정답 및 풀이

고등 수학(하)

집합과 명제

함수

순열과 조합

● 정답을 확인하려고 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

01 집합의 뜻과 표현

0001 답 ○ **0002** 답 ×

0003 답 ○

0004 답 수성, 금성, 지구, 화성, 목성, 토성, 천왕성, 해왕성

0005 답 -1, 0, 1

0006 답 $\in$ **0007** 답 $\not\in$

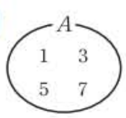
0008 답 {s, t, u, d, y} **0009** 답 $\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

0010 답 $\{x \mid x$는 8 이하의 자연수$\}$

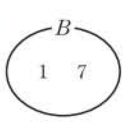
참고 $\{x \mid x$는 9보다 작은 자연수$\}$, $\{x \mid x$는 $1 \le x \le 8$인 자연수$\}$ 등으로 답할 수도 있다.

0011 답 $\{x \mid x$는 5 이상의 홀수$\}$

0012 답



0013 답



0014 답 무 **0015** 답 유

0016 답 유

참고 공집합은 원소의 개수가 0이므로 유한집합이다.

0017 답 무

0018 100 이하의 5의 양의 배수는

$5,\ 10,\ 15,\ \cdots,\ 100$

따라서 주어진 집합은 유한집합이다. 답 유

0019 9로 나누어떨어지는 자연수는

$9,\ 18,\ 27,\ \cdots$

따라서 주어진 집합은 무한집합이다. 답 무

0020 $|x|>0$인 정수 x는 0을 제외한 모든 정수이므로 주어진 집합은 무한집합이다. 답 무

0021 $x^2-5=0$을 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않는다.
따라서 주어진 집합은 공집합이므로 유한집합이다. 답 유

0022 ㄷ. 2로 나누어떨어지는 홀수는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다.

ㄹ. $1<x<2$인 자연수 x는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다.

ㅁ. $\{4\}$

이상에서 공집합인 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄷ, ㄹ

0023 답 3 **0024** 답 0

0025 답 25

0026 $|x| \le 2$에서 $-2 \le x \le 2$

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개

$\therefore n(A)=5$ 답 5

0027 실수 x에 대하여 $x^2 \ge 0$이므로 $x^2+2=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

$\therefore n(A)=0$ 답 0

0028 12의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$의 6개

$\therefore n(A)=6$ 답 6

0029 답 $\subset$ **0030** 답 $\not\subset$

0031 답 $\subset$ **0032** 답 $\subset$

0033 $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$이므로

$A \subset B$ 답 $A \subset B$

0034 $x^2-1=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 $A=\{-1,\ 1\}$이므로

$B \subset A$ 답 $B \subset A$

0035 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\}$, $B=\{4,\ 8,\ 12,\ \cdots\}$이므로

$B \subset A$ 답 $B \subset A$

0036 답 $\varnothing$ **0037** 답 $\{a\}$, $\{b\}$

0038 답 $\{a,\ b\}$ **0039** 답 $\varnothing$, $\{7\}$

0040 답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{1,\ 2,\ 3\}$

0041 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면

$\{1,\ 5\}$

이므로 구하는 부분집합은 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{5\}$, $\{1,\ 5\}$

답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{5\}$, $\{1,\ 5\}$

0042 $x^2=4$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면

$\{-2,\ 2\}$

이므로 구하는 부분집합은 $\varnothing$, $\{-2\}$, $\{2\}$, $\{-2,\ 2\}$

답 $\varnothing$, $\{-2\}$, $\{2\}$, $\{-2,\ 2\}$

0043 답 $A=B$

0044 $B=\{6, 12, 18, \cdots\}$이므로

$A \neq B$ 답 $A \neq B$

0045 $A=\{1, 3, 5, 7\}$이므로

$A \neq B$ 답 $A \neq B$

0046 $|x|=1$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore A=\{-1, 1\}$

$x^2=1$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore B=\{-1, 1\}$

$\therefore A=B$ 답 $A=B$

0047 답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$

0048 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면

$\{1, 2, 4\}$

이므로 구하는 진부분집합은

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$

답 풀이 참조

0049 $2^4=16$ 답 16

0050 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면

$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

이므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^6=64$ 답 64

0051 $2^5=32$ 답 32

0052 $2^5-1=31$ 답 31

0053 $2^{5-1}=2^4=16$ 답 16

0054 $2^{5-2}=2^3=8$ 답 8

라쎈 특강

특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수

집합 $A=\{a, b, c\}$의 부분집합 중에서

① a를 원소로 갖지 않는 집합은 집합 $\{b, c\}$의 부분집합과 같으므로 그 개수는

$2^2=4$

② a를 반드시 원소로 갖는 집합은 집합 $\{b, c\}$의 부분집합에 각각 원소 a를 추가한 집합과 같다.

따라서 그 개수는 집합 $\{b, c\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^2=4$

일반적으로 원소의 개수가 n인 집합의 부분집합 중에서 특정한 원소 $k\,(k<n)$개를 반드시 원소로 갖거나 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 n개의 원소 중에서 k개의 원소를 제외한 집합의 부분집합의 개수 2^{n-k}과 같다.

0055 ①, ②, ③, ④ '큰', '가까운', '잘하는', '소질이 있는'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

답 ⑤

0056 ② '목소리가 큰'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

답 ②

참고 '높은'은 조건이 명확하지 않지만 '가장 높은'은 조건이 명확하다. 따라서 ⑤는 집합이다.

0057 $A=\{5, 10, 15, \cdots\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$

① $1 \notin A$ ② $6 \notin A$

③ $30 \in A$ ⑤ $4 \notin B$

답 ④

0058 $x^2-2x-15>0$에서 $(x+3)(x-5)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>5$

$\therefore A=\{x \mid x<-3$ 또는 $x>5\}$

ㄱ. $-4 \in A$ ㄴ. $0 \notin A$

ㄷ. $7 \in A$

이상에서 옳은 것은 ㄹ뿐이다. 답 ③

0059 ① $\sqrt{9}=3$이므로 $\sqrt{9} \in Z$

②, ④ $\sqrt{8}$, $\sqrt{2}+1$은 모두 무리수이므로

$\sqrt{8} \notin Q$, $\sqrt{2}+1 \in R$

③, ⑤ $\frac{i}{3}$, $i^3=-i$는 모두 허수이므로

$\frac{i}{3} \notin Q$, $i^3 \notin R$

답 ⑤

라쎈 특강

i의 거듭제곱

i^n(n은 자연수)은 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타나므로 다음과 같은 규칙성을 찾을 수 있다.

$i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=i^2=-1$, $i^{4k+3}=i^3=-i$

(단, k는 자연수)

0060 ① $2018=3\cdot672+2$이므로 $2018 \notin A_1$, $2018 \in A_2$

② $2019=3\cdot673$이므로 $2019 \in A_0$

③ $2020=3\cdot673+1$이므로 $2020 \notin A_2$, $2020 \in A_1$

④ $2021=3\cdot673+2$이므로 $2021 \notin A_1$, $2021 \in A_2$

⑤ $2022=3\cdot674$이므로 $2022 \in A_0$

답 ③

0061 ① $A=\{1, 2, 3, 6\}$

② $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

③ $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

④ $A=\{3, 6, 9, 12\}$

⑤ $A=\{6, 12\}$

답 ②

0062 ⑤ $\{x|x$는 100 미만의 2의 양의 배수$\}$
$\Rightarrow \{2, 4, 6, \cdots, 98\}$

답 ⑤

0063 ①, ②, ③, ⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
④ $\{1, 3, 5, 9\}$

답 ④

0064 ① 무한집합
② $\{1, 2, 3, \cdots\}$ ➡ 무한집합
③ $\{0\}$ ➡ 유한집합
④ $\{102, 104, 106, \cdots\}$ ➡ 무한집합
⑤ $\{3, 6, 9, \cdots\}$ ➡ 무한집합

답 ③

0065 ㄱ. $\{11, 13, 15, \cdots\}$ ➡ 무한집합
ㄴ. $\{1, 5\}$ ➡ 유한집합
ㄷ. $\{2, 4, 6, \cdots, 30\}$ ➡ 유한집합
ㄹ. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}$ ➡ 무한집합
ㅁ. $\{4, 8, 12, \cdots, 48\}$ ➡ 유한집합
이상에서 무한집합인 것은 ㄱ, ㄹ의 2개이다. 답 ②

0066 ② $\{3\}$이므로 공집합이 아니다.

답 ②

0067 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{11, 22, 33, \cdots, 99\}$ $7^2=49$, $8^2=64$
따라서 $n(A)=7$, $n(B)=9$이므로
$n(B)-n(A)=2$ 답 2

0068 ② $n(\{3, 6, 9\})=3$, $n(\{3, 6\})=2$이므로
$n(\{3, 6, 9\})-n(\{3, 6\})=1$
③ $\{x|x$는 4의 양의 약수$\}=\{1, 2, 4\}$이므로
$n(\{x|x$는 4의 양의 약수$\})=3$
④ $n(\{1\})=1$, $n(\{2\})=1$이므로
$n(\{1\})=n(\{2\})$
⑤ $n(\varnothing)=0$, $n(\{\varnothing\})=1$이므로
$n(\varnothing)+n(\{\varnothing\})=1$

답 ⑤

0069 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$x^2-10x+16<0$에서 $(x-2)(x-8)<0$
$\therefore 2<x<8$
따라서 $B=\{3, 5, 7\}$이므로
$n(B)=3$ 답 ③

0070 $A=\{2, 4, 6, 8\}$이므로 $n(A)=4$
이때 $n(A)=n(B)$이므로
$n(B)=4$ ⋯ ❶
즉 k의 양의 약수의 개수가 4이어야 한다.
1, 2, 3, 4, 5, 6의 양의 약수의 개수는 각각
1, 2, 2, 3, 2, 4
이므로 가장 작은 자연수 k의 값은 6이다. ⋯ ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ $n(B)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 가장 작은 자연수 k의 값을 구할 수 있다.	70 %

참고 양의 약수의 개수가 4인 자연수는
① (소수)×(소수) 꼴인 경우: 2×3, 2×5, 2×7, ⋯
② $(\text{소수})^3$ 꼴인 경우: 2^3, 3^3, 5^3, ⋯

0071 집합 A의 원소 a, 집합 B의 원소 b에 대하여 ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	-2	0
1	-2	0
3	-6	0

$X=\{-6, -2, 0\}$
따라서 집합 X의 모든 원소의 합은
$-6+(-2)+0=-8$ 답 -8

0072 집합 A의 원소 x, 집합 B의 원소 y에 대하여 (x, y)를 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	d	e
a	(a, d)	(a, e)
b	(b, d)	(b, e)
c	(c, d)	(c, e)

$X=\{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$
$\therefore n(X)=6$ 답 ④

0073 집합 A의 두 원소 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	-3	0	3
-3	18	9	18
0	9	0	9
3	18	9	18

$X=\{0, 9, 18\}$
답 $X=\{0, 9, 18\}$

0074 집합 A의 원소 a, 집합 B의 원소 b에 대하여 $a\geq b$일 때 $a-b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	2	5	8
1			
3	1		
5	3	0	
7	5	2	
9	7	4	1

$a<b$인 경우

$X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ ⋯ ❶
따라서 집합 X의 원소의 개수는 7이다. ⋯ ❷

답 7

채점 기준	비율
❶ 집합 X를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	70 %
❷ 집합 X의 원소의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0075 ① $4\in A$, $4\notin B$이므로 $A\not\subset B$
② $c\in A$, $c\notin B$이므로 $A\not\subset B$
③ $A=\{1, 3, 9\}$, $B=\{1, 3\}$
$9\in A$, $9\notin B$이므로 $A\not\subset B$
④ $A=\{5, 10, 15, \cdots\}$, $B=\{10, 20, 30, \cdots\}$
$5\in A$, $5\notin B$이므로 $A\not\subset B$

⑤ $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 $\quad A\subset B$

답 ⑤

0076 답 ①

0077 $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$이고, 주어진 벤다이어그램에서 $B\subset A$이므로 k는 16의 양의 약수이어야 한다. ··· ❶

따라서 한 자리 자연수 k는

$1, 2, 4, 8$

의 4개이다. ··· ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ k의 조건을 구할 수 있다.	70 %
❷ 한 자리 자연수 k의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0078 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

⑤ $8\notin A$이므로 $\quad \{2, 8, 12\}\not\subset A$

답 ⑤

0079 ① $2\in A$ 또는 $\{2\}\subset A$

③ $4\in A$ 또는 $\{4\}\subset A$

⑤ $A\subset B$

답 ②, ④

0080 ⑤ $1\in A$, $\{5\}\in A$이므로 $\quad \{1, \{5\}\}\subset A$

답 ⑤

참고 집합 $A=\{1, 5, \{5\}\}$의 원소는 $1, 5, \{5\}$이므로
$1\in A$, $5\in A$, $\{5\}\in A$, $\{1\}\subset A$, $\{5\}\subset A$, $\{\{5\}\}\subset A$,
$\{1, 5\}\subset A$, $\{1, \{5\}\}\subset A$, $\{5, \{5\}\}\subset A$

0081 ㄷ. $\{a, c\}\in A$

ㅁ. $\{a, c\}\in A$ 또는 $\{\{a, c\}\}\subset A$

ㅂ. $\{c\}\notin A$이므로 $\quad \{b, \{c\}\}\not\subset A$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

0082 $A\subset B$가 성립하려면 $4\in B$이어야 하므로

$a+1=4$ 또는 $3a-8=4$

$\therefore a=3$ 또는 $a=4$

(i) $a=3$일 때,

$A=\{2, 4\}$, $B=\{0, 1, 2, 4\}$이므로 $\quad A\subset B$

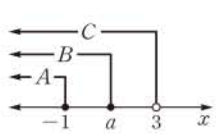
(ii) $a=4$일 때,

$A=\{3, 4\}$, $B=\{0, 2, 4, 5\}$이므로 $\quad A\not\subset B$

(i), (ii)에서 $\quad a=3$

답 3

0083 $A\subset B\subset C$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-1\le a<3$

따라서 정수 a는 $-1, 0, 1, 2$의 4개이다. 답 ②

0084 $B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ ··· ❶

이때 $A=\{k, 2k\}$에서 $A\subset B$가 성립하려면 $k\in B$이어야 한다.

$k=1$일 때, $\quad A=\{1, 2\}$ $\quad\therefore A\subset B$

$k=2$일 때, $\quad A=\{2, 4\}$ $\quad\therefore A\not\subset B$

$k=3$일 때, $\quad A=\{3, 6\}$ $\quad\therefore A\subset B$

$k=6$일 때, $\quad A=\{6, 12\}$ $\quad\therefore A\not\subset B$

$k=9$일 때, $\quad A=\{9, 18\}$ $\quad\therefore A\subset B$

$k=18$일 때, $\quad A=\{18, 36\}$ $\quad\therefore A\not\subset B$

따라서 $A\subset B$가 성립하도록 하는 자연수 k는

$1, 3, 9$ ··· ❷

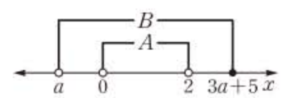
이므로 구하는 합은

$1+3+9=13$ ··· ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $A\subset B$가 성립하도록 하는 자연수 k의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ 모든 자연수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0085 $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



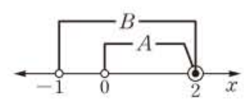
$a\le 0$, $3a+5\ge 2$

$3a+5\ge 2$에서 $\quad 3a\ge -3$ $\quad\therefore a\ge -1$

따라서 $-1\le a\le 0$이므로 a의 최솟값은 -1이다.

답 ③

참고 $a=-1$일 때,
$A=\{x|0<x<2\}$,
$B=\{x|-1<x\le 2\}$
이므로 $A\subset B$가 성립한다.



0086 $A\subset B$가 성립하려면 $-2\in B$이어야 하므로

$a=-2$ 또는 $a+1=-2$ 또는 $a+2=-2$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=-3$ 또는 $a=-4$ ··· ❶

(i) $a=-2$일 때,

$A=\{-2, 2\}$, $B=\{-2, -1, 0, 2\}$이므로

$A\subset B$

(ii) $a=-3$일 때,

$A=\{-2, 7\}$, $B=\{-3, -2, -1, 2\}$이므로

$A\not\subset B$

(iii) $a=-4$일 때,

$A=\{-2, 14\}$, $B=\{-4, -3, -2, 2\}$이므로

$A\not\subset B$ ··· ❷

이상에서 $a=-2$이므로

$B=\{-2, -1, 0, 2\}$ ··· ❸

답 $\{-2, -1, 0, 2\}$

채점 기준	비율
❶ $-2\in B$를 만족시키는 a의 값을 모두 구할 수 있다.	20 %
❷ 각각의 경우에서 $A\subset B$가 성립하는지 확인할 수 있다.	60 %
❸ 집합 B를 구할 수 있다.	20 %

0087 $A=\{-1, 0, 1\}$이므로 A의 부분집합은

$\varnothing$, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$, $\{-1, 0, 1\}$

답 풀이 참조

0088 $A=\{9, 18, 27, 36\}$ ⋯ ❶

집합 B는 A의 부분집합 중에서 원소가 2개인 집합이므로

$\{9, 18\}$, $\{9, 27\}$, $\{9, 36\}$, $\{18, 27\}$, $\{18, 36\}$, $\{27, 36\}$

의 6개이다. ⋯ ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 집합 B의 개수를 구할 수 있다.	70 %

0089 $A=B$에서 $0\in A$, $5\in B$이므로

$a+2b=0$, $2a-b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

$\therefore a+b=1$

답 1

0090 ② $A=\varnothing$, $B=\{1\}$이므로

$A\neq B$

③ $A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{3, 4\}$이므로

$A\neq B$

④ $A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 3\}$이므로

$A=B$

⑤ $A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, $B=\{4, 8, 12, 16\}$이므로

$A\neq B$

답 ④

0091 $A\subset B$이고 $B\subset A$이므로

$A=B$ ⋯ ❶

따라서 $1\in A$이므로 $x^2+4x-a=0$에 $x=1$을 대입하면

$1+4-a=0$ $\therefore a=5$ ⋯ ❷

$x^2+4x-5=0$에서 $(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

즉 $A=\{-5, 1\}$이므로

$b=-5$ ⋯ ❸

$\therefore a-b=10$ ⋯ ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ $A=B$임을 알 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

다른 풀이 $A=B$에서 $x^2+4x-a=0$의 두 근이 1, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+b=-4$, $b=-a$

$\therefore a=5$, $b=-5$

$\therefore a-b=10$

라쎈 특강

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때,

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

0092 $A=B$이므로

$x^2-1=3$, $x^2=4$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

(i) $x=-2$일 때,

$A=\{-8, -2, 3\}$, $B=\{2, 3, 4\}$이므로

$A\neq B$

(ii) $x=2$일 때,

$A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 4\}$이므로

$A=B$

(i), (ii)에서 $x=2$

답 2

0093 ㄱ. $\varnothing\subset\{1, 2, 3, 4\}$, $\varnothing\neq\{1, 2, 3, 4\}$

ㄴ. $\{x|x$는 $0<x<4$인 자연수$\}=\{1, 2, 3\}$이므로

$\{1, 2, 3\}\subset\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}\neq\{1, 2, 3, 4\}$

ㄷ. $\{x|x$는 4 이하의 자연수$\}=\{1, 2, 3, 4\}$

ㄹ. $\{x|x$는 2의 양의 약수$\}=\{1, 2\}$이므로

$\{1, 2\}\subset\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2\}\neq\{1, 2, 3, 4\}$

이상에서 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 진부분집합인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0094 $x^2-6x+5<0$에서

$(x-1)(x-5)<0$ $\therefore 1<x<5$

$\therefore A=\{2, 3, 4\}$ ⋯ ❶

따라서 집합 A의 진부분집합은

$\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$ ⋯ ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 집합 A의 진부분집합을 구할 수 있다.	50 %

0095 $U=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

1을 제외한 U의 모든 원소가 A의 원소일 때 $S(A)$의 값이 최대이므로 구하는 최댓값은

$A=\{2, 3, 4, 6, 12\}$

$2+3+4+6+12=27$

답 27

참고 $A\neq U$이므로 U의 원소 중 가장 작은 1을 제외했을 때 $S(A)$의 값이 최대이다.

0096 ① 원소의 개수가 3이므로 부분집합의 개수는

$2^3=8$

② $\{2, 3, 5, 7, 11\}$에서 원소의 개수가 5이므로 부분집합의 개수는 $2^5=32$

③ $\{1, 3, 5\}$에서 원소의 개수가 3이므로 부분집합의 개수는

$2^3=8$

④ $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$에서 원소의 개수가 8이므로 부분집합의 개수는 $\quad 2^8=256$

⑤ $\{1, 2, 3, \cdots, 32\}$에서 원소의 개수가 32이므로 부분집합의 개수는 $\quad 2^{32}$

답 ②

0097 $n(A)=a$, $n(B)=b$라 하면

$2^a=16$, $2^b-1=63$

$2^a=16=2^4$에서 $\quad a=4$

$2^b=64=2^6$에서 $\quad b=6$

$\therefore n(B)-n(A)=2$

답 2

0098 $x^3-2x^2-x+2=0$에서

$x^2(x-2)-(x-2)=0, \quad (x^2-1)(x-2)=0$

$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore A=\{-1, 1, 2\}$

따라서 $n(A)=3$이므로 집합 A의 진부분집합의 개수는

$2^3-1=7$

답 ④

참고 조립제법을 이용하여 인수분해할 수도 있다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ & & -1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

x^3-2x^2-x+2
$=(x+1)(x^2-3x+2)$
$=(x+1)(x-1)(x-2)$

0099 집합 A의 두 원소 a, b에 대하여 ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	-1	0	1	2
-1	1	0	-1	-2
0	0	0	0	0
1	-1	0	1	2
2	-2	0	2	4

$B=\{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ ⋯ ❶

따라서 집합 B의 원소의 개수가 6이므로 부분집합의 개수는

$2^6=64$ ⋯ ❷

답 64

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ 집합 B의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	40 %

0100 $A=\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$

A의 부분집합 중에서 4, 16을 반드시 원소로 갖고, 12를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{6-2-1}=2^3=8$

답 ③

0101 X는 A의 진부분집합이고, 1, 3을 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는

$2^{5-2}\underbrace{-1}_{X=A\text{인 경우 제외}}=2^3-1=7$

답 ③

0102 $A=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$에서

$n(A)=k$

A의 부분집합 중에서 1, 2를 원소로 갖지 않는 집합의 개수가 16이므로

$2^{k-2}=16=2^4, \quad k-2=4$

$\therefore k=6$

답 6

0103 (1) $2x^2-5x-12<0$에서

$(2x+3)(x-4)<0$

$\therefore -\frac{3}{2}<x<4$ ⋯ ❶

이때 x는 정수이므로

$A=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ⋯ ❷

(2) 음수 -1을 포함하지 않는 집합 A의 부분집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$ ⋯ ❸

답 (1) $A=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (2) 16

채점 기준	비율
❶ $2x^2-5x-12<0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ 음수를 포함하지 않는 집합 A의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	40 %

0104 $A=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

이때 집합 A의 부분집합 중에서 모든 원소가 짝수로만 이루어진 집합은 공집합이 아니고 1, 3, 5, 15를 원소로 갖지 않아야 하므로 구하는 집합의 개수는

$2^{8-4}\underbrace{-1}_{\text{공집합을 제외해야 한다.}}=15$

답 ③

0105 $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ ⋯ ❶

이때 집합 A의 부분집합 중 가장 큰 원소가 9인 집합은 9를 반드시 원소로 갖고 11, 13을 원소로 갖지 않아야 한다. ⋯ ❷

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$2^{7-1-2}=2^4=16$ ⋯ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 집합 A의 부분집합 중 가장 큰 원소가 9일 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ 가장 큰 원소가 9인 집합 A의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	40 %

0106 $x^2-5x+6=0$에서 $\quad (x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{2, 3\}$

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$이므로 집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 2, 3을 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{8-2}=2^6=64$

답 ⑤

라쎈 특강

포함 관계를 만족시키는 집합의 개수

$A\subset B$를 만족시키는 두 집합 A, B에 대하여 $n(A)=a$, $n(B)=b$일 때, $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는

2^{b-a} (단, $a<b$)

0107 집합 X는 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$의 부분집합 중에서 1, 3을 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{6-2}=2^4=16$ 답 16

0108 집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.
이때 집합 X의 개수가 32이므로
$2^{n-3}=32=2^5$, $\quad n-3=5 \quad \therefore n=8$ 답 ③

0109 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$
따라서 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 2, 4, 6, 8, 10을 반드시 원소로 갖는 집합에서 A, B를 제외한 것과 같다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{10-5}-2=2^5-2=30$ 답 30

0110 집합 A의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 짝수를 원소로 갖는 집합은 $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{3, 9, 15\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.
따라서 그 개수는
$2^6-2^3=64-8=56$ 답 56

0111 $A=\{0, 1, 2, 3\}$ ⋯ ❶
집합 A의 진부분집합 중에서 홀수를 1개 이상 포함하는 집합은 A의 진부분집합 중에서 집합 $\{0, 2\}$의 부분집합을 제외한 것과 같으므로 그 개수는
$(2^4-1)-2^2=15-4=11$ ⋯ ❷
답 11

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 집합의 개수를 구할 수 있다.	70 %

0112 집합 A의 부분집합 중에서 7 또는 10을 원소로 갖는 집합은 $A=\{4, 7, 10, 13, 16, 19\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{4, 13, 16, 19\}$의 부분집합을 제외한 것과 같으므로 그 개수는
$2^6-2^4=64-16=48$ 답 ⑤
다른 풀이 7 또는 10을 원소로 갖는 집합은 집합 $\{4, 13, 16, 19\}$의 부분집합에 7만 추가하거나 10만 추가하거나 7, 10을 모두 추가하면 된다.
따라서 구하는 부분집합의 개수는 $\quad 2^4\cdot 3=48$

0113 ① $2\in S$이므로 $\quad 2\cdot 2=4\in S$
② $2\in S$, $3\in S$이므로 $\quad 2\cdot 3=6\in S$
④ $3\in S$이므로 $\quad 3\cdot 3=9\in S$
⑤ $2\in S$, $6\in S$이므로 $\quad 2\cdot 6=12\in S$
답 ③

0114 (1) 집합 X의 원소는 4의 양의 약수이어야 한다.
이때 4의 양의 약수는 1, 2, 4이고 1과 4는 어느 하나가 X의 원소이면 나머지 하나도 반드시 X의 원소이어야 한다. ⋯ ❶
따라서 원소의 개수가 1인 집합 X는 $\quad \{2\}$ ⋯ ❷
(2) 원소의 개수가 2인 집합 X는 $\quad \{1, 4\}$ ⋯ ❸
(3) 원소의 개수가 3인 집합 X는 $\quad \{1, 2, 4\}$ ⋯ ❹
답 (1) $\{2\}$ (2) $\{1, 4\}$ (3) $\{1, 2, 4\}$

채점 기준	비율
❶ 집합 X의 원소의 조건을 이해할 수 있다.	40 %
❷ $n(X)=1$인 집합 X를 구할 수 있다.	20 %
❸ $n(X)=2$인 집합 X를 구할 수 있다.	20 %
❹ $n(X)=3$인 집합 X를 구할 수 있다.	20 %

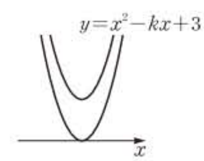
참고 $1\in X$이면 $\quad \frac{4}{1}=4\in X$
$2\in X$이면 $\quad \frac{4}{2}=2\in X$
$4\in X$이면 $\quad \frac{4}{4}=1\in X$

0115 ㄱ. $2\in S$이므로 $\quad 2+3=5\in S$
$5\in S$이므로 $\quad 5+3=8\in S$
$8\in S$이므로 $\quad 8+3=11\in S$
ㄴ. $x\in S$이므로 $\quad x+3\in S$
$x+3\in S$이므로 $\quad (x+3)+3=x+6\in S$
ㄷ. ㄱ에서 $2\in S$이지만 $6\in S$인지 알 수 없다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0116 전략 먼저 집합 A를 원소나열법으로 나타낸다.
풀이 $x=1, 2, 3, 4$이므로 $\quad A=\{1, 6, 11, 16\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$1+6+11+16=34$ 답 34

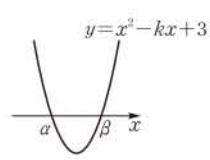
0117 전략 주어진 벤다이어그램을 보고 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낸다.
풀이 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$
⑤ $\{2, 4, 8\}\subset B$
답 ⑤

0118 전략 이차함수 $y=x^2-kx+3$의 그래프와 x축의 위치 관계를 생각한다.
풀이 집합 X가 유한집합이 되려면 이차함수 $y=x^2-kx+3$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점에서 만나거나 만나지 않아야 한다.



즉 이차방정식 $x^2-kx+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-k)^2-4\cdot 1\cdot 3\le 0$
$k^2-12\le 0$, $\quad (k+2\sqrt{3})(k-2\sqrt{3})\le 0$
$\therefore -2\sqrt{3}\le k\le 2\sqrt{3}$
따라서 k의 최댓값은 $2\sqrt{3}$이다. 답 ③

참고 이차함수 $y=x^2-kx+3$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ $(\alpha<\beta)$에서 만나면 이차부등식 $x^2-kx+3\le 0$의 해는 $\quad \alpha\le x\le\beta$
이때 $\alpha\le x\le\beta$를 만족시키는 실수 x는 무수히 많으므로 집합 X는 무한집합이 된다.



0119 전략• 집합 A, B를 각각 원소나열법으로 나타낸 후 $n(A)$, $n(B)$를 구한다.

풀이 $72=2^3\times3^2$, $108=2^2\times3^3$이므로 72와 108의 최대공약수는 $2^2\times3^2$, 즉 36이다.

72와 108의 공약수는 36의 약수와 같으므로

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$

$\therefore\ n(A)=9$

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k-1\}$이므로

$n(B)=k-1$

따라서 $n(A)+n(B)=15$에서

$9+(k-1)=15$

$\therefore\ k=7$

답 ②

0120 전략• 집합 A를 원소나열법으로 나타낸 후 A의 원소를 이용하여 집합 B의 원소를 구한다.

풀이 $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $\cdots$이므로

$A=\{i,\ -1,\ -i,\ 1\}$

이때 집합 A의 원소 z에 대하여 z^2의 값은

$i^2=-1$, $(-1)^2=1$, $(-i)^2=-1$, $1^2=1$

중 하나이다.

즉 집합 A의 두 원소 z_1, z_2에 대하여 z_1^2, z_2^2의 값은 각각 -1 또는 1이므로 $z_1^2+z_2^2$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

z_1^2 \ z_2^2	-1	1
-1	-2	0
1	0	2

$\therefore\ B=\{-2,\ 0,\ 2\}$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 3이다.

답 3

참고 집합 A의 두 원소 z_1, z_2에 대하여 $z_1^2+z_2^2$의 값을 오른쪽 표를 이용하여 구할 수도 있다.

z_1 \ z_2	i	-1	$-i$	1
i	-2	0	-2	0
-1	0	2	0	2
$-i$	-2	0	-2	0
1	0	2	0	2

0121 전략• 주어진 최솟값과 최댓값을 이용하여 먼저 a, c의 값을 구한다.

풀이 $a<b<c$이므로 집합 B의 원소 중 최솟값은 $a+a=2a$, 최댓값은 $c+c=2c$이다.

즉 $2a=6$, $2c=18$이므로

$a=3$, $c=9$

따라서 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

x \ y	3	b	9
3	6	$3+b$	12
b	$3+b$	$2b$	$9+b$
9	12	$9+b$	18

$3<b<9$이므로

$6<3+b<2b<9+b<18$,

$6<3+b<12<9+b<18$

이때 $n(B)=5$이므로 6, $3+b$, $2b$, 12, $9+b$, 18 중 2개가 같은 수이어야 한다.

따라서 $2b=12$이므로 $b=6$

답 6

참고 $3<b<9$의 각 변에 b를 더하면 $3+b<2b<9+b$

또 $3<b<9$의 각 변에 3과 9를 각각 더하면

$6<3+b<12$, $12<9+b<18$

따라서 $6<3+b<2b<9+b<18$, $6<3+b<12<9+b<18$이다.

0122 전략• 두 집합 B, C를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

$B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

또 $(-1)^2=1$, $0^2=0$, $1^2=1$이므로

$C=\{0,\ 1\}$

$\therefore\ C\subset A\subset B$

답 ④

0123 전략• 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 3,\ 9\}$

① $6\in A$ 또는 $\{6\}\subset A$

② $\{2,\ 3\}\subset A$

③ $9\in B$, $9\notin A$이므로 $B\not\subset A$

④, ⑤ $n(A)=4$, $n(B)=3$이므로

$n(A)>n(B)$, $n(B)-n(A)=-1$

답 ④

0124 전략• 집합 A의 원소는 모두 집합 B의 원소임을 이용한다.

풀이 $(x-5)(x-a)=0$에서

$x=5$ 또는 $x=a$

즉 A는 5, a를 원소로 갖는다.

이때 $A\subset B$이려면 $a\in B$이어야 하므로

$a=5$ ($\because\ a>0$)

답 5

0125 전략• $A_n\subset A_{25}$를 만족시킬 때의 $\sqrt{n}$의 값의 범위를 구한다.

풀이 $A_{25}=\{x\,|\,x$는 $\sqrt{25}$ 이하의 홀수$\}$에서 $\sqrt{25}=5$이므로

$A_{25}=\{1,\ 3,\ 5\}$

$A_n=\{x\,|\,x$는 $\sqrt{n}$ 이하의 홀수$\}$에서 $A_n\subset A_{25}$를 만족시키려면 $\sqrt{n}<7$이어야 한다.

$\sqrt{n}\geq7$이면 $7\in A_n$이므로 $A_n\not\subset A_{25}$이다.

이때 n은 자연수이므로

$1\leq\sqrt{n}<7$ $\therefore\ 1\leq n<49$

따라서 자연수 n의 최댓값은 48이다.

답 48

0126 전략• 집합 B가 주어진 조건을 모두 만족시키려면 어떤 원소를 가져야 하는지 구한다.

풀이 $A=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

조건 (나)에서 집합 B는 3을 반드시 원소로 갖고 2를 원소로 갖지 않아야 한다.

또 조건 (가)에서 집합 B는 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 3개를 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 B의 모든 원소의 합이 최대가 되려면

$B=\{3,\ 7,\ 8,\ 9\}$

이어야 하므로 구하는 최댓값은

$3+7+8+9=27$

답 ②

0127 전략• $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수를 뜻한다.

풀이 ① $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 2\}$이면 $A\subset B$이지만 $n(A)=n(B)$이다.

③ $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{3\}$이면 $n(A)>n(B)$이지만 $B\not\subset A$이다.

④ $A=\{1, 2\}$, $B=\{3, 4\}$이면 $n(A)=n(B)$이지만 $A\neq B$이다.

⑤ $n(A)=0$이면 $A=\varnothing$이다.

답 ②

참고 $A\subset B$이면 $n(A)\le n(B)$이다.

0128 전략 두 집합 A, B의 모든 원소가 같음을 이용한다.

풀이 $A=B$이므로

$a+2=2$ 또는 $\underline{a^2-2=2}$ $a^2=4$에서 $a=-2$ 또는 $a=2$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때,

$A=\{0, 2\}$, $B=\{2, 8\}$이므로 $A\neq B$

(ii) $a=0$일 때,

$A=\{-2, 2\}$, $B=\{2, 6\}$이므로 $A\neq B$

(iii) $a=2$일 때,

$A=\{2, 4\}$, $B=\{2, 4\}$이므로 $A=B$

이상에서 $a=2$

답 ⑤

0129 전략 $P(S)$의 원소는 집합 S의 부분집합임을 이용한다.

풀이 $P(S)$는 집합 S의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로 $P(S)$의 원소의 개수는

$2^2=4$

따라서 $P(S)$의 부분집합의 개수는

$2^4=16$

답 16

참고 $P(S)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$이므로 $P(S)$의 부분집합은
$\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{a\}\}$, $\{\{b\}\}$, $\{\{a, b\}\}$, $\{\varnothing, \{a\}\}$, $\{\varnothing, \{b\}\}$,
$\{\varnothing, \{a, b\}\}$, $\{\{a\}, \{b\}\}$, $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, $\{\{b\}, \{a, b\}\}$,
$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}\}$, $\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$, $\{\varnothing, \{b\}, \{a, b\}\}$,
$\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

0130 전략 집합 X가 반드시 원소로 갖는 것과 갖지 않는 것의 개수를 이용한다.

풀이 집합 X는 집합 S의 부분집합 중에서 2, 4를 반드시 원소로 갖고, 10을 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{7-2-1}=2^4=16$

답 16

0131 전략 집합 X는 A의 부분집합 중에서 B의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합임을 이용한다.

풀이 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

답 8

0132 전략 집합 A의 원소의 개수가 1, 2, 3일 때로 나누어 순서쌍 (A, B)의 개수를 구한다.

풀이 (i) 집합 A의 원소의 개수가 1일 때,

집합 B의 개수는 집합 X의 부분집합 중에서 집합 A의 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{3-1}=2^2=4$

이때 원소의 개수가 1인 집합 A는 $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$의 3가지이므로 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3\cdot4=12$

(ii) 집합 A의 원소의 개수가 2일 때,

집합 B의 개수는 집합 X의 부분집합 중에서 집합 A의 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{3-2}=2^1=2$

이때 원소의 개수가 2인 집합 A는 $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$의 3가지이므로 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3\cdot2=6$

(iii) 집합 A의 원소의 개수가 3일 때,

$A=\{-1, 0, 1\}$이므로 $B=\{-1, 0, 1\}$

따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는 1이다.

이상에서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$12+6+1=19$

답 ⑤

집합 B의 원소의 개수가 1, 2, 3일 때로 나누어 생각할 수도 있다.

다른 풀이 (i) 집합 B의 원소의 개수가 1일 때,

집합 A는 공집합이 아닌 집합 B의 부분집합이므로 $A=B$이다.

이때 원소의 개수가 1인 집합 B는 $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$의 3가지이므로 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

3

(ii) 집합 B의 원소의 개수가 2일 때,

집합 A는 공집합이 아닌 집합 B의 부분집합이므로 그 개수는

$2^2-1=3$

이때 원소의 개수가 2인 집합 B는 $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$의 3가지이므로 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3\cdot3=9$

(iii) 집합 B의 원소의 개수가 3일 때,

집합 A는 공집합이 아닌 집합 B의 부분집합이므로 그 개수는

$2^3-1=7$

이때 $B=\{-1, 0, 1\}$이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

$7\cdot1=7$

이상에서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3+9+7=19$

0133 전략 $X=\{2, 5, a, b\}$로 놓고, a, b 사이의 관계식을 이용한다.

풀이 조건 (가), (나)에서 $2\in X$, $5\in X$이고 $n(X)=4$이므로 2, 5가 아닌 서로 다른 두 자연수 a, b에 대하여

$X=\{2, 5, a, b\}$

라 하자.

조건 (다)에서 집합 X의 원소의 총합이 15이므로

$2+5+a+b=15$

$\therefore a+b=8$ ··· ❶

조건 (라)에서 원소 중 7의 배수가 한 개 있으므로 $\underline{a=7}$이라 하면

8 미만인 7의 배수는 7뿐이다.

$b=8-7=1$

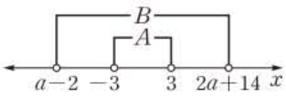
$\therefore X=\{1, 2, 5, 7\}$ ··· ❷

답 $\{1, 2, 5, 7\}$

채점 기준	비율
❶ 집합 X의 2, 5를 제외한 나머지 원소의 합을 구할 수 있다.	50 %
❷ 집합 X를 구할 수 있다.	50 %

0134 전략 주어진 조건을 만족시키도록 두 집합 A, B를 수직선에 나타낸다.

풀이 $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a-2\le -3$, $2a+14\ge 3$ ··· ❶

$a\le -1$, $a\ge -\frac{11}{2}$

$\therefore -\frac{11}{2}\le a\le -1$ ··· ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 -1, 최솟값은 -5이므로 구하는 합은

$-1+(-5)=-6$ ··· ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ 수직선을 이용하여 a에 대한 조건을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 정수 a의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0135 전략 집합 B의 원소가 집합 A의 방정식의 해임을 이용한다.

풀이 $A\subset B$이고 $B\subset A$이므로

$A=B$ ··· ❶

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -2, 5이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=-2+5$, $b=-2\cdot 5$

$\therefore a=-3$, $b=-10$ ··· ❷

$\therefore ab=30$ ··· ❸

답 30

채점 기준	비율
❶ $A=B$임을 알 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0136 전략 집합 X에 반드시 속하는 원소를 이용한다.

풀이 $A=\{2, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{3, 5\}$이므로 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 3, 5, 7을 반드시 원소로 갖는 집합과 같다. ··· ❶

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$ ··· ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 집합 X의 조건을 구할 수 있다.	70 %
❷ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %

Ⅰ. 집합과 명제

02 집합의 연산

0137 답 $\{a, b, c, d, e\}$

0138 $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

답 $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

0139 $A=\{2, 4, 6, \cdots, 100\}$, $B=\{4, 8, 12, \cdots, 100\}$이므로

$A\cup B=\{2, 4, 6, \cdots, 100\}$

답 $\{2, 4, 6, \cdots, 100\}$

0140 답 $\{3, 4\}$

0141 $A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{1, 2, 5, 7\}$이므로

$A\cap B=\{1, 2\}$ 답 $\{1, 2\}$

0142 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 답 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

0143 답 $\varnothing$

0144 답 $A\cup B=\{1, 2, 4, 8\}$, $A\cap B=\{1, 2\}$

0145 답 $A\cup B=\{a, b, c, d, e\}$, $A\cap B=\{b, e\}$

0146 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 $A\cup B$이므로

$A\cup B=\{2, 5, 6, 8, 10\}$ 답 $\{2, 5, 6, 8, 10\}$

0147 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 $A\cap B$이므로

$A\cap B=\{2, 8\}$ 답 $\{2, 8\}$

0148 답 서로소이다.

참고 공집합은 모든 집합과 서로소이다.

0149 $A=\{1, 3, 5, 15\}$, $B=\{1, 2, 3\}$이므로

$A\cap B=\{1, 3\}$

따라서 A와 B는 서로소가 아니다.

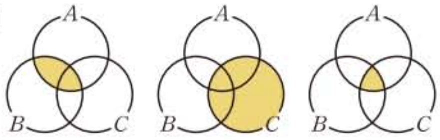
답 서로소가 아니다.

0150 $A=\{1, 3, 5, \cdots\}$, $B=\{2, 4, 6, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$

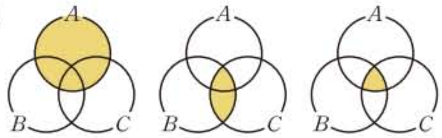
따라서 A와 B는 서로소이다. 답 서로소이다.

0151 [좌변]



$(A\cap B) \quad \cap \quad C \quad =(A\cap B)\cap C$

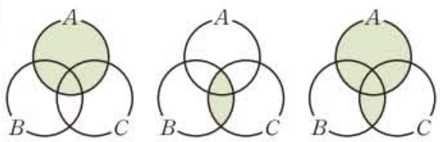
[우변]



$A \quad \cap \quad (B\cap C) \quad =A\cap(B\cap C)$

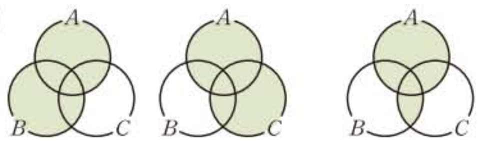
답 풀이 참조

0152 [좌변]



$A \quad \cup \quad (B\cap C) \quad =A\cup(B\cap C)$

[우변]



$(A\cup B) \quad \cap \quad (A\cup C) \quad =(A\cup B)\cap(A\cup C)$

답 풀이 참조

0153 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$=\{x,\ y,\ z\}\cup\{m,\ n,\ x\}$

$=\{m,\ n,\ x,\ y,\ z\}$

답 $\{m,\ n,\ x,\ y,\ z\}$

0154 $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$이므로

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

$=\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}\cap\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$

$=\{2,\ 3,\ 6\}$

답 $\{2,\ 3,\ 6\}$

0155 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$=\{-1,\ 0,\ 1\}\cap\{-2,\ -1,\ 0\}$

$=\{-1,\ 0\}$

답 $\{-1,\ 0\}$

0156 $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)$

$=\{a,\ b\}\cap\{a,\ c,\ d,\ e\}$

$=\{a\}$

답 $\{a\}$

0157 답 $\{1,\ 3,\ 12\}$

0158 $B=\{3,\ 6,\ 12\}$이므로

$B^C=\{1,\ 2,\ 4\}$ 답 $\{1,\ 2,\ 4\}$

0159 $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이므로

$C^C=\varnothing$ 답 $\varnothing$

0160 답 $A-B=\{2,\ 4\}$, $B-A=\{5\}$

0161 답 $A-B=\varnothing$, $B-A=\{a,\ d\}$

0162 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$, $B=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$이므로

$A-B=\{4,\ 20\}$, $B-A=\varnothing$

답 $A-B=\{4,\ 20\}$, $B-A=\varnothing$

0163 답 $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$

0164 답 $\{1,\ 2,\ 3\}$

0165 답 $\{2\}$

0166 답 $\{4,\ 5\}$

0167 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$이고 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 A^C이므로

$A^C=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$

답 $\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$

0168 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 $B-A$이므로

$B-A=\{1,\ 10\}$ 답 $\{1,\ 10\}$

0169 답 A

0170 답 A

0171 답 $\varnothing$

0172 답 A

0173 답 $\varnothing$

0174 답 U

0175 답 $\varnothing$

0176 답 U

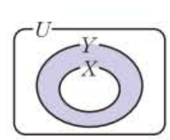
0177 $A^C\cap B=B\cap A^C=B-A=\{2,\ 3\}$ 답 $\{2,\ 3\}$

0178 $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B=\{6,\ 9\}$ 답 $\{6,\ 9\}$

0179 ㄱ. $X\cup Y=Y$

ㄴ. $X\cap Y^C=X-Y=\varnothing$

ㄷ. $Y-X$는 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠한 부분과 같으므로



$Y-X\neq\varnothing$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

0180 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이므로

$(A\cup B)^C=\{4\}$ 답 $\{4\}$

0181 $A^C=\{1,\ 4\}$, $B^C=\{3,\ 4\}$이므로

$A^C\cap B^C=\{4\}$ 답 $\{4\}$

0182 $A\cap B=\{2,\ 5\}$이므로
$(A\cap B)^C=\{1,\ 3,\ 4\}$ 답 $\{1,\ 3,\ 4\}$

0183 $A^C=\{1,\ 4\}$, $B^C=\{3,\ 4\}$이므로
$A^C\cup B^C=\{1,\ 3,\ 4\}$ 답 $\{1,\ 3,\ 4\}$

0184 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이고 $A\cup B=U$이므로
$A^C\cap B^C=U^C=\varnothing$ 답 $\varnothing$

0185 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이고 $A\cap B=\varnothing$이므로
$A^C\cup B^C=\varnothing^C=U$ 답 U

0186 답 (가) 드모르간의 법칙 (나) 결합법칙

0187 답 b, B, $A\cap B$

0188 답 $a+b$, A

0189 답 A, $A\cup B$

0190 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=4+5-3=6$ 답 6

0191 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$
$=12+9=21$ 답 21

참고 $A\cap B=\varnothing$이므로 $n(A\cap B)=0$이다.

0192 $n(A^C)=n(U)-n(A)$
$=50-31=19$ 답 19

0193 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=30-9=21$ 답 21

0194 $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=20-9=11$ 답 11

0195 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서
$15=14+3-n(A\cap B)$
$\therefore\ n(A\cap B)=2$ 답 2

0196 $n(A^C)=n(U)-n(A)=20-14=6$ 답 6

0197 $n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$
$=15-14=1$ 답 1

0198 $n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$
$=15-3=12$ 답 12

0199 $n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
$=20-15=5$ 답 5

0200 $n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$
$=20-2=18$ 답 18

0201 $B\cap C=\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}\cap\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}=\{3,\ 5,\ 6\}$
$\therefore\ A\cup(B\cap C)=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}\cup\{3,\ 5,\ 6\}$
$=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$
답 $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$

0202 $A\cap B=\{12,\ 24,\ 36,\ \cdots\}$
$=\{x\,|\,x$는 12의 양의 배수$\}$
$\therefore\ k=12$ 답 12

0203 $B=\{3,\ 4,\ 5\}$, $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$
③ $B\cap C=\{3,\ 4\}$이므로
$A\cap(B\cap C)=\{4\}$
④ $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이므로
$(A\cup B)\cap C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$
답 ③

0204 집합 B는 c, d를 반드시 원소로 갖고, a, b를 원소로 갖지 않아야 하므로 B가 될 수 있는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

참고 ① $B=\{a,\ b,\ c\}$이면 $A\cap B=\{a,\ b,\ c\}$
② $B=\{a,\ c,\ d\}$이면 $A\cap B=\{a,\ c,\ d\}$
③ $B=\{b,\ c,\ d\}$이면 $A\cap B=\{b,\ c,\ d\}$
④ $B=\{b,\ d,\ e\}$이면 $A\cap B=\{b,\ d\}$

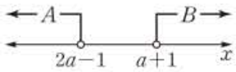
0205 ① $A=\{-1\}$, $B=\{-1,\ 1\}$이므로
$A\cap B=\{-1\}$
② $B=\{-3,\ 3\}$이므로 $A\cap B=\varnothing$
③ $A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$
④ $A=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{2\}$
⑤ $A\cap B=\{x\,|\,x$는 28의 양의 배수$\}$
답 ②

참고 ④ 양의 약수가 2개인 자연수는 소수이다.

