쎈

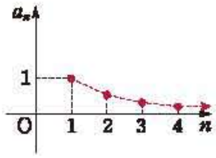
정답 및 풀이

미적분 Ⅰ

정답을 확인하려 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

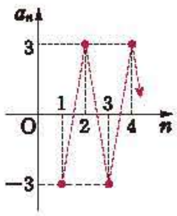
01 수열의 극한

0001 n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 n이 한없이 커질 때 $\frac{1}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다. 따라서 주어진 수열은 0에 수렴한다.



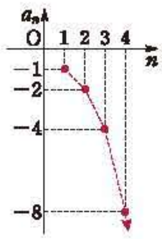
답 수렴, 0

0002 n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.



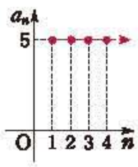
답 발산

0003 n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 n이 한없이 커질 때 -2^{n-1}의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다. 따라서 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.



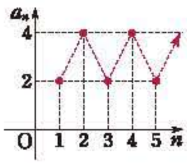
답 발산

0004 n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 수열은 5에 수렴한다.



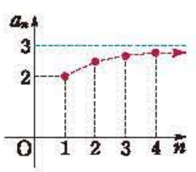
답 수렴, 5

0005 n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.



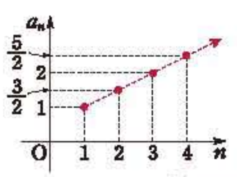
답 발산

0006 n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 n이 한없이 커질 때 $3-\frac{1}{n}$의 값은 3에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.
따라서 주어진 수열은 3에 수렴한다.



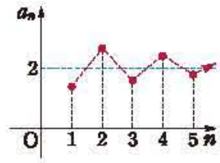
답 수렴, 3

0007 n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 n이 한없이 커질 때 $\frac{n+1}{2}$의 값은 한없이 커짐을 알 수 있다. 따라서 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.



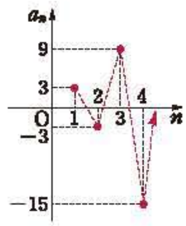
답 발산

0008 n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 n이 한없이 커질 때 $2+\left(-\frac{1}{4}\right)^n$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다. 따라서 주어진 수열은 2에 수렴한다.



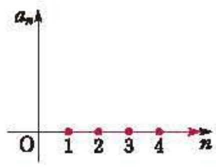
답 수렴, 2

0009 n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.



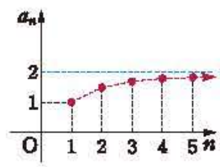
답 발산

0010 n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$



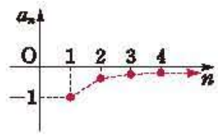
답 ○

0011 n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 n이 한없이 커질 때 $\frac{2n-1}{n}$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.
$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=2$



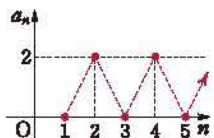
답 ×

0012 n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 n이 한없이 커질 때 $-\frac{1}{n^2}$의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.
$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=0$



답 ○

0013 n이 증가하면서 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.



답 ×

0014 (1) $\lim_{n\to\infty}(-a_n+2)=-\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} 2=-2+2=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}(4a_n-3b_n)=4\lim_{n\to\infty} a_n-3\lim_{n\to\infty} b_n=4\cdot 2-3\cdot(-3)=17$

(3) $\lim_{n\to\infty} 2a_nb_n=2\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n=2\cdot 2\cdot(-3)=-12$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{3b_n}=\frac{2\lim_{n\to\infty} a_n}{3\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot(-3)}=-\frac{4}{9}$

답 (1) 0 (2) 17 (3) -12 (4) $-\frac{4}{9}$

0015 (1) $\lim_{n\to\infty}(3-4a_n)=\lim_{n\to\infty}3-4\lim_{n\to\infty}a_n=3-4\alpha$

(2) $\lim_{n\to\infty}(2a_n+4b_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n+4\lim_{n\to\infty}b_n=2\alpha+4\beta$

(3) $\lim_{n\to\infty}5a_n^2b_n^4=5\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n\lim_{n\to\infty}b_n\lim_{n\to\infty}b_n\lim_{n\to\infty}b_n$
$=5\alpha^2\beta^4$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-5}{b_n^2}=\dfrac{2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}5}{\lim_{n\to\infty}b_n\lim_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{2\alpha-5}{\beta^2}$

답 (1) $3-4\alpha$ (2) $2\alpha+4\beta$ (3) $5\alpha^2\beta^4$ (4) $\dfrac{2\alpha-5}{\beta^2}$

0016 $\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2+3\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$
$=2+3\cdot0=2$ 답 2

0017 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)$
$=2\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}$
$=2\cdot0-0=0$ 답 0

0018 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}+1\right)\left(3-\dfrac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}+1\right)\lim_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)$
$=1\cdot3=3$ 답 3

0019 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}=\dfrac{1}{1}=1$ 답 1

0020 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5-n}{2n-3}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{5}{n}-1}{2-\dfrac{3}{n}}=-\dfrac{1}{2}$ 답 수렴, $-\dfrac{1}{2}$

0021 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n^2}}=0$ 답 수렴, 0

0022 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^3+6n^2-n}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+6-\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{1}{n^2}}=\infty$ 답 발산

0023 $\lim_{n\to\infty}(n^2-5n+1)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$
$=\infty$ 답 발산

0024 $\lim_{n\to\infty}(3n-n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\dfrac{3}{n}-1\right)=-\infty$ 답 발산

0025 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$
$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$ 답 수렴, 0

0026 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n}$
$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4n}+n}{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}$
$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4n}+n}{4n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}+1}{4}$
$=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ 답 수렴, $\dfrac{1}{2}$

0027 $\dfrac{3n^2-2}{n^2+2}<a_n<\dfrac{3n^2}{n^2+1}$에서
$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2+1}=3$
$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=3$ 답 3

0028 주어진 수열은 공비가 0.4이고, $-1<0.4<1$이므로 0에 수렴한다. 답 수렴

0029 주어진 수열은 공비가 -2이고, $-2<-1$이므로 발산한다. 답 발산

0030 주어진 수열은 공비가 $\sqrt{2.4}$이고, $\sqrt{2.4}>1$이므로 발산한다. 답 발산

0031 $\dfrac{(-2)^n}{5^n}=\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n$에서 주어진 수열의 공비는 $-\dfrac{2}{5}$이고, $-1<-\dfrac{2}{5}<1$이므로 0에 수렴한다. 답 수렴

0032 주어진 수열은 공비가 $-\dfrac{1}{3}$이고, $-1<-\dfrac{1}{3}<1$이므로 0에 수렴한다. 답 수렴

0033 주어진 수열은 공비가 $\sqrt{2}$이고, $\sqrt{2}>1$이므로 발산한다. 답 발산

0034 $\lim_{n\to\infty}(1+0.2^n)=1+\lim_{n\to\infty}0.2^n=1+0=1$ 답 수렴, 1

0035 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{1.5})^n=\infty$이므로
$\lim_{n\to\infty}\{3-(\sqrt{1.5})^n\}=-\infty$ 답 발산

0036 $\lim_{n\to\infty}(3^n-4^n)=\lim_{n\to\infty}4^n\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right\}=-\infty$ 　답 발산

0037 $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n-2\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n-2$

$=0-2=-2$ 　답 수렴, -2

0038 공비가 $-2r$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<-2r\le1$ 　$\therefore -\frac{1}{2}\le r<\frac{1}{2}$ 　답 $-\frac{1}{2}\le r<\frac{1}{2}$

0039 공비가 $\frac{r}{3}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{r}{3}\le1$ 　$\therefore -3<r\le3$ 　답 $-3<r\le3$

유형 01 수열의 수렴과 발산 　본책 12쪽

0이 아닌 상수 a에 대하여 n이 한없이 커지면

① 수열 $\left\{\frac{a}{n}\right\}$ ➡ 0으로 수렴

② 수열 $\left\{\frac{n}{a}\right\}$ ➡ 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산

0040 ① 발산(진동)한다.

② 홀수 번째 항은 $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, \cdots$에서 -1에 수렴하고, 짝수 번째 항은 $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \cdots$에서 1에 수렴하므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

③ 홀수 번째 항은 $-2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}, \cdots$에서 0에 수렴하고, 짝수 번째 항은 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$에서 0에 수렴하므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

④ 주어진 수열에서 각 항의 분모를 유리화하면

$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{8}}{2}, \cdots, \frac{\sqrt{2n}}{2}, \cdots$

n이 한없이 커지면 $\frac{\sqrt{2n}}{2}$의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

⑤ 주어진 수열은

$0, -\log 2, -\log 3, -\log 4, \cdots, -\log n, \cdots$

n이 한없이 커지면 $-\log n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다. 　답 ③

0041 ㄱ. n이 한없이 커지면 $5n-20$의 값은 한없이 커지므로 수열 $\{5n-20\}$은 양의 무한대로 발산한다.

ㄴ. n이 한없이 커지면 $\frac{1}{\sqrt{n}}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$은 0에 수렴한다.

ㄷ. $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 $(-4)^n$에 차례대로 대입하면

$-4, 16, -64, 256, \cdots$

이므로 수열 $\{(-4)^n\}$은 발산(진동)한다.

ㄹ. $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$에 차례대로 대입하면

$-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots$

이므로 n이 한없이 커지면 $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

따라서 수열 $\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$은 1에 수렴한다.

이상에서 발산하는 수열은 ㄱ, ㄷ이다. 　답 ②

0042 수열 $\left\{\frac{5}{6n+1}\right\}$에서 n이 한없이 커지면 $\frac{5}{6n+1}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 0에 수렴한다.

$\therefore a=0$ 　➡ ❶

$\frac{2n+(-1)^n}{n}=2+\frac{(-1)^n}{n}$이므로 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 $2+\frac{(-1)^n}{n}$에 차례대로 대입하면

$2-1, 2+\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{4}, \cdots$

이므로 n이 한없이 커지면 $\frac{2n+(-1)^n}{n}$의 값은 2에 한없이 가까워진다. 즉 2에 수렴하므로 　$b=2$ 　➡ ❷

$\therefore a+b=2$ 　➡ ❸

답 2

채점 기준표	
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 02 수열의 극한에 대한 기본 성질 　본책 12쪽

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)이면 실수 p, q, r에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ra_nb_n}{pa_n+qb_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}ra_nb_n}{\lim_{n\to\infty}(pa_n+qb_n)}=\frac{r\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n}{p\lim_{n\to\infty}a_n+q\lim_{n\to\infty}b_n}$$
$$=\frac{r\alpha\beta}{p\alpha+q\beta}\ (\text{단, } pa_n+qb_n\neq0,\ p\alpha+q\beta\neq0)$$

0043 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-b_n}{a_nb_n+2}=\frac{\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)}{\lim_{n\to\infty}(a_nb_n+2)}=\frac{2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n}{\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n+2}$

$=\frac{2\cdot(-3)-2}{-3\cdot2+2}=2$ 　답 2

0044 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=2$에서 　$\lim_{n\to\infty}a_n=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n(a_n-2)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}(a_n-2)$

$=3\cdot(3-2)=3$ 　답 ③

0045 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(7-\frac{2}{n^2}\right)=7$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(n-1)(n+1)}+5\right\}=5$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n-3)(b_n+2)=\lim_{n\to\infty}(a_n-3)\lim_{n\to\infty}(b_n+2)$$
$$=(7-3)\cdot(5+2)$$
$$=28$$

답 28

0046 $\lim_{n\to\infty}(a_n^2-a_nb_n+b_n^2)$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-3a_nb_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-3\lim_{n\to\infty}a_nb_n$

$=3\cdot3-3\cdot2=3$

답 3

유형 03 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$ (α는 실수)의 이용 — 본책 13쪽

수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)이면

$\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\cdots=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$

0047 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_{n+2}+3}{a_n-3}=-4$에서 $\frac{2\alpha+3}{\alpha-3}=-4$

$2\alpha+3=-4\alpha+12,\quad 6\alpha=9\quad \therefore \alpha=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

0048 수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 실수에 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\frac{1}{a_{n+1}}=2-a_n$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(2-a_n)$이므로

$\frac{1}{\alpha}=2-\alpha,\quad \alpha^2-2\alpha+1=0$

$(\alpha-1)^2=0\quad \therefore \alpha=1$

답 ⑤

0049 ㄱ, ㄷ. [반례] 수열 $\{a_n\}$이

$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

이면 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=1$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n$은 발산(진동)한다.

또 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=1$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=-1$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=1$에서 n 대신 $2n$을 대입하면 $\lim_{2n\to\infty}a_{4n}=1$

이때 $2n\to\infty$이면 $n\to\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_{4n}=1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

0050 이차방정식 $x^2-a_nx+a_{2n}+3=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-a_n)^2-4(a_{2n}+3)=0$

$\therefore a_n^2-4a_{2n}-12=0$ ➊

즉 $\lim_{n\to\infty}(a_n^2-4a_{2n}-12)=0$이고 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$라 하면 $\alpha^2-4\alpha-12=0$

$(\alpha+2)(\alpha-6)=0\quad \therefore \alpha=-2$ 또는 $\alpha=6$

이때 수열 $\{a_n\}$의 각 항이 양수이므로 $\alpha=6$ ➋

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{6}$ ➌

답 $\sqrt{6}$

채점 기준표

➊ $D=0$임을 이용하여 a_n에 대한 방정식을 세울 수 있다.	30%
➋ $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다.	50%
➌ $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 04 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 — 본책 13쪽

[방법 1] 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.
[방법 2] 분모의 차수와 분자의 차수를 비교한다.

0051 ① $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-10}{(n-3)n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-10}{n^2-3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{10}{n^2}}{1-\frac{3}{n}}=1$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{2}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=0$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{5}{n}}}{5}=\frac{1}{5}$

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{16n+4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16+\frac{4}{n}}}=\frac{1}{4}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{(1-n)^3}{(2n+1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+3n^2-3n+1}{8n^3+12n^2+6n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+\frac{3}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{8+\frac{12}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$

$=-\frac{1}{8}$

답 ④

0052 $a_n+a_{n+1}=n^2$ ⋯⋯ ㉠

$a_{n+1}+a_{n+2}=(n+1)^2$ ⋯⋯ ㉡

㉡−㉠을 하면 $a_{n+2}-a_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=2$

답 ⑤

0053 $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-n-\{2(n-1)^2-(n-1)\}=4n-3$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-3)(4n+1)}{2n^2-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16n^2-8n-3}{2n^2-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16-\frac{8}{n}-\frac{3}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}=8$$

답 8

참고 $n\longrightarrow\infty$이므로 $a_1=S_1$은 확인하지 않아도 된다.

유형 05 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한; 합 또는 곱 (본책 14쪽)

(i) 합 또는 곱으로 된 부분을 간단히 정리한 다음 n에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한 다음 극한값을 구한다.

0054 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

답 ①

0055 $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$$
$$=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=\frac{n}{3}\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}$$
$$=\frac{n(4n^2-1)}{3}=\frac{4n^3-n}{3}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-n}{3n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}}{3}=\frac{4}{3}$$

따라서 $a=4$, $b=3$이므로 $a+b=7$

답 7

0056 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)$$
$$\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$$

답 ④

0057 $a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$ ··· ❶

$b_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ ··· ❷

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n^4b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^4}\cdot\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^3+n^2}{4(n+1)^4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}=\frac{1}{4}$$ ··· ❸

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준표

❶ a_n을 간단히 정리할 수 있다.	30%
❷ b_n을 간단히 정리할 수 있다.	20%
❸ $\lim_{n\to\infty}a_n^4b_n$의 값을 구할 수 있다.	50%

유형 06 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한; 로그를 포함한 식 (본책 14쪽)

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 양수)일 때,

$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\log\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)=\log\alpha$ (단, $a_n>0$)

0058 $\log_2(2n+1)+\log_2(2n-1)-2\log_2(n+1)$

$$=\log_2\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+1)^2}=\log_2\frac{4n^2-1}{n^2+2n+1}$$
$$\therefore (\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{4n^2-1}{n^2+2n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{4-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$
$$=\log_2 4=2$$

답 2

0059 $\lim_{n\to\infty}\left(\log_4\sqrt{n^2+n+2}-\log_4\sqrt{2n^2-n+1}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_4\frac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{2n^2-n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_4\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$
$$=\log_4\frac{1}{\sqrt{2}}=\log_{2^2}2^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

답 ④

0060 $a_n=\log\frac{n+1}{n}$이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$
$$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{n+1}{n}$$
$$=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\log(n+1)$$
$$\therefore 10^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}=10^{\log(n+1)}=n+1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

답 ①

유형 07 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한; 미정계수의 결정 본책 14쪽

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\alpha$ (α는 실수)일 때

① $\alpha=0$이면
➡ (a_n의 차수)<(b_n의 차수)

② $\alpha\neq0$이면
➡ (a_n의 차수)=(b_n의 차수)이고, 최고차항의 계수의 비가 α이다.

0061 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+2}{3n-2}=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로

$a=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+2}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+2}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{2}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{b}{3}$$

따라서 $\frac{b}{3}=3$이므로 $b=9$

$\therefore a+b=9$

답 ④

0062
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n+1)}{an^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n-1}{an^2+3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{a+\frac{3}{n^2}}$$
$$=\frac{2}{a}$$

따라서 $\frac{2}{a}=-\frac{1}{6}$이므로 $a=-12$

답 -12

0063 $b\neq0$이므로 $a=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2-5n+1}}{an^2+10n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2-5n+1}}{10n+3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}}{10+\frac{3}{n}}$$
$$=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

따라서 $b=\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^3-4n+1}{\sqrt{bn^2+3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n+1}{\sqrt{\frac{1}{2}n^2+3n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{n}}}$$
$$=-4\sqrt{2}$$

답 $-4\sqrt{2}$

0064 (i) $a\neq0$, $b=0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2n-2}{bn^2-3n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2n-2}{-3n+3}=\infty\ (\text{또는 } -\infty)$$

(ii) $a=0$, $b\neq0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2n-2}{bn^2-3n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-2}{bn^2-3n+3}=0$$

(iii) $a=0$, $b=0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2n-2}{bn^2-3n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-2}{-3n+3}=-\frac{2}{3}$$

이상에서 $a\neq0$, $b\neq0$이므로 ➊

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2n-2}{bn^2-3n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}{b-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{a}{b}$$

따라서 $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$이므로 ➋

$$\lim_{n\to\infty}\frac{bn+a}{an-b}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{a}{n}}{a-\frac{b}{n}}=\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$$ ➌

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준표

➊ $a\neq0$, $b\neq0$임을 알 수 있다.	50%
➋ $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$임을 알 수 있다.	20%
➌ $\lim_{n\to\infty}\frac{bn+a}{an-b}$의 값을 구할 수 있다.	30%

유형 08, 09 $\infty-\infty$ 꼴의 극한 본책 15, 16쪽

① 분자에만 근호가 있는 경우
➡ $\sqrt{f(n)}-\sqrt{g(n)}=\frac{f(n)-g(n)}{\sqrt{f(n)}+\sqrt{g(n)}}$

② 분모에만 근호가 있는 경우
➡ $\frac{h(n)}{\sqrt{f(n)}-\sqrt{g(n)}}=\frac{h(n)\{\sqrt{f(n)}+\sqrt{g(n)}\}}{f(n)-g(n)}$

③ 분자, 분모에 모두 근호가 있는 경우
➡ $\frac{\sqrt{h(n)}-\sqrt{k(n)}}{\sqrt{f(n)}-\sqrt{g(n)}}=\frac{\{h(n)-k(n)\}\{\sqrt{f(n)}+\sqrt{g(n)}\}}{\{f(n)-g(n)\}\{\sqrt{h(n)}+\sqrt{k(n)}\}}$

0065 $\lim_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2-n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-\sqrt{4n^2-n})(2n+\sqrt{4n^2-n})}{2n+\sqrt{4n^2-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+\sqrt{4n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\sqrt{4-\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

답 ④

0066 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{1+1}=1$$

답 ⑤

0067 $\sqrt{4n^2+4n+1}<\sqrt{4n^2+4n+5}<\sqrt{4n^2+8n+4}$이므로

$2n+1<\sqrt{4n^2+4n+5}<2n+2$

$\therefore a_n=2n+1,\ b_n=\sqrt{4n^2+4n+5}-(2n+1)$ ··· ❶

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}(2n+1)\{\sqrt{4n^2+4n+5}-(2n+1)\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\{(\sqrt{4n^2+4n+5})^2-(2n+1)^2\}}{\sqrt{4n^2+4n+5}+(2n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+4}{\sqrt{4n^2+4n+5}+2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{4}{n}}{\sqrt{4+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+2+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{8}{2+2}=2$$ ··· ❷

답 2

채점 기준표

❶ a_n, b_n을 구할 수 있다.	50%
❷ $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값을 구할 수 있다.	50%

0068 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{nx^2+ny^2+4n^2}-2n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{nx^2+ny^2+4n^2}-2n)(\sqrt{nx^2+ny^2+4n^2}+2n)}{\sqrt{nx^2+ny^2+4n^2}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(x^2+y^2)}{\sqrt{nx^2+ny^2+4n^2}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{\frac{x^2}{n}+\frac{y^2}{n}+4}+2}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{4}=2$$

$\therefore x^2+y^2=8$

답 8

0069 $a_{2k}=4\cdot 2k-3=8k-3$이므로

$$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}(8k-3)$$

$$=8\cdot\frac{n(n+1)}{2}-3n$$

$$=4n^2+n$$

또 $a_{2k-1}=4(2k-1)-3=8k-7$이므로

$$a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(8k-7)$$

$$=8\cdot\frac{n(n+1)}{2}-7n$$

$$=4n^2-3n$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}-\sqrt{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}})$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-\sqrt{4n^2-3n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+n}-\sqrt{4n^2-3n})(\sqrt{4n^2+n}+\sqrt{4n^2-3n})}{\sqrt{4n^2+n}+\sqrt{4n^2-3n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{4n^2+n}+\sqrt{4n^2-3n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+\sqrt{4-\frac{3}{n}}}$$

$$=\frac{4}{2+2}=1$$

답 ①

0070 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n})}{n^2-n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$=1$$

답 1

0071 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2018}-n}{n-\sqrt{n^2-2017}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2018}-n)(\sqrt{n^2+2018}+n)(n+\sqrt{n^2-2017})}{(n-\sqrt{n^2-2017})(n+\sqrt{n^2-2017})(\sqrt{n^2+2018}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2018(n+\sqrt{n^2-2017})}{2017(\sqrt{n^2+2018}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2018\left(1+\sqrt{1-\frac{2017}{n^2}}\right)}{2017\left(\sqrt{1+\frac{2018}{n^2}}+1\right)}$$

$$=\frac{2018\cdot 2}{2017\cdot 2}=\frac{2018}{2017}$$

답 ⑤

0072 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}-n}=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{1}$$
$$=2$$

답 ③

0073 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=1,\ \alpha_n\beta_n=3n-\sqrt{9n^2+2n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-\sqrt{9n^2+2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\sqrt{9n^2+2n}}{(3n-\sqrt{9n^2+2n})(3n+\sqrt{9n^2+2n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\sqrt{9n^2+2n}}{9n^2-(9n^2+2n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\sqrt{9n^2+2n}}{-2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\sqrt{9+\frac{2}{n}}}{-2}$$
$$=-3$$

답 ①

유형 10 $\infty-\infty$ 꼴의 극한; 미정계수의 결정 본책 16쪽

(i) 무리식을 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

(ii) (i)의 식이 0이 아닌 실수 α로 수렴하면 최고차항의 계수의 비가 α임을 이용한다.

0074 $a\le 0$이면 $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+4n+3}-(an+b)\}=\infty$이므로 $a>0$이어야 한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+4n+3}-(an+b)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+4n+3}-(an+b)\}\{\sqrt{n^2+4n+3}+(an+b)\}}{\sqrt{n^2+4n+3}+(an+b)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2+2(2-ab)n+3-b^2}{\sqrt{n^2+4n+3}+an+b}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n+2(2-ab)+\frac{3-b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+a+\frac{b}{n}}$$

이때 이 식의 극한값이 4이므로

$$1-a^2=0,\quad \frac{2(2-ab)}{1+a}=4$$

앞의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-2\ (\because a>0)$

$\therefore a+b=-1$

답 ②

0075 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9n^2+an}-3n+a}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+an}+(3n-a)}{\{\sqrt{9n^2+an}-(3n-a)\}\{\sqrt{9n^2+an}+(3n-a)\}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+an}+3n-a}{7an-a^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{a}{n}}+3-\frac{a}{n}}{7a-\frac{a^2}{n}}=\frac{6}{7a}$$

따라서 $\frac{6}{7a}=\frac{1}{7}$이므로 $a=6$

답 6

0076 $k\ge 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이므로 $k<0$이어야 한다. ··· ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n-2)(2n+1)}+kn\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{(n-2)(2n+1)}+kn\}\{\sqrt{(n-2)(2n+1)}-kn\}}{\sqrt{(n-2)(2n+1)}-kn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-k^2)n^2-3n-2}{\sqrt{2n^2-3n-2}-kn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-k^2)n-3-\frac{2}{n}}{\sqrt{2-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}-k}$$

이때 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$2-k^2=0,\quad k^2=2$

$\therefore k=-\sqrt{2}\ (\because k<0)$ ··· ❷

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{-3}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ··· ❸

답 $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

채점 기준표

❶ $k<0$임을 알 수 있다.	20%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 11 일반항 a_n을 포함한 식의 극한값 본책 17쪽

0이 아닌 두 실수 $p,\ r$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{ra_n+s}{pa_n+q}=\alpha$ (α는 실수)일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은 다음과 같이 구한다.

[방법 1] $\frac{ra_n+s}{pa_n+q}=b_n$으로 놓고, a_n을 b_n에 대한 식으로 나타낸다.

[방법 2] 수렴하는 두 수열의 곱의 꼴로 정리한다.

0077 $\frac{3a_n-2}{2a_n+1}=b_n$으로 놓으면

$3a_n-2=2a_nb_n+b_n$, $(3-2b_n)a_n=b_n+2$

$\therefore a_n=\frac{b_n+2}{3-2b_n}$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+2}{3-2b_n}=\frac{3+2}{3-2\cdot3}=-\frac{5}{3}$$

답 ①

0078 $(n+3)a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{b_n}{n+3}$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(2n+5)a_n=\lim_{n\to\infty}(2n+5)\cdot\frac{b_n}{n+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n+3}\cdot\lim_{n\to\infty} b_n$$

$$=2\cdot4=8$$

답 ⑤

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty}(2n+5)a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n+3}\cdot(n+3)a_n$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n+3}\cdot\lim_{n\to\infty}(n+3)a_n$$

$$=2\cdot4=8$$

0079 $(n+1)a_n=c_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{c_n}{n+1}$

$(n^3+1)b_n=d_n$으로 놓으면 $b_n=\frac{d_n}{n^3+1}$

이때 $\lim_{n\to\infty} c_n=4$, $\lim_{n\to\infty} d_n=6$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-1)^2b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(4n-1)^2d_n}{n^3+1}}{\frac{c_n}{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(16n^2-8n+1)(n+1)}{n^3+1}\cdot\frac{d_n}{c_n}$$

$$=16\cdot\frac{6}{4}=24$$

답 24

0080 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이고 $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면

$b_n=a_n-c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty} c_n=-2$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+b_n}{a_n-2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+(a_n-c_n)}{a_n-2(a_n-c_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-c_n}{-a_n+2c_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{c_n}{a_n}}{-1+2\cdot\frac{c_n}{a_n}}=-3$$

답 -3

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=-2$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$이어야 한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+b_n}{a_n-2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{b_n}{a_n}}{1-2\cdot\frac{b_n}{a_n}}=\frac{2+1}{1-2}=-3$$

참고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$이 수렴하려면 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이어야 한다.

유형 12 수열의 극한의 대소 관계

본책 17쪽

세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때, 모든 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

➡ $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$

0081 $2n-100<a_n<2n+100$에서

$$2-\frac{100}{n}<\frac{a_n}{n}<2+\frac{100}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{100}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{100}{n}\right)=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$$

답 2

0082 $\sqrt{16n^2-n}<(n+1)a_n<\sqrt{16n^2+3n}$에서

$$\frac{\sqrt{16n^2-n}}{n+1}<a_n<\frac{\sqrt{16n^2+3n}}{n+1}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2-n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+3n}}{n+1}=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=4$$

답 ①

0083 $2n<a_n<2n+1$에서

$$\sum_{k=1}^{n}2k<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$$

$$n(n+1)<\sum_{k=1}^{n}a_k<n(n+1)+n$$

$$n^2+n<\sum_{k=1}^{n}a_k<n^2+2n$$

$$\therefore \frac{n^2+n}{6n^2+10}<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{6n^2+10}<\frac{n^2+2n}{6n^2+10}$$ ··· ❶

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{6n^2+10}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{6n^2+10}=\frac{1}{6}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{6n^2+10}=\frac{1}{6}$$ ··· ❷

답 $\frac{1}{6}$

채점 기준표

❶ $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{6n^2+10}$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❷ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{6n^2+10}$ 의 값을 구할 수 있다.	50%

0084 $\frac{n}{5}-1<\left[\frac{n}{5}\right]\le\frac{n}{5}$이므로

$$\frac{5}{n+2}\left(\frac{n}{5}-1\right)<\frac{5}{n+2}\left[\frac{n}{5}\right]\le\frac{5}{n+2}\cdot\frac{n}{5}$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n+2}\left(\frac{n}{5}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n+2}\cdot\frac{n}{5}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+2}\left[\frac{n}{5}\right]=1$$

답 1

유형 13 수열의 극한에 대한 합답형 문제 본책 18쪽

① 성립하지 않는 성질에 대한 것은 반례를 찾는다.
② 극한값을 구하려는 수열을 수렴하는 수열에 대한 식으로 나타낸다.

0085 ㄱ. $a_n<b_n$에서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$

ㄴ. [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$이면 $a_n<b_n$이지만

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, $\cdots$

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, $\cdots$

이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

0086 ㄱ. [반례] $a_n=n^2$, $b_n=\frac{1}{n}$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n}=0$이므로 $\frac{a}{\infty}=0$ (a는 상수)

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$

ㄷ. $a_n-b_n=c_n$이라 하면 $b_n=a_n-c_n$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$

ㄹ. [반례] $a_n=n-\frac{1}{n}$, $b_n=n+\frac{1}{n}$, $c_n=n$이면 $a_n<c_n<b_n$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$이지만 수열 $\{c_n\}$은 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

0087 ㄱ. [반례] $a_n=(-1)^n$이면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=-1$

따라서 두 수열 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$은 모두 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ $(\alpha\neq0)$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}a_nb_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{\beta}{\alpha}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

ㄷ. [반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=1-(-1)^n$이면

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1$

따라서 수열 $\{a_n+b_n\}$은 수렴하고 수열 $\{a_n\}$은 발산하지만

$\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{(-1)^n}-1$이므로 수열 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$은 발산(진동)한다.

ㄹ. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}\\&=\frac{1}{2}\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)+\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\}\\&=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}b_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}\\&=\frac{1}{2}\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\}\\&=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

따라서 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0088 ㄱ. $-|a_n|\le a_n\le|a_n|$에서

$\lim\limits_{n\to\infty}(-|a_n|)=\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

ㄴ. $a_n>0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1}{3}$에서 $0<a_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot a_1$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}0=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot a_1=0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

ㄷ. $a_{n+1}=a_n^{\frac{1}{2}}$에서 $\log a_{n+1}=\frac{1}{2}\log a_n$

$\therefore \log a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\log a_1$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\log a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\log a_1=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

ㄹ. [반례] $a_n=(-1)^n$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2=1$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$은 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

유형 14 등비수열의 극한 (1) 본책 19쪽

수열 $\left\{\frac{c^n+d^n}{a^n+b^n}\right\}$ (a, b, c, d는 실수) 꼴의 극한값 구하기

(i) $|a|>|b|$이면 a^n, $|a|<|b|$이면 b^n으로 분모, 분자를 각각 나눈다.
(ii) $|r|<1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$임을 이용하여 주어진 수열의 극한값을 구한다.

0089 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+2}}{2^{n+1}-4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^2\cdot4^n}{2\cdot2^n-4^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=-16$ 답 ①

0090 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+3^n\cdot a_n}{3^{n+1}-5^n\cdot a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\left(\frac{3}{5}\right)^n\cdot a_n}{3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n-a_n}=\frac{5}{-\alpha}$$

따라서 $\frac{5}{-\alpha}=5$이므로 $\alpha=-1$ 답 -1

0091 $0<a<b$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10a^{n+1}-3b^n}{a^n-b^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{10a^2\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}-3b}{a\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}-1}=3b$$

따라서 $3b=c$이므로

$\frac{c+b}{c-b}=\frac{3b+b}{3b-b}=\frac{4b}{2b}=2$ 답 2

0092 $x^2-4x+2=0$에서

$x=2\pm\sqrt{2}$

$\alpha=2+\sqrt{2}$, $\beta=2-\sqrt{2}$라 하면 $0<\frac{\beta}{\alpha}<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+\beta\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

$=\alpha=2+\sqrt{2}$ 답 ③

참고 $\alpha=2-\sqrt{2}$, $\beta=2+\sqrt{2}$라 하면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+\beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+1}$$

$=\beta=2+\sqrt{2}$

0093 $4^{n+1}-3^n<(2^{n+1}+4^{n-1})a_n<2^n+4^{n+1}$에서

$\frac{4^{n+1}-3^n}{2^{n+1}+4^{n-1}}<a_n<\frac{2^n+4^{n+1}}{2^{n+1}+4^{n-1}}$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3^n}{2^{n+1}+4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{16-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1}=16,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4^{n+1}}{2^{n+1}+4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+16}{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1}=16$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=16$ 답 ⑤

0094 $2x^{n+1}+3x+1$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지 a_n은

$a_n=2\cdot2^{n+1}+3\cdot2+1=4\cdot2^n+7$ ➊

$2x^{n+1}+3x+1$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지 b_n은

$b_n=2\cdot3^{n+1}+3\cdot3+1=6\cdot3^n+10$ ➋

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot2^n+7+6\cdot3^n+10}{3^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot2^n+6\cdot3^n+17}{3^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+6+17\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$=6$ ➌

답 6

채점 기준표	
➊ a_n을 구할 수 있다.	30%
➋ b_n을 구할 수 있다.	30%
➌ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{3^n+1}$의 값을 구할 수 있다.	40%

유형 15 등비수열의 극한 (2)

본책 19쪽

(i) a_n, S_n을 각각 구한다.

(ii) $|r|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$임을 이용하여 극한값을 구한다.

0095 $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n+3^n)-(2^{n-1}+3^{n-1})$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot2^n+\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot3^n=\frac{1}{2}\cdot2^n+\frac{2}{3}\cdot3^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot2^n+\frac{2}{3}\cdot3^n}{2^n+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0096 $a_n=3\cdot2^{n-1}$, $S_n=\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3\cdot2^n-3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot2^n-3}{3\cdot2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3}=2$$

답 ②

0097 $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=n\cdot2^{n-1}-(n-1)2^{n-2}$

$=2n\cdot2^{n-2}-(n-1)2^{n-2}$

$=(n+1)2^{n-2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^{n-1}}{(n+1)2^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$ 답 2

0098 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3=14$에서 $a_1+a_1r+a_1r^2=14$

$\therefore a_1(1+r+r^2)=14$ …… ㉠

$a_4+a_5+a_6=-378$에서 $a_1r^3+a_1r^4+a_1r^5=-378$

$\therefore a_1r^3(1+r+r^2)=-378$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=-27$ $\therefore r=-3$

$r=-3$을 ㉠에 대입하면 $a_1=2$ ⋯→ ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 -3인 등비수열이므로

$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$

$\therefore a_{2n+1}=2\cdot(-3)^{2n}=2\cdot 9^n$ ⋯→ ❷

또 $S_n=\frac{2\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\frac{1}{2}\{1-(-3)^n\}$이므로

$S_n^2=\frac{1}{4}\{1-(-3)^n\}^2=\frac{1}{4}\cdot 9^n-\frac{1}{2}\cdot(-3)^n+\frac{1}{4}$ ⋯→ ❸

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n^2}{a_{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\cdot 9^n-\frac{1}{2}\cdot(-3)^n+\frac{1}{4}}{2\cdot 9^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n}{2}$$

$$=\frac{1}{8}$$ ⋯→ ❹

답 $\frac{1}{8}$

채점 기준표

❶ a_1, r의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ a_{2n+1}을 구할 수 있다.	20%
❸ S_n^2을 구할 수 있다.	20%
❹ $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^2}{a_{2n+1}}$의 값을 구할 수 있다.	30%

유형 16 등비수열의 수렴 조건 (본책 20쪽)

① 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하려면 ➡ $-1<r\le 1$

② 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴하려면 ➡ $a=0$ 또는 $-1<r\le 1$

0099 공비가 $\frac{x-1}{4}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x-1}{4}\le 1$, $-4<x-1\le 4$

$\therefore -3<x\le 5$

따라서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 정수 x는

$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

의 8개이다. 답 8

0100 공비가 $\frac{x^2-5x-3}{3}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-5x-3}{3}\le 1$

(i) $-1<\frac{x^2-5x-3}{3}$, 즉 $x^2-5x>0$에서

$x(x-5)>0$ $\therefore x<0$ 또는 $x>5$

(ii) $\frac{x^2-5x-3}{3}\le 1$, 즉 $x^2-5x-6\le 0$에서

$(x+1)(x-6)\le 0$ $\therefore -1\le x\le 6$

(i), (ii)에서 $-1\le x<0$ 또는 $5<x\le 6$

따라서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 정수 x는 -1, 6이므로 구하는 합은 5이다. 답 ③

0101 공비가 $(5-x)^2$이고 $(5-x)^2\ge 0$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$(5-x)^2\le 1$, $x^2-10x+24\le 0$

$(x-4)(x-6)\le 0$ $\therefore 4\le x\le 6$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=6$이므로 $\alpha+\beta=10$ 답 10

0102 수열 $\{(x+1)(x^2-2x)^{n-1}\}$의 첫째항이 $x+1$, 공비가 x^2-2x이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$x+1=0$ 또는 $-1<x^2-2x\le 1$

$\therefore x=-1$ 또는 $-1<x^2-2x\le 1$

(i) $-1<x^2-2x$, 즉 $x^2-2x+1>0$에서

$(x-1)^2>0$ $\therefore x\ne 1$인 모든 실수

(ii) $x^2-2x\le 1$, 즉 $x^2-2x-1\le 0$에서

$1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}$, $x\ne 1$

따라서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 정수 x는 -1, 0, 2의 3개이다. 답 3

유형 17 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴할 때, 수렴하는 수열 (본책 20쪽)

(i) 등비수열의 수렴 조건을 이용하여 수렴하는 수열에서 r의 값의 범위를 구한다.

(ii) (i)에서 구한 r의 값의 범위를 이용하여 각 수열의 공비가 $-1<(\text{공비})\le 1$을 만족시키는지 확인한다.

0103 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로

$-1<r\le 1$ …… ㉠

ㄱ. 공비가 $-r$이고 ㉠에서 $-1\le -r<1$

이때 $-r=-1$, 즉 $r=1$이면 수열 $\{(-r)^n\}$은 수렴하지 않는다.

ㄴ. 공비가 $\frac{1-r}{2}$이고 ㉠에서 $-1\le -r<1$

$0\le 1-r<2$ $\therefore 0\le\frac{1-r}{2}<1$

따라서 수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

ㄷ. 공비가 r^2이고 ㉠에서 $0\le r^2\le 1$이므로 수열 $\{r^{2n}\}$은 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 수열은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0104 등비수열 $\{[r]^n\}$이 수렴하므로 $-1<[r]\le 1$

$\therefore [r]=0$ 또는 $[r]=1$

즉 $0\le r<1$ 또는 $1\le r<2$이므로 $0\le r<2$ …… ㉠

ㄱ. 공비가 $\frac{r}{2}$이고 ㉠에서 $0 \le \frac{r}{2} < 1$이므로 수열 $\left\{\left(\frac{r}{2}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

ㄴ. 공비가 $\frac{1}{r}$이고 ㉠에서 $0<r<1$일 때, $\frac{1}{r}>1$이므로 수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$은 수렴하지 않는다.

ㄷ. 공비가 $r^2-2r+1=(r-1)^2$이고 ㉠에서

$-1 \le r-1 < 1 \quad \therefore 0 \le (r-1)^2 \le 1$

따라서 수열 $\{(r^2-2r+1)^n\}$은 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

유형 18 r^n을 포함한 수열의 극한 본책 21쪽

등비수열 $\{r^n\}$에서 공비 r의 값의 범위를

$|r|<1,\ r=1,\ |r|>1,\ r=-1$

인 경우로 나누어 극한을 조사한다.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & (|r|<1) \\ 1 & (r=1) \\ \text{발산} & (|r|>1 \text{ 또는 } r=-1) \end{cases}$$

0105 (i) $|r|<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^n+1}=0 \quad \therefore a=0$

(ii) $r=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2} \quad \therefore b=\frac{1}{2}$$

(iii) $|r|>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{r^n}}=1 \quad \therefore c=1$$

이상에서 $\quad a+b+c=0+\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0106 (i) $0<r<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} r^{n+1}=0$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3}{r^{n+1}+1}=-3$ ··· ❶

(ii) $r=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3}{r^{n+1}+1}=\frac{1-3}{1+1}=-1$$ ··· ❷

(iii) $r>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} r^{n+1}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3}{r^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r}-\frac{3}{r^{n+1}}}{1+\frac{1}{r^{n+1}}}=\frac{1}{r}$$ ··· ❸

답 풀이 참조

채점 기준표

❶ $0<r<1$일 때, 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있다.	30%
❷ $r=1$일 때, 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있다.	30%
❸ $r>1$일 때, 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있다.	40%

0107 ① $x<-1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}|x^n|=\infty,\ \lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^n}-x^n}{\frac{1}{x^n}+1}$$

에서 주어진 수열은 발산(진동)한다.

② $-1<x<0$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^n}=1$

③ $0<x<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^n}=1$

④ $x=1$일 때, $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$

⑤ $x>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^n}-x^n}{\frac{1}{x^n}+1}=-\infty$$ 답 ③

0108 (i) $|r|<7$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{7}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n-r^n}{7^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{r}{7}\right)^n}{1+\left(\frac{r}{7}\right)^n}=1$$

(ii) $r=7$일 때, $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{7^n-r^n}{7^n+r^n}=0$

(iii) $|r|>7$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n-r^n}{7^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{7}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{7}{r}\right)^n+1}=-1$$

이상에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{7^n-r^n}{7^n+r^n}=1$을 만족시키는 r의 값의 범위는 $|r|<7$이므로 구하는 정수 r는 $-6, -5, -4, \cdots, 6$의 13개이다. 답 13

유형 19 x^n을 포함한 극한으로 정의된 함수 본책 21쪽

x의 값의 범위를 $|x|<1,\ x=1,\ |x|>1,\ x=-1$인 경우로 나누어 함수식을 구한다.

① $|x|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}x^n=0$

② $|x|>1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$

0109 $f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n-1}-3+2}{(-1)^{2n}+1}=\frac{-1-1}{1+1}=-1,$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2n-1}+3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+2}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2n}+1}=1,$$

$$f\left(\frac{2}{9}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{9}\right)^{2n-1}+3\cdot\frac{2}{9}+2}{\left(\frac{2}{9}\right)^{2n}+1}=\frac{8}{3},$$

$$f(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n-1}+3\cdot3+2}{3^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}+\frac{11}{3^{2n}}}{1+\frac{1}{3^{2n}}}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore f(-1)+f\left(-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{9}\right)+f(3)$$

$$=-1+1+\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=3$$

답 ③

다른 풀이 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+3x+2}{x^{2n}+1}=3x+2$$

(ii) $x=1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+3x+2}{x^{2n}+1}=\frac{1+3+2}{1+1}=3$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}|x^{2n-1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+3x+2}{x^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^{2n-1}}+\frac{2}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+3x+2}{x^{2n}+1}=\frac{-1-3+2}{1+1}=-1$$

이상에서 구하는 값은

$$f(-1)+f\left(-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{9}\right)+f(3)$$

$$=-1+1+\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=3$$

0110 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=1$$

(ii) $x=1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}-x}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=-x$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\frac{1-(-1)}{1+1}=1$$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 ③이다.

답 ③

0111 (i) $\frac{1}{2}\le x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{n}=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n}+2x}{x^{n+1}+1}=2x$$

(ii) $x=1$일 때,

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n}+2x}{x^{n+1}+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

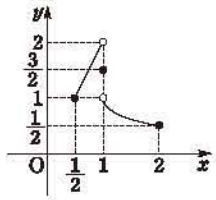
(iii) $1<x\le2$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{n}=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=\infty$이므로

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n}+2x}{x^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^{n}}}{1+\frac{1}{x^{n+1}}}=\frac{1}{x}$$

이상에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$$\left\{y\,\middle|\,\frac{1}{2}\le y<2\right\}$$

답 ①



유형 20 귀납적으로 정의된 수열의 극한 본책 22쪽

(i) 주어진 식을 변형하여 수열의 일반항을 구한다.
(ii) (i)의 일반항을 이용하여 극한값을 구한다.

0112 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3$에서 $a_{n+1}-6=\frac{1}{2}(a_n-6)$

따라서 수열 $\{a_n-6\}$은 첫째항이 $a_1-6=1$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n-6=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\qquad\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+6$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+6\right\}=6$$

답 ③

0113 $a_{n+1}=a_n+2^n$의 양변에 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&a_2=a_1+2^1\\
&a_3=a_2+2^2\\
&a_4=a_3+2^3\\
&\quad\vdots\\
+)\ &\underline{a_n=a_{n-1}+2^{n-1}}\\
&a_n=a_1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}
\end{aligned}$$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-4}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-4}{2^n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{4}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}}=4$$

답 ④

0114 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$에서 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n}$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$$

⋯ ➊

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{3}$, 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이므로

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3n-1}{6}$$

$$\therefore a_n=\frac{6}{3n-1} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{3-\frac{1}{n}}=2 \quad \cdots ❸$$

답 2

채점 기준표

❶ 주어진 a_n, a_{n+1} 사이의 관계식을 정리할 수 있다.	30%
❷ a_n을 구할 수 있다.	50%
❸ $\lim_{n\to\infty} na_n$의 값을 구할 수 있다.	20%

0115 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{2017}{2018}$에서

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\left(\frac{2017}{2018}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n\le a_1\left(\frac{2017}{2018}\right)^{n-1} (\because a_1>0)$$

$a_n>0$이므로 $\quad 0<a_n\le a_1\left(\frac{2017}{2018}\right)^{n-1}$

이때 $\lim_{n\to\infty} a_1\left(\frac{2017}{2018}\right)^{n-1}=0$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty} a_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-a_n}{2a_n+n^2-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{a_n}{n^2}}{\frac{2a_n}{n^2}+1-\frac{3}{n^2}}=4$$

답 4

유형 21, 22 수열의 극한의 활용 본책 23, 24쪽

점의 좌표, 선분의 길이 등을 n에 대한 식으로 나타낸 후, 이 식의 극한값을 구한다.

0116 $n\ge2$일 때, 원 $x^2+y^2=n^2$과 x축이 만나는 점의 좌표는 $(n, 0)$, $(-n, 0)$이므로

$a_n=n$ $(\because a_n>0)$

$y=\sqrt{n}$을 $x^2+y^2=n^2$에 대입하여 정리하면

$$x^2+n=n^2, \quad x^2=n^2-n$$

$$\therefore x=\sqrt{n^2-n} (\because x>0) \quad \therefore b_n=\sqrt{n^2-n}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)&=\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}{n+\sqrt{n^2-n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ①

0117 $P_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$이므로 직선 OP_n의 기울기는 $\frac{1}{n}$이다.

즉 점 P_n을 지나고 직선 OP_n에 수직인 직선의 방정식은

$$y=-n\left(x-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}=-nx+1+\frac{1}{n^2}$$

따라서 이 직선의 y절편이 $1+\frac{1}{n^2}$이므로

$$a_n=1+\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1$$

답 ②

0118 $\overline{OP_n}=\sqrt{n^2+(\sqrt{n+1})^2}=\sqrt{n^2+n+1}$, $\overline{OQ_n}=n$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\overline{OP_n}-\overline{OQ_n})\\&=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n+1}-n)(\sqrt{n^2+n+1}+n)}{\sqrt{n^2+n+1}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ④

0119 $P_n\left(n, \frac{n^2}{2}\right)$, $Q_n\left(n+1, \frac{(n+1)^2}{2}\right)$이므로

$$\begin{aligned}a_n=\overline{P_nQ_n}&=\sqrt{1^2+\left\{\frac{(n+1)^2}{2}-\frac{n^2}{2}\right\}^2}\\&=\sqrt{\frac{4n^2+4n+5}{4}}=\frac{\sqrt{4n^2+4n+5}}{2} \quad \cdots ❶\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{4n^2+4n+5}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{4+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}}=1 \quad \cdots ❷\end{aligned}$$

답 1

채점 기준표

❶ a_n을 구할 수 있다.	50%
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	50%

0120 $y=\frac{n}{n+2}x$에서 $x=\frac{n+2}{n}y$이므로 이것을 $x+y=2$에 대입하면

$$\frac{n+2}{n}y+y=2, \quad \frac{2n+2}{n}y=2$$

$$\therefore y=\frac{n}{n+1}$$

따라서 점 P_n의 y좌표가 $\frac{n}{n+1}$이므로 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_n이라 하면

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

답 ②

0121 $\triangle \mathrm{AB_1P}_n \backsim \triangle \mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n$이고 닮음비가 $1:n$이므로
$\overline{\mathrm{AP}_n}:\overline{\mathrm{AC}_n}=1:n$

$$\therefore \overline{\mathrm{AP}_n}=\frac{\overline{\mathrm{AC}_n}}{n}=\frac{\sqrt{3^2+n^2}}{n}=\frac{\sqrt{9+n^2}}{n}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{AP}_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+n^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{9}{n^2}+1}=1$$

답 1

0122 $a_1=1,\ a_2=1+3=4,\ a_3=1+3+5=9,\ \cdots$에서

$$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2 \quad \cdots ①$$

$b_1=3,\ b_2=3+6=9,\ b_3=3+6+9=18,\ \cdots$에서

$$b_n=3+6+9+\cdots+3n$$
$$=\sum_{k=1}^{n}3k=3\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3n^2+3n}{2} \quad \cdots ②$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n}{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}\right)=3 \quad \cdots ③$$

답 3

채점 기준표

① a_n을 구할 수 있다.	40%
② b_n을 구할 수 있다.	40%
③ $\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	20%

0123 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$을 $2:3$으로 내분하는 점 A_{n+2}의 좌표는
$\frac{2x_{n+1}+3x_n}{5}$

즉 $x_{n+2}=\frac{2x_{n+1}+3x_n}{5}$이므로

$$5x_{n+2}=2x_{n+1}+3x_n, \qquad 5(x_{n+2}-x_{n+1})=-3(x_{n+1}-x_n)$$
$$\therefore x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{3}{5}(x_{n+1}-x_n)$$

$x_{n+1}-x_n=y_n$으로 놓으면

$$y_{n+1}=-\frac{3}{5}y_n,\quad y_1=x_2-x_1=5$$

따라서 수열 $\{y_n\}$은 첫째항이 5, 공비가 $-\frac{3}{5}$인 등비수열이므로

$$y_n=5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1},\ 즉\ x_{n+1}=x_n+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

위의 식의 양변에 n 대신 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$x_2=x_1+5$$
$$x_3=x_2+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$$
$$x_4=x_3+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^2$$
$$\vdots$$
$$+\big)\ x_n=x_{n-1}+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-2}$$
$$x_n=x_1+5+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\cdots+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-2}$$
$$=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}=2+\frac{5\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}$$
$$=2+\frac{25}{8}-\frac{25}{8}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{41}{8}-\frac{25}{8}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{41}{8}-\frac{25}{8}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}=\frac{41}{8}$$

답 ④

유형 23 수열의 극한의 실생활에의 활용 본책 24쪽

(i) 주어진 조건을 이용하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.
(ii) (i)에서 구한 식을 변형하여 일반항 a_n을 구한다.
(iii) 구하는 식에 a_n을 대입하여 극한값을 구한다.

0124 주어진 조건에서

$$a_1=12,\ a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+4)=\frac{1}{4}a_n+1$$
$$\therefore a_{n+1}-\frac{4}{3}=\frac{1}{4}\left(a_n-\frac{4}{3}\right)$$

따라서 수열 $\left\{a_n-\frac{4}{3}\right\}$는 첫째항이 $a_1-\frac{4}{3}=\frac{32}{3}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$a_n-\frac{4}{3}=\frac{32}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$
$$\therefore a_n=\frac{32}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{4}{3}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{32}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{4}{3}\right\}=\frac{4}{3}$$

답 ②

0125 n회의 시행 후에 A, B 두 그릇에 남아 있는 물의 양을 각각 $a_n,\ b_n$이라 하면

$a_n+b_n=2 \qquad \therefore b_n=2-a_n$ ← A, B 두 그릇에 담긴 물의 양의 합은 일정하다.

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a_n+b_n\right)=\frac{7}{9}a_n+\frac{1}{3}b_n$$
$$=\frac{7}{9}a_n+\frac{1}{3}(2-a_n)=\frac{4}{9}a_n+\frac{2}{3}$$
$$\therefore a_{n+1}-\frac{6}{5}=\frac{4}{9}\left(a_n-\frac{6}{5}\right)$$

따라서 수열 $\left\{a_n-\frac{6}{5}\right\}$은 첫째항이

$$a_1-\frac{6}{5}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)-\frac{6}{5}=-\frac{4}{45}$$

└ 1회의 시행 후에 A그릇에 남아 있는 물의 양

이고 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$$a_n-\frac{6}{5}=-\frac{4}{45}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=-\frac{4}{45}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}+\frac{6}{5}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{4}{45}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}+\frac{6}{5}\right\}=\frac{6}{5}$$

따라서 A그릇의 물의 양은 $\frac{6}{5}$ L에 가까워진다. 답 $\frac{6}{5}$ L

0126 $a_1=\sqrt{3}$이라 하고 a_1에서 네 개의 키를 순서대로 눌러 나오는 수를 a_2, a_2에서 네 개의 키를 순서대로 눌러 나오는 수를 a_3, ⋯이라 하면 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+3}$

양변을 제곱하면 $a_{n+1}^2=a_n+3$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$이므로

$$\alpha^2=\alpha+3,\quad \alpha^2-\alpha-3=0$$

$$\therefore \alpha=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\ (\because \alpha>0)$$

답 ②

0127 전략 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$임을 이용한다.

풀이 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{a_n}\right)$$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$이므로

$$\alpha=2+\frac{1}{\alpha},\quad \alpha^2-2\alpha-1=0$$

$$\therefore \alpha=1+\sqrt{2}\ (\because \alpha>0)$$

답 ③

0128 전략 합의 기호 Σ를 이용하여 S_n, T_n을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{3n}k=\frac{3n(3n+1)}{2}$,

$$T_n=S_n-(3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+\cdots+3n)$$

$$=\frac{3n(3n+1)}{2}-3\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{3n(3n+1)}{2}-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=3n^2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{\frac{3n(3n+1)}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$

답 ②

0129 전략 a_n과 S_n 사이의 관계를 이용하여 a_n+b_n을 구한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\frac{1}{n+1}$ ⋯⋯ ㉠

$\sum_{k=1}^{n-1}(a_k+b_k)=\frac{1}{n}$ ⋯⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면

$$a_n+b_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}n^2(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n^2+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\frac{1}{n}}=-1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}n^2a_n=\lim_{n\to\infty}\{n^2(a_n+b_n)-n^2b_n\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}n^2b_n$$

$$=-1-2$$

$$=-3$$

답 ①

0130 전략 순서쌍 (x, y)의 개수를 z에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x+y+z=n$에서

$x+y=n-z$ $(z=1, 2, \cdots, n-2)$

이므로 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, n-z-1)$, $(2, n-z-2)$, ⋯, $(n-z-1, 1)$

$$\therefore a_n=\sum_{z=1}^{n-2}(n-z-1)$$

$$=\sum_{z=1}^{n-2}(n-1)-\sum_{z=1}^{n-2}z$$

$$=(n-1)(n-2)-\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+2}{2n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0131 전략 $a_nb_n=c_n$으로 놓고 주어진 식을 a_n, c_n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_nb_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=\frac{c_n}{a_n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n^2-a_nb_n-b_n+4)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n\cdot\frac{c_n^2}{a_n^2}-a_n\cdot\frac{c_n}{a_n}-\frac{c_n}{a_n}+4\right)$$

$$=0-2-0+4=2$$

답 2

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=2$이고, $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_nb_n^2-a_nb_n-b_n+4)$

$=\lim_{n\to\infty}\{(b_n-1)(a_nb_n-1)+3\}$

$=-1\cdot1+3=2$

0132 **전략** $a<4$, $a=4$인 경우로 a의 값의 범위를 나누어 극한값을 구한다.

풀이 (i) $a<4$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot a^n+4^{n+1}}{a^{n+1}+b\cdot4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^n+4}{a\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^n+b}=\frac{4}{b}$$

즉 $\frac{4}{b}>1$이어야 하므로 $\quad b<4$

따라서 $a<4$, $b<4$를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3\cdot3=9$이다.

└ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)

(ii) $a=4$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot a^n+4^{n+1}}{a^{n+1}+b\cdot4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot4^n+4^{n+1}}{4^{n+1}+b\cdot4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+4}{4+b}=\frac{7}{4+b}$$

즉 $\frac{7}{4+b}>1$이어야 하므로 $\quad 4+b<7$

$\therefore b<3$

따라서 $a=4$, $b<3$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(4, 1)$, $(4, 2)$의 2이다.

(i), (ii)에서 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$9+2=11$

답 ④

0133 **전략** $|x|<1$, $x=1$, $|x|>1$, $x=-1$일 때로 나누어 각각 $f(x)$를 구한다.

풀이 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{x^{2n}+1}=0$$

(ii) $x=1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{x^{2n}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

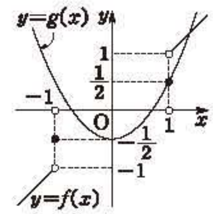
(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=x$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{x^{2n}+1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

이상에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프의 교점이 4개이려면 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$을 지나야 한다.



따라서 $\frac{1}{2}=1^2+k$이므로

$k=-\frac{1}{2}$

답 ②

0134 **전략** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq2)$임을 이용하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_{k+1}-a_k}=2\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$에서

(i) $n=1$일 때, $\quad \sqrt{a_2-a_1}=\frac{4}{3}$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$\sqrt{a_{n+1}-a_n}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_{k+1}-a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{a_{k+1}-a_k}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-2\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{4}{3^n} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\sqrt{a_2-a_1}=\frac{4}{3}$는 $n=1$을 ㉠에 대입한 것과 같으므로 모든 자연수 n에 대하여

$\sqrt{a_{n+1}-a_n}=\frac{4}{3^n} \qquad \therefore a_{n+1}=a_n+\frac{16}{9^n}$

위의 식의 양변에 n 대신 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2=a_1+\frac{16}{9}$

$a_3=a_2+\frac{16}{9^2}$

$a_4=a_3+\frac{16}{9^3}$

$\vdots$

$+\big)\ a_n=a_{n-1}+\frac{16}{9^{n-1}}$

$$a_n=a_1+\frac{16}{9}+\frac{16}{9^2}+\frac{16}{9^3}+\cdots+\frac{16}{9^{n-1}}$$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{16}{9^k}$$

$$=9+\frac{\frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{9}}$$

$$=11-2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{11-2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right\}=11$$

답 ⑤

0135 전략 각 사분원의 호의 길이를 구하여 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 이어 붙이는 정사각형의 한 변의 길이는 차례대로 1, 2, 3, 5, 8, ⋯이므로 a_n은

$$\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ 4\pi,\ \cdots$$

이때

$$a_1=\frac{\pi}{2},\ a_2=\pi$$

$$\underbrace{a_{n+2}=a_{n+1}+a_n}_{\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2},\ \pi+\frac{3\pi}{2}=\frac{5\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}+\frac{5\pi}{2}=4\pi,\ \cdots}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이므로

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=c$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

에서 $\quad c=1+\frac{1}{c},\quad c^2-c-1=0$

$$\therefore c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\because c>0)$$

답 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

0136 전략 주어진 규칙에 따라 $f(2^n)$의 값을 구한다.

풀이 블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 각 열에 남아 있는 블록의 개수는 다음과 같다.

m	1	2
	1	1

$\therefore f(2)=2$

m	1	2	3	4
	1		3	
		1		1

$1+1=f(2)$

$\therefore f(2^2)=f(2)+(1+3)$

m	1	2	3	4	5	6	7	8
	1		3		5		7	
		1		1		3		1

$1+1+3+1=f(2^2)$

$\therefore f(2^3)=f(2^2)+(1+3+5+7)$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	1		3		5		7		9		11		13		15	
		1		1		3		1		5		3		7		1

$1+1+3+1+5+3+7+1=f(2^3)$

$$\therefore f(2^4)=f(2^3)+(1+3+5+7+9+11+13+15)$$

$$\vdots$$

$$\therefore f(2^{n+1})-f(2^n)=\sum_{k=1}^{2^n}(2k-1)=2\cdot\frac{2^n(2^n+1)}{2}-2^n$$

$$=(2^n)^2=4^n$$

따라서 $f(2^{n+1})-f(2^n)=4^n$, 즉 $f(2^{n+1})=f(2^n)+4^n$이므로

$$f(2^n)=f(2)+4+4^2+4^3+\cdots+4^{n-1}$$

이 식의 양변에 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더한다.

$$=f(2)+\sum_{k=1}^{n-1}4^k$$

$$=2+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}=\frac{4^n+2}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{\frac{4^{n+2}+2}{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot4^n}{4^{n+2}+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{16+2\cdot\frac{1}{4^n}}=\frac{3}{16}$$

따라서 $p=16$, $q=3$이므로 $\quad p+q=19$

답 19

0137 전략 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $a_1=40\cdot\frac{1}{4}=10$, $a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+40)=\frac{1}{4}a_n+10$

$$\therefore a_{n+1}-\frac{40}{3}=\frac{1}{4}\left(a_n-\frac{40}{3}\right)$$

따라서 수열 $\left\{a_n-\frac{40}{3}\right\}$은 첫째항이 $a_1-\frac{40}{3}=-\frac{10}{3}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$a_n-\frac{40}{3}=-\frac{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=-\frac{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{40}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{40}{3}\right\}$$

$$=\frac{40}{3}$$

답 ③

0138 전략 등차중항과 등비중항을 이용하여 a_n, b_n을 각각 구한다.

풀이 a_n, b_n, a_{n+1}이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b_n=a_n+a_{n+1}\quad\therefore a_{n+1}=2b_n-a_n\quad$ ⋯⋯ ㉠ ⋯→ ❶

b_n, a_{n+1}, b_{n+1}이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_{n+1}{}^2=b_nb_{n+1}\quad\therefore b_{n+1}=\frac{a_{n+1}{}^2}{b_n}\quad$ ⋯⋯ ㉡ ⋯→ ❷

㉠, ㉡에 의하여 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 각 항을 구하면

$\{a_n\}$: 1, 3, 6, 10, ⋯

$\{b_n\}$: 2, $\frac{9}{2}$, 8, $\frac{25}{2}$, ⋯

이때 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_2=a_1+2$$
$$a_3=a_2+3$$
$$a_4=a_3+4$$
$$\vdots$$
$$+\underline{)\ a_n=a_{n-1}+n}$$
$$a_n=a_1+2+3+4+\cdots+n$$

$$=1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$ ⋯→ ❸

또 수열 $\{b_n\}$에서

$$2=\frac{4}{2},\ \frac{9}{2},\ 8=\frac{16}{2},\ \frac{25}{2},\ \cdots$$

이므로

$$b_n=\frac{(n+1)^2}{2}=\frac{n^2+2n+1}{2}$$ ⋯→ ❹

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+2n+1}{2}}{\frac{n^2+n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=1 \quad \cdots ❺$$

답 1

채점 기준표

❶ ㉠을 구할 수 있다.	20%
❷ ㉡을 구할 수 있다.	20%
❸ a_n을 구할 수 있다.	20%
❹ b_n을 구할 수 있다.	20%
❺ $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	20%

0139 전략 $(2n+1)a_n=b_n$으로 놓고 주어진 식을 b_n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $(2n+1)a_n=b_n$으로 놓으면 $\quad a_n=\frac{b_n}{2n+1}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(n-1)a_n=\lim_{n\to\infty}(n-1)\cdot\frac{b_n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha=\frac{1}{2} \quad \cdots ❶$$

또 $\lim_{n\to\infty}(2-3n)a_n=\lim_{n\to\infty}(2-3n)\cdot\frac{b_n}{2n+1}=-\frac{3}{2}$이므로

$$\beta=-\frac{3}{2} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \alpha-\beta=\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=2 \quad \cdots ❸$$

답 2

채점 기준표

❶ α의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ β의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\alpha-\beta$의 값을 구할 수 있다.	20%

0140 전략 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 일차 이하의 다항식이므로 $R_n(x)=ax+b$로 놓는다.

풀이 x^n을 $(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_n(x)$라 하고, $R_n(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$x^n=(x-2)(x-3)Q_n(x)+ax+b \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^n=2a+b \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3^n=3a+b \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉢$-$㉡을 하면 $\quad a=3^n-2^n$

이것을 ㉡에 대입하면 $\quad 2^n=2(3^n-2^n)+b$

$\therefore b=3\cdot2^n-2\cdot3^n$

따라서 $R_n(x)=(3^n-2^n)x+3\cdot2^n-2\cdot3^n$이므로 $\cdots$ ❶

$R_n(0)=3\cdot2^n-2\cdot3^n$, $R_n(1)=2\cdot2^n-3^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{R_n(0)}{R_n(1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot2^n-2\cdot3^n}{2\cdot2^n-3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-2}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=2 \quad \cdots ❷$$

답 2

채점 기준표

❶ $R_n(x)$를 구할 수 있다.	70%
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{R_n(0)}{R_n(1)}$의 값을 구할 수 있다.	30%

SSEN 특강

다항식의 나눗셈

다항식 A를 다항식 B ($B\neq0$)로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (단, (R의 차수)$<$(B의 차수))

0141 전략 $f(x+y)=f(x)f(y)$에 $x=n$(n은 자연수), $y=1$을 대입하여 $f(n)$을 구한다.

풀이 조건 (나)에서 $f(x+y)=f(x)f(y)$에 $x=n$(n은 자연수), $y=1$을 대입하면 $\quad f(n+1)=f(n)f(1)$

$$f(n+1)=\frac{3}{4}f(n) \qquad \therefore f(n)=\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \cdots ❶$$

한편 $a_{n+1}=a_n+f(n)$이므로 이 식의 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2&=a_1+\frac{3}{4}\\
a_3&=a_2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\\
a_4&=a_3+\left(\frac{3}{4}\right)^3\\
&\vdots\\
+)\ a_n&=a_{n-1}+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\\
\hline
a_n&=a_1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k=3+\frac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=6-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{6-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}=6 \quad \cdots ❸$$

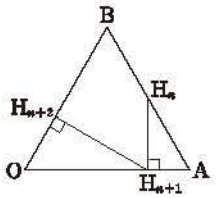
답 6

채점 기준표

❶ $f(n)$을 구할 수 있다.	30%
❷ a_n을 구할 수 있다.	50%
❸ $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다.	20%

0142 **전략** 삼각비를 이용하여 $\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}$의 길이와 $\overline{\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}}$의 길이 사이의 관계를 찾는다.

풀이 변 AB 위의 한 점을 H_n이라 하면 점 H_{n+1}은 변 OA 위에 있으므로



$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OH}_{n+1}}&=2-\overline{\mathrm{AH}_{n+1}}\\&=2-\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}\tan 30°\\&=2-\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}\end{aligned}$$

또

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}}&=\overline{\mathrm{OH}_{n+1}}\sin 60°\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{\mathrm{OH}_{n+1}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}\right)\\&=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}\end{aligned}$$ ··· ①

따라서 $\lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}=\alpha$라 하면 $\lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}}=\alpha$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}\right)$$

에서 $\alpha=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\alpha,\quad \frac{3}{2}\alpha=\sqrt{3}$

$$\therefore \alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$ ··· ②

답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

채점 기준표

① $\overline{\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}}$의 길이를 $\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}$로 나타낼 수 있다.	60%
② $\lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}$의 값을 구할 수 있다.	40%

0143 **전략** 높이가 a m인 식물이 매년 x %씩 자란다고 할 때, n년 후 이 식물의 높이는 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)^n$ m이다.

풀이 n년 후 A수목원과 B수목원에 있는 두 식물 P, Q의 높이의 합은

$a_n=8.2\times1.06^n+6.5\times1.07^n$ ··· ①

$b_n=10.8\times1.06^n+5.2\times1.07^n$ ··· ②

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{10b_n}{a_n}&=10\lim_{n\to\infty}\frac{10.8\times1.06^n+5.2\times1.07^n}{8.2\times1.06^n+6.5\times1.07^n}\\&=10\lim_{n\to\infty}\frac{10.8\times\left(\frac{1.06}{1.07}\right)^n+5.2}{8.2\times\left(\frac{1.06}{1.07}\right)^n+6.5}\\&=10\times\frac{5.2}{6.5}=8\end{aligned}$$ ··· ③

답 8

채점 기준표

① a_n을 구할 수 있다.	30%
② b_n을 구할 수 있다.	30%
③ $\lim_{n\to\infty}\frac{10b_n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	40%

02 급수

0144 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{4n+1}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

0145 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}=2$ 답 2

0146 주어진 급수는 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 합이므로 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{n\{2\cdot1+(n-1)\cdot2\}}{2}=n^2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0147 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열의 합이므로 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\frac{4}{3}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{4}{3}$이다. 답 수렴, $\frac{4}{3}$

0148 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})\\&\quad+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\\&=\sqrt{2n+1}-1\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0149 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}+n\right\}=\frac{n^2+3n}{4}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{4}=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0150 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}-\frac{k+1}{k+2}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}=-\frac{n}{2(n+2)}\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{n}{2(n+2)}\right\} = -\frac{1}{2}$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $-\frac{1}{2}$이다. 답 수렴, $-\frac{1}{2}$

0151 제 n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2^k-1) = \frac{2(2^n-1)}{2-1} - n = 2^{n+1}-2-n$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(2^{n+1}-2-n) = \infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0152 제 n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{3}{4}$이다. 답 수렴, $\frac{3}{4}$

0153 주어진 급수는 첫째항이 -3, 공차가 4인 등차수열의 합이므로 제 n항을 a_n이라 하면

$a_n = -3+(n-1)\cdot 4 = 4n-7$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(4n-7) = \infty \neq 0$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0154 주어진 급수는 첫째항이 2, 공비가 1인 등비수열의 합이므로 제 n항을 a_n이라 하면 $a_n = 2$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 2 \neq 0$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0155 주어진 급수는 첫째항이 $-\frac{1}{\sqrt{7}}$, 공차가 $\frac{3}{\sqrt{7}}$인 등차수열의 합이므로 제 n항을 a_n이라 하면

$a_n = -\frac{1}{\sqrt{7}}+(n-1)\cdot\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}n-\frac{4}{\sqrt{7}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{7}}n-\frac{4}{\sqrt{7}}\right) = \infty \neq 0$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0156 주어진 급수는 첫째항이 -100, 공차가 3인 등차수열의 합이므로 제 n항을 a_n이라 하면

$a_n = -100+(n-1)\cdot 3 = 3n-103$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(3n-103) = \infty \neq 0$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0157 $a_n = \frac{2n}{3n+1}$으로 놓으면

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} \neq 0$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0158 $a_n = \sqrt{n^2+n}-n$으로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0159 $a_n = \log\frac{2n^2}{n^2+3}$으로 놓으면

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\log\frac{2n^2}{n^2+3} = \log 2 \neq 0$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0160 $a_n = \frac{4^n}{2^n+3^n}$으로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = \infty \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0161 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n = 2\cdot 2+(-1) = 3$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-5b_n) = 3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-5\sum_{n=1}^{\infty}b_n = 3\cdot 2-5\cdot(-1) = 11$

답 (1) 3 (2) 11

0162 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$이고, $-1<\frac{1}{3}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ 답 수렴, $\frac{3}{2}$

0163 공비가 $-\sqrt{5}$이고, $-\sqrt{5}<-1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다. 답 발산

0164 첫째항이 1, 공비가 0.1이고, $-1<0.1<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$\frac{1}{1-0.1} = \frac{10}{9}$ 답 수렴, $\frac{10}{9}$

0165 첫째항이 $\sqrt{2}$, 공비가 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$이고, $-1<-\frac{1}{\sqrt{2}}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{\sqrt{2}}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{2}{\sqrt{2}+1}=2\sqrt{2}-2$$

답 수렴, $2\sqrt{2}-2$

0166 공비가 $\frac{4}{3}$이고, $\frac{4}{3}>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

답 발산

0167 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$에서 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{2}{3}$이고, $-1<-\frac{2}{3}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}$$

답 수렴, $\frac{3}{5}$

0168 $\sum_{n=1}^{\infty}3\cdot(-1)^{n-1}$에서 공비가 -1이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

답 발산

0169 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{n+1}$에서 첫째항이 $\frac{1}{5}$, 공비가 $\frac{1}{\sqrt{5}}$이고 $-1<\frac{1}{\sqrt{5}}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{20}$$

답 수렴, $\frac{5+\sqrt{5}}{20}$

0170 $\sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt{3})^n$에서 첫째항이 $2-\sqrt{3}$, 공비가 $2-\sqrt{3}$이고 $-1<2-\sqrt{3}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

답 수렴, $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

0171 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^{n+1}}{7^n}=\sum_{n=1}^{\infty}8\cdot\left(\frac{8}{7}\right)^n$에서 공비가 $\frac{8}{7}>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

답 발산

0172 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

0173 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n}-\frac{1}{2^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$=3\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=3\cdot\frac{1}{3}-1=0$$

답 0

0174 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}-\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}=-\frac{5}{6}$$

답 $-\frac{5}{6}$

0175 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}+4^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot2^n+4^n}{6^n}$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
$$=2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}+2=3$$

답 3

0176 주어진 등비급수의 공비가 $-2x$이므로 수렴하려면

$-1<-2x<1$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

0177 주어진 등비급수의 공비가 $2x-1$이므로 수렴하려면

$-1<2x-1<1,\quad 0<2x<2$

$\therefore 0<x<1$

답 $0<x<1$

0178 주어진 등비급수의 공비가 $-\frac{x}{3}$이므로 수렴하려면

$-1<-\frac{x}{3}<1$ $\quad\therefore -3<x<3$

답 $-3<x<3$

0179 $0.\dot{1}6\dot{9}=0.169+0.000169+0.000000169+\cdots$

$$=\frac{0.169}{1-0.001}=\frac{0.169}{0.999}=\frac{169}{999}$$

답 $\frac{169}{999}$

0180 $0.5\dot{7}=0.5+0.07+0.007+0.0007+\cdots$

$$=0.5+\frac{0.07}{1-0.1}=0.5+\frac{0.07}{0.9}$$
$$=\frac{5}{10}+\frac{7}{90}=\frac{52}{90}=\frac{26}{45}$$

답 $\frac{26}{45}$

0181 $1.\dot{4}\dot{2}=1+0.42+0.0042+0.000042+\cdots$

$$=1+\frac{0.42}{1-0.01}=1+\frac{0.42}{0.99}$$
$$=1+\frac{42}{99}=\frac{141}{99}=\frac{47}{33}$$

답 $\frac{47}{33}$

유형 01 부분분수를 이용하는 급수 본책 32쪽

(i) $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$임을 이용하여 부분합 S_n을 구한다. (단, $A\neq B$)

(ii) 부분합의 극한값 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$을 구한다.

0182 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n)^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0183 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{3+6+9+\cdots+3n}=\frac{1}{3(1+2+3+\cdots+n)}=\frac{2}{3n(n+1)}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{2}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{3}$

답 ④

0184 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{2n+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}=\frac{2n+1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\frac{6}{n(n+1)}=6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}6\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=6\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=6$

답 ④

0185 $S_n=\frac{n\{2\cdot4+(n-1)\cdot4\}}{2}=2n(n+1)$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

0186 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-(n-2),\ \alpha_n\beta_n=n^2$ ··· ❶

이므로

$$\begin{aligned}(\alpha_n-2)(\beta_n-2)&=\alpha_n\beta_n-2(\alpha_n+\beta_n)+4\\&=n^2+2(n-2)+4\\&=n^2+2n=n(n+2)\end{aligned}$$ ··· ❷

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha_n-2)(\beta_n-2)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$ ··· ❸

답 $\frac{3}{4}$

채점 기준표

❶ $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$을 구할 수 있다.	20%
❷ $(\alpha_n-2)(\beta_n-2)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha_n-2)(\beta_n-2)}$의 값을 구할 수 있다.	50%

유형 02 로그를 포함한 급수 본책 32쪽

급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log a_n$의 합은 로그의 성질을 이용한다.

➡ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\log a_k=\lim\limits_{n\to\infty}(\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\log(a_1a_2a_3\cdots a_n)$

0187 $\sum_{n=2}^{\infty}\log\frac{n^2}{n^2-1}$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\log\frac{n\cdot n}{(n-1)(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log\frac{k\cdot k}{(k-1)(k+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log\frac{2\cdot2}{1\cdot3}+\log\frac{3\cdot3}{2\cdot4}+\log\frac{4\cdot4}{3\cdot5}+\cdots+\log\frac{n\cdot n}{(n-1)(n+1)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\cdots\cdot\frac{n\cdot n}{(n-1)(n+1)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2n}{n+1}=\log 2$$

답 ③

0188 주어진 급수의 제 n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_k$$
$$=\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_n$$
$$=\log_2(a_1a_2a_3\cdots a_n)=\log_2\frac{4n-1}{n+4}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log_2 a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{4n-1}{n+4}$$
$$=\log_2 4=2$$

답 2

0189 주어진 급수의 제 n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\log_2\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$$
$$=\log_2\left\{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\log_2\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$

이때 제 n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+2}{k+1}\right)$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)+\log_2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)+\log_2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)+\cdots+\log_2\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_2\frac{n+2}{2(n+1)}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+2}{2(n+1)}=\log_2\frac{1}{2}=-1$$

답 ②

0190 $a_n=n^2+2n$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{a_k+1}{a_k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k^2+2k+1}{k^2+2k}=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k+1}{k+2}\right)$$
$$=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)+\log\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)+\cdots+\log\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right)$$
$$=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right)$$
$$=\log\frac{2(n+1)}{n+2}$$ ➊
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2(n+1)}{n+2}=\log 2$$ ➋

답 $\log 2$

채점 기준표

➊ S_n을 간단히 정리할 수 있다.	80%
➋ $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 03 항의 부호가 교대로 바뀌는 급수

본책 33쪽

홀수 번째 항까지의 부분합 S_{2n-1}과 짝수 번째 항까지의 부분합 S_{2n}에 대하여

① $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\alpha$ (α는 실수) ➡ $\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha$로 수렴

② $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ ➡ $\lim_{n\to\infty}S_n$은 발산

0191 급수의 제 n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

① $S_n=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)$

$=2-\frac{n+2}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)=2-1=1$

따라서 주어진 급수는 1로 수렴한다.

② $S_1=2,\ S_2=\frac{1}{2},\ S_3=2,\ S_4=\frac{2}{3},\ S_5=2,\ S_6=\frac{3}{4},\ \cdots$이므로

$S_{2n-1}=2,\ S_{2n}=\frac{n}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=2,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

③ $S_1=-1,\ S_2=-\frac{2}{3},\ S_3=-1,\ S_4=-\frac{4}{5},\ S_5=-1,$

$S_6=-\frac{6}{7},\ \cdots$이므로

$S_{2n-1}=-1,\ S_{2n}=-\frac{2n}{2n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=-1,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2n}{2n+1}\right)=-1$

따라서 주어진 급수는 -1로 수렴한다.

④ $S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

따라서 주어진 급수는 1로 수렴한다.

⑤ $S_1=1,\ S_2=\frac{1}{2},\ S_3=1,\ S_4=\frac{2}{3},\ S_5=1,\ S_6=\frac{3}{4},\ \cdots$이므로

$S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=\frac{n}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=1,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

따라서 주어진 급수는 1로 수렴한다. 답 ②

0192 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

ㄱ. $S_1=1,\ S_2=-1,\ S_3=2,\ S_4=-2,\ S_5=3,\ S_6=-3,\ \cdots$이므로 $S_{2n-1}=n,\ S_{2n}=-n$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\infty,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n}=-\infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $S_n=0+0+\cdots+0=0$이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n=0$

따라서 주어진 급수는 0으로 수렴한다.

ㄷ. $S_1=-1,\ S_2=0,\ S_3=-1,\ S_4=0,\ \cdots$이므로

$S_{2n-1}=-1,\ S_{2n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=-1,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n}=0$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0193 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_1=a_1,\ S_2=a_1-a_2,\ S_3=a_1,\ S_4=a_1-a_3,\ \cdots$

$\therefore S_{2n-1}=a_1,\ S_{2n}=a_1-a_{n+1}$

주어진 급수가 수렴하려면 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}=a_1$이어야 하므로 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=0$, 즉 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이어야 한다.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\log\frac{2n}{n+1}\right)=\log 2\neq 0$

이상에서 주어진 급수가 수렴하는 수열 $\{a_n\}$은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

유형 04 급수와 수열의 극한 사이의 관계 본책 33쪽

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 ➡ $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

0194 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-5\right)=0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=5$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n+5a_n}{n+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5a_n}{n}}{1+\frac{a_n}{n}}=\frac{2+5\cdot 5}{1+5}=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

0195 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 답 ④

0196 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty} S_{2n}=\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=30$

또 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이고

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{2n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}+20a_{2n}}{a_n-4}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}+19a_{2n}}{a_n-4}=\frac{30+19\cdot 0}{0-4}=-\frac{15}{2}$ 답 ②

0197 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n+1}{a_n-3}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+1}{a_n-3}=0$ ··· ❶

$\frac{2a_n+1}{a_n-3}=b_n$으로 놓으면

$a_nb_n-3b_n=2a_n+1,\quad (b_n-2)a_n=3b_n+1$

$\therefore a_n=\frac{3b_n+1}{b_n-2}$ ··· ❷

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n+1}{b_n-2}=\frac{3\cdot 0+1}{0-2}=-\frac{1}{2}$ ··· ❸

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준표

❶ $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+1}{a_n-3}=0$임을 알 수 있다.	30%
❷ a_n을 b_n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❸ $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	20%

0198 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 S로 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이고

$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{n+1}=S$

따라서 $S_n+2S_{n+1}=2+a_n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$에서

$\lim_{n\to\infty}(S_n+2S_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\left\{2+a_n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

이므로 $S+2S=2$

$3S=2 \quad \therefore S=\frac{2}{3}$

$\therefore 30S=20$ 답 ②

유형 05 급수의 수렴과 발산 본책 34쪽

① $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$ ➡ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산

② $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ➡ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합 S_n을 구한다.

0199 ① $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$

$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$은 발산한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$

$=\lim_{n\to\infty}(-1+\sqrt{n+1})=\infty$

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\underbrace{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}_{\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}6\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}6\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=\lim_{n\to\infty}6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=6$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\log\frac{n}{3n-1}=\log\frac{1}{3}\neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n}{3n-1}$은 발산한다.

답 ④

0200 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-2}=\frac{1}{3}\neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-2}$은 발산한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1\neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$은 발산한다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=1$

이상에서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

유형 06, 07 급수의 성질 본책 35쪽

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)이면 실수 p, q에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(pa_n+qb_n)=p\sum_{n=1}^{\infty}a_n+q\sum_{n=1}^{\infty}b_n=p\alpha+q\beta$$

0201 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=10$, $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n)=33$에서

$2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=10$, $3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=33$

$\therefore 2\alpha+\beta=10$, $3\alpha+2\beta=33$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=-13$, $\beta=36$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=\alpha-\beta=-49$

답 ①

다른 풀이 $a_n-b_n=p(2a_n+b_n)+q(3a_n+2b_n)$으로 놓으면

$a_n-b_n=(2p+3q)a_n+(p+2q)b_n$

$\therefore 2p+3q=1$, $p+2q=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $p=5$, $q=-3$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=5\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)-3\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n)$

$=5\cdot 10-3\cdot 33=-49$

0202 $2a_n-3b_n=c_n$이라 하면 $2a_n=3b_n+c_n$

$\therefore a_n=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$ ··· ❶

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=4$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=10$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n\right)=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n$

$=\frac{3}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 10=11$ ··· ❷

답 11

채점 기준표

❶ a_n을 b_n, c_n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다.	60%

0203 $a_n-\frac{2}{n(n+2)}=b_n$이라 하면

$a_n=b_n+\frac{2}{n(n+2)}$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=5$이고

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n + \frac{2}{n(n+2)} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$

$= 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$ 답 ②

0204 $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = \beta$라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \log(a_n b_n) = 5$, $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{a_n^2}{b_n} = 1$에서

$\sum_{n=1}^{\infty} \log(a_n b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\log a_n + \log b_n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n$

$= \alpha + \beta = 5$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{a_n^2}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2\log a_n - \log b_n)$

$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n - \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n$

$= 2\alpha - \beta = 1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha = 2$, $\beta = 3$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{a_n}{b_n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (\log a_n - 3\log b_n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n - 3\sum_{n=1}^{\infty} \log b_n$

$= \alpha - 3\beta = 2 - 3\cdot 3 = -7$ 답 -7

0205 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n + b_n) - a_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$= \beta - \alpha$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, …

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, …

이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0$으로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이지만 $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$이다.

ㄹ. [반례] $\{a_n\}$: 1, -1, 1, -1, 1, …

$\{b_n\}$: -1, 1, -1, 1, -1, …

이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산하지만 $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ①

0206 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)\}$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$

$= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\{(a_n + b_n) - (a_n - b_n)\}$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$

$= \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 모두 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1) = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + 1) = \beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n - 1) + (b_n + 1)\}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + 1)$

$= \alpha + \beta$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$도 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n b_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{0}{2} = 0$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

유형 08 급수의 활용 본책 36쪽

일반항을 구한 후 $\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)(A \neq B)$임을 이용하여 급수의 합을 구한다.

0207 $x - 5y + 5 = 0$에서 $y = \frac{1}{5}x + 1$이므로 y좌표가 자연수이려면 x좌표가 5의 배수이어야 한다.

$x = 5n$(n은 자연수)으로 놓으면 $y = n + 1$이므로

$a_n = 5n$, $b_n = n + 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{5}$ 답 ①

0208 $P_n\left(n, \frac{1}{n+1}\right)$이므로 $\overline{OR_n} = n$, $\overline{OQ_n} = \frac{1}{n+1}$

$\therefore \square P_nQ_nOR_n = \frac{n}{n+1}$ ➊

$P_{n+1}\left(n+1, \frac{1}{n+2}\right)$이므로 $\overline{OR_{n+1}} = n+1$, $\overline{OQ_{n+1}} = \frac{1}{n+2}$

$\therefore \square P_{n+1}Q_{n+1}OR_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ ➋

따라서 $S_n = \left|\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$이므로 ➌

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} \quad \cdots ❹$$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준표

❶ $\square P_nQ_nOR_n$의 넓이를 구할 수 있다.	20%
❷ $\square P_{n+1}Q_{n+1}OR_{n+1}$의 넓이를 구할 수 있다.	20%
❸ S_n을 구할 수 있다.	20%
❹ 주어진 급수의 합을 구할 수 있다.	40%

0209 $n|x|+(n+1)|y|=1$에서

(i) $x\geq0$, $y\geq0$일 때,

$nx+(n+1)y=1 \quad \therefore y=-\frac{n}{n+1}x+\frac{1}{n+1}$

(ii) $x\geq0$, $y<0$일 때,

$nx-(n+1)y=1 \quad \therefore y=\frac{n}{n+1}x-\frac{1}{n+1}$

(iii) $x<0$, $y\geq0$일 때,

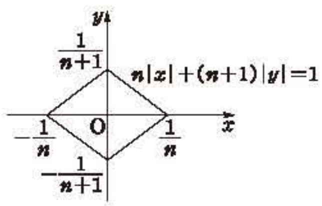
$-nx+(n+1)y=1 \quad \therefore y=\frac{n}{n+1}x+\frac{1}{n+1}$

(iv) $x<0$, $y<0$일 때,

$-nx-(n+1)y=1 \quad \therefore y=-\frac{n}{n+1}x-\frac{1}{n+1}$

이상에서

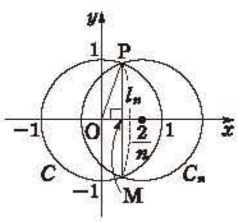
$n|x|+(n+1)|y|=1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$S_n = 4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \frac{2}{n(n+1)}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2$$

답 2

0210 오른쪽 그림에서 $\triangle POM$은 직각삼각형이고 $\overline{OP}=1$,



$\overline{OM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}=\frac{1}{n}$이므로

$$\overline{PM}=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} \quad \cdots ❶$$

따라서 $l_n=2\overline{PM}=2\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$이므로

$$(nl_n)^2=n^2{l_n}^2=n^2\cdot4\cdot\frac{n^2-1}{n^2}=4(n^2-1) \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(nl_n)^2}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4(n^2-1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{16} \quad \cdots ❸$$

따라서 $p=16$, $q=3$이므로 $\quad p+q=19 \quad \cdots ❹$

답 19

채점 기준표

❶ $\overline{PM}$의 길이를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ $(nl_n)^2$을 구할 수 있다.	20%
❸ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(nl_n)^2}$의 값을 구할 수 있다.	50%
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 09 등비급수의 합 (본책 31쪽)

(i) 주어진 급수를 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a\neq0)$ 꼴로 나타낸다.

(ii) $-1<r<1$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 합이 $\frac{a}{1-r}$임을 이용한다.

0211 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}-3^n}{12^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-1}\cdot4^n}{12\cdot12^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{12\cdot12^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$=\frac{1}{24}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{12}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{1}{48}-\frac{1}{36}=-\frac{1}{144}$$

답 ②

0212 $$\frac{a_1}{9}+\frac{a_2}{9^2}+\frac{a_3}{9^3}+\frac{a_4}{9^4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{9^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2\cdot9^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^n$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{9}}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)}$$
$$=\frac{3}{16}-\frac{1}{20}=\frac{11}{80}$$

답 ①

0213 $f(x)=x^n$이라 하면 $a_n=f\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\frac{-\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{2}{5}$$

답 $-\frac{2}{5}$

0214 $x^n=(-5)^{n-1}$에서

(i) $n=2k(k=1, 2, 3, \cdots)$일 때

$x^n=(-5)^{2k-1}=-5^{2k-1}<0$

이때 n은 짝수이므로 실근의 개수는 0이다.

$\therefore a_{2k}=0(k=1, 2, 3, \cdots)$

(ii) $n=2k+1(k=1, 2, 3, \cdots)$일 때

$x^n=(-5)^{2k}=5^{2k}>0$

이때 n은 홀수이므로 실근의 개수는 1이다.

