일품 고등 수학(하)

정답 및 풀이

- 빠른 정답 찾기 ..... 2~4
- 자세한 풀이
  - Ⅴ 집합과 명제 5
  - Ⅵ 함수 28
  - Ⅶ 순열과 조합 63

ⓒ좋은책신사고

Ⅴ. 집합과 명제

12 집합의 뜻과 표현

본책 8~10쪽

01 ④ 02 ⑤ 03 31
04 ⑤ 05 14 06 ② 07 ③ 08 ②
09 26 10 ⑤ 11 12 12 ② 13 3
14 ⑤ 15 ① 16 8 17 959 18 ④

본책 11~12쪽

01 ③ 02 ① 03 ③
04 ③ 05 $a \le -1-\sqrt{2}$ 06 ① 07 3
08 23 09 $a=5, b=-1$ 10 ④ 11 4
12 7 13 45 14 85

본책 13쪽

01 7 02 ④ 03 31
04 63 05 31 06 ②

13 집합의 연산

본책 14~16쪽

01 2 02 16 03 ②
04 ③ 05 0 06 ② 07 ④ 08 ①
09 ② 10 ⑤ 11 42 12 ① 13 36
14 ④ 15 ⑤ 16 ③ 17 18 18 ①

본책 17~19쪽

01 ③ 02 154 03 ④
04 2048 05 ④ 06 ② 07 6 08 ①
09 3 10 8 11 1 12 ① 13 ③
14 6 15 ④ 16 8 17 45 18 3
19 ③ 20 ④

본책 20쪽

01 ③ 02 ③ 03 84
04 5 05 130

14 명제

본책 22~24쪽

01 ② 02 22 03 ②
04 ② 05 ② 06 2 07 ③ 08 ④
09 ③ 10 2 11 42 12 풀이 17쪽
13 ① 14 풀이 18쪽 15 12 16 19

본책 25~27쪽

01 최댓값: 1, 최솟값: −1
02 ④ 03 ④ 04 8 05 ⑤ 06 ③
07 ④ 08 ③ 09 ⑤ 10 −4 11 ③
12 ② 13 ⑤ 14 ④ 15 풀이 20쪽
16 $\frac{9}{2}\,\mathrm{m}^2$ 17 36 18 ⑤

본책 28쪽

01 ④ 02 4 03 ②
04 ① 05 ⑤ 06 ⑤

본책 29~32쪽

01 ② 02 ③ 03 ②
04 ④ 05 ④ 06 ⑤ 07 ③ 08 ④
09 ② 10 ⑤ 11 ⑤ 12 ③ 13 ⑤
14 ③ 15 ⑤ 16 4 17 40 18 180
19 210 20 11 21 15 22 31 23 6
24 풀이 26쪽 25 24 26 풀이 27쪽

본책 33쪽

01 ① 02 ⑤ 03 ③
04 ④

Ⅵ. 함수

15 함수

본책 36~40쪽

01 ② 02 ③ 03 ③
04 ② 05 ⑤ 06 7 07 9 08 5
09 ③ 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ③
14 ① 15 ③ 16 ② 17 ③ 18 ⑤
19 ④ 20 ③ 21 ① 22 $\frac{11}{3}$ 23 13
24 4 25 ③ 26 ① 27 ⑤ 28 ④

본책 41~44쪽

01 ④ 02 3 03 ③
04 26 05 7 06 4 07 ③ 08 9
09 $-\frac{1}{2}\le a<0$ 또는 $0<a\le\frac{1}{2}$ 10 ⑤ 11 ⑤
12 20 13 0 14 ③ 15 ① 16 50
17 2 18 16 19 -2 20 -1 21 ①
22 4 23 17 24 ③ 25 ③ 26 3
27 10 28 8 29 ④ 30 ⑤ 31 8π

본책 45~46쪽

01 3 02 12 03 ⑤
04 ④ 05 ③ 06 ③ 07 ③ 08 ②
09 ⑤ 10 ⑤ 11 5 12 ⑤

16 유리함수

본책 48~50쪽

01 ② 02 0 03 6
04 6 05 ④ 06 18 07 ② 08 4
09 2 10 ② 11 4 12 $\sqrt{15}$ 13 ④
14 -4 15 7 16 -3 17 8 18 ③

본책 51~53쪽

01 123 02 $-\frac{9}{2}$ 03 ⑤
04 $a=-4, b=-10$ 05 91 06 ④ 07 ⑤
08 6 09 ④ 10 16 11 ④ 12 64
13 ④ 14 11 15 ① 16 4 17 7
18 $\frac{2}{3}$ 19 ⑤ 20 20 21 ⑤ 22 ②

본책 54쪽

01 25 02 11 03 ③
04 10 05 168 06 ①

17 무리함수

본책 56~58쪽

01 ② 02 ③ 03 4
04 ② 05 ③ 06 $2\sqrt{2}+2$ 07 7 08 ⑤
09 ④ 10 ⑤ 11 ② 12 ③ 13 ③
14 -2 15 2 16 ④ 17 ③

본책 59~61쪽

01 ① 02 ③ 03 ③
04 60 05 $\frac{5}{3}$ 06 20 07 ② 08 $\frac{5}{4}$
09 ③ 10 ② 11 $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$ 12 ⑤
13 8 14 ④ 15 $\frac{9}{4}$ 16 6 17 ④
18 2 19 20 20 4

본책 62~63쪽

01 ④ 02 ④ 03 ③
04 ① 05 16 06 ④ 07 ③ 08 ③
09 51 10 ① 11 -2 12 $50\sqrt{2}$

본책 64~67쪽

01 ⑤ 02 ⑤ 03 ②
04 ⑤ 05 ⑤ 06 ④ 07 ③ 08 ②
09 ② 10 ② 11 ④ 12 ② 13 ①
14 ① 15 ⑤ 16 $-2\le a\le 2$ 17 6
18 6 19 2 20 5 21 -8 22 $\frac{11}{12}$
23 59 24 $(\sqrt{2}+1)^n$ 25 $\frac{1}{3}\le m\le\frac{4}{3}$
26 6 27 17

본책 68쪽

01 ⑤ 02 78 03 ①
04 8

ⓒ좋은책신사고

빠른 정답 찾기

Ⅶ. 순열과 조합

18 순열

본책 70~71쪽

01 4 02 ④ 03 ④
04 48 05 ③ 06 48 07 8 08 4
09 ⑤ 10 ⑤ 11 1440 12 ⑤

본책 72~73쪽

01 ③ 02 26 03 11
04 504 05 ③ 06 81 07 40 08 ④
09 ④ 10 ① 11 ④ 12 66 13 120
14 1200 15 ③

본책 74쪽

01 ② 02 ⑤ 03 ④
04 96 05 13 06 ②

19 조합

본책 76쪽

01 ④ 02 9 03 39
04 204 05 ④ 06 420

본책 77쪽

01 ① 02 28 03 35
04 70 05 ③ 06 256 07 ②

본책 78쪽

01 ② 02 40 03 126
04 90 05 48 06 ③ 07 ③

본책 79~82쪽

01 ① 02 ① 03 ④
04 ④ 05 ④ 06 ③ 07 ④ 08 ②
09 ② 10 ③ 11 ③ 12 ④ 13 ①
14 ③ 15 ④ 16 ② 17 ① 18 12
19 10 20 60 21 108 22 60 23 2592
24 11 25 2142 26 62 27 360 28 50

본책 83쪽

01 2 02 ③ 03 ②
04 39

"1등급을 향한 최고의 학습 시스템"
일품

V 집합과 명제

12 집합의 뜻과 표현

개념&핵심 기출 본책 8~10쪽

01 ④ '가까운'은 그 기준이 명확하지 않으므로 100에 가까운 수의 모임은 집합이라 할 수 없다. 답 ④

02 ⑤ 10 이하의 소수는 2, 3, 5, 7이므로 $9 \notin A$이다. 답 ⑤

03 16의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16이므로
$1 \in A$, $2 \in A$, $4 \in A$, $8 \in A$, $16 \in A$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$1+2+4+8+16=31$ 답 31

04 ①, ②, ③, ④ $\{2, 4, 6, \cdots\}$
⑤ $\{2, 4, 6\}$ 답 ⑤
8, 10, …도 원소이다.

05 $-2 \le x \le 8$이므로
$-6 \le 3x \le 24$, $-8 \le 3x-2 \le 22$
$\therefore -8 \le y \le 22$
따라서 $M=22$, $m=-8$이므로
$M+m=14$ 답 14

06 $C=\{-3, -2, -1, 0, 2\}$이므로 집합 C의 모든 원소의 합은
$(-3)+(-2)+(-1)+0+2=-4$ 답 ②

07 ①, ② 무한집합
③ $\varnothing$ ➡ 유한집합
④ $\{15, 20, 25, 30, \cdots\}$ ➡ 무한집합
⑤ $\{2, 3, 5, 7, \cdots\}$ ➡ 무한집합 답 ③
원소의 개수가 0이다.

08 $A=\{3, 6, 9, \cdots, 99\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 33이다.
$\therefore n(A)=33$ 답 ②
$3 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, …, $3 \cdot 33$

09 $A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로
$n(A)=6$
$B=\{3, 4, 5, \cdots, 22\}$이므로
$n(B)=20$
$\therefore n(A)+n(B)=26$ 답 26

10 집합 A의 원소는 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$이므로
$\varnothing \in A$, $\{\varnothing\} \in A$
또 $\varnothing \in A$, $\{\varnothing\} \in A$이므로
$\{\varnothing\} \subset A$, $\{\{\varnothing\}\} \subset A$
$\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset A$
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ 모두 옳다. 답 ⑤

11 $A \subset B$이므로 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속해야 한다. 즉 $4 \in A$이므로 $4 \in B$이어야 한다.
(i) $a=4$일 때,
$A=\{4, 8\}$, $B=\{4, b, 3\}$이므로 $A \subset B$이려면 $b=8$이어야 한다.
(ii) $b=4$일 때,
ⓘ $2a=a$이면 $a=0$이므로 $A=\{0, 4\}$, $B=\{0, 3, 4\}$가 되어 두 집합 A, B가 자연수 전체의 집합의 부분집합이라는 조건에 모순이다.
ⓘⓘ $2a=3$이면 $a=\frac{3}{2}$이므로 $B=\left\{\frac{3}{2}, 3, 4\right\}$가 되어 집합 B가 자연수 전체의 집합의 부분집합이라는 조건에 모순이다.
(i), (ii)에서 $a=4$, $b=8$
$\therefore a+b=12$ 답 12

12 $x^2-3x=0$에서 $x(x-3)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=3$
$\therefore A=\{0, 3\}$
$x^2-9 \le 0$에서 $(x+3)(x-3) \le 0$
$\therefore -3 \le x \le 3$
$\therefore B=\{x \mid -3 \le x \le 3\}$
$|x| \le 3$에서 $-3 \le x \le 3$이고 x는 정수이므로
$x=\pm 3$ 또는 $x=\pm 2$ 또는 $x=\pm 1$ 또는 $x=0$
$\therefore C=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$\therefore A \subset C \subset B$ 답 ②

13 $4 \in A$이므로 $4 \in B$이어야 한다.
(i) $a+1=4$, 즉 $a=3$일 때,
$A=\{4, 6, 9\}$, $B=\{4, 6, 9\}$이므로 $A=B$이다.
(ii) $3a=4$, 즉 $a=\frac{4}{3}$일 때,
$A=\left\{\frac{16}{9}, \frac{8}{3}, 4\right\}$, $B=\left\{\frac{7}{3}, 4, 6\right\}$이므로 $A \ne B$이다.
(i), (ii)에서 $a=3$ 답 3

14 $A \subset B$이면 $n(A) \le n(B)$이고 조건에서
$n(B) \le n(A)$이므로 $n(A)=n(B)$
즉 $A \subset B$이고 $n(A)=n(B)$이므로
$A=B$
이때 $8 \in A$에서 $8 \in B$이어야 하므로 $ab=8$
(i) $a+b=4$, $4a-b=6$일 때,
$a=2$, $b=2$이므로 $ab=8$을 만족시키지 않는다.
(ii) $a+b=6$, $4a-b=4$일 때,
$a=2$, $b=4$이므로 $ab=8$을 만족시킨다.
(i), (ii)에서 $a=2$, $b=4$
$\therefore b-a=2$ 답 ⑤
다른 풀이 $A=B$이면 두 집합 A, B의 모든 원소의 합이 같아야 하므로
$(a+b)+(4a-b)+8=8+4+6$
$5a=10$ $\therefore a=2$
$ab=8$에서 $b=4$
$\therefore b-a=2$

15 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$이므로 진부분집합 중에서 원소의 개수가 가장 큰 것은 집합 A의 부분집합 중에서 원소의 개수가 4인 것이다.
이때 모든 원소의 합이 최소인 집합은 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$이므로 구하는 최솟값은
$2+4+6+8=20$ 답 ①

16 $\{1,\ 3\}\subset X$이므로 집합 X는 1, 3을 반드시 원소로 갖는 집합 A의 부분집합이다.
따라서 집합 X의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$ 답 8

17 $A=\{11,\ 12,\ 13,\ \cdots,\ 20\}$이므로 11, 13, 17, 19를 원소로 갖지 않는 집합 A의 부분집합의 개수는
$2^{10-4}=2^6=64$
따라서 구하는 진부분집합의 개수는
$2^{10}-1-64=959$ 답 959

(진부분집합의 개수) − (소수를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수)

18 집합 A의 원소의 개수는 n이므로 2는 원소로 갖고 $2n$은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
$2^{n-1-1}=2^{n-2}$
$2^{n-2}=2^5$에서 $n-2=5$ $\therefore n=7$
따라서 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은
$2+4+6+8+10+12+14=56$ 답 ④

1등급을 위한 고난도 문제 본책 11~12쪽

01 $\sqrt{2}x^2-4x+\sqrt{2}=0$에서
$x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pm1$
이므로 $A=\{\sqrt{2}-1,\ 1,\ \sqrt{2}+1\}$
$\alpha=\sqrt{2}+1$, $\beta=\sqrt{2}-1$이라 하면
$1+\alpha=2+\sqrt{2}\notin A$
$1-\alpha=-\sqrt{2}\notin A$
$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}\notin A$
이므로 덧셈, 뺄셈, 나눗셈은 주어진 조건을 만족시키지 않는다. 이때
$\alpha\cdot1=\alpha$, $\beta\cdot1=\beta$, $\alpha\beta=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$
이므로 집합 A에 대하여 주어진 조건을 만족시키는 연산은 곱셈이다. 답 ③

02 ㄱ. $z\in S$이면 z^2-2z는 실수이므로 $\overline{z^2-2z}$도 실수이다.
즉 $\overline{z^2-2z}=\overline{z}^2-2\overline{z}=(\overline{z})^2-2\overline{z}$가 실수이므로
$\overline{z}\in S$
ㄴ. $z=1+i$이면
$z^2-2z=(1+i)^2-2(1+i)=2i-2-2i=-2$
이므로 $z\in S$이지만
$(2z)^2-2\cdot2z=(2+2i)^2-2(2+2i)=-4+4i$
이므로 $2z\notin S$

켤레복소수의 성질
두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$라 할 때
① $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$
② $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$ (복호동순)
③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
④ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

ㄷ. $z_1=2$, $z_2=1+i$라 하면
$z_1^2-2z_1=2^2-4=0$
이므로 $z_1\in S$
ㄴ에서 $z_2\in S$
그러나 ㄴ에서 $z_1z_2=2(1+i)\notin S$이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

다른 풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$z^2-2z=(a+bi)^2-2(a+bi)$
$=a^2-2a-b^2+2b(a-1)i$
이때 z^2-2z가 실수이므로 $2b(a-1)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $b=0$
즉 집합 S의 원소는 복소수 중 실수부분이 1인 수 또는 실수이다.
실수 x, y ($x\neq0$)에 대하여
ㄱ. (i) $z=1+xi$이면 $\overline{z}=1-xi=1+(-x)i\in S$
(ii) $z=y$이면 $\overline{z}=y\in S$
ㄴ. $z=1+xi$이면 $2z=2+2xi\notin S$ 실수부분이 1이 아니다.
ㄷ. $z_1=1+xi$, $z_2=y$ ($y\neq0$)이면
$z_1z_2=(1+xi)y=y+xyi$
이때 $y\neq1$이면 $y+xyi\notin S$

03 $x=m^2-n^2=(m+n)(m-n)$에서
$a=m+n$, $b=m-n$이라 하면
$a+b=2m$ (단, m은 정수)
이때 a가 홀수이면 b도 홀수이고 a가 짝수이면 b도 짝수이어야 한다.
즉 x는 (홀수)×(홀수) 꼴이거나 (짝수)×(짝수) 꼴이어야 한다.
ㄱ. $9=3\cdot3$이므로 $m+n=3$, $m-n=3$에서 (홀수)×(홀수) 꼴
$m=3$, $n=0$
$\therefore 9\in A$
ㄴ. $12=2\cdot6$이므로 $m+n=2$, $m-n=6$에서 (짝수)×(짝수) 꼴
$m=4$, $n=-2$
$\therefore 12\in A$
ㄷ. $22=1\cdot22=2\cdot11$이므로 정수 m, n의 값은 존재하지 않는다. (짝수)×(홀수) 꼴
$\therefore 22\notin A$
이상에서 집합 A의 원소인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

두 수의 합이 짝수 ➡ 두 수 모두 홀수이거나 두 수 모두 짝수이다.

04 조건 (나)에서
(i) $5\in A$이므로 $\dfrac{1}{1-5}\in A$ $\therefore -\dfrac{1}{4}\in A$
(ii) $-\dfrac{1}{4}\in A$이므로 $\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}\in A$ $\therefore \dfrac{4}{5}\in A$
(iii) $\dfrac{4}{5}\in A$이므로 $\dfrac{1}{1-\frac{4}{5}}\in A$ $\therefore 5\in A$
⋮
이상에서 집합 A는 $-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{4}{5}$, 5를 반드시 원소로 가지므

로 원소의 개수가 가장 작은 집합은

$A=\left\{-\frac{1}{4},\ \frac{4}{5},\ 5\right\}$

따라서 $n(A)$의 최솟값은 3이다. 답 ③

05 주어진 집합이 공집합이려면 부등식 $a(x^2-2x+2)>-2x$의 해가 존재하지 않아야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여 부등식

$ax^2-2(a-1)x+2a\le 0$ …… ㉠

이 성립해야 한다. ⋯› ❶

(i) $a=0$일 때,

㉠에서 $2x\le 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

이차방정식 $ax^2-2(a-1)x+2a=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(a-1)^2-2a^2\le 0$

$-a^2-2a+1\le 0$, 즉 $a^2+2a-1\ge 0$

$\therefore a\le -1-\sqrt{2}$ 또는 $a\ge -1+\sqrt{2}$

이때 $a<0$이므로 $a\le -1-\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$a\le -1-\sqrt{2}$ ⋯› ❷

답 $a\le -1-\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 집합이 공집합일 조건을 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %

06 ㄱ. $a\in A$, $b\in A$에서 a^2, b^2은 모두 유리수이므로 a^2b^2은 유리수이다.

이때 $a^2b^2=(ab)^2$이므로 $ab\in A$

ㄴ. $\sqrt{2}\in A$, $\sqrt{3}\in A$이지만 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$은 유리수가 아니므로 $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin A$

ㄷ. $(\sqrt{2})^2=2$이므로 $\sqrt{2}\in A$

그런데 $\sqrt{2}$는 무리수이므로 집합 A는 유리수 전체의 집합의 부분집합이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

07 $1-\sqrt{3}i\in A$이므로 $1-\sqrt{3}i$는 방정식

$x^2+ax+b=0$ …… ㉠

의 근이고, a, b가 실수이므로 방정식 ㉠의 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}i$이다. 즉 $1+\sqrt{3}i\in A$이다.

이때 $A\subset B$이므로 $1\pm\sqrt{3}i\in B$

따라서 $1-\sqrt{3}i$와 $1+\sqrt{3}i$는 방정식

$x^3+cx^2+dx+4=0$ …… ㉡

의 근이다.

㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)=-a$

$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)=b$

$\therefore a=-2,\ b=4$ ⋯› ❶

㉡의 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)+\alpha=-c$

$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)\alpha+(1-\sqrt{3}i)\alpha=d$

$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)\alpha=-4$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$\alpha=-1,\ c=-1,\ d=2$ ⋯› ❷

$\therefore a+b+c+d=-2+4+(-1)+2=3$ ⋯› ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ c, d의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b+c+d$의 값을 구할 수 있다.	20 %

08 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 50\}$의 원소들 중에서 7로 나누었을 때의 나머지가 k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$인 수의 집합을 A_k라 하면

$A_0=\{7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42,\ 49\}$,

$A_1=\{1,\ 8,\ 15,\ 22,\ 29,\ 36,\ 43,\ 50\}$,

$A_2=\{2,\ 9,\ 16,\ 23,\ 30,\ 37,\ 44\}$,

$A_3=\{3,\ 10,\ 17,\ 24,\ 31,\ 38,\ 45\}$,

$A_4=\{4,\ 11,\ 18,\ 25,\ 32,\ 39,\ 46\}$,

$A_5=\{5,\ 12,\ 19,\ 26,\ 33,\ 40,\ 47\}$,

$A_6=\{6,\ 13,\ 20,\ 27,\ 34,\ 41,\ 48\}$

이때 집합 X의 어떤 서로 다른 두 원소의 합도 7의 배수가 아닐 때의 집합 X의 원소의 개수가 최대가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) A_0의 원소 1개와 A_1, A_2, A_3의 모든 원소를 가질 때

(ii) A_0의 원소 1개와 A_1, A_2, A_4의 모든 원소를 가질 때

(iii) A_0의 원소 1개와 A_1, A_3, A_5의 모든 원소를 가질 때

(iv) A_0의 원소 1개와 A_1, A_4, A_5의 모든 원소를 가질 때

이상에서 각 경우의 집합 X의 원소의 개수는 모두

$1+8+7+7=23$

이므로 구하는 원소의 개수의 최댓값은 23이다. 답 23

09 $A\subset B$, $B\subset A$이면 $A=B$

(i) $a+b=a-b-3$, $a-b=4$일 때,

$a+b=a-b-3$이면 $2b=-3$이므로 이를 만족시키는 정수 b는 존재하지 않는다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+b=4$, $a-b=a+b+2$일 때,

$a-b=a+b+2$에서 $2b=-2$

$\therefore b=-1$

$a+b=4$에 $b=-1$을 대입하면 $a=5$

이때 $A=B=\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=5,\ b=-1$ 답 $a=5,\ b=-1$

10 조건 (가), (나)에서 1과 11, 3과 9, 5와 7은 어느 하나가 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.

일품 BOX

$ax^2+bx+c\le 0$ (a, b, c는 상수)이 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건

① $a=0,\ b=0,\ c\le 0$

② $a<0,\ b^2-4ac\le 0$

$a+b\ne a+b+2$

$a-b\ne a-b-3$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)의 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다.
(단, p, q는 실수, $q\ne 0$)

또 6은 반드시 A의 원소이어야 한다.

(i) $n(A)=3$인 경우

$\{1, 6, 11\}$, $\{3, 6, 9\}$, $\{5, 6, 7\}$의 3개

(ii) $n(A)=5$인 경우

$\{1, 3, 6, 9, 11\}$, $\{1, 5, 6, 7, 11\}$, $\{3, 5, 6, 7, 9\}$의 3개

(iii) $n(A)=7$인 경우

$\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11\}$의 1개

이상에서 집합 A의 개수는 7이다. 답 ④

11 $A=\{\varnothing\}$이면 집합 A의 부분집합은 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$이므로 $B=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 2이므로 집합 B의 부분집합의 개수는 $2^2=4$

$\therefore n(C)=4$ 답 4

$\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

12 조건 (가)에서 집합 A의 모든 원소는 홀수이어야 한다. 이때 조건 (나)에서 집합 A의 원소의 개수는 짝수이어야 한다.

즉 구하는 집합 A는 집합 $X=\{1, 3, 5, 7\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 짝수인 집합이다. ···❶

X의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 집합은

$\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 7\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$, $\{5, 7\}$

의 6개이고, 원소의 개수가 4인 집합은 $\{1, 3, 5, 7\}$의 1개이다.

따라서 구하는 집합 A의 개수는 $6+1=7$ ···❷

답 7

채점 기준	비율
❶ 조건을 모두 만족시키는 집합 A를 알 수 있다.	40 %
❷ 집합 A의 개수를 구할 수 있다.	60 %

1등급 비밀노트

자연수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대하여

① $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$의 값이 홀수이려면 $a_1, a_2, \cdots, a_n$이 모두 홀수이어야 한다.

② $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$의 값이 짝수이려면 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

③ $a_1+a_2+\cdots+a_n$의 값이 홀수이려면 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중 홀수인 것이 홀수 개이어야 한다.

④ $a_1+a_2+\cdots+a_n$의 값이 짝수이려면 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중 홀수인 것이 짝수 개이거나 없어야 한다.

13 (i) 집합 A의 부분집합 중 2를 원소로 갖는 것의 개수는 $2^3=8$이고, 이들 집합에서 최소인 원소는 2이다. 즉 이들의 합은 $2 \cdot 8=16$

(ii) 집합 A의 부분집합 중 3을 원소로 갖고 2를 원소로 갖지 않는 것의 개수는 $2^2=4$이고, 이들 집합에서 최소인 원소는 3이다. 즉 이들의 합은 $3 \cdot 4=12$

(iii) 집합 A의 부분집합 중 5를 원소로 갖고 2, 3을 원소로 갖지 않는 것의 개수는 $2^1=2$이고, 이들 집합에서 최소인 원소는 5이다. 즉 이들의 합은 $5 \cdot 2=10$

(iv) 집합 A의 부분집합 중 7을 원소로 갖고 2, 3, 5를 원소로 갖지 않는 것은 1개뿐이고, 이 집합에서 최소인 원소는 7이다.

이상에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}=16+12+10+7=45$ 답 45

참고 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합을 모두 구해 보면

(i) $\{2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 7\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 3, 7\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{2, 3, 5, 7\}$

(ii) $\{3\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$, $\{3, 5, 7\}$

(iii) $\{5\}$, $\{5, 7\}$

(iv) $\{7\}$

14 $n(X) \geq 2$, $S(X)=9$를 만족시키는 집합 X는 다음과 같다.

(i) 집합 X의 원소 중 가장 큰 수가 8, 가장 작은 수가 1일 때, X의 개수는 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^6=64$

(ii) 집합 X의 원소 중 가장 큰 수가 7, 가장 작은 수가 2일 때, X의 개수는 $\{3, 4, 5, 6\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4=16$

(iii) 집합 X의 원소 중 가장 큰 수가 6, 가장 작은 수가 3일 때, X의 개수는 $\{4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^2=4$

(iv) 집합 X의 원소 중 가장 큰 수가 5, 가장 작은 수가 4일 때, $X=\{4, 5\}$이므로 X의 개수는 1이다.

이상에서 집합 X의 개수는

$64+16+4+1=85$ 답 85

사고력 강화를 위한 수능형 문제 본책 13쪽

01 집합 A는 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점들의 집합이고, 집합 B는 집합 A가 나타내는 점들을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동시킨 점들의 집합이므로

$B=\{(x, y) \mid (x-3)^2+(y+4)^2=4\}$

즉 점 (a, b)는 중심이 $(3, -4)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

이때 원점 $(0, 0)$과 원의 중심 $(3, -4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

이므로 $\sqrt{a^2+b^2}$의 최댓값은 $5+2=7$ 답 7

원점과 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=4$ 위의 점 사이의 거리

02 $a \in A_1$, $b \in A_1$일 때, ab의 값을 구해 보면

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

$\therefore A_2=\{0, 1, 2, 4\}$

일품 BOX

$a \in A_1$, $b \in A_2$일 때, ab의 값을 구해 보면

×	0	1	2	4
0	0	0	0	0
1	0	1	2	4
2	0	2	4	8

$\therefore A_3=\{0, 1, 2, 4, 8\}$

$a \in A_1$, $b \in A_3$일 때, ab의 값을 구해 보면

×	0	1	2	4	8
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	4	8
2	0	2	4	8	16

$\therefore A_4=\{0, 1, 2, 4, 8, 16\}$

따라서 집합 A_4의 모든 원소의 합은

$0+1+2+4+8+16=31$ 답 ④

03 집합 A의 임의의 원소 x에 대하여 x와 $\frac{36}{x}$이 모두 자연수이어야 하므로 x의 값이 될 수 있는 수는 36의 양의 약수인 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36이다.

$1 \in A$이면 $\frac{36}{1}=36 \in A$이므로 1과 36은 항상 동시에 집합 A의 원소이어야 한다. 같은 방법으로 2와 18, 3과 12, 4와 9는 동시에 집합 A의 원소이어야 한다.

또 $6 \in A$이면 $\frac{36}{6}=6$이므로 $A=\{6\}$도 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

따라서 구하는 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로 구하는 집합 A의 개수는

$2^5-1=31$ 답 31

다른 풀이 (i) $n(A)=1$인 경우

$\{6\}$의 1개

(ii) $n(A)=2$인 경우

$\{1, 36\}$, $\{2, 18\}$, $\{3, 12\}$, $\{4, 9\}$의 4개

(iii) $n(A)=3$인 경우

$\{1, 6, 36\}$, $\{2, 6, 18\}$, $\{3, 6, 12\}$, $\{4, 6, 9\}$의 4개

(ii)의 집합에 원소 6을 추가한 경우와 같다.

(iv) $n(A)=4$인 경우

$\{1, 2, 18, 36\}$, $\{1, 3, 12, 36\}$, $\{1, 4, 9, 36\}$, $\{2, 3, 12, 18\}$, $\{2, 4, 9, 18\}$, $\{3, 4, 9, 12\}$의 6개

(v) $n(A)=5$인 경우

$\{1, 2, 6, 18, 36\}$, $\{1, 3, 6, 12, 36\}$, $\{1, 4, 6, 9, 36\}$, $\{2, 3, 6, 12, 18\}$, $\{2, 4, 6, 9, 18\}$, $\{3, 4, 6, 9, 12\}$의 6개

(iv)의 집합에 원소 6을 추가한 경우와 같다.

(vi) $n(A)=6$인 경우

$\{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$, $\{1, 2, 4, 9, 18, 36\}$, $\{1, 3, 4, 9, 12, 36\}$, $\{2, 3, 4, 9, 12, 18\}$의 4개

(vi)의 집합에 원소 6을 추가한 경우와 같다.

(vii) $n(A)=7$인 경우

$\{1, 2, 3, 6, 12, 18, 36\}$, $\{1, 2, 4, 6, 9, 18, 36\}$, $\{1, 3, 4, 6, 9, 12, 36\}$, $\{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$의 4개

(viii) $n(A)=8$인 경우

$\{1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36\}$의 1개

(ix) $n(A)=9$인 경우

$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$의 1개

이상에서 집합 A의 개수는

$1+4+4+6+6+4+4+1+1=31$

04 $A=\{1, 3, 9, 27\}$이므로 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는

$n=2^4-1=15$

집합 $A=\{1, 3, 9, 27\}$의 부분집합 중 원소 1을 포함하는 부분집합의 개수는

$2^{4-1}=8$

이므로 $p(A_1)\times p(A_2)\times p(A_3)\times \cdots \times p(A_{15})$에는 1이 8번 곱해져 있다.

마찬가지로 $p(A_1)\times p(A_2)\times p(A_3)\times \cdots \times p(A_{15})$에는 3, 9, 27이 각각 8번씩 곱해져 있으므로

$p(A_1)\times p(A_2)\times p(A_3)\times \cdots \times p(A_{15})$

$=1^8\times 3^8\times 9^8\times 27^8$

$=3^8\times 3^{16}\times 3^{24}=3^{48}$

$\therefore k=48$

$\therefore n+k=15+48=63$ 답 63

05 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$의 부분집합 A의 원소의 개수가 k $(0 \le k<9)$일 때, $A \subset X \subset U$를 만족시키는 집합 X의 개수는 2^{9-k}이므로

$f(A)=2^{9-k}=16=2^4$

$\therefore k=5$

따라서 집합 A의 원소의 개수가 5이므로 집합 A의 진부분집합의 개수는

$2^5-1=31$ 답 31

06 ㄱ. S의 부분집합 중 가장 큰 원소가 3인 부분집합은 $\{3\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$의 4개이므로 $M(3)=4$

ㄴ. S의 부분집합 중 가장 큰 원소가 n인 부분집합은 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, n-1\}$의 부분집합에 원소 n을 추가한 집합과 같으므로

$M(1)=1$,

$M(n)=2^{n-1}$ $(n=2, 3, \cdots, 10)$

따라서 $a>b$이면 $M(a)>M(b)$이다.

ㄷ. $M(4)=8$, $M(3)=4$이므로 $M(4) \ne \{M(3)\}^2$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

ⓒ좋은책신사고

13 집합의 연산

개념&핵심 기출

본책 14~16쪽

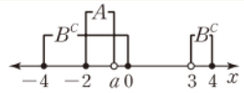
01 $A\cap B=\{3,\ 5\}$에서 $5\in A$, $3\in B$, $5\in B$이다.
이때 $b-1=3$, $b+1=5$이므로 — $b-1<b+1$
$b=4$
(i) $a-1=5$, 즉 $a=6$일 때,
$A=\{3,\ 5,\ 9\}$, $B=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$에서
$A\cap B=\{3,\ 5,\ 9\}$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a+3=5$, 즉 $a=2$일 때,
$A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$에서
$A\cap B=\{3,\ 5\}$이다.
(i), (ii)에서 $a=2$
$\therefore b-a=2$ 답 2

02 $\{1,\ 2\}\subset X\subset A$이므로 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합이다.
이때 $\{3\}\cap X=\varnothing$이므로 집합 X는 3을 원소로 갖지 않는다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{7-2-1}=2^4=16$ 답 16

03 ㄱ. $A_3=\{1,\ 3\}$, $A_4=\{1,\ 2,\ 4\}$이므로
$A_3\cap A_4=\{1\}$
ㄴ. $A_6=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $A_{12}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이므로
$A_6\cup A_{12}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$
$\therefore A_6\cup A_{12}=A_{12}$
ㄷ. $A_3=\{1,\ 3\}$, $A_4=\{1,\ 2,\ 4\}$이므로
$A_3\cup A_4=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$
그런데 $A_6=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로
$(A_3\cup A_4)\not\subset A_6$
이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

04 $A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$이므로
$A^C-B=\{2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14\}$ — $A^C=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14\}$
따라서 집합 A^C-B의 원소의 개수는 8이다. 답 ③

05 $B^C=\{x\mid -4\le x\le 0$ 또는 $3<x\le 4\}$
오른쪽 그림에서 $A\subset B^C$가 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는 — $A\subset B^C \Rightarrow A\cap B=\varnothing$



$-2<a\le 0$
이므로 a의 최댓값은 0이다. 답 0

06 $A\cap X=X$이므로 $X\subset A$
$(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$
$\therefore (A-B)\subset X\subset A$
즉 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 집합 $A-B$를 포함하는 집합이다.

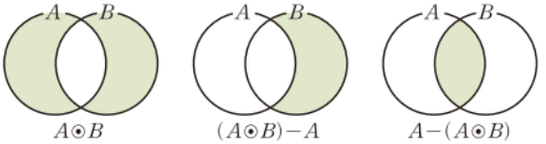
두 집합 A, B에 대하여
① $A\cap B=A$이면 $A\subset B$
② $A\cup B=A$이면 $B\subset A$

이때 $n(A-B)=m$이라 하면 집합 X의 개수는 2^{5-m}이므로
$2^{5-m}=8=2^3$ $\therefore m=2$
즉 $n(A-B)=2$이므로 $n(A\cap B)=3$
이때 a가 자연수이므로 집합 B의 원소는 연속하는 네 자연수이다. 따라서
$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
이므로 $a+1=3$에서 $a=2$ 답 ②

07 A, B^C가 서로소이므로 $A\cap B^C=\varnothing$이다.
즉 $A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$
① $A\cap B=A$
② $A\cup B=B$
③ $A\subset B$이고 $A\ne B$이므로 $B-A\ne\varnothing$
④ $A\subset B$이므로 $(A^C\cup A)\subset(A^C\cup B)$
이때 $A^C\cup A=U$이므로 $U\subset(A^C\cup B)$
$\therefore A^C\cup B=U$
⑤ $A\subset B$이고 $B\not\subset A$이므로 $A^C\not\subset B^C$ 답 ④ — $A\ne B$이다.

08 $A-(A-B^C)^C=A-(A\cap B)^C$
$=A\cap(A\cap B)$ — $(A\cap B)\subset A$
$=A\cap B$
$=B$
즉 $A\cap B=B$이므로 $B\subset A$ 답 ①

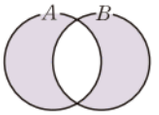
09 $(A\odot B)\odot A=\{(A\odot B)-A\}\cup\{A-(A\odot B)\}$이므로 $A\odot B$, $(A\odot B)-A$, $A-(A\odot B)$를 각각 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



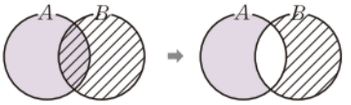
$\therefore (A\odot B)\odot A$
$=\{(A\odot B)-A\}\cup\{A-(A\odot B)\}$
$=B$ 답 ②

1등급 비밀노트

대칭차집합
두 집합 A, B에 대하여 $A-B$와 $B-A$의 합집합, 즉
$(A-B)\cup(B-A)$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$
를 **대칭차집합**이라 한다.



벤다이어그램으로 나타내면 두 집합 A, B에서 겹쳐지는 부분을 제거하고 남은 부분을 의미한다.



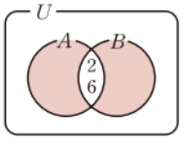
이와 같이 두 집합을 벤다이어그램에 색칠한 부분과 빗금 친 부분으로 각각 나타낸 후 겹쳐지는 부분을 제거하면 대칭차집합을 쉽게 구할 수 있다.

10 ㄱ. $A\subset B$이면 $A\cap B=A$이므로
$A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B=A$
ㄴ. $A\cap(A\cup B^C)=(A\cap A)\cup(A\cap B^C)=A\cup\varnothing=A$
ㄷ. $A-(A-B)=A-\varnothing=A$
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

11 $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C=\{1, 2, 3, 6\}$이므로
$(A\cup B)\cap(B\cup C^C)$
$=(A\cup B)\cap(C^C\cup B)$
$=(A\cap C^C)\cup B$
$=(A-C)\cup B$
$=\{5, 7\}\cup\{2, 4, 6, 8, 10\}$
$=\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
따라서 구하는 모든 원소의 합은
$2+4+5+6+7+8+10=42$ 답 42

12 $\{(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\}\cup\{(A^C\cup B)\cap(A^C\cup B^C)\}$
$=\{A\cap(B\cup B^C)\}\cup\{A^C\cup(B\cap B^C)\}$
$=(A\cap U)\cup(A^C\cup\varnothing)$
$=A\cup A^C$
$=U$ 답 ①

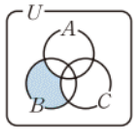
13 $(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$
$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$
$=\{4, 8, 12, 16\}$
이므로 $(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다. 그런데 $A=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

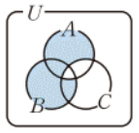


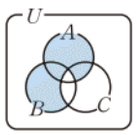
$A\cap B=\{2, 6\}$
$\therefore B=\{2, 6, 12, 16\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$2+6+12+16=36$ 답 36

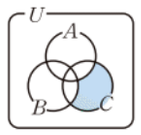
14 $(A\cup B)^C\cup(A^C\cap B)$
$=(\boxed{A^C\cap B^C})\cup(A^C\cap B)$
$=A^C\cap(\boxed{B^C\cup B})$
$=A^C\cap\boxed{U}$
$=\boxed{A^C}$
$\therefore$ (가) $A^C\cap B^C$ (나) $B^C\cup B$ (다) U (라) A^C 답 ④

15 ① $(A\cup B)\cap(A^C\cap C^C)$
$=(A\cup B)\cap(A\cup C)^C$
$=(A\cup B)-(A\cup C)$
② $(A\cup B)\cap(A^C\cup C^C)=(A\cup B)\cap(A\cap C)^C$
$=(A\cup B)-(A\cap C)$
③ $(A\cup B)\cap(B^C\cup C^C)=(A\cup B)\cap(B\cap C)^C$
$=(A\cup B)-(B\cap C)$
④ $(A^C\cap B^C)\cap(A\cup C)=(A\cup B)^C\cap(A\cup C)$
$=(A\cup C)-(A\cup B)$
⑤ $(A^C\cup B^C)\cap(A\cup C)=(A\cap B)^C\cap(A\cup C)$
$=(A\cup C)-(A\cap B)$
이므로 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.

① 

② 

③ 

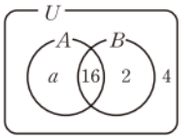
④ 

따라서 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ⑤이다. 답 ⑤

16 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$이므로
$n(A)-n(A\cap B)=n(A)-n(B)$
$\therefore n(A\cap B)=n(B)$
이때 $(A\cap B)\subset B$이므로 $n(A\cap B)=n(B)$이려면
$A\cap B=B$
즉 $B\subset A$이어야 한다.
따라서 $A\cup B=A$이므로
$n(A)=n(A\cup B)=20$
$n(A)-n(B)=7$에서 $n(B)=n(A)-7=13$이므로
$n(A\cap B)=n(B)=13$ 답 ③

17 학급 전체 학생의 집합을 U, 중식을 신청한 학생들의 집합을 A, 석식을 신청한 학생들의 집합을 B라 하면
$n(U)=40$, $n(A\cap B)=16$, $n(B-A)=2$, $n(A^C\cap B^C)=4$
$\therefore n(B)=n(A\cap B)+n(B-A)$
$=16+2=18$
또
$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
이므로
$40-n(A\cup B)=4$
$\therefore n(A\cup B)=36$
이때 중식만 신청한 학생들의 집합은 $A-B$이므로
$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$
$=36-18=18$ 답 18

다른 풀이 중식만 신청한 학생 수를 a라 하고 벤다이어그램의 각 영역에 해당되는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 나타내자.



이때 $n(U)=40$이므로
$40=a+16+2+4$
$\therefore a=18$

일품 BOX

석식만 신청한 학생들의 집합 ➡ $B\cap A^C$

$(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$
$=\{4, 8, 12, 16\}$
에서
$\{4, 8\}\subset A$,
$\{12, 16\}\subset B$

$A\cap B^C$

18 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=7+5-10=2$
$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)$
$=5+3-6=2$
그런데 $A\cap C=\varnothing$에서 $A\cap B\cap C=\varnothing$이므로
$n(A\cap C)=n(A\cap B\cap C)=0$
$\therefore n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=7+5+3-2-2-0+0$
$=11$ 답 ①

1등급을 위한 고난도 문제 본책 17~19쪽

01 $X*Y=\{-4,\ -2,\ 2,\ 4\}$,
$Z*Y=\{-16,\ -8,\ -4\}$이므로
$(X*Y)\cup(Z*Y)$
$=\{-4,\ -2,\ 2,\ 4\}\cup\{-16,\ -8,\ -4\}$
$=\{-16,\ -8,\ -4,\ -2,\ 2,\ 4\}$
따라서 집합 $(X*Y)\cup(Z*Y)$의 원소의 개수는 6이므로 부분집합의 개수는
$2^6=64$ 답 ③

02 집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 주어진 조건을 모두 만족시키는 경우는 다음과 같다.
(i) 두 집합이 각각 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 5\}$일 때,
$s(A)\times s(B)=15\times 10=150$
(ii) 두 집합이 각각 $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$일 때,
$s(A)\times s(B)=11\times 14=154$ ···➊
(i), (ii)에서 $s(A)\times s(B)$의 최댓값은 154이다. ···➋
답 154

채점 기준	비율
➊ 주어진 조건을 모두 만족시키는 두 집합 A, B에 대하여 $s(A)\times s(B)$의 값을 각각 구할 수 있다.	80 %
➋ $s(A)\times s(B)$의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

03 주어진 조건에서 $A\cap B$의 원소의 개수가 3이고,
$26=1^2+3^2+4^2$
이므로 1, 3, 4는 집합 A의 원소이다. 또
$A\cap B=\{1^2,\ 3^2,\ 4^2\}=\{1,\ 9,\ 16\}$
이므로
$A=\{1,\ 3,\ 4,\ 9,\ 16\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$1^2+3^2+4^2+9^2+16^2=363$ 답 ④

1등급 비밀노트
조건 (나)에서 세 자연수를 각각 제곱하여 더한 값이 26이므로 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 중 합이 26이 되는 세 수를 찾으면 된다.

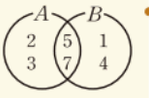
일품 BOX

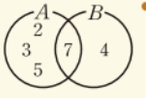
$B-A$
$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$

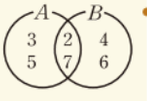
$A_2=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$,
$A_3=\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\}$
이므로
A_3^C
$=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ \cdots\}$
$\therefore 6\notin A_3^C$

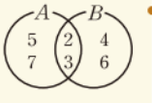
×	2	4
−1	−2	−4
1	2	4

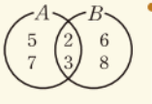
×	2	4
−4	−8	−16
−2	−4	−8

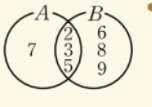


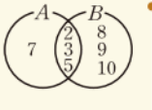








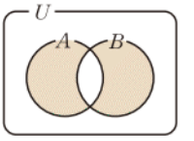




04 조건 (가)에서 두 집합 X, Y는 각각 두 집합 A, B의 부분집합이다. 또 $X-Y=X$이므로 $X\cap Y=\varnothing$이다.
조건 (나)에서 $A\cap B=\{5,\ 7,\ 9\}$이므로
$\{5,\ 7,\ 9\}\subset(X\cup Y)$
두 집합 A, $B-A$의 부분집합을 각각 P, Q라 하면 P, Q의 개수는 각각 2^5, 2^6이다. 이때
$X=P$,
$Y=Q\cup\{(A\cap B)-P\}=Q\cup(\{5,\ 7,\ 9\}-P)$
이므로 구하는 순서쌍 $(X,\ Y)$의 개수는
$2^5\cdot 2^6=2^{11}=2048$ 답 2048

05 ㄱ. $6\in A_2$이지만 $6\notin A_3^C$이다.
$\therefore A_2\not\subset A_3^C$
ㄴ. 3과 4의 최소공배수는 12이므로 $A_3\cap A_4=A_{12}$
ㄷ. $A_{12}-A_k=\varnothing$이려면 $A_{12}\subset A_k$이어야 한다. 즉 k는 12의 양의 약수이어야 하므로
$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$
의 6개이다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

06 조건 (가)에서 $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
이때 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같고, 그 원소는 연속하는 네 자연수이다.



