정답 및 풀이

* 정답을 확인하려 할 때에는 「빠른 정답 찾기」를 이용하면 편리합니다.

01 지수

개념 정리

본책 6쪽

❶ n제곱근 ❷ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ❸ $\sqrt[n]{a^m}$ ❹ $\sqrt[n]{a}$ ❺ a^{x-y}
❻ a^{xy}

쎈B 유형 뽀개기

본책 7쪽

01 ① 27의 세제곱근은 방정식 $x^3=27$의 근이므로 3개이다.
② 64의 세제곱근 중 실수인 것은 4의 한 개이다.
④ n이 홀수일 때, -5의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{-5}$의 한 개이다.
⑤ n이 짝수일 때, -2의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.

답 ③

02 $\sqrt[3]{(-3)^3}+\sqrt[4]{(-4)^4}+\sqrt[5]{(-5)^5}+\cdots+\sqrt[12]{(-12)^{12}}$
$=(-3)+4+(-5)+6+\cdots+(-11)+12$
$=1\times5=5$

답 5

03 $a=-\sqrt{\sqrt[3]{9}}=-\sqrt[6]{9}=-\sqrt[6]{3^2}=-\sqrt[3]{3}$
$b=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^3\times3}=3\sqrt[3]{3}$
$\therefore b-a=3\sqrt[3]{3}-(-\sqrt[3]{3})=4\sqrt[3]{3}$

답 ④

04 $B=\{2, 3\}$이므로 ⋯ ❶
(i) $b=2$일 때,
$\sqrt{-6}$, $\sqrt{-4}$는 실수가 아니고, $\sqrt{4}$, $\sqrt{6}$은 실수이다.
(ii) $b=3$일 때,
$\sqrt[3]{-9}$, $\sqrt[3]{-6}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[3]{9}$는 모두 실수이다.
(i), (ii)에서
$C=\{\sqrt{4}, \sqrt{6}, \sqrt[3]{-9}, \sqrt[3]{-6}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{9}\}$ ⋯ ❷
따라서 집합 C의 원소의 개수는 6이다. ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 집합 C를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	70 %
❸ 집합 C의 원소의 개수를 구할 수 있다.	10 %

05 5의 제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{5}$의 2개이므로
$f_2(5)=2$
$\sqrt{6}$의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{\sqrt{6}}$의 1개이므로
$f_3(\sqrt{6})=1$
-4의 네제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로
$f_4(-4)=0$
$-\sqrt{7}$의 다섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-\sqrt{7}}$의 1개이므로
$f_5(-\sqrt{7})=1$
$\therefore f_2(5)-f_3(\sqrt{6})+f_4(-4)-f_5(-\sqrt{7})$
$=2-1+0-1=0$

답 ③

06 (i) $-n^2+9n-18>0$일 때,
$n^2-9n+18<0$에서 $(n-3)(n-6)<0$
$\therefore 3<n<6$
이때 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하려면 n이 짝수이어야 하므로
$n=4$
(ii) $-n^2+9n-18=0$일 때,
0의 n제곱근은 항상 0이므로 음의 실수가 존재하지 않는다.
(iii) $-n^2+9n-18<0$일 때,
$n^2-9n+18>0$에서 $(n-3)(n-6)>0$
$\therefore n<3$ 또는 $n>6$
그런데 $3\le n\le 11$이므로
$6<n\le 11$
이때 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하려면 n이 홀수이어야 하므로
$n=7, 9, 11$
이상에서 모든 n의 값의 합은
$4+7+9+11=31$

답 31

쎈B 특강

a의 n제곱근 중 음의 실수가 존재할 조건
실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하려면 $a>0$일 때 n은 짝수, $a<0$일 때 n은 홀수이어야 한다.

07 ㄱ. $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{3^3\times3^2}=\sqrt[6]{3^5}$
ㄴ. $\sqrt[3]{2^9}\div\sqrt[3]{(-2)^6}=\dfrac{\sqrt[3]{2^9}}{\sqrt[3]{2^6}}=\sqrt[3]{\dfrac{2^9}{2^6}}=\sqrt[3]{2^3}=2$
ㄷ. $(\sqrt[3]{7})^6=\sqrt[3]{7^6}=7^2=49$
ㄹ. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt{2}$
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

08 $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})$
$=(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})$
$=(\sqrt[3]{5})^3-(\sqrt[3]{2})^3$
$=5-2=3$

답 3

09 $\dfrac{\sqrt[3]{81}+\sqrt[6]{36}}{\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}+\sqrt{\sqrt[3]{4}}}=\dfrac{\sqrt[3]{3^3\times3}+\sqrt[6]{6^2}}{\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}}{3+\sqrt[3]{2}}$
$=\dfrac{\sqrt[3]{3}(3+\sqrt[3]{2})}{3+\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{3}$

답 ②

10 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-\sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{24}$, $-\sqrt[3]{3}b=a$
$-\sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{24}$에서
$b=\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2^3\times3}+\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$

$b=3\sqrt[3]{3}$을 $-\sqrt[3]{3}b=a$에 대입하면

$a=-\sqrt[3]{3}\cdot 3\sqrt[3]{3}=-3\sqrt[3]{9}$

$\therefore ab=-3\sqrt[3]{9}\cdot 3\sqrt[3]{3}=-9\sqrt[3]{27}$

$=-9\sqrt[3]{3^3}=-9\cdot 3=-27$

답 ①

11 정육면체의 한 모서리의 길이는

$\sqrt{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[3]{3}$ ··· ❶

삼각형 AFC는 한 변의 길이가 $\sqrt[3]{3}\times\sqrt{2}$인 정삼각형이므로

$\triangle AFC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt[3]{3}\times\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3^2}}{2}$

$=\frac{\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[6]{3^4}}{2}=\frac{\sqrt[6]{3^7}}{2}$ ··· ❷

따라서 $m=7$, $n=6$이므로

$m-n=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 정육면체의 한 모서리의 길이를 구할 수 있다.	20 %
❷ 삼각형 AFC의 넓이를 구할 수 있다.	60 %
❸ $m-n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

12 $\sqrt{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[4]{x}}}\times\sqrt[4]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}}\times\sqrt[5]{\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt[10]{x}}{\sqrt[8]{x}}\times\frac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[20]{x}}\times\frac{\sqrt[20]{x}}{\sqrt[10]{x}}$

$=1$

답 1

13 $\sqrt{2ab^2}\times\sqrt[8]{a^6b^5}\div\sqrt[4]{4a^2b^3}=\frac{\sqrt[8]{2^4a^4b^8}\times\sqrt[8]{a^6b^5}}{\sqrt[8]{4^2a^4b^6}}$

$=\sqrt[8]{\frac{16a^{10}b^{13}}{16a^4b^6}}$

$=\sqrt[8]{a^6b^7}$

답 ⑤

14 $\frac{\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a\sqrt[6]{a}}}}{\sqrt[6]{a\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}}}}=\frac{\sqrt[4]{a}\times\sqrt[20]{a}\times\sqrt[120]{a}}{\sqrt[6]{a}\times\sqrt[30]{a}\times\sqrt[120]{a}}=\frac{\sqrt[4]{a}\times\sqrt[20]{a}}{\sqrt[6]{a}\times\sqrt[30]{a}}$

$=\frac{\sqrt[60]{a^{15}\times a^3}}{\sqrt[60]{a^{10}\times a^2}}=\sqrt[60]{\frac{a^{18}}{a^{12}}}$

$=\sqrt[60]{a^6}=\sqrt[10]{a}$

따라서 $m=1$, $n=10$이므로 $m+n=11$

답 11

15 ㄱ. $R(5, 6)=\sqrt[6]{5}=\sqrt[3]{\sqrt{5}}=R(\sqrt{5}, 3)$

ㄴ. $R(a, 2)R(a, 2)=\sqrt{a}\sqrt{a}=a$, $R(2a, 2)=\sqrt{2a}$이므로

$R(a, 2)R(a, 2)\neq R(2a, 2)$

ㄷ. $R(R(a, n), n)=\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n^2]{a}$, $R(a, n^2)=\sqrt[n^2]{a}$이므로

$R(R(a, n), n)=R(a, n^2)$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

16 3, 6, 9의 최소공배수가 18이므로

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[18]{2^6}=\sqrt[18]{64}$, $\sqrt[6]{5}=\sqrt[18]{5^3}=\sqrt[18]{125}$, $\sqrt[9]{7}=\sqrt[18]{7^2}=\sqrt[18]{49}$

$\sqrt[18]{49}<\sqrt[18]{64}<\sqrt[18]{125}$이므로

$\sqrt[9]{7}<\sqrt[3]{2}<\sqrt[6]{5}$

답 ④

쎈B특강

$\sqrt[n]{a^m}$과 $\sqrt[p]{a^q}$ (m, n, p, q는 2 이상의 자연수)의 대소는 다음과 같은 방법으로 비교한다.

(i) n, p의 최소공배수 k를 구하여 $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[p]{a^q}$을 각각 $\sqrt[k]{a^l}$ 꼴로 나타낸다.

(ii) $\sqrt[k]{\ }$ 안의 수가 큰 쪽이 큼을 이용하여 대소를 비교한다.

다른 풀이 $(\sqrt[3]{2})^{18}=\sqrt[3]{2^{18}}=2^6=64$, $(\sqrt[6]{5})^{18}=\sqrt[6]{5^{18}}=5^3=125$,

$(\sqrt[9]{7})^{18}=\sqrt[9]{7^{18}}=7^2=49$이므로

$\sqrt[9]{7}<\sqrt[3]{2}<\sqrt[6]{5}$

17 $\sqrt{4\sqrt[3]{3}}=\sqrt{\sqrt[3]{4^3\times 3}}=\sqrt[6]{192}$, $\sqrt{5\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{5^3\times 2}}=\sqrt[6]{250}$,

$\sqrt[3]{6\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{6^2\times 5}}=\sqrt[6]{180}$에서

$\sqrt[6]{180}<\sqrt[6]{192}<\sqrt[6]{250}$

따라서 $a=\sqrt[6]{180}$, $b=\sqrt[6]{250}$이므로 부등식 $\sqrt[6]{180}<\sqrt[6]{n}<\sqrt[6]{250}$을 만족시키는 자연수 n은 181, 182, 183, ⋯, 249의 69개이다.

└ $249-181+1=69$(개)

답 ③

18 (i) $A-B=(\sqrt[3]{2}+2\sqrt{3})-(2\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})$

$=\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$

$=\sqrt[6]{27}-\sqrt[6]{4}>0$

$\therefore A>B$ ··· ❶

(ii) $C-D=(3\sqrt[3]{2}-2\sqrt{3})-(3\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2})$

$=5(\sqrt[3]{2}-\sqrt{3})$

$=5(\sqrt[6]{4}-\sqrt[6]{27})<0$

$\therefore C<D$ ··· ❷

(iii) $B-D=(2\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})-(3\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2})$

$=2(2\sqrt[3]{2}-\sqrt{3})$

$=2(\sqrt[6]{256}-\sqrt[6]{27})>0$

$\therefore B>D$ ··· ❸

이상에서 $C<D<B<A$이므로 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합은

$A+C=(\sqrt[3]{2}+2\sqrt{3})+(3\sqrt[3]{2}-2\sqrt{3})=4\sqrt[3]{2}$ ··· ❹

답 $4\sqrt[3]{2}$

채점 기준	비율
❶ A와 B의 대소를 비교할 수 있다.	30 %
❷ C와 D의 대소를 비교할 수 있다.	30 %
❸ B와 D의 대소를 비교할 수 있다.	30 %
❹ 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합을 구할 수 있다.	10 %

쎈B특강

두 수 또는 두 식의 대소 관계의 판정

① 차의 부호를 조사한다. ➡ $A-B>0 \Longleftrightarrow A>B$

② 제곱의 차의 부호를 조사한다.

➡ $A>0$, $B>0$일 때,

$A^2-B^2>0 \Longleftrightarrow A^2>B^2 \Longleftrightarrow A>B$

③ 비를 조사한다.

➡ $A>0$, $B>0$일 때, $\frac{A}{B}>1 \Longleftrightarrow A>B$

19 $\dfrac{4^{-4}+2^{-5}}{9}=\dfrac{(2^2)^{-4}+2^{-5}}{9}=\dfrac{2^{-8}+2^{-5}}{9}=\dfrac{2^{-8}(1+2^3)}{9}=2^{-8}$

$\dfrac{10}{3^{10}+9^4}=\dfrac{10}{3^{10}+(3^2)^4}=\dfrac{10}{3^{10}+3^8}=\dfrac{10}{3^8(3^2+1)}=\dfrac{1}{3^8}=3^{-8}$

$\therefore$ (주어진 식)$=2^{-8}\times3^{-8}=(2\times3)^{-8}=6^{-8}$ 답 ③

참고 밑이 같은 두 수의 합 또는 차는 지수가 작은 수로 묶어서 계산한다.

쎈B특강

지수법칙을 이용할 때 다음에 유의한다.

(단, $a\neq0$이고, m, n은 정수이다.)

① $a^m+a^n\neq a^{m+n}$ ② $a^m\times a^n\neq a^{mn}$

③ $(a^m)^n\neq a^{m^n}$ ④ $a^m\div a^m\neq0$

20 $9^{-4}\div(9^{-7}\div3^{-6})^{-5}=\dfrac{1}{9^4}\div\left(\dfrac{1}{9^7}\div\dfrac{1}{3^6}\right)^{-5}$

$=\dfrac{1}{3^8}\div\left(\dfrac{1}{3^{14}}\times3^6\right)^{-5}$

$=\dfrac{1}{3^8}\div\left(\dfrac{1}{3^8}\right)^{-5}$

$=\dfrac{1}{3^8}\div3^{40}$

$=\dfrac{1}{3^8}\times\dfrac{1}{3^{40}}$

$=\dfrac{1}{3^{48}}=3^{-48}$

$\therefore n=-48$ 답 ②

21 $\dfrac{1}{3^{-5}+1}+\dfrac{1}{3^{-3}+1}+\dfrac{1}{3^3+1}+\dfrac{1}{3^5+1}$

$=\dfrac{3^5}{1+3^5}+\dfrac{3^3}{1+3^3}+\dfrac{1}{3^3+1}+\dfrac{1}{3^5+1}$

$=\dfrac{3^5+1}{3^5+1}+\dfrac{3^3+1}{3^3+1}$

$=1+1=2$ 답 2

다른 풀이 $\dfrac{1}{3^{-5}+1}+\dfrac{1}{3^{-3}+1}+\dfrac{1}{3^3+1}+\dfrac{1}{3^5+1}$

$=\left(\dfrac{1}{3^{-5}+1}+\dfrac{1}{3^5+1}\right)+\left(\dfrac{1}{3^{-3}+1}+\dfrac{1}{3^3+1}\right)$

$=\dfrac{3^5+1+3^{-5}+1}{(3^{-5}+1)(3^5+1)}+\dfrac{3^3+1+3^{-3}+1}{(3^{-3}+1)(3^3+1)}$

$=\dfrac{3^5+3^{-5}+2}{1+3^{-5}+3^5+1}+\dfrac{3^3+3^{-3}+2}{1+3^{-3}+3^3+1}$

$=1+1=2$

22 $\dfrac{a^{-1}+a^{-3}+a^{-5}+a^{-7}+a^{-9}}{a+a^3+a^5+a^7+a^9}=\dfrac{a^{-9}(a^8+a^6+a^4+a^2+1)}{a(1+a^2+a^4+a^6+a^8)}$

$=\dfrac{a^{-9}}{a}=a^{-10}$

$=(\sqrt[5]{\sqrt{5}-2})^{-10}=(\sqrt{5}-2)^{-2}$

$=\dfrac{1}{(\sqrt{5}-2)^2}=\dfrac{1}{9-4\sqrt{5}}$

$=\dfrac{9+4\sqrt{5}}{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}$

$=9+4\sqrt{5}$ 답 ⑤

23 $\left\{\left(\dfrac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\frac{2}{3}}\times\left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{8}{3}}=\left(\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2$

$=\left\{\left(\dfrac{1}{5}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{3}}\times\dfrac{16}{25}$

$=5\times\dfrac{16}{25}$

$=\dfrac{16}{5}$ 답 $\dfrac{16}{5}$

24 $2^{\frac{5}{8}}3^{-\frac{4}{3}}\times(2^{\frac{3}{4}}3^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{8}}3^{-\frac{4}{3}}\times2^{\frac{3}{8}}3^{-\frac{1}{6}}$

$=2^{\frac{5}{8}+\frac{3}{8}}\times3^{-\frac{4}{3}-\frac{1}{6}}$

$=2\times3^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3\times3^{\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ 답 ④

25 $(a^{\sqrt{3}})^{4\sqrt{2}+\sqrt{12}}\div(a^5)^{2+\sqrt{6}}\times(a^{\frac{1}{3}})^{3\sqrt{6}-9}$

$=a^{\sqrt{3}(4\sqrt{2}+\sqrt{12})}\div a^{5(2+\sqrt{6})}\times a^{\frac{1}{3}(3\sqrt{6}-9)}$

$=a^{4\sqrt{6}+6}\div a^{10+5\sqrt{6}}\times a^{\sqrt{6}-3}$

$=a^{4\sqrt{6}+6-(10+5\sqrt{6})+\sqrt{6}-3}$

$=a^{-7}$

$\therefore k=-7$ 답 -7

26 $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{a}{9}}=(3^{-3})^{\frac{a}{9}}=3^{-\frac{a}{3}}=(3^a)^{-\frac{1}{3}}$

$=8^{-\frac{1}{3}}=(2^3)^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$ 답 ③

27 $\sqrt{\dfrac{1}{4}}\times\sqrt[6]{\dfrac{1}{6}}\times\sqrt[4]{\dfrac{1}{8}}\times\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$

$=4^{-\frac{1}{2}}\times6^{-\frac{1}{6}}\times8^{-\frac{1}{4}}\times9^{-\frac{1}{3}}$

$=2^{-1}\times2^{-\frac{1}{6}}\times3^{-\frac{1}{6}}\times2^{-\frac{3}{4}}\times3^{-\frac{2}{3}}$

$=2^{-1-\frac{1}{6}-\frac{3}{4}}\times3^{-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}$

$=2^{-\frac{23}{12}}\times3^{-\frac{5}{6}}$

따라서 $p=-\dfrac{23}{12}$, $q=-\dfrac{5}{6}$이므로

$q-p=\dfrac{13}{12}$ 답 ⑤

28 $\sqrt[5]{a}=2$에서 $a^{\frac{1}{5}}=2$ $\therefore a=2^5$

$\sqrt[4]{b}=3$에서 $b^{\frac{1}{4}}=3$ $\therefore b=3^4$

$\therefore \sqrt[10]{ab}=a^{\frac{1}{10}}\times b^{\frac{1}{10}}=(2^5)^{\frac{1}{10}}\times(3^4)^{\frac{1}{10}}=2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{2}{5}}$

따라서 $p=\dfrac{1}{2}$, $q=\dfrac{2}{5}$이므로

$p+q=\dfrac{9}{10}$ 답 ⑤

29 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=-\dfrac{3}{2}$ ···· ❶

따라서 $\sqrt[5]{2^{\alpha}}\times\sqrt[5]{2^{\beta}}=2^{\frac{\alpha}{5}}\times2^{\frac{\beta}{5}}=2^{\frac{\alpha+\beta}{5}}=2^{\frac{5}{5}}=2$,

$(16^{\alpha})^{\beta}=16^{\alpha\beta}=(2^4)^{-\frac{3}{2}}=2^{-6}$이므로

$$\frac{\sqrt[5]{2^{\alpha}}\times\sqrt[5]{2^{\beta}}}{(16^{\alpha})^{\beta}}=\frac{2}{2^{-6}}=2^7=128 \quad \cdots ❷$$

답 128

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 식의 값을 구할 수 있다.	70 %

30 조건 (가)에서 $a^3=\sqrt{c}$이므로 $\quad a=c^{\frac{1}{6}}$

조건 (나)에서 $c^2=\sqrt[3]{b}$이므로 $\quad b=c^6$

따라서 $\frac{a}{b}=\frac{c^{\frac{1}{6}}}{c^6}=c^{\frac{1}{6}-6}=c^{-\frac{35}{6}}$이므로

$k=-\frac{35}{6}$

답 $-\frac{35}{6}$

31 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}=\sqrt[8]{a}=a^{\frac{1}{8}}$, $\sqrt[8]{\sqrt[8]{a}}=\sqrt[64]{a}=a^{\frac{1}{64}}$이므로

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}\times\sqrt[8]{\sqrt[8]{a}}=a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{1}{64}}=a^{\frac{1}{8}+\frac{1}{64}}=a^{\frac{9}{64}}$

$\therefore k=\frac{9}{64}$

답 ③

32 $a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=a\times\sqrt{a}\times\sqrt[4]{a}\times\sqrt[8]{a}$

$=a\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{8}}$

$=a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$

$=a^{\frac{15}{8}}$

$\therefore k=\frac{15}{8}$

답 $\frac{15}{8}$

33 $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}\times\sqrt[4]{a\sqrt{a^k}}\div\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\times(a^{1+\frac{k}{2}})^{\frac{1}{4}}\div(a^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{3}}$

$=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{k}{8}-\frac{5}{6}}$

$=a^{\frac{k}{8}-\frac{1}{4}}$

즉 $\frac{k}{8}-\frac{1}{4}=1$이므로 $\quad \frac{k}{8}=\frac{5}{4}$

$\therefore k=10$

답 ⑤

34 $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}\sqrt[6]{a}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[12]{a^2}\times\sqrt[24]{a}=a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{1}{24}}$

$=a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}}=a^{\frac{11}{24}} \quad \cdots ❶$

$\sqrt[8]{a\sqrt[3]{a^m}}=\sqrt[8]{a}\times\sqrt[24]{a^m}=a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{m}{24}}=a^{\frac{1}{8}+\frac{m}{24}}=a^{\frac{3+m}{24}} \quad \cdots ❷$

따라서 $\frac{11}{24}=\frac{3+m}{24}$이므로 $\quad m+3=11$

$\therefore m=8 \quad \cdots ❸$

답 8

채점 기준	비율
❶ 좌변을 a^r 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 우변을 a^r 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ m의 값을 구할 수 있다.	20 %

35 $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[k]{a}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[8]{a}}}=\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[4k]{a}}\times\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[16]{a}}$

$=a^{\frac{1}{8}-\frac{1}{4k}}\times a^{\frac{1}{8}-\frac{1}{16}}$

$=a^{\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4k}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right)}$

$=a^{\frac{3}{16}-\frac{1}{4k}}$

$\sqrt[8]{a}=a^{\frac{1}{8}}$

따라서 $\frac{3}{16}-\frac{1}{4k}=\frac{1}{8}$이므로 $\quad \frac{1}{4k}=\frac{1}{16}$

$\therefore k=4$

답 4

36 $16^2=a$에서 $\quad (2^4)^2=a$, $\quad 2^8=a \quad \therefore 2=a^{\frac{1}{8}}$

$3^3=b$에서 $\quad 3=b^{\frac{1}{3}}$

$\therefore 18^{10}=(2\times3^2)^{10}=2^{10}\times3^{20}$

$=(a^{\frac{1}{8}})^{10}\times(b^{\frac{1}{3}})^{20}=a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{20}{3}}$

답 ②

37 $a=8^4=(2^3)^4=2^{12}$이므로 $\quad 2=a^{\frac{1}{12}}$

$\therefore 16^9=(2^4)^9=2^{36}=(a^{\frac{1}{12}})^{36}=a^3$

답 ①

38 $a=\sqrt[4]{5}$에서 $\quad a^4=5$

$b=\sqrt{7}$에서 $\quad b^2=7$

$\therefore 35^{\frac{1}{8}}=(5\times7)^{\frac{1}{8}}=(a^4\times b^2)^{\frac{1}{8}}$

$=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}$

답 ④

39 $\left(\frac{1}{256}\right)^{-\frac{1}{n}}=256^{\frac{1}{n}}=(2^8)^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{8}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 정수 n은 8의 양의 약수이다.

따라서 모든 정수 n의 값의 합은

$1+2+4+8=15$

답 15

40 $a^3=2$, $b^4=5$, $c^5=7$에서

$a=2^{\frac{1}{3}}$, $b=5^{\frac{1}{4}}$, $c=7^{\frac{1}{5}}$

$\therefore (abc)^n=(2^{\frac{1}{3}}\times5^{\frac{1}{4}}\times7^{\frac{1}{5}})^n=2^{\frac{n}{3}}\times5^{\frac{n}{4}}\times7^{\frac{n}{5}} \quad \cdots ❶$

따라서 $(abc)^n$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n은 3, 4, 5의 공배수이므로 자연수 n의 최솟값은 60이다. $\cdots ❷$

답 60

채점 기준	비율
❶ $(abc)^n$을 지수를 사용하여 나타낼 수 있다.	50 %
❷ n의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

41 $(\sqrt{3^5})^{\frac{1}{3}}$이 자연수 N의 n제곱근이라 하면

$\left\{(\sqrt{3^5})^{\frac{1}{3}}\right\}^n=(3^{\frac{5}{2}})^{\frac{n}{3}}=3^{\frac{5n}{6}}=N$

따라서 $3^{\frac{5n}{6}}$이 자연수가 되려면 $5n$이 6의 배수이어야 하므로 n이 6의 배수이어야 한다.

이때 $2\le n\le100$이므로 n은 6, 12, 18, $\cdots$, 96의 16개이다.

답 ④

42 $\sqrt{\frac{n}{3}}=\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$이므로 $\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$이 자연수이려면

$n=3k^2$ (k는 자연수)

꼴이어야 하고, $\sqrt[3]{\frac{n}{2}}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$이므로 $\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$이 자연수이려면

$n=2l^3$ (l은 자연수)

꼴이어야 한다.

즉 $n=3k^2=2l^3$에서 k는 2의 배수, l은 3의 배수이어야 하므로

$k=2p$, $l=3q$ (p, q는 자연수)

로 놓을 수 있다.

$n=3k^2$에서 $n=3\times(2p)^2=3\times2^2\times p^2$

$n=2l^3$에서 $n=2\times(3q)^3=3^3\times2\times q^3$

따라서 $p=3\times2$, $q=2$일 때 n의 값이 최소이므로 구하는 n의 최솟값은

$2^4\times3^3=432$

답 432

43 $(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})(a+a^{-1})$

$=\{(a^{\frac{1}{2}})^2-(a^{-\frac{1}{2}})^2\}(a+a^{-1})$

$=(a-a^{-1})(a+a^{-1})$

$=a^2-a^{-2}$

답 a^2-a^{-2}

44 $x=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$이므로

$x^3=(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}})^3$

$=2-2^{-1}-3(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}})$

$=\frac{3}{2}-3x$

$\therefore x^3+3x-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

45 $2^{\frac{a}{4}}-2^{\frac{b}{4}}=6$의 양변을 제곱하면

$(2^{\frac{a}{4}}-2^{\frac{b}{4}})^2=6^2$, $2^{\frac{a}{2}}-2\cdot2^{\frac{a}{4}}\cdot2^{\frac{b}{4}}+2^{\frac{b}{2}}=36$

$2^{\frac{a}{2}}-2^{1+\frac{a+b}{4}}+2^{\frac{b}{2}}=36$, $2^{\frac{a}{2}}-2^{1+\frac{8}{4}}+2^{\frac{b}{2}}=36$

$2^{\frac{a}{2}}-8+2^{\frac{b}{2}}=36$

$\therefore 2^{\frac{a}{2}}+2^{\frac{b}{2}}=44$

답 ③

46 (주어진 식)

$=(x^{\frac{1}{8}}-x^{-\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=(x^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=x-x^{-1}=x-\frac{1}{x}$

$=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$

답 $\frac{8}{3}$

47 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$7=a^2+b^2+c^2+4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=3$ ··· ❶

$\therefore (2^a)^{a+b}\times(2^b)^{b+c}\times(2^c)^{c+a}=2^{a^2+ab}\times2^{b^2+bc}\times2^{c^2+ca}$

$=2^{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$

$=2^5=32$ ··· ❷

답 32

채점 기준	비율
❶ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

48 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$x+x^{-1}+2=9$ $\therefore x+x^{-1}=7$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2+x^{-2}+2=49$ $\therefore x^2+x^{-2}=47$

답 ①

49 $2^x+2^{1-x}=8$의 양변을 제곱하면

$4^x+4^{1-x}+2\cdot2=64$

$\therefore 4^x+4^{1-x}=60$

답 60

다른 풀이 $2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $2^{1-x}=\frac{2}{t}$이므로

$4^x+4^{1-x}=(2^x)^2+(2^{1-x})^2$

$=t^2+\frac{4}{t^2}=\left(t+\frac{2}{t}\right)^2-4$

$=8^2-4=60$

50 $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=3+\sqrt{2}$의 양변을 세제곱하면

$x+\frac{1}{x}+3\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)=45+29\sqrt{2}$

$\therefore x+\frac{1}{x}=45+29\sqrt{2}-3(3+\sqrt{2})=36+26\sqrt{2}$

따라서 $a=36$, $b=26$이므로

$a-b=10$

답 ③

51 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 제곱하면

$x+x^{-1}-2=16$ $\therefore x+x^{-1}=18$ ··· ❶

$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 세제곱하면

$x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}-3(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})=64$

$\therefore x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}=64+3\cdot4=76$ ··· ❷

$\therefore \frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}-10}{x+x^{-1}-7}=\frac{76-10}{18-7}=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $x+x^{-1}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

52 $\frac{x^4+x^2}{x^2+1}-\frac{x^{-4}+x^{-2}}{x^{-2}+1}$

$=\frac{x^2(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{x^{-2}(x^{-2}+1)}{x^{-2}+1}$

$=x^2-x^{-2}=(x+x^{-1})(x-x^{-1})$ ······ ㉠

$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=3$의 양변을 제곱하면

$x+\frac{1}{x}-2=9 \qquad \therefore x+x^{-1}=11$ ...... ㉡

$\therefore (x-x^{-1})^2=(x+x^{-1})^2-4=11^2-4=117$

그런데 $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>0$에서 $x>1$이므로 $\quad x-x^{-1}>0$

$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>0$의 양변에 $\sqrt{x}$를 곱하면 $x-1>0 \quad \therefore x>1$

$\therefore x-x^{-1}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 구하는 식의 값은

$11\cdot 3\sqrt{13}=33\sqrt{13}$

답 $33\sqrt{13}$

53 구하는 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$$

$$=\frac{5-1}{5+1}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

54 $7^{\frac{1}{x}}=4$에서 $\quad 4^x=7 \quad \therefore 2^{2x}=7$

구하는 식의 분모, 분자에 2^x을 곱하면

$$\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=\frac{2^x(2^x+2^{-x})}{2^x(2^x-2^{-x})}=\frac{2^{2x}+1}{2^{2x}-1}$$

$$=\frac{7+1}{7-1}=\frac{4}{3}$$

답 ②

55 $3^{8x}=(3^{4x})^2=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$

구하는 식의 분모, 분자에 3^{2x}을 곱하면

$$\frac{3^{6x}-3^{-6x}}{3^{2x}+3^{-2x}}=\frac{3^{2x}(3^{6x}-3^{-6x})}{3^{2x}(3^{2x}+3^{-2x})}=\frac{3^{8x}-3^{-4x}}{3^{4x}+1}$$

$$=\frac{3^{8x}-\frac{1}{3^{4x}}}{3^{4x}+1}=\frac{3+2\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{(\sqrt{2}+1)+1}$$

$$=\frac{4+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}$$

답 $3-\sqrt{2}$

56 $\frac{a^{2m}+a^{-2m}}{a^{2m}-a^{-2m}}=\frac{3}{2}$의 좌변의 분모, 분자에 a^{2m}을 곱하면

$\frac{a^{2m}(a^{2m}+a^{-2m})}{a^{2m}(a^{2m}-a^{-2m})}=\frac{3}{2}, \quad \frac{a^{4m}+1}{a^{4m}-1}=\frac{3}{2}$ ··· ❶

$2a^{4m}+2=3a^{4m}-3 \qquad \therefore a^{4m}=5$ ··· ❷

$\therefore a^{12m}=(a^{4m})^3=5^3=125$ ··· ❸

답 125

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변의 분모, 분자에 a^{2m}을 곱하여 정리할 수 있다.	40 %
❷ a^{4m}의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a^{12m}의 값을 구할 수 있다.	30 %

57 $6^x=3$에서 $\quad 6=3^{\frac{1}{x}}$ ...... ㉠

$54^y=27$에서 $\quad 54=27^{\frac{1}{y}}=(3^3)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{3}{y}}$ ...... ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\quad \frac{1}{9}=3^{\frac{1}{x}}\div 3^{\frac{3}{y}}$

$3^{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}=3^{-2} \qquad \therefore \frac{1}{x}-\frac{3}{y}=-2$

답 ②

58 $3^x=12$에서 $\quad 3=12^{\frac{1}{x}}$ ...... ㉠

$4^y=12$에서 $\quad 4=12^{\frac{1}{y}}$ ...... ㉡

㉠×㉡을 하면 $\quad 12=12^{\frac{1}{x}}\times 12^{\frac{1}{y}}=12^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

답 ③

59 $\left(\frac{1}{7}\right)^x=4$에서

$\frac{1}{7}=4^{\frac{1}{x}}=(2^2)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{2}{x}}$ ...... ㉠

$14^y=16$에서 $\quad 14=16^{\frac{1}{y}}=(2^4)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{4}{y}}$ ...... ㉡ ··· ❶

㉠×㉡을 하면 $\quad 2=2^{\frac{2}{x}}\times 2^{\frac{4}{y}}$

$\therefore 2^{\frac{2}{x}+\frac{4}{y}}=2$ ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $\frac{1}{7}$, 14를 2^r 꼴로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $2^{\frac{2}{x}+\frac{4}{y}}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

60 $a^x=2$에서 $\quad a=2^{\frac{1}{x}}$ ...... ㉠

$\left(\frac{a}{b}\right)^y=2^4$에서 $\quad \frac{a}{b}=2^{\frac{4}{y}}$ ...... ㉡

$\left(\frac{bc}{a}\right)^z=2^3$에서 $\quad \frac{bc}{a}=2^{\frac{3}{z}}$ ...... ㉢

㉠÷㉡÷㉢을 하면

$a\div\frac{a}{b}\div\frac{bc}{a}=2^{\frac{1}{x}}\div 2^{\frac{4}{y}}\div 2^{\frac{3}{z}}$

$\therefore 2^{\frac{1}{x}-\frac{4}{y}-\frac{3}{z}}=a\times\frac{b}{a}\times\frac{a}{bc}=\frac{a}{c}$

답 ②

61 $45^x=3$에서 $\quad 3^{\frac{1}{x}}=45$ ...... ㉠

$5^y=27$에서 $\quad 3^{\frac{3}{y}}=5$ ...... ㉡

$a^z=\frac{1}{9}$에서 $\quad a^z=3^{-2} \qquad \therefore 3^{\frac{1}{z}}=a^{-\frac{1}{2}}$ ...... ㉢

㉠÷㉡×㉢을 하면

$3^{\frac{1}{x}}\div 3^{\frac{3}{y}}\times 3^{\frac{1}{z}}=45\div 5\times a^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore 3^{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{9}{\sqrt{a}}$

즉 $3=\frac{9}{\sqrt{a}}$이므로 $\quad \sqrt{a}=3 \qquad \therefore a=9$

답 9

62 $15^x=3^y=5^z=k\ (k>0)$로 놓으면 $xyz\neq 0$에서

$k\neq 1$

$15^x=k$에서 $\quad 15=k^{\frac{1}{x}}$ ...... ㉠

$3^y=k$에서 $\quad 3=k^{\frac{1}{y}}$ ...... ㉡

$5^z=k$에서 $\quad 5=k^{\frac{1}{z}}$ ...... ㉢

㉠÷㉡÷㉢을 하면 $\quad 1=k^{\frac{1}{x}}\div k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}}$

$\therefore k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$

그런데 $k\neq 1$이므로 $\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$

답 0

63 $x^y=y^x$에서 $y=x^{\frac{y}{x}}$ $\therefore y=x^{\frac{4}{3}}$

위의 식을 $\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$에 대입하면

$\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x}=\frac{4}{3}$, $x^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}$

$\therefore x=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$ 답 ④

64 $8^x=9^y=k\ (k>0)$로 놓으면 $xy\neq0$에서

$k\neq1$

$8^x=2^{3x}=k$에서 $2=k^{\frac{1}{3x}}$ ⋯⋯ ㉠

$9^y=3^{2y}=k$에서 $3=k^{\frac{1}{2y}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{2}{3}=k^{\frac{1}{3x}}\div k^{\frac{1}{2y}}$

$\therefore k^{\frac{1}{3x}-\frac{1}{2y}}=\frac{2}{3}$

즉 $k^{-1}=\frac{2}{3}$이므로 $k=\frac{3}{2}$

$\therefore 8^x=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

65 $a^x=2^y=b^z=k\ (k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서

$k\neq1$

$a^x=k$에서 $a=k^{\frac{1}{x}}$

$2^y=k$에서 $2=k^{\frac{1}{y}}$

$b^z=k$에서 $b=k^{\frac{1}{z}}$ ⋯ ❶

이때 $\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=\frac{3}{y}$이므로

$\frac{a}{b}=k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{z}}=k^{\frac{3}{y}}=(k^{\frac{1}{y}})^3$

$=2^3=8$ ⋯ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ a, 2, b를 k^r 꼴로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $\frac{a}{b}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

66 $5^x=4^{-y}=k\ (k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서

$k\neq1$

$5^x=k$에서 $5=k^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$4^{-y}=k$에서 $2=k^{-\frac{1}{2y}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠×㉡을 하면 $10=k^{\frac{1}{x}}\times k^{-\frac{1}{2y}}$

$\therefore 10=k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{2y}}$ ⋯⋯ ㉢

한편 $5^x=k$에서 $25^{-x}=(5^x)^{-2}=k^{-2}$이므로

$10^z=k^{-2}$ $\therefore 10=k^{-\frac{2}{z}}$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣에서 $k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{2y}}=k^{-\frac{2}{z}}$이고 $k\neq1$이므로

$\frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=-\frac{2}{z}$ 답 ①

67 t년 후에 물질의 양이 $\frac{m}{32}$이 된다고 하면

$\frac{m}{32}=m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{200}}$, $\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{200}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{200}}$, $5=\frac{t}{200}$

$\therefore t=1000$

따라서 1000년 후이다. 답 1000년

쎈B특강

실생활 활용 문제는 문장이 길고 생소한 단어가 많아서 다소 어렵게 느껴질 수 있다. 하지만 주어진 조건에 밑줄을 긋고 조건에 해당하는 문자를 적으면서 어떤 문자에 어떤 수를 대입해야 하는지 파악하면 기본적인 계산만으로 쉽게 답을 찾을 수 있다.

68 어떤 음보다 반음 높은 음의 진동수가 어떤 음의 진동수의 x배라 하면

$x^{12}=2$ $\therefore x=\sqrt[12]{2}$

따라서 '솔'음의 진동수는 '미'음의 진동수의

$(\sqrt[12]{2})^3=\sqrt[4]{2}$ (배) 답 $\sqrt[4]{2}$배

69 $Q=30$, $H=6$일 때,

$S_1=N\times30^{\frac{1}{2}}\times6^{-\frac{3}{4}}$

$Q=15$, $H=12$일 때,

$S_2=N\times15^{\frac{1}{2}}\times12^{-\frac{3}{4}}$

$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{N\times30^{\frac{1}{2}}\times6^{-\frac{3}{4}}}{N\times15^{\frac{1}{2}}\times12^{-\frac{3}{4}}}=\left(\frac{30}{15}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{6}{12}\right)^{-\frac{3}{4}}$

$=2^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{3}{4}}$

$=2^{\frac{5}{4}}$ 답 ③

70 원본의 알파벳 크기를 a라 하면 5번째 복사본의 알파벳 크기가 원본의 2배이므로

$a\left(\frac{r}{100}\right)^5=2a$ $\therefore \left(\frac{r}{100}\right)^5=2$

7번째, 9번째 복사본의 알파벳 크기는 각각 $a\left(\frac{r}{100}\right)^7$, $a\left(\frac{r}{100}\right)^9$이므로

$a\left(\frac{r}{100}\right)^9\div a\left(\frac{r}{100}\right)^7=\left(\frac{r}{100}\right)^2=\left\{\left(\frac{r}{100}\right)^5\right\}^{\frac{2}{5}}=2^{\frac{2}{5}}$

따라서 9번째 복사본의 알파벳 크기는 7번째 복사본의 $2^{\frac{2}{5}}$배이므로

$p=5$, $q=2$

$\therefore p-q=3$ 답 3

02 로그

I. 지수함수와 로그함수

개념 정리

본책 18쪽

❶ $\log_a N$ ❷ 진수 ❸ 0 ❹ $\log_a N$ ❺ $\frac{M}{N}$

❻ k ❼ $\log_c b$ ❽ $\frac{n}{m}$ ❾ $\log N$

쎈B 유형 뽀개기

본책 19쪽

01 $\log_5 2=a$에서 $5^a=2$ …… ㉠

$\log_b 5=4$에서 $b^4=5$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(b^4)^a=2$

$(b^a)^4=2$ $\therefore b^a=\sqrt[4]{2}$ ($\because b>0$)

답 ①

02 $\log_3\{\log_2(\log_5 n)\}=0$에서

$\log_2(\log_5 n)=3^0=1$ ··· ❶

$\log_5 n=2^1=2$ ··· ❷

$\therefore n=5^2=25$ ··· ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ $\log_2(\log_5 n)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\log_5 n$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	30 %

03 $x=\log_2(2+\sqrt{3})$에서 $2^x=2+\sqrt{3}$

$$\therefore 2^x+2^{-x}=2^x+\frac{1}{2^x}=(2+\sqrt{3})+\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$
$$=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})$$
$$=4$$

답 ⑤

04 밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq1$

$x>3$, $x\neq4$ $\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ …… ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+6x+7>0$

$x^2-6x-7<0$, $(x+1)(x-7)<0$

$\therefore -1<x<7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<7$

따라서 정수 x의 최솟값은 5이다.

답 5

05 밑의 조건에서 $a-4>0$, $a-4\neq1$

$a>4$, $a\neq5$ $\therefore 4<a<5$ 또는 $a>5$ …… ㉠

진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2-ax+3a>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2-ax+3a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4\cdot3a<0$, $a(a-12)<0$

$\therefore 0<a<12$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$4<a<5$ 또는 $5<a<12$

따라서 정수 a는 6, 7, 8, 9, 10, 11의 6개이다.

답 6

쎈B 특강

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립할 조건

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면

$a>0$, $b^2-4ac<0$

06 ① $\log_3 72+3\log_3\frac{3}{2}=\log_3 72+\log_3\left(\frac{3}{2}\right)^3$
$$=\log_3 72+\log_3\frac{27}{8}$$
$$=\log_3\left(72\cdot\frac{27}{8}\right)$$
$$=\log_3 3^5=5$$

② $\log_6 3\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log_6 3=\log_6 3\sqrt{2}-\log_6\sqrt{3}$
$$=\log_6\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\log_6\sqrt{6}$$
$$=\log_6 6^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

③ $\log_2 16\cdot\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}=\log_2 2^4\cdot\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^3$
$$=4\cdot3=12$$

④ $\log_6(7-\sqrt{13})+\log_6(7+\sqrt{13})=\log_6(7-\sqrt{13})(7+\sqrt{13})$
$$=\log_6 36=\log_6 6^2=2$$

⑤ $\log_5 5\sqrt{2}-\frac{3}{2}\log_5 2+\log_5 10=\log_5 5\sqrt{2}-\log_5 2\sqrt{2}+\log_5 10$
$$=\log_5\frac{5\sqrt{2}\cdot10}{2\sqrt{2}}=\log_5 25$$
$$=\log_5 5^2=2$$

답 ⑤

07 $\log_8 x+\log_8 2y+\log_8 4z=1$에서

$\log_8(x\cdot2y\cdot4z)=1$, $\log_8 8xyz=1$

$8xyz=8$ $\therefore xyz=1$

$\therefore \{(3^x)^y\}^z=3^{xyz}=3$

답 3

08 (주어진 식)$=\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{4}{3}+\log_3\frac{5}{4}+\cdots+\log_3\frac{54}{53}$
$$=\log_3\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{54}{53}\right)$$
$$=\log_3 27=\log_3 3^3$$
$$=3$$

답 3

09 $1000=10^3$이므로 1000의 양의 약수를 작은 수부터 차례대로 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{16}$이라 하면

$1000=2^3\cdot5^3$이므로 양의 약수의 개수는 $(3+1)\cdot(3+1)=16$

$a_1a_{16}=a_2a_{15}=\cdots=a_8a_9=10^3$

$\therefore \log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log a_{16}$
$$=\log a_1a_2a_3\cdots a_{16}$$
$$=\log\{(a_1a_{16})(a_2a_{15})\cdots(a_8a_9)\}$$
$$=\log(10^3)^8=\log 10^{24}$$
$$=24$$

답 24

10 $\log_2(x-y)=2$에서 $\quad x-y=2^2=4$

$\log_2 x+\log_2 y=4$에서 $\quad \log_2 xy=4 \quad \therefore xy=2^4=16$

$\therefore x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$=4^2+2\cdot16=48$

답 48

11 $\log_4 x$가 자연수이려면 $\quad x=4^p$ (p는 자연수)

$\therefore A=\{4, 16, 64\}$

$\log_5 x$가 자연수이려면 $\quad x=5^q$ (q는 자연수)

$\therefore B=\{5, 25\}$

이때 $A\cap B=\varnothing$이므로 $\quad n(A-B)=n(A)=3$

답 ③

12 $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{DE}$이므로

$5:2=\log_2 y^2:\log_2 x$ ⋯ ❶

$5\log_2 x=4\log_2 y, \quad \log_2 x=\frac{4}{5}\log_2 y$

$\log_2 x=\log_2 y^{\frac{4}{5}} \quad \therefore x=y^{\frac{4}{5}}$ ⋯ ❷

$\therefore k=\frac{4}{5}$ ⋯ ❸

답 $\frac{4}{5}$

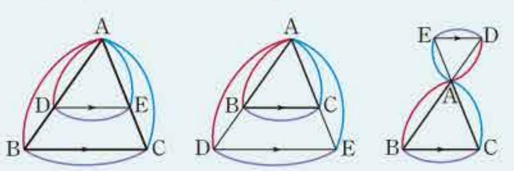
채점 기준	비율
❶ 삼각형에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 이용하여 비례식을 세울 수 있다.	40 %
❷ x를 y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	10 %

쎈B특강

삼각형에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비

삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC 또는 그 연장선 위의 점을 각각 D, E라 할 때, $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DE}$이면

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE}$



13 $\log_a(b+c)+\log_a(b-c)=2$에서

$\log_a(b+c)(b-c)=2 \quad \therefore \log_a(b^2-c^2)=2$

즉 $a^2=b^2-c^2$이므로 $\quad b^2=a^2+c^2$

따라서 △ABC는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

답 ④

14 $\log_3 15\cdot\log_5 15-\log_3 5-\log_5 3$

$=\log_3(3\cdot5)\cdot\log_5(3\cdot5)-\log_3 5-\log_5 3$

$=(\log_3 3+\log_3 5)(\log_5 3+\log_5 5)-\log_3 5-\log_5 3$

$=(1+\log_3 5)(\log_5 3+1)-\log_3 5-\log_5 3$

$=\log_5 3+1+\log_3 5\cdot\log_5 3+\log_3 5-\log_3 5-\log_5 3$

$=1+\underline{\log_3 5\cdot\log_5 3}$

$=1+1=2$ $\quad \log_3 5\cdot\frac{1}{\log_3 5}=1$

답 ②

15 $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_6 x}=2$에서

$\log_x 2+\log_x 3+\log_x 6=2$

$\log_x(2\cdot3\cdot6)=2, \quad \log_x 36=2$

$x^2=36 \quad \therefore x=6\ (\because x>0)$

답 6

16 $\log_b 9=\frac{\log_a 9}{\log_a b}=\frac{2\log_a 3}{\log_a b}$

즉 $\frac{2\cdot6}{\log_a b}=-1$이므로 $\quad \log_a b=-12$ ⋯ ❶

$\therefore \log_a\frac{27}{b}=\log_a 27-\log_a b$

$=3\log_a 3-\log_a b$

$=3\cdot6+12=30$ ⋯ ❷

답 30

채점 기준	비율
❶ $\log_a b$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\log_a\frac{27}{b}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

17 (주어진 식)

$=\log_6(\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\cdots\cdot\log_{63} 64)$

$=\log_6\left(\log_2 3\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\cdot\cdots\cdot\frac{\log_2 64}{\log_2 63}\right)$

$=\log_6(\log_2 64)=\log_6(\log_2 2^6)$

$=\log_6 6=1$

답 1

18 $(2\log_a b)^2+(\log_b\sqrt{a})^2=\left(\frac{2}{\log_b a}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\log_b a\right)^2$

$=\frac{4}{(\log_b a)^2}+\frac{1}{4}(\log_b a)^2$

$\frac{4}{(\log_b a)^2}>0,\ \frac{1}{4}(\log_b a)^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{4}{(\log_b a)^2}+\frac{1}{4}(\log_b a)^2\geq2\sqrt{\frac{4}{(\log_b a)^2}\cdot\frac{1}{4}(\log_b a)^2}$

$=2\cdot1=2$

(단, 등호는 $(\log_b a)^2=4$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

답 2

쎈B특강

산술평균과 기하평균의 관계

$x>0,\ y>0$일 때,

$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

19 ㄱ. $d=c^2$이면 $\frac{\log_a b}{\log_c d}=1$에서

$\frac{\log_a b}{\log_c c^2}=1, \quad \frac{\log_a b}{2}=1$

$\therefore \log_a b=2$

즉 $a^2=b$이므로 $\quad a=\sqrt{b}\ (\because a>0)$

ㄴ. $ac=1$이면 $c=\dfrac{1}{a}$이므로 $\dfrac{\log_a b}{\log_c d}=1$에서

$\dfrac{\log_a b}{\log_{\frac{1}{a}} d}=1$, $\quad \dfrac{\log_a b}{\log_a d}=-1$

$\therefore \log_d b=-1$

즉 $b=d^{-1}=\dfrac{1}{d}$이므로 $\quad bd=1$

ㄷ. $b=d$이면 $\dfrac{\log_a b}{\log_c d}=1$에서 $\quad \dfrac{\log_a b}{\log_c b}=1$

$\log_a b\cdot\log_b c=1$, $\quad \log_a b\cdot\dfrac{\log_a c}{\log_a b}=1$

$\log_a c=1 \quad \therefore a=c$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

20 $3\log_2 5-4\log_{\frac{1}{2}} 3-2\log_2 45=\log_2 5^3+\log_2 3^4-\log_2 45^2$

$=\log_2\dfrac{5^3\cdot3^4}{45^2}=\log_2\dfrac{5^3\cdot3^4}{3^4\cdot5^2}$

$=\log_2 5$

$\therefore$ (주어진 식)$=8^{\log_2 5}=5^{\log_2 8}=5^{3\log_2 2}$

$=5^3=125$

답 125

21 $x=\log_4 9+\log_2 5=\log_{2^2} 3^2+\log_2 5$

$=\log_2 3+\log_2 5=\log_2(3\cdot5)=\log_2 15$

$\therefore 2^x=2^{\log_2 15}=15$

답 ③

22 $\left(\log_3\sqrt{5}+\dfrac{3}{4}\log_{\sqrt{3}} 5\right)\cdot\log_5 3\sqrt{3}$

$=\left(\log_3 5^{\frac{1}{2}}+\dfrac{3}{4}\log_{3^{\frac{1}{2}}} 5\right)\cdot\log_5 3^{\frac{3}{2}}$

$=\left(\dfrac{1}{2}\log_3 5+\dfrac{3}{2}\log_3 5\right)\cdot\dfrac{3}{2}\log_5 3$

$=2\log_3 5\cdot\dfrac{3}{2}\log_5 3=3$

답 ⑤

23 $\log_2 9-\log_2 3=\log_2\dfrac{9}{3}=\log_2 3$이므로

(주어진 식)$=(4^{\log_2 3})^2-(3^{\log_2 3})^{\log_3 8}$

$=(3^{\log_2 4})^2-3^{\log_2 3\cdot3\log_3 2}$

$=9^2-3^3=81-27=54$

답 ②

24 $A=3^{\log_3 10-\log_3 4}=3^{\log_3\frac{10}{4}}=3^{\log_3\frac{5}{2}}=\dfrac{5}{2}$ ··· ❶

$B=\log_9 3-\log_8 2=\log_{3^2} 3-\log_{2^3} 2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$ ··· ❷

$C=\log_{\frac{1}{8}}(\log_4\sqrt{2})=\log_{\frac{1}{8}}(\log_{2^2} 2^{\frac{1}{2}})$

$=\log_{\frac{1}{8}}\dfrac{1}{4}=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{2}{3}$ ··· ❸

$\therefore B<C<A$ ··· ❹

답 $B<C<A$

채점 기준	비율
❶ A의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ B의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ C의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ A, B, C의 대소를 비교할 수 있다.	10 %

25 $O(0, 0)$, $A(2, \log_3 a)$, $B(4, \log_9 b)$라 하면 세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있으므로 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기가 같다.