$\therefore a_{2k+1}=1(k=1, 2, 3, \cdots)$

(i), (ii)에서 $a_n=\begin{cases}0 & (n=2k) \\ 1 & (n=2k+1)\end{cases}(k=1, 2, 3, \cdots)$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\frac{a_4}{3^4}+\frac{a_5}{3^5}+\cdots$$
$$=\frac{0}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{0}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\cdots$$
$$=\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^7}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{24}$$

답 ①

SSEN 특강

실수 a에 대하여

$x^n=a$(n은 2 이상의 정수)

를 만족시키는 x의 값 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

유형 10 합이 주어진 등비급수

본책 37쪽

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\alpha$ (α는 실수)이면 ➡ $\frac{a}{1-r}=\alpha$

0215 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(-1<r<1)$라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=-2$에서 $\frac{a}{1-r}=-2$ ...... ㉠

수열 $\{a_n^2\}$의 첫째항은 a^2, 공비는 r^2이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=12$에서

$\frac{a^2}{1-r^2}=12$ $\therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)}=12$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $-2\cdot\frac{a}{1+r}=12$

$\therefore \frac{a}{1+r}=-6$ ...... ㉢

㉠÷㉢을 하면 $\frac{1+r}{1-r}=\frac{1}{3}$

$3(1+r)=1-r$, $4r=-2$ $\therefore r=-\frac{1}{2}$

$r=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{a}{1+\frac{1}{2}}=-2$ $\therefore a=-3$

따라서 수열 $\{a_n^3\}$은 첫째항이 $a^3=-27$, 공비가 $r^3=-\frac{1}{8}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3=\frac{-27}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)}=-24$$

답 ⑤

0216 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{2}x$인 등비급수이므로

$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}x\right)}=4$, $1=4\left(1+\frac{1}{2}x\right)$

$2x=-3$ $\therefore x=-\frac{3}{2}$

답 $-\frac{3}{2}$

0217 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a_1}{1-r}=8$ ...... ㉠

$a_1-b_1=1$이므로 $b_1=a_1-1$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{b_1}{1-r}=\frac{a_1-1}{1-r}=6$ ...... ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{a_1}{a_1-1}=\frac{4}{3}$

$3a_1=4(a_1-1)$ $\therefore a_1=4$

$a_1=4$를 ㉠, ㉡에 대입하면

$b_1=3$, $r=\frac{1}{2}$

따라서 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 $a_1b_1=4\cdot3=12$, 공비가 $r^2=\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=\frac{12}{1-\frac{1}{4}}=16$$

답 ⑤

0218 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(-x)^n}{3^n}=0+2\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2+0+2\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^4+\cdots$

따라서 주어진 급수는 첫째항이 $2\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2$, 공비가 $\left(\frac{x}{3}\right)^2$인 등비급수이므로

$\frac{\frac{2}{9}x^2}{1-\frac{x^2}{9}}=\frac{8}{5}$, $\frac{2x^2}{9-x^2}=\frac{8}{5}$, $10x^2=72-8x^2$

$18x^2=72$, $x^2=4$ $\therefore x=2$ $(\because x>0)$

답 2

0219 $a_2=ar$, $a_3=ar^2$, $a_5=ar^4$이므로 $2ar^2=ar+ar^4$

$ar\neq0$이므로 양변을 ar로 나누면

$2r=1+r^3$, $r^3-2r+1=0$

$(r-1)(r^2+r-1)=0$

$\therefore r=1$ 또는 $r=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이면서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하려면

$0<r<1$이어야 하므로 $\quad r=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ··· ❶

$r=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$를 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{a}{1-r}=4+2\sqrt{5}$에 대입하여 정리하면

$$a=(4+2\sqrt{5})(1-r)$$
$$=(4+2\sqrt{5})\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}=1+\sqrt{5}$$ ··· ❷

$$\therefore ar=(1+\sqrt{5})\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=2$$ ··· ❸

답 2

채점 기준표

❶ r의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ar의 값을 구할 수 있다.	20%

SSEN 특강

등차중항과 등비중항

세 수 a, b, c가 이 순서대로

① 등차수열을 이룬다. ➡ b는 a와 c의 등차중항이다. ➡ $2b=a+c$

② 등비수열을 이룬다. ➡ b는 a와 c의 등비중항이다. ➡ $b^2=ac$

유형 11, 12 등비급수의 수렴 조건

본책 37, 38쪽

① 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하려면 ➡ $-1<r<1$

② 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$이 수렴하려면 ➡ $a=0$ 또는 $-1<r<1$

0220 주어진 급수의 첫째항과 공비가 $\dfrac{3x-1}{4}$이므로 급수가 수렴하려면

$$-1<\frac{3x-1}{4}<1,\qquad -4<3x-1<4$$
$$-3<3x<5\qquad \therefore -1<x<\frac{5}{3}$$

따라서 구하는 정수 x는 0, 1의 2개이다. 답 ②

0221 주어진 급수는 첫째항이 $1-x$, 공비가 $(1-x)^2$이므로 급수가 수렴하려면 $\quad -1<(1-x)^2<1$

그런데 실수 x에 대하여 $(1-x)^2\ge0$이므로

$$(1-x)^2<1,\qquad x^2-2x+1<1$$
$$x^2-2x<0,\qquad x(x-2)<0$$
$$\therefore 0<x<2$$

답 ③

0222 주어진 급수는 첫째항이 $(x-3)^2$, 공비가 $\dfrac{x-1}{2}$이므로 급수가 수렴하려면

$$(x-3)^2=0 \text{ 또는 } -1<\frac{x-1}{2}<1$$

(i) $(x-3)^2=0$, 즉 $x=3$일 때

$$S=0$$

(ii) $-1<\dfrac{x-1}{2}<1$, 즉 $-1<x<3$일 때

$$S=\frac{(x-3)^2}{1-\frac{x-1}{2}}=\frac{2(x-3)^2}{-(x-3)}=-2x+6$$

이때 $-1<x<3$에서 $\quad -6<-2x<2$

$0<-2x+6<8 \qquad \therefore 0<S<8$

(i), (ii)에서 $\quad 0\le S<8$

따라서 구하는 S의 최솟값은 0이다. 답 0

0223 (i) 수열 $\{(x-1)(3x-1)^n\}$의 첫째항이 $(x-1)(3x-1)$, 공비가 $3x-1$이므로 수렴하려면

$$(x-1)(3x-1)=0 \text{ 또는 } -1<3x-1\le1$$
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } 0<x\le\frac{2}{3}$$ ··· ❶

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-x+1)^n$의 공비가 x^2-x+1이므로 수렴하려면

$$-1<x^2-x+1<1$$

$x^2-x+1>-1$에서 $\quad x^2-x+2>0$

이때 $x^2-x+2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$x^2-x+1<1$에서 $\quad x^2-x<0,\quad x(x-1)<0$

$\therefore 0<x<1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-x+1)^n$이 수렴하려면 $\quad 0<x<1$ ··· ❷

(i), (ii)에서 $\quad 0<x\le\dfrac{2}{3}$ ··· ❸

답 $0<x\le\dfrac{2}{3}$

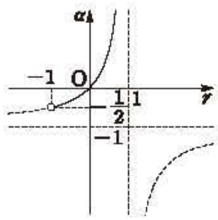
채점 기준표

❶ 주어진 수열이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❷ 주어진 급수가 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

0224 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 α로 수렴하므로 $-1<r<1$이고

$$\alpha=\frac{r}{1-r}=\frac{-(1-r)+1}{1-r}=-1+\frac{1}{1-r}$$

$-1<r<1$에서 $\alpha=-1+\dfrac{1}{1-r}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$\alpha>-\frac{1}{2}$$

따라서 α의 값이 될 수 없는 것은 ①이다. 답 ①

0225 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로

$-1<r<1$ ······ ㉠

① $\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(r^2)^n$은 공비가 r^2인 등비급수이므로 ㉠에서

$0\le r^2<1$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

② $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{3}\right)^n$은 공비가 $\frac{r-1}{3}$인 등비급수이므로 ㉠에서

$-2<r-1<0 \quad \therefore -\frac{2}{3}<\frac{r-1}{3}<0$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r+1}{2}\right)^n$은 공비가 $\frac{r+1}{2}$인 등비급수이므로 ㉠에서

$0<r+1<2 \quad \therefore 0<\frac{r+1}{2}<1$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{4}-1\right)^n$은 공비가 $\frac{r}{4}-1$인 등비급수이므로 ㉠에서

$-\frac{1}{4}<\frac{r}{4}<\frac{1}{4} \quad \therefore -\frac{5}{4}<\frac{r}{4}-1<-\frac{3}{4}$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}r^n$도 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-r)^n}{2}$은 공비가 $-r$인 등비급수이므로 ㉠에서 $-1<-r<1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-r)^n}{2}$에서 주어진 급수는 수렴한다.

답 ④

0226 $\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}$이 수렴하므로 $-1<a<1$ …… ㉠

또 $\sum_{n=1}^{\infty}b^n$이 수렴하므로 $-1<b<1$ …… ㉡

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(ab)^{n-1}$은 공비가 ab인 등비급수이고, ㉠, ㉡에서

$-1<ab<1$

이므로 주어진 급수는 수렴한다.

ㄴ. [반례] $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}$은 공비가 $\frac{a}{b}$인 등비급수이고, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$

이면 $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}>1$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a+b)^{n-1}$은 공비가 $a+b$인 등비급수이고, ㉠, ㉡에서

$-2<a+b<2$

이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}(|a|-|b|)^{n-1}$은 공비가 $|a|-|b|$인 등비급수이고,

㉠, ㉡에서 $0\le|a|<1$, $0\le|b|<1$

$\therefore -1<|a|-|b|<1$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

SSEN 특강

부등식의 사칙계산

실수 x, y에 대하여 $0<a<x<b$, $0<c<y<d$일 때

① $a+c<x+y<b+d$ ② $a-d<x-y<b-c$

③ $ac<xy<bd$ ④ $\frac{a}{d}<\frac{x}{y}<\frac{b}{c}$

0227 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 각각 a, b, 공비를 각각 r_1, r_2라 하면 $a_n=ar_1^{n-1}$, $b_n=br_2^{n-1}$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $-1<r_1<1$, $-1<r_2<1$

$\therefore -1<r_1r_2<1$

이때 $a_nb_n=ab(r_1r_2)^{n-1}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 수렴한다.

ㄴ. [반례] $a_n=-2^n$, $b_n=2^n$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산하지만

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3=\sum_{n=1}^{\infty}a^3(r_1^3)^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^3=\sum_{n=1}^{\infty}b^3(r_2^3)^{n-1}$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^3$이 수렴하므로

$-1<r_1^3<1$, $-1<r_2^3<1$

$\therefore -1<r_1<1$, $-1<r_2<1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$도 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

유형 13 귀납적으로 정의된 수열의 급수 본책 39쪽

다음과 같은 여러 가지 수열의 귀납적 정의를 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

① $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴 ➡ $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

② $a_{n+1}=a_nf(n)$ 꼴 ➡ $a_n=a_1f(1)f(2)\cdots f(n-1)$

③ $a_{n+1}=pa_n+q$ $(p\ne1,\ pq\ne0)$ 꼴 ➡ $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$로 변형

④ $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ $(p+q+r=0,\ pqr\ne0)$ 꼴

➡ $a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{r}{p}(a_{n+1}-a_n)$으로 변형

0228 $2a_{n+1}=a_n+4$에서 $a_{n+1}-4=\frac{1}{2}(a_n-4)$

따라서 수열 $\{a_n-4\}$는 첫째항이 $a_1-4=1$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 $a_n-4=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(4-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{-1}{1-\frac{1}{2}}=-2$

답 ①

0229 $a_{n+1}=a_n+n+1$의 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=a_1+1+1 \\ & a_3=a_2+2+1 \\ & a_4=a_3+3+1 \\ & \vdots \\ +) & a_n=a_{n-1}+n-1+1 \\ \hline & a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k+(n-1) \end{array}$$

$=1+\frac{n(n-1)}{2}+n-1$

$=\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ⋯➊

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$ ⋯ ②

답 2

채점 기준표

① a_n을 구할 수 있다.	50%
② 주어진 급수의 합을 구할 수 있다.	50%

0230 $3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0$에서

$3(a_{n+2}-a_{n+1})=2(a_{n+1}-a_n)$

$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)$

$a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면

$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n,\ b_1=a_2-a_1=a_2-1$

즉 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 a_2-1, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$b_n=(a_2-1)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, 즉 $a_{n+1}=a_n+(a_2-1)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

위의 식의 양변에 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+(a_2-1)$$
$$a_3=a_2+(a_2-1)\cdot\frac{2}{3}$$
$$a_4=a_3+(a_2-1)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$\vdots$$
$$+\underline{)\ a_n=a_{n-1}+(a_2-1)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}$$
$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_2-1)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$
$$=1+\frac{(a_2-1)\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$=1+3(a_2-1)\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\quad\cdots\cdots㉠$$

그런데 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

즉 $\lim_{n\to\infty}\left[1+3(a_2-1)\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\right]=0$에서

$1+3(a_2-1)=0\quad \therefore a_2=\frac{2}{3}$

$a_2=\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하여 정리하면 $a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$$

답 ④

0231 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$에서 $\quad a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

$$\therefore b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}$$
$$=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\frac{1}{a_2}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\because \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+2}}=0\right)$$

답 ②

참고 $a_1=2,\ a_2=3$에서 $\quad a_3=5,\ a_4=8,\ a_5=13,\ \cdots$

즉 $a_{n+1}>a_n$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$$

유형 14 S_n과 a_n 사이의 관계를 이용하는 급수

본책 39쪽

$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

0232 (i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=2$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\frac{n(3n+1)}{2}-\frac{(n-1)(3n-2)}{2}$$
$$=\frac{3n^2+n-3n^2+5n-2}{2}=3n-1\quad\cdots\cdots㉠$$

이때 $a_1=2$는 $n=1$을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$a_n=3n-1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

답 ①

0233 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

(i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=3$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$
\begin{aligned}
a_n&=S_n-S_{n-1}\\
&=12\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}-12\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}\\
&=-9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+12\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\\
&=3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \qquad \cdots\cdots ㉠
\end{aligned}
$$

이때 $a_1=3$은 $n=1$을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$$a_n=3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots$$

$$=\underbrace{3+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6+\cdots}_{\text{첫째항이 3, 공비가 }\left(\frac{3}{4}\right)^2\text{인 등비급수}}$$

$$=\frac{3}{1-\frac{9}{16}}=\frac{48}{7}$$

답 ②

0234 $\log_3(S_n+1)=n$에서 $\quad S_n+1=3^n$

$\therefore\ S_n=3^n-1$

(i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=2$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$
\begin{aligned}
a_n&=S_n-S_{n-1}=3^n-1-(3^{n-1}-1)\\
&=2\cdot3^{n-1} \qquad \cdots\cdots ㉠
\end{aligned}
$$

이때 $a_1=2$는 $n=1$을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2\cdot3^{n-1}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot3^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

유형 15 등비급수의 활용; 좌표

본책 41쪽

한없이 움직이는 점이 가까워지는 점의 x좌표, y좌표를 각각 등비급수를 이용하여 나타낸다.

0235 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$x=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots$$

$$=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^4-\left(\frac{3}{4}\right)^6+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{9}{16}\right)}=\frac{16}{25}$$

$$y=\overline{P_1P_2}-\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}-\overline{P_7P_8}+\cdots$$

$$=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^5-\left(\frac{3}{4}\right)^7+\cdots$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{9}{16}\right)}=\frac{12}{25}$$

따라서 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{16}{25},\ \frac{12}{25}\right)$이다.

답 $\left(\frac{16}{25},\ \frac{12}{25}\right)$

0236 $x=\overline{OP_1}\cos30°-\overline{P_1P_2}\cos30°$

$\quad+\overline{P_2P_3}\cos30°-\overline{P_3P_4}\cos30°+\cdots$

$$=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ ❶

$y=\overline{OP_1}\sin30°+\overline{P_1P_2}\sin30°$

$\quad+\overline{P_2P_3}\sin30°+\overline{P_3P_4}\sin30°+\cdots$

$$=1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$ ❷

$$\therefore\ xy=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ ❸

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

채점 기준표

❶ x의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ y의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ xy의 값을 구할 수 있다.	20%

0237 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$a=\overline{OP_1}\cos45°+\overline{P_1P_2}\cos45°$

$\quad+\overline{P_2P_3}\cos45°+\overline{P_3P_4}\cos45°+\cdots$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$$

$$=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$$

$b=\overline{OP_1}\sin45°-\overline{P_1P_2}\sin45°$

$\quad+\overline{P_2P_3}\sin45°-\overline{P_3P_4}\sin45°+\cdots$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$$

$$=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

즉 점 P_n은 점 $\left(2\sqrt{2},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$에 한없이 가까워지므로 점 $\left(2\sqrt{2},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$가 부등식 $x^2+y^2\leq k$가 나타내는 영역에 속하려면

$$(2\sqrt{2})^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2\leq k$$

$$\therefore\ \frac{80}{9}\leq k$$

따라서 k의 최솟값은 $\frac{80}{9}$이다.

답 $\frac{80}{9}$

02 급수

0238 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 y좌표는

$$\overline{OP_1}-\overline{P_1P_2}\cos 60^\circ-\overline{P_2P_3}\cos 60^\circ+\overline{P_3P_4}-\overline{P_4P_5}\cos 60^\circ-\overline{P_5P_6}\cos 60^\circ+\overline{P_6P_7}-\cdots$$

$$=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^6-\cdots$$

$$=\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots\right\}-\frac{1}{3}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots\right\}-\frac{2}{9}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots\right\}$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\right)\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots\right\}$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{8}{27}}=\frac{12}{19}$$

답 $\frac{12}{19}$

유형 16~20 등비급수의 활용

본책 42~43쪽

(i) 도형의 길이, 넓이 등이 줄어들거나 늘어나는 일정한 규칙을 찾는다.
(ii) (i)에서 구한 규칙이 등비급수이면 첫째항 a와 공비 r를 구한다.
(iii) 등비급수의 합이 $\frac{a}{1-r}$ $(|r|<1)$임을 이용한다.

0239 추가 멈출 때까지 움직인 거리는

$$20+\frac{3}{4}\cdot 20+\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot 20+\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot 20+\cdots$$

$$=\frac{20}{1-\frac{3}{4}}=80(\text{cm})$$

답 ①

0240 공이 정지할 때까지 움직인 거리는

$$30+2\cdot\frac{3}{5}\cdot 30+2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot 30+2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot 30+\cdots$$

$$=30+\frac{36}{1-\frac{3}{5}}=30+90=120(\text{m})$$

답 120 m

0241 $l_1=24-24\cdot\frac{1}{4}+1=19$, $l_{n+1}=\frac{3}{4}l_n+1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

이므로 $\quad l_{n+1}-4=\frac{3}{4}(l_n-4)$

따라서 수열 $\{l_n-4\}$는 첫째항이 $l_1-4=15$, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(l_n-4)=\frac{15}{1-\frac{3}{4}}=60$$

답 60

0242 $\angle XOY=30^\circ$이므로

$$\overline{P_0P_1}=\overline{OP_0}\sin 30^\circ=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\angle OP_0P_1=60^\circ$이므로

$$\overline{P_1P_2}=\overline{P_0P_1}\sin 60^\circ=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle P_2P_1P_3=60^\circ$이므로

$$\overline{P_2P_3}=\overline{P_1P_2}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$\vdots$

$$\therefore \overline{P_0P_1}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\cdots=1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2-\sqrt{3}}$$

$$=2(2+\sqrt{3})$$

답 ④

0243 $\overline{A_1A_2}=2$이므로 $\quad l_1=\pi$ ··· ❶

선분 A_nA_{n+1}을 $1:2$로 내분하는 점이 A_{n+2}이므로

$$\overline{A_{n+1}A_{n+2}}=\frac{2}{3}\overline{A_nA_{n+1}}$$

반원의 호의 길이는 반지름의 길이에 정비례하므로

$$l_{n+1}=\frac{2}{3}l_n$$ ··· ❷

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $l_1=\pi$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\pi}{1-\frac{2}{3}}=3\pi$$ ··· ❸

답 3π

채점 기준표

❶ l_1의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ 수열 $\{l_n\}$을 귀납적으로 정의할 수 있다.	50%
❸ $\sum_{n=1}^{\infty}l_n$의 값을 구할 수 있다.	30%

0244 $\angle OP_1P_2=45^\circ$이므로

$$\overline{P_1P_2}=\overline{OP_1}\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\overline{OP_2}=\overline{P_1P_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$\overline{P_2P_3}=\overline{OP_2}\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$\overline{OP_3}=\overline{P_2P_3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$이므로

$$\overline{P_3P_4}=\overline{OP_3}\cos 45^\circ=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

$\vdots$

$$\therefore \overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\cdots$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

$$=1+\sqrt{2}$$

답 $1+\sqrt{2}$

0245 $\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\cdots=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=4$

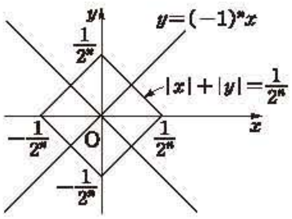
정오각형 ABCDE의 한 변의 길이가 1이므로 점은 꼭짓점 E에 수렴한다.

이때 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\cdots+\left(\frac{4}{5}\right)^n<4$$

이므로 무한개의 점이 찍히는 변은 $\overline{\mathrm{DE}}$이다. 답 ④

0246 도형 $|x|+|y|=\frac{1}{2^n}$과 직선 $y=(-1)^n x$는 오른쪽 그림과 같다.



$n=1$일 때, 도형 $|x|+|y|=\frac{1}{2}$과 직선 $y=-x$의 교점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$n=2$일 때, 도형 $|x|+|y|=\frac{1}{2^2}$과 직선 $y=x$의 교점의 좌표는

$\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{A_2B_2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

같은 방법으로 하면

$$\overline{\mathrm{A_3B_3}}=\frac{\sqrt{2}}{8},\ \overline{\mathrm{A_4B_4}}=\frac{\sqrt{2}}{16},\ \cdots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\overline{\mathrm{A_1B_1}}+\overline{\mathrm{A_2B_2}}+\overline{\mathrm{A_3B_3}}+\cdots$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

답 ②

0247 원 C_n의 둘레의 길이 l_n에 대하여

$$l_1=2\pi\cdot 1=2\pi,\ l_2=2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi,\ l_3=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\pi,\ \cdots$$

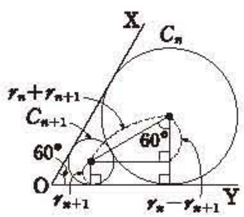
이므로

$$l_n=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\sum_{n=1}^{\infty}2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2\pi}{1-\frac{1}{2}}=4\pi$$

답 4π

0248 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 오른쪽 그림에서



$$(r_n+r_{n+1}):(r_n-r_{n+1})=2:1$$
$$r_n+r_{n+1}=2r_n-2r_{n+1}$$
$$\therefore r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n \quad \cdots ❶$$

따라서 수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 $r_1=1$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=2\pi r_1+2\pi r_2+2\pi r_3+\cdots$$
$$=2\pi+2\pi\cdot\frac{1}{3}+2\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots$$
$$=\frac{2\pi}{1-\frac{1}{3}}=3\pi \quad \cdots ❷$$

답 3π

채점 기준표	
❶ 수열 $\{r_n\}$을 귀납적으로 정의할 수 있다.	50%
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}l_n$의 값을 구할 수 있다.	50%

0249 색칠한 정사각형의 넓이를 큰 순서대로 $a_1, a_2, a_3, \cdots$이라 하면

$$a_1=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\ a_2=a_1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4},\ a_3=a_2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2,\ \cdots$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0250 정사각형 ABCD의 넓이는 $2\cdot 2=4$이므로

$$S_1=4\cdot\frac{1}{2}=2,\ S_2=S_1\cdot\frac{1}{2}=1,\ S_3=S_2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ \cdots$$

$$\therefore S_n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

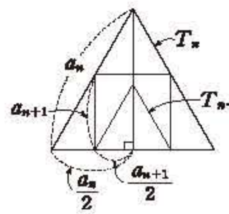
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$$

답 4

0251 정삼각형 T_n의 한 변의 길이를 a_n이라 하면

$$a_1=2,\ S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3} \quad \cdots ❶$$

오른쪽 그림에서



$$\left(\frac{a_n}{2}-\frac{a_{n+1}}{2}\right):a_{n+1}=1:\sqrt{3}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}a_n-\frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1}=a_{n+1}$$
$$(2+\sqrt{3})a_{n+1}=\sqrt{3}a_n$$
$$\therefore a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}a_n=(2\sqrt{3}-3)a_n \quad \cdots ❷$$

$a_n:a_{n+1}=1:(2\sqrt{3}-3)$이므로 S_n과 S_{n+1}의 비는 $1:(2\sqrt{3}-3)^2$, 즉 $1:(21-12\sqrt{3})$이다.

$$\therefore S_{n+1}=(21-12\sqrt{3})S_n \quad \cdots ❸$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1=\sqrt{3}$, 공비가 $21-12\sqrt{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\sqrt{3}}{1-(21-12\sqrt{3})}=\frac{9+5\sqrt{3}}{8} \quad \cdots ❹$$

답 $\frac{9+5\sqrt{3}}{8}$

채점 기준표

❶ S_1의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의할 수 있다.	30%
❸ 수열 $\{S_n\}$을 귀납적으로 정의할 수 있다.	30%
❹ $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구할 수 있다.	20%

0252 $S_1=3^2+4\cdot 1^2$, $S_2=3^2+4\cdot 1^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$,

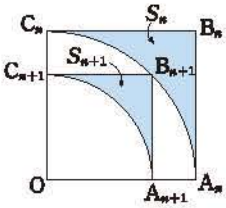
$S_3=3^2+4\cdot 1^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4$, $\cdots$

$$\therefore S_n=3^2+\sum_{k=1}^{n}4\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=3^2+\frac{4}{1-\frac{1}{9}}=9+\frac{9}{2}=\frac{27}{2}$$

답 ①

0253 오른쪽 그림과 같이 □$OA_nB_nC_n$에 내접하는 사분원을 제외하고 남은 부분의 넓이를 S_n이라 하면



$$S_1=2^2-\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2=4-\pi$$

이때 $\overline{OA_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OB_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OA_n}$이므로

$$S_{n+1}=\overline{OA_{n+1}}^2-\frac{1}{4}\pi\cdot\overline{OA_{n+1}}^2$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OA_n}\right)^2-\frac{1}{4}\pi\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OA_n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overline{OA_n}^2-\frac{1}{4}\pi\cdot\overline{OA_n}^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}S_n$$

즉 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1=4-\pi$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{4-\pi}{1-\frac{1}{2}}=8-2\pi$$

따라서 $a=8$, $b=-2$이므로 $\quad a+b=6$

답 ③

0254 처음 생산된 비닐의 양을 A, n번째 수거하여 재생산된 비닐의 양을 a_n이라 하면

$$a_1=A\cdot\frac{75}{100}\cdot\frac{80}{100}=\frac{3}{5}A,$$
$$a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{5}A$, 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{3}{5}A}{1-\frac{3}{5}}=\frac{3}{2}A$$

$$\therefore (\text{재활용률})=\frac{\frac{3}{2}A}{A}\cdot 100=150(\%)$$

답 ⑤

0255 A, B의 작업량은 다음과 같다.

A의 작업량	B의 작업량	남은 작업량
$\frac{1}{3}K$		$\frac{2}{3}K$
	$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}K$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2K$
$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2K$		$\left(\frac{2}{3}\right)^3K$
	$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3K$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4K$
⋮	⋮	⋮

$$(\text{A의 총 작업량})=\frac{1}{3}K+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2K+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4K+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{3}K}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{5}K$$

$$(\text{B의 총 작업량})=K-\frac{3}{5}K=\frac{2}{5}K$$

$$\therefore \frac{(\text{A의 총 작업량})}{(\text{B의 총 작업량})}=\frac{\frac{3}{5}K}{\frac{2}{5}K}=\frac{3}{2}$$

따라서 A가 받는 임금은 B가 받는 임금의 $\frac{3}{2}$배이다.

답 ②

0256 $a_1=15\cdot\frac{2}{3}+2=12$,

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$$a_{n+1}-6=\frac{2}{3}(a_n-6)$$

따라서 수열 $\{a_n-6\}$은 첫째항이 $a_1-6=6$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로 $\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-6)=\frac{6}{1-\frac{2}{3}}=18$

답 ⑤

0257 약의 매회 복용량을 a mg이라 하면 6시간이 지날 때마다 체내에 남아 있는 약의 양은 반으로 줄어들고 24시간마다 a mg을 복용하므로 복용 24시간 후의 체내에 남아 있는 약의 양은

$$a+\frac{a}{2^4}=a+\frac{a}{16}$$

48시간 후의 체내에 남아 있는 약의 양은

$$a+\frac{1}{2^4}\left(a+\frac{a}{16}\right)=a+\frac{a}{16}+\frac{a}{16^2}$$

따라서 $24n$시간 후의 체내에 남아 있는 약의 양은

$$a+\frac{a}{16}+\frac{a}{16^2}+\cdots+\frac{a}{16^n}=a+\sum_{k=1}^{n}a\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^k$$

규칙적으로 장기간 복용했을 때 체내에 남아 있는 약의 양은

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a+\sum_{k=1}^{n}a\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^k\right\}=a+\frac{\frac{a}{16}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{16}{15}a$$

즉 $\frac{16}{15}a\le 160$이어야 하므로 $\quad a\le 150$

따라서 매회 복용 가능한 약의 최대량은 150 mg이다.

답 150 mg

유형 21 순환소수와 등비급수 (본책 44쪽)

① 주어진 순환소수를 분수로 나타낸다.
② 첫째항과 공비를 구하여 등비급수의 합을 구한다.

0258 $0.2\dot{6}=\frac{26-2}{90}=\frac{24}{90}$, $0.0\dot{3}=\frac{3}{90}$이므로 공비를 r라 하면

$\frac{24}{90}r^3=\frac{3}{90}$, $\quad r^3=\frac{1}{8}$ $\quad \therefore r=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{24}{90}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{48}{90}=0.5\dot{3}$$

답 ④

0259 $0.\dot{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, $0.\dot{1}2\dot{6}=\frac{126}{999}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{126}{999}$$

$$\therefore a_1=\frac{126}{999}\cdot\frac{1}{3}=\frac{42}{999}=0.\dot{0}4\dot{2}$$

답 ③

0260 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $0.\dot{x}=\frac{x}{9}$, 공비가 $0.\dot{0}\dot{x}=\frac{x}{99}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{x}{9}}{1-\frac{x}{99}}=\frac{11x}{99-x}$$ ➊

따라서 $\frac{11x}{99-x}=1.1=\frac{11}{10}$이므로

$10x=99-x$, $\quad 11x=99$

$\therefore x=9$ ➋

답 9

채점 기준표

➊	$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$을 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
➋	x의 값을 구할 수 있다.	50%

유형 22 자릿수와 등비급수 (본책 44쪽)

수열 $\{a_n\}$에서 a_1, a_2, a_3, …을 차례대로 구하여 주어진 등비급수의 첫째항과 공비를 찾는다.

0261 2^n+7에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하면

9, 11, 15, 23, 39, 71, …

이므로

$a_1=4$, $a_2=1$, $a_3=0$, $a_4=3$,
$a_5=4$, $a_6=1$, $a_7=0$, $a_8=3$, …

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{0}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\frac{4}{10^5}+\cdots$$
$$=0.4+0.01+0.0003+0.00004+\cdots$$
$$=0.\dot{4}10\dot{3}$$

답 ③

0262 $\frac{8}{33}=\frac{24}{99}=0.\dot{2}\dot{4}$이므로

$a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=2$, $a_4=4$, …

$$\therefore \frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}+\frac{a_3}{7^3}+\frac{a_4}{7^4}+\frac{a_5}{7^5}+\frac{a_6}{7^6}+\cdots$$
$$=\frac{2}{7}+\frac{4}{7^2}+\frac{2}{7^3}+\frac{4}{7^4}+\frac{2}{7^5}+\frac{4}{7^6}+\cdots$$
$$=\left(\frac{2}{7}+\frac{2}{7^3}+\frac{2}{7^5}+\cdots\right)+\left(\frac{4}{7^2}+\frac{4}{7^4}+\frac{4}{7^6}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{1}{49}}+\frac{\frac{4}{49}}{1-\frac{1}{49}}$$
$$=\frac{7}{24}+\frac{1}{12}=\frac{3}{8}$$

따라서 $p=8$, $q=3$이므로 $\quad p+q=11$

답 ②

0263 전략 부분분수를 이용하여 급수의 합을 구한다.

풀이 [n단계]에 놓인 전체 바둑돌의 개수는 $(2n)^2$이므로

$a_n=(2n)^2-2\cdot 2n=4n^2-4n=4n(n-1)$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4n(n-1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}$$

답 ②

다른 풀이 [1단계], [2단계], [3단계], …, [n단계]에 놓인 검은색 바둑돌의 개수는 차례대로

0, $4\cdot 2$, $4(2+4)$, …, $4\{2+4+\cdots+2(n-1)\}$

이므로

$$a_n=4\{2+4+\cdots+2(n-1)\}$$
$$=8\{1+2+\cdots+(n-1)\}$$
$$=8\sum_{k=1}^{n-1}k=8\cdot\frac{n(n-1)}{2}=4n(n-1)$$

0264 전략 두 조건 (가), (나)를 이용하여 a_n의 범위를 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $\quad a_n-b_n<\frac{3}{2}$

$\therefore a_n<b_n+\frac{3}{2}$ ······㉠

조건 (나)에서 $\quad a_n>\frac{3n^2-2}{2n^2+1}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\quad \frac{3n^2-2}{2n^2+1}<a_n<b_n+\frac{3}{2}$ ······㉢

한편 조건 (다)에 의하여 $\quad \lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$

또 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2}{2n^2+1}=\frac{3}{2}$이므로 ㉢에서 $\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

0265 전략 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{an^2+216}{9n^2-6n-8}=b$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an^2+216}{9n^2-6n-8}=0$$

이때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an^2+216}{9n^2-6n-8}=\lim_{n\to\infty} \frac{a+\frac{216}{n^2}}{9-\frac{6}{n}-\frac{8}{n^2}}=\frac{a}{9}$$

이므로 $\frac{a}{9}=0$

$\therefore a=0$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \frac{216}{9n^2-6n-8}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty} \frac{216}{(3n-4)(3n+2)}=\sum_{n=2}^{\infty} 216\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3n-4}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} 36\left(\frac{1}{3k-4}-\frac{1}{3k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} 36\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{14}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-7}-\frac{1}{3n-1}\right)+\left(\frac{1}{3n-4}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty} 36\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=36\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=\frac{126}{5}$$

$\therefore b=\frac{126}{5}$

$\therefore 5b-a=126$

답 ③

0266 전략 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. [반례] $a_n=0$, $b_n=-1$이면 $a_n>b_n$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=0$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다.

ㄴ. $\alpha-\beta=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)$

$=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+\cdots>0$

$\therefore \alpha>\beta$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0267 전략 두 점 P_n, Q_n의 좌표를 각각 구한다.

풀이 $P_n\left(\frac{2n-4}{n+2},\ 0\right)$, $Q_n\left(\frac{2n+4}{n-2},\ 0\right)$이므로

$$\overline{P_nQ_n}=\left|\frac{2n+4}{n-2}-\frac{2n-4}{n+2}\right|=\frac{16n}{(n-2)(n+2)}\ (\because n>2)$$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\overline{P_nQ_n}}{n}$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty} \frac{16}{(n-2)(n+2)}$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty} 4\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} 4\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} 4\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty} 4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

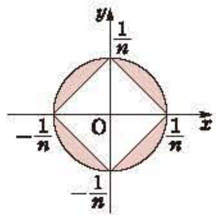
$$=\frac{25}{3}$$

답 $\frac{25}{3}$

0268 전략 주어진 연립부등식의 영역을 좌표평면에 나타내고, 넓이 S_n을 구한다.

풀이 부등식 $x^2+y^2\le\left(\frac{1}{n}\right)^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{n}\right)^2$의 내부(경계선 포함)이고 부등식 $|x|+|y|\ge\frac{1}{n}$의 영역은 방정식 $|x|+|y|=\frac{1}{n}$이 나타내는 도형의 외부(경계선 포함)이다.

따라서 주어진 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$$\therefore S_n=\pi\left(\frac{1}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{\pi-2}{n^2}$$

$S_{n+2}=\frac{\pi-2}{(n+2)^2}$이므로

$$\frac{20}{\pi-2}\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{S_nS_{n+2}}$$

$$=\frac{20}{\pi-2}\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi-2}{n^2}\cdot\frac{\pi-2}{(n+2)^2}}$$

$$=20\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

$$=20\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=10\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=10\lim_{n\to\infty} \left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=10\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=10\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=15$$

답 15

0269 전략 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$의 값의 범위를 각각 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2+x-3=0$에서

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

$\alpha<\beta$이므로 $\alpha=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$, $\beta=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

이때 $\alpha<-1$, $\beta>1$이므로

$$-1<\frac{1}{\alpha}<0,\ 0<\frac{1}{\beta}<1$$

한편 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-3$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{\alpha}}{1-\frac{1}{\alpha}}+\frac{\frac{1}{\beta}}{1-\frac{1}{\beta}}$$

$$=\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$$

$$=\frac{-1-2}{-3-(-1)+1}$$

$$=3$$

답 3

0270 전략 자연수 n에 대하여 $6\cdot5^n$의 양의 약수를 5^k, $2\cdot5^k$, $3\cdot5^k$, $2\cdot3\cdot5^k$ (k는 $0\le k\le n$인 정수)인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 $6\cdot5^n$의 양의 약수는

$1,\ 5,\ 5^2,\ \cdots,\ 5^n,$
$2,\ 2\cdot5,\ 2\cdot5^2,\ \cdots,\ 2\cdot5^n,$
$3,\ 3\cdot5,\ 3\cdot5^2,\ \cdots,\ 3\cdot5^n,$
$2\cdot3,\ 2\cdot3\cdot5,\ 2\cdot3\cdot5^2,\ \cdots,\ 2\cdot3\cdot5^n$

이므로

$$S(n)=\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{2\cdot5^2}+\cdots+\frac{1}{2\cdot5^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5^2}+\cdots+\frac{1}{3\cdot5^n}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot5}+\frac{1}{2\cdot3\cdot5^2}+\cdots+\frac{1}{2\cdot3\cdot5^n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S(n)=2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{2}$$

답 ④

0271 전략 $|r|<1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\,(-1<r<1)$라 하면 수열 $\{a_{2n}\}$의 첫째항은 $a_2=ar$, 공비는 r^2이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\frac{ar}{1-r^2}=3$$

$$\therefore \frac{ar}{(1-r)(1+r)}=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 수열 $\{a_{3n}\}$의 첫째항은 $a_3=ar^2$, 공비는 r^3이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n}=\frac{ar^2}{1-r^3}=\frac{12}{13}$$

$$\therefore \frac{ar^2}{(1-r)(1+r+r^2)}=\frac{12}{13} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠÷㉡을 하면 $\frac{1+r+r^2}{r(1+r)}=\frac{13}{4}$

$13r(1+r)=4(1+r+r^2)$, $9r^2+9r-4=0$

$(3r+4)(3r-1)=0$ $\therefore r=\frac{1}{3}$ ($\because |r|<1$)

$r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $a=8$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{8}{1-\frac{1}{3}}=12$$

답 ④

참고 두 등비수열 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{3n}\}$의 공비 r^2, r^3의 값의 범위가 각각

$-1<r^2<1$, $-1<r^3<1$

이므로 $-1<r<1$

0272 전략 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}\,(a\ne0)$의 수렴 조건은 $|r|<1$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $-1<\frac{r-4}{9}<1$이어야 하므로

$-9<r-4<9$ $\therefore -5<r<13$

(i) $-5<r<8$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-2^{3n}+4^n}{r^n+2^{3n+2}+4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-8^n+4^n}{r^n+4\cdot8^n+4^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r\left(\frac{r}{8}\right)^n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{r}{8}\right)^n+4+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=-\frac{1}{4}$$

(ii) $r=8$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-2^{3n}+4^n}{r^n+2^{3n+2}+4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8^{n+1}-8^n+4^n}{8^n+4\cdot8^n+4^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+4+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\frac{7}{5}$$

(iii) $8<r<13$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-2^{3n}+4^n}{r^n+2^{3n+2}+4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-8^n+4^n}{r^n+4\cdot8^n+4^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r-\left(\frac{8}{r}\right)^n+\left(\frac{4}{r}\right)^n}{1+4\left(\frac{8}{r}\right)^n+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{r}\right)^n}$$

$$=r$$

이상에서 조건 (나)를 만족시키는 r의 값의 범위는

$-5<r<8$

따라서 구하는 정수 r는 $-4,\ -3,\ -2,\ \cdots,\ 7$의 12개이다.

답 12

0273 전략 주어진 수열의 귀납적 정의를 이용하여 $\dfrac{a_n}{a_{n+2}}$의 식을 구한다.

풀이 $a_{n+1}=\sqrt{n}\,a_n$에서

$a_{n+2}=\sqrt{n+1}\,a_{n+1}=\sqrt{n+1}\sqrt{n}\,a_n$

이므로

$$\frac{a_n}{a_{n+2}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})a_n}{a_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=1$$

답 ②

0274 전략 $a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)$임을 이용하여 S_n을 구한다.

풀이 $a_1=S_1$이므로 $3a_1=2S_1+1$에서

$3S_1=2S_1+1\qquad \therefore S_1=1$

또 $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)$이므로

$3(S_n-S_{n-1})=2S_n+1\qquad \therefore S_n=3S_{n-1}+1$

$\therefore S_n+\dfrac{1}{2}=3\left(S_{n-1}+\dfrac{1}{2}\right)\ (n\ge2)$

따라서 수열 $\left\{S_n+\dfrac{1}{2}\right\}$은 첫째항이 $S_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$, 공비가 3인 등비수열이므로 $\quad S_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\cdot3^{n-1}$

$$\therefore S_n=\frac{3^n-1}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{4^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-1}{4^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}$$

답 ⑤

0275 전략 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$의 값을 차례대로 구하여 a_n을 구한다.

풀이 $a_1=1$

$a_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$

$a_3=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)=\left(\dfrac{7}{12}\right)^2$

$\vdots$

따라서 $a_n=\left(\dfrac{7}{12}\right)^{n-1}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{12}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{7}{12}}=\frac{12}{5}$$

답 $\dfrac{12}{5}$

다른 풀이 $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{1}{4}a_n=\dfrac{7}{12}a_n\ (n\ge1)$이므로

$$a_n=1\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{n-1}=\left(\frac{7}{12}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-\frac{7}{12}}=\frac{12}{5}$$

0276 전략 두 점 A, B가 움직인 거리의 비를 구한다.

풀이 같은 시간 동안 움직인 거리는 속력에 정비례하므로

$a_1:b_1=1:1$

$a_2:b_2=\dfrac{4}{5}:\dfrac{9}{10}$

$a_3:b_3=\left(\dfrac{4}{5}\right)^2:\left(\dfrac{9}{10}\right)^2$

$\vdots$

따라서 $a_n:b_n=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}:\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}$이므로

$$a_n\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}=b_n\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

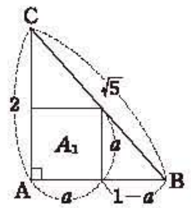
$$\therefore \frac{a_n}{b_n}=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{10}{9}\right)^{n-1}=\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{8}{9}}=9$$

답 ④

0277 전략 두 급수 $\sum_{n=2}^{\infty}S_n,\ \sum_{n=2}^{\infty}S_n'$의 첫째항과 공비를 각각 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 정사각형 A_1의 한 변의 길이를 a라 하면

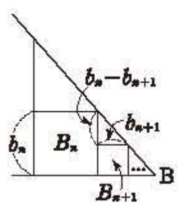


$(1-a):a=1:2$

$2-2a=a$

$\therefore a=\dfrac{2}{3}$

한편 정사각형 $B_n(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$의 한 변의 길이를 b_n이라 하면 오른쪽 그림에서



$b_{n+1}:(b_n-b_{n+1})=1:2$

$2b_{n+1}=b_n-b_{n+1}\qquad \therefore b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$

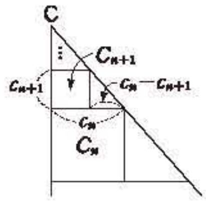
따라서 두 정사각형 B_n과 B_{n+1}의 닮음비가 $1:\dfrac{1}{3}$이므로 넓이의 비는 $1^2:\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$, 즉 $1:\dfrac{1}{9}$이다. 이때 A_1의 넓이가 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$이므로

$$S_2=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{4}{81}$$

또 정사각형 $C_n(n=2, 3, 4, \cdots)$의 한 변의 길이를 c_n이라 하면 오른쪽 그림에서

$(c_n-c_{n+1}) : c_{n+1}=1 : 2$

$c_{n+1}=2c_n-2c_{n+1}$ $\quad\therefore c_{n+1}=\frac{2}{3}c_n$



따라서 두 정사각형 C_n과 C_{n+1}의 닮음비가 $1 : \frac{2}{3}$이므로 넓이의 비는 $1^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^2$, 즉 $1 : \frac{4}{9}$이다.

이때 A_1의 넓이가 $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$이므로

$$S_2'=\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}(S_n+S_n')=\sum_{n=2}^{\infty}S_n+\sum_{n=2}^{\infty}S_n'$$

$$=\frac{\frac{4}{81}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{\frac{16}{81}}{1-\frac{4}{9}}$$

$$=\frac{1}{18}+\frac{16}{45}=\frac{37}{90}$$

답 $\frac{37}{90}$

0278 전략 순환소수 $a_1, a_2, a_3, \cdots$을 분수로 나타내어 규칙을 찾는다.

풀이 $a_1=\frac{1}{9}=\frac{1}{10-1}$

$a_2=\frac{10}{99}=\frac{10}{10^2-1}$

$a_3=\frac{100}{999}=\frac{10^2}{10^3-1}$

$\vdots$

$a_n=\frac{10^{n-1}}{10^n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10^{n+1}-1}{10^n}-\frac{10^n-1}{10^{n-1}}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(10^{n+1}-1)-10(10^n-1)}{10^n}$$

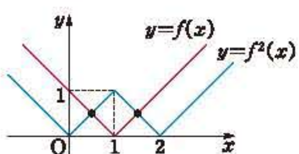
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$$

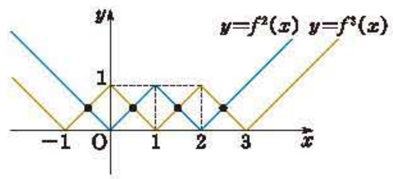
답 ②

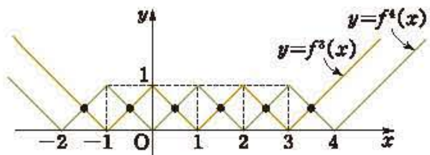
0279 전략 좌표평면 위에 $y=f(x)$, $y=f^2(x)$, $y=f^3(x)$, $\cdots$의 그래프를 나타내어 a_n을 구한다.

풀이 $y=f^2(x)=(f\circ f)(x)=|f(x)-1|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 후, x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 그래프이다.

같은 방법으로 $y=f^3(x)$, $y=f^4(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.







··· ❶

따라서 $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=6$, $\cdots$, $a_n=2n$이므로 ··· ❷

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\cdot 2(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n(n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}$$ ··· ❸

답 $\frac{1}{4}$

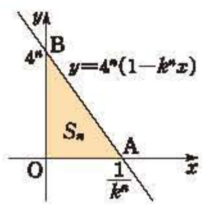
채점 기준표

❶ $y=f^n(x)(n=1, 2, 3, \cdots)$의 그래프를 그릴 수 있다.	50%
❷ a_n을 구할 수 있다.	20%
❸ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$의 값을 구할 수 있다.	30%

0280 전략 주어진 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 식으로 나타낸 후 등비급수의 수렴 조건을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림에서 직선 $y=4^n(1-k^nx)$, 즉 $y=-(4k)^nx+4^n$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

$$A\left(\frac{1}{k^n}, 0\right), B(0, 4^n)$$ ··· ❶



이때 $\frac{1}{k^n}>0$, $4^n>0$이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^n}\cdot 4^n=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{k}\right)^n$$ ··· ❷

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$은 공비가 $\frac{4}{k}$인 등비급수이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1<\frac{4}{k}<1$$

그런데 k는 자연수이므로 $\frac{4}{k}<1$ $\quad\therefore k>4$ ··· ❸

따라서 자연수 k의 최솟값은 5이다. ··· ❹

답 5

채점 기준표

❶ 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ S_n을 구할 수 있다.	20%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❹ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

0281 **전략** 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

풀이 $a_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+q$에서

$$a_{n+1}-\frac{6q}{5}=\frac{1}{6}\left(a_n-\frac{6q}{5}\right)$$

$$\therefore\ a_n=\left(a_1-\frac{6q}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{6q}{5} \quad \cdots ❶$$

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_1-\frac{6q}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{6q}{5}\right\}=0 \qquad \therefore\ q=0 \quad \cdots ❷$$

즉 $a_n=a_1\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=p$, 공비가 $\frac{1}{6}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{p}{1-\frac{1}{6}}=42, \qquad \frac{6}{5}p=42 \qquad \therefore\ p=35 \quad \cdots ❸$$

따라서 $a_n=35\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 35\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}35\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{35}{1-\left(-\frac{1}{6}\right)}=30 \quad \cdots ❹$$

답 30

채점 기준표

❶ a_n을 구할 수 있다.	30%
❷ q의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ p의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$의 값을 구할 수 있다.	20%

0282 **전략** 선분의 길이를 이용하여 점 A_n의 x좌표를 구한다.

풀이 점 A_n이 한없이 가까워지는 점의 x좌표는

$$\overline{OA_0}-\overline{A_0A_1}\cos 60°+\overline{A_1A_2}-\overline{A_2A_3}\cos 60°$$
$$+\overline{A_3A_4}-\overline{A_4A_5}\cos 60°+\cdots \quad \cdots ❶$$

$$=10-10\cdot\frac{1}{2}+10\cdot\frac{2}{3}-10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$
$$+10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3-10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{2}+\cdots$$

$$=10-10\cdot\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right\}$$
$$+10\cdot\frac{2}{3}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=10+\left(\frac{20}{3}-5\right)\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right\}$$

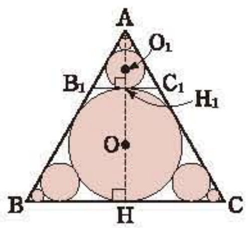
$$=10+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=13 \quad \cdots ❷$$

답 13

채점 기준표

❶ $\overline{A_nA_{n+1}}$의 길이를 이용하여 점 A_n이 가까워지는 점의 x좌표를 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ 점 A_n이 가까워지는 점의 x좌표를 구할 수 있다.	60%

0283 **전략** 정삼각형에 내접하는 원의 중심은 정삼각형의 무게중심과 같음을 이용하여 원의 넓이를 구한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H, 원 O의 반지름의 길이를 r_1이라 하면 원 O의 중심은 $\triangle ABC$의 무게중심이므로

$\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6=3\sqrt{3}$에서

$$r_1=\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

$$\therefore\ S_1=3\pi \quad \cdots ❶$$

또 원 O에 외접하고 $\triangle ABC$의 두 변에 내접하는 세 원 중 꼭짓점 A에 가까운 원을 O_1이라 하자. $\overline{BC}$와 평행하면서 두 원 O, O_1에 동시에 접하는 직선과 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$가 만나는 점을 각각 B_1, C_1, 점 A에서 $\overline{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면 $\overline{AH_1}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{AH_1}=\overline{AH}-2r_1=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$\overline{AH}:\overline{AH_1}=3:1$

즉 원 O와 원 O_1의 닮음비도 $3:1$이므로 두 원의 넓이의 비는 $9:1$이다.

$\triangle ABC$와 $\triangle AB_1C_1$의 닮음비가 $3:1$이므로 두 원 O, O_1의 닮음비도 $3:1$이다.

$$\therefore\ S_2=\frac{1}{9}S_1$$

같은 방법으로 하면

$$S_3=\left(\frac{1}{9}\right)^2 S_1,\ S_4=\left(\frac{1}{9}\right)^3 S_1,\ \cdots$$

$$\therefore\ S_n=S_1\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}=3\pi\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \quad \cdots ❷$$

따라서 모든 원의 넓이의 합은

$$S_1+3S_2+3S_3+3S_4+\cdots$$

$$=3\pi+3\cdot 3\pi\cdot\frac{1}{9}+3\cdot 3\pi\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2+3\cdot 3\pi\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3+\cdots$$

$$=3\pi+\frac{\pi}{1-\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{33}{8}\pi \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{33}{8}\pi$

채점 기준표

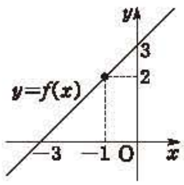
❶ S_1의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ S_n을 구할 수 있다.	40%
❸ 모든 원의 넓이의 합을 구할 수 있다.	30%

Ⅰ 함수의 극한과 연속

03 함수의 극한

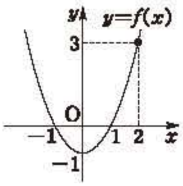
0284 $f(x)=x+3$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to -1}(x+3)=2$ 답 2



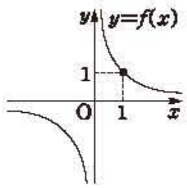
0285 $f(x)=x^2-1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 2}(x^2-1)=3$ 답 3



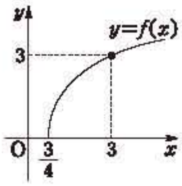
0286 $f(x)=\frac{1}{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$ 답 1



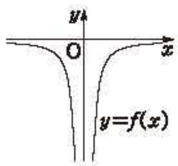
0287 $f(x)=\sqrt{4x-3}$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 3}\sqrt{4x-3}=3$ 답 3



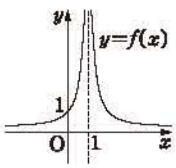
0288 $f(x)=-\frac{1}{x^2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$

답 $-\infty$



0289 $f(x)=\frac{1}{|x-1|}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}=\infty$

답 ∞



SSEN 특강

$y=\frac{1}{|x-1|}$의 그래프 그리기

(i) $y=\frac{1}{|x|}$의 그래프를 그린다.

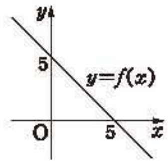
ⓘ $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 그려 $x>0$인 부분만 남긴다.

ⓘⓘ ⓘ의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한다.

(ii) (i)의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.

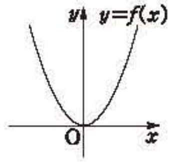
0290 $f(x)=-x+5$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to\infty}(-x+5)=-\infty$ 답 $-\infty$



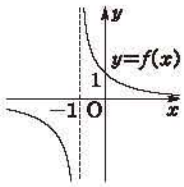
0291 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to -\infty}x^2=\infty$ 답 ∞



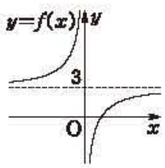
0292 $f(x)=\frac{1}{x+1}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0$ 답 0



0293 $f(x)=3-\frac{1}{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to -\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$ 답 3

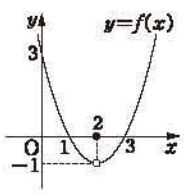


0294 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

(1) $\lim_{x\to 0}f(x)=3$ (2) $\lim_{x\to 1}f(x)=0$

(3) $\lim_{x\to 2}f(x)=-1$ (4) $\lim_{x\to -\infty}f(x)=\infty$

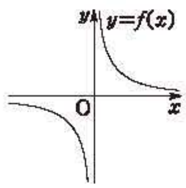
답 (1) 3 (2) 0 (3) -1 (4) ∞



0295 $f(x)=\frac{1}{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

(1) $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$ (2) $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$

답 (1) ∞ (2) $-\infty$



0296 (1) $\lim_{x\to -2+}f(x)=0$ (2) $\lim_{x\to -2-}f(x)=2$

(3) $\lim_{x\to -2+}f(x)\neq\lim_{x\to -2-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to -2}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

(4) $\lim_{x\to 1+}f(x)=1$ (5) $\lim_{x\to 1-}f(x)=1$

(6) $\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=1$

답 풀이 참조

0297 $\lim_{x\to 1}(2x+5)=2\cdot 1+5=7$ 답 7

0298 $\lim_{x\to3}(x-1)(2x^2-3x-1)=(3-1)(2\cdot3^2-3\cdot3-1)$
$=2\cdot8=16$ 답 16

0299 $\lim_{x\to2}\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2\cdot2-1}{2+1}=\frac{3}{3}=1$ 답 1

0300 $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{\sqrt{2}-0}{1}=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

0301 $\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+2)}{x}=\lim_{x\to0}(x^2+2)=2$ 답 2

0302 $\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x-3)}{x+1}$
$=\lim_{x\to-1}(2x-3)=-5$ 답 -5

0303 $\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+1)}$
$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+2}{x+1}$
$=2$ 답 2

0304 $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$
$=\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)=12$ 답 12

0305 $\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$
$=\lim_{x\to9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$
$=\lim_{x\to9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

0306 $\lim_{x\to3}\frac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$
$=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$
$=\lim_{x\to3}2(\sqrt{x+1}+2)=8$ 답 8

0307 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^3+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=0$ 답 0

0308 $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-1}{3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}}=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

0309 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\frac{3}{x}}{4+\frac{3}{x}}=\infty$ 답 ∞

0310 $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(2x-1)}{3x^2+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x^2+x-1}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$
$=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0311 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\frac{4}{x}}=2$ 답 2

0312 $\lim_{x\to-\infty}(x^3+3x^2+2x-1)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$
$=-\infty$ 답 $-\infty$

0313 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$ 답 0

0314 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+3x})$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x-x^2-3x}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+3x}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+3x}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=-3$ 답 -3

0315 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}$
$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}$
$=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0316 $\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(2x-\frac{5x+2}{x+1}\right)$
$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{2x^2-3x-2}{x+1}$
$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{(2x+1)(x-2)}{x+1}$
$=\lim_{x\to2}\frac{2x+1}{x+1}=\frac{5}{3}$ 답 $\frac{5}{3}$

0317 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.
즉 $\lim_{x\to1}(ax-2)=0$이므로 $a-2=0$
$\therefore a=2$ 답 2

0318 $x \to -1$일 때 (분자) $\to$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x \to -1}(2x^2+3x+a)=0$이므로 $\quad 2-3+a=0$

$\therefore a=1$

답 1

0319 (1) $\lim_{x \to 1}(x^2+2x-4)=1^2+2\cdot1-4=-1$

(2) $\lim_{x \to 1}(2x^2-3)=2\cdot1^2-3=-1$

(3) 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2x-4 \le f(x) \le 2x^2-3$이고

$\lim_{x \to 1}(x^2+2x-4)=\lim_{x \to 1}(2x^2-3)=-1$이므로

$\lim_{x \to 1}f(x)=-1$

답 (1) -1 (2) -1 (3) -1

유형 01 함수의 극한값의 존재 본책 54쪽

우극한과 좌극한을 각각 구하여 비교한다.

두 값이 같으면 ➡ 극한값이 존재한다.

두 값이 다르거나 수렴하지 않으면 ➡ 극한값이 존재하지 않는다.

0320 ㄱ. $\lim_{x \to 3+}(x-3)=0$, $\lim_{x \to 3-}(x-3)=0$

$\therefore \lim_{x \to 3}(x-3)=0$

ㄴ. $\lim_{x \to -2+}|x+2|=\lim_{x \to -2+}(x+2)=0$

$\lim_{x \to -2-}|x+2|=\lim_{x \to -2-}\{-(x+2)\}=0$

$\therefore \lim_{x \to -2}|x+2|=0$

ㄷ. $\lim_{x \to 1+}\frac{|x-1|}{x^2-1}=\lim_{x \to 1+}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x \to 1+}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x \to 1+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 1-}\frac{|x-1|}{x^2-1}=\lim_{x \to 1-}\frac{-(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x \to 1-}\frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x \to 1-}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{1}{2}$

즉 $\lim_{x \to 1+}\frac{|x-1|}{x^2-1} \ne \lim_{x \to 1-}\frac{|x-1|}{x^2-1}$이므로 $\lim_{x \to 1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄹ. $\lim_{x \to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x \to 5}\frac{(x+5)(x-5)}{x-5}=\lim_{x \to 5}(x+5)=10$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ⑤

0321 ① $\lim_{x \to 0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x \to 0-}f(x)=-\infty$이므로 $\lim_{x \to 0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

② $\lim_{x \to 0+}f(x) \ne \lim_{x \to 0-}f(x)$이므로 $\lim_{x \to 0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x \to 0}f(x)=\infty$이므로 $\lim_{x \to 0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

④ $\lim_{x \to 0}f(x)$의 값이 존재한다.

⑤ a가 정수일 때, $\lim_{x \to a+}f(x) \ne \lim_{x \to a-}f(x)$이므로 $\lim_{x \to 0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

답 ④

참고 ③ $\lim_{x \to 0}f(x)=\infty$에서 ∞는 일정한 값이 아닌 한없이 커지는 상태를 나타내므로 $\lim_{x \to 0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

0322 ㄱ. $\lim_{x \to 1+}f(x)=0$, $\lim_{x \to 1-}f(x)=-2$이므로 $\lim_{x \to 1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x \to 2+}f(x)=1$, $\lim_{x \to 2-}f(x)=1$이므로 $\quad \lim_{x \to 2}f(x)=1$

ㄷ. $-1<a<1$인 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a}f(x)$의 값이 항상 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0323 $\lim_{x \to 2+}f(x)=\lim_{x \to 2+}(kx-5)=2k-5$ ··· ❶

$\lim_{x \to 2-}f(x)=\lim_{x \to 2-}(x-k)^2=(2-k)^2$ ··· ❷

$\lim_{x \to 2}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x \to 2+}f(x)=\lim_{x \to 2-}f(x)$이어야 하므로 $\quad 2k-5=(2-k)^2$ ··· ❸

$2k-5=k^2-4k+4, \quad k^2-6k+9=0$

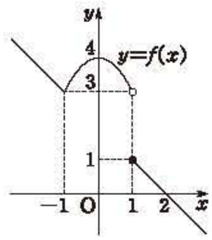
$(k-3)^2=0 \quad \therefore k=3$ ··· ❹

답 3

채점 기준표

❶ $\lim_{x \to 2+}f(x)$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ $\lim_{x \to 2-}f(x)$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❸ k에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40%
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20%

0324 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\lim_{x \to 1+}f(x)=\lim_{x \to 1+}(2-x)=1$

$\lim_{x \to 1-}f(x)=\lim_{x \to 1-}(4-x^2)=3$

이므로 $\lim_{x \to 1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore a=1$

답 1

유형 02 함수의 극한값 구하기 본책 55쪽

① 절댓값 기호를 포함한 함수

➡ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 함수의 식을 구한다.

② x^n을 포함한 함수

➡ $|x|<1$, $|x|>1$, $x=1$, $x=-1$인 경우로 나누어 함수의 식을 간단히 한다.

0325 (i) $x>2$일 때, $\quad f(x)=\frac{x-2}{x-2}=1$

(ii) $x<2$일 때, $\quad f(x)=\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$

$|A|=\begin{cases} A & (A \ge 0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \to 2+}f(x)=1$, $\lim_{x \to 2-}f(x)=-1$이므로

$a=1, \ b=-1$

$\therefore a-b=2$

답 2

0326 $\lim_{x\to0} f(x)+\lim_{x\to1} f(x)+\lim_{x\to2+} f(x)$

$=1+0+(-1)=0$ 답 ③

0327 $x\neq0$일 때, $0<\frac{1}{1+x^2}<1$이므로

$$f(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^3}+\cdots$$

$$=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2$$

$\therefore \lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}(1+x^2)=1$ 답 ④

0328 (i) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x-1}{x^{2n}+1}=-x-1$$ ···➊

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x-1}{x^{2n}+1}=\frac{1-1-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$ ···➋

(iii) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x-1}{x^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\frac{1}{x^{2n-1}}-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=x$$ ···➌

이상에서

$\lim_{x\to1+} f(x)+\lim_{x\to1-} f(x)+f(1)$

$=\lim_{x\to1+} x+\lim_{x\to1-}(-x-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=1-2-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$ ···➍

답 $-\frac{3}{2}$

채점 기준표

➊ $0<x<1$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	20%
➋ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20%
➌ $x>1$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	20%
➍ $\lim_{x\to1+} f(x)+\lim_{x\to1-} f(x)+f(1)$의 값을 구할 수 있다.	40%

참고 일반적으로 $n\longrightarrow\infty$일 때 n은 자연수, $x\longrightarrow\infty$일 때 x는 실수로 생각한다.

유형 03 가우스 기호를 포함한 함수의 극한

본책 55쪽

$[x]$가 x보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n에 대하여

① $n\le x<n+1$이면 $[x]=n$ ➡ $\lim_{x\to n+}[x]=n$

② $n-1\le x<n$이면 $[x]=n-1$ ➡ $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$

0329 $\lim_{x\to3+}[x]=3$, $\lim_{x\to3-}[x]=2$이므로

$$\lim_{x\to3+}\frac{[x]^2+x}{[x]}+\lim_{x\to3-}\frac{[x]^2-x}{[x]}$$

$$=\frac{3^2+3}{3}+\frac{2^2-3}{2}$$

$$=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$ 답 $\frac{9}{2}$

0330 ① $\lim_{x\to0-}\frac{[x-2]}{x-2}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$

② $\lim_{x\to0+}\frac{x}{[x-1]}=\frac{0}{-1}=0$

③ $\lim_{x\to-1+}[x]=-1$이고, $x\longrightarrow-1+$일 때 x^2-1은 0보다 작은 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-1+}\frac{[x]^2-1}{[x^2-1]}=\frac{(-1)^2-1}{-1}=0$$

④ $\lim_{x\to1-}\frac{[x-2]}{[x+1]}=\frac{-2}{1}=-2$

⑤ $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x+1}{x+1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[2-\frac{1}{x+1}\right]=1$ 답 ①

0331 $\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}(a[x]^3-2b[x]^2+3)$

$=a\cdot0-2b\cdot0+3=3$

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}(a[x]^3-2b[x]^2+3)$

$=a\cdot(-1)^3-2b\cdot(-1)^2+3$

$=-a-2b+3$

$\lim_{x\to0} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0-} f(x)$이어야 하므로

$3=-a-2b+3$ $\therefore a=-2b$

$\therefore \frac{2b}{a}=\frac{2b}{-2b}=-1$ 답 ②

0332 $\lim_{x\to k+}\frac{[2x]}{[x]^2+x}=\frac{2k}{k^2+k}=\frac{2}{k+1}$ ($\because k\neq0$)

$\lim_{x\to k-}\frac{[2x]}{[x]^2+x}=\frac{2k-1}{(k-1)^2+k}=\frac{2k-1}{k^2-k+1}$

이때 $\lim_{x\to k}\frac{[2x]}{[x]^2+x}$의 값이 존재하므로

$\frac{2}{k+1}=\frac{2k-1}{k^2-k+1}$, $2k^2-2k+2=2k^2+k-1$

$3k=3$ $\therefore k=1$

또 $a=\frac{2}{k+1}=\frac{2}{1+1}=1$이므로

$k+a=2$ 답 2

유형 04 합성함수의 극한

본책 56쪽

$\lim_{x\to a+} g(f(x))$의 값은 $f(x)=t$로 놓고 다음을 이용한다.

① $x\to a+$일 때, $t\to b+$이면 $\lim_{x\to a+} g(f(x))=\lim_{t\to b+} g(t)$

② $x\to a+$일 때, $t\to b-$이면 $\lim_{x\to a+} g(f(x))=\lim_{t\to b-} g(t)$

③ $x\to a+$일 때, $t=b$이면 $\lim_{x\to a+} g(f(x))=g(b)$

0333 $f(x)=t$로 놓으면 $x \to 0+$일 때 $t \to 0+$이므로

$\lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{t\to 0+} g(t)=\lim_{t\to 0+}(t-2)^2=4$

또 $x \to 1+$일 때 $t \to -1+$이므로

$\lim_{x\to 1+} g(f(x))=\lim_{t\to -1+} g(t)=\lim_{t\to -1+}(t-2)^2=9$

$\therefore \lim_{x\to 0+} g(f(x))+\lim_{x\to 1+} g(f(x))=4+9=13$

답 ②

0334 ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(x-2)=-2$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$

즉 $\lim_{x\to 0+} f(x)\neq \lim_{x\to 0-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면 $x \to 0-$일 때 $t=-1$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(f(x))=f(-1)=-1$

ㄷ. $x \to 2+$일 때 $t \to 0+$이므로

$\lim_{x\to 2+} f(f(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=\lim_{t\to 0+}(t-2)=-2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0335 $f(x)=t$로 놓으면 $x \to 1+$일 때 $t \to 2+$이므로

$\lim_{x\to 1+} g(f(x))=\lim_{t\to 2+} g(t)=\lim_{t\to 2+}(|t|-1)=1$

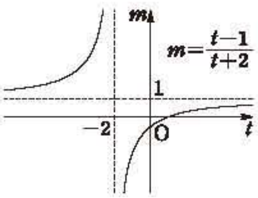
또 $x \to 1-$일 때 $t \to -2+$이므로

$\lim_{x\to 1-} g(f(x))=\lim_{t\to -2+} g(t)=\lim_{t\to -2+}(-t^2)=-4$

$\therefore \lim_{x\to 1+} g(f(x))+\lim_{x\to 1-} g(f(x))=1-4=-3$

답 ①

0336 $\dfrac{t-1}{t+2}=m$으로 놓으면



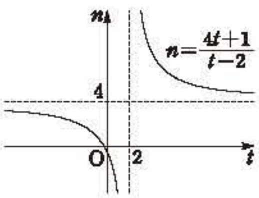
$\dfrac{t-1}{t+2}=\dfrac{t+2-3}{t+2}$

$=1-\dfrac{3}{t+2}$

이므로 $m=\dfrac{t-1}{t+2}$의 그래프는 위의 그림과 같고, $t \to \infty$일 때 $m \to 1-$이므로

$\lim_{t\to\infty} f\left(\dfrac{t-1}{t+2}\right)=\lim_{m\to 1-} f(m)=2$ ··· ❶

$\dfrac{4t+1}{t-2}=n$으로 놓으면



$\dfrac{4t+1}{t-2}=\dfrac{4(t-2)+9}{t-2}$

$=4+\dfrac{9}{t-2}$

이므로 $n=\dfrac{4t+1}{t-2}$의 그래프는 위의 그림과 같고, $t \to \infty$일 때 $n \to 4+$이므로

$\lim_{t\to\infty} f\left(\dfrac{4t+1}{t-2}\right)=\lim_{n\to 4+} f(n)=1$ ··· ❷

$\therefore 2\lim_{t\to\infty} f\left(\dfrac{t-1}{t+2}\right)-\lim_{t\to\infty} f\left(\dfrac{4t+1}{t-2}\right)=2\cdot 2-1=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준표

❶ $\lim_{t\to\infty} f\left(\dfrac{t-1}{t+2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $\lim_{t\to\infty} f\left(\dfrac{4t+1}{t-2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $2\lim_{t\to\infty} f\left(\dfrac{t-1}{t+2}\right)-\lim_{t\to\infty} f\left(\dfrac{4t+1}{t-2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 05 함수의 극한에 대한 성질

본책 56쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)일 때

➡ $f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면 두 함수 $f(x)$, $h(x)$는 수렴하므로 극한값을 구하려는 함수식을 $f(x)$와 $h(x)$로 나타낸 후 극한에 대한 성질을 이용한다.

0337 $f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면 $g(x)=f(x)-h(x)$이고, $\lim_{x\to\infty} h(x)=2$이다.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{2f(x)-3g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+\{f(x)-h(x)\}}{2f(x)-3\{f(x)-h(x)\}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-h(x)}{-f(x)+3h(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{h(x)}{f(x)}}{-1+3\cdot\dfrac{h(x)}{f(x)}}$$

$$=-2\ \left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0\right)$$

답 ②

0338 $\lim_{x\to -2}(x^2-x-6)f(x)=\lim_{x\to -2}(x+2)(x-3)f(x)$

$=\lim_{x\to -2}(x-3)\{(x+2)f(x)\}$

$=-5\cdot\dfrac{1}{3}$

$=-\dfrac{5}{3}$

답 $-\dfrac{5}{3}$

0339 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\{f(x)-2x^2\}=0$에서

$\lim_{x\to\infty}\left\{\dfrac{f(x)}{x^2}-2\right\}=0$, 즉 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{5f(x)+x}{2f(x)-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot\dfrac{f(x)}{x^2}+\dfrac{1}{x}}{2\cdot\dfrac{f(x)}{x^2}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{5\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{5}{2}$$

답 $\dfrac{5}{2}$

0340 $f(x)-2g(x)=h(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to a} h(x)=-9$이고

$g(x)=\dfrac{f(x)-h(x)}{2}$ ··· ❶

$\therefore \lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-h(x)}{2}$

$=\frac{1}{2}\{\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} h(x)\}$

$=\frac{1}{2}\{3-(-9)\}=6$ ···➋

답 6

채점 기준표

➊ $g(x)$를 $f(x)$, $h(x)$로 나타낼 수 있다.	40%
➋ $\lim_{x\to a} g(x)$의 값을 구할 수 있다.	60%

0341 $x-1=t$로 놓으면 $x \to 1$일 때 $t \to 0$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=1$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$

$=1\cdot\frac{1}{1^2+1+1}=\frac{1}{3}$

답 ④

유형 06 함수의 극한에 대한 성질; 합답형 본책 쪽

$x \to a$일 때의 극한값이 존재하지 않는 함수의 예를 들 때

➡ $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 다른 함수를 찾아본다.

0342 $[x]$를 x보다 크지 않은 최대의 정수라 하자.

ㄱ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=[x]$이면

$\lim_{x\to 1} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=0$

이지만 $\lim_{x\to 1} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=[x^2+1]$이면

$\lim_{x\to 1} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

이지만 $\lim_{x\to 1} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하고

$\frac{f(x)}{g(x)}=h(x)$로 놓으면 $f(x)=g(x)h(x)$이므로

$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)h(x)=\alpha\beta$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ②

0343 ㄱ. [반례] $f(x)=\begin{cases} 2 & (x\ge a) \\ 1 & (x<a)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 1 & (x\ge a) \\ 2 & (x<a)\end{cases}$이면

$\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} g(x)$의 값은 모두 존재하지 않지만

$f(x)+g(x)=3$이므로 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=3$이다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$의 값이 각각 존재할 때

$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$

(α, β는 실수)

라 하고 $f(x)+g(x)=h(x)$, $f(x)-g(x)=k(x)$로 놓으면

$\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} k(x)=\beta$이다.

이때 $f(x)=\frac{h(x)+k(x)}{2}$이므로

$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)+k(x)}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$

ㄷ. $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$의 값이 각각 존재할 때

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\beta$ (α, β는 실수)

라 하고 $f(x)g(x)=h(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to a} h(x)=\beta$이다.

$f(x)\ne 0$일 때, $g(x)=\frac{h(x)}{f(x)}$이므로 $\lim_{x\to a} f(x)\ne 0$이면

$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{\beta}{\alpha}$

ㄹ. [반례] $f(x)=\begin{cases} -x+6 & (x>2) \\ x+2 & (x\le 2)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 4 & (x\ne 2) \\ 6 & (x=2)\end{cases}$이면 모든

양수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이지만

$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} g(x)=4$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ②

유형 07 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한; 유리식 본책 쪽

분자, 분모가 모두 다항식이면

➡ 분자, 분모를 각각 인수분해하여 공통인수를 약분한다.

0344 $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+2)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+2}{x-1}$

$=-2$

답 -2

0345 $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x-1)}{(x+2)(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{x+2}=\frac{1}{3}$

답 ①

0346 $\lim_{x\to 1}\frac{4(x^4-1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{4(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2-1)f(x)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{4(x^2+1)}{f(x)}$

$=\frac{8}{f(1)}=1$

$\therefore f(1)=8$

답 8

0347
$$\lim_{x\to-2}\frac{\{f(x)\}^2-f(x)}{x^2f(x)-4f(x)}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)\{f(x)-1\}}{(x^2-4)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-1}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-1}{x+2}\cdot\lim_{x\to-2}\frac{1}{x-2}$$
$$=4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$$

답 ②

0348 $-1<x<1$일 때 $x^2-1<0$이므로

$$\lim_{x\to-1+}\frac{x^2+x}{|x^2-1|}=\lim_{x\to-1+}\frac{x^2+x}{1-x^2}=\lim_{x\to-1+}\frac{x(1+x)}{(1+x)(1-x)}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{x}{1-x}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ ➡ ❶

또 $\lim_{x\to0+}\frac{x+|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{2x}{x}=2$이므로

$b=2$ ➡ ❷

$\therefore a+b=\frac{3}{2}$ ➡ ❸

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준표

❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 08 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한; 무리식 본책 [illegible]쪽

분자, 분모 중 무리식이 있으면
➡ 근호를 포함한 쪽을 유리화하고 공통인수를 약분한다.

0349
$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x^2-5}-2}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{(\sqrt{x^2-5}-2)(\sqrt{x^2-5}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{x^2-9}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{(x+3)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2-5}+2}{x+3}=\frac{2}{3}$$

답 ①

0350
$$\lim_{x\to4}\frac{(x-4)f(x)}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)f(x)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)f(x)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}f(x)(\sqrt{x}+2)$$
$$=3\cdot(2+2)=12$$

답 ⑤

0351
$$\lim_{x\to8}\frac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to8}\frac{(x+8)(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}$$
$$=\lim_{x\to8}\frac{(x+8)(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8}$$
$$=\lim_{x\to8}(x+8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)$$
$$=16\cdot(4+2\cdot2+4)=192$$

$\therefore a=192$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+8}+3)}=\frac{1}{2\cdot6}=\frac{1}{12}$$

$\therefore b=\frac{1}{12}$

$\therefore ab=16$

답 16

0352
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-x^2-1+x)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}{(1+x^2-1-x)(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}\right)$$
$$=-\frac{1+1}{1+1}=-1$$

답 -1

유형 09 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 본책 [illegible]쪽

(i) 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

(ii) $\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^n}=0$ (n은 자연수, c는 상수)임을 이용한다.

0353 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{\sqrt{4x^2+x+1}-x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+1}-2t}{\sqrt{4t^2-t+1}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}-2}{\sqrt{4-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}$$
$$=\frac{1-2}{2+1}=-\frac{1}{3}$$

답 ③

0354
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{9x^2-x}+\sqrt{4x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{9-\frac{1}{x}}+\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\frac{3}{3+2}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

0355 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+3}=0$이므로 $a=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x}{2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{5}{x}}{2-\frac{1}{x^2}}=\frac{6}{2}=3$이므로 $b=3$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+5}-3}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{5}{x^2}}-\frac{3}{x}}{1}=3$이므로 $c=3$

① $a<b$ ② $a\neq c$ ③ $b=c$

④ $a-b=0-3=-3$이므로 $a-b\neq c$

⑤ $a+c=0+3=3$이므로 $a+c=b$

답 ⑤

0356 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+\{f(x)\}^2}{3x^2-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{3-\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}}$

$=\frac{2+2^2}{3-2\cdot 0}=2$

답 ③

0357 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{-t}=a$

$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{t}=-a$ …… ㉠ ➊

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3f(x)}{\sqrt{f(x)+x^2}+f(x)}=\lim_{t\to\infty}\frac{3f(-t)}{\sqrt{f(-t)+t^2}+f(-t)}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{3\cdot\frac{f(-t)}{t}}{\sqrt{\frac{f(-t)}{t}\cdot\frac{1}{t}+1}+\frac{f(-t)}{t}}$

$=\frac{-3a}{1-a}$ (∵ ㉠) ➋

따라서 $\frac{-3a}{1-a}=4$이므로 $4-4a=-3a$

$\therefore a=4$ ➌

답 4

채점 기준표

➊ $\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{t}=-a$임을 알 수 있다.	30%
➋ $\lim_{x\to-\infty}\frac{3f(x)}{\sqrt{f(x)+x^2}+f(x)}$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
➌ a의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 10 $\infty-\infty$ 꼴의 극한 　본책 59쪽

① 다항식은 최고차항으로 묶는다.

② 무리식은 근호를 포함한 쪽을 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

0358 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

(주어진 식) $=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{1-2t+t^2}-t)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{1-2t+t^2}-t)(\sqrt{1-2t+t^2}+t)}{\sqrt{1-2t+t^2}+t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{1-2t}{\sqrt{1-2t+t^2}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}-2}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1}+1}$

$=\frac{0-2}{1+1}=-1$

답 ②

0359 (주어진 식)

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-2x+4}}{(x-\sqrt{x^2-2x+4})(x+\sqrt{x^2-2x+4})}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-2x+4}}{2x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{2-\frac{4}{x}}$

$=\frac{1+1}{2-0}=1$

답 ⑤

0360 $\lim_{x\to2}\frac{1-\sqrt{x-1}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}$

$=\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}$

$=\lim_{x\to2}\left(-\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\right)=-\frac{1}{2}$

$\therefore p=-\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+3x+1})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+3x+1})(\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+3x+1})}{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+3x+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+3x+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}$

$=\frac{-6}{1+1}=-3$

$\therefore q=-3$

$\therefore 2p-q=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-(-3)=2$

답 2

0361 $x=[x]+\alpha\ (0\le\alpha<1)$로 놓으면 $[x]=x-\alpha$

위의 식을 주어진 식에 대입하면

(주어진 식) $=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-\alpha}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x-\alpha}-x)(\sqrt{x^2+x-\alpha}+x)}{\sqrt{x^2+x-\alpha}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\alpha}{\sqrt{x^2+x-\alpha}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\alpha}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{\alpha}{x^2}}+1}$

$=\frac{1-0}{1+1}=\frac{1}{2}$

답 ⑤

다른 풀이 (주어진 식) $=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+[x]}-x)(\sqrt{x^2+[x]}+x)}{\sqrt{x^2+[x]}+x}$

$x>0$일 때, $\frac{x-1}{x}<\frac{[x]}{x}\le\frac{x}{x}$에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{\sqrt{x^2+[x]}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{[x]}{x}}{\sqrt{1+\frac{[x]}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

유형 11 $\infty\times 0$ 꼴의 극한 본책 60쪽

$\infty\times c$, $\frac{c}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ (c는 0이 아닌 상수) 꼴로 변형하여 계산한다.

0362 (주어진 식) $=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2x^2+x-1}{2(x-1)}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{(x+1)(2x-1)}{2(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{2x-1}{2(x-1)}=\frac{3}{4}$$

답 ③

0363 (주어진 식) $=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}-2)\cdot\frac{x-6}{x-4}$

$$=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}-2)\cdot\frac{x-6}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x-6}{\sqrt{x}+2}=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0364 $\frac{1}{n}=x$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $x\to0$이고

$f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$

$\therefore$ (주어진 식) $=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\{f(3x+1)-f(1)\}^2$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\{(3x+2)^2-2^2\}^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(9x^2+12x)^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{9x^2(3x+4)^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}9(9x^2+24x+16)$$

$$=9\cdot16=144$$

답 144

0365 $x=3k+\alpha$ (k는 정수, $0\le\alpha<3$)로 놓으면

$$\left[\frac{x}{3}\right]=\left[\frac{3k+\alpha}{3}\right]=\left[k+\frac{\alpha}{3}\right]=k\ \left(\because 0\le\frac{\alpha}{3}<1\right)$$

$x\to\infty$일 때 $k\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x}\left[\frac{x}{3}\right]=\lim_{k\to\infty}\frac{6}{3k+\alpha}\cdot k$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{6}{3+\frac{\alpha}{k}}=2$$

답 ④

유형 12, 13 미정계수의 결정 (1), (2) 본책 60, 61쪽

미정계수가 포함된 분수 꼴의 함수에서 $x\to a$일 때
① (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하면 ➡ (분자) $\to$ 0
② (분자) $\to$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 ➡ (분모) $\to$ 0

0366 $x\to-1$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1-a+b=0$

$\therefore b=a-1$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+a-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}(x+a-1)=a-2$$

$a-2=3$에서 $a=5$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore a+b=9$

답 ③

0367 $x\to1$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^3+ax^2+bx)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2-(a+1)x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(x+a+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}x(x+a+1)=2+a$$

$2+a=6$에서 $a=4$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $b=-5$

따라서 $f(x)=x^3+4x^2-5x$이므로 $f(2)=14$

답 ②

0368 $x\to2$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to2}(a\sqrt{x-1}+b)=0$이므로 $a+b=0$

$\therefore b=-a$ ...... ㉠ ➡ ❶

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}-a}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{a}{2}$$ ➡ ❷

$\frac{a}{2}=1$에서 $a=2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $b=-2$ ➡ ❸

$\therefore a^2+b^2=2^2+(-2)^2=8$ ➡ ❹

답 8

채점 기준표

❶ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}$의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	10%

0369 (주어진 식)$=\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{-x-a+b}{b(x+a)}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-x-a+b}{b(x-2)(x+a)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to2}(-x-a+b)=0$이므로 $\quad -2-a+b=0$

$\therefore b=a+2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)}{(a+2)(x-2)(x+a)}=\lim_{x\to2}\frac{-1}{(a+2)(x+a)}=-\frac{1}{(a+2)^2}$$

$-\frac{1}{(a+2)^2}=-\frac{1}{9}$에서 $\quad a=1$ ($\because a$는 자연수)

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $\quad b=3$

$\therefore ab=3$ 답 3

0370 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=a$이므로

$a=2$

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+bx+c}{x^2-x-2}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

에서 $x\longrightarrow-1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to-1}(2x^2+bx+c)=0$이므로 $\quad 2-b+c=0$

$\therefore c=b-2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+bx+b-2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x+b-2)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to-1}\frac{2x+b-2}{x-2}=\frac{b-4}{-3}$$

$\frac{b-4}{-3}=\frac{1}{2}$에서 $b=\frac{5}{2}$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$c=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b+c=5$ 답 ⑤

0371 $x\longrightarrow2$일 때 (분자) $\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$이므로 $\quad 4+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-4 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2+ax-2a-4}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2+a)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2+a}=\frac{1}{4+a}$$

$\frac{1}{4+a}=1$에서 $a=-3$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $\quad b=2$

$\therefore b-a=5$ 답 ②

0372 $x\longrightarrow4$일 때 (분자) $\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to4}(ax+b)=0$이므로 $\quad 4a+b=0$

$\therefore b=-4a \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to4}\frac{4\sqrt{9+x^2}-5x}{ax-4a}=\lim_{x\to4}\frac{(4\sqrt{9+x^2}-5x)(4\sqrt{9+x^2}+5x)}{(ax-4a)(4\sqrt{9+x^2}+5x)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{-9(x+4)(x-4)}{a(x-4)(4\sqrt{9+x^2}+5x)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{-9(x+4)}{a(4\sqrt{9+x^2}+5x)}=-\frac{9}{5a}$$

$-\frac{9}{5a}=-2$에서 $a=\frac{9}{10}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$b=-\frac{18}{5}$

$\therefore a+b=-\frac{27}{10}$ 답 ②

유형 14 미정계수의 결정 (3) 본책 61쪽

미정계수가 포함된 $\infty-\infty$ 꼴의 극한에서 $x\longrightarrow\infty$일 때 극한값이 존재하면

➡ $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 분자와 분모의 최고차항의 차수와 계수를 비교한다.

0373 $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2-bx}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{at^2+bt}-t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{at^2+bt}-t)(\sqrt{at^2+bt}+t)}{\sqrt{at^2+bt}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{at^2+bt-t^2}{\sqrt{at^2+bt}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-1)t^2+bt}{\sqrt{at^2+bt}+t} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 극한값이 존재하려면 $\quad a-1=0 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{bt}{\sqrt{t^2+bt}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b}{t}}+1}=\frac{b}{2}=1$$

따라서 $b=2$이므로 $\quad ab=2$ 답 2

0374 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2ax+1}-\sqrt{x^2-2ax+1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2ax+1-(x^2-2ax+1)}{\sqrt{x^2+2ax+1}+\sqrt{x^2-2ax+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4ax}{\sqrt{x^2+2ax+1}+\sqrt{x^2-2ax+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4a}{\sqrt{1+\frac{2a}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2a}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{4a}{2}=2a$$

따라서 $2a=6$이므로 $\quad a=3$ 답 ④

0375 $a\le 0$이면 $\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{4x^2+2x+1}-(ax+b)\}=\infty$이므로 $a>0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to\infty}\{\sqrt{4x^2+2x+1}-(ax+b)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2+2x+1)-(ax+b)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}+ax+b}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(4-a^2)x^2+(2-2ab)x+1-b^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}+ax+b}$ ······ ㉠

㉠의 극한값이 존재하려면 $4-a^2=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) ··· ❶

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2-4b)x+1-b^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x+b}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-4b+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2+\frac{b}{x}}$$

$$=\frac{2-4b}{4}=0$$

$\therefore b=\dfrac{1}{2}$ ··· ❷

따라서

$\lim_{x\to\infty}x\left\{\sqrt{4x^2+2x+1}-\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x\left\{(4x^2+2x+1)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x+\frac{1}{2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{4}x}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x+\frac{1}{2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2+\frac{1}{2x}}=\dfrac{3}{16}$

이므로 $p=16$, $q=3$ ··· ❸

$\therefore p+q=19$ ··· ❹

답 19

채점 기준표

❶ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ p, q의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 15 다항식의 결정

본책 61쪽

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 상수)이면

➡ $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같다.

② $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (β는 상수)일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면

➡ $\lim_{x\to a}f(x)=0$

0376 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+1}=2$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x+1)(x-1)}=-1$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=2(x-1)(x+a)$ (a는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\dfrac{2(x+a)}{x+1}=\dfrac{2(1+a)}{2}=-1$

$\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=2(x-1)(x-2)$이므로

$f(-1)=2\cdot(-2)\cdot(-3)=12$

답 12

0377 $\lim_{x\to4}\dfrac{f(x)}{x-4}=9$에서 $x\to4$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to4}f(x)=0$이므로 $f(4)=0$ ··· ❶

$f(x)=(x-4)(x+a)$ (a는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to4}\dfrac{(x-4)(x+a)}{x-4}=\lim_{x\to4}(x+a)=4+a$

따라서 $4+a=9$이므로 $a=5$

$f(x)=(x-4)(x+5)$이므로 ··· ❷

$\lim_{x\to2}\dfrac{f(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{(x+2-4)(x+2+5)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+7)=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준표

❶ $f(4)=0$임을 알 수 있다.	40%
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $\lim_{x\to2}\dfrac{f(x+2)}{x-2}$의 값을 구할 수 있다.	20%

0378 조건 (가)에서 $f(x)$는 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 3인 삼차식임을 알 수 있다.

또 조건 (나)에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$ $\therefore f(0)=0$

$f(x)=x^3+3x^2+ax$ (a는 상수)로 놓으면 조건 (나)에서

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{x(x^2+3x+a)}{x}$

$=\lim_{x\to0}(x^2+3x+a)=a=4$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2+4x$이므로 구하는 나머지는

$f(-1)=(-1)^3+3\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)=-2$

답 -2

SSEN 특강

나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

➡ $R=f(a)$

0379 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^2}{2x-3}=a$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 4인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-2$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$f(x)=4(x-1)(x+k)$(k는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{4(x-1)(x+k)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}4(x+k)=4(1+k)=-2$$
$$\therefore k=-\frac{3}{2}$$

따라서 $f(x)=4(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)=4x^2-10x+6$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-10x+6-4x^2}{2x-3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-10x+6}{2x-3}$$
$$=-5=a$$

답 ③

0380 주어진 조건에 의하여 $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식) ⋯⋯ ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠을 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-2)Q(x)=-1$$

$\therefore Q(1)=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=5$에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-1)Q(x)=5$$

$\therefore Q(2)=5$ ⋯⋯ ㉢

㉠에서 $Q(x)$의 차수가 낮아지면 $f(x)$의 차수도 낮아진다.

㉡, ㉢을 모두 만족시키는 다항식 $Q(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차식이므로

$Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

로 놓으면 ㉡, ㉢에서

$a+b=1$, $2a+b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=4$, $b=-3$

따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(4x-3)$이므로

$g(3)=2\cdot1\cdot9=18$

답 ③

0381 $\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-x^2}{x+3}=4$에서 $x\longrightarrow-3$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-3}\{f(x)-x^2\}=0$이므로 $\quad f(-3)-9=0$

$\therefore f(-3)=9$

$g(x)=f(x)-f(-3)=f(x)-9$이므로

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)g(x)}{x^2-9}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{f(x)\{f(x)-9\}}{x^2-9}=\lim_{x\to-3}\frac{\{f(x)\}^2-9f(x)}{x^2-9}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2f(x)-9f(x)}{x^2-9}$$
$$=\lim_{x\to-3}\left[\frac{f(x)\{f(x)-x^2\}}{(x+3)(x-3)}+\frac{f(x)(x^2-9)}{x^2-9}\right]$$
$$=\lim_{x\to-3}\left\{\frac{f(x)}{x-3}\cdot\frac{f(x)-x^2}{x+3}+f(x)\right\}$$
$$=\frac{f(-3)}{-6}\cdot4+f(-3)=-6+9=3$$

답 ③

16 함수의 극한의 대소 관계

본책 [illegible]쪽

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$($\alpha$는 실수)이면

➡ $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

0382 $2x+3<f(x)<2x+7$의 각 변을 세제곱하면

$(2x+3)^3<\{f(x)\}^3<(2x+7)^3$

$x\longrightarrow\infty$일 때 $x>0$이므로 각 변을 x^3+1로 나누면

$$\frac{(2x+3)^3}{x^3+1}<\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}<\frac{(2x+7)^3}{x^3+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+7)^3}{x^3+1}=8$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}=8$$

답 ③

0383 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{2x^2-1}{x^2+1}\le f(x)\le\frac{2x^2+5}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{x^2+1}=2$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$$

답 2

0384 $\sqrt{4x^2+3x}-1<[\sqrt{4x^2+3x}\,]\le\sqrt{4x^2+3x}$이므로

$\sqrt{4x^2+3x}-1-\sqrt{x}<[\sqrt{4x^2+3x}\,]-\sqrt{x}\le\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt{x}$

$x\longrightarrow\infty$일 때 $x>0$이므로 각 변을 x로 나누면

$$\frac{\sqrt{4x^2+3x}-1-\sqrt{x}}{x}<\frac{[\sqrt{4x^2+3x}\,]-\sqrt{x}}{x}\le\frac{\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt{x}}{x}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x}-1-\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt{x}}{x}=2$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[\sqrt{4x^2+3x}\,]-\sqrt{x}}{x}=2$$

답 ②

17 함수의 극한의 활용

본책 [illegible]쪽

(i) 구하는 선분의 길이 또는 점의 좌표를 식으로 나타낸다.