(i) $n=1$일 때,
$(A\cup B)-(A\cap B)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로
$B=\{1,\ 4,\ 5,\ 7\}$
(ii) $n=2$일 때,
$(A\cup B)-(A\cap B)=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로
$B=\{4,\ 7\}$
(iii) $n=3$일 때,
$(A\cup B)-(A\cap B)=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이므로
$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 7\}$
(iv) $n=4$일 때,
$(A\cup B)-(A\cap B)=\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$이므로
$B=\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$
(v) $n=5$일 때,
$(A\cup B)-(A\cap B)=\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이므로
$B=\{2,\ 3,\ 6,\ 8\}$
(vi) $n=6$일 때,
$(A\cup B)-(A\cap B)=\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$이므로
$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$
(vii) $n=7$일 때,
$(A\cup B)-(A\cap B)=\{7,\ 8,\ 9,\ 10\}$이므로
$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10\}$
조건 (다)에서 집합 B의 원소의 개수가 4이어야 하므로
$n=1,\ 3,\ 4,\ 5$
따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은
$1+3+4+5=13$ 답 ②

일품 BOX

07 $B-A=(A\cup B)-A$
$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}-\{1, 3, 4, a\}$
$\subset\{2, 5, 6\}$
따라서 집합 $B-A$의 모든 원소의 합이 7이 되려면 $a=6$이어야 한다. 답 6

2+5

08 임의의 두 집합 A, B에 대하여
$(A\cap B)\subset(A\cup B)$ …… ㉠
이고, 주어진 조건에서 $(A\cup B)-(A\cap B)=\varnothing$이므로
$(A\cup B)\subset(A\cap B)$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $A\cap B=A\cup B$
$\therefore A=B$ 답 ①

두 집합 X, Y에 대하여 $X\subset Y$이고 $Y\subset X$일 때 ➡ $X=Y$

09 $A\cap B=B$를 만족시키려면 $B\subset A$이어야 한다. ⋯➊

(i) $B=\{-1\}$일 때,
$(x+1)^2=0$에서 $x^2+2x+1=0$
$\therefore a=-1$, $b=1$
(ii) $B=\{1\}$일 때,
$(x-1)^2=0$에서 $x^2-2x+1=0$
$\therefore a=1$, $b=1$
(iii) $B=\{-1, 1\}$일 때,
$(x+1)(x-1)=0$에서 $x^2-1=0$
$\therefore a=0$, $b=-1$ ⋯➋
이상에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(0, -1)$
의 3이다. ⋯➌
답 3

채점 기준	비율
❶ $A\cap B=B$에서 $B\subset A$임을 알 수 있다.	30%
❷ 각각의 집합 B에 대하여 a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	20%

10 $U=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$,
$A=\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
$A-B=A$에서 $A\cap B=\varnothing$
즉 집합 B의 개수는 집합 $\{1, 9, 15\}$의 부분집합의 개수와 같다.
따라서 집합 B의 개수는 $2^3=8$ 답 8

$U-A$

11 $A=\left\{(1-i)^2, \frac{1}{i}, 2\right\}$에서
$A=\{-2i, -i, 2\}$
$(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$에서
$A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$
즉 $A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$ ⋯➊
(i) $a+bi=-2i$, $(a-2)i=-i$일 때,
$a+bi=-2i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=0$, $b=-2$
이때 $a=0$을 $(a-2)i=-i$에 대입하면 등식이 성립하지 않는다.

$(1-i)^2=1-2i-1$
$=-2i$,
$\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

(ii) $a+bi=-i$, $(a-2)i=-2i$일 때,
$a+bi=-i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=0$, $b=-1$
이때 $a=0$을 $(a-2)i=-2i$에 대입하면 등식이 성립한다.
(i), (ii)에서 $a=0$, $b=-1$이므로 ⋯➋
$a^2+b^2=1$ ⋯➌
답 1

채점 기준	비율
❶ 집합의 연산의 성질을 이용하여 $A=B$임을 알 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	10%

12 $(A\cap B)\cup B=(A\cup B)\cap(B\cup B)$
$=(A\cup B)\cap B$
$=B$
$\therefore A=B$
② $A\cap B=A$(또는 B)
③ $A^C\cap B=B-A=\varnothing$
④ $A\cup B=A$(또는 B)
⑤ $A\cup B^C=A\cup A^C=U$ 답 ①

13 $(A-C)\cap(B-C)$
$=(A\cap C^C)\cap(B\cap C^C)$
$=(A\cap B)\cap C^C$
이때 $A\cap B=\{x\,|\,x$는 유리수$\}$이고
$C^C=\{x\,|\,x$는 무리수 또는 0$\}$이므로
$(A-C)\cap(B-C)=(A\cap B)\cap C^C=\{0\}$
따라서 집합 $(A-C)\cap(B-C)$의 모든 원소의 합은 0이다. 답 ③

$b=0$, $d=0$인 경우

14 2와 서로소가 아닌 자연수는 2를 약수로 가지므로 A_2는 2의 배수의 집합이다.
6과 서로소가 아닌 자연수는 2 또는 3을 약수로 가지므로 A_6은 2의 배수 또는 3의 배수의 집합이다. 즉
$A_6=A_2\cup A_3$
4와 서로소가 아닌 자연수는 2를 약수로 가지므로 A_4는 2의 배수의 집합이다. 즉
$A_4=A_2$
9와 서로소가 아닌 자연수는 3을 약수로 가지므로 A_9는 3의 배수의 집합이다. 즉
$A_9=A_3$
$\therefore (A_2\cup A_6)\cap(A_4\cup A_9)$
$=\{A_2\cup(A_2\cup A_3)\}\cap(A_2\cup A_3)$
$=(A_2\cup A_3)\cap(A_2\cup A_3)$
$=A_2\cup A_3$ ⋯➊
집합 A_k는 2의 배수 또는 3의 배수의 집합이므로 6과 서로소가 아닌 자연수들의 집합이다.
따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 6이다. ⋯➋
답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

참고 자연수 k의 값은 2^a3^b (a, b는 자연수) 꼴의 수이다.

15 $(X\cup Y)\subset Z$이면
$X\subset Z$, $Y\subset Z$
$\therefore (Z-X)^C\cap Y=(Z\cap X^C)^C\cap Y$
$=(Z^C\cup X)\cap Y$
$=(Z^C\cap Y)\cup(X\cap Y)$
$=(Y-Z)\cup(X\cap Y)$
$=\varnothing\cup(X\cap Y)$
$=X\cap Y$

① $X\subset Z$, $Y\subset Z$이면
$Z\cap X=X$, $Z\cap Y=Y$
$\therefore (Z\cap X)\cup(Z\cap Y)=X\cup Y$

② $X\subset Z$, $Y\subset Z$이면
$Z\cup X=Z$, $Z\cup Y=Z$
$\therefore (Z\cup X)^C\cap(Z\cup Y)^C=Z^C\cap Z^C=Z^C$

③ $(Z-X)\cap(Z-Y)=(Z\cap X^C)\cap(Z\cap Y^C)$
$=Z\cap(X^C\cap Y^C)$
$=Z\cap(X\cup Y)^C$
$=Z-(X\cup Y)$

④ $(X-Z^C)\cap(Y-Z^C)=(X\cap Z)\cap(Y\cap Z)$
$=(X\cap Y)\cap Z$
$=X\cap Y$

$(X\cup Y)\subset Z$이므로 $(X\cap Y)\subset Z$

⑤ $Y\subset Z$이면 $Z^C\subset Y^C$이므로
$Z^C\cap Y^C=Z^C$
$\therefore (Z\cap X)\cup(Z^C\cap Y^C)=X\cup Z^C$

답 ④

다른 풀이 ① $(Z\cap X)\cup(Z\cap Y)=Z\cap(X\cup Y)$
$=X\cup Y$

② $(Z\cup X)^C\cap(Z\cup Y)^C=(Z^C\cap X^C)\cap(Z^C\cap Y^C)$
$=Z^C\cap(X^C\cap Y^C)$
$=Z^C\cap(X\cup Y)^C$
$=Z^C$

$(X\cup Y)\subset Z$이므로 $Z^C\subset(X\cup Y)^C$

16 $A\triangle B=A^C-B=A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로
$(A\triangle B)\triangle A=(A\cup B)^C\triangle A$
$=(A\cup B)-A$
$=B-A$
$=\{5\}$ ··· ❶

이때 $A=\{1, 2, 4\}$이므로 집합 B는 5는 반드시 원소로 갖고, 3은 원소로 갖지 않는 U의 부분집합이다.
따라서 집합 B의 개수는
$2^{5-1-1}=2^3=8$ ··· ❷

답 8

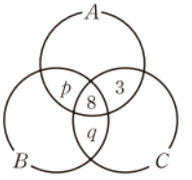
원소의 개수가 n인 집합 A의 특정한 원소 m개를 반드시 원소로 갖고, 특정한 원소 k개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수 ➡ 2^{n-m-k} (단, $m+k<n$)

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ 집합 B의 개수를 구할 수 있다.	50 %

17 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=15+12-n(A\cup B)$
$=27-n(A\cup B)$
즉 $3\le 27-n(A\cup B)\le 6$이므로
$-24\le -n(A\cup B)\le -21$
$\therefore 21\le n(A\cup B)\le 24$
따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 24, 최솟값은 21이므로 구하는 합은 45이다.

답 45

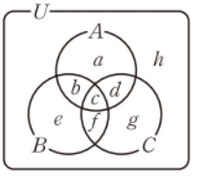
18 벤다이어그램의 각 영역에 해당되는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 나타내자.



이때 $n(B-(A\cup C))$가 최소이려면 $n(A\cup C)$, 즉 $p+q$가 최대이어야 한다.
$n(A)-n(A\cap C)=15-(8+3)=4$이므로 p의 최댓값은 4이고, $n(C)-n(A\cap C)=19-(8+3)=8$이므로 q의 최댓값은 8이다.
따라서 $n(B-(A\cup C))$의 최솟값은
$23-(4+8+8)=3$

답 3

19 $(A^C\cup B)\cap(A\cup B^C)$
$=\{(A^C\cup B)\cap A\}\cup\{(A^C\cup B)\cap B^C\}$
$=\{(A^C\cap A)\cup(B\cap A)\}\cup\{(A^C\cap B^C)\cup(B\cap B^C)\}$
$=(A\cap B)\cup(A^C\cap B^C)$
$=(A\cap B)\cup(A\cup B)^C$
에서 $A\triangle B=(A\cap B)\cup(A\cup B)^C$
벤다이어그램의 각 영역에 해당되는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 나타내면



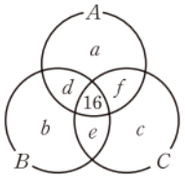
$n(A\triangle B)=b+c+g+h$,
$n(B\triangle C)=c+f+a+h$,
$n(C\triangle A)=c+d+e+h$
이고 조건 (나)에서
$b+g=f+a=d+e$
이때 $c=5$, $h=50-44=6$이므로 $n(A\cap B\cap C)=c$, $n(U)-n(A\cup B\cup C)=h$
$n(U)=a+b+c+d+e+f+g+h$
$=(a+f)+(b+g)+(d+e)+5+6$
$=3(a+f)+11=50$
따라서 $a+f=13$이므로
$n((A-C)\cup(C-A))=(a+b)+(g+f)$
$=(a+f)+(b+g)$
$=26$

답 ③

20 80명의 학생 전체의 집합을 U, 세 권의 책 A, B, C를 읽은 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면
$n(U)=n(A\cup B\cup C)=80$, $n(A)=42$,
$n(B)=35$, $n(C)=44$, $n(A\cap B\cap C)=16$

이때
$$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$$
$$=n(A)+n(B)+n(C)+n(A\cap B\cap C)$$
$$-n(A\cup B\cup C)$$
$$=42+35+44+16-80$$
$$=57$$
이므로 세 권의 책 중에서 한 권만 읽은 학생 수는
$$80-\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}$$
$$+2n(A\cap B\cap C)$$
$$=80-57+2\times16$$
$$=55$$
답 ④

다른 풀이 세 권의 책 A, B, C를 읽은 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하고 벤다이어그램의 각 영역에 해당되는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 나타내자.



$n(A\cup B\cup C)=80$, $n(A)=42$, $n(B)=35$, $n(C)=44$이므로
$$a+b+c+d+e+f=64 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$a+d+f=26 \quad \cdots\cdots ㉡$$
$$b+d+e=19 \quad \cdots\cdots ㉢$$
$$c+e+f=28 \quad \cdots\cdots ㉣$$
㉡+㉢+㉣−㉠을 하면
$$d+e+f=9 \quad \cdots\cdots ㉤$$
㉤을 ㉠에 대입하면 $a+b+c=55$
따라서 세 권의 책 중에서 한 권만 읽은 학생 수는 55이다.

일품 BOX

80−16=64
42−16=26
35−16=19
44−16=28

모든 집합은 자기 자신의 부분집합이므로 $P\subset P$

사고력 강화를 위한 수능형 문제 본책 20쪽

01 $A\cap X=B\cup X$에서
$$X\subset(B\cup X)\subset A$$
$$\therefore X\subset A \quad \cdots\cdots ㉠$$
마찬가지로 $A\cap X=B\cup X$에서
$$B\subset(B\cup X)\subset X$$
$$\therefore B\subset X \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡에서
$$B\subset X\subset A$$
따라서 집합 X의 개수는 집합 A의 부분집합 중 집합 B의 원소인 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
$$2^{6-2}=2^4=16$$
답 ③

02 ㄱ. $R\cup\{2, 5\}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로
$$1\in R,\ 3\in R,\ 4\in R$$
$$\therefore \{1, 3, 4\}\subset R\subset\{1, 2, 3, 4, 5\}$$
이때 $Q-\{2, 6, 8\}=R$에서
$$2\notin R$$
또 $P^C\cap\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}=Q$에서 $5\notin Q$이므로
$$5\notin R$$
$$\therefore R=\{1, 3, 4\}$$
따라서 집합 R의 부분집합의 개수는
$$2^3=8$$
ㄴ. $Q-\{2, 6, 8\}=R$이므로 ㄱ에서
$$1\in Q,\ 3\in Q,\ 4\in Q$$
한편 $P^C\cap\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}=Q$에서
$$Q\subset\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$
$$\therefore \{1, 3, 4\}\subset Q\subset\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$
따라서 2는 집합 Q의 원소일 수도 있고 아닐 수도 있다.
ㄷ. $Q=\{1, 2, 3, 4, 6\}$이면
$$P^C\cap\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}=\{1, 2, 3, 4, 6\}$$
이므로
$$\{1, 2, 3, 4, 6\}\subset P^C$$
이때 $P^C=\{1, 2, 3, 4, 6\}$이면
$$P=\{5, 7, 8, 9, 10\}$$
따라서 집합 P의 부분집합 중 원소의 개수가 5인 것이 존재한다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ③

03 조건 (가), (나)에서
$$A\cap B^C=\{x\mid x\text{는 3의 배수이고 4의 배수인 수}\}$$
$$=\{x\mid x\text{는 12의 배수}\},$$
$$A\cap B=\{x\mid x\text{는 3의 배수이고 4의 배수가 아닌 수}\}$$
$$=\{x\mid x\text{는 3의 배수 중 12의 배수가 아닌 수}\},$$
$$A^C\cap B=\{x\mid x\text{는 4의 배수이고 3의 배수가 아닌 수}\}$$
$$=\{x\mid x\text{는 4의 배수 중 12의 배수가 아닌 수}\}$$
한편 200 이하의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 66, 4의 배수의 개수는 50, 12의 배수의 개수는 16이므로
$$n(A\cap B)=66-16=50,$$
$$n(A^C\cap B)=50-16=34$$
$$\therefore n(B)=n(A\cap B)+n(A^C\cap B)$$
$$=50+34=84$$
답 84

04 $(B-A)^C\cap\{A\cap(A\cap B)^C\}$
$$=(B\cap A^C)^C\cap\{A\cap(A^C\cup B^C)\}$$
$$=(B^C\cup A)\cap\{(A\cap A^C)\cup(A\cap B^C)\}$$
$$=(B^C\cup A)\cap\{\varnothing\cup(A\cap B^C)\}$$
$$=(B^C\cup A)\cap(A\cap B^C)$$
$$=A\cap B^C\ (\because (A\cap B^C)\subset(B^C\cup A))$$
$$=A-B$$
$$\therefore A-B=\{1\} \quad \cdots\cdots ㉠$$
또 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{1, 2, 3, 5\}$이므로
$$A\cap B=\{4\} \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡에서
$$A=(A-B)\cup(A\cap B)=\{1, 4\}$$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은 $1+4=5$이다.
답 5

05 300명의 학생 전체의 집합을 U, 야구, 축구, 농구를 선택한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면 조건 (가), (나)에서

$n(A\cup B\cup C)=300$, $n(A\cap B\cap C)=20$

조건 (다)에서 야구만 선택한 학생 수는 축구, 농구를 모두 선택한 학생 수와 같으므로

$n(A-(B\cup C))=n(B\cap C)$

$n(A\cup B\cup C)-n(B\cup C)=n(B\cap C)$

$300-n(B)-n(C)+n(B\cap C)=n(B\cap C)$

$\therefore n(B)+n(C)=300$ ····· ㉠

같은 방법으로

$n(C)+n(A)=300$ ····· ㉡

$n(A)+n(B)=300$ ····· ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2\{n(A)+n(B)+n(C)\}=900$

$\therefore n(A)+n(B)+n(C)=450$

이때

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$

$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

이므로

$300=450-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+20$

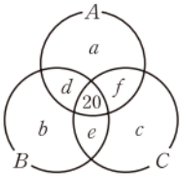
$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=170$

따라서 두 종목 이상을 선택한 학생 수는

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-2n(A\cap B\cap C)$

$=170-2\cdot 20=130$ 답 130

다른 풀이 야구, 축구, 농구를 선택한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하고 벤다이어그램의 각 영역에 해당되는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 나타내자.



조건 (가)에서

$a+b+c+d+e+f+20=300$ ····· ㉠

조건 (다)에서

$a=e+20$, $b=f+20$, $c=d+20$

$\therefore a+b+c=e+f+d+60$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2(d+e+f)=220$

$\therefore d+e+f=110$

따라서 두 종목 이상을 선택한 학생 수는

$d+e+f+20=110+20=130$

일품 BOX

여러 가지 부정
① 크다. ➡ 작거나 같다.
② 작다. ➡ 크거나 같다.
③ 같다. ➡ 같지 않다.
④ 그리고 ➡ 또는
⑤ 또는 ➡ 그리고

14 명제

개념&핵심 기출

본책 22~24쪽

01 $|x-3|\le 2$에서 $-2\le x-3\le 2$

$\therefore 1\le x\le 5$

$\therefore P=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$x^2-4x>0$에서 $x(x-4)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>4$

$\therefore Q=\{5, 6, 7\}$

따라서

$P^C\cap Q=\{6, 7\}\cap\{5, 6, 7\}$

$=\{6, 7\}$

이므로 집합 $P^C\cap Q$의 원소의 개수는 2이다. 답 ②

다른 풀이 $P^C\cap Q=Q-P$

$=\{5, 6, 7\}-\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$=\{6, 7\}$

02 $U=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이고

$x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

즉 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{2, 4\}$

이때 조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로

$P^C=\{1, 3, 6, 12\}$

따라서 집합 P^C의 모든 원소의 합은

$1+3+6+12=22$ 답 22

03 ㄱ. '$-2<a<3$', 즉 '$a>-2$이고 $a<3$'의 부정은 '$a\le -2$ 또는 $a\ge 3$'이다.

ㄴ. '$|a|=|b|$', 즉 '$a=b$ 또는 $a=-b$'의 부정은 '$a\ne b$이고 $a\ne -b$'이다.

ㄷ. '$a^2+b^2=0$', 즉 '$a=0$이고 $b=0$'의 부정은 '$a\ne 0$ 또는 $b\ne 0$'이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

참고 ㄷ. $ab\ne 0$ ➡ $a\ne 0$이고 $b\ne 0$

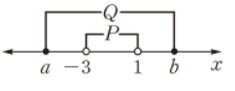
04 $-2<2x+4<6$에서 $-6<2x<2$

$\therefore -3<x<1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\mid -3<x<1\}$, $Q=\{x\mid a\le x\le b\}$

명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a\le -3$, $b\ge 1$

따라서 a의 최댓값은 -3, b의 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$-3+1=-2$ 답 ②

일품 BOX

05 ㄱ. [반례] $a=\sqrt{2}$이면 $a+b=\sqrt{2}$에서 $b=0$이므로 b는 유리수이다.

ㄴ. a가 무리수이면 $a\neq 0$이므로 $ab=1$에서 $b=\frac{1}{a}$은 무리수이다.

ㄷ. [반례] $a=0$이면 $b^2=a^2+1=1$이므로
$b=\pm 1$
이때 b는 유리수이다.

이상에서 참인 명제는 ㄴ뿐이다. 답 ②

06 명제 $p \Longrightarrow q$가 참이므로 대우 $\sim q \Longrightarrow \sim p$도 참이다. 즉 명제 '$x=2$이면 $x^2-ax+a=2$'가 참이므로
$2^2-2a+a=2$에서 $\quad -a+4=2$
$\therefore a=2$ 답 2

07 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. 명제 $p \Longrightarrow q$의 역 $q \Longrightarrow p$가 거짓이려면 $Q\not\subset P$이어야 한다.

ㄱ. $P=\{x|x>0\}$, $Q=\{0, 2\}$이므로 $Q\not\subset P$이다. 즉 명제 $q \Longrightarrow p$는 거짓이다.

ㄴ. $x>1$이고 $y>1$이면 $x+y>2$이므로 $Q\subset P$이다. 즉 명제 $q \Longrightarrow p$는 참이다.

ㄷ. $P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Q=\{1, 2, 4, 8\}$이므로 $Q\not\subset P$이다. 즉 명제 $q \Longrightarrow p$는 거짓이다.

이상에서 명제 $p \Longrightarrow q$의 역이 거짓인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

08 명제 $p \Longrightarrow q$의 역이 참이므로 명제 $q \Longrightarrow p$가 참이다.
$\therefore Q\subset P$
명제 $p \Longrightarrow q$의 대우가 참이므로 그 명제도 참이다.
$\therefore P\subset Q$
따라서 $P=Q$이다.
(i) $4-a=2$, 즉 $a=2$일 때,
$P=\{2, 4\}$, $Q=\{2, 5\}$이므로 $\quad P\neq Q$
(ii) $3a-1=2$, 즉 $a=1$일 때,
$P=\{2, 3\}$, $Q=\{2, 3\}$이므로 $\quad P=Q$
(i), (ii)에서 $\quad a=1$ 답 ④

09 조건 $|x-1|=1$의 진리집합을 A라 하면
$A=\{x||x-1|=1\}=\{0, 2\}$
ㄱ. 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{x|(x-2)^2=0\}=\{2\}$
즉 $P\subset A$이므로 조건 p는 $|x-1|=1$이기 위한 충분조건이다.

$A\not\subset P$이므로 필요조건은 아니다.

ㄴ. 조건 q의 진리집합을 Q라 하면
$Q=\{x|x^2-2x=0\}=\{0, 2\}$
즉 $A=Q$이므로 조건 q는 $|x-1|=1$이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. 조건 r의 진리집합을 R라 하면
$R=\{x|2x-5<0\}=\left\{x\middle|x<\frac{5}{2}\right\}$

$R\not\subset A$이므로 충분조건은 아니다.

즉 $A\subset R$이므로 조건 r는 $|x-1|=1$이기 위한 필요조건이다.

이상에서 $|x-1|=1$이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

10 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{x|x^2-4x-5<0\}=\{x|-1<x<5\}$
조건 q의 진리집합을 Q라 하면
$Q=\{x||x-a|<3\}=\{x|a-3<x<a+3\}$
따라서 p가 q이기 위한 필요충분조건이 되려면 $P=Q$이어야 하므로

$P\subset Q$, $Q\subset P$

$a-3=-1$, $a+3=5$
$\therefore a=2$ 답 2

11 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.
p는 r이기 위한 충분조건이므로 $\quad P\subset R$
q는 r이기 위한 필요조건이므로 $\quad R\subset Q$
$\therefore P\subset R\subset Q$
이때 $P=\{1, 2, 3, 6\}$, $Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$이므로
$R=P$ 또는 $R=\{x|x$는 12의 양의 약수$\}$
또는 $R=Q$
따라서 n의 값은 6 또는 12 또는 24이므로 구하는 합은
$6+12+24=42$ 답 42

12 주어진 명제의 대우는
'a가 3의 배수가 아니면 a^2+3a도 3의 배수가 아니다.'
이다.
a가 3의 배수가 아니면 $a=3k+1$ 또는 $a=3k+2$ ($k=0, 1, 2, \cdots$)로 나타낼 수 있다.
(i) $a=3k+1$이면
$a^2+3a=(3k+1)^2+3(3k+1)$
$=9k^2+15k+4$
$=3(3k^2+5k+1)+1$
이므로 a^2+3a는 3의 배수가 아니다.
(ii) $a=3k+2$이면
$a^2+3a=(3k+2)^2+3(3k+2)$
$=9k^2+21k+10$
$=3(3k^2+7k+3)+1$
이므로 a^2+3a는 3의 배수가 아니다.
(i), (ii)에서 a^2+3a는 3의 배수가 아니다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 답 풀이 참조

'$p>\sqrt{n}$이고 $q>\sqrt{n}$이다.'의 부정
➡ $p\leq\sqrt{n}$이거나 $q\leq\sqrt{n}$이다.

13 이때 $p>\sqrt{n}$이고 $q>\sqrt{n}$이면 $pq>\sqrt{n}\sqrt{n}=n$이므로 $pq\leq n$이라는 가정에 모순이다.
따라서 $\boxed{p\leq\sqrt{n}$이거나 $q\leq\sqrt{n}}$이다. 답 ①

ⓒ좋은책신사고

14 $\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
$=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)$
$=a-2\sqrt{ab}+b$
$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$
$\therefore \{\sqrt{2(a+b)}\}^2\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
그런데 $\sqrt{2(a+b)}>0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$이므로
$\sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
답 풀이 참조

15 $2a^2+2a(2-3b)+9b^2+4$
$=2a^2+4a-6ab+9b^2+4$
$=(a^2+4a+4)+(a^2-6ab+9b^2)$
$=(a+2)^2+(a-3b)^2\leq 0$
이때 $a+2$, $a-3b$는 실수이므로
$a+2=0$, $a-3b=0$
$\therefore a=-2$, $b=-\frac{2}{3}$
$\therefore 9ab=12$ 답 12

16 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)$
$=1+\frac{9a}{b}+\frac{b}{a}+9$
$=10+\frac{9a}{b}+\frac{b}{a}$
$\geq 10+2\sqrt{\frac{9a}{b}\cdot\frac{b}{a}}\left(\because \frac{9a}{b}>0,\ \frac{b}{a}>0\right)$
$=10+2\cdot 3=16$ (단, 등호는 $3a=b$일 때 성립)
따라서 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)$는 $a=\alpha$, $b=\beta=3\alpha$일 때 최솟값 16을 가지므로
$k+\frac{\beta}{\alpha}=16+\frac{3\alpha}{\alpha}=19$ 답 19

$\frac{9a}{b}=\frac{b}{a}$에서
$9a^2=b^2$
$\therefore 3a=b$
$(\because a>0,\ b>0)$

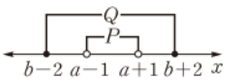
1등급 비밀노트

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ ····· ㉠, $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\geq 2\sqrt{\frac{9}{ab}}$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 변끼리 곱하면
$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)\geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{\frac{9}{ab}}=12$ ····· ㉢
이때 ㉠, ㉡의 등호가 동시에 성립하는 a, b의 값이 존재하지 않으므로 ㉢은 성립하지 않는다. 즉 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)$의 최솟값이 12라고 할 수 없다.

1등급을 위한 고난도 문제 본책 25~27쪽

01 $|x-a|<1$에서 $-1<x-a<1$
$\therefore a-1<x<a+1$
$\therefore P=\{x|a-1<x<a+1\}$
$|x-b|\leq 2$에서 $-2\leq x-b\leq 2$
$\therefore b-2\leq x\leq b+2$
$\therefore Q=\{x|b-2\leq x\leq b+2\}$ ⋯➊

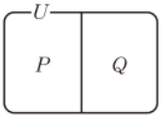
$P\subset Q$이므로 오른쪽 그림에서
$b-2\leq a-1$,
$a+1\leq b+2$
$\therefore -1\leq a-b\leq 1$
따라서 $a-b$의 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다. ⋯➋
답 최댓값: 1, 최솟값: -1



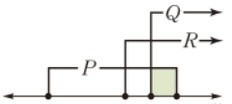
채점 기준	비율
➊ 두 집합 P, Q를 각각 구할 수 있다.	40 %
➋ $a-b$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

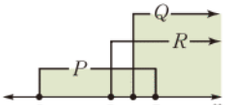
02 조건 'p 또는 $\sim q$'의 부정은 '$\sim p$이고 q'이다.
$\sim p$: $x\leq 1$ 또는 $x>4$, q: $-1\leq x<7$
이므로 조건 '$\sim p$이고 q'는
$-1\leq x\leq 1$ 또는 $4<x<7$
이다. 답 ④

03 $P\cap Q=\varnothing$, $P\cup Q=U$를 만족시키는 두 집합 P, Q를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $P=Q^C$, $P^C=Q$이므로 명제 $p\longrightarrow\sim q$와 $\sim p\longrightarrow q$는 참이다.
이상에서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④



04 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 명제 (p이고 q) $\longrightarrow r$가 참이려면 $(P\cap Q)\subset R$,
명제 $r\longrightarrow$ (p 또는 q)가 참이려면 $R\subset(P\cup Q)$이어야 한다.
(i) 오른쪽 그림에서
$(P\cap Q)\subset R$이려면
$a\geq 3$
$\therefore m=3$
(ii) 오른쪽 그림에서
$R\subset(P\cup Q)$이려면
$a\leq 5$
$\therefore n=5$
(i), (ii)에서 $m+n=8$ 답 8





05 ㄱ. $x\in P-Q$이면 $x\notin Q$이다.
즉 어떤 $x\in P$에 대하여 $x\notin Q$이다.
ㄴ. $P\cap R=\varnothing$이므로 $P\subset R^C$
즉 모든 $x\in P$에 대하여 $x\notin R$이다.
ㄷ. $(Q-P)\cap R\neq\varnothing$이므로 어떤 $x\in Q-P$에 대하여 $x\in R$이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

06 ㄱ. (i) $a^3=b^3$이면 $a=b$이므로 $a^2=b^2$이다. 즉 주어진 명제의 역 '$a^3=b^3$이면 $a^2=b^2$이다.'는 참이다.
(ii) [반례] $a=1$, $b=-1$이면 $a^2=b^2$이지만 $a^3\neq b^3$이다. 즉 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

ㄴ. (i) $a^2+b^2=0$이면 $a=b=0$이므로 $|a|+|b|=0$이다. 즉 주어진 명제의 역 '$a^2+b^2=0$이면 $|a|+|b|=0$이다.'는 참이다.

(ii) $|a|+|b|=0$이면 $a=b=0$이므로 $a^2+b^2=0$이다. 즉 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

ㄷ. (i) $a\neq0$이고 $b\neq0$이면 $a\neq0$ 또는 $b\neq0$이므로 주어진 명제의 역 '$ab\neq0$이면 $a\neq0$ 또는 $b\neq0$이다.'는 참이다.

(ii) [반례] $a=0$, $b=1$이면 $ab=0$이지만 $b\neq0$이다. 즉 주어진 명제의 대우 '$ab=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.'는 거짓이다.

이상에서 역은 참이고, 대우는 거짓인 명제는 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

$ab\neq0$

1등급 비밀노트

실수 a, b에 대하여
① $a=b$는 $a^2=b^2$이기 위한 충분조건이다.
② $a=b$는 $a^3=b^3$이기 위한 필요충분조건이다.
③ $a^2=b^2$은 $a^3=b^3$이기 위한 필요조건이다.

07 ㄱ. a, b, c가 모두 홀수이면 a^2, b^2, c^2이 모두 홀수이고, a^2+b^2은 짝수이므로

$a^2+b^2\neq c^2$

즉 주어진 명제의 대우 'a, b, c가 모두 홀수이면 $a^2+b^2\neq c^2$이다.'가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

ㄴ. [반례] $a=6$, $b=8$, $c=10$이면 $a^2+b^2=c^2$이지만 a, b, c는 모두 소수가 아니다. 즉 주어진 명제는 거짓이다.

ㄷ. a, b, c가 모두 3의 배수가 아니면 a, b, c를 각각 $3k+1$ 또는 $3k+2$ ($k=0, 1, 2, \cdots$)로 나타낼 수 있다.

이때 a^2, b^2, c^2은 모두 $3l+1$ ($l=0, 1, 2, \cdots$) 꼴이고, a^2+b^2은 $3m+2$ ($m=0, 1, 2, \cdots$) 꼴이므로

$a^2+b^2\neq c^2$

즉 주어진 명제의 대우 'a, b, c가 모두 3의 배수가 아니면 $a^2+b^2\neq c^2$이다.'가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

이상에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

$(3k+1)^2$
$=9k^2+6k+1$
$=3(3k^2+2k)+1$,
$(3k+2)^2$
$=9k^2+12k+4$
$=3(3k^2+4k+1)+1$

08 ㄱ. 명제 $\sim p\longrightarrow\sim q$가 참이므로 그 대우 $q\longrightarrow p$도 참이다.

ㄴ. 명제 $r\longrightarrow\sim p$가 참이므로 그 대우 $p\longrightarrow\sim r$는 참이지만 명제 $p\longrightarrow r$의 참, 거짓은 추론할 수 없다.

ㄷ. 두 명제 $q\longrightarrow p$, $p\longrightarrow\sim r$가 참이므로 명제 $q\longrightarrow\sim r$가 참이다.

이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

$a>0$, $b\geq0$일 때,
$a>b\Longleftrightarrow a^2>b^2$
$\Longleftrightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}$

09 ㄱ. $Q\not\subset R$이므로 q는 r이기 위한 충분조건이 아니다.

ㄴ. $R\subset Q^C$이므로 $r\Longrightarrow\sim q$

따라서 $\sim q$는 r이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $Q\subset P$이므로 $P^C\subset Q^C$ $\therefore\sim p\Longrightarrow\sim q$

따라서 $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

10 p가 r이기 위한 충분조건이므로 명제 $p\longrightarrow r$가 참이고, 그 대우인 $\sim r\longrightarrow\sim p$도 참이다.

즉 $2x+b=0$이면 $x^2+x-2=0$이다.

따라서 $x=-\frac{b}{2}$를 $x^2+x-2=0$에 대입하면 성립해야 하므로

$\left(-\frac{b}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)-2=0$, $b^2-2b-8=0$

$(b+2)(b-4)=0$ $\therefore b=-2$ 또는 $b=4$

한편 q가 r이기 위한 충분조건이므로 명제 $q\longrightarrow r$가 참이고, 그 대우인 $\sim r\longrightarrow\sim q$도 참이다.

즉 $2x+b=0$이면 $x^2-2x+a=0$이다.

따라서 $x=-\frac{b}{2}$를 $x^2-2x+a=0$에 대입하면 성립해야 한다.

(i) $b=-2$일 때,

$x=-\frac{-2}{2}=1$을 $x^2-2x+a=0$에 대입하면

$1-2+a=0$ $\therefore a=1$

이때 방정식 $x^2-2x+1=0$에서 $(x-1)^2=0$의 근은 $x=1$이므로 명제 $\sim r\longrightarrow\sim q$와 $\sim q\longrightarrow\sim r$가 모두 참이 되어 q는 r이기 위한 필요충분조건이 된다.

(ii) $b=4$일 때,

$x=-\frac{4}{2}=-2$를 $x^2-2x+a=0$에 대입하면

$4+4+a=0$ $\therefore a=-8$

이때 방정식 $x^2-2x-8=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$의 근은 $x=-2$ 또는 $x=4$이므로 명제 $\sim r\longrightarrow\sim q$가 참이 되어 q는 r이기 위한 충분조건이 된다.

(i), (ii)에서 $a=-8$, $b=4$이므로

$a+b=-4$ 답 -4

11 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

ㄱ. $P=\{x|-1<x<1\}$, $Q=\{x|x<1\}$이므로

$P\subset Q$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄴ. $|x|>|y|\geq0$이므로 $|x|^2>|y|^2$, 즉 $x^2>y^2$

또 $x^2>y^2$에서 $x^2-y^2>0$

$(x-y)(x+y)>0$

$\therefore x-y>0$, $x+y>0$ 또는 $x-y<0$, $x+y<0$

즉 $-x<y<x$ 또는 $x<y<-x$이므로

$|x|>|y|$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $x^2-x-2\leq0$에서 $(x+1)(x-2)\leq0$

$\therefore -1\leq x\leq2$

$\therefore P=\{x|-1\leq x\leq2\}$

$x^2=|x|^2$이므로 $x^2-|x|-2\le 0$에서

$|x|^2-|x|-2\le 0$

$(|x|+1)(|x|-2)\le 0$, $0\le|x|\le 2$

$\therefore -2\le x\le 2$

$\therefore Q=\{x\mid -2\le x\le 2\}$

$\therefore P\subset Q$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

이상에서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

12 주어진 명제의 대우는

'$x>1$이고 $y>1$이면 $xy+1>x+y$이다.'

이다.

$x>1$이고 $y>1$이면 $x-1>0$, $y-1>0$이므로

$(x-1)(y-1)\boxed{>}0$

$xy-x-y+1\boxed{>}0$

$\therefore xy+1\boxed{>}x+y$

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$\therefore$ (가) $x>1$이고 $y>1$ (나) $>$ 답 ②

13 이차방정식 $x^2+(ab+1)x=a+b$의 홀수인 해를 m이라 하면

$m^2+(ab+1)m=a+b$ …… ㉠

이고, a, b가 모두 짝수가 아닌 경우는 다음과 같다.

(i) a, b가 모두 홀수인 경우

$m^2+(ab+1)m$은 홀수, $a+b$는 짝수이므로 ㉠이 성립하지 않는다.

(ii) a, b 중 하나는 홀수, 하나는 짝수인 경우

$m^2+(ab+1)m$은 짝수, $a+b$는 홀수이므로 ㉠이 성립하지 않는다.

(i), (ii)에서 a, b는 모두 짝수이다.

$\therefore$ (가) 홀수 (나) 홀수 (다) 짝수 (라) 짝수 (마) 홀수 답 ⑤

14 ㄱ. [반례] $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이면

$a^2+b^2=\frac{1}{2}<a+b=1$

ㄴ. $a^3+ab^2-(a^2b+b^3)$

$=(a^3-a^2b)+(ab^2-b^3)$

$=a^2(a-b)+b^2(a-b)$

$=(a-b)(a^2+b^2)>0$

$\therefore a^3+ab^2>a^2b+b^3$

ㄷ. $a+b=|a+b|\iff a+b\ge 0$ …… ㉠

$|a+b|=|a|+|b|\iff ab\ge 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a\ge 0$, $b\ge 0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

일품 BOX

$x=2y$일 때,

$x+2y=6$에서

$x+x=6$, $2x=6$

$\therefore x=3$

따라서 입구의 가로의 길이가 3 m, 세로의 길이가 $\frac{3}{2}$ m일 때 입구의 넓이는 최대이다.

15 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{8}$이므로

$\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$

$=\frac{4a^3+4b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3}{8}$

$=\frac{3a^3+3b^3-3a^2b-3ab^2}{8}$

$=\frac{3}{8}(a^3+b^3-a^2b-ab^2)$

$=\frac{3}{8}\{(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)\}$

$=\frac{3}{8}(a+b)(a^2-2ab+b^2)$

$=\frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2\ge 0$ …… ❶

$\therefore \frac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립) …… ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$의 부호를 알 수 있다.	80 %
❷ $\frac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$이 성립함을 알 수 있다.	20 %

16 직사각형 모양의 입구의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면

$4x+8y+6=30$ $\therefore x+2y=6$ …… ❶

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{x+2y}{2}\ge\sqrt{x\cdot 2y}$, $\frac{6}{2}\ge\sqrt{2xy}$

$3\ge\sqrt{2xy}$, $9\ge 2xy$

$\therefore xy\le\frac{9}{2}$ (단, 등호는 $x=2y$일 때 성립) …… ❷

따라서 입구 1개의 넓이의 최댓값은 $\frac{9}{2}$ m^{2}이다. …… ❸

답 $\frac{9}{2}$ m^2

채점 기준	비율
❶ 직사각형 모양의 입구의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m라 놓고 x, y 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ xy의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 입구 1개의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

17 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$3a+2b=12$ (단, $a>0$, $b>0$)

A(4, 0), B(0, 6)이므로

$S_1=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot b=2b$, $S_2=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot a=3a$

$\therefore S_1+S_2=3a+2b=12$

이때 $S_1>0$, $S_2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$12=S_1+S_2\ge 2\sqrt{S_1S_2}$

(단, 등호는 $S_1=S_2$일 때 성립)

즉 $\sqrt{S_1S_2}\le 6$이므로

$S_1S_2\le 36$

따라서 S_1S_2의 최댓값은 36이다. 답 36

18 $\overline{ED}=a$, $\overline{FC}=b$라 하면 $a+b=1$이고

$S_1=\frac{1}{2}a^2$, $S_2=\frac{1}{2}b^2$

$\therefore 2(S_1+S_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)+4$

$=2\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}\right)+4$

$=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)+4$

$=\left(a^2+\frac{1}{a^2}+2\right)+\left(b^2+\frac{1}{b^2}+2\right)$

$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$

$\therefore \left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\}^2$

$\le\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\}(1^2+1^2)$

$=2\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\}$

$\left(\text{단, 등호는 } a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}\text{일 때 성립}\right)$

한편 $a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}=1+\frac{a+b}{ab}=1+\frac{1}{ab}$이고 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$, $\frac{1}{2}\ge\sqrt{ab}$, $\frac{1}{4}\ge ab$

$\therefore \frac{1}{ab}\ge 4$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 $1+\frac{1}{ab}\ge 5$이므로

$25\le 2\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\}$

$\therefore 2(S_1+S_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)+4$

$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\ge\frac{25}{2}$

$\left(\text{단, 등호는 } a=b=\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$

답 ⑤

$2\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\}$
$\ge\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2$
$=\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2\ge 25$

참고 주어진 식이 최솟값을 갖는 경우는 $a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}$이고 $a=b$일 때이므로 $a=b$

그런데 $a+b=1$이므로 $a=b=\frac{1}{2}$

사고력 강화를 위한 수능형 문제 본책 28쪽

01 조건 (p이고 $\sim q$)의 진리집합은

$P\cap Q^C=\{2, 3, 5, 7\}\cap\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$=\{3, 5, 7\}$

이므로 명제 (p이고 $\sim q$) $\longrightarrow r$가 참이려면

$(P\cap Q^C)\subset R$, 즉 $\{3, 5, 7\}\subset R$이어야 한다.

따라서 집합 R의 개수는

$2^{10-3}=2^7=128$ 답 ④

02 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

(가)의 $|x-1|<2$에서

$-2<x-1<2$, $-1<x<3$

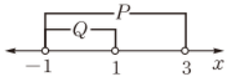
$\therefore P=\{x\mid -1<x<3\}$

$|x|<1$에서

$-1<x<1$

$\therefore Q=\{x\mid -1<x<1\}$

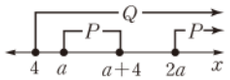
즉 $Q\subset P$에서 $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.



따라서 (가)에 대한 점수가 10점이므로 (나), (다)에 대한 점수의 합은 101점이다.

(i) (나), (다)에 대한 점수가 각각 100점, 1점인 경우

(나)에서 p는 q이기 위한 필요충분조건이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$P=Q$, 즉 $4=a$, $a+4=2a$

$\therefore a=4$

(다)에서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니어야 하므로 방정식 $3x-b=0$의 근 $x=\frac{b}{3}$는 방정식 $x^2-6x+b=0$의 서로 다른 두 근 중 하나이어야 한다.

따라서 $\frac{b^2}{9}-2b+b=0$에서

$b^2-9b=0$, $b(b-9)=0$

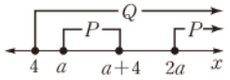
$\therefore b=0$ 또는 $b=9$ ····· ㉠

이때 방정식 $x^2-6x+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $b=0$이어야 한다.

$\therefore a+b=4+0=4$

(ii) (나), (다)에 대한 점수가 각각 1점, 100점인 경우

(나)에서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니어야 하므로 오른쪽 그림에서



$P\subset Q$, $P\ne Q$

즉 $4\le a$이고 $a+4\ne 2a$이므로

$a>4$

이때 a는 정수이므로 $a\ge 5$

(다)에서 p는 q이기 위한 필요충분조건이어야 하므로 방정식 $3x-b=0$의 근 $x=\frac{b}{3}$는 방정식 $x^2-6x+b=0$의 중근이어야 한다.

따라서 ㉠에서

$b=9$

$\therefore a+b\ge 5+9=14$

(i), (ii)에서 $a+b$의 최솟값은 4이다. 답 4

참고 (i)에서 $b=9$이면

p: $3x-b=0 \iff 3x-9=0$

$\iff x=3$

q: $x^2-6x+b=0 \iff x^2-6x+9=0$

$\iff (x-3)^2=0$

$\iff x=3$

즉 $P=Q=\{3\}$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

03 p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

r는 p이기 위한 필요조건이므로 $P \subset R$

$P \subset Q$에서 $a^2-7=2$ 또는 $b=2$이다.

(i) $a^2-7=2$이면 $a=-3$ 또는 $a=3$이고, $a+b=2$이어야 한다.

ⓘ $a=-3$이면 $b=2-a=5$이므로

$a^2+b^2=(-3)^2+5^2=34$

ⓘⓘ $a=3$이면 $b=2-a=-1$이므로

$a^2+b^2=3^2+(-1)^2=10$

(ii) $b=2$이면 $a=2$ 또는 $a+b=2$이어야 한다.