즉 $\dfrac{\log_3 a}{2}=\dfrac{\log_9 b}{4}$이므로 $\quad \dfrac{\log_3 a}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}\log_3 b}{4}$

$4\log_3 a=\log_3 b$, $\quad \dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}=4 \quad \therefore \log_a b=4$

답 ⑤

쎈B특강

세 점이 한 직선 위에 있을 조건

세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이 한 직선 위에 있다.

➡ (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)
=(직선 CA의 기울기)

➡ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}$ (단, $x_1\neq x_2$, $x_2\neq x_3$, $x_3\neq x_1$)

다른 풀이 두 점 $(2, \log_3 a)$, $(4, \log_9 b)$를 지나는 직선의 방정식은 $\quad y-\log_9 b=\dfrac{\log_9 b-\log_3 a}{2}(x-4)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-\log_9 b=\dfrac{\log_9 b-\log_3 a}{2}\cdot(-4)$

$2\log_3 a=\log_9 b$, $\quad 2\log_3 a=\dfrac{1}{2}\log_3 b$

$\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}=4 \quad \therefore \log_a b=4$

26 $\log_a M=m$, $\log_a N=n$으로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $a^m=\boxed{M}$, $a^n=N$이므로

$a^{m+n}=a^m\cdot a^n=\boxed{MN}$

따라서 로그의 정의에 의하여 $\log_a MN=\boxed{m+n}$이므로

$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

$\therefore$ (가) M (나) MN (다) $m+n$

답 ③

27 $a^{\log_b c}=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$\boxed{\log_a x}=\log_b c$

이때 $\log_a x=\dfrac{\log_c x}{\boxed{\log_c a}}$, $\log_b c=\dfrac{1}{\boxed{\log_c b}}$이므로

$\dfrac{\log_c x}{\log_c a}=\dfrac{1}{\log_c b}$

$\therefore \log_c x=\dfrac{\log_c a}{\log_c b}=\log_b a$

따라서 로그의 정의에 의하여 $x=c^{\log_b a}$이므로

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

$\therefore$ (가) $\log_a x$ (나) $\log_c a$ (다) $\log_c b$

답 (가) $\log_a x$ (나) $\log_c a$ (다) $\log_c b$

28 $\log_{12} 4$가 $\boxed{\text{유리수}}$라 가정하면 서로소인 두 자연수 m, n $(m<n)$에 대하여 $\log_{12} 4=\dfrac{m}{n}$으로 나타낼 수 있다.

로그의 정의에 의하여 $\quad 12^{\frac{m}{n}}=4$, $\quad 12^m=4^n$

$\dfrac{12^m}{4^m}=\dfrac{4^n}{4^m} \quad \therefore \boxed{3^m}=4^{n-m}$

이때 3^m은 $\boxed{\text{홀수}}$이고 4^{n-m}은 짝수이므로 3^m과 4^{n-m}은 항상 같지 않다.

따라서 $\log_{12}4$는 무리수이다.

$\therefore$ (가) 유리수 (나) 3^m (다) 홀수

답 (가) 유리수 (나) 3^m (다) 홀수

29 $\log_2 8 < \log_2 12 < \log_2 16$에서

$3 < \log_2 12 < 4$

즉 $\log_2 12$의 정수 부분이 3이므로

$a=3,\ b=\log_2 12-3=\log_2 \frac{3}{2}$

$\therefore a-2^b=3-2^{\log_2 \frac{3}{2}}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

답 ②

30 $\log_3 9 < \log_3 15 < \log_3 27$에서

$2 < \log_3 15 < 3$

즉 $\log_3 15$의 정수 부분이 2이므로

$a=\log_3 15-2=\log_3 \frac{5}{3}$

$\therefore 9^a=3^{2\log_3 \frac{5}{3}}=\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$

답 ③

31 $\log 10 < \log 50 < \log 100$에서

$1 < \log 50 < 2$

즉 $\log 50$의 정수 부분이 1이므로

$n=1,\ a=\log 50-1=\log 5$ ⋯ ❶

$\therefore \frac{10^n-10^a}{10^n+10^a}=\frac{10-10^{\log 5}}{10+10^{\log 5}}=\frac{10-5}{10+5}=\frac{1}{3}$ ⋯ ❷

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ n, a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\frac{10^n-10^a}{10^n+10^a}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

32 (i) $1 \le N < 5$일 때,

$\log_5 1 \le \log_5 N < \log_5 5$에서 $0 \le \log_5 N < 1$

즉 $\log_5 N$의 정수 부분이 0이므로 $f(N)=0$

$\therefore f(2)=f(3)=f(4)=0$

(ii) $5 \le N < 25$일 때,

$\log_5 5 \le \log_5 N < \log_5 25$에서 $1 \le \log_5 N < 2$

즉 $\log_5 N$의 정수 부분이 1이므로 $f(N)=1$

$\therefore f(5)=f(6)=\cdots=f(24)=1$

(iii) $25 \le N < 125$일 때,

$\log_5 25 \le \log_5 N < \log_5 125$에서 $2 \le \log_5 N < 3$

즉 $\log_5 N$의 정수 부분이 2이므로 $f(N)=2$

$\therefore f(25)=f(26)=\cdots=f(100)=2$

이상에서

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(100)$

$=0\cdot3+1\cdot20+2\cdot76=172$

답 ①

33 $\log_2 3=a,\ \log_2 5=\frac{1}{b}$이므로

$$\log_{90}120=\frac{\log_2 120}{\log_2 90}=\frac{\log_2(2^3\cdot3\cdot5)}{\log_2(2\cdot3^2\cdot5)}$$

$$=\frac{3\log_2 2+\log_2 3+\log_2 5}{\log_2 2+2\log_2 3+\log_2 5}$$

$$=\frac{3+a+\frac{1}{b}}{1+2a+\frac{1}{b}}=\frac{3b+ab+1}{b+2ab+1}$$

답 $\frac{3b+ab+1}{b+2ab+1}$

34 $\log\frac{16}{45}=\log 16-\log 45$

$=\log 2^4-(\log 3^2+\log 5)$

$=4\log 2-2\log 3-\log\frac{10}{2}$

$=4\log 2-2\log 3-(1-\log 2)$

$=5\log 2-2\log 3-1$

$=5a-2b-1$

답 $5a-2b-1$

35 $\log_3 10=a$에서 $\log_3 2+\log_3 5=a$ ⋯⋯ ㉠

$\log_3\frac{5}{4}=b$에서 $\log_3 5-\log_3 2^2=b$

$\therefore \log_3 5-2\log_3 2=b$ ⋯⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면

$3\log_3 2=a-b$ $\therefore \log_3 2=\frac{a-b}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{a-b}{3}+\log_3 5=a$ $\therefore \log_3 5=\frac{2a+b}{3}$

$\therefore \log_3 40=\log_3(2^3\cdot5)=3\log_3 2+\log_3 5$

$=3\cdot\frac{a-b}{3}+\frac{2a+b}{3}=\frac{5a-2b}{3}$

답 ①

36 $\log_3 2=\frac{1}{a}$이고, $\log_5 7=\frac{\log_3 7}{\log_3 5}$에서

$\log_3 7=\log_3 5\cdot\log_5 7=bc$

$$\therefore \log_{15}42=\frac{\log_3 42}{\log_3 15}=\frac{\log_3(2\cdot3\cdot7)}{\log_3(3\cdot5)}$$

$$=\frac{\log_3 2+\log_3 3+\log_3 7}{\log_3 3+\log_3 5}$$

$$=\frac{\frac{1}{a}+1+bc}{1+b}$$

$$=\frac{1+a+abc}{a+ab}$$

답 $\frac{1+a+abc}{a+ab}$

37 $2^a=x,\ 2^b=y,\ 2^c=z$에서

$\log_2 x=a,\ \log_2 y=b,\ \log_2 z=c$

$$\therefore \log_{xz}x^4y^3=\frac{\log_2 x^4y^3}{\log_2 xz}=\frac{4\log_2 x+3\log_2 y}{\log_2 x+\log_2 z}$$

$$=\frac{4a+3b}{a+c}$$

답 ③

다른 풀이 $xz=2^a\cdot2^c=2^{a+c},\ x^4y^3=2^{4a}\cdot2^{3b}=2^{4a+3b}$이므로

$\log_{xz}x^4y^3=\log_{2^{a+c}}2^{4a+3b}=\frac{4a+3b}{a+c}$

38 $5^a=2$, $5^b=9$에서 $\quad \log_5 2=a$, $\log_5 9=2\log_5 3=b$

$\therefore \log_5 2=a$, $\log_5 3=\frac{1}{2}b$

$$\therefore \log_{12}54=\frac{\log_5 54}{\log_5 12}=\frac{\log_5(2\cdot 3^3)}{\log_5(2^2\cdot 3)}$$

$$=\frac{\log_5 2+3\log_5 3}{2\log_5 2+\log_5 3}$$

$$=\frac{a+\frac{3}{2}b}{2a+\frac{1}{2}b}=\frac{2a+3b}{4a+b}$$

답 ②

39 $a^m=b^n=3$에서 $\quad \log_a 3=m$, $\log_b 3=n$

$\therefore \log_3 a=\frac{1}{m}$, $\log_3 b=\frac{1}{n}$ ⋯ ❶

$$\therefore \log_{a^2}ab=\frac{\log_3 ab}{\log_3 a^2}=\frac{\log_3 a+\log_3 b}{2\log_3 a}$$

$$=\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{\frac{2}{m}}=\frac{m+n}{2n}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{m+n}{2n}$

채점 기준	비율
❶ $\log_3 a$, $\log_3 b$를 m, n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\log_{a^2}ab$를 m, n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %

40 $x^3y^4=1$의 양변에 y를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_y x^3y^4=\log_y 1$, $\quad \log_y x^3+\log_y y^4=0$

$3\log_y x+4=0 \quad \therefore \log_y x=-\frac{4}{3}$

$\therefore \log_y x^4y^5=\log_y x^4+\log_y y^5=4\log_y x+5$

$$=4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+5=-\frac{1}{3}$$

답 ②

다른 풀이 $x^3y^4=1$에서 $\quad x^3=y^{-4} \quad \therefore x=y^{-\frac{4}{3}}$

$\therefore \log_y x^4y^5=\log_y\{(y^{-\frac{4}{3}})^4\cdot y^5\}=\log_y y^{-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}$

41 $\log_4 x^2+\log_2 y=2$에서 $\quad \log_{2^2}x^2+\log_2 y=2$

$\therefore \log_2 x+\log_2 y=2$

$\therefore 9^{\log_2 x}\cdot 3^{\log_2 y^2}=3^{2\log_2 x}\cdot 3^{2\log_2 y}=3^{2(\log_2 x+\log_2 y)}$

$$=3^{2\cdot 2}=81$$

답 81

42 $\log_a c : \log_b c=1 : 2$에서 $\quad \log_b c=2\log_a c$

$\frac{1}{\log_c b}=\frac{2}{\log_c a}$, $\quad \log_c a=2\log_c b$

$\therefore a=b^2$ ⋯ ❶

$\therefore \log_a b+\log_b a=\log_{b^2}b+\log_b b^2$

$$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\log_a b+\log_b a$의 값을 구할 수 있다.	40 %

43 조건 (가)에서 $\quad \log_2 b=\frac{1}{3}\log_2\frac{c}{a}$, $\quad 3\log_2 b=\log_2\frac{c}{a}$

$b^3=\frac{c}{a} \quad \therefore ab^3=c$ ⋯⋯ ㉠

조건 (나)에서 $\quad \frac{2\log_2 c}{\log_2 a}=\log_b c$, $\quad 2\log_a c=\log_b c$

$\frac{2}{\log_c a}=\frac{1}{\log_c b}$, $\quad 2\log_c b=\log_c a$

$\therefore a=b^2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $c=ab^3=b^2\cdot b^3=b^5$이므로

$\log_b ac=\log_b b^2b^5=\log_b b^7=7$

답 ④

44 $\log_a b=\frac{\log_b c}{3}=\frac{\log_c a}{9}=k$ (k는 실수)로 놓으면

$\log_a b=k$, $\log_b c=3k$, $\log_c a=9k$

이때 $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$이므로 $\quad k\cdot 3k\cdot 9k=1$

$k^3=\frac{1}{27} \quad \therefore k=\frac{1}{3}$ ($\because$ k는 실수)

$\therefore \log_a b+\log_b c+\log_c a=k+3k+9k=13k$

$$=13\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$$

답 ②

45 $a^2=b^3=c^4=k$ ($k>0$, $k\neq 1$)로 놓으면

$a^2=k$에서 $\quad a=k^{\frac{1}{2}}$

$b^3=k$에서 $\quad b=k^{\frac{1}{3}}$

$c^4=k$에서 $\quad c=k^{\frac{1}{4}}$

이때 $ab=k^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=k^{\frac{5}{6}}$, $bc=k^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=k^{\frac{7}{12}}$, $ac=k^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=k^{\frac{3}{4}}$이므로

$\log_{ab}b+\log_{bc}c-\log_{ac}a=\log_{k^{\frac{5}{6}}}k^{\frac{1}{3}}+\log_{k^{\frac{7}{12}}}k^{\frac{1}{4}}-\log_{k^{\frac{3}{4}}}k^{\frac{1}{2}}$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}}+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}}-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{3}{7}-\frac{2}{3}=\frac{17}{105}$$

답 $\frac{17}{105}$

46 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 a+\log_3 b=4$, $\log_3 a\cdot\log_3 b=2$

$$\therefore \log_a b+\log_b a=\frac{\log_3 b}{\log_3 a}+\frac{\log_3 a}{\log_3 b}$$

$$=\frac{(\log_3 a)^2+(\log_3 b)^2}{\log_3 a\cdot\log_3 b}$$

$$=\frac{(\log_3 a+\log_3 b)^2-2\log_3 a\cdot\log_3 b}{\log_3 a\cdot\log_3 b}$$

$$=\frac{4^2-2\cdot 2}{2}=6$$

답 6

47 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=1$

$\therefore \log_2(\alpha+1)+\log_2(\beta+1)=\log_2(\alpha+1)(\beta+1)$

$$=\log_2(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)$$

$$=\log_2(1+6+1)$$

$$=\log_2 8=3$$

답 3

48 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+\log_5 3=-a,\ 1\cdot\log_5 3=b$

이므로 $a=-(\log_5 5+\log_5 3)=-\log_5 15,\ b=\log_5 3$

$\therefore\ \dfrac{a}{b}=-\dfrac{\log_5 15}{\log_5 3}=-\log_3 15$ 답 ②

49 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2\log_2 3,\ \alpha\beta=3-\log_2 6$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\alpha-1)(\beta-1)&=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\\&=3-\log_2 6-2\log_2 3+1\\&=3-(1+\log_2 3)-2\log_2 3+1\\&=3-3\log_2 3=\log_2 8-\log_2 3^3\\&=\log_2\frac{8}{27}\end{aligned}$$

$\therefore\ k=\dfrac{8}{27}$ 답 $\dfrac{8}{27}$

50 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=\dfrac{1}{2}$ ··· ❶

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=8$ ··· ❷

$\therefore\ \log_{\alpha^2+\beta^2}2\alpha+\log_{\alpha^2+\beta^2}2\beta=\log_{\alpha^2+\beta^2}4\alpha\beta=\log_8\left(4\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

$=\log_{2^3}2=\dfrac{1}{3}$ ··· ❸

답 $\dfrac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

51 $\log x^2-\log\dfrac{1}{x}=2\log x+\log x=3\log x$

$1<x<100$에서 $0<\log x<2$ $\therefore\ 0<3\log x<6$

이때 $3\log x$가 정수이므로 $3\log x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$\log x=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ 1,\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{3}$

$\therefore\ x=10^{\frac{1}{3}},\ 10^{\frac{2}{3}},\ 10,\ 10^{\frac{4}{3}},\ 10^{\frac{5}{3}}$

따라서 조건을 만족시키는 x의 개수는 5이다. 답 5

52 $4\log_n 3=k$ (k는 자연수)로 놓으면

$\log_n 3=\dfrac{k}{4},\quad n^{\frac{k}{4}}=3\quad\therefore\ n=3^{\frac{4}{k}}$

이때 n이 2 이상의 자연수이므로 $\dfrac{4}{k}$도 자연수이어야 한다.

즉 주어진 조건을 만족시키는 k의 값은 $1,\ 2,\ 4$

(i) $k=1$일 때, $n=3^4=81$

(ii) $k=2$일 때, $n=3^2=9$

(iii) $k=4$일 때, $n=3^1=3$

이상에서 모든 n의 값의 합은 $81+9+3=93$ 답 ⑤

다른 풀이 $4\log_n 3=\dfrac{4}{\log_3 n}$ ······ ㉠

n이 2 이상의 자연수이므로

$\log_3 n=\log_3 2,\ 1,\ \log_3 4,\ \log_3 5,\ \cdots$

이때 ㉠의 값이 자연수이려면

$\log_3 n=1,\ 2,\ 4\quad\therefore\ n=3,\ 9,\ 81$

따라서 모든 n의 값의 합은 $3+9+81=93$

53 $\log x^3-\log\sqrt{x}=3\log x-\dfrac{1}{2}\log x=\dfrac{5}{2}\log x$

$10<x<100$에서 $1<\log x<2$ $\therefore\ \dfrac{5}{2}<\dfrac{5}{2}\log x<5$

이때 $\dfrac{5}{2}\log x$가 정수이므로 $\dfrac{5}{2}\log x=3,\ 4$

$\log x=\dfrac{6}{5},\ \dfrac{8}{5}$ $\therefore\ x=10^{\frac{6}{5}},\ 10^{\frac{8}{5}}$

따라서 구하는 곱은 $10^{\frac{6}{5}}10^{\frac{8}{5}}=10^{\frac{14}{5}}$ 답 $10^{\frac{14}{5}}$

54 $\log 25+\log 48=2\log 5+\log(2^4\cdot 3)=2\log\dfrac{10}{2}+\log(2^4\cdot 3)$

$$\begin{aligned}&=2(\log 10-\log 2)+\log 2^4+\log 3\\&=2-2\log 2+4\log 2+\log 3\\&=2+2\log 2+\log 3\\&=2+2\times 0.3010+0.4771\\&=3.0791\end{aligned}$$

답 ③

쎈B특강

상용로그를 포함한 문제는

$\log 5=\log\dfrac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-\log 2,$

$\log 2=\log\dfrac{10}{5}=\log 10-\log 5=1-\log 5$

임을 알아두면 쉽게 해결할 수 있다.

55 ③ $\log 0.573=\log(57.3\times 10^{-2})=\log 57.3+\log 10^{-2}$

$=1.7582-2=-0.2418$ 답 ③

56 $\log\sqrt{x}-\log\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{2}\log x+2\log x=\dfrac{5}{2}\log x$

$=\dfrac{5}{2}\times 0.4=1$ 답 1

57 $\log 36.2-\log x=1.5587+0.4413=2=\log 100$

즉 $\log\dfrac{36.2}{x}=\log 100$이므로 $\dfrac{36.2}{x}=100$

$\therefore\ x=\dfrac{36.2}{100}=0.362$ 답 0.362

58 규모가 8인 지진의 에너지를 E_1, 규모가 6인 지진의 에너지를 E_2라 하면

$\log E_1=11.8+1.5\times 8=23.8$ $\therefore\ E_1=10^{23.8}$

$\log E_2=11.8+1.5\times 6=20.8$ $\therefore\ E_2=10^{20.8}$

$\therefore\ \dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{10^{23.8}}{10^{20.8}}=10^3=1000$

따라서 규모가 8인 지진의 에너지는 규모가 6인 지진의 에너지의 1000배이다. 답 ⑤

59 $A=80$일 때 $I=10^{-4}$이므로

$$80=k\log\frac{10^{-4}}{10^{-12}},\qquad 80=k\log 10^{8}$$

$$80=8k\qquad \therefore k=10$$

따라서 $I=10^{-7}$일 때의 소리의 크기는

$$10\log\frac{10^{-7}}{10^{-12}}=10\log 10^{5}=10\times5=50\,(\text{dB})$$ 답 50 dB

60 1등급인 별의 밝기를 I_1, 6등급인 별의 밝기를 I_2라 하면

$$1=-\frac{5}{2}\log I_1+C \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$6=-\frac{5}{2}\log I_2+C \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$-$㉡을 하면

$$-5=-\frac{5}{2}(\log I_1-\log I_2),\qquad \log\frac{I_1}{I_2}=2$$

$$\therefore \frac{I_1}{I_2}=10^2=100$$

따라서 1등급인 별의 밝기는 6등급인 별의 밝기의 100배이다.

답 ⑤

61 원본 사진 A를 압축했을 때, 최대 신호 대 잡음비가 P_{A}, 평균제곱오차가 E_{A}이므로 $\quad P_{\text{A}}=20\log 255-10\log E_{\text{A}}$

원본 사진 B를 압축했을 때, 최대 신호 대 잡음비가 P_{B}, 평균제곱오차가 E_{B}이므로 $\quad P_{\text{B}}=20\log 255-10\log E_{\text{B}}$

이때 $E_{\text{B}}=10^5E_{\text{A}}$이므로

$$\begin{aligned}P_{\text{A}}-P_{\text{B}}&=(20\log 255-10\log E_{\text{A}})-(20\log 255-10\log E_{\text{B}})\\&=10(\log E_{\text{B}}-\log E_{\text{A}})\\&=10\log\frac{E_{\text{B}}}{E_{\text{A}}}=10\log\frac{10^5E_{\text{A}}}{E_{\text{A}}}\\&=10\log 10^5=50\end{aligned}$$

답 ⑤

62 초기 온도가 25 °C이므로 $\quad T_x=25+k\log(8x+1)$

$x=\frac{9}{8}$일 때 $T_x=155$이므로

$$25+k\log\left(8\cdot\frac{9}{8}+1\right)=155,\qquad 25+k=155$$

$$\therefore k=130$$ ⋯ ❶

따라서 화재가 발생한 지 a분 후의 온도를 285 °C라 하면

$$25+130\log(8a+1)=285,\qquad \log(8a+1)=2$$

$$8a+1=10^2=100\qquad \therefore a=\frac{99}{8}$$

따라서 화재가 발생한 후 온도가 285 °C가 되는 데 걸리는 시간은 $\frac{99}{8}$분이다. ⋯ ❷

답 $\frac{99}{8}$분

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 285 °C가 되는 데 걸리는 시간을 구할 수 있다.	50 %

63 처음 빛의 밝기를 A라 하면 유리를 7장 통과한 빛의 밝기는

$$A\left(1-\frac{36}{100}\right)^7=A\times0.64^7$$

0.64^7에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log 0.64^7&=7\log 0.64=7\log(64\times10^{-2})\\&=7(6\log 2-2)=7(6\times0.3-2)=-1.4\end{aligned}$$

$\log 3.99-\log 0.64^7=0.6+1.4=2$이므로

$$\log\frac{3.99}{0.64^7}=\log 100$$

즉 $\frac{3.99}{0.64^7}=100$이므로 $\qquad 0.64^7=0.0399$

따라서 유리를 7장 통과한 빛의 밝기는 $0.0399A$이므로 처음 밝기의 3.99 %이다. 답 ②

64 10개의 세포를 5시간, 즉 300분 동안 배양하면 전체 세포의 수는 $10\cdot2^{30}$이다.

$10\cdot2^{30}$에 상용로그를 취하면

$$\log(10\cdot2^{30})=1+30\log 2=1+30\times0.3=10$$

$$\therefore 10\cdot2^{30}=10^{10}$$

따라서 5시간 후의 세포의 수는 10^{10}이므로

$k=10$ 답 ③

65 10년 전 매출액을 A원, 매출액이 매년 a %씩 증가했다고 하면 $\quad A\left(1+\frac{a}{100}\right)^{10}=4A$ ⋯ ❶

$$\therefore \left(1+\frac{a}{100}\right)^{10}=4$$

양변에 상용로그를 취하면

$$10\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log 4$$

$$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{1}{10}\log 4=\frac{1}{5}\log 2=\frac{1}{5}\times0.3=0.06$$ ⋯ ❷

이때 $\log 1.15=0.06$이므로 $\qquad 1+\frac{a}{100}=1.15 \qquad \therefore a=15$

따라서 매출액은 매년 15 %씩 증가했다. ⋯ ❸

답 15 %

채점 기준	비율
❶ 매출액이 매년 a %씩 증가했을 때의 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ $\log\left(1+\frac{a}{100}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 매출액이 매년 몇 %씩 증가했는지 구할 수 있다.	30 %

66 현재의 인구는

$$A(1-0.2)^5(1+0.2)^5=A\times0.96^5(\text{명})$$

0.96^5에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log 0.96^5&=5\log 0.96=5\log(9.6\times10^{-1})\\&=5(0.982-1)=-0.09\end{aligned}$$

$\log 8.2-\log 0.96^5=0.91+0.09=1$이므로

$$\log\frac{8.2}{0.96^5}=\log 10$$

즉 $\frac{8.2}{0.96^5}=10$이므로 $\qquad 0.96^5=0.82$

따라서 현재의 인구는 $0.82A$명이므로 $\qquad k=0.82$ 답 0.82

03 지수함수

개념 정리

본책 30쪽

❶ 지수함수 ❷ 증가 ❸ 감소 ❹ x ❺ a^m
❻ a^n

쎈B 유형 뽀개기

본책 31쪽

01 ㄱ. $f(-m)=a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, $f\left(\frac{1}{m}\right)=a^{\frac{1}{m}}$이므로

$$f(-m)\neq f\left(\frac{1}{m}\right)$$

ㄴ. $f(2m)=a^{2m}$, $2f(m)=2a^m$이므로

$$f(2m)\neq 2f(m)$$

ㄷ. $f(mn)=a^{mn}=(a^m)^n=\{f(m)\}^n$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

02 $f(p)=q$에서 $\quad 3^p=q$

$$\therefore f(2p)+f(-2p)=3^{2p}+3^{-2p}$$
$$=(3^p)^2+(3^p)^{-2}$$
$$=q^2+\frac{1}{q^2}$$

답 ⑤

03 $f(0)=a^n=3$, $f(3)=a^{3m+n}=24$이므로

$3a^{3m}=24$, $\quad a^{3m}=8$

$\therefore a^m=2$

$\therefore f(-1)=a^{-m+n}=\frac{a^n}{a^m}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

04 $f(a-b)=\left(\frac{1}{3}\right)^{a-b}=\left(\frac{1}{3}\right)^a\left(\frac{1}{3}\right)^{-b}$

이때 $p=f(a)=\left(\frac{1}{3}\right)^a$, $q=f(b)=\left(\frac{1}{3}\right)^b$이므로

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-b}=\frac{1}{q}$$

$\therefore\ f(a-b)=\left(\frac{1}{3}\right)^a\left(\frac{1}{3}\right)^{-b}=\frac{p}{q}$ 답 $\frac{p}{q}$

05 $f(2k)=a^{2k}+a^{-2k}=7$

$(a^k+a^{-k})^2=a^{2k}+a^{-2k}+2$이므로

$(a^k+a^{-k})^2=7+2=9$

$\therefore a^k+a^{-k}=3\ (\because a^k+a^{-k}>0)$

$$\therefore f(3k)=a^{3k}+a^{-3k}$$
$$=(a^k+a^{-k})^3-3(a^k+a^{-k})$$
$$=3^3-3\cdot 3=18$$

답 18

06 $f(3)=a^3=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$에서 $\quad a=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

ㄱ. $f(-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

ㄴ. $f(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$이므로 그래프는 점 $(-1, 2)$를 지난다.

ㄷ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

ㄹ. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서 밑이 1보다 작으므로 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

07 $a<b$일 때 $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 함수이다.

이때

$$f(x)=10^{-x}=\left(\frac{1}{10}\right)^x,\ f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}=\left(\frac{2}{3}\right)^x,$$

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-x}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^x \quad \frac{2\sqrt{3}}{3}=\sqrt{\frac{4}{3}}>1$$

이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ⑤이다. 답 ⑤

08 $y=(a^2+3a+3)^x$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하려면 $\quad 0<a^2+3a+3<1$ ··· ❶

(i) $0<a^2+3a+3$에서

$$a^2+3a+3=\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

이므로 항상 성립한다.

(ii) $a^2+3a+3<1$에서 $\quad a^2+3a+2<0$

$(a+2)(a+1)<0 \quad \therefore -2<a<-1$

(i), (ii)에서 $\quad -2<a<-1$ ··· ❷

답 $-2<a<-1$

채점 기준	비율
❶ a^2+3a+3의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %

09 $y=3^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=3^{2(x-m)}$

$\therefore y=3^{-2m}\cdot 3^{2x}+n$

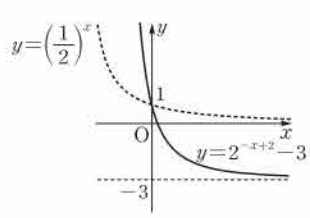
이 식이 $y=\frac{1}{81}\cdot 3^{2x}-6$과 일치하므로

$3^{-2m}=\frac{1}{81}=3^{-4}$, $n=-6$

따라서 $m=2$, $n=-6$이므로

$mn=-12$ 답 -12

10 $y=2^{-x+2}-3=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-3$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



⑤ 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다. 답 ⑤

쎈B특강

함수 $y=a^{x-p}+q$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
이때 함수 $y=a^x$의 그래프의 점근선이 x축, 즉 직선 $y=0$이므로 함수 $y=a^{x-p}+q$의 그래프의 점근선은 직선 $y=0$을 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 직선 $y=q$가 된다.

11 $y=4^{x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$이므로

$b=-2$ ⋯ ❶

또 이 그래프가 점 (0, 2)를 지나므로

$2=4^a-2,\quad 4^a=4\quad \therefore a=1$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

12 ㄱ. $y=\frac{1}{4^x}-1=4^{-x}-1$이므로 $y=4^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=\frac{1}{4^x}-1$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄴ. $y=-2^{2x}=-4^x$이므로 $y=4^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=-2^{2x}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄷ. $y=2\cdot4^x=4^{\frac{1}{2}}\cdot4^x=4^{x+\frac{1}{2}}$이므로 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동하면 $y=2\cdot4^x$의 그래프와 겹쳐진다.

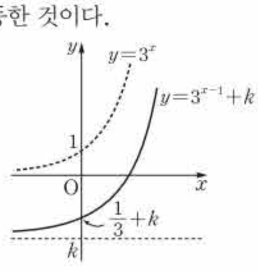
ㄹ. $y=\frac{2^x+1}{4}=\frac{2^x}{4}+\frac{1}{4}=2^{x-2}+\frac{1}{4}$이므로 $y=4^x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여도 $y=\frac{2^x+1}{4}$의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

이상에서 $y=4^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

참고 ㄹ. $y=\frac{2^x+1}{4}=2^{x-2}+\frac{1}{4}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동하면 겹쳐진다.

13 $y=3^{x-1}+k$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



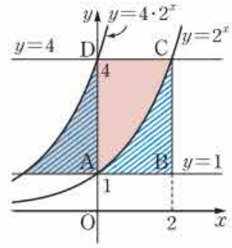
$\underbrace{\frac{1}{3}+k}_{x=0\text{일 때의 함숫값}}\le0\quad \therefore k\le-\frac{1}{3}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다.

답 ⑤

14 $y=4\cdot2^x=2^{x+2}$이므로 $y=4\cdot2^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 두 함수 $y=2^x$, $y=4\cdot2^x$의 그래프와 두 직선 $y=1$, $y=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



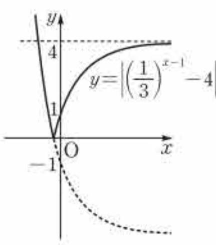
따라서 구하는 넓이는

$\overline{AB}\cdot\overline{AD}=2\cdot3=6$ 답 ②

참고 $y=2^x$에서 $y=4$일 때,
$2^x=4=2^2\quad \therefore x=2\quad \therefore C(2, 4)$

15 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-4$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-4\right|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$가 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나려면 $0<k<4$



즉 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

답 ③

참고 $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-4\right|$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-4$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

16 $y=a^x$의 그래프가 두 점 $(b, 4)$, $(c, 16)$을 지나므로

$4=a^b$, $16=a^c$

$\therefore f\left(\frac{b+c}{3}\right)=a^{\frac{b+c}{3}}=(a^{b+c})^{\frac{1}{3}}=(a^b\cdot a^c)^{\frac{1}{3}}$

$=(4\cdot16)^{\frac{1}{3}}=4$ 답 ①

17 $a=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$, $b=3^a=3^{\sqrt{3}}$이므로

$b^a=(3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=3^3=27$ 답 27

18 $A(a, 2^a)$, $B(b, 2^b)$이고, 직선 AB의 기울기가 2이므로

$\frac{2^b-2^a}{b-a}=2\quad \therefore b-a=\frac{1}{2}(2^b-2^a)$ ⋯⋯ ㉠

또 $\overline{AB}=\sqrt{5}$이므로

$(b-a)^2+(2^b-2^a)^2=(\sqrt{5})^2$

㉠을 위의 식에 대입하면

$\frac{1}{4}(2^b-2^a)^2+(2^b-2^a)^2=5$

$(2^b-2^a)^2=4$

$\therefore 2^b-2^a=2\ (\because \underbrace{2^a<2^b}_{a<b\text{이므로 }2^a<2^b})$ 답 2

19 점 P의 좌표를 $(a, 3^a)$이라 하면 $\overline{OP}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{a}{1+2}, \frac{3^a}{1+2}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{3}, 3^{a-1}\right)$

03 지수함수

이 점이 함수 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프 위에 있으므로

$$3^{a-1}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{a}{3}}, \quad 3^{a-1}=3^{-\frac{2}{3}a}$$

$$a-1=-\frac{2}{3}a, \quad 3a-3=-2a$$

$$\therefore a=\frac{3}{5}$$

답 ③

쎈B 특강

좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n\ (m>0, n>0)$으로

① 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

② 외분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$

(단, $m\neq n$)

20 점 A의 좌표가 $(k, 2^k)$이고 두 점 A, C의 y좌표가 같으므로 $8^x=2^k$에서 $\quad 2^{3x}=2^k \quad \therefore x=\frac{k}{3}$

따라서 $C\left(\frac{k}{3}, 2^k\right)$이므로 $\quad \overline{AC}=\frac{2}{3}k$ ··· ❶

한편 점 B의 좌표가 $(k, 8^k)$이고 두 점 B, D의 y좌표가 같으므로

$2^x=8^k$에서 $\quad 2^x=2^{3k} \quad \therefore x=3k$

따라서 $D(3k, 8^k)$이므로 $\quad \overline{BD}=2k$ ··· ❷

즉 $\overline{BD}=3\overline{AC}$이므로 $\quad l=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\overline{AC}$의 길이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\overline{BD}$의 길이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ l의 값을 구할 수 있다.	20 %

21 두 삼각형 ACB, ADC의 높이가 $\overline{AB}$로 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$$\therefore \overline{BC}:\overline{CD}=\triangle ACB:\triangle ADC=3:1$$

따라서 $\overline{BC}:\overline{BD}=3:4$이므로 두 점 C, D의 x좌표를 각각 $3b$, $4b\ (b>0)$로 놓으면

$$4^{3b}=a^{4b}=k, \quad 64^b=(a^4)^b, \quad 64=a^4$$

$$\therefore a=64^{\frac{1}{4}}=(2^6)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

22 $A=\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{3}{4}}$, $B=16^{\frac{1}{3}}=(2^4)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$,

$C=0.5^{-\frac{5}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{4}}=2^{\frac{5}{4}}$

이때 $\frac{3}{4}<\frac{5}{4}<\frac{4}{3}$이고 밑이 1보다 크므로

$$2^{\frac{3}{4}}<2^{\frac{5}{4}}<2^{\frac{4}{3}}, \text{ 즉 } A<C<B$$

답 ②

23 $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=(3\cdot 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{4}}=(3^{-3})^{-\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$,

$(3^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{3}})^{\frac{4}{7}}=(3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{3}})^{\frac{4}{7}}=3^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{81^5}}}=\{(3^4)^5\}^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{5}{2}}$ ··· ❶

이때 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{5}{2}$이고 밑이 1보다 크므로

$3^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{5}{2}}$ ··· ❷

따라서 가장 큰 수는 $3^{\frac{5}{2}}$이고, 가장 작은 수는 $3^{\frac{1}{2}}$이므로 구하는 곱은

$3^{\frac{5}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}=3^3=27$ ··· ❸

답 27

채점 기준	비율
❶ 주어진 네 수의 밑을 같게 할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 네 수의 대소를 비교할 수 있다.	30 %
❸ 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱을 구할 수 있다.	20 %

24 $A=a^{\frac{n}{n+1}}$, $B=a^{\frac{n+1}{n+2}}$, $C=a^{\frac{n+2}{n+3}}$

$\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$, $\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}$, $\frac{n+2}{n+3}=1-\frac{1}{n+3}$이고

n이 자연수이므로

$$\frac{1}{n+3}<\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}$$

따라서 $1-\frac{1}{n+1}<1-\frac{1}{n+2}<1-\frac{1}{n+3}$,

즉 $\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}<\frac{n+2}{n+3}$이고 $0<a<1$이므로

$$a^{\frac{n+2}{n+3}}<a^{\frac{n+1}{n+2}}<a^{\frac{n}{n+1}}, \text{ 즉 } C<B<A$$

답 $C<B<A$

25 $0<a<1$일 때 $y=a^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $0<a<1$에서 $\quad a^1<a^a<a^0$, 즉 $a<a^a<1$

$2>1$이므로 $a<a^a<1$에서

$$2^a<2^{a^a}<2$$

답 ④

26 $f(x)=2^{x-1}+k$에서 $x=4$일 때 최대이고 최댓값은

$$2^{4-1}+k=8+k$$

즉 $8+k=7$이므로 $\quad k=-1$

$$\therefore f(3)=2^2-1=3$$

답 ③

27 $y=3^x\cdot 4^{-x}=\left(\frac{3}{4}\right)^x$이므로 $x=-1$일 때 최대이고 최댓값은

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$$

$x=2$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^2$

따라서 구하는 곱은 $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-1+2}=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

28 (i) $a>1$일 때,

최댓값은 $f(1)$, 최솟값은 $f(-1)$이므로

$f(1)=4f(-1), \quad a=4a^{-1}$

$a^2=4 \quad \therefore a=2\ (\because a>0)$ ··· ❶

(ii) $0<a<1$일 때,

최댓값은 $f(-1)$, 최솟값은 $f(1)$이므로

$f(-1)=4f(1), \quad a^{-1}=4a$

$a^2=\frac{1}{4} \quad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$ ··· ❷ (i), (ii)에서 모든 양수 a의 값의 합은 $\quad 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ $a>1$일 때 a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $0<a<1$일 때 a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 양수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

29 $f(x)=|x-2|+3$으로 놓으면 $-1\le x\le 3$에서

$-3\le x-2\le 1,\quad 0\le |x-2|\le 3$

$\therefore 3\le |x-2|+3\le 6$, 즉 $3\le f(x)\le 6$

(i) $a>1$일 때,

$y=a^{f(x)}$은 $f(x)=6$일 때 최댓값을 가지므로

$a^6=\frac{1}{8}\qquad \therefore a=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\because a>0)$

그런데 이것은 $a>1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a<1$일 때,

$y=a^{f(x)}$은 $f(x)=3$일 때 최댓값을 가지므로

$a^3=\frac{1}{8}\qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$이고, $f(x)=6$일 때 최소이므로 최솟값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^6=2^{-6}$

답 ③

쎈B특강

함수 $y=a^x$에서 $a=1$이면 $y=1$이므로 $y=a^x$은 상수함수이고, $a>0$, $a\neq 1$이면 $y=a^x$은 지수함수이다.
따라서 함수 $y=a^x$의 최대·최소는 a의 값의 범위에 따라 달라지므로 문제에서 a의 값의 조건이 주어지지 않은 경우에는 a의 값의 범위를 $0<a<1$, $a=1$, $a>1$인 경우로 나누어 생각해야 한다. 그러나 29번과 같이 최댓값이 1이 아닌 수로 주어지면 $a=1$인 경우는 생각하지 않아도 되므로 풀이 시간을 절약할 수 있다.

30 $f(x)=x^2-2x-1$로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2-2$

$f(-1)=2$, $f(1)=-2$, $f(2)=-1$이므로 $-1\le x\le 2$에서

$-2\le f(x)\le 2$

$y=3^{x^2-2x-1}=3^{f(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=3^{f(x)}$은 $f(x)=2$, 즉 $x=-1$일 때 최댓값 $3^2=9$를 갖는다.

따라서 $a=-1$, $b=9$이므로

$ab=-9$

답 ①

쎈B특강

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은

① $\alpha\le p\le\beta$일 때
⇒ $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때
⇒ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

31 $f(x)=-x^2+6x-6$으로 놓으면

$f(x)=-(x-3)^2+3$

$\therefore f(x)\le 3$

$y=a^{-x^2+6x-6}=a^{f(x)}$에서 $0<a<1$이므로 함수 $y=a^{f(x)}$은 $f(x)=3$일 때 최솟값 $\frac{1}{27}$을 갖는다.

즉 $a^3=\frac{1}{27}$이므로 $\quad a=\frac{1}{3}$

답 ④

32 $f(x)=x^2+4x+1$로 놓으면

$f(x)=(x+2)^2-3$

$f(-3)=-2$, $f(-2)=-3$, $f(1)=6$이므로 $-3\le x\le 1$에서

$-3\le f(x)\le 6$ ⋯ ❶

$y=2^{x^2+4x+1}=2^{f(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=2^{f(x)}$은 $f(x)=6$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad M=2^6=64$

$f(x)=-3$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad m=2^{-3}=\frac{1}{8}$ ⋯ ❷

$\therefore Mm=64\cdot\frac{1}{8}=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $y=2^{f(x)}$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	50 %
❸ Mm의 값을 구할 수 있다.	10 %

33 $f(x)=x^2+2x+b$로 놓으면

$f(x)=(x+1)^2+b-1$

$f(-2)=b$, $f(-1)=b-1$이므로 $-2\le x\le -1$에서

$b-1\le f(x)\le b$

$y=a^{x^2+2x+b}=a^{f(x)}$에서 $0<a<1$이므로 함수 $y=a^{f(x)}$은 $f(x)=b-1$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad a^{b-1}$

$\therefore a^{b-1}=8$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 $f(x)=b$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad a^b$

$\therefore a^b=4$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad a^{b-b+1}=\frac{4}{8}\qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면 $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^b=4$

$2^{-b}=2^2\qquad \therefore b=-2$

$\therefore \frac{b}{a}=-4$

답 ①

34 $y=4^x-2^{x+2}+1=(2^x)^2-4\cdot 2^x+1$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $-1\le x\le 2$에서

$\frac{1}{2}\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

이므로 $t=4$, 즉 $x=2$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad 1$

$t=2$, 즉 $x=1$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad -3$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=1$, $d=-3$이므로

$ab-cd=5$ 답 ④

35 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}-1=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2^a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-2^a\cdot t-1=(t-2^{a-1})^2-2^{2a-2}-1$

따라서 $t=2^{a-1}$일 때 최솟값 $-2^{2a-2}-1$을 가지므로

$-2^{2a-2}-1=-5,\quad 2^{2a-2}=4=2^2$

$2a-2=2\quad \therefore a=2$ 답 ③

36 $y=3^{-2x}-2\cdot3^{-x}-3=(3^{-x})^2-2\cdot3^{-x}-3$

$3^{-x}=t\ (t>0)$로 놓으면 $-2\le x\le 1$에서

$\frac{1}{3}\le t\le 9$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t-3=(t-1)^2-4$

이므로 $t=9$일 때 최대이고 최댓값은 60

$t=1$일 때 최소이고 최솟값은 -4

따라서 $a=-4$, $b=60$이므로

$b-a=64$ 답 64

37 $2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때 $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=t^2-2-6t=(t-3)^2-11\ (t\ge2)$

따라서 주어진 함수는 $t=3$일 때 최솟값 -11을 갖는다. 답 ①

38 $9^x>0$, $9^{-x+3}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$9^x+9^{-x+3}\ge 2\sqrt{9^x\cdot9^{-x+3}}$

$=2\sqrt{9^3}=2\cdot3^3=54$

이때 등호는 $9^x=9^{-x+3}$일 때 성립하므로

$x=-x+3\quad \therefore x=\frac{3}{2}$

따라서 주어진 함수는 $x=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 54를 가지므로

$a=\frac{3}{2}$, $b=54$

$\therefore ab=81$ 답 ⑤

39 $2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립) ⋯ ❶

이때 $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=4t-(t^2-2)-1=-t^2+4t+1$

$=-(t-2)^2+5\ (t\ge2)$ ⋯ ❷

따라서 $t=2$, 즉 $x=0$일 때 최댓값 5를 가지므로

$a=0$, $b=5$

$\therefore a+b=5$ ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 함수를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

40 $2x+y-2=0$에서 $y=2-2x$이므로

$25^x+5^y=5^{2x}+5^{2-2x}$

$5^{2x}>0$, $5^{2-2x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$5^{2x}+5^{2-2x}\ge 2\sqrt{5^{2x}\cdot5^{2-2x}}$

$=2\sqrt{5^2}=2\cdot5=10$

이때 등호는 $5^{2x}=5^{2-2x}$일 때 성립하므로

$2x=2-2x\quad \therefore x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$을 $y=2-2x$에 대입하면 $y=1$

따라서 25^x+5^y은 $x=\frac{1}{2}$, $y=1$일 때 최솟값 10을 가지므로

$\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$, $\gamma=10$

$\therefore \alpha\beta\gamma=5$ 답 5

41 $16^x-2^{x^2+3}=0$에서 $2^{4x}=2^{x^2+3}$이므로

$4x=x^2+3,\quad x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0\quad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 모든 실근의 곱은

$1\cdot3=3$ 답 ③

42 $(3^x-27)(2^{2x}-16)=0$에서

$3^x=27$ 또는 $2^{2x}=16$

$3^x=27$에서 $3^x=3^3\quad \therefore x=3$

$2^{2x}=16$에서 $4^x=4^2\quad \therefore x=2$

따라서 주어진 방정식의 두 실근이 2, 3이므로

$|\alpha-\beta|=|2-3|=1$ 답 1

43 $(10\sqrt{10})^{x^2}=\left(\frac{1}{100}\right)^{x+\frac{1}{4}}$에서 $10^{\frac{3}{2}x^2}=10^{-2x-\frac{1}{2}}$이므로

$\frac{3}{2}x^2=-2x-\frac{1}{2},\quad 3x^2+4x+1=0$

$(3x+1)(x+1)=0\quad \therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=-1$

그런데 x는 정수이므로 $x=-1$ 답 ②

44 $\frac{2^{x^2+3}}{4^{x+1}}=16$에서 $\frac{2^{x^2+3}}{(2^2)^{x+1}}=2^4$

$\therefore 2^{x^2-2x+1}=2^4$ ⋯ ❶

즉 $x^2-2x+1=4$이므로 $\quad x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$ ⋯ ❷

따라서 모든 실근의 합은 $\quad -1+3=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 $2^{f(x)}=2^{g(x)}$ 꼴로 변형할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 방정식의 실근을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 실근의 합을 구할 수 있다.	20 %

45 $8^x+8^{1-x}=6$의 양변에 8^x을 곱하면

$(8^x)^2+8=6\cdot8^x \quad \therefore (8^x)^2-6\cdot8^x+8=0$

$8^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-6t+8=0, \quad (t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

즉 $8^x=2$ 또는 $8^x=4$이므로 $\quad 2^{3x}=2$ 또는 $2^{3x}=2^2$

$3x=1$ 또는 $3x=2 \quad \therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{2}{3}$이므로 $\quad \frac{\beta}{\alpha}=2$

답 ④

46 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+2)=2^{2x+2}$,

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2^x)=2\cdot2^x+2$이므로 방정식

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$는

$2^{2x+2}=2\cdot2^x+2, \quad 4\cdot(2^x)^2-2\cdot2^x-2=0$

$\therefore 2\cdot(2^x)^2-2^x-1=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad 2t^2-t-1=0$

$(2t+1)(t-1)=0 \quad \therefore t=1\ (\because t>0)$

즉 $2^x=1$이므로 $\quad x=0$

답 $x=0$

47 $a^{2x}+a^x=12$에서 $\quad (a^x)^2+a^x-12=0$

$a^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+t-12=0$ ⋯ ❶

$(t+4)(t-3)=0 \quad \therefore t=3\ (\because t>0)$ ⋯ ❷

즉 $a^x=3$에서 방정식의 해가 $x=\frac{1}{2}$이므로 $\quad a^{\frac{1}{2}}=3$

$\therefore a=3^2=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ t의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

48 $3^x+3^{-x}=t\ (t\ge2)$로 놓으면

$3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $t=3^x+3^{-x}\ge2\sqrt{3^x\cdot3^{-x}}=2$

$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$

이므로 주어진 방정식은

$3(t^2-2)-7t-4=0, \quad 3t^2-7t-10=0$

$(t+1)(3t-10)=0 \quad \therefore t=\frac{10}{3}\ (\because t\ge2)$

즉 $3^x+3^{-x}=\frac{10}{3}$이므로 양변에 3^x을 곱하면

$(3^x)^2+1=\frac{10}{3}\cdot3^x \quad \therefore 3\cdot(3^x)^2-10\cdot3^x+3=0$

$3^x=k\ (k>0)$로 놓으면 $\quad 3k^2-10k+3=0$

$(3k-1)(k-3)=0 \quad \therefore k=\frac{1}{3}$ 또는 $k=3$

즉 $3^x=\frac{1}{3}$ 또는 $3^x=3$이므로

$x=-1$ 또는 $x=1$

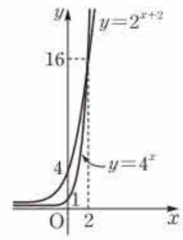
따라서 모든 실근의 곱은 $\quad (-1)\cdot1=-1$

답 ③

49 $4^x=2^{x+2}$에서 $\quad 2^{2x}=2^{x+2}$

$2x=x+2 \quad \therefore x=2$

따라서 두 함수 $y=4^x$, $y=2^{x+2}$의 그래프의 교점의 x좌표는 2이므로 주어진 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\mathrm{A}(k,\ 4^k)$, $\mathrm{B}(k,\ 2^{k+2})$이므로

(i) $k>2$인 경우

$\overline{\mathrm{AB}}=4^k-2^{k+2}=32$이므로 $2^k=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-4t-32=0, \quad (t+4)(t-8)=0$

$\therefore t=8\ (\because t>0)$

즉 $2^k=8$이므로 $\quad k=3$

(ii) $k<2$인 경우

$\overline{\mathrm{AB}}=2^{k+2}-4^k=32$이므로 $2^k=t\ (t>0)$로 놓으면

$4t-t^2=32 \quad \therefore t^2-4t+32=0$ ⋯⋯ ㉠

이때 t에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot32=-28<0$

이므로 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않는다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=32$를 만족시키는 상수 k가 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad k=3$

답 3

50 $\begin{cases}2^{x+2}+3^{y-1}=11\\2^{x-1}+3^{y+1}=28\end{cases}$에서 $\quad \begin{cases}4\cdot2^x+\frac{1}{3}\cdot3^y=11\\\frac{1}{2}\cdot2^x+3\cdot3^y=28\end{cases}$

$2^x=X$, $3^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}4X+\frac{1}{3}Y=11\\\frac{1}{2}X+3Y=28\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $\quad X=2,\ Y=9$

즉 $2^x=2$, $3^y=9$이므로 $\quad x=1,\ y=2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로 $\quad \alpha+\beta=3$

답 ④

51 $\begin{cases}3^{x+1}+3^{y+1}=28\\3^{x+y-1}=1\end{cases}$에서 $\quad \begin{cases}3\cdot3^x+3\cdot3^y=28\\\frac{1}{3}\cdot3^x\cdot3^y=1\end{cases}$

$3^x=X$, $3^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}3X+3Y=28\\\frac{1}{3}XY=1\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}3X+3Y=28\\XY=3\end{cases}$ ⋯ ❶

이 연립방정식을 풀면

$X=9,\ Y=\frac{1}{3}$ 또는 $X=\frac{1}{3},\ Y=9$ ··· ❷

즉 $3^x=9,\ 3^y=\frac{1}{3}$ 또는 $3^x=\frac{1}{3},\ 3^y=9$이므로

$x=2,\ y=-1$ 또는 $x=-1,\ y=2$

$\therefore\ \alpha\beta=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 X, Y에 대한 방정식으로 정리할 수 있다.	40 %
❷ X, Y의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

52 $x^x\cdot x^6=(x^x)^3$에서 $x^{x+6}=x^{3x}$

(i) $x=1$일 때, 주어진 방정식은 $1^7=1^3$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\neq1$일 때, $x+6=3x$에서 $x=3$

(i), (ii)에서 $\alpha^2+\beta^2=1^2+3^2=10$

답 ②

53 (i) $x-2=0$, 즉 $x=2$일 때, 주어진 방정식은 $3^0=5^0$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x-2\neq0$일 때, $x+1=5$에서 $x=4$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $2+4=6$

답 6

54 $x^{x^2-2}=x^{4x+3}$에서

(i) $x=1$일 때, 주어진 방정식은 $1^{-1}=1^7$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\neq1$일 때, $x^2-2=4x+3$에서 $x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0 \quad \therefore\ x=5\left(\because\ x>\frac{2}{3}\right)$

(i), (ii)에서 $a=1+5=6$ ··· ❶

$\left(x-\frac{2}{3}\right)^{2x-3}=2^{2x-3}$에서

(iii) $2x-3=0$, 즉 $x=\frac{3}{2}$일 때, 주어진 방정식은 $\left(\frac{5}{6}\right)^0=2^0$이므로 등식이 성립한다.

