정답 및 풀이

V 집합과 명제

VI 함수

VII 순열과 조합

14 집합

01 집합

확인

본책 6~8쪽

1 답 (1) $1, 2, 5, 10$ (3) $2, 4, 6$

2 답 (1) $\in$ (2) $\in$ (3) $\notin$ (4) $\in$

3 답 (1) $A=\{1, 3, 5, \cdots, 59\}$
(2) $B=\{x \mid x$는 32의 양의 약수$\}$

4 $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{1, 3, 5, 15\}$, $D=\varnothing$이므로 A, B, D는 유한집합, D는 공집합이다.
또 2보다 크고 3보다 작은 유리수는 무수히 많으므로 C는 무한집합이다. 답 (1) A, B, D (2) C (3) D

5 (3) $|x|\le 2$에서 $-2\le x\le 2$
따라서 정수 x는 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5개이므로
$n(C)=5$ 답 (1) 8 (2) 0 (3) 5

유제

본책 9~11쪽

1 ①, ②, ③, ⑤ '잘하는', '유익한', '깨끗한', '큰'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
④ '가장 작은'은 조건이 명확하므로 집합이다. 답 ④

2 $A=\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
① $1\in B$ ② $2\notin A$
④ $12\in A$ ⑤ $24\notin B$ 답 ③

3 ㄱ. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
ㄴ. $\{2, 4, 6, 8\}$
ㄷ. $\{2, 4, 6, 8\}$
ㄹ. $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
이상에서 집합 $\{2, 4, 6, 8\}$을 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

4 ② $\{x \mid x$는 $10<x<20$인 소수$\}$
➡ $\{11, 13, 17, 19\}$ 답 ②

5 $A=\{-1, 0, 1\}$, $B=\{-2, 2\}$에 대하여
$a\in A$, $b\in B$이므로
$a=-1, 0, 1$
$b=-2, 2$
따라서 $a+b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로 집합 C를 원소나열법으로 나타내면

b \ a	-1	0	1
-2	-3	-2	-1
2	1	2	3

$C=\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$
답 $C=\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

6 ① $\{2\}$ ➡ 유한집합
② $\{-1\}$ ➡ 유한집합
③ $\{100, 101, 102, \cdots, 999\}$ ➡ 유한집합
④ $\left\{(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (0, 1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \cdots\right\}$
➡ 무한집합
⑤ $\{1, 3, 5, \cdots\}$ ➡ 무한집합 답 ④, ⑤

7 ㄱ. $n(\{\varnothing\})=1$
ㄴ. $n(\{2, 3, 4\})=3$, $n(\{4, 5, 6\})=3$이므로
$n(\{2, 3, 4\})=n(\{4, 5, 6\})$
ㄷ. $n(\{0, 2\})=2$, $n(\{0\})=1$이므로
$n(\{0, 2\})+n(\{0\})=3$
ㄹ. $n(\{5\})=1$, $n(\{3\})=1$이므로
$n(\{5\})-n(\{3\})=0$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

02 집합 사이의 포함 관계

확인

본책 12~14쪽

1 답 (1) $\varnothing$, $\{5\}$
(2) $\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2, 3\}$
(3) $\varnothing$, $\{-3\}$, $\{3\}$, $\{-3, 3\}$
(4) $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$

2 (1) $B=\{1, 3, 9\}$이므로
$A=B$
(2) $A=\{-1, 0, 1\}$, $B=\{-1, 1\}$이므로
$A\ne B$
답 (1) $A=B$ (2) $A\ne B$

3 (1) $\varnothing$, $\{-1\}$, $\{3\}$

(2) $\{x \mid x$는 5 이하의 소수$\} = \{2, 3, 5\}$

따라서 주어진 집합의 진부분집합은

$\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$

답 풀이 참조

4 (1) $n(A)=6$이므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^6=64$

(2) $2^6-1=63$

답 (1) 64 (2) 63

5 (1) 집합 A에서 1, 5를 제외한 집합 $\{2, 3, 4\}$의 부분집합에 원소 1, 5를 넣은 집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

(2) 집합 A에서 2, 3, 4를 제외한 집합 $\{1, 5\}$의 부분집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

(3) 집합 A에서 1, 3과 4를 제외한 집합 $\{2, 5\}$의 부분집합에 원소 1, 3을 넣은 집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{5-2-1}=2^2=4$

답 (1) 8 (2) 4 (3) 4

유제 본책 15~17쪽

1 ① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset A$

② a는 집합 A의 원소이므로 $a \in A$

③ a는 집합 B의 원소이므로 $\{a\} \subset B$

④ c는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{a, c\} \not\subset A$

⑤ b, c는 집합 B의 원소이므로 $\{b, c\} \subset B$

답 ④

2 $A=\{1, 3, 5, 7\}$

① 1은 집합 A의 원소이므로 $1 \in A$

② 4는 집합 A의 원소가 아니므로 $4 \notin A$

③ 3, 5는 집합 A의 원소이므로 $\{3, 5\} \subset A$

④ 2는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{2, 3, 7\} \not\subset A$