ⓘ $a=2$이면

$a^2+b^2=2^2+2^2=8$

ⓘⓘ $a+b=2$이면 $a=2-b=0$이므로

$a^2+b^2=0^2+2^2=4$

(i), (ii)에서 a^2+b^2의 최댓값은 34이다. 답 ②

04 $x^2-ax-a=ax^2+ax$에서

$(a-1)x^2+2ax+a=0$ $(a>1)$ …… ㉠

㉠의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2a}{a-1}$, $\alpha\beta=\dfrac{a}{a-1}$

두 점 P, Q의 좌표를

$P(\alpha,\ \alpha^2-a\alpha-a)$, $Q(\beta,\ \beta^2-a\beta-a)$

라 하면 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{(\beta^2-a\beta-a)-(\alpha^2-a\alpha-a)}{\beta-\alpha}$$

$$=(\alpha+\beta)-a=-\frac{2a}{a-1}-a$$

$$=\frac{-2(a-1)-2}{a-1}-a$$

$$=-2-\frac{2}{a-1}-a$$

$$=-3-\left(\frac{2}{a-1}+a-1\right)$$

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2}{a-1}+a-1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{a-1}\cdot(a-1)}=2\sqrt{2}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{2}{a-1}=a-1 \text{일 때 성립}\right)$

이므로

$$-3-\left(\frac{2}{a-1}+a-1\right) \leq -3-2\sqrt{2}$$

따라서 직선 PQ의 기울기의 최댓값은

$-3-2\sqrt{2}$ 답 ①

일품 BOX

$a_i+b_i+c_i=1$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ 이므로

$a_1+b_1+c_1$
$=a_2+b_2+c_2$
$=a_3+b_3+c_3$
$=1$

$c_1x_1 \leq c_1x_3$, $c_2x_2 \leq c_2x_3$

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선 AB의 기울기

➡ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (단, $x_1 \neq x_2$)

$(a-1)^2=2$에서

$a-1=\pm\sqrt{2}$

$\therefore a=1+\sqrt{2}$ $(\because a>1)$

05 ㄱ. $(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)$
$+(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3)$
$=(a_1x_1+b_1x_1+c_1x_1)+(a_2x_2+b_2x_2+c_2x_2)$
$+(a_3x_3+b_3x_3+c_3x_3)$
$=(a_1+b_1+c_1)x_1+(a_2+b_2+c_2)x_2$
$+(a_3+b_3+c_3)x_3$
$=x_1+x_2+x_3$

ㄴ. $x_1 \leq x_2 \leq x_3$이고 $a_i \geq 0$이므로

$a_2x_1 \leq a_2x_2$, $a_3x_1 \leq a_3x_3$

따라서

$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 \geq a_1x_1+a_2x_1+a_3x_1$
$=(a_1+a_2+a_3)x_1$
$=x_1$

이므로

$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 \geq x_1$

ㄷ. ㄱ에서

$(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)$
$=x_1+x_2+x_3-(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3)$

$x_1 \leq x_2 \leq x_3$이고 $c_i \geq 0$이므로

$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3 \leq c_1x_3+c_2x_3+c_3x_3$
$=(c_1+c_2+c_3)x_3$
$=x_3$

$\therefore (a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)$
$\geq x_1+x_2$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 ㄴ. $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3-x_1$
$=(a_1-1)x_1+a_2x_2+a_3x_3$

이때 $x_1 \leq x_2 \leq x_3$이고 $a_i \geq 0$이므로

$a_2x_2+a_3x_3 \geq a_2x_1+a_3x_1$

$\therefore a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3-x_1$
$\geq (a_1-1)x_1+a_2x_1+a_3x_1$
$=(a_1+a_2+a_3-1)x_1$
$=0$

06 우리의 가로의 길이를 a m, 세로의 길이를 b m라 하면 우리의 넓이는

$ab=35$ (m^2) …… ㉠

또 벽을 쌓는 데 $2(5a+5b)$(만 원), 칸막이를 설치하는 데 $2\cdot 2b$(만 원)이 필요하므로 우리를 만드는 데 필요한 비용은

$10a+14b$ (만 원)

따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$10a+14b \geq 2\sqrt{10a\cdot 14b}$
$=4\sqrt{35ab}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$10a+14b \geq 4\sqrt{35\cdot 35}=140$

(단, 등호는 $10a=14b$일 때 성립)

따라서 우리를 만드는 데 드는 비용의 최솟값은 140만 원이다. 답 ⑤

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제 본책 29~32쪽

01 전략 반례를 찾아 조건을 만족시키는 집합이 될 수 없음을 보인다.

풀이 ㄱ. [반례] $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이면 $a\in A$, $b\in A$이지만

$$ab=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\div 2\notin A$$

이므로 집합 A는 조건을 만족시키지 않는다.

ㄴ. $a=2^m$, $b=2^n$ (m, n은 자연수)으로 놓으면

$$ab=2^m\cdot 2^n=2^{m+n}$$

이때 $m+n$은 자연수이므로 $ab\in B$이다.

따라서 집합 B는 조건을 만족시킨다.

ㄷ. $a=2m+1$, $b=2n+1$ (m, n은 정수)로 놓으면

$$ab=(2m+1)(2n+1)$$
$$=2(2mn+m+n)+1$$

이때 $2mn+m+n$은 정수이므로 $ab\in C$이다.

따라서 집합 C는 조건을 만족시킨다.

ㄹ. [반례] $a=\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$이면 $a\in D$, $b\in D$이지만

$$ab=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\notin D$$

이므로 집합 D는 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 집합 X가 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ②

집합 A의 원소는 (정수)÷2 꼴이다.

집합 D의 원소는 (정수)·$\sqrt{2}$ 꼴이다.

02 전략 $x\in A$이면 $\frac{18}{x}\in A$임을 이용한다.

풀이 $U=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

조건 (나)에서 1과 18, 2와 9, 3과 6은 어느 하나가 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.

(i) A의 원소의 개수가 2일 때,

조건 (다)에서 B는 전체집합 U에서 A의 원소가 아닌 4개의 원소를 반드시 포함하는 부분집합이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

$$3\cdot 2^{6-4}=12$$

(ii) A의 원소의 개수가 4일 때,

조건 (다)에서 B는 전체집합 U에서 A의 원소가 아닌 2개의 원소를 반드시 포함하는 부분집합이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

$$3\cdot 2^{6-2}=48$$

(iii) A의 원소의 개수가 6일 때,

조건 (가)에서 B는 공집합이 아닌 U의 부분집합이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

$$1\cdot(2^6-1)=63$$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$12+48+63=123$$

답 ③

03 전략 $A-B=A\iff A\cap B=\varnothing$임을 이용한다.

풀이 $A-B=A\iff A\cap B=\varnothing$

$x^2-2ax+a^2-4<0$에서 $x^2-2ax+(a+2)(a-2)<0$

이므로

$$\{x-(a-2)\}\{x-(a+2)\}<0$$

이때 $a-2<a+2$이므로

$$a-2<x<a+2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x^2-2x+1-b^2\le 0$에서 $x^2-2x+(1+b)(1-b)\le 0$이므로

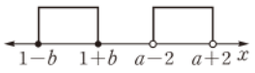
$$\{x-(1-b)\}\{x-(1+b)\}\le 0$$

이때 $1-b<1+b$ ($\because b>0$)이므로

$$1-b\le x\le 1+b \quad \cdots\cdots ㉡$$

한편 $a>0$, $b>0$이므로 $1-b<a+2$

따라서 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않으려면



$$1+b\le a-2$$
$$\therefore a-b\ge 3$$

답 ②

$A\cap B=\varnothing$
$\iff A-B=A$
$\iff B-A=B$
$\iff A^C\cup B=A^C$
$\iff B^C\cup A=B^C$

$A-B^C=A\cap(B^C)^C$
$=A\cap B=\varnothing$

04 전략 $A^C\cap B=\{x\mid x$는 6의 배수$\}$임을 이용한다.

풀이 $A^C\cap B=\{x\mid x$는 짝수이고 3의 배수$\}$
$=\{x\mid x$는 6의 배수$\}$

이다.

$A^C\cap B=\{6, 12\}$이므로

$$12\le n<18$$

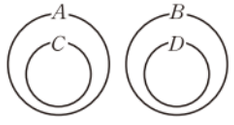
따라서 자연수 n의 최댓값은 17, 최솟값은 12이므로 구하는 합은 29이다. 답 ④

05 전략 집합의 연산 법칙 또는 벤다이어그램을 이용한다.

풀이 ㄱ. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$=\varnothing\cup C=C$

ㄴ. [반례] $A=\{1\}$, $B=C=\{2\}$이면 $A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$이지만 $B\cap C\ne\varnothing$이다.

ㄷ. $A\cap B=\varnothing$, $C\subset A$, $D\subset B$이므로 네 집합 A, B, C, D를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$$\therefore C\cap D=\varnothing$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

06 전략 집합의 연산 법칙을 이용하여 $A*B$를 파악한다.

풀이 ㄱ. $A*B^C=A^C\cap(B^C)^C=A^C\cap B=B-A$이고, 두 집합 A, B가 서로소이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$$B-A=B \quad \therefore A*B^C=B$$

ㄴ. $(A*B)\cap(A^C*B^C)=(A^C\cap B^C)\cap(A\cap B)$
$=(A^C\cap A)\cap(B^C\cap B)$
$=\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$

따라서 $A*B$와 A^C*B^C는 서로소이다.

ㄷ. $(A*B)*A^C=(A^C\cap B^C)*A^C$
$=(A^C\cap B^C)^C\cap A$
$=(A\cup B)\cap A=A$

이므로 $A\subset B^C$이면

$A-B^C=\varnothing$, 즉 $A\cap B=\varnothing$

따라서 A, B는 서로소이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

일품 BOX

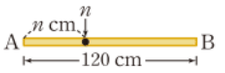
$A\cap B=\varnothing$
$\iff A-B=A$
$\iff A\subset B^C$
$\iff B\subset A^C$

$Q\subset R^C$에서 $R\subset Q^C$이므로
$r\longrightarrow\sim q$

집합 P의 원소는
$4\cdot1,\ 4\cdot2,\ \cdots,\ 4\cdot29$
이므로
$n(P)=29$

07 전략 양 끝 점을 제외하고 막대를 30등분, 20등분, 12등분 하는 점들의 지점을 나타내는 값의 집합을 각각 P, Q, R로 나타낸다.

풀이 막대의 양 끝 점을 A, B라 하고 A로부터 n cm 떨어진 지점을 나타내는 값을 n이라 하자. 양 끝 점을 제외하고 막대를 30등분 하는 점들의 지점을 나타내는 값의 집합을 P라 하면



$P=\{4,\ 8,\ 12,\ \cdots,\ 116\}$

막대를 20등분 하는 점들의 지점을 나타내는 값의 집합을 Q라 하면

$Q=\{6,\ 12,\ 18,\ \cdots,\ 114\}$

막대를 12등분 하는 점들의 지점을 나타내는 값의 집합을 R라 하면

$R=\{10,\ 20,\ 30,\ \cdots,\ 110\}$

즉 $n(P)=29$, $n(Q)=19$, $n(R)=11$이고, $P\cap Q$, $Q\cap R$, $R\cap P$의 원소는 각각 120 미만의 12의 양의 배수, 30의 양의 배수, 20의 양의 배수이므로

$n(P\cap Q)=9$, $n(Q\cap R)=3$, $n(R\cap P)=5$

이때 $P\cap Q\cap R$의 원소는 120 미만의 60의 양의 배수이므로 $n(P\cap Q\cap R)=1$

막대의 눈금이 표시된 모든 점들의 지점을 나타내는 값의 집합은 $P\cup Q\cup R$이므로

$$\begin{aligned}&n(P\cup Q\cup R)\\&=n(P)+n(Q)+n(R)-n(P\cap Q)-n(Q\cap R)\\&\quad-n(R\cap P)+n(P\cap Q\cap R)\\&=29+19+11-9-3-5+1=43\end{aligned}$$

따라서 막대의 내부에 표시된 눈금이 43개이므로 막대는 44개로 나누어진다. 답 ③

08 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하고 P, Q를 구한다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$|x-2|\le3$에서 $-3\le x-2\le3$

$\therefore\ -1\le x\le5$

$\therefore\ P=\{x\,|\,-1\le x\le5\}$

$x^2-6x+8\le0$에서 $(x-2)(x-4)\le0$

$\therefore\ 2\le x\le4$

$\therefore\ Q=\{x\,|\,2\le x\le4\}$

조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cap Q^C$이므로

$P\cap Q^C=\{x\,|\,-1\le x<2$ 또는 $4<x\le5\}$

따라서 집합 $P\cap Q^C$에 속하는 정수는

$-1,\ 0,\ 1,\ 5$

의 4개이다. 답 ④

09 전략 집합 P^C에 속하지만 집합 Q^C에 속하지 않는 원소를 찾는다.

풀이 명제 $\sim p\longrightarrow\sim q$가 거짓임을 보이려면 조건 $\sim p$를 만족시키지만 조건 $\sim q$를 만족시키지 않는 원소를 찾으면 된다.

따라서 조건 $\sim p$의 진리집합이 P^C, 조건 $\sim q$의 진리집합이 Q^C이므로 반례는 집합 P^C-Q^C의 원소이다.

$P^C-Q^C=P^C\cap(Q^C)^C=P^C\cap Q$

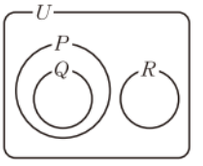
이므로 구하는 집합은 $P^C\cap Q$이다. 답 ②

10 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P\subset Q$이면 명제 $p\longrightarrow q$가 참임을 이용한다.

풀이 $P\cap Q=Q$에서 $Q\subset P$

$P-R=P$에서 $P\cap R=\varnothing$

즉 세 집합 P, Q, R를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $Q\subset P\subset R^C$이므로 명제 $p\longrightarrow\sim r$, $q\longrightarrow p$, $r\longrightarrow\sim q$는 모두 참이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참인 명제이다. 답 ⑤

11 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p\longrightarrow q$가 참이면 $P\subset Q$임을 이용한다.

풀이 $\sim p\longrightarrow q$이므로 $P^C\subset Q$ ····· ㉠

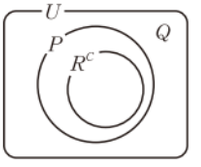
$p\longrightarrow\sim q$이므로

$P\subset Q^C$, 즉 $Q\subset P^C$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $P^C=Q$

또 $\sim r\longrightarrow p$이므로 $R^C\subset P$

따라서 세 집합 P, Q, R^C를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $P\cap Q=\varnothing$

ㄴ. $R^C\subset P$이므로 $P^C\subset R$

ㄷ. $R^C\cup Q^C=R^C\cup P=P$

$\therefore\ P\subset(R^C\cup Q^C)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 ㄷ. $P\subset Q^C$이므로 $P\subset(R^C\cup Q^C)$

12 전략 필요조건을 만족시키는 진리집합의 포함 관계를 생각한다.

풀이 p가 (q 또는 r)이기 위한 필요조건이므로

$(Q\cup R)\subset P$, 즉 $(Q\cup R)-P=\varnothing$

$\therefore\ (Q\cup R)\cap P^C=\varnothing$ 답 ③

13 전략 충분조건과 필요조건을 만족시키는 진리집합의 포함 관계를 생각한다.

풀이 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.

$\therefore\ P=\{x\,|\,x\ge k\}$

$3x-2>10$에서 $x>4$

$\therefore\ Q=\{x\,|\,x>4\}$

$x^2-10x\ge24$에서 $x^2-10x-24\ge0$

$(x+2)(x-12)\ge0$

$\therefore\ x\ge12\ (\because\ x>0)$

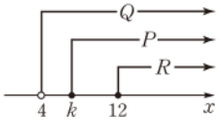
$\therefore\ R=\{x\,|\,x\ge12\}$

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p는 r이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아니므로

$R \subset P$, $P \not\subset R$

$\therefore R \subset P \subset Q$, $P \not\subset R$



위의 그림에서 $4 < k < 12$이므로 자연수 k의 개수는

5, 6, 7, ⋯, 11

의 7이다. 답 ⑤

14 전략 실수 x에 대하여 $x^2 \geq 0$임을 이용한다.

풀이 $x^2 \geq 0$이므로

$-x^2+2 \leq 2$, $3x^2+4 \geq 4$

$\therefore 2 \leq a \leq 4$

따라서 주어진 부등식이 항상 성립하도록 하는 정수 a는 2, 3, 4의 3개이다. 답 ③

15 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 ㄱ. x, y가 양수이고 $x+y=2$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, $1 \geq \sqrt{xy}$

$\therefore xy \leq 1$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

ㄴ. $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4-2xy$

ㄱ에서 $xy \leq 1$이므로

$-2xy \geq -2$, $4-2xy \geq 2$

$\therefore x^2+y^2 \geq 2$

ㄷ. x, y가 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2y}}$

$=2\sqrt{\frac{1}{4xy}}=\frac{1}{\sqrt{xy}}$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

그런데 ㄱ에서 $0 < xy \leq 1$이므로

$\frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 1$ $\therefore \frac{1}{2x}+\frac{1}{2y} \geq 1$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

16 전략 $20 \in C$임을 이용하여 k에 대한 식을 세운다.

풀이 $(-1)^2=1$, $1^2=1$, $2^2=4$이므로 $20 \in C$에서

$k^2+1=20$ 또는 $k^2+4=20$

$\therefore k^2=19$ 또는 $k^2=16$

이때 k는 자연수이므로

$k^2=16$ $\therefore k=4$ 답 4

참고 $k=4$일 때, 오른쪽 표에서 $C=\{1, 4, 10, 13, 17, 20\}$

+	$(-1)^2$	1^2	2^2
$(-3)^2$	10	10	13
0^2	1	1	4
4^2	17	17	20

일품 BOX

원소의 개수가 n인 집합 A의 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 A의 부분집합의 개수
➡ 2^{n-k} (단, $k < n$)

17 전략 $A \ll B$의 의미를 이해하여 집합 X의 가장 큰 원소를 찾는다.

풀이 $P \ll X$이므로 집합 X는 집합 P의 가장 큰 원소인 3을 원소로 갖는다.

$X \ll Q$이므로 집합 Q는 집합 X의 가장 큰 원소를 원소로 갖는다.

따라서 집합 X의 가장 큰 원소는 5 또는 7이다. ⋯ ❶

(i) 집합 X의 가장 큰 원소가 5인 경우

집합 X는 5 이하의 자연수 중 3과 5를 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=8$

(ii) 집합 X의 가장 큰 원소가 7인 경우

집합 X는 7 이하의 자연수 중 3과 7을 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는

$2^{7-2}=32$

(i), (ii)에서 구하는 집합 X의 개수는

$8+32=40$ ⋯ ❷

답 40

채점 기준	비율
❶ 집합 X의 가장 큰 원소를 알 수 있다.	40%
❷ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	60%

18 전략 $A \cap B=A$이면 $A \subset B$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $A \subset B$이므로 k는 20의 배수이어야 한다.

조건 (나)에서

$n(B \cap A^C)=n(B-A)$

$=n(B)-n(A)$

$=2n(A)$

$\therefore n(B)=3n(A)$

이때 $20=2^2 \cdot 5$이므로 $n(A)=6$

즉 $n(B)=3 \cdot 6=18$이므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 k는 20의 배수이면서 양의 약수의 개수가 18이어야 한다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은

$(2^2 \cdot 5) \cdot 3^2=180$ 답 180

19 전략 $f(A)+f(B)=f(U)$임을 이용한다.

풀이 $f(A)+f(B)=f(U)$이고

$f(U)=1+2+3+4+5+6+7=28$

이므로 $f(B)=28-f(A)$

$f(A)f(B)=f(A)\{28-f(A)\}$

$=-\{f(A)\}^2+28f(A)$

$=-\{f(A)-14\}^2+196$

따라서 $f(A)f(B)$는 $f(A)=14$일 때 최댓값 196을 가지므로

$a=14$, $k=196$

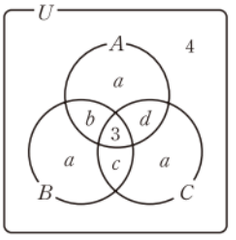
$\therefore a+k=210$ 답 210

참고 실제로 $A=\{2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 6, 7\}$이면 $A\cup B=U$, $A\cap B=\varnothing$이고 $f(A)=14$를 만족시킨다.
이외에도 $A=\{1, 3, 4, 6\}$, $B=\{2, 5, 7\}$ 등 조건을 만족시키는 두 집합 A, B는 다양하게 존재한다.

20 전략 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내어 본다.

풀이 40명의 학생 전체의 집합을 U, 첫 번째, 두 번째, 세 번째 봉사활동에 참가한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하자.

한 번도 봉사활동에 참가하지 않은 학생은 4명, 3회 모두 참가한 학생은 3명이고 첫 번째에만, 두 번째에만, 세 번째에만 참가한 학생 수가 서로 같으므로 벤다이어그램의 각 영역에 해당되는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 나타내자.



연속해서 2회만 참가한 학생 수는 $b+c$, 첫 번째와 세 번째의 2회만 참가한 학생 수는 d이므로

$b+c=2d$

$n(U)=40$이므로

$3a+b+c+d+3+4=40$

$3a+2d+d+7=40$, $3a+3d=33$

$\therefore a+d=11$

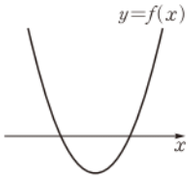
따라서 구하는 학생 수는 11이다. 답 11

첫 번째 봉사활동에는 참가하고 두 번째 봉사활동에는 참가하지 않은 학생의 집합은 $A-B$이다.

21 전략 '어떤 x에 대하여 p이다.'가 참이려면 전체집합의 원소 중 한 개 이상이 p를 만족시켜야 함을 이용한다.

풀이 명제 '모든 실수 x에 대하여 $x^2-8x+k\geq 0$이다.'의 부정은 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-8x+k<0$이다.'이다. ··· ❶

주어진 명제의 부정이 참이 되기 위해서는 $f(x)=x^2-8x+k$라 할 때, $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-4)^2-k>0$, $16-k>0$

$\therefore k<16$

따라서 자연수 k의 최댓값은 15이다. ··· ❷

답 15

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 부정을 말할 수 있다.	30 %
❷ 자연수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	70 %

22 전략 원소의 개수가 n인 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는 2^n-1임을 이용한다.

풀이 $a\in A$이면 $2a-4\notin U$이므로

$2a-4<1$ 또는 $2a-4>20$

$\therefore a<\frac{5}{2}$ 또는 $a>12$

또 $a\in A$이면 $\frac{1}{2}a\in U$이므로 a는 짝수이다.

따라서 주어진 명제가 참이 되도록 하는 집합 A는 집합 $\{2, 14, 16, 18, 20\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 집합 A의 개수는

$2^5-1=31$ 답 31

23 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 주어진 명제가 참이려면 $P\cap Q\neq\varnothing$이어야 함을 이용한다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 주어진 명제가 참이려면 $x\in P\cap Q$인 실수 x가 존재해야 한다. 즉 $P\cap Q\neq\varnothing$이어야 한다.

$x^2-(a+1)x+a\geq 0$에서 $(x-1)(x-a)\geq 0$

(i) $a\leq 1$일 때, $P\cap Q\neq\varnothing$이므로 주어진 명제가 참이 되도록 하는 자연수 a는 1의 1개이다.

(ii) $a>1$일 때, $P\cap Q\neq\varnothing$이려면 $a\leq 6$이어야 하므로

$1<a\leq 6$

즉 주어진 명제가 참이 되도록 하는 자연수 a는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수 a의 개수는

$1+5=6$ 답 6

24 전략 주어진 명제의 대우는 'm, n이 자연수일 때, mn이 홀수이면 m^2+n^2은 짝수이다.'임을 이용한다.

풀이 주어진 명제의 대우는 'm, n이 자연수일 때, mn이 홀수이면 m^2+n^2은 짝수이다.'이다. ··· ❶

두 자연수의 곱 mn이 홀수이면 두 자연수 m, n은 모두 홀수이므로

$m=2p+1$, $n=2q+1$ (p, q는 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$m^2+n^2=(2p+1)^2+(2q+1)^2$

$=(4p^2+4p+1)+(4q^2+4q+1)$

$=2(2p^2+2q^2+2p+2q+1)$

이때 $2p^2+2q^2+2p+2q+1$은 자연수이므로 m^2+n^2은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. ··· ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우를 말할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 명제의 대우가 참임을 이용하여 그 명제가 참임을 증명할 수 있다.	70 %

25 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $x>0$, $y>0$이고 $2x+3y=1$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{2x+3y}{2}\geq\sqrt{2x\cdot 3y}$

일품 BOX

$\frac{1}{2} \geq \sqrt{6xy}$, $6xy \leq \frac{1}{4}$

$\therefore xy \leq \frac{1}{24}$ (단, 등호는 $2x=3y$일 때 성립) ⋯ ❶

또 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{3}{x}+\frac{2}{y} \geq 2\sqrt{\frac{3}{x}\cdot\frac{2}{y}}$

이때 $2\sqrt{\frac{6}{xy}} \geq 24$이므로

$\frac{3}{x}+\frac{2}{y} \geq 24$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{3}{x}=\frac{2}{y}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 24이다. ⋯ ❷

답 24

$0<xy \leq \frac{1}{24}$에서

$\frac{1}{xy} \geq 24$

$\frac{6}{xy} \geq 144$

$\sqrt{\frac{6}{xy}} \geq 12$

$\therefore 2\sqrt{\frac{6}{xy}} \geq 24$

채점 기준	비율
❶ xy의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}$의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

26 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $b+c=x$, $c+a=y$, $a+b=z$라 하면

$a+b+c=\frac{1}{2}(x+y+z)$이므로

$a=\frac{1}{2}(x+y+z)-x=\frac{1}{2}(y+z-x)$,

$b=\frac{1}{2}(x+y+z)-y=\frac{1}{2}(z+x-y)$,

$c=\frac{1}{2}(x+y+z)-z=\frac{1}{2}(x+y-z)$

따라서

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y+z-x}{x}+\frac{z+x-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-3\right)$$
$$\geq\frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}+2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}-3\right)$$
$$=\frac{3}{2}\text{ (단, 등호는 } a=b=c\text{일 때 성립)}$$

답 풀이 참고

참고 등호는 $\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$, $\frac{z}{y}=\frac{y}{z}$, $\frac{x}{z}=\frac{z}{x}$, 즉 $x=y=z$일 때 성립하고, $x=y=z$이면 $b+c=c+a=a+b$에서 $a=b=c$이다. 따라서 주어진 부등식이 성립하고, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.

최상위로 가는 최고 수준 문제 본책 33쪽

01

해결 단계

❶ 조건 (가)를 이용하여 두 집합 A, X의 포함 관계를 생각한다.
❷ 집합의 연산 법칙을 이용하여 조건 (나)를 간단히 정리한다.
❸ ❶, ❷를 이용하여 집합 X가 반드시 포함하는 원소와 포함하지 않는 원소를 찾아 X의 개수를 구한다.

풀이 ❶ 조건 (가)에서 $A \cap X = A$이므로 $A \subset X$이다.

❷ 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}(X-A)\cap B &= (X\cap A^C)\cap B\\ &= X\cap(A^C\cap B)\\ &= X\cap(B-A)\\ &= X\cap\{5,\ 7,\ 9\}\\ &= \{7,\ 9\}\end{aligned}$$

즉 집합 X는 7, 9를 반드시 포함하고, 5를 포함하지 않는다.

❸ 따라서 조건 (가), (나)에서 집합 X는 1, 2, 3, 7, 9를 반드시 포함하고, 5를 포함하지 않는 U의 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{10-5-1}=2^4=16$ 답 ①

02

해결 단계

❶ n이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 두 집합 A_n, A_{n+1}의 포함 관계를 생각한다.
❷ n의 모든 양의 약수는 n^2의 양의 약수임을 이용하여 두 집합 B_n, B_n의 포함 관계를 생각한다.
❸ n이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 두 집합 A_n, B_n을 비교한다.

풀이 ❶ ㄱ. 자연수 k에 대하여

$A_{2k-1}=\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2k-1\}$,

$A_{2k}=\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2k-1\}$,

$A_{2k+1}=\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2k-1,\ 2k+1\}$

$\therefore A_{2k-1}=A_{2k}\subset A_{2k+1}$

따라서 $n=2k-1$이면 $A_n=A_{n+1}$이고 $n=2k$이면 $A_n\subset A_{n+1}$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$A_n\subset A_{n+1}$

❷ ㄴ. $n^2=n\cdot n$이므로 n의 모든 양의 약수는 n^2의 양의 약수이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $B_n\subset B_{n^2}$이다.

❸ ㄷ. n이 짝수이면 $2\in B_n$이지만 $2\notin A_n$이므로 $A_n=B_n$을 만족시키는 n은 존재하지 않는다.

또 $n\geq 5$인 홀수, 즉 $n=2k-1$ (k는 3 이상의 자연수)이면 $A_n=\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2k-1\}$에서 $2k-1$이 $2k-1$보다 작은 모든 홀수들로 나누어떨어질 때 $A_n=B_n$인데 이를 만족시키는 홀수 n은 존재하지 않는다.

예를 들어 $n=9$일 때, $A_9=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B_9=\{1,\ 3,\ 9\}$이때 9는 5, 7로 나누어떨어지지 않는다.

따라서 $n=1$, $n=3$일 때, 즉 $A_1=\{1\}$, $B_1=\{1\}$ 또는 $A_3=\{1,\ 3\}$, $B_3=\{1,\ 3\}$인 경우에만 $A_n=B_n$이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

03

해결 단계

❶ 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하고 P, Q, R를 조건제시법으로 나타낸다.
❷ 세 집합 P, Q, R의 포함 관계를 이용하여 세 조건 p, q, r의 관계를 찾는다.

ⓒ좋은책신사고

풀이 ❶ 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{(a, b)\,|\,a<0$이고 $b<0\}$,

$Q=\{(a, b)\,|\,a>0$이고 $b<0\}$,

$R=\{(a, b)\,|\,a, b$는 0이 아닌 모든 실수$\}$

❷ ㄱ. $P\subset R$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $Q\subset R$이므로 r는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $P^C\cup Q=P^C$이고 $P^C\subset R$, $R\not\subset P^C$이므로 ($\sim p$ 또는 q)는 r이기 위한 충분조건이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

04

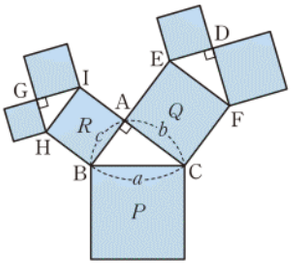
해결 단계

❶ 직각삼각형 ABC에서 $a^2=b^2+c^2$임을 이용하여 각 정사각형의 넓이 사이의 관계를 이해한다.

❷ ❶을 이용하여 a의 값을 구한다.

❸ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 abc의 최댓값을 구한다.

풀이



❶ 직각삼각형 ABC에서 $a^2=b^2+c^2$이므로 두 정사각형 Q, R의 넓이의 합 b^2+c^2은 정사각형 P의 넓이인 a^2과 같다.

마찬가지로 직각삼각형 DEF의 빗변이 아닌 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 두 개의 넓이의 합은 정사각형 Q의 넓이인 b^2과 같고, 직각삼각형 GHI의 빗변이 아닌 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 두 개의 넓이의 합은 정사각형 R의 넓이인 c^2과 같다.

❷ 이때 7개의 정사각형의 넓이의 합은

$a^2+(b^2+c^2)+b^2+c^2=a^2+a^2+a^2=3a^2$

이므로

$3a^2=108$, $a^2=36$ $\therefore a=6$ ($\because a>0$)

❸ 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2=b^2+c^2$

$\geq 2\sqrt{b^2c^2}=2bc$ (등호는 $b=c$일 때 성립)

이므로

$36\geq 2bc$ $\therefore bc\leq 18$

따라서

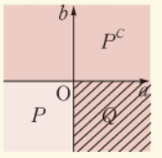
$abc\leq 6\cdot 18=108$

이므로 abc의 최댓값은 108이다. 답 ④

일품 BOX

두 집합 X, Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 X에서 Y로의 함수라 한다.

조건 $\sim p$, q를 만족시키는 부분을 그림으로 나타내면 다음과 같다. (단, 좌표축은 제외한다.)



원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수 ➡ 2^n

VI 함수

15 함수

개념&핵심 기출

본책 36~40쪽

01 정의역의 임의의 원소 a에 대하여 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만나야 하므로 함수의 그래프는 ②이다. 답 ②

02 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 각각 a, b, c라 하면 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 다음과 같다.

(i) $f(1)+f(2)+f(3)=3$인 경우

$(1, 1, 1)$의 1개

(ii) $f(1)+f(2)+f(3)=4$인 경우

$(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$의 3개

(iii) $f(1)+f(2)+f(3)=5$인 경우

$(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$의 6개

이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$1+3+6=10$ 답 ③

03 ㄱ. $A=B=\{-1, 0\}$, $C=D=\{0, 2\}$

ㄴ. $f(-1)=g(-1)=0$, $f(0)=g(0)=-1$,

$f(1)=g(1)=0$이므로 $f=g$

ㄷ. $h(-1)=2$, $k(-1)=0$이므로 $h(-1)\neq k(-1)$

$h(1)=0$, $k(1)=2$이므로 $h(1)\neq k(1)$

$\therefore h\neq k$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

04 $f(2)=g(2)$에서 $4+1=2+b$ $\therefore b=3$

$f(a)=g(a)$에서

$a^2+1=a+b$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$ $\therefore a=-1$ ($\because a\neq 2$)

$\therefore a+b=2$ 답 ②

05 집합 X의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이어야 하므로

$x^3=2x^2+3x$, $x(x^2-2x-3)=0$

$x(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

즉 집합 X는 집합 $\{-1, 0, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합이다.

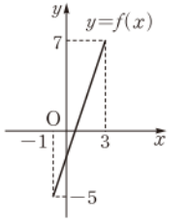
따라서 구하는 집합 X의 개수는 $2^3-1=7$ 답 ⑤

06 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅂ의 4개이므로
$a=4$
일대일함수의 그래프인 것은 ㄴ, ㄷ의 2개이므로
$b=2$
일대일대응의 그래프인 것은 ㄴ의 1개이므로
$c=1$
$\therefore a+b+c=7$ 답 7

07 함수 f가 일대일함수이고, $f(1)=1$이므로
$f(2)\neq 1$, $f(3)\neq 1$
이때 $f(2)f(3)=18=3\cdot 6$이므로
$f(2)=3$, $f(3)=6$ 또는 $f(2)=6$, $f(3)=3$
$\therefore f(2)+f(3)=3+6=9$ 답 9

자연수 a의 값은 6이다.

08 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $a>0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(-1)=-5$, $f(3)=7$이므로
$f(-1)=-a+b=-5$
$f(3)=3a+b=7$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=3$, $b=-2$
$\therefore a-b=5$ 답 5

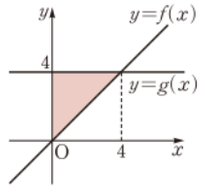
09 함수 $f(x)$가 항등함수이므로 $f(x)=x$
(i) $x<0$일 때,
$-x^2+2=x$에서
$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ ($\because x<0$)
(ii) $0\le x<4$일 때,
$2x-3=x$에서 $x=3$
(iii) $x\ge 4$일 때, $x=5$
이상에서 $X=\{-2, 3, 5\}$이므로
$f(a)+f(b)+f(c)=a+b+c$
$=-2+3+5=6$ 답 ③

$f(x)$는 항등함수이므로 $f(a)=a$, $f(b)=b$, $f(c)=c$

10 함수 $f(x)$가 항등함수이므로 $f(x)=x$
$f(2)=2$에서 $4+2a+b=2$
$\therefore 2a+b=-2$ …… ㉠
$f(5)=5$에서 $25+5a+b=5$
$\therefore 5a+b=-20$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-6$, $b=10$
$\therefore a+b=4$ 답 ②

다른 풀이 함수 $f(x)$가 항등함수이므로 정의역 X의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x)=x$이다.
즉 $x^2+ax+b=x$에서 $x^2+(a-1)x+b=0$
따라서 정의역 X의 두 원소 2, 5는 이 이차방정식의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$2+5=-(a-1)$, $2\cdot 5=b$
따라서 $a=-6$, $b=10$이므로 $a+b=4$

11 함수 f는 항등함수이므로 $f(x)=x$
함수 g는 상수함수이고 $g(1)=4$이므로 $g(x)=4$
따라서 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$ 답 ③

12 $f(2)=-1$, $f(-1)=2$이므로
$(f\circ f\circ f\circ f)(2)=(f\circ f\circ f)(-1)$
$=(f\circ f)(2)$
$=f(-1)=2$ 답 ④

13 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$이므로
$g(2x-1)=\frac{x+3}{2}$
이때 $2x-1=5$에서 $x=3$
$\therefore g(5)=\frac{3+3}{2}=3$ 답 ③

14 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+a)$
$=(x+a)^2-2(x+a)-1$
$=x^2+2(a-1)x+a^2-2a-1$
즉 $x^2+2(a-1)x+a^2-2a-1=x^2+4x+b$이므로
$2(a-1)=4$, $a^2-2a-1=b$
$\therefore a=3$, $b=2$
$\therefore a+b=5$ 답 ①

양변의 동류항의 계수를 비교한다.

15 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+10)$
$=4(ax+10)+a$
$=4ax+40+a$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4x+a)$
$=a(4x+a)+10$
$=4ax+a^2+10$
이때 $g\circ f=f\circ g$이므로
$4ax+40+a=4ax+a^2+10$, $40+a=a^2+10$
$a^2-a-30=0$, $(a+5)(a-6)=0$
$\therefore a=6$ ($\because a>0$) 답 ③

16 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{2}x-1\right)$
$=2\left(\frac{1}{2}x-1\right)+2=x$
즉 합성함수 $f\circ g$는 항등함수 I이므로
$h(x)=((f\circ g\circ f)\circ(f\circ g))(x)$
$=((I\circ f)\circ I)(x)$
$=f(x)=2x+2$ 답 ②

17 $(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$
$=(h\circ g)(f(x))$
$=(h\circ g)(3x-1)$
$=2(3x-1)+1$
$=6x-1$
따라서 $6x-1=5$에서 $x=1$ 답 ③

결합법칙이 성립한다.

18 주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1+1)=f(1)f(1)$

$f(1)=a$ $(a>0)$라 하면 $f(2)=4$이므로

$a^2=4$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$\therefore f(1)=2$

주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=2$를 대입하면

$f(1+2)=f(1)f(2)=2\cdot4=8$

$\therefore f(3)=8$

주어진 식의 양변에 $x=2$, $y=3$을 대입하면

$f(2+3)=f(2)f(3)=4\cdot8=32$

$\therefore f(5)=32$ 답 ⑤

19 주어진 식의 양변에 $x=2$, $y=2$를 대입하면

$f(2+2)=f(2)+f(2)$

$f(4)=2f(2)$, $3=2f(2)$

$\therefore f(2)=\frac{3}{2}$

주어진 식의 양변에 $x=4$, $y=4$를 대입하면

$f(4+4)=f(4)+f(4)=3+3=6$

$\therefore f(8)=6$

주어진 식의 양변에 $x=8$, $y=2$를 대입하면

$f(8+2)=f(8)+f(2)=6+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$

$\therefore f(10)=\frac{15}{2}$ 답 ④

20 $f(x)+3f(1-x)=2x$ …… ㉠

㉠의 양변에 x 대신에 $1-x$를 대입하면

$f(1-x)+3f(x)=2(1-x)$ …… ㉡

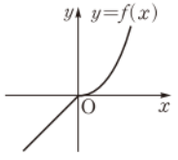
㉠−㉡×3을 하면

$-8f(x)=8x-6$ $\therefore f(x)=-x+\frac{3}{4}$

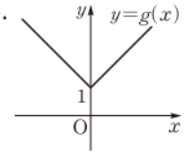
$\therefore f(-2)+f(2)=\frac{11}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{3}{2}$ 답 ③

21 함수 f, g, h의 그래프를 그려 보면 다음과 같다.

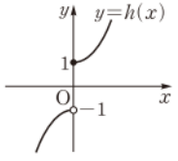
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



이상에서 집합 R에서 R로의 일대일대응인 것은 f이므로 역함수가 존재하는 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

22 $f(3)=6$이므로 $f^{-1}(6)=3$이다.

$f^{-1}(6)=6c-1=3$에서 $c=\frac{2}{3}$

$f^{-1}(x)=\frac{2}{3}x-1$에서 $f^{-1}(3)=1$이므로

$f(1)=3$

따라서 $f(1)=a+b=3$이므로

$a+b+c=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$ 답 $\frac{11}{3}$

23 $f(2x-1)=x+4$에서 $2x-1=t$로 놓으면

$x=\frac{t+1}{2}$

즉 $f(t)=\frac{t+1}{2}+4$이므로

$f(x)=\frac{x+1}{2}+4$

$y=\frac{x+1}{2}+4$로 놓으면 $2y=x+9$

$\therefore x=2y-9$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x-9$

따라서 $f^{-1}(x)=2x-9$이므로

$a=2$, $b=-9$

$\therefore 2a-b=13$ 답 13

다른 풀이 $f(2x-1)=x+4$이므로

$f^{-1}(x+4)=2x-1$

$x+4=t$로 놓으면 $x=t-4$이므로

$f^{-1}(t)=2(t-4)-1=2t-9$

따라서 $f^{-1}(x)=2x-9$이므로

$a=2$, $b=-9$

$\therefore 2a-b=13$

24 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)$

$=(f\circ(f^{-1}\circ g^{-1})\circ f)(2)$

$=((f\circ f^{-1})\circ(g^{-1}\circ f))(2)$

$=(g^{-1}\circ f)(2)$

$=g^{-1}(f(2))$

$=g^{-1}(-1)$

이때 $g^{-1}(-1)=k$라 하면 $g(k)=-1$

$2k-9=-1$ $\therefore k=4$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)=4$ 답 4

25 $f\circ h=g$에서 $h=f^{-1}\circ g$

$\therefore h(x)=(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))$

$=f^{-1}(3x+5)$

$=\frac{(3x+5)-3}{2}$

$=\frac{3}{2}x+1$ 답 ③

다른 풀이 $y=\frac{x-3}{2}$으로 놓으면 $2y=x-3$

$\therefore x=2y+3$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x+3$

따라서 $f(x)=2x+3$이므로 $f\circ h=g$에서

$f(h(x))=g(x)$

$2h(x)+3=3x+5$, $2h(x)=3x+2$

$\therefore h(x)=\frac{3}{2}x+1$

일품 BOX

$f\circ f^{-1}=I$ (단, I는 항등함수)

$f(2)=2-3=-1$

$f\circ h=g$에서

$f^{-1}\circ(f\circ h)=f^{-1}\circ g$

$(f^{-1}\circ f)\circ h=f^{-1}\circ g$

$I\circ h=f^{-1}\circ g$

$\therefore h=f^{-1}\circ g$ (단, I는 항등함수)

ㄴ. 함수 g는 일대일함수가 아니므로 일대일대응이 아니다.

ㄷ. 함수 h는 치역과 공역이 같지 않으므로 일대일대응이 아니다.

일품 BOX

참고 두 함수 $f(x)=2x+3$, $g(x)=3x+5$에 대하여 $h\circ f=g$를 만족시키는 함수 h는 다음과 같이 구한다.
$h(2x+3)=3x+5$이므로 $2x+3=t$로 놓으면

$x=\frac{t-3}{2}$

$\therefore h(t)=3\cdot\frac{t-3}{2}+5=\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}$

$\therefore h(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

26 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 교점 P는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
따라서 교점 P의 좌표를 $(a,\ a)(a\geq1)$로 놓으면 원점과 점 P 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$이므로

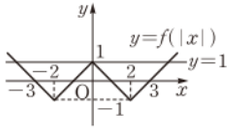
$\sqrt{a^2+a^2}=4\sqrt{2}$, $a^2=16$

$\therefore a=4$ ($\because a\geq1$)

따라서 $f(4)=4$이므로 $16-8+k=4$

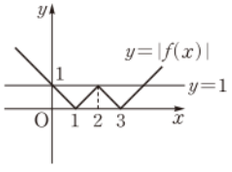
$\therefore k=-4$ 답 ①

27 ㄱ. $y=f(|x|)$의 그래프는 $x\geq0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, $x<0$인 부분은 $x\geq0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.



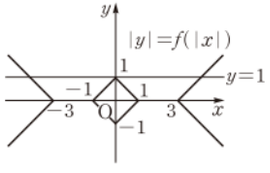
따라서 $y=f(|x|)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수는 3이다.

ㄴ. $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한다.



따라서 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수는 3이다.

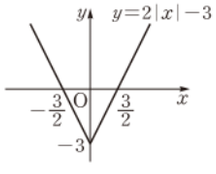
ㄷ. $|y|=f(|x|)$의 그래프는 $x\geq0$, $y\geq0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, 이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한다.



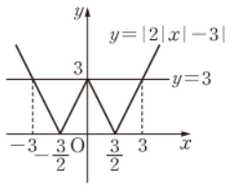
따라서 $|y|=f(|x|)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수는 3이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

28 $y=2|x|-3$에서
(i) $x\geq0$일 때,
$y=2x-3$
(ii) $x<0$일 때,
$y=-2x-3$
(i), (ii)에서 $y=2|x|-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $y=|2|x|-3|$의 그래프는 함수 $y=2|x|-3$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|2|x|-3|$의 그래프와 직선 $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\left(\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\right)\cdot2=9$ 답 ④

1등급을 위한 고난도 문제 본책 41~44쪽

01 $f(1)=f(5)=-1$,
$f(3)=f(7)=f(11)=\cdots=f(123)=4$
$\therefore f(5)+f(11)+f(123)=-1+4+4$
$=7$ 답 ④

$123=4\cdot30+3$이므로
$f(123)=f(3)=4$

1등급 비밀노트
함수 $y=f(x)$에서 정의역에 속하는 모든 x에 대하여
$f(x+p)=f(x)$
를 만족시키는 양의 상수 p가 존재할 때, $f(x)$를 주기함수라 하고, 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라 한다.
이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x)$가 $f(x)=f(x+4)$를 만족시킨다고 해서 $f(x)$의 주기를 4라고 단정할 수 없다. 왜냐하면 $f(x)$가 주기가 2인 함수인 경우에도 $f(x)=f(x+4)$를 만족시키기 때문이다.