0206 ⑤ $\{x\,|\,x$는 9의 양의 약수$\}=\{1,\ 3,\ 9\}$
$\therefore\ \{3,\ 7\}\cap\{1,\ 3,\ 9\}=\{3\}$
따라서 집합 $\{3,\ 7\}$과 서로소가 아니다.
답 ⑤

0207 집합 B와 서로소인 집합은 집합 A의 부분집합 중에서 '도'와 '미'를 원소로 갖지 않는 집합이므로 {레, 파, 솔, 라, 시}의 부분집합과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^5=32$ 답 32

0208 두 집합 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이려면 오른쪽 그림과 같아야 한다. ⋯ ❶



따라서 $2a-1\le a+1$에서

$a\le 2$ ⋯ ❷

이므로 a의 최댓값은 2이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B가 서로소가 되도록 수직선 위에 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0209 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A^C=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

따라서 $A\cup B=\{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$이므로

$(A\cup B)^C=\{2, 4, 6\}$ 답 $\{2, 4, 6\}$

0210 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$, $A=\{2, 5, 8\}$이므로

$A^C=\{1, 3, 4, 6, 7\}$

따라서 $n(A)=3$, $n(A^C)=5$이므로

$n(A^C)-n(A)=2$ 답 ②

0211 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B=\{2, 3, 5, 7, 11\}$, $C=\{1, 3, 7, 9, 11\}$이므로 ⋯ ❶

$A\cup B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$

$\therefore (A\cup B\cup C)^C=\{8, 10\}$

또 $A\cap B\cap C=\{3\}$이므로

$(A\cup B\cup C)^C\cup(A\cap B\cap C)=\{3, 8, 10\}$ ⋯ ❷

따라서 구하는 원소의 합은

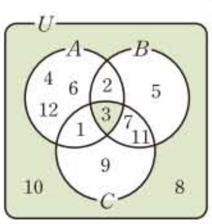
$3+8+10=21$ ⋯ ❸

답 21

채점 기준	비율
❶ 세 집합 A, B, C를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 집합 $(A\cup B\cup C)^C\cup(A\cap B\cap C)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ 집합 $(A\cup B\cup C)^C\cup(A\cap B\cap C)$의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 집합 U, A, B, C를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고 $(A\cup B\cup C)^C\cup(A\cap B\cap C)$는 색칠한 부분이므로 이 집합의 원소는

3, 8, 10



0212 $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{3, 6\}$이므로

$A-B=\{2, 4, 8\}$

$\therefore (A-B)^C=\{1, 3, 5, 6, 7\}$ 답 ⑤

0213 $B-C=\{3, 4, 5\}-\{5, 6, 7\}=\{3, 4\}$이므로

$A-(B-C)=\{1, 2, 3\}-\{3, 4\}$

$=\{1, 2\}$ 답 ③

0214 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$A-B=\{1, 2, 3, 4\}-\{2, 4, 6, 8\}=\{1, 3\}$,

$B-A=\{2, 4, 6, 8\}-\{1, 2, 3, 4\}=\{6, 8\}$ ⋯ ❶

$\therefore (A-B)\cup(B-A)=\{1, 3, 6, 8\}$ ⋯ ❷

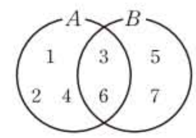
따라서 구하는 원소의 합은

$1+3+6+8=18$ ⋯ ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ 두 집합 $A-B$, $B-A$를 구할 수 있다.	50 %
❷ 집합 $(A-B)\cup(B-A)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

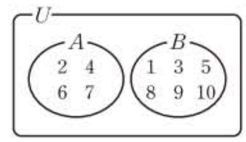
0215 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=\{3, 5, 6, 7\}$

답 $\{3, 5, 6, 7\}$

0216 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

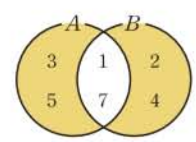


$B=\{1, 3, 5, 8, 9, 10\}$

따라서 구하는 원소의 합은

$1+3+5+8+9+10=36$ 답 ②

0217 오른쪽 벤다이어그램에서 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$는 색칠한 부분과 같고 $A=\{1, 3, 5, 7\}$이므로



$\underbrace{A\cap B=\{1, 7\}}_{A-\{(A\cup B)-(A\cap B)\}=A\cap B}$ ⋯ ❶

따라서 $A-B=\{3, 5\}$, $B-A=\{2, 4\}$이므로

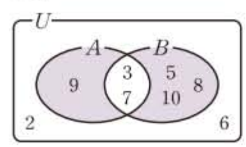
$\underbrace{B=\{1, 2, 4, 7\}}_{(A\cap B)\cup(B-A)=B}$ ⋯ ❷

답 $\{1, 2, 4, 7\}$

채점 기준	비율
❶ 집합 $A\cap B$를 구할 수 있다.	50 %
❷ 집합 B를 구할 수 있다.	50 %

0218 $(A\cup B)-(A\cap B)=\{5, 8, 9, 10\}$

오른쪽 벤다이어그램에서 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$는 색칠한 부분과 같고 $A^C=\{2, 5, 6, 8, 10\}$이므로



$A-B=\{9\}$, $\underbrace{B-A=\{5, 8, 10\}}_{\{(A\cup B)-(A\cap B)\}\cap A^C=B-A}$

따라서 구하는 원소의 합은 $5+8+10=23$ 답 23

0219 $A\cap B=\{1, 2\}$에서 $2\in A$이므로

$a^2-a=2$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때,

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{0, 1, 2\}$이므로

$A\cap B=\{1, 2\}$

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$이므로

$A\cap B=\{3\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad a=-1$

답 -1

0220 $A\cap B=\{2,\ 5\}$에서 $5\in A$이므로

$a=5$

또 $2\in B$이므로

$b-1=2 \qquad \therefore b=3$

$\therefore ab=15$

답 15

0221 $B-A=\{5\}$에서 $3\in(A\cap B)$이므로 $\qquad 3\in A$

$\therefore a=3$

$\therefore A=\{2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$

⑤ $A-B=\{4\}$

답 ⑤

0222 $A\cup B=\{0,\ 2,\ 3,\ 5\}$이므로

$a+3=3$ 또는 $a+3=5$

$\therefore a=0$ 또는 $a=2$

(i) $a=0$일 때,

$A=\{0,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 3\}$이므로

$A\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{0,\ 2,\ 5\}$, $B=\{3,\ 5\}$이므로

$A\cup B=\{0,\ 2,\ 3,\ 5\}$

(i), (ii)에서 $\quad a=2$ ··· ❶

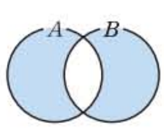
따라서 $B=\{3,\ 5\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$3+5=8$ ··· ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ 집합 B의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	30 %

0223 오른쪽 벤다이어그램에서 집합 $(A-B)\cup(B-A)$는 색칠한 부분과 같고



$1\in B$, $1\notin\{(A-B)\cup(B-A)\}$이므로

$1\in(A\cap B) \qquad \therefore 1\in A$

즉 $a-1=1$ 또는 $a+2=1$이므로

$a=2$ 또는 $a=-1$

(i) $a=2$일 때,

$A=\{1,\ 2,\ 4\}$, $B=\{1,\ 2,\ 8\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{4,\ 8\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-1$일 때,

$A=\{-2,\ 1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 2,\ 5\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{-2,\ 5\}$

(i), (ii)에서 $\quad a=-1$

답 -1

0224 ① $U-A^C=U\cap(A^C)^C=U\cap A=A$

③ $U^C=\varnothing$이므로 $\qquad A\not\subset U^C$

④ $A\cap(A\cup A^C)=A\cap U=A$

답 ③

0225 $B-A^C=B\cap(A^C)^C=\underbrace{B\cap A=A\cap B}_{\text{교환법칙이 성립한다.}}$

답 ①

0226 ② $A\cap B^C=A-B$

③ $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=\underbrace{B^C\cap A=A\cap B^C}_{\text{교환법칙이 성립한다.}}=A-B$

④ $(U\cap B)-A=B-A$

⑤ $A\cap(U\cap B^C)=A\cap B^C=A-B$

답 ④

0227 ③ $A-B=A\cap B^C$

$=\{x\,|\,-3<x<1\}\cap\{x\,|\,0<x<2\}$

$=\{x\,|\,0<x<1\}$

④ $B-A=B\cap A^C$

$=\{x\,|\,x\le 0$ 또는 $x\ge 2\}\cap\{x\,|\,x\le -3$ 또는 $x\ge 1\}$

$=\{x\,|\,x\le -3$ 또는 $x\ge 2\}$

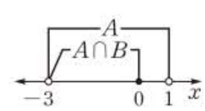
⑤ $A\cup B=\{x\,|\,x<1$ 또는 $x\ge 2\}$이므로

$(A\cup B)^C=\{x\,|\,1\le x<2\}$

답 ④

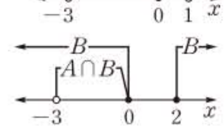
참고 $A\cap B=\{x\,|\,-3<x\le 0\}$이므로

③ $A-B=A-(A\cap B)=\{x\,|\,0<x<1\}$



④ $B-A=B-(A\cap B)$

$=\{x\,|\,x\le -3$ 또는 $x\ge 2\}$



0228 $A\cap B=B$이면 $\qquad B\subset A$

② $A\cup B=A$이므로 $\qquad (A\cup B)\subset A$

③ $B\subset A$이고 $A\neq B$이므로 $\qquad A-B\neq\varnothing$

④, ⑤ $B\subset A$이므로 $\qquad A^C\subset B^C \qquad \therefore A^C-B^C=\varnothing$

답 ③

0229 ① $A\cup B=B$

② $A\cap(A\cup B)=A\cap B=A$

③ $(A\cap B)\cup B=A\cup B=B$

④ $(A\cap\varnothing)\cup B=\varnothing\cup B=B$

⑤ $(A\cap B)\cup(A\cup B)=A\cup B=B$

답 ②

0230 $A=\{5,\ 10,\ 15,\ \cdots\}$, $B=\{10,\ 20,\ 30,\ \cdots\}$

$\therefore B\subset A$

ㄱ. $A-B=\{5,\ 15,\ 25,\ \cdots\}$이므로 $\qquad A-B\neq\varnothing$

ㄴ. $B\cap A^C=B-A=\varnothing$

ㄷ. $A\cap B=B$이므로 $\qquad B\subset(A\cap B)$

ㄹ. $A\cup B=A$이므로

$$A\cup B^{C}=\underbrace{(A\cup B)\cup B^{C}=A\cup(B\cup B^{C})}_{\text{결합법칙이 성립한다.}}$$
$$=A\cup U=U$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

0231 $A\cap X=X$이므로 $\quad X\subset A$

$(A-B)\cup X=X$이므로 $\quad (A-B)\subset X$

$\therefore (A-B)\subset X\subset A$

이때 $A-B=\{7,\ 10,\ 13\}$이므로 집합 X의 개수는 집합 $\{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16\}$의 부분집합 중에서 7, 10, 13을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^{6-3}=2^{3}=8$ 답 ③

0232 $A\cap B=\{1,\ 3\}$, $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 중에서 1, 3을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{6-2}=2^{4}=16$ 답 16

0233 $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$ ··· ❶

$A-X=\varnothing$이므로 $\quad A\subset X$

$B\cap X=X$이므로 $\quad X\subset B$

$\therefore A\subset X\subset B$ ··· ❷

따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$의 부분집합 중에서 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{5-3}=2^{2}=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	10 %
❷ 세 집합 A, X, B 사이의 포함 관계를 구할 수 있다.	50 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	40 %

0234 $X-(X\cap Y)=X$에서 $\quad X\cap Y=\varnothing$

따라서 집합 Y의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 중에서 2, 5를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$2^{7-2}=2^{5}=32$ 답 ⑤

0235 $U=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$이고 U의 부분집합 X가

$\{1,\ 3\}\cup X=\{3,\ 5\}\cup X$

를 만족시키려면 집합 X는 두 집합 $\{1,\ 3\}$, $\{3,\ 5\}$의 공통인 원소 3을 제외한 나머지 원소 1, 5를 반드시 원소로 가져야 한다. ··· ❶

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{4-2}=2^{2}=4$ ··· ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 집합 X가 반드시 갖는 원소를 구할 수 있다.	60 %
❷ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	40 %

참고 $3\in A$, $3\in B$이므로 $\quad 3\in(A\cup X)$, $3\in(B\cup X)$

따라서 집합 X는 3을 원소로 갖지 않아도 된다.

0236 드모르간의 법칙에 의하여

$A^{C}\cap B^{C}=(A\cup B)^{C}$

이때 $A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$이므로

$A\cup B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

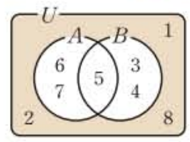
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8\}$이므로

$A^{C}\cap B^{C}=(A\cup B)^{C}=\{1,\ 2,\ 8\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$1+2+8=11$ 답 ①

다른 풀이 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고 $A^{C}\cap B^{C}$는 색칠한 부분이므로 이 집합의 원소는



1, 2, 8

0237 드모르간의 법칙에 의하여

$A^{C}\cup B^{C}=(A\cap B)^{C}$

이때 $A=\{0,\ 5,\ 9\}$, $A-B=\{0\}$에서

$A\cap B=A-(A-B)=\{5,\ 9\}$ ··· ❶

$\therefore A^{C}\cup B^{C}=(A\cap B)^{C}=\{0,\ 1,\ 3,\ 7\}$ ··· ❷

답 $\{0,\ 1,\ 3,\ 7\}$

채점 기준	비율
❶ 집합 $A\cap B$를 구할 수 있다.	50 %
❷ 집합 $A^{C}\cup B^{C}$를 구할 수 있다.	50 %

0238 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

드모르간의 법칙에 의하여

$A^{C}\cap B^{C}=(A\cup B)^{C}=\{1,\ 3,\ 5\}$

이므로 $\quad A\cup B=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

이때 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$이고 $\underbrace{(A\cup B)-A=B}_{A\cap B=\varnothing}$일 때, 집합 B의 모든 원소의 합이 최소이다.

따라서 구하는 최솟값은

$7+9=16$ 답 16

0239 $(A\cap B^{C})\cup(A-B^{C})=(A\cap B^{C})\cup\{A\cap(B^{C})^{C}\}$

$=(A\cap B^{C})\cup(A\cap B)$

$=A\cap(B^{C}\cup B)$

$=A\cap U$

$=A$ 답 A

0240 $(A-B)^{C}\cap B=(A\cap B^{C})^{C}\cap B=\{A^{C}\cup(B^{C})^{C}\}\cap B$

$=(A^{C}\cup B)\cap B=(A^{C}\cap B)\cup(B\cap B)$

$=\underbrace{(B-A)\cup B}_{(B-A)\subset B}=B$

① $(A\cap B)\subset A$이므로 $\quad (A\cap B)\cup A=A$

② $A-(A\cap B)=A-B$

③ $(A\cup B)-A=B-A$

④ $(A\cup B)-(A-B)=(A\cup B)-(A\cap B^{C})$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B^{C})^{C}$

$=(A\cup B)\cap(A^{C}\cup B)$

$=(A\cap A^{C})\cup B=\varnothing\cup B$

$=B$

⑤ $A\cap(B-A)^C=A\cap(B\cap A^C)^C=A\cap\{B^C\cup(A^C)^C\}$

$=A\cap(B^C\cup A)=(A\cap B^C)\cup(A\cap A)$

$=\underbrace{(A-B)\cup A}_{(A-B)\subset A}=A$

답 ④

0241 $A\cup\{(A\cap B)\cup(B-A)\}=A\cup\{(A\cap B)\cup(B\cap A^C)\}$

$=A\cup\{(A\cup A^C)\cap B\}$

$=A\cup(U\cap B)$

$=A\cup B$

따라서 $A\cup B=B$이므로 $A\subset B$

ㄱ. $A\cap B=A$

ㄷ. $A^C\cup B=A^C\cup(A\cup B)=(A^C\cup A)\cup B$

$=U\cup B=U$

ㄹ. $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A$

$=A-B=\varnothing$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

0242 $(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$ ··· ❶

이때 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$, $A\cap B=\{1, 2\}$이므로

$(A\cup B)-(A\cap B)=\{3, 4, 5, 8\}$ ··· ❷

따라서 구하는 원소의 개수는 4이다. ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$를 변형할 수 있다.	50 %
❷ 집합 $(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 원소의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0243 $\{(A\cup B^C)\cap B\}\cup(A\cap B)^C$

$=\{(A\cap B)\cup(B^C\cap B)\}\cup(A\cap B)^C$

$=\{(A\cap B)\cup\varnothing\}\cup(A\cap B)^C$

$=(A\cap B)\cup(A\cap B)^C$

$=U$

따라서 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0244 $(A-B)\cup(A-C)$

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$

$=A\cap(B^C\cup C^C)$

$=A\cap(B\cap C)^C$

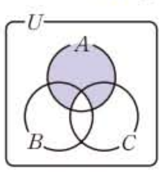
$=A-(B\cap C)$

이므로 $A-(B\cap C)=\{3, 5, 8\}$

이때 $A=\{1, 3, 5, 6, 8\}$이므로

$1\in(B\cap C)$, $6\in(B\cap C)$ 답 ①

다른 풀이 오른쪽 벤다이어그램에서 집합 $(A-B)\cup(A-C)$는 색칠한 부분과 같고 이 집합의 원소는 3, 5, 8이다.



$A=\{1, 3, 5, 6, 8\}$이므로

$1\in(A\cap B\cap C)$, $6\in(A\cap B\cap C)$

$\therefore 1\in(B\cap C)$, $6\in(B\cap C)$

0245 $(A_3\cup A_8)\cap A_{12}=(A_3\cap A_{12})\cup(A_8\cap A_{12})$

$=\underbrace{A_{12}\cup A_{24}}_{A_{24}\subset A_{12}}$

$=A_{12}$

답 ④

0246 $P_{36}\cap(P_{12}\cup P_8)=(P_{36}\cap P_{12})\cup(P_{36}\cap P_8)$

$=\underbrace{P_{12}\cup P_4}_{P_4\subset P_{12}}=P_{12}$

$=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

따라서 구하는 원소의 합은

$1+2+3+4+6+12=28$ 답 28

라쎈 특강

배수의 집합과 약수의 집합

① 자연수 k의 양의 배수의 집합을 A_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면 $A_m\subset A_n$

$\therefore A_m\cap A_n=A_m$, $A_m\cup A_n=A_n$

② 자연수 k의 양의 약수의 집합을 B_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면 $B_n\subset B_m$

$\therefore B_m\cap B_n=B_n$, $B_m\cup B_n=B_m$

0247 ㄴ. $(A_6\cup A_{15})\cap(A_{10}\cup A_{15})=(A_6\cap A_{10})\cup A_{15}$

$=A_{30}\cup A_{15}$

$=A_{15}$

ㄷ. $A_3\cap(A_2\cup A_8)=A_3\cap A_2=A_6$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0248 $A_2\cap A_5=A_{10}$이므로 $A_m\subset(A_2\cap A_5)$에서

$A_m\subset A_{10}$

즉 m은 10의 양의 배수이어야 하므로 m의 최솟값은 10이다. ··· ❶

또 $(A_8\cup A_{12})\subset A_n$에서

$A_8\subset A_n$, $A_{12}\subset A_n$

즉 n은 8과 12의 양의 공약수이어야 하므로 n의 최댓값은 4이다. ··· ❷

따라서 구하는 합은

$10+4=14$ ··· ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ m의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %
❸ m의 최솟값과 n의 최댓값의 합을 구할 수 있다.	10 %

참고 $A_8=\{8, 16, 24, 32, 40, 48, \cdots\}$, $A_{12}=\{12, 24, 36, 48, \cdots\}$이므로

$A_8\cup A_{12}=\{8, 12, 16, 24, 32, 36, 40, 48, \cdots\}$

이때 $A_4=\{4, 8, 12, 16, 20, 24, \cdots\}$이므로

$(A_8\cup A_{12})\subset A_4$

0249 $x^2-6x+8\geq 0$에서 $(x-2)(x-4)\geq 0$

$\therefore x\leq 2$ 또는 $x\geq 4$

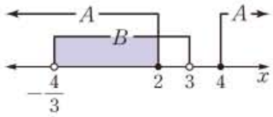
$\therefore A=\{x|x\leq 2$ 또는 $x\geq 4\}$

$3x^2-5x-12<0$에서 $(3x+4)(x-3)<0$

$\therefore -\frac{4}{3}<x<3$

$\therefore B=\left\{x \middle| -\frac{4}{3}<x<3\right\}$

따라서 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A\cap B=\left\{x \middle| -\frac{4}{3}<x\le 2\right\}$

답 $\left\{x \middle| -\frac{4}{3}<x\le 2\right\}$

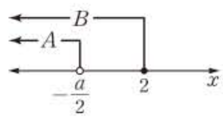
0250 $x+a<-x$에서 $\quad 2x<-a \quad \therefore x<-\frac{a}{2}$

$\therefore A=\left\{x \middle| x<-\frac{a}{2}\right\}$

$x-2\ge 3x-6$에서 $\quad 2x\le 4 \quad \therefore x\le 2$

$\therefore B=\{x|x\le 2\}$ ⋯ ❶

이때 $A\cap B=A$에서 $A\subset B$이므로 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $-\frac{a}{2}\le 2$이므로

$a\ge -4$ ⋯ ❷

따라서 a의 최솟값은 -4이다. ⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0251 $x^2-3x-10\ge 0$에서 $\quad (x+2)(x-5)\ge 0$

$\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 5$

이때 $A=\{x|x>-2\}$, $B=\{x|x<5\}$이므로

$A^C=\{x|x\le -2\}$, $B^C=\{x|x\ge 5\}$

따라서 부등식 $x^2-3x-10\ge 0$의 해의 집합은

$\{x|x\le -2$ 또는 $x\ge 5\}=\{x|x\le -2\}\cup\{x|x\ge 5\}$

$=A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$

답 ④

참고 ① $A\cap B=\{x|-2<x<5\}$
② $A\cup B=U$
③ $A-B=A\cap B^C=\{x|x\ge 5\}$
⑤ $(A\cup B)^C=\varnothing$

0252 $(x-5)(x-21)\ge 0$에서 $\quad x\le 5$ 또는 $x\ge 21$

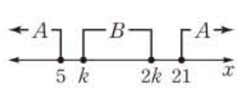
$\therefore A=\{x|x\le 5$ 또는 $x\ge 21\}$

$(x-k)(x-2k)\le 0$에서 $\underbrace{k<2k}_{k\text{는 자연수}}$이므로

$k\le x\le 2k$

$\therefore B=\{x|k\le x\le 2k\}$

$A\cap B=\varnothing$이 되도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $5<k$, $2k<21$이므로

$5<k<\frac{21}{2}$

따라서 자연수 k는 6, 7, 8, 9, 10의 5개이다.

답 ②

0253 ① $A☆\varnothing=(A\cup\varnothing)-(A\cap\varnothing)=A-\varnothing=A$

② $A☆A=(A\cup A)-(A\cap A)=A-A=\varnothing$

③ $U☆\varnothing=(U\cup\varnothing)-(U\cap\varnothing)=U-\varnothing=U$

④ $U☆A=(U\cup A)-(U\cap A)=U-A=A^C$

⑤ $A☆B=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=(B\cup A)-(B\cap A)=B☆A$

답 ②

0254 $A\triangle B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$

$=(A\cup A^C)\cap B$

$=U\cap B=B$ ⋯ ❶

이므로

$(A\triangle B)\triangle A=B\triangle A=A$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$ ⋯ ❷

따라서 구하는 원소의 개수는 6이다. ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $A\triangle B$를 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ $(A\triangle B)\triangle A$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $(A\triangle B)\triangle A$의 원소의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0255 ㄱ. $A^C*B^C=(A^C-B^C)\cup(B^C-A^C)$

$=\{A^C\cap(B^C)^C\}\cup\{B^C\cap(A^C)^C\}$

$=(A^C\cap B)\cup(B^C\cap A)$

$=(B-A)\cup(A-B)$

$=(A-B)\cup(B-A)=A*B$

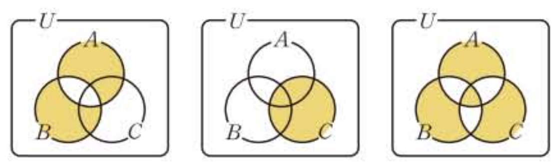
ㄴ. $A*A^C=(A-A^C)\cup(A^C-A)$

$=\{A\cap(A^C)^C\}\cup(A^C\cap A^C)$

$=A\cup A^C=U$

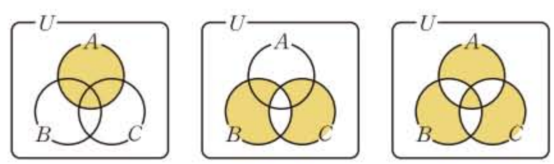
ㄷ. 양변을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

[좌변]



$(A*B) \quad * \quad C \quad = \quad (A*B)*C$

[우변]



$A \quad * \quad (B*C) \quad = \quad A*(B*C)$

$\therefore (A*B)*C=A*(B*C)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0256 $n(A^C \cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

이때

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=20+15-9=26$$

이므로

$$n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)=30-26=4$$

답 ③

0257 $A\cap B=\varnothing$이므로 $n(A\cap B)=0$

$$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$
$$=15+12=27$$

답 ③

0258 $A^C\cup B=(A\cap B^C)^C=(A-B)^C$이므로

$$n(A^C\cup B)=n((A-B)^C)=n(U)-n(A-B)$$
$$=30-12=18$$

답 18

0259 $n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=28-20=8$

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)=28-16=12$

$$\therefore n(A-B)+n(B-A)=20$$

답 ①

다른 풀이 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$28=16+20-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=8$

$$\therefore n(A-B)+n(B-A)=n(A\cup B)-n(A\cap B)$$
$$=28-8=20$$

0260 $A=\{2, 4, 6, \cdots, 60\}$, $B=\{3, 6, 9, \cdots, 60\}$이므로

$A\cap B=\{6, 12, 18, \cdots, 60\}$ ··· ❶

따라서 $n(A)=30$, $n(A\cap B)=10$이므로

$$n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$
$$=30-10=20$$ ··· ❷

답 20

채점 기준	비율
❶ 세 집합 A, B, $A\cap B$를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $n(A\cap B^C)$를 구할 수 있다.	70 %

0261 $n(A\cap B^C)=n(A-B)=9$이므로

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$에서

$9=12-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=3$

즉

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=12+15-3=24$$

이므로

$$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=40-24=16$$

따라서 구하는 원소의 개수는

$n(A\cap B)+n((A\cup B)^C)=3+16=19$ 답 ④

다른 풀이 $n(A\cap B^C)=n(A-B)=9$이므로

$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=12-9=3$

$\therefore n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=15-3=12$

색칠한 부분이 나타내는 집합은 $\{(A-B)\cup(B-A)\}^C$이므로

구하는 원소의 개수는

$$n(U)-n((A-B)\cup(B-A))=40-(9+12)=19$$

0262 $B\subset A$일 때 $n(A\cap B)$가 최대이므로

$M=n(B)=8$

$A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$m=15+8-20=3$

$\therefore M+m=11$ 답 ④

다른 풀이 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=23-n(A\cup B)$

$A\subset(A\cup B)$이므로 $n(A)\le n(A\cup B)$

$(A\cup B)\subset U$이므로 $n(A\cup B)\le n(U)$

즉 $15\le n(A\cup B)\le 20$이므로

$-20\le -n(A\cup B)\le -15$

$\therefore 3\le 23-n(A\cup B)\le 8$

따라서 $3\le n(A\cap B)\le 8$이므로

$M=8$, $m=3$ $\quad\therefore M+m=11$

0263 $A\cap B=\varnothing$일 때 $n(A\cup B)$가 최대이므로 최댓값은

$n(A)+n(B)=32+40=72$ ··· ❶

$A\subset B$일 때 $n(A\cup B)$가 최소이므로 최솟값은

$n(B)=40$ ··· ❷

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 차는

$72-40=32$ ··· ❸

답 32

채점 기준	비율
❶ $n(A\cup B)$의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $n(A\cup B)$의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 최댓값과 최솟값의 차를 구할 수 있다.	20 %

0264 $n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$이므로 $n(A\cup B)$가 최대일 때 $n(A-B)$가 최대이다.

$A\cup B=U$일 때 $n(A\cup B)$가 최대이므로 $n(A-B)$의 최댓값은

$50-27=23$ 답 ④

다른 풀이 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$이므로 $n(A\cap B)$가 최소일 때 $n(A-B)$가 최대이다.

$A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서 $n(A\cap B)$의 최솟값은

$32+27-50=9$

따라서 $n(A-B)$의 최댓값은

$32-9=23$

0265 로맨스 영화를 관람한 회원의 집합을 A, 공포 영화를 관람한 회원의 집합을 B라 하면

$n(A)=20$, $n(B)=17$, $n(A\cup B)=29$

로맨스와 공포 영화를 모두 관람한 회원의 집합은 $A\cap B$이므로

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$
$$=20+17-29=8$$

따라서 구하는 회원은 8명이다. 답 ①

0266 빨간색을 좋아하는 학생의 집합을 A, 파란색을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(A)=17$, $n(B)=13$, $n(A\cap B)=8$

빨간색 또는 파란색을 좋아하는 학생의 집합은 $A\cup B$이므로

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=17+13-8=22$$

따라서 구하는 학생은 22명이다. 답 ②

0267 재현이네 반 학생 전체의 집합을 U, 거울을 소지한 학생의 집합을 A, 빗을 소지한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=28$, $n(A)=13$, $n(B)=7$, $n(A\cap B)=3$ ⋯ ❶

거울과 빗 중 어느 것도 소지하지 않은 학생의 집합은

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=28-n(A\cup B) \quad \cdots\cdots ㉠$$ ⋯ ❷

이때

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=13+7-3=17$$

이므로 ㉠에서 구하는 학생 수는

$28-17=11$ ⋯ ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 집합으로 나타내고, 각 집합의 원소의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 구하는 학생 수를 집합의 원소의 개수로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 거울과 빗 중 어느 것도 소지하지 않은 학생 수를 구할 수 있다.	40 %

0268 스키를 타 본 학생의 집합을 A, 스노보드를 타 본 학생의 집합을 B라 하면

$n(A)=21$, $n(B)=19$, $n(A\cap B)=8$

스키만 타 본 학생의 집합은 $A-B$, 스노보드만 타 본 학생의 집합은 $B-A$이므로

$$n(A-B)+n(B-A)$$
$$=\{n(A)-n(A\cap B)\}+\{n(B)-n(A\cap B)\}$$
$$=(21-8)+(19-8)=24$$

따라서 구하는 학생은 24명이다. 답 ④

0269 여행 동호회 회원 전체의 집합을 U, 제주도를 가 본 회원의 집합을 A, 울릉도를 가 본 회원의 집합을 B라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=32$, $n(B)=15$,

$n(A^C\cap B^C)=7$ ⋯ ❶

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$이므로

$$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$$
$$=40-7=33$$ ⋯ ❷

이때 제주도와 울릉도를 모두 가 본 회원의 집합은 $A\cap B$이므로

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$
$$=32+15-33=14$$

따라서 구하는 회원 수는 14이다. ⋯ ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 집합으로 나타내고, 각 집합의 원소의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 제주도 또는 울릉도를 가 본 회원 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 제주도와 울릉도를 모두 가 본 회원 수를 구할 수 있다.	30 %

0270 지수네 반 학생 전체의 집합을 U, 줄다리기에 참여하는 학생의 집합을 A, 단체 줄넘기에 참여하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=30$, $n(A)=17$, $n(B)=15$

두 종목에 모두 참여하는 학생의 집합은 $A\cap B$이고, $B\subset A$일 때 $n(A\cap B)$가 최대이므로 두 종목에 모두 참여하는 학생 수의 최댓값은

$n(B)=15$

한편 $A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서 두 종목에 모두 참여하는 학생 수의 최솟값은

$17+15-30=2$

답 최댓값: 15, 최솟값: 2

다른 풀이 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=32-n(A\cup B)$

$A\subset(A\cup B)$이므로 $n(A)\le n(A\cup B)$

$(A\cup B)\subset U$이므로 $n(A\cup B)\le n(U)$

즉 $17\le n(A\cup B)\le 30$이므로

$-30\le -n(A\cup B)\le -17$

$\therefore 2\le 32-n(A\cup B)\le 15$

따라서 $2\le n(A\cap B)\le 15$이므로 두 종목에 모두 참여하는 학생 수의 최댓값은 15, 최솟값은 2이다.

0271 **전략** 합집합, 교집합, 여집합, 차집합의 정의를 이용한다.

풀이 ① $A\cap B=\{3\}$

② $A^C=\{2, 4, 5\}$

③ $A-B=\{1, 6\}$

④ $B^C=\{1, 2, 6\}$이므로 $A-B^C=\{3\}$

⑤ $A\cup B=\{1, 3, 4, 5, 6\}$

답 ④

참고 ④ $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B=\{3\}$

0272 **전략** 먼저 두 집합 U, A를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{1, 2, 3, 6\}$

ㄱ. $A\cap B=\{2, 3\}$이므로 $5\notin A\cap B$

ㄴ. $B-A=\{5, 7\}$이므로 $n(B-A)=2$

ㄷ. $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$이므로 집합 $A\cup B$와 서로소인 집합은 전체집합 U의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 5, 6, 7을 원소로 갖지 않는 집합이다.

즉 $A\cup B$와 서로소인 집합의 개수는 $\{4, 8, 9, 10\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

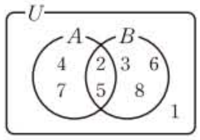
$2^4=16$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

참고 ㄴ. $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=4-2=2$

0273 전략 조건으로 주어진 집합의 원소를 벤다이어그램의 해당하는 부분에 써넣는다.

풀이 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B-A=\{3, 6, 8\}$

따라서 구하는 원소의 합은

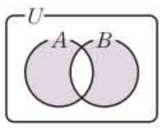
$3+6+8=17$ 답 ④

0274 전략 집합의 연산을 이용하여 주어진 조건을 간단히 나타내고 벤다이어그램을 이용하여 조건을 만족시키는 경우를 찾는다.

풀이 $(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$

$=\{1, 3, 8\}$

이때 집합 $(A-B)\cup(B-A)$는 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠한 부분과 같고



$\underline{1\in(A-B),\ 3\in(A-B)}$

$a-1\in(A-B)$ 또는 $a-1\in(A\cap B)$

$a-1\in(A-B)$이면 $a-1=8$이므로

$a=9$

이때 $B=\{11, 38\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a-1\in(A\cap B)$

즉 $a-1=a^2-4a-7$ 또는 $a-1=a+2$이어야 한다.

(i) $a-1=a^2-4a-7$일 때,

$a^2-5a-6=0$에서 $(a+1)(a-6)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=6$

이때 $\underline{a+2=8}$이어야 하므로

$8\in(B-A)$

$a=6$

(ii) $a-1=a+2$일 때,

$-1\neq 2$이므로 a의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=6$ 답 ②

0275 전략 보기를 만족시키지 않는 예가 있는지 찾아본다.

풀이 ① $X\cup Y=Y$

② $X\cap Y=X$

③ $Y^C\subset X^C$

④ $X\cap Y^C=X-Y=\varnothing$

⑤ $Y\cap X^C=Y-X$

이때 $X=\{1\}$, $Y=\{1, 2\}$이면 $X\subset Y$이지만

$Y-X=\{2\}\neq\varnothing$ 답 ④

0276 전략 주어진 조건을 이용하여 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 구한다.

풀이 $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$

즉 $2\in B$이어야 하므로

$a^2-2=2$, $a^2=4$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때,

$A=\{-1, 2\}$, $B=\{2, 5, 7\}$이므로 $A\not\subset B$

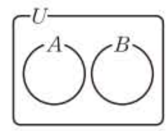
(ii) $a=2$일 때,

$A=\{2, 7\}$, $B=\{2, 5, 7\}$이므로 $A\subset B$

(i), (ii)에서 $a=2$ 답 ④

0277 전략 $A-B=A$이면 두 집합 A, B가 서로소임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $A-B=A$일 때 두 집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A\cap B=\varnothing$

ㄴ. $B-A=B$

ㄷ. $A\not\subset B$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

0278 전략 주어진 조건을 이용하여 집합 사이의 포함 관계를 구한다.

풀이 $X\cup A=X$이므로 $A\subset X$

$X\cap B^C=X$이므로 $X\subset B^C$

$\therefore A\subset X\subset B^C$

이때 $A=\{1, 2\}$, $B^C=\{1, 2, 6, 7, 8\}$이므로 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 2, 6, 7, 8\}$의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^{5-2}=2^3=8$ 답 8

0279 전략 집합의 연산 법칙과 연산의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\{(A-B)\cup(A\cup B)^C\}\cup A^C$

$=\{(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)\}\cup A^C$

$=\{(A\cup A^C)\cap B^C\}\cup A^C$

$=(U\cap B^C)\cup A^C$

$=B^C\cup A^C=(A\cap B)^C$

이므로 $(A\cap B)^C=B^C$에서

$A\cap B=B$ $\therefore B\subset A$

따라서 두 집합 A, B의 포함 관계를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ①이다. 답 ①

0280 전략 $A\cap B$는 18과 k의 양의 공약수의 집합임을 이용한다.

풀이 $A\cap B$는 18과 k의 양의 공약수의 집합이므로 18과 k의 최대공약수가 9이어야 한다.

이때 $18=9\cdot 2$에서 $k=9m$ (m은 2와 서로소) 꼴이어야 하므로 k의 값이 될 수 있는 것은 ③ $27=9\cdot 3$이다. 답 ③

0281 전략• 각 부등식의 해의 집합을 구한 후 수직선 위에 나타내어 본다.

풀이 $x^2-4x-5<0$에서 $\quad (x+1)(x-5)<0$

$\therefore\ -1<x<5$

$\therefore\ A=\{x\mid -1<x<5\}$

$x^2-5x+6>0$에서 $\quad (x-2)(x-3)>0$

$\therefore\ x<2$ 또는 $x>3$

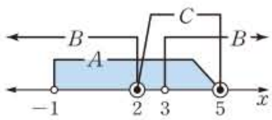
$\therefore\ B=\{x\mid x<2$ 또는 $x>3\}$

$x^2-7x+10\le 0$에서 $\quad (x-2)(x-5)\le 0$

$\therefore\ 2\le x\le 5$

$\therefore\ C=\{x\mid 2\le x\le 5\}$

세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$(A\cap B)\cup C$

$=\{x\mid -1<x<2$ 또는 $3<x<5\}\cup\{x\mid 2\le x\le 5\}$

$=\{x\mid -1<x\le 5\}$

따라서 정수인 원소는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개이다. 답 6

0282 전략• 집합의 연산 법칙과 연산의 성질을 이용하여 먼저 $A◎\varnothing$과 $B◎U$를 각각 간단히 한다.

풀이 $A◎\varnothing=(A^C\cup\varnothing)\cap(A\cup\varnothing^C)$

$=A^C\cap(A\cup U)$

$=A^C\cap U=A^C$

$B◎U=(B^C\cup U)\cap(B\cup U^C)$

$=U\cap(B\cup\varnothing)$

$=U\cap B=B$

$\therefore\ (A◎\varnothing)◎(B◎U)=A^C◎B$

$=\{(A^C)^C\cup B\}\cap(A^C\cup B^C)$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

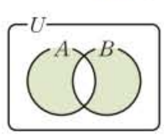
$=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=(A-B)\cup(B-A)$

따라서 $(A◎\varnothing)◎(B◎U)$와 항상 같은 집합은 ⑤이다.

답 ⑤

참고 $(A-B)\cup(B-A)$는 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠한 부분과 같으므로 $(A\cup B)-(A\cap B)$와 같다.



0283 전략• 주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $A\cap B$이다.

풀이 주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $A\cap B$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=20+17-29=8$

답 8

0284 전략• 집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 ① $n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)$

$=16-12=4$

② $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=16+18-4=30$

③ $n(A^C)=n(U)-n(A)=30-16=14$

④ $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=18-4=14$

⑤ $n(A^C\cup B)=n(A^C)+n(B)-n(A^C\cap B)$

$=n(A^C)+n(B)-n(B-A)$

$=14+18-14=18$ 답 ④

0285 전략• 5의 배수의 집합을 A, 7의 배수의 집합을 B라 하고 $n(A^C\cap B^C)$를 구한다.

풀이 100 이하의 자연수의 집합을 U, 100 이하의 자연수 중 5의 배수의 집합을 A, 7의 배수의 집합을 B라 하면

$n(U)=100,\ n(A)=20,\ n(B)=14$

100 이하의 자연수 중 5의 배수도 아니고 7의 배수도 아닌 자연수의 집합은 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=100-n(A\cup B)$ ······ ㉠

이때 $A\cap B$는 100 이하의 자연수 중 $\underbrace{35}_{\text{5와 7의 최소공배수}}$의 배수의 집합이므로

$n(A\cap B)=2$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=20+14-2$

$=32$

따라서 ㉠에서 구하는 자연수의 개수는

$100-32=68$ 답 ②

0286 전략• $n(A\cup B)$는 $A\cap B=\varnothing$일 때 최대이고, $A\subset B$일 때 최소임을 이용한다.

풀이 소비자 전체의 집합을 U, A 제품을 사용하는 사람의 집합을 A, B 제품을 사용하는 사람의 집합을 B라 하면

$n(U)=100,\ n(A)=39,\ n(B)=52$

$n(A)+n(B)<n(U)$이므로 $A\cap B=\varnothing$일 때 $n(A\cup B)$가 최대이다.

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은

$n(A)+n(B)=39+52=91$

또 $A\subset B$일 때 $n(A\cup B)$가 최소이므로 $n(A\cup B)$의 최솟값은

$n(B)=52$

답 최댓값: 91, 최솟값: 52

0287 전략• 주어진 조건을 집합으로 나타낸 후 각 집합의 원소의 개수를 이용한다.

풀이 은행 A를 이용하는 고객의 집합을 A, 은행 B를 이용하는 고객의 집합을 B라 하면

$\underbrace{n(A\cup B)=35+30=65}_{\text{조사에 참여한 전체 고객의 수}}$

이때 조건 (가)에 의하여

$n(A)+n(B)=82$

$\therefore\ n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=82-65=17$

따라서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 고객의 수는

$n(A\cup B)-n(A\cap B)=65-17=48$

이므로 조건 (나)에 의하여 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수는

$\frac{1}{2}\cdot 48=24$

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는

$30-24=6$ 답 ②

라쎈 특강

두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 고객의 수를 식으로 나타내 보자.

은행 A만 이용하는 고객의 수는

$n(A)-n(A\cap B)$

은행 B만 이용하는 고객의 수는

$n(B)-n(A\cap B)$

따라서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 고객의 수는

$\{n(A)-n(A\cap B)\}+\{n(B)-n(A\cap B)\}$

$=\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}-n(A\cap B)$

$=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

0288 전략 $A\cap B=\{3\}$이므로 $3\in A$임을 이용한다.

풀이 $A\cap B=\{3\}$이므로 $3\in A$

즉 $k^2-3k-1=3$이므로

$k^2-3k-4=0,\quad (k+1)(k-4)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=4$ ··· ❶

(i) $k=-1$일 때,

$A=\{1, 3\}$, $B=\{-4, 3\}$이므로

$A\cap B=\{3\}$

(ii) $k=4$일 때,

$A=\{1, 3\}$, $B=\{-2, 1\}$이므로

$A\cap B=\{1\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다. ··· ❷

(i), (ii)에서 $k=-1$ ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ $3\in A$를 만족시키는 k의 값을 모두 구할 수 있다.	30 %
❷ k의 값에 따라 경우를 나누어 조건을 만족시키는지 확인할 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0289 전략 1을 제외한 집합 A의 원소는 모두 집합 B의 원소임을 이용한다.

풀이 $x^3+3x^2-x-3=0$에서

$x^2(x+3)-(x+3)=0,\quad (x+3)(x^2-1)=0$

$(x+3)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore A=\{-3, -1, 1\}$ ··· ❶

$A-B=\{1\}$에서 $-3\in(A\cap B)$, $-1\in(A\cap B)$이므로

$-3\in B$, $-1\in B$

$-3\in B$에서 $9-3a+b=0 \quad \therefore 3a-b=9$ ······ ㉠

$-1\in B$에서 $1-a+b=0 \quad \therefore a-b=1$ ······ ㉡

··· ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=3 \quad \therefore a+b=7$ ··· ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

다른 풀이 $-3\in B$, $-1\in B$이므로 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, -1이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=-3+(-1)$, $b=(-3)\cdot(-1)$

$\therefore a=4$, $b=3$

$\therefore a+b=7$

0290 전략 먼저 집합 B를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $4\cdot1-3=1$, $4\cdot2-3=5$, $4\cdot3-3=9$, $4\cdot4-3=13$이므로

$B=\{1, 5, 9, 13\}$

$\therefore B-A=\{5, 9, 13\}$ ··· ❶

이때 $\{5, 9, 13\}\cap X=X$이므로

$X\subset\{5, 9, 13\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{5, 9, 13\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^3=8$ ··· ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ 집합 $B-A$를 구할 수 있다.	50 %
❷ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	50 %

0291 전략 주어진 조건을 집합으로 나타낸 후 각 집합의 원소의 개수를 이용한다.

풀이 손님 전체의 집합을 U, 짜장면을 좋아하는 손님의 집합을 A, 짬뽕을 좋아하는 손님의 집합을 B라 하면

$n(U)=30$, $n(A)=18$, $n(B)=13$,

$n(A^C\cap B^C)=6$ ··· ❶

짜장면만 좋아하는 손님의 집합은 $A-B$이므로

$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$ ······ ㉠ ··· ❷

이때 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$에서

$6=30-n(A\cup B) \quad \therefore n(A\cup B)=24$

따라서 ㉠에서 짜장면만 좋아하는 손님의 수는

$24-13=11$ ··· ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 집합으로 나타내고, 각 집합의 원소의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 구하는 손님의 수를 집합의 원소의 개수로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 짜장면만 좋아하는 손님의 수를 구할 수 있다.	50 %

03 명제

0292 답 ×

0293 답 ×

0294 답 ○

참고 π는 무리수이다.

0295 답 거짓

0296 답 참

0297 답 거짓

참고 순환소수는 유리수이다.

0298 답 정리

0299 답 정의

0300 답 정리

0301 x의 값에 따라 참, 거짓이 정해지므로 조건이다.
답 조건

0302 거짓인 식이므로 명제이다. 답 명제

0303 참인 식이므로 명제이다. 답 명제

0304 x의 값에 따라 참, 거짓이 정해지므로 조건이다.
답 조건

0305 답 $\{8\}$

0306 답 $\{1, 2, 3, 4\}$

0307 $x^2-25=0$에서 $(x+5)(x-5)=0$
$\therefore x=-5$ 또는 $x=5$
따라서 주어진 조건의 진리집합은
$\{5\}$ 답 $\{5\}$

0308 $x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
따라서 주어진 조건의 진리집합은
$\{1, 3\}$ 답 $\{1, 3\}$

0309 답 직사각형은 평행사변형이 아니다.

0310 답 x는 소수이다.

0311 답 $x\neq1$

0312 답 $\varnothing\not\subset\{a, b\}$

0313 답 $x\leq3$

0314 답 $(-1)^2>1$

0315 답 $x\neq0$이고 $x\neq1$

0316 답 $x=-3$ 또는 $x=4$

0317 답 $x<-1$ 또는 $x\geq2$

0318 답 0은 자연수가 아니다. (참)

0319 답 $3x+9\neq3(x+3)$ (거짓)

0320 답 $3i$는 실수이다. (단, $i=\sqrt{-1}$) (거짓)

0321 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{2, 6\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{4, 8\}$ 답 $\{4, 8\}$

다른 풀이 주어진 조건의 부정은
'x는 6의 약수가 아니다.'
이므로 부정의 진리집합은 $\{4, 8\}$

0322 $x^2-8x+12=0$에서
$(x-2)(x-6)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=6$
즉 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{2, 6\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{4, 8\}$ 답 $\{4, 8\}$

0323 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{2, 4\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{6, 8\}$ 답 $\{6, 8\}$

0324 $x^2-12x+32\leq0$에서
$(x-4)(x-8)\leq0$ $\therefore 4\leq x\leq8$
즉 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{4, 6, 8\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{2\}$ 답 $\{2\}$

0325 답 가정: a가 짝수이다., 결론: a^2은 짝수이다.

0326 답 가정: $x=2$이다., 결론: $x-1=1$이다.

0327 답 가정: 3의 배수이다., 결론: 9의 배수이다.

0328 $|-1|=1$이므로 주어진 명제는 참이다. 답 참

0329 [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 홀수가 아니므로 주어진 명제는 거짓이다.

답 거짓

0330 8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8이고 16의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16이므로 주어진 명제는 참이다.

답 참

0331 [반례] $x=2$이면 $x>1$이지만 $x\le 2$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

답 거짓

0332 답 참

0333 [반례] $2^2=4$, $4^2=16$이고 4와 16은 짝수이므로 주어진 명제는 거짓이다.

답 거짓

0334 답 참

0335 답 거짓

0336 답 어떤 자연수 x에 대하여 $x\le 0$이다. (거짓)

0337 답 모든 실수 x에 대하여 $x^2\ne -1$이다. (참)

0338 역: $x^2=1$이면 $x=1$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x\ne 1$이다.

대우: $x^2\ne 1$이면 $x\ne 1$이다. (참) 답 풀이 참조

참고 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

0339 역: x가 4의 배수이면 x는 짝수이다. (참)

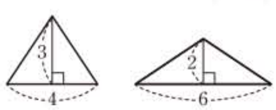
대우: x가 4의 배수가 아니면 x는 짝수가 아니다. (거짓)

[반례] $x=2$이면 x는 4의 배수가 아니지만 짝수이다.

답 풀이 참조

0340 역: 두 삼각형의 넓이가 같으면 두 삼각형은 합동이다. (거짓)

[반례] 오른쪽 그림에서 두 삼각형의 넓이는 6으로 같지만 합동은 아니다.



대우: 두 삼각형의 넓이가 다르면 두 삼각형은 합동이 아니다. (참)

답 풀이 참조

0341 역: $2x+1>4$이면 $x>2$이다. (거짓)

[반례] $x=\frac{7}{4}$이면 $2x+1>4$이지만 $x\le 2$이다.

대우: $2x+1\le 4$이면 $x\le 2$이다. (참) 답 풀이 참조

0342 역: $x=0$ 또는 $y=0$이면 $x+y=0$이다. (거짓)

[반례] $x=0$, $y=1$이면 $x+y\ne 0$이다.

대우: $x\ne 0$이고 $y\ne 0$이면 $x+y\ne 0$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$, $y=1$이면 $x\ne 0$, $y\ne 0$이지만 $x+y=0$이다.

답 풀이 참조

0343 역: $a>0$이고 $b>0$이면 $ab>0$이다. (참)

대우: $a\le 0$ 또는 $b\le 0$이면 $ab\le 0$이다. (거짓)

[반례] $a=-1$, $b=-1$이면 $a\le 0$, $b\le 0$이지만 $ab>0$이다.

답 풀이 참조

0344 $p \longrightarrow q$: $x\le 0$이면 $x<0$이다. (거짓)

[반례] $x=0$이면 $x\le 0$이지만 $x\ge 0$이다.

$q \longrightarrow p$: $x<0$이면 $x\le 0$이다. (참)

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

답 필요조건

0345 모든 한 자리 자연수는 10 미만의 자연수이고, 10 미만의 자연수는 모두 한 자리 자연수이다.

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 필요충분조건

0346 $p \longrightarrow q$: x가 8의 양의 배수이면 x는 짝수인 자연수이다. (참)

$q \longrightarrow p$: x가 짝수인 자연수이면 x는 8의 양의 배수이다. (거짓)

[반례] $x=4$이면 x는 짝수인 자연수이지만 8의 배수는 아니다.

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

답 충분조건

0347 $a=0 \Longrightarrow a=0$ 또는 $b=0$

따라서 $a=0$은 '$a=0$ 또는 $b=0$'이기 위한 충분조건이다.

답 충분조건

0348 $ab=0 \Longleftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$

따라서 $ab=0$은 '$a=0$ 또는 $b=0$'이기 위한 필요충분조건이다.

답 필요충분조건

0349 $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=b=0$,

$a=b=0 \Longrightarrow a=0$ 또는 $b=0$

이므로 $a^2+b^2=0 \Longrightarrow a=0$ 또는 $b=0$

따라서 $a^2+b^2=0$은 '$a=0$ 또는 $b=0$'이기 위한 충분조건이다.

답 충분조건

0350 $(a+b)^2\ge 0 \Longleftrightarrow a+b$는 실수,

$a=0$ 또는 $b=0 \Longrightarrow a+b$는 실수

이므로 $a=0$ 또는 $b=0 \Longrightarrow (a+b)^2\ge 0$

따라서 $(a+b)^2\ge 0$은 '$a=0$ 또는 $b=0$'이기 위한 필요조건이다.

답 필요조건

0351 주어진 명제의 대우는

'$x=2$이고 $y=3$이면 $xy=6$이다.'

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

0352 $1+\sqrt{2}$가 $\boxed{\text{유리수}}$라 가정하면

$(1+\sqrt{2})-1=\sqrt{2}$

에서 $1+\sqrt{2}$, -1이 모두 $\boxed{\text{유리수}}$이므로 $\sqrt{2}$는 $\boxed{\text{유리수}}$이다.

그런데 이것은 $\sqrt{2}$가 $\boxed{\text{무리수}}$라는 사실에 모순이므로 $1+\sqrt{2}$는 무리수이다.

∴ (가) 유리수 (나) 유리수 (다) 유리수 (라) 무리수

답 풀이 참조

0353 $a^2+b^2 \ge ab$에서

$a^2-ab+b^2 \ge 0$ …… ㉠

㉠의 좌변을 변형하면

$$a^2-ab+b^2=\left(a^2-ab+\frac{b^2}{4}\right)-\frac{b^2}{4}+b^2$$
$$=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\boxed{\frac{3}{4}b^2}$$

a, b가 실수이므로

$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2 \ge 0$, $\boxed{\frac{3}{4}b^2} \ge 0$

∴ $a^2-ab+b^2 \boxed{\ge} 0$

이때 등호는 $a-\frac{b}{2}=0$, $\frac{3}{4}b^2=0$일 때, 즉 $a=\boxed{0}$, $b=\boxed{0}$일 때 성립한다.

∴ (가) $\frac{3}{4}b^2$ (나) $\ge$ (다) 0 (라) 0

답 풀이 참조

0354 $x>0$, $\frac{1}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{1}{x} \ge 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}=2$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

따라서 $x+\frac{1}{x}$의 최솟값은 2이다.

답 2

참고 등호는 $x=\frac{1}{x}$에서 $x^2=1$, 즉 $x=1$ ($\because x>0$)일 때 성립한다.

0355 $2x>0$, $\frac{8}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+\frac{8}{x} \ge 2\sqrt{2x \cdot \frac{8}{x}}=8$ (단, 등호는 $x=2$일 때 성립)

따라서 $2x+\frac{8}{x}$의 최솟값은 8이다.