(iv) $2x-3\neq0$일 때, $x-\frac{2}{3}=2$에서 $x=\frac{8}{3}$

(iii), (iv)에서 $b=\frac{3}{2}+\frac{8}{3}=\frac{25}{6}$ ··· ❷

$\therefore\ ab=25$ ··· ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

55 $2^{2x}-2^{x+2}=a$에서 $(2^x)^2-4\cdot2^x-a=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-4t-a=0$ ······ ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(-a)>0 \quad \therefore\ a>-4$

(ii) 이차방정식 ㉠의 (두 근의 합)$=4>0$

(iii) 이차방정식 ㉠의 (두 근의 곱)$=-a>0 \quad \therefore\ a<0$

이상에서 $-4<a<0$이므로 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1$의 3개이다.

답 3

쎈B특강

이차방정식의 실근의 부호

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라 할 때

① 두 근이 모두 양수일 조건 ➡ $D\geq0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음수일 조건 ➡ $D\geq0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호일 조건 ➡ $\alpha\beta<0$

56 $9^x-6\cdot3^x+3=0$에서 $(3^x)^2-6\cdot3^x+3=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은 $t^2-6t+3=0$

이 방정식의 두 근이 3^α, 3^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha+3^\beta=6,\ 3^\alpha\cdot3^\beta=3$

$\therefore\ 9^\alpha+9^\beta=(3^\alpha)^2+(3^\beta)^2=(3^\alpha+3^\beta)^2-2\cdot3^\alpha\cdot3^\beta$

$=6^2-2\cdot3=30$

답 ③

57 $4^x-2^{x+3}+k=0$에서 $(2^x)^2-8\cdot2^x+k=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-8t+k=0$ ······ ㉠

주어진 방정식의 서로 다른 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=3$이고 방정식 ㉠의 두 근은 2^α, 2^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$k=2^\alpha\cdot2^\beta=2^{\alpha+\beta}=2^3=8$

답 ④

58 $3^{2x}+a\cdot3^{x+1}+15-3a=0$에서

$(3^x)^2+3a\cdot3^x+15-3a=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+3at+15-3a=0$ ······ ㉠

주어진 방정식의 두 근을 m, $2m\ (m\neq0)$이라 하면 방정식 ㉠의 두 근은 3^m, 3^{2m}이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^m+3^{2m}=-3a,\ 3^m\cdot3^{2m}=15-3a$

$3^m=k\ (k>0)$로 놓으면

$k+k^2=-3a,\ k^3=15-3a$

따라서 $k^3=15+k+k^2$이므로 $k^3-k^2-k-15=0$

$(k-3)(k^2+2k+5)=0 \quad \therefore\ k=3\ (\because\ k^2+2k+5>0)$

따라서 $k+k^2=-3a$에서 $-3a=3+3^2=12$

$\therefore\ a=-4$

답 ②

59 $5^x+5^{-x}=t\ (t\geq2)$로 놓으면

$25^x+25^{-x}=(5^x+5^{-x})^2-2=t^2-2$

이므로 주어진 방정식은

$(t^2-2)+4t+k=0 \qquad \therefore t^2+4t-2=-k \quad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식이 적어도 하나의 실근을 가지려면 $t\ge2$에서 방정식 ㉠이 적어도 하나의 실근을 가져야 한다.

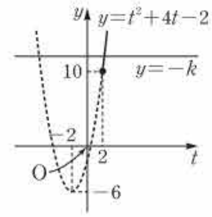
이때 $t\ge2$에서 함수

$y=t^2+4t-2=(t+2)^2-6$

의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

$-k\ge10 \qquad \therefore k\le-10$

따라서 실수 k의 최댓값은 -10이다.



답 -10

60 $\left(\frac{1}{10}\right)^{x-8}>\left(\frac{1}{100}\right)^{1-2x}$에서 $\quad \left(\frac{1}{10}\right)^{x-8}>\left(\frac{1}{10}\right)^{2-4x}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x-8<2-4x$

$5x<10 \qquad \therefore x<2$

답 ①

61 $5^{-f(x)}<5^{-g(x)}$에서 밑이 1보다 크므로

$-f(x)<-g(x) \qquad \therefore f(x)>g(x)$

주어진 그래프에서 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는

$0<x<3$

답 $0<x<3$

62 $(\sqrt{8})^x\ge4^{x-1}$에서 $\quad 2^{\frac{3}{2}x}\ge2^{2x-2}$

밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{3}{2}x\ge2x-2$

$-\frac{1}{2}x\ge-2 \qquad \therefore x\le4 \quad \cdots\cdots$ ㉠ ··· ❶

$\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-6}>\left(\frac{5}{2}\right)^{1-4x}$에서 $\quad \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-6}>\left(\frac{2}{5}\right)^{4x-1}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x^2-6<4x-1$

$x^2-4x-5<0, \qquad (x+1)(x-5)<0$

$\therefore -1<x<5 \quad \cdots\cdots$ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad -1<x\le4$ ··· ❸

답 $-1<x\le4$

채점 기준	비율
❶ $(\sqrt{8})^x\ge4^{x-1}$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-6}>\left(\frac{5}{2}\right)^{1-4x}$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

63 $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x}<3^{x^2-2}<\left(\frac{1}{9}\right)^{x-3}$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2+2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-6}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad 5-x>-x^2+2>2x-6$

(i) $5-x>-x^2+2$에서 $\quad x^2-x+3>0$

이때 $x^2-x+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0$이므로 이 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $-x^2+2>2x-6$에서 $\quad x^2+2x-8<0$

$(x+4)(x-2)<0 \qquad \therefore -4<x<2$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $\quad -4<x<2$

답 $-4<x<2$

쎈B특강

$A<B<C$ 꼴의 부등식은 두 부등식 $A<B$와 $B<C$를 하나로 나타낸 것이므로 연립부등식 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

64 $2^{ax}\le\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2}$에서 $\quad 2^{ax}\le2^{-3x^2}$

밑이 1보다 크므로 $\quad ax\le-3x^2$

$3x^2+ax\le0, \qquad x(3x+a)\le0$

$\therefore -\frac{a}{3}\le x\le0$ ($\because a$는 자연수)

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 5이므로

$-4, -3, -2, -1, 0$의 5개

$-5<-\frac{a}{3}\le-4 \qquad \therefore 12\le a<15$

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$12+13+14=39$

답 ③

65 $10^{(x-1)^2}\le\sqrt{10^{4-x}}$에서 $\quad 10^{(x-1)^2}\le10^{\frac{4-x}{2}}$

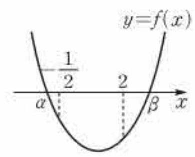
밑이 1보다 크므로 $\quad (x-1)^2\le\frac{4-x}{2}$

$2(x^2-2x+1)\le4-x, \qquad 2x^2-3x-2\le0$

$(2x+1)(x-2)\le0 \qquad \therefore -\frac{1}{2}\le x\le2$

$\therefore A=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}\le x\le2\right\}$ ··· ❶

집합 B에서 $f(x)=x^2+ax-2$로 놓고 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다. ··· ❷



$f\left(-\frac{1}{2}\right)\le0$에서 $\quad \frac{1}{4}-\frac{1}{2}a-2\le0$

$\frac{1}{2}a\ge-\frac{7}{4} \qquad \therefore a\ge-\frac{7}{2} \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(2)\le0$에서 $\quad 4+2a-2\le0$

$2a\le-2 \qquad \therefore a\le-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $A\subset B$를 만족시키는 a의 값의 범위는

$-\frac{7}{2}\le a\le-1$ ··· ❸

답 $-\frac{7}{2}\le a\le-1$

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $A\subset B$를 만족시키는 $y=x^2+ax-2$의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	30 %
❸ $A\subset B$를 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

66 $2^{2x+1}-17\cdot2^x+8\le0$에서 $\quad 2\cdot(2^x)^2-17\cdot2^x+8\le0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad 2t^2-17t+8\le0$

$(2t-1)(t-8)\le0 \qquad \therefore \frac{1}{2}\le t\le8$

즉 $2^{-1} \le 2^x \le 2^3$이고 밑이 1보다 크므로

$-1 \le x \le 3$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다. 답 ④

67 $5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^x - 26 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + 5 \le 0$에서

$5 \cdot \left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2 - 26 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + 5 \le 0$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x = t\ (t>0)$로 놓으면 $5t^2 - 26t + 5 \le 0$

$(5t-1)(t-5) \le 0 \quad \therefore \frac{1}{5} \le t \le 5$

즉 $\left(\frac{1}{5}\right)^1 \le \left(\frac{1}{5}\right)^x \le \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$이고 밑이 1보다 작으므로

$-1 \le x \le 1$

따라서 $M=1$, $m=-1$이므로 $Mm=-1$ 답 -1

68 $x^{3x-1} > x^{x+3}$에서 $x=1$일 때 $1^2 = 1^4$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(i) $0<x<1$일 때, $3x-1<x+3$이므로 $x<2$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $x>1$일 때, $3x-1>x+3$이므로 $x>2$

그런데 $x>1$이므로 $x>2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$0<x<1$ 또는 $x>2$ 답 $0<x<1$ 또는 $x>2$

69 $x^{x^2-6} < x^{2x+9}$에서 $x=1$일 때 $1^{-5} = 1^{11}$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(i) $0<x<1$일 때, $x^2-6>2x+9$이므로

$x^2-2x-15>0, \quad (x+3)(x-5)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>5$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.

(ii) $x>1$일 때, $x^2-6<2x+9$이므로

$x^2-2x-15<0, \quad (x+3)(x-5)<0$

$\therefore -3<x<5$

그런데 $x>1$이므로 $1<x<5$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $1<x<5$이므로

$\alpha=1$, $\beta=5$

$\therefore \beta-\alpha=4$ 답 ③

70 (i) $x^2+2x+1=1$이면 $1=1$이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.

따라서 $x^2+2x+1 \ne 1$에서 $x^2+2x \ne 0$

$x(x+2) \ne 0 \quad \therefore x \ne -2, x \ne 0$

(ii) $0<x^2+2x+1<1$일 때, $0<(x+1)^2<1$에서

$-1<x+1<0$ 또는 $0<x+1<1$

$\therefore -2<x<-1$ 또는 $-1<x<0$ ...... ㉠

주어진 부등식 $(x^2+2x+1)^{x+1} < (x^2+2x+1)^0$에서 밑이 1보다 작으므로

$x+1>0 \quad \therefore x>-1$

그런데 ㉠이므로 $-1<x<0$

(iii) $x^2+2x+1>1$일 때, $x(x+2)>0$에서

$x<-2$ 또는 $x>0$ ...... ㉡

주어진 부등식 $(x^2+2x+1)^{x+1} < (x^2+2x+1)^0$에서 밑이 1보다 크므로

$x+1<0 \quad \therefore x<-1$

그런데 ㉡이므로 $x<-2$

이상에서 $S=\{x \mid x<-2$ 또는 $-1<x<0\}$이므로 집합 S의 원소가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

71 $4^x - 2^{x+1} + k \ge 0$에서 $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + k \ge 0$

$2^x = t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2 - 2t + k \ge 0$

$\therefore (t-1)^2 + k - 1 \ge 0$

이 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$k-1 \ge 0 \quad \therefore k \ge 1$

따라서 실수 k의 최솟값은 1이다. 답 ①

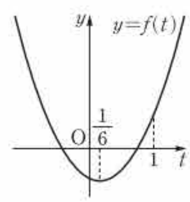
72 $\left(\frac{1}{9}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \ge a$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - a \ge 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$로 놓으면 $x \le 0$에서 $t \ge 1$이고

$t^2 - \frac{1}{3}t - a \ge 0$

이 부등식이 $t \ge 1$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 하므로



$f(t) = t^2 - \frac{1}{3}t - a$

$= \left(t - \frac{1}{6}\right)^2 - a - \frac{1}{36}$

로 놓으면 오른쪽 그림에서 $f(1) \ge 0$이어야 한다.

즉 $f(1) = 1 - \frac{1}{3} - a \ge 0$이므로 $a \le \frac{2}{3}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\frac{2}{3}$이다. 답 $\frac{2}{3}$

73 $25^x - 2a \cdot 5^x + 25 \ge 0$에서 $(5^x)^2 - 2a \cdot 5^x + 25 \ge 0$

$5^x = t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2 - 2at + 25 \ge 0$

$\therefore (t-a)^2 - a^2 + 25 \ge 0$ ...... ㉠ ··· ❶

부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

(i) $a>0$일 때, $-a^2+25 \ge 0$에서 $a^2 - 25 \le 0$

$(a+5)(a-5) \le 0 \quad \therefore -5 \le a \le 5$

그런데 $a>0$이므로 $0<a \le 5$ ··· ❷

(ii) $a \le 0$일 때, $t=0$이면 ㉠에서 $25 \ge 0$이므로 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다. ··· ❸

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$a \le 5$ ··· ❹

답 $a \le 5$

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 t에 대한 이차부등식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $a>0$일 때의 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ $a\le 0$일 때의 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	10 %

74 20마리의 박테리아가 3시간 후에 540마리가 되므로

$20a^3=540,\quad a^3=27=3^3$

$\therefore a=3$

따라서 1마리의 박테리아가 x시간 후에 3^x마리가 되므로

$20\cdot 3^x=4860,\quad 3^x=243=3^5$

$\therefore x=5$

즉 박테리아는 5시간 후에 4860마리가 된다. 답 ②

75 수면에서의 빛의 세기가 I_0 W/m²일 때, 수심이 x m인 곳에서의 빛의 세기는 $I_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$ W/m²이므로

$I_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}\le\frac{1}{2^5}I_0,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}\le\frac{1}{2^5}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$

밑이 1보다 작으므로 $\frac{x}{4}\ge 5$

$\therefore x\ge 20$

즉 수심은 최소 20 m이어야 한다. 답 20 m

76 처음 빛의 양을 1이라 하면 필름을 n장 붙일 때 통과하는 빛의 양은 $(1-0.75)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$이므로

$\left(\frac{1}{4}\right)^n\le\frac{1}{128},\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\le\left(\frac{1}{2}\right)^7$

밑이 1보다 작으므로 $2n\ge 7$

$\therefore n\ge 3.5$

이때 n은 자연수이므로 n의 최솟값은 4이다.

즉 필름은 최소 4장을 붙여야 한다. 답 ③

77 처음 양이 4 kg, 즉 4000 g일 때 x년 후에 남아 있는 방사성 물질의 양을 125 g이라 하면

$4000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4520}}=125$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4520}}=\frac{125}{4000}=\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$

$\frac{x}{4520}=5\quad \therefore x=22600$

즉 유물은 22600년 전의 것이다. 답 22600년

04 로그함수

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

개념 정리

본책 44쪽

❶ 로그함수 ❷ 증가 ❸ 감소 ❹ y ❺ $\log_a m$ ❻ $\log_a n$

쎈 B 유형 뽀개기

본책 45쪽

01 $f(8)=\log_a 9-3=1$이므로

$\log_a 9=4,\quad a^4=9$

$\therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>0)$

따라서 $f(x)=\log_{\sqrt{3}}(x+1)-3$이므로

$f(26)=\log_{\sqrt{3}}27-3=\log_{3^{\frac{1}{2}}}3^3-3=6-3=3$ 답 ②

02 $f(-2)=\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}=(3^{-2})^{-2}=3^4$이므로

$(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g(3^4)=\log_3 3^4=4$ 답 4

03 $a=\log_2 3$, $b=\log_2 8$이므로

$f(k)=\frac{a+b}{3}=\frac{\log_2 3+\log_2 8}{3}=\frac{1}{3}\log_2 24$

즉 $\log_2 k=\frac{1}{3}\log_2 24$이므로

$k=\sqrt[3]{24}=2\sqrt[3]{3}$ 답 ③

04 $f(x)=\log_3\left(1+\frac{1}{x+1}\right)=\log_3\frac{x+2}{x+1}$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

$=\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{4}{3}+\log_3\frac{5}{4}+\cdots+\log_3\frac{n+2}{n+1}$

$=\log_3\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)=\log_3\frac{n+2}{2}$

즉 $\log_3\frac{n+2}{2}=2$이므로 $3^2=\frac{n+2}{2}$

$18=n+2\quad \therefore n=16$ 답 16

05 $(a, b)\in A$이므로 $b=\log_2 a$

ㄱ. $y=\log_2 x$의 x에 $2a$를 대입하면

$y=\log_2 2a=1+\log_2 a=1+b$

$\therefore (2a, 2+b)\notin A$

ㄴ. $y=\log_2 x$의 x에 $\frac{1}{a}$을 대입하면

$y=\log_2\frac{1}{a}=\log_2 a^{-1}=-\log_2 a=-b$

$\therefore \left(\frac{1}{a}, -b\right)\in A$

ㄷ. $y=\log_2 x$의 x에 $\frac{a}{4}$를 대입하면

$y=\log_2\frac{a}{4}=\log_2 a-2=b-2$

$\therefore \left(\frac{a}{4}, b-2\right)\in A$

ㄹ. $y=\log_2 x$의 x에 a^3을 대입하면

$y=\log_2 a^3=3\log_2 a=3b$

$\therefore (a^3, 3b)\in A$

이상에서 집합 A의 원소인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

06 $f_2(x)=f_1(x^2)+f_1(x)=\log_2 x^2+\log_2 x$

$=2\log_2 x+\log_2 x=3\log_2 x$

$f_3(x)=f_2(x^2)+f_2(x)=3\log_2 x^2+3\log_2 x$

$=6\log_2 x+3\log_2 x=9\log_2 x$

$f_4(x)=f_3(x^2)+f_3(x)=9\log_2 x^2+9\log_2 x$

$=18\log_2 x+9\log_2 x=27\log_2 x$ ⋯ ❶

$\therefore \log_3\{f_4(8)\}=\log_3(27\log_2 8)$

$=\log_3(27\cdot 3)$

$=\log_3 3^4=4$ ⋯ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ $f_4(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $\log_3\{f_4(8)\}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

07 ⑤ $y=\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{1}{x}=\log_{a^{-1}}x^{-1}=\log_a x$이고 정의역이 같으므로

$y=\log_a x$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{1}{x}$의 그래프와 일치한다.

답 ⑤

08 ㄱ. 일대일함수이므로 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.

ㄴ. 밑이 1보다 작으므로 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

ㄷ. $y=\log_2 x=-\log_{\frac{1}{2}}x$이므로 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

09 $y=\log(20+x-x^2)$에서 $20+x-x^2>0$이므로

$x^2-x-20<0$, $(x+4)(x-5)<0$

$\therefore -4<x<5$

$\therefore A=\{x|-4<x<5\}$

$y=\log(\log x)$에서 $x>0$이고 $\log x>0$이므로

$x>1$

$\therefore B=\{x|x>1\}$

$\therefore A\cap B=\{x|1<x<5\}$ ⋯ ❶

따라서 $1<x<5$를 만족시키는 정수 x는 2, 3, 4의 3개이다. ⋯ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ 집합 $A\cap B$를 구할 수 있다.	80 %
❷ 집합 $A\cap B$의 원소 중 정수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

10 $y=\log_a bx$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로 $0<a<1$

또 $x=1$일 때 $y<0$이므로 $\log_a b<0$, $\log_a b<\log_a 1$

밑이 1보다 작으므로 $b>1$

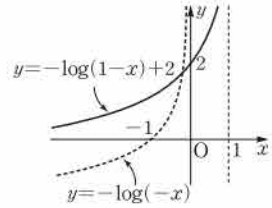
따라서 함수 $y=\log_b ax$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하고, $x=1$일 때 $y=\log_b a<0$이므로 그래프의 개형은 ③과 같다.

답 ③

11 $y=-\log(1-x)+2=-\log\{-(x-1)\}+2$이므로

$y=-\log(1-x)+2$의 그래프는 $y=-\log(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=-\log(-x)$의 그래프는 $y=\log x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 $y=-\log(1-x)+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 정의역은 $\{x|x<1\}$이다.

③ $x=0$일 때, $y=2$이므로 그래프는 점 $(0, 2)$를 지난다.

답 ①, ③

12 $y=\log_2(x+a)+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$이므로 $-a=-1$ $\therefore a=1$

또 이 그래프가 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=\log_2(3+1)+b$ $\therefore b=-2$

$\therefore a-b=3$ 답 3

13 ㄱ. $y=\log_3\sqrt{x}=\log_3 x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_3 x$이므로 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 $y=\log_3\sqrt{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

ㄴ. $y=\log_{\frac{1}{3}}3x=-\log_3 3x=-\log_3 x-1$이므로 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=\log_{\frac{1}{3}}3x$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄷ. $y=\log_3 x^2=2\log_3|x|$이므로 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 $y=\log_3 x^2$의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

ㄹ. $y=\log_3(3-x)=\log_3\{-(x-3)\}$이므로 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=\log_3(3-x)$의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

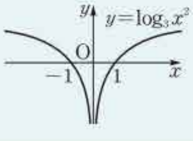
쎈B특강

ㄷ의 함수 $y=\log_3 x^2$의 정의역은 $x^2>0$에서 $\{x|x\neq 0$인 실수$\}$이다.

(i) $x>0$일 때, $y=\log_3 x^2=2\log_3 x$

(ii) $x<0$일 때, $y=\log_3 x^2=2\log_3(-x)$

(i), (ii)에서 $y=\log_3 x^2=2\log_3|x|$이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



14 $y=\log ax$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log ax-1 \qquad \therefore y=\log\dfrac{ax}{10}$ ⋯ ❶

$y=\log\dfrac{ax}{10}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

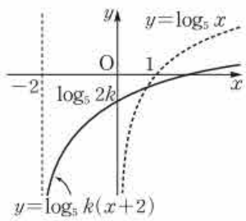
$y=-\log\dfrac{ax}{10} \qquad \therefore y=\log\dfrac{10}{ax}$ ⋯ ❷

따라서 $\dfrac{10}{a}=\dfrac{2}{3}$이므로 $\quad a=15$ ⋯ ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	50 %
❷ 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	10 %

15 $y=\log_5 k(x+2)=\log_5(x+2)+\log_5 k$이므로
$y=\log_5 k(x+2)$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $\log_5 k$만큼 평행이동한 것이다.



따라서 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$x=0$일 때의 함숫값

$\log_5 2k\le 0, \qquad \log_5 2k\le\log_5 1$

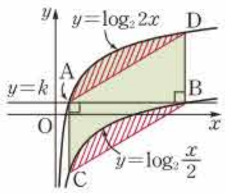
밑이 1보다 크므로 $\quad 2k\le 1$

$\therefore 0<k\le\dfrac{1}{2}$

따라서 양수 k의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

답 $\dfrac{1}{2}$

16 $y=\log_2 2x=\log_2\left(4\cdot\dfrac{x}{2}\right)=2+\log_2\dfrac{x}{2}$이므로 $y=\log_2 2x$의 그래프는 $y=\log_2\dfrac{x}{2}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



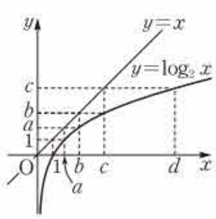
즉 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 두 함수 $y=\log_2 2x$, $y=\log_2\dfrac{x}{2}$의 그래프와 두 선분 AC, BD로 둘러싸인 부분의 넓이는 평행사변형 ACBD의 넓이와 같다.
따라서 구하는 넓이는

$\overline{AC}\cdot\overline{AB}=2\cdot 4=8$

답 8

17 $\log_2 b=a$, $\log_2 d=c$이므로

$a-c=\log_2 b-\log_2 d=\log_2\dfrac{b}{d}$



따라서 $2^{a-c}=\dfrac{b}{d}$이므로

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a-c}=\dfrac{d}{b}$

답 ④

다른 풀이 $\log_2 a=1$이므로 $\quad a=2$

$\log_2 b=a=2$이므로 $\quad b=2^2=4$

$\log_2 c=b=4$이므로 $\quad c=2^4=16$

$\log_2 d=c=16$이므로 $\quad d=2^{16}$

$\therefore \left(\dfrac{1}{2}\right)^{a-c}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2-16}=2^{14}=\dfrac{d}{b}$

18 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로 $\quad b=2$

즉 $2=\log_3 a$에서 $\quad a=3^2=9$

$y=\log_3 x$의 그래프가 점 A$(a, 2)$를 지난다.

따라서 A$(9, 2)$이므로 점 D의 좌표는 $(11, 2)$

즉 $p=11$, $q=2$이므로 $\quad p+q=13$

답 13

19 $\overline{OP}=\log_{\sqrt{5}}p$, $\overline{OQ}=\log_5 q$이므로 $\overline{OP}:\overline{OQ}=4:3$에서

$\log_{\sqrt{5}}p:\log_5 q=4:3, \qquad 2\log_5 p:\log_5 q=4:3$

$6\log_5 p=4\log_5 q, \qquad 3\log_5 p=2\log_5 q$

$\log_5 p^3=\log_5 q^2 \qquad \therefore p^3=q^2$

답 ④

20 점 A의 y좌표는 0이므로 $\log_{\frac{1}{3}}x=0$에서 $\quad x=1$

$\therefore$ A$(1, 0)$

$x=9$일 때 $y=\log_a 9$이므로 $\quad$ B$(9, \log_a 9)$

$x=9$일 때 $y=\log_{\frac{1}{3}}9=\log_{3^{-1}}3^2=-2$이므로 $\quad$ C$(9, -2)$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot\{\log_a 9-(-2)\}\cdot(9-1)=24$

$\log_a 9=4, \qquad a^4=9$

$\therefore a=9^{\frac{1}{4}}=(3^2)^{\frac{1}{4}}=\sqrt{3}\ (\because a>1)$

답 $\sqrt{3}$

21 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

$(4, \log_a 4)$, $(4, \log_b 4)$, $(4, -\log_a 4)$

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$에서 $3\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$3(\log_a 4-\log_b 4)=\log_b 4+\log_a 4$

$2\log_a 4=4\log_b 4, \qquad \dfrac{1}{\log_4 a}=\dfrac{2}{\log_4 b}$

$\dfrac{\log_4 b}{\log_4 a}=2, \qquad \log_a b=2$

$\therefore h(b)=-\log_a b=-2$

답 -2

22 두 점 A, B의 y좌표는 1이므로

$\log_a x=1$에서 $\quad x=a \qquad \therefore$ A$(a, 1)$

$\log_b x=1$에서 $\quad x=b \qquad \therefore$ B$(b, 1)$ ⋯ ❶

선분 AB의 중점의 좌표가 $(2, 1)$이므로

$\dfrac{a+b}{2}=2 \qquad \therefore a+b=4$ ⋯⋯ ㉠

또 $\overline{AB}=1$이므로

$b-a=1\ (\because a<b)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{5}{2}$ ⋯ ❷

두 점 C, D의 y좌표는 2이므로

$\log_{\frac{3}{2}}x=2$에서 $\quad x=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4} \qquad \therefore$ C$\left(\dfrac{9}{4}, 2\right)$

$\log_{\frac{5}{2}} x=2$에서 $\quad x=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \qquad \therefore \mathrm{D}\left(\frac{25}{4}, 2\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{CD}}=\frac{25}{4}-\frac{9}{4}=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %

23 $y=\log_4(x-1)+4$에서 $\quad y-4=\log_4(x-1)$

$x-1=4^{y-4} \qquad \therefore x=4^{y-4}+1$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=4^{x-4}+1=2^{2x-8}+1$

따라서 $a=2$, $b=-8$, $c=1$이므로

$abc=-16$

답 -16

24 $f(x)$는 $y=\log_3(x+a)$의 역함수이고 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로 $y=\log_3(x+a)$의 그래프는 점 $(3, 2)$를 지난다.

즉 $2=\log_3(3+a)$이므로

$3+a=3^2 \qquad \therefore a=6$

답 ②

다른 풀이 $f(x)$는 $y=\log_3(x+a)$의 역함수이다.

$y=\log_3(x+a)$에서 $\quad x+a=3^y$

$\therefore x=3^y-a$

따라서 $f(x)=3^x-a$이고 $f(2)=3$이므로

$3^2-a=3 \qquad \therefore a=6$

쎈B특강

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 역함수 관계임을 직접 언급하지 않고 다음과 같은 표현으로 나타낼 수도 있다.

① $(g\circ f)(x)=x$

② 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

25 $(g\circ f)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 $g(1)=k$로 놓으면 $f(k)=1$이므로

$\log_5(k^3+4)=1, \qquad k^3+4=5$

$k^3=1 \qquad \therefore k=1$ ⋯ ❶

즉 $g(1)=1$이므로

$(g\circ g)(1)=g(g(1))=g(1)=1$ ⋯ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ $g(1)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $(g\circ g)(1)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

26 $g(x)$는 $y=\log_2 x$의 역함수이므로

$g(x)=2^x$

점 A는 $y=g(x)$의 그래프와 y축의 교점이므로 $\quad \mathrm{A}(0, 1)$

점 B의 y좌표가 1이므로 $1=\log_2 x$에서 $\quad x=2$

$\therefore \mathrm{B}(2, 1)$

점 C의 x좌표가 2이므로

$\mathrm{C}(2, 2^2)$, 즉 $\mathrm{C}(2, 4)$

점 D의 y좌표가 4이므로 $4=\log_2 x$에서 $\quad x=16$

$\therefore \mathrm{D}(16, 4)$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=4-1=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=16-2=14$이므로

$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 14=21$

답 ②

27 함수 $y=\log_a x+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\log_a x+b$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

이때 두 교점의 x좌표가 1, 3이므로 $y=\log_a x+b$의 그래프는 두 점 $(1, 1)$, $(3, 3)$을 지난다.

$1=\log_a 1+b$에서 $\quad b=1$

$3=\log_a 3+1$에서 $\quad 2=\log_a 3, \quad a^2=3$

$\therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>1)$

$\therefore ab=\sqrt{3}$

답 ①

28 $A=2\log_2 5=\log_2 25$,

$B=4=\log_2 2^4=\log_2 16$,

$C=\log_4 250=\log_{2^2} 250=\frac{1}{2}\log_2 250=\log_2\sqrt{250}$

이때 $\sqrt{250}<16<25$이고 밑이 1보다 크므로

$\log_2\sqrt{250}<\log_2 16<\log_2 25$, 즉 $C<B<A$

답 ⑤

29 ㄱ. $0<a<1$이고 $a<\frac{1}{a}$이므로 $\quad a^a>a^{\frac{1}{a}}$

ㄴ. $0<a<1$이고 $b<b^2$이므로 $\quad \log_a b>\log_a b^2$

ㄷ. $\log_a b-\log_b a=\frac{\log b}{\log a}-\frac{\log a}{\log b}$

$=\frac{(\log b)^2-(\log a)^2}{\log a\log b}$

$=\frac{(\log b+\log a)(\log b-\log a)}{\log a\log b}$

이때 $\log a<0<\log b<-\log a$이므로

$\log b+\log a<0$, $\log b-\log a>0$, $\log a\log b<0$

$\therefore \log_a b-\log_b a>0$, 즉 $\log_a b>\log_b a$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

30 $b<a<1$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a 1<\log_a a<\log_a b \qquad \therefore 0<1<\log_a b$

또 $b<a<1$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b 1<\log_b a<\log_b b \qquad \therefore 0<\log_b a<1$ ⋯⋯ ㉠

$\log_b\frac{b}{a}=\log_b b-\log_b a=1-\log_b a$이고 ㉠에서

$-1<-\log_b a<0, \qquad 0<1-\log_b a<1$

$\therefore 0<\log_b\frac{b}{a}<1$

$\log_b \frac{a}{b} = \log_b a - \log_b b = \log_b a - 1$이고 ㉠에서

$-1 < \log_b a - 1 < 0 \qquad \therefore -1 < \log_b \frac{a}{b} < 0$

따라서 가장 큰 값은 $\log_a b$, 가장 작은 값은 $\log_b \frac{a}{b}$이다. 답 ③

31 $y = \log_2(3x-2)+1$에서 $x=6$일 때 최대이고 최댓값은

$M = \log_2 16 + 1 = 4 + 1 = 5$

$x=2$일 때 최소이고 최솟값은

$m = \log_2 4 + 1 = 2 + 1 = 3$

$\therefore M - m = 2$

답 2

32 $y = 2\log_{\frac{1}{5}}(x+k)$는 $x=0$일 때 최댓값 -2를 가지므로

$2\log_{\frac{1}{5}} k = -2, \qquad \log_5 k = 1 \qquad \therefore k = 5$

$x=20$일 때 최솟값 m을 가지므로

$m = 2\log_{\frac{1}{5}} 25 = 2 \cdot (-2) = -4$

$\therefore km = -20$

답 ①

33 $f(x) = -x^2+4x+4$로 놓으면

$f(x) = -(x-2)^2 + 8$

$f(0)=4$, $f(2)=8$, $f(4)=4$이므로 $0 \le x \le 4$에서

$4 \le f(x) \le 8$

$y = \log_2 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y = \log_2 f(x)$는

$f(x)=8$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad \log_2 8 = 3$

$f(x)=4$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad \log_2 4 = 2$

따라서 구하는 합은 $\quad 3+2=5$

답 ③

34 진수의 조건에서

$4-x>0$, $x+2>0 \qquad \therefore -2<x<4$

$y = \log_{\frac{1}{3}}(4-x) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) = \log_{\frac{1}{3}}(-x^2+2x+8)$이므로

$f(x) = -x^2+2x+8$로 놓으면

$f(x) = -(x-1)^2+9$

$f(1)=9$이므로 $-2<x<4$에서 $f(x)$의 최댓값은 9이다.

$y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$에서 밑이 1보다 작으므로 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$는

$f(x)=9$일 때 최소이다.

따라서 구하는 최솟값은

$\log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{3^{-1}} 3^2 = -2$

답 -2

35 $f(x) = x^2-6x+12$로 놓으면 $\qquad f(x) = (x-3)^2+3$

$f(1)=7$, $f(3)=3$, $f(4)=4$이므로 $1 \le x \le 4$에서

$3 \le f(x) \le 7$ ···➊

$y = \log_a f(x)$에서 $0<a<1$이므로 함수 $y = \log_a f(x)$는

$f(x)=3$일 때 최댓값 -1을 갖는다.

즉 $\log_a 3 = -1$이므로

$a^{-1} = 3 \qquad \therefore a = \frac{1}{3}$ ···➋

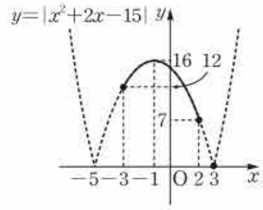
답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
➊ $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
➋ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

36 $f(x) = |x^2+2x-15|$로 놓으면

$f(x) = |(x+5)(x-3)| = |(x+1)^2-16|$

따라서 $-3 \le x \le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$7 \le f(x) \le 16$

$y = \log_2 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y = \log_2 f(x)$는 $f(x)=16$일 때 최대이고 최댓값은

$\log_2 16 = 4$

답 ③

37 $\log_3 x = t$로 놓으면 $1 \le x \le 27$에서

$\log_3 1 \le \log_3 x \le \log_3 27 \qquad \therefore 0 \le t \le 3$

이때 주어진 함수는

$y = t^2-2t+6 = (t-1)^2+5$

이므로 $t=3$일 때 최대이고 최댓값은 $\qquad M=9$

$t=1$일 때 최소이고 최솟값은 $\qquad m=5$

$\therefore M+m=14$

답 ②

38 $y = (\log_2 x)^2 + a\log_{\frac{1}{2}} x + b$에서

$y = (\log_2 x)^2 - a\log_2 x + b$

$\log_2 x = t$로 놓으면 $\qquad y = t^2 - at + b$ ···➊

$x = \frac{1}{8}$, 즉 $t = \log_2 \frac{1}{8} = -3$에서 최솟값 -4를 갖고 t^2의 계수가 1인 이차함수는

$y = (t+3)^2-4 = t^2+6t+5$ ···➋

따라서 $a=-6$, $b=5$이므로

$a-b=-11$ ···➌

답 -11

채점 기준	비율
➊ 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 나타낼 수 있다.	30 %
➋ 주어진 조건을 만족시키는 t에 대한 이차함수를 세울 수 있다.	50 %
➌ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

39 $y = \log_4 64x \cdot \log_4 \frac{x}{4} = (\log_4 x + 3)(\log_4 x - 1)$

$= (\log_4 x)^2 + 2\log_4 x - 3$

$\log_4 x = t$로 놓으면 $\frac{1}{64} \le x \le 16$에서

$\log_4 \frac{1}{64} \le \log_4 x \le \log_4 16 \qquad \therefore -3 \le t \le 2$

이때 주어진 함수는

$y = t^2+2t-3 = (t+1)^2-4$

이므로 $t=2$일 때 최대이고 최댓값은 $\qquad 5$

$t=-1$일 때 최소이고 최솟값은 $\qquad -4$

따라서 $a=-4$, $b=5$이므로 $\qquad ab=-20$ 답 ②

40 $x^{\log 2}=2^{\log x}$이므로

$y=-2^{\log x}\cdot x^{\log 2}+2^{\log 100x}$

$=-2^{\log x}\cdot 2^{\log x}+2^2\cdot 2^{\log x}$

$=-(2^{\log x})^2+4\cdot 2^{\log x}$

$2^{\log x}=t$로 놓으면 $\underline{x>1}$에서 $\quad t>1$

$\quad$ └ $\log x>0$이므로 $\quad 2^{\log x}>1$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$

따라서 $t=2$일 때 최댓값 4를 가지므로 $2^{\log x}=2$에서

$\log x=1 \qquad \therefore x=10$

즉 $a=10$, $b=4$이므로 $\qquad a+b=14$

답 14

41 $y=x^{-2+\log_2 x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 y=\log_2 x^{-2+\log_2 x}=(-2+\log_2 x)\log_2 x$

$=(\log_2 x)^2-2\log_2 x$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 16$에서

$\log_2 1\le \log_2 x\le \log_2 16 \qquad \therefore 0\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$\log_2 y=t^2-2t=(t-1)^2-1$

따라서 $\log_2 y$는 $t=4$일 때 최댓값 8, $t=1$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$\log_2 y=8$에서 $\qquad y=2^8=256 \qquad \therefore M=256$

$\log_2 y=-1$에서 $\qquad y=2^{-1}=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore m=\dfrac{1}{2}$

$\therefore Mm=128$

답 128

42 $y=\dfrac{x^4}{x^{\log_3 x}}=x^{4-\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 y=\log_3 x^{4-\log_3 x}=(4-\log_3 x)\log_3 x$

$=-(\log_3 x)^2+4\log_3 x$

$\log_3 x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$\log_3 y=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$

따라서 $\log_3 y$는 $t=2$일 때 최댓값 4를 가지므로

$\log_3 x=2$에서 $\qquad x=3^2=9 \qquad \therefore a=9$

$\log_3 y=4$에서 $\qquad y=3^4=81 \qquad \therefore b=81$

$\therefore b-a=72$

답 72

43 $y=\log_3 x+\log_x 81=\log_3 x+4\log_x 3$

$=\log_3 x+\dfrac{4}{\log_3 x}$

이때 $x>1$에서 $\log_3 x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_3 x+\dfrac{4}{\log_3 x}\ge 2\sqrt{\log_3 x\cdot\dfrac{4}{\log_3 x}}$

$=2\cdot 2=4$ (단, 등호는 $\log_3 x=2$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

답 ④

44 $\log_2 x+\log_2 y=\underline{\log_2 xy}$ ┌ 밑이 1보다 크므로 $\log_2 xy$는 xy의 값이 최대일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\ge 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$x+y=16$이므로 $\qquad 16\ge 2\sqrt{xy} \qquad \therefore xy\le 64$

따라서 구하는 최댓값은 $\log_2 64=6$이다.

답 6

45 $\log_4(x+3y)+\log_4\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3y}\right)$

$=\log_4(x+3y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3y}\right)$

$=\underline{\log_4\left(2+\dfrac{x}{3y}+\dfrac{3y}{x}\right)}$ ┌ 밑이 1보다 크므로 $\log_4\left(2+\dfrac{x}{3y}+\dfrac{3y}{x}\right)$는 $2+\dfrac{x}{3y}+\dfrac{3y}{x}$의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $x>0$, $y>0$에서 $\dfrac{x}{3y}>0$, $\dfrac{3y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2+\dfrac{x}{3y}+\dfrac{3y}{x}\ge 2+2\sqrt{\dfrac{x}{3y}\cdot\dfrac{3y}{x}}$

$=2+2\cdot 1=4$ (단, 등호는 $x=3y$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $\log_4 4=1$이다.

답 1

46 $\dfrac{1}{4}<x<9$에서 $\log_6 4x>0$, $\log_6\dfrac{9}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_6 4x+\log_6\dfrac{9}{x}\ge 2\sqrt{\log_6 4x\cdot\log_6\dfrac{9}{x}}$

이때 $\log_6 4x+\log_6\dfrac{9}{x}=\log_6\left(4x\cdot\dfrac{9}{x}\right)=\log_6 36=2$이므로

$2\ge 2\sqrt{\log_6 4x\cdot\log_6\dfrac{9}{x}}$, $\qquad \sqrt{\log_6 4x\cdot\log_6\dfrac{9}{x}}\le 1$

$\therefore 0<\log_6 4x\cdot\log_6\dfrac{9}{x}\le 1$

즉 $\log_6 4x\cdot\log_6\dfrac{9}{x}$의 최댓값은 1이므로 $\qquad b=1$ ⋯ ❶

한편 등호는 $\log_6 4x=\log_6\dfrac{9}{x}$, 즉 $4x=\dfrac{9}{x}$일 때 성립하므로

$x^2=\dfrac{9}{4} \qquad \therefore x=\dfrac{3}{2}\left(\because \dfrac{1}{4}<x<9\right)$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore ab=\dfrac{3}{2}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

47 진수의 조건에서

$x>0$, $(x-1)^2>0$

$\therefore 0<x<1$ 또는 $x>1$ ⋯⋯ ㉠

$\log_2 x+\log_4(x-1)^2=1$에서

$\log_2 x+\log_2(x-1)=1$

$\therefore \log_2(x^2-x)=\log_2 2$

즉 $x^2-x-2=0$이므로 $\qquad (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이때 ㉠에 의하여 $\qquad x=2$

답 $x=2$

48 진수의 조건에서

$5x-15>0,\ x+5>0 \qquad \therefore x>3$ ...... ㉠

$\log\sqrt{5x-15}=1-\frac{1}{2}\log(x+5)$에서

$\frac{1}{2}\log(5x-15)+\frac{1}{2}\log(x+5)=1$

$\log(5x-15)(x+5)=2$

$\therefore \log(5x^2+10x-75)=\log 100$

즉 $5x^2+10x-75=100$이므로 $\quad x^2+2x-35=0$

$(x+7)(x-5)=0 \qquad \therefore x=-7$ 또는 $x=5$

이때 ㉠에 의하여 $\quad x=5$

답 ②

49 밑과 진수의 조건에서

$(x-3)^2>0,\ (x-3)^2\neq 1$이므로 $x\neq 2,\ x\neq 3,\ x\neq 4$

$x^2-6x+9>0,\ x^2-6x+9\neq 1,\ 3-x>0$

$\therefore x<2$ 또는 $2<x<3$ ...... ㉠ ··· ❶

(i) $x^2-6x+9=4$일 때,

$x^2-6x+5=0, \qquad (x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

이때 ㉠에 의하여 $\quad x=1$ ··· ❷

(ii) $3-x=1$일 때, $\quad x=2$

$x=2$는 ㉠을 만족시키지 않는다. ··· ❸

(i), (ii)에서 $\quad x=1$ ··· ❹

답 $x=1$

채점 기준	비율
❶ 밑과 진수의 조건을 이용하여 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 밑이 같을 때의 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 진수가 1일 때의 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ 해를 구할 수 있다.	10 %

50 $\log_2\{\log_3(x^2+y^2)\}=1$에서

$\log_3(x^2+y^2)=2 \qquad \therefore x^2+y^2=9$ ...... ㉠

$\log_{y^2}x^2=1$에서 $\quad y^2=x^2$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2x^2=9, \quad x^2=\frac{9}{2} \qquad \therefore x=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$

㉡에서 $\quad y^2=x^2=\frac{9}{2} \qquad \therefore y=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$

따라서 주어진 연립방정식의 해 $(x,\ y)$는

$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 또는 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 또는

$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 또는 $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

이므로 $x+y$의 최댓값은

$\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

답 ①

51 $\log_9 x^2-\log_x 9+1=0$에서

$2\log_9 x-\frac{1}{\log_9 x}+1=0$

$\log_9 x=t\ (t\neq 0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$2t-\frac{1}{t}+1=0, \qquad 2t^2+t-1=0$

$(t+1)(2t-1)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

즉 $\log_9 x=-1$ 또는 $\log_9 x=\frac{1}{2}$이므로

$x=9^{-1}=\frac{1}{9}$ 또는 $x=9^{\frac{1}{2}}=3$

따라서 두 근의 곱은 $\quad \frac{1}{9}\cdot 3=\frac{1}{3}$

답 ③

52 $\log_{\frac{1}{2}}x^3-(\log_2 x)^2+4=0$에서

$(\log_2 x)^2+3\log_2 x-4=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\quad t^2+3t-4=0$

$(t+4)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-4$ 또는 $t=1$ ··· ❶

즉 $\log_2 x=-4$ 또는 $\log_2 x=1$이므로

$x=2^{-4}$ 또는 $x=2$ ··· ❷

$\therefore \log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\log_{2^{-4}}2+\log_2 2^{-4}$

$=-\frac{1}{4}-4=-\frac{17}{4}$ ··· ❸

답 $-\frac{17}{4}$

채점 기준	비율
❶ t에 대한 방정식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha$의 값을 구할 수 있다.	30 %

53 $x^{\log 2}=2^{\log x}$이므로 주어진 방정식은

$(2^{\log x})^2+2^{\log x}-6=0$

$2^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2+t-6=0$

$(t+3)(t-2)=0 \qquad \therefore t=2\ (\because t>0)$

즉 $2^{\log x}=2$이므로 $\quad \log x=1 \qquad \therefore x=10$

답 ④

54 $\log_2 x+\log_5 y=4$에서 $\quad \frac{\log x}{\log 2}+\frac{\log y}{\log 5}=4$

$\log_5 x\cdot\log_2 y=3$에서

$\frac{\log x}{\log 5}\cdot\frac{\log y}{\log 2}=3$, 즉 $\frac{\log x}{\log 2}\cdot\frac{\log y}{\log 5}=3$

$\frac{\log x}{\log 2}=X,\ \frac{\log y}{\log 5}=Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} X+Y=4 \\ XY=3 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $\quad X=3,\ Y=1$ 또는 $X=1,\ Y=3$

이때 $x>y$이면 $X>Y$이므로 $\quad X=3,\ Y=1$

즉 $\frac{\log x}{\log 2}=3,\ \frac{\log y}{\log 5}=1$이므로

$\log x=3\log 2,\ \log y=\log 5$

$\therefore x=2^3=8,\ y=5$

따라서 $\alpha=8,\ \beta=5$이므로 $\quad \alpha-\beta=3$

답 3

55 $x^{\log_2 x}=\frac{8}{x^2}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2\frac{8}{x^2}, \qquad (\log_2 x)^2=\log_2 8-2\log_2 x$

$\therefore (\log_2 x)^2+2\log_2 x-3=0$

$\log_2 x = t$로 놓으면 $\quad t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

즉 $\log_2 x=-3$ 또는 $\log_2 x=1$이므로

$x=2^{-3}=\frac{1}{8}$ 또는 $x=2$

따라서 모든 근의 합은

$\frac{1}{8}+2=\frac{17}{8}$

이므로 $\quad p=8,\ q=17$

$\therefore p+q=25$ 답 25

56 $5^{2-x}=2^x$의 양변에 상용로그를 취하면

$(2-x)\log 5 = x\log 2, \qquad x(\log 2+\log 5)=2\log 5$

$x\log 10 = 2\log 5 \qquad \therefore x=2\log 5$ 답 $x=2\log 5$

57 $x^{\log x}-\frac{x^3}{100}=0$, 즉 $x^{\log x}=\frac{x^3}{100}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log\frac{x^3}{100}, \qquad (\log x)^2=\log x^3-\log 100$

$\therefore (\log x)^2-3\log x+2=0$

$\log x=t$로 놓으면 $\quad t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=2$

즉 $\log x=1$ 또는 $\log x=2$이므로

$x=10$ 또는 $x=10^2=100$

따라서 모든 근의 곱은 $\quad 10\cdot 100=1000$ 답 ⑤

58 $(3x)^{\log 3}-(2x)^{\log 2}=0$, 즉 $(3x)^{\log 3}=(2x)^{\log 2}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 3\cdot\log 3x=\log 2\cdot\log 2x$

$\log 3(\log 3+\log x)=\log 2(\log 2+\log x)$

$(\log 3)^2+\log 3\cdot\log x=(\log 2)^2+\log 2\cdot\log x$

$(\log 3-\log 2)\log x=(\log 2)^2-(\log 3)^2$

$$\therefore \log x=\frac{-(\log 3+\log 2)(\log 3-\log 2)}{\log 3-\log 2}$$

$$=-(\log 3+\log 2)=-\log 6=\log\frac{1}{6}$$

$\therefore x=\frac{1}{6}$ 답 $x=\frac{1}{6}$

59 주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 $\quad \alpha\beta=10$

$\log x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+kt-2=0$

이 방정식의 해는 $\log\alpha$, $\log\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=-k, \qquad \log\alpha\beta=-k$

$\therefore k=-\log 10=-1$ 답 -1

60 $\log_3\frac{x}{4}\cdot\log_3\frac{x}{5}=1$에서

$(\log_3 x-\log_3 4)(\log_3 x-\log_3 5)=1$

$(\log_3 x)^2-(\log_3 4+\log_3 5)\log_3 x+\log_3 4\cdot\log_3 5-1=0$

$\therefore (\log_3 x)^2-\log_3 20\cdot\log_3 x+\log_3 4\cdot\log_3 5-1=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-t\log_3 20+\log_3 4\cdot\log_3 5-1=0$

이 방정식의 두 근이 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=\log_3 20, \qquad \log_3\alpha\beta=\log_3 20$

$\therefore \alpha\beta=20$ 답 20

61 $(\log_2 8x)^2-3\log_2 4x^3=4$에서

$(3+\log_2 x)^2-3(2+3\log_2 x)=4$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\quad (3+t)^2-3(2+3t)=4$

$\therefore t^2-3t-1=0$ ⋯ ❶

이 방정식의 두 근이 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=3,\ \log_2\alpha\cdot\log_2\beta=-1$ ⋯ ❷

$$\therefore (\log_\alpha 2)^2+(\log_\beta 2)^2$$

$$=\frac{1}{(\log_2\alpha)^2}+\frac{1}{(\log_2\beta)^2}$$

$$=\frac{(\log_2\alpha)^2+(\log_2\beta)^2}{(\log_2\alpha)^2(\log_2\beta)^2}$$

$$=\frac{(\log_2\alpha+\log_2\beta)^2-2\log_2\alpha\cdot\log_2\beta}{(\log_2\alpha\cdot\log_2\beta)^2}$$

$$=\frac{3^2-2\cdot(-1)}{(-1)^2}=11$$ ⋯ ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\log_2\alpha+\log_2\beta$, $\log_2\alpha\cdot\log_2\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $(\log_\alpha 2)^2+(\log_\beta 2)^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %

62 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\log a-1)^2-(1-\log a)\cdot 3=0$

$\therefore (\log a)^2+\log a-2=0$

$\log a=t$로 놓으면 $\quad t^2+t-2=0$

$(t+2)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-2\ (\because t\neq 1)$

즉 $\log a=-2$이므로

$a=10^{-2}=\frac{1}{100}$ 답 ①

참고 $\log a-1\neq 0$이어야 하므로 $\log a\neq 1$, 즉 $t\neq 1$이어야 한다.