02 (i) $x=1$일 때, $2\cdot1-f(1)\in A$에서
$f(1)=1$
(ii) $x=2$일 때, $2\cdot2-f(2)\in A$에서
$f(2)=1$ 또는 $f(2)=2$ 또는 $f(2)=3$
(iii) $x=3$일 때, $2\cdot3-f(3)\in A$에서
$f(3)=3$
이상에서 함수 f의 개수는
$1\cdot3\cdot1=3$ 답 3

$f(1)=2$이면
$2\cdot1-f(1)=0$
$\therefore 0\notin A$
$f(1)=3$이면
$2\cdot1-f(1)=-1$
$\therefore -1\notin A$

참고 '$x\in A$이면 $2x-f(x)\in A$를 만족시킨다.'는 것은 $2-f(1)$, $4-f(2)$, $6-f(3)$의 값이 모두 1, 2, 3 중 하나라는 뜻이다.

03 ㄱ. $a^2+b^2<1$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(0,\ 0)$의 1개이므로 $f(1)=1$
$a^2+b^2<2$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$의 3개이므로 $f(2)=3$
$\therefore f(1)+f(2)=1+3=4$
ㄴ. [반례] $i=3$, $j=4$라 하면
$a^2+b^2<3$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 1)$의 4개이므로 $f(3)=4$
$a^2+b^2<4$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 1)$의 4개이므로 $f(4)=4$
즉 $i<j$이지만 $f(i)=f(j)$이다.

ⓒ좋은책신사고

ㄷ. $a^2+b^2<50$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는
$a=0$일 때, $b=0, 1, 2, \cdots, 7$의 8개
$a=1$일 때, $b=0, 1, 2, \cdots, 6$의 7개
$a=2$일 때, $b=0, 1, 2, \cdots, 6$의 7개
$a=3$일 때, $b=0, 1, 2, \cdots, 6$의 7개
$a=4$일 때, $b=0, 1, 2, \cdots, 5$의 6개
$a=5$일 때, $b=0, 1, 2, 3, 4$의 5개
$a=6$일 때, $b=0, 1, 2, 3$의 4개
$a=7$일 때, $b=0$의 1개
$\therefore f(50)=8+7+7+7+6+5+4+1=45$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

04 n이 홀수일 때, $f(n)=n-1$이므로
$f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$
$=0+2+4+6+8=20$ ··· ❶
n이 짝수일 때, $f(n)=f\left(\frac{n}{2}\right)$이므로
$f(2)=f(1)=0$
$f(4)=f(2)=f(1)=0$
$f(6)=f(3)=2$
$f(8)=f(4)=0$
$f(10)=f(5)=4$
$\therefore f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)$
$=0+0+2+0+4=6$ ··· ❷
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)=26$ ··· ❸
답 26

채점 기준	비율
❶ $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

05 (i) $x\le0$일 때,
$x^2+2x=2x+4$에서 $x^2=4$
$x\le0$이므로 $x=-2$
(ii) $0<x\le4$일 때,
$x^2-x=2x+4$에서
$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$
$0<x\le4$이므로 $x=4$
(iii) $x>4$일 때,
$x^2-x=8x-20$에서
$x^2-9x+20=0$, $(x-4)(x-5)=0$
$x>4$이므로 $x=5$ ··· ❶
이상에서 $X=\{-2, 4, 5\}$이므로 집합 X의 모든 원소의 합은 $-2+4+5=7$ ··· ❷
답 7

채점 기준	비율
❶ $x\le0$, $0<x\le4$, $x>4$로 나누어 x의 값을 구할 수 있다.	80 %
❷ 집합 X의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

일품 BOX

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}-\frac{4}{3}+3$
$=\frac{19}{9}$

일대일대응
➡ 일대일함수이고, 치역과 공역이 같은 함수

$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

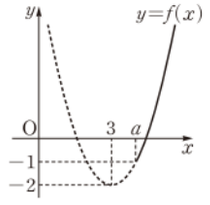
$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$
2	3	4
2	4	3
3	2	4
3	4	2
4	2	3
4	3	2

이차함수의 그래프는 직선과 최대 2개의 점에서 만날 수 있다.

$f(x)=ax^2+bx+c$에서 $a>0$이므로 $f(1)$의 값이 가장 클 수 없다.

06 $g(x)=f(2x)=(2x)^2+2\cdot2x+3=4x^2+4x+3$
이때 두 함수 f와 g가 서로 같으므로
$x^2+2x+3=4x^2+4x+3$
$3x^2+2x=0$, $x(3x+2)=0$
$\therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=0$
따라서 $X=\left\{-\frac{2}{3}, 0\right\}$이고,
$f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{19}{9}$, $f(0)=3$
이므로 $f=h$에서
$h\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}a+b=\frac{19}{9}$, $h(0)=b=3$
$\therefore a=\frac{4}{3}$
$\therefore ab=4$ 답 4

07 $f(x)=x^2-6x+7=(x-3)^2-2$
함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가해야 하므로
$a\ge3$
또 치역과 공역이 같아야 하므로
$f(a)=-1$
$a^2-6a+7=-1$, $a^2-6a+8=0$
$(a-2)(a-4)=0$
$\therefore a=4$ ($\because a\ge3$) 답 ③



참고 $a=2$, 즉 $x\ge2$이면 $f(2)=f(4)=-1$이므로 $f(x)$는 일대일함수가 될 수 없다. 따라서 $f(x)$는 일대일대응이 될 수 없다.

08 조건 (가)에서 함수 f는 일대일대응이므로
$\{f(0), f(1), f(2)\}=\{2, 3, 4\}$
(i) $f(0)=2$, $f(1)=3$, $f(2)=4$ 또는
$f(0)=4$, $f(1)=3$, $f(2)=2$인 경우
순서쌍 $(x, f(x))$를 좌표평면 위에 나타내면 세 점이 한 직선 위에 있는 경우이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ii) $f(0)=2$, $f(1)=4$, $f(2)=3$ 또는
$f(0)=3$, $f(1)=4$, $f(2)=2$인 경우
$f(1)$의 값이 가장 크므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(iii) $f(0)=3$, $f(1)=2$, $f(2)=4$인 경우
$f(0)=c=3$
$f(1)=a+b+c=2$
$f(2)=4a+2b+c=4$
세 식을 연립하여 풀면
$a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$, $c=3$
$\therefore a-b+c=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+3=7$
(iv) $f(0)=4$, $f(1)=2$, $f(2)=3$인 경우
$f(0)=c=4$
$f(1)=a+b+c=2$
$f(2)=4a+2b+c=3$

세 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{2},\ b=-\frac{7}{2},\ c=4$

$\therefore a-b+c=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}+4=9$

이상에서 $a-b+c$의 최댓값은 9이다. 답 9

09 $g(x)=2x$, $h(x)=ax^2+bx-4a$라 하면 $f(x)$가 함수이므로

$g(-2)=h(-2)$에서

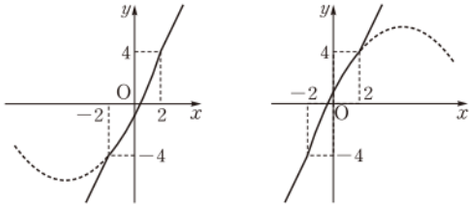
$-4=4a-2b-4a \quad \therefore b=2$

$g(2)=h(2)$에서

$4=4a+2b-4a \quad \therefore b=2$ ···❶

한편 함수 $f(x)$는 일대일대응이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

(i) $a>0$일 때 (ii) $a<0$일 때



이때 $y=h(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{1}{a}$

(i) $a>0$일 때 $-\frac{1}{a}\le -2 \quad \therefore 0<a\le\frac{1}{2}$

(ii) $a<0$일 때 $-\frac{1}{a}\ge 2 \quad \therefore -\frac{1}{2}\le a<0$

(i), (ii)에서 $-\frac{1}{2}\le a<0$ 또는 $0<a\le\frac{1}{2}$ ···❷

답 $-\frac{1}{2}\le a<0$ 또는 $0<a\le\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %

10 f가 일대일대응이고, $f(1)=6$이므로 $f(2)-f(3)=2$를 만족시키는 $f(2)$, $f(3)$의 값은

$f(2)=4,\ f(3)=2$ 또는 $f(2)=10,\ f(3)=8$

이때 $f(4)$, $f(5)$의 값은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외한 나머지 두 개의 값을 각각 하나씩 갖는다.

(i) $f(2)=4$, $f(3)=2$일 때,

$f(4)=8$, $f(5)=10$ 또는 $f(4)=10$, $f(5)=8$이므로

$f(3)f(4)$의 값은

$2\cdot 8=16$ 또는 $2\cdot 10=20$

(ii) $f(2)=10$, $f(3)=8$일 때,

$f(4)=2$, $f(5)=4$ 또는 $f(4)=4$, $f(5)=2$이므로

$f(3)f(4)$의 값은

$8\cdot 2=16$ 또는 $8\cdot 4=32$

(i), (ii)에서 $f(3)f(4)$의 최댓값은 32, 최솟값은 16이므로 그 합은 48이다. 답 ⑤

일품 BOX

$g(2)=2$, $g(4)=4$, $g(8)=8$

$h(8)=4$이므로 $h(2)=h(4)=4$

$h(x)=ax^2+2x-4a=a\left(x+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{4a^2+1}{a}$에서 축의 방정식은 $x=-\frac{1}{a}$

합성함수 $g\circ f$가 정의되려면 (f의 치역)$\subset$(g의 정의역)이어야 한다.

11 $f(x)=4$이려면 $x=5k+4$ (k는 음이 아닌 정수) 꼴이어야 한다.

함수 f는 치역이 $\{4\}$인 상수함수이므로 정의역 X는 집합 $\{x\,|\,x=5k+4,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9\}$, 즉 $\{4,\ 9,\ 14,\ 19,\ \cdots,\ 49\}$의 공집합이 아닌 부분집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{10}-1=1023$ 답 ⑤

1등급 비밀노트

자연수 n을 5로 나누었을 때의 나머지는 0 또는 1 또는 2 또는 3 또는 4이므로 자연수 n은 $5k$ (k는 자연수) 또는 $5k+r$ (k는 음이 아닌 정수, $r=1,\ 2,\ 3,\ 4$) 꼴로 나타낼 수 있다. 이때 5로 나누었을 때의 나머지가 4인 자연수는 $5k+4$ (k는 음이 아닌 정수) 꼴로 나타낼 수 있다.

12 함수 g가 항등함수이므로

$g(4)=4$

조건 (가)에서 $f(2)=h(8)=g(4)=4$

이때 함수 f가 일대일대응이고 $f(2)=4$이므로 조건 (나)에서 $f(2)f(8)=f(4)$가 성립하려면

$f(8)=2,\ f(4)=8$

이어야 한다.

또 함수 g가 항등함수이므로 $g(8)=8$

함수 h가 상수함수이므로 $h(2)=4$

$\therefore f(4)+g(8)+h(2)=8+8+4=20$ 답 20

13 $f(1)=a+3$, $f(2)=2a+3$, $f(3)=3a+3$이므로 함수 f의 치역을 $f(X)$라 하면

$f(X)=\{a+3,\ 2a+3,\ 3a+3\}$

합성함수 $g\circ f$가 정의되려면 $f(X)\subset X$이어야 하므로

$\{a+3,\ 2a+3,\ 3a+3\}\subset\{1,\ 2,\ 3\}$

(i) $a+3=1$, 즉 $a=-2$일 때,

$f(X)=\{1,\ -1,\ -3\}$이므로 $f(X)\not\subset X$

(ii) $a+3=2$, 즉 $a=-1$일 때,

$f(X)=\{2,\ 1,\ 0\}$이므로 $f(X)\not\subset X$

(iii) $a+3=3$, 즉 $a=0$일 때,

$f(X)=\{3\}$이므로 $f(X)\subset X$

이상에서 구하는 a의 값은 0이다. 답 0

14 $f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x\le 1)\\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & (1\le x\le 3)\end{cases}$

(i) $0\le x\le\frac{1}{2}$일 때,

$0\le f(x)\le 1$이므로

$f(f(x))=f(2x)=2\cdot 2x=4x$

(ii) $\frac{1}{2}\le x\le 1$일 때,

$1\le f(x)\le 2$이므로

$f(f(x))=f(2x)=\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{3}{2}=x+\frac{3}{2}$

ⓒ좋은책신사고

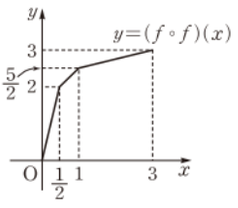
(iii) $1\le x\le 3$일 때,

$2\le f(x)\le 3$이므로

$$f(f(x))=f\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$$

이상에서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프의 개형은 ③과 같다. 답 ③



15 $f(x)=\begin{cases}2 & (x<1)\\ -1 & (x=1)\\ -2 & (1<x\le 2)\\ 1 & (x>2)\end{cases}$

(i) $x<1$일 때,

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2)=-2$

(ii) $x=1$일 때,

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-1)=2$

(iii) $1<x\le 2$일 때,

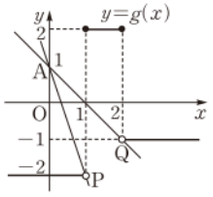
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-2)=2$

(iv) $x>2$일 때,

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(1)=-1$

이상에서 $g(x)=\begin{cases}-2 & (x<1)\\ 2 & (1\le x\le 2)\\ -1 & (x>2)\end{cases}$

즉 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=ax+1$이 직선 AP와 직선 AQ 사이에 존재하면 된다.



이때 직선 AP의 기울기는

$$\frac{-2-1}{1-0}=-3$$

직선 AQ의 기울기는 $\frac{-1-1}{2-0}=-1$

따라서 구하는 a의 값의 범위는 $-3\le a\le -1$ 답 ①

16 $f^1(2)=1$, $f^2(2)=4$, $f^3(2)=3$, $f^4(2)=2$, $f^5(2)=1$, …

$f^1(3)=2$, $f^2(3)=1$, $f^3(3)=4$, $f^4(3)=3$, $f^5(3)=2$, …

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$f^n(2)=f^{n+4}(2)$, $f^n(3)=f^{n+4}(3)$

이 성립한다. 즉

$f^1(2)+f^3(3)=1+4=5$,

$f^2(2)+f^4(3)=4+3=7$,

$f^3(2)+f^5(3)=3+2=5$,

$f^4(2)+f^6(3)=2+1=3$,

$f^5(2)+f^7(3)=1+4=5$,

⋮

이므로 $f^n(2)+f^{n+2}(3)=5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 n은

1, 3, 5, …, 99

의 50개이다. 답 50

17 $(f\circ g\circ h)(x)=3g\left(\frac{x}{2}\right)-2$에서

$f(g(h(x)))=3g\left(\frac{x}{2}\right)-2$

$3g(h(x))-2=3g\left(\frac{x}{2}\right)-2$

$\therefore g(h(x))=g\left(\frac{x}{2}\right)$ ⋯ ❶

함수 g는 일대일대응이므로

$h(x)=\frac{x}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore (h\circ h)(8)=h(h(8))$

$=h(4)=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $g(h(x))=g\left(\frac{x}{2}\right)$임을 알 수 있다.	40 %
❷ 함수 $h(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $(h\circ h)(8)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

18 $(f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x)))=1$에서

$f(f(x))=k$라 하면 $f(k)=1$

$0\le k\le 2$일 때, $k^2=1$

$\therefore k=1$ ($\because 0\le k\le 2$)

$2<k\le 4$일 때, $(k-4)^2=1$

$\therefore k=3$ ($\because 2<k\le 4$)

$\therefore f(f(x))=1$ 또는 $f(f(x))=3$

(i) $f(f(x))=1$일 때,

$f(x)=p$라 하면

$f(p)=1$

$0\le p\le 2$일 때, $p^2=1$

$\therefore p=1$ ($\because 0\le p\le 2$)

$f(x)=1$을 만족시키는 x의 값을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=4$

$y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$2-\alpha=\beta-2$

$\therefore \alpha+\beta=4$

$2<p\le 4$일 때, $(p-4)^2=1$

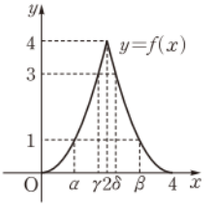
$\therefore p=3$ ($\because 2<p\le 4$)

$f(x)=3$을 만족시키는 x의 값을 γ, δ라 하면

$\gamma+\delta=4$

$2-\gamma=\delta-2$

$\therefore \gamma+\delta=4$



(ii) $f(f(x))=3$일 때,

$f(x)=s$라 하면

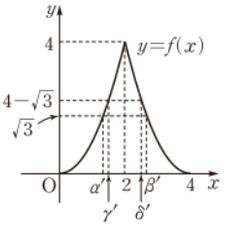
$f(s)=3$

$0\le s\le 2$일 때, $s^2=3$

$\therefore s=\sqrt{3}$ ($\because 0\le s\le 2$)

$f(x)=\sqrt{3}$을 만족시키는 x의 값을 α', β'이라 하면

$\alpha'+\beta'=4$



일품 BOX

$2<s\le4$일 때, $(s-4)^2=3$

$\therefore s=4-\sqrt{3}$ ($\because 2<s\le4$)

$f(x)=4-\sqrt{3}$을 만족시키는 x의 값을 γ', δ'이라 하면

$\gamma'+\delta'=4$

(i), (ii)에서 모든 x의 값의 합은

$4+4+4+4=16$ 답 16

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$
$+\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'$

19 주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)+f(1)$

$\therefore f(1)=0$ ···❶

주어진 식의 양변에 $x=8$, $y=\frac{1}{8}$을 대입하면

$f(1)=f(8)+f\left(\frac{1}{8}\right)$, $0=6+f\left(\frac{1}{8}\right)$

$\therefore f\left(\frac{1}{8}\right)=-6$ ···❷

이때

$f(8)=f(2\cdot4)=f(2)+f(4)$

$=f(2)+f(2\cdot2)=f(2)+f(2)+f(2)$

$=3f(2)$

이므로 $3f(2)=6$에서 $f(2)=2$

$\therefore f(4)=f(2)+f(2)=2+2=4$ ···❸

$\therefore f\left(\frac{1}{8}\right)+f(1)+f(4)=-6+0+4=-2$ ···❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $f\left(\frac{1}{8}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $f(4)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $f\left(\frac{1}{8}\right)+f(1)+f(4)$의 값을 구할 수 있다.	10%

다른 풀이 $f\left(\frac{1}{8}\right)+f(1)+f(4)=f\left(\frac{1}{8}\cdot1\right)+f(4)$

$=f\left(\frac{1}{8}\cdot1\cdot4\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

이때

$f\left(\frac{1}{8}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=3f\left(\frac{1}{2}\right)$

이므로 $3f\left(\frac{1}{2}\right)=-6$에서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$

$\therefore$ (구하는 값)$=-2$

20 주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=0$을 대입하면

$f(1)f(0)=f(1)+f(1)$

$\therefore f(0)=1+1=2$

주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1)f(1)=f(2)+f(0)$

$1\cdot1=f(2)+2$

$\therefore f(2)=-1$

주어진 식의 양변에 $x=2$, $y=2$를 대입하면

$f(2)f(2)=f(4)+f(0)$

$(-1)\cdot(-1)=f(4)+2$

$\therefore f(4)=-1$ 답 -1

$f(4)=1$, $g(1)=7$

21 $2f(2x)+f(4-2x)=3x-1$ ····· ㉠

㉠의 양변에 x 대신에 $2-x$를 대입하면

$2f(4-2x)+f(2x)=5-3x$ ····· ㉡

㉠$\times2-$㉡을 하면

$3f(2x)=9x-7$

$\therefore f(2x)=3x-\frac{7}{3}$ ····· ㉢

㉢의 양변에 x 대신에 $\frac{x}{2}$를 대입하면

$f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}$

따라서

$(f\circ f)(6)=f(f(6))=f\left(\frac{20}{3}\right)$

$=\frac{23}{3}$ 답 ①

22 $f(1)=3$, $f(2)=9$, $f(3)=7$, $f(4)=1$이고

$g(1)=7$, $g(2)=9$, $g(3)=3$, $g(4)=1$이므로

$f^{-1}(1)=4$, $g^{-1}(7)=1$

$\therefore (g\circ f^{-1})(1)+(f\circ g^{-1})(7)$

$=g(f^{-1}(1))+f(g^{-1}(7))$

$=g(4)+f(1)$

$=1+3=4$ 답 4

23 $y=\frac{2}{5}(x+1)$로 놓으면 $x=\frac{5}{2}y-1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{5}{2}x-1$

$\therefore g(x)=\frac{5}{2}x-1$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점을 A라 하면

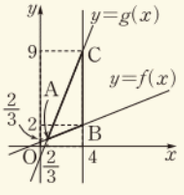
$\frac{2}{5}(x+1)=\frac{5}{2}x-1$에서 $x=\frac{2}{3}$

$\therefore$ A$\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

또 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $x=4$의 교점을 각각 B, C라 하면

B(4, 2), C(4, 9)

이때 삼각형 ABC의 경계 또는 내부에 놓인 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 다음과 같다.



(i) $x=1$일 때,

$\frac{4}{5}\le y\le\frac{3}{2}$이므로 (1, 1)의 1개

(ii) $x=2$일 때,

$\frac{6}{5}\le y\le4$이므로 (2, 2), (2, 3), (2, 4)의 3개

(iii) $x=3$일 때,

$\frac{8}{5}\le y\le\frac{13}{2}$이므로 (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)의 5개

(iv) $x=4$일 때,

$2\le y\le9$이므로 (4, 2), (4, 3), ···, (4, 9)의 8개

이상에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$1+3+5+8=17$ 답 17

ⓒ좋은책신사고

24 $f(1)=4$이므로 $f(1)=3+k=4$

$\therefore k=1$

(i) $x\geq 0$일 때,

$f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$

이때 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y|y\geq 1\}$이다.

(ii) $x<0$일 때,

$f(x)=-x^2+2x+1=-(x-1)^2+2$

이때 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y|y<1\}$이다.

$f^{-1}(-2)=a$라 하면 $f(a)=-2$에서 $-2<1$이므로

$a<0$

(ii)에서 $f(a)=-a^2+2a+1=-2$

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a<0$)

또 $f^{-1}(9)=b$라 하면 $f(b)=9$에서 $9\geq 1$이므로

$b\geq 0$

(i)에서 $f(b)=b^2+2b+1=9$

$b^2+2b-8=0$, $(b+4)(b-2)=0$

$\therefore b=2$ ($\because b\geq 0$)

$\therefore f^{-1}(-2)+f^{-1}(9)=(-1)+2=1$ 답 ③

25 $f^{-1}(x)=x^2$에서

$f(x^2)=x$ …… ㉠

$(f\circ g^{-1})(x^2)=x$에서 $f(g^{-1}(x^2))=x$이므로 ㉠에서

$g^{-1}(x^2)=x^2$ $\therefore g(x^2)=x^2$

$\therefore (f\circ g)(16)=f(g(16))$

$=f(16)=4$ 답 ③

다른 풀이 $(f\circ g^{-1})(x^2)=x$에서

$(f\circ g^{-1})^{-1}(x)=x^2$

$\therefore (g\circ f^{-1})(x)=x^2$

이때 $(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))=g(x^2)$이므로

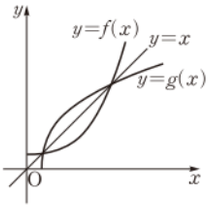
$g(x^2)=x^2$

또 $f^{-1}(x)=x^2$에서 $f(x^2)=x$이므로

$(f\circ g)(16)=f(g(16))$

$=f(16)=4$

26 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수이므로 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다. ⋯› ❶

$\frac{1}{10}x^2+a=x$, 즉 $x^2-10x+10a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-10x+10a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-5)^2-10a>0$

$\therefore a<\frac{5}{2}$ …… ㉠

일품 BOX

두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=10>0$,

$\alpha\beta=10a>0$

$\therefore a>0$

또 두 근의 합과 곱도 모두 양수이어야 하므로

$a>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<a<\frac{5}{2}$ ⋯› ❷

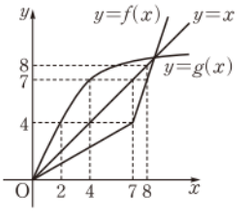
따라서 정수 a는 1, 2이므로 그 합은 3이다. ⋯› ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같음을 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

27 오른쪽 그림에서

$g^{-1}(f(7))=g^{-1}(4)=a$라 하면



$g(a)=4$

$\therefore a=2$

$\therefore g^{-1}(f(7))=2$

$f^{-1}(g(4))=f^{-1}(7)=b$라 하면

$f(b)=7$ $\therefore b=8$

$\therefore f^{-1}(g(4))=8$

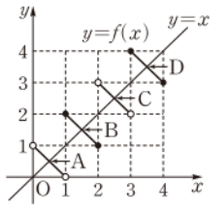
$\therefore g^{-1}(f(7))+f^{-1}(g(4))=10$ 답 10

28 구간 $0<x<1$, $1\leq x\leq 2$, $2<x<3$, $3\leq x\leq 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 $0<x\leq 4$에서 $f(f(x))=x$이다.

따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근은 직선 $y=x$와 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.

오른쪽 그림에서 직선 $y=x$와 $y=f(x)$의 그래프는 네 점 A, B, C, D에서 만나고 이 네 점의 x좌표는 각각



$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$

이므로 구하는 합은

$\frac{1+3+5+7}{2}=8$ 답 8

점 A는 두 직선 $y=-x+1$과 $y=x$의 교점이므로 x좌표는

$-x+1=x$

$\therefore x=\frac{1}{2}$

점 B, C, D의 x좌표도 같은 방법으로 구할 수 있다.

29 (i) $x<-1$일 때,

$f(x)=-(x+1)-(x-1)-(x-p)$

$=-3x+p$

(ii) $-1\leq x<p$일 때,

$f(x)=(x+1)-(x-1)-(x-p)$

$=-x+2+p$

(iii) $p\leq x<1$일 때,

$f(x)=(x+1)-(x-1)+(x-p)$

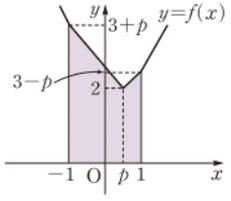
$=x+2-p$

(iv) $x\geq 1$일 때,

$f(x)=(x+1)+(x-1)+(x-p)$

$=3x-p$

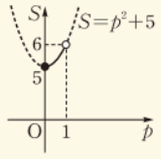
이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는 색칠한 부분의 넓이와 같다.



즉 구하는 넓이를 S라 하면

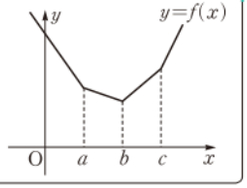
$$S=\frac{1}{2}\{(3+p)+2\}(p+1)+\frac{1}{2}\{2+(3-p)\}(1-p)$$
$$=\frac{1}{2}\{(p+5)(p+1)+(5-p)(1-p)\}$$
$$=p^2+5$$

따라서 $0\le p<1$이므로 S는 $p=0$일 때 최솟값 5를 갖는다. 답 ④



1등급 비밀노트

$f(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ $(a<b<c)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=a$, $x=b$, $x=c$인 점에서 꺾인 모양이므로 $x=a$, $x=b$, $x=c$에서 y의 값을 찾아 두 점 사이를 선분으로 연결하여 그린다.



30 ㄱ. $x\ge2$이면 $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(x-2)+1=x$이므로 $f(x)$는 항등함수이다.

ㄴ. $0\le x\le2$이면 $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(x-2)+1=2$이므로 $f(x)$는 상수함수이다.

ㄷ. $x\le0$이면 $f(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(x-2)+1=-x+2$이고, $x_1\ne x_2$이면

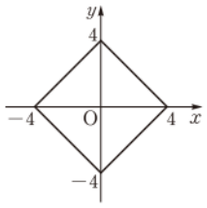
$f(x_1)-f(x_2)=(-x_1+2)-(-x_2+2)=x_2-x_1\ne0$

이므로 $f(x_1)\ne f(x_2)$

즉 $f(x)$는 일대일함수이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

31 $|x|+|y|=4$의 그래프는 직선 $x+y=4$에서 $x\ge0$, $y\ge0$인 부분과 이 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. ··· ❶



이 도형에 내접하는 원의 반지름의 길이는 원점과 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$ ··· ❷

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi\cdot(2\sqrt{2})^2=8\pi$$ ··· ❸

답 8π

채점 기준	비율
❶ $\|x\|+\|y\|=4$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷ ❶의 도형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❸ 원의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

일품 BOX

$f(3)\le2\cdot3=6$

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

사고력 강화를 위한 수능형 문제 본책 45~46쪽

01 (i) $f(3)=1$, $g(3)=3$이므로 $h(3)=3$

(ii) $g(1)=3$이고 $h(x)$는 일대일대응이므로

$h(1)\ge3$, $h(1)\ne3$

$\therefore h(1)=4$, $f(1)=4$

(iii) $g(2)=2$이고 $h(x)$는 일대일대응이므로

$h(2)\ge2$, $h(2)\ne3$, $h(2)\ne4$

$\therefore h(2)=2$, $f(2)=1$ 또는 $f(2)=2$

(iv) $g(4)=1$이고 $h(x)$는 일대일대응이므로

$h(4)=1$, $f(4)=1$

이상에서 $f(4)+h(2)=1+2=3$ 답 3

02 조건 (가)에서 $f(1)\le2$이므로 $f(1)=1$

조건 (나)에서 $f(x)$는 일대일함수이므로 $f(3)=a$라 하면

조건 (가)에서 $a=3$ 또는 $a=5$

이때 조건 (다)에서 $(f\circ f)(3)=f(a)=7$이므로 $a=5$

즉 $f(1)=1$, $f(3)=5$, $f(5)=7$이므로

$f(7)=3$, $f(9)=9$ 또는 $f(7)=9$, $f(9)=3$

$\therefore f(7)+f(9)=12$ 답 12

03 $n=a_m\cdot10^m+a_{m-1}\cdot10^{m-1}+\cdots+a_1\cdot10+a_0$ (a_i는 $0\le a_i\le9$인 정수, $i=0, 1, 2, \cdots, m$)으로 놓으면

조건 (나)에서

$$f(n)=f(a_m\cdot10^m+\cdots+a_2\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0)$$
$$=f(a_m\cdot10^{m-1}+\cdots+a_2\cdot10+a_1)+a_0$$
$$=f(a_m\cdot10^{m-2}+\cdots+a_2)+a_1+a_0$$
$$\vdots$$
$$=f(a_m)+\cdots+a_2+a_1+a_0$$
$$=f(0)+a_m+\cdots+a_2+a_1+a_0$$

$\therefore f(n)=a_m+\cdots+a_2+a_1+a_0$

ㄱ. $f(123)=1+2+3=6$

ㄴ. $f(10^n)=f(1\cdot10^n+0)=1$이므로

$(f\circ f)(10^n)=f(f(10^n))=f(1)$

$=f(0)+1=1$

$\therefore (f\circ f)(10^n)=f(10^n)$

ㄷ. $f(n)=a_m+\cdots+a_2+a_1+a_0$을 9의 배수라 가정하면

$n=a_m\cdot10^m+a_{m-1}\cdot10^{m-1}+\cdots+a_1\cdot10+a_0$

$=a_m\cdot(10^m-1)+a_{m-1}\cdot(10^{m-1}-1)$

$+\cdots+a_1\cdot(10-1)+(a_m+\cdots+a_2+a_1+a_0)$

이때 10^a-1 (a는 자연수)과 $a_m+\cdots+a_2+a_1+a_0$은 각각 9의 배수이므로 n은 9의 배수이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

$f(a_m)=f(10\cdot0+a_m)$

04 ㄱ. [반례] $x=4$, $y=5$일 때, $f(4)=3$, $f(5)=2$이므로 $x<y$이지만 $f(x)>f(y)$이다.

1, 2, 4의 3개

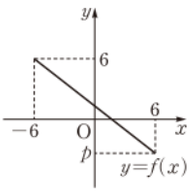
1, 5의 2개

ㄴ. x가 소수이면 $f(x)=2$이고 $f(2)=2$이므로
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2)=2=f(x)$
ㄷ. $x=a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}$($a_1$, a_2, $\cdots$, a_n은 2가 아닌 서로 다른 소수이고 p_1, p_2, $\cdots$, p_n은 자연수)으로 놓으면
$k=f(x)=(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_n+1)$
$2x=2a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}$이므로
$f(2x)=(1+1)(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_n+1)$
$=2k$
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

05 함수 $y=f(x)$의 그래프에서
$f(-1)=0$, $f(0)=2$, $f(1)=-1$, $f(2)=-1$
이므로
$f(1)=-1$
$f^2(1)=f(f(1))=f(-1)=0$
$f^3(1)=f(f^2(1))=f(0)=2$
$f^4(1)=f(f^3(1))=f(2)=-1$
$f^5(1)=f(f^4(1))=f(-1)=0$
$\vdots$
즉 $f^n(1)$은 -1, 0, 2가 이 순서대로 반복된다.
$\therefore f(1)+f^2(1)+f^3(1)+\cdots+f^{10}(1)$
$=(-1+0+2)+(-1+0+2)+(-1+0+2)-1$
$=2$ 답 ③

06 $g(x)=6$에서 $(f\circ f)(x+2)=6$이므로
$f(f(x+2))=6$
$x+2=t$로 놓으면 $f(f(t))=6$
$\therefore f(t)=3$ 또는 $f(t)=7$ 또는 $f(t)=9$
그런데 $f(t)\le 7$이므로
$f(t)=3$ 또는 $f(t)=7$
(i) $f(t)=3$일 때,
$t=2$ 또는 $t=4$ 또는 $t=6$ 또는 $t=10$이므로
$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=8$
(ii) $f(t)=7$일 때,
$t=8$이므로 $x=6$
(i), (ii)에서 실수 x는 0, 2, 4, 6, 8의 5개이다. 답 ③

07 함수 $y=a(x+6)+6$의 그래프는 a의 값에 관계없이 점 $(-6, 6)$을 지난다. 또 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하면 함수 $f(x)$는 일대일대응이므로 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(6, p)$를 지난다.



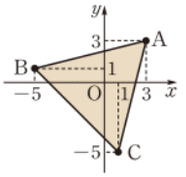
따라서 $y=f(x)$의 그래프의 기울기 a는
$a=\frac{p-6}{6-(-6)}=\frac{p-6}{12}$ ← 두 점 $(-6, 6)$, $(6, p)$를 지나는 직선의 기울기
$\therefore f(x)=\frac{p-6}{12}(x+6)+6$
$=\frac{p-6}{12}x+\frac{p+6}{2}$

일품 BOX

$f(0)>0$에서 $\frac{p+6}{2}>0$
$\therefore p>-6$
따라서 $f(0)>0$을 만족시키는 정수 p의 최솟값은 -5이다. 답 ③

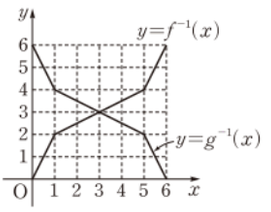
08 $g=[2, 3, 4, 1]$, $h=[3, 4, 1, 2]$에서
$g(1)=2$, $g(2)=3$, $g(3)=4$, $g(4)=1$
$h(1)=3$, $h(2)=4$, $h(3)=1$, $h(4)=2$
이므로
$(h\circ g)(1)=h(g(1))=h(2)=4$
$(h\circ g)(2)=h(g(2))=h(3)=1$
$(h\circ g)(3)=h(g(3))=h(4)=2$
$(h\circ g)(4)=h(g(4))=h(1)=3$
따라서 역함수의 정의에 의하여
$(h\circ g)^{-1}(1)=2$, $(h\circ g)^{-1}(2)=3$,
$(h\circ g)^{-1}(3)=4$, $(h\circ g)^{-1}(4)=1$
$\therefore (h\circ g)^{-1}=[2, 3, 4, 1]$ 답 ②

09 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 A는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
즉 $x^2-6=x$에서 $x^2-x-6=0$
$(x+2)(x-3)=0$
$\therefore x=3$ ($\because x\ge 0$)
따라서 점 A의 좌표는 $(3, 3)$이다.
$y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점 B$(-5, 1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선과 $y=f(x)$의 그래프의 교점 C는 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 C$(1, -5)$이다.
직선 BC의 방정식은
$y-1=-(x+5)$
$\therefore x+y+4=0$



점 A$(3, 3)$과 직선 BC 사이의 거리는
$\frac{|3+3+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}$
이고, $\overline{BC}=\sqrt{6^2+(-6)^2}=6\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}=30$ 답 ⑤

10 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 두 함수 $y=g(x)$, $y=g^{-1}(x)$의 그래프도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f^{-1}(x)$, $y=g^{-1}(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.



이때 $1\le a\le 6$이므로 자연수 a의 값에 따른 b의 값은 다음과 같다.

(i) $a=1$일 때,
$g(f^{-1}(1))=g(2)=5$이므로 $g^{-1}(b)=5$
$\therefore b=\frac{1}{2}$

(ii) $a=2$일 때,
$g(f^{-1}(2))=g\left(\frac{5}{2}\right)=4$이므로 $g^{-1}(b)=4$
$\therefore b=1$

(iii) $a=3$일 때,
$g(f^{-1}(3))=g(3)=3$이므로 $g^{-1}(b)=3$
$\therefore b=3$

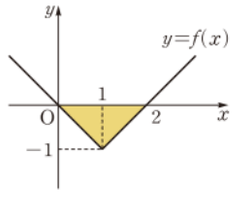
(iv) $a=4$일 때,
$g(f^{-1}(4))=g\left(\frac{7}{2}\right)=2$이므로 $g^{-1}(b)=2$
$\therefore b=5$

(v) $a=5$일 때,
$g(f^{-1}(5))=g(4)=1$이므로 $g^{-1}(b)=1$
$\therefore b=\frac{11}{2}$

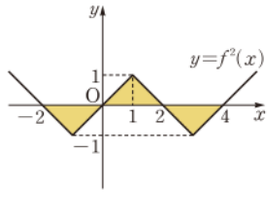
(vi) $a=6$일 때,
$g(f^{-1}(6))=g(6)=0$이므로 $g^{-1}(b)=0$
$\therefore b=6$

이상에서 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍은
$(2, 1), (3, 3), (4, 5), (6, 6)$
이므로 $a+b$의 최댓값은 $6+6=12$, 최솟값은 $2+1=3$이고, 그 합은 15이다. 답 ⑤

11 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.
$y=(f\circ f)(x)=|f(x)-1|-1$의 그래프는 [그림 1]의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 다음 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 후 다시 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프이다.
따라서 $y=f^2(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.

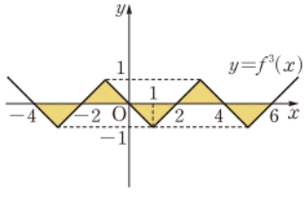


[그림 1]



[그림 2]

같은 방법으로 $y=f^3(x)$의 그래프는 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

즉 $y=f^1(x)$, $y=f^2(x)$, $y=f^3(x)$, …, $y=f^n(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 차례대로
$1, 3\cdot 1, 5\cdot 1, \cdots, (2n-1)\cdot 1$

$y=f(x)$
↓ y축의 방향으로 -1만큼 평행이동
$y=f(x)-1$
↓ x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동
$y=|f(x)-1|$
↓ y축의 방향으로 -1만큼 평행이동
$y=|f(x)-1|-1$

[그림 1], [그림 2], [그림 3]에서 색칠한 삼각형 한 개의 넓이는 모두 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$로 같다.

이므로 $a=2$, $b=-1$
$\therefore a^2+b^2=5$ 답 5

12 ㄱ. 조건 (가)에서 $x=-2$를 대입하면
$f(1)=f(3-2)=f(5+2)=f(7)$
ㄴ. 조건 (가)에서 $x=0$을 대입하면
$f(3)=f(5)$
조건 (나)에서 $x_1=3$, $x_2=5$를 대입하면
$f(4)=f\left(\frac{3+5}{2}\right)\ge\frac{f(3)+f(5)}{2}$
$=\frac{f(5)+f(5)}{2}$
$=f(5)$
$\therefore f(4)\ge f(5)$
ㄷ. 조건 (나)에서 $x_1=4$, $x_2=6$을 대입하면
$f(5)=f\left(\frac{4+6}{2}\right)\ge\frac{f(4)+f(6)}{2}$ …… ㉠
$x_1=5$, $x_2=7$을 대입하면
$f(6)=f\left(\frac{5+7}{2}\right)\ge\frac{f(5)+f(7)}{2}$ …… ㉡
$x_1=6$, $x_2=8$을 대입하면
$f(7)=f\left(\frac{6+8}{2}\right)\ge\frac{f(6)+f(8)}{2}$ …… ㉢
㉠+㉡+㉢을 하면
$f(5)+f(6)+f(7)$
$\ge\frac{f(4)}{2}+\frac{f(5)}{2}+f(6)+\frac{f(7)}{2}+\frac{f(8)}{2}$
$2f(5)+2f(7)\ge f(4)+f(5)+f(7)+f(8)$
$\therefore f(5)+f(7)\ge f(4)+f(8)$
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

1등급 비밀노트
임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여
① $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록
② $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록

16 유리함수

개념&핵심 기출

본책 48~50쪽

01 $x\triangle x^2=\dfrac{x}{x+x^2}=\dfrac{x}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}$

$(x^2-x)\triangle(x-1)=\dfrac{x^2-x}{x^2-x+x-1}$

$=\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x}{x+1}$

$\therefore (x\triangle x^2)+\{(x^2-x)\triangle(x-1)\}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{x+1}$

$=\dfrac{x+1}{x+1}=1$ 답 ②

02 $\dfrac{x}{x^2+x-2}+\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$

$=\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}+\dfrac{x-1}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{x(x+1)+(x-1)^2}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{2x^2-x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

따라서

$\dfrac{2x^2-x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

가 x에 대한 항등식이므로

$a=2,\ b=-1,\ c=1$

$\therefore a+b-c=0$ 답 0

분자의 동류항의 계수를 비교한다.

03 $\dfrac{(a-2)^2}{a-b}+\dfrac{(b-2)^2}{b-a}$

$=\dfrac{(a-2)^2-(b-2)^2}{a-b}$

$=\dfrac{\{(a-2)+(b-2)\}\{(a-2)-(b-2)\}}{a-b}$

$=\dfrac{(a+b-4)(a-b)}{a-b}$

$=a+b-4\ (\because a-b\neq0)$

$=2$

$\therefore a+b=6$ 답 6

04 주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\dfrac{2}{2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$+\dfrac{3}{3}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+7}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$+\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+7}\right)$

$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+7}$

$=\dfrac{6}{(x+1)(x+7)}$

$\therefore a=6$ 답 6

05 $\dfrac{10}{7}=\dfrac{7+3}{7}=1+\dfrac{3}{7}$

$=1+\dfrac{1}{\frac{7}{3}}=1+\dfrac{1}{6+1}{3}$

$=1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{3}}$

따라서 $a=1,\ b=2,\ c=3$이므로

$a+b+c=6$ 답 ④

06 주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$\dfrac{x}{1+\frac{3}{x+1}}=\dfrac{x}{\frac{x+4}{x+1}}=\dfrac{x^2+x}{x+4}$

$=\dfrac{(x+4)(x-3)+12}{x+4}$

$=x-3+\dfrac{12}{x+4}$

$x+4)\overline{x^2+x}\ (x-3$

x^2+4x

$-3x$

$-3x-12$

12

$\therefore x^2+x=(x+4)(x-3)+12$

따라서

$x-3+\dfrac{12}{x+4}=x+a+\dfrac{b}{x+4}$

가 x에 대한 항등식이므로

$a=-3,\ b=12$

$\therefore b-2a=18$ 답 18

07 $(3x+5y):(2x+3y)=4:3$에서

$3(3x+5y)=4(2x+3y)$

$9x+15y=8x+12y$

$\therefore x=-3y$

$\therefore \dfrac{3x+10y}{x+2y}=\dfrac{-9y+10y}{-3y+2y}=\dfrac{y}{-y}=-1$ 답 ②

08 $\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{x+y}{3}=k\ (k\neq0)$라 하면

$x-y=2k,\ x+y=3k$ …… ㉠

㉠의 두 식을 변끼리 더하면

$2x=5k \quad \therefore x=\dfrac{5}{2}k$

㉠의 두 식을 변끼리 빼면

$-2y=-k \quad \therefore y=\dfrac{1}{2}k$

$\therefore \dfrac{x^2-5y^2}{xy}=\dfrac{\left(\frac{5}{2}k\right)^2-5\left(\frac{1}{2}k\right)^2}{\frac{5}{2}k\cdot\frac{1}{2}k}$

$=\dfrac{\frac{25}{4}k^2-\frac{5}{4}k^2}{\frac{5}{4}k^2}$

$=\dfrac{\frac{20}{4}k^2}{\frac{5}{4}k^2}=4$ 답 4

다른 풀이 $\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{x+y}{3}$의 양변에 6을 곱하면

$3(x-y)=2(x+y) \quad \therefore x=5y$

$\therefore \dfrac{x^2-5y^2}{xy}=\dfrac{20y^2}{5y^2}=4$

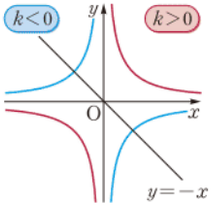
09 $x:y=(x+y):xy$에서 $\quad y(x+y)=x^2y$

$\therefore\ x+y=x^2\ (\because\ y\neq0)$

$\therefore\ \dfrac{2x^2}{x+y}=\dfrac{2x^2}{x^2}=2$ 답 2

10 ㄱ. $k>0$이면 x의 값이 커질 때 y의 값은 작아지지만 $k<0$이면 x의 값이 커질 때 y의 값도 커진다.

ㄴ. 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다.

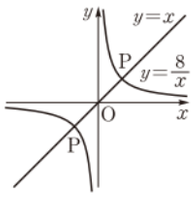


ㄷ. $|k|$의 값이 커질수록 그래프는 원점으로부터 멀어진다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

11 원점을 O라 하면 점 O는 함수 $y=\dfrac{8}{x}$의 그래프의 두 점근선의 교점이므로 $\overline{OP}$의 길이가 최소일 때의 점 P는 오른쪽 그림과 같다.



