쎈

정답 및 풀이

V 집합과 명제

12 집합의 뜻과 표현 2
13 집합의 연산 11
14 명제 25

VI 함수

15 함수 45
16 유리식과 유리함수 64
17 무리식과 무리함수 86

VII 순열과 조합

18 순열과 조합 99

···› 정답을 확인하려 할 때에는 「**빠른 정답 찾기**」를 이용하면 편리합니다.

12 집합의 뜻과 표현

0001 답 ×

0002 답 ○

0003 답 ×

0004 답 ○

0005 답 $\in$

0006 답 $\in$

0007 답 $\in$

0008 답 $\not\in$

0009 답 $\not\in$

0010 답 $\in$

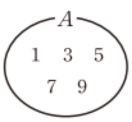
0011 답 $\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$

0012 답 $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

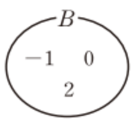
0013 답 $\{x \mid x$는 자연수$\}$

0014 답 $\{x \mid x$는 100 이하의 5의 양의 배수$\}$

0015 답



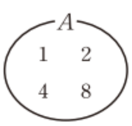
0016 답



0017 답 $A=\{1, 2, 4, 8\}$

0018 답 $A=\{x \mid x$는 8의 양의 약수$\}$

0019 답



0020 답 무

0021 답 유

0022 답 유, 공

0023 답 무

0024 답 0

0025 답 3

0026 $x^2-3<0$에서 $\quad (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})<0$

$\therefore -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

부등식을 만족시키는 정수 x는 $-1, 0, 1$의 3개이므로

$n(\{x \mid x^2-3<0, x$는 정수$\})=3$ 답 3

0027 $X=\{3, 6, 9, \cdots\}$, $Y=\{6, 12, 18, \cdots\}$이므로

$Y \subset X$ 답 $Y \subset X$

0028 모든 정사각형은 마름모이므로

$X \subset Y$ 답 $X \subset Y$

0029 $x^2=4$에서 $\quad x=\pm 2$

따라서 $X=\{-2, 2\}$이므로

$Y \subset X$ 답 $Y \subset X$

0030 $X=\varnothing$

$|y| \le 1$에서 $\quad -1 \le y \le 1$

이때 y는 정수이므로 $\quad y=-1, 0, 1$

따라서 $Y=\{-1, 0, 1\}$이므로

$X \subset Y$ 답 $X \subset Y$

0031 답 $\varnothing$

0032 답 $\{0\}, \{1\}, \{2\}$

0033 답 $\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$

0034 답 $\{0, 1, 2\}$

0035 답 $\varnothing, \{\varnothing\}$

0036 답 $\varnothing, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}$

0037 답 $\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}$

0038 답 $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$

0039 답 $A=B$

0040 답 $A \ne B$

0041 답 $A=B$

0042 답 $A \ne B$

0043 9의 양의 약수는 1, 3, 9이므로 집합 $\{1, 3, 9\}$의 진부분집합은

$\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{9\}, \{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}$

답 풀이 참조

0044 $n(A)=4$이므로 부분집합의 개수는

$2^4=16$ 답 16

0045 $n(A)=4$이므로 진부분집합의 개수는

$2^4-1=15$ 답 15

0046 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$ — 집합 $\{1, 3, 4\}$의 부분집합의 개수와 같다. 답 8

0047 1, 3을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{4-2}=2^2=4$ — 집합 $\{2, 4\}$의 부분집합의 개수와 같다. 답 4

유형 01 집합의 뜻 본책 12쪽

집합 ➡ 어떤 조건에 의하여 그 대상을 분명히 정할 수 있는 것들의 모임

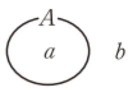
0048 '아름다운', '가까운', '작은', '잘 어울리는'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

답 ⑤

0049 '높은', '큰'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 보기에서 집합인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ의 3개이다. 답 ③

유형 02 집합과 원소 사이의 관계 본책 12쪽

① a가 집합 A에 속하면 ➡ $a\in A$
② b가 집합 A에 속하지 않으면 ➡ $b\notin A$



0050 ① $\sqrt{2}$는 실수이므로 $\sqrt{2}\in R$
② i는 허수이므로 $i\notin R$
③ $i^4=1$은 실수이므로 $i^4\in R$
④ $\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$은 무리수이므로 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}\notin Q$
⑤ $\sqrt{9}=3$은 유리수이므로 $\sqrt{9}\in Q$ 답 ③

0051 $x^3+2x^2-3x=0$에서

$x(x^2+2x-3)=0$, $x(x+3)(x-1)=0$

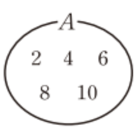
$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 $0\in A$, $1\in A$, $2\notin A$, $3\notin A$이므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

유형 03 집합의 표현 방법 본책 12쪽

집합을 나타내는 방법은 원소나열법, 조건제시법, 벤다이어그램이 있다.
예 10 이하의 짝수인 자연수의 집합을 A라 할 때
➡ ① 원소나열법: $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$
② 조건제시법: $A=\{x\mid x$는 10 이하의 짝수인 자연수$\}$
③ 벤다이어그램:



0052 ① $A=\{1, 5\}$ ② $A=\{1, 2, 5, 10\}$
③ $A=\{1, 3, 5, 15\}$ ④ $A=\{3, 6, 9, 12, 15\}$
⑤ $A=\{5, 10, 15\}$ 답 ③

0053 ⑤ $\{2, 3, 4, \cdots, 9\}$ 답 ⑤

0054 ① $6=2^1\times3^1$ ② $12=2^2\times3^1$
③ $18=2^1\times3^2$ ④ $45=3^2\times5^1$
⑤ $54=2^1\times3^3$ 답 ④

0055 집합 A의 두 원소 a, b에 대하여 ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$X=\{-2, 0, 1, 4\}$

답 $X=\{-2, 0, 1, 4\}$

a \ b	-1	0	2
-1	1	0	-2
0	0	0	0
2	-2	0	4

유형 04 유한집합과 무한집합 본책 13쪽

① 유한집합 ➡ 원소가 유한개인 집합
② 무한집합 ➡ 원소가 무수히 많은 집합
③ 공집합 ➡ 원소가 하나도 없는 집합

0056 ② $\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$: 무한집합
③ $\{1\}$: 유한집합
④ $\left\{\cdots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$: 무한집합
⑤ $\{a+b\mid 0<a+b<2\}$: 무한집합 답 ③

0057 ① 원소가 1개 있으므로 공집합이 아니다.
③, ④ $\{x\mid -1<x<1\}$이므로 공집합이 아니다.
⑤ $\{-1\}$이므로 공집합이 아니다. 답 ②

0058 4의 양의 배수는 4, 8, 12, 16, ⋯이므로 k의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4이다. ⋯ ❶
따라서 k의 최댓값은 4이다. ⋯ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	80 %
❷ k의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

참고 $k=4$일 때, $A=\{x\mid x$는 $x<4$인 4의 양의 배수$\}=\varnothing$
$k=5$일 때, $A=\{x\mid x$는 $x<5$인 4의 양의 배수$\}=\{4\}\neq\varnothing$

유형 05 유한집합의 원소의 개수 본책 13쪽

$n(A)$ ➡ 유한집합 A의 원소의 개수
예 $n(\varnothing)=0$, $n(\{\varnothing\})=1$, $n(\{1, 2\})=2$

0059 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{11, 22, 33, \cdots, 99\}$이므로

$n(A)=5$, $n(B)=9$

$\therefore n(B)-n(A)=4$

답 ①

0060 $B=\{2, 3, 5, 7\}$ ··· ❶

$x\in A$, $y\in B$인 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	2	3	5	7
1	3	4	6	8
2	4	5	7	9
3	5	6	8	10

$C=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ··· ❷

$\therefore n(C)=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 집합 C를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	60 %
❸ $n(C)$를 구할 수 있다.	10 %

0061 ① $n(\{1, 2, 3\})=n(\{4, 5, 6\})=3$

② $A=\{0\}$이면 $n(A)=1$이다.

③ $n(A)=0$이면 $A=\varnothing$이다.

④ $n(\{\varnothing\})-n(\varnothing)=1-0=1$

⑤ $n(\{60\})-n(\{55\})=1-1=0$

답 ④

0062 $A=\{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$이므로

$n(A)=4$ ··· ❶

또 $n(B)=k$이므로 $n(A)+n(B)=11$에서

$4+k=11$

$\therefore k=7$ ··· ❷

답 7

채점 기준	비율
❶ $n(A)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 06 기호 ∈, ⊂의 사용

본책 14쪽

① 원소와 집합 사이의 관계

➡ ∈, ∉를 사용하여 나타낸다.

② 집합과 집합 사이의 포함 관계

➡ ⊂, ⊄를 사용하여 나타낸다.

0063 ㄱ. $b\in A$ 또는 $\{b\}\subset A$

ㄷ. $c\in A$ 또는 $\{c\}\subset A$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

답 ④

0064 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$

③ $\{1, 2, 3\}\subset B$

답 ③

0065 ① a는 집합 A의 원소이므로 $\{a\}\subset A$ 또는 $a\in A$

② $\{b\}$는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{b\}\not\in A$

③ $\{b, c\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{b, c\}\in A$

④ $b\not\in A$이므로 $\{a, b\}\not\subset A$

⑤ $b\not\in A$, $c\not\in A$이므로 $\{a, b, c\}\not\subset A$

답 ③

SSEN 특강

집합을 원소로 갖는 집합

집합 $A=\{a, \{b, c\}\}$는 집합을 원소로 갖는 집합이다. 집합 A의 원소는 a와 $\{b, c\}$이고, 집합 $\{\{b, c\}\}$는 집합 A의 부분집합이다. 즉

$a\in A$, $\{b, c\}\in A$, $\{\{b, c\}\}\subset A$

0066 ① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$

②, ④ $1\in A$, $3\in A$이므로 $\{1, 3\}\subset A$

⑤ $\{2\}\not\in A$

답 ⑤

유형 07 집합 사이의 포함 관계

본책 14쪽

집합 사이의 포함 관계를 알아보려면 각 집합을 원소나열법으로 나타내어 각 원소를 비교한다.

➡ 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속하면 $A\subset B$이다.

0067 $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{0\}$, $Z=\{0, 1\}$이므로 $|-1|=|1|=1$

$Y\subset Z\subset X$

답 ④

0068 주어진 벤다이어그램에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $A\subset B$이다.

① $A\not\subset B$, $B\not\subset A$

② $B\subset A$

③ $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $B=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이므로

$B\subset A$

④ $A=\{3, 6, 9\}$, $B=\{1, 3, 5, 15\}$이므로

$A\not\subset B$, $B\not\subset A$

⑤ $A\subset B$

답 ⑤

0069 $x\in A$, $y\in A$인 x, y에 대하여 $x-2y$, $x-y$의 값을 구하면 각각 다음 [표 1], [표 2]와 같다.

x \ y	0	1	2
0	0	-2	-4
1	1	-1	-3
2	2	0	-2

[표 1]

x \ y	0	1	2
0	0	-1	-2
1	1	0	-1
2	2	1	0

[표 2]

따라서 $B=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$,

$C=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$이므로

$A\subset C\subset B$

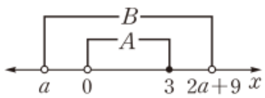
답 ②

유형 08 집합 사이의 포함 관계가 성립하도록 하는 상수 구하기

본책 15쪽

집합 사이의 포함 관계가 성립하도록 하는 상수를 구할 때에는
① 각 집합을 원소나열법으로 나타내어 각 원소를 비교한다.
➡ $A\subset B$일 때, A의 원소는 모두 B의 원소이다.
② 수직선을 이용하여 포함 관계가 성립할 조건을 찾는다.

0070 $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



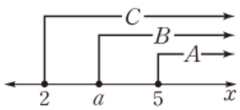
$a\le 0$, $2a+9>3$

$2a+9>3$에서 $a>-3$이므로

$-3<a\le 0$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0의 3개이다. 답 3

0071 $A\subset B\subset C$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$2\le a\le 5$

따라서 정수 a는 2, 3, 4, 5의 4개이다. 답 ④

0072 $x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$\therefore A=\{-3, 2\}$ ⋯ ❶

$A\subset B$이려면 $a>2$ ⋯ ❷

따라서 정수 a의 최솟값은 3이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0073 $X\subset Y$가 성립하려면 $3\in Y$, $-a\in Y$이어야 한다.

(i) $3=a^2+2$, 즉 $a=\pm 1$일 때,

$a=1$이면 $X=\{-1, 3\}$, $Y=\{-3, 1, 3\}$이므로

$X\not\subset Y$

$a=-1$이면 $X=\{1, 3\}$, $Y=\{-5, 1, 3\}$이므로

$X\subset Y$

(ii) $3=a-4$, 즉 $a=7$일 때,

$X=\{-7, 3\}$, $Y=\{1, 3, 51\}$이므로 $X\not\subset Y$

(i), (ii)에서 $a=-1$ 답 -1

다른 풀이 $-a\in Y$임을 이용하면

(i) $-a=a^2+2$, 즉 $a^2+a+2=0$일 때,

실수 a는 존재하지 않는다. $D=1^2-4\cdot 1\cdot 2=-7<0$

(ii) $-a=a-4$, 즉 $a=2$일 때,

$X=\{-2, 3\}$, $Y=\{-2, 1, 6\}$이므로 $X\not\subset Y$

(iii) $-a=1$, 즉 $a=-1$일 때,

$X=\{1, 3\}$, $Y=\{-5, 1, 3\}$이므로 $X\subset Y$

이상에서 $a=-1$

유형 09 부분집합 구하기

본책 15쪽

집합 $A=\{1, 2, 3\}$의 부분집합을 모두 구하면
➡ 원소의 개수가 0: $\varnothing$
원소의 개수가 1: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$
원소의 개수가 2: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$
원소의 개수가 3: $\{1, 2, 3\}$

0074 주어진 집합은

$\{x\,|\,x=3n-2,\ n=2, 3, 5\}=\{4, 7, 13\}$

이므로 구하는 부분집합은

$\varnothing$, $\{4\}$, $\{7\}$, $\{13\}$, $\{4, 7\}$, $\{4, 13\}$, $\{7, 13\}$, $\{4, 7, 13\}$

답 풀이 참조

0075 ① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 A의 부분집합이다.

② $\{1, 2, 3\}\subset A$

③ $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$의 3개

④ $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$의 3개

⑤ $\{1, 2, 3\}$의 1개 답 ①

0076 $A=\{3, 6, 9, 12\}$에 대하여 $B\subset A$이고 $n(B)=3$을 만족시키는 집합 B는 A의 부분집합 중에서 원소가 3개인 집합이므로

$\{3, 6, 9\}$, $\{3, 6, 12\}$, $\{3, 9, 12\}$, $\{6, 9, 12\}$

의 4개이다. 답 4

0077 집합 A의 부분집합 중에서 원소의 합이 20 이상이 되려면 원소가 3개 이상이어야 한다.

(i) 원소가 3개인 경우

$\{2, 8, 10\}$, $\{4, 6, 10\}$, $\{4, 8, 10\}$, $\{6, 8, 10\}$의 4개이다. ⋯ ❶

(ii) 원소가 4개인 경우

$\{2, 4, 6, 8\}$, $\{2, 4, 6, 10\}$, $\{2, 4, 8, 10\}$, $\{2, 6, 8, 10\}$, $\{4, 6, 8, 10\}$의 5개이다. ⋯ ❷

(iii) 원소가 5개인 경우

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$의 1개이다. ⋯ ❸

이상에서 구하는 부분집합의 개수는

$4+5+1=10$ ⋯ ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ 원소가 3개일 때의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 원소가 4개일 때의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 원소가 5개일 때의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 원소의 합이 20 이상인 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	10 %

유형 10 서로 같은 집합 본책 16쪽

$A\subset B$, $B\subset A$ ➡ $A=B$ ➡ 두 집합 A, B의 원소가 서로 같다.

0078 $A=B$이므로 $\quad a^2-2a=3$

$a^2-2a-3=0$, $\quad (a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

(i) $a=-1$일 때,

$A=\{-2, 3, 4\}$, $B=\{-2, 3, 4\}$이므로

$A=B$

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{3, 6, 8\}$, $B=\{-2, 3, 4\}$이므로

$A\neq B$

(i), (ii)에서 $\quad a=-1$

답 -1

0079 $A\subset B$, $B\subset A$이므로 $\quad A=B$

이때 $x-2<x+1<x+3$이므로

$x-2=3$, $x+1=6$, $x+3=8$

$\therefore x=5$

답 ③

0080 ㄱ. $\{2, 4\}$ ㄴ. $\{1, 2, 4\}$

ㄷ. $\{2, 4, 6\}$ ㄹ. $\{2, 4\}$

따라서 집합 A와 서로 같은 집합은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

0081 $A=B$이므로

$a+2b=-5$, $2a-3b=4$ ⋯ ❶

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-2$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 두 일차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0082 $A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{1, 10, a-2, b+2\}$이고 $A=B$이므로

$a-2=2$, $b+2=5$ 또는 $a-2=5$, $b+2=2$

$\therefore a=4$, $b=3$ 또는 $a=7$, $b=0$

그런데 a, b는 자연수이므로 $\quad a=4$, $b=3$

$\therefore ab=12$

답 ③

유형 11 부분집합의 개수 본책 17쪽

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

① A의 부분집합의 개수 ➡ 2^n

② A의 진부분집합의 개수

➡ 부분집합 중에서 자기 자신을 제외한 집합의 개수

➡ 2^n-1

0083 두 집합 A, B의 원소의 개수를 각각 a, b라 하면

$2^a=64$, $2^b-1=127$

$2^a=64=2^6$에서 $\quad a=6$

$2^b=128=2^7$에서 $\quad b=7$

$\therefore n(A)+n(B)=13$

답 ③

0084 $f(x)=x^3-3x^2-x+3$이라 하면

$f(-1)=-1-3+1+3=0$,

$f(1)=1-3-1+3=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ & & -1 & 4 & -3 \\ \hline 1 & 1 & -4 & 3 & \boxed{0} \\ & & 1 & -3 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)$

⋯ ❶

따라서 방정식 $f(x)=0$의 해는

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

이므로 $\quad A=\{1, 3\}$ ⋯ ❷

즉 $n(A)=2$이므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^2=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ x^3-3x^2-x+3을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ 집합 A를 구할 수 있다.	30 %
❸ 집합 A의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0085 집합 A의 원소 중에서 12의 약수는

1, 2, 3, 4, 6, 12

구하는 부분집합은 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로

$2^6-1=63$

답 63

유형 12 특정한 원소를 갖는(갖지 않는) 부분집합의 개수 본책 17쪽

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

① A의 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수

➡ 2^{n-k} (단, $k<n$)

② A의 특정한 원소 l개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수

➡ 2^{n-l} (단, $l<n$)

③ A의 원소 중에서 k개는 반드시 원소로 갖고, l개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수 ➡ 2^{n-k-l} (단, $k+l<n$)

0086 $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

X는 A의 진부분집합이고, 1, 2를 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는

집합 $\{3, 6, 9, 18\}$의 진부분집합의 개수와 같다.

$2^{6-2}-1=2^4-1=15$

답 15

0087 2, 3을 반드시 원소로 갖고 7을 원소로 갖지 않는 부분집합 X의 개수는

$2^{7-2-1}=2^4=16$

답 ④

0088 $n(A)=k$이므로 1, 2를 반드시 원소로 갖고 3, 4, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{k-2-3}=32=2^5$

$k-5=5 \qquad \therefore k=10$

답 ③

유형 13 $A \subset X \subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수

본책 18쪽

$A \subset X \subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수

⇒ B의 부분집합 중에서 A의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수

0089 $x^2-7x+10=0$에서 $\qquad (x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=5 \qquad \therefore A=\{2, 5\}$

또 $B=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로 집합 X의 개수는 $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$의 부분집합 중에서 2, 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^{6-2}=2^4=16$

답 ③

0090 집합 X의 개수는 B의 부분집합 중에서 a, b, f를 반드시 원소로 갖고 d를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{6-3-1}=2^2=4$

답 ②

0091 $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $\underbrace{B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}}_{\text{12의 양의 약수의 집합}}$ ⋯ ❶

따라서 집합 X의 개수는 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 6을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로 ⋯ ❷

$2^{6-4}=2^2=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 조건을 만족시키는 집합 X의 개수와 같은 경우를 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0092 집합 X의 개수는 A의 부분집합 중에서 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{n-3}=16=2^4, \qquad n-3=4$

$\therefore n=7$

답 7

유형 14 여러 가지 부분집합의 개수

본책 18쪽

① $\{1, 2, 3\}$의 부분집합 중에서 1 또는 2를 원소로 갖는 집합의 개수는 $\{1, 2, 3\}$의 부분집합 중에서 $\{3\}$의 부분집합을 제외한 집합의 개수와 같다.

⇒ $2^3-2=8-2=6$

② $\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합 중에서 짝수만 원소로 갖는 집합 $\{2, 4\}$의 부분집합을 제외한 집합의 개수와 같다.

⇒ $2^4-2^2=16-4=12$

0093 $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$의 부분집합 중에서 3 또는 6을 원소로 갖는 부분집합은 A의 부분집합 중에서 $\{9, 12, 15, 18\}$의 부분집합을 제외하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^6-2^4=64-16=48$

답 ①

0094 $A=\{5, 10, 15, 20, 25\}$의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합은 A의 부분집합 중에서 $\{10, 20\}$의 부분집합을 제외하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^5-2^2=32-4=28$

답 28

0095 전략 집합 S를 원소나열법으로 나타내고, 주어진 조건을 이용하여 나머지 원소를 찾는다.

풀이 집합 S의 원소가 3개이므로 $S=\{0, 5, a\}$ $(a\neq 0,\ a\neq 5)$라 하자. 조건 (나)에 의하여 $(5+a)\in S$이므로

$5+a=0$ 또는 $5+a=5 \qquad \therefore a=-5$ 또는 $a=0$

그런데 $a\neq 0$이므로 $\qquad a=-5$

따라서 $S=\{-5, 0, 5\}$이므로 0과 5를 제외한 집합 S의 나머지 원소는 -5이다.

답 -5

0096 전략 주어진 조건을 이용하여 집합 S의 원소를 구해 본다.

풀이 x와 $8-x$가 모두 자연수이므로

$x\geq 1,\ 8-x\geq 1 \qquad \therefore 1\leq x\leq 7$

따라서 집합 S의 원소가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이다.

① $6\in S$이면 $\qquad 8-6=2\in S$

② 원소가 1개인 집합 S는 $\qquad \underbrace{S=\{4\}}_{4\in S\text{이면 } 8-4=4\in S}$

③ 원소가 2개인 집합 S는

$\{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}$

1∈S이면 7∈S, 2∈S이면 6∈S, 3∈S이면 5∈S이므로 1과 7, 2와 6, 3과 5는 어느 하나가 S의 원소이면 나머지 하나도 반드시 S의 원소이다.

의 3개이다.

④ 원소가 5개인 집합 S는

$\{1, 2, 4, 6, 7\}, \{1, 3, 4, 5, 7\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}$

의 3개이다.

⑤ 1을 원소로 갖는 집합 S는

$\{1, 7\}, \{1, 4, 7\}, \{1, 2, 6, 7\}, \{1, 3, 5, 7\},$
$\{1, 2, 4, 6, 7\}, \{1, 3, 4, 5, 7\}, \{1, 2, 3, 5, 6, 7\},$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

의 8개이다.

답 ⑤

0097 전략 집합 X의 원소를 모두 구해 본다.

풀이 $X=\{x+y\,|\,x\in A,\ y\in B\}$

$=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a+1, a+3, a+5\}$

이므로 $n(X)=10$이 되려면

$a+3<2,\ a+5\geq 2$ 또는 $a+1\leq 9,\ a+3>9$

$\therefore -3\leq a<-1$ 또는 $6<a\leq 8$

따라서 자연수 a의 최댓값은 8이다.

답 8

0098 전략 주어진 조건을 이용하여 집합 A의 원소가 어떤 꼴인지 알아본다.

풀이 (i) $2\in A$에서 조건 (나)에 의하여 $2\cdot 2\in U$이므로 $\qquad 4\in A$

또 조건 (나)에 의하여 $2\cdot4\in U$이므로 $\quad 8\in A$

이와 같이 계속하면 $\underbrace{2^n(n=1, 2, 3, 4, 5, 6)}_{2^n\le100}$은 집합 A의 원소이다.

$\therefore \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}\subset A$

(ii) $5\in A$에서 조건 (나)에 의하여 $2\cdot5\in U$이므로 $\quad 10\in A$

또 조건 (나)에 의하여 $2\cdot10\in U$이므로 $\quad 20\in A$

이와 같이 계속하면

$\{5, 10, 20, 40, 80\}\subset A$

(i), (ii)에서

$\{2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 64, 80\}\subset A$

이므로 원소의 개수가 최소인 집합 A는

$\{2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 64, 80\}$

따라서 집합 A의 원소의 개수의 최솟값은 11이다. 답 ③

0099 전략 최대공약수의 성질을 이용하여 집합 $A_k(n)$을 구한다.

풀이 ㄱ. $A_4(20)=\{x|G(20, x)=4\}$

이때 $G(20, 8)=4$이므로

$8\in A_4(20)$

ㄴ. $A_3(6)=\{x|G(6, x)=3\}$의 원소는 3을 인수로 갖고 2를 인수로 갖지 않는 100 이하의 자연수이다.

또 $A_3(12)=\{x|G(12, x)=3\}$의 원소는 3을 인수로 갖고 2를 인수로 갖지 않는 100 이하의 자연수이다.

$\therefore A_3(6)=A_3(12)$

ㄷ. $A_1(7)=\{x|G(7, x)=1\}$은 100 이하의 자연수 중에서 7과 서로소인 자연수의 집합이다.

이때 7과 서로소가 아닌 자연수는 7의 배수뿐이고 100 이하의 자연수 중에서 7의 배수는 14개이므로 $A_1(7)$의 원소의 개수는

$100-14=86$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0100 전략 a, b를 각각 4로 나누었을 때의 나머지가 서로 같으려면 $a-b$가 4의 배수가 되어야 한다.

풀이 (i) 집합 A의 경우

$2x\equiv1$이므로 $2x-1$은 4의 배수가 되어야 한다.

그런데 자연수 x에 대하여 $2x-1$은 홀수이므로 $2x-1$이 4의 배수가 되도록 하는 자연수 x는 존재하지 않는다.

$2x-1=4k$ (k는 자연수)로 놓으면 $x=2k+\frac{1}{2}$이므로 x는 자연수가 아니다.

$\therefore A=\varnothing$

(ii) 집합 B의 경우

$x^3+2x^2\equiv x^2-x$이므로

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-x^2+x &= x^3+x^2+x \\ &= x(x^2+x+1) \\ &= x\{x(x+1)+1\} \end{aligned}$$

이 4의 배수가 되어야 한다.

이때 $x(x+1)$은 짝수이므로 $x(x+1)+1$은 홀수이다. — 이웃한 두 자연수의 곱은 항상 짝수이다.

따라서 $x\{x(x+1)+1\}$이 4의 배수이려면 x가 4의 배수이어야 한다.

$\therefore B=\{4, 8, 12, \cdots, 96, 100\}$

(i), (ii)에서 $n(A)=0$, $n(B)=25$이므로

$n(A)+n(B)=25$ 답 ①

0101 전략 n, k가 짝수일 때와 홀수일 때로 경우를 나누어 생각해 본다.

풀이 ㄱ. $A(2, 3)=\{x|2<x<5, x\text{는 짝수}\}=\{4\}$이므로

$4\in A(2, 3)$

ㄴ. $A(n^2, k)=\{x|n^2<x<n^2+k, x\text{는 짝수}\}$

n이 짝수이면 n^2도 짝수이고, n이 홀수이면 n^2도 홀수이므로 집합 $A(n, k)$의 원소의 개수와 집합 $A(n^2, k)$의 원소의 개수는 같다.

ㄷ. (i) k가 짝수일 때,

$A(2n, k)=\{2n+2, 2n+4, \cdots, 2n+k-2\}$,

$A(2n-1, k)=\{2n, 2n+2, 2n+4, \cdots, 2n+k-2\}$

이므로 $\quad A(2n, k)\subset A(2n-1, k)$

(ii) k가 홀수일 때,

$A(2n, k)=\{2n+2, 2n+4, \cdots, 2n+k-1\}$,

$A(2n-1, k)=\{2n, 2n+2, 2n+4, \cdots, 2n+k-3\}$

이므로 $\quad A(2n, k)\not\subset A(2n-1, k)$

(i), (ii)에서 $A(2n, k)\subset A(2n-1, k)$를 만족시키는 k는 짝수이다.

k가 짝수일 때,

$A(k, k)=\{k+2, k+4, \cdots, 2k-2\}$,

$A(k+1, k)=\{k+2, k+4, \cdots, 2k\}$

이므로 $\quad A(k, k)\subset A(k+1, k)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0102 전략 먼저 원소의 개수가 2이면서 1을 원소로 갖는 부분집합을 구한다.

풀이 집합 A의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2이면서 1을 원소로 갖는 부분집합은

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}$

의 4개이다. 즉 $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_{10}$ 중에서 1을 원소로 갖는 집합은 위의 4개이다. 마찬가지로 2, 3, 4, 5를 원소로 갖는 집합도 각각 4개씩 있다.

$$\begin{aligned} \therefore S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{10} &= 4(1+2+3+4+5) \\ &= 4\cdot15=60 \end{aligned}$$

답 ②

0103 전략 $B=C$이면 두 집합의 모든 원소가 같음을 이용한다.

풀이 $B=\{x^2+1|x\in A\}\subset\{x||x|\le5, x\text{는 정수}\}$이므로

$1\le x^2+1\le5, \quad 0\le x^2\le4 \quad \therefore -2\le x\le2$

그런데 x는 정수이므로 $V=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$라 하면

$A\subset V$

조건 (가)에서 $n(A)=2$이므로

$A=\{x_1, x_2\}$ $(x_1\ne x_2, x_1\in V, x_2\in V)$라 하면

$B=\{x_1^2+1, x_2^2+1\}$, $C=\{2x_1+k, 2x_2+k\}$

$B=C$이므로

$x_1^2+1=2x_1+k$, $x_2^2+1=2x_2+k$

또는 $x_1^2+1=2x_2+k$, $x_2^2+1=2x_1+k$

(i) $x_1^2+1=2x_1+k$, $x_2^2+1=2x_2+k$일 때,

$x_1^2+1=2x_1+k$에서 $\quad x_1^2-2x_1-k+1=0$

$\therefore x_1=1\pm\sqrt{k}$

이때 $x_1 \in V$이므로 $\sqrt{k}=-1,\ 0,\ 1$

그런데 k는 자연수이므로

$\sqrt{k}=1$ $\therefore k=1$

$\therefore x_1=0$ 또는 $x_1=2$

마찬가지로 $x_2^2+1=2x_2+k$일 때에도

$x_2=0$ 또는 $x_2=2$

$x_1 \neq x_2$이므로

$x_1=0,\ x_2=2$ 또는 $x_1=2,\ x_2=0$

$\therefore A=\{0,\ 2\}$

따라서 $\alpha=2,\ \beta=1$이므로 $\alpha+\beta=3$

(ii) $x_1^2+1=2x_2+k,\ x_2^2+1=2x_1+k$일 때,

위의 두 식을 변끼리 빼면

$x_1^2-x_2^2=2(x_2-x_1)$

$(x_1+x_2)(x_1-x_2)+2(x_1-x_2)=0$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)=0$

$\therefore x_1+x_2+2=0$ ($\because x_1 \neq x_2$)

이 식을 만족시키는 $x_1,\ x_2$는

$x_1=-2,\ x_2=0$ 또는 $x_1=0,\ x_2=-2$

$\therefore A=\{-2,\ 0\},\ k=5$

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=5$이므로 $\alpha+\beta=3$

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta=3$ 답 3

다른 풀이 (i) $x_1^2+1=2x_1+k,\ x_2^2+1=2x_2+k$일 때,

$x_1^2+1=2x_1+k$에서

$x_1^2-2x_1+1=k$, $(x_1-1)^2=k$

$x_2^2+1=2x_2+k$에서 $(x_2-1)^2=k$

$x_1,\ x_2$에 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$를 각각 대입하여 k의 값을 구하면 다음 표와 같다.

x_1	-2	-1	0	1	2
x_2	-2	-1	0	1	2
k	9	4	1	0	1

이때 $x_1 \neq x_2$이면서 $(x_1-1)^2=(x_2-1)^2=k$를 만족시키는 k의 값은 1이고, 그때의 $x_1,\ x_2$의 값은

$x_1=0,\ x_2=2$ 또는 $x_1=2,\ x_2=0$

0104 전략 먼저 집합 $P(A)$의 원소의 개수를 구한다.

풀이 $P(A)$는 집합 A의 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로

$n(P(A))=2^3=8$

따라서 $P(A)$의 부분집합의 개수는

$2^8=256$ 답 256

0105 전략 m의 값에 따라 두 집합 $A_m,\ B_m$을 원소나열법으로 나타내 본다.

풀이 ㄱ. 3 이하의 소수는 2, 3이므로

$A_3=\{2,\ 3\}$

3의 양의 약수는 1, 3이므로

$B_3=\{1,\ 3\}$

$\therefore n(A_3)+n(B_3)=2+2=4$

ㄴ. 6 이하의 소수는 2, 3, 5이므로

$A_6=\{2,\ 3,\ 5\}$

$\{2,\ 3,\ 5\} \subset B_m$이려면 m은 2, 3, 5의 공배수이어야 한다.

따라서 $A_6 \subset B_m$을 만족시키는 m의 최솟값은 2, 3, 5의 최소공배수인 30이다.

ㄷ. $m=12$일 때,

$A_{12}=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\},\ B_{12}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

따라서 두 집합 $A_{12},\ B_{12}$의 부분집합의 개수는 각각 $2^5=32$, $2^6=64$이므로 집합 A_{12}의 부분집합의 개수가 집합 B_{12}의 부분집합의 개수보다 적다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

참고 ㄷ. 집합의 원소의 개수가 많을수록 부분집합의 개수도 많다. 따라서 $m>6$이면서 집합 A_m의 원소의 개수가 집합 B_m의 원소의 개수보다 적은 경우를 찾아본다.

0106 전략 특정한 원소를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 이용하여 $f(n)$을 구한다.

풀이 $f(n)$은 n을 반드시 원소로 갖고 n보다 작은 자연수를 원소로 갖지 않는 집합 X의 부분집합의 개수이므로

$f(n)=2^{10-1-(n-1)}=2^{10-n}$ (단, $1 \le n < 10$)

ㄱ. $f(8)=2^{10-8}=2^2=4$

ㄴ. $a=7,\ b=8$일 때, $7 \in X,\ 8 \in X$이고 $7<8$이지만

$f(7)=2^{10-7}=2^3=8,\ f(8)=4$

이므로 $f(7)>f(8)$

ㄷ. $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$

$=2^{10-1}+2^{10-3}+2^{10-5}+2^{10-7}+2^{10-9}$

$=2^9+2^7+2^5+2^3+2$

$=682$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

참고 $n=10$일 때, 10을 최소의 원소로 갖는 집합은 $\{10\}$뿐이므로

$f(10)=1$

0107 전략 a, 4가 B의 원소이면 $\frac{a}{2}$, 2가 A의 원소임을 이용한다.

풀이 $a \in A,\ 4 \in A$이므로 $2a \in B,\ 8 \in B$

$a \in B,\ 4 \in B$이므로 $\frac{a}{2} \in A,\ 2 \in A$ ⋯ ❶

(i) $a=2$일 때,

$1 \in A,\ 2 \in A,\ 4 \in A$이고 $n(A)=4$이므로 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ b\}$라 하면

$1+2+4+b=27$ $\therefore b=20$

따라서 $B=\{2,\ 4,\ 8,\ 40\}$이므로 집합 B의 원소 중 가장 큰 수는 40이다.

(ii) $a=8$일 때, $\frac{a}{2}=4$일 때

$2 \in A,\ 4 \in A,\ 8 \in A$이고 $n(A)=4$이므로 $A=\{2,\ 4,\ 8,\ c\}$라 하면

$2+4+8+c=27$ $\therefore c=13$

따라서 $B=\{4,\ 8,\ 16,\ 26\}$이므로 집합 B의 원소 중 가장 큰 수는 26이다.

(iii) $a\neq2$, $a\neq8$일 때,

$A=\left\{2,\ 4,\ \dfrac{a}{2},\ a\right\}$이므로

$$2+4+\frac{a}{2}+a=27 \qquad \therefore a=14$$

따라서 $B=\{4,\ 8,\ 14,\ 28\}$이므로 집합 B의 원소 중 가장 큰 수는 28이다. ··· ❷

이상에서

$$p+q+r=40+26+28=94$$ ··· ❸

답 94

채점 기준	비율
❶ 집합 B의 조건을 이용하여 집합 A, B의 원소를 구할 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 기준으로 경우를 나누어 집합 B의 원소 중 가장 큰 수를 구할 수 있다.	60 %
❸ $p+q+r$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0108 **전략** 홀수가 포함된 수의 합이 짝수가 되려면 홀수의 개수는 짝수이어야 함을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $\{3,\ 5,\ 7\}\subset X$이므로

$3\in X$, $5\in X$, $7\in X$ ······ ㉠

또 $\{2,\ 4,\ 5\}\not\subset X$이므로

$2\notin X$ 또는 $4\notin X$ ······ ㉡ ··· ❶

조건 (다)에서 $n(X)=6$이고 ㉠에 의하여 집합 X는 집합 A의 원소 중 3, 5, 7을 제외한 3개의 원소를 더 갖는다.

이때 $3+5+7=15$는 홀수이고 조건 (나)에서 $S(X)$의 값이 짝수이므로 나머지 3개의 원소의 합은 홀수이다.

3개의 수의 합이 홀수가 되는 경우는

짝수가 2개, 홀수가 1개 또는 홀수가 3개

일 때이고 ㉡을 만족시키면서 $S(X)$가 최소가 되는 경우는

$1\in X$, $2\in X$, $6\in X$ ··· ❷

따라서 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$일 때, $S(X)$가 최소가 되므로 $S(X)$의 최솟값은

$$1+2+3+5+6+7=24$$ ··· ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)를 만족시키는 집합 X의 원소에 대한 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건 (나), (다)를 만족시키고 $S(X)$가 최소일 때의 집합 X의 원소에 대한 조건을 구할 수 있다.	50 %
❸ $S(X)$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0109 **전략** $a\in A$이면 $10-a\in A$임을 이용하여 집합 A의 부분집합이 될 수 있는 집합을 찾는다.

풀이 조건 (가)에 의하여 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 어느 하나가 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.

또 $A=\{5\}$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

따라서 집합 A는 집합

$\{1,\ 9\}$, $\{2,\ 8\}$, $\{3,\ 7\}$, $\{4,\ 6\}$, $\{5\}$

중에서 일부 또는 전부를 부분집합으로 갖는 집합이다. ··· ❶

네 집합 $\{1,\ 9\}$, $\{2,\ 8\}$, $\{3,\ 7\}$, $\{4,\ 6\}$은 원소의 합이 모두 10이고 조건 (나)에서 집합 A의 모든 원소의 합은 20보다 크고 30보다 작으므로 집합 A는 네 집합

$\{1,\ 9\}$, $\{2,\ 8\}$, $\{3,\ 7\}$, $\{4,\ 6\}$

중에서 2개와 집합 $\{5\}$를 부분집합으로 갖는 집합이다. ··· ❷

네 집합 $\{1,\ 9\}$, $\{2,\ 8\}$, $\{3,\ 7\}$, $\{4,\ 6\}$의 각 집합의 원소의 곱은 9, 16, 21, 24이므로 집합 A의 모든 원소의 곱이 최소일 때의 집합 A는

$A=\{1,\ 2,\ 5,\ 8,\ 9\}$

따라서 구하는 집합 A의 모든 원소의 곱의 최솟값은

$$1\cdot2\cdot5\cdot8\cdot9=720$$ ··· ❸

답 720

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)를 만족시키는 집합 A의 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ 조건 (나)를 만족시키는 집합 A의 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 A의 모든 원소의 곱의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0110 **전략** 집합 B는 3을 반드시 원소로 갖는 A의 부분집합이다.

풀이 조건 (나)에 의하여 $3\in B$이고, 조건 (다)에 의하여

$$\frac{12}{3}=4\in B$$

이므로 집합 B는 반드시 3, 4를 원소로 갖는다.

또 조건 (다)에 의하여 1과 12, 2와 6은 어느 하나가 집합 B의 원소이면 나머지 하나도 반드시 B의 원소이다. ··· ❶

(i) $n(B)=2$인 경우

$\{3,\ 4\}$

(ii) $n(B)=4$인 경우

$\{1,\ 3,\ 4,\ 12\}$, $\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

(iii) $n(B)=6$인 경우

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ ··· ❷

이상에서 집합 B의 개수는 4이다. ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 조건 (나), (다)를 이용하여 집합 B의 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ 집합 B의 원소의 개수가 2, 4, 6일 때, 집합 B를 각각 구할 수 있다.	60 %
❸ 집합 B의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0111 **전략** 짝수인 원소가 1개, 2개, 3개인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 짝수인 원소가 1개일 때,

2를 반드시 원소로 갖고 4, 6을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{7-1-2}=2^4=16$$

마찬가지로 4를 반드시 원소로 갖고 2, 6을 원소로 갖지 않는 부분집합과 6을 반드시 원소로 갖고 2, 4를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수도 각각 16이므로

$$a_1=16\cdot3=48$$ ··· ❶

(ii) 짝수인 원소가 2개일 때,

2, 4를 반드시 원소로 갖고 6을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{7-2-1}=2^4=16$$

마찬가지로 2, 6을 반드시 원소로 갖고 4를 원소로 갖지 않는 부분집합과 4, 6을 반드시 원소로 갖고 2를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수도 각각 16이므로

$a_2=16\cdot 3=48$ ⋯ ❷

(iii) 짝수인 원소가 3개일 때,

2, 4, 6을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$a_3=2^{7-3}=2^4=16$ ⋯ ❸

이상에서 $a_1+a_2+a_3=112$ ⋯ ❹

답 112

채점 기준	비율
❶ a_1의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a_2의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a_3의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a_1+a_2+a_3$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0112 전략 먼저 집합 X가 반드시 갖는 원소와 집합 X의 가장 큰 원소를 구한다.

풀이 $A\ll X$이므로 집합 X는 집합 A의 가장 큰 원소인 4를 반드시 원소로 갖는다.

또 $X\ll B$이므로 집합 B는 집합 X의 가장 큰 원소를 반드시 원소로 갖는다.

따라서 집합 X의 가장 큰 원소는 6 또는 8이다. ⋯ ❶

(i) 집합 X의 가장 큰 원소가 6인 경우

집합 X는 6 이하의 자연수 중 4, 6을 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ ⋯ ❷

(ii) 집합 X의 가장 큰 원소가 8인 경우

집합 X는 8 이하의 자연수 중 4, 8을 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는

$2^{8-2}=2^6=64$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 구하는 집합 X의 개수는

$16+64=80$ ⋯ ❹

답 80

채점 기준	비율
❶ 집합 X가 반드시 갖는 원소와 집합 X의 가장 큰 원소를 구할 수 있다.	30 %
❷ 집합 X의 가장 큰 원소가 6일 때, 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 집합 X의 가장 큰 원소가 8일 때, 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	10 %

Ⅴ. 집합과 명제

13 집합의 연산

0113 답 $\{a, b, c, d, e\}$

0114 답 $\{x\,|\,x$는 자연수$\}$

0115 답 $\{p, q, r, s\}$

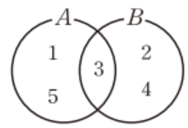
0116 답 $\{x, y, z\}$

0117 답 $\varnothing$

0118 $A=\{2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$A\cap B=\{2, 3\}$ 답 $\{2, 3\}$

0119 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=\{2, 3, 4\}$

답 $\{2, 3, 4\}$

0120 ㄴ. $A=\{1, 3, 9\}$, $B=\{3, 6, 9\}$이므로

$A\cap B=\{3, 9\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

ㄷ. $A=\{x\,|\,-1\le x\le 1\}$, $B=\{-2, 2\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$

따라서 두 집합 A, B는 서로소이다.

이상에서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0121
$$\begin{aligned}A\cap(B\cup C)&\overset{\text{분배법칙}}{=}(A\cap B)\cup(A\cap C)\\&=\{b, c\}\cup\{c, e\}\\&=\{b, c, e\}\end{aligned}$$
답 $\{b, c, e\}$

0122
$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(A\cup C)&\overset{\text{분배법칙}}{=}A\cup(B\cap C)\\&=\{1, 2\}\cup\{5\}\\&=\{1, 2, 5\}\end{aligned}$$
답 $\{1, 2, 5\}$

다른 풀이 $(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1, 2, 4, 5\}\cap\{1, 2, 3, 5\}$

$=\{1, 2, 5\}$

0123 답 $\{1, 2, 6, 7, 8\}$

0124 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$B^C=\{1, 3, 5, 7\}$ 답 $\{1, 3, 5, 7\}$

0125 답 $\{b, c\}$

0126 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$A-B=\varnothing$ 답 $\varnothing$

0127 답 $\{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

0128 답 $\{1, 3, 4, 8, 9\}$

0129 답 $\{1, 4\}$

0130 답 $\{5, 6, 7\}$

0131 답 $\{3, 8, 9\}$

0132 답 $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

0133 답 $\varnothing$ **0134** 답 A

0135 답 $\varnothing$ **0136** 답 U

0137 답 A **0138** 답 U

0139 $A\subset B$일 때
③ $A\cap B^C=A-B=\varnothing$이므로 $(A\cap B^C)\subset B$
④ $B\cap A^C=B-A\not\subset A$ 답 ④

0140 답 (가) ㄹ (나) ㄴ

0141 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이고 $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$이므로
$A^C\cap B^C=\{4, 8, 10\}$ 답 $\{4, 8, 10\}$

0142 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=5+4-7=2$ 답 2

0143 $n(A^C)=n(U)-n(A)$
$=50-32=18$ 답 18

0144 $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=18-6=12$ 답 12

0145 $n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=32-6=26$ 답 26

0146 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=32+18-6=44$ 답 44

0147 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$
$=50-(35+23-10)$
$=2$ 답 2

0148 $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)$
$=n(U)-n(A\cap B)$
$=50-10=40$ 답 40

0149 $n(X\cup Y\cup Z)$
$=n(X)+n(Y)+n(Z)-n(X\cap Y)-n(Y\cap Z)$
$-n(Z\cap X)+n(X\cap Y\cap Z)$
$=20+5+13-3-2-10+2$
$=25$ 답 25

유형 01 합집합과 교집합 본책 26쪽

각 집합을 원소나열법으로 나타낸 후 주어진 집합의 합집합과 교집합을 구한다.
① $A\cup B=\{x|x\in A$ 또는 $x\in B\}$
➡ 두 집합 A, B 중 적어도 어느 한 쪽에 속하는 원소를 모두 택한다.
② $A\cap B=\{x|x\in A$ 그리고 $x\in B\}$
➡ 두 집합 A, B에 공통으로 속하는 원소를 모두 택한다.

0150 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$, $C=\{1, 2, 4\}$이므로
$(A\cup B)\cap C=\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}\cap\{1, 2, 4\}$
$=\{1, 2\}$ 답 ①

0151 $C=\{1, 2, 4, 8\}$
③ $A\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ 답 ③

0152 집합 B는 b, d를 반드시 원소로 갖고, a, c를 원소로 갖지 않아야 하므로 B가 될 수 있는 것은 ④이다. 답 ④

유형 02 서로소인 집합 본책 26쪽

두 집합 A, B가 서로소 ➡ $A\cap B=\varnothing$ ➡ 공통인 원소가 하나도 없다.

0153 ㄱ. $\{2, 4, 6, \cdots\}$ ㄴ. $\{1, 3, 5, \cdots\}$
ㄷ. $\{3, 6, 9, \cdots\}$ ㄹ. $\varnothing$
ㅁ. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ㅂ. $\{1, 3, 5, 15\}$
이상에서 집합 $\{2, 4, 6\}$과 서로소인 집합은 ㄴ, ㄹ, ㅂ의 3개이다. 답 ③

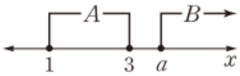
참고 ㄹ. $x^2+2x=0$에서 $x(x+2)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=-2$
따라서 $x^2+2x=0$을 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다.

0154 구하는 집합의 개수는 집합 A의 부분집합 중 a, b를 원소로 갖지 않는 집합의 개수, 즉 $\{c, d, e\}$의 부분집합의 개수와 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^3=8$ 답 8

0155 두 집합 A, B가 서로소이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 ⋯ ❶

$a>3$ ⋯ ❷

따라서 정수 a의 최솟값은 4이다. ⋯ ❸



답 4

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B가 서로소가 되도록 수직선 위에 나타낼 수 있다.	50 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 정수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 여집합과 차집합

본책 26쪽

각 집합을 원소나열법으로 나타낸 후 주어진 집합의 연산을 한다. 이때 원소나열법으로 나타내기 어려운 경우에는 수직선을 이용한다.

① $A^C=\{x|x\in U$ 그리고 $x\notin A\}$

➡ 전체집합 U에서 집합 A의 원소를 제외한다.

② $A-B=\{x|x\in A$ 그리고 $x\notin B\}$

➡ 집합 A에서 집합 B의 원소를 제외한다.

0156 $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 4, 6\}$이므로

$B^C=\{1, 3, 5\}$

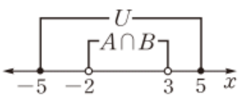
$\therefore A-B^C=\{1, 2, 3, 6\}-\{1, 3, 5\}=\{2, 6\}$

따라서 집합 $A-B^C$의 모든 원소의 합은

$2+6=8$

답 8

0157 $A\cap B=\{x|-2<x<3\}$이므로 오른쪽 그림에서



$(A\cap B)^C$

$=\{x|-5\le x\le -2$ 또는 $3\le x\le 5\}$

답 ④

0158 $A\cup B=\{a, b, c, d, e\}$, $(A-B)^C=\{c, d, e, f, g\}$

$\therefore (A\cup B)\cap(A-B)^C=\{c, d, e\}$

답 $\{c, d, e\}$

0159 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 4, 7, 10\}$이므로 ⋯ ❶

$A\cup B=\{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$, $A\cap B=\{1, 7\}$ ⋯ ❷

$\therefore (A\cup B)-(A\cap B)=\{3, 4, 5, 9, 10\}$ ⋯ ❸

답 $\{3, 4, 5, 9, 10\}$

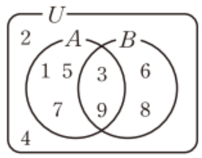
채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 두 집합 $A\cup B$, $A\cap B$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$를 구할 수 있다.	30 %

유형 04 조건을 만족시키는 집합 구하기

본책 27쪽

주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내어 구하는 집합을 찾는다.

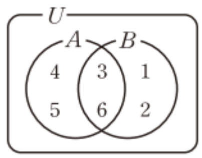
0160 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=\{3, 6, 8, 9\}$

답 ⑤

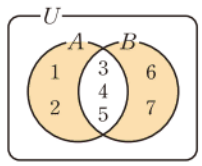
0161 $B=\{1, 2, 3, 6\}$, $A\cap B=\{3, 6\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 오른쪽 벤다이어그램에서



$A=\{3, 4, 5, 6\}$

답 $\{3, 4, 5, 6\}$

0162 집합 $(A-B)\cup(B-A)$는 오른쪽 벤다이어그램의 색칠한 부분과 같고 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로



$A-B=\{1, 2\}$, $B-A=\{6, 7\}$

따라서

$B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$

이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$3+4+5+6+7=25$

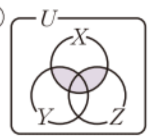
답 25

유형 05 벤다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합

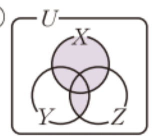
본책 27쪽

각 집합을 벤다이어그램으로 나타낸 후 주어진 벤다이어그램과 같은 것을 찾는다.

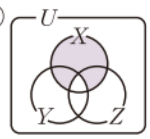
0163 ①



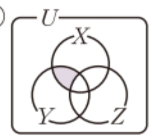
②



③

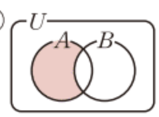


⑤

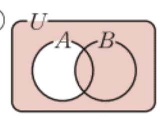


답 ④

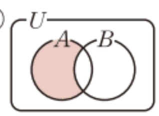
0164 ①



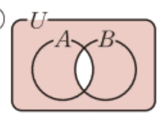
③



④



⑤



답 ②

유형 06 집합의 연산; 미지수 구하기

본책 28쪽

(i) 주어진 집합의 연산을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

(ii) 미지수의 값을 대입하여 각 집합의 원소를 구한다.

(iii) 구한 집합이 주어진 조건을 만족시키는지 확인한다.

0165 $A\cap B=\{-1, 2\}$이므로 $\quad 2\in A$

따라서 $a^2+a-4=2$이므로 $\quad a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0 \qquad \therefore a=-3$ 또는 $a=2$

(i) $a=-3$일 때,

$A=\{-1, 0, 2\}$, $B=\{2, 6, 9\}$이므로 $\quad A\cap B=\{2\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{-1, 0, 2\}$, $B=\{-1, 1, 2\}$이므로

$A\cap B=\{-1, 2\}$

(i), (ii)에서 $\quad a=2$ 답 2

0166 $A-B=\{5\}$이므로 1, 4, $3a-b$는 집합 B의 원소이다.

이때 $B=\{1, 7, a-2b\}$이므로

$3a-b=7$, $a-2b=4$ ···· ❶

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-1$ ···· ❷

$\therefore a+b=1$ ···· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 두 방정식을 세울 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0167 $A\cup B=\{0, 1, 2, 3\}$이고 $B=\{2, 3, a-1\}$이므로

$a-1=0$ 또는 $a-1=1$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

(i) $a=1$일 때,

$A=\{-1, 1, 3\}$, $B=\{0, 2, 3\}$이므로

$A\cup B=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{0, 2, 3\}$, $B=\{1, 2, 3\}$이므로

$A\cup B=\{0, 1, 2, 3\}$

(i), (ii)에서 $\quad A=\{0, 2, 3\}$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은 $\quad 0+2+3=5$ 답 5

유형 07 집합의 연산의 성질 본책 28쪽

(1) 집합의 연산 법칙

① 교환법칙: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$

② 결합법칙: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$

③ 분배법칙: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(2) 집합의 연산의 성질

① $A\cup A=A$, $A\cap A=A$ ② $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$

③ $A\cup U=U$, $A\cap U=A$ ④ $A\cup A^C=U$, $A\cap A^C=\varnothing$

⑤ $U^C=\varnothing$, $\varnothing^C=U$ ⑥ $(A^C)^C=A$

⑦ $A-B=A\cap B^C$

0168 ① $U-A^C=A$

③ $(A\cup B)\subset U$

④ $U^C=\varnothing$이므로 $\quad U^C\subset A$

⑤ $U\cap B^C=B^C$ 답 ②

0169 ① $(A^C)^C=A$

② $A\cup\varnothing=A$

③ $A\cup A^C=U$

④ $A^C\cap B=B-A$ 답 ⑤

0170 ① $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

② $A\cap(U-B^C)=A\cap B$

③ $B-A^C=B\cap(A^C)^C=A\cap B$

④ $A\cap(B\cup B^C)=A\cap U=A$

⑤ $(A\cap B)\cup(A\cap A^C)=(A\cap B)\cup\varnothing=A\cap B$ 답 ④

유형 08 집합의 연산의 성질; 포함 관계가 있는 두 집합 본책 29쪽

(1) $A\subset B$이면

① $A\cup B=B$, $A\cap B=A$ ② $A-B=\varnothing$, $A\cap B^C=\varnothing$

③ $A^C\cup B=U$ ④ $B^C\subset A^C$

(2) $A\cap B=\varnothing$이면

① $A-B=A$, $B-A=B$ ② $A\subset B^C$, $B\subset A^C$

0171 $A\cap B=A$이므로 $\quad A\subset B$

③ $A\subset B$이면 $B^C\subset A^C$이므로

$A^C\cap B^C=B^C$

⑤ $B\cap A^C=B-A$에서 $A\subset B$이고 $A\neq B$이므로

$B-A\neq\varnothing$ 답 ⑤

0172 $A^C\subset B^C$이면 $\quad B\subset A$

① $A\cup B=A$

② $A\cap(A\cup B)=A\cap A=A$

③ $(A\cap B)\cup B=B\cup B=B$

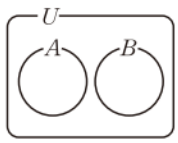
④ $A\cup(B-A)=A\cup\varnothing=A$

⑤ $(A\cup B)\cup(A\cap B)=A\cup B=A$ 답 ③

0173 $A-B=A$이면

$A\cap B=\varnothing$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B-A=B$, $B\subset A^C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

0174 $(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)=(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$이므로

$A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$

따라서 $A\subset B$, $B\subset A$이므로 $\quad A=B$ 답 ①

유형 09 조건을 만족시키는 부분집합의 개수 본책 29쪽

주어진 조건을 만족시키는 부분집합 X의 개수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 집합 X에 반드시 속하는 원소 또는 속하지 않는 원소를 찾는다.
(ii) (i)을 만족시키는 집합 X의 개수를 구한다.

0175 $(B-A)\cup X=X$에서
$(B-A)\subset X$
$\therefore \{-1\}\subset X$ …… ㉠
$A\cup X=X$에서 $A\subset X$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 집합 X는 -2, -1, 0, 1을 반드시 원소로 가져야 하므로 구하는 집합 X의 개수는
$2^{6-4}=2^2=4$
답 4

0176 $A\cup B=U$이므로 집합 B는 집합 A^C의 원소
-3, -1, 1, 3
을 반드시 원소로 가져야 한다.
따라서 집합 B의 개수는
$2^{7-4}=2^3=8$
답 ①

0177 $A-X=A$이므로
$A\cap X=\varnothing$ ··· ❶
즉 집합 X는 집합 U의 부분집합 중 a, d를 원소로 갖지 않는 집합이다. ··· ❷
따라서 집합 X의 개수는
$2^{6-2}=2^4=16$ ··· ❸
답 16

채점 기준	비율
❶ $A\cap X=\varnothing$임을 알 수 있다.	30 %
❷ 집합 X가 ❶을 만족시키기 위한 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0178 $A\cap B=\{3, 4\}$, $B\cap C=\{6\}$이므로
$X-(A\cap B)=X\cup(B\cap C)$에서
$X-\{3, 4\}=X\cup\{6\}$ …… ㉠
㉠을 만족시키려면 $3\notin X$, $4\notin X$이므로
$X-\{3, 4\}=X$
즉 ㉠에서 $X=X\cup\{6\}$이므로
$6\in X$
따라서 집합 X는 3, 4를 원소로 갖지 않고 6을 반드시 원소로 가져야 하므로 구하는 집합 X의 개수는
$2^{9-2-1}=2^6=64$
답 ④

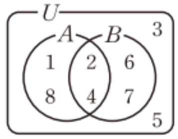
0179 $A\cup X=X$에서 $A\subset X$ …… ㉠
$B-A=\{1, 3, 6\}$이고 $(B-A)\cap X=\{1, 6\}$이므로
$1\in X$, $3\notin X$, $6\in X$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 집합 X는 1, 2, 4, 6을 반드시 원소로 갖고 3을 원소로 갖지 않아야 한다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{7-4-1}=2^2=4$
답 4

유형 10 드모르간의 법칙 본책 30쪽

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$, $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

0180 $(A\cup B)\cup(A^C\cup B^C)^C=(A\cup B)\cup((A\cap B)^C)^C$
$=(A\cup B)\cup(A\cap B)$
$=A\cup B$ ← $(A\cap B)\subset(A\cup B)$
$=\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$
따라서 구하는 원소의 개수는 6이다.
답 6

0181 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{3, 5\}$이므로
주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore B=\{2, 4, 6, 7\}$
답 $\{2, 4, 6, 7\}$

0182 $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$
$=A\cap(B^C\cup C^C)$
$=A\cap(B\cap C)^C$
$=A-(B\cap C)$
이므로 $A-(B\cap C)=\{1, 4, 5, 8\}$
이때 $A=\{1, 2, 4, 5, 8, 9\}$이므로
$2\in(B\cap C)$, $9\in(B\cap C)$
임을 알 수 있다.
답 ②

0183 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로
$(A\cap B)^C=\{1, 2, 3, 5\}$
$\therefore A\cap B=\{4\}$ …… ㉠ ··· ❶
$(B-A)^C\cap\{A\cap(A\cap B)^C\}$
$=(B-A)^C\cap\{A\cap(A^C\cup B^C)\}$
$=(B\cap A^C)^C\cap\{(A\cap A^C)\cup(A\cap B^C)\}$
$=(B^C\cup A)\cap\{\varnothing\cup(A\cap B^C)\}$
$=(A\cup B^C)\cap(A\cap B^C)$
$=\{(A\cup B^C)\cap A\}\cap B^C$ ← $A\subset(A\cup B^C)$이므로 $(A\cup B^C)\cap A=A$
$=A\cap B^C$
$=A-B$
$\therefore A-B=\{1\}$ …… ㉡ ··· ❷
㉠, ㉡에서 $A=\{1, 4\}$ ··· ❸
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$1+4=5$ ··· ❹
답 5

채점 기준	비율
❶ 집합 $A\cap B$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $(B-A)^c\cap\{A\cap(A\cap B)^c\}$를 간단히 할 수 있다.	50 %
❸ 집합 A를 구할 수 있다.	20 %
❹ 집합 A의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

유형 11 항상 같은 집합 구하기

본책 31쪽

집합의 연산의 성질과 연산 법칙을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

0184 $(X\cap Y)\subset Y$이므로 $\quad(X\cap Y)\cup Y=Y$

① $(X-Y)\cup Y=(X\cap Y^c)\cup Y$
$=(X\cup Y)\cap(Y^c\cup Y)$
$=(X\cup Y)\cap U=X\cup Y$

② $(Y-X)^c\cap Y=(Y\cap X^c)^c\cap Y$
$=(Y^c\cup X)\cap Y$
$=(Y^c\cap Y)\cup(X\cap Y)$
$=\varnothing\cup(X\cap Y)=X\cap Y$

③ $X-(X\cap Y)=X\cap(X\cap Y)^c$
$=X\cap(X^c\cup Y^c)$
$=(X\cap X^c)\cup(X\cap Y^c)$
$=\varnothing\cup(X\cap Y^c)=X-Y$

④ $X\cap(Y-X)=\varnothing$이므로 $\quad X-(Y-X)=X$

⑤ $Y\cap(X-Y)=\varnothing$이므로 $\quad Y-(X-Y)=Y$

답 ⑤

0185 $(A-B)-(A-C)$
$=(A\cap B^c)\cap(A\cap C^c)^c$
$=(A\cap B^c)\cap(A^c\cup C)$
$=\{(A\cap B^c)\cap A^c\}\cup\{(A\cap B^c)\cap C\}$
$=\{(A\cap A^c)\cap B^c\}\cup\{(A\cap C)\cap B^c\}$
$=\varnothing\cup\{(A\cap C)\cap B^c\}$ $\quad A\cap A^c=\varnothing$이므로 $(A\cap A^c)\cap B^c=\varnothing$
$=(A\cap C)-B$

답 ⑤

0186 ㄱ. $(A\cup B)\cup(A^c\cap B^c)=(A\cup B)\cup(A\cup B)^c$
$=U$

ㄴ. $A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)^c$
$=A\cap(B^c\cup C^c)$
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)$
$=(A-B)\cup(A-C)$

ㄷ. $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)^c$
$=(A\cap B)\cap(A^c\cup C^c)$
$=\{(A\cap B)\cap A^c\}\cup\{(A\cap B)\cap C^c\}$
$=\varnothing\cup\{(A\cap B)\cap C^c\}$
$=(A\cap B)-C$

ㄹ. $(A-B)\cup(A\cap C)=(A\cap B^c)\cup(A\cap C)$
$=A\cap(B^c\cup C)$
$=A\cap(B\cap C^c)^c$
$=A-(B-C)$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

0187 $(A\cup B^c)\cap(A^c\cup B)$
$=\{(A\cup B^c)\cap A^c\}\cup\{(A\cup B^c)\cap B\}$
$=\{(A\cap A^c)\cup(B^c\cap A^c)\}\cup\{(A\cap B)\cup(B^c\cap B)\}$
$=\{\varnothing\cup(B^c\cap A^c)\}\cup\{(A\cap B)\cup\varnothing\}$
$=(A^c\cap B^c)\cup(A\cap B)$

이때 $A-B=\varnothing$에서 $A\subset B$, $B^c\subset A^c$이므로
$A^c\cap B^c=B^c$, $A\cap B=A$
$\therefore$ (주어진 식)$=B^c\cup A=A\cup B^c$

답 ②

0188 $(X\cup Y)\subset Z$에서 $\quad X\subset Z$, $Y\subset Z$

$\therefore (Z-X)^c\cap Y=(Z\cap X^c)^c\cap Y$
$=(Z^c\cup X)\cap Y$
$=(Z^c\cap Y)\cup(X\cap Y)$
$=\varnothing\cup(X\cap Y)$ $\quad Z^c\cap Y=Y\cap Z^c=Y-Z$ 이때 $Y\subset Z$이므로 $Y-Z=\varnothing$
$=X\cap Y$

① $(Z\cap X)\cup(Z\cap Y)=X\cup Y$

② $(Z\cup X)^c\cap(Z\cup Y)^c=Z^c\cap Z^c=Z^c$

③ $(Z-X)\cap(Z-Y)=(Z\cap X^c)\cap(Z\cap Y^c)$
$=Z\cap(X^c\cap Y^c)$
$=Z\cap(X\cup Y)^c$
$=Z-(X\cup Y)$

④ $(X-Z^c)\cap(Y-Z^c)=\{X\cap(Z^c)^c\}\cap\{Y\cap(Z^c)^c\}$
$=(X\cap Z)\cap(Y\cap Z)$
$=X\cap Y$

⑤ $(Z\cap X)\cup(Z^c\cap Y^c)=X\cup(Z\cup Y)^c$
$=X\cup Z^c$

답 ④

유형 12 두 집합의 포함 관계

본책 31쪽

주어진 집합의 연산에 대한 등식을 연산 법칙을 이용하여 간단히 한 후 두 집합의 포함 관계를 구한다.