답 8

참고 등호는 $2x=\frac{8}{x}$에서 $x^2=4$, 즉 $x=2$ ($\because x>0$)일 때 성립한다.

0356 ①, ③ 참인 명제이다.

② x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

④, ⑤ 거짓인 명제이다.

답 ②

0357 ①, ③ 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

⑤ 거짓인 명제이다.

답 ②

참고 정오각형의 한 내각의 크기는 $108°$이다.

0358 ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

ㄴ. $48 \div 6=8<9$이므로 거짓인 명제이다.

ㄷ. 모든 x에 대하여 항상 성립하므로 참인 명제이다.

ㄹ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

이상에서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ②

0359 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은

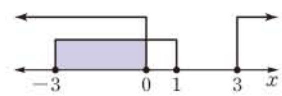
'p 그리고 $\sim q$'

이때 p: $-3 \le x \le 1$,

$\sim q$: $x \le 0$ 또는 $x \ge 3$이므로

'p 그리고 $\sim q$'는

$-3 \le x \le 0$



답 $-3 \le x \le 0$

0360 답 ⑤

0361 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.

ㄱ. 64는 4의 배수가 아니다. (거짓)

ㄴ. $3^2 \le (-3)^2$ (참) — $9=9$

ㄷ. 2는 합성수가 아니다. (참) — 2는 소수이다.

ㄹ. $1 \notin \{x \mid x^2-2x+1 \le 0\}$ (거짓) — $1^2-2\cdot1+1=0$이므로 $1 \in \{x \mid x^2-2x+1 \le 0\}$

이상에서 부정이 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

참고 명제가 거짓이면 그 부정은 참이다. 따라서 ㄱ, ㄹ의 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이고, ㄴ, ㄷ의 명제가 거짓이므로 그 부정은 참이다.

0362 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$에서

$a-b=0$ 또는 $b-c=0$ 또는 $c-a=0$

∴ $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

따라서 주어진 조건의 부정은

$a \ne b$이고 $b \ne c$이고 $c \ne a$

답 ②

0363 (i) 정현이의 말만 진실이라고 하면 다음 문장이 모두 참이다.

- 정현이는 영화관에 다녀왔다.
- 민아는 도서관에 다녀왔다.
- 수지는 영화관에 다녀왔다.

이때 정현이와 수지가 모두 영화관에 다녀왔으므로 정현이의 말은 진실이 아니다. ⋯ ❶

(ii) 민아의 말만 진실이라고 하면 다음 문장이 모두 참이다.

- 정현이는 영화관에 다녀오지 않았다.
- 민아는 도서관에 다녀오지 않았다.
- 수지는 영화관에 다녀왔다. ⋯ ❷

(iii) 수지의 말만 진실이라고 하면 다음 문장이 모두 참이다.

- 정현이는 영화관에 다녀오지 않았다.
- 민아는 도서관에 다녀왔다.
- 수지는 영화관에 다녀오지 않았다.

이때 영화관에 다녀온 사람이 아무도 없으므로 수지의 말은 진실이 아니다. ⋯ ❸

이상에서 진실을 말한 사람은 민아이므로 공원에 다녀온 사람은 민아이다. ⋯ ❹

답 민아

채점 기준	비율
❶ 정현이의 말만 진실일 때 참, 거짓을 확인할 수 있다.	30 %
❷ 민아의 말만 진실일 때 참, 거짓을 확인할 수 있다.	30 %
❸ 수지의 말만 진실일 때 참, 거짓을 확인할 수 있다.	30 %
❹ 공원에 다녀온 사람을 말할 수 있다.	10 %

참고 도서관에 다녀온 사람은 정현이다.

0364 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$

$x^2-6x-16<0$에서 $(x+2)(x-8)<0$

$\therefore -2<x<8$

따라서 조건 p의 진리집합은

$\{1, 2, 3, \cdots, 7\}$

이므로 구하는 원소의 개수는 7이다. 답 7

0365 10 이하의 자연수 중 홀수는 1, 3, 5, 7, 9이고 10의 약수는 1, 2, 5, 10이므로 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$

따라서 조건 $\sim p$의 진리집합은

$P^C=\{4, 6, 8\}$

이므로 구하는 원소의 합은

$4+6+8=18$ 답 ④

0366 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{3, 6, 9, \cdots, 48\}$, $Q=\{4, 8, 12, \cdots, 48\}$

따라서 조건 'p이고 q'의 진리집합은

$\underbrace{P\cap Q}_{\text{3과 4의 공배수, 즉 12의 배수의 집합}}=\{12, 24, 36, 48\}$

답 $\{12, 24, 36, 48\}$

0367 $0\le x<2$에서 $x\ge 0$이고 $x<2$

p: $x<0$에서 $\sim p$: $x\ge 0$이므로 $P^C=\{x|x\ge 0\}$

q: $x<2$이므로 $Q=\{x|x<2\}$

따라서 구하는 진리집합은

$P^C\cap Q$ 답 ⑤

참고 ① $P\cup Q=\{x|x<2\}$ ② $P\cap Q=\{x|x<0\}$
③ $P\cup Q^C=\{x|x<0$ 또는 $x\ge 2\}$ ④ $P\cap Q^C=\varnothing$

0368 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

p: $|x-3|>2$에서 $\sim p$: $|x-3|\le 2$이므로

$-2\le x-3\le 2$ $\therefore 1\le x\le 5$

$\therefore P^C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ⋯ ❶

q: $x^2+3x-10=0$에서 $(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

$\therefore Q=\{-5, 2\}$ ⋯ ❷

따라서 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은

$P^C\cup Q=\{1, 2, 3, 4, 5\}\cup\{-5, 2\}$

$=\{-5, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ⋯ ❸

이므로 구하는 원소의 합은

$-5+1+2+3+4+5=10$ ⋯ ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ 조건 $\sim p$의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건 q의 진리집합을 구할 수 있다.	20 %
❸ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❹ 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

0369 ① $x=-1$이면 $2x-3=2\cdot(-1)-3=-5$

② $x=2k$ (k는 자연수)라 하면

$3x=6k=2\cdot 3k$

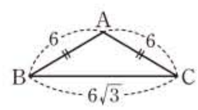
이므로 $3x$는 항상 짝수이다.

③ $x=2m-1$, $y=2n-1$ (m, n은 자연수)이라 하면

$x+y=(2m-1)+(2n-1)=2(m+n-1)$

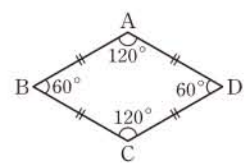
이므로 $x+y$는 항상 짝수이다.

⑤ [반례] 오른쪽 그림에서 $\triangle$ABC는 이등변삼각형이지만 $\angle A\ne\angle B$이다.



답 ④

0370 ③ [반례] 오른쪽 그림에서 □ABCD는 네 변의 길이가 모두 같지만 직사각형은 아니다.



⑤ [반례] $x=6$이면 x는 2의 양의 배수이지만 4의 양의 배수는 아니다.

답 ③, ⑤

0371 ㄱ. [반례] $x=1$, $y=-2$이면 $x>y$이지만 $x^2=1$, $y^2=4$이므로 $x^2<y^2$이다.

ㄷ. $x^2\ge 0$, $y^2\ge 0$이므로 $x^2+y^2\ne 0$이면

$x^2\ne 0$ 또는 $y^2\ne 0$ $\therefore x\ne 0$ 또는 $y\ne 0$

이상에서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0372 명제 $q \longrightarrow p$가 거짓임을 보이는 원소는 집합 Q에는 속하고 집합 P에는 속하지 않는다.

따라서 구하는 원소는 $Q-P$의 원소인 c이다. 답 ③

0373 두 조건 p, q를

p: n은 36의 약수이다., q: n은 24의 약수이다.

라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$,

$Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

이때 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않으므로 집합 $P-Q$의 원소이다.

$P-Q=\{9,\ 18,\ 36\}$이므로 반례로 알맞은 것은 ④이다.

답 ④

0374 명제 '$\sim p$이면 q이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P^C에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않는다.
따라서 구하는 집합은 $\quad P^C-Q=P^C\cap Q^C$

답 ③

0375 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보여주는 원소는 집합 P에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않으므로 $P-Q$의 원소이다.
또 명제 $q \longrightarrow p$가 거짓임을 보여주는 원소는 집합 Q에는 속하고 집합 P에는 속하지 않으므로 $Q-P$의 원소이다. ··· ❶
따라서 a의 값은 집합 $P-Q$에 속하는 모든 원소의 합이고, b의 값은 집합 $Q-P$에 속하는 모든 원소의 합이다.
이때 두 집합 $P-Q$, $Q-P$는 서로소이므로 $a+b$의 값은 집합 $(P-Q)\cup(Q-P)$에 속하는 모든 원소의 합이고

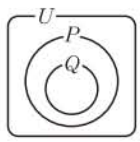
$$\begin{aligned}(P-Q)\cup(Q-P)&=(P\cup Q)-(P\cap Q)\\&=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}-\{3,\ 7\}\\&=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}\end{aligned}$$

이므로 $\quad a+b=1+2+4+5+6+8+9+10=45$ ··· ❷

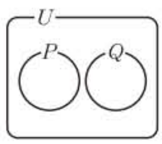
답 45

채점 기준	비율
❶ 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$가 거짓임을 보여주는 원소가 속하는 집합을 각각 구할 수 있다.	40 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0376 명제 $q \longrightarrow p$가 참이면 $\quad Q\subset P$
따라서 두 집합 P, Q의 포함 관계는 오른쪽 그림과 같으므로 ④ $P-Q\neq\varnothing$이다. 답 ④



0377 $P\cap Q=\varnothing$에서 두 집합 P, Q는 서로소이므로 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



③ $Q\subset P^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 항상 참이다.

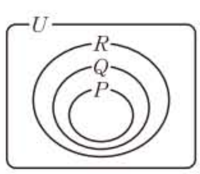
답 ③

참고 $P\subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$도 항상 참이다.

0378 ①, ② $P\subset Q^C$, $P\subset R^C$이므로 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $p \longrightarrow \sim r$는 모두 참이다.
③ $Q\subset P^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 참이다.
④ $R\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 참이다.
⑤ $R^C\not\subset Q^C$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.

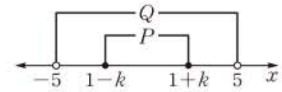
답 ⑤

0379 $P\cap Q=P$에서 $\quad P\subset Q$
$Q-R=\varnothing$에서 $\quad Q\subset R$
따라서 세 집합 P, Q, R의 포함 관계는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $P\subset R$이므로 명제 $p \longrightarrow r$는 참이다.
ㄴ. $Q^C\not\subset R$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow r$는 거짓이다.
ㄷ. $R^C\subset Q^C$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$는 참이다.
ㄹ. $Q\not\subset P^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.
이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0380 $|x-1|\le k$에서 $\quad -k\le x-1\le k$
$\therefore\ 1-k\le x\le 1+k$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\,|\,1-k\le x\le 1+k\}$,
$Q=\{x\,|\,-5<x<5\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면
$P\subset Q$
이어야 하므로 오른쪽 그림에서

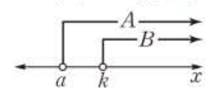


$-5<1-k$, $1+k<5$
$k<6$, $k<4 \quad \therefore\ k<4$
따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다. 답 ③

라센특강

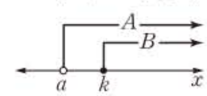
$B\subset A$가 되도록 하는 a의 값의 범위

① $A=\{x\,|\,x>a\}$,
$B=\{x\,|\,x>k\}$일 때



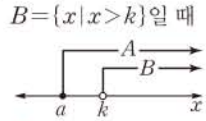
➡ $a\le k$

② $A=\{x\,|\,x>a\}$,
$B=\{x\,|\,x\ge k\}$일 때



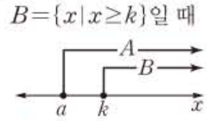
➡ $a<k$

③ $A=\{x\,|\,x\ge a\}$,
$B=\{x\,|\,x>k\}$일 때



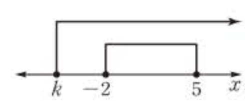
➡ $a\le k$

④ $A=\{x\,|\,x\ge a\}$,
$B=\{x\,|\,x\ge k\}$일 때



➡ $a\le k$

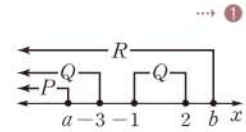
0381 주어진 명제가 참이 되려면
$\{x\,|\,-2\le x\le 5\}\subset\{x\,|\,x\ge k\}$
이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$k\le -2$

답 ①

0382 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면
$P=\{x\,|\,x\le a\}$, $Q=\{x\,|\,x\le -3$ 또는 $-1\le x\le 2\}$,
$R=\{x\,|\,x\le b\}$
두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이 되려면
$P\subset Q$, $Q\subset R$ ··· ❶
이어야 하므로 오른쪽 그림에서

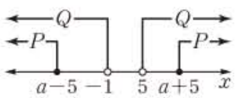


$a\le -3$, $b\ge 2$ ··· ❷
따라서 a의 최댓값은 -3, b의 최솟값은 2이므로 구하는 곱은
$-3\cdot 2=-6$ ··· ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ 세 조건의 진리집합 사이의 포함 관계를 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 최댓값과 b의 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

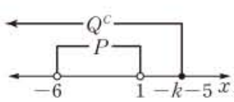
0383 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$|x-a|\ge 5$에서
$x-a\le -5$ 또는 $x-a\ge 5$
$\therefore x\le a-5$ 또는 $x\ge a+5$
$\therefore P=\{x|x\le a-5$ 또는 $x\ge a+5\}$
$|x-2|>3$에서
$x-2<-3$ 또는 $x-2>3$
$\therefore x<-1$ 또는 $x>5$
$\therefore Q=\{x|x<-1$ 또는 $x>5\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면
$P\subset Q$
이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-5<-1$, $a+5>5$
$\therefore 0<a<4$
따라서 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

0384 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$x^2+5x-6<0$에서 $(x+6)(x-1)<0$
$\therefore -6<x<1$
$\therefore P=\{x|-6<x<1\}$
또 $x-5<2x+k$에서
$x>-k-5$
따라서 $Q=\{x|x>-k-5\}$이므로
$Q^C=\{x|x\le -k-5\}$
명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면
$P\subset Q^C$
이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k-5\ge 1$
$\therefore k\le -6$
따라서 k의 최댓값은 -6이다.

답 ③

0385 ㄱ. [반례] $x=1$이면 $1^2+1=2$이다.
ㄴ. $x=0$이면 $0^2=0$이므로 참이다.
ㄷ. $x=2$이면 $2>\frac{1}{2}$이므로 참이다.
이상에서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고 ㄷ. $x>0$이므로 $x>\frac{1}{x}$의 양변에 x를 곱하면
$x^2>1$, $x^2-1>0$, $(x+1)(x-1)>0$
$\therefore x>1\ (\because x>0)$
따라서 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $x>\frac{1}{x}$이다.

0386 주어진 명제의 부정은
'어떤 학생은 음악과 미술을 모두 좋아하지 않는다.'
이고 이와 같은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0387 ㄴ. $P=U$일 때만 '모든 x에 대하여 p이다.'는 참이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

라쎈 특강

'모든'이나 '어떤'이 있는 명제의 참, 거짓
공집합이 아닌 전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때
① $P=\varnothing$ ➡ '어떤 x에 대하여 p이다.' (거짓)
'모든 x에 대하여 p이다.' (거짓)
② $P=U$ ➡ '어떤 x에 대하여 p이다.' (참)
'모든 x에 대하여 p이다.' (참)
③ $P\ne\varnothing$ ➡ '어떤 x에 대하여 p이다.' (참)
④ $P\ne U$ ➡ '모든 x에 대하여 p이다.' (거짓)

0388 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
① $4x$의 값은 4, 8, 12, 16, 20
따라서 모든 x에 대하여 $4x\le 20$이므로 참이다.
② $x=5$이면 $5+5=10$이므로 참이다.
③ $-x+3$의 값은 2, 1, 0, -1, -2
따라서 모든 x에 대하여 $-x+3\ge -2$이므로 참이다.
④ x^2의 값은 1, 4, 9, 16, 25
따라서 $x^2<1$을 만족시키는 x가 존재하지 않으므로 거짓이다.
⑤ $x=1$이면 $1-5\ne 3$이므로 참이다.

답 ④

0389 주어진 명제의 부정은
'모든 실수 x에 대하여 $x^2-kx+9\ge 0$이다.'
이다. ··· ❶
이차방정식 $x^2-kx+9=0$의 판별식을 D라 할 때, 위의 명제가 참이려면
$D=(-k)^2-4\cdot 9\le 0$
$k^2-36\le 0$, $(k+6)(k-6)\le 0$
$\therefore -6\le k\le 6$
따라서 k의 최솟값은 -6이다. ··· ❷

답 -6

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 부정을 말할 수 있다.	40 %
❷ k의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

0390 ① 역: $x=y$이면 $x^2=y^2$이다. (참)
② 역: $x=0$이면 $xy=0$이다. (참)
③ 역: $2x-2=2$이면 $x=2$이다. (참)
④ 역: $xy>0$이면 $x<0$이고 $y<0$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=2$이면 $xy>0$이지만 $x>0$이고 $y>0$이다.
⑤ 역: $\underbrace{4\text{의 양의 약수}}_{1,\ 2,\ 4}$이면 $\underbrace{8\text{의 양의 약수}}_{1,\ 2,\ 4,\ 8}$이다. (참)

답 ④

0391 명제 $p \longrightarrow q$의 역은
$q \longrightarrow p$
따라서 명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우인 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 반드시 참이다.

답 ②

0392 주어진 명제의 대우는

'$x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$이면 $x^2+y^2\neq 0$이다.'

이다.

이때 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다. 답 ②

0393 ㄱ. 역: $xy=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이다. (참)

대우: $xy\neq 0$이면 $x\neq 0$이고 $y\neq 0$이다. (참)

ㄴ. 역: $x<0$ 또는 $y<0$이면 $xy<0$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$, $y=-1$이면 $xy>0$이다.

대우: $x\geq 0$이고 $y\geq 0$이면 $xy\geq 0$이다. (참)

ㄷ. 역: xy가 짝수이면 x와 y는 짝수이다. (거짓)

[반례] $x=2$, $y=1$이면 xy는 짝수이지만 y는 짝수가 아니다.

대우: xy가 짝수가 아니면 x 또는 y는 짝수가 아니다. (참)

이상에서 역과 대우가 모두 참인 명제인 것은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

0394 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$|x-3|\leq 7$에서 $\quad -7\leq x-3\leq 7$

$\therefore -4\leq x\leq 10$

$\therefore P=\{x|-4\leq x\leq 10\}$

$x^2-k^2\leq 0$에서 $\quad (x+k)(x-k)\leq 0$

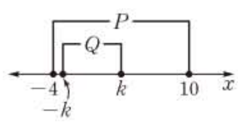
$\therefore -k\leq x\leq k$

$\therefore Q=\{x|-k\leq x\leq k\}$ ⋯ ❶

이때 명제 $p \longrightarrow q$의 역은

$q \longrightarrow p$

명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k\geq -4$, $k\leq 10$

$k\leq 4$, $k\leq 10 \quad \therefore k\leq 4$ ⋯ ❷

따라서 자연수 k의 최댓값은 4이다. ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0395 주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$x-5=0$이면 $x^2+kx+10=0$이다.'

도 참이다.

따라서 $x=5$를 $x^2+kx+10=0$에 대입하면

$25+5k+10=0, \quad 5k=-35$

$\therefore k=-7$ 답 -7

0396 주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$a\geq k$이고 $b\geq 2$이면 $a+b\geq 10$이다.'

도 참이다.

$a\geq k$, $b\geq 2$에서 $a+b\geq k+2$이므로

$k+2\geq 10 \quad \therefore k\geq 8$

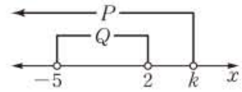
따라서 k의 최솟값은 8이다. 답 ④

0397 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 그 대우 $q \longrightarrow p$가 참이 되어야 한다.

이때 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x<k\}$, $Q=\{x|-5<x<2\}$

명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$k\geq 2$ 답 ⑤

0398 ①, ④ 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $r \longrightarrow p$가 모두 참이므로 각각의 대우인 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow \sim r$도 모두 참이다.

②, ③ 두 명제 $r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이고, 그 대우인 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ⑤이다. 답 ⑤

0399 ㄴ. 명제 $r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

ㄷ. 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이고, 그 대우인 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

이상에서 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄷ의 2개이다. 답 2

참고 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim p \longrightarrow \sim s$가 모두 참이므로 그 대우인 $q \longrightarrow \sim p$, $s \longrightarrow p$도 모두 참이다.

0400 네 조건 p, q, r, s를

p: 수학을 좋아한다., q: 과학을 좋아한다.,

r: 영어를 좋아한다., s: 국어를 좋아한다.

로 놓으면 (가), (나)에서 두 명제 $r \longrightarrow \sim p$, $\sim q \longrightarrow s$가 모두 참이므로 각각의 대우인 $p \longrightarrow \sim r$, $\sim s \longrightarrow q$도 모두 참이다.

따라서 명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 $\sim r \longrightarrow \sim s$, 즉

'영어를 좋아하지 않으면 국어를 좋아하지 않는다.'

이다. 답 ⑤

0401 ① $x^2=x$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $x^2=y^2$에서 $\quad x=y$ 또는 $x=-y$

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

③ $x>y$의 양변에서 z를 빼면 $\quad x-z>y-z$

$x-z>y-z$의 양변에 z를 더하면 $\quad x>y$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

④ $xy\geq 0$에서

'$x>0$이고 $y>0$' 또는 '$x<0$이고 $y<0$' 또는

'$x=0$' 또는 '$y=0$'

따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

⑤ $xy\neq 0$에서 $\quad x\neq 0$이고 $y\neq 0$

$x^2+y^2\neq 0$에서 $\quad x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$

따라서 $p\Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

답 ④

0402 $A\cup B=A$이면 $B\subset A$이므로 $\quad n(B)\leq n(A)$

$\therefore p\Longrightarrow q$

$A=\{1, 2\}$, $B=\{3\}$이면 $n(A)=2$, $n(B)=1$이므로

$n(B)\leq n(A)$이지만 $A\cup B\neq A$이다.

$\therefore q \not\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다. 답 충분조건

0403 ① x, y가 자연수이면 xy는 자연수이므로 $\quad p\Longrightarrow q$

$x=\frac{1}{2}$, $y=2$이면 $\underbrace{xy}_{\frac{1}{2}\cdot 2=1}$는 자연수이지만 x는 자연수가 아니다.

$\therefore q\not\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $x=1$, $y=2$, $z=0$이면 $\underbrace{xz=yz}_{1\cdot 0=2\cdot 0}$이지만 $x\neq y$이다.

$\therefore p\not\Longrightarrow q$

$x=y$의 양변에 z를 곱하면 $\quad xz=yz$

$\therefore q\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

③ $p\Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

④ $x=1$, $y=1$, $z=2$이면 $(x-y)(y-z)=0$이지만 $y\neq z$이므로 $\quad p\not\Longrightarrow q$

$x=y$이고 $y=z$이면 $(\underbrace{x-y}_{0})(\underbrace{y-z}_{0})=0$이므로

$q\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

⑤ $x=0$, $y=1$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $x=0$이므로

$p\not\Longrightarrow q$

$x\neq 0$이고 $y\neq 0$이면 $x^2+y^2>0$이므로

$q\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

답 ③

0404 p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $\quad p\Longrightarrow \sim q$

q가 r이기 위한 필요조건이므로 $\quad r\Longrightarrow q$

②, ⑤ 두 명제 $p\longrightarrow \sim q$, $r\longrightarrow q$가 모두 참이므로 각각의 대우인 $q\longrightarrow \sim p$, $\sim q\longrightarrow \sim r$도 모두 참이다.

①, ④ 두 명제 $p\longrightarrow \sim q$, $\sim q\longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $p\longrightarrow \sim r$가 참이고, 그 대우인 $r\longrightarrow \sim p$도 참이다.

이상에서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ③이다. 답 ③

0405 p가 q이기 위한 필요조건이므로 $\quad q\Longrightarrow p$

③ 명제 $q\longrightarrow p$가 참이므로 그 대우인 $\sim p\longrightarrow \sim q$도 참이다.

즉 $\sim p\Longrightarrow \sim q$이므로 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

답 ③

참고 ⑤ $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다.

0406 명제 $\sim p\longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우인 $r\longrightarrow p$도 참이다.

따라서 두 명제 $r\longrightarrow p$, $p\longrightarrow q$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $r\longrightarrow q$가 참이다.

ㄱ. $p\Longrightarrow q$이므로 q는 p이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $r\Longrightarrow q$이므로 r는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. $r\Longrightarrow p$이므로 p는 r이기 위한 필요조건이다.

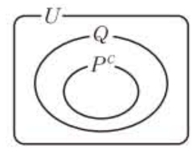
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0407 $\underbrace{\sim p\text{는 } q\text{이기 위한 충분조건}}_{\sim p\Longrightarrow q}$이므로

$P^C\subset Q$

이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$P\cup Q=U$



답 ⑤

0408 $\underbrace{p\text{는 } q\text{이기 위한 필요조건}}_{q\Longrightarrow p}$이므로

$Q\subset P$

$\underbrace{q\text{는 } r\text{이기 위한 필요조건}}_{r\Longrightarrow q}$이므로

$R\subset Q$

$\therefore R\subset Q\subset P$ 답 ⑤

0409 주어진 벤다이어그램에서

①, ② $Q\subset P$이므로 $\quad q\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이고, q는 p이기 위한 충분조건이다.

③ $R\not\subset Q$이므로 $\quad r\not\Longrightarrow q$

따라서 r는 q이기 위한 충분조건이 아니다.

④ $R\subset P^C$이므로 $\quad r\Longrightarrow \sim p$

따라서 r는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

⑤ $P\subset R^C$이므로 $\quad p\Longrightarrow \sim r$

따라서 $\sim r$는 p이기 위한 필요조건이다.

답 ②, ⑤

0410 $(P^C-Q^C)\cup P=\{P^C\cap (Q^C)^C\}\cup P=(P^C\cap Q)\cup P$

$=(P^C\cup P)\cap (Q\cup P)=U\cap (Q\cup P)$

$=Q\cup P$

이므로 $(P^C-Q^C)\cup P=Q$에서

$Q\cup P=Q \qquad \therefore P\subset Q$

따라서 $p\Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

답 충분조건

0411 (1) $P=\{-1, 0, 1\}$, $Q=\{0\}$,

$R=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ··· ❶

(2) $Q\subset P$이므로 $\quad q\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다. ··· ❷

(3) $P\subset R$이므로 $\quad p\Longrightarrow r$

따라서 p는 r이기 위한 충분조건이다. ··· ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ P, Q, R를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ p가 q이기 위한 어떤 조건인지 말할 수 있다.	40 %
❸ p가 r이기 위한 어떤 조건인지 말할 수 있다.	40 %

0412 $-a<x<a$가 $x^2+6x+8<0$이기 위한 필요조건이므로 명제

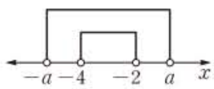
'$x^2+6x+8<0$이면 $-a<x<a$이다.'

가 참이다.

$x^2+6x+8<0$에서 $(x+4)(x+2)<0$

$\therefore -4<x<-2$

즉 $\{x|-4<x<-2\}\subset\{x|-a<x<a\}$



이므로 오른쪽 그림에서

$-a\le-4$, $a\ge-2$

$\therefore a\ge4$

따라서 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

0413 $x-3=0$, 즉 $x=3$은 $x^2+ax+b=0$이기 위한 필요충분조건이므로 두 명제

'$x=3$이면 $x^2+ax+b=0$이다.',

'$x^2+ax+b=0$이면 $x=3$이다.'

가 모두 참이다.

즉 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해는 $x=3$뿐이어야 하므로

$(x-3)^2=0$에서

$x^2-6x+9=0$

따라서 $a=-6$, $b=9$이므로

$a+b=3$

답 3

0414 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$7\le3x+1<19$에서 $6\le3x<18$

$\therefore 2\le x<6$

$\therefore P=\{x|2\le x<6\}$

$x-a=2$에서 $x=a+2$

$\therefore Q=\{a+2\}$

이때 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $q\Longrightarrow p$

즉 $Q\subset P$이어야 하므로

$2\le a+2<6$ $\therefore 0\le a<4$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

답 ④

0415 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$|x-2|\ge10$에서 $x-2\le-10$ 또는 $x-2\ge10$

$\therefore x\le-8$ 또는 $x\ge12$

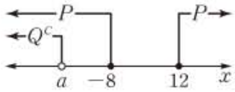
$\therefore P=\{x|x\le-8$ 또는 $x\ge12\}$

$Q=\{x|x\ge a\}$이므로

$Q^C=\{x|x<a\}$

$\sim q$가 p이기 위한 충분조건이 되려면 $\sim q\Longrightarrow p$

즉 $Q^C\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a\le-8$

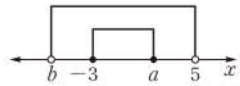
따라서 a의 최댓값은 -8이다.

답 -8

0416 (1) p가 q이기 위한 충분조건이므로

$p\Longrightarrow q$ ··· ❶

즉 $\{x|-3\le x\le a\}\subset\{x|b<x<5\}$



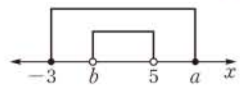
이므로 오른쪽 그림에서

$b<-3$, $-3\le a<5$ ··· ❷

(2) p가 q이기 위한 필요조건이므로

$q\Longrightarrow p$ ··· ❸

즉 $\{x|b<x<5\}\subset\{x|-3\le x\le a\}$



이므로 오른쪽 그림에서

$-3\le b<5$, $a\ge5$ ··· ❹

답 (1) $-3\le a<5$, $b<-3$ (2) $a\ge5$, $-3\le b<5$

채점 기준	비율
❶ $p\Longrightarrow q$임을 알 수 있다.	20 %
❷ 조건을 만족시키는 a, b의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ $q\Longrightarrow p$임을 알 수 있다.	20 %
❹ 조건을 만족시키는 a, b의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

0417 p가 q이기 위한 충분조건이므로 $p\Longrightarrow q$

$\therefore P\subset Q$ ······ ㉠

q가 r이기 위한 필요충분조건이므로 $q\Longleftrightarrow r$

$\therefore Q=R$ ······ ㉡

㉠에서 $4\in Q$이므로 $a^2=4$ 또는 $4a=4$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때,

$Q=\{-8, 4\}$이므로 ㉡을 만족시키지 못한다.

(ii) $a=1$일 때,

$Q=\{1, 4\}$이므로 ㉡에서 $b=4$

(iii) $a=2$일 때,

$Q=\{4, 8\}$이므로 ㉡을 만족시키지 못한다.

이상에서 $a=1$, $b=4$

$\therefore a+b=5$

답 5

0418 주어진 명제의 대우는

'$\boxed{n\text{이 홀수이면 } n^2\text{도 홀수이다.}}$'

이다.

n이 홀수이면 $n=2k-1$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1$

$=2(2k^2-2k)+\boxed{1}$

이때 $2k^2-2k$는 0 또는 자연수이므로 n^2은 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$\therefore$ (가) n이 홀수이면 n^2도 홀수이다. (나) 1

답 풀이 참조

0419 (1) x가 유리수이면 x^2도 유리수이다. ··· ❶

(2) x가 유리수이면

$x=\pm\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)

으로 나타낼 수 있다. 이때 양변을 제곱하면

$x^2=\left(\pm\dfrac{n}{m}\right)^2=\dfrac{n^2}{m^2}$

이고, m, n이 서로소인 자연수이므로 m^2, n^2도 서로소인 자연수이다.

따라서 x^2이 유리수이다. ➋

주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. ➌

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우를 말할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 명제의 대우가 참임을 증명할 수 있다.	50 %
❸ 대우가 참임을 이용하여 주어진 명제가 참임을 증명할 수 있다.	20 %

0420 $\sqrt{2}$가 무리수가 아니라고 가정하면 $\sqrt{2}$는 유리수이므로

$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)

으로 나타낼 수 있다.

즉 $\sqrt{2}m=n$이므로 양변을 제곱하면

$2m^2=n^2$ …… ㉠

이때 n^2이 짝수이므로 n도 $\boxed{\text{짝수}}$이다.

$n=2k$ (k는 자연수)로 놓으면 ㉠에서

$2m^2=4k^2$ $\quad\therefore m^2=2k^2$

따라서 m^2이 짝수이므로 m도 $\boxed{\text{짝수}}$이다.

이것은 m, n이 $\boxed{\text{서로소}}$라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

$\therefore$ (가) 짝수 (나) 짝수 (다) 서로소

답 ④

0421 mn이 짝수일 때, m, n이 모두 $\boxed{\text{홀수}}$라 가정하면

$m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)

로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned} mn&=(2k-1)(2l-1)\\ &=4kl-2k-2l+1\\ &=2(\boxed{2kl-k-l})+1 \end{aligned}$$

이때 $\boxed{2kl-k-l}$은 0 또는 자연수이므로 mn은 $\boxed{\text{홀수}}$이다.

그런데 이것은 mn이 짝수라는 가정에 모순이므로 m 또는 n이 짝수이다.

$\therefore$ (가) 홀수 (나) $2kl-k-l$ (다) 홀수

답 풀이 참조

0422 방정식 $ax^2+bx-c=0$, 즉 $ax^2+bx=c$가 정수인 해 $x=k$를 갖는다고 가정하면 $ak^2+bk=c$이므로

(i) $k=2n$ (n은 정수)일 때,

$a(2n)^2+b\cdot 2n=c$, $\quad 4an^2+2bn=c$

$2(\boxed{2an^2+bn})=c$

위의 등식에서 좌변은 짝수이고, 우변은 홀수이므로 모순이다.

(ii) $k=2n+1$ (n은 정수)일 때,

$a(2n+1)^2+b(2n+1)=c$

$4an^2+4an+2bn+a+b=c$

$2(\boxed{2an^2+2an+bn})+a+b=c$

위의 등식에서 좌변은 짝수이고, 우변은 홀수이므로 모순이다.

(i), (ii)에서 방정식 $ax^2+bx-c=0$은 정수인 해를 갖지 않는다.

$\therefore$ (가) $2an^2+bn$ (나) $2an^2+2an+bn$

답 풀이 참조

0423
$$\begin{aligned} &(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2\\ &=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)\\ &=a^2y^2-2abxy+b^2x^2\\ &=(\boxed{ay-bx})^2\ge 0 \quad\cdots\cdots\ ㉠ \end{aligned}$$

$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$

이때 등호는 ㉠에서 $ay-bx=0$, 즉 $\frac{x}{a}=\boxed{\frac{y}{b}}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $ay-bx$ (나) $\frac{y}{b}$

답 풀이 참조

참고 (가)에 $ay-bx$ 대신 $bx-ay$를 써넣어도 된다.

0424
$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}&=\frac{a+b-\boxed{2\sqrt{ab}}}{2}\\ &=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}\\ &=\frac{(\boxed{\sqrt{a}-\sqrt{b}})^2}{2}\ge 0 \quad\cdots\cdots\ ㉠ \end{aligned}$$

$\therefore \frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

이때 등호는 ㉠에서 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=\boxed{b}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (다) b

답 풀이 참조

참고 (나)에 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 대신 $\sqrt{b}-\sqrt{a}$를 써넣어도 된다.

0425
$$\begin{aligned} &(|a|+|b|)^2-|a+b|^2\\ &=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a+b)^2\\ &=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)\\ &=2(\boxed{|ab|-ab})\ge 0\ (\because \underbrace{|ab|\ge ab}_{\text{모든 실수 }A\text{에 대하여 }|A|\ge A}) \quad\cdots\cdots\ ㉠ \end{aligned}$$

$\therefore (|a|+|b|)^2\ge|a+b|^2$

그런데 $|a|+|b|\ge 0$, $|a+b|\ge 0$이므로

$|a|+|b|\ge|a+b|$

이때 등호는 ㉠에서 $|ab|-ab=0$, 즉 $|ab|=ab$일 때 성립하므로 $\boxed{ab\ge 0}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $|ab|-ab$ (나) $ab\ge 0$

답 ①

0426 ㄱ. $(x^2+1)-x=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

이때 x가 실수이므로 $\quad\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$

따라서 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 $\quad x^2+1>x$

ㄴ. $x=1$, $y=1$이면

$x^2+y^2+1=1^2+1^2+1=3$, $2(x+y)=2(1+1)=4$

따라서 $x^2+y^2+1<2(x+y)$인 경우가 존재하므로 절대부등식이 아니다.

ㄷ. $(x^2+2y^2)-y(2x+y)=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$

이때 x, y가 실수이므로 $\quad(x-y)^2\ge 0$

$\therefore x^2+2y^2\ge y(2x+y)$

이상에서 절대부등식인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

참고 ㄴ. $(x^2+y^2+1)-2(x+y)=(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)-1$
$=(x-1)^2+(y-1)^2-1$

이때 실수 x, y에 대하여 $(x-1)^2\ge 0$, $(y-1)^2\ge 0$이므로

$(x-1)^2+(y-1)^2-1\ge -1$

따라서 $(x-1)^2+(y-1)^2-1<0$인 경우가 존재한다.

0427 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a+2b\geq 2\sqrt{3a\cdot 2b}=2\sqrt{6ab}$$

이때 $3a+2b=12$이므로

$$12\geq 2\sqrt{6ab},\quad 6\geq \sqrt{6ab}$$

양변을 제곱하면 $\quad 36\geq 6ab$

$\therefore ab\leq 6$ (단, 등호는 $3a=2b$일 때 성립)

따라서 ab의 최댓값은 6이다.

답 6

참고 등호는 $3a=2b$일 때 성립하고 $3a+2b=12$이므로

$3a=6$, $2b=6\quad \therefore a=2$, $b=3$

따라서 $a=2$, $b=3$일 때 ab는 최댓값을 갖는다.

0428 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$7a+3b\geq 2\sqrt{7a\cdot 3b}=2\sqrt{21ab}$$

이때 $ab=21$이므로

$$7a+3b\geq 2\sqrt{21\cdot 21}$$
$$=42 \text{ (단, 등호는 } 7a=3b\text{일 때 성립)}$$

따라서 $7a+3b$의 최솟값은 42이다.

답 42

다른 풀이 $ab=21$에서 $\quad b=\frac{21}{a}$

$$\therefore 7a+3b=7a+3\cdot\frac{21}{a}=7a+\frac{63}{a}$$
$$\geq 2\sqrt{7a\cdot\frac{63}{a}}$$
$$=2\cdot 21$$
$$=42 \text{ (단, 등호는 } a=3\text{일 때 성립)}$$

$7a=\frac{63}{a}$에서 $a^2=9\quad \therefore a=3\ (\because a>0)$

0429 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{10}{xy}\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+y\geq 2\sqrt{xy}$$

이때 $x+y=10$이므로

$$10\geq 2\sqrt{xy},\quad 5\geq\sqrt{xy}$$

양변을 제곱하면

$xy\leq 25$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

즉 $\frac{1}{xy}\geq\frac{1}{25}$이므로 $\quad \frac{10}{xy}\geq\frac{2}{5}$

따라서 ㉠에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$의 최솟값은 $\frac{2}{5}$이다.

답 ②

0430 (1) 피타고라스 정리에 의하여

$$x^2+y^2=12^2=144$$

(2) 직사각형의 넓이는 xy이고 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy\ (\because x>0,\ y>0)$$

이때 $x^2+y^2=144$이므로

$$144\geq 2xy$$

$\therefore xy\leq 72$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은 72이다.

답 (1) $x^2+y^2=144$ (2) 72

0431 두 원의 반지름의 길이를 각각 x, y라 하면 반지름의 길이의 곱이 8이므로

$$xy=8$$

두 원의 넓이의 합은 $x^2\pi+y^2\pi$이고 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy\ (\because x>0,\ y>0)$$

이때 $xy=8$이므로

$$x^2+y^2\geq 16$$

양변에 π를 곱하면

$$x^2\pi+y^2\pi\geq 16\pi$$

따라서 두 원의 넓이의 합의 최솟값은 16π이다.

답 ③

0432 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a+2b+\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=3a+\frac{3}{a}+2b+\frac{2}{b}$$
$$\geq 2\sqrt{3a\cdot\frac{3}{a}}+2\sqrt{2b\cdot\frac{2}{b}}$$
$$=2\cdot 3+2\cdot 2$$
$$=10 \text{ (단, 등호는 } a=1,\ b=1\text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 10이다.

답 10

참고 등호는 $3a=\frac{3}{a}$, $2b=\frac{2}{b}$일 때 성립하므로

$a^2=1$, $b^2=1\quad \therefore a=1$, $b=1\ (\because a>0,\ b>0)$

따라서 $a=1$, $b=1$일 때 $3a+2b+\frac{3}{a}+\frac{2}{b}$는 최솟값을 갖는다.

0433 $x>2$에서 $x-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{1}{x-2}=x-2+\frac{1}{x-2}+2$$
$$\geq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2$$
$$=2\cdot 1+2=4 \text{ (단, 등호는 } x=3\text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

답 ④

참고 등호는 $x-2=\frac{1}{x-2}$일 때 성립하므로

$(x-2)^2=1$, $\quad x-2=1\ (\because x-2>0)\quad \therefore x=3$

따라서 $x=3$일 때 $x+\frac{1}{x-2}$은 최솟값을 갖는다.

0434 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(x+\frac{4}{y}\right)\left(y+\frac{9}{x}\right)=xy+9+4+\frac{36}{xy}$$
$$=13+xy+\frac{36}{xy}$$
$$\geq 13+2\sqrt{xy\cdot\frac{36}{xy}}$$
$$=13+2\cdot 6$$
$$=25$$

따라서 $\left(x+\frac{4}{y}\right)\left(y+\frac{9}{x}\right)$의 최솟값은 25이므로

$b=25\quad\cdots$ ❶

이때 등호는 $xy=\frac{36}{xy}$일 때 성립하므로

$(xy)^2=36\quad \therefore xy=6\ (\because x>0,\ y>0)$

따라서 $a=6$이므로 ⋯ ❷

$a+b=31$ ⋯ ❸

답 31

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0435 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(4^2+3^2)(x^2+y^2)\geq(4x+3y)^2$$

이때 $x^2+y^2=4$이므로

$$25\cdot4\geq(4x+3y)^2,\qquad 100\geq(4x+3y)^2$$

$$\therefore\ -10\leq4x+3y\leq10\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{4}=\frac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $4x+3y$의 최댓값은 10, 최솟값은 -10이므로 구하는 곱은

$10\cdot(-10)=-100$ 답 -100

0436 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(12^2+5^2)(x^2+y^2)\geq(12x+5y)^2$$

이때 $12x+5y=13$이므로

$$169(x^2+y^2)\geq169$$

$$\therefore\ x^2+y^2\geq1\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{12}=\frac{y}{5}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 1이다. 답 ①

0437 a, b, c, d가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$$

이때 $a^2+b^2=10$, $c^2+d^2=5$이므로

$$10\cdot5\geq(ac+bd)^2,\qquad 50\geq(ac+bd)^2$$

$$\therefore\ -5\sqrt{2}\leq ac+bd\leq5\sqrt{2}\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{c}{a}=\frac{d}{b}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $ac+bd$의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0438 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 원의 지름이 직사각형의 대각선이므로

$$x^2+y^2=4^2=16$$

직사각형의 둘레의 길이는 $(2x+2y)$ cm이고 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(2^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(2x+2y)^2$ ⋯ ❶

$8\cdot16\geq(2x+2y)^2,\qquad (2x+2y)^2\leq128$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$0<2x+2y\leq8\sqrt{2}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립) $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}$에서 $x=y$

따라서 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $8\sqrt{2}$ cm이다. ⋯ ❷

답 $8\sqrt{2}$ cm

채점 기준	비율
❶ 코시-슈바르츠 부등식을 이용하여 식을 세울 수 있다.	50 %
❷ 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %

0439 전략 x의 값에 관계없이 참, 거짓을 판별할 수 있는 문장이나 식을 찾는다.

풀이 ①, ③, ④, ⑤ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

② $x+7>x+5$에서 $7>5$이므로 x의 값에 관계없이 참인 명제이다.

답 ②

0440 전략 명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, p가 거짓이면 $\sim p$는 참임을 이용한다.

풀이 (i) 영호의 말만 참인 경우 다음 문장이 모두 참이다.

- 수진이는 결석했다.
- 대웅이는 결석하지 않았다.

(ii) 수진이의 말만 참인 경우 다음 문장이 모두 참이다.

- 수진이는 결석하지 않았다.
- 대웅이는 결석하지 않았다.

(iii) 대웅이의 말만 참인 경우 다음 문장이 모두 참이다.

- 수진이는 결석하지 않았다.
- 수진이는 결석했다.
- 대웅이는 결석했다.

이때 첫 번째 문장과 두 번째 문장은 모순이므로 대웅이의 말은 참이 될 수 없다.

이상에서 참을 말한 사람은 영호 또는 수진이다.

이때 항상 참이 되는 것은 ⑤ '대웅이는 결석하지 않았다.'이다.

답 ⑤

다른 풀이 영호와 수진이가 한 말은 서로 반대이므로 영호와 수진이 중 한 명의 말만 참이고, 다른 한 명의 말은 거짓이다.

이때 한 명의 말만 참이므로 대웅이의 말은 거짓이다.

따라서 '대웅이는 결석하지 않았다.'는 항상 참이다.

0441 전략 $ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)g(x)=0$에서

$f(x)=0$ 또는 $g(x)=0$ ⋯⋯ ㉠

p: $f(x)\neq0$에서 $\sim p$: $f(x)=0$이므로

$P^C=\{x\,|\,f(x)=0\}$

q: $g(x)\neq0$에서 $\sim q$: $g(x)=0$이므로

$Q^C=\{x\,|\,g(x)=0\}$

따라서 ㉠의 진리집합은

$P^C\cup Q^C$ 답 ⑤

0442 전략 'p이고 $\sim q$'를 만족시키는 x가 속하는 집합을 구한다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

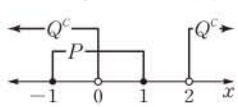
$P=\{x\,|\,-1\leq x\leq1\}$,

$Q=\{x\,|\,0\leq x\leq2\}$

명제 'p이면 q이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않으므로 $P-Q$, 즉 $P\cap Q^C$의 원소이다.

이때 $Q^C=\{x\,|\,x<0 \text{ 또는 } x>2\}$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 집합은

$P\cap Q^C=\{x\,|\,-1\leq x<0\}$



답 ②

0443 전략 세 조건 p, q, r의 진리집합의 포함 관계를 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.

$|x|>4$에서 $\quad x<-4$ 또는 $x>4$

$\therefore P=\{x|x<-4$ 또는 $x>4\}$

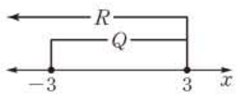
$x^2-9\le0$에서 $\quad (x+3)(x-3)\le0$

$\therefore -3\le x\le3$

$\therefore Q=\{x|-3\le x\le3\}$

$x\le3$에서 $\quad R=\{x|x\le3\}$

ㄱ. 두 집합 Q, R를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

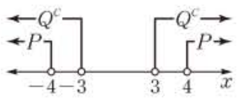


$Q\subset R$

따라서 명제 $q \longrightarrow r$는 참이다.

ㄴ. $Q^C=\{x|x<-3$ 또는 $x>3\}$

두 집합 P, Q^C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

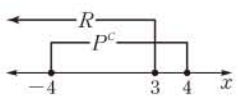


$P\subset Q^C$

따라서 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 참이다.

ㄷ. $P^C=\{x|-4\le x\le4\}$

두 집합 R, P^C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$R\not\subset P^C$

따라서 명제 $r \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.

이상에서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0444 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $q \longrightarrow p$가 참이면 $Q\subset P$이다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x>0\}$

이때 명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 한다.

① $x^2\ge0$은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$Q=\{x|x$는 실수$\}\quad \therefore Q\not\subset P$

② $x^2\le0$이면 $x=0$이므로 $\quad Q=\{0\}$

$\therefore Q\not\subset P$

③ $x^2\ne0$이면 $x\ne0$이므로 $\quad Q=\{x|x$는 0이 아닌 실수$\}$

$\therefore Q\not\subset P$

④ $Q=\{x|x>1\}$이므로 $\quad Q\subset P$

⑤ $Q=\{x|x>-1\}$이므로 $\quad Q\not\subset P$

답 ④

0445 전략 명제가 거짓이면 그 명제의 부정은 참임을 이용한다.

풀이 주어진 명제가 거짓이 되려면 그 부정이 참이어야 한다.

이때 주어진 명제의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $2x^2+6x+a<0$이다.'

이차방정식 $2x^2+6x+a=0$의 판별식을 D라 할 때, 위의 명제가 참이 되려면

$$\frac{D}{4}=3^2-2\cdot a>0 \qquad \therefore a<\frac{9}{2}$$

따라서 정수 a의 최댓값은 4이다.

답 ③

라쎈 특강

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$이다.'가

① 참이려면

○ 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 해를 갖는다.

○ $a>0$ 또는 $a<0$, $D>0$

② 거짓이려면

○ 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 해를 갖지 않는다.

○ 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\le0$이 성립한다.

○ $a<0$, $D\le0$

(2) 명제 '모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$이다.'가

① 참이려면

○ 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립한다.

○ $a>0$, $D<0$

② 거짓이려면

○ 이차부등식 $ax^2+bx+c\le0$이 해를 갖는다.

○ $a<0$ 또는 $a>0$, $D\ge0$

0446 전략 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용하여 대우의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ① [반례] $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$이면 x, y는 모두 무리수이지만 xy는 유리수이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

역: xy가 무리수이면 x, y가 모두 무리수이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=\sqrt{2}$이면 xy는 무리수이지만 x는 무리수가 아니다.

② 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

역: $x=0$ 또는 $x=2$이면 $x^2=2x$이다. (참)

③ [반례] $x=0$, $y=0$이면 $|xy|=xy$이지만 x, y가 양수가 아니다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

역: x, y가 모두 양수이면 $|xy|=xy$이다. (참)

④ 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

역: $x+y>2$이면 $x>1$, $y>1$이다. (거짓)

[반례] $x=4$, $y=-1$이면 $x+y>2$이지만 $y<1$이다.

⑤ [반례] $x=2$, $y=1$이면 xy가 짝수이지만 x^2+y^2은 홀수이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

역: x, y가 자연수일 때, x^2+y^2이 짝수이면 xy는 짝수이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=1$이면 x^2+y^2이 짝수이지만 xy는 홀수이다.

답 ④

0447 전략 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용한다.

풀이 주어진 명제가 참이 되려면 그 대우

'$x=a$이면 $x^2\le6$이다.'

가 참이어야 한다.

$x=a$를 $x^2\le6$에 대입하면

$a^2\le6 \qquad \therefore -\sqrt{6}\le a\le\sqrt{6}$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다. 답 5

0448 전략 삼단논법을 이용하여 진리집합 사이의 포함 관계를 파악한다.

풀이 ㄱ. 두 명제 $r \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim p$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $r \longrightarrow \sim p$가 참이다.

$\therefore R \subset P^C$

ㄴ. 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우인 $p \longrightarrow \sim q$도 참이다.
따라서 $P \subset Q^C$이므로

$P \cap Q^C = P$

ㄷ. 명제 $r \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우인 $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.
따라서 $P \subset R^C$이므로

$P - R^C = \varnothing$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0449 전략 명제가 참이면 그 대우도 참인 것과 삼단논법을 이용하여 항상 참인 명제를 찾는다.

풀이 네 조건 p, q, r, s를

p: 독서를 좋아한다., q: 글쓰기를 좋아한다.,

r: 논리적이다., s: 그림 그리기를 좋아한다.

로 놓으면 (가), (나), (다)에서 각각 명제

$p \longrightarrow q$, $\sim p \longrightarrow \sim r$, $\sim q \longrightarrow s$

가 참이다.

④ 명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우인 $r \longrightarrow p$도 참이다.
이때 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $r \longrightarrow q$가 참이다. 즉 '논리적인 학생은 글쓰기를 좋아한다.'는 항상 참이다. 답 ④

참고 주어진 명제를 각각 네 조건 p, q, r, s로 나타내면 다음과 같다.