63 $\log x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-2(k-2)t-k+8=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 방정식의 두 근이 $x>1$인 부분에 있으려면 $t=\log x$에서 이차방정식 ㉠의 두 근이 $t>0$인 부분에 있어야 하므로

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=\{-(k-2)\}^2-(-k+8)\geq 0$

$k^2-3k-4\geq 0, \qquad (k+1)(k-4)\geq 0$

$\therefore k\leq -1$ 또는 $k\geq 4$

(ii) 이차방정식 ㉠의

$(\text{두 근의 합})=2(k-2)>0 \qquad \therefore k>2$

(iii) 이차방정식 ㉠의

$(\text{두 근의 곱})=-k+8>0 \qquad \therefore k<8$

이상에서 $4\le k<8$이므로 정수 k는 4, 5, 6, 7의 4개이다. 답 4

64 진수의 조건에서

$x-1>0,\ 4-x>0 \qquad \therefore 1<x<4$ …… ㉠

$\log_2(x-1)-\log_2(4-x)-1>0$에서

$\log_2(x-1)>\log_2(4-x)+1$

$\therefore \log_2(x-1)>\log_2 2(4-x)$

밑이 1보다 크므로 $\quad x-1>2(4-x)$

$3x>9 \qquad \therefore x>3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad 3<x<4$

따라서 $\alpha=3,\ \beta=4$이므로 $\quad \beta-\alpha=1$ 답 1

65 진수의 조건에서

$x+2>0,\ x+3>0 \qquad \therefore x>-2$ …… ㉠

$\log_{0.1}(x+2)+\log_{0.1}(x+3)>\log_{0.1}12$에서

$\log_{0.1}(x+2)(x+3)>\log_{0.1}12$

$\therefore \log_{0.1}(x^2+5x+6)>\log_{0.1}12$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x^2+5x+6<12$

$x^2+5x-6<0, \qquad (x+6)(x-1)<0$

$\therefore -6<x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad -2<x<1$ 답 ④

66 $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1}>\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5}$에서 $\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1}>\left(\frac{3}{2}\right)^{5-x}$

밑이 1보다 크므로 $\quad 2x-1>5-x$

$3x>6 \qquad \therefore x>2$ …… ㉠ ⋯→ ❶

$\log_3(x^2-3x+5)\le 2$에서

$x^2-3x+5=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0$

즉 모든 실수 x가 진수의 조건을 만족시킨다.

$\log_3(x^2-3x+5)\le\log_3 9$에서 밑이 1보다 크므로

$x^2-3x+5\le 9, \qquad x^2-3x-4\le 0$

$(x+1)(x-4)\le 0 \qquad \therefore -1\le x\le 4$ …… ㉡ ⋯→ ❷

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad 2<x\le 4$ ⋯→ ❸

답 $2<x\le 4$

채점 기준	비율
❶ 지수부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 로그부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

67 진수의 조건에서 $\quad f(x)>0,\ x+2>0$

$-2<x<5,\ x>-2 \qquad \therefore -2<x<5$ …… ㉠

$\log_5 f(x)+\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\ge 0$에서

$\log_5 f(x)-\log_5(x+2)\ge 0$

$\therefore \log_5 f(x)\ge\log_5(x+2)$

밑이 1보다 크므로 $\quad f(x)\ge x+2$

주어진 그래프에서 $f(x)\ge x+2$의 해는

$-2\le x\le 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad -2<x\le 3$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$이므로 구하는 합은

$-1+0+1+2+3=5$ 답 5

68 진수의 조건에서

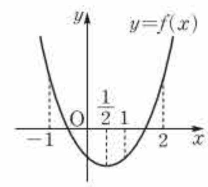
$x+2>0 \qquad \therefore x>-2$ …… ㉠

$\log(x+2)\ge\log(x^2+k)$에서 밑이 1보다 크므로

$x+2\ge x^2+k$

$\therefore x^2-x+k-2\le 0$ …… ㉡

$f(x)=x^2-x+k-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{9}{4}$



라 할 때, ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x의 개수가 2이려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$f(-1)>0,\ f(0)\le 0,$

$f(1)\le 0,\ f(2)>0$

$f(-1)=f(2)=k$이므로 $\quad k>0$

$f(0)=f(1)=k-2$이므로 $k-2\le 0$에서 $\quad k\le 2$

$\therefore 0<k\le 2$

따라서 k의 최댓값은 2이다. 답 2

69 진수의 조건에서

$x>0,\ \log_2 x>0 \qquad \therefore x>1$ …… ㉠

$\log_3(\log_2 x)\le 1$에서 $\quad \log_3(\log_2 x)\le\log_3 3$

밑이 1보다 크므로 $\quad \log_2 x\le 3 \qquad \therefore x\le 8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad 1<x\le 8$ 답 ⑤

70 진수의 조건에서

$x>0,\ \log_4 x>0,\ \log_3(\log_4 x)>0$

$\log_3(\log_4 x)>\log_3 1$에서 $\quad \log_4 x>1$

$\therefore x>4$ …… ㉠ ⋯→ ❶

$\log_{\frac{1}{2}}\{\log_3(\log_4 x)\}\ge 0$에서

$\log_{\frac{1}{2}}\{\log_3(\log_4 x)\}\ge\log_{\frac{1}{2}}1$

밑이 1보다 작으므로 $\quad \log_3(\log_4 x)\le 1$

밑이 1보다 크므로 $\quad \log_4 x\le 3$

$\therefore x\le 64$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad 4<x\le 64$ ⋯→ ❷

따라서 $M=64,\ m=5$이므로

$M-m=59$ ⋯→ ❸

답 59

채점 기준	비율
❶ 진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 로그부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

71 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}} 27x \cdot \log_3 \frac{x}{3} \geq 0$에서

$(\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_{\frac{1}{3}} x)(\log_3 x - \log_3 3) \geq 0$

$\therefore (-3-\log_3 x)(\log_3 x - 1) \geq 0$

$\log_3 x = t$로 놓으면 $(-3-t)(t-1) \geq 0$

$(t+3)(t-1) \leq 0$ $\therefore -3 \leq t \leq 1$

즉 $-3 \leq \log_3 x \leq 1$이므로 $\log_3 3^{-3} \leq \log_3 x \leq \log_3 3$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{27} \leq x \leq 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{27} \leq x \leq 3$

따라서 $\alpha = \frac{1}{27}$, $\beta = 3$이므로 $\alpha\beta = \frac{1}{9}$ 답 $\frac{1}{9}$

72 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_2 x = t$로 놓으면 $t^2 - t - 6 \geq 0$

$(t+2)(t-3) \geq 0$ $\therefore t \leq -2$ 또는 $t \geq 3$

즉 $\log_2 x \leq -2$ 또는 $\log_2 x \geq 3$이므로

$\log_2 x \leq \log_2 2^{-2}$ 또는 $\log_2 x \geq \log_2 2^3$

밑이 1보다 크므로 $x \leq \frac{1}{4}$ 또는 $x \geq 8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0 < x \leq \frac{1}{4}$ 또는 $x \geq 8$ 답 ⑤

73 $\log_{\frac{1}{5}} x = t$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2 + at + b < 0$ …… ㉠

$\frac{1}{5} < x < 5$에서

$\log_{\frac{1}{5}} 5 < \log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5}$, 즉 $-1 < \log_{\frac{1}{5}} x < 1$

$\therefore -1 < t < 1$

해가 $-1 < t < 1$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(t+1)(t-1) < 0$ $\therefore t^2 - 1 < 0$

이 부등식이 ㉠과 일치해야 하므로 $a=0$, $b=-1$

$\therefore a^2 + b^2 = 0^2 + (-1)^2 = 1$ 답 ①

74 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$[\log_2 x] = t$ (t는 정수)로 놓으면 $t^2 + t - 6 < 0$

$(t+3)(t-2) < 0$ $\therefore -3 < t < 2$

이때 t는 정수이므로 $t = -2, -1, 0, 1$

$[\log_2 x] = -2$일 때, $-2 \leq \log_2 x < -1$ $\therefore \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}$

$[\log_2 x] = -1$일 때, $-1 \leq \log_2 x < 0$ $\therefore \frac{1}{2} \leq x < 1$

$[\log_2 x] = 0$일 때, $0 \leq \log_2 x < 1$ $\therefore 1 \leq x < 2$

$[\log_2 x] = 1$일 때, $1 \leq \log_2 x < 2$ $\therefore 2 \leq x < 4$

$\therefore \frac{1}{4} \leq x < 4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{4} \leq x < 4$ 답 $\frac{1}{4} \leq x < 4$

75 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > 8x^4$의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x} < \log_{\frac{1}{2}} 8x^4$

$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 < \log_{\frac{1}{2}} 8 + 4\log_{\frac{1}{2}} x$

$\therefore (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - 4\log_{\frac{1}{2}} x + 3 < 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$로 놓으면 $t^2 - 4t + 3 < 0$

$(t-1)(t-3) < 0$ $\therefore 1 < t < 3$

즉 $1 < \log_{\frac{1}{2}} x < 3$이므로 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$

밑이 1보다 작으므로 $\frac{1}{8} < x < \frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{8} < x < \frac{1}{2}$

따라서 $\alpha = \frac{1}{8}$, $\beta = \frac{1}{2}$이므로

$\alpha + \beta = \frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

76 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log x} < 100x$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x} < \log 100x$, $(\log x)^2 < \log 100 + \log x$

$\therefore (\log x)^2 - \log x - 2 < 0$

$\log x = t$로 놓으면 $t^2 - t - 2 < 0$

$(t+1)(t-2) < 0$ $\therefore -1 < t < 2$

즉 $-1 < \log x < 2$이므로 $\log 10^{-1} < \log x < \log 10^2$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{10} < x < 100$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{10} < x < 100$

따라서 정수 x는 1, 2, 3, …, 99의 99개이다. 답 99

77 $2^{3x-1} < 5^{x+2}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(3x-1)\log 2 < (x+2)\log 5$

$\therefore (3\log 2 - \log 5)x < \log 2 + 2\log 5$

이때 $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.3 = 0.7$이므로

$(3 \times 0.3 - 0.7)x < 0.3 + 2 \times 0.7$

$0.2x < 1.7$ $\therefore x < \frac{1.7}{0.2} = 8.5$

따라서 가장 큰 정수 x의 값은 8이다. 답 8

78 $(\log x)^2 - \log ax^2 \geq 0$에서

$(\log x)^2 - 2\log x - \log a \geq 0$

$\log x = t$로 놓으면 $t^2 - 2t - \log a \geq 0$

모든 양의 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2 - 2t - \log a = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (-1)^2 + \log a \leq 0$

$\log a \leq -1$, $\log a \leq \log \frac{1}{10}$

밑이 1보다 크므로 $a\le\frac{1}{10}$

이때 $a>0$이므로 $0<a\le\frac{1}{10}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{1}{10}$이다. 답 $\frac{1}{10}$

79 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(3-\log_2 a)x+4\log_2 a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(3-\log_2 a)\}^2-4\log_2 a<0$

$\therefore (\log_2 a)^2-10\log_2 a+9<0$ ⋯ ❶

$\log_2 a=t$로 놓으면 $t^2-10t+9<0$

$(t-1)(t-9)<0$ $\therefore 1<t<9$

즉 $1<\log_2 a<9$이므로 $\log_2 2<\log_2 a<\log_2 2^9$

밑이 1보다 크므로 $2<a<512$ ⋯ ❷

따라서 정수 a는 $\underbrace{3, 4, 5, \cdots, 511}_{511-3+1=509(\text{개})}$의 509개이다. ⋯ ❸

답 509

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 로그부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

80 $(\log x-\log 3)(\log x-\log 9)=-(\log k)^2$에서

$(\log x)^2-(\log 3+\log 9)\log x+\log 3\cdot\log 9+(\log k)^2=0$

$\therefore (\log x)^2-3\log 3\cdot\log x+2(\log 3)^2+(\log k)^2=0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-3t\log 3+2(\log 3)^2+(\log k)^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3\log 3)^2-4\{2(\log 3)^2+(\log k)^2\}>0$

$4(\log k)^2-(\log 3)^2<0$

$(2\log k+\log 3)(2\log k-\log 3)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}\log 3<\log k<\frac{1}{2}\log 3$

즉 $\log 3^{-\frac{1}{2}}<\log k<\log 3^{\frac{1}{2}}$이고 밑이 1보다 크므로

$\frac{\sqrt{3}}{3}<k<\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\beta=\sqrt{3}$이므로 $\frac{\beta}{\alpha}=3$ 답 ④

쎈B특강

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이
① 서로 다른 두 실근을 가지면 ➡ $b^2-4ac>0$
② 실근을 가지면 ➡ $b^2-4ac\ge0$
③ 실근을 갖지 않으면 ➡ $b^2-4ac<0$

81 n년 후의 태블릿의 가격은

$60\times(1-0.1)^n=0.9^n\times60$ (만 원)

n년 후에 태블릿의 가격이 6만 원 이하가 된다고 하면

$0.9^n\times60\le6$ $\therefore 0.9^n\le\frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log 0.9\le-1$

$n(\log 9-1)\le-1$, $n(0.9542-1)\le-1$

$-0.0458n\le-1$ $\therefore n\ge21.\cdots$

따라서 22년 후인 2044년에 태블릿의 가격이 처음으로 6만 원 이하가 된다. 답 ④

82 현재의 관광객 수를 a라 할 때 n년 후의 관광객 수는

$a\times(1+0.15)^n=a\times1.15^n$

n년 후에 관광객 수가 현재의 2배 이상이 된다고 하면

$a\times1.15^n\ge2a$ $\therefore 1.15^n\ge2$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log 1.15\ge\log 2$

$0.06n\ge0.3$ $\therefore n\ge\frac{0.3}{0.06}=5$

따라서 관광객 수가 현재의 2배 이상이 되는 것은 최소 5년 후이다. 답 5년

83 $a=10$, $c=8$, $b=4$를 주어진 식에 대입하면

$\log\frac{4}{10}=-1+k\log 8$

$2\log 2-1=-1+3k\log 2$

$2\log 2=3k\log 2$, $3k=2$

$\therefore k=\frac{2}{3}$ ⋯ ❶

염료 B의 질량을 x g이라 하고 $a=40$, $c=27$, $b=x$를

$\log\frac{b}{a}=-1+\frac{2}{3}\log c$에 대입하면

$\log\frac{x}{40}=-1+\frac{2}{3}\log 27$

$\log x-(2\log 2+1)=-1+2\log 3$

$\log x=2\log 2+2\log 3$

$\log x=\log(2^2\cdot3^2)$

$\therefore x=36$

따라서 염료 B의 질량은 36 g이다. ⋯ ❷

답 36 g

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 염료 B의 질량을 구할 수 있다.	50 %

84 올해 매출을 K원이라 하면 n년 후의 두 공장 A, B의 매출은 각각

$K(1+0.2)^n=K\times1.2^n$(원),

$K(1+0.3)^n=K\times1.3^n$(원)

n년 후에 B 공장의 매출이 A 공장의 매출의 10배 이상이 된다고 하면

$K\times1.3^n\ge10\times K\times1.2^n$

$\therefore 1.3^n\ge10\times1.2^n$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log 1.3\ge\log 10+n\log 1.2$

$0.114n\ge1+0.079n$, $0.035n\ge1$

$\therefore n\ge28.\cdots$

따라서 올해로부터 29년 후에 B 공장의 매출이 처음으로 A 공장의 매출의 10배 이상이 된다. 답 ④

05 삼각함수

개념 정리 본책 60쪽

❶ 일반각 ❷ 호도법 ❸ $\frac{\pi}{180}$ ❹ $r\theta$ ❺ $\frac{y}{r}$
❻ 코사인함수 ❼ $\tan\theta$ ❽ 1

쎈 B 유형 뽀개기

본책 61쪽

01 ① $400^\circ=360^\circ\times1+40^\circ$ ➡ 제1사분면
② $920^\circ=360^\circ\times2+200^\circ$ ➡ 제3사분면
③ $1215^\circ=360^\circ\times3+135^\circ$ ➡ 제2사분면
④ $-695^\circ=360^\circ\times(-2)+25^\circ$ ➡ 제1사분면
⑤ $-760^\circ=360^\circ\times(-3)+320^\circ$ ➡ 제4사분면

답 ③

02 ㄱ. $-1020^\circ=360^\circ\times(-3)+60^\circ$
ㄴ. $-640^\circ=360^\circ\times(-2)+80^\circ$
ㄷ. $-280^\circ=360^\circ\times(-1)+80^\circ$
ㄹ. $470^\circ=360^\circ\times1+110^\circ$
ㅁ. $800^\circ=360^\circ\times2+80^\circ$
ㅂ. $1150^\circ=360^\circ\times3+70^\circ$
이상에서 각을 나타내는 동경이 80°를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다. 답 ㄴ, ㄷ, ㅁ

03 124°를 나타내는 동경 OP가 주어진 조건을 만족시키며 회전한 후 나타내는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta=124^\circ-645^\circ+94^\circ=-427^\circ$

이때 $-427^\circ=360^\circ\times(-2)+293^\circ$이므로 동경 OP는 제4사분면에 있다. 답 제4사분면

04 θ가 제3사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+180^\circ<\theta<360^\circ\times n+270^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 360^\circ\times\frac{n}{2}+90^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times\frac{n}{2}+135^\circ$

(ⅰ) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+90^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+135^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이다.

(ⅱ) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+270^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+315^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제4사분면의 각이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 제2사분면 또는 제4사분면

05 3θ가 제1사분면의 각이므로

$360^\circ\times n<3\theta<360^\circ\times n+90^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 360^\circ\times\frac{n}{3}<\theta<360^\circ\times\frac{n}{3}+30^\circ$ ··· ❶

(ⅰ) $n=3k$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k<\theta<360^\circ\times k+30^\circ$

따라서 θ는 제1사분면의 각이다. ··· ❷

(ⅱ) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+120^\circ<\theta<360^\circ\times k+150^\circ$

따라서 θ는 제2사분면의 각이다. ··· ❸

(ⅲ) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+240^\circ<\theta<360^\circ\times k+270^\circ$

따라서 θ는 제3사분면의 각이다. ··· ❹

이상에서 θ는 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이므로 θ를 나타내는 동경은 제4사분면에 존재할 수 없다. ··· ❺

답 제4사분면

채점 기준	비율
❶ θ의 범위를 n에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $n=3k$일 때 θ가 제몇 사분면의 각인지 말할 수 있다.	20 %
❸ $n=3k+1$일 때 θ가 제몇 사분면의 각인지 말할 수 있다.	20 %
❹ $n=3k+2$일 때 θ가 제몇 사분면의 각인지 말할 수 있다.	20 %
❺ θ를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면을 말할 수 있다.	20 %

06 2θ가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+90^\circ<2\theta<360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 360^\circ\times\frac{n}{2}+45^\circ<\theta<360^\circ\times\frac{n}{2}+90^\circ$

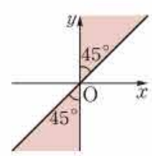
(ⅰ) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+45^\circ<\theta<360^\circ\times k+90^\circ$

(ⅱ) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+225^\circ<\theta<360^\circ\times k+270^\circ$

(ⅰ), (ⅱ)에서 θ를 나타내는 동경이 속하는 모든 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. (단, 경계선은 제외한다.)



답 ⑤

07 ① $40^\circ=40\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{2}{9}\pi$

② $135^\circ=135\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{3}{4}\pi$

③ $210^\circ=210\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{7}{6}\pi$

④ $\frac{7}{12}\pi=\frac{7}{12}\pi\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=105^\circ$

⑤ $\frac{5}{4}\pi=\frac{5}{4}\pi\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=225^\circ$

답 ③, ④

08 ㄱ. $1=\frac{180^\circ}{\pi}$이므로 $3=\frac{540^\circ}{\pi}$

ㄴ. $\frac{9}{5}\pi=324^\circ$이므로 $\frac{9}{5}\pi$는 제4사분면의 각이다.

ㄷ. $\frac{25}{6}\pi=2\pi\times2+\frac{\pi}{6}$, $-\frac{11}{6}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{\pi}{6}$이므로 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{25}{6}\pi$, $-\frac{11}{6}\pi$를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

09 ① $-815°=360°\times(-3)+265°$ ➡ 제3사분면

② $-500°=360°\times(-2)+220°$ ➡ 제3사분면

③ $910°=360°\times2+190°$ ➡ 제3사분면

④ $-\frac{19}{4}\pi=2\pi\times(-3)+\frac{5}{4}\pi$ ➡ 제3사분면

⑤ $\frac{26}{9}\pi=2\pi\times1+\frac{8}{9}\pi$ ➡ 제2사분면

답 ⑤

10 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$4\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$3\theta=2n\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi$ ...... ㉠

$\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\frac{2n}{3}\pi<2\pi$이므로

$\frac{3}{2}<n<3$

n은 정수이므로 $n=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{4}{3}\pi$ 답 ④

11 각 θ를 나타내는 동경과 각 9θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$9\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$8\theta=(2n+1)\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{2n+1}{8}\pi$ ...... ㉠

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\frac{2n+1}{8}\pi<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<2n+1<4$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}<n<\frac{3}{2}$

n은 정수이므로 $n=0, 1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{8}, \frac{3}{8}\pi$ 답 $\frac{\pi}{8}, \frac{3}{8}\pi$

12 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$5\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$4\theta=2n\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{n}{2}\pi$ ...... ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{n}{2}\pi<\pi$이므로

$0<n<2$

n은 정수이므로 $n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로
원점에 대하여 대칭이다.

$6\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$5\theta=(2n+1)\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{2n+1}{5}\pi$ ...... ㉠ ··· ❶

$0<\theta<2\pi$에서 $0<\frac{2n+1}{5}\pi<2\pi$이므로

$0<2n+1<10$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}<n<\frac{9}{2}$

n은 정수이므로 $n=0, 1, 2, 3, 4$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{5}, \frac{3}{5}\pi, \pi, \frac{7}{5}\pi, \frac{9}{5}\pi$ ··· ❷

따라서 구하는 모든 각 θ의 크기의 합은

$\frac{\pi}{5}+\frac{3}{5}\pi+\pi+\frac{7}{5}\pi+\frac{9}{5}\pi=5\pi$ ··· ❸

답 5π

채점 기준	비율
❶ θ를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ θ의 크기를 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 각 θ의 크기의 합을 구할 수 있다.	20 %

14 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+4\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$5\theta=2n\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{2n}{5}\pi$ ...... ㉠

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n}{5}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\frac{5}{4}<n<\frac{15}{4}$

n은 정수이므로 $n=2, 3$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi$

따라서 구하는 모든 각 θ의 크기의 합은

$\frac{4}{5}\pi+\frac{6}{5}\pi=2\pi$ 답 2π

15 각 2θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$2\theta+6\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$8\theta=(2n+1)\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{2n+1}{8}\pi$ ...... ㉠

$\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\frac{2n+1}{8}\pi<2\pi$이므로

$8<2n+1<16$ $\quad\therefore \frac{7}{2}<n<\frac{15}{2}$

n은 정수이므로 $n=4, 5, 6, 7$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{9}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi$

따라서 구하는 각 θ의 개수는 4이다. 답 ④

16 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$$\theta+5\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}\ (n\text{은 정수})$$

$$6\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2} \qquad \therefore\ \theta=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12} \qquad \cdots\cdots\ ㉠ \qquad \cdots ❶$$

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12}<\pi$이므로

$$-\frac{1}{12}<\frac{n}{3}<\frac{11}{12} \qquad \therefore\ -\frac{1}{4}<n<\frac{11}{4}$$

n은 정수이므로 $\quad n=0,\ 1,\ 2$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi,\ \frac{3}{4}\pi \qquad \cdots ❷$$

답 $\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi,\ \frac{3}{4}\pi$

채점 기준	비율
❶ θ를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ θ의 크기를 모두 구할 수 있다.	50 %

17 반지름의 길이가 a, 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$인 부채꼴의 호의 길이가 6π이므로

$$a\cdot\frac{3}{4}\pi=6\pi \qquad \therefore\ a=8$$

따라서 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot8\cdot6\pi=24\pi$이므로 $\quad b=24$

$$\therefore\ b-a=16$$

답 16

18 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\frac{5}{3}=30, \qquad r^2=36$$

$$\therefore\ r=6\ (\because\ r>0)$$

따라서 부채꼴의 호의 길이는 $6\cdot\frac{5}{3}=10$이므로 둘레의 길이는

$$6+6+10=22$$

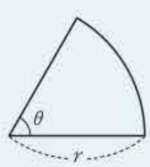
답 22

쎈B특강

부채꼴의 둘레의 길이

중심각의 크기가 θ(라디안)이고 반지름의 길이가 r인 부채꼴의 둘레의 길이를 l이라 하면

$$l=2\times(\text{반지름의 길이})+(\text{호의 길이})$$
$$=2r+r\theta$$



19 $\overset{\frown}{AB}=48\pi\,\text{cm}$이므로

$$60\theta=48\pi \qquad \therefore\ \theta=\frac{4}{5}\pi \qquad \cdots ❶$$

따라서 구하는 유리창의 넓이는

(큰 부채꼴의 넓이)$-$(작은 부채꼴의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\cdot60\cdot48\pi-\frac{1}{2}\cdot\underbrace{10^2}_{60-50=10\,(\text{cm})}\cdot\frac{4}{5}\pi$$

$$=1440\pi-40\pi=1400\pi\,(\text{cm}^2) \qquad \cdots ❷$$

답 $1400\pi\,\text{cm}^2$

채점 기준	비율
❶ θ의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 유리창의 넓이를 구할 수 있다.	60 %

20 부채꼴 APB를 원 O에 접하면서 한 바퀴 굴렸더니 점 P로 되돌아왔으므로 부채꼴 APB의 둘레의 길이는 원의 둘레의 길이와 같다.

원의 둘레의 길이는 $2\pi\cdot4=8\pi$이고, 부채꼴의 둘레의 길이는

$$8+8+8\theta=16+8\theta$$

이므로 $\quad 16+8\theta=8\pi$

$$8\theta=8\pi-16 \qquad \therefore\ \theta=\pi-2$$

답 ③

21 (1) 호 AB의 길이는

$$10\cdot\frac{3}{5}\pi=6\pi$$

$\overline{OC}=5$, $\angle COD=\pi-\frac{3}{5}\pi=\frac{2}{5}\pi$이므로 호 CD의 길이는

$$5\cdot\frac{2}{5}\pi=2\pi$$

$\overline{OE}=\frac{5}{2}$, $\angle EOF=\frac{3}{5}\pi$이므로 호 EF의 길이는

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{5}\pi=\frac{3}{2}\pi$$

$\overline{OG}=\frac{5}{4}$, $\angle GOH=\frac{2}{5}\pi$이므로 호 GH의 길이는

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\pi=\frac{\pi}{2}$$

따라서 구하는 호의 길이의 합은

$$6\pi+2\pi+\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{2}=10\pi$$

(2) $\overline{AC}=\overline{OC}=5$, $\overline{DE}=\overline{OE}=\frac{5}{2}$, $\overline{FG}=\overline{OG}=\frac{5}{4}$이고

$$\overline{BH}=\overline{OB}-\overline{OH}=\overline{OB}-\overline{OG}=10-\frac{5}{4}=\frac{35}{4}$$

따라서 색칠한 도형의 둘레의 길이는

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{GH}+\overline{AC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{BH}$$
$$=10\pi+5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{35}{4}$$
$$=10\pi+\frac{35}{2}$$

답 (1) 10π (2) $10\pi+\frac{35}{2}$

22 부채꼴 AOB의 반지름의 길이를 r라 하면 직각삼각형 BOC에서

$$\overline{OC}=r\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}r$$

이때 삼각형 BOC의 넓이가 9이므로

$$\frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}r\cdot\sin\frac{\pi}{4}=9$$

$$\frac{r^2}{4}=9, \qquad r^2=36 \qquad \therefore\ r=6\ (\because\ r>0)$$

따라서 $\overline{OB}=6$, $\overline{OC}=3\sqrt{2}$이므로 두 호 AB, CD와 두 선분 AC, BD로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot6^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{9}{4}\pi$$

답 ②

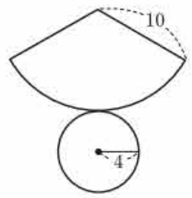
참고 $\overline{OC}$, $\overline{OB}$의 길이를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\triangle$BOC에서 $\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로 $\quad \overline{BC}=\overline{OC}$

이때 $\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{OC}=9$이므로 $\quad \overline{BC}=\overline{OC}=3\sqrt{2}$

$\triangle$BOC에서 피타고라스 정리에 의하여 $\quad \overline{OB}=6$

23 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는 원의 둘레의 길이와 같으므로 $\quad 2\pi\cdot4=8\pi$



따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot10\cdot8\pi=40\pi$$

$\therefore$ (원뿔의 겉넓이)$=40\pi+\pi\cdot4^2=56\pi$

답 56π

24 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$16\theta=2\pi r \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{8}r$ ⋯ ❶

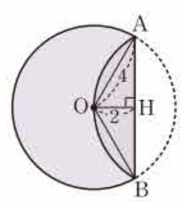
$\therefore a=\frac{\pi}{8}\cdot2=\frac{\pi}{4},\ b=\frac{\pi}{8}\cdot5=\frac{5}{8}\pi$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=\frac{7}{8}\pi$ ⋯ ❸

답 $\frac{7}{8}\pi$

채점 기준	비율
❶ θ를 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

25 오른쪽 그림과 같이 접힌 선분의 양 끝점을 A, B라 하고 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OAH에서



$$\cos(\angle AOH)=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\angle AOH=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<\angle AOH<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \angle AOB=2\angle AOH=\frac{2}{3}\pi$$

따라서 접힌 활꼴의 호의 길이는 $\widehat{AB}$의 길이와 같으므로

$$4\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi$$

답 $\frac{8}{3}\pi$

26 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 둘레의 길이가 18이므로 호의 길이는 $\quad 18-2r$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}r(18-2r)=-r^2+9r$$

$$=-\left(r-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{4}\ \underline{(0<r<9)}$$

$r>0$, $18-2r>0$이므로 $0<r<9$

따라서 $r=\frac{9}{2}$일 때 S가 최대이므로 구하는 최댓값은 $\frac{81}{4}$이다.

답 ②

27 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 둘레의 길이가 24이므로 호의 길이는 $\quad 24-2r$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}r(24-2r)=-r^2+12r$$

$$=-(r-6)^2+36\ (0<r<12)$$

따라서 $r=6$일 때 S는 최댓값 36을 갖는다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$이므로

$$36=\frac{1}{2}\cdot6^2\cdot\theta \qquad \therefore \theta=2$$

답 2

28 부채꼴의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m라 하면 부채꼴의 둘레의 길이는 $\quad (l+2r)$ m

이때 부채꼴의 넓이가 64 m²이므로

$\frac{1}{2}rl=64 \qquad \therefore rl=128$ ⋯ ❶

$l>0$, $2r>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$l+2r\geq2\sqrt{l\cdot2r}$$

$$=2\cdot16=32\ (\text{단, 등호는 } \underline{l=2r}\text{일 때 성립})$$

$rl=128$이므로 $r^2=64$ $\quad\therefore r=8\ (\because r>0)$

즉 화단의 둘레의 길이의 최솟값은 32 m이다. ⋯ ❷

답 32 m

채점 기준	비율
❶ 부채꼴의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m라 하면 r, l에 대한 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❷ 화단의 둘레의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

29 $\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$이므로

$$\sin\theta=-\frac{3}{5},\ \cos\theta=-\frac{4}{5},\ \tan\theta=\frac{3}{4}$$

$$\therefore 5\sin\theta+5\cos\theta-4\tan\theta=5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+5\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-4\cdot\frac{3}{4}$$

$$=-3-4-3=-10$$

답 -10

30 점 $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ a\right)$에서 $\tan\theta=\dfrac{a}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$이므로

$$\frac{a}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\sqrt{3} \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$$

따라서 점 P의 좌표가 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이므로

$$r=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$$

$$\therefore ar=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

답 ②

31 θ가 제4사분면의 각이므로 각 θ를 나타내는 동경을 OP라 할 때, $\tan\theta=\frac{-\sqrt{7}}{3}$에서 점 P의 좌표를 $(3a,\ -\sqrt{7}a)\ (a>0)$로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(3a)^2+(-\sqrt{7}a)^2}=4a$ ($\because$ $a>0$)이므로

$$\sin\theta=\frac{-\sqrt{7}a}{4a}=-\frac{\sqrt{7}}{4},\ \cos\theta=\frac{3a}{4a}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{3\sqrt{7}}{16}$$

답 ②

다른 풀이 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{7}}{3}$이므로 $\quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{\sqrt{7}}{3}$

$$\therefore\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{7}}{3}\cos\theta \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\quad \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\cos\theta\right)^2+\cos^2\theta=1$

$$\frac{16}{9}\cos^2\theta=1, \qquad \cos^2\theta=\frac{9}{16}$$

이때 θ는 제4사분면의 각이므로 $\quad \cos\theta>0$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{3}{4}$$

㉠에서 $\quad \sin\theta=-\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

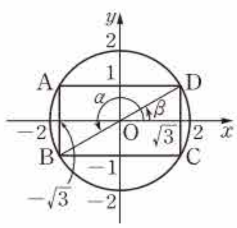
$$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{3\sqrt{7}}{16}$$

32 $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로

$\mathrm{B}(-\sqrt{3},\ -1)$

$\overline{\mathrm{OB}}=2$이므로

$$\sin\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots ❶$$



두 점 B, D가 원점에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{D}(\sqrt{3},\ 1)$

$\overline{\mathrm{OD}}=2$이므로 $\quad \sin\beta=\frac{1}{2},\ \cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots ❷$

$$\therefore\ \sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sin\beta$, $\cos\beta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

33 점 P는 직선 $y=2$와 원 $x^2+y^2=8$의 교점이므로 $x^2+y^2=8$에 $y=2$를 대입하면

$$x^2+2^2=8, \qquad x^2=4 \qquad \therefore\ x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

이때 점 P는 제2사분면 위의 점이므로 $\mathrm{P}(-2,\ 2)$이고 $\overline{\mathrm{OP}}=2\sqrt{2}$이므로

$$\cos\alpha=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

점 Q는 직선 $y=2$와 원 $x^2+y^2=20$의 교점이므로 $x^2+y^2=20$에 $y=2$를 대입하면

$$x^2+2^2=20, \qquad x^2=16 \qquad \therefore\ x=-4 \text{ 또는 } x=4$$

이때 점 Q는 제2사분면 위의 점이므로 $\mathrm{Q}(-4,\ 2)$이고 $\overline{\mathrm{OQ}}=2\sqrt{5}$이므로

$$\sin\beta=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore\ \cos\alpha\sin\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

답 $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

34 (i) $\sin\theta\tan\theta<0$일 때,

$\sin\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta>0$일 때,

$\cos\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제2사분면의 각이다.

답 ②

35 θ가 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta<0$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta+\sin\theta-\cos\theta-\tan\theta$

$=2\sin\theta$

답 $2\sin\theta$

36 $\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta}=-\sqrt{\sin\theta\cos\theta}$이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0$

즉 θ는 제3사분면의 각이므로 $\quad \tan\theta>0$

ㄱ. $\cos\theta+\sin\theta<0$ $\qquad$ ㄴ. $\tan\theta-\cos\theta>0$

ㄷ. $\sin\theta\cos\theta>0$ $\qquad$ ㄹ. $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}<0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

쎈B특강

음수의 제곱근의 성질

실수 a, b에 대하여

① $a<0$, $b<0$이면 $\quad \sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

그 외에는 $\quad \sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$이면 $\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

그 외에는 $\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ (단, $b\neq0$)

37 $\sin\theta\tan\theta<0$에서 $\sin\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르고 $\sin\theta-\tan\theta>0$에서 $\sin\theta>\tan\theta$이므로

$\sin\theta>0,\ \tan\theta<0$

즉 θ는 제2사분면의 각이므로 $\quad \cos\theta<0 \quad \cdots ❶$

따라서 $1-\tan\theta>0$, $\cos\theta+\tan\theta<0$이므로

(주어진 식)

$=-\cos\theta+\sin\theta+1-\tan\theta-\{-(\cos\theta+\tan\theta)\}$

$=\sin\theta+1 \quad \cdots ❷$

답 $\sin\theta+1$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호를 알 수 있다.	50 %
❷ 식을 간단히 할 수 있다.	50 %

38 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

이때 $0<\theta<2\pi$이므로 $\quad \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

① $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 $\quad \sin\theta\tan\theta<0$

② $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 $\quad \frac{\cos\theta}{\tan\theta}<0$

③ $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\quad \frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3}{4}\pi$

즉 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이므로 $\quad \tan\frac{\theta}{2}<0$

④ $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\quad 2\pi<2\theta<3\pi$

즉 2θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이므로

$\sin 2\theta>0$

⑤ $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\quad \frac{3}{2}\pi<\theta+\frac{\pi}{2}<2\pi$

즉 $\theta+\frac{\pi}{2}$는 제4사분면의 각이므로 $\quad \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)>0$

답 ⑤

39 $\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{1-2\sin\theta\cos\theta}-\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}$

$=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}-\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{(\sin\theta-\cos\theta)^2}-\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}-\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=0$

답 0

40 $\cos^2\theta(1-\tan\theta)^2+\cos^2\theta(1+\tan\theta)^2$

$=\cos^2\theta\{(1-\tan\theta)^2+(1+\tan\theta)^2\}$

$=\cos^2\theta(1-2\tan\theta+\tan^2\theta+1+2\tan\theta+\tan^2\theta)$

$=\cos^2\theta(2+2\tan^2\theta)=2\cos^2\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$=2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=2$

답 ④

41 ① $\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta(1-\sin\theta)+\cos^2\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\frac{2\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{2\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=2$

② $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}=\frac{2}{\cos\theta}$

③ $\sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=1-\cos^2\theta-\cos^2\theta$

$=1-2\cos^2\theta$

④ $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta-\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\frac{\sin^2\theta-\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\frac{1}{\sin\theta}$

⑤ $(1-\cos^2\theta)(1+\tan^2\theta)=(1-\cos^2\theta)\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$=(1-\cos^2\theta)\cdot\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\tan^2\theta$

답 ⑤

42 $\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$-\sqrt{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}$

$=|\sin\theta+\cos\theta|-|\sin\theta-\cos\theta|$

$=\sin\theta+\cos\theta-\{-(\sin\theta-\cos\theta)\}$ ($\because 0<\sin\theta<\cos\theta$)

$=2\sin\theta$

답 $2\sin\theta$

43 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\quad \cos\theta=-\frac{12}{13}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}$

$\therefore \frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta=-\frac{13}{12}-\frac{5}{12}=-\frac{3}{2}$

답 $-\frac{3}{2}$

쎈B특강

삼각함수의 값의 부호는 각이 제몇 사분면의 각인지에 따라 달라지므로 $\sin^2\theta$ 또는 $\cos^2\theta$의 값을 이용하여 $\sin\theta$ 또는 $\cos\theta$의 값을 구할 때, 먼저 θ가 제몇 사분면의 각인지 파악하여 $\sin\theta$ 또는 $\cos\theta$의 부호를 정한다.

44 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2=\frac{5}{8}$

이때 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로 $\quad \sin\theta=-\frac{\sqrt{10}}{4}$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{10}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=-\frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\therefore \sqrt{10}\sin\theta-\sqrt{15}\tan\theta=\sqrt{10}\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{4}\right)-\sqrt{15}\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$$
$$=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

45 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$$=\frac{\cos^2\theta+1+2\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$
$$=\frac{2(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}=\frac{2}{\cos\theta}$$

따라서 $\frac{2}{\cos\theta}=-8$이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{4}$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$이므로

$$\sin\theta=-\frac{\sqrt{15}}{4}\ \left(\because \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}}=\sqrt{15}$$

답 ①

46 $\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=2+\sqrt{3}$에서 $1-\tan\theta=(2+\sqrt{3})(1+\tan\theta)$

$(3+\sqrt{3})\tan\theta=-1-\sqrt{3}$

$$\therefore \tan\theta=\frac{-1-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

즉 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\cos\theta=-\sqrt{3}\sin\theta$ …… ㉠

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\sin^2\theta+(-\sqrt{3}\sin\theta)^2=1$

$4\sin^2\theta=1$, $\sin^2\theta=\frac{1}{4}$

이때 θ는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta=\frac{1}{2}$

따라서 ㉠에서

$$\cos\theta=-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

47 $|\sin\theta|=|\cos\theta|$이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$2\sin^2\theta=1$, $\sin^2\theta=\frac{1}{2}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⋯ ❶

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$이므로 ⋯ ❷

$\sin\theta\cos\theta-\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\sin\theta\cos\theta-\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

48 $\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}$

$$=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{(1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta)\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{2(1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}$$

따라서 $\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}=1$이므로 $\sin\theta=2\cos\theta$ …… ㉠

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $(2\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$

$5\cos^2\theta=1$, $\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

이때 θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 ㉠에서

$$\sin\theta=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이므로 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

답 ②

49 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{3}$$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}$

$$\therefore (1-\sin^2\theta)(1-\cos^2\theta)$$
$$=1-\cos^2\theta-\sin^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$=1-1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

답 $\frac{1}{9}$

50 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$$=1-2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

답 ③

51 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta$
$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{9}\right)=\frac{13}{27}$ 답 $\frac{13}{27}$

52 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{5}{18}$ ⋯ ❶

이때

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$=1+2\sin\theta\cos\theta$
$=1+2\cdot\frac{5}{18}=\frac{14}{9}$

이고 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$에서
$\sin\theta+\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{14}}{3}$ ⋯ ❷

$\therefore \sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$
$=-\frac{\sqrt{14}}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2\sqrt{14}}{9}$ ⋯ ❸

답 $\frac{2\sqrt{14}}{9}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sin^2\theta-\cos^2\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

53 $\sin\theta+\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta$의 양변을 제곱하면
$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=4\sin^2\theta\cos^2\theta$
$\therefore 4(\sin\theta\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta-1=0$

$\sin\theta\cos\theta=t$ $(t<0)$로 놓으면

$4t^2-2t-1=0$ $\therefore t=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ $(\because t<0)$

$\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$
$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{4}{1-\sqrt{5}}=-1-\sqrt{5}$

따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로
$-6a+b=5$ 답 5

54 $2x^2+3x+k=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=-\frac{3}{2}$ …… ㉠

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=\frac{k}{2}$ …… ㉡

㉠에서 $2\sin\theta=-\frac{3}{2}$ $\therefore \sin\theta=-\frac{3}{4}$

㉡의 좌변을 간단히 하면

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta$
$=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)$
$=2\sin^2\theta-1$

즉 $2\sin^2\theta-1=\frac{k}{2}$이므로 $\sin\theta=-\frac{3}{4}$을 대입하면

$\frac{9}{8}-1=\frac{k}{2}$ $\therefore k=\frac{1}{4}$ 답 ②

55 $3x^2-\sqrt{3}x+a=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이 식의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{3}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}$ ⋯ ❶

$\therefore (\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$
$=1-2\sin\theta\cos\theta$
$=1-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$

이때 $\sin\theta>\cos\theta$에서 $\cos\theta-\sin\theta<0$이므로

$\cos\theta-\sin\theta=-\frac{\sqrt{15}}{3}$ ⋯ ❷

답 $-\frac{\sqrt{15}}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\cos\theta-\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %

56 $6x^2-2x+k=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$

이 식의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

$\tan\theta$와 $\frac{1}{\tan\theta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 4인 이차방정식은

$4\left\{x^2-\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)x+\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}\right\}=0$

이때

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$
$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{9}{4}$

이므로 구하는 이차방정식은

$4\left\{x^2-\left(-\frac{9}{4}\right)x+1\right\}=0$

$\therefore 4x^2+9x+4=0$ 답 $4x^2+9x+4=0$

06 삼각함수의 그래프

개념 정리

본책 70쪽

❶ 주기 ❷ y축 ❸ 2π ❹ 원점 ❺ π
❻ $\dfrac{2\pi}{|b|}$ ❼ $\tan\theta$ ❽ $-\sin\theta$

쎈B 유형 뽀개기

본책 71쪽

01 함수 $f(x)$의 주기가 p이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x+p)=f(x)$

$\therefore\ f(p)=f(0)=\cos 0+\tan 0+2$

$=1+0+2=3$

답 ⑤

02 조건 (가)에 의하여

$f(32)=f(27)=f(22)=\cdots=f(2)$

조건 (나)에 의하여 $f(2)=\cos 2\pi=1$이므로

$f(32)=1$

답 1

참고 $32=5\cdot 6+2$이므로 $f(32)=f(2)$

03 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x-2)$가 성립하므로 양변에 x 대신 $x+2$를 대입하면

$f(x+4)=f(x)$

즉 함수 $f(x)$는 주기함수이다. ⋯ ❶

따라서

$f(1000)=f(996)=f(992)=\cdots=f(0)=1,$

$f(1001)=f(997)=f(993)=\cdots=f(1)=-1,$

$f(1002)=f(998)=f(994)=\cdots=f(2)=2$

이므로

$f(1000)+f(1001)+f(1002)=1-1+2=2$ ⋯ ❷

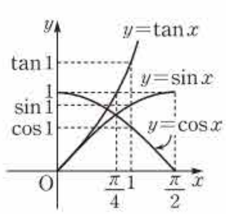
답 2

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 주기함수임을 알 수 있다.	50 %
❷ $f(1000)+f(1001)+f(1002)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

04 $\dfrac{\pi}{4}<1<\dfrac{\pi}{2}$이므로 오른쪽 그림에서

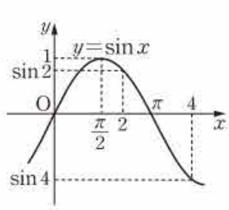
$\cos 1<\sin 1<\tan 1$

답 ③



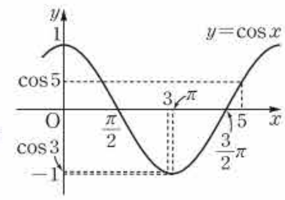
05 ㄱ. $0<\dfrac{\pi}{2}<2<\pi<4$이므로 오른쪽 그림에서

$\sin 4<\underset{\llcorner \sin 0=0}{\underline{\sin 0}}<\sin 2$



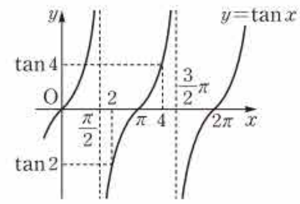
ㄴ. $0<\dfrac{\pi}{2}<3<\pi<\dfrac{3}{2}\pi<5$이므로 오른쪽 그림에서

$\cos 3<\cos 5<\underset{\llcorner \cos 0=1}{\underline{\cos 0}}$



ㄷ. $0<\dfrac{\pi}{2}<2<\pi<4$이므로 오른쪽 그림에서

$\tan 2<\underset{\llcorner \tan 0=0}{\underline{\tan 0}}<\tan 4$



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

06 $A-B=x\cos y+y\cos x-(x\sin x+y\sin y)$

$=x(\cos y-\sin x)+y(\cos x-\sin y)$

$0<x<\dfrac{\pi}{4}$, $0<y<\dfrac{\pi}{4}$인 모든 x, y $(x\neq y)$에 대하여

$\sin x<\cos y$, $\sin y<\cos x$

$\therefore\ \cos y-\sin x>0$, $\cos x-\sin y>0$

따라서 $x(\cos y-\sin x)+y(\cos x-\sin y)>0$이므로

$A-B>0$ $\quad\therefore\ A>B$

답 $A>B$

07 $y=3\sin(2x+\pi)-4=3\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-4$의 그래프는 $y=3\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=-\dfrac{\pi}{2}$, $n=-4$이므로

$mn=2\pi$

답 ⑤

08 $y=\tan 4x-2$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\tan 4x-2$, 즉 $y=-\tan 4x+2$

이 함수의 그래프를 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-5=-\tan 4x+2$ $\quad\therefore\ y=-\tan 4x+7$

따라서 $a=-1$, $b=7$이므로 $\quad b-a=8$

답 ③

쎈B 특강

평행이동·대칭이동한 도형의 방정식

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을
① x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동
 ➡ $f(x-a, y-b)=0$
② x축에 대하여 대칭이동 ➡ $f(x, -y)=0$
③ y축에 대하여 대칭이동 ➡ $f(-x, y)=0$
④ 원점에 대하여 대칭이동 ➡ $f(-x, -y)=0$

09 $y=\cos\dfrac{\pi}{4}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\dfrac{1}{3}$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\cos\frac{\pi}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3} \quad \cdots ❶$$

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{3}{2},\ a\right)$를 지나므로

$$a=\cos\frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}=\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$$
$$=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

10 ㄱ. $y=\cos 3x-5$의 그래프는 $y=\cos 3x$의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄴ. $y=-\cos 3x+2$의 그래프는 $y=\cos 3x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄷ. $y=2\cos(3x+\pi)=2\cos 3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=2\cos 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. $y=\cos(3x-4\pi)=\cos 3\left(x-\frac{4}{3}\pi\right)$의 그래프는 $y=\cos 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}\pi$만큼 평행이동한 것과 같다.

이상에서 $y=\cos 3x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

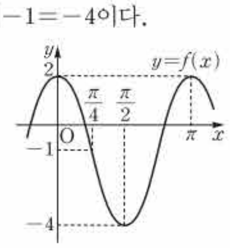
답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

11 ① $f(x)=3\cos 2x-1$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고,

$g(x)=\tan 4x$의 주기는 $\frac{\pi}{4}$이다.

② 최댓값은 $|3|-1=2$, 최솟값은 $-|3|-1=-4$이다.

③ $f(x)=3\cos 2x-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.



④ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(\pi)=-4+2=-2$

⑤ $f(-x)=3\cos(-2x)-1$
$=3\cos 2x-1$

이므로 $\quad f(x)=f(-x)$

답 ③, ⑤

12 $y=4\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=4\sin\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1 \quad \cdots ❶$$

이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로

$a=4$

또 최솟값은 $-|4|+1=-3$이므로

$b=-3 \quad \cdots ❷$

$\therefore a-b=7 \quad \cdots ❸$

답 7

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 삼각함수의 그래프를 평행이동하여도 함수의 주기는 변하지 않는다.

13 $y=\cos 2\pi x+6$의 주기는 $\quad \frac{2\pi}{2\pi}=1$

ㄱ. $y=2\cos\pi x-1$의 주기는 $\quad \frac{2\pi}{\pi}=2$

ㄴ. $y=\sin(2\pi x-3)$의 주기는 $\quad \frac{2\pi}{2\pi}=1$

ㄷ. $y=\tan 2\pi x$의 주기는 $\quad \frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

ㄹ. $y=\tan\pi x+2$의 주기는 $\quad \frac{\pi}{\pi}=1$

이상에서 $y=\cos 2\pi x+6$과 주기가 같은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

14 ㄱ. 함수 $f(x)$의 주기는 $\quad \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

ㄴ. $f(4)=-3\tan\pi-2=-2$이므로 그래프는 점 $(4,\ -2)$를 지난다.

ㄷ. 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 존재하지 않는다.

ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은

$$\frac{\pi}{2}x-\pi=n\pi+\frac{\pi}{2} \qquad \therefore x=2n+3\ (n\text{은 정수})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

15 ① $f(x)$의 주기는 $\quad \frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi}=3$

$\therefore f(x+6)=f(x+3)=f(x)$

② $f(x)$의 주기는 $\quad \frac{2\pi}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{4}{3}$

이때

$$f(x+6)=f\left(x+\frac{14}{3}\right)=f\left(x+\frac{10}{3}\right)$$
$$=f(x+2)=f\left(x+\frac{2}{3}\right)=f\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

이므로 $\quad f(x+6)\ne f(x)$

③ $f(x)$의 주기는 $\quad \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$

$\therefore f(x+6)=f(x)$

④ $f(x)$의 주기는 $\quad \frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$

$$\therefore f(x+6)=f\left(x+\frac{16}{3}\right)=f\left(x+\frac{14}{3}\right)$$
$$=\cdots=f\left(x+\frac{2}{3}\right)=f(x)$$

⑤ $f(x)$의 주기는 $\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

$\therefore f(x+6)=f(x+4)=f(x+2)=f(x)$

답 ②

참고 $f(x+6)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 주기는 $\dfrac{6}{n}$ (n은 자연수)이다.

