정답 및 풀이

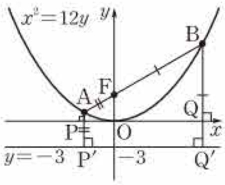
I. 이차곡선

01 이차곡선

유제 본책 11~39쪽

001-❶ $x^2=12y=4\cdot 3y$에서 포물선의 초점은 $F(0, 3)$이고 준선의 방정식은 $y=-3$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 직선 $y=-3$에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면 포물선의 정의에 의하여



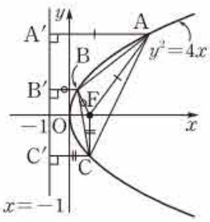
$$\overline{AF}=\overline{AP'}=\overline{AP}+\overline{PP'}$$
$$=1+3=4$$
$$\overline{BF}=\overline{BQ'}=\overline{BQ}+\overline{QQ'}$$
$$=9+3=12$$
$$\therefore \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}$$
$$=4+12=16$$

답 16

001-❷ 포물선 $y^2=4x$ 위의 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 a, b, c라 하면

$$\frac{a+b+c}{3}=2 \qquad \therefore a+b+c=6$$

포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 직선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$$\overline{AF}=\overline{AA'},\ \overline{BF}=\overline{BB'},$$
$$\overline{CF}=\overline{CC'}$$
$$\therefore \overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF}=\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}$$
$$=(a+1)+(b+1)+(c+1)$$
$$=(a+b+c)+3$$
$$=6+3=9$$

답 9

002-❶ 주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$$\left(1,\ \frac{-2-1}{2}\right),\ 즉\ \left(1,\ -\frac{3}{2}\right)$$

따라서 주어진 포물선은 꼭짓점이 원점인 포물선을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

평행이동하기 전의 포물선의 초점의 좌표가 $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$이므로 평행이동하기 전의 포물선의 방정식은

$$x^2=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)y,\ 즉\ x^2=-2y$$

따라서 주어진 포물선의 방정식은

$$(x-1)^2=-2\left(y+\frac{3}{2}\right)$$

즉 $a=-1$, $b=-2$, $c=\frac{3}{2}$이므로

$$a+b+c=-\frac{3}{2}$$

답 $-\frac{3}{2}$

다른 풀이 포물선 위의 한 점을 $P(x, y)$라 하고, 점 P에서 준선 $y=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=|y+1|$$

양변을 제곱하면

$$(x-1)^2+y^2+4y+4=y^2+2y+1$$
$$\therefore (x-1)^2=-2\left(y+\frac{3}{2}\right)$$

따라서 $a=-1$, $b=-2$, $c=\frac{3}{2}$이므로

$$a+b+c=-\frac{3}{2}$$

002-❷ 주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$$\left(\frac{0-3}{2},\ 4\right),\ 즉\ \left(-\frac{3}{2},\ 4\right)$$

따라서 주어진 포물선은 꼭짓점이 원점인 포물선을 x축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

평행이동하기 전의 포물선의 초점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이므로 평행이동하기 전의 포물선의 방정식은

$$y^2=4\cdot\frac{3}{2}x,\ 즉\ y^2=6x$$

따라서 주어진 포물선의 방정식은

$$(y-4)^2=6\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

이 포물선이 점 $(k, 7)$을 지나므로

$$9=6\left(k+\frac{3}{2}\right) \qquad \therefore k=0$$

답 0

다른 풀이 포물선 위의 한 점을 $P(x, y)$라 하고, 점 P에서 준선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로

$$\sqrt{x^2+(y-4)^2}=|x+3|$$

양변을 제곱하면

$x^2+(y-4)^2=x^2+6x+9$

$\therefore (y-4)^2=6\left(x+\frac{3}{2}\right)$

이 포물선이 점 $(k, 7)$을 지나므로

$9=6\left(k+\frac{3}{2}\right) \qquad \therefore k=0$

003-❶ (1) 주어진 포물선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$y^2=6(x+1)$

따라서 이 포물선은 포물선 $y^2=6x$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=6x=4\cdot\frac{3}{2}x$에서

초점의 좌표: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

준선의 방정식: $x=-\frac{3}{2}$

꼭짓점의 좌표: $(0, 0)$

이므로 포물선 $y^2=6(x+1)$에서

초점의 좌표: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

준선의 방정식: $x=-\frac{5}{2}$

꼭짓점의 좌표: $(-1, 0)$

(2) 주어진 포물선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$x^2-10x+25=2y-2$

$\therefore (x-5)^2=2(y-1)$

따라서 이 포물선은 포물선 $x^2=2y$를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2=2y=4\cdot\frac{1}{2}y$에서

초점의 좌표: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

준선의 방정식: $y=-\frac{1}{2}$

꼭짓점의 좌표: $(0, 0)$

이므로 포물선 $(x-5)^2=2(y-1)$에서

초점의 좌표: $\left(5, \frac{3}{2}\right)$

준선의 방정식: $y=\frac{1}{2}$

꼭짓점의 좌표: $(5, 1)$

답 풀이 참조

003-❷ $y^2-4x+6y+a=0$에서

$y^2+6y+9=4x-a+9$

$\therefore (y+3)^2=4\left(x-\frac{a-9}{4}\right)$

이 포물선의 초점의 좌표는

$\left(1+\frac{a-9}{4}, -3\right)$, 즉 $\left(\frac{a-5}{4}, -3\right)$

$x^2-8x-8y-24=0$에서 $\quad x^2-8x+16=8y+40$

$\therefore (x-4)^2=8(y+5)$

이 포물선의 초점의 좌표는

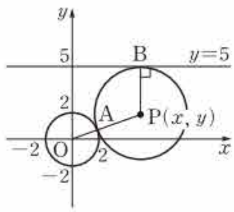
$(4, 2-5)$, 즉 $(4, -3)$

두 포물선의 초점이 일치하므로

$\frac{a-5}{4}=4, \quad a-5=16 \quad \therefore a=21$

답 21

004-❶ 오른쪽 그림과 같이 두 원의 접점을 A, 중심이 P인 원과 직선 $y=5$의 접점을 B라 하면



$\overline{OP}=\overline{OA}+\overline{PA}$

$=2+\overline{PB}$

이때 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\sqrt{x^2+y^2}=2+|5-y|$

이때 $y<5$이므로 $\quad \sqrt{x^2+y^2}=7-y$

양변을 제곱하면 $\quad x^2+y^2=49-14y+y^2$

$\therefore x^2+14y-49=0$

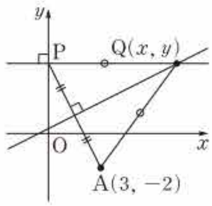
답 $x^2+14y-49=0$

Remark▶

$x^2+14y-49=0$에서 $\quad x^2=-14\left(y-\frac{7}{2}\right)$

따라서 점 P의 자취는 초점이 원점이고 준선의 방정식이 $y=7$인 포물선이다.

004-❷ 오른쪽 그림에서 점 Q는 $\overline{AP}$의 수직이등분선 위의 점이므로



$\overline{AQ}=\overline{PQ}$

이때 점 Q의 좌표를 (x, y)라 하면

$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=|x|$

양변을 제곱하면 $\quad x^2-6x+9+(y+2)^2=x^2$

$\therefore (y+2)^2=6\left(x-\frac{3}{2}\right)$

답 $(y+2)^2=6\left(x-\frac{3}{2}\right)$

005-❶ 초점이 x축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b^2=a^2-c^2)$이라 하자.

초점의 좌표가 $(5, 0)$, $(-5, 0)$이므로

$a^2-b^2=5^2$

$\therefore (a+b)(a-b)=25 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 장축의 길이와 단축의 길이의 차가 2이므로

$2a-2b=2 \qquad \therefore a-b=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$a+b=25 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=13,\ b=12$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

답 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

005-❷ 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$의 초점의 좌표는

$\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$에서 $\quad (0,\ \sqrt{6}),\ (0,\ -\sqrt{6})$

초점이 y축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a^2=b^2-c^2)$이라 하자.

두 초점에서의 거리의 합이 10이므로

$2b=10 \qquad \therefore b=5$

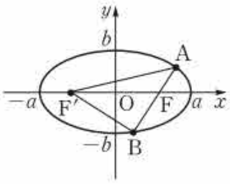
$\therefore a^2=5^2-(\sqrt{6})^2=19$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{19}+\frac{y^2}{25}=1$

답 $\frac{x^2}{19}+\frac{y^2}{25}=1$

006-❶ 오른쪽 그림에서



타원의 정의에 의하여

$\overline{AF}+\overline{AF'}$

$=\overline{BF}+\overline{BF'}=2a$

이므로 $\triangle ABF'$의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BF'}+\overline{F'A}$

$=(\overline{AF}+\overline{BF})+\overline{BF'}+\overline{AF'}$

$=(\overline{AF}+\overline{AF'})+(\overline{BF}+\overline{BF'})$

$=2a+2a=4a$

즉 $4a=12$이므로 $\quad a=3$

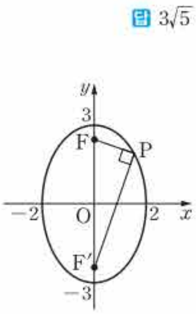
이때 초점이 $F(2,\ 0),\ F'(-2,\ 0)$이므로

$b^2=3^2-2^2=5 \qquad \therefore b=\sqrt{5}\ (\because b>0)$

$\therefore ab=3\sqrt{5}$

답 $3\sqrt{5}$

006-❷ 오른쪽 그림에서 타원의 정의에 의하여



$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\cdot 3=6$

$\overline{PF}=p$라 하면 $\quad \overline{PF'}=6-p$

또 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$에서

$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

이므로 타원의 초점의 좌표는

$(0,\ \sqrt{5}),\ (0,\ -\sqrt{5})$

$\therefore \overline{FF'}=2\sqrt{5}$

$\triangle FPF'$에서 피타고라스 정리에 의하여

$p^2+(6-p)^2=(2\sqrt{5})^2$

$p^2-6p+8=0, \qquad (p-2)(p-4)=0$

$\therefore p=2$ 또는 $p=4$

$\therefore \overline{PF}=2\ (\because \overline{PF'}>\overline{PF})$

답 2

007-❶ 구하는 타원의 중심의 좌표가

$\left(\frac{1+1}{2},\ \frac{1-9}{2}\right)$, 즉 $(1,\ -4)$이므로 구하는 타원은 중심이 원점이고 단축의 길이가 8인 타원을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

평행이동하기 전의 타원의 초점의 좌표가 $(0,\ 5)$, $(0,\ -5)$이고 $5^2+4^2=41$이므로 평행이동하기 전의 타원의 방정식은 $\quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{41}=1$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+4)^2}{41}=1$

답 $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+4)^2}{41}=1$

007-❷ 구하는 타원의 중심의 좌표가

$\left(\frac{0-6}{2},\ \frac{-1-1}{2}\right)$, 즉 $(-3,\ -1)$이므로 구하는 타원은 중심이 원점인 타원을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

평행이동하기 전의 타원의 초점의 좌표가 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이므로 구하는 타원의 방정식을

$\frac{(x+3)^2}{a^2}+\frac{(y+1)^2}{b^2}=1\,(b^2=a^2-c^2)$이라 하면

$a^2=b^2+9 \qquad \cdots\cdots ㉠$

타원이 점 $(-3,\ 5)$를 지나므로

$\frac{36}{b^2}=1 \qquad \therefore b^2=36$

$b^2=36$을 ㉠에 대입하면 $\quad a^2=45$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$\frac{(x+3)^2}{45}+\frac{(y+1)^2}{36}=1$

답 $\frac{(x+3)^2}{45}+\frac{(y+1)^2}{36}=1$

008-❶ (1) 주어진 타원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$(x^2-4x+4)+4(y^2+2y+1)=4$

$(x-2)^2+4(y+1)^2=4$

$\therefore \dfrac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1$

따라서 이 타원은 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$에서

초점의 좌표: $(\sqrt{3},\ 0)$, $(-\sqrt{3},\ 0)$

(장축의 길이)$=2\cdot2=4$

이므로 타원 $\dfrac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1$에서

초점의 좌표: $(2+\sqrt{3},\ -1)$, $(2-\sqrt{3},\ -1)$

장축의 길이: 4

(2) 주어진 타원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$3(x^2+6x+9)+2(y^2-2y+1)=12$

$3(x+3)^2+2(y-1)^2=12$

$\therefore \dfrac{(x+3)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{6}=1$

따라서 이 타원은 타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{6}=1$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{6}=1$에서

초점의 좌표: $(0,\ \sqrt{2})$, $(0,\ -\sqrt{2})$

(장축의 길이)$=2\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

이므로 타원 $\dfrac{(x+3)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{6}=1$에서

초점의 좌표: $(-3,\ 1+\sqrt{2})$, $(-3,\ 1-\sqrt{2})$

장축의 길이: $2\sqrt{6}$

답 풀이 참조

009-❶ 점 P는 타원 위의 점이므로 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$\dfrac{a^2}{27}+\dfrac{b^2}{18}=1$ …… ㉠

$\triangle\mathrm{ABP}$의 무게중심의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{-2+2+a}{3}=\dfrac{a}{3}$, $y=\dfrac{0+0+b}{3}=\dfrac{b}{3}$

$\therefore a=3x,\ b=3y$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{(3x)^2}{27}+\dfrac{(3y)^2}{18}=1 \qquad \therefore \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$

답 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$

009-❷ $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=9$이므로

$\sqrt{a^2+b^2}=9$

$\therefore a^2+b^2=81$ …… ㉠

이때 점 P는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{2\cdot0+1\cdot a}{2+1}=\dfrac{a}{3}$, $y=\dfrac{2\cdot b+1\cdot0}{2+1}=\dfrac{2}{3}b$

$\therefore a=3x,\ b=\dfrac{3}{2}y$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(3x)^2+\left(\dfrac{3}{2}y\right)^2=81 \qquad \therefore x^2+\dfrac{y^2}{4}=9$

답 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=9$

010-❶ 초점이 x축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하자.

초점의 좌표가 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=5^2=25$ …… ㉠

또 점근선의 방정식이 $y=\pm2x$이므로

$\dfrac{b}{a}=\pm2$

$\therefore b=\pm2a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2+(\pm2a)^2=25, \qquad 5a^2=25 \qquad \therefore a^2=5$

$a^2=5$를 ㉠에 대입하면 $\qquad b^2=20$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$

답 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$

011-❶ $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=-1$에서 $\sqrt{9+16}=5$이므로 쌍곡선의 초점의 좌표는 $\qquad (0,\ 5)$, $(0,\ -5)$

$\therefore \overline{\mathrm{FF'}}=10$

쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=2\cdot4=8$

이때 $\overline{\mathrm{PF'}}=2\overline{\mathrm{PF}}$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=8$, $\overline{\mathrm{PF'}}=16$

따라서 $\triangle\mathrm{PFF'}$의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{FF'}}+\overline{\mathrm{PF'}}=8+10+16=34$

답 34

011-❷ $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$에서 $\sqrt{4+5}=3$이므로 쌍곡선의 초점의 좌표는 $\qquad (3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$

$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$에서 $\sqrt{16-7}=3$이므로 타원의 초점의 좌표는 $\qquad (3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$

따라서 쌍곡선과 타원은 초점을 공유한다.

쌍곡선의 주축의 길이가 $2\cdot 2=4$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=4$

또 타원의 장축의 길이가 $2\cdot 4=8$이므로 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF'}+\overline{PF}=8$

$$\therefore \overline{PF'}^2-\overline{PF}^2=(\overline{PF'}+\overline{PF})(\overline{PF'}-\overline{PF})=8\cdot 4=32$$

답 32

012-❶ 구하는 쌍곡선의 중심의 좌표가 $\left(\frac{4-6}{2},\ \frac{2+2}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ 2)$이므로 구하는 쌍곡선은 중심이 원점이고 두 초점에서의 거리의 차가 8인 쌍곡선을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

평행이동하기 전의 쌍곡선의 초점의 좌표가 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이고 $5^2-4^2=9$이므로 평행이동하기 전의 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

답 $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$

다른 풀이 쌍곡선 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=8$, 즉 $\overline{PF}-\overline{PF'}=\pm 8$이므로

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2}=\pm 8$$

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\pm 8+\sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\pm 4\sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2}=5x+21$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$9(x+1)^2-16(y-2)^2=144$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

012-❷ 구하는 쌍곡선의 중심의 좌표가 $\left(\frac{1-5}{2},\ 0\right)$, 즉 $(-2,\ 0)$이므로 구하는 쌍곡선은 중심이 원점인 쌍곡선을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

평행이동하기 전의 쌍곡선의 초점의 좌표가 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이므로 평행이동하기 전의 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면

$$a^2+b^2=3^2=9 \quad \cdots\cdots ㉠$$

점근선의 기울기가 $\pm 2\sqrt{2}$이므로

$$\frac{b}{a}=\pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore b=\pm 2\sqrt{2}a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$a^2+(\pm 2\sqrt{2}a)^2=9,\quad 9a^2=9 \quad \therefore a^2=1$$

$a^2=1$을 ㉠에 대입하면 $b^2=8$

따라서 평행이동하기 전의 쌍곡선의 방정식이 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$이므로 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$(x+2)^2-\frac{y^2}{8}=1$$

답 $(x+2)^2-\frac{y^2}{8}=1$

013-❶ (1) 주어진 쌍곡선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$5(x^2+2x+1)-4(y^2-4y+4)=20$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$$

따라서 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$에서

초점의 좌표: $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$

점근선의 방정식: $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$

이므로 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(2,\ 2)$, $(-4,\ 2)$

점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x+1)+2$

$$\therefore y=\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2}+2,\ y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x-\frac{\sqrt{5}}{2}+2$$

(2) 주어진 쌍곡선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$9(x^2-4x+4)-4(y^2-2y+1)=-36$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{9}=-1$$

따라서 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$에서

초점의 좌표: $(0,\ \sqrt{13})$, $(0,\ -\sqrt{13})$

점근선의 방정식: $y=\pm\frac{3}{2}x$

이므로 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(2,\ 1+\sqrt{13})$, $(2,\ 1-\sqrt{13})$

점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{3}{2}(x-2)+1$

$$\therefore y=\frac{3}{2}x-2,\ y=-\frac{3}{2}x+4$$

답 풀이 참조

014-❶ 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$Q(0,\ y)$

$\therefore\ \overline{AQ}=\sqrt{(-2)^2+y^2},\ \overline{PQ}=|x|$

$\overline{AQ}=\overline{PQ}$에서

$\sqrt{4+y^2}=|x|$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-y^2=4$ 답 $x^2-y^2=4$

Remark▶

$x^2-y^2=4$에서 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$

따라서 점 P의 자취는 초점의 좌표가 $(2\sqrt{2},\ 0)$, $(-2\sqrt{2},\ 0)$이고 주축의 길이가 4인 쌍곡선이다.

014-❷ 점 P는 쌍곡선 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{b^2}{2}=1$ …… ㉠

점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{a}{2},\ y=\dfrac{b+1}{2}$

$\therefore\ a=2x,\ b=2y-1$

이것을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{(2x)^2}{4}-\dfrac{(2y-1)^2}{2}=1$

$\therefore\ 2x^2-4y^2+4y-3=0$

답 $2x^2-4y^2+4y-3=0$

중단원 연습 문제

본책 41~45쪽

01 2	**02** ⑤	**03** ③	**04** $6\sqrt{2}$	**05** 25
06 ③	**07** $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$			
08 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=-1$	**09** $4\sqrt{6}$	**10** 4		
11 $k<3$	**12** ②	**13** $27\sqrt{2}$	**14** 2	**15** ②
16 10	**17** $\dfrac{9}{10}$	**18** 5	**19** 3	**20** 29
21 ④	**22** ②	**23** ③		

01 전략 초점의 좌표가 $(p,\ 0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식은 $y^2=4px\ (p\neq0)$임을 이용하여 두 포물선의 초점의 좌표를 각각 구한다.

풀이 포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$

포물선 $x^2=ky=4\cdot\dfrac{k}{4}y$의 초점의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{k}{4}\right)$

두 초점 사이의 거리가 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$이므로

$\sqrt{1^2+\left(-\dfrac{k}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

양변을 제곱하면 $1+\dfrac{k^2}{16}=\dfrac{5}{4}$

$k^2=4$ $\therefore\ k=2\ (\because\ k>0)$ 답 2

02 전략 포물선의 정의를 이용한다.

풀이 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PH}=\overline{PF}=3$이므로 $\triangle PHF$는 이등변삼각형이다.

이때 점 P에서 $\overline{HF}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\triangle HPM$은 직각삼각형이므로

$\overline{HM}=\overline{PH}\cos30^\circ=3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \overline{FH}=2\overline{HM}=2\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ 답 ⑤

03 전략 $P(a,\ b)$, $Q(x,\ y)$로 놓고 a, b를 각각 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P는 포물선 $x^2=12y$ 위를 움직이므로

$a^2=12b$ …… ㉠

점 Q는 $\overline{OP}$의 중점이므로 $Q(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{a}{2},\ y=\dfrac{b}{2}$

$\therefore\ a=2x,\ b=2y$

이것을 ㉠에 대입하면

$(2x)^2=12\cdot2y$

$\therefore\ x^2=6y$

따라서 점 Q의 자취의 방정식은 $x^2=6y$이다. 답 ③

04 전략 장축의 길이를 이용하여 $|a|$의 값을 구한다.

풀이 주어진 타원의 장축의 길이가 10이므로

$2|a|=10$ $\therefore\ |a|=5$ ··· ❶

$\sqrt{5^2-7}=3\sqrt{2}$이므로 두 초점의 좌표는

$(3\sqrt{2},\ 0)$, $(-3\sqrt{2},\ 0)$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$2\cdot3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$ ··· ❷

답 $6\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $|a|$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 초점 사이의 거리를 구할 수 있다.	60 %

05 전략 타원의 정의와 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $\overline{PA}=a$, $\overline{PB}=b$라 하면 타원의 정의에 의하여

$a+b=2\cdot5=10$ ⋯ ❶

이때 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq2\sqrt{ab}$, $10\geq2\sqrt{ab}$

$\therefore ab\leq25$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립) ⋯ ❷

따라서 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$의 최댓값은 25이다. ⋯ ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ $\overline{PA}+\overline{PB}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $\overline{PA}=a$라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{PB}=10-a$ $(0<a<10)$

$\therefore \overline{PA}\cdot\overline{PB}=a(10-a)=10a-a^2$

$=-(a-5)^2+25$

즉 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$는 $a=5$일 때 최댓값 25를 갖는다.

06 전략 일반형으로 주어진 타원의 방정식을 표준형으로 변형한다.

풀이 $3x^2+2y^2-12x+4y+2=0$에서

$3(x-2)^2+2(y+1)^2=12$

타원 $3(x-2)^2+2(y+1)^2=12$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$3(x-2-a)^2+2(y+1-b)^2=12$

이것이 $3x^2+2y^2=c$와 일치하므로

$a=-2$, $b=1$, $c=12$

$\therefore ab+c=10$

답 ③

07 전략 점 P의 좌표를 (x, y)로 놓는다.

풀이 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\sqrt{(x-4)^2+y^2}:|x-7|=1:2$

$\therefore |x-7|=2\sqrt{(x-4)^2+y^2}$

양변을 제곱하면

$x^2-14x+49=4(x^2-8x+16+y^2)$

$3x^2-18x+4y^2+15=0$, $3(x-3)^2+4y^2=12$

$\therefore \dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

답 $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

08 전략 두 초점으로부터의 거리의 차가 4인 점의 자취는 쌍곡선이다.

풀이 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$에서 $\sqrt{25-16}=3$이므로 타원의 초점의 좌표는

$(0, 3)$, $(0, -3)$

따라서 두 초점 $(0, 3)$, $(0, -3)$으로부터의 거리의 차가 4인 점의 자취의 방정식은

$\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=-1$

답 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=-1$

다른 풀이 주어진 조건을 만족시키는 점을 $P(x, y)$라 하고, $F(0, 3)$, $F'(0, -3)$이라 하면

$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=4$, 즉 $\overline{PF}-\overline{PF'}=\pm4$

이므로

$\sqrt{x^2+(y-3)^2}-\sqrt{x^2+(y+3)^2}=\pm4$

$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=\pm4+\sqrt{x^2+(y+3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$\pm2\sqrt{x^2+(y+3)^2}=3y+4$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$4x^2-5y^2=-20$

$\therefore \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=-1$

09 전략 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$이다.

풀이 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하면 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

두 점근선이 서로 수직으로 만나므로

$\dfrac{b}{a}\cdot\left(-\dfrac{b}{a}\right)=-1$ $\therefore a^2=b^2$

즉 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$이 점 $(4, 2)$를 지나므로

$\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{4}{a^2}=1$ $\therefore a^2=12$

따라서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{12}=1$의 초점의 좌표는

$(2\sqrt{6}, 0)$, $(-2\sqrt{6}, 0)$

이므로 두 초점 사이의 거리는

$2\cdot2\sqrt{6}=4\sqrt{6}$

답 $4\sqrt{6}$

Remark▶

쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$이라 하면 $a^2=-12$가 되므로 조건을 만족시키지 않는다.

10 전략 일반형으로 주어진 쌍곡선의 방정식을 표준형으로 변형한다.