(ii) 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

0385 P$(x,\ \sqrt{2x-2})$, Q$(x,\ 2)$이고 $x>3$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}=x-3,\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2x-2}-2$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to3+}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}&=\lim_{x\to3+}\frac{x-3}{\sqrt{2x-2}-2}\\&=\lim_{x\to3+}\frac{(x-3)(\sqrt{2x-2}+2)}{(\sqrt{2x-2}-2)(\sqrt{2x-2}+2)}\\&=\lim_{x\to3+}\frac{(x-3)(\sqrt{2x-2}+2)}{2(x-3)}\\&=\lim_{x\to3+}\frac{\sqrt{2x-2}+2}{2}=2\end{aligned}$$

답 ④

0386 직선 OP의 기울기가 $\frac{2t^2}{t}=2t$이므로 점 P를 지나고 직선 OP와 수직인 직선의 방정식은

$$y-2t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)$$ ⋯ ❶

위의 식에 $x=0$을 대입하면 $y=2t^2+\frac{1}{2}$이므로

$$f(t)=2t^2+\frac{1}{2}$$ ⋯ ❷

$$\therefore \lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}\left(2t^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준표

❶ 점 P를 지나고 직선 OP와 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ $f(t)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $\lim_{t\to0}f(t)$의 값을 구할 수 있다.	30%

0387 $\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(t-3)^2+16t},\ \overline{\mathrm{PH}}=t$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PH}})&=\lim_{t\to\infty}\{\sqrt{(t-3)^2+16t}-t\}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{(t-3)^2+16t-t^2}{\sqrt{(t-3)^2+16t}+t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{10t+9}{\sqrt{t^2+10t+9}+t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{10+\frac{9}{t}}{\sqrt{1+\frac{10}{t}+\frac{9}{t^2}}+1}\\&=5\end{aligned}$$

답 ⑤

0388 점 C의 좌표를 $(0,\ y)$, 점 P의 좌표를 $\left(x,\ \frac{1}{2}x^2\right)$으로 놓으면

$\overline{\mathrm{CO}}=\overline{\mathrm{CP}}$, 즉 $\overline{\mathrm{CO}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$이므로

$$y^2=x^2+\left(\frac{1}{2}x^2-y\right)^2,\quad y^2=x^2+\frac{1}{4}x^4-x^2y+y^2$$

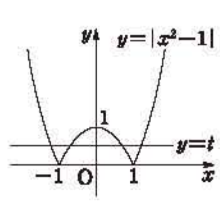
$$\therefore y=1+\frac{1}{4}x^2\ (\because x\neq0)$$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $x\longrightarrow0$이므로 점 C가 한없이 가까워지는 점의 y좌표는

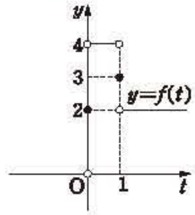
$$\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{4}x^2\right)=1$$

답 1

0389 직선 $y=t$와 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프는 [그림 1]과 같으므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 $\lim_{t\to0+}f(t)=4,\ \lim_{t\to1+}f(t)=2$이므로 $\alpha=4,\ \beta=2$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta}=2$$

답 ②

0390 전략 $f(a)$에서 a가 유리수인지 무리수인지 확인한다.

풀이 ① $1-\frac{1}{n}$은 유리수이므로

$$\lim_{n\to\infty}f\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2=1$$

② $1+\frac{\sqrt{2}}{n}$는 무리수이므로

$$\lim_{n\to\infty}f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^3=1$$

③ $-1+\frac{\sqrt{2}}{n}$는 무리수이므로

$$\lim_{n\to\infty}f\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^3=-1$$

④ x가 유리수이면 $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}x^2=1$

x가 무리수이면 $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}x^3=1$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=1$

⑤ x가 유리수이면 $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}x^2=1$

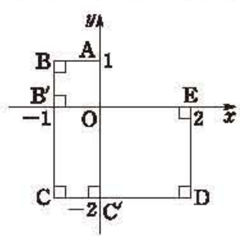
x가 무리수이면 $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}x^3=-1$

따라서 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

답 ⑤

0391 전략 먼저 $0\le t\le12$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B′, 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 C′이라 하면 P$(a,\ b)$는 다음과 같다.



$0\le t\le1$일 때, 선분 OA 위에 있으므로 P$(0,\ t)$

$1<t<2$일 때, 선분 AB 위에 있으므로 P$(1-t,\ 1)$

$2\le t<3$일 때, 선분 BB′ 위에 있으므로 P$(-1,\ 3-t)$

$3\le t<5$일 때, 선분 B′C 위에 있으므로 P$(-1,\ 3-t)$

$5\le t\le6$일 때, 선분 CC′ 위에 있으므로 P$(t-6,\ -2)$

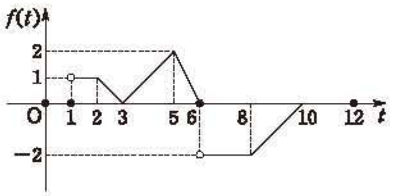
$6<t<8$일 때, 선분 C′D 위에 있으므로 P$(t-6,\ -2)$

$8\le t<10$일 때, 선분 DE 위에 있으므로 P$(2,\ t-10)$

$10\le t\le12$일 때, 선분 EO 위에 있으므로 P$(12-t,\ 0)$

따라서 $0\le t\le 12$에서 함수 $f(t)$와 그 그래프는 다음과 같다.

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (0\le t\le 1) \\ 1 & (1<t<2) \\ -t+3 & (2\le t<3) \\ t-3 & (3\le t<5) \\ -2t+12 & (5\le t\le 6) \\ -2 & (6<t<8) \\ t-10 & (8\le t<10) \\ 0 & (10\le t\le 12) \end{cases}$$



$0\le t\le 12$에서 $\lim_{t\to k-} f(t)>\lim_{t\to k+} f(t)$를 만족시키는 k의 값은 6이고, 함수 $f(t)$는 임의의 양수 t에 대하여 $f(t)=f(t+12)$를 만족시킨다. 따라서 $0<k<50$에서 주어진 조건을 만족시키는 k의 값은 6, 18, 30, 42이므로 구하는 합은

$6+18+30+42=96$ 답 ③

0392 전략 정수 n에 대하여

$n<x\le n+1$ ➡ $<x>=n+1$ ➡ $\lim_{x\to n+} <x>=n+1$

$n-1<x\le n$ ➡ $<x>=n$ ➡ $\lim_{x\to n-} <x>=n$

풀이 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to -1$일 때 $t\to 2-$이고 $x\to 1$일 때 $t\to -1+$이므로

$\lim_{x\to -1} <f(x)>+\lim_{x\to 1} <f(x)>$

$=\lim_{t\to 2-} <t>+\lim_{t\to -1+} <t>$

$=2+0=2$ 답 2

0393 전략 x가 정수인 경우와 정수가 아닌 경우로 나누어 $f(x)$를 구한다.

풀이 ㄱ. (i) $x=n$ (n은 정수)일 때,

$f(x)=[x]+[-x]=n-n=0$

(ii) $x=n+\alpha$ (n은 정수, $0<\alpha<1$)일 때,

$-x=-n-\alpha=-n-1+(1-\alpha)$

이므로 $f(x)=[x]+[-x]=n+(-n-1)=-1$

(i), (ii)에서 치역은 $\{0, -1\}$이다.

ㄴ. (i) $a=n$ (n은 정수)일 때,

$x\to a+$이면 $n<x<n+1$, $-n-1<-x<-n$이므로

$\lim_{x\to a+} ([x]+[-x])=n+(-n-1)=-1$

$x\to a-$이면 $n-1<x<n$, $-n<-x<-n+1$이므로

$\lim_{x\to a-} ([x]+[-x])=(n-1)+(-n)=-1$

따라서 $\lim_{x\to a} f(x)=-1$이다.

(ii) $a\ne n$ (n은 정수)일 때,

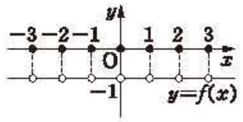
$\lim_{x\to a} f(x)$의 값은 항상 존재하며 그 값은 -1이다.

(i), (ii)에서 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재한다.

ㄷ. [반례] $f(0)=0$이지만 $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

다른 풀이 ㄴ. ㄱ에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재한다.



0394 전략 좌극한과 우극한의 값을 각각 비교한다.

풀이 ㄱ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 1+} g(f(x))=\lim_{t\to 0+} g(t)=1$

또 $x\to 1-$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x\to 1-} g(f(x))=g(1)=2$

따라서 $\lim_{x\to 1+} g(f(x))\ne\lim_{x\to 1-} g(f(x))$이므로

$\lim_{x\to 1} (g\circ f)(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to 2+$일 때 $t\to 1-$이므로

$\lim_{x\to 2+} f(g(x))=\lim_{t\to 1-} f(t)=1$

또 $x\to 2-$일 때 $t\to 2-$이므로

$\lim_{x\to 2-} f(g(x))=\lim_{t\to 2-} f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(g(x))=1$

ㄷ. $\lim_{x\to 2+} f(x)g(x)=1\cdot 1=1$, $\lim_{x\to 2-} f(x)g(x)=1\cdot 2=2$

따라서 $\lim_{x\to 2+} f(x)g(x)\ne\lim_{x\to 2-} f(x)g(x)$이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

0395 전략 a의 값의 범위를 나누어 $f(a)$의 값을 구한다.

풀이 $A=\{x\,|\,x^2-3x+2=0\}$에서 $A=\{1, 2\}$

$B=\{x\,|\,(x-a)(x-a-3)\le 0\}$에서 $B=\{x\,|\,a\le x\le a+3\}$

$f(a)=n(A\cap B)$이므로

(i) $a<-2$일 때, $f(a)=0$

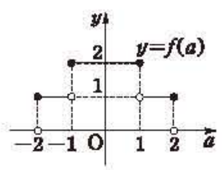
(ii) $-2\le a<-1$일 때, $f(a)=1$

(iii) $-1\le a\le 1$일 때, $f(a)=2$

(iv) $1<a\le 2$일 때, $f(a)=1$

(v) $a>2$일 때, $f(a)=0$

이상에서 $y=f(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $\lim_{a\to 1+} f(a)=1$, $\lim_{a\to 1-} f(a)=2$이므로

$\lim_{a\to 1} f(a)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{a\to 2+} f(a)=0$, $f(2)=1$이므로

$\lim_{a\to 2+} f(a)<f(2)$

ㄷ. $a\to -2+$일 때 $f(a)=1$이므로

$\lim_{a\to -2+} f(f(a))=f(1)=2$

$a\to -2-$일 때 $f(a)=0$이므로

$\lim_{a\to -2-} f(f(a))=f(0)=2$

$\therefore \lim_{a\to -2} f(f(a))=2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0396 전략 먼저 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구한다.

풀이 $x\neq 0$, $g(x)\neq -2$일 때, 조건 (가)의 식의 양변을 $x\{g(x)+2\}$로 나누면 $\frac{f(x)}{x}=\frac{g(x)-2}{g(x)+2}$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-2}{g(x)+2}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}\ (\because \text{조건 (나)})$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x+f(x)g(x)}{x^2-f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{f(x)}{x}\cdot g(x)}{x-\frac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{3}\cdot 1}{0+\frac{1}{3}}=2$$

답 2

0397 전략 $x>1$, $x=1$, $x<1$로 경우를 나누어 x^2과 $(x-2)^2$의 대소를 비교한다.

풀이 $x^2-(x-2)^2=4(x-1)$에서

(i) $x<1$일 때, $x^2<(x-2)^2$, 즉 $0\le\left(\frac{x}{x-2}\right)^2<1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(x-2)^{2n+1}}{x^{2n}+(x-2)^{2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x\left(\frac{x}{x-2}\right)^{2n}+(x-2)}{\left(\frac{x}{x-2}\right)^{2n}+1}$$
$$=x-2$$

(ii) $x=1$일 때,

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2n+1}+(-1)^{2n+1}}{1^{2n}+(-1)^{2n}}$$
$$=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $x>1$일 때, $x^2>(x-2)^2$, 즉 $0\le\left(\frac{x-2}{x}\right)^2<1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(x-2)^{2n+1}}{x^{2n}+(x-2)^{2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x+(x-2)\left(\frac{x-2}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{x-2}{x}\right)^{2n}}$$
$$=x$$

$$\therefore \lim_{x\to 1+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=1+(-1)=0$$

답 ③

0398 전략 인수정리를 이용하여 삼차방정식의 근을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-(3a+1)x^2+2(a-1)x+a+2$로 놓으면

$f(1)=0$이므로 $f(x)=(x-1)(x^2-3ax-a-2)$ ← 조립제법을 이용한다.

이때 $x^2-3ax-a-2=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2+4a+8}}{2}$$

따라서 주어진 삼차방정식의 세 근 중 가장 작은 근은 $\frac{3a-\sqrt{9a^2+4a+8}}{2}$이므로

$$\lim_{a\to\infty}\alpha=\lim_{a\to\infty}\frac{3a-\sqrt{9a^2+4a+8}}{2}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\frac{-2a-4}{3a+\sqrt{9a^2+4a+8}}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\frac{-2-\frac{4}{a}}{3+\sqrt{9+\frac{4}{a}+\frac{8}{a^2}}}=-\frac{1}{3}$$

답 ②

SSEN 특강

인수정리

다항식 $f(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어지기 위한 필요충분조건은 $f(a)=0$이다.

➡ 다항식 $f(x)$가 x에 대한 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다.
$\Longleftrightarrow$ $f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ $f(a)=0$

0399 전략 함수의 극한의 성질을 이용하여 식을 정리한다.

풀이 $n=1$일 때, $\lim_{x\to 1}g(x)=g(1)=0$이고 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=0$ $\quad\therefore f(1)=0$

$f(x)$, $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수),
$g(x)=(x-1)(x^2+cx+d)$ (c, d는 상수)

로 놓으면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+ax+b)}{(x-1)(x^2+cx+d)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}=\frac{1+a+b}{1+c+d}=0$$

이므로 $1+a+b=0$ $\quad\therefore a+b=-1$ …… ㉠

조건 (나)에서 $n=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x^2+ax+b)}{(x-1)(x^2+cx+d)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}=\frac{4+2a+b}{4+2c+d}=0$$

이므로 $4+2a+b=0$ $\quad\therefore 2a+b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=2$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2-3x+2)=(x-1)^2(x-2)$

한편 조건 (나)에서 $n=3$일 때,

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x^2+cx+d)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+cx+d}$$
$$=\frac{2}{9+3c+d}=(3-1)(3-2)=2$$

이므로 $9+3c+d=1$ $\quad\therefore 3c+d=-8$ …… ㉢

$n=4$일 때,

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x^2+cx+d)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+cx+d}$$
$$=\frac{6}{16+4c+d}=(4-1)(4-2)=6$$

이므로 $16+4c+d=1$ $\quad\therefore 4c+d=-15$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $c=-7$, $d=13$

따라서 $g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$이므로

$g(5)=4\cdot(25-35+13)=4\cdot3=12$ 답 ⑤

0400 전략 $\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=\infty$일 때, $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{3}$이므로 $a=3$

$\lim_{x\to-1}|f(x)|=\infty$, $\lim_{x\to5}|f(x)|=\infty$이고,

$\lim_{x\to-1}(x^2-3x+2)=6$, $\lim_{x\to5}(x^2-3x+2)=12$이므로

$\lim_{x\to-1}(ax^2+bx+c)=0$, $\lim_{x\to5}(ax^2+bx+c)=0$

$$\therefore ax^2+bx+c=a(x+1)(x-5)=3(x+1)(x-5)$$
$$=3x^2-12x-15$$

따라서 $a=3$, $b=-12$, $c=-15$이므로

$a+b+c=-24$ 답 -24

0401 전략 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 d_1, d_2를 구한다.

풀이 $d_1=\sqrt{(t-1)^2+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2-t+1}$,

$d_2=\sqrt{(t-2)^2+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2-3t+4}$이므로

$$\lim_{t\to\infty}(d_1-d_2)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2-3t+4})$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t-3}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2-3t+4}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2-\frac{3}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}}$$
$$=\frac{2}{1+1}=1$$

답 1

0402 전략 원이 직선에 접하므로 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다.

풀이 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원이 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$에 접하므로

$$r=\frac{\left|a-\left(a-\frac{1}{a}\right)\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}a}\ (\because a>0)$$

점 A와 직선 $y=x$ 사이의 거리

이때 원 위의 한 점에서 원점 O까지의 거리의 최솟값은 원의 중심 A에서 원점까지의 거리에서 반지름의 길이를 뺀 것과 같다.

즉 $\overline{OA}=\sqrt{a^2+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{2a^2-2+\frac{1}{a^2}}$에서

$$d=\overline{OA}-r=\sqrt{2a^2-2+\frac{1}{a^2}}-\frac{1}{\sqrt{2}a}$$
$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{d}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{2a^2-2+\frac{1}{a^2}}-\frac{1}{\sqrt{2}a}}{a}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\left(\sqrt{2-\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^4}}-\frac{1}{\sqrt{2}a^2}\right)=\sqrt{2}$$

답 ②

0403 전략 두 직선 PQ, AB의 방정식을 각각 구한 후 $\overline{AP}=\overline{BQ}$임을 이용하여 두 직선의 교점의 좌표를 한 문자에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 직선 AB의 방정식은 $y=-2x+2$ ...... ㉠

직선 PQ의 방정식은 $y=-\frac{q}{p}x+q$ ...... ㉡

$\overline{AP}=p-1$, $\overline{BQ}=2-q$이므로 $\overline{AP}=\overline{BQ}$에서

$p-1=2-q$ $\quad\therefore q=3-p$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $y=\frac{p-3}{p}x+3-p$이므로 두 직선 PQ와 AB의 교점의 좌표는 $-2x+2=\frac{p-3}{p}x+3-p$에서

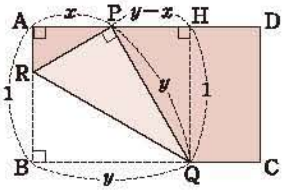
$$\frac{3p-3}{p}x=p-1$$
$$\therefore x=\frac{p(p-1)}{3(p-1)}=\frac{p}{3},\ y=-\frac{2}{3}p+2\ (\because ㉠)$$

두 점 P, Q가 각각 A, B에 한없이 가까워질 때 $p\to1+$이므로

$$\lim_{p\to1+}x=\lim_{p\to1+}\frac{p}{3}=\frac{1}{3},$$
$$\lim_{p\to1+}y=\lim_{p\to1+}\left(-\frac{2}{3}p+2\right)=\frac{4}{3}$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$ 답 ③

0404 전략 $\overline{BQ}=y$라 하고 x와 y 사이의 관계식을 구하여 $S(x)$를 x에 대한 식으로 나타낸다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{BQ}=y$라 하면 $\overline{PH}=y-x$, $\overline{PQ}=\overline{BQ}=y$이므로 직각삼각형 PQH에서

$y^2=(y-x)^2+1^2$

$y^2=y^2-2xy+x^2+1$ $\quad\therefore y=\frac{x^2+1}{2x}$ ...... ㉠

$\triangle$RPA와 $\triangle$PQH에서

$\angle A=\angle H=90°$, $\angle APR=\angle HQP$

이므로 $\triangle RPA\backsim\triangle PQH$ (AA 닮음)

이때 $\overline{AP}:\overline{HQ}=\overline{PR}:\overline{QP}$에서

$x:1=\overline{PR}:y$ $\quad\therefore \overline{PR}=xy$

따라서 $S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{PR}\cdot\overline{PQ}=\frac{1}{2}\cdot xy\cdot y=\frac{1}{2}xy^2$이므로

$$\lim_{x\to0+}xS(x)=\lim_{x\to0+}\frac{x^2y^2}{2}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2}{2}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{x^4+2x^2+1}{8}=\frac{1}{8}$$

답 ⑤

0405 전략 점 A의 좌표를 구한 후 $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 A는 곡선 $y=-x^2+6$과 직선 $y=x$의 교점이므로 점 A의 x좌표는

$-x^2+6=x$, $\quad x^2+x-6=0$

$(x-2)(x+3)=0$ $\quad\therefore x=2\ (\because x>0)$

따라서 점 A의 좌표는 $(2,\ 2)$이고 이때 점 Q의 x좌표는 점 A의 x좌표와 같으므로 $\quad\overline{PQ}=2-a$

또 점 R의 x좌표는 점 P의 x좌표와 같고 점 R는 곡선 $y=-x^2+6$ 위의 점이므로

$$\overline{\mathrm{PR}}=(-a^2+6)-a=-a^2-a+6$$

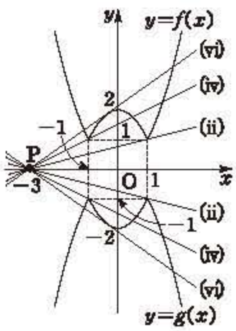
$$\begin{aligned}\therefore \lim_{a\to 2-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}}&=\lim_{a\to 2-}\frac{2-a}{-a^2-a+6}=\lim_{a\to 2-}\frac{a-2}{a^2+a-6}\\&=\lim_{a\to 2-}\frac{a-2}{(a+3)(a-2)}\\&=\lim_{a\to 2-}\frac{1}{a+3}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

답 ②

0406 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그린 후, 점 P$(-3,\ 0)$을 지나는 직선을 그려 a의 값의 범위에 따른 $h(a)$의 값을 찾는다.

풀이 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2 & (-1\le x\le 1)\\ x^2 & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\end{cases}$ 이고 $g(x)=-f(x)$

이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축에 대하여 대칭이다. ··· ❶



점 P$(-3,\ 0)$을 지나고 기울기가 a인 직선을 l이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=a(x+3)$

직선 l이 점 $(1,\ 1)$을 지날 때 기울기 a는

$$a=\frac{1-0}{1-(-3)}=\frac{1}{4}$$

직선 l이 점 $(-1,\ 1)$을 지날 때 기울기 a는 $a=\dfrac{1-0}{-1-(-3)}=\dfrac{1}{2}$

직선 l이 곡선 $y=-x^2+2$와 접할 때 a의 값을 m이라 하면 a의 값의 범위에 따른 $h(a)$의 값은 다음과 같다.

(i) $|a|<\frac{1}{4}$일 때, $h(a)=0$

(ii) $|a|=\frac{1}{4}$일 때, $h(a)=1$

(iii) $\frac{1}{4}<|a|<\frac{1}{2}$일 때, $h(a)=2$

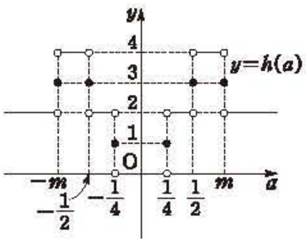
(iv) $|a|=\frac{1}{2}$일 때, $h(a)=3$

(v) $\frac{1}{2}<|a|<m$일 때, $h(a)=4$

(vi) $|a|=m$일 때, $h(a)=3$

(vii) $|a|>m$일 때, $h(a)=2$

이상에서 함수 $y=h(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❷



$\lim\limits_{a\to k+}h(a)+\lim\limits_{a\to k-}h(a)=6$을 만족시키는 k의 값은 $\pm m$, $\pm\frac{1}{2}$이므로 그 개수는 4이다. ··· ❸

답 4

채점 기준표

❶ 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	20%
❷ a의 값의 범위에 따라 $h(a)$의 값을 구하고 함수 $y=h(a)$의 그래프를 그릴 수 있다.	50%
❸ $\lim\limits_{a\to k+}h(a)+\lim\limits_{a\to k-}h(a)=6$을 만족시키는 k의 값의 개수를 구할 수 있다.	30%

0407 전략 모든 실수 x에 대하여 $f(x-5)=f(x)-1$이 성립함을 이용하여 주어진 그래프 이외의 부분을 더 그려 본다.

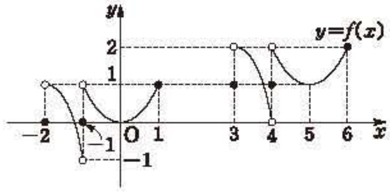
풀이 $x+2=s$, $-\frac{1}{x}=t$라 하면 $x\to 1-$일 때 $s\to 3-$이고, $t\to -1-$이므로

$$\lim_{x\to 1-}f(x+2)f\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{s\to 3-}f(s)\lim_{t\to -1-}f(t)=2 \cdots ㉠$$

또 $x-1=u$, $x^2=v$라 하면 $x\to 2+$일 때 $u\to 1+$이고, $v\to 4+$이므로

$$\lim_{x\to 2+}f(x-1)f(x^2)=\lim_{u\to 1+}f(u)\lim_{v\to 4+}f(v)=-2 \cdots ㉡$$

한편 모든 실수 x에 대하여 $f(x-5)=f(x)-1$이 성립하므로 $-2\le x\le 6$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



··· ❶

위의 그래프에서 $\lim\limits_{t\to -1-}f(t)=-1$이므로 ㉠에서

$\lim\limits_{s\to 3-}f(s)=-2 \quad \therefore \lim\limits_{x\to 3-}f(x)=-2$ ··· ❷

또 $\lim\limits_{v\to 4+}f(v)=2$이므로 ㉡에서

$\lim\limits_{u\to 1+}f(u)=-1 \quad \therefore \lim\limits_{x\to 1+}f(x)=-1$ ··· ❸

$\therefore \lim\limits_{x\to 1+}f(x)+\lim\limits_{x\to 3-}f(x)=-1-2=-3$ ··· ❹

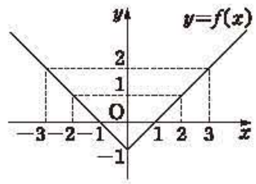
답 -3

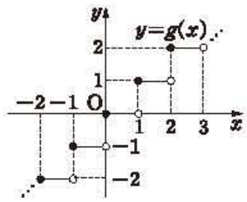
채점 기준표

❶ $-2\le x\le 6$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	30%
❷ $\lim\limits_{x\to 3-}f(x)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)+\lim\limits_{x\to 3-}f(x)$의 값을 구할 수 있다.	10%

0408 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타낸 후, 주어진 조건을 만족시키는 정수 k의 값을 구한다.

풀이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.





··· ❶

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to 1-$일 때 $t\to 1+$이므로

$\lim\limits_{x\to 1-}g\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to 1+}g(t)=1$ ··· ❷

즉 $\lim\limits_{x\to k+}g(f(x))=1$이어야 하므로 $x\to k+$일 때

$f(x)\to 1+$ 또는 $f(x)\to 2-$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=2$ ⋯➜ ③

따라서 구하는 모든 정수 k의 값의 합은

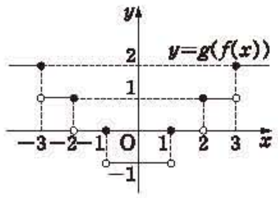
$-3+2=-1$ ⋯➜ ④

답 -1

채점 기준표

① 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	20%
② $\lim_{x\to 1-} g\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30%
③ k의 값을 구할 수 있다.	40%
④ k의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

참고 함수 $y=g(f(x))$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0409 전략 x의 값의 범위에 따라 함수 $f(x)$의 식을 구한다.

풀이 (i) $0<x<2$일 때, $\max(x,\ 2)=2$이므로

$$f(x)=2-\frac{2x-1}{x}=\frac{1}{x}$$

(ii) $x=2$일 때, $f(2)=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

(iii) $x>2$일 때, $\max(x,\ 2)=x$이므로

$$f(x)=x-\frac{2x-1}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x}$$ ⋯➜ ①

$$\therefore \lim_{x\to 2-}\frac{x-2}{f(x)-f(2)}=\lim_{x\to 2-}\frac{x-2}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 2-}\frac{2x(x-2)}{2-x}$$

$$=\lim_{x\to 2-}(-2x)=-4=a$$ ⋯➜ ②

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{\frac{x^2-2x+1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{2x^2-5x+2}{2x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(2x-1)}{2x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{2x-1}{2x}=\frac{3}{4}=b$$ ⋯➜ ③

$\therefore ab=-3$ ⋯➜ ④

답 -3

채점 기준표

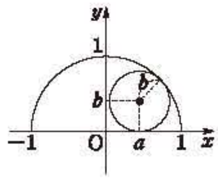
① x의 값의 범위에 따라 함수 $f(x)$의 식을 구할 수 있다.	30%
② a의 값을 구할 수 있다.	30%
③ b의 값을 구할 수 있다.	30%
④ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

0410 전략 x축에 접하는 원은 (반지름의 길이)$=|$(중심의 y좌표)$|$이다.

풀이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 반원의 방정식은

$x^2+y^2=1\ (y\ge 0)$

이 반원에 내접하고 x축에 접하는 원의 중심의 좌표가 $(a,\ b)$이므로 이 원의 반지름의 길이는 b이다.



$\therefore \sqrt{a^2+b^2}=1-b$ ⋯➜ ①

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2+b^2=(1-b)^2,\qquad a^2=-2b+1$

$\therefore b=\frac{1}{2}(1-a^2)$ ⋯➜ ②

$$\therefore \lim_{a\to -1+}\frac{b}{a+1}=\lim_{a\to -1+}\frac{1-a^2}{2(a+1)}$$

$$=\lim_{a\to -1+}\frac{-(a+1)(a-1)}{2(a+1)}$$

$$=\lim_{a\to -1+}\left\{-\frac{1}{2}(a-1)\right\}=1$$ ⋯➜ ③

답 1

채점 기준표

① 주어진 조건을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
② b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
③ $\lim_{a\to -1+}\frac{b}{a+1}$의 값을 구할 수 있다.	50%

0411 전략 직선 AP의 기울기를 구한 후, 점 P를 지나고 직선 AP에 수직인 직선 l의 방정식을 구한다.

풀이 $y=\sqrt{3x}$를 $x^2+y^2=18$에 대입하여 정리하면

$x^2+3x-18=0,\qquad (x+6)(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because x\ge 0)$ ⋯➜ ①

따라서 $\mathrm{A}(3,\ 3)$이고 직선 AP의 기울기는 $\frac{\sqrt{3a}-3}{a-3}$이므로 점 P를 지나고 직선 AP에 수직인 직선 l의 방정식은

$$y-\sqrt{3a}=\frac{3-a}{\sqrt{3a}-3}(x-a)$$ ⋯➜ ②

위의 식에 $x=0$을 대입하면 $\quad y=\frac{a(a-3)}{\sqrt{3a}-3}+\sqrt{3a}$

$$\therefore f(a)=\frac{a(a-3)}{\sqrt{3a}-3}+\sqrt{3a}$$ ⋯➜ ③

$$\therefore \lim_{a\to 3}f(a)=\lim_{a\to 3}\left\{\frac{a(a-3)}{\sqrt{3a}-3}+\sqrt{3a}\right\}$$

$$=\lim_{a\to 3}\left\{\frac{a(a-3)(\sqrt{3a}+3)}{3(a-3)}+\sqrt{3a}\right\}$$

$$=\lim_{a\to 3}\left\{\frac{a(\sqrt{3a}+3)}{3}+\sqrt{3a}\right\}$$

$$=\frac{3\cdot(3+3)}{3}+3=9$$ ⋯➜ ④

답 9

채점 기준표

① 점 A의 x좌표를 구할 수 있다.	10%
② 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30%
③ $f(a)$를 구할 수 있다.	20%
④ $\lim_{a\to 3}f(a)$의 값을 구할 수 있다.	40%

Ⅰ 함수의 극한과 연속

04 함수의 연속

0412 (1) $f(3)$이 정의되어 있지 않으므로 불연속이다.

(2) $\lim_{x\to3+} f(x)=4$, $\lim_{x\to3-} f(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to3+} f(x)\neq \lim_{x\to3-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x\to3} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

(3) $f(3)=4$이고, $\lim_{x\to3} f(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to3} f(x)\neq f(3)$$

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

답 (1) ㄱ (2) ㄴ (3) ㄷ

0413 $f(1)=1$, $\lim_{x\to1} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0414 $f(1)=0$, $\lim_{x\to1} f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0415 $x=1$일 때 함숫값 $f(1)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 답 불연속

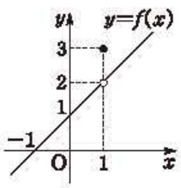
0416 $f(1)=3$,

$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$

이므로

$$\lim_{x\to1} f(x)\neq f(1)$$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.



답 불연속

0417 답 $[-1, 2]$

0418 답 $(-3, 2)$

0419 답 $[1, 5)$

0420 답 $(-5, -1]$

0421 답 $[0, \infty)$

0422 답 $(-\infty, 4)$

0423 주어진 함수의 정의역은 $9-x^2\geq0$, 즉 $-3\leq x\leq3$인 x의 값들의 집합이므로 $[-3, 3]$ 답 $[-3, 3]$

0424 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 $(-\infty, \infty)$ 답 $(-\infty, \infty)$

0425 함수 $y=x^2-4$는 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0426 함수 $y=\sqrt{5-x}$는 $5-x\geq0$일 때, 즉 구간 $(-\infty, 5]$에서 연속이다. 답 $(-\infty, 5]$

0427 함수 $y=3$은 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, \infty)$

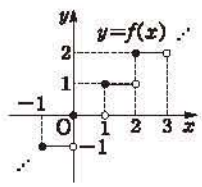
0428 함수 $y=\frac{x-1}{2x+1}$은 $x\neq-\frac{1}{2}$일 때, 즉 구간 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$에서 연속이다.

답 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

0429 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정수 n에 대하여

$$\lim_{x\to n+} f(x)=n,\ \lim_{x\to n-} f(x)=n-1$$

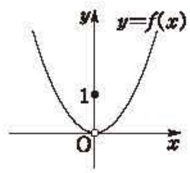
$$\therefore \lim_{x\to n+} f(x)\neq \lim_{x\to n-} f(x)$$



따라서 정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=n$(n은 정수)에서 불연속이고 그 이외의 x의 값에서는 연속이다. 답 풀이 참조

0430 $f(0)=1$, $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0} x^2=0$이므로 $\lim_{x\to0} f(x)\neq f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 그 이외의 x의 값에서는 연속이다. 답 풀이 참조



0431 ㄹ. 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$일 때 불연속이므로 실수 전체의 집합에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

이상에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0432 (1) $f(x)-g(x)=2x-(x^2+2x-8)=-x^2+8$

따라서 $f(x)-g(x)$는 다항함수이므로 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$

(2) $f(x)g(x)=2x(x^2+2x-8)=2x^3+4x^2-16x$

따라서 $f(x)g(x)$는 다항함수이므로 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$

(3) $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2+2x-8}{2x}$

따라서 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $2x\neq0$, 즉 $x\neq0$일 때 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$

(4) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x}{x^2+2x-8}=\frac{2x}{(x+4)(x-2)}$

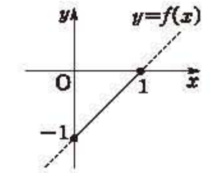
따라서 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $(x+4)(x-2)\neq0$, 즉 $x\neq-4$이고 $x\neq2$일 때 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, -4)\cup(-4, 2)\cup(2, \infty)$

답 풀이 참조

0433 답 (1) 최댓값: 없다, 최솟값: 0

(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1

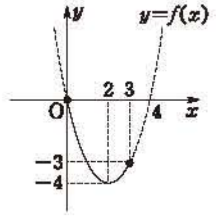
0434 함수 $f(x)=x-1$은 구간 $[0, 1]$에서 연속이고 구간 $[0, 1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 0, $x=0$에서 최솟값 -1을 갖는다.

답 최댓값: 0, 최솟값: -1

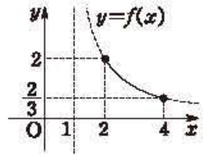
0435 함수 $f(x)=x^2-4x$는 구간 $[0, 3]$에서 연속이고 구간 $[0, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 0, $x=2$에서 최솟값 -4를 갖는다.

답 최댓값: 0, 최솟값: -4

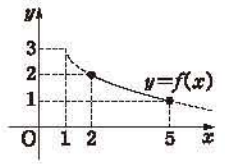
0436 함수 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$는 구간 $[2, 4]$에서 연속이고 구간 $[2, 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 2, $x=4$에서 최솟값 $\dfrac{2}{3}$를 갖는다.

답 최댓값: 2, 최솟값: $\dfrac{2}{3}$

0437 함수 $f(x)=3-\sqrt{x-1}$은 구간 $[2, 5]$에서 연속이고 구간 $[2, 5]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 2, $x=5$에서 최솟값 1을 갖는다.

답 최댓값: 2, 최솟값: 1

0438 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 $\boxed{\text{연속}}$이므로 닫힌 구간 $[1, 2]$에서 연속이다.
또 $f(1)=1$, $f(2)=4$에서 $f(1)\neq f(2)$이고, $1<\sqrt{3}<4$이므로 $\boxed{\text{사이값 정리}}$에 의하여 $f(c)=\sqrt{3}$을 만족시키는 c가 열린 구간 $(1, 2)$에 반드시 존재한다.

답 (가) 연속 (나) 사이값 정리

0439 (1) $f(1)=-1$, $f(3)=19$이므로 $\quad f(1)<10<f(3)$
(2) $f(x)$는 닫힌 구간 $[1, 3]$에서 연속이고 (1)에서 $f(1)\neq f(3)$이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=10$인 c가 열린 구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

답 풀이 참조

유형 01 함수의 연속 본책 72쪽

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속인지 알아보려면
(i) 함숫값 $f(a)$가 존재하는지
(ii) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하는지
➡ $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$와 $\lim\limits_{x\to a-}f(x)$의 값이 같은지
(iii) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$인지
를 모두 확인한다.

0440 ㄱ. $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}$
$=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-4$
$\therefore \lim\limits_{x\to -2}f(x)\neq f(-2)$
따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

ㄴ. $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.
이때 $g(1)=-1$이고,
$\lim\limits_{x\to 1+}g(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(\sqrt{x-1}-1)=-1$,
$\lim\limits_{x\to 1-}g(x)=-1$
이므로 $\quad \lim\limits_{x\to 1}g(x)=-1$
즉 $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=g(1)$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
따라서 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 1+}h(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+}x=1$
$\lim\limits_{x\to 1-}h(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x(x-1)}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1-}(-x)=-1$
$\therefore \lim\limits_{x\to 1+}h(x)\neq \lim\limits_{x\to 1-}h(x)$
따라서 $\lim\limits_{x\to 1}h(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수는 ㄴ뿐이다. 답 ②

SSEN 특강

여러 가지 함수의 연속성
① 다항함수 ➡ 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속
② 유리함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ➡ $g(x)=0$인 x에서 불연속
③ 무리함수 $y=\sqrt{f(x)}$ ➡ $f(x)\geq 0$인 x에서 연속
④ 가우스 함수 $y=[x]$ (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)
➡ $x=n$ (n은 정수)에서 불연속

0441 ① $f(-1)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.
② $\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1+}[x]^2=(-1)^2=1$
$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1-}[x]^2=(-2)^2=4$
$\therefore \lim\limits_{x\to -1+}f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1-}f(x)$
따라서 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.
③ $f(-1)=-1$이고,
$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x+1)^2=0$
이므로 $\quad \lim\limits_{x\to -1}f(x)\neq f(-1)$
따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

④ $\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{3|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1+}\frac{3(x+1)}{x+1}=3$

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1-}\frac{3|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1-}\frac{-3(x+1)}{x+1}=-3$

$\therefore \lim_{x\to-1+} f(x)\neq\lim_{x\to-1-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to-1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

⑤ $f(-1)=-2$이고,

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$$

이므로 $\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. 답 ⑤

0442 $\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+} x=a$

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a-}(x^2-2)=a^2-2$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재해야 하므로

$a=a^2-2,\quad a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0\quad \therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때, $f(-1)=-1$, $\lim_{x\to-1} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii) $a=2$일 때, $f(2)=2$, $\lim_{x\to2} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 구하는 모든 a의 값의 합은

$-1+2=1$ 답 ②

0443 $f(x)=\dfrac{1}{x-\frac{4}{x}}=\dfrac{1}{\frac{x^2-4}{x}}=\dfrac{x}{x^2-4}$

따라서 $x=0$, $x^2-4=0$인 x의 값에서 함수 $f(x)$가 정의되지 않으므로 불연속이 되는 x의 값은 -2, 0, 2의 3개이다.

답 ③

0444 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x^2-1)$이므로

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-1}{|2x^2-1|} & (2x^2-1\neq0)\\ 0 & (2x^2-1=0)\end{cases}$$

$$\therefore (f\circ g)(x)=\begin{cases}1 & (2x^2-1>0)\\ 0 & (2x^2-1=0)\\ -1 & (2x^2-1<0)\end{cases}$$ ➡ ①

즉 $(f\circ g)(x)$는 $2x^2-1=0$인 x의 값에서 불연속이므로

$2x^2=1,\quad x^2=\frac{1}{2}\quad \therefore x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ➡ ②

따라서 구하는 모든 x의 값의 곱은 $-\frac{1}{2}$이다. ➡ ③

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준표

① $(f\circ g)(x)$를 구할 수 있다.	40%
② $(f\circ g)(x)$가 불연속이 되는 모든 x의 값을 구할 수 있다.	40%
③ 모든 x의 값의 곱을 구할 수 있다.	20%

참고 $(f\circ g)(x)=\begin{cases}1 & \left(x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ 또는 }x>\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ 0 & \left(x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ -1 & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$ 이므로

$\lim_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}+}(f\circ g)(x)=-1,\quad \lim_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}-}(f\circ g)(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}+}(f\circ g)(x)\neq\lim_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}-}(f\circ g)(x)$

따라서 $\lim_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}}(f\circ g)(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 불연속이다.

$\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}+}(f\circ g)(x)=1,\quad \lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}-}(f\circ g)(x)=-1$

$\therefore \lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}+}(f\circ g)(x)\neq\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}-}(f\circ g)(x)$

따라서 $\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}}(f\circ g)(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 불연속이다.

유형 02 함수의 그래프와 연속 본책 73쪽

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 끊어져 있으면
➡ $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

0445 ㄱ, ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to1} f(x)$와 $f(1)$은 존재하지만 $\lim_{x\to1} f(x)\neq f(1)$이다.

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to1+} g(x)\neq\lim_{x\to1-} g(x)$이므로 $\lim_{x\to1} g(x)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

0446 $\lim_{x\to-1+} f(x)=1$, $\lim_{x\to-1-} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to-1+} f(x)\neq\lim_{x\to-1-} f(x)$

즉 $\lim_{x\to-1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $a=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이고 $\lim_{x\to1} f(x)=1$, $f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

$\lim_{x\to-1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $y=f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

$\therefore b=2$

$\therefore ab=2$ 답 2

04 함수의 연속

0447 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to0}f(x)=2$이지만 $f(0)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

$\therefore a=0$ ⋯ ❶

이때 $f(a+3)=f(3)=1$이므로 $b=1$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준표

❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0448 ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $x-1=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to0+$이고, $x\to1-$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x-1)=\lim_{t\to0+}f(t)=-1$

$\lim_{x\to1-}f(x-1)=\lim_{t\to0-}f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to1+}f(x-1)\neq\lim_{x\to1-}f(x-1)$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x-1)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x-1)$은 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $x+1=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1+$이고, $x\to0-$일 때 $t\to1-$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}f(x)f(x+1)&=\lim_{x\to0+}f(x)\lim_{x\to0+}f(x+1)\\&=\lim_{x\to0+}f(x)\lim_{t\to1+}f(t)\\&=-1\cdot0=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}f(x)f(x+1)&=\lim_{x\to0-}f(x)\lim_{x\to0-}f(x+1)\\&=\lim_{x\to0-}f(x)\lim_{t\to1-}f(t)\\&=1\cdot0=0\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)f(x+1)=0$

이때 $f(0)f(0+1)=f(0)f(1)=0\cdot0=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)f(x+1)=f(0)f(0+1)$

따라서 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

유형 03 함수의 그래프와 연속; 합성함수 본책 71쪽

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 합성함수 $f(g(x))$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a+}f(g(x))=\lim_{x\to a-}f(g(x))=f(g(a))$

0449 ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to-1}f(f(x))=\lim_{t\to-1+}f(t)=-1$

ㄷ. ㄴ에서 $\lim_{x\to-1}f(f(x))=-1$이고, $f(f(-1))=f(0)=1$이므로

$\lim_{x\to-1}f(f(x))\neq f(f(-1))$

따라서 $f(f(x))$는 $x=-1$에서 불연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0450 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 함수 $g(f(x))$의 연속성을 조사해 보자.

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1-$이고, $x\to0-$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to1-}g(t)$, $\lim_{x\to0-}g(f(x))=\lim_{t\to-1+}g(t)$이고

$g(f(0))=g(0)$이다.

ㄱ. $\lim_{x\to-1+}g(x)=\lim_{x\to1-}g(x)=0$, $g(0)=0$이므로 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to-1+}g(x)=\lim_{x\to1-}g(x)=0$, $g(0)=0$이므로 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to-1+}g(x)=1$, $\lim_{x\to1-}g(x)=-1$에서

$\lim_{x\to-1+}g(x)\neq\lim_{x\to1-}g(x)$이므로 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 $g(f(x))$가 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0451 ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=1\cdot0=0$

$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=-1\cdot0=0$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$

이때 $f(0)g(0)=0\cdot0=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to0}f(g(x))=f(0)=0$이고 $f(g(0))=f(0)=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(g(x))=f(g(0))$

따라서 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1-$이고, $x\to0-$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to1-}g(t)=0$

$\lim_{x\to0-}g(f(x))=\lim_{t\to-1+}g(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}g(f(x))=0$

이때 $g(f(0))=g(0)=0$이므로

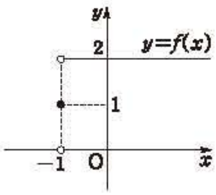
$\lim_{x\to0}g(f(x))=g(f(0))$

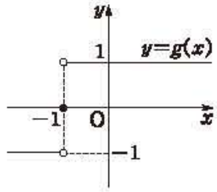
따라서 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 $x=0$에서 연속이다.

답 ⑤

0452 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.





ㄱ. $x>-1$일 때, $\quad f(f(x))=f(2)=2$

$x=-1$일 때, $\quad f(f(x))=f(1)=2$

$x<-1$일 때, $\quad f(f(x))=f(0)=2$

따라서 $f(f(x))$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to-1+} f(g(x))=f(1)=2$

$\lim_{x\to-1-} f(g(x))=f(-1)=1$

$\therefore \lim_{x\to-1+} f(g(x)) \neq \lim_{x\to-1-} f(g(x))$

따라서 $\lim_{x\to-1} f(g(x))$의 값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to-1+} g(f(x))=g(2)=1$, $\lim_{x\to-1-} g(f(x))=g(0)=1$

$\therefore \lim_{x\to-1} g(f(x))=1$

이때 $g(f(-1))=g(1)=1$이므로 $g(f(x))$는 $x=-1$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

유형 04 함수가 연속일 조건 (1) 본책 73쪽

$x\neq a$에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 함수

$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\neq a) \\ k & (x=a) \end{cases}$ (k는 상수)

가 모든 실수 x에 대하여 연속이면 ⇨ $\lim_{x\to a} g(x)=k$

0453 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\quad \lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2x^3-2x^2-x+1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x^2-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(2x^2-1)=1$$

이므로 $\quad k=1$ 답 ①

0454 $f(0)=-2$이므로 $\quad -b=-2 \quad \therefore b=2$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2-} f(x)=f(2)$

$4+a=4-b \quad \therefore a=-2$

또 $x=-2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to-2+} f(x)=\lim_{x\to-2-} f(x)=f(-2)$

$4-b=-6-c \quad \therefore c=-8$

$\therefore abc=(-2)\cdot2\cdot(-8)=32$ 답 32

0455 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to1} f(x)g(x)=f(1)g(1)$이어야 한다.

$f(1)g(1)=(1+3)(1+k)=4+4k$이고, ⋯ ❶

$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}(-x+2)(x+k)=1+k$, ⋯ ❷

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}(x+3)(x+k)=4+4k$ ⋯ ❸

이므로 $\quad 1+k=4+4k, \quad 3k=-3$

$\therefore k=-1$ ⋯ ❹

답 -1

채점 기준표

❶ $f(1)g(1)$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $\lim_{x\to1+} f(x)g(x)$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $\lim_{x\to1-} f(x)g(x)$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❹ k의 값을 구할 수 있다.	10%

0456 함수 $\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to0}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$이어야 한다. 이때 $\{g(0)\}^2=\{f(1)\}^2=k^2$이고

$x+1=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1+$이므로

$$\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0+}\{f(x+1)\}^2=\lim_{t\to1+}\{f(t)\}^2$$
$$=\lim_{t\to1+}(t^2-t+k)^2$$
$$=(1^2-1+k)^2=k^2$$

또 $x-1=t$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $t\to-1-$이므로

$$\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0-}\{f(x-1)\}^2=\lim_{t\to-1-}\{f(t)\}^2$$
$$=\lim_{t\to-1-}(t^2-t+k)^2$$
$$=\{(-1)^2-(-1)+k\}^2$$
$$=(2+k)^2$$

따라서 $k^2=(2+k)^2$이므로

$4k+4=0 \quad \therefore k=-1$ 답 -1

다른 풀이 $f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)+k=x^2+x+k$,

$f(x-1)=(x-1)^2-(x-1)+k=x^2-3x+2+k$

이므로 $\quad g(x)=\begin{cases} x^2+x+k & (x\geq0) \\ x^2-3x+2+k & (x<0) \end{cases}$

이때 $\{g(0)\}^2=k^2$이고,

$\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0+}(x^2+x+k)^2=k^2$,

$\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0-}(x^2-3x+2+k)^2=(2+k)^2$

이므로 $\quad k^2=(2+k)^2, \quad 4k+4=0$

$\therefore k=-1$

0457 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=3$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to3} f(x)$의 값이 존재한다.

즉 $\lim_{x\to3+} f(x)=\lim_{x\to3-} f(x)$이므로

$\lim_{x\to3+} 3(x-3)=\lim_{x\to3-}(-x^2+ax+b)$

$\therefore -9+3a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

이때 $f(x)=f(x+4)$이므로 $\quad f(0)=f(4)$

$\therefore b=3(4-3)=3$

$b=3$을 ㉠에 대입하면 $-9+3a+3=0$ $\therefore a=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x+3 & (0\le x<3) \\ 3(x-3) & (3\le x\le 4) \end{cases}$ 이므로

$f(10)=f(6)=f(2)=-4+4+3=3$

답 ④

유형 05 함수가 연속일 조건 (2) 본책 76쪽

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 ➡ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

(ii) 분수 꼴의 함수에서 $x\to a$일 때

① (분모) → 0이고 극한값이 존재하면 (분자) → 0이다.

② (분자) → 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) → 0이다.

0458 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2-ax-2}{x-1}=b$ ...... ㉠

$x\to 1$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이다.

즉 $\lim_{x\to 1}(x^2-ax-2)=0$이므로

$1-a-2=0$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$$

$\therefore b=3$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+3^2=10$

답 ③

0459 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$

$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+a}+b}{x+1}=-1$ ...... ㉠ ➡ ❶

$x\to -1$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이다.

즉 $\lim_{x\to -1}(\sqrt{x^2+a}+b)=0$이므로

$\sqrt{1+a}+b=0$ $\therefore b=-\sqrt{1+a}$ ...... ㉡ ➡ ❷

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}{(x+1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a}}=\frac{-2}{2\sqrt{1+a}}=-\frac{1}{\sqrt{1+a}}$$

즉 $-\frac{1}{\sqrt{1+a}}=-1$이므로 $1+a=1$

$\therefore a=0$

$a=0$을 ㉡에 대입하면 $b=-1$ ➡ ❸

$\therefore a+b=-1$ ➡ ❹

답 -1

채점 기준표

❶ $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+a}+b}{x+1}=-1$임을 알 수 있다.	30%
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0460 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$f(0)=b$로 놓으면 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}+a}{x^2}=b$ ...... ㉠

$x\to 0$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+9}+a)=0$이므로 $3+a=0$ $\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}=\frac{1}{6}$$

즉 $b=\frac{1}{6}$이므로 $f(0)=\frac{1}{6}$

답 ①

유형 06 x^n을 포함한 극한으로 정의된 함수의 연속 본책 76쪽

(i) $|x|<1$, $|x|>1$, $x=1$, $x=-1$인 경우로 나누어 각 범위에서의 함수의 식을 구한다.

(ii) $x=1$과 $x=-1$에서 함수의 연속성을 조사한다.

0461 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\frac{0+ax+b}{0+1}=ax+b$$

(ii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x^{2n}|=\lim_{n\to\infty}|x^{2n+1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{a}{x^{2n-1}}+\frac{b}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=x$$

(iii) $|x|=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=1$이므로

$$f(x)=\frac{x+ax+b}{1+1}=\frac{(a+1)x+b}{2}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$과 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$ ...... ㉠

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1-} f(x)=f(-1)$ ...... ㉡

이어야 한다.

㉠에서 $\lim_{x\to 1+} x=\lim_{x\to 1-}(ax+b)=\frac{a+1+b}{2}$이므로

$1=a+b=\frac{a+b+1}{2}$ $\therefore a+b=1$ ...... ㉢

㉡에서 $\lim_{x\to -1+}(ax+b)=\lim_{x\to -1-}x=\frac{-a-1+b}{2}$이므로

$-a+b=-1=\frac{-a+b-1}{2}$　　∴ $a-b=1$　　…… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면　$a=1,\ b=0$

∴ $4a+b=4$　　답 ⑤

0462 (i) $|2x|<1$, 즉 $|x|<\frac{1}{2}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}(2x)^{2n}=\lim_{n\to\infty}(2x)^{2n-1}=0$이므로

$$f(x)=\frac{0+1}{0+1}=1$$

(ii) $|2x|>1$, 즉 $|x|>\frac{1}{2}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}(2x)^{2n}=\lim_{n\to\infty}(2x)^{2n-1}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2x}+\frac{1}{(2x)^{2n}}}{1+\frac{1}{(2x)^{2n}}}=\frac{1}{2x}$$

(iii) $2x=1$, 즉 $x=\frac{1}{2}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}(2x)^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}(2x)^{2n-1}=1$이므로

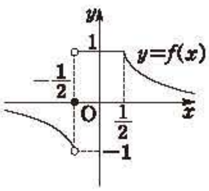
$$f(x)=\frac{1+1}{1+1}=1$$

(iv) $2x=-1$, 즉 $x=-\frac{1}{2}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}(2x)^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}(2x)^{2n-1}=-1$이므로

$$f(x)=\frac{-1+1}{1+1}=0$$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

ㄴ. $\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}f(x)=1$, $\lim_{x\to -\frac{1}{2}-}f(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 $x=-\frac{1}{2}$의 1개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.　　답 ①

0463 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x|^{n+1}=\lim_{n\to\infty}|x|^{n}=0$이므로

$$f(x)=\frac{0+a|x|}{0+b}=\frac{a}{b}|x|$$

(ii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x|^{n+1}=\lim_{n\to\infty}|x|^{n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|+\frac{a}{|x|^{n-1}}}{1+\frac{b}{|x|^{n}}}=|x|$$

(iii) $|x|=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x|^{n+1}=\lim_{n\to\infty}|x|^{n}=1$이므로

$$f(x)=\frac{1+a}{1+b}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$, $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$\frac{a}{b}=1=\frac{1+a}{1+b}$　　∴ $a=b$

∴ $a-b=0$　　답 ③

0464 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=\lim_{n\to\infty}x^{n}=0$이므로

$$f(x)=\frac{0+2x^2(ax+b)}{0+2}=x^2(ax+b)$$

(ii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x^{n+1}|=\lim_{n\to\infty}|x^{n}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+2+\frac{2x^2(ax+b)}{x^n}}{1+\frac{2}{x^n}}=x+2$$

(iii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=\lim_{n\to\infty}x^{n}=1$이므로

$$f(1)=\frac{3+2a+2b}{3}$$

(iv) $x=-1$일 때,

ⓘ n이 홀수이면　$f(x)=-1-2a+2b$

ⓘⓘ n이 짝수이면　$f(x)=\frac{1-2a+2b}{3}$　　··· ❶

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$3=a+b=\frac{3+2a+2b}{3}$

∴ $a+b=3$　　…… ㉠　　··· ❷

또 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$-a+b=1=-1-2a+2b=\frac{1-2a+2b}{3}$

∴ $a-b=-1$　　…… ㉡　　··· ❸

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　$a=1,\ b=2$　　··· ❹

답 $a=1,\ b=2$

채점 기준표

❶ x의 값에 따른 $f(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ ㉠을 구할 수 있다.	30%
❸ ㉡을 구할 수 있다.	30%
❹ a, b의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 07 등비급수의 꼴로 정의된 함수의 연속　　본책 76쪽

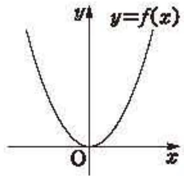
(i) 첫째항이 0인 경우와 0이 아닌 경우로 나누어 함수를 구한다.
(ii) x의 경곗값에서 함수의 연속성을 조사한다.

0465 (i) $x=0$일 때,　$f(0)=0$

(ii) $x\neq0$일 때,

함수 $f(x)$는 첫째항이 $\frac{x^2}{1+x^2}$, 공비가 $\frac{x^2}{1+x^2}$인 등비급수의 합이고, $0<\frac{x^2}{1+x^2}<1$이므로

$$f(x)=\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{1-\frac{x^2}{1+x^2}}=x^2$$



(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=x^2$이다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

참고 일반적으로 등비급수의 꼴로 정의된 함수 $f(x)$의 연속성은 모든 항이 0이 되게 하는 x의 값에서 연속성을 조사한다.

0466 $-1<x<1$일 때,

$$f(x)=(x^5+x^3)+(x^5+x^3)(1-x^2)+(x^5+x^3)(1-x^2)^2+\cdots$$

(i) $x=0$일 때, $f(0)=0$

(ii) $-1<x<0$ 또는 $0<x<1$일 때,
함수 $f(x)$는 첫째항이 x^5+x^3, 공비가 $1-x^2$인 등비급수의 합이고, $0<1-x^2<1$이므로

$$f(x)=\frac{x^5+x^3}{1-(1-x^2)}=x^3+x$$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases} x^3+x & (|x|<1,\ x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \\ 2 & (|x|\geq 1)\end{cases}$

ㄱ. $\lim_{x\to 1+}f(x)=2$, $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(x^3+x)=2$이므로
$\lim_{x\to 1}f(x)=2$

ㄴ. $\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}(x^3+x)=-2$, $\lim_{x\to -1-}f(x)=2$
즉 $\lim_{x\to -1+}f(x)\neq\lim_{x\to -1-}f(x)$이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄷ. $g(x)=xf(x)$에서
(i) $x=0$일 때, $g(0)=0\cdot f(0)=0$
(ii) $-1<x<0$ 또는 $0<x<1$일 때,
$g(x)=xf(x)=x(x^3+x)=x^4+x^2$
$\therefore \lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}(x^4+x^2)=0$
(i), (ii)에서 $\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)=0$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0467 $f(x)=(x+1)^2+\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}+\frac{(x+1)^2}{(x^2+2x+2)^2}+\cdots$

(i) $x=-1$일 때, $f(-1)=0$

(ii) $x\neq -1$일 때,
함수 $f(x)$는 첫째항이 $(x+1)^2$, 공비가 $\frac{1}{x^2+2x+2}$인 등비급수의 합이다. 이때 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>1$이므로

$$0<\frac{1}{x^2+2x+2}<1$$

$$\therefore f(x)=\frac{(x+1)^2}{1-\frac{1}{x^2+2x+2}}=x^2+2x+2$$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2 & (x\neq -1) \\ 0 & (x=-1)\end{cases}$ ··· ❶

함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면
$\lim_{x\to -1}g(f(x))=g(f(-1))$이어야 한다.

이때 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to -1$일 때 $t\to 1+$이므로

$$\lim_{x\to -1}g(f(x))=\lim_{t\to 1+}g(t)$$
$$=\lim_{t\to 1+}(2at+1)=2a+1$$ ··· ❷

이고 $g(f(-1))=g(0)=1$이므로 ··· ❸

$2a+1=1 \qquad \therefore a=0$ ··· ❹

답 0

채점 기준표

❶ x의 값에 따른 $f(x)$를 구할 수 있다.	50%
❷ $\lim_{x\to -1}g(f(x))$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❸ $g(f(-1))$의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ a의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 08 가우스 기호를 포함한 함수의 연속

본책 77쪽

(1) 정수 n에 대하여 $x\to a$일 때
① $f(x)\to n+$이면 ➡ $\lim_{x\to a}[f(x)]=n$
② $f(x)\to n-$이면 ➡ $\lim_{x\to a}[f(x)]=n-1$

(2) 함수 $g(x)=[f(x)]$의 연속 또는 불연속을 판단하려면
➡ $f(x)=n$ (n은 정수)을 만족시키는 x의 값에서 연속성을 조사한다.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

0468 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 2}g(x)=g(2)$이어야 한다. 이때

$$\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}[f(x)]=\lim_{x\to 2}[2(x-2)^2+4]$$

이고 $x\to 2$일 때 $2(x-2)^2+4\to 4+$이므로

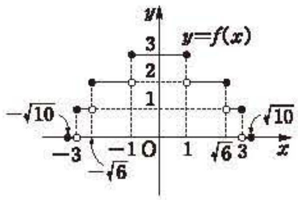
$$\lim_{x\to 2}[2(x-2)^2+4]=4$$
$$\therefore k=g(2)=\lim_{x\to 2}g(x)=4$$

답 ⑤

0469 $10-x^2\geq 0$, 즉 $x^2\leq 10$이어야 하므로 함수 $f(x)$는 $-\sqrt{10}\leq x\leq\sqrt{10}$에서 정의되어 있다.

(i) $0\leq x^2\leq 1$일 때, $9\leq 10-x^2\leq 10$이므로 $f(x)=3$
(ii) $1<x^2\leq 6$일 때, $4\leq 10-x^2<9$이므로 $f(x)=2$
(iii) $6<x^2\leq 9$일 때, $1\leq 10-x^2<4$이므로 $f(x)=1$
(iv) $9<x^2\leq 10$일 때, $0\leq 10-x^2<1$이므로 $f(x)=0$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 불연속이 되는 x의 값은 6개이다.



답 ④

0470 $f(1)$의 값이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고 그 외의 구간에서는 연속이다.

$\therefore A=\{x\mid -5<x<1\}\cup\{x\mid 1<x<5\}$ ➊

정수 n에 대하여 $\lim\limits_{x\to n}g(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=n$(n은 정수)에서 불연속이고 그 외의 구간에서는 연속이다.

$\therefore B=\{x\mid -5<x<-4\}\cup\{x\mid -4<x<-3\}$
$\cup\cdots\cup\{x\mid 4<x<5\}$ ➋

따라서 $A-B=\{-4, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4\}$이므로

$n(A-B)=8$ ➌

답 8

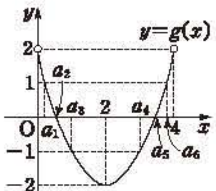
채점 기준표

➊ 집합 A를 구할 수 있다.	30%
➋ 집합 B를 구할 수 있다.	40%
➌ $n(A-B)$의 값을 구할 수 있다.	30%

0471 $g(x)=x^2-4x+2$로 놓으면

$g(x)=(x-2)^2-2$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$g(x)=-1, 0, 1$을 만족시키는 x에서 $f(x)$가 불연속이므로 이때 x의 값을 차례대로

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_6\ (a_1<a_2<\cdots<a_6)$

이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=(a_1+a_6)+(a_2+a_5)+(a_3+a_4)$
$=4+4+4=12$

답 ③

유형 09 $(x-a)f(x)$ 꼴의 함수의 연속 본책 77쪽

연속함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)$가 $(x-a)f(x)=g(x)$를 만족시킬 때, $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면

➡ $f(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{x-a}$

0472 $x\neq-2$일 때, $f(x)=\dfrac{ax^3-bx}{x+2}$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$$f(-2)=\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{ax^3-bx}{x+2}$$

이어야 한다.

$x\to-2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to-2}(ax^3-bx)=0$이므로

$-8a+2b=0 \quad \therefore b=4a$ ······ ㉠

이때 $f(1)=5$이므로 $(x+2)f(x)=ax^3-bx$에서

$3f(1)=a-b \quad \therefore a-b=15$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5,\ b=-20$

따라서 $x\neq-2$일 때, $f(x)=\dfrac{-5x^3+20x}{x+2}$이므로

$$\begin{aligned}f(-2)&=\lim_{x\to-2}\frac{-5x^3+20x}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{-5x(x+2)(x-2)}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2}\{-5x(x-2)\}\\&=-5\cdot(-2)\cdot(-4)=-40\end{aligned}$$

답 ①

0473 $x\neq-1$일 때, $f(x)=\dfrac{x^5+1}{x+1}$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$$\begin{aligned}f(-1)&=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^5+1}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1}(x^4-x^3+x^2-x+1)=5\end{aligned}$$

답 ⑤

0474 $x\neq2$일 때, $f(x)=\dfrac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$

$\therefore \lim\limits_{x\to2}\dfrac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=1$ ······ ㉠ ➊

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to2}(a\sqrt{x-1}+b)=0$이므로

$a+b=0 \quad \therefore b=-a$ ······ ㉡ ➋

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}-a}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

즉 $\dfrac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면 $b=-2$ ➌

$\therefore a^2+b^2=2^2+(-2)^2=8$ ➍

답 8

채점 기준표

➊ $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=1$임을 알 수 있다.	30%
➋ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
➌ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
➍ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 10 연속함수의 성질

본책 [illegible]쪽

① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면
➡ $f(x)g(x)$, $f(x)\pm g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.
② $y=f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 $y=g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이면 $y=g(f(x))$는 $x=a$에서 연속이다.

0475 ㄱ. $f(x)+g(x)=h(x)$로 놓으면 $\quad g(x)=h(x)-f(x)$
이때 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

ㄴ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases} 1 & (x\ge 0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$이면 $f(x)$와
$f(x)g(x)$는 연속함수이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. 임의의 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$로 놓으면 $g(x)$가 연속이므로 $\quad b=g(a)$
또 $f(x)$가 연속함수이므로
$\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(g(a))=f(b)$
따라서 $f(g(x))$도 연속함수이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0476 ① $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x}+x^2+2$
이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

② $f(x)g(x)=\dfrac{1}{x}(x^2+2)=x+\dfrac{2}{x}$
이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

③ $g(f(x))=g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2}+2$
이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

④ $f(g(x))=f(x^2+2)=\dfrac{1}{x^2+2}$이므로 $f(g(x))$는 모든 실수 x에서 연속이다.

⑤ $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{x(x^2+2)}$
이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

답 ④

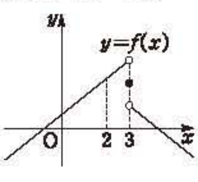
0477 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$

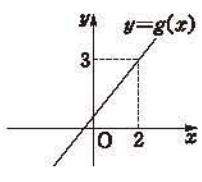
ㄱ. $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-4g(x)\}=\lim\limits_{x\to a} f(x)-4\lim\limits_{x\to a} g(x)=f(a)-4g(a)$
이므로 $f(x)-4g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to a}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=\{g(a)\}^2$
이므로 $\{g(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. $f(a)=0$이면 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=a$에서 정의되지 않으므로 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=a$에서 불연속이다.

ㄹ. [반례]





앞의 그림에서 $f(x)$, $g(x)$는 $x=2$에서 모두 연속이지만 $f(g(x))$는 $x=2$에서 불연속이다.

이상에서 $x=a$에서 항상 연속인 함수의 개수는 2이다. 답 2

참고 ㄹ. $f(g(x))$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(g(a))$가 성립해야 하므로 $f(x)$가 $x=g(a)$에서 연속이어야 한다.

유형 11 최대 · 최소 정리

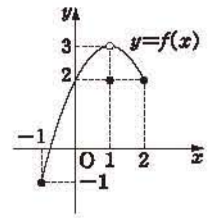
본책 [illegible]쪽

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 불연속인 경우
➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 최댓값, 최솟값의 존재를 확인한다.

0478 ① 불연속이 되는 x의 값은 3, 5의 2개이다.
② $\lim\limits_{x\to 5+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 5-} f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.
③ $\lim\limits_{x\to 3+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=4$이므로 $\quad\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$
⑤ 구간 $[1, 5)$에서 $x=1$일 때 최솟값 $f(1)=1$을 갖는다.

답 ④

0479 $x\neq 1$일 때,
$f(x)=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$
함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $[-1, 2]$에서 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$에서 불연속이다.
따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 2]$에서 $x=-1$일 때 최솟값 -1을 갖고, 최댓값은 없다.



답 최댓값: 없다, 최솟값: -1

0480 최대 · 최소 정리의 역은 '함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 최댓값과 최솟값을 가지면 이 구간에서 연속이다.' 이므로 최댓값과 최솟값을 갖지만 연속이 아닌 함수를 찾으면 된다.
①, ②, ③ 구간 $[1, 3]$에서 최댓값과 최솟값을 갖고 연속이다.
④ 구간 $[1, 3]$에서 최댓값과 최솟값을 갖지만 연속이 아니다.
⑤ 구간 $[1, 3]$에서 최댓값과 최솟값을 갖지 않고 연속도 아니다.
따라서 보기 중 최대 · 최소 정리의 역이 성립하지 않음을 보이는 예로 적절한 것은 ④이다. 답 ④

유형 12, 13 사잇값 정리

본책 [illegible]쪽

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$일 때
➡ $f(c)=0$인 c가 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

0481 $f(x)=2x^3-x^2-x-3$으로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이고
$f(-1)=-5<0$, $f(0)=-3<0$, $f(1)=-3<0$,
$f(2)=7>0$, $f(3)=39>0$, $f(4)=105>0$
따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1, 2)$이다. 답 ③

0482 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(-2,\ 3)$에서 실근을 가지려면 $f(-2)f(3)<0$이어야 하므로 ⋯ ❶

$(a-2)(a+4)<0 \quad \therefore -4<a<2$ ⋯ ❷

따라서 구하는 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$의 5개이다. ⋯ ❸

답 5

채점 기준표

❶ 방정식 $f(x)=0$이 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	60%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20%

0483 ㄱ. $f(x)=|2x-1|-2$로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$f(1)=-1<0,\ f(2)=1>0$

이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(x)=\sqrt{4x-1}-2$로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$f(1)=\sqrt{3}-2<0,\ f(2)=\sqrt{7}-2>0$

이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(x)=\dfrac{4}{3x-1}-1$로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$f(1)=1>0,\ f(2)=-\dfrac{1}{5}<0$

이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 ⑤

0484 $f(-2)=-1,\ f(-1)=1$이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2,\ -1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또 $f(0)=2,\ f(1)=-1,\ f(2)=2$이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 1),\ (1,\ 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 3개의 실근을 갖는다.

$\therefore n=3$

답 ②

0485 $f(1)f(2)<0,\ f(3)f(4)<0$이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,\ 2),\ (3,\ 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. ⋯ ❶

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로

$f(-1)f(-2)<0,\ f(-3)f(-4)<0$

즉 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2,\ -1),\ (-4,\ -3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. ⋯ ❷

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 4개의 실근을 갖는다. ⋯ ❸

답 4개

채점 기준표

❶ 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(1,\ 2),\ (3,\ 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가짐을 알 수 있다.	40%
❷ 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(-2,\ -1),\ (-4,\ -3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가짐을 알 수 있다.	40%
❸ 방정식 $f(x)=0$이 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구할 수 있다.	20%

0486 조건 (가), (나)에서 $f(-1)=0,\ f(3)=0$이므로

$f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항함수) ⋯⋯ ㉠

로 놓을 수 있다. ㉠을 (가)의 식에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-3)Q(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-3)Q(x)$$
$$=-4Q(-1)$$

즉 $-4Q(-1)=\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad Q(-1)=-\dfrac{1}{8}$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 (나)의 식에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{(x+1)(x-3)Q(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+1)Q(x)$$
$$=4Q(3)$$

즉 $4Q(3)=\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad Q(3)=\dfrac{1}{8}$ ⋯⋯ ㉢

이때 $Q(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이고, ㉡, ㉢에서 $Q(-1)Q(3)<0$이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $Q(x)=0$은 구간 $(-1,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-1,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 ①

0487 $g(x)=f(x)-x^2$으로 놓으면 함수 $g(x)$는 연속함수이고

$g(1)=f(1)-1=2-1=1>0,$

$g(2)=f(2)-4=3-4=-1<0,$

$g(3)=f(3)-9=10-9=1>0,$

$g(4)=f(4)-16=20-16=4>0$

이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x^2$의 그래프는 구간 $(1,\ 4)$에서 적어도 2개의 교점을 갖는다.

답 ②

유형 14 사이값 정리의 실생활에의 활용 본책 80쪽

열차가 두 지점 A, B를 지날 때의 속력이 각각 시속 $a$km, $b$km $(a<b)$일 때, $a<c<b$인 실수 c에 대하여 열차가 지날 때의 속력이 시속 $c$km인 지점이 두 지점 A, B 사이에 적어도 한 곳 존재한다.

0488 버스가 A정류장을 출발한 지 x시간 후의 버스의 속력을 $f(x)$ km/h라 하고 A정류장을 출발한 지 각각 b시간, c시간 후에 B정류장, C정류장에 도착하였다고 하면

$f(0)=0,\ f(b)=0,\ f(c)=0$

이때 $0<\alpha<b,\ b<\beta<c$이고 $f(\alpha)=60,\ f(\beta)=60$인 $\alpha,\ \beta$가 존재하므로 $f(k)=20$인 k가 구간 $(0,\ \alpha),\ (\alpha,\ b),\ (b,\ \beta),\ (\beta,\ c)$에 각각 적어도 하나씩 존재한다.

따라서 버스의 속력이 20 km/h인 순간은 적어도 4번 존재한다.

$\therefore n=4$

답 ④

0489 기차의 속력은 연속이므로 사이값 정리에 의하여

① 구간 AB에서 시속 110 km인 지점은 적어도 한 곳 존재한다.

② 구간 AB에서 시속 130 km인 지점은 존재하지 않을 수도 있다.

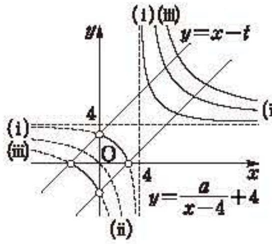
③ 구간 BC에서 시속 90 km인 지점은 적어도 한 곳 존재한다.
④ 구간 BC에서 시속 110 km인 지점은 적어도 한 곳 존재한다.
⑤ 구간 AC에서 시속 110 km인 지점은 구간 AB에서 적어도 한 곳, 구간 BC에서 적어도 한 곳으로 적어도 두 곳 존재한다.

답 ⑤

0490 전략 집합 $A\cap B$가 나타내는 그래프를 그려 집합 C가 나타내는 그래프와의 교점의 개수를 조사한다.

풀이 집합 $A\cap B$는 $y=\dfrac{a}{x-4}+4\,(a>0)$의 그래프에서 제1사분면과 제3사분면에 있는 부분을 나타내므로 집합 $A\cap B\cap C$는 이 부분과 직선 $y=x-t$의 교점의 좌표를 원소로 갖는다.

이때 곡선 $y=\dfrac{a}{x-4}+4$가 y축과 만나는 점의 y좌표에 따라 오른쪽 그림과 같이 세 가지 경우로 나눌 수 있다.



(i) $\dfrac{a}{0-4}+4>0$, 즉 $0<a<16$일 때,

$$f(t)=\begin{cases}1 & \left(|t|\ge -\dfrac{a}{4}+4\right)\\ 2 & \left(|t|< -\dfrac{a}{4}+4\right)\end{cases}$$

(ii) $\dfrac{a}{0-4}+4=0$, 즉 $a=16$일 때,

$f(t)=1$

(iii) $\dfrac{a}{0-4}+4<0$, 즉 $a>16$일 때,

$$f(t)=\begin{cases}1 & \left(|t|\ge \dfrac{a}{4}-4\right)\\ 2 & \left(|t|< \dfrac{a}{4}-4\right)\end{cases}$$

$-\dfrac{a}{4}+4<0$이므로
$-\dfrac{a}{4}+4<t<-\left(-\dfrac{a}{4}+4\right)$에서
$|t|<\dfrac{a}{4}-4$

이상에서 함수 $f(t)$가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 양수 a의 값은 16이다.

답 ④

0491 전략 $x=3$과 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값에서 $g(x)$의 연속성을 조사한다.

풀이 ㄱ. 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 5]$에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 구간 $[0, 3)\cup(3, 5]$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to3+}g(x)=\lim_{x\to3+}f(f(x))=\lim_{x\to1-}f(x)=2$

$\displaystyle\lim_{x\to3-}g(x)=\lim_{x\to3-}\{f(x)\}^2=1^2=1$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to3+}g(x)\ne\lim_{x\to3-}g(x)$

따라서 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로 구간 $[0, 5]$에서 연속이 아니다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 4)\cup(4, 5]$에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 구간 $[0, 3)\cup(3, 5]$에서 연속이므로

(i) $\displaystyle\lim_{x\to3+}g(x)=\lim_{x\to3+}f(f(x))=\lim_{x\to2-}f(x)=4$

$\displaystyle\lim_{x\to3-}g(x)=\lim_{x\to3-}\{f(x)\}^2=2^2=4$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to3}g(x)=4$

이때 $g(3)=\{f(3)\}^2=2^2=4$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to3}g(x)=g(3)$

따라서 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to4+}g(x)=\lim_{x\to4+}f(f(x))=\lim_{x\to1+}f(x)=3$

$\displaystyle\lim_{x\to4-}g(x)=\lim_{x\to4-}f(f(x))=\lim_{x\to0+}f(x)=3$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to4}g(x)=3$

이때 $g(4)=f(f(4))=f(0)=3$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to4}g(x)=g(4)$

따라서 $g(x)$는 $x=4$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 $g(x)$는 구간 $[0, 5]$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 4)\cup(4, 5]$에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 구간 $[0, 3)\cup(3, 5]$에서 연속이므로

(i) $\displaystyle\lim_{x\to3+}g(x)=\lim_{x\to3+}f(f(x))=\lim_{x\to2-}f(x)=4$

$\displaystyle\lim_{x\to3-}g(x)=\lim_{x\to3-}\{f(x)\}^2=2^2=4$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to3}g(x)=4$

이때 $g(3)=\{f(3)\}^2=2^2=4$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to3}g(x)=g(3)$

따라서 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to4+}g(x)=\lim_{x\to4+}f(f(x))=\lim_{x\to1+}f(x)=3$

$\displaystyle\lim_{x\to4-}g(x)=\lim_{x\to4-}f(f(x))=\lim_{x\to0+}f(x)=2$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to4+}g(x)\ne\lim_{x\to4-}g(x)$

따라서 $g(x)$는 $x=4$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 $g(x)$는 구간 $[0, 5]$에서 연속이 아니다.

이상에서 구하는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 ㄴ뿐이다.

답 ②

0492 전략 주어진 그래프를 이용하여 $\displaystyle g(x)=\lim_{n\to\infty}f^n(x)$의 값을 찾는다.

풀이 $f(0)=0$이므로

$f^n(0)=(f\circ f\circ\cdots\circ f)(0)=f(f(\cdots f(0)))=f(0)=0$

$\displaystyle\therefore g(0)=\lim_{n\to\infty}f^n(0)=0$

$f(2)=2$, $f(4)=4$이므로 같은 방법으로 하면

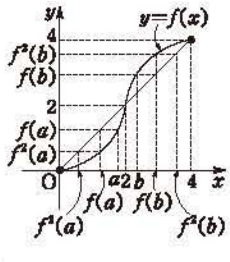
$g(2)=2$, $g(4)=4$

$x=a\ (0<a<2)$일 때, 오른쪽 그림에서

$g(a)=0$

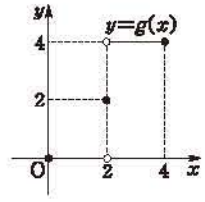
$x=b\ (2<b<4)$일 때, 오른쪽 그림에서

$g(b)=4$



$$\therefore g(x)=\begin{cases}0 & (0\le x<2)\\ 2 & (x=2)\\ 4 & (2<x\le 4)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $g(1)=0$
ㄴ. $g(3)=4$
ㄷ. $g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

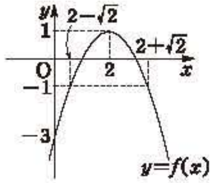
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0493 전략 $|f(x)|<1$, $|f(x)|>1$, $|f(x)|=1$인 경우로 나누어 $g(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=-x^2+4x-3$

$=-(x-2)^2+1$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\{f(x)\}^{2n}+1}$$ 에서

(i) $-1<f(x)<1$, 즉 $2-\sqrt{2}<x<2$ 또는 $2<x<2+\sqrt{2}$일 때,

$$g(x)=\frac{1}{0+1}=1$$

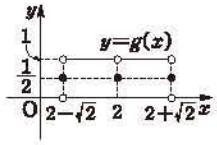
(ii) $f(x)<-1$, 즉 $x<2-\sqrt{2}$ 또는 $x>2+\sqrt{2}$일 때,

$$g(x)=0$$

(iii) $f(x)=\pm1$, 즉 $x=2-\sqrt{2}$ 또는 $x=2$ 또는 $x=2+\sqrt{2}$일 때,

$$g(x)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

이상에서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $g(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 $2-\sqrt{2}$, 2, $2+\sqrt{2}$의 3개이다.



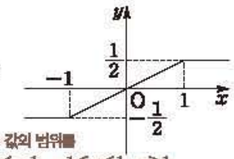
답 3

0494 전략 $\dfrac{x}{|x+1|+|x-1|}$의 값의 범위를 구해 본다.

풀이 (i) $x=2$일 때, $f(2)=0$

(ii) $x\neq2$일 때,

함수 $y=\dfrac{x}{|x+1|+|x-1|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



x의 값의 범위를 $x<-1$, $-1\le x<1$, $x\ge1$로 나누어 구한다.

$$-\frac{1}{2}\le\frac{x}{|x+1|+|x-1|}\le\frac{1}{2}$$

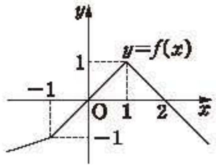
이때 함수 $f(x)$는 첫째항이 $(2-x)\cdot\dfrac{x}{|x+1|+|x-1|}$, 공비가 $\dfrac{x}{|x+1|+|x-1|}$인 등비급수의 합이므로

$$f(x)=\frac{(2-x)\cdot\dfrac{x}{|x+1|+|x-1|}}{1-\dfrac{x}{|x+1|+|x-1|}}$$

$$=\frac{x(2-x)}{|x+1|+|x-1|-x}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x-2) & (x<-1)\\ x & (-1\le x<1)\\ -x+2 & (x\ge1)\end{cases}$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 정의역은 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=1$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0495 전략 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$를 만족시키면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

풀이 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$를 만족시키면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 집합 A의 원소는 함수 $f(x)$가 연속이 되도록 하는 정수 a이다. 이때

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}([x]^3+3[x]^2-16[x])$$
$$=a^3+3a^2-16a,$$
$$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}([x]^3+3[x]^2-16[x])$$
$$=(a-1)^3+3(a-1)^2-16(a-1)$$

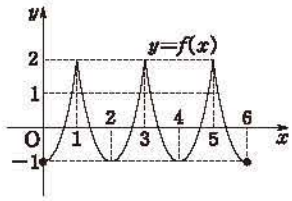
이므로

$$a^3+3a^2-16a=(a-1)^3+3(a-1)^2-16(a-1)$$
$$a^2+a-6=0,\quad (a+3)(a-2)=0$$
$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 $A=\{-3, 2\}$이므로 구하는 원소의 합은 -1이다. 답 ②

0496 전략 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타낸다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 조건 (나)에서 $x=1$에 대하여 대칭이고, 조건 (다)에서 y축에 대하여 대칭이므로 $0\le x\le6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

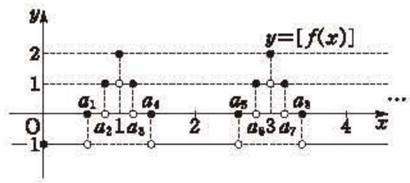


이때 $y=[f(x)]$는 $f(x)=0, 1, 2$를 만족시키는 x에서 불연속이다.

$f(x)=0$, $f(x)=1$을 만족시키는 x의 값은 각각 6개, $f(x)=2$를 만족시키는 x의 값은 3개이므로 구하는 x의 값의 개수는 15이다.

답 15

참고 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 $y=0$, $y=1$과 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 $a_1, a_2, a_3, \cdots$이라 하면 $y=[f(x)]$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=[f(x)]$는 $f(x)=0, 1, 2$를 만족시키는 x에서 불연속이다.

0497 전략 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 두 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 불연속인 점에서 $f(x)g(x)$와 $f(x)h(x)$가 연속이 되도록 한다.

풀이 (i) $|x|<1$일 때,

$$g(x)=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(ii) $|x|>1$일 때,

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

(iii) $x=1$일 때,

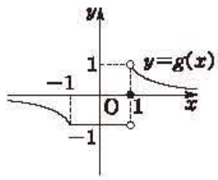
$$g(x)=\frac{1-1}{1+1}=0$$

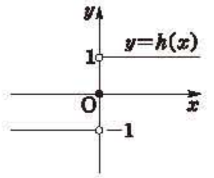
(iv) $x=-1$일 때,

$$g(x)=\frac{-1-1}{1+1}=-1$$

$$\therefore g(x)=\begin{cases}-1 & (-1\le x<1)\\ 0 & (x=1)\\ \dfrac{1}{x} & (|x|>1)\end{cases}$$

한편 $h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$, 즉 $h(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이므로 두 함수 $y=g(x)$와 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.





이때 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다. 즉 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$$f(x)g(x)=\begin{cases}-x^2-ax-b & (-1\le x<1)\\ 0 & (x=1)\\ x+a+\dfrac{b}{x} & (|x|>1)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to 1+}\left(x+a+\frac{b}{x}\right)=\lim_{x\to 1-}(-x^2-ax-b)=0$$

$\therefore a+b=-1$ ······ ㉠

또 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 함수 $f(x)h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다. 즉

$$f(x)h(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -x^2-ax-b & (x<0)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to 0+}f(x)h(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)h(x)=f(0)h(0)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0+}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to 0-}(-x^2-ax-b)=0$$

$b=-b=0$ $\quad\therefore b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=-1$

따라서 $f(x)=x^2-x$이므로

$f(10)=10^2-10=90$

답 90

0498 전략 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $f(x)$가 불연속인 점에서 함수 $f(x)g(x)$가 연속이 되도록 a, b의 값을 정한다.

풀이 (i) $1\le x<4$일 때, $-1\le\sqrt{x}-2<0$이므로

$[\sqrt{x}-2]=-1$

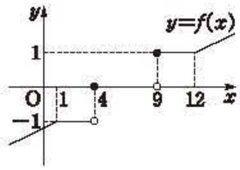
(ii) $4\le x<9$일 때, $0\le\sqrt{x}-2<1$이므로

$[\sqrt{x}-2]=0$

(iii) $9\le x\le 12$일 때, $1\le\sqrt{x}-2<2$이므로

$[\sqrt{x}-2]=1$ $\quad \sqrt{x}-2\le 2\sqrt{3}-2<2$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고, 함수 $f(x)$는 $x=4$, $x=9$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=4$, $x=9$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 4+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 4-}f(x)g(x)=f(4)g(4)$에서

$0\cdot g(4)=-1\cdot g(4)=0\cdot g(4)$ $\quad\therefore g(4)=0$

$\lim_{x\to 9+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 9-}f(x)g(x)=f(9)g(9)$에서

$1\cdot g(9)=0\cdot g(9)=1\cdot g(9)$ $\quad\therefore g(9)=0$

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 4, 9이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=4+9$, $b=4\cdot 9$

$\therefore a=-13$, $b=36$

$\therefore a+b=23$

답 ③

0499 전략 함수 $f(x)$가 구간 $[-3, 3]$에서 연속이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

풀이 ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ $\quad\therefore \lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)-2}{2x}=-1$

$x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}\{g(x)-2\}=0$이므로 $\quad g(0)=2$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 구간 $[-3, 3]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 갖는다.

ㄷ. [반례] $g(x)=-2x+2$일 때, $g(-2)>0$, $g(2)<0$이지만 $f(x)=-1$이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2, 2)$에서 실근을 갖지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0500 전략 $x\to a$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\to 0$임을 이용하여 함수 $f(x)$의 식을 세운다.

풀이 $\lim_{x\to 5}\dfrac{f(x)}{x-5}=10$, $\lim_{x\to 10}\dfrac{f(x)}{x-10}=5$에서

$f(5)=0$, $f(10)=0$

즉 $f(x)$는 $x-5$, $x-10$을 인수로 가지므로

$f(x)=(x-5)(x-10)g(x)$ ($g(x)$는 다항함수)로 놓으면

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-10)g(x)}{x-5}$$
$$=-5g(5)=10$$

$\therefore g(5)=-2$

$$\lim_{x\to 10}\frac{f(x)}{x-10}=\lim_{x\to 10}\frac{(x-5)(x-10)g(x)}{x-10}$$
$$=5g(10)=5$$

$\therefore g(10)=1$

이때 $g(x)$는 연속함수이고 $g(5)g(10)<0$이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 구간 $(5,\ 10)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=(x-5)(x-10)g(x)$는 구간 $[5,\ 10]$에서 적어도 세 개의 실근을 가지므로 실수 m의 값은 3이다. 답 3

0501 **전략** $f(x)=1$, $g(x)=1$을 만족시키는 x의 값을 찾은 후 $f(x)g(x)$를 구한다.

풀이 구간 $(0,\ 10)$에서 $f(x)=1$을 만족시키는 x의 값들의 집합을 A라 하면

$$A=\left\{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \cdots,\ \frac{19}{2}\right\}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ -1 & (x\notin A)\end{cases}$$ ➊

또 구간 $(0,\ 10)$에서 $g(x)=1$을 만족시키는 x의 값들의 집합을 B라 하면

$$B=\left\{\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2,\ \frac{7}{3},\ \frac{8}{3},\ 3,\ \cdots,\ \frac{29}{3}\right\}$$

$$\therefore g(x)=\begin{cases}1 & (x\in B)\\ -1 & (x\notin B)\end{cases}$$ ➋

$$\therefore f(x)g(x)=\begin{cases}1 & (x\in A\cap B \text{ 또는 } x\in A^C\cap B^C)\\ -1 & (x\in A-B \text{ 또는 } x\in B-A)\end{cases}$$ ➌

따라서 전체집합 $U=\{x\mid 0<x<10\}$에서 함수 $f(x)g(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 집합 $(A-B)\cup(B-A)$의 원소이다. 이때 $n(A)=19$, $n(B)=29$, $n(A\cap B)=9$이므로 구하는 x의 값의 개수는

$$\begin{aligned}n(A-B)+n(B-A)&=(19-9)+(29-9)\\&=30\end{aligned}$$ ➍

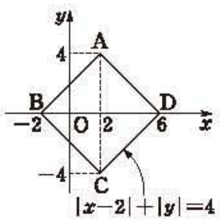
답 30

채점 기준표

채점 기준	배점
➊ 집합 A를 정하고 함수 $f(x)$를 구할 수 있다.	20%
➋ 집합 B를 정하고 함수 $g(x)$를 구할 수 있다.	20%
➌ $f(x)g(x)$를 구할 수 있다.	30%
➍ $f(x)g(x)$가 불연속이 되는 x의 개수를 구할 수 있다.	30%

0502 **전략** r의 값의 범위를 나누어 방정식 $|x-2|+|y|=4$의 그래프와 원의 교점의 개수를 구한다.

풀이 방정식 $|x-2|+|y|=4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 마름모 모양이다. 이 마름모의 네 꼭짓점을 각각 A, B, C, D라 하면 원점 O와 직선 AB, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리는 $\sqrt{2}$, 원점 O와 직선 AD, 즉 $x+y-6=0$ 사이의 거리는 $3\sqrt{2}$이다.



이때 두 점 O, B 사이의 거리는 2, 두 점 O, C 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$, 두 점 O, D 사이의 거리는 6이다. ➊

즉 r의 값의 범위에 따른 원과 마름모의 교점의 개수 $f(r)$는 다음과 같다.

$0<r<\sqrt{2}$이면 $f(r)=0$

$r=\sqrt{2}$이면 $f(r)=2$

$\sqrt{2}<r<2$이면 $f(r)=4$

$r=2$이면 $f(r)=3$

$2<r<3\sqrt{2}$이면 $f(r)=2$

$r=3\sqrt{2}$이면 $f(r)=4$

$3\sqrt{2}<r<2\sqrt{5}$이면 $f(r)=6$

$r=2\sqrt{5}$이면 $f(r)=4$

$2\sqrt{5}<r<6$이면 $f(r)=2$

$r=6$이면 $f(r)=1$

$r>6$이면 $f(r)=0$ ➋

따라서 $f(r)$는 구간 $(0,\ 10)$에서 $r=\sqrt{2}$, 2, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, 6에서 불연속이므로 $a_3=3\sqrt{2}$, $n=5$ ➌

$\therefore a_3^{\,2}+n^2=(3\sqrt{2})^2+5^2=43$ ➍

답 43

채점 기준표

채점 기준	배점
➊ 원점 O와 직선 AB, AD 사이의 거리와 $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$의 길이를 각각 구할 수 있다.	20%
➋ r의 값의 범위에 따른 $f(r)$의 값을 구할 수 있다.	40%
➌ a_3, n의 값을 구할 수 있다.	30%
➍ $a_3^{\,2}+n^2$의 값을 구할 수 있다.	10%

0503 **전략** 함수 $g(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구하고, $f(x)g(x)$가 $x=1$과 $x=-1$에서 연속임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $g(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차함수이다. ➊

다항함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고, 조건 (나)에 의하여 $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=-1\cdot g(-1)=-g(-1),$$

$$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=1\cdot g(-1)=g(-1)$$

이므로 $g(-1)=-g(-1)$

$\therefore g(-1)=0$ ······ ㉠ ➋

또 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=0\cdot g(1)=0,$$

$$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=-1\cdot g(1)=-g(1)$$

이므로 $-g(1)=0$

$\therefore g(1)=0$ ······ ㉡ ➌

㉠, ㉡에서 $g(x)=2(x-1)(x+1)$이므로

$g(x)$는 $g(-1)=0$에서 $x+1$, $g(1)=0$에서 $x-1$을 인수로 갖는다.