① $A\cap B=A \Rightarrow A\subset B$
② $A\cup B=B \Rightarrow A\subset B$

0189 $\{(A\cap B)\cup(A-B)\}\cap B$
$=\{(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\}\cap B$
$=\{A\cap(B\cup B^c)\}\cap B$
$=(A\cap U)\cap B$
$=A\cap B$

따라서 $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$이다.

답 ②

0190 $(A-B)^c\cap B^c=(A\cap B^c)^c\cap B^c$
$=(A^c\cup B)\cap B^c$
$=(A^c\cap B^c)\cup(B\cap B^c)$
$=(A^c\cap B^c)\cup\varnothing$
$=A^c\cap B^c$

따라서 $A^c\cap B^c=B^c$이므로
$B^c\subset A^c \quad \therefore A\subset B$

답 ③

유형 13 배수와 약수의 집합의 연산 본책 32쪽

① 자연수 p의 배수를 원소로 하는 집합을 A_p라 하면 자연수 m, n에 대하여

$A_m \cap A_n$ ➡ m과 n의 공배수의 집합

② 자연수 q의 약수를 원소로 하는 집합을 B_q라 하면 자연수 m, n에 대하여

$B_m \cap B_n$ ➡ m과 n의 공약수의 집합

0191 $A_3 \cap (A_4 \cup A_6) = (A_3 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_6)$
$= A_{12} \cup A_6$
$= A_6$

전체집합 U의 원소 중 6의 배수는 16개이므로 구하는 원소의 개수는 16이다.

답 16

sSEN 특강

배수와 약수의 집합

자연수 k에 대하여

① k의 배수의 집합을 A_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면

➡ $A_m \subset A_n$ ➡ $A_m \cap A_n = A_m$, $A_m \cup A_n = A_n$

예 4는 2의 배수이므로

$A_4 \subset A_2$ ➡ $A_4 \cap A_2 = A_4$, $A_4 \cup A_2 = A_2$

② k의 약수의 집합을 B_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 약수이면

➡ $B_m \subset B_n$ ➡ $B_m \cap B_n = B_m$, $B_m \cup B_n = B_n$

예 2는 4의 약수이므로

$B_2 \subset B_4$ ➡ $B_2 \cap B_4 = B_2$, $B_2 \cup B_4 = B_4$

0192 $(A_4 \cup A_8) \cap (A_3 \cup A_{12}) = A_4 \cap A_3$
$= A_{12}$

답 ④

0193 $A_{12} \cap A_{18} \cap A_{24} = (A_{12} \cap A_{18}) \cap A_{24}$
$= A_6 \cap A_{24}$
$= A_6 = \{1, 2, 3, 6\}$

따라서 집합 $A_{12} \cap A_{18} \cap A_{24}$에 속하는 원소가 아닌 것은 ④이다.

답 ④

0194 집합 $A_6 \cap A_9$는 6과 9의 공배수의 집합, 즉 18의 배수의 집합이므로 $A_6 \cap A_9 = A_{18}$

따라서 $A_p \subset A_{18}$을 만족시키는 p는 18의 배수이므로 자연수 p의 최솟값은 18이다. ··· ❶

또 집합 $B_{12} \cap B_{18}$은 12와 18의 공약수의 집합, 즉 6의 약수의 집합이므로 $B_{12} \cap B_{18} = B_6$

따라서 $B_q \subset B_6$을 만족시키는 q는 6의 약수이므로 자연수 q의 최댓값은 6이다. ··· ❷

따라서 구하는 값은

$18 + 6 = 24$ ··· ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ 자연수 p의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 자연수 q의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 p의 최솟값과 자연수 q의 최댓값의 합을 구할 수 있다.	20 %

유형 14 방정식 또는 부등식의 해의 집합의 연산 본책 33쪽

방정식 또는 부등식의 해의 집합의 교집합은 연립방정식 또는 연립부등식의 해의 집합임을 이용한다. 이때 부등식에 대한 문제는 수직선을 이용하면 편리하다.

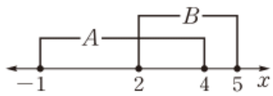
0195 $x^2 - 3x - 4 \le 0$에서 $(x+1)(x-4) \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 4$

$\therefore A = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$

$A \cap B = \{x \mid 2 \le x \le 4\}$이고,

$A \cup B = \{x \mid -1 \le x \le 5\}$이므로 오른쪽 그림에서



$B = \{x \mid 2 \le x \le 5\}$
$= \{x \mid (x-2)(x-5) \le 0\}$
$= \{x \mid x^2 - 7x + 10 \le 0\}$

따라서 $p = -7$, $q = 10$이므로

$q - p = 17$

답 17

0196 $A \cap B = \{3\}$이므로 $3 \in A$, $3 \in B$

$3 \in A$에서 $9 - 6 + a = 0$

$\therefore a = -3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$에서 $(x+1)(x-3) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 3$

$\therefore A = \{-1, 3\}$ ······ ㉠ ··· ❶

$3 \in B$에서 $27 + 3b + 12 = 0$

$\therefore b = -13$

$x^3 - 13x + 12 = 0$에서 $(x+4)(x-1)(x-3) = 0$

$\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

$\therefore B = \{-4, 1, 3\}$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 $A \cup B = \{-4, -1, 1, 3\}$ ··· ❸

답 $\{-4, -1, 1, 3\}$

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 구할 수 있다.	40 %
❷ 집합 B를 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 $A \cup B$를 구할 수 있다.	20 %

0197 $(x-4)(x-20) \ge 0$에서

$x \le 4$ 또는 $x \ge 20$

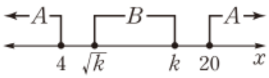
$\therefore A = \{x \mid x \le 4$ 또는 $x \ge 20\}$

$(x - \sqrt{k})(x - k) \le 0$에서 $\sqrt{k} \le k$이므로

$\sqrt{k} \le x \le k$

$\therefore B = \{x \mid \sqrt{k} \le x \le k\}$

$A\cap B=\varnothing$이 되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\sqrt{k}>4$, $k<20$

$\sqrt{k}>4$에서 $k>16$이므로

$16<k<20$

따라서 자연수 k는 17, 18, 19의 3개이다. 답 ③

0198 $x^2-x-6<0$에서 $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$

$\therefore A=\{x\mid -2<x<3\}$

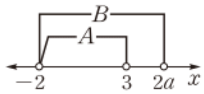
$x^2-2(a-1)x-4a<0$에서

$(x+2)(x-2a)<0$

$\therefore B=\{x\mid (x+2)(x-2a)<0\}$

이때 $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$

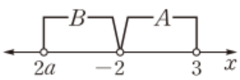
$A\subset B$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$2a\geq 3$ $\therefore a\geq \frac{3}{2}$

따라서 구하는 a의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다. 답 $\frac{3}{2}$

참고 $2a<-2$인 경우는 오른쪽 그림과 같으므로 $A\subset B$일 수 없다.



유형 15 새롭게 약속된 집합의 연산 본책 33쪽

새로운 집합의 연산을 약속한 경우

➡ 집합의 연산 법칙을 이용하여 간단한 연산으로 정리한다.

0199 ① $U\diamond A=(U-A)\cup(A-U)$

$=A^C\cup\varnothing=A^C$

② $\varnothing\diamond A=(\varnothing-A)\cup(A-\varnothing)$

$=\varnothing\cup A=A$

③ $A\diamond A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing$

④ $U\diamond\varnothing=(U-\varnothing)\cup(\varnothing-U)$

$=U\cup\varnothing=U$

⑤ $A\diamond B=(A-B)\cup(B-A)$

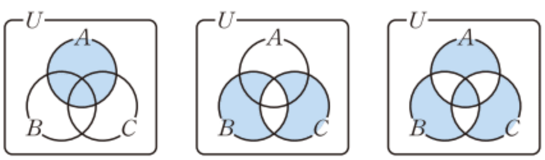
$=(B-A)\cup(A-B)$

$=B\diamond A$ 답 ③

0200 $A\circledcirc B=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

이므로 $A\circledcirc(B\circledcirc C)$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



A $\circledcirc$ $B\circledcirc C$ $=$ $A\circledcirc(B\circledcirc C)$

답 ③

0201 $A\triangleright B=(A\cup B)\cap(A^C\cup B)$

$=(A\cap A^C)\cup B$

$=\varnothing\cup B=B$

$\therefore (A\triangleright B)\triangleright B=B\triangleright B$

$=(B\cup B)\cap(B^C\cup B)$

$=B\cap U=B$ 답 ②

유형 16 유한집합의 원소의 개수 본책 34쪽

① $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

② $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$

$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

③ $n(A^C)=n(U)-n(A)$

④ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(B)$

0202 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$4=30-n(A\cup B)$

$\therefore n(A\cup B)=26$

$\therefore n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=20+15-26$

$=9$ 답 ④

0203 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=\{n(A)-n(A\cap B)\}+n(B)$

$=n(A-B)+n(B)$

$=15+10$

$=25$ 답 25

0204 $A\subset B^C$이므로 $A\cap B=\varnothing$

$\therefore n(A\cap B)=0$ ··· ❶

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$13=7+n(B)$

$\therefore n(B)=6$ ··· ❷

$\therefore n(B-A)=n(B)=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $n(A\cap B)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $n(B)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $n(B-A)$를 구할 수 있다.	30 %

0205 $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$이므로

$25=30-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=5$

이때 $n(A)=n(U)-n(A^C)=30-16=14$이므로

$n(A\cap B^C)=n(A-B)$

$=n(A)-n(A\cap B)$

$=14-5=9$ 답 9

0206 두 집합 A와 C가 서로소이므로

$A\cap C=\varnothing,\ A\cap B\cap C=\varnothing$

$\therefore\ n(A\cap C)=0,\ n(A\cap B\cap C)=0$

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=6+5-9=2,$

$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)=5+4-6=3$

이므로

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)&=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)\\&\quad-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\\&=6+5+4-2-3-0+0\\&=10\end{aligned}$$

답 ②

유형 17 유한집합의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값 본책 34쪽

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(B)<n(A)$일 때

① $n(A\cap B)$가 최대가 되는 경우

⇒ $n(A\cup B)$가 최소가 될 때, 즉 $B\subset A$

② $n(A\cap B)$가 최소가 되는 경우

⇒ $n(A\cup B)$가 최대가 될 때, 즉 $A\cup B=U$

0207 (i) $Y\subset X$일 때, $n(X\cap Y)$가 최대이므로

$M=n(Y)=8$

(ii) $X\cup Y=U$일 때, $n(X\cap Y)$가 최소이므로

$n(X\cap Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cup Y)$에서

$m=14+8-20=2$

(i), (ii)에서 $\quad M-m=6$

답 ④

다른 풀이 $n(X\cap Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cup Y)$

$=14+8-n(X\cup Y)$

$=22-n(X\cup Y)\quad\cdots\cdots$ ㉠

$X\subset(X\cup Y),\ Y\subset(X\cup Y)$이므로

$n(X)\le n(X\cup Y),\ n(Y)\le n(X\cup Y)\quad\cdots\cdots$ ㉡

$(X\cup Y)\subset U$이므로 $\quad n(X\cup Y)\le n(U)\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $14\le n(X\cup Y)\le 20$이므로

$-20\le -n(X\cup Y)\le -14$

$\therefore\ 2\le 22-n(X\cup Y)\le 8$

따라서 ㉠에서 $2\le n(X\cap Y)\le 8$이므로

$M=8,\ m=2\quad \therefore\ M-m=6$

0208 $(A\cap B)\subset A,\ (A\cap B)\subset B$이므로

$n(A\cap B)\le n(A),\ n(A\cap B)\le n(B)$

이고 $n(A\cap B)\ge 3$이므로 $\quad n(A)=6,\ n(B)=9$이므로 $n(A\cap B)\le 6$

$3\le n(A\cap B)\le 6$ ⋯ ❶

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

(i) $n(A\cap B)=3$일 때,

$n(A\cup B)=6+9-3=12$

(ii) $n(A\cap B)=6$일 때,

$n(A\cup B)=6+9-6=9$

(i), (ii)에서 $\quad 9\le n(A\cup B)\le 12$ ⋯ ❷

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 12, 최솟값은 9이므로 구하는 합은

$12+9=21$ ⋯ ❸

답 21

채점 기준	비율
❶ $n(A\cap B)$의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $n(A\cup B)$의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10 %

유형 18~19 유한집합의 원소의 개수의 활용 본책 35쪽

주어진 조건을 전체집합 U와 그 부분집합 A, B로 나타낸 후 다음을 이용한다.

- 둘 다 ~하는 ⇒ $A\cap B$
- 둘 다 ~하지 않는 ⇒ $A^C\cap B^C$
- ~만 ~하는 ⇒ $A-B$ 또는 $B-A$
- 둘 중 하나만 ~하는 ⇒ $(A-B)\cup(B-A)$

0209 학생 전체의 집합을 U, A은행의 통장을 갖고 있는 학생의 집합을 A, B은행의 통장을 갖고 있는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=28,\ n(B)=16,\ n(A^C\cap B^C)=4$

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$에서

$n(A\cup B)=40-4=36$

따라서 A은행과 B은행의 통장을 모두 갖고 있는 학생 수는

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=28+16-36=8$

답 8

0210 회원 전체의 집합을 U, 야구를 좋아하는 회원의 집합을 A, 축구를 좋아하는 회원의 집합을 B라 하면

$n(U)=50,\ n(A)=24,\ n(B)=32,\ n(A^C\cap B^C)=5$ ⋯ ❶

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$에서

$n(A\cup B)=50-5=45$

$\therefore\ n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=24+32-45=11$ ⋯ ❷

따라서 축구만 좋아하는 회원 수는

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=32-11=21$ ⋯ ❸

답 21

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 집합으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $n(A\cap B)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 축구만 좋아하는 회원 수를 구할 수 있다.	30 %

0211 학생 전체의 집합을 U, 수학 강의를 수강하는 학생의 집합을 A, 과학 강의를 수강하는 학생의 집합을 B라 하면 조건 (가), (나), (다)에서

$n(U)=50,\ n(A)=32,\ n(A-B)=13,\ n(A^C\cap B^C)=10$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cap B)=32-13=19$

또 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$에서

$n(A\cup B)=50-10=40$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$40=32+n(B)-19\qquad \therefore\ n(B)=27$

따라서 과학 강의를 수강하는 학생 수는 27이다. 답 ⑤

0212 학생 전체의 집합을 U, 세 문제 A, B, C를 맞힌 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=n(A\cup B\cup C)=40,\ n(A)=16,\ n(B)=20,$

$n(C)=22,\ n(A\cap B\cap C)=3$

세 문제 중 두 문제만 맞힌 학생 수는

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)$ …… ㉠

이때

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

이므로

$40=16+20+22-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+3$

$\therefore\ n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=21$

따라서 ㉠에서 구하는 학생 수는 $21-3\cdot 3=12$ 답 12

0213 고객 전체의 집합을 U, 반지를 착용한 고객의 집합을 A, 목걸이를 착용한 고객의 집합을 B라 하면

$n(U)=35,\ n(A)=12,\ n(B)=18$

반지와 목걸이 중 어느 것도 착용하지 않은 고객 수는

$$\begin{aligned} n(A^C\cap B^C)&=n((A\cup B)^C)\\ &=n(U)-n(A\cup B)\\ &=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}\\ &=35-12-18+n(A\cap B)\\ &=5+n(A\cap B) \end{aligned}$$

이때 $n(A\cap B)$의 최댓값이 12, 최솟값이 0이므로

$M=5+12=17,\ m=5+0=5$

$\therefore\ M+m=22$ 답 22

참고 ① $n(A\cap B)$의 최댓값은

$A\subset B$일 때, 즉 $n(A\cap B)=n(A)$일 때

$n(A\cap B)=12$

② $n(A\cap B)$의 최솟값은

$n(A)+n(B)=30<35=n(U)$이므로 $A\cap B=\varnothing$일 때,

$n(A\cap B)=0$

0214 학생 전체의 집합을 U, 영어를 좋아하는 학생의 집합을 A, 수학을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=35,\ n(A)=21,\ n(B)=27$

영어와 수학을 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로 $n(A\cap B)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면

$A\subset B$일 때 $n(A\cap B)$가 최대이다.

$\therefore\ M=21$

또 $A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$35=21+27-m\qquad \therefore\ m=13$

답 최댓값: 21, 최솟값: 13

0215 주부 전체의 집합을 U, A통조림을 구입해 본 주부의 집합을 A, B통조림을 구입해 본 주부의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=23,\ n(B)=27$

B통조림만 구입해 본 주부의 집합은 $B-A$이고

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$ …… ㉠

이므로 $n(A\cap B)$가 최소일 때 $n(B-A)$는 최대가 된다.

그런데 $A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로 $n(A\cap B)$의 최솟값을 m이라 하면 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$40=23+27-m\qquad \therefore\ m=10$

따라서 $n(A\cap B)$의 최솟값은 10이므로 ㉠에서 구하는 최댓값은

$27-10=17$ 답 ④

0216 전략 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때 A_n을 구하여 조건을 만족시키는 m, l의 값의 범위를 구한다.

풀이 $A_1=\{x\,|\,-1\le x\le 13,\ x\text{는 정수}\}$

$A_2=\{x\,|\,1\le x\le 16,\ x\text{는 정수}\}$

$A_3=\{x\,|\,3\le x\le 19,\ x\text{는 정수}\}$

⋮

$A_m=\{x\,|\,2m-3\le x\le 3m+10,\ x\text{는 정수}\}$

$A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_m\neq\varnothing$이려면

$2m-3\le 13\qquad \therefore\ m\le 8$

즉 m의 최댓값은 8이므로 $\quad p=8$

한편 $A_8=\{x\,|\,13\le x\le 34,\ x\text{는 정수}\}$이므로

$A_1\cup A_8=\{x\,|\,-1\le x\le 34,\ x\text{는 정수}\}$

$A_l=\{x\,|\,2l-3\le x\le 3l+10,\ x\text{는 정수}\}$에 대하여

$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 50\}\subset(A_1\cup A_8\cup A_l)$

이려면 $2l-3\le 35,\ 3l+10\ge 50$이어야 하므로

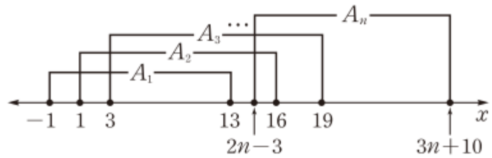
$\frac{40}{3}\le l\le 19$

즉 l의 최댓값은 19이므로 $\quad q=19$

$\therefore\ p+q=27$ 답 27

$A_{19}=\{x\,|\,35\le x\le 67,\ x\text{는 정수}\}$이므로
$A_1\cup A_8\cup A_{19}=\{x\,|\,-1\le x\le 67,\ x\text{는 정수}\}$

참고 집합 A_n(n은 자연수)을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



이때 위의 그림과 같이 집합 A_n의 원소의 최솟값 $2n-3$이 13보다 크면 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n=\varnothing$이 된다.

0217 전략 $A\cup B=A$이면 $B\subset A$임을 이용한다.

풀이 $A\cup B=A$이므로 $\quad B\subset A$

(i) $B=\varnothing$인 경우

방정식 $mx+1=x$의 해가 존재하지 않아야 하므로

$(m-1)x=-1$에서 $\quad m=1$

(ii) $B\neq\varnothing$인 경우

$-1\in B$ 또는 $2\in B$이어야 하므로

$-m+1=-1$ 또는 $2m+1=2$

$\therefore\ m=2$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $\quad m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=1$ 또는 $m=2$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은

$$\frac{1}{2}+1+2=\frac{7}{2}$$

답 ⑤

0218 전략 $P-R=\varnothing$이면 $P\subset R$이고 $Q\cap R=R$이면 $R\subset Q$임을 이용한다.

풀이 $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$이므로

$A\cap B=\{1, 2, 4, 8\}$,

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$

이때 $(A\cap B)-X=\varnothing$, $(A\cup B)\cap X=X$에서

$(A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$

이므로 집합 X는 집합 $A\cup B$의 부분집합 중에서 1, 2, 4, 8을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

그런데 집합 X의 모든 원소의 합이 30이고, $1+2+4+8=15$이므로 1, 2, 4, 8을 제외한 집합 X의 원소의 합은 15이다.

3, 6, 12, 16, 24 중에서 몇 개의 수를 선택하여 그 합이 15가 되는 경우는 3, 12를 선택하는 경우뿐이므로

$X=\{1, 2, 3, 4, 8, 12\}$

따라서 집합 X의 원소의 개수는 6이다. 답 ③

0219 전략 서로소의 뜻을 이용하여 집합 X의 원소가 되기 위한 조건을 찾는다.

풀이 조건 ㈏에서 $X\cap B=\varnothing$이므로 집합 X의 모든 원소는 50과 서로소가 아니고, $50=2\times5^2$이므로 집합 X의 모든 원소는 2 또는 5의 배수이다.

조건 ㈐에서 $12=2^2\times3$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

따라서 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 자연수이다.

즉 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는

5, 25, 35, 55, 65, 85, 95

이때 조건 ㈎에서 $X\neq\varnothing$이므로 집합 X의 개수는

$2^7-1=127$ 답 127

0220 전략 서로소인 두 집합의 교집합은 공집합임을 이용한다.

풀이 A와 B^C가 서로소이고 A와 C가 서로소이므로

$A\cap B^C=A-B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$

$\therefore A\subset B$, $A\cap C=\varnothing$

ㄱ. $A=\{1\}$, $B=\{1, 2\}$, $C=\{2, 3\}$이면 $A\subset B$, $A\cap C=\varnothing$이지만 $B\cap C=\{2\}$이다.

따라서 $B\cap C=\varnothing$이 항상 성립한다고 할 수 없다.

ㄴ. $(A\cap B)^C\cap C=\underbrace{A^C\cap C=C}_{C\cap A^C=C-A=C}$

ㄷ. $(B-A)\cup(B-C)=(B\cap A^C)\cup(B\cap C^C)$

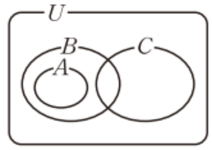
$=B\cap(A^C\cup C^C)$

$=B\cap\underbrace{(A\cap C)^C}_{A\cap C=\varnothing,\ \varnothing^C=U}$

$=B\cap U=B$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

참고 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 만족시키는 한 가지 경우를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 이 벤다이어그램에서 ㄱ이 항상 성립하는 것은 아님을 알 수 있다.



0221 전략 집합의 연산 법칙을 이용하여 $A*B$를 파악한다.

풀이 $A*B$

$=(A-B)^C\cap(B-A)^C$

$=(A\cap B^C)^C\cap(B\cap A^C)^C$

$=(A^C\cup B)\cap(B^C\cup A)$

$=\{(A^C\cup B)\cap B^C\}\cup\{(A^C\cup B)\cap A\}$

$=\{(A^C\cap B^C)\cup(B\cap B^C)\}\cup\{(A^C\cap A)\cup(B\cap A)\}$

$=\{(A^C\cap B^C)\cup\varnothing\}\cup\{\varnothing\cup(A\cap B)\}$

$=(A\cup B)^C\cup(A\cap B)$

ㄱ. $\{1, 2\}\cup\{2, 3\}=\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\}\cap\{2, 3\}=\{2\}$이므로

$\{1, 2\}*\{2, 3\}=\{4, 5, 6\}\cup\{2\}$

$=\{2, 4, 5, 6\}$

ㄴ. $A^C*B^C=(A^C\cup B^C)^C\cup(A^C\cap B^C)$

$=(A\cap B)\cup(A\cup B)^C$

$=(A\cup B)^C\cup(A\cap B)$

$=A*B$

ㄷ. $A*B=(A\cup B)^C\cup(A\cap B)=\varnothing$에서

$(A\cup B)^C=\varnothing$, $A\cap B=\varnothing$

즉 $A\cup B=U$, $A\cap B=\varnothing$이므로

$B=A^C$

따라서 $A*B=\varnothing$을 만족시키는 집합 A가 정해지면 집합 B도 정해지므로 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는 전체집합 U의 부분집합 A의 개수와 같다.

$\therefore 2^6=64$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0222 전략 $B\subset U$이므로 집합 B의 원소는 모두 자연수임을 이용한다.

풀이 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$가 자연수이므로 a, b, c는 모두 자연수의 제곱이다.

이때 조건 ㈏에서 $a<b<c$, $a+c=53$이므로

$a=4$, $c=49$

$\therefore A=\{4, b, 49\}$, $B=\{2, \sqrt{b}, 7\}$

또 $n(A)=3$, $n(B)=3$, $n(A\cup B)=5$에서

$n(A\cap B)=3+3-5=1$

$n(A\cap B)=1$인 경우는

$b=2$ 또는 $b=\sqrt{b}$ 또는 $b=7$

또는 $\sqrt{b}=4$ 또는 $\sqrt{b}=49$

$\therefore b=2$ 또는 $b=1$ 또는 $b=7$

또는 $b=16$ 또는 $b=2401$

그런데 $\sqrt{b}$는 자연수이고 $a<b<c$, 즉 $4<b<49$이어야 하므로

$b=16$

따라서 $B=\{2, 4, 7\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$2+4+7=13$ 답 ③

13 집합의 연산

0223 전략 $(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=A\cup B$임을 이용한다.

풀이 $n(A\cap B)=p$, $n(A\cap B^C)=q$, $n(A^C\cap B)=r$라 하면
$(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=A\cup B$이므로

$$p+q+r\le 15 \quad \cdots\cdots ㉠$$

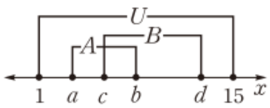
또 $n(A\cap B)=n(A\cap B^C)=\dfrac{1}{2}\times n(A^C\cap B)$에서

$$p=q=\frac{1}{2}r \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 만족시키는 자연수 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)는
$(1, 1, 2)$ 또는 $(2, 2, 4)$ 또는 $(3, 3, 6)$
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로 S의 값이 최소일 때의 순서쌍 (p, q, r)는 $(3, 3, 6)$
이때 $n(A\cup B)=3+3+6=12$이므로
$n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)=15-12=3$
이고 S의 값이 최소이려면
$A^C\cap B^C=\{1, 2, 3\}$
이어야 한다.
따라서 $\underbrace{A=\{x|4\le x\le 9\},\ B=\{x|7\le x\le 15\}}_{n(A\cap B)=3,\ n(A\cap B^C)=3,\ n(A^C\cap B)=6,\ A^C\cap B^C=\{1,\ 2,\ 3\}\text{을 만족시킨다.}}$이므로
$a=4$, $b=9$, $c=7$, $d=15$
$\therefore a+b+c+d=35$

답 35

다른 풀이 $n(A\cap B)=k$라 하면
$n(A\cap B^C)=k$, $n(A^C\cap B)=2k$
오른쪽 그림에서



$A\cap B^C=\{x|a\le x<c\}$,
$A\cap B=\{x|c\le x\le b\}$,
$A^C\cap B=\{x|b<x\le d\}$
이므로
$c-a=k$, $b-c+1=k$, $d-b=2k$
$\therefore c=a+k$, $b=c+k-1$, $d=b+2k$,
즉 $c=a+k$, $b=a+2k-1$, $d=a+4k-1$ $\cdots\cdots$ ㉠
이때 S의 값이 최소이려면 d의 값이 최대이어야 하므로
$d=15$, 즉 $a+4k-1=15$
$\therefore a+4k=16$
a, k는 15 이하의 자연수이므로
$a=12$, $k=1$ 또는 $a=8$, $k=2$ 또는 $a=4$, $k=3$
이때 k의 값이 클수록 S의 값이 작아지므로 S의 값이 최소이려면
$a=4$, $k=3$
따라서 ㉠에서 $a=4$, $b=9$, $c=7$, $d=15$이므로
$a+b+c+d=35$

참고 $n(A\cap B)=0$이면 $n(A\cap B^C)=0$, $n(A^C\cap B)=0$이므로
$A=\varnothing$, $B=\varnothing$
그런데 주어진 두 집합 A, B는 공집합이 아니므로
$n(A\cap B)\ne 0$

0224 전략 두 집합 A, B는 집합 U의 부분집합을 원소로 갖는 집합이다.

풀이 집합 A는 a를 반드시 원소로 갖는 U의 부분집합을 원소로 가지므로 $n(A)=2^{4-1}=2^3=8$
또 집합 B는 b를 반드시 원소로 갖는 U의 부분집합을 원소로 가지므로
$n(B)=2^{4-1}=2^3=8$
이때 집합 $A\cap B$는 a와 b를 반드시 원소로 갖는 U의 부분집합을 원소로 가지므로
$n(A\cap B)=2^{4-2}=2^2=4$
$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=8+8-4$
$=12$

답 ③

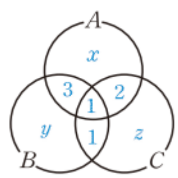
0225 전략 집합 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$의 부분집합의 개수는 2^n임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $s(A)=4$이면 $n(A)=2$
따라서 $n(A^C)=n(U)-n(A)=5-2=3$이므로
$s(A^C)=2^3=8$
ㄴ. $A^C\subset B^C$이면 $B\subset A$이므로
$s(B)\le s(A)$
ㄷ. $n(A)=2$, $n(B)=3$, $\underbrace{A\cap B=\varnothing}_{n(A\cap B)=0}$이면
$s(A)=2^2=4$, $s(B)=2^3=8$
$\therefore s(A)+s(B)=12$
이때 $n(A\cup B)=2+3=5$이므로
$s(A\cup B)=2^5=32$
$\therefore s(A\cup B)\ne s(A)+s(B)$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

0226 전략 각 집합에 속하는 원소의 개수를 벤다이어그램을 이용하여 나타내어 본다.

풀이 a, b, c를 초과한 사람의 집합을 각각 A, B, C라 하고 각 부분에 속하는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 벤다이어그램으로 나타내면 적어도 한 항목에서 정상 수치를 초과한 사람이 15명이므로



$x+y+z+3+1+2+1=15$
$\therefore x+y+z=8$ $\cdots\cdots$ ㉠
a 또는 b를 초과한 사람이 12명이므로
$x+y+3+1+2+1=12$
$\therefore x+y=5$ $\cdots\cdots$ ㉡
b 또는 c를 초과한 사람이 12명이므로
$y+z+3+1+2+1=12$
$\therefore y+z=5$ $\cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서
$\underbrace{x=3,\ y=2,\ z=3}$
㉠−㉡을 하면 $z=3$
㉠−㉢을 하면 $x=3$
$x=3$을 ㉡에 대입하면 $y=2$
따라서 a 또는 c를 초과한 사람 수는
$x+z+3+1+2+1=13$

답 13

0227 전략 어떤 수를 10으로 나누었을 때의 나머지는 그 수의 일의 자리의 숫자와 같다.

풀이 8^n-1을 10으로 나누었을 때의 나머지는 8^n-1의 일의 자리의 숫자와 같다.
$n=1, 2, 3, 4, \cdots$일 때 8^n의 일의 자리의 숫자는 8, 4, 2, 6이 이 순서대로 반복되므로 8^n-1의 일의 자리의 숫자는 7, 3, 1, 5가 이 순서대로 반복된다.

$\therefore A=\{1, 3, 5, 7\}$ ⋯ ❶

$n=1, 2, 3, 4, \cdots$일 때 7^n의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복되므로

$B=\{1, 3, 7, 9\}$ ⋯ ❷

따라서 $A\cap B=\{1, 3, 7\}$의 부분집합의 개수는

$2^3=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 집합 $A\cap B$의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0228 전략 집합의 연산 법칙을 이용하여 집합 B를 먼저 구한다.

풀이 $(A^C\cup B)\cap(A\cup B)=(A^C\cap A)\cup B$
$=\varnothing\cup B=B$

이므로 $B=\{3, 8, 9\}$ ⋯ ❶

그런데 $3\in A$이므로 집합 $A\cap B$의 원소의 합은
$A\cap B=B=\{3, 8, 9\}$일 때 최대이고 $A\cap B=\{3\}$일 때 최소이다.
따라서 $M=20$, $m=3$이므로 ⋯ ❷

$M+m=23$ ⋯ ❸

답 23

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 구할 수 있다.	50 %
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	10 %

다른 풀이 $(A\cup B)-(A^C\cup B)=(A\cup B)\cap(A^C\cup B)^C$
$=(A\cup B)\cap(A\cap B^C)$
$=\underbrace{(A\cup B)\cap(A-B)}_{(A-B)\subset(A\cup B)}$
$=A-B$

이므로

$A-B=\{4, 6\}$

$\therefore B=(A\cup B)-(A-B)=\{3, 8, 9\}$

0229 전략 집합 $A_p\cap A_q$는 p와 q의 공배수의 집합임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 집합 $A_n\cap A_2$는 n과 2의 공배수의 집합이므로 $A_n\cap A_2=A_{2n}$이면 n과 2의 최소공배수는 $2n$이다. 즉 n과 2는 서로소이므로 n은 홀수이다. ⋯ ❶

조건 (나)에서 홀수 n에 대하여

$A_n-A_2=\{n, 3n, 5n, 7n, \cdots\}$ ⋯ ❷

(i) n이 3의 배수가 아니면
$A_n-A_3=\{n, 2n, 4n, 5n, 7n, \cdots\}$
이므로 $(A_n-A_3)\not\subset(A_n-A_2)$

(ii) n이 3의 배수이면
$A_n-A_3=\varnothing$
이므로 $(A_n-A_3)\subset(A_n-A_2)$

(i), (ii)에서 n은 3의 배수이므로 주어진 조건을 모두 만족시키는 수는 50 이하의 자연수 중 홀수인 3의 배수이다. ⋯ ❸

따라서 자연수 n은

3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45

의 8개이다. ⋯ ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)를 만족시키는 n의 조건을 구할 수 있다.	20 %
❷ 집합 A_n-A_2를 n을 사용하여 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ 주어진 조건을 모두 만족시키는 n의 조건을 구할 수 있다.	50 %
❹ n의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0230 전략 두 조건을 모두 만족시키는 두 집합 A, B에 대하여 $n(A)$, $n(B)$, $n(A\cap B)$를 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$A\cup B=\{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$n(A\cup B)=7$이므로

$n(A)\le 7$, $n(B)\le 7$, $n(A)+n(B)\ge 7$

이때 조건 (나)에서 $n(A)=2\times n(B)$이므로

$n(A)=6$, $n(B)=3$

$\therefore n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=6+3-7$
$=2$

$n(A\cap B)=2$이고 $S(A\cap B)=0$이므로 집합 $A\cap B$는

$\{-1, 1\}$ 또는 $\{-2, 2\}$ ⋯ ❶

(i) $A\cap B=\{-1, 1\}$일 때,
$(A\cup B)-(A\cap B)=\{-4, -2, 0, 2, 3\}$
$-4\in B$이면 $S(A)=3$, $S(B)=-4$이므로
$S(A)>S(B)$ $A=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B=\{-4, -1, 1\}$
$-2\in B$이면 $S(A)=1$, $S(B)=-2$이므로
$S(A)>S(B)$
$0\in B$이면 $S(A)=-1$, $S(B)=0$이므로
$S(A)<S(B)$
$2\in B$이면 $S(A)=-3$, $S(B)=2$이므로
$S(A)<S(B)$
$3\in B$이면 $S(A)=-4$, $S(B)=3$이므로
$S(A)<S(B)$
따라서 $0\in B$ 또는 $2\in B$ 또는 $3\in B$이므로 집합 B는
$\{-1, 0, 1\}$ 또는 $\{-1, 1, 2\}$ 또는 $\{-1, 1, 3\}$ ⋯ ❷

(ii) $A\cap B=\{-2, 2\}$일 때,
$(A\cup B)-(A\cap B)=\{-4, -1, 0, 1, 3\}$
$-4\in B$이면 $S(A)=3$, $S(B)=-4$이므로
$S(A)>S(B)$
$-1\in B$이면 $S(A)=0$, $S(B)=-1$이므로
$S(A)>S(B)$

$0\in B$이면 $S(A)=-1$, $S(B)=0$이므로

$S(A)<S(B)$

$1\in B$이면 $S(A)=-2$, $S(B)=1$이므로

$S(A)<S(B)$

$3\in B$이면 $S(A)=-4$, $S(B)=3$이므로

$S(A)<S(B)$

따라서 $0\in B$ 또는 $1\in B$ 또는 $3\in B$이므로 집합 B는

$\{-2, 0, 2\}$ 또는 $\{-2, 1, 2\}$ 또는 $\{-2, 2, 3\}$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 집합 A는 집합 B가 결정됨에 따라 한 가지로만 결정되므로 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (A, B)의 개수는 6이다.

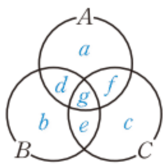
⋯ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ 두 조건을 모두 만족시키는 집합 $A\cap B$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $A\cap B=\{-1, 1\}$일 때, 집합 B를 구할 수 있다.	30 %
❸ $A\cap B=\{-2, 2\}$일 때, 집합 B를 구할 수 있다.	30 %
❹ 순서쌍 (A, B)의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0231 전략 각 집합에 속하는 원소의 개수를 벤다이어그램을 이용하여 나타내어 본다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 벤다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 a, b, c, d, e, f, g로 나타내면 ⋯ ❶



$n(A\cup B\cup C)=65$,

$n(A\triangle B)=36$,

$n(B\triangle C)=38$,

$n(C\triangle A)=32$

이므로

$a+b+c+d+e+f+g=65$ ⋯⋯ ㉠

$a+f+b+e=36$ ⋯⋯ ㉡

$b+d+c+f=38$ ⋯⋯ ㉢

$a+d+c+e=32$ ⋯⋯ ㉣ ⋯ ❷

㉡+㉢+㉣을 하면

$2(a+b+c+d+e+f)=106$

$\therefore a+b+c+d+e+f=53$ ⋯⋯ ㉤

㉠−㉤을 하면 $g=12$

$\therefore n(A\cap B\cap C)=12$ ⋯ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 벤다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 문자를 이용하여 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 주어진 조건을 이용하여 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 구할 수 있다.	30 %
❸ $n(A\cap B\cap C)$를 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 $n(A\cup B\cup C)=65$에서

$n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=65$ ⋯⋯ ㉠

$n(A\triangle B)=36$에서

$n(A)+n(B)-2\times n(A\cap B)=36$ ⋯⋯ ㉡

$n(B\triangle C)=38$에서

$n(B)+n(C)-2\times n(B\cap C)=38$ ⋯⋯ ㉢

$n(C\triangle A)=32$에서

$n(C)+n(A)-2\times n(C\cap A)=32$ ⋯⋯ ㉣

㉡+㉢+㉣을 하면

$2\{n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\}$
$=106$

$\therefore n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)$
$=53$ ⋯⋯ ㉤

㉠−㉤을 하면 $n(A\cap B\cap C)=12$

0232 전략 주어진 조건을 집합으로 나타낸 후 합집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 학생 전체의 집합을 U, 인문학 특강을 신청한 학생의 집합을 A, 자연과학 특강을 신청한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=120$ ⋯⋯ ㉠

$n(A)=n(B)-16$ ⋯⋯ ㉡

$n(A\cup B)=n(A^C\cap B^C)+80$ ⋯⋯ ㉢ ⋯ ❶

㉢에서 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$n(A\cup B)=n(U)-n(A\cup B)+80$

$=120-n(A\cup B)+80$ ($\because$ ㉠)

$=200-n(A\cup B)$

$\therefore n(A\cup B)=100$ ⋯ ❷

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$100=n(B)-16+n(B)-n(A\cap B)$ ($\because$ ㉡)

$\therefore n(B)=\frac{1}{2}\times n(A\cap B)+58$

자연과학 특강만 신청한 학생의 수는

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}\times n(A\cap B)+58-n(A\cap B)$

$=58-\frac{1}{2}\times n(A\cap B)$ ⋯ ❸

위의 식에서 $n(B-A)$가 최대일 때는 $n(A\cap B)$가 최소일 때이고 $n(A\cap B)$의 최솟값은 0이므로 $n(B-A)$의 최댓값은 58

따라서 자연과학 특강만 신청한 학생 수의 최댓값은 58이다. ⋯ ❹

답 58

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 집합으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $n(A\cup B)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $n(B-A)$를 $n(A\cap B)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❹ 자연과학 특강만 신청한 학생 수의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

참고 $n(A)=n(B)-16$에서 $n(A)<n(B)$이므로 $n(A\cap B)$의 최댓값은 $n(A)$이다.

또 $n(A\cup B)=100<n(U)$이므로 $n(A\cap B)$의 최솟값은 0이다.

$\therefore 0\le n(A\cap B)\le n(A)$

V. 집합과 명제

14 명제

0233 답 ○

0234 답 ×

0235 답 ×

0236 답 참

0237 답 거짓

0238 $x^2+2x-3=0$에서
$(x+3)(x-1)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=1$
따라서 조건 p의 진리집합은 $\{-3, 1\}$ 답 $\{-3, 1\}$

0239 10보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7이므로 조건 q의 진리집합은
$\{2, 3, 5, 7\}$ 답 $\{2, 3, 5, 7\}$

0240 답 $\sqrt{4}$는 무리수가 아니다. (참)

0241 답 1은 합성수이거나 소수이다. (거짓)

0242 $\sim p$: x는 8의 약수가 아니다.
8의 약수는 1, 2, 4, 8이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은
$\{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$ 답 풀이 참조

0243 $\sim q$: $x^2-5x+6\neq 0$
$x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$
따라서 조건 $\sim q$의 진리집합은
$\{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 답 풀이 참조

0244 답 $x\neq 1$이고 $x\neq 2$

0245 답 $x<-2$ 또는 $x\geq 3$

0246 답 가정: 18의 약수이다., 결론: 9의 약수이다.

0247 답 가정: $x=-1$이다., 결론: $3x-2=-1$이다.

0248 답 가정: $ab=0$이다., 결론: $a=0$ 또는 $b=0$이다.

0249 [반례] $x=0$이면 $x^2=0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
답 거짓

0250 (홀수)×(홀수)=(홀수), (홀수)×(짝수)=(짝수), (짝수)×(홀수)=(짝수), (짝수)×(짝수)=(짝수)이므로 주어진 명제는 참이다. 답 참

0251 [반례] $x=1$, $y=3$이면 $x+y=4$이므로 $x+y$는 짝수이지만 x, y는 모두 홀수이다. 따라서 주어진 명제는 거짓이다.
답 거짓

0252 $xy\neq 0$이면 $x\neq 0$, $y\neq 0$이므로 $x^2+y^2\neq 0$이다. 답 참

0253 [반례] $x=0$이면 $|x|=0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
답 거짓

0254 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 주어진 명제는 참이다.
답 참

0255 $x=0$이면 $x^2=0$이므로 주어진 명제는 참이다. 답 참

0256 $\sqrt{x}<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

0257 답 어떤 실수 x에 대하여 $x^2\neq 4$이다.

0258 답 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+1<0$이다.

0259 답 모든 실수 x에 대하여 $x^2\leq 4$이다.

0260 답 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq 0$이다.

0261 답 (1) 역 (2) 대우

0262 답 역: $x=1$이면 $x^2=1$이다.
대우: $x\neq 1$이면 $x^2\neq 1$이다.

0263 답 역: $x>3$이면 $x>2$이다.
대우: $x\leq 3$이면 $x\leq 2$이다.

0264 답 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다.
대우: $x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$이면 $x^2+y^2\neq 0$이다.

0265 답 역: $a>0$ 또는 $b>0$이면 $a+b>0$이다.
대우: $a\leq 0$이고 $b\leq 0$이면 $a+b\leq 0$이다.

0266 답 (1) $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다.
(2) 참 (3) 참

0267 $x^2=4$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=2$
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

답 충분조건

0268 $|x|<1$에서 $\quad -1<x<1$
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

답 필요조건

0269 $x>0,\ y>0$이면 $\quad x+y>0,\ xy>0$
$x+y>0,\ xy>0$이면 $\quad x>0,\ y>0$
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 필요충분조건

0270 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$
이므로 $\quad Q\subset P$
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다. 답 필요조건

0271 모든 정수는 유리수이므로 $p \Longrightarrow q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다. 답 충분조건

0272 $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$
(1) $ab=0 \Longleftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$
따라서 $ab=0$은 $a^2+b^2=0$이기 위한 필요조건이다.
(2) $a+b=0 \Longleftrightarrow a=-b$
따라서 $a+b=0$은 $a^2+b^2=0$이기 위한 필요조건이다.
(3) $|a|+|b|=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$
따라서 $|a|+|b|=0$은 $a^2+b^2=0$이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) 필요조건 (2) 필요조건 (3) 필요충분조건

0273 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 반드시 참인 명제는 그 대우인 $q \longrightarrow \sim p$이다. 답 ③

0274 답 (가) $\geq$ (나) $\geq$

0275 $a^2+2b^2-2ab=a^2-2ab+b^2+b^2$
$=(\boxed{a-b})^2+b^2\geq 0$
$\therefore\ a^2+2b^2 \boxed{\geq} 2ab$
이때 등호는 $\underline{a-b=0,\ b=0}$에서 $\boxed{a=b=0}$일 때 성립한다.
└ $(a-b)^2\geq 0$, $b^2\geq 0$에서 $a-b=0$, $b=0$일 때 등호가 성립한다.

답 (가) $a-b$ (나) $\geq$ (다) $a=b=0$

0276 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}-(a+b)$
$=\boxed{2\sqrt{ab}}>0$
$\therefore\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \boxed{>} (\sqrt{a+b})^2$
그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a+b}>0$이므로
$\sqrt{a}+\sqrt{b} \boxed{>} \sqrt{a+b}$

답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $>$ (다) $>$

참고 $a>0$, $b>0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.

0277 $a^2+ab+b^2=\left(a^2+ab+\dfrac{b^2}{4}\right)+\dfrac{3}{4}b^2$
$=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2$
a, b가 실수이므로 $\quad \left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2\geq 0$, $\dfrac{3}{4}b^2\geq 0$
$\therefore\ a^2+ab+b^2\geq 0$ (단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

답 풀이 참조

참고 $\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2\geq 0$에서 $a+\dfrac{b}{2}=0$일 때 등호가 성립한다.
또 $\dfrac{3}{4}b^2\geq 0$에서 $b=0$일 때 등호가 성립한다.
따라서 $a=b=0$일 때 $a^2+ab+b^2=0$이 성립한다.

0278 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})$
$=\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\}$
$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$
$\therefore\ \dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

답 풀이 참조

0279 $x>0$, $\dfrac{1}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립)
따라서 $x+\dfrac{1}{x}$의 최솟값은 2이다. 답 2

참고 등호는 $x=\dfrac{1}{x}$에서 $x^2=1$, 즉 $x=1$ ($\because\ x>0$)일 때 성립한다.

0280 $4x>0$, $\dfrac{9}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$4x+\dfrac{9}{x}\geq 2\sqrt{4x\cdot\dfrac{9}{x}}$
$=2\cdot 6=12$ $\left(\text{단, 등호는 } x=\dfrac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$
따라서 $4x+\dfrac{9}{x}$의 최솟값은 12이다. 답 12

참고 등호는 $4x=\dfrac{9}{x}$에서 $x^2=\dfrac{9}{4}$, 즉 $x=\dfrac{3}{2}$ ($\because\ x>0$)일 때 성립한다.

0281 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$
$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$
$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$
$=\underline{(\boxed{bx-ay})^2\geq 0}$ ┌ 실수 A에 대하여 $A^2\geq 0$
$\therefore\ (a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$
이때 등호는 $bx-ay=0$, 즉 $\boxed{\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}}$일 때 성립한다.

답 (가) $bx-ay$ (나) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$

유형 01 명제 본책 46쪽

① 명제인 것 ➡ $\begin{cases} \text{참인 문장 또는 식} \\ \text{거짓인 문장 또는 식} \end{cases}$

② 명제가 아닌 것 ➡ 참, 거짓을 판별할 수 없는 문장 또는 식

0282 ① x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.
②, ④, ⑤ 참인 명제이다.
③ 거짓인 명제이다. 답 ①

0283 ㄱ. 거짓인 명제이다.
ㄴ. $x-3=x+5$에서 $-3=5$이므로 거짓인 명제이다.
ㄷ. $3x=x+2x$에서 $3x=3x$이므로 참인 명제이다.
ㄹ. x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.
이상에서 명제인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ②

유형 02 명제와 조건의 부정 본책 46쪽

① '$a \le x \le b$'의 부정 ➡ '$x<a$ 또는 $x>b$'
② '$x=a$'의 부정 ➡ '$x \ne a$'
③ '또는'의 부정 ➡ '그리고'
④ '그리고'의 부정 ➡ '또는'

0284 'p 또는 $\sim q$'의 부정은 '$\sim p$ 그리고 q'
$\sim p$: $x \le -2$ 또는 $x>3$, q: $-3 \le x < 5$이므로 '$\sim p$ 그리고 q'는
$-3 \le x \le -2$ 또는 $3<x<5$
답 $-3 \le x \le -2$ 또는 $3<x<5$

0285 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.
① 3은 소수가 아니다. (거짓)
② $6 \le 2$ (거짓)
③ $\overbrace{(-1)^5+1}^{-1+1=0} \ne \underbrace{-1^5+1}_{-1+1=0}$ (거짓)
④ 4는 18의 약수가 아니다. (참)
⑤ 정삼각형은 이등변삼각형이 아니다. (거짓)
두 변의 길이가 같으므로 이등변삼각형이다.
답 ④

다른 풀이 명제가 거짓이면 그 부정은 참이다. 주어진 명제 ①, ②, ③, ⑤는 참, ④는 거짓이므로 명제의 부정이 참인 것은 ④이다.

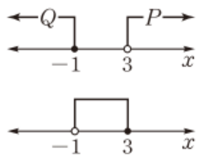
0286 '$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$'의 부정은
'$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ne 0$'
이므로
$(a-b)^2 \ne 0$ 또는 $(b-c)^2 \ne 0$ 또는 $(c-a)^2 \ne 0$
$\therefore a \ne b$ 또는 $b \ne c$ 또는 $c \ne a$
즉 a, b, c 중에 서로 다른 것이 적어도 하나 있다. 답 ⑤

유형 03 진리집합 본책 46쪽

진리집합 ➡ 전체집합 U의 원소 중에서 어떤 조건이 참이 되게 하는 모든 원소의 집합

0287 20 이하의 자연수 중 4의 배수는 4, 8, 12, 16, 20이고, 16의 약수는 1, 2, 4, 8, 16이므로 조건 p의 진리집합은
$\{4, 8, 16\}$ 답 $\{4, 8, 16\}$

0288 두 진리집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
또 조건 '$-1<x \le 3$'의 진리집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 집합은



$P^C \cap Q^C = (P \cup Q)^C$ 답 ⑤

0289 $x^3-x=0$에서 $x(x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
조건 p의 진리집합을 P라 하면 $P=\{-1, 0, 1\}$ ··· ❶
$x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$
조건 q의 진리집합을 Q라 하면 $Q=\{-3, 1\}$ ··· ❷
이때 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은 $P^C \cup Q$이고
$P^C=\{-3, -2, 2, 3\}$이므로
$P^C \cup Q = \{-3, -2, 1, 2, 3\}$ ··· ❸
따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은
$-3+(-2)+1+2+3=1$ ··· ❹
답 1

채점 기준	비율
❶ 조건 p의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건 q의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❸ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

유형 04 명제의 참, 거짓 본책 47쪽

(1) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때
① $P \subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
② $P \not\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
(2) 어떤 명제가 거짓임을 보이려면 ➡ 명제의 반례를 찾는다.

0290 ㄱ. [반례] $x=-2$, $y=-1$, $z=1$이면 $x<y<z$이지만 $xy>yz$이다. $2>-1$
ㄷ. [반례] $x=-1$, $y=0$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $y=0$이다.
이상에서 참인 명제인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0291 ① [반례] $x=-1$이면 $x^2+x=0$이지만 $x<0$이다.
② $2x-1=3$에서 $x=2$이고 $2^2+2-6=0$이므로 주어진 명제는 참이다.
③ [반례] $x=3$이면 x는 3의 배수이지만 9의 배수는 아니다.
④ [반례] 2는 소수이지만 $2^2=4$는 짝수이다.
⑤ [반례] $x=0$, $y=1$이면 $xy=0$이지만 $x^2+y^2\neq0$이다.

답 ②

0292 ㄱ. 두 조건 p, q를

p: x는 4의 양의 약수이다., q: x는 8의 양의 약수이다.

라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 4\}$, $Q=\{1, 2, 4, 8\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. [반례] $a=1+\sqrt{2}$, $b=1-\sqrt{2}$이면 a, b는 모두 무리수이지만 $a+b=2$이므로 $a+b$는 유리수이다.

ㄷ. 삼각형 ABC가 정삼각형이면

$\angle A=\angle B=\angle C=60°$

따라서 $\angle B=\angle C$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄹ. $(a-2)(b-3)=0$이면

$a-2=0$ 또는 $b-3=0$

$\therefore a=2$ 또는 $b=3$

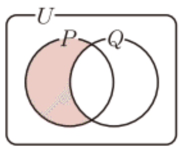
따라서 주어진 명제는 참이다.

이상에서 거짓인 명제는 ㄴ의 1개이다.

답 1

유형 05 거짓인 명제의 반례 본책 47쪽

전체집합 U에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠한 부분, 즉 $P-Q=P\cap Q^C$의 원소이다.



0293 명제 'p이면 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 P의 원소 중에서 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 구하는 원소는 $P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$의 원소인 b이다. 답 ②

0294 두 조건 p, q를

p: n은 2의 배수이다., q: n은 3의 배수이다.

라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 4, 6, \cdots, 18\}$, $Q=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

이때 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P\cap Q^C$의 원소이므로 구하는 반례는 2, 4, 8, 10, 14, 16이다.

답 2, 4, 8, 10, 14, 16

0295 명제 '$\sim p$이면 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 P^C의 원소 중에서 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 구하는 집합은

$P^C\cap(Q^C)^C=P^C\cap Q$ 답 ④

유형 06 명제의 참, 거짓과 진리집합 본책 48쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때
① $p \longrightarrow q$가 참 ➡ $P\subset Q$
② $P\subset Q$ ➡ $p \longrightarrow q$가 참

0296 주어진 벤다이어그램에서 $Q\subset P$, $Q\subset R$이므로 두 명제

$q \longrightarrow p$, $q \longrightarrow r$

가 모두 참이다.
또한 $P^C\subset Q^C$, $R^C\subset Q^C$이므로 두 명제

$\sim p \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow \sim q$

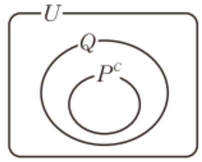
도 모두 참이다.
그러나 $P^C \not\subset R^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$는 거짓이다. 답 ④

0297 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로

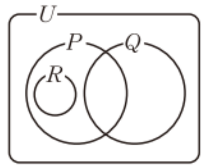
$P^C\subset Q$

따라서 오른쪽 그림에서

$P\cup Q=U$ 답 ②



0298 세 집합 P, Q, R에 대하여 $R\subset(P-Q)$를 만족시키도록 벤다이어그램을 그리면 오른쪽 그림과 같다.
이때 $Q\subset R^C$, $R\subset P$, $R\subset Q^C$이므로 세 명제 $q \longrightarrow \sim r$, $r \longrightarrow p$, $r \longrightarrow \sim q$는 모두 참이다.



이상에서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ④

유형 07 명제가 참이 되도록 하는 상수 구하기 본책 48쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되도록 하는 상수를 구하려면
➡ $P\subset Q$가 되도록 수직선 위에 나타낸다.

0299 $|x-3|<k$에서

$-k<x-3<k$

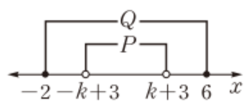
$\therefore -k+3<x<k+3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-k+3<x<k+3\}$

$Q=\{x|-2\le x\le6\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k+3\ge-2$, $k+3\le6$

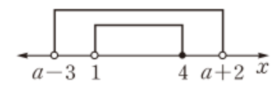
$\therefore 0<k\le3$ ($\because k>0$)

따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다. 답 3

0300 주어진 명제가 참이 되려면

$\{x|1<x\le4\}\subset\{x|a-3<x<a+2\}$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-3\le 1$, $\underline{a+2>4}$

$a+2=4$, 즉 $a=2$이면 $\{x|1<x\le 4\}\not\subset\{x|-1<x<4\}$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

$\therefore\ 2<a\le 4$

답 $2<a\le 4$

0301 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x|-1\le x\le 3$ 또는 $x\ge 5\}$

$Q=\{x|x\ge a\}$

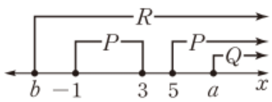
$R=\{x|x\ge b\}$ ⋯ ❶

명제 $q\longrightarrow p$가 참이 되려면

$Q\subset P$

이고, 명제 $p\longrightarrow r$가 참이 되려면

$P\subset R$



이어야 하므로 위의 그림에서

$a\ge 5$, $b\le -1$ ⋯ ❷

따라서 a의 최솟값은 5, b의 최댓값은 -1이므로 구하는 합은

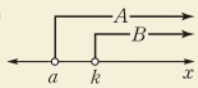
$5+(-1)=4$ ⋯ ❸

답 4

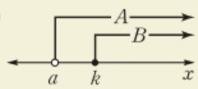
채점 기준	비율
❶ 세 조건 p, q, r의 진리집합을 구할 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ a의 최솟값과 b의 최댓값의 합을 구할 수 있다.	20 %

sSEN 특강

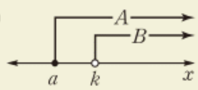
$B\subset A$가 되도록 하는 a의 값의 범위 구하기

①


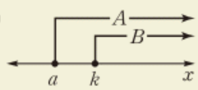
➡ $a\le k$

②


➡ $a<k$

③


➡ $a\le k$

④


➡ $a\le k$

0302 $|x-1|\ge k$에서

$x-1\le -k$ 또는 $x-1\ge k$

$\therefore\ x\le -k+1$ 또는 $x\ge k+1$

q: $|x+2|<4$에서 $\sim q$: $|x+2|\ge 4$이므로

$x+2\le -4$ 또는 $x+2\ge 4$

$\therefore\ x\le -6$ 또는 $x\ge 2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x\le -k+1$ 또는 $x\ge k+1\}$

$Q^C=\{x|x\le -6$ 또는 $x\ge 2\}$

명제 $\sim q\longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q^C\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$-k+1\ge -6$, $k+1\le 2$

$\therefore\ 0<k\le 1$ ($\because$ $k>0$)

따라서 k의 최댓값은 1이다.

답 1

유형 08 '모든'이나 '어떤'이 있는 명제

본책 49쪽

① '모든 x에 대하여 p이다.'가 참이면

➡ 전체집합의 원소 중 한 개도 빠짐없이 p를 만족시킨다.

② '어떤 x에 대하여 p이다.'가 참이면

➡ 전체집합의 원소 중 한 개 이상이 p를 만족시킨다.

0303 ① 2는 소수이고, 짝수이다.

③ $x=\frac{1}{2}$이면 $x^2=\frac{1}{4}$이므로 $x^2<x$

④ $x=0$이면 $x^2+x=0$

⑤ [반례] $x=1+\sqrt{2}$이면 $x^2=3+2\sqrt{2}$는 무리수이다.

답 ⑤

0304 ① [반례] $x=1$이면 $2x=2$이고 $2\notin U$이다.

② [반례] $x=0$이면 $x^2=0$이다.

③ -1, 0, 1은 모두 $x-1>0$을 만족시키지 않으므로 거짓이다.

④ $x=0$이면 $x^2=0$이므로 참이다.

⑤ [반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2+y^2=2$이다.