① $p \longrightarrow r$ ② $s \longrightarrow q$ ③ $s \longrightarrow \sim r$
④ $r \longrightarrow q$ ⑤ $\sim r \longrightarrow \sim p$

0450 전략 $p \Longleftrightarrow q$인 것을 찾는다.

풀이 ㄱ. $|x|=|y|$이면 $|x|^2=|y|^2$이므로 $x^2=y^2$
또 $x^2=y^2$이면 $x=y$ 또는 $x=-y$이므로 $|x|=|y|$
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. $x^2+y^2 \le 0$이면 $x=0$이고 $y=0$
$xy=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. $x^2>y^2$에서 $x^2-y^2>0$

$\therefore (x+y)(x-y)>0$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

이상에서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0451 전략 두 조건 p, q가 나타내는 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 이용하여 $p \Longrightarrow q$이지만 $q \not\Longrightarrow p$인 것을 찾는다.

풀이 ① $A \cup B=B$에서 $A \subset B$
$A-B=\varnothing$에서 $A \subset B$
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

② $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

③ $A-B^C=B$에서 $A \cap (B^C)^C=B$
$A \cap B=B$ $\therefore B \subset A$
$A^C \subset B^C$에서 $B \subset A$
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

④ $A-B=A$에서 $A \cap B=\varnothing$
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

⑤ $A=U-B$에서 $A=B^C$
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

답 ④

0452 전략 삼단논법을 이용한다.

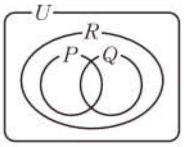
풀이 p가 q이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow q$
r가 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow r$
ㄷ. 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다.
이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0453 전략 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타낸다.

풀이 r는 'p 또는 q'이기 위한 필요조건이므로

$(P \cup Q) \subset R$

이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



③ $P^C \cap Q = Q-P \neq \varnothing$

답 ③

0454 전략 $\sim q \Longrightarrow p$일 때 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$2x-a \le 0$에서 $x \le \frac{a}{2}$

$\therefore P=\left\{x \middle| x \le \frac{a}{2}\right\}$

$x^2-5x+4>0$에서 $(x-1)(x-4)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>4$

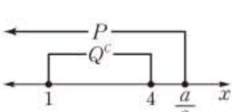
즉 $Q=\{x|x<1$ 또는 $x>4\}$이므로

$Q^C=\{x|1 \le x \le 4\}$

이때 p가 $\sim q$이기 위한 필요조건이므로

$\sim q \Longrightarrow p$

따라서 $Q^C \subset P$이므로 오른쪽 그림에서



$\frac{a}{2} \ge 4$ $\therefore a \ge 8$

즉 실수 a의 최솟값은 8이다.

답 8

0455 전략 결론을 부정하여 모순이 생김을 보인다.

풀이 $a \neq 0$이라 가정하면 $a\sqrt{3}+b=0$에서

$a\sqrt{3}=-b$ $\therefore \sqrt{3}=\boxed{-\frac{b}{a}}$

이때 a, b가 유리수이므로 $\boxed{-\dfrac{b}{a}}$, 즉 $\sqrt{3}$은 유리수이다.

그런데 이것은 $\sqrt{3}$이 $\boxed{\text{무리수}}$라는 사실에 모순이므로 $\boxed{a=0}$이다.

또한 $a\sqrt{3}+b=0$에 $\boxed{a=0}$을 대입하면 $b=0$이므로 $a\sqrt{3}+b=0$이면 $a=b=0$이다.

$\therefore$ (가) $-\dfrac{b}{a}$ (나) 무리수 (다) $a=0$ 답 ④

0456 전략• $a-b\geq 0$이면 $a\geq b$임을 이용한다.

•풀이 $A-B=(x^2+y^2)-(x^2y^2+1)$

$=x^2+y^2-x^2y^2-1$

$=x^2(1-y^2)-(1-y^2)$

$=(x^2-1)(1-y^2)$

이때 $-1\leq x\leq 1$, $-1\leq y\leq 1$이므로

$x^2-1\leq 0$, $1-y^2\geq 0$ — $0\leq x^2\leq 1$, $0\leq y^2\leq 1$이므로 $x^2-1\leq 0$, $1-y^2\geq 0$

$\therefore (x^2-1)(1-y^2)\leq 0$

즉 $A-B\leq 0$이므로

$A\leq B$ (단, 등호는 $|x|=1$ 또는 $|y|=1$일 때 성립)

— $x^2-1=0$ 또는 $1-y^2=0$에서 $|x|=1$ 또는 $|y|=1$

답 ④

0457 전략• 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

•풀이 $x^2>0$, $9y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+9y^2\geq 2\sqrt{x^2\cdot 9y^2}$

$=2\cdot|3xy|=6|xy|$

이때 $x^2+9y^2=36$이므로

$36\geq 6|xy|$, $|xy|\leq 6$

$\therefore -6\leq xy<0$ 또는 $0<xy\leq 6$

(단, 등호는 $|x|=3|y|$일 때 성립)

따라서 xy의 최댓값은 6, 최솟값은 -6이므로 구하는 곱은

$6\cdot(-6)=-36$ 답 -36

0458 전략• 꽃밭의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하고 x, y 사이의 관계식을 구한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

•풀이 꽃밭의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면 넓이가 400이므로 $xy=400$

울타리의 길이는 $2x+2y-10$이고 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+2y-10\geq 2\sqrt{2x\cdot 2y}-10$

$=4\sqrt{xy}-10$

이때 $xy=400$이므로

$2x+2y-10\geq 4\cdot 20-10$

$=70$ (단, 등호는 $x=y=20$일 때 성립)

— $2x=2y$, $xy=400$에서 $x=y=20$

따라서 울타리의 길이의 최솟값은 70이다. 답 ①

0459 전략• $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a+\dfrac{4}{a}\right)$를 전개한 후, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

•풀이 $a\neq 0$이므로 $a^2>0$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a+\dfrac{4}{a}\right)=a^2+4+1+\dfrac{4}{a^2}=5+a^2+\dfrac{4}{a^2}$

$\geq 5+2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{4}{a^2}}$

$=5+2\cdot 2$

$=9$ (단, 등호는 $a^2=2$일 때 성립)

따라서 $k\leq 9$이므로 k의 최댓값은 9이다. — $a^2=\dfrac{4}{a^2}$에서 $a^2=2$

답 ②

0460 전략• 두 조건 p, q의 진리집합을 이용하여 조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합을 구한다.

•풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$x^2-9x+8\leq 0$에서 $(x-1)(x-8)\leq 0$

$\therefore 1\leq x\leq 8$

$\therefore P=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ⋯ ❶

또 $x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

즉 $Q=\{1, 3\}$이므로

$Q^C=\{x\,|\,x$는 $x\neq 1$이고 $x\neq 3$인 정수$\}$ ⋯ ❷

따라서 조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합은

$P\cap Q^C=\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ⋯ ❸

— 집합 P에서 1, 3을 제외

이므로 모든 원소의 합은

$2+4+5+6+7+8=32$ ⋯ ❹

답 32

채점 기준	비율
❶ 조건 p의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건 $\sim q$의 진리집합을 구할 수 있다.	40 %
❸ 조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합을 구할 수 있다.	20 %
❹ 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

0461 전략• 역의 가정과 결론을 각각 수직선 위에 나타낸다.

•풀이 주어진 명제의 역은

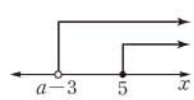
'$x\geq 5$이면 $x+3>a$이다.' ⋯ ❶

$x+3>a$에서 $x>a-3$

따라서 주어진 명제의 역이 참이려면

$\{x\,|\,x\geq 5\}\subset\{x\,|\,x>a-3\}$이어야 하므로

오른쪽 그림에서



$a-3<5$

$\therefore a<8$ ⋯ ❷

답 $a<8$

채점 기준	비율
❶ 명제의 역을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %

0462 전략• $p \Longleftrightarrow q$이므로 $x^2+ax+b\leq 0$의 해가 $|x-2|\leq 3$의 해임을 이용한다.

•풀이 p는 q이기 위한 필요충분조건이므로 두 명제

'$|x-2|\leq 3$이면 $x^2+ax+b\leq 0$이다.',

'$x^2+ax+b\leq 0$이면 $|x-2|\leq 3$이다.'

가 모두 참이다.

$|x-2|\le 3$에서 $\quad -3\le x-2\le 3$

$\therefore -1\le x\le 5$

따라서 부등식 $x^2+ax+b\le 0$의 해가 $-1\le x\le 5$이다. ⋯ ❶

이때 x^2의 계수가 1이고 해가 $-1\le x\le 5$인 이차부등식은

$(x+1)(x-5)\le 0$, 즉 $x^2-4x-5\le 0$

이므로

$a=-4$, $b=-5$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=-9$ ⋯ ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ 부등식 $x^2+ax+b\le 0$의 해가 $-1\le x\le 5$임을 알 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0463 전략 두 자연수 m, n에 대하여 $A_m\subset A_n$이면 n은 m의 배수이고 m은 n의 약수임을 이용한다.

풀이 p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 명제

'$x\in A_8$이면 $x\in A_k$'

가 참이어야 하므로 $\quad A_8\subset A_k$

이때 k는 8의 배수이어야 하므로 자연수 k의 최솟값은

$a=16$ — 8의 배수 중 8을 제외한 가장 작은 수 ⋯ ❶

p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 명제

'$x\in A_k$이면 $x\in A_8$'

이 참이어야 하므로 $\quad A_k\subset A_8$

이때 k는 8의 약수이어야 하므로 자연수 k의 최댓값은

$b=4$ — 8의 약수 중 8을 제외한 가장 큰 수 ⋯ ❷

$\therefore a+b=20$ ⋯ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 $A_8=\{1, 2, 4, 8\}$

$k=16$일 때, $A_k=\{1, 2, 4, 8, 16\}$이므로 $\quad A_8\subset A_k$

$k=4$일 때, $A_k=\{1, 2, 4\}$이므로 $\quad A_k\subset A_8$

0464 전략 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

풀이 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}(x^2+y^2)\ge\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)^2$$ ⋯ ❶

이때 $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=\sqrt{34}$이므로

$\frac{34}{225}(x^2+y^2)\ge 34$

$\therefore x^2+y^2\ge 225$ (단, 등호는 $3x=5y$일 때 성립)

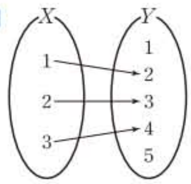
따라서 x^2+y^2의 최솟값은 225이다. ⋯ ❷

답 225

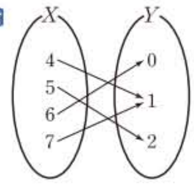
채점 기준	비율
❶ 코시-슈바르츠 부등식을 이용하여 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ x^2+y^2의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

04 함수

0465 답



0466 답



0467 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 f는 함수이다.

이때 정의역은 $\{1, 2, 3\}$, 공역은 $\{4, 5, 6\}$, 치역은 $\underbrace{\{4, 5, 6\}}_{f(1)=5,\ f(2)=4,\ f(3)=6}$ 이다.

답 풀이 참조

0468 X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 f는 함수가 아니다. 답 함수가 아니다.

0469 X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 4, 5의 2개이므로 f는 함수가 아니다.

답 함수가 아니다.

0470 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 f는 함수이다.

이때 정의역은 $\{1, 2, 3\}$, 공역은 $\{4, 5, 6\}$, 치역은 $\{5\}$이다.

답 풀이 참조

0471 $x=-2$일 때, $\quad y=(-2)-6=-8$

$x=-1$일 때, $\quad y=(-1)-6=-7$

$x=0$일 때, $\quad y=0-6=-6$

$x=1$일 때, $\quad y=1-6=-5$

$x=2$일 때, $\quad y=2-6=-4$

따라서 치역은 $\{-8, -7, -6, -5, -4\}$이다.

답 $\{-8, -7, -6, -5, -4\}$

0472 $x=-2$일 때, $\quad y=-2\cdot(-2)+7=11$

$x=-1$일 때, $\quad y=-2\cdot(-1)+7=9$

$x=0$일 때, $\quad y=-2\cdot 0+7=7$

$x=1$일 때, $\quad y=-2\cdot 1+7=5$

$x=2$일 때, $\quad y=-2\cdot 2+7=3$

따라서 치역은 $\{3, 5, 7, 9, 11\}$이다.

답 $\{3, 5, 7, 9, 11\}$

0473 $x=-2$일 때, $y=(-2)^2-4=0$
$x=-1$일 때, $y=(-1)^2-4=-3$
$x=0$일 때, $y=0^2-4=-4$
$x=1$일 때, $y=1^2-4=-3$
$x=2$일 때, $y=2^2-4=0$
따라서 치역은 $\{-4, -3, 0\}$이다. 답 $\{-4, -3, 0\}$

0474 $x=-2$일 때, $y=\{-(-2)\}^3=8$
$x=-1$일 때, $y=\{-(-1)\}^3=1$
$x=0$일 때, $y=0^3=0$
$x=1$일 때, $y=(-1)^3=-1$
$x=2$일 때, $y=(-2)^3=-8$
따라서 치역은 $\{-8, -1, 0, 1, 8\}$이다.
답 $\{-8, -1, 0, 1, 8\}$

0475 답 정의역: $\{x|x$는 실수$\}$, 치역: $\{y|y$는 실수$\}$

0476 답 정의역: $\{x|x\neq0$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq0$인 실수$\}$

0477 답 정의역: $\{x|x$는 실수$\}$, 치역: $\{y|y\geq2$인 실수$\}$

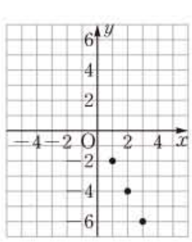
0478 답 정의역: $\{x|x$는 실수$\}$, 치역: $\{y|y\geq0$인 실수$\}$

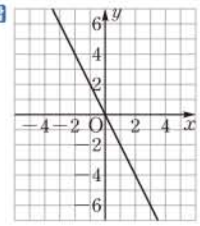
0479 $f(-1)=g(-1)=2$, $f(0)=g(0)=1$, $f(1)=g(1)=2$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같다.
답 서로 같은 함수이다.

0480 $f(-1)=-2$, $g(-1)=0$이므로
$f(-1)\neq g(-1)$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같지 않다.
답 서로 같은 함수가 아니다.

0481 $f(-1)=g(-1)=-3$, $f(0)=g(0)=0$,
$f(1)=g(1)=3$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같다.
답 서로 같은 함수이다.

0482 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 정의역과 공역은 실수 전체의 집합이고 모든 실수 x에 대하여
$$f(x)=g(x)=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.
답 서로 같은 함수이다.

0483 답


0484 답


0485 답 ×

0486 답 ○

0487 답 ○

0488 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

0489 답 ㄴ, ㄷ

0490 답 ㄷ

0491 답 ㄱ

0492 답 ㄱ, ㄴ

0493 ㄹ. $f(x)=x^2$이라 하면 $f(-1)=1$, $f(1)=1$이므로
$y=f(x)$는 일대일함수가 아니다.
답 ㄱ, ㄷ

0494 답 ㄱ, ㄷ

0495 답 ㄱ

0496 답 ㄴ

0497 $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(b)=4$ 답 4

0498 $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(a)=3$ 답 3

0499 $(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(3)=a$ 답 a

0500 $(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(4)=d$ 답 d

0501 $(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(1)=-1$ 답 -1

0502 $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=3$ 답 3

0503 $(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(5)=7$ 답 7

0504 $(g\circ g)(1)=g(g(1))=g(-1)=-1$ 답 -1

0505 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)$
$=-5\cdot2x+1=-10x+1$
답 $(g\circ f)(x)=-10x+1$

0506 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-5x+1)$
$=2(-5x+1)=-10x+2$
답 $(f\circ g)(x)=-10x+2$

0507 $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(-5x+1)$

$$=-5(-5x+1)+1=25x-4$$

답 $(g\circ g)(x)=25x-4$

0508 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+1)$

$$=(3x+1)^2-5$$
$$=9x^2+6x-4$$

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-5)$

$$=3(x^2-5)+1=3x^2-14$$

(3) $g\circ f\neq f\circ g$

답 풀이 참조

0509 (1) $(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(x^3+1)$

$$=\frac{1}{2}(x^3+1)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}$$

이므로

$$((h\circ f)\circ g)(x)=(h\circ f)(g(x))=(h\circ f)(x^2)$$
$$=\frac{1}{2}(x^2)^3+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}$$

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=(x^2)^3+1=x^6+1$이므로

$$(h\circ(f\circ g))(x)=h((f\circ g)(x))=h(x^6+1)$$
$$=\frac{1}{2}(x^6+1)=\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}$$

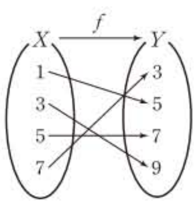
(3) $(h\circ f)\circ g=h\circ(f\circ g)$

답 풀이 참조

0510 함수 f가 일대일대응이어야 하므로

$f(7)=3$

따라서 대응 관계를 완성하면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $f(3)=9$, $f^{-1}(3)=7$이므로

$f(3)+f^{-1}(3)=16$

답 풀이 참조

0511 답 3

0512 답 2

0513 답 4

0514 $(f^{-1})^{-1}(3)=f(3)=5$

답 5

0515 답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

일대일대응, $\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

참고 역함수를 구하기 전에 주어진 함수가 일대일대응인지를 먼저 확인해야 한다.

0516 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=-4x+8$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$4x=-y+8 \quad \therefore x=-\frac{1}{4}y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\frac{1}{4}x+2$

답 $y=-\frac{1}{4}x+2$

0517 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{1}{3}x-2$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

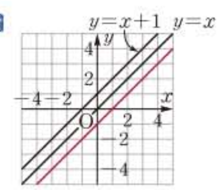
$\frac{1}{3}x=y+2 \quad \therefore x=3y+6$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

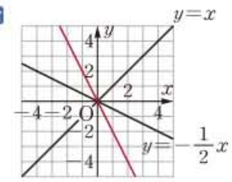
$y=3x+6$

답 $y=3x+6$

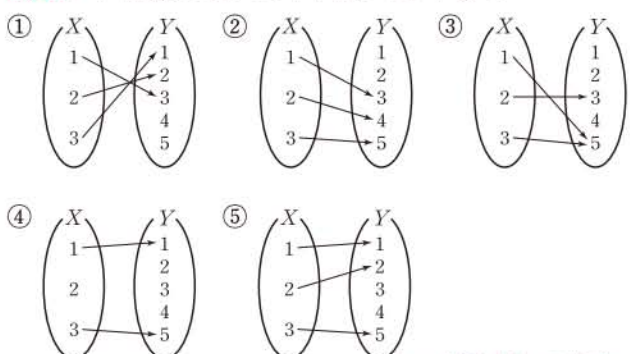
0518 답



0519 답



0520 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



집합 X의 원소 2에 대응하는 집합 Y의 원소가 없다.

따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ④이다.

답 ④

0521 ㄱ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$가 그래프와 만나지 않거나 두 개 이상의 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.

ㄴ, ㄷ, ㄹ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$가 그래프와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

이상에서 함수의 그래프는 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

0522 ① $1\le x\le 3$에서 $\quad 2\le x+1\le 4$

$\therefore 2\le y\le 4$

② $1\le x\le 3$에서 $\quad 1\le x^2\le 9$

$\therefore 1\le y\le 9$

04 함수

③ $1\le x\le 3$에서　$-3\le -x\le -1$

$\therefore -4\le -x-1\le -2$

$\therefore -4\le y\le -2$

④ $1\le x\le 3$에서　$1\le |x|\le 3$

$\therefore 0\le |x|-1\le 2$

$\therefore 0\le y\le 2$

⑤ $1\le x\le 3$에서　$1\le x^3\le 27$

$\therefore -9\le -\frac{1}{3}x^3\le -\frac{1}{3}$

$\therefore -9\le y\le -\frac{1}{3}$

따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ④이다. 　답 ④

0523 $\sqrt{3}-1>0$이므로

$f(\sqrt{3}-1)=2(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}-2$

$\sqrt{3}-2<0$이므로

$f(\sqrt{3}-2)=\sqrt{3}-2$

$\therefore f(\sqrt{3}-1)-f(\sqrt{3}-2)=2\sqrt{3}-2-(\sqrt{3}-2)$

$=\sqrt{3}$ 　답 ③

0524 $\frac{x-1}{2}=-2$에서

$x-1=-4$　$\therefore x=-3$

$x=-3$을 $f\left(\frac{x-1}{2}\right)=3x-2$에 대입하면

$f(-2)=3\cdot(-3)-2=-11$ 　답 -11

다른 풀이 $\frac{x-1}{2}=t$로 놓으면　$x=2t+1$

$\therefore f(t)=3(2t+1)-2=6t+1$

따라서 $f(x)=6x+1$이므로

$f(-2)=6\cdot(-2)+1=-11$

0525 $f(3)=3+1=4$

$f(21)=f(16)=f(11)=f(6)=f(1)=2$

$\therefore f(3)+f(21)=4+2=6$ 　답 ③

0526 $f(\sqrt{7})=2\sqrt{7}-[\sqrt{7}]=2\sqrt{7}-2$ ⋯ ❶

$f(3-\sqrt{7})=2(3-\sqrt{7})-[3-\sqrt{7}]$

$=6-2\sqrt{7}-0$

$2<\sqrt{7}<3$이므로 $0<3-\sqrt{7}<1$　$\therefore [3-\sqrt{7}]=0$

$=6-2\sqrt{7}$ ⋯ ❷

$\therefore f(\sqrt{7})+f(3-\sqrt{7})=(2\sqrt{7}-2)+(6-2\sqrt{7})$

$=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $f(\sqrt{7})$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(3-\sqrt{7})$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(\sqrt{7})+f(3-\sqrt{7})$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0527 $-10\le x\le 8$에서　$-12\le x-2\le 6$

$-4\le \frac{x-2}{3}\le 2$　$\therefore -2\le -\frac{x-2}{3}\le 4$

$\therefore -2\le y\le 4$

따라서 함수 $y=-\frac{x-2}{3}$의 치역이 $\{y\,|\,-2\le y\le 4\}$이므로

$a=-2,\ b=4$　$\therefore a+b=2$ 　답 2

0528 치역이 $\{-3, -1, 5, 9\}$이므로

$y=-3$일 때,　$-3=-\frac{8}{x}+1$

$-4=-\frac{8}{x}$　$\therefore x=2$

$y=-1$일 때,　$-1=-\frac{8}{x}+1$

$-2=-\frac{8}{x}$　$\therefore x=4$

$y=5$일 때,　$5=-\frac{8}{x}+1$

$4=-\frac{8}{x}$　$\therefore x=-2$

$y=9$일 때,　$9=-\frac{8}{x}+1$

$8=-\frac{8}{x}$　$\therefore x=-1$

따라서 정의역의 원소가 아닌 것은 ③이다. 　답 ③

0529 정의역이 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$이므로

$f(1)=10-1=9,\ f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2+1=2,$

$f(3)=10-3=7,\ f(4)=\frac{1}{2}\cdot 4+1=3,$

$f(5)=10-5=5,\ f(6)=\frac{1}{2}\cdot 6+1=4,$

$f(7)=10-7=3,\ f(8)=\frac{1}{2}\cdot 8+1=5,$

$f(9)=10-9=1$

따라서 치역이 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$이므로 원소의 개수는 7이다.

답 7

0530 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$이므로

$f(-1)=a-1,\ f(0)=0,\ f(1)=a+1$ ⋯ ❶

치역의 모든 원소의 합이 4이므로

$(a-1)+0+(a+1)=4$

$2a=4$　$\therefore a=2$ ⋯ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ 치역의 원소를 구할 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 $a-1,\ 0,\ a+1$ 중에서 같은 원소가 있으면 $a=-1$ 또는 $a=1$이다. 이때 $a=-1$이면 모든 원소의 합이 -2이고 $a=1$이면 모든 원소의 합이 2이므로 주어진 조건에 모순이다.

따라서 $a-1,\ 0,\ a+1$은 모두 다른 원소이다.

0531 $f(0)=g(0)$에서　$b=2$

$f(1)=g(1)$에서　$a+2=1-2+b$

$\therefore a-b=-3$

$b=2$를 위의 식에 대입하면　$a=-1$

$\therefore ab=-2$ 　답 ①

0532 $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(2)=2$

ㄱ. $g(0)=0,\ g(1)=1,\ g(2)=2$이므로

$f=g$

ㄴ. $h(0)=0,\ h(1)=1,\ h(2)=2$이므로

$f=h$

ㄷ. $k(2)=4$이므로 $\quad f\neq k$

이상에서 함수 f와 서로 같은 함수는 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0533 $f(-2)=g(-2)$에서 $\quad 0=a+b \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(-1)=g(-1)$에서 $\quad b=-2$

$b=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad a=2$

$\therefore a-b=4$ 답 4

참고 $g(x)=2|x+1|-2$이므로 $\quad f(0)=g(0)=0$

0534 $f(x)=g(x)$에서

$x^2=x+2,\quad x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ ⋯ ❶

따라서 집합 X는 공집합이 아닌 집합 $\{-1,\ 2\}$의 부분집합이어야 하므로

$\{-1\},\ \{2\},\ \{-1,\ 2\}$ ⋯ ❷

답 $\{-1\},\ \{2\},\ \{-1,\ 2\}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)=g(x)$가 되는 x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 집합 X를 모두 구할 수 있다.	50 %

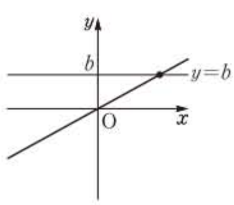
0535 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나는 그래프는 ㄱ, ㄹ이다.

따라서 일대일함수의 그래프는 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

라쎈 특강

일대일함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 치역의 각 원소 b에 대하여 y축에 수직인 직선 $y=b$와 오직 한 점에서 만난다.

또한 그래프가 오른쪽 그림과 같은 함수는 치역과 공역이 같으므로 일대일함수이면서 일대일대응이다.



0536 ① 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

② 양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.

그런데 치역과 공역이 같지 않으므로 일대일대응이 아니다. $\{y|y>0\}$

③ 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

④, ⑤ 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 만나지 않거나 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

답 ②

0537 $f(-1)+f(0)=4$이고 f는 일대일대응이므로

$f(-1)=1,\ f(0)=3$ 또는 $f(-1)=3,\ f(0)=1$

(i) $f(-1)=1$이면 $f(-1)+f(1)=5$에서

$1+f(1)=5 \quad \therefore f(1)=4$

$4\notin Y$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(-1)=3$이면 $f(-1)+f(1)=5$에서

$3+f(1)=5 \quad \therefore f(1)=2$ ⋯ ❶

(i), (ii)에서

$f(-1)=3,\ f(0)=1,\ f(1)=2$ ⋯ ❷

$\therefore 2f(1)-f(0)=2\cdot2-1=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(-1)$의 값에 따라 경우를 나누어 조건을 만족시키는지 확인할 수 있다.	60 %
❷ $f(-1),\ f(0),\ f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $2f(1)-f(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0538 $a>0$이고 함수 f가 일대일대응이므로

$f(-1)=-2,\ f(2)=7$

$-a+b=-2,\ 2a+b=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

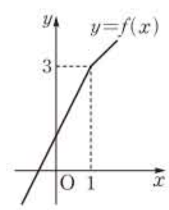
$a=3,\ b=1$

$\therefore a+b=4$ 답 4

0539 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 직선 $y=2x+a$가 점 $(1,\ 3)$을 지나야 하므로

$3=2+a \quad \therefore a=1$



답 ①

0540 $f(x)=x^2-4x+8=(x-2)^2+4$

$x\geq a$에서 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가하려면

$a\geq2$

함수 f가 일대일대응이므로 $\quad f(a)=4$

$(a-2)^2+4=4,\quad (a-2)^2=0$

$\therefore a=2$ 답 ①

0541 함수 $f(x)=ax+b$는 일대일함수이고, 공역과 치역이 서로 같으므로 일대일대응이다. ⋯ ❶

(i) $a>0$인 경우

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로

$f(0)=0,\ f(3)=3$

$f(0)=0$에서 $\quad b=0$

$f(3)=3$에서 $\quad 3a+b=3$

$b=0$을 위의 식에 대입하면 $\quad a=1$

이때 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다. ⋯ ❷

(ii) $a<0$인 경우

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로

$f(0)=3,\ f(3)=0$

$f(0)=3$에서 $\quad b=3$

$f(3)=0$에서 $\quad 3a+b=0$

$b=3$을 위의 식에 대입하면 $\quad a=-1$

$\therefore\ ab=-3$ ··· ❸

(i), (ii)에서 $\quad ab=-3$ ··· ❹

답 -3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 일대일대응임을 알 수 있다.	10 %
❷ $a>0$일 때, ab의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a<0$일 때, ab의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0542 ㄱ. $f(3)=|3|=3,\ f(5)=|5|=5,\ f(7)=|7|=7$

따라서 함수 $f(x)$는 항등함수이다.

ㄴ. 3, 5, 7은 모두 소수이므로 양의 약수의 개수는 각각 2이다.

$\therefore\ g(3)=2,\ g(5)=2,\ g(7)=2$

따라서 함수 $g(x)$는 상수함수이다.

ㄷ. 3, 5, 7을 각각 10으로 나눈 나머지는 3, 5, 7이므로

$h(3)=3,\ h(5)=5,\ h(7)=7$

따라서 함수 $h(x)$는 항등함수이다.

ㄹ. $i(3)=0,\ i(5)=1,\ i(7)=1$

따라서 $i(x)$는 항등함수도 아니고 상수함수도 아니다.

이상에서 항등함수는 ㄱ, ㄷ의 2개이고 상수함수는 ㄴ의 1개이므로

$a=2,\ b=1 \quad \therefore\ ab=2$

답 2

0543 함수 f가 상수함수이므로

$f(1)=f(2)=\cdots=f(10)=f(100)=3$

$\therefore\ f(1)+f(2)+\cdots+f(10)=3\cdot 10=30$

답 ③

0544 함수 f가 항등함수이므로

$f(1)=1,\ f(5)=5$ ··· ❶

$f(5)=g(5)$에서 $\quad g(5)=5$

이때 함수 g가 상수함수이므로 $\quad g(2)=5$ ··· ❷

$\therefore\ f(1)+g(2)=1+5=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(1),\ f(5)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(1)+g(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0545 $f(x)$가 항등함수이므로

$f(a)=a,\ f(b)=b$ ··· ❶

$a^2-6=a$에서 $\quad a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0 \quad \therefore\ a=-2$ 또는 $a=3$

같은 방법으로 $\quad b=-2$ 또는 $b=3$

이때 $a\neq b$이므로

$a=-2,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=-2$ ··· ❷

$\therefore\ a^2+b^2=(-2)^2+3^2=13$ ··· ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ $f(a)=a,\ f(b)=b$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

0546 X에서 X로의 함수의 개수는 $\quad 3^3=27$

X에서 X로의 일대일대응의 개수는 $\quad 3\cdot 2\cdot 1=6$

X에서 X로의 상수함수의 개수는 $\quad 3$

따라서 $p=27,\ q=6,\ r=3$이므로

$p+q+r=36$

답 ③

0547 $f(1)=a,\ f(2)=c$이고 함수 f는 일대일대응이므로

$f(3)=b,\ f(4)=d$ 또는 $f(3)=d,\ f(4)=b$ ··· ❶

따라서 함수 f의 개수는 2이다. ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(3),\ f(4)$의 값을 구할 수 있다.	80 %
❷ 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0548 함수 f는 일대일함수이므로 구하는 함수 f의 개수는

$5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$

답 ⑤

0549 $f(-10)=\frac{1}{2}\cdot(-10)+3=-2$이므로

$(g\circ f)(-10)=g(f(-10))=g(-2)$

$=-2\cdot(-2)+10=14$

$g(4)=4^2-2=14$이므로

$(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(14)$

$=\frac{1}{2}\cdot 14+3=10$

$\therefore\ (g\circ f)(-10)+(f\circ g)(4)=14+10=24$

답 24

0550 $f(1)=3$이므로

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=2$

$(f\circ f\circ f)(1)=f((f\circ f)(1))=f(2)=1$

$\therefore\ (f\circ f)(1)-(f\circ f\circ f)(1)=2-1=1$

답 ④

0551 $h(-1)=-5+3=-2$이므로

$(g\circ h)(-1)=g(h(-1))=g(-2)$

$=(-2)^2=4$

$\therefore\ (f\circ(g\circ h))(-1)=f((g\circ h)(-1))=f(4)$

$=-4+4=0$

답 ①

0552 $(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(-a-1)$

$=2(-a-1)-3=-2a-5$

즉 $-2a-5=-3$이므로

$-2a=2 \quad \therefore\ a=-1$ ··· ❶

따라서 $g(x)=-x-1$이므로

$g(4)=-4-1=-5$ ⋯ ❷

답 -5

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $g(4)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0553 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$이므로

$$(h\circ(g\circ f))\left(\frac{1}{2}\right)=((h\circ g)\circ f)\left(\frac{1}{2}\right)=(h\circ g)\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$=(h\circ g)\left(\frac{3}{2}\right)=4\cdot\frac{3}{2}-3$$
$$=3$$

답 ③

라쎈 특강

합성함수의 성질

세 함수 f, g, h에 대하여 $f\circ g$와 h의 함수가 주어지고 $(f\circ(g\circ h))(a)$의 값을 구할 때에는 함수의 합성에서 결합법칙이 성립함을 이용하여 다음과 같이 해결한다.

$$(f\circ(g\circ h))(a)=((f\circ g)\circ h)(a)$$
$$=(f\circ g)(h(a))$$

0554 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=4(4x-8)-8=16x-40$이므로

$(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))=4(16x-40)-8$
$=64x-168$

$(f\circ f\circ f)(a)=24$에서 $64a-168=24$

$64a=192$ $\therefore a=3$

답 ②

다른 풀이 $f(f(f(a)))=24$에서 $f(f(a))=k$라 하면 $f(k)=24$이므로

$4k-8=24,\quad 4k=32\quad \therefore k=8$

$f(f(a))=8$에서 $f(a)=l$이라 하면 $f(l)=8$이므로

$4l-8=8,\quad 4l=16\quad \therefore l=4$

따라서 $f(a)=4$이므로 $4a-8=4$

$4a=12\quad \therefore a=3$

0555 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=a(x+c)+b$
$=ax+ac+b$

따라서 $ax+ac+b=4x+7$이므로

$a=4,\ ac+b=7\quad \therefore a=4,\ b+4c=7$

또 $f(1)=3$이므로

$4+b=3\quad \therefore b=-1$

$b+4c=7$에 $b=-1$을 대입하면

$-1+4c=7,\quad 4c=8$

$\therefore c=2$

$\therefore abc=4\cdot(-1)\cdot 2=-8$

답 -8

0556 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax+b)+b$
$=a^2x+ab+b$

따라서 $a^2x+ab+b=4x-3$이므로

$a^2=4,\ ab+b=-3$

$a^2=4$에서 $a=2\ (\because a>0)$

$ab+b=-3$에 $a=2$를 대입하면

$3b=-3\quad \therefore b=-1$

따라서 $f(x)=2x-1$이므로

$f(2)=2\cdot 2-1=3$

답 ③

0557 $f(x)=ax-1$, $g(x)=3x-4$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-4)=a(3x-4)-1$
$=3ax-4a-1$, ⋯ ❶

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-1)=3(ax-1)-4$
$=3ax-7$ ⋯ ❷

$f\circ g=g\circ f$이므로 $3ax-4a-1=3ax-7$

$-4a-1=-7,\quad 4a=6$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ $(f\circ g)(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $(g\circ f)(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0558 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+a)=(3x+a)^2-16$

$(g\circ f)(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로

$(g\circ f)(2)=(6+a)^2-16=0$

$\therefore \underline{a^2+12a+20=0}$ (판별식)>0이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 20이다.

답 20

라쎈 특강

인수정리

다항식 $P(x)$에 대하여

① $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

② $P(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $\underline{P(\alpha)=0}$이다.
$x-\alpha$는 $P(x)$의 인수이다.

0559 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+2)=a(bx+2)-4$
$=abx+2a-4$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-4)=b(ax-4)+2$
$=abx-4b+2$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $abx+2a-4=abx-4b+2$

$2a-4=-4b+2,\quad 2a+4b=6$

$\therefore a+2b=3$

이때 a, b는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+2b\geq 2\sqrt{2ab}$, 즉 $3\geq 2\sqrt{2ab}$

$\frac{3}{2}\geq\sqrt{2ab},\quad 2ab\leq\frac{9}{4}$

$\therefore ab\leq\frac{9}{8}$ $\left(\text{단, 등호는 } \underline{a=\frac{3}{2},\ b=\frac{3}{4}}\text{일 때 성립}\right)$
$a+2b=3$이고 $a=2b$일 때

따라서 ab의 최댓값은 $\frac{9}{8}$이다.

답 ②

0560 $(g \circ h)(x)=g(h(x))=2h(x)+1$

따라서 $2h(x)+1=2x^2-3$이므로

$2h(x)=2x^2-4 \qquad \therefore h(x)=x^2-2$ 답 ①

0561 $f(2x+7)=4x+4$에서 $2x+7=t$로 놓으면

$2x=t-7 \qquad \therefore x=\dfrac{t-7}{2}$

따라서 $f(t)=4\cdot\dfrac{t-7}{2}+4=2t-10$이므로

$f(x)=2x-10$ 답 $f(x)=2x-10$

0562 (1) $(h\circ g\circ f)(x)=((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))$
$\qquad =-f(x)+4$ ⋯ ❶

따라서 $-f(x)+4=\dfrac{1}{2}x+1$이므로

$-f(x)=\dfrac{1}{2}x-3 \qquad \therefore f(x)=-\dfrac{1}{2}x+3$ ⋯ ❷

(2) $f(10)=-\dfrac{1}{2}\cdot 10+3=-2$ ⋯ ❸

답 (1) $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+3$ (2) -2

채점 기준	비율
❶ $(h\circ g\circ f)(x)$를 $f(x)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(10)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0563 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{2x+5}{3}\right)$이고

$(f\circ g)(x)=h(x)$이므로

$f\left(\dfrac{2x+5}{3}\right)=4x+8$

$\dfrac{2x+5}{3}=t$로 놓으면

$2x=3t-5 \qquad \therefore x=\dfrac{3t-5}{2}$

따라서 $f(t)=4\cdot\dfrac{3t-5}{2}+8=6t-2$이므로

$f(x)=6x-2$

$\therefore f(1)=6\cdot 1-2=4$

답 4

다른 풀이 $g(a)=1$인 a의 값을 구하면

$\dfrac{2a+5}{3}=1, \qquad 2a+5=3$

$\therefore a=-1$

$(f\circ g)(x)=h(x)$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(g(-1))=h(-1)$이므로

$f(1)=h(-1)=4\cdot(-1)+8=4$

0564 $f(k)=m$이라 하면 $(f\circ f)(k)=2$에서

$f(f(k))=f(m)=2$

이때 주어진 그래프에서 $f(1)=2$이므로

$m=1 \qquad \therefore f(k)=1$

따라서 주어진 그래프에서 $f(0)=1$이므로

$k=0$ 답 0

0565 주어진 그래프에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 식을 구하면 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<1) \\ -2x+4 & (1\le x\le 2)\end{cases},\ g(x)=\begin{cases} 1 & (0\le x<1) \\ 2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

따라서 $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=0$,

$(g\circ f)\left(\dfrac{3}{2}\right)=g\left(f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)=g(1)=2$이므로

$(f\circ g)(1)+(g\circ f)\left(\dfrac{3}{2}\right)=0+2=2$ 답 2

0566 (1) $(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=3$ ⋯ ❶

(2) $f(a)=b$라 하면 $(f\circ f)(a)=4$에서

$f(f(a))=f(b)=4$

이때 주어진 그래프에서 $f(0)=4$이므로 $\qquad b=0$

$\therefore f(a)=0$ ⋯ ❷

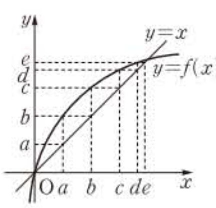
따라서 주어진 그래프에서 $f(4)=0$이므로

$a=4$ ⋯ ❸

답 (1) 3 (2) 4

채점 기준	비율
❶ $(f\circ f)(3)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(a)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0567 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같으므로



$(f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(a)))$
$\qquad =f(f(b))$
$\qquad =f(c)$
$\qquad =d$

답 ④

라쎈 특강

직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 같다. 따라서 합성함수의 함숫값을 구할 때 직선 $y=x$를 이용하여 주어진 그래프 위의 점의 x좌표 또는 y좌표를 구하면 합성함수의 함숫값을 구할 수 있다.

0568 $f^1(x)=f(x)=x-1$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=x-1-1$
$\qquad =x-2$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=x-2-1$
$\qquad =x-3$

$\vdots$

$\therefore f^{10}(x)=x-10$

$\therefore f^{10}(9)=-1$ 답 ②

다른 풀이 $f^1(9)=f(9)=\underbrace{8}_{9-1}$에서

$f^2(9)=f(f(9))=f(8)=\underbrace{7}_{9-2}$

$f^3(9)=f(f^2(9))=f(7)=\underbrace{6}_{9-3}$

$\vdots$

$f^{10}(9)=9-10=-1$

0569 $f^1(x)=f(x)=2x$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=2\cdot 2x=2^2x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=2\cdot 2^2x=2^3x$

$\vdots$

$\therefore f^k(x)=2^kx$

$f^k(2)=2^k\cdot 2=2^{k+1}$이므로 $2^{k+1}=1024=2^{10}$

$k+1=10$ $\therefore k=9$

답 ③

0570 $f^1(1)=f(1)=2$에서

$f^2(1)=f(f(1))=f(2)=3$

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(3)=0$

$f^4(1)=f(f^3(1))=f(0)=1$

$f^5(1)=f(f^4(1))=f(1)=2$

$\vdots$

따라서 $f^n(1)$의 값은 2, 3, 0, 1이 이 순서대로 반복된다. ··· ❶

$\therefore f^{30}(1)=f^{4\cdot 7+2}(1)=f^2(1)=3$ ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $f^n(1)$의 값의 규칙을 찾을 수 있다.	60 %
❷ $f^{30}(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0571 $f^1\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$에서

$f^2\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)=2$

$f^3\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(2)=0$

$f^4\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^3\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(0)=1$

$\vdots$

따라서 $f^n\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은 1, 2, 0이 이 순서대로 반복된다. ··· ❶

$\therefore f^{100}\left(\frac{1}{2}\right)=f^{3\cdot 33+1}\left(\frac{1}{2}\right)=f^1\left(\frac{1}{2}\right)=1$ ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ $f^n\left(\frac{1}{2}\right)$의 값의 규칙을 찾을 수 있다.	60 %
❷ $f^{100}\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0572 $f^{-1}(3)=-1$에서 $f(-1)=3$이므로

$-a+b=3$ ······ ㉠

$f^{-1}(9)=2$에서 $f(2)=9$이므로

$2a+b=9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=5$

$\therefore ab=10$

답 ⑤

0573 $f^{-1}(5)=3$에서 $f(3)=5$이므로

$3\cdot 3+a=5$ $\therefore a=-4$ ··· ❶

따라서 $f(x)=3x-4$이므로

$f(2)=3\cdot 2-4=2$ ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0574 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f(0)=0$이므로 $c=0$

$\therefore f(x)=ax^2+bx$

$f^{-1}(7)=-1$에서 $f(-1)=7$이므로

$a-b=7$ ······ ㉠

$f^{-1}(-5)=1$에서 $f(1)=-5$이므로

$a+b=-5$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-6$

따라서 $f(x)=x^2-6x$이므로

$f(-2)=(-2)^2-6\cdot(-2)=16$

답 ④

0575 $f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$

(i) $k\geq 0$이면

$-k+1=2$ $\therefore k=-1$

이것은 $k\geq 0$을 만족시키지 않는다.

(ii) $k<0$이면

$k^2+1=2,$ $k^2=1$

$\therefore k=-1$ ($\because k<0$)

(i), (ii)에서 $k=-1$이므로

$f^{-1}(2)=-1$

답 -1

0576 $\frac{2x-1}{3}=t$로 놓으면 $2x=3t+1$

$\therefore x=\frac{3t+1}{2}$

따라서 $f(t)=6\cdot\frac{3t+1}{2}-2=9t+1$이므로

$f(x)=9x+1$ ··· ❶

$f^{-1}(28)=k$라 하면 $f(k)=28$이므로

$9k+1=28$ $\therefore k=3$ ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f^{-1}(28)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 $6x-2=28$에서 $6x=30$

$\therefore x=5$

$x=5$를 $f\left(\frac{2x-1}{3}\right)=6x-2$에 대입하면

$f(3)=28$ $\therefore f^{-1}(28)=3$

0577 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.

이때 $f(x)=2x-3$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로

$y=f(x)$의 그래프의 기울기가 양수

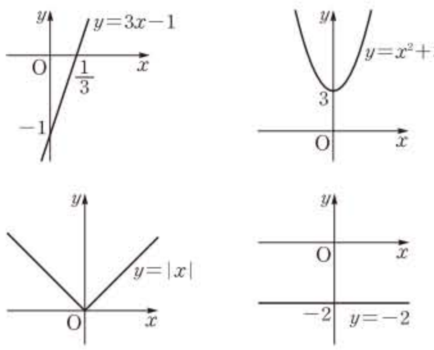
$a=f(1)=2-3=-1,$

$b=f(5)=2\cdot 5-3=7$

$\therefore a+b=6$

답 ①

0578 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.
이때 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 일대일대응인 함수는 $y=3x-1$뿐이므로 역함수가 존재하는 함수의 개수는 1이다. 답 1

0579 함수 f의 역함수가 존재하려면 f는 일대일대응이어야 한다.
즉 $x=1$에서 두 직선 $y=4x+a$, $y=ax+b$가 만나야 하므로

$4+a=a+b \quad \therefore b=4$

또 $x\geq1$에서 $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 양수이므로 $x<1$에서 $y=f(x)$의 그래프의 기울기도 양수이어야 한다.

$\therefore a>0$

따라서 역함수가 존재하도록 하는 실수 a, b의 조건은

$a>0$, $b=4$ 답 ③

0580 $f(x)=2x^2-4x+2=2(x-1)^2$
함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$a\geq1$, $f(a)=a$

$f(a)=a$에서 $2a^2-4a+2=a$이므로

$2a^2-5a+2=0, \quad (2a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=2 \ (\because a\geq1)$ 답 2

0581 $y=3x+a$로 놓으면

$3x=y-a \quad \therefore x=\frac{1}{3}y-\frac{a}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{3}x-\frac{a}{3}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{a}{3}$이므로

$\frac{1}{3}=b, \ -\frac{a}{3}=2 \quad \therefore a=-6, \ b=\frac{1}{3}$

$\therefore ab=-2$ 답 ①

0582 $y=2x+5$로 놓으면

$2x=y-5 \quad \therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ ⋯ ❶

직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$의 x절편이 5, y절편이 $-\frac{5}{2}$이므로

$a=5, \ b=-\frac{5}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=\frac{15}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{15}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

다른 풀이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편이 a, y절편이 b이므로

$f^{-1}(a)=0, \ f^{-1}(0)=b$

따라서 $f(0)=a$, $f(b)=0$이므로

$a=f(0)=5, \ f(b)=2b+5=0$

$\therefore a=5, \ b=-\frac{5}{2} \qquad \therefore a-b=\frac{15}{2}$

0583 ㄱ. $y=x-1$로 놓으면 $\quad x=y+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=x+1$

즉 $f^{-1}(x)=x+1$이므로 $\quad f\neq f^{-1}$

ㄴ. $y=-x+3$으로 놓으면 $\quad x=-y+3$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-x+3$

즉 $f^{-1}(x)=-x+3$이므로 $\quad f=f^{-1}$

ㄷ. $y=4x$로 놓으면 $\quad x=\frac{1}{4}y$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{x}{4}$

즉 $f^{-1}(x)=\frac{x}{4}$이므로 $\quad f\neq f^{-1}$

이상에서 $f=f^{-1}$를 만족시키는 함수인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

0584 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=3(-x+1)-2=-3x+1$ ⋯ ❶

$y=-3x+1$로 놓으면

$3x=-y+1 \quad \therefore x=-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

$\therefore h^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ ⋯ ❷

답 $h^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $h(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $h^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	50 %

0585 $g(x)=\frac{1}{3}x-1$에서 $y=\frac{1}{3}x-1$로 놓으면

$\frac{1}{3}x=y+1 \quad \therefore x=3y+3$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=3x+3$

따라서 $g^{-1}(x)=3x+3$이므로 $(f\circ g^{-1})(x)=6x+1$에서

$f(3x+3)=6x+1$ …… ㉠

$3x+3=t$로 놓으면 $3x=t-3$

$\therefore x=\dfrac{t-3}{3}$

$x=\dfrac{t-3}{3}$을 ㉠에 대입하면

$f(t)=6\cdot\dfrac{t-3}{3}+1=2t-5$

$\therefore f(x)=2x-5$ 답 $f(x)=2x-5$

0586 $g(-3)=-3+1=-2$이므로

$(f^{-1}\circ g)(-3)=f^{-1}(g(-3))=f^{-1}(-2)$

$f^{-1}(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$이므로

$2k-4=-2,\quad 2k=2$

$\therefore k=1$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(-3)=f^{-1}(-2)=1$ 답 ①

0587 $g(2)=1$이므로 $g^{-1}(1)=2$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1})(1)=f^{-1}(g^{-1}(1))=f^{-1}(2)$

이때 $f(1)=2$이므로 $f^{-1}(2)=1$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1})(1)=f^{-1}(2)=1$ 답 1

0588 $(g^{-1}\circ f)(k)=1$에서

$g^{-1}(f(k))=1\quad \therefore g^{-1}(-k+2)=1$

따라서 $g(1)=-k+2$이므로

$4=-k+2\quad \therefore k=-2$ 답 ②

0589 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)+a$

$=x-2+a$

따라서 $x-2+a=x+7$이므로

$-2+a=7\quad \therefore a=9$

$\therefore f(x)=2x+9$

$f^{-1}(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로

$2k+9=5,\quad 2k=-4$

$\therefore k=-2$

$\therefore (g\circ f^{-1})(5)=g(f^{-1}(5))=g(-2)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(-2)-1=-2$ 답 ①

0590 $f(x)=ax+b$에서 $a>0$이면 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가하고, $f(x)$가 일대일대응이므로

$f(-3)=-5,\ f(5)=11$

$-3a+b=-5,\ 5a+b=11$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$

$\therefore f(x)=2x+1$ ⋯ ❶

$g(x)=cx+d$에서 $c<0$이면 x의 값이 증가할 때 $g(x)$의 값은 감소하고, $g(x)$가 일대일대응이므로

$g(-3)=11,\ g(5)=-5$

$-3c+d=11,\ 5c+d=-5$

앞의 두 식을 연립하여 풀면 $c=-2,\ d=5$

$\therefore g(x)=-2x+5$ ⋯ ❷

한편 $g^{-1}(1)=k$라 하면 $g(k)=1$이므로

$-2k+5=1,\quad -2k=-4\quad \therefore k=2$

따라서 $g^{-1}(1)=2$이므로

$(f\circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))=f(2)=2\cdot2+1=5$ ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $(f\circ g^{-1})(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0591 $(g^{-1}\circ f)^{-1}(9)=(f^{-1}\circ g)(9)=f^{-1}(g(9))$

$=f^{-1}(10)$

$f^{-1}(10)=k$라 하면 $f(k)=10$이므로

$2k-4=10,\quad 2k=14$

$\therefore k=7$

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(9)=f^{-1}(10)=7$ 답 ④

0592 $(f\circ(g\circ f)^{-1})(5)=(\underbrace{f\circ f^{-1}}_{f\circ f^{-1}=I\ (I\text{는 항등함수})}\circ g^{-1})(5)$

$=g^{-1}(5)$

$g^{-1}(5)=k$라 하면 $g(k)=5$이므로

$3k+2=5\quad \therefore k=1$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1})(5)=g^{-1}(5)=1$ 답 1

0593 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f(3)=5$이므로 $3a+b=5$ …… ㉠

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=-7$

따라서 $f(x)=4x-7$이므로 ⋯ ❶

$(f\circ f^{-1}\circ f)(x)=f(x)=4x-7$ ⋯ ❷

답 $(f\circ f^{-1}\circ f)(x)=4x-7$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷ $(f\circ f^{-1}\circ f)(x)$를 구할 수 있다.	30 %

0594 $(g\circ f)^{-1}(0)+(f^{-1}\circ g^{-1})(0)$

$=(f^{-1}\circ g^{-1})(0)+(f^{-1}\circ g^{-1})(0)$

$=2(f^{-1}\circ g^{-1})(0)=2f^{-1}(g^{-1}(0))$

$g^{-1}(0)=a$라 하면 $g(a)=0$이므로

$a+3=0\quad \therefore a=-3$

$f^{-1}(-3)=b$라 하면 $f(b)=-3$이므로

$2b-7=-3,\quad 2b=4$

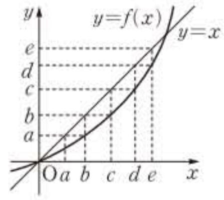
$\therefore b=2$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(0)+(f^{-1}\circ g^{-1})(0)$

$=2f^{-1}(g^{-1}(0))=2f^{-1}(-3)$

$=2\cdot2=4$ 답 ①

0595 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(b)=k$라 하면 $f(k)=b$이므로

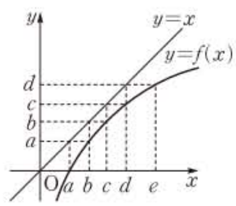
$k=c$

$f^{-1}(c)=l$이라 하면 $f(l)=c$이므로

$l=d$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(b)=f^{-1}(f^{-1}(b))=f^{-1}(c)=d$ 답 ④

0596 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$(f\circ f)^{-1}(c)=(f^{-1}\circ f^{-1})(c)$

$=f^{-1}(f^{-1}(c))$

이고 $f^{-1}(c)=k$라 하면 $f(k)=c$이므로

$k=d$

$f^{-1}(d)=l$이라 하면 $f(l)=d$이므로

$l=e$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(d)=e$ 답 ⑤

0597 $f^{-1}(2)=a$, $f^{-1}(4)=b$라 하면

$f(a)=2$, $f(b)=4$

이때 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$a=3$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=3$

$\therefore f^{-1}(2)+f^{-1}(4)=a+b=7$ 답 7

0598 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

$\frac{1}{3}x-2=x$에서 $\frac{2}{3}x=-2$

$\therefore x=-3$

따라서 교점의 좌표는 $(-3, -3)$이므로

$a=-3$, $b=-3$

$\therefore a+b=-6$ 답 ②

0599 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1, 4)$를 지나므로

$-a+b=4$ ······ ㉠

또 $y=f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(-2, 5)$를 지나므로 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(5, -2)$를 지난다.