$\dfrac{8}{x}=x$에서 $\quad x^2=8$

$\therefore\ x=\pm2\sqrt{2}$

따라서 점 P의 좌표는

$(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ 또는 $(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$

이므로 $\overline{OP}$의 길이의 최솟값은

$\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4$ 답 4

원점과 점 $(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리 ➡ $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

다른 풀이 원점을 O라 하고, 점 P의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{8}{a}\right)$이라 하면

$\overline{OP}=\sqrt{a^2+\dfrac{64}{a^2}}$

$a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+\dfrac{64}{a^2}\geq2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{64}{a^2}}=16$

$\left(\text{단, 등호는 } a^2=\dfrac{64}{a^2}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore\ \overline{OP}\geq\sqrt{16}=4$

12 $(f_1\circ f_2)(x)=f_1(f_2(x))$

$=f_1\left(\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{1}{\frac{2}{x}}=\dfrac{x}{2}$

$(f_1\circ f_2\circ f_3)(x)=((f_1\circ f_2)\circ f_3)(x)$

$=(f_1\circ f_2)\left(\dfrac{3}{x}\right)=\dfrac{\frac{3}{x}}{2}=\dfrac{3}{2x}$

따라서 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{3}{2x}$에서 $\quad x^2=3 \quad \therefore\ x=\pm\sqrt{3}$

즉 두 함수 $y=\dfrac{x}{2}$, $y=\dfrac{3}{2x}$의 그래프의 교점의 좌표는

$\left(-\sqrt{3},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

이므로 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{15}$ 답 $\sqrt{15}$

13 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=2$이므로

$y=\dfrac{a}{x+1}+2$

또 주어진 그래프가 원점을 지나므로

$0=a+2 \quad \therefore\ a=-2$

따라서 주어진 함수는 $y=-\dfrac{2}{x+1}+2$이므로

$a=-2$, $b=1$, $c=2$

$\therefore\ a+b+c=1$ 답 ④

14 $y=\dfrac{-2x+k}{x+1}=\dfrac{-2(x+1)+k+2}{x+1}=\dfrac{k+2}{x+1}-2$이므로 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{k+2}{x-2+1}-1-2$

$=\dfrac{k+2}{x-1}-3$

이때 $g(x)=\dfrac{k+2}{x-1}-3$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=-3$

따라서 두 점근선의 교점의 좌표는 $(1,\ -3)$이고, 이 점이 $y=f(x)$의 그래프 위에 있으므로

$f(1)=-3$

$-3=\dfrac{-2+k}{1+1}$, $\quad -6=-2+k$

$\therefore\ k=-4$ 답 -4

15 $y=\dfrac{bx+1}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-ab+1}{x+a}$

$=\dfrac{-ab+1}{x+a}+b$

이므로 점근선의 방정식은 $\quad x=-a$, $y=b$

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ -2)$에 대하여 대칭이므로

$a=-1$, $b=-2$

점 $(1,\ -2)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=-2$

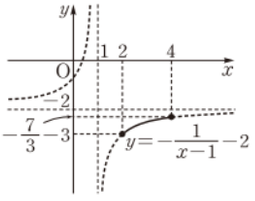
즉 $-a=1$, $b=-2$이므로 $a=-1$, $b=-2$

따라서 $2\leq x\leq4$에서

$y=\dfrac{-2x+1}{x-1}$

$=-\dfrac{1}{x-1}-2$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=4$일 때 최댓값 $-\dfrac{7}{3}$,

$x=2$일 때 최솟값 -3

을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$-\dfrac{7}{3}\cdot(-3)=7$ 답 7

ⓒ좋은책신사고

16 $(f^{-1})^{-1}=f$이므로 $y=\dfrac{3x-2}{2x-3}$에서

$y(2x-3)=3x-2$, $(2y-3)x=3y-2$

$\therefore x=\dfrac{3y-2}{2y-3}$

이때 x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{3x-2}{2x-3}$ $\therefore f(x)=\dfrac{3x-2}{2x-3}$

따라서 $a=2$, $b=-3$, $c=-2$이므로

$a+b+c=-3$ 답 -3

참고 $f(x)=\dfrac{3x-2}{2x-3}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-2}{2x-3}$에서 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

17 $g(2)=1$이므로 $f(1)=2$

$\dfrac{1+a}{b+3}=2$ $\therefore a-2b=5$ …… ㉠

$(f\circ f)(1)=3$에서 $f(f(1))=f(2)=3$

$\dfrac{2+a}{2b+3}=3$ $\therefore a-6b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\dfrac{x+4}{-\frac{1}{2}x+3}=\dfrac{2x+8}{-x+6}$

$\therefore f(4)=\dfrac{16}{2}=8$ 답 8

18 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(3,\ b)$에 대하여 대칭이다.

이때

$f(x)=\dfrac{2x+5}{x-a}=\dfrac{2(x-a)+2a+5}{x-a}$

$=\dfrac{2a+5}{x-a}+2$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(a,\ 2)$에 대하여 대칭이므로

$a=3$, $b=2$

$\therefore ab=6$ 답 ③

1등급 비밀노트

함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$에 대하여 대칭이고 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $\left(\dfrac{a}{c},\ -\dfrac{d}{c}\right)$에 대하여 대칭이다.

1등급을 위한 고난도 문제

본책 51~53쪽

01 $x^5+\dfrac{1}{x^5}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ …➊

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=7$이므로

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=9$

이때 $x>0$이므로 $x+\dfrac{1}{x}=3$ …➋

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\cdot3=18$ …➌

$\therefore x^5+\dfrac{1}{x^5}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=7\cdot18-3=123$ …➍

답 123

채점 기준	비율
➊ $x^5+\dfrac{1}{x^5}$을 변형할 수 있다.	20 %
➋ $x+\dfrac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
➍ $x^5+\dfrac{1}{x^5}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

02 $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}$

$=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

$=\dfrac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{abc}$

$=\dfrac{2^2-2\cdot(-1)}{abc}=-3$

이므로 $abc=-2$ …➊

$\therefore \dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}$

$=\dfrac{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}{abc}$

$=\dfrac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{abc}$

$=\dfrac{(-1)^2-2\cdot(-2)\cdot2}{-2}=-\dfrac{9}{2}$ …➋

답 $-\dfrac{9}{2}$

채점 기준	비율
➊ abc의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋ $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

03 $\dfrac{4m^2+12m}{m^3-9m}=\dfrac{4m(m+3)}{m(m+3)(m-3)}=\dfrac{4}{m-3}$

$m-3=-4$, -2, -1, 1, 2, 4이므로

$m=-1$, 1, 2, 4, 5, 7

따라서 모든 m의 값의 합은

$-1+1+2+4+5+7=18$ 답 ⑤

04 $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{x+5}{x+4}$

$=\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)-\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$+\left(1+\dfrac{1}{x+3}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+4}\right)$

일품 BOX

곱셈 공식의 변형
① $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
② $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$\dfrac{1+a}{b+3}=2$에서 $2(b+3)=1+a$, $\therefore a-2b=5$

$\dfrac{2+a}{2b+3}=3$에서 $3(2b+3)=2+a$, $\therefore a-6b=7$

점 $(b,\ 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(3,\ b)$이다.

$\dfrac{4}{m-3}$의 값이 정수이려면 $m-3$은 4의 약수이어야 한다.

분자의 차수가 분모의 차수보다 낮아지도록 식을 변형한다.

$$=\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$=-\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}$$
$$=\frac{-(x^2+7x+12)+x^2+3x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$
$$=\frac{-4x-10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

따라서 등식

$$\frac{-4x-10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=\frac{ax+b}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

가 x에 대한 항등식이므로

$a=-4,\ b=-10$

답 $a=-4,\ b=-10$

다른 풀이 주어진 등식에 $x=0$을 대입하면

$$-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}=\frac{b}{24}$$
$$\therefore b=-12+32-30=-10$$

주어진 등식에 $x=-5$를 대입하면

$$\frac{-5}{-4}-\frac{-4}{-3}+\frac{-1}{-2}=\frac{-5a-10}{-4\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)}$$
$$30-32+12=-5a-10,\qquad 5a=-20$$
$$\therefore a=-4$$

05 $n^2+3n+2-(2n^2+2)=3n-n^2=n(3-n)$

$n<3$이면 $n^2+3n+2>2n^2+2$이므로

$f(n)=2n^2+2$

$n\geq 3$이면 $n^2+3n+2\leq 2n^2+2$이므로

$f(n)=n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$

$$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(4)}+\cdots+\frac{1}{f(10)}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{11\cdot 12}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$$
$$=\frac{31}{60}$$

따라서 $p=60,\ q=31$이므로

$p+q=91$ 답 91

06 A, B, C로 시간당 채울 수 있는 물의 양을 각각 a, b, c라 하고, 수영장을 가득 채우는 데 필요한 물의 양을 W라 하면

$$\frac{W}{a}=\frac{W}{b}\cdot m \qquad \therefore m=\frac{b}{a}$$
$$\frac{W}{b}=\frac{W}{c}\cdot n \qquad \therefore n=\frac{c}{b}$$
$$\frac{W}{c}=\frac{W}{a+b}\cdot x$$

$$\therefore x=\frac{a+b}{c}=\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{c}{b}}=\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{c}{b}}$$
$$=\frac{\frac{1}{m}+1}{n}=\frac{m+1}{mn}$$

답 ④

07 $x+y+z=3x+2y-z$에서

$2x+y-2z=0$ …… ㉠

$3x+2y-z=x-y+2z$에서

$2x+3y-3z=0$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $-2y+z=0$ $\therefore z=2y$

㉠에 $z=2y$를 대입하여 정리하면 $x=\frac{3}{2}y$

$$\therefore \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{z}}=\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{\frac{3}{2}y}-\frac{1}{2y}}=\frac{1}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6$$

답 ⑤

08 (i) $x+y+2z\neq 0$일 때,

가비의 리에 의하여

$$\frac{x+y}{2z}=\frac{y+2z}{x}=\frac{2z+x}{y}$$
$$=\frac{(x+y)+(y+2z)+(2z+x)}{x+y+2z}$$
$$=\frac{2(x+y+2z)}{x+y+2z}=2$$

이므로

$x+y=4z$ …… ㉠

$y+2z=2x$ …… ㉡

$2z+x=2y$

㉠−㉡을 하면

$x-2z=4z-2x$ $\therefore x=2z$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$y+2z=4z$ $\therefore y=2z$

$$\therefore \frac{x^3+y^3+8z^3}{xyz}=\frac{24z^3}{4z^3}=6$$ ⋯ ❶

(ii) $x+y+2z=0$일 때,

$x+y=-2z$이므로

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$=-8z^3+6xyz$$
$$\therefore \frac{x^3+y^3+8z^3}{xyz}=\frac{6xyz}{xyz}=6$$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 구하는 식의 값은 6이다. ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $x+y+2z\neq 0$일 때 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $x+y+2z=0$일 때 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 가비의 리는 분모의 합이 0이 아닌 경우에 성립하므로 가비의 리를 이용하여 식의 값을 구할 때, 분모의 합이 0인 경우는 따로 생각한다.

일품 BOX

세 다항식 A, B, C에 대하여 $A=B=C$이면 ➡ $A=B$이고 $B=C$이고 $C=A$

가비의 리

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$
$=\frac{a+c+e}{b+d+f}$
$=\frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}$
(단, $b+d+f\neq 0$, $pb+qd+rf\neq 0$)

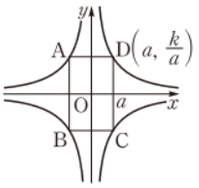
n^2+3n+2와 $2n^2+2$ 중 작거나 같은 값이 집합 $A_n\cap B_n$의 원소의 최댓값이다.

부분분수로의 변형

$\frac{1}{AB}$
$=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$
(단, $A\neq B$)

VI 함수

09 $|y|=\frac{k}{|x|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점 D의 좌표를 $\left(a, \frac{k}{a}\right)$ $(a>0)$라 하면



$S(k)=4\cdot a\cdot\frac{k}{a}=4k$

$\therefore S(1)+S(2)+S(3)+S(4)$

$=4(1+2+3+4)=40$ 답 ④

10 $y=\frac{a}{x}$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 직선 l과 직선 $y=x$는 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(1, a)$, $(a, 1)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(a-1)^2+(1-a)^2}$

$=\sqrt{2}(a-1)$ $(\because a>1)$

또 직선 l의 방정식은

$y-a=-1\cdot(x-1)$, 즉 $x+y-(a+1)=0$

이므로 원점과 직선 $x+y-(a+1)=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-(a+1)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{a+1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}(a-1)\cdot\frac{a+1}{\sqrt{2}}=\frac{a^2-1}{2}$

$\frac{a^2-1}{2}=40$에서 $a^2=81$

$\therefore a=9$ $(\because a>1)$ ··· ❶

한편 점 C의 x좌표는 $\frac{9}{x}=x$에서

$x^2=9$ $\therefore x=3$

따라서 C$(3, 3)$이므로 점 C와 직선 $x+y-10=0$ 사이의 거리는

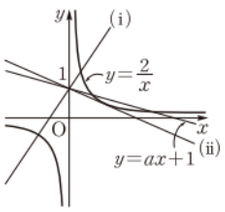
$\frac{|3+3-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$

$\therefore \triangle CAB=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}}=16$ ··· ❷

답 16

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ △CAB의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

11 직선 $y=ax+1$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지나므로 오른쪽 그림에서



$y=\frac{2}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+1$이 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 다음과 같다.

(i) $a>0$일 때, 항상 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) $a<0$일 때,

함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+1$이 서로 접하려면 방정식 $\frac{2}{x}=ax+1$, 즉 $ax^2+x-2=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=1^2-4a\cdot(-2)=0$, $8a+1=0$

$\therefore a=-\frac{1}{8}$

따라서 a의 값의 범위는 $-\frac{1}{8}<a<0$

(i), (ii)에서 $-\frac{1}{8}<a<0$ 또는 $a>0$ 답 ④

12 $\overline{AD}=a-c$, $\overline{AB}=\frac{16}{a}-\frac{16}{c}$이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(\overline{AD}+\overline{AB})=2(a-c)+2\left(\frac{16}{a}-\frac{16}{c}\right)$

$=2\left(a+\frac{16}{a}\right)+2\left(-c+\frac{16}{-c}\right)$ ····· ㉠

이때 $a>0$, $-c>0$이므로 ㉠에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2\left(a+\frac{16}{a}\right)+2\left(-c+\frac{16}{-c}\right)$

$\geq 2\cdot 2\sqrt{a\cdot\frac{16}{a}}+2\cdot 2\sqrt{-c\cdot\frac{16}{-c}}$

$=16+16=32$ (단, 등호는 $a=4$, $c=-4$일 때 성립)

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 최소일 때 A$(4, 4)$, C$(-4, -4)$이므로 구하는 넓이는

$\overline{AD}\cdot\overline{AB}=8\cdot 8=64$ 답 64

13 ㄱ. $y=\frac{2x+6}{x+2}=\frac{2(x+2)+2}{x+2}=\frac{2}{x+2}+2$

따라서 $y=\frac{2x+6}{x+2}$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{x}{x-1}=\frac{(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+1$

따라서 $y=\frac{x}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{x-4}{2-x}=\frac{-(x-2)+2}{x-2}=\frac{2}{x-2}-1$

따라서 $y=\frac{x-4}{2-x}$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동에 의하여 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

14 함수 $y=\frac{k}{x-5}+2$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=5$, $y=2$이므로 $k<0$이면 제 3사분면을 지날 수 없다.

$\therefore k>0$

일품 BOX

$y=\frac{2}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+1$의 교점의 개수

(i) $a<-\frac{1}{8}$일 때 ➡ 0

(ii) $a=-\frac{1}{8}$일 때 ➡ 1

(iii) $-\frac{1}{8}<a<0$일 때 ➡ 2

(iv) $a=0$일 때 ➡ 1

(v) $a>0$일 때 ➡ 2

점 (x, y)와 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 점의 좌표 ➡ (y, x)

직선 l의 기울기는 -1이고 직선 $y=x$의 기울기는 1이므로

$-1\cdot 1=-1$

에서 두 직선이 수직임을 알 수 있다.

$a=\frac{16}{a}$에서 $a^2=16$

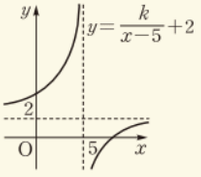
$\therefore a=4$ $(\because a>0)$

$-c=\frac{16}{-c}$에서 $c^2=16$

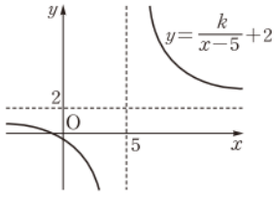
$\therefore c=-4$ $(\because c<0)$

점 C는 제1사분면 위의 점

$k<0$일 때



이때 오른쪽 그림에서 함수 $y=\frac{k}{x-5}+2$의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 함수 $y=\frac{k}{x-5}+2$의 그래프의 y절편이 음수이어야 하므로



$$\frac{k}{0-5}+2<0, \quad \frac{k}{5}>2$$

$$\therefore k>10$$

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 11이다. 답 11

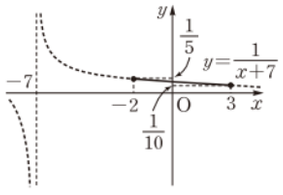
참고 함수 $y=\frac{k}{x-5}+2$의 그래프의 x절편이 음수이어야 함을 이용하여 k의 값의 범위를 구해도 된다.

15 $y=\frac{1}{x-5}-\frac{12}{x^2+2x-35}$

$$=\frac{1}{x-5}-\frac{12}{(x+7)(x-5)}$$

$$=\frac{x-5}{(x+7)(x-5)}=\frac{1}{x+7}$$

따라서 $-2\le x\le 3$에서 $y=\frac{1}{x+7}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-2$일 때 최댓값 $\frac{1}{5}$,

$x=3$일 때 최솟값 $\frac{1}{10}$

을 갖는다.

$$\therefore M=\frac{1}{5},\ m=\frac{1}{10}$$

$$\therefore M+m=\frac{3}{10}$$

답 ①

16 $y=\frac{-2x+7}{2x-1}=\frac{-(2x-1)+6}{2x-1}=\frac{6}{2x-1}-1$ ··· ❶

y의 값이 정수이려면 $2x-1$은 6의 약수이어야 하므로

$2x-1=-6,\ -3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6$

이때 x의 값도 정수이므로

$2x-1=-3,\ -1,\ 1,\ 3$

의 4개만 가능하다. ··· ❷

따라서 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 4이다. ··· ❸

$(-1,\ -3),\ (0,\ -7),\ (1,\ 5),\ (2,\ 1)$

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 식을 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$ 꼴로 변형할 수 있다.	30 %
❷ $2x-1$의 값이 될 수 있는 것을 찾을 수 있다.	40 %
❸ x좌표, y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구할 수 있다.	30 %

17 함수 $y=\frac{bx+c}{x+a}$의 그래프가 두 직선 $x=-2$, $y=4$와 만나지 않으려면 두 직선 $x=-2$, $y=4$가 주어진 함수의 그래프의 점근선이어야 한다.

이때

$$y=\frac{bx+c}{x+a}=\frac{b(x+a)+c-ab}{x+a}$$

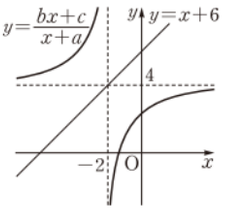
$$=\frac{c-ab}{x+a}+b$$

에서 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=b$이므로

$$a=2,\ b=4$$

$$\therefore y=\frac{bx+c}{x+a}=\frac{c-8}{x+2}+4$$

한편 직선 $y=x+6$은 점 $(-2,\ 4)$를 지나므로 오른쪽 그림에서 $y=\frac{c-8}{x+2}+4$의 그래프가 직선 $y=x+6$과 만나지 않으려면 $c-8<0$이어야 한다.



$$\therefore c<8$$

따라서 정수 c의 최댓값은 7이다. 답 7

18 두 정사각형 OBPA, OCQD의 넓이가 각각 9, 1이므로 두 정사각형의 한 변의 길이는 각각 3, 1이다.

또 두 정사각형은 원점을 한 꼭짓점으로 하고 두 변이 각각 x축, y축 위에 있으므로 두 점 P, Q는

$$\mathrm{P}(-3,\ 3),\ \mathrm{Q}(-1,\ -1)$$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 한 점근선이 직선 $x=-2$이므로

$$f(x)=\frac{a}{x+2}+b\ (a,\ b\text{는 상수})$$

로 놓으면

$$f(-3)=-a+b=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$f(-1)=a+b=-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

따라서 $f(x)=\frac{-2}{x+2}+1$이므로

$$f(4)=\frac{-2}{4+2}+1=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

19 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 즉 두 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있어야 한다.

$$f(x)=\frac{x+2}{x+a}=\frac{(x+a)+2-a}{x+a}=\frac{2-a}{x+a}+1$$

에서 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-a,\ 1)$이고, 이 점이 직선 $y=x$ 위에 있어야 하므로

$$1=-a \quad \therefore a=-1$$

답 ⑤

다른 풀이 $y=\frac{x+2}{x+a}$로 놓으면 $y(x+a)=x+2$

$$x(y-1)=-ay+2 \quad \therefore x=\frac{-ay+2}{y-1}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{-ax+2}{x-1}$

따라서 $f^{-1}(x)=\dfrac{-ax+2}{x-1}$이므로 $\dfrac{-ax+2}{x-1}=\dfrac{x+2}{x+a}$

에서 $a=-1$

1등급 비밀노트

$y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프가 일치한다는 것은 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 의미한다. 이때 $f(x)$가 유리함수이면 두 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있어야 한다.

20 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 두 직선 $y=x+2$, $y=-x+8$에 대하여 각각 대칭이므로 두 직선의 교점은 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점과 같다.

$y=x+2$, $y=-x+8$을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=5$

즉 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=5$이므로 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=5$, $y=3$ ··· ❶

$f(x)=\dfrac{ax}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab}{x+b}=\dfrac{-ab}{x+b}+a$에서 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=a$이므로

$a=3$, $b=-5$

$\therefore f(x)=\dfrac{3x}{x-5}$ ··· ❷

$f^{-1}(4)=k$라 하면 $f(k)=4$이므로

$\dfrac{3k}{k-5}=4$, $3k=4k-20$ $\therefore k=20$

$\therefore f^{-1}(4)=20$ ··· ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❷ $y=f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f^{-1}(4)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

21 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=x+1$이므로

$\dfrac{x}{x-1}=t$로 놓으면

$x=t(x-1)$, $x(1-t)=-t$

$\therefore x=\dfrac{t}{t-1}$

$x=\dfrac{t}{t-1}$를 $g\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=x+1$에 대입하면

$g(t)=\dfrac{t}{t-1}+1=\dfrac{2t-1}{t-1}$

$\therefore g(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

$g^{-1}(3)=a$라 하면 $g(a)=3$이므로

$\dfrac{2a-1}{a-1}=3$, $2a-1=3a-3$ $\therefore a=2$

$\therefore g^{-1}(3)=2$

답 ⑤

일품 BOX

점근선의 방정식은 $x=1$, $y=b+1$

다른 풀이 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=x+1$에서

$g^{-1}(x+1)=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

$x+1=3$이면 $x=2$이므로 $g^{-1}(3)=\dfrac{2}{2-1}=2$

22 $f(x)=\dfrac{x-a}{x+2}=\dfrac{(x+2)-a-2}{x+2}=\dfrac{-a-2}{x+2}+1$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=1$

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=-2$이고, 조건 (가)에서

$f^{-1}(x)=f(x-3)+b=\dfrac{x-3-a}{x-3+2}+b$

$=\dfrac{(x-1)-a-2}{x-1}+b$

$=\dfrac{-a-2}{x-1}+b+1$

이므로 $b+1=-2$ $\therefore b=-3$

또 조건 (나)에서

$y=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\dfrac{x-a}{x+2}\right)$

$=\dfrac{\dfrac{x-a}{x+2}-a}{\dfrac{x-a}{x+2}+2}=\dfrac{\dfrac{x-a-ax-2a}{x+2}}{\dfrac{x-a+2x+4}{x+2}}$

$=\dfrac{(1-a)x-3a}{3x-a+4}$

의 그래프의 한 점근선의 방정식이 $x=-1$이므로

$\dfrac{a-4}{3}=-1$, $a-4=-3$ $\therefore a=1$

$\therefore a-b=4$

답 ②

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 54쪽

01 A, B 두 지역의 15세 이상 인구수의 비가 2 : 5이므로 두 지역의 15세 이상 인구수를 각각 $2p$, $5p$ $(p>0)$라 하고, 두 지역의 실업자 수의 비가 1 : 2이므로 두 지역의 실업자 수를 각각 q, $2q$ $(q>0)$라 하자.

또 두 지역의 취업자 수를 각각 x, y라 하자.

A지역의 실업률은 $\dfrac{q}{x+q}\times 100\,(\%)$

B지역의 실업률은 $\dfrac{2q}{y+2q}\times 100\,(\%)$

이때 두 지역의 실업률이 같으므로

$\dfrac{q}{x+q}\times 100=\dfrac{2q}{y+2q}\times 100$

$q(y+2q)=2q(x+q)$, $qy+2q^2=2qx+2q^2$

$\therefore y=2x$

따라서 A지역의 고용률은 $\dfrac{x}{2p}\times 100\,(\%)$

B지역의 고용률은 $\dfrac{2x}{5p}\times 100\,(\%)$

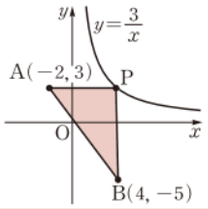
이므로 두 지역의 고용률의 비는

$\left(\dfrac{x}{2p}\times 100\right):\left(\dfrac{2x}{5p}\times 100\right)=\dfrac{1}{2}:\dfrac{2}{5}=5:4$

따라서 $m=5$, $n=4$이므로 $m+5n=25$

답 25

02 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은



$$y-3=\frac{-5-3}{4+2}(x+2)$$

$$\therefore\ 4x+3y-1=0$$

점 P의 좌표를 $\left(t,\ \frac{3}{t}\right)$ $(t>0)$이라 하면 점 P와 직선 $4x+3y-1=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{\left|4t+\frac{9}{t}-1\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{\left|4t+\frac{9}{t}-1\right|}{5}$$

$\triangle PAB$의 밑변을 $\overline{AB}$라 하면 $\triangle PAB$의 넓이는 높이 d가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4t+\frac{9}{t}\ge 2\sqrt{4t\cdot\frac{9}{t}}=12$$

$\left(\text{등호는 } 4t=\frac{9}{t},\ \text{즉 } t=\frac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$

이므로 d의 최솟값은 $\frac{|12-1|}{5}=\frac{11}{5}$

따라서 $\triangle PAB$의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\frac{11}{5}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{11}{5}=11$$

답 11

$y-3=-\frac{4}{3}(x+2)$
$-3y+9=4x+8$
$\therefore\ 4x+3y-1=0$

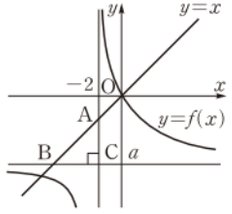
$a>0$, $b>0$일 때,
$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\overline{AB}$
$=\sqrt{(4+2)^2+(-5-3)^2}$
$=\sqrt{100}=10$

03 $f(x)=\frac{ax}{x+2}=\frac{a(x+2)-2a}{x+2}=\frac{-2a}{x+2}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=a$

이때 $a<0$이므로 두 점근선과 직선 $y=x$가 만나는 세 점을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $A(-2,\ -2)$, $B(a,\ a)$, $C(-2,\ a)$에서

$\overline{AC}=\overline{BC}=-2-a$이므로

$$\frac{1}{2}(-2-a)^2=8,\qquad (2+a)^2=16$$

$$2+a=\pm 4$$

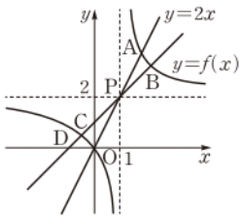
$$\therefore\ a=-6\ (\because\ a<0)$$

따라서 $f(x)=\frac{-6x}{x+2}$이므로

$$f(-1)=\frac{-6\cdot(-1)}{-1+2}=6$$

답 ③

04 점 $P(1,\ 2)$에 대하여 대칭인 유리함수 $y=f(x)$의 그래프와 점 P를 지나고 기울기가 2인 직선이 만나므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



점 P(1, 2)를 지나고 기울기가 m $(0<m<2)$인 직선의 방정식은

$$y-2=m(x-1),\ \text{즉 } y=mx-m+2$$

따라서 $D\left(\frac{m-2}{m},\ 0\right)$이므로 $\triangle OPD$의 넓이는

$\frac{x}{x+1}$
$\frac{x+x+1}{x+1}$
$=\frac{x(x+1)}{(2x+1)(x+1)}$

$\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x+2x+1}{2x+1}}$
$=\frac{x(2x+1)}{(3x+1)(2x+1)}$

$\frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x+3x+1}{3x+1}}$
$=\frac{x(3x+1)}{(4x+1)(3x+1)}$

$\frac{12-3a}{a+2}$
$=\frac{-3(a+2)+18}{a+2}$
$=\frac{18}{a+2}-3$

$$\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{m-2}{m}\right|\cdot 2=\frac{2-m}{m}$$

이때 $\triangle OPC\equiv\triangle APB$ (SAS 합동)이므로 $\triangle OPC$의 넓이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이고

$$\triangle OPD=\triangle OPC+\triangle OCD$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{2}=1$$

따라서 $\frac{2-m}{m}=1$이므로

$$2-m=m\qquad\therefore\ m=1$$

$$\therefore\ 10m=10$$

답 10

05 $f(x)=\frac{x}{x+1}$이므로

$$f^2(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}=\frac{x}{3x+1}$$

$$f^4(x)=f(f^3(x))=\frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1}+1}=\frac{x}{4x+1}$$

$$\vdots$$

$$\therefore\ f^n(x)=\frac{x}{nx+1}$$

$f^k(a)=\frac{2}{333}$에서 $\frac{a}{ka+1}=\frac{2}{333}$

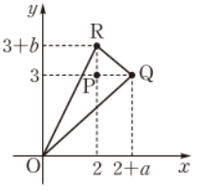
$$\frac{ka+1}{a}=\frac{333}{2},\qquad k+\frac{1}{a}=166+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a=2,\ k=166$$

$$\therefore\ a+k=168$$

답 168

06 $Q(2+a,\ 3)$, $R(2,\ 3+b)$이므로 $\triangle OQR$의 넓이를 S라 하면



$$S=(2+a)(3+b)$$
$$-\frac{1}{2}\{2(3+b)$$
$$+3(2+a)+ab\}$$
$$=\frac{3}{2}a+b+\frac{1}{2}ab=6$$

$$3a+2b+ab=12,\qquad (a+2)b=12-3a$$

$$\therefore\ b=\frac{12-3a}{a+2}=\frac{18}{a+2}-3$$

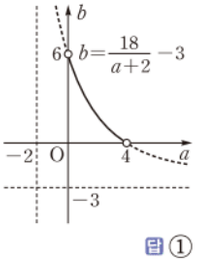
이때 $a>0$, $b>0$이므로

$$\frac{18}{a+2}-3>0$$

$$\therefore\ 0<a<4$$

따라서 구하는 자취의 방정식은

$$y=\frac{18}{x+2}-3\ (0<x<4)$$



답 ①

17 무리함수

개념&핵심 기출

본책 56~58쪽

01 $-3\le x\le 1$에서 $1-x\ge 0$, $x+3\ge 0$이므로

$\sqrt{(1-x)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=|1-x|-|x+3|$

$=(1-x)-(x+3)$

$=-2x-2$ 답 ②

일품 BOX

$|a|=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

02 $\sqrt{ab}\sqrt{b-a}=-\sqrt{ab(b-a)}$에서

$ab<0$, $b-a<0$

$\therefore a>0$, $b<0$

따라서 $a-b>0$이므로

$\dfrac{\sqrt{(a-b)^2}}{|a|-|b|}=\dfrac{|a-b|}{a-(-b)}=\dfrac{a-b}{a+b}$ 답 ③

일품 BOX

$A<0$, $B<0$일 때, $\sqrt{A}\sqrt{B}=-\sqrt{AB}$

03 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}}=-\sqrt{\dfrac{x}{x-4}}$에서

$x\ge 0$, $x-4<0$

$\therefore 0\le x<4$

$\therefore |x|+\sqrt{x^2-8x+16}=|x|+\sqrt{(x-4)^2}$

$=|x|+|x-4|$

$=x-(x-4)$

$=4$ 답 4

일품 BOX

$a>0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$x=0$일 때, (좌변)=(우변)=0이므로 등식이 성립한다.

04 $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}$

$=\dfrac{1}{1+2(\sqrt{2}+1)}$

$=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}$

$=3-2\sqrt{2}$ 답 ②

05 $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{(x+1)-2\sqrt{x^2-1}+(x-1)}{(x+1)-(x-1)}$

$=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}$

$=x-\sqrt{x^2-1}$

$=\sqrt{10}-\sqrt{10-1}$

$=\sqrt{10}-3$ 답 ③

06 $\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x+1}}$

$=\dfrac{(1-\sqrt{x+1})+(1+\sqrt{x+1})}{(1+\sqrt{x+1})(1-\sqrt{x+1})}$

$=\dfrac{2}{1-(x+1)}=-\dfrac{2}{x}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$=2\sqrt{2}+2$ 답 $2\sqrt{2}+2$

07 $(5-3\sqrt{8})(a+3\sqrt{2})=(5-6\sqrt{2})(a+3\sqrt{2})$

$=5a+15\sqrt{2}-6a\sqrt{2}-36$

$=5a-36+(15-6a)\sqrt{2}$

이때 위의 식의 값이 유리수가 되어야 하고, a는 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$15-6a=0 \quad \therefore a=\dfrac{5}{2}$

무리수 부분은 0이 되어야 한다.

$\therefore (2\sqrt{a}-\sqrt{3})(2\sqrt{a}+\sqrt{3})=4a-3$

$=4\cdot\dfrac{5}{2}-3$

$=7$ 답 7

08 $2+\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=2+\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=2+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}+1$

이므로 주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$(\text{좌변})=\dfrac{a}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}}}}$

$=\dfrac{a}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}}}$

$=\dfrac{a}{2+\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}+1}$

$=\dfrac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$

$\dfrac{a}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{a(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$

즉 $-\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\sqrt{3}=b+3\sqrt{3}$이고 a, b는 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$-\dfrac{a}{2}=b$, $\dfrac{a}{2}=3 \quad \therefore a=6$, $b=-3$

$\therefore a+b=3$ 답 ⑤

09 $(\text{좌변})=a\sqrt{2}+a\sqrt{3}+ab\sqrt{6}+6+3\sqrt{6}+6b\sqrt{3}$

$=6+a\sqrt{2}+(a+6b)\sqrt{3}+(ab+3)\sqrt{6}$

이므로

$6+a\sqrt{2}+(a+6b)\sqrt{3}+(ab+3)\sqrt{6}$

$=c+\sqrt{2}-17\sqrt{3}$

a, b, c는 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$c=6$, $a=1$, $a+6b=-17$, $ab+3=0$

$\therefore a=1$, $b=-3$, $c=6$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1^2+(-3)^2+6^2=46$ 답 ④

일품 BOX

10 ㄱ. $b>0$이면 a의 값의 부호에 관계없이 정의역은 $\{x|x\geq 0\}$이다.

ㄴ. $a>0$이면 b의 값의 부호에 관계없이 치역은 $\{y|y\geq 0\}$이다.

ㄷ. $a>0$, $b<0$이면 정의역은 $\{x|x\leq 0\}$, 치역은 $\{y|y\geq 0\}$이므로 그 그래프는 제2사분면을 지난다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

11 직선의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이므로

$a<0$, $b>0$

즉 $-a>0$, $b>0$이므로 무리함수 $y=b\sqrt{-ax}$의 정의역은 $\{x|x\geq 0\}$이고, 치역은 $\{y|y\geq 0\}$이다.

이때 그래프는 원점을 지난다.

따라서 그래프의 개형은 ②와 같다. 답 ②

정의역이 $\{x|x\geq 0\}$, 치역이 $\{y|y\geq 0\}$이므로 그래프는 제1사분면을 지난다.

12 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{-2(x-2)}-1$

$=\sqrt{-2x+4}-1$

따라서 $a=4$, $b=-1$이므로 $ab=-4$

$\therefore f(ab)=f(-4)$

$=\sqrt{-2\cdot(-4)+4}-1$

$=2\sqrt{3}-1$ 답 ③

13 함수 $f(x)=\sqrt{-2x+5}-1$에서 $-2x+5\geq 0$이므로

$x\leq\frac{5}{2}$

$\therefore A=\left\{x\middle|x\leq\frac{5}{2}\right\}$

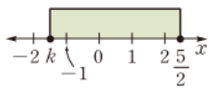
함수 $g(x)=\sqrt{4x-1}+k$에서

$g(x)\geq k$

$\therefore B=\{y|y\geq k\}$

$\therefore A\cap B=\left\{x\middle|k\leq x\leq\frac{5}{2}\right\}$

그런데 $A\cap B$에 속하는 정수의 개수가 4이므로 오른쪽 그림에서 k의 값의 범위는



$-2<k\leq -1$ 답 ③

참고 **무리함수의 정의역과 치역**

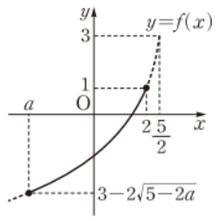
함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a>0)$에 대하여

➡ 정의역: $ax+b\geq 0$이므로 $\left\{x\middle|x\geq -\frac{b}{a}\right\}$

➡ 치역: $\sqrt{ax+b}\geq 0$이므로 $\{y|y\geq c\}$

14 $f(x)=3-2\sqrt{5-2x}=-2\sqrt{-2\left(x-\frac{5}{2}\right)}+3$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-2\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{5}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a\leq x\leq 2$에서 $y=3-2\sqrt{5-2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=2$일 때,

최댓값 $M=1$,

$x=a$일 때,

최솟값 $m=3-2\sqrt{5-2a}$

를 갖는다.

$M=3-2\sqrt{5-2\cdot 2}$
$=3-2=1$

$Mm=-3$이므로 $3-2\sqrt{5-2a}=-3$

$\sqrt{5-2a}=3$, $5-2a=9$

$\therefore a=-2$ 답 -2

15 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)$

$=(g^{-1}\circ f)(3)$

$=g^{-1}(f(3))$

$=g^{-1}\left(\frac{3+2}{3-2}\right)$

$=g^{-1}(5)$

이때 $g^{-1}(5)=k$라 하면 $g(k)=5$이므로

$\sqrt{3k+3}+2=5$, $\sqrt{3k+3}=3$

$3k+3=9$ $\therefore k=2$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=2$ 답 2

점 (a, b)가 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점이면 점 (b, a)는 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이다.

16 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$f(2)=\sqrt{2a+b}=3$

$\therefore 2a+b=9$ …… ㉠

또 $f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(3, 2)$를 지난다.

따라서 $f(3)=\sqrt{3a+b}=2$이므로

$3a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=19$

$\therefore 2a+3b=47$ 답 ④

$\sqrt{A}$의 값이 실수가 되도록 하는 조건은 $A\geq 0$이다.

$\sqrt{4x-1}\geq 0$이므로 $g(x)\geq k$

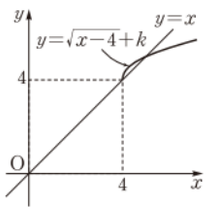
1등급 비밀노트

무리함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점

무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점이다. 그러나 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이 아닐 수도 있다.

예를 들어 함수 $y=\sqrt{-5x+19}$의 경우, 그 역함수 $y=-\frac{1}{5}x^2+\frac{19}{5}$ $(x\geq 0)$의 그래프와의 교점은 직선 $y=x$와의 교점 $\left(\frac{-5+\sqrt{101}}{2}, \frac{-5+\sqrt{101}}{2}\right)$ 외에도 직선 $y=x$ 위의 점이 아닌 $(2, 3)$, $(3, 2)$가 존재한다.

17 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 $f(x)=\sqrt{x-4}+k$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



따라서 상수 k는 $y=\sqrt{x-4}+k$의 그래프가 점 $(4,\ 4)$를 지날 때 최댓값 4를 갖는다. 답 ③

1등급 비밀노트

앞의 문제에서 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구해 보자.
$y=\sqrt{x-4}+k$의 그래프가 직선 $y=x$에 접할 때의 k의 값을 구하면 $\sqrt{x-4}+k=x$에서

$x^2-(2k+1)x+k^2+4=0$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k+1)^2-4(k^2+4)=0, \quad 4k-15=0$

$\therefore k=\frac{15}{4}$

따라서 k의 값의 범위는 $\frac{15}{4}<k\le 4$이다.

1등급을 위한 고난도 문제

본책 59~61쪽

01 $12+x-x^2\ge 0$에서

$x^2-x-12\le 0, \quad (x+3)(x-4)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 4$

분모는 0이 아니어야 하므로

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)\ne 0$

$\therefore x\ne -2,\ 1$

$x+4=0$에서 $x=-4$

따라서 정수 x는 $-4,\ -3,\ -1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 4$이므로 구하는 합은 1이다. 답 ①

무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안의 식의 값이 0 이상이고, (분모)$\ne$0이어야 한다.

$x+4=0$이면 주어진 식의 값이 0이므로 실수가 된다.

02 $\sqrt{(a+1)^2-4a}-\sqrt{(b-1)^2+4b}$

$=\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(b+1)^2}$

$=|a-1|-|b+1|$

이때 $y=-x^2+2ax+b=-(x-a)^2+a^2+b$에서 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 a이므로

$0<a<1$

또 이차함수의 그래프의 y절편은 b이므로

$-1<b<0$

따라서 $a-1<0,\ b+1>0$이므로

(주어진 식) $=|a-1|-|b+1|$

$=-(a-1)-(b+1)$

$=-a-b$ 답 ③

$(a+1)^2-4a$
$=a^2-2a+1$
$=(a-1)^2$,
$(b-1)^2+4b$
$=b^2+2b+1$
$=(b+1)^2$

$x=0$을 $y=-x^2+2ax+b$에 대입하면 $y=b$, 즉 y절편은 b이다.

03 $f(m,\ n)=\frac{1}{m+\sqrt{mn}}+\frac{1}{n+\sqrt{mn}}$

$=\frac{1}{\sqrt{m}(\sqrt{m}+\sqrt{n})}+\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{m})}$

$=\frac{\sqrt{n}+\sqrt{m}}{\sqrt{mn}(\sqrt{m}+\sqrt{n})}=\frac{1}{\sqrt{mn}}$

$f(m,\ n)=\frac{1}{\sqrt{mn}}>\frac{1}{3}$에서 $\sqrt{mn}<3$

$\therefore mn<9$

$m=1$일 때, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8$

$m=2$일 때, $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$m=3$일 때, $n=1,\ 2$

$m=4$일 때, $n=1,\ 2$

$m=5,\ 6,\ 7,\ 8$일 때, $n=1$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$8+4+2+2+4\cdot 1=20$ 답 ③

04 $\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

$=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}$

$=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}$ ⋯ ❶

이므로 주어진 부등식의 좌변을 간단히 하면

$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots$

$+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$ ⋯ ❷

즉 $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)\le 5$이므로

$\sqrt{2n+1}\le 11, \quad 2n+1\le 121$

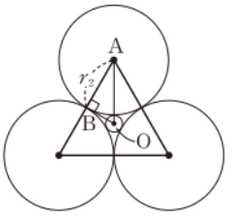
$\therefore n\le 60$

따라서 구하는 자연수 n의 최댓값은 60이다. ⋯ ❸

답 60

채점 기준	비율
❶ $\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$의 분모를 유리화할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 부등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 n의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

05 반지름의 길이가 1인 원의 중심을 O라 하면 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r_2인 세 원의 중심을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형은 정삼각형이므로 $\angle OAB=30^\circ$이다.



정삼각형의 한 내각의 크기는 60°이다.

$\cos 30^\circ=\frac{r_2}{OA}=\frac{r_2}{1+r_2}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{r_2}{1+r_2}, \quad 2r_2=\sqrt{3}(1+r_2)$

$(2-\sqrt{3})r_2=\sqrt{3}$

$\therefore r_2=\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=3+2\sqrt{3}$

$r_1=2r_2+1=2(3+2\sqrt{3})+1=7+4\sqrt{3}$이므로

$\frac{r_1}{r_2}=\frac{7+4\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}=\frac{(7+4\sqrt{3})(3-2\sqrt{3})}{(3+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{3})}$

$=1+\frac{2}{3}\sqrt{3}$

따라서 $a=1,\ b=\frac{2}{3}$이므로 $a+b=\frac{5}{3}$ 답 $\frac{5}{3}$

참고 위의 그림에서 점 O는 반지름의 길이가 r_2인 세 원의 중심을 세 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 외심이므로 $\overline{AB}\perp\overline{OB}$이다.

일품 BOX

06 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$에서 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$로 놓으면

$$\frac{a+\sqrt{5}}{a-\sqrt{5}}+\frac{a-\sqrt{5}}{a+\sqrt{5}}=\frac{(a+\sqrt{5})^2+(a-\sqrt{5})^2}{(a-\sqrt{5})(a+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{2a^2+10}{a^2-5}$$ ···➊

한편 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$에서 $a^2=5+2\sqrt{6}$이므로

$$\frac{2a^2+10}{a^2-5}=\frac{2(5+2\sqrt{6})+10}{(5+2\sqrt{6})-5}=\frac{4\sqrt{6}+20}{2\sqrt{6}}$$

$$=2+\frac{5}{3}\sqrt{6}$$ ···➋

$\therefore p=2,\ q=\dfrac{5}{3}$ ···➌

$\therefore 6pq=6\cdot2\cdot\dfrac{5}{3}=20$ ···➍

답 20

$a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$에서
$a^2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$
$=2+2\sqrt{6}+3$
$=5+2\sqrt{6}$

$\dfrac{4\sqrt{6}+20}{2\sqrt{6}}$
$=2+\dfrac{10}{\sqrt{6}}$
$=2+\dfrac{5}{3}\sqrt{6}$

채점 기준	비율
➊ $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$로 놓고 주어진 식을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
➋ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ p, q의 값을 구할 수 있다.	20 %
➍ $6pq$의 값을 구할 수 있다.	10 %

07 $\sqrt{n}=a+b$ (a는 음이 아닌 정수, $0<b<1$)에서

$b=\sqrt{n}-a$ ····· ㉠

㉠을 $a^3+b^3=18ab$에 대입하면

$a^3+(\sqrt{n}-a)^3=18a(\sqrt{n}-a)$

$a^3+n\sqrt{n}-3an+3a^2\sqrt{n}-a^3=18a\sqrt{n}-18a^2$

$18a^2-3an+(n+3a^2-18a)\sqrt{n}=0$

a는 음이 아닌 정수, n은 자연수, $\sqrt{n}$은 무리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$18a^2-3an=0$ ····· ㉡

$n+3a^2-18a=0$ ····· ㉢

㉡에서 $3a(6a-n)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=\dfrac{n}{6}$

(i) $a=0$을 ㉢에 대입하면 $n=0$

n은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=\dfrac{n}{6}$을 ㉢에 대입하면

$n+3\cdot\left(\dfrac{n}{6}\right)^2-18\cdot\dfrac{n}{6}=0,\quad \dfrac{n^2}{12}-2n=0$

$n^2-24n=0,\quad n(n-24)=0$

$\therefore n=24$ ($\because n$은 자연수)

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n은 24이다. 답 ②

$18a^2-3an$과 $n+3a^2-18a$는 모두 정수이다.