답 ④

0305 (1) 주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-3x+3>0$이다.' ⋯ ❶

(2) $x^2-3x+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 명제의 부정은 참이다. ⋯ ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 부정을 말할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 명제의 부정의 참, 거짓을 판별할 수 있다.	60 %

유형 09~10 명제와 역, 대우의 참, 거짓

본책 49, 50쪽

(1) 명제 $p\longrightarrow q$에서

① 역: $q\longrightarrow p$　　② 대우: $\sim q\longrightarrow \sim p$

(2) 명제가 참이면 그 대우도 참이고, 명제가 거짓이면 그 대우도 거짓이다.

0306 ① 역: $xy=0$이면 $x=0$이다.

[반례] $x=3$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x\ne 0$이다.

② 역: $x>2$이면 $3x-7>0$이다.

[반례] $x=\frac{7}{3}$이면 $x>2$이지만 $3x-7=0$이다.

③ 역: xy가 짝수이면 x, y는 짝수이다.

[반례] $x=2$, $y=3$이면 $xy=6$은 짝수이지만 y는 홀수이다.

④ 역: $x+y>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다.

[반례] $x=5$, $y=-4$이면 $x+y>0$이지만 $x>0$, $y<0$이다.

⑤ 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (참)

답 ⑤

14 명제

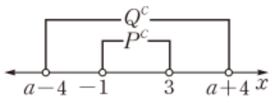
0307 ㄱ. 명제: [반례] $a=\sqrt{3}$, $b=-\sqrt{3}$이면 $ab=-3$은 유리수이지만 a, b는 유리수가 아니다.
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.
ㄴ. 대우: $a\le 0$ 또는 $b\le 0$이면 $ab\le 0$이다.
[반례] $a=-2$, $b=-3$이면 $a\le 0$, $b\le 0$이지만 $ab=6>0$이다.
ㄷ. 대우: $a^2-4a+3<0$이면 $-1\le a<3$이다. (참)
$(a-1)(a-3)<0 \quad \therefore 1<a<3$
이상에서 대우가 거짓인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

0308 ① 역: $x>1$이면 $x>0$이다. (참)
명제: [반례] $x=\frac{1}{2}$이면 $x>0$이지만 $x<1$이다.
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.
② 역: $x+1=0$이면 $x^2=1$이다. (참)
$x=-1$
명제: [반례] $x=1$이면 $x^2=1$이지만 $x+1=2$이다.
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.
③ 역: $x(x-2)=0$이면 $x=2$이다.
[반례] $x=0$이면 $x(x-2)=0$이지만 $x\ne 2$이다.
또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
④ 역: $ac=bc$이면 $a=b$이다.
[반례] $a=1$, $b=2$, $c=0$이면 $ac=bc=0$이지만 $a\ne b$이다.
또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
⑤ 역: $A\cap B=A$이면 $A\subset B$이다. (참)
또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
따라서 그 역과 대우가 모두 참인 명제는 ⑤이다.
답 ⑤

0309 주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$a\ge k$이고 $b\ge -1$이면 $a+b\ge 4$이다.'
도 참이다. $a\ge k$, $b\ge -1$에서 $a+b\ge k-1$이므로
$k-1\ge 4$ $\{(a, b)\,|\,a+b\ge k-1\}\subset\{(a, b)\,|\,a+b\ge 4\}$
$\therefore k\ge 5$
따라서 k의 최솟값은 5이다. 답 5

0310 주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$x=1$이면 $x^2+ax-3=0$이다.'
도 참이다. $x^2+ax-3=0$에 $x=1$을 대입하면
$1+a-3=0 \qquad \therefore a=2$ 답 2

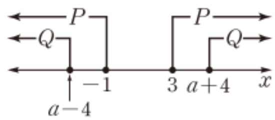
0311 명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되어야 한다. ··· ❶
$\sim p$: $|x-1|<2$에서 $\quad -2<x-1<2$
$\therefore -1<x<3$ ··· ❷
$\sim q$: $|x-a|<4$에서 $\quad -4<x-a<4$
$\therefore a-4<x<a+4$ ··· ❸
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P^C=\{x\,|\,-1<x<3\}$, $Q^C=\{x\,|\,a-4<x<a+4\}$
명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-4\le -1$, $a+4\ge 3$
$\therefore -1\le a\le 3$ ··· ❹
답 $-1\le a\le 3$

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우가 참임을 알 수 있다.	10 %
❷ 조건 $\sim p$가 참이 되는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ 조건 $\sim q$가 참이 되는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❹ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 p: $|x-1|\ge 2$에서
$x-1\le -2$ 또는 $x-1\ge 2$
$\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 3$
q: $|x-a|\ge 4$에서
$x-a\le -4$ 또는 $x-a\ge 4$
$\therefore x\le a-4$ 또는 $x\ge a+4$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\,|\,x\le -1$ 또는 $x\ge 3\}$
$Q=\{x\,|\,x\le a-4$ 또는 $x\ge a+4\}$
명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-4\le -1$, $a+4\ge 3$
$\therefore -1\le a\le 3$

유형 11 삼단논법
본책 50쪽

세 조건 p, q, r에 대하여 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이면
➡ 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다.

0312 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $r \longrightarrow q$가 모두 참이므로 각각의 대우 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim q \longrightarrow \sim r$도 모두 참이다.
또 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이고, 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $p \longrightarrow r$이다. 답 ①

0313 ㄱ. 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$가 참이다. 따라서 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.
ㄴ. 두 명제 $q \longrightarrow r$, $s \longrightarrow q$가 참이므로 명제 $s \longrightarrow r$는 참이지만 명제 $r \longrightarrow s$의 참, 거짓은 추론할 수 없다.
ㄷ. 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim s$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim s$가 참이다.
$s \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim s$도 참이다.
이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

0314 명제 $\sim r \longrightarrow \sim s$가 참이므로 그 대우 $s \longrightarrow r$도 참이다.
두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $s \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$가 참이 되려면 명제 $\sim q \longrightarrow s$가 참이어야 한다.

또 명제 $\sim q \longrightarrow s$가 참이면 그 대우 $\sim s \longrightarrow q$도 참이다.
따라서 명제 $p \longrightarrow r$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 $\sim s \longrightarrow q$이다. 답 ⑤

유형 12 삼단논법과 명제의 추론 본책 50쪽

주어진 문장에서 조건 p, q를 찾아 $p \longrightarrow q$ 꼴로 나타낸 후 명제가 참이면 그 대우도 참임과 삼단논법을 이용하여 참인 명제를 찾는다.

0315 세 조건 p, q, r를
p: 음악을 좋아한다., q: 미술을 좋아한다.,
r: 체육을 좋아한다.
로 놓으면 명제 $p \longrightarrow q$와 $\sim p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$와 $r \longrightarrow p$도 참이다.
또 $r \longrightarrow p$와 $p \longrightarrow q$가 참이므로 $r \longrightarrow q$가 참이고, 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.
따라서 반드시 참인 명제는 ④이다. 답 ④

참고 각 보기를 p, q, r로 나타내면 다음과 같다.
① $p \longrightarrow r$ ② $q \longrightarrow r$ ③ $\sim p \longrightarrow \sim q$
④ $r \longrightarrow q$ ⑤ $r \longrightarrow \sim p$

0316 (i) A가 남학생인 경우
(나)에 의하여 B가 남학생이거나 C가 여학생이어야 하는데 (다)에 의하여 C가 남학생이어야 하므로 B가 남학생이다.
즉 A, B, C 모두 남학생이므로 (가)에 모순이다. ··· ❶
(ii) A가 여학생인 경우
(다)에 의하여 C는 여학생이고, (라)에 의하여 B도 여학생이다.
즉 A, B, C 모두 여학생이다. ··· ❷
(i), (ii)에서 A, B, C 모두 여학생이다. ··· ❸
답 A, B, C

채점 기준	비율
❶ A가 남학생일 때, 모순임을 알 수 있다.	50 %
❷ A가 여학생일 때, B, C의 성별을 알 수 있다.	40 %
❸ 여학생을 모두 고를 수 있다.	10 %

유형 13 충분조건, 필요조건, 필요충분조건 본책 51쪽

① $p \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} q$ ➡ p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
② $p \underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} q$ ➡ p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.
③ $p \underset{\bigcirc}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} q$ ➡ p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

0317 ① $x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이고, $xy=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이므로 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
② z가 양수이므로 $x>y \Longleftrightarrow xz>yz$, 즉 $p \Longleftrightarrow q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
③ $xy=|xy|$이면 $xy\ge 0$이므로 $x\ge 0$, $y\ge 0$ 또는 $x\le 0$, $y\le 0$이다.
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
④ $x^2=x$이면 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ $x^2=y^2$이면 $x=y$ 또는 $x=-y$이므로 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0318 ① [$\longrightarrow$ 의 반례] $x=-1$, $y=-1$이면 $|x+y|=|x|+|y|$이지만 $x<0$, $y<0$이다.
$x\ge 0$, $y\ge 0$이면 $|x+y|=|x|+|y|$이므로 $q \Longrightarrow p$
② $x\ge 0$, $y\ge 0$이면 $xy\ge 0$이므로 $p \Longrightarrow q$
[$\longleftarrow$의 반례] $x=-1$, $y=-1$이면 $xy\ge 0$이지만 $x<0$, $y<0$이다.
③ p: $x^2>y^2 \Longleftrightarrow q$: $|x|>|y|$
④ [$\longrightarrow$ 의 반례] $x=2$, $y=-4$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $x+y<0$이다.
$x+y>0$이면 $x^2+y^2>0$이므로 $q \Longrightarrow p$
⑤ [$\longrightarrow$ 의 반례] $x=1$, $y=2$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $xy>0$이다.
$xy<0$이면 $x^2+y^2>0$이므로 $q \Longrightarrow p$
따라서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ③이다. 답 ③

0319 ㄱ. $a=b=c=0$이면
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$
이므로
$p \Longrightarrow q$
$\underbrace{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0}_{a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0}$이면 $a=b=c$이므로
$q \not\Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. $a-c>b-c$의 양변에 c를 더하면 $a>b$이므로
$p \Longrightarrow q$
$a>b$의 양변에 $-c$를 더하면 $a-c>b-c$이므로
$q \Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
ㄷ. [$\longrightarrow$ 의 반례] $a=-2$, $b=-1$이면 $ab+1>2$이지만 $a<1$, $b<1$이다.
$a>1$, $b>1$이면 $ab>1$에서 $ab+1>2$이므로
$q \Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.
이상에서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

유형 14 충분조건, 필요조건과 명제의 참, 거짓 본책 51쪽

① p가 q이기 위한 충분조건 ➡ 명제 $p \longrightarrow q$가 참이다. ➡ $p \Longrightarrow q$
② p가 q이기 위한 필요조건 ➡ 명제 $q \longrightarrow p$가 참이다. ➡ $q \Longrightarrow p$

0320 $q \Longrightarrow p$, $r \Longrightarrow q$이므로 $r \Longrightarrow p$
$q \Longrightarrow p$이므로 $\sim p \Longrightarrow \sim q$
이상에서 참인 명제인 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

0321 ㄱ. $q \Longrightarrow p$이므로 q는 p이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $\sim r \Longrightarrow \sim p$이므로 $p \Longrightarrow r$

따라서 r는 p이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $q \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow r$이므로 $q \Longrightarrow r$

따라서 q는 r이기 위한 충분조건이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

유형 15 충분 · 필요 · 필요충분조건과 진리집합

본책 52쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

① $P \cap Q = P$ ➡ $P \subset Q$ ➡ $p \Longrightarrow q$ ➡ p는 q이기 위한 충분조건

② $P \cup Q = P$ ➡ $Q \subset P$ ➡ $q \Longrightarrow p$ ➡ p는 q이기 위한 필요조건

③ $P \subset Q$, $Q \subset P$ ➡ $P = Q$ ➡ $p \Longleftrightarrow q$

➡ p는 q이기 위한 필요충분조건

0322 p는 q이기 위한 충분조건이므로

$P \subset Q$

q는 r이기 위한 충분조건이므로

$Q \subset R$

따라서 $P \subset Q \subset R$이므로 항상 옳은 것은 ②이다. 답 ②

0323 ① $R \subset P$이므로 p는 r이기 위한 필요조건이다.

③ $Q \subset P$이므로 q는 p이기 위한 충분조건이다.

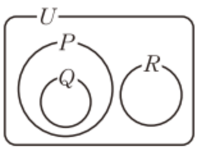
⑤ $P^C \subset R^C$이므로 $\sim r$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다. 답 ③

0324 $(P - R^C) \cup (Q - P) = \varnothing$이므로

$P - R^C = \varnothing$, $Q - P = \varnothing$ $\quad P - R^C = P \cap (R^C)^C = P \cap R = \varnothing$

$\therefore P \cap R = \varnothing$, $Q \subset P$

세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $Q \subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

④ $Q \subset R^C$이므로 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

⑤ $R \subset Q^C$이므로 r는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다. 답 ④

유형 16 집합의 연산과 필요충분조건

본책 52쪽

$A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A \Longleftrightarrow A \cup B = B$

$\Longleftrightarrow A - B = \varnothing \Longleftrightarrow B^C \subset A^C$

0325
$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (B - A)^C &= (A \cup B) \cap (B \cap A^C)^C \\ &= (A \cup B) \cap (B^C \cup A) \\ &= A \cup (B \cap B^C) \\ &= A \cup \varnothing \\ &= A\end{aligned}$$

따라서 $A \cup B = A$가 성립하기 위한 필요충분조건은 $B \subset A$이다.

답 ②

0326 두 집합 A, B가 서로소 $\Longleftrightarrow A \cap B = \varnothing$

$\Longleftrightarrow B \subset A^C$

따라서 두 집합 A, B가 서로소이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

유형 17 충분 · 필요 · 필요충분조건이 되도록 하는 상수 구하기

본책 52쪽

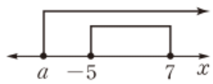
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

① p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건 ➡ $P \subset Q$

② p는 q이기 위한 필요충분조건 ➡ $P = Q$

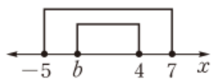
임을 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구한다.

0327 $x \ge a$는 $-5 \le x \le 7$이기 위한 필요조건이므로 명제 '$-5 \le x \le 7$이면 $x \ge a$이다.'가 참이다.



$\therefore a \le -5$

$b \le x \le 4$는 $-5 \le x \le 7$이기 위한 충분조건이므로 명제 '$b \le x \le 4$이면 $-5 \le x \le 7$이다.'가 참이다.



$\therefore -5 \le b \le 4$

따라서 a의 최댓값은 -5, b의 최솟값은 -5이므로 구하는 합은

$-5 + (-5) = -10$ 답 -10

0328 p가 q이기 위한 충분조건이므로 명제 '$4x^2 - 4x - 3 \ne 0$이면 $2x + a \ne 0$이다.'가 참이다.

즉 이 명제의 대우 '$2x + a = 0$이면 $4x^2 - 4x - 3 = 0$이다.'도 참이다. ··· ❶

$2x + a = 0$에서 $x = -\dfrac{a}{2}$이므로 이것을 $4x^2 - 4x - 3 = 0$에 대입하면

$4\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2 - 4\left(-\dfrac{a}{2}\right) - 3 = 0$

$a^2 + 2a - 3 = 0$, $\quad (a+3)(a-1) = 0$

$\therefore a = -3$ 또는 $a = 1$ ··· ❷

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$-3 + 1 = -2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ p가 q이기 위한 충분조건임을 이용하여 참인 명제를 찾을 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0329 $x + 1 = 2x - 1$에서 $x = 2$

이때 $x + 1 = 2x - 1$은 $x^2 - ax + b = 0$이기 위한 필요충분조건이므로 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$의 해는 2뿐이어야 한다.

중근 $x = 2$를 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $(x-2)^2 = 0$이므로

$x^2 - ax + b = (x-2)^2$, $\quad x^2 - ax + b = x^2 - 4x + 4$

$\therefore a = 4$, $b = 4$

$\therefore a + b = 8$ 답 8

0330 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\mid -1<x<0$ 또는 $x\ge 3\}$

$Q=\{x\mid x\le a\}$

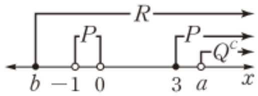
$R=\{x\mid x\ge b\}$

이때 $\sim p$는 q이기 위한 충분조건이고 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로 두 명제 $\sim p \longrightarrow q$, $\sim r \longrightarrow \sim p$는 참이다.

즉 $P^C \subset Q$, $R^C \subset P^C$이므로 $Q^C \subset P$, $P \subset R$

$\therefore Q^C \subset P \subset R$

오른쪽 그림에서 $a\ge 3$, $b\le -1$이므로



$a\ge 3$, $-b\ge 1$

$\therefore a-b\ge 4$

따라서 $a-b$의 최솟값은 4이다. 답 4

유형 18 대우를 이용한 명제의 증명 본책 53쪽

명제의 대우 '$\sim q$이면 $\sim p$이다.'가 참임을 이용하여 주어진 명제 'p이면 q이다.'가 참임을 증명한다.

0331 $n=\boxed{3k-2}$ 또는 $n=\boxed{3k-1}$ (k는 자연수)이라 하면

k가 자연수이므로 $n=3k+1$ 또는 $n=3k+2$라 하면 n은 3 이상의 3의 배수가 아닌 자연수이므로 1, 2는 표현할 수 없다.

(i) $n=3k-2$일 때,

$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4$

$=3(\boxed{3k^2-4k+1})+1$

(ii) $n=3k-1$일 때,

$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1$

$=3(\boxed{3k^2-2k})+1$ 답 ②

0332 주어진 명제의 대우는

'$a\ne 0$ 또는 $b\ne 0$이면 $a^2+b^2\ne 0$이다.'

(i) $a\ne 0$이면

$a^2>0$이고 $b^2\ge 0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\ne 0$이다.

(ii) $b\ne 0$이면

$a^2\ge 0$이고 $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\ne 0$이다.

(i), (ii)에서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

0333 (1) 주어진 명제의 대우는

'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.' ⋯ ❶

(2) $n=2k-1$(k는 자연수)이라 하면

$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1$

이므로 n^2도 홀수이다. ⋯ ❷

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

⋯ ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우를 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 명제의 대우가 참임을 보일 수 있다.	50 %
❸ 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.	20 %

유형 19 귀류법 본책 53쪽

명제가 참임을 직접 증명하는 것이 복잡할 때

➡ 명제의 결론을 부정하여 가정에 모순이 됨을 보인다.

0334 $\sqrt{5}$가 $\boxed{\text{유리수}}$라고 가정하면

$\sqrt{5}=\dfrac{a}{b}$ (a, b는 $\boxed{\text{서로소}}$인 정수, $b\ne 0$)

꼴로 나타낼 수 있다. 양변을 제곱하여 정리하면

$a^2=5b^2$ ⋯⋯ ㉠

따라서 a^2이 $\boxed{\text{5의 배수}}$이므로 a도 5의 배수이다.

$a=5k$ (k는 정수)로 놓으면 ㉠에서

$25k^2=5b^2$ $\therefore b^2=5k^2$

따라서 b^2이 5의 배수이므로 b도 5의 배수이다.

그러므로 a, b가 서로소라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{5}$는 무리수이다.

∴ (가) 유리수 (나) 서로소 (다) 5의 배수 답 ③

0335 $b\ne 0$이라 가정하면 $a+b\sqrt{2}=0$에서 $\sqrt{2}=-\dfrac{a}{b}$

a, b가 유리수이므로 $-\dfrac{a}{b}$, 즉 $\sqrt{2}$가 유리수이다.

이때 $\sqrt{2}$가 무리수라는 사실에 모순이므로 $b=0$이다.

$a+b\sqrt{2}=0$에 $b=0$을 대입하면 $a=0$이다.

따라서 유리수 a, b에 대하여 $a+b\sqrt{2}=0$이면 $a=b=0$이다.

답 풀이 참조

유형 20 실수의 성질을 이용한 절대부등식의 증명 본책 54쪽

실수 A, B에 대하여

① $A\ge B \Longleftrightarrow A-B\ge 0$

② $A^2\ge 0$, $A^2+B^2\ge 0$ (단, 등호는 $A=0$, $B=0$일 때 성립)

임을 이용하여 증명한다.

0336 $a^2+b^2-ab=\left(a-\boxed{\dfrac{b}{2}}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\ge 0$

따라서 $a^2+b^2\ge ab$이고, 등호는 $a-\dfrac{b}{2}=0$, $b=0$, 즉 $\boxed{a=b=0}$

일 때 성립한다. 답 (가) $\dfrac{b}{2}$ (나) $a=b=0$

0337 $A-B=(ab-1)^2-(a^2-1)(b^2-1)$

$=a^2b^2-2ab+1-(a^2b^2-a^2-b^2+1)$

$=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

a, b가 실수이므로 $(a-b)^2\ge 0$

$\therefore A\ge B$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립) 답 ②

0338 $(a^2+b^2+1)-(ab+a+b)$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2-2ab-2a-2b+2)$

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}\ge 0$ ⋯ ❶

$\therefore a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$ ⋯ ❷

이때 등호는 $a-b=0$, $a-1=0$, $b-1=0$, 즉 $a=b=1$일 때 성립한다. ⋯ ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $(a^2+b^2+1)-(ab+a+b) \geq 0$임을 증명할 수 있다.	50 %
❷ $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$임을 증명할 수 있다.	20 %
❸ 등호가 성립하는 경우를 구할 수 있다.	30 %

유형 21 절댓값 기호를 포함한 절대부등식

본책 54쪽

실수 A, B, C에 대하여

① $|A| \geq 0$, $|B| \geq 0$이므로

$$|A| \geq |B| \Longleftrightarrow |A|^2 \geq |B|^2$$
$$\Longleftrightarrow |A|^2-|B|^2 \geq 0$$

② $|A|+|B| \geq 0$, $|C| \geq 0$이므로

$$|A|+|B| \geq |C| \Longleftrightarrow (|A|+|B|)^2 \geq |C|^2$$
$$\Longleftrightarrow (|A|+|B|)^2-|C|^2 \geq 0$$

0339 $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a+b)^2$

$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(\boxed{|ab|-ab}) \geq 0$ ($\because$ $|ab| \geq ab$) ← 모든 실수 A에 대하여 $|A| \geq A$

$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2$

그런데 $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$이므로

$|a|+|b| \geq |a+b|$

(단, 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $\boxed{ab \geq 0}$일 때 성립)

$\therefore$ (가) $|ab|-ab$ (나) $ab \geq 0$

답 ④

0340 ㄱ. $(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$

$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a-b)^2$

$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$

$=2(|ab|+ab) \geq 0$ ($\because |ab| \geq -ab$)

$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq |a-b|^2$

그런데 $|a|+|b| \geq 0$, $|a-b| \geq 0$이므로

$|a|+|b| \geq |a-b|$

(단, 등호는 $|ab|=-ab$, 즉 $ab \leq 0$일 때 성립)

ㄴ. [반례] $a=1$, $b=-1$이면

$|a+b|=0$, $|a-b|=2$

$\therefore |a+b|<|a-b|$

$|a+b|^2-|a-b|^2=4ab$의 부호는 알 수 없으므로 ㄱ과 같은 방법으로 증명하기 어렵다.

ㄷ. (i) $|a| \geq |b|$일 때,

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$

$=a^2-2ab+b^2-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2(|ab|-ab) \geq 0$ ($\because |ab| \geq ab$)

$\therefore |a-b|^2 \geq (|a|-|b|)^2$

그런데 $|a-b| \geq 0$, $|a|-|b| \geq 0$이므로

$|a-b| \geq |a|-|b|$

(ii) $|a|<|b|$일 때,

$|a-b|>0$, $|a|-|b|<0$이므로

$|a-b|>|a|-|b|$

(i), (ii)에서

$|a-b| \geq |a|-|b|$

(단, 등호는 $|ab|=ab$, $|a| \geq |b|$일 때 성립)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

유형 22 산술평균과 기하평균의 관계 ; 곱의 최솟값 구하기

본책 55쪽

곱을 전개하여 양수 a, b에 대하여

$(\text{상수})+a+b \geq (\text{상수})+2\sqrt{ab}$

꼴로 변형한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

0341 $x>0$, $y>0$에서 $xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right)=xy+8+2+\frac{16}{xy}$$
$$\geq 10+2\sqrt{xy\cdot\frac{16}{xy}}$$

← $xy>0$이므로 $\frac{16}{xy}>0$이다.

$$=10+2\cdot 4$$
$$=18$$

등호는 $xy=\dfrac{16}{xy}$일 때 성립하므로 $(xy)^2=16$에서

$xy=4$ ($\because xy>0$)

따라서 $\left(x+\dfrac{2}{y}\right)\left(y+\dfrac{8}{x}\right)$은 $xy=4$일 때 최솟값 18을 가지므로

$a=4$, $b=18$

$\therefore a+b=22$

답 22

참고 $x+\dfrac{2}{y} \geq 2\sqrt{\dfrac{2x}{y}}$ ⋯⋯ ㉠, $y+\dfrac{8}{x} \geq 2\sqrt{\dfrac{8y}{x}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 곱하면 $\left(x+\dfrac{2}{y}\right)\left(y+\dfrac{8}{x}\right) \geq 4\sqrt{\dfrac{2x}{y}\cdot\dfrac{8y}{x}}=16$

따라서 $\left(x+\dfrac{2}{y}\right)\left(y+\dfrac{8}{x}\right)$의 최솟값을 16이라 하면 잘못된 풀이이다.

㉠에서 등호가 성립하는 것은 $x=\dfrac{2}{y}$일 때이고 ㉡에서 등호가 성립하는 것은 $y=\dfrac{8}{x}$일 때인데, ㉠, ㉡의 등호가 동시에 성립하도록 하는 양수 x, y가 존재하지 않기 때문이다.

0342 $a>0$에서 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{4}{a}\right)=a^2-4-1+\frac{4}{a^2}$$
$$\geq -5+2\sqrt{a^2\cdot\frac{4}{a^2}}$$
$$=-5+2\cdot 2=-1$$

등호는 $a^2=\dfrac{4}{a^2}$일 때 성립하므로 $a^4=4$

$a^2=2$ ($\because a^2>0$)

$\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

답 $\sqrt{2}$

0343 $a>0,\ b>0,\ c>0$에서 $\frac{a}{b+c}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)&=\{a+(b+c)\}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)\\&=1+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}+1\\&=2+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a} \quad \cdots ①\\&\ge 2+2\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b+c}{a}}\\&=4\ (\text{단, 등호는 } a=b+c\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 4이다. ⋯ ②

답 4

채점 기준	비율
① 주어진 식을 변형할 수 있다.	60 %
② 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

참고 등호는 $\frac{a}{b+c}=\frac{b+c}{a}$일 때 성립하므로

$a^2=(b+c)^2 \qquad \therefore a=b+c\ (\because a>0,\ b+c>0)$

유형 23 산술평균과 기하평균의 관계 ; 합의 최솟값 구하기

본책 55쪽

$f(x)+\frac{1}{f(x)}\ (f(x)>0)$ 꼴을 포함하도록 식을 변형한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

0344 $x>-1$에서 $x+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}x+\frac{9}{x+1}&=x+1+\frac{9}{x+1}-1\\&\ge 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{9}{x+1}}-1\\&=2\cdot3-1=5\end{aligned}$$

등호는 $x+1=\frac{9}{x+1}$일 때 성립하므로

$(x+1)^2=9, \qquad x+1=3\ (\because x+1>0) \qquad \therefore x=2$

따라서 $x+\frac{9}{x+1}$는 $x=2$일 때 최솟값 5를 가지므로

$m=5,\ n=2 \qquad \therefore m+n=7$

답 ③

0345 $x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}x+y+\frac{1}{x}+\frac{4}{y}&=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{4}{y}\right)\\&\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+2\sqrt{y\cdot\frac{4}{y}}\\&=2+2\cdot2\\&=6\ (\text{단, 등호는 } x=1,\ y=2\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

따라서 $x+y+\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$의 최솟값은 6이다.

답 6

참고 등호는 $x=\frac{1}{x},\ y=\frac{4}{y}$일 때 성립하므로

$x^2=1,\ y^2=4 \qquad \therefore x=1,\ y=2\ (\because x>0,\ y>0)$

0346 $x>2$에서 $x-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}4x-4+\frac{4}{x-2}&=4(x-2)+\frac{4}{x-2}+4 \quad \cdots ①\\&\ge 2\sqrt{4(x-2)\cdot\frac{4}{x-2}}+4\\&=2\cdot4+4\\&=12\ (\text{단, 등호는 } x=3\text{일 때 성립}) \quad \cdots ②\end{aligned}$$

따라서 $4x-4+\frac{4}{x-2}\ge m$이 항상 성립하려면 $m\le12$이어야 하므로 m의 최댓값은 12이다. ⋯ ③

답 12

채점 기준	비율
① 주어진 부등식의 좌변을 변형할 수 있다.	30 %
② 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	40 %
③ m의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

참고 등호는 $4(x-2)=\frac{4}{x-2}$일 때 성립하므로

$4(x-2)^2=4, \qquad x-2=1\ (\because x-2>0) \qquad \therefore x=3$

0347 $\sqrt{x^2}=x,\ x\ne0$에서 $x>0,\ x^2+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}&=\frac{x^2+1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}\\&\ge 2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{4x}{x^2+1}}\\&=2\cdot2\\&=4\ (\text{단, 등호는 } x=1\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

따라서 $x+\frac{1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}$의 최솟값은 4이다.

답 ④

참고 등호는 $\frac{x^2+1}{x}=\frac{4x}{x^2+1}$일 때 성립하므로

$(x^2+1)^2=4x^2, \qquad x^4-2x^2+1=0$

$(x^2-1)^2=0, \qquad x^2=1 \qquad \therefore x=1\ (\because x>0)$

0348 $x\ne0$이므로 $\frac{x}{x^2+2x+9}$의 분모, 분자를 각각 x로 나누면

$$\frac{x}{x^2+2x+9}=\frac{1}{x+2+\frac{9}{x}}$$

이때 $x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}x+2+\frac{9}{x}&\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}+2\\&=2\cdot3+2\\&=8\ (\text{단, 등호는 } x=3\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

따라서 $x+2+\frac{9}{x}$의 최솟값이 8이므로 $\frac{1}{x+2+\frac{9}{x}}$, 즉 $\frac{x}{x^2+2x+9}$의 최댓값은 $\frac{1}{8}$이다.

답 $\frac{1}{8}$

유형 24 산술평균과 기하평균의 관계 ; 합 또는 곱이 일정할 때

본책 56쪽

$a>0$, $b>0$일 때, $a+b\geq 2\sqrt{ab}$가 항상 성립하므로
➡ $a+b$가 일정하면 ab는 $a=b$일 때 최댓값을 갖는다.
➡ ab가 일정하면 $a+b$는 $a=b$일 때 최솟값을 갖는다.

0349 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x+3y\geq 2\sqrt{2x\cdot 3y}=2\sqrt{6xy}$$

그런데 $2x+3y=6$이므로

$$6\geq 2\sqrt{6xy},\qquad 3\geq\sqrt{6xy}$$

양변을 제곱하면 $\quad 9\geq 6xy$

$$\therefore\ xy\leq\frac{3}{2}$$

이때 등호는 $2x=3y$일 때 성립하고 $2x+3y=6$이므로

$$2x=3,\ 3y=3$$

$$\therefore\ x=\frac{3}{2},\ y=1$$

따라서 xy는 $x=\frac{3}{2}$, $y=1$일 때 최댓값 $\frac{3}{2}$을 가지므로

$$\alpha=\frac{3}{2},\ \beta=\frac{3}{2},\ \gamma=1$$

$$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=4$$

답 ②

0350 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4x^2+9y^2\geq 2\sqrt{4x^2\cdot 9y^2}=12xy$$

그런데 $4x^2+9y^2=48$이므로

$$48\geq 12xy$$

$\therefore\ xy\leq 4$ (단, 등호는 $2x=3y$일 때 성립)

따라서 xy의 최댓값은 4이다.

답 4

참고 등호는 $4x^2=9y^2$일 때 성립하므로
$(2x)^2=(3y)^2\qquad\therefore\ 2x=3y\ (\because\ x>0,\ y>0)$

0351 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{4}{ab}$ ······ ㉠

한편 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}$$

그런데 $a+b=4$이므로

$4\geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $\quad 16\geq 4ab$

$$\therefore\ \frac{4}{ab}\geq 1$$

따라서 ㉠에서 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$의 최솟값은 1이다.

답 ③

0352 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4a+2b\geq 2\sqrt{4a\cdot 2b}=2\sqrt{8ab}$$

그런데 $ab=18$이므로

$4a+2b\geq 2\sqrt{8\cdot 18}$
$=24$ (단, 등호는 $2a=b$일 때 성립)

따라서 $4a+2b$의 최솟값은 24이다.

답 24

다른 풀이 $ab=18$에서 $a>0$이므로 $\quad b=\frac{18}{a}$

$$\therefore\ 4a+2b=4a+2\cdot\frac{18}{a}=4a+\frac{36}{a}\geq 2\sqrt{4a\cdot\frac{36}{a}}=2\cdot 12$$

$=24$ (단, 등호는 $a=3$일 때 성립)

$4a=\frac{36}{a}$에서 $a^2=9$
$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

0353 $x>0$, $y>0$이므로

$$(\sqrt{3x}+\sqrt{5y})^2=3x+5y+2\sqrt{3x}\sqrt{5y}=10+2\sqrt{15xy}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

이고, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3x+5y\geq 2\sqrt{3x\cdot 5y}=2\sqrt{15xy}$$

그런데 $3x+5y=10$이므로

$10\geq 2\sqrt{15xy}$ (단, 등호는 $3x=5y$일 때 성립) ······ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$(\sqrt{3x}+\sqrt{5y})^2=10+2\sqrt{15xy}\leq 10+10=20$$

$\therefore\ \sqrt{3x}+\sqrt{5y}\leq\sqrt{20}=2\sqrt{5}\ (\because\ \sqrt{3x}+\sqrt{5y}>0)$

따라서 $\sqrt{3x}+\sqrt{5y}$의 최댓값은 $2\sqrt{5}$이다.

답 $2\sqrt{5}$

유형 25 산술평균과 기하평균의 관계 ; 복잡한 식의 최대·최소

본책 56쪽

$a>0$, $b>0$, $c>0$일 때
① $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}$
$=8abc$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
② $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}$
$=4$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

0354 $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}$$
$$=\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}$$
$$=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}+2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}}$$
$$=2+2+2$$

$=6$ (단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 6이다.

답 6

참고 등호는 $\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$, $\frac{z}{y}=\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}=\frac{x}{z}$일 때 성립하므로
$x^2=y^2=z^2\qquad\therefore\ x=y=z\ (\because\ x>0,\ y>0,\ z>0)$

SSEN 특강

이 문제에서는 세 식 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\ge 2\sqrt{\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{x}{y}}$, $\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}\ge 2\sqrt{\dfrac{z}{y}\cdot\dfrac{y}{z}}$, $\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\ge 2\sqrt{\dfrac{z}{x}\cdot\dfrac{x}{z}}$에서 등호가 성립할 조건이 동시에 성립할 수 있으므로 위와 같이 풀 수 있다.

그런데 예를 들어 $x+\dfrac{1}{x}+x+\dfrac{9}{x}$ $(x>0)$의 최솟값을 구할 때,

$$x+\frac{1}{x}+x+\frac{9}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}=2+2\cdot 3=8$$

에서 $x+\dfrac{1}{x}+x+\dfrac{9}{x}$의 최솟값이 8이라 생각하면 안 된다.

이 경우 $x+\dfrac{1}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}$에서 등호가 성립하는 조건은 $x=1$이고, $x+\dfrac{9}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{9}{x}}$에서 등호가 성립하는 조건은 $x=3$이므로 두 식의 등호가 동시에 성립할 수 없기 때문이다.

0355 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}\cdot 2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}\cdot 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}}$$
$$=8\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}$$
$$=8 \text{ (단, 등호는 } a=b=c\text{일 때 성립)}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 8이다.

답 ④

참고 등호는 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{a}$일 때 성립하므로

$b^2=ac$ ⋯ ㉠, $c^2=ab$ ⋯ ㉡, $a^2=bc$ ⋯ ㉢

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{c}{b}$, $b^3=c^3$ $\therefore b=c$

㉡÷㉢을 하면 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a}{c}$, $a^3=c^3$ $\therefore a=c$

$\therefore a=b=c$

0356 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2-2a+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=(a-1)^2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1 \quad \cdots ❶$$
$$\ge (a-1)^2+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}-1$$
$$=(a-1)^2+1 \text{ (단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립)} \quad \cdots ❷$$

이때 $(a-1)^2+1$은 $a=1$일 때 최소이므로 주어진 식은 $a=b=1$일 때 최소이다.

$\therefore a+b=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0357 $x=a+\dfrac{2}{b}$, $y=b+\dfrac{2}{a}$이므로

$$x^2+y^2=\left(a+\frac{2}{b}\right)^2+\left(b+\frac{2}{a}\right)^2$$
$$=\left(a^2+\frac{4a}{b}+\frac{4}{b^2}\right)+\left(b^2+\frac{4b}{a}+\frac{4}{a^2}\right)$$
$$=\left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)+\left(\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}\right)+\left(b^2+\frac{4}{b^2}\right)$$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2+\frac{4}{a^2}\ge 2\sqrt{a^2\cdot\frac{4}{a^2}}=2\cdot 2=4 \text{ (단, 등호는 } a=\sqrt{2}\text{일 때 성립)}$$
$$\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=2\cdot 4=8$$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
$$b^2+\frac{4}{b^2}\ge 2\sqrt{b^2\cdot\frac{4}{b^2}}=2\cdot 2=4 \text{ (단, 등호는 } b=\sqrt{2}\text{일 때 성립)}$$
$$\therefore x^2+y^2\ge 4+8+4=16 \text{ (단, 등호는 } a=b=\sqrt{2}\text{일 때 성립)}$$

따라서 x^2+y^2은 $a=b=\sqrt{2}$일 때 최솟값 16을 가지므로

$\alpha=16$, $\beta=\sqrt{2}$, $\gamma=\sqrt{2}$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta\gamma}=\frac{16}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=8$$

답 8

다른 풀이 $x^2>0$, $y^2>0$, $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot y^2} \quad \cdots ㉠$$
$$=2xy$$
$$=2\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)$$
$$=2\left(ab+\frac{4}{ab}+4\right)$$
$$\ge 2\left(2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+4\right) \quad \cdots ㉡$$
$$=2(2\cdot 2+4)=16$$

㉠에서 등호는 $x=y$일 때, ㉡에서 등호는 $ab=2$일 때 성립한다.

$x=y$에서 $a+\dfrac{2}{b}=b+\dfrac{2}{a}$

$$\frac{ab+2}{b}=\frac{ab+2}{a}$$

$\therefore a=b$

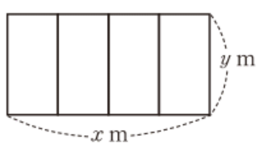
또 $ab=2$이므로 등호는 $a=b=\sqrt{2}$일 때 성립한다.

유형 26 산술평균과 기하평균의 관계 ; 도형에서의 활용

본책 57쪽

변하는 값을 각각 x, y로 놓고 주어진 값 또는 구하는 값을 $x+y$, xy로 나타낸다.

0358 오른쪽 그림과 같이 바깥쪽 직사각형의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면 줄의 전체 길이가 100 m이므로



$2x+5y=100$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x+5y\ge 2\sqrt{2x\cdot 5y}=2\sqrt{10xy} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 등호는 $2x=5y$일 때 성립하고 이때 구역의 전체 넓이 xy가 최대가 되므로 $2x+5y=100$에서

$2x=50$, $5y=50$

$\therefore x=25$, $y=10$

따라서 가로의 길이가 25 m, 세로의 길이가 10 m일 때, 구역 전체 테두리인 바깥쪽 직사각형의 둘레의 길이는

$2(25+10)=70\,(\mathrm{m})$ 답 70 m

참고 $2x+5y=100$에서 $y=20-\frac{2}{5}x$이므로 구역의 전체 넓이를 S라 할 때,

$$S=x\left(20-\frac{2}{5}x\right)=-\frac{2}{5}(x-25)^2+250\ (0<x<50)$$

따라서 이차함수의 최대·최소를 이용하여 답을 구할 수도 있다.

0359 창고의 밑면에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 x m, y m라 하면

$x^2+y^2=12^2=144$ ··· ❶

$x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot y^2}=2xy$

그런데 $x^2+y^2=144$이므로

$144\ge 2xy$

$\therefore xy\le 72$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립) ··· ❷

따라서 창고의 밑면의 넓이를 S m^{2}라 하면

$$S=\frac{1}{2}xy\le\frac{1}{2}\cdot 72=36$$

이므로 넓이의 최댓값은 36 m^{2}이다.

$\therefore k=36$ ··· ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ x^2+y^2의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

0360 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$이므로 삼각형 OBC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}ab \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 A(2, 3)이 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\ge 2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\frac{3}{b}}=2\sqrt{\frac{6}{ab}}$$

그런데 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$이므로

$$1\ge 2\sqrt{\frac{6}{ab}}\ (\text{단, 등호는 } 3a=2b\text{일 때 성립})$$

$\frac{2}{a}=\frac{3}{b}$에서 $3a=2b$

양변을 제곱하면 $1\ge 4\cdot\frac{6}{ab}$

$$\therefore ab\ge 24 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$S=\frac{1}{2}ab\ge\frac{1}{2}\cdot 24=12$$

따라서 삼각형 OBC의 넓이의 최솟값은 12이다. 답 12

유형 27~30 코시 – 슈바르츠의 부등식

본책 57, 58쪽

① a, b, x, y가 실수일 때,

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2\ \left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$$

② a, b, c, x, y, z가 실수일 때,

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\ge(ax+by+cz)^2$$

$$\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\text{일 때 성립}\right)$$

0361 x, y가 실수이므로 코시 – 슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\ge(2x+3y)^2$

그런데 $x^2+y^2=52$이므로

$13\cdot 52\ge(2x+3y)^2$

$13^2\cdot 2^2\ge(2x+3y)^2$

$\therefore -26\le 2x+3y\le 26$

한편 등호는 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$일 때 성립하므로 $y=\frac{3}{2}x$

이것을 $x^2+y^2=52$에 대입하면

$$x^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2=52,\qquad x^2=16$$

$\therefore x=\pm 4$, $y=\pm 6$ (복호동순)

따라서 $2x+3y$는 $x=4$, $y=6$일 때 최댓값 26을 가지므로

$\alpha=26$, $\beta=4$, $\gamma=6$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=36$ 답 ⑤

0362 x, y가 실수이므로 코시 – 슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2)(x^2+y^2)\ge(x+2y)^2$

그런데 $x^2+y^2=5$이므로

$25\ge(x+2y)^2$

$$\therefore -5\le x+2y\le 5\ \left(\text{단, 등호는 } x=\frac{y}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $x+2y$의 최댓값은 5, 최솟값은 -5이므로 구하는 곱은

$5\cdot(-5)=-25$ 답 ①

0363 $x^2+y^2=3$이므로

$x^2+4x+y^2+3y=4x+3y+3$

x, y가 실수이므로 코시 – 슈바르츠의 부등식에 의하여

$(4^2+3^2)(x^2+y^2)\ge(4x+3y)^2$

그런데 $x^2+y^2=3$이므로

$75\ge(4x+3y)^2$

$$-5\sqrt{3}\le 4x+3y\le 5\sqrt{3}\ \left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{4}=\frac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$$

$\therefore 3-5\sqrt{3}\le 4x+3y+3\le 3+5\sqrt{3}$

따라서 x^2+4x+y^2+3y의 최댓값은 $3+5\sqrt{3}$이다. 답 $3+5\sqrt{3}$

0364 x, y가 실수이므로 코시 – 슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(3^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(3x+y)^2$$

그런데 $x^2+y^2=a$이므로

$$10a\ge(3x+y)^2$$

$$\therefore\ -\sqrt{10a}\le 3x+y\le\sqrt{10a}\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{3}=y\text{일 때 성립}\right)$$

⋯ ❶

따라서 $3x+y$의 최댓값은 $\sqrt{10a}$, 최솟값은 $-\sqrt{10a}$이고 그 차가 20이므로

$$2\sqrt{10a}=20,\qquad 10a=100\qquad \therefore\ a=10$$

⋯ ❷

답 10

채점 기준	비율
❶ $3x+y$의 값의 범위를 a를 사용하여 나타낼 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0365 x, y가 실수이므로 코시 – 슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(3x+4y)^2$$

그런데 $3x+4y=5$이므로

$$25(x^2+y^2)\ge 25$$

$$\therefore\ x^2+y^2\ge 1\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{3}=\frac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 1이다. 답 ①

0366 a, b가 실수이므로 코시 – 슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}(a^2+b^2)\ge\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2$$

그런데 $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=\sqrt{13}$이므로

$$\frac{13}{36}(a^2+b^2)\ge 13$$

$$\therefore\ a^2+b^2\ge 36\ (\text{단, 등호는 } 2a=3b\text{일 때 성립})$$

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 36이다. 답 ④

0367 $x+y+z=1$에서

$y+z=1-x$ — 구하는 것이 x의 최댓값이므로 x 이외의 문자들을 x에 대한 식으로 나타낸다. ⋯⋯ ㉠

$x^2+y^2+z^2=3$에서

$y^2+z^2=3-x^2$ ⋯⋯ ㉡

y, z는 실수이므로 코시 – 슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(y^2+z^2)\ge(y+z)^2$ ⋯⋯ ㉢

㉢에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$2(3-x^2)\ge(1-x)^2,\qquad 6-2x^2\ge 1-2x+x^2$$

$$3x^2-2x-5\le 0,\qquad (x+1)(3x-5)\le 0$$

$$\therefore\ -1\le x\le\frac{5}{3}\ (\text{단, 등호는 } y=z\text{일 때 성립})$$

따라서 x의 최댓값은 $\frac{5}{3}$이다. 답 $\frac{5}{3}$

다른 풀이 $x+y+z=1$에서

$y+z=1-x$ ⋯⋯ ㉠

$x^2+y^2+z^2=3$에서

$y^2+z^2=3-x^2$ ⋯⋯ ㉡

$(y+z)^2=y^2+z^2+2yz$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$(1-x)^2=3-x^2+2yz$$

$\therefore\ yz=x^2-x-1$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉢에서 y, z는 t에 대한 이차방정식

$$t^2-(y+z)t+yz=0,\ \text{즉 } t^2-(1-x)t+x^2-x-1=0$$

의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(1-x)\}^2-4(x^2-x-1)\ge 0$$

$$3x^2-2x-5\le 0,\qquad (x+1)(3x-5)\le 0$$

$$\therefore\ -1\le x\le\frac{5}{3}$$

0368 x, y, z가 실수이므로 코시 – 슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\{1^2+(-2)^2+3^2\}(x^2+y^2+z^2)\ge(x-2y+3z)^2$$

그런데 $x^2+y^2+z^2=2$이므로

$$28\ge(x-2y+3z)^2$$

$$\therefore\ -2\sqrt{7}\le x-2y+3z\le 2\sqrt{7}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } x=-\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $x-2y+3z$의 최솟값은 $-2\sqrt{7}$이다. 답 ①

0369 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$가 실수이므로 코시 – 슈바르츠의 부등식에 의하여

└ $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$는 실수이다.

$$(1^2+2^2+3^2)\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\}\ge(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$$

$$14(a+b+c)\ge(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$$

그런데 $a+b+c=14$이므로

$$14^2\ge(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

$$0<\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}\le 14$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \sqrt{a}=\frac{\sqrt{b}}{2}=\frac{\sqrt{c}}{3}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값은 14이다. 답 14

0370 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면 원의 지름이 직사각형의 대각선이므로

$$x^2+y^2=2^2$$

한편 x, y가 실수이므로 코시 – 슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$$

$$2\cdot 4\ge(x+y)^2,\qquad (x+y)^2\le 8$$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$$0<x+y\le 2\sqrt{2}\ (\text{단, 등호는 } x=y\text{일 때 성립})$$

직사각형의 둘레의 길이는 $2(x+y)$이므로

$$0<2(x+y)\le 4\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최댓값은 $4\sqrt{2}$이다. 답 ④

0371 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 직육면체의 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3\sqrt{3}\qquad \therefore\ a^2+b^2+c^2=27$$

⋯ ❶

한편 a, b, c는 실수이므로 코시 – 슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$$

$$3\cdot 27\ge(a+b+c)^2,\qquad (a+b+c)^2\le 81$$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

$0<a+b+c\le 9$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립) ⋯ ❷

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$이므로

$0<4(a+b+c)\le 36$

따라서 구하는 최댓값은 36이다. ⋯ ❸

답 36

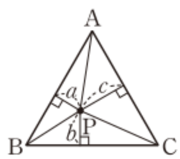
채점 기준	비율
❶ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 코시-슈바르츠의 부등식을 이용할 수 있다.	40 %
❸ 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0372 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 넓이는

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$

오른쪽 그림에서



$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle BCP+\triangle CAP$

이므로

$\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot b+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot c$

$\therefore a+b+c=\sqrt{3}$

한편 a, b, c가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$

$3(a^2+b^2+c^2)\ge 3$

$\therefore a^2+b^2+c^2\ge 1$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 $a^2+b^2+c^2$의 최솟값은 1이다. 답 1

0373 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $P\subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 참이다.

$\therefore p \Rightarrow q$

ㄴ. $P\not\subset R$이므로 명제 $p \longrightarrow r$는 거짓이다.

$\therefore p \not\Rightarrow \sim r$

ㄷ. $Q\subset R$이므로 $R^C\subset Q^C$

따라서 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$는 참이다.

$\therefore \sim r \Rightarrow q$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0374 전략 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, '어떤 x에 대하여 p이다.'가 참이 되려면 $P\ne\varnothing$이어야 함을 이용한다.

풀이 조건 '$-3<x\le 2$'의 진리집합을 P라 하면

$P=\{x\,|\,-3<x\le 2\}$

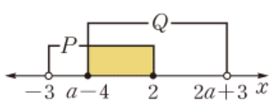
조건 '$a-4\le x<2a+3$'의 진리집합을 Q라 하면

$Q=\{x\,|\,a-4\le x<2a+3\}$

주어진 명제가 참이 되려면 $P\cap Q\ne\varnothing$이어야 한다.

(i) $a-4\ge -3$, 즉 $a\ge 1$일 때,

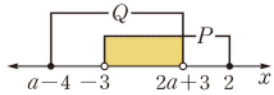
오른쪽 그림과 같이 $a-4\le 2$이어야 하므로



$1\le a\le 6$

(ii) $a-4<-3$, 즉 $a<1$일 때,

오른쪽 그림과 같이 $2a+3>-3$이어야 하므로



$-3<a<1$

(i), (ii)에서 $-3<a\le 6$

따라서 주어진 명제가 참이 되도록 하는 정수 a는

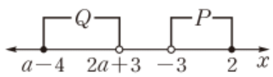
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

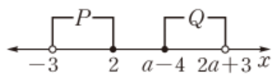
이므로 구하는 a의 값의 합은 18이다. 답 18

다른 풀이 두 조건 '$-3<x\le 2$', '$a-4\le x<2a+3$'의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 주어진 명제가 참이 되려면 $P\cap Q\ne\varnothing$이어야 한다. $P\cap Q=\varnothing$이려면 다음 그림과 같아야 하므로

$2a+3\le -3$ 또는 $a-4>2$

이어야 한다.





즉 $P\cap Q=\varnothing$이도록 하는 a의 값의 집합을 A라 하면

$A=\{a\,|\,a\le -3$ 또는 $a>6\}$

$P\cap Q\ne\varnothing$이도록 하는 a의 값의 집합은 A^C이므로

$A^C=\{a\,|\,-3<a\le 6\}$

0375 전략 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참임을 이용한다.

풀이 $\sim q$: $x^2+2x-3\ge 0$에서 $(x+3)(x-1)\ge 0$

$\therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 1$

$\sim p$: $(x^2-mx+m)(x^2+2x-3)\ge 0$

명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$에서 $x^2-mx+m\ge 0$이어야 한다.

즉 $f(x)=x^2-mx+m$이라 할 때, $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$에서 $f(x)\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2-mx+m=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $D\le 0$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$을 만족시키므로

$D=(-m)^2-4m\le 0$, $m(m-4)\le 0$

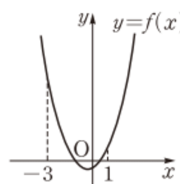
$\therefore 0\le m\le 4$

(ii) $D>0$일 때, 즉

$m<0$ 또는 $m>4$ ⋯⋯ ㉠

일 때, 함수 $f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이때 $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$에서 $f(x)\ge 0$이려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



ⓘ $f(-3)=9+4m\ge 0$에서

$m\ge -\frac{9}{4}$ ⋯⋯ ㉡

ⓘⓘ $f(1)=1\ge 0$

$y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{m}{2}$이다.

ⓘⓘⓘ $-3<\frac{m}{2}<1$에서

$-6<m<2$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$-\frac{9}{4}\le m<0$

(i), (ii)에서 $-\frac{9}{4} \le m \le 4$이므로

$a=4,\ b=-\frac{9}{4}$

$\therefore\ -8ab=72$

답 72

0376 전략 A, B, C, D가 유리창을 깬 각각의 경우에 대하여 네 사람의 진술이 참인지 거짓인지를 알아본다.

풀이 (i) A가 유리창을 깬 경우

A: 거짓, B: 참, C: 참, D: 참

(ii) B가 유리창을 깬 경우

A: 참, B: 거짓, C: 거짓, D: 참

(iii) C가 유리창을 깬 경우

A: 거짓, B: 참, C: 거짓, D: 참

(iv) D가 유리창을 깬 경우

A: 거짓, B: 참, C: 거짓, D: 거짓

이상에서 네 명 중 한 명의 진술만 참인 경우는 (iv)이므로 유리창을 깬 사람은 D, 옳게 진술한 사람은 B이다.

답 D, B

다른 풀이 A의 진술이 참이면 B가 유리창을 깼으므로 D의 진술은 참이 된다. 그런데 네 명 중 한 명의 진술만 참이므로 A의 진술은 거짓이다.

A의 진술이 거짓이면 B의 진술은 참이고, 네 명 중 한 명의 진술만 참이므로 C와 D의 진술은 거짓이다.

따라서 유리창을 깬 사람은 D이고, 옳게 진술한 사람은 B이다.

0377 전략 조건 p, q, r를 만족시키는 a, b의 값 또는 관계식을 구해 본다.

풀이 p: $|a|+|b|=0$에서

$a=0,\ b=0$

q: $a^2-2ab+b^2=0$에서

$(a-b)^2=0$

$\therefore\ a=b$

r: $|a+b|=|a-b|$에서 $|a+b|^2=|a-b|^2$이므로

$ab=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $b=0$

ㄱ. $a=0,\ b=0$이면 $a=b$이므로

$p \Longrightarrow q$

ㄴ. $\sim p$: $a\ne0$ 또는 $b\ne0$, $\sim r$: $a\ne0,\ b\ne0$이므로

$\sim r \Longrightarrow \sim p$

ㄷ. q이고 r: $a=b=0$

$\therefore\ p \Longleftrightarrow q$이고 r

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

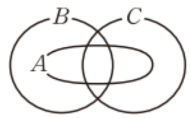
0378 전략 두 조건 p, q에 대하여 $q \Longrightarrow p$이고, $p \not\Longrightarrow q$인 것을 찾는다.

풀이 ㄱ. p: $A\cap B=A$에서 $A\subset B$

q: $A-B=\varnothing$에서 $A\subset B$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. [$\longrightarrow$ 의 반례] 오른쪽 벤다이어그램에서



$p \not\Longrightarrow q$

$A\subset B$ 또는 $A\subset C$이면 $A\subset(B\cup C)$이므로

$q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. [$\longrightarrow$ 의 반례] $a=2,\ b=1,\ c=4$이면 $|a-b|<|a-c|$이지만 $b<a<c$이므로 $p \not\Longrightarrow q$

$|a-b|$는 수직선 위에서 a를 나타내는 점과 b를 나타내는 점 사이의 거리이므로 $a<b<c$이면 $|a-b|<|a-c|$이다.

$\therefore\ q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄹ. $a^2+b^2-ab=0 \Longleftrightarrow \left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=0$

$\Longleftrightarrow a=b=0$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

이상에서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

0379 전략 충분조건, 필요조건을 만족시키는 진리집합의 포함 관계를 생각한다.

풀이 p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$

$\therefore\ |a|=1,\ b^2=4$ 또는 $|a|=4,\ b^2=1$

q는 r이기 위한 필요조건이므로 $R\subset Q$

(i) $|a|=1,\ b^2=4$일 때,

$a=-1,\ b=-2$ 또는 $a=-1,\ b=2$

또는 $a=1,\ b=-2$ 또는 $a=1,\ b=2$

이때 $|a|=1,\ 2ab\ne-8$이고 $R\subset Q$이므로

$2ab=b^2$, 즉 $2ab=4$ $\therefore\ ab=2$

따라서 $a=-1,\ b=-2$ 또는 $a=1,\ b=2$이므로 $2a-b$의 값은 0이다.

(ii) $|a|=4,\ b^2=1$일 때,

$a=-4,\ b=-1$ 또는 $a=-4,\ b=1$

또는 $a=4,\ b=-1$ 또는 $a=4,\ b=1$

이때 $b^2=1,\ 2ab\ne|a|$이고 $R\subset Q$이므로

$2ab=-8$ $\therefore\ ab=-4$

따라서 $a=-4,\ b=1$ 또는 $a=4,\ b=-1$이므로 $2a-b$의 값은 -9 또는 9

(i), (ii)에서 $2a-b$의 최댓값은 9이다.

답 ⑤

0380 전략 $X>0,\ Y>0$일 때 $X^2<Y^2$이면 $X<Y$임을 이용한다.

풀이 $A^2-B^2=(\sqrt{1+a})^2-\left(1+\frac{a}{2}\right)^2$

$=(1+a)-\left(1+a+\frac{a^2}{4}\right)$

$=-\frac{a^2}{4}<0\ (\because\ a^2>0)$

따라서 $A^2<B^2$이고 $A>0$, $B>0$이므로

$A<B$ …… ㉠

한편 $b=1-\frac{1}{a+1}$에서 $1-b=\frac{1}{a+1}$이므로

$\frac{1}{\sqrt{1-b}}=\sqrt{1+a}$, 즉 $C=A$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A=C<B$ 답 ③

0381 전략 근호를 포함한 식은 제곱의 차를 이용하여 부등식이 성립하는지 확인한다.

풀이 ㄱ. $(a+b)^2-3ab=a^2-ab+b^2$

$=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\ge 0$

(단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

$\therefore (a+b)^2\ge 3ab$

ㄴ. $(\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|})^2-\{\sqrt{2(|a|+|b|)}\}^2$

$=|a|+2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}+|b|-2(|a|+|b|)$

$=-(|a|-2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}+|b|)$

$=-\{(\sqrt{|a|})^2-2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}+(\sqrt{|b|})^2\}$

$=-(\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|})^2\le 0$ (단, 등호는 $|a|=|b|$일 때 성립)

$\therefore \sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}\le\sqrt{2(|a|+|b|)}$

ㄷ. $(|a|+|b|)^2-(\sqrt{a^2+b^2})^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a^2+b^2)$

$=a^2+2|ab|+b^2-a^2-b^2$

$=2|ab|\ge 0$ (단, 등호는 $ab=0$일 때 성립)

$\therefore |a|+|b|\ge\sqrt{a^2+b^2}$

ㄹ. $a^2+b^2+1-2(a+b-ab)$

$=a^2+b^2+(-1)^2+2a\cdot(-1)+2b\cdot(-1)+2ab$

$=(a+b-1)^2\ge 0$ (단, 등호는 $a+b=1$일 때 성립)

$\therefore a^2+b^2+1\ge 2(a+b-ab)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

0382 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 ㄱ. $f(2)g(2)=(a_1+a_2)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)$

$=2+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}$

$\ge 2+2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}}$

$=4$ (단, 등호는 $a_1=a_2$일 때 성립)

ㄴ. $f(n)+g(n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$

$=\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$

$\ge 2\sqrt{a_1\cdot\frac{1}{a_1}}+2\sqrt{a_2\cdot\frac{1}{a_2}}+\cdots+2\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}$

$=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n\text{개}}=2n$

(단, 등호는 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$일 때 성립)

ㄷ. $f(n)$, $g(n)$이 모두 n보다 작으면 ㄴ에 모순이 된다.

따라서 $f(n)$, $g(n)$ 중 적어도 하나는 n보다 크거나 같다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0383 전략 A, B, C 세 밭의 한 변의 길이를 각각 x m, y m, z m라 하고 코시-슈바르츠의 부등식을 이용한다.

풀이 A, B, C 세 밭의 한 변의 길이를 각각 x m, y m, z m라 하면

$x^2+y^2+z^2=800$

A, B, C 세 밭에서 수확한 옥수수의 양은 각각 $3x$ kg, $4y$ kg, $5z$ kg이므로 수확한 옥수수의 전체 양은

$3x+4y+5z$ (kg)

x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+4^2+5^2)(x^2+y^2+z^2)\ge(3x+4y+5z)^2$

$50\cdot 800\ge(3x+4y+5z)^2$

$(3x+4y+5z)^2\le 200^2$

이때 $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로

$0<3x+4y+5z\le 200$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}\text{일 때 성립}\right)$

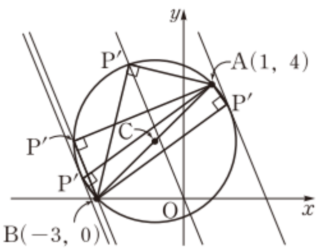
따라서 농부가 수확할 수 있는 최대의 수확량은 200 kg이므로

$M=200$ 답 200

0384 전략 반원에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용한다.

풀이 주어진 명제가 참이 되려면 $\angle$APB$=90°$를 만족시키는 직선 l 위의 점 P가 적어도 하나 존재하면 된다.

두 점 A(1, 4), B(-3, 0)을 지름의 양 끝 점으로 하는 원을 C라 하면 원 C 위의 점 중에서 A, B를 제외한 모든 점 P′에 대하여 $\angle$AP′B$=90°$이다.



따라서 원 C와 직선 l이 두 점 A, B가 아닌 어떤 점에서 만나면 주어진 명제는 참이 된다. ➊

원 C의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$\mathrm{C}\left(\frac{1-3}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$, 즉 C($-1$, 2)

원 C의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(1+1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$

이므로 원 C와 직선 l이 만나려면 원의 중심 C(-1, 2)와 직선 $y=-3x+k$, 즉 $3x+y-k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작거나 같아야 한다. 즉

$\frac{|-3+2-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}\le 2\sqrt{2}$, $\quad |-k-1|\le 4\sqrt{5}$

$-4\sqrt{5}\le k+1\le 4\sqrt{5}$

$\therefore -4\sqrt{5}-1\le k\le 4\sqrt{5}-1$ ➋

이때 $(4\sqrt{5})^2=80$이고 $8^2<80<9^2$이므로

$8<4\sqrt{5}<9$, $-9<-4\sqrt{5}<-8$

$\therefore 7<4\sqrt{5}-1<8$, $-10<-4\sqrt{5}-1<-9$

즉 $-9.\times\times\times \le k \le 7.\times\times\times$이므로 정수 k는

$-9,\ -8,\ -7,\ \cdots,\ 6,\ 7$

의 17개이다. ⋯ ❸

답 17

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제가 참이 되는 경우를 알 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

참고 직선 l이 점 A(또는 점 B)를 지날 때에는 원 C와 만나는 점 중에서 점 A(또는 점 B)가 아닌 점이 점 P가 된다.