$\therefore 5a+b=-2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

$\therefore ab=-3$ 답 ①

0600 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(3, 1)$을 지난다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치하므로 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(1, 3)$, $(3, 1)$을 지난다.

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$a+b=3$, $3a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=4$

따라서 $f(x)=-x+4$이므로

$f(4)=0$ 답 ③

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로

$(f\circ f)(x)=x$

일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$f(x)=a(x-1)+3=ax-a+3$ $(a\neq0)$

이라 하면

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax-a+3)-a+3$

$=a^2x-a^2+2a+3$

따라서 $a^2x-a^2+2a+3=x$이므로

$a^2=1$, $-a^2+2a+3=0$

$a^2=1$에서 $a=\pm1$ ······ ㉠

$a^2-2a-3=0$에서 $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$이므로 $f(x)=-x+4$

$\therefore f(4)=0$

0601 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 P는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이다. ··· ❶

$3x+8=x$에서 $2x=-8$

$\therefore x=-4$

따라서 $\mathrm{P}(-4, -4)$이므로 ··· ❷

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$ ··· ❸

답 $4\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 P가 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점임을 알 수 있다.	30 %
❷ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 선분 OP의 길이를 구할 수 있다.	30 %

라쎈 특강

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

① 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

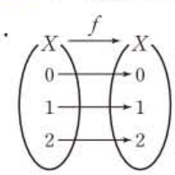
② 원점 O와 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

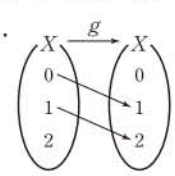
0602 **전략** 각 대응을 그림으로 나타내어 본다.

풀이 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

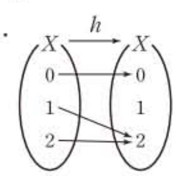
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



이상에서 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0603 전략 k의 값의 범위를 나누어 생각한다.

풀이 (i) $0\le k\le 5$일 때,

$2k=8$에서 $k=4$

(ii) $k>5$일 때,

$k+1=8$에서 $k=7$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 합은

$4+7=11$

답 11

0604 전략 $x_1\ne x_2$이면서 $f(x_1)=f(x_2)$인 x_1, x_2가 존재하면 일대일대응이 아니다.

풀이 ① $x_1=1$, $x_2=2$이면 $x_1\ne x_2$이지만

$f(x_1)=3$, $f(x_2)=3$

따라서 $f(x)=3$은 일대일대응이 아니다.

③ $x_1=0$, $x_2=2$이면 $x_1\ne x_2$이지만

$f(x_1)=(0-1)^2=1$, $f(x_2)=(2-1)^2=1$

따라서 $f(x)=(x-1)^2$은 일대일대응이 아니다.

④ $x_1=0$, $x_2=1$이면 $x_1\ne x_2$이지만

$f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$

따라서 $f(x)=x^3-x^2$은 일대일대응이 아니다.

⑤ $x_1=-1$, $x_2=-2$이면 $x_1\ne x_2$이지만

$f(x_1)=-1+|-1|=0$, $f(x_2)=-2+|-2|=0$

따라서 $f(x)=x+|x|$는 일대일대응이 아니다.

답 ②

0605 전략 주어진 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 증가하거나 감소해야 한다.

풀이 주어진 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 증가하거나 감소해야 하므로

$(a+3)(2-a)>0$이어야 한다.

즉 $(a+3)(a-2)<0$에서

$-3<a<2$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 -2, -1, 0, 1의 4개이다.

답 ④

0606 전략 $f(-2)=-2$, $f(-1)=-1$, $f(3)=3$을 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

풀이 함수 f가 항등함수가 되려면

$f(-2)=-2$, $f(-1)=-1$, $f(3)=3$

이어야 한다.

$x\ge 0$일 때 $f(3)=3$을 만족시키고 $x<0$일 때

$f(x)=ax^2+bx-2$이므로 $f(-2)=-2$, $f(-1)=-1$에서

$4a-2b-2=-2$, $a-b-2=-1$

$\therefore 2a-b=0$, $a-b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

$\therefore a+b=-3$

답 ③

0607 전략 함수 g가 항등함수이므로 $g(6)=6$이고 함수 h가 상수함수이므로 $h(6)=h(4)$임을 이용한다.

풀이 $f(2)=g(6)+h(6)$에서 함수 g가 항등함수이므로

$f(2)=6+h(6)$

$X=\{2, 4, 6, 8\}$에서 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 8이므로

$h(6)\ge 2$이므로 $f(2)\ge 8$

$f(2)=8$, $h(6)=2$

이때 함수 h는 상수함수이므로 $h(4)=2$

또 $f(8)=f(6)+4$에서 $f(8)>4$이고, 함수 f는 일대일대응이므로

$f(6)=2$, $f(8)=6$

따라서 $f(4)=4$이므로

$f(4)+g(4)+h(4)=4+4+2=10$

답 10

0608 전략 먼저 집합 X의 원소를 구한다.

풀이 $X=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 X에서 X로의 일대일대응의 개수는

$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$

답 24

0609 전략 $\sqrt{3}$과 $f(\sqrt{3})$의 값이 유리수인지 무리수인지 구분하여 함숫값을 구한다.

풀이 $\sqrt{3}$은 무리수이므로 $f(\sqrt{3})=-(\sqrt{3})^2=-3$

-3은 유리수이므로 $f(-3)=2\cdot(-3)=-6$

$\therefore (f\circ f)(\sqrt{3})=f(f(\sqrt{3}))=f(-3)=-6$

답 ①

0610 전략 $f\circ g=g\circ f$임을 이용하여 $g(2)$, $g(3)$의 값을 구한다.

풀이 주어진 그림에서

$f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=2$

$f\circ g=g\circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$ …… ㉠

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $f(g(1))=g(f(1))$

$f(2)=g(3)$ $\therefore g(3)=1$

$x=3$을 ㉠에 대입하면 $f(g(3))=g(f(3))$

$f(1)=g(2)$ $\therefore g(2)=3$

$\therefore g(2)-g(3)=2$

답 ⑤

0611 전략 $f\circ g=g\circ f$의 양변을 미지수를 포함한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(2)=7$에서

$2a+1=7$ $\therefore a=3$

따라서 $f(x)=3x+1$, $g(x)=bx+2$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+2)=3(bx+2)+1$
$=3bx+7$,

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+1)=b(3x+1)+2$
$=3bx+b+2$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$7=b+2$ $\therefore b=5$

$\therefore ab=15$

답 15

0612 전략 $h(3)=k$로 놓고 주어진 합성함수의 식에 대입한다.

풀이 $h(3)=k$라 하면 $f(h(3))=g(3)$이므로

$f(k)=-4$

$f(k)=\frac{1}{2}k+1$이므로

$\frac{1}{2}k+1=-4$ $\therefore k=-10$

$\therefore h(3)=-10$

답 ①

04 함수

다른 풀이 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=\frac{1}{2}h(x)+1$

따라서 $\frac{1}{2}h(x)+1=-x^2+5$이므로

$\frac{1}{2}h(x)=-x^2+4$ $\quad\therefore h(x)=-2x^2+8$

$\therefore h(3)=-2\cdot 3^2+8=-10$

0613 **전략** 먼저 조건 ㈎를 이용하여 $f(x)$를 구한 후 조건 ㈏에 대입한다.

풀이 조건 ㈎에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\{g(x)\}^2+1$

$g(x)=t$로 놓으면 $\quad f(t)=t^2+1$

$\therefore f(x)=x^2+1$

따라서 조건 ㈏에서 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+1)$이므로

$g(x^2+1)=5\{g(x)\}^2+\frac{1}{5}$

$g(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$g(x^2+1)=a(x^2+1)+b=ax^2+a+b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$5\{g(x)\}^2+\frac{1}{5}=5(ax+b)^2+\frac{1}{5}$

$=5a^2x^2+10abx+5b^2+\frac{1}{5}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$ax^2+a+b=5a^2x^2+10abx+5b^2+\frac{1}{5}$

이므로

$a=5a^2$, $0=10ab$, $a+b=5b^2+\frac{1}{5}$

$a=5a^2$에서

$5a^2-a=0$, $\quad a(5a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{5}$ ($\because a\neq 0$)

$10ab=0$에서 $\quad b=0$ ($\because a\neq 0$)

$\therefore g(x)=\frac{1}{5}x$

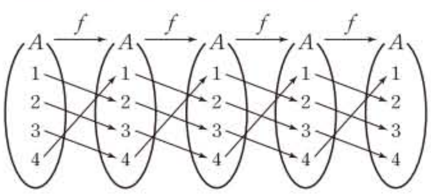
즉 $f(3)=3^2+1=10$, $g(5)=\frac{1}{5}\cdot 5=1$이므로

$f(3)+g(5)=11$

답 11

0614 **전략** $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 구하여 f^1, f^2, f^3, f^4의 대응 관계를 그려 본다.

풀이 $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(4)=1$이므로 f^1, f^2, f^3, f^4의 대응 관계를 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $f^4(x)=x$이므로

$f^{2012}(2)=f^{4\cdot 503}(2)=f^4(2)=2$

$f^{2013}(3)=f^{4\cdot 503+1}(3)=f^1(3)=4$

$\therefore f^{2012}(2)+f^{2013}(3)=6$

답 ④

0615 **전략** 함수 f의 역함수 f^{-1}를 구하여 계수를 비교한다.

풀이 ㄱ. $y=ax+b$로 놓으면 $\quad ax=y-b$

$\therefore x=\frac{1}{a}(y-b)$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{a}(x-b)$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}(x-b)$

ㄴ. $a=-1$이면

$f(x)=-x+b$, $f^{-1}(x)=-x+b$

따라서 b의 값에 관계없이 $f=f^{-1}$이다.

ㄷ. $a=1$이면

$f(x)=x+b$, $f^{-1}(x)=x-b$

이때 $b=0$이면 $\quad f=f^{-1}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

참고 일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $f=f^{-1}$이려면

$a=\frac{1}{a}$, $b=-\frac{b}{a}$

이어야 하므로 $\quad a^2=1$, $ab+b=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$, $b=0$

0616 **전략** $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$임을 이용한다.

풀이 $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$이므로 $(g\circ f)^{-1}=(f\circ g)^{-1}$가 성립한다.

$\therefore g\circ f=f\circ g$

이때

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=3\left(\frac{1}{3}x-1\right)+a$

$=x-3+a$,

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{3}(3x+a)-1$

$=x+\frac{1}{3}a-1$

이므로 $g\circ f=f\circ g$에서

$x-3+a=x+\frac{1}{3}a-1$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$-3+a=\frac{1}{3}a-1$, $\quad \frac{2}{3}a=2$

$\therefore a=3$

답 ⑤

다른 풀이 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=3\left(\frac{1}{3}x-1\right)+a$

$=x-3+a$

$y=x-3+a$로 놓으면 $\quad x=y+3-a$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=x+3-a$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(x)=x+3-a$

$f(x)=\frac{1}{3}x-1$에서 $y=\frac{1}{3}x-1$로 놓으면

$\frac{1}{3}x=y+1$ $\quad\therefore x=3y+3$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=3x+3$

$\therefore f^{-1}(x)=3x+3$

$g(x)=3x+a$에서 $y=3x+a$로 놓으면

$3x=y-a$ $\quad\therefore x=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}a$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}a$

$\therefore g^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}a$

$\therefore (g^{-1}\circ f^{-1})(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))$

$=\frac{1}{3}(3x+3)-\frac{1}{3}a$

$=x+1-\frac{1}{3}a$

$(g\circ f)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$에서

$x+3-a=x+1-\frac{1}{3}a$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$3-a=1-\frac{1}{3}a, \qquad -\frac{2}{3}a=-2$

$\therefore a=3$

0617 전략 $\frac{1}{2}x+1=h(x)$로 놓고 $f\circ h$의 역함수를 구한다.

풀이 $h(x)=\frac{1}{2}x+1$이라 하면 함수 $y=f\left(\frac{1}{2}x+1\right)$, 즉 $y=f(h(x))$의 역함수는

$(f\circ h)^{-1}(x)=(h^{-1}\circ f^{-1})(x)=h^{-1}(g(x))$

$h(x)=\frac{1}{2}x+1$에서 $y=\frac{1}{2}x+1$로 놓으면

$\frac{1}{2}x=y-1 \qquad \therefore x=2y-2$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=2x-2$

즉 $h^{-1}(x)=2x-2$이므로

$h^{-1}(g(x))=2g(x)-2$

따라서 $y=f\left(\frac{1}{2}x+1\right)$의 역함수는 $y=2g(x)-2$이므로

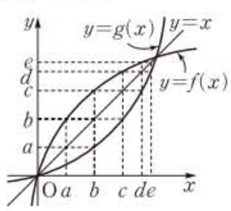
$a=2,\ b=-2$

$\therefore ab=-4$

답 -4

0618 전략 먼저 $f^{-1}(d)=k$로 놓고 k의 값을 구한다.

풀이 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(d)=k$라 하면 $f(k)=d$이므로

$k=c \qquad \therefore f^{-1}(d)=c$

$\therefore (f\circ g\circ f^{-1})(d)$

$=f(g(f^{-1}(d)))$

$=f(\underbrace{g(c)}_{g(c)=b})=f(b)$

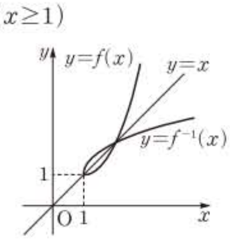
$=c$

답 ③

0619 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1\ (x\ge1)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같으므로

$x^2-2x+2=x$에서

$x^2-3x+2=0, \qquad (x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

즉 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 구하는 합은

$1+2=3$

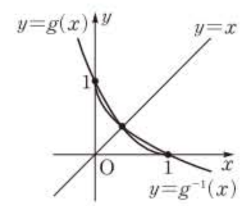
답 ③

라쎈 특강

$y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점

함수 $f(x)=x^2-2x+2\ (x\ge1)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 모두 직선 $y=x$ 위에 존재한다.

하지만 $g(x)=(x-1)^2\ (x\le1)$에 대하여 $y=g(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$ 밖에서도 존재한다.



이처럼 어떤 함수의 그래프와 그 함수의 역함수의 그래프의 교점이 반드시 직선 $y=x$ 위에만 존재하는 것은 아니므로 교점의 좌표를 구할 때에는 그래프를 그려서 교점의 위치를 확인해 보아야 한다.

0620 전략 x, y에 적당한 수를 대입하여 $f(0)$, $f(-1)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x+y)=f(x)+f(y)$에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$ ⋯ ❶

또 $x=-1,\ y=1$을 대입하면

$f(0)=f(-1)+f(1)$

이때 $f(1)=3$이므로 $\quad 0=f(-1)+3$

$\therefore f(-1)=-3$ ⋯ ❷

답 -3

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0621 전략 $A\ge0$이면 $|A|=A$, $A<0$이면 $|A|=-A$임을 이용한다.

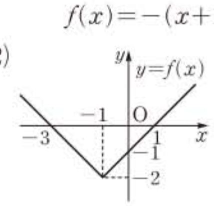
풀이 (1) $x\ge-1$일 때, $x+1\ge0$이므로

$f(x)=x+1-2=x-1$

$x<-1$일 때, $x+1<0$이므로

$f(x)=-(x+1)-2=-x-3$ ⋯ ❶

(2)



⋯ ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $x\ge-1$일 때와 $x<-1$일 때의 $f(x)$를 $ax+b$ 꼴로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	50 %

0622 전략 $f(3)=1$, $f(3)=2$, $f(3)=3$인 경우로 나누어 조건을 만족시키는지 확인한다.

풀이 (i) $f(3)=1$이면

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=2$

(ii) $f(3)=2$이면

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(2)=2$

이때 함수 f가 일대일대응이 아니므로 $f(3)\neq 2$

(iii) $f(3)=3$이면

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(3)=2$

이때 $f(3)=3$을 만족시키지 않으므로 $f(3)\neq 3$ ··· ❶

이상에서 $f(1)=2$, $f(3)=1$이고, f가 일대일대응이므로

$f(2)=3$ ··· ❷

$\therefore\ 2f(1)+f(2)=2\cdot2+3=7$ ··· ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $f(1)$, $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $2f(1)+f(2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0623 전략 $f^{-1}(m)=n \iff f(n)=m$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f(3)=8$이므로

$3a+b=8$ ······ ㉠

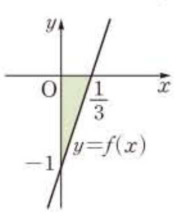
$f^{-1}(5)=2$에서 $f(2)=5$이므로

$2a+b=5$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

$\therefore\ f(x)=3x-1$ x절편은 $\frac{1}{3}$, y절편은 -1 ··· ❶

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{6}$ ··· ❷

답 $\frac{1}{6}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

05 유리식과 유리함수

0624 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ

0625 다항식이 아닌 유리식은 분수식이고, 분수식인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅂ이다. 답 ㄴ, ㄹ, ㅂ

0626 $\frac{6}{x^2y^2}$, $\frac{2}{xy^2}$의 분모의 최소공배수는 x^2y^2이므로

$\frac{6}{x^2y^2}$, $\frac{2x}{x^2y^2}$

답 $\frac{6}{x^2y^2}$, $\frac{2x}{x^2y^2}$

0627 $\frac{2}{x+1}$, $\frac{x+1}{x-1}$의 분모의 최소공배수는 $(x+1)(x-1)$이므로

$\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}$, $\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}$

답 $\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}$, $\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}$

0628 $\frac{x-2}{(x+1)(x+2)}$, $\frac{x-4}{(x+2)(x+3)}$의 분모의 최소공배수는 $(x+1)(x+2)(x+3)$이므로

$\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, $\frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

답 $\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, $\frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

0629 $\frac{x+1}{x^2-5x+4}=\frac{x+1}{(x-1)(x-4)}$,

$\frac{x}{x^2-16}=\frac{x}{(x+4)(x-4)}$에서 분모의 최소공배수는 $(x+4)(x-1)(x-4)$이므로

$\frac{(x+4)(x+1)}{(x+4)(x-1)(x-4)}$, $\frac{x(x-1)}{(x+4)(x-1)(x-4)}$

답 $\frac{(x+4)(x+1)}{(x+4)(x-1)(x-4)}$, $\frac{x(x-1)}{(x+4)(x-1)(x-4)}$

0630 답 $\frac{3}{yz^3}$

0631 $\frac{a^2+3a}{(a+3)(a-3)}=\frac{a(a+3)}{(a+3)(a-3)}=\frac{a}{a-3}$

답 $\frac{a}{a-3}$

0632 $\frac{a^2+a-2}{a^2+4a-5}=\frac{(a+2)(a-1)}{(a+5)(a-1)}=\frac{a+2}{a+5}$

답 $\frac{a+2}{a+5}$

0633 $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2+3x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^3}=\frac{x-1}{(x+1)^2}$

답 $\frac{x-1}{(x+1)^2}$

라쎈 특강

다항식의 곱셈 공식

① $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
② $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
③ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
④ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
⑤ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

0634 $\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x-1}=\frac{2(x-1)+(x+3)}{(x+3)(x-1)}$
$=\frac{3x+1}{(x+3)(x-1)}$

답 $\frac{3x+1}{(x+3)(x-1)}$

0635 $\frac{5}{x}+\frac{1}{x(x+3)}=\frac{5(x+3)+1}{x(x+3)}=\frac{5x+16}{x(x+3)}$

답 $\frac{5x+16}{x(x+3)}$

0636 $\frac{2}{x^2-1}+\frac{5}{(x+3)(x-1)}$
$=\frac{2}{(x+1)(x-1)}+\frac{5}{(x+3)(x-1)}$
$=\frac{2(x+3)+5(x+1)}{(x+3)(x+1)(x-1)}$
$=\frac{7x+11}{(x+3)(x+1)(x-1)}$

답 $\frac{7x+11}{(x+3)(x+1)(x-1)}$

0637 $2-\frac{3}{x+4}=\frac{2(x+4)-3}{x+4}$
$=\frac{2x+5}{x+4}$

답 $\frac{2x+5}{x+4}$

0638 $\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)-3(x+1)}{(x+1)(x+2)}$
$=\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)}$

답 $\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)}$

0639 $\frac{x+2}{x^2-4}-\frac{x}{x+3}=\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}-\frac{x}{x+3}$

약분이 되는 유리식은 약분한 다음 통분한다.

$=\frac{1}{x-2}-\frac{x}{x+3}=\frac{x+3-x(x-2)}{(x+3)(x-2)}$
$=\frac{-x^2+3x+3}{(x+3)(x-2)}$

답 $\frac{-x^2+3x+3}{(x+3)(x-2)}$

0640 $\frac{2}{x+1}\times\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{2}{x+1}\times\frac{x(x+1)}{x+2}=\frac{2x}{x+2}$

답 $\frac{2x}{x+2}$

0641 $\frac{x}{x^2-4}\times\frac{x+2}{x-2}=\frac{x}{(x+2)(x-2)}\times\frac{x+2}{x-2}$
$=\frac{x}{(x-2)^2}$

답 $\frac{x}{(x-2)^2}$

0642 $\frac{1-x}{2x^2-5x-3}\times\frac{2x+1}{3x^2-4x+1}$
$=\frac{-(x-1)}{(2x+1)(x-3)}\times\frac{2x+1}{(x-1)(3x-1)}$
$=-\frac{1}{(x-3)(3x-1)}$

답 $-\frac{1}{(x-3)(3x-1)}$

0643 $\frac{x}{x^2-1}\div\frac{x+1}{x-1}=\frac{x}{(x+1)(x-1)}\times\frac{x-1}{x+1}$
$=\frac{x}{(x+1)^2}$

답 $\frac{x}{(x+1)^2}$

0644 $\frac{x-1}{x+3}\div\frac{x^2+3x-4}{x^2-9}=\frac{x-1}{x+3}\div\frac{(x+4)(x-1)}{(x+3)(x-3)}$
$=\frac{x-1}{x+3}\times\frac{(x+3)(x-3)}{(x+4)(x-1)}$
$=\frac{x-3}{x+4}$

답 $\frac{x-3}{x+4}$

0645 $\frac{x^2-x-6}{6x^2+7x+2}\div\frac{-x^2+4x-3}{3x^2-4x-4}$
$=\frac{(x+2)(x-3)}{(3x+2)(2x+1)}\div\frac{-(x-1)(x-3)}{(3x+2)(x-2)}$
$=-\frac{(x+2)(x-3)}{(3x+2)(2x+1)}\times\frac{(3x+2)(x-2)}{(x-1)(x-3)}$
$=-\frac{(x+2)(x-2)}{(2x+1)(x-1)}$

답 $-\frac{(x+2)(x-2)}{(2x+1)(x-1)}$

0646 $\frac{2x+4}{x+1}=\frac{2(x+1)+2}{x+1}=2+\frac{\boxed{2}}{x+1}$ 답 2

0647 $\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1-(x-1)}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$
$=\frac{1}{\boxed{2}}\left(\frac{1}{\boxed{x-1}}-\frac{1}{x+1}\right)$

답 2, $x-1$

0648 $\frac{\frac{x+2}{x+1}}{\frac{x}{x+3}}=\frac{x+2}{x+1}\div\frac{x}{x+3}=\frac{x+2}{x+1}\times\frac{x+3}{x}$
$=\frac{\boxed{(x+2)(x+3)}}{x(x+1)}$

답 $(x+2)(x+3)$

05 유리식과 유리함수

0649 $\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{(x+3)-1}{x+3}-\dfrac{(x-1)-1}{x-1}$

분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같을 때, 분자의 차수가 분모의 차수보다 작아지도록 변형하면 계산이 편리하다.

$$=\left(1-\frac{1}{x+3}\right)-\left(1-\frac{1}{x-1}\right)$$
$$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}=\frac{x+3-(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{4}{(x+3)(x-1)}$$

답 $\dfrac{4}{(x+3)(x-1)}$

0650 $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{x+2}$$

답 $\dfrac{1}{x+2}$

다른 풀이 $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{(x+2)-1}{(x+1)(x+2)}$

$$=\frac{x+1}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{1}{x+2}$$

0651 $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$

$$=\frac{1}{x+1-(x-1)}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$+\frac{1}{x+3-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x+3-(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{2}{(x+3)(x-1)}$$

답 $\dfrac{2}{(x+3)(x-1)}$

0652 $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$$=\frac{1}{x+1-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$+\frac{1}{x+2-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$+\frac{1}{x+3-(x+2)}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{x+3-x}{x(x+3)}$$
$$=\frac{3}{x(x+3)}$$

답 $\dfrac{3}{x(x+3)}$

0653 답 $\dfrac{x+3}{x+2}$

0654 $\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\frac{x+1}{x}}=\dfrac{x}{x+1}$

답 $\dfrac{x}{x+1}$

0655 $\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}}=\dfrac{x}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}$

답 $\dfrac{1}{x-1}$

0656 $\dfrac{\frac{x^2-2x}{x+1}}{\frac{x^2-4}{x^2-1}}=\dfrac{\frac{x(x-2)}{x+1}}{\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)}}$

$$=\frac{x(x+1)(x-1)(x-2)}{(x+2)(x+1)(x-2)}$$
$$=\frac{x(x-1)}{x+2}$$

답 $\dfrac{x(x-1)}{x+2}$

0657 답 ㄴ, ㄷ, ㅂ

0658 답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

0659 $x+3=0$에서 $\quad x=-3$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq-3$인 실수$\}$

답 $\{x\,|\,x\neq-3$인 실수$\}$

0660 $x-2=0$에서 $\quad x=2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq 2$인 실수$\}$

답 $\{x\,|\,x\neq 2$인 실수$\}$

0661 $x^2+1>0$이므로 주어진 함수의 정의역은

분모를 0으로 만드는 실수 x의 값이 존재하지 않는다.

$\{x\,|\,x$는 실수$\}$

답 $\{x\,|\,x$는 실수$\}$

0662 $x^2-4=0$에서

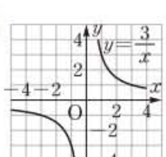
$x^2=4 \quad \therefore x=\pm2$

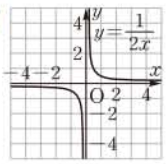
따라서 주어진 함수의 정의역은

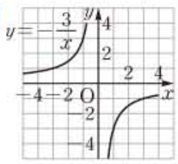
$\{x\,|\,x\neq-2,\ x\neq2$인 실수$\}$

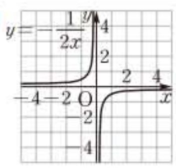
답 $\{x\,|\,x\neq-2,\ x\neq2$인 실수$\}$

0663 답



0664 답 

0665 답 

0666 답 

0667 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프가 제2사분면을 지나려면 $k<0$이어야 한다. 따라서 그래프가 제2사분면을 지나는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄷ, ㄹ

0668 함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프는 $|k|$가 클수록 원점으로부터 멀어진다.
이때 $\left|-\dfrac{1}{5}\right|<\left|\dfrac{1}{3}\right|<|4|<|-5|$이므로 그래프가 원점으로부터 가장 멀리 떨어진 것은 ㄷ이다. 답 ㄷ

0669 답 $y=\dfrac{1}{x+3}-4$

0670 답 $y=\dfrac{3}{x+1}+7$

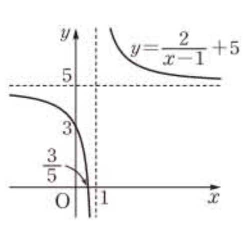
0671 답 $y=-\dfrac{4}{x-5}-7$

0672 답 정의역: $\{x|x\neq2$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq3$인 실수$\}$

0673 답 정의역: $\{x|x\neq-2$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq1$인 실수$\}$

0674 $y=\dfrac{2}{x-1}+5$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은

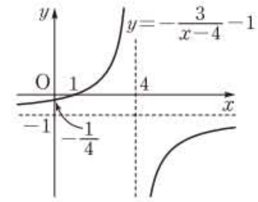
$x=1$, $y=5$



답 풀이 참조

0675 $y=-\dfrac{3}{x-4}-1$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은

$x=4$, $y=-1$



답 풀이 참조

0676 $y=\dfrac{x-6}{x+4}=\dfrac{(x+4)-10}{x+4}=-\dfrac{10}{x+4}+1$

답 $y=-\dfrac{10}{x+4}+1$

0677 $y=\dfrac{3x+5}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+3$

답 $y=\dfrac{2}{x+1}+3$

0678 $y=\dfrac{6x-5}{-x+2}=\dfrac{-6(-x+2)+7}{-x+2}=-\dfrac{7}{x-2}-6$

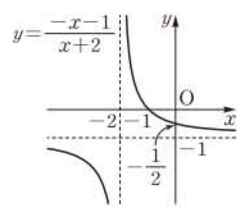
답 $y=-\dfrac{7}{x-2}-6$

0679 (1) $y=\dfrac{-x-1}{x+2}=\dfrac{-(x+2)+1}{x+2}$

$=\dfrac{1}{x+2}-1$

(2) 정의역: $\{x|x\neq-2$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq-1$인 실수$\}$

(3) $y=\dfrac{-x-1}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



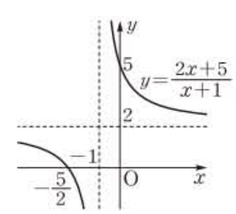
(4) $x=-2$, $y=-1$

답 풀이 참조

0680 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+3}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은

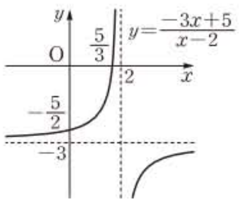
$x=-1$, $y=2$



답 풀이 참조

0681 $y=\dfrac{-3x+5}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}-3$

이므로 $y=\frac{-3x+5}{x-2}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은



$x=2$, $y=-3$

답 풀이 참조

0682 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$

$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)$

$=\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}+\frac{x+1-(x+2)}{(x+1)(x+2)}$

$=\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

$=\frac{(x+2)(x+1)-x(x-1)}{x(x+2)(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x^2+3x+2-x^2+x}{x(x+2)(x+1)(x-1)}$

$=\frac{4x+2}{x(x+2)(x+1)(x-1)}$

따라서 $f(x)=4x+2$이므로 방정식 $f(x)=0$의 해는

$x=-\frac{1}{2}$

답 $x=-\frac{1}{2}$

0683 $\frac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}\times\frac{x-2y}{x^2+2xy}$

$=\frac{(x+2y)(x-2y)}{(x-2y)^2}\times\frac{x-2y}{x(x+2y)}$

$=\frac{1}{x}$

답 $\frac{1}{x}$

0684 $\frac{a^2-a}{a^2+a}\times\frac{a^2+3a+2}{a^2-4a+3}\div\frac{a+2}{a-3}$

$=\frac{a(a-1)}{a(a+1)}\times\frac{(a+1)(a+2)}{(a-1)(a-3)}\times\frac{a-3}{a+2}$

$=1$

답 ⑤

0685 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{2}{x^2+1}$

$=\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+1}$

$=\frac{2(x^2+1)-2(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$=\frac{4}{x^4-1}$ ··· ❶

따라서 $f(x)=x^4-1$, $a=4$이므로 ··· ❷

$f(a)=f(4)=4^4-1=255$ ··· ❸

답 255

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 계산할 수 있다.	60 %
❷ $f(x)$와 a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(a)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0686 주어진 식의 좌변을 계산하면

$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}=\frac{a(x-3)+b(x+1)}{(x+1)(x-3)}$

$=\frac{(a+b)x-3a+b}{x^2-2x-3}$

따라서 $\frac{(a+b)x-3a+b}{x^2-2x-3}=\frac{3x-1}{x^2-2x-3}$이 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b=3$, $-3a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

$\therefore a-b=-1$

답 ③

라쎈 특강

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이다.
⇨ $a=b=c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이다.
⇨ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

③ $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이다.
⇨ $a=b=c=0$

④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 x, y에 대한 항등식이다.
⇨ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

0687 주어진 식의 우변을 계산하면

$\frac{2}{x-1}-\frac{2x+3}{x^2+x+1}=\frac{2(x^2+x+1)-(2x+3)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{2x^2+2x+2-(2x^2+x-3)}{x^3-1}$

$=\frac{x+5}{x^3-1}$

따라서 $\frac{ax^2+bx+c}{x^3-1}=\frac{x+5}{x^3-1}$가 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a=0$, $b=1$, $c=5$

$\therefore a+b+c=6$

답 6

0688 주어진 식의 우변을 계산하면

$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$

$=\frac{a(x-1)^2+b(x+1)(x-1)+(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$

$=\frac{(a+b)x^2+(-2a+1)x+a-b+1}{(x+1)(x-1)^2}$ ··· ❶

따라서 $\frac{3-x^2}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{(a+b)x^2+(-2a+1)x+a-b+1}{(x+1)(x-1)^2}$

이 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b=-1$, $-2a+1=0$, $a-b+1=3$ ··· ❷

위의 세 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$ ··· ❸

$\therefore ab=-\frac{3}{4}$ ··· ❹

답 $-\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 우변을 계산할 수 있다.	40 %
❷ a, b에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0689 주어진 식의 우변을 계산하면

$$\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-2}+\frac{a_3}{x-3}+\frac{a_4}{x-4}$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$
$$\times\{a_1(x-2)(x-3)(x-4)+a_2(x-1)(x-3)(x-4)$$
$$+a_3(x-1)(x-2)(x-4)+a_4(x-1)(x-2)(x-3)\}$$

따라서

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$
$$\times\{a_1(x-2)(x-3)(x-4)+a_2(x-1)(x-3)(x-4)$$
$$+a_3(x-1)(x-2)(x-4)+a_4(x-1)(x-2)(x-3)\}$$

이 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 x^3의 계수를 비교하면

$$a_1+a_2+a_3+a_4=0$$

답 ③

0690 $\frac{x+1}{x}-\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+3}{x+2}+\frac{x+4}{x+3}$

$$=\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{(x+1)+1}{x+1}-\frac{(x+2)+1}{x+2}+\frac{(x+3)+1}{x+3}$$
$$=\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(1+\frac{1}{x+1}\right)-\left(1+\frac{1}{x+2}\right)+\left(1+\frac{1}{x+3}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$=\frac{x+1-x}{x(x+1)}+\frac{x+2-(x+3)}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{(x+2)(x+3)-x(x+1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{x^2+5x+6-(x^2+x)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{\boxed{4x+6}}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

답 ⑤

0691 $\frac{2x^2-2x+2}{x^2-x}-\frac{4x^2+2x+1}{2x^2+x}$

$$=\frac{2(x^2-x)+2}{x^2-x}-\frac{2(2x^2+x)+1}{2x^2+x}$$
$$=\left(2+\frac{2}{x^2-x}\right)-\left(2+\frac{1}{2x^2+x}\right)$$
$$=\frac{2}{x^2-x}-\frac{1}{2x^2+x}=\frac{2}{x(x-1)}-\frac{1}{x(2x+1)}$$
$$=\frac{2(2x+1)-(x-1)}{x(2x+1)(x-1)}=\frac{3x+3}{x(2x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{3(x+1)}{x(2x+1)(x-1)}$$

답 $\frac{3(x+1)}{x(2x+1)(x-1)}$

0692 $\frac{2x^2-2x-3}{x^2-x-2}-\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x}-1$

$$=\frac{2(x^2-x-2)+1}{x^2-x-2}-\frac{(x^2-2x)+1}{x^2-2x}-1$$
$$=\left(2+\frac{1}{x^2-x-2}\right)-\left(1+\frac{1}{x^2-2x}\right)-1$$
$$=\frac{1}{x^2-x-2}-\frac{1}{x^2-2x}$$
$$=\frac{1}{(x+1)(x-2)}-\frac{1}{x(x-2)}$$
$$=\frac{x-(x+1)}{x(x+1)(x-2)}$$
$$=-\frac{1}{x(x+1)(x-2)}$$
$$\therefore k=-1$$

답 -1

0693 $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{6}{(x+3)(x+9)}$

$$=\frac{1}{x+1-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$+\frac{2}{x+3-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$+\frac{6}{x+9-(x+3)}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+9}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+9}$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+9}=\frac{x+9-x}{x(x+9)}$$
$$=\frac{9}{x(x+9)}$$
$$\therefore k=9$$

답 9

다른 풀이 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=1$을 대입하면

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{2}{2\cdot4}+\frac{6}{4\cdot10}=\frac{k}{1\cdot10}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{20}=\frac{k}{10}\qquad\therefore k=9$$

0694 $\frac{y}{x(x+y)}+\frac{z}{(x+y)(x+y+z)}$

$$=\frac{y}{x+y-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+y}\right)$$
$$+\frac{z}{x+y+z-(x+y)}\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x+y+z}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x+y+z}$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+y+z}=\frac{x+y+z-x}{x(x+y+z)}$$
$$=\frac{y+z}{x(x+y+z)}$$

답 ⑤

다른 풀이 $\frac{y}{x(x+y)}+\frac{z}{(x+y)(x+y+z)}$

$$=\frac{y(x+y+z)+zx}{x(x+y)(x+y+z)}=\frac{xy+y^2+zy+zx}{x(x+y)(x+y+z)}$$
$$=\frac{y(x+y)+z(x+y)}{x(x+y)(x+y+z)}=\frac{y+z}{x(x+y+z)}$$

05 유리식과 유리함수

0695 $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{1}{x^2+6x+8}+\dfrac{1}{x^2+10x+24}$

$=\dfrac{2}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+6)}$

$=\dfrac{2}{x+2-(x-2)}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$+\dfrac{1}{x+4-(x+2)}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$+\dfrac{1}{x+6-(x+4)}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+6}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+6}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x+6-(x-2)}{(x-2)(x+6)}$

$=\dfrac{4}{(x-2)(x+6)}$

답 ④

0696 $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x+1-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(99)$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}\right)$

$=1-\dfrac{1}{100}$

$=\dfrac{99}{100}$

답 ②

0697 $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{x+1}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{x+1+x}{x+1}}=\dfrac{1}{\dfrac{2x+1}{x+1}}$

$=\dfrac{x+1}{2x+1}$

답 ④

0698 $A+B=\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{a-b+a+b}{(a+b)(a-b)}$

$=\dfrac{2a}{(a+b)(a-b)}$

$A-B=\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{-2b}{(a+b)(a-b)}$

$\therefore \dfrac{A-B}{A+B}=\dfrac{\dfrac{-2b}{(a+b)(a-b)}}{\dfrac{2a}{(a+b)(a-b)}}$

$=\dfrac{-2b(a+b)(a-b)}{2a(a+b)(a-b)}$

$=-\dfrac{b}{a}$

답 ①

다른 풀이 $\dfrac{A-B}{A+B}=\dfrac{\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}}{\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}}$

분자와 분모에 각각 $(a+b)(a-b)$를 곱한다.

$=\dfrac{a-b-(a+b)}{a-b+a+b}$

$=\dfrac{-2b}{2a}=-\dfrac{b}{a}$

0699 주어진 식의 좌변을 간단히 하면

$\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\dfrac{2x-1}{x}}}=\dfrac{1}{2-\dfrac{x}{2x-1}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{2(2x-1)-x}{2x-1}}=\dfrac{1}{\dfrac{3x-2}{2x-1}}$

$=\dfrac{2x-1}{3x-2}$ ··· ❶

따라서 $\dfrac{2x-1}{3x-2}=\dfrac{ax-1}{3x+b}$이 x에 대한 항등식이므로

$a=2,\ b=-2$ ··· ❷

$\therefore a-b=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0700 주어진 식의 좌변을 간단히 하면

$3+\dfrac{2}{3-\dfrac{1}{3+\dfrac{2}{3-c}}}=3+\dfrac{2}{3-\dfrac{1}{\dfrac{3(3-c)+2}{3-c}}}$

$=3+\dfrac{2}{3-\dfrac{1}{\dfrac{11-3c}{3-c}}}=3+\dfrac{2}{3-\dfrac{3-c}{11-3c}}$

$=3+\dfrac{2}{\dfrac{3(11-3c)-(3-c)}{11-3c}}$

$=3+\dfrac{2}{\dfrac{30-8c}{11-3c}}=3+\dfrac{2(11-3c)}{30-8c}$

$=\dfrac{3(30-8c)+2(11-3c)}{30-8c}$

$=\dfrac{112-30c}{30-8c}$

따라서 $\dfrac{112-30c}{30-8c}=c$에서 $\quad 112-30c=c(30-8c)$

$8c^2-60c+112=0,\quad 2c^2-15c+28=0$

$(2c-7)(c-4)=0$

$\therefore c=4$ ($\because$ c는 정수)

답 4

0701 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$=3^2-2=7$

답 ③

0702 $a^2-\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$이므로

$\dfrac{5}{2}\left(a-\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{15}{4}\qquad \therefore a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore a^3-\dfrac{1}{a^3}=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$

$=\left(\dfrac{3}{2}\right)^3+3\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{63}{8}$

답 $\dfrac{63}{8}$

다른 풀이 $a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{2}$, $a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{2}$을 변끼리 더하면

$2a=4 \qquad \therefore a=2$

$\therefore a^3-\dfrac{1}{a^3}=2^3-\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{63}{8}$

$x=0$을 대입하면 $-1\neq0$이므로 $x\neq0$이다.

0703 $x^2-x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-1-\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\dfrac{1}{x}=1$ ⋯ ❶

$\therefore x^2+x-1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-1$

$=\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2\right\}+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-1$

$=(1^2+2)+1-1$

$=3$ ⋯ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $x-\dfrac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $x^2+x-1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$의 값을 구할 수 있다.	70 %

0704 $x:y:z=1:2:3$이므로 $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x=k,\ y=2k,\ z=3k$

$\therefore \dfrac{3x-y-3z}{-x+y+z}=\dfrac{3k-2k-9k}{-k+2k+3k}=-\dfrac{8k}{4k}=-2$

답 ②

라쎈 특강

비의 값이 같은 두 개의 비 $a:b$와 $c:d$를

$a:b=c:d$ 또는 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

와 같이 나타낸 식을 비례식이라 한다.

0705 $a:b=3:5$이므로 $\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{5}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$a=3k,\ b=5k$

$\therefore \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{(3k)^2+(5k)^2}{(3k)^2-(5k)^2}=-\dfrac{34k^2}{16k^2}=-\dfrac{17}{8}$ 답 ②

0706 $3x=y,\ 2y=3z$에서

$x=\dfrac{1}{3}y,\ z=\dfrac{2}{3}y$ ⋯ ❶

$\therefore \dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{\frac{1}{3}y^2+\frac{2}{3}y^2+\frac{2}{9}y^2}{\frac{1}{9}y^2+y^2+\frac{4}{9}y^2}=\dfrac{\frac{11}{9}y^2}{\frac{14}{9}y^2}$

$=\dfrac{11}{14}$ ⋯ ❷

따라서 $p=14,\ q=11$이므로 $p+q=25$ ⋯ ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ x, z를 y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

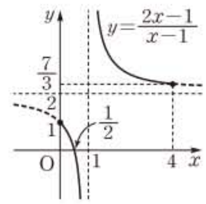
0707 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}$

$=\dfrac{1}{x-1}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x<1$ 또는 $1<x\le4$에서 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\left\{y\,\middle|\,y\le1 \text{ 또는 } y\ge\dfrac{7}{3}\right\}$



답 ①

0708 $y=\dfrac{bx+2}{a-x}=\dfrac{-b(a-x)+ab+2}{a-x}$

$=-\dfrac{ab+2}{x-a}-b$ ⋯ ❶

이므로

정의역은 $\{x\,|\,x\neq a$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\neq -b$인 실수$\}$

따라서 $a=2,\ b=1$이므로 ⋯ ❷

$a+b=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0709 $y=\dfrac{4-x}{x-3}=\dfrac{-(x-3)+1}{x-3}$

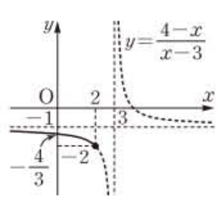
$=\dfrac{1}{x-3}-1$

이므로 $y=\dfrac{4-x}{x-3}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\le y<-1$에서 $y=\dfrac{4-x}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은

$-2=\dfrac{4-x}{x-3}$에서
$-2x+6=4-x$
$\therefore x=2$

$\{x\,|\,x\le2\}$



답 ③

0710 $y=\dfrac{2x+7}{x+2}=\dfrac{2(x+2)+3}{x+2}=\dfrac{3}{x+2}+2$

따라서 $y=\dfrac{2x+7}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$a=-2,\ b=2,\ k=3$

$\therefore a+b+k=3$

답 ①

0711 $y=\frac{1}{x+4}-1$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{1}{x+4}-1+a$$

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$$0=\frac{1}{0+4}-1+a \qquad \therefore a=\frac{3}{4}$$

답 ③

0712 ① $y=\frac{x+1}{1-x}=\frac{(x-1)+2}{-(x-1)}=-\frac{2}{x-1}-1$

② $y=\frac{2x+3}{x-2}=\frac{2(x-2)+7}{x-2}=\frac{7}{x-2}+2$

③ $y=\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2(x+2)+1}{x+2}=\frac{1}{x+2}+2$

④ $y=\frac{4x-6}{2x-1}=\frac{2(2x-1)-4}{2x-1}=-\frac{4}{2x-1}+2$

⑤ $y=\frac{2x+3}{2x-2}=\frac{2x-2+5}{2x-2}=\frac{5}{2x-2}+1$

따라서 ③ $y=\frac{1}{x+2}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{1}{(x-3)+2}+2-2=\frac{1}{x-1}$$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=\frac{1}{x-1}$의 그래프와 겹쳐진다.

답 ③

참고 두 함수 $y=\frac{k_1}{x-p_1}+q_1$, $y=\frac{k_2}{x-p_2}+q_2$ $(k_1k_2\neq0)$에 대하여 $k_1=k_2$이면 두 함수의 그래프는 평행이동에 의하여 겹쳐진다.

0713 $y=\frac{bx-1}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab-1}{x+a}=-\frac{ab+1}{x+a}+b$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-\frac{ab+1}{x+2+a}+b+1$$

이 함수의 그래프가 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프와 일치해야 하므로

$2+a=0$, $b+1=0$, $ab+1=3$

$\therefore a=-2$, $b=-1$

$\therefore a+b=-3$

답 -3

다른 풀이 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-\frac{3}{x-2}-1=\frac{-3-(x-2)}{x-2}=\frac{-x-1}{x-2}$$

이 함수의 그래프가 $y=\frac{bx-1}{x+a}$의 그래프와 일치해야 하므로

$a=-2$, $b=-1$ $\qquad \therefore a+b=-3$

0714 $y=\frac{3x+5}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+3$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=3$이므로

$a=-1$, $b=3$

$\therefore a^2+b^2=1+9=10$

답 10

0715 $y=\frac{bx-3}{x-a}=\frac{b(x-a)+ab-3}{x-a}$

$=\frac{ab-3}{x-a}+b$ ⋯ ❶

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$이므로

$a=3$, $b=-5$ ⋯ ❷

$\therefore ab=-15$ ⋯ ❸

답 -15

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0716 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=3$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\frac{k}{x+2}+3$ $(k\neq0)$ ⋯⋯ ㉠

으로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(3, 1)$을 지나므로

$1=\frac{k}{3+2}+3$, $\qquad \frac{k}{5}=-2$

$\therefore k=-10$

$k=-10$을 ㉠에 대입하면

$$y=\frac{-10}{x+2}+3=\frac{-10+3(x+2)}{x+2}=\frac{3x-4}{x+2}$$

따라서 $a=3$, $b=-4$, $c=2$이므로

$a+b+c=1$

답 ④

다른 풀이 $y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}$

$=\frac{-ac+b}{x+c}+a$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-c$, $y=a$이므로

$a=3$, $c=2$ ⋯⋯ ㉠

또 그래프가 점 $(3, 1)$을 지나므로

$$1=\frac{-ac+b}{3+c}+a$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$1=\frac{-6+b}{5}+3$ $\qquad \therefore b=-4$

$\therefore a+b+c=1$

0717 $y=\frac{3x+b}{x+a}$의 그래프가 점 $(-2, 4)$를 지나므로

$4=\frac{3\cdot(-2)+b}{-2+a}$, $\qquad 4=\frac{-6+b}{-2+a}$

$-8+4a=-6+b$

$\therefore b=4a-2$ ⋯⋯ ㉠

한편

$$y=\frac{3x+b}{x+a}=\frac{3(x+a)-3a+b}{x+a}=\frac{-3a+b}{x+a}+3$$

에서 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=3$이므로 그래프는 점 $(-a, 3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $-a=-1$, $c=3$이므로 $\quad a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=2$

$\therefore abc=6$

답 ③

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 점 $(-1, c)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=c$

따라서 주어진 함수의 식을

$$y=\frac{k}{x+1}+c\ (k\neq 0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(-2, 4)$를 지나므로

$$4=\frac{k}{-1}+c \quad \therefore k=c-4$$

$k=c-4$를 ㉠에 대입하면

$$y=\frac{c-4}{x+1}+c=\frac{c-4+c(x+1)}{x+1}=\frac{cx+2c-4}{x+1}$$

따라서 $c=3$, $b=2c-4$, $a=1$이므로 $\quad b=2$

$\therefore abc=6$

0718 $y=\dfrac{5x-3}{x-2}=\dfrac{5(x-2)+7}{x-2}=\dfrac{7}{x-2}+5$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=5$

이때 주어진 함수의 그래프가 직선 $y=x+k$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x+k$는 점근선의 교점 $(2, 5)$를 지난다. 즉

$5=2+k \quad \therefore k=3$

답 3

라쎈 특강

유리함수의 그래프의 대칭성

유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 각각 대칭이다.

따라서 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 평행이동한 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프는 $\underbrace{\text{점 }(p,\ q)}_{\text{두 점근선의 교점}}$를 지나고 기울기가 ± 1인 두 직선

$y-q=x-p$, $y-q=-(x-p)$

에 대하여 각각 대칭이다.

0719 주어진 함수의 그래프가 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=1$ ⋯ ❶

주어진 함수의 식을

$$y=\frac{k}{x-2}+1\ (k\neq 0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$$3=\frac{k}{-2}+1, \quad -\frac{k}{2}=2$$

$\therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$$y=\frac{-4}{x-2}+1=\frac{-4+(x-2)}{x-2}=\frac{x-6}{x-2} \quad ⋯ ❷$$

따라서 $a=1$, $2b=-6$, $c=-2$이므로 $\quad b=-3$

$\therefore a+b+c=-4$ ⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 점근선의 방정식을 알 수 있다.	20 %
❷ 함수의 식을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0720 주어진 함수의 그래프가 두 직선 $y=x-1$, $y=-x-5$에 대하여 대칭이므로 두 직선의 교점은 주어진 함수의 그래프의 점근선의 교점과 같다.