$g(4)=2\cdot3\cdot5=30$ ➍

답 30

채점 기준표

채점 기준	배점
➊ $g(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구할 수 있다.	20%
➋ $g(-1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
➌ $g(1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
➍ $g(4)$의 값을 구할 수 있다.	20%

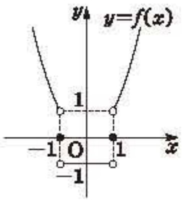
0504 전략 x의 값의 범위에 따른 함수 $f(x)$를 구한 후, 구간 $(t-4,\ t)$에서 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값의 개수를 조사한다.

풀이 $|x|<1$일 때, $\quad f(x)=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$

$|x|>1$일 때, $\quad f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2-\dfrac{1}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=x^2$

$|x|=1$일 때, $\quad f(x)=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ➊



이때 t의 값의 범위에 따른 $g(t)$의 값은 다음과 같다.

(i) $t\le-1$일 때,
구간 $(t-4,\ t)$에서 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 없다.
$\therefore g(t)=0$

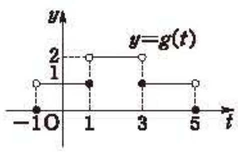
(ii) $-1<t\le1$일 때,
$t-4<-1<t\le1$이므로 구간 $(t-4,\ t)$에서 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 -1의 1개이다.
$\therefore g(t)=1$

(iii) $1<t<3$일 때,
$t-4<-1<1<t$이므로 구간 $(t-4,\ t)$에서 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 $-1,\ 1$의 2개이다.
$\therefore g(t)=2$

(iv) $3\le t<5$일 때,
$-1\le t-4<1<t$이므로 구간 $(t-4,\ t)$에서 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 1의 1개이다.
$\therefore g(t)=1$

(v) $t\ge5$일 때,
$1\le t-4<t$이므로 구간 $(t-4,\ t)$에서 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 없다.
$\therefore g(t)=0$

이상에서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ➋



따라서 함수 $g(t)$가
$t=-1,\ 1,\ 3,\ 5$
에서 불연속이므로
$k=-1,\ 1,\ 3,\ 5$
구하는 합은
$-1+1+3+5=8$ ➌

답 8

채점 기준표

➊ x의 값의 범위에 따른 $f(x)$를 구하고 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	30%
➋ t의 값의 범위에 따른 $g(t)$를 구하고 함수 $y=g(t)$의 그래프를 그릴 수 있다.	50%
➌ 모든 실수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

0505 전략 $|x|<1,\ |x|>1,\ x=1,\ x=-1$일 때로 나누어 $f(x)$를 구한다.

풀이 (i) $|x|<1$일 때,
$f(x)=-x^2+bx+c$

(ii) $|x|>1$일 때,
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^{2n-2}}+\dfrac{b}{x^{2n-1}}+\dfrac{c}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=\frac{a}{x}$$

(iii) $x=1$일 때,
$f(x)=\dfrac{a-1+b+c}{2}$

(iv) $x=-1$일 때,
$f(x)=\dfrac{-a-1-b+c}{2}$ ➊

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$a=-1+b+c=\dfrac{a-1+b+c}{2}$

$\therefore a-b-c=-1$ ...... ㉠

또 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$-1-b+c=-a=\dfrac{-a-1-b+c}{2}$

$\therefore a-b+c=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$c=1,\ b=a$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-x^2+ax+1=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+1+\dfrac{a^2}{4} & (|x|\le1)\\ \dfrac{a}{x} & (|x|>1)\end{cases}$$ ➋

$0<a\le2$이면 $f(x)$의 최댓값은

$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=1+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{5}{4}$

$4+a^2=5,\quad a^2=1$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

$a>2$이면 $f(x)$의 최댓값은 $\quad f(1)=a=\dfrac{5}{4}$

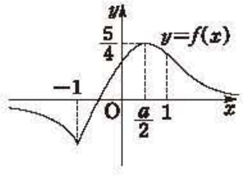
그런데 $a>2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $a=1,\ b=1,\ c=1$이므로
$a+b+c=3$ ➌

답 3

채점 기준표

➊ x의 값의 범위에 따른 $f(x)$를 구할 수 있다.	30%
➋ $f(x)$를 간단히 정리할 수 있다.	40%
➌ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	30%

참고 $0<a\le2$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



Ⅱ 다항함수의 미분법

05 미분계수와 도함수

0506 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{1-3}{2}=-1$ 답 -1

0507 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{-1-(-1)}{2}=0$ 답 0

0508 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2-(-4)}{2}=3$ 답 3

0509 (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{6-0}{2}=3$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)}=\frac{2-6}{1}=-4$ 답 (1) 3 (2) -4

0510 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{(2+\Delta x)-2}=\frac{\{3(2+\Delta x)+1\}-7}{\Delta x}$

$=\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$ 답 3

0511 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)+2\}-3}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$ 답 1

0512 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)\}-1}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-\Delta x)=0$ 답 0

0513 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-3(1+\Delta x)^3+6(1+\Delta x)+1\}-4}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3\Delta x-9(\Delta x)^2-3(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{-3-9\Delta x-3(\Delta x)^2\}=-3$ 답 -3

0514 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2+2)-(a^2+2)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}(x+a)=2a$

$2a=4$에서 $a=2$ 답 2

0515 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{(x^3+x+1)-(a^3+a+1)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2+1)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2+1)=3a^2+1$

$3a^2+1=4$에서 $a=1\,(\because a>0)$ 답 1

0516 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-2(1+\Delta x)+3\}-1}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x}{\Delta x}=-2$ 답 -2

0517 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$과 같으므로

$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{3(-1+\Delta x)^2+1\}-4}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-6\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-6+3\Delta x)=-6$ 답 -6

0518 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 12)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같으므로

$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(2+\Delta x)^3+4\}-12}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{12\Delta x+6(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{12+6\Delta x+(\Delta x)^2\}=12$ 답 12

0519 답 (가) 연속 (나) 미분가능

0520 (i) $f(1)=1$이고,

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}x^2=1$,

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x^2+2)=1$

이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+}(x+1)=2$,

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-x^2+2-1}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\{-(x+1)\}=-2$$
이므로 $f'(1)$의 값이 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

답 연속이고 미분가능하지 않다.

0521 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{4-4}{\Delta x}=0$

답 $f'(x)=0$

0522 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(x+\Delta x)+3\}-(x+3)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$

답 $f'(x)=1$

0523 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(x+\Delta x)^2-4\}-(x^2-4)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to0}(2x+\Delta x)=2x$

답 $f'(x)=2x$

0524 $y'=(-x^8)'=-8x^7$ 답 $y'=-8x^7$

0525 $y'=(6)'=0$ 답 $y'=0$

0526 $y'=(3x^6)'=18x^5$ 답 $y'=18x^5$

0527 $y'=(-5x+2)'=(-5x)'+(2)'=-5$ 답 $y'=-5$

0528 $y'=(-x^2+2x-4)'=(-x^2)'+(2x)'-(4)'$
$=-2x+2$ 답 $y'=-2x+2$

0529 $y'=\left(\frac{1}{2}x^2-x+4\right)'=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'-(x)'+(4)'$
$=x-1$ 답 $y'=x-1$

0530 (1) 함수 $f(x)+g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는
$f'(0)+g'(0)=-2+6=4$
(2) 함수 $f(x)-2g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는
$f'(0)-2g'(0)=-2-2\cdot6=-14$ 답 (1) 4 (2) -14

0531 $y'=(x-3)'(2x-1)+(x-3)(2x-1)'$
$=(2x-1)+2(x-3)=4x-7$ 답 $y'=4x-7$

0532 $y'=(-5x)'(x^2+1)-5x(x^2+1)'$
$=-5(x^2+1)-5x\cdot2x$
$=-15x^2-5$ 답 $y'=-15x^2-5$

0533 $y'=(x^2-4x+5)'(3x+7)+(x^2-4x+5)(3x+7)'$
$=(2x-4)(3x+7)+3(x^2-4x+5)$
$=9x^2-10x-13$ 답 $y'=9x^2-10x-13$

0534 $y'=(x)'(x+1)(x+2)+x(x+1)'(x+2)$
$+x(x+1)(x+2)'$
$=(x+1)(x+2)+x(x+2)+x(x+1)$
$=3x^2+6x+2$ 답 $y'=3x^2+6x+2$

0535 $y'=(x-5)'(2x+1)(-x+7)$
$+(x-5)(2x+1)'(-x+7)$
$+(x-5)(2x+1)(-x+7)'$
$=(2x+1)(-x+7)+2(x-5)(-x+7)$
$-(x-5)(2x+1)$
$=-6x^2+46x-58$ 답 $y'=-6x^2+46x-58$

0536 $y'=\{(3x-2)^4\}'=4(3x-2)^{4-1}(3x-2)'$
$=12(3x-2)^3$ 답 $y'=12(3x-2)^3$

0537 $y'=\{(2x^2-x+5)^3\}'$
$=3(2x^2-x+5)^{3-1}(2x^2-x+5)'$
$=3(2x^2-x+5)^2(4x-1)$

답 $y'=3(2x^2-x+5)^2(4x-1)$

0538 $y'=\{(x+2)^2\}'(3x^2-1)+(x+2)^2(3x^2-1)'$
$=2(x+2)(x+2)'(3x^2-1)+(x+2)^2\cdot6x$
$=(x+2)(12x^2+12x-2)$
$=2(x+2)(6x^2+6x-1)$

답 $y'=2(x+2)(6x^2+6x-1)$

0539 $y'=\{(x-5)^2\}'(x^2+1)^3+(x-5)^2\{(x^2+1)^3\}'$
$=2(x-5)(x-5)'(x^2+1)^3$
$+(x-5)^2\cdot3(x^2+1)^2(x^2+1)'$
$=2(x-5)(x^2+1)^3+6x(x-5)^2(x^2+1)^2$
$=2(x-5)(x^2+1)^2(4x^2-15x+1)$

답 $y'=2(x-5)(x^2+1)^2(4x^2-15x+1)$

유형 01 평균변화율 본책 [illegible]쪽

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율
➡ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

0540 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은
$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a^3-2a+1)-0}{a-1}$$
$$=\frac{(a-1)(a^2+a-1)}{a-1}=a^2+a-1$$
$a^2+a-1=11$에서 $a^2+a-12=0$
$(a+4)(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a>1$) 답 3

0541 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{(16+4a+1)-(4+2a+1)}{2}$$
$$=\frac{2a+12}{2}=a+6$$

$a+6=3$에서 $\quad a=-3$ 답 ③

0542 x의 값이 -2에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은 $\dfrac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}=\dfrac{32-(-4)}{6}=6$

또 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a^2+4a}{a}=a+4$$

$a+4=6$에서 $\quad a=2$ 답 2

0543 $f^1(x)=f(x)=\dfrac{2-x}{1-x}$

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{2-\dfrac{2-x}{1-x}}{1-\dfrac{2-x}{1-x}}=x$$

$$\therefore g(x)=f^{999}(x)=f^{2\cdot 499+1}(x)=f^1(x)=\frac{2-x}{1-x}$$ ··· ❶

따라서 x의 값이 3에서 6까지 변할 때의 함수 $g(x)$의 평균변화율은

$$\frac{g(6)-g(3)}{6-3}=\frac{\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{2}}{3}=\frac{1}{10}$$ ··· ❷

답 $\dfrac{1}{10}$

채점 기준표

❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	50%
❷ x의 값이 3에서 6까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	50%

유형 02 평균변화율의 기하학적 의미 본책 91쪽

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))$를 지나는 직선 AB의 기울기와 같다.

0544 직선 AB의 기울기는 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=2$$

한편 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

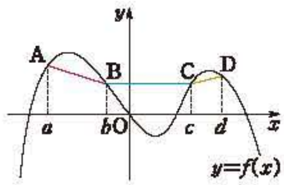
$f(0)=f(4)$

따라서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{f(2)-f(4)}{2-0}=-\frac{f(4)-f(2)}{2}=-2$$

답 -2

0545 오른쪽 그림의 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 α, β, γ의 값은 각각 직선 AB, 직선 BC, 직선 CD의 기울기와 같으므로



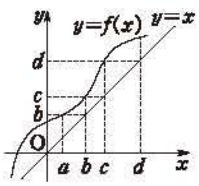
$\alpha<0$, $\beta=0$, $\gamma>0$

$\therefore \alpha<\beta<\gamma$ 답 ①

0546 x의 값이 c에서 d까지 변할 때의 함수 $g(x)$의 평균변화율은

$$\frac{g(d)-g(c)}{d-c}=\frac{f^{-1}(d)-f^{-1}(c)}{d-c}$$

오른쪽 그림에서 $f(c)=d$이므로



$f^{-1}(d)=c$

또 $f(b)=c$이므로 $\quad f^{-1}(c)=b$

따라서 구하는 평균변화율은

$$\frac{f^{-1}(d)-f^{-1}(c)}{d-c}=\frac{c-b}{d-c}$$ 답 ④

유형 03 평균변화율과 미분계수 본책 91쪽

① 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

② 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

0547 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3-(-1)}{2}=2$$

또 함수 $f(x)$의 $x=c$에서의 미분계수는

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(c+h)^2-2(c+h)\}-(c^2-2c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2ch+h^2-2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2c+h-2)=2c-2$$

$2c-2=2$에서 $\quad c=2$ 답 2

0548 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^3+2b+3)-(a^3+2a+3)}{b-a}$$
$$=\frac{(b^3-a^3)+2(b-a)}{b-a}$$
$$=\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2+2)}{b-a}$$
$$=b^2+ab+a^2+2$$ ··· ❶

또 함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 순간변화율은

$$f'(-1)=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(-1+h)^2+2(-1+h)+3\}-2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to0}h=0 \quad \cdots ❷$$

$b+a+2=0$에서 $\quad a+b=-2 \quad \cdots ❸$

답 -2

채점 기준표

❶ x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40%
❷ $x=-1$에서의 순간변화율을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0549 $\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=t^2$, $f(0)=1$이므로 $\quad f(t)=t^3+1$

즉 $f(x)=x^3+1$이므로

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{(1+h)^3+1\}-2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{3h+3h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to0}(3+3h+h^2)=3$$

답 ③

유형 04 미분계수를 이용한 극한값의 계산 ; $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 본책 91쪽

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

➡ 주어진 식을 $\displaystyle\lim_{\square\to0}\frac{f(a+\square)-f(a)}{\square}$ 꼴을 포함한 식으로 변형한다.

0550 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1+3h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1-2h)-f(1)\}-\{f(1+3h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)-\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot3$$
$$=-2f'(1)-3f'(1)=-5f'(1)$$
$$=-5\cdot(-2)=10$$

답 ⑤

0551 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+5h)-f(a)}{4h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+5h)-f(a)}{5h}\cdot\frac{5}{4}$

$$=\frac{5}{4}f'(a)$$

답 ④

0552 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(2+mh)-f(2-nh)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+mh)-f(2)\}-\{f(2-nh)-f(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+mh)-f(2)}{mh}\cdot m+\lim_{h\to0}\frac{f(2-nh)-f(2)}{-nh}\cdot n$$
$$=mf'(2)+nf'(2)=(m+n)f'(2)$$

$f'(2)=4$이므로 $\quad 4(m+n)=8$

$\therefore m+n=2$

답 2

0553 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}\right\}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(a)-f(a+h)}{f(a+h)f(a)}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{1}{f(a+h)f(a)}\right\}$$
$$=-\frac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}$$

답 ①

0554 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a+h^2)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(a+4h)-f(a)\}-\{f(a+h^2)-f(a)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\cdot4-\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot h$$
$$=4f'(a)-0\cdot f'(a)=4f'(a)$$
$$=4\cdot3=12$$

답 12

유형 05 미분계수를 이용한 극한값의 계산 ; $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 본책 92쪽

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

➡ 주어진 식을 $\displaystyle\lim_{\blacktriangle\to\bullet}\frac{f(\blacktriangle)-f(\bullet)}{\blacktriangle-\bullet}$ 꼴을 포함한 식으로 변형한다.

0555 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-2f(2)+2f(2)-xf(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2\{f(x)-f(2)\}-f(2)(x-2)}{x-2}$$
$$=2\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-f(2)$$
$$=2f'(2)-f(2)=2\cdot5-2=8$$

답 ③

0556 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x^2)-f(a^2)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x^2)-f(a^2)}{x^2-a^2}\cdot(x+a)$

$$=2af'(a^2)$$

답 ④

0557 $f(3)=0$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{(x-3)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}f'(3)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot8=2$$

답 2

0558 $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(1)}}{\sqrt{x}-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(1)}\}\{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}\}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}}$

$=f'(1)\cdot\frac{2}{2\sqrt{f(1)}}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0559 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 $f(x)=f(-x)$가 성립한다.

$\therefore f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-a-h)-f(-a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-a-h)-f(-a)}{-h}\cdot(-1)=-f'(-a)$

즉 $f'(2)=2$에서 $-f'(-2)=2$이므로 $f'(-2)=-2$

$\therefore \lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(2)}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot\frac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)}\cdot(x-2)$

$=f'(4)\cdot\frac{1}{f'(-2)}\cdot(-4)$

$=-6\cdot\frac{1}{-2}\cdot(-4)=-12$ 답 -12

유형 06 관계식이 주어질 때 미분계수 구하기 본책 92쪽

(i) 주어진 식의 x, y에 적당한 수를 대입하여 $f(0)$의 값을 구한다.

(ii) $f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$에서 $f(a+h)$에 주어진 관계식을 대입하여 $f'(a)$의 값을 구한다.

0560 $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$

$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=2$ 답 ②

0561 $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$ $\therefore f(0)=0$ ❶

$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+h-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+h}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+1=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+1$

$=f'(0)+1$

이고, $f'(1)=2$이므로 $f'(0)=1$ ❷

$\therefore f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+2h-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2$

$=f'(0)+2=1+2=3$ ❸

답 3

채점 기준표

❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	40%

0562 $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$ $\therefore f(0)=1$

$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+4h-1-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}+4$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+4$

$=f'(0)+4$

이고, $f'(2)=7$이므로 $f'(0)=3$

자연수 k에 대하여

$f'(k)=\lim_{h\to0}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(k)+f(h)+2kh-1-f(k)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}+2k$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2k$

$=f'(0)+2k=2k+3$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}f'(k)=\sum_{k=1}^{10}(2k+3)$

$=2\cdot\frac{10\cdot11}{2}+30=140$ 답 140

SSEN 특강

자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ ② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

0563 $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=3f(0)\cdot f(0)$ $\therefore f(0)=\frac{1}{3}$ $(\because f(0)>0)$

$$f'(2018)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2018+h)-f(2018)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3f(2018)f(h)-f(2018)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3f(2018)\left\{f(h)-\frac{1}{3}\right\}}{h}$$
$$=3f(2018)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=3f(2018)f'(0)$$

이므로

$$\frac{f'(2018)}{f(2018)}=\frac{3f(2018)f'(0)}{f(2018)}=3f'(0)=3\cdot 2=6$$

답 6

유형 07 미분계수의 기하학적 의미 본책 93쪽

① 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.
② 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ $(0°\le\theta<90°)$라 하면 $\tan\theta=f'(a)$이다.

0564 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같고, 이 접선은 두 점 $(0, 6)$, $(1, 5)$를 지나므로

$$f'(1)=\frac{5-6}{1-0}=-1$$
$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot\frac{3}{2}$$
$$=\frac{3}{2}f'(1)=\frac{3}{2}\cdot(-1)$$
$$=-\frac{3}{2}$$

답 ②

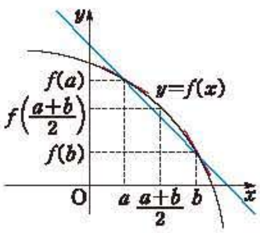
0565 $f'(1)=3$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$$
$$=2f'(1)=2\cdot 3=6$$

답 6

0566 ㄱ. $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 $x=b$인 점에서의 접선의 기울기보다 크므로

$$f'(a)>f'(b)$$



ㄴ. $a\le x\le b$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ㄷ. $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기보다 크므로

$$f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

SSEN 특강

① 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하고 $a<b$일 때
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2},\ f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
② 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하고 $a<b$일 때
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2},\ f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

0567 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, -4)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x^3+x^2-3-(-4)}{x-(-1)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x^2-x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}(2x^2-x+1)=4 \quad \cdots ❶$$

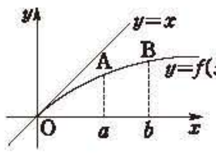
이때 $\tan\theta$의 값은 이 접선의 기울기와 같으므로

$$\tan\theta=4 \quad \cdots ❷$$

답 4

채점 기준표	
❶ $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	80%
❷ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	20%

0568 오른쪽 그림과 같이 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$라 하자.



ㄱ. 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$$

이때 $b-a>0$이므로 $f(b)-f(a)<b-a$

ㄴ. $\frac{f(a)}{a}$는 원점과 점 A를 지나는 직선의 기울기이고, $\frac{f(b)}{b}$는 원점과 점 B를 지나는 직선의 기울기이므로

$$\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$$

ㄷ. $f'(a)$는 점 A에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이므로 $f'(a)>f'(b)$

ㄹ. $0<a<b$에 대하여 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$이고, x의 값이 클수록 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는 작아진다.

$$\therefore f'(\sqrt{ab})>f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ②

유형 08 미분가능성과 연속성; 정의를 이용하는 경우 본책 94쪽

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여
① $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ ➡ $x=a$에서 연속
② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재 ➡ $x=a$에서 미분가능

0569 ① $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=3$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h}=0$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

② $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|^3-0}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\cdot|h|}{h}=\lim_{h\to 0}h|h|=0$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

③ $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1$

이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

④ $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h+|h|-0}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{h+h}{h}=2,$

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h+|h|-0}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\frac{h-h}{h}=0$

이므로 $f'(0)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

⑤ $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(h+1)^2-1}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+2h}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}(h+2)=2,$

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{(2h+1)-1}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\frac{2h}{h}=2$

이므로 $f'(0)=2$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. 답 ④

0570 ㄱ. $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h-1)-0}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$

이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄴ. $\lim_{x\to 1}g(x)=g(1)=0$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{h\to 0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h}{h}=1,$

$\lim_{h\to 0-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h}{h}=-1$

이므로 $g'(1)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x\to 1}k(x)=k(1)=0$이므로 $k(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{h\to 0+}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{|h^2+2h|}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+2h}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}(h+2)=2,$

$\lim_{h\to 0-}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|h^2+2h|}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h^2-2h}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}(-h-2)=-2$

이므로 $k'(1)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $k(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0571 $f(x)=\begin{cases}(x-1)(x+a) & (x\ge 1)\\ -(x-1)(x+a) & (x<1)\end{cases}$이므로

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}(1+h+a)=1+a$

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}(-1-h-a)=-1-a$

$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $1+a=-1-a$에서

$a=-1$

$\therefore f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$

$\therefore a+f'(1)=-1$ 답 ②

유형 09 미분가능성과 연속성; 그래프가 주어진 경우 본책 94쪽

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

① 불연속인 점 ➡ 연결되어 있지 않고 끊어져 있는 점

② 미분가능하지 않은 점 ➡ 불연속인 점, 뾰족한 점

0572 함수 $y=f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 불연속이므로 $m=2$

또 $x=-1$, $x=0$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로 $n=3$

$\therefore m+n=5$ 답 5

0573 ①, ⑤ $x=a$에서 미분가능하지 않다.

②, ③ $x=a$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다. 답 ④

참고 ① $x<a$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기는 0 또는 음수이므로 $\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\le 0$

$x>a$일 때, 함수 $f(x)$의 임의의 점에서의 미분계수는 양수이므로

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$

따라서 $f'(a)$의 값이 존재하지 않으므로 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

0574 ① $\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to 3}f(x)$의 값이 존재한다.

② $x=0$에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $f'(0)>0$이다.

③ 함수 $f(x)$는 $x=3$, $x=4$에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개이다.

④ 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=3$, $x=4$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 점은 3개이다.

⑤ $f'(x)=0$인 점은 구간 $(0, 2)$에서 2개 존재하고, 구간 $(2, 3)$에서 1개 존재하므로 모두 3개이다.

답 ⑤

유형 10 도함수의 정의를 이용하여 도함수 구하기 본책 [illegible]쪽

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{h \to x} \dfrac{f(h)-f(x)}{h-x}$임을 이용한다.

0575 $xf(x)=g(x)$로 놓으면 $y=g(x)$에서

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)f(x+h)-xf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\{f(x+h)-f(x)\}+\boxed{hf(x)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x) \\ &= xf'(x)+\boxed{f(x)} \end{aligned}$$

답 ④

0576
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{\boxed{(t^n+t)-(x^n+x)}}{t-x} \\ &= \lim_{t\to x}\frac{(t^n-x^n)+(t-x)}{t-x} \\ &= \lim_{t\to x}\frac{(\boxed{t-x})(t^{n-1}+xt^{n-2}+x^2t^{n-3}+\cdots+x^{n-1}+1)}{t-x} \\ &= \lim_{t\to x}(t^{n-1}+xt^{n-2}+x^2t^{n-3}+\cdots+x^{n-1}+1) \\ &= \boxed{nx^{n-1}+1} \end{aligned}$$

답 ①

유형 11 관계식이 주어질 때 도함수 구하기 본책 [illegible]쪽

(i) 주어진 식의 x, y에 적당한 수를 대입하여 $f(0)$의 값을 구한다.

(ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

0577 $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0 \quad \therefore f(0)=0$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-3xh-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-3xh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}-3x \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-3x \\ &= f'(0)-3x=-3x-2 \end{aligned}$$

답 ②

0578 $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1 \quad \therefore f(0)=1$ ⋯➊

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+xh-1-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)+xh-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}+x \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+x=f'(0)+x \end{aligned}$$ ⋯➋

이때 $f'(0)$은 상수이므로 $f'(x)$는 일차함수이다.

따라서 $f(x)$는 이차함수이므로 $f(x)$의 차수는 2이다. ⋯➌

답 2

채점 기준표

➊ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	30%
➋ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40%
➌ $f(x)$의 차수를 구할 수 있다.	30%

0579 ㄱ. $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$

$y=-x$를 주어진 식에 대입하면

$f(x-x)=f(x)+f(-x)-2x^2$

$\therefore f(x)+f(-x)=2x^2+f(0)=2x^2$

ㄴ.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2xh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+2x \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2x=f'(0)+2x=2x+4 \end{aligned}$$

ㄷ. 함수 $f(x)$가 미분가능하므로 모든 실수 a에서 연속이다.

$\therefore f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

유형 12 미분법의 공식 본책 [illegible]쪽

① $f(x)=x^n$ (n은 양의 정수) ➡ $f'(x)=nx^{n-1}$

② $f(x)=c$ (c는 상수) ➡ $f'(x)=0$

③ $h(x)=af(x)\pm bg(x)$ (a, b는 상수)

➡ $h'(x)=af'(x)\pm bg'(x)$ (복호동순)

0580 $f'(x)=10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1$

$\therefore f'(1)=10+9+8+\cdots+2+1=\dfrac{10\cdot 11}{2}=55$

답 ③

0581 $f'(x)=x^3-x^2+ax+2$이므로 $\quad f'(2)=2a+6$

$f'(2)=4$이므로 $\quad 2a+6=4 \quad \therefore a=-1$

답 -1

0582 $f(1)=0$에서 $\quad a+b+c=0$ ⋯⋯ ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(-1)=-7$에서 $-2a+b=-7$ ······ ㉡

$f'(2)=5$에서 $4a+b=5$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-3,\ c=1$

$\therefore abc=-6$

답 ②

0583 $f(x)=x+x^3+x^5+\cdots+x^{2n-1}$이므로

$f'(x)=1+3x^2+5x^4+\cdots+(2n-1)x^{2n-2}$

$\therefore f'(1)=1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$=\dfrac{n\{1+(2n-1)\}}{2}=n^2$

답 ①

유형 13 미분계수를 이용한 극한값의 계산 본책 96쪽

(i) 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 $f'(a)$가 포함된 식으로 변형한다.

(ii) 미분법의 공식을 이용하여 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구한 후, $f'(x)$에 $x=a$를 대입하여 $f'(a)$의 값을 구한다.

(iii) (i)의 식에 $f'(a)$의 값을 대입한다.

0584 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)-\{f(3-h)-f(3)\}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\right\}$

$=f'(3)+f'(3)=2f'(3)$

$f'(x)=3x^2+2x-5$이므로 $f'(3)=28$

따라서 구하는 값은 $2f'(3)=2\cdot28=56$

답 ⑤

0585 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(2)\}^2}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)-f(2)\}\{f(x)+f(2)\}}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\lim_{x\to2}\{f(x)+f(2)\}=f'(2)\cdot2f(2)$

$f(x)=x^3-4x^2$에서 $f(2)=-8$

또 $f'(x)=3x^2-8x$이므로 $f'(2)=-4$

따라서 구하는 값은

$f'(2)\cdot2f(2)=-4\cdot2\cdot(-8)=64$

답 64

0586 $\dfrac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow0$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(-1+\frac{1}{n}\right)-f\left(-1-\frac{1}{n}\right)\right\}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1-h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)-\{f(-1-h)-f(-1)\}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(-1-h)-f(-1)}{-h}$

$=f'(-1)+f'(-1)=2f'(-1)$

$f'(x)=8x^3-3x^2$이므로 $f'(-1)=-11$

따라서 구하는 값은

$2f'(-1)=2\cdot(-11)=-22$

답 -22

유형 14 미분계수를 이용한 미정계수의 결정 본책 96쪽

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=c$ (c는 실수)이면

➡ $f(a)=b,\ f'(a)=c$

0587 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=4$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로

$f(1)=0$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=4$

한편 $f(x)=x^3+ax+b,\ f'(x)=3x^2+a$이므로

$f(1)=0$에서 $a+b=-1$ ······ ㉠

$f'(1)=4$에서 $3+a=4$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore ab=-2$

답 ④

0588 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=4$에서

$f'(1)=4$ ··· ❶

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{-h}$

$=-f'(-2)=-1$

에서 $f'(-2)=1$ ··· ❷

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(1)=4$에서 $2a+b=1$ ······ ㉠

$f'(-2)=1$에서 $4a-b=11$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-3$ ··· ❸

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-3x+1$이므로

$f(1)=1$ ··· ❹

답 1

채점 기준표

❶ $f'(1)=4$임을 알 수 있다.	30%
❷ $f'(-2)=1$임을 알 수 있다.	30%
❸ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0589 조건 (가)에서 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+2x+3}=3$이므로

$a=0,\ b=3$

또 조건 (나)에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)-22\}=0$이므로 $f(2)=22$

따라서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-22}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=16$

이때 $f(x)=3x^2+cx+d$이므로 $f'(x)=6x+c$

$f(2)=22$에서 $12+2c+d=22$ ...... ㉠

$f'(2)=16$에서 $12+c=16$ $\therefore c=4$

$c=4$를 ㉠에 대입하면 $d=2$

$\therefore a+b+c+d=0+3+4+2=9$ 답 ③

유형 15 치환을 이용한 극한값의 계산 본책 97쪽

(i) 주어진 식의 일부를 $f(x)$로 놓는다.
(ii) 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

0590 $f(x)=x^n-2x$로 놓으면 $f(1)=-1$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x^n-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$f'(x)=nx^{n-1}-2$이므로 $f'(1)=n-2$

$n-2=15$에서 $n=17$ 답 ④

0591 $f(x)=x^{10}+3x$로 놓으면 $f(-1)=-2$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{x^{10}+3x+2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$

$f'(x)=10x^9+3$이므로 $f'(-1)=-7$ 답 -7

0592 $\lim_{x\to3}\frac{x^n-x^3-9x-27}{x-3}=a$에서 $x\longrightarrow3$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}(x^n-x^3-9x-27)=0$이므로

$3^n-3^3-9\cdot3-27=0$, $3^n=81$ $\therefore n=4$

$f(x)=x^4-x^3-9x-24$로 놓으면 $f(3)=3$이므로

$\lim_{x\to3}\frac{x^4-x^3-9x-27}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$

$f'(x)=4x^3-3x^2-9$이므로

$f'(3)=72$ $\therefore a=72$

$\therefore n+a=76$ 답 ②

유형 16 접선의 기울기를 이용한 미정계수의 결정 본책 97쪽

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 m이면
⇒ $f(a)=b$, $f'(a)=m$

0593 $f(1)=4$에서 $1+a+2=4$ $\therefore a=1$

즉 $f(x)=x^2+x+2$에서 $f'(x)=2x+1$

이때 $f'(1)=m$이므로 $m=2\cdot1+1=3$

$\therefore a+m=4$ 답 ④

0594 $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(1, 2)$, $(2, 0)$을 지나므로

$a+b+c=2$ ...... ㉠

$4a+2b+c=0$ ...... ㉡

또 점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(2)=1$

$f'(x)=2ax+b$이므로 $4a+b=1$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-11$, $c=10$

$\therefore a-b-c=3-(-11)-10=4$ 답 4

0595 조건 (가)에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$ ➊

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=3$ ➋

한편 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$, $f'(x)=-3x^2+2ax+b$이므로

$f(1)=0$에서 $a+b+c=1$ ...... ㉠

$f'(1)=3$에서 $-3+2a+b=3$

$\therefore 2a+b=6$ ...... ㉡

또 조건 (나)에서 $f'(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 가지므로

$f'(x)=-3\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\frac{a^2}{3}+b$에서

$\frac{a}{3}=3$ $\therefore a=9$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=-12$, $c=4$ ➌

따라서 $f(x)=-x^3+9x^2-12x+4$이므로

$f(3)=22$ ➍

답 22

채점 기준표

➊ $f(1)=0$임을 알 수 있다.	30%
➋ $f'(1)=3$임을 알 수 있다.	30%
➌ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	20%
➍ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 17 미분의 항등식에의 활용 본책 98쪽

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$으로 놓고 $f'(x)$를 구하여 주어진 항등식에 대입한 후 계수를 비교한다.
① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow a=0,\ b=0,\ c=0$
② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식
$\Longleftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$

0596 $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$(x+1)(2ax+b)-2(ax^2+bx+c)+2=0$

$\therefore (2a-b)x+(b-2c+2)=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a-b=0$, $b-2c+2=0$ ...... ㉠

또 $f(0)=3$이므로 $c=3$
$c=3$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=2$, $b=4$
따라서 $f'(x)=4x+4$이므로 $f'(1)=8$ 답 ④

0597 $f(x)=2x^2+3xf'(1)$에서 $f'(1)$은 상수이므로
$f'(1)=a$ (a는 상수)로 놓으면
$f(x)=2x^2+3ax$
$f'(x)=4x+3a$
$f'(1)=4+3a$이므로 $f(x)$와 $f'(1)$을 주어진 식에 대입하면
$2x^2+3ax=2x^2+3x(4+3a)$
위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$3a=3(4+3a)$, $a=4+3a$
$2a=-4$ $\therefore a=-2$
따라서 $f'(x)=4x-6$이므로 $f'(2)=2$ 답 ④
다른 풀이 $f(x)=2x^2+3xf'(1)$에서 $f'(x)=4x+3f'(1)$
$x=1$을 위의 식의 양변에 대입하면 $f'(1)=4+3f'(1)$
$2f'(1)=-4$ $\therefore f'(1)=-2$
따라서 $f'(x)=4x+3f'(1)=4x+3\cdot(-2)=4x-6$이므로
$f'(2)=8-6=2$

0598 $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 놓으면
$f'(x)=2ax+b$

$$\begin{aligned}f(f'(x))&=a(2ax+b)^2+b(2ax+b)+c\\&=4a^3x^2+4a^2bx+ab^2+2abx+b^2+c\\&=4a^3x^2+(4a^2b+2ab)x+ab^2+b^2+c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(f(x))&=2a(ax^2+bx+c)+b\\&=2a^2x^2+2abx+2ac+b\end{aligned}$$

이때 $f(f'(x))=f'(f(x))$, 즉 $f(f'(x))-f'(f(x))=0$이므로
$(4a^3-2a^2)x^2+4a^2bx+ab^2+b^2-2ac-b+c=0$
위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$4a^3-2a^2=0$, $4a^2b=0$, $ab^2+b^2-2ac-b+c=0$
$\therefore a=\frac{1}{2}$, $b=0$ ($\because a\neq0$)
이때 $f(2)=4a+2b+c=2+c=3$이므로 $c=1$
따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$이므로
$f(4)=\frac{1}{2}\cdot4^2+1=9$ 답 9

0599 (1) $f(x)$가 상수함수이면 $f'(x)=0$이므로 주어진 등식에서 좌변은 0이고 우변은 이차식이 되어 모순이다.
$f(x)$를 n(n은 자연수)차 함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 함수이다.
이때 주어진 등식에서 $n=1$이면 좌변은 상수이고 우변은 이차식이 되어 모순이다.
$\therefore n\geq2$
따라서 좌변의 차수는 $(n-1)+(n-1)$, 우변의 차수는 n이므로
$2n-2=n$ $\therefore n=2$ ··· ❶
(2) $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 정수, $a\neq0$)로 놓으면
$f'(x)=2ax+b$
$f'(x)\{f'(x)+2\}=8f(x)+12x^2+11$에서
$(2ax+b)(2ax+b+2)=8(ax^2+bx+c)+12x^2+11$
$\therefore 4a^2x^2+4(ab+a)x+b^2+2b$
$=4(2a+3)x^2+8bx+8c+11$
위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$4a^2=4(2a+3)$, $4(ab+a)=8b$, $b^2+2b=8c+11$
$4a^2=4(2a+3)$에서 $a^2-2a-3=0$
$(a+1)(a-3)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=3$
(i) $a=-1$일 때, $4(ab+a)=8b$에서
$4(-b-1)=8b$ $\therefore b=-\frac{1}{3}$
이것은 b가 정수라는 조건에 모순이다.
(ii) $a=3$일 때, $4(ab+a)=8b$에서
$4(3b+3)=8b$ $\therefore b=-3$
$b=-3$을 $b^2+2b=8c+11$에 대입하면
$3=8c+11$ $\therefore c=-1$
(i), (ii)에서 $a=3$, $b=-3$, $c=-1$
$\therefore f(x)=3x^2-3x-1$ ··· ❷
답 (1) 2 (2) $f(x)=3x^2-3x-1$

채점 기준표	
❶ $f(x)$의 차수를 구할 수 있다.	30%
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	70%

유형 18 함수의 미분가능성을 이용한 미정계수의 결정 (본책 98쪽)

다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $F(x)=\begin{cases}f(x) & (x\geq a)\\g(x) & (x<a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면
→ ① 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 연속이다. 즉
$\lim_{x\to a-}g(x)=f(a)$
② $x=a$에서 함수 $F(x)$의 미분계수가 존재한다. 즉
$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

0600 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다. 즉 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$에서
$2a+b=4$ ······ ㉠
또 $f'(2)$가 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{(2+h)^2-4}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{4h+h^2}{h}\\&=\lim_{h\to0+}(4+h)=4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}&=\lim_{h\to0-}\frac{a(2+h)+b-(2a+b)}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{ah}{h}=a\end{aligned}$$

에서 $a=4$
$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-4$
$\therefore a+b=0$ 답 0

0601 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.
즉 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서

$$\frac{1}{2}+1+b=-1+a$$

$$\therefore a-b=\frac{5}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1+}\frac{(-x^2+ax)-(-1+a)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{-x^2+ax+1-a}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{-(x-1)(x+1-a)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}(-x-1+a)\\&=a-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2+x+b\right)-\left(\frac{1}{2}+1+b\right)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{2}(x+3)(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{1}{2}(x+3)=2\end{aligned}$$

에서 $\quad a-2=2 \quad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=\frac{3}{2}$

$$\therefore ab=6$$

답 6

0602 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & (1\le x<2)\\ 0 & (0\le x<1)\end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.
즉 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서

$$1+a+b=0 \qquad \therefore a+b=-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)^2+a(1+h)+b-(1+a+b)}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+(a+2)h}{h}\\&=\lim_{h\to0+}(h+a+2)=a+2\end{aligned}$$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{0-0}{h}=0$에서

$$a+2=0 \qquad \therefore a=-2$$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=1$

$$\therefore a^2+b^2=5$$

답 5

0603 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{n+2}+bx^n+2x+1}{x^n+1}$에서

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+b & (|x|>1)\\ \frac{a+b+3}{2} & (x=1)\\ 2x+1 & (|x|<1)\end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.
즉 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서 $\quad a+b=3$

$$\therefore b=-a+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}ax^2-a+3 & (|x|>1)\\ 3 & (x=1)\\ 2x+1 & (|x|<1)\end{cases}$$

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1+}\frac{(ax^2-a+3)-3}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{a(x-1)(x+1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}a(x+1)=2a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{(2x+1)-3}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{2(x-1)}{x-1}=2\end{aligned}$$

에서 $\quad 2a=2 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=2$

답 $a=1$, $b=2$

유형 19 $y=f(x)g(x)$ 꼴의 도함수 본책 99쪽

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때
① $y=f(x)g(x)$의 도함수
➡ $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
② $y=f(x)g(x)h(x)$의 도함수
➡ $y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

0604

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x^2+x+1)'(x^3+x^2+x+1)\\&\quad+(x^2+x+1)(x^3+x^2+x+1)'\\&=(2x+1)(x^3+x^2+x+1)\\&\quad+(x^2+x+1)(3x^2+2x+1)\end{aligned}$$

$$\therefore f'(1)=3\cdot4+3\cdot6=30$$

답 ③

0605

$$\begin{aligned}f'(x)&=(2x^2+1)'(3x-1)(-2x+a)\\&\quad+(2x^2+1)(3x-1)'(-2x+a)\\&\quad+(2x^2+1)(3x-1)(-2x+a)'\\&=4x(3x-1)(-2x+a)\\&\quad+(2x^2+1)\cdot3\cdot(-2x+a)\\&\quad+(2x^2+1)(3x-1)\cdot(-2)\end{aligned}$$

$f'(1)=-46+17a=39$이므로

$$17a=85 \qquad \therefore a=5$$

답 ④

0606 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=2$에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.
즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$이므로 $\quad f(2)=3$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=2$이므로 $f'(2)=2$

또 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=4$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}\{g(x)-1\}=0$이므로 $g(2)=1$

$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=4$이므로 $g'(2)=4$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$
$=2\cdot1+3\cdot4=14$

답 ②

0607 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 세 교점 A, B, C의 x좌표를 각각 α, β, γ라 하면 $f(\alpha)=k$, $f(\beta)=k$, $f(\gamma)=k$이므로

$f(x)-k=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$f'(x)=(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)$

이때 점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(\alpha)$와 같으므로

$f'(\alpha)=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$
$=(-\overline{AB})(-\overline{AC})=\overline{AB}\cdot\overline{AC}$

답 ①

유형 20 $y=\{f(x)\}^n$ 꼴의 도함수 본책 99쪽

$y=\{f(x)\}^n$의 도함수 ➡ $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$ (단, n은 자연수)

0608 $f'(x)=5(x^2+1)^4(x^2+1)'=10x(x^2+1)^4$

$\therefore f'(1)=10\cdot1\cdot2^4=160$

답 ⑤

0609 $f(x)=(4x-3)^2(x^2+2)$로 놓으면

$f'(x)=\{(4x-3)^2\}'(x^2+2)+(4x-3)^2(x^2+2)'$
$=8(4x-3)(x^2+2)+2x(4x-3)^2$
$=2(4x-3)(8x^2-3x+8)$

이므로 $x=0$인 점에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는

$f'(0)=2\cdot(-3)\cdot8=-48$

답 -48

0610 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 (2, 4)를 지나므로

$f(2)=4$

또 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같고, 이 접선은 두 점 (0, 2), (2, 4)를 지나므로

$f'(2)=\frac{4-2}{2-0}=1$

이때

$g'(x)=\{(x^2-3x+3)^2\}'f(x)+(x^2-3x+3)^2f'(x)$
$=2(x^2-3x+3)(2x-3)f(x)+(x^2-3x+3)^2f'(x)$

이므로

$g'(2)=2f(2)+f'(2)=2\cdot4+1=9$

답 ⑤

0611 $f(x)=(x-k)^3$에서 $f'(x)=3(x-k)^2$ ··· ❶

$y=f(x)g(x)$에서 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이고 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=2$

$3(2-k)^2+(2-k)^3=2$, $k^3-9k^2+24k-18=0$ ··· ❷

$(k-3)(k^2-6k+6)=0$, $\therefore k=3$ 또는 $k=3\pm\sqrt{3}$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$3(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=18$ ··· ❸

답 18

채점 기준표

❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ k에 대한 삼차방정식을 세울 수 있다.	50%
❸ 모든 실수 k의 값의 곱을 구할 수 있다.	20%

유형 21 다항식의 나눗셈에서 미분법의 활용 ; 나누어떨어지는 경우 본책 100쪽

다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어질 조건
➡ $f(a)=0$, $f'(a)=0$

0612 $f(x)=x^3-3x+k$로 놓으면 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지므로 $f(a)=0$, $f'(a)=0$

$f(a)=0$에서 $a^3-3a+k=0$ ······ ㉠

$f'(x)=3x^2-3$이므로 $f'(a)=0$에서

$3a^2-3=0$, $a^2=1$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $1-3+k=0$ $\therefore k=2$

$\therefore a+k=3$

답 ①

참고 다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(x)=(x-a)^2Q(x)$ ······ ㉠

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(a)=0$, $f'(a)=0$

0613 $f(x)=x^{10}+2ax+3b$로 놓으면 $f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 $f(1)=0$, $f'(1)=0$ ··· ❶

$f(1)=0$에서 $1+2a+3b=0$ ······ ㉠

$f'(x)=10x^9+2a$이므로 $f'(1)=0$에서

$10+2a=0$ $\therefore a=-5$ ··· ❷

$a=-5$를 ㉠에 대입하면 $b=3$ ··· ❸

$\therefore a+b=-2$ ··· ❹

답 -2

채점 기준표

❶ $f(1)=0$, $f'(1)=0$임을 알 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 22 다항식의 나눗셈에서 미분법의 활용 ; 나누어떨어지지 않는 경우 본책 100쪽

(i) 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$로 놓는다. ➡ $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$
(ii) (i)의 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.
➡ $f'(x)=g'(x)Q(x)+g(x)Q'(x)+R'(x)$

0614 다항식 $x^{20}+1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{20}+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ······ ㉠

$x=1$을 ㉠의 양변에 대입하면

$2=a+b$ ······ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$20x^{19}=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

$x=1$을 위의 식의 양변에 대입하면 $a=20$

$a=20$을 ㉡에 대입하면 $b=-18$

따라서 $R(x)=20x-18$이므로

$R(2)=22$ 답 22

0615 다항식 x^4+ax^2+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^4+ax^2+b=(x+1)^2Q(x)+2x+3$ ······ ㉠

$x=-1$을 ㉠의 양변에 대입하면

$1+a+b=1$ $\therefore a+b=0$ ······ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4x^3+2ax=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+2$

$x=-1$을 위의 식의 양변에 대입하면

$-4-2a=2$ $\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면 $b=3$

$\therefore ab=-9$ 답 ②

0616 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+ax+b$ ······ ㉠

점 $(2, 4)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(2)=4$ $\therefore 2a+b=4$ ······ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+a$

$x=2$인 점에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(2)=3$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=-2$

따라서 $R(x)=3x-2$이므로

$R(3)=7$ 답 7

0617 전략 함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$임을 이용한다.

풀이
$$\begin{aligned} m&=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\\ &=\frac{(b^2-2b+1)-(a^2-2a+1)}{b-a}\\ &=\frac{b^2-a^2-2b+2a}{b-a}\\ &=\frac{(b-a)(b+a-2)}{b-a}\\ &=a+b-2 \end{aligned}$$

또

$$\begin{aligned} f'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-2x+1)-(a^2-2a+1)}{x-a}\\ &=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2-2x+2a}{x-a}\\ &=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a-2)}{x-a}\\ &=\lim_{x\to a}(x+a-2)=2a-2 \end{aligned}$$

이고 같은 방법으로 하면

$f'(b)=2b-2$

ㄱ. $a=-2$, $b=4$이면 $m=-2+4-2=0$

ㄴ. $a+b>2$이면 $m=a+b-2>0$

ㄷ. $f'(a)=2a-2$, $f'(b)=2b-2$이므로 $a+b=2$이면

$f'(a)+f'(b)=2(a+b)-4=2\cdot2-4=0$

ㄹ. $f'(c)=2c-2$이므로 $a+b=2c$이면

$f'(c)=2c-2=a+b-2=m$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

참고 ㄹ. 이차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$가 항상 성립한다.

0618 전략 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AH}=f(a)-f(1)$, $\overline{BH}=a-1$이고 $\triangle ABH$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\overline{AH}\cdot\overline{BH}=a^3-a^2-a+1$이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{f(a)-f(1)\}(a-1)&=a^3-a^2-a+1\\ &=a^2(a-1)-(a-1)\\ &=(a^2-1)(a-1)\\ &=(a+1)(a-1)^2 \end{aligned}$$

이때 $a>1$이므로

$f(a)-f(1)=2(a+1)(a-1)$

$$\begin{aligned} \therefore f'(1)&=\lim_{a\to1}\frac{f(a)-f(1)}{a-1}\\ &=\lim_{a\to1}\frac{2(a+1)(a-1)}{a-1}\\ &=\lim_{a\to1}2(a+1)=4 \end{aligned}$$

답 4

0619 전략 주어진 식에 $y=0$을 대입하여 $g(0)$의 값을 구한 후, 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 주어진 식에 $y=0$을 대입하면

$f(x)=f(x)+g(0)\quad \therefore g(0)=0$

$$\begin{aligned} f'(5)&=\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{\{f(5)+g(4h)\}-f(5)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{g(4h)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{g(0+4h)-g(0)}{4h}\cdot4\\ &=4g'(0)\\ &=4\cdot2=8 \end{aligned}$$

답 8

0620 **전략** $\frac{1}{n}=h$로 치환하여 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow0$이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(a+\frac{2}{n}\right)-f(a)\right\}\cdot f\left(a+\frac{4}{n}\right)\\ &=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\{f(a+2h)-f(a)\}\cdot f(a+4h)\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot2\cdot f(a+4h)\\ &=f'(a)\cdot2\cdot f(a) \end{aligned}$$

이때 $f(a)=2$, $f'(a)=2$이므로 구하는 값은

$2\cdot2\cdot2=8$

답 8

0621 **전략** $x=0$에서의 미분계수가 존재하는지 확인한다.

풀이 ㄱ. $g(x)=xf(x)$라 하면

$$\begin{aligned} g'(0)&=\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{hf(h)}{h}\ (\because g(0)=0)\\ &=\lim_{h\to0}f(h)=f(0)\ (\because f(x)\text{는 } x=0\text{에서 연속}) \end{aligned}$$

따라서 $y=xf(x)$는 $x=0$에서 미분계수가 존재하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases} x & (x\ge0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$이면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

$$\begin{aligned} \lim_{h\to0+}\frac{(h^2+1)f(h)-(0+1)f(0)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{(h^2+1)h}{h}\\ &=\lim_{h\to0+}(h^2+1)\\ &=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h\to0-}\frac{(h^2+1)f(h)-(0+1)f(0)}{h}&=\lim_{h\to0-}\frac{(h^2+1)(-h)}{h}\\ &=\lim_{h\to0-}(-h^2-1)\\ &=-1 \end{aligned}$$

따라서 $y=(x^2+1)f(x)$는 $x=0$에서 미분계수가 존재하지 않으므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $g(x)=\frac{1}{1-x^3f(x)}$이라 하면

$$\begin{aligned} g'(0)&=\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{1-h^3f(h)}-1}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{h^3f(h)}{h\{1-h^3f(h)\}}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{h^2f(h)}{1-h^3f(h)}=0 \end{aligned}$$

따라서 $y=\frac{1}{1-x^3f(x)}$은 $x=0$에서 미분계수가 존재하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

이상에서 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

참고 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이지만 미분가능하지 않을 때, $h(x)=f(x)g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면 $g(a)=0$이고 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능해야 한다.

0622 **전략** 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\begin{cases} -x+3 & (1\le x\le2)\\ x-1 & (2<x\le3)\\ 1 & (3<x\le4)\\ x-3 & (4<x\le5)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x-2 & (1\le x<3)\\ x-4 & (3\le x\le5)\end{cases}$

ㄱ. $f(x)+g(x)=\begin{cases} 1 & (1\le x\le2)\\ 2x-3 & (2<x<3)\end{cases}$에서

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to2+}\frac{\{f(x)+g(x)\}-\{f(2)+g(2)\}}{x-2}\\ &=\lim_{x\to2+}\frac{(2x-3)-1}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{2(x-2)}{x-2}=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to2-}\frac{\{f(x)+g(x)\}-\{f(2)+g(2)\}}{x-2}&=\lim_{x\to2-}\frac{1-1}{x-2}\\ &=0 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)+g(x)$는 $x=2$에서 미분계수가 존재하지 않으므로 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $f(x)g(x)=\begin{cases} x-4 & (3<x\le4)\\ (x-3)(x-4) & (4<x\le5)\end{cases}$에서

$$\begin{aligned} \lim_{x\to4+}\frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}&=\lim_{x\to4+}\frac{(x-3)(x-4)-0}{x-4}\\ &=1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to4-}\frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}=\lim_{x\to4-}\frac{(x-4)-0}{x-4}=1$$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=4$에서 미분계수가 존재하므로 $x=4$에서 미분가능하다.

ㄷ. $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} x-3 & (2<x\le3)\\ -1 & (3<x\le4)\end{cases}$에서

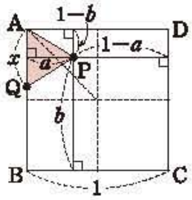
$\lim_{x\to3+}g(f(x))=-1,\ \lim_{x\to3-}g(f(x))=0$

따라서 $(g \circ f)(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로 $x=3$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0623 **전략** 점 Q가 □ABCD의 네 변 AB, BC, CD, DA 위에 있을 때, 함수 $f(x)$를 각각 구하여 $y=f'(x)$의 그래프의 개형을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 두 변 AB, BC까지의 거리를 각각 a, b라 하면 점 P에서 두 변 CD, DA까지의 거리는 각각 $1-a$, $1-b$이므로



$a<1-a$, $1-b<b$, $1-a<b$, $1-b<a$

$\therefore 1-b<a<1-a<b$

한편 함수 $f(x)$를 구하면

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{2}x & (0\le x<1) \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}(x-1) & (1\le x<2) \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{1-a}{2}(x-2) & (2\le x<3) \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{1-a}{2}+\dfrac{1-b}{2}(x-3) & (3\le x\le 4) \end{cases}$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{2} & (0<x<1) \\ \dfrac{b}{2} & (1<x<2) \\ \dfrac{1-a}{2} & (2<x<3) \\ \dfrac{1-b}{2} & (3<x<4) \end{cases}$$

이때 $\dfrac{1-b}{2}<\dfrac{a}{2}<\dfrac{1-a}{2}<\dfrac{b}{2}$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ②이다. 답 ②

0624 **전략** $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴과 $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 극한값의 성질을 이용한다.

풀이 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1$이므로 다항함수 $f(x)$의 최고차항은 x^m이다.

한편 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b$이므로 다항함수 $f(x)$는 n차 이상의 함수이고 차수가 가장 낮은 항은 bx^n이다.

$\therefore f(x)=x^m+\cdots+bx^n$

$f'(x)=mx^{m-1}+\cdots+nbx^{n-1}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a$에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{mx^{m-1}+\cdots+nbx^{n-1}}{x^{m-1}}=m$$

$\therefore m=a$

또 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^{m-1}+\cdots+nbx^{n-1}}{x^{n-1}}=bn$$

$\therefore bn=9$

ㄱ. 다항함수 $f(x)$의 최고차항이 x^m이고 차수가 가장 낮은 항이 bx^n이므로 $m\ge n$

ㄴ. $m=a$, $bn=9$이므로 $ab=m\cdot\dfrac{9}{n}\ge 9$ ($\because m\ge n$)

ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $m=a=3$, $bn=9$이므로 $am=bn$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0625 **전략** $f(x)$의 차수를 먼저 구한다.

풀이 조건 (가)에서

$(x^2-1)f'(x)=2xf(x)+kx^2+5$ ······ ㉠

(i) $f(x)$가 상수함수일 때,

㉠에서 좌변은 0, 우변의 차수는 2가 되어 모순이다.

(ii) $f(x)$가 일차함수일 때,

조건 (나)에서 $f(0)=-3$이므로 $f(x)=ax-3$(a는 상수, $a\ne 0$)으로 놓을 수 있다.

$f'(x)=a$이므로 조건 (다)에서

$f'(1)+f'(-1)=a+a=-10$ $\therefore a=-5$

따라서 $f(x)=-5x-3$, $f'(x)=-5$이므로 ㉠에 대입하면

(좌변)$=-5x^2+5$

(우변)$=2x(-5x-3)+kx^2+5=(k-10)x^2-6x+5$

이므로 모순이다.

(iii) $f(x)$가 $n(n\ge 2)$차 함수일 때,

$f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\ne 0$)이라 하자.

$f'(x)$는 최고차항이 anx^{n-1}인 $(n-1)$차 함수이므로 ㉠의 양변의 최고차항의 계수를 비교하면 $na=2a$

$a\ne 0$이므로 $n=2$

조건 (나)에서 $f(0)=-3$이므로 $f(x)=ax^2+bx-3$ (a, b는 상수, $a\ne 0$)으로 놓을 수 있다.

$f'(x)=2ax+b$이므로 조건 (다)에서

$f'(1)+f'(-1)=(2a+b)+(-2a+b)=-10$

$2b=-10$ $\therefore b=-5$

$f(x)=ax^2-5x-3$, $f'(x)=2ax-5$를 ㉠에 대입하면

$(x^2-1)(2ax-5)=2x(ax^2-5x-3)+kx^2+5$

$2ax^3-5x^2-2ax+5=2ax^3+(k-10)x^2-6x+5$

따라서 $-5=k-10$, $-2a=-6$이므로 $a=3$, $k=5$

$f(x)=3x^2-5x-3$이므로

$f(k)=f(5)=75-25-3=47$ 답 ④

0626 **전략** 구간에 따라 다르게 정의된 함수가 모든 실수 x에서 미분가능하면 각 구간의 경계점에서 연속이고 미분계수가 존재한다.

풀이 (i) $g(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하려면 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$\displaystyle\lim_{x\to a-}g(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=g(a)$

$f(a)=m-f(a)$ $\therefore m=2f(a)$ ······ ㉠

또 $g(x)$가 $x=b$에서 연속이어야 하므로

$\displaystyle\lim_{x\to b-}g(x)=\lim_{x\to b+}g(x)=g(b)$

$m-f(b)=n+f(b)$ $\therefore n=m-2f(b)$ ······ ㉡

(ii) $g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<a) \\ -f'(x) & (a<x<b) \\ f'(x) & (x>b) \end{cases}$

$g(x)$의 $x=a$에서의 미분계수가 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to a-} g'(x)=\lim_{x\to a+} g'(x)$$

$$f'(a)=-f'(a) \qquad \therefore f'(a)=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$g(x)$의 $x=b$에서의 미분계수가 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to b-} g'(x)=\lim_{x\to b+} g'(x)$$

$$-f'(b)=f'(b) \qquad \therefore f'(b)=0 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

이때 $f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$이고 ㉢, ㉣에서 a, b는 $f'(x)=0$의 두 근이므로 $\quad a=-3,\ b=1\ (\because a<b)$

㉠에서 $\quad m=2f(-3)=2\cdot 27=54$

㉡에서 $\quad n=54-2f(1)=54-2\cdot(-5)=64$

$\therefore m+n=118$

답 118

0627 전략 $f(x)=(x-3)(x-4)Q(x)$임을 이용한다.

풀이
$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}\cdot\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)$$
$$=4f'(4)$$

$4f'(4)=12$이므로 $\quad f'(4)=3$

$f(x)=(x-3)(x-4)Q(x)$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(x-4)Q(x)+(x-3)Q(x)+(x-3)(x-4)Q'(x)$$

위의 식의 양변에 $x=4$를 대입하면 $f'(4)=Q(4)$이므로

$Q(4)=3$

답 ③

다른 풀이 $f(x)=(x-3)(x-4)Q(x)$이므로

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-3)(x-4)Q(x)}{\sqrt{x}-2}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-3)(x-4)Q(x)}{x-4}\cdot(\sqrt{x}+2)$$
$$=\lim_{x\to 4}(x-3)Q(x)\cdot\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)$$
$$=4Q(4)$$

$4Q(4)=12$이므로 $\quad Q(4)=3$

0628 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+4}{x-1}=a$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x)+4\}=0$에서

$f(1)+4=0 \qquad \therefore f(1)=-4$ ··· ❶

따라서 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=a$ ··· ❷

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{40+\sum_{k=1}^{10}f(1+kh)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{10}\{f(1+kh)+4\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{10}\frac{f(1+kh)-f(1)}{kh}\cdot k=\sum_{k=1}^{10}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{f(1+kh)-f(1)}{kh}\right\}\cdot k$$
$$=\sum_{k=1}^{10}f'(1)\cdot k=f'(1)\sum_{k=1}^{10}k=a\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=55a$$ ··· ❸

따라서 $55a=110$이므로 $\quad a=2$ ··· ❹

답 2

채점 기준표

❶ $f(1)=-4$임을 알 수 있다.	20%
❷ $f'(1)=a$임을 알 수 있다.	20%
❸ $\lim_{h\to 0}\frac{40+\sum_{k=1}^{10}f(1+kh)}{h}$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❹ a의 값을 구할 수 있다.	10%

0629 전략 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a_n에서 a_{n+2}까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{f(a_{n+2})-f(a_n)}{a_{n+2}-a_n}$임을 이용한다.

풀이 x의 값이 a_n에서 a_{n+2}까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a_{n+2})-f(a_n)}{a_{n+2}-a_n}=\frac{(a_{n+2}^2+4a_{n+2}-3)-(a_n^2+4a_n-3)}{a_{n+2}-a_n}$$
$$=\frac{a_{n+2}^2-a_n^2+4a_{n+2}-4a_n}{a_{n+2}-a_n}$$
$$=\frac{(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}+a_n+4)}{a_{n+2}-a_n}$$
$$=a_{n+2}+a_n+4$$ ··· ❶

또 $f'(x)=2x+4$이므로 $x=a_{n+1}$에서의 미분계수는

$f'(a_{n+1})=2a_{n+1}+4$ ··· ❷

즉 $a_{n+2}+a_n+4=2a_{n+1}+4$이므로

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공차가 $a_2-a_1=3$인 등차수열이므로 $\quad a_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$ ··· ❸

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$$ ··· ❹

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준표

❶ 평균변화율을 구할 수 있다.	20%
❷ 미분계수를 구할 수 있다.	20%
❸ a_n을 구할 수 있다.	30%
❹ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$의 값을 구할 수 있다.	30%

0630 전략 $f(x)$를 n차 다항식으로 나타낸 후, 주어진 조건을 만족시키는 $f(x)$를 구한다.

풀이 조건 (나)에서 $f'(0)=-2$이므로 $f(x)$는 상수함수가 아니다.

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0)$이라 하면

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$$ ⋯→ ❶

조건 (가)에서 $\{f'(x)\}^2=f(x)$는 x에 대한 항등식이므로 최고차항을 비교하면

$n^2a_n{}^2x^{2n-2}=a_nx^n$에서 $\quad n^2a_n{}^2=a_n,\ 2n-2=n$

$\therefore n=2,\ a_n=\frac{1}{4}\ (\because a_n\neq0)$ ⋯→ ❷

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+a_1x+a_0$이므로 $\quad f'(x)=\frac{1}{2}x+a_1$

$f'(0)=-2$에서 $\quad a_1=-2$

$x=0$을 $\{f'(x)\}^2=f(x)$에 대입하면 $\{f'(0)\}^2=f(0)$에서

$a_0=4$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^2-2x+4$ ⋯→ ❸

$\therefore f(4)=\frac{1}{4}\cdot4^2-2\cdot4+4=0$ ⋯→ ❹

답 0

채점 기준표

❶ $f(x)$를 n차 다항식으로 놓고 $f'(x)$를 구할 수 있다.	20%
❷ n, a_n의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❹ $f(4)$의 값을 구할 수 있다.	10%

0631 **전략** 구간에 따라 다르게 정의된 함수가 모든 실수 x에서 미분가능하려면 각 구간의 경계점에서 연속이고 미분계수가 존재해야 한다.

풀이 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to2+}g(x)=\lim_{x\to2-}g(x)=g(2)$이므로

$f(-4)+b=f(2)$

$16a-28+b=4a-10 \qquad \therefore 12a+b=18$ ⋯⋯ ㉠

$g(x)$의 $x=2$에서의 미분계수가 존재하므로

$\lim_{x\to2+}g'(x)=\lim_{x\to2-}g'(x)$

이때 함수 $y=f(x-6)+b$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수와 $f(x)$의 $x=-4$에서의 미분계수가 같아야 한다.

즉 $f'(x)=3x^2+2ax-9$이고, $f'(2)=f'(-4)$이므로

$4a+3=-8a+39 \qquad \therefore a=3$ ⋯→ ❶

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$36+b=18 \qquad \therefore b=-18$ ⋯→ ❷

$\therefore a+b=-15$ ⋯→ ❸

답 -15

채점 기준표

❶ a의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0632 **전략** $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$로 놓고 $f(4)=2$, $f'(4)=3$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$로 놓으면 $f(4)=2$이므로

$(4-a)(4-b)(4-c)=2$ ⋯→ ❶

$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$이므로

$f'(4)=(4-b)(4-c)+(4-a)(4-c)+(4-a)(4-b)$

$=\frac{2}{4-a}+\frac{2}{4-b}+\frac{2}{4-c}$ ⋯→ ❷

이때 $f'(4)=3$이므로 $\quad \frac{2}{4-a}+\frac{2}{4-b}+\frac{2}{4-c}=3$

$\therefore \frac{1}{a-4}+\frac{1}{b-4}+\frac{1}{c-4}=-\frac{3}{2}$ ⋯→ ❸

답 $-\frac{3}{2}$

채점 기준표

❶ a, b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
❷ $f'(4)$를 a, b, c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ $\frac{1}{a-4}+\frac{1}{b-4}+\frac{1}{c-4}$의 값을 구할 수 있다.	20%

0633 **전략** 구간에 따라 다르게 정의된 함수가 모든 실수 x에서 미분가능하려면 각 구간의 경계점에서 연속이고 미분계수가 존재해야 한다.

풀이 $|f(x)|=|x^2-4x+3|=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x\le1 \text{ 또는 } x\ge3) \\ -x^2+4x-3 & (1<x<3) \end{cases}$

이므로 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} (ax^2+bx+c)(x^2-4x+3) & (x\le1 \text{ 또는 } x\ge3) \\ (ax^2+bx+c)(-x^2+4x-3) & (1<x<3) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=1$, $x=3$에서 미분가능해야 한다.

$g'(x)$

$$=\begin{cases} (2ax+b)(x^2-4x+3)+(ax^2+bx+c)(2x-4) \\ \qquad\qquad (x<1 \text{ 또는 } x>3) \\ (2ax+b)(-x^2+4x-3)+(ax^2+bx+c)(-2x+4) \\ \qquad\qquad (1<x<3) \end{cases}$$

$g(x)$의 $x=1$에서 미분계수가 존재해야 하므로

$\lim_{x\to1+}g'(x)=\lim_{x\to1-}g'(x)$에서

$2(a+b+c)=-2(a+b+c)$

$\therefore a+b+c=0$ ⋯⋯ ㉠ ⋯→ ❶

또 $g(x)$의 $x=3$에서 미분계수가 존재해야 하므로

$\lim_{x\to3+}g'(x)=\lim_{x\to3-}g'(x)$에서

$2(9a+3b+c)=-2(9a+3b+c)$

$\therefore 9a+3b+c=0$ ⋯⋯ ㉡ ⋯→ ❷

한편 $g'(0)=-48$이므로

$g'(0)=3b-4c=-48$ ⋯⋯ ㉢ ⋯→ ❸

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=-8,\ c=6$ ⋯→ ❹

$\therefore g'(-1)=-12\cdot8+16\cdot(-6)=-192$ ⋯→ ❺

답 -192

채점 기준표

❶ ㉠을 구할 수 있다.	20%
❷ ㉡을 구할 수 있다.	20%
❸ ㉢을 구할 수 있다.	20%
❹ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	20%
❺ $g'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

Ⅱ 다항함수의 미분법

06 도함수의 활용 (1)

0634 $f(x)=2x^2-6x+7$로 놓으면 $f'(x)=4x-6$
따라서 점 (1, 3)에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=4-6=-2$
답 -2

0635 $f(x)=x^3-5x^2-1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-10x$
따라서 점 (2, −13)에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=3\cdot2^2-10\cdot2=-8$
답 -8

0636 $f(x)=x^2-3x$로 놓으면 $f'(x)=2x-3$
점 (2, −2)에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=2\cdot2-3=1$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-(-2)=1\cdot(x-2)$
$\therefore y=x-4$
답 $y=x-4$

0637 $f(x)=-x^2+3x-5$로 놓으면 $f'(x)=-2x+3$
점 (−1, −9)에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=-2\cdot(-1)+3=5$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-(-9)=5(x+1)$
$\therefore y=5x-4$
답 $y=5x-4$

0638 $f(x)=3x^2+2x-1$로 놓으면 $f'(x)=6x+2$
점 (1, 4)에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=6+2=8$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-4=8(x-1)$
$\therefore y=8x-4$
답 $y=8x-4$

0639 $f(x)=x^3-2x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4x$
점 (1, 0)에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=3-4=-1$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-0=-(x-1)$
$\therefore y=-x+1$
답 $y=-x+1$

0640 $f(x)=-x^3+1$로 놓으면 $f'(x)=-3x^2$
점 (1, 0)에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=-3$
따라서 점 (1, 0)에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로
구하는 직선의 방정식은
$y-0=\frac{1}{3}(x-1)$ $\therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$
답 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

0641 $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4x+3$
점 (1, −2)에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=3-4+3=2$
따라서 점 (1, −2)에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$
답 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

0642 $f(x)=-x^3+x+2$로 놓으면 $f'(x)=-3x^2+1$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+t+2)$라 하면 접선의 기울기가 -2이므로
$f'(t)=-3t^2+1=-2,$ $t^2=1$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-2=-2(x+1)$, $y-2=-2(x-1)$
$\therefore y=-2x$, $y=-2x+4$
답 $y=-2x$, $y=-2x+4$

0643 $f(x)=x^2-4x+3$으로 놓으면 $f'(x)=2x-4$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2-4t+3)$이라 하면 직선 $y=-\frac{1}{2}x-7$과 수직인 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=2t-4=2$ $\therefore t=3$
따라서 구하는 접선은 점 (3, 0)을 지나고 기울기가 2인 직선이므로 $y-0=2(x-3)$
$\therefore y=2x-6$
답 $y=2x-6$

0644 $f(x)=x^3+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+1)$이라 하면 직선 $y=3x+5$에 평행한 접선의 기울기가 3이므로
$f'(t)=3t^2=3,$ $t^2=1$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-0=3(x+1)$, $y-2=3(x-1)$
$\therefore y=3x+3$, $y=3x-1$
답 $y=3x+3$, $y=3x-1$

0645 $f(x)=x^2+2x-1$로 놓으면 $f'(x)=2x+2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2t-1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+2$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^2+2t-1)=(2t+2)(x-t)$ …… ㉠
이 직선이 점 (−1, −3)을 지나므로
$-3-(t^2+2t-1)=(2t+2)(-1-t)$
$t^2+2t=0,$ $t(t+2)=0$
$\therefore t=0$ 또는 $t=-2$
이것을 ㉠에 대입하면
$t=0$일 때, $y+1=2x$ $\therefore y=2x-1$
$t=-2$일 때, $y+1=-2(x+2)$ $\therefore y=-2x-5$
답 $y=2x-1$, $y=-2x-5$

0646 $f(x)=x^3+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^3+2)=3t^2(x-t)$ …… ㉠
이 직선이 점 (0, 0)을 지나므로
$-(t^3+2)=3t^2\cdot(-t),$ $2t^3=2$
$t^3=1$ $\therefore t=1$
이것을 ㉠에 대입하면
$y-3=3(x-1)$ $\therefore y=3x$
답 $y=3x$

0647 (1) $f(x)=ax^3-4x$, $g(x)=-2x^2+bx$로 놓으면
$f'(x)=3ax^2-4$, $g'(x)=-4x+b$

두 곡선이 $x=-1$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(-1)=g(-1)$, $f'(-1)=g'(-1)$

$f(-1)=g(-1)$에서 $\quad -a+4=-2-b$

$\therefore a-b=6$ …… ㉠

$f'(-1)=g'(-1)$에서 $\quad 3a-4=4+b$

$\therefore 3a-b=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1, b=-5$

(2) 두 곡선 $y=x^3-4x$, $y=-2x^2-5x$의 접점의 좌표가 $(-1,\ 3)$이고 접선의 기울기가 $g'(-1)=-1$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-3=-(x+1) \quad \therefore y=-x+2$

답 (1) $a=1$, $b=-5$ (2) $y=-x+2$

0648 (1) $f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-1$, $g'(x)=2x$

접점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$이어야 한다.

$f(t)=g(t)$에서

$t^3-t=t^2-1, \quad (t+1)(t-1)^2=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2-1=2t, \quad (3t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=-\frac{1}{3}$ 또는 $t=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $t=1$이므로 접점의 x좌표는 1이다.

(2) 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 $f'(1)=g'(1)=2$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-0=2(x-1) \quad \therefore y=2x-2$

답 (1) 1 (2) $y=2x-2$

0649 함수 $f(x)=x^2-3x+4$는 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(3)=4$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-3$이므로 $\quad f'(c)=2c-3=0$

$\therefore c=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

0650 함수 $f(x)=-x^2+5x$는 닫힌 구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고 열린 구간 $(1,\ 4)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(4)=4$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=-2x+5$이므로 $\quad f'(c)=-2c+5=0$

$\therefore c=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

0651 함수 $f(x)=(x+2)(x-6)=x^2-4x-12$는 닫힌 구간 $[-2,\ 6]$에서 연속이고 열린 구간 $(-2,\ 6)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(6)=0$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-2,\ 6)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-4$이므로 $\quad f'(c)=2c-4=0$

$\therefore c=2$

답 2

0652 함수 $f(x)=x^3-x^2-5x-3$은 닫힌 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(3)=0$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-2x-5$이므로 $\quad f'(c)=3c^2-2c-5=0$

$(c+1)(3c-5)=0$

$\therefore c=\frac{5}{3}$ ($\because -1<c<3$)

답 $\frac{5}{3}$

0653 함수 $f(x)=x^4-2x^2+1$은 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)=0$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=4x^3-4x$이므로 $\quad f'(c)=4c^3-4c=0$

$4c(c+1)(c-1)=0$

$\therefore c=0$ ($\because -1<c<1$)

답 0

0654 함수 $f(x)=-x^2+x$는 닫힌 구간 $[-3,\ 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(-3,\ 2)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-3,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=-2x+1$이므로 $\quad \frac{-2-(-12)}{2-(-3)}=-2c+1$

$\therefore c=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

0655 함수 $f(x)=(2x+1)(x-1)=2x^2-x-1$은 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$인 c가 구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=4x-1$이므로 $\quad \frac{14-(-1)}{3-0}=4c-1$

$\therefore c=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

0656 함수 $f(x)=x^3$은 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$인 c가 구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2$이므로 $\quad \frac{27-0}{3-0}=3c^2$

$c^2=3 \quad \therefore c=\sqrt{3}$ ($\because 0<c<3$)

답 $\sqrt{3}$

0657 함수 $f(x)=x^3-2x+1$은 닫힌 구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-2$이므로 $\quad \frac{5-2}{2-(-1)}=3c^2-2$

$c^2=1 \quad \therefore c=1$ ($\because -1<c<2$)

답 1

0658 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x$는 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$인 c가 구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-6x+2$이므로 $\quad \frac{6-0}{3-0}=3c^2-6c+2$

$3c^2-6c=0, \quad 3c(c-2)=0$

$\therefore c=2$ ($\because 0<c<3$)

답 2

0659 답 (가) (a, x) (나) $f(x)=f(a)$

0660 답 (가) $f'(x)-g'(x)$ (나) 상수

참고 상수 c에 대하여 $f(x)=c \Longleftrightarrow f'(x)=0$

유형 01 접선의 기울기 본책 105쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

0661 $f(x)=x^3-ax^2+bx-1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2ax+b$

점 $(1, 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=2$

즉 $1-a+b-1=2$에서 $-a+b=2$ ...... ㉠

또 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$

즉 $3-2a+b=2$에서 $-2a+b=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=5$

$\therefore a+b=8$

답 ③

0662 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 7)$에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(2)=4$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$$=2f'(2)=2\cdot 4$$
$$=8$$

답 8

0663 $f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$로 놓으면

$f'(x)=9x^2+2ax+b$

두 점 $(-2, -5)$, $(2, 7)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-2)=-5$, $f(2)=7$

즉 $-24+4a-2b+c=-5$에서 $4a-2b+c=19$ ...... ㉠

또 $24+4a+2b+c=7$에서 $4a+2b+c=-17$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=-9$

또 두 점 $(-2, -5)$, $(2, 7)$에서의 접선이 서로 평행하므로

$f'(-2)=f'(2)$

즉 $36-4a+b=36+4a+b$에서 $a=0$

$a=0, b=-9$를 ㉠에 대입하면 $c=1$

$\therefore a-bc=0-(-9)=9$

답 ⑤

유형 02 접선의 방정식 ; 곡선 위의 점의 좌표가 주어진 경우 본책 105쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)가 주어졌을 때

(i) 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.

(ii) $f'(a)$를 $y-b=f'(a)(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

0664 $f(x)=-2x^3+ax+b$로 놓으면 $f'(x)=-6x^2+a$

점 $(1, -1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=-1$

즉 $-2+a+b=-1$에서 $a+b=1$ ...... ㉠

또 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로 $f'(1)=-2$

즉 $-6+a=-2$에서 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

$\therefore a^2+b^2=4^2+(-3)^2=25$

답 25

0665 $f(x)=x^3-2x^2+5$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4x$

점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이므로 직선 l의 방정식은 $y-4=-(x-1)$

$\therefore x+y-5=0$ ...... ㉠ ➊

점 $(2, 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 직선 m의 방정식은 $y-5=4(x-2)$

$\therefore 4x-y-3=0$ ...... ㉡ ➋

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\frac{8}{5}, y=\frac{17}{5}$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $\left(\frac{8}{5}, \frac{17}{5}\right)$이다. ➌

답 $\left(\frac{8}{5}, \frac{17}{5}\right)$

채점 기준표

➊ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	40%
➋ 직선 m의 방정식을 구할 수 있다.	40%
➌ 두 직선 l, m의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	20%

0666 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x-1}=4$에서 $x \to 1$일 때, (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x)+1\}=0$이므로 $f(1)=-1$

이때 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는 4이다.

따라서 점 $(1, -1)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-1)=4(x-1)$ $\therefore y=4x-5$

따라서 $a=4, b=-5$이므로

$ab=-20$

답 ①

0667 $f(x)=x^3+2x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2$

$\therefore f'(t)=3t^2+2$

따라서 점 (t, t^3+2t)에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t)=(3t^2+2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2)x-2t^3$

즉 $g(t)=-2t^3$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t+1)-g(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2(t+1)^3+2t^3}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-6t^2-6t-2}{t^2}$$
$$=-6$$

답 ②

0668 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f(2)=3$, $f'(2)=2$
곡선 $y=\{f(x)\}^2$ 위의 $x=2$인 점의 y좌표는
$\{f(2)\}^2=3^2=9$
한편 $y=\{f(x)\}^2$에서 $y'=2f(x)f'(x)$이므로 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는
$2f(2)f'(2)=2\cdot3\cdot2=12$
점 $(2, 9)$를 지나고 기울기가 12인 접선의 방정식은
$y-9=12(x-2)$ $\quad\therefore y=12x-15$
따라서 $a=12$, $b=-15$이므로
$a+b=-3$ 답 -3

유형 03 접선과 수직인 직선의 방정식 본책 109쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$를 지나고, 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식
➡ $y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$ (단, $f'(a)\neq0$)

0669 $f(x)=x^3$, $g(x)=2ax^2-bx$로 놓으면
$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=4ax-b$
두 곡선이 모두 점 $(1, 1)$을 지나므로 $f(1)=g(1)$에서
$1=2a-b$ ······ ㉠
또 점 $(1, 1)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(1)g'(1)=-1$에서
$3(4a-b)=-1$ $\quad\therefore 4a-b=-\dfrac{1}{3}$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{2}{3}$, $b=-\dfrac{7}{3}$
$\therefore a+b=-3$ 답 ①

0670 $f(x)=-x^3-2x^2+3$으로 놓으면
$f'(x)=-3x^2-4x$
점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=1$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1이다.
따라서 직선의 방정식은
$y-2=-(x+1)$ $\quad\therefore x+y-1=0$
위의 식이 $ax+by+2=0$과 일치해야 하므로
$\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{2}{-1}$ $\quad\therefore a=-2, b=-2$
$\therefore ab=4$ 답 ⑤

0671 $y=x^3-ax^2+2ax+2$를 a에 대하여 정리하면
$x^3-y+2-ax(x-2)=0$
위의 등식이 a에 대한 항등식이므로
$x^3-y+2=0$, $x(x-2)=0$
두 식을 연립하여 풀면
$x=0$, $y=2$ 또는 $x=2$, $y=10$
즉 곡선 $y=x^3-ax^2+2ax+2$는 a의 값에 관계없이 항상 두 점 $(0, 2)$, $(2, 10)$을 지난다. ➡ ❶
$y'=3x^2-2ax+2a$이고, 두 점 $(0, 2)$, $(2, 10)$에서의 접선이 서로 수직이므로
$2a(12-2a)=-1$
$\therefore 4a^2-24a-1=0$ ➡ ❷
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4}=148>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은 $-\dfrac{1}{4}$이다. ➡ ❸
답 $-\dfrac{1}{4}$

채점 기준표

❶ 곡선이 항상 지나는 두 점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ a에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40%
❸ 모든 실수 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	20%

SSEN 특강

항등식의 성질
① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식
$\iff a=0,\ b=0,\ c=0$
② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식
$\iff a=a',\ b=b',\ c=c'$

0672 $g(x)=x^2$으로 놓으면 $g'(x)=2x$
점 $P(t, t^2)$에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=2t$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2t}$이다.
따라서 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은
$y-t^2=-\dfrac{1}{2t}(x-t)$ $\quad\therefore y=-\dfrac{1}{2t}x+\dfrac{1}{2}+t^2$
$x=0$일 때 $y=\dfrac{1}{2}+t^2$이므로 $f(t)=\dfrac{1}{2}+t^2$
$\therefore \lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}\left(\dfrac{1}{2}+t^2\right)=\dfrac{1}{2}$ 답 ①

유형 04 곡선과 접선의 교점 본책 109쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선 $y=g(x)$가 이 곡선과 다시 만나는 점의 x좌표
➡ 방정식 $f(x)=g(x)$의 $x\neq a$인 실근

0673 $f(x)=-x^3+6x^2-9x-12$로 놓으면
$f'(x)=-3x^2+12x-9$
점 $(0, -12)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-9$이므로 접선의 방정식은
$y-(-12)=-9(x-0)$ $\quad\therefore y=-9x-12$
직선 $y=-9x-12$가 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는
$-x^3+6x^2-9x-12=-9x-12$
에서 $x^2(x-6)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=6$
따라서 다시 만나는 점의 좌표가 $(6, -66)$이므로
$a=6$, $b=-66$
$\therefore \dfrac{b}{a}=-11$ 답 -11

0674 $f(x)=x^3-3x^2+4$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x$
점 A(2, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=0$이므로 접선의 방정식은 $y=0$이고, 직선 $y=0$이 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는
$x^3-3x^2+4=0$에서 $(x+1)(x-2)^2=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
따라서 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$이므로 선분 AP의 중점의 좌표는
$\left(\frac{2+(-1)}{2}, 0\right)$, 즉 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 답 ①

0675 $f(x)=x^3-2x+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$
점 P(1, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 접선의 방정식은
$y-0=1\cdot(x-1)$ $\therefore y=x-1$
이때 점 Q의 좌표는 $(0, -1)$이다.
또 직선 $y=x-1$이 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는
$x^3-2x+1=x-1$에서 $x^3-3x+2=0$
$(x+2)(x-1)^2=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=1$
따라서 점 R의 좌표는 $(-2, -3)$이므로
$\overline{PQ}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$
$\overline{QR}=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$
$\therefore \overline{PQ}:\overline{QR}=\sqrt{2}:2\sqrt{2}=1:2$ 답 ①

0676 $f(x)=x^3-nx^2+x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2nx+1$
점 $(-1, -n-2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=2n+4$이므로 접선의 방정식은
$y-(-n-2)=(2n+4)(x+1)$
$\therefore y=(2n+4)x+n+2$
직선 $y=(2n+4)x+n+2$가 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는
$x^3-nx^2+x=(2n+4)x+n+2$
에서 $x^3-nx^2-(2n+3)x-n-2=0$
$(x+1)^2(x-n-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=n+2$
따라서 $x_n=n+2$이므로

$$\sum_{n=4}^{10}x_n=\sum_{n=4}^{10}(n+2)$$
$$=\sum_{n=1}^{10}(n+2)-\sum_{n=1}^{3}(n+2)$$
$$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}+20\right)-\left(\frac{3\cdot 4}{2}+6\right)$$
$$=75-12=63$$ 답 ④

0677 $f'(x)=(x-1)(kx+1)+x(kx+1)+kx(x-1)$
점 A(1, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=k+1$이므로 이 점을 지나고 직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{k+1}$이다.
따라서 직선의 방정식은
$y=-\frac{1}{k+1}(x-1)$ (단, $k\neq-1$)
이 직선이 곡선 $y=f(x)$와 한 점에서 만나려면 방정식
$x(x-1)(kx+1)=-\frac{1}{k+1}(x-1)$
이 한 개의 실근을 가져야 한다.
즉 $(x-1)\left(kx^2+x+\frac{1}{k+1}\right)=0$에서 이차방정식
$kx^2+x+\frac{1}{k+1}=0$
은 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=1-4k\cdot\frac{1}{k+1}<0$, $\frac{-3k+1}{k+1}<0$ ($\frac{B}{A}<0$이면 $AB<0$)
$(k+1)(3k-1)>0$ $\therefore k<-1$ 또는 $k>\frac{1}{3}$
답 ④

유형 05 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식의 활용 본책 110쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점의 좌표가 주어졌을 때
(i) a_1을 구한다.
(ii) 점 $(a_n, f(a_n))$에서의 접선의 방정식을 구하여 $a_{n+1}=pa_n$ 꼴로 나타낸다.
(iii) 수열 $\{a_n\}$이 등비수열임을 이용한다.

0678 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$
점 (2, 4)에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 접선의 방정식은
$y-4=4(x-2)$ $\therefore y=4x-4$
이 접선과 x축과의 교점의 좌표는 (1, 0)이므로 $a_1=1$
또 곡선 위의 점 (a_n, a_n^2)에서의 접선의 기울기는 $2a_n$이므로 접선의 방정식은
$y-a_n^2=2a_n(x-a_n)$ $\therefore y=2a_nx-a_n^2$
이 접선과 x축과의 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}a_n, 0\right)$이므로
$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로
$a_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\therefore a_6=\left(\frac{1}{2}\right)^5$ 답 ③

SSEN 특강

등비수열의 귀납적 정의
① $a_{n+1}\div a_n=r$ 또는 $a_{n+1}=ra_n$ ➡ 공비가 r인 등비수열
② $a_{n+1}\div a_n=a_{n+2}\div a_{n+1}$ 또는 $a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$
➡ a_{n+1}은 a_n과 a_{n+2}의 등비중항

0679 $f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이므로 접선의 방정식은
$y-1=3(x-1)$ $\therefore y=3x-2$
이 접선과 x축과의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$이므로
$a_1=\frac{2}{3}$ ··· ❶

또 곡선 위의 점 (a_n, a_n^3)에서의 접선의 기울기는 $3a_n^2$이므로 접선의 방정식은

$y-a_n^3=3a_n^2(x-a_n)$ $\quad\therefore y=3a_n^2x-2a_n^3$

이 접선과 x축과의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}a_n,\ 0\right)$이므로

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$ ⋯ ❷

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ⋯ ❸

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$ ⋯ ❹

답 2

채점 기준표

❶ a_1의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의할 수 있다.	30%
❸ a_n을 구할 수 있다.	20%
❹ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다.	20%

SSEN 특강

등비급수의 합

$-1<r<1$일 때, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}\,(a\neq0)$의 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

유형 06 접선의 방정식; 기울기가 주어진 경우

본책 110쪽

곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선의 기울기 m이 주어졌을 때
(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓는다.
(ii) $f'(t)=m$임을 이용하여 t의 값을 구한다.
(iii) $y-f(t)=m(x-t)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

0680 $f(x)=x^3-6x^2+10x-1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+10$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-6t^2+10t-1)$이라 하면 직선 $y=-2x-1$에 평행한 직선의 기울기는 -2이므로

$f'(t)=3t^2-12t+10=-2$

$t^2-4t+4=0,\quad (t-2)^2=0$

$\therefore t=2$

즉 접점의 좌표는 $(2,\ 3)$이므로 직선의 방정식은

$y-3=-2(x-2)$ $\quad\therefore y=-2x+7$

따라서 구하는 y절편은 7이다.

답 7

0681 $f(x)=3x^2-4x+1$로 놓으면

$f'(x)=6x-4$

접점의 좌표를 $(t,\ 3t^2-4t+1)$이라 하면 직선 $y=2x+5$에 평행한 접선의 기울기는 2이므로

직선을 평행이동하여도 기울기는 변하지 않는다.

$f'(t)=6t-4=2$ $\quad\therefore t=1$

즉 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

따라서 $m=1,\ n=0$이므로

$m+n=1$

답 ③

0682 $f(x)=x^3-4x+3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-4$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-4t+3)$이라 하면 접선의 기울기가 8이므로

$f'(t)=3t^2-4=8,\quad t^2=4$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$ ⋯ ❶

따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ 3)$, $(2,\ 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=8(x+2)$, $y-3=8(x-2)$

$\therefore y=8x+19,\ y=8x-13$ ⋯ ❷

이때 $a>b$이므로 $\quad a=19,\ b=-13$ ⋯ ❸

$\therefore a-b=32$ ⋯ ❹

답 32

채점 기준표

❶ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	10%
❹ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0683 $f(x)=2x^3-17x$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-17$

접점의 좌표를 $(t,\ 2t^3-17t)$라 하면 접선의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로

$f'(t)=6t^2-17=1,\quad t^2=3$

$\therefore t=\sqrt{3}\ (\because t>0)$

즉 접점의 좌표는 $(\sqrt{3},\ -11\sqrt{3})$이므로 접선의 방정식은

$y-(-11\sqrt{3})=x-\sqrt{3}$

$\therefore y=x-12\sqrt{3}$

따라서 $a=1,\ b=-12\sqrt{3}$이므로

$ab=-12\sqrt{3}$

답 ①

SSEN 특강

직선의 기울기

직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0°\leq\theta<90°)$라 하면

➡ (직선의 기울기)$=\tan\theta$

0684 $f(x)=-x^2+3x+5$로 놓으면

$f'(x)=-2x+3$

$\therefore f'(1)=1$

즉 직선 l의 기울기는 1이므로 직선 l과 수직인 직선을 m이라 하면 직선 m의 기울기는 -1이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 m의 접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+3t+5)$라 하면 $f'(t)=-1$에서

$-2t+3=-1$ $\quad\therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 7)$이므로 구하는 직선 m의 방정식은

$y-7=-(x-2)$

$\therefore x+y-9=0$

답 ③

유형 07 곡선과 직선이 접할 때 미정계수 구하기 본책 111쪽

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx+n$이 접할 때
(i) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓고 접선의 방정식을 세운다.
(ii) (i)에서 구한 접선의 방정식과 직선 $y=mx+n$이 일치함을 이용하여 t의 값을 구한다.
(iii) t의 값을 $y=f(x)$에 대입하여 미정계수를 구한다.