0385 전략 결론을 부정하여 가정에 모순이 생기는 것을 보인다.

풀이 a, b가 모두 홀수라고 가정하자. ⋯ ❶

방정식 $x^2+ax-b=0$의 정수인 해를 $x=m$이라 하면

$m^2+am=b$

(i) m이 홀수일 때,

m^2은 홀수이고, am은 두 홀수의 곱이므로 홀수이다.

따라서 m^2+am, 즉 b가 짝수이므로 가정에 모순이다.

(ii) m이 짝수일 때,

m^2은 짝수이고, am은 홀수와 짝수의 곱이므로 짝수이다.

따라서 m^2+am, 즉 b가 짝수이므로 가정에 모순이다. ⋯ ❷

(i), (ii)에서 a, b 중 적어도 하나는 짝수이다. ⋯ ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 결론을 부정할 수 있다.	20 %
❷ 가정에 모순임을 보일 수 있다.	60 %
❸ 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.	20 %

0386 전략 x에 대한 이차방정식 $x^2-2axy+by^2=0$의 판별식을 D라 할 때, $D\le 0$이면 주어진 부등식이 항상 성립함을 이용한다.

풀이 부등식 $x^2-2axy+by^2\ge 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 x에 대한 이차방정식 $x^2-2ayx+by^2=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\dfrac{D}{4}=(-ay)^2-by^2\le 0$ ⋯ ❶

$\therefore\ y^2(a^2-b)\le 0$

이때 $y^2\ge 0$이므로 $a^2-b\le 0$ $\quad\therefore\ a^2\le b$ ⋯ ❷

(i) $a=1$이면 $b=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10$

(ii) $a=2$이면 $b=4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ 10$

(iii) $a=3$이면 $b=9,\ 10$ ⋯ ❸

이상에서 10 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$10+7+2=19$ ⋯ ❹

답 19

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	20 %
❸ $a=1,\ 2,\ 3$일 때, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0387 전략 부등식의 좌변을 전개하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 주어진 부등식의 좌변을 전개하면

$$(x-y)\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{y}\right)=1-\frac{4x}{y}-\frac{y}{x}+4$$
$$=5-\left(\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\right)\quad\cdots\cdots\ ㉠$$ ⋯ ❶

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}$$
$$=2\cdot 2$$
$$=4\ (\text{단, 등호는 } 2x=y\text{일 때 성립})\ \cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$5-\left(\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\right)\le 5-4=1$$

이므로

$$(x-y)\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{y}\right)\le 1$$ ⋯ ❷

따라서 $(x-y)\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{y}\right)\le k$가 항상 성립하려면

$k\ge 1$

즉 k의 최솟값은 1이다. ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식의 좌변을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $(x-y)\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{y}\right)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0388 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $a>-1$, $b>-1$에서 $a+1>0$, $b+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+b+2)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)$$
$$=\{(a+1)+(b+1)\}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)$$ ⋯ ❶
$$=1+\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{a+1}+1$$
$$\ge 2+2\sqrt{\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{b+1}{a+1}}$$
$$=2+2$$
$$=4\ (\text{단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립})$$ ⋯ ❷

따라서 주어진 식의 최솟값은 4이다. ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	40 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0389 전략 $S(A)+S(B)$의 값이 일정함을 이용한다.

풀이 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$, $A\cap B=\{1,\ 4\}$ 이므로

$$\begin{aligned} S(A)+S(B)&=S(A\cup B)+S(A\cap B)\\ &=(1+2+3+\cdots+10)+(1+4)\\ &=60 \end{aligned}$$ ···· ❶

$S(A)>0$, $S(B)>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$S(A)+S(B)\ge 2\sqrt{S(A)S(B)}$

$60\ge 2\sqrt{S(A)S(B)}$, $\quad\sqrt{S(A)S(B)}\le 30$

$\therefore S(A)S(B)\le 900$ (단, 등호는 $S(A)=S(B)$일 때 성립)

따라서 $S(A)S(B)$의 최댓값은 900이다. ···· ❷

답 900

채점 기준	비율
❶ $S(A)+S(B)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $S(A)S(B)$의 최댓값을 구할 수 있다.	60 %

참고 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9\}$, $B=\{1,\ 4,\ 7,\ 8,\ 10\}$일 때, $S(A)=S(B)=30$이므로 등호가 성립하는 경우가 존재함을 확인할 수 있다.

0390 전략 두 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 미지수로 놓고 삼각형의 닮음을 이용한다.

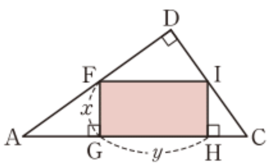
풀이 삼각형 ACD는 $\angle D=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\overline{FG}=x$, $\overline{GH}=y$라 하면

$\triangle AGF\backsim\triangle IHC\backsim\triangle ADC$

(AA 닮음)



이므로

$$\begin{aligned}\overline{AG}:\overline{GF}&=\overline{IH}:\overline{HC}\\ &=\overline{AD}:\overline{DC}\\ &=4:3\end{aligned}$$

$\overline{AG}:\overline{GF}=4:3$에서 $\quad\overline{AG}:x=4:3\quad\therefore\ \overline{AG}=\frac{4}{3}x$

$\overline{IH}:\overline{HC}=4:3$에서 $\quad x:\overline{HC}=4:3\quad\therefore\ \overline{HC}=\frac{3}{4}x$

$\overline{AC}=\overline{AG}+\overline{GH}+\overline{HC}=5$에서 $\quad\frac{4}{3}x+y+\frac{3}{4}x=5$

$16x+12y+9x=60$

$\therefore\ 25x+12y=60$

직사각형 FGHI의 넓이는 xy이고 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$25x+12y\ge 2\sqrt{25x\cdot 12y}=20\sqrt{3xy}$

$60\ge 20\sqrt{3xy}$

$\sqrt{3xy}\le 3$, $\quad 3xy\le 9$

$\therefore\ xy\le 3$ (단, 등호는 $25x=12y$일 때 성립)

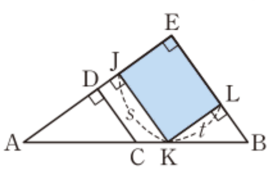
$\therefore\ S_1=3$ ···· ❶

또 $\overline{JK}=s$, $\overline{KL}=t$라 하면

$\triangle AJK\backsim\triangle KLB$

$\backsim\triangle AEB\backsim\triangle ADC$

(AA 닮음)



$\overline{AK}:\overline{JK}=\overline{AC}:\overline{DC}=5:3$에서

$\overline{AK}:s=5:3\quad\therefore\ \overline{AK}=\frac{5}{3}s$

$\overline{KB}:\overline{KL}=\overline{AC}:\overline{AD}=5:4$에서

$\overline{KB}:t=5:4\quad\therefore\ \overline{KB}=\frac{5}{4}t$

$\overline{AB}=\overline{AK}+\overline{KB}=10$에서 $\quad\frac{5}{3}s+\frac{5}{4}t=10$

$20s+15t=120\quad\therefore\ 4s+3t=24$

직사각형 EJKL의 넓이는 st이고 $s>0$, $t>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4s+3t\ge 2\sqrt{4s\cdot 3t}=4\sqrt{3st}$

$24\ge 4\sqrt{3st}$

$\sqrt{3st}\le 6$, $\quad 3st\le 36$

$\therefore\ st\le 12$ (단, 등호는 $4s=3t$일 때 성립)

$\therefore\ S_2=12$ ···· ❷

$\therefore\ S_1+S_2=15$ ···· ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ S_1의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ S_2의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ S_1+S_2의 값을 구할 수 있다.	20 %

VI. 함수

15 함수

0391 X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 4, 5의 2개이므로 함수가 아니다. 답 함수가 아니다.

0392 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

$\therefore$ 정의역: $\{1, 3, 5, 7\}$, 공역: $\{1, 2\}$, 치역: $\{1, 2\}$

답 풀이 참조

0393 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

$\therefore$ 정의역: $\{-1, 0, 1\}$, 공역: $\{1, 3, 5, 7\}$, 치역: $\{1, 5, 7\}$

답 풀이 참조

0394 X의 원소 2, 4에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다. 답 함수가 아니다.

0395 함수 $y=2x-5$의 정의역과 치역은 모두 실수 전체의 집합이다. 답 풀이 참조

0396 함수 $y=|x|+1$의 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 $\{y|y\geq 1\}$이다. 답 풀이 참조

0397 함수 $y=-\dfrac{6}{x}$의 정의역은 $\{x|x\neq 0$인 실수$\}$이고 치역은 $\{y|y\neq 0$인 실수$\}$이다. 답 풀이 참조

0398 함수 $y=-x^2+4$의 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 $\{y|y\leq 4\}$이다. 답 풀이 참조

0399 $f(x)$와 $g(x)$의 정의역과 공역이 각각 서로 같고

$f(-1)=g(-1)=-1$, $f(1)=g(1)=1$

$\therefore f=g$ 답 서로 같은 함수이다.

0400 $\underbrace{\text{두 함수 } f(x),\ g(x)\text{의 정의역과 공역은 실수 전체의 집합}}_{\text{정의역과 공역이 각각 서로 같다.}}$이고

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases},\quad g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

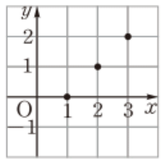
이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=g(x)$ $\quad\therefore f=g$ 답 서로 같은 함수이다.

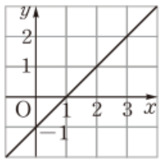
0401 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, $g(x)$의 정의역은 $\{x|x\neq -2$인 실수$\}$이므로 f와 g의 정의역이 서로 다르다.

$\therefore f\neq g$ 답 서로 같은 함수가 아니다.

0402 답



0403 답



0404 답 ㄴ, ㄹ

0405 답 ㄴ, ㄹ

0406 답 ㄹ

0407 답 ㄱ

0408 답 ㄱ, ㄷ

0409 답 ㄱ, ㄷ

0410 답 ㄷ

0411 답 ㄴ

0412 $(g\circ f)(6)=g(f(6))=g(a)=6$ 답 6

0413 $(g\circ f)(8)=g(f(8))=g(d)=6$ 답 6

0414 $(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(8)=d$ 답 d

0415 $(f\circ g)(c)=f(g(c))=f(2)=b$ 답 b

0416 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-1)$

$=(3x-1)^2=9x^2-6x+1$

답 $(g\circ f)(x)=9x^2-6x+1$

0417 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=3x^2-1$

답 $(f\circ g)(x)=3x^2-1$

0418 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(3x-1)$

$=3(3x-1)-1=9x-4$

답 $(f\circ f)(x)=9x-4$

0419 $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2)=x^4$

답 $(g\circ g)(x)=x^4$

0420 $(f\circ g)(x)=f(2x-1)=2x-1+1=2x$이므로

$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(x^2)$

$=2x^2$

$(g\circ h)(x)=g(x^2)=2x^2-1$이므로

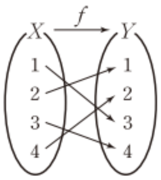
$(f\circ(g\circ h))(x)=f(2x^2-1)$

$=2x^2-1+1$

$=2x^2$

따라서 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$가 성립한다. 답 풀이 참조

0421 (1)



(2) $f(2)=1$, $f^{-1}(2)=4$이므로

$f(2)+f^{-1}(2)=5$

(3) $f^{-1}(3)=1$이므로　　$f^{-1}(a)+1=3$　　$\therefore f^{-1}(a)=2$

$\therefore a=1$

답 풀이 참조

0422 $f^{-1}(3)=a$에서 $f(a)=3$이므로

$-a+4=3$　　$\therefore a=1$　　답 1

0423 $f^{-1}(a)=5$에서 $f(5)=a$이므로

$a=-5+4=-1$　　답 -1

0424 함수 $y=2x+3$은 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=2x+3$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$2x=y-3$　　$\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$　　답 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

0425 함수 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$은 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$\frac{1}{2}x=y+\frac{1}{4}$　　$\therefore x=2y+\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=2x+\frac{1}{2}$　　답 $y=2x+\frac{1}{2}$

0426 $f^{-1}(1)=3$　　답 3

0427 $(f^{-1})^{-1}(3)=f(3)=1$　　답 1

0428 $(f\circ f^{-1})(5)=f(f^{-1}(5))=f(2)=5$　　답 5

0429 $(f^{-1}\circ f)(4)=f^{-1}(f(4))=f^{-1}(7)=4$　　답 4

0430 주어진 그래프의 x절편이 2, y절편이 1이므로

$\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1$　　$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$　　답 $y=-\frac{1}{2}x+1$

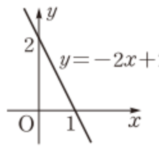
0431 $y=-\frac{1}{2}x+1$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$-\frac{1}{2}x=y-1$　　$\therefore x=-2y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-2x+2$　　답 $y=-2x+2$

0432 답



0433 (1) $x\ge-2$일 때, $\underbrace{x+2\ge0}_{|x+2|=x+2}$이므로

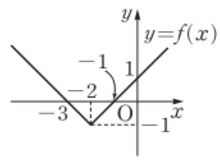
$f(x)=x+2-1=x+1$

(2) $x<-2$일 때, $\underbrace{x+2<0}_{|x+2|=-(x+2)}$이므로

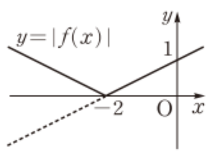
$f(x)=-(x+2)-1=-x-3$

(3) $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 $\{y|y\ge-1\}$이다.

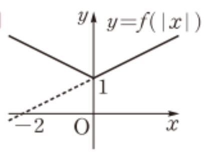
답 풀이 참조



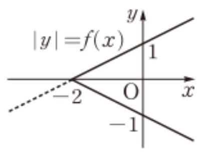
0434 답



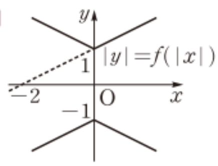
0435 답



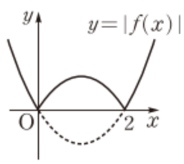
0436 답



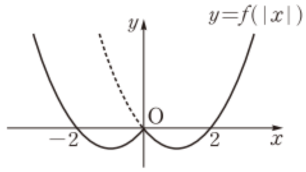
0437 답



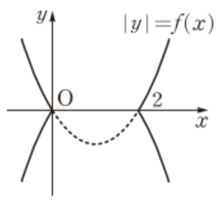
0438 답



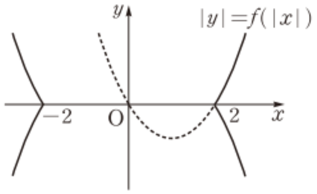
0439 답



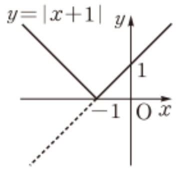
0440 답



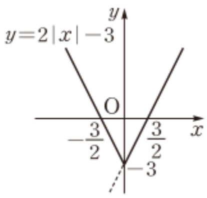
0441 답



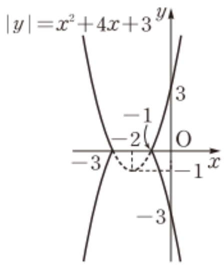
0442 $y=|x+1|$의 그래프는 $y=x+1$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



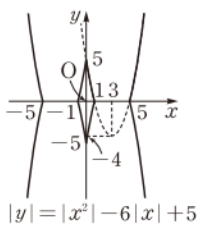
0443 $y=2|x|-3$의 그래프는 $y=2x-3$의 그래프에서 $x\ge 0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분은 $x\ge 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



0444 $|y|=x^2+4x+3$의 그래프는 이차함수 $y=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분만 남기고, $y<0$인 부분은 $y\ge 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



0445 $|y|=|x^2|-6|x|+5$
$=|x|^2-6|x|+5$
의 그래프는 이차함수 $y=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$의 그래프에서 $x\ge 0$, $y\ge 0$인 부분만 남기고, 이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0446 $|x|+|y|=1$에서

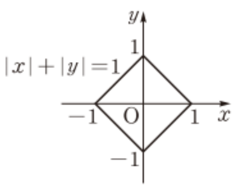
(i) $x\ge 0$, $y\ge 0$일 때, $x+y=1$ $\quad\therefore y=-x+1$

(ii) $x\ge 0$, $y<0$일 때, $x-y=1$ $\quad\therefore y=x-1$

(iii) $x<0$, $y\ge 0$일 때,
$-x+y=1$ $\quad\therefore y=x+1$

(iv) $x<0$, $y<0$일 때,
$-x-y=1$ $\quad\therefore y=-x-1$

이상에서 $|x|+|y|=1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

다른 풀이 $|x|+|y|=1$의 그래프는 $x+y=1\,(x\ge 0,\ y\ge 0)$의 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동하여 그릴 수도 있다.

0447 $|x|-|y|=2$에서

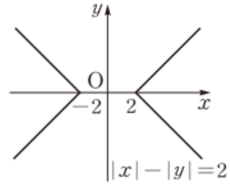
(i) $x\ge 0$, $y\ge 0$일 때, $x-y=2$ $\quad\therefore y=x-2$

(ii) $x\ge 0$, $y<0$일 때, $x+y=2$ $\quad\therefore y=-x+2$

(iii) $x<0$, $y\ge 0$일 때,
$-x-y=2$ $\quad\therefore y=-x-2$

(iv) $x<0$, $y<0$일 때,
$-x+y=2$ $\quad\therefore y=x+2$

이상에서 $|x|-|y|=2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



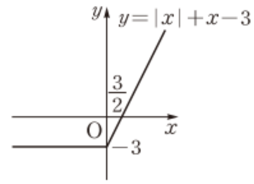
답 풀이 참조

0448 $y=|x|+x-3$에서

(i) $x\ge 0$일 때,
$y=x+x-3$ $\quad\therefore y=2x-3$

(ii) $x<0$일 때,
$y=-x+x-3$ $\quad\therefore y=-3$

(i), (ii)에서 $y=|x|+x-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

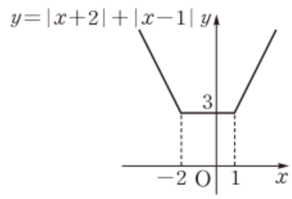
0449 $y=|x+2|+|x-1|$에서

(i) $x<-2$일 때, $x+2<0$, $x-1<0$이므로
$y=-(x+2)-(x-1)$ $\quad\therefore y=-2x-1$

(ii) $-2\le x<1$일 때, $x+2\ge 0$, $x-1<0$이므로
$y=x+2-(x-1)$ $\quad\therefore y=3$

(iii) $x\ge 1$일 때, $x+2>0$, $x-1\ge 0$이므로
$y=x+2+x-1$
$\therefore y=2x+1$

이상에서 $y=|x+2|+|x-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



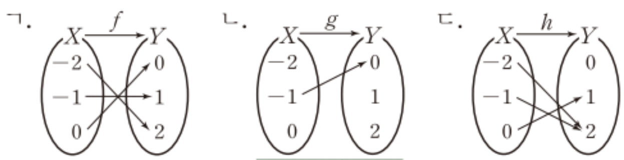
답 풀이 참조

유형 01 함수의 뜻

본책 70쪽

집합 X에서 집합 Y로의 대응이 함수이려면
⇒ X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응해야 한다.

0450 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이상에서 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. └ X의 원소 -2와 0에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

답 ③

0451 답 ㄱ, ㄹ

0452 ① $-1\le x\le 1$에서 $\quad 0\le x+1\le 2$

$\therefore 0\le f(x)\le 2$

② $-1\le x\le 1$에서 $\quad -2\le -2x\le 2$

$-1\le -2x+1\le 3 \quad \therefore -1\le f(x)\le 3$

③ $-1\le x\le 1$에서 $\quad -2\le x-1\le 0$

$0\le |x-1|\le 2,\quad 0\le \frac{1}{2}|x-1|\le 1$

$\therefore 0\le f(x)\le 1$

④ $-1\le x\le 1$에서 $\quad 0\le x^2\le 1$

$2\le x^2+2\le 3 \quad \therefore 2\le f(x)\le 3$

⑤ $-1\le x\le 1$에서 $\quad 0\le x+1\le 2$

$0\le (x+1)^2\le 4,\quad -2\le (x+1)^2-2\le 2$

$\therefore -2\le f(x)\le 2$

따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

유형 02 함숫값 본책 70쪽

① 함수 $f(x)$에서 $f(k)$의 값 구하기
➡ x 대신 k를 대입한다.
② 함수 $f(ax+b)$에서 $f(k)$의 값 구하기
➡ $ax+b=k$를 만족시키는 x의 값을 구하여 x 대신 그 수를 대입한다.

0453 $f(3)=3+1=4$

$f(29)=f(29-4)=f(25-4)=\cdots=f(5-4)$

$=f(1)=1+1=2$

$\therefore f(3)+f(29)=4+2=6$ 답 6

0454 $x-2=4$에서 $\quad x=6$

$f(x-2)=x^2-5$에 $x=6$을 대입하면

$f(4)=6^2-5=31$ 답 31

0455 이차방정식 $x^2+6x-3=0$에서 $x=-3\pm 2\sqrt{3}$이므로 α, β는 무리수이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6,\ \alpha\beta=-3$

$\therefore f(\alpha)+f(\beta)-f(\alpha\beta)=-\alpha-\beta-(\alpha\beta+1)$

$=-(\alpha+\beta)-(\alpha\beta+1)$

$=-(-6)-(-2)=8$ 답 ③

0456 $2n-1=999$에서 $\quad n=500$

조건 (나)에서 $f(2n-1)=n-1$이므로 $n=500$을 대입하면

$f(999)=499$ ··· ❶

조건 (가)에 의하여

$f(1000)=f(500)=f(250)=f(125)$ ··· ❷

$2n-1=125$에서 $\quad n=63$

$f(2n-1)=n-1$에 $n=63$을 대입하면 $\quad f(125)=62$ ··· ❸

$\therefore f(999)+f(1000)=499+62=561$ ··· ❹

답 561

채점 기준	비율
❶ $f(999)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(1000)=f(125)$임을 알 수 있다.	30 %
❸ $f(125)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(999)+f(1000)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 03 함수의 정의역, 공역, 치역 본책 71쪽

함수 $f: X \longrightarrow Y$에 대하여
➡ 정의역: 집합 X, 공역: 집합 Y, 치역: $\{f(x)\,|\,x\in X\}$

0457 (i) $a>0$일 때,

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-1)=-1,\ f(3)=3$

$-a+b=-1,\ 3a+b=3 \quad \therefore a=1,\ b=0$

그런데 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-1)=3,\ f(3)=-1$

$-a+b=3,\ 3a+b=-1 \quad \therefore a=-1,\ b=2$

$\therefore ab=-2$

(i), (ii)에서 $\quad ab=-2$ 답 -2

0458 $x^2-3x+1=-1$에서 $\quad x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

$x^2-3x+1=5$에서 $\quad x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 정의역은 $\{-1, 1, 2, 4\}$이므로 $\quad a=1,\ b=4$

$\therefore a-b=-3$ 답 ②

0459 음이 아닌 정수 k에 대하여

(i) $x=2k$일 때, $x^2=(2k)^2=4k^2$이므로 $\quad f(x)=0$

(ii) $x=2k+1$일 때,

$x^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$

이므로 $\quad f(x)=1$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$의 치역은 $\{0, 1\}$이다. 답 ③

0460 (i) $a>0$일 때, $a+1\ge 2,\ 2a+1\le 6$이므로

치역: $\{y\,|\,a+1\le y\le 2a+1\}$

$1\le a\le \frac{5}{2}$ ··· ❶

(ii) $a<0$일 때, $2a+1\ge 2,\ a+1\le 6$이므로

치역: $\{y\,|\,2a+1\le y\le a+1\}$

$\frac{1}{2}\le a\le 5$

그런데 $a<0$이어야 하므로 성립하지 않는다. ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는

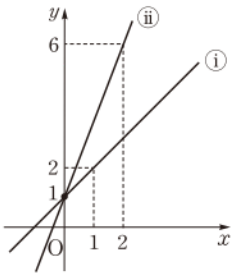
$1\le a\le \frac{5}{2}$ ··· ❸

답 $1\le a\le \frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ $a>0$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $a<0$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

참고 $y=ax+1$은 일차함수이므로 $\quad a\neq0$

다른 풀이 일차함수 $y=ax+1$은 a의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$을 지나는 직선이므로 정의역이 $\{x|1\le x\le 2\}$, 공역이 $\{y|2\le y\le 6\}$이려면 직선 $y=ax+1$의 기울기가 오른쪽 그림과 같이 직선 ⓘ의 기울기보다 크거나 같고 직선 ⓘⓘ의 기울기보다 작거나 같아야 한다.



직선 ⓘ의 방정식은 $y=x+1$, 직선 ⓘⓘ의 방정식은 $y=\frac{5}{2}x+1$이므로 구하는 a의 값의 범위는

$$1\le a\le \frac{5}{2}$$

유형 04 조건을 이용하여 함숫값 구하기 본책 71쪽

$f(x+y)=f(x)f(y)$ 또는 $f(x+y)=f(x)+f(y)$의 조건이 주어졌을 때, $f(a)$의 값 구하기

➡ 적당한 값을 x, y에 대입하여 $f(a)$의 값을 유도한다.

0461 주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1+1)=f(1)f(1)=2\cdot2=4 \quad \therefore f(2)=4$

주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=2$를 대입하면

$f(1+2)=f(1)f(2)=2\cdot4=8 \quad \therefore f(3)=8$

주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=3$을 대입하면

$f(1+3)=f(1)f(3)=2\cdot8=16 \quad \therefore f(4)=16$

주어진 식의 양변에 $x=3$, $y=4$를 대입하면

$f(7)=f(3+4)=f(3)f(4)=8\cdot16=128$ 　답 128

0462 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ⋯⋯ ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$

ㄴ. ㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)+f(1)$

$4=2f(1) \quad \therefore f(1)=2$

㉠의 양변에 $x=-1$, $y=1$을 대입하면

$f(0)=f(-1)+f(1)$

$0=f(-1)+2 \quad \therefore f(-1)=-2$

ㄷ. $f(2x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

$f(3x)=f(x+2x)=f(x)+f(2x)=f(x)+2f(x)=3f(x)$

$f(4x)=f(x+3x)=f(x)+f(3x)=f(x)+3f(x)=4f(x)$

⋮

$\therefore f(nx)=f(x+(n-1)x)=f(x)+f((n-1)x)$

$=f(x)+(n-1)f(x)=nf(x)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 　답 ⑤

0463 $3f(x)+2f(1-x)=5x$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$3f(a)+2f(1-a)=5a$

$f(a)=13$이므로 $\quad 39+2f(1-a)=5a$

$\therefore f(1-a)=\frac{5a-39}{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 양변에 $x=1-a$를 대입하면

$3f(1-a)+2f(a)=5(1-a)$

$f(a)=13$이므로 $\quad 3f(1-a)+26=5-5a$

$\therefore f(1-a)=-\frac{5a+21}{3}$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢에서 $\quad \frac{5a-39}{2}=-\frac{5a+21}{3}$

$15a-117=-10a-42$

$25a=75 \quad \therefore a=3$ 　답 3

유형 05 서로 같은 함수 본책 72쪽

두 함수 f, g가 서로 같은 함수이다.

➡ ① 정의역과 공역이 각각 같다.

② 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $\quad f(x)=g(x)$

0464 $f(-1)=g(-1)$에서 $\quad -a+b=-5$ ⋯⋯ ㉠

$f(1)=g(1)$에서 $\quad a+b=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3$, $b=-2$

$\therefore ab=-6$ 　답 -6

0465 ㄱ. $f(1)=1$, $g(1)=-1$이므로 $\quad f(1)\neq g(1)$

$\therefore f\neq g$

ㄴ. $f(-1)=g(-1)=1$, $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$이므로 $\quad f=g$

ㄷ. $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$이므로 $\quad f=g$

이상에서 $f=g$인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 　답 ④

0466 $f(1)=g(1)$에서 $\quad 1+2a+3b=-a+b$

$\therefore 3a+2b=-1$ ⋯⋯ ㉠

$f(2)=g(2)$에서 $\quad 8+8a+3b=-2a+b$

$10a+2b=-8 \quad \therefore 5a+b=-4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1$, $b=1$

$\therefore f(1)=g(1)=2$, $f(2)=g(2)=3$

따라서 함수 f의 치역은 $\quad \{2, 3\}$ 　답 $\{2, 3\}$

0467 $x^2=4x-3$에서 $\quad x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=3$ ⋯ ❶

따라서 구하는 집합 X는 공집합이 아닌 $\{1, 3\}$의 부분집합이므로

$\{1\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$ ⋯ ❷

답 $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 집합 X를 모두 구할 수 있다.	50 %

유형 06~07 일대일대응 본책 72쪽

함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일대응
➡ ① $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ $(x_1 \in X,\ x_2 \in X)$
② $\{f(x) \mid x \in X\} = Y$

0468 ㄴ. [반례] $f(x)=x+|x|$라 하면 $x_1=-1$, $x_2=-2$일 때 $x_1 \neq x_2$이지만

$f(x_1)=-1+|-1|=0$, $f(x_2)=-2+|-2|=0$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=x+|x|$는 일대일대응이 아니다.

ㄷ. [반례] $f(x)=-x^2+2x$라 하면 $x_1=-1$, $x_2=3$일 때 $x_1 \neq x_2$이지만

$f(x_1)=-(-1)^2-2=-3$, $f(x_2)=-3^2+2\cdot 3=-3$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=-x^2+2x$는 일대일대응이 아니다.

이상에서 일대일대응인 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0469 보기의 그래프 중 임의의 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나는 그래프는 ㄴ, ㄹ이다.

따라서 일대일대응인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

0470 $a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이면

$f(-3)=1$, $f(3)=13$ └ x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가해야 한다.

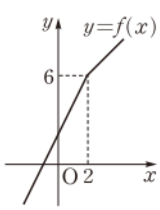
$-3a+b=1$, $3a+b=13$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=7$

$\therefore a+b=9$ 답 9

0471 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 직선 $y=2x+a$가 점 $(2,\ 6)$을 지나야 한다. ⋯ ❶



따라서

$6=2\cdot 2+a$

이므로 $4+a=6$

$\therefore a=2$ ⋯ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ 직선 $y=2x+a$가 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	70 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0472 $f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$이므로 $x \geq 3$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 함수 f가 일대일대응이 되려면 $f(3)=2$이어야 하므로

$9-6+a=2$ $\quad \therefore a=-1$

즉 $f(x)=x^2-2x-1$이므로

$f(4)=4^2-2\cdot 4-1=7$ 답 ②

유형 08 항등함수와 상수함수 본책 73쪽

① 항등함수: 함수 $f: X \longrightarrow X$에서 $f(x)=x$ $(x \in X)$
② 상수함수: 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 $f(x)=c$ $(x \in X,\ c \in Y)$

0473 ㄱ. $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=4$

따라서 f는 항등함수이다.

ㄴ. $g(0)=g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=3$

따라서 g는 상수함수이다.

ㄷ. $h(0)=0$, $h(1)=1$, $h(2)=2$, $h(3)=3$, $h(4)=4$

따라서 h는 항등함수이다.

이상에서 항등함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0474 함수 g는 항등함수이므로

$g(-1)=-1$, $g(0)=0$, $g(1)=1$ ⋯ ❶

$f(-1)=g(1)=h(0)$에서 $\quad f(-1)=h(0)=1$

$f(-1)+f(1)=f(0)$에서 $\quad 1+f(1)=f(0)$

이때 함수 f는 일대일대응이므로

$f(0)=-1$, $f(1)=0$ 또는 $f(0)=0$, $f(1)=-1$

그런데 $f(0)=-1$, $f(1)=0$이면 $1+f(1) \neq f(0)$이므로

$f(0)=0$, $f(1)=-1$ ⋯ ❷

또 함수 h는 상수함수이므로

$h(-1)=h(0)=h(1)=1$ ⋯ ❸

$\therefore f(1)g(-1)h(-1)=-1\cdot(-1)\cdot 1=1$ ⋯ ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ $g(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $h(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(1)g(-1)h(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0475 함수 f가 항등함수이므로

(i) $x<2$일 때, $\quad x=1$ └ $f(x)=x$

(ii) $2 \leq x < 6$일 때,

$3x-8=x$, $\quad 2x=8$ $\quad \therefore x=4$

(iii) $x \geq 6$일 때,

$x^2-8x+14=x$, $\quad x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0$ $\quad \therefore x=7$ $(\because x \geq 6)$

이상에서 $X=\{1,\ 4,\ 7\}$이므로

$a+b+c=1+4+7=12$ 답 12

유형 09 조건을 만족시키는 함수의 개수

본책 73쪽

집합 X의 원소의 개수가 n, 집합 Y의 원소의 개수가 m일 때
① X에서 Y로의 함수의 개수 ➡ m^n
② X에서 Y로의 일대일함수의 개수
➡ $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$ (단, $m \geq n$)
③ X에서 X로의 일대일대응의 개수
➡ $n(n-1)(n-2)\cdot \cdots \cdot 2\cdot 1$
④ X에서 Y로의 상수함수의 개수 ➡ m

0476 일대일대응을 $f : X \longrightarrow X$라 하면
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3 중 하나이므로 3개
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 2개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 1개
따라서 일대일대응의 개수는
$3\cdot 2\cdot 1=6$
또 항등함수는 1개, 상수함수는 3개이므로
$p=6,\ q=1,\ r=3$
$\therefore\ p+q+r=10$

답 10

0477 조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이고, 조건 (나)에서 $f(x)$의 값이 될 수 있는 것은 $-2, -1, 0, 1, 2$이다.
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-2, -1, 0, 1, 2$ 중 하나이므로 5개
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 4개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 3개
$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외한 2개
따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 개수는
$5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$

답 120

0478 $-1+(-1)=-2,\ -1+0=-1,\ -1+1=0,\ 0+0=0,$
$0+1=1,\ 1+1=2$이므로
표로 나타내면

$y \backslash x$	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

$Y=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ··· ❶
따라서 상수함수의 개수는 5이다. ··· ❷

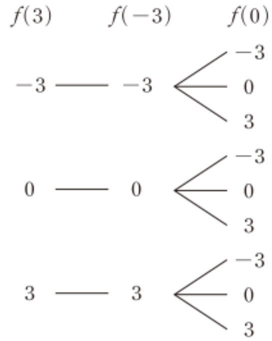
답 5

채점 기준	비율
❶ 집합 Y를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	70 %
❷ 상수함수의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0479 $f(x)-f(-x)=0$에서
$f(x)=f(-x)$
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $-3, 0, 3$ 중 하나이므로 3개
$f(-3)=f(3)$에서 $f(-3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(3)$의 값과 같으므로 1개
$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $-3, 0, 3$ 중 하나이므로 3개
따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$3\cdot 1\cdot 3=9$

답 9

참고 주어진 조건을 만족시키는 $f(3)$, $f(-3)$, $f(0)$의 값을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



유형 10 합성함수의 함숫값

본책 74쪽

두 함수 f, g에 대하여 $(f\circ g)(a)$의 값 구하기
➡ 합성함수 $(f\circ g)(x)$를 구하여 a를 대입할 수도 있지만
$(f\circ g)(a)=f(g(a))$이므로 $g(a)$의 값을 구하여 $f(x)$의 x에 대입하는 것이 더 편리하다.
즉 $g(a)=m$, $f(m)=n$이면 $(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(m)=n$

0480 $\sqrt{2}$는 무리수이므로 $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2=2$
2는 유리수이므로 $f(2)=-2\cdot 2=-4$
$\therefore\ (f\circ f)(\sqrt{2})=f(f(\sqrt{2}))=f(2)=-4$

답 -4

0481 $f(3)=1$이고
$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=2,$
$(f\circ f\circ f)(3)=f((f\circ f)(3))=f(2)=4$
이므로
(주어진 식)$=1+2+4=7$

답 ②

0482 $\underbrace{(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)}_{\text{합성함수에서는 결합법칙이 성립한다.}}$
$=(h\circ g)(f(x))$
$=(h\circ g)(x+2)$
$=7(x+2)-6$
$=7x+8$
이므로 $7a+8=-6,\quad 7a=-14$
$\therefore\ a=-2$

답 -2

0483 $f(x)=f(x+4)$이므로
$f(14)=f(10)=f(6)=f(2)$
$=2^2-2\cdot 2+3=3$ ··· ❶
$\therefore\ (f\circ f)(14)=f(f(14))=f(3)$
$=12-2\cdot 3=6$ ··· ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(14)$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $(f\circ f)(14)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0484 $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(1)=2$
$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(1)=2$
이때 $f(3)=g(2)=1$이고 두 함수 f, g는 각각 일대일대응이므로
$f(2)=3$, $g(3)=3$
$\therefore f(2)+g(3)=6$ 답 ⑤

유형 11 $f\circ g=g\circ f$인 경우 본책 74쪽

합성함수 $f\circ g$와 $g\circ f$를 각각 구하여 동류항의 계수를 비교한다.
➡ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면
$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

0485 $f(x)=ax+1$, $g(x)=-x-2$에서
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=a(-x-2)+1$
$=-ax-2a+1$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=-(ax+1)-2$
$=-ax-3$
$f\circ g=g\circ f$ 이므로 $-ax-2a+1=-ax-3$
$-2a+1=-3$ $\therefore a=2$ 답 ②

0486 주어진 그림에서
$f(1)=4$, $f(2)=1$, $f(3)=2$, $f(4)=3$
$f\circ g=g\circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$ ...... ㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(g(1))=g(f(1))$
$f(3)=g(4)$ $\therefore g(4)=2$
㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면 $f(g(4))=g(f(4))$
$f(2)=g(3)$ $\therefore g(3)=1$
㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 $f(g(3))=g(f(3))$
$f(1)=g(2)$ $\therefore g(2)=4$
$\therefore g(2)-g(4)=4-2=2$ 답 ②

0487 $f(x)=2x+3$, $g(x)=ax+b$에서
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(ax+b)+3$
$=2ax+2b+3$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=a(2x+3)+b$
$=2ax+3a+b$
$f\circ g=g\circ f$이므로 $2ax+2b+3=2ax+3a+b$
$2b+3=3a+b$ $\therefore b=3a-3$
$g(x)=ax+b$에 $b=3a-3$을 대입하면
$g(x)=ax+3a-3=a(x+3)-3$
이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 점 $(-3,\ -3)$을 지난다. 답 $(-3,\ -3)$

유형 12 $f\circ g$에 대한 조건이 주어진 경우 본책 75쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미지수를 포함한 식으로 주어지고 함수 $f\circ g$에 대한 조건이 주어진 경우
➡ $(f\circ g)(x)$를 미지수를 포함한 식으로 나타낸 후 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값 또는 범위를 구한다.

0488 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=bx+c+a$
따라서 $bx+c+a=4x-2$이므로
$b=4$, $c+a=-2$
또 $f(2)=3$이므로
$2+a=3$ $\therefore a=1$
$c+a=-2$에 $a=1$을 대입하면
$c+1=-2$ $\therefore c=-3$
$\therefore abc=1\cdot4\cdot(-3)=-12$ 답 -12

0489 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=(x^2-a)^2-a$
$=x^4-2ax^2+a^2-a$
$(f\circ f)(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로
$(f\circ f)(2)=16-8a+a^2-a=0$
$\therefore \underline{a^2-9a+16=0}$ (판별식)>0이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 9이다. 답 ⑤

0490 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$=\{f(x)\}^2-4f(x)+a$
$=\{f(x)-2\}^2-4+a$
에서 $f(x)=2$, 즉 $x=\frac{3}{2}$일 때 함수 $(g\circ f)(x)$가 최솟값 $-4+a$를 가지므로 $(g\circ f)(x)\ge0$이 되려면
$-4+a\ge0$
이어야 한다.
$\therefore a\ge4$
따라서 구하는 a의 최솟값은 4이다. 답 ④

다른 풀이 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$=(2x-1)^2-4(2x-1)+a$
$=4x^2-12x+5+a$
$(g\circ f)(x)\ge0$이 되려면 이차방정식 $4x^2-12x+5+a=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=(-6)^2-4(5+a)\le0$
$-4a+16\le0$ $\therefore a\ge4$

0491 $g(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x)))$
$=f(f(-2x+a))=f(-2(-2x+a)+a)$
$=f(4x-a)=-2(4x-a)+a$
$=-8x+3a$ ···➊
함수 $g(x)$는 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소하므로 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 최솟값 -17을 갖는다. 즉 $g(4)=-17$이므로
$-8\cdot4+3a=-17$, $3a=15$
$\therefore a=5$ ···➋
따라서 $g(x)=-8x+15$이고 $x=b$에서 최댓값 7을 가지므로
$g(b)=7$, $-8b+15=7$
$8b=8$ $\therefore b=1$ ···➌
$\therefore ab=5$ ···➍
답 5

채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 13 $f \circ g = h$를 만족시키는 함수 f 또는 g 구하기

본책 75쪽

① 두 함수 $f(x)$, $h(x)$가 주어진 경우
➡ $f(g(x))=h(x)$임을 이용하여 $g(x)$를 구한다.
② 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 주어진 경우
➡ $f(g(x))=h(x)$이므로 $g(x)=t$로 치환하여 $f(t)$를 구한다.

0492 $(g\circ h)(x)=g(h(x))=2h(x)-3$
$(g\circ h)(x)=f(x)$이므로
$2h(x)-3=2x^2+1$
$2h(x)=2x^2+4 \quad \therefore h(x)=x^2+2$

답 ③

0493 (1) $(f\circ h)(x)=g(x)$이므로
$f(h(x))=g(x)$
$3h(x)-2=-x+1, \quad 3h(x)=-x+3$
$\therefore h(x)=-\frac{1}{3}x+1$ ⋯ ❶

(2) $(k\circ f)(x)=g(x)$이므로
$k(f(x))=g(x), \quad k(3x-2)=-x+1$
$3x-2=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}$이므로
$k(t)=-\left(\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}\right)+1=-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}$
$\therefore k(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ ⋯ ❷

답 (1) $h(x)=-\frac{1}{3}x+1$ (2) $k(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $h(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $k(x)$를 구할 수 있다.	60 %

0494 $(g\circ f)(x)=-2x+1$에서 $\quad g(f(x))=-2x+1$
$g\left(\frac{2x+1}{3}\right)=-2x+1$
$\frac{2x+1}{3}=t$로 놓으면 $\quad 2x+1=3t \quad \therefore x=\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}$
따라서 $g(t)=-2\left(\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\right)+1=-3t+2$이므로
$g(3)=-3\cdot 3+2=-7$

답 -7

다른 풀이 $g\left(\frac{2x+1}{3}\right)=-2x+1$ ⋯⋯ ㉠
$\frac{2x+1}{3}=3$에서 $\quad 2x+1=9 \quad \therefore x=4$
㉠에 $x=4$를 대입하면 $\quad g(3)=-7$

유형 14 합성함수의 추정

본책 76쪽

함수 f에 대하여 $f^n=f^{n-1}\circ f$일 때, $f^n(a)$의 값 구하기
➡ [방법 1] $f^2(x)$, $f^3(x)$, $f^4(x)$, ⋯를 직접 구하여 $f^n(x)$를 추정한 다음, x 대신 a를 대입한다.
[방법 2] $f(a)$, $f^2(a)$, $f^3(a)$, ⋯에서 규칙을 찾아 $f^n(a)$의 값을 추정한다.

0495 $f^1(2)=f(2)=1$이므로
$f^2(2)=f(f(2))=f(1)=4$
$f^3(2)=f(f^2(2))=f(4)=3$
$f^4(2)=f(f^3(2))=f(3)=2$
$f^5(2)=f(f^4(2))=f(2)=1$
⋮
즉 $f^n(2)$는 1, 4, 3, 2가 이 순서대로 반복된다.
이때 $50=4\cdot 12+2$이므로 $\quad f^{50}(2)=f^2(2)=4$

답 4

0496 $f(x)=-x+2$에서 $\quad f_1(x)=f(x)=-x+2$
$f_2(x)=(f\circ f)(x)=-(-x+2)+2=x$ ⋯ ❶
따라서 $f_3(x)=f(x)$, $f_4(x)=f_2(x)$, ⋯이므로
$f_n(x)=\begin{cases}-x+2 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$ ⋯ ❷

답 $f_n(x)=\begin{cases}-x+2 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

채점 기준	비율
❶ $f_1(x)$, $f_2(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f_n(x)$를 구할 수 있다.	60 %

0497 $f^{n+1}=f^n\circ f=f\circ f^n$이고
$f^1(100)=f(100)=\frac{100}{2}=50$이므로
$f^2(100)=(f\circ f)(100)=f(f(100))$
$=f(50)=\frac{50}{2}=25$
$f^3(100)=(f\circ f^2)(100)=f(f^2(100))$
$=f(25)=\frac{25+1}{2}=13$
$f^4(100)=(f\circ f^3)(100)=f(f^3(100))$
$=f(13)=\frac{13+1}{2}=7$
$f^5(100)=(f\circ f^4)(100)=f(f^4(100))$
$=f(7)=\frac{7+1}{2}=4$
$f^6(100)=(f\circ f^5)(100)=f(f^5(100))$
$=f(4)=\frac{4}{2}=2$
$f^7(100)=(f\circ f^6)(100)=f(f^6(100))$
$=f(2)=\frac{2}{2}=1$
따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다.

답 ③

0498 $f^1(3)=f(3)=3-2=1$이므로

$f^2(3)=(f\circ f)(3)=f(1)=1-2=-1$

$f^3(3)=(f\circ f^2)(3)=f(-1)=(-1)^2+2\cdot(-1)-2=-3$

$f^4(3)=(f\circ f^3)(3)=f(-3)=(-3)^2+2\cdot(-3)-2=1$

$f^5(3)=(f\circ f^4)(3)=f(1)=-1$

$\vdots$

즉 $f^n(3)$은 $1, -1, -3$이 이 순서대로 반복된다.

이때 $2018=3\cdot 672+2$이므로

$f^{2018}(3)=f^2(3)=-1$

$f^1(4)=f(4)=4-2=2$이므로

$f^2(4)=(f\circ f)(4)=f(2)=2-2=0$

$f^3(4)=(f\circ f^2)(4)=f(0)=0-2=-2$

$f^4(4)=(f\circ f^3)(4)=f(-2)=(-2)^2+2\cdot(-2)-2=-2$

$f^5(4)=(f\circ f^4)(4)=f(-2)=-2$

$\vdots$

즉 $f^n(4)=-2\ (n\geq 3)$이므로

$f^{2018}(4)=-2$

$\therefore f^{2018}(3)+f^{2018}(4)=-1-2=-3$

답 -3

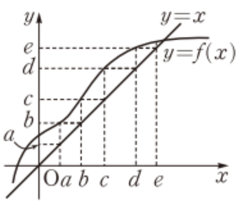
유형 15 함수의 그래프와 합성함수

본책 76쪽

함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 (a, b), (b, c)를 지나면

➡ $(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=c$

0499 오른쪽 그림에서



$(f\circ f\circ f)(b)=f(f(f(b)))$

$=f(f(c))$

$=f(d)$

$=e$

답 ⑤

0500 $f(a)=b$라 하면 $(f\circ f)(a)=4$에서

$f(f(a))=f(b)=4$

주어진 그래프에서 $f(b)=4$를 만족시키는 b의 값은

$b=2$ 또는 $b=4$

이므로 $f(a)=2$ 또는 $f(a)=4$

(i) $f(a)=2$일 때,

$a=3$

(ii) $f(a)=4$일 때,

$a=2$ 또는 $a=4$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$2+3+4=9$

답 ⑤

유형 16 역함수의 정의

본책 77쪽

함수 f의 역함수가 f^{-1}일 때

➡ $f(x)=y \Longleftrightarrow f^{-1}(y)=x$

0501 $f^{-1}(4)=2$이므로 $f(2)=4$

$\therefore 2a+b=4$ ······ ㉠

$f^{-1}(-5)=-1$이므로 $f(-1)=-5$

$\therefore -a+b=-5$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-2$

$\therefore a^2+b^2=3^2+(-2)^2$

$=13$

답 13

0502 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$, a, b, c는 상수)라 하면

$f(0)=0$에서 $c=0$

즉 $f(x)=ax^2+bx$이고

$f^{-1}(-10)=-2$이므로 $f(-2)=-10$

$4a-2b=-10$ $\therefore 2a-b=-5$ ······ ㉠

$f^{-1}(32)=4$이므로 $f(4)=32$

$16a+4b=32$ $\therefore 4a+b=8$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{2},\ b=6$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+6x$이므로

$f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^2+6\cdot 2$

$=14$

답 ③

0503 $\frac{3-x}{2}=t$로 놓으면 $3-x=2t$

$\therefore x=-2t+3$

따라서 $f(t)=4(-2t+3)+1=-8t+13$이므로

$f(x)=-8x+13$ ··· ❶

$f^{-1}(0)=k$라 하면 $f(k)=0$이므로

$-8k+13=0$ $\therefore k=\frac{13}{8}$

$\therefore f^{-1}(0)=\frac{13}{8}$ ··· ❷

답 $\frac{13}{8}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f^{-1}(0)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0504 $x<5$일 때,

$f(x)=x+3<8$

$x\geq 5$일 때,

$f(x)=2x-2\geq 8$

$f^{-1}(6)=m$이라 하면 $f(m)=6$이므로

6<8이므로 $f(x)=x+3$에 대입한다.

$m+3=6$ $\therefore m=3$

$f^{-1}(12)=n$이라 하면 $f(n)=12$이므로

12≥8이므로 $f(x)=2x-2$에 대입한다.

$2n-2=12$ $\therefore n=7$

$\therefore f^{-1}(6)+f^{-1}(12)=3+7$

$=10$

답 ②

유형 17 역함수가 존재하기 위한 조건

본책 77쪽

함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재한다.
➡ f가 일대일대응이다.
➡ ① 정의역의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$
② 치역과 공역이 서로 같다.

0505 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.
$y=f(x)$의 그래프의 기울기가 양수이므로

$f(2)=a$, $f(6)=b$ (x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.)

이때 $f(2)=3\cdot2-2=4$, $f(6)=3\cdot6-2=16$이므로

$a=4$, $b=16$

$\therefore a+b=20$

답 ③

0506 $f(x)=x^2-2x-40=(x-1)^2-41$이고, 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$a\geq1$, $f(a)=a$

$f(a)=a$에서 $a^2-2a-40=a$

$a^2-3a-40=0$, $(a+5)(a-8)=0$

$\therefore a=8$ ($\because a\geq1$)

답 8

0507 $f(x)=kx+|x-1|+2$에서

(i) $x\geq1$일 때,

$f(x)=kx+x-1+2=(k+1)x+1$ ··· ❶

(ii) $x<1$일 때,

$f(x)=kx-(x-1)+2=(k-1)x+3$ ··· ❷

(i), (ii)에서 함수 f의 역함수가 존재하려면 f가 일대일대응이어야 하므로 $x\geq1$일 때와 $x<1$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다. ($k+1>0$, $k-1>0$ 또는 $k+1<0$, $k-1<0$)

따라서 $(k+1)(k-1)>0$이므로

$k<-1$ 또는 $k>1$ ··· ❸

답 $k<-1$ 또는 $k>1$

채점 기준	비율
❶ $x\geq1$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $x<1$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

0508 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.
따라서 $3+a=3\cdot3-1$이므로 $a=5$

$x<3$일 때, $f(x)=x+5<8$

$x\geq3$일 때, $f(x)=3x-1\geq8$

$f^{-1}(11)=k$라 하면 $f(k)=11$이므로 ($11\geq8$이므로 $f(x)=3x-1$에 대입한다.)

$3k-1=11$ $\therefore k=4$

$f^{-1}(4)=m$이라 하면 $f(m)=4$이므로 ($4<8$이므로 $f(x)=x+5$에 대입한다.)

$m+5=4$ $\therefore m=-1$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(11)=f^{-1}(f^{-1}(11))=f^{-1}(4)=-1$

답 -1

유형 18 역함수 구하기

본책 78쪽

일차함수 $y=ax+b$의 역함수 구하기
(i) x를 y에 대한 식으로 나타낸다. ➡ $x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$
(ii) x와 y를 서로 바꾼다. ➡ $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$

0509 $y=ax-6$이라 하면 $ax=y+6$

$\therefore x=\frac{1}{a}y+\frac{6}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x+\frac{6}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x+\frac{6}{a}$

따라서 $\frac{1}{a}x+\frac{6}{a}=\frac{1}{2}x+b$이므로

$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$, $\frac{6}{a}=b$ $\therefore a=2$, $b=3$

$\therefore ab=6$

답 ④

0510 $2x-1=t$로 놓으면 $2x=t+1$

$\therefore x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

따라서 $f(t)=4\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+3=2t+5$이므로

$f(x)=2x+5$

$y=2x+5$라 하면 $2x=y-5$

$\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편은 5, y절편은 $-\frac{5}{2}$이므로 구하는 합은

$5+\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

0511 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=2\left(\frac{1}{2}x-1\right)+a$

$=x-2+a$

$y=x-2+a$라 하면

$x=y+2-a$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x+2-a$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(x)=x+2-a$

$f(x)=\frac{1}{2}x-1$에서 $y=\frac{1}{2}x-1$이라 하면

$x=2y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x+2$

$\therefore f^{-1}(x)=2x+2$

$g(x)=2x+a$에서 $y=2x+a$라 하면

$x=\frac{1}{2}y-\frac{a}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{2}x-\frac{a}{2}$

$\therefore g^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{a}{2}$

$\therefore (g^{-1}\circ f^{-1})(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))$

$=\frac{1}{2}(2x+2)-\frac{a}{2}=x+1-\frac{a}{2}$

$(g\circ f)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$에서 $\quad x+2-a=x+1-\frac{a}{2}$

따라서 $2-a=1-\frac{a}{2}$이므로 $\quad -\frac{a}{2}=-1$

$\therefore a=2$

답 ⑤

0512 $f(x)=|2x-2|+|x-4|$에서

$1\le x<4$일 때, $\quad f(x)=2x-2-(x-4)=x+2$

$x\ge 4$일 때, $\quad f(x)=2x-2+x-4=3x-6$

$\therefore f(x)=\begin{cases} x+2 & (1\le x<4) \\ 3x-6 & (x\ge 4)\end{cases}$ ···➊

(i) $1\le x<4$일 때, $y=x+2$라 하면 $\quad 3\le y<6$

x를 y에 대한 식으로 나타내면 $\quad x=y-2$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=x-2$

$\therefore f^{-1}(x)=x-2\ (3\le x<6)$ ···➋

(ii) $x\ge 4$일 때, $y=3x-6$이라 하면 $\quad y\ge 6$

x를 y에 대한 식으로 나타내면 $\quad x=\frac{1}{3}y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{3}x+2$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+2\ (x\ge 6)$ ···➌

(i), (ii)에서 구하는 역함수는

$f^{-1}(x)=\begin{cases} x-2 & (3\le x<6) \\ \frac{1}{3}x+2 & (x\ge 6)\end{cases}$ ···➍

답 $f^{-1}(x)=\begin{cases} x-2 & (3\le x<6) \\ \frac{1}{3}x+2 & (x\ge 6)\end{cases}$

채점 기준	비율
➊ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
➋ $1\le x<4$일 때, $f(x)$의 역함수를 구할 수 있다.	30 %
➌ $x\ge 4$일 때, $f(x)$의 역함수를 구할 수 있다.	30 %
➍ $f(x)$의 역함수를 구할 수 있다.	10 %

유형 19 $f=f^{-1}$인 함수

본책 78쪽

함수 f와 f의 역함수 f^{-1}에 대하여

$f=f^{-1} \Longleftrightarrow (f\circ f)(x)=x$

0513 $f=f^{-1}$이면

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$

ㄱ. $f(x)=x+1$이므로

$f(f(x))=f(x+1)=x+1+1=x+2$

ㄴ. $f(x)=-x+1$이므로

$f(f(x))=f(-x+1)=-(-x+1)+1=x$

ㄷ. $f(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$f(f(x))=f\left(-\frac{1}{x}\right)=-1\div\left(-\frac{1}{x}\right)=x$

이상에서 $f=f^{-1}$인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0514 $(f\circ f)(x)=x$이므로

$f(x)=f^{-1}(x)$

$\therefore f(2)=f^{-1}(2)=-3$

답 -3

다른 풀이 $f^{-1}(2)=-3$이므로 $\quad f(-3)=2$

$(f\circ f)(x)=x$의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$(f\circ f)(-3)=-3, \quad f(f(-3))=-3$

$\therefore f(2)=-3$

0515 $f=f^{-1}$이므로

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$

$f(x)=\underline{a(x-6)-2}=ax-6a-2\ (a\neq 0)$라 하면

그래프가 점 (6, −2)를 지나는 일차함수

$f(f(x))=a(ax-6a-2)-6a-2$

$=a^2x-6a^2-8a-2$

이므로

$a^2x-6a^2-8a-2=x$

즉 $a^2=1$, $-6a^2-8a-2=0$이므로

$a^2=1$에서 $\quad a=-1$ 또는 $a=1$ ······ ㉠

$-6a^2-8a-2=0$에서 $\quad 3a^2+4a+1=0$

$(a+1)(3a+1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=-\frac{1}{3}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=-1$

따라서 $f(x)=-x+4$이므로

$f(-1)=-(-1)+4=5$

답 ⑤

다른 풀이 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치하므로 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(6, -2)$, $(-2, 6)$을 지난다.

$f(x)=mx+n\ (m\neq 0)$이라 하면

$6m+n=-2$, $-2m+n=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad m=-1$, $n=4$

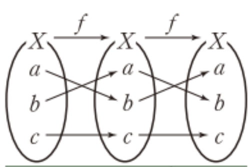
따라서 $f(x)=-x+4$이므로 $\quad f(-1)=5$

0516 $f=f^{-1}$이므로 $f\circ f$가 항등함수인 것의 개수를 구하면 된다.

(i) $f(x)=x$인 함수: 1개

(ii) 오른쪽 그림과 같이 자기 자신에 대응되는 원소가 1개이고 나머지 2개는 서로 엇갈려 대응되는 함수

: 자기 자신에 대응되는 원소가 a, b, c인 3가지 경우가 있으므로 3개



자기 자신에 대응되는 원소가 c인 경우이다.

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$1+3=4$

답 4

유형 20 합성함수와 역함수 본책 79쪽

두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때

① $(f^{-1}\circ g)(a)$의 값 구하기

(i) $g(a)$의 값을 구한다.

(ii) $f^{-1}(g(a))=k$로 놓으면 $f(k)=g(a)$이므로 이를 만족시키는 k의 값을 구한다.

② $(f\circ g^{-1})(a)$의 값 구하기

(i) $g^{-1}(a)=k$로 놓으면 $g(k)=a$이므로 이를 만족시키는 k의 값을 구한다.

(ii) $f(x)$에 x 대신 k의 값을 대입한다.

0517 $(f^{-1}\circ g)(a)=f^{-1}(g(a))=1$에서 $\quad f(1)=g(a)$

$3\cdot1-2=a-1 \qquad \therefore a=2$

답 ⑤

0518 $(f\circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))$

이때 $g(2)=1$이므로 $\quad g^{-1}(1)=2$

$\therefore (f\circ g^{-1})(1)=f(2)=4$

답 ⑤

0519 (1) $g^{-1}(3)=2$이므로 $\quad g(2)=3$

즉 $\frac{1}{3}\cdot2+b=3$이므로

$b=\frac{7}{3}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=x+c$이므로

$a\left(\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}\right)-3=x+c$, 즉 $\frac{a}{3}x+\frac{7}{3}a-3=x+c$

따라서 $\frac{a}{3}=1$, $\frac{7}{3}a-3=c$이므로

$a=3$, $c=4$

$\therefore a+b+c=\frac{28}{3}$ ··· ❶

(2) $g^{-1}(f(-1))=k$라 하면 $\quad g(k)=f(-1)$

이때 $f(x)=3x-3$에서 $f(-1)=-6$이므로

$g(k)=-6$

즉 $g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$에서 $\quad \frac{1}{3}k+\frac{7}{3}=-6$

$\therefore k=-25$

$\therefore g^{-1}(f(-1))=-25$ ··· ❷

답 (1) $\frac{28}{3}$ (2) -25

채점 기준	비율
❶ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $g^{-1}(f(-1))$의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 21 역함수의 성질 본책 79쪽

두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때

① $(f^{-1}\circ f)(x)=x$, $(f\circ f^{-1})(y)=y$

② $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}\neq f^{-1}\circ g^{-1}$

0520 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(8)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(8)$

$=(g^{-1}\circ f)(8)$

$=g^{-1}(f(8))$

$=g^{-1}(-23)$

$g^{-1}(-23)=k$라 하면 $\quad g(k)=-23$

$4k+1=-23 \qquad \therefore k=-6$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(8)=-6$

답 -6

0521 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$이므로

$(g\circ f)^{-1}(2)+(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=(f^{-1}\circ g^{-1})(2)+(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=2(f^{-1}\circ g^{-1})(2)=2f^{-1}(g^{-1}(2))$

$g^{-1}(2)=a$라 하면 $\quad g(a)=2$

$a-3=2 \qquad \therefore a=5$

$f^{-1}(5)=b$라 하면 $\quad f(b)=5$

$b^2+1=5$, $\quad b^2=4 \qquad \therefore b=2\ (\because b\geq0)$

$\therefore$ (주어진 식)$=2f^{-1}(g^{-1}(2))=2f^{-1}(5)=2\cdot2=4$

답 ①

0522 $(f\circ h)(x)=g^{-1}(x)$에서

$(f^{-1}\circ f\circ h)(x)=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$

$\therefore h(x)=(g\circ f)^{-1}(x)$ ··· ❶

(i) $x\geq3$일 때,

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-3)$

$=(2x-3)+4=2x+1$

$y=2x+1$이라 하면 $\quad y\geq7$

x를 y에 대한 식으로 나타내면 $\quad x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ (x\geq7)$ ··· ❷

(ii) $x<3$일 때,

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=x+4$

$y=x+4$라 하면 $\quad y<7$

x를 y에 대한 식으로 나타내면 $\quad x=y-4$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=x-4$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(x)=x-4\ (x<7)$ ··· ❸

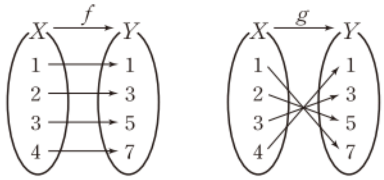
(i), (ii)에서

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & (x\geq7)\\ x-4 & (x<7)\end{cases}$$ ··· ❹

답 $h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & (x\geq7)\\ x-4 & (x<7)\end{cases}$

채점 기준	비율
❶ $h(x)=(g\circ f)^{-1}(x)$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $x\geq3$일 때, $(g\circ f)^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $x<3$일 때, $(g\circ f)^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $h(x)$를 구할 수 있다.	10 %

0523 두 함수 f, g의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore (f\circ g)^{-1}(5)+(g\circ f)^{-1}(7)$
$=(g^{-1}\circ f^{-1})(5)+(f^{-1}\circ g^{-1})(7)$
$=g^{-1}(f^{-1}(5))+f^{-1}(g^{-1}(7))$
$=g^{-1}(3)+f^{-1}(1)=3+1=4$ 　답 4

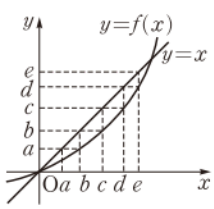
0524 $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$이고
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(-3x+4)=-6x+8$
$y=-6x+8$이라 하면 　$x=-\frac{1}{6}y+\frac{4}{3}$
x와 y를 서로 바꾸면 　$y=-\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$
$\therefore (f\circ g)^{-1}(x)=-\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$
$\therefore (g^{-1}\circ f^{-1}\circ h)(x)=(f\circ g)^{-1}(h(x))=-\frac{1}{6}h(x)+\frac{4}{3}$
즉 $-\frac{1}{6}h(x)+\frac{4}{3}=f(x)$이므로
$-\frac{1}{6}h(1)+\frac{4}{3}=f(1)$, 　$-\frac{1}{6}h(1)+\frac{4}{3}=2$
$\therefore h(1)=-4$ 　답 ④

다른 풀이 $((f\circ g)^{-1}\circ h)(x)=f(x)$에서
$((f\circ g)\circ(f\circ g)^{-1}\circ h)(x)=(f\circ g\circ f)(x)$
$\therefore h(x)=(f\circ g\circ f)(x)$
$\therefore h(1)=f(g(f(1)))=f(g(2))$
$=f(-2)=-4$

유형 22 함수의 그래프와 역함수 　본책 80쪽

함수 f와 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지난다.
➡ $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 (b, a)를 지난다.
➡ $f^{-1}(b)=a$

0525 $f^{-1}(c)=k$라 하면
$f(k)=c$ 　$\therefore k=d$
$f^{-1}(d)=l$이라 하면
$f(l)=d$ 　$\therefore l=e$
$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$
$=f^{-1}(d)$
$=e$



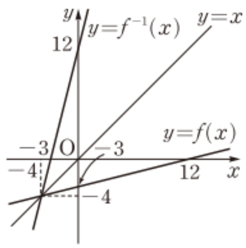
답 ⑤

0526 $f^{-1}(3)=a$, $f^{-1}(5)=b$라 하면
$f(a)=3$, $f(b)=5$
함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로
$a=3$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=3$
$\therefore f^{-1}(3)+f^{-1}(5)=a+b=7$ 　답 7

유형 23 역함수의 그래프의 성질 　본책 80쪽

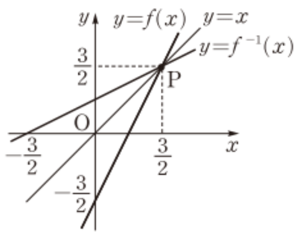
함수 f와 역함수 f^{-1}에 대하여
① $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
② $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점과 같다.