⑤ 집합 A의 원소 1은 집합 $\{3, 5, 7, 9\}$의 원소가 아니므로

$A \not\subset \{3, 5, 7, 9\}$

답 ③

3 ㄱ, ㄴ. $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\varnothing \in A$, $\{\varnothing\} \subset A$

ㄷ. 1, 2는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{1, 2\} \not\subset A$

ㄹ. $\{1\}$, $\{2\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{\{1\}, \{2\}\} \subset A$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

라이트 UP

집합을 원소로 갖는 집합

집합 $A=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$는 집합을 원소로 갖는 집합이다. 집합 A의 원소는 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$이고 $\{\{1\}, \{2\}\}$는 $\{1\}$과 $\{2\}$를 원소로 갖는 집합 A의 부분집합이다. 즉

$\varnothing \in A$, $\{1\} \in A$, $\{2\} \in A$, $\{1, 2\} \in A$,

$\{\varnothing\} \subset A$, $\{\{1\}\} \subset A$, $\{\{2\}\} \subset A$, $\{\{1, 2\}\} \subset A$, $\{\{1\}, \{2\}\} \subset A$

4 $A=B$이면 두 집합 A, B의 모든 원소가 같다.

$1 \in A$에서 $1 \in B$이어야 하므로

$a-b=1$ …… ㉠

$7 \in B$에서 $7 \in A$이어야 하므로

$a+b=7$ …… ㉡

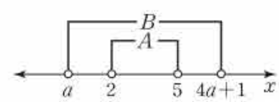
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=3$

$\therefore ab=12$

답 12

5 $A \subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선을 이용하여 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a \le 2$, $4a+1 \ge 5$

$4a+1 \ge 5$에서 $4a \ge 4$ $\therefore a \ge 1$

$\therefore 1 \le a \le 2$

답 $1 \le a \le 2$

6 $A \subset B$, $B \subset A$이므로 $A=B$

$-4 \in A$에서 $-4 \in B$이어야 하므로

$a^2-5a=-4$

$a^2-5a+4=0$, $(a-1)(a-4)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=4$ …… ㉠

$2 \in B$에서 $2 \in A$이어야 하므로

$a^2-2a-6=2$

$a^2-2a-8=0$, $(a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A=B$를 만족시키는 a의 값은 4이다.

답 4

7 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

집합 X는 집합 A의 진부분집합이고, 2, 4를 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는

$2^{5-2}-1=2^3-1=7$

답 7

8 $A=\{1, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

따라서 집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 1, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ 답 16

중단원 연습 문제

본책 18~20쪽

01 ③	**02** ②	**03** ③	**04** ⑤	**05** ②
06 ④	**07** ⑤	**08** ⑤	**09** 11	**10** 72
11 ④	**12** 12	**13** 32	**14** 64	**15** 10
16 30	**17** 9	**18** ④	**19** 28	**20** 21
21 ①				

01 전략 집합은 그 대상을 분명히 정할 수 있는 것들의 모임이다.

풀이 ㄱ, ㄹ. '따뜻한', '가까운'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

이상에서 집합인 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ의 3개이다. 답 ③

02 전략 조건제시법으로 나타내어진 집합을 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 ① $A=\{1, 2, 5, 10\}$

② $A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

③ $A=\{1, 5, 25\}$

④ $A=\{5, 10, 15, 20\}$

⑤ $A=\{10, 20\}$ 답 ②

03 전략 소인수분해하였을 때 소인수가 2, 5인 수는 집합 A의 원소이다.

풀이 ① $10=2^1\times5^1$

② $50=2^1\times5^2$

③ $70=2^1\times5^1\times7^1$

④ $80=2^4\times5^1$

⑤ $100=2^2\times5^2$ 답 ③

04 전략 공집합은 원소가 하나도 없는 집합이다.

풀이 ⑤ $\{5\}$ 답 ⑤

05 전략 $n(A)$는 유한집합 A의 원소의 개수를 뜻한다.

풀이 ① $n(\{5\})=1$

② 집합 $\{0, \{0, 1\}\}$의 원소는 0, $\{0, 1\}$이므로

$n(\{0, \{0, 1\}\})=2$

③ $n(\varnothing)=0$, $n(\{\varnothing\})=1$이므로

$n(\varnothing)+n(\{\varnothing\})=1$

④ $\{x|x$는 8의 양의 약수$\}=\{1, 2, 4, 8\}$이므로

$n(\{x|x$는 8의 양의 약수$\})=4$

⑤ $n(\{1, 2, 3, 4\})=4$, $n(\{1, 2, 3\})=3$이므로

$n(\{1, 2, 3, 4\})-n(\{1, 2, 3\})=1$ 답 ②

06 전략 먼저 두 집합 Y, Z를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $Y=\{0, 1\}$, $Z=\{0, 1\}$이므로

$Y=Z\subset X$ 답 ④

07 전략 (원소)$\in$(집합), (부분집합)$\subset$(집합)임을 이용한다.