0685 $f(x)=x^3+2x^2+ax$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+4x+a$
접점의 좌표를 (t, t^3+2t^2+at)라 하면 접선의 기울기는
$f'(t)=3t^2+4t+a$
따라서 접선의 방정식은
$y-(t^3+2t^2+at)=(3t^2+4t+a)(x-t)$
$\therefore y=(3t^2+4t+a)x-2t^3-2t^2$
이 직선이 직선 $y=3x+8$과 일치해야 하므로
$3t^2+4t+a=3$ ······ ㉠
$-2t^3-2t^2=8$ ······ ㉡
㉡에서 $t^3+t^2+4=0$, $(t+2)(t^2-t+2)=0$
$\therefore t=-2$ ($\because t^2-t+2>0$)
$t=-2$를 ㉠에 대입하면
$12-8+a=3$ $\therefore a=-1$
답 ②

0686 곡선 $y=x^2-3x+a$와 직선 $y=-x+3$의 접점의 x좌표가 t이므로 $x=t$일 때 접선의 기울기는 -1이다.
$f(x)=x^2-3x+a$로 놓으면 $f'(x)=2x-3$이므로
$f'(t)=2t-3=-1$ $\therefore t=1$
따라서 접점의 좌표가 $(1, 2)$이므로 $x=1$, $y=2$를 $y=x^2-3x+a$에 대입하면 $2=1-3+a$ $\therefore a=4$
$\therefore a+t=5$
답 ③

0687 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$
점 $(2, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 접선의 방정식은
$y-4=4(x-2)$ $\therefore y=4x-4$ ······ ㉠
한편 $g(x)=x^3+ax+12$로 놓으면 $g'(x)=3x^2+a$
접점의 좌표를 $(t, t^3+at+12)$라 하면 접선의 기울기는
$g'(t)=3t^2+a$
따라서 접선의 방정식은
$y-(t^3+at+12)=(3t^2+a)(x-t)$
$\therefore y=(3t^2+a)x-2t^3+12$
이 직선이 ㉠과 일치해야 하므로
$3t^2+a=4$ ······ ㉡
$-2t^3+12=-4$ ······ ㉢
㉢에서 $t^3=8$ $\therefore t=2$
$t=2$를 ㉡에 대입하면
$12+a=4$ $\therefore a=-8$
답 ①

0688 $f(x)=x^3+ax^2+ax+3$으로 놓으면
$f'(x)=3x^2+2ax+a$
접점의 좌표를 (t, t^3+at^2+at+3)이라 하면 접선의 기울기는
$f'(t)=3t^2+2at+a$
따라서 접선의 방정식은
$y-(t^3+at^2+at+3)=(3t^2+2at+a)(x-t)$
$\therefore y=(3t^2+2at+a)x-2t^3-at^2+3$
이 직선이 직선 $y=x+3$과 일치해야 하므로
$3t^2+2at+a=1$ ······ ㉠
$-2t^3-at^2+3=3$ ······ ㉡
㉡에서 $t^2(2t+a)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=-\frac{a}{2}$
(i) $t=0$을 ㉠에 대입하면 $a=1$
(ii) $t=-\frac{a}{2}$를 ㉠에 대입하면
$\frac{3}{4}a^2-a^2+a=1$, $a^2-4a+4=0$
$(a-2)^2=0$ $\therefore a=2$
(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 합은
$1+2=3$
답 ③

유형 08 기울기가 주어진 접선의 방정식의 활용 본책 112쪽

곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선의 기울기 m이 주어졌을 때
➡ 접점의 좌표를 $(t, f(t))$라 하고 $f'(t)=m$임을 이용하여 t의 값을 구한 후 접점의 좌표를 구한다.

0689 $f(x)=x^3-3x^2-6x+1$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-6x-6$
접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-6t+1)이라 하면 접선의 기울기가 3이므로
$f'(t)=3t^2-6t-6=3$, $t^2-2t-3=0$
$(t+1)(t-3)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=3$
따라서 접점의 좌표는 $(-1, 3)$, $(3, -17)$이므로 접선의 방정식은
$y-3=3(x+1)$, $y+17=3(x-3)$
$\therefore 3x-y+6=0$, $3x-y-26=0$
위의 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-y+6=0$ 위의 점 $(0, 6)$과 직선 $3x-y-26=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는
$$\frac{|0-6-26|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{16\sqrt{10}}{5}$$
답 ③

SSEN 특강

점과 직선 사이의 거리
점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는
$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

0690 $f(x)=x^3-10x+5$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-10$
접점의 좌표를 $(t, t^3-10t+5)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=3t^2-10=2$, $t^2=4$
$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$ ···➊
즉 접점의 좌표는 $(-2, 17)$, $(2, -7)$이다. ···➋
따라서 선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{17-7}{2}\right)$, 즉 $(0, 5)$ ···➌
답 $(0, 5)$

채점 기준표

❶ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	50%
❷ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❸ 선분 AB의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	30%

0691 $f(x)=x^3-3x^2+5x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+5$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+5t)$라 하면 접선의 기울기가 8이므로

$f'(t)=3t^2-6t+5=8 \quad \therefore t^2-2t-1=0$ ······ ㉠

두 접점의 x좌표가 α, β이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은 α, β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\cdot(-1)=8$이므로

$|\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

유형 09 접선의 기울기의 최댓값 또는 최솟값 본책 112쪽

곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선의 기울기의 최댓값 또는 최솟값은 $f'(x)$의 최대·최소를 이용하여 구한다.

0692 $f(x)=-x^3+3x^2-4$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+6x=-3(x-1)^2+3$

이므로 $f'(x)$는 $x=1$에서 최댓값 3을 갖는다.

따라서 기울기가 최대인 접선의 접점의 좌표는 $(1,\ -2)$이고 접선의 기울기가 3이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-2)=3(x-1) \quad \therefore y=3x-5$

답 $y=3x-5$

0693 $f(x)=x^3-6x^2+x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+1=3(x-2)^2-11$

이므로 $f'(x)$는 $x=2$에서 최솟값 -11을 갖는다.

따라서 구하는 기울기 m의 최솟값은 -11이다.

답 ①

0694 $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2+kx-1$로 놓으면

$f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+k=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}+k$

이므로 $f'(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $\frac{9}{2}+k$를 갖는다.

즉 $\frac{9}{2}+k=6$이므로 $\quad k=\frac{3}{2}$

답 ②

유형 10 곡선 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값 본책 113쪽

(i) 곡선의 접선 중 주어진 직선과 평행한 접선의 접점의 좌표를 구한다.
(ii) 이 접점과 직선 사이의 거리가 구하는 거리의 최솟값이다.

0695 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $\quad f'(x)=2x$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=2x-6$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이어야 하므로 $\quad f'(t)=2t=2 \quad \therefore t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$이고, 점 $(1,\ 1)$과 직선 $y=2x-6$, 즉 $2x-y-6=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$$\frac{|2-1-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

답 ③

0696 $f(x)=x^2+3x+4$로 놓으면 $\quad f'(x)=2x+3$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=x$와 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+3t+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이어야 하므로 $\quad f'(t)=2t+3=1 \quad \therefore t=-1$ ··· ❶

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 2)$이므로 $\mathrm{P}(-1,\ 2)$일 때 △ABP의 넓이가 최소이다.

점 $\mathrm{P}(-1,\ 2)$와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$ ··· ❷

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이므로 △ABP의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}=3$$ ··· ❸

답 3

채점 기준표

❶ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	50%
❷ 점 P와 직선 $y=x$ 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❸ △ABP의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

유형 11 접선의 방정식; 곡선 밖의 한 점이 주어진 경우 본책 113쪽

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$가 주어졌을 때
(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓는다.
(ii) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 점 $(a,\ b)$의 좌표를 대입하여 t의 값을 구한다.
(iii) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

0697 $f(x)=x^3+2x$로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2+2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t)=(3t^2+2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2)x-2t^3$ ······ ㉠

이 직선이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=-2t^3, \quad t^3=-1 \quad \therefore t=-1$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=5x+2$

$5x+2=0$에서 $\quad x=-\frac{2}{5}$

따라서 구하는 접선의 x절편은 $-\frac{2}{5}$이다.

답 ④

0698 $f(x)=x^2-3$으로 놓으면 $\quad f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-3)=2t(x-t) \quad \therefore y=2tx-t^2-3$

이 직선이 점 $(0,\ -4)$를 지나므로

$-4=-t^2-3, \quad t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(-1)f'(1)=-2\cdot 2=-4$ 답 ④

0699 $f(x)=x^3+x$로 놓으면 $f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+t)=(2t+1)(x-t)$

$\therefore y=(2t+1)x-t^3$ …… ㉠

이 직선이 점 (1, 1)을 지나므로

$1=2t+1-t^3$, $t(t-2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$

$t=0$, $t=2$를 ㉠에 각각 대입하면

$y=x$, $y=5x-4$

이상에서 접선의 방정식은 ㄷ, ㅁ이다. 답 ⑤

0700 $f(x)=x^3+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+2)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3+2$ …… ㉠

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-2t^3+2$, $t^3=1$ $\therefore t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $y=3x$

따라서 직선 $y=3x$ 위의 점의 좌표는 ③이다. 답 ③

0701 $f(x)=x^2-2x$로 놓으면 $f'(x)=2x-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-2t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-2t)=(2t-2)(x-t)$

$\therefore y=(2t-2)x-t^2$

이 직선이 점 (1, −2)를 지나므로

$-2=2t-2-t^2$, $t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=2$

한편 점 $(t,\ t^2-2t)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$-\dfrac{1}{2t-2}$이므로 직선의 방정식은

$$y-(t^2-2t)=-\frac{1}{2t-2}(x-t)$$

위의 식에 $t=0$, $t=2$를 각각 대입하면

$y=\dfrac{1}{2}x$, $y=-\dfrac{1}{2}x+1$

따라서 $a=0$, $b=1$ 또는 $a=1$, $b=0$이므로

$a+b=1$ 답 1

유형 12 곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식의 활용 (1) 본책 114쪽

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$가 주어졌을 때

(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 접선의 방정식을 세운다.

(ii) 점 $(a,\ b)$의 좌표를 접선의 방정식에 대입하여 t에 대한 방정식을 세운다.

(iii) t에 대한 방정식의 해가 접점의 x좌표임을 이용한다.

0702 $f(x)=x^3-5x^2+8x-4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-10x+8$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t^2+8t-4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-10t+8$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-5t^2+8t-4)=(3t^2-10t+8)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-10t+8)x-2t^3+5t^2-4$

이 직선이 점 (3, 0)을 지나므로

$0=-2t^3+14t^2-30t+20$

$t^3-7t^2+15t-10=0$, $(t-2)(t^2-5t+5)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $t=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$

따라서 세 접점의 x좌표의 합은

$2+\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}=7$ 답 ④

0703 $f(x)=x^3-2x+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t+1)=(3t^2-2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-2)x-2t^3+1$

이 직선이 점 $(1,\ k)$를 지나므로

$k=3t^2-2-2t^3+1$ $\therefore 2t^3-3t^2+k+1=0$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근이 등차수열을 이루므로 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=\dfrac{3}{2}$ $\therefore a=\dfrac{1}{2}$

따라서 $t=\dfrac{1}{2}$이 방정식 ㉠의 근이므로

$\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}+k+1=0$ $\therefore k=-\dfrac{1}{2}$ 답 ③

유형 13 곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식의 활용 (2) 본책 114쪽

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$가 주어졌을 때

(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 접선의 방정식을 세운다.

(ii) 점 $(a,\ b)$의 좌표를 접선의 방정식에 대입하여 t의 값을 구한 후 접점의 좌표를 구한다.

0704 $f(x)=-x^2+x$로 놓으면 $f'(x)=-2x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+1$이므로 접선의 방정식은

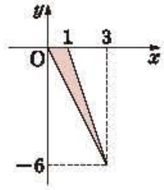
$y-(-t^2+t)=(-2t+1)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+1)x+t^2$

이 직선이 점 (2, −1)을 지나므로

$-1=-4t+2+t^2$, $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=3$



따라서 접점의 좌표는 (1, 0), (3, −6)이므로 오른쪽 그림에서 구하는 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 6=3$ 답 ②

0705 $f(x)=x^4+3$으로 놓으면 $f'(x)=4x^3$
접점의 좌표를 $(t,\ t^4+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3$이므로 접선의 방정식은
$$y-(t^4+3)=4t^3(x-t) \qquad \therefore y=4t^3x-3t^4+3 \quad \cdots➊$$
이 직선이 원점을 지나므로 $0=-3t^4+3$
$$t^4-1=0, \qquad (t+1)(t-1)(t^2+1)=0$$
$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1 \ (\because t^2+1>0) \quad \cdots➋$$
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 4)$, $(1,\ 4)$이므로
$$\overline{PQ}=2 \quad \cdots➌$$
답 2

채점 기준표

➊ 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 접선의 방정식을 세울 수 있다.	30%
➋ t의 값을 구할 수 있다.	50%
➌ 선분 PQ의 길이를 구할 수 있다.	20%

유형 14 공통인 접선
본책 115쪽

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$에서 공통인 접선을 가지면
① $x=t$인 점에서 두 곡선이 만난다. ➡ $f(t)=g(t)$
② $x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같다. ➡ $f'(t)=g'(t)$

0706 $f(x)=x^3$, $g(x)=3x^2-4$로 놓으면
$$f'(x)=3x^2, \ g'(x)=6x$$
두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면
$f(t)=g(t)$에서 $t^3=3t^2-4$
$$(t+1)(t-2)^2=0 \qquad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=2$$
$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2=6t$
$$3t(t-2)=0 \qquad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=2$$
따라서 $t=2$일 때, 즉 점 $(2,\ 8)$에서 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(2)=g'(2)=12$이므로 공통인 접선의 방정식은
$$y-8=12(x-2) \qquad \therefore y=12x-16$$
답 ④

0707 $f(x)=x^3+ax$, $g(x)=2x^2+4$로 놓으면
$$f'(x)=3x^2+a, \ g'(x)=4x$$
두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면
$f(t)=g(t)$에서 $t^3+at=2t^2+4 \quad \cdots\cdots ㉠$
$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2+a=4t$
$$\therefore a=4t-3t^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
$$t^3-t^2+2=0, \qquad (t+1)(t^2-2t+2)=0$$
$$\therefore t=-1 \ (\because t^2-2t+2>0)$$
$t=-1$을 ㉡에 대입하면 $a=-7$
답 ①

0708 $f(x)=x^3+ax$, $g(x)=bx^3+3x^2+c$로 놓으면
$$f'(x)=3x^2+a, \ g'(x)=3bx^2+6x$$
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1,\ -2)$를 지나므로
$f(1)=-2$에서 $a=-3 \quad \cdots\cdots ㉠$
$g(1)=-2$에서 $b+c=-5 \quad \cdots\cdots ㉡ \quad \cdots➊$
점 $(1,\ -2)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
$f'(1)=g'(1)$에서 $3+a=3b+6 \quad \cdots\cdots ㉢ \quad \cdots➋$
㉠, ㉡, ㉢에서 $a=-3,\ b=-2,\ c=-3 \quad \cdots➌$
$$\therefore a+b-c=-3+(-2)-(-3)=-2 \quad \cdots➍$$
답 -2

채점 기준표

➊ ㉠, ㉡을 구할 수 있다.	30%
➋ ㉢을 구할 수 있다.	30%
➌ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	30%
➍ $a+b-c$의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 15 두 곡선의 교점에서의 접선
본책 115쪽

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 대하여
(i) 두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면 ➡ $f(t)=g(t)$
(ii) 두 곡선의 교점에서의 접선의 방정식은 각각
➡ $y-f(t)=f'(t)(x-t)$, $y-g(t)=g'(t)(x-t)$

0709 $f(x)=x^2+4$, $g(x)=-3x^2+ax$로 놓으면
$$f'(x)=2x, \ g'(x)=-6x+a$$
두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$에서
$$t^2+4=-3t^2+at \qquad \therefore at=4t^2+4 \quad \cdots\cdots ㉠$$
두 접선이 서로 수직이므로 $2t(-6t+a)=-1$에서
$$-12t^2+2at=-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉠을 ㉡에 대입하면 $-12t^2+2(4t^2+4)=-1$
$$4t^2=9 \qquad \therefore t=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } t=\frac{3}{2}$$
(i) $t=-\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $-\frac{3}{2}a=13 \qquad \therefore a=-\frac{26}{3}$
(ii) $t=\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{3}{2}a=13 \qquad \therefore a=\frac{26}{3}$
그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{26}{3}$
답 ⑤

0710 $f(x)=-x^2+2$, $g(x)=ax^2+3x$로 놓으면
$$f'(x)=-2x, \ g'(x)=2ax+3$$
두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$에서
$$-t^2+2=at^2+3t \quad \cdots\cdots ㉠$$
또 $m_1=f'(t)=-2t$, $m_2=g'(t)=2at+3$이므로 $m_1-m_2=1$에서
$$-2t-2at-3=1 \qquad \therefore at=-t-2 \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $t=2$
$t=2$를 ㉡에 대입하면 $a=-2$
답 -2

0711 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1,\ k)$에서 만나므로
$$f(1)=k, \ g(1)=k$$
또 점 $(1,\ k)$에서의 두 곡선의 접선이 서로 수직이므로
$$f'(1)g'(1)=-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이고 점 $(1,\ k^2)$에서의 접선의 기울기는 0이므로
$$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=0, \qquad k\{f'(1)+g'(1)\}=0$$

$\therefore f'(1)+g'(1)=0(\because k\neq 0)$ ...... ㉡

㉡에서 $g'(1)=-f'(1)$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$\{f'(1)\}^2=1 \quad \therefore f'(1)=-1$ 또는 $f'(1)=1$

그런데 $f'(1)<g'(1)$이므로 $\quad f'(1)=-1,\ g'(1)=1$

$\therefore f'(1)-g'(1)=-2$

답 ④

유형 16 접선과 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이

본책 116쪽

(i) 접선의 방정식을 구한다.
(ii) 접선의 x절편과 y절편을 찾아 도형의 넓이를 구한다.

0712 $f(x)=2x^3-3x^2+4x-1$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x+4$

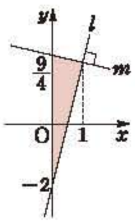
점 P$(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$이므로 접선 l의 방정식은

$y-2=4(x-1) \quad \therefore y=4x-2$

한편 직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이므로 점 $(1,\ 2)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{4}$인 직선 m의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{4}(x-1)$

$\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$



오른쪽 그림에서 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{9}{4}-(-2)\right\}\cdot 1=\frac{17}{8}$

답 ②

0713 $f(x)=x^2-4x+5$로 놓으면

$f'(x)=2x-4$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-4t+5)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=2t-4=2 \quad \therefore t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3,\ 2)$이므로 접선의 방정식은

$y-2=2(x-3) \quad \therefore y=2x-4$

접선의 x절편과 y절편이 각각 2, -4이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4$

답 ②

0714 점 $(1,\ k)$는 곡선 $y=x^2+a$ 위의 점이므로

$k=1+a$ ...... ㉠

$f(x)=x^2+a$로 놓으면 $\quad f'(x)=2x$

점 $(1,\ k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 접선의 방정식은

$y-k=2(x-1)$

$\therefore y=2x+k-2$ ➊

따라서 접선의 x절편과 y절편은 각각 $\frac{2-k}{2}$, $k-2$이다.

이때 $k>2$이고 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{4}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot\frac{k-2}{2}\cdot(k-2)=\frac{1}{4}, \quad (k-2)^2=1$

$\therefore k=3\ (\because k>2)$ ➋

$k=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad 3=1+a \quad \therefore a=2$ ➌

$\therefore a+k=5$ ➍

답 5

채점 기준표

➊ 점 $(1,\ k)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
➋ k의 값을 구할 수 있다.	30%
➌ a의 값을 구할 수 있다.	30%
➍ $a+k$의 값을 구할 수 있다.	10%

0715 $x^2+x-6=0$에서 $\quad (x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

이때 A$(2,\ 0)$, B$(0,\ -6)$이므로 직선 AB의 기울기는

$\frac{-6-0}{0-2}=3$

한편 $f(x)=x^2+x-6$으로 놓으면

$f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+t-6)$이라 하면 직선 AB의 기울기가 3이므로

$f'(t)=2t+1=3 \quad \therefore t=1$

즉 접점의 좌표가 $(1,\ -4)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-4)=3(x-1) \quad \therefore y=3x-7$

따라서 C$\left(\frac{7}{3},\ 0\right)$, D$(0,\ -7)$이므로 $\triangle$OCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{3}\cdot 7=\frac{49}{6}$

답 $\frac{49}{6}$

0716 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $\quad f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t) \quad \therefore y=2tx-t^2$ ...... ㉠

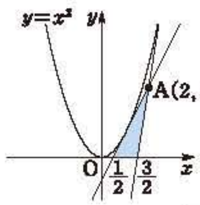
직선 ㉠이 점 A$(2,\ 3)$을 지나므로

$3=4t-t^2, \quad t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

$t=1$, $t=3$을 ㉠에 각각 대입하면

$y=2x-1$, $y=6x-9$



두 접선의 x축과의 교점의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이므로 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot 3=\frac{3}{2}$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=3^2+2^2=13$

답 ②

0717 $f(x)=x^2-2x+2$, $g(x)=-x^2+6$으로 놓으면

$f'(x)=2x-2$, $g'(x)=-2x$

제1사분면 위에 있는 두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad t^2-2t+2=-t^2+6, \quad t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0 \quad \therefore t=2\ (\because t>0)$

$\therefore$ P$(2,\ 2)$

점 P(2, 2)에서 두 곡선에 그은 접선 l, m의 기울기는 각각

$f'(2)=2$, $g'(2)=-4$

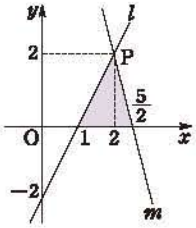
따라서 직선 l의 방정식은 $y-2=2(x-2)$에서

$y=2x-2$

직선 m의 방정식은 $y-2=-4(x-2)$에서

$y=-4x+10$

오른쪽 그림에서 두 직선 l, m과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}-1\right)\cdot 2=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

유형 17 곡선과 원의 접선 본책 117쪽

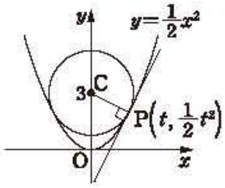
곡선 $y=f(x)$와 원 C가 접할 때,

① (원 C의 반지름의 길이)=(원 C의 중심과 접점 사이의 거리)

② 원 C의 중심과 접점을 지나는 직선은 접점에서의 접선과 수직이다.

0718 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$으로 놓으면 $f'(x)=x$

오른쪽 그림과 같이 접점을 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=t$이고, 직선 CP의 기울기는



$$\frac{\frac{1}{2}t^2-3}{t-0}=\frac{t^2-6}{2t}$$

이때 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로

$t\cdot\frac{t^2-6}{2t}=-1,\quad t^2=4$

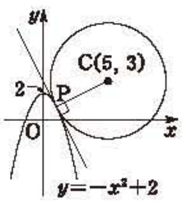
$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

따라서 두 접점의 좌표는 $(-2,\ 2)$, $(2,\ 2)$이고 원 C의 반지름의 길이는 두 점 $(2,\ 2)$, $(0,\ 3)$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ 답 ④

0719 $f(x)=-x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=-2x$

오른쪽 그림과 같이 접점을 $\mathrm{P}(t,\ -t^2+2)$라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$이고, 직선 CP의 기울기는



$$\frac{-t^2-1}{t-5}$$

이때 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로

$-2t\cdot\frac{-t^2-1}{t-5}=-1$

$2t^3+3t-5=0,\quad (t-1)(2t^2+2t+5)=0$

$\therefore t=1\ (\because 2t^2+2t+5>0)$

따라서 구하는 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$이다. 답 ④

0720 $f(x)=x^3+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

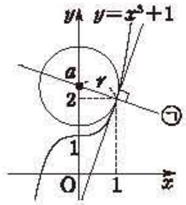
곡선 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=3$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 점 $(1,\ 2)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{3}(x-1)$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ …… ㉠ → 1

중심이 y축 위에 있는 원의 방정식을 $x^2+(y-a)^2=r^2\ (r>0)$이라 하면 직선 ㉠이 원의 중심 $(0,\ a)$를 지나야 하므로



$a=\frac{7}{3}$ → 2

이때 반지름의 길이 r는 두 점 $(1,\ 2)$, $\left(0,\ \frac{7}{3}\right)$ 사이의 거리와 같으므로

$r=\sqrt{(1-0)^2+\left(2-\frac{7}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}$ → 3

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2=\frac{10}{9}\pi$ → 4

답 $\frac{10}{9}\pi$

채점 기준표

1 접선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
2 a의 값을 구할 수 있다.	30%
3 r의 값을 구할 수 있다.	20%
4 원의 넓이를 구할 수 있다.	20%

유형 18 롤의 정리 본책 117쪽

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

⇒ $f'(c)=0$인 c가 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

0721 함수 $f(x)=(x+1)^2(x-2)$, 즉 $f(x)=x^3-3x-2$는 닫힌 구간 $[-\sqrt{3},\ \sqrt{3}]$에서 연속이고 열린 구간 $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$에서 미분가능하며 $f(-\sqrt{3})=f(\sqrt{3})=-2$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-3$이므로

$f'(c)=3c^2-3=3(c+1)(c-1)=0$

$\therefore c=-1$ 또는 $c=1$

따라서 모든 상수 c의 값의 합은

$-1+1=0$ 답 ③

0722 함수 $f(x)=kx-x^2$에 대하여 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 2가 존재하므로 $f'(x)=k-2x$에서

$f'(2)=k-4=0\quad \therefore k=4$ 답 ⑤

0723 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+5$는 닫힌 구간 $[-a, a]$에서 연속이고 열린 구간 $(-a, a)$에서 미분가능하다.
이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$이어야 하므로

$$-\frac{1}{3}a^3+a^2+3a+5=\frac{1}{3}a^3+a^2-3a+5$$

$a^3-9a=0,\quad a(a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a$는 자연수)

한편 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-3, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=x^2+2x-3$이므로 $\quad f'(c)=c^2+2c-3=0$

$(c+3)(c-1)=0 \quad \therefore c=1$ ($\because -3<c<3$)

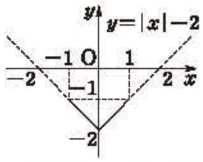
답 $a=3$, $c=1$

0724 $f(1)-f(-1)=2f'(c)$에서

$$\frac{f(1)-f(-1)}{2}=f'(c)$$

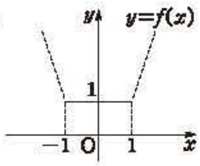
이때 보기의 세 함수는 모두 $f(1)=f(-1)$을 만족시키므로 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 구간 $(-1, 1)$에 존재하는지 알아보아야 한다.

ㄱ. 함수 $y=|x|-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 구간 $(-1, 1)$에 존재하지 않는다.

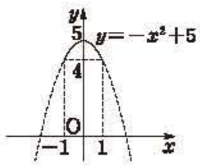


ㄴ, ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄴ.



ㄷ.



이상에서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

유형 19 평균값 정리; 정의를 이용하는 경우 본책 118쪽

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하면
➡ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

0725 함수 $f(x)=x^3-2x$는 닫힌 구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하므로

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-2$이므로 $\quad \frac{4-(-4)}{2-(-2)}=3c^2-2$

$3c^2=4 \quad \therefore c=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 또는 $c=\frac{2}{\sqrt{3}}$ ($\because -2<c<2$)

따라서 모든 상수 c의 값의 곱은 $-\frac{4}{3}$이다. 답 $-\frac{4}{3}$

0726 함수 $g(x)=f'(x)=6x^2-2x+1$은 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로

$$\frac{g(2)-g(0)}{2-0}=g'(c)$$

인 c가 구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$g'(x)=12x-2$이므로 $\quad \frac{21-1}{2-0}=12c-2$

$\therefore c=1$

답 ②

0727 함수 $f(x)=x^3-5x+3$은 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하므로

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-5$이므로 $\quad \frac{-1-7}{1-(-1)}=3c^2-5$

$3c^2=1 \quad \therefore c=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because -1<c<1$)

따라서 상수 c의 개수는 2이다. 답 ③

0728 함수 $f(x)=-x^2+5x+1$에 대하여 닫힌 구간 $[1, k]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 4가 존재하므로

$$\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'(4)$$

인 상수 4가 구간 $(1, k)$에 존재한다.

$f'(x)=-2x+5$이므로 $\quad \frac{-k^2+5k+1-5}{k-1}=-3$ ···· ❶

$k^2-8k+7=0,\quad (k-1)(k-7)=0$

$\therefore k=7$ ($\because k>1$) ···· ❷

답 7

채점 기준표

❶ $\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'(4)$임을 이용하여 k에 대한 식을 세울 수 있다.	60%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40%

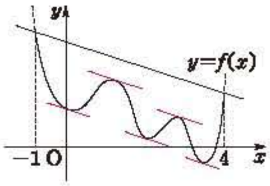
유형 20 평균값 정리; 그래프를 이용하는 경우 본책 118쪽

평균값 정리는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 갖는 점이 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재함을 의미한다.

0729 닫힌 구간 $[-1, 4]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-1, f(-1))$, $(4, f(4))$를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(4,\ f(4))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 5개 그을 수 있다.

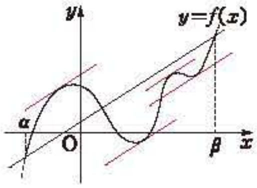
따라서 상수 c의 개수는 5이다.



답 ⑤

0730 $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$를 잇는 직선의 기울기이고, $f'(c)$는 곡선 $y=f(x)$의 $x=c$에서의 접선의 기울기이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 4개 그을 수 있으므로 주어진 조건을 만족시키는 상수 c의 개수는 4이다.



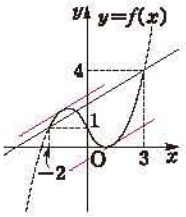
답 4

0731 닫힌 구간 $[-2,\ 3]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-2,\ 1)$, $(3,\ 4)$를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

함수 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & (x\geq 0)\\ -(x+1)^2+2 & (x<0)\end{cases}$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이때 두 점 $(-2,\ 1)$, $(3,\ 4)$를 잇는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있다.

따라서 상수 c의 개수는 2이다.



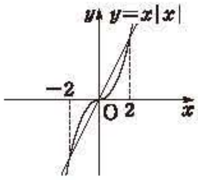
답 2

0732 $\dfrac{f(2)-f(-2)}{4}=f'(c)$에서

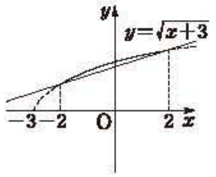
$\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=f'(c)$ …… ㉠

ㄱ, ㄴ. 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 ㉠을 만족시키는 c가 구간 $(-2,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

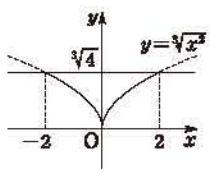
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ. 함수 $y=\sqrt[3]{x^2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ㉠을 만족시키는 c가 구간 $(-2,\ 2)$에 존재하지 않는다.



이상에서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

유형 21 평균값 정리의 변형 본책 119쪽

(i) 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구한다.

(ii) 주어진 식에 $f(x)$와 $f'(x)$를 대입하여 θ에 대한 식으로 정리한 후 극한값을 구한다.

0733 $f(x)=x^3$에서 $f'(x)=3x^2$

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$에서

$(a+h)^3=a^3+h\{3(a+\theta h)^2\}$

$3ah^2+h^3=6a\theta h^2+3\theta^2h^3$

$3h\theta^2+6a\theta-3a-h=0$ — θ에 대한 이차방정식으로 생각하고 근의 공식을 이용하여 θ를 구한다.

$\therefore\ \theta=\dfrac{-3a+\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}}{3h}\ (\because\ \theta>0)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{h\to 0}\theta&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}-3a}{3h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{9a^2+9ah+3h^2-9a^2}{3h(\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{3a+h}{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a}\\&=\frac{3a}{3a+3a}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ④

0734 $f(x)=x^2+ax+b$에서 $f'(x)=2x+a$

$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$에서

$(x+h)^2+a(x+h)+b=x^2+ax+b+h\{2(x+\theta h)+a\}$

$h^2=2\theta h^2$ $\quad\therefore\ \theta=\dfrac{1}{2}\ (\because\ h>0)$

답 ⑤

0735 전략 주어진 식을 변형하여 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-5$이므로 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기가 3이다.

$\therefore\ f'(2)=3$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\{f\left(2+\frac{1}{3n}\right)-f(2)\right\}$에서 $h=\dfrac{1}{3n}$로 놓으면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow 0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\{f\left(2+\frac{1}{3n}\right)-f(2)\right\}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{6h}\\&=\frac{1}{6}f'(2)\\&=\frac{1}{6}\cdot 3\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

0736 전략 $f(0)=0$이면 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}f_i'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f_i(x)+2kx}{f_i(x)+kx}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f_i(x)}{x}+2k}{\dfrac{f_i(x)}{x}+k}\ (i=1,\ 2)\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f_i(x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{f_i(x)-0}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f_i(x)-f_i(0)}{x-0}=f_i'(0)\end{aligned}$$

이므로

$$f_i'(0)=\frac{f_i'(0)+2k}{f_i'(0)+k}$$

$f_i'(0)=a$(a는 실수)라 하면

$$a=\frac{a+2k}{a+k},\quad a(a+k)=a+2k$$

$$a^2+(k-1)a-2k=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 조건 (다)에서 원점에서의 두 접선이 서로 직교하므로

$$f_1'(0)\cdot f_2'(0)=-1$$

$f_1'(0)$, $f_2'(0)$은 방정식 ㉠의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2k=-1 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

답 ①

0737 전략 등비급수의 합의 공식을 이용하여 $f(x)$를 간단히 정리한다.

풀이 $f(x)=x+\frac{x^5}{1+x^4}+\frac{x^9}{(1+x^4)^2}+\cdots+\frac{x^{4n-3}}{(1+x^4)^{n-1}}+\cdots$

에서 $0<\frac{x^4}{1+x^4}<1$이므로

$$f(x)=\frac{x}{1-\frac{x^4}{1+x^4}}=x(1+x^4)=x^5+x$$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$은 $|r|<1$일 때 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

$$\therefore f'(x)=5x^4+1$$

$f(-1)=-2$, $f'(-1)=6$이므로 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(-1, -2)$에서의 접선의 방정식은

$$y+2=6(x+1) \quad \therefore y=6x+4$$

답 $y=6x+4$

0738 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$이다.

풀이 주어진 그래프에서 $f(1)=2$, $f'(1)=0$

$g(x)=-xf(x)$에서 $g(1)=-f(1)=-2$

$g'(x)=-f(x)-xf'(x)$에서

$$g'(1)=-f(1)-f'(1)=-2$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, -2)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(-2)=-2(x-1) \quad \therefore y=-2x$$

답 $y=-2x$

0739 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$이다.

풀이 $f'(\alpha)=2\alpha$, $f'(\beta)=2\beta$이므로 두 점 $\left(\alpha, \alpha^2+\frac{1}{4}\right)$, $\left(\beta, \beta^2+\frac{1}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은 각각

$$y-\left(\alpha^2+\frac{1}{4}\right)=2\alpha(x-\alpha),\text{ 즉 }y=\boxed{2\alpha}x-\alpha^2+\frac{1}{4} \quad \cdots ㉠$$

$$y-\left(\beta^2+\frac{1}{4}\right)=2\beta(x-\beta),\text{ 즉 }y=\boxed{2\beta}x-\beta^2+\frac{1}{4} \quad \cdots ㉡$$

두 접선이 서로 수직이므로

$$2\alpha\cdot 2\beta=-1 \quad \therefore \alpha\beta=\boxed{-\frac{1}{4}}$$

㉠, ㉡에서 두 접선의 교점의 x좌표는

$$2\alpha x-\alpha^2+\frac{1}{4}=2\beta x-\beta^2+\frac{1}{4}$$

$$2(\alpha-\beta)x=\alpha^2-\beta^2,\quad 2(\alpha-\beta)x=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

그런데 $\alpha\neq\beta$이므로 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$y=\alpha\beta+\frac{1}{4}=0$$

따라서 두 접선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, 0\right)$이므로 교점은 항상 x축 위에 있다.

답 ③

0740 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점에서의 접선 $y=g(x)$가 이 곡선과 다시 만나는 점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근임을 이용한다.

풀이 $f(x)=(x-1)(x-3)(x-a)$에서

$$f(2)=-(2-a)=a-2$$

이므로 점 P의 좌표는 $(2, a-2)$

$f'(x)=(x-3)(x-a)+(x-1)(x-a)+(x-1)(x-3)$이므로

$$f'(2)=-(2-a)+(2-a)-1=-1$$

따라서 점 P$(2, a-2)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(a-2)=-(x-2),\text{ 즉 }y=-x+a$$

직선 $y=-x+a$가 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$$(x-1)(x-3)(x-a)=-x+a$$

$$(x-a)\{(x-1)(x-3)+1\}=0$$

$$(x-a)(x^2-4x+4)=0,\quad (x-a)(x-2)^2=0$$

$$\therefore x=a\text{ 또는 }x=2$$

따라서 점 Q의 좌표는 $(a, 0)$이다.

한편 점 Q에서의 접선이 직선 PQ와 서로 수직이므로 점 Q에서의 접선의 기울기는 1이어야 한다.

$f'(a)=1$에서 $(a-1)(a-3)=1$

$$a^2-4a+2=0$$

이때 $a>3$이므로 $a=2+\sqrt{2}$

답 ①

0741 전략 함수 $y=f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이면 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선은 x축에 평행하다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-(b^2-4)x+2$로 놓으면

$$f'(x)=x^2+2ax-b^2+4$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 모든 점에서의 접선이 x축과 평행하지 않으려면 $f'(x)=0$을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않아야 하므로 모든 실수 x에 대하여 이차방정식 $x^2+2ax-b^2+4=0$이 실근을 갖지 않아야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-(-b^2+4)=a^2+b^2-4<0$$

$$\therefore a^2+b^2<4$$

따라서 점 (a, b)는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원의 내부에 존재하므로 구하는 영역의 넓이는 4π이다.

답 ④

0742 **전략** $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)로 놓고 조건 (나), (다)를 이용하여 b, d를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)로 놓으면

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$$

조건 (다)에서 $f'(0)=0$이므로 $\quad c=0$

조건 (나)에서 $f(2)=2$, $f'(2)=0$이므로

$$f(2)=16+8a+4b+d=2$$

$$8a+4b+d=-14 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$f'(2)=32+12a+4b=0$$

$$b=-3a-8 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$8a+4(-3a-8)+d=-14$$

$$\therefore d=4a+18 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 $f(x)$에 대입하면

$$f(x)=x^4+ax^3+(-3a-8)x^2+4a+18$$

$$=a(x^3-3x^2+4)+x^4-8x^2+18$$

이때 a의 값에 관계없이 $y=f(x)$의 그래프가 항상 지나는 점의 x좌표는 $x^3-3x^2+4=0$을 만족시키는 x의 값이다.

$x^3-3x^2+4=0$에서 $\quad (x+1)(x-2)^2=0$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

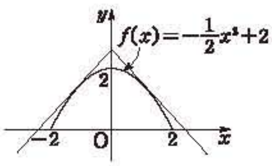
$x=-1$일 때, y좌표는 11이고, $x=2$일 때, y좌표는 2이므로 y좌표의 합은

$$11+2=13$$

답 13

0743 **전략** 주어진 구조물의 단면을 좌표평면 위에 나타내어 이차함수의 그래프의 식을 구한다.

풀이 주어진 구조물의 단면을 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 나타내면 이차함수의 그래프의 식은



$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$$

로 놓을 수 있다.

이 이차함수의 그래프와 제1사분면에서 접하는 접선의 접점의 좌표를 $\left(t,\ -\frac{1}{2}t^2+2\right)$ $(0<t<2)$라 하면 $f'(x)=-x$에서 접선의 기울기는 $f'(t)=-t$이므로 접선의 방정식은

$$y-\left(-\frac{1}{2}t^2+2\right)=-t(x-t)$$

$$\therefore y=-tx+\frac{1}{2}t^2+2$$

이때 접선의 x절편은 $\frac{1}{2}t+\frac{2}{t}$, y절편은 $\frac{1}{2}t^2+2$이고 조명에 의하여 생기는 그림자와 구조물의 밑면의 넓이의 합이 $\frac{25}{4}\pi\,\mathrm{m}^2$이므로

$$\left(\frac{1}{2}t+\frac{2}{t}\right)^2\pi=\frac{25}{4}\pi, \quad \frac{1}{2}t+\frac{2}{t}=\frac{5}{2}$$

$$t^2-5t+4=0, \quad (t-1)(t-4)=0$$

$$\therefore t=1 \ (\because 0<t<2)$$

따라서 구하는 높이는 $\quad \frac{1}{2}\cdot 1^2+2=\frac{5}{2}$ (m)

접선의 y절편과 같다.

답 ④

0744 **전략** 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 $x=p$, $x=q$인 점에서 만나면 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 $x=p$ 또는 $x=q$와 같음을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 삼차방정식 $f(x)=3x+2$의 두 실근이 $x=2$(중근), $x=a$이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)-(3x+2)=(x-2)^2(x-a)$$

$$\text{즉 } f(x)=(x-2)^2(x-a)+3x+2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

$$\therefore f'(x)=2(x-2)(x-a)+(x-2)^2+3$$

조건 (나)에서 $f'(a)=12$이므로

$$f'(a)=(a-2)^2+3=12$$

$$a^2-4a-5=0, \quad (a+1)(a-5)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=5$$

이때 $a>2$이므로 $\quad a=5$

따라서 점 B의 좌표는 (5, 17)이다.

직선 $y=3x+2$의 방정식에 $x=5$를 대입하면 $y=17$이다.

또 $a=5$를 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x-2)^2(x-5)+3x+2$$

$$=x^3-9x^2+27x-18$$

이므로 $\quad f'(x)=3x^2-18x+27$

이때 $f'(x)=3$에서

$$3x^2-18x+27=3, \quad x^2-6x+8=0$$

$$(x-2)(x-4)=0 \quad \therefore x=2 \text{ 또는 } x=4$$

즉 점 C의 좌표는 (4, 10)이다. 따라서

$f(4)=10$

$$\overline{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(17-8)^2}=3\sqrt{10}$$

이고, 점 C(4, 10)과 직선 $y=3x+2$, 즉 $3x-y+2=0$ 사이의 거리는 $\quad \frac{|12-10+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{10}\cdot\frac{4}{\sqrt{10}}=6$$

답 ①

0745 **전략** 두 접점 P, Q에서의 접선의 기울기가 같음을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+2x$로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2-6x+2$

곡선 $y=x^3-3x^2+2x$에 그은 기울기가 m인 두 접선의 접점을 각각 $P(a,\ a^3-3a^2+2a)$, $Q(b,\ b^3-3b^2+2b)$라 하자. (단, $a\neq b$)

ㄱ. 방정식 $f'(x)=m$, 즉 $3x^2-6x+2-m=0$의 두 실근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=-\frac{-6}{3}=2$$

ㄴ. 이차방정식 $3x^2-6x+2-m=0$이 서로 다른 두 실근 a, b를 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-3(2-m)>0$$

$$9-6+3m>0, \quad 3m>-3$$

$$\therefore m>-1$$

ㄷ. 기울기가 m인 두 접선은 평행하므로 두 접선 사이의 거리가 선분 PQ의 길이와 같아지려면 접점 P 또는 Q에서의 접선과 직선 PQ가 서로 수직이어야 한다. 즉 점 P에서의 접선과 직선 PQ의 기울기의 곱이 −1이 되는 실수 m이 존재해야 하므로

$$m\cdot\frac{(a^3-3a^2+2a)-(b^3-3b^2+2b)}{a-b}=-1$$

$$m\cdot\frac{(a^3-b^3)-3(a^2-b^2)+2(a-b)}{a-b}=-1$$

$$m\{a^2+ab+b^2-3(a+b)+2\}=-1$$

$$m\{(a+b)^2-ab-3(a+b)+2\}=-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 a, b는 방정식 $3x^2-6x+2-m=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=2,\ ab=\frac{2-m}{3}$$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$$m\left(4-\frac{2-m}{3}-6+2\right)=-1$$

$$m\cdot\frac{m-2}{3}=-1$$

$$\therefore m^2-2m+3=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-3=-2<0$$

이므로 방정식 ㉡을 만족시키는 실수 m이 존재하지 않는다.
따라서 두 접선 사이의 거리와 선분 PQ의 길이가 같아지는 실수 m은 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

다른 풀이 ㄱ. 두 접점 P, Q의 x좌표를 각각 a, b $(a\neq b)$라 하자.
$f(x)=x^3-3x^2+2x$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6x+2$$

이때 두 접점 P, Q에서의 접선의 기울기는 m으로 서로 같으므로

$$3a^2-6a+2=3b^2-6b+2$$

$$3a^2-6a+2-3b^2+6b-2=0$$

$$3(a^2-b^2)-6(a-b)=0$$

$$3(a-b)(a+b)-6(a-b)=0$$

$$3(a-b)(a+b-2)=0$$

$$\therefore a+b=2\ (\because a\neq b)$$

0746 **전략** $f'(x)$의 최솟값을 구한다.

풀이 $f'(x)=3x^2-12ax+12a^2+\sqrt{3}$
$=3(x-2a)^2+\sqrt{3}$

ㄱ. 함수 $f'(x)$는 $x=2a$일 때 최소이다.
$\therefore f'(a)>f'(2a)$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq\sqrt{3}$이므로 접선의 기울기의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.

ㄷ. $f'(x)=m$에서

$$3x^2-12ax+12a^2+\sqrt{3}-m=0$$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4a$$

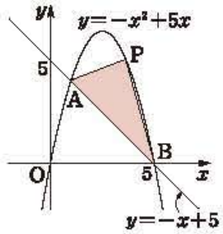
이때 α, β는 두 접점의 x좌표이므로 두 접점을 잇는 선분의 중점의 x좌표는

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{4a}{2}=2a$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0747 **전략** △ABP의 넓이가 최대가 될 때는 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대가 될 때이다.

풀이 오른쪽 그림에서 △ABP의 넓이가 최대일 때는 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 $y=-x+5$의 기울기와 같을 때이다.



$f(x)=-x^2+5x$로 놓으면

$$f'(x)=-2x+5$$

점 P의 좌표를 $(t,\ -t^2+5t)$라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 -1이어야 하므로

$$f'(t)=-2t+5=-1 \qquad \therefore t=3$$

따라서 점 P의 좌표가 $(3,\ 6)$일 때 △ABP의 넓이가 최대이므로

$$a=3,\ b=6$$

$$\therefore a+b=9$$

답 ④

0748 **전략** 직선 $y=ax$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때의 접선의 방정식을 구한다.

풀이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=ax$가 제1사분면에서 접할 때의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t+2)$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$에서 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3-2t+2)=(3t^2-2)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-2)x-2t^3+2$$

이 직선이 원점을 지나므로 ── 직선 $y=ax$는 항상 원점을 지난다.

$$-2t^3+2=0$$

$$t^3=1 \qquad \therefore t=1$$

따라서 곡선과 직선이 제1사분면에서 접할 때의 접선의 방정식은 $y=x$이므로 a의 값에 따른 곡선과 직선의 교점의 개수는 다음과 같다.

(i) $a>1$이면 교점의 개수는 3
(ii) $a=1$이면 교점의 개수는 2
(iii) $a<1$이면 교점의 개수는 1

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0749 **전략** 기울기가 $f'(a)$인 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{f'(a)}$이다. (단, $f'(a)\neq0$)

풀이 $f(x)=x^3+1$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2 \qquad \therefore f'(t)=3t^2$$

점 $A(t,\ t^3+1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(t^3+1)=3t^2(x-t)$$

$$\therefore y=3t^2x-2t^3+1$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{3t^2}$이므로 점 A를 지나고 점 A에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y-(t^3+1)=-\frac{1}{3t^2}(x-t)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{3t^2}x+\frac{1}{3t}+t^3+1$$

따라서 $B(0,\ -2t^3+1)$, $C\left(0,\ \dfrac{1}{3t}+t^3+1\right)$이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot|t|\cdot\left|\left(\frac{1}{3t}+t^3+1\right)-(-2t^3+1)\right|$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{3}{2}t^4$$
$$\therefore \lim_{t\to0}S(t)=\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{2}t^4\right)=\frac{1}{6}$$

답 ⑤

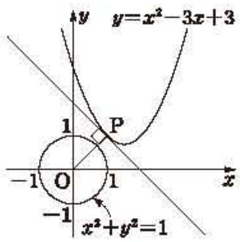
0750 **전략** 곡선 위의 점 P와 원점 O가 중심인 원 사이의 거리가 최소가 될 때는 점 P에서의 접선과 직선 OP가 서로 수직이 될 때이다.

풀이 $f(x)=x^2-3x+3$으로 놓으면

$f'(x)=2x-3$

곡선 $y=x^2-3x+3$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(t,\ t^2-3t+3)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-3$이다.

이때 원 $x^2+y^2=1$의 중심이 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이므로 곡선 위의 점과 원 사이의 거리의 최솟값은 점 P에서의 접선과 직선 OP가 서로 수직이 될 때의 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이에서 반지름의 길이 1을 뺀 것과 같다.



직선 OP의 기울기는 $\frac{t^2-3t+3}{t}$이므로

$$\frac{t^2-3t+3}{t}\cdot(2t-3)=-1$$

$2t^3-9t^2+16t-9=0,\qquad (t-1)(2t^2-7t+9)=0$

$\therefore t=1\ (\because 2t^2-7t+9>0)$

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ 1)$이고 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2}$이므로 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{2}-1$이다.

답 ①

0751 **전략** 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

풀이 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ -6)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-6,\ 3)$에서의 접선도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. ⋯ ➊

$f'(x)=-2x+2$에서 $f'(3)=-4$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ -6)$에서의 접선의 방정식은

$y+6=-4(x-3)\qquad \therefore y=-4x+6$ ⋯ ➋

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$x=-4y+6\qquad \therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-6,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$ ⋯ ➌

답 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$

채점 기준표

➊ 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.	40%
➋ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ -6)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
➌ 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-6,\ 3)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%

0752 **전략** 기울기가 각각 m, n인 두 직선이 이루는 각이 직각이면 $mn=-1$이다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^2$으로 놓으면 $\quad f'(x)=\frac{2}{3}x$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{3}t^2\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{2}{3}t$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{3}t^2=\frac{2}{3}t(x-t)\qquad \therefore y=\frac{2}{3}tx-\frac{1}{3}t^2$ ⋯ ➊

점 P의 좌표를 $(a,\ a-1)$이라 하면 점 P가 직선 $y=\frac{2}{3}tx-\frac{1}{3}t^2$ 위의 점이므로 $\quad a-1=\frac{2}{3}ta-\frac{1}{3}t^2$

$\therefore t^2-2at+3(a-1)=0$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ➋

이 이차방정식의 두 근을 p, q라 하면 p, q는 접점의 x좌표이므로 접점에서의 접선의 기울기는 각각 $\frac{2}{3}p$, $\frac{2}{3}q$이다.

이때 두 접선이 이루는 각이 직각이므로

$\frac{2}{3}p\cdot\frac{2}{3}q=-1\qquad \therefore pq=-\frac{9}{4}$ ⋯ ➌

㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $pq=3(a-1)$이므로 $\quad -\frac{9}{4}=3(a-1)\qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$이다. ⋯ ➍

답 $\left(\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$

채점 기준표

➊ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
➋ t에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	20%
➌ pq의 값을 구할 수 있다.	30%
➍ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	20%

0753 **전략** 두 곡선의 접점의 x좌표를 t로 놓고 $f(t)=g(t)$임을 이용하여 t의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=-x^2+4x-1$로 놓으면

$f'(x)=2x,\ g'(x)=-2x+4$

두 곡선의 접점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$t^2+1=-t^2+4t-1,\qquad t^2-2t+1=0$

$(t-1)^2=0\qquad \therefore t=1$ ⋯ ➊

따라서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 접점에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=g'(1)=2$이므로 두 직선 m, n의 기울기는 모두 $-\frac{1}{2}$이다.

점 A의 x좌표를 a라 하면 $f'(a)=2a=-\frac{1}{2}$에서 $a=-\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{A}\left(-\frac{1}{4},\ \frac{17}{16}\right)$ ⋯ ➋

점 B의 x좌표를 b라 하면 $g'(b)=-2b+4=-\frac{1}{2}$에서 $b=\frac{9}{4}$이므로 $\quad \mathrm{B}\left(\frac{9}{4},\ \frac{47}{16}\right)$ ⋯ ➌

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}{2}, \frac{\frac{17}{16}+\frac{47}{16}}{2}\right),\ \text{즉 } (1,\ 2)$$ ···➍

답 (1, 2)

채점 기준표

➊ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	20%
➋ 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	30%
➌ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	30%
➍ 선분 AB의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	20%

0754 전략 주어진 조건을 이용하여 $f'(x)=0$, $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 모두 찾는다.

풀이 조건 (나)에서

$f'(1+x)=g'(1-x)$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(1)=g'(1)=0$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f'(-1)=g'(3)=0$ ···➊

이때 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f'(x)$, $g'(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차함수이다.

$\therefore f'(x)=3(x+1)(x-1)$

$g'(x)=3(x-1)(x-3)$ ···➋

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 위의 $x=2$인 점을 A라 하고, 이 점의 y좌표를 k라 하자.

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 A$(2,\ k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=9$이므로 접선의 방정식은

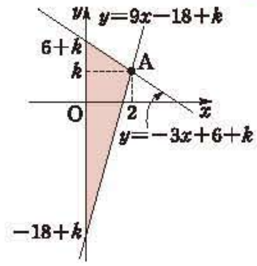
$y-k=9(x-2)$, 즉 $y=9x-18+k$ ···➌

또 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 A$(2,\ k)$에서의 접선의 기울기는 $g'(2)=-3$이므로 접선의 방정식은

$y-k=-3(x-2)$, 즉 $y=-3x+6+k$ ···➍

따라서 오른쪽 그림에서 두 접선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\{(6+k)-(-18+k)\}\cdot 2=24$ ···➎



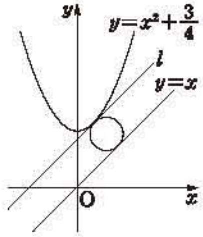
답 24

채점 기준표

➊ $f'(-1)=0$, $g'(1)=0$임을 알 수 있다.	20%
➋ $f'(x)$, $g'(x)$를 구할 수 있다.	20%
➌ 곡선 $y=f(x)$의 점 A에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20%
➍ 곡선 $y=g(x)$의 점 A에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20%
➎ 두 접선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	20%

0755 전략 직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2+\frac{3}{4}$에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 최소인 원은 곡선 $y=x^2+\frac{3}{4}$의 접선 중 기울기가 1인 접선과 직선 $y=x$에 동시에 접하는 원이다.

풀이 직선 $y=x$에 평행하고 곡선 $y=x^2+\frac{3}{4}$에 접하는 직선을 l이라 하면 직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2+\frac{3}{4}$에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 최소인 원은 오른쪽 그림과 같이 직선 l과 직선 $y=x$에 동시에 접하는 원이다. ···➊



이때 $f(x)=x^2+\frac{3}{4}$으로 놓으면 $f'(x)=2x$이고 곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 접점의 좌표를 $\left(t,\ t^2+\frac{3}{4}\right)$이라 하면 직선 l의 기울기가 1이므로

$f'(t)=2t=1 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$이고, 점 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|\frac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

이므로 이때의 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{8} \quad \therefore r=\frac{\sqrt{2}}{8}$ ···➋

한편 점 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선과 수직이다.

$y-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \therefore y=-x+\frac{3}{2}$

두 직선 $y=-x+\frac{3}{2}$, $y=x$의 교점의 x좌표는 $-x+\frac{3}{2}=x$에서 $x=\frac{3}{4}$이므로 교점의 좌표는 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)$이다.

따라서 직선 l과 직선 $y=x$에 동시에 접하는 원은 두 점 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, $\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이므로 이 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2}, \frac{1+\frac{3}{4}}{2}\right),\ \text{즉 } \left(\frac{5}{8},\ \frac{7}{8}\right)$$

$\therefore a=\frac{5}{8},\ b=\frac{7}{8}$ ···➌

$\therefore (a+b)r=\left(\frac{5}{8}+\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{3\sqrt{2}}{16}$ ···➍

답 $\frac{3\sqrt{2}}{16}$

채점 기준표

➊ 조건을 만족시키는 원이 직선 l과 직선 $y=x$에 동시에 접하는 원임을 알 수 있다.	30%
➋ r의 최솟값을 구할 수 있다.	30%
➌ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
➍ $(a+b)r$의 값을 구할 수 있다.	10%

07 도함수의 활용 (2)

0756 답 (가) < (나) 증가

0757 $a<b$인 임의의 두 양수 a, b에 대하여

$f(a)-f(b)=-a^2-(-b^2)=-(a^2-b^2)$
$=-(a+b)(a-b)>0$

$\therefore f(a)>f(b)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 감소한다. 답 감소

0758 $1<a<b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$f(a)-f(b)=(a^2-2a)-(b^2-2b)$
$=a^2-b^2-2(a-b)$
$=(a-b)\underbrace{(a+b-2)}_{a>1,\ b>1\text{이므로}\ a+b-2>0}<0$

$\therefore f(a)<f(b)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(1, \infty)$에서 증가한다. 답 증가

0759 $a<b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$f(a)-f(b)=-a^3-(-b^3)=-(a^3-b^3)$
$=-(a-b)(a^2+ab+b^2)$

이때 $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$이므로

$f(a)-f(b)>0$ $\therefore f(a)>f(b)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다. 답 감소

0760 $f(x)=x^2-4x+2$에서

$f'(x)=2x-4$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 2]$에서 감소하고, 구간 $[2, \infty)$에서 증가한다. 답 풀이 참조

0761 $f(x)=x^3-x^2+1$에서

$f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$ 또는 구간 $\left[\frac{2}{3}, \infty\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[0, \frac{2}{3}\right]$에서 감소한다. 답 풀이 참조

0762 $f(x)=x^3+3x^2+3x+2$에서

$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다. 답 풀이 참조

0763 $f(x)=-x^3+x^2-x$에서

$f'(x)=-3x^2+2x-1=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{3}<0$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다. 답 풀이 참조

0764 $f(x)=x^4-2x^2+5$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$ 또는 구간 $[0, 1]$에서 감소하고, 구간 $[-1, 0]$ 또는 구간 $[1, \infty)$에서 증가한다. 답 풀이 참조

0765 함수 $f(x)$는 $x=0$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이며 극댓값은 $f(0)=2$

또 $x=2$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이며 극솟값은 $f(2)=8-12+2=-2$

답 극댓값: 2, 극솟값: -2

0766 (1) $x=a$, $x=d$의 좌우에서 함수 $f(x)$가 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=a$, $x=d$에서 극댓값을 갖는다.

(2) $x=b$, $x=e$의 좌우에서 함수 $f(x)$가 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=b$, $x=e$에서 극솟값을 갖는다.

답 (1) a, d (2) b, e

0767 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하고 $x=1$에서 극값 8을 가지므로 $f(1)=8$, $f'(1)=0$

$\therefore f(1)+f'(1)=8$ 답 8

0768 $f(x)=x^2+ax+3$, $g(x)=-2x^2+bx+4$에서

$f'(x)=2x+a$, $g'(x)=-4x+b$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=2$에서 극값을 가지면 $f'(2)=0$, $g'(2)=0$이므로

$f'(2)=4+a=0$, $g'(2)=-8+b=0$

$\therefore a=-4$, $b=8$ 답 $a=-4$, $b=8$

0769 $f(x)=x^3-3x$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=2$, 극솟값은 $f(1)=-2$이다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

답 극댓값: 2, 극솟값: -2

0770 $f(x)=-2x^3+6x+1$에서

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=5$, 극솟값은 $f(-1)=-3$이다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-3	↗	5	↘

답 극댓값: 5, 극솟값: -3

0771 $f(x)=x^3+3x^2-24$에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(-2)=-20$, 극솟값은 $f(0)=-24$이다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-20	↘	-24	↗

답 극댓값: -20, 극솟값: -24

0772 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+3$에서

$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(2)=23$, 극솟값은 $f(-1)=-4$이다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	23	↘

답 극댓값: 23, 극솟값: -4

0773 $f(x)=x^4-2x^2$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=0$, 극솟값은 $f(-1)=f(1)=-1$이다.

답 극댓값: 0, 극솟값: -1

0774 $f(x)=-x^4+4x^3-4x^2+2$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2-8x=-4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗	2	↘

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=f(2)=2$, 극솟값은 $f(1)=1$이다.

답 극댓값: 2, 극솟값: 1

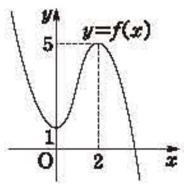
0775 $f(x)=-x^3+3x^2+1$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	1	↗	5	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

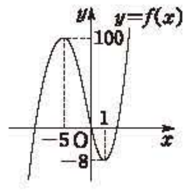
0776 $f(x)=x^3+6x^2-15x$에서

$f'(x)=3x^2+12x-15=3(x+5)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-5$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	100	↘	-8	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0777 $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^3(x+1)$에서

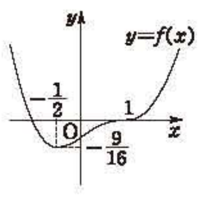
$f'(x)=(x-1)^2(x+1)+\frac{1}{3}(x-1)^3$

$\quad=\frac{2}{3}(x-1)^2(2x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{9}{16}$	↗	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0778 $f(x)=x^2-2x+3$에서

$f'(x)=2x-2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 6, $x=1$일 때 최솟값 2를 갖는다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	2	↗	6

답 최댓값: 6, 최솟값: 2

0779 $f(x)=-x^3+3x^2$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0\ (\because -1\le x\le 1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 4, $x=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	0	↗	2

답 최댓값: 4, 최솟값: 0

0780 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-6$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 3, $x=2$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	3

답 최댓값: 3, 최솟값: -2

0781 $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x-3$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	13	↘	-12	↗	4	↘	-12	↗	13

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$ 또는 $x=4$일 때 최댓값 13, $x=-1$ 또는 $x=3$일 때 최솟값 -12를 갖는다.

답 최댓값: 13, 최솟값: -12

0782 $f(x)=-3x^4+8x^3-6x^2-1$에서

$f'(x)=-12x^3+24x^2-12x=-12x(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 -1, $x=2$일 때 최솟값 -9를 갖는다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	-2	↘	-9

답 최댓값: -1, 최솟값: -9

0783 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$에서

$f'(x)=x^3+2x^2-x-2=(x+2)(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=-1\ (\because -2\le x\le 0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $\frac{13}{12}$, $x=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	↗	$\frac{13}{12}$	↘	0

답 최댓값: $\frac{13}{12}$, 최솟값: 0

0784 (1) 잘라내고 남은 부분을 접어서 만든 상자의 밑면은 가로의 길이가 $16-2x$, 세로의 길이가 $10-2x$인 직사각형이므로

$16-2x>0,\ 10-2x>0 \qquad \therefore x<5$

그런데 $x>0$이므로 $\quad 0<x<5$

(2) 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(16-2x)(10-2x)$

$=4x^3-52x^2+160x$

$\therefore V'(x)=12x^2-104x+160=4(x-2)(3x-20)$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because 0<x<5)$

따라서 상자의 부피는 $x=2$일 때 최대이다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	5
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	144	↘	

(3) $V(2)=2\cdot12\cdot6=144$

답 (1) $0<x<5$ (2) 2 (3) 144

유형 01 함수의 증가와 감소 본책 126쪽

어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 알아보려면 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

① $f'(x)>0$ ➡ $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$ ➡ $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

0785 $f(x)=-x^3-3x^2+24x-2$에서

$f'(x)=-3x^2-6x+24=-3(x+4)(x-2)$

삼차함수 $f(x)$는 $f'(x)\ge0$인 구간에서 증가하므로

$-3(x+4)(x-2)\ge0, \qquad (x+4)(x-2)\le0$

$\therefore -4\le x\le 2$

따라서 $\alpha=-4,\ \beta=2$이므로 $\qquad \alpha+\beta=-2$

답 ①

0786 $f(x)=x^3-3x+2$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

삼차함수 $f(x)$는 $f'(x)\le0$인 구간에서 감소하므로

$(x+1)(x-1)\le0 \qquad \therefore -1\le x\le 1$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-1)^2+1^2=2$

답 ②

0787 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+2$에서

$f'(x)=x^2+2ax+b$

주어진 조건에 의하여 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 1, 3이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=-2a,\ 1\cdot3=b$

$\therefore a=-2,\ b=3$

$\therefore a-b=-5$

답 -5

0788 $f(x)=2x^3-6x^2+ax+7$에서

$f'(x)=6x^2-12x+a$

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $-1\le x\le b$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 $-1,\ b$이다. ❶

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+b=2,\ -1\cdot b=\frac{a}{6}$

$\therefore a=-18,\ b=3$ ❷

$\therefore a+b=-15$ ⋯➌

답 -15

채점 기준표

➊ 방정식 $f'(x)=0$의 두 근을 구할 수 있다.	40%
➋ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
➌ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 02 실수 전체의 집합에서 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

본책 128쪽

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서
① 증가하면 ➡ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$
② 감소하면 ➡ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$

0789 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(3a+4)x-1$에서

$f'(x)=x^2+2ax+3a+4$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a-4\le 0$, $(a+1)(a-4)\le 0$

$\therefore -1\le a\le 4$

따라서 정수 a는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$의 6개이다. 답 ④

SSEN 특강

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$이 성립하려면
$a>0$, $D\le 0$
② 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$이 성립하려면
$a<0$, $D\le 0$

0790 $f(x)=-x^3+4x^2+ax-1$에서

$f'(x)=-3x^2+8x+a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=16+3a\le 0$ $\therefore a\le -\frac{16}{3}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -6이다. 답 ①

0791 $f(x)=ax^3+x^2-x$에서 $f'(x)=3ax^2+2x-1$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 $a<0$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1+3a\le 0$ $\therefore a\le -\frac{1}{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a\le -\frac{1}{3}$ 답 ①

0792 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일 대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다. 그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 증가해야 한다. ⋯➊

$f(x)=x^3+x^2+kx-4$에서 $f'(x)=3x^2+2x+k$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-3k\le 0$ $\therefore k\ge \frac{1}{3}$ ⋯➋

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. ⋯➌

답 1

채점 기준표

➊ 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 함을 알 수 있다.	40%
➋ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
➌ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	10%

0793 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$f(x)=-x^3+2ax^2-ax$에서 $f'(x)=-3x^2+4ax-a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-3a\le 0$, $a(4a-3)\le 0$ $\therefore 0\le a\le \frac{3}{4}$

따라서 정수 a는 0의 1개이다. 답 ②

0794 $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$를 만족시키는 함수는 일대일 대응이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x)=x^3-3(a+1)x^2-4ax+2$에서

$f'(x)=3x^2-6(a+1)x-4a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9(a+1)^2+12a\le 0$, $3a^2+10a+3\le 0$

$(a+3)(3a+1)\le 0$ $\therefore -3\le a\le -\frac{1}{3}$

따라서 정수 a는 $-3, -2, -1$이므로 구하는 합은 -6이다. 답 ②

유형 03 주어진 구간에서 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

본책 129쪽

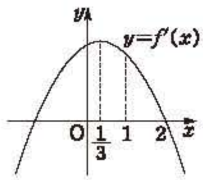
삼차함수 $f(x)$가 증가 또는 감소하기 위한 조건은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $f'(x)$를 구한다.
(ii) $y=f'(x)$의 그래프를 그려 주어진 구간에서 $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$일 조건을 찾는다.

➡ $f(x)$가 $\begin{cases}\text{증가하려면 ➡ } f'(x)\ge 0\\ \text{감소하려면 ➡ } f'(x)\le 0\end{cases}$

0795 $f(x)=-x^3+x^2+ax-4$에서

$$f'(x)=-3x^2+2x+a=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+a+\frac{1}{3}$$

함수 $f(x)$가 $1<x<2$에서 증가하려면 $1<x<2$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(2)=-8+a\geq 0 \qquad \therefore a\geq 8$

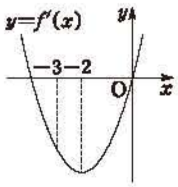
따라서 실수 a의 최솟값은 8이다.

답 ④

0796 $f(x)=x^3+6x^2+(2a+1)x$에서

$$f'(x)=3x^2+12x+2a+1=3(x+2)^2+2a-11$$

함수 $f(x)$가 구간 $(-3, 0)$에서 감소하려면 $-3<x<0$에서 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(0)=2a+1\leq 0$

$\therefore a\leq -\frac{1}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다.

답 ③

0797 $f(x)=x^3+ax^2-9x+1$에서

$$f'(x)=3x^2+2ax-9$$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 2)$에서 감소하려면 $-1<x<2$에서 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

$f'(-1)=3-2a-9\leq 0$에서 $\quad a\geq -3$

$f'(2)=12+4a-9\leq 0$에서 $\quad a\leq -\frac{3}{4}$

따라서 a의 값의 범위는 $\quad -3\leq a\leq -\frac{3}{4}$

즉 $M=-\frac{3}{4}$, $m=-3$이므로 $\quad Mm=\frac{9}{4}$

답 ④

0798 $f(x)=x^3+ax^2+1$에서

$$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$$

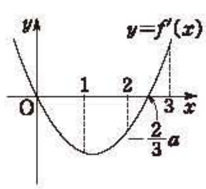
함수 $f(x)$가 구간 $(1, 2)$에서 감소하고, 구간 $(3, \infty)$에서 증가하려면 $1<x<2$에서 $f'(x)\leq 0$, $x>3$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

··· ❶

$f'(1)=3+2a\leq 0$에서 $\quad a\leq -\frac{3}{2}$

$f'(2)=2(6+2a)\leq 0$에서 $\quad a\leq -3$

$f'(3)=3(9+2a)\geq 0$에서 $\quad a\geq -\frac{9}{2}$



따라서 a의 값의 범위는

$-\frac{9}{2}\leq a\leq -3$ ··· ❷

이므로 정수 a는 -4, -3의 2개이다. ··· ❸

답 2

채점 기준표	
❶ x의 값의 범위에 따른 $f'(x)$의 부호를 알 수 있다.	30%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20%

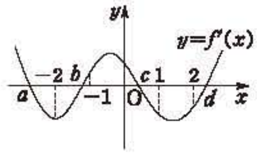
유형 04 함수의 그래프와 증가·감소 본책 130쪽

$y=f'(x)$의 그래프에서

① x축의 위쪽 부분 ➡ $f'(x)>0$ ➡ 이 구간에서 $f(x)$가 증가한다.

② x축의 아래쪽 부분 ➡ $f'(x)<0$ ➡ 이 구간에서 $f(x)$가 감소한다.

0799 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 차례대로 a, b, c, d라 하면



① 구간 $(-\infty, a)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

② 구간 $(-2, b)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

③ 구간 $(-1, 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

④ 구간 $(c, 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

⑤ 구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

답 ⑤

0800 $y=\{f(x)\}^2$에서 $\qquad y'=2f(x)f'(x)$

① 구간 (a, b)에서 $f(x)>0$, $f'(x)>0$이므로

$2f(x)f'(x)>0$

따라서 구간 (a, b)에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.

② 구간 (c, d)에서 $f(x)<0$, $f'(x)<0$이므로

$2f(x)f'(x)>0$

따라서 구간 (c, d)에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.

③ 구간 (d, e)에서 $f(x)<0$, $f'(x)>0$이므로

$2f(x)f'(x)<0$

따라서 구간 (d, e)에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.

④ 구간 (e, f)에서 $f(x)>0$, $f'(x)>0$이므로

$2f(x)f'(x)>0$

따라서 구간 (e, f)에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.

⑤ 구간 (g, ∞)에서 $f(x)<0$, $f'(x)<0$이므로

$2f(x)f'(x)>0$

따라서 구간 (g, ∞)에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.

답 ③

0801 (i) $m-h<x<m$에서 $x-m<0$이므로

$\frac{f(x)-f(m)}{x-m}<0$이면 $\quad f(x)-f(m)>0$

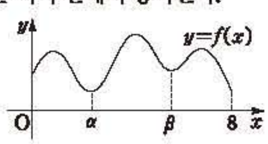
즉 $f(x)>f(m)$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

(ii) $m<x<m+h$에서 $x-m>0$이므로

$\frac{f(x)-f(m)}{x-m}>0$이면 $\quad f(x)-f(m)>0$

즉 $f(x)>f(m)$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

따라서 오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$가 감소하다가 증가하는 x의 값은 α, β의 2개이므로 구하는 m의 개수는 2이다.



답 ②

유형 05 함수의 극대·극소 본책 130쪽

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여
(i) $f'(x)$를 구한다.
(ii) $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 a를 구한다.
(iii) $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.
→ $f'(x)$의 부호가 양 → 음 → $f(x)$는 $x=a$에서 극대
　　　　　　　　 음 → 양 → $f(x)$는 $x=a$에서 극소

0802 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$에서
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극댓값 5, $x=3$일 때 극솟값 1을 가지므로 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는
$5-1=4$
답 4

0803 $f(x)=-x^4+6x^2+8x-10$에서
$f'(x)=-4x^3+12x+8=-4(x+1)^2(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+	0	−
$f(x)$	↗		↗	14	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극댓값 14를 갖고, $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=-1$에서는 극값을 갖지 않는다.
따라서 $a=1$, $b=0$이므로 $a+2b=1$
답 ①

0804 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+3$에서
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	-2	↗	3	↘	-29	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극솟값 -2, $x=0$일 때 극댓값 3, $x=2$일 때 극솟값 -29를 가지므로 구하는 극값의 합은
$-2+3+(-29)=-28$
답 ②

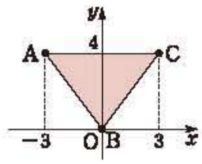
0805 $f(x)=-\dfrac{4}{81}x^4+\dfrac{8}{9}x^2$에서

$$f'(x)=-\frac{16}{81}x^3+\frac{16}{9}x=-\frac{16}{81}x(x+3)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗	4	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$ 또는 $x=3$일 때 극댓값 4, $x=0$일 때 극솟값 0을 갖는다.
$A(-3, 4)$, $B(0, 0)$, $C(3, 4)$라 하면 $\triangle ABC$의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot\{3-(-3)\}\cdot 4=12$$
답 ③

0806 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy(x+y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$
이때 $f'(0)=4$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=4$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-xh(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}-x^2-xh\right\}\\&=4-x^2\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소, $x=2$에서 극대이므로
$\alpha=-2$, $\beta=2$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=(-2)^2+2^2=8$
답 8

유형 06 함수의 극대·극소를 이용한 미정계수의 결정 본책 131쪽

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여
① $x=\alpha$에서 극값을 갖는다. → $f'(\alpha)=0$
② $x=\alpha$에서 극값 β를 갖는다. → $f'(\alpha)=0$, $f(\alpha)=\beta$

0807 $f(x)=(x-1)^2(x-4)+a=x^3-6x^2+9x-4+a$에서
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	a	↘	$a-4$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 a를 가지므로 $a=14$
또 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 $a-4$를 가지므로 구하는 극솟값은
$14-4=10$
답 ②

0808 $f(x)=x^3-6x^2+ax+b$에서
$f'(x)=3x^2-12x+a$
함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 2를 가지므로
$f(3)=2$, $f'(3)=0$
$27-54+3a+b=2$, $27-36+a=0$
$\therefore a=9$, $b=2$
$\therefore a+b=11$
답 11

0809 $f(x)=-x^3+ax+b$에서

$f'(x)=-3x^2+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 6을 가지므로

$f(1)=6,\ f'(1)=0$

$-1+a+b=6,\ -3+a=0$

$\therefore a=3,\ b=4$

즉 $f(x)=-x^3+3x+4$이므로

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 2를 갖는다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	2	↗	6	↘

답 ④

0810 $f(x)=-x^3-\dfrac{3}{2}ax^2+6a^2x$에서

$f'(x)=-3x^2-3ax+6a^2=-3(x+2a)(x-a)$ ➊

$f'(x)=0$에서 $x=-2a$ 또는 $x=a$

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-10a^3$	↗	$\frac{7}{2}a^3$	↘

$a>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2a$에서 극솟값 $-10a^3$을 갖고, $x=a$에서 극댓값 $\dfrac{7}{2}a^3$을 갖는다. ➋

이때 극댓값과 극솟값의 차가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{7}{2}a^3-(-10a^3)=\dfrac{1}{2},\quad a^3=\dfrac{1}{27}\quad \therefore a=\dfrac{1}{3}$ ➌

답 $\dfrac{1}{3}$

채점 기준표

➊ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20%
➋ 극댓값과 극솟값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
➌ a의 값을 구할 수 있다.	30%

0811 $f(-x)=-x^3+ax^2-bx-2$이므로

$f(x)+f(-x)=2f(0)$에서

$x^3+ax^2+bx-2+(-x^3+ax^2-bx-2)=-4$

$\therefore 2ax^2=0$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $a=0$

즉 $f(x)=x^3+bx-2$이므로 $f'(x)=3x^2+b$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값 14를 갖는다고 하면

$f(\alpha)=\alpha^3+b\alpha-2=14$ ······ ㉠

$f'(\alpha)=3\alpha^2+b=0$, 즉 $b=-3\alpha^2$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\alpha^3+(-3\alpha^2)\cdot\alpha-2=14,\quad -2\alpha^3=16$

$\alpha^3=-8\quad \therefore \alpha=-2$

$\alpha=-2$를 ㉡에 대입하면 $b=-12$

$\therefore a-b=12$

답 12

0812 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극값을 가지므로 $f'(3)=0$에서

$27+6a+b=0$ ······ ㉠

한편 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-12$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$\therefore 1+a+b+c=0$ ······ ㉡

또 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=-12\quad \therefore 3+2a+b=-12$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=-9,\ c=11$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$이므로

$f(-1)=-1-3+9+11=16$

답 ②

유형 07 함수의 극대·극소의 활용 본책 112쪽

함수의 도함수와 증감표를 이용하여 극댓값 또는 극솟값을 구하고, 주어진 조건과 이를 이용하여 문제를 해결한다.

0813 $f(x)=x^3-3x+1$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값 3, $x=1$일 때 극솟값 -1을 가지므로

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

$\mathrm{A}(-1,\ 3),\ \mathrm{B}(1,\ -1)$

따라서 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot1+2\cdot(-1)}{1+2},\ \dfrac{1\cdot(-1)+2\cdot3}{1+2}\right)$, 즉 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$

답 ⑤

0814 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=0\quad \therefore -3-2a+b=0$ ······ ㉠

또 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기가 -15이므로

$f'(2)=-15\quad \therefore -12+4a+b=-15$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=1$

$\therefore a+b=0$

답 ②

0815 $f(x)=x^3+(a+1)x^2-2x$에서

$f'(x)=3x^2+2(a+1)x-2$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소라 하면 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $3x^2+2(a+1)x-2=0$의 두 근이다.

이때 극대가 되는 점과 극소가 되는 점이 원점에 대하여 대칭이므로 $\alpha=-\beta$, 즉 $\alpha+\beta=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2(a+1)}{3}=0 \qquad \therefore a=-1$ 　　　답 ②

0816 $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+ax^2-a$에서

$f'(x)=-2x^2+2ax=-2x(x-a)$

$f'(x)=0$에서 　$x=0$ 또는 $x=a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=a$에서 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로

$f(0)=0$ 또는 $f(a)=0$

그런데 $f(0)=-a\neq0$이므로 　$f(a)=0$

$f(a)=\dfrac{1}{3}a^3-a=0, \quad \dfrac{1}{3}a(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=0$

$\therefore a=-\sqrt{3}$ 또는 $a=\sqrt{3}$ 　　　답 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$

0817 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 5를 가지므로

$f(-1)=5$, $f'(-1)=0$

이때 $g(x)=(3x+1)f(x)$에서

$g(-1)=-2f(-1)=-10$

$g'(x)=3f(x)+(3x+1)f'(x)$에서

$g'(-1)=3f(-1)-2f'(-1)=15$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=-1$인 점에서의 접선의 방정식은

$y-(-10)=15(x+1) \qquad \therefore y=15x+5$

이 직선의 x절편이 $-\dfrac{1}{3}$, y절편이 5이므로 구하는 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot5=\dfrac{5}{6}$ 　　　답 ④

0818 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-8x+\dfrac{1}{3}$에서

$f'(x)=x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 　$x=-4$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	27	↘	-9	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 -9를 가지므로

$a=2$, $b=-9$ 　　　⇢ ❶

한편 점 $(-1, f(-1))$, 즉 점 $(-1, 9)$에서의 접선 l의 기울기는

$f'(-1)=3\cdot(-3)=-9$

이므로 접선 l의 방정식은

$y-9=-9(x+1) \qquad \therefore 9x+y=0$ 　　　⇢ ❷

따라서 점 $(2, -9)$에서 직선 $9x+y=0$까지의 거리 d는

$d=\dfrac{|9\cdot2+1\cdot(-9)|}{\sqrt{9^2+1^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{82}}$

$\therefore 82d^2=82\cdot\dfrac{81}{82}=81$ 　　　⇢ ❸

답 81

채점 기준표

❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ 접선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ $82d^2$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 08 함수의 극대·극소를 이용한 삼차함수의 계수의 부호 결정 　본책 133쪽

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에 대하여

① $x\to\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이면 ➡ $a>0$

$x\to\infty$일 때, $f(x)\to-\infty$이면 ➡ $a<0$

② $y=f(x)$의 그래프가 y축과 양의 부분에서 만나면 ➡ $d>0$

$y=f(x)$의 그래프가 y축과 음의 부분에서 만나면 ➡ $d<0$

③ 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지면

➡ 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 α, β이다.

0819 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서 $x\to\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이므로 　$a>0$

또 그래프가 y축의 음의 부분과 만나므로 　$d<0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고, α, β는 서로 다른 두 양수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}>0, \ \alpha\beta=\dfrac{c}{3a}>0$

$a>0$이므로 　$b<0$, $c>0$

따라서 옳은 것은 ⑤이다. 　　　답 ⑤

0820 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$의 그래프에서 $x\to\infty$일 때, $f(x)\to-\infty$이므로 　$a<0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고 $\alpha<0$, $\beta>0$, $|\beta|>|\alpha|$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}>0, \ \alpha\beta=\dfrac{c}{3a}<0$

$a<0$이므로 　$b>0$, $c>0$

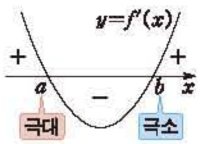
따라서 그 값이 항상 양인 것은 ⑤이다. 　　　답 ⑤

유형 09 도함수의 그래프를 이용한 함수의 극대·극소 　본책 133쪽

함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, x축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양 ⟶ 음 ➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극대

② 음 ⟶ 양 ➡ $f(x)$는 $x=b$에서 극소



0821 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 2이므로 $f'(x)=0$에서 　$x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서 　$f'(x)=6x^2+2ax+b$

$f'(-1)=0$, $f'(2)=0$이므로

$f'(-1)=6-2a+b=0$ 　　$\cdots\cdots$ ㉠

$f'(2)=24+4a+b=0$ 　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 　$a=-3$, $b=-12$

즉 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+c$이고, 함수 $f(x)$의 극댓값이 10이므로 $\quad f(-1)=-2-3+12+c=10 \qquad \therefore c=3$

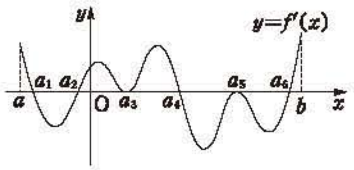
따라서 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$이므로 구하는 극솟값은

$\quad f(2)=16-12-24+3=-17$ 답 ④

0822 주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌는 점의 x좌표는 -4, 2, 9이므로 함수 $f(x)$는 $x=-4$, $x=2$, $x=9$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구하는 모든 x의 값의 합은 $\quad -4+2+9=7$ 답 7

0823



위의 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 왼쪽부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6이라 하면

(i) $x=a_1$, $x=a_4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_1$, $x=a_4$에서 극댓값을 갖는다.

$\quad \therefore m=2$ ➊

(ii) $x=a_2$, $x=a_6$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_2$, $x=a_6$에서 극솟값을 갖는다.

$\quad \therefore n=2$ ➋

(i), (ii)에서 $\quad m-n=0$ ➌

답 0

채점 기준표

➊ m의 값을 구할 수 있다.	40%
➋ n의 값을 구할 수 있다.	40%
➌ $m-n$의 값을 구할 수 있다.	20%

참고 $x=a_3$, $x=a_5$의 좌우에서는 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.

0824 ㄱ, ㄴ. $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌고, $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고, $x=4$에서 극댓값을 갖는다. 따라서 극솟값은 $f(0)=1$, 극댓값은 $f(4)$이다.

ㄷ. $0<x<4$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 구간 $(0,\ 4)$에서 증가한다.

$\quad \therefore f(0)<f(2)<f(4)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

0825 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 2이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서

$\quad f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=0$, $f'(2)=0$이므로

$\quad f'(0)=c=0$, $f'(2)=12a+4b=0 \quad \cdots\cdots ㉠$ ➊

$f(x)$의 극솟값이 -2, 극댓값이 2이므로

$\quad f(0)=-2 \qquad \therefore d=-2$

$\quad f(2)=2 \qquad \therefore 8a+4b=4 \quad \cdots\cdots ㉡$ ➋

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1$, $b=3$ ➌

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2-2$이므로

$\quad f(-1)=1+3-2=2$ ➍

답 2

채점 기준표

➊ $f'(0)=0$, $f'(2)=0$임을 이용할 수 있다.	30%
➋ $f(0)=-2$, $f(2)=2$임을 이용할 수 있다.	30%
➌ a, b의 값을 구할 수 있다.	20%
➍ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0826 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	8	↘	0	↗

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$로 놓으면

$\quad f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(-1)=0$, $f'(1)=0$이므로

$\quad f'(-1)=3a-2b+c=0$

$\quad f'(1)=3a+2b+c=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\quad b=0$, $3a+c=0$

$\quad \therefore c=-3a \quad \cdots\cdots ㉠$

$f(-1)=8$, $f(1)=0$이므로

$\quad f(-1)=-a+b-c+d=8 \quad \cdots\cdots ㉡$

$\quad f(1)=a+b+c+d=0 \quad \cdots\cdots ㉢$

$b=0$, $c=-3a$를 ㉡, ㉢에 대입하면

$\quad -a+3a+d=8 \qquad \therefore 2a+d=8$

$\quad a-3a+d=0 \qquad \therefore -2a+d=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $d=4$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad c=-6$

$\quad \therefore f(x)=2x^3-6x+4$

따라서 방정식 $2x^3-6x+4=0$의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\quad -\dfrac{4}{2}=-2$ 답 -2

유형 10 도함수의 그래프의 해석 (1) 본책 134쪽

함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프에서

① x축의 위쪽 부분, 즉 $f'(x)>0$인 구간에서 $f(x)$는 증가한다.

② x축의 아래쪽 부분, 즉 $f'(x)<0$인 구간에서 $f(x)$는 감소한다.

③ $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다.

0827 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 2, 4이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. 구간 $(-2, -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
ㄴ. 구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
ㄷ. 구간 $(4, 5)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
ㄹ. $f(x)$는 $x=2$에서 극대이다.
ㅁ. $f'(3)\neq0$이므로 $f(x)$는 $x=3$에서 극값을 갖지 않는다.
이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

0828 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 2, 4이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

ㄱ. $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $f'(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.
ㄷ. 구간 $(0, 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
ㄹ. $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖고 $f(-2)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $x=-2$에서 x축에 접한다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0829 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 7, 9이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=7$ 또는 $x=9$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	7	$\cdots$	9	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘	극소	↗

① $-1<x<8$에서 $f(x)$는 $x=7$에서 극값을 가지므로 극값은 1개이다.
② $f'(8)\neq0$이므로 $f(x)$는 $x=8$에서 극값을 갖지 않는다.
③ $2<x<4$에서 $f'(x)=k\,(k>0)$이므로 $f(x)$는 일차함수이다.
④ $f'(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
⑤ $0<x<7$일 때, $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

답 ⑤

유형 11 도함수의 그래프의 해석 (2) 본책 135쪽

주어진 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만든 후, 함수 $f(x)$가 증가 또는 감소하는 구간, 극값을 갖는 x의 값 등을 찾아 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 유추한다.

0830 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 3이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이고, $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ②이다.

답 ②

0831 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1, 3이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소, $x=3$에서 극대이다.
또 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서는 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

답 ④

유형 12, 13 삼차함수가 극값을 갖거나 갖지 않을 조건 본책 135, 136쪽

삼차함수 $f(x)$에 대하여
① $f(x)$가 극댓값, 극솟값을 모두 갖는다.
→ 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
② $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
→ 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

0832 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+ax$에서

$f'(x)=x^2-ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4a>0,\quad a(a-4)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>4$

따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다.

답 5

참고 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

0833 $f(x)=x^3-ax^2-ax+2$에서

$f'(x)=3x^2-2ax-a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ⋯ ❶
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+3a>0,\quad a(a+3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>0$ ⋯❷

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=0$이므로

$2\alpha+\beta=2\cdot(-3)+0=-6$ ⋯❸

답 -6

채점 기준표

❶ 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	40%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ $2\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	20%

0834 $f(x)=ax^3+3x^2+ax+5$에서

$f'(x)=3ax^2+6x+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3a^2>0,\quad a^2<3$

$\therefore -\sqrt{3}<a<0$ 또는 $0<a<\sqrt{3}$ ($\because a\neq0$)

따라서 정수 a는 -1, 1의 2개이다. 답 ②

0835 $f(x)=-2x^3+ax^2+ax$에서

$f'(x)=-6x^2+2ax+a$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+6a\le0,\quad a(a+6)\le0\quad \therefore -6\le a\le0$

따라서 정수 a는 $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$의 7개이다. 답 ③

0836 $f(x)=x^3+x^2+2kx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2x+2k$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-6k\le0\quad \therefore k\ge\frac{1}{6}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{1}{6}$이다. 답 $\frac{1}{6}$

0837 $f(x)=\frac{4}{3}x^3+(a+3)x^2-ax+1$에서

$f'(x)=4x^2+2(a+3)x-a$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+3)^2+4a\le0,\quad a^2+10a+9\le0$

$(a+9)(a+1)\le0\quad \therefore -9\le a\le-1$

따라서 $\alpha=-9$, $\beta=-1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-9)^2+(-1)^2=82$ 답 ⑤

0838 $f(x)$가 삼차함수이므로

$a-4\neq0\quad \therefore a\neq4$ ⋯❶

$f(x)=(a-4)x^3+3(b-2)x^2-3ax+2$에서

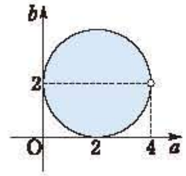
$f'(x)=3(a-4)x^2+6(b-2)x-3a$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다. ⋯❷

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9(b-2)^2+9a(a-4)\le0$

$\therefore (a-2)^2+(b-2)^2\le4$ ⋯❸



따라서 점 (a, b)가 존재하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같으므로 구하는 넓이는 $\pi\cdot2^2=4\pi$ ⋯❹

답 4π

채점 기준표

❶ $a\neq4$임을 알 수 있다.	20%
❷ 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 함을 알 수 있다.	40%
❸ 점 (a, b)가 존재하는 영역을 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❹ 점 (a, b)가 존재하는 영역의 넓이를 구할 수 있다.	20%

유형 14 삼차함수가 주어진 구간에서 극값을 가질 조건 본책 136쪽

삼차함수 $f(x)$가 구간 (a, b)에서 극댓값과 극솟값을 갖는다.

➡ 이차방정식 $f'(x)=0$이 구간 (a, b)에서 서로 다른 두 실근을 가지므로 다음 세 가지를 조사한다.

① 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 D의 부호

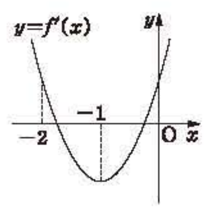
② $f'(a)$, $f'(b)$의 값의 부호

③ $y=f'(x)$의 그래프의 축의 위치

0839 $f(x)=x^3+3x^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-2, 0)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-2<x<0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3a>0\quad \therefore a<3$

(ii) $f'(-2)>0$에서 $a>0$

$f'(0)>0$에서 $a>0$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-1$

이상에서 a의 값의 범위는 $0<a<3$이므로 구하는 모든 정수 a의 값의 합은

$1+2=3$ 답 ④

0840 $f(x)=x^3+ax^2-ax$에서

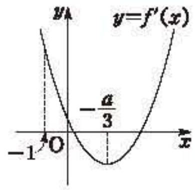
$f'(x)=3x^2+2ax-a$

함수 $f(x)$가 $x>-1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>-1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+3a>0,\quad a(a+3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>0$



(ii) $f'(-1)=3-3a>0$에서 $\quad a<1$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{a}{3}$이므로

$-\frac{a}{3}>-1 \quad \therefore a<3$

이상에서 실수 a의 값의 범위는

$a<-3$ 또는 $0<a<1$

따라서 보기 중 a의 값이 될 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

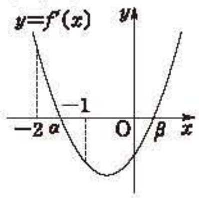
0841 $f(x)=x^3+(a+1)x^2+ax+3$에서

$f'(x)=3x^2+2(a+1)x+a$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$-2<\alpha<-1,\ \beta>-1$

이므로 오른쪽 그림에서



$f'(-2)=8-3a>0 \quad \therefore a<\frac{8}{3}$

$f'(-1)=1-a<0 \quad \therefore a>1$

$\therefore 1<a<\frac{8}{3}$ 답 ③

유형 15, 16 삼차함수가 극댓값 또는 극솟값을 갖거나 갖지 않을 조건 본책 137쪽

삼차함수 $f(x)$에 대하여

① $f(x)$가 극댓값, 극솟값을 모두 갖는다.
→ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

② $f(x)$가 극댓값 또는 극솟값을 갖지 않는다.
→ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는다.