0527 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로



$\frac{1}{4}x-3=x$
$-\frac{3}{4}x=3$
$\therefore x=-4$
따라서 교점의 좌표는 $(-4, -4)$이므로 ─ 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이다.
$a=-4$, $b=-4$
$\therefore a+b=-8$ 　답 ③

0528 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 교점 P의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로



$2x-\frac{3}{2}=x$
$\therefore x=\frac{3}{2}$ 　··· ❶
따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$이므로
$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 　··· ❷

답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

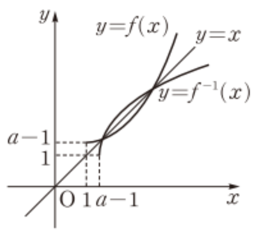
채점 기준	비율
❶ 점 P의 x좌표를 구할 수 있다.	70 %
❷ $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %

SSEN 특강

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리
① 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
② 원점 O와 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

0529 $f(x)=x^2-2x+a$

$\quad\quad=(x-1)^2+a-1\ (x\geq1)$



$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2-2x+a=x$, 즉 $x^2-3x+a=0$이 1보다 크거나 같은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4a>0$

$\therefore a<\dfrac{9}{4}$

(ii) $\underline{1-3+a\geq0}$이므로 $\quad a\geq2$

$g(x)=x^2-3x+a$라 하면 $g(1)\geq0$이어야 한다.

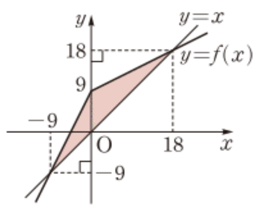
(iii) $\underline{-\dfrac{-3}{2}}>1$

축의 방정식

이상에서 $\quad 2\leq a<\dfrac{9}{4}$

답 $2\leq a<\dfrac{9}{4}$

0530 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

(i) $x\geq0$일 때, $\quad\dfrac{1}{2}x+9=x$

$\therefore x=18$

(ii) $x<0$일 때, $\quad 2x+9=x$

$\therefore x=-9$

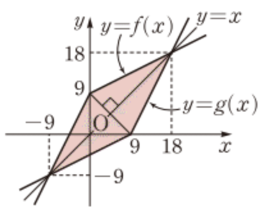
이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

따라서 구하는 넓이는

$2\left(\dfrac{1}{2}\cdot9\cdot9+\dfrac{1}{2}\cdot9\cdot18\right)=243$

답 243

다른 풀이 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형은 마름모이므로 구하는 넓이는

$\underline{\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(9-0)^2+(0-9)^2}\cdot\sqrt{(18+9)^2+(18+9)^2}}$

두 대각선의 길이가 a, b인 마름모의 넓이는 $\dfrac{1}{2}ab$이다.

$=\dfrac{1}{2}\cdot9\sqrt{2}\cdot27\sqrt{2}=243$

유형 24~25 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프

본책 81쪽

① $y=|f(x)|$의 그래프

➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.

② $y=f(|x|)$의 그래프

➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $x<0$인 부분은 $x\geq0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.

③ $|y|=f(x)$의 그래프

➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분은 $y\geq0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.

④ $|y|=f(|x|)$의 그래프

➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq0$, $y\geq0$인 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한다.

0531 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그 개형은 ④와 같다.

답 ④

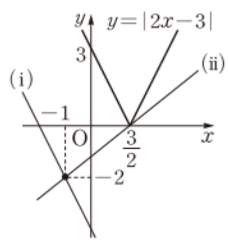
0532 $y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분은 $x\geq0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ㄴ과 같다.

또 $|y|=f(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분만 남기고, $y<0$인 부분은 $y\geq0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ㄱ과 같다.

따라서 구하는 그래프의 개형은 차례대로 ㄴ, ㄱ이다.

답 ㄴ, ㄱ

0533 $y=|2x-3|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선



$y=m(x+1)-2 \quad\cdots\cdots$ ㉠

는 m의 값에 관계없이 점 $(-1,\ -2)$를 지난다.

(i) 직선 ㉠이 직선 $y=|2x-3|\left(x<\dfrac{3}{2}\right)$,

즉 $y=-2x+3$과 평행할 때,

$m=-2$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$을 지날 때,

$m=\dfrac{0-(-2)}{\dfrac{3}{2}-(-1)}=\dfrac{4}{5}$

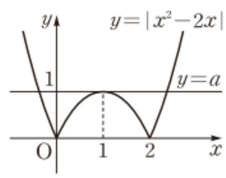
(i), (ii)에서 두 그래프가 만나려면

$m<-2$ 또는 $m\geq\dfrac{4}{5}$

따라서 m의 값으로 적당하지 않은 것은 $\dfrac{1}{4}$이다.

답 ③

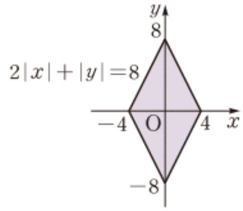
0534 $y=|x^2-2x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면



$a=1$

답 1

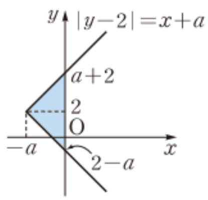
0535 $2|x|+|y|=8$의 그래프는 $2x+y=8$, 즉 $y=-2x+8$의 그래프에서 $x\ge0$, $y\ge0$인 부분만 남기고 이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같은 마름모이다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot8\cdot16=64$ 답 ④

0536 $|y-2|=x+a$의 그래프는 $|y|=x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같으므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 색칠한 도형의 넓이가 9이므로

$\frac{1}{2}\{a+2-(2-a)\}\cdot a=9$

$a^2=9$ $\therefore a=3$ ($\because a>0$) 답 3

0537 방정식 $(f\circ f)(x)=ax+b$의 실근의 개수는 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=|x-1|$에서

$(f\circ f)(x)=||x-1|-1|$

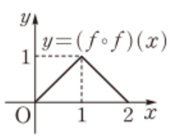
$0\le x<1$일 때,

$(f\circ f)(x)=|-(x-1)-1|=|-x|=x$

$1\le x\le2$일 때,

$(f\circ f)(x)=|x-1-1|=|x-2|=-x+2$ ··· ❶

따라서 $0\le x\le2$에서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 교점의 개수가 무수히 많으려면 직선 $y=ax+b$는



$y=x$ 또는 $y=-x+2$

그런데 $b\ne0$이므로 직선 $y=ax+b$는

$y=-x+2$

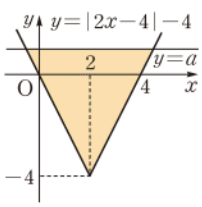
따라서 $a=-1$, $b=2$이므로 ··· ❷

$a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $(f\circ f)(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	10 %

0538 $y=|2x-4|-4=|2(x-2)|-4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와 직선 $y=a$ ($a>0$)의 교점의 x좌표는



$|2x-4|-4=a$에서 $y=|2x-4|-4$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8$이므로 $a>0$이다.

$|2x-4|=a+4$

$2x-4=a+4$ 또는 $2x-4=-a-4$

$\therefore x=\frac{1}{2}a+4$ 또는 $x=-\frac{1}{2}a$

이때 색칠한 부분의 넓이가 18이므로

$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}a+4-\left(-\frac{1}{2}a\right)\right\}\{a-(-4)\}=18$

$(a+4)^2=36$ $a>0$이므로 $\frac{1}{2}a+4>-\frac{1}{2}a$

$a+4=\pm6$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 2

유형 26 두 개 이상의 절댓값 기호를 포함한 함수 본책 82쪽

$y=|x-p|+|x-q|$의 그래프 (단, $p<q$)

➡ $x<p$, $p\le x<q$, $x\ge q$일 때로 나누어 그래프를 그린다.

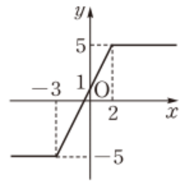
0539 $y=|x+3|-|x-2|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값이 -3, 2이므로

(i) $x<-3$일 때, $y=-(x+3)+x-2=-5$

(ii) $-3\le x<2$일 때, $y=x+3+x-2=2x+1$

(iii) $x\ge2$일 때, $y=x+3-(x-2)=5$

이상에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$M=5$, $m=-5$

$\therefore Mm=-25$

답 -25

0540 $y=|x+1|+|x-5|+|x-7|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값이 -1, 5, 7이므로

(i) $x<-1$일 때,

$y=-(x+1)-(x-5)-(x-7)=-3x+11$

(ii) $-1\le x<5$일 때,

$y=x+1-(x-5)-(x-7)=-x+13$

(iii) $5\le x<7$일 때,

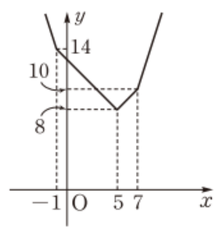
$y=x+1+x-5-(x-7)=x+3$

(iv) $x\ge7$일 때,

$y=x+1+x-5+x-7$

$=3x-11$

이상에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=5$일 때 최솟값 8을 갖는다.



따라서 $a=5$, $b=8$이므로

$a+b=13$ 답 ②

0541 $y=|x+4|+|x-1|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값이 -4, 1이므로

(i) $x<-4$일 때,

$y=-(x+4)-(x-1)=-2x-3$

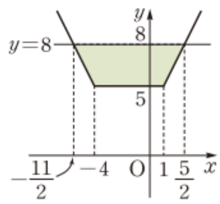
(ii) $-4\le x<1$일 때,

$y=x+4-(x-1)=5$

(iii) $x\ge1$일 때,

$y=x+4+x-1=2x+3$

이상에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$-2x-3=8$에서 $\quad x=-\frac{11}{2}$

$2x+3=8$에서 $\quad x=\frac{5}{2}$

이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(\underbrace{8+5}_{\frac{5}{2}-\left(-\frac{11}{2}\right)=8})\cdot 3=\frac{39}{2}$$

답 $\frac{39}{2}$

0542 전략 $f(n)=(n$의 소인수의 개수$)$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $90=2\cdot3^2\cdot5$이므로 $\quad f(90)=3$ $\quad$ $6=2\cdot3$이므로 소인수의 개수는 2이다.

ㄴ. [반례] $6<7$이지만 $f(6)=2$, $f(7)=1$이므로 $\quad f(6)>f(7)$

ㄷ. $m=c_1^{d_1}c_2^{d_2}\cdots c_i^{d_i}$, $n=e_1^{f_1}e_2^{f_2}\cdots e_k^{f_k}$ (c_s, e_t는 소수, $c_s\neq e_t$, d_s, f_t는 자연수, $1\le s\le i$, $1\le t\le k$)이라 하면 $\quad$ m, n이 서로소이므로 $c_s\neq e_t$

$$mn=(c_1^{d_1}c_2^{d_2}\cdots c_i^{d_i})(e_1^{f_1}e_2^{f_2}\cdots e_k^{f_k})$$

$$\therefore f(mn)=i+k=f(m)+f(n)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

참고 ㄷ. 서로소인 두 자연수 m, n은 같은 소인수를 갖지 않으므로

$$f(mn)=f(m)+f(n)$$

임을 유추할 수 있다.

0543 전략 항등함수와 일대일함수의 정의를 이용한다.

풀이 ㄱ. f, g가 모두 항등함수이면 $f(x)=x$, $g(x)=x$이므로

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=x$$

따라서 $g\circ f$는 항등함수이다.

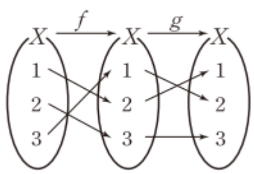
ㄴ. $g\circ f$가 항등함수이면 $g\circ f$는 일대일함수이다.

f가 일대일함수가 아니라고 가정하면 집합 X의 서로 다른 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$인 x_1, x_2가 존재한다. $\quad$ 귀류법을 이용한다.

이때 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$, 즉 $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$이므로 $g\circ f$가 일대일함수라는 사실에 모순이다.

따라서 f는 일대일함수이다.

ㄷ. [반례] 두 함수 f, g가 오른쪽 그림과 같으면 $g\circ f$는 일대일함수이지만 f, g는 모두 항등함수가 아니다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0544 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=4$를 기준으로 그 모양이 달라짐을 이용하여 $f(x)$를 식으로 나타낸다.

풀이 두 상수 k_1, k_2 $(0<k_2<k_1)$에 대하여

$$f(x)=\begin{cases} k_1 & (x>4) \\ k_2 & (x\le4) \end{cases}$$

라 하면 $\quad (f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases} k_1 & (g(x)>4) \\ k_2 & (g(x)\le4) \end{cases}$

그런데 모든 실수 x에 대하여 $0\le g(x)\le3$이므로

$$(f\circ g)(x)=k_2$$

따라서 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다.

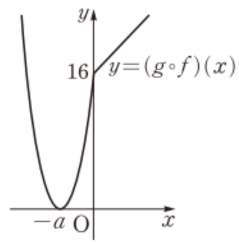
답 ②

0545 전략 합성함수 $(g\circ f)(x)$를 구하고 치역이 $\{y\,|\,y\ge0\}$이기 위한 조건을 찾는다.

풀이 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} x^2+2ax+16 & (x<0) \\ x+16 & (x\ge0) \end{cases}$

$a\le0$이면 함수 $y=x^2+2ax+16$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 양수이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge16\}$이 되어 조건을 만족시키지 않는다. $\quad \therefore a>0$

$a>0$이면 함수 $y=x^2+2ax+16$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 음수이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge0\}$이려면 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 한다. 즉



$$y=x^2+2ax+16$$
$$=(x+a)^2+16-a^2$$

에서 $\quad 16-a^2=0 \quad \therefore a=4\ (\because a>0)$

답 4

0546 전략 $f(x+y)=f(x)+f(y)$에 적당한 값을 대입한다.

풀이 ㄱ. $f(x+y)=f(x)+f(y)$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$$

ㄴ. $f(x+y)=f(x)+f(y)$에 $y=-x$를 대입하면

$$f(0)=f(x)+f(-x)$$
$$\therefore f(x)=-f(-x)\ (\because f(0)=0)$$

ㄷ. $(f\circ f)(x+y)=f(f(x+y))=f(f(x)+f(y))$
$$=f(f(x))+f(f(y))$$
$$=(f\circ f)(x)+(f\circ f)(y)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0547 전략 $f^1\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f^2\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f^3\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\cdots$과 $f^1\left(\frac{1}{2}\right)$, $f^2\left(\frac{1}{2}\right)$, $f^3\left(\frac{1}{2}\right)$, $\cdots$을 차례대로 구하여 규칙성을 찾는다.

풀이 $f^{n+1}(x)=f^n(f(x))=f(f^n(x))$이고

$f^1\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$이므로

$$f^2\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f(0)=1$$
$$f^3\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(f^2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)=-1$$
$$f^4\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(f^3\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f(-1)=1$$
$$f^5\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(f^4\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)=-1$$
$$\vdots$$
$$\therefore f^{2018}\left(-\frac{1}{2}\right)=1$$

같은 방법으로 하면 $f^{2019}\left(\frac{1}{2}\right)=-1$이므로

$$f^{2018}\left(-\frac{1}{2}\right)+f^{2019}\left(\frac{1}{2}\right)=1+(-1)=0$$

답 0

참고 $f^n\left(\frac{1}{2}\right)=f^n\left(-\frac{1}{2}\right)=\begin{cases} 0 & (n=1) \\ 1 & (n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots) \\ -1 & (n=3,\ 5,\ 7,\ \cdots) \end{cases}$

0548 전략 $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$가 x를 점 O를 중심으로 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 몇 도 회전시킨 것인지를 알아본다.

풀이 ㄱ. $f^{(3)}(x)$, $g^{(2)}(x)$는 모두 x를 점 O를 중심으로 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 $180°$만큼 회전시키는 것이므로 $(f^{(3)} \circ g^{(2)})(x)$는 x를 점 O를 중심으로 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 $360°$만큼 회전시키는 것이다.

$\therefore (f^{(3)} \circ g^{(2)})(x)=x$

ㄴ. $g^{(3)}(x)$는 x를 점 O를 중심으로 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 $270°$만큼 회전시키는 것이므로

$g^{(3)}(1)=4$

또 $f^{-1}(x)$는 x를 점 O를 중심으로 시곗바늘이 도는 방향으로 $60°$만큼 회전시키는 것이므로

$f^{-1}(2)=4$

$\therefore g^{(3)}(1)=f^{-1}(2)$

ㄷ. $h(x)$는 x를 점 O를 중심으로 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 $150°$만큼 회전시키는 것이므로 $h^{(6)}(x)$는 x를 점 O를 중심으로 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 $900°$만큼 회전시키는 것이다.

$\therefore h^{(6)}(x) \neq x$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0549 전략 f의 역함수 f^{-1}에 대하여 $f(x)=y$이면 $f^{-1}(y)=x$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $a<1$이므로 조건 (다)에 의하여

$f(a)>f(1)$

이때 조건 (나)에 의하여 $f(1)=1$이고, $b<1$이므로

$b<f(1)$ $\quad \therefore f(a)>b$

$\therefore f(f(a))<f(b)$, 즉 $(f \circ f)(a)<f(b)$

ㄴ. $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$라 하면 $x_1<x_2$일 때,

$y_1>y_2$ ...... ㉠

이때 $f^{-1}(y_1)=x_1$, $f^{-1}(y_2)=x_2$이므로

$f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $y_2<y_1$이면 $f^{-1}(y_2)>f^{-1}(y_1)$임을 알 수 있다.

따라서 $a<b$이므로 $f^{-1}(a)>f^{-1}(b)$이다.

ㄷ. ㄴ에서 $f^{-1}(a)>f^{-1}(b)$이므로

$f^{-1}(f^{-1}(a))<f^{-1}(f^{-1}(b))$,

즉 $(f^{-1} \circ f^{-1})(a)<(f^{-1} \circ f^{-1})(b)$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0550 전략 함수 g의 역함수가 존재하면 g는 일대일대응임을 이용한다.

풀이 $f(4)=5$이므로

$(g \circ f)(4)+(f \circ g)(4)=g(5)+f(g(4))$

함수 g의 역함수가 존재하므로 $g(4)$의 값은 1, 2, 4 중 하나이다.

$g(4)$	1		2		4	
$f(g(4))$	2		1		5	
$g(5)$	2	4	1	4	1	2

위의 표에서 $g(4)=4$, $g(5)=2$일 때 구하는 최댓값은 7이다. 답 ③

0551 전략 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$를 각각 $f(1)$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1+1)=f(1)+f(1)$

$\therefore f(2)=2f(1)$

㉠의 양변에 $x=1$, $y=2$를 대입하면

$f(1+2)=f(1)+f(2)=f(1)+2f(1)=3f(1)$

$\therefore f(3)=3f(1)$

㉠의 양변에 $x=1$, $y=3$을 대입하면

$f(1+3)=f(1)+f(3)=f(1)+3f(1)=4f(1)$

$\therefore f(4)=4f(1)$ ··· ❶

이때

$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=f(1)+2f(1)+3f(1)+4f(1)=10f(1)$$ ··· ❷

이므로 $10f(1)=80$

$\therefore f(1)=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$를 각각 $f(1)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$를 $f(1)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0552 전략 함수 f가 일대일함수이려면 $n(A) \le n(B)$이어야 함을 이용하여 $n(A)$, $n(B)$를 구해 본다.

풀이 $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$이므로

$n(A)+n(B)=n(A \cup B)+n(A \cap B)$

$=4+1$

$=5$

이때 함수 f가 일대일함수이므로 $n(A) \le n(B)$이어야 한다.

$n(A)>n(B)$인 경우 집합 A의 서로 다른 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$인 x_1, x_2가 존재한다.

$\therefore n(A)=1$, $n(B)=4$ 또는 $n(A)=2$, $n(B)=3$ ··· ❶

(i) $n(A)=1$, $n(B)=4$일 때,

$A \cap B=\{1\}$인 경우에 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개

$A=\{1\}$

$A \cap B$가 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$인 경우도 각각 4개씩 있으므로 함수 f의 개수는

$4 \cdot 4=16$ ··· ❷

(ii) $n(A)=2$, $n(B)=3$일 때,

$A \cap B=\{1\}$인 경우에 집합 A와 집합 B가 될 수 있는 것은

$A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 3, 4\}$

또는 $A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 2, 4\}$

또는 $A=\{1, 4\}$, $B=\{1, 2, 3\}$

의 3개이고, 위의 각각의 경우에 대하여 가능한 함수 f의 개수는 $3 \cdot 2=6$개씩 있다.

$A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 3, 4\}$일 때, $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 3, 4 중 하나이므로 3개이고, $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 2개이다.

$\therefore 3 \cdot 6=18$

$A \cap B$가 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$인 경우도 각각 18개씩 있으므로 함수 f의 개수는

$4 \cdot 18=72$ ··· ❸

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$16+72=88$ ··· ❹

답 88

채점 기준	비율
❶ 함수 f가 일대일함수가 되는 $n(A)$, $n(B)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $n(A)=1$, $n(B)=4$일 때, 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ $n(A)=2$, $n(B)=3$일 때, 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❹ 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0553 전략 함수 f의 치역의 원소가 2개일 때와 1개일 때로 나누어 순서쌍 (f, g)의 개수를 구한다.

풀이 (i) 함수 f의 치역의 원소가 2개일 때,

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3 중 하나이므로 2개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 1개

따라서 함수 f의 개수는

$2\cdot1=2$

$g(2)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1 중 하나이므로 2개

$g(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $g(2)$의 값의 1개

따라서 함수 f에 대하여 함수 g의 개수는

$2\cdot1=2$

따라서 순서쌍 (f, g)의 개수는

$2\cdot2=4$ ··· ❶

(ii) 함수 f의 치역의 원소가 1개일 때,

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3 중 하나이므로 2개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값의 1개

따라서 함수 f의 개수는

$2\cdot1=2$

$g(2)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1 중 하나이므로 2개

$g(3)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1 중 하나이므로 2개

따라서 함수 f에 대하여 함수 g의 개수는

$2\cdot2=4$

따라서 순서쌍 (f, g)의 개수는

$2\cdot4=8$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (f, g)의 개수는

$4+8=12$ ··· ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 함수 f의 치역의 원소가 2개일 때, 순서쌍 (f, g)의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 함수 f의 치역의 원소가 1개일 때, 순서쌍 (f, g)의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 순서쌍 (f, g)의 개수를 구할 수 있다.	20 %

참고 (ii)에서 $f(1)=2$, $f(2)=2$이고 $g(2)=0$이라 하면 $g(3)=1$이어도 $(g\circ f)(x)=0$이므로 $g\circ f$는 상수함수이다.

0554 전략 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 식을 이용하여 $y=g(4x+3)$의 식을 구한 후 $y=g(x)$의 식을 구한다.

풀이 $f(x)=2x+4$에서 $y=2x+4$라 하면

$2x=y-4 \quad \therefore x=\frac{1}{2}y-2$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{2}x-2$

즉 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-2$이므로

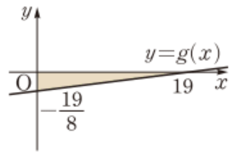
$g(4x+3)=\frac{1}{2}x-2$ ··· ❶

이때 $4x+3=t$로 놓으면 $x=\frac{t-3}{4}$이므로

$g(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t-3}{4}-2=\frac{1}{8}t-\frac{19}{8}$

$\therefore g(x)=\frac{1}{8}x-\frac{19}{8}$ ··· ❷

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot19\cdot\frac{19}{8}=\frac{361}{16}$ ··· ❸

답 $\frac{361}{16}$

채점 기준	비율
❶ $g(4x+3)$을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

0555 전략 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

풀이 조건 (가)에서

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<2) \\ -2x+8 & (2\le x\le 4) \end{cases}$$

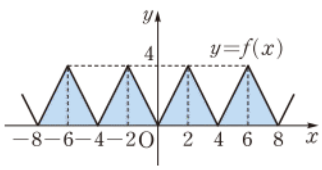
조건 (나)에서 $f(1-x)=f(3+x)$의 양변에 x 대신 $x-1$을 대입하면

$f(2-x)=f(2+x)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

또 조건 (다)의 $f(x)=f(-x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. ··· ❶

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❷



따라서 $-8\le x\le8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$4\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=32$ ··· ❸

답 32

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 추정할 수 있다.	30 %
❷ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

0556 전략 $x<-1$, $-1\le x<2$, $x\ge2$일 때로 나누어 주어진 함수의 그래프를 그린다.

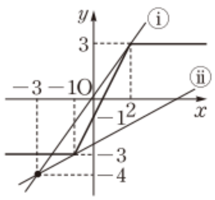
풀이 $y=|x+1|-|x-2|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값이 -1, 2이므로

(i) $x<-1$일 때, $y=-(x+1)+x-2=-3$

(ii) $-1\le x<2$일 때, $y=x+1+x-2=2x-1$

(iii) $x\ge2$일 때, $y=x+1-(x-2)=3$

이상에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❶



한편 직선 $mx-y+3m-4=0$에서

$y=m(x+3)-4$ ······ ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-3,\ -4)$를 지난다. ··· ❷

ⓘ 직선 ㉠이 점 $(2,\ 3)$을 지날 때,

$3=5m-4 \qquad \therefore m=\dfrac{7}{5}$

ⓘⓘ 직선 ㉠이 점 $(-1,\ -3)$을 지날 때,

$-3=2m-4 \qquad \therefore m=\dfrac{1}{2}$

ⓘ, ⓘⓘ에서 직선이 $y=|x+1|-|x-2|$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나려면

$\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{7}{5}$ ··· ❸

답 $\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{7}{5}$

채점 기준	비율
❶ $y=\|x+1\|-\|x-2\|$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ 직선 $mx-y+3m-4=0$이 점 $(-3,\ -4)$를 지남을 알 수 있다.	20 %
❸ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

16 유리식과 유리함수

0557 답 ㄴ, ㄷ

0558 답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

0559 $\dfrac{b}{2a^2xy}$, $\dfrac{1}{3abx^2}$의 분모의 최소공배수는 $6a^2bx^2y$이므로 두 식을 통분하면 $\dfrac{3b^2x}{6a^2bx^2y}$, $\dfrac{2ay}{6a^2bx^2y}$ 답 $\dfrac{3b^2x}{6a^2bx^2y}$, $\dfrac{2ay}{6a^2bx^2y}$

0560 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, $x^2-4=(x+2)(x-2)$이므로 두 식을 통분하면

$$\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x+2)},\ \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)(x+2)}$$

답 $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x+2)}$, $\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)(x+2)}$

0561 답 $\dfrac{3z}{4y}$

0562 $\dfrac{x^3-2x^2-8x}{x^2-4x}=\dfrac{x(x+2)(x-4)}{x(x-4)}=x+2$ 답 $x+2$

0563
$$\begin{aligned}\frac{x-3}{x-1}+\frac{5x+3}{x^2+2x-3}&=\frac{x-3}{x-1}+\frac{5x+3}{(x+3)(x-1)}\\&=\frac{(x+3)(x-3)+5x+3}{(x+3)(x-1)}\\&=\frac{x^2+5x-6}{(x+3)(x-1)}\\&=\frac{(x+6)(x-1)}{(x+3)(x-1)}\\&=\frac{x+6}{x+3}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{x+6}{x+3}$

0564
$$\begin{aligned}&\frac{x+3}{x^2+x-2}\times\frac{3x^2+2x-8}{2x^2+x-1}\div\frac{3x^2+5x-12}{x^2-1}\\&=\frac{x+3}{(x+2)(x-1)}\times\frac{(x+2)(3x-4)}{(x+1)(2x-1)}\times\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(3x-4)}\\&=\frac{1}{2x-1}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{1}{2x-1}$

0565 $\dfrac{x+2}{x-3}-\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x-3+5}{x-3}-\dfrac{x-2+1}{x-2}$

분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같으면 분자의 차수가 분모의 차수보다 작아지도록 변형한다.

$$\begin{aligned}&=1+\frac{5}{x-3}-\left(1+\frac{1}{x-2}\right)\\&=\frac{5}{x-3}-\frac{1}{x-2}=\frac{5(x-2)-(x-3)}{(x-3)(x-2)}\\&=\frac{4x-7}{(x-3)(x-2)}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{4x-7}{(x-3)(x-2)}$

0566 $x^2+4x+7=x(x+1)+3(x+1)+4$
$=(x+1)(x+3)+4$
$x^2+2x-2=x(x-1)+3(x-1)+1=(x-1)(x+3)+1$

$$\therefore \frac{x^2+4x+7}{x+1}-\frac{x^2+2x-2}{x-1}$$
$$=\frac{(x+1)(x+3)+4}{x+1}-\frac{(x-1)(x+3)+1}{x-1}$$
$$=x+3+\frac{4}{x+1}-(x+3)-\frac{1}{x-1}$$
$$=\frac{4(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{3x-5}{(x+1)(x-1)}$$

답 $\dfrac{3x-5}{(x+1)(x-1)}$

0567 $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$
$$=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$$

답 $\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$

0568 $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$$

$\frac{2}{(x+3)-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$

$$=\frac{x+3-x}{x(x+3)}=\frac{3}{x(x+3)}$$

답 $\dfrac{3}{x(x+3)}$

0569 $\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\frac{x-1}{x}}=\dfrac{x}{x-1}$

답 $\dfrac{x}{x-1}$

0570 $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\dfrac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}=x-1$

분자, 분모에 각각 x를 곱한다.

답 $x-1$

0571 $x:y=2:3$이므로

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$

이때 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x=2k,\ y=3k$

$$\therefore \frac{2x-y}{x+y}=\frac{4k-3k}{2k+3k}=\frac{k}{5k}=\frac{1}{5}$$

답 $\dfrac{1}{5}$

참고 비례식에서는 비의 값이 일정하므로 일정한 비의 값을 비례상수 k로 놓고, 각 문자를 k에 대한 식으로 표현한 후 주어진 식에 대입하여 식의 값을 계산한다.

0572 $a:b=3:4$이므로 $\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}$

이때 $\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}=k\ (k\neq0)$로 놓으면 $a=3k,\ b=4k$

$$\therefore \frac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}=\frac{9k^2-12k^2+16k^2}{9k^2+16k^2}=\frac{13k^2}{25k^2}=\frac{13}{25}$$

답 $\dfrac{13}{25}$

0573 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x=2k,\ y=4k,\ z=5k$

$$\therefore \frac{(x-2y+3z)^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{(2k-8k+15k)^2}{4k^2+16k^2+25k^2}$$
$$=\frac{81k^2}{45k^2}=\frac{9}{5}$$

답 $\dfrac{9}{5}$

0574 답 ㄱ, ㄹ

0575 답 ㄴ, ㄷ, ㅁ

0576 $2x+3=0$에서 $x=-\dfrac{3}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\neq-\dfrac{3}{2}\text{인 실수}\right\}$

답 $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\dfrac{3}{2}\text{인 실수}\right\}$

0577 $x-5=0$에서 $x=5$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq5\text{인 실수}\}$

답 $\{x\,|\,x\neq5\text{인 실수}\}$

0578 $x^2-4=0$에서 $x=\pm2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq\pm2\text{인 실수}\}$

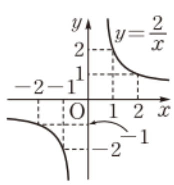
답 $\{x\,|\,x\neq\pm2\text{인 실수}\}$

0579 $x^2+1>0$이므로 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

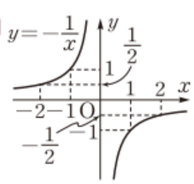
주어진 함수의 분모를 0으로 만드는 x의 값이 존재하지 않는다.

답 실수 전체의 집합

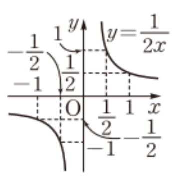
0580 답



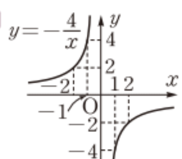
0581 답



0582 답



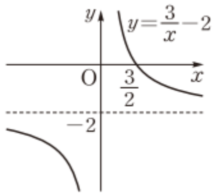
0583 답



0584 답 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$

0585 답 $y=-\dfrac{2}{x+2}-1$

0586 $y=\dfrac{3}{x}-2$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

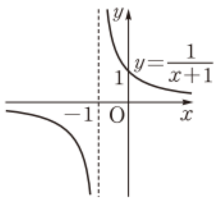


정의역은 $\{x\,|\,x\neq 0$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\neq -2$인 실수$\}$

답 풀이 참조

0587 $y=\dfrac{1}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

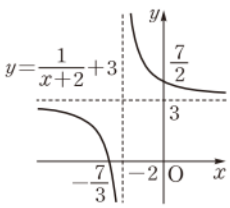


정의역은 $\{x\,|\,x\neq -1$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\neq 0$인 실수$\}$

답 풀이 참조

0588 $y=\dfrac{1}{x+2}+3$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

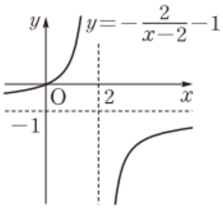


정의역은 $\{x\,|\,x\neq -2$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\neq 3$인 실수$\}$

답 풀이 참조

0589 $y=-\dfrac{2}{x-2}-1$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



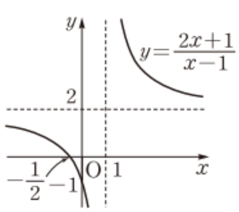
정의역은 $\{x\,|\,x\neq 2$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\neq -1$인 실수$\}$

답 풀이 참조

0590 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

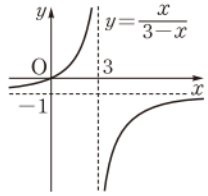
따라서 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은



$x=1,\ y=2$ 답 풀이 참조

0591 $y=\dfrac{x}{3-x}=\dfrac{-x}{x-3}=\dfrac{-(x-3)-3}{x-3}=-\dfrac{3}{x-3}-1$

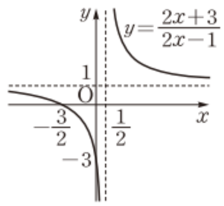
따라서 $y=\dfrac{x}{3-x}$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은



$x=3,\ y=-1$ 답 풀이 참조

0592 $y=\dfrac{2x+3}{2x-1}=\dfrac{(2x-1)+4}{2x-1}=\dfrac{2}{x-\frac{1}{2}}+1$

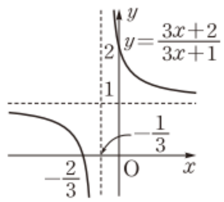
따라서 $y=\dfrac{2x+3}{2x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은



$x=\dfrac{1}{2},\ y=1$ 답 풀이 참조

0593 $y=\dfrac{3x+2}{3x+1}=\dfrac{(3x+1)+1}{3x+1}=\dfrac{1}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}+1$

따라서 $y=\dfrac{3x+2}{3x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은



$x=-\dfrac{1}{3},\ y=1$ 답 풀이 참조

유형 01 유리식의 덧셈과 뺄셈

본책 90쪽

유리식의 덧셈과 뺄셈은 분모를 통분하여 분자끼리 계산한다.

0594 $\dfrac{x-1}{x^2-x+1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{x^3+1}$ — $(x^3+1)=(x+1)(x^2-x+1)$

$=\dfrac{(x+1)(x-1)-(x^2-x+1)+3}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{x^2-1-(x^2-x+1)+3}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{1}{x^2-x+1}$ 답 $\dfrac{1}{x^2-x+1}$

0595 $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{-ab+ca-bc+ab-ca+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=0$ 답 ③

0596 $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$

$=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)$ — 간단한 식이 되도록 적당히 두 개씩 묶어서 계산한다.

$=\frac{3}{(x-2)(x+1)}+\frac{3}{x(x+3)}$

$=\frac{3(x^2+3x)+3(x^2-x-2)}{(x-2)(x+1)x(x+3)}$

$=\frac{6(x^2+x-1)}{x(x+3)(x+1)(x-2)}$

답 $\frac{6(x^2+x-1)}{x(x+3)(x+1)(x-2)}$

유형 02 유리식의 곱셈과 나눗셈 본책 90쪽

(i) 각 유리식의 분자, 분모를 인수분해한다.
(ii) 분자와 분모에 공통인 인수가 있을 때에는 분자, 분모를 약분하여 간단히 한다.
(iii) 유리식의 곱셈, 나눗셈을 한다.

0597 $\frac{a^2-6a}{a^2+a-2}\times\frac{a^2+5a+6}{a+1}\div\frac{a^2-3a-18}{a-1}$

$=\frac{a(a-6)}{(a+2)(a-1)}\times\frac{(a+3)(a+2)}{a+1}\times\frac{a-1}{(a+3)(a-6)}$

$=\frac{a}{a+1}$ 답 $\frac{a}{a+1}$

0598 $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{2(a^2+b^2)}{(a-b)(a+b)}$

$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{4ab}{(a-b)(a+b)}$

$\therefore \left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right)\div\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)$

$=\frac{2(a^2+b^2)}{(a-b)(a+b)}\times\frac{(a-b)(a+b)}{4ab}$

$=\frac{a^2+b^2}{2ab}$

$=\frac{5}{6}$ 답 $\frac{5}{6}$

0599 $(x^2\triangle x)\div\{x^2\triangle(-5x+6)\}$

$=\frac{x^2-x}{x^2+x}\div\frac{x^2+5x-6}{x^2-5x+6}$

$=\frac{x(x-1)}{x(x+1)}\times\frac{(x-2)(x-3)}{(x+6)(x-1)}$

$=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+6)}$

답 $\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+6)}$

유형 03 유리식과 항등식 본책 90쪽

주어진 유리식이 항등식일 때
➡ 적절한 식을 양변에 곱하여 정리한 후 동류항의 계수를 비교한다.

0600 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$이므로 주어진 식의 양변에 x^3+1을 곱하여 정리하면

$x+7=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$

$\therefore x+7=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$-a+b+c=1$ $\therefore a-b-c=-1$ 답 ③

SSEN 특강

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식
$\Longleftrightarrow a=b=c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식
$\Longleftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$

③ $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식
$\Longleftrightarrow a=b=c=0$

④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 x, y에 대한 항등식
$\Longleftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$

0601 주어진 식의 양변에 $x(x+1)^2$을 곱하여 정리하면

$1=a(x+1)^2+bx(x+1)+cx$

$\therefore 1=(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ 2a+b+c=0,\ a=1$

$a+b=0$에 $a=1$을 대입하면

$1+b=0$ $\therefore b=-1$

$2a+b+c=0$에 $a=1$, $b=-1$을 대입하면

$2-1+c=0$ $\therefore c=-1$

$\therefore abc=1$ 답 1

0602 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^4+1}$

$=\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^4+1}$

$=\frac{4}{x^4-1}-\frac{4}{x^4+1}=\frac{8}{x^8-1}$ ··· ❶

따라서 $\frac{8}{x^8-1}=\frac{a}{x^b-1}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=8,\ b=8$ ··· ❷

$\therefore ab=64$ ··· ❸

답 64

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0603 주어진 식의 양변에 $(x-1)^{10}$을 곱하여 정리하면

$$x^9+1=a_1(x-1)^9+a_2(x-1)^8+\cdots+a_9(x-1)$$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$$2^9+1=a_1+a_2+\cdots+a_9$$

$$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_9=513$$

답 ②

유형 04 (분자의 차수)≥(분모의 차수)인 유리식 본책 91쪽

분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같은 유리식은 다항식과 분수식의 합으로 변형한다.

0604 $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x+3}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{2x-3}{x-2}$

$$=\frac{(x-1)+1}{x-1}+\frac{2(x+1)+1}{x+1}-\frac{(x+2)+1}{x+2}-\frac{2(x-2)+1}{x-2}$$

$$=\left(1+\frac{1}{x-1}\right)+\left(2+\frac{1}{x+1}\right)-\left(1+\frac{1}{x+2}\right)-\left(2+\frac{1}{x-2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-2}\right)$$

$$=\frac{3}{(x-1)(x+2)}+\frac{-3}{(x+1)(x-2)}$$

$$=\frac{3(x^2-x-2)-3(x^2+x-2)}{(x-1)(x+2)(x+1)(x-2)}$$

$$=\frac{\boxed{-6x}}{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}$$

답 ①

0605 $\dfrac{x^3}{x^2+x+1}+\dfrac{x^3}{x^2-x+1}-2x$

$$=\frac{(x^3-1)+1}{x^2+x+1}+\frac{(x^3+1)-1}{x^2-x+1}-2x$$

$$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)+1}{x^2+x+1}+\frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x^2-x+1}-2x$$

$$=\left(x-1+\frac{1}{x^2+x+1}\right)+\left(x+1-\frac{1}{x^2-x+1}\right)-2x$$

$$=\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{x^2-x+1-(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{-2x}{x^4+x^2+1}$$

답 $\dfrac{-2x}{x^4+x^2+1}$

유형 05 부분분수로의 변형 본책 91쪽

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

0606 $\dfrac{2}{x(x+2)}+\dfrac{3}{(x+2)(x+5)}+\dfrac{4}{(x+5)(x+9)}$

$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}\right)+\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+9}\right)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+9}=\frac{9}{x(x+9)}$$

따라서 $\dfrac{9}{x(x+9)}=\dfrac{a}{x(x+b)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=9$, $b=9$

$\therefore\ a+b=18$

답 18

0607 $f(n)=\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}=\dfrac{1}{x+n}-\dfrac{1}{x+n+1}$

이므로

$$f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(10)$$

$$=\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)+\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+10}-\frac{1}{x+11}\right)$$

$$=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+11}$$

$$=\frac{8}{(x+3)(x+11)}$$

따라서 $\dfrac{8}{(x+3)(x+11)}=\dfrac{c}{(x+a)(x+b)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=3$, $b=11$, $c=8$ 또는 $a=11$, $b=3$, $c=8$

$\therefore\ a+b-c=6$

답 6

0608 $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{48}+\cdots+\dfrac{1}{440}$

$$=\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{20\cdot22}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{22}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{22}\right)=\frac{5}{22}$$

답 ③

0609 $f(x)=4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$이므로

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$ ··· ❶

$$\therefore\ \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(49)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{99}\right)=\frac{49}{99}$$ ··· ❷

답 $\dfrac{49}{99}$

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{1}{f(x)}$을 부분분수로 변형할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

유형 06~07 번분수식

본책 92쪽

(1) 번분수식: 분자 또는 분모에 또 다른 분수식을 포함한 유리식

(2) 번분수식의 계산

① 하나하나 차례로 통분하여 계산한다.

② 분자, 분모에 적당한 식을 곱하여 간단히 한다.

0610 $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}}}$

$=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}}$

$=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{-1}{x-1}}}$

$=1-\dfrac{1}{1+x-1}$

$=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$ 답 $\dfrac{x-1}{x}$

0611 $f(x)=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{x+2}{1+x}}$

$=1+\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{2x+3}{x+2}$

따라서 $\dfrac{2k+3}{k+2}=\dfrac{11}{6}$에서 $12k+18=11k+22$

$\therefore k=4$ 답 ④

0612 $\dfrac{\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+5}}{\dfrac{1}{n+5}-\dfrac{1}{n+8}}=\dfrac{\dfrac{3}{(n+2)(n+5)}}{\dfrac{3}{(n+5)(n+8)}}=\dfrac{n+8}{n+2}$

$\dfrac{n+8}{n+2}=k$ (k는 자연수)로 놓으면

$n+8=k(n+2)$, $(k-1)n=-2k+8$ ← $k=1$이면 $0\cdot n=6$이므로 모순이다. $\therefore k\neq1$

$\therefore n=\dfrac{-2k+8}{k-1}=\dfrac{-2(k-1)+6}{k-1}=-2+\dfrac{6}{k-1}$

n이 정수이려면 $k-1$이 6의 양의 약수이어야 하므로

$k-1=1,\ 2,\ 3,\ 6$

$\therefore k=2,\ 3,\ 4,\ 7$

따라서 정수 n은 $4,\ 1,\ 0,\ -1$의 4개이다. 답 4

0613 $a_1=\dfrac{1}{4}$, $a_2=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$, $a_3=\dfrac{1}{1-\dfrac{4}{3}}=-3$,

$a_4=\dfrac{1}{1-(-3)}=\dfrac{1}{4}$, $a_5=\dfrac{4}{3}$, $\cdots$

따라서 a_n은 $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{4}{3}$, -3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $2018=3\cdot672+2$, $2019=3\cdot673$이므로

$a_{2018}=\dfrac{4}{3}$, $a_{2019}=-3$

$\therefore a_{2018}a_{2019}=-4$ 답 -4

참고 $a_2=\dfrac{1}{1-a_1}$, $a_3=\dfrac{1}{1-a_2}$, $a_4=\dfrac{1}{1-a_3}$, $\cdots$이므로

$a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$ (단, n은 자연수)

0614 $\dfrac{30}{11}=2+\dfrac{8}{11}=2+\dfrac{1}{\dfrac{11}{8}}=2+\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{8}}$

$=2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{8}{3}}}=2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{2}{3}}}$

$=2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}}}}=2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}$

따라서 $a=2,\ b=1,\ c=2,\ d=1,\ e=2$이므로

$a+b+c+d+e=8$ 답 8

0615 $\dfrac{43}{19}=2+\dfrac{5}{19}=2+\dfrac{1}{\dfrac{19}{5}}=2+\dfrac{1}{3+\dfrac{4}{5}}$

$=2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{\dfrac{5}{4}}}=2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}}}$

따라서 $a=2,\ b=3,\ c=1,\ d=4$이므로

$abcd=24$ 답 24

유형 08 유리식의 값; $x\pm\dfrac{1}{x}$의 값 이용

본책 92쪽

(i) 주어진 식을 변형하여 $x+\dfrac{1}{x}$, $x-\dfrac{1}{x}$의 값을 구한다.

(ii) 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

➡ ① $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

② $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

③ $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

0616 $x^2-2x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-2-\dfrac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x-\dfrac{1}{x}=2$ ← $x^2-2x-1=0$의 좌변에 $x=0$을 대입하면 $0^2-2\cdot0-1=-1\neq0$ 이므로 $x\neq0$

$\therefore 3x^2+2x-1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}$

$=3\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-1$

$=3\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2\right\}+2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-1$

$=3\cdot(2^2+2)+2\cdot2-1=21$ 답 21

0617 $ab \neq 0$이므로 $a^2-3ab+b^2=0$의 양변을 ab로 나누면

$$\frac{a}{b}-3+\frac{b}{a}=0 \qquad \therefore \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}&=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\\&=3^3-3\cdot3\\&=18\end{aligned}$$

답 ③

0618 $-1<x<0$에서 $x \neq 0$이므로 $x^2+3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$$x+3+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=-3 \quad \cdots ❶$$

한편 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$이므로

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(-3)^2-4=5$$

이때 $-1<x<0$에서 $x<0$, $x^2-1<0$이므로

$$x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}>0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=\sqrt{5} \quad \cdots ❷$$

$$\begin{aligned}\therefore x^4-\frac{1}{x^4}&=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\\&=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)\\&=\{(-3)^2-2\}\cdot(-3)\cdot\sqrt{5}\\&=-21\sqrt{5} \quad \cdots ❸\end{aligned}$$

답 $-21\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $x-\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $x^4-\frac{1}{x^4}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 09 유리식의 값; $a+b+c=0$ 이용

본책 93쪽

$a+b+c=0$이 주어질 때
① 주어진 식에 $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$를 대입하여 식을 간단히 한다.
② $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에 $a+b+c=0$을 대입하면 $a^3+b^3+c^3=3abc$임을 이용한다.

0619 $a+b+c=0$에서 $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$이므로

$$\begin{aligned}&a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\\&=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\\&=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\\&=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}\\&=-3\end{aligned}$$

답 -3

다른 풀이 $a+b+c=0$이므로

$$\begin{aligned}&a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\\&=a\cdot\frac{b+c}{bc}+b\cdot\frac{c+a}{ca}+c\cdot\frac{a+b}{ab}\\&=a\cdot\frac{-a}{bc}+b\cdot\frac{-b}{ca}+c\cdot\frac{-c}{ab}\\&=-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\end{aligned}$$

이때 인수분해 공식

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

에서 $a+b+c=0$이면

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=-\frac{3abc}{abc}=-3$$

0620 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$에서

$$\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$$

0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여 $abc \neq 0$

$$\therefore ab+bc+ca=0$$

$$\begin{aligned}\therefore &\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}\\&=\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&=0\end{aligned}$$

답 ③

0621 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$
이므로

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=0$$

$$\frac{a+b+c}{abc}=0$$

$$\therefore a+b+c=0 \quad \cdots ❶$$

따라서 인수분해 공식

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

에서

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3 \quad \cdots ❸$$

답 3

채점 기준	비율
❶ $a+b+c=0$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $a^3+b^3+c^3=3abc$임을 알 수 있다.	40 %
❸ $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 10 유리식의 활용

본책 93쪽

(1) $(\text{농도})=\dfrac{(\text{용질의 양})}{(\text{용액의 양})}\times100\,(\%)$

$=\dfrac{(\text{용질의 양})}{(\text{용매의 양})+(\text{용질의 양})}\times100\,(\%)$

(2) 처음 양이 a일 때

① $x\,\%$ 증가 ➡ $a\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$ ② $x\,\%$ 감소 ➡ $a\left(1-\dfrac{x}{100}\right)$

0622 지난달 유색 생물의 수를 X, 무색 생물의 수를 Y라 하면 지난달 이 호수의 생물학적 지표가 20 %이므로

$$\frac{Y}{X+Y}\times100=20,\quad 5Y=X+Y$$

$\therefore X=4Y$ …… ㉠

이번 달 이 호수의 유색 생물의 수는 지난달의 2배이므로 $2X$이고, 무색 생물의 수는 지난달의 4배이므로 $4Y$이다.

따라서 이번 달 이 호수의 생물학적 지표는

$$\frac{4Y}{2X+4Y}\times100=\frac{4Y}{2\cdot4Y+4Y}\times100\ (\because ㉠)$$

$$=\frac{4Y}{12Y}\times100=\frac{100}{3}$$

$$=33.333\cdots(\%)$$

즉 이번 달 이 호수의 생물학적 지표는 약 33 %이다.

답 33 %

0623 오렌지 원액 전체의 양은

$(\text{용질의 양})=\dfrac{(\text{농도})}{100}\times(\text{용액의 양})$

$$\frac{a}{100}\times100+\frac{b}{100}\times x=a+\frac{bx}{100}$$

이고 오렌지 주스 전체의 양은 $(100+x)$ L이므로 새로운 오렌지 주스의 농도는

$$c=\frac{a+\dfrac{bx}{100}}{100+x}\times100=\frac{100a+bx}{100+x}$$

$$c(100+x)=100a+bx,\quad (b-c)x=100(c-a)$$

$$\therefore x=\frac{100(c-a)}{b-c}$$

답 ④

0624 휴대폰 단말기의 처음 가격을 a원이라 하면 $p\,\%$ 인상한 가격은

$$a+a\times\frac{p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)(\text{원})$$

$a\left(1+\dfrac{p}{100}\right)=b$라 하면 b원을 $q\,\%$ 인상한 가격은

$$b+b\times\frac{q}{100}=b\left(1+\frac{q}{100}\right)=a\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)(\text{원})$$

이 가격이 처음 가격의 $x\,\%$를 인상한 것과 같으므로

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)=a\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)$$

$$1+\frac{x}{100}=\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)$$

$$=1+\frac{p}{100}+\frac{q}{100}+\frac{pq}{10000}$$

$$\therefore x=p+q+\frac{pq}{100}$$

답 ⑤

유형 11 유리식의 값; 비례식이 주어질 때

본책 94쪽

$a:b:c=d:e:f \Longleftrightarrow \dfrac{a}{d}=\dfrac{b}{e}=\dfrac{c}{f}$

$\Longleftrightarrow a=dk,\ b=ek,\ c=fk\ (k\neq0)$

0625 $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x+y=3k,\ y+z=4k,\ z+x=5k$ …… ㉠

세 식을 변끼리 더하면 $2(x+y+z)=12k$

$\therefore x+y+z=6k$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=2k,\ y=k,\ z=3k$

$$\therefore \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}=\frac{6k^3}{8k^3+k^3+27k^3}$$

$$=\frac{6k^3}{36k^3}=\frac{1}{6}$$

답 $\dfrac{1}{6}$

0626 $x=3k,\ y=4k,\ z=5k\ (k\neq0)$로 놓으면

$$\frac{-2x+3y-z}{x-y+z}=\frac{-6k+12k-5k}{3k-4k+5k}$$

$$=\frac{k}{4k}=\frac{1}{4}$$

답 ②

0627 $2x=3y$이므로 $x=\dfrac{3}{2}y$

$5z=4y$이므로 $z=\dfrac{4}{5}y$

$\therefore x:y:z=\dfrac{3}{2}y:y:\dfrac{4}{5}y=15:10:8$ ··· ❶

$x=15k,\ y=10k,\ z=8k\ (k\neq0)$로 놓으면

$$\frac{3x-y-3z}{x+y+z}=\frac{45k-10k-24k}{15k+10k+8k}$$

$=\dfrac{11k}{33k}=\dfrac{1}{3}$ ··· ❷

답 $\dfrac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $x:y:z$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\dfrac{3x-y-3z}{x+y+z}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 $x=\dfrac{3}{2}y,\ z=\dfrac{4}{5}y$이므로

$$\frac{3x-y-3z}{x+y+z}=\frac{\dfrac{9}{2}y-y-\dfrac{12}{5}y}{\dfrac{3}{2}y+y+\dfrac{4}{5}y}=\frac{\dfrac{11}{10}y}{\dfrac{33}{10}y}=\frac{1}{3}$$

유형 12 유리식의 값; 방정식이 주어질 때

본책 94쪽

주어진 방정식을 이용하여 각 문자를 한 문자에 대한 식으로 나타낸 후 구하는 유리식에 대입한다.

0628 $\begin{cases} x+y-2z=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 3x-3y+2z=0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $4x-2y=0 \quad \therefore y=2x$

㉠에 $y=2x$를 대입하면

$$x+2x-2z=0, \quad 2z=3x \quad \therefore z=\frac{3}{2}x$$

$$\therefore \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{2x^2+3x^2+\frac{3}{2}x^2}{x^2+4x^2+\frac{9}{4}x^2}=\frac{\frac{13}{2}x^2}{\frac{29}{4}x^2}=\frac{26}{29}$$

답 $\frac{26}{29}$

0629 $x+\frac{1}{2y}=1$에서 $x=1-\frac{1}{2y}=\frac{2y-1}{2y}$

$2y+\frac{4}{z}=1$에서 $\frac{4}{z}=1-2y \quad \therefore z=\frac{4}{1-2y}$

$$\therefore \frac{4}{x}+z=\frac{8y}{2y-1}+\frac{4}{1-2y}$$
$$=\frac{8y-4}{2y-1}=\frac{4(2y-1)}{2y-1}=4$$

답 ④

0630 $\begin{cases} 2x+y-3z=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x-3y+z=0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠−㉡×2를 하면 $7y-5z=0 \quad \therefore z=\frac{7}{5}y$ ⋯ ❶

㉡에 $z=\frac{7}{5}y$를 대입하면

$x-3y+\frac{7}{5}y=0 \quad \therefore x=\frac{8}{5}y$ ⋯ ❷

$\therefore \frac{x-y}{x+z}=\frac{\frac{8}{5}y-y}{\frac{8}{5}y+\frac{7}{5}y}=\frac{\frac{3}{5}y}{\frac{15}{5}y}=\frac{1}{5}$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{5}$

채점 기준	비율
❶ z를 y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ x를 y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\frac{x-y}{x+z}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 13 비례식을 만족시키는 상수 구하기

본책 94쪽

주어진 비례식을 $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}=l\,(l\neq0)$과 같이 한 문자로 놓고 $a=dl$, $b=el$, $c=fl$임을 이용한다.

0631 $\frac{3a-b}{4}=\frac{2b-c}{3}=\frac{4c+3a}{2}=l\,(l\neq0)$로 놓으면

$3a-b=4l$ ⋯⋯ ㉠

$2b-c=3l$ ⋯⋯ ㉡

$4c+3a=2l$ ⋯⋯ ㉢

㉠+2×㉡+㉢을 하면

$(3a-b)+2(2b-c)+(4c+3a)=4l+2\cdot3l+2l$

$\therefore 6a+3b+2c=12l$

이때 $\frac{6a+3b+2c}{k}=l$에서 $\frac{12l}{k}=l$

$\therefore k=12$

답 ③

0632 $\frac{x+2y}{3}=\frac{3y-2z}{4}=\frac{z+x}{5}=l\,(l\neq0)$로 놓으면

$x+2y=3l$ ⋯⋯ ㉠

$3y-2z=4l$ ⋯⋯ ㉡

$z+x=5l$ ⋯⋯ ㉢

3×㉠−2×㉡+㉢을 하면

$3(x+2y)-2(3y-2z)+(z+x)=3\cdot3l-2\cdot4l+5l$

$\therefore 4x+5z=6l$

이때 $\frac{4x+5z}{k}=l$에서 $\frac{6l}{k}=l$

$\therefore k=6$

답 6

0633 $2b+3c=ak$ ⋯⋯ ㉠

$3c+a=2bk$ ⋯⋯ ㉡

$a+2b=3ck$ ⋯⋯ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(a+2b+3c)=(a+2b+3c)k$

(i) $a+2b+3c\neq0$일 때,

$k=2$

(ii) $a+2b+3c=0$일 때, $2b+3c=-a$이므로 ㉠에서

$-a=ak$

$\therefore k=-1 \ (\because a\neq0)$

(i), (ii)에서 구하는 모든 k의 값의 합은

$2+(-1)=1$

답 1

유형 14 비례식의 활용

본책 95쪽

$x:y=a:b$이면

➡ $x=ak$, $y=bk\,(k\neq0)$로 놓는다.

0634 A, B 두 학교의 합격자 수를 각각 $3k$, $4k\,(k\neq0)$로 놓고, 불합격자 수를 각각 $2l$, $5l\,(l\neq0)$로 놓으면 지원자 수는 각각 $3k+2l$, $4k+5l$이다.

이때 $(3k+2l):(4k+5l)=1:2$이므로

$2(3k+2l)=4k+5l, \quad 6k+4l=4k+5l$

$\therefore l=2k$

따라서 A학교의 지원자 수는 $3k+2l=3k+4k=7k$, 합격자 수는 $3k$이므로 A학교의 합격률은

$\frac{3k}{7k}=\frac{3}{7}$

답 ③

0635 넓이가 A, B, C, D인 정사각형의 한 변의 길이를 각각 a, b, c, d라 하면

$c=2d$, $b=c+d$, $a=b+c$

$\therefore a=(c+d)+2d=2d+d+2d=5d$

따라서 $a:d=5:1$이므로

$A:D=25:1$

답 ④

SSEN 특강

닮은 도형의 성질

(1) 닮은 두 평면도형의 닮음비가 $m:n$일 때
 ① 둘레의 길이의 비 ➡ $m:n$
 ② 넓이의 비 ➡ $m^2:n^2$

(2) 닮은 두 입체도형의 닮음비가 $m:n$일 때
 ① 겉넓이의 비 ➡ $m^2:n^2$
 ② 부피의 비 ➡ $m^3:n^3$

0636 1학년의 남학생과 여학생 수를 각각 k, $2k\,(k\neq0)$로 놓고, 2학년의 남학생과 여학생 수를 각각 l, $5l\,(l\neq0)$로 놓으면 방송반 전체의 남학생과 여학생 수는 각각 $k+l$, $2k+5l$이다.
이때 $(k+l):(2k+5l)=4:11$이므로

$$11(k+l)=4(2k+5l),\qquad 11k+11l=8k+20l$$

$$9l=3k\qquad \therefore\ l=\frac{k}{3}$$

따라서 방송반 전체의 학생 수는

$$(k+l)+(2k+5l)=3k+6l=3k+6\cdot\frac{k}{3}=5k$$

이고 1학년 학생 수는 $\underbrace{3k}_{k+2k=3k}$이므로 구하는 비율은

$$\frac{3k}{5k}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

유형 15 유리함수의 정의역과 치역

본책 95쪽

주어진 조건에 맞는 유리함수의 그래프를 그린 후 정의역 또는 치역을 구한다. 이때 정의역은 분모가 0이 되는 x의 값을 포함하지 않는다.