풀이 주어진 쌍곡선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$(x+1)^2-3(y-3)^2=12$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{12}-\frac{(y-3)^2}{4}=1 \quad \cdots ❶$$

따라서 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표가 $(4, 0)$, $(-4, 0)$이므로 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$$(3, 3),\ (-5, 3) \quad \cdots ❷$$

$$\therefore a+b+c+d=3+3+(-5)+3=4 \quad \cdots ❸$$

답 4

채점 기준	비율
❶ 쌍곡선의 방정식을 표준형으로 변형할 수 있다.	40 %
❷ 쌍곡선의 초점의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b+c+d$의 값을 구할 수 있다.	10 %

11 **전략** $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=\pm1$ 꼴로 변형한다.

풀이 $x^2+(k-3)y^2+2x+8y+1=0$에서

$$x^2+2x+1+(k-3)\left\{y^2+\frac{8}{k-3}y+\left(\frac{4}{k-3}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{16}{k-3}$$

$$\therefore (x+1)^2+(k-3)\left(y+\frac{4}{k-3}\right)^2=\frac{16}{k-3}$$

이 이차곡선이 쌍곡선이려면

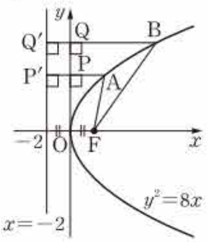
$k-3<0 \qquad \therefore k<3$

답 $k<3$

12 **전략** 포물선의 정의를 이용하여 $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y^2=8x=4\cdot2x$에서 포물선의 초점은 $F(2, 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$$\overline{AP'}=\overline{AF}=a,$$

$$\overline{BQ'}=\overline{BF}=2a$$

$$\therefore \overline{AP}=\overline{AP'}-\overline{PP'}=a-2$$

$$\overline{BQ}=\overline{BQ'}-\overline{QQ'}=2a-2$$

이때 $\overline{BQ}=3\overline{AP}$이므로

$2a-2=3(a-2) \qquad \therefore a=4$

답 ②

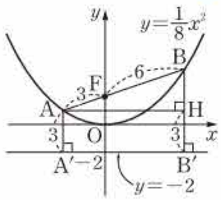
13 **전략** 포물선의 정의를 이용하여 $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$의 길이를 구한다.

풀이 $y=\frac{1}{8}x^2$에서 $\quad x^2=8y=4\cdot2y$

따라서 점 $F(0, 2)$와 직선 $y=-2$는 각각 포물선 $y=\frac{1}{8}x^2$의 초점과 준선이므로 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AA'}=\overline{AF}=3,\ \overline{BB'}=\overline{BF}=6 \quad \cdots ❶$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BB'}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{BH}=\overline{BB'}-\overline{HB'}=6-3=3$$

직각삼각형 BAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2} \quad \cdots ❷$$

따라서 □AA′B′B의 넓이는

$$\frac{1}{2}(\overline{AA'}+\overline{BB'})\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}(3+6)\cdot6\sqrt{2}=27\sqrt{2} \quad \cdots ❸$$

답 $27\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\overline{AH}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❸ □AA′B′B의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

14 **전략** 포물선의 꼭짓점은 포물선의 축 위의 점임을 이용한다.

풀이 직선 $y=-2$를 축으로 하는 포물선의 방정식을

$$(y+2)^2=4p(x-m)$$

이라 하면 이 포물선이 두 점 $(4, -4)$, $(12, 4)$를 지나므로

$$4=4p(4-m) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$36=4p(12-m) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$m=3,\ p=1$$

$$\therefore (y+2)^2=4(x-3)$$

따라서 이 포물선은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는

$(1+3, 0-2)$, 즉 $(4, -2)$

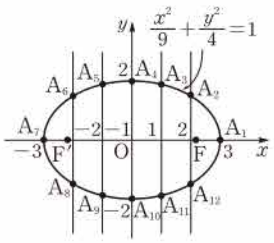
따라서 $a=4$, $b=-2$이므로

$a+b=2$

답 2

15 전략 타원의 정의를 이용한다.

풀이 다음 그림과 같이 A_1, A_2, $\cdots$, A_{12}를 정하고 주어진 타원의 다른 한 초점을 F'이라 하자.



타원의 정의에 의하여

$\overline{A_iF}+\overline{A_iF'}=2\cdot3=6$ $(i=1, 2, \cdots, 12)$

$\therefore (\overline{A_1F}+\overline{A_1F'})+(\overline{A_2F}+\overline{A_2F'})$
$+\cdots+(\overline{A_{12}F}+\overline{A_{12}F'})$

$=6\cdot12=72$

그런데 주어진 타원은 y축에 대하여 대칭이므로

$\overline{A_1F}+\overline{A_2F}+\cdots+\overline{A_{12}F}$
$=\overline{A_1F'}+\overline{A_2F'}+\cdots+\overline{A_{12}F'}$
$=\frac{1}{2}\cdot72=36$

답 ②

Remark▶

주어진 타원이 y축에 대하여 대칭이므로 위의 그림에서 초점 F와 F′, 타원 위의 점 A_2와 점 A_6도 y축에 대하여 대칭이다.

$\therefore \overline{A_2F}=\overline{A_6F'}$

나머지 점들도 같은 방법으로

$\overline{A_1F}+\overline{A_2F}+\cdots+\overline{A_{12}F}$
$=\overline{A_1F'}+\overline{A_2F'}+\cdots+\overline{A_{12}F'}$

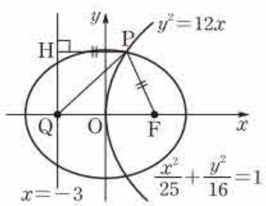
임을 알 수 있다.

16 전략 타원의 정의와 포물선의 정의를 이용한다.

풀이 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$에서 $\sqrt{25-16}=3$이므로 타원의 초점의 좌표는

$(3, 0)$, $(-3, 0)$

$F(3, 0)$이라 하면 타원의 초점은 두 점 F, Q이므로 타원의 정의에 의하여



$\overline{PF}+\overline{PQ}=2\cdot5=10$

한편 $y^2=12x=4\cdot3x$에서 포물선의 초점은 점 F이고, 준선은 직선 $x=-3$이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$

$\therefore \overline{PH}+\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{PQ}=10$

답 10

17 전략 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 길이는 각각 점 P와 두 점근선 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{1}{3}x$ $\therefore x\pm3y=0$ ··· ❶

점 P에서 두 직선 $x+3y=0$, $x-3y=0$에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 길이는 각각 점 $P(a, b)$와 두 직선 $x+3y=0$, $x-3y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{PA}=\frac{|a+3b|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|a+3b|}{\sqrt{10}}$

$\overline{PB}=\frac{|a-3b|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|a-3b|}{\sqrt{10}}$

$\therefore \overline{PA}\cdot\overline{PB}=\frac{|a+3b|}{\sqrt{10}}\cdot\frac{|a-3b|}{\sqrt{10}}$

$=\frac{|a^2-9b^2|}{10}$ ······ ㉠ ··· ❷

이때 점 $P(a, b)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{9}-b^2=1$ $\therefore a^2-9b^2=9$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\frac{9}{10}$ ··· ❸

답 $\frac{9}{10}$

채점 기준	비율
❶ 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

18 전략 주축의 길이와 점근선의 방정식을 이용하여 쌍곡선의 방정식을 구한다.

풀이 주축이 x축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하자.

주축의 길이가 2이므로

$2a=2$ $\therefore a=1$

점근선의 방정식이 $y=\pm2x$이므로

$\frac{b}{a}=2$ $\therefore b=2a=2$

따라서 쌍곡선의 방정식은

$x^2-\frac{y^2}{4}=1$ ······ ㉠

점 P의 좌표를 (s, t)라 하면 점 P는 쌍곡선 ㉠ 위의 점이므로 $s^2-\frac{t^2}{4}=1$

$\therefore t^2=4s^2-4$ …… ㉡

점 $A(5, 0)$과 점 P 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\sqrt{(s-5)^2+t^2}$$
$$=\sqrt{(s-5)^2+4s^2-4}\ (\because ㉡)$$
$$=\sqrt{5s^2-10s+21}$$
$$=\sqrt{5(s-1)^2+16}$$

따라서 d는 $s=1$일 때 최소이고, 이때의 최솟값은 4이므로

$p=1,\ m=4$

또 $s=1$을 ㉡에 대입하면

$t^2=4\cdot1^2-4=0 \qquad \therefore t=0$

$\therefore q=0$

$\therefore p+q+m=5$

답 5

19 전략 두 점 P, Q는 두 쌍곡선의 초점임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$에서 $\sqrt{4+12}=4$,

$x^2-\dfrac{y^2}{15}=1$에서 $\sqrt{1+15}=4$이므로 두 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(4, 0),\ (-4, 0)$

즉 두 점 P, Q는 두 쌍곡선의 초점이다. ⋯ ❶

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{AQ}-\overline{AP}=2\cdot2=4$

$\overline{BQ}-\overline{BP}=2\cdot1=2$ …… ㉠ ⋯ ❷

$\triangle QAB$의 둘레의 길이가 12이므로

$\overline{BQ}+\overline{AQ}+\overline{AB}=12$

$\overline{BQ}+\overline{AQ}+(\overline{BP}-\overline{AP})=12$

㉠에서 $\overline{BQ}=\overline{BP}+2$이므로

$(\overline{BP}+2)+(\overline{AQ}-\overline{AP})+\overline{BP}=12$

$2\overline{BP}+6=12$

$\therefore \overline{BP}=3$ ⋯ ❸

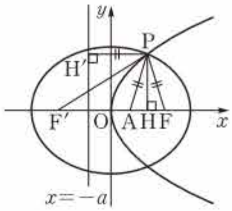
답 3

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q가 두 쌍곡선의 초점임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\overline{AQ}-\overline{AP}$, $\overline{BQ}-\overline{BP}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{BP}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %

20 전략 포물선의 정의를 이용하여 $\overline{PF}$, $\overline{FF'}$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 초점이 $A(a, 0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선의 준선의 방정식은 $x=-a$이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x축, 준선 $x=-a$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면



$\overline{AH}=\overline{FH}$

$=\dfrac{1}{2}\overline{AF}$

$=1$

이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF}=\overline{PA}=\overline{PH'}=2a+1$

또 $\overline{PF'}=\overline{FF'}=2(a+2)=2a+4$이고

$\triangle PAF \backsim \triangle F'FP$이므로

$\overline{PA}:\overline{F'F}=\overline{AF}:\overline{FP}$

$(2a+1):(2a+4)=2:(2a+1)$

$4a^2=7 \qquad \therefore a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\ (\because a>0)$

따라서 타원의 장축의 길이는

$\overline{PF'}+\overline{PF}=(2a+4)+(2a+1)$

$=4a+5$

$=2\sqrt{7}+5$

이므로 $\quad p=5,\ q=2$

$\therefore p^2+q^2=29$

답 29

21 전략 타원의 정의를 이용하여 $\triangle AFB$의 넓이를 b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서

$\overline{OA}=|a|,\ \overline{OB}=|b|,\ \overline{OF}=c$

이때 $\triangle OFB$는 직각삼각형이고, $c^2=a^2-b^2$이므로

$\overline{OA}^2=\overline{OF}^2+\overline{OB}^2=\overline{BF}^2$

$\therefore \overline{OA}=\overline{BF}$

$\overline{BF}=\dfrac{\overline{OB}}{\sin 60°}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}|b|$, $\overline{OF}=\dfrac{\overline{OB}}{\tan 60°}=\dfrac{|b|}{\sqrt{3}}$이므로 $\triangle AFB$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AF}\cdot\overline{OB}=\dfrac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OF})\cdot\overline{OB}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}|b|+\dfrac{|b|}{\sqrt{3}}\right)\cdot|b|$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b^2$

즉 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}b^2=6\sqrt{3}$이므로 $\qquad b^2=12$

이때 $\overline{OA}=\overline{BF}$, 즉 $|a|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}|b|$이므로

$a^2=\dfrac{4}{3}b^2=16$

$\therefore a^2+b^2=28$

답 ④

22

(전략) 타원의 정의를 이용한다.

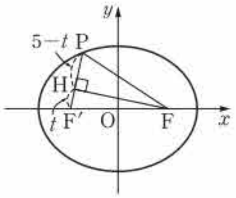
(풀이) 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{F'P}}=2\cdot 7=14$

$\overline{\mathrm{FP}}=9$이므로

$\overline{\mathrm{F'P}}=14-9=5$

오른쪽 그림에서



$\overline{\mathrm{F'H}}=t\,(0<t<5)$라 하면

$\overline{\mathrm{HP}}=5-t$

직각삼각형 PHF에서

$(5-t)^2+(6\sqrt{2})^2=9^2$

$\therefore (5-t)^2=9$

이때 $0<t<5$이므로 $\quad t=2$

따라서 직각삼각형 FHF′에서

$\overline{\mathrm{FF'}}=\sqrt{2^2+(6\sqrt{2})^2}=2\sqrt{19}$

이므로 주어진 타원의 두 초점은

$(\sqrt{19},\ 0),\ (-\sqrt{19},\ 0)$

따라서 $\sqrt{49-a}=\sqrt{19}$이므로

$a=49-19=30$

답 ②

23

(전략) $\overline{\mathrm{FQ}}$의 최댓값이 14임을 이용하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 값을 구한다.

(풀이) 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=8$ ...... ㉠

또 $\overline{\mathrm{FQ}}\le\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}$이고 $\overline{\mathrm{FQ}}$의 최댓값이 14이므로

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=14$ ...... ㉡

㉡−㉠을 하면

$2\overline{\mathrm{PF'}}=6 \qquad \therefore \overline{\mathrm{PF'}}=3$

따라서 원 C의 넓이는

$\pi\cdot 3^2=9\pi$

답 ③

I. 이차곡선

02 이차곡선과 직선

유제 본책 49~72쪽

015-❶ $x=-my-3$을 $y^2-4x-2y+13=0$에 대입하면 $\quad y^2-4(-my-3)-2y+13=0$

$\therefore y^2+2(2m-1)y+25=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2m-1)^2-25=0$

$m^2-m-6=0, \qquad (m+2)(m-3)=0$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=3$

그런데 $m>0$이므로 $\quad m=3$

답 3

015-❷ 직선 $y=3x+3$을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=3(x-k)+3$, 즉 $y=3x-3k+3$

이것을 $x^2=4y$에 대입하면

$x^2=4(3x-3k+3)$

$\therefore x^2-12x+12k-12=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-(12k-12)<0$

$-12k+48<0 \qquad \therefore k>4$

답 $k>4$

016-❶ x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 직선의 기울기는 $\quad \tan 60°=\sqrt{3}$

$y^2=-3x=4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)x$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x+\frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{3}}$, 즉 $y=\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{4}$

답 $y=\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{4}$

(다른 풀이) 구하는 직선의 기울기가 $\tan 60°=\sqrt{3}$이므로 직선의 방정식을 $y=\sqrt{3}x+k$로 놓고 $y^2=-3x$에 대입하면 $\quad (\sqrt{3}x+k)^2=-3x$

$\therefore 3x^2+(2\sqrt{3}k+3)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2\sqrt{3}k+3)^2-4\cdot 3\cdot k^2=0$

$12\sqrt{3}k+9=0 \qquad \therefore k=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{4}$

016-❷ 직선 $2x+y+1=0$에 평행한 직선의 기울기는 -2이다.
초점의 좌표가 $(0,\ 1)$이고 준선의 방정식이 $y=-1$인 포물선의 방정식은
$$x^2=4y$$
이므로 구하는 직선의 방정식은
$$y=-2x-(-2)^2\cdot1,\ \text{즉}\ y=-2x-4$$
답 $y=-2x-4$

다른 풀이 구하는 직선의 기울기가 -2이므로 직선의 방정식을 $y=-2x+k$로 놓고 $x^2=4y$에 대입하면
$$x^2=4(-2x+k)$$
$$\therefore\ x^2+8x-4k=0$$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=4^2-(-4k)=0$$
$$16+4k=0 \qquad \therefore\ k=-4$$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$$y=-2x-4$$

017-❶ 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 방정식은
$$-2y=2\cdot1\cdot(x+1) \qquad \therefore\ y=-x-1$$
직선 $y=-x-1$이 점 $(k,\ 4)$를 지나므로
$$4=-k-1 \qquad \therefore\ k=-5$$
답 -5

다른 풀이 구하는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은
$$y=mx+\frac{1}{m} \qquad \cdots\cdots ㉠$$
직선 ㉠이 점 $(1,\ -2)$를 지나므로
$$-2=m+\frac{1}{m}, \qquad m^2+2m+1=0$$
$$(m+1)^2=0 \qquad \therefore\ m=-1$$
이것을 ㉠에 대입하면 $\quad y=-x-1$
직선 $y=-x-1$이 점 $(k,\ 4)$를 지나므로
$$4=-k-1 \qquad \therefore\ k=-5$$

017-❷ 포물선 $x^2=8y$ 위의 점 $(4,\ 2)$에서의 접선의 방정식은
$$4x=2\cdot2(y+2) \qquad \therefore\ y=x-2$$
따라서 구하는 직선은 기울기가 1이고 점 $(-3,\ 5)$를 지나므로
$$y=1\cdot(x+3)+5$$
$$\therefore\ y=x+8$$
답 $y=x+8$

018-❶ 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$로 놓으면 접선의 방정식은
$$x_1x=4(y+y_1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$
직선 ㉠이 점 $(1,\ -1)$을 지나므로
$$x_1=4(-1+y_1) \qquad \cdots\cdots ㉡$$
또 점 $(x_1,\ y_1)$은 포물선 $x^2=8y$ 위의 점이므로
$$x_1^2=8y_1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$
㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면
$$2y_1^2-5y_1+2=0, \qquad (2y_1-1)(y_1-2)=0$$
$$\therefore\ y_1=\frac{1}{2}\ \text{또는}\ y_1=2$$
$y_1=\frac{1}{2}$일 때 $x_1=-2$, $y_1=2$일 때 $x_1=4$이므로 ㉠에서 구하는 직선의 방정식은
$$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\ y=x-2$$
답 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\ y=x-2$

다른 풀이 1 포물선 $x^2=8y$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$$y=mx-2m^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
직선 ㉠이 점 $(1,\ -1)$을 지나므로
$$-1=m-2m^2, \qquad 2m^2-m-1=0$$
$$(2m+1)(m-1)=0$$
$$\therefore\ m=-\frac{1}{2}\ \text{또는}\ m=1$$
따라서 ㉠에서 구하는 직선의 방정식은
$$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\ y=x-2$$

다른 풀이 2 점 $(1,\ -1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$$y=m(x-1)-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
㉠을 $x^2=8y$에 대입하여 정리하면
$$x^2-8mx+8m+8=0$$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=(-4m)^2-(8m+8)=0$$
$$2m^2-m-1=0, \qquad (2m+1)(m-1)=0$$
$$\therefore\ m=-\frac{1}{2}\ \text{또는}\ m=1$$
따라서 ㉠에서 구하는 직선의 방정식은
$$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\ y=x-2$$

019-❶ $y=mx-\sqrt{3}$을 $x^2+2y^2=2$에 대입하면
$$x^2+2(mx-\sqrt{3})^2=2$$
$$\therefore\ (1+2m^2)x^2-4\sqrt{3}mx+4=0$$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=(-2\sqrt{3}m)^2-4(1+2m^2)=0$$

$4m^2-4=0, \quad m^2=1$

$\therefore m=1 \ (\because m>0)$ 답 1

019-❷ 직선 $y=2x$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=2(x-k)$

$y=2(x-k)$를 $2x^2+y^2=12$에 대입하면

$2x^2+4(x-k)^2=12$

$\therefore 3x^2-4kx+2k^2-6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-3(2k^2-6)<0$

$-2k^2+18<0, \quad (k+3)(k-3)>0$

$\therefore k<-3$ 또는 $k>3$ 답 $k<-3$ 또는 $k>3$

020-❶ 직선 $2x-y+5=0$, 즉 $y=2x+5$에 평행한 직선의 기울기는 2이다.

$2x^2+y^2=6$에서 $\quad \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{3\cdot2^2+6}$, 즉 $y=2x\pm3\sqrt{2}$

답 $y=2x\pm3\sqrt{2}$

다른 풀이 구하는 직선의 기울기가 2이므로 직선의 방정식을 $y=2x+k$로 놓고 $2x^2+y^2=6$에 대입하면

$2x^2+(2x+k)^2=6$

$\therefore 6x^2+4kx+k^2-6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-6(k^2-6)=0$

$k^2=18 \quad \therefore k=\pm3\sqrt{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\quad y=2x\pm3\sqrt{2}$

020-❷ $x^2+4y^2=16$에서 $\quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

따라서 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{16\cdot(\sqrt{3})^2+4}$, 즉 $y=\sqrt{3}x\pm2\sqrt{13}$

구하는 거리는 직선 $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{13}$ 위의 점 $(0, 2\sqrt{13})$과 직선 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{13}$, 즉 $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{13}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-2\sqrt{13}-2\sqrt{13}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{13}}{2}=2\sqrt{13}$ 답 $2\sqrt{13}$

021-❶ 타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{-x}{2}+\frac{2y}{8}=1 \quad \therefore y=2x+4$

이 직선이 점 $(4, a)$를 지나므로

$a=2\cdot4+4=12$ 답 12

021-❷ 타원 $x^2+2y^2=6$ 위의 점 $(2, -1)$에서의 접선의 방정식은

$2x+2\cdot(-y)=6$

$\therefore y=x-3$

직선 $y=x-3$에 수직인 직선의 기울기는 -1이고, 이 직선이 점 $(6, 1)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-(x-6)$, 즉 $y=-x+7$

답 $y=-x+7$

022-❶ 접점의 좌표를 (x_1, y_1)로 놓으면 접선의 방정식은

$4x_1x+y_1y=4$ ······ ㉠

직선 ㉠이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$4x_1+y_1=4$

$\therefore y_1=-4x_1+4$ ······ ㉡

또 점 (x_1, y_1)은 타원 위의 점이므로

$4x_1^2+y_1^2=4$ ······ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면

$5x_1^2-8x_1+3=0, \quad (5x_1-3)(x_1-1)=0$

$\therefore x_1=\frac{3}{5}$ 또는 $x_1=1$

$x_1=\frac{3}{5}$일 때 $y_1=\frac{8}{5}$, $x_1=1$일 때 $y_1=0$이므로 ㉠에서 구하는 접선의 방정식은

$3x+2y=5, \ x=1$ 답 $3x+2y=5, \ x=1$

023-❶ $y=-x+k$를 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{4}-\frac{(-x+k)^2}{2}=1$

$\therefore x^2-4kx+2k^2+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-(2k^2+4)=0$

$2k^2-4=0, \quad k^2=2$

$\therefore k=\pm\sqrt{2}$ 답 $\pm\sqrt{2}$

023-❷ $y=2x+k$를 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{4}-(2x+k)^2=1$

$\therefore 15x^2+16kx+4k^2+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(8k)^2-15(4k^2+4)<0$

$4k^2-60<0$, $k^2<15$

$\therefore -\sqrt{15}<k<\sqrt{15}$

따라서 정수 k의 최댓값은 3이다. 답 3

024-❶ x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 직선의 기울기는 $\tan 60°=\sqrt{3}$

$3x^2-4y^2=12$에서 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{4\cdot(\sqrt{3})^2-3}$, 즉 $y=\sqrt{3}x\pm3$

답 $y=\sqrt{3}x\pm3$

다른 풀이 구하는 직선의 기울기가 $\tan 60°=\sqrt{3}$이므로 직선의 방정식을 $y=\sqrt{3}x+k$로 놓고 $3x^2-4y^2=12$에 대입하면 $3x^2-4(\sqrt{3}x+k)^2=12$

$\therefore 9x^2+8\sqrt{3}kx+4k^2+12=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(4\sqrt{3}k)^2-9(4k^2+12)=0$

$12k^2=108$, $k^2=9$

$\therefore k=\pm3$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x\pm3$

024-❷ 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{9\cdot2^2-16}$, 즉 $y=2x\pm2\sqrt{5}$

이때 두 직선 $y=2x-2\sqrt{5}$와 $y=2x+2\sqrt{5}$ 사이의 거리는 직선 $y=2x-2\sqrt{5}$ 위의 점 $(0,\ -2\sqrt{5})$와 직선 $y=2x+2\sqrt{5}$, 즉 $2x-y+2\sqrt{5}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-(-2\sqrt{5})+2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=4$ 답 4

025-❶ 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2x}{2}-1\cdot y=1$ $\therefore y=x-1$

따라서 구하는 y절편은 -1이다. 답 -1

025-❷ 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax-3by=6$

이 직선이 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$a+3b=6$ $\therefore a=-3b+6$ …… ㉠

또 점 $(a,\ b)$가 쌍곡선 $x^2-3y^2=6$ 위의 점이므로

$a^2-3b^2=6$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(-3b+6)^2-3b^2=6$

$b^2-6b+5=0$, $(b-1)(b-5)=0$

$\therefore b=1$ 또는 $b=5$

$b=1$일 때 $a=3$, $b=5$일 때 $a=-9$이므로

$a=3,\ b=1$ ($\because a>0,\ b>0$) 답 $a=3,\ b=1$

026-❶ 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$로 놓으면 접선의 방정식은 $x_1x-2y_1y=1$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로

$-x_1-2y_1=1$

$\therefore x_1=-2y_1-1$ …… ㉡

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 쌍곡선 위의 점이므로

$x_1^2-2y_1^2=1$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면

$y_1^2+2y_1=0$, $y_1(y_1+2)=0$

$\therefore y_1=0$ 또는 $y_1=-2$

$y_1=0$일 때 $x_1=-1$, $y_1=-2$일 때 $x_1=3$이므로 ㉠에서 구하는 접선의 방정식은

$x=-1,\ 3x+4y=1$ 답 $x=-1,\ 3x+4y=1$

중단원 연습 문제 본책 73~76쪽

01 $k<\frac{3}{2}$	02 ③	03 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$		
04 $3\sqrt{5}$	05 $2\sqrt{7}$	06 $\frac{25}{2}$	07 4	08 ①
09 $\frac{1}{8}$	10 ④	11 $\frac{27}{10}$	12 -5	13 ③
14 $\frac{24\sqrt{13}}{13}$		15 ①	16 12	17 17
18 32	19 ③	20 ①		

01 전략 주어진 직선을 대칭이동, 평행이동한 직선의 방정식과 포물선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식이 0보다 커야 함을 이용한다.