0842 $f(x)=-x^4+4x^3+2ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2+4ax=-4x(x^2-3x-a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 방정식 $x^2-3x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-3x-a=0$의 판별식을 D라 하면 $D=9+4a>0$에서

$a>-\frac{9}{4}$

이때 $a=0$이면 방정식 $x^2-3x-a=0$이 $x=0$을 근으로 가지므로

$a\neq0$

$\therefore -\frac{9}{4}<a<0$ 또는 $a>0$

따라서 보기 중 a의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0843 $f(x)=x^4+2x^3+ax^2$에서

$f'(x)=4x^3+6x^2+2ax=2x(2x^2+3x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 방정식 $2x^2+3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2+3x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D=9-8a>0$에서

$a<\frac{9}{8}$

이때 $a=0$이면 방정식 $2x^2+3x+a=0$이 $x=0$을 근으로 가지므로

$a\neq0$

$\therefore a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=\frac{9}{8}$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{9}{8}$ 답 ⑤

0844 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+(a-1)x^2-2ax$에서

$f'(x)=2x^3+2(a-1)x-2a$

$=2(x-1)(x^2+x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+x+a=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=1-4a<0 \quad \therefore a>\frac{1}{4}$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x=1$을 근으로 갖거나 1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

ⓘ 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때

$2+a=0 \quad \therefore a=-2$

ⓘⓘ 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 1이 아닌 실수를 중근으로 가질 때 판별식을 D라 하면

$D=1-4a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는

$a=-2$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$

따라서 a의 최솟값은 -2이다. 답 ①

0845 $f(x)=-x^4+\frac{4}{3}x^3-2(a-2)x^2-4ax$에서

$f'(x)=-4x^3+4x^2-4(a-2)x-4a$

$=-4(x+1)(x^2-2x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-a<0 \quad \therefore a>1$

07 도함수의 활용 (2)

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 $x=-1$을 근으로 갖거나 -1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

ⓘ 이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 $x=-1$을 근으로 가질 때
$3+a=0$ $\therefore a=-3$

ⓘⓘ 이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 -1이 아닌 실수를 중근으로 가질 때
판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=1-a=0$ $\therefore a=1$

(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는
$a=-3$ 또는 $a\ge1$

답 $a=-3$ 또는 $a\ge1$

0846 $f(x)=x^4+2ax^3+2x^2+1$에서
$f'(x)=4x^3+6ax^2+4x=2x(2x^2+3ax+2)$
사차함수 $f(x)$가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다. ··· ❶
(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우
이차방정식 $2x^2+3ax+2=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D=9a^2-16<0$, $(3a+4)(3a-4)<0$
$\therefore -\frac{4}{3}<a<\frac{4}{3}$
(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우
이차방정식 $2x^2+3ax+2=0$이 $x=0$을 근으로 가질 수 없으므로 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다. 판별식을 D라 하면
$D=9a^2-16=0$ $\therefore a=-\frac{4}{3}$ 또는 $a=\frac{4}{3}$
(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는 $-\frac{4}{3}\le a\le\frac{4}{3}$ ··· ❷
따라서 $M=1$, $m=-1$이므로 $Mm=-1$ ··· ❸

답 -1

채점 기준표

❶ 방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 함을 알 수 있다.	30%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%
❸ Mm의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 17 함수의 최대·최소 본책 13쪽

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여
(i) 구간 (a, b)에서의 $f(x)$의 극값을 구한다.
(ii) $f(a)$, $f(b)$의 값을 구한다.
(iii) (i), (ii)에서 구한 극값, $f(a)$, $f(b)$의 값 중 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

0847 $f(x)=3x^4-16x^3+18x^2-2$에서
$f'(x)=12x^3-48x^2+36x=12x(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	35	↘	-2	↗	3	↘	-29	↗	30

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 35, $x=3$일 때 최솟값 -29를 가지므로 $M=35$, $m=-29$
$\therefore M+m=6$

답 ④

0848 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$에서
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↗	10	↘	-22	↗	-15

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 10, $x=3$일 때 최솟값 -22를 가지므로 $M=10$, $m=-22$
$\therefore Mm=-220$

답 ①

0849 $f(x)=-x^4+6x^2-8x+3$에서
$f'(x)=-4x^3+12x-8=-4(x-1)^2(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ ($\because -3\le x\le0$)

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	27	↘	3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 27을 가지므로
$a=-2$, $b=27$
$\therefore a+b=25$

답 ②

0850 $x^2-6x+8=t$로 놓으면
$t=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$
$2\le x\le5$에서 t의 값의 범위는 $-1\le t\le3$
$g(t)=t^3-12t+1$로 놓으면
$g'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$
$g'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because -1\le t\le3$)

t	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	12	↘	-15	↗	-8

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-1$일 때 최댓값 12, $t=2$일 때 최솟값 -15를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은 -3이다.

답 ②

0851 $g(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로 $g(x)=t$로 놓으면 $t\ge-1$이고 ··· ❶
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-3t+4$ ··· ❷
$\therefore f'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$
$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	6	↘	2	↗

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 2를 갖는다. ··· ❸

답 2

채점 기준표

❶ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❷ $(f\circ g)(x)$를 t에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	20%
❸ 최솟값을 구할 수 있다.	60%

유형 18 함수의 최대·최소를 이용한 미정계수의 결정 본책 138쪽

닫힌 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값이 주어졌을 때
➡ $f(a)$, $f(b)$의 값, 열린 구간 (a, b)에서의 $f(x)$의 극값을 비교한다.

0852 $f(x)=-x^3+27x+k$에서
$f'(x)=-3x^2+27=-3(x+3)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because 0\le x\le 4$)

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	k	↗	$k+54$	↘	$k+44$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $k+54$, $x=0$일 때 최솟값 k를 갖는다.
이때 최댓값과 최솟값의 합이 50이므로
$k+54+k=50$ $\therefore k=-2$
답 ②

0853 $f(x)=x^3+ax^2+b$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$
$f'(1)=9$에서 $3+2a=9$ $\therefore a=3$
즉 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$이므로 $f'(x)=0$에서
$x=0$ ($\because 0\le x\le 2$)
따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $b+20$을 가지므로
$b+20=24$ $\therefore b=4$
$\therefore ab=12$
답 ④

x	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	b	↗	$b+20$

0854 $f(x)=2x^3-6x^2+k$에서 $f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-40$	↗	k	↘	$k-8$	↗	k

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값 $k-40$, $x=0$ 또는 $x=3$일 때 최댓값 k를 갖는다. ⇢ ❶
이때 함수 $f(x)$의 최솟값은 -8이므로
$k-40=-8$ $\therefore k=32$ ⇢ ❷
따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 32이다. ⇢ ❸
답 32

채점 기준표

❶ 최솟값과 최댓값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ 최댓값을 구할 수 있다.	20%

0855 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$에서
$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1\le x\le 3$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-2a+b$	↘	$-4a+b$	↗	b

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 b, $x=2$일 때 최솟값 $-4a+b$를 가지므로
$b=10$, $-4a+b=2$
$\therefore a=2$, $b=10$ $\therefore a+b=12$
답 ④

0856 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=-2$, $x=0$에서 극값을 가지므로 $f'(-2)=0$, $f'(0)=0$이다.
즉 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로
$f'(-2)=12-4a+b=0$, $f'(0)=b=0$
$\therefore a=3$, $b=0$
따라서 $f(x)=x^3+3x^2+c$이다. 이때 $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$이므로

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	c	↗	$c+4$	↘	c	↗	$c+20$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $c+20$, $x=-3$ 또는 $x=0$일 때 최솟값 c를 갖는다.
이때 조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 19이므로
$c+20=19$ $\therefore c=-1$
따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -1이다.
답 ③

유형 19~21 최대·최소의 활용 본책 139, 140쪽

① 두 점 사이의 거리, 평면도형의 넓이 구하는 공식
② 입체도형의 부피 구하는 공식
③ 피타고라스 정리
등을 이용하여 도형의 길이, 넓이, 부피를 한 문자에 대한 함수로 나타낸 후, 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0857 점 P의 좌표를 (t, t^2)으로 놓으면 점 P와 점 $(3, 0)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(t-3)^2+t^4}=\sqrt{t^4+t^2-6t+9}$
$f(t)=t^4+t^2-6t+9$로 놓으면
$f'(t)=4t^3+2t-6=2(t-1)(2t^2+2t+3)$
$2t^2+2t+3=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$
$f'(t)=0$에서
$t=1$ ($\because 2t^2+2t+3>0$)
따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은
$f(1)=5$

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소	↗

따라서 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.
답 ②

0858 점 P의 좌표를 $(t, -t^2)$으로 놓으면

$l=\sqrt{(t-6)^2+(-t^2+3)^2}=\sqrt{t^4-5t^2-12t+45}$

$f(t)=t^4-5t^2-12t+45$로 놓으면

$f'(t)=4t^3-10t-12=2(t-2)(2t^2+4t+3)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=2$ ($\because 2t^2+4t+3>0$)

$2t^2+4t+3=2(t+1)^2+1>0$

t	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 점 P의 좌표는 $(2, -4)$이다.

답 $(2, -4)$

0859 점 P의 좌표를 (t, t^2-2)로 놓으면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=t^2+(t^2+1)^2+(t-10)^2+(t^2+1)^2$

$=2t^4+6t^2-20t+102$

$f(t)=2t^4+6t^2-20t+102$로 놓으면

$f'(t)=8t^3+12t-20=4(t-1)(2t^2+2t+5)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=1$ ($\because 2t^2+2t+5>0$)

$2t^2+2t+5=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}>0$

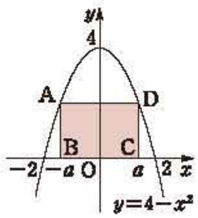
t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$f(1)=90$

답 90

0860 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 꼭짓점 C의 좌표를 $(a, 0)$ $(0<a<2)$으로 놓으면



$D(a, 4-a^2)$, $A(-a, 4-a^2)$, $B(-a, 0)$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(4-a^2)=-2a^3+8a$

$\therefore S'(a)=-6a^2+8=-2(3a^2-4)$

$S'(a)=0$에서 $\quad a^2=\frac{4}{3} \quad \therefore a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<a<2$)

a	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$일 때 $S(a)$는 극대이면서 최대이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은

$S\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-2\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3+8\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{32\sqrt{3}}{9}$

답 ④

0861 점 P의 좌표를 $(a, -a^2+3a)$ $(0<a<3)$로 놓으면 $H(a, 0)$이므로 △OPH의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}a(-a^2+3a)=\frac{1}{2}(-a^3+3a^2)$

$\therefore S'(a)=\frac{1}{2}(-3a^2+6a)=-\frac{3}{2}a(a-2)$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=2$ ($\because 0<a<3$)

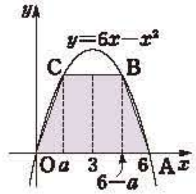
a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $a=2$일 때 $S(a)$는 극대이면서 최대이므로 △OPH의 넓이의 최댓값은

$S(2)=\frac{1}{2}(-8+12)=2$

답 ②

0862 $6x-x^2=0$에서 $x(x-6)=0$이므로



$x=0$ 또는 $x=6$

$\therefore A(6, 0)$

오른쪽 그림과 같이 점 C의 좌표를 $(a, 6a-a^2)$ $(0<a<3)$으로 놓으면 $B(6-a, 6a-a^2)$이므로 ⋯ ❶

사다리꼴 OABC의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\{6+(6-2a)\}(6a-a^2)$

$=(6-a)(6a-a^2)$

$=a^3-12a^2+36a$ ⋯ ❷

$\therefore S'(a)=3a^2-24a+36=3(a-2)(a-6)$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=2$ ($\because 0<a<3$)

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

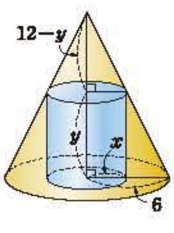
따라서 $a=2$일 때 $S(a)$는 극대이면서 최대이므로 넓이가 최대인 사다리꼴의 높이는

$6a-a^2=6\cdot2-2^2=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준표	
❶ 세 점 A, B, C의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ $S(a)$를 구할 수 있다.	20%
❸ 넓이가 최대인 사다리꼴의 높이를 구할 수 있다.	50%

0863 오른쪽 그림과 같이 직원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면



$6 : 12=x : (12-y)$

$\therefore y=12-2x$ $(0<x<6)$

직원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2(12-2x)$

$=2\pi(6x^2-x^3)$

$\therefore V'(x)=2\pi(12x-3x^2)=-6\pi x(x-4)$

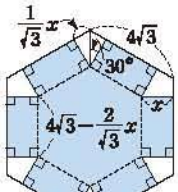
$V'(x)=0$에서 $\quad x=4$ ($\because 0<x<6$)

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $x=4$일 때 $V(x)$는 극대이면서 최대이므로 직원기둥의 부피의 최댓값은

$V(4)=2\pi(96-64)=64\pi$ 답 ③

0864 상자의 높이가 x이므로 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 각 꼭짓점으로부터 거리가 $x\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$인 부분까지 자르게 된다.



이때 $0<\dfrac{2}{\sqrt{3}}x<4\sqrt{3}$에서

$0<x<6$

따라서 육각기둥의 밑면은 한 변의 길이가 $4\sqrt{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}x$인 정육각형이므로 그 넓이는

$$6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(4\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2=2\sqrt{3}(6-x)^2$$

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=2\sqrt{3}(6-x)^2\cdot x=2\sqrt{3}(x^3-12x^2+36x)$

$\therefore V'(x)=2\sqrt{3}(3x^2-24x+36)$

$=6\sqrt{3}(x-2)(x-6)$

$V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0<x<6$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $x=2$일 때 $V(x)$는 극대이면서 최대이다.

답 2

0865 전략 x의 값의 범위를 $x\ge 3a$, $x\le 3a$로 나누어 함수 $f(x)$를 구한다.

풀이 (i) $x\ge 3a$일 때, $f(x)=2x^3+3x^2+36(x-3a)+10$이므로

$$f'(x)=6x^2+6x+36=6\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{69}{2}>0$$

따라서 함수 $f(x)$는 증가한다.

(ii) $x\le 3a$일 때, $f(x)=2x^3+3x^2-36(x-3a)+10$이므로

$f'(x)=6x^2+6x-36=6(x+3)(x-2)$

함수 $f(x)$가 $x\le 3a$에서 증가하려면

$3a\le -3$ $\quad\therefore a\le -1$ └ $x\le 3a$가 $x\le -3$ 또는 $x\ge 2$에 포함되어야 한다.

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 실수 a의 최댓값은 -1이다.

답 -1

0866 전략 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이다.

풀이 $f(x)$는 삼차함수이므로 모든 실수 x에 대하여 미분가능하고 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+3}{x-1}=0$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)+3\}=0$이므로 $\quad f(1)=-3$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로 $\quad f'(1)=0$

또 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-4}{x-5}=0$에서 $x\longrightarrow 5$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

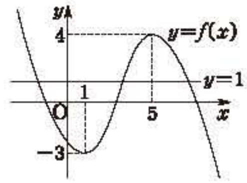
즉 $\lim\limits_{x\to 5}\{f(x)-4\}=0$이므로 $\quad f(5)=4$

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-4}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}=f'(5)$이므로

$f'(5)=0$

$f'(1)=0$, $f'(5)=0$이고 $f(x)$는 삼차함수이므로 $f(x)$는 $x=1$, $x=5$에서 극값을 갖는다. 이때 $f(1)<f(5)$이므로 극솟값은 $f(1)$, 극댓값은 $f(5)$이다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=3$의 좌우에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극댓값 4를 갖는다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$은 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=1$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0867 전략 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 함수 $g(t)$를 구한다.

풀이 점 (t, t^3)과 직선 $y=x+6$, 즉 $x-y+6=0$ 사이의 거리 $g(t)$는

$$g(t)=\frac{|t-t^3+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-t^3+t+6|}{\sqrt{2}}$$

이때 $h(t)=-t^3+t+6$으로 놓으면

$h'(t)=-3t^2+1$

$h'(t)=0$에서 $\quad t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

또 $h(t)=0$에서 $\quad -t^3+t+6=0$

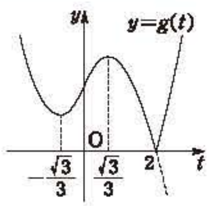
$t^3-t-6=(t-2)(t^2+2t+3)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t^2+2t+3>0$)

즉 함수 $y=h(t)$의 그래프는 $t=2$일 때 t축과 한 점에서 만난다.

t	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(t)$	−	0	+	0	−	−	−
$h(t)$	↘	극소	↗	극대	↘	0	↘

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 오른쪽 그래프에서 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $g(t)$는 $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 0이 아닌 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $t<2$일 때 $g(t)=\dfrac{-t^3+t+6}{\sqrt{2}}$, $t>2$일 때 $g(t)=\dfrac{t^3-t-6}{\sqrt{2}}$이므로

$$\lim_{t\to 2-}g'(t)=\lim_{t\to 2-}\frac{1}{\sqrt{2}}(-3t^2+1)=-\frac{11}{\sqrt{2}}$$

07 도함수의 활용 (2)

$$\lim_{t\to2+}g'(t)=\lim_{t\to2+}\frac{1}{\sqrt{2}}(3t^2-1)=\frac{11}{\sqrt{2}}$$

즉 $\lim_{t\to2-}g'(t)\neq\lim_{t\to2+}g'(t)$이므로 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0868 전략 $y=f(x)$의 그래프가 지나는 점과 접하는 점의 x좌표를 이용하여 함수 $f(x)$의 식을 세운다.

풀이 $y=f(x)$의 그래프가 $x=k$인 점에서 x축과 접한다고 하면 그래프가 원점을 지나므로 $f(x)=x(x-k)^2$ $(k<0)$으로 놓을 수 있다. 따라서

$$f'(x)=(x-k)^2+2x(x-k)=(x-k)(3x-k)$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=k$ 또는 $x=\frac{k}{3}$

x	$\cdots$	k	$\cdots$	$\frac{k}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 $f(x)$는 $x=\frac{k}{3}$에서 극솟값 -4를 가지므로

$$f\left(\frac{k}{3}\right)=\frac{k}{3}\left(\frac{k}{3}-k\right)^2=-4,\qquad \frac{4}{27}k^3=-4$$

$k^3=-27\qquad \therefore k=-3$

따라서 $f(x)=x(x+3)^2=x^3+6x^2+9x$이므로

$a=6,\ b=9\qquad \therefore a+b=15$ 답 15

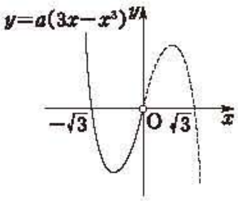
0869 전략 a의 값의 부호에 따라 범위를 나누어서 생각한다.

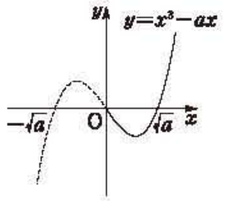
풀이 (i) $a>0$인 경우

$$f(x)=\begin{cases}a(3x-x^3) & (x<0)\\ x^3-ax & (x\geq0)\end{cases}\text{에서}$$

$$f(x)=\begin{cases}-ax(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) & (x<0)\\ x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) & (x\geq0)\end{cases}$$

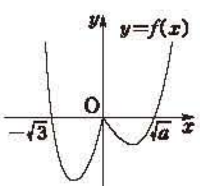
이므로 두 삼차함수 $y=a(3x-x^3)$, $y=x^3-ax$의 그래프의 개형은 각각 다음과 같다.





따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖지만 $f(0)=0$이므로 극댓값은 5가 아니다.

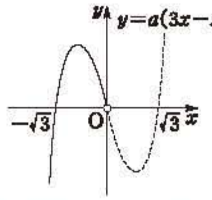


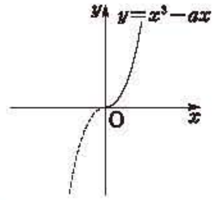
(ii) $a=0$인 경우

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ x^3 & (x\geq0)\end{cases}$$ 이므로 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖지 않는다.

(iii) $a<0$인 경우

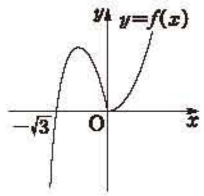
$$f(x)=\begin{cases}a(3x-x^3) & (x<0)\\ x^3-ax & (x\geq0)\end{cases}$$ 에서 두 삼차함수 $y=a(3x-x^3)$, $y=x^3-ax$의 그래프의 개형은 각각 다음과 같다.





따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 함수 $f(x)$가 $x<0$인 부분에서 극댓값을 가지므로



$f(x)=a(3x-x^3)\ (x<0)$에서

$$f'(x)=3a(1-x^2)$$
$$=-3a(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1\ (\because x<0)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	극대	↘	

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 $f(-1)=5$이어야 하므로

$a\{3\cdot(-1)-(-1)^3\}=5,\qquad a(-3+1)=5$

$\therefore a=-\frac{5}{2}$

이상에서 $a=-\frac{5}{2}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{5}{2}(3x-x^3) & (x<0)\\ x^3+\frac{5}{2}x & (x\geq0)\end{cases}$$

$\therefore f(2)=2^3+\frac{5}{2}\cdot2=13$ 답 ⑤

0870 전략 $y=f(x)$의 그래프를 그려 극댓값과 극솟값을 갖는지 확인한다.

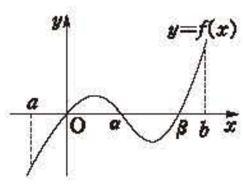
풀이 ㄱ. $g(x)=f(a)$에서

$f(a)+(b-a)f'(x)=f(a)$

$(b-a)f'(x)=0\qquad \therefore f'(x)=0\ (\because b-a>0)$

이때 오른쪽 그림에서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 극댓값과 극솟값을 가지므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $g(x)=f(a)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.



ㄴ. $g(b)-f(a)=\{f(a)+(b-a)f'(b)\}-f(a)=(b-a)f'(b)$

이때 $b-a>0$이고, $f'(b)>0$이므로

$(b-a)f'(b)>0\qquad \therefore g(b)>f(a)$

ㄷ. [반례] $f(x)=x(x-1)(x-2)$, $a=-1$, $b=5$이면

$g(a)=g(-1)=f(-1)+6f'(-1)$

$f(-1)=-1\cdot(-2)\cdot(-3)=-6$이고

$$f'(x)=(x-1)(x-2)+x(x-2)+x(x-1)$$

에서

$$f'(-1)=-2\cdot(-3)+(-1)\cdot(-3)+(-1)\cdot(-2)=11$$

이므로 $g(a)=-6+6\cdot 11=60$

이때 $f(b)=f(5)=5\cdot 4\cdot 3=60$이므로

$$g(a)=f(b)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

참고 ㄷ에서

$$g(a)-f(b)=\{f(a)+(b-a)f'(a)\}-f(b)$$
$$=(b-a)\left\{f'(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\}$$

이때 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이고 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이다.

점 $(a,\ f(a))$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 접점 이외에 만나는 점의 x좌표를 c라 하면 $b=c$일 때 $f'(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$이므로 $g(a)=f(b)$이고, $b<c$일 때 $g(a)>f(b)$이고, $b>c$일 때 $g(a)<f(b)$이다.

0871 **전략** $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

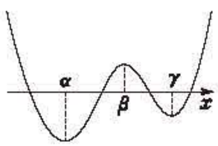
풀이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로 $f'(x)=0$에서

$$x=\alpha \text{ 또는 } x=\beta \text{ 또는 } x=\gamma$$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

ㄴ. $f(\beta-x)=f(\beta+x)$이려면 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=\beta$에 대하여 대칭이어야 한다.
$f(\alpha)<f(\gamma)<0<f(\beta)$에서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다. 이때 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\beta$에 대하여 대칭이 아니므로



$$f(\beta-x)\neq f(\beta+x)$$

ㄷ. ㄴ에서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 네 점에서 만난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0872 **전략** $y=E'(t)$의 그래프를 이용하여 $y=E(t)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 $y=E'(t)$의 그래프가 t축과 만나는 점의 t좌표가 8, 15, 20이므로 $E'(t)=0$에서

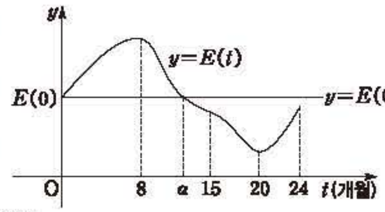
$$t=8 \text{ 또는 } t=15 \text{ 또는 } t=20$$

t	$\cdots$	8	$\cdots$	15	$\cdots$	20	$\cdots$
$E'(t)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$E(t)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

ㄱ. $0\le t\le 8$에서 $E'(t)\ge 0$, $8\le t\le 12$에서 $E'(t)\le 0$이므로 고용함수 $E(t)$는 $t=8$에서 최댓값을 갖는다.
따라서 2012년에 경제가 최고의 호황기일 때는 8월이다.

ㄴ. $8\le t\le 20$에서 $E'(t)\le 0$, $20\le t\le 24$에서 $E'(t)\ge 0$이므로 고용함수 $E(t)$는 $t=20$에서 최솟값을 갖는다.
따라서 고용함수는 2013년 8월에 최솟값을 갖는다.

ㄷ. $E(0)>E(20)$이면 $y=E(t)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 $E(0)=E(a)$를 만족시키는 a의 값이 구간 $(8,\ 20)$에 존재한다.



이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0873 **전략** 점 P의 좌표를 이용하여 두 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a,\ -a^2+5a)$로 놓으면 두 정사각형이 겹치는 부분의 넓이는

$$a(-a^2+5a)=-a^3+5a^2\ (0<a<5)$$

$f(a)=-a^3+5a^2$으로 놓으면

$$f'(a)=-3a^2+10a=-a(3a-10)$$

$f'(a)=0$에서 $a=\frac{10}{3}\ (\because 0<a<5)$

a	0	$\cdots$	$\frac{10}{3}$	$\cdots$	5
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $a=\frac{10}{3}$일 때 $f(a)$는 극대이면서 최대이므로 겹치는 부분의 넓이의 최댓값은

$$f\left(\frac{10}{3}\right)=-\left(\frac{10}{3}\right)^3+5\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{500}{27}$$

따라서 $p=27,\ q=500$이므로 $p+q=527$ 답 527

0874 **전략** $\overline{BP}=x\ (0<x<1)$라 하고 $\triangle PCQ$의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{BP}=x\ (0<x<1)$라 하면 $\overline{CP}=1-x$

이때 $\triangle ABP \backsim \triangle PCQ$ (AA 닮음)이므로 $\overline{AB}:\overline{PC}=\overline{BP}:\overline{CQ}$에서

$$1:(1-x)=x:\overline{CQ} \qquad \therefore \overline{CQ}=x-x^2$$

$\triangle PCQ$의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}(1-x)(x-x^2)=\frac{1}{2}(x^3-2x^2+x)$$

$$\therefore S'(x)=\frac{1}{2}(3x^2-4x+1)=\frac{1}{2}(3x-1)(x-1)$$

$S'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{1}{3}\,(\because 0<x<1)$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$S'(x)$		+	0	−	
$S(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $x=\frac{1}{3}$일 때 $S(x)$는 극대이면서 최대이므로 $\triangle PCQ$의 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{27}$$

답 ②

0875 전략 삼차함수의 그래프와 x축에 평행한 임의의 직선이 오직 한 점에서 만나려면 삼차함수는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

풀이 곡선 $y=x^3+3ax^2+3(10-3a)x$는 삼차함수의 그래프이고 직선 $y=t$는 x축 또는 x축에 평행한 직선이므로 임의의 실수 t에 대하여 곡선과 직선이 오직 한 점에서 만나려면 삼차함수 $y=x^3+3ax^2+3(10-3a)x$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다. ⋯ ❶

$f(x)=x^3+3ax^2+3(10-3a)x$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2+6ax+3(10-3a)$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다. 즉 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=9a^2-9(10-3a)\le 0$$

$$a^2+3a-10\le 0, \quad (a+5)(a-2)\le 0$$

$$\therefore -5\le a\le 2$$ ⋯ ❷

따라서 정수 a는 $-5, -4, -3, \cdots, 2$이므로 구하는 합은 -12이다. ⋯ ❸

답 -12

채점 기준표

❶ 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 함을 알 수 있다.	40%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

0876 전략 직선 $x=a$가 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 극대가 되는 점과 극소가 되는 점 사이를 지날 때, $f'(a)$의 값의 부호를 확인한다.

풀이 $f(x)=x^3-ax^2-36x+60$에서

$$f'(x)=3x^2-2ax-36$$

직선 $x=a$가 곡선 $y=f(x)$의 극대가 되는 점과 극소가 되는 점 사이를 지나므로 $\quad f'(a)<0$

$$3a^2-2a^2-36<0, \quad a^2-36<0$$

$$(a+6)(a-6)<0 \quad \therefore -6<a<6 \quad \cdots\cdots ㉠$$ ⋯ ❶

또 $g(x)=-x^3+2ax^2-56ax$에서

$$g'(x)=-3x^2+4ax-56a$$

직선 $x=-a$가 곡선 $y=g(x)$의 극대가 되는 점과 극소가 되는 점 사이를 지나므로 $\quad g'(-a)>0$

$$-3a^2-4a^2-56a>0, \quad 7a(a+8)<0$$

$$\therefore -8<a<0 \quad \cdots\cdots ㉡$$ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $\quad -6<a<0$ ⋯ ❸

따라서 정수 a는 $-5, -4, -3, -2, -1$의 5개이다. ⋯ ❹

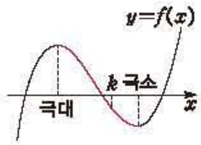
답 5

채점 기준표

❶ ㉠을 구할 수 있다.	40%
❷ ㉡을 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	10%
❹ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	10%

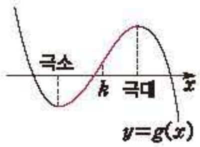
참고 ① 최고차항의 계수가 양수이고 극값을 갖는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 극댓값을 갖는 x의 값과 극솟값을 갖는 x의 값 사이에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

$\therefore f'(k)<0$



② 최고차항의 계수가 음수이고 극값을 갖는 삼차함수 $y=g(x)$의 그래프에서 극댓값을 갖는 x의 값과 극솟값을 갖는 x의 값 사이에서 함수 $y=g(x)$는 증가한다.

$\therefore g'(k)>0$



0877 전략 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 x축과 접하면 $x=a$에서 극값을 가지고 그 극값은 0임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 가지고 그 극값은 0이므로 $\quad f(1)=0,\ f'(1)=0$ ⋯ ❶

즉 $f(x)=a(x-1)^2(x+p)$ (a, p는 상수, $a\ne 0$)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $g(x)$는 $x=3$에서 극값을 가지고 그 극값은 0이므로

$g(3)=0,\ g'(3)=0$ ⋯ ❷

즉 $g(x)=b(x-3)^2(x+q)$ (b, q는 상수, $b\ne 0$)로 놓을 수 있다.

이때

$$f'(x)=2a(x-1)(x+p)+a(x-1)^2=a(x-1)(3x+2p-1)$$

$$g'(x)=2b(x-3)(x+q)+b(x-3)^2=b(x-3)(3x+2q-3)=3b(x-3)\left(x+\frac{2q-3}{3}\right)$$

조건 (다)에서 $g'(x)=-f'(-x)$이므로

$$-f'(-x)=-a(-x-1)(-3x+2p-1)=-a(x+1)(3x-2p+1)=-3a(x+1)\left(x-\frac{2p-1}{3}\right)$$

에서 $\quad b=-a,\ 3=\frac{2p-1}{3},\ \frac{2q-3}{3}=1$

$\therefore p=5,\ q=3$ ⋯ ❸

$\therefore f(x)=a(x-1)^2(x+5),\ g(x)=-a(x-3)^2(x+3)$

또 $f(0)=10$에서

$f(0)=a\cdot(-1)^2\cdot 5=10 \quad \therefore a=2$ ⋯ ❹

따라서 $f(x)=2(x-1)^2(x+5)$, $g(x)=-2(x-3)^2(x+3)$이므로 $\quad f(2)+g(2)=14+(-10)=4$ ⋯ ❺

답 4

채점 기준표

① $f(1)=0$, $f'(1)=0$임을 알 수 있다.	20%
② $g(3)=0$, $g'(3)=0$임을 알 수 있다.	20%
③ p, q의 값을 구할 수 있다.	30%
④ a의 값을 구할 수 있다.	20%
⑤ $f(2)+g(2)$의 값을 구할 수 있다.	10%

0878 **전략** $a\neq2$인 a의 값에 따른 함수 $y=g(x)$를 구한다.

풀이 $x\geq0$일 때, $g(x)=x^4-x^3+(2-a)x^3=x^4+(1-a)x^3$

$x<0$일 때, $g(x)=x^4+x^3$

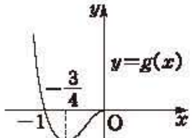
$$\therefore g(x)=\begin{cases} x^4+(1-a)x^3 & (x\geq0) \\ x^4+x^3 & (x<0)\end{cases}$$ ⋯ ①

(i) $x<0$일 때,

$g'(x)=4x^3+3x^2=x^2(4x+3)$

$g'(x)=0$에서 $x=-\frac{3}{4}$ ($\because x<0$)

x	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	0
$g'(x)$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	↘	극소	↗	



따라서 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{3}{4}$에서 극솟값을 갖는다.

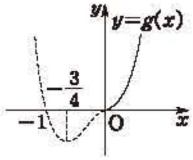
(ii) $x\geq0$일 때,

$g'(x)=4x^3+3(1-a)x^2=x^2\{4x+3(1-a)\}$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{3(a-1)}{4}$

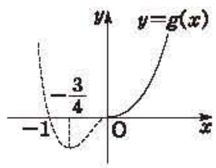
ⓘ $a-1<0$일 때,

$g'(x)\geq0$이므로 함수 $g(x)$는 $x\geq0$에서 증가한다.



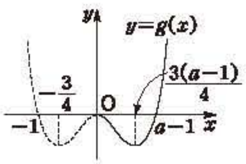
ⓙ $a-1=0$일 때,

$g'(x)\geq0$이므로 함수 $g(x)$는 $x\geq0$에서 증가한다.



ⓚ $a-1>0$일 때,

x	0	$\cdots$	$\frac{3(a-1)}{4}$	$\cdots$
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	0	↘	극소	↗



함수 $g(x)$는 $x=\frac{3(a-1)}{4}$에서 극솟값을 갖는다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$가 극댓값을 가지려면 $a-1>0$, 즉 $a>1$이어야 하고 $a\neq2$이므로 정수 a의 최솟값은 3이다.

$\therefore a_1=3$ ⋯ ②

한편 $a=3$일 때 $g(x)$가 극솟값을 갖는 x의 값은

$x=-\frac{3}{4}$ 또는 $x=\frac{3(3-1)}{4}=\frac{3}{2}$

이므로 모든 x의 값의 합 m은 $m=-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$ ⋯ ③

$\therefore a_1+m=\frac{15}{4}$ ⋯ ④

답 $\frac{15}{4}$

채점 기준표

① x의 값의 범위에 따라 $g(x)$를 구할 수 있다.	20%
② a_1의 값을 구할 수 있다.	50%
③ m의 값을 구할 수 있다.	20%
④ a_1+m의 값을 구할 수 있다.	10%

0879 **전략** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^3+9x$에서 $f'(x)=-3x^2+9$이므로

점 $\mathrm{P}(t, -t^3+9t)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-t^3+9t)=(-3t^2+9)(x-t)$,

즉 $y=(-3t^2+9)x+2t^3$ ⋯ ①

접선 l이 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 x좌표는

$-x^3+9x=(-3t^2+9)x+2t^3$에서 $x^3-3t^2x+2t^3=0$

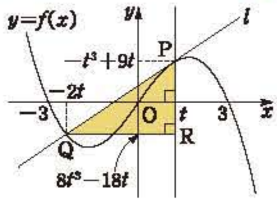
$(x-t)^2(x+2t)=0$ $\therefore x=-2t$ 또는 $x=t$ ⋯ ②

따라서 점 Q의 좌표는 $(-2t, 8t^3-18t)$이므로 점 R의 좌표는 $(t, 8t^3-18t)$이다. 즉

$\overline{\mathrm{PR}}=(-t^3+9t)-(8t^3-18t)$

$=-9t^3+27t$,

$\overline{\mathrm{QR}}=t-(-2t)=3t$



이므로 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\cdot3t\cdot(-9t^3+27t)=-\frac{27}{2}(t^4-3t^2)$ ⋯ ③

$\therefore S'(t)=-\frac{27}{2}(4t^3-6t)=-54t\left(t+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

$S'(t)=0$에서 $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ($\because 0<t<\sqrt{3}$)

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때 $S(t)$는 극대이면서 최대이므로 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=-\frac{27}{2}\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\right)=\frac{243}{8}$$ ⋯ ④

답 $\frac{243}{8}$

채점 기준표

① 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	20%
② 접선 l과 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20%
③ $S(t)$를 구할 수 있다.	30%
④ △PQR의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	30%

08 도함수의 활용 (3)

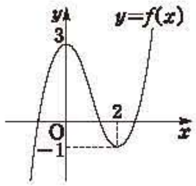
0880 $f(x)=x^3-3x^2+3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	−1	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



답 3

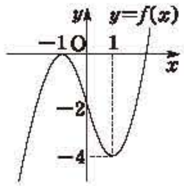
0881 $f(x)=x^3-3x-2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−4	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



답 2

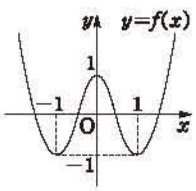
0882 $f(x)=2x^4-4x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−1	↗	1	↘	−1	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 갖는다.



답 4

0883 $2x^4+3=x^4+2x^2+4$에서

$x^4-2x^2-1=0$

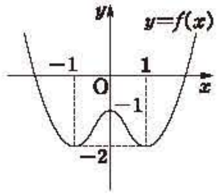
$f(x)=x^4-2x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−2	↗	−1	↘	−2	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



답 2

0884 $x^3-8=6x^2-12x$에서 $x^3-6x^2+12x-8=0$

$f(x)=x^3-6x^2+12x-8$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	0	↗

함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않으므로 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서 만난다.

따라서 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

답 1

0885 $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

(1) 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-1)f(3)<0$이어야 하므로

$(k+5)(k-27)<0$ $\therefore -5<k<27$

(2) 삼차방정식이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(3)=0$이어야 하므로

$(k+5)(k-27)=0$ $\therefore k=-5$ 또는 $k=27$

(3) 삼차방정식이 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(-1)f(3)>0$이어야 하므로

$(k+5)(k-27)>0$ $\therefore k<-5$ 또는 $k>27$

답 풀이 참조

0886 $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$	2	↗	6	↘	2	↗

$x\geq 0$일 때 $f(x)$의 최솟값은 $\boxed{2}$이므로

$f(x)\boxed{>}0$

$\therefore x^3-6x^2+9x+2>0$

답 (가) 2 (나) >

0887 $f(x)=3x^4-4x^3+2$로 놓으면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	1	↗

$x\geq0$일 때 함수 $f(x)$의 최솟값은 1이므로

$f(x)\geq0$, 즉 $3x^4-4x^3+2\geq0$

따라서 $x\geq0$일 때, 부등식 $3x^4-4x^3+2\geq0$이 성립한다.

답 풀이 참조

0888 $f(x)=x^4-4k^3x+12$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4k^3=4(x-k)(x^2+kx+k^2)$

$f'(x)=0$에서 $x=k$ ($\because x^2+kx+k^2\geq0$)

따라서 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극소이면서 최소이므로 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

x	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-3k^4+12$	↗

$f(k)=-3k^4+12>0$, $k^4-4<0$

$(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})(k^2+2)<0$

$\therefore -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ ($\because k^2+2>0$)

답 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

SSEN 특강

모든 실수에 대하여 부등식이 성립할 조건

① 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq0$이 성립하려면
➡ ($f(x)$의 최솟값)≥0

② 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\leq0$이 성립하려면
➡ ($f(x)$의 최댓값)≤0

0889 $v=\dfrac{dx}{dt}=6t-9$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=6-9=-3$, $a=6$

답 $v=-3$, $a=6$

0890 $v=\dfrac{dx}{dt}=-6t^2+5$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-12t$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=-6+5=-1$, $a=-12$

답 $v=-1$, $a=-12$

0891 $\dfrac{dl}{dt}=3t^2+2t$이므로 $t=2$일 때 고무줄의 길이의 변화율은

$3\cdot2^2+2\cdot2=16$

답 16

0892 (1) 구의 겉넓이를 S라 하면

$S=4\pi(0.1t)^2=0.04\pi t^2$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=0.08\pi t$

따라서 $t=10$일 때 구의 겉넓이의 변화율은

$0.08\pi\times10=0.8\pi$

(2) 구의 부피를 V라 하면

$V=\dfrac{4}{3}\pi(0.1t)^3=\dfrac{0.004}{3}\pi t^3$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=0.004\pi t^2$

따라서 $t=10$일 때 구의 부피의 변화율은

$0.004\pi\times10^2=0.4\pi$

답 (1) 0.8π (2) 0.4π

유형 01 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수 본책 146쪽

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수
➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

0893 $3x^4-8x^3-6x^2+24x-k=0$에서

$3x^4-8x^3-6x^2+24x=k$ …… ㉠

방정식 ㉠이 한 중근과 서로 다른 두 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=3x^4-8x^3-6x^2+24x$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$로 놓으면

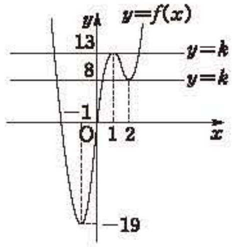
$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

$=12(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-19	↗	13	↘	8	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 서로 다른 두 점에서 만나려면



$k=8$ 또는 $k=13$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$8+13=21$

답 ④

0894 $x^3-3x+1+k=0$에서

$x^3-3x+1=-k$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=x^3-3x+1$과 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x^3-3x+1$로 놓으면

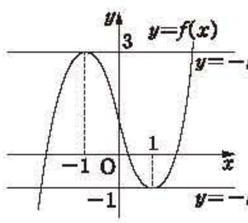
$f'(x)=3x^2-3$

$=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면



$-k=3$ 또는 $-k=-1$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

따라서 양수 k의 값은 1이다.

답 1

08 도함수의 활용 (3)

0895 $\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+k=0$에서

$\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x=-k$ ······ ㉠

방정식 ㉠이 오직 한 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x$와 직선 $y=-k$가 한 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x$로 놓으면

$f'(x)=x^3-3x+2=(x+2)(x-1)^2$

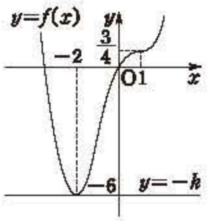
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	-6	↗	$\frac{3}{4}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 한 점에서 만나려면

$-k=-6$

$\therefore k=6$



답 ⑤

0896 $3x^4-8x^3-18x^2-k=0$에서

$3x^4-8x^3-18x^2=k$ ······ ㉠ ··· ❶

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=3x^4-8x^3-18x^2$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=3x^4-8x^3-18x^2$으로 놓으면

$f'(x)=12x^3-24x^2-36x=12x(x+1)(x-3)$

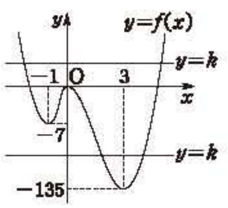
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$ ··· ❷

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-7	↗	0	↘	-135	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$k>0$ 또는 $-135<k<-7$ ··· ❸

따라서 음의 정수 k는 $-134, -133, -132, \cdots, -8$의 127개이다. ··· ❹



답 127

채점 기준표

❶ 주어진 방정식을 정리할 수 있다.	10%
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❹ 음의 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	10%

0897 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 α, β, γ이므로 $f'(x)=0$에서

$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지려면

$f(\alpha)<0,\ f(\beta)>0,\ f(\gamma)<0$

이어야 한다.

답 ③

유형 02 방정식 $f(x)=k$의 실근의 부호

본책 146쪽

(1) 방정식 $f(x)=k$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다.

(2) 방정식 $f(x)=k$가

① 양근을 갖는다.

➡ $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 양수이다.

② 음근을 갖는다.

➡ $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 음수이다.

0898 $2x^3+3x^2-12x+p=0$에서

$p=-2x^3-3x^2+12x$ ······ ㉠

방정식 ㉠이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=-2x^3-3x^2+12x$와 직선 $y=p$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이어야 한다.

$f(x)=-2x^3-3x^2+12x$로 놓으면

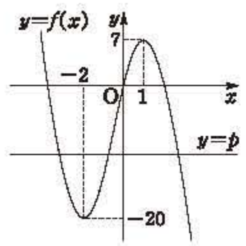
$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-20	↗	7	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=p$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수가 되는 실수 p의 값의 범위는

$-20<p<0$



답 ①

0899 $x^3-x^2+a=2x^2+9x$에서

$a=-x^3+3x^2+9x$ ······ ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=-x^3+3x^2+9x$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수이어야 한다.

$f(x)=-x^3+3x^2+9x$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

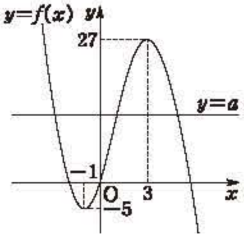
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-5	↗	27	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수가 되는 실수 a의 값의 범위는

$0<a<27$

즉 주어진 조건을 만족시키는 정수 a는 1, 2, 3, …, 26의 26개이다.



답 ④

0900 $x^3-12x^2+36x-k=0$에서

$k=x^3-12x^2+36x$ …… ㉠ ⋯➊

방정식 ㉠이 오직 한 개의 양근을 가지려면 곡선 $y=x^3-12x^2+36x$와 직선 $y=k$의 교점이 1개이고 그 교점의 x좌표가 양수이어야 한다.

$f(x)=x^3-12x^2+36x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$

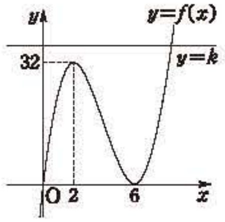
$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=6$ ⋯➋

x	⋯	2	⋯	6	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점이 1개이고, 그 교점의 x좌표가 양수가 되는 실수 k의 값의 범위는

$k>32$ ⋯➌

즉 정수 k의 최솟값은 33이다. ⋯➍



답 33

채점 기준표

➊ 주어진 방정식을 정리할 수 있다.	10%
➋ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30%
➌ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
➍ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	10%

0901 $x^4-4x^3-x^2=x^2-12x+k$에서

$x^4-4x^3-2x^2+12x=k$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=x^4-4x^3-2x^2+12x$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이어야 한다.

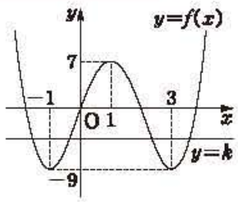
$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	⋯	−1	⋯	1	⋯	3	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−9	↗	7	↘	−9	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수, 다른 두 개는 음수가 되는 실수 k의 값의 범위는 $-9<k<0$



따라서 $a=-9$, $b=0$이므로

$b-a=9$

답 ⑤

유형 03-05 삼차방정식의 근의 판별 본책 147, 148쪽

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 근은

① (극댓값)×(극솟값)<0 ⟺ 서로 다른 세 실근

② (극댓값)×(극솟값)=0 ⟺ 한 실근과 중근(서로 다른 두 실근)

③ (극댓값)×(극솟값)>0 ⟺ 한 실근과 두 허근

0902 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+n$으로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-1)f(2)<0$이어야 하므로

$(n+7)(n-20)<0$

$\therefore -7<n<20$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 n은 −6, −5, −4, …, 19의 26개이다.

답 ②

다른 풀이 $2x^3-3x^2-12x+n=0$에서

$2x^3-3x^2-12x=-n$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=2x^3-3x^2-12x$와 직선 $y=-n$이 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

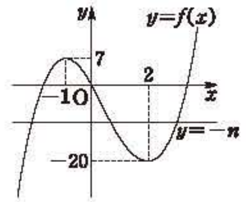
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	⋯	−1	⋯	2	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	−20	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-n$의 교점이 3개가 되는 $-n$의 값의 범위는

$-20<-n<7$

$\therefore -7<n<20$



즉 주어진 조건을 만족시키는 정수 n은 26개이다.

0903 $f(x)=-4$, 즉 $x^3-3ax^2=-4$에서

$x^3-3ax^2+4=0$

$g(x)=x^3-3ax^2+4$로 놓으면

$g'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a$

삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$g(0)g(2a)<0$이어야 하므로

$4(4-4a^3)<0$, $a^3-1>0$

$(a-1)(a^2+a+1)>0$

이때 $a^2+a+1>0$이므로 $a>1$

답 $a>1$

08 도함수의 활용 (3)

0904 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+k$로 놓으면

$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 한 실근과 중근을 가져야 하므로 $f(1)f(3)=0$이어야 한다.

즉 $\left(\frac{4}{3}+k\right)\cdot k=0$이므로 $k=-\frac{4}{3}$ 또는 $k=0$

따라서 정수 k의 값은 0이다. 답 ③

0905 함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되므로

$g(x)=x^3+3x^2-9x-10+a$

$\therefore g'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 한 실근과 중근을 가져야 하므로 $g(-3)g(1)=0$이어야 한다.

즉 $(17+a)(-15+a)=0$이므로 $a=-17$ 또는 $a=15$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-17+15=-2$ 답 ②

0906 $f(x)=2x^3-6x^2-18x-a+2$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(-1)f(3)>0$이어야 하므로

$(12-a)(-52-a)>0$

$(a-12)(a+52)>0$

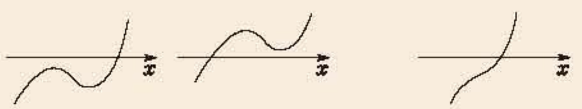
$\therefore a<-52$ 또는 $a>12$

따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

SSEN 특강

삼차함수의 그래프의 개형

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가질 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



[극값을 갖는 경우] [극값을 갖지 않는 경우]

0907 $f(x)=x^3-3x^2-24x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면 $f(-2)f(4)>0$이어야 하므로

$(28+k)(-80+k)>0$

$(k+28)(k-80)>0$

$\therefore k<-28$ 또는 $k>80$

따라서 자연수 k의 최솟값은 81이다. 답 81

0908 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2ax+2a$에서

$f'(x)=2x^2-2a=2(x^2-a)$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $a>0$ …… ㉠

즉 $f'(x)=2(x^2-a)=2(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$에서

$x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면 $f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})>0$이어야 하므로

$\left(\frac{4}{3}a\sqrt{a}+2a\right)\left(-\frac{4}{3}a\sqrt{a}+2a\right)>0$

$\left(2a+\frac{4}{3}a\sqrt{a}\right)\left(2a-\frac{4}{3}a\sqrt{a}\right)>0$

$4a^2-\frac{16}{9}a^3>0,\quad 4a^2\left(1-\frac{4}{9}a\right)>0$

$1-\frac{4}{9}a>0\ (\because ㉠)\quad \therefore a<\frac{9}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<a<\frac{9}{4}$ 답 $0<a<\frac{9}{4}$

유형 06 두 그래프의 교점의 개수 본책 148쪽

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수

➡ 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수와 같다.

0909 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3+6x^2=-9x+k$, 즉 $x^3+6x^2+9x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+6x^2+9x-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-3)f(-1)<0$이어야 하므로

$-k(-4-k)<0,\quad k(k+4)<0$

$\therefore -4<k<0$ 답 ②

0910 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $-x^3+4x^2-4x=x^2-4x+k$, 즉 $x^3-3x^2+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ➊

$f(x)=x^3-3x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ ➋

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(0)f(2)=0$이어야 하므로

$k(-4+k)=0\quad \therefore k=0$ 또는 $k=4$ ➌

따라서 양수 k의 값은 4이다. ➍

답 4

채점 기준표

➊ 방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	20%
➋ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20%
➌ k의 값을 구할 수 있다.	50%
➍ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	10%

0911 주어진 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $-x^3+2x^2=x^2-x+k$, 즉 $x^3-x^2-x+k=0$이 한 실근만을 가져야 한다.
$f(x)=x^3-x^2-x+k$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서
$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$
삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면
$f\left(-\frac{1}{3}\right)f(1)>0$이어야 하므로
$\left(\frac{5}{27}+k\right)(-1+k)>0,\quad \left(k+\frac{5}{27}\right)(k-1)>0$
$\therefore k<-\frac{5}{27}$ 또는 $k>1$
따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다. 답 2

0912 주어진 곡선과 직선이 한 점에서는 만나고 다른 한 점에서는 접하려면 방정식 $x^3+7=3x+k$, 즉 $x^3-3x+7-k=0$이 한 실근과 중근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3-3x+7-k$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=1$
삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(1)=0$이어야 하므로
$(9-k)(5-k)=0$
$\therefore k=5$ 또는 $k=9$ 답 5, 9

유형 07 접선의 개수 본책 148쪽

곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 접점의 개수와 같다.

0913 $y=x^3-kx$에서 $y'=3x^2-k$
점 (1, 1)에서 곡선 $y=x^3-kx$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3-kt)라 하면 접선의 방정식은
$y-(t^3-kt)=(3t^2-k)(x-t)$
이 직선이 점 (1, 1)을 지나므로
$1-(t^3-kt)=(3t^2-k)(1-t)$
$\therefore 2t^3-3t^2+1+k=0$ ⋯⋯ ㉠
점 (1, 1)에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
$f(t)=2t^3-3t^2+1+k$로 놓으면
$f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$
$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$
삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(0)f(1)=0$이어야 하므로
$(1+k)\cdot k=0\quad \therefore k=-1\ (\because k\neq 0)$
답 ②

0914 $y=x^3+2$에서 $y'=3x^2$
점 $(1, a)$에서 곡선 $y=x^3+2$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3+2)라 하면 접선의 방정식은
$y-(t^3+2)=3t^2(x-t)$
이 직선이 점 $(1, a)$를 지나므로
$a-(t^3+2)=3t^2(1-t)$
$\therefore 2t^3-3t^2-2+a=0$ ⋯⋯ ㉠
점 $(1, a)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(t)=2t^3-3t^2-2+a$로 놓으면
$f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$
$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$
삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(0)f(1)<0$이어야 하므로
$(-2+a)(-3+a)<0,\quad (a-2)(a-3)<0$
$\therefore 2<a<3$ 답 $2<a<3$

유형 08 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건; 증가·감소의 활용 본책 149쪽

① 구간 (a, b)에서 감소하는 함수 $f(x)$가 $f(x)>k$이려면
➡ $f(b)\geq k$
② 구간 (a, b)에서 증가하는 함수 $f(x)$가 $f(x)<k$이려면
➡ $f(b)\leq k$

0915 $f(x)=x^3-6x^2+k$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$
$1<x<3$일 때 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 (1, 3)에서 감소한다.
따라서 $1<x<3$에서 $f(x)>0$이려면 $f(3)\geq 0$이어야 하므로
$f(3)=27-54+k=-27+k\geq 0\quad \therefore k\geq 27$ 답 ⑤

0916 $f(x)=2x^3+3x^2+k$로 놓으면
$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$
$x<-1$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 증가한다.
따라서 $x<-1$에서 $f(x)<0$이려면 $f(-1)\leq 0$이어야 하므로
$f(-1)=-2+3+k=1+k\leq 0\quad \therefore k\leq -1$
즉 실수 k의 최댓값은 -1이다. 답 -1

0917 $x^3+3x^2+k<x^2+4x$에서
$x^3+2x^2-4x+k<0$
$f(x)=x^3+2x^2-4x+k$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+4x-4=(x+2)(3x-2)$
$2<x<4$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 (2, 4)에서 증가한다.
따라서 $2<x<4$에서 $f(x)<0$이려면 $f(4)\leq 0$이어야 하므로
$f(4)=64+32-16+k=80+k\leq 0\quad \therefore k\leq -80$
즉 실수 k의 최댓값은 -80이다. 답 ②

08 도함수의 활용 (3)

유형 09 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건 ; 최대·최소의 활용 본책 149쪽

① 구간 (a, b)에서 부등식 $f(x) \le a$를 증명하려면
➡ 구간 (a, b)에서 ($f(x)$의 최댓값) $\le a$임을 보인다.
② 구간 (a, b)에서 부등식 $f(x) \ge a$를 증명하려면
➡ 구간 (a, b)에서 ($f(x)$의 최솟값) $\ge a$임을 보인다.

0918 $f(x)=4x^3-3x^2-6x$로 놓으면

$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	-1	↗	$\frac{7}{4}$	↘	-5	↗

$x \ge -1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 -5이다. 즉 $x \ge -1$일 때 $f(x) \ge k$이려면 $f(1) \ge k$이어야 하므로 $f(1)=-5 \ge k$ $\therefore k \le -5$

따라서 실수 k의 최댓값은 -5이다.

답 ⑤

0919 $2x^3+2x^2-35x+k \le -x^2+x$에서

$2x^3+3x^2-36x+k \le 0$

$f(x)=2x^3+3x^2-36x+k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+6x-36=6(x+3)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=2$

$x<0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $k+81$이다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	$k+81$	↘	

$x<0$일 때 $f(x) \le 0$이려면 $f(-3) \le 0$이어야 하므로

$f(-3)=k+81 \le 0$ $\therefore k \le -81$

답 ①

0920 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ ➡ ①

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k+5$	↘	$k+4$	↗	$k+9$

$1 \le x \le 3$에서 $f(x)$의 최댓값은 $k+9$, 최솟값은 $k+4$이므로 $0 \le f(x) \le 10$이려면 $k+4 \ge 0$, $k+9 \le 10$이어야 한다.

$\therefore -4 \le k \le 1$ ➡ ②

따라서 정수 k는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1$의 6개이다. ➡ ③

답 6

채점 기준표

① $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20%
② k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%
③ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20%

유형 10 모든 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건 본책 150쪽

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \ge 0$이 성립하려면
➡ ($f(x)$의 최솟값) ≥ 0

0921 (i) $k=0$일 때, $x^4+3 \ge 0$이므로 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k \ne 0$일 때,

$f(x)=x^4+4k^3x+3$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3+4k^3=4(x+k)(x^2-kx+k^2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-k$ ($\because x^2-kx+k^2>0$)

함수 $f(x)$는 $x=-k$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $-3k^4+3$이다.

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-3k^4+3$	↗

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이려면 $f(-k) \ge 0$이어야 하므로

$f(-k)=-3k^4+3 \ge 0$

$k^4-1 \le 0$, $(k+1)(k-1)(k^2+1) \le 0$

$\therefore -1 \le k < 0$ 또는 $0 < k \le 1$ ($\because k \ne 0$)

(i), (ii)에서 $-1 \le k \le 1$이므로 구하는 정수 k는 $-1, 0, 1$의 3개이다.

답 3

0922 $2x^4-4x^2 \ge k$에서 $2x^4-4x^2-k \ge 0$

$f(x)=2x^4-4x^2-k$로 놓으면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-k-2$	↗	$-k$	↘	$-k-2$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $-k-2$이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이려면 $f(-1) \ge 0$, $f(1) \ge 0$이어야 하므로

$f(-1)=f(1)=-k-2 \ge 0$

$\therefore k \le -2$

따라서 실수 k의 최댓값은 -2이다.

답 ④

유형 11 부등식 $f(x)>g(x)$ 꼴 본책 150쪽

구간 (a, b)에서 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립하려면
$h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때,
➡ 구간 (a, b)에서 ($h(x)$의 최솟값) >0

0923 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=x^4+2x^3-x^2-9x-(2x^3+5x^2-x-a)$

$=x^4-6x^2-8x+a$

$\therefore h'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↘	$a-24$	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $a-24$이다.

모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이려면 $h(2)>0$이어야 하므로

$h(x)=f(x)-g(x)>0$ $\therefore f(x)>g(x)$

$h(2)=a-24>0$

$\therefore a>24$ 답 ⑤

0924 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=5x^3-10x^2+k-(5x^2+2)$

$=5x^3-15x^2+k-2$

$\therefore h'(x)=15x^2-30x=15x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$k-22$	↗	

$0<x<3$에서 함수 $h(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $k-22$이다.

$0<x<3$에서 $h(x)\geq 0$이려면 $h(2)\geq 0$이어야 하므로

$h(2)=k-22\geq 0$ $\therefore k\geq 22$

따라서 실수 k의 최솟값은 22이다. 답 ③

0925 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=4x^3-6x-(-3x^2-a)=4x^3+3x^2-6x+a$

$\therefore h'(x)=12x^2+6x-6=6(x+1)(2x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$a+5$	↘	$a-\frac{7}{4}$	↗	$a+32$

$-1\leq x\leq 2$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 최대이고, 최댓값은 $a+32$이다.

$-1\leq x\leq 2$에서 $h(x)\leq 0$이려면 $h(2)\leq 0$이어야 하므로

$h(2)=a+32\leq 0$ $\therefore a\leq -32$

따라서 실수 a의 최댓값은 -32이다. 답 -32

0926 $x>3$에서 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$이 직선 $y=-\frac{5}{4}x+k$보다 항상 위쪽에 있으려면 $x>3$에서 $\frac{1}{3}x^3-x^2>-\frac{5}{4}x+k$, 즉 $\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{5}{4}x-k>0$이어야 한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{5}{4}x-k$로 놓으면

$f'(x)=x^2-2x+\frac{5}{4}=(x-1)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{4}$

$x>3$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(3,\ \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x>3$에서 $f(x)>0$이려면 $f(3)\geq 0$이어야 하므로

$f(3)=-k+\frac{15}{4}\geq 0$ $\therefore k\leq\frac{15}{4}$

즉 정수 k의 최댓값은 3이다. 답 ③

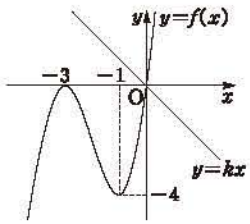
0927 $f(x)=x^3+6x^2+9x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$ ➊

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗	0

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ➋



이때 $y=kx$는 원점을 지나는 직선이므로 $x\leq 0$일 때 $f(x)\leq kx$가 성립하려면 $k\leq 0$ ➌

답 $k\leq 0$

채점 기준표	
➊ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20%
➋ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40%
➌ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%

유형 12-14 속도와 가속도

본책 161쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는

$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$, $a=\frac{dv}{dt}=v'(t)$

이때 점 P의 속력은 $|v|$이다.

0928 점 P가 원점을 지날 때는 $x=0$일 때이므로

$t^3-4t^2+4t=0$, $t(t-2)^2=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$

따라서 점 P가 출발 후 다시 원점을 지날 때는 $t=2$일 때이고, 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-8t+4$

이므로 $t=2$일 때 점 P의 속도는

$12-16+4=0$ 답 0

0929 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2at+4$

$t=3$일 때 $v=19$이므로 $27+6a+4=19$

$6a=-12$ $\therefore a=-2$ 답 ①

0930 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=2t^2,\ v_Q=-3t+5$ ⋯ ❶

이때 두 점 P, Q의 속도가 같아지려면 $v_P=v_Q$이므로

$2t^2=-3t+5,\quad 2t^2+3t-5=0$

$(2t+5)(t-1)=0$

$\therefore t=1\ (\because t\ge 0)$ ⋯ ❷

$x_P(1)=1$, $x_Q(1)=4$이므로 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$4-1=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준표

❶ 두 점 P, Q의 속도를 구할 수 있다.	40%
❷ 속도가 같아지는 순간의 시각을 구할 수 있다.	30%
❸ 두 점 P, Q 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%

0931 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2-6t-8$

$6t^2-6t-8=4$에서 $\quad 6t^2-6t-12=0$

$6(t+1)(t-2)=0 \quad \therefore t=2\ (\because t\ge 0)$

점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=12t-6$

이므로 $t=2$일 때 점 P의 가속도는

$24-6=18$

답 18

0932 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-8t^3+18t^2-12t+5$

$a=\dfrac{dv}{dt}=-24t^2+36t-12$

점 P의 속도가 증가하면 $a>0$이므로

$-24t^2+36t-12>0,\quad 2t^2-3t+1<0$

$(2t-1)(t-1)<0 \quad \therefore \dfrac{1}{2}<t<1$

답 ③

0933 점 P의 속도를 v라 하면

$v=f'(t)=3t^2-6t-5=3(t-1)^2-8$

즉 $0\le t\le 3$에서 $-8\le f'(t)\le 4$이므로 $\quad 0\le |f'(t)|\le 8$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 8이다.

답 8

0934 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-t^2+2t+3=-(t-1)^2+4$

즉 $0\le t\le 3$에서 $0\le f'(t)\le 4$이므로 $\quad 0\le |f'(t)|\le 4$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 4이고 그때의 시각은 $t=1$이므로

$M=4,\ a=1 \quad \therefore M+a=5$

답 ②

0935 점 P의 속도를 v라 하면

$v=f'(t)=-6t^2+24t-14=-6(t-2)^2+10$

즉 $1\le t\le 5$에서 $-44\le f'(t)\le 10$이므로 $\quad 0\le |f'(t)|\le 44$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 44이다.

답 ④

유형 15 속도·가속도와 운동 방향

본책 152쪽

① 수직선 위를 움직이는 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이다.

② 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면
➡ (두 점의 속도의 곱)<0

0936 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=3$

$t=1$일 때 점 P의 위치는 4이고, $t=3$일 때 점 P의 위치는 0이므로 두 점 A, B 사이의 거리는 4이다.

답 4

0937 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-24t+36=3(t-2)(t-6)$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=2$ 또는 $t=6$

따라서 점 P는 $t=2$, $t=6$에서 운동 방향을 2번 바꾼다.

답 2번

0938 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=5$

즉 $t=1$일 때 점 P는 첫 번째로 운동 방향을 바꾸고, $t=5$일 때 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-18$

따라서 $t=5$일 때 점 P의 가속도는

$30-18=12$

답 ⑤

0939 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=2t-4,\ v_Q=2t-8$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

$(2t-4)(2t-8)<0,\quad 4(t-2)(t-4)<0$

$\therefore 2<t<4$

답 ②

0940 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2+2mt+n$

$t=1$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸므로

$6+2m+n=0$ 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이다. ⋯⋯ ㉠

$t=1$일 때 점 P의 위치는 3이므로

$2+m+n+3=3 \quad \therefore m+n=-2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad m=-4,\ n=2$ ⋯ ❶

$\therefore v=6t^2-8t+2=2(3t-1)(t-1)$

$v=0$에서 $\quad t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=1$

따라서 점 P가 $t=1$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=\frac{1}{3}$이다. ⋯ ❷

이때 점 P의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=12t-8$$

따라서 $t=\frac{1}{3}$일 때 점 P의 가속도는

$4-8=-4$ ⋯ ❸

답 -4

채점 기준표

❶ m, n의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각을 구할 수 있다.	30%
❸ 가속도를 구할 수 있다.	30%

유형 16 속도의 그래프의 해석 (본책 152쪽)

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프에서
① $y=v(t)$의 그래프가 t축과 $t=a$에서 만나고 $t=a$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌면
➡ 점 P는 $t=a$일 때 운동 방향을 바꾼다.
② $y=v(t)$의 그래프가 증가하는 구간
➡ 점 P의 가속도는 양의 값이다.
③ $y=v(t)$의 그래프가 감소하는 구간
➡ 점 P의 가속도는 음의 값이다.

0941 ① 점 P의 가속도는 $v'(t)$이고, $v'(a)<0$이므로 $t=a$일 때 가속도는 음의 값이다.
④ $t=f$에서 $v(t)>0$이므로 점 P는 움직이고 있다.
⑤ $t=d$와 $t=h$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 바뀐다. 따라서 $0<t<i$에서 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다.

답 ④

0942 ㄱ. $v(a)>0$, $v(c)<0$이므로 $t=a$일 때와 $t=c$일 때 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.
ㄴ. $t=c$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $t=c$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.
ㄷ. 점 P의 가속도는 $v'(t)$이고, $v'(d)>0$이므로 $t=d$일 때 점 P의 가속도는 양의 값이다.
ㄹ. $v'(t)=0$이면 가속도가 0이고, $v'(a)=0$, $v'(c)=0$이므로 점 P의 가속도가 0이 되는 순간이 두 번 있다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

유형 17 정지하는 물체의 속도와 움직인 거리 (본책 153쪽)

움직이는 물체가 제동을 건 후 t초 동안 움직인 거리를 xm라 할 때
① 제동을 건 지 t초 후의 속도 ➡ $\frac{dx}{dt}$
② 물체가 정지할 때의 속도 ➡ 0

0943 열차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=12-0.8t$$

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$12-0.8t=0 \quad \therefore t=15$

따라서 15초 동안 열차가 움직인 거리는

$12\times15-0.4\times15^2=90(\text{m})$

답 ③

0944 자동차가 브레이크를 밟은 지 t초 후의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=36-9t$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$36-9t=0 \quad \therefore t=4$

답 ③

0945 기차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=27-0.9t$$

기차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$27-0.9t=0 \quad \therefore t=30$

이때 30초 동안 기차가 움직인 거리는

$27\times30-0.45\times30^2=405(\text{m})$

따라서 목적지로부터 전방 405 m의 지점에서 제동을 걸어야 하므로

$a=405$

답 405

유형 18 위로 던진 물체의 위치와 속도 (본책 153쪽)

지면에서 똑바로 위로 던진 물체의 t초 후의 높이를 hm라 할 때
① t초 후의 물체의 속도 ➡ $\frac{dh}{dt}$
② 최고 지점에 도달했을 때의 속도 ➡ 0

0946 로켓의 t초 후의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=20-10t$$

최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$20-10t=0 \quad \therefore t=2$

따라서 2초 후 이 로켓의 지면으로부터의 높이는

$20\cdot2-5\cdot2^2=20(\text{m})$

답 ②

0947 물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 $h=0$에서

$30+25t-5t^2=0, \quad t^2-5t-6=0$

$(t+1)(t-6)=0 \quad \therefore t=6\ (\because t>0)$ ⋯ ❶

물체의 t초 후의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=25-10t$$ ⋯ ❷

$t=6$일 때 물체의 속도는

$25-60=-35\ (\text{m/s})$ ⋯ ❸

따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속력은 35 m/s이다. ⋯ ❹

답 35 m/s

채점 기준표

❶ 물체가 지면에 떨어질 때의 시각을 구할 수 있다.	40%
❷ 속도를 구할 수 있다.	30%
❸ 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도를 구할 수 있다.	20%
❹ 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속력을 구할 수 있다.	10%

0948 물체의 t초 후의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=a-10t$$

최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$$a-10t=0 \qquad \therefore t=\frac{a}{10}$$

즉 $t=\frac{a}{10}$일 때 물체의 높이가 최대가 되므로

$$a\cdot\frac{a}{10}-5\left(\frac{a}{10}\right)^2\geq 80, \qquad \frac{a^2}{20}\geq 80$$

$$a^2\geq 1600 \qquad \therefore a\geq 40\ (\because a>0)$$

따라서 상수 a의 최솟값은 40이다. 답 ⑤

유형 19 위치의 그래프의 해석 본책 154쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$의 그래프에서
① $x'(t)>0$인 구간 ➡ 점 P는 양의 방향으로 움직인다.
② $x'(t)=0$일 때 ➡ 점 P는 정지하거나 운동 방향을 바꾼다.
③ $x'(t)<0$인 구간 ➡ 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

0949 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

ㄱ. $0<k<a$일 때, $v(k)=x'(k)>0$이고 $v(a)=x'(a)=0$이므로
$v(k)>v(a)$
따라서 $0<t<b$에서 점 P의 속도는 $t=a$일 때 최대가 아니다.

ㄴ. $a<t<c$에서 $v(t)=x'(t)<0$이므로 $t=b$일 때 점 P의 운동 방향은 일정하다.

ㄷ. $t=c$일 때 $x'(t)=0$이므로 점 P의 속도는 0이다.

ㄹ. $0<t<d$에서 $t=c$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

0950 주어진 그림에서 점 P가 원점을 지나는 시각은 $t=c$ 또는 $t=e$이고, 이 중 처음으로 원점을 지나는 시각은 $t=c$이므로 구하는 속도는 $x'(c)$의 값과 같다. 답 ⑤

0951 $x(t)$는 t에 대한 삼차식이고 $x(t)$의 그래프가 t축과 만나는 점의 t좌표가 각각 0, 2, 5이므로

$$x(t)=kt(t-2)(t-5)=kt^3-7kt^2+10kt\ (k>0)$$

로 놓을 수 있다.

점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=x'(t)=3kt^2-14kt+10k$$

$$a=\frac{dv}{dt}=6kt-14k$$

따라서 가속도가 0이 되는 시각은 $a=0$에서

$$6kt-14k=0 \qquad \therefore t=\frac{7}{3}$$

답 $\frac{7}{3}$

0952 ㄱ. 두 점 P, Q는 $t=1$, $t=8$일 때 모두 두 번 만난다.

ㄴ. $y=f(t)$의 그래프는 t의 값이 커질수록 접선의 기울기가 점점 작아지므로 $f'(4)>f'(8)$이다. 따라서 점 P의 $t=4$일 때의 속력은 $t=8$일 때의 속력보다 빠르다.

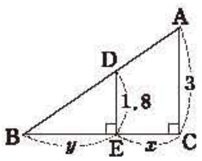
ㄷ. $4\leq t\leq 8$일 때,
점 P가 움직인 거리는 $f(8)-f(4)$
점 Q가 움직인 거리는 $g(8)-g(4)$
주어진 그래프에서
$$g(8)-g(4)>f(8)-f(4)$$
이므로 점 Q가 움직인 거리가 점 P가 움직인 거리보다 길다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

유형 20~22 시각에 대한 변화율 본책 154, 155쪽

어떤 물체의 시각 t에서의 길이가 l, 넓이가 S, 부피가 V일 때, 시각 t에서의 변화율 구하기
(i) t초 후의 길이, 넓이, 부피 등의 관계식을 세운다.
(ii) t에 대하여 미분한다.
① 길이의 변화율 ➡ $\frac{dl}{dt}$ ② 넓이의 변화율 ➡ $\frac{dS}{dt}$
③ 부피의 변화율 ➡ $\frac{dV}{dt}$
(iii) (ii)에서 구한 식에 주어진 조건을 만족시키는 t의 값을 대입한다.

0953 t초 동안 사람이 움직인 거리를 x m, 사람의 그림자의 길이를 y m라 하면 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$이므로



$$3:1.8=(x+y):y$$

$$3y=1.8x+1.8y, \qquad 1.2y=1.8x$$

$$\therefore y=\frac{3}{2}x$$

그런데 $x=2t$이므로 $\quad y=3t \qquad \therefore \frac{dy}{dt}=3$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 3 m/s이다. 답 ④

0954 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2t,\ 0)$, $(0,\ t)$이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2t}+\frac{y}{t}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠ \quad ❶$$

이때 직선 ㉠과 직선 $y=x$의 교점 R의 x좌표는 $\frac{x}{2t}+\frac{x}{t}=1$에서

$$\frac{3x}{2t}=1 \qquad \therefore x=\frac{2}{3}t \qquad \therefore R\left(\frac{2}{3}t,\ \frac{2}{3}t\right) \quad ❷$$

$\overline{OR}$의 길이를 l이라 하면

$$l=\sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{2}{3}t\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}t^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}t$$

$$\therefore \frac{dl}{dt}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 선분 OR의 길이의 변화율은 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다. ···➌

답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

채점 기준표

❶ 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식을 세울 수 있다.	30%
❷ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❸ $\overline{OR}$의 길이의 변화율을 구할 수 있다.	50%

0955 t초 후의 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이는 $10t$ cm이므로 원의 넓이를 S cm²라 하면

$$S=\pi(10t)^2=100\pi t^2 \qquad \therefore \frac{dS}{dt}=200\pi t$$

따라서 $t=2$일 때 원의 넓이의 변화율은

$200\pi\cdot 2=400\pi$ (cm²/s)

$\therefore a=400$

답 400

0956 t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(10+2t)$ cm이므로 정사각형의 넓이를 S cm²라 하면

$$S=(10+2t)^2=4t^2+40t+100$$

$$\therefore \frac{dS}{dt}=8t+40$$

정사각형의 넓이가 400 cm²가 될 때, 한 변의 길이는 20 cm이므로

$10+2t=20 \qquad \therefore t=5$

따라서 $t=5$일 때 정사각형의 넓이의 변화율은

$8\cdot 5+40=80$ (cm²/s)

답 ④

0957 t초 후의 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 길이는 각각 $2t$, $10-2t$이므로 두 정사각형의 넓이의 합을 S라 하면

$S=(2t)^2+(10-2t)^2=8t^2-40t+100 \ (0<t<5)$ ···➊

$\therefore \frac{dS}{dt}=16t-40$ ···➋

따라서 $t=3$일 때 두 정사각형의 넓이의 합의 변화율은

$16\cdot 3-40=8$ ···➌

답 8

채점 기준표

❶ S를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ 넓이의 합의 변화율을 구할 수 있다.	30%
❸ $t=3$일 때 넓이의 합의 변화율을 구할 수 있다.	30%

0958 t초 후의 고무풍선의 반지름의 길이는 $\left(2+\frac{1}{2}t\right)$ cm이므로

고무풍선의 부피를 V cm³라 하면

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(2+\frac{1}{2}t\right)^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{8}t^3+\frac{3}{2}t^2+6t+8\right)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{8}t^2+3t+6\right)$$

따라서 $t=4$일 때 고무풍선의 부피의 변화율은

$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{8}\cdot 4^2+3\cdot 4+6\right)=32\pi$ (cm³/s)

답 ④

0959 t초 후의 직원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면 $\quad r=3+t,\ h=6-t$

직원기둥의 부피를 V cm³라 하면

$$V=\pi r^2h=\pi(3+t)^2(6-t)\ (0\le t<6)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=2\pi(3+t)(6-t)+\pi(3+t)^2\cdot(-1)$$
$$=3\pi(3+t)(3-t)$$

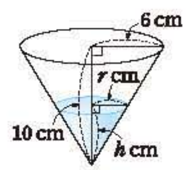
$\frac{dV}{dt}=0$에서 $\quad t=3$

따라서 구하는 부피는

$\pi(3+3)^2(6-3)=108\pi$ (cm³)

답 ③

0960 그릇에 담긴 물의 깊이를 h cm, 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$r:h=6:10 \qquad \therefore r=\frac{3}{5}h$

이때 t초 동안 수면의 높이는 $\frac{20}{9}t$ cm만큼 상승하므로 $\quad h=\frac{20}{9}t$

물의 부피를 V cm³라 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{3}{5}h\right)^2\cdot h=\frac{3}{25}\pi h^3$$
$$=\frac{3}{25}\pi\cdot\left(\frac{20}{9}t\right)^3=\frac{320}{243}\pi t^3$$
$$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{320}{81}\pi t^2$$

$h=5$일 때 $5=\frac{20}{9}t$에서 $t=\frac{9}{4}$이므로 물의 부피의 변화율은

$\frac{320}{81}\pi\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^2=20\pi$ (cm³/s)

답 ②

0961 전략 a, b, c의 조건에 따라 $f'(x)$를 구한 후 증감표를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 ㄱ. $a=b=c$이면 $\quad f'(x)=(x-a)^3$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(a)$이다.

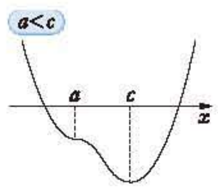
x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

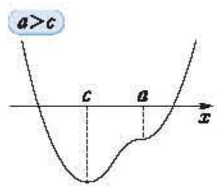
이때 $f(a)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.

ㄴ. $a=b\neq c$이면 $\quad f'(x)=(x-a)^2(x-c)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=a$ 또는 $x=c$

함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극소이고, $f(a)<0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



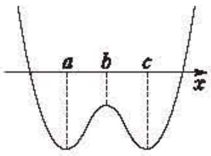


따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $a<b<c$이면 $f'(x)=0$에서
$x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $f(b)<0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



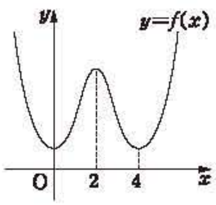
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0962 전략 주어진 조건을 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악한 후 함수식을 구한다.

풀이 사차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 모든 실수 x에 대하여 $f(2+x)=f(2-x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

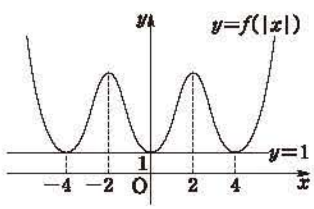
이때 $f(0)<f(2)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 우함수의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같으므로



$$f(x)=(x-2)^4+a(x-2)^2+b$$
$(a, b$는 상수$)$

로 놓을 수 있다.

한편 방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극솟값 1을 갖고 $x=2$에서 극댓값을 가져야 한다.

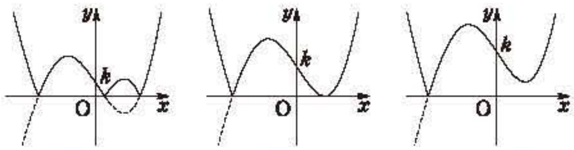


$f(0)=f(4)=1$에서
$16+4a+b=1$ $\cdots\cdots$ ㉠
$f'(x)=4(x-2)^3+2a(x-2)$이므로
$f'(0)=f'(4)=0$에서 $32+4a=0$
$\therefore a=-8$
$a=-8$을 ㉠에 대입하면
$16-32+b=1$ $\therefore b=17$
따라서 $f(x)=(x-2)^4-8(x-2)^2+17$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(2)=17$

답 ④

0963 전략 주어진 조건을 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악한 후 함수식을 구한다.

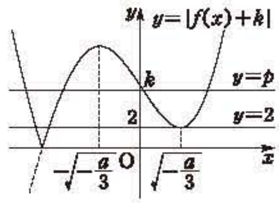
풀이 조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 기함수이므로
$f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)
로 놓을 수 있다.
$f'(x)=3x^2+a$이므로 $f'(x)=0$에서
$3x^2+a=0$, $3x^2=-a$
$\therefore x=-\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 또는 $x=\sqrt{-\frac{a}{3}}$
이때 조건 (나)를 만족시키려면 함수 $f(x)$가 극값을 가져야 하므로 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 즉
$-\frac{a}{3}>0$ $\therefore a<0$
함수 $y=|f(x)+k|$의 그래프는 자연수 k의 값에 따라 다음 세 가지 경우가 있다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

이때 조건 (나), (다)를 만족시키는 함수 $y=|f(x)+k|$의 그래프는 [그림 3]과 같다.

오른쪽 그래프에서 함수 $f(x)+k$의 극솟값이 2이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 $\underbrace{2-k}_{\text{정수}}$이다.
이때 함수 $f(x)+k$의 극댓값도 정수이고 극댓값과 극솟값 사이의 정수의 개수가 31이므로 $f(x)+k$의 극댓값은 $2+31+1=34$



따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $34-k$이므로 $f(-x)=-f(x)$에서 $34-k=-(2-k)$
$2k=36$ $\therefore k=18$
즉 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)=2-18=-16$이므로
$-\frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}+a\sqrt{-\frac{a}{3}}=-16$, $\frac{2}{3}a\sqrt{-\frac{a}{3}}=-16$
$\frac{4}{9}a^2\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)=256$, $a^3=(-27)\cdot 64=\{(-3)\cdot 4\}^3$
$\therefore a=-12$
따라서 $f(x)=x^3-12x$이므로
$f(1)+k=-11+18=7$

답 7

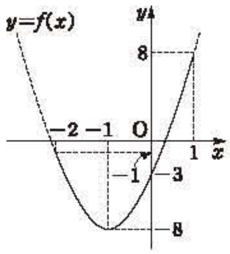
참고 함수 $f(x)$는 기함수이므로 (극댓값)$=-$(극솟값)을 만족시킨다. 그런데 함수 $f(x)$의 극솟값이 $2-k$로 정수이므로 극댓값도 정수이다.

0964 전략 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형하고 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $x^3-3x^2-9x+3+k=0$에서
$-x^3+3x^2+9x-3=k$
$f(x)=-x^3+3x^2+9x-3$으로 놓으면
$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ $(\because -2\le x\le 1)$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↘	-8	↗	8

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=k$가 구간 $[-2, 1]$에서 적어도 한 개의 실근을 가지려면 $\quad -8\le k\le 8$
따라서 정수 k는 $-8, -7, -6, \cdots, 8$의 17개이다. 답 ④



0965 **전략** 방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 이용한다.

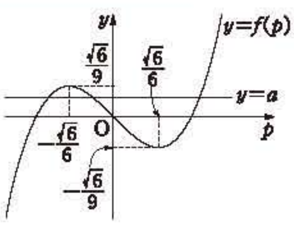
풀이 주어진 그림에서 $h'(\alpha)=h'(\beta)=0$이고 $x=\alpha$, $x=\beta$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이다.
이때 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로
$$h(\alpha)>0,\ h(\beta)<0$$
답 ④

0966 **전략** 먼저 점 $(a, 1)$을 지나는 직선 l_P의 방정식을 구한다.

풀이 $y=x^2$에서 $\quad y'=2x$
점 $P(p, p^2)$에서의 접선의 기울기는 $2p$이므로 점 P를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2p}$인 직선 l_P의 방정식은
$$y-p^2=-\frac{1}{2p}(x-p)$$
$$\therefore y=-\frac{1}{2p}x+\frac{1}{2}+p^2$$
이 직선이 점 $(a, 1)$을 지나므로
$$1=-\frac{1}{2p}a+\frac{1}{2}+p^2 \qquad \therefore a=2p^3-p$$
$f(p)=2p^3-p$로 놓으면
$$f'(p)=6p^2-1=6\left(p+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(p-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$
$f'(p)=0$에서 $\quad p=-\frac{\sqrt{6}}{6}$ 또는 $p=\frac{\sqrt{6}}{6}$

p	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\cdots$
$f'(p)$	+	0	−	0	+
$f(p)$	↗	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	↘	$-\frac{\sqrt{6}}{9}$	↗

함수 $y=f(p)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른 직선 l_P가 세 개 존재하기 위한 실수 a의 값의 범위는
$$-\frac{\sqrt{6}}{9}<a<\frac{\sqrt{6}}{9}$$



답 $-\frac{\sqrt{6}}{9}<a<\frac{\sqrt{6}}{9}$

참고 $p=0$일 때, 직선 l_P의 방정식은 $x=0$이고 이 직선은 점 $(0, 1)$을 지나므로 $a=0$, 즉 $a=2p^3-p$를 만족시킨다.

0967 **전략** $(f(x)$의 최솟값$)\ge(g(x)$의 최댓값$)$이어야 한다.

풀이 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\ge g(x_2)$가 성립하려면 $(f(x)$의 최솟값$)\ge(g(x)$의 최댓값$)$이어야 한다.
$f(x)=x^4+x^2-6x$에서
$$f'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$$
$f'(x)=0$에서 $\quad x=1\ (\because 2x^2+2x+3>0)$
따라서 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	−4	↗

또
$$g(x)=-2x^2-8x+a$$
$$=-2(x+2)^2+8+a$$
이므로 함수 $g(x)$는 $x=-2$일 때 최대이다.
즉 $f(1)\ge g(-2)$이어야 하므로
$$-4\ge 8+a \qquad \therefore a\le -12$$
따라서 실수 a의 최댓값은 -12이다. 답 -12

0968 **전략** 먼저 주어진 부등식을 $f(x)>0$ 꼴로 변형한다.

풀이 ㄱ. $f(x)=2x^3-3x^2+1$로 놓으면
$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$
$x>1$일 때, $f'(x)>0$이고 $f(1)=0$이므로 $f(x)>0$이다.
ㄴ. $f(x)=x^3-3x^2+4$로 놓으면
$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$
$x>2$일 때, $f'(x)>0$이고 $f(2)=0$이므로 $f(x)>0$이다.
ㄷ. $f(x)=x^3-3x+3$으로 놓으면
$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	−2	$\cdots$	−1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		↗	5	↘	1	↗

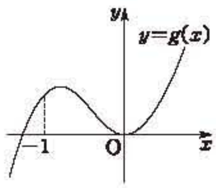
$x>-2$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)\ge 1$, 즉 $f(x)>0$이다.
이상에서 주어진 성질을 이용하여 증명할 수 있는 부등식은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0969 **전략** $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓고 조건을 이용하여 삼차함수 $f(x)$의 식을 구한다.

풀이 조건 ㈎에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2+2ax+b$
조건 ㈏에서 $f(0)=f'(0)$이므로 $\quad c=b$
$$\therefore f(x)=x^3+ax^2+bx+b$$
한편 조건 ㈐에서 $x\ge -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge f'(x)$이므로 $x\ge -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-f'(x)\ge 0$이 항상 성립한다.
즉 $f(x)-f'(x)\ge 0$에서
$$x^3+ax^2+bx+b-(3x^2+2ax+b)\ge 0$$
$$x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x\ge 0$$
$$x\{x^2+(a-3)x+(b-2a)\}\ge 0$$

08 도함수의 활용 (3)

$g(x)=x\{x^2+(a-3)x+(b-2a)\}$로 놓으면 $g(0)=0$이고, 조건 (다)에서 $x\geq-1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다.



따라서 $g'(0)=0$이므로

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$에서

$g'(0)=b-2a=0 \qquad \therefore b=2a$

$\therefore g(x)=x^3+(a-3)x^2$

또 $g(-1)\geq0$이므로

$g(-1)=a-4\geq0 \qquad \therefore a\geq4 \qquad \cdots\cdots ㉠$

따라서 $f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$ ($\because b=2a$)이므로

$f(2)=8+4a+4a+2a=10a+8\geq48$ ($\because ㉠$)

즉 $f(2)$의 최솟값은 48이다.

답 ⑤

0970 전략 접선의 방정식을 구하여 접점의 x좌표를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y=x^2$에서 $\quad y'=2x$

접점 Q의 좌표를 (a, a^2)이라 하면 점 R의 좌표는 $(a, 0)$이고 점 Q에서의 접선의 방정식은

$y-a^2=2a(x-a)$, 즉 $y=2ax-a^2$

점 $\mathrm{P}(3t^3+kt^2, 0)$은 직선 $y=2ax-a^2$ 위의 점이므로

$0=2a(3t^3+kt^2)-a^2, \qquad a(a-6t^3-2kt^2)=0$

$\therefore a=6t^3+2kt^2$ ($\because a\neq0$) $a=0$이면 접선은 직선 $y=0$이다.

점 R가 시각 t에서 x축 위를 움직이는 속도를 v라 하면

$$v=\frac{da}{dt}=18t^2+4kt$$

$t=1$일 때 $v=38$이므로 $\quad 18\cdot1^2+4k\cdot1=38$

$4k=20 \qquad \therefore k=5$

답 ⑤

0971 전략 수직선 위를 움직이는 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0임을 이용한다.

풀이 $f(t)=at^3+bt^2+ct$에서

$g(t)=f'(t)=3at^2+2bt+c$

모든 실수 t에 대하여 $3f(t)=tg(t)+2ct$가 성립하므로

$3(at^3+bt^2+ct)=t(3at^2+2bt+c)+2ct$

$3at^3+3bt^2+3ct=3at^3+2bt^2+ct+2ct$

$3bt^2=2bt^2, \qquad bt^2=0 \qquad \therefore b=0$

$\therefore g(t)=3at^2+c$

한편 점 P가 시각 $t=1$에서 운동 방향을 바꾸므로

$g(1)=3a+c=0 \qquad \therefore c=-3a \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $g'(t)$이고 $g'(t)=6at$이므로

$g'(1)=12$에서 $\quad 6a=12 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad c=-6$

따라서 $g(t)=6t^2-6$이므로 점 P의 시각 $t=2$에서의 속도는

$g(2)=24-6=18$

답 ④

0972 전략 태풍의 중심과 A지점 사이의 거리, 태풍의 중심이 이동한 거리를 이용하여 A지점이 태풍의 영향권에서 벗어나는 순간의 시각을 구한다.

풀이 t시간 후 태풍의 영향권은 반경 $(60+5t)$km, 태풍의 중심이 움직인 거리는 $40t$ km이므로 A지점이 태풍의 영향권에서 벗어나는 순간의 시각은

$\underbrace{40t-(60+5t)}_{(\text{태풍의 중심이 이동한 거리})-(\text{태풍의 반경})}=500, \qquad 35t=560$

$\therefore t=16$

이때 태풍의 영향권의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(60+5t)^2\pi=(25t^2+600t+3600)\pi$

$\therefore S'(t)=(50t+600)\pi$

따라서 $t=16$일 때 태풍의 영향권의 넓이의 변화율은

$(50\cdot16+600)\pi=1400\pi\,(\mathrm{km^2/h})$

$\therefore a=1400$

답 1400

0973 전략 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 $f(x)=x^4-\dfrac{16}{3}x^3+6x^2+9$에서

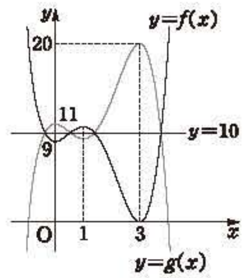
$f'(x)=4x^3-16x^2+12x=4x(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

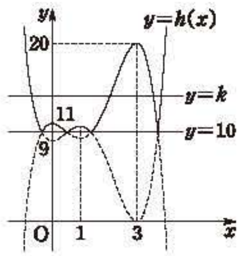
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	9	↗	$\frac{32}{3}$	↘	0	↗

따라서 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=10$에 대하여 대칭이동한 곡선 $y=g(x)$는 [그림 1]과 같다. ··· ❶

이때 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq10) \\ g(x) & (f(x)<10) \end{cases}$이므로 곡선 $y=h(x)$는 [그림 2]와 같다. ··· ❷



[그림 1]



[그림 2]

방정식 $h(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로 방정식 $h(x)=k$가 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$k=10$ 또는 $11<k<20$ ··· ❸

따라서 정수 k는 10, 12, 13, $\cdots$, 19의 9개이다. ··· ❹

답 9

채점 기준표

❶ 곡선 $y=f(x)$를 그릴 수 있다.	30%
❷ 곡선 $y=h(x)$를 그릴 수 있다.	30%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❹ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	10%

0974 **전략** 사차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 생각해 본다.