16 조건 (가)에서 $f(x)$의 최댓값이 -4이고 $a>0$이므로

$|a|+c=-4$

$a+c=-4$ ······ ㉠

조건 (나)에서 $f(x)$의 주기가 6π이고 $b>0$이므로

$\dfrac{2\pi}{b}=6\pi \qquad \therefore b=\dfrac{1}{3}$ $\quad \dfrac{2\pi}{|b|}=6\pi$

$\therefore f(x)=a\cos\dfrac{x}{3}+c$

조건 (다)에서 $f(\pi)=-5$이므로

$a\cos\dfrac{\pi}{3}+c=-5 \qquad \therefore \dfrac{a}{2}+c=-5$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ c=-6$

$\therefore abc=-4$

답 -4

17 $f(x)=a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+k$의 최솟값이 $-\dfrac{5}{2}$이고 $a<0$이므로

$a+k=-\dfrac{5}{2}$ ······ ㉠

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$이므로

$a\sin\pi+k=-\dfrac{1}{2} \qquad \therefore k=-\dfrac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면

$a-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2} \qquad \therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{1}{2}$이므로 $f(x)$의 최댓값은

$2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

답 $\dfrac{3}{2}$

18 $y=3\tan(ax+b)+1$의 주기가 2π이고 $a>0$이므로

$\dfrac{\pi}{a}=2\pi \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

따라서 함수 $y=3\tan\left(\dfrac{1}{2}x+b\right)+1$의 그래프의 점근선의 방정식은

$\dfrac{1}{2}x+b=l\pi+\dfrac{\pi}{2}, \qquad \dfrac{1}{2}x=l\pi+\dfrac{\pi}{2}-b$

$\therefore x=2l\pi+\pi-2b$ (l은 정수)

이 방정식이 $x=2n\pi$와 일치하므로

$\pi-2b=2k\pi$ (k는 정수)

이때 $0<b<\pi$이므로 $\quad b=\dfrac{\pi}{2}$

$k=0$일 때, $\pi-2b=0$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\pi$

답 ③

19 조건 (가)에서 $f(x)$의 주기가 π이고 $b>0$이므로

$\dfrac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$ ··· ❶

$f(x)=a\cos(2x+c)+d=a\cos2\left(x+\dfrac{c}{2}\right)+d$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $y=a\cos2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{c}{2}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이다.

즉 조건 (나)에서 $\quad -\dfrac{c}{2}=\dfrac{\pi}{6},\ d=4$

$\therefore c=-\dfrac{\pi}{3},\ d=4$ ··· ❷

조건 (다)에서 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=3$이므로

$a\cos\dfrac{\pi}{3}+4=3$

$\dfrac{1}{2}a+4=3 \qquad \therefore a=-2$ ··· ❸

따라서 $f(x)=-2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+4$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\cos0+4=-2+4=2$ ··· ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ c, d의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

20 주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로

$a=3$

또 주기가 $\dfrac{7}{12}\pi-\left(-\dfrac{5}{12}\pi\right)=\pi$이고 $b>0$이므로

$\dfrac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$

따라서 주어진 함수는 $y=3\cos(2x+c)$이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\dfrac{\pi}{12},\ 0\right)$을 지나므로

$0=3\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+c\right)$

$\therefore \cos\left(\dfrac{\pi}{6}+c\right)=0$

이때 $0<c<\pi$에서 $\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{6}+c<\dfrac{7}{6}\pi$이므로

$\dfrac{\pi}{6}+c=\dfrac{\pi}{2} \qquad \therefore c=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore abc=2\pi$

답 ⑤

21 주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$a+b=3,\ -a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=1$

따라서 주어진 함수는 $y=2\sin\pi\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+1$이고, 이 함수의 그래프의 주기가 $2\left(c-\dfrac{5}{6}\right)$이므로

$\dfrac{2\pi}{\pi}=2\left(c-\dfrac{5}{6}\right) \qquad \therefore c=\dfrac{11}{6}$

$\therefore a+3b+6c=2+3+11=16$

답 ⑤

22 $f(x)=a\sin bx+c$ 또는 $f(x)=a\cos bx+c$ $(a>0,\ b>0)$로 놓으면 함수 $f(x)$의 최댓값이 2, 최솟값이 -4이고 $a>0$이므로

$a+c=2,\ -a+c=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ c=-1$

또 주기가 π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$

$\therefore f(x)=3\sin 2x-1$ 또는 $f(x)=3\cos 2x-1$

그런데 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 구하는 함수 $f(x)$는 ③이다.

답 ③

23 주어진 그래프의 주기가 $\frac{\pi}{4}$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{4} \qquad \therefore a=4$ ··· ❶

따라서 주어진 함수는 $y=\tan(4x+b)$이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{8},\ 0\right)$을 지나므로

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+b\right)=0$

이때 $0<b<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+b<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\frac{\pi}{2}+b=\pi \qquad \therefore b=\frac{\pi}{2}$ ··· ❷

$\therefore ab=2\pi$ ··· ❸

답 2π

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

24 함수 $f(x)$의 최댓값이 -1, 최솟값이 -5이고 $a>0$이므로

$a+d=-1,\ -a+d=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ d=-3$

또 주어진 그래프의 주기가 $2\cdot\{2-(-2)\}=8$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=8 \qquad \therefore b=\frac{\pi}{4}$

따라서 $f(x)=2\cos\frac{\pi}{4}(x-c)-3$이고, 이 함수의 그래프가 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$2\cos\frac{\pi}{4}(2-c)-3=-1$

$\therefore \cos\frac{\pi}{4}(2-c)=1$

이때 $0<c<4$에서 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}(2-c)<\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{4}(2-c)=0, \qquad 2-c=0 \qquad \therefore c=2$

따라서 $f(x)=2\cos\frac{\pi}{4}(x-2)-3$이므로

$f(3)=2\cos\frac{\pi}{4}-3=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-3=\sqrt{2}-3$

답 $\sqrt{2}-3$

25 주어진 그래프에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $10,\ -10$이고, 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $4,\ -4$이다.

이때 두 함수의 주기가 모두 24이므로 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{2}{5}$배한 후 x축의 방향으로 $24n+4$(n은 정수)만큼 평행이동한 것과 같다.

$\therefore a=\frac{2}{5},\ b=24n+4$ (n은 정수)

그런데 $-12<b<12$이므로 $\quad b=4$

$\therefore b-a=\frac{18}{5}$

답 ②

참고 함수 $f(x)$의 주기는 $\quad 12-(-12)=24$

함수 $g(x)$의 주기는 $\quad 16-(-8)=24$

26 $y=\cos x$의 그래프에서 $\quad \frac{a+c}{2}=\pi \qquad \therefore a+c=2\pi$

$y=\sin x$의 그래프에서

$\frac{b+d}{2}=\frac{3}{2}\pi \qquad \therefore b+d=3\pi$

$\therefore \tan(a-b+c-d)=\tan((a+c)-(b+d))$

$=\tan(-\pi)=-\tan\pi=0$

답 0

27 $y=\cos x$의 그래프에서

$\frac{x_1+x_2}{2}=\pi$이므로 $\quad x_1+x_2=2\pi$

$\frac{x_3+x_4}{2}=2\pi+\pi=3\pi$이므로 $\quad x_3+x_4=6\pi$

$\frac{x_5+x_6}{2}=4\pi+\pi=5\pi$이므로 $\quad x_5+x_6=10\pi$

$\vdots$

$\frac{x_{15}+x_{16}}{2}=14\pi+\pi=15\pi$이므로 $\quad x_{15}+x_{16}=30\pi$

답 ④

28 $y=\sin\frac{1}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.

두 점 A, D는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\delta}{2}=\pi \qquad \therefore \alpha+\delta=2\pi$ ··· ❶

두 점 B, C는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\pi \qquad \therefore \beta+\gamma=2\pi$ ··· ❷

$\therefore \alpha-2\beta-2\gamma+\delta=\alpha+\delta-2(\beta+\gamma)$

$=2\pi-2\cdot2\pi=-2\pi$ ··· ❸

답 -2π

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\delta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\alpha-2\beta-2\gamma+\delta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 두 점 A, B는 점 $(0,\ 0)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=0 \qquad \therefore \alpha+\beta=0$

두 점 C, D는 점 $(2\pi,\ 0)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma+\delta}{2}=2\pi \qquad \therefore \gamma+\delta=4\pi$

두 점 B, C는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\beta+\gamma}{2}=\pi \qquad \therefore \beta+\gamma=2\pi$$

$$\therefore \alpha-2\beta-2\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)-3(\beta+\gamma)$$
$$=0+4\pi-6\pi=-2\pi$$

29 $y=3\sin\frac{\pi}{6}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$이므로 두 점 B, C는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

이때 $\overline{\mathrm{BC}}=4$이므로 $\quad$ B(1, 0), C(5, 0)

$x=1$일 때 $y=3\sin\frac{\pi}{6}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이므로

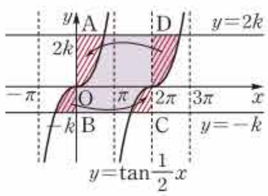
$$\mathrm{A}\left(1, \frac{3}{2}\right)$$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$2\left(4+\frac{3}{2}\right)=11$$

답 ⑤

30 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 각각 같으므로 $y=\tan\frac{1}{2}x\,(-\pi<x<3\pi)$의 그래프와 두 직선 $y=2k$, $y=-k$로 둘러싸인 도형의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



$\overline{\mathrm{AB}}=3k$, $\overline{\mathrm{AD}}=2\pi$이므로 직사각형 ABCD의 넓이는

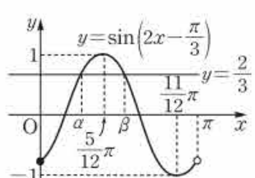
$$6k\pi$$

즉 $6k\pi=18\pi$이므로 $\qquad k=3$

답 3

31 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x<\pi$에서 함수 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}$는 오른쪽 그림과 같으므로



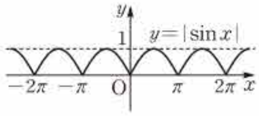
$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{5}{12}\pi$$

$$\therefore \frac{\alpha+\beta}{5}=\frac{\pi}{6}$$

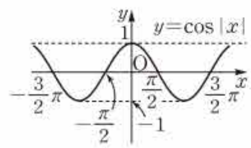
$$\therefore \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{5}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

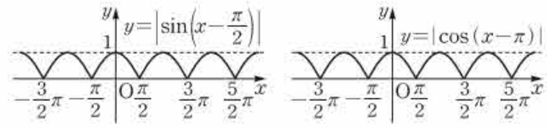
32 ㄱ. $y=|\sin x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. $y=\cos|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



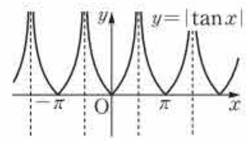
ㄷ. $y=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|$의 그래프는 $y=|\sin x|$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이고, $y=|\cos(x-\pi)|$의 그래프는 $y=|\cos x|$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이므로 두 함수의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



이상에서 두 함수의 그래프가 일치하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

33 $y=|\tan x|$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



① 주기가 π인 주기함수이다.

② 최댓값은 존재하지 않고, 최솟값은 0이다.

④ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

⑤ 정의역은 $x\ne n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이다.

답 ③

34 함수 $f(x)=3|\sin 4(x-\pi)|-2$의 주기는 $y=|\sin 4x|$의 주기와 같으므로

$$a=\frac{\pi}{4}$$

$0\le|\sin 4(x-\pi)|\le1$이므로

$$0\le3|\sin 4(x-\pi)|\le3$$

$$\therefore -2\le3|\sin 4(x-\pi)|-2\le1$$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -2이므로

$$b=1,\ c=-2$$

$$\therefore abc=-\frac{\pi}{2}$$

답 ③

쎈B특강

절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 주기

① $y=|\sin x|$의 주기: π

➡ $y=|\sin bx|$의 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

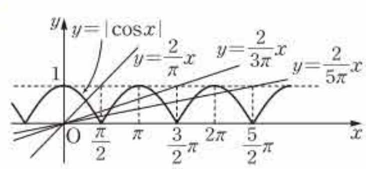
② $y=|\cos x|$의 주기: π

➡ $y=|\cos bx|$의 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

③ $y=|\tan x|$의 주기: π

➡ $y=|\tan bx|$의 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

35



앞의 그림에서 함수 $y=|\cos x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{\pi}x$, 즉 $y=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}x$의 교점의 개수는 1이므로

$f(1)=1$

함수 $y=|\cos x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3\pi}x$, 즉 $y=\frac{1}{\frac{3}{2}\pi}x$의 교점의 개수는 3이므로

$f(3)=3$

함수 $y=|\cos x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{5\pi}x$, 즉 $y=\frac{1}{\frac{5}{2}\pi}x$의 교점의 개수는 5이므로

$f(5)=5$

$\therefore f(1)+f(3)+f(5)=9$ 답 9

36 $\sin\frac{5}{3}\pi=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{3}{4}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

$\cos\left(-\frac{8}{3}\pi\right)=\cos\frac{8}{3}\pi=\cos\left(3\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\therefore$ (주어진 식)$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-1)-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

37 $\cos 80°=\cos(90°\times1-10°)=\sin 10°=0.1736$

$\tan 200°=\tan(90°\times2+20°)=\tan 20°=0.3640$

$\therefore \cos 80°+\tan 200°=0.1736+0.3640$

$=0.5376$ 답 ⑤

38 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\cos\left(5\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

39 $\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$, $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$이므로

$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)\div\cos(\pi+\theta)=\frac{4}{3}$에서

$-\frac{1}{\tan\theta}\cdot\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{4}{3}$, $\quad -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{4}{3}$

$\therefore \sin\theta=\frac{3}{4}$

$\therefore 40(1-\sin\theta)=40\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)=40\cdot\frac{1}{4}=10$ 답 ②

40 ㄱ. $\sin 300°=\sin(90°\times3+30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 420°=\cos(90°\times4+60°)=\cos 60°=\frac{1}{2}$

$\tan 225°=\tan(90°\times2+45°)=\tan 45°=1$

$\therefore \sqrt{3}\sin 300°+\cos 420°-\tan 225°$

$=\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}-1$

$=-2$

ㄴ. $\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\cos\frac{13}{3}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\tan\frac{7}{4}\pi=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

$\therefore \sin\frac{5}{6}\pi+\cos\frac{13}{3}\pi+\tan\frac{7}{4}\pi=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+(-1)=0$

ㄷ. $\tan 75°=\tan(90°-15°)=\frac{1}{\tan 15°}$

$\tan 105°=\tan(90°+15°)=-\frac{1}{\tan 15°}$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\left(\tan 15°+\frac{1}{\tan 15°}\right)^2-\left(\tan 15°-\frac{1}{\tan 15°}\right)^2$

$=4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

41 $\sin(2\pi+\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos(2\pi-\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\sin\theta\cdot\cos\theta-\cos\theta\cdot(-\sin\theta)$

$=2\sin\theta\cos\theta$ ...... ㉠ ➊

직선 $y=-\frac{4}{3}x$의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이므로

$\tan\theta=-\frac{4}{3}$, $\quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$

$\therefore \sin\theta=-\frac{4}{3}\cos\theta$ ...... ㉡

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\quad \left(-\frac{4}{3}\cos\theta\right)^2+\cos^2\theta=1$

$\frac{25}{9}\cos^2\theta=1 \quad \therefore \cos^2\theta=\frac{9}{25}$

이때 $a<0$에서 점 $P(a, b)$는 제2사분면 위의 점이므로

$\cos\theta=-\frac{3}{5}$

㉡에서 $\quad \sin\theta=-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}$ ➋

따라서 ㉠에서

$\sin(2\pi+\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos(2\pi-\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$ ➌

답 $-\frac{24}{25}$

채점 기준	비율
➊ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	30 %
➋ $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
➌ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

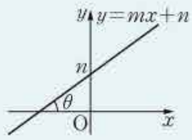
쎈B특강

직선의 기울기

직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때,

$m=\tan\theta$

이다.



42 $\sin\frac{\pi}{10}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{10}\pi\right)=\cos\frac{4}{10}\pi$

$\sin\frac{2}{10}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{10}\pi\right)=\cos\frac{3}{10}\pi$

$\therefore \sin^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{2}{10}\pi+\sin^2\frac{3}{10}\pi+\sin^2\frac{4}{10}\pi+\sin^2\frac{5}{10}\pi$

$=\left(\sin^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{4}{10}\pi\right)+\left(\sin^2\frac{2}{10}\pi+\sin^2\frac{3}{10}\pi\right)$

$+\sin^2\frac{5}{10}\pi$

$=\left(\cos^2\frac{4}{10}\pi+\sin^2\frac{4}{10}\pi\right)+\left(\cos^2\frac{3}{10}\pi+\sin^2\frac{3}{10}\pi\right)$

$+\sin^2\frac{\pi}{2}$

$=1+1+1=3$

답 3

43 $\tan 80^\circ=\tan(90^\circ-10^\circ)=\frac{1}{\tan 10^\circ}$

$\tan 70^\circ=\tan(90^\circ-20^\circ)=\frac{1}{\tan 20^\circ}$

$\tan 60^\circ=\tan(90^\circ-30^\circ)=\frac{1}{\tan 30^\circ}$

$\tan 50^\circ=\tan(90^\circ-40^\circ)=\frac{1}{\tan 40^\circ}$

$\therefore \tan 10^\circ\times\tan 20^\circ\times\cdots\times\tan 70^\circ\times\tan 80^\circ$

$=\tan 10^\circ\times\tan 20^\circ\times\tan 30^\circ\times\tan 40^\circ$

$\times\frac{1}{\tan 40^\circ}\times\frac{1}{\tan 30^\circ}\times\frac{1}{\tan 20^\circ}\times\frac{1}{\tan 10^\circ}$

$=1$

답 1

44 $10\theta=\frac{\pi}{2}$에서 $5\theta=\frac{\pi}{4}$이고

$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-9\theta\right)=\sin 9\theta$,

$\cos 2\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-8\theta\right)=\sin 8\theta$,

$\cos 3\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-7\theta\right)=\sin 7\theta$,

$\cos 4\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-6\theta\right)=\sin 6\theta$

$\therefore \cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2 8\theta+\cos^2 9\theta$

$=\sin^2 9\theta+\sin^2 8\theta+\sin^2 7\theta+\sin^2 6\theta+\cos^2 5\theta+\cos^2 6\theta$

$+\cos^2 7\theta+\cos^2 8\theta+\cos^2 9\theta$

$=(\sin^2 9\theta+\cos^2 9\theta)+(\sin^2 8\theta+\cos^2 8\theta)$

$+(\sin^2 7\theta+\cos^2 7\theta)+(\sin^2 6\theta+\cos^2 6\theta)+\cos^2\frac{\pi}{4}$

$=1+1+1+1+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

답 $\frac{9}{2}$

45 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle C=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3$

$\therefore \sin(2\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

$2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha$

$=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

46 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

$A+B+C=\pi$, $B=C$

ㄱ. $A+2B=\pi$에서

$\sin\frac{A}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$

ㄴ. $A+2C=\pi$에서

$\cos A=\cos(\pi-2C)=-\cos 2C$

ㄷ. $A+2C=\pi$에서

$\tan 2A=\tan(2\pi-4C)=-\tan 4C$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

47 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$이므로 주어진 식은

$\sin^2\alpha+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\tan^2\alpha=2$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\tan^2\alpha=2$

$1+\tan^2\alpha=2$, $\tan^2\alpha=1$

$\therefore \tan\alpha=1\left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

즉 $\alpha=\frac{\pi}{4}$이므로 직각삼각형 POA에서

$\overline{OA}=\overline{OP}\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{AP}=\overline{OP}\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \triangle POA=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

48 $\cos\alpha=\frac{4}{5}>0$에서 α는 예각이므로

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$ ··· ❶

한편 사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $\alpha+\beta=\pi$

$\therefore \tan\alpha+\sin\beta=\tan\alpha+\sin(\pi-\alpha)$

$=\tan\alpha+\sin\alpha$

$=\frac{3}{4}+\frac{3}{5}=\frac{27}{20}$ ··· ❷

답 $\frac{27}{20}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\alpha$, $\tan\alpha$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\tan\alpha+\sin\beta$의 값을 구할 수 있다.	50 %

참고 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

49 $-1\le\sin x\le 1$이므로 $\sin x-3<0$

$\therefore y=\sin x-3+k$

따라서 주어진 함수의

최댓값은 $1-3+k=-2+k$

최솟값은 $-1-3+k=-4+k$

따라서 $(-2+k)+(-4+k)=-4$이므로

$-6+2k=-4 \quad \therefore k=1$

답 1

50 $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$이므로

$y=-\cos x-3\cos x+1=-4\cos x+1$

$-1\le\cos x\le1$이므로 $\quad -3\le-4\cos x+1\le5$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 5, 최솟값은 -3이므로

$M=5,\ m=-3$

$\therefore M+m=2$

답 ②

51 $-1\le\cos 5x\le1$이므로 $\quad \cos 5x-2<0$

$\therefore y=-a\cos 5x+2a+b$

$a>0$이므로 주어진 함수의

최댓값은 $a+2a+b=3a+b$

최솟값은 $-a+2a+b=a+b$

따라서 $3a+b=10,\ a+b=4$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=1$

$\therefore ab=3$

답 ②

52 $y=\dfrac{-\sin x+4}{\sin x+2}$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=\dfrac{-t+4}{t+2}=\dfrac{-(t+2)+6}{t+2}=\dfrac{6}{t+2}-1$

오른쪽 그림에서

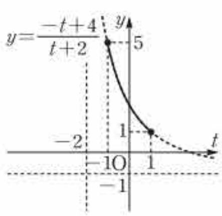
$t=-1$일 때 최댓값은 5,

$t=1$일 때 최솟값은 1

이므로 $\quad M=5,\ m=1$

$\therefore M-m=4$

답 ④



쎈B특강

함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\ne0)$의 그래프

함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\ne0)$의 그래프는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

53 $y=\dfrac{2\tan x+1}{\tan x+1}$에서 $\underline{\tan x=t}$로 놓으면 $0\le t\le1$이고

└ $0\le x\le\frac{\pi}{4}$이므로 $0\le\tan x\le1$

$y=\dfrac{2t+1}{t+1}=\dfrac{2(t+1)-1}{t+1}=-\dfrac{1}{t+1}+2$

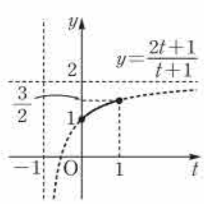
오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 최댓값 $\frac{3}{2}$을

가지므로 $\quad b=\frac{3}{2}$

한편 $t=1$, 즉 $\tan x=1$에서

$x=\frac{\pi}{4}\ \left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$

이므로 $\quad a=\frac{\pi}{4}$



$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\pi}{6}$

답 $\frac{\pi}{6}$

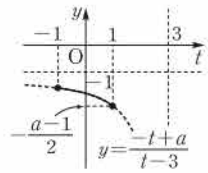
54 $y=\dfrac{-\cos x+a}{\cos x-3}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=\dfrac{-t+a}{t-3}=\dfrac{-(t-3)+a-3}{t-3}=\dfrac{a-3}{t-3}-1$

이때 $a>3$에서 $a-3>0$이므로

$y=\dfrac{-t+a}{t-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과

같다.



$t=1$일 때 최솟값 $-\dfrac{a-1}{2}$을 가지므로

$-\dfrac{a-1}{2}=-2 \quad \therefore a=5$

따라서 $y=\dfrac{-t+5}{t-3}$이므로 $t=-1$일 때 최댓값은 $-\frac{3}{2}$이다.

답 ②

55 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=-\cos x$이므로

$y=\dfrac{2\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)}{\cos x+3}=\dfrac{-2\cos x}{\cos x+3}$ ··· ❶

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=\dfrac{-2t}{t+3}=\dfrac{-2(t+3)+6}{t+3}=\dfrac{6}{t+3}-2$

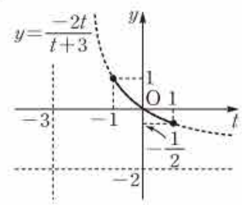
오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값은 1,

$t=1$일 때 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ ··· ❷

이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ ··· ❸



답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $\cos x$에 대한 함수로 변형할 수 있다.	30 %
❷ 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	60 %
❸ 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10 %

56 $y=-2\cos^2 x+4\sin x+1$

$=-2(1-\sin^2 x)+4\sin x+1$

$=2\sin^2 x+4\sin x-1$

$\sin x=t$로 놓으면 $-\pi\le x\le\pi$에서 $-1\le t\le1$이고

$y=2t^2+4t-1=2(t+1)^2-3$

오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 최댓값 5를

가지므로

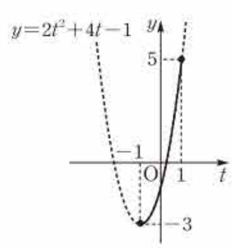
$b=5$

한편 $t=1$, 즉 $\sin x=1$에서

$x=\frac{\pi}{2}\ (\because -\pi\le x\le\pi)$

이므로 $\quad a=\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=\frac{5}{2}\pi$



답 ④

57 $y=-\sin^2 x+\sin x-1$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=-t^2+t-1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$$

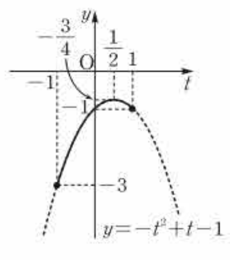
오른쪽 그림에서

$t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $-\frac{3}{4}$,

$t=-1$일 때 최솟값은 -3

이므로 $M=-\frac{3}{4}$, $m=-3$

$\therefore M-m=\frac{9}{4}$ 답 $\frac{9}{4}$



58 $y=a\sin^2 x-a\cos x+b$

$=a(1-\cos^2 x)-a\cos x+b$

$=-a\cos^2 x-a\cos x+a+b$ ⋯ ❶

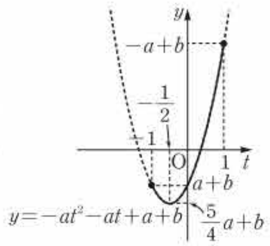
$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=-at^2-at+a+b=-a\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a+b$$

$a<0$이므로 오른쪽 그림에서

$t=1$일 때 최댓값은 $-a+b$,

$t=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{5}{4}a+b$ ⋯ ❷



따라서

$-a+b=3$, $\frac{5}{4}a+b=-\frac{3}{2}$

이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=1$

$\therefore ab=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $\cos x$에 대한 함수로 변형할 수 있다.	20 %
❷ 최댓값과 최솟값을 a, b로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	30 %

59 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$, $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$이므로

$y=\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+2\sin^2\theta+4\cos(\theta+\pi)$

$=\cos^2\theta+2\sin^2\theta-4\cos\theta$

$=\cos^2\theta+2(1-\cos^2\theta)-4\cos\theta$

$=-\cos^2\theta-4\cos\theta+2$

$\cos\theta=t$로 놓으면 $-\frac{\pi}{2}\le\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0\le t\le 1$이고

$y=-t^2-4t+2=-(t+2)^2+6$

오른쪽 그림에서

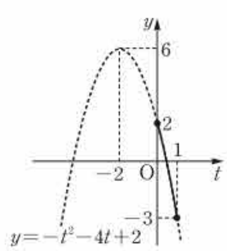
$t=0$일 때 최댓값은 2,

$t=1$일 때 최솟값은 -3

이므로

$M=2$, $m=-3$

$\therefore M-m=5$ 답 ⑤



60 $y=\sin^2 x+2k\cos x-1+6k$

$=(1-\cos^2 x)+2k\cos x-1+6k$

$=-\cos^2 x+2k\cos x+6k$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고

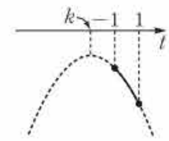
$y=-t^2+2kt+6k=-(t-k)^2+k^2+6k$

$f(t)=-(t-k)^2+k^2+6k$로 놓으면

(i) $k<-1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(-1)$이므로

$-1+4k=-9$

$\therefore k=-2$



(ii) $-1\le k\le 1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(k)$이므로

$k^2+6k=-9$

$(k+3)^2=0$

$\therefore k=-3$

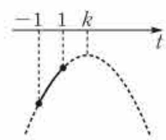
그런데 $k=-3$은 $-1\le k\le 1$을 만족시키지 않는다.

(iii) $k>1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(1)$이므로

$-1+8k=-9$

$\therefore k=-1$

그런데 $k=-1$은 $k>1$을 만족시키지 않는다.



이상에서 $k=-2$이고 $f(t)$는 $t=-1$, 즉 $\cos x=-1$일 때 최댓값을 가지므로

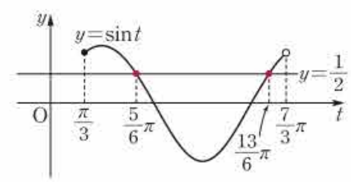
$x=\pi$ ($\because 0\le x<2\pi$)

$\therefore \alpha=\pi$ 답 $\alpha=\pi$, $k=-2$

61 $2x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$이고, 주어진 방정식은

$\sin t=\frac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$이므로



$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{13}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{11}{12}\pi=\frac{7}{6}\pi$ 답 $\frac{7}{6}\pi$

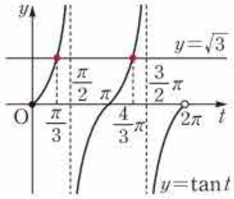
62 $\tan\frac{x}{2}-\sqrt{3}=0$에서

$\tan\frac{x}{2}=\sqrt{3}$

$\frac{x}{2}=t$로 놓으면 $0\le x<4\pi$에서 $0\le t<2\pi$이고, 주어진 방정식은

$\tan t=\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le t<2\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$이므로



$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{x}{2}=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{8}{3}\pi$

따라서 $\alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi+\frac{8}{3}\pi=\frac{10}{3}\pi$이므로

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\frac{10}{3}\pi=\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ②

63 $2\log\sin x$, $2\log\cos x$에서 진수의 조건에 의하여

$\sin x>0$, $\cos x>0$

$\therefore 0<x<\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<x<2\pi$) ⋯ ❶

$2\log\sin x-2\log\cos x=\log 3$에서

$2\log\frac{\sin x}{\cos x}=\log 3$

따라서 $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2=3$이므로

$\tan^2 x=3$

$\therefore \tan x=\sqrt{3}$ $\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ ⋯ ❷

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ ⋯ ❸

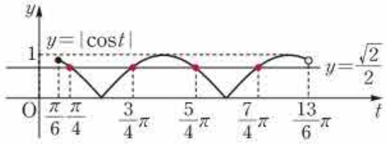
답 $x=\frac{\pi}{3}$

채점 기준	비율
❶ 진수의 조건을 이용하여 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\tan x$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 방정식의 해를 구할 수 있다.	20 %

64 $x+\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{6}\le t<\frac{13}{6}\pi$이고, 주어진 방정식은

$|\cos t|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{6}\le t<\frac{13}{6}\pi$에서 함수 $y=|\cos t|$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이므로



$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}\pi$ 또는

$x+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{4}\pi$

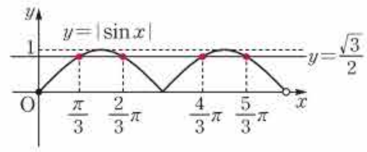
$\therefore x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{7}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{19}{12}\pi$

따라서 $M=\frac{19}{12}\pi$, $m=\frac{\pi}{12}$이므로

$M+m=\frac{5}{3}\pi$

답 ②

65 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의



x좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$이므로 방정식 $|\sin x|=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

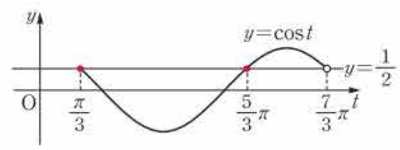
⋯⋯ ㉠

$2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$에서 $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$이고, 방정식은

$\cos t=\frac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이므로



$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 연립방정식의 해는

$x=\frac{4}{3}\pi$

답 $x=\frac{4}{3}\pi$

66 $\pi\cos x=t$로 놓으면 $-\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}$에서

$0\le\cos x\le 1$ $\therefore 0\le t\le\pi$

이때 주어진 방정식은 $\sin t=1$이므로

$t=\frac{\pi}{2}$

즉 $\pi\cos x=\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 두 근의 차는

$\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi$

답 ③

67 $2\sin^2 x-\cos x-1=0$에서

$2(1-\cos^2 x)-\cos x-1=0$

$\therefore 2\cos^2 x+\cos x-1=0$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고, 주어진 방정식은 $2t^2+t-1=0$

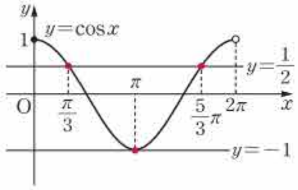
$(t+1)(2t-1)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

$\therefore \cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

(i) $\cos x=-1$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\pi$



(ii) $\cos x=\frac{1}{2}$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(i), (ii)에서 구하는 모든 근의 합은

$\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi=3\pi$ 답 3π

68 $2\sin^2 x+5\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-2$에서

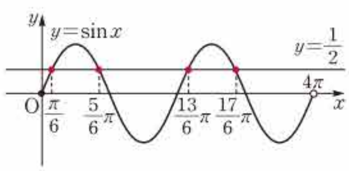
$2\sin^2 x-5\sin x+2=0$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<4\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고, 주어진 방정식은

$2t^2-5t+2=0, \qquad (2t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ ($\because -1\le t\le 1$)

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$



이때 $0\le x<4\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{6}\pi$

따라서 $M=\frac{17}{6}\pi$, $m=\frac{\pi}{6}$이므로

$M-m=\frac{8}{3}\pi$ 답 $\frac{8}{3}\pi$

69 $\cos^2 A+2\sin A=2$에서

$1-\sin^2 A+2\sin A=2$

$\sin^2 A-2\sin A+1=0$

$(\sin A-1)^2=0 \qquad \therefore \sin A=1$

$0<A<\pi$이므로 $\qquad A=\frac{\pi}{2}$ ⋯ ❶

이때 $A+B+C=\pi$이므로

$B+C-2\pi=(\pi-A)-2\pi$

$=-\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{3}{2}\pi$ ⋯ ❷

$\therefore \tan\frac{B+C-2\pi}{2}=\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\tan\frac{3}{4}\pi$

$=-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}$

$=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ A의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $B+C-2\pi$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\tan\frac{B+C-2\pi}{2}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

70 $\sqrt{\sin\theta+1}=\sqrt{3}\cos\theta$의 양변을 제곱하면

$\sin\theta+1=3\cos^2\theta$

$\sin\theta+1=3(1-\sin^2\theta)$

$3\sin^2\theta+\sin\theta-2=0$

$(\sin\theta+1)(3\sin\theta-2)=0$

$\therefore \sin\theta=-1$ 또는 $\sin\theta=\frac{2}{3}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin\theta<1$이므로

$\sin\theta=\frac{2}{3}$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin\theta+1}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 답 ②

다른 풀이 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

71 $4\cos^2 x-3=0$에서 $\qquad \cos^2 x=\frac{3}{4}$

$\therefore \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(i) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때,

$0<x<2\pi$이므로 $\qquad x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(ii) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때,

$0<x<2\pi$이므로 $\qquad x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식을 만족시키는 x의 값은

$\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ …… ㉠

한편 $\sin x\cos x<0$에서 $\sin x$와 $\cos x$의 부호가 다르므로 x는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다. $\sin x>0$, $\cos x<0$ 또는 $\sin x<0$, $\cos x>0$

$\therefore \frac{\pi}{2}<x<\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값은

$\frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ 답 $\frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

72 $3\tan x+\frac{\sqrt{3}}{\tan x}=3+\sqrt{3}$에서 $\tan x\ne 0$이므로 양변에 $\tan x$를 곱하여 정리하면

$3\tan^2 x-(3+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}=0$

$\tan x=t$로 놓으면

$3t^2-(3+\sqrt{3})t+\sqrt{3}=0$

$(t-1)(3t-\sqrt{3})=0$

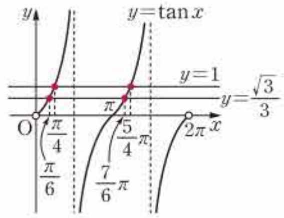
$\therefore t=1$ 또는 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \tan x=1$ 또는 $\tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(i) $\tan x=1$일 때,

$0<x<2\pi$이므로

$x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$



(ii) $\tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때,

$0<x<2\pi$이므로

$x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{7}{6}\pi$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

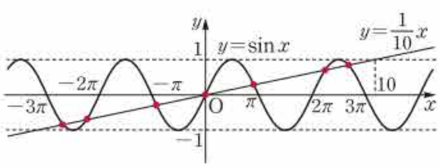
$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5}{4}\pi+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{7}{6}\pi=\dfrac{17}{6}\pi$

따라서 $p=6$, $q=17$이므로

$p+q=23$

답 ⑤

73 방정식 $\sin x=\dfrac{1}{10}x$의 실근은 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{10}x$의 교점의 x좌표와 같다.



위의 그림에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{10}x$의 교점의 개수는 7이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

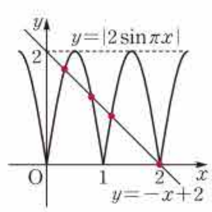
답 ②

참고 $y=\dfrac{1}{10}x$에서 $x>10$이면 $y>1$, $x<-10$이면 $y<-1$이므로 $x>10$ 또는 $x<-10$에서 직선 $y=\dfrac{1}{10}x$는 $y=\sin x$의 그래프와 만나지 않는다.

74 방정식 $|2\sin \pi x|=-x+2$의 실근은 함수 $y=|2\sin \pi x|$의 그래프와 직선 $y=-x+2$의 교점의 x좌표와 같다.

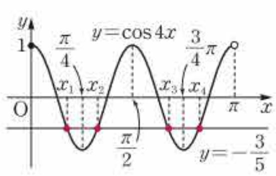
오른쪽 그림에서 함수 $y=|2\sin \pi x|$의 그래프와 직선 $y=-x+2$의 교점의 개수는 4이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

답 4



75 방정식 $\cos 4x=-\dfrac{3}{5}$의 실근은 함수 $y=\cos 4x$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{3}{5}$의 교점의 x좌표와 같다.

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<\pi$에서 함수 $y=\cos 4x$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{3}{5}$의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하면



$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{x_3+x_4}{2}=\dfrac{3}{4}\pi$

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{\pi}{2}$, $x_3+x_4=\dfrac{3}{2}\pi$

따라서 구하는 모든 근의 합은

$x_1+x_2+x_3+x_4=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{2}\pi=2\pi$

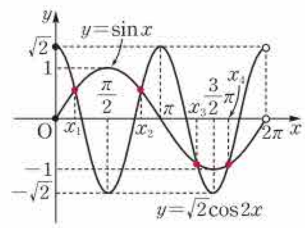
답 2π

76 $\sin x-\sqrt{2}\cos 2x=0$에서

$\sin x=\sqrt{2}\cos 2x$

방정식 $\sin x=\sqrt{2}\cos 2x$의 실근은 두 함수 $y=\sin x$, $y=\sqrt{2}\cos 2x$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=\sqrt{2}\cos 2x$의 그래프의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하면



$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{\pi}{2}$,

$\dfrac{x_3+x_4}{2}=\dfrac{3}{2}\pi$

$\therefore x_1+x_2=\pi$, $x_3+x_4=3\pi$

따라서 구하는 모든 근의 합은

$x_1+x_2+x_3+x_4=\pi+3\pi=4\pi$

답 ③

77 $\cos^2 x+2\sin x-1+a=0$에서

$1-\sin^2 x+2\sin x-1+a=0$

$\therefore \sin^2 x-2\sin x=a$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=\sin^2 x-2\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재해야 한다.

$y=\sin^2 x-2\sin x$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

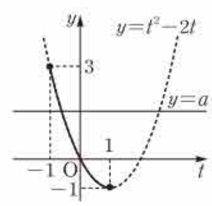
$y=t^2-2t$

$=(t-1)^2-1$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 a의 값의 범위는

$-1\le a\le 3$

답 ④



78 $4\sin^2 x+4\cos(x+\pi)+k=0$에서

$4(1-\cos^2 x)-4\cos x+k=0$

$\therefore k=4\cos^2 x+4\cos x-4$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=4\cos^2 x+4\cos x-4$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

$y=4\cos^2 x+4\cos x-4$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=4t^2+4t-4$

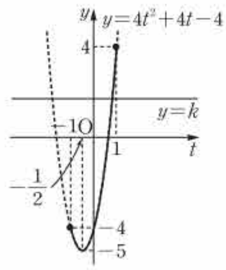
$=4\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-5$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위는

$-5\le k\le 4$

이므로 k의 최솟값은 -5이다.

답 ②



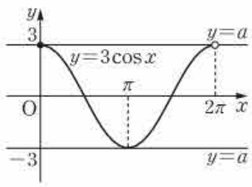
79 $2\cos x=\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)+a$에서

$2\cos x=-\cos x+a \qquad \therefore 3\cos x=a$

따라서 주어진 방정식이 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=3\cos x$의 그래프와 직선 $y=a$가 한 점에서 만나야 한다. ⋯ ❶

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=3\cos x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $y=3\cos x$의 그래프와 직선 $y=a$가 한 점에서 만나려면

$a=-3$ 또는 $a=3$ ⋯ ❷



따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-3\cdot 3=-9$ ⋯ ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ $y=3\cos x$의 그래프와 직선 $y=a$가 한 점에서 만나야 함을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	10 %

80 $x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi$이고, 주어진 부등식은

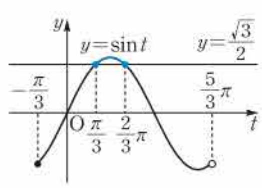
$\sin t\ge \frac{\sqrt{3}}{2}$

오른쪽 그림에서 t의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3}\le t\le \frac{2}{3}\pi$이므로

$\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}\le \frac{2}{3}\pi$

$\therefore \frac{2}{3}\pi\le x\le \pi$

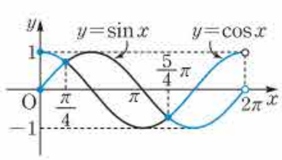


따라서 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\pi$이므로 $\qquad \beta-\alpha=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \cos(\beta-\alpha)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

81 부등식 $\sin x\le\cos x$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프와 만나거나 그 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서



$0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi\le x<2\pi$

따라서 x의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ③이다.

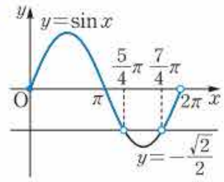
답 ③

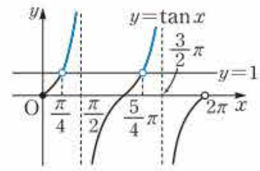
82 $\sin\theta_1=\frac{4}{3}\sin\theta_2\le\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

$\therefore 0<\theta_1\le\frac{\pi}{6}\ \left(\because 0<\theta_1<\frac{\pi}{2}\right)$

답 $0<\theta_1\le\frac{\pi}{6}$

83





위의 그림에서

$A=\left\{x\,\middle|\,0\le x<\frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } \frac{7}{4}\pi<x<2\pi\right\}$,

$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi\right\}$

$\therefore A\cap B=\left\{x\,\middle|\,\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}\right\}$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$이므로 $\qquad \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{\pi}=2$

답 ④

84 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$에서 $2\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$이므로

$2\beta=\frac{\pi}{2}-2\alpha$

$2\sin 2\alpha+\cos 2\beta\ge\frac{3}{2}$에서

$2\sin 2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\ge\frac{3}{2}$

$2\sin 2\alpha+\sin 2\alpha\ge\frac{3}{2}$

$3\sin 2\alpha\ge\frac{3}{2} \qquad \therefore \sin 2\alpha\ge\frac{1}{2}$ ⋯ ❶

$2\alpha=t$로 놓으면 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $0<t<\pi$이고, 주어진 부등식은

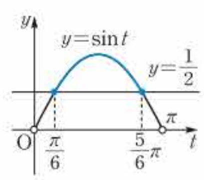
$\sin t\ge\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 t의 값의 범위는

$\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{5}{6}\pi$이므로

$\frac{\pi}{6}\le 2\alpha\le\frac{5}{6}\pi$

$\therefore \frac{\pi}{12}\le\alpha\le\frac{5}{12}\pi$ ⋯ ❷



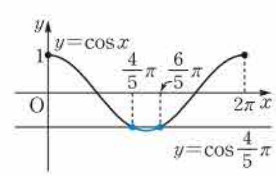
따라서 α의 최댓값은 $\frac{5}{12}\pi$이다. ⋯ ❸

답 $\frac{5}{12}\pi$

채점 기준	비율
❶ 한 종류의 삼각함수에 대한 부등식으로 변형할 수 있다.	50 %
❷ α의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ α의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

85 부등식 $\cos x\le\cos\frac{4}{5}\pi$의 해는 $\quad \frac{4}{5}\pi\le x\le\frac{6}{5}\pi$

$\therefore \frac{\pi}{3}\le\frac{5}{12}x\le\frac{\pi}{2}$



따라서 $\sin\frac{5}{12}x$의 값의 범위는

$$\sin\frac{\pi}{3}\le\sin\frac{5}{12}x\le\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{2}\le\sin\frac{5}{12}x\le1$$

즉 $M=1$, $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$Mm=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

86 $2\cos^2x+3\sin x-3\ge0$에서

$$2(1-\sin^2x)+3\sin x-3\ge0$$

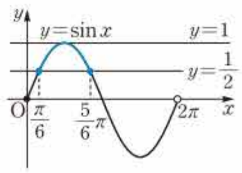
$$2\sin^2x-3\sin x+1\le0$$

$$(2\sin x-1)(\sin x-1)\le0$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\le\sin x\le1$$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$$



이므로 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$

$$\therefore\ \alpha+\beta=\pi$$

답 ④

87 $2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos x-1<0$에서

$$2\sin^2x-\cos x-1<0$$

$$2(1-\cos^2x)-\cos x-1<0$$

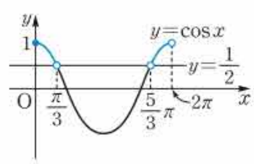
$$2\cos^2x+\cos x-1>0$$

$$(\cos x+1)(2\cos x-1)>0$$

$$\therefore\ \cos x<-1\text{ 또는 }\cos x>\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$$0\le x<\frac{\pi}{3}\text{ 또는 }\frac{5}{3}\pi<x<2\pi$$



답 $0\le x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<x<2\pi$

88 $\sin^2\theta+6\cos\theta\le2a$에서

$$(1-\cos^2\theta)+6\cos\theta\le2a$$

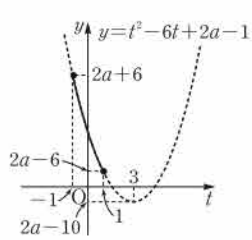
$$\therefore\ \cos^2\theta-6\cos\theta+2a-1\ge0$$

$\cos\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고, 주어진 부등식은

$$t^2-6t+2a-1\ge0$$

$y=t^2-6t+2a-1$이라 하면

$$y=(t-3)^2+2a-10$$



이므로 $-1\le t\le1$에서 $t=1$일 때 최솟값 $2a-6$을 갖는다.

이때 부등식이 항상 성립하려면 $2a-6\ge0$이어야 하므로

$$a\ge3$$

따라서 a의 최솟값은 3이다.

답 ④

89 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차방정식 $x^2+2(2\cos\theta+1)x-6\cos\theta-3=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2\cos\theta+1)^2-(-6\cos\theta-3)<0$$

$$4\cos^2\theta+10\cos\theta+4<0$$

$$2\cos^2\theta+5\cos\theta+2<0$$

$$\therefore\ (2\cos\theta+1)(\cos\theta+2)<0$$

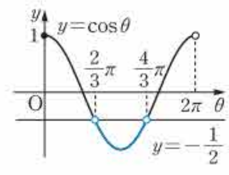
$0\le\theta<2\pi$에서 $\cos\theta+2>0$이므로

$$2\cos\theta+1<0$$

$$\therefore\ \cos\theta<-\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$$\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{4}{3}\pi$$



답 $\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{4}{3}\pi$

90 이차방정식 $x^2-4x+6+2\tan\theta=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(6+2\tan\theta)\ge0$$

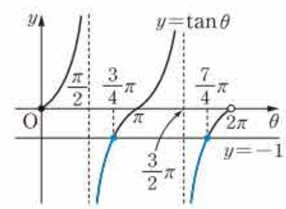
$$-2\tan\theta-2\ge0$$

$$\therefore\ \tan\theta\le-1$$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{2}<\theta\le\frac{3}{4}\pi\text{ 또는}$$

$$\frac{3}{2}\pi<\theta\le\frac{7}{4}\pi$$



이므로 조건을 만족시키는 θ의 값이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

91 주어진 이차함수의 그래프가 x축에 접하려면 이차방정식 $x^2-4x\sin\theta+3-4\sin\theta=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2\sin\theta)^2-(3-4\sin\theta)=0 \quad\cdots❶$$

$$4\sin^2\theta+4\sin\theta-3=0$$

$$(2\sin\theta+3)(2\sin\theta-1)=0$$

$0<\theta<2\pi$에서 $-1\le\sin\theta\le1$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}\text{ 또는 }\theta=\frac{5}{6}\pi \quad\cdots❷$$

따라서 $\theta_1=\frac{\pi}{6}$, $\theta_2=\frac{5}{6}\pi$이므로

$$\theta_2-\theta_1=\frac{2}{3}\pi \quad\cdots❸$$

답 $\frac{2}{3}\pi$

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 θ에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 방정식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\theta_2-\theta_1$의 값을 구할 수 있다.	10 %

92 $y=x^2+2x\cos\theta+\sin^2\theta$

$\quad =(x+\cos\theta)^2-\cos^2\theta+\sin^2\theta$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $\quad(-\cos\theta,\ -\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

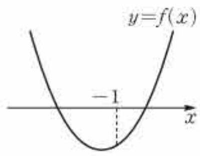
이 점이 직선 $y=3x-1$ 위에 있으려면

$$-\cos^2\theta+\sin^2\theta=3(-\cos\theta)-1$$
$$-\cos^2\theta+(1-\cos^2\theta)=-3\cos\theta-1$$
$$2\cos^2\theta-3\cos\theta-2=0$$
$$(2\cos\theta+1)(\cos\theta-2)=0$$

$0<\theta<2\pi$에서 $-1\le\cos\theta<1$이므로 $\quad \cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$ 답 $\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

93 $f(x)=x^2+6x\cos\theta+2$라 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 -1이 있어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

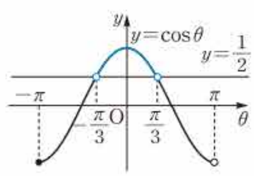


즉 $f(-1)<0$이어야 하므로

$1-6\cos\theta+2<0,\quad -6\cos\theta<-3$

$\therefore\ \cos\theta>\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 구하는 θ의 조건은



$-\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{3}$

답 ③

07 삼각함수의 활용

개념 정리

본책 88쪽

❶ $2R$ ❷ $b^2+c^2-a^2$ ❸ $\sin B$

쎈 B 유형 뽀개기

본책 89쪽

01 사인법칙에 의하여 $\frac{3}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin C}$이므로

$\sin C=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \cos^2 C=1-\sin^2 C=1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$ 답 ⑤

02 $\triangle$ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$c\sin(B+C)=c\sin(\pi-A)=c\sin A \qquad \therefore\ c\sin A=2$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$이므로

$a\sin C=c\sin A \qquad \therefore\ a\sin C=2$

$\therefore\ a\sin C+c\sin A=4$ 답 ⑤

03 $C=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$이므로 $\triangle$APC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{CP}}}{\sin(\angle\mathrm{CAP})}=\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin 30^\circ}=2\overline{\mathrm{AP}} \qquad \cdots ❶$$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이가 최소일 때 $\frac{\overline{\mathrm{CP}}}{\sin(\angle\mathrm{CAP})}$의 값도 최소이다.

$\overline{\mathrm{AP}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$일 때 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이가 최소이므로

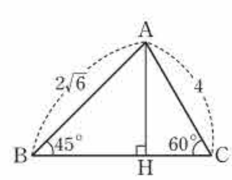
$$\overline{\mathrm{AP}}\ge 3\sqrt{2}\sin 45^\circ=3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3 \qquad \cdots ❷$$

따라서 $\frac{\overline{\mathrm{CP}}}{\sin(\angle\mathrm{CAP})}$의 최솟값은 6이다. $\cdots$ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 $\overline{\mathrm{AP}}$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

04 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle$ABH에서

$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos 45^\circ$

$\quad =2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{3}$

$\triangle$AHC에서

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{AC}}\cos 60^\circ=4\cdot\frac{1}{2}=2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BH}}+\overline{\mathrm{CH}}=2\sqrt{3}+2$

$\angle BAC=180°-(45°+60°)=75°$이므로 $\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{3}+2}{\sin 75°}=\frac{4}{\sin 45°}$$

$$\therefore \sin 75°=\frac{1}{4}\cdot(2\sqrt{3}+2)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

05 $\angle ACD=90°-\angle ADC=\angle BDE$

$\angle ACD=\theta$라 하면 $\triangle ACD$에서 $\overline{AD}=4\sin\theta$이므로

$$\overline{BE}=\overline{AD}=4\sin\theta$$

$\triangle BDE$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BED)}=\frac{\overline{BE}}{\sin(\underbrace{\angle BDE}_{\angle BDE=\angle ACD=\theta})}$$

$$\frac{\overline{BD}}{\sin \underbrace{120°}_{\triangle DEC에서\ \angle BED=90°+30°=120°}}=\frac{4\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore \overline{BD}=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$

06 $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$의 외접원이 같으므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin(\angle DAB)}=\frac{3}{\sin(\angle DAC)}$$

$$\therefore \sin(\angle DAC)=\frac{3}{4}\sin(\angle DAB)$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

07 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2\cdot 6}+\frac{b}{2\cdot 6}+\frac{c}{2\cdot 6}$$

$$=\frac{a+b+c}{12}=\frac{5}{4}$$

$$\therefore a+b+c=15$$

따라서 $\triangle ABC$의 둘레의 길이는 15이다.