풀이 집합 $A=\{\varnothing, 0, \{0\}\}$의 원소는 $\varnothing$, 0, $\{0\}$

①, ③ $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로

$\varnothing\in A$, $\{\varnothing\}\subset A$

②, ④ $\{0\}$은 집합 A의 원소이므로

$\{0\}\in A$, $\{\{0\}\}\subset A$

⑤ $\varnothing$, 0은 집합 A의 원소이므로

$\{\varnothing, 0\}\subset A$ 답 ⑤

08 전략 성립하지 않는 예를 찾는다.

풀이 ① $A=\{0, 1\}$, $B=\{0, 1\}$이면 $A\subset B$이지만 $n(A)=n(B)$이다.

② $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{4, 5, 6\}$이면 $n(A)=n(B)$이지만 $A\neq B$이다.

③ $A=\{1, 3\}$, $B=\{2\}$이면 $n(A)>n(B)$이지만 $B\not\subset A$이다.

④ $n(A)=0$이면 $A=\varnothing$이다.

⑤ $n(\varnothing)=0$이므로 $n(A)\le0$이면 $n(A)=0$이다.

따라서 $A=\varnothing$이다. 답 ⑤

09 전략 $A\subset B$이면 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속한다.

풀이 $A\subset B$가 성립하려면 $3\in B$이어야 한다.

(i) $a^2+2=3$, 즉 $a=\pm1$일 때,

$a=1$이면 $A=\{2, 3\}$, $B=\{2, 3, 6\}$이므로

$A\subset B$

$a=-1$이면 $A=\{0, 3\}$, $B=\{2, 3, 8\}$이므로

$A\not\subset B$

(ii) $-a+7=3$, 즉 $a=4$일 때,

$A=\{3, 5\}$, $B=\{2, 3, 18\}$이므로

$A\not\subset B$

(i), (ii)에서 $A\subset B$를 만족시키는 a의 값은 1이다.

따라서 $B=\{2, 3, 6\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$2+3+6=11$ 답 11

10 전략 이차방정식 $x^2-3x-5=0$의 두 근이 a, b임을 이용한다.

풀이 $A=B$이므로 이차방정식 $x^2-3x-5=0$의 두 근은 a, b이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=3,\ ab=-5$ ⋯ ❶

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=3^3-3\cdot(-5)\cdot3$
$=27+45=72$ ⋯ ❷

답 72

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 $a+b$, ab의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a^3+b^3의 값을 구할 수 있다.	60%

라이트 UP

곱셈 공식의 변형
① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
② $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
③ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

11 전략 집합 B는 집합 A의 부분집합 중에서 원소가 3개인 집합임을 이용한다.

풀이 $x^2=1$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x^2=4$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$\therefore A=\{-2, -1, 1, 2\}$

$B\subset A$이고 $n(B)=3$을 만족시키는 집합 B는 집합 A의 부분집합 중에서 원소가 3개인 집합이므로

$\{-2, -1, 1\}, \{-2, -1, 2\}, \{-2, 1, 2\}, \{-1, 1, 2\}$

의 4개이다. 답 ④

12 전략 원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수는 2^n임을 이용한다.

풀이 집합 A의 원소의 개수를 a라 하면 부분집합의 개수가 128이므로

$2^a=128 \quad \therefore a=7$

집합 B의 원소의 개수를 b라 하면 진부분집합의 개수가 31이므로

$2^b-1=31, \quad 2^b=32 \quad \therefore b=5$

$\therefore n(A)+n(B)=a+b=12$ 답 12

13 전략 특정한 원소를 반드시 원소로 갖는(갖지 않는) 부분집합의 개수는 그 원소를 제외한 집합의 부분집합의 개수와 같다.

풀이 집합 A에서 1과 2, 8을 제외한 집합 $\{3, 4, 6, 12, 24\}$의 부분집합에 원소 1을 넣은 집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{8-1-2}=2^5=32$ 답 32

14 전략 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 A의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합임을 이용한다.

풀이 $x^2-8x+15=0$에서

$(x-3)(x-5)=0 \quad \therefore x=3$ 또는 $x=5$

$\therefore A=\{3, 5\}$

$B=\{x|x$는 30의 양의 약수$\}$이므로

$B=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ ⋯ ❶

따라서 집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 3, 5를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{8-2}=2^6=64$ ⋯ ❷

답 64

채점 기준	비율
❶ 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	60%

15 전략 원소가 3개, 4개, 5개인 경우로 나누어 구한다.