$x-1=-x-5$에서

$2x=-4 \quad \therefore x=-2$

$x=-2$를 $y=x-1$에 대입하면 $\quad y=-3$

따라서 점근선의 교점의 좌표가 $(-2, -3)$이므로 점근선의 방정식은

$x=-2$, $y=-3$

$y=\dfrac{1}{x-a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$이므로

$a=-2$, $b=-3$

$\therefore a+b=-5$

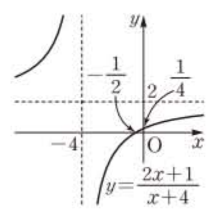
답 ①

0721 ① $y=\dfrac{2x+1}{x+4}$에 $x=0$을 대입하면 $\quad y=\dfrac{1}{4}$

따라서 그래프의 y절편은 $\dfrac{1}{4}$이다.

②, ③ $y=\dfrac{2x+1}{x+4}=\dfrac{2(x+4)-7}{x+4}=-\dfrac{7}{x+4}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x+1}{x+4}$의 그래프는 $y=-\dfrac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.

④ $y=\dfrac{2x+1}{x+4}=-\dfrac{7}{x+4}+2$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-4$, $y=2$

이므로 그래프는 점 $(-4, 2)$에 대하여 대칭이다.

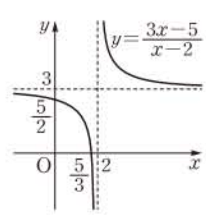
⑤ $x+4=0$에서 $\quad x=-4$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq -4$인 실수$\}$이다.

답 ②

0722 $y=\dfrac{3x-5}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+3$

이므로 $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.

답 제3사분면

0723 $y=\frac{2x-1}{x+2}=\frac{2(x+2)-5}{x+2}=-\frac{5}{x+2}+2$

ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=2$이므로 그래프는 점 $(-2,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $y=\frac{2x-1}{x+2}$의 그래프는 $y=-\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0724 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=1$이므로 함수의 식을

$$y=\frac{k}{x+2}+1\ (k\neq0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$$0=\frac{k}{2+2}+1 \qquad \therefore k=-4$$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$$y=\frac{-4}{x+2}+1=\frac{-4+(x+2)}{x+2}=\frac{x-2}{x+2}$$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=2$이므로

$a+b+c=1$ 답 1

0725 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$이므로

$a=-2$, $b=3$

따라서 $y=\frac{k}{x-2}+3$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$$0=\frac{k}{1-2}+3 \qquad \therefore k=3$$

$\therefore abk=-18$ 답 ①

0726 함수 $y=f(x)$의 그래프의 한 점근선의 방정식이 $x=-2$이므로

$$f(x)=\frac{k}{x+2}+m\ (k\neq0)$$

으로 놓을 수 있다.

$y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-4,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나므로

$0=\frac{k}{-4+2}+m$에서 $\quad k-2m=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

$2=\frac{k}{2}+m$에서 $\quad k+2m=4 \quad \cdots\cdots ㉡$

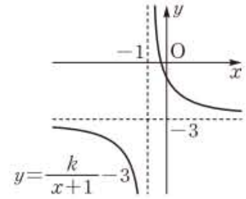
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad k=2$, $m=1$

$$\therefore f(x)=\frac{2}{x+2}+1=\frac{2+(x+2)}{x+2}=\frac{x+4}{x+2}$$

답 $f(x)=\frac{x+4}{x+2}$

0727 $y=\frac{k}{x+1}-3$의 그래프는 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

$k>0$일 때 $y=\frac{k}{x+1}-3$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작거나 같아야 하므로



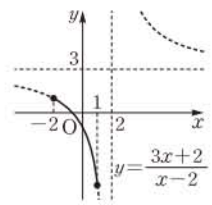
$k-3\leq0 \qquad \therefore k\leq3$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다. 답 ③

0728 $y=\frac{3x+2}{x-2}=\frac{3(x-2)+8}{x-2}=\frac{8}{x-2}+3$

이므로 $y=\frac{3x+2}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{8}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\leq x\leq1$에서 $y=\frac{3x+2}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-2$일 때 최댓값 $\frac{-6+2}{-2-2}=1$,

$x=1$일 때 최솟값 $\frac{3+2}{1-2}=-5$

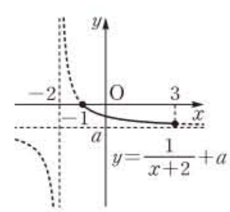
를 갖는다.

즉 $a=1$, $b=-5$이므로

$a+b=-4$ 답 ②

0729 $y=\frac{1}{x+2}+a$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\leq x\leq3$에서 $y=\frac{1}{x+2}+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=3$일 때 최솟값 $\frac{1}{5}+a$

를 갖는다.

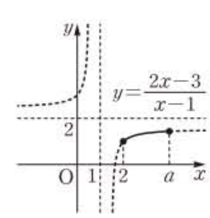
즉 $\frac{1}{5}+a=-\frac{4}{5}$이므로

$a=-1$ 답 -1

0730 $y=\frac{2x-3}{x-1}=\frac{2(x-1)-1}{x-1}=-\frac{1}{x-1}+2$ ··· ❶

이므로 $y=\frac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\leq x\leq a$에서 $y=\frac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=a$일 때 최댓값 $\frac{2a-3}{a-1}$,

$x=2$일 때 최솟값 $\frac{4-3}{2-1}=1$

을 갖는다.

즉 $m=1$이고 $\frac{2a-3}{a-1}=\frac{5}{3}$이므로

$6a-9=5a-5 \qquad \therefore a=4$ ··· ❷

$\therefore am=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형할 수 있다.	30 %
❷ a, m의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ am의 값을 구할 수 있다.	10 %

0731 $y=\dfrac{x+2}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 한 점에서 만나므로 $\dfrac{x+2}{x+1}=-x+k$에서

$x+2=(x+1)(-x+k)\qquad \therefore x^2+(2-k)x+2-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2-k)^2-4(2-k)=0$

$k^2=4\qquad \therefore k=-2$ 또는 $k=2$

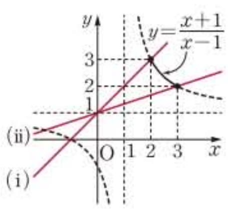
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $\quad -2+2=0$

답 0

0732 $y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

이므로 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le 3$에서 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



직선 $y=kx+1$은 k의 값에 관계없이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

(i) 직선 $y=kx+1$이 점 $(2,\ 3)$을 지날 때,

$3=2k+1\qquad \therefore k=1$

(ii) 직선 $y=kx+1$이 점 $(3,\ 2)$를 지날 때,

$2=3k+1\qquad \therefore k=\dfrac{1}{3}$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는 $\quad \dfrac{1}{3}\le k\le 1$ ⋯ ❷

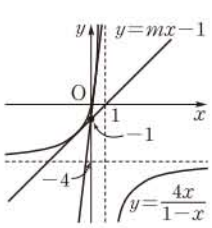
답 $\dfrac{1}{3}\le k\le 1$

채점 기준	비율
❶ $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %

0733 $y=\dfrac{4x}{1-x}=-\dfrac{4(x-1)+4}{x-1}=-\dfrac{4}{x-1}-4$

이므로 $y=\dfrac{4x}{1-x}$의 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\dfrac{4x}{1-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 직선 $y=mx-1$은 m의 값에 관계없이 점 $(0,\ -1)$을 지난다.



함수 $y=\dfrac{4x}{1-x}$의 그래프와 직선 $y=mx-1$이 한 점에서 만날 때의 m의 값은 $\dfrac{4x}{1-x}=mx-1$에서

$4x=(1-x)(mx-1)$

$\therefore mx^2+(3-m)x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(3-m)^2-4m=0$

$m^2-10m+9=0,\qquad (m-1)(m-9)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $m=9$

따라서 구하는 m의 값의 범위는

$1<m<9$

답 ③

0734 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$$

$$=\dfrac{\dfrac{x-1}{x}-1}{\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{\dfrac{x-1-x}{x}}{\dfrac{x-1}{x}}$$

$$=-\dfrac{1}{x-1}$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(-\dfrac{1}{x-1}\right)$$

$$=\dfrac{-\dfrac{1}{x-1}-1}{-\dfrac{1}{x-1}}=\dfrac{\dfrac{1}{x-1}+1}{\dfrac{1}{x-1}}=\dfrac{\dfrac{1+(x-1)}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}}$$

$$=x$$

따라서 함수 $f^{3n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{2021}(x)=f^{3\cdot 673+2}(x)=f^2(x)=-\dfrac{1}{x-1}$

$\therefore f^{2021}(2)=-1$

답 -1

다른 풀이 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$에서

$$f^1(2)=f(2)=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$$

$$f^2(2)=f(f^1(2))=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{2}-1}{\dfrac{1}{2}}=-1$$

$$f^3(2)=f(f^2(2))=f(-1)=\dfrac{-1-1}{-1}=2$$

$$f^4(2)=f(f^3(2))=f(2)=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$$

$$\vdots$$

이므로 $f^n(2)$의 값은 $\dfrac{1}{2}$, -1, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $2021=3\cdot 673+2$이므로

$f^{2021}(2)=f^2(2)=-1$

0735 $f(-6)=\dfrac{-6+4}{-6-2}=\dfrac{1}{4}$이므로

$$(g\circ f)(-6)=g(f(-6))=g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{4}+1}=\dfrac{1}{5}$$

답 $\dfrac{1}{5}$

0736 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\dfrac{3x+1}{x-1}\right)$

$$=\dfrac{3\cdot\dfrac{3x+1}{x-1}+1}{\dfrac{3x+1}{x-1}-1}=\dfrac{\dfrac{9x+3+(x-1)}{x-1}}{\dfrac{3x+1-(x-1)}{x-1}}$$

$$=\dfrac{\dfrac{10x+2}{x-1}}{\dfrac{2x+2}{x-1}}=\dfrac{2(5x+1)}{2(x+1)}=\dfrac{5x+1}{x+1}$$

따라서 $(f\circ f)(k)=\dfrac{5k+1}{k+1}$이므로

$\dfrac{5k+1}{k+1}=4,\qquad 5k+1=4k+4$

$\therefore k=3$

답 ③

다른 풀이 $(f\circ f)(k)=f(f(k))=\dfrac{3f(k)+1}{f(k)-1}=4$에서

$3f(k)+1=4f(k)-4$

$\therefore f(k)=5$

즉 $\dfrac{3k+1}{k-1}=5$이므로 $\qquad 3k+1=5k-5$

$\therefore k=3$

0737 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=1$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x+1}+1\ (k\neq 0)\qquad \cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다.

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=k+1\qquad \therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면

$f(x)=\dfrac{-1}{x+1}+1=\dfrac{-1+(x+1)}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$ ··· ❶

$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$$

$$=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x+(x+1)}{x+1}}=\dfrac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)$$

$$=\dfrac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1}+1}=\dfrac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x+(2x+1)}{2x+1}}=\dfrac{x}{3x+1}$$

$\vdots$

따라서 $f^{10}(x)=\dfrac{x}{10x+1}$이므로 ··· ❷

$f^{10}(1)=\dfrac{1}{10+1}=\dfrac{1}{11}$ ··· ❸

답 $\dfrac{1}{11}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f^{10}(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $f^{10}(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0738 $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x+a}$에서 $y=\dfrac{-2x+1}{x+a}$로 놓으면

$y(x+a)=-2x+1,\qquad (y+2)x=-ay+1$

$\therefore x=\dfrac{-ay+1}{y+2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\dfrac{-ax+1}{x+2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-ax+1}{x+2}$

따라서 $\dfrac{-ax+1}{x+2}=\dfrac{3x+b}{cx+2}$이므로

$a=-3,\ b=1,\ c=1$

$\therefore a+b+c=-1$

답 ③

0739 $f(x)=\dfrac{ax+1}{3x-1}$에서 $y=\dfrac{ax+1}{3x-1}$로 놓으면

$y(3x-1)=ax+1,\qquad (3y-a)x=y+1$

$\therefore x=\dfrac{y+1}{3y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\dfrac{x+1}{3x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{3x-a}$

따라서 $f=f^{-1}$에서 $\dfrac{ax+1}{3x-1}=\dfrac{x+1}{3x-a}$이므로

$a=1$

답 ④

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로 $\qquad (f\circ f)(x)=x$

$$(f\circ f)(x)=f\left(\dfrac{ax+1}{3x-1}\right)=\dfrac{a\cdot\dfrac{ax+1}{3x-1}+1}{3\cdot\dfrac{ax+1}{3x-1}-1}$$

$$=\dfrac{a(ax+1)+3x-1}{3(ax+1)-(3x-1)}$$

$$=\dfrac{(a^2+3)x+a-1}{3(a-1)x+4}$$

따라서 $\dfrac{(a^2+3)x+a-1}{3(a-1)x+4}=x$이므로

$\underline{(a^2+3)x+a-1=3(a-1)x^2+4x}$ 양변의 동류항의 계수를 비교한다.

$a-1=0,\ a^2+3=4$

$\therefore a=1$

0740 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+2}$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{a+b}{3}\qquad \therefore a+b=6\qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+2}$의 역함수의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나면

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+2}$의 그래프는 점 $(2, 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{2a+b}{4}\qquad \therefore 2a+b=4\qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=-2,\ b=8$

$\therefore ab=-16$

답 -16

라쎈 특강

함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계

$y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지난다.
$\Longleftrightarrow y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 (b, a)를 지난다.

0741 $y=\dfrac{1+x}{2-x}$의 그래프와 $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다. ··· ❶

$y=\dfrac{1+x}{2-x}$에서 $y(2-x)=1+x$

$(y+1)x=2y-1 \quad \therefore x=\dfrac{2y-1}{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

따라서 $\dfrac{ax+b}{x+1}=\dfrac{2x-1}{x+1}$이므로 $a=2,\ b=-1$ ··· ❷

$\therefore a-b=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 두 함수가 역함수 관계임을 알 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0742 $f\circ f^{-1}=I$ (I는 항등함수)이므로

$(f\circ f^{-1}\circ f^{-1})(7)=f^{-1}(7)$

$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로

$\dfrac{4k+3}{3k-2}=7, \quad 4k+3=21k-14$

$17k=17 \quad \therefore k=1$

$\therefore (f\circ f^{-1}\circ f^{-1})(7)=f^{-1}(7)=1$

답 1

0743 $(f\circ g^{-1})^{-1}(2)=(g\circ f^{-1})(2)=g(f^{-1}(2))$

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$\dfrac{k}{k-1}=2, \quad k=2k-2 \quad \therefore k=2$

$\therefore (f\circ g^{-1})^{-1}(2)=g(f^{-1}(2))=g(2)$

$=\dfrac{4-3}{2+1}=\dfrac{1}{3}$

답 ④

0744 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(a)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(a)$

$=(g^{-1}\circ f)(a)$

$=g^{-1}(f(a))$ ··· ❶

즉 $g^{-1}(f(a))=-1$이므로 $g(-1)=f(a)$

$\dfrac{-3\cdot(-1)+2}{2\cdot(-1)-3}=\dfrac{a-1}{a+1}$

$\dfrac{a-1}{a+1}=-1, \quad a-1=-(a+1)$

$\therefore a=0$ ··· ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ 합성함수와 역함수의 성질을 이용할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %

0745 전략 주어진 식을 통분하여 계산한다.

풀이 $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}=\dfrac{a(b+1)+b(a+1)}{(a+1)(b+1)}$

$=\dfrac{2ab+a+b}{ab+a+b+1}$

$=\dfrac{a+b+2}{a+b+2}=1$

답 1

다른 풀이 $ab=1$에서 $a=\dfrac{1}{b}$

$\therefore \dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}=\dfrac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}+1}+\dfrac{b}{b+1}$

$=\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{b}{b+1}$

$=\dfrac{b+1}{b+1}=1$

0746 전략 주어진 등식의 좌변의 두 분수식을 각각 분자를 분모로 나누어 다항식과 분수식의 합으로 변형한다.

풀이 $\dfrac{3x-14}{x-5}-\dfrac{3x+13}{x+4}=\dfrac{3(x-5)+1}{x-5}-\dfrac{3(x+4)+1}{x+4}$

$=3+\dfrac{1}{x-5}-\left(3+\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x+4}$

$=\dfrac{(x+4)-(x-5)}{(x+4)(x-5)}$

$=\dfrac{9}{(x+4)(x-5)}$

$\therefore k=9$

답 ⑤

다른 풀이 $\dfrac{3x-14}{x-5}-\dfrac{3x+13}{x+4}$

$=\dfrac{(3x-14)(x+4)-(3x+13)(x-5)}{(x+4)(x-5)}$

$=\dfrac{(3x^2-2x-56)-(3x^2-2x-65)}{(x+4)(x-5)}$

$=\dfrac{9}{(x+4)(x-5)}$

$\therefore k=9$

0747 전략 $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ $(A\neq B)$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{2}{x(x+2)}+\dfrac{3}{(x+2)(x+5)}+\dfrac{4}{(x+5)(x+9)}$

$=\dfrac{2}{x+2-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$+\dfrac{3}{x+5-(x+2)}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+5}\right)$

$+\dfrac{4}{x+9-(x+5)}\left(\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+9}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+9}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+9}=\dfrac{9}{x(x+9)}$

따라서 $a=9$, $b=9$이므로

$a-b=0$

답 ①

05 유리식과 유리함수

0748 전략 y를 x에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 식에 대입한다.

풀이 $\frac{x+y}{2x+y}=\frac{3}{4}$에서 $4x+4y=6x+3y$

$\therefore y=2x$

$y=2x$를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{xy}{x^2+xy}=\frac{2x^2}{x^2+2x^2}=\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0749 전략 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 정의역은 $\{x|x\neq p$인 실수$\}$, 치역은 $\{y|y\neq q$인 실수$\}$임을 이용한다.

풀이 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x \middle| x\neq\frac{5}{3}\text{인 실수}\right\}$이고 치역은 $\{y|y\neq a$인 실수$\}$이다.

이때 정의역과 치역이 같으므로

$a=\frac{5}{3}$

답 $\frac{5}{3}$

0750 전략 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식은 $y=-\frac{2}{x-p}+q$ 꼴이다.

풀이 ① $y=-\frac{x}{x+1}=-\frac{(x+1)-1}{x+1}=\frac{1}{x+1}-1$

② $y=\frac{2x}{x+1}=\frac{2(x+1)-2}{x+1}=-\frac{2}{x+1}+2$

③ $y=\frac{x-2}{x-1}=\frac{(x-1)-1}{x-1}=-\frac{1}{x-1}+1$

④ $y=\frac{x+3}{x+1}=\frac{(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+1$

⑤ $y=\frac{2-x}{x-1}=\frac{-(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}-1$

따라서 ② $y=-\frac{2}{x+1}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$$y=-\frac{2}{(x-1)+1}+2-2=-\frac{2}{x}$$

이므로 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐진다.

답 ②

0751 전략 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$임을 이용한다.

풀이 $y=\frac{k}{x-1}+5$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=5$

이때 두 점근선의 교점의 좌표가 $(1,\ 2a+1)$이므로

$2a+1=5 \qquad \therefore a=2$

따라서 함수 $y=\frac{k}{x-1}+5$의 그래프가 점 $(5,\ 3a)$, 즉 $(5,\ 6)$을 지나므로

$6=\frac{k}{5-1}+5 \qquad \therefore k=4$

답 ④

0752 전략 $y=\frac{bx}{ax+1}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y=\frac{bx}{ax+1}=\frac{\frac{b}{a}(ax+1)-\frac{b}{a}}{ax+1}=-\frac{b}{a(ax+1)}+\frac{b}{a}$

따라서 함수 $f(x)$의 정의역은 $\left\{x \middle| x\neq-\frac{1}{a}\text{인 실수}\right\}$, 치역은 $\left\{y \middle| y\neq\frac{b}{a}\text{인 실수}\right\}$이고 정의역과 치역이 같으므로

$-\frac{1}{a}=\frac{b}{a} \qquad \therefore b=-1$

또 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{1}{a}$, $y=\frac{b}{a}$

두 점근선의 교점 $\left(-\frac{1}{a},\ \frac{b}{a}\right)$, 즉 $\left(-\frac{1}{a},\ -\frac{1}{a}\right)$이 직선 $y=2x+3$ 위에 있으므로

$-\frac{1}{a}=-\frac{2}{a}+3,\qquad \frac{1}{a}=3 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=-\frac{2}{3}$

답 ①

0753 전략 먼저 주어진 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.

풀이 함수 $y=\frac{3}{x-5}+k$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=5$, $y=k$

이때 함수 $y=\frac{3}{x-5}+k$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점근선의 교점 $(5,\ k)$는 직선 $y=x$ 위의 점이어야 한다.

$\therefore k=5$

답 ⑤

0754 전략 $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$의 길이를 각각 점 P의 x좌표에 대한 식으로 나타낸 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 $\left(k,\ \frac{4}{k-2}+1\right)\ (k>2)$이라 하면

$\mathrm{Q}(k,\ 1)$, $\mathrm{R}\left(2,\ \frac{4}{k-2}+1\right)$

$\overline{PQ}=\left(\frac{4}{k-2}+1\right)-1=\frac{4}{k-2}$, $\overline{PR}=k-2$이고 $k>2$에서

$k-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PQ}+\overline{PR}&=\frac{4}{k-2}+k-2\\&\geq2\sqrt{\frac{4}{k-2}\cdot(k-2)}\\&=2\cdot2\\&=4\ (\text{단, 등호는 } k=4\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

$\frac{4}{k-2}=k-2$에서 $(k-2)^2=4$
$k-2=\pm2 \quad \therefore k=4\ (\because k>2)$

따라서 $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 최솟값은 4이다.

답 4

라쎈 특강

유리함수의 그래프의 활용 문제는 주어진 유리함수의 그래프 위의 한 점의 좌표를 문자를 이용하여 나타낸 후 도형의 길이 또는 넓이를 그 문자에 대한 식으로 나타낸다. 이때 도형의 길이 또는 넓이의 최솟값을 구하는 경우 양수 조건이 있으면 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a>0$, $b>0$일 때,
$a+b\geq2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

0755 전략 $y=\frac{k}{x}$의 그래프의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $k<0$이면 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

ㄴ. 점근선이 x축, y축이므로 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=0$이다.

ㄷ. $|k|$가 클수록 그래프는 원점으로부터 멀어진다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

0756 전략 $y=\frac{k}{x}$의 그래프가 제1사분면과 제3사분면을 지나면 $k>0$이고, 제2사분면과 제4사분면을 지나면 $k<0$이다.

풀이 함수 $y=\frac{c}{x}$의 그래프는 제1사분면을 지나고, 함수 $y=\frac{a}{x}$, $y=\frac{b}{x}$의 그래프는 제2사분면을 지나므로

$c>0$, $a<0$, $b<0$

이때 $y=\frac{a}{x}$의 그래프가 $y=\frac{b}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로 $|a|>|b|$

$\therefore a<b$ ($\because a<0,\ b<0$)

$\therefore a<b<c$

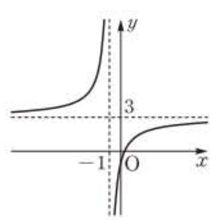
답 ①

0757 전략 $y=\frac{3x+k-10}{x+1}$을 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\frac{3x+k-10}{x+1}=\frac{3(x+1)+k-13}{x+1}=\frac{k-13}{x+1}+3$

이므로 $y=\frac{3x+k-10}{x+1}$의 그래프는 $y=\frac{k-13}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\frac{3x+k-10}{x+1}$의 그래프가 제4사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $k-13<0$이어야 하므로



$k<13$ ...... ㉠

또 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작아야 하므로

$k-10<0$

$\therefore k<10$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $k<10$

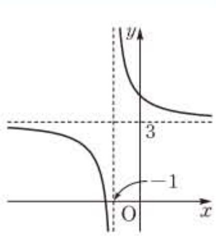
따라서 자연수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 9의 9개이다.

답 ③

라쎈특강

$y=\frac{k-13}{x+1}+3$에서 $k-13>0$이면 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.

또 $k=13$이면 $y=\frac{13-13}{x+1}+3$, 즉 $y=3$이므로 그래프는 제4사분면을 지나지 않는다.

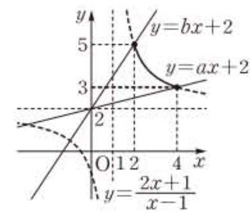


0758 전략 $y=\frac{2x+1}{x-1}$, $y=ax+2$, $y=bx+2$의 그래프를 이용한다.

풀이 $y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+2$

이므로 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le 4$에서 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 두 직선 $y=ax+2$, $y=bx+2$는 a, b의 값에 관계없이 점 $(0, 2)$를 지난다.

(i) 직선 $y=ax+2$가 점 $(4, 3)$을 지날 때,

$3=4a+2$에서 $a=\frac{1}{4}$

따라서 $ax+2\le\frac{2x+1}{x-1}$이려면 $a\le\frac{1}{4}$

(ii) 직선 $y=bx+2$가 점 $(2, 5)$를 지날 때,

$5=2b+2$에서 $b=\frac{3}{2}$

따라서 $\frac{2x+1}{x-1}\le bx+2$이려면 $b\ge\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $a-b$의 최댓값은 $\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{5}{4}$

답 $-\frac{5}{4}$

0759 전략 먼저 $(f\circ f)(x)$를 구한다.

풀이 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$=\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=\frac{\frac{x-1-(x+1)}{x+1}}{\frac{x-1+(x+1)}{x+1}}$$

$$=-\frac{1}{x}$$

$(f\circ f)(k)=-k-1$에서 $-\frac{1}{k}=-k-1$

$\therefore \underline{k^2+k-1=0}$ (판별식)>0이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 -1이다. 답 ③

0760 전략 $f(m)=n$이면 $f^{-1}(n)=m$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{4x+9}{x-1}=\frac{4(x-1)+13}{x-1}=\frac{13}{x-1}+4$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=4$이므로

$a=1$, $b=4$

따라서 $a+b=5$이므로 $f^{-1}(a+b)=f^{-1}(5)=k$라 하면

$f(k)=5$, $\frac{4k+9}{k-1}=5$

$4k+9=5k-5$ $\therefore k=14$

$\therefore f^{-1}(a+b)=f^{-1}(5)=14$ 답 14

05 유리식과 유리함수

0761 전략• $f(-1)$의 값을 구한 후 $(g^{-1}\circ f)(-1)=g^{-1}(f(-1))$임을 이용한다.

풀이 $f(-1)=\dfrac{-3+1}{-2+3}=-2$이므로

$(g^{-1}\circ f)(-1)=g^{-1}(f(-1))=g^{-1}(-2)$

$g^{-1}(-2)=k$라 하면 $g(k)=-2$이므로

$\dfrac{1}{k}=-2 \qquad \therefore k=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore (g^{-1}\circ f)(-1)=g^{-1}(-2)=-\dfrac{1}{2}$

답 ②

0762 전략• 두 함수의 그래프의 점근선의 방정식을 구한 후 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\dfrac{x+1}{x-k}=\dfrac{(x-k)+k+1}{x-k}=\dfrac{k+1}{x-k}+1$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

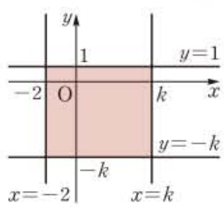
$x=k,\ y=1$

$y=\dfrac{-kx+1}{x+2}=\dfrac{-k(x+2)+2k+1}{x+2}=\dfrac{2k+1}{x+2}-k$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-2,\ y=-k$ ⋯ ❶

따라서 두 함수의 그래프의 점근선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의 넓이가 42이므로



$(k+2)(1+k)=42$

$k^2+3k-40=0$

$(k+8)(k-5)=0$

$\therefore k=5\ (\because k>0)$ ⋯ ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ 두 함수의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	60 %

0763 전략• 두 직선의 교점을 이용하여 점근선의 방정식을 구한다.

풀이 두 식 $y=-x+3,\ y=x-1$을 연립하여 풀면

$x=2,\ y=1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 교점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다. ⋯ ❶

즉 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2,\ y=1$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x-2}+1\ (k\neq 0)$ ⋯⋯ ㉠

로 놓을 수 있다.

이때 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$-k+1=0 \qquad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$f(x)=\dfrac{1}{x-2}+1=\dfrac{1+(x-2)}{x-2}=\dfrac{x-1}{x-2}$ ⋯ ❷

따라서 $a=-2,\ b=-1$이므로

$a-b=-2-(-1)=-1$ ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0764 전략• 주어진 조건을 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식을 알아낸다.

풀이 조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0,\ y=-1$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x}-1\ (k\neq 0)$

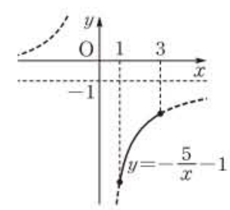
로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $f(-1)=4$이므로

$4=-k-1 \qquad \therefore k=-5$

$\therefore f(x)=-\dfrac{5}{x}-1$ ⋯ ❶

따라서 $1\le x\le 3$에서 $y=-\dfrac{5}{x}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는



$x=3$일 때 최댓값 $-\dfrac{5}{3}-1=-\dfrac{8}{3}$,

$x=1$일 때 최솟값 $-5-1=-6$

을 갖는다. ⋯ ❷

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$-\dfrac{8}{3}\cdot(-6)=16$ ⋯ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $1\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	10 %

0765 전략• $f^{-1}(m)=n$이면 $f(n)=m$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{4x+a}{bx-2}$의 그래프가 점 $\left(3,\ \dfrac{16}{7}\right)$을 지나므로

$\dfrac{12+a}{3b-2}=\dfrac{16}{7}, \qquad 7a+84=48b-32$

$\therefore 7a-48b=-116$ ⋯⋯ ㉠

또 $f^{-1}(3)=2$에서 $f(2)=3$이므로

$\dfrac{8+a}{2b-2}=3, \qquad 8+a=6b-6$

$\therefore a-6b=-14$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=4,\ b=3$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=7$ ⋯ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ $a,\ b$에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	60 %
❷ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

Ⅱ. 함수

06 무리식과 무리함수

0766 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

0767 $x-2\geq0$, $x+2\geq0$이므로 　 $x\geq2$, $x\geq-2$

$\therefore x\geq2$ 　 답 $x\geq2$

0768 $x+5\geq0$, $3-x\geq0$이므로 　 $x\geq-5$, $x\leq3$

$\therefore -5\leq x\leq3$ 　 답 $-5\leq x\leq3$

0769 $x-1>0$이므로 　 $x>1$ 　 답 $x>1$

0770 $x\geq0$, $6-x>0$이므로 　 $x\geq0$, $x<6$

$\therefore 0\leq x<6$ 　 답 $0\leq x<6$

0771 $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x})(\sqrt{x+y}-\sqrt{x})$

$=(\sqrt{x+y})^2-(\sqrt{x})^2$

$=x+y-x$

$=y$ 　 답 y

0772 $(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})$

$=(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x-2})^2$

$=(x+2)-(x-2)$

$=4$ 　 답 4

0773 $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$=\dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$

$=\sqrt{x}+2$ 　 답 $\sqrt{x}+2$

라쎈 특강

분모의 유리화

$a>0$, $b>0$일 때

① $\dfrac{a}{\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

② $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$

$=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$ (단, $a\neq b$)

0774 $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$=\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$

답 $\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$

0775 $\dfrac{1}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}{(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})}$

$=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}{a-(a-1)}$

$=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$ 　 답 $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$

0776 $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$

$=\dfrac{x+1-2\sqrt{x(x+1)}+x}{x+1-x}$

$=2x+1-2\sqrt{x(x+1)}$

답 $2x+1-2\sqrt{x(x+1)}$

0777 $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$=\dfrac{2\sqrt{a}}{a-b}$ 　 답 $\dfrac{2\sqrt{a}}{a-b}$

0778 $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{(\sqrt{x}+2)^2-(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$=\dfrac{x+4\sqrt{x}+4-(x-4\sqrt{x}+4)}{x-4}$

$=\dfrac{8\sqrt{x}}{x-4}$ 　 답 $\dfrac{8\sqrt{x}}{x-4}$

0779 답 ㄱ, ㄷ

0780 $x+4\geq0$이므로 　 $x\geq-4$

따라서 구하는 정의역은 　 $\{x\,|\,x\geq-4\}$ 　 답 $\{x\,|\,x\geq-4\}$

0781 $3-x\geq0$이므로 　 $x\leq3$

따라서 구하는 정의역은 　 $\{x\,|\,x\leq3\}$ 　 답 $\{x\,|\,x\leq3\}$

0782 $5x-4\geq0$이므로 　 $x\geq\dfrac{4}{5}$

따라서 구하는 정의역은 　 $\left\{x\,\middle|\,x\geq\dfrac{4}{5}\right\}$ 　 답 $\left\{x\,\middle|\,x\geq\dfrac{4}{5}\right\}$

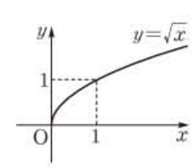
0783 $4-2x\geq0$이므로 　 $x\leq2$

따라서 구하는 정의역은 　 $\{x\,|\,x\leq2\}$ 　 답 $\{x\,|\,x\leq2\}$

0784 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 　 $\{x\,|\,x\geq0\}$,

치역은 　 $\{y\,|\,y\geq0\}$

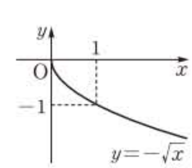


답 풀이 참조

0785 $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 　 $\{x\,|\,x\geq0\}$,

치역은 　 $\{y\,|\,y\leq0\}$

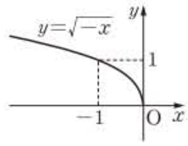


답 풀이 참조

0786 $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\le0\}$,

치역은 $\{y|y\ge0\}$

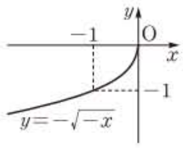


답 풀이 참조

0787 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\le0\}$,

치역은 $\{y|y\le0\}$



답 풀이 참조

0788 y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\sqrt{3x}$ $\quad\therefore y=-\sqrt{3x}$

답 $y=-\sqrt{3x}$

라쎈 특강

도형의 대칭이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

① x축에 대한 대칭이동 ➡ y 대신 $-y$를 대입 ➡ $f(x,\ -y)=0$

② y축에 대한 대칭이동 ➡ x 대신 $-x$를 대입 ➡ $f(-x,\ y)=0$

③ 원점에 대한 대칭이동 ➡ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입 ➡ $f(-x,\ -y)=0$

④ 직선 $y=x$에 대한 대칭이동 ➡ x 대신 y, y 대신 x를 대입 ➡ $f(y,\ x)=0$

0789 x 대신 $-x$를 대입하면

$y=\sqrt{3\cdot(-x)}$ $\quad\therefore y=\sqrt{-3x}$

답 $y=\sqrt{-3x}$

0790 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\sqrt{3\cdot(-x)}$ $\quad\therefore y=-\sqrt{-3x}$

답 $y=-\sqrt{-3x}$

0791 답 $y=\sqrt{x-1}+2$

0792 $y=\sqrt{-2(x-3)}-4=\sqrt{-2x+6}-4$

답 $y=\sqrt{-2x+6}-4$

0793 $y=-\sqrt{3\{x-(-2)\}}+3=-\sqrt{3x+6}+3$

답 $y=-\sqrt{3x+6}+3$

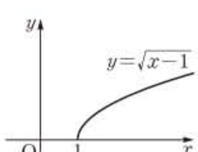
0794 $y=-\sqrt{-\{x-(-5)\}}-1=-\sqrt{-x-5}-1$

답 $y=-\sqrt{-x-5}-1$

0795 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\ge1\}$,

치역은 $\{y|y\ge0\}$

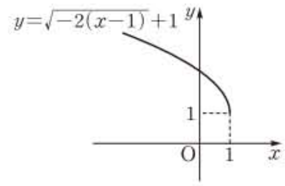


답 풀이 참조

0796 $y=\sqrt{-2(x-1)}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\le1\}$,

치역은 $\{y|y\ge1\}$

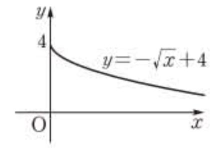


답 풀이 참조

0797 $y=-\sqrt{x}+4$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\ge0\}$,

치역은 $\{y|y\le4\}$

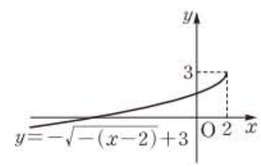


답 풀이 참조

0798 $y=-\sqrt{-(x-2)}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\le2\}$,

치역은 $\{y|y\le3\}$



답 풀이 참조

0799 $y=\sqrt{-3x+1}+2=\sqrt{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)}+2$

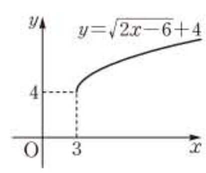
답 $y=\sqrt{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)}+2$

0800 $y=-\sqrt{5x-10}+4=-\sqrt{5(x-2)}+4$

답 $y=-\sqrt{5(x-2)}+4$

0801 (1) $y=\sqrt{2x-6}+4=\sqrt{2(x-3)}+4$

(2) $y=\sqrt{2x-6}+4$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(3) 정의역: $\{x|x\ge3\}$, 치역: $\{y|y\ge4\}$

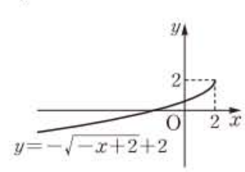
답 풀이 참조

0802 $y=-\sqrt{-x+2}+2=-\sqrt{-(x-2)}+2$

따라서 $y=-\sqrt{-x+2}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\le2\}$,

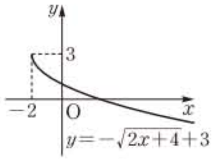
치역은 $\{y|y\le2\}$



답 풀이 참조

0803 $y=-\sqrt{2x+4}+3=-\sqrt{2(x+2)}+3$

따라서 $y=-\sqrt{2x+4}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



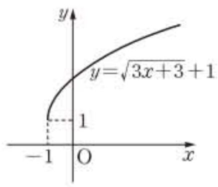
정의역은 $\{x\,|\,x\ge -2\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\le 3\}$

답 풀이 참조

0804 $y=\sqrt{3x+3}+1=\sqrt{3(x+1)}+1$

따라서 $y=\sqrt{3x+3}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



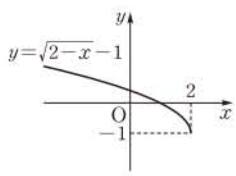
정의역은 $\{x\,|\,x\ge -1\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\ge 1\}$

답 풀이 참조

0805 $y=\sqrt{2-x}-1=\sqrt{-(x-2)}-1$

따라서 $y=\sqrt{2-x}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



정의역은 $\{x\,|\,x\le 2\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\ge -1\}$

답 풀이 참조

0806 $8x^2+2x-1\ge 0$이므로

$(2x+1)(4x-1)\ge 0$

$\therefore x\le -\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge \frac{1}{4}$

답 $x\le -\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge \frac{1}{4}$

0807 $2-x\ge 0$이므로 $x\le 2$ ...... ㉠

$x+3>0$이므로 $x>-3$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $-3<x\le 2$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

답 ④

0808 $x+1\ge 0$이므로 $x\ge -1$ ...... ㉠

$1-x\ge 0$이므로 $x\le 1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $-1\le x\le 1$

$-1\le x\le 1$일 때, $x-2<0$이므로

$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}$

$=-(x-2)=-x+2$

답 ②

0809 $9-x^2\ge 0$이므로

$x^2-9\le 0$, $(x+3)(x-3)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 3$ ...... ㉠

$x+2>0$이므로 $x>-2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $-2<x\le 3$ ⋯ ❶

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$-1+0+1+2+3=5$ ⋯ ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %
❷ 모든 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	30 %

0810 $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}$

$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$

$+\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2})}$

$+\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3})(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3})}$

$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}+\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{x-1-(x-2)}+\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}{x-2-(x-3)}$

$=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}$

$=\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$

답 $\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$

0811 $\frac{1}{a-\sqrt{ab}}+\frac{1}{b-\sqrt{ab}}$

$=\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}+\frac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}$

$=\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}-\frac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$

$=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$

$=-\frac{1}{\sqrt{ab}}=-\frac{\sqrt{ab}}{ab}$

답 ④

다른 풀이 $\frac{1}{a-\sqrt{ab}}+\frac{1}{b-\sqrt{ab}}$

$=\frac{a+\sqrt{ab}}{(a-\sqrt{ab})(a+\sqrt{ab})}+\frac{b+\sqrt{ab}}{(b-\sqrt{ab})(b+\sqrt{ab})}$

$=\frac{a+\sqrt{ab}}{a^2-ab}+\frac{b+\sqrt{ab}}{b^2-ab}=\frac{a+\sqrt{ab}}{a(a-b)}-\frac{b+\sqrt{ab}}{b(a-b)}$

$=\frac{b(a+\sqrt{ab})-a(b+\sqrt{ab})}{ab(a-b)}=\frac{b\sqrt{ab}-a\sqrt{ab}}{ab(a-b)}$

$=-\frac{\sqrt{ab}(a-b)}{ab(a-b)}=-\frac{\sqrt{ab}}{ab}$

0812 $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$=\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2+(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\frac{2+2\sqrt{(1+x)(1-x)}+2-2\sqrt{(1+x)(1-x)}}{1+x-(1-x)}$

$=\frac{2}{x}$

$\therefore k=2$

답 ④

0813 $2-a\ge 0$이므로 $\quad a\le 2$ …… ㉠

$a-1>0$이므로 $\quad a>1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 1<a\le 2$ ⋯→ ❶

$1<a\le 2$일 때, $a-2\le 0$이고 $\underbrace{3a-1>0}_{}$이므로

$1<a\le 2$에서 $3<3a\le 6$ $\therefore 2<3a-1\le 5$

$$|a-2|+\sqrt{9a^2-6a+1}$$
$$=|a-2|+\sqrt{(3a-1)^2}$$
$$=-(a-2)+(3a-1)$$
$$=2a+1$$ ⋯→ ❷

답 $2a+1$

채점 기준	비율
❶ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %

0814 $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+1+x+2\sqrt{x}+1}{x-1}$$
$$=\frac{2x+2}{x-1}$$
$$=\frac{2(\sqrt{2}+1)+2}{(\sqrt{2}+1)-1}$$ ← $x=\sqrt{2}+1$을 대입
$$=\frac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+2$$

답 ⑤

0815 $\dfrac{1}{1-\sqrt{2x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{2x}}=\dfrac{(1+\sqrt{2x})+(1-\sqrt{2x})}{(1-\sqrt{2x})(1+\sqrt{2x})}$

$$=\frac{2}{1-2x}=\frac{2}{1-\sqrt{2}}$$ ← $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$를 대입
$$=\frac{2(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$$
$$=-2(1+\sqrt{2})$$

답 $-2(1+\sqrt{2})$

0816 $\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}=\dfrac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})^2}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})}$

$$=\frac{2+x-2\sqrt{(2+x)(2-x)}+2-x}{2+x-(2-x)}$$
$$=\frac{4-2\sqrt{4-x^2}}{2x}=\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$$
$x=\sqrt{3}$을 대입 → $$=\frac{2-1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

0817 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$ ⋯→ ❶

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(24)$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})$

$=\sqrt{25}-1=4$ ⋯→ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 분모를 유리화할 수 있다.	60 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(24)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0818 $x+y=2\sqrt{2}$, $x-y=2$, $xy=1$이므로

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$
$$=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}=\frac{2\sqrt{2}+2}{2}$$
$$=\sqrt{2}+1$$

답 ③

0819 $x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=3-2\sqrt{2}$,

$y=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$

이므로 $\quad x+y=6$, $x-y=-4\sqrt{2}$

$$\therefore \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$$
$$=\frac{x+y}{x-y}=\frac{6}{-4\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

답 ②

0820 $x+y=4$, $xy=1$이므로 $\sqrt{3x}-\sqrt{3y}$를 제곱하면

$$(\sqrt{3x}-\sqrt{3y})^2=3x-2\cdot\sqrt{3x}\sqrt{3y}+3y$$
$$=3(x+y)-6\sqrt{xy}$$
$$=3\cdot 4-6\cdot 1$$
$$=6$$ ⋯→ ❶

이때 $x>y$에서 $\sqrt{3x}>\sqrt{3y}$이므로 $\quad \sqrt{3x}-\sqrt{3y}>0$

$\therefore \sqrt{3x}-\sqrt{3y}=\sqrt{6}$ ⋯→ ❷

답 $\sqrt{6}$

채점 기준	비율
❶ $(\sqrt{3x}-\sqrt{3y})^2$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\sqrt{3x}-\sqrt{3y}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0821 $x-2\ge 0$이므로 $\quad x\ge 2$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\ge 2\}$이므로

$b=2$

또 함수 $y=\sqrt{x-2}+a$에서 $\sqrt{x-2}\ge 0$이므로 치역은

$\{y|y\ge a\}$ $\quad \therefore a=1$

$\therefore ab=2$

답 ④

0822 $-2x+a\ge 0$이므로 $\quad 2x\le a \quad \therefore x\le \dfrac{a}{2}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,x\le \dfrac{a}{2}\right\}$이므로

$\dfrac{a}{2}=2 \quad \therefore a=4$

답 ⑤

0823 $4x+a\ge 0$이므로

$4x\ge -a \quad \therefore x\ge -\dfrac{a}{4}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x \middle| x \ge -\frac{a}{4}\right\}$이므로

$-\frac{a}{4}=1 \qquad \therefore a=-4$ ⋯ ❶

함수 $y=\sqrt{4x-4}+b$의 그래프가 점 $(2, 4)$를 지나므로

$4=\sqrt{4\cdot 2-4}+b \qquad \therefore b=2$ ⋯ ❷

따라서 함수 $y=\sqrt{4x-4}+2$에서 $\sqrt{4x-4}\ge 0$이므로 치역은

$\{y|y\ge 2\}$ ⋯ ❸

답 $\{y|y\ge 2\}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 치역을 구할 수 있다.	40 %

0824 $y=\frac{ax+2}{x-b}=\frac{a(x-b)+ab+2}{x-b}=\frac{ab+2}{x-b}+a$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=b$, $y=a$이므로

$a=3$, $b=-2$

따라서 함수 $y=\sqrt{ax+b}=\sqrt{3x-2}$에서 $3x-2\ge 0$이므로

$x\ge \frac{2}{3}$

즉 구하는 정의역은 $\left\{x \middle| x\ge \frac{2}{3}\right\}$이다. 답 $\left\{x \middle| x\ge \frac{2}{3}\right\}$

0825 $y=\sqrt{2x-3}-1=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}-1$

이므로 $y=\sqrt{2x-3}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=-1$이므로

$a+b=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0826 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-3)}+2$

이 그래프가 점 $(4, 5)$를 지나므로

$5=\sqrt{a}+2, \qquad \sqrt{a}=3$

$\therefore a=9$ 답 9

다른 풀이 점 $(4, 5)$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(4-3, 5-2)$, 즉 $(1, 3)$

따라서 $y=\sqrt{ax}$의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{a} \qquad \therefore a=9$

0827 $y=\sqrt{a(x+1)}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-b+1)}-2+c$

이 함수의 그래프가

$y=\sqrt{4-2x}-1=\sqrt{-2(x-2)}-1$

의 그래프와 일치하므로

$a=-2$, $-b+1=-2$, $-2+c=-1$

따라서 $a=-2$, $b=3$, $c=1$이므로

$abc=-6$ 답 ②

0828 $y=-\sqrt{3-x}+4$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{3-(x-k)}+4=-\sqrt{-x+k+3}+4$ ⋯ ❶

$x=0$을 대입하면 $\qquad y=-\sqrt{k+3}+4$ ⋯ ❷

이때 이 그래프의 y절편이 음수이므로

$-\sqrt{k+3}+4<0, \qquad \sqrt{k+3}>4$

$k+3>16 \qquad \therefore k>13$ ⋯ ❸

답 $k>13$

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 평행이동한 그래프의 y절편을 구할 수 있다.	20 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

0829 $y=\sqrt{2x-1}+5$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{2(-x)-1}+5 \qquad \therefore y=-\sqrt{-2x-1}-5$

이 함수의 그래프가 점 $(-1, k)$를 지나므로

$k=-\sqrt{-2\cdot(-1)-1}-5=-1-5=-6$ 답 ①

0830 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{-x}$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{-\{x-(-5)\}}-3=-\sqrt{-x-5}-3$

$\therefore f(x)=-\sqrt{-x-5}-3$ 답 $f(x)=-\sqrt{-x-5}-3$

0831 ㄱ. $y=\sqrt{2x+4}=\sqrt{2(x+2)}$

따라서 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄷ. $y=\sqrt{-2x-10}=\sqrt{-2(x+5)}$

따라서 $y=\sqrt{-2x-10}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동하면 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

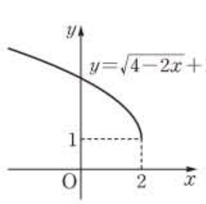
0832 ② $4-2x\ge 0$에서 $x\le 2$이므로 정의역은 $\{x|x\le 2\}$

③ $\sqrt{4-2x}\ge 0$이므로 치역은 $\{y|y\ge 1\}$

④ $y=\sqrt{4-2x}+1=\sqrt{-2(x-2)}+1$

따라서 $y=\sqrt{4-2x}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프와 겹쳐진다.

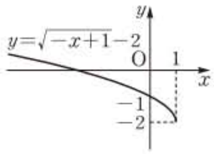
⑤ $y=\sqrt{4-2x}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



답 ⑤

0833 $y=\sqrt{-x+1}-2$

$=\sqrt{-(x-1)}-2$



의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이고, y절편이 -1이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

답 제1사분면

0834 ㄱ. $a>0$이면 정의역은 $\{x|x\geq 0\}$, 치역은 $\{y|y\geq 0\}$이므로 그래프는 제1사분면을 지난다.

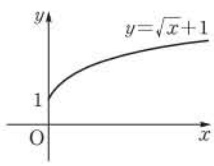
ㄴ. $a<0$이면 치역은 $\{y|y\leq 0\}$이다.

ㄷ. $y=-a\sqrt{x}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

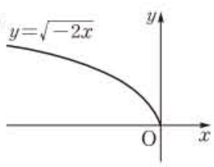
이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

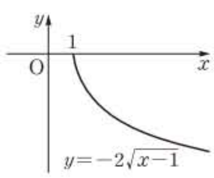
0835 ① $y=\sqrt{x}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



②



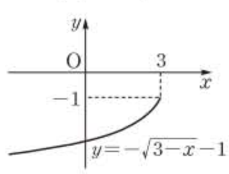
③ $y=-2\sqrt{x-1}$의 그래프는 $y=-2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



④ $y=-\sqrt{3-x}-1$

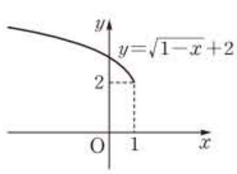
$=-\sqrt{-(x-3)}-1$

의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



⑤ $y=\sqrt{1-x}+2=\sqrt{-(x-1)}+2$

의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이상에서 그래프가 제3사분면을 지나는 것은 ④이다.

답 ④

0836 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x+2)}-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{2a}-1,\quad \sqrt{2a}=2$

$2a=4 \quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{2(x+2)}-1=\sqrt{2x+4}-1$

따라서 $b=4$, $c=-1$이므로

$a+b+c=5$

답 ④

라쎈 특강

주어진 무리함수의 그래프의 시작하는 점의 좌표가 (p, q)일 때 함수의 식은 다음과 같이 놓을 수 있다.