1등급 비밀노트

무리수의 정수 부분과 소수 부분

① 소수 부분: 0보다 크고 1보다 작은 실수

② (무리수)=(정수 부분)+(소수 부분)

➡ (정수 부분)=(무리수)−(소수 부분)

➡ (소수 부분)=(무리수)−(정수 부분)

08 점 A의 좌표는 $(2,\ \sqrt{2})$이므로 점 B의 좌표를 $(a,\ \sqrt{2})$라 하면 $\sqrt{-2a}=\sqrt{2}$에서

$a=-1$ $\therefore$ B$(-1,\ \sqrt{2})$ ···➊

점 C의 좌표를 $(-1,\ b)$라 하면

$b=-\sqrt{3}$ $\therefore$ C$(-1,\ -\sqrt{3})$ ···➋

점 D의 좌표를 $(c,\ -\sqrt{3})$이라 하면 $-\sqrt{4c}=-\sqrt{3}$에서

$c=\dfrac{3}{4}$ $\therefore$ D$\left(\dfrac{3}{4},\ -\sqrt{3}\right)$ ···➌

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{4},\ 0\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=2-\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{4}$ ···➍

답 $\dfrac{5}{4}$

채점 기준	비율
➊ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
➋ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
➌ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
➍ $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 구할 수 있다.	10 %

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이
➡ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

09 점 B의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 점 A의 좌표는 $(a+2,\ \sqrt{a+2})$

이때 한 변의 길이가 4인 정삼각형의 높이는 $2\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{a+2}=2\sqrt{3},\quad a+2=12$

$\therefore a=10$

따라서 A$(12,\ 2\sqrt{3})$, B$(10,\ 0)$이므로

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot2\sqrt{3}=10\sqrt{3}$ 답 ③

10 직선 $y=x$와 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프의 교점의 x좌표는 $x=\sqrt{ax}$에서

$x^2=ax,\quad x(x-a)=0$

$\therefore x=a$ ($\because x\neq0$)

$\therefore$ P$(a,\ a)$

직선 $y=\dfrac{1}{2}x$와 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프의 교점의 x좌표는 $\dfrac{1}{2}x=\sqrt{ax}$에서

$x^2=4ax,\quad x(x-4a)=0$

$\therefore x=4a$ ($\because x\neq0$)

$\therefore$ Q$(4a,\ 2a)$

두 점 O$(0,\ 0)$, Q$(4a,\ 2a)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{(4a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{5}a$

점 P$(a,\ a)$에서 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{|a-2a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$

$\therefore \triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}a\cdot\dfrac{a}{\sqrt{5}}$

$=a^2$ 답 ②

ⓒ좋은책신사고

11 두 점 A, B를 지나는 직선이 x축의 음의 방향과 이루는 각의 크기가 $30°$이므로 $\angle ABC=30°$

$A(a, \sqrt{a})$, $B(b, \sqrt{-b})$ $(b<0)$라 하면 $C(-b, \sqrt{-b})$이므로

$\overline{BC}=-b-b=-2b$

$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}\cos 30°=-\sqrt{3}b$,

$\overline{AC}=\overline{BC}\sin 30°=-b$ ··· ❶

따라서 $\overline{AB}^2=3b^2$, $\overline{AC}^2=b^2$이므로

$(a-b)^2+(\sqrt{a}-\sqrt{-b})^2=3b^2$ ····· ㉠

$(a+b)^2+(\sqrt{a}-\sqrt{-b})^2=b^2$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$-4ab=2b^2$ $\therefore b=-2a$ ··· ❷

이때 직선 AC가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$이므로

$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{-b}}{a+b}=\tan 60°$, $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2a}}{-a}=\sqrt{3}$

$\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{a}}{a}=\sqrt{3}$, $\sqrt{a}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$

$\therefore a=\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$ ··· ❸

답 $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$를 b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

12 방정식 $\sqrt{ax}=x$의 한 실근이 $x=3$이므로

$\sqrt{3a}=3$ $\therefore a=3$

$y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{3(x-b)}$

이때 $y=\sqrt{3(x-b)}$의 그래프와 직선 $y=x$가 접하므로 $\sqrt{3(x-b)}=x$에서 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-3x+3b=0$

이차방정식 $x^2-3x+3b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot 3b=0$

$9-12b=0$ $\therefore b=\frac{3}{4}$

$\therefore a-b=\frac{9}{4}$ 답 ⑤

13 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 $\sqrt{20-2x}=\sqrt{12+2x}$에서

$20-2x=12+2x$, $4x=8$

$\therefore x=2$

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로 임의의 두 실수 x_1, x_2 $(-6\le x_1\le x_2\le 10)$에 대하여

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$,

$\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\le g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

$\therefore \frac{h(x_1)+h(x_2)}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$

$\le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

$=h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

즉 함수 $y=h(x)$의 그래프는 $-6\le x\le 10$에서 위로 볼록하다.

한편 $y=\sqrt{20-2x}$의 그래프를 직선 $x=2$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{20-2(2\cdot 2-x)}=\sqrt{12+2x}=g(x)$

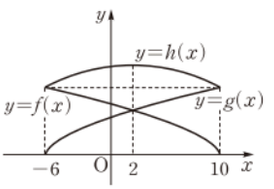
이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

따라서 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=h(x)$는 $x=2$일 때 최댓값

$h(2)=f(2)+g(2)$

$=4+4=8$

을 갖는다. 답 8



1등급 비밀노트

함수 $y=f(x)$에서 임의의 실수 x, y에 대하여

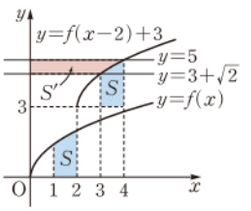
① $\frac{f(x)+f(y)}{2}\le f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ ➡ $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록

② $\frac{f(x)+f(y)}{2}\ge f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ ➡ $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록

14 $y=f(x-2)+3$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같이 세 점 $(2, 3)$, $(3, 3+\sqrt{2})$, $(4, 5)$를 지난다. 이때 $y=f(x-2)+3$의 그래프와 직선 $x=3$, $x=4$, $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 S와 같으므로 구하는 도형의 넓이를 S'이라 하면

$S'=4\cdot(5-3)-3\cdot\{(3+\sqrt{2})-3\}-S$

$=8-3\sqrt{2}-S$ 답 ④



15 점 $A(a, b)$가 함수 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프 위의 점이므로 $b=\sqrt{2-a}$에서

$b^2=2-a$ $\therefore a=2-b^2$ ··· ❶

$\therefore \overline{OB}+\overline{OC}=a+b=2-b^2+b$

$=-\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$ ··· ❷

그런데 점 A가 제1사분면 위의 점이므로

$0<b<\sqrt{2}$

따라서 $\overline{OB}+\overline{OC}$는 $b=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{9}{4}$를 갖는다. ··· ❸

답 $\frac{9}{4}$

일품 BOX

점 C의 좌표를 $(c, \sqrt{-b})$라 하면 $\sqrt{c}=\sqrt{-b}$ $\therefore c=-b$

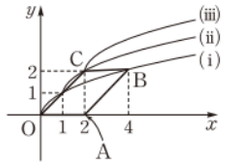
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=a$에 대하여 대칭인 그래프의 식 ➡ $y=f(2a-x)$

$f(1)=\sqrt{2}$, $f(2)=2$이므로 $y=f(x-2)+3$에서 $x=3$일 때, $y=f(1)+3=3+\sqrt{2}$ $x=4$일 때, $y=f(2)+3=5$

직선 $x=1$, $x=2$ 및 $y=0$(x축)을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 각각 평행이동하면 $x=3$, $x=4$, $y=3$

채점 기준	비율
❶ a를 b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\overline{OB}+\overline{OC}$를 b에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\overline{OB}+\overline{OC}$의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

16 함수 $y=f(x-k)+k$의 그래프는 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}-1$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.



(i) $k=1$일 때,
$y=\sqrt{x}$의 그래프와 사각형 OABC의 네 변은 세 점 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 2)$에서 만나므로
$g(1)=3$

(ii) $k=2$일 때,
$y=\sqrt{x-1}+1$의 그래프와 사각형 OABC의 네 변은 두 점 $(1, 1)$, $(2, 2)$에서 만나므로
$g(2)=2$

(iii) $k=3$일 때,
$y=\sqrt{x-2}+2$의 그래프와 사각형 OABC의 네 변은 점 $(2, 2)$에서 만나므로
$g(3)=1$

(iv) $k\geq 4$일 때,
함수 $y=f(x-k)+k$의 그래프와 사각형 OABC의 네 변은 만나지 않으므로
$g(k)=0$

이상에서
$g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(5)$
$=3+2+1+0+0=6$ 답 6

17 점 G의 x좌표가 t이므로 $G(t, -\sqrt{t-1}-1)$
이때 점 G는 정삼각형 ABC의 무게중심이므로
$A(t, -3\sqrt{t-1}-3)$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AG}:\overline{GH}=2:1$
$\therefore \overline{AH}=3\overline{GH}$

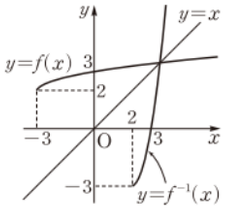
$\overline{BC}=a$라 하면 정삼각형 ABC의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로
$\frac{\sqrt{3}}{2}a=|-3\sqrt{t-1}-3|=3\sqrt{t-1}+3$
$\therefore a=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot(3\sqrt{t-1}+3)=2\sqrt{3}(\sqrt{t-1}+1)$

따라서 $S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=3\sqrt{3}(\sqrt{t-1}+1)^2$이므로
$\frac{S(10)}{S(1)+S(2)}=\frac{48\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+12\sqrt{3}}=\frac{16}{5}$ 답 ④

18 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=16$에서 $(f\circ f)^{-1}(a)=16$
$\therefore (f\circ f)(16)=a$
이때
$f(16)=2-\sqrt{16}=2-4=-2$,
$f(-2)=\sqrt{2-(-2)}=\sqrt{4}=2$
이므로
$a=(f\circ f)(16)=f(f(16))=f(-2)=2$ 답 2

역함수의 성질
① $(f^{-1})^{-1}=f$
② $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

19 $(f^{-1})^{-1}=f$이므로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프는 $y=f(x)$, 즉 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프이다.
오른쪽 그림에서



$f(x)=\sqrt{a(x+3)}+2$이고, $f(0)=3$이므로
$\sqrt{3a}+2=3$
$\therefore a=\frac{1}{3}$
$\therefore f(x)=\sqrt{\frac{1}{3}(x+3)}+2$
$=\sqrt{\frac{1}{3}x+1}+2$

두 점 $(2, -3)$, $(3, 0)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각 $(-3, 2)$, $(0, 3)$이다.

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=1$, $c=2$이므로
$30abc=20$ 답 20

다른 풀이 $f^{-1}(x)=k(x-2)^2-3$ $(k>0,\ x\geq 2)$이라 하면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(3, 0)$을 지나므로
$k(3-2)^2-3=0$ $\therefore k=3$
$\therefore f^{-1}(x)=3(x-2)^2-3$
$y=3(x-2)^2-3$으로 놓으면 $(x-2)^2=\frac{1}{3}y+1$
$x-2=\sqrt{\frac{1}{3}y+1}$ $(\because x\geq 2)$
$\therefore x=\sqrt{\frac{1}{3}y+1}+2$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{\frac{1}{3}x+1}+2$
$\therefore f(x)=\sqrt{\frac{1}{3}x+1}+2$

20 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1, 2)$이므로
$f(x)=a(x-1)^2+2$ $(a>0)$
로 놓을 수 있다.
이때 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로
$f(0)=a+2=3$ $\therefore a=1$
$\therefore f(x)=(x-1)^2+2$ $(x\geq 1)$ ⋯ ❶
$y=(x-1)^2+2$로 놓으면
$(x-1)^2=y-2$, $x-1=\sqrt{y-2}$ $(\because x\geq 1)$
$\therefore x=\sqrt{y-2}+1$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{x-2}+1$
$\therefore f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}+1$ ⋯ ❷
따라서 $5\leq x\leq 11$에서 $f^{-1}(x)$의 최댓값은
$f^{-1}(11)=\sqrt{9}+1=4$ ⋯ ❸
답 4

채점 기준	비율
❶ 이차함수 $y=f(x)$의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 함수 $f^{-1}(x)$의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 범위에서 함수 $f^{-1}(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

ⓒ좋은책신사고

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 62~63쪽

01 $(1+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$에서 $(1-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$이므로

$$\begin{aligned}a_{10}^{\,2}-3b_{10}^{\,2}&=(a_{10}+b_{10}\sqrt{3})(a_{10}-b_{10}\sqrt{3})\\&=(1+\sqrt{3})^{10}(1-\sqrt{3})^{10}\\&=\{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\}^{10}\\&=(-2)^{10}=2^{10}\end{aligned}$$

답 ④

02 $2<\sqrt{6}<3$이므로 $x_1=\sqrt{6}-2$

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{6}-2}=\frac{\sqrt{6}+2}{2}$$

$$x_3=\frac{\sqrt{6}+2}{2}-2=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

$$x_4=\frac{2}{\sqrt{6}-2}=\frac{2(\sqrt{6}+2)}{2}=\sqrt{6}+2$$

$$x_5=\sqrt{6}+2-4=\sqrt{6}-2$$

$\vdots$

즉 x_n은 $\sqrt{6}-2$, $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$, $\frac{\sqrt{6}-2}{2}$, $\sqrt{6}+2$가 이 순서대로 반복된다.

따라서

$$x_{2018}=x_{4\cdot504+2}=x_2=\frac{\sqrt{6}+2}{2},$$

$$x_{2019}=x_{4\cdot504+3}=x_3=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

이므로

$$x_{2018}+x_{2019}=\frac{\sqrt{6}+2}{2}+\frac{\sqrt{6}-2}{2}=\sqrt{6}$$

답 ④

03 A행성과 B행성의 중력가속도를 각각 G_A, G_B, 질량을 각각 M_A, M_B라 하고, 각 행성 주위를 공전하는 인공위성의 공전 반지름의 길이를 각각 r_A, r_B, 공전주기를 각각 T_A, T_B라 하면

$$T_A=k\sqrt{\frac{r_A^{\,3}}{G_AM_A}},\ T_B=k\sqrt{\frac{r_B^{\,3}}{G_BM_B}}$$

A행성의 중력가속도는 B행성의 중력가속도의 $\frac{9}{2}$배이므로

$$G_A=\frac{9}{2}G_B$$

또 A행성의 질량은 B행성의 질량의 16배이므로

$$M_A=16M_B$$

A행성 주위를 공전하는 인공위성의 공전 반지름의 길이는 B행성 주위를 공전하는 인공위성의 공전 반지름의 길이의 3배이므로

$$r_A=3r_B$$

$$\therefore T_A=k\sqrt{\frac{(3r_B)^3}{\frac{9}{2}G_B\cdot16M_B}}$$

$$=k\sqrt{\frac{27r_B^{\,3}}{72G_BM_B}}$$

$$=k\sqrt{\frac{3r_B^{\,3}}{8G_BM_B}}$$

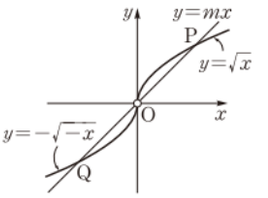
$$\therefore \frac{T_A}{T_B}=\frac{k\sqrt{\frac{3r_B^{\,3}}{8G_BM_B}}}{k\sqrt{\frac{r_B^{\,3}}{G_BM_B}}}=\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

따라서 A행성 주위를 공전하는 인공위성의 공전주기는 B행성 주위를 공전하는 인공위성의 공전주기의 $\frac{\sqrt{6}}{4}$배이다.

답 ③

04 두 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

$$\overline{PQ}=2\overline{OP}$$



점 P의 x좌표는 $mx=\sqrt{x}$에서

$$m^2x^2=x,\quad x(m^2x-1)=0$$

$$\therefore x=\frac{1}{m^2}\ (\because x\neq0)$$

따라서 $P\left(\frac{1}{m^2},\ \frac{1}{m}\right)$이므로

$$\overline{PQ}=2\overline{OP}=2\sqrt{\frac{1}{m^4}+\frac{1}{m^2}}=\frac{2\sqrt{1+m^2}}{m^2}$$

답 ①

05 점 $A(1,\ \sqrt{3})$이 곡선 $y=\sqrt{ax}$ 위의 점이므로

$$\sqrt{a}=\sqrt{3}\qquad\therefore a=3$$

점 B의 x좌표를 t라 하면 $B(t,\ \sqrt{3})$이 곡선 $y=\frac{1}{2}\sqrt{3x}$ 위의 점이므로

$$\frac{1}{2}\sqrt{3t}=\sqrt{3}\qquad\therefore t=4$$

즉 $B(4,\ \sqrt{3})$이고, 이 점은 곡선 $y=\frac{b}{x}$ 위의 점이므로

$$\frac{b}{4}=\sqrt{3}\qquad\therefore b=4\sqrt{3}$$

따라서 두 곡선 $y=\sqrt{3x}$, $y=\frac{4\sqrt{3}}{x}$의 교점의 x좌표가 k이므로

$$\sqrt{3k}=\frac{4\sqrt{3}}{k},\qquad k\sqrt{3k}=4\sqrt{3}$$

$$k\sqrt{k}=4\qquad\therefore k^3=16$$

답 16

06 $y=\sqrt{x+|x|}$에서

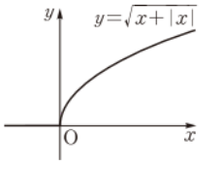
(i) $x\geq0$일 때,

$$y=\sqrt{x+x}=\sqrt{2x}$$

(ii) $x<0$일 때,

$$y=\sqrt{x-x}=0$$

(i), (ii)에서 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



점 $(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=m(x-1)+1\quad\cdots\ ㉠$$

일품 BOX

$\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{24}}{8}=\frac{2\sqrt{6}}{8}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

등식에서 $\sqrt{3}$ 대신 $-\sqrt{3}$을 대입하면

$(1-\sqrt{3})^n=a_n+b_n(-\sqrt{3})=a_n-b_n\sqrt{3}$

$\sqrt{3t}=2\sqrt{3}$에서 $3t=12$ $\therefore t=4$

일품 BOX

직선 ㉠이 원점을 지날 때

$0=-m+1$

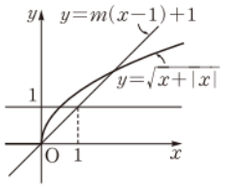
$\therefore m=1$

직선 ㉠이 x축과 평행할 때

$m=0$

따라서 구하는 m의 값의 범위는

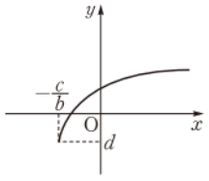
$0<m<1$ 답 ④



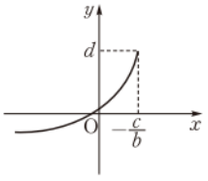
$0<m<1$이면 직선 ㉠은 $x<0$일 때, x축과 한 점에서 만나고, $x>0$일 때, $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다.

07 $y=a\sqrt{bx+c}+d=a\sqrt{b\left(x+\frac{c}{b}\right)}+d$의 그래프가 제 1, 2, 3사분면을 모두 지나고 제4사분면은 지나지 않는 경우는 다음의 2가지 경우이다.

(i) $a>0$, $b>0$일 때,



(ii) $a<0$, $b<0$일 때,



ㄱ. (i), (ii)에서 $a>0$, $b>0$ 또는 $a<0$, $b<0$이므로

$ab>0$

ㄴ. $a>0$, $b>0$일 때, $-\frac{c}{b}<0$이므로 $bc>0$

ㄷ. (i) $a>0$, $b>0$일 때, $d<0$이므로 $ad<0$

(ii) $a<0$, $b<0$일 때, $d>0$이므로 $ad<0$

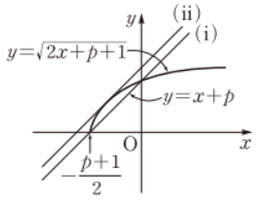
(i), (ii)에서 $ad<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

08 $y=\sqrt{2x+p+1}$

$=\sqrt{2\left(x+\frac{p+1}{2}\right)}$

(i) 직선 $y=x+p$가 점 $\left(-\frac{p+1}{2},\ 0\right)$을 지날 때,



$0=-\frac{p+1}{2}+p$에서 $p=1$

(ii) 직선 $y=x+p$가 $y=\sqrt{2x+p+1}$의 그래프와 접할 때,

$x+p=\sqrt{2x+p+1}$에서

$x^2+2px+p^2=2x+p+1$

$x^2+2(p-1)x+p^2-p-1=0$ …… ㉠

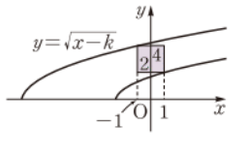
㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(p-1)^2-p^2+p+1=0$

$-p+2=0$ $\therefore p=2$

(i), (ii)에서 $p>2$일 때 교점은 없고, $p=2$일 때 교점은 1개, $1\le p<2$일 때 교점은 2개, $p<1$일 때 교점은 1개이므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

09 부등식 $-1\le x\le 1$, $2\le y\le 4$를 동시에 만족시키는 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



이때 $A\cap B\neq\varnothing$이려면 $y=\sqrt{x-k}$의 그래프가 색칠한 부분을 지나야 한다.

(i) $y=\sqrt{x-k}$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지날 때,

$2=\sqrt{1-k}$에서 $k=-3$

(ii) $y=\sqrt{x-k}$의 그래프가 점 $(-1,\ 4)$를 지날 때,

$4=\sqrt{-1-k}$에서 $k=-17$

(i), (ii)에서 $-17\le k\le -3$일 때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로

$M=-3$, $m=-17$

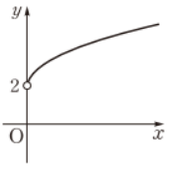
$\therefore Mm=51$ 답 51

10 $f(x)=\frac{1\cdot 4+x\cdot 1}{1+x}=\frac{x+4}{x+1}$이므로

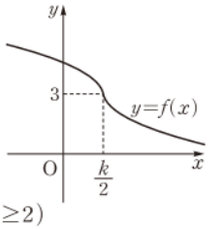
$y=\sqrt{(x+1)f(x)}=\sqrt{(x+1)\cdot\frac{x+4}{x+1}}$

$=\sqrt{x+4}$

이때 $x>0$이므로 $y=\sqrt{(x+1)f(x)}$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다. 답 ①



11 $y=-\sqrt{2x-k}+3=-\sqrt{2\left(x-\frac{k}{2}\right)}+3$에서 함수 $y=-\sqrt{2x-k}+3$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{k}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, $y=\sqrt{-2x+k}+3=\sqrt{-2\left(x-\frac{k}{2}\right)}+3$에서 함수 $y=\sqrt{-2x+k}+3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{k}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. 이때 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



그래프가 연결되어야 한다.
➡ 공역과 치역이 같다.

즉 $\frac{k}{2}=2$이므로 $k=4$

$\therefore f(x)=\begin{cases}-\sqrt{2x-4}+3 & (x\ge 2)\\ \sqrt{-2x+4}+3 & (x<2)\end{cases}$

$f^{-1}(k-3)=f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$

$a\ge 2$이므로

$-\sqrt{2a-4}+3=1$, $\sqrt{2a-4}=2$

$\therefore a=4$

$x\ge 2$일 때, $f(x)\le 3$이므로 $f(a)=1$이면 $a\ge 2$이다.

$f^{-1}(k+3)=f^{-1}(7)=b$라 하면 $f(b)=7$

$b<2$이므로

$\sqrt{-2b+4}+3=7$, $\sqrt{-2b+4}=4$

$\therefore b=-6$

$x<2$일 때, $f(x)>3$이므로 $f(b)=7$이면 $b<2$이다.

$\therefore f^{-1}(k-3)+f^{-1}(k+3)=4+(-6)=-2$

답 -2

12 $y=\sqrt{x+n^2}-n$에서 $y+n=\sqrt{x+n^2}$

$y^2+2ny+n^2=x+n^2$ $\therefore x=y^2+2ny$

ⓒ좋은책신사고

x와 y를 서로 바꾸면

$y=x^2+2nx$

$\therefore g(x)=x^2+2nx\ (x\geq 0)$

이때 점 Q_n의 x좌표는 $x^2+2nx=-x+2n+2$에서

$x^2+(2n+1)x-2n-2=0$

$(x-1)(x+2n+2)=0$

$\therefore x=1\ (\because x\geq 0)$

따라서 $Q_n(1,\ 2n+1)$이므로 $P_n(2n+1,\ 1)$

$\therefore l_n=\overline{P_nQ_n}$

$=\sqrt{(2n+1-1)^2+(1-2n-1)^2}=2\sqrt{2}n$

$\therefore l_1+l_3+l_5+l_7+l_9$

$=2\sqrt{2}+6\sqrt{2}+10\sqrt{2}+14\sqrt{2}+18\sqrt{2}$

$=50\sqrt{2}$ 답 $50\sqrt{2}$

점 $(1,\ 2n+1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(2n+1,\ 1)$

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제 본책 64~67쪽

01 전략 a가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 가능한 함숫값을 각각 구한다.

풀이 $a+f(a)$가 짝수이므로 a가 홀수이면 $f(a)$도 홀수이고, a가 짝수이면 $f(a)$도 짝수이어야 한다.

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5 중 하나이므로 3개,

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 4 중 하나이므로 2개,

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5 중 하나이므로 3개,

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 4 중 하나이므로 2개

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$3\cdot 2\cdot 3\cdot 2=36$ 답 ⑤

$f(3+x)=f(3-x)$
$=f(x-3)$

02 전략 자연수를 2^k+l (k는 양의 정수, $0\leq l<2^k$) 꼴로 나타내어 본다.

풀이 ㄱ. $9=2^3+1$이므로 $g(9)=1$

ㄴ. $n=2^k+l$에서 $n-l=2^k$이고 n이 3 이상의 홀수이면 $k\geq 1$이므로 2^k은 짝수이다.

따라서 $l=g(n)$은 홀수이다.

ㄷ. $f(n)=3$이므로 $n=2^3+l\ (0\leq l<2^3)$

따라서 n의 개수는 8이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

$0\leq x\leq 3$에서 $f(x)=2x+1$이므로 $f(2)=2\cdot 2+1=5$

$2^3,\ 2^3+1,\ 2^3+2,\ 2^3+3,\ 2^3+4,\ 2^3+5,\ 2^3+6,\ 2^3+7$

03 전략 함수 f가 일대일대응이 되려면 계속 증가하거나 계속 감소해야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=\begin{cases}(a+3)x-a & (x\geq 1)\\ (-a+3)x+a & (x<1)\end{cases}$

에서 함수 f가 일대일대응이 되려면 두 직선 $y=(a+3)x-a$, $y=(-a+3)x+a$의 기울기의 부호가 같아야 한다.

즉 $(a+3)(-a+3)>0$이므로

$(a+3)(a-3)<0$ $\therefore -3<a<3$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다. 답 ②

$x<20$일 때 $g(x)<40$이고, $x\geq 20$일 때 $g(x)\geq 40$이므로 $g(b)=30$이면 $b<20$이다.

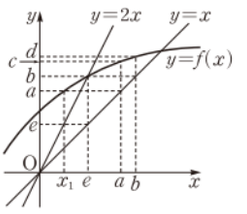
04 전략 주어진 함수의 그래프를 이용하여 함숫값을 구한다.

풀이 $f(x_1)=a$, $f(a)=c$이므로

$(f\circ f)(x_1)=f(f(x_1))$

$=f(a)$

$=c$



$2x_1=e$이고, $f(e)=b$,

$f(b)=d$이므로

$(f\circ f)(2x_1)=f(f(2x_1))$

$=f(f(e))$

$=f(b)$

$=d$

$\therefore (f\circ f)(x_1)+(f\circ f)(2x_1)=c+d$ 답 ⑤

05 전략 먼저 주어진 조건을 이용하여 $f(40)=f(4)$임을 구한다.

풀이 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로

$f(3-x)=f(-(3-x))=f(x-3)$

따라서 $f(3+x)=f(x-3)$이므로 이 식의 양변에 x 대신에 $x+3$을 대입하면

$f(x+6)=f(x)$

$\therefore f(40)=f(6\cdot 6+4)=f(4)$

이때 $f(3+x)=f(3-x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(4)=f(2)=2\cdot 2+1=5$

$\therefore f(40)=5$ 답 ⑤

06 전략 f의 역함수 f^{-1}에 대하여 $f^{-1}(a)=b$이면 $f(b)=a$임을 이용한다.

풀이 $(f^{-1}\circ g)(60)=f^{-1}(g(60))=f^{-1}(60)$

$f^{-1}(60)=a$라 하면 $f(a)=60$이므로

$4a+20=60$ $\therefore a=10$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(60)=10$

$g^{-1}(30)=b$라 하면 $g(b)=30$이므로

$2b=30$ $\therefore b=15$

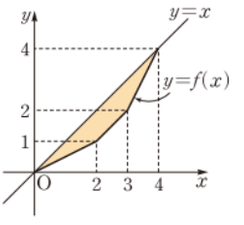
$\therefore (f\circ g^{-1})(30)=f(g^{-1}(30))=f(15)=80$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(60)+(f\circ g^{-1})(30)=10+80=90$

답 ④

07 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

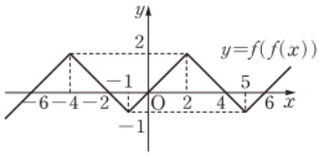
따라서 구하는 넓이는

$$2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot4\cdot4-\left\{\frac{1}{2}\cdot2\cdot1+\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot1+\frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot1\right\}\right]$$
$$=5$$ 답 ③

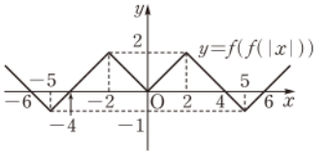
08 전략 $y=f(|x|)$의 그래프는 $x\geq0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, $x<0$인 부분은 $x\geq0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.

풀이 $$f(f(x))=\begin{cases}x+6 & (x<-4)\\ -x-2 & (-4\leq x<-1)\\ x & (-1\leq x<2)\\ -x+4 & (2\leq x<5)\\ x-6 & (x\geq5)\end{cases}$$

이므로 $y=f(f(x))$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $y=f(f(|x|))$의 그래프는 $y=f(f(x))$의 그래프에서 $x\geq0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분은 $x\geq0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $y=f(f(|x|))$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot4\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\right)=10$$ 답 ②

09 전략 $a=111111$로 놓고 x, y, z를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a=111111$로 놓으면

$$x=\frac{a-1}{a}=1-\frac{1}{a},$$

$$y=\frac{2a-1}{2a+1}=1-\frac{2}{2a+1}=1-\frac{1}{a+\frac{1}{2}},$$

$$z=\frac{3a-2}{3a+1}=1-\frac{3}{3a+1}=1-\frac{1}{a+\frac{1}{3}}$$

이때 $a<a+\frac{1}{3}<a+\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{1}{a}>\frac{1}{a+\frac{1}{3}}>\frac{1}{a+\frac{1}{2}}$$

$$1-\frac{1}{a}<1-\frac{1}{a+\frac{1}{3}}<1-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}$$

$\therefore x<z<y$ 답 ②

10 전략 원 $x^2+y^2=4$와 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

일품 BOX

원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=x$의 교점

$\frac{2a-1}{2a+1}=\frac{2a+1-2}{2a+1}$
$=1-\frac{2}{2a+1}$

$\frac{3a-2}{3a+1}=\frac{3a+1-3}{3a+1}$
$=1-\frac{3}{3a+1}$

$\frac{1}{a}>\frac{1}{a+\frac{1}{3}}>\frac{1}{a+\frac{1}{2}}$
이므로
$-\frac{1}{a}<-\frac{1}{a+\frac{1}{3}}$
$<-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}$

풀이 원 $x^2+y^2=4$와 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 오직 두 점에서만 만나므로 제 1 사분면 위에서 만나는 점을 P라 하면 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

이때 점 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$$\sqrt{2}=\frac{k}{\sqrt{2}} \qquad \therefore k=2$$

$$\therefore y=\frac{2}{x}$$

따라서 $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{2}{a}\right)$라 하면 점 A가 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이므로

$$a^2+\frac{4}{a^2}=16$$

또 점 A와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|a-\frac{2}{a}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|a-\frac{2}{a}\right|$$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}\left|a-\frac{2}{a}\right|$이다.

이때 $\left|a-\frac{2}{a}\right|^2=a^2+\frac{4}{a^2}-4=16-4=12$에서

$\left|a-\frac{2}{a}\right|=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$ 답 ②

11 전략 점 A가 함수 $y=g(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점임을 이용한다.

풀이 두 점 A(2, 1), B(4, 3)을 지나는 직선의 방정식은

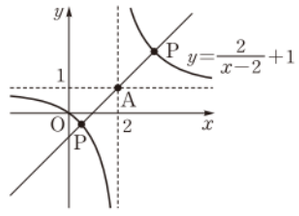
$$y-1=\frac{3-1}{4-2}(x-2),\ \text{즉}\ y=x-1$$

이므로

$$g(x)=\frac{f(x)+1}{f(x)-1}=\frac{x-1+1}{x-1-1}$$
$$=\frac{x}{x-2}=\frac{x-2+2}{x-2}$$
$$=\frac{2}{x-2}+1$$

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$이므로 점 A(2, 1)은 두 점근선의 교점이다.

즉 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이가 최소일 때의 점 P는 오른쪽 그림과 같다.



한편 곡선 $y=g(x)$는 점 A(2, 1)에 대하여 대칭이므로 직선 $y-1=x-2$, 즉 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

$\frac{2}{x-2}+1=x-1$에서 $\quad 2=(x-2)^2$

$$x^2-4x+2=0 \qquad \therefore x=2\pm\sqrt{2}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(2+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$ 또는 $(2-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{(2+\sqrt{2}-2)^2+(1+\sqrt{2}-1)^2}=2$$ 답 ④

ⓒ좋은책신사고

다른 풀이 점 P의 좌표를 $\left(t,\ \frac{2}{t-2}+1\right)$이라 하면

$$\overline{AP}=\sqrt{(t-2)^2+\left(\frac{2}{t-2}+1-1\right)^2}$$

$$=\sqrt{(t-2)^2+\left(\frac{2}{t-2}\right)^2}$$

$(t-2)^2>0,\ \left(\frac{2}{t-2}\right)^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(t-2)^2+\left(\frac{2}{t-2}\right)^2\geq 2\sqrt{(t-2)^2\cdot\left(\frac{2}{t-2}\right)^2}$$

$$=4$$

$\left(\text{단, 등호는 } (t-2)^2=\left(\frac{2}{t-2}\right)^2 \text{일 때 성립}\right)$

$\therefore \overline{AP}\geq\sqrt{4}=2$

12 **전략** $g(0)$의 값이 $y=(g\circ f)(x)$에서 $f(x)=0$일 때의 합성함수 $g\circ f$의 함숫값과 같음을 이용한다.

풀이 $g(0)$의 값은 $g(f(x))=\frac{x-1}{x+2}$에서 $f(x)=0$일 때의 합성함수 $g\circ f$의 함숫값과 같다.

$f(x)=\frac{x+1}{x-1}=0$에서 $\quad f(-1)=0$

즉 $g(0)=g(f(-1))=\frac{-1-1}{-1+2}=-2$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(0)=f^{-1}(g(0))=f^{-1}(-2)$

이때 $f^{-1}(-2)=a$라 하면 $\quad f(a)=-2$

$\frac{a+1}{a-1}=-2,\quad a+1=-2a+2$

$3a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(0)=\frac{1}{3}$ 답 ②

13 **전략** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a>0,\ b<0$임을 이용한다.

풀이 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이므로 $\quad a>0,\ b<0$

ㄱ. $|ab|+ab=-ab+ab=0$

ㄴ. $\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$

그런데 $a>0,\ b<0$이므로 $\quad a-b>0$

$\therefore \sqrt{a^2-2ab+b^2}=a-b$

ㄷ. $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

14 **전략** 먼저 $x,\ y$의 분모를 유리화한다.

풀이 $x=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=7-4\sqrt{3},$

$y=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$

이므로

$x+y=14,\ x-y=-8\sqrt{3}$

$\therefore \frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}=\frac{14}{-8\sqrt{3}}+\frac{8\sqrt{3}}{14}$

$=-\frac{7\sqrt{3}}{12}+\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$=\frac{-49\sqrt{3}+48\sqrt{3}}{84}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{84}$ 답 ①

다른 풀이 $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}=\frac{4xy}{x^2-y^2}$이므로

$x^2-y^2=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)^2$

$=\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}-\frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$

$=(7-4\sqrt{3})^2-(7+4\sqrt{3})^2$

$=-112\sqrt{3}$

$xy=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=1$

$\therefore$ (주어진 식) $=\frac{4xy}{x^2-y^2}=-\frac{4}{112\sqrt{3}}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{84}$

15 **전략** 주어진 함수의 그래프를 이용하여 $a,\ b,\ c$의 부호를 구한다.

풀이 $y=\frac{bx+c}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+c}{x+a}$

$=\frac{-ab+c}{x+a}+b$

에서 $y=\frac{bx+c}{x+a}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a,\ y=b$이므로

$a<0,\ b<0$

또 y절편은 양수이므로 $\quad \frac{c}{a}>0$

$\therefore c<0\ (\because a<0)$

$y=\sqrt{ax+b}+c$에서

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$

이므로 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a<0,\ -\frac{b}{a}<0,\ c<0$이므로 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형은 ⑤와 같다. 답 ⑤

16 **전략** $y=f(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ -1)$을 지나는 직선임을 이용한다.

풀이 $f(x)=ax-a-1=a(x-1)-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ -1)$을 지나는 직선이다. ⋯ ❶

함수 $f(x)$가 정의되려면

$-3\leq f(0)\leq 2,\ -3\leq f(2)\leq 2$ ⋯ ❷

$-3\leq -a-1\leq 2$에서

$-3\leq a\leq 2$ ⋯⋯ ㉠

일품 BOX

유리함수의 그래프는 함수의 식을 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하여 생각한다.

$-a>0,\ b<0$이므로 $a<0,\ b<0$

$x=0$을 $y=\frac{bx+c}{x+a}$에 대입하면 $y=\frac{0+c}{0+a}=\frac{c}{a}$

음수의 제곱근의 성질

① $a<0,\ b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

② $a>0,\ b<0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

$a<0,\ b<0$이므로 $-\frac{b}{a}<0$

$-3\le a-1\le 2$에서

$-2\le a\le 3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-2\le a\le 2$ ··· ❸

답 $-2\le a\le 2$

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1,-1)$을 지나는 직선임을 알 수 있다.	30 %
❷ 함수 $f(x)$가 정의되기 위한 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

17 전략 일대일대응의 정의를 이용한다.

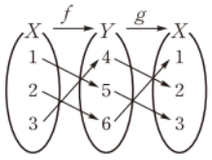
풀이 함수 f가 일대일대응이므로 $f(2)=4$ 또는 $f(2)=6$이다. 이때 $f(2)=4$이면

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(4)=2\neq 1$

이므로 $f(2)=6$, $f(3)=4$

또 $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(6)=1$이므로

$g(5)=3$



따라서 두 함수 f, g는 위의 그림과 같으므로

$(g\circ f)(3)+(f\circ g)(5)=g(f(3))+f(g(5))$

$=g(4)+f(3)$

$=2+4=6$ 답 6

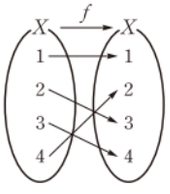
18 전략 함수 f^3이 항등함수임을 이용한다.

풀이 $f^3(1)=f^2(1)=f(1)=1$, $f^3(2)=2$, $f^3(3)=3$, $f^3(4)=4$이므로 f^3은 항등함수이다.

이때 $f(1)=1$, $f(2)=3$이고 f^3이 항등함수이려면 함수 f는

$f(3)=4$, $f(4)=2$

이어야 한다.



$\therefore f^{2017}(2)+f^{2018}(4)$

$=f^{2016}(f(2))+f^{2016}(f^2(4))$

$=f(2)+f^2(4)$

$=3+f(f(4))$

$=3+f(2)$

$=3+3=6$ 답 6

$f^3(1)=f^2(f(1))$
$=f^2(1)$
$=f(f(1))$
$=f(1)$
$=1$

$2016=3\cdot 672$이므로 f^{2016}은 항등함수이다.

19 전략 f의 역함수 f^{-1}에 대하여 $f^{-1}(a)=b$이면 $f(b)=a$임을 이용한다.

풀이 $(h\circ f)(x)=g^{-1}(x)$에서

$h(f(x))=g^{-1}(x)$

$\therefore h(2x-5)=g^{-1}(x)$ …… ㉠

$2x-5=3$에서 $x=4$이므로 ㉠에 $x=4$를 대입하면

$h(3)=g^{-1}(4)$

$g^{-1}(4)=k$라 하면 $g(k)=4$

$-\frac{1}{2}k+5=4$, $-\frac{1}{2}k=-1$

$\therefore k=2$

$\therefore h(3)=2$ 답 2

20 전략 주어진 식을 간단히 하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\frac{x^2-3xy-7y^2}{x^2-3xy-5y^2}=3$에서

$x^2-3xy-7y^2=3(x^2-3xy-5y^2)$

$x^2-3xy-7y^2=3x^2-9xy-15y^2$

$2x^2-6xy-8y^2=0$, $x^2-3xy-4y^2=0$

$\therefore (x+y)(x-4y)=0$ ··· ❶

(i) $x=-y$일 때,

$xy=(-y)\cdot y=-y^2<0$ ($\because y\neq 0$)

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x=4y$일 때,

$xy=4y\cdot y=4y^2>0$ ($\because y\neq 0$)

따라서 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $x=4y$ ··· ❷

$\therefore \frac{2x+7y}{2x-5y}=\frac{8y+7y}{8y-5y}$

$=\frac{15y}{3y}=5$ ($\because y\neq 0$) ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ x, y 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

21 전략 $f(-2)=-6$, $f(-6)=-2$임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(-2)=-6$이므로

$\frac{-2a+b}{-2+4}=-6$

$\therefore -2a+b=-12$ …… ㉠

또 조건 (가)에서 $f^{-1}(-2)=-6$이므로

$f(-6)=-2$

$\frac{-6a+b}{-6+4}=-2$

$\therefore -6a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=-20$

따라서

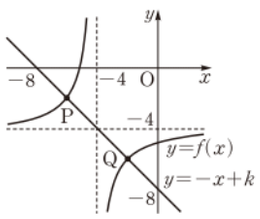
$f(x)=\frac{-4x-20}{x+4}=\frac{-4(x+4)-4}{x+4}$

$=\frac{-4}{x+4}-4$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-4$, $y=-4$이다.

즉 점 $(-4,\ -4)$가 두 점근선의 교점이므로 $\overline{PQ}$의 길이가 최소일 때의 두 점 P, Q는 오른쪽 그림과 같다.



이때 직선 $y=-x+k$는 점 $(-4,\ -4)$를 지나므로

$-4=4+k \qquad \therefore k=-8$

답 -8

22 전략 합성함수 f^n의 규칙성을 찾는다.

풀이 $f^1(x)=f(x)=\dfrac{x-1}{x}$

$$f^2(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}$$

$$=\frac{\frac{x-1-x}{x}}{\frac{x-1}{x}}=-\frac{1}{x-1}$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=f\left(-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{-\frac{1}{x-1}-1}{-\frac{1}{x-1}}$$

$$=\frac{\frac{-1-x+1}{x-1}}{\frac{-1}{x-1}}=x$$

$\vdots$

$\therefore f^{3n-2}(x)=\dfrac{x-1}{x},\ f^{3n-1}(x)=-\dfrac{1}{x-1},$

$f^{3n}(x)=x$ (단, n은 자연수)

이때 $2014=3\cdot672-2$이므로 $\quad f^{2014}(x)=\dfrac{x-1}{x}$

$\therefore f^{2014}(12)=\dfrac{11}{12}$

답 $\dfrac{11}{12}$

23 전략 (소금물의 농도)$=\dfrac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times100$ (%)임을 이용한다.

풀이 (소금물의 농도)$=\dfrac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times100$ (%)이므로

$$y=\frac{\frac{20}{100}\times1+\frac{30}{100}\times x}{x+1}\times100$$

$$=\frac{30x+20}{x+1}=\frac{30(x+1)-10}{x+1}$$

$$=-\frac{10}{x+1}+30\ (x\geq0) \quad \cdots ❶$$

따라서 점근선의 방정식은 $\quad y=30$

$\therefore m=30 \quad \cdots ❷$

$x=9$일 때, $y=-\dfrac{10}{10}+30=29$이므로 그래프는 점 $(9,\ 29)$를 지난다.

$\therefore n=29 \quad \cdots ❸$

$\therefore m+n=59 \quad \cdots ❹$

답 59

일품 BOX

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-ab$

$=\dfrac{1}{4}(a+b)^2-ab$

$=\dfrac{1}{4}\{(a+b)^2-4ab\}$

$=\dfrac{1}{4}(a-b)^2$

$=\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

$\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}$

$=\dfrac{AD}{BC}$

항등함수

함수 $f: X\longrightarrow X$에서 정의역의 원소 x에 대하여 $f(x)=x$인 함수

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때, $d=r$이면 원과 직선은 접한다.