풀이 집합 A의 부분집합 중 원소의 합이 10 이상이 되려면 원소의 개수가 3 이상이어야 한다.

(i) 원소의 개수가 3인 경우

$\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$

의 4개이다.

(ii) 원소의 개수가 4인 경우

$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$

의 5개이다.

(iii) 원소의 개수가 5인 경우

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$

의 1개이다.

이상에서 구하는 부분집합의 개수는

$4+5+1=10$ 답 10

16 전략 m, n에 집합 A의 원소를 각각 대입하여 나올 수 있는 값을 찾는다.

풀이 (i) $m=1$, $n=1$일 때,

$2^m+3n=2^1+3\cdot1=5$

(ii) $m=1$, $n=2$일 때,

$2^m+3n=2^1+3\cdot2=8$

(iii) $m=2$, $n=1$일 때,

$$2^m+3n=2^2+3\cdot1=7$$

(iv) $m=2$, $n=2$일 때,

$$2^m+3n=2^2+3\cdot2=10$$

이상에서 $X=\{5, 7, 8, 10\}$

따라서 집합 X의 모든 원소의 합은

$5+7+8+10=30$ 답 30

17 전략 $A\subset B$, $B\subset A$이면 $A=B$임을 이용한다.

풀이 $A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$

$A=B$에서 두 집합 A, B의 모든 원소의 합이 서로 같으므로

$$a+b+c=ab+bc+ca$$

$\therefore ab+bc+ca=4$ ⋯ ❶

또 두 집합 A, B의 모든 원소의 곱이 서로 같으므로

$abc=ab\cdot bc\cdot ca$, $abc=(abc)^2$

$abc(abc-1)=0$ $\therefore abc=1$ ($\because abc\neq0$) ⋯ ❷

$\therefore a^2+b^2+c^2+abc$

$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+abc$

$=4^2-2\cdot4+1=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ abc의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $a^2+b^2+c^2+abc$의 값을 구할 수 있다.	40%

18 전략 원소의 개수가 n인 집합에 대하여 특정한 k개는 반드시 원소로 갖고, 특정한 m개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 2^{n-k-m}임을 이용한다. (단, $k+m<n$)

풀이 $A=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$이므로 $n(A)=k$

따라서 3, 4, 5를 반드시 원소로 갖고 1, 2를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{k-3-2}=64$, $2^{k-5}=2^6$

$k-5=6$ $\therefore k=11$ 답 ④

19 전략 $M(X)\geq3$이므로 집합 X는 3, 4, 5 중 하나를 반드시 원소로 갖는다.

풀이 $M(X)\geq3$을 만족하기 위해서는 집합 A의 부분집합 X가 3 이상의 원소를 적어도 하나 가져야 한다.

따라서 집합 X의 개수는 A의 부분집합의 개수에서 3, 4, 5를 모두 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^5-2^{5-3}=32-4=28$ 답 28

20 전략 두 수의 합이 7인 경우를 나누어 집합 X의 개수를 구한다.

풀이 $7=1+6=2+5=3+4$이므로

(i) 원소 중 가장 큰 수가 6, 가장 작은 수가 1인 경우

집합 X는 1, 6을 반드시 원소로 가져야 하므로 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ ⋯ ❶

(ii) 원소 중 가장 큰 수가 5, 가장 작은 수가 2인 경우

집합 X는 2, 5를 반드시 원소로 갖고 1, 6을 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 X의 개수는

$2^{6-2-2}=2^2=4$ ⋯ ❷

(iii) 원소 중 가장 큰 수가 4, 가장 작은 수가 3인 경우

집합 X는 $\{3, 4\}$의 1개이다. ⋯ ❸

이상에서 구하는 집합 X의 개수는

$16+4+1=21$ ⋯ ❹

답 21

채점 기준	비율
❶ 원소 중 가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 6, 1인 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30%
❷ 원소 중 가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 5, 2인 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30%
❸ 원소 중 가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 4, 3인 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30%
❹ 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	10%

21 전략 가장 작은 원소가 1, 2, 3, 4인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 집합 S의 부분집합 중에서 원소가 2개 이상인 집합의 개수는 다음과 같다.

(i) 1이 가장 작은 원소인 경우

1을 반드시 원소로 갖는 집합에서 $\{1\}$을 제외하면 되므로

$2^{5-1}-1=15$

(ii) 2가 가장 작은 원소인 경우

2를 반드시 원소로 갖고 1을 원소로 갖지 않는 집합에서 $\{2\}$를 제외하면 되므로

$2^{5-1-1}-1=7$

(iii) 3이 가장 작은 원소인 경우

3을 반드시 원소로 갖고 1, 2를 원소로 갖지 않는 집합에서 $\{3\}$을 제외하면 되므로

$2^{5-1-2}-1=3$

(iv) 4가 가장 작은 원소인 경우

$\{4, 5\}$의 1개이다.