풀이 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. ⋯ ❶

$f'(x)=4x^3-12x+2a$이므로 $g(x)=4x^3-12x+2a$로 놓으면

$$g'(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $g(-1)g(1)<0$이어야 하므로 ⋯ ❷

$$(8+2a)(-8+2a)<0, \quad (a+4)(a-4)<0$$

$$\therefore -4<a<4$$ ⋯ ❸

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 a의 최댓값은 3이다. ⋯ ❹

답 3

채점 기준표

❶ 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	30%
❷ 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	30%
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❹ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	10%

0975 **전략** 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 구한다.

풀이 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$$v_P=f'(t)=4t^3-18t^2+24t, \quad v_Q=g'(t)=m$$ ⋯ ❶

두 점 P, Q의 속도가 같게 되는 때가 세 번 있으려면 $v_P=v_Q$를 만족시키는 t의 값이 3개 존재해야 하므로 t에 대한 방정식 $4t^3-18t^2+24t=m$이 음이 아닌 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. ⋯ ❷

$f(t)=4t^3-18t^2+24t$로 놓으면

$$f'(t)=12t^2-36t+24=12(t-1)(t-2)$$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=1$ 또는 $t=2$

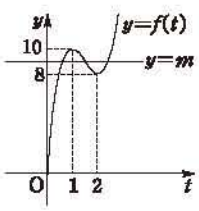
t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$		+	0	−	0	+
$f(t)$	0	↗	10	↘	8	↗

따라서 $t\ge0$일 때 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ⋯ ❸

곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=m$이 서로 다른 세 점에서 만나려면

t축의 양의 부분과 만난다.

$$8<m<10$$ ⋯ ❹



답 $8<m<10$

채점 기준표

❶ 두 점 P, Q의 속도를 구할 수 있다.	20%
❷ 방정식 $v_P=v_Q$가 음이 아닌 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	20%
❸ $y=f(t)$의 그래프를 그릴 수 있다.	30%
❹ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%

0976 **전략** 두 점 $P(x_1)$, $Q(x_2)$를 잇는 선분의 중점 M의 좌표는 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$이다.

풀이 선분 PQ의 중점 M의 t분 후의 위치를 x_3이라 하면

$$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{(2t^3-9t^2)+(t^2+8t)}{2}$$

$$=t^3-4t^2+4t$$ ⋯ ❶

세 점 P, Q, M의 속도를 각각 v_P, v_Q, v_M이라 하면

$$v_P=\frac{dx_1}{dt}=6t^2-18t=6t(t-3)$$

$$v_Q=\frac{dx_2}{dt}=2t+8=2(t+4)$$

$$v_M=\frac{dx_3}{dt}=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$$ ⋯ ❷

$0<t\le4$에서 v_P, v_Q, v_M의 값이 0이 되는 t의 개수를 각각 구하면 다음과 같다.

(i) $v_P=0$에서 $\quad t=3 \quad \therefore a=1$

(ii) $v_Q=0$을 만족시키는 t는 존재하지 않으므로 $\quad b=0$

(iii) $v_M=0$에서 $\quad t=\dfrac{2}{3}$ 또는 $t=2 \quad \therefore c=2$ ⋯ ❸

이상에서 $\quad a+b+c=3$ ⋯ ❹

답 3

채점 기준표

❶ 점 M의 위치를 구할 수 있다.	20%
❷ v_P, v_Q, v_M을 구할 수 있다.	40%
❸ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10%

0977 **전략** t초 후의 $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$, $\overline{TS}$, $\overline{TR}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸 후, 직사각형의 넓이를 구한다.

풀이 t초 후의 $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$의 길이는 각각 $2t$, t이므로

$$\overline{TS}=10-2t, \quad \overline{TR}=8-t$$ ⋯ ❶

t초 후의 직사각형 APTQ의 넓이를 $S_1(t)$, 직사각형 TSCR의 넓이를 $S_2(t)$라 하면

$$S_1(t)=2t^2$$

$$S_2(t)=(10-2t)(8-t)=2t^2-26t+80$$

두 직사각형 APTQ, TSCR의 넓이의 합을 $S(t)$라 하면

$$S(t)=2t^2+(2t^2-26t+80)=4t^2-26t+80$$ ⋯ ❷

$$\therefore S'(t)=8t-26$$

이때 $S_1(t)=S_2(t)$에서 $\quad 2t^2=2t^2-26t+80$

$$26t=80 \quad \therefore t=\frac{40}{13}$$ ⋯ ❸

따라서 $t=\dfrac{40}{13}$일 때 두 직사각형의 넓이의 합의 변화율은

$$8\cdot\frac{40}{13}-26=-\frac{18}{13}$$ ⋯ ❹

답 $-\dfrac{18}{13}$

채점 기준표

❶ $\overline{TS}$, $\overline{TR}$를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ $S(t)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $S_1(t)=S_2(t)$를 만족시키는 t의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ 넓이의 합의 변화율을 구할 수 있다.	20%

Ⅳ 다항함수의 적분법

09 부정적분

0978 $f(x)=(2x^2+5x+C)'=4x+5$ 답 $f(x)=4x+5$

SSEN 특강

미분법의 공식

① $y=x^n$ (n은 양의 정수) ➡ $y'=nx^{n-1}$

② $y=c$ (c는 상수) ➡ $y'=0$

0979 $f(x)=\left(-\frac{2}{3}x^3+4x+C\right)'$
$=-2x^2+4$ 답 $f(x)=-2x^2+4$

0980 $f(x)=(x^3+2x^2-4x+C)'$
$=3x^2+4x-4$ 답 $f(x)=3x^2+4x-4$

0981 $f(x)=(x^4+3x^3+2x^2+x+C)'$
$=4x^3+9x^2+4x+1$ 답 $f(x)=4x^3+9x^2+4x+1$

0982 $xf(x)=(x^3+x^2+C)'$
$=3x^2+2x$
$\therefore f(x)=3x+2$ 답 $f(x)=3x+2$

0983 $(x-1)f(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x+C\right)'$
$=x^2-1=(x+1)(x-1)$
$\therefore f(x)=x+1$ 답 $f(x)=x+1$

0984 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$이므로
$\frac{d}{dx}\int x^3dx=x^3$ 답 x^3

0985 $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로
$\int\left(\frac{d}{dx}x^3\right)dx=x^3+C$ 답 x^3+C

0986 $\int 3\,dx=3x+C$ 답 $3x+C$

0987 $\int x^5dx=\frac{1}{6}x^6+C$ 답 $\frac{1}{6}x^6+C$

0988 $\int x^{10}dx=\frac{1}{11}x^{11}+C$ 답 $\frac{1}{11}x^{11}+C$

0989 $\int x^{100}dx=\frac{1}{101}x^{101}+C$ 답 $\frac{1}{101}x^{101}+C$

0990 $\int(3x+2)dx=\int 3x\,dx+\int 2\,dx$
$=3\int x\,dx+\int 2\,dx$
$=\frac{3}{2}x^2+2x+C$ 답 $\frac{3}{2}x^2+2x+C$

0991 $\int(2x^3-x+1)dx=\int 2x^3dx-\int x\,dx+\int 1\,dx$
$=2\int x^3dx-\int x\,dx+\int 1\,dx$
$=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+x+C$
답 $\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+x+C$

0992 $\int(x+1)^2dx=\int(x^2+2x+1)dx$
$=\int x^2dx+\int 2x\,dx+\int 1\,dx$
$=\int x^2dx+2\int x\,dx+\int 1\,dx$
$=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$
답 $\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$

0993 $\int(x+1)(x^2-x+1)dx=\int(x^3+1)dx$
$=\int x^3dx+\int 1\,dx$
$=\frac{1}{4}x^4+x+C$
답 $\frac{1}{4}x^4+x+C$

0994 $\int(2x+1)^2dx-\int(2x-1)^2dx$
$=\int(4x^2+4x+1)dx-\int(4x^2-4x+1)dx$
$=\int 8x\,dx=8\int x\,dx=4x^2+C$ 답 $4x^2+C$

0995 $\int(x+1)^3dx+\int(x-1)^3dx$
$=\int(x^3+3x^2+3x+1)dx+\int(x^3-3x^2+3x-1)dx$
$=\int(2x^3+6x)dx$
$=\int 2x^3dx+\int 6x\,dx$
$=2\int x^3dx+6\int x\,dx$
$=\frac{1}{2}x^4+3x^2+C$ 답 $\frac{1}{2}x^4+3x^2+C$

0996 $\int \frac{x^2}{x+1}dx-\int \frac{1}{x+1}dx$

$=\int \frac{x^2-1}{x+1}dx=\int (x-1)dx$

$=\int x\,dx-\int 1dx$

$=\frac{1}{2}x^2-x+C$ 답 $\frac{1}{2}x^2-x+C$

유형 01 부정적분의 정의 본책 162쪽

$F(x)$는 $f(x)$의 부정적분이다.
$\Longleftrightarrow \int f(x)dx=F(x)+C$ (단, C는 적분상수)
$\Longleftrightarrow$ 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$이다.
$\Longleftrightarrow F'(x)=f(x)$

0997 $\int (x-2)f(x)dx=2x^3-24x+C$에서

$(x-2)f(x)=(2x^3-24x+C)'$
$=6x^2-24$
$=6(x+2)(x-2)$

따라서 $f(x)=6(x+2)$이므로

$f(2)=24$ 답 24

0998 $F(x)=3x^2+x-1$로 놓으면

$f(x)=F'(x)=(3x^2+x-1)'=6x+1$

$\therefore f(1)=7$ 답 ⑤

0999 $\int g(x)dx=G(x)$에서

$g(x)=G'(x)=x^2+k$

$g(1)=3$에서 $1+k=3$ $\therefore k=2$ ⋯ ❶

따라서 $g(x)=x^2+2$이므로 ⋯ ❷

$g(3)=11$ ⋯ ❸

답 11

채점 기준표

❶ k의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $g(3)$의 값을 구할 수 있다.	20%

1000 $f(x)=F'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f(0)=3$에서

$b=3$

$f'(x)=6x+2a$이므로 $f'(0)=1$에서

$2a=1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

1001 $\int F(x)dx=f(x)g(x)$에서

$F(x)=\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$=2x(2x^2-4x+1)+(x^2-1)(4x-4)$
$=8x^3-12x^2-2x+4$

따라서 함수 $F(x)$의 일차항의 계수는 -2이다. 답 ③

SSEN 특강

곱의 미분법
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,
$y=f(x)g(x) \Rightarrow y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

유형 02, 03 부정적분과 미분의 관계 본책 162, 163쪽

① $\frac{d}{dx}\int \overset{\text{그대로}}{f(x)dx=f(x)}$

② $\int \left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=\overset{(\text{그대로})+(\text{적분상수})}{f(x)+C}$ (단, C는 적분상수)

1002 $F(x)=\frac{d}{dx}\int xf(x)dx=xf(x)=5x^3-8x^2$

$\therefore F(2)=40-32=8$ 답 ②

1003 $\frac{d}{dx}\int (ax^2+x+3)dx=ax^2+x+3$이므로

$ax^2+x+3=x^2+bx+c$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=1$, $b=1$, $c=3$

$\therefore a+b+c=5$ 답 ③

1004 $\frac{d}{dx}\int (4x^2-5x)dx=4x^2-5x$,

$\frac{d}{dx}\int (3x^3-2)dx=3x^3-2$이므로 주어진 방정식은

$3x^3+4x^2-5x-2=0$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{4}{3}$ 답 ①

SSEN 특강

삼차방정식의 근과 계수의 관계
삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면
$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

1005 $\int \left\{\frac{d}{dx}(x^3-x)\right\}dx=x^3-x+C$이므로

$F(x)=x^3-x+C$

$F(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $F(x)=x^3-x+1$이므로

$F(3)=27-3+1=25$ 답 ⑤

1006 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$이므로

$g(x)=x^2+2x$ ⋯ ❶

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$h(x)=x^2+2x+C$

$h(-2)=1$이므로 $C=1$

따라서 $h(x)=x^2+2x+1$이므로 ⋯ ❷

$g(2)+h(-1)=8+0=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준표

❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $h(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $g(2)+h(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

1007 $\int\left\{\frac{d}{dx}(6x-x^2)\right\}dx=6x-x^2+C$이므로

$f(x)=-x^2+6x+C=-(x-3)^2+C+9$

이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 10이므로

$C+9=10$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=-x^2+6x+1$이므로

$f(2)=-4+12+1=9$

답 9

1008 $\int\left[\frac{d}{dx}\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$

$=f(x)+C_2$

이므로 $F(x)=50x^{50}+49x^{49}+\cdots+2x^2+x+C_2$

$F(0)=5$이므로 $C_2=5$

따라서 $F(x)=50x^{50}+49x^{49}+\cdots+2x^2+x+5$이므로

$F(1)=50+49+\cdots+2+1+5$

$=\frac{50\cdot51}{2}+5=1280$

답 ①

유형 04 부정적분과 미분의 관계의 활용; 함수 구하기 본책 163쪽

함수 $f(x)$에 대하여

① $\int f(x)dx=g(x)$ 꼴 ➡ 양변을 미분한다.

② $\frac{d}{dx}f(x)=g(x)$ 꼴 ➡ 양변을 적분한다.

1009 $\int(x+1)f'(x)dx=x^3-x^2-5x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x+1)f'(x)=3x^2-2x-5$

$=(x+1)(3x-5)$

$\therefore f'(x)=3x-5$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-5)dx$

$=\frac{3}{2}x^2-5x+C$

$f(2)=-1$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-5x+3$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{3}{\frac{3}{2}}=2$

답 ④

1010 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=4$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int4dx$

$f(x)+g(x)=4x+C_1$

$x=0$을 위의 등식에 대입하면 $f(0)+g(0)=C_1$

이때 $f(0)=3$, $g(0)=-3$이므로 $C_1=0$

$\therefore f(x)+g(x)=4x$ ⋯⋯ ㉠

또 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=8x$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int8xdx$

$f(x)g(x)=4x^2+C_2$

$x=0$을 위의 등식에 대입하면 $f(0)g(0)=C_2$

이때 $f(0)=3$, $g(0)=-3$이므로 $C_2=-9$

$\therefore f(x)g(x)=4x^2-9=(2x+3)(2x-3)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\begin{cases}f(x)=2x+3\\g(x)=2x-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=2x-3\\g(x)=2x+3\end{cases}$

그런데 $f(0)=3$, $g(0)=-3$이므로

$f(x)=2x+3$, $g(x)=2x-3$

$\therefore f(5)-g(5)=13-7=6$

답 6

유형 05 부정적분의 성질 본책 164쪽

① m, n이 음이 아닌 정수일 때

$\int x^ndx+\int x^mdx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\frac{1}{m+1}x^{m+1}+C$

(단, C는 적분상수)

② 두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 두 실수 k, l에 대하여

$\int\{kf(x)\pm lg(x)\}dx=k\int f(x)dx\pm l\int g(x)dx$ (복호동순)

1011 $f(x)=\int(2+\sqrt{x})^2dx+\int(2-\sqrt{x})^2dx$

$=\int\{(2+\sqrt{x})^2+(2-\sqrt{x})^2\}dx$

$=\int(2x+8)dx$

$=x^2+8x+C$

$f(1)=5$이므로

$1+8+C=5$ $\therefore C=-4$

따라서 $f(x)=x^2+8x-4$이므로

$f(-2)=4-16-4=-16$

답 ①

1012 $f(x)=\int \frac{2x^2}{x-3}dx-\int \frac{5x}{x-3}dx-\int \frac{3}{x-3}dx$

$=\int \frac{2x^2-5x-3}{x-3}dx$

$=\int \frac{(2x+1)(x-3)}{x-3}dx$

$=\int (2x+1)dx=x^2+x+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

$\therefore f(x)=x^2+x+1$ 답 $f(x)=x^2+x+1$

1013 $f(x)=\int\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{10}x^{10}\right)dx$

$=\frac{1}{1\cdot 2}x^2+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{3\cdot 4}x^4+\cdots+\frac{1}{10\cdot 11}x^{11}+C$

$\therefore f(1)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{10\cdot 11}+C$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+C$

$=1-\frac{1}{11}+C=\frac{10}{11}+C$

$f(1)=1$이므로 $\frac{10}{11}+C=1$ $\therefore C=\frac{1}{11}$

따라서

$f(x)=\frac{1}{1\cdot 2}x^2+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{3\cdot 4}x^4+\cdots+\frac{1}{10\cdot 11}x^{11}+\frac{1}{11}$

이므로 $f(0)=\frac{1}{11}$ 답 $\frac{1}{11}$

1014 $f(x)=\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$이므로

$F(x)=\int f(x)dx=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+C$

$F(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $F(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+2$이므로

$F(2)=2+2^2+2^3+\cdots+2^n+2$

$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}+2$

$=2^{n+1}-2+2=2^{n+1}$ 답 ③

SSEN 특강

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 $r\ (r\neq 1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

유형 06 도함수가 주어질 때 함수 구하기

본책 164쪽

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 주어지면 $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용하여 $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타낸다.

1015 $f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (3x^2+6x-2a)dx$

$=x^3+3x^2-2ax+C$

$f(0)=-2$이므로 $C=-2$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-2ax-2$이고, $f(-1)=4$이므로

$-1+3+2a-2=4$ $\therefore a=2$

즉 $f(x)=x^3+3x^2-4x-2$이므로

$f(2)=8+12-8-2=10$ 답 10

1016 $f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int \frac{x^8-1}{x^4+1}dx=\int \frac{(x^4+1)(x^4-1)}{x^4+1}dx$

$=\int (x^4-1)dx=\frac{1}{5}x^5-x+C$

$f(1)=\frac{6}{5}$이므로

$\frac{1}{5}-1+C=\frac{6}{5}$ $\therefore C=2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x+2$이므로

$f(2)=\frac{32}{5}-2+2=\frac{32}{5}$ 답 ④

1017 $f'(x)=12x(x-1)=12x^2-12x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (12x^2-12x)dx$

$=4x^3-6x^2+C_1$

$f(0)=1$이므로 $C_1=1$

$\therefore f(x)=4x^3-6x^2+1$ ··· ❶

$\therefore F(x)=\int f(x)dx$

$=\int (4x^3-6x^2+1)dx$

$=x^4-2x^3+x+C_2$

$F(1)=-1$이므로

$1-2+1+C_2=-1$ $\therefore C_2=-1$

$\therefore F(x)=x^4-2x^3+x-1$ ··· ❷

따라서 $F(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$F(2)=16-16+2-1=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준표

❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $F(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $F(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	20%

SSEN 특강

나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$이다.

유형 07 부정적분과 미분의 관계의 활용 ; $xf(x)$ 꼴을 포함하는 경우 본책 155쪽

$\int f(x)dx=g(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면 ➡ $f(x)=g'(x)$

1018 $F(x)=xf(x)-6x^4+6x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-24x^3+18x^2$

$xf'(x)=24x^3-18x^2$

$\therefore f'(x)=24x^2-18x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(24x^2-18x)dx$

$=8x^3-9x^2+C$

$f(1)=0$이므로

$8-9+C=0 \quad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=8x^3-9x^2+1$ 답 $f(x)=8x^3-9x^2+1$

1019 $\int g(x)dx=x^3f(x)+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

$\therefore g(1)=3f(1)+f'(1)=6+1=7$ 답 ⑤

1020 $2\int f(x)dx=f(x)+xf(x)-x-1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=f'(x)+f(x)+xf'(x)-1$

$\therefore f(x)=(1+x)f'(x)-1$ …… ㉠ ➡ ❶

$f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f'(x)=a$

$f(x)=ax+b$, $f'(x)=a$를 ㉠에 대입하면

$ax+b=a(1+x)-1$

$ax+b=ax+a-1$

$\therefore b=a-1$ …… ㉡

$f(1)=3$이므로

$a+b=3$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$ ➡ ❷

따라서 $f(x)=2x+1$이므로 $y=f(x)$의 그래프의 x절편은

$0=2x+1 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$ ➡ ❸

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준표	
❶ 주어진 식의 양변을 미분할 수 있다.	30%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ x절편을 구할 수 있다.	20%

1021 $f(x)+\int xf(x)dx=\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+xf(x)=3x^3-x^2+7x-1$ …… ㉠

$f(x)$를 n차함수라 하면 $xf(x)$는 $(n+1)$차함수이므로 ㉠에서

$n+1=3 \quad \therefore n=2$

즉 $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)=ax^2+bx+c$, $f'(x)=2ax+b$를 ㉠에 대입하면

$2ax+b+x(ax^2+bx+c)=3x^3-x^2+7x-1$

$\therefore ax^3+bx^2+(2a+c)x+b=3x^3-x^2+7x-1$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=3$, $b=-1$, $2a+c=7$

$\therefore a=3$, $b=-1$, $c=1$

따라서 $f(x)=3x^2-x+1$이므로

$f(2)=12-2+1=11$ 답 ③

유형 08 부정적분과 함수의 연속성 본책 155쪽

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$가 $f'(x)=\begin{cases} g_1(x) & (x\geq a) \\ g_2(x) & (x<a) \end{cases}$이고, $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면

① $f(x)=\begin{cases} \int g_1(x)dx & (x\geq a) \\ \int g_2(x)dx & (x<a) \end{cases}$

② $f(a)=\lim_{x\to a+}\int g_1(x)dx=\lim_{x\to a-}\int g_2(x)dx$

1022 $f'(x)=\begin{cases} x-3 & (x>-1) \\ k & (x<-1) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-3x+C_1 & (x>-1) \\ kx+C_2 & (x<-1) \end{cases}$

$f(0)=-3$이므로 $\quad C_1=-3$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x-3 \ (x>-1)$

$f(-2)=6$이므로 $\quad -2k+C_2=6$ …… ㉠

$f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}\left(\frac{1}{2}x^2-3x-3\right)=\lim_{x\to-1-}(kx+C_2)$

$\therefore -k+C_2=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad C_2=-5$, $k=-\frac{11}{2}$ 답 ①

SSEN 특강

함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

(i) $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

1023 $f'(x)=\begin{cases} x & (x\ge0) \\ 3x & (x<0)\end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+C_1 & (x\ge0) \\ \frac{3}{2}x^2+C_2 & (x<0)\end{cases}$$

$f(0)=-1$이므로 $C_1=-1$

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0-}\left(\frac{3}{2}x^2+C_2\right)=f(0) \quad \therefore C_2=-1$$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-1 & (x\ge0) \\ \frac{3}{2}x^2-1 & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(-4)f(2)=23\cdot1=23$

답 ④

1024 $f'(x)=\begin{cases} -x+4 & (x\ge2) \\ 2 & (x<2)\end{cases}$이므로 ➊

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+4x+C_1 & (x\ge2) \\ 2x+C_2 & (x<2)\end{cases}$$ ➋

$y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=0 \quad \therefore C_2=0$

$f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to2+}\left(-\frac{1}{2}x^2+4x+C_1\right)=\lim_{x\to2-}2x$$

$\therefore C_1=-2$ ➌

따라서 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+4x-2 & (x\ge2) \\ 2x & (x<2)\end{cases}$이므로

$f(3)=-\frac{9}{2}+12-2=\frac{11}{2}$ ➍

답 $\frac{11}{2}$

채점 기준표

➊ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20%
➋ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	20%
➌ C_1, C_2의 값을 구할 수 있다.	40%
➍ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 09 부정적분과 접선의 기울기

본책 166쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로 $f(x)=\int f'(x)dx$

1025 $f'(x)=x^2-1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-1)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$f(0)=C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+1$이므로

$f(3)=9-3+1=7$

답 7

1026 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^2에 정비례하므로

$f'(x)=ax^2$ (a는 상수)

으로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax^2\,dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3+C$$

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-1, 0)$, $(0, -1)$을 지나므로

$f(-1)=-\frac{a}{3}+C=0$ ...... ㉠

$f(0)=C=-1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=-3$

따라서 $f(x)=-x^3-1$이므로

$f(-2)=8-1=7$

답 ④

1027 $f'(x)=-6x+k$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-6x+k)dx$$
$$=-3x^2+kx+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, -2)$를 지나므로

$f(0)=C=-2$

$\therefore f(x)=-3x^2+kx-2$

따라서 방정식 $-3x^2+kx-2=0$의 두 근의 합이 $\frac{2}{9}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{k}{-3}=\frac{2}{9} \quad \therefore k=\frac{2}{3}$

답 ②

1028 $f'(x)=2x-6$이므로 ➊

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-6)dx$$
$$=x^2-6x+C=(x-3)^2-9+C$$

함수 $f(x)$의 최솟값이 -5이므로

$-9+C=-5 \quad \therefore C=4$

$\therefore f(x)=x^2-6x+4$ ➋

따라서 구간 $[-1, 2]$에서 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

$f(-1)=1+6+4=11$ ➌

답 11

채점 기준표

➊ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20%
➋ $f(x)$를 구할 수 있다.	50%
➌ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	30%

유형 10 부정적분과 미분계수를 이용한 극한값의 계산 본책 166쪽

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

➡ $f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

1029 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

$f(x)=\int(x-2)(x^2+2x+4)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8$

$\therefore f'(1)=-7$

따라서 구하는 값은

$2f'(1)=2\cdot(-7)=-14$ 답 ①

1030 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{3x-6}=\frac{1}{3}\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\frac{1}{3}f'(2)$

$f(x)=\int(4x^3-3x^2+1)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x^3-3x^2+1$

$\therefore f'(2)=21$

따라서 구하는 값은 $\frac{1}{3}f'(2)=\frac{1}{3}\cdot21=7$ 답 7

1031 $\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x-h)-f(x)\}-\{f(x-3h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\cdot(-1)+\lim_{h\to0}\frac{f(x-3h)-f(x)}{-3h}\cdot3$

$=-f'(x)+3f'(x)=2f'(x)$

즉 $2f'(x)=8x^3-4x+6$에서

$f'(x)=4x^3-2x+3$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3-2x+3)dx$

$=x^4-x^2+3x+C$

$f(1)=2$이므로

$1-1+3+C=2$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=x^4-x^2+3x-1$이므로

$f(-1)=1-1-3-1=-4$ 답 ①

1032 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x-1}=4$이므로 $f'(x)$는 일차항의 계수가 4인 일차식이다. 즉

$f'(x)=4x+k$ (k는 상수)

조건 (나)에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=1$

$f'(2)=8+k=1$에서 $k=-7$

$\therefore f'(x)=4x-7$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x-7)dx=2x^2-7x+C$이므로

$f(2)=8-14+C=0$ $\therefore C=6$

$\therefore f(x)=2x^2-7x+6$

따라서 방정식 $2x^2-7x+6=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{6}{2}=3$ 답 ④

유형 11 부정적분과 도함수의 정의를 이용하여 함수 구하기 본책 167쪽

미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수는

➡ $f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

1033 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0$ $\therefore f(0)=0$

$f'(1)=3$이므로

$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-h-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-1=3$

즉 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=4$이므로

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-x$

$=4-x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(4-x)dx$

$=-\frac{1}{2}x^2+4x+C$

그런데 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$이므로

$f(-2)=-2-8=-10$ 답 ②

1034 $\Delta y=(ax+3)\Delta x-3(\Delta x)^2$의 양변을 Δx로 나누면

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=ax+3-3\Delta x$

이므로 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=ax+3$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax+3)dx$

$=\frac{1}{2}ax^2+3x+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$f(1)=0$이므로 $\frac{1}{2}a+3=0$ $\therefore a=-6$

따라서 $f(x)=-3x^2+3x$이므로

$f(-1)=-3-3=-6$

답 ①

1035 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{mxh+2h^2}{h}=mx$ ➊

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int mxdx=\frac{m}{2}x^2+C$ ➋

$f(1)=5$이므로 $\frac{m}{2}+C=5$ …… ㉠

$f(3)=21$이므로 $\frac{9}{2}m+C=21$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=4$, $C=3$ ➌

따라서 $f(x)=2x^2+3$이므로

$f(2)=8+3=11$ ➍

답 11

채점 기준표

➊ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40%
➋ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	20%
➌ m, C의 값을 구할 수 있다.	20%
➍ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 12 부정적분과 극대·극소 본책 168쪽

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서
① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면
⇒ $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고 극댓값 $f(a)$를 갖는다.
② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면
⇒ $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

1036 $f'(x)=ax(x-2)$ $(a<0)$로 놓으면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax(x-2)dx$

$=\int(ax^2-2ax)dx=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	…	0	…	2	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고, $x=2$에서 극댓값을 가지므로

$f(0)=4$, $f(2)=8$

$\therefore f(0)=C=4$, $f(2)=-\frac{4}{3}a+C=8$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $C=4$

$\therefore f(x)=-x^3+3x^2+4$

답 $f(x)=-x^3+3x^2+4$

1037 $f(x)=\int(x^2-2x-3)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	…	-1	…	3	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로 $f(-1)=\frac{2}{3}$

이때

$f(x)=\int(x^2-2x-3)dx=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$

이므로

$f(-1)=-\frac{1}{3}-1+3+C=\frac{2}{3}$ $\therefore C=-1$

즉 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x-1$이므로 극솟값은

$f(3)=9-9-9-1=-10$

답 ①

1038 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1-f(x)=-x^3+9x+1$ $\therefore f(x)=x^3-9x$

$f'(x)=3x^2-9=3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	…	$-\sqrt{3}$	…	$\sqrt{3}$	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$에서 극댓값을 갖고, $x=\sqrt{3}$에서 극솟값을 가지므로

$\alpha=-\sqrt{3}$, $\beta=f(\sqrt{3})=3\sqrt{3}-9\sqrt{3}=-6\sqrt{3}$

$\therefore \alpha+\beta=-7\sqrt{3}$

답 ①

1039 $f'(x)=a(x+1)^2-1$ $(a>0)$로 놓으면 $f'(0)=0$이므로

$a-1=0$ $\therefore a=1$

$\therefore f'(x)=x^2+2x=x(x+2)$ ➊

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	…	-2	…	0	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로

$f(-2)=1$ ⋯ ❷

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2+2x)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+x^2+C$$

이므로

$$f(-2)=-\frac{8}{3}+4+C=1 \qquad \therefore C=-\frac{1}{3}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3}$이므로 ⋯ ❸

$$f(2)=\frac{8}{3}+4-\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$$ ⋯ ❹

답 $\frac{19}{3}$

채점 기준표

❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ $f(-2)=1$임을 알 수 있다.	30%
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	30%
❹ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	10%

1040 $f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이다.

이때 $f'(2)=f'(10)=0$이므로

$$f'(x)=3(x-2)(x-10)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$ 또는 $x=10$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	10	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 $\quad f(2)=56$

이때

$$f(x)=\int 3(x-2)(x-10)dx=3\int(x^2-12x+20)dx$$
$$=x^3-18x^2+60x+C$$

이므로

$$f(2)=8-72+120+C=56 \qquad \therefore C=0$$

따라서 $f(x)=x^3-18x^2+60x$이므로 극솟값은

$$f(10)=1000-1800+600=-200$$

답 ④

다른 풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$
$$\therefore f'(2)=12+4a+b=0,\ f'(10)=300+20a+b=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-18,\ b=60$

$$\therefore f(x)=x^3-18x^2+60x+c$$

$f(2)=56$에서 $\quad c=0$

따라서 $f(x)=x^3-18x^2+60x$이므로 극솟값은

$$f(10)=-200$$

1041 전략 $F(x)$와 $G(x)$가 모두 $f(x)$의 부정적분이므로 $F'(x)=G'(x)$이다.

풀이 $F'(x)=G'(x)$이므로

$$F(x)=G(x)+C\ (C는\ 상수)$$

가 성립한다.

이때 $F(0)=G(0)+2$이므로 $\quad C=2$

$$\therefore F(x)=G(x)+2$$

따라서 $F(4)=G(4)+2$이므로 $\quad F(4)-G(4)=2$

답 2

1042 전략 $\frac{d}{dx}p(x)=q(x)$이면 $p(x)=\int q(x)dx$이다.

풀이 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=3$에서

$$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 3\,dx$$
$$f(x)+g(x)=3x+C_1$$

$x=0$을 위의 등식에 대입하면 $\quad f(0)+g(0)=C_1$

이때 $f(0)=-4$, $g(0)=-2$이므로 $\quad C_1=-6$

$$\therefore f(x)+g(x)=3(x-2)$$

또 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=4x-8$에서

$$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(4x-8)dx$$
$$f(x)g(x)=2x^2-8x+C_2$$

$x=0$을 위의 등식에 대입하면 $\quad f(0)g(0)=C_2$

이때 $f(0)=-4$, $g(0)=-2$이므로 $\quad C_2=8$

$$\therefore f(x)g(x)=2(x-2)^2$$
$$\therefore h(x)=\int\frac{f(x)g(x)}{f(x)+g(x)}dx=\int\frac{2(x-2)^2}{3(x-2)}dx$$
$$=\int\frac{2(x-2)}{3}dx=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x+C$$

$h(1)=-1$이므로 $\quad \frac{1}{3}-\frac{4}{3}+C=-1 \qquad \therefore C=0$

따라서 $h(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x$이므로

$$h(6)=12-8=4$$

답 4

1043 전략 $p(x)=\int q(x)dx$이면 $\frac{d}{dx}p(x)=q(x)$이다.

풀이 ㄱ. 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\int f'(x)dx+\int 2x\,dx=\int\{f'(x)+2x\}dx$$

주어진 식의 우변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+x^2+C\}=f'(x)+2x$$
$$\therefore \int f'(x)dx+\int 2x\,dx=f(x)+x^2+C$$

ㄴ. $\frac{d}{dx}[\{f(x)\}^2+C]=2f(x)f'(x)$이므로

$$\int f'(x)f(x)dx\neq\{f(x)\}^2+C$$

ㄷ. 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\int f(x)dx+\int xf'(x)dx=\int\{f(x)+xf'(x)\}dx$$

주어진 식의 우변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\{xf(x)+C\}=f(x)+xf'(x)$$

$$\therefore \int f(x)dx+\int xf'(x)dx=xf(x)+C$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

1044 전략 $F_n(x)$를 x에 대한 식으로 나타낸 후, $F_n(0)=0$임을 이용하여 $F_n(x)$를 구한다.

풀이 $F_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)\int x^k dx\right\}=\sum_{k=1}^{n}\{x^{k+1}+(k+1)C\}$

$$=\sum_{k=1}^{n}x^{k+1}+\sum_{k=1}^{n}(k+1)C$$

$$=x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{n+1}+\frac{n(n+3)}{2}C$$

$F_n(0)=0$에서 $C=0$ ($\because n>0$)

따라서 $F_n(x)=x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{n+1}$이므로

$$F_n(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}=n$$ 답 ④

1045 전략 주어진 조건을 이용하여 먼저 함수 $g(x)$의 차수를 정한다.

풀이 함수 $f(x)$가 이차함수이고 $f(x)g(x)$가 사차함수이므로 $g(x)$는 이차함수이다.

이때 $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$이므로 $x^2+f(x)$는 일차함수이다.

따라서 $f(x)=-x^2+ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$$g(x)=\int(x^2-x^2+ax+b)dx=\int(ax+b)dx$$

$$=\frac{a}{2}x^2+bx+C$$

$$\therefore f(x)g(x)=(-x^2+ax+b)\left(\frac{a}{2}x^2+bx+C\right)$$

$$=-2x^4+8x^3$$

$$-\frac{a}{2}x^4+\left(\frac{a^2}{2}-b\right)x^3+\left(-C+\frac{3}{2}ab\right)x^2+(aC+b^2)x+bC$$

$$=-2x^4+8x^3$$

위의 식에서 양변의 계수를 비교하면

$-\frac{a}{2}=-2$, $\frac{a^2}{2}-b=8$, $-C+\frac{3}{2}ab=0$, $aC+b^2=0$,

$bC=0$

$\therefore a=4$, $b=0$, $C=0$

따라서 $g(x)=2x^2$이므로 $g(1)=2\cdot1=2$ 답 ②

1046 전략 $f_{i+1}(x)=\int(n+i)f_i(x)dx$에 $i=1$, 2, 3, $\cdots$을 대입하여 $f_i(x)$를 구한다.

풀이 $f_{i+1}(x)=\int(n+i)f_i(x)dx$ ($i=1$, 2, 3, $\cdots$)이므로

$$f_2(x)=\int(n+1)f_1(x)dx=\int x^{n+1}dx$$

$$=\frac{1}{n+2}x^{n+2}+C_1$$

$f_2(0)=0$이므로 $C_1=0$이고 $f_2(x)=\frac{1}{n+2}x^{n+2}$

$$f_3(x)=\int(n+2)f_2(x)dx=\int x^{n+2}dx$$

$$=\frac{1}{n+3}x^{n+3}+C_2$$

$f_3(0)=0$이므로 $C_2=0$이고 $f_3(x)=\frac{1}{n+3}x^{n+3}$

$\vdots$

따라서 $f_i(x)=\frac{1}{n+i}x^{n+i}$ ($i=1$, 2, 3, $\cdots$)이므로

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f_i(1)}=\sum_{i=1}^{n}(n+i)=\sum_{i=1}^{n}n+\sum_{i=1}^{n}i$$

$$=n^2+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{3n^2+n}{2}=100$$

$3n^2+n=200$, $3n^2+n-200=0$

$(3n+25)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because n$은 자연수) 답 8

1047 전략 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 삼차함수 $f(x)$에서 (극댓값)×(극솟값)<0이어야 한다.

풀이 곡선 $y=x^2-3x+1$과 직선 $y=x+6$의 교점의 x좌표는 $x^2-3x+1=x+6$에서

$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1, 0)$, $(5, 0)$을 지나므로

$$f(x)=3(x+1)(x-5)=3x^2-12x-15$$

조건 (가)에서

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(3x^2-12x-15)dx$$

$$=x^3-6x^2-15x+C$$

$F(0)=C$이므로 조건 (나)에 의하여 C는 정수이다.

조건 (다)에서 방정식 $F(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $F(-1)F(5)<0$이어야 하므로

$(C+8)(C-100)<0$

$\therefore -8<C<100$

따라서 정수 C의 값은 -7, -6, -5, $\cdots$, 98, 99의 107개이므로 구하는 함수 $F(x)$의 개수는 107이다. 답 ④

SSEN 특강

삼차방정식의 근의 판별

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 근은

① (극댓값)×(극솟값)<0 $\Longleftrightarrow$ 서로 다른 세 실근

② (극댓값)×(극솟값)$=0$ $\Longleftrightarrow$ 한 실근과 중근 (서로 다른 두 실근)

③ (극댓값)×(극솟값)>0 $\Longleftrightarrow$ 한 실근과 두 허근

1048 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

풀이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(p, f(p))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(p)=f'(p)(x-p)$

$\therefore y=f'(p)x-pf'(p)+f(p)$

이것이 $y=(2p-2)x+g(p)$와 같아야 하므로

$f'(p)=2p-2,\ g(p)=-pf'(p)+f(p)$

한편 점 $(p, f(p))$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점이므로

$f'(x)=2x-2$ ······ ㉠

$g(x)=-xf'(x)+f(x)$ ······ ㉡

㉠에서 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-2)dx=x^2-2x+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=x^2-2x$ ······ ㉢

㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면

$g(x)=-x(2x-2)+(x^2-2x)=-x^2$

답 $g(x)=-x^2$

1049 전략 $y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$임을 이용한다.

풀이 $\Delta y=(2x+1)\Delta x+k(\Delta x)^2$의 양변을 Δx로 나누면

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+1+k\Delta x$

이므로 $y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+1$

$\therefore y=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$

$x=12$일 때 $y=0$이므로

$0=144+12+C \quad \therefore C=-156$

즉 $y=x^2+x-156$이므로 $x=22$일 때,

$y=484+22-156=350$

따라서 도서관의 온도를 22 °C로 유지시킬 때, 1시간당 연료 소모량은 350 mL이다.

답 ④

1050 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면

$f(a)=\lim_{x\to a+}\int f'(x)dx=\lim_{x\to a-}\int f'(x)dx$이다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases}1 & (|x|>1)\\ -x^2 & (|x|<1)\end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}x+C_1 & (x>1)\\ -\frac{1}{3}x^3+C_2 & (-1<x<1)\\ x+C_3 & (x<-1)\end{cases}$$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}(x+C_1)=\lim_{x\to 1-}\left(-\frac{1}{3}x^3+C_2\right)$

$1+C_1=-\frac{1}{3}+C_2 \quad \therefore C_1-C_2=-\frac{4}{3}$ ······ ㉠

또 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1+}\left(-\frac{1}{3}x^3+C_2\right)=\lim_{x\to -1-}(x+C_3)$

$\frac{1}{3}+C_2=-1+C_3 \quad \therefore C_2-C_3=-\frac{4}{3}$ ······ ㉡

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이고 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다. 즉 $f(1)=0$이므로

$1+C_1=0 \quad \therefore C_1=-1$

㉠, ㉡에서 $C_2=\frac{1}{3},\ C_3=\frac{5}{3}$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x-1 & (x>1)\\ -\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3} & (-1<x<1)\\ x+\frac{5}{3} & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(2)-9f(-3)=1-9\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=13$

답 13

1051 전략 곡선 $y=h(x)$ 위의 임의의 점 $(x, h(x))$에서의 접선의 기울기는 $h'(x)$이므로 $h(x)=\int h'(x)dx$이다.

풀이 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $3x^2-3$인 곡선을 $y=h(x)$라 하면 $h'(x)=3x^2-3$이므로

$h(x)=\int h'(x)dx=\int(3x^2-3)dx=x^3-3x+C$

삼차함수 $y=h(x)$의 그래프가 직선 $y=3$에 접하려면 함수 $h(x)$의 극댓값 또는 극솟값이 3이어야 한다.

$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로 $h'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $h(x)$는 $x=-1$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

(i) $h(-1)=3$인 경우

$-1+3+C=3$에서 $C=1$

(ii) $h(1)=3$인 경우

$1-3+C=3$에서 $C=5$

(i), (ii)에서

$f(x)=x^3-3x+1,\ g(x)=x^3-3x+5$

또는 $f(x)=x^3-3x+5,\ g(x)=x^3-3x+1$

$\therefore f(2)+g(2)=3+7=10$

답 ③

1052 전략 그래프가 원점에 대하여 대칭인 삼차함수가 $x=1$에서 극값을 가지면 $x=-1$에서도 극값을 갖고, 그래프는 원점을 지남을 이용한다.

풀이 삼차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 갖고 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $x=-1$에서도 극값을 갖는다.

따라서 $f'(x)=a(x+1)(x-1)=a(x^2-1)$ (a는 상수, $a\neq 0$)로 놓으면

$f(x)=\int f'(x)dx=a\int(x^2-1)dx$

$=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+C$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 $x=0$에서 연속이므로 원점을 지난다.

즉 $f(0)=0$에서 $C=0$

$$\therefore f(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)=\frac{a}{3}x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표 중에서 양수인 것은 $\sqrt{3}$이다.

답 ②

1053 전략 $F(x)=\int f(x)dx=k(x+p)^3$임을 이용하여 a, b를 p로 나타낸다.

풀이 $f(x)=3x^2+2ax+b$의 부정적분 중 하나가 $F(x)$이므로

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(3x^2+2ax+b)dx$$
$$=x^3+ax^2+bx+C$$

이때 $F(x)=k(x+p)^3$이므로

$k=1$, $p>0$ ($\because$ a, b는 양수)

따라서 $x^3+ax^2+bx+C=x^3+3px^2+3p^2x+p^3$에서

$a=3p$, $b=3p^2$ ······ ㉠

$xF(x)=x(x+p)^3$에서

$$\{xF(x)\}'=F(x)+xF'(x)$$
$$=(x+p)^3+x\cdot3(x+p)^2$$
$$=(x+p)^2(4x+p)$$

$\{xF(x)\}'=0$에서 $x=-p$ 또는 $x=-\frac{p}{4}$

x	$\cdots$	$-p$	$\cdots$	$-\frac{p}{4}$	$\cdots$
$\{xF(x)\}'$	$-$	0	$-$	0	$+$
$xF(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 $xF(x)$는 $x=-\frac{p}{4}$에서 극솟값 -3을 가지므로

$$-\frac{p}{4}\left(\frac{3}{4}p\right)^3=-3,\quad p^4=\frac{4^4}{3^3}$$

$$\therefore p=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\ (\because p>0)$$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=4\sqrt{3}$, $b=16$이므로

$ab=64\sqrt{3}$

답 ⑤

1054 전략 $f(x)$가 $k(x-a)(x-b)$(k, a, b는 상수)로 나누어떨어지면 $f(a)=0$, $f(b)=0$이다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int g(x)dx$

$$=\int\left(x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+a\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-3x^2+ax+C$$

$f(0)=b$에서 $C=b$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-3x^2+ax+b$$ ··· ❶

이때

$h(x)=g'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$ ··· ❷

이고 $f(x)$가 $h(x)$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=-\frac{9}{4}-a+b=0$,

$f(2)=-12+2a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{13}{4}$, $b=\frac{11}{2}$ ··· ❸

$\therefore 8a+2b=26+11=37$ ··· ❹

답 37

채점 기준표

❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ $h(x)$를 구할 수 있다.	20%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $8a+2b$의 값을 구할 수 있다.	20%

1055 전략 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$, $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$임을 이용한다.

풀이 $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\frac{1}{3}x^3+2x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+g(x)=x^2+2$ ······ ㉠ ··· ❶

$x=1$을 ㉠에 대입하면

$f(1)+g(1)=3$

이때 $g(1)=2$이므로

$f(1)+2=3$ $\therefore f(1)=1$

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이고

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=3x^2$이므로

$$f(x)g(x)=\int\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx$$
$$=\int 3x^2\,dx=x^3+C_1$$

$x=1$을 위의 식에 대입하면

$f(1)g(1)=1+C_1$

이때 $f(1)=1$, $g(1)=2$이므로

$1\cdot2=1+C_1$ $\therefore C_1=1$

$\therefore f(x)g(x)=x^3+1$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서

$f(x)=x^2-x+1$, $g(x)=x+1$ ($\because f(1)=1$, $g(1)=2$) ··· ❸

$\therefore f(2)=3$ ··· ❹

답 3

채점 기준표

❶ $f(x)+g(x)$를 구할 수 있다.	20%
❷ $f(x)g(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	30%
❹ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	10%

1056 전략 $y=f(x)$의 그래프가 x좌표가 a인 점에서 x축에 접하면 $f(a)=0,\ f'(a)=0$이다.

풀이 $y=f(x)+8$의 그래프가 x좌표가 2인 점에서 x축에 접하므로 $f(2)=-8,\ f'(2)=0$ ⋯❶

또 $y=f(x)-8$의 그래프가 x좌표가 -2인 점에서 x축에 접하므로 $f(-2)=8,\ f'(-2)=0$ ⋯❷

$f'(2)=0,\ f'(-2)=0$에서

$f'(x)=a(x+2)(x-2)=a(x^2-4)$ (a는 상수, $a\neq0$)

로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int a(x^2-4)dx$$
$$=a\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)+C$$

$f(2)=-8,\ f(-2)=8$이므로

$$-\frac{16}{3}a+C=-8,\ \frac{16}{3}a+C=8$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2},\ C=0$ ⋯❸

따라서

$$f(x)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=\frac{1}{2}x^3-6x=\frac{1}{2}x(x^2-12)$$

이므로 방정식 $f(x)=0$의 0이 아닌 두 근의 곱은 -12이다. ⋯❹

답 -12

채점 기준표

❶ $f(2)=-8,\ f'(2)=0$임을 알 수 있다.	30%
❷ $f(-2)=8,\ f'(-2)=0$임을 알 수 있다.	30%
❸ $a,\ C$의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ 방정식 $f(x)=0$의 0이 아닌 두 근의 곱을 구할 수 있다.	10%

1057 전략 먼저 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 상수, $a\neq0$)로 놓고 $f(-x)=-f(x)$에 대입한다.

풀이 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 상수, $a\neq0$)로 놓으면 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$-ax^3+bx^2-cx+d=-(ax^3+bx^2+cx+d)$

위의 식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$b=-b,\ d=-d\quad \therefore b=0,\ d=0$ ⋯❶

따라서 $f(x)=ax^3+cx$이므로 $f'(x)=3ax^2+c$

$$F(x)=\int\{f(x)+f'(x)\}dx=\int(ax^3+3ax^2+cx+c)dx$$
$$=\frac{a}{4}x^4+ax^3+\frac{c}{2}x^2+cx+C$$

$F(0)=0$에서 $C=0$

$$\therefore F(x)=\frac{a}{4}x^4+ax^3+\frac{c}{2}x^2+cx$$ ⋯❷

$F(1)=0$에서 $\frac{1}{4}a+a+\frac{c}{2}+c=0\quad \therefore c=-\frac{5}{6}a$ ⋯❸

$$\therefore f(x)=a\left(x^3-\frac{5}{6}x\right)$$

$$\therefore \frac{f(2)}{f(1)}=\frac{\frac{19}{3}a}{\frac{1}{6}a}=38\ (\because a\neq0)$$ ⋯❹

답 38

채점 기준표

❶ $b=0,\ d=0$임을 알 수 있다.	20%
❷ $F(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $a,\ c$ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	20%
❹ $\frac{f(2)}{f(1)}$의 값을 구할 수 있다.	20%

1058 전략 $F_1(x),\ F_2(x),\ \cdots$를 차례대로 구하여 함수 $F_n(x)$의 식을 찾는다.

풀이 $F_1(x)=\int(x-1)dx=\frac{1}{2}x^2-x+C_1$

이때 $F_1(0)=1$이므로 $C_1=1$

$$\therefore F_1(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$$

$$F_2(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^2-x+1\right)dx=\frac{1}{2\cdot3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C_2$$

이때 $F_2(0)=-1$이므로 $C_2=-1$

$$\therefore F_2(x)=\frac{1}{2\cdot3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-1$$

$$F_3(x)=\int\left(\frac{1}{2\cdot3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-1\right)dx$$
$$=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}x^4-\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C_3$$

이때 $F_3(0)=1$이므로 $C_3=1$

$$\therefore F_3(x)=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}x^4-\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+1$$

$\vdots$

$$F_n(x)=\frac{1}{2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n+1)}x^{n+1}-\frac{1}{2\cdot3\cdot\cdots\cdot n}x^n+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2}x^2+(-1)^n x+(-1)^{n+1}$$ ⋯❶

따라서

$$G_1(x)=F_1(x)+F_2(x)=\frac{1}{2\cdot3}x^3$$

$$G_2(x)=F_2(x)+F_3(x)=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}x^4$$

$\vdots$

$$G_n(x)=F_n(x)+F_{n+1}(x)=\frac{1}{2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n+2)}x^{n+2}$$ ⋯❷

이므로 $G_n'(x)=\frac{1}{2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n+1)}x^{n+1}$ ⋯❸

$$\therefore \frac{G_{100}'(1)}{G_{100}(1)}=\frac{\frac{1}{2\cdot3\cdot\cdots\cdot101}}{\frac{1}{2\cdot3\cdot\cdots\cdot102}}=102$$ ⋯❹

답 102

채점 기준표

❶ $F_n(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $G_n(x)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $G_n'(x)$를 구할 수 있다.	20%
❹ $\frac{G_{100}'(1)}{G_{100}(1)}$의 값을 구할 수 있다.	10%

Ⅳ 다항함수의 적분법

10 정적분

1059 $\overline{AB}=\frac{l_n}{n}$이므로

$$S_n=n\cdot\triangle\boxed{OAB}=n\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{l_n}{n}\cdot h_n\right)=\boxed{\frac{1}{2}l_nh_n}$$

이때 $n\longrightarrow\infty$이면 $l_n\longrightarrow 2\pi r$, $h_n\longrightarrow r$이므로 구하는 원의 넓이를 S라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}l_nh_n=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2$$

답 (가) OAB (나) $\frac{1}{2}l_nh_n$

1060 $f(x)=x^3$으로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ x_k=k\Delta x=\boxed{\frac{k}{n}}$$

$$\therefore \int_0^1 x^3dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k^3\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\boxed{\frac{k^3}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\boxed{\frac{1}{4}}$$

$\therefore$ (가) $\frac{k}{n}$ (나) $\frac{k^3}{n^4}$ (다) $\frac{1}{4}$

답 (가) $\frac{k}{n}$ (나) $\frac{k^3}{n^4}$ (다) $\frac{1}{4}$

SSEN 특강

자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ ② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

1061 $\frac{d}{dx}\int_1^x(t^2-2t)dt=x^2-2x$ 답 x^2-2x

1062 $\frac{d}{dx}\int_2^x(-t^3+4t+2)dt=-x^3+4x+2$

답 $-x^3+4x+2$

1063 $\int_0^1 3x^4dx=\left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

1064 $\int_0^4(5x+4)dx=\left[\frac{5}{2}x^2+4x\right]_0^4=40+16=56$ 답 56

1065 $\int_{-1}^{2}(x^3-3x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$

$$=(4-6)-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=-\frac{3}{4}$$

답 $-\frac{3}{4}$

1066 $\int_1^2(2x^2+3x-1)dx=\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x\right]_1^2$

$$=\left(\frac{16}{3}+6-2\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-1\right)$$

$$=\frac{49}{6}$$

답 $\frac{49}{6}$

1067 $\int_0^2(x+1)(x-1)dx=\int_0^2(x^2-1)dx$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

1068 $\int_0^1(x-1)(x^2+x+1)dx=\int_0^1(x^3-1)dx$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$$

답 $-\frac{3}{4}$

1069 $\int_0^{-1}(x^3-4x)dx=-\int_{-1}^{0}(x^3-4x)dx$

$$=-\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$=-\left\{0-\left(\frac{1}{4}-2\right)\right\}$$

$$=-\frac{7}{4}$$

답 $-\frac{7}{4}$

1070 $\int_1^{-2}(6x^2+2x-5)dx$

$$=-\int_{-2}^{1}(6x^2+2x-5)dx$$

$$=-\left[2x^3+x^2-5x\right]_{-2}^{1}$$

$$=-\{(2+1-5)-(-16+4+10)\}$$

$$=0$$

답 0

1071 $\int_3^1(4x^3-3x^2-2x)dx=-\int_1^3(4x^3-3x^2-2x)dx$

$$=-\left[x^4-x^3-x^2\right]_1^3$$

$$=-\{(81-27-9)-(1-1-1)\}$$

$$=-46$$

답 -46

1072 $\int_{-1}^{3}(3x^2+x-2)dx-\int_{-1}^{3}(x+3)dx$

$=\int_{-1}^{3}(3x^2+x-2-x-3)dx$

$=\int_{-1}^{3}(3x^2-5)dx$

$=\Big[x^3-5x\Big]_{-1}^{3}$

$=12-4=8$ 답 8

1073 $\int_{0}^{1}(x+1)^2dx+\int_{1}^{0}(x-1)^2dx$

$=\int_{0}^{1}(x^2+2x+1)dx-\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx$

$=\int_{0}^{1}(x^2+2x+1-x^2+2x-1)dx$

$=\int_{0}^{1}4x\,dx=\Big[2x^2\Big]_{0}^{1}$

$=2$ 답 2

1074 $\int_{-1}^{0}(3x+2)dx+\int_{0}^{2}(3x+2)dx$

$=\int_{-1}^{2}(3x+2)dx=\Big[\frac{3}{2}x^2+2x\Big]_{-1}^{2}$

$=10-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{2}$ 답 $\frac{21}{2}$

1075 $\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2+2x)dx+\int_{0}^{-1}(x^3-3x^2+2x)dx$

$=\int_{-1}^{-1}(x^3-3x^2+2x)dx=0$ 답 0

다른 풀이 $\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2+2x)dx+\int_{0}^{-1}(x^3-3x^2+2x)dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2+2x)dx-\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2+2x)dx=0$

1076 $\int_{-2}^{-1}(x^2-4x+5)dx+\int_{-1}^{1}(y^2-4y+5)dy$

$=\int_{-2}^{-1}(x^2-4x+5)dx+\int_{-1}^{1}(x^2-4x+5)dx$

$=\int_{-2}^{1}(x^2-4x+5)dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x\Big]_{-2}^{1}$

$=\frac{10}{3}-\left(-\frac{62}{3}\right)=24$ 답 24

1077 $\int_{-1}^{2}(5x^4-6x-1)dx-\int_{3}^{2}(5x^4-6x-1)dx$

$=\int_{-1}^{2}(5x^4-6x-1)dx+\int_{2}^{3}(5x^4-6x-1)dx$

$=\int_{-1}^{3}(5x^4-6x-1)dx$

$=\Big[x^5-3x^2-x\Big]_{-1}^{3}$

$=213-(-3)=216$ 답 216

1078 $\int_{-3}^{3}(-5x^3+3x^2+4x-2)dx$

$=\int_{-3}^{3}(3x^2-2)dx+\int_{-3}^{3}(-5x^3+4x)dx$

$=2\int_{0}^{3}(3x^2-2)dx=2\Big[x^3-2x\Big]_{0}^{3}=2\cdot21=42$ 답 42

1079 $\int_{-1}^{1}(x+1)(3x+2)dx=\int_{-1}^{1}(3x^2+5x+2)dx$

$=\int_{-1}^{1}(3x^2+2)dx+\int_{-1}^{1}5x\,dx$

$=2\int_{0}^{1}(3x^2+2)dx$

$=2\Big[x^3+2x\Big]_{0}^{1}=2\cdot3=6$ 답 6

1080 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x-3$ 답 $f(x)=4x-3$

1081 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+10x-4$ 답 $f(x)=3x^2+10x-4$

1082 $F'(x)=x^2+2x+3$이라 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}(x^2+2x+3)dx=\lim_{h\to0}\frac{F(h)-F(0)}{h}$

$=F'(0)=3$ 답 3

1083 $F'(x)=(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$이라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}(x+2)(x+3)dx$

$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=F'(1)=12$ 답 12

1084 답 (가) 2 (나) 1

1085 답 (가) 1 (나) $2+x$

1086 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\int_{0}^{1}(3x)^2dx=\int_{0}^{1}9x^2dx$

$=\Big[3x^3\Big]_{0}^{1}=3$ 답 3

1087 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}=\int_{3}^{5}x\,dx=\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_{3}^{5}$

$=\frac{25}{2}-\frac{9}{2}=8$ 답 8

유형 01 구분구적법; 넓이 본책 175쪽

구분구적법을 이용하여 넓이를 구할 때
(i) 주어진 도형을 n개의 기본 도형으로 분할한다.
(ii) n개의 기본 도형의 넓이의 합 S_n을 구한다.
(iii) $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구한다.

1088 S_n은 밑변의 길이가 $\frac{1}{n}$이고, 높이가 각각 $\left(\frac{1}{n}\right)^2$, $\left(\frac{2}{n}\right)^2$, $\cdots$, $\left(\frac{n}{n}\right)^2$인 직사각형의 넓이의 합이므로

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}}$$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

답 ③

1089 구간 $[0,\ 2]$를 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 앞에서부터 차례대로

$$0,\ \frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \cdots,\ \frac{2(n-1)}{n},\ \frac{2n}{n}=2$$

n등분한 각 구간을 밑변으로 하고 왼쪽 끝에서의 함숫값을 높이로 하는 $(n-1)$개의 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^3+\frac{2}{n}\cdot\left(\frac{4}{n}\right)^3+\cdots+\frac{2}{n}\cdot\left\{\frac{2(n-1)}{n}\right\}^3$$
$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2k}{n}\right)^3$$

따라서 넓이 S는

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2k}{n}\right)^3$$

$\therefore a=2$

답 ④

유형 02 구분구적법; 부피 본책 175쪽

구분구적법을 이용하여 부피를 구할 때
(i) 주어진 입체도형을 n개의 기본 도형으로 분할한다.
(ii) n개의 기본 도형의 부피의 합 V_n을 구한다.
(iii) $\lim_{n\to\infty} V_n$의 값을 구한다.

1090 원뿔을 자른 단면의 반지름의 길이는 위에서부터 차례대로

$$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n},\ \frac{3r}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)r}{n}$$

이고, 높이는 $\boxed{\frac{h}{n}}$이므로 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합을 V_n이라 하면

$$V_n=\frac{h}{n}\left[\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{3r}{n}\right)^2+\cdots+\pi\left\{\frac{(n-1)r}{n}\right\}^2\right]$$
$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\}$$
$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}k^2}=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{\pi r^2h(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

답 ④

1091 사각뿔의 높이를 n등분하여 만들어진 직육면체의 밑넓이는 위에서부터 차례대로

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2a}{n}\right)^2,\ \left(\frac{3a}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left\{\frac{(n-1)a}{n}\right\}^2$$

이고, 높이는 $\frac{h}{n}$이므로 $(n-1)$개의 직육면체의 부피의 합 V_n은

$$V_n=\frac{h}{n}\left[\left(\frac{a}{n}\right)^2+\left(\frac{2a}{n}\right)^2+\left(\frac{3a}{n}\right)^2+\cdots+\left\{\frac{(n-1)a}{n}\right\}^2\right]$$
$$=\frac{a^2h}{n^3}\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\}=\frac{a^2h}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$=\frac{a^2h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{a^2h}{6n^2}\cdot\boxed{(n-1)(2n-1)}$$

답 $(n-1)(2n-1)$

유형 03 정적분의 정의 본책 177쪽

닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 정적분의 정의를 이용하여 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 구할 때
(i) $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, $x_k=a+k\Delta x$를 구한다.
(ii) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$의 값을 구한다.

1092 $f(x)=x^4$으로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[1,\ 3]$에서 연속이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\Delta x=\frac{2}{n},\ x_k=1+k\Delta x=1+\frac{2k}{n},\ f(x_k)=x_k^4=\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4$$
$$\therefore \int_1^3 x^4\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4\cdot\frac{2}{n}$$

$\therefore a=2$

답 ④

1093 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 연속이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\Delta x=\frac{2}{n},\ x_k=k\Delta x=\frac{2k}{n},\ f(x_k)=x_k^2=\left(\frac{2k}{n}\right)^2=\frac{4k^2}{n^2}$$
$$\therefore \int_0^2 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\boxed{\frac{4k^2}{n^2}}\cdot\frac{2}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{8}{n^3}}\sum_{k=1}^{n}k^2=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\boxed{\frac{8}{3}}$$

답 ⑤

1094 $f(x)=(-2x)^2=4x^2$으로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[0,\ 3]$에서 연속이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\Delta x=\frac{3}{n},\ x_k=k\Delta x=\frac{3k}{n}$$

$$f(x_k)=4{x_k}^2=4\left(\frac{3k}{n}\right)^2=\frac{36k^2}{n^2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^3 (-2x)^2dx=\int_0^3 4x^2dx&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{36k^2}{n^2}\cdot\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{108}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{108}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\lim_{n\to\infty}18\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\\&=36\end{aligned}$$

따라서 $a=36$, $m=36$이므로

$a+m=72$

답 72

1095 $f(x)=x-2$로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[2,\ 4]$에서 연속이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\Delta x=\frac{2}{n},\ x_k=2+k\Delta x=2+\frac{2}{n}k$$

$$f(x_k)=x_k-2=2+\frac{2}{n}k-2=\frac{2}{n}k \quad \cdots ❶$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_2^4 (x-2)dx&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}\cdot\frac{2}{n} \quad \cdots ❷\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{n}\right)=2 \quad \cdots ❸\end{aligned}$$

답 2

채점 기준표

❶ Δx, x_k, $f(x_k)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $\int_2^4 (x-2)dx$를 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ $\int_2^4 (x-2)dx$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 **04, 05** 미적분의 기본 정리 본책 177, 178쪽

① 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 구할 때

(i) 적분상수를 생략한 $f(x)$의 부정적분 $F(x)$를 구한다.

(ii) $\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$의 값을 구한다.

② $a>b$일 때, $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

1096 $\int_3^3 (x-1)(2x+3)dx-\int_{-1}^{-3}(x-1)(3x+1)dx$

$$\begin{aligned}&=0+\int_{-3}^{-1}(x-1)(3x+1)dx\\&=\int_{-3}^{-1}(3x^2-2x-1)dx=\Big[x^3-x^2-x\Big]_{-3}^{-1}\\&=-1-(-33)=32\end{aligned}$$

답 32

1097 $\int_0^1 9(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)dx$

$$\begin{aligned}&=\int_0^1 9(x^4-1)(x^4+1)dx=\int_0^1 9(x^8-1)dx\\&=\int_0^1 (9x^8-9)dx=\Big[x^9-9x\Big]_0^1=-8\end{aligned}$$

답 ③

1098 $\int_0^1 (1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$

$$\begin{aligned}&=\Big[x+x^2+x^3+\cdots+x^n\Big]_0^1\\&=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}=n\end{aligned}$$

이므로 $n=100$

답 ③

1099 $\int_1^4 \{3f'(x)-2x\}dx=\Big[3f(x)-x^2\Big]_1^4$

$$\begin{aligned}&=\{3f(4)-16\}-\{3f(1)-1\}\\&=3f(4)-24\ (\because f(1)=3)\end{aligned}$$

즉 $3f(4)-24=3$이므로 $f(4)=9$

답 ⑤

1100 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (2x^3-2kx)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-kx^2\right]_0^1=\frac{1}{2}-k$$

이때 $f(1)=2-2k$이므로 $\frac{1}{2}-k=2-2k$

$\therefore k=\frac{3}{2}$

답 ⑤

1101 $\int_{-2}^k (4x+6)dx=\Big[2x^2+6x\Big]_{-2}^k=(2k^2+6k)-(8-12)$

$$=2k^2+6k+4=2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

이므로 $\int_{-2}^k (4x+6)dx$는 $k=-\frac{3}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{2}$을 갖는다.

따라서 $m=-\frac{3}{2}$, $n=-\frac{1}{2}$이므로

$m+n=-2$

답 -2

1102 $\int_1^2 (3x^2-2kx+2)dx=\Big[x^3-kx^2+2x\Big]_1^2$

$$\begin{aligned}&=(12-4k)-(3-k)\\&=-3k+9\end{aligned}$$

즉 $-3k+9>3$에서 $k<2$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

답 ①

1103 $f(n)=\int_0^n (2x+1)dx=\left[x^2+x\right]_0^n$

$=n^2+n$ ⋯ ❶

이므로

$$\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{f(n)}=\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)$$
$$=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$$ ⋯ ❷

따라서 $p=21$, $q=20$이므로

$p+q=41$ ⋯ ❸

답 41

채점 기준표

❶ $f(n)$을 구할 수 있다.	40%
❷ $\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{f(n)}$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 06 정적분의 계산; 적분 구간이 같은 경우 본책 178쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때
➡ $\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx=\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx$ (복호동순)임을 이용하여 주어진 식을 하나의 정적분으로 나타낸다.

1104 $\int_0^2 (2x^2+1)dx+2\int_0^2 (x-x^2)dx$

$=\int_0^2 (2x^2+1)dx+\int_0^2 (2x-2x^2)dx$

$=\int_0^2 (2x^2+1+2x-2x^2)dx$

$=\int_0^2 (2x+1)dx$

$=\left[x^2+x\right]_0^2=6$

답 ⑤

1105 $\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx-\int_1^0 \frac{1}{t+1}dt$

$=\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx-\int_1^0 \frac{1}{x+1}dx$

$=\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$

$=\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}dx$

$=\int_0^1 \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$

$=\int_0^1 (x^2-x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{5}{6}$

답 ④

유형 07 정적분의 계산; 피적분함수가 같은 경우 본책 179쪽

함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌 구간에서 연속일 때
➡ $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$임을 이용하여 주어진 식을 하나의 정적분으로 나타낸다.

1106 $\int_0^4 f(x)dx-\int_2^8 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx$

$=\int_0^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx-\int_2^8 f(x)dx$

$=\int_0^8 f(x)dx-\int_2^8 f(x)dx$

$=\int_0^2 f(x)dx$

$=\int_0^2 (2x^3-3x^2+1)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^4-x^3+x\right]_0^2$

$=\frac{1}{2}\cdot16-8+2=2$

답 ⑤

1107 $\int_1^2 (x^3+2x-1)dx+\int_2^3 (x^3+2x-1)dx$

$=\int_1^3 (x^3+2x-1)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^2-x\right]_1^3$

$=\frac{105}{4}-\frac{1}{4}=26$

답 ④

1108 $\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$

$=\left\{\int_0^2 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx\right\}+\int_1^3 f(x)dx$

$=(A-C)+B$

$=A+B-C$

답 $A+B-C$

1109 $\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$

이때 $\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx$이므로

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$

$\therefore \int_0^2 f(x)dx=0$

즉 $\int_{-2}^2 f(x)dx=0$, $\int_0^2 f(x)dx=0$, $\int_{-2}^0 f(x)dx=0$이다.

한편 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$\int_0^2 f(x)dx=0$, $\int_{-2}^0 f(x)dx=0$이므로

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x^2+ax+b)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}+2a+2b=0$ ⋯⋯ ㉠

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx=\int_{-2}^{0}(x^2+ax+b)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{-2}^{0}$$
$$=\frac{8}{3}-2a+2b=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=0,\ b=-\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{4}{3}$이므로 $\quad f(1)=-\frac{1}{3}$ 　답 ②

유형 08 정적분의 계산; 구간에 따라 다르게 정의된 함수 　본책 179쪽

함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\geq c) \\ h(x) & (x\leq c) \end{cases}$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $a<c<b$일 때

➡ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c h(x)dx+\int_c^b g(x)dx$

1110 $\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^2 xf(x)dx$
$$=\int_0^1 (x^3-x)dx+\int_1^2 (x^2-x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{7}{12}$$

즉 $k=\frac{7}{12}$이므로 $\quad 12k=7$ 　답 ⑤

1111 $f(x)=\begin{cases} -3x+6 & (x\geq 0) \\ 6 & (x\leq 0) \end{cases}$이므로 ··· ❶
$$\int_{-2}^{3} f(x)dx=\int_{-2}^{0} 6\,dx+\int_0^3 (-3x+6)dx \quad \cdots ❷$$
$$=\left[6x\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{3}{2}x^2+6x\right]_0^3$$
$$=12+\frac{9}{2}=\frac{33}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{33}{2}$

채점 기준표

❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ $\int_{-2}^{3} f(x)dx$를 구간에 따라 나누어 정적분으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ 정적분의 값을 구할 수 있다.	30%

유형 09 정적분의 계산; 절댓값 기호를 포함한 함수 　본책 180쪽

절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분의 값을 구할 때
(i) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.
(ii) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용한다.

1112 $|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 1) \\ -x^2+1 & (-1\leq x\leq 1) \end{cases}$이므로
$$\int_0^3 \frac{|x^2-1|}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{-x^2+1}{x+1}dx+\int_1^3 \frac{x^2-1}{x+1}dx$$
$$=-\int_0^1 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx+\int_1^3 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx$$
$$=-\int_0^1 (x-1)dx+\int_1^3 (x-1)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

답 ②

1113 $|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x\leq 0) \end{cases}$이므로
$$\int_{-2}^{3} (2|x|-1)dx=\int_{-2}^{0} (-2x-1)dx+\int_0^3 (2x-1)dx$$
$$=\left[-x^2-x\right]_{-2}^{0}+\left[x^2-x\right]_0^3$$
$$=2+6=8$$

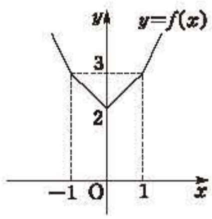
답 ⑤

1114 $|3x^2-6x|=\begin{cases} 3x^2-6x & (x\leq 0 \text{ 또는 } x\geq 2) \\ -3x^2+6x & (0\leq x\leq 2) \end{cases}$이므로
$$\int_0^a |3x^2-6x|dx=\int_0^2 (-3x^2+6x)dx+\int_2^a (3x^2-6x)dx$$
$$=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2+\left[x^3-3x^2\right]_2^a$$
$$=a^3-3a^2+8$$

이때 $a^3-3a^2+8=24$, 즉 $a^3-3a^2-16=0$에서
$(a-4)(a^2+a+4)=0$
$\therefore a=4$ ($\because a$는 실수)

답 ②

1115 오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값 2를 가지므로



$a=2$

$1\leq x\leq 2$일 때 $|x+1|=x+1$, $|x-1|=x-1$, $|x|=x$이므로
$$\int_1^a f(x)dx$$
$$=\int_1^2 (x+1+x-1+x)dx$$
$$=\int_1^2 3x\,dx=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

답 ⑤

1116 $|x-n|=\begin{cases} x-n & (x\geq n) \\ -x+n & (x\leq n) \end{cases}$이므로

$f(n)=\int_0^{2n}|x-n|dx$

$=\int_0^n(-x+n)dx+\int_n^{2n}(x-n)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+nx\right]_0^n+\left[\frac{1}{2}x^2-nx\right]_n^{2n}$

$=\frac{n^2}{2}+\frac{n^2}{2}=n^2$ ⋯ ❶

$\therefore \frac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)}{11}$

$=\frac{1}{11}\sum_{k=1}^{11}f(k)=\frac{1}{11}\sum_{k=1}^{11}k^2=\frac{1}{11}\cdot\frac{11\cdot12\cdot23}{6}$

$=46$ ⋯ ❷

답 46

채점 기준표

❶ $f(n)$을 구할 수 있다.	60%
❷ $\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(11)}{11}$의 값을 구할 수 있다.	40%

유형 10 우함수·기함수의 정적분 ; 피적분함수가 주어진 경우 본책 180쪽

적분 구간이 $[-a, a]$인 정적분의 계산은 피적분함수가 우함수인지 기함수인지를 파악한 후 다음을 이용한다.

① 피적분함수가 우함수이면 ➡ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

② 피적분함수가 기함수이면 ➡ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

1117 $\int_{-a}^{a}(3x^2-2x)dx=2\int_0^a 3x^2dx=2\left[x^3\right]_0^a=2a^3$

즉 $2a^3=\frac{2}{27}$이므로 $a=\frac{1}{3}$ ($\because$ a는 실수)

$\therefore 60a=20$

답 ②

1118 $\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+30x^{29})dx$

$=\int_{-1}^{1}(1+3x^2+\cdots+29x^{28})dx+\int_{-1}^{1}(2x+4x^3+\cdots+30x^{29})dx$

$=2\int_0^1(1+3x^2+\cdots+29x^{28})dx$

$=2\left[x+x^3+\cdots+x^{29}\right]_0^1=2\cdot15=30$

답 30

1119 $\int_{-a}^{a}(x^3+3x^2+x+a)dx=2\int_0^a(3x^2+a)dx$

$=2\left[x^3+ax\right]_0^a=2a^3+2a^2$

이므로 $2a^3+2a^2=(a+1)^2$

$2a^3+a^2-2a-1=0,\quad (a+1)(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+\left(-\frac{1}{2}\right)+1=-\frac{1}{2}$

답 ②

1120 일차함수 $f(x)$를 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓자.

$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=3$에서

$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)dx=2a\int_0^1x^2dx$

$=2a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2a\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}a$

즉 $\frac{2}{3}a=3$이므로 $a=\frac{9}{2}$ ⋯ ❶

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=-2$에서

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2)dx=2b\int_0^1x^2dx$

$=2b\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2b\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}b$

즉 $\frac{2}{3}b=-2$이므로 $b=-3$ ⋯ ❷

따라서 $f(x)=\frac{9}{2}x-3$이므로 $f(2)=\frac{9}{2}\cdot2-3=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준표

❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 11 우함수·기함수의 정적분 ; 피적분함수가 주어지지 않은 경우 본책 181쪽

① $f(-x)=f(x)$이면 ➡ $f(x)$는 우함수

② $f(-x)=-f(x)$이면 ➡ $f(x)$는 기함수

1121 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로 $x^3f(x)$, $xf(x)$는 모두 기함수이다.

$\therefore \int_{-1}^{1}(2x^3-x-1)f(x)dx$

$=2\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx-\int_{-1}^{1}xf(x)dx-\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$=0-\int_{-1}^{1}f(x)dx=-2\int_0^1f(x)dx$

$=-2\cdot5=-10$

답 −10

SSEN 특강

우함수, 기함수의 곱

① (우함수)·(우함수)=(우함수)

② (우함수)·(기함수)=(기함수)

③ (기함수)·(기함수)=(우함수)

1122 $f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수, $g(x)=-g(-x)$에서 $g(-x)=-g(x)$이므로 $g(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-3}^{3}\{f(x)+g(x)\}dx=\int_{-3}^{3}f(x)dx+\int_{-3}^{3}g(x)dx$$
$$=2\int_{0}^{3}f(x)dx+0$$
$$=2\cdot 4=8$$

답 ③

1123 $f(x)=-f(-x)$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^{3}f(x)dx=\int_{-2}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx$$
$$=0+\int_{2}^{3}f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{3}f(x)dx-\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=k-(-5)=k+5$$

이때 $\int_{-2}^{3}f(x)dx=3k-1$이므로

$k+5=3k-1,\quad 2k=6$

$\therefore k=3$

답 3

유형 12 $f(x+k)=f(x)$인 함수의 정적분 본책 182쪽

함수 $y=f(x)$에서 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여

$f(x+k)=f(x)$

인 연속함수 $f(x)$의 정적분의 값은 다음을 이용하여 구한다.

① $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a+k}^{b+k}f(x)dx$

② $\int_{a}^{a+k}f(x)dx=\int_{b}^{b+k}f(x)dx$

1124 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_{1}^{4}f(x)dx=\int_{4}^{7}f(x)dx=\int_{7}^{10}f(x)dx=\int_{10}^{13}f(x)dx=2$$
$$\therefore \int_{1}^{13}f(x)dx=\int_{1}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{7}f(x)dx$$
$$+\int_{7}^{10}f(x)dx+\int_{10}^{13}f(x)dx$$
$$=4\cdot 2=8$$

답 ②

1125 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=2\int_{0}^{1}x^2dx$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$ ··· ①

이때 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로

$$\int_{-5}^{6}f(x)dx=6\int_{-1}^{1}f(x)dx=6\cdot\frac{2}{3}=4$$ ··· ②

답 4

채점 기준표

① $\int_{-1}^{1}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40%
② $\int_{-5}^{6}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	60%

1126 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$이므로

$$\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{5}^{6}f(x)dx=\int_{9}^{10}f(x)dx$$
$$=\cdots=\int_{2017}^{2018}f(x)dx=\int_{2021}^{2022}f(x)dx=\cdots$$

답 ①

유형 13 적분 구간이 상수로 주어진 정적분을 포함한 등식 본책 182쪽

함수 $f(x)$가 $f(x)=g(x)+\int_{a}^{b}f(x)dx$ (a, b는 상수)를 만족시킬 때

➡ $\int_{a}^{b}f(x)dx=k$ (k는 상수)로 놓고 $f(x)=g(x)+k$를 위의 등식에 대입하여 k의 값을 구한다.

1127 $\int_{0}^{4}f(t)dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면 $\quad f(x)=x^3-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_{0}^{4}(t^3-2t+k)dt=k,\quad \left[\frac{1}{4}t^4-t^2+kt\right]_0^4=k$$

$48+4k=k\quad \therefore k=-16$

따라서 $f(x)=x^3-2x-16$이므로 $\quad f(2)=-12$

답 ②

1128 $f(x)=3x^2+\int_{0}^{1}(2x+1)f(t)dt$

$$=3x^2+2x\int_{0}^{1}f(t)dt+\int_{0}^{1}f(t)dt$$

이때

$\int_{0}^{1}f(t)dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면 $\quad f(x)=3x^2+2kx+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_{0}^{1}(3t^2+2kt+k)dt=k,\quad \left[t^3+kt^2+kt\right]_0^1=k$$

$1+2k=k\quad \therefore k=-1$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-1$이므로 $\quad f(-2)=15$

답 ④

1129 $f(x)=mx+n$은 연속함수이므로

$$f(x)=2x+\int_{0}^{2}f(t)dt-\int_{0}^{4}f(t)dt$$
$$=2x-\left\{\int_{2}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{4}f(t)dt\right\}$$
$$=2x-\int_{2}^{4}f(t)dt$$

이때 $\int_{2}^{4}f(t)dt$는 상수이므로 $m=2$이고

$n=-\int_{2}^{4}f(t)dt$ ······ ㉠

따라서 $f(x)=2x+n$을 ㉠에 대입하면

$$n=-\int_{2}^{4}(2t+n)dt,\quad n=-\left[t^2+nt\right]_2^4$$

$n=-(16+4n)+(4+2n)\quad \therefore n=-4$

$\therefore mn=-8$

답 ①

1130 $f(x)=3x^2-2x+\int_0^2 f(x)dx$에서

$\int_0^2 f(x)dx=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^2-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2 (3x^2-2x+k)dx=k,\quad \left[x^3-x^2+kx\right]_0^2=k$

$8-4+2k=k\quad \therefore k=-4$

즉 $f(x)=3x^2-2x-4$이므로 $f(x)<g(x)$에서

$3x^2-2x-4<2x^2+3x+2$

$x^2-5x-6<0,\quad (x+1)(x-6)<0$

$\therefore -1<x<6$

따라서 $f(x)<g(x)$를 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5이므로

구하는 합은 $1+2+3+4+5=15$ 답 15

1131 $\int_0^1 \{f(y)+g(y)\}dy=a$, $\int_0^1 \{f(y)-g(y)\}dy=b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=3x^2+a,\ g(x)=4x^3+b$

이므로

$\int_0^1 \{f(y)+g(y)\}dy=\int_0^1 \{4y^3+3y^2+(a+b)\}dy$

$=\left[y^4+y^3+(a+b)y\right]_0^1$

$=2+a+b$

즉 $2+a+b=a$이므로 $b=-2$ ➊

$\int_0^1 \{f(y)-g(y)\}dy=\int_0^1 \{-4y^3+3y^2+(a-b)\}dy$

$=\left[-y^4+y^3+(a-b)y\right]_0^1$

$=a-b$

즉 $a-b=b$이므로 $a=2b=-4$ ➋

따라서 $f(x)=3x^2-4,\ g(x)=4x^3-2$이므로

$f(1)g(1)=-1\cdot 2=-2$ ➌

답 -2

채점 기준표

➊ b의 값을 구할 수 있다.	40%
➋ a의 값을 구할 수 있다.	40%
➌ $f(1)g(1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 14 적분 구간에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식 본책 183쪽

함수 $f(x)$가 $\int_a^x f(t)dt=g(x)$ (a는 상수)를 만족시킬 때

① 양변에 $x=a$를 대입하면 ➡ $\int_a^a f(t)dt=0$, 즉 $g(a)=0$

② 양변을 x에 대하여 미분하면 ➡ $f(x)=g'(x)$

1132 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$a^2-4a=0,\quad a(a-4)=0\quad \therefore a=4\ (\because a>0)$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-4$

$\therefore f(a)=f(4)=4$ 답 ⑤

1133 $f(x)=\int_{-1}^x (t^2+t)dt$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=0$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+x$

따라서 $f'(-1)=0$이므로

$f(-1)+f'(-1)=0$ 답 0

1134 $f(x)=\int_x^{x+1} t^3dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$

$\therefore \int_0^2 f'(x)dx=\int_0^2 (3x^2+3x+1)dx$

$=\left[x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right]_0^2=16$ 답 ②

1135 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$2a^3+a^2-12=0,\quad a^2=4\quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x+a=4x+2$

따라서 $f(2)=10$이므로 $\frac{a}{f(2)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

1136 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-3$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=3x^2-8x+f(x)$

$xf'(x)=3x^2-8x\quad \therefore f'(x)=3x-8$

이때 $f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x-8)dx=\frac{3}{2}x^2-8x+C$이므로

$f(1)=\frac{3}{2}-8+C=-3\quad \therefore C=\frac{7}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+\frac{7}{2}$이므로 $f(k)=41$에서

$\frac{3}{2}k^2-8k+\frac{7}{2}=41,\quad 3k^2-16k-75=0$

$(k+3)(3k-25)=0\quad \therefore k=-3\ (\because k$는 정수$)$ 답 -3

유형 15 적분 구간과 피적분함수에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식 본책 183쪽

$\int_a^x (x\pm t)f(t)dt$ (a는 상수) 꼴을 포함한 등식이 주어질 때

(i) $x\int_a^x f(t)dt\pm\int_a^x tf(t)dt$로 변형한다.

(ii) (i)에서 얻은 등식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

➡ $\frac{d}{dx}\left[x\int_a^x f(t)dt\pm\int_a^x tf(t)dt\right]=\int_a^x f(t)dt+xf(x)\pm xf(x)$

(복호동순)

1137 $\int_2^x (x-t)f(t)dt=x^3+ax^2+4$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8+4a+4=0 \quad \therefore a=-3$

$\int_2^x (x-t)f(t)dt=x^3-3x^2+4$에서

$x\int_2^x f(t)dt-\int_2^x tf(t)dt=x^3-3x^2+4$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_2^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-6x$

$\therefore \int_2^x f(t)dt=3x^2-6x$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-6 \quad \therefore b=f(2)=6$

$\therefore a+b=3$

답 3

1138 $\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^3-x^2-x+1$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3-x^2-x+1$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-2x-1$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2-2x-1$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-2 \quad \therefore f(0)=-2$

답 ①

1139 $\int_0^x (x-t)f'(t)dt=x^4$에서

$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=x^4$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=4x^3$

$\int_0^x f'(t)dt=4x^3$

$\Big[f(t)\Big]_0^x=4x^3$

$\therefore f(x)-f(0)=4x^3$

이때 $f(0)=-2$이므로 $\quad f(x)=4x^3-2$

답 $f(x)=4x^3-2$

유형 16 정적분으로 정의된 함수의 극대·극소 본책 184쪽

$f(x)=\int_a^x g(t)dt$ (a는 상수)와 같이 정의된 다항함수 $f(x)$의 극값을 찾을 때

(i) 양변을 x에 대하여 미분한다. ➡ $f'(x)=g(x)$

(ii) $f'(b)=0$을 만족시키는 상수 b의 값을 구한다.

(iii) $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.

➡ $f'(x)$의 부호가 ⊕ → ⊖ ➡ $f(x)$는 $x=b$에서 극대
　 $f'(x)$의 부호가 ⊖ → ⊕ ➡ $f(x)$는 $x=b$에서 극소

1140 $f(x)=\int_0^x (-3t^2+at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-3x^2+ax+b$

$f'(-3)=0$에서 $\quad -27-3a+b=0$

$\therefore 3a-b=-27$ ...... ㉠

한편 $f(x)$는 $x=-3$에서 극솟값 -18을 가지므로

$f(-3)=\int_0^{-3}(-3t^2+at+b)dt$

$=\left[-t^3+\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^{-3}$

$=27+\frac{9}{2}a-3b=-18$

$\frac{9}{2}a-3b=-45 \quad \therefore 3a-2b=-30$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-8,\ b=3$

$\therefore ab=-24$

답 ①

1141 $f(x)=\int_0^x (t^2+kt-8)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+kx-8$

$f'(2)=0$에서 $\quad 4+2k-8=0$

$2k=4 \quad \therefore k=2$

답 2

1142 $f(x)=\int_0^x (t^2-2t-3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극대이므로 극댓값 a는

$a=f(-1)=\int_0^{-1}(t^2-2t-3)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\right]_0^{-1}=\frac{5}{3}$

또 $x=3$일 때 극소이므로 극솟값 b는

$b=f(3)=\int_0^3 (t^2-2t-3)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\right]_0^3=-9$

$\therefore 3a+b=3\cdot\frac{5}{3}+(-9)=-4$

답 ①

1143 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=a$

즉 $f(x)$는 $x=1$일 때 극대, $x=a$일 때 극소이다. ⋯ ❶

한편 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $\frac{11}{6}$을 가지므로

$$f(1)=\int_0^1 (t-1)(t-a)dt$$
$$=\int_0^1 \{t^2-(a+1)t+a\}dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a+1}{2}t^2+at\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{a+1}{2}+a$$
$$=\frac{3a-1}{6}$$

즉 $\frac{3a-1}{6}=\frac{11}{6}$이므로 $3a-1=11$

$\therefore a=4$ ⋯ ❷

따라서 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 가지므로 구하는 극솟값은

$$f(4)=\int_0^4 (t-1)(t-4)dt$$
$$=\int_0^4 (t^2-5t+4)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_0^4=-\frac{8}{3}$$ ⋯ ❸

답 $-\frac{8}{3}$

채점 기준표

❶ $f(x)$가 극대, 극소일 때의 x의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $f(x)$의 극솟값을 구할 수 있다.	40%

1144 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x)=x^3-3x+2a$$

이므로 사차함수 $F(x)$가 극댓값을 갖기 위해서는 $F(x)$의 도함수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

(극댓값)×(극솟값)<0

└ 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $F(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $F'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이어야 한다.

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

즉 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극값 $f(-1)$, $f(1)$을 가지므로

$f(-1)f(1)<0$, $(2+2a)(-2+2a)<0$

$\therefore -1<a<1$

따라서 구하는 정수 a의 값은 0이다. 답 0

유형 17 정적분으로 정의된 함수의 최대·최소 본책 184쪽

주어진 등식을 미분하여 $f(x)$ 또는 $f'(x)$를 구한 다음 $f(x)$의 최댓값·최솟값을 구한다.

1145 $f(x)=\int_x^{x+1} (t^3-t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\{(x+1)^3-(x+1)\}-(x^3-x)$$
$$=3x^2+3x=3x(x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

이때

$$f(-1)=\int_{-1}^0 (t^3-t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0=\frac{1}{4}$$
$$f(0)=\int_0^1 (t^3-t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=-\frac{1}{4}$$
$$f(1)=\int_1^2 (t^3-t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_1^2=\frac{9}{4}$$

이므로 $-1\le x\le 1$에서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{9}{4}$, 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다. 즉 $M=\frac{9}{4}$, $m=-\frac{1}{4}$이므로

$M+m=2$

답 ④

1146 $\int_0^x (x-t)f(t)dt=\frac{1}{4}x^4+x^3+3x^2$에서

$$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\frac{1}{4}x^4+x^3+3x^2$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=x^3+3x^2+6x$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt=x^3+3x^2+6x$$ ⋯ ❶

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+6x+6$ ⋯ ❷

따라서 $f(x)=3(x+1)^2+3$이므로 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 3을 갖는다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준표

❶ $\int_0^x f(t)dt$를 구할 수 있다.	50%
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	20%
❸ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

1147 $f(x)=\int_{-1}^x (1-|t|)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-|x|$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\le x\le 3$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(1)=\int_{-1}^{1}(1-|t|)dt$$
$$=2\int_{0}^{1}(1-|t|)dt$$

$y=1-|x|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 우함수이다.

$$=2\int_{0}^{1}(1-t)dt$$
$$=2\Big[t-\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

답 ②

유형 18 정적분으로 정의된 함수의 그래프 본책 185쪽

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$에 대하여 $y=F(x)$의 그래프가 주어질 때

(i) 그래프로부터 $F(x)$의 식을 구한다.

(ii) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $F'(x)=f(x)$임을 이용한다.

1148 주어진 그래프에서

$F(x)=a(x-1)(x-2)=a(x^2-3x+2)$ $(a<0)$

로 놓을 수 있다.

이때 $\int_2^x f(t)dt=a(x^2-3x+2)$이므로 이 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=a(2x-3)$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$3=a(2-3)$ $\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-3(2x-3)$이므로 $f(0)=9$

답 ⑤

1149 주어진 그래프에서

$f(x)=ax(x-2)$ $(a>0)$

로 놓을 수 있다. 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이고, $f(x)$의 최솟값이 -1이므로 $f(1)=-1$에서

$a\cdot(-1)=-1$ $\therefore a=1$

$\therefore f(x)=x(x-2)=x^2-2x$

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

따라서 $F(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$$F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2(t^2-2t)dt$$
$$=\Big[\frac{1}{3}t^3-t^2\Big]_0^2=-\frac{4}{3}$$

답 $-\frac{4}{3}$

1150 주어진 그래프에서

$f(x)=a(x-2)(x-5)(a>0)$

로 놓을 수 있다.

이때 $g(x)=\int_x^{x+2}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=f(x+2)-f(x)$$
$$=ax(x-3)-a(x-2)(x-5)$$
$$=a(x^2-3x-x^2+7x-10)$$
$$=2a(2x-5)$$

$g'(x)=0$에서 $x=\frac{5}{2}$ ($\because a>0$)

따라서 $g(x)$는 $x=\frac{5}{2}$에서 극소이면서 최소이므로

x	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

$k=\frac{5}{2}$

답 ③

1151 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

이므로 $f(x)$는 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 도함수이다.

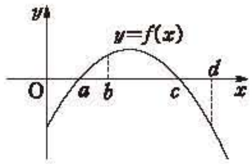
그런데 $y=F(x)$의 그래프가

$0\le x\le a$에서 감소하므로 $f(x)\le0$

$a\le x\le c$에서 증가하므로 $f(x)\ge0$

$x\ge c$에서 감소하므로 $f(x)\le0$ ······ ㉠

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로



$f(0)<0$, $f(a)=0$, $f(b)>0$,

$f(c)=0$, $f(d)<0$

ㄴ. $f(0)f(b)<0$

ㄷ. ㉠에서 $x>c$일 때, $f(x)<0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

유형 19 정적분으로 정의된 함수의 극한 ; $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt$ 꼴 본책 186쪽

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt$의 값을 구할 때

(i) $F'(t)=f(t)$로 놓는다.

(ii) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x+a)-F(a)}{x}=F'(a)=f(a)$임을 이용한다.