① 정의역: $\{x|x\geq p\}$, 치역: $\{y|y\geq q\}$
→ $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a>0)$

② 정의역: $\{x|x\geq p\}$, 치역: $\{y|y\leq q\}$
→ $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a>0)$

③ 정의역: $\{x|x\leq p\}$, 치역: $\{y|y\geq q\}$
→ $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a<0)$

④ 정의역: $\{x|x\leq p\}$, 치역: $\{y|y\leq q\}$
→ $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a<0)$

0837 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x-3)}+1$ $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{-a}+1,\quad \sqrt{-a}=1$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-(x-3)}+1=-\sqrt{-x+3}+1$

$\therefore b=3,\ c=1$

답 $a=-1$, $b=3$, $c=1$

0838 (1) 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x+1)}+1$ $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{a}+1,\quad \sqrt{a}=1$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=\sqrt{x+1}+1$

$\therefore b=1,\ c=1$ ··· ❶

(2) $y=\dfrac{cx+3}{ax+b}$에서

$y=\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+1$ ··· ❷

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=1$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-1, 1)$이다. ··· ❸

답 (1) $a=1$, $b=1$, $c=1$ (2) $(-1, 1)$

채점 기준	비율
❶ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $y=\dfrac{cx+3}{ax+b}$ 을 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형할 수 있다.	30 %
❸ 두 점근선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

0839 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y=\sqrt{a(x-p)}+q$$
$$=\sqrt{ax-ap}+q\ (p>0,\ q<0)$$

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프와 같으므로

$-ap=b$, $q=c$

ㄱ, ㄴ. 주어진 함수의 그래프에서 $a<0$, $p>0$, $q<0$이므로

$b>0$, $c<0$

$\therefore bc<0$

ㄷ. $x=1$에서의 함숫값이 0보다 작으므로

$\underbrace{\sqrt{a+b}+c}_{y=\sqrt{ax+b}+c\text{에 } x=1\text{을 대입하면 } y=\sqrt{a+b}+c}<0$

$\therefore \sqrt{a+b}<-c$

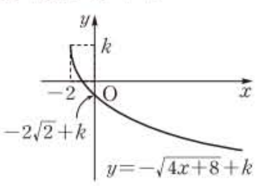
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0840 $y=-\sqrt{4x+8}+k=-\sqrt{4(x+2)}+k$ ··· ❶

이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-\sqrt{4x+8}+k$의 그래프가 제1사분면을 제외한 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$k>0$ ······ ㉠

또 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작아야 하므로

$\underbrace{-2\sqrt{2}+k}_{y=-\sqrt{4x+8}+k\text{에 } x=0\text{을 대입하면 } y=-2\sqrt{2}+k}<0$

$\therefore k<2\sqrt{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<k<2\sqrt{2}$ ··· ❷

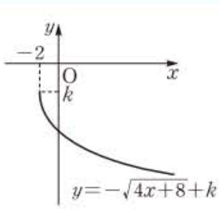
따라서 정수 k는 1, 2의 2개이다. ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 함수의 식을 $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

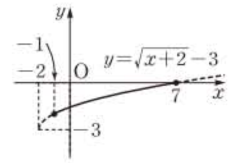
라쎈 특강

$y=-\sqrt{4(x+2)}+k$에서 $k\le0$이면 그 그래프가 오른쪽 그림과 같이 제1사분면, 제2사분면을 지나지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.



0841 $y=\sqrt{x+2}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le7$에서 $y=\sqrt{x+2}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=7$일 때 최댓값 $\sqrt{7+2}-3=0$,

$x=-1$일 때

최솟값 $\sqrt{-1+2}-3=-2$

를 갖는다.

즉 $a=0$, $b=-2$이므로

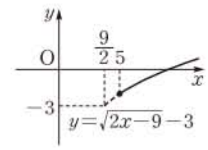
$a-b=2$

답 2

0842 $y=\sqrt{2x-9}-3=\sqrt{2\left(x-\dfrac{9}{2}\right)}-3$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{9}{2}$만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $x\ge5$에서 $y=\sqrt{2x-9}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=5$일 때

최솟값 $\sqrt{2\cdot5-9}-3=-2$

를 갖는다.

즉 $a=5$, $m=-2$이므로

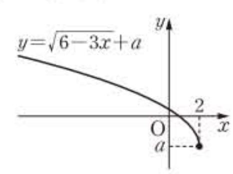
$a+m=3$

답 ②

0843 $y=\sqrt{6-3x}+a=\sqrt{-3(x-2)}+a$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{6-3x}+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=2$일 때 최솟값 $\sqrt{6-3\cdot2}+a=a$

를 갖는다.

$\therefore a=-2$

즉 $y=\sqrt{6-3x}+a=\sqrt{6-3x}-2$의 그래프가 점 $(b,\ 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{6-3b}-2$, $\quad\sqrt{6-3b}=3$

$6-3b=9 \quad \therefore b=-1$

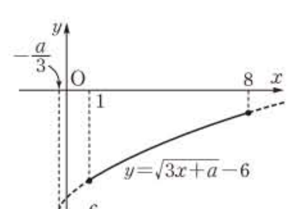
$\therefore ab=2$

답 ②

0844 $y=\sqrt{3x+a}-6=\sqrt{3\left(x+\dfrac{a}{3}\right)}-6$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{a}{3}$만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $1\le x\le8$에서 $y=\sqrt{3x+a}-6$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=8$일 때

최댓값 $\sqrt{24+a}-6$,

$x=1$일 때 최솟값 $\sqrt{3+a}-6$

을 갖는다. ⋯ ❶

즉 $\sqrt{24+a}-6=-1$이므로

$\sqrt{24+a}=5, \qquad 24+a=25$

$\therefore a=1$ ⋯ ❷

따라서 구하는 최솟값은

$\sqrt{3+1}-6=-4$ ⋯ ❸

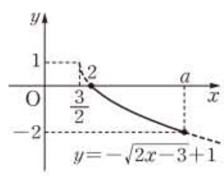
답 -4

채점 기준	비율
❶ $1\le x\le 8$에서 함수 $y=\sqrt{3x+a}-6$의 최댓값과 최솟값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0845 $y=-\sqrt{2x-3}+1=-\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+1$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le a$에서 $y=-\sqrt{2x-3}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=2$일 때

최댓값 $-\sqrt{2\cdot 2-3}+1=0$,

$x=a$일 때 최솟값 $-\sqrt{2a-3}+1$

을 갖는다.

즉 $b=0$이고 $-\sqrt{2a-3}+1=-2$이므로

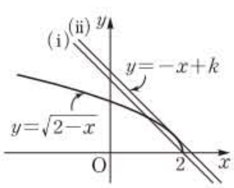
$\sqrt{2a-3}=3, \qquad 2a-3=9$

$\therefore a=6$

$\therefore a+b=6$

답 ③

0846 $y=\sqrt{2-x}=\sqrt{-(x-2)}$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때,

$0=-2+k \qquad \therefore k=2$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{2-x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$2-x=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2+(1-2k)x+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(1-2k)^2-4(k^2-2)=0$

$-4k+9=0 \qquad \therefore k=\frac{9}{4}$

(i), (ii)에서 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

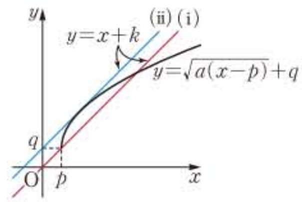
$2\le k<\frac{9}{4}$

답 $2\le k<\frac{9}{4}$

라쎈 특강

무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq 0)$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 위치 관계는 오른쪽 그림에서



① 직선이 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때

⇨ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② 직선이 (ii)이거나 (i)의 아래쪽에 있을 때

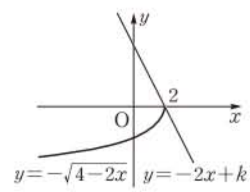
⇨ 한 점에서 만난다.

③ 직선이 (ii)의 위쪽에 있을 때 ⇨ 만나지 않는다.

0847 $y=-\sqrt{4-2x}$

$=-\sqrt{-2(x-2)}$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-2x+k$는 기울기가 -2이고 y절편이 k이다.



직선 $y=-2x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때,

$0=-4+k \qquad \therefore k=4$

따라서 함수 $y=-\sqrt{4-2x}$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 만나지 않으려면

$k>4$

이어야 하므로 자연수 k의 최솟값은 5이다.

답 ④

0848 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점 중 한 점의 x좌표가 4이므로 ┌ 직선 $y=x$ 위의 점이므로 y좌표도 4이다.

$\sqrt{4a}=4, \qquad 4a=16 \qquad \therefore a=4$ ⋯ ❶

따라서 함수 $y=\sqrt{ax+b}=\sqrt{4x+b}$의 그래프가 직선 $y=x$에 접하므로 $\sqrt{4x+b}=x$의 양변을 제곱하면

$4x+b=x^2 \qquad \therefore x^2-4x-b=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(-b)=0$

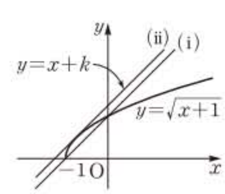
$4+b=0 \qquad \therefore b=-4$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=0$ ⋯ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0849 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1, 0)$을 지날 때,

$0=-1+k \quad \therefore k=1$

(ii) 직선 $y=x+k$가 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프에 접할 때,
$\sqrt{x+1}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x+1=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$

$-4k+5=0 \quad \therefore k=\dfrac{5}{4}$

(i), (ii)에서 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 한 점에서 만나려면

$k<1$ 또는 $k=\dfrac{5}{4}$

따라서 k의 값이 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0850 함수 $y=\sqrt{x-2}+1$의 치역이 $\{y|y\geq 1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\geq 1\}$이다.

$\therefore c=1$

$y=\sqrt{x-2}+1$에서 $\quad y-1=\sqrt{x-2}$

양변을 제곱하면 $\quad (y-1)^2=x-2$

$\therefore x=(y-1)^2+2$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=(x-1)^2+2=x^2-2x+3 \ (x\geq 1)$

따라서 $a=-2$, $b=3$이므로

$a+b+c=2$ 답 ⑤

0851 $f^{-1}(-1)=k$라 하면 $f(k)=-1$이므로

$2-\sqrt{k+1}=-1, \quad \sqrt{k+1}=3$

$k+1=9 \quad \therefore k=8$

$\therefore f^{-1}(-1)=8$ 답 8

다른 풀이 함수 $f(x)=2-\sqrt{x+1}$에서 $-\sqrt{x+1}\leq 0$이므로 치역은 $\{y|y\leq 2\}$

따라서 이 함수의 역함수의 정의역은 $\{x|x\leq 2\}$이다.

$y=2-\sqrt{x+1}$로 놓으면 $\quad \sqrt{x+1}=2-y$

양변을 제곱하면 $\quad x+1=(2-y)^2$

$\therefore x=(2-y)^2-1$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=(2-x)^2-1 \ (x\leq 2)$

즉 $f^{-1}(x)=(2-x)^2-1 \ (x\leq 2)$이므로

$f^{-1}(-1)=\{2-(-1)\}^2-1=8$

0852 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$\sqrt{2a+b}=1 \quad \therefore 2a+b=1$ …… ㉠

역함수의 그래프가 점 $(4, -3)$을 지나므로 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 점 $(-3, 4)$를 지난다. 즉

$\sqrt{-3a+b}=4 \quad \therefore -3a+b=16$ …… ㉡ ⋯➊

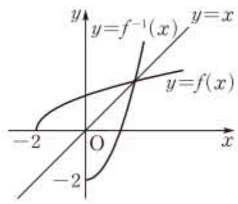
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-3$, $b=7$ ⋯➋

$\therefore ab=-21$ ⋯➌

답 -21

채점 기준	비율
➊ a, b에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	60 %
➋ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0853 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x+2}=x$의 양변을 제곱하면 $\quad x+2=x^2$

$x^2-x-2=0, \quad (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=2 \ (\because x\geq 0)$

따라서 교점의 좌표가 $(2, 2)$이므로 $\quad a=2$, $b=2$

$\therefore a+b=4$ 답 4

참고 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$의 치역이 $\{y|y\geq 0\}$이므로 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x|x\geq 0\}$이다. 따라서 두 그래프의 교점은 $x\geq 0$인 점에서 생긴다.

0854 $(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(5)=f^{-1}(5)$

$f^{-1}(5)=a$라 하면 $f(a)=5$이므로

$\sqrt{2a+1}=5, \quad 2a+1=25$

$\therefore a=12$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(5)=f^{-1}(5)=12$ 답 12

0855 $(f^{-1}\circ g^{-1})(-3)=f^{-1}(g^{-1}(-3))$

$g^{-1}(-3)=a$라 하면 $g(a)=-3$이므로

$-\sqrt{4-a}=-3, \quad 4-a=9$

$\therefore a=-5$

따라서 $g^{-1}(-3)=-5$이므로

$f^{-1}(g^{-1}(-3))=f^{-1}(-5)$

또 $f^{-1}(-5)=b$라 하면 $f(b)=-5$이므로

$-\sqrt{-3b-2}=-5, \quad -3b-2=25$

$\therefore b=-9$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1})(-3)=f^{-1}(-5)=-9$ 답 ②

0856 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(1)=(g^{-1}\circ f)(1)$
$=g^{-1}(f(1))$

$f(1)=\dfrac{1+5}{1+1}=3$이므로

$g^{-1}(f(1))=g^{-1}(3)$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$이므로

$\sqrt{2k-1}=3, \quad 2k-1=9$

$\therefore k=5$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=g^{-1}(3)=5$ 답 ⑤

0857 $g(1)=\sqrt{2-1}-4=-3$이므로

$(f^{-1}\circ g)(1)=f^{-1}(g(1))=f^{-1}(-3)$

$f^{-1}(-3)=k$라 하면 $f(k)=-3$에서

$$\frac{-4k-1}{k-2}=-3, \qquad -4k-1=-3k+6$$

$\therefore k=-7$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(1)=f^{-1}(-3)=-7$

$f(1)=\frac{-4-1}{1-2}=5$이므로

$(g^{-1}\circ f)(1)=g^{-1}(f(1))=g^{-1}(5)$

$g^{-1}(5)=l$이라 하면 $g(l)=5$에서

$\sqrt{2-l}-4=5, \qquad \sqrt{2-l}=9$

$2-l=81 \qquad \therefore l=-79$

$\therefore (g^{-1}\circ f)(1)=g^{-1}(5)=-79$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(1)-(g^{-1}\circ f)(1)=-7-(-79)$

$=72$

답 72

0858 전략• 무리식의 값이 실수가 되기 위해서는 근호 안에 있는 식의 값이 0 이상이어야 한다.

풀이 $4+x\geq 0$이므로 $\quad x\geq -4$ ...... ㉠

$6-3x\geq 0$이므로 $\quad x\leq 2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad -4\leq x\leq 2$

답 ②

0859 전략• 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq 0$이 성립하려면 $a>0$, $D\leq 0$이어야 한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2-kx+3}$의 값이 실수가 되려면 $kx^2-kx+3\geq 0$이어야 한다.

(i) $k=0$일 때,

$0\cdot x^2-0\cdot x+3=3\geq 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $k\neq 0$일 때,

$k>0$ ...... ㉠

이어야 하고 이차방정식 $kx^2-kx+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot k\cdot 3=k^2-12k\leq 0$

$k(k-12)\leq 0 \qquad \therefore 0\leq k\leq 12$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 0<k\leq 12$

(i), (ii)에서 $\quad 0\leq k\leq 12$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, $\cdots$, 12의 13개이다.

답 ④

0860 전략• 분모의 유리화를 이용한다.

풀이 $$\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$
$$=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}-(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$
$$=\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$=\sqrt{x+1}+\frac{\sqrt{x}}{x}$$

답 ④

0861 전략• 분모의 유리화를 이용하여 주어진 무리식을 간단히 한 후 $x+y$, xy의 값을 대입한다.

풀이 $x+y=6$, $xy=1$이므로

$$\frac{1}{2+\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{2-\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$
$$=\frac{(2-\sqrt{x}-\sqrt{y})+(2+\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\{2+(\sqrt{x}+\sqrt{y})\}\{2-(\sqrt{x}+\sqrt{y})\}}$$
$$=\frac{4}{2^2-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}$$
$$=\frac{4}{4-(x+y+2\sqrt{xy})}$$
$$=\frac{4}{4-(6+2)}=-1$$

답 ①

0862 전략• 함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c\ (a>0)$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\geq -\frac{b}{a}\right\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\leq c\}$이다.

풀이 $x+2\geq 0$이므로 $\qquad x\geq -2$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\{x\,|\,x\geq -2\}$이므로

$a=-2$

또 함수 $y=-\sqrt{x+2}-2$에서 $-\sqrt{x+2}\leq 0$이므로 치역은

$\{y\,|\,y\leq -2\} \qquad \therefore b=-2$

$\therefore ab=4$

답 4

0863 전략• 주어진 함수의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 나타낸다.

풀이 $y=\sqrt{3x-9}-4=\sqrt{3(x-3)}-4$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=3$, $n=-4$이므로

$m+n=-1$

답 ②

0864 전략• 평행이동과 대칭이동한 그래프의 식을 구한 후 일치하는 그래프의 식과 비교한다.

풀이 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x+4)+b}+c+3$

$y=\sqrt{a(x+4)+b}+c+3$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(-x+4)+b}+c+3$

$=\sqrt{-ax+4a+b}+c+3$

위의 함수의 그래프가 $y=\sqrt{-2x+9}+6$의 그래프와 일치하므로

$-a=-2$, $4a+b=9$, $c+3=6$

$\therefore a=2$, $b=1$, $c=3$

$\therefore a+b+c=6$

답 6

0865 전략• 무리함수 $y=\sqrt{5x+10}-1$의 그래프를 그려 본다.

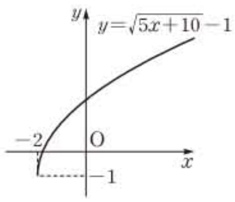
풀이 ㄱ. $5x+10\geq 0$이므로 $\qquad 5x\geq -10 \qquad \therefore x\geq -2$

즉 주어진 함수의 정의역은 $\qquad \{x\,|\,x\geq -2\}$

또 $\sqrt{5x+10}\geq 0$이므로 치역은 $\qquad \{y\,|\,y\geq -1\}$

ㄴ. $y=\sqrt{5x+10}-1=\sqrt{5(x+2)}-1$

이므로 $y=\sqrt{5x+10}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지난다.



ㄷ. $y=\sqrt{5x+10}-1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{5x+10}-1$

$\therefore y=-\sqrt{5x+10}+1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0866 전략 주어진 그래프가 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용한다.

풀이 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x-3)}-4$ ...... ㉠

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=\sqrt{-3a}-4,\quad \sqrt{-3a}=3,\quad -3a=9$

$\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-3(x-3)}-4=\sqrt{-3x+9}-4$

따라서 $b=9$, $c=-4$이므로

$abc=108$

답 ④

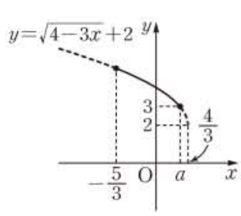
0867 전략 함수 $y=\sqrt{4-3x}+2$를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\sqrt{4-3x}+2=\sqrt{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}+2$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-\frac{5}{3}\le x\le a$에서

$y=\sqrt{4-3x}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-\frac{5}{3}$일 때 최댓값

$\sqrt{4-3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}+2=5,$

$x=a$일 때 최솟값 $\sqrt{4-3a}+2$

를 갖는다.

즉 $M=5$이고 $\sqrt{4-3a}+2=3$이므로

$\sqrt{4-3a}=1,\quad 4-3a=1$

$\therefore a=1$

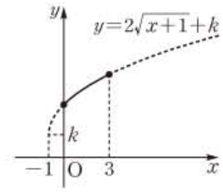
$\therefore a+M=6$

답 6

0868 전략 주어진 정의역에서 함수 $y=2\sqrt{x+1}+k$의 그래프를 그린다.

풀이 $y=2\sqrt{x+1}+k$의 그래프는 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le 3$에서 $y=2\sqrt{x+1}+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=3$일 때 최댓값

$2\sqrt{3+1}+k=4+k,$

$x=0$일 때 최솟값

$2\sqrt{0+1}+k=2+k$

를 갖는다.

즉 $M=4+k$, $m=2+k$이므로 $M+m=40$에서

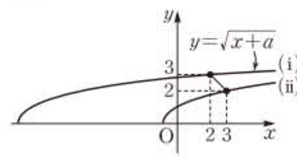
$(4+k)+(2+k)=40$

$2k=34\qquad \therefore k=17$

답 17

0869 전략 좌표평면에 무리함수 $y=\sqrt{x+a}$의 그래프를 나타낸 후 조건을 만족시키도록 그래프를 움직여 본다.

풀이 $y=\sqrt{x+a}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이다.



(i) $y=\sqrt{x+a}$의 그래프가 점 $(2,\ 3)$을 지날 때,

$3=\sqrt{2+a},\qquad 9=2+a$

$\therefore a=7$

(ii) $y=\sqrt{x+a}$의 그래프가 점 $(3,\ 2)$를 지날 때,

$2=\sqrt{3+a},\qquad 4=3+a$

$\therefore a=1$

(i), (ii)에서 $1\le a\le 7$이므로

$M=7,\ m=1$

$\therefore M+m=8$

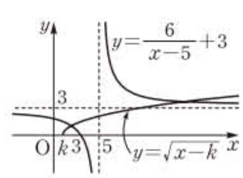
답 ⑤

0870 전략 주어진 유리함수의 그래프와 무리함수의 그래프를 그린 후 무리함수의 그래프를 움직여 본다.

풀이 유리함수 $y=\frac{6}{x-5}+3$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=5,\ y=3$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 두 곡선 $y=\frac{6}{x-5}+3$, $y=\sqrt{x-k}$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$k\le 3$

이어야 하므로 구하는 실수 k의 최댓값은

3

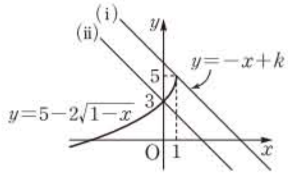
답 ①

참고 두 곡선 $y=\frac{6}{x-5}+3$, $y=\sqrt{x-k}$는 $x>5$에서 한 개의 교점을 가지므로 서로 다른 두 점에서 만나려면 $x<5$에서도 한 개의 교점을 가져야 한다. 이때 곡선 $y=\frac{6}{x-5}+3$의 x절편이 3이므로 곡선 $y=\sqrt{x-k}$가 시작하는 점의 x좌표인 k가 3보다 작거나 같아야 한다.

0871 전략• 주어진 무리함수의 그래프를 그린 후 직선 $y=-x+k$를 움직여 본다.

풀이 $y=5-2\sqrt{1-x}$

$=-2\sqrt{-(x-1)}+5$



이므로 이 함수의 그래프는 $y=-2\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이고 y절편은 3이다. 또 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.

(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1, 5)$를 지날 때,

$5=-1+k \qquad \therefore k=6$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 $(0, 3)$을 지날 때,

$3=0+k \qquad \therefore k=3$

(i), (ii)에서 직선 $y=-x+k$가 $y=5-2\sqrt{1-x}$의 그래프와 제1사분면에서 만나려면

$3<k\le6$ y축에서 만나는 경우는 제1사분면에서 만나지 않는다.

따라서 정수 k는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$4+5+6=15$

답 ③

0872 전략• x를 y에 대한 식으로 나타낸 후 x와 y를 서로 바꾼다.

풀이 함수 $y=-\sqrt{x+1}-3$에서 $-\sqrt{x+1}\le0$이므로 치역은

$\{y\,|\,y\le-3\}$

따라서 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\le-3\}$이다.

$y=-\sqrt{x+1}-3$에서 $\quad \sqrt{x+1}=-y-3$

양변을 제곱하면 $\quad x+1=(-y-3)^2$

$\therefore x=(-y-3)^2-1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=(-x-3)^2-1$

$=x^2+6x+8 \ (x\le-3)$

답 ④

0873 전략• $f^{-1}(m)=n$이면 $f(n)=m$임을 이용한다.

풀이 $f(3)=4$이므로 $\quad \sqrt{3a+b}+3=4$

$\sqrt{3a+b}=1 \qquad \therefore 3a+b=1$ ······ ㉠

$g(5)=0$에서 $f(0)=5$이므로 $\quad \sqrt{b}+3=5$

$\sqrt{b}=2 \qquad \therefore b=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad 3a+4=1$

$3a=-3 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore ab=-4$

답 -4

0874 전략• $f^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ f)^{-1}$임을 이용한다.

풀이 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=(f\circ f)^{-1}(a)=16$에서

$(f\circ f)(16)=a$

이때 $f(16)=2-\sqrt{16}=-2$이므로

$a=(f\circ f)(16)=f(f(16))=f(-2)$

$=2+\sqrt{-2\cdot(-2)}=4$

답 4

다른 풀이 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=f^{-1}(f^{-1}(a))=16$이므로

$f(16)=f^{-1}(a)$

이때 $f(16)=2-\sqrt{16}=-2$이므로

$f^{-1}(a)=-2$

$\therefore a=f(-2)=2+\sqrt{-2\cdot(-2)}=4$

0875 전략• 함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c\ (a>0)$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\ge-\frac{b}{a}\right\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\le c\}$이다.

풀이 $ax-6\ge0$이므로 $\qquad ax\ge6$

이때 $a<0$이면 $x\le\frac{6}{a}$이므로 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,x\le\frac{6}{a}\right\}$이다.

따라서 $a>0$이므로 $\qquad x\ge\frac{6}{a}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,x\ge\frac{6}{a}\right\}$이므로

$\frac{6}{a}=3 \qquad \therefore a=2$ ··· ❶

따라서 함수 $y=-\sqrt{2x-6}+2$에서 $-\sqrt{2x-6}\le0$이므로 치역은

$\{y\,|\,y\le2\}$ ··· ❷

답 $\{y\,|\,y\le2\}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ 치역을 구할 수 있다.	40 %

0876 전략• 주어진 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용한다.

풀이 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=\sqrt{3(x+2)}-1$ ··· ❶

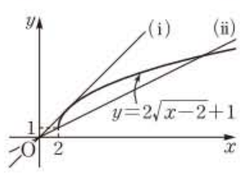
$\therefore f(1)=\sqrt{3\cdot3}-1=2$ ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0877 전략• 무리함수의 그래프를 그린 후 직선 $y=ax$를 움직여 본다.

풀이 $n(A\cap B)=2$이므로 함수 $y=2\sqrt{x-2}+1$의 그래프와 직선 $y=ax$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. ··· ❶



이때 $y=2\sqrt{x-2}+1$의 그래프는 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=ax$는 기울기가 a이고 y절편이 0이다.

(i) 직선 $y=ax$가 $y=2\sqrt{x-2}+1$의 그래프에 접할 때,

직선의 기울기는 양수이어야 하고 $ax=2\sqrt{x-2}+1$에서

$ax-1=2\sqrt{x-2}$의 양변을 제곱하면

$a^2x^2-2ax+1=4(x-2)$

$\therefore a^2x^2-2(a+2)x+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-9a^2=0$

$-8a^2+4a+4=0$, $2a^2-a-1=0$

$(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$) ⋯ ❷

(ii) 직선 $y=ax$가 점 (2, 1)을 지날 때,

$1=2a$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 $y=2\sqrt{x-2}+1$의 그래프와 직선 $y=ax$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{1}{2}\le a<1$ ⋯ ❹

답 $\frac{1}{2}\le a<1$

채점 기준	비율
❶ $n(A\cap B)=2$의 의미를 알 수 있다.	20 %
❷ 직선 $y=ax$가 $y=2\sqrt{x-2}+1$의 그래프에 접할 때의 a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 직선 $y=ax$가 점 (2, 1)을 지날 때의 a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

0878 전략 함수 $y=f(x)$의 정의역이 $\{x|x\ge p\}$, 치역이 $\{y|y\le q\}$이면 그 역함수의 정의역은 $\{x|x\le q\}$, 치역은 $\{y|y\ge p\}$이다.

풀이 $x+a\ge 0$이므로 $x\ge -a$

즉 $y=f(x)$의 정의역이 $\{x|x\ge -a\}$이므로

$-a=5$ $\therefore a=-5$ ⋯ ❶

따라서 $f(x)=-\sqrt{x-5}+b$에서 $-\sqrt{x-5}\le 0$이므로 치역은 $\{y|y\le b\}$

한편 $y=g(x)$의 정의역이 $\{x|x\le 2\}$이므로 $y=f(x)$의 치역은 $\{y|y\le 2\}$이다.

$\therefore b=2$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

III. 순열과 조합

07 순열

0879 $5+2=7$ 답 7

0880 $12+10=22$ 답 22

0881 6의 배수가 적힌 공은 6, 12, 18의 3개

7의 배수가 적힌 공은 7, 14의 2개

두 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는

$3+2=5$ 답 5

0882 4의 배수가 적힌 공은 4, 8, 12, 16, 20의 5개

5의 배수가 적힌 공은 5, 10, 15, 20의 4개

4와 5의 공배수가 적힌 공은 20의 1개

20의 배수

따라서 구하는 경우의 수는

$5+4-1=8$ 답 8

라쎈 특강

두 개 이상의 자연수의 공통인 배수를 공배수라 한다. 이때 두 개 이상의 자연수의 공배수는 모두 그들의 최소공배수의 배수이고, 서로소인 두 자연수의 최소공배수는 두 자연수의 곱과 같다.

0883 $7\cdot 8=56$ 답 56

0884 첫 번째에 소수의 눈이 나오는 경우는

2, 3, 5의 3가지

두 번째에 짝수의 눈이 나오는 경우는 2, 4, 6의 3가지

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot 3=9$ 답 9

0885 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 3, 5, 7, 9의 5개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 2, 4, 8의 4개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$5\cdot 4=20$ 답 20

0886 (i) A 지점에서 B 지점을 거쳐 C 지점으로 가는 경우의 수는

$2\cdot 3=6$

(ii) A 지점에서 B 지점을 거치지 않고 C 지점으로 가는 경우의 수는

1

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6+1=7$ 답 7

0887 ${}_4P_2=4\cdot 3=12$ 답 12

0888 답 1

0889 답 5

0890 ${}_3P_3=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

0891 $3!=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

0892 $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ 답 120

0893 답 1 **0894** 답 1

0895 ${}_nP_2=n(n-1)$이므로

$n(n-1)=56=8\cdot7$ $\therefore n=8$ 답 8

0896 ${}_nP_n=n!$이므로

$n!=24=4\cdot3\cdot2\cdot1$ $\therefore n=4$ 답 4

0897 답 1

참고 ${}_nP_r=n$이면 $r=1$이다.

0898 답 0

참고 ${}_nP_r=1$이면 $r=0$ 또는 $n=1$이다.

0899 $360=6\cdot5\cdot4\cdot3$이므로 ${}_6P_4=360$

$\therefore r=4$ 답 4

0900 $336=8\cdot7\cdot6$이므로 ${}_8P_3=336$

$\therefore r=3$ 답 3

0901 ${}_{10}P_4=\dfrac{10!}{(10-4)!}=\dfrac{10!}{6!}$ $\therefore \square=6$ 답 6

0902 ${}_7P_{\square}=\dfrac{7!}{(7-\square)!}=\dfrac{7!}{2!}$이므로

$7-\square=2$ $\therefore \square=5$ 답 5

0903 4장의 카드에서 3장을 뽑는 순열의 수는

${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24$ 답 24

0904 10명의 학생 중에서 2명을 뽑는 순열의 수는

${}_{10}P_2=10\cdot9=90$ 답 90

0905 $6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ 답 720

0906 아버지를 제외한 나머지 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

0907 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 5가 되는 경우는

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

(ii) 눈의 수의 합이 6이 되는 경우는

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지

두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$4+5=9$ 답 ④

0908 1부터 34까지의 자연수 중에서 소수는

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31의 11개

8의 배수는

8, 16, 24, 32의 4개

두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$11+4=15$ 답 15

0909 정십이면체를 두 번 던질 때 바닥에 오는 면에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 두 수의 합이 20인 경우는

(8, 12), (9, 11), (10, 10), (11, 9), (12, 8)의 5가지

(ii) 두 수의 합이 21인 경우는

(9, 12), (10, 11), (11, 10), (12, 9)의 4가지

(iii) 두 수의 합이 22인 경우는

(10, 12), (11, 11), (12, 10)의 3가지

(iv) 두 수의 합이 23인 경우는

(11, 12), (12, 11)의 2가지

(v) 두 수의 합이 24인 경우는

(12, 12)의 1가지 ··· ❶

이상에서 구하는 경우의 수는

$5+4+3+2+1=15$ ··· ❷

답 15

채점 기준	비율
❶ 바닥에 오는 면에 적힌 수의 합이 20 이상인 경우의 순서쌍을 구할 수 있다.	70 %
❷ 바닥에 오는 면에 적힌 수의 합이 20 이상인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %

0910 1부터 100까지의 자연수 중에서 4의 배수는 25개, 6의 배수는 16개, $\underbrace{\text{4와 6의 공배수}}_{\text{12의 배수}}$는 8개이므로 4의 배수 또는 6의 배수를 택하는 경우의 수는

$25+16-8=33$ 답 ①

0911 $36=2^2\times3^2$이므로 36과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수이다.

36개의 공 중에서 2의 배수가 적힌 공은 18개, 3의 배수가 적힌 공은 12개, $\underbrace{\text{2와 3의 공배수}}_{\text{6의 배수}}$가 적힌 공은 6개이므로 2의 배수 또는 3의 배수가 적힌 공의 개수는

$18+12-6=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $36-24=12$ 답 12

0912 모든 원소의 곱이 6의 배수인 집합은 3을 반드시 원소로 갖고, 2 또는 4를 원소로 갖는다.

(i) 2, 3을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

(ii) 3, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

(iii) 2, 3, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

이상에서 구하는 부분집합의 개수는

$8+8-4=12$ 답 ②

다른 풀이 (i) 3을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$

(ii) 3을 반드시 원소로 갖고 2, 4를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 $2^{5-1-2}=2^2=4$

(i), (ii)에서 구하는 부분집합의 개수는 $16-4=12$

라쎈 특강

부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

① 집합 A의 부분집합의 개수: 2^n

② 집합 A의 특정한 원소 r $(r<n)$개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수: 2^{n-r}

③ 집합 A의 특정한 원소 k $(k<n)$개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수: 2^{n-k}

0913 (i) $x=1$일 때,

$y+z=6$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(1, 1, 5), (1, 2, 4), (1, 3, 3), (1, 4, 2), (1, 5, 1)$의 5개

(ii) $x=2$일 때,

$y+z=4$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1)$의 3개

(iii) $x=3$일 때,

$y+z=2$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(3, 1, 1)$의 1개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+3+1=9$ 답 9

0914 x, y가 자연수이므로 $x+3y\le8$을 만족시키는 경우는

$x+3y=4$, $x+3y=5$, $x+3y=6$, $x+3y=7$, $x+3y=8$

(i) $x+3y=4$인 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$의 1개

(ii) $x+3y=5$인 순서쌍 (x, y)는 $(2, 1)$의 1개

(iii) $x+3y=6$인 순서쌍 (x, y)는 $(3, 1)$의 1개

(iv) $x+3y=7$인 순서쌍 (x, y)는 $(4, 1), (1, 2)$의 2개

(v) $x+3y=8$인 순서쌍 (x, y)는 $(5, 1), (2, 2)$의 2개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+1+1+2+2=7$ 답 ⑤

다른 풀이 (i) $y=1$일 때,

$x+3\le8$, 즉 $x\le5$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)$의 5개

(ii) $y=2$일 때,

$x+6\le8$, 즉 $x\le2$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 2), (2, 2)$의 2개

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $5+2=7$

0915 100원, 200원, 400원짜리 초콜릿을 각각 x개, y개, z개 산다고 하면

$100x+200y+400z=1500$

$\therefore x+2y+4z=15$ (단, x, y, z는 자연수)

(i) $z=1$일 때,

$x+2y=11$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(9, 1, 1), (7, 2, 1), (5, 3, 1), (3, 4, 1), (1, 5, 1)$의 5개

(ii) $z=2$일 때,

$x+2y=7$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(5, 1, 2), (3, 2, 2), (1, 3, 2)$의 3개

(iii) $z=3$일 때,

$x+2y=3$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(1, 1, 3)$의 1개

이상에서 구하는 경우의 수는 $5+3+1=9$ 답 9

0916 $|a-b|\le1$에서

$|a-b|=0$ 또는 $|a-b|=1$ ❶

(i) $|a-b|=0$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$의 6개

(ii) $|a-b|=1$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)$의 10개 ❷

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$6+10=16$ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ $\lvert a-b\rvert$의 값이 될 수 있는 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\lvert a-b\rvert$의 값에 따른 순서쌍 (a, b)의 개수를 각각 구할 수 있다.	60 %
❸ 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0917 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 3, 5, 7, 9의 5개

십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

2, 3, 5, 7의 4개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0, 2, 4, 6, 8의 5개

따라서 구하는 자연수의 개수는 $5\cdot4\cdot5=100$ 답 100

0918 $(x+y+z)(a+b+c+d)$를 전개할 때, x, y, z에 곱해지는 항이 각각 a, b, c, d의 4개이므로 항의 개수는

$3\cdot4=12$ 답 ②

0919 정의역 X의 원소 1, 2에 각각 대응시킬 수 있는 공역 Y의 원소는 4, 5, 6의 3개이므로 X에서 Y로의 함수의 개수는

$3\cdot3=9$ 답 ③

0920 인문학, 사회 과학 과목의 강좌를 수강하는 경우의 수는

$4\cdot3=12$

인문학, 자연 과학 과목의 강좌를 수강하는 경우의 수는

$4\cdot5=20$

사회 과학, 자연 과학 과목의 강좌를 수강하는 경우의 수는

$3\cdot5=15$ ⋯ ❶

따라서 구하는 경우의 수는

$12+20+15=47$ ⋯ ❷

답 47

채점 기준	비율
❶ 경우를 나누어 2개의 강좌를 수강하는 경우의 수를 각각 구할 수 있다.	70 %
❷ 서로 다른 과목의 2개의 강좌를 수강하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %

0921 1부터 99까지의 자연수 중에서 어느 자리의 숫자에도 3, 6, 9가 포함되지 않은 수는 각 자리의 숫자가 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8만으로 이루어져야 한다. 따라서 구하는 자연수의 개수는

$7\cdot7\underbrace{-1}_{\text{00인 경우는 제외한다.}}=48$ 답 48

다른 풀이 (i) 한 자리 자연수는

1, 2, 4, 5, 7, 8의 6개

(ii) 두 자리 자연수는

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 4, 5, 7, 8의 6개이고 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8의 7개이므로 그 개수는

$6\cdot7=42$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+42=48$

0922 $a+b+ab$가 홀수이려면

$\underbrace{a\text{는 짝수, } b\text{는 홀수}}_{ab\text{는 짝수}}$ 또는 $\underbrace{a\text{는 홀수, } b\text{는 짝수}}_{ab\text{는 짝수}}$

또는 $\underbrace{a, b\text{가 모두 홀수}}_{ab\text{는 홀수}}$

이어야 한다. ⋯ ❶

(i) a는 짝수, b는 홀수일 때,

A 주머니에서 $\underbrace{\text{짝수}}_{2,\,4,\,6}$가 적힌 공을 꺼내고 B 주머니에서 $\underbrace{\text{홀수}}_{1,\,3,\,5}$가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는

$3\cdot3=9$

(ii) a는 홀수, b는 짝수일 때,

A 주머니에서 홀수가 적힌 공을 꺼내고 B 주머니에서 짝수가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는

$3\cdot3=9$

(iii) a, b가 모두 홀수일 때,

두 주머니 A, B에서 모두 홀수가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는 $3\cdot3=9$ ⋯ ❷

이상에서 구하는 경우의 수는

$9+9+9=27$ ⋯ ❸

답 27

채점 기준	비율
❶ $a+b+ab$가 홀수인 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 조건에 따른 경우의 수를 각각 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b+ab$가 홀수인 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

참고 a, b가 모두 짝수인 경우에는 ab도 짝수이므로 $a+b+ab$가 짝수이다.

0923 $54=2\cdot3^3$이므로 54의 양의 약수의 개수는

$(1+1)(3+1)=8$ $\therefore a=8$

$90=2\cdot3^2\cdot5$이므로 90의 양의 약수의 개수는

$(1+1)(2+1)(1+1)=12$ $\therefore b=12$

$\therefore a+b=20$ 답 20

0924 ① $3^2\times8=2^3\times3^2$이므로 양의 약수의 개수는

$(3+1)(2+1)=12$

② $3^2\times10=2\times3^2\times5$이므로 양의 약수의 개수는

$(1+1)(2+1)(1+1)=12$

③ $3^2\times12=2^2\times3^3$이므로 양의 약수의 개수는

$(2+1)(3+1)=12$

④ $3^2\times21=3^3\times7$이므로 양의 약수의 개수는

$(3+1)(1+1)=8$

⑤ $3^2\times35=3^2\times5\times7$이므로 양의 약수의 개수는

$(2+1)(1+1)(1+1)=12$

답 ④

0925 $168=2^3\cdot3\cdot7$, $252=2^2\cdot3^2\cdot7$이므로 두 수의 최대공약수는 $2^2\cdot3\cdot7$

168과 252의 양의 공약수의 개수는 $2^2\cdot3\cdot7$의 양의 약수의 개수와 같으므로

$(2+1)(1+1)(1+1)=12$ 답 ⑤

0926 $720=2^4\cdot3^2\cdot5$이므로 720의 양의 약수의 개수는

$(4+1)(2+1)(1+1)=30$ ⋯ ❶

이 중에서 홀수의 개수는 $3^2\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같으므로

$(2+1)(1+1)=6$ ⋯ ❷

따라서 구하는 짝수의 개수는

$30-6=24$ ⋯ ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ 720의 양의 약수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 720의 양의 약수 중 홀수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 720의 양의 약수 중 짝수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0927 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개의 2가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$2\cdot3\cdot4-1=23$ 답 23

0928 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, 1500원의 4가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은 금액이 중복되는 경우가 없다.

0원, 100원, 200원, 300원의 4가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원의 2가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$4\cdot4\cdot2-1=31$ 답 31

0929 (i) 지불할 수 있는 방법의 수

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$3\cdot4\cdot4-1=47$ $\therefore a=47$ ···➊

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과 500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액이 중복된다.

따라서 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 7개, 100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, ⋯, 3500원의 8가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$8\cdot4-1=31$ $\therefore b=31$ ···➋

(i), (ii)에서 $a-b=16$ ···➌

답 16

채점 기준	비율
➊ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
➌ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0930 (i) A → B → C로 가는 경우의 수는

$2\cdot4=8$

(ii) A → D → C로 가는 경우의 수는

$3\cdot2=6$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$8+6=14$ 답 ③

0931 (i) 매표소 → 정상 → 약수터 → 매표소로 가는 경우의 수는

$3\cdot2\cdot4=24$

(ii) 매표소 → 약수터 → 정상 → 매표소로 가는 경우의 수는

$4\cdot2\cdot3=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$24+24=48$ 답 ③

0932 (i) 공원 → A → 서점으로 가는 경우의 수는

$3\cdot2=6$

(ii) 공원 → B → 서점으로 가는 경우의 수는

$2\cdot1=2$ ···➊

(iii) 공원 → A → B → 서점으로 가는 경우의 수는

$3\cdot2\cdot1=6$

(iv) 공원 → B → A → 서점으로 가는 경우의 수는

$2\cdot2\cdot2=8$ ···➋

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+2+6+8=22$ ···➌

답 22

채점 기준	비율
➊ A, B 중 한 지점만 지나는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
➋ A, B 지점을 모두 지나는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
➌ 공원에서 서점으로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0933 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ 답 48

0934 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4\cdot3\cdot3=36$ 답 ⑤

0935 C에 칠할 수 있는 색은 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 1가지, B에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 1가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1=12$ 답 ③

0936 (i) A와 C가 같은 색인 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 칠하는 경우의 수는

$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$ ···➊

(ii) A와 C가 다른 색인 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 칠하는 경우의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ ···➋

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

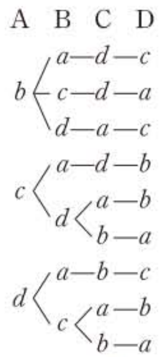
$36+48=84$ ⋯ ❸

답 84

채점 기준	비율
❶ A와 C에 같은 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A와 C에 다른 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

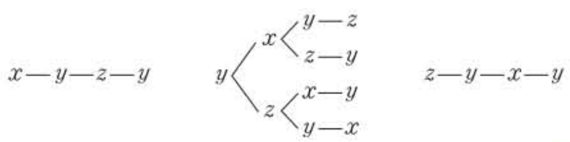
0937 모든 자물쇠가 열리지 않는 경우는 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 9이다.



답 ②

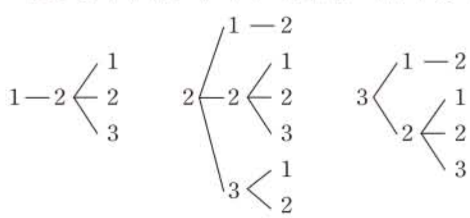
0938 조건을 만족시키도록 네 개의 문자를 일렬로 나열하면 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 6이다.

답 6

0939 조건을 만족시키는 세 자리 자연수는 다음과 같다.



따라서 구하는 자연수의 개수는 13이다.

답 13

0940 구하는 경우의 수는 10명의 회원 중에서 3명을 택하여 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

${}_{10}P_3=10\cdot9\cdot8=720$

답 ⑤

0941 구하는 경우의 수는 6곡의 노래 중에서 4곡을 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_6P_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$

답 360

0942 앞줄에 상장을 진열하는 경우의 수는 $3!=6$

뒷줄에 트로피를 진열하는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$

답 ③

0943 ${}_nP_2=72$이므로

$n(n-1)=72=9\cdot8 \quad \therefore n=9$

답 9

0944 선생님 3명을 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

선생님 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot6=720$

답 ①

0945 A와 D를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

A와 D가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot2=12$

답 12

0946 4쌍의 부부를 각각 한 사람으로 생각하여 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$4!=24$

4쌍의 부부가 각각 부부끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot16=384$

답 ④

0947 배우 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$2!=2$

배우들 사이 및 양 끝의 3개의 자리에 가수 2명을 세우는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot6=12$

답 ②

0948 4개의 모음 o, u, i, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$ ⋯ ❶

모음들 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 3개의 자음 t, s, d를 나열하는 경우의 수는

${}_5P_3=60$ ⋯ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot60=1440$ ⋯ ❸

답 1440

채점 기준	비율
❶ 모음을 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 자음을 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자음끼리 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0949 3개의 의자에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 4개이다.
따라서 빈 의자들 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 학생이 앉은 의자 3개를 놓으면 되므로 구하는 경우의 수는

$_5P_3=60$ 답 60

참고 의자가 모두 똑같으므로 빈 의자 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 1이다.

0950 A와 B를 한 묶음으로 생각하여 D와 E를 제외한 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

3개의 문자의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 D, E를 나열하는 경우의 수는

$_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot2\cdot12=144$ 답 ③

0951 (i) 남자, 여자의 순서로 번갈아 세우는 경우의 수는

$3!\cdot3!=36$

(ii) 여자, 남자의 순서로 번갈아 세우는 경우의 수는

$3!\cdot3!=36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36+36=72$ 답 72

0952 빨간색 꽃은 4송이, 노란색 꽃은 3송이이므로 빨간색 꽃 4송이를 일렬로 심은 뒤 그 사이사이에 노란색 꽃 3송이를 심으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4!\cdot3!=24\cdot6=144$ 답 ③

0953 (i) 맨 앞자리에 짝수가 오는 경우

짝수 2, 4, 6, 8을 일렬로 나열한 후 그 사이사이에 홀수 1, 3, 5, 7, 9에서 3개를 택하여 나열하면 된다.

따라서 이 경우의 수는

$4!\cdot{_5P_3}=24\cdot60=1440$ ··· ❶

(ii) 맨 앞자리에 홀수가 오는 경우

홀수 1, 3, 5, 7, 9에서 4개를 택하여 일렬로 나열한 후 그 사이사이에 짝수 2, 4, 6, 8에서 3개를 택하여 나열하면 된다.

따라서 이 경우의 수는

$_5P_4\cdot{_4P_3}=120\cdot24=2880$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$1440+2880=4320$ ··· ❸

답 4320

채점 기준	비율
❶ 맨 앞자리에 짝수가 오도록 자연수를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 맨 앞자리에 홀수가 오도록 자연수를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 짝수와 홀수가 번갈아 나타나도록 자연수를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0954 남학생은 4명이므로 양 끝에 남학생 2명을 세우는 경우의 수는

$_4P_2=12$

양 끝의 남학생 2명을 제외한 나머지 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\cdot24=288$ 답 ③

0955 구하는 경우의 수는 A를 제외한 나머지 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

A를 맨 뒤에 나열한 후 2개를 나열

$_4P_2=12$ 답 12

0956 부모님 중 운전석에 앉을 사람을 정하는 경우의 수는

$_2P_1=2$

나머지 5명이 앉을 좌석을 정하는 경우의 수는

$_6P_5=720$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot720=1440$ 답 ⑤

0957 모음 i, e를 세 군데의 홀수 번째 자리 중 두 군데에 나열하는 경우의 수는

$_3P_2=6$ ··· ❶

나머지 세 자리에 자음 3개를 나열하는 경우의 수는

$3!=6$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot6=36$ ··· ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ 모음을 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 자음을 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 문자를 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0958 지수와 미영이 사이에 2명이 앉도록 묶음을 만드는 경우의 수는

지수와 미영이가 자리를 바꾸는 경우의 수

$2!\cdot{_4P_2}=24$ 지수와 미영이를 제외한 4명 중에서 2명을 앉히는 경우의 수

이 묶음과 나머지 2명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot6=144$ 답 ④

0959 d와 m 사이에 3개의 문자가 오도록 묶음을 만드는 경우의 수는

$2!\cdot{_5P_3}=120$

이 묶음과 나머지 2개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot6=720$ 답 ⑤

0960 (i) A와 B 사이에 2개의 문자가 오도록 묶음을 만드는 경우의 수는

$2!\cdot {}_3P_2=12$

이 묶음과 나머지 1개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 경우의 수는

$12\cdot 2=24$ ··· ❶

(ii) A와 B 사이에 3개의 문자가 오도록 나열하는 경우의 수는

$2!\cdot {}_3P_3=12$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$24+12=36$ ··· ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ A와 B 사이에 2개의 문자가 오도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A와 B 사이에 3개의 문자가 오도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ A와 B 사이에 2개 이상의 문자가 오도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0961 5권의 책을 나란히 꽂는 경우의 수는

$5!=120$

양 끝에 만화책을 꽂는 경우의 수는

${}_3P_2\cdot 3!=36$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-36=84$

답 ④

0962 (1) 구하는 경우의 수는 8명의 선수 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

${}_8P_2=56$ ··· ❶

(2) 구하는 경우의 수는 농구 선수 3명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

${}_3P_2=6$ ··· ❷

(3) 구하는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 대표, 부대표를 모두 농구 선수로 뽑는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$56-6=50$ ··· ❸

답 (1) 56 (2) 6 (3) 50

채점 기준	비율
❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 모두 농구 선수로 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 적어도 한 명은 야구 선수로 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %

0963 7명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$7!=5040$

여학생끼리 이웃하지 않게 세우는 경우의 수는 남학생 4명을 일렬로 세우고 남학생들 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 여학생 3명을 세우는 경우의 수와 같으므로

$4!\cdot {}_5P_3=1440$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-1440=3600$

답 3600

0964 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

A와 B 사이에 문자가 없도록 나열하는 경우의 수는 A와 B를 이웃하게 나열하는 경우의 수와 같다.

A와 B를 하나의 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

A와 B의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉 A와 B를 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$120\cdot 2=240$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-240=480$

답 ④

0965 일의 자리의 숫자가 홀수이어야 하므로 일의 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는

${}_2P_1=2$

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리의 숫자를 제외한 3개이다.

또 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_3P_2=6$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$2\cdot 3\cdot 6=36$

답 ①

0966 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 2, 4, 6, 8의 4개이다.

십의 자리와 일의 자리에는 백의 자리의 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$4\cdot 12=48$

답 48

0967 7개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

${}_7P_3=210$

백의 자리와 일의 자리의 숫자가 모두 홀수인 자연수의 개수는

${}_4P_2\cdot 5=60$ 백의 자리와 일의 자리에는 1, 3, 5, 7 중 2개를 택하여 나열한다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$210-60=150$

답 ④

다른 풀이 (i) 백의 자리의 숫자는 짝수, 일의 자리의 숫자는 홀수인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6의 3개

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7의 4개

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 5개이므로 자연수의 개수는

$3\cdot 4\cdot 5=60$

(ii) 백의 자리의 숫자는 홀수, 일의 자리의 숫자는 짝수인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7의 4개

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6의 3개

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 5개이므로 자연수의 개수는

$4\cdot3\cdot5=60$

(iii) 백의 자리와 일의 자리의 숫자가 모두 짝수인 경우

백의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6의 3개이므로 그 경우의 수는

${}_3P_2=6$

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 5개이므로 자연수의 개수는

$6\cdot5=30$

이상에서 구하는 자연수의 개수는 $60+60+30=150$

0968 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

일의 자리의 숫자가 0인 네 자리 자연수의 개수는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5P_3=60$ ⋯ ❶

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 1, 2, 3, 4의 4개이다.