이상에서 구하는 값은

$15\cdot1+7\cdot2+3\cdot3+1\cdot4=42$ 답 ①

15 집합의 연산

01 집합의 연산

확인 본책 22~25쪽

1 (1) $A=\{-1, 0, 1\}$, $B=\{1, 2, 3\}$이므로

$A\cup B=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$,

$A\cap B=\{1\}$

(2) $A=\{2, 3\}$, $B=\{-4, 4\}$이므로

$A\cup B=\{-4, 2, 3, 4\}$,

$A\cap B=\varnothing$

따라서 A와 B는 서로소이다.

답 (1) $A\cup B=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $A\cap B=\{1\}$

(2) $A\cup B=\{-4, 2, 3, 4\}$, $A\cap B=\varnothing$

A와 B는 서로소이다.

2 ① $A\cup(A\cap\varnothing)=A\cup\varnothing=A$

② $(A\cup\varnothing)\cap A=A\cap A=A$

③ $(A\cup\varnothing)\cup\varnothing=A\cup\varnothing=A$

④ $(A\cap A)\cap\varnothing=A\cap\varnothing=\varnothing$

⑤ $(A\cap B)\subset A$이므로

$A\cup(A\cap B)=A$ 답 ④

3 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$=\{2, 3, 7\}\cup\{3, 6\}$

$=\{2, 3, 6, 7\}$ 답 $\{2, 3, 6, 7\}$

4 $U=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $A=\{1, 3, 5, 15\}$,

$B=\{2, 5, 10\}$

(1) $A^C=\{2, 6, 10, 30\}$

(2) $B^C=\{1, 3, 6, 15, 30\}$

(3) $A-B=\{1, 3, 15\}$

(4) $B-A=\{2, 10\}$ 답 풀이 참조

5 ① $A\cap U^C=A\cap\varnothing=\varnothing$

② $A\cup A^C=U$

③ $(A^C)^C\cap U=A\cap U=A$

④ $\varnothing-A=\varnothing$

⑤ $A^C\cap B=B-A$ 답 ③

유제 본책 26~30쪽

1 $A=\{1, 4, 7, 10\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

③ $B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12\}$이므로

$A\cap(B\cup C)=\{1, 4, 10\}$

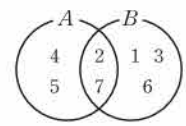
④ $B\cap C=\{2, 4, 6\}$이므로

$A\cup(B\cap C)=\{1, 2, 4, 6, 7, 10\}$

⑤ $A\cap B=\{4, 10\}$이므로

$(A\cap B)\cup C=\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}$ 답 ⑤

2 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=\{1, 2, 3, 6, 7\}$

답 $\{1, 2, 3, 6, 7\}$

3 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{5, 10\}$이므로

$A-B=\{1, 3, 7, 9\}$

$\therefore (A-B)^C=\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

답 $\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

4 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 15\}$, $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$,

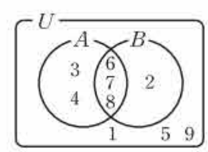
$B=\{1, 3, 5, 15\}$이므로

$A-B=\{2, 7, 11, 13\}$, $B-A=\{1, 15\}$

$\therefore (A-B)\cup(B-A)=\{1, 2, 7, 11, 13, 15\}$

답 $\{1, 2, 7, 11, 13, 15\}$

5 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이고 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A^C=\{1, 2, 5, 9\}$

따라서 집합 A^C의 모든 원소의 합은

$1+2+5+9=17$ 답 17

6 $A\cap B=\{-3, 4\}$에서 $4\in A$이므로

$2a+b=4$ …… ㉠

또 $-3\in B$이므로 $a-2b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

$\therefore a+b=3$ 답 3

7 $A-B=\{1\}$에서 $A\cap B=\{4, a^2-a\}$이므로

$4\in B$, $a^2-a\in B$

$4\in B$에서

$a-3=4$ 또는 $a+1=4$

$\therefore a=7$ 또는 $a=3$

(i) $a=7$일 때,

$A=\{1, 4, 42\}$, $B=\{4, 6, 8\}$이므로

$A-B=\{1, 42\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{1, 4, 6\}$, $B=\{0, 4, 6\}$이므로