풀이 직선 $y=x+1$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=x+1$ $\therefore y=-x-1$

이 직선을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-x-1+k$

$y=-x-1+k$를 $x^2=-2y$에 대입하면

$$x^2=-2(-x-1+k)$$

$$\therefore x^2-2x-2+2k=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

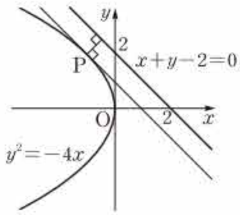
$$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-2+2k)>0$$

$$3-2k>0 \quad \therefore k<\frac{3}{2}$$

답 $k<\frac{3}{2}$

02 전략 직선 $x+y-2=0$과 평행한 포물선의 접선과 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리를 구한다.

풀이 직선 $x+y-2=0$의 기울기가 -1이므로 구하는 최솟값은 포물선 $y^2=-4x$에 접하고 기울기가 -1인 직선과 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리와 같다.



포물선 $y^2=-4x$에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$$y=-x+\frac{-1}{-1} \quad \therefore y=-x+1$$

이 직선 위의 점 $(0, 1)$과 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. 답 ③

다른 풀이 점 P의 좌표를 $\left(-\frac{a^2}{4}, a\right)$로 놓으면 점 P와 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|-\frac{a^2}{4}+a-2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\frac{1}{4}(a-2)^2-1\right|$$

따라서 구하는 거리는 $a=2$일 때 최소이고, 최솟값은 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

03 전략 먼저 포물선 위의 점 $(4, 8)$에서의 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $x^2=2y=4\cdot\frac{1}{2}y$에서 포물선의 초점의 좌표는

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \quad \cdots ❶$$

포물선 $x^2=2y$ 위의 점 $(4, 8)$에서의 접선의 방정식은

$$4x=2\cdot\frac{1}{2}\cdot(y+8) \quad \therefore y=4x-8 \quad \cdots ❷$$

직선 $y=4x-8$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이고 이 직선이 점 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 포물선 $x^2=2y$의 초점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ 포물선 $x^2=2y$ 위의 점 $(4, 8)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 접선에 수직이고 포물선의 초점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

04 전략 접점의 좌표를 (x_1, y_1)로 놓고 접점의 좌표를 구한다.

풀이 접점의 좌표를 (x_1, y_1)로 놓으면 접선의 방정식은

$$y_1y=2(x+x_1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $A(-2, 1)$을 지나므로

$$y_1=2(-2+x_1) \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 점 (x_1, y_1)이 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$$y_1^2=4x_1 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면

$$x_1^2-5x_1+4=0, \quad (x_1-1)(x_1-4)=0$$

$\therefore x_1=1$ 또는 $x_1=4$

$x_1=1$일 때 $y_1=-2$, $x_1=4$일 때 $y_1=4$이므로 접점 P, Q의 좌표는 $(1, -2)$, $(4, 4)$

$$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(4-1)^2+\{4-(-2)\}^2}=3\sqrt{5}$$

답 $3\sqrt{5}$

05 전략 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식 중 하나는 $y=-x+4$와 일치함을 이용한다.

풀이 초점의 좌표가 $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$이므로 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b^2=a^2-c^2)$로 놓으면

$$a^2-b^2=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

타원에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$$y=-x\pm\sqrt{a^2\cdot(-1)^2+b^2}, \text{ 즉 } y=-x\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

따라서 직선 $y=-x+\sqrt{a^2+b^2}$이 직선 $y=-x+4$와 일치해야 하므로

$$\sqrt{a^2+b^2}=4$$

$$\therefore a^2+b^2=16 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a^2=9,\ b^2=7$

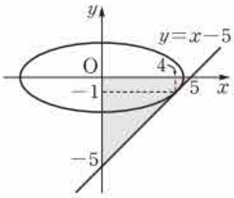
따라서 단축의 길이는 $2|b|=2\sqrt{7}$ 답 $2\sqrt{7}$

06 전략 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$임을 이용한다.

풀이 타원 $x^2+4y^2=20$ 위의 점 $(4,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$4x+4\cdot(-y)=20 \quad \therefore y=x-5$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot5\cdot5=\frac{25}{2}$

답 $\frac{25}{2}$

07 전략 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1임을 이용한다.

풀이 점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=m(x-2)+1$

이것을 $ax^2+y^2=a$에 대입하여 정리하면

$(a+m^2)x^2+2m(1-2m)x+4m^2-4m+1-a=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{m(1-2m)\}^2-(a+m^2)(4m^2-4m+1-a)$
$=0$

$3am^2-4am-a^2+a=0$

$\therefore 3m^2-4m-a+1=0\ (\because a>0)$

두 접선의 기울기는 이 이차방정식의 두 근과 같고, 두 접선이 서로 수직이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{-a+1}{3}=-1, \quad -a+1=-3$

$\therefore a=4$ 답 4

08 전략 쌍곡선과 직선의 방정식을 연립하여 만든 이차방정식의 판별식이 0임을 이용한다.

풀이 $y=mx+3$을 $x^2-y^2=3$에 대입하면

$x^2-(mx+3)^2=3$

$\therefore (1-m^2)x^2-6mx-12=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3m)^2-(1-m^2)\cdot(-12)=0$

$-3m^2+12=0, \quad m^2=4 \quad \therefore m=\pm2$

따라서 모든 실수 m의 값의 곱은

$(-2)\cdot2=-4$ 답 ①

다른 풀이 쌍곡선 $x^2-y^2=3$, 즉 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{3m^2-3}$

따라서 직선 $y=mx+\sqrt{3m^2-3}$이 직선 $y=mx+3$과 일치하므로 y절편을 비교하면

$\sqrt{3m^2-3}=3, \quad 3m^2=12$

$m^2=4 \quad \therefore m=\pm2$

따라서 모든 실수 m의 값의 곱은 $(-2)\cdot2=-4$

09 전략 먼저 쌍곡선의 접선의 방정식을 구한다.

풀이 쌍곡선 $4x^2-y^2=3$ 위의 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $4\cdot(-x)-1\cdot y=3$

$\therefore y=-4x-3$ ··· ❶

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{4}$이고, 이 직선이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{4}(x-2)+1$, 즉 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ ··· ❷

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$이므로 $ab=\frac{1}{8}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{8}$

채점 기준	비율
❶ 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ 접선에 수직이고 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

10 전략 점근선의 방정식과 접선의 방정식을 구한 후, 점근선과 접선의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 $y^2-x^2=5$, 즉 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{5}=-1$에서 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}x$, 즉 $y=\pm x$ ······ ㉠

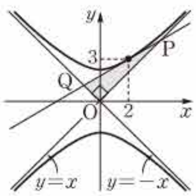
쌍곡선 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$3y-2x=5$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-1,\ y=1$ 또는 $x=5,\ y=5$

오른쪽 그림과 같이 $P(5,\ 5)$, $Q(-1,\ 1)$이라 하면 두 점근선의 기울기의 곱이 -1이므로



$\angle POQ=90°$

$\overline{OP}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$,

$\overline{OQ}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\cdot5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=5$ 답 ④

02 이차곡선과 직선

11 (전략) 두 접선의 방정식을 구한 후, 점 P, Q의 좌표를 구한다.

(풀이) 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$로 놓으면 접선의 방정식은

$x_1x-y_1y=1$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$x_1-3y_1=1$

$\therefore\ x_1=3y_1+1$ …… ㉡

또 점 $(x_1,\ y_1)$이 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점이므로

${x_1}^2-{y_1}^2=1$ …… ㉢

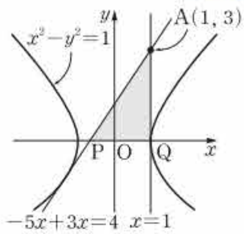
㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면

$4{y_1}^2+3y_1=0,\qquad y_1(4y_1+3)=0$

$\therefore\ y_1=-\dfrac{3}{4}$ 또는 $y_1=0$

$y_1=-\dfrac{3}{4}$일 때 $x_1=-\dfrac{5}{4}$, $y_1=0$일 때 $x_1=1$이므로 ㉠에서 접선의 방정식은

$-5x+3y=4,\ x=1$ ⋯ ❶



오른쪽 그림과 같이 직선 $-5x+3y=4$와 x축의 교점을 P, 직선 $x=1$과 x축의 교점을 Q라 하면

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{4}{5},\ 0\right),\ \mathrm{Q}(1,\ 0)$

따라서 △APQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\left\{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right\}\cdot 3=\dfrac{27}{10}$ ⋯ ❷

답 $\dfrac{27}{10}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ △APQ의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

12 (전략) 포물선 $y^2=-8x$에 접하고 기울기가 m인 직선이 포물선 $y^2=12(x-1)$에도 접함을 이용한다.

(풀이) 포물선 $y^2=-8x$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx-\dfrac{2}{m}$

직선 $y=mx-\dfrac{2}{m}$가 포물선 $y^2=12(x-1)$에 접하므로 $y=mx-\dfrac{2}{m}$를 $y^2=12(x-1)$에 대입하면

$\left(mx-\dfrac{2}{m}\right)^2=12(x-1)$

$\therefore\ m^2x^2-16x+\dfrac{4}{m^2}+12=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-8)^2-m^2\left(\dfrac{4}{m^2}+12\right)=0$

$60-12m^2=0,\qquad m^2=5$

$\therefore\ m=\pm\sqrt{5}$

따라서 두 직선의 기울기의 곱은

$\sqrt{5}\cdot(-\sqrt{5})=-5$

답 -5

Remark▶ 평행이동한 포물선의 접선의 방정식

포물선 $(y-\beta)^2=4p(x-\alpha)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-\beta=m(x-\alpha)+\dfrac{p}{m}$

13 (전략) 접점의 x좌표에 대한 이차방정식을 세운 후, 근과 계수의 관계를 이용한다.

(풀이) 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$로 놓으면 접선의 방정식은

$y_1y=2(x+x_1)$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $\mathrm{P}(-1,\ 2)$를 지나므로

$2y_1=2(-1+x_1)$

$\therefore\ y_1=x_1-1$ …… ㉡

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

${y_1}^2=4x_1$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면

${x_1}^2-6x_1+1=0$

이 이차방정식의 두 근을 a, b라 하면 a, b는 접점의 x좌표이므로 ㉡에 의하여 $\mathrm{A}(a,\ a-1)$, $\mathrm{B}(b,\ b-1)$로 놓을 수 있다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=6,\ ab=1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(b-a)^2+\{(b-1)-(a-1)\}^2}$

$=\sqrt{2(b-a)^2}$

$=\sqrt{2\{(a+b)^2-4ab\}}$

$=\sqrt{2(6^2-4\cdot1)}$

$=8$

답 ③

Remark▶

포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $x=-1$이고, 점 $\mathrm{P}(-1,\ 2)$는 준선 위의 점이므로 직선 l_1, l_2는 서로 수직이다.

14 (전략) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$임을 이용한다.

풀이 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$에서 $\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$이므로

$F(2\sqrt{3},\ 0),\ F'(-2\sqrt{3},\ 0)$ ⋯ ❶

주어진 타원 위의 점 $(2,\ \sqrt{3})$에서의 접선 l의 방정식은

$$\frac{2x}{16}+\frac{\sqrt{3}y}{4}=1$$

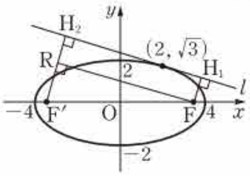
$\therefore x+2\sqrt{3}y-8=0$ ⋯ ❷

직선 l에 수직이고 점 $F'(-2\sqrt{3},\ 0)$을 지나는 직선 $F'H_2$의 방정식은

$$y=2\sqrt{3}\{x-(-2\sqrt{3})\}$$

$\therefore 2\sqrt{3}x-y+12=0$ ⋯ ❸

이때 오른쪽 그림과 같이 점 $F(2\sqrt{3},\ 0)$에서 $\overline{F'H_2}$에 내린 수선의 발을 R라 하면



$$\overline{FR}=\frac{|2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}+12|}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{24}{\sqrt{13}}=\frac{24\sqrt{13}}{13}$$

$\therefore \overline{H_1H_2}=\overline{FR}=\frac{24\sqrt{13}}{13}$ ⋯ ❹

답 $\frac{24\sqrt{13}}{13}$

채점 기준	비율
❶ 초점 F, F′의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ 접선 l의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❸ 직선 $F'H_2$의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❹ $\overline{H_1H_2}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %

15

전략 점 P에서의 쌍곡선과 타원의 접선의 방정식을 각각 구한다.

풀이 점 $P\left(\sqrt{5},\ \frac{1}{2}\right)$에서의 쌍곡선의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{5}}{4}x-\frac{1}{2}y=1 \qquad \therefore y=\frac{\sqrt{5}}{2}x-2$$

점 $P\left(\sqrt{5},\ \frac{1}{2}\right)$에서의 타원의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{5}}{a^2}x+\frac{1}{2b^2}y=1 \qquad \therefore y=-\frac{2\sqrt{5}b^2}{a^2}x+2b^2$$

두 접선이 서로 수직이므로 $\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}b^2}{a^2}\right)=-1$

$\therefore a^2=5b^2$ ⋯⋯ ㉠

또 점 $P\left(\sqrt{5},\ \frac{1}{2}\right)$이 타원 위의 점이므로

$\frac{5}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{5}{5b^2}+\frac{1}{4b^2}=1$

$\therefore b^2=\frac{5}{4}$

따라서 $p=4,\ q=5$이므로

$p+q=9$

답 ①

16

전략 포물선의 초점의 좌표와 접선의 방정식을 구하여 d를 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y^2=nx=4\cdot\frac{n}{4}x$에서 포물선의 초점의 좌표는

$$\left(\frac{n}{4},\ 0\right)$$

또 포물선 $y^2=nx$ 위의 점 $(n,\ n)$에서의 접선의 방정식은 $ny=\frac{n}{2}(x+n)$

$\therefore x-2y+n=0$ ($\because n$은 자연수)

따라서 점 $\left(\frac{n}{4},\ 0\right)$과 직선 $x-2y+n=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{\left|\frac{n}{4}+n\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{4}n$$

$d^2\ge 40$이므로 $\frac{5}{16}n^2\ge 40$ $\quad\therefore n^2\ge 128$

이때 $11^2=121,\ 12^2=144$이므로 자연수 n의 최솟값은 12이다.

답 12

17

전략 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$임을 이용한다.

풀이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점의 좌표가 $(b,\ 0)$, $(-b,\ 0)$이므로

$a^2-b^2=b^2$ $\quad\therefore a^2=2b^2$ ⋯⋯ ㉠

타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 네 꼭짓점의 좌표는

$(2,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ -1)$

이므로 두 점 $(-2,\ 0),\ (0,\ 1)$ 또는 두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ -1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$

이고, 이 중 직선 $y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}=1 \quad \therefore a^2+4b^2=4 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a^2=\frac{4}{3},\ b^2=\frac{2}{3} \quad \therefore a^2b^2=\frac{8}{9}$

따라서 $p=9$, $q=8$이므로

$p+q=17$ 답 17

18 전략 점 P, Q의 좌표를 구한 후 타원의 정의를 이용한다.

풀이 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$로 놓으면 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{8}+\frac{y_1y}{2}=1$

이 직선이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$\frac{2y_1}{2}=1 \quad \therefore y_1=1$

또 점 $(x_1,\ y_1)$, 즉 $(x_1,\ 1)$은 타원 위의 점이므로

$\frac{x_1^2}{8}+\frac{1}{2}=1, \quad x_1^2=4$

$\therefore x_1=-2$ 또는 $x_1=2$

따라서 $P(-2,\ 1)$, $Q(2,\ 1)$이므로

$\overline{PQ}=2-(-2)=4$

한편 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$의 장축의 길이는

$2\cdot2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

이므로 다른 한 초점을 F′이라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{QF}+\overline{QF'}=4\sqrt{2}$

이때 주어진 타원은 y축에 대하여 대칭이므로

$\overline{PF'}=\overline{QF} \quad \therefore \overline{PF}+\overline{QF}=4\sqrt{2}$

따라서 △PFQ의 둘레의 길이는

$\overline{PF}+\overline{QF}+\overline{PQ}=4\sqrt{2}+4$

이므로 $a=4$, $b=4$

$\therefore a^2+b^2=32$ 답 32

19 전략 점근선의 방정식, 접선의 방정식 등을 구하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. 쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm x$

ㄴ. 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x-y_1y=1 \quad \therefore y=\frac{x_1}{y_1}x-\frac{1}{y_1}$

이 직선이 점근선과 평행하려면 $\frac{x_1}{y_1}=\pm1$

$\therefore x_1=\pm y_1$

이때 $x_1^2-y_1^2=y_1^2-y_1^2=0$이므로 점 $(x_1,\ y_1)$은 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점이라는 조건에 모순이다.

따라서 점근선과 평행한 접선은 존재하지 않는다.

ㄷ. $y^2=4px$를 $x^2-y^2=1$에 대입하여 정리하면

$x^2-4px-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2p)^2-(-1)=4p^2+1>0$

따라서 포물선 $y^2=4px$는 쌍곡선과 항상 두 점에서 만난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

20 전략 점근선의 방정식과 초점의 좌표를 이용하여 쌍곡선의 방정식을 구한다.

풀이 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$이므로

$\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$

$\therefore a^2=3b^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 한 초점이 $F(4\sqrt{3},\ 0)$이므로

$a^2+b^2=48 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a^2=36,\ b^2=12$

주어진 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$에 $x=4\sqrt{3}$을 대입하면

$\frac{y^2}{12}=\frac{1}{3}, \quad y^2=4$

$\therefore y=2$ 또는 $y=-2$

점 P는 제1사분면 위의 점이므로 $P(4\sqrt{3},\ 2)$

점 $P(4\sqrt{3},\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{4\sqrt{3}x}{36}-\frac{2y}{12}=1$

$\therefore y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-6$

따라서 구하는 접선의 기울기는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다. 답 ①

Ⅱ. 벡터

03 벡터의 연산

유제 본책 83~97쪽

027-❶ (1) $\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}=-\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$

(4) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}=\vec{b}$

답 (1) $\vec{a}$ (2) $-\vec{c}$ (3) $-\vec{a}$ (4) $\vec{b}$

027-❷ $\overrightarrow{AC}$와 같은 벡터는 $\overrightarrow{FD}$이고

$\overline{FD}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

이므로 $|\overrightarrow{FD}|=3\sqrt{2}$

답 $\overrightarrow{FD}$, $3\sqrt{2}$

028-❶ (1) $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}$

$=\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}$

$=-\vec{a}+\vec{b}$

답 (1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $-\vec{a}+\vec{b}$

028-❷ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AA}$

$=\vec{0}$

답 풀이 참조

029-❶ (1) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BO}$

$=\vec{b}+(-\vec{a}+\vec{b})$

$=-\vec{a}+2\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{AB}$

$=(-\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}$

$=-2\vec{a}+\vec{b}$

답 (1) $-\vec{a}+2\vec{b}$ (2) $-2\vec{a}+\vec{b}$

029-❷ $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

답 $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

030-❶ (1) $2(\vec{a}+3\vec{b})-3(2\vec{a}-\vec{x})=\vec{x}$에서

$2\vec{a}+6\vec{b}-6\vec{a}+3\vec{x}=\vec{x}$

$2\vec{x}=4\vec{a}-6\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=\frac{1}{2}(4\vec{a}-6\vec{b})$

$=2\vec{a}-3\vec{b}$

(2) $3(\vec{a}-3\vec{b}-2\vec{x})-2(\vec{a}-3\vec{c})=7\vec{a}+3\vec{b}$에서

$3\vec{a}-9\vec{b}-6\vec{x}-2\vec{a}+6\vec{c}=7\vec{a}+3\vec{b}$

$-6\vec{x}=6\vec{a}+12\vec{b}-6\vec{c}$

$\therefore \vec{x}=-\frac{1}{6}(6\vec{a}+12\vec{b}-6\vec{c})$

$=-\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$

답 (1) $2\vec{a}-3\vec{b}$ (2) $-\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$

030-❷ (1) $\begin{cases}\vec{x}-\vec{y}=-2\vec{a} & \cdots\cdots ㉠\\ -\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}+\vec{b} & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$\vec{y}=-\vec{a}+\vec{b}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\vec{x}-(-\vec{a}+\vec{b})=-2\vec{a}$

$\vec{x}+\vec{a}-\vec{b}=-2\vec{a}$

$\therefore \vec{x}=-3\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\begin{cases}2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}-3\vec{b} & \cdots\cdots ㉠\\ \vec{x}-3\vec{y}=2\vec{a}+\vec{b} & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠×3+㉡을 하면

$7\vec{x}=5\vec{a}-8\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=\frac{5}{7}\vec{a}-\frac{8}{7}\vec{b}$

이것을 ㉠에 대입하면

$2\left(\frac{5}{7}\vec{a}-\frac{8}{7}\vec{b}\right)+\vec{y}=\vec{a}-3\vec{b}$

$\frac{10}{7}\vec{a}-\frac{16}{7}\vec{b}+\vec{y}=\vec{a}-3\vec{b}$

$\therefore \vec{y}=-\frac{3}{7}\vec{a}-\frac{5}{7}\vec{b}$

답 풀이 참조

031-❶ (1) $(m+2)\vec{a}+(3n-1)\vec{b}=4\vec{a}-(m+3)\vec{b}$
에서

$m+2=4,\ 3n-1=-(m+3)$

$\therefore m=2,\ n=-\frac{4}{3}$

(2) $(m+n-3)\vec{a}+(mn+10)\vec{b}=\vec{0}$에서

$m+n-3=0,\ mn+10=0$

$\therefore m+n=3,\ mn=-10$

이를 만족시키는 실수 m, n은 이차방정식 $x^2-3x-10=0$의 두 실근이다.

따라서 $(x+2)(x-5)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=5$

$\therefore \begin{cases} m=-2 \\ n=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} m=5 \\ n=-2 \end{cases}$

답 풀이 참조

다른 풀이 (1) 주어진 식의 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면

$(m-2)\vec{a}+(m+3n+2)\vec{b}=\vec{0}$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$m-2=0$, $m+3n+2=0$

$\therefore m=2,\ n=-\frac{4}{3}$

031-❷ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(k\vec{a}+3\vec{b})-\vec{a}$

$=(k-1)\vec{a}+3\vec{b}$,

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$

이므로 $6\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{BA}$에서

$6(k-1)\vec{a}+18\vec{b}=m\vec{a}-m\vec{b}$

따라서 $6(k-1)=m$, $18=-m$이므로

$m=-18$, $k=-2$

$\therefore m-k=-16$

답 -16

032-❶ 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가 서로 평행하려면

$\vec{q}=k\vec{p}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다.

$\vec{p}=m\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=8\vec{a}+m\vec{b}$ 이므로

$8\vec{a}+m\vec{b}=k(m\vec{a}+2\vec{b})$

$=km\vec{a}+2k\vec{b}$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$8=km$, $m=2k$

$m=2k$를 $8=km$에 대입하면

$2k^2=8$, $\quad k^2=4$

$\therefore k=\pm2$, $m=\pm4$ (복호동순)

답 ±4

032-❷ 두 벡터 $\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{q}-\vec{r}$가 서로 평행하려면

$\vec{q}-\vec{r}=k(\vec{p}+\vec{q})$ ...... ㉠

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다.

세 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$에 대하여

$\vec{p}+\vec{q}=(\vec{a}+\vec{b})+(m\vec{a}-2\vec{b})$

$=(m+1)\vec{a}-\vec{b}$

$\vec{q}-\vec{r}=(m\vec{a}-2\vec{b})-(3\vec{a}+2\vec{b})$

$=(m-3)\vec{a}-4\vec{b}$

이를 ㉠에 대입하면

$(m-3)\vec{a}-4\vec{b}=k\{(m+1)\vec{a}-\vec{b}\}$

$=k(m+1)\vec{a}-k\vec{b}$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$m-3=k(m+1)$, $-4=-k$

$\therefore k=4,\ m=-\frac{7}{3}$

답 $-\frac{7}{3}$

033-❶ 서로 다른 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ ...... ㉠

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다.

이때

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(\vec{a}+\vec{b})-(2\vec{a}-\vec{b})$

$=-\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

$=(-\vec{a}+m\vec{b})-(2\vec{a}-\vec{b})$

$=-3\vec{a}+(m+1)\vec{b}$

이를 ㉠에 대입하면

$-3\vec{a}+(m+1)\vec{b}=k(-\vec{a}+2\vec{b})$

$=-k\vec{a}+2k\vec{b}$

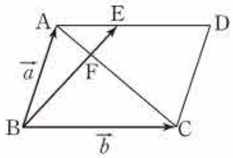
벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$-3=-k$, $m+1=2k$

$\therefore k=3,\ m=5$

답 5

033-❷ 오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라 하면



$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

$=\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

세 점 B, E, F가 한 직선 위에 있고 $|\overrightarrow{BF}|=m|\overrightarrow{BE}|$이므로

$\overrightarrow{BF}=m\overrightarrow{BE}=m\vec{a}+\frac{2}{5}m\vec{b}$ ...... ㉠

한편 세 점 A, F, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AC}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다.