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 $y=f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ m의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	10%

24 전략 $a=(\sqrt{2}+1)^n$, $b=(\sqrt{2}-1)^n$으로 놓고 $\sqrt{x}$, $\sqrt{x-1}$을 각각 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a=(\sqrt{2}+1)^n$, $b=(\sqrt{2}-1)^n$으로 놓으면 $a>0$, $b>0$이므로

$$\sqrt{x}=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=\frac{a+b}{2} \quad \cdots ❶$$

또 $ab=\{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\}^n=1^n=1$이므로

$$\sqrt{x-1}=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-1}=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\frac{|a-b|}{2}$$

$$=\frac{a-b}{2}\ (\because a>b) \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \sqrt{x}+\sqrt{x-1}=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a$$

$$=(\sqrt{2}+1)^n \quad \cdots ❸$$

답 $(\sqrt{2}+1)^n$

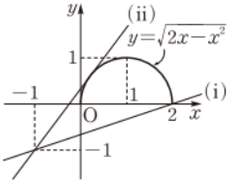
채점 기준	비율
❶ $\sqrt{x}$를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $\sqrt{x-1}$을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$의 값을 구할 수 있다.	20%

25 전략 직선 $y=mx+m-1$이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 이용한다.

풀이 $y=\sqrt{2x-x^2}$에서

$y^2=2x-x^2$

즉 $(x-1)^2+y^2=1\ (y\geq0)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선



$y=mx+m-1$

$=m(x+1)-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ -1)$을 지난다.

(i) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$3m-1=0$에서 $\quad m=\dfrac{1}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 $y=\sqrt{2x-x^2}$의 그래프에 접할 때,

반원의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 $mx-y+m-1=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \qquad |2m-1|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$4m^2-4m+1=m^2+1, \qquad 3m^2-4m=0$

$m(3m-4)=0$

이때 $m>0$이므로 $m=\frac{4}{3}$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$\frac{1}{3}\le m\le\frac{4}{3}$ 답 $\frac{1}{3}\le m\le\frac{4}{3}$

26 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 교점이 (a, a)로 같음을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서

$f(x)=\frac{k}{x-a}+a$, $g(x)=\frac{l}{x-a}+a$ $(k\neq0,\ l\neq0)$

로 놓으면

$f(x)+g(x)=\left(\frac{k}{x-a}+a\right)+\left(\frac{l}{x-a}+a\right)$

$=\frac{k+l}{x-a}+2a$

이때 조건 (나)에서 $k+l=0$이므로

$l=-k$

따라서 $g(x)=\frac{-k}{x-a}+a$에서

$f(g(x))=f\left(\frac{-k}{x-a}+a\right)=\frac{k}{\frac{-k}{x-a}+a-a}+a$

$=-x+2a$

이고, 조건 (다)에서 $y=f(g(x))$의 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4=2a$ $\therefore a=2$

즉 $f(x)=\frac{k}{x-2}+2$이고 $f(0)=4$이므로

$4=\frac{k}{-2}+2$ $\therefore k=-4$

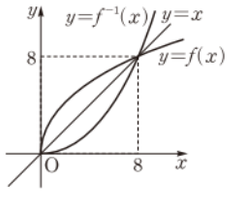
$\therefore l=4$

따라서 $g(x)=\frac{4}{x-2}+2$이므로

$g(3)=\frac{4}{3-2}+2=6$ 답 6

27 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$\sqrt{8x}=x$에서

$8x=x^2$, $x(x-8)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=8$

따라서 도형의 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이고 직선 $y=x$ 위에 있는 점은

$(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, …, $(7,\ 7)$의 7개

이고, 직선 $y=x$보다 위에 있는 점은

$f(1)=\sqrt{8}<3$에서 $(1,\ 2)$

$f(2)=\sqrt{16}=4$에서 $(2,\ 3)$

$f(3)=\sqrt{24}<5$에서 $(3,\ 4)$

$f(4)=\sqrt{32}<6$에서 $(4,\ 5)$

$f(5)=\sqrt{40}<7$에서 $(5,\ 6)$

의 5개이다.

이때 도형의 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이고 직선 $y=x$보다 아래에 있는 점의 개수는 직선 $y=x$보다 위에 있는 점의 개수와 같으므로 구하는 점의 개수는

$7+2\cdot5=17$ 답 17

일품 BOX

$f(6)=\sqrt{48}<7$이고, $f(7)=\sqrt{56}<8$이므로 x좌표가 6 또는 7일 때는 존재하지 않는다.

함수 g가 정의되려면 집합 $Y-Y'$의 원소에 0 또는 1이 대응되어야 함에 주의한다.

최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 68쪽

01

해결 단계

❶ 함수 f의 개수를 구한다.
❷ $Y'=\{f(1),\ f(2),\ f(3)\}$이라 하고 Y'에서 Z로의 함수의 개수를 이용하여 함수 g의 개수를 구한다.
❸ ❶, ❷의 함수의 개수를 이용하여 순서쌍 $(f,\ g)$의 개수를 구한다.

풀이 ❶ (i) $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 3개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 2개

따라서 함수 f의 개수는

$4\cdot3\cdot2=24$

❷ (ii) $Y'=\{f(1),\ f(2),\ f(3)\}$이라 하면 Y'에서 Z로의 함수의 개수는

$2\cdot2\cdot2=8$

그런데 합성함수 $g\circ f$의 치역이 Z가 되려면 Y'에서 Z로의 함수 중 치역이 $\{0\}$ 또는 $\{1\}$인 함수 2개는 제외되어야 한다.

또 집합 $Y-Y'$의 원소에는 0 또는 1이 대응된다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 g의 개수는

$(8-2)\cdot2=12$

❸ (i), (ii)에서 순서쌍 $(f,\ g)$의 개수는

$24\cdot12=288$ 답 ⑤

참고 ① 합성함수 $g\circ f$의 정의역은 f의 정의역 X와 같고 $g\circ f$의 공역은 g의 공역 Z와 같다.

② 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합일 때만 합성함수 $g\circ f$가 정의된다.

02

해결 단계

❶ 조건 (가)를 이용하여 $f(0)$의 값을 구한다.
❷ 조건 (가), (나)를 이용하여 함수 f의 치역을 구한다.
❸ ❷의 각 경우에 대하여 함수 f의 개수를 구한다.
❹ 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구한다.

ⓒ좋은책신사고

일품 BOX

풀이 ❶ 조건 (가)에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+f(0)=0 \quad \therefore f(0)=0$

❷ 또 조건 (가)에서 $f(-x)=-f(x)$이므로

$f(-3)=-f(3)$, $f(-2)=-f(2)$,

$f(-1)=-f(1)$

따라서 조건 (나)에서 함수 f의 치역은

$\{-3, 0, 3\}$ 또는 $\{-2, 0, 2\}$ 또는 $\{-1, 0, 1\}$

이다.

$f(a)=-3$이면 $f(-a)=-f(a)=3$이므로 -3이 치역에 포함되면 3도 반드시 포함되어야 한다.

❸ (i) 치역이 $\{-3, 0, 3\}$인 경우

ⓘ $f(-3)=-3$, $f(3)=3$

또는 $f(-3)=3$, $f(3)=-3$일 때, 순서쌍

$(f(-2), f(2), f(-1), f(1))$은

$(0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, -3, 3)$,

$(0, 0, 3, -3)$, $(-3, 3, 0, 0)$,

$(-3, 3, -3, 3)$, $(-3, 3, 3, -3)$,

$(3, -3, 0, 0)$, $(3, -3, -3, 3)$,

$(3, -3, 3, -3)$의 9개

ⓘⓘ $f(-3)=f(3)=0$일 때, 순서쌍

$(f(-2), f(2), f(-1), f(1))$은

$(0, 0, -3, 3)$, $(0, 0, 3, -3)$,

$(-3, 3, 0, 0)$, $(-3, 3, -3, 3)$,

$(-3, 3, 3, -3)$, $(3, -3, 0, 0)$,

$(3, -3, -3, 3)$, $(3, -3, 3, -3)$의 8개

ⓘ, ⓘⓘ에서 함수 f의 개수는

$2 \cdot 9+8=26$

(ii) 치역이 $\{-2, 0, 2\}$, $\{-1, 0, 1\}$인 경우도 마찬가지이므로 함수 f의 개수는 각각 26이다.

❹ (i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$26+26+26=78$ 답 78

03

해결 단계

❶ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 각각 $y=\sqrt{a(x+p)}+q$ 꼴로 변형하여 두 함수의 그래프를 그린다.

❷ 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 평행이동과 대칭이동에 의하여 서로 겹쳐짐을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

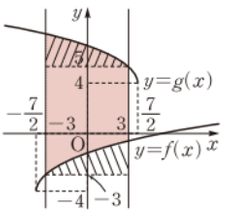
풀이 ❶ $f(x)=\sqrt{2x+7}-4$

$=\sqrt{2\left(x+\frac{7}{2}\right)}-4$

$g(x)=\sqrt{-2x+7}+4$

$=\sqrt{-2\left(x-\frac{7}{2}\right)}+4$

이므로 구하는 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같다.



❷ 이때 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 도형의 넓이는

$6 \cdot 8=48$ 답 ①

가로의 길이가 $3-(-3)=6$, 세로의 길이가 $5-(-3)=8$인 직사각형의 넓이

04

해결 단계

❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

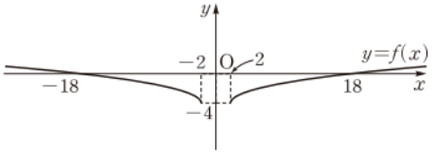
❷ $f(f(x))=k$일 때, $f(x)=t\,(t \geq -4)$라 하면 $f(t)=k$임을 구한다.

❸ $k=-4$, -2, 0일 때, $g(k)$의 값을 구한다.

❹ $g(-4)+g(-2)+g(0)$의 값을 구한다.

풀이 ❶ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x-2}-4 & (x \leq -2)\\ \sqrt{x-2}-4 & (x \geq 2)\end{cases}$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



❷ 이때 $f(f(x))=k$에서 $f(x)=t\,(t \geq -4)$라 하면

$f(t)=k$

❸ (i) $k=-4$일 때, $f(t)=-4$에서

$t=-2$ 또는 $t=2$

이때 $f(x)=-2$, $f(x)=2$를 만족시키는 x의 값은 각각 2개씩 존재하므로

$g(-4)=4$

(ii) $k=-2$일 때, $f(t)=-2$에서

$\sqrt{-t-2}-4=-2$ 또는 $\sqrt{t-2}-4=-2$

$\therefore t=6 \ (\because t \geq -4)$

이때 $f(x)=6$을 만족시키는 x의 값은 2개이므로

$g(-2)=2$

(iii) $k=0$일 때, $f(t)=0$에서

$\sqrt{-t-2}-4=0$ 또는 $\sqrt{t-2}-4=0$

$\therefore t=18 \ (\because t \geq -4)$

이때 $f(x)=18$을 만족시키는 x의 값은 2개이므로

$g(0)=2$

❹ 이상에서

$g(-4)+g(-2)+g(0)=4+2+2=8$ 답 8

Ⅶ 순열과 조합

18 순열

개념&핵심 기출 본책 70~71쪽

01 뽑힌 카드에 적힌 세 수를 x, y, z라 하면 평균이 4 또는 5가 되는 경우는

$\frac{x+y+z}{3}=4$ 또는 $\frac{x+y+z}{3}=5$

$\therefore x+y+z=12$ 또는 $x+y+z=15$

(i) 세 수의 합이 12인 경우

3, 4, 5의 1가지

(ii) 세 수의 합이 15인 경우

3, 4, 8 또는 3, 5, 7 또는 4, 5, 6의 3가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $1+3=4$ 답 4

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없다.
➡ 합의 법칙 이용

02 (i) $a<b$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
$(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4),$
$(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)$
의 15개

(ii) $ab<6$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5),$
$(2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1), (5, 1)$
의 10개

(iii) $a<b$, $ab<6$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$의 4개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$15+10-4=21$ 답 ④

03 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 $D=b^2-4ac\geq 0$이어야 한다.

(i) $b=2$일 때, 순서쌍 (a, c)는

$(1, 1)$의 1개

(ii) $b=3$일 때, 순서쌍 (a, c)는

$(1, 1), (1, 2), (2, 1)$의 3개

(iii) $b=4$일 때, 순서쌍 (a, c)는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1),$
$(2, 2), (3, 1), (4, 1)$의 8개

(iv) $b=5$일 때, 순서쌍 (a, c)는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5),$
$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2),$
$(4, 1), (5, 1)$의 12개

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$1+3+8+12=24$ 답 ④

참고 $b=1$일 때, $1-4ac\geq 0$, 즉 $ac\leq\frac{1}{4}$을 만족시키는 순서쌍 (a, c)는 존재하지 않는다.

04 (i) 갑이 B지점, 을이 C지점을 지날 때,

갑이 A → B → D로 가는 방법의 수는

$1\cdot 4=4$

을이 A → C → D로 가는 방법의 수는

$2\cdot 3=6$

따라서 방법의 수는 $4\cdot 6=24$

(ii) 갑이 C지점, 을이 B지점을 지날 때,

갑이 A → C → D로 가는 방법의 수는

$2\cdot 3=6$

을이 A → B → D로 가는 방법의 수는

$1\cdot 4=4$

따라서 방법의 수는 $6\cdot 4=24$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$24+24=48$ 답 48

05 (i) 2□□ 꼴의 짝수

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 4, 6, 8의 4가지,
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 8가지이므로

$4\cdot 8=32$

(ii) 3□□ 꼴의 짝수

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지,
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 8가지이므로

$5\cdot 8=40$

(iii) 4□□ 꼴의 짝수

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 6, 8의 4가지,
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 8가지이므로

$4\cdot 8=32$

이상에서 구하는 수의 개수는

$32+40+32=104$ 답 ③

0, 1, 2, …, 9의 10개의 숫자 중 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 숫자

06 A도시에 칠할 수 있는 색은 4가지, D도시에 칠할 수 있는 색은 A도시에 칠한 색을 제외한 3가지, B도시에 칠할 수 있는 색은 A도시와 D도시에 칠한 색을 제외한 2가지, C도시에 칠할 수 있는 색은 B도시와 D도시에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$4\cdot 3\cdot 2\cdot 2=48$ 답 48

07 ${}_nP_3=3\cdot{}_nP_2+21\cdot{}_nP_1$에서

$n(n-1)(n-2)=3n(n-1)+21n$

${}_nP_3$에서 $n\geq 3$이므로 양변을 n으로 나누어 정리하면

$n^2-6n-16=0$, $(n+2)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because n\geq 3$) 답 8

08 ${}_{n+1}P_3+{}_{n-1}P_2$

$=(n+1)n(n-1)+(n-1)(n-2)$

$=n^3+n^2-4n+2$

이므로 $n^3+n^2-4n+2=66$

$n^3+n^2-4n-64=0$

$(n-4)(n^2+5n+16)=0$

$\therefore n=4$ ($\because n^2+5n+16>0$) 답 4

$f(n)=n^3+n^2-4n-64$라 하면 $f(4)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(n)$을 인수분해하면

4	1	1	−4	−64
		4	20	64
	1	5	16	0

$\therefore f(n)=(n-4)(n^2+5n+16)$

1등급 비밀노트

삼차방정식 $f(x)=0$에서 $f(x)$의 인수분해

다항식 $f(x)$에서 $f(a)=0$이면 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 가지므로 $f(a)=0$을 만족시키는 a의 값을 찾아 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

09 ${}_nP_{r+1}+(r+1){}_nP_r$

$=\dfrac{n!}{(n-r-1)!}+(r+1)\cdot\dfrac{n!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{(n-r)n!}{(n-r)(n-r-1)!}+(r+1)\cdot\dfrac{n!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{(\boxed{n-r})n!}{(n-r)!}+\dfrac{(r+1)n!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{n!(n-r+r+1)}{(n-r)!}=\dfrac{(n+1)!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{(n+1)!}{\{(n+1)-(r+1)\}!}$

$=\boxed{{}_{n+1}P_{r+1}}$

∴ (가) ${}_{n+1}P_{r+1}$ (나) $n-r$ 답 ⑤

10 7개의 문자 중 모음은 A, E이고, 자음은 B, C, D, F, G이다.

양 끝에 5개의 자음 중 두 개의 문자를 나열하는 방법의 수는

${}_5P_2=20$

2개의 모음을 한 묶음으로 생각하여 이 묶음과 3개의 자음을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

이때 A와 E가 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$20\cdot24\cdot2=960$ 답 ⑤

11 남학생 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$4!=24$

남학생 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리 중 3개의 자리에 여학생 3명을 세우는 방법의 수는

${}_5P_3=60$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot60=1440$ 답 1440

12 i와 o 사이에 i와 o를 제외한 나머지 7개의 문자 중 3개의 문자를 택하여 나열하는 방법의 수는

${}_7P_3=210$

i, o와 그 사이의 3개의 문자를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$5!=120$

이때 i와 o가 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$210\cdot120\cdot2=50400$ 답 ⑤

일품 BOX

서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 방법의 수 ➡ $n!$

남학생을 ○라 하면 ∨○∨○∨○∨○∨

자연수 n에 대하여 $2n-1>2b>3c$를 만족시키는 순서쌍 (b, c)와 $2n>2b>3c$를 만족시키는 순서쌍 (b, c)는 같다.

1등급을 위한 고난도 문제

본책 72~73쪽

01 원 $(x-a)^2+y^2=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$의 중심 $(a, 0)$과 직선 $x=3$ 사이의 거리는 $|a-3|$이고, 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{b}{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$|a-3|>\dfrac{b}{2}$

이어야 한다.

(i) $a=1$일 때,

$|1-3|>\dfrac{b}{2}$, 즉 $b<4$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$의 3개

(ii) $a=2$일 때,

$|2-3|>\dfrac{b}{2}$, 즉 $b<2$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$의 1개

(iii) $a=3$일 때,

$|3-3|>\dfrac{b}{2}$, 즉 $b<0$이므로 순서쌍 (a, b)는 존재하지 않는다.

(iv) $a=4$일 때,

$|4-3|>\dfrac{b}{2}$, 즉 $b<2$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(4, 1)$의 1개

(v) $a=5$일 때,

$|5-3|>\dfrac{b}{2}$, 즉 $b<4$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$의 3개

(vi) $a=6$일 때,

$|6-3|>\dfrac{b}{2}$, 즉 $b<6$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$의 5개

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3+1+0+1+3+5=13$ 답 ③

02 (i) $a=0$, 1, 2일 때, $a>2b>3c$를 만족시키는 순서쌍 (b, c)는 존재하지 않는다.

(ii) $a=3$, 4일 때, $a>2b>3c$를 만족시키는 순서쌍 (b, c)는

$(1, 0)$의 1개

(iii) $a=5$, 6일 때, $a>2b>3c$를 만족시키는 순서쌍 (b, c)는

$(1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$의 3개

(iv) $a=7$, 8일 때, $a>2b>3c$를 만족시키는 순서쌍 (b, c)는

$(1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$의 5개

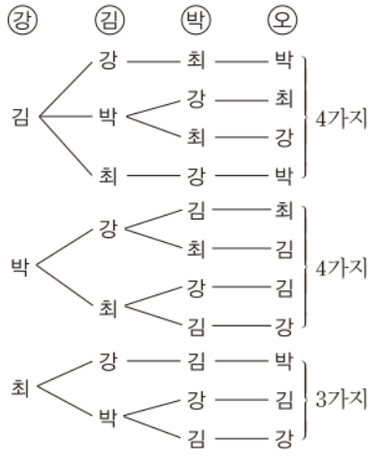
(v) $a=9$일 때, $a>2b>3c$를 만족시키는 순서쌍 (b, c)는

$(1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$의 8개

이상에서 주어진 집합의 원소의 개수는

$2\cdot1+2\cdot3+2\cdot5+8=26$ 답 26

03 남자 4명에 대하여 여자 4명을 짝으로 정하는 방법은 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는

$4+4+3=11$ 답 11

1등급 비밀노트

n번째에는 n이 오지 않도록 배열하는 경우의 수는 수형도를 이용한다.

04 천의 자리에는 0이 올 수 없고, 조건 (나)에서 일의 자리에는 0 또는 5가 올 수 없으므로 조건 (가), (나)를 만족시키는 네 자리 자연수의 개수는

$5\cdot6\cdot6\cdot4=720$

이 중에서 일의 자리의 숫자와 천의 자리의 숫자를 곱한 수가 홀수인 네 자리 자연수의 개수는

$3\cdot6\cdot6\cdot2=216$

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$720-216=504$ 답 504

05 $n=2^x3^y$이라 하면 n의 양의 약수의 개수는 $(x+1)(y+1)$

즉 $(x+1)(y+1)=20$이므로 등식을 만족시키는 각 경우는 다음 표와 같다.

$x+1$	1	2	4	5	10	20
$y+1$	20	10	5	4	2	1

따라서 자연수 n의 개수는 6이다. 답 ③

1등급 비밀노트

양의 약수의 개수

자연수 N이 $N=p^lq^m$(p, q는 서로 다른 소수, l, m은 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 개수는

$(l+1)(m+1)$

06 abc가 홀수이면 a, b, c가 모두 홀수이므로 $a+b+c$도 홀수가 되어 $abc+a+b+c$는 짝수이다.

일품 BOX

각각의 순서쌍에 대하여 $100a+10b+c$의 값은 서로 다르므로 집합의 원소의 개수는 순서쌍의 개수와 같다.

2^x의 양의 약수의 개수는 $2^0, 2^1, \cdots, 2^x$의 $x+1$

3^y의 양의 약수의 개수는 $3^0, 3^1, \cdots, 3^y$의 $y+1$

조건을 만족시키는 자연수 n은 2^03^{19}, 2^13^9, 2^33^4, 2^43^3, 2^83^1, $2^{19}3^0$의 6개

즉 $abc+a+b+c$가 홀수가 되려면 abc는 짝수, $a+b+c$는 홀수이어야 한다.

따라서 a, b, c 중 한 개는 홀수, 나머지 두 개는 짝수이어야 하므로 조건을 만족시키는 경우는 순서쌍 (a, b, c)가

(홀수, 짝수, 짝수), (짝수, 홀수, 짝수),

(짝수, 짝수, 홀수)

인 경우이다. ··· ❶

이때 위의 각 경우의 눈이 나오는 경우의 수는

$3\cdot3\cdot3=27$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$27\cdot3=81$ ··· ❸

답 81

채점 기준	비율
❶ $abc+a+b+c$의 값이 홀수가 되는 순서쌍 (a, b, c)의 경우를 생각할 수 있다.	40%
❷ ❶의 각 경우의 눈이 나오는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ $abc+a+b+c$의 값이 홀수가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%

1등급 비밀노트

네 수의 합이 홀수가 되려면 네 수 중 한 개 또는 세 개가 홀수이어야 하므로 a, b, c, abc 중 한 개 또는 세 개가 홀수가 되는 경우를 구하면 다음과 같다.

(i) a, b, c 중 한 개의 수가 홀수이면 abc는 짝수

➡ a, b, c, abc 중 한 개의 수가 홀수이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) a, b, c 중 두 개의 수가 홀수이면 abc는 짝수

➡ a, b, c, abc 중 두 개의 수가 홀수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

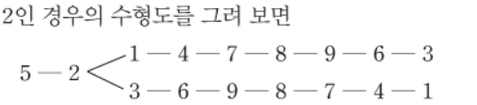
(iii) a, b, c 모두 홀수이면 abc는 홀수

➡ a, b, c, abc 네 개의 수가 모두 홀수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 조건을 만족시키는 경우는 a, b, c 중 한 개는 홀수, 나머지 두 개는 짝수인 경우이다.

07 (i) 첫 번째 카드로 2, 4, 6, 8을 선택한 경우 9장의 카드를 모두 가져오는 방법은 없다. ··· ❶

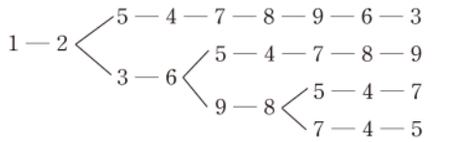
(ii) 첫 번째 카드로 5를 선택한 경우 두 번째 카드를 선택하는 방법은 2, 4, 6, 8의 4가지가 있고, 두 번째 카드가 2인 경우의 수형도를 그려 보면



의 2가지가 있다. 두 번째 카드가 4, 6, 8인 경우도 마찬가지이므로 9장의 카드를 모두 가져오는 방법의 수는

$4\cdot2=8$ ··· ❷

(iii) 첫 번째 카드로 1, 3, 7, 9를 선택한 경우 두 번째 카드를 선택하는 방법은 2가지가 있고, 첫 번째 카드가 1, 두 번째 카드가 2인 경우의 수형도를 그려 보면



ⓒ좋은책신사고

의 4가지가 있다. 첫 번째 카드가 3, 7, 9인 경우도 마찬가지이므로 9장의 카드를 모두 가져오는 방법의 수는

$4\cdot2\cdot4=32$ ···· ❸

이상에서 구하는 방법의 수는

$8+32=40$ ···· ❹

답 40

채점 기준	비율
❶ 첫 번째 카드로 2, 4, 6, 8을 선택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 첫 번째 카드로 5를 선택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 첫 번째 카드로 1, 3, 7, 9를 선택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 9장의 카드를 모두 가져오는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

08 $f(a)f(b)f(c)<0$을 만족시키려면 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 값이 모두 음수이거나 한 개는 음수, 두 개는 양수이어야 한다.

(i) $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 값이 모두 음수인 경우

$f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 각각 -3, -2, -1의 3개이므로 함수 f의 개수는

$3\cdot3\cdot3=27$

(ii) $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 값이 한 개는 음수, 두 개는 양수인 경우

$f(a)$가 음수일 때, $f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 -3, -2, -1의 3개이고, $f(b)$, $f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 각각 1, 2의 2개이므로 함수 f의 개수는

$3\cdot2\cdot2=12$

$f(b)$ 또는 $f(c)$의 값이 음수인 경우도 마찬가지이므로 함수 f의 개수는

$12\cdot3=36$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$27+36=63$ 답 ④

09 $n\cdot{}_{12}\mathrm{P}_m<{}_{12}\mathrm{P}_{m+2}$에서

$$n\cdot\frac{12!}{(12-m)!}<\frac{12!}{(10-m)!}$$

$n<(12-m)(11-m)$ ····· ㉠

이때 부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 m의 개수가 4이려면 m은 1, 2, 3, 4이어야 한다.

$m=4$일 때 $n<(12-4)(11-4)$에서

$n<56$

$m=5$일 때 $n\geq(12-5)(11-5)$에서

$n\geq42$

따라서 n의 값의 범위는

$42\leq n<56$

이므로 n의 최댓값과 최솟값의 합은

$55+42=97$ 답 ④

10 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

${}_5\mathrm{P}_3=5\cdot4\cdot3=60$

60개의 자연수 중에서 백의 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5인 자연수가 각각 12개씩이므로 백의 자리의 합은

$(1+2+3+4+5)\cdot12\cdot100=18000$

60개의 자연수 중에서 십의 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5인 자연수가 각각 12개씩이므로 십의 자리의 합은

$(1+2+3+4+5)\cdot12\cdot10=1800$

60개의 자연수 중에서 일의 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5인 자연수가 각각 12개씩이므로 일의 자리의 합은

$(1+2+3+4+5)\cdot12=180$

따라서 구하는 자연수의 총합은

$18000+1800+180=19980$ 답 ①

11 1학년 학생 3명은 각각 서로 다른 조에 속해야 하므로 이 3개의 조에 2학년 학생 1명씩과 3학년 학생 1명씩을 각각 배정하고 남은 2명이 1개의 조를 이루면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_3\cdot{}_4\mathrm{P}_3=24\cdot24=576$ 답 ④

다른 풀이 2명으로 이루어진 조에 들어갈 2학년 학생 1명과 3학년 학생 1명을 택하는 경우의 수는

$4\cdot4=16$

1학년 학생이 1명씩 속한 3개의 조에 2학년 학생 1명씩과 3학년 학생 1명씩을 각각 배정하는 경우의 수는

$3!\cdot3!=36$

따라서 구하는 경우의 수는 $16\cdot36=576$

12 학생 10명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$10!$ ···· ❶

양 끝에 1학년 학생 2명을 세우는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2\cdot8!$

양 끝에 2학년 학생 2명을 세우는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2\cdot8!$

양 끝에 3학년 학생 2명을 세우는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2\cdot8!$ ···· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$10!-{}_3\mathrm{P}_2\cdot8!-{}_3\mathrm{P}_2\cdot8!-{}_4\mathrm{P}_2\cdot8!$

$=(90-6-6-12)\cdot8!$

$=66\cdot8!$ ···· ❸

$\therefore a=66$ ···· ❹

답 66

채점 기준	비율
❶ 학생 10명을 일렬로 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 양 끝에 선 두 학생의 학년이 같은 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 양 끝에 선 두 학생의 학년이 서로 다른 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 양 끝에 1학년 학생과 2학년 학생을 세우는 경우의 수는

$2\cdot{}_3\mathrm{P}_1\cdot{}_3\mathrm{P}_1\cdot8!=18\cdot8!$

양 끝에 1학년 학생과 3학년 학생을 세우는 경우의 수는

$2\cdot{}_3\mathrm{P}_1\cdot{}_4\mathrm{P}_1\cdot8!=24\cdot8!$

일품 BOX

백의 자리의 합이므로 자리의 값을 곱하는 것을 빠뜨리지 않도록 한다.

남은 2명은 2학년 학생 1명과 3학년 학생 1명이므로 같은 조에 속할 수 있다.

3명으로 이루어진 조에는 1학년 학생 1명, 2학년 학생 1명, 3학년 학생 1명씩이 속해야 하므로 2명으로 이루어진 조에는 2학년 학생 1명과 3학년 학생 1명이 속해야 한다.

$m=k$가 부등식 ㉠을 만족시키면 $m<k$인 자연수 m에 대하여

$(12-m)(11-m)>(12-k)(11-k)$

이므로 $m=1, 2, 3, \cdots, k-1$도 부등식 ㉠을 만족시킨다.

양 끝에 2학년 학생과 3학년 학생을 세우는 경우의 수는
$2\cdot {}_3\mathrm{P}_1\cdot {}_4\mathrm{P}_1\cdot 8!=24\cdot 8!$
따라서 구하는 경우의 수는
$18\cdot 8!+24\cdot 8!+24\cdot 8!=(18+24+24)\cdot 8!=66\cdot 8!$
$\therefore a=66$

13 6개의 좌석을 왼쪽부터 차례대로 a, b, c, d, e, f라 하자.
할아버지, 아버지, 아들이 서로 이웃하지 않게 앉으려면 3명은
a, c, e 또는 a, c, f 또는 a, d, f 또는 b, d, f
에 앉아야 한다.
(i) a, c, e에 앉는 경우
어머니와 딸이 항상 서로 이웃하지 않게 되므로 방법의 수는
$3!\cdot 3!=36$
(ii) a, c, f에 앉는 경우
어머니와 딸 중 1명은 b에 앉아야 하므로 방법의 수는
$3!\cdot 2\cdot 2=24$
(iii) a, d, f에 앉는 경우
어머니와 딸 중 1명은 e에 앉아야 하므로 방법의 수는
$3!\cdot 2\cdot 2=24$
(iv) b, d, f에 앉는 경우
어머니와 딸이 항상 서로 이웃하지 않게 되므로 방법의 수는
$3!\cdot 3!=36$
이상에서 구하는 방법의 수는
$36+24+24+36=120$ 답 120

14 각 자리의 숫자는 차례대로 홀수, 짝수, 홀수, 짝수, 홀수 또는 짝수, 홀수, 짝수, 홀수, 짝수이어야 한다.
(i) 홀수, 짝수, 홀수, 짝수, 홀수인 경우
1, 3, 5, 7, 9의 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 만의 자리, 백의 자리, 일의 자리에 나열하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{P}_3=60$
2, 4, 6, 8의 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 천의 자리와 십의 자리에 나열하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{P}_2=12$
따라서 자연수의 개수는
$60\cdot 12=720$ ⋯› ❶
(ii) 짝수, 홀수, 짝수, 홀수, 짝수인 경우
2, 4, 6, 8의 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 만의 자리, 백의 자리, 일의 자리에 나열하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{P}_3=24$
1, 3, 5, 7, 9의 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 천의 자리와 십의 자리에 나열하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{P}_2=20$
따라서 자연수의 개수는
$24\cdot 20=480$ ⋯› ❷
(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는
$720+480=1200$ ⋯› ❸
답 1200

채점 기준	비율
❶ 각 자리의 숫자가 차례대로 홀수, 짝수, 홀수, 짝수, 홀수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 각 자리의 숫자가 차례대로 짝수, 홀수, 짝수, 홀수, 짝수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

15 3의 배수인 3, 6, 9를 한 묶음으로 생각하여 A라 하자.
1, 2, 5, 7, A를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5!$
이때 1, 2, 5, 7, A의 5개의 사이사이 및 양 끝의 6개의 자리 중 2개의 자리에 4의 배수인 4, 8을 나열하는 방법의 수는 ${}_6\mathrm{P}_2$
묶음 A 안에서 3, 6, 9를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!$
$\therefore N=5!\cdot {}_6\mathrm{P}_2\cdot 3!$
$=(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\times(6\cdot 5)\times(3\cdot 2\cdot 1)=2^5\cdot 3^3\cdot 5^2$
따라서 N의 약수의 개수는
$(5+1)\cdot(3+1)\cdot(2+1)=72$ 답 ③

일품 BOX
3의 배수인 3, 6, 9와 4의 배수인 4, 8을 제외한 수
할아버지, 아버지, 아들이 자리를 바꾸는 방법의 수 $3!$
나머지 가족이 자리를 바꾸는 방법의 수 $3!$
할아버지, 아버지, 아들이 자리를 바꾸는 방법의 수 $3!$
어머니와 딸 중 b에 앉을 사람을 정하는 방법의 수 2
d, e에 앉는 두 사람이 자리를 바꾸는 방법의 수 2

사고력 강화를 위한 수능형 문제 본책 74쪽

01 (i) $c=1$일 때,
$a+b>1$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $6\cdot 6=36$
(ii) $c=2$일 때,
$a+b>4$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 전체 순서쌍의 개수에서 $a+b\le 4$를 만족시키는 순서쌍의 개수를 빼면 된다.
이때 $a+b\le 4$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 6개
따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $36-6=30$
(iii) $c=3$일 때,
$a+b>9$이므로 순서쌍 (a, b)는
$(4, 6)$, $(5, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$, $(6, 6)$의 6개
(iv) $c=4$, 5, 6일 때,
$a+b>c^2$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 존재하지 않는다.
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$36+30+6=72$ 답 ②

02 홀수가 아닌 소수는 2뿐이므로 구하는 경우의 수는 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 2 또는 홀수가 되는 경우의 수와 같다.

ⓒ좋은책신사고

(i) 두 수의 곱이 2인 경우
양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수가 1, 2이어야 하므로 경우의 수는
$2!\cdot 7=14$
(ii) 두 수의 곱이 홀수인 경우
양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수가 모두 홀수이어야 하므로 경우의 수는
${}_5P_2\cdot 7=140$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$14+140=154$ 답 ⑤

03 (i) 막대 A에 1개, 막대 B에 5개의 링을 꽂는 경우
6개의 링 중에서 1개를 택하고 남은 5개의 링을 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_6P_1\cdot 5!=720$
(ii) 막대 A에 2개, 막대 B에 4개의 링을 꽂는 경우
6개의 링 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하고 남은 4개의 링을 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_6P_2\cdot 4!=720$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$720+720=1440$ 답 ④

04 (가)에 들어가는 수를 x, (가)를 포함한 가로줄의 칸에 쓴 5개의 수의 합을 y라 하면 가로줄의 수의 합과 세로줄의 수의 합이 같으므로
$2+3+4+5+6+7+8+x=2y$ ····· ㉠
$\therefore y=\frac{35+x}{2}$
이때 ㉠에서 $35+x$는 짝수이므로 x는 홀수이다.
(i) $x=3$일 때
$y=\frac{35+3}{2}=19$에서 두 수의 합이 16인 두 수는 존재하지 않으므로 세로줄을 채울 수 없다.
(ii) $x=5$일 때
$y=\frac{35+5}{2}=20$에서 (가)를 제외한 세로줄의 칸에는 7과 8을, (가)를 제외한 가로줄의 칸에는 2, 3, 4, 6을 쓰면 된다.
세로줄에 7, 8을 써넣는 방법의 수는 $2!=2$
가로줄에 2, 3, 4, 6을 써넣는 방법의 수는 $4!=24$
따라서 이 경우의 방법의 수는 $2\cdot 24=48$
(iii) $x=7$일 때
$y=\frac{35+7}{2}=21$에서 (가)를 제외한 세로줄의 칸에는 6과 8을, (가)를 제외한 가로줄의 칸에는 2, 3, 4, 5를 쓰면 된다.
따라서 이 경우의 방법의 수는 (ii)와 마찬가지로
$2!\cdot 4!=48$
이상에서 구하는 방법의 수는
$48+48=96$ 답 96

일품 BOX

여학생끼리 이웃하지 않고 남학생끼리 이웃한 학생 수가 항상 3명 이상인 경우는 남학생이 3명, 3명, 3명으로 서는 경우뿐이다.

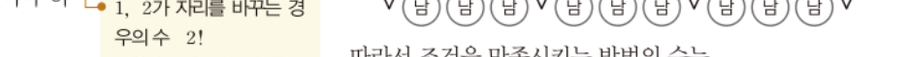
1, 2가 자리를 바꾸는 경우의 수 $2!$
가운데 놓인 카드에 적힌 수의 경우의 수 7

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하는 경우의 수

2y는 짝수이므로 $35+x$도 짝수이다.

세로줄의 나머지 두 수를 a, b라 하면
$a+b+3=19$
$\therefore a+b=16$

05 남학생 9명을 일렬로 세우는 방법의 수는
$9!$
이때 다음 그림과 같이 남학생 9명을 3명씩 묶어서 그 사이사이 및 양 끝의 네 자리에 여학생 4명을 세우는 방법의 수는 $4!$



따라서 조건을 만족시키는 방법의 수는
$9!\cdot 4!$
즉 $a=9$, $b=4$이므로
$a+b=13$ 답 13

06 두 명이 이웃하게 앉는 방법은 다음과 같다.
(A−1, A−2), (A−2, A−3), (A−3, A−4),
(B−1, B−2), (B−2, B−3), (B−3, B−4)
(i) 엄마와 막내아들이
(A−1, A−2) 또는 (A−3, A−4)
또는 (B−1, B−2) 또는 (B−3, B−4)
에 앉는 경우
엄마와 막내아들이 (A−1, A−2)에 앉을 때 할아버지와 할머니가 앉을 수 있는 경우는
(A−3, A−4), (B−1, B−2),
(B−2, B−3), (B−3, B−4)의 4가지
엄마와 막내아들, 할아버지와 할머니가 자리를 바꾸는 방법의 수는 각각 $2!=2$
남은 자리에 나머지 가족 4명이 앉는 방법의 수는
$4!=24$
따라서 이 경우의 방법의 수는
$4\cdot 2\cdot 2\cdot 24=384$
엄마와 막내아들이 (A−3, A−4) 또는 (B−1, B−2) 또는 (B−3, B−4)에 앉을 때도 방법의 수는 동일하므로 $384\cdot 4=1536$
(ii) 엄마와 막내아들이
(A−2, A−3) 또는 (B−2, B−3)
에 앉는 경우
엄마와 막내아들이 (A−2, A−3)에 앉을 때 할아버지와 할머니가 앉을 수 있는 경우는
(B−1, B−2), (B−2, B−3),
(B−3, B−4)의 3가지
엄마와 막내아들, 할아버지와 할머니가 자리를 바꾸는 방법의 수는 각각 $2!=2$
남은 자리에 나머지 가족 4명이 앉는 방법의 수는
$4!=24$
따라서 이 경우의 방법의 수는
$3\cdot 2\cdot 2\cdot 24=288$
엄마와 막내아들이 (B−2, B−3)에 앉을 때도 방법의 수는 동일하므로 $288\cdot 2=576$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$1536+576=2112$ 답 ②

일품 BOX

19 조합

개념&핵심 기출 본책 76쪽

01 $3\cdot {}_nC_3=4\cdot {}_nC_2+18\cdot {}_nC_1$에서

$$3\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=4\cdot\frac{n(n-1)}{2}+18n$$

${}_nC_3$에서 $n\geq3$이므로 양변을 n으로 나누어 정리하면

$n^2-7n-30=0$, $(n+3)(n-10)=0$

$\therefore n=10$ ($\because n\geq3$) 답 ④

02 꺼낸 공에 적힌 두 수의 곱이 양수이려면 두 수가 모두 음수 또는 양수이어야 한다.

(i) 두 수가 모두 음수인 경우의 수

${}_3C_2=3$ — −3, −2, −1의 3개의 정수가 적힌 공 중에서 2개를 택하는 경우의 수

(ii) 두 수가 모두 양수인 경우의 수

${}_4C_2=6$ — 1, 2, 3, 4의 4개의 정수가 적힌 공 중에서 2개를 택하는 경우의 수

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3+6=9$ 답 9

03 $n=2k+1$ (k는 자연수)이라 하면 가위바위보를 하여 이긴 사람의 수는 $\frac{n-1}{2}=k$

이때 모인 사람의 수는 $(k+1)$명이고, 악수를 한 횟수는 $(k+1)$명 중에서 서로 다른 두 명을 뽑는 조합의 수와 같으므로

${}_{k+1}C_2=190$, $\frac{(k+1)k}{2}=190$

$(k+1)k=20\cdot19$ $\therefore k=19$

따라서 구하는 n의 값은

$n=2k+1=2\cdot19+1=39$ 답 39

04 10명의 학생 중 대표 5명을 뽑는 방법의 수는

${}_{10}C_5=252$

1학년, 2학년, 3학년을 각각 제외하고 대표를 뽑는 방법의 수는 — 각 학년의 학생 수가 5 미만이므로 한 학년에서만 대표가 뽑히는 경우는 없다.

${}_7C_5+{}_7C_5+{}_6C_5={}_7C_2+{}_7C_2+{}_6C_1$ — ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

$=21+21+6=48$

따라서 구하는 방법의 수는

$252-48=204$ 답 204

05 A, B 두 상자에서 각각 두 장씩 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_5C_2\cdot{}_4C_2=60$

B상자에서 뽑힌 카드 2장을 한 묶음으로 생각하여 카드 3장을 일렬로 나열하는 경우의 수는 3!이고, 이때 B상자에서 뽑힌 카드 2장이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로

$3!\cdot2!=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\cdot12=720$ 답 ④

06 12개의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

${}_{12}C_4=495$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하고 나머지 점 중에서 1개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_3\cdot{}_7C_1={}_5C_2\cdot{}_7C_1=70$

이때 한 직선 위에 있는 4개의 점 또는 한 직선 위에 있는 3개의 점과 나머지 한 점으로는 사각형을 만들 수 없으므로 구하는 사각형의 개수는

$495-5-70=420$ 답 420

1등급을 위한 고난도 문제 본책 77쪽

01 $\frac{{}_nC_r}{5}=\frac{{}_nC_{r+1}}{3}$에서

$$\frac{n!}{5\cdot r!(n-r)!}=\frac{n!}{3\cdot(r+1)!(n-r-1)!}$$

$3(r+1)=5(n-r)$

$\therefore 5n-8r=3$ …… ㉠

$\frac{{}_nC_{r+1}}{3}={}_nC_{r+2}$에서

$$\frac{n!}{3\cdot(r+1)!(n-r-1)!}=\frac{n!}{(r+2)!(n-r-2)!}$$

$r+2=3(n-r-1)$

$\therefore 3n-4r=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $n=7$, $r=4$

$\therefore n+r=11$ 답 ①

02 $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

집합 A의 원소가 모두 소수이므로 집합 A에서 서로 다른 두 원소를 택하여 곱한 결과는 모두 서로 다른 값이다.

따라서 집합 B의 원소의 개수는

${}_8C_2=28$ 답 28

03 (i) A를 선출하는 경우

B는 선출하고 C는 선출하지 않는 방법의 수는 D, E, F, G, H의 5명 중에서 2명을 선출하는 방법의 수와 같으므로

${}_5C_2=10$

C를 선출하는 방법의 수는 B, F, G, H의 4명 중에서 2명을 선출하는 방법의 수와 같으므로

${}_4C_2=6$

따라서 방법의 수는

$10+6=16$

Ⅷ 순열과 조합

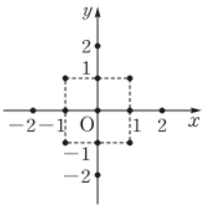
(ii) A는 선출하지 않고 C는 선출하는 경우
B, F, G, H의 4명 중에서 3명을 선출하는 방법의 수는
$_4C_3=4$
(iii) A와 C를 모두 선출하지 않는 경우
B, D, E, F, G, H의 6명 중에서 4명을 선출하는 방법의 수는
$_6C_4=15$
이상에서 구하는 방법의 수는
$16+4+15=35$ 답 35

04 a_1, a_2, a_3, …, a_9 중에서 가장 큰 수는 a_5이므로
$a_5=9$ ··· ❶
1, 2, 3, …, 8의 8개 중에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, a_4로 놓고, 나머지 4개의 수를 큰 수부터 차례대로 a_6, a_7, a_8, a_9로 놓으면 되므로 나머지 8개의 수를 나열하는 방법의 수는
$_8C_4=70$ ··· ❷
따라서 구하는 방법의 수는 70이다. ··· ❸
답 70

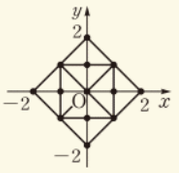
채점 기준	비율
❶ a_5의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a_5를 제외한 나머지 8개의 수를 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 9개의 수를 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

05 7개의 공 중에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는
$_7C_3=35$
3개의 공에 적힌 수를 각각 a, b, c $(a<b<c)$라 하면 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 다음과 같다.
(i) 세 수의 합이 10 미만인 경우
$(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 2, 5)$, $(1, 2, 6)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 3, 5)$, $(2, 3, 4)$의 7가지
(ii) 세 수의 합이 17 초과인 경우
$(5, 6, 7)$의 1가지
(i), (ii)에서 세 수의 합이 10 미만 또는 17 초과인 경우의 수는
$7+1=8$
따라서 구하는 경우의 수는
$35-8=27$ 답 ③

06 $|x|+|y|\le 2$를 만족시키는 점 (x, y)는 오른쪽 그림과 같이 13개가 있다.