1152 $f(x)=\int_0^x(9t^2-2t+2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=9x^2-2x+2$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f'(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=f'(0)=2$$

답 ②

1153 $f(x)=x^3-x^2$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_3^{3+3h}(x^3-x^2)dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_3^{3+3h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(3+3h)-F(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(3+3h)-F(3)}{3h}\cdot3$$
$$=3F'(3)$$
$$=3f(3)$$
$$=3\cdot18=54$$

답 ③

1154 $f(x)=x^2-x+a$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-2h}^{1+h}(x^2-x+a)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-2h}^{1+h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1-2h)}{h} \quad \cdots❶$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{F(1+h)-F(1)\}-\{F(1-2h)-F(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{F(1-2h)-F(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{F(1-2h)-F(1)}{-2h}\cdot(-2)$$
$$=F'(1)+2F'(1) \quad \cdots❷$$
$$=3F'(1)=3f(1)=3a$$

즉 $3a=1$이므로 $a=\frac{1}{3}$ ⋯❸

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준표

❶ 주어진 등식의 좌변을 $F(x)$를 이용하여 나타낼 수 있다.	40%
❷ 주어진 등식의 좌변을 $F'(1)$을 이용하여 나타낼 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

1155 $f(t)=|t-5a|$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x|t-5a|dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)$$
$$=|-5a|=-5a\ (\because a<0)$$

따라서 $-5a=2a^2-3$이므로 $2a^2+5a-3=0$

$(2a-1)(a+3)=0 \quad \therefore a=-3\ (\because a<0)$

답 -3

유형 20 정적분으로 정의된 함수의 극한 ; $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$ 꼴 — 본책 186쪽

$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$의 값을 구할 때

(i) $F'(t)=f(t)$로 놓는다.

(ii) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$임을 이용한다.

1156 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_x^1 f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{-1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$=-\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=-F'(1)=-f(1)$$
$$=-4$$

답 ①

1157 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$$
$$=\frac{-1+a}{2}$$

즉 $\frac{-1+a}{2}=3$이므로 $a=7$

답 ④

1158 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^3}f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)$$
$$=3F'(1)=3f(1)$$
$$=3$$

답 ③

1159 $f(t)=t(k-t)$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x t(k-t)dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=f(1)$$
$$=k-1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\left\{\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x t(k-t)dt\right\}=\sum_{k=1}^{10}(k-1)$$
$$=\frac{10\cdot11}{2}-10$$
$$=45$$

답 ①

1160 $F'(t)=tf(t)$로 놓으면

$$a_n=\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x tf(t)dt$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)$$
$$=\frac{1}{2}f(2)$$
$$=1+n \quad \cdots❶$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}(1+k)$$
$$=8+\frac{8\cdot9}{2}=44 \quad \cdots❷$$

답 44

채점 기준표

❶ a_n을 구할 수 있다.	80%
❷ $\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 21~23 정적분과 급수 본책 187, 188쪽

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}$의 값을 구할 때에는 ( ) 안의 k의 계수인 $\frac{p}{n}$가 ( ) 밖에 곱해져 있도록 식을 변형한 후, 다음을 이용한다.

① $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_0^p f(x)dx$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_0^p f(a+x)dx$

1161 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}=\frac{2}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\cdot\frac{3}{n}$

$=\frac{2}{3}\int_1^4 x^3dx=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^4$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{255}{4}=\frac{85}{2}$ 답 ⑤

1162 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$=3\int_2^3 f(x)dx$

$=3\int_0^1 f(2+x)dx$ 답 ④

1163 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2-a}{n}\left\{a+\frac{(2-a)k}{n}\right\}^2$

$=\int_0^{2-a}(a+x)^2dx=\int_a^2 x^2dx$

$=\int_{a-2}^0 (x+2)^2dx$

이상에서 주어진 식을 정적분으로 나타낸 것으로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

1164 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right)^3+\left(3+\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(3+\frac{n}{n}\right)^3\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(3+\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}=\int_3^4 x^3dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_3^4=64-\frac{81}{4}=\frac{175}{4}$ 답 $\frac{175}{4}$

1165 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5}{n^6}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^5+\left(\frac{2}{n}\right)^5+\left(\frac{3}{n}\right)^5+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^5\right\}\cdot\frac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^5dx$

$=\left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^1=\frac{1}{6}$ 답 ①

1166 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+f\left(\frac{6}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{2n}{n}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{1}{2n}$

$=\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$

$=\frac{1}{4}\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{4}\int_0^2(4x^3-9x^2+3)dx$

$=\frac{1}{4}\left[x^4-3x^3+3x\right]_0^2=\frac{1}{4}\cdot(-2)=-\frac{1}{2}$ 답 ②

1167 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+2f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+nf\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$=\int_0^1 xf(x)dx$ ···➊

$=\int_0^1 (x^5-x^2)dx$

$=\left[\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=-\frac{1}{6}$ ···➋

답 $-\frac{1}{6}$

채점 기준표

➊ 주어진 식을 정적분을 이용한 식으로 변형할 수 있다.	60%
➋ 주어진 식의 극한값을 구할 수 있다.	40%

1168 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(\left|2-\frac{3}{n}\right|+\left|2-\frac{6}{n}\right|+\cdots+\left|2-\frac{3n}{n}\right|\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left|2-\frac{3k}{n}\right|\cdot\frac{3}{n}$

$=\int_0^3|2-x|dx=\int_0^2(2-x)dx+\int_2^3(x-2)dx$

$=\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3$

$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ 답 ③

1169 점 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{n-1}이 x축 위의 구간 $[0, 2]$를 n등분하였으므로 $A_k\left(\frac{2k}{n}, 0\right)$ $\therefore \overline{A_kB_k}=\left(\frac{2k}{n}\right)^3$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3$

$=8\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$

$=8\int_0^1 x^3dx$

$=8\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=8\cdot\frac{1}{4}=2$ 답 ②

1170 $\overline{BC}=\overline{CA}=1$이므로 닮음의 성질에 의하여

$\overline{B_1C_1}=\frac{1}{n}$, $\overline{B_2C_2}=\frac{2}{n}$, $\overline{B_3C_3}=\frac{3}{n}$, $\cdots$, $\overline{B_kC_k}=\frac{k}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^4=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^4$$
$$=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}$$
$$=3\int_0^1 x^4dx$$
$$=3\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

1171 전략 먼저 주어진 등식에서 다항함수 $f(x)$의 차수를 구한다.

풀이 $f(x)$의 차수를 n($n\ge2$인 자연수)이라 하면 주어진 등식의 좌변의 차수는 n^2, 우변의 차수는 $n+1$이므로

$n^2=n+1 \qquad \therefore n^2-n-1=0$

그런데 위의 식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않으므로 $f(x)$는 일차 이하의 다항식이다.

따라서 $f(x)=ax+b$(a, b는 상수)로 놓고 주어진 식의 좌변과 우변을 정리하면

(좌변)$=af(x)+b=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

이고

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x(at+b)dt=\left[\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^x=\frac{1}{2}ax^2+bx$$

이므로

(우변)$=\frac{1}{2}ax^3+bx-2x^3+15x+5$

$=\left(\frac{1}{2}a-2\right)x^3+(b+15)x+5$

즉 $a^2x+ab+b=\left(\frac{1}{2}a-2\right)x^3+(b+15)x+5$에서 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$0=\frac{1}{2}a-2$, $a^2=b+15$, $ab+b=5$

$\therefore a=4,\ b=1$

따라서 $f(x)=4x+1$이므로 $\quad f(1)=5$

답 ⑤

1172 전략 $C(x)=\int_0^x C'(x)dx$임을 이용하여 $C(8)-C(4)$의 값을 구한다.

풀이 자동차의 운행 거리가 $10000x$ km일 때까지 지출되는 차량 유지비는

$$C(x)=\int_0^x C'(x)dx=\int_0^x(1.5x^2+30x+200)dx\ (\text{만 원})$$

운행 거리가 40000 km일 때부터 80000 km일 때까지 지출하게 되는 차량 유지비는

$C(8)-C(4)$

$$=\int_0^8(1.5x^2+30x+200)dx-\int_0^4(1.5x^2+30x+200)dx$$
$$=\int_0^8(1.5x^2+30x+200)dx+\int_4^0(1.5x^2+30x+200)dx$$
$$=\int_4^8(1.5x^2+30x+200)dx$$
$$=\left[0.5x^3+15x^2+200x\right]_4^8$$
$=2816-1072=1744$(만 원)

답 ②

1173 전략 주어진 식을 변형하여 정적분의 성질을 이용한다.

풀이 $k\int_a^c xdx-\int_a^c x^2dx=\int_c^b x^2dx-k\int_c^b xdx$에서

$$k\left(\int_a^c xdx+\int_c^b xdx\right)=\int_a^c x^2dx+\int_c^b x^2dx$$
$$k\int_a^b xdx=\int_a^b x^2dx,\qquad k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b$$
$$\therefore k\cdot\frac{1}{2}(b^2-a^2)=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

$a\ne b$이고, $a+b=4$, $ab=1$이므로

$$k=\frac{2}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{(a+b)^2-ab}{a+b}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4^2-1}{4}=\frac{5}{2}$$

답 ②

다른 풀이 $k\int_a^c xdx-\int_a^c x^2dx=\int_c^b x^2dx-k\int_c^b xdx$에서

$$\int_a^c(kx-x^2)dx=\int_c^b(x^2-kx)dx$$
$$\int_a^c(kx-x^2)dx-\int_c^b(x^2-kx)dx=0$$
$$\int_a^c(kx-x^2)dx+\int_c^b(kx-x^2)dx=0$$
$$\int_a^b(kx-x^2)dx=0,\qquad \left[\frac{k}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_a^b=0$$
$$\frac{k}{2}b^2-\frac{1}{3}b^3-\left(\frac{k}{2}a^2-\frac{1}{3}a^3\right)=0$$
$$\therefore \frac{k}{2}(b^2-a^2)=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

1174 전략 $f(x+y)=f(x)+f(y)$의 x, y에 적당한 수나 문자를 대입하여 $f(x)$의 성질을 알아본다.

풀이 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ …… ㉠

㉠에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

또 ㉠에 y 대신 $-x$를 대입하면

$f(0)=f(x)+f(-x)$

$\therefore f(-x)=-f(x)$

따라서 함수 $f(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-2}^1 f(x)dx+\int_{-1}^2 f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}f(x)dx+2\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\left\{\int_{-2}^{-1}f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx\right\}+2\int_{-1}^1 f(x)dx$$
$=0+2\cdot0=0$

답 0

1175 전략 $f(-x)=f(x)$이므로 $\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$이다.

풀이 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로

$$\int_{-2}^1 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$

즉 $b=a+\int_0^1 f(x)dx$이므로 $\int_0^1 f(x)dx=b-a$

$$\therefore \int_{-3}^1 f(x)dx=\int_{-3}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\int_0^3 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$
$$=2\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$$
$$=2(b-a)+c$$
$$=-2a+2b+c$$

답 ⑤

1176 전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $h(x)$의 성질을 찾아 적분한다.

풀이 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$이므로

$$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$$

따라서 다항함수 $h(x)$는 기함수이다.

$h(x)$가 기함수이므로 $h'(x)$는 우함수이다. 즉

$$\int_{-3}^3 (x+5)h'(x)dx=\underbrace{\int_{-3}^3 xh'(x)dx}_{(\text{기함수})\cdot(\text{우함수})=(\text{기함수})}+\int_{-3}^3 5h'(x)dx$$
$$=2\int_0^3 5h'(x)dx$$
$$=10\int_0^3 h'(x)dx=10\Big[h(x)\Big]_0^3$$
$$=10\{h(3)-h(0)\}=10$$

$\therefore h(3)-h(0)=1$

이때 $h(-x)=-h(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$h(0)=-h(0)$ $\quad\therefore h(0)=0$

$\therefore h(3)=h(0)+1=1$

답 ①

참고 $h(x)$가 기함수이므로 $h(x)=a_1x+a_2x^3+a_3x^5+\cdots$ (a_1, a_2, a_3, $\cdots$은 상수)으로 놓으면

$$h'(x)=a_1+3a_2x^2+5a_3x^4+\cdots$$
$$=a_1+3a_2(-x)^2+5a_3(-x)^4+\cdots$$
$$=h'(-x)$$

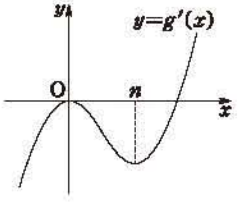
이므로 $h'(x)$는 우함수이다.

1177 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 함수 $g'(x)$의 그래프의 개형을 찾는다.

풀이 $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$에서

$$g'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt$$

$g'(0)=0$이고, $g'(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로 함수 $y=g'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$g'(x)=ax^2(x-b)$

(a, b는 상수, $a>0$, $b>n>0$)로 놓으면

$$ax^2(x-b)=\int_0^x f(t)dt$$

앞의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2ax(x-b)+ax^2=f(x)$$

$f(x)=0$에서 $\quad 2ax(x-b)+ax^2=0$

$$ax(3x-2b)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{2b}{3}$$

즉 $n=\frac{2b}{3}$이므로 $\quad b=\frac{3}{2}n$

$g'(x)=ax^2\left(x-\frac{3}{2}n\right)=a\left(x^3-\frac{3}{2}nx^2\right)$이므로

$$g(x)=a\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{n}{2}x^3\right)+C$$

그런데 $g(0)=C=0$이므로

$$g(x)=a\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{n}{2}x^3\right)$$

$g(k)>0$에서

$$g(k)=a\left(\frac{1}{4}k^4-\frac{n}{2}k^3\right)=\frac{1}{4}ak^3(k-2n)>0$$

이때 $a>0$, $k>0$이므로

$k-2n>0 \quad \therefore k>2n$

따라서 $a_n=2n+1$이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{10}(2n+1)$$
$$=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+10=120$$

답 120

1178 전략 사각형 PBCQ는 사다리꼴임을 이용하여 넓이 $S(x)$를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{PQ}=y$라 하면 $\triangle APQ \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{PQ}:\overline{BC}$$

즉 $x:6=y:8$에서 $\quad y=\frac{4}{3}x$

따라서 사각형 PBCQ의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=\frac{1}{2}(8+y)(6-x)=\frac{1}{2}\left(8+\frac{4}{3}x\right)(6-x)$$
$$=-\frac{2}{3}x^2+24\ (0<x<6)$$

이므로

$$\lim_{x\to 4}\frac{5x+4}{x^2-16}\int_4^x S(x)dx$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{5x+4}{(x+4)(x-4)}\int_4^x S(x)dx$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{5x+4}{x+4}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{1}{x-4}\int_4^x S(x)dx$$
$$=3\cdot S(4)$$
$$=3\cdot\frac{40}{3}=40$$

답 ③

1179 전략 $F'(x)=f(x)$로 놓고 주어진 식을 변형한 후, 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{b\to a}\frac{\int_{a^2}^{b^2}f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}=\lim_{b\to a}\frac{\dfrac{\int_{a^2}^{b^2}f(x)dx}{b^2-a^2}}{\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b^2-a^2}}$$

$$=\lim_{b\to a}(b+a)\cdot\frac{\dfrac{F(b^2)-F(a^2)}{b^2-a^2}}{\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}}$$

$$=2a\cdot\frac{F'(a^2)}{F'(a)}=2a\cdot\frac{f(a^2)}{f(a)}$$

$$=2a\cdot\frac{6}{2}=6a$$

답 ③

1180 전략 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합을 구하고, $n\to\infty$일 때 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합의 극한값을 정적분을 이용하여 구한다.

풀이 피타고라스 정리에 의하여 밑에서부터 k번째 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는

$$\sqrt{r^2-\left(\frac{k}{n}r\right)^2}=\boxed{\frac{r}{n}\sqrt{n^2-k^2}}$$

이므로 이 원기둥의 부피는

$$\pi\cdot\frac{r^2}{n^2}(n^2-k^2)\cdot\frac{r}{n}=\boxed{\frac{\pi r^3}{n^3}(n^2-k^2)}$$

따라서 구하는 반구의 부피는

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi r^3}{n^3}(n^2-k^2)=\pi r^3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\pi r^3\int_0^1\left(\boxed{1-x^2}\right)dx$$

$$=\pi r^3\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^3$$

답 ②

1181 전략 $S(m, x)$를 정적분으로 나타낸다.

풀이 $S(m, x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{-1+\frac{(x+1)k}{n}\right\}^m\frac{x+1}{n}$

$$=\int_{-1}^{x}t^m dt$$

$$\therefore \lim_{x\to-1}\sum_{m=1}^{101}\frac{S(m, x)}{x^2-1}=\sum_{m=1}^{101}\lim_{x\to-1}\frac{S(m, x)}{x^2-1}$$

$$=\sum_{m=1}^{101}\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{\int_{-1}^{x}t^m dt}{x+1}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{101}(-1)^m$$

$$=-\frac{1}{2}(\underbrace{-1+1-1+1-\cdots-1}_{101\text{개}})$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot(-1)=\frac{1}{2}$$

답 ①

1182 전략 두 점 P_k, Q_k의 좌표를 구하여 S_k를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 D_k의 좌표가 $\left(0, \frac{k}{n}\right)$이므로 직선 AD_k의 방정식은

$$y=\frac{k}{n}x+\frac{k}{n}=\frac{k}{n}(x+1)$$

직선 AD_k와 곡선 $y=-x^2+1$의 교점의 x좌표는

$$\frac{k}{n}(x+1)=-x^2+1,\quad x^2+\frac{k}{n}x+\frac{k}{n}-1=0$$

$$(x+1)\left(x+\frac{k}{n}-1\right)=0$$

$$\therefore x=1-\frac{k}{n}\text{ 또는 }x=-1$$

즉 점 P_k의 x좌표는 $1-\frac{k}{n}$이므로

$$P_k\left(1-\frac{k}{n}, \frac{2k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right),\ Q_k\left(1-\frac{k}{n}, 0\right)$$

$\overline{AQ_k}=2-\frac{k}{n}$, $\overline{P_kQ_k}=\frac{2k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2$이므로

$$S_k=\frac{1}{2}\left(2-\frac{k}{n}\right)\left\{\frac{2k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(2-\frac{k}{n}\right)\left\{\frac{2k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}(2-x)(2x-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(x^3-4x^2+4x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+2\right)=\frac{11}{24}$$

$$\therefore 24a=24\cdot\frac{11}{24}=11$$

답 11

1183 전략 $f(-x)=f(x)$에서 함수 $f(x)$는 우함수이고, $f(x-1)=f(x+1)$에서 $f(x)=f(x+2)$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x)$는 우함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

또 $\int_0^1 f(x)dx=3$이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx$$

$$=2\cdot3=6 \quad \cdots ❶$$

조건 (나)에서 x 대신 $x+1$을 대입하면 $f(x)=f(x+2)$이므로

$$\int_{-3}^{-1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx$$

$$=\int_3^5 f(x)dx=\int_5^7 f(x)dx$$

$$\therefore \int_{-3}^{7}f(x)dx=5\int_{-1}^{1}f(x)dx$$

$$=5\cdot6=30 \quad \cdots ❷$$

답 30

채점 기준표	
❶ $\int_{-1}^{1}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $\int_{-3}^{7}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	60%

1184 전략 주어진 등식의 좌변을 $x\int_{1}^{x}f(t)dt-\int_{1}^{x}tf(t)dt$로 변형한 후, 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=x^3-ax^2+bx+3$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$1-a+b+3=0 \qquad \therefore a-b=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=x^3-ax^2+bx+3$에서

$$x\int_{1}^{x}f(t)dt-\int_{1}^{x}tf(t)dt=x^3-ax^2+bx+3$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{1}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-2ax+b$$

$$\therefore \int_{1}^{x}f(t)dt=3x^2-2ax+b$$

$x=1$을 위의 등식의 양변에 대입하면

$$3-2a+b=0 \qquad \therefore 2a-b=3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-5$ ⋯ ❶

따라서 $\int_{1}^{x}f(t)dt=3x^2+2x-5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=6x+2 \qquad \cdots ❷$$

이므로 $f(3)=20$

$$\therefore f(3)+a+b=14 \qquad \cdots ❸$$

답 14

채점 기준표	
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $f(3)+a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

1185 전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $y=F(x)$의 그래프의 개형을 찾는다.

풀이 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, $f(-x)=-f(x)$에서 기함수이므로 $f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)로 놓으면

$$F(x)=\int_{-1}^{x}(t^3+at)dt=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{a}{2}t^2\right]_{-1}^{x}$$

$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{4}-\frac{a}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(-x)^4+\frac{a}{2}(-x)^2-\frac{1}{4}-\frac{a}{2}=F(-x)$$

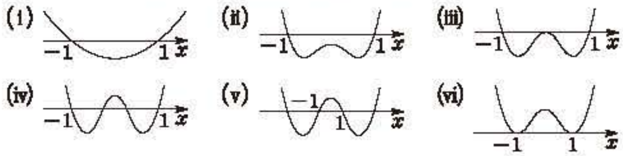
즉 $F(x)$는 우함수이다. ⋯ ❶

또 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$F(-1)=0$$

이때 $F(x)$는 우함수이므로 $F(1)=F(-1)=0$ ⋯ ❷

따라서 $y=F(x)$의 그래프의 개형은 다음 중 하나이다.

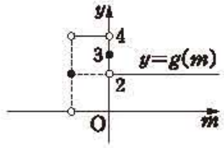


이때 $F(x)$는 $-1<x<1$에서 극솟값을 가지고 함수 $g(m)$이 $m=0$에서 불연속이므로 함수 $y=F(x)$의 그래프의 개형은 (iii)과 같다.

즉 $F(0)=0$이므로

$$F(x)=\frac{1}{4}x^2(x+1)(x-1) \qquad \cdots ❸$$

한편 $y=g(m)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$g(2)=2$$

$$\therefore F(2)+g(2)=3+2=5 \qquad \cdots ❹$$

답 5

채점 기준표	
❶ $F(x)$가 우함수임을 알 수 있다.	20%
❷ $F(-1)$, $F(1)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $F(x)$를 구할 수 있다.	40%
❹ $F(2)+g(2)$의 값을 구할 수 있다.	20%

1186 전략 점 P_k의 좌표를 구한 후 두 점 사이의 거리를 이용하여 $\overline{OP_k}$의 길이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P_k의 좌표가 $\left(\frac{k}{n},\ 2\sqrt{\frac{k}{n}+1}\right)$이므로

$$\overline{OP_k}=\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+4\left(\frac{k}{n}+1\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{k}{n}+2\right)^2}=\frac{k}{n}+2\left(\because \frac{k}{n}>0\right) \qquad \cdots ❶$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{OP_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+2\right)\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+2\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=2\int_{0}^{1}(x+2)dx \qquad \cdots ❷$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{0}^{1}$$

$$=2\cdot\frac{5}{2}=5 \qquad \cdots ❸$$

답 5

채점 기준표	
❶ $\overline{OP_k}$의 길이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{OP_k}$를 정적분으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{OP_k}$의 값을 구할 수 있다.	20%

Ⅳ 다항함수의 적분법

11 정적분의 활용

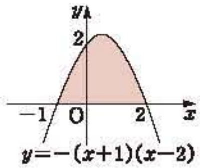
1187 $\int_{-2}^{0} x^2(x+2)dx=\int_{-2}^{0}(x^3+2x^2)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

1188 곡선 $y=-(x+1)(x-2)$와 x축의 교점의 x좌표는 $-(x+1)(x-2)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

$y=-(x+1)(x-2)=-x^2+x+2$이므로 구하는 넓이는



$\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$

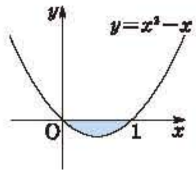
$=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

1189 곡선 $y=x^2-x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-x=0$에서

$x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{0}^{1}\{-(x^2-x)\}dx=-\int_{0}^{1}(x^2-x)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

1190 $\int_{-1}^{2}x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}=\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=3$ 답 3

1191 $\int_{-2}^{1}\{-(-x^2-2)\}dx=\int_{-2}^{1}(x^2+2)dx$

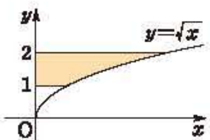
$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{-2}^{1}$

$=\frac{7}{3}+\frac{20}{3}=9$ 답 9

1192 $\int_{0}^{3}(3y-y^2)dy=\left[\frac{3}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_{0}^{3}=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

1193 $y=\sqrt{x}$에서 $x=y^2$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{1}^{2}y^2dy=\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{1}^{2}$

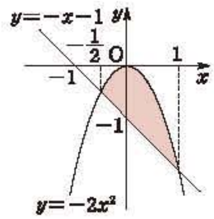
$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ 답 $\frac{7}{3}$

1194 곡선 $y=-2x^2$과 직선 $y=-x-1$의 교점의 x좌표는 $-2x^2=-x-1$에서

$2x^2-x-1=0$

$(2x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\{-2x^2-(-x-1)\}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(-2x^2+x+1)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$

$=\frac{5}{6}-\left(-\frac{7}{24}\right)=\frac{9}{8}$ 답 $\frac{9}{8}$

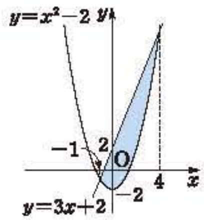
1195 곡선 $y=x^2-2$와 직선 $y=3x+2$의 교점의 x좌표는 $x^2-2=3x+2$에서

$x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{-1}^{4}\{(3x+2)-(x^2-2)\}dx$

$=\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{4}$

$=\frac{56}{3}-\left(-\frac{13}{6}\right)=\frac{125}{6}$ 답 $\frac{125}{6}$

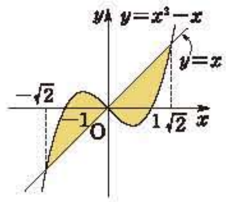
1196 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3-x=x$에서

$x^3-2x=0$

$x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-\sqrt{2}$

또는 $x=\sqrt{2}$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-\sqrt{2}}^{0}\{(x^3-x)-x\}dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}\{x-(x^3-x)\}dx$

$=\int_{-\sqrt{2}}^{0}(x^3-2x)dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}(-x^3+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2\right]_{-\sqrt{2}}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{0}^{\sqrt{2}}=1+1=2$ 답 2

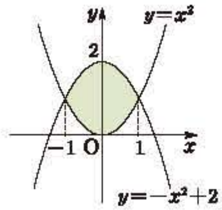
1197 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+2$의 교점의 x좌표는 $x^2=-x^2+2$에서

$2x^2-2=0$

$2(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{-1}^{1}\{(-x^2+2)-x^2\}dx$

$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx=4\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$

$=4\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}=4\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$ 답 $\frac{8}{3}$

SSEN 특강

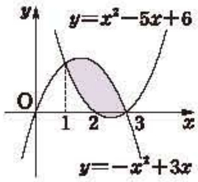
우함수 · 기함수의 정적분

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서 연속일 때, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f(x)$가 우함수이면 ➡ $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$

② $f(x)$가 기함수이면 ➡ $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

1198 두 곡선 $y=x^2-5x+6$, $y=-x^2+3x$의 교점의 x좌표는 $x^2-5x+6=-x^2+3x$에서



$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

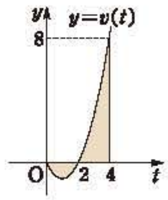
$$\int_{1}^{3}\{(-x^2+3x)-(x^2-5x+6)\}dx$$
$$=\int_{1}^{3}(-2x^2+8x-6)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_{1}^{3}$$
$$=0-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

1199 (1) $0+\int_{0}^{4}(t^2-2t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{0}^{4}=\frac{16}{3}$

(2) $\int_{1}^{2}(t^2-2t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{1}^{2}=-\frac{4}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

(3) $\int_{0}^{4}|t^2-2t|dt$



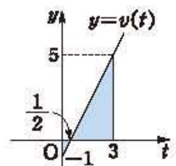
$$=\int_{0}^{2}(-t^2+2t)dt+\int_{2}^{4}(t^2-2t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_{0}^{2}+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{2}^{4}$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=8$$

답 (1) $\frac{16}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (3) 8

1200 (1) $5+\int_{0}^{2}(2t-1)dt=5+\left[t^2-t\right]_{0}^{2}=5+2=7$

(2) $\int_{0}^{3}(2t-1)dt=\left[t^2-t\right]_{0}^{3}=6$

(3) $\int_{0}^{3}|2t-1|dt$



$$=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-2t+1)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{3}(2t-1)dt$$
$$=\left[-t^2+t\right]_{0}^{\frac{1}{2}}+\left[t^2-t\right]_{\frac{1}{2}}^{3}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{25}{4}=\frac{13}{2}$$

답 (1) 7 (2) 6 (3) $\frac{13}{2}$

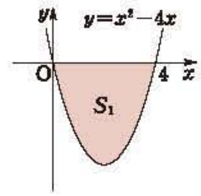
유형 01 곡선과 x축 사이의 넓이; 적분 구간에서 $f(x)\geq0$ 또는 $f(x)\leq0$인 경우 본책 194쪽

연속함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는

① 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq0$일 때, $\int_{a}^{b}f(x)dx$

② 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\leq0$일 때, $\int_{a}^{b}\{-f(x)\}dx$

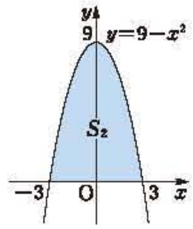
1201 곡선 $y=x^2-4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4x=0$에서



$x(x-4)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=4$

$$\therefore S_1=\int_{0}^{4}\{-(x^2-4x)\}dx$$
$$=-\int_{0}^{4}(x^2-4x)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{0}^{4}=\frac{32}{3}$$

곡선 $y=9-x^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $9-x^2=0$에서



$x^2-9=0, \qquad (x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

$$\therefore S_2=\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx$$
$$=2\int_{0}^{3}(9-x^2)dx$$
$$=2\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{3}=2\cdot18=36$$

$\therefore 3S_1+S_2=32+36=68$

답 ④

다른 풀이 포물선 $y=x(x-4)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S_1=\frac{(4-0)^3}{6}=\frac{32}{3}$$

포물선 $y=-(x+3)(x-3)$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S_2=\frac{\{3-(-3)\}^3}{6}=36$$

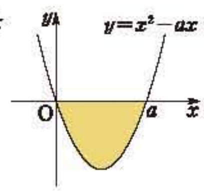
$\therefore 3S_1+S_2=68$

SSEN 특강

포물선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

포물선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (\alpha<\beta)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $\quad S=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$

1202 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{a}\{-(x^2-ax)\}dx$$
$$=-\int_{0}^{a}(x^2-ax)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_{0}^{a}=\frac{a^3}{6}$$

따라서 $\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}$이므로 $\quad a^3=27 \qquad \therefore a=3$

답 ③

1203 $xf(x)=\int_0^x tf'(t)dt+\frac{1}{3}x^3-x^2-8x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=xf'(x)+x^2-2x-8$

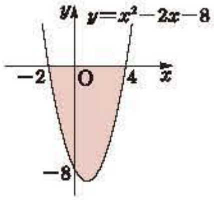
$\therefore f(x)=x^2-2x-8$

곡선 $y=x^2-2x-8$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-2x-8=0$에서

$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^4\{-(x^2-2x-8)\}dx$$
$$=-\int_{-2}^4(x^2-2x-8)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-8x\right]_{-2}^4$$
$$=\frac{80}{3}+\frac{28}{3}=36$$

답 36

1204 $S_n=\int_0^1\frac{1}{n}x^n dx=\left[\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}\right]_0^1$

$=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ⋯ ❶

$\therefore S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{10}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$ ⋯ ❷

답 $\frac{10}{11}$

채점 기준표

❶ S_n을 구할 수 있다.	60%
❷ $S_1+S_2+\cdots+S_{10}$의 값을 구할 수 있다.	40%

1205 $S_1+S_2+S_3=\int_{-2}^1(-x^2-x+2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1$

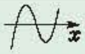
$=\frac{7}{6}-\left(-\frac{10}{3}\right)=\frac{9}{2}$

이때 S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S_2=S_1+S_3$

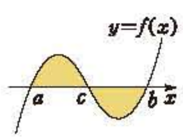
따라서 $\underbrace{3S_2}_{S_1+S_2+S_3=S_2+2S_2=3S_2}=\frac{9}{2}$이므로 $S_2=\frac{3}{2}$

답 ②

유형 02 곡선과 x축 사이의 넓이;  **꼴** 본책 194쪽

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

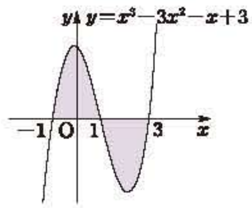
➡ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b\{-f(x)\}dx$



1206 $y=(x+1)(x-1)(x-3)$에서

$y=x^3-3x^2-x+3$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^1(x^3-3x^2-x+3)dx$$
$$+\int_1^3(-x^3+3x^2+x-3)dx$$
$$=2\int_0^1(-3x^2+3)dx+\int_1^3(-x^3+3x^2+x-3)dx$$
$$=2\left[-x^3+3x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2-3x\right]_1^3$$
$$=2\cdot2+4=8$$

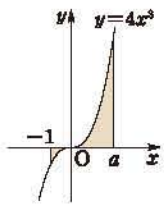
답 ③

1207 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^1(x^2-4x+3)dx+\int_1^2(-x^2+4x-3)dx$$
$$=2\int_0^1(x^2+3)dx+\int_1^2(-x^2+4x-3)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^2=2\cdot\frac{10}{3}+\frac{2}{3}=\frac{22}{3}$$

답 ③

1208 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$\int_{-1}^0(-4x^3)dx+\int_0^a 4x^3dx$ ⋯ ❶

$=\left[-x^4\right]_{-1}^0+\left[x^4\right]_0^a=1+a^4$ ⋯ ❷

따라서 $1+a^4=17$이므로 $a^4=16$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준표

❶ 색칠한 부분의 넓이를 적분 기호를 사용하여 나타낼 수 있다.	40%
❷ 색칠한 부분의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

1209 $S_1=\int_a^0(-x^3)dx=\left[-\frac{1}{4}x^4\right]_a^0=\frac{1}{4}a^4,$

$S_2=\int_0^b x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^b=\frac{1}{4}b^4$

이때 $|a|=3b$이므로 $a^4=81b^4$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{4}a^4}{\frac{1}{4}b^4}=\frac{a^4}{b^4}=\frac{81b^4}{b^4}=81$$

답 ⑤

유형 03 곡선과 y축 사이의 넓이; 적분 구간에서 $g(y)\ge0$ 또는 $g(y)\le0$인 경우 본책 195쪽

연속함수 $g(y)$에 대하여 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는

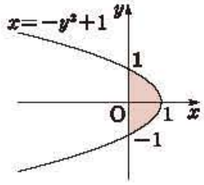
① 구간 $[a, b]$에서 $g(y)\ge0$일 때, $\int_a^b g(y)dy$

② 구간 $[a, b]$에서 $g(y)\le0$일 때, $\int_a^b\{-g(y)\}dy$

1210 곡선 $x=-y^2+1$과 y축의 교점의 y좌표는 $-y^2+1=0$에서

$y^2=1$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=1$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}(-y^2+1)dy=2\int_{0}^{1}(-y^2+1)dy$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}y^3+y\right]_0^1$$
$$=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 ④

1211 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_1^a\{-(y-1)(y-a)\}dy=\int_1^a\{-y^2+(1+a)y-a\}dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}(1+a)y^2-ay\right]_1^a$$
$$=\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}$$

따라서 $\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$이므로

$a^3-3a^2+3a-9=0,\quad (a-3)(a^2+3)=0$

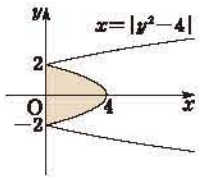
$\therefore a=3$ ($\because a$는 실수)

답 ⑤

1212 곡선 $x=|y^2-4|$와 y축의 교점의 y좌표는 $|y^2-4|=0$에서

$y^2=4 \quad \therefore y=-2$ 또는 $y=2$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^{2}|y^2-4|dy=2\int_0^2(-y^2+4)dy$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}y^3+4y\right]_0^2$$
$$=2\left(-\frac{8}{3}+8\right)=\frac{32}{3}$$

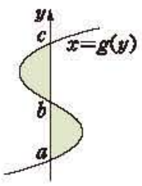
답 $\frac{32}{3}$

유형 04 곡선과 y축 사이의 넓이; 꼴

본책 196쪽

오른쪽 그림과 같이 곡선 $x=g(y)$와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

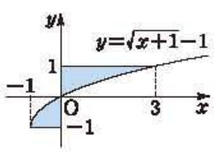
➡ $\int_a^b g(y)dy+\int_b^c\{-g(y)\}dy$



1213 $y=\sqrt{x+1}-1$에서 $y+1=\sqrt{x+1}$이므로

$(y+1)^2=x+1$

$\therefore x=y^2+2y$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{-(y^2+2y)\}dy+\int_0^1(y^2+2y)dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3-y^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}y^3+y^2\right]_0^1=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$

답 ②

1214 $x=y(1-y^2)$에서 $\quad x=y-y^3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{-(y-y^3)\}dy+\int_0^1(y-y^3)dy$$
$$=\left[-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}y^4\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{4}y^4\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

답 ②

유형 05 곡선과 직선 사이의 넓이

본책 196쪽

(i) 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.

(ii) 곡선과 직선을 그려 위치 관계를 파악한다.

(iii) (i)의 적분 구간에서 {(위쪽 그래프의 식)−(아래쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

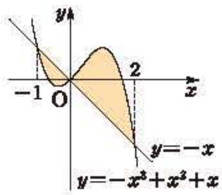
1215 곡선 $y=-x^3+x^2+x$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는

$-x^3+x^2+x=-x$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

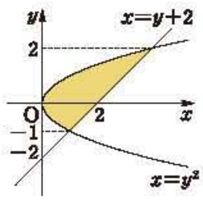


따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{-x-(-x^3+x^2+x)\}dx+\int_0^2\{-x^3+x^2+x-(-x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

답 ②

1216 $x=y^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



$y=x-2$에서 $x=y+2$이므로 곡선 $x=y^2$과 직선 $x=y+2$의 교점의 y좌표는

$y^2=y+2$에서 $\quad y^2-y-2=0$

$(y+1)(y-2)=0$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{(y+2)-y^2\}dy=\int_{-1}^{2}(-y^2+y+2)dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right]_{-1}^2$$
$$=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{9}{2}$$

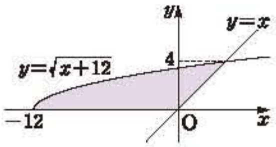
답 ①

1217 $y=\sqrt{x+12}$에서 $x=y^2-12\,(y\ge0)$이므로 곡선 $x=y^2-12$와 직선 $x=y$의 교점의 y좌표는 $y^2-12=y$에서

$y^2-y-12=0,\quad (y+3)(y-4)=0$

$\therefore y=4\ (\because y\ge0)$

따라서 구하는 넓이는

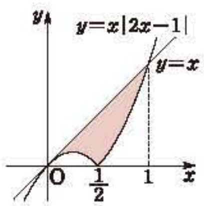


$$\int_0^4 \{y-(y^2-12)\}dy$$
$$=\int_0^4 (-y^2+y+12)dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+12y\right]_0^4$$
$$=-\frac{64}{3}+8+48=\frac{104}{3}$$

답 $\frac{104}{3}$

1218 $y=x|2x-1|=\begin{cases} 2x^2-x & \left(x\ge\frac{1}{2}\right) \\ -2x^2+x & \left(x\le\frac{1}{2}\right)\end{cases}$

$y=x|2x-1|$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



(i) $x\ge\frac{1}{2}$일 때,

$2x^2-x=x$에서 $\quad 2x^2-2x=0$

$2x(x-1)=0$

$\therefore x=1\ \left(\because x\ge\frac{1}{2}\right)$

(ii) $x\le\frac{1}{2}$일 때,

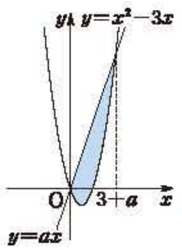
$-2x^2+x=x$에서 $\quad -2x^2=0 \quad \therefore x=0$

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\{x-(-2x^2+x)\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\{x-(2x^2-x)\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}2x^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^1(-2x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$$

답 ①

1219 곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=ax$에서



$x^2-(3+a)x=0$

$x\{x-(3+a)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3+a$ ··· ❶

따라서 주어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{3+a}\{ax-(x^2-3x)\}dx$$
$$=\int_0^{3+a}\{-x^2+(a+3)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+3}{2}x^2\right]_0^{3+a}$$
$$=\frac{1}{6}(a+3)^3$$ ··· ❷

즉 $\frac{1}{6}(a+3)^3=36$이므로 $\quad a+3=6$

$\therefore a=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준표

❶ 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

1220 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 0, 2, 4이므로 삼차방정식 $g(x)-f(x)=0$의 세 근은 0, 2, 4이다. 이때 $y=f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $g(x)-f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다. 즉

$g(x)-f(x)=ax(x-2)(x-4)$

$=a(x^3-6x^2+8x)\ (a<0)$

로 놓을 수 있다.

한편 색칠한 부분의 넓이가 2이므로

$$\int_2^4\{g(x)-f(x)\}dx=\int_2^4 a(x^3-6x^2+8x)dx$$
$$=a\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_2^4$$
$$=a\cdot(-4)=-4a$$

즉 $-4a=2$이므로 $\quad a=-\frac{1}{2}$

따라서 $g(x)-f(x)=-\frac{1}{2}x(x-2)(x-4)$이므로

$$g(1)-f(1)=-\frac{1}{2}\cdot1\cdot(-1)\cdot(-3)=-\frac{3}{2}$$

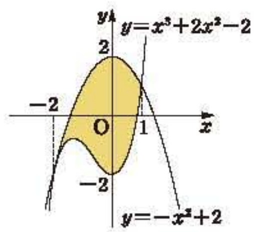
답 $-\frac{3}{2}$

유형 06 두 곡선 사이의 넓이

본책 197쪽

(i) 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.
(ii) 두 곡선을 그려 위치 관계를 파악한다.
(iii) (i)의 적분 구간에서 {(위쪽 그래프의 식)−(아래쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

1221 두 곡선 $y=x^3+2x^2-2$, $y=-x^2+2$의 교점의 x좌표는 $x^3+2x^2-2=-x^2+2$에서



$x^3+3x^2-4=0$

$(x+2)^2(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

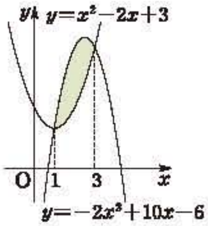
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^1\{(-x^2+2)-(x^3+2x^2-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^1(-x^3-3x^2+4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-2}^1$$
$$=\frac{11}{4}-(-4)=\frac{27}{4}$$

답 ③

11 정적분의 활용

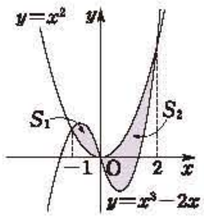
1222 두 곡선 $y=x^2-2x+3$, $y=-2x^2+10x-6$의 교점의 x좌표는
$x^2-2x+3=-2x^2+10x-6$에서
$x^2-4x+3=0$
$(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
따라서 구하는 넓이는



$$\int_1^3 \{(-2x^2+10x-6)-(x^2-2x+3)\}dx$$
$$=\int_1^3 (-3x^2+12x-9)dx$$
$$=\Big[-x^3+6x^2-9x\Big]_1^3=0-(-4)=4$$

답 ②

1223 두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=x^2$에서
$x^3-x^2-2x=0$
$x(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$ ➊



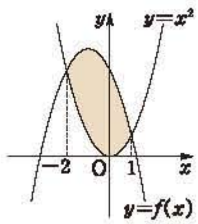
$\therefore S_2-S_1$
$$=\int_0^2 \{x^2-(x^3-2x)\}dx-\int_{-1}^0 \{(x^3-2x)-x^2\}dx$$
$$=\int_0^2 (-x^3+x^2+2x)dx-\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_0^2-\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\Big]_{-1}^0$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{5}{12}=\frac{9}{4}$$ ➋

답 $\frac{9}{4}$

채점 기준표

➊	두 곡선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30%
➋	S_2-S_1의 값을 구할 수 있다.	70%

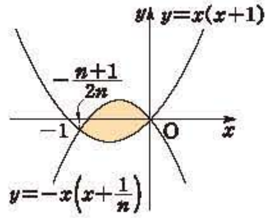
1224 곡선 $y=x^2$을 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=-x^2$
이를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면
$y=-(x+1)^2+5$
$\therefore f(x)=-(x+1)^2+5=-x^2-2x+4$
두 곡선 $y=x^2$, $y=f(x)$의 교점의 x좌표는
$x^2=-x^2-2x+4$에서
$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$
따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^1 \{(-x^2-2x+4)-x^2\}dx$$
$$=\int_{-2}^1 (-2x^2-2x+4)dx$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\Big]_{-2}^1=\frac{7}{3}-\left(-\frac{20}{3}\right)=9$$

답 ②

1225 두 곡선 $y=x(x+1)$, $y=-x\left(x+\frac{1}{n}\right)$의 교점의 x좌표는



$$x(x+1)=-x\left(x+\frac{1}{n}\right)$$
에서 $2x^2+\left(1+\frac{1}{n}\right)x=0$
$$x\left(2x+1+\frac{1}{n}\right)=0$$
$\therefore x=0$ 또는 $x=-\frac{n+1}{2n}$
자연수 n에 대하여 $-\frac{n+1}{2n}<0$이므로
$$S_n=\int_{-\frac{n+1}{2n}}^0 \left\{-x\left(x+\frac{1}{n}\right)-x(x+1)\right\}dx$$
$$=\int_{-\frac{n+1}{2n}}^0 \left\{-2x^2-\left(1+\frac{1}{n}\right)x\right\}dx$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}x^3-\frac{n+1}{2n}x^2\Big]_{-\frac{n+1}{2n}}^0$$
$$=-\frac{2}{3}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^3+\left(\frac{n+1}{2n}\right)^3$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^3$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^3$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{24}$$

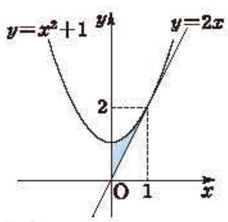
답 ⑤

유형 07 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이

본책 198쪽

(i) 접선의 방정식을 구한다.
(ii) 곡선과 접선을 그려 위치 관계를 파악한다.
(iii) 적분 구간에서 {(위쪽 그래프의 식)−(아래쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

1226 $y=x^2+1$에서 $y'=2x$이므로 곡선 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $2\cdot1=2$이고, 접선의 방정식은
$y-2=2(x-1)$
$\therefore y=2x$
따라서 구하는 넓이는



$$\int_0^1 \{(x^2+1)-2x\}dx=\int_0^1 (x^2-2x+1)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\Big]_0^1=\frac{1}{3}$$

답 ①

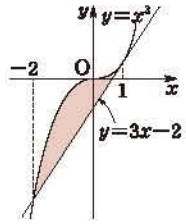
SSEN 특강

접선의 방정식
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

1227 $y=x^3$에서 $y'=3x^2$이므로 곡선 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는 $3\cdot 1^2=3$이고, 접선의 방정식은

$y-1=3(x-1)$

$\therefore y=3x-2$



곡선 $y=x^3$과 직선 $y=3x-2$의 교점의 x좌표는 $x^3=3x-2$에서

$x^3-3x+2=0,\quad (x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{x^3-(3x-2)\}dx=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\frac{3}{4}-(-6)$$
$$=\frac{27}{4}$$

답 ⑤

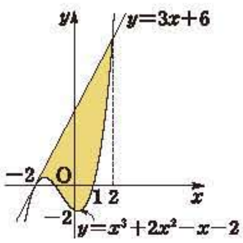
1228 $y=x^3+2x^2-x-2$에서 $y'=3x^2+4x-1$이므로 곡선 위의 점 $(-2, 0)$에서의 접선의 기울기는

$3\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)-1=3$

이고, 접선의 방정식은

$y-0=3(x+2)$

$\therefore y=3x+6$ ➊



곡선 $y=x^3+2x^2-x-2$와 직선 $y=3x+6$의 교점의 x좌표는 $x^3+2x^2-x-2=3x+6$에서

$x^3+2x^2-4x-8=0,\quad (x+2)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$ ➋

따라서 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{2}\{(3x+6)-(x^3+2x^2-x-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(-x^3-2x^2+4x+8)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-2x^2+8)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_{0}^{2}$$
$$=2\cdot\frac{32}{3}$$
$$=\frac{64}{3}$$
$$\therefore 3S=3\cdot\frac{64}{3}=64$$ ➌

답 64

채점 기준표

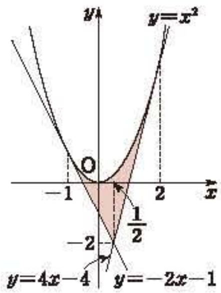
➊ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
➋ 접선과 곡선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20%
➌ $3S$의 값을 구할 수 있다.	50%

1229 $y=x^2$에서 $y'=2x$

접점의 좌표를 (t, t^2)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $2t$이고, 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t)$

$\therefore y=2tx-t^2$ ······ ㉠



이 직선이 점 $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$를 지나므로

$-2=t-t^2,\quad t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0\quad \therefore t=-1$ 또는 $t=2$

(i) $t=-1$일 때, ㉠에서 $y=-2x-1$

(ii) $t=2$일 때, ㉠에서 $y=4x-4$

따라서 구하는 넓이는

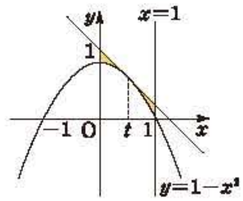
$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{x^2-(-2x-1)\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\{x^2-(4x-4)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(x^2+2x+1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(x^2-4x+4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$
$$=\frac{9}{8}+\frac{9}{8}=\frac{9}{4}$$

답 ④

1230 $y=1-x^2$에서 $y'=-2x$이므로 곡선 위의 점 $(t, 1-t^2)$에서의 접선의 기울기는 $-2t$이고, 접선의 방정식은

$y-(1-t^2)=-2t(x-t)$

$\therefore y=-2tx+t^2+1$



오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{0}^{1}\{(-2tx+t^2+1)-(1-x^2)\}dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^2-2tx+t^2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{3}-t+t^2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}$$

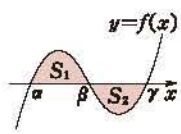
따라서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{1}{12}$이다.

답 ①

유형 08 두 도형의 넓이가 같을 조건 (본책 198쪽)

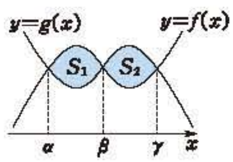
(1) 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면

➡ $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx=0$

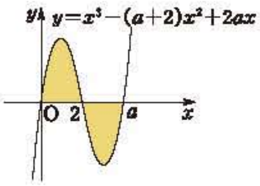


(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면

➡ $\int_{\alpha}^{\gamma}\{f(x)-g(x)\}dx=0$



1231 곡선 $y=x^3-(a+2)x^2+2ax$ 와 x축의 교점의 x좌표는



$x^3-(a+2)x^2+2ax=0$에서

$x(x-2)(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=a$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^a \{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_0^a=0$$

$$\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}(a+2)a^3+a^3=0, \qquad -\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3=0$$

$a^4-4a^3=0, \qquad a^3(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>2$)

답 ③

1232 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 \{(4-x^2)-k\}dx=0$$

즉 $\int_0^2 (-x^2+4-k)dx=0$이므로

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+4x-kx\right]_0^2=0, \qquad -\frac{8}{3}+8-2k=0$$

$$\frac{16}{3}-2k=0, \qquad 2k=\frac{16}{3}$$

$$\therefore k=\frac{8}{3}$$

답 ①

1233 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^4 \{-x^2(x-4)-ax(x-4)\}dx=0$$

즉 $\int_0^4 \{-x^3+(4-a)x^2+4ax\}dx=0$이므로

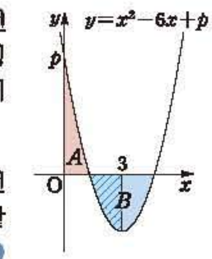
$$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4-a}{3}x^3+2ax^2\right]_0^4=0$$

$$-64+\frac{64(4-a)}{3}+32a=0$$

$32a=-64 \qquad \therefore a=-2$

답 ⑤

1234 $A:B=1:2$에서 $B=2A$이고, 곡선 $y=x^2-6x+p$가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}B=A$이다.



즉 곡선 $y=x^2-6x+p$와 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로 ❶

$$\int_0^3 (x^2-6x+p)dx=0$$ ❷

$$\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+px\right]_0^3=0$$

$-18+3p=0 \qquad \therefore p=6$ ❸

답 6

채점 기준표

❶ A와 빗금친 부분의 넓이가 서로 같음을 알 수 있다.	30%
❷ $\int_0^3 (x^2-6x+p)dx=0$임을 알 수 있다.	40%
❸ p의 값을 구할 수 있다.	30%

1235 $x^3-2x+k=0$의 근 중 가장 큰 값을 $\alpha(\alpha>0)$라 하면

$\alpha^3-2\alpha+k=0$

$\therefore k=2\alpha-\alpha^3$ ······ ㉠

$S_1=S_2$이므로

$$\int_0^\alpha (x^3-2x+k)dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-x^2+kx\right]_0^\alpha=0$$

$$\frac{1}{4}\alpha^4-\alpha^2+k\alpha=0, \qquad \alpha^4-4\alpha^2+4k\alpha=0$$

$\therefore \alpha^3-4\alpha+4k=0$ ($\because \alpha>0$) ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\alpha^3-4\alpha+4(2\alpha-\alpha^3)=0$

$-3\alpha^3+4\alpha=0, \qquad \alpha(3\alpha^2-4)=0$

$\alpha>0$이므로 $\quad \alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

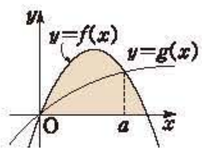
$$\therefore k=2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

답 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

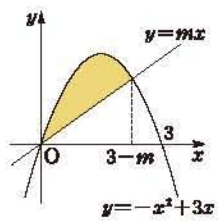
유형 09 두 곡선 사이의 넓이의 활용; 이등분 본책 199쪽

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S가 곡선 $y=g(x)$에 의하여 이등분되면

➡ $\int_0^a |f(x)-g(x)|dx=\frac{1}{2}S$



1236 곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x=mx$에서



$x^2+(m-3)x=0$

$x(x+m-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3-m$

따라서 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^{3-m} \{(-x^2+3x)-mx\}dx$$

$$=\int_0^{3-m} \{-x^2+(3-m)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3-m}{2}x^2\right]_0^{3-m}$$

$$=\frac{1}{6}(3-m)^3$$

이때 곡선 $y=-x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^3 (-x^2+3x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

이므로

$$\frac{1}{6}(3-m)^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2} \qquad \therefore (3-m)^3=\frac{27}{2}$$

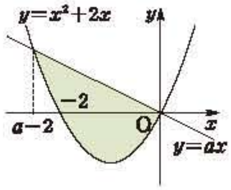
답 ③

1237 곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는
$x^2+2x=ax$에서 $x^2+(2-a)x=0$

$x(x+2-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a-2$ ⋯ ❶

따라서 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{a-2}^{0}\{ax-(x^2+2x)\}\,dx$$

$$=\int_{a-2}^{0}\{-x^2+(a-2)x\}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a-2}{2}x^2\right]_{a-2}^{0}$$

$$=\frac{1}{6}(2-a)^3 \quad \cdots ❷$$

이때 곡선 $y=x^2+2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$-\int_{-2}^{0}(x^2+2x)\,dx=-\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3} \quad \cdots ❸$$

이므로

$$\frac{1}{6}(2-a)^3=2\cdot\frac{4}{3} \qquad \therefore (2-a)^3=16$$

즉 $8-12a+6a^2-a^3=16$이므로

$a^3-6a^2+12a=-8$ ⋯ ❹

답 -8

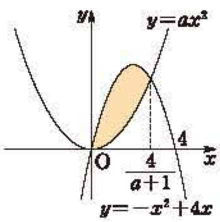
채점 기준표

❶ 곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ 색칠한 부분의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ 곡선 $y=x^2+2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30%
❹ a^3-6a^2+12a의 값을 구할 수 있다.	20%

1238 두 곡선 $y=-x^2+4x$, $y=ax^2$의 교점의 x좌표는
$ax^2=-x^2+4x$에서 $(a+1)x^2-4x=0$

$$x\{(a+1)x-4\}=0 \qquad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{4}{a+1}$$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{\frac{4}{a+1}}\{(-x^2+4x)-ax^2\}dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{4}{a+1}}\{-(a+1)x^2+4x\}dx$$

$$=\left[-\frac{a+1}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{\frac{4}{a+1}}$$

$$=\frac{32}{3(a+1)^2}$$

이때 곡선 $y=-x^2+4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{4}(-x^2+4x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{4}=\frac{32}{3}$$

이므로

$$\frac{32}{3(a+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}$$

$(a+1)^2=2 \qquad \therefore a=\sqrt{2}-1\ (\because a>0)$

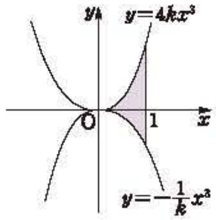
답 $\sqrt{2}-1$

유형 10 두 곡선 사이의 넓이의 활용 ; 넓이의 최솟값

본책 200쪽

(i) 두 곡선 사이의 넓이를 정적분을 이용하여 나타낸다.
(ii) 산술평균과 기하평균의 관계, 증감표 등을 이용하여 넓이의 최솟값을 구한다.

1239 두 곡선 $y=4kx^3$, $y=-\frac{1}{k}x^3$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{0}^{1}\left\{4kx^3-\left(-\frac{1}{k}x^3\right)\right\}dx$$

$$=\left(4k+\frac{1}{k}\right)\int_{0}^{1}x^3\,dx$$

$$=\left(4k+\frac{1}{k}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}$$

$$=k+\frac{1}{4k}$$

$k>0$, $\frac{1}{4k}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$k+\frac{1}{4k}\ge 2\sqrt{k\cdot\frac{1}{4k}}=1\ \left(\text{단, 등호는 } k=\frac{1}{4k}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 주어진 두 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는
$k=\frac{1}{4k}$, 즉 $k=\frac{1}{2}$일 때 최소이고, 그 최솟값은 1이다.

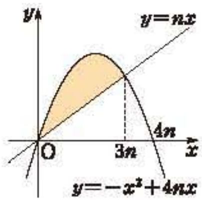
답 ④

SSEN 특강

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때 ➡ $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

1240 곡선 $y=-x^2+4nx$와 직선 $y=nx$의 교점의 x좌표는 $-x^2+4nx=nx$에서



$x^2-3nx=0$

$x(x-3n)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3n$

$$\therefore S_n=\int_{0}^{3n}\{(-x^2+4nx)-nx\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{3n}(-x^2+3nx)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3n}{2}x^2\right]_{0}^{3n}$$

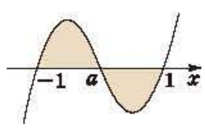
$$=\frac{9}{2}n^3$$

즉 $\frac{9}{2}n^3>90$에서 $n^3>20$

따라서 자연수 n의 최솟값은 3이다.

답 ③

1241 함수 $y=(x+1)(x-a)(x-1)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 색칠한 부분의 넓이를 $S(a)$라 하면



$$S(a)=\int_{-1}^{a}(x+1)(x-a)(x-1)dx$$
$$+\int_{a}^{1}\{-(x+1)(x-a)(x-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{a}(x^3-ax^2-x+a)dx-\int_{a}^{1}(x^3-ax^2-x+a)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{-1}^{a}$$
$$-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{a}^{1}$$
$$=-\frac{1}{6}a^4+a^2+\frac{1}{2}$$
$$\therefore S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a=-\frac{2}{3}a(a^2-3)$$

$S'(a)=0$에서 $a=0$ ($\because -1<a<1$)

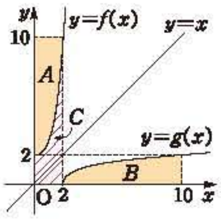
a	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $S(a)$는 $a=0$일 때 극소이면서 최소이다. 답 0

유형 11 함수와 그 역함수의 정적분
본책 200쪽

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
➡ 넓이가 같은 도형을 이용한다.

1242 함수 $f(x)=x^3+2$ $(x\geq 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



오른쪽 그림에서

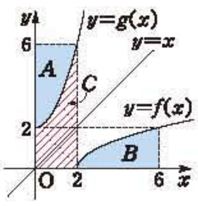
(A의 넓이)$=$(B의 넓이)

이므로

$$\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{10}g(x)dx=(C\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})$$
$$=(C\text{의 넓이})+(A\text{의 넓이})$$
$$=2\cdot 10=20$$

답 ⑤

1243 함수 $f(x)=\sqrt{x-2}$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. ➡ ①



오른쪽 그림에서

(A의 넓이)$=$(B의 넓이) ➡ ②

이므로

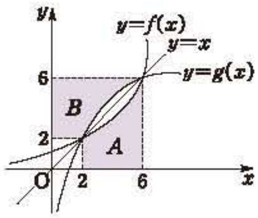
$$\int_{0}^{2}g(x)dx+\int_{2}^{6}f(x)dx=(C\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})$$
$$=(C\text{의 넓이})+(A\text{의 넓이})$$
$$=2\cdot 6=12$$ ➡ ③

답 12

채점 기준표

① $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.	40%
② (A의 넓이)$=$(B의 넓이)임을 알 수 있다.	40%
③ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20%

1244 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



오른쪽 그림에서

(A의 넓이)$=$(B의 넓이)$=S$

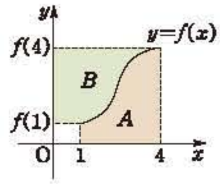
이므로

$$\int_{2}^{6}g(x)dx=6^2-2^2-(B\text{의 넓이})=32-S$$
$$\therefore k=32$$

답 ⑤

1245 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$y=f(x) \Longleftrightarrow x=g(y)$



조건 (다)에 의하여 오른쪽 그림의 두 영역 A, B의 넓이가 서로 같으므로

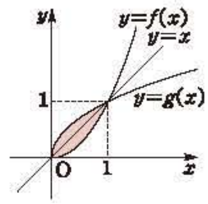
$$\int_{1}^{4}f(x)dx=\frac{1}{2}\{4f(4)-f(1)\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 20=10$$

답 ③

유형 12 함수와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이
본책 201쪽

두 곡선 $y=f(x)$와 $x=f(y)$로 둘러싸인 도형의 넓이는
➡ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

1246 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



$x^2=x$에서 $x(x-1)=0$

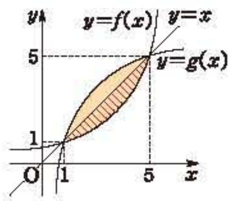
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_{0}^{1}(x-x^2)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}$$

답 ②

1247 오른쪽 그림과 같이 구하는 넓이는 직선 $y=x$에 의하여 이등분되고, 빗금친 부분의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot(5^2-1^2)-\int_{1}^{5}f(x)dx$$
$$=12-9=3$$

따라서 구하는 넓이는 빗금친 부분의 넓이의 2배이므로

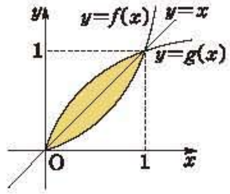
$2\cdot3=6$ 답 6

1248 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로

$x^n=x$에서

$x(x^{n-1}-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ ⋯ ❶



오른쪽 그림과 같이 구하는 넓이는 직선 $y=x$에 의하여 이등분되므로

$$S_n=2\int_0^1(x-x^n)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$
$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right) \quad ⋯ ❷$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=1 \quad ⋯ ❸$$

답 1

채점 기준표

❶ 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ S_n을 구할 수 있다.	40%
❸ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값을 구할 수 있다.	20%

1249 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고

$$f'(x)=3x^2-2x+1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

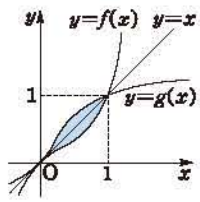
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로

$x^3-x^2+x=x$

$x^3-x^2=0$

$x^2(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$



이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^1\{x-f(x)\}dx=2\int_0^1\{x-(x^3-x^2+x)\}dx$$
$$=2\int_0^1(-x^3+x^2)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=2\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

답 ③

유형 13, 14 위치의 변화량과 움직인 거리 본책 201, 202쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때,

① 시각 t에서 점 P의 위치 x는 ➡ $x=x_0+\int_a^t v(t)dt$

② 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 ➡ $\int_a^b v(t)dt$

③ 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

➡ $s=\int_a^b|v(t)|dt$

1250 $t=0$에서의 점 P의 좌표가 2이므로 $t=3$에서 점 P의 위치는

$$2+\int_0^3(6-2t)dt=2+\left[6t-t^2\right]_0^3$$
$$=2+9=11$$

답 ⑤

1251 $v(t)=0$일 때 물이 멈추므로

$4t-t^2=0,\quad t(4-t)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=4$

따라서 $t=4$일 때까지 흘러나온 물의 양은

$$1^2\cdot\int_0^4(4t-t^2)dt=\left[2t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

답 ③

SSEN 특강

물체의 운동과 속도의 관계

① 움직이던 물체가 정지할 때 ➡ (속도)=0

② 움직이던 물체가 운동 방향을 바꿀 때 ➡ (속도)=0

1252 $\int_0^1(-t^2+t)dt+\int_1^4(t^2-4t+3)dt$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_1^4$$
$$=\frac{1}{6}+0=\frac{1}{6}$$

답 ①

1253 $v(t)=0$일 때 점 P가 움직이는 방향이 바뀌므로

$8-4t=0 \qquad \therefore t=2$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2(8-4t)dt=\left[8t-2t^2\right]_0^2=8$$

답 8

1254 자동차 B가 P지점을 지나 t초 동안 달린 거리를 x_B라 하면

$$x_B=\int_0^t(2t+2)dt=t^2+2t$$

자동차 A가 P지점을 지나 $(t+2)$초 동안 달린 거리를 x_A라 하면

$x_A=16(t+2)$

└ (거리)=(속력)×(시간)

$x_A=x_B$에서

$t^2+2t=16(t+2),\quad t^2-14t-32=0$

$(t+2)(t-16)=0 \qquad \therefore t=16\ (\because t>0)$

따라서 자동차 B가 P지점을 지난 지 16초 후에 두 자동차 A, B가 만난다.

답 ③

1255 $v(t)=30-2t=0$에서 $\quad t=15$

따라서 전동차는 제동을 건 후 15초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

11 정적분의 활용

$$\int_0^{15}|30-2t|dt=\int_0^{15}(30-2t)dt$$
$$=\Big[30t-t^2\Big]_0^{15}=225(\text{m})$$
답 ④

1256 $v(t)=20-10t=0$에서 $t=2$
따라서 물체는 위로 쏘아 올린 지 2초 후에 최고 높이에 도달하므로 구하는 거리는

$$\int_2^4|20-10t|dt=\int_2^4(10t-20)dt$$
$$=\Big[5t^2-20t\Big]_2^4$$
$$=0-(-20)=20(\text{m})$$
답 ①

1257 (1) 원점에서 출발하였으므로 위치의 변화량이 0이면 점 P의 위치가 원점이다. $t=a$ $(a>0)$일 때 점 P의 위치의 변화량이 0이라 하면

$$\int_0^a(6-2t)dt=0, \quad \Big[6t-t^2\Big]_0^a=0$$
$$6a-a^2=0, \quad a(6-a)=0 \quad \therefore a=6\ (\because a>0)$$

따라서 점 P가 원점으로 돌아오는 데 걸리는 시간은 6초이다.
··· ❶

(2) $$\int_0^6|6-2t|dt=\int_0^3(6-2t)dt+\int_3^6(2t-6)dt$$
$$=\Big[6t-t^2\Big]_0^3+\Big[t^2-6t\Big]_3^6$$
$$=9+9=18(\text{m})$$
··· ❷

답 (1) 6초 (2) 18 m

채점 기준표	
❶ 점 P가 원점으로 돌아오는 데 걸리는 시간을 구할 수 있다.	60%
❷ 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 움직인 거리를 구할 수 있다.	40%

1258 낙하를 시작한 지 $t(t>0)$초부터 $(t+1)$초까지 물체가 낙하한 거리는

$$\int_t^{t+1}|-10t|dt=\Big[5t^2\Big]_t^{t+1}=10t+5(\text{m})$$

이때 물체가 1초 동안 낙하한 거리가 80 m 이상이 되려면

$$10t+5\ge 80 \quad \therefore t\ge 7.5$$

따라서 이 물체가 1초 동안 낙하한 거리가 80 m 이상이 되는 것은 낙하를 시작한 지 7.5초가 지나서부터이다.
답 ③

1259 $t=a$ $(a>0)$일 때 열차가 달린 거리가 3 km라 하면

$$\int_0^a\left|\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t\right|dt=3, \quad \int_0^a\left(\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t\right)dt=3$$
$$\left[\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^a=3, \quad \frac{1}{4}a^3+\frac{1}{4}a^2=3$$
$$a^3+a^2-12=0, \quad (a-2)(a^2+3a+6)=0$$
$$\therefore a=2\ (\because a^2+3a+6>0)$$

따라서 열차가 출발한 후 $t=2$일 때의 속도는 $v(2)=4(\text{km/m})$이므로 구하는 거리는

$$3+\int_2^5 4dt=3+\Big[4t\Big]_2^5=3+12=15(\text{km})$$
답 15 km

1260 $v(t)=at(t-20)$ $(a<0)$으로 놓으면 속도 $v(t)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(10,\ 10)$이므로

$$10=a\cdot 10\cdot(-10) \quad \therefore a=-\frac{1}{10}$$
$$\therefore v(t)=-\frac{1}{10}t(t-20)$$
$$=-\frac{1}{10}t^2+2t$$

이때 두 항구 A, B 사이의 거리는 $t=0$부터 $t=20$까지 배가 이동한 거리이므로

$$\int_0^{20}\left|-\frac{1}{10}t^2+2t\right|dt=\int_0^{20}\left(-\frac{1}{10}t^2+2t\right)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{30}t^3+t^2\right]_0^{20}$$
$$=\frac{400}{3}\ (\text{km})$$
답 ②

유형 15 그래프에서의 위치와 움직인 거리
본책 200쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 할 때,

① $\int_a^b v(t)dt$ ➡ $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량

② $\int_a^b |v(t)|dt$ ➡ $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리
➡ $y=v(t)$의 그래프와 t축 및 두 직선 $t=a$, $t=b$로 둘러싸인 도형의 넓이

1261 ㄱ. 점 P의 운동 방향은

$v(t)=0$, 즉 $t=\frac{7}{3}$, $t=5$

두 점 (2, 1), (3, −2)를 지나는 직선의 방정식이 $v(t)=-3t+7$이므로 $v(t)=0$일 때, $t=\frac{7}{3}$

일 때 바뀌므로 $t=7$일 때까지 두 번 바뀐다.

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 속력 $|v(t)|$의 값이 가장 큰 것은 $t=3$일 때이다.

ㄷ. $t=7$일 때 점 P의 위치는

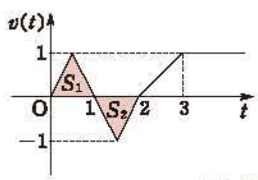
$$\int_0^7 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{7}{3}\right)\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\left(5-\frac{7}{3}\right)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1$$
$$=\frac{5}{3}-\frac{8}{3}+1$$
$$=0$$

이므로 $t=7$일 때 점 P는 원점에 놓여 있다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ③

1262 점 P가 움직인 거리는 속도 $v(t)$의 그래프와 t축 및 두 직선 $t=0$, $t=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=3$$
답 3

1263 $t=a$일 때, 원점을 다시 통과한다고 하면 $\int_0^a v(t)dt=0$이어야 한다.



오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이므로 $t=2$일 때 다시 원점을 통과한다.

$$\therefore a=2$$
답 ②

1264 $t=3$에서의 점 P의 위치는 $\int_0^3 v(t)dt$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot4a+\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot(-a)=3$$

$\therefore a=3$ ➊

따라서 $t=0$부터 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5 |v(t)|dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot12+\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot3+\frac{1}{2}\cdot(5-3)\cdot12$$
$$=6+3+12=21$$ ➋

답 21

채점 기준표

➊ a의 값을 구할 수 있다.	50%
➋ $t=0$부터 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리를 구할 수 있다.	50%

1265 $t=0$에서의 점 P의 위치를 x_0이라 하자.

$t=2$에서의 점 P의 위치는 $x_0+\int_0^2 v(t)dt$이므로

$$x_0+\frac{1}{2}\cdot2\cdot a=5$$

$\therefore x_0+a=5$ ...... ㉠

$t=2$에서 $t=4$까지의 위치의 변화량과 $t=6$에서 $t=7$까지의 위치의 변화량은 각각 0이고, $t=7$에서의 점 P의 위치는 $x_0+\int_0^7 v(t)dt$이므로

$$x_0+\frac{1}{2}\cdot2\cdot a+(6-4)\cdot(-a)=-1$$

$\therefore x_0-a=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

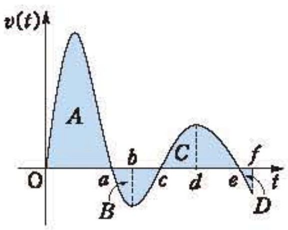
$x_0=2,\ a=3$

따라서 $t=10$에서의 점 P의 위치는

$$\underbrace{-1+\frac{1}{2}\cdot(10-7)\cdot3}_{(t=7\text{에서의 위치})+(t=7\text{에서 }t=10\text{까지의 위치의 변화량})}=\frac{7}{2}$$

답 ③

1266 오른쪽 그림에서 속도 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 차례대로 A, B, C, D라 하면 주어진 조건에서



$A=B+C+D$

$B=C-D$ (단, $ABCD\neq0$)

ㄱ. $\int_0^c v(t)dt=A-B=C+D$

$$\int_c^f |v(t)|dt=C+D$$

$$\therefore \int_0^c v(t)dt=\int_c^f |v(t)|dt$$

ㄴ. 점 P는 $t=a$, $t=c$, $t=e$에서 운동 방향을 바꾸므로 3번 바꾼다.

ㄷ. $\int_a^c |v(t)|dt=B$, $\int_c^f |v(t)|dt=C+D$이므로

$$\int_a^c |v(t)|dt+\int_c^f |v(t)|dt=B+C+D=A$$

$\int_0^c v(t)dt=A-B$이고, $B\neq0$이므로

$$\int_0^c v(t)dt\neq\int_a^c |v(t)|dt+\int_c^f |v(t)|dt$$

ㄹ. $\int_0^a v(t)dt=A>0$, $\int_0^c v(t)dt=A-B=C+D>0$,

$$\int_0^e v(t)dt=A-B+C=2C+D>0,$$

$$\int_0^f v(t)dt=A-B+C-D=2C>0$$

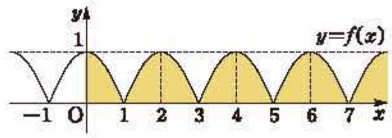
이므로 점 P의 위치의 변화량이 0이 되는 때는 없다.
따라서 점 P는 출발 후 원점을 다시 지나지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

1267 전략 $y=f(x)$의 그래프를 그려 같은 넓이를 갖는 부분을 찾는다.

풀이 조건 (가), (나)에 의하여 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (1-x^2)dx=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{100} f(x)dx=100\int_0^1 f(x)dx$$
$$=100\cdot\frac{2}{3}=\frac{200}{3}$$

답 $\frac{200}{3}$

1268 전략 정적분의 성질을 이용하여 주어진 조건을 간단히 한다.

풀이 $\int_0^{2013} f(x)dx=\int_3^{2013} f(x)dx$이므로

$$\int_0^{2013} f(x)dx-\int_3^{2013} f(x)dx=0$$

$$\int_0^{2013} f(x)dx+\int_{2013}^{3} f(x)dx=0$$

$$\therefore \int_0^3 f(x)dx=0$$

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$$\int_0^3 (x^2+ax+b)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^3$$
$$=9+\frac{9}{2}a+3b$$

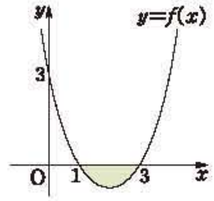
$9+\frac{9}{2}a+3b=0$이므로 $3a+2b=-6$ ...... ㉠

또 $f(3)=0$이므로 $9+3a+b=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=3$

따라서 $f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$이므로

$$S=\int_1^3 |x^2-4x+3|dx$$
$$=\int_1^3 (-x^2+4x-3)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3$$
$$=0-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$$



$\therefore 30S=30\cdot\frac{4}{3}=40$ 답 40

1269 전략 곡선 $y=4x-x^2$과 두 직선 $y=2x$, $y=x$의 교점의 x좌표를 각각 구하고, 그래프를 그려 본다.

풀이 곡선 $y=4x-x^2$과 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는 $4x-x^2=2x$에서

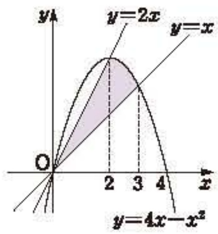
$x^2-2x=0,\quad x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

곡선 $y=4x-x^2$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $4x-x^2=x$에서

$x^2-3x=0,\quad x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 (2x-x)dx+\int_2^3 (4x-x^2-x)dx$$
$$=\int_0^2 xdx+\int_2^3 (-x^2+3x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_2^3$$
$$=2+\frac{7}{6}=\frac{19}{6}$$

답 ⑤

1270 전략 $y=|f(x)|$의 그래프를 그려서 이 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 접하고 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 a의 값을 정한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x+a$에서

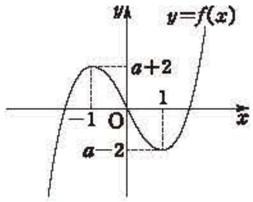
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

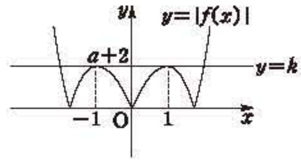
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+2$	↘	$a-2$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $a+2$를, $x=1$에서 극솟값 $a-2$를 갖는다. 이때 방정식 $|f(x)|=k$가 서로 다른 2개의 중근과 서로 다른 2개의 실근을 가지려면 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 접하고 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. 따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이고 $|a+2|=|a-2|$이어야 한다.

즉 $a+2=-(a-2)$에서 $a=0$이므로 $\quad k=2$





따라서 $f(x)=x^3-3x$이고 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는 $f(x)=2$에서

$x^3-3x-2=0,\quad (x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

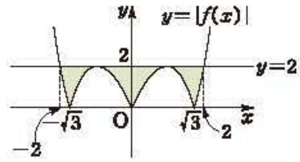
이때 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는

$x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

또 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-3x=0$에서

$x(x^2-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^2 \{2-|f(x)|\}dx$$
$$=2\int_0^2 \{2-|f(x)|\}dx$$
$$=2\left[\int_0^{\sqrt{3}} \{2-(-x^3+3x)\}dx+\int_{\sqrt{3}}^2 \{2-(x^3-3x)\}dx\right]$$
$$=2\left\{\int_0^{\sqrt{3}} (x^3-3x+2)dx+\int_{\sqrt{3}}^2 (-x^3+3x+2)dx\right\}$$
$$=2\left(\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{\sqrt{3}}^2\right)$$
$$=2\left\{\left(-\frac{9}{4}+2\sqrt{3}\right)+\left(\frac{15}{4}-2\sqrt{3}\right)\right\}=3$$

답 ①

1271 전략 $q_0=525$일 때의 p_0의 값을 구한다.

풀이 $q_0=525$이므로

$500+0.01{p_0}^2=525,\qquad 0.01{p_0}^2=25$

${p_0}^2=2500\qquad \therefore p_0=50$

따라서 현재 가격이 525원일 때의 생산자 과잉 S는

$$S=\int_0^{50} \{q_0-f(p)\}dp$$
$$=\int_0^{50} \{525-(500+0.01p^2)\}dp$$
$$=\int_0^{50} \left(-\frac{1}{100}p^2+25\right)dp=\left[-\frac{1}{300}p^3+25p\right]_0^{50}$$
$$=-\frac{1250}{3}+1250=\frac{2500}{3}$$

$\therefore \frac{S}{100}=\frac{25}{3}$ 답 $\frac{25}{3}$

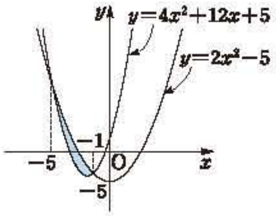
1272 전략 두 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$, $y=(g\circ f)(x)$의 식을 각각 구한다.

풀이 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+3)$

$=(2x+3)^2-4=4x^2+12x+5$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2-4)$$
$$= 2(x^2-4)+3$$
$$= 2x^2-5$$

두 곡선 $y=4x^2+12x+5$, $y=2x^2-5$의 교점의 x좌표는 $4x^2+12x+5=2x^2-5$에서



$$x^2+6x+5=0$$
$$(x+5)(x+1)=0$$
$$\therefore x=-5 \text{ 또는 } x=-1$$

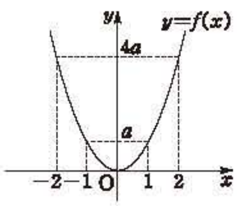
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-5}^{-1}\{(2x^2-5)-(4x^2+12x+5)\}dx$$
$$=\int_{-5}^{-1}(-2x^2-12x-10)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-6x^2-10x\right]_{-5}^{-1}=\frac{14}{3}-\left(-\frac{50}{3}\right)=\frac{64}{3}$$

답 ④

1273 전략 t의 값의 범위에 따른 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 조사하여 두 함수 $g(t)$, $h(t)$를 구한다.

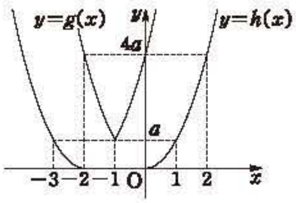
풀이 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$$g(t)=\begin{cases} f(t+2) & (t \geq -1) \\ f(t) & (t \leq -1) \end{cases},$$

$$h(t)=\begin{cases} f(t) & (t \geq 0) \\ 0 & (-2 \leq t \leq 0) \\ f(t+2) & (t \leq -2) \end{cases}$$

즉 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^{2}\{g(x)-h(x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{0}\{g(x)-h(x)\}dx+\int_{0}^{2}\{g(x)-h(x)\}dx$$
$$=2\int_{-2}^{-1}g(x)dx+\int_{0}^{2}\{g(x)-h(x)\}dx$$
$$=2\int_{-2}^{-1}ax^2dx+\int_{0}^{2}\{a(x+2)^2-ax^2\}dx$$
$$=2a\int_{-2}^{-1}x^2dx+a\int_{0}^{2}(4x+4)dx$$
$$=2a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{-1}+a\left[2x^2+4x\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{14}{3}a+16a=\frac{62}{3}a$$

$\frac{62}{3}a=31$에서 $a=\frac{3}{2}$ $\therefore 10a=10\cdot\frac{3}{2}=15$

답 15

1274 전략 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

풀이 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 교점의 좌표는 $(1, 1)$, $(2, 2)$이다.

$$\therefore f(1)=1,\ f(2)=2$$

$f(1)=a+b=1$ ...... ㉠

$f(2)=4a+b=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$$

이때

$$A=2\int_{0}^{1}\{f(x)-x\}dx,\ B=2\int_{1}^{2}\{x-f(x)\}dx$$

이므로

$$A-B=2\int_{0}^{1}\{f(x)-x\}dx-2\int_{1}^{2}\{x-f(x)\}dx$$
$$=2\left[\int_{0}^{1}\{f(x)-x\}dx+\int_{1}^{2}\{f(x)-x\}dx\right]$$
$$=2\int_{0}^{2}\{f(x)-x\}dx$$
$$=2\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{3}x^2-x+\frac{2}{3}\right)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\right]_{0}^{2}$$
$$=2\left(\frac{8}{9}-2+\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{9}$$

답 ④

1275 전략 주어진 그래프를 이용하여 $y=f'(t)$의 식을 구한다.

풀이 이차함수 $y=f'(t)$의 그래프와 t축의 교점의 t좌표가 1, 5이므로

$$f'(t)=a(t-1)(t-5)\ (a>0)$$

로 놓으면 $f'(0)=5$이므로

$$5a=5 \qquad \therefore a=1$$
$$\therefore f'(t)=(t-1)(t-5)=t^2-6t+5$$

점 P가 출발할 때의 운동 방향에 대하여 반대 방향으로 움직인 시간은 $t=1$에서 $t=5$일 때까지이다.

따라서 점 P가 반대 방향으로 움직인 거리 l은

$$l=\int_{1}^{5}|t^2-6t+5|dt=\int_{1}^{5}(-t^2+6t-5)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2-5t\right]_{1}^{5}=\frac{25}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{32}{3}$$
$$\therefore 6l=64$$

답 ⑤

1276 전략 시각 t에서의 속도가 $v(t)$인 물체가 정지할 때, $v(t)=0$이다.

풀이 열차가 정지할 때의 속력은 0이므로

$$28-4t=0 \qquad \therefore t=7$$

따라서 7초 동안 달린 거리는

$$\int_{0}^{7}|28-4t|dt=\int_{0}^{7}(28-4t)dt$$
$$=\left[28t-2t^2\right]_{0}^{7}=98(\text{m})$$

이므로 열차가 장애물과 부딪히지 않고 정지하기 위한 x의 값의 범위는 $x>98$이다.

답 ⑤

11 정적분의 활용

1277 전략 두 자동차 P, Q가 움직인 거리의 합이 400의 배수일 때, P, Q는 서로 만난다.

풀이 2분, 즉 120초 동안 자동차 P가 움직인 거리 $s_1(120)$은

$$s_1(120)=\int_0^5 8t\,dt+\int_5^{120} 40\,dt$$
$$=\Big[4t^2\Big]_0^5+\Big[40t\Big]_5^{120}$$
$$=100+4600=4700\ (\text{m})$$

120초 동안 자동차 Q가 움직인 거리 $s_2(120)$은

$$s_2(120)=\int_0^{10} 6t\,dt+\int_{10}^{120} 60\,dt$$
$$=\Big[3t^2\Big]_0^{10}+\Big[60t\Big]_{10}^{120}$$
$$=300+6600=6900\ (\text{m})$$

두 자동차 P, Q가 움직인 거리의 합이 400의 배수일 때, P, Q는 서로 만나고 $400n\le 4700+6900=11600$에서 $n\le 29$이므로 P, Q는 29회 만난다.

한편 $7.5k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 16)$초 동안 자동차 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5 8t\,dt+\int_5^{7.5k} 40\,dt=\Big[4t^2\Big]_0^5+\Big[40t\Big]_5^{7.5k}$$
$$=100+(300k-200)$$
$$=300k-100\ (\text{m})$$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 16$일 때, P가 이동한 거리는 200 m, 500 m, 800 m, $\cdots$, 4700 m이고, P, R가 만날 수 있는 위치는 M 또는 N이므로 $k=2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 16$일 때는 P, R가 만날 수 없다.

$k=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 15$일 때, P가 움직인 거리와 P, R의 위치는 다음 표와 같다.

k	1	3	5	7	9	11	13	15
P가 움직인 거리(m)	200	800	1400	2000	2600	3200	3800	4400
P의 위치	N	M	N	M	N	M	N	M
R의 위치	N	N	N	N	N	N	N	N

즉 P, R는 $k=1,\ 5,\ 9,\ 13$일 때 만나므로 4회 만난다.

따라서 구하는 합은 $29+4=33$ 답 ⑤

1278 전략 미적분의 기본 정리를 이용한다.

풀이 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)$이므로

$$S(t)=\int_2^t f(x)dx=F(t)-F(2)$$ ··· ①

$$\therefore \lim_{t\to 2}\frac{S(t)}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{F(t)-F(2)}{t-2}$$
$$=F'(2)=f(2)=4$$ ··· ②

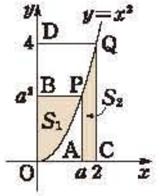
답 4

채점 기준표

① $S(t)$를 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② $\lim_{t\to 2}\frac{S(t)}{t-2}$의 값을 구할 수 있다.	60%

1279 전략 색칠한 두 부분의 넓이를 각각 구하여 그 넓이의 합이 4임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 색칠한 두 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면



$$S_1=\square\text{OAPB}-\int_0^a x^2dx$$
$$=a^3-\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^a$$
$$=\frac{2}{3}a^3$$ ··· ①

$$S_2=\int_a^2 x^2dx=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_a^2$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}a^3$$ ··· ②

$S_1+S_2=4$이므로

$$\frac{2}{3}a^3+\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}a^3\right)=4,\qquad \frac{1}{3}a^3=\frac{4}{3}$$

$a^3=4\qquad \therefore a=\sqrt[3]{4}\ (\because 0<a<2)$ ··· ③

답 $\sqrt[3]{4}$

채점 기준표

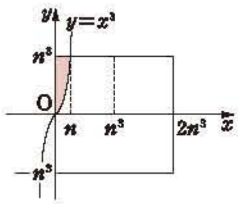
① S_1을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② S_2를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
③ a의 값을 구할 수 있다.	20%

1280 전략 주어진 정사각형과 $y=x^3$의 그래프를 그려 공통부분을 찾는다.

풀이 한 변의 길이가 $2n^3$이고 두 대각선의 교점의 좌표가 $(n^3,\ 0)$인 정사각형의 윗변과 곡선 $y=x^3$의 교점의 x좌표는 $x^3=n^3$에서

$x=n$ ($\because$ n은 자연수)

즉 $S(n)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로 ··· ①



$$S(n)=\int_0^n (n^3-x^3)dx$$
$$=\Big[n^3x-\frac{1}{4}x^4\Big]_0^n$$
$$=n^4-\frac{1}{4}n^4=\frac{3}{4}n^4$$ ··· ②

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S(2n)+n}{n^4-S(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}(2n)^4+n}{n^4-\frac{3}{4}n^4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^4+n}{\frac{1}{4}n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{4}}$$
$$=48$$ ··· ③

답 48

채점 기준표

① 공통부분을 좌표평면 위에 나타낼 수 있다.	40%
② $S(n)$을 구할 수 있다.	30%
③ 극한값을 구할 수 있다.	30%

1281 **전략** $f(x)=f(-x)$이므로 함수 $f(x)$는 우함수이고, 그 그래프가 y축에 대하여 대칭이다.

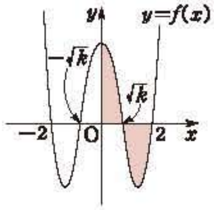
풀이 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $f(x)=0$에서

$$(x^2-4)(x^2-k)=0$$
$$(x+2)(x-2)(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})=0$$
$$\therefore x=\pm 2 \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{k}$$

한편 $f(-x)=\{(-x)^2-4\}\{(-x)^2-k\}=(x^2-4)(x^2-k)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이고, $A+C=B$이므로

$$\frac{B}{2}=A=C \quad \cdots ❶$$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_0^2 (x^2-4)(x^2-k)dx=0 \quad \cdots ❷$$
$$\int_0^2 \{x^4-(4+k)x^2+4k\}dx=0$$
$$\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4+k}{3}x^3+4kx\right]_0^2=0$$
$$\frac{32}{5}-\frac{8}{3}(4+k)+8k=0$$
$$80k=64 \qquad \therefore k=\frac{4}{5} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{4}{5}$

채점 기준표

❶ $\frac{B}{2}=A=C$임을 알 수 있다.	30%
❷ $\int_0^2 (x^2-4)(x^2-k)dx=0$임을 알 수 있다.	30%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40%

1282 **전략** 점 A의 시각 t에서의 위치를 식으로 나타내고 그 최솟값을 구한다.

풀이 점 A의 시각 t에서의 위치 x는

$$x=10+\int_0^t (2t-4)dt$$
$$=10+\left[t^2-4t\right]_0^t$$
$$=t^2-4t+10$$
$$=(t-2)^2+6 \quad \cdots ❶$$

따라서 점 A는 $t=2$일 때 원점에서 가장 가까이 있으며 그때의 점 A의 위치는 6이다. ⋯ ❷

답 6

채점 기준표

❶ 점 A의 시각 t에서의 위치를 구할 수 있다.	80%
❷ 점 A의 위치를 구할 수 있다.	20%

1283 **전략** 점 P_n이 다시 원점을 지날 때의 시각을 a라 하면 $a>2$이고 $\int_0^a v_n(t)dt=0$이 성립한다.

풀이 $v_n(t)=0$일 때 점 P_n이 운동 방향을 바꾸므로

$$\frac{1}{2^n}\cdot t(2-t)=0 \qquad \therefore t=2\,(\because t>0)$$

점 P_n이 다시 원점을 지날 때의 시각을 $t=a$라 하면 $a>2$이므로

$$\int_0^a \frac{1}{2^n}(2t-t^2)dt=\frac{1}{2^n}\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{2^n}\left(a^2-\frac{a^3}{3}\right)$$

즉 $\frac{1}{2^n}\left(a^2-\frac{a^3}{3}\right)=0$에서 $\quad 3a^2-a^3=0$

$$a^2(3-a)=0 \qquad \therefore a=3\,(\because a>2) \quad \cdots ❶$$

$$\therefore S_n=\int_0^3 \left|\frac{1}{2^n}(2t-t^2)\right|dt$$
$$=\int_0^2 \frac{1}{2^n}(2t-t^2)dt+\int_2^3 \left\{-\frac{1}{2^n}(2t-t^2)\right\}dt$$
$$=\frac{1}{2^n}\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^2+\frac{1}{2^n}\left[-t^2+\frac{1}{3}t^3\right]_2^3$$
$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$$
$$=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2^n} \quad \cdots ❷$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$은 첫째항이 $\frac{4}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{3} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{8}{3}$

채점 기준표

❶ 점 P_n이 다시 원점을 지날 때의 시각을 구할 수 있다.	40%
❷ S_n을 구할 수 있다.	40%
❸ $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구할 수 있다.	20%

memo