$A-B=\{1\}$

(i), (ii)에서 $a=3$ 답 3

8 $A\cup B=\{-1, 2, 3, 4\}$이고 $A=\{a-3, 2, 3\}$이므로

$a-3=-1$ 또는 $a-3=4$

$\therefore a=2$ 또는 $a=7$

(i) $a=2$일 때,

$A=\{-1, 2, 3\}$, $B=\{-1, 3, 4\}$이므로

$A\cup B=\{-1, 2, 3, 4\}$

(ii) $a=7$일 때,

$A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{-1, 14, 48\}$이므로

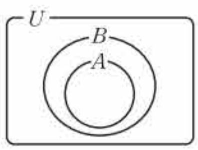
$A\cup B=\{-1, 2, 3, 4, 14, 48\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $B=\{-1, 3, 4\}$ 답 $\{-1, 3, 4\}$

9 $A\cup B=B$이면 $A\subset B$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $A\cap B=A$

② $A\cup B^C\neq U$

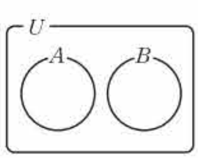
③ $B-A\neq\varnothing$

④ $A^C-B^C\neq\varnothing$

답 ⑤

10 $A-B=A$이면 $A\cap B=\varnothing$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



④ $A^C\not\subset B$

답 ④

11 $(A-B)\cup B=(A\cap B^C)\cup B$

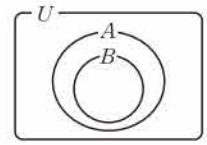
$=(A\cup B)\cap(B^C\cup B)$

$=(A\cup B)\cap U$

$=A\cup B$

따라서 $A\cup B=A$이므로 $B\subset A$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $A\not\subset B$ ② $B^C\not\subset A$

③ $A-B\neq\varnothing$ ⑤ $A\neq B$

답 ④

12 $(A\cap B)\cup X=X$이므로

$(A\cap B)\subset X$

$(A\cup B)\cap X=X$이므로

$X\subset(A\cup B)$

$\therefore (A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$

이때 $A\cap B=\{4, 10\}$, $A\cup B=\{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10\}$이므로 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10\}$의 부분집합 중에서 4, 10을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^{7-2}=2^5=32$ 답 32

13 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{4, 9\}$

$A-X=\varnothing$이므로 $A\subset X$

$B-X=B$이므로 $B\cap X=\varnothing$

따라서 집합 X의 개수는 전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 부분집합 중에서 집합 A의 원소 1, 2, 5, 10을 반드시 원소로 갖고 집합 B의 원소 4, 9를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$2^{10-4-2}=2^4=16$ 답 16

14 $U=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $A=\{1, 3, 4, 12\}$,

$B=\{3, 6, 24\}$이므로 $A-B=\{1, 4, 12\}$

$(A-B)\cap X=\{1, 4\}$에서 집합 X는 1, 4를 반드시 원소로 갖고 12를 원소로 갖지 않는다.

또 $B\cup X=X$에서 $B\subset X$이므로 집합 X는 집합 B의 원소 3, 6, 24를 반드시 원소로 갖는다.

따라서 집합 X의 개수는 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$의 부분집합 중에서 1, 3, 4, 6, 24를 반드시 원소로 갖고 12를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$2^{8-5-1}=2^2=4$ 답 4

02 드모르간의 법칙

확인

본책 31~32쪽

1 (1) $(A\cap B)\cup(A^C\cup B^C)=(A\cap B)\cup(A\cap B)^C$

$=U$

(2) $(A^C \cup B)^C \cup B = (A \cap B^C) \cup B$
$= (A \cup B) \cap (B^C \cup B)$
$= (A \cup B) \cap U$
$= A \cup B$

답 (1) U (2) $A \cup B$

2 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$에서
$39 = 26 + 18 - n(A \cap B)$
$\therefore n(A \cap B) = 5$

답 5

3 (1) $n(A^C) = n(U) - n(A)$
$= 30 - 13 = 17$
(2) $n(B^C \cap A) = n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$
$= 13 - 5 = 8$

답 (1) 17 (2) 8

유제 본책 33~35쪽

1 (1) $(A \cup B) \cup (A^C \cap B^C) = (A \cup B) \cup (A \cup B)^C$
$= U$
(2) $A - (A \cup B^C) = A \cap (A \cup B^C)^C$
$= A \cap (A^C \cap B)$
$= (A \cap A^C) \cap B$
$= \varnothing \cap B = \varnothing$

답 (1) U (2) $\varnothing$

2 $A \cap B = A - (A - B) = \{4, 6\}$이므로
$A^C \cup B^C = (A \cap B)^C = \{2, 8, 10\}$

답 $\{2, 8, 10\}$

3 주어진 식의 좌변을 정리하면
$\{(A \cup B) \cap (A - B)^C\} \cup A$
$= \{(A \cup B) \cap (A \cap B^C)^C\} \cup A$
$= \{(A \cup B) \cap (A^C \cup B)\} \cup A$
$= \{(A \cap A^C) \cup B\} \cup A$
$= (\varnothing \cup B) \cup A = A \cup B$
따라서 $A \cup B = B$이므로 $A \subset B$
③ $B - A \neq B$ ④ $A \cap B = A$ ⑤ $A \cup B = B$