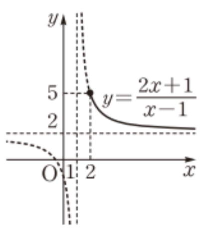
0637 $y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}$

$$=\frac{3}{x-1}+2$$

이므로 함수 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $2<y\le5$에서 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은

$$\{x\,|\,x\ge2\}$$

답 ④



0638 $y=\frac{bx+4}{a-x}=\frac{-b(a-x)+ab+4}{a-x}$

$$=\frac{ab+4}{a-x}-b$$

이므로
 정의역은 $\{x\,|\,x\neq a$인 실수$\}$,
 치역은 $\{y\,|\,y\neq-b$인 실수$\}$
따라서 $a=1$, $b=4$이므로
 $ab=4$

답 4

유형 16~18 유리함수의 그래프

본책 95, 96쪽

함수 $y=\frac{bx+c}{x+a}$의 그래프

① $y=\frac{bx+c}{x+a}=\frac{-ab+c}{x+a}+b$
 ➡ $y=\frac{-ab+c}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.
② 점근선의 방정식: $x=-a$, $y=b$
③ 점 $(-a,\ b)$에 대하여 대칭이다.
④ 직선 $y=x+a+b$와 $y=-x-a+b$에 대하여 각각 대칭이다.

0639 ㄱ. $y=\frac{1}{5x-5}=\frac{1}{5(x-1)}$

따라서 $y=\frac{1}{5x-5}$의 그래프는 $y=\frac{1}{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{10x+1}{5x}=\frac{2\cdot5x+1}{5x}=\frac{1}{5x}+2$

따라서 $y=\frac{10x+1}{5x}$의 그래프는 $y=\frac{1}{5x}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{10x+3}{5x+5}=\frac{2(5x+5)-7}{5x+5}=-\frac{7}{5(x+1)}+2$

따라서 $y=\frac{10x+3}{5x+5}$의 그래프는 $y=-\frac{7}{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\frac{x-2}{5-5x}=\frac{(x-1)-1}{-5(x-1)}=\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{5}$

따라서 $y=\frac{x-2}{5-5x}$의 그래프는 $y=\frac{1}{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{5}$만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동에 의하여 $y=\frac{1}{5x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0640 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=4$의 중심인 점 $(-2,\ 3)$이 점 $(1,\ -2)$로 옮겨지므로 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동하는 것이다.
따라서 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{1}{x-3}-5=\frac{1-5(x-3)}{x-3}$$

$$=\frac{-5x+16}{x-3}$$

이 식의 그래프가 $y=\frac{bx+c}{x+a}$의 그래프와 일치해야 하므로

$$a=-3,\ b=-5,\ c=16\qquad \therefore\ a+b+c=8$$

답 8

0641 $y=\frac{bx+7}{x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

16 유리식과 유리함수

$$y=\frac{b(x-3)+7}{(x-3)+a}-2=\frac{b(x-3+a)+7-ab}{x-3+a}-2$$
$$=\frac{7-ab}{x-3+a}+b-2$$
이 식의 그래프가 $y=\frac{1}{x}$의 그래프와 일치해야 하므로

$-3+a=0$, $b-2=0$, $7-ab=1$

$\therefore a=3, b=2 \qquad \therefore a+b=5$ 답 ⑤

다른 풀이 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은
$$y=\frac{1}{x+3}+2=\frac{1+2(x+3)}{x+3}=\frac{2x+7}{x+3}$$
이 식의 그래프가 $y=\frac{bx+7}{x+a}$의 그래프와 일치해야 하므로

$a=3$, $b=2$

0642 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=2$이므로 주어진 함수를
$$y=\frac{k}{x+1}+2\ (k\neq0)$$
라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로
$$1=\frac{k}{2+1}+2 \qquad \therefore k=-3$$
$$\therefore y=\frac{-3}{x+1}+2=\frac{-3+2(x+1)}{x+1}=\frac{2x-1}{x+1}$$
따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=1$이므로

$a^2+b^2+c^2=2^2+(-1)^2+1^2=6$ 답 6

다른 풀이 $y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}$
$$=\frac{-ac+b}{x+c}+a \qquad \cdots\cdots ㉠$$
이므로 ㉠의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-c$, $y=a \qquad \therefore c=1, a=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

또 ㉠의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로
$$1=\frac{-ac+b}{2+c}+a \qquad \cdots\cdots ㉢$$
㉢에 ㉡을 대입하면
$$1=\frac{-2+b}{3}+2 \qquad \therefore b=-1$$

0643 $y=\frac{3x-2}{-x+2}=\frac{-3(-x+2)+4}{-x+2}=\frac{4}{-x+2}-3$이므로 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=-3$ ⋯ ❶
$$y=\frac{bx-1}{2x+a}=\frac{\frac{b}{2}(2x+a)-\frac{ab}{2}-1}{2x+a}=\frac{-\frac{ab}{2}-1}{2x+a}+\frac{b}{2}$$이므로 점근선의 방정식은

$x=-\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$ ⋯ ❷

따라서 $-\frac{a}{2}=2$, $\frac{b}{2}=-3$이므로

$a=-4$, $b=-6$

$\therefore ab=24$ ⋯ ❸

답 24

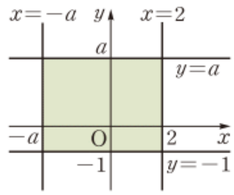
채점 기준	비율
❶ $y=\frac{3x-2}{-x+2}$의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ $y=\frac{bx-1}{2x+a}$의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0644 $y=-\frac{x}{x+a}=-\frac{(x+a)-a}{x+a}=\frac{a}{x+a}-1$이므로 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=-1$
$$y=\frac{ax+1}{x-2}=\frac{a(x-2)+2a+1}{x-2}=\frac{2a+1}{x-2}+a$$이므로 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=a$

따라서 두 함수의 그래프의 점근선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의 넓이가 20이므로



$(a+2)(a+1)=20$

$a^2+3a-18=0$

$(a+6)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 3

0645 주어진 함수의 그래프가 점 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로

점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=-\frac{1}{2}$
$$y=\frac{k}{x+1}-\frac{1}{2}\ (k\neq0)$$
이라 하면 이 함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 1이므로
$$1=k-\frac{1}{2} \qquad \therefore k=\frac{3}{2}$$
$$\therefore y=\frac{\frac{3}{2}}{x+1}-\frac{1}{2}=\frac{3-(x+1)}{2(x+1)}$$
$$=\frac{-x+2}{2x+2}$$
따라서 $a=-1$, $b=1$, $c=2$이므로

$a+b+c=2$ 답 ②

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 1이므로
$$1=\frac{2b}{c} \qquad \therefore c=2b$$
$y=\frac{ax+2b}{2x+c}$에 $c=2b$를 대입하면
$$y=\frac{ax+2b}{2x+2b}=\frac{\frac{a}{2}x+b}{x+b}=\frac{\frac{a}{2}(x+b)+b-\frac{ab}{2}}{x+b}$$
$$=\frac{b-\frac{ab}{2}}{x+b}+\frac{a}{2}$$
이 함수의 그래프가 점 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로
$$-b=-1,\ \frac{a}{2}=-\frac{1}{2}$$
$\therefore a=-1$, $b=1$, $c=2$

0646 $y=\dfrac{4x-3}{2x+1}=\dfrac{2(2x+1)-5}{2x+1}=-\dfrac{5}{2x+1}+2$이므로 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{1}{2},\ y=2$ ····· ❶

따라서 주어진 그래프는 점 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 2\right)$에 대하여 대칭이므로

$a=-\dfrac{1}{2},\ b=2$ ····· ❷

또 점 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 2\right)$는 직선 $y=x+c$ 위의 점이므로

$2=-\dfrac{1}{2}+c \qquad \therefore c=\dfrac{5}{2}$ ····· ❸

$\therefore abc=-\dfrac{5}{2}$ ····· ❹

답 $-\dfrac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ abc의 값을 구할 수 있다.	10 %

0647 $y=\dfrac{bx+2}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-ab+2}{x+a}=\dfrac{-ab+2}{x+a}+b$이므로 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=b$

이때 점 $(-a,\ b)$가 두 직선 $y=x+3$, $y=-x-2$의 교점이므로

$b=-a+3,\ b=a-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{5}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore 2b-a=2\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}$

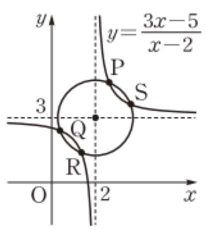
$=-\dfrac{3}{2}$

답 $-\dfrac{3}{2}$

0648 $y=\dfrac{3x-5}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+3$이므로 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=3$

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$의 그래프와 중심의 좌표가 $(2,\ 3)$인 원이 만나는 네 점을 각각 P, Q, R, S라 하면 두 점 P, R와 S, Q는 각각 점 $(2,\ 3)$에 대하여 대칭이다.



따라서 네 점 P, Q, R, S의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3, x_4라 하면

$\underbrace{\dfrac{x_1+x_3}{2}=2,\ \dfrac{x_2+x_4}{2}=2}_{}$ ← $\overline{\text{PR}}$, $\overline{\text{SQ}}$의 중점의 x좌표가 2이다.

$\therefore x_1+x_3=4,\ x_2+x_4=4$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=8$

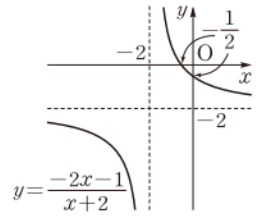
답 8

유형 19 유리함수의 그래프가 지나는 사분면 본책 97쪽

함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하여 그래프를 그려 본다.

0649 $y=\dfrac{-2x-1}{x+2}=\dfrac{-2(x+2)+3}{x+2}=\dfrac{3}{x+2}-2$

따라서 $y=\dfrac{-2x-1}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 즉 그래프가 지나지 않는 사분면은 제1사분면이다.



답 제1사분면

0650 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a\left(x+\dfrac{d}{c}\right)-\dfrac{ad}{c}+b}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}$

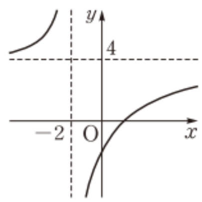
$=\dfrac{\dfrac{-ad+bc}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}}+\dfrac{a}{c}$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{d}{c},\ y=\dfrac{a}{c}$

따라서 $-\dfrac{d}{c}=-2,\ \dfrac{a}{c}=4$이므로

$a=4c,\ d=2c$ ······ ㉠

한편 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프가 제1, 2, 3, 4사분면을 모두 지나려면 그래프의 개형이 오른쪽 그림과 같아야 한다.



㉠에서 a, c, d의 부호가 모두 같고

(x절편)$=-\dfrac{b}{a}>0$, 즉 $ab<0$이므로 a, b, c, d의 부호는

$a>0,\ b<0,\ c>0,\ d>0$ 또는 $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d<0$

(i) $a>0,\ b<0,\ c>0,\ d>0$일 때,

a, c, d는 10 이하의 정수이므로 ㉠에서

$a=4,\ c=1,\ d=2$ 또는 $a=8,\ c=2,\ d=4$

따라서 $a+b+c+d$는 $a=4,\ b=-10,\ c=1,\ d=2$일 때 최솟값

$4-10+1+2=-3$

을 갖는다.

(ii) $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d<0$일 때,

a, c, d는 -10 이상의 정수이므로 ㉠에서

$a=-4,\ c=-1,\ d=-2$ 또는 $a=-8,\ c=-2,\ d=-4$

따라서 $a+b+c+d$는 $a=-8,\ b=1,\ c=-2,\ d=-4$일 때 최솟값

$-8+1-2-4=-13$

을 갖는다.

(i), (ii)에서 $a+b+c+d$의 최솟값은

-13 답 -13

유형 20 그래프를 이용하여 유리함수의 식 구하기 본책 97쪽

점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$이고, 점 (a, b)를 지나는 유리함수의 식

➡ $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$로 놓고 $x=a$, $y=b$를 대입하여 상수 k의 값을 구한다.

0651 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=1$이므로 주어진 함수를

$y=\dfrac{k}{x+2}+1\ (k>0)$

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{k}{0+2}+1$

$\therefore k=2$

$\therefore y=\dfrac{2}{x+2}+1=\dfrac{2+x+2}{x+2}$

$=\dfrac{x+4}{x+2}$

따라서 $a=1$, $b=4$, $c=2$이므로

$abc=8$ 답 8

0652 $y=\dfrac{k}{x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=2$이므로

$a=-3$, $b=2$

따라서 함수 $y=\dfrac{k}{x-3}+2$의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{1-3}+2 \qquad \therefore k=4$

$\therefore a+b+k=3$ 답 ②

0653 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a$, $y=c$

이므로 주어진 그래프에서

$a>0$, $c<0$

또 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프가 제2, 4사분면을 지나므로

$b<0$

ㄱ. $a>0$, $c<0$이므로 $\quad a-c>0$

ㄴ. 함수 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프가 원점을 지나므로

$-\dfrac{b}{a}+c=0, \qquad -b+ac=0$

$\therefore b=ac$

ㄷ. $\dfrac{b}{a}<0$, $\dfrac{a}{c}<0$이므로

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{c}<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

유형 21 유리함수의 그래프의 성질 본책 98쪽

함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프

① $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

② 정의역: $\{x\,|\,x\neq p$인 실수$\}$, 치역: $\{y\,|\,y\neq q$인 실수$\}$

③ 점 (p, q)에 대하여 대칭이다.

④ 점근선의 방정식: $x=p$, $y=q$

0654 $y=\dfrac{-3x-5}{x+2}=\dfrac{-3(x+2)+1}{x+2}=\dfrac{1}{x+2}-3$

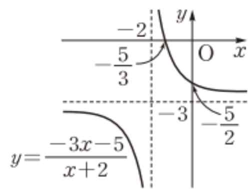
① 그래프는 점 $(-2, -3)$에 대하여 대칭이다.

② 정의역은 $\{x\,|\,x\neq -2$인 실수$\}$이다.

③ $y=\dfrac{-3x-5}{x+2}$에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{-3x-5}{x+2}$

$-3x-5=0 \qquad \therefore x=-\dfrac{5}{3}$



따라서 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$이다.

④ 그래프는 위의 그림과 같으므로 제2, 3, 4사분면을 지난다.

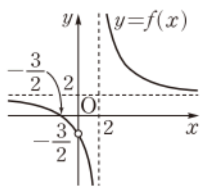
⑤ 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다. 답 ④

0655 ㄱ. $f(x)=\dfrac{2+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{2x+3}{x-2}$이므로 정의역은

$\{x\,|\,x\neq 0,\ x\neq 2$인 실수$\}$이다.

ㄴ. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+7}{x-2}$

$=\dfrac{7}{x-2}+2$



이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 그래프는 모든 사분면을 지난다.

ㄷ. 그래프가 점 $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$은 지나지만 점 $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$은 지나지 않으므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0656 $y=\dfrac{a}{x}$, $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프는 제2사분면을 지나므로

$a<0$, $b<0$

이때 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프가 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$\underbrace{|a|>|b| \qquad \therefore a<b<0}_{\text{음수끼리는 절댓값이 클수록 작다.}}$ ··· ❶

$y=\frac{c}{x}$, $y=\frac{d}{x}$의 그래프는 제1사분면을 지나므로

$c>0$, $d>0$

이때 $y=\frac{d}{x}$의 그래프가 $y=\frac{c}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$\underline{|d|>|c|}$ $\quad\therefore 0<c<d$ ⋯ ❷

양수끼리는 절댓값이 클수록 크다.

$\therefore a<b<c<d$ ⋯ ❸

답 $a<b<c<d$

채점 기준	비율
❶ $a<b<0$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $0<c<d$임을 알 수 있다.	40 %
❸ a, b, c, d의 대소를 비교할 수 있다.	20 %

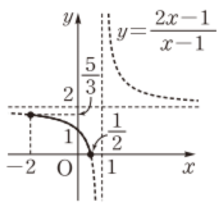
유형 22 유리함수의 최대·최소

본책 98쪽

함수 $y=f(x)$의 정의역이 주어졌을 때
⇒ 주어진 정의역에서 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, y의 최댓값과 최솟값을 구한다.

0657 $y=\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+2$이므로 함수 $y=\frac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\le x\le\frac{1}{2}$에서 $y=\frac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-2$일 때 최댓값 $\frac{5}{3}$,

$x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 0

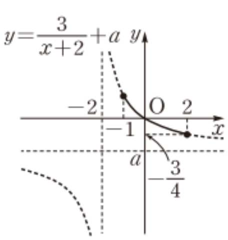
을 갖는다.

즉 $a=\frac{5}{3}$, $b=0$이므로 $\quad a+b=\frac{5}{3}$

답 $\frac{5}{3}$

0658 $y=\frac{3}{x+2}+a$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이때 $-1\le x\le 2$에서 $y=\frac{3}{x+2}+a$의 최솟값이 $-\frac{3}{4}$이려면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 주어진 함수는 $x=2$일 때 최솟값 $\frac{3}{4}+a$를 가지므로

$\frac{3}{4}+a=-\frac{3}{4}$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$

답 ①

0659 조건 ㈎에서 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=1$이므로

$f(x)=\frac{k}{x-3}+1\ (k\ne 0)$

이라 하자. ⋯ ❶

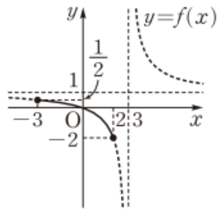
이때 조건 ㈏에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\frac{k}{-3}+1 \quad \therefore k=3$

$\therefore f(x)=\underline{\frac{3}{x-3}+1}$ ⋯ ❷

$y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-3$일 때 최댓값 $\frac{1}{2}$,

$x=2$일 때 최솟값 -2

를 갖는다.

즉 구하는 합은

$\frac{1}{2}+(-2)=-\frac{3}{2}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $f(x)=\frac{k}{x-3}+1\ (k\ne 0)$로 놓을 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	40 %

유형 23 유리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

본책 99쪽

① 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 한 점에서 만난다.
⇒ 방정식 $f(x)=g(x)$가 이차방정식일 때 판별식을 D라 하면 $D=0$

② $y=f(x)$의 그래프를 그리고, 직선 $y=g(x)$가 반드시 지나는 점을 이용한다.

0660 함수 $y=\frac{x-2}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=kx+1$이 한 점에서 만나므로 $\frac{x-2}{x+1}=kx+1$에서

$x-2=(kx+1)(x+1)$

$x-2=kx^2+(k+1)x+1$

$\therefore kx^2+kx+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-12k=0$

$k(k-12)=0 \quad \therefore k=12\ (\because k>0)$

답 ④

0661 함수 $y=\frac{x}{x-2}$의 그래프와 직선 $y=mx-2m$이 만나지 않으므로 $\frac{x}{x-2}=\underbrace{mx-2m}_{m(x-2)}$에서

$x=m(x-2)^2$

$\therefore mx^2-(4m+1)x+4m=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(4m+1)\}^2-16m^2<0$

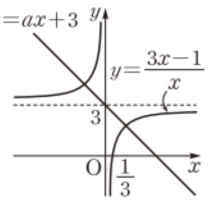
$8m+1<0 \qquad \therefore m<-\frac{1}{8}$

따라서 정수 m의 최댓값은 -1이다. 답 ⑤

0662 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 $y=\frac{3x-1}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+3$이 만난다.

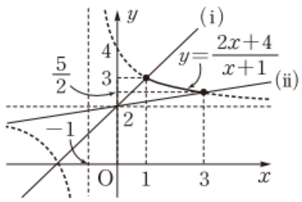
$y=\frac{3x-1}{x}$, 즉 $y=-\frac{1}{x}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax+3$은 a의 값에 관계없이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$a<0$ 답 $a<0$



0663 $y=\frac{2x+4}{x+1}=\frac{2(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+2$

이므로 $1\le x\le 3$에서 $y=\frac{2x+4}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax+2$는 a의 값에 관계없이 점 $(0, 2)$를 지난다.



(i) 직선 $y=ax+2$가 점 $(1, 3)$을 지날 때,

$3=a+2 \qquad \therefore a=1$

(ii) 직선 $y=ax+2$가 점 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$를 지날 때,

$\frac{5}{2}=3a+2 \qquad \therefore a=\frac{1}{6}$

(i), (ii)에서 함수 $y=\frac{2x+4}{x+1}(1\le x\le 3)$의 그래프와 직선 $y=ax+2$가 한 점에서 만나려면 $\quad \frac{1}{6}\le a\le 1$

따라서 a의 최댓값은 1, 최솟값은 $\frac{1}{6}$이므로 구하는 합은

$1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$ 답 $\frac{7}{6}$

유형 24 유리함수의 합성

본책 99쪽

$f^n(k)$의 값 구하기 (단, n은 자연수)

➡ [방법 1] $f^1(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, $\cdots$를 직접 구하여 $f^n(x)$를 추정한 다음 x 대신 k를 대입한다.

[방법 2] $f^1(k)$, $f^2(k)$, $f^3(k)$, $\cdots$에서 규칙을 찾아 $f^n(k)$의 값을 추정한다.

0664 $f(x)=\frac{x-1}{x}$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{-1}{x-1}$

$f^3(x)=(f^2\circ f)(x)=f^2(f(x))=\frac{-1}{\frac{x-1}{x}-1}=x$

따라서 함수 $f^3(x)=f^6(x)=f^9(x)=\cdots=f^{3n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{100}(x)=f^{3\times 33+1}(x)=f(x)$

$\therefore f^{100}(8)=f(8)=\frac{8-1}{8}=\frac{7}{8}$ 답 $\frac{7}{8}$

참고 $f^1(8)=\frac{7}{8}$, $f^2(8)=-\frac{1}{7}$, $f^3(8)=8$, $f^4(8)=\frac{7}{8}$, $\cdots$이므로 $f^n(8)$은 $\frac{7}{8}$, $-\frac{1}{7}$, 8이 이 순서대로 반복된다.

0665 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=x$

즉 $(f\circ f)(k)=\frac{1}{k}$에서

$k=\frac{1}{k}, \qquad k^2=1 \qquad \therefore k=-1\ (\because k\neq 1)$ 답 ③

0666 $f(x)=\frac{x}{1-x}$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=\dfrac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$ ⋯ ❶

$f^3(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))$

$=\dfrac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}$ ⋯ ❷

같은 방법으로 하면 $\quad f^{10}(x)=\frac{x}{1-10x}$ ⋯ ❸

따라서 $a=1$, $b=0$, $c=-10$이므로

$a+b+c=-9$ ⋯ ❹

답 -9

채점 기준	비율
❶ $f^2(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f^3(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f^{10}(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 $f^n(x)=\frac{x}{1-nx}$ (단, n은 자연수)

0667 주어진 그래프에서

$f^1(0)=f(0)=1$, $f^1(1)=f(1)=0$

이므로

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f^1(1))=f(0)=1$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(1)=0$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(0)=1$

$f^5(1)=(f\circ f^4)(1)=f(f^4(1))=f(1)=0$

$\vdots$

$\therefore f^n(1)=\begin{cases} 0 & (n\text{은 홀수}) \\ 1 & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$

$\therefore f^{2018}(1)=1$ 답 1

참고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=2$이고 두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$을 지나므로

$$f(x)=\frac{2}{x-2}+2$$

유형 25 유리함수의 역함수

본책 100쪽

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq0,\ ad-bc\neq0)$의 역함수 구하기

(i) x를 y에 대한 식으로 나타낸다. ➡ $x=\dfrac{dy-b}{-cy+a}$

(ii) x와 y를 서로 바꾼다. ➡ $y=\dfrac{dx-b}{-cx+a}$

0668 $y=\dfrac{ax}{2x+3}$라 하면 $\quad y(2x+3)=ax$

$(2y-a)x=-3y \qquad \therefore\ x=\dfrac{-3y}{2y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{-3x}{2x-a}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{-3x}{2x-a}$

$f=f^{-1}$이므로 $\quad \dfrac{ax}{2x+3}=\dfrac{-3x}{2x-a}$

$\therefore\ a=-3$

답 ①

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로

$(f\circ f)(x)=x$

$$f(f(x))=\frac{af(x)}{2f(x)+3}=\frac{a\cdot\dfrac{ax}{2x+3}}{2\cdot\dfrac{ax}{2x+3}+3}=\frac{a^2x}{2(a+3)x+9}=x$$

이므로 $\quad 2(a+3)x^2+9x=a^2x$

$\therefore\ 2(a+3)x^2+(9-a^2)x=0$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+3=0,\ 9-a^2=0$

$\therefore\ a=-3$

0669 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 그래프가 점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$-2=\dfrac{3a+b}{3-2} \qquad \therefore\ 3a+b=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 역함수의 그래프가 점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 그래프는 점 $(-2,\ 3)$을 지난다. 즉

$3=\dfrac{-2a+b}{-2-2} \qquad \therefore\ -2a+b=-12 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=-8$

$\therefore\ a+b=-6$

답 ③

SSEN 특강

함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점을 $(a,\ b)$라 하면

$b=f(a) \Longleftrightarrow a=f^{-1}(b)$

가 성립한다.

0670 두 직선 $y=x+5$, $y=-x-3$의 교점의 x좌표는

$x+5=-x-3 \qquad \therefore\ x=-4$

$\therefore\ y=1$

즉 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-4,\ 1)$에 대하여 대칭이므로 그 역함수의 그래프는 점 $(1,\ -4)$에 대하여 대칭이다.

따라서 점 $(1,\ -4)$는 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$의 교점이므로

$a+b=-4,\ c+d=-4$

$\therefore\ a+b+c+d=-8$

답 -8

0671 $g(x)=f(x+3)-2$에서 $\quad g(2)=f(5)-2$

이때 $g(2)=4$이므로 $\quad f(5)-2=4 \qquad \therefore\ f(5)=6$

$f(5)=6$에서 $\quad \dfrac{6}{5a+b}=6$

$\therefore\ b=-5a+1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=\dfrac{x+1}{ax+b}=\dfrac{\left(x+\dfrac{b}{a}\right)+1-\dfrac{b}{a}}{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}=\dfrac{1-\dfrac{b}{a}}{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+\dfrac{1}{a}$이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{a},\ y=\dfrac{1}{a}$

$g(x)=f(x+3)-2$에서 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{a}-3,\ y=\dfrac{1}{a}-2$

이때 $g=g^{-1}$이므로

$-\dfrac{b}{a}-3=\dfrac{1}{a}-2 \qquad \therefore\ \dfrac{1+b}{a}=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하여 정리하면 $\quad a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ a-b=2$

답 ⑤

참고 $g(x)=\dfrac{q}{x-p}+r$라 할 때 $y=g(x)$의 역함수 $y=g^{-1}(x)$를 구하면

$y-r=\dfrac{q}{x-p}$에서 $\quad x-p=\dfrac{q}{y-r} \qquad \therefore\ x=\dfrac{q}{y-r}+p$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{q}{x-r}+p$

$\therefore\ g^{-1}(x)=\dfrac{q}{x-r}+p$

따라서 $g=g^{-1}$를 만족시키려면 $p=r$이어야 한다.

다른 풀이 $g(x)=f(x+3)-2$에서

$g(x)=\dfrac{(x+3)+1}{a(x+3)+b}-2=\dfrac{(1-2a)x+4-6a-2b}{ax+3a+b}$

$g(2)=4$이므로 $\quad \dfrac{6-10a-2b}{5a+b}=4$

$\therefore\ b=-5a+1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

따라서 $g(x)=\dfrac{(1-2a)x+4a+2}{ax-2a+1}$에서 $y=g(x)$라 하면

$y=\dfrac{(1-2a)x+4a+2}{ax-2a+1}$

$(ax-2a+1)y=(1-2a)x+4a+2$

$\therefore\ x=\dfrac{(2a-1)y+4a+2}{ay+2a-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{(2a-1)x+4a+2}{ax+2a-1}$

$\therefore g^{-1}(x)=\dfrac{(2a-1)x+4a+2}{ax+2a-1}$

$g=g^{-1}$에서 $\quad -2a+1=2a-1$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$

㉠에 $a=\dfrac{1}{2}$을 대입하면 $\quad b=-\dfrac{3}{2}$

유형 26 유리함수의 합성함수와 역함수

본책 100쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$에 대하여

➡ $(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))$

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))$

0672 $f^{-1}\circ f=I$ (항등함수)이므로

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(5)=(I\circ f^{-1})(5)=f^{-1}(5)$

$f^{-1}(5)=k$라 하면 $\quad f(k)=5$

$\dfrac{2k-3}{k-3}=5,\quad 2k-3=5k-15$

$\therefore k=4$

답 4

0673 $(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(3)=k$라 하면 $\quad f(k)=3$

$\dfrac{2k-4}{k-1}=3,\quad 2k-4=3k-3$

$\therefore k=-1$ ⋯ ❶

$g(-1)=t$라 하면 $\quad f(t)=-1$

$\dfrac{2t-4}{t-1}=-1,\quad 2t-4=-t+1$

$\therefore t=\dfrac{5}{3}$ ⋯ ❷

$\therefore (g\circ g)(3)=g(g(3))=g(-1)=\dfrac{5}{3}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{5}{3}$

채점 기준	비율
❶ $g(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(-1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $(g\circ g)(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $y=\dfrac{2x-4}{x-1}$라 하면 $\quad y(x-1)=2x-4$

$(y-2)x=y-4 \quad \therefore x=\dfrac{y-4}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{x-4}{x-2}$

$\therefore g(x)=\dfrac{x-4}{x-2}$

따라서 $g(3)=\dfrac{3-4}{3-2}=-1$, $g(-1)=\dfrac{-1-4}{-1-2}=\dfrac{5}{3}$이므로

$(g\circ g)(3)=g(g(3))=g(-1)=\dfrac{5}{3}$

0674 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ f)(3)$

$=g^{-1}(f(3))$

$=g^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)$

$g^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)=k$라 하면 $\quad g(k)=\dfrac{3}{2}$

$\dfrac{2k-1}{k}=\dfrac{3}{2},\quad 4k-2=3k \quad \therefore k=2$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=2$

답 ③

0675 **전략** 주어진 저항이 직렬 연결인지 병렬 연결인지 확인하여 식에 대입한다.

풀이 병렬 연결된 부분의 전체 저항의 크기를 $R'(\Omega)$이라 하면

$\dfrac{1}{R'}=\dfrac{1}{R+1}+\dfrac{1}{2R}=\dfrac{2R+(R+1)}{2R(R+1)}=\dfrac{3R+1}{2R^2+2R}$

$\therefore R'=\dfrac{2R^2+2R}{3R+1}(\Omega)$

따라서 구하는 전체 저항의 크기는

$R+R'=R+\dfrac{2R^2+2R}{3R+1}=\dfrac{3R^2+R+2R^2+2R}{3R+1}$

$=\dfrac{5R^2+3R}{3R+1}(\Omega)$

답 ④

0676 **전략** $f(n)f(101-n)=1$임을 이용하여 $\dfrac{1}{1+f(n)}$을 구한다.

풀이 $f(n)f(101-n)=1$이므로 $\quad f(n)=\dfrac{1}{f(101-n)}$

$\therefore \dfrac{1}{1+f(n)}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{f(101-n)}}=\dfrac{f(101-n)}{1+f(101-n)}$

따라서

$\dfrac{1}{1+f(n)}+\dfrac{1}{1+f(101-n)}=\dfrac{f(101-n)+1}{1+f(101-n)}=1$

이므로

$\dfrac{1}{1+f(1)}+\dfrac{1}{1+f(2)}+\dfrac{1}{1+f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{1+f(100)}=50$

답 50

0677 **전략** $x+\dfrac{1}{x}=1$의 양변에 적당한 식을 곱하여 변형한다.

풀이 ㄱ. $x+\dfrac{1}{x}=1$에서 $x\neq0$이므로 양변에 $\dfrac{1}{x}$을 곱하면

$1+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x} \quad \therefore 1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

ㄴ. $x+\dfrac{1}{x}=1$의 양변에 x를 곱하면

$x^2+1=x \quad \therefore x^2-x+1=0$ ⋯⋯ ㉠

$\therefore \left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)$

$=(x-x^2+x^3)+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)$

$=x(1-x+x^2)+\dfrac{x^2-x+1}{x^3}$

$=0+0=0$ ($\because$ ㉠)

ㄷ. ㉠의 양변에 $x+1$을 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^3+1=0 \qquad \therefore x^3=-1$

(i) n이 짝수일 때, $x^{3n+2}=x^2$, $x^{3n+1}=x$이므로

$$(\text{좌변})=x^2-x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=(x^2-x)+\frac{1-x}{x^2}$$
$$=-1+\frac{-x^2}{x^2}=-1-1=-2$$

㉠에서 $x^2-x=-1$, $1-x=-x^2$

(ii) n이 홀수일 때, $x^{3n+2}=-x^2$, $x^{3n+1}=-x$이므로

$$(\text{좌변})=-x^2+x-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=-(x^2-x)-\frac{1-x}{x^2}$$
$$=-(-1)-\frac{-x^2}{x^2}=1+1=2$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

다른 풀이 ㄴ. $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=1-2=-1$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=1-3=-2$

$\therefore (\text{좌변})=1-(-1)+(-2)=0$

0678 전략 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=k\,(k>0)$로 놓고 $b=ak$, $d=ck$임을 이용하여 식을 정리한다.

풀이 ㄱ. $ad-bc=0$에서 $bc=ad$이므로 양변을 ac로 나누면

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

ㄴ. $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=k\ (k>0)$로 놓으면 $b=ak$, $d=ck$이므로

$$\frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{a^2+c^2}{a\cdot ak+c\cdot ck}=\frac{a^2+c^2}{(a^2+c^2)k}=\frac{1}{k}$$
$$\frac{2ac}{ad+bc}=\frac{2ac}{a\cdot ck+ak\cdot c}=\frac{2ac}{2ack}=\frac{1}{k}$$
$$\therefore \frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{2ac}{ad+bc}$$

ㄷ. ㄴ에서 $b=ak$, $d=ck$이므로

$$\frac{b^3+d^3}{a^3+c^3}=\frac{a^3k^3+c^3k^3}{a^3+c^3}=\frac{(a^3+c^3)k^3}{a^3+c^3}=k^3$$
$$\frac{(b+d)^3}{(a+c)^3}=\frac{(ak+ck)^3}{(a+c)^3}=\frac{(a+c)^3k^3}{(a+c)^3}=k^3$$
$$\therefore \frac{b^3+d^3}{a^3+c^3}=\frac{(b+d)^3}{(a+c)^3}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0679 전략 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하여 a를 b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a^2-4ab+3b^2=0$에서

$(a-b)(a-3b)=0 \qquad \therefore a=b$ 또는 $a=3b$

(i) $a=b$일 때,

$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}=\frac{(b+b)^2}{b^2+b^2}=\frac{4b^2}{2b^2}=2$$

$\therefore k=2$

(ii) $a=3b$일 때,

$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}=\frac{(3b+b)^2}{9b^2+b^2}=\frac{16b^2}{10b^2}=\frac{8}{5}$$

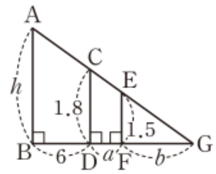
$\therefore k=\frac{8}{5}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 k의 값의 합은

$2+\frac{8}{5}=\frac{18}{5}$ 답 $\frac{18}{5}$

0680 전략 삼각형의 닮음을 이용하여 a, b, h 사이의 관계식을 구한다.

풀이 가로등을 $\overline{AB}$, 아버지와 연준이의 위치를 각각 D와 F, 그림자 끝을 G라 하면 오른쪽 그림에서 △CDG∽△EFG이므로



$1.8:(a+b)=1.5:b$

$1.5(a+b)=1.8b$

단위를 m로 나타내면 $180\text{ cm}=1.8\text{ m}$, $150\text{ cm}=1.5\text{ m}$

$1.5a=0.3b$

$\therefore b=5a$

또 △ABG∽△EFG이므로

$h:(6+a+b)=1.5:b$

$\therefore bh=1.5(6+a+b)=1.5(6+6a)=9(a+1)$

$\therefore \frac{bh}{a+1}=\frac{9(a+1)}{a+1}=9$ 답 9

0681 전략 유리함수의 그래프의 점근선을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{3x+k}{x+4}=\frac{3(x+4)+k-12}{x+4}=\frac{k-12}{x+4}+3$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선이 $y=g(x)$이므로

$$g(x)=\frac{k-12}{x+2+4}+3+3=\frac{k-12}{x+6}+6$$

따라서 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $x=-6$, $y=6$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-6, 6)$이다.

이때 점 $(-6, 6)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$\frac{3\cdot(-6)+k}{-6+4}=6$$

$\therefore k=6$ 답 ⑤

다른 풀이 $f(x)=\frac{3x+k}{x+4}=\frac{k-12}{x+4}+3$에서 곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은 $x=-4$, $y=3$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-4, 3)$이다.

곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선이므로 곡선 $y=g(x)$의 두 점근선의 교점은 점 $(-4, 3)$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점 $(-6, 6)$과 같다.

이때 점 $(-6, 6)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$\frac{3\cdot(-6)+k}{-6+4}=6$$

$\therefore k=6$

16 유리식과 유리함수

0682 전략 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$이면 점 $(p,\ q)$가 직선 $y=x$ 위의 점이다.

풀이 함수 $y=\dfrac{3}{x-5}+k$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=5$, $y=k$

이때 함수 $y=\dfrac{3}{x-5}+k$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 $(5,\ k)$는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

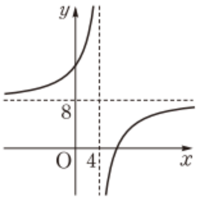
$\therefore\ k=5$

답 ⑤

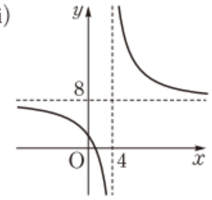
0683 전략 함수의 그래프를 이용하여 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 $y=\dfrac{k}{x-4}+8$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것이다.

(i)



(ii)



(i) $k<0$일 때, k의 값에 관계없이 $y=\dfrac{k}{x-4}+8$의 그래프가 제1, 2, 4사분면을 지난다.

(ii) $k>0$일 때, 그래프가 제1, 2, 4사분면만을 지나려면 $x=0$일 때 $y\geq 0$이어야 하므로 $y<0$이면 모든 사분면을 지난다.

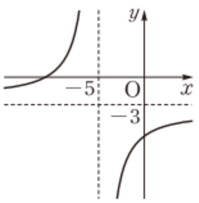
$\dfrac{k}{0-4}+8\geq 0,\qquad \dfrac{k}{4}\leq 8$

$\therefore\ 0<k\leq 32\ (\because\ k>0)$

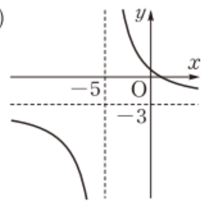
(i), (ii)에서 $\quad k<0$ 또는 $0<k\leq 32$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편 $y=\dfrac{k}{x+5}-3$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

(iii)



(iv)



(iii) $k<0$일 때, k의 값에 관계없이 $y=\dfrac{k}{x+5}-3$의 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

(iv) $k>0$일 때, 그래프가 모든 사분면을 지나려면 $x=0$일 때 $y>0$이어야 하므로 $y\leq 0$이면 제1사분면을 지나지 않는다.

$\dfrac{k}{0+5}-3>0,\qquad \dfrac{k}{5}>3$

$\therefore\ k>15$

(iii), (iv)에서 $\quad k>15$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$15<k\leq 32$

따라서 구하는 정수 k는 16, 17, 18, $\cdots$, 32의 17개이다.

답 ④

0684 전략 점 B의 좌표를 이용하여 점 D가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.

풀이 점 B의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)(t>0)$이라 하면 점 D의 좌표는

$\left(t+2,\ \dfrac{1}{t}+2\right)$

즉 점 D의 자취는 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같으므로 자취의 방정식은

$y=\dfrac{1}{x-2}+2=\dfrac{2x-3}{x-2}\ (x>2)$

따라서 $a=2$, $b=-2$이므로

$a+b=0$

답 0

다른 풀이 점 B의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)(t>0)$이라 하고, 점 D의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=t+2,\ y=\dfrac{1}{t}+2$

$\therefore\ t=x-2,\ \dfrac{1}{t}=y-2$

따라서 $y-2=\dfrac{1}{x-2}\ (x>2)$이므로

$y=\dfrac{1}{x-2}+2=\dfrac{2x-3}{x-2}\ (x>2)$

참고 점 B는 제1사분면에서의 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프 위의 점이므로 $t>0$이다.

$\therefore\ x=t+2>2$

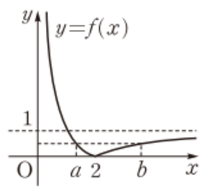
sSEN 특강

점의 자취의 방정식을 구하는 방법

(i) 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓는다.
(ii) 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 세운다.
(iii) x, y 이외의 문자는 소거하고 제한된 범위를 생각한다.
(iv) x, y 사이의 관계식에서 자취의 방정식을 구한다.

0685 전략 $y=f(x)$의 그래프를 그려 $f(a)=f(b)$를 만족시키는 a, b의 위치를 찾는다.

풀이 $f(x)=\left|\dfrac{2-x}{x}\right|=\left|\dfrac{2}{x}-1\right|$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(a)=f(b)$이려면

$0<a<2,\ b>2$

이어야 한다.

ㄴ. 위의 그림에서 $\quad 0<f(b)<1$

ㄷ. $f(a)=\dfrac{2-a}{a}$, $f(b)=\dfrac{b-2}{b}$이므로

$f(a)+f(b)=\dfrac{2-a}{a}+\dfrac{b-2}{b}$

$=\dfrac{2b-ab+ab-2a}{ab}=\dfrac{2(b-a)}{ab}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

참고 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동시켜 그린다.

0686 전략 점 (p, q)가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이면 $q=f(p)$임을 이용한다.

풀이 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(c, d)$가 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$$b=\frac{2}{a},\ d=\frac{2}{c}$$

직선 AB의 기울기가 $-\frac{1}{6}$이므로 $\quad \frac{d-b}{c-a}=-\frac{1}{6}$

$$\frac{\frac{2}{c}-\frac{2}{a}}{c-a}=-\frac{1}{6},\qquad \frac{\frac{2(a-c)}{ac}}{c-a}=-\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ ac=12 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 사각형 CODE와 AEBF의 넓이의 비가 1 : 4이므로

$$ad:(c-a)(b-d)=1:4,\qquad (c-a)(b-d)=4ad$$

$$(c-a)\left(\frac{2}{a}-\frac{2}{c}\right)=\frac{8a}{c},\qquad (c-a)\left\{\frac{2(c-a)}{ac}\right\}=\frac{8a}{c}$$

$$(c-a)^2=4a^2$$

$$c-a=2a\ (\because\ c-a>0,\ 2a>0)$$

$$\therefore\ c=3a$$

㉠에서

$$a\cdot 3a=12,\qquad a^2=4$$

$$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$$

따라서 $c=6$, $b=1$, $d=\frac{1}{3}$이므로

$$a+b+c+d=2+1+6+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{28}{3}$$

답 $\frac{28}{3}$

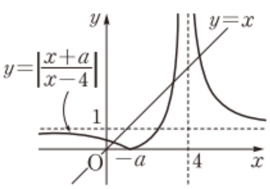
0687 전략 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식과 y절편을 이용하여 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\frac{x+a}{x-4}=\frac{a+4}{x-4}+1$이므로 점근선의 방정식은 $x=4$, $y=1$이고, y절편은 $-\frac{a}{4}$이다.

한편 $a>-4$이므로 $\quad a+4>0$

(i) $-\frac{a}{4}>0$, 즉 $-4<a<0$이면

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\left|\frac{x+a}{x-4}\right|$의 그래프는 직선 $y=x$와 서로 다른 세 점에서 만나므로 조건을 만족시키는 정수 a는



$$-3,\ -2,\ -1$$

(ii) $-\frac{a}{4}=0$, 즉 $a=0$이면

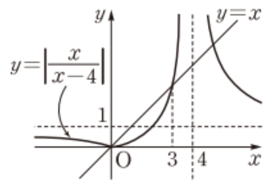
$0<x<4$에서 $\qquad y=\left|\frac{x}{x-4}\right|=\frac{-x}{x-4}$

$\frac{-x}{x-4}=x$에서 $\qquad x^2-3x=0$

$$x(x-3)=0$$

$$\therefore\ x=0 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 오른쪽 그림과 같이 $y=\left|\frac{x}{x-4}\right|$의 그래프는 직선 $y=x$와 서로 다른 세 점에서 만나므로 $a=0$은 조건을 만족시킨다.



(iii) $-\frac{a}{4}<0$, 즉 $a>0$이면

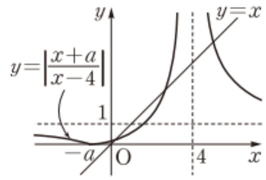
x절편이 $-a$이므로 $-a<x<4$에서

$$y=\left|\frac{x+a}{x-4}\right|=\frac{-x-a}{x-4}$$

$\frac{-x-a}{x-4}=x$에서

$$x^2-3x+a=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D>0$일 때 오른쪽 그림과 같이 $y=\left|\frac{x+a}{x-4}\right|$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 세 점에서 만난다. 즉



$$D=(-3)^2-4a>0$$

$$\therefore\ a<\frac{9}{4}$$

따라서 $0<a<\frac{9}{4}$이므로 조건을 만족시키는 정수 a는

$$1,\ 2$$

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 정수 a는

$$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$$

의 6개이다.

답 6

0688 전략 $(f\circ f)(x)=x$이면 $f(x)=f^{-1}(x)$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $ab=-6$이면 $b=-\frac{6}{a}$이므로

$$f(x)=\frac{ax+6}{x-b}=\frac{a\left(x+\frac{6}{a}\right)}{x+\frac{6}{a}}=a$$

따라서 함수 $f(x)$는 상수함수이므로

$$ab\neq-6$$

ㄴ. $(f\circ f)(x)=x$이므로

$$f(x)=f^{-1}(x)$$

$y=\frac{ax+6}{x-b}$이라 하면

$$(x-b)y=ax+6,\qquad (y-a)x=by+6$$

$$\therefore\ x=\frac{by+6}{y-a}$$

x와 y를 서로 바꾸면

$$y=\frac{bx+6}{x-a}$$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{bx+6}{x-a}$이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$에서

$$\frac{ax+6}{x-b}=\frac{bx+6}{x-a}$$

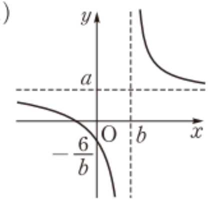
$$\therefore\ a=b$$

16 유리식과 유리함수

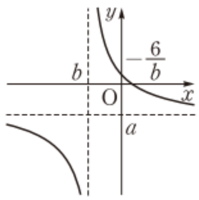
ㄷ. $f(x)=\dfrac{ax+6}{x-b}=\dfrac{a(x-b)+ab+6}{x-b}=\dfrac{ab+6}{x-b}+a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=b$, $y=a$이고 y절편은 $-\dfrac{6}{b}$이다.

한편 ㄴ에서 $a=b$이므로　　$ab+6=a^2+6>0$

(i)



(ii)



(i) $a>0$, $b>0$일 때,

$-\dfrac{6}{b}<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제1, 2, 3, 4사분면을 모두 지난다.

(ii) $a<0$, $b<0$일 때,

$-\dfrac{6}{b}>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제1, 2, 3, 4사분면을 모두 지난다.

(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제1, 2, 3, 4사분면을 모두 지난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0689 전략 $\dfrac{-4x+6y+a}{3x-by+2}=k$ (k는 실수)로 놓고 식을 변형하여 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 $\dfrac{-4x+6y+a}{3x-by+2}=k$ (k는 실수)로 놓으면

$-4x+6y+a=k(3x-by+2)$

$(3k+4)x-(bk+6)y+2k-a=0$ ⋯ ❶

이 식이 x, y에 대한 항등식이므로

$3k+4=0$, $bk+6=0$, $2k-a=0$

$\therefore k=-\dfrac{4}{3}$, $a=-\dfrac{8}{3}$, $b=\dfrac{9}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=\dfrac{11}{6}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{11}{6}$

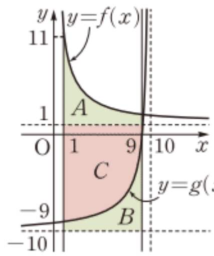
채점 기준	비율
❶ $\dfrac{-4x+6y+a}{3x-by+2}=k$ (k는 실수)로 놓고 식을 변형할 수 있다.	40 %
❷ a, b, k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0690 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그려 도형의 넓이를 구한다.

풀이 함수 $y=\dfrac{10}{x}+1$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{10}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

또 함수 $y=\dfrac{10}{10-x}-10$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{10}{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 10만큼, y축의 방향으로 -10만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



이때

$(A$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$ ⋯ ❷

이므로 구하는 넓이는

$(A$의 넓이$)+(C$의 넓이$)$

$=(B$의 넓이$)+(C$의 넓이$)$

$=8\cdot 11=88$ ⋯ ❸

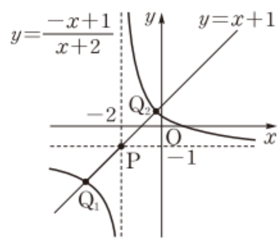
답 88

채점 기준	비율
❶ 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷ $(A$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$임을 알 수 있다.	30 %
❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

0691 전략 점 P가 점근선의 교점임을 이용한다.

풀이 $y=\dfrac{-x+1}{x+2}=\dfrac{-(x+2)+3}{x+2}=\dfrac{3}{x+2}-1$이므로 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=-1$이다. 즉 점 $\mathrm{P}(-2,\ -1)$은 두 점근선의 교점이다. ⋯ ❶

점 P가 두 점근선의 교점이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이가 최소일 때의 점 Q는 오른쪽 그림과 같이 Q_1, Q_2로 두 개가 존재한다.



한편 곡선 $y=\dfrac{-x+1}{x+2}$은 점 $\mathrm{P}(-2,\ -1)$에 대하여 대칭이므로 직선 $y+1=x+2$, 즉 $y=x+1$에 대하여 대칭이다.

$\dfrac{-x+1}{x+2}=x+1$에서 ― 두 점 Q_1, Q_2는 곡선 $y=\dfrac{-x+1}{x+2}$과 직선 $y=x+1$의 교점이다.

$-x+1=(x+1)(x+2)$

$x^2+4x+1=0$

$\therefore x=-2\pm\sqrt{3}$

따라서 두 점 Q_1, Q_2의 좌표는 각각 $(-2-\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3})$, $(-2+\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3})$이고 $\overline{\mathrm{PQ}_1}=\overline{\mathrm{PQ}_2}$이므로 ⋯ ❷

$m=\overline{\mathrm{PQ}_1}$

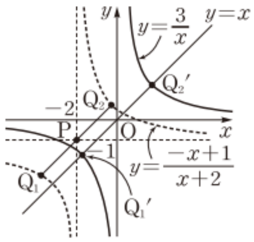
$=\sqrt{(-2-\sqrt{3}+2)^2+(-1-\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{6}$

$\therefore m^2=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 점 P가 두 점근선의 교점임을 알 수 있다.	30 %
❷ 두 점 Q_1, Q_2의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❸ m^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 곡선 $y=\dfrac{3}{x+2}-1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 곡선은 $y=\dfrac{3}{x}$이 되고, 점근선의 교점 P는 원점으로 옮겨지며, 두 점 Q_1, Q_2도 오른쪽 그림과 같이 각각 두 점 Q_1', Q_2'으로 옮겨진다.



$\therefore\ \overline{PQ_1}=\overline{OQ_1'}$

$\overline{PQ_2}=\overline{OQ_2'}$

이때 곡선 $y=\dfrac{3}{x}$은 직선 $y=x$와 원점에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{3}{x}=x$에서 $\quad x^2=3$ — 두 점 Q_1', Q_2'은 곡선 $y=\dfrac{3}{x}$과 직선 $y=x$의 교점이다.

$\therefore\ x=\pm\sqrt{3}$

따라서 두 점 Q_1', Q_2'의 좌표는 각각 $(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},\ \sqrt{3})$이고 $\overline{OQ_1'}=\overline{OQ_2'}$이므로

$m=\overline{OQ_2'}$

$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$

0692 **전략** 함수 $y=\dfrac{l}{x}$의 그래프는 $l>0$인 경우 제1, 3사분면을 지나고, $l<0$인 경우 제2, 4사분면을 지남을 이용한다.

풀이 $y=\dfrac{2x+k}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+k-2}{x+1}=\dfrac{k-2}{x+1}+2$ ··· ❶

$k=2$이면 $y=\dfrac{2x+k}{x+1}=2$이므로 최댓값이 1이 아니다.

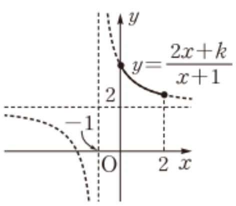
$\therefore\ k\neq 2$

(i) $k>2$일 때,

주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $0\leq x\leq 2$에서 $x=0$일 때 최대이므로

$k=1$

그런데 $k>2$이어야 하므로 모순이다. ··· ❷

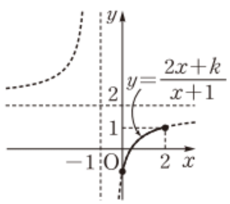


(ii) $k<2$일 때,

주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $0\leq x\leq 2$에서 $x=2$일 때 최대이므로

$\dfrac{4+k}{3}=1$

$\therefore\ k=-1$ ··· ❸



(i), (ii)에서

$k=-1$ ··· ❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $y=\dfrac{l}{x-p}+q$ 꼴로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $k>2$일 때, k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $k<2$일 때, k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0693 **전략** 두 점 A, B의 x좌표는 방정식 $\dfrac{1}{x}=2x+k$의 실근과 같다.

풀이 $\dfrac{1}{x}=2x+k$에서 $\quad 1=2x^2+kx$

$\therefore\ 2x^2+kx-1=0$ ······ ㉠

두 점 A, B의 좌표를 각각 $\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$, $\left(\beta,\ \dfrac{1}{\beta}\right)$이라 하면 α, β는 방정식 ㉠의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{k}{2}$, $\alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$ ··· ❶

이때 선분 AB의 중점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}\right)$

이므로

$\left(\dfrac{-\frac{k}{2}}{2},\ \dfrac{-\frac{k}{2}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)$, 즉 $\left(-\dfrac{k}{4},\ \dfrac{k}{2}\right)$ ··· ❷

따라서 $x=-\dfrac{k}{4}$, $y=\dfrac{k}{2}$이므로 $\quad y=-2x$ ··· ❸

답 $y=-2x$

채점 기준	비율
❶ 방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	40 %
❷ 점 P의 좌표를 k를 사용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있다.	30 %

0694 **전략** $f^{-1}(x)$, $(f\circ f)(x)$를 구하여 각 항의 계수를 비교한다.

풀이 $y=\dfrac{3x+a}{x-2}$라 하면 $\quad y(x-2)=3x+a$

$(y-3)x=2y+a \quad \therefore\ x=\dfrac{2y+a}{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{2x+a}{x-3}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{2x+a}{x-3}$ ··· ❶

이때

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{3\cdot\dfrac{3x+a}{x-2}+a}{\dfrac{3x+a}{x-2}-2}$

$=\dfrac{(a+9)x+a}{x+a+4}$ ··· ❷

이므로 $\quad \dfrac{2x+a}{x-3}=\dfrac{(a+9)x+a}{x+a+4}$

따라서 $a+9=2$, $a+4=-3$이므로

$a=-7$ ··· ❸

답 -7

채점 기준	비율
❶ $f^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $(f\circ f)(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

17 무리식과 무리함수

0695 $x+2\geq 0 \quad \therefore x\geq -2$ 답 $x\geq -2$

0696 $x-1\geq 0$, $x+4\geq 0$이므로 $\quad x\geq 1$, $x\geq -4$
$\therefore x\geq 1$ 답 $x\geq 1$

0697 $x-2\geq 0$, $\underline{3-x>0}$이므로 $\quad x\geq 2$, $x<3$
(근호 안의 식의 값)≥ 0, (분모)$\neq 0$
$\therefore 2\leq x<3$ 답 $2\leq x<3$

0698 $x+1\geq 0$, $5-x>0$이므로 $\quad x\geq -1$, $x<5$
$\therefore -1\leq x<5$ 답 $-1\leq x<5$

0699 $a<0$일 때, $-a>0$이므로
ㄱ. $\sqrt{a^2}=|a|=-a$
ㄴ. $-\sqrt{a^2}=-|a|=-(-a)=a$
ㄷ. $\sqrt{(-a)^2}=|-a|=-a$
ㄹ. $-\sqrt{(-a)^2}=-|-a|=-(-a)=a$
ㅁ. $(-\sqrt{-a})^2=(\sqrt{-a})^2=-a$
이상에서 그 값이 양수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ

0700 $a>0$, $2b<0$, $a-b>0$이므로
$$\begin{aligned}\sqrt{a^2}+\sqrt{4b^2}+\sqrt{(a-b)^2}&=|a|+|2b|+|a-b|\\&=a-2b+a-b\\&=2a-3b\end{aligned}$$
답 $2a-3b$

0701 $1-\sqrt{2}<0$이므로
$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$
답 $-1+\sqrt{2}$

0702 $x-10>0$이므로
$\sqrt{(x-10)^2}=|x-10|=x-10$ 답 $x-10$

0703 $x-1>0$, $x-2<0$이므로
$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}&=|x-1|+|x-2|\\&=(x-1)-(x-2)\\&=1\end{aligned}$$
답 1

0704 $(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$
$=(\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{x})^2$
$=x-2-x=-2$ 답 -2

0705 $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})$
$=(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2$
$=(x+1)-(x-1)=2$ 답 2

0706 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 답 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

0707 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1$
답 $\sqrt{2}+1$

0708
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}&=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}\\&=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}\\&=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\end{aligned}$$
답 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

0709
$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}&=\frac{4(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}\\&=\frac{4(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{x+2-(x-2)}\\&=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\end{aligned}$$
답 $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$

0710
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}&=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\\&=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}\end{aligned}$$
답 $\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}$

0711
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}&=\frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}\\&=\frac{x-1+2\sqrt{x(x-1)}+x}{x-1-x}\\&=-2x+1-2\sqrt{x(x-1)}\end{aligned}$$
답 $-2x+1-2\sqrt{x(x-1)}$

0712
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}&=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\\&=\frac{2\sqrt{a}}{a-b}\end{aligned}$$
답 $\dfrac{2\sqrt{a}}{a-b}$

0713 $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}+1}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}-1}$
$$\begin{aligned}&=\frac{(x-1)(\sqrt{x+1}-1)-(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}\\&=\frac{-2(x+\sqrt{x+1})}{x+1-1}\\&=\frac{-2(x+\sqrt{x+1})}{x}\end{aligned}$$
답 $\dfrac{-2(x+\sqrt{x+1})}{x}$

0714 $\underline{\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}=\dfrac{2}{1-x}}$
먼저 주어진 식을 간단히 한다.
$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$를 대입하면
$$\frac{2}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4}{2-\sqrt{2}}=\frac{4(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=2(2+\sqrt{2})$$
답 $2(2+\sqrt{2})$

0715 ㄴ. $y=-\sqrt{3}x$는 다항함수이다.
ㄹ. $y=\sqrt{(x+2)^2}$, 즉 $y=|x+2|$는 무리함수가 아니다.
이상에서 무리함수는 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ

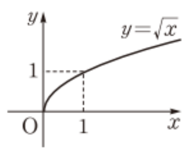
0716 $x+1\geq 0$에서 $x\geq -1$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|x\geq -1\}$ 답 $\{x|x\geq -1\}$

0717 $-x\geq 0$에서 $x\leq 0$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|x\leq 0\}$ 답 $\{x|x\leq 0\}$

0718 $2x-3\geq 0$에서 $x\geq \frac{3}{2}$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\left\{x \middle| x\geq \frac{3}{2}\right\}$ 답 $\left\{x \middle| x\geq \frac{3}{2}\right\}$

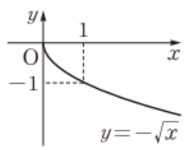
0719 $4-x^2\geq 0$에서 $x^2-4\leq 0$
$(x+2)(x-2)\leq 0$ $\therefore -2\leq x\leq 2$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|-2\leq x\leq 2\}$ 답 $\{x|-2\leq x\leq 2\}$

0720 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\geq 0\}$,
치역은 $\{y|y\geq 0\}$



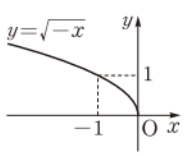
답 풀이 참조

0721 $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\geq 0\}$,
치역은 $\{y|y\leq 0\}$



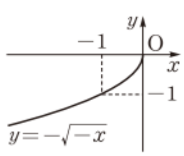
답 풀이 참조

0722 $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\leq 0\}$,
치역은 $\{y|y\geq 0\}$



답 풀이 참조

0723 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\leq 0\}$,
치역은 $\{y|y\leq 0\}$



답 풀이 참조

0724 ㄱ. 함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$의 정의역은
$a>0$일 때, $\{x|x\geq 0\}$
$a<0$일 때, $\{x|x\leq 0\}$
ㄹ. $a<0$이면 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프는 원점과 제2사분면을 지난다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0725 y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=\sqrt{-3x}$ $\therefore y=-\sqrt{-3x}$ 답 $y=-\sqrt{-3x}$

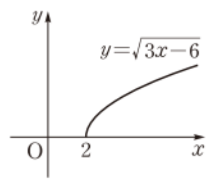
0726 x 대신 $-x$를 대입하면
$y=\sqrt{-3(-x)}$ $\therefore y=\sqrt{3x}$ 답 $y=\sqrt{3x}$

0727 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=\sqrt{-3(-x)}$ $\therefore y=-\sqrt{3x}$ 답 $y=-\sqrt{3x}$

0728 $y=\sqrt{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-1=\sqrt{5\{x-(-1)\}}$ $\therefore y=\sqrt{5(x+1)}+1$
답 $y=\sqrt{5(x+1)}+1$

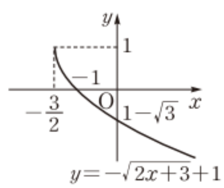
0729 $y=\sqrt{4-2x}+2=\sqrt{-2(x-2)}+2$
따라서 $y=\sqrt{4-2x}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
$\therefore a=2,\ b=2$ 답 $a=2,\ b=2$

0730 $y=\sqrt{3x-6}=\sqrt{3(x-2)}$
따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\geq 2\}$,
치역은 $\{y|y\geq 0\}$



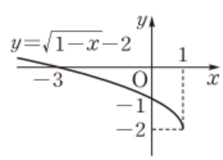
답 풀이 참조

0731 $y=-\sqrt{2x+3}+1=-\sqrt{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}+1$
따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\left\{x \middle| x\geq -\frac{3}{2}\right\}$,
치역은 $\{y|y\leq 1\}$



답 풀이 참조

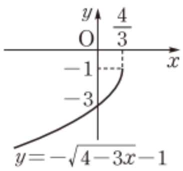
0732 $y=\sqrt{1-x}-2=\sqrt{-(x-1)}-2$
따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\leq 1\}$,
치역은 $\{y|y\geq -2\}$



답 풀이 참조

0733 $y=-\sqrt{4-3x}-1=-\sqrt{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}-1$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



정의역은 $\left\{x \,\middle|\, x\le\frac{4}{3}\right\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\le-1\}$ 답 풀이 참조

유형 01 무리식의 값이 실수가 되기 위한 조건 본책 108쪽

① $\sqrt{A}$가 실수이려면 ➡ $A\ge0$

② $\frac{1}{\sqrt{A}}$이 실수이려면 ➡ $A>0$

0734 $6x^2+5x-4\ge0$에서 $(3x+4)(2x-1)\ge0$

$\therefore x\le-\frac{4}{3}$ 또는 $x\ge\frac{1}{2}$ 답 $x\le-\frac{4}{3}$ 또는 $x\ge\frac{1}{2}$

0735 $4-3x\ge0$에서 $x\le\frac{4}{3}$

$x+3>0$에서 $x>-3$

$\therefore -3<x\le\frac{4}{3}$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1의 4개이다. 답 ④

유형 02 제곱근의 성질 본책 108쪽

a가 실수일 때 ➡ $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\ge0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$

0736 $-\frac{1}{2}<a<1$에서 $a-1<0$, $2a+1>0$이므로

$\sqrt{a^2-2a+1}=\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|=-a+1$

$\sqrt{4a^2+4a+1}=\sqrt{(2a+1)^2}=|2a+1|=2a+1$

$\therefore \sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{4a^2+4a+1}$

$=(-a+1)+(2a+1)=a+2$ 답 ③

0737 $-1\le a\le1$에서 $a+1\ge0$이므로

$\sqrt{x}=\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|=a+1$

$x-4a=(a+1)^2-4a=(a-1)^2$이고 $a-1\le0$이므로

$\sqrt{x-4a}=\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|=-a+1$

$\therefore \sqrt{x}+\sqrt{x-4a}=(a+1)+(-a+1)=2$ 답 ①

0738 $x+y=a^2+2+2a=(a+1)^2+1>0$

$x-y=a^2+2-2a=(a-1)^2+1>0$

$\therefore \sqrt{(x+y)^2}-\sqrt{(x-y)^2}=|x+y|-|x-y|$

$=(x+y)-(x-y)$

$=2y=4a$ 답 $4a$

0739 $x+3\ge0$이므로 $x\ge-3$ …… ㉠

$3-x\ge0$이므로 $x\le3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는 $-3\le x\le3$ ··· ❶

$-3\le x\le3$일 때, $2x-7<0$, $x-4<0$이므로

$|2x-7|-\sqrt{x^2-8x+16}=|2x-7|-\sqrt{(x-4)^2}$

$=|2x-7|-|x-4|$

$=-(2x-7)+(x-4)$

$=-x+3$ ··· ❷

답 $-x+3$

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %

유형 03 음수의 제곱근의 성질 본책 108쪽

두 실수 a, b에 대하여

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ ➡ $a<0$, $b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

② $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$ ➡ $a>0$, $b<0$ 또는 $a=0$, $b\ne0$

0740 $\sqrt{a-3}\sqrt{1-a}=-\sqrt{(a-3)(1-a)}$에서

$a-3\le0$, $1-a\le0$

$\therefore 1\le a\le3$

따라서 $a+2>0$, $a-4<0$이므로

$\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(a-4)^2}=|a+2|+|a-4|$

$=(a+2)-(a-4)$

$=6$ 답 ③

0741 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$에서 $a>0$, $b<0$이므로

$\sqrt{a^2-2ab+b^2}+2|a|-\sqrt{b^2}$

$=\sqrt{(a-b)^2}+2|a|-\sqrt{b^2}$

$=|a-b|+2|a|-|b|$

$=(a-b)+2a-(-b)$

$=3a$ 답 $3a$

유형 04 분모의 유리화 본책 109쪽

분모에 근호를 포함한 수 또는 식

➡ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$임을 이용하여 분모를 유리화한다.

0742 $\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$

$=\frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})+(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}$

$=\frac{2\sqrt{x-1}}{(x-1)-x}$

$=-2\sqrt{x-1}$ 답 ⑤

0743 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$ ...... ㉠

이때

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=12-8=4$

이므로 $x-y=2$ ($\because x>y$)

따라서 ㉠에서

$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

답 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

0744 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$

$=-\sqrt{x-1}+\sqrt{x}$ ··· ❶

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=(-0+1)+(-1+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$+\cdots+(-\sqrt{99}+\sqrt{100})$

$=\sqrt{100}=10$ ··· ❷

답 10

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0745 $\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{4+a_1}$에서

$4+a_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$

$\therefore a_1=\sqrt{5}+2-4=\sqrt{5}-2$

$a_1=\dfrac{1}{4+a_2}$, 즉 $\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{4+a_2}$에서

$4+a_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$

$\therefore a_2=\sqrt{5}-2$

$a_2=\dfrac{1}{4+a_3}$, 즉 $\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{4+a_3}$에서

$4+a_3=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$

$\therefore a_3=\sqrt{5}-2$

⋮

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\sqrt{5}-2$

$\therefore a_7+a_8=(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}-2)=2\sqrt{5}-4$

답 ②

유형 05 무리식의 값 구하기

본책 109쪽

① 식을 간단히 할 수 있으면 ➡ 식을 간단히 한 후 수를 대입한다.
② 식을 간단히 할 수 없으면 ➡ 수를 먼저 대입한다.

0746 $\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}$ ← 식을 간단히 한다.

$=\dfrac{(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x})^2}{(\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x})(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x})}$

$=\dfrac{3+x+3-x-2\sqrt{9-x^2}}{(3+x)-(3-x)}$

$=\dfrac{6-2\sqrt{9-x^2}}{2x}=\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}$ ← $x=\sqrt{5}$를 대입한다.

$=\dfrac{3-\sqrt{4}}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

답 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

0747 $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{(\sqrt{1-x})^2+(\sqrt{1+x})^2}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}$ ← 통분한다.

$=\dfrac{(1-x)+(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=4$

답 ④

0748 $\sqrt{x+2}=2$의 양변을 제곱하면

$x+2=4$ $\therefore x=2$ ··· ❶

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1)}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$=\sqrt{2}-1$ ··· ❷

답 $\sqrt{2}-1$

채점 기준	비율
❶ x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	70 %

유형 06 무리식의 값 구하기 ; $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $y=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 꼴

본책 110쪽

x, y가 $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $y=\sqrt{a}-\sqrt{b}$와 같이 주어지면
➡ $x+y$, $x-y$, xy의 값을 이용한다.

0749 $x+y=2\sqrt{3}$, $xy=1$이므로

$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1}}=2\sqrt{3}$

답 ③

0750 $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$,

$y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=3-2\sqrt{2}$이므로

$x+y=6,\ xy=1$ ⋯ ❶

$\sqrt{2x}-\sqrt{2y}$를 제곱하면

$(\sqrt{2x}-\sqrt{2y})^2=2x-2\sqrt{2x}\sqrt{2y}+2y$

$=2(x+y)-4\sqrt{xy}$ — $x>0,\ y>0$이면 $2\sqrt{2x}\sqrt{2y}=2\cdot2\sqrt{xy}=4\sqrt{xy}$

$=2\cdot6-4\cdot1=8$ ⋯ ❷

이때 $x>y$에서 $\sqrt{2x}>\sqrt{2y}$이므로 $\sqrt{2x}-\sqrt{2y}>0$

$\therefore\ \sqrt{2x}-\sqrt{2y}=2\sqrt{2}$ ⋯ ❸

답 $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $x+y,\ xy$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $(\sqrt{2x}-\sqrt{2y})^2$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sqrt{2x}-\sqrt{2y}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0751 $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,

$y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$이므로

$x+y=\sqrt{6},\ x-y=\sqrt{2}$

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{2(x+y)}{x-y}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

$=2\sqrt{3}$

답 ③

유형 07 무리식의 값 구하기 ; $x=a\pm\sqrt{b}$ 꼴

본책 110쪽

x가 $x=a+\sqrt{b}$와 같이 주어지면

➡ $x-a=\sqrt{b}$의 양변을 제곱한다.

0752 $x=3+2\sqrt{3}$에서 $x-3=2\sqrt{3}$

위의 식의 양변을 제곱하면 $x^2-6x+9=12$

따라서 $x^2-6x-3=0$이므로

$x^3-6x^2-2x-3=x(x^2-6x-3)+x-3$

$=x\cdot0+2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

답 $2\sqrt{3}$

0753 $x=\sqrt{7}-1$에서 $x+1=\sqrt{7}$

위의 식의 양변을 제곱하면 $x^2+2x+1=7$

따라서 $x^2+2x-6=0$이므로

$(x+3)(x-1)(x^2+2x+4)$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x+4)$

$=\{(x^2+2x-6)+3\}\{(x^2+2x-6)+10\}$

$=3\cdot10=30$

답 ⑤

0754 $x=\sqrt{5}-2$에서 $x+2=\sqrt{5}$

위의 식의 양변을 제곱하면 $x^2+4x+4=5$

따라서 $x^2+4x-1=0$이므로 — $x^4+3x^3-8x^2-9x+4$를 x^2+4x-1로 나누면 몫이 x^2-x-3, 나머지가 $2x+1$이다.

$x^4+3x^3-8x^2-9x+4=(x^2+4x-1)(x^2-x-3)+2x+1$

$=2x+1$

$\therefore\ \dfrac{x^4+3x^3-8x^2-9x+4}{x^2+4x+2}=\dfrac{2x+1}{(x^2+4x-1)+3}$

$=\dfrac{2(\sqrt{5}-2)+1}{3}$

$=\dfrac{2\sqrt{5}-3}{3}$

답 $\dfrac{2\sqrt{5}-3}{3}$

유형 08 무리함수의 정의역과 치역

본책 110쪽

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a>0)$에 대하여

➡ 정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\ge-\dfrac{b}{a}\right\}$, 치역: $\{y\mid y\ge c\}$

0755 $-2x+2\ge0$에서 $2x\le2$ $\therefore\ x\le1$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\{x\mid x\le1\}$이므로 $a=1$

또 함수 $y=\sqrt{-2x+2}+b$의 치역은 $\{y\mid y\ge b\}$이므로

$b=3$

$\therefore\ ab=3$

답 ④

0756 $ax+9\ge0$에서 $ax\ge-9$ $\therefore\ x\ge-\dfrac{9}{a}$ — 정의역이 $\{x\mid x\ge-3\}$이므로 $a>0$

즉 $-\dfrac{9}{a}=-3$이므로 $a=3$

또 $y=-\sqrt{3x+9}+b$의 그래프가 점 $(9,\ -4)$를 지나므로

$-4=-\sqrt{3\cdot9+9}+b$ $\therefore\ b=2$

따라서 주어진 함수의 치역은

$\{y\mid y\le2\}$

답 $\{y\mid y\le2\}$

0757 $y=\dfrac{4x+13}{x+5}=\dfrac{4(x+5)-7}{x+5}=-\dfrac{7}{x+5}+4$이므로 점근선의 방정식은 $x=-5,\ y=4$

$\therefore\ a=-5,\ b=4$ ⋯ ❶

$f(x)=\sqrt{-5x+4}+c$에서 $f(0)=1$이므로

$2+c=1$ $\therefore\ c=-1$ ⋯ ❷

$\therefore\ f(x)=\sqrt{-5x+4}-1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\le\dfrac{4}{5}\right\}$이고, 치역은 $\{y\mid y\ge-1\}$이다. ⋯ ❸

답 정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\le\dfrac{4}{5}\right\}$, 치역: $\{y\mid y\ge-1\}$

채점 기준	비율
❶ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 함수 $y=f(x)$의 정의역과 치역을 구할 수 있다.	40 %

0758 $y=\dfrac{ax+3}{x+b}=\dfrac{a(x+b)+3-ab}{x+b}=\dfrac{3-ab}{x+b}+a$이고, 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=-1$이므로

$a=-1$, $b=-4$

따라서 함수 $y=\sqrt{-4x-1}$의 정의역은 $\left\{x \middle| x\le-\dfrac{1}{4}\right\}$이므로 구하는 정수의 최댓값은 -1이다.

답 ②

유형 09~12 무리함수의 그래프 본책 111~113쪽

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a>0)$의 그래프

① $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$

➡ $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

② 정의역: $\left\{x \middle| x\ge-\dfrac{b}{a}\right\}$, 치역: $\{y|y\ge c\}$

③ x축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-\sqrt{ax+b}-c$
y축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=\sqrt{-ax+b}+c$
원점에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-\sqrt{-ax+b}-c$

0759 $y=\sqrt{a(x-1)}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-b-1)}+3+c$

이 함수의 그래프가

$y=\sqrt{6-3x}=\sqrt{-3(x-2)}$

의 그래프와 일치하므로

$a=-3$, $-b-1=-2$, $3+c=0$

따라서 $a=-3$, $b=1$, $c=-3$이므로

$abc=9$

답 9

0760 ㄱ. $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ. $y=-\sqrt{3-x}=-\sqrt{-(x-3)}$
따라서 $y=-\sqrt{3-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄹ. $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-3}+1=\sqrt{\dfrac{1}{4}(4x-3)}+1$
$=\sqrt{x-\dfrac{3}{4}}+1$
따라서 $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-3}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\dfrac{3}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

0761 $y=\sqrt{-x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-(x-2)+1}-1=\sqrt{-x+3}-1$ ··· ❶

이 함수의 그래프를 다시 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{x+3}-1$ ··· ❷

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=-1$이므로

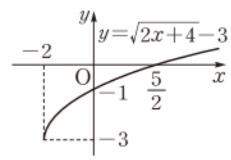
$a+b+c=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

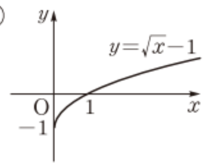
0762 $y=\sqrt{2x+4}-3=\sqrt{2(x+2)}-3$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{2x+4}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3, 4사분면을 지난다.

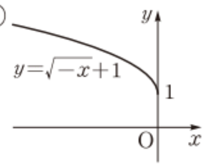


답 ⑤

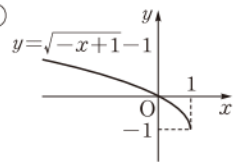
0763 ①



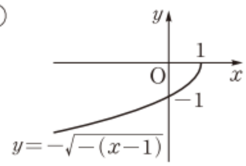
②



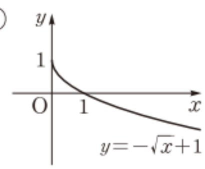
③



④



⑤



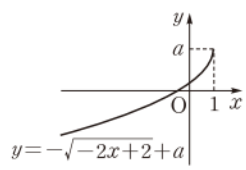
따라서 그래프가 제4사분면을 지나지 않는 것은 ②이다.

답 ②

0764 $y=-\sqrt{-2x+2}+a=-\sqrt{-2(x-1)}+a$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-\sqrt{-2x+2}+a$의 그래프가 제1, 2, 3사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 $y>0$이어야 하므로

$y\le0$이면 제2사분면을 지나지 않는다.



$-\sqrt{2}+a>0$ $\quad\therefore a>\sqrt{2}$

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다.

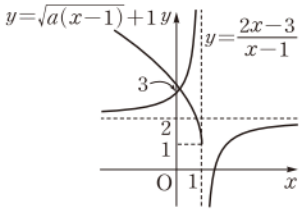
답 2

0765 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-1)}+1$

$y=\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-1}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}+2$이므로 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



$y=\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프가 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프와 제1사분면에서 만나려면 $x=0$일 때 $y>3$이어야 한다. 즉 $\sqrt{-a}+1>3$이어야 하므로

$\sqrt{-a}>2$

$-a>4 \qquad \therefore a<-4$

답 ①

0766 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+1)}-1$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{a}-1,\qquad \sqrt{a}=2 \qquad \therefore a=4$

㉠에 $a=4$를 대입하면

$y=\sqrt{4(x+1)}-1=\sqrt{4x+4}-1$

따라서 $a=4$, $b=4$, $c=-1$이므로

$a+b+c=7$

답 7

0767 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x-p)}+q$ ··· ❶

이 함수가 $y=\sqrt{a(x+b)}+c$와 같으므로

$b=-p,\ c=q$ ··· ❷

이때 $p>0$, $q<0$이므로

$a<0,\ b<0,\ c<0$ ··· ❸

답 $a<0,\ b<0,\ c<0$

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 그래프의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ b, c를 p, q에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a, b, c의 부호를 구할 수 있다.	30 %

참고 주어진 함수의 정의역이 $\{x\,|\,x\le p\}$이므로 $a<0$임을 알 수 있다.

0768 주어진 그래프의 모양에서 $\quad b>0$

$y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=c$이므로

$-a<0,\ c<0 \qquad \therefore a>0,\ c<0$

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$이므로 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a>0$, $-\dfrac{b}{a}<0$, $c<0$이므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형은 ⑤와 같다.

$a>0,\ b>0$이므로 $-\dfrac{b}{a}<0$

답 ⑤

0769 ① $6-2x\ge0$에서 $x\le3$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\le3\}$

② $\sqrt{6-2x}\ge0$에서 $\sqrt{6-2x}-1\ge-1$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\ge-1\}$

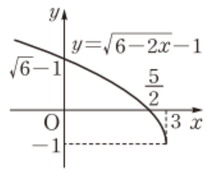
③ $y=\sqrt{6-2x}-1$에 $x=3$을 대입하면

$y=-1$

따라서 점 $(3,\ -1)$을 지난다.

④ $y=\sqrt{6-2x}-1=\sqrt{-2(x-3)}-1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\sqrt{6-2x}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



답 ④

0770 ㄱ. $a>0$, $b<0$이면 정의역이 $\{x\,|\,x\le0\}$, 치역이 $\{y\,|\,y\ge0\}$이므로 그래프는 제2사분면을 지난다.

ㄷ. 그래프는 $y=-a\sqrt{bx}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

유형 13 무리함수의 최대·최소

본책 113쪽

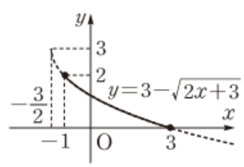
정의역이 $\{x\,|\,p\le x\le q\}$인 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 최대·최소

➡ ① $a>0$일 때, 최솟값은 $f(p)$, 최댓값은 $f(q)$

② $a<0$일 때, 최솟값은 $f(q)$, 최댓값은 $f(p)$

0771 $y=3-\sqrt{2x+3}=-\sqrt{2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}+3$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$-1\le x\le3$에서 $y=3-\sqrt{2x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-1$일 때 최댓값 2,

$x=3$일 때 최솟값 0

을 갖는다.

따라서 $a=2$, $b=0$이므로

$a+b=2$

답 2

0772 $y=\sqrt{3x-6}+a=\sqrt{3(x-2)}+a$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

즉 $x=2$일 때 최솟값 a를 가지므로 $\quad a=4$

따라서 $y=\sqrt{3(x-2)}+4$의 그래프가 점 $(b,\ 7)$을 지나므로

$7=\sqrt{3(b-2)}+4, \qquad \sqrt{3(b-2)}=3$

$3(b-2)=9 \qquad \therefore b=5$

$\therefore a+b=9$

답 ③

0773 $y=\sqrt{3x+a}-5=\sqrt{3\left(x+\dfrac{a}{3}\right)}-5$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{a}{3}$만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\sqrt{3x+a}-5$는 $x=17$일 때 최댓값 2를 가지므로

$2=\sqrt{3\cdot17+a}-5, \qquad 7=\sqrt{51+a}$

$49=51+a$

$\therefore a=-2$

즉 함수 $y=\sqrt{3x-2}-5$는 $\underbrace{x=2\text{일 때 최솟값 }-3}_{\sqrt{3\cdot2-2}-5=2-5=-3}$을 갖는다.

답 ③

0774 $y=\sqrt{1-4x}+5=\sqrt{-4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)}+5$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

$-2\le x\le a$에서 $\underbrace{y=\sqrt{1-4x}+5}_{\text{정의역이 }\left\{x \middle| x\le\frac{1}{4}\right\}\text{이므로 } a\le\frac{1}{4}}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-2$일 때 최댓값 b,

$x=a$일 때 최솟값 6

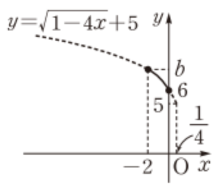
을 갖는다. 즉

$b=\sqrt{1-4\cdot(-2)}+5=8$

$\underbrace{\sqrt{1-4a}+5=6}_{\sqrt{1-4a}=1,\ \ 1-4a=1\ \ \therefore a=0}$

따라서 $a=0$, $b=8$이므로

$a+b=8$



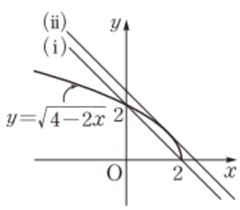
답 8

유형 14 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계 본책 114쪽

① 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 위치 관계
➡ 그래프를 직접 그려 본다.

② 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접할 때
➡ 이차방정식 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$의 판별식을 D라 하면 $\quad D=0$

0775 $y=\sqrt{4-2x}=\sqrt{-2(x-2)}$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$0=-2+k$

$\therefore k=2$

(ii) 함수 $y=\sqrt{4-2x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때,

$\sqrt{4-2x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$4-2x=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-2(k-1)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-4)=0$

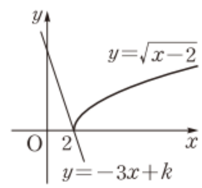
$-2k+5=0 \qquad \therefore k=\dfrac{5}{2}$

(i), (ii)에서 $\quad 2\le k<\dfrac{5}{2}$

답 ⑤

0776 함수 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, $y=-3x+k$는 기울기가 -3이고 y절편이 k인 직선이다.

이때 $A\cap B\ne\varnothing$이므로 함수 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=-3x+k$가 만나야 한다.



직선 $y=-3x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$0=-6+k \qquad \therefore k=6$

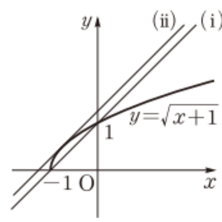
따라서 직선 $y=-3x+k$가 함수 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프와 만나려면

$k\ge6$

이어야 하므로 k의 최솟값은 6이다.

답 ④

0777 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고, $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때,

$0=-1+k \qquad \therefore k=1$ ··· ❶

(ii) $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

$\sqrt{x+1}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x+1=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$

$-4k+5=0 \qquad \therefore k=\dfrac{5}{4}$ ··· ❷

(i), (ii)에서

$$f(k)=\begin{cases}0 & \left(k>\dfrac{5}{4}\right)\\ 1 & \left(k=\dfrac{5}{4}\text{ 또는 }k<1\right)\\ 2 & \left(1\le k<\dfrac{5}{4}\right)\end{cases}$$ ··· ❸

$\therefore f\left(\dfrac{1}{4}\right)+f(1)+f\left(\dfrac{5}{4}\right)+f(2)$

$=1+2+1+0=4$ ··· ❹

답 4

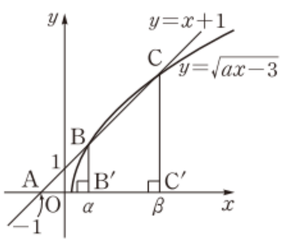
17 무리식과 무리함수

채점 기준	비율
❶ 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때 k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 함수의 그래프가 접할 때 k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(k)$를 구할 수 있다.	20 %
❹ $f\left(\frac{1}{4}\right)+f(1)+f\left(\frac{5}{4}\right)+f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0778 $a<0$이면 함수 $y=\sqrt{ax-3}$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 한 점에서 만나거나 만나지 않으므로

$a>0$

함수 $y=\sqrt{ax-3}$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 오른쪽 그림과 같고 두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $B'(\alpha,\ 0)$, $C'(\beta,\ 0)$이라 하자.



$A(-1,\ 0)$이고 점 B가 선분 AC를 $2:3$으로 내분하므로

$\overline{AB'}:\overline{B'C'}=\overline{AB}:\overline{BC}$

$=2:3$

즉 $\alpha+1:\beta-\alpha=2:3$이므로

$2(\beta-\alpha)=3(\alpha+1)$, $\quad 2\beta-2\alpha=3\alpha+3$

$\therefore \beta=\dfrac{5\alpha+3}{2}$ ······ ㉠

직선 $y=x+1$과 함수 $y=\sqrt{ax-3}$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 $\sqrt{ax-3}=x+1$에서

$ax-3=(x+1)^2$

$ax-3=x^2+2x+1$

$\therefore x^2+(2-a)x+4=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a-2$ ······ ㉡

$\alpha\beta=4$ ······ ㉢

㉢에 ㉠을 대입하면

$\alpha\cdot\dfrac{5\alpha+3}{2}=4$, $\quad 5\alpha^2+3\alpha-8=0$

$(5\alpha+8)(\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=1\ (\because \alpha>0)$

㉠에 $\alpha=1$을 대입하면 $\beta=4$이므로 ㉡에서

$1+4=a-2 \qquad \therefore a=7$

답 ③

0779 $y=\sqrt{1-x^2}$의 양변을 제곱하면

$y^2=1-x^2$

$\therefore x^2+y^2=1\ (y\geq 0)$

즉 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$의 그래프는 중심이 $(0,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 1인 원에서 $y\geq 0$인 부분이다.

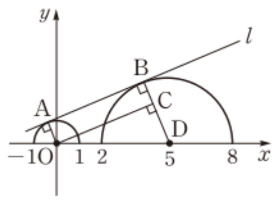
또 $y=\sqrt{-x^2+10x-16}$의 양변을 제곱하면

$y^2=-x^2+10x-16$

$\therefore (x-5)^2+y^2=9\ (y\geq 0)$

즉 함수 $y=\sqrt{-x^2+10x-16}$의 그래프는 중심이 $(5,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 3인 원에서 $y\geq 0$인 부분이다.

따라서 주어진 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $D(5,\ 0)$이라 하고 원점 O에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 C라 하면



$\overline{CD}=\overline{BD}-\underbrace{\overline{BC}}_{\overline{BC}=\overline{AO}=1}=3-1=2$

직각삼각형 ODC에서

$\overline{OC}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{OC}=\sqrt{21}$

답 $\sqrt{21}$

유형 15 무리함수의 역함수와 그 성질

본책 115쪽

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\,(a\neq 0)$의 역함수 구하기

(i) x를 y에 대한 식으로 나타낸다.

➡ $y-c=\sqrt{ax+b}$의 양변을 제곱하면 $\quad (y-c)^2=ax+b$

$\therefore x=\dfrac{1}{a}\{(y-c)^2-b\}$

(ii) x와 y를 서로 바꾼다.

➡ $y=\dfrac{1}{a}\{(x-c)^2-b\}$

(iii) $y=\sqrt{ax+b}+c$의 치역이 $\{y\,|\,y\geq c\}$이므로 역함수의 정의역은

➡ $\{x\,|\,x\geq c\}$

0780 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{2a+b} \qquad \therefore 2a+b=1$ ······ ㉠

또 역함수의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 점 $(1,\ 2)$를 지난다.

즉 $2=\sqrt{a+b}$이므로 $\quad a+b=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=7$

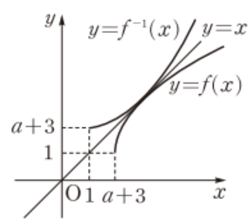
$\therefore ab=-21$

답 ①

0781 $y=2\sqrt{x-3}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2\sqrt{x-a-3}+1$ ···➊

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 접한다. ···➋



$2\sqrt{x-a-3}+1=x$에서

$2\sqrt{x-a-3}=x-1$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4(x-a-3)=x^2-2x+1$

$\therefore x^2-6x+4a+13=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

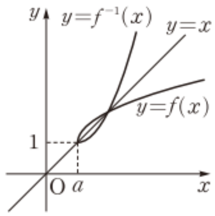
$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-(4a+13)=0$

$-4a-4=0 \qquad \therefore a=-1$ ···➌

답 -1

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	20 %
❷ $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 접함을 알 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

0782 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{x-a}+1$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x-a}+1=x$에서 $\quad \sqrt{x-a}=x-1$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x-a=x^2-2x+1$

$\therefore x^2-3x+a+1=0$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=a+1$

이때 두 교점의 좌표는 (α, α), (β, β)이므로 두 점 사이의 거리는

$$\begin{aligned}\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}&=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}\\&=\sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}\\&=\sqrt{2\{3^2-4(a+1)\}}\\&=\sqrt{10-8a}\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{10-8a}=\sqrt{2}$이므로

$10-8a=2 \qquad \therefore a=1$

답 1

0783 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 두 점 $(3, 4)$, $(5, 0)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(4, 3)$, $(0, 5)$를 지난다. 또 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역이 $\{x|x\geq 3\}$, 치역이 $\{y|y\leq 4\}$이므로 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x|x\leq 4\}$, 치역은 $\{y|y\geq 3\}$이다.

즉 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$는 $y=\sqrt{ax}\,(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식이므로

$\dfrac{b}{a}=-4$, $c=3$

또 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 점 $(0, 5)$를 지나므로

$5=\sqrt{b}+c, \qquad 5=\sqrt{b}+3$

$\sqrt{b}=2 \qquad \therefore b=4$

$\dfrac{b}{a}=-4$에 $b=4$를 대입하면

$\dfrac{4}{a}=-4 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore a+b+c=6$

답 ①

다른 풀이 $f^{-1}(x)=k(x-3)^2+4\,(k<0,\ x\geq 3)$라 하면

꼭짓점의 좌표가 $(3, 4)$이고 위로 볼록한 이차함수의 그래프 중 $x\geq 3$인 부분이다.

$y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(5, 0)$을 지나므로

$k(5-3)^2+4=0, \qquad 4k=-4$

$\therefore k=-1$

$\therefore f^{-1}(x)=-(x-3)^2+4\,(x\geq 3)$

$y=-(x-3)^2+4$라 하면 $\quad (x-3)^2=-y+4$

$x-3=\pm\sqrt{-y+4}$

$x-3=\sqrt{-y+4}\ (\because x\geq 3) \qquad \therefore x=\sqrt{-y+4}+3$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\sqrt{-x+4}+3$

$\therefore f(x)=\sqrt{-x+4}+3$

따라서 $a=-1$, $b=4$, $c=3$이므로

$a+b+c=6$

참고 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq 0,\ y\geq c)$라 하면

$y-c=\sqrt{ax+b}, \qquad (y-c)^2=ax+b$

$\therefore x=\dfrac{1}{a}\{(y-c)^2-b\}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{1}{a}\{(x-c)^2-b\}$

즉 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq 0)$의 역함수는

$y=\dfrac{1}{a}(x-c)^2-\dfrac{b}{a}\ (x\geq c)$

따라서 주어진 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$의 역함수를 $f^{-1}(x)=k(x-3)^2+4\ (k<0,\ x\geq 3)$로 놓을 수 있다.

유형 16 무리함수의 합성함수와 역함수

본책 115쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$에 대하여

① $(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))$

② $(g^{-1}\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))$

③ $g^{-1}(f(a))=k$이면 $\quad g(k)=f(a)$

0784 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)$
$=(g^{-1}\circ f)(3)$
$=g^{-1}(f(3))$

이때 $f(3)=\dfrac{3+1}{3-1}=2$이므로

$g^{-1}(f(3))=g^{-1}(2)$

$g^{-1}(2)=k$라 하면 $\quad g(k)=2$

$\sqrt{3k-2}=2, \qquad 3k-2=4 \qquad \therefore k=2$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=2$

답 ②

0785 $(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(4)=k$라 하면 $\quad f(k)=4$

$\sqrt{2k-4}=4, \qquad 2k-4=16$

$\therefore k=10$

$g(10)=m$이라 하면 $\quad f(m)=10$

$\sqrt{2m-4}=10, \qquad 2m-4=100$

$\therefore m=52$

$\therefore (g\circ g)(4)=g(g(4))=g(10)=52$

답 ③

0786 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(2)=(g^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(f(2))$

$f(2)=\sqrt{2-1}+4=5$이므로

$g^{-1}(f(2))=g^{-1}(5)$

$g^{-1}(5)=k$라 하면 $\quad g(k)=5$

$\sqrt{2k+1}=5, \qquad 2k+1=25 \qquad \therefore k=12$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(2)=12$

답 12

0787 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=16$에서

$(f\circ f)^{-1}(a)=16$

$\therefore (f\circ f)(16)=a$ ⋯ ❶

이때 $f(16)=1-\sqrt{16}=1-4=-3$이고,

$f(-3)=\sqrt{1-(-3)}=\sqrt{4}=2$이므로

$a=(f\circ f)(16)=f(f(16))$

$=f(-3)=2$ ⋯ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $(f\circ f)(16)=a$임을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %

0788 전략 주어진 함수의 점근선의 방정식과 x절편, y절편을 구한 후 그래프를 이용하여 부호를 확인한다.

풀이 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a\left(x+\dfrac{d}{c}\right)-\dfrac{ad}{c}+b}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}$

$=\dfrac{\dfrac{-ad+bc}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}}+\dfrac{a}{c}$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{d}{c},\ y=\dfrac{a}{c}$

이고 x절편은 $-\dfrac{b}{a}$, y절편은 $\dfrac{b}{d}$이다.

주어진 그래프에서

$-\dfrac{d}{c}>0,\ \dfrac{a}{c}>0,\ -\dfrac{b}{a}>0,\ \dfrac{b}{d}>0,\ \dfrac{-ad+bc}{c^2}>0$

이므로

$cd<0,\ ac>0,\ ab<0,\ bd>0,\ ad-bc<0$

$\therefore a>0,\ b<0,\ c>0,\ d<0,\ ad-bc<0$

또는 $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d>0,\ ad-bc<0$

따라서 $ad-bc<0,\ \dfrac{c}{b}<0,\ \dfrac{b}{c}<0$이므로

$\sqrt{(ad-bc)^2}+\sqrt{\dfrac{c}{b}}\sqrt{\dfrac{b}{c}}$

$=|ad-bc|-\sqrt{\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{b}{c}}$

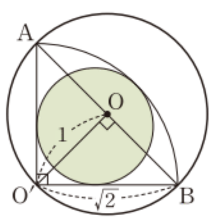
$=-(ad-bc)-1$

$=bc-ad-1$

답 $bc-ad-1$

0789 전략 지름에 대한 원주각의 크기는 $90°$이다.

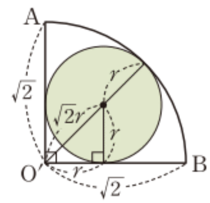
풀이 오른쪽 그림과 같이 사분원 O'이 원 O와 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면 $\angle AO'B$가 직각이므로 선분 AB는 원 O의 지름이다.



즉 $\overline{OO'}=\overline{OB}=1$이므로

$\overline{O'B}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

사분원 O'에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 오른쪽 그림에서



$(\sqrt{2}+1)r=\sqrt{2}$

$\therefore r=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

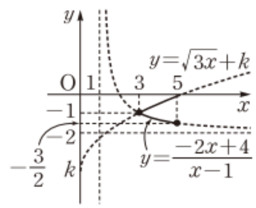
$=2-\sqrt{2}$

답 ③

0790 전략 함수 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}$의 그래프와 주어진 조건을 만족시키는 무리함수의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}-2$이므로 함수 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $3\le x\le 5$에서 정의된 함수 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 점 $(3,\ -1)$을 지날 때 k의 값이 최대이다. 즉



$-1=\sqrt{3\cdot3}+k\qquad \therefore k=-4$

따라서 $M=-4$이므로

$M^2=16$

답 16

참고 함수 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 점 $\left(5,\ -\dfrac{3}{2}\right)$을 지날 때 $k=-\dfrac{3}{2}-\sqrt{15}$이므로 두 함수의 그래프가 한 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는

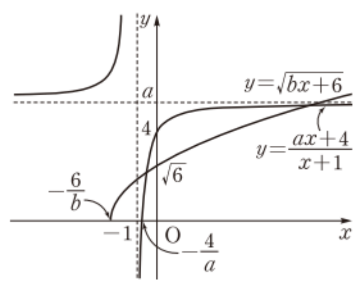
$-\dfrac{3}{2}-\sqrt{15}\le k\le -4$

0791 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 x절편과 y절편을 구한 후 a의 값의 범위를 나누어 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x)=\dfrac{ax+4}{x+1}=\dfrac{a(x+1)-a+4}{x+1}=\dfrac{4-a}{x+1}+a$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=a$이고, x절편은 $-\dfrac{4}{a}$, y절편은 4이다.

또 $g(x)=\sqrt{bx+6}=\sqrt{b\left(x+\dfrac{6}{b}\right)}$이므로 함수 $y=g(x)$의 x절편은 $-\dfrac{6}{b}$, y절편은 $\sqrt{6}$이다.

(i) $4<a\le 10$일 때, $\quad -1<-\dfrac{4}{a}\le -\dfrac{2}{5}$



앞의 그림과 같이 $-\frac{6}{b}<-\frac{4}{a}$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 x축 위에서는 만나지 않고 서로 다른 두 점에서 만난다.

$-\frac{6}{b}<-\frac{4}{a}$, 즉 $3a>2b$에서

$a=5$일 때, $b=1, 2, 3, \cdots, 7$

$a=6$일 때, $b=1, 2, 3, \cdots, 8$

$a=7$일 때, $b=1, 2, 3, \cdots, 10$

$a=8$일 때, $b=1, 2, 3, \cdots, 10$

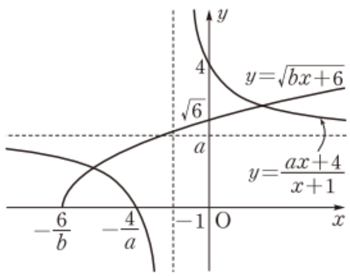
$a=9$일 때, $b=1, 2, 3, \cdots, 10$

$a=10$일 때, $b=1, 2, 3, \cdots, 10$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$7+8+10+10+10+10=55$

(ii) $1\leq a<4$일 때, $-4\leq -\frac{4}{a}<-1$



위의 그림과 같이 $-\frac{6}{b}<-\frac{4}{a}$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 x축 위에서는 만나지 않고 서로 다른 두 점에서 만난다.

$-\frac{6}{b}<-\frac{4}{a}$, 즉 $3a>2b$에서

$a=1$일 때, $b=1$

$a=2$일 때, $b=1, 2$

$a=3$일 때, $b=1, 2, 3, 4$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1+2+4=7$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$55+7=62$

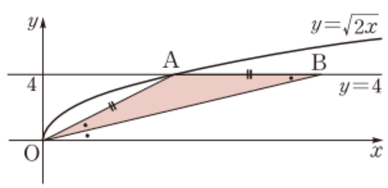
답 62

0792 전략 먼저 점 A의 좌표를 구한 후 △AOB가 어떤 삼각형인지 생각해 본다.

풀이 점 A의 x좌표는 $\sqrt{2x}=4$에서 $2x=16$ $\therefore x=8$

즉 점 A의 좌표는 $(8, 4)$

다음 그림과 같이 ∠ABO와 직선 BO가 x축의 양의 부분과 이루는 각은 엇각으로 그 크기가 같으므로 삼각형 AOB는 이등변삼각형이다.



$\overline{OA}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$이므로

$\overline{AB}=\overline{OA}=4\sqrt{5}$

$\therefore \triangle AOB=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot 4$

$=8\sqrt{5}$

답 $8\sqrt{5}$

0793 전략 주어진 두 관계식을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $y=\frac{a\sqrt{t}}{x}$에 $x=b\sqrt{t}+2$를 대입하면

$$y=\frac{a\sqrt{t}}{b\sqrt{t}+2}=\frac{a}{b+\frac{2}{\sqrt{t}}}$$

즉 t의 값이 증가할수록 y의 값도 증가하므로 $t=1$일 때 $y=8$이고, $t=4$일 때 $y=9$이다. 즉

$8=\frac{a}{b+2}$, $9=\frac{a}{b+1}$

$\therefore a-8b=16$, $a-9b=9$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=72$, $b=7$

따라서 $t=16$일 때 $y=\frac{72}{7+\frac{1}{2}}=\frac{48}{5}=9.6$이므로

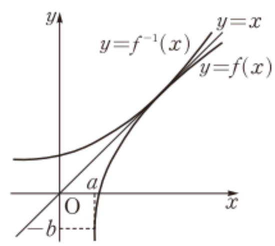
$S=9.6\times 1000=9600$

$\therefore \frac{S}{100}=96$

답 96

0794 전략 직선 $y=x$가 주어진 함수 $f(x)$의 그래프에 접함을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=\sqrt{x-a}-b$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프가 한 점에서 만날 때, 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 접한다.



$\sqrt{x-a}-b=x$에서

$\sqrt{x-a}=x+b$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x-a=x^2+2bx+b^2$

$\therefore x^2+(2b-1)x+a+b^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2b-1)^2-4(a+b^2)=0$

$-4(a+b)+1=0$

$\therefore a+b=\frac{1}{4}$

이때 a, b가 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$, $\frac{1}{4}\geq 2\sqrt{ab}$

$\therefore ab\leq\frac{1}{64}$ $\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{8},\ b=\frac{1}{8}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 ab의 최댓값은 $\frac{1}{64}$이다.

답 ①

0795 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 관계를 파악한 후 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 조건을 구한다.

풀이 함수 $y=\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}k\,(x\ge0)$는 집합 $\{x\,|\,x\ge0\}$에서 집합 $\left\{y\,\middle|\,y\ge\frac{1}{5}k\right\}$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}k$에서

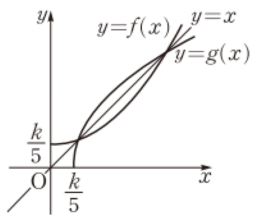
$\frac{1}{5}x^2=y-\frac{1}{5}k,\quad x^2=5y-k$

$\therefore x=\sqrt{5y-k}\ (\because x\ge0)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{5x-k}$

즉 함수 $g(x)=\sqrt{5x-k}$는 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}k=x$에서

$x^2-5x+k=0$

이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\underbrace{k\ge0}_{\text{(두 근의 곱)}\ge0},\ D=(-5)^2-4k>0$

$\therefore 0\le k<\frac{25}{4}$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, $\cdots$, 6의 7개이다. 답 ②

0796 전략 $a\ne0$, $b\ne0$일 때 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$임을 이용한다.

풀이 0이 아닌 세 실수 x, y, z가 $\sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$, $\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}=-\sqrt{\frac{z}{y}}$를 동시에 만족시키므로

$\underbrace{x>0}_{x<0\text{이면 }\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}\text{이므로 모순이다.}},\ y<0,\ z>0$ ⋯ ❶

따라서 $x-y>0$, $y-z<0$, $x-y+z>0$이므로 ⋯ ❷

$|x-y|+\sqrt{(y-z)^2}-\sqrt{(x-y+z)^2}$

$=|x-y|+|y-z|-|x-y+z|$

$=x-y-(y-z)-(x-y+z)$

$=x-y-y+z-x+y-z$

$=-y$ ⋯ ❸

답 $-y$

채점 기준	비율
❶ x, y, z의 부호를 구할 수 있다.	40 %
❷ $x-y$, $y-z$, $x-y+z$의 부호를 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	30 %

0797 전략 무리함수의 정의역을 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표를 구한 후 삼각형 ABC의 넓이를 구한다.

풀이 $x^2-2x-3\ge0$에서

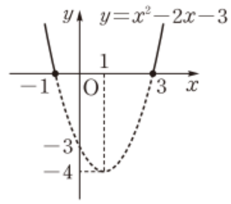
$(x+1)(x-3)\ge0$

$\therefore x\le-1$ 또는 $x\ge3$

이때 $x\le-1$ 또는 $x\ge3$에서

$x^2-2x-3=(x-1)^2-4$

가 최소일 때 함수 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$이 최소이므로 오른쪽 그림에서 $x=-1$ 또는 $x=3$일 때 최솟값 0을 갖는다.



$\therefore$ A$(-1,\ 0)$, B$(3,\ 0)$

또는 A$(3,\ 0)$, B$(-1,\ 0)$ ⋯ ❶

또 $-x^2+2x+8\ge0$에서

$x^2-2x-8\le0$

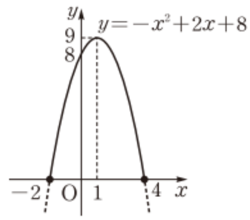
$(x+2)(x-4)\le0\qquad\therefore -2\le x\le4$

이때 $-2\le x\le4$에서

$-x^2+2x+8=-(x-1)^2+9$

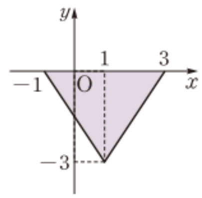
가 최대일 때 함수

$g(x)=-\sqrt{-x^2+2x+8}$이 최소이므로 오른쪽 그림에서 $x=1$일 때 최솟값 $-\sqrt{9}=-3$을 갖는다.



$\therefore$ C$(1,\ -3)$ ⋯ ❷

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이이므로



$\triangle\text{ABC}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ △ABC의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

0798 전략 삼각형 ABP의 넓이는 점 P가 직선 AB와 평행한 접선 위의 접점일 때 최대가 됨을 이용한다.

풀이 삼각형 ABP의 넓이는 점 P가 직선 AB와 평행한 접선 위의 접점일 때 최대이다. ⋯ ❶

직선 AB의 방정식은

$y=\frac{3-0}{4-1}(x-1)$, 즉 $y=x-1$

이므로 직선 AB와 평행한 접선의 방정식을 $y=x+k$ (k는 실수)라 하면

$\sqrt{3x-3}=x+k$

위의 식의 양변을 제곱하면

$3x-3=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-3)x+k^2+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-3)^2-4(k^2+3)=0$

$-12k-3=0\qquad\therefore k=-\frac{1}{4}$ ⋯ ❷

두 직선 $y=x-1$, $y=x-\frac{1}{4}$ 사이의 거리는 직선 $y=x-1$ 위의 점 $(1,\ 0)$과 직선 $y=x-\frac{1}{4}$, 즉 $4x-4y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4-1|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+3^2}=3\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{9}{8}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{9}{8}$

채점 기준	비율
❶ 삼각형 ABP의 넓이가 최대일 때의 점 P의 위치를 알 수 있다.	20 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0799 전략 먼저 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$를 구한다.

풀이 $y=\frac{1}{2}\sqrt{x-3}+1\ (y\geq1)$이라 하면

$2(y-1)=\sqrt{x-3}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4(y-1)^2=x-3$

$\therefore x=4(y-1)^2+3$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=4(x-1)^2+3$

$\therefore g(x)=4(x-1)^2+3\ (x\geq1)$ ⋯ ❶

따라서 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $x\geq0$인 범위에서 $y=4x^2$의 그래프와 겹쳐지므로

$a=-1,\ b=-3,\ k=4$ ⋯ ❷

$\therefore abk=12$ ⋯ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b, k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ abk의 값을 구할 수 있다.	10 %

Ⅶ. 순열과 조합

18 순열과 조합

0800 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 4가 되는 경우는

$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$의 3가지

(ii) 눈의 수의 합이 7이 되는 경우는

$(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$의 6가지

두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$3+6=9$ 답 9

0801 5의 배수가 적힌 공은 $5,\ 10,\ 15,\ \cdots,\ 50$의 10개

11의 배수가 적힌 공은 $11,\ 22,\ 33,\ 44$의 4개

두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$10+4=14$ 답 14

0802 3의 배수가 적힌 공은 $3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 48$의 16개

7의 배수가 적힌 공은 $7,\ 14,\ 21,\ \cdots,\ 49$의 7개

3과 7의 최소공배수인 21의 배수가 적힌 공은 $21,\ 42$의 2개

따라서 구하는 경우의 수는

$16+7-2=21$ 답 21

0803 $3\cdot2=6$ 답 6

0804 $3\cdot3=9$ 답 9

0805 $2\cdot2=4$ 답 4

0806 $6\cdot4\cdot3=72$ 답 72

0807 ${}_6P_3=6\cdot5\cdot4=120$ 답 120

0808 ${}_6P_0=1$ 답 1

0809 ${}_4P_4=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

0810 ${}_5P_1\cdot3!=5\cdot3\cdot2\cdot1=30$ 답 30

0811 ${}_nP_2=n(n-1)$이므로

$n(n-1)=30=6\cdot5$ $\quad\therefore n=6$ 답 6

0812 $60=5\cdot4\cdot3$이므로 ${}_5P_3=60$ $\quad\therefore r=3$ 답 3

0813 ${}_7P_r=\frac{7!}{(7-r)!}$이므로 $\frac{7!}{(7-r)!}=\frac{7!}{4!}$

$7-r=4$ $\therefore r=3$ 답 3

0814 ${}_nP_n=n!$, $120=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$이므로

$n!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ $\therefore n=5$ 답 5

0815 5장의 카드 중에서 3장을 뽑는 순열의 수이므로

${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$ 답 60

0816 (i) 일의 자리에 2가 오는 경우

2가 적힌 카드를 제외한 나머지 4장의 카드 중에서 2장을 뽑는 순열의 수이므로

${}_4P_2=4\cdot3=12$

(ii) 일의 자리에 4가 오는 경우

4가 적힌 카드를 제외한 나머지 4장의 카드 중에서 2장을 뽑는 순열의 수이므로

${}_4P_2=4\cdot3=12$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$12+12=24$ 답 24

0817 4개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

0818 A를 제외한 3개를 일렬로 나열하고, 그 뒤에 A를 나열하면 되므로 구하는 방법의 수는

$3!=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

0819 B와 C를 한 문자로 생각하여 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=3\cdot2\cdot1=6$

이때 각 경우에 대하여 B와 C가 자리를 바꾸는 방법의 수가 $2!=2$이므로 구하는 방법의 수는

$6\cdot2=12$ 답 12

0820 ${}_9C_2=\frac{{}_9P_2}{2!}=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}=36$ 답 36

0821 ${}_{10}C_8={}_{10}C_2=\frac{{}_{10}P_2}{2!}=\frac{10\cdot9}{2\cdot1}=45$ 답 45

0822 ${}_5C_0=1$ 답 1

0823 ${}_4C_4=1$ 답 1

0824 ${}_nC_3=56$에서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=56$

$n(n-1)(n-2)=8\cdot7\cdot6$ $\therefore n=8$ 답 8

0825 ${}_{2n+1}C_2=78$에서 $\frac{(2n+1)\cdot2n}{2\cdot1}=78$

$2n^2+n-78=0$, $(2n+13)(n-6)=0$

$\therefore n=-\frac{13}{2}$ 또는 $n=6$

그런데 $\underbrace{n\geq\frac{1}{2}}_{2n+1\geq2}$이므로 $n=6$ 답 6

0826 ${}_nC_4={}_nC_{n-4}$이므로 ${}_nC_4={}_nC_6$에서

$n-4=6$ $\therefore n=10$ 답 10

0827 ${}_7C_r={}_7C_{r-3}$에서 $r=r-3$ 또는 $7-r=r-3$

그런데 $r\neq r-3$이므로

$7-r=r-3$, $2r=10$ $\therefore r=5$ 답 5

0828 ${}_9C_6={}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$ 답 84

0829 동호회 회원 8명 중에서 2명을 택하는 방법의 수와 같으므로 악수한 총 횟수는

${}_8C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$ 답 28

0830 7명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

0831 남학생 4명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

여학생 3명 중에서 1명을 뽑는 방법의 수는 ${}_3C_1=3$

따라서 구하는 방법의 수는 $6\cdot3=18$ 답 18

0832 빨간색을 제외한 6가지 색 중에서 3가지 색을 택한 후 각각의 경우에 빨간색을 포함하면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ 답 20

0833 보라색을 제외한 6가지 색 중에서 4가지 색을 택하면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ 답 15

0834 노란색과 초록색을 제외한 5가지 색 중에서 3가지 색을 택한 후 각각의 경우에 노란색을 포함하면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

0835 9명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$

여자만 3명을 뽑는 방법의 수는 $\quad {}_4C_3={}_4C_1=4$
따라서 구하는 방법의 수는 $\quad 84-4=80$ 답 80

0836 6개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는
$${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$
답 15

0837 서로 다른 사탕 9개를 2개, 3개, 4개의 세 묶음으로 나누는 방법의 수는
$${}_9C_2\cdot{}_7C_3\cdot{}_4C_4=36\cdot35\cdot1=1260$$
답 1260

0838 서로 다른 사탕 9개를 2개, 2개, 5개의 세 묶음으로 나누는 방법의 수는
$${}_9C_2\cdot{}_7C_2\cdot{}_5C_5\cdot\frac{1}{2!}=36\cdot21\cdot1\cdot\frac{1}{2}=378$$
답 378

0839 서로 다른 사탕 9개를 3개, 3개, 3개의 세 묶음으로 나누는 방법의 수는
$${}_9C_3\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{3!}=84\cdot20\cdot1\cdot\frac{1}{6}=280$$
답 280

0840 서로 다른 종류의 꽃 10송이를 3송이, 3송이, 4송이의 세 묶음으로 나누는 방법의 수는
$${}_{10}C_3\cdot{}_7C_3\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=120\cdot35\cdot1\cdot\frac{1}{2}=2100$$
세 묶음을 3명에게 나누어 주는 방법의 수는 $\quad 3!=6$
따라서 구하는 방법의 수는
$$2100\cdot6=12600$$
답 12600

유형 01 합의 법칙
본책 124쪽

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면
(사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수)$=m+n$

0841 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 5가 되는 경우는
$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4가지
(ii) 눈의 수의 합이 10이 되는 경우는
$(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$의 3가지
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$4+3=7$ 답 7

0842 꺼낸 공에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 세 수의 곱이 3이 되는 경우는
$(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$, $(3, 1, 1)$의 3가지 ··· ❶
(ii) 세 수의 곱이 4가 되는 경우는
$(1, 1, 4)$, $(1, 4, 1)$, $(4, 1, 1)$,
$(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$의 6가지 ··· ❷
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$3+6=9$ ··· ❸
답 9

채점 기준	비율
❶ 세 수의 곱이 3이 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 세 수의 곱이 4가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 세 수의 곱이 3 또는 4가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0843 1부터 100까지의 자연수 중에서
(i) 2로 나누어떨어지는 수, 즉 2의 배수는
$2, 4, 6, \cdots, 100$의 50개
(ii) 5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는
$5, 10, 15, \cdots, 100$의 20개
(iii) 2와 5로 나누어떨어지는 수, 즉 10의 배수는
$10, 20, 30, \cdots, 100$의 10개
이상에서 2 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수는
$50+20-10=60$
이므로 2와 5로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는
$100-60=40$ 답 ③

유형 02 방정식과 부등식의 해의 개수
본책 124쪽

① 방정식 $ax+by+cz=d$ (a, b, c, d는 상수)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 x, y, z 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입하여 구한다.
② 부등식 $ax+by\le c$ (a, b, c는 상수)를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수는 주어진 x, y의 값의 조건을 이용하여 부등식이 성립하는 $ax+by$의 값을 찾은 후, $ax+by=d$ 꼴의 방정식을 만들어 이 방정식의 해의 개수를 구한다.

0844 (i) $z=1$일 때, $x+2y=17$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(15, 1)$, $(13, 2)$, $(11, 3)$, $(9, 4)$,
$(7, 5)$, $(5, 6)$, $(3, 7)$, $(1, 8)$의 8개
(ii) $z=2$일 때, $x+2y=14$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(12, 1)$, $(10, 2)$, $(8, 3)$,
$(6, 4)$, $(4, 5)$, $(2, 6)$의 6개
(iii) $z=3$일 때, $x+2y=11$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(9, 1)$, $(7, 2)$, $(5, 3)$, $(3, 4)$, $(1, 5)$의 5개
(iv) $z=4$일 때, $x+2y=8$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(6, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 3)$의 3개
(v) $z=5$일 때, $x+2y=5$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(3, 1)$, $(1, 2)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$8+6+5+3+2=24$ 답 24

0845 x, y가 자연수이므로 $x+2y\le6$을 만족시키는 경우는
$x+2y=3$, $x+2y=4$, $x+2y=5$, $x+2y=6$
(i) $x+2y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$의 1개

(ii) $x+2y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1)$의 1개

(iii) $x+2y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(3, 1), (1, 2)$의 2개

(iv) $x+2y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(4, 1), (2, 2)$의 2개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+1+2+2=6$ 답 ②

다른 풀이 (i) $y=1$일 때, $x+2\le 6$, 즉 $x\le 4$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)$의 4개

(ii) $y=2$일 때, $x+4\le 6$, 즉 $x\le 2$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 2), (2, 2)$의 2개

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $4+2=6$

0846 100원, 300원, 500원짜리 사탕을 각각 x개, y개, z개 산다고 하면

$100x+300y+500z=1000$

$\therefore x+3y+5z=10$ (단, x, y, z는 음이 아닌 정수) ⋯ ❶

(i) $z=0$일 때, $x+3y=10$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(10, 0), (7, 1), (4, 2), (1, 3)$의 4개

(ii) $z=1$일 때, $x+3y=5$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(5, 0), (2, 1)$의 2개

(iii) $z=2$일 때, $x+3y=0$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 0)$의 1개 ⋯ ❷

이상에서 구하는 방법의 수는

$4+2+1=7$ ⋯ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세울 수 있다.	20 %
❷ $z=0$, $z=1$, $z=2$일 때 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구할 수 있다.	60 %
❸ 사탕을 1000원어치 사는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0847 이차함수 $y=x^2+(a+b)x+ab+1$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+(a+b)x+ab+1=0$이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$D=(a+b)^2-4(ab+1)<0,\qquad (a-b)^2-4<0$

$\{(a-b)+2\}\{(a-b)-2\}<0$

$\therefore -2<a-b<2$

이때 $a-b$의 값은 정수이므로

$a-b=-1,\ a-b=0,\ a-b=1$

(i) $a-b=-1$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$의 5개

(ii) $a-b=0$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$의 6개

(iii) $a-b=1$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$의 5개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+6+5=16$ 답 ③

유형 03 곱의 법칙

본책 124쪽

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면

(두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수)$=m\times n$

0848 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 3, 5, 7, 9의 5개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

2, 3, 5, 7의 4개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$5\cdot 4=20$ 답 ②

0849 a가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개

b가 될 수 있는 것은 2, 4, 6의 3개

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $4\cdot 3=12$이므로

$n(C)=12$ 답 12

0850 $(a+b+c)(x+y+z)$에서 a, b, c에 곱해지는 항이 각각 x, y, z의 3개이므로 항의 개수는

$3\cdot 3=9$ 답 ③

유형 04 약수의 개수

본책 125쪽

자연수 N이 $N=x^ay^b$ (x, y는 서로 다른 소수, a, b는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수는 $\underbrace{x^a\text{의 양의 약수}}_{1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^a\text{의 } a+1\text{개}}$와 $\underbrace{y^b\text{의 양의 약수}}_{1,\ y,\ y^2,\ \cdots,\ y^b\text{의 } b+1\text{개}}$ 중에서 각각 하나씩 택하여 곱한 수이므로 그 개수는

➡ $(a+1)(b+1)$

0851 280과 420의 최대공약수는 140이므로 280과 420의 양의 공약수의 개수는 140의 양의 약수의 개수와 같다.

이때 $140=2^2\cdot 5\cdot 7$이므로 양의 약수의 개수는

$(2+1)(1+1)(1+1)=12$ 답 12

0852 72를 소인수분해하면 $72=2^3\cdot 3^2$

72의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(2+1)=12\qquad \therefore a=12$

72의 양의 약수의 총합은

$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)=15\cdot 13=195\qquad \therefore b=195$

$\therefore b-a=183$ 답 ③

SSEN 특강

자연수의 양의 약수의 총합

자연수 N이 $N=x^ay^bz^c$ (x, y, z는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 총합은

$(1+x+x^2+\cdots+x^a)(1+y+y^2+\cdots+y^b)(1+z+z^2+\cdots+z^c)$

0853 540을 소인수분해하면 $540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$ ⋯ ❶

짝수는 2를 소인수로 가지므로 540의 양의 약수 중 짝수의 개수는 $2\cdot 3^3\cdot 5$의 양의 약수의 개수와 같다. $2\cdot 3^3\cdot 5$의 양의 약수에 각각 2를 곱한 것이 540의 양의 약수 중 짝수이다.

$\therefore p=(1+1)(3+1)(1+1)=16$ ⋯ ❷

3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 540의 양의 약수 중 3의 배수의 개수는 $2^2\cdot3^2\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

$2^2\cdot3^2\cdot5$의 양의 약수에 각각 3을 곱한 것이 540의 양의 약수 중 3의 배수이다.

$\therefore q=(2+1)(2+1)(1+1)=18$ ··· ❸

$\therefore p+q=34$ ··· ❹

답 34

채점 기준	비율
❶ 540을 소인수분해할 수 있다.	10 %
❷ p의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 05 수형도를 이용하는 경우의 수

본책 125쪽

규칙성을 찾기 어려운 경우의 수를 구할 때

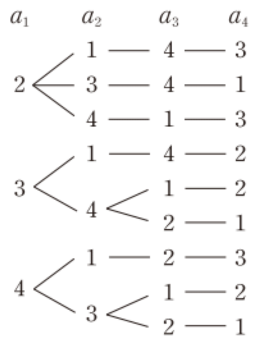
➡ 수형도를 이용하면 중복되지 않고 빠짐없이 모든 경우를 나열할 수 있다.

사건이 일어나는 모든 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타낸 것을 수형도라 한다.

0854 $a_1\neq1$이므로 a_1이 2, 3, 4인 경우에 대하여 $a_2\neq2$, $a_3\neq3$, $a_4\neq4$인 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 9이다.

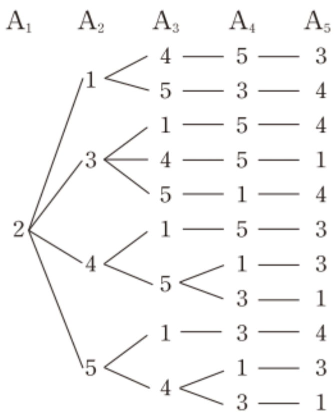
답 ①



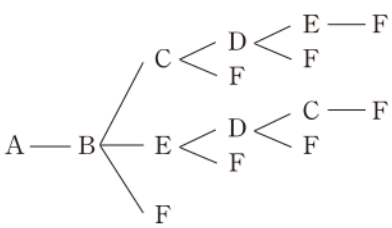
0855 2가 적힌 공은 A_1에 넣고 k가 적힌 공은 A_k에 넣지 않는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 방법의 수는 11이다.

답 11



0856 주어진 팔면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B로 움직인 후 꼭짓점 F에 도착하는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 C 또는 D 또는 E로 움직인 후 꼭짓점 F에 도착하는 경우도 각각 7가지씩이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$7\cdot4=28$

답 28

유형 06 지불 방법의 수와 지불 금액의 수

본책 126쪽

① 지불 방법의 수

x원짜리 동전 n개로 지불할 수 있는 방법

➡ 0개, 1개, 2개, …, n개의 $n+1$가지

② 지불 금액의 수

x원짜리 동전 n개로 지불할 수 있는 금액과 y원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같을 때

➡ y원짜리 동전 1개를 x원짜리 동전 n개로 바꾸어 생각한다.