답 ④

08 $\triangle ABC$에서 $A+B+C=\pi$이므로

$\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$ ···· ❶

$3\cos A\cos(B+C)=-2$에서

$$3\cos A\cdot(-\cos A)=-2$$

$$-3\cos^2 A=-2,\quad \cos^2 A=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\because 0<A<\pi)$ ···· ❷

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=3\qquad \therefore R=\frac{3}{2}$ ···· ❸

답 $\frac{3}{2}$

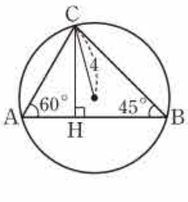
채점 기준	비율
❶ $\cos(B+C)$를 $\cos A$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\sin A$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %

09 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60°}=\frac{\overline{AC}}{\sin 45°}=2\cdot 4$$

$$\therefore \overline{BC}=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3},\ \overline{AC}=8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$$

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle CAH$에서

$$\overline{AH}=\overline{AC}\cos 60°=4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{2}$$

$\triangle CBH$에서

$$\overline{BH}=\overline{BC}\cos 45°=4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$$

$$\therefore \overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}=2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$$

답 ③

10 $\underbrace{\angle CAD=\angle CBD=20°}_{\overset{\frown}{CD}에\ 대한\ 원주각}$이므로 $\triangle ACD$에서

$$\angle ADC=180°-(20°+70°)=90°$$

따라서 현 AC는 원의 지름이므로 $\triangle ABD$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$2R=\overline{AC}=6\sqrt{2}$$

$\angle BAD=25°+20°=45°$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin 45°}=6\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{BD}=6\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6$$

답 6

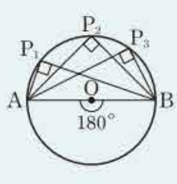
쎈B 특강

반원에 대한 중심각과 원주각

원 O에서 $\overline{AB}$가 지름이면 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각의 크기는 $180°$이다.

따라서 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각의 크기는

$$\angle AP_1B=\angle AP_2B$$
$$=\angle AP_3B=90°$$



11 $\frac{a+b}{7}=\frac{b+c}{8}=\frac{c+a}{9}=k\ (k>0)$라 하면

$a+b=7k,\ b+c=8k,\ c+a=9k$ ······ ㉠

위의 세 식을 변끼리 더하면

$2a+2b+2c=24k\qquad \therefore a+b+c=12k$ ······ ㉡

㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면

$$a=4k,\ b=3k,\ c=5k$$

$$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$$

$$=4k:3k:5k$$

$$=4:3:5$$

답 4 : 3 : 5

12 $ab:bc:ca=3:4:9$이므로 $ab=3k^2$, $bc=4k^2$, $ca=9k^2$ $(k>0)$으로 놓으면

$ab\cdot bc\cdot ca=3k^2\cdot 4k^2\cdot 9k^2$

$(abc)^2=108k^6$

$\therefore abc=6\sqrt{3}k^3$ ($\because abc>0$)

$\therefore a=\dfrac{abc}{bc}=\dfrac{6\sqrt{3}k^3}{4k^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}k$,

$b=\dfrac{abc}{ca}=\dfrac{6\sqrt{3}k^3}{9k^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}k$,

$c=\dfrac{abc}{ab}=\dfrac{6\sqrt{3}k^3}{3k^2}=2\sqrt{3}k$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}k:\dfrac{2\sqrt{3}}{3}k:2\sqrt{3}k$

$=9:4:12$ 답 ③

13 △ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+B):\sin(B+C):\sin(C+A)$

$=\sin(\pi-C):\sin(\pi-A):\sin(\pi-B)$

$=\sin C:\sin A:\sin B$

$=4:7:5$

따라서 $c:a:b=4:7:5$이므로 $a=7k$, $b=5k$, $c=4k$ $(k>0)$로 놓으면 구하는 값은

$\dfrac{a^2-b^2+c^2}{bc}=\dfrac{(7k)^2-(5k)^2+(4k)^2}{5k\cdot 4k}=\dfrac{40k^2}{20k^2}=2$ 답 2

14 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

이를 주어진 식에 대입하면

$(a-b)\cdot\dfrac{c}{2R}=a\cdot\dfrac{a}{2R}-b\cdot\dfrac{b}{2R}$

$(a-b)c=a^2-b^2$, $(a-b)c=(a+b)(a-b)$

$(a-b)(c-a-b)=0$

이때 $a+b\neq c$이므로 $a-b=0$ $\therefore a=b$

따라서 △ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ①

쎈B특강

삼각형의 모양

삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$
➡ △ABC는 이등변삼각형이다.

② $a=b=c$ ➡ △ABC는 정삼각형이다.

③ 가장 긴 변의 길이가 c일 때

(i) $a^2+b^2<c^2$ ➡ △ABC는 ∠C>90°인 둔각삼각형이다.

(ii) $a^2+b^2=c^2$ ➡ △ABC는 ∠C=90°인 직각삼각형이다.

(iii) $a^2+b^2>c^2$ ➡ △ABC는 예각삼각형이다.

15 △ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$ ··· ❶

따라서 주어진 등식은

$\cos^2 B+\cos^2 C=\cos^2 A+1$

$(1-\sin^2 B)+(1-\sin^2 C)=(1-\sin^2 A)+1$

$\therefore \sin^2 B+\sin^2 C=\sin^2 A$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

이를 $\sin^2 B+\sin^2 C=\sin^2 A$에 대입하면

$\dfrac{b^2}{4R^2}+\dfrac{c^2}{4R^2}=\dfrac{a^2}{4R^2}$

$\therefore b^2+c^2=a^2$ ··· ❷

따라서 △ABC는 $A=90°$인 직각삼각형이다. ··· ❸

답 $A=90°$인 직각삼각형

채점 기준	비율
❶ $\cos(B+C)=-\cos A$임을 알 수 있다.	30 %
❷ a, b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❸ △ABC를 결정할 수 있다.	20 %

16 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{3\sqrt{c}\sin(A+C)\}^2-9b\sin^2 C=0$

$9c\sin^2(A+C)-9b\sin^2 C=0$ — $A+B+C=\pi$이므로 $A+C=\pi-B$

$9c\sin^2 B-9b\sin^2 C=0$

$\therefore c\sin^2 B-b\sin^2 C=0$ ······ ㉠

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

이를 ㉠에 대입하면

$c\cdot\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2-b\cdot\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2=0$, $b^2c-bc^2=0$

$bc(b-c)=0$ $\therefore b=c$ ($\because bc\neq 0$)

따라서 △ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다. 답 ④

17 열기구의 위치를 C라 하면

$\angle ACB=180°-(75°+60°)=45°$

△ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{80}{\sin 45°}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 60°}$

$\therefore \overline{AC}=80\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}=40\sqrt{6}$ (m)

따라서 A 지점에서 열기구까지의 거리는 $40\sqrt{6}$ m이다. 답 ②

18 $C=180°-(85°+65°)=30°$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R cm라 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\dfrac{3}{\sin 30°}=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}=6$ $\therefore R=3$

따라서 컵의 부피는 $\pi\cdot 3^2\cdot 5=45\pi$ (cm³) 답 45π cm³

19 △ABQ에서

$\angle AQB=180°-(30°+105°)=45°$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BQ}}{\sin 30°}=\frac{50}{\sin 45°}$$

$$\therefore \overline{BQ}=50\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=25\sqrt{2}\,(\text{m})$$

따라서 △PBQ에서

$\overline{PQ}=\overline{BQ}\tan 60°=25\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=25\sqrt{6}\,(\text{m})$ 답 $25\sqrt{6}$ m

20 △ABC에서 $\overline{AC}=\dfrac{3}{\sin 30°}=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}=6$

△CDE에서 $\overline{CE}=\dfrac{5}{\sin 30°}=\dfrac{5}{\frac{1}{2}}=10$

$\angle ACE=180°-(30°+30°)=120°$이므로 △ACE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AE}^2=6^2+10^2-2\cdot6\cdot10\cdot\cos 120°$$
$$=36+100-2\cdot6\cdot10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=196$$

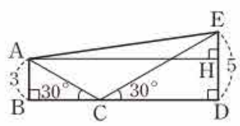
$\therefore \overline{AE}=14$ 답 14

다른 풀이 △ABC에서 $\overline{BC}=\dfrac{3}{\tan 30°}=\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=3\sqrt{3}$

△CDE에서 $\overline{CD}=\dfrac{5}{\tan 30°}=\dfrac{5}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=5\sqrt{3}$

$\therefore \overline{BD}=\overline{BC}+\overline{CD}=3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{DE}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 AHE에서



$$\overline{AE}=\sqrt{(\underbrace{8\sqrt{3}}_{\overline{AH}=\overline{BD}=8\sqrt{3}})^2+\underbrace{2}_{\overline{EH}=5-3=2}^2}=14$$

21 □ABCD가 원에 내접하므로 $A+C=180°$

즉 $C=180°-A$이므로

$$\cos C=\cos(180°-A)=-\cos A=-\frac{3}{5}$$

따라서 △BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=10^2+2^2-2\cdot10\cdot2\cdot\cos C$$
$$=100+4-2\cdot10\cdot2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=128$$

$\therefore \overline{BD}=8\sqrt{2}$ 답 ③

22 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$이므로

$\cos\theta=\dfrac{1}{3}\left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ ⋯ ❶

△DCG에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DG}^2=6^2+2^2-2\cdot6\cdot2\cdot\cos\theta$$
$$=36+4-2\cdot6\cdot2\cdot\frac{1}{3}=32$$

$\therefore \overline{DG}=4\sqrt{2}$ ⋯ ❷

$\angle BCE=2\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi-\theta$이므로

$$\cos(\angle BCE)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\frac{1}{3}$$

△BEC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BE}^2=6^2+2^2-2\cdot6\cdot2\cdot\cos(\angle BCE)$$
$$=36+4-2\cdot6\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=48$$

$\therefore \overline{BE}=4\sqrt{3}$ ⋯ ❸

$\therefore \overline{DG}\cdot\overline{BE}=4\sqrt{2}\cdot4\sqrt{3}=16\sqrt{6}$ ⋯ ❹

답 $16\sqrt{6}$

채점 기준	비율
❶ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{DG}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{BE}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❹ $\overline{DG}\cdot\overline{BE}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

23 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{4^2+8^2-6^2}{2\cdot4\cdot\underbrace{8}_{5+3=8}}=\frac{11}{16}$$

△ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cdot\cos B$$
$$=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\frac{11}{16}=\frac{27}{2}$$

$\therefore \overline{AD}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ 답 $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

24 가장 짧은 변의 대각의 크기가 가장 작으므로 그 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{5^2+(4\sqrt{2})^2-(\sqrt{17})^2}{2\cdot5\cdot4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0°<\theta<180°$이므로 $\theta=45°$ 답 45°

25 $3c^2=3a^2+3b^2+2ab$에서 $3a^2+3b^2-3c^2=-2ab$

$$\therefore a^2+b^2-c^2=-\frac{2ab}{3}$$

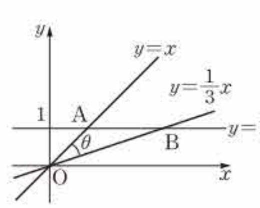
따라서 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-\frac{2ab}{3}}{2ab}=-\frac{1}{3}$$

$$\underbrace{\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}}_{0°<C<180°\text{이므로 }\sin C>0}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\text{이므로}$$

$\tan C=\dfrac{\sin C}{\cos C}=-2\sqrt{2}$ 답 ②

26 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=x$, $y=\dfrac{1}{3}x$와 직선 $y=1$의 교점을 각각 A, B라 하면



A(1, 1), B(3, 1)

$\therefore \overline{OA}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,

$\overline{OB}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$, $\overline{AB}=2$

따라서 △AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{10})^2-2^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$ 답 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

27 정육각형의 한 내각의 크기는

$$\frac{180^\circ\times(6-2)}{6}=120^\circ$$ ⋯ ❶

$\overline{AF}=2a$라 하면 $\overline{AM}=a$이므로 △AMF에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{MF}^2=(2a)^2+a^2-2\cdot2a\cdot a\cdot\cos120^\circ$$
$$=4a^2+a^2-2\cdot2a\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=7a^2$$

$\therefore \overline{MF}=\sqrt{7}a$ ⋯ ❷

$$\therefore \cos\theta=\frac{a^2+(\sqrt{7}a)^2-(2a)^2}{2\cdot a\cdot\sqrt{7}a}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

채점 기준	비율
❶ 정육각형의 한 내각의 크기를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{MF}$의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

28 $\overline{AD}:\overline{BD}=\overline{AC}:\overline{BC}=6:3=2:1$이므로 $\overline{AD}=2x$, $\overline{BD}=x\ (x>0)$라 하고 $\angle ACD=\theta$라 하면

△ADC에서 $\cos\theta=\frac{2^2+6^2-(2x)^2}{2\cdot2\cdot6}=\frac{10-x^2}{6}$

△BCD에서 $\cos\theta=\frac{3^2+2^2-x^2}{2\cdot3\cdot2}=\frac{13-x^2}{12}$

따라서 $\frac{10-x^2}{6}=\frac{13-x^2}{12}$이므로

$20-2x^2=13-x^2$, $x^2=7$ $\therefore x=\sqrt{7}\ (\because x>0)$

$\therefore \overline{AB}=3x=3\sqrt{7}$ 답 ④

$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=2x+x=3x$

29 세 원 A, B, C의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3이라 하면 세 원의 넓이의 비가 $1:3:12$이므로

$\pi r_1^2:\pi r_2^2:\pi r_3^2=1:3:12$

$\therefore r_1:r_2:r_3=1:\sqrt{3}:2\sqrt{3}$

$r_1=k$, $r_2=\sqrt{3}k$, $r_3=2\sqrt{3}k\ (k>0)$로 놓으면

$\overline{AB}=r_1+r_2=(1+\sqrt{3})k$,

$\overline{BC}=r_2+r_3=3\sqrt{3}k$,

$\overline{CA}=r_3+r_1=(2\sqrt{3}+1)k$

따라서 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{\{(1+\sqrt{3})k\}^2+(3\sqrt{3}k)^2-\{(2\sqrt{3}+1)k\}^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})k\cdot3\sqrt{3}k}$$
$$=\frac{9-\sqrt{3}}{9+3\sqrt{3}}=\frac{5-2\sqrt{3}}{3}$$ 답 ④

30 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=6^2+4^2-2\cdot6\cdot4\cdot\cos60^\circ$$
$$=36+16-2\cdot6\cdot4\cdot\frac{1}{2}=28$$

$\therefore \overline{BC}=2\sqrt{7}$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{7}}{\sin60^\circ}=2R$

$$\therefore R=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$$ 답 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

31 △ABC에서 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{3}:2:\sqrt{5}$

따라서 $a=\sqrt{3}k$, $b=2k$, $c=\sqrt{5}k\ (k>0)$로 놓으면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{(\sqrt{3}k)^2+(2k)^2-(\sqrt{5}k)^2}{2\cdot\sqrt{3}k\cdot2k}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

32 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$c^2=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-2\cdot2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\cos30^\circ$$
$$=8+(8+4\sqrt{3})-2\cdot2\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4$$

$\therefore c=2$ ⋯ ❶

△ABC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin30^\circ}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin A}$

$$\therefore \sin A=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0^\circ<A<90^\circ$이므로 $A=45^\circ$ ⋯ ❷

이때 $A+B+C=180^\circ$이므로

$B=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$ ⋯ ❸

답 105°

채점 기준	비율
❶ c를 구할 수 있다.	40 %
❷ ∠A의 크기를 구할 수 있다.	40 %
❸ ∠B의 크기를 구할 수 있다.	20 %

33 길이가 6인 변의 대각의 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{1}{8}$

이때 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{63}{64}$이므로

$\sin\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}\ (\because 0^\circ<\theta<180^\circ)$

삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{6}{\sin\theta}=2R$$

$$\therefore R=\frac{1}{2}\cdot6\cdot\frac{8}{3\sqrt{7}}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$$

따라서 구하는 외접원의 넓이는

$$\pi R^2=\pi\left(\frac{8\sqrt{7}}{7}\right)^2=\frac{64}{7}\pi$$ 답 ④

34 △ABC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin60^\circ}=2\cdot\sqrt{7}$

$$\therefore \overline{BC}=2\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{21}$$

$\overline{AB}:\overline{AC}=2:3$이므로 $\overline{AB}=2k$, $\overline{AC}=3k\ (k>0)$로 놓으면
△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{21})^2=(2k)^2+(3k)^2-2\cdot2k\cdot3k\cdot\cos 60°$

$21=4k^2+9k^2-2\cdot2k\cdot3k\cdot\frac{1}{2}$

$7k^2=21,\quad k^2=3$

$\therefore k=\sqrt{3}\ (\because k>0)$

$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{3}$

답 ③

35 △ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$

따라서 주어진 등식은

$\sin C=2\sin A\cos B$ …… ㉠

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{c}{2R}=2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$c^2=c^2+a^2-b^2,\quad a^2=b^2$

$\therefore a=b$

따라서 △ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 ①

36 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로 주어진 식에 대입하면

$a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$

$c^2+a^2-b^2-(b^2+c^2-a^2)=2c^2$

$\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 △ABC는 $A=90°$인 직각삼각형이다.

답 $A=90°$인 직각삼각형

37 $\frac{a^2}{\tan A}=\frac{c^2}{\tan C}$에서

$a^2\cdot\frac{\cos A}{\sin A}=c^2\cdot\frac{\cos C}{\sin C}$

$\therefore a^2\sin C\cos A=c^2\sin A\cos C$ …… ㉠

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R},$

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이를 ㉠에 대입하면

$a^2\cdot\frac{c}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c^2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$a^2(b^2+c^2-a^2)=c^2(a^2+b^2-c^2)$

$a^4-c^4-a^2b^2+b^2c^2=0$

$(a^2+c^2)(a^2-c^2)-b^2(a^2-c^2)=0$

$(a^2-b^2+c^2)(a^2-c^2)=0$

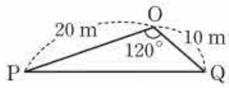
$(a^2-b^2+c^2)(a+c)(a-c)=0$

$\therefore a^2+c^2=b^2$ 또는 $a=c\ (\because a\neq -c)$

따라서 $B=90°$인 직각삼각형 또는 $a=c$인 이등변삼각형이므로 △ABC의 모양이 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

38 5초 후의 두 로봇 A, B의 위치를 각각 P, Q라 하면



$\overline{OP}=5\cdot4=20\ (\mathrm{m}),$

$\overline{OQ}=5\cdot2=10\ (\mathrm{m})$

△OPQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=20^2+10^2-2\cdot20\cdot10\cdot\cos 120°$

$=400+100-2\cdot20\cdot10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=700$

$\therefore \overline{PQ}=10\sqrt{7}\ (\mathrm{m})$

따라서 5초 후의 두 로봇 사이의 거리는 $10\sqrt{7}$ m이다.

답 $10\sqrt{7}$ m

39 △ACD에서 $\overline{AC}=\frac{15\sqrt{3}}{\sin 60°}=\frac{15\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=30\ (\mathrm{m})$

△BCE에서 $\overline{BC}=\frac{20\sqrt{3}}{\sin 60°}=\frac{20\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=40\ (\mathrm{m})$

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=30^2+40^2-2\cdot30\cdot40\cdot\cos 60°$

$=900+1600-2\cdot30\cdot40\cdot\frac{1}{2}=1300$

$\therefore \overline{AB}=10\sqrt{13}\ (\mathrm{m})$

답 ④

40 $\angle ACB=\pi-\theta$이므로 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\pi-\theta)=\frac{10^2+6^2-14^2}{2\cdot10\cdot6}=-\frac{1}{2}$

$-\cos\theta=-\frac{1}{2}\qquad \therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\ (\because 0<\theta<\pi)$

답 $\frac{\pi}{3}$

41 △ABC의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot4\cdot\sin A=6\qquad \therefore \sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0°<A<90°$이므로 $A=45°$

따라서 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$a^2=(3\sqrt{2})^2+4^2-2\cdot3\sqrt{2}\cdot4\cdot\cos 45°$

$=18+16-2\cdot3\sqrt{2}\cdot4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=10$

$\therefore a=\sqrt{10}$

답 ③

42 $\overline{AD}=x$라 하면 △ABC=△ABD+△ACD이므로

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot\sin 120°=\frac{1}{2}\cdot4\cdot x\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}\cdot x\cdot2\cdot\sin 60°$

$2\sqrt{3}=\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}x,\qquad \frac{3\sqrt{3}}{2}x=2\sqrt{3}$

$\therefore x=\frac{4}{3}$

답 ②

43 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$a^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos120°$

$=9+25-2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=49$

$\therefore a=7$ ⋯ ❶

△ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120°=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$ ⋯ ❷

△ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$S=\frac{1}{2}r(7+3+5)=\frac{15\sqrt{3}}{4}$ $\quad\therefore r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 구하는 내접원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. ⋯ ❸

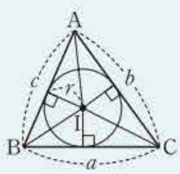
답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

채점 기준	비율
❶ a를 구할 수 있다.	30 %
❷ △ABC의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 내접원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %

쎈B특강

삼각형의 넓이와 내접원의 반지름의 길이

삼각형 ABC의 내심을 I, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면



△ABC=△IBC+△ICA+△IAB

$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$

$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

44 $\overline{BC}:\overline{AD}=4:2=2:1$이므로

△ABC : △ACD=2 : 1

즉 △ABC=2△ACD이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{CD}\cdot\sin\beta$

$\therefore \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\overline{AB}}{2\overline{CD}}$

답 ③

45 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$5^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos60°$

$\therefore 25=a^2+b^2-ab$ ⋯⋯ ㉠

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로

$a^2+b^2=7^2-2ab=49-2ab$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$25=49-3ab$ $\quad\therefore ab=8$

$\therefore$ △ABC$=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot\sin60°$

$=\frac{1}{2}\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

답 $2\sqrt{3}$

46 $\overline{AP}=x$, $\overline{AQ}=y$라 하면 △ABC=3△APQ이므로

$\frac{1}{2}\cdot12\cdot7\cdot\sin60°=3\left(\frac{1}{2}\cdot xy\cdot\sin60°\right)$

$\therefore xy=28$

△APQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos60°$

$=x^2+y^2-2\cdot28\cdot\frac{1}{2}=x^2+y^2-28$

이때 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-28$

$\geq2\sqrt{x^2y^2}-28=2xy-28$

$=28$ (단, 등호는 $x=y=2\sqrt{7}$일 때 성립)

$\therefore \overline{PQ}\geq\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{7}$이다.

답 $2\sqrt{7}$

47 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$이므로

△APR$=\frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{AR}\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot\frac{2c}{3}\cdot\frac{b}{3}\cdot\sin A$

$=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right)=\frac{2}{9}S$

같은 방법으로

△BQP$=\frac{2}{9}S$, △CRQ$=\frac{2}{9}S$

$\therefore S'=$△ABC−(△APR+△BQP+△CRQ)

$=S-\left(\frac{2}{9}S+\frac{2}{9}S+\frac{2}{9}S\right)=\frac{1}{3}S$

$\therefore \frac{S}{S'}=3$

답 ③

48 $B=C=30°$이므로

$A=180°-(30°+30°)=120°$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로 $\frac{1}{2}\cdot12=6$

△ABC$=2\cdot6^2\cdot\sin120°\cdot\sin30°\cdot\sin30°$

$=2\cdot36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=9\sqrt{3}$

답 $9\sqrt{3}$

49 $\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}:\overset{\frown}{AB}=2:3:7$이므로 △ABC에서

$A=\underbrace{180°}_{A+B+C=180°}\times\frac{2}{12}=30°$, $B=180°\times\frac{3}{12}=45°$,

$C=180°\times\frac{7}{12}=105°$ ⋯ ❶

△ABC의 외접원의 반지름의 길이가 8이므로

△ABC$=2\cdot8^2\cdot\sin30°\cdot\sin45°\cdot\sin105°$

$=2\cdot64\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$=16(1+\sqrt{3})$ ⋯ ❷

답 $16(1+\sqrt{3})$

채점 기준	비율
❶ A, B, C를 구할 수 있다.	50 %
❷ △ABC의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

참고 한 원에서 호의 길이는 그 호에 대한 원주각의 크기에 정비례하므로

$A:B:C=\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}:\overset{\frown}{AB}=2:3:7$

50 $\overline{AC}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4$, $\overline{AF}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$,

$\overline{CF}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$

헤론의 공식에서

$$s=\frac{4+3+3}{2}=5$$

따라서 $\triangle$AFC의 넓이는

$$\sqrt{5(5-4)(5-3)(5-3)}=2\sqrt{5}$$

답 ③

다른 풀이 $\triangle$AFC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{3^2+4^2-3^2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{2}{3}$$

$0^\circ<A<180^\circ$에서 $\sin A>0$이므로

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

따라서 $\triangle$AFC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AF}\cdot\overline{AC}\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=2\sqrt{5}$$

51 헤론의 공식에서

$$s=\frac{5+7+8}{2}=10$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)}=10\sqrt{3}$$

답 ③

52 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=9:10:11$이므로

$a=9k,\ b=10k,\ c=11k\ (k>0)$

로 놓으면 헤론의 공식에서

$$s=\frac{9k+10k+11k}{2}=15k$$

$\triangle$ABC의 넓이는

$$\sqrt{15k(15k-9k)(15k-10k)(15k-11k)}=30\sqrt{2}k^2$$

즉 $30\sqrt{2}k^2=\frac{10\sqrt{2}}{3}$이므로 $\quad k^2=\frac{1}{9}$

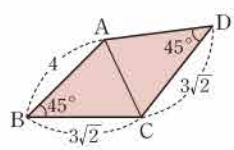
$\therefore\ k=\frac{1}{3}\ (\because\ k>0)$

따라서 $\triangle$ABC의 둘레의 길이는

$$9k+10k+11k=30k=10$$

답 10

53 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 긋고 $\overline{AC}=x$라 하면 $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여



$$x^2=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\cdot4\cdot3\sqrt{2}\cdot\cos45^\circ=10$$

$\therefore\ x=\sqrt{10}$

$\overline{AD}=y$라 하면 $\triangle$ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{10})^2=(3\sqrt{2})^2+y^2-2\cdot3\sqrt{2}\cdot y\cdot\cos45^\circ$$

$10=18+y^2-6y,\quad y^2-6y+8=0$

$(y-2)(y-4)=0\quad \therefore\ y=2$ 또는 $y=4$

그런데 $y>2$이므로 $\quad y=4$

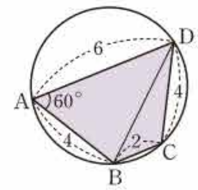
$$\therefore\ \square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD=2\triangle ABC=2\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\sqrt{2}\cdot\sin45^\circ=12$$

답 12

54 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이므로

$$\angle BCD=180^\circ-\angle BAD=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

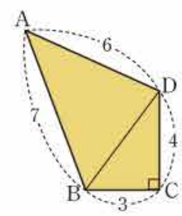
오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 사각형 ABCD의 넓이는



$$\triangle ABD+\triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot4\cdot6\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\cdot\sin120^\circ=6\sqrt{3}+2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$$

답 $8\sqrt{3}$

55 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 긋고 $\overline{BD}=x$라 하면 $\triangle$BCD에서



$x^2=3^2+4^2=25\qquad \therefore\ x=5$

$\triangle$ABD에서 헤론의 공식에 의하여

$$s=\frac{5+6+7}{2}=9$$

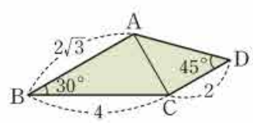
$$\therefore\ \triangle ABD=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=6\sqrt{6}$$

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=6$이므로

$$\square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD=6+6\sqrt{6}$$

답 ③

56 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 긋고 $\overline{AC}=x$라 하면 $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여



$$x^2=(2\sqrt{3})^2+4^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot4\cdot\cos30^\circ=4$$

$\therefore\ x=2$

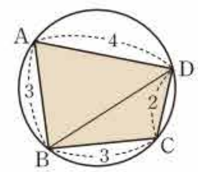
$\overline{AC}=\overline{CD}$이고 $\angle ADC=45^\circ$이므로 $\triangle$ACD는 $\angle ACD=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

$$\therefore\ \square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot4\cdot\sin30^\circ+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2\sqrt{3}+2$$

따라서 $a=2,\ b=2$이므로 $\quad a+b=4$

답 ②

57 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 긋고 $\angle BAD=\theta$라 하면 $\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여



$$\overline{BD}^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos\theta=25-24\cos\theta \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\angle BCD=180^\circ-\angle BAD=180^\circ-\theta$이므로 $\triangle$BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\cos(\pi-\theta)=13+12\cos\theta \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $25-24\cos\theta=13+12\cos\theta$이므로

$36\cos\theta=12\qquad \therefore\ \cos\theta=\frac{1}{3}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$에서 $\sin\theta>0$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$

$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot \sin\theta + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot \sin(180° - \theta)$

$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$= 6\sqrt{2}$ 답 $6\sqrt{2}$

58 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B = \frac{8^2+7^2-13^2}{2\cdot 8\cdot 7} = -\frac{1}{2}$

$0° < B < 180°$이므로 $B = 120°$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin 120° = 8\cdot 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 28\sqrt{3}$ 답 $28\sqrt{3}$

59 $\overline{AD} = \overline{BC} = 6$이므로

$5\cdot 6\cdot \sin A = 15$ $\therefore \sin A = \frac{1}{2}$

$90° < A < 180°$이므로 $A = 150°$ 답 $150°$

60 $a = 4\cdot 2\cdot \sin 60° = 4\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ ··· ❶

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$b^2 = 4^2 + 2^2 - 2\cdot 4\cdot 2\cdot\cos 60° = 16 + 4 - 2\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 12$

$\therefore b = 2\sqrt{3}$ ··· ❷

$\therefore ab = 24$ ··· ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

61 $\triangle BCD$에서

$\overline{BD} = \frac{\overline{CD}}{\tan 30°} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3}$

$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sin 60°$

$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$ 답 ②

62 $\cos\theta = \frac{3}{5}$이고 $0° < \theta < 180°$에서 $\sin\theta > 0$이므로

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ ··· ❶

$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot\sin\theta$

$= \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot\frac{4}{5} = 24$ ··· ❷

답 24

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ □ABCD의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

63 □ABCD의 넓이가 $3\sqrt{2}$이므로

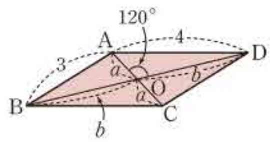
$\frac{1}{2}ab\sin 45° = 3\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{4}ab = 3\sqrt{2}$ $\therefore ab = 12$

$\therefore a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$= 7^3 - 3\cdot 12\cdot 7 = 91$ 답 ④

64 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점을 O라 하자.



평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 $\overline{AC} = 2a$, $\overline{BD} = 2b$라 하면 $\triangle ABO$에서 코사인법칙에 의하여

$3^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cdot\frac{1}{2}$

$\therefore 9 = a^2 + b^2 - ab$ ······ ㉠

$\triangle AOD$에서 코사인법칙에 의하여

$4^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore 16 = a^2 + b^2 + ab$ ······ ㉡

㉡−㉠을 하면 $7 = 2ab$ $\therefore ab = \frac{7}{2}$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b\cdot\sin 60° = 2\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

08 등차수열과 등비수열

Ⅲ. 수열

개념 정리

본책 102쪽

❶ 등차수열 ❷ 공차 ❸ $\frac{n(a+l)}{2}$ ❹ 등비수열
❺ 공비 ❻ $a(r^n-1)$

쎈B 유형 뽀개기

본책 103쪽

001 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_5=a+4\cdot(-2)=-5$

$a-8=-5 \qquad \therefore a=3$

$\therefore a_n=3+(n-1)\cdot(-2)=-2n+5$

$a_k=-2k+5=-41$이므로

$-2k=-46 \qquad \therefore k=23$

답 ②

002 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2-a_1=a_4-a_3=\cdots=a_{30}-a_{29}=d$

$\therefore -a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots-a_{29}+a_{30}$

$=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{30}-a_{29})$

$=15d$

즉 $15d=90$이므로 $\qquad d=6$

답 6

003 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=\log_3 16$ …… ㉠

$a_7=a+6d=\log_3 256$ …… ㉡

㉡－㉠을 하면

$4d=\log_3 256-\log_3 16=\log_3 16$

$\therefore d=\frac{1}{4}\log_3 16=\log_3 2$

$d=\log_3 2$를 ㉠에 대입하면

$a+2\log_3 2=\log_3 16$

$\therefore a=2\log_3 2$

따라서 $a_n=2\log_3 2+(n-1)\log_3 2=(n+1)\log_3 2$이므로

$a_{10}=11\log_3 2$

답 $11\log_3 2$

쎈B 특강

공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 제$(n+k)$항은 제n항에 공차 d를 k번 더한 것과 같음을 이용하여 등차수열의 두 항의 차를 다음과 같이 공차에 대한 식으로 나타낼 수도 있다.

$a_{n+k}=a_n+kd \Longleftrightarrow a_{n+k}-a_n=kd$

즉 **003**번에서 $a_7-a_3=4d$임을 바로 알 수 있다.

다른 풀이 $d=\log_3 2$이므로

$a_{10}=a_7+3d=\log_3 256+3\log_3 2=11\log_3 2$

004 등차수열 $\{a_{3n}\}$은 a_3, a_6, a_9, $\cdots$이고 공차가 -6이므로

$a_6-a_3=-6$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$(a+5d)-(a+2d)=-6$

$3d=-6 \qquad \therefore d=-2$ ⋯▸ ❶

등차수열 $\{a_{4n+3}\}$은 a_7, a_{11}, a_{15}, $\cdots$이므로 구하는 공차는

$a_{11}-a_7=(a+10d)-(a+6d)$

$=4d=4\cdot(-2)$

$=-8$ ⋯▸ ❷

답 -8

채점 기준	비율
❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 구할 수 있다.	50 %
❷ 등차수열 $\{a_{4n+3}\}$의 공차를 구할 수 있다.	50 %

005 오른쪽 창가의 좌석 번호를 뒤에서부터 차례대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 하면 $\{a_n\}$은

$96, 90, 84, \cdots, 12, 6$

즉 첫째항이 96, 공차가 -6인 등차수열이므로

$a_n=96+(n-1)\cdot(-6)=-6n+102$

따라서 구하는 좌석 번호는

$a_8=-6\cdot 8+102=54$

답 54

006 첫 번째 시행에서 만들어지는 수열은

$1, 3, 5, 7, \cdots$

이므로 공차가 2인 등차수열이다.

두 번째 시행에서 만들어지는 수열은

$1, 5, 9, 13, \cdots$

이므로 공차가 $4=2^2$인 등차수열이다.

세 번째 시행에서 만들어지는 수열은

$1, 9, 17, 25, \cdots$

이므로 공차가 $8=2^3$인 등차수열이다.

따라서 6번째 시행에서 만들어지는 수열은 첫째항이 1, 공차가 $2^6=64$인 등차수열이므로 제n항은

$1+(n-1)\cdot 64=64n-63$

따라서 구하는 제4항은

$64\cdot 4-63=193$

답 193

007 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2+a_9=(a+d)+(a+8d)$

$=2a+9d=25$ …… ㉠

$a_5+a_{11}=(a+4d)+(a+10d)$

$=2a+14d=40$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1, d=3$

따라서 $a_n=-1+(n-1)\cdot 3=3n-4$이므로

$a_{32}=3\cdot 32-4=92$

답 92

008 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3+a_{10}=0$이므로　$(a+2d)+(a+9d)=0$

$\therefore 2a+11d=0$　…… ㉠

또 $a_5=3$이므로　$a+4d=3$　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=11,\ d=-2$　⋯→ ❶

$\therefore a_n=11+(n-1)\cdot(-2)=-2n+13$　⋯→ ❷

-47을 제 n 항이라 하면

$-2n+13=-47,\quad -2n=-60$

$\therefore n=30$

따라서 -47은 제 30 항이다.　⋯→ ❸

답 제 30 항

채점 기준	비율
❶ 첫째항과 공차를 구할 수 있다.	50 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	20 %
❸ -47은 제몇 항인지 구할 수 있다.	30 %

009 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3+a_6=(a_1+2d)+(a_1+5d)=2a_1+7d,$

$a_4+a_9=(a_1+3d)+(a_1+8d)=2a_1+11d$

이때 $(a_3+a_6):(a_4+a_9)=3:7$이므로

$(2a_1+7d):(2a_1+11d)=3:7$

$7(2a_1+7d)=3(2a_1+11d),\quad 8a_1+16d=0$

$16d=-8a_1\quad \therefore d=-\frac{1}{2}a_1$

$\therefore a_{13}=a_1+12d=a_1+12\cdot\left(-\frac{1}{2}a_1\right)=-5a_1$　답 ④

010 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d\ (d>0)$라 하면

조건 (가)에서 $a_5+a_9=0$이므로

$(a+4d)+(a+8d)=0,\quad 2a=-12d$

$\therefore a=-6d$　…… ㉠

조건 (나)에서 $|a_5|=|a_7|+6$이므로

$|a+4d|=|a+6d|+6$　…… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$|-6d+4d|=|-6d+6d|+6$

$|-2d|=6\quad \therefore |d|=3$

이때 $d>0$이므로　$d=3$

$d=3$을 ㉠에 대입하면

$a=-6\cdot3=-18$

따라서 $a_n=-18+(n-1)\cdot3=3n-21$이므로

$a_5=3\cdot5-21=-6$　답 ④

011 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=a+3d=42$　…… ㉠

$a_9=a+8d=17$　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=57,\ d=-5$

$\therefore a_n=57+(n-1)\cdot(-5)=-5n+62$

$-5n+62<0$에서　$5n>62$

$\therefore n>\frac{62}{5}=12.4$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제 13 항이다.　답 ②

012 $a_n=-1020+(n-1)\cdot7=7n-1027$

$7n-1027>9$에서　$7n>1036$

$\therefore n>148$

따라서 처음으로 9보다 커지는 항은 제 149 항이다.

답 제 149 항

013 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_{10}=a+9\cdot12=45\quad \therefore a=-63$

$\therefore a_n=-63+(n-1)\cdot12=12n-75$　⋯→ ❶

$12n-75=0$에서　$12n=75$

$\therefore n=\frac{75}{12}=6.25$

이때 $a_6=12\cdot6-75=-3,\ a_7=12\cdot7-75=9$이므로

$|a_6|<|a_7|$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 6이다.　⋯→ ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lvert a_n\rvert$의 값이 최소가 되는 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	60 %

014 $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \cdots\}$,

$B=\{5, 8, 11, 14, 17, \cdots\}$

이므로　$A\cap B=\{5, 11, 17, \cdots\}$

따라서 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 6인 등차수열이므로

$c_n=5+(n-1)\cdot6=6n-1$

$6n-1\ge1000$에서　$6n\ge1001$

$\therefore n\ge\frac{1001}{6}=166.\cdots$

따라서 구하는 n의 값은 167이다.　답 167

015 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 4, 제 16 항이 109이므로

$4+15d=109,\quad 15d=105\quad \therefore d=7$

이때 a_6은 주어진 수열의 제 7 항이므로

$a_6=4+6\cdot7=46$　답 46

016 첫째항이 -12, 공차가 3인 등차수열의 제 $(n+2)$ 항이 51이므로

$-12+(n+1)\cdot3=51,\quad 3n-9=51$

$3n=60\quad \therefore n=20$　답 20

017 주어진 등차수열의 공차를 d라 하자.

수열 3, a_1, a_2, $\cdots$, a_m, 12에서 12는 제 $(m+2)$ 항이므로

$3+(m+1)d=12\quad \therefore d=\frac{9}{m+1}$　…… ㉠

또 수열 12, b_1, b_2, $\cdots$, b_n, 39에서 12를 첫째항으로 생각하면 39는 제 $(n+2)$ 항이므로

$$12+(n+1)d=39 \quad \therefore d=\frac{27}{n+1} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $\frac{9}{m+1}=\frac{27}{n+1}$이므로 $\quad n+1=3(m+1)$

$$\therefore n=3m+2$$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $\quad pq=6$

답 ①

018 세 수 $2a$, a^2-a, 16이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(a^2-a)=2a+16, \quad a^2-2a-8=0$$

$$(a+2)(a-4)=0 \quad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 모든 a의 값의 합은 $\quad -2+4=2$

답 ④

참고 $a=-2$일 때, 주어진 세 수는 -4, 6, 16이므로 공차가 10인 등차수열을 이루고, $a=4$일 때, 주어진 세 수는 8, 12, 16이므로 공차가 4인 등차수열을 이룬다.

019 $P(x)=ax^2+2x-5$라 하면 $P(x)$를 $x-1$, $x+3$, $x-5$로 나누었을 때의 나머지는 각각

$$P(1)=a+2-5=a-3,$$

$$P(-3)=9a-6-5=9a-11,$$

$$P(5)=25a+10-5=25a+5$$

즉 세 수 $a-3$, $9a-11$, $25a+5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(9a-11)=(a-3)+(25a+5)$$

$$8a=-24 \quad \therefore a=-3$$

답 -3

쎈B특강

나머지정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $\quad R=P(\alpha)$

020 다섯 개의 수 32, a, 8, b, -16이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a=\frac{32+8}{2}=20, \; b=\frac{8+(-16)}{2}=-4$$

또 네 개의 수 $\log_2 3$, c, $\log_2 12$, d가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$c=\frac{\log_2 3+\log_2 12}{2}=\frac{\log_2 36}{2}=\frac{2\log_2 6}{2}=\log_2 6$$

$2\log_2 12=c+d$에서

$$2\log_2 12=\log_2 6+d$$

$$\therefore d=2\log_2 12-\log_2 6=\log_2 24$$

$$\therefore a-b+c-d=20-(-4)+\log_2 6-\log_2 24$$

$$=24+\log_2 \frac{1}{4}=24+(-2)$$

$$=22$$

답 ③

다른 풀이 $a-b=32-8=24$,

$$c-d=\log_2 3-\log_2 12=\log_2 \frac{1}{4}=-2$$

$$\therefore a-b+c-d=24+(-2)=22$$

021 α, β가 이차방정식 $x^2+8x-2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-8, \; \alpha\beta=-2 \quad \cdots ❶$$

이때 m은 α, β의 등차중항이므로

$$m=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{-8}{2}=-4$$

또 n은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$의 등차중항이므로

$$n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{-8}{2\cdot(-2)}=2 \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \frac{m}{n}=-2 \quad \cdots ❸$$

답 -2

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\frac{m}{n}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

022 세 수 a, c, 8이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$c=\frac{a+8}{2}$$

세 수 a, 0, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a+b=0 \quad \therefore b=-a$$

세 수 b, -2, f가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b+f=2\cdot(-2) \quad \therefore f=-b-4=a-4$$

세 수 8, e, f가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$e=\frac{8+f}{2}=\frac{a+4}{2}$$

$$\therefore a+c-e-f=a+\frac{a+8}{2}-\frac{a+4}{2}-(a-4)$$

$$=6$$

답 ②

023 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면

$$(a-d)+a+(a+d)=24 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=200 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠에서 $\quad 3a=24 \quad \therefore a=8$

$a=8$을 ㉡에 대입하면

$$(8-d)^2+8^2+(8+d)^2=200$$

$$2d^2+192=200, \quad 2d^2=8$$

$$d^2=4 \quad \therefore d=\pm 2$$

따라서 세 수는 6, 8, 10이므로 세 수의 곱은

$$6\cdot 8\cdot 10=480$$

답 ⑤

024 삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d)+a+(a+d)=9$$

$$3a=9 \quad \therefore a=3$$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 3이므로 방정식에 $x=3$을 대입하면

$$3^3-9\cdot 3^2+3k+21=0$$

$$3k=33 \quad \therefore k=11$$

답 ②

쎈B특강

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

025 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$로 놓으면

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=16$ …… ㉠

$(a-3d)(a+3d)=-65$ …… ㉡ ⋯ ❶

㉠에서 $4a=16$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면

$(4-3d)(4+3d)=-65$

$16-9d^2=-65$, $9d^2=81$

$d^2=9$ $\therefore d=\pm3$ ⋯ ❷

따라서 네 수는 -5, 1, 7, 13이므로 가장 작은 수는 -5이다. ⋯ ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ 네 수를 a, d로 나타내고 a, d에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, d의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 네 수 중 가장 작은 수를 구할 수 있다.	20 %

026 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 모든 모서리의 길이의 합이 60이므로

$4\{(a-d)+a+(a+d)\}=60$

$3a=15$ $\therefore a=5$

또 겉넓이가 142이므로

$2\{a(a-d)+(a+d)(a-d)+a(a+d)\}=142$

$3a^2-d^2=71$

$a=5$를 위의 식에 대입하면 $75-d^2=71$

$d^2=4$ $\therefore d=\pm2$

따라서 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이는 각각

3, 5, 7 또는 7, 5, 3

이므로 구하는 부피는

$3\cdot5\cdot7=105$

답 105

027 A, B, C, D, E가 가진 펜의 개수를 순서대로

$a+2d$, $a+d$, a, $a-d$, $a-2d$

로 놓으면 A, B, C가 가진 펜의 개수의 합은 102이므로

$(a+2d)+(a+d)+a=102$

$\therefore a+d=34$ …… ㉠

B, E가 가진 펜의 개수의 합은 56이므로

$(a+d)+(a-2d)=56$

$\therefore 2a-d=56$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=30$, $d=4$

따라서 D가 가진 펜의 개수는

$a-d=30-4=26$

답 26

028 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=-5$ …… ㉠

$a_7=a+6d=-21$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $d=-4$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\frac{15\{2\cdot3+(15-1)\cdot(-4)\}}{2}=-375$$

답 ①

029 $a_1=5\cdot1-13=-8$, $a_{10}=5\cdot10-13=37$이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10(-8+37)}{2}=145$$

답 145

030 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 32, 공차가 -8이므로

$$S_n=\frac{n\{2\cdot32+(n-1)\cdot(-8)\}}{2}$$

$=-4n^2+36n$ ⋯ ❶

$S_n<0$에서 $-4n^2+36n<0$, $4n(n-9)>0$

$\therefore n>9$ ($\because$ n은 자연수) ⋯ ❷

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 10이다. ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ S_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ n의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

031 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하면

$a_1+b_1=-6$, $d+d'=9$

$\therefore (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10})$

$$=\frac{10(2a_1+9d)}{2}+\frac{10(2b_1+9d')}{2}$$

$=5\{2(a_1+b_1)+9(d+d')\}$

$=5\{2\cdot(-6)+9\cdot9\}$

$=345$

답 345

다른 풀이 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 -6, 공차가 9인 등차수열이므로

(주어진 식)$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{10}+b_{10})$

$$=\frac{10\{2\cdot(-6)+(10-1)\cdot9\}}{2}$$

$=345$

032 첫째항이 3, 제n항이 45인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이 192이므로

$\frac{n(3+45)}{2}=192$, $24n=192$

$\therefore n=8$

즉 $a_8=45$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$3+7d=45,\quad 7d=42$

$\therefore d=6$

$\therefore a_{10}=3+9\cdot6=57$ 답 ③

033 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_6=36+5d=11,\quad 5d=-25$

$\therefore d=-5$

$\therefore a_n=36+(n-1)\cdot(-5)=-5n+41$

$a_n<0$에서 $\quad -5n+41<0,\quad 5n>41$

$\therefore n>\dfrac{41}{5}=8.2$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제 8 항까지 양수이고, 제 9 항부터 음수이다.

이때

$a_8=-5\cdot8+41=1,$

$a_9=-5\cdot9+41=-4,$

$a_{20}=-5\cdot20+41=-59$

이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8)-(a_9+a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{20})$

$=\dfrac{8(36+1)}{2}-\dfrac{12\{-4+(-59)\}}{2}$

$=148+378=526$ 답 ③

034 첫째항이 3, 끝항이 87, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 720이므로

$\dfrac{(n+2)(3+87)}{2}=720,\quad n+2=16$

$\therefore n=14$ 답 14

035 첫째항이 -4, 끝항이 40, 항수가 15인 등차수열의 합은

$\dfrac{15(-4+40)}{2}=270$

따라서 $-4+x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{13}+40=270$이므로

$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{13}=234$ 답 ④

036 $15+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+(-19)=15-32-19$

$=-36$

즉 첫째항이 15, 끝항이 -19, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 -36이므로

$\dfrac{(n+2)(15-19)}{2}=-36,\quad n+2=18$

$\therefore n=16$ 답 ②

037 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_6=\dfrac{6\{2a+(6-1)d\}}{2}=66$

$\therefore 2a+5d=22$ …… ㉠

$S_{12}=\dfrac{12\{2a+(12-1)d\}}{2}=276$

$\therefore 2a+11d=46$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ d=4$

$\therefore S_{18}=\dfrac{18\{2\cdot1+(18-1)\cdot4\}}{2}=630$ 답 630

038 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_4=\dfrac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=58$

$\therefore 2a+3d=29$ …… ㉠

$S_{10}=\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=235$

$\therefore 2a+9d=47$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=10,\ d=3$

$\therefore a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{20}=S_{20}-S_4$

$=\dfrac{20\{2\cdot10+(20-1)\cdot3\}}{2}-58$

$=770-58$

$=712$ 답 ②

039 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d\ (d>0)$라 하면

$S_{10}=\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=60$

$\therefore 2a+9d=12$ …… ㉠

$|S_6|=\left|\dfrac{6\{2a+(6-1)d\}}{2}\right|=60$

$|3(2a+5d)|=60$

$|2a+5d|=20$

$\therefore 2a+5d=20$ 또는 $2a+5d=-20$

(i) $2a+5d=20$일 때, …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=15,\ d=-2$

이때 공차가 음수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2a+5d=-20$일 때, …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-30,\ d=8$

(i), (ii)에서

$a_n=-30+(n-1)\cdot8=8n-38$

이므로

$a_8=8\cdot8-38=26$ 답 26

쎈B특강

039번에서 수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이므로

$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$

에서 $S_n<S_{n+1}$임을 알 수 있다.

따라서 $S_{10}=|S_6|$이고 $S_6<S_{10}$이므로 $S_{10}\neq S_6$, 즉 $S_{10}=-S_6$이고, $S_{10}>0,\ S_6<0$임을 알 수 있다.

040 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공차가 $\frac{1}{2}$이므로

$$S_2=a_1+a_2=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

$$S_{n+2}=\frac{(n+2)\left\{2\cdot 1+(n+2-1)\cdot\frac{1}{2}\right\}}{2}=\frac{(n+2)(n+5)}{4}$$

$$S_{2n}=\frac{2n\left\{2\cdot 1+(2n-1)\cdot\frac{1}{2}\right\}}{2}=\frac{n(2n+3)}{2}$$

이때 S_2, S_{n+2}, S_{2n}이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2S_{n+2}=S_2+S_{2n}$$

$$2\cdot\frac{(n+2)(n+5)}{4}=\frac{5}{2}+\frac{n(2n+3)}{2}$$

$$n^2+7n+10=5+2n^2+3n$$

$$n^2-4n-5=0,\qquad (n+1)(n-5)=0$$

$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)

답 ③

041 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_7=a+6d=3$ …… ㉠

$a_{12}=a+11d=-7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=15$, $d=-2$

$\therefore a_n=15+(n-1)\cdot(-2)=-2n+17$

$-2n+17<0$에서 $\qquad n>\frac{17}{2}=8.5$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제 9 항부터 음수이므로 첫째항부터 제 8 항까지의 합이 최대이다.

이때 $a_8=-2\cdot 8+17=1$이므로 구하는 최댓값은

$$S_8=\frac{8(15+1)}{2}=64$$

답 64

042 $a_n>0$에서 $\qquad n\log_5 2-10>0$

$$\therefore n>\frac{10}{\log_5 2}=\frac{10}{\frac{\log 2}{\log 5}}=\frac{10(1-\log 2)}{\log 2}$$

$$=\frac{10\times(1-0.3)}{0.3}=\frac{7}{0.3}=23.\cdots$$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제24항부터 양수이므로 첫째항부터 제23항까지의 합이 최소이다.