답 ①

4 (1) $n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$에서
$n(A \cap B) = n(A) - n(A-B) = 10 - 4 = 6$
$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 10 + 8 - 6 = 12$

(2) $n(A^C \cup B) = n((A \cap B^C)^C)$
$= n(U) - n(A \cap B^C)$
$= n(U) - n(A - B)$
$= 25 - 4 = 21$

답 (1) 12 (2) 21

5 $n(U) = 30$이고
$n(A^C \cap B^C) = n((A \cup B)^C)$
$= n(U) - n(A \cup B)$
이므로
$n(A \cup B) = n(U) - n(A^C \cap B^C)$
$= 30 - 8 = 22$
$\therefore n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(A-B) - n(B-A)$
$= 22 - 5 - 12 = 5$

답 5

6 $B \cap C = \varnothing$이므로
$A \cap B \cap C = \varnothing$
$\therefore n(B \cap C) = 0,\ n(A \cap B \cap C) = 0$
또한
$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
$= 14 + 10 - 22 = 2$
$n(C \cap A) = n(C) + n(A) - n(C \cup A)$
$= 9 + 14 - 18 = 5$
$\therefore n(A \cup B \cup C)$
$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$
$- n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
$= 14 + 10 + 9 - 2 - 0 - 5 + 0$
$= 26$

답 26

7 장미를 좋아하는 학생의 집합을 A, 백합을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면
$n(A) = 12,\ n(B) = 10,\ n(A \cap B) = 7$
장미 또는 백합을 좋아하는 학생의 집합은 $A \cup B$이므로
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 12 + 10 - 7 = 15$
따라서 구하는 학생 수는 15이다.

답 15

8 산악 동호회 회원 전체의 집합을 U, 관악산을 등산한 회원의 집합을 A, 북한산을 등산한 회원의 집합을 B라 하면
$n(U) = 40,\ n(A) = 29,\ n(B) = 23,\ n(A^C \cap B^C) = 6$

이때

$$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$$
$$=n(U)-n(A\cup B)$$

에서

$$n(A\cup B)=n(U)-n(A^C\cap B^C)$$
$$=40-6=34$$

관악산만 등산한 회원의 집합은 $A-B$이므로

$$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$$
$$=34-23=11$$

답 11

다른 풀이 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$
$$=29+23-34=18$$

관악산만 등산한 회원의 집합은 $A-B$이므로

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$
$$=29-18=11$$

9 환경 동호회 회원 전체의 집합을 U, 텀블러를 사용하는 회원의 집합을 A, 머그잔을 사용하는 회원의 집합을 B라 하면

$$n(U)=50,\ n(A)=23,\ n(B)=34$$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$
$$=23+34-n(A\cup B)$$
$$=57-n(A\cup B)$$

(i) $n(A\cap B)$의 값이 최대인 경우

$n(A\cup B)$의 값이 최소일 때, 즉 $A\subset B$일 때이므로

$n(A\cap B)$의 최댓값은

$$n(A\cap B)=n(A)=23$$

(ii) $n(A\cap B)$의 값이 최소인 경우

$n(A\cup B)$의 값이 최대일 때, 즉 $A\cup B=U$일 때이므로

$n(A\cap B)$의 최솟값은

$$n(A\cap B)=57-n(A\cup B)$$
$$=57-n(U)$$
$$=57-50=7$$

(i), (ii)에서 텀블러와 머그잔을 모두 사용하는 회원 수의 최댓값은 23, 최솟값은 7이다.

답 최댓값: 23, 최솟값: 7

라이트 UP

유한집합의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값

전체집합 U의 두 부분집합 X, Y에 대하여 $n(X)<n(Y)$일 때

$X\subset(X\cup Y)$, $Y\subset(X\cup Y)$이고 $(X\cup Y)\subset U$이므로

$n(Y)\le n(X\cup Y)\le n(U)$가 성립한다.

따라서 $n(X\cup Y)$의 최댓값은 $n(U)$, 최솟값은 $n(Y)$이다.

중단원 연습 문제

본책 36~38쪽

01 ④	02 ④	03 ④	04 ①	05 ②
06 ②	07 ④	08 32	09 4	10 ⑤
11 40	12 ③	13 10	14 47	15 6
16 8	17 $\frac{9}{2}$	18 ㄱ	19 ④	20 75

01 전략 두 집합 A, B가 서로소이면 $A\cap B=\varnothing$임을 이용한다.