0857 (i) 지불할 수 있는 방법의 수

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개의 2가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는

$a=2\cdot4\cdot3-1=23$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 1개를 50원짜리 동전 2개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 5개, 10원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, …, 250원의 6가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$b=6\cdot3-1=17$

(i), (ii)에서 $a-b=6$

답 ③

0858 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지 ··· ❶

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지 ··· ❷

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지 ··· ❸

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$3\cdot4\cdot5-1=59$ ··· ❹

답 59

채점 기준	비율
❶ 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❹ 동전의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %

0859 5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 2장을 5000원짜리 지폐 4장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000원짜리 지폐 6장, 1000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
5000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은
0원, 5000원, 10000원, ⋯, 30000원의 7가지
1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은
0원, 1000원, 2000원, 3000원의 4가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는
$7\cdot4-1=27$ 답 ②

유형 07 도로망에서의 방법의 수 본책 126쪽

① 동시에 갈 수 없는 길이면 ➡ 합의 법칙
② 이어지는 길이면 ➡ 곱의 법칙

0860 (i) A → B → C로 가는 방법의 수는 $4\cdot2=8$
(ii) A → D → C로 가는 방법의 수는 $3\cdot4=12$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$8+12=20$ 답 20

0861 (i) 집 → A → 도서관으로 가는 방법의 수는
$3\cdot2=6$
(ii) 집 → B → 도서관으로 가는 방법의 수는
$1\cdot3=3$
(iii) 집 → A → B → 도서관으로 가는 방법의 수는
$3\cdot2\cdot3=18$
(iv) 집 → B → A → 도서관으로 가는 방법의 수는
$1\cdot2\cdot2=4$
이상에서 구하는 방법의 수는
$6+3+18+4=31$ 답 31

0862 B지점과 D지점을 연결하는 x개의 도로를 추가한다고 하면
(i) A → B → C로 가는 방법의 수는 $2\cdot3=6$
(ii) A → D → C로 가는 방법의 수는 $3\cdot2=6$
(iii) A → B → D → C로 가는 방법의 수는 $2\cdot x\cdot2=4x$
(iv) A → D → B → C로 가는 방법의 수는 $3\cdot x\cdot3=9x$
이상에서 A지점에서 C지점으로 가는 방법의 수는
$6+6+4x+9x=13x+12$
$13x+12=90$에서 $13x=78$ $\therefore x=6$
따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 6이다. 답 ④

유형 08 색칠하는 방법의 수 본책 127쪽

각 영역을 색칠하는 방법의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용하여 색칠하는 모든 방법의 수를 구한다. 이때
① 인접한 영역이 가장 많은 영역에 색칠하는 방법의 수를 먼저 구한다.
② 같은 색을 칠할 수 있는 영역은 같은 색인 경우와 다른 색인 경우로 나누어 생각한다.

0863 A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는
$5\cdot4\cdot3\cdot3\cdot3=540$ 답 540

0864 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는
$4\cdot3\cdot3=36$ 답 ④

0865 (i) A와 C에 같은 색을 칠하는 방법의 수
A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 방법의 수는
$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$ ⋯ ❶
(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 방법의 수
A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 방법의 수는
$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ ⋯ ❷
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$36+48=84$ ⋯ ❸
답 84

채점 기준	비율
❶ A와 C에 같은 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A와 C에 다른 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0866 A, B, C, D, E의 순서로 칠할 때, A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
(i) B와 D에 같은 색을 칠하는 방법의 수
D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 방법의 수는 $5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot3=180$

(ii) B와 D에 다른 색을 칠하는 방법의 수
D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 방법의 수는 $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2=240$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$180+240=420$ 답 ④

다른 풀이 (i) 모두 다른 색을 칠하는 방법의 수는
$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$
(ii) B와 D에만 같은 색을 칠하는 방법의 수는
$5\cdot4\cdot3\cdot2=120$
(iii) C와 E에만 같은 색을 칠하는 방법의 수는
$5\cdot4\cdot3\cdot2=120$
(iv) B와 D, C와 E에 각각 같은 색을 칠하는 방법의 수는
$5\cdot4\cdot3=60$
이상에서 구하는 방법의 수는
$120+120+120+60=420$

유형 09 이웃하는 순열의 수

본책 127쪽

(i) 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.
(ii) (i)의 결과와 이웃하는 것끼리 자리를 바꾸는 방법의 수를 곱한다.

0867 1학년 학생 3명을 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$
1학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 방법의 수는
$120\cdot6=720$ 답 ④

0868 P와 R를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$
P와 R의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는
$24\cdot2=48$ 답 48

0869 초등학생 4명을 한 사람, 중학생 3명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$
초등학생끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $4!=24$
중학생끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 방법의 수는
$24\cdot24\cdot6=3456$ 답 ②

0870 여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 $n+1$명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $(n+1)!$
여학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 $(n+1)!\cdot6=36$이므로
$(n+1)!=6=3!$
$n+1=3 \qquad \therefore n=2$ 답 2

유형 10 이웃하지 않는 순열의 수

본책 128쪽

(i) 이웃해도 상관없는 것을 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.
(ii) (i)에서 나열한 것 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열하는 방법의 수를 구한다.
(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

0871 여자 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$
여자들 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 남자 2명을 세우는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$
따라서 구하는 방법의 수는
$6\cdot12=72$ 답 72

0872 4개의 자음 c, l, m, t를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$4!=24$
자음의 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 3개의 모음 i, a, e를 나열하는 방법의 수는 ${}_5P_3=60$
따라서 구하는 방법의 수는
$24\cdot60=1440$ 답 ⑤

0873 의자 3개에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 5개이다.
빈 의자들 사이사이 및 양 끝의 6개의 자리에 학생이 앉을 의자 3개를 놓으면 되므로 구하는 방법의 수는 ${}_6P_3=120$ 답 120

유형 11 자리에 대한 조건이 있는 순열의 수

본책 128쪽

특정한 자리에 대한 조건이 있을 때
➡ 특정한 자리에 오는 것의 위치를 고정시킨 후 나머지를 나열한다.

0874 여학생은 4명이므로 양 끝에 여학생 2명을 세우는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$
양 끝의 여학생 2명을 제외한 나머지 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$
따라서 구하는 방법의 수는
$12\cdot120=1440$ 답 ⑤

0875 자음은 p, r, m, s의 4개, 모음은 o, i, e의 3개이므로 자음 4개를 일렬로 나열하고 그 사이사이에 모음 3개를 나열하면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는
$4!\cdot3!=24\cdot6=144$ 답 ③

0876 2송이의 노란색 꽃을 세 군데의 홀수 번째 자리 중 두 군데에 심는 방법의 수는
${}_3P_2=6$ ⋯ ❶
나머지 빈 세 자리에 빨간색 꽃 3송이를 심는 방법의 수는
$3!=6$ ⋯ ❷
따라서 구하는 방법의 수는
$6\cdot6=36$ ⋯ ❸
답 36

채점 기준	비율
❶ 노란색 꽃을 홀수 번째 자리에 심는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 빨간색 꽃을 심는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 꽃을 심는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0877 w와 t 사이에 w와 t를 제외한 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하는 방법의 수는 $\quad {}_4P_2=12$
w, t와 그 사이의 2개의 문자를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\quad 3!=6$
w와 t가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $\quad 2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는
$12\cdot6\cdot2=144$
답 144

유형 12 '적어도'의 조건이 있는 순열의 수 (본책 129쪽)

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

0878 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$6!=720$
자음은 s, l, n, t의 4개이므로 양 끝에 모두 자음이 오도록 나열하는 방법의 수는
$\underbrace{{}_4P_2}_{\text{자음 4개에서 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 방법의 수}}\cdot\underbrace{4!}_{\text{양 끝의 자음을 제외한 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수}}=288$
따라서 구하는 방법의 수는
$720-288=432$
답 ⑤

0879 (1) 10명의 학생 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로
${}_{10}P_2=90$ ··· ❶
(2) 남학생 4명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로
${}_4P_2=12$ ··· ❷
(3) 모든 방법의 수에서 반장, 부반장 모두 남학생을 뽑는 방법의 수를 뺀 것과 같으므로
$90-12=78$ ··· ❸
답 (1) 90 (2) 12 (3) 78

채점 기준	비율
❶ 모든 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 반장, 부반장 모두 남학생을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 반장, 부반장 중에서 적어도 한 명은 여학생을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %

0880 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\quad 5!=120$
a, b, c의 3개의 문자 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는 d, e를 일렬로 나열하고 d와 e 사이 및 양 끝의 3개의 자리에 a, b, c를 나열하는 방법의 수와 같으므로 $\quad 2!\cdot3!=12$
따라서 구하는 방법의 수는
$120-12=108$
답 108

유형 13 자연수의 개수 (본책 129쪽)

① 1, 2, 3, ⋯, n $(3\le n\le9)$의 n개의 숫자를 한 번씩 사용하여 만들 수 있는
두 자리 자연수의 개수 ➡ ${}_nP_2$
세 자리 자연수의 개수 ➡ ${}_nP_3$
② 0, 1, 2, ⋯, n $(2\le n\le9)$의 $n+1$개의 숫자를 한 번씩 사용하여 만들 수 있는
두 자리 자연수의 개수 ➡ $n\cdot{}_nP_1$
세 자리 자연수의 개수 ➡ $n\cdot{}_nP_2$

0881 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.
0, 1, 2 또는 0, 2, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 3, 4
(i) 0, 1, 2로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
$2\cdot2!=4$
(ii) 0, 2, 4로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
$2\cdot2!=4$
(iii) 1, 2, 3으로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
$3!=6$
(iv) 2, 3, 4로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
$3!=6$
이상에서 구하는 3의 배수의 개수는
$4+4+6+6=20$
답 ③

0882 백의 자리와 일의 자리에는 2, 4, 6의 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로 $\quad {}_3P_2=6$
천의 자리와 십의 자리에는 백의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로
${}_4P_2=12$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$6\cdot12=72$
답 72

0883 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다. ··· ❶
(i) 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수
0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $\quad {}_5P_3=60$ ··· ❷
(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수
천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 $\quad$ 1, 3, 7, 9의 4개
백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로
${}_4P_2=12$
따라서 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수는
$4\cdot12=48$ ··· ❸
(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는
$60+48=108$ ··· ❹
답 108

채점 기준	비율
❶ 5의 배수가 되는 경우를 알 수 있다.	20 %
❷ 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❹ 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	10 %

유형 14 사전식으로 배열하는 방법의 수 본책 130쪽

문자를 사전식으로 배열하거나 자연수를 크기 순으로 나열하는 방법의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 기준이 되는 문자열 또는 수의 꼴을 살핀 후 먼저 자리를 정할 수 있는 자리에 문자 또는 수를 배열한다.

(ii) 순열을 이용하여 나머지 자리에 올 수 있는 것을 배열하는 방법의 수를 구한다.

0884 A로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
B로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
CA로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
CBA로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$
CBD로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$
CBE로 시작하는 것은 순서대로
CBEAD, CBEDA의 2개
따라서 CBEDA까지의 개수는
$24+24+6+2+2+2=60$
이므로 CBEDA는 60번째에 온다. 답 60번째

0885 4300보다 큰 자연수는 43○○, 45○○, 46○○, 5○○○, 6○○○ 꼴이다. ··· ❶
43○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$
45○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$
46○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$
5○○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$
6○○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$ ··· ❷
따라서 구하는 자연수의 개수는
$12+12+12+60+60=156$ ··· ❸
답 156

채점 기준	비율
❶ 4300보다 큰 자연수의 꼴을 구할 수 있다.	30 %
❷ 각 자연수의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 4300보다 큰 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0886 D로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$
E로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$
FD로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
FE로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
FID로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
FIE로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
따라서 D로 시작하는 것부터 FIE로 시작하는 것까지의 총 개수는
$120+120+24+24+6+6=300$
이므로 301번째에 오는 것은 FINDER 답 ②

0887 54○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
53○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
52○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
51○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
504○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
503○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
따라서 543210부터 503124까지의 자연수의 개수는
$24+24+24+24+6+6=108$
이므로 구하는 수는 502431, 502413, …에서 502413이다. 답 ④

유형 15 ${}_nP_r$와 ${}_nC_r$의 계산 본책 130쪽

① ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)
$=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

② ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

③ ${}_nP_n=n!$, ${}_nP_0=1$, $0!=1$, ${}_nC_0=1$, ${}_nC_n=1$

④ ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

0888 ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}$이므로 $15=\dfrac{360}{r!}$
$r!=24=4\cdot3\cdot2\cdot1$ $\therefore r=4$
또 ${}_nP_4=360=6\cdot5\cdot4\cdot3$에서 $n=6$
$\therefore n+r=10$ 답 ⑤

0889 ${}_nP_4=20\cdot{}_nP_2$에서
$n(n-1)(n-2)(n-3)=20n(n-1)$
${}_nP_4$에서 $n\ge4$이므로 등식의 양변을 $n(n-1)$로 나누면
$(n-2)(n-3)=20$, $n^2-5n-14=0$
$(n+2)(n-7)=0$ $\therefore n=7$ ($\because n\ge4$) 답 7

0890 ${}_{14}C_{r^2}={}_{14}C_{r+2}$에서
$r^2=r+2$ 또는 $14-r^2=r+2$
(i) $r^2=r+2$일 때,
$r^2-r-2=0$, $(r+1)(r-2)=0$
$\therefore r=2$ ($\because r>0$)
(ii) $14-r^2=r+2$일 때,
$r^2+r-12=0$, $(r+4)(r-3)=0$
$\therefore r=3$ ($\because r>0$)
(i), (ii)에서 구하는 자연수 r의 값의 합은
$2+3=5$ 답 ①

0891 ${}_nP_2+6\cdot{}_nC_2=12\cdot{}_{n-1}C_3$에서
$n(n-1)+6\cdot\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}=12\cdot\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot2\cdot1}$

${}_{n-1}C_3$에서 $n-1\geq3$, 즉 $n\geq4$이므로 등식의 양변을 $n-1$로 나누면

$$n+3n=2(n-2)(n-3),\quad 4n=2n^2-10n+12$$
$$n^2-7n+6=0,\quad (n-1)(n-6)=0$$
$$\therefore n=6\ (\because n\geq4)$$

답 6

0892 이차방정식 ${}_nC_2x^2-{}_nC_3x+{}_nC_5=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=\dfrac{{}_nC_3}{{}_nC_2}$, $\alpha\beta=\dfrac{{}_nC_5}{{}_nC_2}$

이때 $\alpha\beta=1$이므로 $\dfrac{{}_nC_5}{{}_nC_2}=1$, ${}_nC_5={}_nC_2$

$n-5=2\quad \therefore n=7$ ··· ❶

$$\therefore \alpha+\beta=\frac{{}_7C_3}{{}_7C_2}=\frac{\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{7\cdot6}{2\cdot1}}=\frac{5}{3}$$ ··· ❷

답 $\dfrac{5}{3}$

채점 기준	비율
❶ n의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 16 ${}_nP_r$와 ${}_nC_r$를 이용한 증명 본책 131쪽

다음과 같은 순열과 조합의 수에 대한 식을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 증명한다.

① ${}_nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$, ${}_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\leq r\leq n$)

② $n!=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n\cdot(n-1)!$

0893 ④ ${}_{n+1}C_r={}_{n+1}C_{n-r+1}$ 답 ④

0894 ${}_{n-1}P_r+r\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

분모, 분자에 $n-r$를 곱한다.

$$=\frac{(n-1)!(n-r)}{(n-r)!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$
$$=\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\{(n-r)+r\}=\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\cdot\boxed{n}$$
$$=\frac{\boxed{n!}}{(n-r)!}={}_nP_r$$

∴ (가) n (나) $n!$ 답 ①

0895 $n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\boxed{(n-r)!}}$$
$$=\frac{\boxed{n!}}{(r-1)!(n-r)!}$$
$$=\frac{r\cdot n!}{\boxed{r!}(n-r)!}=r\cdot{}_nC_r$$

∴ (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$ 답 ⑤

0896 ${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

$$=\frac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$$
$$=\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$
$$=\frac{(n-r)\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{r\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$$
$$=\frac{\{(n-r)+r\}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$$
$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_r$$
$$\therefore {}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$$

답 풀이 참조

유형 17 조합의 수 본책 131쪽

① 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 방법의 수
➡ ${}_nC_r$

② 서로 다른 n개에서 a개를 택한 후 나머지에서 b개를 택하는 방법의 수
➡ ${}_nC_a\cdot{}_{n-a}C_b$

0897 의사 7명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_7C_3=35$

간호사 6명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_6C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$35+20=55$ 답 55

0898 색연필 n자루 중에서 3자루를 택하는 방법의 수는 ${}_nC_3$

공책 5권 중에서 2권을 택하는 방법의 수는 ${}_5C_2=10$

따라서 ${}_nC_3\cdot10=200$이므로 ${}_nC_3=20$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=20,\quad n(n-1)(n-2)=6\cdot5\cdot4$$

$\therefore n=6$ 답 6

0899 5개의 동아리 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

택한 3개의 동아리에서 각각 1명씩 뽑는 방법의 수는

${}_4C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_4C_1=4\cdot4\cdot4=64$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot64=640$ 답 ⑤

0900 세 수의 합이 짝수가 되기 위해서는 세 수 모두 짝수이거나 하나는 짝수, 두 수는 홀수이어야 한다.

(i) 세 수 모두 짝수인 경우

2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 3장을 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_3=4$ ··· ❶

(ii) 하나는 짝수, 두 수는 홀수인 경우

2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 1장을 꺼내고 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 2장을 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_1\cdot{}_5C_2=4\cdot10=40$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4+40=44$ ⋯ ❸

답 44

채점 기준	비율
❶ 짝수가 적힌 카드 3장을 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 짝수가 적힌 카드 1장, 홀수가 적힌 카드 2장을 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 카드에 적힌 수의 총합이 짝수가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0901 1부터 20까지의 홀수 중 4로 나누었을 때 나머지가 1, 3인 수의 집합을 각각 A, B라 하면

$A=\{1, 5, 9, 13, 17\}$, $B=\{3, 7, 11, 15, 19\}$

두 수의 합이 4의 배수가 되려면 두 집합 A, B에서 각각 1개씩 택하면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_5C_1\cdot{}_5C_1=5\cdot5=25$

답 25

유형 18 특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수

본책 132쪽

① 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 방법의 수

➡ $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 뽑는 방법의 수와 같다.

➡ ${}_{n-k}C_{r-k}$

② 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 제외하고 r개를 뽑는 방법의 수

➡ $(n-k)$개에서 r개를 뽑는 방법의 수와 같다.

➡ ${}_{n-k}C_r$

0902 혜원이와 민준이를 제외한 10명의 회원 중에서 3명을 뽑는 방법의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는

${}_{10}C_3=120$

답 ①

0903 2와 7이 적힌 공을 제외한 8개의 공 중에서 2개를 꺼내는 방법의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는

${}_8C_2=28$

답 28

0904 A는 뽑고 B는 뽑지 않는 방법의 수는 A, B를 제외한 7명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

${}_7C_3=35$

B는 뽑고 A는 뽑지 않는 방법의 수는 A, B를 제외한 7명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

${}_7C_3=35$

따라서 구하는 방법의 수는

$35+35=70$

답 ④

다른 풀이 A, B를 제외한 7명의 학생 중에서 3명을 뽑고, A, B 중에서 한 명을 뽑으면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_7C_3\cdot{}_2C_1=35\cdot2=70$

0905 (1) 5를 제외한 11개의 자연수 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_{11}C_2=55$ ⋯ ❶

(2) 3, 6, 9, 12를 제외한 8개의 자연수 중에서 4개 이하를 택하는 방법의 수와 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_8C_4+{}_8C_3+{}_8C_2+{}_8C_1+{}_8C_0=70+56+28+8+1$

$=163$ ⋯ ❷

답 (1) 55 (2) 163

채점 기준	비율
❶ 5를 원소로 갖고 원소의 개수가 3인 집합 A의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 3의 배수를 원소로 갖지 않고 원소의 개수가 4 이하인 집합 A의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	60 %

0906 짝이 맞는 구두 한 켤레를 택하는 방법의 수는

${}_5C_1=5$

한 켤레를 제외한 구두 8짝 중에서 2짝을 택하는 방법의 수는

${}_8C_2=28$

이때 구두 8짝 중에서 짝이 맞는 2짝, 즉 구두 4켤레 중에서 한 켤레를 택하는 방법의 수는

${}_4C_1=4$

이므로 구두 8짝 중에서 짝이 맞지 않는 2짝을 택하는 방법의 수는

$28-4=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot24=120$

답 ②

유형 19 '적어도'의 조건이 있는 조합의 수

본책 133쪽

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)

=(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

0907 12명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

${}_{12}C_4=495$

남자만 4명을 뽑는 방법의 수는 ${}_6C_4={}_6C_2=15$

여자만 4명을 뽑는 방법의 수는 ${}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 방법의 수는

$495-(15+15)=465$

답 ②

0908 (1) 10송이 중에서 4송이를 고르는 방법의 수는

${}_{10}C_4=210$

노란색 꽃과 보라색 꽃 중에서 4송이를 고르는 방법의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 방법의 수는

$210-15=195$ ⋯ ❶

(2) (i) 노란색 꽃이 2송이 포함되도록 고르는 방법의 수는

${}_3C_2\cdot{}_7C_2=3\cdot21=63$

(ii) 노란색 꽃이 3송이 포함되도록 고르는 방법의 수는

${}_3C_3\cdot{}_7C_1=1\cdot7=7$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$63+7=70$ ⋯ ❷

답 (1) 195 (2) 70

채점 기준	비율
❶ 빨간색 꽃이 적어도 1송이 포함되도록 고르는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 노란색 꽃이 적어도 2송이 포함되도록 고르는 방법의 수를 구할 수 있다.	60 %

다른 풀이 (2) 10송이 중에서 4송이를 고르는 방법의 수는

$_{10}C_4=210$

(i) 노란색 꽃이 하나도 포함되지 않도록 고르는 방법의 수는 빨간색 꽃과 보라색 꽃 중에서 4송이를 고르는 방법의 수와 같으므로

$_7C_4={}_7C_3=35$

(ii) 노란색 꽃이 1송이만 포함되도록 고르는 방법의 수는 빨간색 꽃과 보라색 꽃 중에서 3송이를 고르고, 노란색 꽃 중에서 1송이를 고르는 방법의 수와 같으므로

$_7C_3\cdot{}_3C_1=35\cdot3=105$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$210-(35+105)=70$

0909 12명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_{12}C_3=220$

여자 지원자를 $n(n\geq3)$명이라 하면 여자만 3명을 뽑는 방법의 수는 $_nC_3$

이때 남자 지원자를 적어도 한 명 포함하도록 뽑는 방법의 수가 164이므로

$220-{}_nC_3=164,\quad {}_nC_3=56$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=56,\quad n(n-1)(n-2)=8\cdot7\cdot6$

$\therefore n=8$

따라서 여자 지원자가 8명이므로 남자 지원자 수는

$12-8=4$ 답 4

참고 12명의 지원자 중 여자 지원자가 3명 미만이면 3명을 뽑을 때 항상 남자 지원자가 적어도 한 명 포함되므로 남자 지원자를 적어도 한 명 포함하도록 3명을 뽑는 방법의 수는 $_{12}C_3=220$

즉 주어진 조건에 맞지 않으므로 $n\geq3$

0910 10 미만의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 자연수를 뽑는 방법의 수는

$_9C_4=126$

10 미만의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이므로

(i) 홀수만 4개를 뽑는 방법의 수는 $_5C_4={}_5C_1=5$

(ii) 짝수만 4개를 뽑는 방법의 수는 $_4C_4=1$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$126-(5+1)=120$ 답 120

유형 20 뽑아서 나열하는 방법의 수

본책 133쪽

m개 중에서 r개, n개 중에서 s개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수

➡ $_mC_r\cdot{}_nC_s\cdot(r+s)!$

0911 어른 5명 중에서 1명을 뽑는 방법의 수는

$_5C_1=5$

어린이 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_6C_2=15$

3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot15\cdot6=450$ 답 ④

0912 1부터 9까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이므로

홀수 3개를 택하는 방법의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

짝수 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

5개의 자연수를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$10\cdot6\cdot120=7200$ 답 ④

0913 지원이와 수현이를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 $_6C_3=20$ ··· ❶

지원이와 수현이를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$이고, 이때 지원이와 수현이가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이므로 지원이와 수현이를 이웃하도록 세우는 방법의 수는 $24\cdot2=48$ ··· ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$20\cdot48=960$ ··· ❸

답 960

채점 기준	비율
❶ 지원이와 수현이를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 지원이와 수현이를 이웃하도록 세우는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 지원이와 수현이가 모두 포함되고 이들이 서로 이웃하도록 세우는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

유형 21 함수의 개수

본책 134쪽

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, $n(m\leq n)$일 때

① 함수 $f: X \longrightarrow Y$ 중에서 일대일함수인 함수 f의 개수 ➡ $_nP_m$

② 함수 $f: X \longrightarrow X$ 중에서 일대일대응인 함수 f의 개수 ➡ $_mP_m=m!$

③ 함수 $f: X \longrightarrow Y$ 중에서 $a<b$이면 $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수 f의 개수 ➡ $_nC_m$

0914 주어진 조건을 만족시키려면 공역의 원소 중에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 3, 5에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$_5C_3={}_5C_2=10$ 답 ③

0915 집합 A의 원소 4개 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 정의역의 원소 4개 중 2개는 같은 함숫값을 갖는다.

$_4C_2=6$

택한 2개의 원소를 한 원소로 생각하여 집합 A의 원소 3개를 집합 B의 각 원소에 대응시키는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 함수의 개수는

$6\cdot6=36$ 답 ④

0916 조건 (가), (나)에서 함수 f는 집합 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에서 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$으로의 일대일대응으로 생각할 수 있다.

조건 (다)에서 $f(2)\le2$이므로 $f(2)$의 값을 정하는 방법의 수는

$_2C_1$

$f(3)\le3$, $f(3)\ne f(2)$이므로 $f(3)$의 값을 정하는 방법의 수는

$_2C_1$

마찬가지로 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 방법의 수는 각각 $_2C_1$이고, $f(7)$의 값을 정하는 방법의 수는 1이다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot1=32$ 답 32

유형 22 직선의 개수 본책 134쪽

서로 다른 n개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않을 때, 주어진 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수 ➡ $_nC_2$

0917 5개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

$_5C_2=10$ 답 ②

0918 두 직선 위의 점을 각각 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

$_3C_1\cdot{}_5C_1=3\cdot5=15$

한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 연결한 직선의 개수는 주어진 두 직선

2

따라서 구하는 직선의 개수는

$15+2=17$ 답 ③

다른 풀이 8개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_8C_2=28$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_5C_2=10$

주어진 두 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$28-3-10+2=17$

0919 10개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_{10}C_2=45$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

이때 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 5개이므로 구하는 직선의 개수는

$45-6\cdot5+5=20$ 답 20

0920 12개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

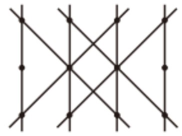
$_{12}C_2=66$

(i) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 8개이다.

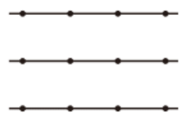


(ii) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우

4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이다.



(i), (ii)에서 구하는 직선의 개수는

$66-3\cdot8-6\cdot3+8+3=35$ 답 35

유형 23 다각형의 대각선의 개수 본책 135쪽

n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 변의 개수인 n을 뺀 것과 같다.

➡ $_nC_2-n$

0921 구하는 대각선의 개수는 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 방법의 수에서 변의 개수인 8을 뺀 것과 같으므로

$_8C_2-8=28-8=20$ 답 ②

0922 구하는 다각형의 꼭짓점의 개수를 $n(n\ge3)$이라 하면 대각선의 개수가 44이므로

$_nC_2-n=44,\quad \dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}-n=44$

$n^2-3n-88=0$

$(n+8)(n-11)=0$

$\therefore n=11\ (\because n\ge3)$ 답 11

유형 24 다각형의 개수 본책 135쪽

서로 다른 n개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않을 때, 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수 ➡ $_nC_3$

0923 9개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_9C_3=84$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_4C_3={}_4C_1=4$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이다.

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-4\cdot3=72$ 답 72

0924 7개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는

${}_7C_3=35$ 답 ④

0925 직선 l 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_2=6$

직선 m 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_2=10$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$6\cdot10=60$ 답 60

0926 7개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_7C_3=35$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$35-4=31$ 답 ②

0927 16개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_{16}C_3=560$

(i) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우

4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 10개이다.

(ii) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_3C_3=1$

이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 4개이다.

(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 개수는

$560-4\cdot10-1\cdot4=516$ 답 516

유형 25 평행사변형의 개수

본책 136쪽

m개의 평행한 직선과 n개의 평행한 직선이 만날 때, 이 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수 ➡ ${}_mC_2\cdot{}_nC_2$

0928 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_5C_2\cdot{}_4C_2=10\cdot6=60$ 답 ④

0929 (1) 한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형의 개수는 각각 9, 4, 1이므로 정사각형의 개수는

$9+4+1=14$ ⋯ ❶

(2) 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어지므로 직사각형의 총 개수는 ${}_4C_2\cdot{}_4C_2=6\cdot6=36$ ⋯ ❷

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$36-14=22$ ⋯ ❸

답 (1) 14 (2) 22

채점 기준	비율
❶ 만들어지는 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 만들어지는 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 만들어지는 정사각형이 아닌 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0930 n개의 평행한 직선 중에서 2개, $n+2$개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로

${}_nC_2\cdot{}_{n+2}C_2=210$

$\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}\cdot\dfrac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1}=210$

$(n+2)(n+1)n(n-1)=7\cdot6\cdot5\cdot4$

$\therefore n=5$ 답 5

유형 26 분할하는 방법의 수

본책 136쪽

서로 다른 n개를 p개, q개, r개$(p+q+r=n)$로 분할하는 방법의 수는

① p, q, r가 모두 다른 수일 때 ➡ ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r$

② p, q, r 중 어느 두 수가 같을 때 ➡ ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r\cdot\dfrac{1}{2!}$

③ p, q, r가 모두 같은 수일 때 ➡ ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r\cdot\dfrac{1}{3!}$

0931 6개의 과일을 똑같은 바구니 3개에 빈 바구니가 없도록 나누어 담을 때, 각 바구니에 담을 수 있는 과일의 개수는

1, 1, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 2, 2

(i) 1개, 1개, 4개로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_4\cdot\dfrac{1}{2!}=6\cdot5\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=15$

(ii) 1개, 2개, 3개로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\cdot10\cdot1=60$

(iii) 2개, 2개, 2개로 나누는 방법의 수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\dfrac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\dfrac{1}{6}=15$

이상에서 구하는 방법의 수는

$15+60+15=90$ 답 90

0932 남자 8명 중 2명이 여자 4명과 한 조를 이루면 되므로 남자 8명을 2명, 6명으로 나누면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

${}_8C_2\cdot{}_6C_6=28\cdot1=28$ 답 28

0933 10명을 5명, 5명으로 나누는 방법의 수는

$${}_{10}C_5 \cdot {}_5C_5 \cdot \frac{1}{2!} = 252 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 126 \quad \cdots❶$$

경찰관 7명을 2명, 5명으로 나누는 방법의 수는

경찰관만 포함된 조가 있도록 나누는 방법

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_5 = 21 \quad \cdots❷$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$126 - 21 = 105 \quad \cdots❸$$

답 105

채점 기준	비율
❶ 10명을 5명, 5명으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 경찰관 7명을 2명, 5명으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 각 조에 적어도 한 명의 소방관이 포함되도록 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 각 조에 적어도 한 명의 소방관이 포함되려면

경찰관 4명과 소방관 1명,

경찰관 3명과 소방관 2명

의 두 개의 조로 나눠야 한다.

경찰관 4명을 뽑고 함께 한 조가 될 소방관 1명을 뽑으면 나머지 5명이 한 조가 되면 되므로 구하는 방법의 수는

$${}_7C_4 \cdot {}_3C_1 = {}_7C_3 \cdot 3 = 35 \cdot 3 = 105$$

유형 27 분할한 후 분배하는 방법의 수

본책 137쪽

n묶음으로 분할하여 n명에게 분배하는 방법의 수

➡ (n묶음으로 분할하는 방법의 수)$\cdot n!$

0934 7명의 학생을 3명, 3명, 1명의 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_3 \cdot {}_4C_3 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} = 35 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 70$$

3개의 조를 3곳의 청소 구역에 배정하는 방법의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$70 \cdot 6 = 420$$

답 ④

0935 8명의 학생을 2명, 2명, 2명, 2명의 4개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{4!} = 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{24} = 105 \quad \cdots❶$$

4개의 조가 4종류의 컴퓨터 게임을 하는 방법의 수는

$$4! = 24 \quad \cdots❷$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$105 \cdot 24 = 2520 \quad \cdots❸$$

답 2520

채점 기준	비율
❶ 8명의 학생을 2명씩 4개의 조로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 4개의 조가 4종류의 컴퓨터 게임을 하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 2명씩 짝을 이루어 4종류의 컴퓨터 게임을 하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0936 2층부터 7층까지 6개의 층 중에서 사람들이 내리는 3개의 층을 택하는 방법의 수는 ${}_6C_3 = 20$

7명을 2명, 2명, 3명의 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 21 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 105$$

3개의 조를 3개의 층에 분배하는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는

$$20 \cdot 105 \cdot 6 = 12600$$

답 ④

다른 풀이 7명을 2명, 2명, 3명의 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 105$$

3개의 조가 2층부터 7층까지 6개의 층 중에서 3개의 층에 각각 내리면 되므로 구하는 방법의 수는

$$105 \cdot {}_6P_3 = 105 \cdot 120 = 12600$$

0937 운전자를 제외한 나머지 7명을 3개의 조로 나눌 때, 각 승용차에 탑승하는 인원수는

1, 3, 3 또는 2, 2, 3

(i) 1명, 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 7 \cdot 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 70$$

(ii) 2명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 21 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 105$$

(i), (ii)에서 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$$70 + 105 = 175$$

3개의 조를 3대의 승용차에 배정하는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는

$$175 \cdot 6 = 1050$$

답 1050

유형 28 대진표 작성하기

본책 137쪽

오른쪽 그림과 같은 대진표에서

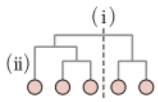
(i) 5명을 3명, 2명의 2개의 조로 나눈다.

➡ ${}_5C_3 \cdot {}_2C_2$

(ii) 3명인 조에서 부전승으로 올라가는 1명을 택한다.

➡ ${}_3C_1$

(iii) (i), (ii)의 결과를 곱한다. ➡ ${}_5C_3 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_3C_1$



0938 구하는 방법의 수는 먼저 6명을 3명, 3명의 2개의 조로 나눈 후 각 조에서 부전승으로 올라가는 1명을 택하는 방법의 수와 같으므로

$$\left({}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!}\right) \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 = 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 90$$

답 ④

0939 구하는 방법의 수는 먼저 6개의 학급을 2개, 4개의 학급으로 나눈 후 4개의 학급을 다시 2개, 2개의 학급으로 나누는 방법의 수와 같으므로

$$({}_6C_2 \cdot {}_4C_4) \cdot \left({}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!}\right) = 15 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 45$$

답 45

0940 9개의 팀을 5개, 4개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$_9C_5\cdot{}_4C_4=126\cdot1=126$

5개의 팀을 3개, 2개의 팀으로 나눈 후 3개의 팀 중에서 부전승으로 올라가는 1개의 팀을 택하는 방법의 수는

$(_5C_3\cdot{}_2C_2)\cdot{}_3C_1=10\cdot1\cdot3=30$

4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$

따라서 구하는 방법의 수는

$126\cdot30\cdot3=11340$ 답 11340

0941 전략 다섯 개의 영역 A, B, C, D, E의 넓이를 각각 구한 후, 가장 넓은 영역인 E에 칠하는 색을 기준으로 조건을 만족시키는 경우를 구한다.

풀이 영역 A의 넓이는 $\pi\cdot1^2=\pi$

영역 B의 넓이는 $\pi\cdot2^2-\pi\cdot1^2=3\pi$

영역 C의 넓이는 $\pi\cdot3^2-\pi\cdot2^2=5\pi$

영역 D의 넓이는 $\pi\cdot4^2-\pi\cdot3^2=7\pi$

영역 E의 넓이는 $\pi\cdot5^2-\pi\cdot4^2=9\pi$

이때 각 물감은 10통 이하만 사용할 수 있고 물감 1통으로는 영역 A의 넓이인 π만큼만 칠할 수 있으므로 한 가지 색의 물감으로는 10π만큼의 넓이까지 칠할 수 있다.

3가지 색을 빨강, 노랑, 파랑이라 하고 가장 넓은 영역인 E에 빨강을 칠하는 경우를 모두 구하면 다음과 같다.

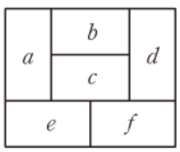
영역 E (넓이: 9π)	영역 D (넓이: 7π)	영역 C (넓이: 5π)	영역 B (넓이: 3π)	영역 A (넓이: π)
빨강	파랑	노랑	파랑	빨강
빨강	파랑	노랑	파랑	노랑
빨강	노랑	파랑	노랑	빨강
빨강	노랑	파랑	노랑	파랑

영역 E에 노랑, 파랑을 칠하는 경우도 마찬가지로 각각 4가지씩이므로 구하는 문양의 개수는

$4\cdot3=12$ 답 ②

0942 전략 먼저 서로 이웃한 2개의 지역을 선택하는 경우의 수를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 6개 지역을 각각 a, b, c, d, e, f라 하면 서로 이웃한 2개의 지역을 선택하는 경우의 수는



(a, b), (a, c), (a, e), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (c, f), (d, f), (e, f)의 10

서로 이웃한 2개 지역을 조사하는 조사원을 정하는 경우의 수는

5

남은 4개 지역을 나머지 4명의 조사원이 조사하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot5\cdot24=1200$ 답 ⑤

0943 전략 흰 공을 먼저 놓고, 그 각각의 경우에 대하여 검은 공을 놓는 방법을 생각한다.

1행, 2행, 3행, 4행의 4가지

풀이 1열에 흰 공을 놓을 수 있는 방법은 4가지, 2열에 흰 공을 놓을 수 있는 방법은 1열에 흰 공을 놓은 행을 제외한 3가지, 3열에 흰 공을 놓을 수 있는 방법은 1, 2열에 흰 공을 놓은 행을 제외한 2가지, 4열에 흰 공을 놓을 수 있는 방법은 1, 2, 3열에 흰 공을 놓은 행을 제외한 1가지이다.

따라서 흰 공을 놓을 수 있는 방법의 수는 $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

이때 조건 (다)에 의하여 검은 공은 다음과 같이 놓을 수 있다.

(i) 1행에 놓인 흰 공과 같은 열에서 검은 공은 3행 또는 4행에 놓을 수 있다.

(ii) 2행에 놓인 흰 공과 같은 열에서 검은 공은 4행에 놓을 수 있다.

(iii) 3행에 놓인 흰 공과 같은 열에서 검은 공은 1행에 놓을 수 있다.

(iv) 4행에 놓인 흰 공과 같은 열에서 검은 공은 1행 또는 2행에 놓을 수 있다.

이상에서 검은 공을 놓을 수 있는 방법의 수는 $2\cdot1\cdot1\cdot2=4$

따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot4=96$ 답 ②

0944 전략 숫자를 나열하는 경우와 알파벳을 나열하는 경우를 나누어 생각한다.

풀이 (i) 숫자를 나열하는 경우

ⓘ 0을 사용하지 않거나 1개 사용하는 경우

0, 2, 7, 1, 3 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$_5P_4=120$

ⓘⓘ 0을 2개 사용하는 경우

0끼리 서로 이웃하므로 00□□, □00□, □□00 꼴의 3가지이고, 그 각각에 대하여 2, 7, 1, 3 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수가 $_4P_2=12$이므로

$3\cdot12=36$

ⓘ, ⓘⓘ에서 숫자를 나열하는 방법의 수는

$120+36=156$

(ii) 알파벳을 나열하는 경우

ⓘⓘⓘ g△g□ 또는 □g△g인 경우

△에는 i, o 중에서 한 개, □에는 l, d, n과 사용하지 않은 모음 중에서 한 개를 택하여 나열하는 방법의 수는

$2\cdot4=8$

이므로 구하는 방법의 수는

$2\cdot8=16$

ⓘⓥ g△□g인 경우

△, □에 적어도 한 개의 모음을 나열해야 하므로

$_5P_2-{}_3P_2=20-6=14$

ⓘⓘⓘ, ⓘⓥ에서 알파벳을 나열하는 방법의 수는

$16+14=30$

(i), (ii)에서 구하는 비밀번호의 개수는

$156\cdot30=4680$ 답 ④

0945 전략 $_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$, $n!=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1$임을 이용한다.

풀이 $_{50}P_{38}$

$$=\frac{50!}{(50-38)!}=\frac{50!}{12!}$$

$$=\frac{(50\cdot 48\cdot 46\cdot \cdots \cdot 2)(49\cdot 47\cdot 45\cdot \cdots \cdot 1)}{12!}$$

$$=\frac{2^{25}(25\cdot 24\cdot 23\cdot \cdots \cdot 1)\cdot f(25)}{12!}$$

$$=\frac{2^{25}\cdot(25\cdot 23\cdot 21\cdot \cdots \cdot 1)\cdot(24\cdot 22\cdot 20\cdot \cdots \cdot 2)\cdot f(25)}{12!}$$

$$=\frac{2^{25}\cdot f(13)\cdot 2^{12}\cdot 12!\cdot f(25)}{12!}$$

$$=2^{37}\cdot f(13)\cdot f(25)$$

따라서 (가)에 알맞은 식은 $2^{37}\cdot f(13)$이다. 답 ④

0946 전략 $_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$임을 이용한다.

풀이 $_{n+3}C_n-{}_{n+3}C_{n-1}$

$$=\frac{(n+3)!}{n!3!}-\frac{(n+3)!}{(n-1)!4!}$$

$$=(\boxed{n+3})!\left\{\frac{1}{n!3!}-\frac{1}{(n-1)!4!}\right\}$$

$$=(n+3)!\left(\frac{4}{n!4!}-\frac{n}{n!4!}\right)$$

$$=(n+3)!\cdot\frac{\boxed{4-n}}{n!4!}$$

$$=\boxed{\frac{4-n}{n+4}}\cdot\frac{(n+4)!}{n!4!}$$

$$=\frac{4-n}{n+4}\cdot{}_{n+4}C_4$$

따라서 $f(n)=n+3$, $g(n)=4-n$, $h(n)=\dfrac{4-n}{n+4}$이므로

$$\frac{f(1)+g(2)}{h(3)}=\frac{4+2}{\frac{1}{7}}=42$$ 답 ②

0947 전략 $1+2+3+\cdots+9=45$이므로 세 수의 합이 15가 되는 경우를 먼저 구한다.

풀이 $1+2+3+\cdots+9=45$이므로 각 행의 세 수의 합은 $\dfrac{45}{3}=15$이다.

세 수의 합이 15가 되도록 자연수를 나누는 방법은

$(1,\ 5,\ 9)$, $(2,\ 6,\ 7)$, $(3,\ 4,\ 8)$

또는 $(1,\ 6,\ 8)$, $(2,\ 4,\ 9)$, $(3,\ 5,\ 7)$

(i) 각 행에 $(1,\ 5,\ 9)$, $(2,\ 6,\ 7)$, $(3,\ 4,\ 8)$을 적는 경우

조건 (나)에 의하여 2행에 $(1,\ 5,\ 9)$를 적고 1과 9는 자리를 바꿀 수 있으므로 그 방법의 수는 $2!=2$

1행과 3행에 $(2,\ 6,\ 7)$, $(3,\ 4,\ 8)$을 적는 방법의 수는

$2!=2$

이때 조건 (다)에 의하여 1행의 양 끝의 두 수의 합이 짝수이면 3행의 양 끝의 두 수의 합도 짝수이어야 한다. 즉 각 행의 가운데에는 홀수를 적고 양 끝의 짝수는 자리를 바꿀 수 있으므로 그 방법의 수는 $2!\cdot 2!=4$

또 1행의 양 끝의 두 수의 합이 홀수이면 3행의 양 끝의 두 수의 합도 홀수이어야 한다. 즉 각 행의 가운데에 적을 짝수를 하나 택하고 양 끝의 두 수는 자리를 바꿀 수 있으므로 그 방법의 수는

$({}_2C_1\cdot 2!)\cdot({}_2C_1\cdot 2!)=16$

따라서 적는 방법의 수는 $2\cdot 2\cdot(4+16)=80$

(ii) 각 행에 $(1,\ 6,\ 8)$, $(2,\ 4,\ 9)$, $(3,\ 5,\ 7)$을 적는 경우도 (i)과 마찬가지이므로 그 방법의 수는 80

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$80+80=160$ 답 160

0948 전략 두 수의 합이 짝수가 되는 경우는 (짝수)+(짝수), (홀수)+(홀수)이다.

풀이 ㄱ. $n=4$일 때, 짝수가 2개, 홀수가 2개이므로 두 수의 합이 짝수인 경우의 수는 ${}_2C_2+{}_2C_2=2$ $\quad\therefore f(4)=2$

ㄴ. n개 중에서 홀수의 개수를 x라 하면 짝수의 개수는 $n-x$이고, $x\ge 2$, $n-x\ge 2$이다.

이때 두 수의 합이 짝수인 경우의 수는

$$_xC_2+{}_{n-x}C_2=\frac{x(x-1)}{2\cdot 1}+\frac{(n-x)(n-x-1)}{2\cdot 1}$$

$$=\frac{(x^2-x)+(n^2-2nx+x^2-n+x)}{2}$$

$$=x^2-nx+\frac{n^2-n}{2}$$

$$=\left(x-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{n^2-2n}{4}$$

$g(x)=\left(x-\dfrac{n}{2}\right)^2+\dfrac{n^2-2n}{4}$이라 하면 n이 짝수이므로 $g(x)$는 $x=\dfrac{n}{2}$일 때 최소이고, 최솟값은 $\dfrac{n^2-2n}{4}$이다.

$$\therefore f(n)=\frac{n^2-2n}{4}$$

ㄷ. ㄴ에서 $g(x)=\left(x-\dfrac{n}{2}\right)^2+\dfrac{n^2-2n}{4}$에 대하여

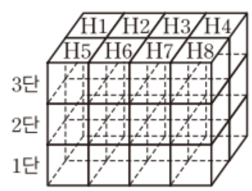
n이 홀수이면 $g(x)$는 $x=\dfrac{n+1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{n-1}{2}$일 때 최소이고, 최솟값은 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{n^2-2n}{4}=\dfrac{n^2-2n+1}{4}$이다.

$$\therefore f(n)=\frac{n^2-2n+1}{4}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0949 전략 [그림 1]과 같은 모양이 되려면 최소 6개, [그림 2]와 같은 모양이 되려면 최소 5개를 바꿔야 한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직육면체에서 높이로 쌓아 올린 세 개의 정육면체를 묶어서 각각 H1, H2, H3, …, H8이라 하자.



6개의 유리 상자를 바꾸어 [그림 1]과 같은 모양이 되기 위해서는 H1, H2, H3, H4, H6, H7에서 정육면체를 각각 한 개씩 바꾸어야 한다.

(ⅰ) H1, H2, H3, H4에서 정육면체를 각각 한 개씩 바꿀 때,
[그림 2]와 같은 모양이 되기 위해서는 어느 단에서는 2개를 바꿔야 하고, 나머지 단에서는 한 개씩 바꾸어야 한다.
2개를 바꿀 단을 택하는 방법의 수는 $\quad {}_3C_1=3$
그 단에서 바꿀 2개를 택하는 방법의 수는 $\quad {}_4C_2=6$
나머지 두 단에서 한 개씩 바꾸는 방법의 수는 $\quad 2!=2$
따라서 방법의 수는
$\quad 3\cdot6\cdot2=36$
(ⅱ) H6, H7에서 정육면체를 각각 한 개씩 바꿀 때,
[그림 2]와 같은 모양이 되기 위해서는 1단과 3단에서 한 개씩 바꾸어야 하므로 그 방법의 수는 $\quad 2!=2$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는
$\quad 36\cdot2=72$ 답 72

0950 전략 A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 0개인 경우와 1개인 경우로 나눈다.

풀이 (ⅰ) A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 0개인 경우
A가 4개의 동아리 중에서 2개를 택하고, 남은 2개의 동아리에 B가 가입하면 되므로 경우의 수는
$\quad {}_4C_2=6$
(ⅱ) A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개인 경우
A가 4개의 동아리 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
$\quad {}_4C_2=6$
B가 A가 택한 2개의 동아리 중에서 하나를 택하고, A가 택하지 않은 2개의 동아리 중에서 하나를 택하는 경우의 수는
$\quad {}_2C_1\cdot{}_2C_1=2\cdot2=4$
따라서 A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개인 경우의 수는
$\quad 6\cdot4=24$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$\quad 6+24=30$ 답 30

다른 풀이 (ⅱ) A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개인 경우
4개의 동아리 중에서 A와 B가 공통으로 가입할 동아리를 택하는 경우의 수는 $\quad {}_4C_1=4$
남은 3개의 동아리 중에서 A와 B가 각각 하나씩 가입할 동아리를 택하는 경우의 수는 $\quad {}_3P_2=6$
따라서 A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개인 경우의 수는 $\quad 4\cdot6=24$

0951 전략 민아를 기준으로 7명을 4명, 3명으로 나누는 경우를 구한다.

풀이 7명을 4명, 3명으로 나누는데 조건 (나)에 의하여 민아는 4명에 포함되어야 한다.
(ⅰ) {(민아, 여), (여, 여)}, {남, 남, 남}으로 나누는 경우
여학생 4명이 한 레일바이크에 탑승하는 경우의 수는
$\quad 4!=24$
남학생 3명이 한 레일바이크에 탑승하는 경우의 수는
$\quad {}_4P_3=24$
따라서 서로 다른 두 레일바이크에 탑승하는 경우의 수는
$\quad (24\cdot24)\cdot2!=1152$
(ⅱ) {(민아, 여), (남, 남)}, {(여, 여), 남}으로 나누는 경우
민아와 같이 앉을 여학생을 한 명 택하고, 남학생 3명 중에서 2명을 택하여 한 레일바이크에 탑승하는 경우의 수는
$$ {}_3C_1\cdot{}_3C_2\cdot\overbrace{2!\cdot2!}^{\text{짝끼리 자리를 바꿔 앉는 경우의 수}}\cdot\underbrace{2!}_{\text{앞자리와 뒷자리로 바꿔 앉는 경우의 수}}=72 $$
남은 사람들이 한 레일바이크에 탑승하는 경우의 수는
$\quad 2!\cdot2!\cdot2!=8$
따라서 서로 다른 두 레일바이크에 탑승하는 경우의 수는
$\quad (72\cdot8)\cdot2!=1152$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$\quad 1152+1152=2304$ 답 2304

다른 풀이 민아가 탑승하는 경우의 수는 두 레일바이크 중에서 한 레일바이크를 택하고, 택한 레일바이크의 네 자리 중에서 한 자리를 택하므로
$\quad {}_2C_1\cdot{}_4C_1=2\cdot4=8$
민아가 탑승한 레일바이크를 A, 다른 레일바이크를 B라 하면 나머지 여학생 3명, 남학생 3명이 탑승하는 경우는
(ⅰ) 3명의 여학생이 모두 A에 탑승하는 경우
여학생 3명은 민아가 앉고 남은 3자리에 앉으므로 $\quad 3!=6$
이때 남학생 3명은 B에 탑승하고, 4자리 중에서 3자리에 앉으므로
$\quad {}_4P_3=24$
(ⅱ) 1명의 여학생이 A에, 2명의 여학생이 B에 탑승하는 경우
민아 옆에 앉을 여학생을 택하는 경우의 수는 $\quad {}_3C_1=3$
나머지 2명의 여학생이 B에 탑승하여 옆자리에 앉는 경우의 수는 $\quad 2!\cdot2!=4$
남학생 3명 중에서 2명은 A에, 1명은 B에 탑승하므로
B에 1명이 탑승하는 경우의 수는
$\quad {}_3C_1\cdot2!=3\cdot2=6$
A에 나머지 2명이 탑승하는 경우의 수는
$\quad 2!=2$
(ⅰ), (ⅱ)에서 여학생 3명, 남학생 3명이 탑승하는 경우의 수는
$\quad 6\cdot24+3\cdot4\cdot6\cdot2=288$
따라서 구하는 경우의 수는
$\quad 8\cdot288=2304$

0952 전략 사각형의 네 꼭짓점이 각각 위치해야 하는 점을 조사한다.

풀이 주어진 삼각형을 포함하는 사각형의 네 꼭짓점은 다음과 같이 택하면 된다.
(ⅰ) 원점 $(0,\ 0)$
(ⅱ) x축 위의 점 $(4,\ 0)$, $(8,\ 0)$ 중에서 한 점
(ⅲ) y축 위의 점 $(0,\ 4)$, $(0,\ 8)$ 중에서 한 점
(ⅳ) 제1사분면 위의 점 $(4,\ 4)$, $(4,\ 8)$, $(8,\ 4)$, $(8,\ 8)$ 중에서 한 점
이상에서 조건을 만족시키는 사각형의 꼭짓점이 될 4개의 점을 택하는 방법의 수는
$\quad 1\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_4C_1=1\cdot2\cdot2\cdot4=16$
그런데 네 점 $(0,\ 0)$, $(8,\ 0)$, $(4,\ 4)$, $(0,\ 8)$을 택하는 경우는 사각형을 만들 수 없으므로 구하는 사각형의 개수는
$\quad 16-1=15$ 답 ②

0953 전략 먼저 6명을 세 팀으로 나눈 후 세 팀을 A, B, C에 배정한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 6명의 학생을 세 팀으로 나눌 때, 각 팀의 인원수는

1, 2, 3 또는 2, 2, 2

(i) 1명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 6 \cdot 10 \cdot 1 = 60$$

세 팀을 A, B, C에 배정하는 방법의 수는

$$3! = 6$$

이때 조건 (나)에 의하여 3명인 팀의 학생이 각자 다른 팀의 학생과 시합을 해야 하므로 그 방법의 수는 나머지 팀의 3명을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다. 즉

$$3! = 6$$

따라서 대진표를 작성하는 방법의 수는

$$60 \cdot 6 \cdot 6 = 2160$$

(ii) 2명, 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{3!} = 15 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 15$$

세 팀을 A, B, C에 배정하는 방법의 수는

$$3! = 6$$

이때 조건 (나)에 의하여 A팀의 2명이 B, C팀에서 한 명씩과 시합하고, B, C팀에서 각각 남은 한 명끼리 시합을 해야 하므로 그 방법의 수는 B, C팀에서 한 명씩 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다. 즉

$${}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot 2! = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

따라서 대진표를 작성하는 방법의 수는

$$15 \cdot 6 \cdot 8 = 720$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$$2160 + 720 = 2880$$

답 2880

0954 전략 사다리꼴의 넓이가 2이기 위한 윗변과 아랫변의 길이를 구한다.

풀이 두 평행한 직선에서 각각 두 점을 택할 때 사각형이 되고, 이 사각형은 사다리꼴이다.

사다리꼴의 윗변과 아랫변의 길이를 각각 a, b라 할 때, 사다리꼴의 넓이가 2이려면

$$\frac{1}{2}(a+b) \cdot 1 = 2 \qquad \therefore a+b=4$$ ⋯ ❶

(i) $a=1$, $b=3$일 때,

$a=1$인 경우는 4가지, $b=3$인 경우는 2가지이므로

$$4 \cdot 2 = 8$$ ⋯ ❷

(ii) $a=2$, $b=2$일 때, 평행사변형도 사다리꼴이다.

$a=2$인 경우는 3가지, $b=2$인 경우는 3가지이므로

$$3 \cdot 3 = 9$$ ⋯ ❸

(iii) $a=3$, $b=1$일 때,

$a=3$인 경우는 2가지, $b=1$인 경우는 4가지이므로

$$2 \cdot 4 = 8$$ ⋯ ❹

이상에서 구하는 사각형의 개수는

$$8+9+8=25$$ ⋯ ❺

답 25

채점 기준	비율
❶ 사각형의 윗변의 길이와 아랫변의 길이에 대한 관계식을 세울 수 있다.	20 %
❷ 윗변의 길이가 1, 아랫변의 길이가 3인 사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 윗변의 길이가 2, 아랫변의 길이가 2인 사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❹ 윗변의 길이가 3, 아랫변의 길이가 1인 사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❺ 넓이가 2인 사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0955 전략 같은 숫자가 없을 때, 한 쌍 있을 때, 두 쌍 있을 때로 나누어 각각의 자연수의 개수를 구한다.

풀이 (i) 같은 숫자가 없는 경우

네 자리 자연수의 개수는 ${}_5P_4 = 120$ ⋯ ❶

(ii) 같은 숫자가 한 쌍 있는 경우

∨□∨□, □∨□∨, ∨□□∨의 3가지

∨의 자리에 서로 같은 수를 넣고 □의 자리에 서로 다른 두 수를 각각 넣으면 되므로 네 자리 자연수의 개수는

$$3 \cdot \underbrace{2}_{\text{4 또는 5를 택하는 방법의 수}} \cdot {}_4P_2 = 72$$ ⋯ ❷

(iii) 같은 숫자가 두 쌍 있는 경우

네 자리 자연수는 4545, 5454의 2개 ⋯ ❸

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$$120+72+2=194$$ ⋯ ❹

답 194

채점 기준	비율
❶ 같은 숫자가 없는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 같은 숫자가 한 쌍 있는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 같은 숫자가 두 쌍 있는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 같은 숫자끼리는 이웃하지 않는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0956 전략 색을 0회, 1회, 2회 바꾸는 경우에 대하여 색을 바꿀 수 있는 곳을 생각한다.

풀이 1과 2, 2와 3, ⋯, 8과 9가 적힌 정사각형을 칠할 때 색이 바뀌는 것을 각각 a_1, a_2, ⋯, a_8이라 하자.

(i) 색을 바꾸지 않는 경우

3가지 색 중에서 1가지 색을 택하여 칠하는 방법의 수는

$${}_3C_1 = 3$$ ⋯ ❶

(ii) 색을 1회 바꾸는 경우

3가지 색 중에서 2가지 색을 택하고, 색의 순서를 바꾸는 방법의 수는

$${}_3C_2 \cdot 2! = 6$$

이때 조건 (나)에 의하여 a_2, a_3, a_4는 택할 수 없고, a_1, a_5, a_6, a_7, a_8 중 하나를 택할 수 있으므로 색을 바꾸는 곳을 택하는 방법의 수는

$${}_5C_1 = 5$$

따라서 색을 칠하는 방법의 수는

$$6 \cdot 5 = 30$$ ⋯ ❷

(iii) 색을 2회 바꾸는 경우

ⓘ 2가지 색을 이용하는 경우

3가지 색 중에서 2가지 색을 택하고, 색의 순서를 바꾸는 방법의 수는

$${}_3C_2 \cdot 2! = 6$$

이때 조건 (나)에 의하여

a_1을 택하고 a_5, a_6, a_7, a_8 중 하나를 택하거나

a_2, a_3, a_4 중 두 개를 택하거나

a_5, a_6, a_7, a_8 중 두 개를 택할 수 있으므로

색을 바꾸는 곳을 택하는 방법의 수는

$$1 \cdot {}_4C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_2 = 13$$

즉 2가지 색으로 칠하는 방법의 수는

$$6 \cdot 13 = 78$$

ⓘⓘ 3가지 색을 이용하는 경우

3가지 색을 모두 사용할 때, 색의 순서를 바꾸는 방법의 수는

$$3! = 6$$

이때 조건 (나)에 의하여

a_1을 택하고 a_5, a_6, a_7, a_8 중 하나를 택하거나

a_5, a_6, a_7, a_8 중 두 개를 택할 수 있으므로

색을 바꾸는 곳을 택하는 방법의 수는

$$1 \cdot {}_4C_1 + {}_4C_2 = 10$$

즉 3가지 색으로 칠하는 방법의 수는

$$6 \cdot 10 = 60$$

ⓘ, ⓘⓘ에서 색을 칠하는 방법의 수는

$78 + 60 = 138$ ⋯ ❸

이상에서 구하는 방법의 수는

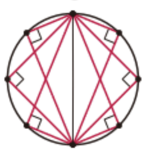
$3 + 30 + 138 = 171$ ⋯ ❹

답 171

채점 기준	비율
❶ 색을 바꾸지 않고 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	10 %
❷ 색을 1회 바꾸어 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 색을 2회 바꾸어 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	50 %
❹ 조건을 만족시키도록 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	10 %

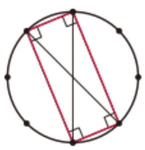
0957 전략 원에서 반원에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용한다.

풀이 8개의 점으로 만들 수 있는 지름은 4개이고, 오른쪽 그림과 같이 1개의 지름에 대하여 6개의 직각삼각형을 만들 수 있으므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는



$4 \cdot 6 = 24$ $\quad \therefore a = 24$ ⋯ ❶

원에 내접하는 직사각형의 두 대각선의 교점은 원의 중심이고, 오른쪽 그림과 같이 2개의 지름에 대하여 1개의 직사각형을 만들 수 있으므로 만들 수 있는 직사각형의 개수는



${}_4C_2 = 6$ $\quad \therefore b = 6$ ⋯ ❷

$\therefore a + b = 30$ ⋯ ❸

답 30

채점 기준	비율
❶ 직각삼각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0958 전략 승객 6명을 2개의 조로 나누어 세 정류장 A, B, C 중에서 두 정류장에 분배한다.

풀이 세 정류장 A, B, C 중에서 승객이 내리는 2개의 정류장을 택하는 방법의 수는 $\quad {}_3C_2 = 3$ ⋯ ❶

승객 6명을 2개의 조로 나눌 때, 각 조의 인원수는

1, 5 또는 2, 4 또는 3, 3

(i) 승객을 1명, 5명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_5 = 6 \cdot 1 = 6$$

(ii) 승객을 2명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15 \cdot 1 = 15$$

(iii) 승객을 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

이상에서 승객을 2개의 조로 나누는 방법의 수는

$6 + 15 + 10 = 31$ ⋯ ❷

2개의 조를 2개의 정류장에 분배하는 방법의 수는

$2! = 2$ ⋯ ❸

따라서 구하는 방법의 수는

$3 \cdot 31 \cdot 2 = 186$ ⋯ ❹

답 186

채점 기준	비율
❶ 세 정류장 중에서 2개의 정류장을 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 승객을 2개의 조로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 2개의 조를 2개의 정류장에 분배하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❹ 2개의 정류장에 모든 승객이 내리는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

MEMO

MEMO