따라서 구하는 자연수 n의 값은 23이다.

답 ④

043 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$\frac{3\{2a+(3-1)d\}}{2}=21,\ \frac{9\{2a+(9-1)d\}}{2}=-18$$

$\therefore a+d=7$, $a+4d=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=10$, $d=-3$

$\therefore a_n=10+(n-1)\cdot(-3)=-3n+13$ ⋯ ❶

$-3n+13<0$에서 $\qquad n>\frac{13}{3}=4.\cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제 5 항부터 음수이므로 첫째항부터 제 4 항까지의 합이 최대이다.

$\therefore p=4$ ⋯ ❷

이때 $a_4=-3\cdot 4+13=1$이므로

$$q=\frac{4(10+1)}{2}=22$$ ⋯ ❸

$\therefore p+q=26$ ⋯ ❹

답 26

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ p의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ q의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

044 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$S_4=\frac{4\{2\cdot(-3)+(4-1)d\}}{2}=6d-12$$

$$S_{12}=\frac{12\{2\cdot(-3)+(12-1)d\}}{2}=66d-36$$

$S_4=S_{12}$에서 $\qquad 6d-12=66d-36$

$60d=24 \qquad \therefore d=\frac{2}{5}$

$$\therefore a_n=-3+(n-1)\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}n-\frac{17}{5}$$

$\frac{2}{5}n-\frac{17}{5}>0$에서 $\qquad n>\frac{17}{2}=8.5$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제 9 항부터 양수이므로 첫째항부터 제 8 항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_8=\frac{2}{5}\cdot 8-\frac{17}{5}=-\frac{1}{5}$이므로 구하는 최솟값은

$$S_8=\frac{8\left\{-3+\left(-\frac{1}{5}\right)\right\}}{2}=-\frac{64}{5}$$

답 ④

045 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=-60+(n-1)d$

이때 S_6의 값이 임의의 다른 S_n의 값보다 작으려면

$a_6<0$, $a_7>0$

$a_6=-60+5d<0$에서 $\qquad d<12$

$a_7=-60+6d>0$에서 $\qquad d>10$

$\therefore 10<d<12$

이때 d는 정수이므로 $\qquad d=11$

답 11

쎈B 특강

① S_k의 값이 임의의 다른 S_n의 값보다 작다.
➡ S_n의 최솟값이 S_k이다.
➡ $a_k<0$, $a_{k+1}>0$

② S_k의 값이 임의의 다른 S_n의 값보다 크다.
➡ S_n의 최댓값이 S_k이다.
➡ $a_k>0$, $a_{k+1}<0$

046 100 이하의 자연수 중에서 5로 나누었을 때의 나머지가 2인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

2, 7, 12, 17, ⋯, 97

이때 $\underbrace{97=2+5\cdot19}_{\text{첫째항이 2, 공차가 5인 등차수열의 제 20항}}$에서 구하는 값은 첫째항이 2, 끝항이 97, 항수가 20인 등차수열의 합이므로

$$\frac{20(2+97)}{2}=990$$

답 ①

047 100과 300 사이에 있는 8의 배수는

104, 112, 120, $\cdots$, 296

이때 $296=104+8\cdot24$에서 구하는 값은 첫째항이 104, 끝항이 296, 항수가 25인 등차수열의 합이므로

$$\frac{25(104+296)}{2}=5000$$

답 ⑤

048 두 자리 자연수 중에서 2의 배수는

10, 12, 14, $\cdots$, 98 $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $98=10+2\cdot44$에서 ㉠은 첫째항이 10, 끝항이 98, 항수가 45인 등차수열이므로 그 합은

$$\frac{45(10+98)}{2}=2430$$ ⋯ ❶

두 자리 자연수 중에서 7의 배수는

14, 21, 28, $\cdots$, 98 $\cdots\cdots$ ㉡

이때 $98=14+7\cdot12$에서 ㉡은 첫째항이 14, 끝항이 98, 항수가 13인 등차수열이므로 그 합은

$$\frac{13(14+98)}{2}=728$$ ⋯ ❷

한편 두 자리 자연수 중에서 14의 배수는

14, 28, 42, $\cdots$, 98 $\cdots\cdots$ ㉢

이때 $98=14\cdot7$에서 ㉢은 첫째항이 14, 끝항이 98, 항수가 7인 등차수열이므로 그 합은

$$\frac{7(14+98)}{2}=392$$ ⋯ ❸

따라서 두 자리 자연수 중에서 2 또는 7로 나누어떨어지는 수의 총합은

$2430+728-392=2766$ ⋯ ❹

답 2766

채점 기준	비율
❶ 두 자리 자연수 중 2의 배수의 합을 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 자리 자연수 중 7의 배수의 합을 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 자리 자연수 중 14의 배수의 합을 구할 수 있다.	20 %
❹ 두 자리 자연수 중 2 또는 7로 나누어떨어지는 수의 총합을 구할 수 있다.	20 %

049 6으로 나누었을 때의 나머지가 5인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, $\cdots$ $\cdots\cdots$ ㉠

4로 나누었을 때의 나머지가 3인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, $\cdots$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 공통인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

11, 23, 35, $\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 11, 공차가 12인 등차수열이므로 구하는 합은

$$\frac{8\{2\cdot11+(8-1)\cdot12\}}{2}=424$$

답 ②

050 연속하는 30개의 자연수 중에서 가장 큰 수를 a라 하면 30개의 자연수는 첫째항이 a, 공차가 -1인 등차수열이므로

$$\frac{30\{2a+(30-1)\cdot(-1)\}}{2}=765$$

$2a-29=51,\quad 2a=80\quad \therefore a=40$

따라서 구하는 가장 큰 수는 40이다.

답 ⑤

다른 풀이 연속하는 30개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 a라 하면 30개의 자연수는 첫째항이 a, 끝항이 $a+29$, 항수가 30인 등차수열이므로

$$\frac{30\{a+(a+29)\}}{2}=765,\qquad 2a+29=51$$

$2a=22\quad \therefore a=11$

따라서 구하는 가장 큰 수는 $\quad 11+29=40$

051 n일째 운동 시간을 a_n시간이라 하면

$$a_n=1+\underbrace{\frac{1}{6}}_{\frac{10}{60}=\frac{1}{6}\text{(시간)}}(n-1)=\frac{1}{6}n+\frac{5}{6}$$

운동 시간이 2시간 50분, 즉 $\frac{17}{6}$시간인 날은

$$\frac{1}{6}n+\frac{5}{6}=\frac{17}{6},\qquad \frac{1}{6}n=2\qquad \therefore n=12$$

따라서 운동한 시간의 총합은 (첫째항이 1, 제 12 항이 $\frac{17}{6}$인 등차수열의 첫째항부터 제 12 항까지의 합)

$$\frac{12\left(1+\frac{17}{6}\right)}{2}=23\text{ (시간)}$$

답 ③

052 $a_1=1+2+3+4=10$

$a_2=4+5+6+7=22$

$a_3=7+8+9+10=34$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 10, 공차가 12인 등차수열이므로

$$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\frac{10\{2\cdot10+(10-1)\cdot12\}}{2}=640$$

답 640

쎈B특강

어느 칸에 적힌 수가 x일 때, 이 칸에서 오른쪽으로 n칸, 아래쪽으로 n칸 이동한 칸에 적힌 수는 $x+3n$이므로

$a_1=1+2+3+4=10$,

$a_{n+1}=(1+3n)+(2+3n)+(3+3n)+(4+3n)=10+12n$

이다. 즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 10, 공차가 12인 등차수열임을 알 수 있다.

053 n각형의 내각의 크기의 합은

$180°\times(n-2)=180°\times n-360°$ ⋯ ❶

첫째항이 45°, 공차가 30°, 항수가 n인 등차수열의 합은

$$\frac{n\{2\times45°+(n-1)\times30°\}}{2}=15°\times n^2+30°\times n$$ ⋯ ❷

따라서 $15° \times n^2 + 30° \times n = 180° \times n - 360°$이므로

$$n^2 - 10n + 24 = 0, \qquad (n-4)(n-6) = 0$$

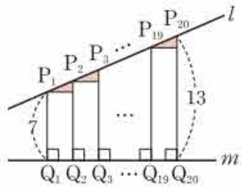
$\therefore n=4$ 또는 $n=6$

이때 $n=6$이면 가장 큰 내각의 크기가 $45° + 5 \times 30° = 195°$이므로 조건을 만족시키지 않는다. $\quad \therefore n=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ n각형의 내각의 크기의 합을 알 수 있다.	20 %
❷ 등차수열의 합의 공식을 이용하여 n각형의 내각의 크기의 합을 구할 수 있다.	40 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	40 %

054 오른쪽 그림에서 색칠한 직각삼각형은 모두 합동이므로



$$\overline{P_2Q_2} - \overline{P_1Q_1} = \overline{P_3Q_3} - \overline{P_2Q_2}$$
$$\vdots$$
$$= \overline{P_{20}Q_{20}} - \overline{P_{19}Q_{19}}$$

즉 선분 P_1Q_1, P_2Q_2, ⋯, $P_{20}Q_{20}$의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 이 수열의 공차를 d라 하면

$$\overline{P_2Q_2} = 7+d, \ \overline{P_{19}Q_{19}} = 13-d$$

$$\therefore \overline{P_2Q_2} + \overline{P_3Q_3} + \overline{P_4Q_4} + \cdots + \overline{P_{19}Q_{19}}$$
$$= \frac{18\{(7+d)+(13-d)\}}{2} = 180$$

답 ③

다른 풀이 선분 P_1Q_1, P_2Q_2, ⋯, $P_{20}Q_{20}$의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\overline{P_1Q_1} + \overline{P_2Q_2} + \overline{P_3Q_3} + \cdots + \overline{P_{20}Q_{20}} = \frac{20(7+13)}{2} = 200$$

$$\therefore \overline{P_2Q_2} + \overline{P_3Q_3} + \cdots + \overline{P_{19}Q_{19}} = 200 - \overline{P_1Q_1} - \overline{P_{20}Q_{20}}$$
$$= 200 - 7 - 13 = 180$$

055 $S_n = -n^2 + 6n$에서

(i) $n=1$일 때,

$$a_1 = S_1 = -1^2 + 6 \cdot 1 = 5$$

(ii) $n \ge 2$일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= -n^2 + 6n - \{-(n-1)^2 + 6(n-1)\}$$
$$= -2n + 7 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1 = 5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = -2n + 7$$

따라서 $a_1 = 5$, $a_3 = 1$, $a_5 = -3$, ⋯, $a_{49} = -91$이므로 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{49}$는 첫째항이 5, 끝항이 -91, 항수가 25인 등차수열의 합과 같다.

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{49} = \frac{25(5-91)}{2} = -1075$$

답 -1075

056 $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 1 = -2$이므로 $\quad k \ne 1$

$$\therefore a_k = S_k - S_{k-1}$$
$$= 2k^2 - 3k - 1 - \{2(k-1)^2 - 3(k-1) - 1\}$$
$$= 4k - 5$$

즉 $4k - 5 = 27$이므로 $\quad 4k = 32$

$\therefore k = 8$

답 8

057 $S_n = 3 \cdot (-n)^2 + 2 \cdot (-n) = 3n^2 - 2n$이므로

$$a_3 = S_3 - S_2$$
$$= (3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3) - (3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2)$$
$$= 13$$

$$a_5 = S_5 - S_4$$
$$= (3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5) - (3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4)$$
$$= 25$$

$\therefore a_3 + a_5 = 38$

답 ③

다른 풀이 1 $S_n = 3n^2 - 2n$이므로

(i) $n=1$일 때,

$$a_1 = S_1 = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1$$

(ii) $n \ge 2$일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= 3n^2 - 2n - \{3(n-1)^2 - 2(n-1)\}$$
$$= 6n - 5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1 = 1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 6n - 5$$

$$\therefore a_3 + a_5 = (6 \cdot 3 - 5) + (6 \cdot 5 - 5) = 38$$

다른 풀이 2 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로

$$a_3 + a_5 = 2a_4 = 2(S_4 - S_3)$$
$$= 2\{3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 - (3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3)\}$$
$$= 38$$

058 $S_n = n^2 + kn - 1$, $S_n{}' = 2n^2 - 4n$이라 하면

$$a_5 = S_5 - S_4$$
$$= (5^2 + 5k - 1) - (4^2 + 4k - 1)$$
$$= 9 + k$$

$$b_5 = S_5{}' - S_4{}'$$
$$= (2 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5) - (2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4)$$
$$= 14$$

이때 $a_5 = b_5$이므로 $\quad 9 + k = 14 \quad \therefore k = 5$

답 ①

059 $S_n = n^2 - 5n$에서

(i) $n=1$일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 5 \cdot 1 = -4$$

(ii) $n \ge 2$일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= n^2 - 5n - \{(n-1)^2 - 5(n-1)\}$$
$$= 2n - 6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1 = -4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n = 2n - 6$ ⋯ ❶

$9 \le a_n \le 18$에서 $\quad 9 \le 2n - 6 \le 18$

$15 \le 2n \le 24 \quad \therefore 7.5 \le n \le 12$ ⋯ ❷

따라서 자연수 n은 8, 9, 10, 11, 12이므로 그 합은

$8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 50$ ⋯ ❸

답 50

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 모든 자연수 n의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

060 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_4=ar^3=-2$ ...... ㉠

$a_7=ar^6=16$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=-8 \qquad \therefore r=-2$

$r=-2$를 ㉠에 대입하면

$-8a=-2 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 $a_n=\frac{1}{4}\cdot(-2)^{n-1}$이므로

$a_5=\frac{1}{4}\cdot(-2)^4=4$ 답 ③

다른 풀이 $a_5=a_4r=-2\cdot(-2)=4$

061 $a_n=\frac{2}{3^{3n-2}}$에서

$a_1=\frac{2}{3},\ a_2=\frac{2}{3^4}=\frac{2}{81}$

$\therefore \frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{81}\div\frac{2}{3}=\frac{1}{27}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $\frac{2}{3}$, 공비는 $\frac{1}{27}$이다.

답 첫째항: $\frac{2}{3}$, 공비: $\frac{1}{27}$

062 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_3=a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1 \qquad \therefore a=4$

$\therefore a_n=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_k=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{16}$이므로

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

따라서 $k-1=6$이므로 $\qquad k=7$ 답 ②

063 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\ (r>0)$라 하면

$a_4=ar^3=25$ ...... ㉠

$a_6=ar^5=125$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=5 \qquad \therefore r=\sqrt{5}\ (\because r>0)$

$r=\sqrt{5}$를 ㉠에 대입하면

$5\sqrt{5}a=25 \qquad \therefore a=\sqrt{5}$

따라서 $a_n=\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5})^{n-1}=(\sqrt{5})^n$이므로

$a_1a_3a_5\cdots a_{39}=\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5})^3\cdot(\sqrt{5})^5\cdot\cdots\cdot(\sqrt{5})^{39}$

$=5^{\frac{1+3+5+\cdots+39}{2}}=5^{\frac{20(1+39)}{4}}$

$=5^{200}$ 답 ⑤

064 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=12$에서 $\qquad ar=12$ ...... ㉠

$a_6=\frac{1}{4}a_4$에서 $\qquad ar^5=\frac{1}{4}ar^3$

$r^2=\frac{1}{4} \qquad \therefore r=\frac{1}{2}\ (\because \underbrace{r>0}_{\text{모든 항이 양수이므로 공비도 양수이다.}})$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}a=12 \qquad \therefore a=24$

따라서 $a_n=24\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_5=24\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

다른 풀이 $a_5=a_2r^3=12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{2}$

065 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_3+a_5=105$에서 $\qquad a_1+a_1r^2+a_1r^4=105$

$\therefore a_1(1+r^2+r^4)=105$ ...... ㉠

$a_2+a_4+a_6=210$에서 $\qquad a_1r+a_1r^3+a_1r^5=210$

$\therefore a_1r(1+r^2+r^4)=210$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\qquad r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$21a_1=105 \qquad \therefore a_1=5$

$\therefore a_2+a_3+a_4=a_1r+a_1r^2+a_1r^3=a_1r(1+r+r^2)$

$=10\cdot7=70$ 답 ④

066 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_7}{a_2}=\frac{a_8}{a_3}=\frac{a_9}{a_4}=\cdots=\frac{a_{16}}{a_{11}}=r^5$

이므로 주어진 식은

$\underbrace{r^5+r^5+r^5+\cdots+r^5}_{10\text{개}}=40$

$10r^5=40 \qquad \therefore r^5=4$

$\therefore \frac{a_{30}}{a_{20}}=r^{10}=(r^5)^2=4^2=16$ 답 16

067 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $\frac{a_4}{a_3}+\frac{a_4}{a_2}=-\frac{1}{4}$에서

$\frac{-16r^3}{-16r^2}+\frac{-16r^3}{-16r}=-\frac{1}{4}$

$r+r^2=-\frac{1}{4}, \qquad 4r^2+4r+1=0$

$(2r+1)^2=0 \qquad \therefore r=-\frac{1}{2}$

$\therefore a_n=-16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

-1을 제k항이라 하면

$-16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=-1$

$\therefore \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

따라서 $k-1=4$이므로 $\qquad k=5$ 답 제5항

068 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r(r>0)$라 하면

$a_5=ar^4=8$ …… ㉠

$a_7=ar^6=16$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=2 \quad \therefore r=\sqrt{2}\ (\because r>0)$

$r=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$4a=8 \quad \therefore a=2$

따라서 $a_n=2\cdot(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^{n+1}$이므로

$a_n^{\ 2}=2^{n+1}$

$a_n^{\ 2}>500$, 즉 $2^{n+1}>500$에서 $2^8=256$, $2^9=512$이므로

$n+1\geq 9 \quad \therefore n\geq 8$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이다. 답 ①

069 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$라 하면

$a_3=2\cdot r^2=\frac{2}{9}, \qquad r^2=\frac{1}{9}$

$\therefore r=\frac{1}{3}(\because r>0)$ ··· ❶

따라서 $a_n=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로 $\quad 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\frac{1}{50}$ ··· ❷

$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\frac{1}{100}, \qquad 3^{n-1}>100$

이때 $3^4=81$, $3^5=243$이므로

$n-1\geq 5 \quad \therefore n\geq 6$

따라서 처음으로 $\frac{1}{50}$보다 작아지는 항은 제 6 항이다. ··· ❸

답 제 6 항

채점 기준	비율
❶ 공비를 구할 수 있다.	40 %
❷ 부등식을 세울 수 있다.	20 %
❸ 처음으로 $\frac{1}{50}$보다 작아지는 항은 제몇 항인지 구할 수 있다.	40 %

쎈B특강

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열에서

① 처음으로 k보다 커지는 항

➡ $ar^{n-1}>k$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

② 처음으로 k보다 작아지는 항

➡ $ar^{n-1}<k$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

070 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\log a_3=\frac{2}{3}$에서 $\quad a_3=ar^2=10^{\frac{2}{3}}$ …… ㉠

$\log a_6=\frac{5}{3}$에서 $\quad a_6=ar^5=10^{\frac{5}{3}}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=10 \quad \therefore r=10^{\frac{1}{3}}$

$r=10^{\frac{1}{3}}$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=1$

따라서 $a_n=10^{\frac{n-1}{3}}$이므로 $1000<a_n<10000$에서

$10^3<10^{\frac{n-1}{3}}<10^4, \qquad 3<\frac{n-1}{3}<4$

$9<n-1<12 \qquad \therefore 10<n<13$

따라서 자연수 n은 11, 12의 2개이다. 답 ②

071 주어진 등비수열의 공비를 $r\ (r>0)$라 하면 첫째항이 7, 제 5 항이 112이므로

$7r^4=112, \qquad r^4=16$

$\therefore r=2\ (\because r>0)$

따라서 $a=14$, $b=28$, $c=56$이므로

$a+b+c=98$ 답 98

072 주어진 등비수열의 첫째항이 16, 공비가 $\frac{3}{2}$, 제$(n+2)$항이 $\frac{243}{2}$이므로

$16\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}=\frac{243}{2}, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^5$

$n+1=5 \qquad \therefore n=4$ 답 ③

073 주어진 등비수열의 공비를 $r\ (r>0)$라 하면 첫째항이 3, 제 7 항이 81이므로

$3\cdot r^6=81, \qquad r^6=27=3^3=(\sqrt{3})^6$

$\therefore r=\sqrt{3}\ (\because r>0)$

따라서 $x_n=3\cdot(\sqrt{3})^n=3^{1+\frac{n}{2}}$이므로

$\log_3 x_n=1+\frac{n}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\log_3 x_1+\log_3 x_2+\log_3 x_3+\log_3 x_4+\log_3 x_5$

$=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{2}{2}\right)+\left(1+\frac{3}{2}\right)+\left(1+\frac{4}{2}\right)+\left(1+\frac{5}{2}\right)$

$=5+\frac{1+2+3+4+5}{2}=\frac{25}{2}$ 답 ④

074 세 양수 $x-1$, $x+2$, $3x$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(x+2)^2=(x-1)\cdot 3x, \qquad x^2+4x+4=3x^2-3x$

$2x^2-7x-4=0, \qquad (2x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x>1)$ $x-1>0,\ x+2>0,\ 3x>0$이므로 $x>1$ 답 4

075 세 수 $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta$, $\frac{3\sqrt{3}}{8}$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\cos^2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{9}{16}$

$\therefore \cos\theta=\frac{3}{4}\ (\because 0^\circ<\theta<90^\circ)$

$\therefore \frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{7}{12}$ 답 ①

076 1, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=b$ …… ㉠ ··· ❶

a, b, 15가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+15$ …… ㉡ ··· ❷

㉠을 ㉡에 대입하면

$2a^2=a+15, \quad 2a^2-a-15=0$

$(2a+5)(a-3)=0 \quad \therefore a=3 \ (\because a>0)$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=9$ ··· ❸

$\therefore ab=27$ ··· ❹

답 27

채점 기준	비율
❶ 등비중항을 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	20 %
❷ 등차중항을 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	20 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

077 1이 아닌 세 양수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $\quad b^2=ac$

$$\therefore \frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_c b}=\log_b a+\log_b c$$
$$=\log_b ac=\log_b b^2$$
$$=2\log_b b=2$$

답 ⑤

078 $0.\dot{a}=\frac{a}{9}$, $0.00\dot{b}=\frac{b}{900}$, $0.0000\dot{c}=\frac{c}{90000}$에서 $\frac{a}{9}$, $\frac{b}{900}$, $\frac{c}{90000}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$\left(\frac{b}{900}\right)^2=\frac{a}{9}\cdot\frac{c}{90000}$$

$\therefore b^2=ac$

이때 a, b, c는 $a<b<c$인 5 이하의 자연수이므로

$a=1$, $b=2$, $c=4$

$\therefore a+b+c=7$

답 7

079 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

$a+ar+ar^2=13 \quad \therefore a(1+r+r^2)=13$ ······ ㉠

$a\cdot ar\cdot ar^2=27 \quad \therefore (ar)^3=27$ ······ ㉡

㉡에서 $\quad ar=3 \quad \therefore a=\frac{3}{r}$ ······ ㉢

$a=\frac{3}{r}$을 ㉠에 대입하면 $\quad \frac{3}{r}(1+r+r^2)=13$

양변에 r를 곱하여 정리하면

$3r^2-10r+3=0, \quad (3r-1)(r-3)=0$

$\therefore r=\frac{1}{3}$ 또는 $r=3$

㉢에서 $r=\frac{1}{3}$일 때 $a=9$, $r=3$일 때 $a=1$이므로 세 실수는 1, 3, 9이다.

따라서 가장 큰 수는 9이다.

답 9

080 삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=k$

$a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot a=155$ ······ ㉠

$a\cdot ar\cdot ar^2=125$ ······ ㉡

㉡에서 $\quad (ar)^3=125 \quad \therefore ar=5$

㉠에서 $ar(a+ar+ar^2)=155$이므로

$5k=155 \quad \therefore k=31$

답 ⑤

081 다섯 개의 자연수를 a, ar, ar^2, ar^3, ar^4 (a, r는 자연수, $r>1$)으로 놓으면

$ar^4\le 400$

(i) $r=2$일 때, $a\le 25$에서

$a=1, 2, 3, \cdots, 25$

(ii) $r=3$일 때, $a\le\frac{400}{81}=4.\cdots$에서

$a=1, 2, 3, 4$

(iii) $r=4$일 때, $a\le\frac{25}{16}=1.5625$에서

$a=1$

(iv) $r\ge 5$일 때, $ar^4\le 400$을 만족시키는 자연수 a는 존재하지 않는다.

이상에서 구하는 경우의 수는

$25+4+1=30$

답 ③

082 한 변의 길이가 6인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6^2=9\sqrt{3}$

1회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$9\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}$

2회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$9\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=9\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$9\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$

따라서 15회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$9\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{15}$

답 $9\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{15}$

083 주어진 정사각형의 넓이가 32이므로 한 변의 길이는

$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

정사각형 T_1의 한 변의 길이는

$\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4$

정사각형 T_2의 한 변의 길이는

$\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

정사각형 T_3의 한 변의 길이는

$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$ ··· ❶

⋮

따라서 정사각형 T_n의 한 변의 길이는

$4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}=2^{\frac{5-n}{2}}$ ··· ❷

$4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}=4\cdot 2^{\frac{1-n}{2}}=2^{\frac{5-n}{2}}$

즉 $f(n)=\frac{5-n}{2}$이므로

$f(55)=-25$ ··· ❸

답 -25

채점 기준	비율
❶ 정사각형 T_1, T_2, T_3의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ 정사각형 T_n의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(55)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

084 1일의 이용 시간을 a분, 매일 이용 시간의 증가율을 r라 하자.

1일부터 n일 후의 이용 시간은 $\quad a(1+r)^n$

4일 후인 5일의 이용 시간이 1일의 4배이므로

$$a(1+r)^4=4a \qquad \therefore (1+r)^4=4$$

8일 후인 9일의 이용 시간이 $a(1+r)^8$이므로 4일 동안 증가한 이용 시간은

$$\begin{aligned} a(1+r)^8-a(1+r)^4&=a(1+r)^4\{(1+r)^4-1\} \\ &=4a(4-1)=12a \end{aligned}$$

즉 $12a=\overbrace{180}^{3\cdot 60=180(분)}$이므로 $\quad a=15$

따라서 1일의 이용 시간은 15분이다. 답 15분

085 $\sin\underbrace{45^\circ}_{\angle P_1OP_2}=\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\overline{OP_1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$$\overline{P_1P_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OP_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}=1$$

$$\overline{P_2P_3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{P_1P_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vdots$$

$$\therefore \overline{P_nP_{n+1}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^8=\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^8=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{16}$에서 $\quad n-1=16 \quad \therefore n=17$

따라서 구하는 선분은 $\overline{P_{17}P_{18}}$이다. 답 ⑤

086 $a_n=3^{3n-2}$에서 $\quad a_1=3,\ a_2=3^4,\ a_3=3^7,\ \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 27인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9&=\frac{3(27^9-1)}{27-1}=\frac{3(3^{27}-1)}{26} \\ &=\frac{3^{28}-3}{26} \end{aligned}$$

$\therefore p=28$ 답 28

087 주어진 수열은 첫째항이 5, 공비가 -2인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{5\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{5}{3}\{1-(-2)^n\}$$

$S_k=55$에서 $\quad \dfrac{5}{3}\{1-(-2)^k\}=55$

$$1-(-2)^k=33, \qquad (-2)^k=-32=(-2)^5$$

$\therefore k=5$ 답 5

088 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$a_2+a_3=ar+ar^2=12 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$a_4+a_5=ar^3+ar^4=r^2(ar+ar^2)=48 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$r^2=4 \qquad \therefore r=2\ (\because r>0)$$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$$2a+4a=12 \qquad \therefore a=2 \qquad \cdots ❶$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제 8 항까지의 합은

$$\frac{2\cdot(2^8-1)}{2-1}=510 \qquad \cdots ❷$$

답 510

채점 기준	비율
❶ 첫째항과 공비를 구할 수 있다.	60 %
❷ 첫째항부터 제 8 항까지의 합을 구할 수 있다.	40 %

089 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$a_3=a_1r^2=12 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$a_7=a_1r^6=108 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^4=9$

r는 실수이므로 $\quad r^2=3$

$r^2=3$을 ㉠에 대입하면

$$3a_1=12 \qquad \therefore a_1=4$$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 $a_1^2=16$, 공비가 $r^2=3$인 등비수열이므로 구하는 합은

$$\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{15}^2&=\frac{16(3^{15}-1)}{3-1} \\ &=8(3^{15}-1) \end{aligned}$$

답 ③

090 첫째항이 4, 공비가 5인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{4(5^n-1)}{5-1}=5^n-1$$

$S_n\geq 10^{10}$에서 $\quad 5^n-1\geq 10^{10}$

$$\therefore \underbrace{5^n\geq 10^{10}+1}_{5^n\geq 10^{10}+1>10^{10}}$$

즉 $5^n>10^{10}$이므로 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 5^n>\log 10^{10}, \qquad n\log 5>10$$

$$\therefore n>\frac{10}{\log 5}=\frac{10}{1-0.3}=14.\cdots$$

따라서 첫째항부터 제 15 항까지의 합이 처음으로 10^{10} 이상이 되므로

$n=15$ 답 15

091 주어진 수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$$\begin{aligned} &1+11+111+\cdots+11\cdots1 \\ &=\frac{1}{9}(9+99+999+\cdots+99\cdots9) \\ &=\frac{1}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^{10}-1)\} \\ &=\frac{1}{9}\{(10+10^2+10^3+\cdots+10^{10})-10\} \\ &=\frac{1}{9}(10^2+10^3+\cdots+10^{10}) \\ &=\frac{1}{9}\cdot\frac{100(10^9-1)}{10-1} \\ &=\frac{100}{81}(10^9-1) \end{aligned}$$

따라서 $a=81$, $b=9$이므로 $\quad \dfrac{a}{b}=9$ 답 ③

092 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=27 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$S_{2n}=\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\frac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1}=36 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면

$$r^n+1=\frac{4}{3} \qquad \therefore r^n=\frac{1}{3}$$

$$\therefore S_{3n}=\frac{a(r^{3n}-1)}{r-1}=\frac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}$$

$$=27\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+1\right\}$$

$$=27\cdot\frac{13}{9}=39$$ 답 ②

093 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$\frac{a(r^3-1)}{r-1}=35 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=315 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면

$$r^3+1=9, \qquad r^3=8 \qquad \therefore r=2$$

$r=2$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$7a=35 \qquad \therefore a=5$$

따라서 $a_n=5\cdot 2^{n-1}$이므로

$$a_4=5\cdot 2^3=40$$ 답 ④

094 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=\frac{a_1(r^{20}-1)}{r-1}=20 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=\underbrace{a_1+a_1r^2+a_1r^4+\cdots+a_1r^{18}}_{\text{첫째항이 } a_1\text{, 공비가 } r^2\text{인 등비수열}}$$

$$=\frac{a_1\{(r^2)^{10}-1\}}{r^2-1}$$

$$=\frac{a_1(r^{20}-1)}{(r+1)(r-1)}$$

$$=15 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠÷㉡을 하면

$$r+1=\frac{4}{3} \qquad \therefore r=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 공비는 $\frac{1}{3}$이다. 답 $\frac{1}{3}$

095 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$$
$$=r+r^3+r^5+\cdots+r^{2k-1}$$
$$=\frac{r\{(r^2)^k-1\}}{r^2-1}=\frac{r(r^{2k}-1)}{r^2-1}=273 \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}$$
$$=1+r^2+r^4+\cdots+r^{2k-2}$$
$$=\frac{1\cdot\{(r^2)^k-1\}}{r^2-1}=\frac{r^{2k}-1}{r^2-1}=91 \quad \cdots\cdots ㉡ \quad \cdots ❷$$

㉠÷㉡을 하면 $\quad r=3$ ⋯ ❸

$r=3$을 ㉡에 대입하면

$$\frac{9^k-1}{9-1}=91, \qquad 9^k-1=728$$

$$9^k=729=9^3 \qquad \therefore k=3 \quad \cdots ❹$$

답 3

채점 기준	비율
❶ $a_2+a_4+\cdots+a_{2k}$를 r, k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}$을 r, k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ r의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

096 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$도 등비수열이다.

등비수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=7 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면

$$r^{10}+1=21 \qquad \therefore r^{10}=20$$

$$\therefore S_{40}=\frac{a(r^{40}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{20}-1)(r^{20}+1)}{r-1}$$

$$=7(20^2+1)=2807$$ 답 2807

쎈B특강

수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이면 $a_n=ar^{n-1}$이므로 $\quad \dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{ar^{n-1}}=\dfrac{1}{a}\cdot\left(\dfrac{1}{r}\right)^{n-1}$

즉 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a}$, 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비수열이다.

097 2011년의 전력량을 a kWh라 하고, 매년 전력량이 전년도의 전력량의 r배라 하면 2011년부터 2020년까지의 전력량이 6×10^5 kWh이므로

$$\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=600000 \quad \cdots\cdots ㉠$$

2016년부터 2020년까지의 전력량이 45×10^4 kWh이므로

$$\frac{ar^5(1-r^5)}{1-r}=450000 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠÷㉡을 하면

$$\frac{1-r^{10}}{r^5(1-r^5)}=\frac{4}{3}, \qquad \frac{(1+r^5)(1-r^5)}{r^5(1-r^5)}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{1+r^5}{r^5}=\frac{4}{3}, \qquad 3+3r^5=4r^5$$

$$\therefore r^5=3$$

따라서 2021년의 전력량은

$$ar^{10}=a(r^5)^2=a\cdot 3^2=9a$$

이므로 2011년의 전력량의 9배이다. 답 9배

098 V석의 구역은 1개이고 등급에 따라 구역의 개수가 3배씩 늘어나므로 전체 구역의 개수는

$$1+1\cdot3+1\cdot3^2+1\cdot3^3+1\cdot3^4=\frac{3^5-1}{3-1}=121$$

이때 한 구역의 좌석이 20개이므로 전체 좌석의 개수는

$121\cdot20=2420$ 　　답 2420

099 1회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 한 변의 길이가 6인 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

$6^2=36$

$$36\cdot\frac{1}{4}=9$$

2회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 　$9\cdot\frac{3}{4}$

3회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 　$9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$

⋮

n회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 　$9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

따라서 시행을 20회 반복했을 때 색칠한 부분의 넓이의 합은

$$9+9\cdot\frac{3}{4}+9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{19}$$

$$=\frac{9\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{3}{4}}=36\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}$$

답 $36\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}$

100 처음 15 km 구간을 달리는 데 걸린 시간은 $\frac{15}{12}$시간이고, 일정한 속력으로 1 km를 달리는 데 걸린 시간은 $\frac{1}{12}$시간이다.

이후 1 km를 달리는 데 걸린 시간은 $\frac{1}{12}$시간에서 20 %씩 증가하므로 전체 걸린 시간은

$$\frac{15}{12}+\underbrace{\frac{1}{12}\times1.2+\frac{1}{12}\times1.2^2+\cdots+\frac{1}{12}\times1.2^5}_{\text{5 km를 달리는 데 걸린 시간}}$$

$$=\frac{5}{4}+\frac{\frac{1}{12}\times1.2\times(1.2^5-1)}{1.2-1}$$

$$=\frac{5}{4}+\frac{\frac{1}{12}\times1.2\times1.5}{0.2}=2(\text{시간})$$

따라서 완주하는 데 걸린 시간은 2시간이다. 　　답 2시간

101 $S_n+25=5^{n+2}$에서 　$S_n=5^{n+2}-25$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=5^3-25=100$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=5^{n+2}-25-(5^{n+1}-25)\\&=5^{n+1}(5-1)\\&=4\cdot5^{n+1}\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=100$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4\cdot5^{n+1}$

따라서 $p=4$, $q=5$이므로

$pq=20$ 　　답 20

102 ㄱ. $a_3=S_3-S_2=215-35=180$

$a_1=S_1=6^1-1=5$

$\therefore a_3-a_1=175$

ㄴ. $$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=6^n-1-(6^{n-1}-1)\\&=6^{n-1}(6-1)\\&=5\cdot6^{n-1}\ (n\ge2)\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=5\cdot6^{n-1}$

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$은 공비가 6인 등비수열을 이루므로 수열 $\{a_{3n}\}$은 공비가 $6^3=216$인 등비수열이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 　　답 ②

103 $S_n=3\cdot10^{n+1}+k$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3\cdot10^2+k=300+k$ 　$\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=3\cdot10^{n+1}+k-(3\cdot10^n+k)\\&=3\cdot10^n(10-1)\\&=27\cdot10^n\qquad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

이 수열이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉡에 $n=1$을 대입한 것과 ㉠이 같아야 하므로

$270=300+k$ 　　$\therefore k=-30$ 　　답 -30

104 $S_n=2^{n-1}-\frac{1}{2}$에서

(i) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=2^{n-1}-\frac{1}{2}-\left(2^{n-2}-\frac{1}{2}\right)\\&=2^{n-2}(2-1)\\&=2^{n-2}\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=\frac{1}{2}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2^{n-2}$ 　⋯ ❶

$$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=\frac{1}{2}+2+2^3+2^5+2^7=\frac{\frac{1}{2}\{(2^2)^5-1\}}{2^2-1}=\frac{341}{2}$$ 　⋯ ❷

답 $\frac{341}{2}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	60 %
❷ $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구할 수 있다.	40 %

105 매년 초에 100만 원씩 적립하면 10년째 말의 적립금의 원리합계는

$$100(1+0.03)+100(1+0.03)^2+\cdots+100(1+0.03)^{10}$$
$$=\frac{100\times1.03\times(1.03^{10}-1)}{1.03-1}=\frac{100\times1.03\times0.3}{0.03}$$
$$=1030\text{ (만 원)}$$

답 1030만 원

106 매년 초에 적립하는 금액을 a만 원이라 하면 3년째 말의 적립금의 원리합계는

$$a(1+0.04)+a(1+0.04)^2+a(1+0.04)^3$$
$$=\frac{a\times1.04\times(1.04^3-1)}{1.04-1}=\frac{a\times1.04\times0.12}{0.04}$$
$$=3.12a\text{ (만 원)}$$

$3.12a=390$이므로 $a=125$

따라서 매년 초에 125만 원씩 적립해야 한다.

답 ④

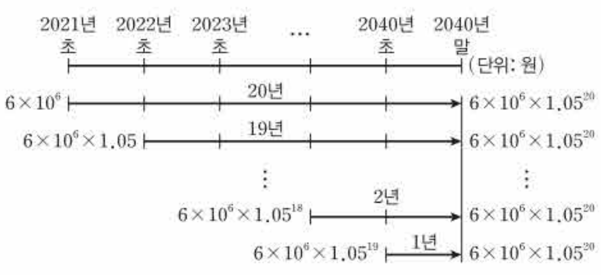
107 예나와 유준이가 각각 24개월, 12개월째 말에 받는 금액을 A만 원, B만 원이라 하면

$$A=10(1+0.001)+10(1+0.001)^2+\cdots+10(1+0.001)^{24}$$
$$=\frac{10\times1.001\times(1.001^{24}-1)}{1.001-1}$$
$$=10010(1.001^{24}-1)$$
$$B=15(1+0.001)+15(1+0.001)^2+\cdots+15(1+0.001)^{12}$$
$$=\frac{15\times1.001\times(1.001^{12}-1)}{1.001-1}$$
$$=15015(1.001^{12}-1)$$
$$\therefore \frac{A}{B}=\frac{10010(1.001^{24}-1)}{15015(1.001^{12}-1)}$$
$$=\frac{2(1.001^{12}+1)}{3}$$
$$=\frac{2(1.01+1)}{3}$$
$$=1.34$$

따라서 예나가 받는 금액은 유준이가 받는 금액의 1.34배이다.

답 ③

108 매년 초 적립금의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 2040년 말의 적립금의 원리합계는

$$6\times10^6\times1.05^{20}\times20=120\times1.05^{20}\times10^6$$
$$=120\times2.7\times10^6$$
$$=324\times10^6\text{ (원)}$$

즉 3억 2천 4백만 원이다.

답 3억 2천 4백만 원

09 수열의 합

Ⅲ. 수열

개념 정리

본책 120쪽

❶ $\frac{n(n+1)}{2}$ ❷ $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ❸ $\frac{1}{k+1}$

쎈 B 유형 뽀개기

본책 121쪽

01 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$
$$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$$

이므로 $\sum_{k=1}^{2n}a_k=3n^2-4n$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=3\cdot5^2-4\cdot5=55$$

답 ②

02 $\sum_{k=1}^{39}f(k+1)-\sum_{k=2}^{40}f(k-1)$

$$=\{f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(40)\}$$
$$-\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(39)\}$$
$$=f(40)-f(1)=90-8=82$$

답 82

03 ③ $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
$$=0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=0}^{n}k^2$$

④ $\sum_{k=1}^{20}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{19}+a_{20}$
$$=(a_1+a_3+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})$$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{10}a_{2k}$$

⑤ $\sum_{k=1}^{20}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+20^3=\sum_{k=3}^{22}(k-2)^3$

답 ⑤

04 $\sum_{k=0}^{10}(2k+1)^2+\sum_{k=1}^{11}(2k)^2$

$$=(1^2+3^2+5^2+\cdots+21^2)+(2^2+4^2+6^2+\cdots+22^2)$$
$$=1^2+2^2+3^2+\cdots+22^2$$
$$=\sum_{k=1}^{22}k^2=\sum_{k=0}^{21}(k+1)^2$$

이상에서 $\sum_{k=0}^{10}(2k+1)^2+\sum_{k=1}^{11}(2k)^2$과 그 값이 같은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

05 $\sum_{k=1}^{20}ka_k=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+20a_{20}=80$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{19}ka_{k+1}=a_2+2a_3+3a_4+\cdots+19a_{20}=35$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=45$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=45$$

답 45

09 수열의 합

06 $a_{12}=S_{12}-S_{11}$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{13}(2k+3)^2-\sum_{k=1}^{12}(2k+1)^2\right\}$$
$$-\left\{\sum_{k=1}^{12}(2k+3)^2-\sum_{k=1}^{11}(2k+1)^2\right\}$$
$$=\left\{\sum_{k=1}^{13}(2k+3)^2-\sum_{k=1}^{12}(2k+3)^2\right\}$$
$$-\left\{\sum_{k=1}^{12}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{11}(2k+1)^2\right\}$$
$$=(2\cdot13+3)^2-(2\cdot12+1)^2$$
$$=29^2-25^2=(29+25)(29-25)=216$$

답 ⑤

다른 풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n+1}(2k+3)^2-\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2$

$$=\{5^2+7^2+\cdots+(2n+5)^2\}$$
$$-\{3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2\}$$
$$=(2n+3)^2+(2n+5)^2-3^2$$
$$=8n^2+32n+25$$

$\therefore a_{12}=S_{12}-S_{11}$

$=8\cdot12^2+32\cdot12+25-(8\cdot11^2+32\cdot11+25)=216$

07 자연수 k에 대하여

(i) $n=3k-2$일 때,

$n^2=(3k-2)^2=3(3k^2-4k+1)+1$이므로 $\quad a_{3k-2}=1$

(ii) $n=3k-1$일 때,

$n^2=(3k-1)^2=3(3k^2-2k)+1$이므로 $\quad a_{3k-1}=1$

(iii) $n=3k$일 때,

$n^2=(3k)^2=3(3k^2)$이므로 $\quad a_{3k}=0$

$\therefore \sum_{n=1}^{1000}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1000}$

$=1+1+0+1+1+0+\cdots+1+1+0+1$

$=2\cdot333+1=667$

답 667

08 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 중 1이 a개, 2가 b개라 하면

$\sum_{i=1}^{n}x_i=1\cdot a+2\cdot b=26$

$\therefore a+2b=26$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1^2\cdot a+2^2\cdot b=40$

$\therefore a+4b=40$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=12,\ b=7$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}x_i^4=1^4\cdot12+2^4\cdot7=124$

답 ⑤

09 $2\le n\le3$일 때, $\quad n-4<0$

n이 짝수이면 실수인 n제곱근은 없고, n이 홀수이면 실수인 n제곱근은 1개이므로

$f(2)=0,\ f(3)=1$

$n=4$일 때, $\quad n-4=0$

0의 n제곱근은 0의 1개이므로

$f(4)=1$

$5\le n\le20$일 때, $\quad n-4>0$

n이 짝수이면 실수인 n제곱근은 2개이고, n이 홀수이면 실수인 n제곱근은 1개이므로

$f(5)=f(7)=\cdots=f(19)=1,$

$f(6)=f(8)=\cdots=f(20)=2$

$\therefore \sum_{n=2}^{20}f(n)=f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(20)$

$=0+1+1+8(1+2)=26$

답 26

10 $\sum_{k=1}^{20}(2a_k-3)^2=\sum_{k=1}^{20}(4a_k^2-12a_k+9)$

$$=4\sum_{k=1}^{20}a_k^2-12\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=1}^{20}9$$
$$=4\cdot20-12\cdot8+9\cdot20=164$$

답 ③

11 $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2-2a_kb_k+b_k^2)$

$=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)-2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$ $\quad\cdots$ ➊

이므로 $\quad 50=120-2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k,\quad 2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=70$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_kb_k=35$ $\quad\cdots$ ➋

답 35

채점 기준	비율
➊ $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2$을 변형할 수 있다.	50 %
➋ $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$의 값을 구할 수 있다.	50 %

12 $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+2b_k-8)=3\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}8$

$$=3\cdot(-6\cdot10)+2\cdot(4\cdot10^2)-8\cdot10$$
$$=540$$

답 ④

13 $\sum_{k=11}^{20}(4a_k+5b_k)=4\sum_{k=11}^{20}a_k+5\sum_{k=11}^{20}b_k$

$$=4\left(\sum_{k=1}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k\right)+5\left(\sum_{k=1}^{20}b_k-\sum_{k=1}^{10}b_k\right)$$
$$=4(45-24)+5(18-10)$$
$$=124$$

답 124

14 $\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^2=48$에서

$\sum_{k=1}^{10}(a_k^2-2a_k+1)=48$

$\sum_{k=1}^{10}a_k^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=48$

$\sum_{k=1}^{10}a_k^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k+1\cdot10=48$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k=38$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k-1)=32$에서

$\sum_{k=1}^{10}(a_k^2-a_k)=32$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k^2-\sum_{k=1}^{10}a_k=32$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡$\times2-$㉠을 하면 $\quad \sum_{k=1}^{10}a_k^2=26$

답 ⑤

15 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{30}a_{2k}-\sum_{k=1}^{30}a_{2k-1}&=(a_2+a_4+\cdots+a_{60})-(a_1+a_3+\cdots+a_{59})\\&=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{60}-a_{59})\\&=\underbrace{d+d+\cdots+d}_{d\text{가 }30\text{개}}\\&=30d\end{aligned}$$

이때 $a_3+a_5=12$에서

$$\begin{aligned}a_3+a_5&=(a_1+2d)+(a_1+4d)\\&=2a_1+6d=12\end{aligned}$$

$\therefore\ a_1+3d=6$ …… ㉠

$a_8=22$에서 $a_1+7d=22$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1=-6,\ d=4$

따라서 구하는 값은 $30d=120$ 답 120

다른 풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -6, 공차가 4이므로

$a_n=-6+(n-1)\cdot4=4n-10$

이때

$a_{2k}=4\cdot2k-10=8k-10$

$a_{2k-1}=4(2k-1)-10=8k-14$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{30}a_{2k}-\sum_{k=1}^{30}a_{2k-1}&=\sum_{k=1}^{30}(8k-10)-\sum_{k=1}^{30}(8k-14)\\&=8\sum_{k=1}^{30}k-30\cdot10-8\sum_{k=1}^{30}k+30\cdot14\\&=-300+420=120\end{aligned}$$

16 다항식 $P(x)=x^{n-1}(x-3)$을 $x-6$으로 나누었을 때의 나머지는 $P(6)$이므로

$a_n=6^{n-1}\cdot3=\frac{1}{2}\cdot6^n$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{n}a_k&=\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}6^k}_{\text{첫째항이 6, 공비가 6인 등비수열의 첫째항부터 제}n\text{항까지의 합}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6(6^n-1)}{6-1}\\&=\frac{3(6^n-1)}{5}\end{aligned}$$

답 ②

17 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5+a_{11}=8a_3$에서 $(a+4d)+(a+10d)=8(a+2d)$

$2a+14d=8a+16d,\quad 6a+2d=0$

$\therefore\ 3a+d=0$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{15}a_k=600$에서 $\frac{15(2a+14d)}{2}=600$

$\therefore\ a+7d=40$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ d=6$

$\therefore\ a_7=a+6d=-2+6\cdot6=34$ 답 34

18 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_{13}=27a_{10}$에서 $ar^{12}=27ar^9,\quad r^3=27$

$\therefore\ r=3$ ($\because$ r는 실수)

$a_2=18$에서 $ar=18$

$r=3$을 위의 식에 대입하면 $a=6$ ⋯ ❶

$\sum_{k=1}^{n}a_k=726$에서 $\frac{6(3^n-1)}{3-1}=726$

$3^n-1=242,\quad 3^n=243=3^5\quad \therefore\ n=5$ ⋯ ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구할 수 있다.	50 %
❷ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	50 %

19

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{30}\frac{2^k-5^k}{4^{k-2}}&=\sum_{k=1}^{30}\left\{16\left(\frac{1}{2}\right)^k-16\left(\frac{5}{4}\right)^k\right\}\\&=16\sum_{k=1}^{30}\left(\frac{1}{2}\right)^k-16\sum_{k=1}^{30}\left(\frac{5}{4}\right)^k\\&=16\cdot\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{30}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-16\cdot\frac{\frac{5}{4}\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{30}-1\right\}}{\frac{5}{4}-1}\\&=16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{30}\right\}-80\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{30}-1\right\}\\&=16-16\left(\frac{1}{2}\right)^{30}-80\left(\frac{5}{4}\right)^{30}+80\\&=-80\left(\frac{5}{4}\right)^{30}-\left(\frac{1}{2}\right)^{26}+96\end{aligned}$$

$16\left(\frac{1}{2}\right)^{30}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}=\left(\frac{1}{2}\right)^{26}$

따라서 $a=-80,\ b=96$이므로

$a+b=16$ 답 ③

20 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_3=20$에서

$32+2d=20,\quad 2d=-12$

$\therefore\ d=-6$

$\therefore\ a_n=32+(n-1)\cdot(-6)=-6n+38$

$a_n<0$에서 $-6n+38<0$

$\therefore\ n>\frac{19}{3}=6.\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제6항까지 양수이고, 제7항부터 음수이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{10}|a_k|&=\sum_{k=1}^{6}a_k+\sum_{k=7}^{10}(-a_k)\\&=\sum_{k=1}^{6}a_k-\sum_{k=7}^{10}a_k\\&=\underbrace{\frac{6(32+2)}{2}}_{a_1=32,\ a_6=2}-\underbrace{\frac{4(-4-22)}{2}}_{a_7=-4,\ a_{10}=-22}\\&=154\end{aligned}$$

답 154

21

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}\frac{1+2+3+\cdots+k}{k+1}&=\sum_{k=1}^{20}\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k+1}\\&=\sum_{k=1}^{20}\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}k\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{20\cdot21}{2}\\&=105\end{aligned}$$

답 ②

22

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(6k-5)&=6\cdot\frac{(n-1)n}{2}-5(n-1)\\&=3n^2-8n+5\end{aligned}$$

따라서 $3n^2-8n+5=65$이므로

$3n^2-8n-60=0,\quad (3n+10)(n-6)=0$

$\therefore\ n=6$ ($\because$ n은 자연수) 답 6

23 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_k+\beta_k=k,\ \alpha_k\beta_k=-(k+1)$

이므로

$$\begin{aligned}\alpha_k^2+\beta_k^2&=(\alpha_k+\beta_k)^2-2\alpha_k\beta_k\\&=k^2+2(k+1)\\&=k^2+2k+2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}(\alpha_k^2+\beta_k^2)&=\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k+2)\\&=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+2\cdot\frac{10\cdot11}{2}+2\cdot10\\&=515\end{aligned}$$

답 ③

24 $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6}(k+c)^2&=\sum_{k=1}^{6}(k^2+2ck+c^2)\\&=\frac{6\cdot7\cdot13}{6}+2c\cdot\frac{6\cdot7}{2}+c^2\cdot6\\&=6c^2+42c+91\\&=6\left(c+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{35}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{6}(k+c)^2$의 값이 최소가 되도록 하는 c의 값은 $-\frac{7}{2}$이다.