이때 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$이므로

$\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA}=k(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$

$\therefore \overrightarrow{BF}=(1-k)\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{BC}$
$=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $m=1-k,\ \frac{2}{5}m=k$

두 식을 연립하여 풀면

$m=\frac{5}{7},\ k=\frac{2}{7}$ 답 $\frac{5}{7}$

중단원 연습 문제

본책 98~101쪽

01 3 **02** 8 **03** ③

04 $-\frac{3}{10}\vec{a}+\vec{b}-\frac{9}{5}\vec{c}$ **05** ② **06** 2

07 ③ **08** D, E **09** $3\sqrt{2}$ **10** $-\vec{b}+\sqrt{2}\vec{c}$

11 ① **12** $\frac{5}{2}$ **13** $m=1,\ n=0$ **14** ③

15 ② **16** ⑤

01 전략 $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$임을 이용한다.

풀이 $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$
$=2\overrightarrow{AB}$

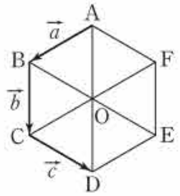
즉 $|2\overrightarrow{AB}|=6$이므로 $|\overrightarrow{AB}|=3$

따라서 정사각형의 한 변의 길이는 3이다. 답 3

02 전략 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$를 네 점 A, B, C, D를 시점과 종점으로 하는 벡터로 나타낸다.

풀이 $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{BA}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$
$=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BD}$
$=\overrightarrow{BE}$

오른쪽 그림과 같이 정육각형 ABCDEF의 세 대각선의 교점을 O라 하면



$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$
$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO})$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}$
$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{DC}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FA}$
$=\overrightarrow{FC}$

따라서 $|-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=|\overrightarrow{BE}|=4$, $|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=0$, $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=|\overrightarrow{FC}|=4$이므로 구하는 값은

$4+0+4=8$ 답 8

03 전략 $\overrightarrow{EG}$와 같은 벡터를 이용하여 $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}$를 하나의 벡터로 나타낸다.

풀이 $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{BH}$이므로

$\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{BP}$

선분 CF의 중점을 O라 하면

$|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}|=|\overrightarrow{BP}|=\overline{BP}$
$\le\overline{BO}+\overline{OP}$
$=\sqrt{5^2+2^2}+2$
$=2+\sqrt{29}$

따라서 구하는 최댓값은 $2+\sqrt{29}$이다. 답 ③

04 전략 실수를 계수, 벡터를 문자로 생각하여 주어진 등식을 다항식의 연산과 같은 방법으로 간단히 한다.

풀이 $\frac{1}{2}(\vec{a}+4\vec{x})-\frac{1}{3}(2\vec{b}+\vec{x})=-3\vec{c}+\vec{b}$에서

$\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{x}-\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{x}=-3\vec{c}+\vec{b}$

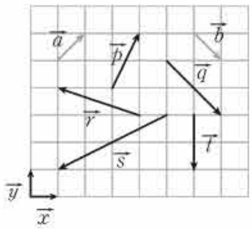
$\frac{5}{3}\vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}-3\vec{c}$

$\therefore \vec{x}=-\frac{3}{10}\vec{a}+\vec{b}-\frac{9}{5}\vec{c}$

답 $-\frac{3}{10}\vec{a}+\vec{b}-\frac{9}{5}\vec{c}$

05 전략 주어진 벡터들을 $m\vec{a}+n\vec{b}$ 꼴로 나타낸 후 $mn<0$을 만족시키는 벡터를 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$를 잡으면



$\vec{a}=\vec{x}+\vec{y}$,
$\vec{b}=\vec{x}-\vec{y}$

이므로 위의 두 식을 연립하여 정리하면

$\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$,

$\vec{y}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$\therefore \vec{p}=\vec{x}+2\vec{y}=\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$\vec{q}=2\vec{x}-2\vec{y}=2\vec{b}$

$\vec{r}=-3\vec{x}+\vec{y}=-\vec{a}-2\vec{b}$

$\vec{s}=-4\vec{x}-2\vec{y}=-3\vec{a}-\vec{b}$

$\vec{t}=-2\vec{y}=-\vec{a}+\vec{b}$

이때 집합 C의 원소는 $m\vec{a}+n\vec{b}$ 꼴로 나타내었을 때 $mn<0$이어야 한다.

따라서 집합 C의 원소인 벡터는 $\vec{p}$, $\vec{t}$이다. 답 ②

06 (전략) 벡터가 서로 같을 조건을 이용한다.

(풀이) $(4m+2n)\vec{a}+(3m-2n-5)\vec{b}$

$=(3m-n)\vec{a}+(m+3n+6)\vec{b}$

에서

$4m+2n=3m-n$, $3m-2n-5=m+3n+6$

$\therefore m+3n=0$, $2m-5n-11=0$ ⋯ ❶

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=3$, $n=-1$ ⋯ ❷

$\therefore m+n=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 벡터가 서로 같을 조건을 이용하여 m, n에 대한 두 식을 구할 수 있다.	50 %
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

07 (전략) 보기에 주어진 벡터 중 $k(\vec{a}+\vec{b})$ 꼴인 것을 찾는다.

(풀이) ㄱ. $2\vec{a}-\vec{c}=2\vec{a}-(2\vec{a}-\vec{b})=\vec{b}$

ㄴ. $-3\vec{a}+\vec{c}=-3\vec{a}+(2\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$

$=-(\vec{a}+\vec{b})$

ㄷ. $3\vec{b}+\vec{c}=3\vec{b}+(2\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$

$=2(\vec{a}+\vec{b})$

ㄹ. $\vec{b}-\vec{c}=\vec{b}-(2\vec{a}-\vec{b})=-2\vec{a}+2\vec{b}$

$=-2(\vec{a}-\vec{b})$

이상에서 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 서로 평행한 벡터는 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

08 (전략) 세 점이 한 직선 위에 있을 조건을 이용한다.

(풀이) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$이고

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{a}-3\vec{b})-\vec{a}=\vec{a}-3\vec{b}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(4\vec{a}-3\vec{b})-\vec{a}=3\vec{a}-3\vec{b}$

$=-3(\vec{b}-\vec{a})$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=(5\vec{a}-4\vec{b})-\vec{a}=4\vec{a}-4\vec{b}$

$=-4(\vec{b}-\vec{a})$ ⋯ ❶

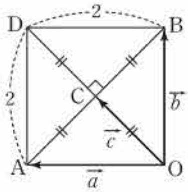
따라서 $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}=-4\overrightarrow{AB}$이므로 직선 AB 위의 점인 것은 D, E이다. ⋯ ❷

답 D, E

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	70 %
❷ 직선 AB 위의 점인 것을 찾을 수 있다.	30 %

09 (전략) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$를 이웃하는 두 변으로 하는 정사각형을 이용한다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$를 이웃하는 두 변으로 하는 정사각형을 그리고 나머지 꼭짓점을 D라 하면



$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OD}=2\vec{c}$

이므로

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=2\vec{c}+\vec{c}=3\vec{c}$

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=|3\vec{c}|=\frac{3}{2}|2\vec{c}|$

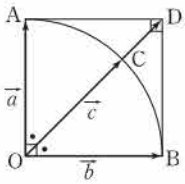
$=\frac{3}{2}|\overrightarrow{OD}|$

$=\frac{3}{2}\sqrt{2^2+2^2}$

$=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

10 (전략) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$를 이웃하는 두 변으로 하는 정사각형을 이용한다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$를 이웃하는 두 변으로 하는 정사각형을 그리고 나머지 꼭짓점을 D라 하면



$|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{OB}|$

이때 $\overrightarrow{OC}$는 $\overrightarrow{OD}$와 방향이 같고 크기가 $|\overrightarrow{OB}|$이므로

$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OD}$ ⋯ ❶

따라서 $\overrightarrow{OD}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{OC}$이므로

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{OC}$

$\vec{a}+\vec{b}=\sqrt{2}\,\vec{c}$

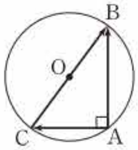
$\therefore \vec{a}=-\vec{b}+\sqrt{2}\,\vec{c}$ ⋯ ❷

답 $-\vec{b}+\sqrt{2}\,\vec{c}$

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OD}$임을 알 수 있다.	60 %
❷ $\vec{a}$를 $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타낼 수 있다.	40 %

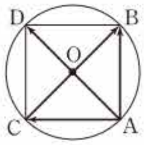
11 **전략** 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 직각삼각형과 정삼각형의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\angle BAC=90°$이면 $\overline{BC}$는 원 O의 지름이므로



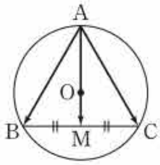
$$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{CB}|$$
$$=\overline{CB}=2$$

ㄴ. [반례] 원에 내접하는 정사각형의 네 꼭짓점을 각각 A, B, D, C라 하면 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$는 원 O의 지름이므로



$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|$$
$$=\overline{AD}=2$$
$$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{CB}|=\overline{CB}=2$$
$$\therefore\ |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$$

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 △ABC가 정삼각형일 때, 선분 BC의 중점을 M이라 하자.



$\overline{AB}$, $\overline{AC}$를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형에 대하여 나머지 꼭짓점을 D라 하면

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$이고, $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}$이므로

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AM}|$$

그런데 △ABC가 정삼각형이므로 원의 중심 O는 △ABC의 무게중심과 같다.

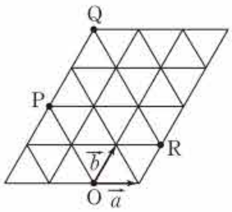
즉 $\overline{AM}=\frac{3}{2}\overline{AO}=\frac{3}{2}$이므로

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\overline{AM}=2\cdot\frac{3}{2}=3$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. **답** ①

12 **전략** 점 O를 시점으로 하는 두 벡터를 잡아 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$를 두 벡터로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 O를 시점으로 하는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 잡으면



$$\overrightarrow{OP}=-2\vec{a}+2\vec{b},$$
$$\overrightarrow{OQ}=-2\vec{a}+4\vec{b},$$
$$\overrightarrow{OR}=\vec{a}+\vec{b}$$

앞의 식을 $\overrightarrow{OQ}=m\overrightarrow{OP}+n\overrightarrow{OR}$에 대입하면

$$-2\vec{a}+4\vec{b}=m(-2\vec{a}+2\vec{b})+n(\vec{a}+\vec{b})$$
$$=(-2m+n)\vec{a}+(2m+n)\vec{b}$$

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-2=-2m+n,\ 4=2m+n$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $m=\frac{3}{2}$, $n=1$

$$\therefore\ m+n=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

다른 풀이 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RQ}$ ...... ㉠

이때 $\overrightarrow{OP}/\!/\overrightarrow{RQ}$이고 $|\overrightarrow{RQ}|=\frac{3}{2}|\overrightarrow{OP}|$이므로

$$\overrightarrow{RQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP}$$

이를 ㉠에 대입하면 $\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}$

따라서 $m=\frac{3}{2}$, $n=1$이므로

$$m+n=\frac{5}{2}$$

13 **전략** $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}\,(k\neq0)$이면 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있음을 이용한다.

풀이 서로 다른 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다. ··· ❶

세 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$에 대하여

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{a}+\vec{b})-(m\vec{a}+2\vec{b})$$
$$=(2-m)\vec{a}-\vec{b}$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(3\vec{a}+n\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})$$
$$=\vec{a}+(n-1)\vec{b}$$

이므로

$$(2-m)\vec{a}-\vec{b}=k\{\vec{a}+(n-1)\vec{b}\}$$
$$=k\vec{a}+k(n-1)\vec{b}$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$2-m=k$ ...... ㉠

$-1=k(n-1)$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(m-2)(n-1)=1$ ··· ❷

$m-2$, $n-1$은 정수이므로

$$\begin{cases} m-2=-1 \\ n-1=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} m-2=1 \\ n-1=1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m=1 \\ n=0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$$

그런데 $\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{OC}$이므로

$m=1$, $n=0$ ⋯ ❸

답 $m=1$, $n=0$

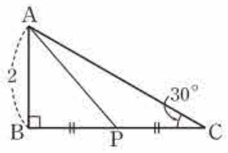
채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재함을 알 수 있다.	20 %
❷ $(m-2)(n-1)=1$임을 알 수 있다.	40 %
❸ m, n의 값을 구할 수 있다.	40 %

14 전략 먼저 주어진 조건을 만족시키는 점 P의 위치를 찾은 후 삼각형 ABC를 그린다.

풀이 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서 $\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PC}$

즉 점 P는 선분 BC의 중점이다.

오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서



$$\overline{BC}=\frac{2}{\tan 30^\circ}=2\sqrt{3}$$

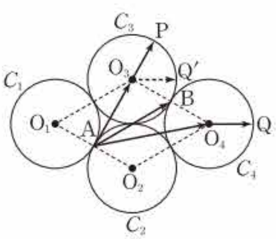
$$\therefore \overline{PB}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\sqrt{3}$$

따라서 $\overline{PA}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$이므로

$|\overrightarrow{PA}|^2=\overline{PA}^2=7$ 답 ③

15 전략 주어진 네 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 사각형이 마름모임을 이용한다.

풀이 다음 그림과 같이 네 원 C_1, C_2, C_3, C_4의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3, O_4라 하고, 두 원 C_3, C_4의 접점을 B라 하자. 사각형 $O_1O_2O_4O_3$은 한 변의 길이가 2인 마름모이고, 두 점 A, B는 각각 변 O_1O_2, 변 O_3O_4의 중점이다.



$$\therefore \overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{AO_4}=2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{O_1O_3}$$

한편 벡터 $\overrightarrow{O_4Q}$를 시점이 O_3이 되도록 평행이동하였을 때의 종점을 Q′이라 하면 $\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_4Q}=\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_3Q'}$이므로

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}\\&=(\overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{O_3P})+(\overrightarrow{AO_4}+\overrightarrow{O_4Q})\\&=(\overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{AO_4})+(\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_4Q})\\&=2\overrightarrow{O_1O_3}+\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_3Q'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore |\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}| &\le 2|\overrightarrow{O_1O_3}|+|\overrightarrow{O_3P}|+|\overrightarrow{O_3Q'}|\\&=2\cdot 2+1+1\\&=6\end{aligned}$$

따라서 구하는 최댓값은 6이다. 답 ②

Remark▶
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여
$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$

16 전략 먼저 $\overrightarrow{CA}$를 시점이 점 P인 벡터로 나타낸다.

풀이 ㄱ. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$이므로

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$

$\therefore \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$

ㄴ. 주어진 직사각형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점을 M이라 하면

$$\frac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}}{2}=\overrightarrow{PM}$$

이때 ㄱ에서

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$, 즉 $\dfrac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}}{2}=\overrightarrow{CP}$

이므로 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PM}$

$\therefore \overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{PC}$

따라서 점 P는 선분 CM의 중점이므로

$$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

ㄷ. 두 삼각형 ADP, ADC의 밑변을 $\overline{AD}$라 하면 높이의 비는 $3:4$이므로

$3:4=3:\triangle ACD$

$\therefore \triangle ACD=4$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$4\times 2=8$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

Ⅱ. 벡터

04 평면벡터의 성분

유제

본책 107~117쪽

034-❶ 점 D의 위치벡터를 $\vec{d}$라 하면 □ABCD는 평행사변형이므로

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC},\quad \vec{d}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$$

$$\therefore \vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$$

점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라 하면

$$\vec{p}=\frac{2\vec{d}+3\vec{a}}{2+3}=\frac{2(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})+3\vec{a}}{5}=\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$$

답 $\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

034-❷ $\overline{AM}$이 △ABC의 중선이므로 점 M은 $\overline{BC}$의 중점이다. 즉

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

이므로 $\quad \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

$$\therefore \overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$$

따라서 $m=\frac{1}{3}$, $n=-\frac{2}{3}$이므로

$$m+n=-\frac{1}{3}$$

답 $-\frac{1}{3}$

다른 풀이 $\overrightarrow{CA}=-\vec{b}$, $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$

이때 점 G는 $\overline{AM}$을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{CG}=\frac{2\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CA}}{2+1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}=-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$$

따라서 $m=\frac{1}{3}$, $n=-\frac{2}{3}$이므로

$$m+n=-\frac{1}{3}$$

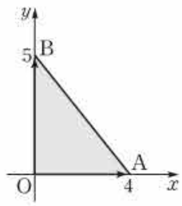
035-❶ 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB이다.

따라서 구하는 도형의 길이는

$$\overline{AB}=\sqrt{(2-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

035-❷ 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 △OAB의 내부와 그 둘레이다.



따라서 구하는 넓이는

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times4\times5=10$$

답 10

036-❶ (1) $3(-2\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}$
$=-6\vec{a}+3\vec{b}-\vec{a}$
$=-7\vec{a}+3\vec{b}$
$=-7(2,\ 3)+3(3,\ -2)$
$=(-14+9,\ -21-6)$
$=(-5,\ -27)$

(2) $5\vec{a}-2(\vec{a}+3\vec{b})=5\vec{a}-2\vec{a}-6\vec{b}$
$=3\vec{a}-6\vec{b}$
$=3(2,\ 3)-6(3,\ -2)$
$=(6-18,\ 9+12)$
$=(-12,\ 21)$

답 (1) $(-5,\ -27)$ (2) $(-12,\ 21)$

036-❷ (1) $\vec{p}=k\vec{a}+h\vec{b}$ (k, h는 실수)라 하면

$(3,\ 4)=k(1,\ -2)+h(-1,\ 0)$
$=(k-h,\ -2k)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$3=k-h$, $4=-2k$

$\therefore k=-2$, $h=-5$

$\therefore \vec{p}=-2\vec{a}-5\vec{b}$

(2) $\vec{q}=k\vec{a}+h\vec{b}$ (k, h는 실수)라 하면

$(0,\ 1)=k(1,\ -2)+h(-1,\ 0)$
$=(k-h,\ -2k)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$0=k-h$, $1=-2k$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$, $h=-\frac{1}{2}$

$\therefore \vec{q}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

답 (1) $-2\vec{a}-5\vec{b}$ (2) $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

036-❸ $\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 1)+(-3,\ 2)=(-1,\ 3)$

$k\vec{a}+(1-k)\vec{b}=k(2,\ 1)+(1-k)(-3,\ 2)$
$=(5k-3,\ 2-k)$

두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 $k\vec{a}+(1-k)\vec{b}$가 서로 평행하면

$k\vec{a}+(1-k)\vec{b}=m(\vec{a}+\vec{b})$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 m이 존재하므로

$(5k-3,\ 2-k)=m(-1,\ 3)=(-m,\ 3m)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$5k-3=-m,\ 2-k=3m$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=\frac{1}{2},\ k=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

037-❶ 점 B의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AB}=(x+1,\ y-4)$

$\vec{p}=\overrightarrow{AB}$이므로 $(2,\ -3)=(x+1,\ y-4)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$2=x+1,\ -3=y-4$

$\therefore x=1,\ y=1$

따라서 점 B의 좌표는 $(1,\ 1)$이다. 답 $(1,\ 1)$

037-❷ 점 D의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AC}=(-4,\ 5),\ \overrightarrow{BD}=(x+5,\ y-7)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$이므로 $(-4,\ 5)=(x+5,\ y-7)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$x+5=-4,\ y-7=5$

$\therefore x=-9,\ y=12$

따라서 점 D의 좌표는 $(-9,\ 12)$이다. 답 $(-9,\ 12)$

038-❶ 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x+2,\ y-1),\ \overrightarrow{BP}=(x-4,\ y+3)$

(1) $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$이므로

$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3x-2y-5=0$

(2) $|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{BP}|$이므로

$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=2\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3x^2+3y^2-36x+26y+95=0$

답 (1) $3x-2y-5=0$
(2) $3x^2+3y^2-36x+26y+95=0$

Remark▶

(1)에서 점 P의 자취는 선분 AB의 수직이등분선이고, (2)에서 점 P의 자취는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원(아폴로니오스의 원)이다.

038-❷ 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-2,\ y+1)$

$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AP}|=k$이므로

$\sqrt{2^2+(-1)^2}\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=k$

양변을 제곱하여 정리하면

$(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{k^2}{5}$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2,\ -1)$, 반지름의 길이가 $\frac{k}{\sqrt{5}}$인 원이다.

이때 원의 넓이가 4π이므로 $\pi\times\left(\frac{k}{\sqrt{5}}\right)^2=4\pi$

$k^2=20 \quad \therefore k=2\sqrt{5}\ (\because k>0)$ 답 $2\sqrt{5}$

중단원 연습 문제

본책 118~121쪽

01 $-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$	**02** $\frac{1}{5}$	**03** ③	**04** $\sqrt{29}$
05 ③	**06** ④	**07** $(1,\ 3)$	**08** $\frac{3}{2}$
09 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$	**10** ③	**11** 33	**12** ⑤
13 ②	**14** $\overrightarrow{AB}=(5,\ -\sqrt{3}),\ \lvert\overrightarrow{AB}\rvert=2\sqrt{7}$		
15 15	**16** ①	**17** ⑤	

01 전략 $\overline{BC}$의 중점 M의 위치벡터는 $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$임을 이용한다.

풀이 점 M이 $\overline{BC}$의 중점이므로

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

이때 점 G가 △ABC의 무게중심이므로 점 G는 $\overline{AM}$을 2 : 1로 내분한다.

$\therefore \overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{GM}=-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$

답 $-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$

02 전략 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 할 때, $\overline{AB}$를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점의 위치벡터는 $\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$임을 이용한다.

풀이 평행사변형 ABCD에서

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ ...... ㉠

변 BC의 중점이 M이므로

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$

$\therefore \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}$ ...... ㉡

변 CD를 2 : 1로 내분하는 점이 N이므로

$\overrightarrow{AN}=\dfrac{2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}}{3}$

$\therefore \overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AN}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AN}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AN}$

$\therefore \overrightarrow{AC}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AM}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AN}$

따라서 $x=\dfrac{4}{5}$, $y=\dfrac{3}{5}$이므로

$x-y=\dfrac{1}{5}$

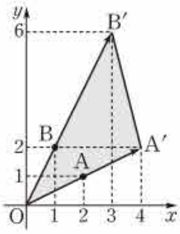
답 $\dfrac{1}{5}$

03

전략 세 점 O, A, B에 대하여 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ $(0\le m+n\le 1,\ m\ge 0,\ n\ge 0)$를 만족시키는 점 P의 자취는 삼각형 OAB의 내부와 그 둘레임을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{OP}=m(2\overrightarrow{OA})+n(3\overrightarrow{OB})$

두 벡터 $2\overrightarrow{OA}$, $3\overrightarrow{OB}$의 종점을 각각 A′, B′이라 하면 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 △OA′B′의 내부와 그 둘레이다.



이때

$\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}=2(2,\ 1)$

$=(4,\ 2)$

$\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}=3(1,\ 2)=(3,\ 6)$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\triangle OA'B'=4\times 6-\dfrac{1}{2}(4\times 2+3\times 6+1\times 4)=9$

답 ③

04

전략 벡터가 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 $\vec{a}=\vec{b}$이므로

$(x+3,\ 2y-1)=(1-y,\ -10-3x)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$x+3=1-y$, $2y-1=-10-3x$

$\therefore x+y=-2$, $3x+2y=-9$ ··· ❶

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-5$, $y=3$ ··· ❷

따라서 $\vec{a}=(-2,\ 5)$이므로

$|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+5^2}$

$=\sqrt{29}$ ··· ❸

답 $\sqrt{29}$

채점 기준	비율
❶ 벡터가 서로 같을 조건을 이용하여 x, y에 대한 식을 세울 수 있다.	50 %
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\lvert\vec{a}\rvert$를 구할 수 있다.	30 %

05

전략 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같은 벡터는 양수 k에 대하여 $k\vec{a}$로 놓을 수 있다.

풀이 $2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=2(1,\ -1)-(2,\ 4)+(3,\ 3)$

$=(3,\ -3)$

이므로 $2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$와 방향이 같은 벡터 $\vec{p}$를

$\vec{p}=k(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$

$=k(3,\ -3)$

$=(3k,\ -3k)$ $(k>0)$

로 놓을 수 있다.

이때 $|\vec{p}|=2$이므로

$\sqrt{(3k)^2+(-3k)^2}=2$

$3\sqrt{2}k=2$ $\quad\therefore k=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

따라서 $\vec{p}=(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$이므로

$x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$

$\therefore x-y=2\sqrt{2}$

답 ③

06

전략 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면 $\vec{a}=k\vec{b}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재함을 이용한다.

풀이 $\vec{a}-\vec{b}=(-1,\ 3)-(-2,\ -3)=(1,\ 6)$

$\vec{a}+m\vec{c}=(-1,\ 3)+m\left(3,\ \dfrac{9}{2}\right)$

$=\left(-1+3m,\ 3+\dfrac{9}{2}m\right)$

이때 두 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}+m\vec{c}$가 서로 평행하면

$\vec{a}+m\vec{c}=k(\vec{a}-\vec{b})$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하므로

$\left(-1+3m,\ 3+\dfrac{9}{2}m\right)=k(1,\ 6)=(k,\ 6k)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$-1+3m=k,\ 3+\frac{9}{2}m=6k$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=\frac{2}{3},\ k=1$ 답 ④

07 전략 구하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고 각각의 벡터를 성분으로 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{PA}=(-2-x,\ 6-y),\ \overrightarrow{PB}=(1-x,\ -2-y),$

$\overrightarrow{PC}=(4-x,\ 5-y)$

$\therefore\ \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$

$=(-2-x,\ 6-y)+(1-x,\ -2-y)$

$\quad+(4-x,\ 5-y)$

$=(3-3x,\ 9-3y)$ ⋯ ❶

이때 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$이므로

$(3-3x,\ 9-3y)=(0,\ 0)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$3-3x=0,\ 9-3y=0$

$\therefore\ x=1,\ y=3$

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ 3)$이다. ⋯ ❷

답 $(1,\ 3)$

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$를 성분으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	50 %

08 전략 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}\,(m\neq0)$이면 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있음을 이용한다.

풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 m이 존재해야 한다.

$\overrightarrow{AB}=(k-5,\ -2),\ \overrightarrow{AC}=(-7,\ -4)$이므로

$(k-5,\ -2)=m(-7,\ -4)=(-7m,\ -4m)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$k-5=-7m,\ -2=-4m$

$\therefore\ m=\frac{1}{2},\ k=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

09 전략 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고, 주어진 조건을 이용하여 $x,\ y$ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x+2,\ y),\ \overrightarrow{BP}=(x-2,\ y)$

$|\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{BP}|=6$이므로

$\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=6$

$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=6-\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

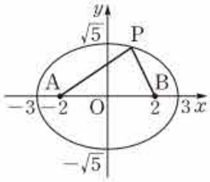
$3\sqrt{(x-2)^2+y^2}=-2x+9$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 $5x^2+9y^2=45$

$\therefore\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 답 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

다른 풀이 $|\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{BP}|=6$에서 $\overline{AP}+\overline{BP}=6$이므로 점 P는 두 점 A, B에서의 거리의 합이 6인 점이다.

따라서 점 P의 자취는 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B를 초점으로 하고 장축의 길이가 6인 타원이므로



$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

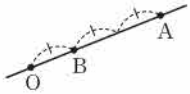
10 전략 세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{OB}\,(m\neq0)$임을 이용한다.

풀이 $\overline{OA}=3\overline{OB}$이므로

$\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OB}$ 또는 $\overrightarrow{OA}=-3\overrightarrow{OB}$

(i) $\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OB}$일 때,

오른쪽 그림에서



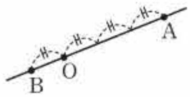
$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\vec{a}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{a}=-\frac{2}{3}\vec{a}$

(ii) $\overrightarrow{OA}=-3\overrightarrow{OB}$일 때,

오른쪽 그림에서



$\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

$=-\frac{1}{3}\vec{a}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=-\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{a}=-\frac{4}{3}\vec{a}$

(i), (ii)에서 $k=-\frac{2}{3}$ 또는 $k=-\frac{4}{3}$이므로 모든 k의 값의 합은 $-\frac{2}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right)=-2$ 답 ③

11 전략 선분 AD의 내분점의 위치벡터를 이용한다.

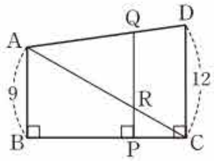
풀이 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점을 Q라 하면

$\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PD}}{3}$

$\therefore\ |\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PD}|=3|\overrightarrow{PQ}|$

따라서 선분 PQ의 길이가 최소일 때, $|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PD}|$가 최소이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P가 점 Q에서 선분 BC에 내린 수선의 발일 때 $\overline{PQ}$의 길이가 최소이고, 이때 $\overline{QP}$와 $\overline{AC}$의 교점을 R라 하자.



$\overline{AQ}:\overline{AD}=2:3$이므로

$$\overline{QR}=12\cdot\frac{2}{3}=8$$

$\overline{PC}:\overline{BC}=1:3$이므로

$$\overline{RP}=9\cdot\frac{1}{3}=3$$

$$\therefore \overline{PQ}=\overline{QR}+\overline{RP}=11$$

따라서 $|\overrightarrow{PQ}|\geq 11$이므로 $|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PD}|$의 최솟값은

$3\times 11=33$ 답 33

12 전략 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 할 때, 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점의 위치벡터는 $\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$임을 이용하여 점 P의 위치를 찾는다.

풀이 $5\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}=\vec{0}$에서

$$5\overrightarrow{AP}=-3\overrightarrow{BP}-4\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}$$

$$\therefore \frac{5}{7}\overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}}{3+4}$$

이때 $\dfrac{3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}}{3+4}=\overrightarrow{PD}$라 하면 점 D는 선분 BC를 $4:3$으로 내분하는 점이다.

또 $\dfrac{5}{7}\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PD}$에서 $5\overrightarrow{AP}=7\overrightarrow{PD}$이므로

$$|\overrightarrow{AP}|:|\overrightarrow{PD}|=\overline{AP}:\overline{PD}=7:5$$

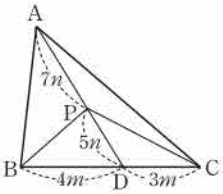
즉 점 P는 선분 AD를 $7:5$로 내분하는 점이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 △ABC에서

$\overline{BD}=4m$, $\overline{DC}=3m$,

$\overline{AP}=7n$, $\overline{PD}=5n$

이라 하면



$$\triangle PAB=\frac{7}{12}\triangle ABD$$
$$=\frac{7}{12}\times\frac{4}{7}\triangle ABC$$
$$=\frac{1}{3}\triangle ABC$$

$$\triangle PBC=\frac{5}{12}\triangle ABD+\frac{5}{12}\triangle ADC$$
$$=\frac{5}{12}\triangle ABC$$

$$\triangle PCA=\frac{7}{12}\triangle ADC$$
$$=\frac{7}{12}\times\frac{3}{7}\triangle ABC$$
$$=\frac{1}{4}\triangle ABC$$

$\therefore \triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA$

$=\dfrac{1}{3}\triangle ABC:\dfrac{5}{12}\triangle ABC:\dfrac{1}{4}\triangle ABC$

$=4:5:3$ 답 ⑤

13 전략 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면 $\vec{a}=m\vec{b}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 m이 존재함을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{AB}=(4,\ -1)-(3,\ 2)=(1,\ -3)$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\vec{p}$가 서로 평행하면

$$\vec{p}=m\overrightarrow{AB}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 m이 존재하므로

$$(4+2k,\ -1+5k)=m(1,\ -3)=(m,\ -3m)$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$4+2k=m,\ -1+5k=-3m$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=-1$, $m=2$ 답 ②

14 전략 두 점 A, B의 좌표를 구한다.

풀이 16개의 정삼각형의 한 변의 길이가 2이므로

$A(2,\ 2\sqrt{3})$, $B(7,\ \sqrt{3})$ ··· ❶

$\therefore \overrightarrow{AB}=(7,\ \sqrt{3})-(2,\ 2\sqrt{3})=(5,\ -\sqrt{3})$,

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5^2+(-\sqrt{3})^2}$

$=2\sqrt{7}$ ··· ❷

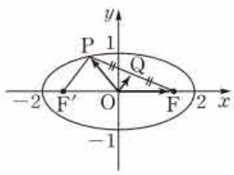
답 $\overrightarrow{AB}=(5,\ -\sqrt{3})$, $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{7}$

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\overrightarrow{AB}$를 성분으로 나타내고 그 크기를 구할 수 있다.	60 %

15 전략 $\overline{FP}$의 중점을 Q라 하고 타원의 정의를 이용한다.

풀이 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=1$에서 $\overline{FP}$의 중점을 Q라 하면

$$\left|\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}}{2}\right|=|\overrightarrow{OQ}|$$
$$=\frac{1}{2}$$



한편 $\overline{F'P}\,/\!/\,\overline{OQ}$이므로 $|\overrightarrow{F'P}|=\overline{PF'}=1$

이때 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF'}+\overline{PF}=4$이므로

$$\overline{PF}=3$$

따라서 $k=3$이므로 $5k=15$ 답 15

16 (전략) 주어진 조건에 맞게 그림을 그려 점 P가 그리는 도형을 구한다.

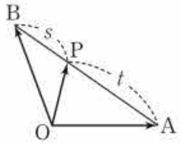
(풀이) ㄱ. $s+t=1$에서

$s=1-t$이므로

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

$(0\le t\le 1)$



따라서 점 P가 그리는 도형은 선분 AB이다.

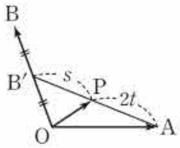
ㄴ. $s+2t=1$에서 $2t=1-s$이므로

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

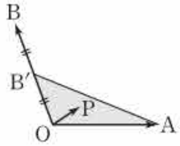
$=s\overrightarrow{OA}+2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$=s\overrightarrow{OA}+(1-s)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)\ (0\le s\le 1)$

이때 $\overrightarrow{OB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$라 하면 점 P가 그리는 도형은 선분 AB′이고, 그 길이는 선분 AB의 길이보다 작다.



ㄷ. ㄴ에서 양수 s, t가 $s+2t\le 1$이면 점 P가 그리는 영역은 삼각형 OAB′의 내부와 그 둘레이므로 삼각형 OAB에 포함된다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

17 (전략) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면 $\vec{a}=k\vec{b}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재함을 이용한다.

(풀이) 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{v}+\vec{b}$가 서로 평행하므로

$\vec{v}+\vec{b}=k\vec{a}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

이때

$\vec{v}=k\vec{a}-\vec{b}$

$=k(3,\ 1)-(4,\ -2)$

$=(3k-4,\ k+2)$

이므로

$|\vec{v}|^2=(3k-4)^2+(k+2)^2$

$=10k^2-20k+20$

$=10(k-1)^2+10$

≥ 10

따라서 $|\vec{v}|^2$은 $k=1$일 때 최솟값 10을 갖는다.

답 ⑤

Ⅱ. 벡터

05 평면벡터의 내적

유제 본책 125~147쪽

039-❶ (1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos 60°$

$=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AF}|\cos(180°-120°)$

$=-1\times 1\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

(3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO}$

$=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BO}|\cos 60°$

$=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CF}$

$=-|\overrightarrow{CO}||\overrightarrow{CF}|\cos 0°$

$=-1\times 2\times 1=-2$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) -2

040-❶ $\vec{a}+\vec{b}=(-1,\ 3)+(2,\ 1)=(1,\ 4)$이므로

$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=(-1)\times 1+3\times 4$

$=11$

답 11

040-❷ 점 P의 좌표를 $(m,\ 2m^2)$이라 하면

$\overrightarrow{AP}=(m,\ 2m^2)-(-3,\ 2)$

$=(m+3,\ 2m^2-2)$

$\overrightarrow{AB}=(1,\ 3)-(-3,\ 2)$

$=(4,\ 1)$

이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=4(m+3)+2m^2-2$

$=2m^2+4m+10$

$=2(m+1)^2+8$

따라서 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$는 $m=-1$, 즉 $P(-1,\ 2)$일 때 최솟값 8을 갖는다.

답 8

041-❶ $|\vec{a}-3\vec{b}|^2=(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}+3\vec{b}|^2=(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

이므로

$$|\vec{a}-3\vec{b}|^2+|\vec{a}+3\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+18|\vec{b}|^2$$
$$=2\times 2^2+18\times 1^2$$
$$=26$$

답 26

041-❷ $|2\vec{a}-\vec{b}|^2=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$
$$=4\vec{a}\cdot\vec{a}-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

이므로

$$7^2=4\times 4^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+5^2$$
$$4\vec{a}\cdot\vec{b}=40 \qquad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=10$$

답 10

042-❶ $\vec{a}\cdot\vec{b}=(6, 8)\cdot(1, x)=6+8x$

즉 $6+8x=-50$이므로 $x=-7$

$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$이므로 두 벡터가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(90^\circ<\theta\leq 180^\circ)$라 하면

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
$$=-\frac{-50}{\sqrt{6^2+8^2}\sqrt{1^2+(-7)^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $180^\circ-\theta=45^\circ$이므로

$$\theta=135^\circ$$

답 135°

042-❷ $|3\vec{a}+2\vec{b}|=8$의 좌변을 제곱하면

$$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})$$
$$=9\vec{a}\cdot\vec{a}+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$
$$=9\times 1^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times 3^2$$
$$=12\vec{a}\cdot\vec{b}+45$$

즉 $12\vec{a}\cdot\vec{b}+45=64$이므로 $12\vec{a}\cdot\vec{b}=19$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{19}{12}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$이므로 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ\leq\theta<90^\circ)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\frac{19}{12}}{1\times 3}=\frac{19}{36}$$

답 $\frac{19}{36}$

043-❶ $\vec{b}$와 $\vec{c}$가 서로 수직이면 $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$이므로

$$12+6y=0 \qquad \therefore y=-2$$

$\vec{a}$와 $\vec{c}$가 서로 평행하면 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\pm|\vec{a}||\vec{c}|$이므로

$$3x-8=\pm\sqrt{x^2+16}\sqrt{3^2+(-2)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2+12x+36=0, \qquad (x+6)^2=0$$
$$\therefore x=-6$$

답 $x=-6$, $y=-2$

044-❶ (1) 두 직선 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}$, $\frac{x-4}{5}=y+2$의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$$\vec{u}=(2, 3),\ \vec{v}=(5, 1)$$

이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$
$$=\frac{|2\times 5+3\times 1|}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{5^2+1^2}}$$
$$=\frac{13}{\sqrt{13}\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\therefore \theta=45^\circ$$

(2) 두 직선 $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{\sqrt{3}}$, $\frac{x+7}{\sqrt{3}}=\frac{y}{5}$의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$$\vec{u}=(2, \sqrt{3}),\ \vec{v}=(\sqrt{3}, 5)$$

이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$
$$=\frac{|2\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times 5|}{\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}\sqrt{(\sqrt{3})^2+5^2}}$$
$$=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{28}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \theta=30^\circ$$

답 (1) 45° (2) 30°

044-❷ 두 직선 $\frac{1-x}{k}=y+3$, $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{k}$의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$$\vec{u}=(-k, 1),\ \vec{v}=(3, k)$$

두 직선이 이루는 각의 크기가 60°이므로

$$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\cos 60^\circ$$
$$\frac{|-3k+k|}{\sqrt{(-k)^2+1^2}\sqrt{3^2+k^2}}=\frac{1}{2}$$
$$4k=\sqrt{(k^2+1)(k^2+9)}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $k^4-6k^2+9=0$

$$(k^2-3)^2=0, \qquad k^2=3$$
$$\therefore k=\sqrt{3}\ (\because k>0)$$

답 $\sqrt{3}$

045-❶ $x-1=-ky$에서 $\frac{x-1}{-k}=y$

주어진 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$$\vec{u}=(-2, 5),\ \vec{v}=(-k, 1)$$

두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$$2k+5=0 \qquad \therefore k=-\frac{5}{2}$$

답 $-\frac{5}{2}$

045-② 주어진 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ k+1)$, $\vec{v}=(k,\ 4)$

두 직선이 서로 평행하므로

$\vec{u}=t\vec{v}$ (t는 실수)

라 하면 $(2,\ k+1)=t(k,\ 4)=(kt,\ 4t)$

$\therefore\ 2=kt,\ k+1=4t$

위의 식에서 t를 소거하면 $\dfrac{2}{k}=\dfrac{k+1}{4}$이므로

$k(k+1)=8$

$\therefore\ k^2+k-8=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 실수 k의 값의 곱은 -8이다. 답 -8

Remark▶
이차방정식 $k^2+k-8=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\times1\times(-8)=33>0$
이므로 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

046-① $4(x+1)=3(y-4)$에서

$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{4}$

이므로 구하는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(3,\ 4)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{4}$ 답 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{4}$

다른 풀이 $4(x+1)=3(y-4)$에서

$4x-3y+16=0$

이므로 구하는 직선의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{n}=(4,\ -3)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$4(x-1)-3(y+1)=0$

$\therefore\ 4x-3y-7=0$, 즉 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{4}$

046-② 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(-3,\ 4)$

구하는 직선은 주어진 직선에 수직이므로 법선벡터가 $\vec{u}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$-3(x-2)+4(y+3)=0$

$\therefore\ 3x-4y-18=0$ 답 $3x-4y-18=0$

047-① 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-5,\ y-2)$, $\overrightarrow{BP}=(x+1,\ y-4)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서

$(x-5,\ y-2)\cdot(x+1,\ y-4)=0$

$(x-5)(x+1)+(y-2)(y-4)=0$

$x^2-4x-5+y^2-6y+8=0$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-3)^2=10$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$2\pi\times\sqrt{10}=2\sqrt{10}\pi$ 답 $2\sqrt{10}\pi$

다른 풀이 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서 $\angle APB=90°$이므로 점 P가 나타내는 도형은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-5)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{10}$이므로 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

따라서 구하는 도형의 둘레의 길이는 $2\sqrt{10}\pi$이다.

중단원 연습 문제

본책 148~151쪽

01 ①	02 ③	03 $\dfrac{1}{3}$	04 $\dfrac{5\sqrt{26}}{26}$	
05 ②	06 $60°$			
07 $\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{4}{5},\ -\dfrac{3}{5}\right)$		08 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$	09 ⑤	
10 최댓값: $4+2\sqrt{3}$, 최솟값: 4		11 $\dfrac{\sqrt{7}}{14}$	12 $60°$	
13 ④	14 ③	15 7	16 ③	17 ⑤

01 **전략** 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$임을 이용한다.

풀이 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(x,\ -3)\cdot(x+4,\ 4)$

$=x^2+4x-12$

$=(x+2)^2-16$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 $x=-2$일 때 최솟값 -16을 갖는다.

답 ①

02 **전략** $|\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{13}$의 양변을 제곱한다.

풀이 $|\vec{b}|=1$이고, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $60°$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60°$

$=|\vec{a}|\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}|$

한편 $|\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{13}$의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}-3\vec{b}|^2=13$$
$$(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=13$$
$$\therefore |\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=13$$

이때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}|\vec{a}|$이므로

$$|\vec{a}|^2-6\times\frac{1}{2}|\vec{a}|+9=13$$
$$|\vec{a}|^2-3|\vec{a}|-4=0$$
$$\therefore (|\vec{a}|+1)(|\vec{a}|-4)=0$$

그런데 $|\vec{a}|>0$이므로

$$|\vec{a}|=4$$

답 ③

03

전략 벡터의 내적의 성질을 이용한다.

풀이 $|k\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2}\,|\vec{a}-k\vec{b}|$의 양변을 제곱하면

$$k^2|\vec{a}|^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
$$=2(|\vec{a}|^2-2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2|\vec{b}|^2)$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로

$$k^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+1=2(1-2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2)$$
$$6k\vec{a}\cdot\vec{b}=k^2+1$$
$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{k^2+1}{6k}=\frac{k}{6}+\frac{1}{6k} \quad \cdots ❶$$

$k>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{k}{6}+\frac{1}{6k}\ge 2\sqrt{\frac{k}{6}\times\frac{1}{6k}}=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$
$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{k}{6}=\frac{1}{6k} \text{ 일 때 성립}\right)$$
$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}\ge\frac{1}{3}$$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다. $\cdots$ ❷

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

04

전략 $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\cos(180°-\theta)=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$임을 이용한다.

풀이 $\vec{a}-\vec{b}=(x,\ 6-x)$이므로

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{x^2+(6-x)^2}=\sqrt{2x^2-12x+36}$$

이때 $|\vec{a}-\vec{b}|=5\sqrt{2}$이므로

$$\sqrt{2x^2-12x+36}=5\sqrt{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2-6x-7=0, \qquad (x+1)(x-7)=0$$
$$\therefore x=-1\ (\because x<0)$$

따라서 $\vec{a}=(0,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ -5)$이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\times1+2\times(-5)=-10$$
$$\therefore \cos(180°-\theta)=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
$$=-\frac{-10}{\sqrt{2^2}\sqrt{1^2+(-5)^2}}$$
$$=\frac{5\sqrt{26}}{26}$$

답 $\frac{5\sqrt{26}}{26}$

05

전략 두 벡터가 서로 수직이면 두 벡터의 내적이 0임을 이용하여 t에 대한 항등식을 세운다.

풀이 $\vec{a}+t\vec{b}=(x,\ y)+t(1,\ -3)=(x+t,\ y-3t)$

$\vec{b}+t\vec{c}=(1,\ -3)+t(3,\ 1)=(1+3t,\ -3+t)$

두 벡터 $\vec{a}+t\vec{b}$, $\vec{b}+t\vec{c}$가 서로 수직이므로

$$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{b}+t\vec{c})=0$$
$$(x+t,\ y-3t)\cdot(1+3t,\ -3+t)=0$$
$$(x+t)(1+3t)+(y-3t)(-3+t)=0$$
$$\therefore (3x+y+10)t+(x-3y)=0$$

이 식이 t의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$3x+y+10=0,\ x-3y=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=-3,\ y=-1$$
$$\therefore x+y=-4$$

답 ②

06

전략 $\vec{p}\perp\vec{q}$이면 $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$임을 이용한다.

풀이 $\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}$가 서로 수직이므로

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\left(\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}\right)=0$$
$$\vec{a}\cdot\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{5}\vec{b}\cdot\vec{b}=0$$
$$|\vec{a}|^2+\frac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{5}|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{b}|=2|\vec{a}|$이므로

$$|\vec{a}|^2+\frac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{5}\times4|\vec{a}|^2=0$$
$$\frac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{5}|\vec{a}|^2 \qquad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2$$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0°\le\theta<90°)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\times2|\vec{a}|}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore \theta=60°$$

답 60°

05 평면벡터의 내적

07 전략 서로 다른 두 점을 지나는 직선의 방향벡터를 구한다.

풀이 두 직선 l, m의 교점을 P라 하면

$\mathrm{P}(4,\ 1)$

따라서

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(4,\ 1)-(0,\ -2)=(4,\ 3)$

이므로 두 점 A, P를 지나는 직선의 방향벡터는

$(4k,\ 3k)\ (k\neq0)$ 꼴이다.

이때 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$이므로 구하는 단위벡터는

$\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right),\ \left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$

답 $\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right),\ \left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$

08 전략 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하고 직선의 방향벡터를 이용한다.

풀이 점 G의 좌표는

$\mathrm{G}\left(\frac{-1+2+5}{3},\ \frac{3+5-2}{3}\right)$, 즉 $\mathrm{G}(2,\ 2)$ ···➊

두 직선 AG, BG의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(2,\ 2)-(-1,\ 3)=(3,\ -1)$,

$\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{BG}}=(2,\ 2)-(2,\ 5)=(0,\ -3)$ ···➋

$$\therefore \cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|3\times0+(-1)\times(-3)|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}\sqrt{(-3)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$ ···➌

답 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

채점 기준	비율
➊ 점 G의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
➋ 두 직선 AG, BG의 방향벡터를 구할 수 있다.	30 %
➌ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %

09 전략 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 x, y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\vec{p}=(x,\ y)$이므로

$\vec{p}-\vec{a}=(x-3,\ y-1)$,

$\vec{p}-\vec{b}=(x+1,\ y-5)$

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$에서

$(x-3,\ y-1)\cdot(x+1,\ y-5)=0$

$(x-3)(x+1)+(y-1)(y-5)=0$

$x^2-2x-3+y^2-6y+5=0$

$\therefore (x-1)^2+(y-3)^2=8$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1,\ 3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{2})^2=8\pi$

답 ⑤

10 전략 점 P에서 직선 BA에 내린 수선의 발을 H라 하고 평면벡터의 내적을 이용한다.

풀이 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0°\leq\theta\leq90°)$, 점 P에서 직선 BA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BP}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BH}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|$$

한편 삼각형 EAD는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$2\leq|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|\leq2+\sqrt{3}$

$4\leq2|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|\leq4+2\sqrt{3}$

$\therefore\ 4\leq\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\leq4+2\sqrt{3}$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$의 최댓값은 $4+2\sqrt{3}$, 최솟값은 4이다.

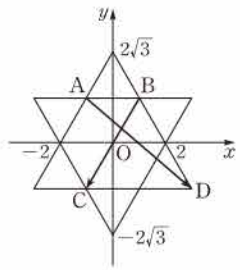
답 최댓값: $4+2\sqrt{3}$, 최솟값: 4

Remark▶

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$가 최대가 되는 경우는 점 P가 점 E에 있을 때이고, 최소가 되는 경우는 점 P가 변 AD 위에 있을 때이다.

11 전략 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓고 네 점 A, B, C, D의 좌표를 구한다.

풀이 주어진 도형을 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 놓으면 네 점 A, B, C, D의 좌표는



$\mathrm{A}(-1,\ \sqrt{3})$,

$\mathrm{B}(1,\ \sqrt{3})$,

$\mathrm{C}(-1,\ -\sqrt{3})$,

$\mathrm{D}(3,\ -\sqrt{3})$

이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(3,\ -\sqrt{3})-(-1,\ \sqrt{3})=(4,\ -2\sqrt{3})$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,\ -\sqrt{3})-(1,\ \sqrt{3})=(-2,\ -2\sqrt{3})$

따라서

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=4\times(-2)-2\sqrt{3}\times(-2\sqrt{3})=4$

이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}>0$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{4^2+(-2\sqrt{3})^2}\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}}$$
$$=\frac{4}{8\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$$

답 $\frac{\sqrt{7}}{14}$

12 전략 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$임을 이용하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 구한다.

풀이 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$에서 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$이므로

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{c}|$, 즉 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$

따라서

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$

이므로

$6^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+10^2=14^2$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=30$ ··· ❶

$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0°\le\theta<90°)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{30}{6\times10}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta=60°$ ··· ❷

답 $60°$

채점 기준	비율
❶ $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.	50 %

13 전략 두 평면벡터가 수직일 조건을 이용하여 직선 밖의 한 점에서 그 직선에 이르는 거리를 구한다.

풀이 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $Q(a,\ b)$라 하면 점 Q는 직선 l 위의 점이므로

$$\frac{a-1}{2}=2-b$$

$\therefore a+2b=5$ ······ ㉠

또 $\overrightarrow{PQ}=(a-1,\ b+3)$이고 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(2,\ -1)$이므로 $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}=0$에서

$(a-1,\ b+3)\cdot(2,\ -1)=0$

$2(a-1)-(b+3)=0$

$\therefore 2a-b=5$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=1$

따라서 $\overrightarrow{PQ}=(2,\ 4)$이므로 구하는 거리는

$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

답 ④

14 전략 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$로 놓고, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{DE}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낸다.

풀이 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$

따라서 $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}=-\frac{5}{3}\vec{a}+\vec{b}$이므로

$$|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2=\left|-\frac{5}{3}\vec{a}+\vec{b}\right|^2$$
$$=\frac{25}{9}|\vec{a}|^2-\frac{10}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

이때 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=3$이고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기는 $60°$이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60°=\frac{9}{2}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2=\frac{25}{9}\times3^2-\frac{10}{3}\times\frac{9}{2}+3^2$$
$$=19$$

답 ③

15 전략 점 P가 선분 AH 위를 움직이므로 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AH}\,(0\le k\le1)$임을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$이고, 점 P가 $\overrightarrow{AH}$ 위의 점이므로

$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AH}\ (0\le k\le1)$

라 하면

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

한편 $\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}$이므로

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$$
$$=-\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})$$
$$=-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AP}|^2$$
$$=-\frac{1}{2}k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}+k^2|\overrightarrow{AH}|^2$$
$$=-\frac{1}{2}k|\overrightarrow{AB}|^2-\frac{1}{2}k\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+k^2|\overrightarrow{AH}|^2$$

이때 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=2$, $|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{3}$이고

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos60°=2\times2\times\frac{1}{2}=2$이므로

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$$
$$=-\frac{1}{2}k\times2^2-\frac{1}{2}k\times2+k^2(\sqrt{3})^2$$
$$=3k^2-3k=3\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$$

$0 \le k \le 1$이므로 $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 $k=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{3}{4}$이다.

따라서 $p=4$, $q=3$이므로

$p+q=7$ **답** 7

16 **전략** 점 P가 나타내는 도형을 구하고 점 Q의 위치를 찾는다.

풀이 점 M은 선분 AB의 중점이므로

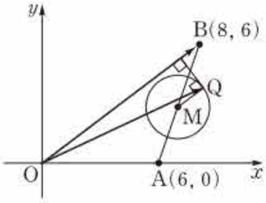
$$\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}=\overrightarrow{PM} \qquad \therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PM}$$

이때 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$이므로

$$2|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{10} \qquad \therefore |\overrightarrow{PM}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

즉 점 P는 중심이 점 M이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$인 원 위의 점이다.

이 원을 C라 하면 점 Q는 다음 그림과 같이 직선 OB에 수직인 직선이 원 C와 접할 때의 접점 중 선분 OP의 길이가 가장 길 때의 점이다.



한편 직선 OB에 수직이고 점 Q를 지나는 직선과 직선 MQ는 수직이므로

$\overline{OB} /\!/ \overline{MQ}$

즉 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MQ}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기와 같으므로 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}&=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{MQ}|\cos\theta\\&=6\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{4}{5}\\&=\frac{12\sqrt{10}}{5}\end{aligned}$$

답 ③

17 **전략** 주어진 조건을 이용하여 점 X가 나타내는 도형을 구한다.

풀이 $|\overrightarrow{OX}|\le 1$을 만족시키는 점 X가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레와 그 내부이다.

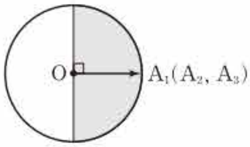
또 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OA_k}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA_k}=|\overrightarrow{OX}||\overrightarrow{OA_k}|\cos\theta\ge 0$$

에서 $\cos\theta\ge 0$

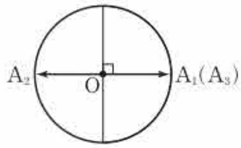
$\therefore 0^\circ\le\theta\le 90^\circ$

ㄱ. $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OA_3}$이면 도형 D는 오른쪽 그림과 같이 반원의 둘레와 그 내부이므로 그 넓이는



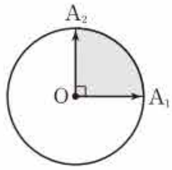
$$\frac{1}{2}\times\pi\times1^2=\frac{\pi}{2}$$

ㄴ. $\overrightarrow{OA_2}=-\overrightarrow{OA_1}$이고 $\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OA_1}$이면 도형 D는 오른쪽 그림과 같이 선분 A_1A_2와 수직인 원의 지름이므로 그 길이는 2이다.



ㄷ. $\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=0$이면 $\overrightarrow{OA_1}\perp\overrightarrow{OA_2}$

$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA_1}\ge 0$, $\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA_2}\ge 0$을 만족시키는 점 X가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 부채꼴 A_1OA_2의 둘레와 그 내부이다.



도형 D의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이려면 점 A_3은 호 A_1A_2 위에 있어야 하므로 점 A_3은 D에 포함되어 있다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

Ⅲ. 공간도형

06 공간도형

유제

본책 158~179쪽

048-❶ 주어진 사각뿔에서 5개의 꼭짓점으로 만들 수 있는 서로 다른 평면은

평면 ABCD, 평면 OAB, 평면 OBC,
평면 OCD, 평면 OAD, 평면 OAC, 평면 OBD

의 7개이다. 답 7

다른 풀이 꼭짓점 O와 밑면의 두 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는 $\quad {}_4C_2=6$

밑면의 점들로 만들 수 있는 평면은 1개이므로 구하는 평면의 개수는 $\quad 6+1=7$

Remark▶

평면 ABC, 평면 ABD, 평면 ACD, 평면 BCD는 모두 평면 ABCD와 같은 평면이다.

049-❶ 꼬인 위치에 있는 두 직선은

직선 AB와 직선 CD, 직선 AC와 직선 BD,
직선 AD와 직선 BC

이다. 답 풀이 참조

049-❷ 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은

직선 CG, 직선 DH, 직선 EH, 직선 FG,
직선 CF, 직선 DE, 직선 CH, 직선 DG,
직선 EG, 직선 FH, 직선 CE, 직선 DF

의 12개이므로 $\quad a=12$

직선 AB와 평행한 평면은

평면 EFGH, 평면 DHGC, 평면 CDEF

의 3개이므로 $\quad b=3$

평면 ABCD와 평행한 직선은

직선 EF, 직선 FG, 직선 GH, 직선 HE,
직선 EG, 직선 FH

의 6개이므로 $\quad c=6$

$\therefore a+b+c=21$ 답 21

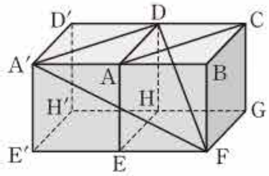
050-❶ $\overleftrightarrow{AD} /\!/ \overleftrightarrow{BF}$이므로 두 직선 AD와 CF가 이루는 각의 크기는 두 직선 BF와 CF가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 $\triangle BCF$는 정삼각형이므로

$\angle BFC=60^\circ$

따라서 두 직선 AD와 CF가 이루는 각의 크기는 60°이다. 답 60°

050-❷ 오른쪽 그림과 같이 합동인 두 정육면체를 나란히 붙이면



$\overleftrightarrow{AC} /\!/ \overleftrightarrow{A'D}$

이므로 두 직선 AC와 DF가 이루는 각의 크기는 두 직선 A′D와 DF가 이루는 각의 크기와 같다.

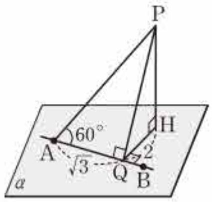
$\triangle A'DF$에서 $\overline{A'D}=\sqrt{2}$, $\overline{DF}=\sqrt{3}$, $\overline{A'F}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{A'F}^2=\overline{A'D}^2+\overline{DF}^2$

즉 $\triangle A'DF$는 $\angle A'DF=90^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 두 직선 AC와 DF가 이루는 각의 크기는 90°이다. 답 90°

051-❶ 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PQ}$를 그으면 $\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{QH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{PQ}\perp\overline{AB}$

이때 직각삼각형 PAQ에서

$\angle PAQ=60^\circ$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{3}\tan 60^\circ$
$\quad =\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$

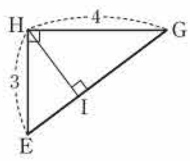
따라서 직각삼각형 PQH에서

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{QH}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

051-❷ $\overline{DH}\perp$(평면 EFGH), $\overline{DI}\perp\overline{EG}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HI}\perp\overline{EG}$

따라서 오른쪽 그림에서



$\frac{1}{2}\overline{EG}\cdot\overline{HI}=\frac{1}{2}\overline{HE}\cdot\overline{HG}$

이므로

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}\cdot\overline{HI}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4$

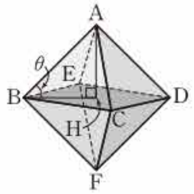
$\therefore \overline{HI}=\frac{12}{5}$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$\overline{DI}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HI}^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{61}}{5}$

답 $\frac{2\sqrt{61}}{5}$

052-❶ 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H, 직선 AB와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

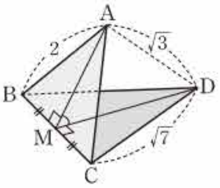


$\angle ABH = \theta$

이때 점 H는 정사각형 BCDE와 AEFC의 두 대각선의 교점이므로 △ABH는 직각이등변삼각형이다.
따라서 $\theta = 45°$이므로 구하는 각의 크기는 45°이다.

답 45°

053-❶ 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면



$\overline{AM} \perp \overline{BC}$, $\overline{DM} \perp \overline{BC}$

이므로 두 평면 ABC와 DBC가 이루는 각의 크기는 두 직선 AM과 DM이 이루는 각의 크기와 같다.
한편 정삼각형 ABC에서

$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$

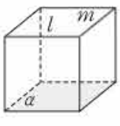
직각삼각형 DMC에서

$$\overline{DM} = \sqrt{\overline{DC}^2 - \overline{MC}^2} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 1^2} = \sqrt{6}$$

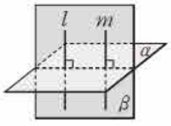
이때 $\overline{AM}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{DM}^2$이고, $\overline{AM} = \overline{AD}$이므로 △AMD는 직각이등변삼각형이다.
따라서 ∠AMD=45°이므로 구하는 각의 크기는 45°이다.

답 45°

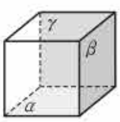
054-❶ ㄱ. [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $l /\!/ \alpha$, $m /\!/ \alpha$이지만 $l \perp m$이다.



ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m을 포함하는 평면을 β라 하면 β는 α와 수직이다.
이때 m은 평면 β 위의 직선이므로 $m \perp \alpha$이다.



ㄷ. [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $\alpha \perp \beta$, $\alpha \perp \gamma$이지만 $\beta \perp \gamma$이다.



이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

055-❶ 타원의 장축의 길이를 $2a$라 하면 타원의 장축의 밑면 위로의 정사영은 밑면의 지름이므로

$10 = 2a\cos 45°$

$\therefore a = \frac{10}{2\cos 45°} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

타원의 단축의 길이를 $2b$라 하면 타원의 단축의 밑면 위로의 정사영은 밑면의 지름과 같으므로

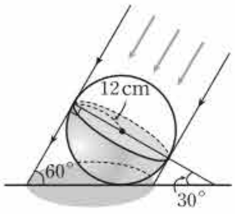
$2b = 10 \quad \therefore b = 5$

이때 $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - 5^2} = 5$이므로 타원의 두 초점 사이의 거리는

$5 \cdot 2 = 10$

답 10

055-❷ 오른쪽 그림과 같이 축구공의 그림자는 햇빛과 수직이고 반지름의 길이가 12 cm인 원의 그림자와 같다.



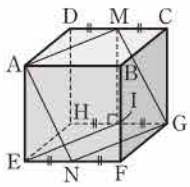
이때 원을 포함하고 햇빛과 수직인 평면과 지면이 이루는 각의 크기는 30°이므로 원의 넓이를 S, 축구공의 그림자의 넓이를 S'이라 하면

$S = S'\cos 30°$

$$\therefore S' = \frac{S}{\cos 30°} = \frac{\pi \cdot 12^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 96\sqrt{3}\pi\,(\text{cm}^2)$$

답 $96\sqrt{3}\pi$ cm²

056-❶ 오른쪽 그림과 같이 $\overline{HG}$의 중점을 I라 하면 마름모 ANGM의 평면 EFGH 위로의 정사영은 사각형 ENGI이므로



$\square ENGI = \square ANGM \cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{\square ENGI}{\square ANGM}$

이때

$$\square ANGM = \frac{1}{2}\overline{MN} \cdot \overline{AG} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$$

$\square ENGI = 1 \cdot 2 = 2$

이므로 $\cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

답 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

056-② 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OAH에서

$$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$$

이므로 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

□ABCD의 두 대각선의 교점을 P라 하면 △OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영은 △PAB이고

$$\triangle PAB=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2=1$$

이때 평면 OAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\triangle PAB=\triangle OAB\cos\theta$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\triangle PAB}{\triangle OAB}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\square ABCD\cos\theta=2^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

다른 풀이 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 중점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{AB}\perp\overline{OM}$, $\overline{AB}\perp\overline{MN}$

따라서 평면 OAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\angle OMN=\theta$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\frac{1}{2}\overline{MN}}{\overline{OM}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\square ABCD\cos\theta=2^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$$

중단원 연습 문제

본책 180~184쪽

01 ㄱ, ㄴ, ㄹ	**02** 5	**03** 풀이 참조		
04 ③	**05** ③	**06** 6	**07** ②	**08** ④
09 60°	**10** 0	**11** (1) 3 (2) 6		**12** $\frac{\sqrt{3}}{12}$
13 38	**14** $\frac{\sqrt{2}}{2}$	**15** $\sqrt{2}$	**16** $\frac{\sqrt{15}}{6}$	
17 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$	**18** 12	**19** ④	**20** ⑤	**21** ⑤
22 40				

01 (전략) 평면의 결정 조건을 이용한다.

풀이 ㄱ. 세 점 A, C, E는 한 직선 위에 있지 않으므로 하나의 평면을 결정한다.

ㄴ. 점 B는 직선 DF 위에 있지 않으므로 점 B와 직선 DF는 하나의 평면을 결정한다.

ㄷ. 직선 AD와 직선 BC는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.
따라서 직선 AD와 직선 BC를 포함하는 평면은 존재하지 않는다.

ㄹ. 직선 BD와 직선 DE는 한 점에서 만나므로 하나의 평면을 결정한다.

이상에서 평면이 하나로 결정되는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

02 (전략) 공간에서의 위치 관계를 이용한다.

풀이 $\overleftrightarrow{AC}$와 꼬인 위치에 있는 직선은

직선 BE, 직선 DE, 직선 BF, 직선 DF

의 4개이므로 $a=4$ ··· ❶

평면 ABC와 평행한 평면은

평면 DEF

의 1개이므로 $b=1$ ··· ❷

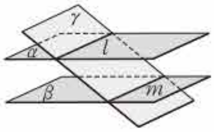
$\therefore a+b=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

03 (전략) 한 평면 위에 있는 두 직선이 만나지 않으면 두 직선은 평행함을 이용한다.

풀이 두 평면 α, β는 평행하므로 만나지 않는다. 이때 두 직선 l, m은 각각 두 평면 α, β 위에 있으므로 두 직선 l, m도 만나지 않는다.



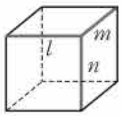
그런데 두 직선 l, m은 모두 평면 γ 위에 있으므로

$l\,/\!/\,m$

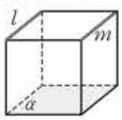
답 풀이 참조

04 (전략) 직육면체를 이용하여 반례를 찾아본다.

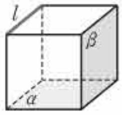
풀이 ① [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $l\perp m$, $l\perp n$이지만 $m\perp n$이다.



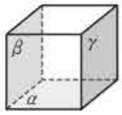
② [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $l\,/\!/\,\alpha$, $m\,/\!/\,\alpha$이지만 $l\,/\!/\,m$이다.



④ [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $l /\!/ \alpha$, $\alpha \perp \beta$이지만 $l /\!/ \beta$이다.



⑤ [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $\alpha \perp \beta$, $\alpha \perp \gamma$이지만 $\beta /\!/ \gamma$이다.



이상에서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

05 전략 한 직선과 평행하고 다른 직선과 만나는 직선을 찾는다.

풀이 ① $\overleftrightarrow{EH} /\!/ \overleftrightarrow{AD}$이고 $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$이므로

$\overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore \cos\theta = \cos 90° = 0$

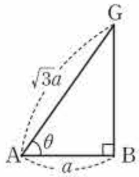
② $\overleftrightarrow{CG} /\!/ \overleftrightarrow{BF}$이고 $\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{AB}$이므로 $\overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore \cos\theta = \cos 90° = 0$

③ $\overleftrightarrow{FH} /\!/ \overleftrightarrow{BD}$이고 $\angle DBA = 45°$이므로 $\overleftrightarrow{FH}$와 $\overleftrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기는 $45°$이다.

$\therefore \cos\theta = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

④ 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면 $\overline{AG} = \sqrt{3}a$이므로 오른쪽 그림에서



$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

⑤ $\overleftrightarrow{AB} /\!/ \overleftrightarrow{EF}$이고 $\overleftrightarrow{CF} \perp \overleftrightarrow{EF}$이므로

$\overleftrightarrow{CF} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore \cos\theta = \cos 90° = 0$

이상에서 $\cos\theta$의 값이 가장 큰 것은 ③이다. 답 ③

06 전략 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AC} \perp \overline{BC}$임을 알아낸다.

풀이 직각삼각형 ACD에서

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$$

$\overline{AD} \perp \overline{BD}$, $\overline{AD} \perp \overline{CD}$이므로 $\overline{AD} \perp$ (평면 BCD)

또 $\overline{CD} \perp \overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

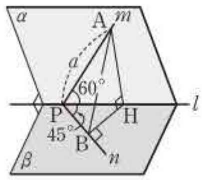
$\overline{AC} \perp \overline{BC}$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AC} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = 6$$

답 6

07 전략 수선을 그어 삼수선의 정리를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 m 위의 한 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 n에 내린 수선의 발을 B라 하면 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{AB} \perp \overline{PB}$

한편 △APH, △HPB가 모두 직각삼각형이므로 $\overline{PA} = a$라 하면

$$\overline{PH} = \overline{PA}\cos 60° = \frac{1}{2}a,$$

$$\overline{PB} = \overline{PH}\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{4}a$$

이때 두 직선 m, n이 이루는 각의 크기 θ는 $\angle APB$의 크기와 같으므로

$$\cos\theta = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ②

08 전략 직선 위의 한 점에서 평면에 수선의 발을 내려 직선과 평면이 이루는 각의 크기를 구한다.

풀이 점 F에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발은 점 B이므로 $\alpha = \angle FDB$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{\overline{DB}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{4^2+3^2}}{\sqrt{5^2+4^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

점 D에서 평면 BFGC에 내린 수선의 발은 점 C이므로 $\beta = \angle DFC$

$$\therefore \cos\beta = \frac{\overline{CF}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{5^2+4^2}}{\sqrt{5^2+4^2+3^2}} = \frac{\sqrt{41}}{5\sqrt{2}}$$

점 F에서 평면 DHGC에 내린 수선의 발은 점 G이므로 $\gamma = \angle FDG$

$$\therefore \cos\gamma = \frac{\overline{DG}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{5^2+3^2}}{\sqrt{5^2+4^2+3^2}} = \frac{\sqrt{34}}{5\sqrt{2}}$$

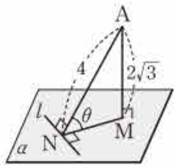
따라서 구하는 값은

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{1}{2} + \frac{41}{50} + \frac{34}{50} = 2$$

답 ④

09 전략 점 A에서 평면 α와 직선 l에 각각 수선의 발을 내린 후 삼수선의 정리를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 α와 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면



$\overline{AM} \perp \alpha$, $\overline{AN} \perp l$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{MN} \perp l$ ⋯ ①

따라서 점 A와 직선 l에 의하여 만들어지는 평면이 평면 α와 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\angle ANM=\theta$ ⋯ ❷

△ANM에서

$$\sin\theta=\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \theta=60^\circ$ ($\because 0^\circ<\theta<90^\circ$) ⋯ ❸

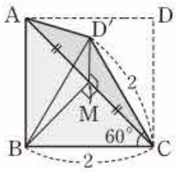
답 60°

채점 기준	비율
❶ $\overline{MN}\perp l$임을 알 수 있다.	40 %
❷ 구하는 각의 크기를 θ라 할 때, $\angle ANM=\theta$임을 알 수 있다.	30 %
❸ θ의 크기를 구할 수 있다.	30 %

10

전략 두 점 B, D′에서 $\overline{AC}$에 각각 수선의 발을 내려 θ의 값을 구한다.

풀이 △ABC와 △ACD′은 모두 직각이등변삼각형이므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$의 중점을 M이라 하면



$\overline{BM}\perp\overline{AC}$, $\overline{D'M}\perp\overline{AC}$

따라서 두 평면 ABC, ACD′이 이루는 각의 크기는 두 직선 BM, D′M이 이루는 각의 크기와 같으므로

$\angle BMD'=\theta$

이때 $\overline{BC}=\overline{D'C}=2$이고 $\angle BCD'=60^\circ$이므로 △D′BC는 정삼각형이다.

$\therefore \overline{BD'}=2$ ⋯⋯ ㉠

또 △BCM과 △CD′M에서

$\overline{BM}=\overline{D'M}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{BD'}^2=\overline{BM}^2+\overline{D'M}^2$

따라서 △BMD′은 $\angle BMD'=90^\circ$인 직각삼각형이므로 $\cos\theta=\cos 90^\circ=0$

답 0

11

전략 정사영을 이용하여 선분의 길이와 도형의 넓이를 구한다.

풀이 (1) 구하는 길이는

$\overline{AB}\cos 60^\circ=6\cdot\frac{1}{2}=3$

(2) 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6=12$

따라서 구하는 넓이는

$12\cos 60^\circ=12\cdot\frac{1}{2}=6$

답 (1) 3 (2) 6

다른 풀이 (2) 세 점 A, B, C의 평면 β 위로의 정사영을 각각 A′, B′, C′이라 하면

$\overline{A'B'}=6\times\cos 60^\circ=6\cdot\frac{1}{2}=3$,

$\overline{B'C'}=\overline{BC}=4$

이고 삼각형 A′B′C′은 $\angle B'=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\triangle A'B'C'=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$

12

전략 먼저 △OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영이 △MAB임을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구한다.

풀이 △OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영이 △MAB이고

$\triangle OAB=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\triangle MAB=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{4}$ ⋯ ❶

이때 △OAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\triangle MAB=\triangle OAB\cos\theta$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\triangle MAB}{\triangle OAB}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ ⋯ ❷

따라서 △MAB의 평면 OAB 위로의 정사영의 넓이는

$\triangle MAB\cos\theta=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{12}$ ⋯ ❸

답 $\frac{\sqrt{3}}{12}$

채점 기준	비율
❶ △OAB, △MAB의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 정사영의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

13

전략 평면의 결정 조건을 이용한다.

풀이 (i) 직선 l과 직선 l 위에 있지 않은 한 점을 택하는 경우

${}_4C_1=4$

(ii) 직선 l 위의 한 점과 직선 l 위에 있지 않은 두 점을 택하는 경우

${}_5C_1\cdot{}_4C_2=30$

(iii) 직선 l 위에 있지 않은 세 점을 택하는 경우

${}_4C_3={}_4C_1=4$

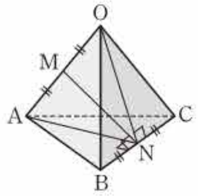
이상에서 구하는 서로 다른 평면의 최대 개수는

$4+30+4=38$

답 38

14 (전략) 직선과 평면의 수직 관계를 이용한다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$, $\overline{BC}$의 중점을 각각 M, N이라 하면 △ABC, △OBC는 모두 정삼각형이므로



$$\overline{AN}\perp\overline{BC},\ \overline{ON}\perp\overline{BC}$$

따라서 (평면 OAN)$\perp\overline{BC}$이므로

$$\overline{MN}\perp\overline{BC}$$

같은 방법으로 하면 $\overline{MN}\perp\overline{OA}$이므로 $\overline{MN}$은 꼬인 위치에 있는 두 모서리 OA, BC의 공통인 수선이다.

따라서 구하는 두 모서리 사이의 거리는 $\overline{MN}$의 길이와 같으므로 직각삼각형 OMN에서

$$\overline{MN}=\sqrt{\overline{ON}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

15 (전략) 직선과 평면의 수직 관계에 의하여 $\overline{OM}\perp\overline{MP}$임을 이용한다.

(풀이) 두 삼각형 OAB, OAC가 모두 정삼각형이므로

$$\overline{OM}\perp\overline{BM},\ \overline{OM}\perp\overline{CM}$$

$$\therefore\ \overline{OM}\perp(\text{평면 BCM})$$

$$\therefore\ \overline{OM}\perp\overline{MP}$$

한편 점 H는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\overline{AH}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot4=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

직각삼각형 OAH에서

$$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

∠OAH$=\theta$라 하면

$$\tan\theta=\frac{\overline{OH}}{\overline{AH}}=\frac{\frac{4\sqrt{6}}{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{2}$$

이때 직각삼각형 OMP에서 ∠OPM$=\theta$이므로

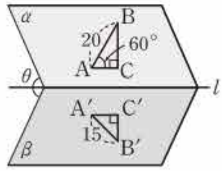
$$\tan\theta=\frac{\overline{OM}}{\overline{MP}}$$

$$\therefore\ \overline{MP}=\frac{\overline{OM}}{\tan\theta}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

16 (전략) $\overline{AC}\,/\!\!/\,l$, $\overline{BC}\perp l$을 만족시키는 평면 α 위의 한 점 C와 점 C의 평면 β 위로의 정사영 C′을 잡아 $\overline{B'C'}=\overline{BC}\cos\theta$임을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구한다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}\,/\!\!/\,l$, $\overline{BC}\perp l$이 되도록 평면 α 위에 한 점 C를 잡으면



$$\overline{AC}=20\cos60°=20\cdot\frac{1}{2}=10$$

$$\overline{BC}=20\sin60°=20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}\quad\cdots ❶$$

이때 점 C의 평면 β 위로의 정사영을 C′이라 하면

$$\overline{A'C'}=\overline{AC}=10\quad\cdots ❷$$

직각삼각형 A′B′C′에서

$$\overline{B'C'}=\sqrt{\overline{A'B'}^2-\overline{A'C'}^2}=\sqrt{15^2-10^2}=5\sqrt{5}\quad\cdots ❸$$

이때 $\overline{B'C'}=\overline{BC}\cos\theta$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=\frac{5\sqrt{5}}{10\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{6}\quad\cdots ❹$$

답 $\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

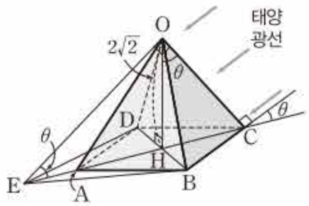
채점 기준	비율
❶ $\overline{AC}$, $\overline{BC}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\overline{A'C'}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %
❸ $\overline{B'C'}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❹ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

Remark▶

직선 AB와 직선 A′B′이 이루는 각의 크기가 θ가 아니므로 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$와 같이 생각하지 않도록 주의한다.

17 (전략) $\overline{AC}$의 연장선 위에 $\overline{OE}\perp\overline{OC}$를 만족시키는 점 E를 잡고, 태양광선이 지면과 이루는 각의 크기를 θ라 하고, $\tan\theta$의 값을 이용하여 그림자의 넓이를 구한다.

(풀이) 다음 그림과 같이 태양광선과 지면이 이루는 각의 크기를 θ라 하고, $\overline{OE}\perp\overline{OC}$인 점 E를 $\overline{AC}$의 연장선 위에 잡으면



$\angle OEC = \angle COH = \theta$

직각삼각형 OHC에서

$$\tan\theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{OH}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

직각삼각형 OEH에서 $\tan\theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{EH}}$이므로

$$\overline{EH} = \frac{\overline{OH}}{\tan\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$$

따라서 도형 P의 넓이를 S라 하면

$$S = \triangle DEB - \triangle DAB$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2} - \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 6$$

한편 태양광선에 수직인 평면 α는 $\overline{OC}$와 평행하므로 지면과 평면 α가 이루는 각의 크기는 $\angle OCH$의 크기와 같다.

이때 직각삼각형 OHC에서

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{HC}^2}$$
$$= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$$

이므로

$$\cos(\angle OCH) = \frac{\overline{CH}}{\overline{OC}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 도형 P의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

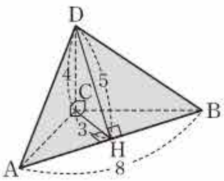
$$S\cos(\angle OCH) = 6\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

답 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

18

전략 삼수선의 정리를 이용하여 △ABC의 넓이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{DC} \perp$ (평면 ABC),

$\overline{DH} \perp \overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{CH} \perp \overline{AB}$

삼각형 ABD의 넓이가 20이므로

$$\frac{1}{2}\times 8\times\overline{DH} = 20$$

$$\therefore \overline{DH} = 5$$

직각삼각형 DCH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{DH}^2 - \overline{DC}^2}$$
$$= \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 8\times 3 = 12$$

답 12

19

전략 평면 ABCD와 점 M에 대하여 삼수선의 정리를 이용한다.

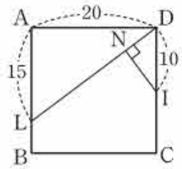
풀이 점 M에서 모서리 CD에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{MI} \perp$ (평면 ABCD), $\overline{MN} \perp \overline{LD}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{NI} \perp \overline{LD}$

오른쪽 그림에서



$\triangle NDI \backsim \triangle ALD$이고

$$\overline{AL} = \frac{3}{4}\overline{AB} = 15,$$

$$\overline{DI} = \frac{1}{2}\overline{CD} = 10,$$

$$\overline{LD} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AL}^2}$$
$$= \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$$

이므로 $\overline{NI} : \overline{AD} = \overline{DI} : \overline{LD}$에서

$$\overline{NI} = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{DI}}{\overline{LD}} = \frac{20\cdot 10}{25} = 8$$

이때 삼각형 MIN은 직각삼각형이므로

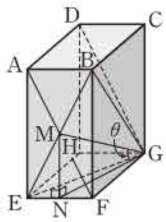
$$\overline{MN} = \sqrt{\overline{MI}^2 + \overline{NI}^2}$$
$$= \sqrt{20^2 + 8^2} = 4\sqrt{29}$$

답 ④

20

전략 보조선을 그어 교선 l의 일부를 한 변으로 하는 직각삼각형을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 선분 AF와 선분 BE의 교점을 M이라 하면 평면 AFGD와 평면 BEG의 교선 l은 직선 GM이다.



점 M에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 N이라 하면

$\angle MGN = \theta$

△BEF에서 $\overline{BE}$, $\overline{EF}$의 중점이 각각 M, N이므로

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BF} = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

△NFG에서

$$\overline{GN} = \sqrt{\overline{NF}^2 + \overline{GF}^2}$$
$$= \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

△MNG에서

$$\overline{GM} = \sqrt{\overline{GN}^2 + \overline{MN}^2}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{10})^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

따라서 $\cos\theta = \frac{\overline{GN}}{\overline{GM}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$이므로

$$\cos^2\theta = \frac{5}{7}$$

답 ⑤

21 (전략) 원뿔의 밑면을 포함한 평면과 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라 하고 $\cos\theta$의 값을 구한다.

(풀이) 원뿔의 모선의 길이는

$$\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$$

원뿔의 밑면을 포함한 평면과 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{1}{3}$$

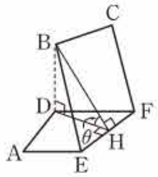
따라서 원뿔의 밑면의 넓이를 S, 원뿔의 밑면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$$S'=S\cos\theta=\pi\cdot\frac{1}{3}=\frac{\pi}{3}$$

답 ⑤

22 (전략) 점 B에서 선분 EF에 수선의 발을 내린 다음 삼수선의 정리를 이용한다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{BD}\perp$(평면 AEFD),

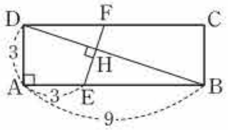
$\overline{BH}\perp\overline{EF}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{DH}\perp\overline{EF}$

$\therefore \angle BHD=\theta$

또 오른쪽 그림에서



$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{DA}^2}=\sqrt{9^2+3^2}=3\sqrt{10}$$

이고

$\triangle BDA \backsim \triangle BEH$

이므로

$\overline{BD}:\overline{BE}=\overline{BA}:\overline{BH}$

$3\sqrt{10}:6=9:\overline{BH}$

$$\therefore \overline{BH}=\frac{6\cdot 9}{3\sqrt{10}}=\frac{9\sqrt{10}}{5}$$

따라서 $\overline{DH}=3\sqrt{10}-\frac{9\sqrt{10}}{5}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{DH}}{\overline{BH}}=\frac{\frac{6\sqrt{10}}{5}}{\frac{9\sqrt{10}}{5}}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore 60\cos\theta=60\cdot\frac{2}{3}=40$$

답 40

Ⅲ. 공간도형

07 공간좌표

유제

본책 191~217쪽

057-❶ 점 P$(-8,\ 3,\ 2)$와 xy평면에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는

Q$(-8,\ 3,\ -2)$

점 Q$(-8,\ 3,\ -2)$와 y축에 대하여 대칭인 점 R의 좌표는

R$(8,\ 3,\ 2)$

답 R$(8,\ 3,\ 2)$

057-❷ 점 P$(5,\ -1,\ 4)$와 원점에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는

Q$(-5,\ 1,\ -4)$

점 Q$(-5,\ 1,\ -4)$에서 xy평면에 내린 수선의 발인 점 R의 좌표는

R$(-5,\ 1,\ 0)$

따라서 $a=-5$, $b=1$, $c=0$이므로

$a+b+c=-4$

답 -4

057-❸ 점 C는 점 B에서 yz평면에 내린 수선의 발이므로

C$(0,\ 7,\ a)$

점 C와 x축에 대하여 대칭인 점의 좌표는

$(0,\ -7,\ -a)$

즉 $-7=b$, $-a=-4$이므로

$a=4$, $b=-7$

$\therefore b-a=-11$

답 -11

058-❶ 점 P가 z축 위에 있으므로 P$(0,\ 0,\ c)$라 하자. $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(-4)^2+(-1)^2+(c-3)^2$

$=(-2)^2+3^2+(c-1)^2$

$4c=12 \qquad \therefore c=3$

$\therefore$ P$(0,\ 0,\ 3)$

답 P$(0,\ 0,\ 3)$

058-❷ $\overline{OP}=\overline{AP}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{AP}^2$이므로

$a^2+b^2=(a+6)^2+(b-4)^2+(-2)^2$

$\therefore 3a-2b=-14 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 $\overline{OP}=\overline{BP}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$a^2+b^2=(a+1)^2+(b-3)^2+2^2$

$\therefore a-3b=-7 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-4,\ b=1$

$\therefore a-b=-5$ 답 -5

059-❶ $\overline{AB}=\sqrt{(1-6)^2+(2+1)^2+(-2-2)^2}$
$=5\sqrt{2}$

두 점 A, B의 yz평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면

$A'(0,\ -1,\ 2),\ B'(0,\ 2,\ -2)$

$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{(2+1)^2+(-2-2)^2}=5$

직선 AB와 yz평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$

이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta=45°$ 답 $45°$

059-❷ $\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(a-1)^2+(2-5)^2}$
$=\sqrt{a^2-2a+26}$

두 점 A, B의 zx평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면

$A'(2,\ 0,\ 5),\ B'(-2,\ 0,\ 2)$

$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{(-2-2)^2+(2-5)^2}=5$

이때 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos 45°$이므로

$5=\sqrt{a^2-2a+26}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

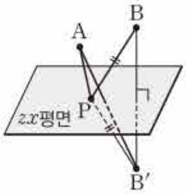
$5\sqrt{2}=\sqrt{a^2-2a+26}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-2a-24=0,\qquad (a+4)(a-6)=0$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$ 답 6

060-❶ 두 점 A, B의 y좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 zx평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.



이때 점 B$(-1,\ 2,\ 6)$과 zx평면에 대하여 대칭인 점을 B′이라 하면

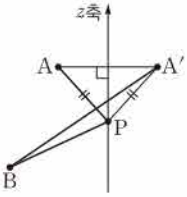
$B'(-1,\ -2,\ 6)$

$\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$
$\geq\overline{AB'}$
$=\sqrt{(-1-5)^2+(-2-1)^2+(6-4)^2}$
$=7$

따라서 구하는 최솟값은 7이다. 답 7

060-❷ 두 점 A, B의 x좌표가 0이고 y좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 yz평면 위에 있고 z축을 기준으로 같은 쪽에 있다.



이때 점 A$(0,\ -2,\ 5)$와 z축에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면 $\quad A'(0,\ 2,\ 5)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$
$\geq\overline{A'B}$
$=\sqrt{(-4-2)^2+(-3-5)^2}$
$=10$

따라서 구하는 최솟값은 10이다. 답 10

061-❶ $\overline{AB}$를 $1:3$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot3+3\cdot(-1)}{1+3},\ \dfrac{1\cdot(-6)+3\cdot2}{1+3},\ \dfrac{1\cdot0+3\cdot(-4)}{1+3}\right)$

$\therefore P(0,\ 0,\ -3)$

또 $\overline{AB}$를 $1:3$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot3-3\cdot(-1)}{1-3},\ \dfrac{1\cdot(-6)-3\cdot2}{1-3},\ \dfrac{1\cdot0-3\cdot(-4)}{1-3}\right)$

$\therefore Q(-3,\ 6,\ -6)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-3)^2+6^2+(-6+3)^2}$
$=3\sqrt{6}$ 답 $3\sqrt{6}$

061-❷ 점 A에 대하여 점 P와 대칭인 점을 P′이라 하면 점 A는 $\overline{PP'}$의 중점이다.

점 P′의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 $\overline{PP'}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+a}{2},\ \dfrac{2+b}{2},\ \dfrac{1+c}{2}\right)$

이 점이 점 A$(3,\ -6,\ -2)$와 일치하므로

$\dfrac{-2+a}{2}=3,\ \dfrac{2+b}{2}=-6,\ \dfrac{1+c}{2}=-2$

$\therefore a=8,\ b=-14,\ c=-5$

$\therefore P'(8,\ -14,\ -5)$ 답 $(8,\ -14,\ -5)$

061-❸ $\overline{AB}$를 $m:1$로 내분하는 점이 xy평면 위에 있으므로 내분점의 z좌표는 0이다.

즉 $\dfrac{m\cdot(-6)+1\cdot6}{m+1}=0$이므로

$-6m+6=0\qquad \therefore m=1$ 답 1

062-❶ $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{0+4}{2},\ \dfrac{3+(-5)}{2},\ \dfrac{1+5}{2}\right)$, 즉 $(2,\ -1,\ 3)$

07 공간좌표

점 D의 좌표를 (a, b, c)라 하면 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5+a}{2}, \frac{-4+b}{2}, \frac{4+c}{2}\right)$$

이때 사각형 ABCD가 평행사변형이므로 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 일치한다. 즉

$$2=\frac{5+a}{2}, \ -1=\frac{-4+b}{2}, \ 3=\frac{4+c}{2}$$

$\therefore a=-1, b=2, c=2$

$\therefore \mathrm{D}(-1, 2, 2)$ 답 $\mathrm{D}(-1, 2, 2)$

062-❷ $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-1}{2}, \frac{-5+6}{2}, \frac{-3+2}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$\overline{\mathrm{BD}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{b+2}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{2-3}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{b+2}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

이때 사각형 ABCD가 마름모이므로 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 일치한다. 즉

$$\frac{a-1}{2}=\frac{b+2}{2}$$

$\therefore b=a-3$ ...... ㉠

또 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$에서

$$\sqrt{(2-a)^2+(2+5)^2+(-3+3)^2}$$
$$=\sqrt{(2+1)^2+(2-6)^2+(-3-2)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-4a+3=0, \quad (a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=3 \ (\because a>2)$

이를 ㉠에 대입하면

$b=0$

$\therefore a+b=3$ 답 3

063-❶ 점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하면 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-1)+a}{3}, \frac{1+0+b}{3}, \frac{1+4+c}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+1}{3}, \frac{b+1}{3}, \frac{c+5}{3}\right)$$

이 점이 점 $(1, 3, 2)$와 일치하므로

$$\frac{a+1}{3}=1, \ \frac{b+1}{3}=3, \ \frac{c+5}{3}=2$$

$\therefore a=2, b=8, c=1$

$\therefore \mathrm{C}(2, 8, 1)$ 답 $\mathrm{C}(2, 8, 1)$

063-❷ 점 A의 좌표를 (a, b, c)라 하면 $\overline{\mathrm{AM}}$을 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot2+1\cdot a}{2+1}, \frac{2\cdot4+1\cdot b}{2+1}, \frac{2\cdot3+1\cdot c}{2+1}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+4}{3}, \frac{b+8}{3}, \frac{c+6}{3}\right)$$

이 점이 점 $\mathrm{G}(2, 3, 3)$과 일치하므로

$$\frac{a+4}{3}=2, \ \frac{b+8}{3}=3, \ \frac{c+6}{3}=3$$

$\therefore a=2, b=1, c=3$

$\therefore \mathrm{A}(2, 1, 3)$ 답 $\mathrm{A}(2, 1, 3)$

다른 풀이 $\mathrm{A}(x, y, z)$, $\mathrm{B}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{C}(x_2, y_2, z_2)$라 하면 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

이 점이 점 $\mathrm{M}(2, 4, 3)$과 일치하므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=2, \ \frac{y_1+y_2}{2}=4, \ \frac{z_1+z_2}{2}=3$$

$\therefore x_1+x_2=4, \ y_1+y_2=8, \ z_1+z_2=6$

또 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x+x_1+x_2}{3}, \frac{y+y_1+y_2}{3}, \frac{z+z_1+z_2}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{x+4}{3}, \frac{y+8}{3}, \frac{z+6}{3}\right)$$

이 점이 점 $\mathrm{G}(2, 3, 3)$과 일치하므로

$$\frac{x+4}{3}=2, \ \frac{y+8}{3}=3, \ \frac{z+6}{3}=3$$

$\therefore x=2, y=1, z=3$

$\therefore \mathrm{A}(2, 1, 3)$

064-❶ 구의 중심을 C라 하면 점 C는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이므로

$$\mathrm{C}\left(\frac{5+3}{2}, \frac{-2+2}{2}, \frac{1+(-5)}{2}\right)$$

$\therefore \mathrm{C}(4, 0, -2)$

또 구의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(3-5)^2+(2+2)^2+(-5-1)^2}$$
$$=\sqrt{14}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-4)^2+y^2+(z+2)^2=14$

답 $(x-4)^2+y^2+(z+2)^2=14$

다른 풀이 구의 중심이 $\mathrm{C}(4, 0, -2)$이므로 구의 반지름의 길이는

$$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(5-4)^2+(-2)^2+(1+2)^2}=\sqrt{14}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-4)^2+y^2+(z+2)^2=14$

065-❶ 구가 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하고 점 $(1,\ -5,\ 4)$를 지나므로 반지름의 길이를 r라 하면 구의 중심의 좌표는

$$(r,\ -r,\ r)$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-r)^2+(y+r)^2+(z-r)^2=r^2$$

이 구가 점 $(1,\ -5,\ 4)$를 지나므로

$$(1-r)^2+(-5+r)^2+(4-r)^2=r^2$$

$$r^2-10r+21=0, \qquad (r-3)(r-7)=0$$

$$\therefore r=3 \text{ 또는 } r=7$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9,$$
$$(x-7)^2+(y+7)^2+(z-7)^2=49$$

답 풀이 참조

065-❷ 중심의 좌표가 $(k,\ 3,\ 2)$이고 y축에 접하는 구의 방정식은

$$(x-k)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=k^2+4$$

이때 구의 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로

$$k^2+4=20, \qquad k^2=16$$

$$\therefore k=4\ (\because k>0)$$

답 4

066-❶ 중심의 좌표가 $(2,\ 0,\ -3)$이고 반지름의 길이가 4인 구의 방정식은

$$(x-2)^2+y^2+(z+3)^2=16$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2-4x+6z-3=0$$

이 방정식이 $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$과 일치하므로

$$a=-4,\ b=0,\ c=6,\ d=-3$$

답 $a=-4,\ b=0,\ c=6,\ d=-3$

066-❷ 방정식 $x^2+y^2+z^2-2x-8y+4z-k=0$을 변형하면

$$(x-1)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=k+21$$

따라서 주어진 방정식이 구를 나타내려면

$$k+21>0$$

이어야 하므로 $\qquad k>-21$

답 $k>-21$

067-❶ 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:2$에서 $2\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$, 즉 $4\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$$4\{x^2+(y-2)^2+(z+2)^2\}$$
$$=x^2+(y+1)^2+(z-1)^2$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2-6y+6z+10=0$$

따라서 $a=0,\ b=-6,\ c=6,\ d=10$이므로

$$a+b+c+d=10$$

답 10

067-❷ 점 A의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 점 A는 구 $x^2+y^2+z^2=64$ 위에 있으므로

$$a^2+b^2+c^2=64 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$$x=\frac{a-4}{2},\ y=\frac{b}{2},\ z=\frac{c+6}{2}$$

$$\therefore a=2x+4,\ b=2y,\ c=2z-6$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$(2x+4)^2+(2y)^2+(2z-6)^2=64$$

$$\therefore (x+2)^2+y^2+(z-3)^2=16$$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이 나타내는 도형은 반지름의 길이가 4인 구이므로 구하는 부피는

$$\frac{4}{3}\pi\cdot 4^3=\frac{256}{3}\pi$$

답 $\frac{256}{3}\pi$

068-❶ $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+3-k=0$에서

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=k+11$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(1,\ 2,\ 3)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{k+11}$이다.

또 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-11=0$에서

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(1,\ -2,\ 0)$, 반지름의 길이는 4이다.

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(1-1)^2+(-2-2)^2+(-3)^2}=5$$

이때 두 구가 내접하므로

$$|\sqrt{k+11}-4|=5$$

$$\therefore \sqrt{k+11}-4=\pm 5$$

그런데 $\sqrt{k+11}>0$이므로

$$\sqrt{k+11}=9$$

양변을 제곱하면 $\qquad k+11=81$

$$\therefore k=70$$

답 70

068-❷ $x^2+y^2+z^2-4x-2z-11=0$에서

$$(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=16$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(2,\ 0,\ 1)$, 반지름의 길이는 4이다.

또 $x^2+y^2+z^2-2x+2ky+k^2-8=0$에서

$$(x-1)^2+(y+k)^2+z^2=9$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(1,\ -k,\ 0)$, 반지름의 길이는 3이다.

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(1-2)^2+(-k)^2+(-1)^2}=\sqrt{k^2+2}$$

이때 두 구가 서로 만나려면

$$4-3\le\sqrt{k^2+2}\le4+3,\qquad 1\le\sqrt{k^2+2}\le7$$

$$1\le k^2+2\le49$$

$$\therefore -1\le k^2\le47$$

그런데 실수 k에 대하여 $k^2\ge0$이므로 $\quad 0\le k^2\le47$

$$\therefore -\sqrt{47}\le k\le\sqrt{47}$$

답 $-\sqrt{47}\le k\le\sqrt{47}$

069-❶ 주어진 구의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$$(x+1)^2+(-2)^2+(z+3)^2=20$$

$$\therefore (x+1)^2+(z+3)^2=16$$

따라서 주어진 구를 zx평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 4인 원이므로 구하는 단면의 넓이는

$$\pi\cdot4^2=16\pi$$

답 16π

069-❷ 구의 중심의 좌표를 (a, b, c)라 하면 구의 반지름의 길이가 5이므로 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=25$$

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 구의 방정식에 $z=0$을 대입하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(-c)^2=25$$

$$\therefore (x-a)^2+(y-b)^2=25-c^2$$

이 방정식이 $(x-2)^2+(y-3)^2=10$과 일치하므로

$$a=2,\ b=3,\ 25-c^2=10$$

$$\therefore a=2,\ b=3,\ c=\pm\sqrt{15}$$

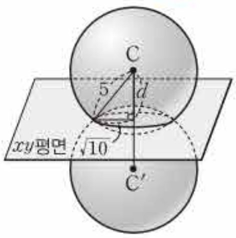
따라서 두 구의 중심의 좌표가 각각

$$(2, 3, \sqrt{15}),\ (2, 3, -\sqrt{15})$$

이므로 두 구의 중심 사이의 거리는 $2\sqrt{15}$이다.

답 $2\sqrt{15}$

다른 풀이 두 구의 중심을 각각 C, C′이라 하고, 점 C에서 xy평면까지의 거리를 d라 하면 오른쪽 그림에서



$$d=\sqrt{5^2-(\sqrt{10})^2}$$

$$=\sqrt{15}$$

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

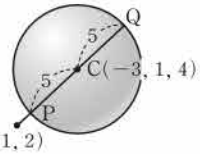
$$\overline{CC'}=2d=2\sqrt{15}$$

070-❶ $x^2+y^2+z^2+6x-2y-8z+1=0$에서

$$(x+3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=25$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(-3, 1, 4)$, 반지름의 길이는 5이다.

다음 그림과 같이 구의 중심을 C, 직선 AC가 구와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면



$$\overline{AC}=\sqrt{(-3-2)^2+(1-1)^2+(4-2)^2}$$

$$=\sqrt{29}$$

따라서 선분의 길이의 최댓값은

$$\overline{AQ}=\overline{AC}+\overline{CQ}=\sqrt{29}+5$$

선분의 길이의 최솟값은

$$\overline{AP}=\overline{AC}-\overline{CP}=\sqrt{29}-5$$

이므로 구하는 곱은

$$(\sqrt{29}+5)(\sqrt{29}-5)=29-25$$

$$=4$$

답 4

중단원 연습 문제

본책 218~222쪽

01 A$(-5, 8, -3)$ **02** ③ **03** 14
04 C$(-4, 5, -3)$, D$(-6, 7, -1)$ **05** ①
06 ③ **07** ④ **08** 160π **09** 13π
10 $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=22$
11 ⑤ **12** C$\left(0, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$, C$(0, 1, 2)$
13 $\frac{\sqrt{70}}{10}$ **14** 48 **15** -2 **16** $2\sqrt{3}\pi$ **17** ③
18 $2\sqrt{2}$ **19** 124 **20** 13 **21** ② **22** 350
23 13 **24** ②

01 **전략** 점 (a, b, c)와 yz평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-a, b, c)$, x축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(a, -b, -c)$임을 이용한다.

풀이 점 A의 좌표를 (a, b, c)라 하면 점 A와 yz평면에 대하여 대칭인 점 B의 좌표는

$$B(-a, b, c)$$

점 B와 x축에 대하여 대칭인 점 C의 좌표는

$$C(-a, -b, -c)$$

따라서 $-a=5$, $-b=-8$, $-c=3$이므로

$$a=-5,\ b=8,\ c=-3$$

$$\therefore A(-5, 8, -3)$$

답 A$(-5, 8, -3)$

02 (전략) 두 점 A, B의 xy평면 위로의 정사영을 이용한다.

(풀이) $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-6)^2+(-2-2)^2+(-7+3)^2}=6$

두 점 A, B의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면 $\mathrm{A}'(6, 2, 0)$, $\mathrm{B}'(4, -2, 0)$

$\therefore \overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(4-6)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}$

이때 $\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

답 ③

03 (전략) 점 A와 yz평면에 대하여 대칭인 점 A′에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$임을 이용한다.

(풀이) 두 점 A, B의 x좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 yz평면을 기준으로 같은 쪽에 있다. ··· ❶

이때 점 $\mathrm{A}(-3, 6, 4)$의 yz평면에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면 $\mathrm{A}'(3, 6, 4)$ ··· ❷

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}&=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\\&\geq\overline{\mathrm{A'B}}\\&=\sqrt{(-1-3)^2+(a-6)^2+(3-4)^2}\\&=\sqrt{a^2-12a+53}\end{aligned}$$ ··· ❸

즉 $\sqrt{a^2-12a+53}=9$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-12a-28=0$, $(a+2)(a-14)=0$

$\therefore a=14\ (\because a>0)$ ··· ❹

답 14

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B가 yz평면을 기준으로 같은 쪽에 있음을 알 수 있다.	10 %
❷ 점 A와 yz평면에 대하여 대칭인 점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❹ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

04 (전략) 평행사변형의 두 대각선의 교점은 각 대각선의 중점임을 이용한다.

(풀이) 점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{-1+b}{2}, \frac{3+c}{2}\right)$$

이 점이 점 $\mathrm{M}(-1, 2, 0)$과 일치하므로

$$\frac{2+a}{2}=-1,\ \frac{-1+b}{2}=2,\ \frac{3+c}{2}=0$$

$\therefore a=-4, b=5, c=-3$

$\therefore \mathrm{C}(-4, 5, -3)$

또 점 D의 좌표를 (a', b', c')이라 하면 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+a'}{2}, \frac{-3+b'}{2}, \frac{1+c'}{2}\right)$$

이 점이 점 $\mathrm{M}(-1, 2, 0)$과 일치하므로

$$\frac{4+a'}{2}=-1,\ \frac{-3+b'}{2}=2,\ \frac{1+c'}{2}=0$$

$\therefore a'=-6, b'=7, c'=-1$

$\therefore \mathrm{D}(-6, 7, -1)$

답 $\mathrm{C}(-4, 5, -3)$, $\mathrm{D}(-6, 7, -1)$

05 (전략) 먼저 내분점의 좌표를 구하는 공식을 이용하여 두 점 P, Q의 좌표를 구한다.

(풀이) $\overline{\mathrm{BC}}$를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{2\cdot0+1\cdot0}{2+1}, \frac{2\cdot0+1\cdot3}{2+1}, \frac{2\cdot3+1\cdot0}{2+1}\right)$$

$\therefore \mathrm{P}(0, 1, 2)$

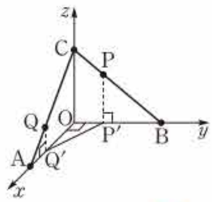
$\overline{\mathrm{AC}}$를 $1:2$로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1\cdot0+2\cdot3}{1+2}, \frac{1\cdot0+2\cdot0}{1+2}, \frac{1\cdot3+2\cdot0}{1+2}\right)$$

$\therefore \mathrm{Q}(2, 0, 1)$

따라서 $\mathrm{P}'(0, 1, 0)$, $\mathrm{Q}'(2, 0, 0)$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=1$$



답 ①

06 (전략) 세 점 A, B, C의 좌표를 구한 후 삼각형의 무게중심의 좌표를 구하는 공식에 대입한다.

(풀이) $\mathrm{P}(1, 5, -2)$에서

$\mathrm{A}(1, 5, 2)$, $\mathrm{B}(-1, 5, -2)$, $\mathrm{C}(1, -5, -2)$

이때 △ABC의 무게중심이 $\mathrm{G}(a, b, c)$이므로

$$a=\frac{1+(-1)+1}{3}=\frac{1}{3},$$

$$b=\frac{5+5+(-5)}{3}=\frac{5}{3},$$

$$c=\frac{2+(-2)+(-2)}{3}=-\frac{2}{3}$$

$\therefore a+b+c=\frac{4}{3}$

답 ③

07 (전략) 구가 zx평면에 접하면 (반지름의 길이)$=|$(중심의 y좌표)$|$임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2+6x+12y-4z-k+39=0$을 변형하면

$(x+3)^2+(y+6)^2+(z-2)^2=k+10$

이때 주어진 구가 zx평면에 접하려면

$\sqrt{k+10}=|-6|$

이어야 하므로 $k+10=36$

$\therefore k=26$

답 ④

08

전략 점 P의 좌표를 (x, y, z)로 놓고 주어진 조건을 만족시키도록 식을 세운다.

풀이 점 P의 좌표를 (x, y, z)라 하면

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$에서 $2\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로 ··· ❶

$4\{x^2+y^2+(z+3)^2\}=x^2+(y-9)^2+z^2$

$x^2+y^2+z^2+6y+8z-15=0$

$\therefore x^2+(y+3)^2+(z+4)^2=40$ ··· ❷

따라서 점 P의 자취가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{40}=2\sqrt{10}$인 구이므로 구하는 겉넓이는

$4\pi\cdot(2\sqrt{10})^2=160\pi$ ··· ❸

답 160π

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}$와 $\overline{BP}$ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	20 %
❷ 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 겉넓이를 구할 수 있다.	40 %

09

전략 구와 yz평면의 교선의 방정식은 구의 방정식에 $x=0$을 대입하여 구한다.

풀이 구의 중심을 C라 하면 점 C는 $\overline{AB}$의 중점이므로 $C\left(\frac{1+3}{2}, \frac{4+4}{2}, \frac{2+(-6)}{2}\right)$

$\therefore C(2, 4, -2)$

또 구의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2+(4-4)^2+(-6-2)^2}$

$=\sqrt{17}$

이므로 주어진 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=17$ ··· ❶

위의 방정식에 $x=0$을 대입하면

$(-2)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=17$

$\therefore (y-4)^2+(z+2)^2=13$ ··· ❷

따라서 주어진 구와 yz평면이 만나서 생기는 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$인 원이므로 구하는 단면의 넓이는 $\pi\cdot(\sqrt{13})^2=13\pi$ ··· ❸

답 13π

채점 기준	비율
❶ 구의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 구와 yz평면이 만나서 생기는 도형의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 단면의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

10

전략 구와 xy평면의 교선의 방정식은 구의 방정식에 $z=0$을 대입하여 구한다.

풀이 구의 중심의 좌표를 (a, b, c), 반지름의 길이를 r라 하면 구하는 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ······ ㉠

㉠에 $z=0$을 대입하면

$(x-a)^2+(y-b)^2+(-c)^2=r^2$

$\therefore (x-a)^2+(y-b)^2=r^2-c^2$

이 방정식이 $(x+3)^2+(y-2)^2=13$과 일치하므로

$-a=3,\ -b=-2,\ r^2-c^2=13$

$\therefore a=-3,\ b=2,\ r^2=c^2+13$

이것을 ㉠에 대입하면

$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-c)^2=c^2+13$

이 구가 점 $(0, -1, 1)$을 지나므로

$3^2+(-3)^2+(1-c)^2=c^2+13$

$-2c+19=13,\qquad -2c=-6$

$\therefore c=3$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=22$

답 $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=22$

11

전략 y축 위의 점은 x좌표와 z좌표가 모두 0임을 이용한다.

풀이 y축 위의 점은 x좌표, z좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$, $z=0$을 대입하면

$y^2-2y-24=0,\qquad (y+4)(y-6)=0$

$\therefore y=-4$ 또는 $y=6$

따라서 주어진 구와 y축의 두 교점 A, B의 좌표는

$(0, -4, 0),\ (0, 6, 0)$

$\therefore \overline{AB}=|6-(-4)|=10$

답 ⑤

Remark▶ 구와 좌표축의 교점의 좌표

구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$과 좌표축의 교점의 좌표는 다음과 같이 구한다.

① x축: 구의 방정식에 $y=0$, $z=0$을 대입한 후 x에 대한 이차방정식을 푼다.

② y축: 구의 방정식에 $x=0$, $z=0$을 대입한 후 y에 대한 이차방정식을 푼다.

③ z축: 구의 방정식에 $x=0$, $y=0$을 대입한 후 z에 대한 이차방정식을 푼다.

12 (전략) yz평면 위의 점 C에 대하여
$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이어야 함을 이용한다.

(풀이) 점 C가 yz평면 위에 있으므로 $C(0,\ b,\ c)$라 하자.

이때 △ABC가 정삼각형이려면

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA},\ 즉\ \overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$$

이어야 하므로 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서

$$(2-1)^2+(-2)^2+1^2=(-2)^2+b^2+(c-1)^2$$

$$\therefore\ b^2+c^2-2c-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$에서

$$(-2)^2+b^2+(c-1)^2=1^2+(2-b)^2+(-c)^2$$

$$\therefore\ c=2b \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$5b^2-4b-1=0, \qquad (5b+1)(b-1)=0$$

$$\therefore\ b=-\frac{1}{5}\ 또는\ b=1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$b=-\frac{1}{5}일\ 때\ c=-\frac{2}{5},$$

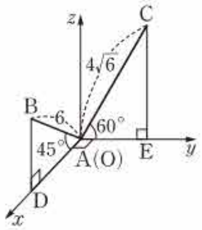
$$b=1일\ 때\ c=2$$

$$\therefore\ C\left(0,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5}\right),\ C(0,\ 1,\ 2)$$

답 $C\left(0,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5}\right),\ C(0,\ 1,\ 2)$

13 (전략) 주어진 조건을 좌표공간에 놓고 각 점의 좌표를 구한다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 점 A를 원점으로 하고, 선분 AD, AE가 각각 x축, y축의 양의 방향과 일치하도록 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$를 좌표공간에 놓자. ··· ❶



△ABD에서

$$\overline{AD}=\overline{AB}\cos 45°$$
$$=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=3\sqrt{2}$$

$$\overline{BD}=\overline{AB}\sin 45°=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

$$\therefore\ B(3\sqrt{2},\ 0,\ 3\sqrt{2}),\ D(3\sqrt{2},\ 0,\ 0) \qquad ···\ ❷$$

△CAE에서

$$\overline{AE}=\overline{AC}\cos 60°=4\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{6}$$

$$\overline{CE}=\overline{AC}\sin 60°=4\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{2}$$

$$\therefore\ C(0,\ 2\sqrt{6},\ 6\sqrt{2}),\ E(0,\ 2\sqrt{6},\ 0) \qquad ···\ ❸$$

한편 $\overline{BC}$의 평면 α 위로의 정사영은 $\overline{DE}$이고

$$\overline{BC}=\sqrt{(-3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{6})^2+(6\sqrt{2}-3\sqrt{2})^2}$$
$$=2\sqrt{15}$$

$$\overline{DE}=\sqrt{(-3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{6})^2}$$
$$=\sqrt{42}$$

이므로 $\overline{DE}=\overline{BC}\cos\theta$에서

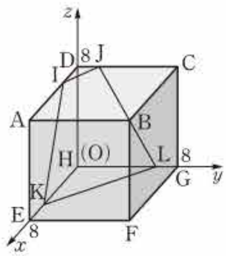
$$\cos\theta=\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{42}}{2\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{70}}{10} \qquad ···\ ❹$$

답 $\frac{\sqrt{70}}{10}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 좌표공간에 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 두 점 B, D의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ 두 점 C, E의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❹ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %

14 (전략) 점 H를 원점으로 하는 좌표공간을 설정하여 각 점의 좌표를 구한다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 점 H를 원점으로 하고, 세 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓자.



$A(8,\ 0,\ 8)$, $C(0,\ 8,\ 8)$, $D(0,\ 0,\ 8)$이므로

$$I(2,\ 0,\ 8),\ J(0,\ 2,\ 8)$$

또 $E(8,\ 0,\ 0)$, $G(0,\ 8,\ 0)$, $H(0,\ 0,\ 0)$이므로

$$K(6,\ 0,\ 0),\ L(0,\ 6,\ 0)$$

이때 두 선분 IJ, KL의 중점을 각각 M, N이라 하면
$\overline{IJ}\perp\overline{MN}$, $\overline{KL}\perp\overline{MN}$이고

$$M(1,\ 1,\ 8),\ N(3,\ 3,\ 0)$$

따라서 □IKLJ에서

$$\overline{IJ}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

$$\overline{KL}=\sqrt{(-6)^2+6^2}=6\sqrt{2}$$

$$\overline{MN}=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2+(-8)^2}$$
$$=6\sqrt{2}$$

이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2}+6\sqrt{2})\cdot 6\sqrt{2}=48$$

답 48

15 (전략) 구가 xy평면에 접하면
(반지름의 길이)$=|$(중심의 z좌표)$|$임을 이용한다.

풀이 주어진 구의 방정식에서

$x^2+y^2+z^2-4x+4y-az-b=0$ …… ㉠

$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+b+8$

따라서 이 구의 중심의 좌표는 $\left(2,\ -2,\ \frac{a}{2}\right)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{a^2}{4}+b+8}$ 이다. ⋯ ❶

이 구가 xy평면에 접하므로

$\left|\frac{a}{2}\right|=\sqrt{\frac{a^2}{4}+b+8}$

양변을 제곱하면

$\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+b+8 \qquad \therefore b=-8$ ⋯ ❷

또 점 $(5,\ -2,\ 3)$이 구 위의 점이므로 이 점을 ㉠에 대입하면

$25+4+9-20-8-3a+8=0$

$3a=18 \qquad \therefore a=6$ ⋯ ❸

$\therefore a+b=-2$ ⋯ ❹

답 -2

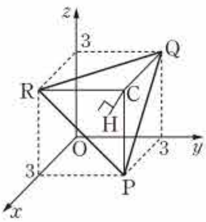
채점 기준	비율
❶ 구의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

16 **전략** 점 C에서 평면 PQR에 내린 수선의 발이 △PQR의 무게중심임을 이용하여 원뿔의 높이를 구한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2-6x-6y-6z+18=0$에서

$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$

이므로



$C(3,\ 3,\ 3)$,

$P(3,\ 3,\ 0)$,

$Q(0,\ 3,\ 3)$,

$R(3,\ 0,\ 3)$

점 C에서 평면 PQR에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 정삼각형 PQR의 무게중심이므로

$H\left(\frac{3+0+3}{3},\ \frac{3+3+0}{3},\ \frac{0+3+3}{3}\right)$

$\therefore H(2,\ 2,\ 2)$

또 점 H는 원뿔의 밑면인 원의 중심이므로 밑면의 반지름의 길이는

$\overline{HP}=\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{6}$

원뿔의 높이는

$\overline{CH}=\sqrt{(2-3)^2+(2-3)^2+(2-3)^2}$

$=\sqrt{3}$

따라서 구하는 원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\pi\cdot(\sqrt{6})^2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi$

답 $2\sqrt{3}\pi$

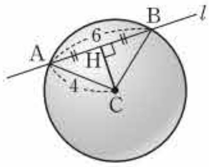
17 **전략** 구의 중심 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{CH}$의 길이를 구한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2+4x-6y-2z-2=0$에서

$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=16$

이므로 이 구의 반지름의 길이는 4이다.

구의 중심을 C, 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{AH}^2}$

$=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

따라서 구의 중심과 직선 l 사이의 거리는 $\sqrt{7}$이다.

답 ③

18 **전략** 점 A에서 xy평면에 수선의 발을 내린 후 거리의 최솟값을 구한다.

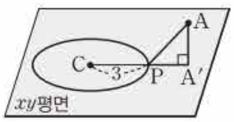
풀이 주어진 구의 방정식에 $z=0$을 대입하면

$x^2+y^2+4x+2y-4=0$

$\therefore (x+2)^2+(y+1)^2=9$

따라서 주어진 구와 xy평면의 교선은 중심의 좌표가 $(-2,\ -1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다. ⋯ ❶

오른쪽 그림과 같이 이 원의 중심을 C, 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 A′, $\overline{CA'}$이 원과 만나는 점을 P라 하면 점 A에서 이 원 위의 점까지의 거리의 최솟값은 $\overline{AP}$의 길이와 같다.



$A'(1,\ 3,\ 0)$이므로

$\overline{CA'}=\sqrt{(1+2)^2+(3+1)^2}=5$

$\therefore \overline{PA'}=\overline{CA'}-\overline{CP}=5-3=2$ ⋯ ❷

이때 $\overline{AA'}=2$이므로 직각삼각형 APA′에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{PA'}^2+\overline{AA'}^2}$

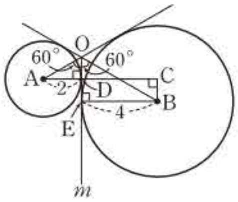
$=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ ⋯ ❸

답 $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 구와 xy평면의 교선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\overline{\mathrm{PA'}}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 A에서 원 위의 점까지의 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

19 전략 먼저 세 반평면과 두 구를 모두 평면 π 위로 정사영시켜 본다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 반평면 α, β, γ와 두 구의 평면 π 위로의 정사영에서 반평면 β의 정사영을 m, 반지름의 길이가 2, 4인 구의 중심의 정사영을 각각 A, B라 하자.



또 직선 l과 평면 π의 교점을 O, 두 점 A, B에서 반직선 m에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=2$, $\overline{\mathrm{BE}}=4$

직각삼각형 OAD에서

$$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{AD}}\tan 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

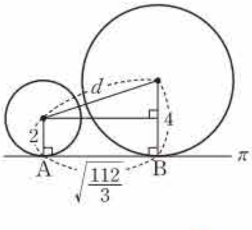
직각삼각형 OEB에서

$$\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{BE}}\tan 30^\circ=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{OE}}-\overline{\mathrm{OD}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이므로 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2}$$
$$=\sqrt{(2+4)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{112}{3}}$$

또 두 구의 반지름의 길이의 차가 2이므로 오른쪽 그림에서



$$d^2=2^2+\left(\sqrt{\frac{112}{3}}\right)^2$$
$$=\frac{124}{3}$$
$$\therefore 3d^2=124$$

답 124

20 전략 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발 H의 좌표를 구한 후 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HP}}^2}$임을 이용한다.

풀이 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면

H$(9,\ 0,\ 0)$

이때 $\overline{\mathrm{AH}}=5$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HP}}^2}=\sqrt{5^2+\overline{\mathrm{HP}}^2}$$

P$(-3,\ 0,\ 0)$일 때 $\overline{\mathrm{HP}}$의 길이가 최대이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}\le\sqrt{5^2+(-3-9)^2}$$
$$=\sqrt{5^2+12^2}=13$$

따라서 구하는 최댓값은 13이다.

답 13

21 전략 xy평면 위의 점은 z좌표가 0임을 이용한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 하면 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{2\cdot2+1\cdot4}{2+1},\ \frac{2\cdot3+1\cdot0}{2+1},\ \frac{2\cdot a+1\cdot2}{2+1}\right)$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{8}{3},\ 2,\ \frac{2a+2}{3}\right)$$

이때 점 P가 xy평면 위에 있으므로

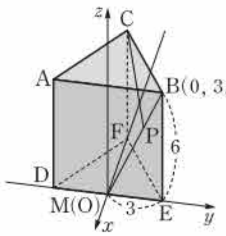
$$\frac{2a+2}{3}=0$$
$$\therefore a=-1$$

답 ②

22 전략 점 M을 원점, $\overline{\mathrm{MF}}$를 x축의 음의 방향, □ADEB를 yz평면 위에 오도록 삼각기둥을 좌표공간에 놓는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 M을 원점, $\overline{\mathrm{MF}}$를 x축의 음의 방향, □ADEB를 yz평면 위에 오도록 삼각기둥을 좌표공간에 놓으면

B$(0,\ 3,\ 6)$



정삼각형 DEF에서

$$\overline{\mathrm{FM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot6=3\sqrt{3}$$

이므로

C$(-3\sqrt{3},\ 0,\ 6)$

이때 점 P는 $\overline{\mathrm{BM}}$을 $1:2$로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{1\cdot0+2\cdot0}{1+2},\ \frac{1\cdot0+2\cdot3}{1+2},\ \frac{1\cdot0+2\cdot6}{1+2}\right)$$
$$\therefore \mathrm{P}(0,\ 2,\ 4)$$

따라서

$$l=\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+2^2+(4-6)^2}=\sqrt{35}$$

이므로

$$10l^2=10\cdot(\sqrt{35})^2=350$$

답 350

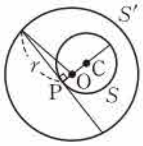
23 전략 두 구의 중심 사이의 거리와 반지름의 길이 사이의 관계를 이용하여 두 구의 위치 관계를 알아본다.

풀이 구 $x^2+y^2+z^2=16$을 S'이라 하고, 두 구 S, S'의 중심을 각각 C, O라 하면 구 S는 중심이 C$(1, 1, 1)$, 반지름의 길이가 2이고, 구 S'은 중심이 O$(0, 0, 0)$, 반지름의 길이가 4이다.

이때 $\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{3}$이고, $\sqrt{3}<4-2$이므로 구 S가 구 S'의 내부에 있다.

구 S에 접하는 평면이 구 S'과 만나서 생기는 도형의 넓이가 최대가 되려면 구 S'의 중심 O와 평면 사이의 거리가 최소이어야 한다.

즉 오른쪽 그림과 같이 점 P가 직선 OC 위에 있을 때 점 O와 평면 사이의 거리가 최소이므로 그 최솟값은



$$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{PC}}-\overline{\mathrm{OC}}=2-\sqrt{3}$$

구 S에 접하는 평면이 구 S'과 만나서 생기는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 r^2의 최댓값은

$$r^2=4^2-\overline{\mathrm{OP}}^2=16-(2-\sqrt{3})^2=9+4\sqrt{3}$$

따라서 원의 넓이의 최댓값은 $(9+4\sqrt{3})\pi$이므로

$$a=9,\ b=4$$

$$\therefore a+b=13$$

답 13

Remark▶

두 구 O, O'의 반지름의 길이를 각각 r, r', 중심 사이의 거리를 d라 할 때

① $|r-r'|<d<r+r'$ ➡ 만나서 교선이 생긴다.

② $d=r+r'$ 또는 $d=|r-r'|$ ➡ 한 점에서 만난다.

③ $d>r+r'$ 또는 $d<|r-r'|$ ➡ 만나지 않는다.

24

전략 구의 중심의 좌표를 (a, b, c)라 하고, 반지름의 길이를 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 구 S의 반지름의 길이를 r, 중심의 좌표를 C(a, b, c) $(a>0,\ b>0,\ c>0)$라 하자.

구 S가 x축과 y축에 접하는 점을 각각 A, B라 하면

$$\mathrm{A}(a, 0, 0),\ \mathrm{B}(0, b, 0)$$

$r=\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$$r^2=b^2+c^2=a^2+c^2$$

$$\therefore a=b\ (\because a>0,\ b>0)$$

따라서 구 S의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 방정식은 ㉠에 $z=0$을 대입하면 되므로

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(-c)^2=a^2+c^2$$

$$\therefore (x-a)^2+(y-a)^2=a^2$$

이 원의 넓이가 64π이므로

$$a^2\pi=64\pi, \qquad a^2=64$$

$$\therefore a=8\ (\because a>0)$$

$a=8$을 ㉠에 대입하면

$$(x-8)^2+(y-8)^2+(z-c)^2=64+c^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 구 S가 z축과 만나는 두 점의 z좌표는 $x=0$, $y=0$을 ㉡에 대입하면 되므로

$$64+64+(z-c)^2=64+c^2$$

$$(z-c)^2=c^2-64$$

$$\therefore z=c\pm\sqrt{c^2-64}$$

구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로

$$(c+\sqrt{c^2-64})-(c-\sqrt{c^2-64})=8$$

$$\sqrt{c^2-64}=4, \qquad c^2-64=16$$

$$\therefore c^2=80$$

따라서 구 S의 반지름의 길이는

$$r=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{64+80}=12$$

답 ②