이 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 방법의 수는
$_{13}C_3=286$ ··· ❶

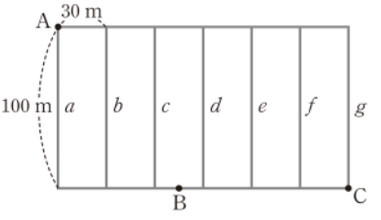


이때 5개의 점이 한 직선 위에 있는 경우가 2가지이므로 한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는
$2\cdot{}_5C_3=20$
또 3개의 점이 한 직선 위에 있는 경우가 10가지이므로 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는
$10\cdot{}_3C_3=10$ ··· ❷
한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는
$286-(20+10)=256$ ··· ❸
답 256

채점 기준	비율
❶ 서로 다른 3개의 점을 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 한 직선 위에 있는 3개의 점을 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	30 %

1등급 비밀노트
서로 다른 n개의 점 중에서 r $(3\le r\le n)$개의 점이 한 직선 위에 있을 때
① 만들 수 있는 삼각형의 개수
➡ $_nC_3-{}_rC_3$
② 만들 수 있는 직선의 개수
➡ $_nC_2-{}_rC_2+1$

07 다음 그림과 같이 세로로 놓인 도로를 왼쪽부터 차례대로 a, b, c, d, e, f, g라 하자.



분속 60 m의 속력으로 10분 이내로 이동하기 위해서는 움직인 거리가 $60\cdot10=600$ (m) 이하가 되어야 한다.
이때 가로로 놓인 도로의 길이가 180 m이므로 세로로 놓인 도로는 1번 또는 3번 이용할 수 있다.
(i) 세로로 놓인 도로를 1번 이용하는 경우
a, b, c 중에서 1개를 택하면 되므로
$_3C_1=3$
(ii) 세로로 놓인 도로를 3번 이용하는 경우
ⓘ a, b, c 중에서 1개를 택하고 d, e, f, g 중에서 2개를 택하면 되므로
$_3C_1\cdot{}_4C_2=18$
ⓘ a, b, c를 모두 택하면 되므로
$_3C_3=1$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$3+18+1=22$ 답 ②

600−180=420 (m)이므로 세로로 놓인 도로는 이동 거리가 420 m 이하가 되도록 이용해야 한다.

일품 BOX

사고력 강화를 위한 수능형 문제

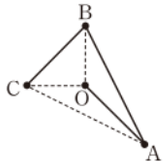
본책 78쪽

01 그을 수 있는 선분은 △ABC의 세 변과 △ABC의 세 꼭짓점에서 내부의 한 점 O를 잇는 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$의 6개이다.

(i) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ 중 한 선분만 긋는 경우

오른쪽 그림과 같이 △ABC의 세 변 중에서 두 변을 그으면 되므로 방법의 수는

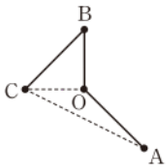
$${}_3C_1 \cdot {}_3C_2 = 9$$



(ii) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ 중 두 선분만 긋는 경우

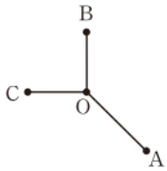
오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$ 또는 $\overline{AC}$를 그으면 되므로 방법의 수는

$${}_3C_2 \cdot {}_2C_1 = 6$$



(iii) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ 세 선분을 모두 긋는 경우

오른쪽 그림과 같은 1가지뿐이다.



이상에서 구하는 방법의 수는

$$9+6+1=16$$

답 ②

다른 풀이 (i) 네 점 O, A, B, C를 일렬로 잇는 경우 네 점을 일렬로 나열하는 방법의 수에서 거꾸로 나열하였을 때 일치하는 경우가 2가지씩 있으므로

$$\frac{4!}{2}=12$$

(ii) 한 점과 나머지 세 점을 잇는 경우

네 점 중 나머지 세 점과 이을 한 점을 택하는 방법의 수는

$${}_4C_1=4$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$$12+4=16$$

02 각 자리의 숫자를 각각 a, b, c, d, e라 하면

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$$

따라서 a, b, c, d, e 중에서 3개는 5이고 나머지 두 개는 1과 8 또는 2와 4이어야 한다.

(i) 다섯 자리 중에서 세 자리에는 5가 들어가고, 나머지 두 자리에는 1과 8이 들어가는 경우의 수는

$${}_5C_3 \cdot 2! = 20$$

(ii) 다섯 자리 중에서 세 자리에는 5가 들어가고, 나머지 두 자리에는 2와 4가 들어가는 경우의 수는

$${}_5C_3 \cdot 2! = 20$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$20+20=40$$

답 40

a, b, c, d, e는 다섯 자리 자연수의 각 자리의 숫자이므로 각각 한 자리 자연수이다.

03 뽑힌 4명이 앉을 의자를 제외한 나머지 6개의 의자를 나열하고 6개의 의자 사이사이 및 양 끝의 7개의 자리 중에서 4개의 자리에 뽑힌 4명이 앉을 의자 4개를 놓으면 된다.

∨○∨○∨○∨○∨○∨ 에서 ∨의 7개의 자리

6명 중 4명을 뽑는 방법의 수는

$${}_6C_4=15$$

7개의 자리 중에서 4개를 택하여 4명을 앉히는 방법의 수는

$${}_7P_4=840$$

따라서 $n=15 \cdot 840=12600$이므로

$$\frac{n}{100}=126$$

답 126

1등급 비밀노트

일렬로 나열된 n개의 의자에 r명이 이웃하지 않도록 앉는 방법의 수는 $(n-r)$개의 의자를 먼저 나열한 뒤, $(n-r)$개의 의자 사이사이 및 양 끝의 $(n-r+1)$개의 자리에 r명이 앉을 의자를 나열하면 되므로

$${}_{n-r+1}P_r \text{ (단, } n-r+1 \geq r)$$

04 조건 (가), (나)에서 7일 동안 운동 종목을 2번 바꾸게 된다.

운동 종목을 바꾸는 시점을 정하는 방법의 수는 7개의 자리의 사이사이인 6개의 자리 중에서 2개의 자리를 선택하는 방법의 수와 같으므로

○∨○∨○∨○∨○∨○ 에서 ∨를 2개 택하는 방법의 수

$${}_6C_2=15$$

각각의 경우에 대하여 운동하는 순서를 정하는 방법의 수는

$$3!=6$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$15 \cdot 6=90$$

답 90

1등급 비밀노트

7개의 자리의 사이사이인 6개의 자리 중에서 2개의 자리를 선택하는 경우 중 하나인

○○○○∨○○∨○

는 세 종목의 운동을 각각 4일, 2일, 1일 동안 하는 방법으로 생각할 수 있다.

05 (i) a를 3개 선택하는 경우의 수는 1이다.

(ii) a를 2개 선택하는 경우

b, c, d, e, f, g의 6개 중에서 1개를 선택하는 경우의 수는

$${}_6C_1=6$$

(iii) a를 1개 선택하는 경우

b를 2개 선택하는 경우의 수는 1

b를 1개 선택하거나 선택하지 않는 경우의 수는 b, c, d, e, f, g의 6개 중에서 2개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_2=15$$

따라서 경우의 수는

$$1+15=16$$

ⓒ좋은책신사고

(iv) a를 선택하지 않는 경우

b를 2개 선택하는 경우의 수는 c, d, e, f, g의 5개 중에서 1개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_1=5$$

b를 1개 선택하거나 선택하지 않는 경우의 수는 b, c, d, e, f, g의 6개 중에서 3개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_3=20$$

따라서 경우의 수는

$$5+20=25$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$1+6+16+25=48$$ 답 48

06 (i) 네 종류의 과일을 선택하는 경우

과일을 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$4!=24$$

(ii) 세 종류의 과일을 선택하는 경우

세 종류의 과일을 선택하는 경우의 수는

$${}_4C_3\cdot 3=12$$

4명의 학생 중 동일한 과일을 받을 2명을 선택하는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

이때 남은 2명에게 두 종류의 과일을 나누어 주는 경우의 수는

$$2!=2$$

따라서 세 종류의 과일을 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$12\cdot 6\cdot 2=144$$

(iii) 두 종류의 과일을 선택하는 경우

두 종류의 과일을 선택하는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

4명의 학생 중 특정 과일을 받을 2명을 선택하는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

따라서 두 종류의 과일을 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$6\cdot 6=36$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$24+144+36=204$$ 답 ③

07 A, B, D, C, E의 순서로 칠할 때, A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 C와 D에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 구하는 방법의 수는

$$5\cdot 4\cdot 3\cdot 3\cdot 3=540$$ 답 ③

다른 풀이 (i) 다섯 가지 색을 모두 사용하는 경우

칠하는 방법의 수는

$$5!=120$$

(ii) 네 가지 색을 사용하는 경우

네 가지 색을 선택하는 방법의 수는

$${}_5C_4=5$$

이때 네 가지 색 중에서 두 영역에 칠할 색을 선택하는 방법의 수는

$${}_4C_1=4$$

같은 색을 칠할 수 있는 영역은 A, C 또는 A, E 또는 B, E의 3가지이므로 칠하는 방법의 수는

$$5\cdot 4\cdot 3\cdot 3!=360$$

(iii) 세 가지 색을 사용하는 경우

세 가지 색을 선택하는 방법의 수는

$${}_5C_3=10$$

이때 세 가지 색 중에서 두 영역에 칠할 두 가지 색을 선택하는 방법의 수는

$${}_3C_2=3$$

같은 색을 칠할 수 있는 영역은 A, C와 B, E이므로 칠하는 방법의 수는

$$10\cdot 3\cdot 2!=60$$

이상에서 구하는 방법의 수는

$$120+360+60=540$$

일품 BOX

네 종류의 과일 중 세 종류의 과일을 선택하고, 선택된 과일 중 2개를 선택할 과일을 정하는 경우의 수

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 79~82쪽

01 전략 삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 짧아야 함을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이이고 조건 (나)에서 a가 가장 긴 변의 길이이므로

$$a<b+c$$

이때 조건 (다)에서 $b+c=12-a$이므로

$$a<12-a,\quad 2a<12$$

$$\therefore a<6$$

또 조건 (나), (다)에서

$$a+b+c\le 3a,\quad 12\le 3a$$

$$\therefore a\ge 4$$

$$\therefore 4\le a<6$$

(i) $a=4$일 때, $b+c=8$이므로

$$b=4,\ c=4$$

(ii) $a=5$일 때, $b+c=7$이므로

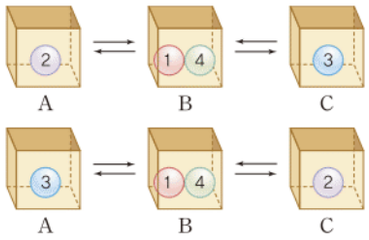
$$b=5,\ c=2 \text{ 또는 } b=4,\ c=3$$

(i), (ii)에서 서로 다른 삼각형의 개수는

$$1+2=3$$ 답 ①

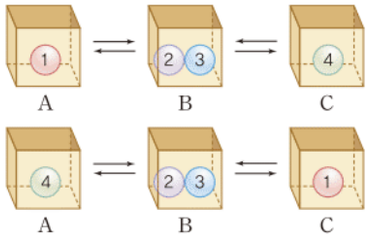
02 전략 짝수 번의 시행과 홀수 번의 시행을 통해 나올 수 있는 결과를 각각 구해 본다.

풀이 ㄱ. 한 번의 시행 후에 나올 수 있는 결과는 다음과 같이 2가지이다.



ㄴ. 1번 공을 A 또는 C에서 B로 옮기면 3번 공은 A 또는 C로 옮겨지고, 마찬가지로 1번 공을 B에서 A 또는 C로 옮기면 3번 공은 B로 옮겨진다. 따라서 1번 공과 3번 공을 B상자에 같이 넣을 수 없다.

ㄷ. 짝수 번의 시행 후에 나올 수 있는 결과는 다음과 같이 2가지이다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

03 전략 최대한 많은 공을 꺼내면서 어느 2개의 공에 적힌 두 수의 합도 20이 될 수 없는 경우를 생각해 본다.

풀이 2개의 공에 적힌 두 수 a, b의 합이 20이 되는 순서쌍 (a, b)는

$(5, 15), (6, 14), (7, 13), (8, 12), (9, 11)$

의 5개이다.

이때 최대한 많은 공을 꺼내면서 어느 2개의 공에 적힌 두 수의 합도 20이 될 수 없는 경우는 각 순서쌍에서 하나씩의 숫자가 적힌 5개의 공과 1, 2, 3, 4, 10이 적힌 5개의 공을 꺼내는 경우이다.

따라서 적어도 11개의 공을 꺼내면 2개의 공에 적힌 두 수의 합이 20이 되는 경우가 항상 존재하므로 n의 최솟값은 11이다. 답 ④

04 전략 구하는 자연수를 $abcba$로 놓고 a, b, c에 올 수 있는 수의 개수를 각각 구한다.

풀이 구하는 다섯 자리 자연수를 $abcba$라 하면 a에 올 수 있는 수는 1부터 9까지의 9개이고, b, c에 올 수 있는 수는 각각 0부터 9까지의 10개이므로 구하는 자연수의 개수는

$9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ 답 ④

05 전략 머리띠, 상의, 하의를 이용하여 인형을 꾸미는 전체 경우의 수에서 색상이 겹치는 경우의 수를 뺀다.

풀이 머리띠, 상의, 하의를 각각 한 개씩 이용하여 인형을 꾸미는 전체 경우의 수는

$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

이때 머리띠와 상의의 색상이 노랑으로 같은 경우는 4가지, 상의와 하의의 색상이 하양으로 같은 경우는 2가지이므로 색상이 겹치는 경우의 수는 $4+2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24-6=18$ 답 ④

다른 풀이 (i) 머리띠의 색상이 노랑인 경우

상의의 색상이 빨강이면 이용할 수 있는 하의는 4가지이고, 상의의 색상이 하양이면 이용할 수 있는 하의는 3가지이므로 경우의 수는

$4+3=7$

(ii) 머리띠의 색상이 파랑인 경우

상의의 색상이 노랑, 빨강이면 이용할 수 있는 하의는 각각 4가지씩이고, 상의의 색상이 하양이면 이용할 수 있는 하의는 3가지이므로 경우의 수는

$2 \cdot 4+3=11$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$7+11=18$

06 전략 일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4이어야 함을 이용한다.

풀이 1□□□□0 또는 1□□□□2 또는 1□□□□4 꼴의 수의 개수는

$3 \cdot 4! = 72$

20□□□4 또는 21□□□0 또는 21□□□4 꼴의 수의 개수는

$3 \cdot 3! = 18$

230□□4 또는 231□□0 또는 231□□4 또는 234□□0 꼴의 수의 개수는

$4 \cdot 2! = 8$

이때 $100-(72+18+8)=2$이므로 구하는 수는 235□□□ 꼴의 짝수 중 2번째로 작은 수이다.

따라서 235014, 235104, …에서 구하는 수는

235104 답 ③

07 전략 일대일대응인 함수 f의 개수에서 $f(4)=4$ 또는 $f(5)=5$인 함수의 개수를 뺀다.

풀이 일대일대응인 함수 f의 개수는 $5!=120$이고, 이 중 $f(x)=x$인 경우는 $f(4)=4$ 또는 $f(5)=5$일 때이다.

$f(4)=4$인 함수 f의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 5\}$에서 집합 $\{5, 6, 7, 8\}$로의 일대일대응의 개수와 같으므로

$4!=24$

마찬가지로 $f(5)=5$인 함수 f의 개수는

$4!=24$

이때 $f(4)=4$이고 $f(5)=5$인 함수 f의 개수는

$3!=6$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$120-(24+24-6)=78$ 답 ④

다른 풀이 (i) $f(4)=5$인 경우

함수 f의 개수는 $\{1, 2, 3, 5\}$에서 $\{4, 6, 7, 8\}$로의 일대일대응의 개수와 같으므로 $4!=24$

일품 BOX

짝수 번의 시행 후 B상자에는 항상 2번 공과 3번 공이 들어 있다.

$n(X)=n$인 집합 X에 대하여 X에서 X로의 일대일대응의 개수 ➡ $n!$

집합 $\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $\{4, 6, 7, 8\}$로의 일대일대응의 개수

집합 $\{1, 2, 3\}$에서 집합 $\{6, 7, 8\}$로의 일대일대응의 개수

Ⅷ 순열과 조합

(ii) $f(4)=6$인 경우

$f(5)$의 값은 4, 7, 8 중의 하나이고, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 $f(4)$와 $f(5)$의 값을 제외한 나머지 함숫값을 가질 수 있으므로 함수 f의 개수는

$3\cdot 3!=18$

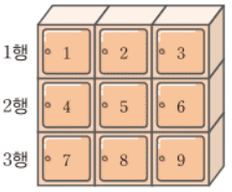
(iii) $f(4)=7$, $f(4)=8$인 경우도 (ii)와 마찬가지이므로 함수 f의 개수는 각각 18씩이다.

이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$24+3\cdot 18=78$

08 전략 먼저 서로 이웃하지 않는 세 사물함을 선택하는 경우의 수를 구해 본다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 사물함의 가장 윗줄부터 순서대로 1행, 2행, 3행이라 하면 서로 이웃하지 않는 세 사물함을 선택하는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) 1행, 2행, 3행에서 각각 1칸씩 선택하는 경우

1행에서 1칸을 선택하는 경우의 수는 3

2행에서 1칸을 선택하는 경우의 수는 1행에서 선택한 사물함과 이웃하는 사물함을 제외해야 하므로 2

3행에서 1칸을 선택하는 경우의 수는 2행에서 선택한 사물함과 이웃하는 사물함을 제외해야 하므로 2

즉 사물함을 선택하는 경우의 수는

$3\cdot 2\cdot 2=12$

(ii) 1행과 2행 또는 2행과 3행에서 3칸을 선택하는 경우

1행과 2행에서 3칸을 선택하는 경우의 수는 1번, 3번, 5번 사물함 또는 2번, 4번, 6번 사물함을 선택할 수 있으므로 2

마찬가지로 2행과 3행에서 3칸을 선택하는 경우의 수는 2

즉 사물함을 선택하는 경우의 수는

$2+2=4$

(iii) 1행과 3행에서 3칸을 선택하는 경우

1행에서 1칸, 3행에서 2칸을 선택하는 경우의 수는 1번, 2번, 3번 사물함 중에서 1칸을 선택하고 7번, 9번 사물함을 선택해야 하므로 3

마찬가지로 1행에서 2칸, 3행에서 1칸을 선택하는 경우의 수는 3

즉 사물함을 선택하는 경우의 수는

$3+3=6$

이상에서 구하는 경우의 수는

$(12+4+6)\cdot 3!=132$ 답 ②

선택한 세 사물함을 세 사람이 각각 하나씩 사용하는 경우의 수

09 전략 자연수 n에 대하여 ${}_nC_r$가 정의되려면 $0\le r\le n$이어야 함을 이용한다.

풀이 ${}_{3n}C_{n+12}$에서

$3n\ge n+12$ $\therefore n\ge 6$ …… ㉠

${}_{n+21}C_{4n}$에서

$n+21\ge 4n$ $\therefore n\le 7$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $6\le n\le 7$

따라서 자연수 n의 값은 6 또는 7이므로

$k=13$

$\therefore {}_{k+1}C_k+{}_kC_{k-2}={}_{14}C_{13}+{}_{13}C_{11}$

$=92$ 답 ②

10 전략 5번 사용하는 숫자의 사이사이 및 양 끝에 3번 사용하는 숫자를 배치한다.

□1□1□1□1□1□1□

풀이 (i) 1을 5번, 2를 3번 사용하는 경우

5개의 1 사이사이 및 양 끝의 6개의 자리 중에서 3개의 자리에 2를 배치하면 되므로 만들 수 있는 비밀번호의 개수는

${}_6C_3=20$

(ii) 1을 3번, 2를 5번 사용하는 경우

(i)과 마찬가지이므로 만들 수 있는 비밀번호의 개수는 20이다.

(i), (ii)에서 구하는 비밀번호의 개수는

$20+20=40$ 답 ③

11 전략 먼저 꺼내는 공의 3가지 색을 택하는 경우의 수를 구한다.

풀이 빨강, 주황, 노랑, 초록의 4가지 색 중에서 꺼내는 공의 3가지의 색을 택하는 경우의 수는

${}_4C_3=4$

각 색깔에서 1개의 공을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\cdot 3^3=108$ 답 ③

각 색깔에서 1개의 공을 택하는 경우의 수는 3이고, 3가지 색의 공을 꺼내므로 3^3

12 전략 우리나라 남자 선수와 미국 여자 선수, 우리나라 여자 선수와 미국 남자 선수가 악수하는 경우의 수를 각각 구한다.

풀이 (i) 우리나라 남자 선수 4명과 미국 여자 선수 6명이 서로 악수를 하는 경우의 수는

${}_4C_1\cdot {}_6C_1=24$

(ii) 우리나라 여자 선수 4명과 미국 남자 선수 6명이 서로 악수를 하는 경우의 수는

${}_4C_1\cdot {}_6C_1=24$

(i), (ii)에서 구하는 악수의 횟수는

$24+24=48$ 답 ④

13 전략 3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수임을 이용한다.

풀이 3의 배수가 되기 위해서는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수가 되어야 한다. 3으로 나누었을 때 나머지가 0인 수의 집합을 A_0, 나머지가 1인 수의 집합을 A_1, 나머지가 2인 수의 집합을 A_2라 하면

$A_0=\{0, 3, 6, 9\}$, $A_1=\{1, 4, 7\}$, $A_2=\{2, 5, 8\}$

일품 BOX

(i) A_0, A_1, A_2 중 한 집합의 원소만으로 만든 3의 배수의 개수는

$3\cdot3\cdot2+3!+3!=30$

(ii) A_0, A_1, A_2의 원소를 각각 한 개씩 택하여 나열하는 방법의 수는

${}_4C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_1\cdot3!=216$

이때 백의 자리에 0이 오는 경우의 수가

${}_3C_1\cdot{}_3C_1\cdot2!=18$이므로 3의 배수의 개수는

$216-18=198$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$30+198=228$ 답 ①

각 자리의 숫자의 합이 $3k+0=3k$, $3l+3=3(l+1)$, $3m+6=3(m+2)$ 꼴이므로 3의 배수이다. (단, k, l, m은 자연수)

각 자리의 숫자의 합이 $3k+3=3(k+1)$ 꼴이므로 3의 배수이다. (단, k는 음이 아닌 정수)

14 전략 집합 S의 각 원소를 원소로 갖는 집합 X의 개수를 구한다.

풀이 조건 (가), (나)에서 집합 X의 개수는 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8의 7개의 원소 중에서 5개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_5=21$

이때 1을 원소로 갖는 집합 X의 개수는 2, 3, 4, 6, 7, 8의 6개의 원소 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_4=15$

마찬가지로 2, 3, 4, 6, 7, 8을 원소로 갖는 집합 X의 개수도 각각 15이므로 구하는 원소의 합은

$21\cdot5+15\cdot(1+2+3+4+6+7+8)=570$ 답 ③

모든 집합 X는 5를 원소로 갖는다.

15 전략 조합을 이용하여 함수 f의 개수를 구한다.

풀이 ㄱ. $a<b$이면 $f(a)<f(b)$이므로

$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$

따라서 집합 Y의 6개의 원소 중 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_6C_4=15$

ㄴ. $f(3)=8$이고, $a<b$이면 $f(a)<f(b)$이므로

$f(4)=9$ 또는 $f(4)=10$

또 $f(1)<f(2)$에서 집합 Y의 원소 5, 6, 7 중 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로 그 개수는

${}_3C_2=3$

따라서 구하는 함수의 개수는

$2\cdot3=6$

ㄷ. (i) $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$인 경우

${}_6C_4=15$

(ii) $f(1)=f(2)<f(3)<f(4)$인 경우

집합 Y의 6개의 원소 중 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 3, 4에 대응시키면 되므로 함수의 개수는

${}_6C_3=20$

가로 방향의 평행한 선분 4개 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 선분 7개 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어진다.

$f(1)=f(2)$이므로 $f(1)$의 값이 정해지면 $f(2)$의 값도 정해진다.

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는 $15+20=35$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

1등급 비밀노트

두 집합 X, Y에 대하여 $n(X)=r$, $n(Y)=s$ $(r\le s)$일 때, X에서 Y로의 함수 f 중에서 $a\in X$, $b\in X$, $a<b$인 a, b에 대하여 $f(a)<f(b)$ (또는 $f(a)>f(b)$)를 만족시키는 f의 개수

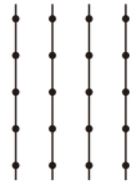
➡ 순서가 이미 정해졌으므로 ${}_sC_r$

16 전략 20개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수에서 중복되는 직선의 개수를 뺀다.

풀이 20개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_{20}C_2=190$

(i) 한 직선 위에 5개의 점이 있는 경우

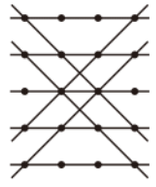


5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_2=10$

이고, 한 직선 위에 5개의 점이 있는 직선은 4개이다.

(ii) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우



4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_2=6$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 9개이다.

(iii) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_3C_2=3$

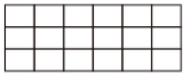
이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 8개이다.

이상에서 구하는 직선의 개수는

$190-10\cdot4-6\cdot9-3\cdot8+4+9+8=93$ 답 ②

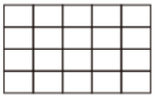
17 전략 주어진 도형을 직사각형을 찾기 쉬운 형태로 나눈다.

풀이 (i) 오른쪽 도형에서 찾을 수 있는 직사각형의 개수는



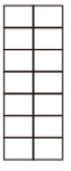
${}_4C_2\cdot{}_7C_2=126$

(ii) 오른쪽 도형에서 찾을 수 있는 직사각형의 개수는



${}_5C_2\cdot{}_6C_2=150$

(iii) 오른쪽 도형에서 찾을 수 있는 직사각형의 개수는



${}_8C_2\cdot{}_3C_2=84$

(iv) 오른쪽 도형에서 찾을 수 있는 직사각형의 개수는

${}_4C_2\cdot{}_3C_2=18$

ⓒ좋은책신사고

(v) 오른쪽 도형에서 찾을 수 있는 직사각형의 개수는

$_5C_2 \cdot {}_3C_2 = 30$

이상에서 구하는 직사각형의 개수는

$126+150+84-(18+30)=312$ 답 ①

18 전략 먼저 숫자가 적힌 4개의 칸에 이웃한 8개의 칸에 들어갈 수를 정한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 8개의 정사각형을 각각 a, b, c, d, e, f, g, h라 하면 a, b에 각각 들어갈 수 있는 수는

	a	c	
e	1	4	f
g	2	3	h
	b	d	

3, 4 또는 4, 3의 2가지

c, d에 각각 들어갈 수 있는 수는

1, 2 또는 2, 1의 2가지

e, f에 각각 들어갈 수 있는 수는

2, 3 또는 3, 2의 2가지

g, h에 각각 들어갈 수 있는 수는

1, 4 또는 4, 1의 2가지

따라서 8개의 정사각형에 들어갈 수 있는 수를 정하는 방법의 수는

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

이때 다음 그림과 같은 경우는 나머지 4개의 정사각형에 조건을 만족시키도록 수를 적을 수 없다.

	3	1	
3	1	4	2
1	2	3	4
	4	2	

	3	1	
2	1	4	3
4	2	3	1
	4	2	

	4	2	
2	1	4	3
4	2	3	1
	3	1	

	4	2	
3	1	4	2
1	2	3	4
	3	1	

따라서 구하는 방법의 수는

$16-4=12$ 답 12

19 전략 평행한 두 직선에서 각각 두 점을 택하여 만들어지는 사각형이 사다리꼴임을 이용한다.

풀이 평행한 두 직선에서 각각 두 점을 택하면 사각형이 되고, 직선 위의 두 변이 서로 평행하므로 이 사각형은 사다리꼴이다. ⋯ ❶

윗변의 길이를 a, 아랫변의 길이를 b라 하면 사각형의 넓이는

$\frac{1}{2}(a+b) \cdot 1 = 3$

이므로

$a+b=6$, $1 \le a \le 4$, $1 \le b \le 4$

(i) $a=2$, $b=4$일 때

$a=2$인 경우는 3가지, $b=4$인 경우는 1가지이므로

$3 \cdot 1 = 3$

(ii) $a=3$, $b=3$일 때

$a=3$인 경우는 2가지, $b=3$인 경우도 2가지이므로

$2 \cdot 2 = 4$

(iii) $a=4$, $b=2$일 때

$a=4$인 경우는 1가지, $b=2$인 경우는 3가지이므로

$1 \cdot 3 = 3$

이상에서 구하는 사각형의 개수는

$3+4+3=10$ ⋯ ❷

답 10

채점 기준	비율
❶ 4개의 점을 꼭짓점으로 하는 사각형이 사다리꼴임을 알 수 있다.	30 %
❷ 넓이가 3인 사각형의 개수를 구할 수 있다.	70 %

20 전략 $a^m b^n c^k$(a, b, c는 서로 다른 소수, m, n, k는 음이 아닌 정수)이 어떤 자연수의 제곱이 되려면 m, n, k가 모두 0 또는 짝수이어야 함을 이용한다.

풀이 $2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^9$의 약수는 $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$ ($0 \le i \le 5$, $0 \le j \le 7$, $0 \le k \le 9$, i, j, k는 정수) 꼴이므로 이 수가 어떤 자연수의 제곱이 되려면 i, j, k가 모두 0 또는 짝수이어야 한다.

따라서 i의 값이 될 수 있는 수는 0, 2, 4의 3가지, j의 값이 될 수 있는 수는 0, 2, 4, 6의 4가지, k의 값이 될 수 있는 수는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지이므로 구하는 수의 개수는

$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ 답 60

21 전략 먼저 엄마, 아빠가 좌석에 앉는 경우의 수를 구한다.

풀이 엄마, 아빠가 앉을 수 있는 좌석은

(1, 2), (2, 3), (4, 5)의 3가지

이고, 엄마, 아빠가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이므로 엄마, 아빠가 서로 이웃하게 앉는 경우의 수는

$3 \cdot 2 = 6$

이때 할머니는 엄마, 아빠가 앉은 두 좌석과 6번 좌석을 제외한 세 좌석에 앉을 수 있고, 자녀 3명은 남은 세 좌석에 앉으면 되므로 할머니와 자녀 3명이 앉는 경우의 수는

$3 \cdot 3! = 18$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \cdot 18 = 108$ 답 108

22 전략 11월 6일의 전입생의 반을 배정한 후에 10일, 20일의 순서대로 전입생의 반을 배정하는 경우의 수를 구한다.

풀이 (i) 11월 6일의 전입생 1명이 배정받는 반은 1반 또는 4반이므로

2가지 ⋯ ❶

(ii) 11월 10일의 전입생 1명이 배정받는 반은 1반 또는 4반 중 11월 6일의 전입생 1명이 배정받지 않은 반이므로

1가지 ⋯ ❷

일품 BOX

$a=3$, $b=3$인 경우에는 평행사변형 또는 직사각형이 된다.

a, b, c, d, e, f, g, h에 들어갈 수가 정해지면 나머지 4개의 정사각형에 들어갈 수도 정해진다.

사다리꼴은 직사각형과 평행사변형을 모두 포함한다.

(사다리꼴의 넓이)
$=\frac{1}{2}\{$(윗변의 길이)
$+$(아랫변의 길이)$\}$
$\times$(높이)

(iii) 11월 20일의 전입생 2명이 배정받는 반은 1, 2, 3, 4, 8, 10반 중 두 반이므로

$${}_6P_2=30$$ ···➌

이상에서 전입생 4명이 반을 배정받는 경우의 수는

$$2\cdot1\cdot30=60$$ ···➍

답 60

채점 기준	비율
❶ 11월 6일의 전입생 1명이 반을 배정받는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 11월 10일의 전입생 1명이 반을 배정받는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 11월 20일의 전입생 2명이 반을 배정받는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 전입생 4명이 반을 배정받는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

23 전략 가로줄에 있는 세 수의 합이 15이어야 함을 이용한다.

풀이 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$이므로 각 가로줄에 있는 세 수의 합은 $\frac{45}{3}=15$이어야 한다.

이때 7, 8, 9는 서로 다른 가로줄에 있어야 하므로 세 수의 합이 15가 되도록 나누는 경우의 수는

(7, 2, 6), (8, 3, 4), (9, 1, 5)

또는 (7, 3, 5), (8, 1, 6), (9, 2, 4)의 2가지 ···❶

(i) (7, 2, 6), (8, 3, 4), (9, 1, 5)인 경우

위의 세 묶음을 각 줄에 나열하는 경우의 수는

$$3!=6$$

이고, 각 줄에서 세 수를 나열하는 경우의 수는

$$3!\cdot3!\cdot3!=216$$

이므로 이 경우의 수는

$$6\cdot216=1296$$

(ii) (7, 3, 5), (8, 1, 6), (9, 2, 4)인 경우

(i)과 마찬가지이므로 1296 ···❷

이상에서 구하는 경우의 수는

$$1296+1296=2592$$ ···❸

답 2592

채점 기준	비율
❶ 세 수의 합이 15가 되도록 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ ❶의 각 경우에 수를 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 각 가로줄에 있는 세 수의 합이 서로 같은 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

24 전략 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ $(0\le r\le n)$임을 이용한다.

풀이 $\frac{{}_{n+2}P_{n-1}}{n!}+40={}_{n+1}C_{n-1}$에서

$$\frac{(n+2)!}{n!(n+2-n+1)!}+40={}_{n+1}C_2$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{3\cdot2\cdot1}+40=\frac{(n+1)n}{2\cdot1}$$

$$(n+2)(n+1)+240=3n(n+1)$$

$$n^2=121$$

$$\therefore n=11\ (\because n\text{은 자연수})$$

답 11

25 전략 A주머니에서 뽑을 수 있는 과자의 개수는 0 또는 1 또는 2임을 이용하여 경우를 나눈다.

풀이 (i) A주머니에서 과자 0개, B주머니에서 사탕 5개를 뽑는 경우의 수

$${}_9C_5=126$$

(ii) A주머니에서 과자 1개, B주머니에서 사탕 4개를 뽑는 경우의 수

$${}_6C_1\cdot{}_9C_4=756$$

(iii) A주머니에서 과자 2개, B주머니에서 사탕 3개를 뽑는 경우의 수

$${}_6C_2\cdot{}_9C_3=1260$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$126+756+1260=2142$$

답 2142

26 전략 집합 A의 원소가 정해지면 집합 B의 원소도 정해짐을 이용한다.

풀이 조건 (가), (나)에서 $B=U-A$이므로 집합 A의 원소가 정해지면 집합 B의 원소도 정해진다.

(i) $n(A)=1$, $n(B)=5$인 경우의 수

$${}_6C_1=6$$

(ii) $n(A)=2$, $n(B)=4$인 경우의 수

$${}_6C_2=15$$

(iii) $n(A)=3$, $n(B)=3$인 경우의 수

$${}_6C_3=20$$

(iv) $n(A)=4$, $n(B)=2$인 경우의 수

$${}_6C_4=15$$

(v) $n(A)=5$, $n(B)=1$인 경우의 수

$${}_6C_5=6$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$6+15+20+15+6=62$$

답 62

27 전략 천의 자리의 숫자가 1로 홀수이므로 가운데 세 자리의 숫자의 합이 홀수이어야 함을 이용한다.

풀이 1000부터 1999까지의 수는 천의 자리의 숫자가 1로 홀수이므로 가운데 세 자리의 숫자의 합이 홀수이면서 세 자리의 숫자가 모두 다른 경우를 구하면 된다.

(i) 세 자리의 숫자가 모두 홀수인 경우

홀수인 1, 3, 5, 7, 9 중 3개를 뽑아 일렬로 나열하면 되므로

$${}_5P_3=60$$

(ii) 세 자리의 숫자 중 0 또는 짝수가 2개, 홀수가 1개인 경우

0과 짝수인 2, 4, 6, 8 중 2개를 뽑고, 홀수인 1, 3, 5, 7, 9 중 1개를 뽑은 후 일렬로 나열하면 되므로

$${}_5C_2\cdot{}_5C_1\cdot3!=10\cdot5\cdot6=300$$

일품 BOX

7+8=15,
7+9=16>15,
8+9=17>15
이므로 7, 8, 9는 같은 가로줄에 올 수 없다.

1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 원소 중에서 집합 A의 원소인 1개를 택하는 경우의 수

각 자리의 숫자의 합이 짝수이다.

${}_{n+1}C_{n-1}={}_{n+1}C_{n+1-n+1}$
$={}_{n+1}C_2$

ⓒ좋은책신사고

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$60+300=360$ 답 360

28 전략 전체 삼각형의 개수에서 볼록십각형과 한 변 또는 두 변을 공유하는 삼각형의 개수를 뺀다.

풀이 볼록십각형에서 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$${}_{10}C_3=120$$ ··· ❶

(i) 볼록십각형과 한 변만 공유하는 삼각형은 볼록십각형의 한 변에 6개씩 만들어지므로 그 개수는

$6\cdot10=60$ ··· ❷

(ii) 볼록십각형과 두 변을 공유하는 삼각형은 볼록십각형의 이웃하는 두 변에 대하여 하나씩만 존재하므로 10개이다. ··· ❸

(i), (ii)에서 볼록십각형과 변을 공유하는 삼각형의 개수는

$60+10=70$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$120-70=50$ ··· ❹

답 50

채점 기준	비율
❶ 만들 수 있는 전체 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 볼록십각형과 한 변만 공유하는 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 볼록십각형과 두 변을 공유하는 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 볼록십각형과 한 변도 공유하지 않는 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

일품 BOX

공유한 변의 양 끝 점 2개와 이웃한 두 변의 끝 점 2개를 제외한 6개의 꼭짓점마다 하나씩 만들어진다.

최상위로 가는 최고 수준 문제 본책 83쪽

01

해결 단계

❶ 세 사람 A, B, C가 두 번째로 점등하는 전구를 각각 구한다.
❷ 세 사람 A, B, C가 각각 a_4를 점등하는 경우로 나누어 순서쌍 (p, q, r)를 구한다.
❸ 합의 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q, r)의 개수를 구한다.

풀이 ❶ $k=2$일 때, A, B, C가 점등하는 전구는 각각

a_{1+p}, a_{2+q}, a_{3+r}

이다.

A, B, C가 두 번째로 점등하는 전구

❷ (i) A가 a_4를 점등하는 경우

$a_{1+p}=a_4$에서 $p=3$이므로 A가 점등하는 전구는

a_{3k-2} ····· ㉠

ⓘ B가 a_5를 점등하는 경우

$a_{2+q}=a_5$에서 $q=3$이므로 B가 점등하는 전구는

a_{3k-1} ····· ㉡

㉠, ㉡에서 a_6은 C가 점등하게 된다.

$a_{3+r}=a_6$에서 $r=3$이므로 C가 점등하는 전구는

a_{3k}

㉠에서 A가 점등하는 전구는

$a_1, a_4, a_7, \cdots$

㉡에서 B가 점등하는 전구는

$a_2, a_5, a_8, \cdots$

따라서 (p, q, r)는 $(3, 3, 3)$이다.

ⓘⓘ C가 a_5를 점등하는 경우

$a_{3+r}=a_5$에서 $r=2$이므로 C가 점등하는 전구는

a_{2k+1}

이 경우에는 $k=3$일 때 A, C 두 사람이 a_7을 점등하게 되므로 조건을 만족시키지 않는다.

$k=3$일 때

$a_{3k-2}=a_{3\cdot3-2}=a_7$

$a_{2k+1}=a_{2\cdot3+1}=a_7$

(ii) B가 a_4를 점등하는 경우

$a_{2+q}=a_4$에서 $q=2$이므로 B가 점등하는 전구는

a_{2k} ····· ㉢

ⓘ A가 a_5를 점등하는 경우

$a_{1+p}=a_5$에서 $p=4$이므로 A가 점등하는 전구는

a_{4k-3} ····· ㉣

㉢, ㉣에서 a_7은 C가 점등하게 된다.

$a_{3+r}=a_7$에서 $r=4$이므로 C가 점등하는 전구는

a_{4k-1}

따라서 (p, q, r)는 $(4, 2, 4)$이다.

ⓘⓘ C가 a_5를 점등하는 경우

$a_{3+r}=a_5$에서 $r=2$이므로 C가 점등하는 전구는

a_{2k+1}

이 경우에는 a_2 이후의 모든 전구를 B와 C만이 점등하게 된다.

따라서 p가 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

㉢에서 B가 점등하는 전구는

$a_2, a_4, a_6, a_8, \cdots$

㉣에서 A가 점등하는 전구는

$a_1, a_5, a_9, \cdots$

$a_{1+p}=a_1$이므로

$p=0$

(iii) C가 a_4를 점등하는 경우

$a_{3+r}=a_4$에서 $r=1$이므로 C가 점등하는 전구는

a_{k+2}

이 경우에는 a_3 이후의 모든 전구를 C만이 점등하게 된다.

따라서 p, q가 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a_{1+p}=a_1$이므로

$p=0$

$a_{2+q}=a_2$이므로

$q=0$

❸ 이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$(3, 3, 3)$, $(4, 2, 4)$

의 2이다. 답 2

02

해결 단계

❶ 1, 1, 1을 나열하고 사이사이 및 양 끝의 자리에 2, 2, 3을 나열해야 함을 안다.
❷ ❶을 만족시키는 경우의 수를 구한다.
❸ 합의 법칙을 이용하여 이웃하는 자리의 두 숫자가 항상 다른 자연수의 개수를 구한다.

풀이 ❶ 1, 1, 1을 다음과 같이 나열하고 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 이웃하는 자리의 두 숫자가 항상 다르도록 2, 2, 3을 나열해야 한다.

○1○1○1○

❷ (i) 한쪽 끝을 제외한 세 자리에 각각 1개씩 숫자를 나열하는 경우

각 자리에 나열하는 숫자를 순서쌍으로 나타내면

$(2, 2, 3)$, $(2, 3, 2)$, $(3, 2, 2)$의 3가지

이므로 경우의 수는

$2\cdot3=6$

(ii) 양 끝을 제외한 두 자리에 각각 1개 또는 2개의 숫자를 나열하는 경우

2개의 숫자 2, 3을 나열할 곳을 고르는 경우의 수는 2이고 숫자끼리 서로 위치를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로 경우의 수는

$2\cdot 2!=4$

❸ (i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+4=10$ 답 ③

다른 풀이 (i) 첫 번째 자리의 숫자가 1인 경우

121213, 121231, 121312, 121321, 123121, 131212, 132121의 7가지

(ii) 첫 번째 자리의 숫자가 2인 경우

212131, 213121의 2가지

(iii) 첫 번째 자리의 숫자가 3인 경우

312121의 1가지

이상에서 구하는 자연수의 개수는 $7+2+1=10$

03

해결 단계

❶ 조건 (가)를 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$의 값을 구한다.
❷ ❶의 각 경우에 대하여 함수 f의 개수를 각각 구한다.
❸ 합의 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구한다.

풀이 ❶ 조건 (가)에서 $f(1)$, $f(2)$의 값은

$f(1)=1$, $f(2)=2$ 또는 $f(1)=2$, $f(2)=1$ 또는
$f(1)=2$, $f(2)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(2)=2$ 또는
$f(1)=3$, $f(2)=4$ 또는 $f(1)=4$, $f(2)=3$ 또는
$f(1)=4$, $f(2)=5$ 또는 $f(1)=5$, $f(2)=4$

이다.

❷ (i) $f(1)=1$, $f(2)=2$ 또는 $f(1)=2$, $f(2)=1$인 경우

3, 4, 5 중 어느 두 수의 합도 항상 6 이상이므로 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 함수의 개수는

$2\cdot 6=12$

(ii) $f(1)=2$, $f(2)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(2)=2$인 경우

1, 4, 5 중 두 수의 합이 6 이상인 경우는 1과 5 또는 4와 5이므로 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2\cdot 2!=4$

따라서 함수의 개수는

$2\cdot 4=8$

(iii) $f(1)=3$, $f(2)=4$ 또는 $f(1)=4$, $f(2)=3$인 경우

1, 2, 5 중 두 수의 합이 6 이상인 경우는 1과 5 또는 2와 5이므로 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2\cdot 2!=4$

따라서 함수의 개수는

$2\cdot 4=8$

(iv) $f(1)=4$, $f(2)=5$ 또는 $f(1)=5$, $f(2)=4$인 경우

1, 2, 3 중 두 수의 합이 6 이상인 경우는 없으므로 이를 만족시키는 함수는 없다.

❸ 이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$12+8+8=28$ 답 ②

04

해결 단계

❶ 주어진 조건을 만족시키기 위한 a, b, c, d의 조건을 구한다.
❷ a의 값에 따라 경우를 나누어 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 각각 구한다.
❸ 합의 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구한다.

풀이 ❶ 조건 (가)에서 a, b, c, d에 5는 반드시 포함되어야 하고, 짝수가 적어도 1개 이상 포함되어야 한다. 또 조건 (나)에서 bcd는 a의 배수이어야 한다.

❷ (i) $a=1$인 경우

b, c, d 중 5는 반드시 포함되어야 하고, 2, 4, 6, 8 중 적어도 1개 이상이 포함되어야 하므로 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$${}_7C_2-{}_3C_2=18$$

2, 3, 4, 6, 7, 8, 9의 7개 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 3, 7, 9의 3개 중에서 2개를 택하는 경우의 수를 뺀다.

(ii) $a=2$인 경우

b, c, d 중 5는 반드시 포함되어야 하고, bcd가 2의 배수이어야 하므로 4, 6, 8 중 적어도 1개 이상이 포함되어야 한다.

따라서 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$${}_6C_2-{}_3C_2=12$$

(iii) $a=3$인 경우

b, c, d 중 5는 반드시 포함되어야 하고, 4, 6, 8 중 적어도 1개 이상이 포함되어야 한다. 또 bcd가 3의 배수이어야 하므로 6, 9 중 적어도 1개 이상이 포함되어야 한다.

이때 6이 적힌 공이 포함되는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

4, 7, 8, 9의 4개 중에서 1개를 택하는 경우의 수

6이 적힌 공이 포함되지 않는 경우의 수는

$${}_2C_1\cdot 1=2$$

4, 8의 2개 중에서 1개를 택하고 9를 택하는 경우의 수

따라서 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$4+2=6$

(iv) $a=4$인 경우

b, c, d 중 5는 반드시 포함되어야 하고, bcd가 4의 배수이어야 하므로 8이 반드시 포함되어야 한다.

따라서 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$${}_3C_1=3$$

(v) $a=5$인 경우

bcd가 5의 배수가 될 수 없으므로 순서쌍 (a, b, c, d)는 존재하지 않는다.

(vi) $a=6$인 경우

b, c, d 중 5가 포함될 수 없으므로 순서쌍 (a, b, c, d)는 존재하지 않는다.

❸ 이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$18+12+6+3=39$ 답 39

일품 BOX

ⓒ좋은책신사고

MEMO

ⓒ좋은책신사고