답 ④

25 세 점 $\left(n,\ \frac{4}{n}\right)$, $(n-2,\ 0)$, $(n+2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 x축 위의 변을 밑변이라 하면 밑변의 길이는 $(n+2)-(n-2)=4$이고 높이는 $\frac{4}{n}$이다.

따라서 삼각형의 넓이 a_n은

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{4}{n}=\frac{8}{n}$$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{12}\frac{16}{a_na_{n+1}}&=\sum_{n=1}^{12}\frac{16}{\frac{8}{n}\cdot\frac{8}{n+1}}\\&=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{12}(n^2+n)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{12\cdot13\cdot25}{6}+\frac{12\cdot13}{2}\right)\\&=182\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 182

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{n=1}^{12}\frac{16}{a_na_{n+1}}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

26 $$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{12}k^2+\sum_{k=2}^{12}k^2+\sum_{k=3}^{12}k^2+\cdots+\sum_{k=12}^{12}k^2\\&=(1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2)+(2^2+3^2+4^2+\cdots+12^2)\\&\quad+(3^2+4^2+5^2+\cdots+12^2)+\cdots+(11^2+12^2)+12^2\\&=1^2\cdot1+2^2\cdot2+3^2\cdot3+\cdots+12^2\cdot12\\&=1^3+2^3+3^3+\cdots+12^3=\sum_{k=1}^{12}k^3\\&=\left(\frac{12\cdot13}{2}\right)^2=78^2\end{aligned}$$

$\therefore m=78$

답 ④

27 $$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}12\right)\right\}&=\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}12l\right)\\&=\sum_{m=1}^{n}\left\{12\cdot\frac{m(m+1)}{2}\right\}\\&=6\sum_{m=1}^{n}(m^2+m)\\&=6\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}\\&=n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)\\&=2n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

답 ③

28 $$\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{i}ij\right)=\sum_{i=1}^{4}\left(i\sum_{j=1}^{i}j\right)$$

i를 상수로 생각한다.

$$=\sum_{i=1}^{4}\left\{i\cdot\frac{i(i+1)}{2}\right\}$$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(i^3+i^2)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{4\cdot5}{2}\right)^2+\frac{4\cdot5\cdot9}{6}\right\}\\&=65\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 65

채점 기준	비율
❶ $\sum_{j=1}^{i}ij$를 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

29 $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{k}(k-i)\right\}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}k-\sum_{i=1}^{k}i\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left\{k^2-\frac{k(k+1)}{2}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}=120$이므로

$n(n-1)(n+1)=720,\quad n^3-n-720=0$

$(n-9)(n^2+9n+80)=0$

$\therefore n=9$ ($\because$ n은 자연수)

답 ⑤

참고 $(n-1)n(n+1)=720=8\cdot9\cdot10$이므로

$n=9$

로 구할 수도 있다.

30 $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{n}2^{k+n}\right)&=\sum_{n=1}^{3}\left(2^n\sum_{k=1}^{n}2^k\right)=\sum_{n=1}^{3}\left\{2^n\cdot\frac{2(2^n-1)}{2-1}\right\}\\&=\sum_{n=1}^{3}2^n(2^{n+1}-2)=\sum_{n=1}^{3}(2^{2n+1}-2^{n+1})\\&=2\sum_{n=1}^{3}4^n-2\sum_{n=1}^{3}2^n\\&=2\cdot\frac{4(4^3-1)}{4-1}-2\cdot\frac{2(2^3-1)}{2-1}\\&=140\end{aligned}$$

답 140

31 수열 $1\cdot2,\ 2\cdot3,\ 3\cdot4,\ \cdots,\ 15\cdot16$의 제 k 항을 a_k라 하면

$a_k=k(k+1)=k^2+k$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{15}a_k=\sum_{k=1}^{15}(k^2+k)$

$=\frac{15\cdot16\cdot31}{6}+\frac{15\cdot16}{2}$

$=1360$ 답 1360

32 $a_n=5n+8$에서 $a_{2k}=5\cdot2k+8=10k+8$

$\therefore \sum_{k=1}^{2n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{2n}(10k+8)$

$=10\cdot\frac{2n(2n+1)}{2}+8\cdot2n$

$=20n^2+26n$ 답 ③

33 주어진 수열의 제 k 항을 a_k라 하면

$a_k=k(2k+1)^2=4k^3+4k^2+k$ ⋯ ❶

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(4k^3+4k^2+k)$

$=4\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{6}\{6n(n+1)+4(2n+1)+3\}$

$=\frac{n(n+1)}{6}(6n^2+14n+7)$ ⋯ ❷

따라서 $f(n)=6n^2+14n+7$이므로

$f(-2)=6\cdot(-2)^2+14\cdot(-2)+7=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 수열의 제 k 항을 구할 수 있다.	30 %
❷ S_n을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(-2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

34 $a_n=1+(n-1)\cdot(-2)=-2n+3$,

$b_n=4+(n-1)\cdot3=3n+1$이므로

$\sum_{k=1}^{5}a_kb_k=\sum_{k=1}^{5}(-2k+3)(3k+1)$

$=\sum_{k=1}^{5}(-6k^2+7k+3)$

$=-6\cdot\frac{5\cdot6\cdot11}{6}+7\cdot\frac{5\cdot6}{2}+3\cdot5$

$=-210$ 답 ②

35 주어진 수열의 제 k 항을 a_k라 하면

$a_k=1+3+5+\cdots+(2k-1)$

$=\sum_{i=1}^{k}(2i-1)$

$=2\cdot\frac{k(k+1)}{2}-1\cdot k=k^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}k^2$

$=\frac{20\cdot21\cdot41}{6}$

$=2870$ 답 2870

36 위에서부터 k 번째 층에 필요한 정육면체의 개수는

$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k^2+k}{2}$

따라서 10층 탑을 쌓는 데 필요한 정육면체의 개수는

$\sum_{k=1}^{10}\frac{k^2+k}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+\frac{10\cdot11}{2}\right)=220$ 답 220

37 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-4n$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=-3$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-4n-\{(n-1)^2-4(n-1)\}$

$=2n-5$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=-3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-5$

따라서 $a_{2k+1}=2(2k+1)-5=4k-3$이므로

$\sum_{k=1}^{20}a_{2k+1}=\sum_{k=1}^{20}(4k-3)$

$=4\cdot\frac{20\cdot21}{2}-3\cdot20$

$=780$ 답 780

38 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=5\cdot2^n-5$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=5$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=5\cdot2^n-5-(5\cdot2^{n-1}-5)$

$=5\cdot2^{n-1}(2-1)$

$=5\cdot2^{n-1}$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=5\cdot2^{n-1}$

따라서 $\frac{1}{a_k}=\frac{1}{5\cdot2^{k-1}}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$이므로

$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{2}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$ 답 ④

39 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=3^{n+1}-3$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=6$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3^{n+1}-3-(3^n-3)$

$=3^n(3-1)$

$=2\cdot3^n$ ⋯⋯ ㉠

09 수열의 합

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2\cdot 3^n \quad \cdots ❶$$

$a_{2k}=2\cdot 3^{2k}=2\cdot 9^k$이므로

$$\sum_{k=1}^{12} a_{2k}=\sum_{k=1}^{12} 2\cdot 9^k=2\sum_{k=1}^{12} 9^k$$
$$=2\cdot\frac{9(9^{12}-1)}{9-1}$$
$$=\frac{9^{13}-9}{4}$$
$$=\frac{3^{26}-9}{4} \quad \cdots ❷$$

따라서 $p=26$, $q=4$이므로

$$p+q=30 \quad \cdots ❸$$

답 30

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{k=1}^{12} a_{2k}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

40 $\sum_{k=1}^{n} ka_k=n(n+1)(n+2)$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=\sum_{k=1}^{1} ka_k=1\cdot 2\cdot 3=6$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$na_n=\sum_{k=1}^{n} ka_k-\sum_{k=1}^{n-1} ka_k$$
$$=n(n+1)(n+2)-n(n-1)(n+1)$$
$$=n(n+1)\{(n+2)-(n-1)\}$$
$$=3n(n+1)$$

$n\neq 0$이므로 $a_n=3(n+1)$ …… ㉠

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=3(n+1)$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{15} a_k=3\sum_{k=1}^{15}(k+1)$$
$$=3\left(\frac{15\cdot 16}{2}+1\cdot 15\right)$$
$$=405$$

답 405

41 수열 $1\cdot(n-1)$, $2\cdot(n-2)$, $3\cdot(n-3)$, $\cdots$, $(n-1)\cdot 1$의 제 k 항을 a_k라 하면

$$a_k=k(n-k)=-k^2+nk$$

이므로 주어진 식은

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k=\sum_{k=1}^{n-1}(-k^2+nk)$$
$$=-\sum_{k=1}^{n-1} k^2+n\sum_{k=1}^{n-1} k$$
$$=-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+n\cdot\frac{(n-1)n}{2}$$
$$=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

답 $\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

42 수열 $\left(1+\frac{2}{n}\right)^2$, $\left(1+\frac{4}{n}\right)^2$, $\left(1+\frac{6}{n}\right)^2$, $\cdots$, $\left(1+\frac{2n}{n}\right)^2$의 제 k 항을 a_k라 하면

$$a_k=\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2=1+\frac{4k}{n}+\frac{4k^2}{n^2}$$

이므로 주어진 식은

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{4k}{n}+\frac{4k^2}{n^2}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n} 1+\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} k+\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2$$
$$=1\cdot n+\frac{4}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{13n^2+12n+2}{3n}$$

따라서 $p=12$, $q=2$이므로

$$p-q=10$$

답 10

43 수열 $1\cdot(2n-1)$, $3\cdot(2n-3)$, $5\cdot(2n-5)$, $\cdots$, $(2n-1)\cdot 1$의 제 k 항을 a_k라 하면

$$a_k=(2k-1)\{2n-(2k-1)\}$$
$$=(2k-1)(2n-2k+1)$$
$$=-4k^2+4(n+1)k-2n-1$$

이므로 주어진 식은

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-4k^2+4(n+1)k-2n-1\}$$
$$=-4\sum_{k=1}^{n} k^2+4(n+1)\sum_{k=1}^{n} k+(-2n-1)\cdot n$$
$$=-4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n(2n+1)$$
$$=\frac{n(2n^2+1)}{3}$$

답 $\frac{n(2n^2+1)}{3}$

44 $a_k=8\cdot 4^{k-1}=2^3\cdot 2^{2k-2}=2^{2k+1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{20}\log_4 a_k=\sum_{k=1}^{20}\log_{2^2} 2^{2k+1}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}\log_2 2^{2k+1}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}(2k+1)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{20\cdot 21}{2}+1\cdot 20\right)$$
$$=220$$

답 220

45 $\sum_{n=1}^{30}\log a_n=\sum_{n=1}^{15}\log a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{15}\log a_{2n}$

$$=\sum_{n=1}^{15}\log 4^n+\sum_{n=1}^{15}\log 25^n$$
$$=\sum_{n=1}^{15} n\log 4+\sum_{n=1}^{15} n\log 25$$
$$=\log 4\sum_{n=1}^{15} n+\log 25\sum_{n=1}^{15} n$$
$$=(\log 4+\log 25)\sum_{n=1}^{15} n$$
$$=\log 100\cdot\frac{15\cdot 16}{2}$$
$$=2\cdot\frac{15\cdot 16}{2}$$
$$=240$$

답 ⑤

다른 풀이 $\sum_{n=1}^{30}\log a_n$

$$=\log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log a_{30}$$
$$=\log(a_1a_2a_3\cdots a_{30})$$
$$=\log\{(a_1a_3a_5\cdots a_{29})(a_2a_4a_6\cdots a_{30})\}$$
$$=\log\{(4^1\cdot4^2\cdot4^3\cdot\cdots\cdot4^{15})(25^1\cdot25^2\cdot25^3\cdot\cdots\cdot25^{15})\}$$
$$=\log(4^{1+2+3+\cdots+15}\cdot25^{1+2+3+\cdots+15})$$
$$=\log(4^{120}\cdot25^{120})$$
$$=\log(2^{240}\cdot5^{240})$$
$$=\log10^{240}=240$$

46 $\sum_{k=2}^{n}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

$$=\sum_{k=2}^{n}\log\frac{k^2-1}{k^2}$$
$$=\sum_{k=2}^{n}\log\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$
$$=\log\frac{1\cdot3}{2^2}+\log\frac{2\cdot4}{3^2}+\log\frac{3\cdot5}{4^2}+\cdots+\log\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$
$$=\log\left\{\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\right\}$$
$$=\log\frac{n+1}{2n}$$

한편 $1-\log19=\log10-\log19=\log\frac{10}{19}$이므로

$$\frac{n+1}{2n}=\frac{10}{19},\qquad 19(n+1)=20n$$
$\therefore n=19$ 답 19

47 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\log\frac{(n+2)(n+3)}{6}$$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=\log2$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\log\frac{(n+2)(n+3)}{6}-\log\frac{(n+1)(n+2)}{6}$$
$$=\log\left\{\frac{(n+2)(n+3)}{6}\cdot\frac{6}{(n+1)(n+2)}\right\}$$
$$=\log\frac{n+3}{n+1} \quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=\log2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=\log\frac{n+3}{n+1}$$

따라서 $a_{2k}=\log\frac{2k+3}{2k+1}$이므로

$$p=\sum_{k=1}^{15}\log\frac{2k+3}{2k+1}$$
$$=\log\frac{5}{3}+\log\frac{7}{5}+\log\frac{9}{7}+\cdots+\log\frac{33}{31}$$
$$=\log\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{9}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{33}{31}\right)$$
$$=\log11$$
$\therefore 10^p=10^{\log11}=11$ 답 11

48 수열 $\frac{1}{2^2-1},\ \frac{1}{4^2-1},\ \frac{1}{6^2-1},\ \cdots,\ \frac{1}{50^2-1}$의 제$k$항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{1}{(2k)^2-1}=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

이므로 주어진 수열의 합은

$$\sum_{k=1}^{25}a_k=\sum_{k=1}^{25}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{51}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{51}\right)=\frac{25}{51}$$

수가 연달아 소거될 때, 앞에서 첫 번째 수가 남으면 뒤에서도 첫 번째 수가 남는다.

따라서 $p=51,\ q=25$이므로 $p-q=26$ 답 ⑤

쎈B특강

Σ로 표현된 식을 합의 꼴로 나타냈을 때, 수가 연달아 소거되는 경우 앞에서 남는 수와 뒤에서 남는 수는 서로 대칭이 되는 위치에 있다. 즉 앞에서 첫 번째 수가 남으면 뒤에서도 첫 번째 수가 남고, 앞에서 두 번째 수가 남으면 뒤에서도 두 번째 수가 남는다. 이를 이용하여 앞에서 몇 개의 수를 소거해 보고 뒤에서 남는 수의 개수 및 위치를 파악하여 식을 정리한다.

49 $a_n=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$$

따라서 $a_m=\frac{2m}{m+1}=\frac{104}{53}$이므로

$106m=104(m+1),\quad 2m=104\quad \therefore m=52$ 답 ②

50 $a_n=\frac{n^3+n^2+8}{n^2+n}=\frac{n^2(n+1)+8}{n(n+1)}$

$$=n+\frac{8}{n(n+1)}=n+8\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}a_k$

$$=\sum_{k=1}^{15}\left\{k+8\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{15}k+8\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{15\cdot16}{2}+8\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)\right\}$$
$$=120+8\left(1-\frac{1}{16}\right)=\frac{255}{2}$$
답 $\frac{255}{2}$

51 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-2,\ \alpha_n\beta_n=-(n^2+n)$ ⋯ ❶

이므로

$$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{30}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{30}2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{31}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{31}\right)=\frac{60}{31} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{60}{31}$

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}$을 부분분수로 변형할 수 있다.	30 %
❸ $\sum_{n=1}^{30}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

52 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+4n$$

(i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=5$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n^2+4n-\{(n-1)^2+4(n-1)\}$$
$$=2n+3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2n+3$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2k+3}-\frac{1}{2k+5}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{43}-\frac{1}{45}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{45}\right)=\frac{4}{45}$$

답 ③

53 자연수 k에 대하여

$$f(k^2)=\frac{1}{k^2+\sqrt{4k^2}}=\frac{1}{k^2+2k}=\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

이므로

$$f(1)+f(4)+f(9)+\cdots+f(81)$$

$$=\sum_{k=1}^{9}f(k^2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

수가 건너뛰며 소거될 때, 앞에서 첫 번째, 세 번째 수가 남으면 뒤에서도 첫 번째, 세 번째 수가 남는다.

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=\frac{36}{55}$$

답 $\frac{36}{55}$

54 주어진 수열의 제 k 항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$$

따라서 수열의 첫째항부터 제 62 항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{62}a_k=\sum_{k=1}^{62}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$$

$$=\sum_{k=1}^{62}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}$$

$$=\sum_{k=1}^{62}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$

$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{64}-\sqrt{63})$$

$$=\sqrt{64}-\sqrt{2}$$

수가 연달아 소거될 때, 앞에서 두 번째 수가 남으면 뒤에서도 두 번째 수가 남는다.

$$=8-\sqrt{2}$$

답 ①

55 $a_n=4+(n-1)\cdot 4=4n$이므로

$$\sum_{k=1}^{35}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{35}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}$$

$$=\sum_{k=1}^{35}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$$

$$=\sum_{k=1}^{35}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+\cdots+(\sqrt{a_{36}}-\sqrt{a_{35}})\}$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{a_{36}}-\sqrt{a_1})$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{4\cdot 36}-\sqrt{4})$$

$$=\frac{1}{4}(12-2)=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

56 $a_k=\sqrt{k+4}+\sqrt{k+2}$이므로 $\cdots$ ❶

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{a_k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k+4}+\sqrt{k+2}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+2})}{(\sqrt{k+4}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+2})}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+2})$$

$$=(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})+(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2})$$

$$=-\sqrt{3}-2+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4} \quad \cdots ❷$$

따라서 $-\sqrt{3}-2+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}=5+3\sqrt{3}$이므로

$$\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}=7+4\sqrt{3}=\sqrt{49}+\sqrt{48}$$

$$\therefore n=45 \quad \cdots ❸$$

답 45

채점 기준	비율
❶ a_k를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{a_k}$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❸ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	20 %

57 $P_k(k, \sqrt{k})$, $Q_k(k+1, \sqrt{k+1})$, $R_k(k, 0)$, $S_k(k+1, 0)$이고 사각형 $P_kR_kS_kQ_k$는 사다리꼴이므로

$$A_k=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\cdot 1=\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{120}\frac{1}{A_k}&=\sum_{k=1}^{120}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\\&=2\sum_{k=1}^{120}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}\\&=2\sum_{k=1}^{120}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=2\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{121}-\sqrt{120})\}\\&=2(-1+\sqrt{121})\\&=20\end{aligned}$$

답 20

58 주어진 수열을

(-1), $(2, 1)$, $(-3, -2, -1)$, $(4, 3, 2, 1)$,
$(-5, -4, -3, -2, -1)$, $\cdots$

과 같이 묶으면 처음으로 나타나는 -16은 17번째 묶음의 2번째 항이다.
이때 n번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 16번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{16}k=\frac{16\cdot 17}{2}=136$$

따라서 $136+2=138$이므로 처음으로 나타나는 -16은 제138항이다.

답 제138항

59 주어진 수열을

(11), $(101, 110)$, $(1001, 1010, 1100)$, $\cdots$

과 같이 묶으면 n번째 묶음은 $(n+1)$자리 수이므로 100001000은 8번째 묶음의 4번째 항이다.
이때 n번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 7번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{7}k=\frac{7\cdot 8}{2}=28$$

따라서 $28+4=32$이므로 100001000은 제32항이다.

답 ①

60 주어진 수열을

$$(1), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right), \cdots$$

와 같이 분모가 같은 항끼리 묶으면 n번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 n번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$n=14$일 때, $\frac{14\cdot 15}{2}=105$이므로 제110항은 15번째 묶음의 5번째 항이다.
이때 15번째 묶음은 $\frac{1}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{15}$, $\cdots$, $\frac{15}{15}$이므로 제110항은 $\frac{5}{15}$이다.

답 $\frac{5}{15}$

61 주어진 수열을

$\{(1, 1)\}$, $\{(1, 2), (2, 1)\}$, $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$,
$\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$, $\cdots$

과 같이 두 수의 합이 같은 순서쌍끼리 묶으면 n번째 묶음의 순서쌍의 두 수의 합은 $n+1$이므로 $(8, 9)$는 16번째 묶음의 8번째 항이다.
이때 n번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 15번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{15}k=\frac{15\cdot 16}{2}=120$$

따라서 $120+8=128$이므로 $(8, 9)$는 제128항이다.

답 ②

62 위에서 k번째 줄에 나열된 수들은 첫째항이 k, 공차가 k, 항수가 k인 등차수열을 이루므로 위에서 k번째 줄에 나열된 수의 합은

$$\frac{k\{2k+(k-1)k\}}{2}=\frac{k^3+k^2}{2}$$

따라서 첫 번째 줄부터 7번째 줄까지 나열된 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{7}\frac{k^3+k^2}{2}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{7\cdot 8}{2}\right)^2+\frac{7\cdot 8\cdot 15}{6}\right\}=462$$

답 462

63 위에서 m번째 줄에 나열된 수들은 첫째항이 m이고, 공차가 m인 등차수열이다.
즉 m번째 줄의 왼쪽에서 m번째에 있는 수는

$$m+(m-1)\cdot m=m^2$$

이때 $225=15^2$에서 c와 225는 15번째 줄에 차례대로 나열되었으므로

$225-c=15$ $\quad\therefore c=210$

a, b는 14번째 줄에 차례대로 나열되었으므로 $\quad b-a=14$

$\therefore b-a+c=14+210=224$

답 ④

다른 풀이 위에서 m번째 줄의 왼쪽에서 n번째에 있는 수는 mn이고 225는 대각선 위의 수이므로 $225=15^2$에서 225는 15번째 줄의 왼쪽에서 15번째에 있는 수이다.
따라서 a는 14번째 줄의 왼쪽에서 14번째에 있는 수, b는 14번째 줄의 왼쪽에서 15번째에 있는 수, c는 15번째 줄의 왼쪽에서 14번째에 있는 수이므로

$a=14^2=196$, $b=14\cdot 15=210$, $c=15\cdot 14=210$

$\therefore b-a+c=210-196+210=224$

64 위에서 k번째 줄에 나열된 수의 개수는 $2k-1$이므로 위에서 13번째 줄까지 나열된 수의 개수는

$$\sum_{k=1}^{13}(2k-1)=2\cdot\frac{13\cdot 14}{2}-13=169$$

이때 $169=5\cdot 33+4$이므로 위에서 14번째 줄에 나열된 수는 9, 1, 3, 5, 7이 이 순서대로 반복된다.
한편 위에서 14번째 줄에 나열된 수의 개수는 $2\cdot 14-1=27$이고 $27=5\cdot 5+2$이므로 나열된 모든 수의 합은

$(9+1+3+5+7)\cdot 5+(9+1)=135$

답 ②

09 수열의 합

10 수학적 귀납법

Ⅲ. 수열

개념 정리 본책 130쪽

❶ 귀납적 정의 ❷ 수학적 귀납법

쎈 B 유형 뽀개기 본책 131쪽

01 $a_{n+1}-a_n=4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 4인 등차수열이다.
이때 $a_1=10$이므로

$a_n=10+(n-1)\cdot 4=4n+6$

$a_k=66$에서 $4k+6=66$

$4k=60$ $\therefore k=15$

답 ①

02 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=-32$ …… ㉠

$a_6=a+5d=-20$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-35$, $d=3$

$\therefore a_n=-35+(n-1)\cdot 3=3n-38$

$3n-38>0$에서 $n>\frac{38}{3}=12.\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 13이다.

답 ④

03 $(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+36$에서

$a_{n+1}^{\ 2}+2a_na_{n+1}+a_n^{\ 2}=4a_na_{n+1}+36$

$a_{n+1}^{\ 2}-2a_na_{n+1}+a_n^{\ 2}=36$

$(a_{n+1}-a_n)^2=36$

이때 $a_n<a_{n+1}$이므로 $a_{n+1}-a_n=6$ ··· ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 6인 등차수열이므로

$a_n=5+(n-1)\cdot 6=6n-1$ ··· ❷

$\therefore a_7=6\cdot 7-1=41$ ··· ❸

답 41

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	40 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ a_7의 값을 구할 수 있다.	20 %

04 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고

$a_1=42$, $a_2-a_1=38-42=-4$

이므로 첫째항이 42, 공차가 -4이다.

$\therefore a_n=42+(n-1)\cdot(-4)=-4n+46$

$-4n+46<0$에서 $n>\frac{46}{4}=11.5$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제12항부터 음수이므로 $\underbrace{\text{첫째항부터 제 11 항까지의 합}}_{\text{양수인 항만 더한 것이다.}}$이 최대가 된다.

답 11

05 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

이때 $a_1=\frac{1}{9}$이므로 $a_n=\frac{1}{9}\cdot 3^{n-1}=3^{n-3}$

따라서 $a_{20}=3^{17}$이므로 $k=17$

답 ①

06 $a_{n+1}=\sqrt{a_na_{n+2}}$, 즉 $a_{n+1}^{\ 2}=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고 공비를 r라 하면 $\frac{a_5}{a_8}=\frac{a_6}{a_9}=\frac{a_7}{a_{10}}=\frac{1}{r^3}$이므로

$3\cdot\frac{1}{r^3}=24$, $r^3=\frac{1}{8}$

$\therefore r=\frac{1}{2}$

$\therefore a_5=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

답 $\frac{1}{16}$

07 $a_{n+1}^{\ 2}=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=32$ …… ㉠

$a_4=ar^3=128$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=4$ $\therefore r=2$ $(\because \underbrace{r>0}_{\text{모든 항이 양수이므로 공비도 양수이다.}})$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$2a=32$ $\therefore a=16$

따라서 $a_n=16\cdot 2^{n-1}=2^4\cdot 2^{n-1}=2^{n+3}$이므로

$\sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{6}2^{k+3}=\frac{2^4(2^6-1)}{2-1}=2^{10}-2^4=1008$

답 1008

08 이차방정식 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a_{n+1}^{\ 2}-a_na_{n+2}=0$

$\therefore a_{n+1}^{\ 2}=a_na_{n+2}$ …… ㉠

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고

$a_1=3$, $\frac{a_2}{a_1}=\frac{15}{3}=5$

이므로 첫째항이 3, 공비가 5이다.

한편 주어진 이차방정식에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-a_{n+1}\pm\sqrt{a_{n+1}^{\ 2}-a_na_{n+2}}}{a_n}$

$=-\frac{a_{n+1}}{a_n}$ $(\because ㉠)$

$=-5$

즉 $b_n=-5$이므로

$b_1+b_2+b_3=-5\cdot 3=-15$

답 ①

09 $\log_3 a_{n+1}=\log_3 a_n+\overset{\log_3 9}{2}$에서

$\log_3 a_{n+1}=\log_3 9a_n$

$\therefore a_{n+1}=9a_n$ ··· ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3^8, 공비가 9인 등비수열이므로

$a_n=3^8\cdot 9^{n-1}=3^8\cdot 3^{2n-2}=3^{2n+6}$ ··· ❷

$a_k=9^{10}$에서 $\quad 3^{2k+6}=9^{10}=3^{20}$

$2k+6=20, \quad 2k=14$

$\therefore k=7$ ⋯❸

답 7

채점 기준	비율
❶ a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 k의 값을 구할 수 있다.	20 %

10 $a_{n+1}=a_n+2n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+2\cdot1$

$a_3=a_2+2\cdot2=a_1+2\cdot1+2\cdot2$

$a_4=a_3+2\cdot3=a_1+2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3$

⋮

$\therefore a_{10}=a_9+2\cdot9=a_1+2\cdot1+2\cdot2+\cdots+2\cdot9$

$=a_1+\sum_{k=1}^{9}2k=3+2\cdot\frac{9\cdot10}{2}=93$

답 93

11 $a_n-a_{n-1}=3^{n-1}$, 즉 $a_n=a_{n-1}+3^{n-1}$의 n에 2, 3, 4, ⋯를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+3$

$a_3=a_2+3^2=a_1+3+3^2$

$a_4=a_3+3^3=a_1+3+3^2+3^3$

⋮

$\therefore a_n=a_1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$

$=\frac{3}{2}+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$

$=\frac{1}{2}\cdot3^n$

이때

$a_8-a_6=\frac{1}{2}\cdot3^8-\frac{1}{2}\cdot3^6=\frac{1}{2}\cdot3^6(3^2-1)=4\cdot3^6$

이므로 $\quad k=6$

답 6

12 $a_{n+1}=a_n+f(n)$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 10을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+f(1)$

$a_3=a_2+f(2)=a_1+f(1)+f(2)$

$a_4=a_3+f(3)=a_1+f(1)+f(2)+f(3)$

⋮

$\therefore a_{11}=a_{10}+f(10)=a_1+f(1)+f(2)+\cdots+f(10)$

$=a_1+\sum_{k=1}^{10}f(k)=1+10^2+1=102$

답 ②

13 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$에서

$a_{n+1}=a_n+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

위의 식의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+\sqrt{2}-1$

$a_3=a_2+\sqrt{3}-\sqrt{2}=a_1+\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}=a_1-1+\sqrt{3}$

$a_4=a_3+\sqrt{4}-\sqrt{3}=a_1-1+\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{3}=a_1-1+\sqrt{4}$

⋮

$\therefore a_n=a_1-1+\sqrt{n}$

$a_k=12$에서 $\quad 8-1+\sqrt{k}=12$

$\sqrt{k}=5 \quad \therefore k=25$

답 25

14 $a_{n+1}=2^na_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 10을 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1$

$a_3=2^2a_2=2^2\cdot2a_1$

$a_4=2^3a_3=2^3\cdot2^2\cdot2a_1$

⋮

$\therefore a_{11}=2^{10}a_{10}$

$=2^{10}\cdot2^9\cdot\cdots\cdot2a_1$

$=2^{1+2+\cdots+10}$

$=2^{55}$

$\therefore \log_2 a_{11}=\log_2 2^{55}=55$

답 ⑤

15 $\sqrt{n}a_{n+1}=\sqrt{n+1}a_n$에서

$a_{n+1}=\sqrt{\frac{n+1}{n}}a_n$

위의 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 80을 차례대로 대입하면

$a_2=\sqrt{2}a_1$

$a_3=\sqrt{\frac{3}{2}}a_2=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{2}a_1=\sqrt{3}a_1$

$a_4=\sqrt{\frac{4}{3}}a_3=\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt{3}a_1=\sqrt{4}a_1$

⋮

$\therefore a_{81}=\sqrt{81}a_1=45$

답 45

16 $a_n=\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}a_{n-1}$

$=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}a_{n-1}$

$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}a_{n-1}$ ⋯❶

위의 식의 n에 2, 3, 4, ⋯를 차례대로 대입하면

$a_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}a_1$

$a_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}a_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}a_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}a_1$

$a_4=\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}a_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}a_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}a_1$

⋮

$\therefore a_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{n+2}{n+1}a_1=\frac{n+2}{n+1}$ ⋯❷

$\therefore a_{50}a_{51}=\frac{52}{51}\cdot\frac{53}{52}=\frac{53}{51}$ ⋯❸

답 $\frac{53}{51}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a_{50}a_{51}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

17 $a_{n+1}=(n+1)a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 99를 차례대로 대입하면

$a_2=2\cdot a_1$
$a_3=3\cdot a_2=3\cdot 2\cdot a_1$
$a_4=4\cdot a_3=4\cdot 3\cdot 2\cdot a_1$
$\vdots$
$\therefore a_{100}=100\cdot a_{99}=100\cdot 99\cdot \cdots \cdot 2\cdot a_1$

이때 $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$이므로 a_4, a_5, $\cdots$, a_{100}은 모두 24로 나누어떨어진다.
즉 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}$을 24로 나누었을 때의 나머지는 $a_1+a_2+a_3$을 24로 나누었을 때의 나머지와 같다.
따라서 $a_1+a_2+a_3=1+2+6=9$이므로 구하는 나머지는 9이다. 답 9

18 $a_{n+1}=a_n+2n-5$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+2\cdot 1-5=-1+2-5=-4$
$a_3=a_2+2\cdot 2-5=-4+4-5=-5$
$a_4=a_3+2\cdot 3-5=-5+6-5=-4$
$\therefore a_5=a_4+2\cdot 4-5=-4+8-5=-1$ 답 ③

19 주어진 식의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\cdot 20=10$ — $n=1$은 홀수
$a_3=a_2+2=10+2=12$ — $n=2$는 짝수
$a_4=\frac{1}{2}a_3=\frac{1}{2}\cdot 12=6$
$a_5=a_4+2=6+2=8$
$\therefore a_6=\frac{1}{2}a_5=\frac{1}{2}\cdot 8=4$ 답 4

20 $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+2a_n}$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{a_1}{1+2a_1}=\frac{1}{1+2\cdot 1}=\frac{1}{3}$$
$$a_3=\frac{a_2}{1+2a_2}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{1}{5}$$
$$a_4=\frac{a_3}{1+2a_3}=\frac{\frac{1}{5}}{1+\frac{2}{5}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}}=\frac{1}{7}$$
$\vdots$
$$\therefore a_n=\frac{1}{2n-1}$$

$a_k=\frac{1}{39}$에서 $\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{39}$ $\therefore k=20$ 답 ⑤

21 $a_n+a_{n+1}=n+2$의 n에 1, 3, 5, $\cdots$, 29를 차례대로 대입하면

$a_1+a_2=3$
$a_3+a_4=5$
$a_5+a_6=7$
$\vdots$
$a_{29}+a_{30}=31$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{30}a_k&=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{29}+a_{30})\\&=3+5+7+\cdots+31\\&=\sum_{k=1}^{15}(2k+1)=2\cdot\frac{15\cdot 16}{2}+15=255\end{aligned}$$
답 255

22
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6}\frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}&=\sum_{k=1}^{6}\frac{a_{k+2}-a_{k+1}}{a_{k+1}a_{k+2}}\\&=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)\\&=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{a_7}-\frac{1}{a_8}\right)\\&=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_8}\\&=1-\frac{1}{a_8}\end{aligned}$$

이때 $1-\frac{1}{a_8}=\frac{20}{21}$이므로 $\frac{1}{a_8}=\frac{1}{21}$
$\therefore a_8=21$ 답 21

23 $a_{n+1}=a_n+(-1)^n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+(-1)=10-1=9$
$a_3=a_2+(-1)^2=9+1=10$
$a_4=a_3+(-1)^3=10-1=9$
$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 10, 9가 이 순서대로 반복된다.
이때 $20=2\cdot 10$이므로 $a_{20}=9$ 답 9

24 $a_{n+1}=5a_n-3$의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_2=5a_1-3=5\cdot 1-3=2$
$a_3=5a_2-3=5\cdot 2-3=7$
$a_4=5a_3-3=5\cdot 7-3=32$ ⋯ ❶

이때 $a_{n+4}=a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 7, 32가 이 순서대로 반복된다. ⋯ ❷
이때 $15=4\cdot 3+3$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}a_k&=3(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_1+a_2+a_3\\&=3(1+2+7+32)+1+2+7=136\end{aligned}$$ ⋯ ❸

답 136

채점 기준	비율
❶ a_2, a_3, a_4의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾을 수 있다.	30 %
❸ $\sum_{k=1}^{15}a_k$의 값을 구할 수 있다.	40 %

쎈B 특강

수열의 합을 구하는 문제에서 등차수열 또는 등비수열의 합의 공식, 자연수의 거듭제곱의 합의 공식을 이용하는 경우가 아닐 때에는 주로 주어진 수열의 항이 규칙적으로 반복되는 경우이다.
몇 개의 수가 같은 순서로 반복되는 수열의 특정한 항이나 수열의 합은 반복되는 수의 주기를 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

25 $a_na_{n+2}=a_{n-1}a_{n+1}$, 즉 $a_{n+2}=\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n}$의 n에 2, 3, 4, …를 차례대로 대입하면

$$a_4=\frac{a_1a_3}{a_2}=\frac{2\cdot3}{-2}=-3$$
$$a_5=\frac{a_2a_4}{a_3}=\frac{-2\cdot(-3)}{3}=2$$
$$a_6=\frac{a_3a_5}{a_4}=\frac{3\cdot2}{-3}=-2$$
$$a_7=\frac{a_4a_6}{a_5}=\frac{-3\cdot(-2)}{2}=3$$
$$a_8=\frac{a_5a_7}{a_6}=\frac{2\cdot3}{-2}=-3$$
$$\vdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 2, -2, 3, -3이 이 순서대로 반복된다.
반복되는 4개의 수 중에서 $|a_k|=3$을 만족시키는 수는 3, -3의 2개이다.
이때 $55=4\cdot13+3$이므로 구하는 55 이하의 자연수 k의 개수는

$2\cdot13+1=27$ 답 ④

26 $a_1+a_2+a_3+a_4=a_2+a_3+a_4+a_5=14$이므로 $a_1=a_5$
$a_2+a_3+a_4+a_5=a_3+a_4+a_5+a_6=14$이므로 $a_2=a_6$
$a_3+a_4+a_5+a_6=a_4+a_5+a_6+a_7=14$이므로 $a_3=a_7$
$a_4+a_5+a_6+a_7=a_5+a_6+a_7+a_8=14$이므로 $a_4=a_8$
$\vdots$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 a_1, a_2, a_3, a_4가 이 순서대로 반복된다.
이때 $9=4\cdot2+1$, $12=4\cdot3$이므로

$a_1=a_9=5$, $a_4=a_{12}=6$

$a_1+a_2+a_3+a_4=14$에서

$a_3=14-a_1-a_2-a_4=14-5-1-6=2$

$100=4\cdot25$, $103=4\cdot25+3$이므로

$a_{100}a_{103}=a_4a_3=6\cdot2=12$ 답 12

27 $S_n=2a_n-2$에서 $S_{n+1}=2a_{n+1}-2$
한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)이므로

$a_{n+1}=2a_{n+1}-2-(2a_n-2)$

$\therefore a_{n+1}=2a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=2$, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$
$a_k=128$에서 $2^k=128=2^7$

$\therefore k=7$ 답 ③

28 $S_{n+1}=3S_n+1$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$S_2=3S_1+1=3\cdot1+1=4$
$S_3=3S_2+1=3\cdot4+1=13$
$S_4=3S_3+1=3\cdot13+1=40$
$S_5=3S_4+1=3\cdot40+1=121$
$\therefore a_5=S_5-S_4=121-40=81$ 답 81

29 $S_n=2a_n-3n$에서

$S_{n+1}=2a_{n+1}-3(n+1)=2a_{n+1}-3n-3$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)이므로

$a_{n+1}=2a_{n+1}-3n-3-(2a_n-3n)$
$=2a_{n+1}-2a_n-3$
$\therefore a_{n+1}=2a_n+3$ …… ㉠

㉠의 식의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1+3=2\cdot3+3=9$
$a_3=2a_2+3=2\cdot9+3=21$
$\therefore a_4=2a_3+3=2\cdot21+3=45$ 답 45

30 ㄱ. $S_n=\frac{a_na_{n+1}}{4}$에 $n=1$을 대입하면

$$S_1=\frac{a_1a_2}{4}$$

$S_1=a_1$이므로 $a_2=4$

ㄴ. $S_n=\frac{a_na_{n+1}}{4}$에서

$4S_n=a_na_{n+1}$ …… ㉠
$\therefore 4S_{n+1}=a_{n+1}a_{n+2}$ …… ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$4(S_{n+1}-S_n)=a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$
$4a_{n+1}=a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$
$\therefore a_{n+2}-a_n=4$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

ㄷ. $a_{n+2}-a_n=4$, 즉 $a_{n+2}=a_n+4$의 n에 1, 2, 3, 4, …를 차례대로 대입하면

$a_3=a_1+4=2+4=6$
$a_4=a_2+4=4+4=8$
$a_5=a_3+4=6+4=10$
$a_6=a_4+4=8+4=12$
$\vdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

31 n개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$개의 새로운 평면이 생긴다. 즉 $(n+1)$개의 직선에 의하여 분할된 평면은 n개의 직선에 의하여 분할된 평면보다 $(n+1)$개가 많으므로

$a_{n+1}=a_n+n+1$

이때 $a_3=7$이므로

$a_4=a_3+3+1=7+3+1=11$
$a_5=a_4+4+1=11+4+1=16$
$a_6=a_5+5+1=16+5+1=22$
$\therefore a_7=a_6+6+1=22+6+1=29$ 답 29

32 시행을 한 번 하면 전체 끈의 길이의 $\frac{2}{5}$가 남으므로

$a_{n+1}=\frac{2}{5}a_n$ ··· ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=\frac{2}{5}\cdot125=50$, 공비가 $\frac{2}{5}$인 등비수열이므로

$a_n=50\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ ··· ❷

$\therefore\ a_4=50\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{16}{5}$ ⋯ ❸

답 $\frac{16}{5}$

채점 기준	비율
❶ a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ a_4의 값을 구할 수 있다.	20 %

33 주어진 그림에서

$a_1=3$

$a_2=\underline{a_1+6}$ $a_2=a_1+3\times(1+1)$

$a_3=\underline{a_2+9}$ $a_3=a_2+3\times(2+1)$

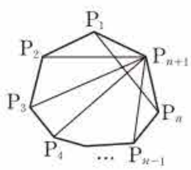
$\vdots$

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+3(n+1)$

$=a_n+3n+3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 $a_{n+1}=a_n+3n+3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

34 오른쪽 그림과 같이 n각형의 꼭짓점을 각각 $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n$이라 하고 두 꼭짓점 P_1과 P_n 사이에 꼭짓점 P_{n+1}을 추가하여 $(n+1)$각형을 만들면 추가되는 대각선은



$\overline{P_1P_n},\ \overline{P_2P_{n+1}},\ \overline{P_3P_{n+1}},\ \cdots,\ \overline{P_{n-1}P_{n+1}}$

의 $(n-1)$개이므로

$a_{n+1}=a_n+n-1\ (n=4,\ 5,\ 6,\ \cdots)$

따라서 $f(n)=n$이므로

$f(20)=20$

답 20

35 $(n+1)$일째 되는 날의 운동 시간 a_{n+1}분은 n일째 되는 날의 운동 시간 a_n분의 $\frac{3}{2}$배에서 10분을 더한 것이므로

$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+10\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 $a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+10\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

36 (1) $a_{n+1}=5(a_n-3)=5a_n-15\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=5\cdot(6-3)=15$이므로

$a_2=5a_1-15=5\cdot15-15=60$

$\therefore\ a_3=5a_2-15=5\cdot60-15=285$

답 (1) $a_{n+1}=5a_n-15\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ (2) 285

37 n명의 회원이 악수한 총횟수는 a_n이고, n명의 회원이 모두 악수를 한 후 $(n+1)$ 번째 회원이 참석하면 $(n+1)$ 번째 회원은 먼저 와 있던 n명의 회원과 한 번씩 악수를 하게 되므로

$a_{n+1}=a_n+n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 $a_{n+1}=a_n+n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

38 a_n %의 설탕물 200 g에 들어 있는 설탕의 양은

$\frac{a_n}{100}\times200=2a_n$ (g)

8 %의 설탕물 100 g에 들어 있는 설탕의 양은

$\frac{8}{100}\times100=8$ (g)

$\therefore\ a_{n+1}=\frac{2a_n+8}{300}\times100=\frac{2}{3}a_n+\frac{8}{3}$

따라서 $p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{8}{3}$이므로 $q-p=2$

답 2

39 n회 시행 후 물통 A에 담긴 물의 양이 a_n L이면 물통 B에 담긴 물의 양은 $(2-a_n)$ L이므로

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{2}\left\{(2-a_n)+\frac{1}{3}a_n\right\}$

$=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{2}\left(2-\frac{2}{3}a_n\right)$

$=\frac{1}{3}a_n+1$

따라서 $p=\frac{1}{3}$, $q=1$이므로 $pq=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

40 $(n+1)$개의 원판 중 먼저 위에 있는 n개의 원판을 두 번째 기둥으로 옮기고 가장 밑에 있는 원판을 세 번째 기둥으로 옮긴 후 두 번째 기둥에 있는 n개의 원판을 세 번째 기둥으로 옮기면 되므로

$a_{n+1}=a_n+1+a_n=2a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ⋯ ❶

이때 $a_2=3$이므로

$a_3=2a_2+1=2\cdot3+1=7$

$a_4=2a_3+1=2\cdot7+1=15$

$a_5=2a_4+1=2\cdot15+1=31$

$\therefore\ a_6=2a_5+1=2\cdot31+1=63$ ⋯ ❷

답 63

채점 기준	비율
❶ a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❷ a_6의 값을 구할 수 있다.	50 %

41 조건 (가), (나)에 의하여

$p(1),\ p(2),\ p(2^2),\ p(2^3),\ \cdots,\ p(2^a)$ (a는 음이 아닌 정수)

이 참이다.

또 조건 (가), (다)에 의하여

$p(1),\ p(5),\ p(5^2),\ p(5^3),\ \cdots,\ p(5^b)$ (b는 음이 아닌 정수)

이 참이다.

따라서 조건 (나), (다)에 의하여 $p(2^a\cdot5^b)$은 참이다.

① $p(20)=p(2^2\cdot5)$

② $p(40)=p(2^3\cdot5)$

③ $p(50)=p(2\cdot5^2)$

④ $p(90)=p(2\cdot3^2\cdot5)$

⑤ $p(100)=p(2^2\cdot5^2)$

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ④이다.

답 ④

42 ㄱ. $p(1)$이 참이면 주어진 조건에 의하여

$p(3),\ p(5),\ p(7),\ \cdots,\ p(2n+1)$

이 모두 참이다.

ㄴ. $p(2)$가 참이면 주어진 조건에 의하여

$p(4),\ p(6),\ p(8),\ \cdots,\ p(2n+2)$

가 모두 참이지만 $p(2n+3)$이 참인지는 알 수 없다.

ㄷ. $p(1)$이 참이면 ㄱ에서 $p(2n+1)$이 참이다.

또 $p(2)$가 참이면 ㄴ에서 $p(2n+2)$가 참이다.

따라서 $p(1),\ p(2)$가 참이면 $p(n)$이 참이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

43 ㄱ. $p(1)$이 참이면

$p(4),\ p(7),\ p(10),\ \cdots,\ p(3l+1)$ (l은 자연수)

이 참이므로 $p(61)=p(3\cdot20+1)$도 참이다.

ㄴ. $p(1)$이 참이면

$p(5),\ p(13),\ p(29),\ p(61),\ p(125),\ \cdots$

도 참이다.

ㄷ. $p(1)$이 참이면

$p(3),\ p(3^2),\ \cdots,\ p(3^m)$ (m은 자연수)

은 참이지만 61은 3의 거듭제곱 꼴이 아니므로 $p(61)$이 참인지는 알 수 없다.

이상에서 (나)의 조건이 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

44 (ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

위의 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$을 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+2k+1$

$=k^2+2k+1=(\boxed{k+1})^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

∴ (가) $2k+1$ (나) $k+1$

즉 $f(k)=2k+1,\ g(k)=k+1$이므로

$f(2)g(1)=5\cdot2=10$ 답 10

쎈B특강

빈칸 추론 문제는 문제가 길고 식이 복잡하기 때문에 어렵다고 생각할 수 있다. 그러나 오히려 힌트가 문제 속에 모두 숨겨져 있으므로 빈칸이 포함된 식과 등호로 연결된 앞, 뒤의 식을 비교하여 식을 변형하면 빈칸에 알맞은 식을 쉽게 찾아낼 수 있다.

45 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1\times2=2$, (우변)$=\dfrac{1\times2\times3}{3}=2$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$

앞의 식의 양변에 $(k+1)(k+2)$를 더하면

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$

$=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

답 풀이 참조

46 (ii) $n=m$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

$n=m+1$일 때,

$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

$+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{2^{m(m+1)}}+m\times2^{-m-1}$

$=2^{m(m+1)}\times\boxed{2^{2m+2}}-\dfrac{m+2}{2}\times2^{-m}$

$=2^{m^2+3m+2}-(m+2)\times2^{-(m+1)}$

$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times2^{-(m+1)}$

따라서 $n=m+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

∴ (가) $2^{m(m+1)}$ (나) 2^{2m+2}

즉 $f(m)=2^{m(m+1)},\ g(m)=2^{2m+2}$이므로

$\dfrac{f(5)}{g(10)}=\dfrac{2^{30}}{2^{22}}=2^8=256$ 답 256

47 (ii) $n=k$일 때 4^n-1이 3의 배수라 가정하면

$4^k-1=3N$, 즉 $4^k=3N+1$ (N은 자연수)

로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$4^{k+1}-1=4\cdot4^k-1$

$=4(3N+1)-1$

$=3(\boxed{4N+1})$

이므로 $n=k+1$일 때도 4^n-1은 $\boxed{3}$의 배수이다.

∴ (가) $4N+1$ (나) 3

즉 $f(N)=4N+1,\ a=3$이므로

$f(3)=4\cdot3+1=13$ 답 ①

48 (ii) $n=k$일 때 7^n+5^{n-1}이 2로 나누어떨어진다고 가정하면

$7^k+5^{k-1}=2N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$7^{k+1}+5^k=7\times7^k+5\times\boxed{5^{k-1}}$

$=7(7^k+5^{k-1})-2\times5^{k-1}$

$=7\times\boxed{2N}-2\times5^{k-1}$

$=2\times(7N-5^{k-1})$

이므로 $n=k+1$일 때도 7^n+5^{n-1}은 2로 나누어떨어진다.

∴ (가) 5^{k-1} (나) $2N$ 답 ②

49 (ii) $n=k$일 때 $2^{n+1}+3^{2n-1}$이 7의 배수라 가정하면

$$2^{k+1}+3^{2k-1}=7N\ (N\text{은 자연수})$$

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$$\begin{aligned}2^{k+2}+3^{2k+1}&=\boxed{2}\cdot2^{k+1}+\boxed{9}\cdot3^{2k-1}\\&=2\cdot2^{k+1}+2\cdot3^{2k-1}+7\cdot3^{2k-1}\\&=2(2^{k+1}+3^{2k-1})+7\cdot3^{2k-1}\\&=2\cdot7N+7\cdot\boxed{3^{2k-1}}\\&=7(2N+3^{2k-1})\end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$일 때도 $2^{n+1}+3^{2n-1}$이 7의 배수이다.

∴ (가) 2 (나) 9 (다) 3^{2k-1}

즉 $a=2$, $b=9$, $f(k)=3^{2k-1}$이므로

$$f(a+b)=f(11)=3^{2\cdot11-1}=3^{21}$$

답 ④

50 (ii) $n=k\ (k\ge2)$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\boxed{\frac{2k+1}{k+1}}$$

이때

$$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2k+2}{k+2}=\frac{k}{\boxed{(k+1)(k+2)}}>0$$

이므로 $\quad \frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$

$$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

∴ (가) $\frac{2k+1}{k+1}$ (나) $(k+1)(k+2)$

즉 $f(k)=\frac{2k+1}{k+1}$, $g(k)=(k+1)(k+2)$이므로

$$f(1)g(1)=\frac{3}{2}\cdot6=9$$

답 9

51 (i) $n=2$일 때,

(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$,

(우변)$=\boxed{1+2h}$

이때 $h^2>0$이므로 $\quad 1+2h+h^2>1+2h$

따라서 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge2)$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k>1+kh$$

위의 식의 양변에 $1+h$를 곱하면 $1+h>0$이므로

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1}&>(1+kh)(1+h)\\&=1+(k+1)h+\boxed{kh^2}\end{aligned}$$

이때 $kh^2>0$이므로

$$1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$$

$$\therefore (1+h)^{k+1}>1+\boxed{(k+1)h}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

∴ (가) $1+2h$ (나) kh^2 (다) $(k+1)h$

답 ④

52 (ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1!+2!+3!+\cdots+k!}{(k+1)!}<\frac{2}{k+1}$$

$n=k+1$일 때

$$\begin{aligned}&\frac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+2)!}\\&=\boxed{\frac{1}{k+2}}\left\{\frac{1!+2!+3!+\cdots+k!}{(k+1)!}+\frac{(k+1)!}{(k+1)!}\right\}\\&<\frac{1}{k+2}\left(1+\frac{2}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{k+2}+\boxed{\frac{2}{(k+1)(k+2)}}\end{aligned}$$

이때 자연수 k에 대하여 $\frac{2}{k+1}\le1$이므로

$\frac{2}{(k+1)(k+2)}\le\frac{1}{k+2}$이고

$\frac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+2)!}<\frac{2}{k+2}$이다.

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

∴ (가) $\frac{1}{k+2}$ (나) $\frac{2}{(k+1)(k+2)}$

즉 $f(k)=\frac{1}{k+2}$, $g(k)=\frac{2}{(k+1)(k+2)}$이므로

$$f(8)+g(3)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$$

답 ②