또 백의 자리, 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 일의 자리의 숫자가 5인 네 자리 자연수의 개수는

$4\cdot12=48$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 5의 배수의 개수는

$60+48=108$ ⋯ ❸

답 108

채점 기준	비율
❶ 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0969 a로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

ba로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bc로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bd로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bea로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

bec로 시작하는 것은 순서대로 $becad$, $becda$의 2개

따라서 $abcde$부터 $becda$까지의 개수는

$24+6+6+6+2+2=46$

이므로 $becda$는 46번째에 온다. 답 46번째

0970 320보다 작은 자연수는 1□□, 2□□, 30□, 31□ 꼴이다.

1□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_2=20$

2□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_2=20$ ⋯ ❶

30□ 꼴인 자연수의 개수는 4

31□ 꼴인 자연수의 개수는 4 ⋯ ❷

따라서 구하는 자연수의 개수는

$20+20+4+4=48$ ⋯ ❸

답 48

채점 기준	비율
❶ 1□□, 2□□ 꼴인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 30□, 31□ 꼴인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 320보다 작은 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0971 8□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

6□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

48□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

따라서 8642부터 4826까지의 자연수의 개수는

$6+6+2=14$

이므로 4682, 4628, ⋯에서 4628은 16번째로 큰 수이다.

답 ②

참고 4628이 몇 번째로 큰 수인지 묻고 있으므로 작은 수가 아닌 큰 수부터 차례대로 개수를 구해야 한다.

0972 a, n, s, w, e, r를 사전식으로 나열하면 a, e, n, r, s, w의 순이다.

a로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$

e로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$

na로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

ne로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

nra로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

따라서 aenrsw부터 nrawse까지의 개수는

nra로 시작하는 것 중 제일 마지막

$120+120+24+24+6=294$

이므로 295번째에 오는 것은 nre로 시작하는 것 중 제일 처음의 것이다. ∴ nreasw 답 ③

0973 전략 원판 A가 가리키는 수에 따라 경우를 나누어 생각한다.

풀이 (i) $a=2$일 때,

$a<b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 3)$, $(2, 5)$, $(2, 8)$의 3개

(ii) $a=4$일 때,

$a<b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(4, 5)$, $(4, 8)$의 2개

(iii) $a=7$일 때,

$a<b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(7, 8)$의 1개

이상에서 구하는 경우의 수는

$3+2+1=6$ 답 6

다른 풀이 (i) $b=2$일 때,

$a<b$를 만족시키는 a의 값은 없다.

(ii) $b=3$일 때,

$a<b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 3)$의 1개

(iii) $b=5$일 때,

$a<b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 5)$, $(4, 5)$의 2개

(iv) $b=8$일 때,

$a<b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 8)$, $(4, 8)$, $(7, 8)$의 3개

이상에서 구하는 경우의 수는

$1+2+3=6$

0974 전략 먼저 3 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수를 구한다.

풀이 1부터 50까지의 자연수 중에서 3의 배수는 16개, 5의 배수는 10개, 3과 5의 공배수는 3개이므로 3 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수는 15의 배수

$16+10-3=23$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$50-23=27$

답 ④

0975 전략 펜의 개수를 x, 노트의 권수를 y로 놓고 부등식을 세운다.

풀이 500원짜리 펜을 x개, 1000원짜리 노트를 y권 산다고 하면

$0<500x+1000y\le 2000$ 적어도 1개는 구매해야 한다.

$\therefore 0<x+2y\le 4$ (단, x, y는 음이 아닌 정수)

따라서

$x+2y=1$ 또는 $x+2y=2$ 또는 $x+2y=3$ 또는 $x+2y=4$

이다.

(i) $x+2y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(1, 0)$의 1개

(ii) $x+2y=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(0, 1)$, $(2, 0)$의 2개

(iii) $x+2y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1)$, $(3, 0)$의 2개

(iv) $x+2y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(0, 2)$, $(2, 1)$, $(4, 0)$의 3개

이상에서 구하는 경우의 수는

$1+2+2+3=8$

답 ③

0976 전략 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 $3\cdot n\cdot 5=60$이므로 $n=4$

답 4

0977 전략 각 항의 문자가 모두 다를 때, 전개식의 항의 개수는 각 다항식의 항의 개수의 곱과 같음을 이용한다.

풀이 $(x+y+z+w)(a+b+c)(p+q)$의 전개식에서 a, p를 포함하지 않는 항의 개수는 $(x+y+z+w)(b+c)q$의 전개식의 항과 같다.

$4\cdot 2\cdot 1=8$

답 ⑤

0978 전략 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 것의 개수를 각각 구하여 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 $x+f(x)\ge 4$에서

(i) $x=1$일 때,

$1+f(1)\ge 4$이므로 $f(1)\ge 3$

따라서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 3, 4의 2개이다.

(ii) $x=2$일 때,

$2+f(2)\ge 4$이므로 $f(2)\ge 2$

따라서 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4의 3개이다.

(iii) $x=3$일 때,

$3+f(3)\ge 4$이므로 $f(3)\ge 1$

따라서 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

(iv) $x=4$일 때,

$4+f(4)\ge 4$이므로 $f(4)\ge 0$

따라서 $f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$2\cdot 3\cdot 4\cdot 4=96$

답 96

0979 전략 $N=x^a y^b z^c$ (x, y, z는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수)의 양의 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)(c+1)$이다.

풀이 $2^3\times 3^3\times 5^n$의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(3+1)(n+1)=16(n+1)$

따라서 $16(n+1)=48$이므로 $n+1=3$

$\therefore n=2$

답 2

0980 전략 약수의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 $1\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5=2\cdot 3^3\cdot 5^2$

따라서 뽑은 카드에 적힌 숫자를 모두 곱한 값이 될 수 있는 수는 $2\cdot 3^3\cdot 5^2$의 양의 약수 중에서 1을 제외한 수이므로 구하는 수의 개수는 2장 이상의 카드를 뽑는다.

$(1+1)(3+1)(2+1)-1=23$

답 ①

0981 전략 각각의 추마다 이용하거나 이용하지 않는 2가지의 경우가 있음을 이용한다.

풀이 각각의 추마다 이용하거나 이용하지 않는 2가지의 경우가 있으므로 모든 경우의 수는

$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$

이때 0 g을 재는 것은 제외하므로 구하는 경우의 수는

$16-1=15$

답 15

0982 전략 동시에 갈 수 없는 길이면 합의 법칙을, 이어지는 길이면 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 (i) A → B → C → A로 가는 경우의 수는

$5\cdot 2\cdot 2=20$

(ii) A → C → B → A로 가는 경우의 수는

$2\cdot 2\cdot 5=20$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$20+20=40$

답 ②

0983 전략 2, 1과 6, 3, 5, 4가 적힌 정사각형에 색을 칠하는 경우의 수를 차례대로 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 2가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은

4가지

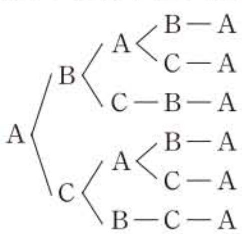
1과 6이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외해야 하므로 　3가지 같은 색을 칠해야 한다.
3이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외해야 하므로 　2가지
5가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외해야 하므로 　2가지
4가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1, 5가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외해야 하므로 　2가지
따라서 구하는 경우의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2=96$

답 ③

0984 전략 수형도를 이용하여 문자열의 개수를 구한다.

풀이 양 끝 자리에 A가 오는 문자열은 다음과 같다.



따라서 양 끝 자리에 A가 오는 문자열은 6개이고 B, C가 오는 경우도 마찬가지로 각각 6개이므로 만들 수 있는 문자열의 개수는

$3\cdot6=18$

답 18

다른 풀이 (i) 양 끝 자리와 세 번째 자리에 같은 문자가 오는 경우
양 끝 자리와 세 번째 자리에 오는 문자를 택하는 경우의 수는 　3
두 번째 자리와 네 번째 자리에 오는 문자를 택하는 경우의 수는 각각 양 끝 자리와 세 번째 자리에 오는 문자를 제외해야 하므로 　2
따라서 이 경우의 수는 　$3\cdot2\cdot2=12$

(ii) 양 끝 자리와 세 번째 자리에 다른 문자가 오는 경우
양 끝 자리에 오는 문자를 택하는 경우의 수는 　3
세 번째 자리에 오는 문자를 택하는 경우의 수는 양 끝 자리에 오는 문자를 제외해야 하므로 　2
두 번째 자리와 네 번째 자리에는 양 끝 자리와 세 번째 자리에 오는 문자를 제외한 문자가 와야 한다.
따라서 이 경우의 수는 　$3\cdot2=6$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+6=18$

0985 전략 먼저 A, B가 좌석에 앉는 경우의 수를 구한다.

풀이 A, B가 앉을 좌석의 줄을 택하는 경우의 수는 　2
한 줄에 놓인 3개의 좌석 중에서 2개의 좌석을 택하여 A, B가 앉는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

나머지 세 명이 맞은편 줄의 3개의 좌석에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot6\cdot6=72$

답 ⑤

0986 전략 첫째 날과 둘째 날에 공연을 하는 팀의 수로 경우를 나누어 생각한다.

풀이 매일 두 팀 이상이 공연해야 하므로 축제의 첫째 날에는 두 팀 또는 세 팀이 공연을 해야 한다.

(i) 첫째 날에 두 팀, 둘째 날에 세 팀이 공연을 하는 경우
첫째 날에 공연하는 두 팀을 택하여 공연 순서를 정하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

둘째 날에 공연하는 세 팀이 공연 순서를 정하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 이 경우의 수는 　$20\cdot6=120$

(ii) 첫째 날에 세 팀, 둘째 날에 두 팀이 공연을 하는 경우
첫째 날에 공연하는 세 팀을 택하여 공연 순서를 정하는 경우의 수는

${}_5P_3=60$

둘째 날에 공연하는 두 팀이 공연 순서를 정하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 이 경우의 수는 　$60\cdot2=120$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$120+120=240$

답 ③

다른 풀이 구하는 경우의 수는 첫째 날과 둘째 날에 각각 공연하는 팀의 수를 정한 후 다섯 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수와 같다.
이때 첫째 날에 두 팀, 둘째 날에 세 팀이 공연하거나 첫째 날에 세 팀, 둘째 날에 두 팀이 공연할 수 있고, 다섯 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는 $5!=120$이므로 구하는 경우의 수는

$2\cdot120=240$

0987 전략 빨간색 그릇끼리 서로 이웃하는 경우의 수와 파란색 그릇끼리 서로 이웃하는 경우의 수를 더한 후 빨간색 그릇과 파란색 그릇이 같은 색 그릇끼리 서로 이웃하는 경우의 수를 뺀다.

풀이 빨간색 그릇 2개를 1개의 그릇으로 생각하여 5개의 그릇을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

빨간색 그릇 2개가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 빨간색 그릇 2개가 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$120\cdot2=240$

마찬가지로 파란색 그릇 2개가 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수도 240이다.
빨간색 그릇 2개와 파란색 그릇 2개를 각각 1개의 그릇으로 생각하여 4개의 그릇을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

빨간색 그릇 2개와 파란색 그릇 2개가 각각 같은 색 그릇끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot2!=4$

07 순열

따라서 빨간색 그릇 2개와 파란색 그릇 2개가 같은 색 그릇끼리 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$24\cdot 4=96$

구하는 경우의 수는

$240+240-96=384$

답 384

0988 전략 맨 앞자리에 자음이 오는 경우와 모음이 오는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 mexico에서 자음은 m, x, c의 3개이고 모음은 e, i, o의 3개이다.

(i) 자음, 모음의 순서로 번갈아 나열하는 경우의 수는

$3!\cdot 3!=36$

(ii) 모음, 자음의 순서로 번갈아 나열하는 경우의 수는

$3!\cdot 3!=36$

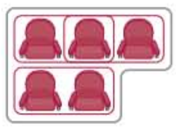
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36+36=72$

답 ④

0989 전략 먼저 부모의 자리를 정하는 경우의 수를 구한다.

풀이 부모의 자리를 정하는 방법은 오른쪽 그림과 같이 3가지이고, 각각의 경우에서 부모가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로 부모의 자리를 정하는 경우의 수는



$3\cdot 2!=6$

나머지 자리에 세 명이 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 6=36$

답 36

0990 전략 흰 돌의 자리를 먼저 정한다.

풀이 5개의 자리 중 흰 돌을 나열할 자리를 정하면 나머지 자리에 검은 돌을 크기순으로 나열하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

답 20

다른 풀이 5개의 서로 다른 돌을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

이때 검은 돌의 순서가 정해져 있으므로 검은 돌 3개를 일렬로 나열하는 경우를 모두 한 가지 경우로 생각해야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{120}{3!}=20$

참고 검은 돌 3개를 작은 것부터 차례대로 ❶, ❷, ❸, 흰 돌 2개를 ○, ◎라 하면 다음을 모두 한 가지 경우로 생각해야 한다.

○◎❶❷❸, ○◎❶❸❷, ○◎❷❶❸, ○◎❷❸❶,
○◎❸❶❷, ○◎❸❷❶

0991 전략 천의 자리, 백의 자리를 기준으로 나누어 생각한다.

풀이 2400보다 큰 자연수는 24□□, 3□□□, 4□□□ 꼴이다.

24□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

3□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

4□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$2+6+6=14$

답 ③

다른 풀이 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$4!=24$

1□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

21□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

23□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$24-(6+2+2)=14$

0992 전략 A 바구니에 담는 과일에 따라 경우를 나누어 B 바구니에 과일을 담는 경우의 수를 구한다.

풀이 (i) A 바구니에 사과를 담는 경우 – B 바구니에는 사과를 담을 수 없다.

B 바구니에 복숭아 a개, 자두 b개를 담는다고 하면 가능한 순서쌍 (a, b)는

$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$, $(7, 1)$의 6개 ··· ❶

(ii) A 바구니에 복숭아를 담는 경우

B 바구니에 사과 a개, 자두 b개를 담는다고 하면 가능한 순서쌍 (a, b)는

$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$의 4개 ··· ❷

(iii) A 바구니에 자두를 담는 경우

B 바구니에 사과 a개, 복숭아 b개를 담는다고 하면 가능한 순서쌍 (a, b)는

$(1, 7)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$의 5개 ··· ❸

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+4+5=15$ ··· ❹

답 15

채점 기준	비율
❶ A 바구니에 사과를 담는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ A 바구니에 복숭아를 담는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ A 바구니에 자두를 담는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ A, B 바구니에 과일을 담는 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

0993 전략 두 자연수의 합이 짝수인 경우는 두 자연수가 모두 짝수이거나 모두 홀수인 경우이다.

풀이 십의 자리의 숫자를 a, 일의 자리의 숫자를 b라 할 때, $a+b$의 값이 짝수이려면 a, b가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

(i) a, b가 모두 짝수인 경우

a가 될 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4개

b가 될 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5개

따라서 두 자리 자연수의 개수는 $4\cdot 5=20$ ··· ❶

(ii) a, b가 모두 홀수인 경우

a가 될 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5개

b가 될 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5개

따라서 두 자리 자연수의 개수는 $5\cdot5=25$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$20+25=45$ ··· ❸

답 45

채점 기준	비율
❶ 각 자리의 숫자가 모두 짝수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 각 자리의 숫자가 모두 홀수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 각 자리의 숫자의 합이 짝수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0994 전략 서로 이웃하는 학생들을 한 사람으로 생각한다.

풀이 같은 반 학생들을 각각 한 사람으로 생각하여 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$2!=2$

각 반의 학생들끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!\cdot3!=144$

$\therefore a=2\cdot144=288$ ··· ❶

7명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$7!=5040$

양 끝에 2반 학생을 세우는 경우의 수는

${}_3P_2\cdot5!=720$

$\therefore b=5040-720=4320$ ··· ❷

$\therefore a+b=4608$ ··· ❸

답 4608

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0995 전략 어떤 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 함을 이용한다.

풀이 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 3개를 택할 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

1, 2, 3 또는 1, 3, 5 또는 2, 3, 4 또는 3, 4, 5 ··· ❶

각각의 세 자연수를 이용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$4\cdot6=24$ ··· ❷

답 24

채점 기준	비율
❶ 합이 3의 배수가 되는 세 자연수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 3의 배수의 개수를 구할 수 있다.	50 %

Ⅲ. 순열과 조합

08 조합

0996 ${}_4C_2=\dfrac{{}_4P_2}{2!}=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$ 답 6

0997 ${}_7C_3=\dfrac{{}_7P_3}{3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

0998 답 1

0999 답 1

1000 ${}_nC_2=10$에서 $\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}=10$

$n(n-1)=20=5\cdot4$ $\therefore n=5$ 답 5

1001 ${}_nC_3=4$에서 $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=4$

$n(n-1)(n-2)=4\cdot3\cdot2$ $\therefore n=4$ 답 4

1002 ${}_6C_r=20$에서 $\dfrac{6!}{r!(6-r)!}=20$

$6!=20\cdot r!(6-r)!$, $6\cdot3\cdot2\cdot1=r!(6-r)!$

$3!\cdot3!=r!(6-r)!$ $\therefore r=3$ 답 3

1003 ${}_8C_r=56$에서 $\dfrac{8!}{r!(8-r)!}=56$

$8!=56\cdot r!(8-r)!$, $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=r!(8-r)!$

$3!\cdot5!=r!(8-r)!$ $\therefore r=3$ 또는 $r=5$

답 3 또는 5

1004 ${}_{12}C_7={}_{12}C_{12-7}={}_{12}C_5$

$\therefore r=5$ 답 5

1005 ${}_nC_9={}_nC_6$에서 $6=n-9$

$\therefore n=15$ 답 15

1006 ${}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

1007 ${}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ 답 56

1008 ${}_7C_4={}_7C_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

1009 ${}_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ 답 20

1010 2, 4, 6, 8, 10이 각각 하나씩 적힌 5장의 카드 중에서 3장의 카드를 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

1011 ${}_{n}C_{2}+{}_{n-1}C_{2}={}_{n+2}C_{2}$에서

$$\frac{n(n-1)}{2\cdot1}+\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot1}=\frac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1}$$

$$n(n-1)+(n-1)(n-2)=(n+2)(n+1)$$

$$2n^2-4n+2=n^2+3n+2$$

$$n^2-7n=0,\qquad n(n-7)=0$$

$\therefore n=7$ ($\because n$은 자연수)

답 ②

1012 ${}_{8}C_{r}={}_{8}C_{r-4}$에서

$r=r-4$ 또는 $r-4=8-r$

(i) $r=r-4$에서 $0\neq-4$이므로 r의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $r-4=8-r$에서

$2r=12\qquad \therefore r=6$

(i), (ii)에서 $\quad r=6$

답 6

1013 ${}_{n}C_{r}=\dfrac{{}_{n}P_{r}}{r!}$이므로

$35=\dfrac{210}{r!},\qquad r!=6=3\cdot2\cdot1$

$\therefore r=3$

또 ${}_{n}P_{3}=210=7\cdot6\cdot5$에서 $\quad n=7$

$\therefore n+r=10$

답 ③

1014 ${}_{9-n}C_{2}=10$에서

$\dfrac{(9-n)(8-n)}{2\cdot1}=10,\qquad (9-n)(8-n)=20$

$n^2-17n+52=0,\qquad (n-4)(n-13)=0$

$\therefore n=4$ ($\because \underbrace{n\le7}_{9-n\ge2\text{에서 } n\le7}$) ⋯ ❶

$\therefore n\cdot{}_{n}P_{2}+{}_{n}C_{3}=4\cdot{}_{4}P_{2}+{}_{4}C_{3}$

$=4\cdot12+{}_{4}C_{1}$

$=48+4$

$=52$ ⋯ ❷

답 52

채점 기준	비율
❶ n의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $n\cdot{}_{n}P_{2}+{}_{n}C_{3}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

1015 ${}_{n}C_{n-r}=\dfrac{n!}{(n-r)!\{n-(\boxed{n-r})\}!}$

$=\dfrac{n!}{(n-r)!\boxed{r!}}={}_{n}C_{r}$

$\therefore$ (가) $n-r$ (나) $r!$

답 풀이 참조

라쎈 특강

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 뽑히지 않을 $(n-r)$개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{n}C_{r}={}_{n}C_{n-r}$가 성립한다.

따라서 ${}_{n}C_{r}$의 값을 구할 때 $r>n-r$인 경우에는 ${}_{n}C_{r}={}_{n}C_{n-r}$를 이용하면 계산을 간단히 할 수 있다.

1016 ${}_{n}C_{k}\cdot{}_{n-k}C_{r-k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\dfrac{(n-k)!}{(r-k)!\{n-k-(r-k)\}!}$

$=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\dfrac{(n-k)!}{(r-k)!\boxed{(n-r)!}}$

$=\dfrac{\boxed{n!}}{k!(r-k)!(n-r)!}$

$=\dfrac{n!}{\boxed{r!}(n-r)!}\cdot\dfrac{\boxed{r!}}{k!(r-k)!}$

$={}_{n}C_{r}\cdot{}_{r}C_{k}$

$\therefore$ (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$ (라) $r!$

답 ④

1017 ${}_{n-1}C_{r}+{}_{n-1}C_{r-1}$

$=\dfrac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}+\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{n-1-(r-1)\}!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{r!\boxed{(n-1-r)!}}+\dfrac{(n-1)!}{\boxed{(r-1)!}(n-r)!}$

$=\dfrac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}+\dfrac{r(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{\{(n-r)+r\}(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{n\boxed{(n-1)!}}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

$={}_{n}C_{r}$

$\therefore$ (가) $(n-1-r)!$ (나) $(r-1)!$ (다) $(n-1)!$

답 풀이 참조

라쎈 특강

${}_{n}C_{r}$는 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 경우의 수이므로 r개 중에 특정한 1개가 포함되지 않는 경우와 특정한 1개가 포함되는 경우로 나누어 다음과 같이 증명할 수도 있다.

(i) r개 중에서 특정한 1개가 포함되지 않는 경우

특정한 1개를 제외한 $(n-1)$개 중에서 r개를 택하면 되므로 그 경우의 수는 $\quad {}_{n-1}C_{r}$

(ii) r개 중에서 특정한 1개가 포함되는 경우

특정한 1개를 제외한 $(n-1)$개 중에서 $(r-1)$개를 택하면 되므로 그 경우의 수는 $\quad {}_{n-1}C_{r-1}$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여

${}_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r}+{}_{n-1}C_{r-1}$

이 성립한다.

1018 플루트 연주자 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$

바이올린 연주자 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_{6}C_{2}=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot15=150$

답 ②

1019 배우 10명 중에서 주연 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_{1}=10$

나머지 배우 9명 중에서 조연 3명을 뽑는 경우의 수는

$_9C_3=84$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot84=840$ 답 840

참고 배우 10명 중에서 조연 3명을 먼저 뽑고 나머지 배우 7명 중에서 주연 1명을 뽑는 경우의 수는

$_{10}C_3\cdot{}_7C_1=120\cdot7=840$

이므로 뽑는 순서와 상관없이 결과가 같다.

1020 디자이너 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

모델 n명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_nC_3$

따라서 $10+{}_nC_3=66$이므로 $_nC_3=56$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=56,\quad n(n-1)(n-2)=8\cdot7\cdot6$

$\therefore n=8$ 답 ①

1021 일주일 중에서 요가를 하는 3일을 택하는 경우의 수는

$_7C_3=35$

요가를 하는 날을 제외한 나머지 4일 중에서 조깅을 하는 3일을 택하는 경우의 수는

$_4C_3=4$

나머지 하루에 할 운동으로 줄넘기, 수영 중에서 하나를 택하는 경우의 수는

$_2C_1=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$35\cdot4\cdot2=280$ 답 ⑤

1022 세 수의 합이 홀수가 되기 위해서는 세 수가 모두 홀수이거나 한 개는 홀수, 두 개는 짝수이어야 한다.

(i) 세 수가 모두 홀수인 경우

1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$ ··· ❶

(ii) 한 개는 홀수, 두 개는 짝수인 경우

1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 1장을 뽑고, 2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 2장을 뽑는 경우의 수는

$_5C_1\cdot{}_4C_2=5\cdot6=30$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10+30=40$ ··· ❸

답 40

채점 기준	비율
❶ 세 수가 모두 홀수인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 한 개는 홀수, 두 개는 짝수인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 카드에 적힌 수의 총합이 홀수가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1023 구하는 경우의 수는 A, B, C를 제외한 7명의 학생 중에서 5명의 위원을 선출하는 경우의 수와 같으므로

$_7C_5={}_7C_2=21$ 답 ③

1024 구하는 경우의 수는 3학년 선수 2명을 제외한 6명의 선수 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_6C_3=20$ 답 ③

1025 구하는 경우의 수는 특정한 남학생 1명을 제외한 3명의 남학생 중에서 2명을 뽑고, 특정한 여학생 2명을 제외한 4명의 여학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_3C_2\cdot{}_4C_2=3\cdot6=18$ 답 ③

1026 구하는 경우의 수는 민정이와 지훈이를 제외한 7명의 회원 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_7C_3=35$ 답 35

1027 녹차 아이스크림과 딸기 아이스크림 중에서 한 가지 아이스크림을 고르는 경우의 수는

$_2C_1=2$

녹차 아이스크림과 딸기 아이스크림을 제외한 6가지 아이스크림 중에서 4가지 아이스크림을 고르는 경우의 수는

$_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot15=30$ 답 ③

1028 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$

조건 (나)에 의하여 집합 A는 원소 1, 2는 포함하지 않고 3은 포함해야 한다.

(i) $n(A)=4$인 경우

집합 A의 개수는 1, 2, 3을 제외한 4, 5, 6, ···, 9의 6개 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_6C_3=20$ ··· ❶

(ii) $n(A)=5$인 경우

집합 A의 개수는 1, 2, 3을 제외한 4, 5, 6, ···, 9의 6개 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_6C_4={}_6C_2=15$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 집합 A의 개수는

$20+15=35$ ··· ❸

답 35

채점 기준	비율
❶ $n(A)=4$인 집합 A의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ $n(A)=5$인 집합 A의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 조건을 만족시키는 집합 A의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1029 9명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$_9C_4=126$

안전 요원만 4명을 뽑는 경우의 수는

$_4C_4=1$

어린이만 4명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$126-1-5=120$ 답 120

1030 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 3인 집합의 개수는

$_9C_3=84$ ⋯ ❶

이 중에서 짝수로만 이루어진 부분집합의 개수는

$_4C_3=4$ ⋯ ❷

따라서 구하는 집합의 개수는

$84-4=80$ ⋯ ❸

답 80

채점 기준	비율
❶ 원소의 개수가 3인 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 짝수로만 이루어진 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %

1031 12명의 무용수 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{12}C_3=220$

남자 무용수가 n명이라 할 때 남자 무용수만 3명을 뽑는 경우의 수는

$_nC_3$

이때 여자 무용수를 적어도 한 명 포함하도록 뽑는 경우의 수가 210이므로

$220-{_nC_3}=210,\quad {_nC_3}=10$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=10$

$n(n-1)(n-2)=5\cdot4\cdot3\quad \therefore n=5$

따라서 남자 무용수가 5명이므로 여자 무용수의 수는

$12-5=7$(명)

답 ⑤

1032 5개의 실내 놀이 기구 중에서 3개를 고르는 경우의 수는

$_5C_3={_5C_2}=10$

4개의 야외 놀이 기구 중에서 2개를 고르는 경우의 수는

$_4C_2=6$

5개의 놀이 기구를 타는 순서를 정하는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot6\cdot120=7200$

답 ④

1033 3, 6을 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_4C_3={_4C_1}=4$

4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\cdot24=96$

답 96

1034 A, B를 제외한 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={_5C_2}=10$ ⋯ ❶

A, B를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$이고, A, B끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 A, B를 이웃하도록 세우는 경우의 수는

$24\cdot2=48$ ⋯ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot48=480$ ⋯ ❸

답 480

채점 기준	비율
❶ A, B를 포함하여 5명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A, B가 이웃하도록 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1035 주어진 조건을 만족시키려면 집합 Y의 10개의 원소 중에서 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f의 개수는 10개의 원소 중에서 4개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

$_{10}C_4=210$

답 ②

1036 (1) 일대일함수 f의 개수는 집합 Y의 5개의 원소 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$_5P_4=120$ ⋯ ❶

(2) 집합 Y의 5개의 원소 중에서 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 -1, 0, 1, 2에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f의 개수는 5개의 원소 중에서 4개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

$_5C_4={_5C_1}=5$ ⋯ ❷

답 (1) 120 (2) 5

채점 기준	비율
❶ 일대일함수 f의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(-1)<f(0)<f(1)<f(2)$인 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	50 %

1037 $f(3)=3$이고 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이므로

$f(4)=1$ 또는 $f(4)=2$

또 $f(1)>f(2)>3$이므로 집합 Y의 원소 4, 5, 6 중 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f의 개수는

$2\cdot{_3C_2}=2\cdot3=6$

답 6

1038 $n(\{x|f(x)=x,\ x\in X\})=4$이므로 $f(x)=x$를 만족시키는 정의역의 원소 4개를 택한 후 나머지 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=x_2$, $f(x_2)=x_1$로 대응시키면 된다.

$f(x)=x$를 만족시키는 정의역의 원소를 택하는 경우의 수는

$_6C_4={_6C_2}=15$

나머지 두 원소를 $f(x)\neq x$를 만족시키도록 대응시키는 경우의 수는 1이므로 구하는 함수 f의 개수는

$15\cdot1=15$

답 ②

1039 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 8개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_8C_2=28$

답 ①

1040 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_5C_2=10$ 답 10

1041 구각형의 대각선의 개수는 9개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 9를 뺀 것과 같으므로

$_9C_2-9=27$ 답 ②

참고 n각형의 대각선의 개수를 구하는 공식 $\frac{n(n-3)}{2}$을 이용하여 구각형의 대각선의 개수가 $\frac{9\cdot 6}{2}=27$임을 알 수도 있다.

이때 $_nC_2-n=\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}-n=\frac{n(n-3)}{2}$이다.

1042 n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 n을 뺀 것과 같으므로

$_nC_2-n=54$ ··· ❶

$\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}-n=54,\qquad n^2-3n-108=0$

$(n+9)(n-12)=0$

$\therefore n=12\ (\because n\ge 3)$

따라서 십이각형의 꼭짓점의 개수는 12이다. ··· ❷

답 12

채점 기준	비율
❶ n각형의 대각선의 개수를 이용하여 n에 대한 식을 세울 수 있다.	50 %
❷ 다각형의 꼭짓점의 개수를 구할 수 있다.	50 %

1043 10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_{10}C_2=45$

한 선분 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_5C_2=10$

이때 한 선분 위에 있는 5개의 점으로 만들 수 있는 직선은 1개이고 이러한 직선이 2개 있으므로 구하는 직선의 개수는

$45-2\cdot 10+2\cdot 1=27$ 답 ②

참고 한 직선 위에 있는 서로 다른 n개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 1임에 유의한다.

다른 풀이 두 선분 위의 점을 각각 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

$_5C_1\cdot{}_5C_1=25$

또 주어진 선분 위의 5개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선은 각각 한 개씩이므로 구하는 직선의 개수는

$25+2=27$

1044 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_8C_3=56$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_4C_3={}_4C_1=4$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$56-4=52$ 답 ④

1045 주어진 8개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같다.

$\therefore {}_8C_3=56$

답 ③

1046 직선 l 위의 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_3C_2=3$

직선 m 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_4C_2=6$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$3\cdot 6=18$

답 18

다른 풀이 7개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$_7C_4={}_7C_3=35$

직선 l 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 m 위의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$_3C_3\cdot{}_4C_1=1\cdot 4=4$

직선 m 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 l 위의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$_4C_3\cdot{}_3C_1=4\cdot 3=12$

직선 m 위의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$_4C_4=1$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$35-(4+12+1)=18$

1047 9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_9C_3=84$

한 직선 위에 있는 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$4\cdot{}_3C_3=4\cdot 1=4$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-4=80$

답 ③

1048 12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_{12}C_3=220$ ··· ❶

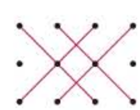
(i) 오른쪽 그림과 같이 가로 방향의 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$3\cdot{}_4C_3=3\cdot 4=12$

(ii) 오른쪽 그림과 같이 세로 방향의 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$4\cdot{}_3C_3=4\cdot 1=4$

(iii) 오른쪽 그림과 같이 대각선 방향의 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는



$4\cdot{}_3C_3=4\cdot 1=4$ ··· ❷

이상에서 구하는 삼각형의 개수는

$220-(12+4+4)=200$ ··· ❸

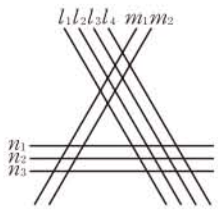
답 200

채점 기준	비율
❶ 12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %
❸ 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1049 가로로 나열된 5개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로로 나열된 3개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정된다.
따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$_5C_2\cdot{}_3C_2=10\cdot3=30$ 답 ②

1050 오른쪽 그림과 같이 평행한 직선을 l_i, m_j, n_k $(i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, k=1, 2, 3)$라 하자.



(i) l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 2개를 택하고, m_1, m_2를 택하는 경우의 수는

$_4C_2\cdot{}_2C_2=6\cdot1=6$ ⋯ ❶

(ii) m_1, m_2를 택하고, n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_2C_2\cdot{}_3C_2=1\cdot3=3$ ⋯ ❷

(iii) n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하고, l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_3C_2\cdot{}_4C_2=3\cdot6=18$ ⋯ ❸

이상에서 구하는 평행사변형의 개수는

$6+3+18=27$ ⋯ ❹

답 27

채점 기준	비율
❶ 4개의 평행한 직선과 2개의 평행한 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 2개의 평행한 직선과 3개의 평행한 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 3개의 평행한 직선과 4개의 평행한 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	10 %

1051 가로로 나열된 4개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로로 나열된 6개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므로 직사각형의 개수는

$_4C_2\cdot{}_6C_2=6\cdot15=90$

(i) 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 15
(ii) 한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 8
(iii) 한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 3

이상에서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$90-(15+8+3)=64$ 답 ②

1052 동전 6개를 똑같은 주머니 2개에 빈 주머니가 없도록 나누어 담을 때, 각 주머니에 담을 수 있는 동전의 개수는

1, 5 또는 2, 4 또는 3, 3

(i) 6개를 1개, 5개로 나누는 경우의 수는

$_6C_1\cdot{}_5C_5=6\cdot1=6$

(ii) 6개를 2개, 4개로 나누는 경우의 수는

$_6C_2\cdot{}_4C_4=15\cdot1=15$

(iii) 6개를 3개, 3개로 나누는 경우의 수는

$_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=10$

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+15+10=31$ 답 31

1053 $a={}_9C_5\cdot{}_4C_4=126\cdot1=126$ ⋯ ❶

$b={}_9C_3\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{3!}=84\cdot20\cdot1\cdot\frac{1}{6}=280$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=406$ ⋯ ❸

답 406

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1054 8명을 4명, 4명으로 나누는 경우의 수는

$_8C_4\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=70\cdot1\cdot\frac{1}{2}=35$

학생 5명 중에서 4명이 같은 조가 되는 경우의 수는

$_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$35-5=30$

답 ③

다른 풀이 각 조에 적어도 한 명의 선생님이 포함되려면
선생님 1명과 학생 3명, 선생님 2명과 학생 2명
의 두 조로 나누어야 한다.
선생님 1명과 학생 3명을 뽑으면 나머지 한 조가 자동으로 결정되므로 구하는 경우의 수는

$_3C_1\cdot{}_5C_3=3\cdot10=30$

1055 9명을 3명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$_9C_3\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{3!}=84\cdot20\cdot1\cdot\frac{1}{6}=280$

규현이와 유진이가 같은 조가 되는 경우의 수는 규현이와 유진이를 제외한 7명을 1명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수와 같으므로

$_7C_1\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=7\cdot20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=70$

따라서 구하는 경우의 수는

$280-70=210$ 답 210

다른 풀이 규현이와 유진이를 제외한 7명을 2명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$_7C_2\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=21\cdot10\cdot1\cdot\frac{1}{2}=105$

2명씩인 조에 규현이와 유진이를 배정하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$105\cdot2=210$

1056 5개의 사탕을 2개, 2개, 1개로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} = 10 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15$$

3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$15 \cdot 6 = 90$

답 ②

1057 9장의 포토카드를 3장, 3장, 3장으로 나누는 경우의 수는

$${}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 84 \cdot 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 280$$ ··· ❶

3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$3! = 6$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$280 \cdot 6 = 1680$ ··· ❸

답 1680

채점 기준	비율
❶ 3개의 묶음으로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 3개의 묶음을 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 9장을 3명의 학생에게 3장씩 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1058 6명을 2명, 2명, 1명, 1명으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} = 15 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 45$$

4개의 조를 2층부터 5층까지 4개의 층에 분배하는 경우의 수는

$4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는

$45 \cdot 24 = 1080$

답 1080

1059 5개의 마카롱을 3명의 어린이가 적어도 한 개씩은 받도록 나눌 때, 각 어린이가 받을 수 있는 마카롱의 개수는

1, 1, 3 또는 1, 2, 2

(i) 5개의 마카롱을 1개, 1개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

(ii) 5개의 마카롱을 1개, 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15$$

(i), (ii)에서 마카롱을 3개의 묶음으로 나누는 경우의 수는

$10 + 15 = 25$

3개의 묶음을 3명의 어린이에게 나누어 주는 경우의 수는

$3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$25 \cdot 6 = 150$

답 ②

1060 2대의 자동차를 각각 A, B라 하면 운전할 수 있는 두 사람이 두 자동차 A, B에 나누어 타는 경우의 수는

$2! = 2$ ··· ❶

운전자를 제외한 4명을 2명, 2명의 두 조로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

두 조를 두 자동차 A, B에 배정하는 경우의 수는

$2! = 2$ ··· ❷

자동차 A에서 운전자를 제외한 2명이 자리에 앉는 경우의 수는

${}_4P_2 = 12$

마찬가지로 자동차 B에서 운전자를 제외한 2명이 자리에 앉는 경우의 수도 12이다. ··· ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$ ··· ❹

답 1728

채점 기준	비율
❶ 운전할 수 있는 두 사람을 배정하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 운전자를 제외한 4명을 배정하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 운전자를 제외한 2명이 자리에 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 자동차에 나누어 타는 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

1061 구하는 경우의 수는 먼저 5개의 학급을 2개, 3개의 두 조로 나눈 후, 3개인 조에서 부전승으로 올라가는 한 학급을 택하는 경우의 수와 같으므로

$({}_5C_2 \cdot {}_3C_3) \cdot {}_3C_1 = 10 \cdot 1 \cdot 3 = 30$

답 ②

1062 구하는 경우의 수는 먼저 6명을 2명, 2명, 2명의 세 조로 나눈 후, 부전승으로 올라가는 한 조를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$\left({}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{3!}\right) \cdot {}_3C_1 = 15 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 = 45$$

답 ①

다른 풀이 6명을 2명, 4명의 두 조로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15 \cdot 1 = 15$

4명인 조를 다시 2명, 2명의 두 조로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$15 \cdot 3 = 45$

1063 구하는 경우의 수는 먼저 8개의 팀을 2개, 2개, 2개, 2개의 네 조로 나눈 후, 네 조를 다시 2개, 2개의 두 조로 나누는 경우의 수와 같으므로

$$\left({}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{4!}\right) \cdot \left({}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!}\right)$$
$$= \left(28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{24}\right) \cdot \left(6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right)$$
$$= 105 \cdot 3$$
$$= 315$$

답 315

다른 풀이 8개의 팀을 4개, 4개의 두 조로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 70 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 35$$

4개의 팀을 다시 2개, 2개의 두 조로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$$

나머지 4개의 팀을 2개, 2개의 두 조로 나누는 경우의 수도 3이므로 구하는 경우의 수는

$$35\cdot3\cdot3=315$$

1064 전략• ${}_nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$임을 이용한다.

풀이 ${}_nC_3:{}_{n+1}C_4=4:9$에서 $9\cdot{}_nC_3=4\cdot{}_{n+1}C_4$

$$9\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=4\cdot\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$$9=n+1 \qquad \therefore n=8$$

답 ②

1065 전략• 먼저 짝수가 적힌 공의 개수와 홀수가 적힌 공의 개수를 구한다.

풀이 주머니에는 짝수가 적힌 공이 2, 4, 6, 8의 4개, 홀수가 적힌 공이 1, 3, 5, 7, 9의 5개가 들어 있다.

짝수가 적힌 4개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

홀수가 적힌 5개의 공 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_1=5$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6\cdot5=30$$

답 ③

1066 전략• 이웃해도 되는 수를 먼저 배열한다.

풀이 0끼리는 이웃하지 않아야 하고 아홉 자리의 자연수의 첫 번째 자리에는 0이 올 수 없으므로 다음과 같이 1을 먼저 일렬로 나열하면 ∨가 표시된 자리에만 0이 올 수 있다.

1∨1∨1∨1∨1∨1∨

따라서 1의 사이사이 및 한쪽 끝의 6개의 자리에 3개의 0을 나열하는 경우의 수는

$${}_6C_3=20$$

답 ⑤

1067 전략• 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수를 구한 후 이 중에서 두 개의 집합을 택하는 경우의 수를 구한다.

풀이 주어진 집합의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 ${}_5C_2=10$

10개의 부분집합 중에서 서로 다른 두 개를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_2=45$$

답 45

1068 전략• 3개의 빨간 구슬, 파란 구슬, 노란 구슬을 꺼내는 경우의 수를 각각 구한 후 합의 법칙을 이용한다.

풀이 (i) 빨간 구슬 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_3=1$$

(ii) 파란 구슬 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

(iii) 노란 구슬 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=10$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$1+4+10=15$$

답 ③

1069 전략• 남녀 혼합 복식, 남자 복식, 여자 복식, 단식에 출전할 회원을 정하는 경우의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 남녀 혼합 복식에 출전할 회원 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_1\cdot{}_6C_1=4\cdot6=24$$

남자 복식, 여자 복식에 출전할 회원 2명씩을 뽑는 경우의 수는

$${}_3C_2\cdot{}_5C_2=3\cdot10=30$$

남은 4명 중에서 단식에 출전할 회원 1명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_1=4$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24\cdot30\cdot4=2880$$

답 2880

1070 전략• 집합 A는 2, 10을 반드시 원소로 갖고, 2보다 크고 10보다 작은 자연수 중에서 4개를 원소로 갖는다.

풀이 집합 A의 가장 작은 원소가 2, 가장 큰 원소가 10이고 $n(A)=6$이므로 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 4개의 원소를 택하면 된다.

따라서 집합 A의 개수는

$${}_7C_4={}_7C_3=35$$

답 ③

1071 전략• 정사각형 모양과 직각이등변삼각형 모양의 시트지를 붙이는 경우의 수를 각각 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 창문 네 개 중 두 개를 택하여 정사각형 모양의 노란색 시트지 2장을 붙이는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

나머지 창문 2개를 직각이등변삼각형 모양으로 각각 나누는 경우의 수는 $2\cdot2=4$이고, 나누어진 네 개의 영역에 직각이등변삼각형 모양의 시트지 4장을 붙이는 경우의 수는 $4!$이므로 직각이등변삼각형 모양의 시트지를 붙이는 경우의 수는

$$4\cdot4!=4\cdot24=96$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6\cdot96=576$$

답 ④

1072 전략• 정의역 X의 원소가 공역 Y의 원소보다 1개 더 많으므로 정의역의 원소 중 2개가 같은 함숫값을 가져야 한다.

풀이 공역 Y의 원소가 4개이므로 공역과 치역이 일치하려면 정의역 X의 원소 5개 중 2개가 같은 함숫값을 가져야 한다.

X의 원소 5개 중 같은 함숫값을 가질 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

택한 2개의 원소를 하나로 생각하여 X의 원소 4개에 Y의 원소를 하나씩 대응시키는 경우의 수는

$$4!=24$$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$10\cdot24=240$$

답 240

1073 전략• 만나는 2개의 선분은 두 직선 l, m에서 각각 2개의 점을 택하여 그을 수 있음을 이용한다.

풀이 직선 l 위의 6개의 점 중에서 2개의 점을 택하고, 직선 m 위의 5개의 점 중에서 2개의 점을 택하여 두 선분을 그을 때 두 선분이 만나는 경우는 한 가지뿐이므로 구하는 경우의 수는

└ 두 선분이 × 모양으로 만나는 경우

$${}_6C_2\cdot{}_5C_2=15\cdot10=150$$

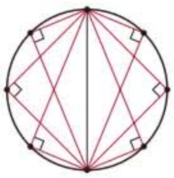
답 150

1074 전략 반원에 대한 원주각의 크기가 90°임을 이용하여 직각삼각형의 개수를 구한다.

풀이 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_8C_3=56$

한편 8개의 점 중에서 2개의 점을 이어 만들 수 있는 지름은 4개이고, 오른쪽 그림과 같이 1개의 지름에 대하여 6개의 직각삼각형을 만들 수 있으므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는



$4\cdot6=24$

따라서 직각삼각형이 아닌 삼각형의 개수는

$56-24=32$

답 32

1075 전략 한 직선 위에 있지 않은 n개의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는 $_nC_3$임을 이용한다.

풀이 10개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_{10}C_3=120$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_4C_3={}_4C_1=4$

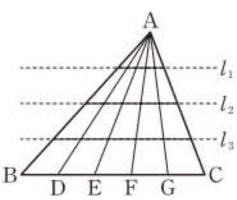
이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없고 이러한 직선이 5개가 있으므로 구하는 삼각형의 개수는

$120-4\cdot5=100$

답 100

1076 전략 삼각형을 만들기 위해 필요한 직선을 택하는 경우의 수를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 6개의 직선 AB, AD, AE, AF, AG, AC 중 서로 다른 2개의 직선을 택하고, 4개의 직선 l_1, l_2, l_3, BC 중 1개의 직선을 택하면 삼각형이 1개 만들어진다.



따라서 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$_6C_2\cdot{}_4C_1=15\cdot4=60$

답 ④

1077 전략 먼저 330을 소인수분해한다.

풀이 $330=2\cdot3\cdot5\cdot11$

이때 330의 소인수 2, 3, 5, 11을 2개의 묶음으로 나누어 곱하면 330이 되므로 구하는 경우의 수는 2, 3, 5, 11을 2개의 묶음으로 나누는 경우의 수와 같다.

(i) 1개, 3개로 나누는 경우의 수는

$_4C_1\cdot{}_3C_3=4\cdot1=4$

(ii) 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

$_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4+3=7$

답 ②

다른 풀이 $330=2\cdot3\cdot5\cdot11$의 양의 약수의 개수는

$(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)=16$

330을 두 자연수의 곱으로 나타내는 것은 두 양의 약수의 곱으로 나타내는 것이므로 그 경우의 수는 $\frac{16}{2}=8$

이때 $330=1\cdot330$으로 나타내는 것은 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$8-1=7$

1078 전략 6개의 수를 2개씩 3묶음으로 나눈 후 그 합이 작은 것부터 차례로 1열, 2열, 3열에 채운다.

풀이 $a_1<a_2<a_3$이려면 6개의 수를 2개, 2개, 2개로 나눈 후 그 합이 작은 것부터 차례로 1열, 2열, 3열에 채우면 된다.

6개의 수를 2개씩 3묶음으로 나누는 경우의 수는

$_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}=15$

이때 각 열의 수끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$\underline{15}\cdot8=120$

└순서가 정해져 있으므로 3묶음으로 나누기만 하면 된다.

답 ②

1079 전략 6명을 3명, 3명의 두 조로 나눈 후, 각 조에서 부전승으로 올라가는 선수를 뽑는다.

풀이 6명을 3명, 3명의 두 조로 나누는 경우의 수는

$_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=10$

각 조에서 부전승으로 올라갈 선수를 뽑는 경우의 수는

$_3C_1\cdot{}_3C_1=3\cdot3=9$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot9=90$

답 ③

1080 전략 같은 문자가 적힌 공의 개수에 따라 경우를 나누어 생각한다.

풀이 (i) 모두 같은 문자가 적힌 경우

AAA, BBB의 2가지이므로 이 경우의 수는 2 ··· ❶

(ii) 같은 문자가 적힌 공이 2개인 경우

같은 문자가 적힌 공은 A, B, C, D, E에서 1종류를 고르고, 나머지 1개의 공은 위에서 선택한 종류를 제외한 나머지 7종류에서 1개를 고르는 경우와 같으므로 이 경우의 수는

$_5C_1\cdot{}_7C_1=35$ ··· ❷

(iii) 모두 다른 문자가 적힌 경우

A, B, C, D, E, F, G, H에서 3개를 고르는 경우와 같으므로 이 경우의 수는

$_8C_3=56$ ··· ❸

이상에서 구하는 경우의 수는

$2+35+56=93$ ··· ❹

답 93

채점 기준	비율
❶ 모두 같은 문자가 적힌 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 같은 문자가 적힌 공이 2개인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 모두 다른 문자가 적힌 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

1081 **전략** 모든 경우의 수에서 B 회사의 제품이 하나도 포함되지 않거나 1개 포함되는 경우의 수를 뺀다.

풀이 10가지 종류의 제품 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$_{10}C_4=210$ ⋯ ❶

(i) B 회사의 제품이 하나도 포함되지 않는 경우

A 회사와 C 회사의 제품 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$_5C_4={}_5C_1=5$ ⋯ ❷

(ii) B 회사의 제품이 1개 포함되는 경우

B 회사의 제품 중에서 1개를 택하고 A 회사와 C 회사의 제품 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_5C_1\cdot{}_5C_3=5\cdot10=50$ ⋯ ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$210-(5+50)=155$ ⋯ ❹

답 155

채점 기준	비율
❶ 4개의 제품을 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ B 회사의 제품이 하나도 포함되지 않는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ B 회사의 제품이 1개 포함되는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ B 회사의 제품이 적어도 2개 포함되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

라쎈 특강

'적어도 2개 포함한다.'는 것은 '2개 이상을 포함한다.'는 뜻이므로 전체 경우의 수에서 하나도 포함하지 않거나 1개를 포함하는 경우의 수를 빼면 쉽게 해결할 수 있다. 유사한 표현인 '최소한'이 있을 때에도 같은 방법을 이용한다.

1082 **전략** '적어도' 조건이 있는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 사건이 일어나지 않는 경우의 수를 빼서 구한다.

풀이 (i) A조의 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

B조의 6명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

$_6C_1=6$

$\therefore a=10\cdot6=60$ ⋯ ❶

(ii) 전체 11명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$_{11}C_4=330$

A조의 5명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_4={}_5C_1=5$

B조의 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$_6C_4={}_6C_2=15$

$\therefore b=330-(5+15)=310$ ⋯ ❷

(iii) A조의 특정한 2명을 제외한 나머지 9명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$c={}_9C_2=36$ ⋯ ❸

이상에서 $c<a<b$ ⋯ ❹

답 c, a, b

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ a, b, c를 작은 순서대로 나열할 수 있다.	10 %

1083 **전략** 먼저 10명을 두 조로 나누는 경우를 모두 구한다.

풀이 학생 10명이 서로 다른 2대의 승강기에 탈 때, 각 승강기에 탈 수 있는 학생 수는

3, 7 또는 4, 6 또는 5, 5

(i) 10명을 3명, 7명으로 나누는 경우의 수는

$_{10}C_3\cdot{}_7C_7=120$

(ii) 10명을 4명, 6명으로 나누는 경우의 수는

$_{10}C_4\cdot{}_6C_6=210$

(iii) 10명을 5명, 5명으로 나누는 경우의 수는

$_{10}C_5\cdot{}_5C_5\cdot\frac{1}{2!}=126$

이상에서 10명을 두 조로 나누는 경우의 수는

$120+210+126=456$ ⋯ ❶

두 조를 서로 다른 2대의 승강기에 분배하는 경우의 수는

$2!=2$ ⋯ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$456\cdot2=912$ ⋯ ❸

답 912

채점 기준	비율
❶ 10명을 두 조로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %
❷ 두 조를 2대의 승강기에 분배하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 10명이 2대의 승강기에 타는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %