베이직쎈 고등 수학(하)

정답 및 풀이

I. 집합과 명제

01 집합의 뜻과 표현

01 집합과 원소

개념 01 집합과 원소

본책 8쪽

01 답 × 02 답 ○

03 답 ○ 04 답 ×

05 답 ○ 06 답 ×

소수
➡ 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수

07 답 × 08 답 ○

09 답 f, l, o, w, e, r 10 답 1, 3, 5, 7, 9

11 답 -1, 4 12 답 ○

13 답 × 14 답 ○

15 답 ×

16 답 $\in$, 1, 2, 3, 4, 6, 12, 원소이다

17 답 $\in$ 18 답 $\notin$

19 답 $\in$ 20 답 $\notin$

21 집합 A의 원소는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19이다.
따라서 1은 집합 A의 원소가 아니다. 답 $\notin$

22 답 $\in$ 23 답 $\notin$

24 답 $\in$ 25 답 $\notin$

26 답 $\in$ 27 답 $\notin$

28 답 $\in$ 29 답 $\notin$

30 답 $\in$ 31 답 $\in$

32 답 $\notin$

33 $\sqrt{9}=3$에서 $\sqrt{9}$는 유리수이므로 집합 Q의 원소이다. 답 $\in$

$\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$

34 π는 무리수이므로 집합 Q의 원소가 아니다. 답 $\notin$

$\pi=3.141592\cdots$이므로 순환소수가 아닌 무한소수, 즉 무리수이다.

35 $0.\dot{5}=\frac{5}{9}$에서 $0.\dot{5}$는 유리수이므로 집합 Q의 원소이다. 답 $\in$

개념 02 집합의 표현

본책 10쪽

36 답 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8

37 답 $\{m, a, t, h\}$

38 답 $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$

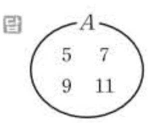
39 답 $\{4, 8, 12, \cdots\}$

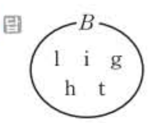
40 답 5, 5

41 답 $\{x|x$는 $-4\le x\le 0$인 정수$\}$

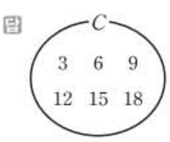
42 답 $\{x|x$는 두 자리 자연수$\}$

43 답 $\{x|x$는 7의 양의 배수$\}$

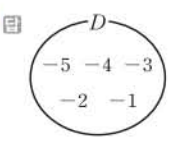
44 답 

45 답 

$C=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

46 답 

$D=\{-5, -4, -3, -2, -1\}$

47 답 

개념 03 집합의 원소의 개수

본책 11쪽

48 답 유 49 답 무

50 답 유 51 답 무

52 세 자리 자연수는
100, 101, 102, $\cdots$, 999
따라서 주어진 집합은 유한집합이다. 답 유

53 3으로 나누어떨어지는 자연수는
3, 6, 9, 12, $\cdots$
따라서 주어진 집합은 무한집합이다. 답 무

3의 양의 배수이다.

54 $0<x<1$인 자연수는 존재하지 않는다.
따라서 주어진 집합은 공집합이므로 유한집합이다. 답 유

55 답 3 56 답 0

57 답 20

58 짝수인 소수는 2의 1개이므로
$n(A)=1$ 답 1

$A=\{2\}$

59 15의 양의 약수는 1, 3, 5, 15의 4개이므로
$n(A)=4$ 답 4

$A=\{1, 3, 5, 15\}$

60 $x^2+2x-3=0$에서
$(x+3)(x-1)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$A=\{-3, 1\}$

따라서 집합 A의 원소는 -3, 1의 2개이므로

$n(A)=2$ 답 2

61 $x^2+1=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로

$n(A)=0$ 답 0

$A=\varnothing$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 12쪽

01 ①, ②, ④, ⑤ '잘하다', '크다', '가깝다'라는 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다. 답 ③

02 ⑤ '높다'라는 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다. 답 ⑤

03 (1), (4) '많다', '크다'라는 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
(2) 집합이고, 원소는 봄, 여름, 가을, 겨울이다.
(3) 집합이고, 원소는 1, 3, 5이다.
답 (2) 봄, 여름, 가을, 겨울 (3) 1, 3, 5

04 집합 A의 원소는 1, 2, 4, 5, 10, 20이다.
① $1\in A$ ② $3\notin A$
③ $5\in A$ ⑤ $20\in A$ 답 ④

05 집합 A의 원소는 $3, 6, 9, \cdots$
집합 B의 원소는 $11, 13, 15, \cdots$
③ $27\in A$
⑤ $16\notin B$ 답 ③, ⑤

06 $x(x+2)(x-5)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=5$
이므로 집합 A의 원소는 -2, 0, 5이다.
ㄱ. $-5\notin A$
ㄷ. $2\notin A$
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

07 ① -5는 정수이므로 $-5\in Z$
②, ③ $\sqrt{10}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$은 모두 무리수이므로
$\sqrt{10}\notin Q$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\in R$
④ $\dfrac{1}{\sqrt{16}}=\dfrac{1}{4}$에서 $\dfrac{1}{\sqrt{16}}$은 유리수이므로
$\dfrac{1}{\sqrt{16}}\in Q$
⑤ $i-3$은 허수이므로 $i-3\notin R$
답 ④

08 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
따라서 집합 A의 원소가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

베이직쎈 BOX

$\{x\mid x$는 30의 양의 약수$\}$
$=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

$a>0$일 때
① $|x|<a$
➡ $-a<x<a$
② $|x|>a$
➡ $x<-a$ 또는 $x>a$

3과 5의 양의 공배수는 15의 양의 배수와 같다.

실수 $\begin{cases}\text{유리수}\\\text{무리수}\end{cases}$

$\dfrac{1}{\sqrt{16}}=\dfrac{1}{\sqrt{4^2}}=\dfrac{1}{4}$

09 ① $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
② $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$
③ $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
④ $A=\{4, 8, 12\}$
⑤ $A=\{8, 16\}$ 답 ④

10 ⑤ $\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$
➡ $\{x\mid x$는 30 이하의 5의 양의 배수$\}$ 답 ⑤

11 ㄱ. $|x|<2$에서 $-2<x<2$
따라서 정수 x는 -1, 0, 1이므로
$A=\{-1, 0, 1\}$
ㄴ. $x^2\le1$에서 $x^2-1\le0$
$(x+1)(x-1)\le0$ ∴ $-1\le x\le1$
따라서 정수 x는 -1, 0, 1이므로
$A=\{-1, 0, 1\}$
ㄷ. $x^2-1=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$
∴ $x=-1$ 또는 $x=1$
∴ $A=\{-1, 1\}$
이상에서 조건제시법으로 나타낸 것으로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

12 (1)

a \ b	1	3
1	2	4
2	3	5

(2) $X=\{2, 3, 4, 5\}$ 답 풀이 참조

13 집합 A의 원소 a, 집합 B의 원소 b에 대하여 ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

a \ b	2	3	4
-1	-2	-3	-4
1	2	3	4

∴ $X=\{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$
답 $X=\{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$

14 ① 무한집합
② $\{-1, -2, -3, \cdots\}$ ➡ 무한집합
③ $\{50, 51, 52, \cdots\}$ ➡ 무한집합
④ $\{-3, 3\}$ ➡ 유한집합
⑤ $\{2, 4, 6, \cdots\}$ ➡ 무한집합 답 ④

15 $A=\{15, 30, 45, \cdots\}$
$B=\{1, 3, 5, \cdots, 99\}$
$C=\left\{\cdots, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \cdots\right\}$
$D=\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots\right\}$
따라서 무한집합인 것은 A, C, D의 3개이다. 답 3

16 ① $\{3\}$ ② $\{6, 12, 18, \cdots\}$
③ $\{2\}$ ④ $\{0\}$
⑤ $\varnothing$ 답 ⑤

17 ③ $n(\{x|x$는 3의 양의 약수$\})=n(\{1, 3\})=2$
④ $n(\{0, 1\})=2$, $n(\{4\})=1$이므로
$n(\{0, 1\})>n(\{4\})$ 답 ④

18 $A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$이므로
$n(A)=5$
$B=\{3, 5, 7\}$이므로
$n(B)=3$
$\therefore n(A)+n(B)=8$ 답 8

19 $A=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$이므로
$n(A)=k$ $\therefore k=9$ 답 9

20 ㄱ. $n(\{10\})=1$, $n(\{5\})=1$이므로
$n(\{10\})-n(\{5\})=0$
ㄴ. 집합 A의 원소는 $\varnothing$이므로
$n(A)=1$
ㄷ. $B=\{1\}$이므로
$n(B)=1$
이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

02 부분집합

개념 04 부분집합

본책 15쪽

01 답 $\subset$ **02** 답 $\not\subset$

03 답 $\subset$ **04** 답 $\not\subset$

05 답 $\subset$ **06** 답 $\subset$

07 답 $X\subset Y$

08 답 $X\subset Y$ 1, 2, 3, 6, X, Y

09 $X=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, $Y=\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$이므로
$Y\subset X$ 답 $Y\subset X$

10 $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{-1, 1\}$이므로
$Y\subset X$ 답 $Y\subset X$

11 모든 정사각형은 직사각형이므로
$Y\subset X$ 답 $Y\subset X$

12 모든 자연수는 정수이므로
$X\subset Y$ 답 $X\subset Y$

13 답 $\subset$ **14** 답 $\in$

15 답 $\subset$ **16** 답 $\in$

17 답 $\subset$

베이직쎈 BOX

조건제시법으로 나타낸 집합은 먼저 원소나열법으로 나타낸 후 원소의 개수를 구한다.

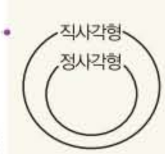
부분집합을 구할 때에는 원소의 개수에 따라 나누어 구하는 것이 편리하다.

$k=-1$일 때,
$x=(-1)^2=1$
$k=1$일 때,
$x=1^2=1$
$\therefore B=\{1\}$

모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다.

집합 A의 원소는
$0, 1, \{2, 3\}$

공집합은 모든 집합의 부분집합이다.



18 답 $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$
$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$

19 원소가 하나도 없는 부분집합은 $\varnothing$
원소가 1개인 부분집합은 $\{1\}$
따라서 구하는 부분집합은 $\varnothing$, $\{1\}$ 답 $\varnothing$, $\{1\}$

20 원소가 하나도 없는 부분집합은 $\varnothing$
원소가 1개인 부분집합은 $\{-2\}$, $\{2\}$
원소가 2개인 부분집합은 $\{-2, 2\}$
따라서 구하는 부분집합은
$\varnothing$, $\{-2\}$, $\{2\}$, $\{-2, 2\}$
답 $\varnothing$, $\{-2\}$, $\{2\}$, $\{-2, 2\}$

21 주어진 집합은 $\{1, 3, 5\}$이므로
원소가 하나도 없는 부분집합은 $\varnothing$
원소가 1개인 부분집합은 $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$
원소가 2개인 부분집합은 $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$
원소가 3개인 부분집합은 $\{1, 3, 5\}$
따라서 구하는 부분집합은
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$
답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$

22 답 $\{0\}$, $\{-1, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{-1, 0, 1\}$

23 답 $\varnothing$, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{-1, 0\}$

24 답 $\{-1\}$, $\{-1, 1\}$

25 답 ○ **26** 답 ×

27 답 ○ **28** 답 ×

29 답 × **30** 답 ○

개념 05 서로 같은 집합

본책 17쪽

31 답 $A=B$

32 $A=\{5, 10, 15, \cdots\}$이므로
$A\neq B$ 답 $A\neq B$

33 $A=\{a, g, i, n, o, s\}$이므로
$A=B$ 답 $A=B$

34 $x^2=4$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
$\therefore A=\{-2, 2\}$
$|x|=2$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
$\therefore B=\{-2, 2\}$
$\therefore A=B$ 답 $A=B$

베이직쎈 BOX

35 $A=\{2, 3, 5, 7, 11, \cdots\}$, $B=\{3, 5, 7, 9, \cdots\}$이므로
$A \neq B$ 답 $A \neq B$

36 답 $a=0$, $b=1$ 0, b

37 답 $a=-1$, $b=2$

38 $-a=3$, $b+1=5$이므로
$a=-3$, $b=4$ 답 $a=-3$, $b=4$

39 $a-1=7$, $2-b=4$이므로
$a=8$, $b=-2$ 답 $a=8$, $b=-2$

40 $2a=-10$, $b-3=4$이므로
$a=-5$, $b=7$ 답 $a=-5$, $b=7$

41 답 $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$

42 답 $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$

43 주어진 집합은 $\{1, 2, 3, 6\}$이므로 구하는 진부분집합은
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{6\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 6\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{2, 3, 6\}$
답 풀이 참조

개념 06 부분집합의 개수

본책 18쪽

원소의 개수가 n인 집합에서 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수
➡ 2^{n-k} (단, $k<n$)

44 $2^3=8$ 답 8

45 $2^5=32$ 답 32

46 $2^7=128$ 답 128

14=2×7이므로 원소의 개수가 7이다.

47 $\{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$에서 원소의 개수가 6이므로 부분집합의 개수는
$2^6=64$ 답 64

48 $\{2, 3, 5, 7\}$에서 원소의 개수가 4이므로 부분집합의 개수는
$2^4=16$ 답 16

49 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에서 원소의 개수가 8이므로 부분집합의 개수는
$2^8=256$ 답 256

50 $2^2-1=3$ 답 3

51 $2^3-1=7$ 답 7

52 $2^9-1=511$ 답 511

17=2×9−1이므로 원소의 개수가 9이다.

53 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$에서 원소의 개수가 8이므로 진부분집합의 개수는
$2^8-1=255$ 답 255

54 $\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$에서 원소의 개수가 6이므로 진부분집합의 개수는
$2^6-1=63$ 답 63

55 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$에서 원소의 개수가 5이므로 진부분집합의 개수는
$2^5-1=31$ 답 31

개념 07 특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수

본책 19쪽

56 답 8 1, 8

57 $2^{5-3}=2^2=4$ 답 4

58 $2^{6-2}=2^4=16$ 답 16

59 답 4 2, 4

60 $2^{4-1}=2^3=8$ 답 8

61 $2^{6-4}=2^2=4$ 답 4

62 답 4 1, 1, 4

63 집합 X는 B의 부분집합 중에서 a, b, c를 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로 집합 X의 개수는
$2^{4-3}=2^1=2$ 답 2

64 집합 X는 B의 부분집합 중에서 -3, 3을 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로 집합 X의 개수는
$2^{5-2}=2^3=8$ 답 8

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 20쪽

01 ④ $7 \notin A$이므로 $\{5, 7, 11\} \not\subset A$
답 ④

02 $A=\{1, 2, 3\}$

집합 A의 부분집합은 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$

① $n(A)=3$
② 원소가 1개인 A의 부분집합은
$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$의 3개
③ 원소가 2개인 A의 부분집합은
$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$의 3개

④ 2를 원소로 갖는 A의 부분집합은

$\{2\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$의 4개

⑤ 3을 원소로 갖지 않는 A의 부분집합은

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$의 4개

답 ④

03 답 ①

04 ① $0\in A$ 또는 $\{0\}\subset A$

⑤ $A\subset B$

답 ①, ⑤

05 $A=\{1, 3, 9\}$

ㄴ. $3\in A$

ㄹ. $9\in A$ 또는 $\{9\}\subset A$

ㅁ. $6\notin A$이므로 $\{1, 6\}\not\subset A$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅂ이다. 답 ②

06 ⑤ $\{2\}\in\{1, \{2\}\}$ 또는 $\{\{2\}\}\subset\{1, \{2\}\}$

답 ⑤

07 $A\subset B\subset C$이면 $A\subset B$이고 $B\subset C$이다.

$A=\{1, 2\}$이므로 $A\subset B$가 성립하려면

$2\in B$ $\therefore a=2$

따라서 $B=\{1, 2, 5\}$이므로 $B\subset C$가 성립하려면

$1\in C$ $\therefore b=1$

$\therefore a+b=3$ 답 ①

08 $A\subset B$가 성립하려면

$k\geq 15$

따라서 실수 k의 최솟값은 15이다. 답 15

09 주어진 벤다이어그램에서 $A\subset B$이므로

$10\in B$

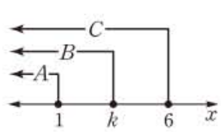
즉 $a+7=10$ 또는 $2a=10$이므로

$a=3$ 또는 $a=5$

따라서 구하는 합은

$3+5=8$ 답 8

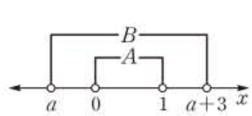
10 $A\subset B\subset C$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$1\leq k\leq 6$

따라서 정수 k는 1, 2, $\cdots$, 6의 6개이다. 답 6

11 $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a\leq 0$, $a+3\geq 1$

$a+3\geq 1$에서 $a\geq -2$이므로 $-2\leq a\leq 0$

따라서 a의 최댓값은 0, 최솟값은 -2이므로 구하는 합은

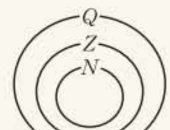
$0+(-2)=-2$ 답 ②

베이직쎈 BOX

$B\subset A$이지만 $A\not\subset B$이다.

$B\subset A$이지만 $A\not\subset B$이다.

$A\subset B$이지만 $B\not\subset A$이다.



집합 A의 원소는 a, b, $\{c\}$

$a=3$일 때, $B=\{-1, 3, 6, 10\}$ 이므로 $A\subset B$

$a=5$일 때, $B=\{-1, 3, 10, 12\}$ 이므로 $A\subset B$

12 ② $B=\{4, 5\}$이므로 $A\neq B$

③ $B=\varnothing$이므로 $A=B$

④ $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 3, 5, 9\}$이므로

$A\neq B$

⑤ $A=\{2, 6, 8\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$A\neq B$

답 ③

13 $A=\{2, 3, 5\}$이고 $A=B$이므로

$a+2=2$, $b-3=3$ 또는 $a+2=3$, $b-3=2$

$\therefore a=0$, $b=6$ 또는 $a=1$, $b=5$

그런데 $a\neq 0$이므로 $a=1$, $b=5$

$\therefore b-a=4$ 답 ③

14 $A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$

따라서 $k^2=9$이므로 $k=-3$ 또는 $k=3$

(i) $k=-3$일 때,

$A=\{-5, -3, 9\}$, $B=\{3, 7, 9\}$이므로

$A\neq B$

(ii) $k=3$일 때,

$A=\{3, 7, 9\}$, $B=\{3, 7, 9\}$이므로

$A=B$

(i), (ii)에서 $k=3$ 답 3

15 집합 A의 진부분집합은

$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{\{c\}\}$, $\{a, b\}$, $\{a, \{c\}\}$, $\{b, \{c\}\}$

따라서 집합 A의 진부분집합이 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

16 $(x+1)(x-2)<0$에서 $-1<x<2$

$\therefore A=\{0, 1\}$

따라서 집합 A의 진부분집합은

$\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$ 답 $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$

17 ㄱ. $\{2, 4\}\subset\{1, 2, 4\}$, $\{2, 4\}\neq\{1, 2, 4\}$

ㄴ. $\{x|x$는 $1<x<3$인 자연수$\}=\{2\}$이므로

$\{2\}\subset\{1, 2, 4\}$, $\{2\}\neq\{1, 2, 4\}$

ㄷ. $\{x|x$는 2의 양의 약수$\}=\{1, 2\}$이므로

$\{1, 2\}\subset\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2\}\neq\{1, 2, 4\}$

ㄹ. $\{x|x$는 4의 양의 약수$\}=\{1, 2, 4\}$

이상에서 집합 $\{1, 2, 4\}$의 진부분집합인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

18 $A=\{13, 15, 17, 19\}$에서 A의 원소의 개수가 4이므로 부분집합의 개수는

$2^4=16$ $\therefore a=16$

$B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$에서 B의 원소의 개수가 6이므로 부분집합의 개수는

$2^6=64$ $\therefore b=64$

$\therefore b-a=48$ 답 ③

19 $A=\{-3,\ -2,\ -1\}$에서 A의 원소의 개수가 3이므로 부분집합의 개수는

$2^3=8 \quad \therefore a=8$

진부분집합의 개수는

$2^3-1=7 \quad \therefore b=7$

$\therefore a+b=15$ 　답 15

20 $n(A)=k$라 하면

$2^k=32=2^5 \quad \therefore k=5$ 　답 5

21 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

A의 부분집합 중에서 2의 배수인 2, 4, 6, 8을 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{8-4}=2^4=16$ 　답 16

22 $4\le 2x<15$에서 $\quad 2\le x<\frac{15}{2}$

$\therefore A=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

A의 부분집합 중에서 3, 6을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16 \quad \therefore a=16$

A의 부분집합 중에서 4를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{6-1}=2^5=32 \quad \therefore b=32$

$\therefore a+b=48$ 　답 ③

23 집합 A의 부분집합 중에서 4, 10을 반드시 원소로 갖고 6을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{5-2-1}=2^2=4$ 　답 4

$4\in X,\ 10\in X$

$6\notin X$

24 $X\subset A$이고 $X\ne A$이므로 X는 A의 진부분집합이다.

따라서 A의 진부분집합 중에서 d, m을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{5-2}-1=2^3-1=7$ 　답 7

25 집합 X는 집합 $\{-2,\ 0,\ 1,\ 3,\ 6\}$의 부분집합 중에서 0, 3을 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$ 　답 ②

26 $|x|\le 2$에서 $\quad -2\le x\le 2$

$\therefore A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

$(x+3)(x-5)\le 0$에서 $\quad -3\le x\le 5$

$\therefore B=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

이때 집합 X는 B의 부분집합 중에서 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$를 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로 집합 X의 개수는

$2^{9-5}=2^4=16$ 　답 16

27 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$

이때 집합 X는 B의 부분집합 중에서 1, 4, 5를 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로

$2^{n-3}=64=2^6, \quad n-3=6$

$\therefore n=9$ 　답 ⑤

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 24쪽

01 전략 주어진 벤다이어그램을 이용하여 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 파악한다.

풀이 주어진 벤다이어그램에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $A\subset B$이다.

① $A\not\subset B,\ B\not\subset A$

② $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},\ B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로 $B\subset A$

③ $A\not\subset B,\ B\not\subset A$

④ $A=\{1,\ 2,\ 4\},\ B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$이므로 $A\subset B$

⑤ $B\subset A$

공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

답 ④

02 전략 먼저 두 집합 Y, Z를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $Y=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\},\ Z=\{-2,\ 2\}$이므로

$Z\subset X\subset Y$ 　답 ④

03 전략 집합 A의 원소와 부분집합을 구분하여 생각한다.

집합 A의 원소는 $\varnothing,\ a,\ \{a,\ b\},\ c$

풀이 ③ $a\in A$ 또는 $\{a\}\subset A$

⑤ $\{a,\ b\}\in A$ 또는 $\{\{a,\ b\}\}\subset A$

답 ③, ⑤

04 전략 주어진 벤다이어그램을 보고 두 집합 X, Y를 원소나열법으로 나타낸다.

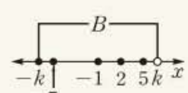
풀이 $X=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\},\ Y=\{4,\ 8\}$

⑤ $\{4,\ 6,\ 8\}\subset X$ 　답 ⑤

05 전략 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속해야 한다.

풀이 $A\subset B$가 성립하려면

$-k\le -7,\ k>5$



$-k\le -7$에서

$k\ge 7$

따라서 $k\ge 7$이므로 k의 최솟값은 7이다. 　답 ③

06 전략 두 집합 A, B의 모든 원소가 같음을 이용한다.

풀이 $A=B$이므로

$a+b=-1,\ 2a-b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-2$

$\therefore ab=-2$ 　답 ①

$\begin{cases} a+b=-1 & \cdots ㉠ \\ 2a-b=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$3a=3 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$1+b=-1$

$\therefore b=-2$

07 전략 원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수는 2^n이다.

풀이 ① 원소의 개수가 3이므로 부분집합의 개수는

$2^3=8$

② $\{1,\ 7\}$에서 원소의 개수가 2이므로 부분집합의 개수는

$2^2=4$

③ $\{-2, -1, 0\}$에서 원소의 개수가 3이므로 부분집합의 개수는

$2^3=8$

④ $\{4, 8, 12, 16, 20\}$에서 원소의 개수가 5이므로 부분집합의 개수는

$2^5=32$

⑤ $\{2, 3, 5, 7\}$에서 원소의 개수가 4이므로 부분집합의 개수는

$2^4=16$ 답 ⑤

08 전략 a^2+b^2의 값이 될 수 있는 수를 모두 구한다.

풀이 집합 A의 두 원소 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	-2	0	2
-2	8	4	8
0	4	0	4
2	8	4	8

$B=\{0, 4, 8\}$

따라서 B의 진부분집합의 개수는

$2^3-1=7$ 답 ①

09 전략 집합 A의 원소가 하나도 없도록 하는 k의 조건을 생각해 본다.

풀이 8의 양의 배수는 8, 16, 24, ⋯이므로 집합 A가 공집합이려면

$k\le8$

따라서 실수 k의 최댓값은 8이다. 답 8

10 전략 표를 이용하여 집합 X의 모든 원소를 빠짐없이 구한다.

풀이 집합 A의 원소 a, 집합 B의 원소 b에 대하여 $a+b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	-3	0
0	-3	0
3	0	3

$X=\{-3, 0, 3\}$ ⋯ ❶

$\therefore n(X)=3$ ⋯ ❷

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	집합 X를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	70 %
❷	$n(X)$를 구할 수 있다.	30 %

11 전략 조건을 만족시키는 부분집합은 원소의 개수가 2개 이상임을 이용한다.

풀이 집합 A의 부분집합 중에서 원소의 합이 15 이상이 되려면 원소가 2개 이상이어야 한다.

(i) 원소가 2개일 때,

$\{6, 9\}$의 1개

(ii) 원소가 3개일 때,

$\{2, 5, 9\}$, $\{2, 6, 9\}$, $\{5, 6, 9\}$의 3개

(iii) 원소가 4개일 때,

$\{2, 5, 6, 9\}$의 1개

이상에서 구하는 집합의 개수는

$1+3+1=5$ 답 5

베이직쎈 BOX

원소의 개수가 n인 집합의 진부분집합의 개수 ➡ 2^n-1

$2+5=7$, $2+6=8$, $2+9=11$, $5+6=11$, $5+9=14$, $6+9=15$

$2+5+6=13$, $2+5+9=16$, $2+6+9=17$, $5+6+9=20$

$2+5+6+9=22$

$\{x|x^2+ax+b=0\}=\{-5, 3\}$

1, 2, 5, 10

$-4, -3, -2, -1$

12 전략 집합 B의 원소가 집합 A의 방정식의 해와 같음을 이용한다.

풀이 $A\subset B$이고 $B\subset A$이므로

$A=B$ ⋯ ❶

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -5, 3이어야 하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-5+3=-a$, $-5\cdot3=b$

$\therefore a=2, b=-15$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=17$ ⋯ ❸

답 17

단계	채점 기준	비율
❶	$A=B$임을 알 수 있다.	30 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	$a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

베쎈 TIP

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

13 전략 원소의 개수가 n인 집합에서 특정한 원소 k개는 반드시 원소로 갖고, l개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 2^{n-k-l}이다. (단, $k+l<n$)

풀이 $(x+4)(x-11)\le0$에서

$-4\le x\le11$

$\therefore A=\{-4, -3, -2, \cdots, 11\}$ ⋯ ❶

따라서 집합 A의 부분집합 중에서 10의 양의 약수는 반드시 원소로 갖고 음수는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{16-4-4}=2^8=256$ ⋯ ❷

답 256

단계	채점 기준	비율
❶	집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷	조건을 만족시키는 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	60 %

14 전략 집합 X는 B의 부분집합 중에서 A의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합임을 이용한다.

풀이 $A=\{b, c\}$, $B=\{a, b, c, d, e, f\}$

이때 집합 X는 B의 부분집합 중에서 b, c를 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ 답 16

Ⅰ. 집합과 명제

02 집합의 연산

03 집합의 연산

개념 08 합집합과 교집합 본책 26쪽

01 답 $A\cup B=\{1, 3, 5, 7\}$, $A\cap B=\{1, 5\}$

02 답 $A\cup B=\{a, b, c, d, e, f\}$, $A\cap B=\{a, c\}$

03 $A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$이므로
$A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
$A\cap B=\{4, 5, 6\}$
답 $A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A\cap B=\{4, 5, 6\}$

04 $A=\{3, 6, 9, \cdots, 48\}$, $B=\{6, 12, 18, \cdots, 48\}$이므로
$A\cup B=\{3, 6, 9, \cdots, 48\}$,
$A\cap B=\{6, 12, 18, \cdots, 48\}$
답 $A\cup B=\{3, 6, 9, \cdots, 48\}$, $A\cap B=\{6, 12, 18, \cdots, 48\}$

05 $A=\{10, 12, 14, \cdots, 98\}$,
$B=\{11, 13, 15, \cdots, 99\}$이므로
$A\cup B=\{10, 11, 12, \cdots, 99\}$, $A\cap B=\varnothing$
답 $A\cup B=\{10, 11, 12, \cdots, 99\}$, $A\cap B=\varnothing$

06 답 $A\cup B=\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$, $A\cap B=\{2, 8\}$

07 답 $A\cup B=\{a, b, c, d, e\}$, $A\cap B=\{b\}$

08 답 $A\cup B=\{1, 3, 7, 9\}$, $A\cap B=\{1, 9\}$

09 답 ◯ $\varnothing$, 서로소이다

10 $A\cap B=\{13\}$이므로 A와 B는 서로소가 아니다.
답 ×

11 $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로소이다. 답 ◯

12 $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로소이다. 답 ◯

13 $A\cap B=\{15, 30, 45, \cdots\}$이므로 A와 B는 서로소가 아니다.
답 ×

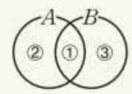
14 $A=\{1, 3, 5, 15\}$이므로
$A\cap B=\{3\}$
따라서 A와 B는 서로소가 아니다. 답 ×

15 $A=\{0, 1\}$, $B=\{2\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 A와 B는 서로소이다. 답 ◯

베이직쎈 BOX

유리수이면서 무리수인 수는 없다.

집합을 벤다이어그램으로 나타낼 때에는 ① → ② → ③의 순서로 원소를 써넣는다.



두 집합의 교집합을 구하여 공집합인지 아닌지 확인한다.

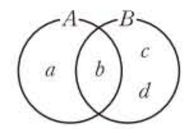
공집합은 모든 집합과 서로소이다.

집합 A는 5의 양의 배수의 집합이고 집합 B는 3의 양의 배수의 집합이므로 $A\cap B$는 5와 3의 최소공배수인 15의 양의 배수의 집합이다.

16 $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로소이다. 답 ◯

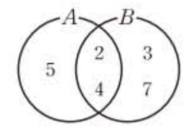
17 답 $B=\{3, 4\}$ $\{3, 4\}$ ① 1 ② 4

18 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{b, c, d\}$



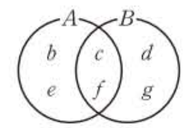
답 $B=\{b, c, d\}$

19 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{2, 3, 4, 7\}$



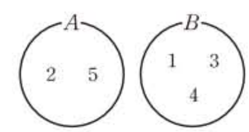
답 $B=\{2, 3, 4, 7\}$

20 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{c, d, f, g\}$



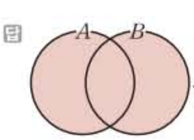
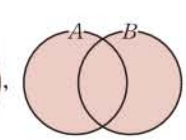
답 $B=\{c, d, f, g\}$

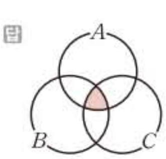
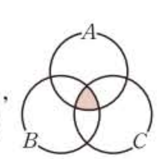
21 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{1, 3, 4\}$

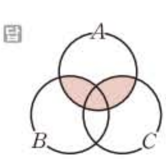
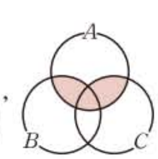


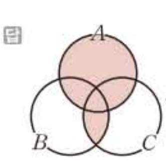
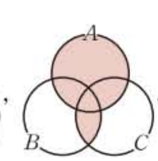
답 $B=\{1, 3, 4\}$

개념 09 집합의 연산 법칙 본책 28쪽

22 답  ,  , =

23 답  ,  , =

24 답  ,  , =

25 답  ,  , =

26 $A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$이므로
$(A\cup B)\cup C=\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$

$B\cup C=\{0, 1, 2, 4, 6, 7\}$이므로
$A\cup(B\cup C)=\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$
답 $(A\cup B)\cup C=\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$, $A\cup(B\cup C)=\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$

27 $B\cup C=\{0, 1, 2, 4, 6, 7\}$이므로
$A\cap(B\cup C)=\{2, 4, 7\}$
$A\cap B=\{2, 7\}$, $A\cap C=\{4, 7\}$이므로
$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{2, 4, 7\}$
답 $A\cap(B\cup C)=\{2, 4, 7\}$, $(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{2, 4, 7\}$

28 $B\cap C=\{1, 7\}$이므로
$A\cup(B\cap C)=\{1, 2, 4, 5, 7\}$
$A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$,
$A\cup C=\{0, 1, 2, 4, 5, 7\}$이므로
$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1, 2, 4, 5, 7\}$
답 $A\cup(B\cap C)=\{1, 2, 4, 5, 7\}$, $(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1, 2, 4, 5, 7\}$

29 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
$=\{1, 6, 9\}\cup\{3, 6, 8\}$
$=\{1, 3, 6, 8, 9\}$
답 $\{1, 3, 6, 8, 9\}$

결합법칙

30 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
$=\{a, c, d, e\}\cap\{a, b, e, f\}$
$=\{a, e\}$　답 $\{a, e\}$

31 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
$=\{1, 3, 5\}\cap\{3, 5, 7\}$
$=\{3, 5\}$　답 $\{3, 5\}$

분배법칙

32 $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)$
$=\{-1, 0, 2\}\cap\{-2, -1, 1\}$
$=\{-1\}$　답 $\{-1\}$

개념 10 여집합과 차집합

본책 29쪽

33 답 $\{2, 4, 6\}$　**34** 답 $\{1, 2, 3, 5\}$

35 $C=\{1, 2, 3, 6\}$이므로
$C^C=\{4, 5\}$　답 $\{4, 5\}$

36 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이므로
$A^C=\{1, 2, 5, 6, 8, 9\}$
답 $\{1, 2, 5, 6, 8, 9\}$

37 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로
$B^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$
답 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

베이직쎈 BOX

소수
➡ 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수

38 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $C=\{2, 3, 5, 7\}$이므로
$C^C=\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$
답 $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

차집합에 대해서는 교환법칙이 성립하지 않는다.
즉
$A-B\neq B-A$

39 답 $A-B=\{1, 3\}$, $B-A=\{4, 6\}$

40 답 $A-B=\{c, d\}$, $B-A=\{a\}$

41 답 $A-B=\{2, 4, 8\}$, $B-A=\varnothing$

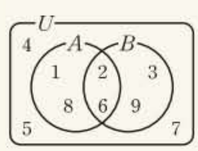
42 $A=\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$,
$B=\{4, 8, 12, 16, 20\}$이므로
$A-B=\{9, 10, 11, 13, 14\}$,
$B-A=\{4, 16, 20\}$
답 $A-B=\{9, 10, 11, 13, 14\}$, $B-A=\{4, 16, 20\}$

43 $A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{1, 2, 4, 8, 16\}$이므로
$A-B=\varnothing$, $B-A=\{16\}$
답 $A-B=\varnothing$, $B-A=\{16\}$

44 답 $\{b, e, f, g\}$　**45** 답 $\{a, d, f, g\}$

46 답 $\{a, d\}$　**47** 답 $\{b, e\}$

48 답 $\{f, g\}$　**49** 답 $\{a, b, d, e, f, g\}$



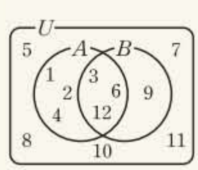
50 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이므로
$A^C=\{3, 4, 5, 7, 9\}$　답 $\{3, 4, 5, 7, 9\}$

51 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이므로
$B^C=\{1, 4, 5, 7, 8\}$　답 $\{1, 4, 5, 7, 8\}$

52 답 $\{1, 8\}$　**53** 답 $\{3, 9\}$

54 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 6, 8, 9\}$이므로
$(A\cup B)^C=\{4, 5, 7\}$　답 $\{4, 5, 7\}$

55 $B^C=\{1, 4, 5, 7, 8\}$이므로
$A\cap B^C=\{1, 8\}$　답 $\{1, 8\}$



56 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$, $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로
$A^C=\{5, 7, 8, 9, 10, 11\}$
답 $\{5, 7, 8, 9, 10, 11\}$

57 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$이므로
$B^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$
답 $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$

58 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$이므로
$A-B=\{1, 2, 4\}$　답 $\{1, 2, 4\}$

59 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$이므로
$B-A=\{9\}$　답 $\{9\}$

60 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$이므로
$A\cap B=\{3, 6, 12\}$
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$이므로
$(A\cap B)^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$
답 $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$

61 $A^C=\{5, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$이므로
$A^C\cap B=\{9\}$
답 $\{9\}$

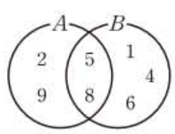
자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 31쪽

01 $C=\{1, 2, 5, 10\}$
④ $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 8, 9\}$이므로
$(A\cup B)\cap C=\{1, 2, 5\}$
답 ④

02 $A=\{6, 12, 18, 24, \cdots\}$,
$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 $A\cap B$이므로
$A\cap B=\{6, 12, 24\}$
답 ⑤

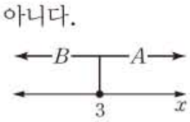
03 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=\{1, 4, 5, 6, 8\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$1+4+5+6+8=24$
답 24

04 ④ $\{x|x$는 3의 양의 배수$\}=\{3, 6, 9, \cdots\}$이므로
$\{4, 7\}\cap\{3, 6, 9, \cdots\}=\varnothing$
따라서 집합 $\{4, 7\}$과 서로소이다.
⑤ $\{x|x$는 14의 양의 약수$\}=\{1, 2, 7, 14\}$이므로
$\{4, 7\}\cap\{1, 2, 7, 14\}=\{7\}$
따라서 집합 $\{4, 7\}$과 서로소가 아니다.
답 ⑤

05 ① $A\cap B=\{10\}$
따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.
② $A=\{0, 2\}$, $B=\{-2, 2\}$이므로
$A\cap B=\{2\}$
따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.
③ 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

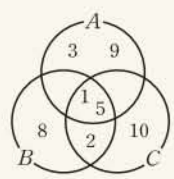


$A\cap B=\{3\}$
따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.
④ $A=\{2, 3, 5, 7, \cdots\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{2\}$
따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.
⑤ $A=\{1, 3, 9\}$, $B=\{4, 8, 12, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 두 집합 A, B는 서로소이다.
답 ⑤

베이직쎈 BOX

$A\cap B=\varnothing$이므로 집합 B의 원소는 집합 $A\cup B$의 원소 중 집합 A의 원소를 제외한 것이다.

원소가 n개인 집합의 부분집합 중에서
① 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수 ➡ 2^{n-k}
② 특정한 원소 l개를 원소로 갖지 않는 집합의 개수 ➡ 2^{n-l}
(단, $k<n$, $l<n$)



서로소
➡ 최대공약수가 1인 두 자연수

조건제시법으로 주어진 집합은 원소나열법으로 나타낸 후 교집합을 구한다.

집합 B의 원소 중 9를 제외한 원소는 모두 집합 A에 속한다.

소수이면서 짝수인 자연수는 2뿐이다.

06 집합 B가 집합 A와 서로소이므로
$A\cap B=\varnothing$
$\therefore B=\{1, 3, 5\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$1+3+5=9$
답 9

07 집합 A의 부분집합 중에서 집합 B와 서로소인 집합은 $\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중에서 b, d를 원소로 갖지 않는 집합과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^{5-2}=2^3=8$
답 8

08 $A=\{1, 3, 7, 9\}$이므로
$A^C=\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$
따라서 집합 A^C의 모든 원소의 합은
$2+4+5+6+8+10=35$
답 35

09 $B-C=\{1, 4, 5\}-\{2, 5, 7\}=\{1, 4\}$이므로
$A-(B-C)=\{2, 4, 6\}-\{1, 4\}$
$=\{2, 6\}$
답 ④

10 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$이므로
$B=\{1, 4, 6, 8\}$
따라서 $A\cap B=\{1, 4, 6\}$이므로
$(A\cap B)^C=\{2, 3, 5, 7, 8\}$
답 $\{2, 3, 5, 7, 8\}$

11 $A=\{2, 3, 5, 8\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로
$A-B=\{2, 8\}$, $B-A=\{1, 7, 9\}$
$\therefore (A-B)\cup(B-A)=\{1, 2, 7, 8, 9\}$
따라서 $(A-B)\cup(B-A)$의 원소의 개수는 5이다.
답 ③

12 $A\cap B=\{3, 7\}$에서 $3\in A$이므로
$a=3$
또 $7\in B$이므로
$b+1=7$ $\quad\therefore b=6$
$\therefore a+b=9$
답 ⑤

13 $B-A=\{9\}$에서 $3\in A$이므로
$k=3$
따라서 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 3, 9\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 3, 9\}$
답 $\{1, 2, 3, 9\}$

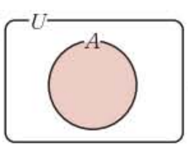
14 $A\cap B=\{2, 9\}$에서 $9\in A$이므로
$a^2=9$ $\quad\therefore a=-3$ 또는 $a=3$
(i) $a=-3$일 때,
$A=\{2, 6, 9\}$, $B=\{-9, -4, 10\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=3$일 때,
$A=\{2, 6, 9\}$, $B=\{2, 9, 10\}$이므로
$A\cap B=\{2, 9\}$
(i), (ii)에서 $\quad a=3$
답 3

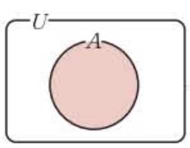
15 $A\cup B=\{0,\ 3,\ 4,\ 7\}$에서 $3\in A$ 또는 $7\in A$이므로
$2a-1=3$ 또는 $2a-1=7$
$\therefore\ a=2$ 또는 $a=4$
(i) $a=2$일 때,
$A=\{0,\ 3,\ 4\}$, $B=\{3,\ 7\}$이므로
$A\cup B=\{0,\ 3,\ 4,\ 7\}$
(ii) $a=4$일 때,
$A=\{0,\ 4,\ 7\}$, $B=\{-5,\ 3\}$이므로
$A\cup B=\{-5,\ 0,\ 3,\ 4,\ 7\}$
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에서 $a=2$
따라서 $B=\{3,\ 7\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은
$3+7=10$ 답 10

04 집합의 연산의 성질

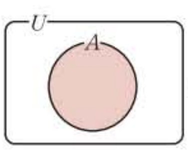
개념 11 집합의 연산의 성질

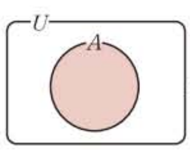
본책 33쪽

01 답 

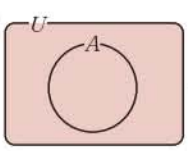
, 

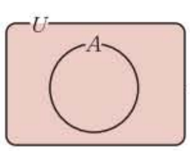
, =

02 답 

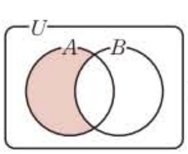
, 

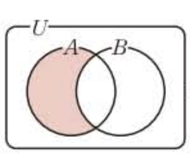
, =

03 답 

, 

, =

04 답 

, 

, =

05 답 A U, A

06 $(A\cap A)\cup\varnothing=A\cup\varnothing=A$ 답 A

07 $(A\cup A^C)\cap A=U\cap A=A$ 답 A

08 $A\cap U^C=A\cap\varnothing=\varnothing$ 답 $\varnothing$

09 $(\varnothing^C)^C=U^C=\varnothing$ 답 $\varnothing$

10 $U-A^C=U\cap(A^C)^C=U\cap A=A$ 답 A

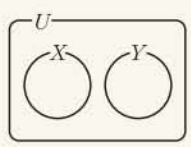
11 답 $\{7\}$ $-$, $\{7\}$

12 $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B=\{4,\ 5\}$ 답 $\{4,\ 5\}$

베이직쎈 BOX

$2a-1=3$에서
$2a=4\quad\therefore\ a=2$

$2a-1=7$에서
$2a=8\quad\therefore\ a=4$



드모르간의 법칙에 의하여
$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$

$A\cap B=X$라 하면
$(A\cap B)\cup(A\cap B)^C$
$=X\cup X^C=U$

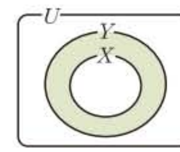
개념 12 집합의 연산을 이용한 여러 가지 표현

본책 34쪽

13 $X\cup Y=Y$ 답 ×

14 답 ○ **15** 답 ○

16 집합 $X^C\cap Y$는 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠한 부분과 같으므로 $X^C\cap Y\neq Y$



답 ×

17 답 ○

18 $Y^C\subset X^C$ 답 ×

19 답 ○

20 $(X\cap Y)-Y=X-Y=\varnothing$ 답 ○

21 $X-(X\cup Y)=X-Y=\varnothing$ 답 ×

22 답 ○

23 $X\subset Y^C$ 답 ×

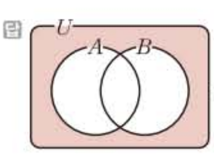
24 $X\cap Y^C=X-Y=X$ 답 ○

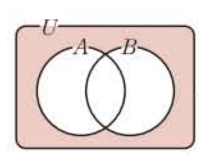
25 $(Y-X)^C=Y^C$이고 $X\subset Y^C$이므로
$X\subset(Y-X)^C$ 답 ○

26 $Y-(X-Y)=Y-X=Y$ 답 ×

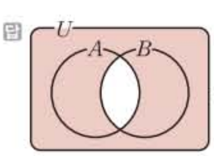
개념 13 드모르간의 법칙

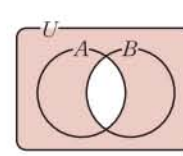
본책 35쪽

27 답 

, 

, =

28 답 

, 

, =

29 답 $\{3,\ 7\}$ U, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 3, 7

30 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이고 $A\cap B=\{5,\ 9\}$이므로
$A^C\cup B^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\}$
답 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\}$

31 답 $\cap$, $\cup$ **32** 답 $\cup$, $\cup$, U, U

33 답 $\cap$, $\cup$, $\cap$, $\varnothing$, B

34 $(A\cap B)\cup(A^C\cup B^C)=(A\cap B)\cup(A\cap B)^C$
$=U$ 답 U

베이직쎈 BOX

35 $A-(A\cup B^{C})=A\cap(A\cup B^{C})^{C}$
$=A\cap(A^{C}\cap B)$
$=(A\cap A^{C})\cap B$
$=\varnothing\cap B$
$=\varnothing$ 답 $\varnothing$

개념 14 유한집합의 원소의 개수

본책 36쪽

36 답 2, 2, B

37 답 6, 5, A

38 답 2, $A\cap B$, 7, $A\cup B$

39 답 6 3, 2, 6

40 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=6+8-3=11$ 답 11

41 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$
$=2+4=6$ 답 6

$A\cap B=\varnothing$이면 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

42 답 1 $A\cup B$, 3, 6, 1

43 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=7+6-10=3$ 답 3

44 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=8+3-9=2$ 답 2

45 답 10 A, 10, 10

46 $n(B^{C})=n(U)-n(B)=20-13=7$ 답 7

47 $n((A\cap B)^{C})=n(U)-n(A\cap B)$
$=20-5=15$ 답 15

48 답 5 A, 10, 5

49 $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=13-5=8$ 답 8

50 $n(A^{C})=n(U)-n(A)=30-18=12$ 답 12

51 $n(B^{C})=n(U)-n(B)=30-11=19$ 답 19

52 $n(A^{C}\cap B^{C})=n((A\cup B)^{C})$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=30-22=8$ 답 8

53 답 11 B, 11, 11

54 $n(B\cap A^{C})=n(B-A)$
$=n(A\cup B)-n(A)$
$=22-18=4$ 답 4

55 답 29
20, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cup B$, 20, 6, 29, 29

56 음악 동아리에 가입한 학생의 집합을 A, 미술 동아리에 가입한 학생의 집합을 B라 하면
$n(A)=12$, $n(B)=16$, $n(A\cap B)=9$

음악 동아리와 미술 동아리에 모두 가입한 학생의 집합

음악 동아리 또는 미술 동아리에 가입한 학생의 집합은 $A\cup B$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=12+16-9=19$
따라서 구하는 학생 수는 19이다. 답 19

57 A 문제를 맞힌 학생의 집합을 A, B 문제를 맞힌 학생의 집합을 B라 하면
$n(A)=18$, $n(B)=22$, $n(A\cup B)=31$

A 문제 또는 B 문제를 맞힌 학생의 집합

A 문제와 B 문제를 모두 맞힌 학생의 집합은 $A\cap B$이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=18+22-31=9$
따라서 구하는 학생 수는 9이다. 답 9

58 빨간색을 좋아하는 학생의 집합을 A, 파란색을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면
$n(A)=8$, $n(B)=13$, $n(A\cup B)=16$

빨간색 또는 파란색을 좋아하는 학생의 집합

빨간색과 파란색을 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=8+13-16=5$
따라서 구하는 학생 수는 5이다. 답 5

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 38쪽

01 $A-B^{C}=A\cap(B^{C})^{C}=A\cap B$ 답 ③

02 ② $\varnothing^{C}=U$이므로 $A\subset\varnothing^{C}$
③ $A-U^{C}=A\cap(U^{C})^{C}=A\cap U=A$
④ $A^{C}\cap B=B\cap A^{C}=B-A$
⑤ $(A\cap\varnothing)\cup U=\varnothing\cup U=U$
답 ⑤

다른 풀이 ③ $A-U^{C}=A-\varnothing=A$

03 $(B\cap U)-A^{C}=B-A^{C}=B\cap(A^{C})^{C}$
$=B\cap A=\{4, 8\}$
따라서 $(B\cap U)-A^{C}$의 모든 원소의 합은
$4+8=12$ 답 12

04 ④ $A\subset B$, $A\neq B$이므로 $B-A\neq\varnothing$ 답 ④

05 $A-B=A$이면 $A\cap B=\varnothing$

두 집합 A, B는 서로소이다.

① $A\not\subset B$
② $A\cup B\neq B$
④ $B\subset A^{C}$
답 ③, ⑤

06 $A^C \subset B^C$이면　　$B \subset A$
① $A \cap B = B$
② $(A \cup B) \cap B = A \cap B = B$
③ $(A \cap B) \cup B = B \cup B = B$
④ $A \cap (A \cup B) = A \cap A = A$
⑤ $(A \cup B) \cap (A \cap B) = A \cap B = B$
답 ④

07 $A \cap X = A$이므로　　$A \subset X$
$B \cup X = B$이므로　　$X \subset B$
$\therefore A \subset X \subset B$
따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중에서 a, b, c를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
$2^{5-3} = 2^2 = 4$　답 4

08 $(A \cup B) \cap X = X$이므로　　$X \subset (A \cup B)$
이때 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$이므로 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 5, 7\}$의 부분집합의 개수와 같다.
$\therefore 2^5 = 32$　답 32

09 $A \cap X = X$이므로　　$X \subset A$
$(A - B) \cup X = X$이므로　　$(A - B) \subset X$
$\therefore (A - B) \subset X \subset A$
이때 $A - B = \{3\}$이므로 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 3, 4, 9\}$의 부분집합 중에서 3을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.
$\therefore 2^{4-1} = 2^3 = 8$　답 8

10 $(B - A)^C = (B \cap A^C)^C$
$= B^C \cup (A^C)^C$
$= B^C \cup A$
$= A \cup B^C$　답 ⑤

11 $A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$
$A = \{2, 4, 6, 9, 10\}$, $A - B = \{4, 6, 10\}$에서
$A \cap B = A - (A - B) = \{2, 9\}$
$\therefore A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$
$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
따라서 $A^C \cup B^C$의 원소의 개수는 8이다.　답 8

12 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$이고
$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C = \{5\}$이므로
$A \cup B = \{1, 3, 7, 9\}$
이때 $A = \{1, 3, 7\}$이므로 집합 B의 개수는 집합 $\{1, 3, 7, 9\}$의 부분집합 중에서 9를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.
$\therefore 2^{4-1} = 2^3 = 8$　답 8

13 $(A \cap B)^C \cap B = B \cap (A \cap B)^C$
$= B - (A \cap B)$
$= B - A = \{1, 3, 7\}$
따라서 $(A \cap B)^C \cap B$의 원소의 개수는 3이다.　답 ①

베이직쎈 BOX

$B \cap (A - B) = \varnothing$이므로
$B - (A - B) = B$

$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$

$B \cap (A^C \cup B^C)$
$= B \cap (A \cap B)^C$
$= B - (A \cap B)$

$9 \in (A \cup B)$, $9 \notin A$이므로
$9 \in B$

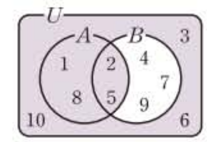
$A \subset B$일 때,
$A \cap B = A$이므로
$n(A \cap B) = n(A)$

$n(A \cap B)$가 최소가 되려면 $n(A \cup B)$가 최대가 되어야 하므로 $A \cup B = U$이어야 한다.

14 $(A \cup B^C) \cap (A - B^C)^C = (A \cup B^C) \cap (A \cap B)^C$
$= (A \cup B^C) \cap (A^C \cup B^C)$
$= (A \cap A^C) \cup B^C$
$= \varnothing \cup B^C = B^C$　답 ②

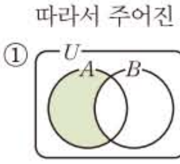
15 $A \cup \{(A - B)^C \cap B\}$
$= A \cup \{(A \cap B^C)^C \cap B\}$
$= A \cup \{(A^C \cup B) \cap B\}$
$= A \cup \{(A^C \cap B) \cup (B \cap B)\}$
$= A \cup (B - A) \cup B$
$= A \cup B$
따라서 $A \cup B = B$이므로　　$A \subset B$　답 ①
다른 풀이 $A \cup \{(A - B)^C \cap B\}$
$= A \cup \{B - (A - B)\}$
$= A \cup B$

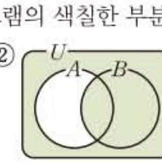
16 집합 $A \cup B^C$는 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠한 부분과 같으므로

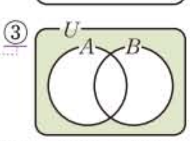


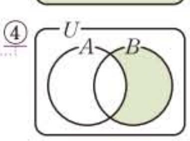
$A \cup B^C$
$= \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10\}$
따라서 구하는 원소의 합은
$1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 10 = 35$　답 35
다른 풀이 $A = \{1, 2, 5, 8\}$, $B^C = \{1, 3, 6, 8, 10\}$이므로
$A \cup B^C = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10\}$

17 ⑤ $(A \cup B) \cap (A \cap B)^C = (A \cup B) - (A \cap B)$
따라서 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분과 같다.

①


②


③


④


답 ⑤

18 $B - (A \cup C)^C = B \cap (A \cup C)$　답 ⑤

19 두 집합 A, B가 서로소이므로　　$A \cap B = \varnothing$
$\therefore n(A \cap B) = 0$
$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
$= 13 + 9 = 22$　답 ②

20 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$에서
$30 = 16 + n(B) - 7$　　$\therefore n(B) = 21$　답 21

21 $A \subset B$일 때 $n(A \cap B)$가 최대이므로
$M = n(A \cap B) = n(A) = 14$
$A \cup B = U$일 때 $n(A \cap B)$가 최소이므로
$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$에서
$m = 14 + 22 - 30 = 6$
$\therefore M + m = 20$　답 20

22 $n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=31-14=17$
$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)=31-23=8$
$\therefore n(A-B)+n(B-A)=17+8=25$ 답 ④

23 $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$
이때
$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=8+11-15=4$$
이므로
$$n(A^C\cup B^C)=n(U)-n(A\cap B)=20-4=16$$
답 16

24 $n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
이때 $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$에서
$$n(A\cap B)=n(B)-n(B-A)=21-14=7$$
이므로
$$n(A\cap B^C)=n(A)-n(A\cap B)=18-7=11$$
답 11

25 제주도를 여행해 본 회원의 집합을 A, 독도를 여행해 본 회원의 집합을 B라 하면
$$n(A)=22,\ n(B)=14,\ n(A\cup B)=28$$
제주도와 독도를 모두 여행해 본 회원의 집합은 $A\cap B$이므로
$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=22+14-28=8$$
따라서 구하는 회원 수는 8이다. 답 ③

26 나은이네 반 학생 전체의 집합을 U, 장미를 좋아하는 학생의 집합을 A, 백합을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면
$$n(U)=32,\ n(A)=15,$$
$$n(B)=20,\ n(A\cap B)=9$$
장미와 백합 중 어느 것도 좋아하지 않는 학생의 집합은 $A^C\cap B^C$이므로
$$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=32-n(A\cup B) \quad \cdots\cdots ㉠$$
이때
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=15+20-9=26$$
이므로 ㉠에서 구하는 학생 수는
$$32-26=6$$
답 6

27 A 영화를 본 학생의 집합을 A, B 영화를 본 학생의 집합을 B라 하면
$$n(A)=17,\ n(B)=16,\ n(A\cap B)=7$$
A 영화만 본 학생의 집합은 $A-B$, B 영화만 본 학생의 집합은 $B-A$이므로
$$n(A-B)+n(B-A)=\{n(A)-n(A\cap B)\}+\{n(B)-n(A\cap B)\}=(17-7)+(16-7)=19$$
따라서 구하는 학생 수는 19이다. 답 ⑤

베이직쎈 BOX

공집합은 모든 집합과 서로소이다.

$x^2-9=0$에서 $x^2=9 \quad \therefore x=\pm3$

분배법칙
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

전체집합 U에서 집합 $A-B$의 원소를 제외한다.

① $A\cup U=U$, $A\cap U=A$
② $(A^C)^C=A$
③ $A-B=A\cap B^C$

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 42쪽

01 전략 $A\cap B$ → 두 집합 A와 B에 공통으로 속하는 원소로 이루어진 집합

풀이 ① $B=\{-2, -1, 0\}$이면
$A\cap B=\{-2, -1, 0\}$
② $B=\{-2, 1, 3\}$이면 $A\cap B=\{-2, 1\}$
③ $B=\{-1, 0, 1\}$이면 $A\cap B=\{-1, 0, 1\}$
④ $B=\{-1, 1, 3\}$이면 $A\cap B=\{-1, 1\}$
⑤ $B=\{0, 1, 3\}$이면 $A\cap B=\{0, 1\}$
답 ④

02 전략 집합 $\{3, 5, 7\}$과의 교집합이 공집합인 집합을 찾는다.

풀이 ㄱ. $\varnothing\cap\{3, 5, 7\}=\varnothing$
ㄴ. $\{2, 5, 9\}\cap\{3, 5, 7\}=\{5\}$
ㄷ. 주어진 집합은 $\{2, 4, 6, \cdots\}$이므로
$\{2, 4, 6, \cdots\}\cap\{3, 5, 7\}=\varnothing$
ㄹ. 주어진 집합은 $\{-3, 3\}$이므로
$\{-3, 3\}\cap\{3, 5, 7\}=\{3\}$
ㅁ. 주어진 집합은 $\{1, 2, 4\}$이므로
$\{1, 2, 4\}\cap\{3, 5, 7\}=\varnothing$
이상에서 집합 $\{3, 5, 7\}$과 서로소인 집합은 ㄱ, ㄷ, ㅁ의 3개이다. 답 ③

03 전략 분배법칙을 이용하여 주어진 집합을 변형한다.

풀이 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$=\{a, b, c, d\}\cup\{a, c, e\}$
$=\{a, b, c, d, e\}$
답 ⑤

04 전략 $A-B$ → 집합 A에서 집합 B의 원소를 제외한다.

풀이 $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{3, 6\}$이므로
$A-B=\{2, 5, 7\}$
$\therefore (A-B)^C=\{1, 3, 4, 6, 8\}$
답 ④

05 전략 $A\cap B=A-(A-B)$임을 이용한다.

풀이 $A=\{2, 5, 8, a\}$, $A-B=\{5\}$이므로
$A\cap B=\{2, 5, 8, a\}-\{5\}$
$=\{2, 8, a\}$
이때 $B=\{2, 6, b\}$이므로
$a=6,\ b=8$
따라서 $A=\{2, 5, 6, 8\}$, $B=\{2, 6, 8\}$이므로
$B-A=\varnothing$, $A\cap B=\{2, 6, 8\}$,
$A\cup B=\{2, 5, 6, 8\}$
답 ⑤

06 전략 집합의 연산의 성질을 이용하여 주어진 집합을 간단히 한다.

풀이 ② $A^C\cap B=B\cap A^C=B-A$
③ $(U\cap B)-A=B-A$
④ $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A=A\cap B^C=A-B$
⑤ $(A^C\cap U)\cap B=A^C\cap B=B\cap A^C=B-A$
답 ④

베이직쎈 BOX

07 전략 각 집합을 주어진 연산에 대입한 후 집합의 연산의 성질을 이용하여 간단히 한다.

풀이 ① $A \circledcirc U=(A\cap U)\cup A^c=A\cup A^c=U$

② $U \circledcirc A=(U\cap A)\cup U^c=A\cup\varnothing=A$

③ $A \circledcirc \varnothing=(A\cap\varnothing)\cup A^c=\varnothing\cup A^c=A^c$

④ $U \circledcirc \varnothing=(U\cap\varnothing)\cup U^c=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

⑤ $\varnothing \circledcirc U=(\varnothing\cap U)\cup\varnothing^c=\varnothing\cup U=U$

답 ②

> ① $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$
> ② $U^c=\varnothing$, $\varnothing^c=U$
> ③ $A\cup A^c=U$, $A\cap A^c=\varnothing$

08 전략 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타내어 두 집합 사이의 포함 관계를 구한다.

풀이 $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $B=\{1, 3, 9\}$이므로

$B\subset A$

ㄱ. $A\cap B=B$

ㄴ. $A-B=\{2, 6, 18\}$이므로 $A-B\neq A$

ㄷ. $A\cup B=A$이므로 $(A\cup B)\subset A$

ㄹ. $A^c\cap B=B-A=\varnothing$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

> 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다.
> ➡ $A\subset A$

09 전략 집합의 연산 법칙과 연산의 성질을 이용하여 주어진 집합을 간단히 한다.

풀이 $A\subset(A\cup B)$이므로

$(A\cup B)\cap A=A$

③ $A-(A\cap B)=A\cap(A\cap B)^c$
$=A\cap(A^c\cup B^c)$
$=(A\cap A^c)\cup(A\cap B^c)$
$=\varnothing\cup(A-B)$
$=A-B$

④ $(A\cup B)-A=(A\cup B)\cap A^c$
$=(A\cap A^c)\cup(B\cap A^c)$
$=\varnothing\cup(B-A)$
$=B-A$

⑤ $(A\cup B)-(B-A)=(A\cup B)-(B\cap A^c)$
$=(A\cup B)\cap(B\cap A^c)^c$
$=(A\cup B)\cap(B^c\cup A)$
$=A\cup(B\cap B^c)$
$=A\cup\varnothing$
$=A$

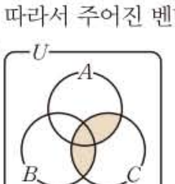
답 ⑤

10 전략 각 집합을 벤다이어그램으로 나타낸 후 주어진 벤다이어그램과 비교한다.

풀이 ② $(A^c\cup B^c)\cap C=(A\cap B)^c\cap C=C\cap(A\cap B)^c$
$=C-(A\cap B)$

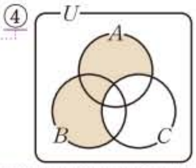
따라서 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분과 같다.

> $(A^c\cap B^c)\cap C$
> $=(A\cup B)^c\cap C$
> $=C\cap(A\cup B)^c$
> $=C-(A\cup B)$

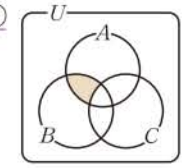
①


③


> $(A\cup B)\cap C^c$
> $=(A\cup B)-C$

④


> $(A\cap B)\cap C^c$
> $=(A\cap B)-C$

⑤


답 ②

11 전략 집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 ① $n(A^c)=n(U)-n(A)=42-26=16$

② $n(A\cap B)=n(B)-n(B-A)=19-7=12$

③ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=26+19-12=33$

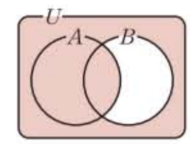
④ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=26-12=14$

⑤ $n(A\cup B^c)=n(A)+n(B^c)-n(A\cap B^c)$
$=n(A)+\{n(U)-n(B)\}-n(A-B)$
$=26+(42-19)-14=35$

답 ⑤

> $n(B-A)$
> $=n(B)-n(A\cap B)$
> 에서
> $n(A\cap B)$
> $=n(B)-n(B-A)$

다른 풀이 ⑤ 집합 $A\cup B^c$는 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠한 부분과 같으므로



$A\cup B^c=(B-A)^c$

$\therefore n(A\cup B^c)=n((B-A)^c)$
$=n(U)-n(B-A)$
$=42-7=35$

> $A\cup B^c=(A^c\cap B)^c$
> $=(B-A)^c$

12 전략 주어진 조건을 집합을 이용하여 나타낸다.

풀이 수학을 좋아하는 학생의 집합을 A, 영어를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(A)=21$, $n(B)=18$, $n(A\cup B)=33$

수학만 좋아하는 학생의 집합은 $A-B$이므로

$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$
$=33-18=15$

따라서 구하는 학생 수는 15이다. 답 ①

> 수학과 영어 중 적어도 한 과목을 좋아하는 학생의 집합

13 전략 $P\subset X\subset Q$를 만족시키는 집합 X의 개수는 Q의 부분집합 중에서 P의 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

풀이 $A\cap B=\{a, e\}$, $A\cup B=\{a, b, c, d, e, i, o, u\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{a, b, c, d, e, i, o, u\}$의 부분집합 중에서 a, e를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{8-2}=2^6=64$ 답 64

14 전략 주어진 조건을 만족시키도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타낸다.

풀이 두 집합 A, B가 서로소이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

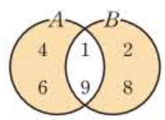
$k\le5$

따라서 k의 최댓값은 5이다. 답 5

베이직쎈 BOX

15 전략 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타낸다.

풀이 집합 $(A-B)\cup(B-A)$는 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠한 부분과 같고, $A=\{1, 4, 6, 9\}$이므로



$A-B=\{4, 6\}$,

$B-A=\{2, 8\}$ ···➊

즉 $A\cap B=\{1, 9\}$이므로

$B=\{1, 2, 8, 9\}$ ···➋

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$1+2+8+9=20$ ···➌

답 20

단계	채점 기준	비율
➊	집합 $A-B$, $B-A$를 구할 수 있다.	50 %
➋	집합 B를 구할 수 있다.	30 %
➌	집합 B의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

16 전략 $a\in(A\cap B)$이면 $a\in A$, $a\in B$임을 이용한다.

풀이 $A\cap B=\{-2\}$이므로

$-2\in A$, $-2\in B$

$-2\in A$에서 $4-2a-6=0$

$2a=-2$ $\therefore a=-1$

$-2\in B$에서 $4-6+b=0$

$\therefore b=2$ ···➊

$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{-2, 3\}$ ···➋

$x^2+3x+2=0$에서 $(x+1)(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

$\therefore B=\{-2, -1\}$ ···➌

$\therefore A\cup B=\{-2, -1, 3\}$ ···➍

답 $\{-2, -1, 3\}$

-2가 방정식 $x^2+ax-6=0$의 해이다.

-2가 방정식 $x^2+3x+b=0$의 해이다.

단계	채점 기준	비율
➊	a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
➋	집합 A를 구할 수 있다.	25 %
➌	집합 B를 구할 수 있다.	25 %
➍	$A\cup B$를 구할 수 있다.	20 %

17 전략 먼저 집합 B를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $2\cdot(-1)-1=-3$, $2\cdot0-1=-1$, $2\cdot1-1=1$, $2\cdot2-1=3$, $2\cdot3-1=5$이므로

$B=\{-3, -1, 1, 3, 5\}$ ···➊

이때 $B\cap X=X$이므로 $X\subset B$

$(B-A)\cup X=X$이므로 $(B-A)\subset X$

$\therefore (B-A)\subset X\subset B$ ···➋

$B-A=\{-3, 5\}$이므로 집합 X의 개수는 $\{-3, -1, 1, 3, 5\}$의 부분집합 중에서 -3, 5를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^{5-2}=2^3=8$ ···➌

답 8

k의 값이 -1, 0, 1, 2, 3일 때의 $2k-1$의 값을 각각 구한다.

$A\cap X=A$이면 $A\subset X$
$B\cup X=B$이면 $X\subset B$

단계	채점 기준	비율
➊	집합 B를 구할 수 있다.	30 %
➋	세 집합 $B-A$, X, B 사이의 포함 관계를 구할 수 있다.	30 %
➌	집합 X의 개수를 구할 수 있다.	40 %

18 전략 먼저 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합을 구한다.

풀이 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $(A\cup B)^C$이다.

이때

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=18+14-9=23$

이므로 구하는 원소의 개수는

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=25-23=2$

답 2

19 전략 주어진 조건을 집합을 이용하여 나타낸다.

풀이 이 고등학교 학생 전체의 집합을 U, 버스를 타고 등교하는 학생의 집합을 A, 지하철을 타고 등교하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=100$, $n(A)=58$, $n(B)=45$,

$n(A^C\cap B^C)=22$ ···➊

$\therefore n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$

$=100-22$

$=78$ ···➋

버스와 지하철 중 어느 것도 타지 않고 등교하는 학생의 집합

이때 버스와 지하철을 모두 타고 등교하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=58+45-78$

$=25$

따라서 구하는 학생 수는 25이다. ···➌

답 25

단계	채점 기준	비율
➊	주어진 조건을 집합으로 나타내고 각 집합의 원소의 개수를 구할 수 있다.	30 %
➋	$n(A\cup B)$를 구할 수 있다.	40 %
➌	버스와 지하철을 모두 타고 등교하는 학생 수를 구할 수 있다.	30 %

I. 집합과 명제

03 명제

05 명제와 조건

개념 15 명제

본책 46쪽

01 아름답다는 것의 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다. 답 ×

02 많다는 것의 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다. 답 ×

03 참인 문장이므로 명제이다. 답 ◯

04 거짓인 식이므로 명제이다. 답 ◯

05 x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다. 답 ×

06 x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다. 답 ×

07 참인 문장이므로 명제이다. 답 ◯

08 거짓인 문장이므로 명제이다. 답 ◯

09 답 참　　**10** 답 거짓

11 가장 작은 소수는 2이다. 답 거짓

12 답 참　　**13** 답 정의

14 답 정리　　**15** 답 정리

16 답 정의

개념 16 조건과 진리집합

본책 47쪽

17 참인 문장이므로 명제이다. 답 명제

18 x의 값에 따라 참, 거짓이 정해지므로 조건이다. 답 조건

19 거짓인 식이므로 명제이다. 답 명제

20 x의 값에 따라 참, 거짓이 정해지므로 조건이다. 답 조건

21 거짓인 문장이므로 명제이다. 답 명제

22 답 $\{2, 3, 5\}$　◎ 3, 3

23 답 $\{1, 2, 3, 6\}$

베이직쎈 BOX

- 한라산의 높이는 약 1947 m이고, 지리산의 높이는 약 1915 m이다.
- $a>0$일 때
  ① $|x|<a$ ➡ $-a<x<a$
  ② $|x|>a$ ➡ $x<-a$ 또는 $x>a$
- 정삼각형의 한 내각의 크기는 60°이다.
- 유리수와 순환소수의 관계
  ① 정수가 아닌 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다.
  ② 유한소수와 순환소수는 모두 유리수이다.
- 마름모 ➡ 네 변의 길이가 모두 같은 사각형
- '~이다.'의 부정은 '~가 아니다.'
- '='의 부정은 '≠'
- 네 변의 길이가 같은 사각형은 마름모이다.

24 답 $\{1, 2, 3, 4\}$

25 $x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서 주어진 조건의 진리집합은
$\{1, 2\}$ 답 $\{1, 2\}$

26 $x^2-4\ge0$에서 $(x+2)(x-2)\ge0$
$\therefore x\le-2$ 또는 $x\ge2$
따라서 주어진 조건의 진리집합은
$\{2, 3, 4, 5, 6\}$ 답 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

27 답 $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

28 $3x-1\le14$에서 $3x\le15$
$\therefore x\le5$
따라서 주어진 조건의 진리집합은
$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 답 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

29 $x^2-5x-6=0$에서 $(x+1)(x-6)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$
따라서 주어진 조건의 진리집합은
$\{6\}$ 답 $\{6\}$

30 $|x+2|<5$에서 $-5<x+2<5$
$\therefore -7<x<3$
따라서 주어진 조건의 진리집합은
$\{1, 2\}$ 답 $\{1, 2\}$

31 $x^2-7x+10<0$에서 $(x-2)(x-5)<0$
$\therefore 2<x<5$
따라서 주어진 조건의 진리집합은
$\{3, 4\}$ 답 $\{3, 4\}$

개념 17 명제와 조건의 부정

본책 48쪽

32 답 15는 3의 배수가 아니다.

33 답 $4+13\ne19$

34 답 π는 무리수가 아니다.

35 답 $3(3x^2-2)\ne9x^2+6$

36 답 직사각형은 정사각형이 아니다.

37 답 1은 소수이다.

38 답 2는 5보다 작지 않다.

39 답 x는 음수가 아니다.

베이직쎈 BOX

40 답 x는 8의 배수가 아니다.

41 답 x는 정수가 아니다.

42 답 $x \neq 4$

43 답 $x^2-1 \geq 0$

'$<$'의 부정은 '$\geq$'

44 답 x는 10보다 크지 않다.

45 답 $x^2-x-2<0$

'$\geq$'의 부정은 '$<$'

46 (1) 2와 5의 최대공약수는 1이므로 2와 5는 서로소이다.
즉 주어진 명제는 참이다.
(2) 주어진 명제의 부정은
'2와 5는 서로소가 아니다.'
(3) 명제가 참이므로 명제의 부정은 거짓이다.
답 풀이 참조

명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, 명제 p가 거짓이면 $\sim p$는 참이다.

47 (1) $\sqrt{9}=3$이므로 $\sqrt{9}$는 유리수이다.
즉 주어진 명제는 거짓이다.
(2) 주어진 명제의 부정은
'$\sqrt{9}$는 유리수이다.'
(3) 명제가 거짓이므로 명제의 부정은 참이다.
답 풀이 참조

48 (1) $21=3\times7$이므로 21은 소수가 아니다.
즉 주어진 명제는 거짓이다.
(2) 주어진 명제의 부정은
'21은 소수가 아니다.'
(3) 명제가 거짓이므로 명제의 부정은 참이다.
답 풀이 참조

49 답 (1) 참 (2) 정사각형은 마름모가 아니다.
(3) 거짓

50 답 $\{2, 4, 6, 8\}$
$\{1, 3, 5, 7\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$

전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.

51 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{1, 2, 4, 8\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{3, 5, 6, 7\}$ 답 $\{3, 5, 6, 7\}$

52 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{3, 6\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
답 $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

53 $3x-5=10$에서 $3x=15$
$\therefore x=5$
즉 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{5\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$
답 $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

54 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{6, 7, 8\}$
답 $\{6, 7, 8\}$

55 $x^2-7x+12=0$에서 $(x-3)(x-4)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=4$
즉 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{3, 4\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$
답 $\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$

56 $x^2-2x-8 \geq 0$에서 $(x+2)(x-4) \geq 0$
$\therefore x \leq -2$ 또는 $x \geq 4$
즉 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{4, 5, 6, 7, 8\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{1, 2, 3\}$ 답 $\{1, 2, 3\}$

개념 18 조건 'p 또는 q'와 'p 그리고 q'

본책 50쪽

57 답 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$\{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\cup$, $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

58 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{2, 3, 5, 7\}$, $Q=\{4, 8\}$
따라서 조건 'p 또는 q'의 진리집합은
$P \cup Q=\{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$
답 $\{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

59 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$x^2-8x+15=0$에서 $(x-3)(x-5)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=5$
$\therefore P=\{3, 5\}$
$|x-5|=1$에서 $x-5=-1$ 또는 $x-5=1$
$\therefore x=4$ 또는 $x=6$
$\therefore Q=\{4, 6\}$
따라서 조건 'p 또는 q'의 진리집합은
$P \cup Q=\{3, 4, 5, 6\}$ 답 $\{3, 4, 5, 6\}$

60 답 $\{4, 5, 6\}$
$\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $\cap$, $\{4, 5, 6\}$

베이직쎈 BOX

61 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 5, 10\}$, $Q=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

따라서 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은

$P\cap Q=\{2, 10\}$ 답 $\{2, 10\}$

62 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{6, 7, 8, 9\}$

$|x-4|<3$에서 $-3<x-4<3$

$\therefore 1<x<7$

$\therefore Q=\{2, 3, 4, 5, 6\}$

따라서 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은

$P\cap Q=\{6\}$ 답 $\{6\}$

63 답 x는 소수도 아니고 합성수도 아니다.

64 답 $x=3$ 또는 $x=7$

65 답 $x<2$ 또는 $x\geq5$

> '$a\geq b$'의 부정은 '$a<b$'
> '$a<b$'의 부정은 '$a\geq b$'

66 답 $4\leq x\leq8$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 51쪽

01 ① 3은 홀수이므로 거짓인 명제이다.

② 참인 명제이다.

③ 모든 x에 대하여 성립하므로 참인 명제이다.

> 항등식은 모든 x에 대하여 성립하므로 참인 명제이다.

④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

⑤ 거짓인 명제이다.

답 ④

02 ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

ㄴ. $54\div9=6<7$이므로 거짓인 명제이다.

ㄷ. 모든 x에 대하여 성립하므로 참인 명제이다.

ㄹ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

이상에서 참인 명제인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

03 ④ 참인 명제이다. 답 ④

04 답 ③

> 'p 또는 q'의 부정은 '$\sim p$ 그리고 $\sim q$'
> 'p 그리고 q'의 부정은 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'

05 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.

① 15는 소수가 아니다. (참)

② $11+3\geq14$ (참)

③ $(-1)^4+1\neq-1^4+1$ (참)

④ $\varnothing\not\subset\{1, 3\}$ (거짓)

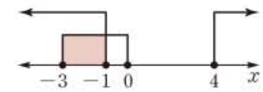
⑤ 6은 16의 약수가 아니다. (참)

답 ④

다른 풀이 명제가 참이면 그 부정은 거짓이다. 주어진 명제 ①, ②, ③, ⑤는 거짓, ④는 참이므로 명제의 부정이 거짓인 것은 ④이다.

06 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은 'p 그리고 $\sim q$'

'$\sim q$: $x\leq-1$ 또는 $x\geq4$'이므로 'p 그리고 $\sim q$'는 오른쪽 그림에서



> 두 조건 p, $\sim q$를 수직선 위에 나타낸 후 공통부분을 찾는다.

$-3\leq x\leq-1$

따라서 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은

$-3\leq x\leq-1$ 답 $-3\leq x\leq-1$

07 ㄱ. $ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$이므로

$\sim p$: $a\neq0$이고 $b\neq0$

ㄴ. $a^2+b^2=0$에서 $a=0$이고 $b=0$이므로

$\sim p$: $a\neq0$ 또는 $b\neq0$

이상에서 조건 p와 그 부정 $\sim p$가 바르게 연결된 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

> 조건 p가 참이 되게 하는 원소를 찾는다.

08 $x^2-5x-14<0$에서 $(x+2)(x-7)<0$

$\therefore -2<x<7$

따라서 조건 p의 진리집합은 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 구하는 원소의 개수는 6이다. 답 ②

09 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1, 2, 5, 10\}$

따라서 조건 $\sim p$의 진리집합은

> x는 10의 약수가 아니다.

$P^C=\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

이므로 구하는 합은

$3+4+6+7+8+9=37$ 답 37

10 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

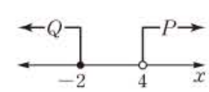
$P=\{1, 3, 5, \cdots, 45\}$, $Q=\{5, 10, 15, \cdots, 45\}$

따라서 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은

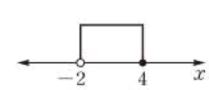
$P\cap Q=\{5, 15, 25, 35, 45\}$

답 $\{5, 15, 25, 35, 45\}$

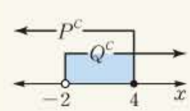
11 두 진리집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



또 조건 '$-2<x\leq4$'의 진리집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 집합은



> '$\sim p$이고 $\sim q$'



$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$ 답 ⑤

> 드모르간의 법칙
> $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$
> $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

12 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$x^3-4x=0$에서 $x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

즉 $P=\{-2, 0, 2\}$이므로 $P^C=\{-3, -1, 1, 3\}$

$x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$\therefore Q=\{-3, 2\}$

따라서 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은

$P^C\cup Q=\{-3, -1, 1, 3\}\cup\{-3, 2\}$

$=\{-3, -1, 1, 2, 3\}$ 답 ③

베이직쎈 BOX

06 명제 $p \longrightarrow q$

개념 19 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓

본책 53쪽

01 답 가정: a, b가 짝수이다.
결론: $a+b$는 짝수이다.

02 답 가정: $x=3$이다.
결론: $2x+3=9$이다.

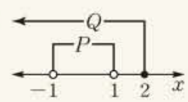
03 답 가정: a가 홀수이다.
결론: a^2은 홀수이다.

04 답 가정: $x<4$이다.
결론: $x<3$이다.

05 답 가정: x가 실수이다.
결론: $x^2>0$이다.

06 답 가정: n이 홀수이다.
결론: $n+1$은 짝수이다.

07 답 참 $-1<x<1$, $x\le2$, $\subset$, 참



08 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\mid x$는 자연수$\}$, $Q=\{x\mid x$는 정수$\}$
따라서 $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다. 답 참

09 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $Q=\{1, 2, 5, 10\}$
따라서 $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
답 거짓

10 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{-4, 4\}$, $Q=\{4\}$
따라서 $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
답 거짓

$x^2=16$에서 $x=\pm4$
$\therefore P=\{-4, 4\}$

11 답 거짓 $>$, $>$

12 [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 홀수가 아니므로 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

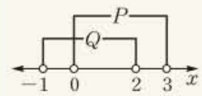
13 (홀수)×(홀수)=(홀수)이므로 주어진 명제는 참이다. 답 참

(홀수)×(홀수)=(홀수)
(홀수)×(짝수)=(짝수)
(짝수)×(짝수)=(짝수)

14 [반례] $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x\ne0$이므로 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

15 $x=1$이면 $x^2+3x-4=1^2+3\cdot1-4=0$
따라서 주어진 명제는 참이다. 답 참

16 $x=-2$이면
$(x+1)(x-2)=(-2+1)(-2-2)=4>0$
따라서 주어진 명제는 참이다. 답 참



17 두 조건 '$0<x<3$', '$-1<x<2$'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\mid 0<x<3\}$, $Q=\{x\mid -1<x<2\}$
따라서 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

18 [반례] $x=1$, $y=-2$이면 $x+y<0$이지만 $x>0$이므로 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

19 답 ○

$A\subset B$와 같은 표현
$A\subset B$ ➡ $A\cup B=B$
➡ $A\cap B=A$
➡ $A-B=\varnothing$
➡ $A\cap B^C=\varnothing$
➡ $B^C\subset A^C$
➡ $B^C-A^C=\varnothing$

20 $P\subset Q$이므로 $P\cup Q=Q$ 답 ×

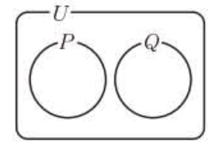
21 $P\subset Q$이므로 $P\cap Q=P$ 답 ○

22 $P\subset Q$이므로 $P-Q=\varnothing$ 답 ○

23 답 ○

24 $P\subset Q^C$이므로 $P\cap Q=\varnothing$ 답 ○

25 $P\cap Q=\varnothing$이므로 두 집합 P, Q를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
$\therefore P\cup Q\ne P$ 답 ×



26 $P\subset Q^C$이므로 $P\cap Q^C=P$ 답 ○

개념 20 '모든'이나 '어떤'이 있는 명제

본책 55쪽

27 답 참

28 [반례] $1^2=1$, $3^2=9$, $5^2=25$이고 1, 9, 25는 홀수이므로 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

29 답 참

30 8의 배수인 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

31 답 참

32 [반례] $x=\pi$이면 $x^2=\pi^2$이고 π^2은 무리수이므로 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

33 $\sqrt{x}<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

$x^2+2x+1\le0$에서
$(x+1)^2\le0$

34 $x=-1$이면 $x^2+2x+1\le0$이므로 주어진 명제는 참이다. 답 참

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

35 $x^2=x+3$, 즉 $x^2-x-3=0$에서
$x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$
따라서 주어진 명제는 참이다. 답 참

36 답 어떤 실수 x에 대하여 $x^2-10\neq0$이다.

37 답 어떤 정삼각형은 이등변삼각형이 아니다.

38 답 모든 자연수 x에 대하여 $x^2\neq4$이다.

39 답 모든 실수 x에 대하여 $|x-2|\leq0$이다.

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 56쪽

01 ④ [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 $x+1=3$으로 짝수가 아니므로 주어진 명제는 거짓이다.

답 ④

02 ④ 42는 3의 배수이지만 4의 배수가 아니다.

답 ④

3의 배수이지만 4의 배수가 아닌 것을 찾는다.

03 ㄷ. [반례] $x=-1$이면 $x^2=1>0$이지만 $x<0$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

이상에서 명제 $p \longrightarrow q$가 참인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

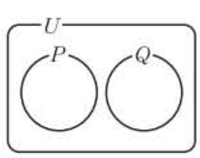
답 ㄱ, ㄴ

04 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이므로 $Q^C\subset P$

$\therefore P^C\subset Q$

답 ②

05 $P\cap Q=\varnothing$이므로 두 집합 P, Q를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



③ $P\subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 항상 참이다.

답 ③

06 ① $R\subset P$이므로 명제 $r \longrightarrow p$는 참이다.

② $R\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 참이다.

③ $R\subset P$에서 $P^C\subset R^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$는 참이다.

④ $R\subset Q$에서 $Q^C\subset R^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 참이다.

⑤ $R^C\not\subset Q^C$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.

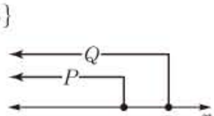
답 ⑤

'모든'이 있는 명제는 만족시키지 않는 것이 하나만 존재해도 거짓이다.

07 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x\leq a\}$, $Q=\{x|x\leq5\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a\leq5$

따라서 실수 a의 최댓값은 5이다.

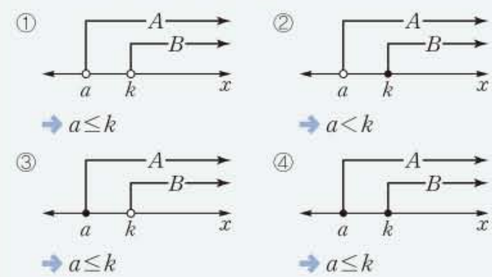
답 5

'어떤'이 있는 명제는 만족시키는 것이 하나도 존재하지 않으면 거짓이다.

베이직쎈 BOX

베쎈TIP

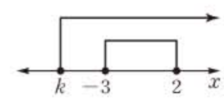
$B\subset A$가 되도록 하는 a의 값의 범위



08 주어진 명제가 참이 되려면

$\{x|-3\leq x\leq2\}\subset\{x|x\geq k\}$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서

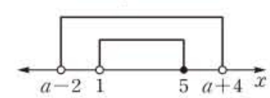


$k\leq-3$ 답 $k\leq-3$

09 주어진 명제가 참이 되려면

$\{x|1<x\leq5\}\subset\{x|a-2<x<a+4\}$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-2\leq1$, $a+4>5$

$\therefore 1<a\leq3$

답 $1<a\leq3$

$a-2\leq1$에서
$a\leq3$ $\cdots$ ㉠
$a+4>5$에서
$a>1$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $1<a\leq3$

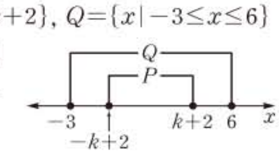
10 $|x-2|\leq k$에서 $-k\leq x-2\leq k$

$\therefore -k+2\leq x\leq k+2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-k+2\leq x\leq k+2\}$, $Q=\{x|-3\leq x\leq6\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k+2\geq-3$, $k+2\leq6$

$\therefore k\leq4$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

답 ④

$-k+2\geq-3$에서
$k\leq5$ $\cdots$ ㉠
$k+2\leq6$에서
$k\leq4$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $k\leq4$

11 ① 2는 짝수이고, 소수이다.

② 방정식 $x^2+x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4=-3<0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+1>0$이다.

③ $x\leq0$이면 $|x|+x=-x+x=0$

④ $x=3$이면 $x^2=9$

⑤ [반례] $x=1$이면 $2x-1=2\cdot1-1=1$이다.

답 ⑤

12 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

① $x-2$의 값은 -1, 0, 1, 2, 3이므로 모든 x에 대하여 $x-2<4$이다.

② $x=5$이면 $x(x-5)=0$

③ $3x-1$의 값은 2, 5, 8, 11, 14이므로 모든 x에 대하여 $3x-1\geq2$이다.

④ x^2의 값은 1, 4, 9, 16, 25이므로 $x^2<1$을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

⑤ 모든 x에 대하여 $x>0$이므로 $|x|=x$이다.

답 ④

다른 풀이 ① $x-2<4$, 즉 $x<6$이므로 모든 x에 대하여 $x-2<4$이다.
③ $3x-1\geq 2$, 즉 $x\geq 1$이므로 모든 x에 대하여 $3x-1\geq 2$이다.
④ 5 이하의 자연수 x에 대하여 $x^2\geq 1$이므로 $x^2<1$을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

13 (1) 주어진 명제의 부정은
'어떤 실수 x에 대하여 $x^2<0$이다.'
$x^2<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제의 부정은 거짓이다.
(2) 주어진 명제의 부정은
'어떤 자연수 x에 대하여 $x^2-2x-3=0$이다.'
$x=3$이면
$x^2-2x-3=3^2-2\cdot 3-3=0$
따라서 주어진 명제의 부정은 참이다.
(3) 주어진 명제의 부정은
'모든 양의 실수 x에 대하여 $x^2\geq x$이다.'
[반례] $x=\frac{1}{2}$이면 $x^2=\frac{1}{4}$이고 $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$이므로 $x^2<x$이다.
따라서 주어진 명제의 부정은 거짓이다.
(4) 주어진 명제의 부정은
'모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq 0$이다.'
$x^2+1=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제의 부정은 참이다.
답 (1) 거짓 (2) 참 (3) 거짓 (4) 참

이 방정식의 해를 구하여 자연수인 해가 있는지 확인한다.

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 58쪽

01 전략 명제 ➔ 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식
풀이 ①, ③ 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
②, ④ x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
⑤ $x-1>x-3$에서 $-1>-3$이므로 x의 값에 관계없이 참인 명제이다.
답 ⑤

02 전략 각 명제의 부정을 구하고 참, 거짓을 판별한다.
풀이 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.
ㄱ. 0은 자연수가 아니다. (참)
ㄴ. π는 유리수이다. (거짓)
ㄷ. 직사각형은 평행사변형이 아니다. (거짓)
ㄹ. 16은 3의 배수가 아니다. (참)
이상에서 부정이 참인 명제는 ㄱ, ㄹ이다.
답 ③

베이직쎈 BOX

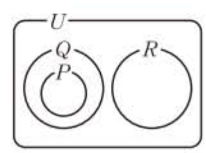
03 전략 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.
풀이 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{2, 3, 5, 7, 11\}$
이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은
$P^C=\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$
답 ④

04 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은 $P\cap Q$이다.
풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$,
$Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
따라서 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은
$P\cap Q=\{4, 8, 12, 24\}$
이므로 구하는 원소의 개수는 4이다.
답 ③

05 전략 반례를 찾아 명제가 거짓임을 보인다.
풀이 ① [반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x\neq 1$이다.
② [반례] $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $|x|+|y|\neq 0$이다.
③ $|x|<1$이면 $-1<x<1$이므로 $x^2<1$이다.
④ [반례] $x=2$, $y=-1$이면 $x+y>0$이지만 $xy<0$이다.
⑤ [반례] $x=1$, $y=1$, $z=2$이면 $(x-y)(y-z)=0$이지만 $x=y\neq z$이다.
답 ③

06 전략 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보여주는 반례는 p이지만 $\sim q$이다.
풀이 ④ $x=-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$이면 x, y가 모두 무리수이지만 $x+y=0$이므로 $x+y$는 유리수이다.
답 ④

07 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$가 참이다.
풀이 주어진 조건을 만족시키도록 세 집합 P, Q, R를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$P\subset Q$, $P\subset R^C$, $Q\subset R^C$, $R\subset Q^C$
따라서 명제 $p \longrightarrow q$, $p \longrightarrow \sim r$, $q \longrightarrow \sim r$, $r \longrightarrow \sim q$는 모두 참이다.
그런데 $R\not\subset P$이므로 명제 $r \longrightarrow p$는 거짓이다.
답 ④

08 전략 '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'임을 이용한다.
풀이 주어진 명제의 부정은
'모든 실수 x에 대하여 $x^2+3x+4\leq 0$이다.'
답 ②

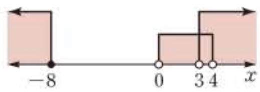
'>'의 부정은 '≤'

09 전략 두 조건 p, q에 대하여 '$\sim p$ 그리고 q'의 부정은 'p 또는 $\sim q$'이다.

풀이 '$\sim p$ 그리고 q'의 부정은

'p 또는 $\sim q$'

'$\sim q$: $x \le -8$ 또는 $x > 3$'이므로 'p 또는 $\sim q$'는 오른쪽 그림에서



$x \le -8$ 또는 $x > 0$

따라서 '$\sim p$ 그리고 q'의 부정은

$x \le -8$ 또는 $x > 0$

답 $x \le -8$ 또는 $x > 0$

베이직쎈 BOX

'또는'이므로 두 범위를 합한 범위를 구한다.

10 전략 두 조건 p, $\sim q$의 진리집합을 구한 후 조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합을 구한다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$|x-3| \le 5$에서

$-5 \le x-3 \le 5$

$\therefore -2 \le x \le 8$

$\therefore P=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ··· ❶

'$\sim q$: $x^2-11x+18 \le 0$'이므로 $x^2-11x+18 \le 0$에서

$(x-2)(x-9) \le 0$

$\therefore 2 \le x \le 9$

$\therefore Q^C=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ··· ❷

따라서 조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은

$P \cup Q^C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

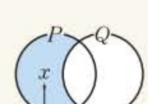
이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ ··· ❸

답 45

단계	채점 기준	비율
❶	조건 p의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❷	조건 $\sim q$의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❸	조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	40 %

11 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보여주는 반례는 집합 $P-Q$의 원소이다.



풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $Q=\{2, 3, 5, 7\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보여주는 반례는 집합 $P-Q$의 원소이다.

이때 $P-Q=\{1, 9\}$이므로 구하는 반례의 개수는 2이다.

답 2

12 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q^C \subset P$이어야 한다.

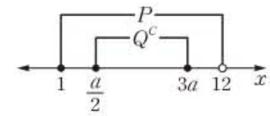
풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid 1 \le x < 12\}$, $Q=\left\{x \,\middle|\, x < \frac{a}{2}\text{ 또는 } x > 3a\right\}$

$Q^C=\left\{x \,\middle|\, \frac{a}{2} \le x \le 3a\right\}$이고, 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면

$Q^C \subset P$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$\frac{a}{2} \ge 1$, $3a < 12$

$\therefore 2 \le a < 4$

따라서 자연수 a는 2, 3이므로 구하는 합은

$2+3=5$

답 5

$\frac{a}{2} \ge 1$에서

$a \ge 2$ ··· ㉠

$3a < 12$에서

$a < 4$ ··· ㉡

㉠, ㉡에서

$2 \le a < 4$

13 전략 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c \ge 0$이려면 $a>0$, $b^2-4ac \le 0$이어야 한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $x^2+4x+10 \ge k$, 즉 $x^2+4x+10-k \ge 0$이려면 이차방정식 $x^2+4x+10-k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=2^2-(10-k) \le 0$ ··· ❶

$-6+k \le 0$

$\therefore k \le 6$ ··· ❷

따라서 실수 k의 최댓값은 6이다. ··· ❸

답 6

단계	채점 기준	비율
❶	이차방정식의 판별식을 이용할 수 있다.	50 %
❷	k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸	k의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

베이직쎈 BOX

I. 집합과 명제

04 명제의 역과 대우

07 명제의 역과 대우

개념 21 명제의 역과 대우

본책 60쪽

01 답 역　　**02** 답 대우

03 답 역　　**04** 답 대우

05 답 역　　**06** 답 대우

07 역: $x=1$이면 $x^2=1$이다. (참)
대우: $x\neq1$이면 $x^2\neq1$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이다.
답 풀이 참조

08 역: $x>0$이면 $x>1$이다. (거짓)
[반례] $x=\frac{1}{2}$이면 $x>0$이지만 $x<1$이다.
대우: $x\le0$이면 $x\le1$이다. (참)
답 풀이 참조

09 역: $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)
대우: $x\neq0$이고 $y\neq0$이면 $xy\neq0$이다. (참)
답 풀이 참조

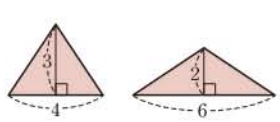
'$x=0$ 또는 $y=0$'의 부정

10 역: 실수 a, b에 대하여 $a>0$ 또는 $b>0$이면 $a+b>0$이다. (거짓)
[반례] $a=1$, $b=-2$이면 $a+b=-1<0$이다.
대우: 실수 a, b에 대하여 $a\le0$이고 $b\le0$이면 $a+b\le0$이다. (참)
답 풀이 참조

'$a>0$ 또는 $b>0$'의 부정

11 역: 두 삼각형의 넓이가 같으면 두 삼각형이 합동이다. (거짓)
[반례] 다음 그림의 두 삼각형은 넓이는 같지만 합동은 아니다.

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot3=6$
$\frac{1}{2}\cdot6\cdot2=6$



대우: 두 삼각형의 넓이가 같지 않으면 두 삼각형이 합동이 아니다. (참)
답 풀이 참조

12 역: x가 6의 약수이면 x는 12의 약수이다. (참)
대우: x가 6의 약수가 아니면 x는 12의 약수가 아니다. (거짓)
[반례] $x=4$이면 x는 6의 약수는 아니지만 12의 약수이다.
답 풀이 참조

개념 22 삼단논법

본책 61쪽

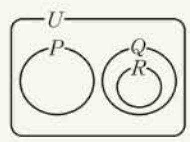
13 답 q　　**14** 답 q

15 답 r　　r, r, r

16 명제 $q\longrightarrow\sim p$가 참이므로 그 대우 $p\longrightarrow\sim q$도 참이다.
따라서 두 명제 $r\longrightarrow p$, $p\longrightarrow\sim q$가 모두 참이므로 명제 $r\longrightarrow\sim q$도 참이다.
답 $\sim q$

17 명제 $r\longrightarrow\sim q$가 참이므로 그 대우 $q\longrightarrow\sim r$도 참이다.
따라서 두 명제 $q\longrightarrow\sim r$, $\sim r\longrightarrow p$가 모두 참이므로 명제 $q\longrightarrow p$도 참이다.
답 p

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면 두 명제 $p\longrightarrow\sim q$, $r\longrightarrow q$가 참이므로
$P\subset Q^C$, $R\subset Q$
따라서 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



18 명제 $p\longrightarrow\sim q$가 참이므로 그 대우 $q\longrightarrow\sim p$도 참이다.
답 ○

19 명제 $r\longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q\longrightarrow\sim r$도 참이다.
답 ○

20 답 ×　　**21** 답 ×

22 두 명제 $r\longrightarrow q$, $q\longrightarrow\sim p$가 모두 참이므로 명제 $r\longrightarrow\sim p$도 참이다.
답 ○

23 답 ×　　**24** 답 ×

개념 23 충분조건과 필요조건

본책 62쪽

25 (1) $p\longrightarrow q$: 평행사변형이면 직사각형이다. (거짓)
(2) $q\longrightarrow p$: 직사각형이면 평행사변형이다. (참)
(3) $p \not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
답 (1) 거짓 (2) 참 (3) 필요조건

26 (1) $p\longrightarrow q$: $x=0$이고 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)
(2) $q\longrightarrow p$: $xy=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다. (거짓)
[반례] $x=0$, $y=1$이면 $xy=0$이지만 $y\neq0$이다.
(3) $p\Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 충분조건

27 (1) $p\longrightarrow q$: $x^2+y^2=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (참)
(2) $q\longrightarrow p$: $|x|+|y|=0$이면 $x^2+y^2=0$이다. (참)
(3) $p\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
답 (1) 참 (2) 참 (3) 필요충분조건

04 명제의 역과 대우

28 (1) $x-1=2$에서 $\quad x=3$

$\therefore P=\{3\}$

$(x+2)(x-3)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=3$

$\therefore Q=\{-2,\ 3\}$

답 (1) $P=\{3\}$, $Q=\{-2,\ 3\}$
(2) $P\subset Q$ (3) 충분조건

29 답 (1) $P=\{x|x>0\}$, $Q=\{x|x\geq 1\}$ (2) $Q\subset P$
(3) 필요조건

30 (1) $x^2=9$에서 $\quad x=\pm 3$

$\therefore P=\{-3,\ 3\}$

$|x|=3$에서 $\quad x=\pm 3$

$\therefore Q=\{-3,\ 3\}$

답 (1) $P=\{-3,\ 3\}$, $Q=\{-3,\ 3\}$
(2) $P=Q$ (3) 필요충분조건

31 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다. 답 충분조건

32 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다. 답 필요조건

33 $x^2=4$에서 $\quad x=\pm 2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다. 답 충분조건

34 $|x|<1$에서 $\quad -1<x<1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $Q\subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다. 답 필요조건

35 $|x|\geq 4$에서 $\quad x\leq -4$ 또는 $x\geq 4$

$x^2\geq 16$에서 $\quad x\leq -4$ 또는 $x\geq 4$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=Q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 필요충분조건

36 답 4 $\quad p$, q, $\subset$, 4

37 p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 명제 $p \longrightarrow q$가 참이어야 하므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P\subset Q$이어야 한다.

따라서 $x-2=0$, 즉 $x=2$를 $x^2-5x+a=0$에 대입하면

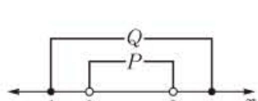
$4-10+a=0 \quad \therefore a=6$ 답 6

38 답 $a\leq 2$ $\quad p$, q, $\subset$, $\leq$

39 p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 명제 $p \longrightarrow q$가 참이어야 하므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P\subset Q$이어야 한다.

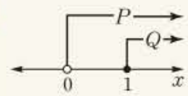
따라서 오른쪽 그림에서

$a\geq 3$



답 $a\geq 3$

베이직쎈 BOX



$p \longrightarrow q$: x가 무리수이면 x는 실수이다. (참)
$q \longrightarrow p$: x가 실수이면 x는 무리수이다. (거짓)

$p \longrightarrow q$: x가 8의 약수이면 x는 4의 약수이다. (거짓)
$q \longrightarrow p$: x가 4의 약수이면 x는 8의 약수이다. (참)

$x=0$이면
$x^2-x=0^2-0=0$

$|x|+|y|=0$이면
$x=y=0$
$\therefore xy=0$

$x<0$이면 $|x|>0$이므로
$|x|>x$

$x^2-2x+1=0$에서
$(x-1)^2=0$
$\therefore x=1$

40 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 명제 $q \longrightarrow p$가 참이어야 하므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $Q\subset P$이어야 한다.

따라서 $x=3$을 $x^2-ax+12=0$에 대입하면

$9-3a+12=0 \quad \therefore a=7$ 답 7

41 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 명제 $q \longrightarrow p$가 참이어야 하므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $Q\subset P$이어야 한다.

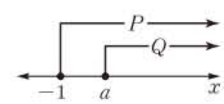
따라서 $2x=4$, 즉 $x=2$를 $2x^2-x+a=0$에 대입하면

$8-2+a=0 \quad \therefore a=-6$ 답 -6

42 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 명제 $q \longrightarrow p$가 참이어야 하므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $Q\subset P$이어야 한다.

따라서 오른쪽 그림에서

$a\geq -1$

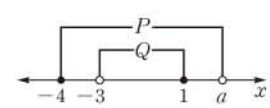


답 $a\geq -1$

43 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 명제 $q \longrightarrow p$가 참이어야 하므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $Q\subset P$이어야 한다.

따라서 오른쪽 그림에서

$a>1$



답 $a>1$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 64쪽

01 ① 역: x가 9의 배수이면 x는 3의 배수이다. (참)

② 역: $x=0$이면 $x^2-x=0$이다. (참)

③ 역: $x>y$이면 $x^2>y^2$이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=-2$이면 $x>y$이지만 $x^2<y^2$이다.

④ 역: $|x|+|y|=0$이면 $xy=0$이다. (참)

⑤ 역: $x<0$이면 $|x|>x$이다. (참)

답 ③

02 ㄱ. 역: $x^2-2x+1=0$이면 $x=1$이다. (참)

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

ㄴ. 역: $x+y>2$이면 $x>1$이고 $y>1$이다. (거짓)

[반례] $x=4$, $y=-1$이면 $x+y>2$이지만 $y<1$이다.

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

ㄷ. 역: $x+z=y+z$이면 $x=y$이다. (참)

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

이상에서 역과 대우가 모두 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

03 명제 $p \longrightarrow \sim q$의 역은 $\quad \sim q \longrightarrow p$

따라서 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우인 $\sim p \longrightarrow q$도 참이다. 답 ②

04 주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$x=2$이면 $x^2+ax-8=0$이다.'
도 참이다.
따라서 $x=2$를 $x^2+ax-8=0$에 대입하면
$4+2a-8=0 \quad \therefore a=2$ 답 2

05 주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$a \le k$이고 $b \le 3$이면 $a+b \le 7$이다.'
도 참이다.
$a \le k$, $b \le 3$에서 $a+b \le k+3$이므로
$k+3 \le 7 \quad \therefore k \le 4$
따라서 k의 최댓값은 4이다. 답 4

06 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
또 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.
즉 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이고 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $\sim r \longrightarrow \sim q$이다. 답 ⑤

07 ㄴ, ㄷ. 두 명제 $r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이고 그 대우 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.
이상에서 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

08 ① $x^2-1=0$에서 $\quad (x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$
$x^3-x=0$에서 $\quad x(x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
② [$q \longrightarrow p$의 반례] $x=1$, $y=-1$, $z=0$이면 $xz=yz$이지만 $x \ne y$이다.
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
③ [$q \longrightarrow p$의 반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 $x+y$는 유리수이지만 x, y는 유리수가 아니다.
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
④ $x^2 \le 0$에서 $\quad x=0$
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
⑤ [$p \longrightarrow q$의 반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x+y=0$이지만 $x \ne 0$, $y \ne 0$이다.
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다. 답 ⑤

베이직쎈 BOX

$xy>0$이면 $x \ne 0$, $y \ne 0$이므로
$x^2>0$, $y^2>0$
$\therefore x^2+y^2>0$

$x=y$이면 $xz=yz$이다. (참)

x, y가 유리수이면 $x+y$가 유리수이다. (참)

$x=0$이고 $y=0$이면 $x+y=0$이다. (참)

09 ㄱ. $ab=0$이면
$a=0$ 또는 $b=0$
$a=0$이고 $b=0 \Longrightarrow a=0$ 또는 $b=0$
따라서 $ab=0$은 $a=0$이고 $b=0$이기 위한 필요조건이다.
ㄴ. $a-b=0$이면
$a=b$
$a=0$이고 $b=0 \Longrightarrow a=b$
따라서 $a-b=0$은 $a=0$이고 $b=0$이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=0$이고 $b=0$
ㄹ. $a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0$이고 $b=0$
이상에서 '$a=0$이고 $b=0$'이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄷ, ㄹ의 2개이다. 답 2

10 ① $x^2=y^2$이면 $\quad x=y$ 또는 $x=-y$
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
② $xy<0$이면 $\quad x>0$, $y<0$ 또는 $x<0$, $y>0$
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
③ [$p \longrightarrow q$의 반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $xy<0$이다.
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
④ $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
⑤ [$q \longrightarrow p$의 반례] $x=1$, $y=1$이면 $(x+y)^2 \ge 0$이지만 $x \ne 0$이고 $y \ne 0$이다.
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
답 ④

11 p는 q이기 위한 충분조건이므로
$p \Longrightarrow q$
p는 r이기 위한 필요조건이므로
$r \Longrightarrow p$
$r \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow q$이므로
$r \Longrightarrow q$
이상에서 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

12 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로
$p \Longrightarrow \sim r$
$p \Longrightarrow \sim r$이므로
$r \Longrightarrow \sim p$
r는 q이기 위한 필요조건이므로
$q \Longrightarrow r$
$q \Longrightarrow r$이므로
$\sim r \Longrightarrow \sim q$
$q \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow \sim p$이므로
$q \Longrightarrow \sim p$
따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $\sim q \longrightarrow \sim p$이다. 답 ③

13 ㄱ. $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. $\sim r \Longrightarrow \sim q$이므로

$q \Longrightarrow r$

따라서 q는 r이기 위한 충분조건이다.
ㄷ. $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$이므로

$p \Longrightarrow r$

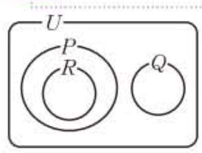
따라서 r는 p이기 위한 필요조건이다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

14 p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$
r는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset R$

$\therefore P \subset Q \subset R$ 답 ①

15 ① $P \subset R$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.
④ $Q \subset P^C$이므로 $\sim p$는 q이기 위한 필요조건이다.
⑤ $R^C \subset Q^C$이므로 $\sim r$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.
답 ⑤

16 $\sim p$는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P^C$
r는 p이기 위한 충분조건이므로 $R \subset P$
이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $P \cap Q = \varnothing$
② $P \cap R = R$
③ $P \cap R^C = P - R \neq \varnothing$
④ $Q - R = Q$
⑤ $Q^C \cup R \neq U$
답 ①

17 $x+1=0$, 즉 $x=-1$이 $x^2+ax+b=0$이기 위한 필요충분조건이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해는 -1뿐이어야 한다.
중근 $x=-1$을 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x+1)^2=0$, 즉 $x^2+2x+1=0$

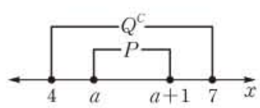
따라서 $a=2$, $b=1$이므로

$a+b=3$ 답 3

18 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $\sim p$가 q이기 위한 필요조건이므로

$Q \subset P^C$ $\therefore P \subset Q^C$

이때 $P=\{x \mid a \leq x \leq a+1\}$,
$Q^C=\{x \mid 4 \leq x \leq 7\}$이므로
오른쪽 그림에서



$a \geq 4$, $a+1 \leq 7$

$\therefore 4 \leq a \leq 6$

따라서 정수 a는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$4+5+6=15$ 답 15

19 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $\sim q$가 p이기 위한 충분조건이므로

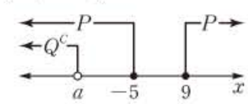
$Q^C \subset P$

$|x-2| \geq 7$에서 $x-2 \leq -7$ 또는 $x-2 \geq 7$

$\therefore x \leq -5$ 또는 $x \geq 9$

$\therefore P=\{x \mid x \leq -5$ 또는 $x \geq 9\}$

$Q=\{x \mid x \geq a\}$이므로 $Q^C=\{x \mid x < a\}$
따라서 오른쪽 그림에서



$a \leq -5$

이므로 a의 최댓값은 -5이다. 답 -5

베이직쎈 BOX

$A \cap B = \varnothing$과 같은 표현
$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A - B = A$
$\Rightarrow B - A = B$
$\Rightarrow A \subset B^C$
$\Rightarrow B \subset A^C$

$A \subset B$와 같은 표현
$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
$\Rightarrow A \cap B = A$
$\Rightarrow A - B = \varnothing$
$\Rightarrow A \cap B^C = \varnothing$
$\Rightarrow B^C \subset A^C$

자연수 k에 대하여
홀수는 $2k-1$,
짝수는 $2k$
로 나타낼 수 있다.

08 여러 가지 증명법

개념 24 명제의 증명 본책 67쪽

01 답 자연수 n에 대하여 n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.,
$2k-1$, $2k-1$, $2k^2-2k$, $2k^2-2k$, 홀수, 대우

02 주어진 명제의 대우는

'자연수 n에 대하여 n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.'

n이 짝수이면 $n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$

이때 $2k^2$은 자연수이므로 n^2은 짝수이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 답 풀이 참조

03 주어진 명제의 대우는

'두 실수 x, y에 대하여 $x<0$이고 $y<0$이면 $x+y<0$이다.'

$x<0$, $y<0$, 즉 두 실수 x, y가 음수이면 $x+y$도 음수이므로 $x+y<0$이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 답 풀이 참조

04 답 유리수, 2, 2, 2, 2, 서로소

05 $1+\sqrt{2}$가 유리수라고 가정하면

$1+\sqrt{2}=a$ (a는 유리수)

로 놓을 수 있다.
즉 $\sqrt{2}=a-1$이고 유리수끼리의 뺄셈의 결과는 유리수이므로 $a-1$은 유리수이다.
그런데 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니므로 모순이다.
따라서 $1+\sqrt{2}$는 유리수가 아니다. 답 풀이 참조

06 a, b가 모두 홀수라고 가정하면

$a=2m-1$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)

로 놓을 수 있으므로

$ab=(2m-1)(2n-1)=2(2mn-m-n)+1$

이때 $2mn-m-n$은 0 또는 자연수이므로 ab는 홀수이다.
따라서 ab가 짝수라는 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다. 답 풀이 참조

베이직쎈 BOX

개념 25 절대부등식

본책 68쪽

07 $2x+5>0$에서 $x>-\frac{5}{2}$ 답 ×

08 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 절대부등식이다. 답 ○

09 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 절대부등식이다. 답 ○

10 $-|x-7|<0$에서 $|x-7|>0$

$x=7$이면 성립하지 않으므로 절대부등식이 아니다. 답 ×

$x=7$이면 $|x-7|=0$

11 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 절대부등식이다. 답 ○

12 $x^2+1>2x$에서 $x^2-2x+1>0$

$\therefore (x-1)^2>0$

$x=1$이면 성립하지 않으므로 절대부등식이 아니다. 답 ×

$x=1$이면 $(x-1)^2=0$

13 답 2, $a-b$, $a-b$, 0, $a=b$

14 $a^2+2ab+2b^2=(a^2+2ab+b^2)+b^2$
$=(a+b)^2+b^2$

a, b가 실수이므로

$(a+b)^2\ge0$, $b^2\ge0$

$\therefore a^2+2ab+2b^2\ge0$

여기서 등호는 $a+b=0$, $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.

답 풀이 참조

15 답 $2ab$, $\ge$, $\ge$, $\ge$, $\ge$

16 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b-(a+b)$
$=2\sqrt{ab}>0$

$\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$

그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a+b}>0$이므로

$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

답 풀이 참조

개념 26 여러 가지 절대부등식

본책 69쪽

17 답 $\frac{3}{4}b^2$, $\frac{3}{4}b^2$, $\frac{3}{4}b^2$, $\ge$, 0, 0, 0, 0

18 답 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\ge$, $\ge$, $\ge$, $\ge$, 0, 0, 0

19 답 $2\sqrt{ab}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, 0, b

$\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$
$=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}$
$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$

20 답 2 　 2, 2, 1, 2

$a=\frac{1}{a}$에서 $a^2=1$
$a>0$이므로 $a=1$

21 $\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$에서 $a^2=b^2$
$a>0$, $b>0$이므로 $a=b$

따라서 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$의 최솟값은 2이다. 답 2

22 $9a>0$, $\frac{4}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$9a+\frac{4}{a}\ge2\sqrt{9a\cdot\frac{4}{a}}=12$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{2}{3}\text{일 때 성립}\right)$

$9a=\frac{4}{a}$에서 $a^2=\frac{4}{9}$
$a>0$이므로 $a=\frac{2}{3}$

따라서 $9a+\frac{4}{a}$의 최솟값은 12이다. 답 12

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 70쪽

01 주어진 명제의 대우는

'$x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다.'

$x=0$이면 y의 값에 관계없이 $xy=0$이고, $y=0$이면 x의 값에 관계없이 $xy=0$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 답 풀이 참조

02 주어진 명제의 대우는

'자연수 x, y에 대하여 xy가 홀수이면 x^2+y^2은 짝수이다.'

xy가 홀수이면 x, y가 모두 홀수이므로

(홀수)×(홀수)=(홀수)
(홀수)×(짝수)=(짝수)
(짝수)×(짝수)=(짝수)

$x=2m-1$, $y=2n-1$ (m, n은 자연수)

로 나타낼 수 있다.

$x^2+y^2=(2m-1)^2+(2n-1)^2$
$=4m^2-4m+1+4n^2-4n+1$
$=2(2m^2-2m+2n^2-2n+1)$

이때 $2m^2-2m+2n^2-2n+1$은 자연수이므로 x^2+y^2은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 답 풀이 참조

03 n이 3의 배수가 아니므로

$n=3k-1$ 또는 $n=\boxed{3k-2}$ (k는 자연수)

라 하면

(i) $n=3k-1$일 때,

$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1$
$=3(\boxed{3k^2-2k})+1$

04 명제의 역과 대우

(ii) $n=3k-2$일 때,

$$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4$$
$$=3(\boxed{3k^2-4k+1})+1$$

즉 n^2은 3으로 나누면 나머지가 $\boxed{1}$인 자연수가 되므로 n이 3의 배수가 아니면 n^2도 $\boxed{\text{3의 배수}}$가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

∴ (가) $3k-2$ (나) $3k^2-2k$ (다) $3k^2-4k+1$
(라) 1 (마) 3의 배수

답 ③

04 답 (가) $\geq$ (나) $\geq$ (다) $\geq$

05 $a\neq0$ 또는 $b\neq0$이라고 가정하자.

(i) $a\neq0$, $b=0$이면 $a^2>0$, $b^2=0$이므로 $a^2+b^2>0$

(ii) $a=0$, $b\neq0$이면 $a^2=0$, $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$

(iii) $a\neq0$, $b\neq0$이면 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$

이상에서 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\neq0$이므로 $a^2+b^2=0$이라는 가정에 모순이다.

따라서 주어진 명제는 참이다. 답 풀이 참조

06 a, b가 모두 짝수라고 가정하면

$a=2m$, $b=2n$ (m, n은 자연수)

으로 나타낼 수 있다.

이때 2는 a, b의 공약수이므로 a, b가 서로소라는 가정에 모순이다.

따라서 주어진 명제는 참이다. 답 풀이 참조

07 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$$
$$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$$
$$=(\boxed{bx-ay})^2\geq0$$
$$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$$

여기서 등호는 $bx-ay=0$, 즉 $\boxed{bx=ay}$일 때 성립한다.

∴ (가) $bx-ay$ (나) $bx=ay$

답 (가) $bx-ay$ (나) $bx=ay$

참고 (가)에 $ay-bx$를 써넣어도 된다.

08 (ii) $|a|\geq|b|$일 때,

$$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$$
$$=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$$
$$=a^2-2ab+b^2-a^2+2|ab|-b^2$$
$$=2(\boxed{|ab|-ab})\geq0\ (\because\ |ab|\geq ab)$$
$$\therefore |a-b|^2\geq(|a|-|b|)^2$$

그런데 $|a-b|\geq0$, $|a|-|b|\geq0$이므로

$$|a-b|\geq|a|-|b|$$

(i), (ii)에서 $|a-b|\geq|a|-|b|$

여기서 등호는 $|a|\geq|b|$, $\boxed{ab\geq0}$일 때 성립한다.

∴ (가) $|ab|-ab$ (나) $ab\geq0$ 답 ③

09 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2a+3b\geq2\sqrt{2a\cdot3b}$$
$$=2\sqrt{6ab}$$
$$=2\sqrt{6\cdot6}=12$$

(단, 등호는 $2a=3b$일 때 성립)

따라서 $2a+3b$의 최솟값은 12이다. 답 12

10 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4a+3b+\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=4a+\frac{4}{a}+3b+\frac{3}{b}$$
$$\geq2\sqrt{4a\cdot\frac{4}{a}}+2\sqrt{3b\cdot\frac{3}{b}}$$
$$=2\cdot4+2\cdot3=14$$

(단, 등호는 $a=1$, $b=1$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 14이다. 답 ④

11 $a>0$에서 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{16}{a}\right)=a^2+16+1+\frac{16}{a^2}$$
$$=17+a^2+\frac{16}{a^2}$$
$$\geq17+2\sqrt{a^2\cdot\frac{16}{a^2}}$$
$$=17+2\cdot4=25$$

이때 등호는 $a^2=\frac{16}{a^2}$일 때 성립하므로 $a^4=16=2^4$

$a>0$이므로 $a=2$ 답 2

12 $x>5$에서 $x-5>0$, $\frac{1}{x-5}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{1}{x-5}=x-5+\frac{1}{x-5}+5$$
$$\geq2\sqrt{(x-5)\cdot\frac{1}{x-5}}+5$$
$$=2\cdot1+5=7$$

(단, 등호는 $x=6$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 7이다. 답 7

베이직쎈 BOX

$4a=\frac{4}{a}$에서 $a^2=1$
$a>0$이므로 $a=1$
$3b=\frac{3}{b}$에서 $b^2=1$
$b>0$이므로 $b=1$

$x-5=\frac{1}{x-5}$에서
$(x-5)^2=1$
$x-5>0$이므로
$x-5=1$ ∴ $x=6$

모든 실수 A에 대하여
$|A|\geq A$

$|ab|=ab$에서
$ab\geq0$

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 72쪽

01 전략 명제 $p \longrightarrow q$의 대우 ➔ $\sim q \longrightarrow \sim p$

풀이 주어진 명제의 대우는

'$xy<1$이면 $x<1$ 또는 $y<1$이다.' 답 ④

02 전략 명제와 그 대우의 참, 거짓은 일치함을 이용한다.

풀이 명제 $q \longrightarrow p$의 역은 $p \longrightarrow q$

따라서 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다. 답 ⑤

베이직쎈 BOX

03 전략 각 명제의 역을 구한 후 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ① 역: $x^2>2$이면 $x>\sqrt{2}$이다. (거짓)

[반례] $x=-2$이면 $x^2=4>2$이지만 $x<\sqrt{2}$이다.

② 역: $|x|=1$이면 $x=-1$이다. (거짓)

[반례] $x=1$이면 $|x|=1$이지만 $x\neq-1$이다.

③ 역: x가 홀수이면 x는 소수이다. (거짓)

[반례] $x=1$이면 x가 홀수이지만 x는 소수가 아니다.

④ 역: $x=y$이면 $x^2=y^2$이다. (참)

⑤ 역: $x\leq3$이면 $3x<9$이다. (거짓)

[반례] $x=3$이면 $x\leq3$이지만 $3x=9$이다.

답 ④

04 전략 두 명제 $p\longrightarrow q$, $q\longrightarrow r$가 모두 참이면 명제 $p\longrightarrow r$도 참임을 이용한다.

풀이 명제 $\sim p\longrightarrow\sim q$가 참이므로 그 대우 $q\longrightarrow p$도 참이다.

또 명제 $p\longrightarrow\sim r$가 참이므로 그 대우 $r\longrightarrow\sim p$도 참이다.

즉 두 명제 $q\longrightarrow p$, $p\longrightarrow\sim r$가 모두 참이므로 명제 $q\longrightarrow\sim r$도 참이고 그 대우 $r\longrightarrow\sim q$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $p\longrightarrow q$이다.

답 ①

05 전략 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니려면 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이어야 한다.

풀이 ① $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

$p\longrightarrow q$: x가 4의 배수이면 x는 8의 배수이다. (거짓)
$q\longrightarrow p$: x가 8의 배수이면 x는 4의 배수이다. (참)

② $\{x|0<x<2\}\subset\{x|x<5\}$

따라서 $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

③ $xy>0$이면 $x>0$, $y>0$ 또는 $x<0$, $y<0$

$x^2+y^2\neq0\Longleftrightarrow x\neq0$ 또는 $y\neq0$

따라서 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

④ $xy=|xy|$이면 $xy\geq0$

따라서 $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

⑤ $x^2=1$에서 $x=\pm1$

따라서 $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

답 ③

06 전략 두 집합 X, Y에 대하여 $X\cup Y=\varnothing$이면 $X=\varnothing$, $Y=\varnothing$임을 이용한다.

풀이 $(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$

$\Longleftrightarrow A-B=\varnothing,\ B-A=\varnothing$

$\Longleftrightarrow A\subset B,\ B\subset A$

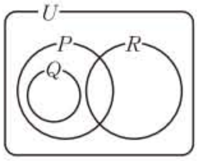
$\Longleftrightarrow A=B$

두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이고 $B\subset A$일 때, A와 B는 서로 같다고 한다.

답 ③

07 전략 주어진 조건을 만족시키도록 세 집합 P, Q, R를 벤다이어그램으로 나타낸다.

풀이 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $Q\subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $Q\subset R^C$이므로 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

08 전략 두 실수 A, B에 대하여 $A>B\Longleftrightarrow A-B>0$

풀이
$$\frac{a}{1+a}-\frac{b}{1+b}=\frac{a(1+b)-\boxed{b(1+a)}}{(1+a)(1+b)}$$
$$=\frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)}$$
$$=\frac{\boxed{a-b}}{(1+a)(1+b)}>0$$

$a>b>0$에서 $a-b>0$, $1+a>0$, $1+b>0$이므로 $\frac{a-b}{(1+a)(1+b)}>0$

$\therefore \frac{a}{1+a}>\frac{b}{1+b}$

$\therefore$ (가) $b(1+a)$ (나) $a-b$

답 ④

09 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4a+\frac{16}{a}+1\geq2\sqrt{4a\cdot\frac{16}{a}}+1$$
$$=2\cdot8+1=17$$

이때 등호는 $4a=\frac{16}{a}$일 때 성립하므로 $a^2=4$

$a>0$이므로 $a=2$

따라서 $m=17$, $n=2$이므로

$m+n=19$

답 ⑤

10 전략 명제와 그 대우의 참, 거짓은 일치함을 이용한다.

풀이 (1) 주어진 명제의 대우는

'a 또는 b가 유리수가 아니면 ab는 유리수가 아니다.'

(2) [반례] $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이면 $ab=-2$

따라서 주어진 명제의 대우는 거짓이다.

(3) 주어진 명제의 대우가 거짓이므로 주어진 명제도 거짓이다.

답 풀이 참조

11 전략 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용한다.

풀이 주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$x-5=0$이면 $x^2+kx+15=0$이다.'

도 참이다. ⋯ ❶

$x-5=0$, 즉 $x=5$를 $x^2+kx+15=0$에 대입하면

$25+5k+15=0$ $\therefore k=-8$ ⋯ ❷

답 -8

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 명제의 대우가 참임을 알 수 있다.	50 %
❷	k의 값을 구할 수 있다.	50 %

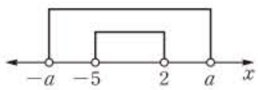
12 전략 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이면 명제 $q \longrightarrow p$가 참이다.

풀이 $-a<x<a$가 $x^2+3x-10<0$이기 위한 필요조건이므로 명제 '$x^2+3x-10<0$이면 $-a<x<a$이다.'가 참이다.

$x^2+3x-10<0$에서 $(x+5)(x-2)<0$

$\therefore -5<x<2$

즉 오른쪽 그림에서



$-a\le -5$, $a\ge 2$

$\therefore a\ge 5$

따라서 a의 최솟값은 5이다. 답 5

13 전략 명제가 참임을 직접 증명하기 어려울 때에는 명제의 대우가 참임을 보인다.

풀이 주어진 명제의 대우는

'두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$가 홀수이면 a^2+b^2은 홀수이다.'

$a+b$가 홀수이면 a가 홀수, b가 짝수이거나 a가 짝수, b가 홀수이다.

(홀수)+(홀수)=(짝수)
(홀수)+(짝수)=(홀수)
(짝수)+(짝수)=(짝수)

(i) a가 홀수, b가 짝수일 때,

a^2은 홀수, b^2은 짝수이므로 a^2+b^2은 홀수이다.

(ii) a가 짝수, b가 홀수일 때,

a^2은 짝수, b^2은 홀수이므로 a^2+b^2은 홀수이다.

(i), (ii)에서 a^2+b^2은 홀수이므로 주어진 명제의 대우는 참이다.

따라서 주어진 명제도 참이다. 답 풀이 참조

14 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $x\ne0$, $y\ne0$에서 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot y^2}=2|xy|$

(단, 등호는 $|x|=|y|$일 때 성립) ··· ❶

a가 실수일 때, $\sqrt{a^2}=|a|$

$x^2=y^2$에서 $|x|=|y|$

이때 $x^2+y^2=16$이므로

$16\ge 2|xy|$, $|xy|\le 8$

$\therefore -8\le xy\le 8$ ··· ❷

따라서 xy의 최댓값은 8, 최솟값은 -8이므로 구하는 곱은 -64이다. ··· ❸

답 -64

단계	채점 기준	비율
❶	산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	50 %
❷	xy의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸	xy의 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

베이직쎈 BOX

Ⅱ. 함수

05 함수

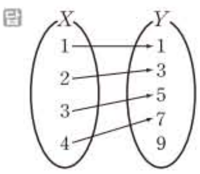
09 함수

개념 27 함수

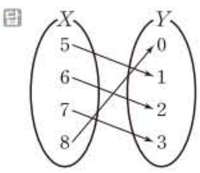
본책 76쪽

$x=1$일 때, $y=2\cdot1-1=1$
$x=2$일 때, $y=2\cdot2-1=3$
$x=3$일 때, $y=2\cdot3-1=5$
$x=4$일 때, $y=2\cdot4-1=7$

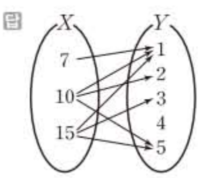
01 답



02 답



03 답



X에서 Y로의 함수
➡ X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응

04 답 ○ **05** 답 ×

X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 2, 4의 2개이므로 함수가 아니다.

06 답 × **07** 답 ○

X의 원소 2, 4에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

08 답 × **09** 답 ○

10 답 ○ 0, 1, 2, 하나, 함수이다

11 $x=-1$일 때, $y=(-1)^2+2\cdot(-1)=-1$

$x=0$일 때, $y=0^2+2\cdot0=0$

$x=1$일 때, $y=1^2+2\cdot1=3$

Y의 원소가 아니다.

따라서 X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다. 답 ×

12 $x=-1$일 때, $y=(-1)^3=-1$

$x=0$일 때, $y=0^3=0$

$x=1$일 때, $y=1^3=1$

따라서 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다. 답 ○

13 $x=-1$일 때, $y=-1-|-1|=-2$

Y의 원소가 아니다.

$x=0$일 때, $y=0-|0|=0$

$x=1$일 때, $y=1-|1|=0$

따라서 X의 원소 -1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다. 답 ×

함수 $f: X\rightarrow Y$에 대하여
① 정의역: 집합 X
② 공역: 집합 Y
③ 치역: $\{f(x)|x\in X\}$

14 답 정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{5, 6, 7, 8\}$, 치역: $\{5, 6, 7\}$

15 답 정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{5, 6, 7, 8\}$, 치역: $\{5, 6, 7, 8\}$

베이직쎈 BOX

16 답 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{a, b, c, d\}$,
치역: $\{a, b, d\}$

17 답 정의역: $\{a, b, c, d\}$, 공역: $\{1, 2, 3, 4\}$,
치역: $\{1, 3\}$

18 $x=-2$일 때, $y=-2-1=-3$
$x=-1$일 때, $y=-1-1=-2$
$x=0$일 때, $y=0-1=-1$
$x=1$일 때, $y=1-1=0$
$x=2$일 때, $y=2-1=1$
따라서 치역은 $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$이다.
답 $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$

19 $x=-2$일 때, $y=-2\cdot(-2)+3=7$
$x=-1$일 때, $y=-2\cdot(-1)+3=5$
$x=0$일 때, $y=-2\cdot0+3=3$
$x=1$일 때, $y=-2\cdot1+3=1$
$x=2$일 때, $y=-2\cdot2+3=-1$
따라서 치역은 $\{-1, 1, 3, 5, 7\}$이다.
답 $\{-1, 1, 3, 5, 7\}$

20 $x=-2$일 때, $y=(-2)^2=4$
$x=-1$일 때, $y=(-1)^2=1$
$x=0$일 때, $y=0^2=0$
$x=1$일 때, $y=1^2=1$
$x=2$일 때, $y=2^2=4$
따라서 치역은 $\{0, 1, 4\}$이다. 답 $\{0, 1, 4\}$

21 $x=-2$일 때, $y=|-2+1|=1$
$x=-1$일 때, $y=|-1+1|=0$
$x=0$일 때, $y=|0+1|=1$
$x=1$일 때, $y=|1+1|=2$
$x=2$일 때, $y=|2+1|=3$
따라서 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$이다. 답 $\{0, 1, 2, 3\}$

22 $f(1)=2\cdot1=2$ 답 2

$1\geq0$이므로 $f(x)=2x$에 x 대신 1을 대입한다.

23 $f(0)=2\cdot0=0$ 답 0

24 $f(\sqrt{2})=2\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

25 $f(-3)=-3+1=-2$ 답 -2

$-3<0$이므로 $f(x)=x+1$에 x 대신 -3을 대입한다.

26 $f(2)=3-2=1$ 답 1

27 $f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2=3$ 답 3

28 $f(0)=3-0=3$ 답 3

29 $f(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{2}$ 답 $3-2\sqrt{2}$

개념 28 서로 같은 함수

본책 78쪽

30 답 서로 같은 함수이다. $-2, 0, =$

두 함수 f, g의 공역은 실수 전체의 집합이다.

31 $f(-1)=0$, $g(-1)=2$이므로
$f(-1)\neq g(-1)$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.
답 서로 같은 함수가 아니다.

32 $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(1)=g(1)=1$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.
답 서로 같은 함수이다.

33 $f(-1)=g(-1)=-5$, $f(1)=g(1)=-1$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.
답 서로 같은 함수이다.

34 $f(2)=2$, $g(2)=8$이므로
$f(2)\neq g(2)$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.
답 서로 같은 함수가 아니다.

$f(3)=3$, $g(3)=27$이므로
$f(3)\neq g(3)$
임을 이용하여 확인할 수도 있다.

35 $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(0)=g(0)=0$,
$f(1)=g(1)=1$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.
답 서로 같은 함수이다.

36 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 정의역과 공역은 실수 전체의 집합이고 모든 실수 x에 대하여
$$f(x)=g(x)=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.
답 서로 같은 함수이다.

37 함수 f의 정의역은 실수 전체의 집합이고 함수 g의 정의역은 $\{x|x\neq2$인 실수$\}$이다.
따라서 f와 g의 정의역이 같지 않으므로 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.
답 서로 같은 함수가 아니다.

(분모)$\neq0$에서
$x-2\neq0$, 즉 $x\neq2$

38 함수 f의 정의역은 $\{x|x\neq1$인 실수$\}$이고 함수 g의 정의역은 $\{x|x\neq-1, x\neq1$인 실수$\}$이다.
따라서 f와 g의 정의역이 같지 않으므로 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.
답 서로 같은 함수가 아니다.

39 답 $a=3$, $b=-2$ 1, 4, 3, -2

40 $f(-1)=g(-1)$에서 $a+b=0$ …… ㉠
$f(0)=g(0)$에서 $b=1$
$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a=-1$
답 $a=-1$, $b=1$

05 함수

41 $f(-3)=g(-3)$에서 $\quad -3a+b=2$

$f(1)=g(1)$에서 $\quad a+b=0$

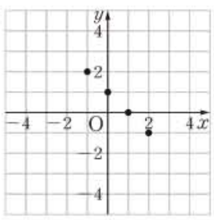
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$

답 $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$

개념 29 함수의 그래프

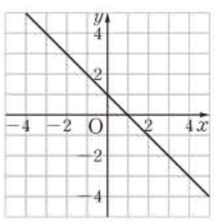
본책 79쪽

42 답

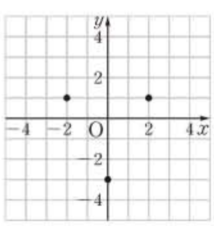


$f(-1)=2,\ f(0)=1,$
$f(1)=0,\ f(2)=-1$

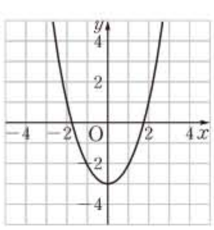
43 답



44 답



45 답



46 답 ○ **47** 답 ×

그래프가 정의역의 원소 a에 대하여 직선 $x=a$와 두 점에서 만날 때가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

48 답 ○ **49** 답 ×

50 답 × **51** 답 ○

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

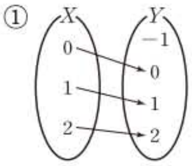
본책 80쪽

01 답 ③

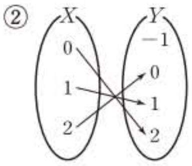
베이직쎈 BOX

02 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

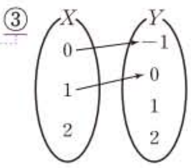
①



②

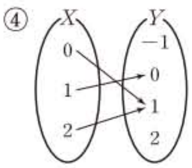


③

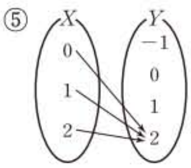


$f(2)=2^2-1=3$

④



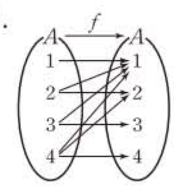
⑤



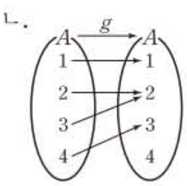
따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

03 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

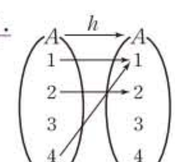
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



3을 3으로 나눈 나머지는 0이다.

이상에서 A에서 A로의 함수인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

04 답 ④

05 $f(3)=4$이므로

$-6+a=4 \quad \therefore a=10$

따라서 $f(x)=-2x+10$이므로

$f(-1)=-2\cdot(-1)+10=12$ 답 12

06 $1-x=4$에서 $\quad x=-3$

$x=-3$을 $f(1-x)=x+4$에 대입하면

$f(4)=-3+4=1$ 답 1

07 $f(\sqrt{3}-1)-f(1-\sqrt{3})=3(\sqrt{3}-1)-\{-(1-\sqrt{3})\}$
$=3\sqrt{3}-3+1-\sqrt{3}$
$=2\sqrt{3}-2$ 답 ②

$1<\sqrt{3}$이므로
$\sqrt{3}-1>0,\ 1-\sqrt{3}<0$

08 치역이 $\{-3,\ -1,\ 1\}$이므로

$y=-3$일 때, $\quad -3=2x+3 \quad \therefore x=-3$

$y=-1$일 때, $\quad -1=2x+3 \quad \therefore x=-2$

$y=1$일 때, $\quad 1=2x+3 \quad \therefore x=-1$

따라서 정의역은 $\{-3, -2, -1\}$이다.

답 $\{-3, -2, -1\}$

09 $-2 \le x \le 4$에서 $\quad -2 \le -\frac{1}{2}x \le 1$

$\therefore -1 \le -\frac{1}{2}x+1 \le 2$

따라서 주어진 함수의 치역이 $\{y \mid -1 \le y \le 2\}$이므로

$a=-1$, $b=2$

$\therefore a+b=1$

답 1

베센 TIP

부등식의 성질

실수 a, b, c에 대하여

① $a>b$이면

$a+c>b+c$, $a-c>b-c$

② $a>b$, $c>0$이면

$ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

③ $a>b$, $c<0$이면

$ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

10 일차함수 $y=ax+b$에서 $a>0$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 즉

$x=1$일 때 $y=-1$, $x=5$일 때 $y=7$

이어야 하므로

$a+b=-1$, $5a+b=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-3$

$\therefore a-b=5$

답 ⑤

11 ㄱ. $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$,

$f(2)=g(2)=2$이므로 $\quad f=g$

ㄴ. $f(2)=2$, $g(2)=8$이므로 $\quad f(2) \ne g(2)$

$\therefore f \ne g$

ㄷ. $f(1)=2$, $g(1)=0$이므로 $\quad f(1) \ne g(1)$

$\therefore f \ne g$

이상에서 $f=g$인 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

12 $f(0)=g(0)$에서 $\quad b=-4$

$f(1)=g(1)$에서 $\quad 1+a-4=2+b$

$\therefore a-b=5$

$b=-4$를 위의 식에 대입하여 풀면 $\quad a=1$

$\therefore ab=-4$

답 -4

13 $f(-1)=g(-1)$에서 $\quad -1-a+b=2a+3b$

$\therefore 3a+2b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=g(2)$에서 $\quad 8+2a+b=-4a+3b$

$\therefore 3a-b=-4 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1$, $b=1$

즉 $f(x)=x^3-x+1$이므로

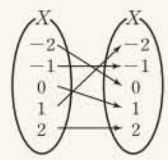
$f(-1)=1$, $f(2)=7$

따라서 함수 f의 치역은 $\{1, 7\}$이다.

답 $\{1, 7\}$

베이직쎈 BOX

일대일대응이면 일대일함수이지만 일대일함수라고 해서 반드시 일대일대응인 것은 아니다.



일대일함수의 그래프는 치역의 임의의 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만난다.

$f(x)$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

10 여러 가지 함수

개념 30 여러 가지 함수

본책 82쪽

01 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ, ㅇ **02** 답 ㄱ, ㅁ, ㅇ

03 답 ㅁ **04** 답 ㄴ

05 답 ㄱ, ㄴ **06** 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

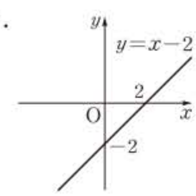
07 답 ㄹ **08** 답 ㄱ, ㄷ

09 답 ㄱ, ㄷ **10** 답 ㄷ

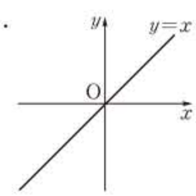
11 답 ㄴ

[12~15] 보기의 함수의 그래프는 다음과 같다.

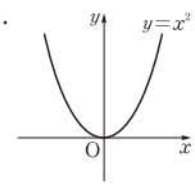
ㄱ.



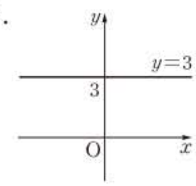
ㄴ.



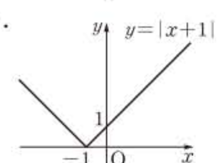
ㄷ.



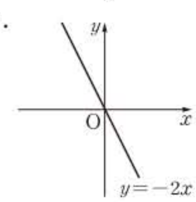
ㄹ.



ㅁ.



ㅂ.



12 답 ㄱ, ㄴ, ㅂ **13** 답 ㄱ, ㄴ, ㅂ

14 답 ㄴ **15** 답 ㄹ

16 답 $a=2$, $b=4$

증가, -2, 6, -2, 6, -2, 6, 2, 4

17 $a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면

$f(-1)=1$, $f(3)=5$

$\therefore -a+b=1$, $3a+b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

답 $a=1$, $b=2$

18 $a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면

$f(-2)=-7$, $f(1)=2$

$\therefore -2a+b=-7$, $a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-1$

답 $a=3$, $b=-1$

19 $a<0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면

$f(-5)=10$, $f(2)=-4$

$\therefore -5a+b=10$, $2a+b=-4$

05 함수

앞의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=0$ 　　답 $a=-2,\ b=0$

20 $a<0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면

$f(2)=6,\ f(7)=-9$

$\therefore\ 2a+b=6,\ 7a+b=-9$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=12$ 　　답 $a=-3,\ b=12$

21 $a<0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면

$f(-3)=11,\ f(5)=3$

$\therefore\ -3a+b=11,\ 5a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=8$ 　　답 $a=-1,\ b=8$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 84쪽

01 주어진 조건을 만족시키는 함수는 일대일함수이다.

① $x_1=1,\ x_2=2$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=f(x_2)=1$

③ $x_1=-1,\ x_2=1$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=f(x_2)=1$

④ $x_1=-1,\ x_2=1$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=f(x_2)=1$

⑤ $x_1=-1,\ x_2=1$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

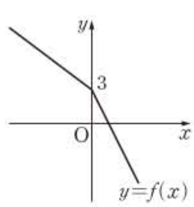
$f(x_1)=f(x_2)=0$

답 ②

02 함수 f가 일대일함수가 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$a<0$

답 $a<0$



03 ① 함수 f의 치역은 $\{y|y\leq 0\}$이므로 치역과 공역은 같지 않다.

② 그래프는 오른쪽 아래로 향한다.

③ 일대일함수이다.

⑤ 그래프는 치역의 각 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만난다.

답 ④

04 함수 f가 일대일함수이고 $f(2)=3$이므로 $f(1)$, $f(3)$의 값은 각각 서로 다르고 1, 2, 4 중 하나이어야 한다.

따라서 $f(1)+f(3)$은 $f(1)=1,\ f(3)=2$ 또는 $f(1)=2,\ f(3)=1$일 때 최솟값 3을 갖는다. 　　답 3

05 답 ㄱ, ㄹ

베이직쎈 BOX

(i) $x\geq 0$일 때,

$y=2x+x$

$\therefore\ y=3x$

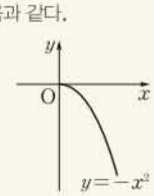
(ii) $x<0$일 때,

$y=2x-x$

$\therefore\ y=x$

집합 X의 원소 중에서 2를 제외한 나머지

$y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(50)=1$이므로

$f(x)=1$

집합 Y의 원소 중에서 3을 제외한 나머지

일대일대응의 그래프는 공역의 임의의 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만난다.

$g(x)=3$

06 ③ $f(x)=-x^2+3$이라 하면 $x_1=-1,\ x_2=1$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

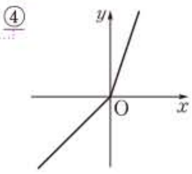
$f(x_1)=f(x_2)=2$

따라서 함수 $y=-x^2+3$은 일대일대응이 아니다.

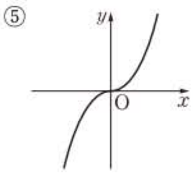
답 ③

참고 ④, ⑤ 주어진 함수의 그래프는 다음과 같다.

④

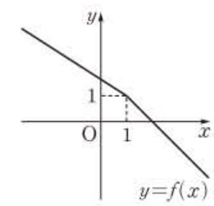


⑤



07 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 직선 $y=ax+b$는 기울기가 음수이고 점 $(1,\ 1)$을 지나야 한다.

$\therefore\ a<0,\ a+b=1$



답 ①

08 $a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면

$f(-2)=-1,\ f(4)=8$

$\therefore\ -2a+b=-1,\ 4a+b=8$

위의 두 식을 연립하여 풀면 　$a=\frac{3}{2},\ b=2$

$\therefore\ ab=3$ 　　답 3

09 함수 f가 일대일대응이고 $f(4)=2$이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 서로 다르고 1, 3, 4 중 하나이어야 한다.

이때 $f(1)<f(3)<f(2)$이므로

$f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=3$

$\therefore\ f(1)-f(2)+f(3)=0$ 　　답 ②

10 ㄱ. $f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3$이므로 f는 항등함수이다.

ㄴ. $g(1)=2,\ g(2)=1,\ g(3)=0$이므로 g는 항등함수가 아니다.

ㄷ. $h(1)=1,\ h(2)=2,\ h(3)=3$이므로 h는 항등함수이다.

이상에서 항등함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 　　답 ④

11 함수 f가 상수함수이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=\cdots=f(49)=f(50)=1$

$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(49)=1\cdot 49=49$

답 49

12 함수 f가 항등함수이므로

$f(-1)=-1,\ f(3)=3$

따라서 $f(3)=g(3)$에서 　$g(3)=3$

이때 함수 g가 상수함수이므로 　$g(4)=3$

$\therefore\ f(-1)+g(4)=2$ 　　답 2

베이직쎈 BOX

11 합성함수와 역함수

개념 31 합성함수

본책 86쪽

01 답 b, 3

f의 치역은 $\{b, c, d\}$이고 g의 정의역인 Y의 부분집합이므로 합성함수 $g \circ f$를 정의할 수 있다.

02 $(g \circ f)(3)=g(f(3))=g(d)=1$ 답 1

03 $(f \circ g)(a)=f(g(a))=f(2)=b$ 답 b

g의 치역은 $\{1, 2, 3, 4\}$이고 f의 정의역인 X의 부분집합이므로 합성함수 $f \circ g$를 정의할 수 있다.

04 $(f \circ g)(c)=f(g(c))=f(4)=c$ 답 c

05 답 2, 2

06 $(f \circ g)(5)=f(g(5))=f(20)=-18$ 답 -18

07 $(f \circ f)(1)=f(f(1))=f(1)=1$ 답 1

08 $(g \circ g)(-2)=g(g(-2))=g(6)=30$ 답 30

09 답 2 -1, -1, 2

10 $(f \circ f)(-3)=f(f(-3))=f(0)=-2$ 답 -2

11 $(f \circ f)(\sqrt{2})=f(f(\sqrt{2}))=f(2)=5$ 답 5

12 $(f \circ f)(\sqrt{5})=f(f(\sqrt{5}))=f(5)=11$ 답 11

13 답 $(g \circ f)(x)=-4x-11$

$x+3$, $x+3$, $-4x-11$

14 $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(-4x+1)$

$=-4x+1+3=-4x+4$

답 $(f \circ g)(x)=-4x+4$

15 $(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(x+3)$

$=x+3+3=x+6$

답 $(f \circ f)(x)=x+6$

16 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x-1)$

$=(x-1)^2=x^2-2x+1$

답 $(g \circ f)(x)=x^2-2x+1$

17 $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2-1$

답 $(f \circ g)(x)=x^2-1$

18 $(g \circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2)=(x^2)^2=x^4$

답 $(g \circ g)(x)=x^4$

19 답 $h(x)=-3x-2$ $h(x)$, $h(x)$, $-3x-2$

20 $(g \circ h)(x)=g(h(x))=2h(x)+5$

$(g \circ h)(x)=f(x)$이므로

$2h(x)+5=-x+7$, $\quad 2h(x)=-x+2$

$\therefore h(x)=-\frac{1}{2}x+1$ 답 $h(x)=-\frac{1}{2}x+1$

21 답 $h(x)=4x-11$

$x+2$, $t-2$, $t-2$, $4t-11$, $4x-11$

22 $(h \circ g)(x)=h(g(x))=h(3x-4)=x-6$

$3x-4=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{3}t+\frac{4}{3}$이므로

$h(t)=\frac{1}{3}t+\frac{4}{3}-6=\frac{1}{3}t-\frac{14}{3}$

$\therefore h(x)=\frac{1}{3}x-\frac{14}{3}$ 답 $h(x)=\frac{1}{3}x-\frac{14}{3}$

개념 32 합성함수의 성질

본책 88쪽

23 (1) $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)$

$=(2x)^2+2x=4x^2+2x$

(2) $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+x)$

$=2(x^2+x)=2x^2+2x$

(3) $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$

함수의 합성에서 교환법칙은 성립하지 않는다.

답 풀이 참조

24 (1) $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(4x)=4x+7$이므로

$(h \circ (g \circ f))(x)=h((g \circ f)(x))=h(4x+7)$

$=-3(4x+7)+1$

$=-12x-20$

(2) $(h \circ g)(x)=h(g(x))=h(x+7)$

$=-3(x+7)+1$

$=-3x-20$

이므로

$((h \circ g) \circ f)(x)=(h \circ g)(f(x))=(h \circ g)(4x)$

$=-3 \cdot 4x-20$

$=-12x-20$

(3) $(h \circ (g \circ f))(x)=((h \circ g) \circ f)(x)$

함수의 합성에서 결합법칙이 성립한다.

답 풀이 참조

25 답 15, 1

26 $(h \circ g \circ f)(-1)=((h \circ g) \circ f)(-1)$

$=(h \circ g)(f(-1))$

$=(h \circ g)(5)=-1$ 답 -1

27 $((f \circ h) \circ g)(0)=(f \circ (h \circ g))(0)$

$=f((h \circ g)(0))$

$=f(-2)=0$ 답 0

베이직쎈 BOX

28 $(f\circ h\circ g)(3)=(f\circ(h\circ g))(3)$
$=f((h\circ g)(3))$
$=f\left(-\frac{7}{5}\right)=3$ 답 3

29 $((h\circ f)\circ g)(2)=(h\circ(f\circ g))(2)$
$=h((f\circ g)(2))$
$=h(0)=4$ 답 4

30 $(f\circ(g\circ h))(-3)=((f\circ g)\circ h)(-3)$
$=(f\circ g)(h(-3))$
$=(f\circ g)(7)=35$ 답 35

31 $((h\circ f)\circ g)(x)=(h\circ(f\circ g))(x)$
$=h((f\circ g)(x))$
$=h(x^2-2x)$
$=-(x^2-2x)+4$
$=-x^2+2x+4$
답 $((h\circ f)\circ g)(x)=-x^2+2x+4$

이 식에 $x=2$를 대입하면
$((h\circ f)\circ g)(2)$
$=-2^2+2\cdot2+4$
$=4$
임을 확인할 수 있다.

32 $(f\circ(g\circ h))(x)=((f\circ g)\circ h)(x)$
$=(f\circ g)(h(x))$
$=(f\circ g)(-x+4)$
$=(-x+4)^2-2(-x+4)$
$=x^2-6x+8$
답 $(f\circ(g\circ h))(x)=x^2-6x+8$

이 식에 $x=-3$을 대입하면
$(f\circ(g\circ h))(-3)$
$=(-3)^2-6\cdot(-3)+8$
$=35$
임을 확인할 수 있다.

개념 33 역함수

본책 89쪽

33 함수 f가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 답 ○

함수 $f: X \to Y$의 역함수가 존재하기 위한 필요충분조건은 f가 일대일대응인 것이다.

34 함수 f가 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다. 답 ×

(치역)≠(공역)이므로 일대일대응이 아니다.

35 함수 f가 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다. 답 ×

함수 f가 일대일함수가 아니므로 일대일대응이 아니다.

36 함수 f가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 답 ○

37 답 2 **38** 답 4

39 답 3 **40** 답 1

41 답 3 ◎ 1, 1, 3, 3

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b$
$\iff f^{-1}(b)=a$

42 $f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로
$-a+3=1 \quad \therefore a=2$
$\therefore f^{-1}(1)=2$ 답 2

43 $f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로
$\frac{1}{4}a+2=1 \quad \therefore a=-4$
$\therefore f^{-1}(1)=-4$ 답 -4

44 답 1 ◎ 1, 1, 1

45 $f^{-1}(a)=3$에서 $f(3)=a$이므로
$a=4\cdot3-3=9$ 답 9

46 $f^{-1}(a)=-2$에서 $f(-2)=a$이므로
$a=4\cdot(-2)-3=-11$ 답 -11

47 $f^{-1}(a)=-5$에서 $f(-5)=a$이므로
$a=4\cdot(-5)-3=-23$ 답 -23

48 답 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
◎ 일대일대응, $\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

49 $y=x-8$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=y+8$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=x+8$ 답 $y=x+8$

50 $y=\frac{1}{2}x-7$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=2y+14$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=2x+14$ 답 $y=2x+14$

51 $y=-x-5$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=-y-5$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=-x-5$ 답 $y=-x-5$

52 $y=-3x-6$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=-\frac{1}{3}y-2$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=-\frac{1}{3}x-2$ 답 $y=-\frac{1}{3}x-2$

53 $y=-\frac{1}{5}x+2$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=-5y+10$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=-5x+10$ 답 $y=-5x+10$

개념 34 역함수의 성질

본책 91쪽

54 $(f^{-1})^{-1}(5)=f(5)=6$ 답 6

55 $(f^{-1})^{-1}(3)=f(3)=3$ 답 3

56 답 1 **57** 답 6

58 $(g\circ f)^{-1}(1)=(f^{-1}\circ g^{-1})(1)=f^{-1}(g^{-1}(1))$
$=f^{-1}(1)=4$ 답 4

베이직쎈 BOX: 두 함수 f, g의 역함수가 존재할 때, $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

59 $(g\circ f)^{-1}(3)=(f^{-1}\circ g^{-1})(3)=f^{-1}(g^{-1}(3))$
$=f^{-1}(4)=2$ 답 2

60 $(f\circ g)^{-1}(2)=(g^{-1}\circ f^{-1})(2)=g^{-1}(f^{-1}(2))$
$=g^{-1}(3)=4$ 답 4

61 $(f\circ g)^{-1}(4)=(g^{-1}\circ f^{-1})(4)=g^{-1}(f^{-1}(4))$
$=g^{-1}(2)=3$ 답 3

62 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(2)=(g^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(f(2))=g^{-1}(11)$
$g^{-1}(11)=a$라 하면 $g(a)=11$이므로
$-2a+1=11$ $\therefore a=-5$
$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(2)=-5$ 답 -5

63 $(f\circ g^{-1})^{-1}(-1)=(g\circ f^{-1})(-1)=g(f^{-1}(-1))$
$f^{-1}(-1)=a$라 하면 $f(a)=-1$이므로
$3a+5=-1$ $\therefore a=-2$
$\therefore (f\circ g^{-1})^{-1}(-1)=g(-2)=5$ 답 5

64 $(g\circ f\circ f^{-1})(5)=g(5)=-9$ 답 -9

$f\circ f^{-1}=I$ (I는 항등함수)

65 $(g\circ g^{-1}\circ f^{-1})(-7)=f^{-1}(-7)$
$f^{-1}(-7)=a$라 하면 $f(a)=-7$이므로
$3a+5=-7$ $\therefore a=-4$
$\therefore (g\circ g^{-1}\circ f^{-1})(-7)=-4$ 답 -4

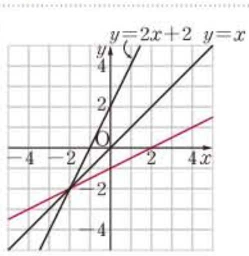
66 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ g)(9)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ g)(9)$
$=9$ 답 9

개념 35 역함수의 그래프

본책 92쪽

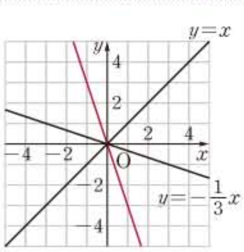
함수 $y=2x+2$의 역함수는 $y=\frac{1}{2}x-1$

67 답



함수 $y=-\frac{1}{3}x$의 역함수는 $y=-3x$

68 답



69 답 c b, c, c

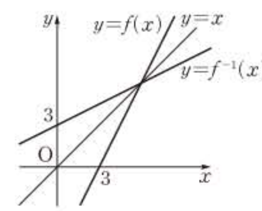
70 $f^{-1}(c)=k$라 하면 $f(k)=c$이므로
$k=d$ $\therefore f^{-1}(c)=d$
$f^{-1}(d)=l$이라 하면 $f(l)=d$이므로
$l=e$ $\therefore f^{-1}(d)=e$
$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(d)=e$
답 e

71 $(f\circ f)^{-1}(a)=(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=f^{-1}(f^{-1}(a))$
$f^{-1}(a)=k$라 하면 $f(k)=a$이므로
$k=b$ $\therefore f^{-1}(a)=b$
$f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$이므로
$l=c$ $\therefore f^{-1}(b)=c$
$\therefore (f\circ f)^{-1}(a)=f^{-1}(b)=c$ 답 c

72 답 $(1, 1)$ x, 1, 1, 1

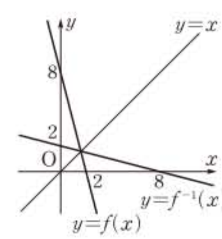
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점과 같다.

73 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로



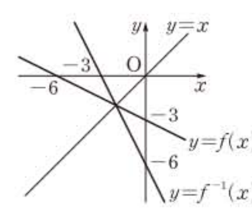
$2x-6=x$ $\therefore x=6$
따라서 구하는 교점의 좌표는
$(6, 6)$ 답 $(6, 6)$

74 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로



$-4x+8=x$ $\therefore x=\frac{8}{5}$
따라서 구하는 교점의 좌표는
$\left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}\right)$ 답 $\left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}\right)$

75 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로



$-\frac{1}{2}x-3=x$ $\therefore x=-2$
따라서 구하는 교점의 좌표는
$(-2, -2)$ 답 $(-2, -2)$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 93쪽

01 $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=4$
$(f\circ f\circ f)(4)=f(f(f(4)))=f(f(3))=f(1)=2$
$\therefore (f\circ f)(1)+(f\circ f\circ f)(4)=6$ 답 ④

02 $(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(7)=27$
$(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(-5)=15$
$\therefore (f\circ g)(3)-(g\circ f)(-1)=12$ 답 12

03 $(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f(4)=16$
$(g\circ f)(-4)=g(f(-4))=g(16)=35$
$\therefore (f\circ g)(-2)+(g\circ f)(-4)=51$ 답 51

04 $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(-2)=-4+a$
즉 $-4+a=2$이므로 $a=6$
따라서 $f(x)=2x+6$이므로
$f(a)=f(6)=18$ 답 18

05 $((h\circ g)\circ f)(-6)=(h\circ g\circ f)(-6)$
$=h(g(f(-6)))$
$=h(g(-1))$
$=h(0)$
$=8$ 답 ⑤

06 $((f\circ g)\circ h)(a)=(f\circ(g\circ h))(a)$
$=f((g\circ h)(a))$
$=f(3a-7)$
$=-(3a-7)+2$
$=-3a+9$
따라서 $-3a+9=6$이므로
$-3a=-3$ $\therefore a=1$ 답 1

07 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+1)$
$=2(ax+1)-4=2ax-2$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-4)$
$=a(2x-4)+1=2ax-4a+1$
$f\circ g=g\circ f$이므로
$2ax-2=2ax-4a+1$
$-2=-4a+1,$ $4a=3$
$\therefore a=\frac{3}{4}$ 답 ③

08 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+1)=bx+1+a$
따라서 $bx+1+a=-2x+5$이므로
$b=-2,\ 1+a=5$ $\therefore a=4,\ b=-2$
$\therefore ab=-8$ 답 -8

09 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$
$=a(ax+b)+b$
$=a^2x+ab+b$
따라서 $a^2x+ab+b=4x+6$이므로
$a^2=4,\ ab+b=6$
$a^2=4$에서 $a=2\ (\because a>0)$
$a=2$를 $ab+b=6$에 대입하면
$2b+b=6$ $\therefore b=2$
즉 $f(x)=2x+2$이므로 $f(1)=4$ 답 4

베이직쎈 BOX

함수의 합성에서 결합법칙이 성립하므로 괄호를 생략하여 나타낼 수 있다.

일반적으로 $f\circ g\neq g\circ f$이지만 특정한 경우에 한하여 $f\circ g=g\circ f$가 성립하기도 한다.

$ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a',\ b=b'$

$x-4=x-2\cdot 2$

$x-6=x-2\cdot 3$

$x-8=x-2\cdot 4$

10 $(g\circ h)(x)=g(h(x))=3h(x)-2$
$(g\circ h)(x)=f(x)$이므로
$3h(x)-2=x^2+1,$ $3h(x)=x^2+3$
$\therefore h(x)=\frac{1}{3}x^2+1$ $\therefore h(3)=4$ 답 ④

11 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-3)$
$=3(x-3)+7=3x-2$
$(h\circ g\circ f)(x)=f(x)$에서 $(h\circ(g\circ f))(x)=f(x)$이므로
$h(3x-2)=x-3$
$3x-2=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}$
따라서 $h(t)=\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}-3=\frac{1}{3}t-\frac{7}{3}$이므로
$h(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}$ 답 $h(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}$

12 (1) $f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x-2)$
$=x-4$
$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x-4)=x-6$
$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(x-6)=x-8$
(2) $f^n(x)=x-2n$
(3) $f^{50}(x)=x-100$이므로 $f^{50}(1)=-99$
답 풀이 참조

13 $f_2(x)=f(f(x))=f(2x)=2^2x$
$f_3(x)=f(f_2(x))=f(2^2x)=2^3x$
$f_4(x)=f(f_3(x))=f(2^3x)=2^4x$
⋮
따라서 $f_{10}(x)=2^{10}x$이므로
$f_{10}(2)=2^{11}=2048$ 답 2048

14 $f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-x+1)=x$
따라서 $f^3(x)=f(x),\ f^4(x)=f(f(x))=f^2(x),\ \cdots$이므로
$f(x)=f^3(x)=f^5(x)=\cdots=-x+1,$
$f^2(x)=f^4(x)=f^6(x)=\cdots=x$
$f^{2019}(x)=-x+1$이므로 $f^{2019}(a)=3$에서
$-a+1=3$ $\therefore a=-2$ 답 ③

15 $f^{-1}(4)=7$에서 $f(7)=4$이므로
$14+a=4$ $\therefore a=-10$
따라서 $f(x)=2x-10$이므로
$f(3)=-4$ 답 -4

16 $f^{-1}(-1)=3,\ f^{-1}(6)=-4$에서 $f(3)=-1,$
$f(-4)=6$이므로
$3a+b=-1, -4a+b=6$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=2$
$\therefore ab=-2$ 답 ①

베이직쎈 BOX

17 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+7)=ax+7+b$이므로 $(g\circ f)(x)=5x+c$에서

$ax+7+b=5x+c$

$\therefore a=5,\ b+7=c$

$g^{-1}(2)=-1$에서 $g(-1)=2$이므로

$-1+b=2 \qquad \therefore b=3$

$b=3$을 $b+7=c$에 대입하면

$c=10$

$\therefore a+b+c=18$ 　　답 18

18 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 역함수가 존재하는 것은 ㄱ뿐이다. 　　답 ㄱ

19 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다. $f(x)=3x+1$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로

$a=f(-1)=-3+1=-2$

$b=f(4)=3\cdot4+1=13$

$\therefore b-a=15$ 　　답 ③

20 $y=2x+a$로 놓으면

$2x=y-a \qquad \therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}a$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a$이므로

$\frac{1}{2}=b,\ -\frac{1}{2}a=4 \qquad \therefore a=-8,\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore ab=-4$ 　　답 ①

21 $y=ax+b$로 놓으면

$ax=y-b \qquad \therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$이므로

$\frac{1}{a}=-\frac{1}{3},\ -\frac{b}{a}=2 \qquad \therefore a=-3,\ b=6$

$\therefore a+2b=9$ 　　답 9

22 ㄱ. $y=x-1$로 놓으면 $\quad x=y+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=x+1$

즉 $f^{-1}(x)=x+1$이므로 $\quad f\neq f^{-1}$

ㄴ. $y=-x+3$으로 놓으면 $\quad x=-y+3$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-x+3$

즉 $f^{-1}(x)=-x+3$이므로 $\quad f=f^{-1}$

ㄷ. $y=2x$로 놓으면 $\quad x=\frac{1}{2}y$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{2}x$

즉 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x$이므로 $\quad f\neq f^{-1}$

ㄹ. $y=-\frac{1}{x}$로 놓으면 $\quad x=-\frac{1}{y}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-\frac{1}{x}$

즉 $f^{-1}(x)=-\frac{1}{x}$이므로 $\quad f=f^{-1}$

이상에서 $f=f^{-1}$를 만족시키는 것은 ㄴ, ㄹ이다. 　　답 ㄴ, ㄹ

23 $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(1)=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(1)$
$=(f^{-1}\circ g)(1)$
$=f^{-1}(g(1))$
$=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로

$a-2=3 \qquad \therefore a=5$

$\therefore (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(1)=5$ 　　답 5

24 $h^{-1}(x)=(g\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$
$=f^{-1}(g^{-1}(x))=f^{-1}(5x-2)$
$=-(5x-2)+7=-5x+9$

답 $h^{-1}(x)=-5x+9$

25 $((g\circ f^{-1})^{-1}\circ f)(a)=(f\circ g^{-1}\circ f)(a)$
$=f(g^{-1}(f(a)))$

$f(g^{-1}(f(a)))=18$에서 $g^{-1}(f(a))=b$라 하면

$f(b)=18$

$3b=18 \qquad \therefore b=6$

$\therefore g^{-1}(f(a))=6$

이때 $f(a)=c$라 하면 $g^{-1}(c)=6$이므로

$g(6)=c \qquad \therefore c=21$

$\therefore f(a)=21$

즉 $3a=21$이므로 $\quad a=7$ 　　답 ⑤

26 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ -4)$를 지나므로

$2a+b=-4$ 　　…… ㉠

함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(a,\ b)$를 지나면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(b,\ a)$를 지난다.

또 $y=f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(2,\ -4)$를 지나므로 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-4,\ 2)$를 지난다.

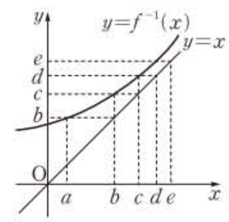
$\therefore -4a+b=2$ 　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=-2$

따라서 $f(x)=-x-2$이므로

$f(3)=-5$ 　　답 -5

27 직선 $y=x$를 이용하여 x축과 점선이 만나는 점의 x좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f(d)=k$라 하면 $f^{-1}(k)=d$이므로

$k=c \qquad \therefore f(d)=c$

$f(c)=l$이라 하면 $f^{-1}(l)=c$이므로

$l=b \qquad \therefore f(c)=b$

$\therefore (f\circ f)(d)=f(f(d))=f(c)=b$ 　　답 ②

05 함수

베이직쎈 BOX

28 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$x^2-2x=x$, $\quad x^2-3x=0$

$x(x-3)=0 \quad \therefore x=3\ (\because x\geq 1)$

따라서 교점의 좌표가 $(3, 3)$이므로

$a=3,\ b=3 \quad \therefore a+b=6$ 답 ⑤

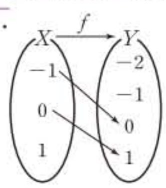
학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 97쪽

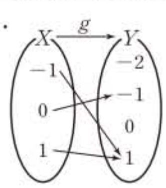
01 전략 각 대응을 그림으로 나타내 본다.

풀이 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

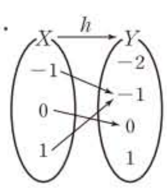
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



이상에서 함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

• X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

02 전략 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 모두 집합 Y의 원소가 되도록 하는 상수 a의 값을 구한다.

풀이 $f(1)=3+a$, $f(2)=6+a$, $f(3)=9+a$

f가 X에서 Y로의 함수가 되려면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 모두 집합 Y의 원소이어야 하므로

$3+a=4,\ 6+a=7,\ 9+a=10$

$\therefore a=1$ 답 ④

• $3<6<9$이므로
$3+a<6+a<9+a$
$\therefore 3+a=4,\ 6+a=7,$
$9+a=10$

03 전략 함수 $f(x)$에서 $f(k)$의 값 ➡ $f(x)$의 x 대신 k를 대입한다.

풀이 $f(2)=a$이므로

$a=4\cdot 2-1=7$

$f(b)=-5$이므로

$4b-1=-5 \quad \therefore b=-1$

$\therefore a-b=8$ 답 ④

04 전략 y의 값이 -2, 0, 2, 4일 때의 x의 값을 각각 구한다.

풀이 치역이 $\{-2, 0, 2, 4\}$이므로

$y=-2$일 때, $\quad -2=-\dfrac{3}{x}+1$

$\dfrac{3}{x}=3 \quad \therefore x=1$

$y=0$일 때, $\quad 0=-\dfrac{3}{x}+1$

$\dfrac{3}{x}=1 \quad \therefore x=3$

$y=2$일 때, $\quad 2=-\dfrac{3}{x}+1$

$\dfrac{3}{x}=-1 \quad \therefore x=-3$

$y=4$일 때, $\quad 4=-\dfrac{3}{x}+1$

$\dfrac{3}{x}=-3 \quad \therefore x=-1$

따라서 정의역은 $\{-3, -1, 1, 3\}$이므로 정의역의 원소가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

05 전략 두 함수 f, g가 서로 같은 함수이면 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.

풀이 $f(x)=g(x)$에서 $\quad x^2=x^3-6x$

$x^3-x^2-6x=0, \quad x(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

따라서 집합 X는 집합 $\{-2, 0, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 그 개수는

$2^3-1=7$ 답 ②

원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수
➡ 2^n

공집합은 제외한다.

06 전략 일대일함수이면서 (치역)$\neq$(공역)인 함수를 찾는다.

풀이 ①, ④, ⑤ 치역의 임의의 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 만나지 않거나 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

② 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

③ 양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.

그런데 치역이 $\{y|y>0\}$이므로 일대일대응이 아니다. 답 ③

일대일함수의 그래프는 치역의 임의의 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만난다.

07 전략 항등함수와 상수함수, 일대일대응의 정의를 이용한다.

풀이 함수 f가 항등함수이므로

$f(1)=1,\ f(2)=2$

$f(1)=g(4)$에서 $\quad g(4)=1$

이때 함수 g가 상수함수이므로 $\quad g(2)=1$

또 $h(1)=h(4)+3$에서 $h(1)>3$이고, 함수 h는 일대일대응이므로

$h(1)=4,\ h(4)=1$

따라서 $h(2)=2$이므로

$f(2)+g(2)+h(2)=5$ 답 ④

08 전략 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$임을 이용하여 합성함수의 함숫값을 구한다.

풀이 $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(-4)=4$ 답 ③

09 전략 $f\circ g$와 $g\circ f$를 각각 구하여 동류항의 계수를 비교한다.

풀이 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4x+a)$

$=2(4x+a)-1=8x+2a-1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$

$=4(2x-1)+a=8x-4+a$

$f \circ g = g \circ f$이므로

$8x+2a-1=8x-4+a$

$2a-1=-4+a \quad \therefore a=-3$

따라서 $(f \circ g)(x)=8x-7$이므로

$(f \circ g)(-1)=-15$ 답 ①

10 전략 $h(f(x))=g(x)$에서 $f(x)=t$로 치환하여 $h(x)$를 구한다.

풀이 $(h \circ f)(x)=h(f(x))=h(-x+7)=3x-4$

$-x+7=t$로 놓으면 $x=-t+7$이므로

$h(t)=3(-t+7)-4=-3t+17$

$\therefore h(x)=-3x+17$ 답 ②

11 전략 $f(1)$, $f^2(1)$, $f^3(1)$, …의 값을 구하여 규칙을 찾아 $f^{2019}(1)$의 값을 추정한다.

풀이 $f^1(1)=f(1)=2$

$f^2(1)=f(f(1))=f(2)=3$

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(3)=4$

$f^4(1)=f(f^3(1))=f(4)=0$

$f^5(1)=f(f^4(1))=f(0)=1$

⋮

따라서 $f^n(1)$의 값은 2, 3, 4, 0, 1이 이 순서대로 반복되므로

$f^{2019}(1)=f^{5\cdot 403+4}(1)=f^4(1)=0$ 답 ①

12 전략 $(f \circ g)^{-1}(x)=(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$, $(g \circ f)^{-1}(x)=(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$임을 이용한다.

풀이 $(f \circ g)^{-1}(4)=(g^{-1} \circ f^{-1})(4)=g^{-1}(f^{-1}(4))$

$=g^{-1}(4)=0$

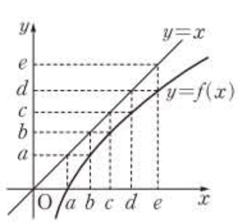
$(g \circ f)^{-1}(1)=(f^{-1} \circ g^{-1})(1)=f^{-1}(g^{-1}(1))$

$=f^{-1}(2)=3$

$\therefore (f \circ g)^{-1}(4)+(g \circ f)^{-1}(1)=3$ 답 ②

13 전략 $(f^{-1} \circ f^{-1})(b)=f^{-1}(f^{-1}(b))$이므로 $f^{-1}(b)$의 값을 먼저 구한다.

풀이 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(b)=k$라 하면 $f(k)=b$이므로

$k=c \quad \therefore f^{-1}(b)=c$

$f^{-1}(c)=l$이라 하면 $f(l)=c$이므로

$l=d \quad \therefore f^{-1}(c)=d$

$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(b)=f^{-1}(f^{-1}(b))=f^{-1}(c)=d$

답 ④

14 전략 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같음을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$2x+a=x \quad \therefore x=-a$

이때 교점의 x좌표가 2이므로

$-a=2 \quad \therefore a=-2$

따라서 $f(x)=2x-2$이므로

$f(1)=0$ 답 ③

15 전략 5와 14가 짝수인지 홀수인지 구분하여 함숫값을 구한다.

풀이 5는 홀수이므로 $\quad f(5)=5^2=25$

14는 짝수이므로 $\quad f(14)=\frac{1}{2}\cdot 14+1=8$

$\therefore f(5)+f(14)=33$ 답 33

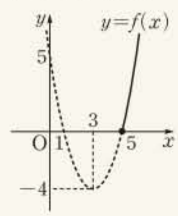
16 전략 f가 일대일대응이면 그래프가 증가 또는 감소하고 치역과 공역이 같다.

풀이 $f(x)=x^2-6x+a=(x-3)^2+a-9$이므로 $x\geq 3$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 함수 f가 일대일대응이려면 $f(5)=0$이어야 하므로

$5^2-6\cdot 5+a=0 \quad \therefore a=5$ 답 5

$a=5$일 때, $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



17 전략 $f(x)$가 항등함수이면 $f(x)=x$이다.

풀이 $f(x)$가 항등함수이므로 $f(x)=x$에서

$x^2-12=x, \quad x^2-x-12=0$

$(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$ ⋯ ❶

따라서 집합 X는 집합 $\{-3, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 그 개수는

$2^2-1=3$ ⋯ ❷

공집합은 제외한다.

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)=x$를 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	집합 X의 개수를 구할 수 있다.	50 %

18 전략 $(f \circ g)(x)=f(g(x))$, $(g \circ f)(x)=g(f(x))$임을 이용한다.

풀이 $(g \circ f)(-1)=g(f(-1))=g(-1+a)$

$=-2(-1+a)+b=2-2a+b$

이므로 $\quad 2-2a+b=2$

$\therefore b=2a$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

$(f \circ g)(2)=f(g(2))=f(-4+b)=-4+b+a$이므로

$-4+b+a=5$

$\therefore a+b=9$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3, b=6$

$\therefore ab=18$ ⋯ ❸

답 18

단계	채점 기준	비율
❶	㉠을 구할 수 있다.	35 %
❷	㉡을 구할 수 있다.	35 %
❸	ab의 값을 구할 수 있다.	30 %

19 전략 $(f\circ f)(x)=x$이면 $f=f^{-1}$임을 이용한다.

풀이 $f^{-1}(2)=-7$이므로

$f(-7)=2$

이때 $(f\circ f)(x)=x$에서 $f=f^{-1}$이므로

$f(2)=f^{-1}(2)=-7,\ f^{-1}(-7)=f(-7)=2$

$\therefore f(2)+f^{-1}(-7)=-5$ 답 -5

20 전략 $(g^{-1}\circ f)(k)=g^{-1}(f(k))$임을 이용한다.

풀이 $(g^{-1}\circ f)(k)=g^{-1}(f(k))=1$이므로

$g(1)=f(k)$ ··· ❶

즉 $13=-k-4$이므로

$k=-17$ ··· ❷

답 -17

단계	채점 기준	비율
❶	$g(1)=f(k)$임을 알 수 있다.	50 %
❷	k의 값을 구할 수 있다.	50 %

21 전략 $(f^{-1})^{-1}=f,\ (f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$임을 이용한다.

풀이 $((f\circ f^{-1})^{-1}\circ f)(3)=(f\circ f^{-1}\circ f)(3)=f(3)$

$=3^2+1=10$ 답 10

22 전략 점 P는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점임을 이용한다.

풀이 점 P는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$2x-5=x \quad \therefore x=5$

따라서 P(5, 5)이므로 ··· ❶

$\overline{OP}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$ ··· ❷

답 $5\sqrt{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	점 P의 좌표를 구할 수 있다.	60 %
❷	$\overline{OP}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %

베쎈 TIP

두 점 사이의 거리

① 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

② 좌표평면 위의 원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

베이직쎈 BOX

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f=f^{-1}$
$\Longleftrightarrow (f\circ f)(x)=x$

다항식 A, B, C $(B\neq0,\ C\neq0)$에 대하여
$\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\times C}{B\times C}$

분자와 분모에 각각 $x+1$을 곱한다.

분자와 분모에 각각 $x+3$을 곱한다.

분자, 분모 중 인수분해되는 식은 인수분해한 다음 통분한다.

다항식 A, B, C $(B\neq0,\ C\neq0)$에 대하여
$\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\div C}{B\div C}$

a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Ⅱ. 함수

06 유리식과 유리함수

12 유리식

개념 36 유리식의 뜻과 성질

본책 100쪽

01 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ　　**02** 답 ㄴ, ㄹ, ㅂ

03 답 $\dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)},\ \dfrac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$x+1,\ x+1,\ x-1,\ x-1$

04 $\dfrac{x-1}{(x+2)(x+3)},\ \dfrac{x-3}{(x+1)(x+2)}$에서 공통분모가 $(x+1)(x+2)(x+3)$이 되도록 통분하면

$$\frac{x-1}{(x+2)(x+3)}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

답 $\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)},\ \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

05 $\dfrac{x-1}{x^2-4}=\dfrac{x-1}{(x+2)(x-2)}$,

$\dfrac{x-3}{x^2-2x-8}=\dfrac{x-3}{(x+2)(x-4)}$에서 공통분모가 $(x+2)(x-2)(x-4)$가 되도록 통분하면

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}=\frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)(x-2)(x-4)}$$

$$\frac{x-3}{(x+2)(x-4)}=\frac{(x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x-4)}$$

답 $\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x+2)(x-2)(x-4)},\ \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x-4)}$

06 답 $x-2,\ x-1,\ x-2$

07 $\dfrac{x^2-4x}{x^2-16}=\dfrac{x(x-4)}{(x+4)(x-4)}=\dfrac{x}{x+4}$ 답 $\dfrac{x}{x+4}$

08 $\dfrac{x^2+x-2}{x^3-1}=\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$

답 $\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$

개념 37 유리식의 계산

본책 101쪽

09 답 2, 3, 5

베이직쎈 BOX

10 $\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x(x-2)}=\dfrac{5(x-2)+3}{x(x-2)}=\dfrac{5x-7}{x(x-2)}$

답 $\dfrac{5x-7}{x(x-2)}$

11 $\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{4(x-1)-2(x+3)}{(x+3)(x-1)}$

$=\dfrac{2x-10}{(x+3)(x-1)}$

답 $\dfrac{2x-10}{(x+3)(x-1)}$

12 $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x-1}{x^2+x}=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x-1}{x(x+1)}$

$=\dfrac{3x-(x-1)}{x(x+1)}$

$=\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$ 답 $\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$

13 $\dfrac{x-2}{x}\times\dfrac{5x}{x^2-4}=\dfrac{x-2}{x}\times\dfrac{5x}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{5}{x+2}$ 답 $\dfrac{5}{x+2}$

14 $\dfrac{3x-9}{x^2-16}\times\dfrac{x+4}{x^2-6x+9}$

$=\dfrac{3(x-3)}{(x+4)(x-4)}\times\dfrac{x+4}{(x-3)^2}$

$=\dfrac{3}{(x-3)(x-4)}$

답 $\dfrac{3}{(x-3)(x-4)}$

15 $\dfrac{x}{x-2}\div\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x}{x-2}\times\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x+1}{x-2}$

답 $\dfrac{x+1}{x-2}$

16 $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}\div\dfrac{x^2-1}{x-2}$

$=\dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)}\div\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-2}$

$=\dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)}\times\dfrac{x-2}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

답 $\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

17 답 $x+1$, $x+2$, $x+2$

18 $\dfrac{1}{x(x+3)}=\dfrac{1}{x+3-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

답 $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 102쪽

01 $\dfrac{2}{x^3+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$

$=\dfrac{2}{(x+1)(x^2-x+1)}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$

$=\dfrac{2+(x^2-x+1)-(x-2)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{5}{(x+1)(x^2-x+1)}$

답 $\dfrac{5}{(x+1)(x^2-x+1)}$

공통분모가 $(x+1)(x^2-x+1)$이 되도록 통분한다.

02 주어진 등식의 좌변을 계산하면

$\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{a(x+2)+b(x-3)}{(x-3)(x+2)}$

$=\dfrac{(a+b)x+2a-3b}{x^2-x-6}$

따라서 $\dfrac{(a+b)x+2a-3b}{x^2-x-6}=\dfrac{2x+9}{x^2-x-6}$가 x에 대한 항등식이므로

$a+b=2$, $2a-3b=9$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-1$

$\therefore ab=-3$ 답 ②

양변의 분모가 같으므로 분자의 동류항의 계수를 비교한다.

$\begin{cases} a+b=2 & \cdots ㉠ \\ 2a-3b=9 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×3+㉡을 하면

$5a=15$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$3+b=2$ $\therefore b=-1$

베쎈 TIP

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이다.
→ $a=b=c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이다.
→ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

③ $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이다.
→ $a=b=c=0$

④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 x, y에 대한 항등식이다.
→ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

03 $\dfrac{x^2+4x}{2x+4}\times\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+3x-4}\div\dfrac{x-5}{x^2-x}$

$=\dfrac{x(x+4)}{2(x+2)}\times\dfrac{(x+2)(x-5)}{(x+4)(x-1)}\div\dfrac{x-5}{x(x-1)}$

$=\dfrac{x(x+4)}{2(x+2)}\times\dfrac{(x+2)(x-5)}{(x+4)(x-1)}\times\dfrac{x(x-1)}{x-5}$

$=\dfrac{x^2}{2}$ 답 $\dfrac{x^2}{2}$

04 주어진 등식의 좌변을 계산하면

$\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+4x-5}\times\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-1}$

$=\dfrac{(x-1)^2}{(x+5)(x-1)}\times\dfrac{(x+5)(x-3)}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x-3}{x+1}$

06 유리식과 유리함수

따라서 $\frac{x-3}{x+1}=\frac{x+a}{x+b}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=-3,\ b=1$

$\therefore b-a=4$ 답 4

05 주어진 등식의 좌변을 계산하면

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+5)}$$
$$=\frac{1}{x+3-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{x+5-(x+3)}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}\right)$$

따라서 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}\right)=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+b}\right)$이 x에 대한 항등식이므로

$a=2,\ b=5$

$\therefore a+b=7$ 답 ③

06 $$\frac{2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x+4)}$$
$$=\frac{2}{x+2-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{2}{x+4-(x+2)}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}$$
$$=\frac{4}{x(x+4)}$$

$\therefore k=4$ 답 4

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}=\frac{x+4-x}{x(x+4)}=\frac{4}{x(x+4)}$$

07 $$\frac{1}{x^2+x}+\frac{3}{x^2+5x+4}+\frac{4}{x^2+12x+32}$$
$$=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{3}{(x+1)(x+4)}+\frac{4}{(x+4)(x+8)}$$
$$=\frac{1}{x+1-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{3}{x+4-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{4}{x+8-(x+4)}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+8}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+8}$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+8}$$
$$=\frac{8}{x(x+8)}$$

답 ③

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+8}=\frac{x+8-x}{x(x+8)}=\frac{8}{x(x+8)}$$

베이직쎈 BOX

13 유리함수

개념 38 유리함수
본책 103쪽

01 답 ㄱ, ㄷ, ㅂ **02** 답 ㄴ, ㄹ, ㅁ

03 $2x=0$에서 $x=0$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq0$인 실수$\}$

답 $\{x\,|\,x\neq0$인 실수$\}$

먼저 분모가 0이 되도록 하는 x의 값을 구한다.

04 $x-5=0$에서 $x=5$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq5$인 실수$\}$

답 $\{x\,|\,x\neq5$인 실수$\}$

05 $x-2=0$에서 $x=2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$

답 $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$

06 $x^2-1=0$에서 $x^2=1$

$\therefore x=\pm1$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq-1,\ x\neq1$인 실수$\}$

답 $\{x\,|\,x\neq-1,\ x\neq1$인 실수$\}$

07 $x^2+1>0$이므로 주어진 함수의 분모가 0이 되도록 하는 실수 x의 값이 존재하지 않는다.

따라서 주어진 함수의 정의역은

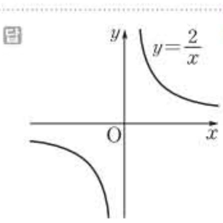
$\{x\,|\,x$는 실수$\}$

답 $\{x\,|\,x$는 실수$\}$

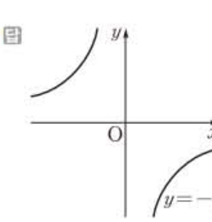
개념 39 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프와 성질
본책 104쪽

$y=\frac{k}{x}\,(k\neq0)$의 그래프는 k의 절댓값이 커질수록 원점으로부터 멀어진다.

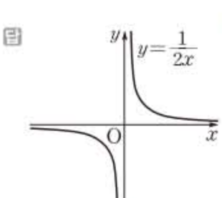
08 답



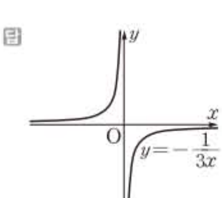
09 답



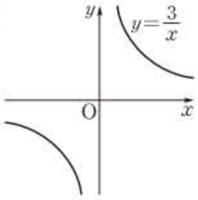
10 답

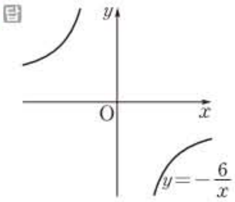


11 답



베이직쎈 BOX

12 답 

13 답 

개념 40 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프

본책 105쪽

14 답 $y=\frac{1}{x-1}+3$　　**15** 답 $y=-\frac{4}{x-2}-4$

> 함수 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은
> $y=\frac{k}{x-p}+q$

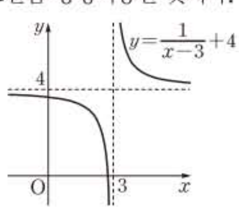
16 답 $y=\frac{5}{x+3}-2$　　**17** 답 $p=1$, $q=4$

18 답 $p=-2$, $q=7$　　**19** 답 $p=5$, $q=-3$

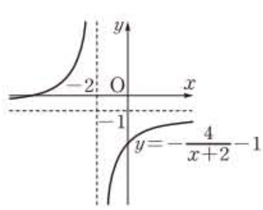
20 답 $p=2$, $q=1$　　**21** 답 $p=-6$, $q=4$

22 답 $p=-1$, $q=-5$

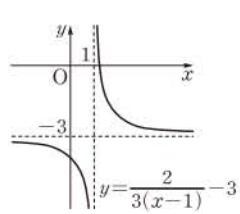
23 $y=\frac{1}{x-3}+4$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은
$x=3$, $y=4$
답 풀이 참조



24 $y=-\frac{4}{x+2}-1$의 그래프는 $y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은
$x=-2$, $y=-1$
답 풀이 참조



25 $y=\frac{2}{3(x-1)}-3$의 그래프는 $y=\frac{2}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은
$x=1$, $y=-3$
답 풀이 참조

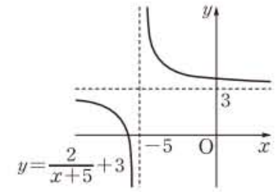


26 정의역은 $\{x|x\neq-5$인 실수$\}$이다.　답 ×

27 답 ○

28 그래프의 점근선은 두 직선 $x=-5$, $y=3$이다.
답 ×

29 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.
답 ○

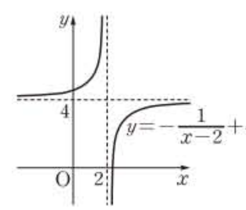


30 답 ○

31 그래프는 점 (2, 4)에 대하여 대칭이다.　답 ×

32 답 ○

33 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면을 지난다.
답 ×



> 유리함수의 그래프의 점근선이 직선 $x=p$, $y=q$이면
> ➡ $y=\frac{k}{x-p}+q$로 놓는다.

34 답 $k=2$, $p=3$, $q=-2$
3, -2, 3, 2, 3, -2, 3, 2, 2

35 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=3$이므로 함수의 식을 $y=\frac{k}{x+1}+3$ $(k<0)$이라 하면
$p=-1$, $q=3$
이 그래프가 원점을 지나므로
$0=k+3$　　$\therefore k=-3$
답 $k=-3$, $p=-1$, $q=3$

> k의 값의 부호는 그래프의 모양으로 판단한다.

개념 41 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프

본책 107쪽

36 $y=\frac{x+3}{x-5}=\frac{(x-5)+8}{x-5}=\frac{8}{x-5}+1$
답 $y=\frac{8}{x-5}+1$

37 $y=\frac{2x-7}{x-1}=\frac{2(x-1)-5}{x-1}=-\frac{5}{x-1}+2$
답 $y=-\frac{5}{x-1}+2$

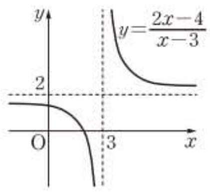
38 $y=\frac{-9x+4}{3x-2}=\frac{-3(3x-2)-2}{3x-2}=-\frac{2}{3x-2}-3$
답 $y=-\frac{2}{3x-2}-3$

베이직쎈 BOX

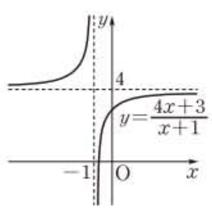
39 $y=\dfrac{3x-5}{-x+2}=\dfrac{-3(-x+2)+1}{-x+2}=\dfrac{1}{-x+2}-3$
$=-\dfrac{1}{x-2}-3$ 　　답 $y=-\dfrac{1}{x-2}-3$

분모의 x의 계수가 -1이므로 다음과 같이 분자, 분모에 각각 -1을 곱한 후 변형해도 된다.
$y=\dfrac{3x-5}{-x+2}$
$=\dfrac{-3x+5}{x-2}$
$=\dfrac{-3(x-2)-1}{x-2}$
$=-\dfrac{1}{x-2}-3$

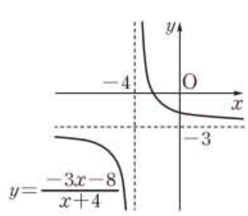
40 $y=\dfrac{2x-4}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+2}{x-3}=\dfrac{2}{x-3}+2$
이므로 $y=\dfrac{2x-4}{x-3}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은
$x=3$, $y=2$
답 풀이 참조



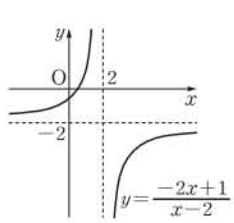
41 $y=\dfrac{4x+3}{x+1}=\dfrac{4(x+1)-1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+4$
이므로 $y=\dfrac{4x+3}{x+1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은
$x=-1$, $y=4$
답 풀이 참조



42 $y=\dfrac{-3x-8}{x+4}=\dfrac{-3(x+4)+4}{x+4}=\dfrac{4}{x+4}-3$
이므로 $y=\dfrac{-3x-8}{x+4}$의 그래프는 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은
$x=-4$, $y=-3$
답 풀이 참조



43 $y=\dfrac{-2x+1}{x-2}=\dfrac{-2(x-2)-3}{x-2}=-\dfrac{3}{x-2}-2$
이므로 $y=\dfrac{-2x+1}{x-2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은
$x=2$, $y=-2$
답 풀이 참조

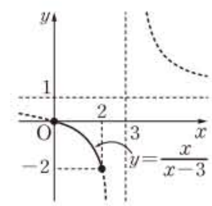


개념 42 유리함수의 최대·최소

본책 108쪽

44 $y=\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{(x-3)+3}{x-3}=\dfrac{3}{x-3}+1$
이므로 $y=\dfrac{x}{x-3}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $0\le x\le 2$에서 $y=\dfrac{x}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
$x=0$일 때 최댓값 0,
$x=2$일 때 최솟값 -2
를 갖는다.

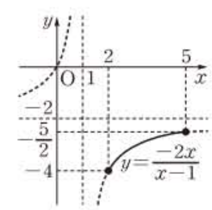
$\dfrac{0}{0-3}=0$
$\dfrac{2}{2-3}=-2$



답 최댓값: 0, 최솟값: -2

45 $y=\dfrac{-2x}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)-2}{x-1}=-\dfrac{2}{x-1}-2$
이므로 $y=\dfrac{-2x}{x-1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $2\le x\le 5$에서 $y=\dfrac{-2x}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
$x=5$일 때 최댓값 $-\dfrac{5}{2}$,
$x=2$일 때 최솟값 -4
를 갖는다.

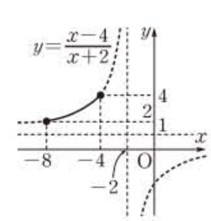
$\dfrac{-10}{5-1}=-\dfrac{5}{2}$
$\dfrac{-4}{2-1}=-4$



답 최댓값: $-\dfrac{5}{2}$, 최솟값: -4

46 $y=\dfrac{x-4}{x+2}=\dfrac{(x+2)-6}{x+2}=-\dfrac{6}{x+2}+1$
이므로 $y=\dfrac{x-4}{x+2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $-8\le x\le -4$에서 $y=\dfrac{x-4}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
$x=-4$일 때 최댓값 4,
$x=-8$일 때 최솟값 2
를 갖는다.

$\dfrac{-4-4}{-4+2}=4$
$\dfrac{-8-4}{-8+2}=2$



답 최댓값: 4, 최솟값: 2

47 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+2}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}+2$
이므로 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

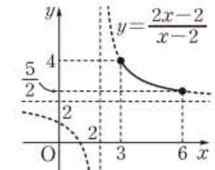
베이직쎈 BOX

따라서 $3\le x\le 6$에서 $y=\frac{2x-2}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=3$일 때 최댓값 4,

$x=6$일 때 최솟값 $\frac{5}{2}$

를 갖는다.



$\frac{6-2}{3-2}=4$

$\frac{12-2}{6-2}=\frac{5}{2}$

답 최댓값: 4, 최솟값: $\frac{5}{2}$

48 $y=\frac{5-3x}{x-3}=\frac{-3(x-3)-4}{x-3}=-\frac{4}{x-3}-3$

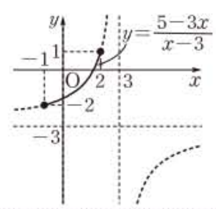
이므로 $y=\frac{5-3x}{x-3}$의 그래프는 $y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le 2$에서 $y=\frac{5-3x}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

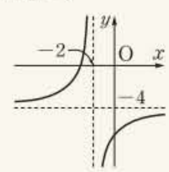
$x=2$일 때 최댓값 1,

$x=-1$일 때 최솟값 -2

를 갖는다.



$k<0$이면 다음 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



$\frac{5-6}{2-3}=1$

$\frac{5+3}{-1-3}=-2$

답 최댓값: 1, 최솟값: -2

49 $y=\frac{-2x-3}{x+2}=\frac{-2(x+2)+1}{x+2}=\frac{1}{x+2}-2$

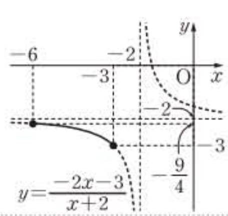
이므로 $y=\frac{-2x-3}{x+2}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-6\le x\le -3$에서 $y=\frac{-2x-3}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-6$일 때 최댓값 $-\frac{9}{4}$,

$x=-3$일 때 최솟값 -3

을 갖는다.



$\frac{12-3}{-6+2}=-\frac{9}{4}$

$\frac{6-3}{-3+2}=-3$

답 최댓값: $-\frac{9}{4}$, 최솟값: -3

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 109쪽

01 답 ㄴ, ㄹ

$y=\frac{k}{x}(k\ne0)$에서 k의 값의 부호를 확인한다.

02 ④ 치역은 $\{y\,|\,y\ne0$인 실수$\}$이다. 답 ④

03 함수 $y=\frac{4}{x-a}+3$의

정의역은 $\{x\,|\,x\ne a$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\ne3$인 실수$\}$

이므로 $a=2,\ b=3$

$\therefore a-b=-1$ 답 -1

04 ㄱ. $x=-1,\ y=0$을 주어진 함수의 식에 대입하면

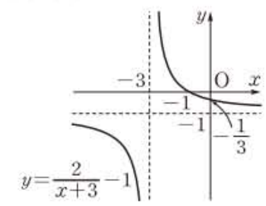
$0=\frac{2}{-1+3}-1$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(-1, 0)$을 지난다.

ㄴ. 정의역은 $\{x\,|\,x\ne-3$인 실수$\}$이다.

ㄷ. 점 $(-3, -1)$에 대하여 대칭이다.

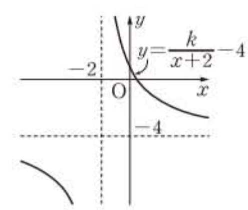
ㄹ. 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

05 함수 $y=\frac{k}{x+2}-4$의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $k>0$이어야 한다.

또 $x=0$에서의 y의 값이 0보다 커야 하므로



$x=0$에서의 y의 값이 0보다 작거나 같으면 제1사분면을 지나지 않는다.

$\frac{k}{0+2}-4>0,\quad \frac{k}{2}>4$

$\therefore k>8$ 답 $k>8$

06 $y=\frac{ax+5}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+5}{x+b}=\frac{-ab+5}{x+b}+a$이므로

정의역은 $\{x\,|\,x\ne-b$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\ne a$인 실수$\}$

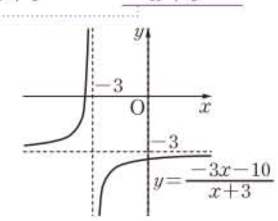
따라서 $-b=1,\ a=-3$, 즉 $a=-3,\ b=-1$이므로

$ab=3$ 답 ②

그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3,\ y=-3$이다.

07 $y=\frac{-3x-10}{x+3}=\frac{-3(x+3)-1}{x+3}=-\frac{1}{x+3}-3$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



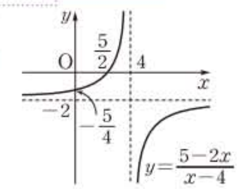
답 ①

그래프의 점근선의 방정식이 $x=4,\ y=-2$이다.

08 $y=\frac{5-2x}{x-4}=\frac{-2(x-4)-3}{x-4}=-\frac{3}{x-4}-2$

ㄱ. 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제2사분면을 지나지 않는다.

ㄴ. 점 $(4, -2)$에 대하여 대칭이다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

09 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{k}{x-2}-5$

이 그래프가 점 (5, -4)를 지나므로

$-4=\frac{k}{5-2}-5$, $\quad\frac{k}{3}=1$

$\therefore k=3$ 답 3

10 $y=\frac{2x+7}{x+4}=\frac{2(x+4)-1}{x+4}=-\frac{1}{x+4}+2$

이므로 $y=\frac{2x+7}{x+4}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore m=-4,\ n=2$ 답 $m=-4,\ n=2$

다른 풀이 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{x-m}+n$

$=\frac{-1+nx-mn}{x-m}$

$=\frac{nx-mn-1}{x-m}$

이 식이 $y=\frac{2x+7}{x+4}$과 일치하므로

$m=-4,\ n=2$

11 $y=\frac{x-1}{x-3}=\frac{(x-3)+2}{x-3}=\frac{2}{x-3}+1$

이므로 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{2}{x-a-3}+1+b$

이 식이

$y=\frac{-3x-7}{x+3}=\frac{-3(x+3)+2}{x+3}=\frac{2}{x+3}-3$

과 일치하므로

$-a-3=3,\ 1+b=-3$

따라서 $a=-6,\ b=-4$이므로

$b-a=2$ 답 ②

12 ㄱ. $y=\frac{x-2}{x-4}=\frac{(x-4)+2}{x-4}=\frac{2}{x-4}+1$

ㄴ. $y=\frac{2x-8}{x-3}=\frac{2(x-3)-2}{x-3}=-\frac{2}{x-3}+2$

ㄷ. $y=\frac{3x+5}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+3$

ㄹ. $y=\frac{2x+3}{2x+2}=\frac{(2x+2)+1}{2x+2}=\frac{1}{2(x+1)}+1$

이상에서 그 그래프가 평행이동에 의하여 $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

13 $y=\frac{1}{3x-6}+k=\frac{1}{3(x-2)}+k$

이므로 $y=\frac{1}{3x-6}+k$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=k$

따라서 $a=2,\ k=-2$이므로

$ak=-4$ 답 ①

베이직쎈 BOX

$x=5$, $y=-4$를 그래프의 식에 대입한다.

유리함수

$y=\frac{k}{x-p}+q(k\neq0)$의 그래프는 점근선의 교점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.

$m=-4,\ n=2$이면

$-mn-1$

$=-(-4)\cdot2-1$

$=8-1=7$

주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하였을 때 $k=2$인 것을 찾는다.

14 $y=\frac{ax+4}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+4}{x+b}=\frac{-ab+4}{x+b}+a$

이므로 $y=\frac{ax+4}{x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-b,\ y=a$

따라서 $-b=-1,\ a=6$, 즉 $a=6,\ b=1$이므로

$a+b=7$ 답 7

15 $y=\frac{6+3x}{x+a}=\frac{3(x+a)-3a+6}{x+a}=\frac{-3a+6}{x+a}+3$

이므로 $y=\frac{6+3x}{x+a}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=3$

따라서 그래프는 점 $(-a,\ 3)$에 대하여 대칭이므로

$-a=-1,\ 3=b$ $\quad\therefore a=1,\ b=3$

$\therefore ab=3$ 답 3

16 점근선의 방정식이 $x=3,\ y=2$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-3}+2\ (k\neq0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 (5, 1)을 지나므로

$1=\frac{k}{5-3}+2$, $\quad\frac{k}{2}=-1$ $\quad\therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-2}{x-3}+2=\frac{-2+2(x-3)}{x-3}=\frac{2x-8}{x-3}$

따라서 $a=2,\ b=8,\ c=-3$이므로

$a+b-c=13$ 답 13

17 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=4$이므로

$a=2,\ b=4$

즉 $y=\frac{k}{x+2}+4$의 그래프가 점 (0, 2)를 지나므로

$2=\frac{k}{0+2}+4$, $\quad\frac{k}{2}=-2$ $\quad\therefore k=-4$

$\therefore k+a+b=2$ 답 ③

18 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=-1$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-3}-1\ (k>0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 (4, 0)을 지나므로

$0=\frac{k}{4-3}-1$ $\quad\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{1}{x-3}-1=\frac{1-(x-3)}{x-3}=\frac{-x+4}{x-3}$

따라서 $a=-1,\ b=4,\ c=3$이므로

$abc=-12$ 답 -12

19 $y=\frac{3x-5}{x-2}=\frac{3(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}+3$

이므로 $y=\frac{3x-5}{x-2}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평

행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{1}{x-a-2}+3$

이때 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3$, $y=3$ 이므로

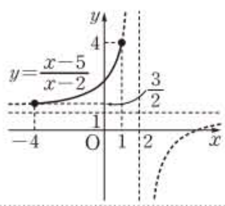
$a+2=-3 \qquad \therefore a=-5$ 　　답 -5

20 $y=\dfrac{x-5}{x-2}=\dfrac{(x-2)-3}{x-2}=-\dfrac{3}{x-2}+1$

이므로 $y=\dfrac{x-5}{x-2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4\le x\le 1$에서

$y=\dfrac{x-5}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=1$일 때 최댓값 4,

$x=-4$일 때 최솟값 $\dfrac{3}{2}$

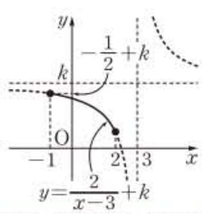
을 갖는다.

즉 $M=4$, $m=\dfrac{3}{2}$이므로 　$Mm=6$ 　　답 6

21 $y=\dfrac{2}{x-3}+k$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le 2$에서

$y=\dfrac{2}{x-3}+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-1$일 때 최댓값 $-\dfrac{1}{2}+k$

를 갖는다.

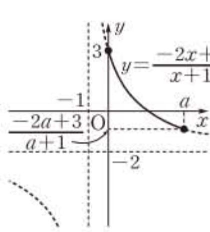
즉 $-\dfrac{1}{2}+k=\dfrac{5}{2}$이므로 　$k=3$ 　　답 ②

22 $y=\dfrac{-2x+3}{x+1}=\dfrac{-2(x+1)+5}{x+1}=\dfrac{5}{x+1}-2$

이므로 $y=\dfrac{-2x+3}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le a$에서

$y=\dfrac{-2x+3}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=0$일 때 최댓값 3,

$x=a$일 때

최솟값 $\dfrac{-2a+3}{a+1}$

을 갖는다.

즉 $b=3$, $\dfrac{-2a+3}{a+1}=-1$이므로 $\dfrac{-2a+3}{a+1}=-1$에서

$-2a+3=-a-1 \qquad \therefore a=4$

$\therefore a-b=1$ 　　답 ①

베이직쎈 BOX

이 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a+2$, $y=3$

$x=(y$에 대한 식$)$ 꼴로 나타낸다.

$\dfrac{1-5}{1-2}=4$

$\dfrac{-4-5}{-4-2}=\dfrac{3}{2}$

$\dfrac{2}{-1-3}+k=-\dfrac{1}{2}+k$

$\dfrac{0+3}{0+1}=3$

23 (1) $y=\dfrac{x+1}{x+2}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+2)=x+1, \qquad xy+2y=x+1$

$x(y-1)=-2y+1$

$\therefore x=\dfrac{-2y+1}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 　$y=\dfrac{-2x+1}{x-1}$

(2) $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+1)=3x-1, \qquad xy+y=3x-1$

$x(y-3)=-y-1$

$\therefore x=\dfrac{-y-1}{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 　$y=\dfrac{-x-1}{x-3}$

(3) $y=\dfrac{2x-3}{x+3}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+3)=2x-3, \qquad xy+3y=2x-3$

$x(y-2)=-3y-3$

$\therefore x=\dfrac{-3y-3}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 　$y=\dfrac{-3x-3}{x-2}$

답 (1) $y=\dfrac{-2x+1}{x-1}$ (2) $y=\dfrac{-x-1}{x-3}$

(3) $y=\dfrac{-3x-3}{x-2}$

24 $y=\dfrac{2}{x}-1$이라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y+1=\dfrac{2}{x}, \qquad x(y+1)=2$

$\therefore x=\dfrac{2}{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 　$y=\dfrac{2}{x+1}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{2}{x+1}$

따라서 $m=2$, $n=1$이므로

$mn=2$ 　　답 ④

25 $y=\dfrac{ax-1}{x-2}$이라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x-2)=ax-1, \qquad xy-2y=ax-1$

$x(y-a)=2y-1 \qquad \therefore x=\dfrac{2y-1}{y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 　$y=\dfrac{2x-1}{x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{2x-1}{x-a}$

따라서 $\dfrac{ax-1}{x-2}=\dfrac{2x-1}{x-a}$이므로 　$a=2$ 　　답 2

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 113쪽

01 전략 주어진 등식의 좌변을 계산한 후 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 계산하면

$$\frac{a}{x-1}+\frac{x+b}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{a(x^2+x+1)+(x+b)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{(a+1)x^2+(a+b-1)x+a-b}{x^3-1}$$

따라서 $\frac{(a+1)x^2+(a+b-1)x+a-b}{x^3-1}=\frac{2x-5}{x^3-1}$가 x에 대한 항등식이므로

$a+1=0,\ a+b-1=2,\ a-b=-5$

즉 $a=-1,\ b=4$이므로

$ab=-4$ 답 ④

베이직쎈 BOX: 양변의 분모가 같으므로 분자의 동류항의 계수를 비교한다.

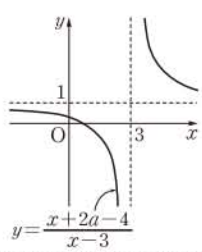
02 **전략** 주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\frac{x+2a-4}{x-3}=\frac{(x-3)+2a-1}{x-3}=\frac{2a-1}{x-3}+1$

이고 a가 자연수이므로

$2a-1>0$

$y=\frac{x+2a-4}{x-3}$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 y의 값이 0보다 크거나 같아야 하므로



$\frac{0+2a-4}{0-3}\geq0$

$2a-4\leq0 \qquad \therefore a\leq2$

따라서 자연수 a는 1, 2이므로 구하는 합은

$1+2=3$ 답 ①

베이직쎈 BOX: $x=0$에서의 y의 값이 0보다 작으면 제3사분면을 지난다.

03 **전략** 먼저 주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$ 꼴로 변형한다.

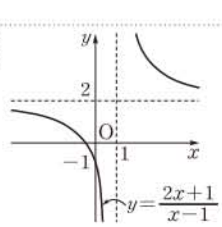
풀이 $y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+2$

② $x=0$일 때 $y=\frac{0+1}{0-1}=-1$이므로 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0,\ -1)$이다.

③ $y=\frac{3}{x-1}+2$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

④ 점근선의 방정식이 $x=1,\ y=2$이므로 점 $(1,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

⑤ 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 사분면을 지난다.



답 ⑤

베이직쎈 BOX: 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1,\ y=2$이고 점 $(0,\ -1)$을 지난다.

04 **전략** $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프는 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

풀이 $y=\frac{-2x+a}{x+1}=\frac{-2(x+1)+2+a}{x+1}=\frac{2+a}{x+1}-2$

이므로 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{2+a}{x-b+1}-2+c$

이 식이 $y=-\frac{3}{x}$과 일치하므로

$2+a=-3,\ -b+1=0,\ -2+c=0$

따라서 $a=-5,\ b=1,\ c=2$이므로

$abc=-10$ 답 ③

다른 풀이 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 $-c$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{-3}{x+b}-c$

이 식이 $y=\frac{-2x+a}{x+1}=\frac{2+a}{x+1}-2$와 일치하므로

$2+a=-3,\ b=1,\ c=2 \qquad \therefore a=-5$

$\therefore abc=-10$

05 **전략** 두 점근선의 교점의 좌표가 $(p,\ q)$이면 점근선의 방정식은 $x=p,\ y=q$이다.

풀이 주어진 함수의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(-2,\ 3)$이므로 점근선의 방정식은

$x=-2,\ y=3$

즉 함수의 식을

$y=\frac{k}{x+2}+3\ (k\neq0)$ ...... ㉠

으로 놓으면 이 그래프가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{2+2}+3, \qquad \frac{k}{4}=-3 \qquad \therefore k=-12$

$k=-12$를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-12}{x+2}+3=\frac{-12+3(x+2)}{x+2}=\frac{3x-6}{x+2}$

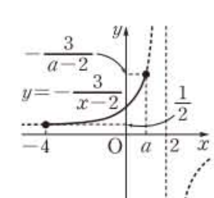
따라서 $a=3,\ b=6,\ c=2$이므로

$a+b-c=7$ 답 ④

06 **전략** 주어진 x의 값의 범위에서 함수의 그래프를 그려 본다.

풀이 $-4\leq x\leq a$에서

$y=-\frac{3}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=a$일 때 최댓값 $-\frac{3}{a-2}$,

$x=-4$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$

을 갖는다.

즉 $-\frac{3}{a-2}=3,\ b=\frac{1}{2}$이므로 $-\frac{3}{a-2}=3$에서

$a-2=-1 \qquad \therefore a=1$

$\therefore a-b=\frac{1}{2}$ 답 ①

베이직쎈 BOX: $-\frac{3}{-4-2}=\frac{1}{2}$

07 전략 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$ 꼴로 변형하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{ax+2}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab+2}{x+b}$

$=\dfrac{-ab+2}{x+b}+a$

이므로 이 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-b,\ y=a \qquad \therefore a=-1,\ b=1$

$\therefore f(x)=\dfrac{-x+2}{x+1}$

ㄱ. $f(1)=\dfrac{-1+2}{1+1}=\dfrac{1}{2}$이므로 그래프는 점 $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 지난다.

ㄴ. $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+1)=-x+2, \qquad xy+y=-x+2$

$x(y+1)=-y+2$

$\therefore x=\dfrac{-y+2}{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\dfrac{-x+2}{x+1}$

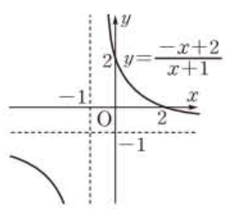
$\therefore f(x)=f^{-1}(x)$

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $y=f(x)$에서 x를 y에 대한 식, 즉 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.
(ii) x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$ 꼴로 나타낸다.

ㄷ. $f(x)=\dfrac{-x+2}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}-1$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 모든 사분면을 지난다.



이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

08 전략 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이면 두 함수는 서로 역함수 관계임을 이용한다.

풀이 주어진 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$y=\dfrac{4x+1}{ax-3}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(ax-3)=4x+1, \qquad axy-3y=4x+1$

$x(ay-4)=3y+1 \qquad \therefore x=\dfrac{3y+1}{ay-4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\dfrac{3x+1}{ax-4}$

이 식이 $y=\dfrac{bx+1}{-2x-4}$과 일치하므로

$a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

답 ②

09 전략 분자, 분모를 각각 인수분해한 후 약분한다.

풀이 $\dfrac{a^2-9b^2}{a^2-5ab+6b^2}\times\dfrac{a-2b}{a^2+4ab+3b^2}$

$=\dfrac{(a+3b)(a-3b)}{(a-2b)(a-3b)}\times\dfrac{a-2b}{(a+b)(a+3b)}$

$=\dfrac{1}{a+b}$

답 $\dfrac{1}{a+b}$

10 전략 $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)(A\neq B)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$

$=\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$+\cdots+\dfrac{1}{(x+9)(x+10)}$

$=\dfrac{1}{x+1-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$+\dfrac{1}{x+2-(x+1)}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$+\dfrac{1}{x+3-(x+2)}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$+\cdots+\dfrac{1}{x+10-(x+9)}\left(\dfrac{1}{x+9}-\dfrac{1}{x+10}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}$

$+\cdots+\dfrac{1}{x+9}-\dfrac{1}{x+10}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+10}$

$\therefore f(10)=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{20}$

답 $\dfrac{1}{20}$

11 전략 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$이다.

풀이 $y=-\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\dfrac{5}{x+2}+4$ ❶

이 그래프가 점 $(3,\ a)$를 지나므로

$x=3$, $y=a$를 그래프의 식에 대입한다.

$a=-\dfrac{5}{3+2}+4=3$ ❷

답 3

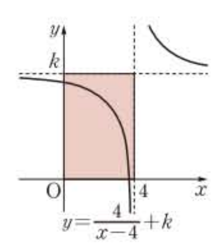
단계	채점 기준	비율
❶	평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	50 %
❷	a의 값을 구할 수 있다.	50 %

12 전략 함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q(k\neq0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.

풀이 함수 $y=\dfrac{4}{x-4}+k$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=4$, $y=k$이므로 오른쪽 그림에서 두 점근선과 x축, y축으로 둘러싸인 직사각형의 넓이는 $4k$이다.

따라서 $4k=24$이므로

$k=6$



답 6

13 전략 그래프의 점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$이면 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$로 놓는다.

풀이 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=-4$이므로 주어진 함수의 식을

06 유리식과 유리함수

$$y=\frac{k}{x-2}-4\,(k<0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓을 수 있다. ⋯ ❶

이 함수의 그래프가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$$-3=\frac{k}{0-2}-4, \quad -\frac{k}{2}=1 \quad \therefore k=-2$$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$$y=\frac{-2}{x-2}-4=\frac{-2-4(x-2)}{x-2}=\frac{-4x+6}{x-2} \quad \cdots ❷$$

따라서 $a=-4$, $b=6$, $c=-2$이므로

$$a-b+c=-12 \quad \cdots ❸$$

답 -12

단계	채점 기준	비율
❶	함수의 식을 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 놓을 수 있다.	20 %
❷	함수의 식을 구할 수 있다.	60 %
❸	$a-b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

14 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 한 점에서 만나면 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 1이다.

풀이 $y=\frac{2}{x}$의 그래프가 직선 $y=-x+k$와 한 점에서 만나려면 방정식 $\frac{2}{x}=-x+k$, 즉 $x^2-kx+2=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1이어야 한다. ⋯ ❶

즉 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot2=0$$

$$k^2=8 \quad \therefore k=\pm2\sqrt{2}$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$$2\sqrt{2}+(-2\sqrt{2})=0 \quad \cdots ❷$$

답 0

단계	채점 기준	비율
❶	함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만날 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷	모든 실수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	60 %

베이직쎈 BOX

x의 계수가 무리수이지만 근호 안에 문자가 포함되지 않은 식이므로 유리식이다.

수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근
② $D=0$ ➡ 중근
③ $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근

$\sqrt{x}-\sqrt{x+2}$를 분자, 분모에 각각 곱한다.

Ⅱ. 함수

07 무리식과 무리함수

14 무리식

개념 43 무리식

본책 116쪽

01 답 ○

02 답 ×

03 답 ×

04 답 ○

05 답 ×

06 답 ○

07 $2x+6\ge0$이므로

$x\ge-3$ 답 $x\ge-3$

08 $1-3x\ge0$이므로

$x\le\frac{1}{3}$ 답 $x\le\frac{1}{3}$

09 $8+4x\ge0$, $6-3x\ge0$이므로

$x\ge-2$, $x\le2$

$\therefore -2\le x\le2$ 답 $-2\le x\le2$

10 $5x+5>0$이므로

$x>-1$ 답 $x>-1$

11 $2x-4>0$, $x>0$이므로

$x>2$ 답 $x>2$

개념 44 무리식의 계산

본책 117쪽

12 $(2-\sqrt{2x+3})(2+\sqrt{2x+3})$

$=2^2-(\sqrt{2x+3})^2$

$=4-(2x+3)$

$=-2x+1$ 답 $-2x+1$

13 $(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1})$

$=(\sqrt{2x-1})^2-(\sqrt{x-1})^2$

$=2x-1-(x-1)$

$=x$ 답 x

14 답 $\sqrt{x+1}$, 1, $\sqrt{x+1}$, 1, $\sqrt{x+1}$, 1

15 $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})}$

$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{x-(x+2)}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{-2}$

$=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}$

베이직쎈 BOX

16 $\dfrac{2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}}$

$=\dfrac{2(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2})}{x+4-(x+2)}$

$=\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}$ 　　답 $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}$

$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}$를 분자, 분모에 각각 곱한다.

17 $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$=\dfrac{x(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$

$=\dfrac{x(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{1+x-(1-x)}$

$=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}$ 　　답 $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}$

$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$를 분자, 분모에 각각 곱한다.

18 $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$

$=\dfrac{2\sqrt{y}}{x-y}$ 　　답 $\dfrac{2\sqrt{y}}{x-y}$

19 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$

$+\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}+\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{x+1-(x+2)}$

$=-(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})$

$=-\sqrt{x}+\sqrt{x+2}$ 　　답 $-\sqrt{x}+\sqrt{x+2}$

20 $\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}-3)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}-\dfrac{(\sqrt{x}+3)^2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$=\dfrac{x-6\sqrt{x}+9-(x+6\sqrt{x}+9)}{x-9}$

$=-\dfrac{12\sqrt{x}}{x-9}$ 　　답 $-\dfrac{12\sqrt{x}}{x-9}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 118쪽

01 $4+2x\geq0$, $3-x\geq0$이므로

$x\geq-2$, $x\leq3$ 　 $\therefore -2\leq x\leq3$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이다.

답 ④

02 $5+x\geq0$, $4x+1>0$이므로

$x\geq-5$, $x>-\dfrac{1}{4}$

$\therefore x>-\dfrac{1}{4}$ 　　답 $x>-\dfrac{1}{4}$

03 $9-3x\geq0$이므로 　 $x\leq3$

이때 $x+2\neq0$이어야 하므로 　 $x\neq-2$

$\therefore x<-2$ 또는 $-2<x\leq3$

답 $x<-2$ 또는 $-2<x\leq3$

04 $\dfrac{1}{2+\sqrt{x+4}}-\dfrac{1}{2-\sqrt{x+4}}$

$=\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{(2+\sqrt{x+4})(2-\sqrt{x+4})}$

$-\dfrac{2+\sqrt{x+4}}{(2-\sqrt{x+4})(2+\sqrt{x+4})}$

$=\dfrac{2-\sqrt{x+4}-(2+\sqrt{x+4})}{4-(x+4)}$

$=\dfrac{2\sqrt{x+4}}{x}$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로

$ab=8$ 　　답 8

05 $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$

$+\dfrac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\dfrac{1+x-2\sqrt{(1+x)(1-x)}+1-x}{1+x-(1-x)}$

$+\dfrac{1+x+2\sqrt{(1+x)(1-x)}+1-x}{1+x-(1-x)}$

$=\dfrac{2-2\sqrt{(1+x)(1-x)}+2+2\sqrt{(1+x)(1-x)}}{2x}$

$=\dfrac{2}{x}$

$\therefore k=2$ 　　답 ④

06 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}$

$=-\sqrt{x-1}+\sqrt{x}$

이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(25)$

$=(-0+1)+(-1+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$+\cdots+(-\sqrt{24}+\sqrt{25})$

$=\sqrt{25}$

$=5$ 　　답 5

07 $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

$=\dfrac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

$=\dfrac{\sqrt{x}+1-(\sqrt{x}-1)}{x-1}$

$=\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

$=\sqrt{3}+1$ 　　답 $\sqrt{3}+1$

베이직쎈 BOX

$x=\sqrt{3}$을 대입한다.

$\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$
$=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$
$=\sqrt{3}+1$

08 $\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x})^2}{(\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x})(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x})}$

$=\dfrac{3+x-2\sqrt{(3+x)(3-x)}+3-x}{3+x-(3-x)}$

$=\dfrac{6-2\sqrt{9-x^2}}{2x}=\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}$

$x=\sqrt{5}$를 대입한다.

$=\dfrac{3-2}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 　　답 ①

15 무리함수

개념 45 무리함수

본책 119쪽

01 답 ○　　**02** 답 ×

03 답 ○　　**04** 답 ×

05 답 ○　　**06** 답 ○

07 $x-5\geq 0$에서 　$x\geq 5$
따라서 주어진 함수의 정의역은 　$\{x|x\geq 5\}$
답 $\{x|x\geq 5\}$

08 $2x-2\geq 0$에서 　$x\geq 1$
따라서 주어진 함수의 정의역은 　$\{x|x\geq 1\}$
답 $\{x|x\geq 1\}$

09 $12+3x\geq 0$에서 　$x\geq -4$
따라서 주어진 함수의 정의역은 　$\{x|x\geq -4\}$
답 $\{x|x\geq -4\}$

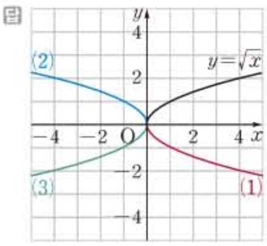
10 $4-x\geq 0$에서 　$x\leq 4$
따라서 주어진 함수의 정의역은 　$\{x|x\leq 4\}$
답 $\{x|x\leq 4\}$

11 $-2x+6\geq 0$에서 　$x\leq 3$
따라서 주어진 함수의 정의역은 　$\{x|x\leq 3\}$
답 $\{x|x\leq 3\}$

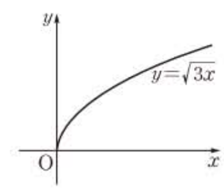
개념 46 무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$의 그래프와 성질

본책 120쪽

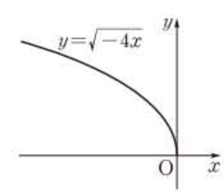
12 답



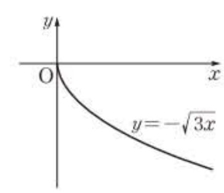
13 $y=\sqrt{3x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\geq 0\}$,
치역은 $\{y|y\geq 0\}$
답 풀이 참조



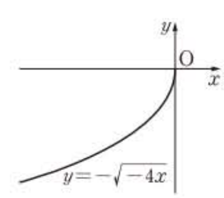
14 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\leq 0\}$,
치역은 $\{y|y\geq 0\}$
답 풀이 참조



15 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\geq 0\}$,
치역은 $\{y|y\leq 0\}$
답 풀이 참조



16 $y=-\sqrt{-4x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\leq 0\}$,
치역은 $\{y|y\leq 0\}$
답 풀이 참조



개념 47 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프

본책 121쪽

17 답 $y=\sqrt{x-1}+2$

18 답 $y=-\sqrt{6(x+1)}+4$

19 답 $y=\sqrt{-2(x+3)}-2$

20 답 $p=1,\ q=-5$　　**21** 답 $p=-3,\ q=-3$

22 답 $p=2,\ q=4$　　**23** 답 $p=2,\ q=1$

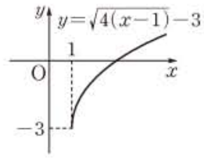
24 답 $p=-4,\ q=3$　　**25** 답 $p=-1,\ q=-6$

베이직쎈 BOX

26 $y=\sqrt{4(x-1)}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\geq 1\}$,

치역은 $\{y|y\geq -3\}$

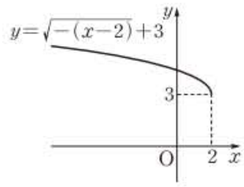


답 풀이 참조

27 $y=\sqrt{-(x-2)}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\leq 2\}$,

치역은 $\{y|y\geq 3\}$

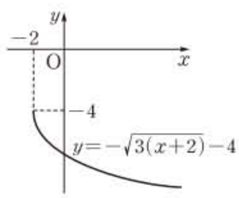


답 풀이 참조

28 $y=-\sqrt{3(x+2)}-4$의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\geq -2\}$,

치역은 $\{y|y\leq -4\}$

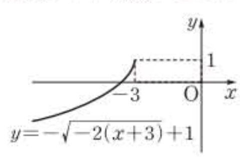


답 풀이 참조

29 $y=-\sqrt{-2(x+3)}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\leq -3\}$,

치역은 $\{y|y\leq 1\}$



답 풀이 참조

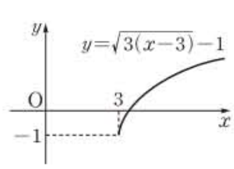
30 답 ○

31 치역은 $\{y|y\geq -1\}$이다. 답 ×

32 그래프는 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

답 ×

33 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면, 제4사분면만을 지난다.



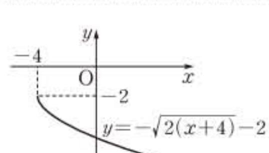
답 ○

34 정의역은 $\{x|x\geq -4\}$이다. 답 ×

35 답 ○

36 답 ○

37 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면, 제4사분면만을 지난다.



답 ×

38 답 $a=2$, $p=2$, $q=3$

$>$, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2

39 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을 $y=-\sqrt{a(x+1)}-1$이라 하면

$p=-1$, $q=-1$

이 그래프가 점 $(-2, -3)$을 지나므로

$-3=-\sqrt{a(-2+1)}-1$ $\quad\therefore a=-4$

답 $a=-4$, $p=-1$, $q=-1$

a의 값의 부호는 그래프의 모양으로 판단한다.

양변에 -1을 곱하면
$3=\sqrt{-a}+1$
$\sqrt{-a}=2$, $\quad -a=4$
$\therefore a=-4$

개념 48 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프

본책 123쪽

40 $y=\sqrt{3x+6}-2=\sqrt{3(x+2)}-2$

답 $y=\sqrt{3(x+2)}-2$

41 $y=-\sqrt{4x+2}+3=-\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}+3$

답 $y=-\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}+3$

42 $y=\sqrt{-x-1}+4=\sqrt{-(x+1)}+4$

답 $y=\sqrt{-(x+1)}+4$

43 $y=-\sqrt{-5x+10}+2=-\sqrt{-5(x-2)}+2$

답 $y=-\sqrt{-5(x-2)}+2$

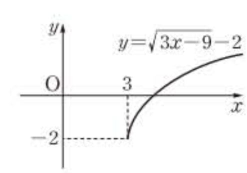
44 $y=\sqrt{3x-9}-2=\sqrt{3(x-3)}-2$

이므로 $y=\sqrt{3x-9}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\geq 3\}$,

치역은 $\{y|y\geq -2\}$



답 풀이 참조

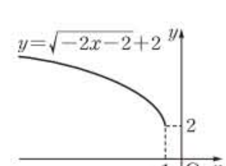
45 $y=\sqrt{-2x-2}+2=\sqrt{-2(x+1)}+2$

이므로 $y=\sqrt{-2x-2}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\leq -1\}$,

치역은 $\{y|y\geq 2\}$

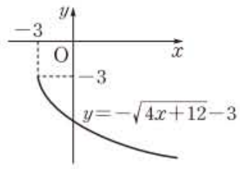


답 풀이 참조

$x=4$, $y=-6$을 그래프의 식에 대입하면
$-6=-\sqrt{2(4+4)}-2$
이므로 그래프는 점 $(4, -6)$을 지난다.

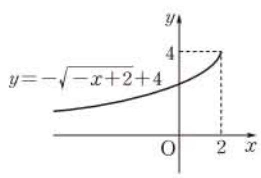
베이직쎈 BOX

46 $y=-\sqrt{4x+12}-3=-\sqrt{4(x+3)}-3$
이므로 $y=-\sqrt{4x+12}-3$의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\geq-3\}$,
치역은 $\{y|y\leq-3\}$



답 풀이 참조

47 $y=-\sqrt{-x+2}+4=-\sqrt{-(x-2)}+4$
이므로 $y=-\sqrt{-x+2}+4$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\leq 2\}$,
치역은 $\{y|y\leq 4\}$

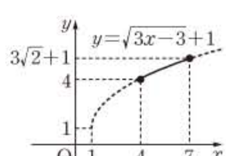


답 풀이 참조

개념 49 무리함수의 최대·최소

본책 124쪽

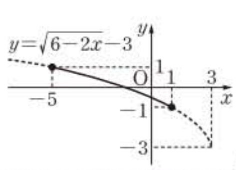
48 $y=\sqrt{3x-3}+1=\sqrt{3(x-1)}+1$
이므로 $y=\sqrt{3x-3}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $4\leq x\leq 7$에서 함수 $y=\sqrt{3x-3}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=7$일 때 최댓값 $3\sqrt{2}+1$,
$x=4$일 때 최솟값 4
를 갖는다. 답 최댓값: $3\sqrt{2}+1$, 최솟값: 4

$\sqrt{3\cdot7-3}+1=3\sqrt{2}+1$
$\sqrt{3\cdot4-3}+1=4$

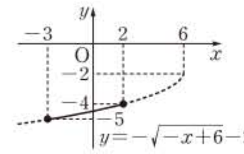
49 $y=\sqrt{6-2x}-3=\sqrt{-2(x-3)}-3$
이므로 $y=\sqrt{6-2x}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $-5\leq x\leq 1$에서 함수 $y=\sqrt{6-2x}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-5$일 때 최댓값 1,
$x=1$일 때 최솟값 -1
을 갖는다. 답 최댓값: 1, 최솟값: -1

$\sqrt{6-2\cdot(-5)}-3=1$
$\sqrt{6-2\cdot1}-3=-1$

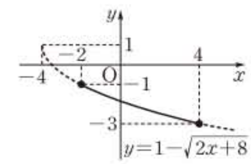
50 $y=-\sqrt{-x+6}-2=-\sqrt{-(x-6)}-2$
이므로 $y=-\sqrt{-x+6}-2$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $-3\leq x\leq 2$에서 함수 $y=-\sqrt{-x+6}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=2$일 때 최댓값 -4,
$x=-3$일 때 최솟값 -5
를 갖는다. 답 최댓값: -4, 최솟값: -5

$-\sqrt{-2+6}-2=-4$
$-\sqrt{3+6}-2=-5$

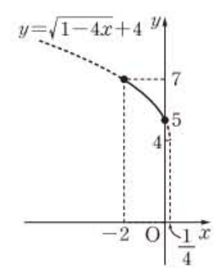
51 $y=1-\sqrt{2x+8}=-\sqrt{2(x+4)}+1$
이므로 $y=1-\sqrt{2x+8}$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $-2\leq x\leq 4$에서 함수 $y=1-\sqrt{2x+8}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-2$일 때 최댓값 -1,
$x=4$일 때 최솟값 -3
을 갖는다. 답 최댓값: -1, 최솟값: -3

$1-\sqrt{2\cdot(-2)+8}=-1$
$1-\sqrt{2\cdot4+8}=-3$

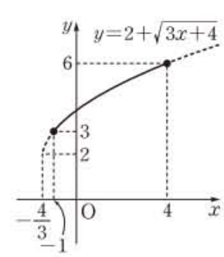
52 $y=\sqrt{1-4x}+4=\sqrt{-4\left(x-\frac{1}{4}\right)}+4$
이므로 $y=\sqrt{1-4x}+4$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $-2\leq x\leq 0$에서 함수 $y=\sqrt{1-4x}+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-2$일 때 최댓값 7,
$x=0$일 때 최솟값 5
를 갖는다.
답 최댓값: 7, 최솟값: 5

$\sqrt{1-4\cdot(-2)}+4=7$
$\sqrt{1-0}+4=5$

53 $y=2+\sqrt{3x+4}=\sqrt{3\left(x+\frac{4}{3}\right)}+2$
이므로 $y=2+\sqrt{3x+4}$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $-1\leq x\leq 4$에서 함수 $y=2+\sqrt{3x+4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=4$일 때 최댓값 6,
$x=-1$일 때 최솟값 3
을 갖는다.
답 최댓값: 6, 최솟값: 3

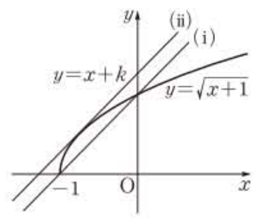
$2+\sqrt{3\cdot4+4}=6$
$2+\sqrt{3\cdot(-1)+4}=3$

개념 50 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

본책 125쪽

54 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.

베이직쎈 BOX



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때,

$0=-1+k \qquad \therefore k=1$

(ii) 직선 $y=x+k$가 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{x+1}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x+1=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$

$-4k+5=0 \qquad \therefore k=\frac{5}{4}$

(1) $1\le k<\frac{5}{4}$일 때, 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $k<1$ 또는 $k=\frac{5}{4}$일 때, 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 한 점에서 만난다.

(3) $k>\frac{5}{4}$일 때, 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$는 만나지 않는다.

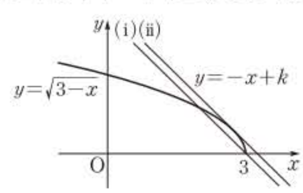
풀이 참조

$x=-1$, $y=0$을 직선의 방정식에 대입한다.

직선 $y=x+k$가 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프에 접하므로 이 이차방정식은 중근을 가져야 한다.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근
② $D=0$ ➡ 중근
③ $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근

55 $y=\sqrt{3-x}=\sqrt{-(x-3)}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(3,\ 0)$을 지날 때,

$0=-3+k \qquad \therefore k=3$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 $y=\sqrt{3-x}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{3-x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$3-x=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-(2k-1)x+k^2-3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-3)=0$

$-4k+13=0 \qquad \therefore k=\frac{13}{4}$

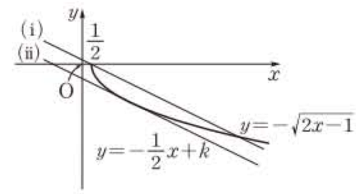
(1) $3\le k<\frac{13}{4}$일 때, 함수 $y=\sqrt{3-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $k<3$ 또는 $k=\frac{13}{4}$일 때, 함수 $y=\sqrt{3-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 한 점에서 만난다.

(3) $k>\frac{13}{4}$일 때, 함수 $y=\sqrt{3-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$는 만나지 않는다.

풀이 참조

56 $y=-\sqrt{2x-1}=-\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$는 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 점 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지날 때,

$0=-\frac{1}{4}+k \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$

(ii) 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 $y=-\sqrt{2x-1}$의 그래프에 접할 때,

$-\sqrt{2x-1}=-\frac{1}{2}x+k$의 양변을 제곱하면

$2x-1=\frac{1}{4}x^2-kx+k^2$

$\therefore \frac{1}{4}x^2-(k+2)x+k^2+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(k+2)^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot(k^2+1)=0$

$4k+3=0 \qquad \therefore k=-\frac{3}{4}$

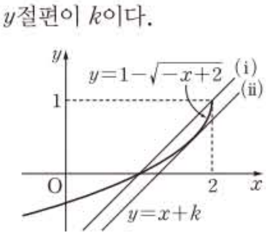
(1) $-\frac{3}{4}<k\le\frac{1}{4}$일 때, 함수 $y=-\sqrt{2x-1}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $k=-\frac{3}{4}$ 또는 $k>\frac{1}{4}$일 때, 함수 $y=-\sqrt{2x-1}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 한 점에서 만난다.

(3) $k<-\frac{3}{4}$일 때, 함수 $y=-\sqrt{2x-1}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$는 만나지 않는다.

풀이 참조

57 $y=1-\sqrt{-x+2}=-\sqrt{-(x-2)}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(2,\ 1)$을 지날 때,

$1=2+k \qquad \therefore k=-1$

(ii) 직선 $y=x+k$가 $y=1-\sqrt{-x+2}$의 그래프에 접할 때,

$1-\sqrt{-x+2}=x+k$, 즉 $-\sqrt{-x+2}=x+k-1$의 양변을 제곱하면

$$-x+2=x^2+k^2+1+2kx-2x-2k$$

$$\therefore\ x^2+(2k-1)x+k^2-2k-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(2k-1)^2-4(k^2-2k-1)=0$$

$$4k+5=0\qquad \therefore\ k=-\frac{5}{4}$$

베이직쎈 BOX

$(a+b+c)^2$
$=a^2+b^2+c^2+2ab$
$+2bc+2ca$

(1) $-\frac{5}{4}<k\le-1$일 때, 함수 $y=1-\sqrt{-x+2}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $k=-\frac{5}{4}$ 또는 $k>-1$일 때, 함수 $y=1-\sqrt{-x+2}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 한 점에서 만난다.

(3) $k<-\frac{5}{4}$일 때, 함수 $y=1-\sqrt{-x+2}$의 그래프와 직선 $y=x+k$는 만나지 않는다.

답 풀이 참조

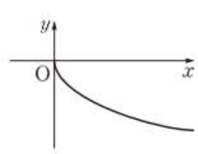
자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 126쪽

01 ④ $y=-\sqrt{ax}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

답 ④

02 ㄱ. $y=k\sqrt{x}$ $(k<0)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지난다.

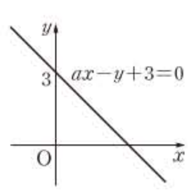


이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

03 주어진 그래프에서 $a<0$

따라서 직선 $ax-y+3=0$, 즉 $y=ax+3$은 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



답 제3사분면

04 함수 $y=\sqrt{2x+8}-1$의

정의역은 $\{x\,|\,x\ge-4\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge-1\}$

따라서 $a=-4$, $b=-1$이므로 $b-a=3$

답 3

$2x+8\ge0$에서
$x\ge-4$

05 ① $x=2$, $y=4$를 주어진 함수의 식에 대입하면

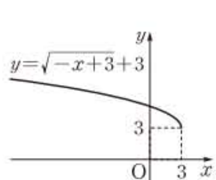
$$4=\sqrt{-2+3}+3$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(2,\ 4)$를 지난다.

④, ⑤ $y=\sqrt{-x+3}+3=\sqrt{-(x-3)}+3$

이므로 $y=\sqrt{-x+3}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

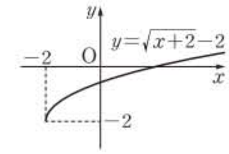
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면, 제2사분면을 지나고, x축과 만나지 않는다.



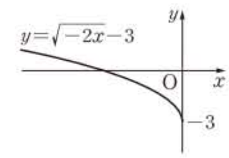
답 ④

무리함수
$y=\sqrt{ax+b}+c\,(a<0)$의
정의역은
$\left\{x\,\middle|\,x\le-\frac{b}{a}\right\}$
치역은
$\{y\,|\,y\ge c\}$

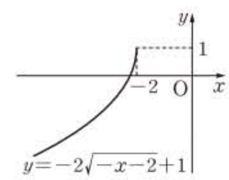
06 ① $y=\sqrt{x+2}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



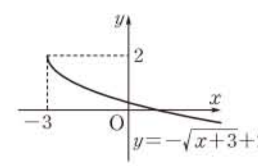
② $y=\sqrt{-2x}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



③ $y=-2\sqrt{-x-2}+1=-2\sqrt{-(x+2)}+1$의 그래프는 $y=-2\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

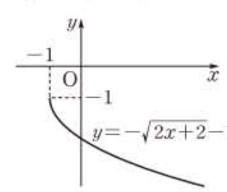


④ $y=-\sqrt{x+3}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$x=0$에서의 y의 값이
$y=-\sqrt{0+3}+2$
$=-\sqrt{3}+2>0$
이므로 제3사분면을 지나지 않는다.

⑤ $y=-\sqrt{2x+2}-1=-\sqrt{2(x+1)}-1$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 그래프가 제3사분면을 지나지 않는 것은 ④이다.

답 ④

07 $ax+9\ge0$에서 $ax\ge-9$

이 부등식의 해가 $x\ge-3$이므로 $a>0$

$$\therefore\ x\ge-\frac{9}{a}$$

부등호의 방향이 바뀌지 않았다.

즉 $-\frac{9}{a}=-3$이므로 $a=3$

이때 $y=-\sqrt{3x+9}+b$의 그래프가 점 $(9,\ -2)$를 지나므로

$$-2=-\sqrt{27+9}+b\qquad \therefore\ b=4$$

따라서 $y=-\sqrt{3x+9}+4$의 치역은

$$\{y\,|\,y\le4\}$$

답 ③

08 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\sqrt{-2(x-4)}-2$$

이 함수의 그래프가 점 $(-4,\ a)$를 지나므로

$$a=\sqrt{-2\cdot(-8)}-2=2$$

답 2

09 $y=\sqrt{5x+a}-1$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{5(x+1)+a}-1-3$, 즉 $y=\sqrt{5x+5+a}-4$
이 함수의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로
$1=\sqrt{10+5+a}-4$, $\sqrt{15+a}=5$
$15+a=25$ $\therefore a=10$ 답 10

10 $y=-\sqrt{a(x-1)}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{a(x-b-1)}-2+c$
이 식이 $y=-\sqrt{4x+8}-1$, 즉 $y=-\sqrt{4(x+2)}-1$과 일치하므로
$a=4$, $-b-1=2$, $-2+c=-1$
$\therefore b=-3$, $c=1$ $\therefore a-b+c=8$ 답 8

11 $y=\sqrt{1-4x}+2$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.
$-y=\sqrt{1+4x}+2$ $\therefore y=-\sqrt{1+4x}-2$
이 함수의 그래프가 점 $(2,\ a)$를 지나므로
$a=-\sqrt{1+8}-2=-5$ 답 ①

12 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-\sqrt{-x}$
x 대신 $-x$를 대입한다.
이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{-(x-5)}+2=-\sqrt{-x+5}+2$
답 $y=-\sqrt{-x+5}+2$

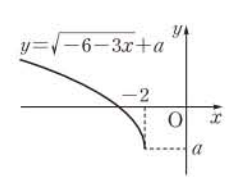
13 ① $y=\sqrt{3x+1}=\sqrt{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$만큼 평행이동한 것이다.
② $y=\sqrt{-3x}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 다음 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
④ $y=-\sqrt{3x-1}+5=-\sqrt{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}+5$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
⑤ $y=-\sqrt{6-3x}-2=-\sqrt{-3(x-2)}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
답 ③

14 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을
$y=\sqrt{a(x+1)}+2$ …… ㉠
로 놓을 수 있다.
이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로
$4=\sqrt{a}+2$, $\sqrt{a}=2$ $\therefore a=4$
$a=4$를 ㉠에 대입하면
$y=\sqrt{4(x+1)}+2=\sqrt{4x+4}+2$
따라서 $b=4$, $c=2$이므로
$abc=32$ 답 ⑤

15 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을
$y=-\sqrt{a(x+2)}-1$ …… ㉠
로 놓을 수 있다.
이 함수의 그래프가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로
$-3=-\sqrt{2a}-1$, $\sqrt{2a}=2$ $\therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면
$y=-\sqrt{2(x+2)}-1=-\sqrt{2x+4}-1$
따라서 $b=4$, $c=-1$이므로
$a+b-c=7$ 답 7

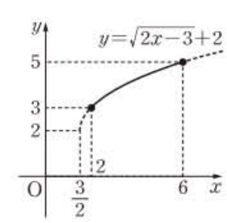
16 $y=\sqrt{-2x+6}+1=\sqrt{-2(x-3)}+1$
이므로 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{-2(x-a-3)}+1+b$ …… ㉠
이때 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 식은
$y=\sqrt{-2(x-1)}-1$
이 식이 ㉠과 일치하므로
$-a-3=-1$, $1+b=-1$
따라서 $a=-2$, $b=-2$이므로
$a+b=-4$ 답 ①

17 $y=\sqrt{-6-3x}+a=\sqrt{-3(x+2)}+a$
이므로 $y=\sqrt{-6-3x}+a$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-2$일 때 최솟값 a를 갖는다.



즉 $b=-2$, $a=-2$이므로
$a-b=0$ 답 0

18 $y=\sqrt{2x-3}+2=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+2$
이므로 $y=\sqrt{2x-3}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $2\le x\le 6$에서 $y=\sqrt{2x-3}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=6$일 때 최댓값 5,
$\sqrt{2\cdot 6-3}+2=5$
$x=2$일 때 최솟값 3
$\sqrt{2\cdot 2-3}+2=3$
을 갖는다.

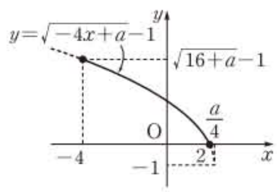
즉 $M=5$, $m=3$이므로

$M-m=2$ 답 ②

19 $y=\sqrt{-4x+a}-1=\sqrt{-4\left(x-\frac{a}{4}\right)}-1$

이므로 $y=\sqrt{-4x+a}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{a}{4}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4\le x\le 2$에서 $y=\sqrt{-4x+a}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-4$일 때 최댓값 $\sqrt{16+a}-1$,

$x=2$일 때 최솟값 $\sqrt{-8+a}-1$

을 갖는다.

즉 $\sqrt{16+a}-1=4$이므로 $\sqrt{16+a}=5$

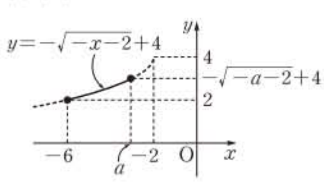
$16+a=25$ $\therefore a=9$

따라서 구하는 최솟값은

$\sqrt{-8+9}-1=0$ 답 0

20 $y=-\sqrt{-x-2}+4=-\sqrt{-(x+2)}+4$

이므로 $y=-\sqrt{-x-2}+4$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $-6\le x\le a$에서 $y=-\sqrt{-x-2}+4$의 그래프는 위의 그림과 같으므로

$x=a$일 때 최댓값 $-\sqrt{-a-2}+4$,

$x=-6$일 때 최솟값 2

를 갖는다.

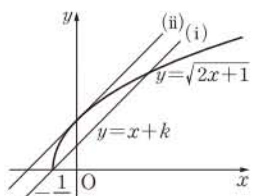
$-\sqrt{6-2}+4=2$

즉 $-\sqrt{-a-2}+4=3$, $b=2$이므로 $-\sqrt{-a-2}+4=3$에서

$\sqrt{-a-2}=1$, $-a-2=1$ $\therefore a=-3$

$\therefore ab=-6$ 답 -6

21 $y=\sqrt{2x+1}=\sqrt{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$을 지날 때,

$0=-\frac{1}{2}+k$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 $y=\sqrt{2x+1}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{2x+1}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x+1=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)=0$

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=b'^2-ac$

$-2k+2=0$ $\therefore k=1$

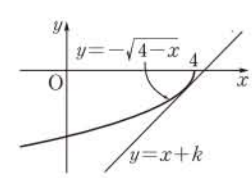
(i), (ii)에서 $\frac{1}{2}\le k<1$일 때 함수 $y=\sqrt{2x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

직선이 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=1$이므로

$a+b=\frac{3}{2}$ 답 ③

22 $y=-\sqrt{4-x}=-\sqrt{-(x-4)}$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



직선 $y=x+k$가 $y=-\sqrt{4-x}$의 그래프에 접할 때,

$-\sqrt{4-x}=x+k$의 양변을 제곱하면

$4-x=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k+1)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

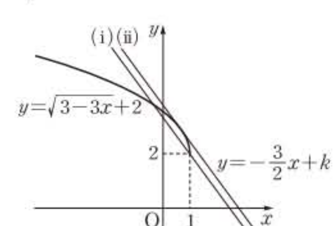
$D=(2k+1)^2-4(k^2-4)=0$

$4k+17=0$ $\therefore k=-\frac{17}{4}$

따라서 $k\ge-\frac{17}{4}$일 때 $y=-\sqrt{4-x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 만나므로 실수 k의 값이 아닌 것은 ①이다.

답 ①

23 $y=\sqrt{3-3x}+2=\sqrt{-3(x-1)}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-\frac{3}{2}x+k$는 기울기가 $-\frac{3}{2}$이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-\frac{3}{2}x+k$가 점 (1, 2)를 지날 때,

$2=-\frac{3}{2}+k \qquad \therefore k=\frac{7}{2}$

(ii) 직선 $y=-\frac{3}{2}x+k$가 $y=\sqrt{3-3x}+2$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{3-3x}+2=-\frac{3}{2}x+k$, 즉 $\sqrt{3-3x}=-\frac{3}{2}x+k-2$

의 양변을 제곱하면

$3-3x=\frac{9}{4}x^2+k^2+4-3kx-4k+6x$

$\therefore \frac{9}{4}x^2-(3k-9)x+k^2-4k+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(3k-9)^2-4\cdot\frac{9}{4}\cdot(k^2-4k+1)=0$

$-18k+72=0 \qquad \therefore k=4$

(i), (ii)에서 $k=4$ 또는 $k<\frac{7}{2}$일 때 $y=\sqrt{3-3x}+2$의 그래프와 직선 $y=-\frac{3}{2}x+k$가 한 점에서 만나므로 구하는 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다. 답 4

24 (1) 함수 $y=\sqrt{x+5}$의 치역이 $\{y|y\geq 0\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\geq 0\}$이다.

$y=\sqrt{x+5}$의 양변을 제곱하면

$y^2=x+5 \qquad \therefore x=y^2-5$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=x^2-5\,(x\geq 0)$

(2) 함수 $y=-\sqrt{3x-2}-1$의 치역이 $\{y|y\leq -1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\leq -1\}$이다.

$y=-\sqrt{3x-2}-1$에서 $\quad y+1=-\sqrt{3x-2}$

양변을 제곱하면

$(y+1)^2=3x-2, \qquad 3x=(y+1)^2+2$

$\therefore x=\frac{1}{3}(y+1)^2+\frac{2}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{3}(x+1)^2+\frac{2}{3}\,(x\leq -1)$

(3) 함수 $y=\sqrt{-x+1}+4$의 치역이 $\{y|y\geq 4\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\geq 4\}$이다.

$y=\sqrt{-x+1}+4$에서 $\quad y-4=\sqrt{-x+1}$

양변을 제곱하면

$(y-4)^2=-x+1 \qquad \therefore x=-(y-4)^2+1$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-(x-4)^2+1\,(x\geq 4)$

답 (1) $y=x^2-5\,(x\geq 0)$
(2) $y=\frac{1}{3}(x+1)^2+\frac{2}{3}\,(x\leq -1)$
(3) $y=-(x-4)^2+1\,(x\geq 4)$

25 함수 $y=3-\sqrt{2-x}$의 치역이 $\{y|y\leq 3\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\leq 3\}$이다.

$\therefore c=3$

$y=3-\sqrt{2-x}$에서 $\quad y-3=-\sqrt{2-x}$

양변을 제곱하면

$(y-3)^2=2-x \qquad \therefore x=-(y-3)^2+2$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-(x-3)^2+2=-x^2+6x-7\,(x\leq 3)$

따라서 $a=6$, $b=-7$이므로

$a-b+c=16$ 답 ②

26 $f^{-1}(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$이므로

$-\sqrt{4k+4}+2=-2, \qquad \sqrt{4k+4}=4$

$4k+4=16 \qquad \therefore k=3$

$\therefore f^{-1}(-2)=3$ 답 3

다른 풀이 함수 $f(x)=-\sqrt{4x+4}+2$의 치역이 $\{y|y\leq 2\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\leq 2\}$이다.

$y=-\sqrt{4x+4}+2$라 하면 $\quad y-2=-\sqrt{4x+4}$

양변을 제곱하면 $\quad (y-2)^2=4x+4$

$4x=(y-2)^2-4 \qquad \therefore x=\frac{1}{4}(y-2)^2-1$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{4}(x-2)^2-1\,(x\leq 2)$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2-1$이므로

$f^{-1}(-2)=\frac{1}{4}\cdot(-4)^2-1=3$

27 함수 $f(x)=\sqrt{x-a}-b$에서

정의역은 $\{x|x\geq a\}$, 치역은 $\{y|y\geq -b\}$

$\therefore a=3$

이때 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$의 정의역이 $\{x|x\geq -5\}$이므로 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y|y\geq -5\}$이다.

즉 $-b=-5$이므로 $\quad b=5$

$\therefore ab=15$ 답 15

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 130쪽

01 전략 $\sqrt{f(x)}$의 값이 실수가 되려면 $f(x)\geq 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $x+1\geq 0$, $2-x\geq 0$에서 $\quad x\geq -1$, $x\leq 2$

$\therefore -1\leq x\leq 2$

$\therefore \sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$

$=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}$

$=x+2-(x-3)=5$ 답 ⑤

02 전략 먼저 분모의 유리화를 이용하여 주어진 무리식을 간단히 한 후 x에 $\sqrt{2}$를 대입한다.

풀이 $\frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$=\frac{x(x-\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}$

$\quad+\frac{x(x+\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}$

$=\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}+x^2+x\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)}$

$=2x^2=2\cdot(\sqrt{2})^2=4$ 답 ⑤

베이직쎈 BOX

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b$
$\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

$(a+b+c)^2$
$=a^2+b^2+c^2+2ab$
$+2bc+2ca$

직선이 (ii)이거나 (i)의 아래쪽에 있을 때 한 점에서 만난다.

$-1\leq x\leq 2$이므로
$x+2>0$, $x-3<0$

실수 a에 대하여
$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\geq 0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$

$x=\sqrt{2}$를 대입한다.

03 전략 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a<0)$의 정의역은 $\left\{x \middle| x\le -\frac{b}{a}\right\}$, 치역은 $\{y|y\ge c\}$임을 이용한다.

풀이 $3-5x\ge 0$에서 $\quad x\le \frac{3}{5}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x \middle| x\le \frac{3}{5}\right\}$이므로

$a=\frac{3}{5}$

또 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\ge 2b-1\}$이므로

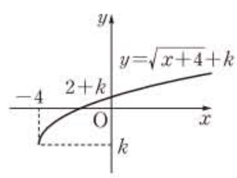
$2b-1=-3 \quad \therefore b=-1$

$\therefore 5ab=-3$ 답 ②

04 전략 $y=\sqrt{x+4}+k$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\sqrt{x+4}+k$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\sqrt{x+4}+k$의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 y의 값이 0보다 크거나 같아야 하므로



$\sqrt{0+4}+k\ge 0 \quad \therefore k\ge -2$

따라서 실수 k의 최솟값은 -2이다. 답 ②

05 전략 함수 $y=-\sqrt{2x+12}-3$을 $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y=-\sqrt{2x+12}-3=-\sqrt{2(x+6)}-3$

이므로 $y=-\sqrt{2x+12}-3$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $p=-6$, $q=-3$이므로

$p+q=-9$ 답 ②

06 전략 함수 $y=\sqrt{5-x}-3$을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한다.

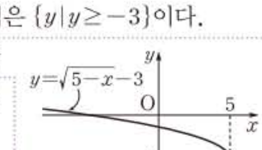
풀이 $y=\sqrt{5-x}-3=\sqrt{-(x-5)}-3$

이므로 $y=\sqrt{5-x}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. $y=\sqrt{5-x}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. 정의역은 $\{x|x\le 5\}$, 치역은 $\{y|y\ge -3\}$이다.

ㄷ. 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

07 전략 주어진 그래프가 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용한다.

베이직쎈 BOX

$1-\sqrt{4-3}=0$

$5-x\ge 0$에서 $\quad x\le 5$

$x=0$에서의 y의 값이
$y=\sqrt{5-0}-3$
$=\sqrt{5}-3<0$
이므로 제1사분면을 지나지 않는다.

풀이 주어진 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$f(x)=\sqrt{a\left(x-\frac{3}{2}\right)}-2 \quad \cdots\cdots ㉠$

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(1, -1)$을 지나므로

$-1=\sqrt{a\left(1-\frac{3}{2}\right)}-2, \quad \sqrt{-\frac{1}{2}a}=1$

$-\frac{1}{2}a=1 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$f(x)=\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}-2=\sqrt{-2x+3}-2$

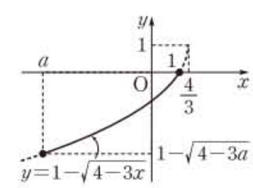
$\therefore f(-3)=\sqrt{6+3}-2=1$ 답 ①

08 전략 함수 $y=1-\sqrt{4-3x}$를 $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형하여 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=1-\sqrt{4-3x}=-\sqrt{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}+1$

이므로 $y=1-\sqrt{4-3x}$의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a\le x\le 1$에서 $y=1-\sqrt{4-3x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=1$일 때 최댓값 0,

$x=a$일 때 최솟값 $1-\sqrt{4-3a}$

를 갖는다.

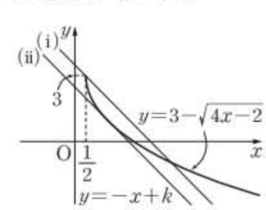
즉 $M=0$, $1-\sqrt{4-3a}=-3$이므로 $1-\sqrt{4-3a}=-3$에서

$\sqrt{4-3a}=4, \quad 4-3a=16$

$\therefore a=-4$ 답 ②

09 전략 함수 $y=3-\sqrt{4x-2}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$를 그리고 직선을 움직여 본다.

풀이 $y=3-\sqrt{4x-2}=-\sqrt{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$을 지날 때,

$3=-\frac{1}{2}+k \quad \therefore k=\frac{7}{2}$

베이직쎈 BOX

(ii) 직선 $y=-x+k$가 $y=3-\sqrt{4x-2}$의 그래프에 접할 때,

$3-\sqrt{4x-2}=-x+k$, 즉 $\sqrt{4x-2}=x-k+3$의 양변을 제곱하면

$4x-2=x^2+k^2+9-2kx-6k+6x$

$\therefore x^2-2(k-1)x+k^2-6k+11=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-6k+11)=0$

$4k-10=0 \quad \therefore k=\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 $\frac{5}{2}<k\le\frac{7}{2}$일 때 $y=3-\sqrt{4x-2}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 구하는 자연수 k의 값은 3이다. 답 ③

직선이 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때 서로 다른 두 점에서 만난다.

10 전략 먼저 분모의 유리화를 이용하여 주어진 무리식을 간단히 한 후 x, y의 값을 대입한다.

풀이 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}+\frac{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

$=\frac{x-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+y}{x-y}=\frac{x+y}{x-y}$ ··· ❶

이때 $x+y=2\sqrt{3}$, $x-y=2$이므로 구하는 식의 값은

$\frac{x+y}{x-y}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ ··· ❷

답 $\sqrt{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷	주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

11 전략 함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c\ (a<0)$의 정의역은 $\left\{x \middle| x\le-\frac{b}{a}\right\}$, 치역은 $\{y|y\le c\}$임을 이용한다.

풀이 $a-3x\ge0$에서 $\quad x\le\frac{a}{3}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x \middle| x\le\frac{a}{3}\right\}$이므로

$\frac{a}{3}=5 \quad \therefore a=15$ ··· ❶

또 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\le b\}$이므로

$b=-4$ ··· ❷

따라서 $f(x)=-\sqrt{15-3x}-4$이므로

$f(2)=-\sqrt{15-6}-4=-7$ ··· ❸

답 -7

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

12 전략 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{a(x-p)}$이다.

풀이 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x+2)}$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.

$-y=\sqrt{a(-x+2)}$, 즉 $y=-\sqrt{-a(x-2)}$

이 함수의 그래프가 점 $(-1, -3)$을 지나므로

$-3=-\sqrt{-a(-1-2)}, \quad 3=\sqrt{3a}$

$9=3a \quad \therefore a=3$ 답 3

13 전략 그래프가 시작하는 점의 좌표를 이용하여 그래프의 식을 구한다.

풀이 주어진 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 식은

$y=\sqrt{-(x-3)}-2=\sqrt{-x+3}-2$

따라서 구하는 y절편은

$x=0$일 때의 y의 값

$\sqrt{3}-2$ 답 $\sqrt{3}-2$

14 전략 함수 $f(x)$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 할 때, $f^{-1}(m)=n$이면 $f(n)=m$임을 이용한다.

풀이 $f(1)=2$이므로 $\quad \sqrt{a+b}=2$

$\therefore a+b=4$ ······ ㉠

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로 $\quad \sqrt{2a+b}=1$

$\therefore 2a+b=1$ ······ ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

㉡−㉠을 하면
$a=-3$
$a=-3$을 ㉠에 대입하면
$-3+b=4$
$\therefore b=7$

$a=-3, b=7$ ··· ❷

$\therefore b-a=10$ ··· ❸

답 10

단계	채점 기준	비율
❶	a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	60 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	$b-a$의 값을 구할 수 있다.	10 %

베이직쎈 BOX

Ⅲ. 순열과 조합

08 순열과 조합

16 경우의 수

개념 51 사건과 경우의 수 (본책 134쪽)

01 소수의 눈이 나오는 경우는 2, 3, 5의 3가지이다. 답 3

> 소수
> ➡ 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수

02 3의 배수의 눈이 나오는 경우는 3, 6의 2가지이다. 답 2

03 4의 약수의 눈이 나오는 경우는 1, 2, 4의 3가지이다. 답 3

04 답 28

05 8의 약수가 나오는 경우는 1, 2, 4, 8의 4가지이다. 답 4

06 두 동전에서 나오는 면을 순서쌍으로 나타내면 앞면이 한 개 나오는 경우는

(앞, 뒤), (뒤, 앞)

의 2가지이다. 답 2

> 서로 다른 동전이나 주사위를 여러 개 던질 때 일어나는 사건의 경우의 수는 순서쌍으로 나타내어 구하면 편리하다.

07 답 3 B, B, A, A, 3

08 A, A, B, C를 일렬로 나열하는 경우를 수형도를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

A – A – B – C
A – A – C – B
A – B – A – C
A – B – C – A
A – C – A – B
A – C – B – A
B – A – A – C
B – A – C – A
B – C – A – A
C – A – A – B
C – A – B – A
C – B – A – A

따라서 구하는 경우의 수는 12이다. 답 12

09 1, 1, 2, 2로 만들 수 있는 네 자리 자연수를 수형도를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

1 – 1 – 2 – 2
1 – 2 – 1 – 2
1 – 2 – 2 – 1
2 – 1 – 1 – 2
2 – 1 – 2 – 1
2 – 2 – 1 – 1

따라서 구하는 자연수의 개수는 6이다. 답 6

10 A, B, C의 신발을 각각 a, b, c라 하고, 자기 신발이 아닌 다른 학생의 신발을 신는 경우를 수형도를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

A B C
$b - c - a$
$c - a - b$

따라서 구하는 경우의 수는 2이다. 답 2

개념 52 합의 법칙과 곱의 법칙 (본책 135쪽)

11 답 4 2, 5, 2, 4

> '또는'
> ➡ 합의 법칙 이용

12 짝수의 눈이 나오는 경우는
2, 4, 6의 3가지
5의 약수의 눈이 나오는 경우는
1, 5의 2가지
따라서 구하는 경우의 수는
$3+2=5$ 답 5

13 소수가 적힌 공이 나오는 경우는
2, 3, 5, 7, 11의 5가지
4의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는
4, 8, 12의 3가지
따라서 구하는 경우의 수는
$5+3=8$ 답 8

14 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 5가 되는 경우는
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지
(ii) 눈의 수의 합이 9가 되는 경우는
(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$4+4=8$ 답 8

15 소설책을 택하는 경우의 수는 6
시집을 택하는 경우의 수는 2
잡지를 택하는 경우의 수는 3
따라서 구하는 경우의 수는
$6+2+3=11$ 답 11

16 답 20 5, 3, 5, 20

> '~이고'
> ➡ 곱의 법칙 이용

17 십의 자리가 될 수 있는 숫자는
2, 4, 6, 8의 4가지
일의 자리가 될 수 있는 숫자는
1, 3, 9의 3가지
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot3=12$ 답 12

18 남학생 대표 1명을 뽑는 경우의 수는 6
여학생 대표 1명을 뽑는 경우의 수는 5
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot5=30$ 답 30

19 첫 번째에 짝수의 눈이 나오는 경우는
2, 4, 6의 3가지
두 번째에 6의 약수의 눈이 나오는 경우는
1, 2, 3, 6의 4가지
따라서 구하는 경우의 수는
$3\cdot4=12$ 답 12

베이직쎈 BOX

20 티셔츠를 고르는 경우의 수는 5
바지를 고르는 경우의 수는 4
외투를 고르는 경우의 수는 2
따라서 구하는 경우의 수는
$5\cdot4\cdot2=40$ 답 40

개념 53 여러 가지 경우의 수

본책 136쪽

21 $24=2^3\cdot3$이므로 24의 양의 약수의 개수는
$(3+1)(1+1)=8$ 답 8

22 $36=2^2\cdot3^2$이므로 36의 양의 약수의 개수는
$(2+1)(2+1)=9$ 답 9

23 $75=3\cdot5^2$이므로 75의 양의 약수의 개수는
$(1+1)(2+1)=6$ 답 6

24 $168=2^3\cdot3\cdot7$이므로 168의 양의 약수의 개수는
$(3+1)(1+1)(1+1)=16$ 답 16

25 $300=2^2\cdot3\cdot5^2$이므로 300의 양의 약수의 개수는
$(2+1)(1+1)(2+1)=18$ 답 18

26 $315=3^2\cdot5\cdot7$이므로 315의 양의 약수의 개수는
$(2+1)(1+1)(1+1)=12$ 답 12

27 A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot3\cdot3\cdot3=108$ 답 108

각 영역에 칠할 수 있는 색의 개수를 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

28 A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ 답 48

29 A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot3\cdot3\cdot2=72$ 답 72

30 A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ 답 48

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 137쪽

01 각 자리의 숫자의 합이 3인 두 자리 자연수는
12, 21, 30의 3개
각 자리의 숫자의 합이 8인 두 자리 자연수는
17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80의 8개
따라서 구하는 자연수의 개수는
$3+8=11$ 답 11

02 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 6이 되는 경우는
(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
(ii) 눈의 수의 합이 12가 되는 경우는
(6, 6)의 1가지
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$5+1=6$ 답 6

두 개의 주사위를 동시에 던져서 나올 수 있는 눈의 수의 합은 2 이상 12 이하의 자연수이므로 구하는 경우는 눈의 수의 합이 6 또는 12가 되는 경우와 같다.

03 정사면체를 두 번 던질 때, 바닥에 오는 면에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 두 수의 차가 0인 경우는
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)의 4가지
(ii) 두 수의 차가 1인 경우는
(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)의 6가지
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$4+6=10$ 답 10

04 1부터 50까지의 자연수 중에서 4의 배수는 12개, 7의 배수는 7개, 4와 7의 최소공배수인 28의 배수는 1개이므로 구하는 경우의 수는
$12+7-1=18$ 답 18

자연수 a로 나누어떨어지는 자연수
➡ a의 배수

05 두 자리 자연수 중에서
3의 배수는 12, 15, 18, …, 99의 30개
8의 배수는 16, 24, 32, …, 96의 11개
3과 8의 최소공배수인 24의 배수는
24, 48, 72, 96의 4개
따라서 구하는 수의 개수는
$30+11-4=37$ 답 37

10부터 99까지의 자연수

06 $x+2y=8$에서
$y=1$일 때, $x+2=8$ $\therefore x=6$
$y=2$일 때, $x+4=8$ $\therefore x=4$
$y=3$일 때, $x+6=8$ $\therefore x=2$
따라서 주어진 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x, y)는
(6, 1), (4, 2), (2, 3)의 3개 답 ②

y의 계수의 절댓값이 x의 계수의 절댓값보다 크므로 y에 먼저 수를 대입한다.

07 (1) (i) $z=1$일 때,
$x+2y=9$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(7, 1, 1)$, $(5, 2, 1)$, $(3, 3, 1)$, $(1, 4, 1)$의 4개
(ii) $z=2$일 때,
$x+2y=6$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(4, 1, 2)$, $(2, 2, 2)$의 2개
(iii) $z=3$일 때,
$x+2y=3$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(1, 1, 3)$의 1개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$4+2+1=7$
(2) (i) $y=1$일 때,
$3x+z=15$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(1, 1, 12)$, $(2, 1, 9)$, $(3, 1, 6)$, $(4, 1, 3)$의 4개
(ii) $y=2$일 때,
$3x+z=10$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(1, 2, 7)$, $(2, 2, 4)$, $(3, 2, 1)$의 3개
(iii) $y=3$일 때,
$3x+z=5$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(1, 3, 2)$의 1개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$4+3+1=8$

답 (1) 7 (2) 8

08 (1) (i) $y=1$일 때,
$x+4\le9$, 즉 $x\le5$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$의 5개
(ii) $y=2$일 때,
$x+8\le9$, 즉 $x\le1$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2)$의 1개
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$5+1=6$
(2) (i) $x=1$일 때,
$3+y\le8$, 즉 $y\le5$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$의 5개
(ii) $x=2$일 때,
$6+y\le8$, 즉 $y\le2$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(2, 1)$, $(2, 2)$의 2개
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$5+2=7$

답 (1) 6 (2) 7

다른 풀이 (1) x, y가 자연수이므로 $x+4y\le9$를 만족시키는 경우는
$x+4y=5$, $x+4y=6$, $x+4y=7$, $x+4y=8$, $x+4y=9$
(i) $x+4y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$의 1개
(ii) $x+4y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(2, 1)$의 1개
(iii) $x+4y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(3, 1)$의 1개
(iv) $x+4y=8$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(4, 1)$의 1개
(v) $x+4y=9$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(5, 1)$, $(1, 2)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+1+1+1+2=6$
(2) x, y가 자연수이므로 $3x+y\le8$을 만족시키는 경우는
$3x+y=4$, $3x+y=5$, $3x+y=6$, $3x+y=7$, $3x+y=8$
(i) $3x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$의 1개
(ii) $3x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2)$의 1개
(iii) $3x+y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 3)$의 1개
(iv) $3x+y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 4)$, $(2, 1)$의 2개
(v) $3x+y=8$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 5)$, $(2, 2)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+1+1+2+2=7$

09 첫 번째에 6의 약수의 눈이 나오는 경우는
1, 2, 3, 6의 4가지
두 번째에 3의 배수의 눈이 나오는 경우는
3, 6의 2가지
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot2=8$

답 ④

10 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
1, 3, 5, 7, 9의 5개
십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
0, 1, 2, 3, ⋯, 9의 10개
일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
0, 5의 2개
따라서 구하는 수의 개수는
$5\cdot10\cdot2=100$

답 100

베센 TIP
배수의 판정
① 2의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 2의 배수인 수
② 3의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 수
③ 4의 배수: 끝의 두 자리 수가 00이거나 4의 배수인 수
④ 5의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 5인 수
⑤ 9의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 9의 배수인 수

11 세 주사위의 눈의 수의 곱이 홀수가 되려면 주사위에서 나오는 눈의 수가 모두 홀수이어야 하므로 구하는 경우의 수는
$3\cdot3\cdot3=27$

답 27

베이직쎈 BOX

$x+2y=9$에서
$y=1$일 때, $x=7$
$y=2$일 때, $x=5$
$y=3$일 때, $x=3$
$y=4$일 때, $x=1$

$x+2y=6$에서
$y=1$일 때, $x=4$
$y=2$일 때, $x=2$

$x+2y=3$에서
$y=1$일 때, $x=1$

$8=2^3$이므로 8과 서로소인 자연수는 2의 배수가 아니다.

5의 배수인 자연수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이다.

$x=1$, $y=1$일 때의 $x+4y$의 값

한 개의 주사위를 던질 때, 홀수의 눈이 나오는 경우는
1, 3, 5의 3가지

베이직쎈 BOX

12 정의역 X의 원소 1, 2에 각각 대응시킬 수 있는 공역 Y의 원소는 3, 4, 5의 3개이다.
따라서 X에서 Y로의 함수의 개수는
$3\cdot3=9$ 답 ③

> X에서 Y로의 함수
> ➡ 두 집합 X, Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응

13 (1) $(a+b)(x+y)$에서 a, b에 곱해지는 항이 각각 x, y의 2개이므로 구하는 항의 개수는
$2\cdot2=4$

> $(a+b)(x+y)$
> $=ax+ay+bx+by$

(2) $(x+y+z)(p+q)(m+n)$에서 x, y, z에 곱해지는 항이 각각 p, q의 2개이고 그 각각에 대하여 곱해지는 항이 m, n의 2개이므로 구하는 항의 개수는
$3\cdot2\cdot2=12$
답 (1) 4 (2) 12

14 $(a+b+c)(x+y+z)$에서 a, b, c에 곱해지는 항이 각각 x, y, z의 3개이므로
$m=3\cdot3=9$
$(a+b)^2(x+y)=(a^2+2ab+b^2)(x+y)$에서 a^2, $2ab$, b^2에 곱해지는 항이 각각 x, y의 2개이므로
$n=3\cdot2=6$
$\therefore m+n=15$ 답 15

15 (i) A → B → D로 가는 경우의 수는
$3\cdot1=3$

> (A 지점에서 B 지점으로 가는 경우의 수)
> ×(B 지점에서 D 지점으로 가는 경우의 수)

(ii) A → C → D로 가는 경우의 수는
$2\cdot2=4$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$3+4=7$ 답 7

16 (i) 집 → A → 도서관으로 가는 경우의 수는
$3\cdot2=6$
(ii) 집 → A → B → 도서관으로 가는 경우의 수는
$3\cdot1\cdot2=6$
(iii) 집 → B → 도서관으로 가는 경우의 수는
$2\cdot2=4$
(iv) 집 → B → A → 도서관으로 가는 경우의 수는
$2\cdot1\cdot2=4$
이상에서 구하는 경우의 수는
$6+6+4+4=20$ 답 20

17 (1) (i) A → C로 가는 경우의 수는
2
(ii) A → B → C로 가는 경우의 수는
$2\cdot3=6$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$2+6=8$
(2) (i) A → B → C → A로 가는 경우의 수는
$2\cdot3\cdot2=12$
(ii) A → C → B → A로 가는 경우의 수는
$2\cdot3\cdot2=12$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$12+12=24$
답 (1) 8 (2) 24

18 $48=2^4\cdot3$이므로 48의 양의 약수의 개수는
$a=(4+1)(1+1)=10$
$120=2^3\cdot3\cdot5$이므로 120의 양의 약수의 개수는
$b=(3+1)(1+1)(1+1)=16$
$\therefore a+b=26$ 답 26

19 $2^4\times3^2\times7^a$의 양의 약수의 개수는
$(4+1)(2+1)(a+1)=15(a+1)$
따라서 $15(a+1)=30$이므로 $a+1=2$
$\therefore a=1$ 답 ①

20 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

> 인접한 영역이 가장 많은 영역인 B에 칠할 수 있는 색의 개수를 먼저 구한다.

따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot3\cdot3=36$ 답 ③

21 A에 칠할 수 있는 색은 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ 답 48

22 B에 칠할 수 있는 색은 5가지, E에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 4가지, D에 칠할 수 있는 색은 B, E에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 B, E에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$5\cdot4\cdot3\cdot3\cdot3=540$ 답 540

17 순열

개념 54 순열

본책 140쪽

01 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_6P_3$ 답 ${}_6P_3$

02 서로 다른 9개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_9P_2$ 답 ${}_9P_2$

03 서로 다른 7개에서 7개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_7P_7$ 답 ${}_7P_7$

04 $3!=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

05 $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ 답 120

08 순열과 조합

06 답 1

07 답 1

08 답 5, 30

09 ${}_3P_2=3\cdot2=6$ 답 6

10 ${}_4P_4=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

11 ${}_{10}P_3=10\cdot9\cdot8=720$ 답 720

12 답 8

13 답 1

14 답 7 $n-1$, $n-1$, 6, 7

15 ${}_nP_3=n(n-1)(n-2)$이므로
$n(n-1)(n-2)=120=6\cdot5\cdot4$
$\therefore n=6$ 답 6

16 ${}_nP_n=n(n-1)\cdot\cdots\cdot1$이므로
$n(n-1)\cdot\cdots\cdot1=720=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$
$\therefore n=6$ 답 6

17 ${}_nP_2=n(n-1)$이므로
$n(n-1)=7n-16$, $n^2-8n+16=0$
$(n-4)^2=0$ $\therefore n=4$ 답 4

18 ${}_nP_3=8\cdot{}_nP_2$에서
$n(n-1)(n-2)=8n(n-1)$
$n\ge3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면
$n-2=8$ $\therefore n=10$ 답 10

19 답 3 4, 3, 3

20 $110=11\cdot10$이므로 ${}_{11}P_2=110$
$\therefore r=2$ 답 2

21 ${}_6P_0=1$이므로 $r-1=0$ $\therefore r=1$ 답 1

22 ${}_7P_5=\dfrac{7!}{(7-5)!}=\dfrac{7!}{2!}$이므로 $r=2$ 답 2

23 ${}_9P_r=\dfrac{9!}{(9-r)!}$이므로 $9-r=4$
$\therefore r=5$ 답 5

24 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_4P_2=4\cdot3=12$ 답 12

베이직쎈 BOX

${}_4P_4=4!$

6명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수

$n(n-1)(n-2)$는 연속하는 세 자연수의 곱이므로 120을 연속하는 세 자연수의 곱으로 나타낸다.

${}_nP_3$에서 $n\ge3$이므로
$n\ne0$, $n-1\ne0$
따라서 양변을 $n(n-1)$로 나눌 수 있다.

${}_nP_0=1$

25 서로 다른 9개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_9P_3=9\cdot8\cdot7=504$ 답 504

26 서로 다른 6개에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_6P_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$ 답 360

27 $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

28 $6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ 답 720

29 $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ 답 120

개념 55 이웃하거나 이웃하지 않는 순열의 수

본책 142쪽

30 A와 B를 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$
A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2\cdot1=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$120\cdot2=240$ 답 240

31 A, C, E를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$
A, C, E가 자리를 바꾸는 경우의 수는
$3!=3\cdot2\cdot1=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\cdot6=144$ 답 144

32 부모를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$3!=3\cdot2\cdot1=6$
부모가 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2\cdot1=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot2=12$ 답 12

33 여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$
여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
$3!=3\cdot2\cdot1=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$120\cdot6=720$ 답 720

베이직쎈 BOX

34 A와 B를 제외한 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

C, D, E, F

4명의 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 A와 B를 나열하는 경우의 수는

C, D, E, F를 ○라 하면

∨○∨○∨○∨○∨

${}_5P_2=5\cdot4=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot20=480$ 답 480

35 A, C, E를 제외한 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=3\cdot2\cdot1=6$

B, D, F

3명의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 A, C, E를 나열하는 경우의 수는

${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$ 답 144

36 안경 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2\cdot1=2$

안경 사이사이 및 양 끝의 3개의 자리에 모자 2개를 나열하는 경우의 수는

${}_3P_2=3\cdot2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot6=12$ 답 12

37 2학년 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

2학년 학생 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 1학년 학생 3명을 세우는 경우의 수는

${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot60=1440$ 답 1440

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 143쪽

01 ${}_7P_2+3!=42+6=48$ 답 48

02 ${}_{n+1}P_4=40\cdot{}_nP_2$에서

$(n+1)n(n-1)(n-2)=40n(n-1)$

$n\geq3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

${}_{n+1}P_4$에서 $n+1\geq4$ $\therefore n\geq3$

$(n+1)(n-2)=40$

$(n+1)(n-2)=40=8\cdot5$에서 $n=7$과 같이 구할 수도 있다.

$n^2-n-42=0$

$(n+6)(n-7)=0$ $\therefore n=7$ ($\because n\geq3$)

답 ③

03 $2\cdot{}_nP_2+{}_{n-1}P_1=14$에서

$2n(n-1)+(n-1)=14$

$2n^2-n-15=0$, $(2n+5)(n-3)=0$

$\therefore n=3$ ($\because n\geq2$) 답 3

04 서로 다른 7개에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_7P_4=840$ 답 840

05 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_6P_3=120$ 답 ④

06 n명 중 대표 1명과 부대표 1명을 뽑는 경우의 수는 서로 다른 n개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_nP_2=156$

$n(n-1)=156=13\cdot12$

$\therefore n=13$ 답 13

07 3개의 모음 o, i, e를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot6=36$ 답 ②

08 3개의 홀수 1, 3, 5와 2개의 짝수 2, 4를 각각 하나의 숫자로 생각하여 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

홀수끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

짝수끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot6\cdot2=24$ 답 ④

09 국어책 2권, 영어책 3권을 각각 한 권으로 생각하여 4권의 책을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$4!=24$

국어책끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

영어책끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot2\cdot6=288$ 답 288

10 세 쌍의 부부를 각각 한 사람으로 생각하여 3명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$3!=6$

세 쌍의 부부가 각각 부부끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot8=48$ 답 48

11 어린이 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

어린이 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 청소년 2명을 세우는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot12=72$ 답 ②

12 샌드위치 3개를 일렬로 진열하는 경우의 수는

$3!=6$

샌드위치 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 음료수 4개를 진열하는 경우의 수는

${}_4P_4=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$ 답 144

13 A와 B를 한 사람으로 생각하고 C, D를 제외한 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

위에서 세운 두 사람 A, B의 묶음과 E, F의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 C, D를 세우는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot2\cdot12=144$ 답 144

14 (i) 중학생, 고등학생의 순서로 번갈아 세우는 경우의 수는

$2!\cdot2!=4$

(ii) 고등학생, 중학생의 순서로 번갈아 세우는 경우의 수는

$2!\cdot2!=4$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4+4=8$ 답 8

15 향초는 4개, 액자는 3개이므로 향초 4개를 일렬로 진열한 뒤 그 사이사이에 액자 3개를 진열하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4!\cdot3!=144$ 답 ④

16 자음은 r, n, g의 3개, 모음은 o, a, e의 3개이므로

(i) 자음, 모음의 순서로 번갈아 나열하는 경우의 수는

$3!\cdot3!=36$

(ii) 모음, 자음의 순서로 번갈아 나열하는 경우의 수는

$3!\cdot3!=36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36+36=72$ 답 ②

17 (1) 구하는 경우의 수는 D를 제외한 나머지 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$5!=120$

베이직쎈 BOX

_ _ A _ B _

양 끝에 오는 것끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수

A B, E, F

A B, E, F를 ○라 하면

∨○∨○∨○∨

중학생을 ●, 고등학생을 ▲라 하면

(i) ●▲●▲

(ii) ▲●▲●

'적어도 하나가 ~인' 사건의 경우의 수는 모든 경우의 수에서 '하나도 ~가 아닌' 사건의 경우의 수를 빼면 된다.

(적어도 1편의 공포 영화를 관람하는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)
−(액션 영화만 2편을 차례대로 관람하는 경우의 수)

어린이 2명을 택하여 양 끝에 세우는 경우의 수는

${}_4P_2$

나머지 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!$

D _ _ _ _ _

(2) 구하는 경우의 수는 A, B를 제외한 나머지 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$4!=24$ 답 (1) 120 (2) 24

18 구하는 경우의 수는 장미를 제외한 나머지 4송이의 꽃 중에서 2송이를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4P_2=12$ 답 ①

19 운전석을 제외한 7개의 좌석에 A를 제외한 4명이 앉으면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_7P_4=840$ 답 ③

20 양 끝에 윤호와 나래를 세우는 경우의 수는

$2!=2$

윤호와 나래를 제외한 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot120=240$ 답 240

21 4명의 학생 중에서 2명을 선생님 사이에 일렬로 세우는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

선생님 2명과 선생님 사이에 있는 학생 2명을 한 명으로 생각하여 3명이 일렬로 서는 경우의 수는

$3!=6$

선생님끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\cdot6\cdot2=144$ 답 ③

22 6편의 영화 중에서 2편을 택하여 차례대로 관람하는 경우의 수는

${}_6P_2=30$

액션 영화 3편 중에서 2편을 택하여 차례대로 관람하는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$30-6=24$ 답 ⑤

23 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$6!=720$

양 끝에 어린이가 오도록 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는

${}_4P_2\cdot4!=288$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-288=432$ 답 432

24 케이크와 쿠키를 일렬로 진열하는 경우의 수는

$5!=120$

쿠키 사이에 케이크를 진열하지 않는 경우의 수는 쿠키끼리 이웃하게 진열하는 경우의 수와 같으므로

$4!\cdot 2!=48$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-48=72$ 답 72

베이직쎈 BOX

2개의 쿠키를 하나로 생각하여 4개를 일렬로 진열하는 경우의 수는

$4!$

쿠키끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!$

25 7명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$7!=5040$

남학생이 이웃하지 않게 세우는 경우의 수는 여학생 4명을 일렬로 세우고 그 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 남학생 3명을 세우는 경우의 수와 같으므로

$4!\cdot {}_5P_3=1440$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-1440=3600$ 답 3600

26 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4의 4개이고, 나머지 네 자리에는 만의 자리에 온 숫자를 제외한 4개를 나열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$4\cdot 4!=96$ 답 96

27 홀수이려면 일의 자리의 숫자가 1 또는 3 또는 5이어야 한다.

일의 자리에 온 숫자가 적힌 카드를 제외한 4장의 카드 중에서 2장을 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$3\cdot 12=36$ 답 ①

28 (1) 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4, 5의 5개이고, 나머지 세 자리에는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$5\cdot {}_5P_3=300$

(2) 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5P_3=60$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 1, 2, 3, 4의 4개이고, 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

$4\cdot {}_4P_2=48$

(i), (ii)에서 5의 배수의 개수는

$60+48=108$

답 (1) 300 (2) 108

29 (1) a로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

ba로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

bc로 시작하는 것은 순서대로

$bcad$, $bcda$의 2개

b, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수

c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수

따라서 $abcd$부터 $bcda$까지의 개수는

$6+2+2=10$

이므로 $bcda$는 10번째에 온다.

(2) a로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

b로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

ca로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

cb로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

따라서 a로 시작하는 것부터 cb로 시작하는 것까지의 총개수는

$6+6+2+2=16$

이므로 17번째에 오는 것은 cd로 시작하는 것 중 제일 처음의 것이다.

$\therefore cdab$

답 (1) 10번째 (2) $cdab$

30 2300보다 작은 자연수는

1□□□, 20□□, 21□□

꼴이다.

1□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

20□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

21□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6+2+2=10$ 답 ⑤

31 1□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

2□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

30□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

따라서 10234부터 30421까지의 자연수의 개수는

$24+24+6=54$

이므로 56번째로 작은 수는 31□□□ 꼴인 자연수 중 2번째로 작은 수이다.

$\therefore 31042$ 답 ②

1□□□□ 꼴인 자연수 중 가장 작은 수

30□□□ 꼴인 자연수 중 가장 큰 수

작은 수부터 차례대로 나열하면

31024, 31042,
31204, 31240,
31402, 31420

18 조합

개념 56 조합

본책 147쪽

01 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_5C_3$ 답 ${}_5C_3$

02 서로 다른 9개에서 6개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_9C_6$ 답 ${}_9C_6$

03 서로 다른 6개에서 4개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_6C_4$ 답 ${}_6C_4$

04 답 3, 5, 3, 20

05 ${}_4C_2=\dfrac{{}_4P_2}{2!}=\dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=6$ 답 6

08 순열과 조합

06 ${}_9C_4=\frac{{}_9P_4}{4!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$ 답 126

07 답 1 08 답 1

09 답 8 $n-1$, $n-1$, 8

10 ${}_nC_3=35$에서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=35$

$n(n-1)(n-2)=210=7\cdot6\cdot5$

$\therefore n=7$ 답 7

11 ${}_nC_3={}_nC_{n-3}$이므로 ${}_nC_3={}_nC_2$에서 ${}_nC_{n-3}={}_nC_2$

따라서 $n-3=2$이므로 $n=5$ 답 5

다른 풀이 ${}_nC_3={}_nC_2$에서

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=\frac{n(n-1)}{2\cdot1}$

$n\ge3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누어 정리하면

$n-2=3$ $\therefore n=5$

12 ${}_nC_7={}_nC_{n-7}$이므로 ${}_nC_7={}_nC_4$에서 ${}_nC_{n-7}={}_nC_4$

따라서 $n-7=4$이므로 $n=11$ 답 11

13 ${}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2$이므로 ${}_{n+2}C_2=21$에서

$\frac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1}=21$

$(n+2)(n+1)=42=7\cdot6$

$n+2=7$ $\therefore n=5$ 답 5

14 답 2 또는 3 $5-r$, $5-r$, $5-r$, $5-r$, 3

15 ${}_8C_r=70$에서 $\frac{8!}{r!(8-r)!}=70$

$8!=70\cdot r!(8-r)!$

$4\cdot6\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=r!(8-r)!$

$4!\cdot4!=r!(8-r)!$ $\therefore r=4$ 답 4

16 ${}_{10}C_3={}_{10}C_{10-3}={}_{10}C_7$이므로 $r=7$ 답 7

17 ${}_9C_r={}_9C_{r-5}$에서

$r=r-5$ 또는 $9-r=r-5$

(i) $r=r-5$에서 $0\ne-5$이므로 r의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $9-r=r-5$에서 $2r=14$

$\therefore r=7$

(i), (ii)에서 $r=7$ 답 7

18 ${}_{14}C_r={}_{14}C_{r-8}$에서

$r=r-8$ 또는 $14-r=r-8$

(i) $r=r-8$에서 $0\ne-8$이므로 r의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $14-r=r-8$에서 $2r=22$

$\therefore r=11$

(i), (ii)에서 $r=11$ 답 11

19 답 7 20 답 9

베이직쎈 BOX

${}_nC_r={}_nC_{n-r}\,(0\le r\le n)$임을 이용하여 계산이 간단해지도록 한다.

${}_nC_3$에서 $n\ge3$
${}_nC_2$에서 $n\ge2$
$\therefore n\ge3$

$r!=2!$, $(5-r)!=3!$일 때, $r=2$
$r!=3!$, $(5-r)!=2!$일 때, $r=3$

$4\cdot6=4\cdot3\cdot2\cdot1=4!$

서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 택하는 경우의 수
➡ ${}_{n-k}C_{r-k}$

서로 다른 n개에서 특정한 k개를 제외하고 r개를 택하는 경우의 수
➡ ${}_{n-k}C_r$

21 ${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ 답 20

22 ${}_{10}C_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$ 답 210

23 ${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

24 ${}_9C_5={}_9C_4=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$ 답 126

25 남학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

여학생 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot15=90$ 답 90

26 1부터 10까지의 자연수 중 홀수와 짝수는 각각 5개이므로 홀수 1개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

짝수 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot10=50$ 답 50

개념 57 특정한 조건이 있는 조합의 수

본책 149쪽

27 답 10 2, 2, 10

28 구하는 경우의 수는 a를 제외한 나머지 6개의 문자 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ 답 20

29 구하는 경우의 수는 c, d, e를 제외한 나머지 4개의 문자 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_1=4$ 답 4

30 답 5 4, 4, 5

31 구하는 경우의 수는 a를 제외한 나머지 6개의 문자 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ 답 15

32 구하는 경우의 수는 c, d, e를 제외한 나머지 4개의 문자 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_4=1$ 답 1

33 답 6 2, 2, 6

34 구하는 경우의 수는 c, d, e를 제외한 나머지 4개의 문자 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_4C_3={}_4C_1=4$ 답 4

35 구하는 경우의 수는 b, c, f, g를 제외한 나머지 3개의 문자 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_3C_2={}_3C_1=3$ 답 3

36 답 1440 　2, 2, 60, 4, 24, 60, 24, 1440

37 1반 학생 1명, 2반 학생 2명을 뽑는 경우의 수는

$_3C_1\cdot{}_6C_2=3\cdot\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=3\cdot15=45$

뽑은 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$45\cdot6=270$ 답 270

개념 58 도형의 개수

본책 150쪽

38 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_5C_2=10$ 답 10

원 위의 5개의 점은 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않다.

39 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

40 5개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_5C_4={}_5C_1=5$ 답 5

41 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

한 직선 위에 있는 서로 다른 3개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선은 1개이다.

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

이때 한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선이 2개이므로 구하는 직선의 개수는

주어진 두 직선이다.

$15-2\cdot3+2=11$ 답 11

다른 풀이 두 직선 위에 있는 점을 각각 하나씩 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는 　$_3C_1\cdot{}_3C_1=3\cdot3=9$

또 한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선이 2개이므로 구하는 직선의 개수는

$9+2=11$

42 6개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_3C_3=1$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$20-2\cdot1=18$ 답 18

다른 풀이 두 직선 위에 있는 점을 각각 1개, 2개 또는 2개, 1개씩 택하여 연결하면 한 개의 삼각형을 만들 수 있으므로 구하는 삼각형의 개수는

$2\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_2=2\cdot3\cdot3=18$

43 두 직선 위에 있는 점을 각각 2개씩 택하여 연결하면 한 개의 사각형을 만들 수 있으므로 구하는 사각형의 개수는

$_3C_2\cdot{}_3C_2=3\cdot3=9$ 답 9

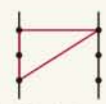
다른 풀이 6개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

두 직선 위에 있는 점을 각각 1개, 3개 또는 3개, 1개씩 택하는 경우의 수는

$2\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_3=2\cdot3\cdot1=6$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점과 다른 직선 위에 있는 1개의 점으로는 사각형을 만들 수 없으므로 구하는 사각형의 개수는 　$15-6=9$



사각형이 만들어지지 않는다.

44 가로 방향의 3개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 3개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는

$_3C_2\cdot{}_3C_2=3\cdot3=9$ 답 9

45 가로 방향의 3개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 5개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는

$_3C_2\cdot{}_5C_2=3\cdot\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=3\cdot10=30$ 답 30

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 151쪽

01 $_6C_r={}_6C_{r-2}$에서

$r=r-2$ 또는 $6-r=r-2$

(i) $r=r-2$에서 $0\neq-2$이므로 r의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $6-r=r-2$에서 　$2r=8$ 　$\therefore r=4$

(i), (ii)에서 　$r=4$

$\therefore {}_rP_2={}_4P_2=12$ 답 ③

02 $_{n+1}C_2-{}_nC_2=8$에서

$\dfrac{(n+1)n}{2\cdot1}-\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}=8$

$n(n+1)-n(n-1)=16,$ 　$2n=16$

$\therefore n=8$ 답 8

03 $\underline{_{n-1}C_3+{}_{n-1}C_4={}_nC_4}$이므로 　$_nC_5={}_nC_4$

$_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ (단, $1\le r<n$)

이때 $_nC_5={}_nC_{n-5}$이므로 　$_nC_{n-5}={}_nC_4$

따라서 $n-5=4$이므로 　$n=9$ 답 ⑤

04 전체 경기 수는 9명 중에서 서로 다른 두 명을 택하는 경우의 수와 같으므로

$_{9}C_{2}=36$ 답 36

05 주어진 집합의 원소의 개수가 5이므로 원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는

$_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$

원소의 개수가 4인 부분집합의 개수는

$_{5}C_{4}={}_{5}C_{1}=5$

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$10+5=15$ 답 15

06 7명의 학생 중에서 체육 대회에 참가할 학생 2명을 뽑는 경우의 수는

$_{7}C_{2}=21$

나머지 5명의 학생 중에서 합창 대회에 참가할 학생 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$21\cdot10=210$ 답 ④

07 흰색 모자 5개 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$_{5}C_{4}={}_{5}C_{1}=5$

검은색 모자 6개 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$5+15=20$ 답 20

08 구하는 경우의 수는 지아와 형기를 제외한 8명의 학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_{8}C_{2}=28$ 답 28

09 (1) 구하는 부분집합의 개수는 3을 제외한 6개의 원소 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_{6}C_{3}=20$

(2) 구하는 부분집합의 개수는 짝수를 제외한 4개의 원소 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$

답 (1) 20 (2) 4

10 구하는 경우의 수는 1, 2, 4, 9가 적힌 공을 제외한 6개의 공 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_{6}C_{2}=15$ 답 15

11 치즈를 고르는 경우의 수는 특정한 치즈 2가지를 제외한 4가지의 치즈 중에서 2가지를 고르는 경우의 수와 같으므로

$_{4}C_{2}=6$

햄을 고르는 경우의 수는 특정한 햄 1가지를 제외한 4가지의 햄 중에서 2가지를 고르는 경우의 수와 같으므로

$_{4}C_{2}=6$

베이직쎈 BOX

부분집합
⇒ 두 집합 A, B에 대하여 A의 모든 원소가 B에 속할 때, A를 B의 부분집합이라 한다.

서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같다.

1, 2, 3, 4, 6, 12가 적힌 6장이다.

모든 경우의 수에서 3명의 대표가 모두 여학생이거나 모두 남학생인 경우의 수를 뺀다.

4개의 모자가 모두 흰색이거나 모두 검은색이어야 한다.

1, 3, 5, 7

4의 약수

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot6=36$ 답 ④

12 9명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{9}C_{3}=84$

학생만 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-10=74$ 답 74

13 12장의 카드 중에서 4장을 뽑는 경우의 수는

$_{12}C_{4}=495$

12의 약수가 적힌 카드를 제외한 6장의 카드 중에서 4장을 뽑는 경우의 수는

$_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$495-15=480$ 답 ④

14 10명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{10}C_{3}=120$

여학생만 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$

남학생만 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-(10+10)=100$ 답 100

15 자두 3개 중에서 2개를 고르는 경우의 수는

$_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$

참외 2개 중에서 1개를 고르는 경우의 수는

$_{2}C_{1}=2$

키위 3개 중에서 2개를 고르는 경우의 수는

$_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$

5명의 학생에게 각각 하나씩 나누어주는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot2\cdot3\cdot120=2160$ 답 2160

16 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명을 뽑는 경우의 수는

$_{5}C_{2}\cdot{}_{4}C_{2}=60$

1학년 학생 2명을 1명으로 생각하고 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 3!이고, 1학년 학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로 1학년 학생끼리 이웃하게 세우는 경우의 수는

$3!\cdot2!=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\cdot12=720$ 답 ④

17 0, 3, 5를 제외한 7개의 숫자 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_{7}C_{3}=35$

4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$35\cdot24=840$ 답 840

18 7개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_7C_2=21$ 답 21

19 8개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_8C_2=28$ 답 ⑤

20 7개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

이때 한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선이 2개이므로 구하는 직선의 개수는

$21-3-6+2=14$ 답 14

다른 풀이 두 직선 위에 있는 점을 각각 하나씩 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

${}_3C_1\cdot{}_4C_1=12$

또 한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선이 2개이므로 구하는 직선의 개수는

$12+2=14$

21 6개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_4={}_6C_2=15$ 답 ④

22 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$56-4=52$ 답 52

23 가로 방향의 5개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 4개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_5C_2\cdot{}_4C_2=60$ 답 60

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 154쪽

01 **전략** 바닥에 오는 면에 적힌 수의 곱이 3이 되는 경우의 수와 4가 되는 경우의 수를 각각 구한 후 합의 법칙을 이용한다.

풀이 정사면체 모양의 주사위를 세 번 던질 때, 바닥에 오는 면에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 세 수의 곱이 3이 되는 경우는

(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)의 3가지

(ii) 세 수의 곱이 4가 되는 경우는

(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1),

(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)의 6가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3+6=9$ 답 ③

02 **전략** x에 1, 2, …를 대입한 부등식을 만족시키는 y의 값을 구한다.

풀이 (i) $x=1$일 때,

$3<2+y<7$, 즉 $1<y<5$이므로 순서쌍 (x, y)는

(1, 2), (1, 3), (1, 4)의 3개

(ii) $x=2$일 때,

$3<4+y<7$, 즉 $-1<y<3$이므로 순서쌍 (x, y)는

(2, 1), (2, 2)의 2개

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$3+2=5$ 답 ③

다른 풀이 x, y가 자연수이므로 $3<2x+y<7$을 만족시키는 경우는

$2x+y=4$, $2x+y=5$, $2x+y=6$

(i) $2x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는

(1, 2)의 1개

(ii) $2x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는

(1, 3), (2, 1)의 2개

(iii) $2x+y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는

(1, 4), (2, 2)의 2개

이상에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$1+2+2=5$

03 **전략** p와 q가 될 수 있는 것의 개수를 각각 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 p가 될 수 있는 것은 a, b, c, d의 4개

q가 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개

따라서 순서쌍 (p, q)의 개수는 $4\cdot3=12$이므로

$n(C)=12$ 답 ④

04 **전략** 두 다항식 A, B의 각 항의 문자가 모두 다를 때, AB의 전개식의 항의 개수는 두 다항식 A, B의 항의 개수의 곱과 같음을 이용한다.

풀이 $(x+y+z)(a+b)$에서 x, y, z에 곱해지는 항이 각각 a, b의 2개이므로 전개식의 항의 개수는

$3\cdot2=6$

$(x+y)(p+q)$에서 x, y에 곱해지는 항이 각각 p, q의 2개이므로 전개식의 항의 개수는

$2\cdot2=4$

이때 $(x+y+z)(a+b)$와 $(x+y)(p+q)$를 각각 전개한 식에서 동류항이 없으므로 구하는 항의 개수는

$6+4=10$ 답 ⑤

베이직쎈 BOX

정팔각형의 8개의 꼭짓점은 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않다.

중복되는 경우는 제외해야 한다.

주어진 두 직선이다.

x의 계수의 절댓값이 y의 계수의 절댓값보다 크므로 x에 먼저 수를 대입하여 구한다.

원 위의 6개의 점은 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않다.

유한집합 A의 원소의 개수를 기호로 $n(A)$와 같이 나타낸다.

$(x+y+z)(a+b)$
$=ax+bx+ay+by$
$+az+bz$

$(x+y)(p+q)$
$=px+qx+py+qy$

동류항
➡ 문자와 차수가 각각 같은 항

08 순열과 조합

05 전략 A → B → C → A로 가는 경우와 A → C → B → A로 가는 경우를 나누어 구한다.

풀이 (i) A → B → C → A로 가는 경우의 수는

$4\cdot2\cdot3=24$

(ii) A → C → B → A로 가는 경우의 수는

$3\cdot2\cdot4=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$24+24=48$ 답 ④

06 전략 먼저 540을 소인수분해한 후 짝수는 2를 소인수로 가짐을 이용한다.

풀이 $540=2^2\cdot3^3\cdot5$이고 짝수는 2를 소인수로 가지므로 540의 양의 약수 중 짝수의 개수는 $2\cdot3^3\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 구하는 짝수의 개수는

$(1+1)(3+1)(1+1)=16$ 답 ①

다른 풀이 540의 양의 약수의 개수는

$(2+1)(3+1)(1+1)=24$

540의 양의 약수 중에서 홀수의 개수는 $3^3\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같으므로

$(3+1)(1+1)=8$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$24-8=16$

07 전략 A와 C에 같은 색을 칠할 때와 다른 색을 칠할 때의 경우로 나누어 구한다.

풀이 (i) A와 C에 같은 색을 칠할 때,

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색인 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는

$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$

(ii) A와 C에 다른 색을 칠할 때,

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36+48=84$ 답 ④

베쎈TIP

A → B → C → D의 순서대로 색을 칠하면 A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

그런데 D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색이 같은지 다른지에 따라 달라지므로 A와 C에 같은 색을 칠할 때와 다른 색을 칠할 때로 경우를 나누어 구해야 한다.

08 전략 감나무 3그루를 1그루로 생각한다.

베이직쎈 BOX

$2\cdot3^3\cdot5$의 양의 약수에 각각 2를 곱한 것이 540의 양의 약수 중 짝수인 것이다.

연속하는 세 수의 곱이다.

${}_nP_4$에서 $n\ge4$
${}_nP_2$에서 $n\ge2$
$\therefore n\ge4$

풀이 감나무 3그루를 1그루로 생각하여 4그루의 나무를 일렬로 심는 경우의 수는

$4!=24$

감나무끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot6=144$ 답 ④

09 전략 먼저 자음과 모음의 개수를 각각 구한다.

풀이 자음은 T, S, D, Y의 4개, 모음은 U, E, A의 3개이므로 4개의 자음을 일렬로 나열한 후 그 사이사이에 3개의 모음을 나열하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4!\cdot3!=144$ 답 ②

10 전략 일의 자리의 숫자가 짝수인 자연수의 개수를 구한다.

풀이 짝수이려면 일의 자리의 숫자가 2 또는 4 또는 6이어야 한다.

일의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_5P_3=60$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$3\cdot60=180$ 답 ②

11 전략 가장 첫 번째에 오는 문자를 기준으로 사전식으로 나열해 본다.

풀이 a, m, u, s, e를 사전식으로 나열하면 a, e, m, s, u이다.

a로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
e로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
ma로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
me로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
msa로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

따라서 a로 시작하는 것부터 msa로 시작하는 것까지의 총개수는

$24+24+6+6+2=62$

이므로 63번째에 오는 것은 mse로 시작하는 것 중 제일 처음의 것이다.

$\therefore$ mseau 답 ③

12 전략 ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$임을 이용한다. (단, $1\le r<n$)

풀이 ${}_mC_2+{}_mC_3=20$에서 ${}_mC_2+{}_mC_3={}_{m+1}C_3$이므로

${}_{m+1}C_3=20$, $\quad \dfrac{(m+1)m(m-1)}{3\cdot2\cdot1}=20$

$(m+1)m(m-1)=120=6\cdot5\cdot4$

$\therefore m=5$

${}_nP_4=20\cdot{}_nP_2$에서

$n(n-1)(n-2)(n-3)=20n(n-1)$

$n\ge4$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$(n-2)(n-3)=20=5\cdot4$

$n-2=5 \qquad \therefore n=7$

$\therefore m+n=12$ 　　답 ⑤

13 전략 a, b, c의 대소 관계가 주어졌으므로 순서를 생각하지 않는 경우임을 이용한다.

풀이 구하는 순서쌍의 개수는 1부터 8까지의 8개의 자연수 중에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_8C_3=56$ 　　답 ③

베이직쎈 BOX
서로 다른 3개의 자연수를 택하면 작은 것부터 차례대로 a, b, c이다.

14 전략 모든 경우의 수에서 소수가 적힌 공을 뽑지 않는 경우의 수를 뺀다.

풀이 10개의 공 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는

$_{10}C_3=120$

소수가 적힌 공을 제외한 6개의 공 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는

$_6C_3=20$

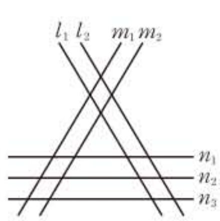
따라서 구하는 경우의 수는

$120-20=100$ 　　답 ②

2, 3, 5, 7이 적힌 공

15 전략 평행사변형을 만들려면 평행한 직선을 2개씩 택해야 한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 평행한 직선을 각각 l_1, l_2, m_1, m_2, n_1, n_2, n_3이라 하자.



(i) l_1, l_2 중에서 2개를 택하고 m_1, m_2 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_2C_2\cdot{}_2C_2=1$

(ii) l_1, l_2 중에서 2개를 택하고 n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_2C_2\cdot{}_3C_2=3$

(iii) m_1, m_2 중에서 2개를 택하고 n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_2C_2\cdot{}_3C_2=3$

이상에서 구하는 평행사변형의 개수는

$1+3+3=7$ 　　답 ②

16 전략 10과 서로소이려면 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아니어야 한다.

풀이 $10=2\cdot5$이므로 10과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수이다. ··· ❶

1부터 40까지의 자연수 중에서 2의 배수는 20개, 5의 배수는 8개, 2와 5의 최소공배수인 10의 배수는 4개이므로 2의 배수 또는 5의 배수인 수의 개수는

$20+8-4=24$ ··· ❷

따라서 구하는 수의 개수는

$40-24=16$ ··· ❸

답 16

단계	채점 기준	비율
❶	10과 서로소인 수의 조건을 알 수 있다.	20 %
❷	2의 배수 또는 5의 배수인 수의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❸	10과 서로소인 수의 개수를 구할 수 있다.	30 %

17 전략 두 수의 합이 짝수가 되려면 두 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

풀이 두 주사위에서 나오는 눈의 수의 합이 짝수가 되려면 두 눈의 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

(i) 두 눈의 수가 모두 짝수인 경우는

$3\cdot3=9$(가지)

2, 4, 6의 3개

(ii) 두 눈의 수가 모두 홀수인 경우는

$3\cdot3=9$(가지)

1, 3, 5의 3개

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$9+9=18$ 　　답 18

18 전략 모든 경우의 수에서 양 끝에 여배우가 서는 경우의 수를 뺀다.

풀이 5명이 일렬로 서는 경우의 수는

$5!=120$

양 끝에 여배우가 오도록 5명이 일렬로 서는 경우의 수는

$_3P_2\cdot3!=36$

여배우 2명을 택하여 양 끝에 세우는 경우의 수는 $_3P_2$
나머지 3명이 일렬로 서는 경우의 수는 $3!$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-36=84$ 　　답 84

19 전략 순열의 수와 조합의 수를 이용한다.

풀이 (1) 일대일함수 f의 개수는 집합 Y의 4개의 원소 중에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$_4P_3=24$ ··· ❶

일대일함수
➡ 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$인 함수

(2) 집합 Y의 4개의 원소 중에서 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 a, b, c에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 4개의 원소 중에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$_4C_3={}_4C_1=4$ ··· ❷

답 (1) 24 (2) 4

단계	채점 기준	비율
❶	일대일함수 f의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❷	$f(a)<f(b)<f(c)$인 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	50 %

베쎈 TIP
두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, $n\,(m\leq n)$일 때, 함수 $f: X \longrightarrow Y$ 중에서
① 일대일함수 f의 개수 ➡ $_nP_m$
② 집합 X의 원소 a, b에 대하여 $a<b$이면 $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수의 개수 ➡ $_nC_m$

20 전략 원소의 개수가 4인 모든 부분집합의 개수에서 원소의 개수가 4이고 짝수로만 이루어진 부분집합의 개수를 뺀다.

본책 156쪽

풀이 집합 $A=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 4인 집합의 개수는

$${}_{10}C_4=210$$

이 중 짝수로만 이루어진 부분집합의 개수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

따라서 구하는 집합의 개수는

$$210-5=205$$

답 205

21 전략 빨간 구슬 2개를 반드시 포함하여 4개를 뽑는 경우의 수를 먼저 구한다.

풀이 빨간 구슬 2개를 제외한 4개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_2=6 \quad \cdots ❶$$

뽑은 4개의 구슬 중 빨간 구슬 2개를 제외한 나머지 2개의 구슬을 일렬로 나열하고 그 사이사이 및 양 끝의 3개의 자리에 빨간 구슬 2개를 나열하는 경우의 수는

$$2!\cdot{}_3P_2=12 \quad \cdots ❷$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6\cdot12=72 \quad \cdots ❸$$

답 72

단계	채점 기준	비율
❶	빨간 구슬 2개를 반드시 포함하여 4개를 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷	빨간 구슬이 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸	조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

22 전략 삼각형이 만들어지지 않는 경우는 제외한다.

풀이 9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_3=84 \quad \cdots ❶$$

한 변 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4 \quad \cdots ❷$$

이때 한 변 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$84-3\cdot4=72 \quad \cdots ❸$$

답 72

단계	채점 기준	비율
❶	9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷	한 변 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸	삼각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

23 전략 직사각형을 만들려면 가로 방향의 선분 2개와 세로 방향의 선분 2개를 택해야 한다.

풀이 가로 방향의 6개의 선분 중에서 2개, 세로 방향의 5개의 선분 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어지므로 구하는 직사각형의 개수는

$${}_6C_2\cdot{}_5C_2=150$$

답 150

베이직쎈 BOX

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

5개의 짝수 2, 4, 6, 8, 10 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같다.

파란 구슬 3개와 노란 구슬 1개