풀이 $A=\{1, 2, 3, 6\}$

④ $\{x\mid x$는 4의 양의 배수$\}=\{4, 8, 12, \cdots\}=B$라 하면

$A\cap B=\varnothing$

따라서 $\{x\mid x$는 4의 양의 배수$\}$는 집합 A와 서로소이다.

답 ④

02 전략 합집합, 교집합, 여집합, 차집합의 뜻을 이용한다.

풀이 $B=\{1, 2, 4, 8\}$

④ $B-A^C=B\cap(A^C)^C=B\cap A=\{1, 2\}$

답 ④

03 전략 $B-A=\{k\}$이면 k를 제외한 집합 B의 원소는 모두 집합 A에 속한다.

풀이 $B-A=\{7\}$에서 $4\in(A\cap B)$이므로

$4\in A$ $\therefore a=4$

$\therefore A=\{1, 4, 5\}$, $B=\{1, 4, 7\}$

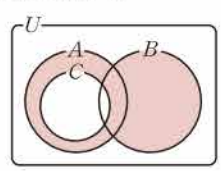
④ $A-B=\{5\}$

답 ④

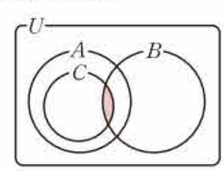
04 전략 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내어 본다.

풀이 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

② $(A\cup B)-C$

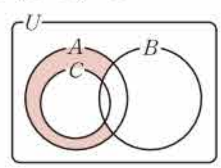


③ $(A\cap B)\cap C$



④ $(B-A)\cap C=\varnothing$

⑤ $(A-B)-C$



답 ①

05 전략 먼저 주어진 식을 집합의 연산의 성질을 이용하여 간단히 한다.

풀이 $(B-A)\subset B$이므로 $(B-A)\cup B=B$

$\therefore \{(B-A)\cup B\}\cap A^C=B\cap A^C=B-A=\{2, 10\}$

답 ②

06 전략 $A^C \cap B = B - A = \varnothing$임을 이용한다.

풀이 $A^C \cap B = \varnothing$이면 $B - A = \varnothing$이므로

$B \subset A$

③ $A^C \cup B \neq U$ ④ $A \cap B = B$

답 ②

07 전략 집합의 연산의 성질을 이용한다.

풀이 ① $A \triangle \varnothing = (A \cup \varnothing) - (A \cap \varnothing)$

$= A - \varnothing = A$

② $U \triangle \varnothing = (U \cup \varnothing) - (U \cap \varnothing)$

$= U - \varnothing = U$

③ $A \triangle A = (A \cup A) - (A \cap A)$

$= A - A = \varnothing$

④ $A \triangle U = (A \cup U) - (A \cap U)$

$= U - A = A^C$

⑤ $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$= (B \cup A) - (B \cap A)$

$= B \triangle A$

답 ④

08 전략 $A - X = A$이면 $A \cap X = \varnothing$임을 이용한다.

풀이 $A - X = A$이므로 $A \cap X = \varnothing$ ··· ❶

따라서 집합 X의 개수는 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중에서 집합 A의 원소 1, 5를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$2^{7-2} = 2^5 = 32$ ··· ❷

답 32

채점 기준	비율
❶ $A \cap X = \varnothing$임을 알 수 있다.	30%
❷ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	70%

09 전략 먼저 주어진 식을 드모르간의 법칙을 이용하여 간단히 한다.

풀이 $(A^C \cup B)^C = A \cap B^C = A - B = \{1, 3\}$이므로 구하는 모든 원소의 합은

$1 + 3 = 4$

답 4

10 전략 집합의 연산 법칙과 드모르간의 법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $(B - A^C)^C \cap (A \cup B^C) = (B \cap A)^C \cap (A \cup B^C)$

$= (B^C \cup A^C) \cap (B^C \cup A)$

$= B^C \cup (A^C \cap A)$

$= B^C \cup \varnothing = B^C$

답 ⑤

11 전략 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$임을 이용한다.

풀이 $n(A^C \cap B^C) = n((A \cup B)^C) = n(U) - n(A \cup B)$이므로

$n(A \cup B) = n(U) - n(A^C \cap B^C)$

$= 46 - 22 = 24$ ··· ❶

이때 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$이므로

$24 = n(A) + n(B) - 16$

$\therefore n(A) + n(B) = 40$ ··· ❷

답 40

채점 기준	비율
❶ $n(A \cup B)$를 구할 수 있다.	50%
❷ $n(A) + n(B)$의 값을 구할 수 있다.	50%

12 전략 $n(A \cap B)$를 $n(A \cup B)$에 대한 식으로 나타낸 후 $n(A \cup B)$의 값이 최소일 때와 최대일 때를 이용한다.

풀이 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$= 22 + 17 - n(A \cup B)$

$= 39 - n(A \cup B)$

(i) $n(A \cap B)$의 값이 최대인 경우

$n(A \cup B)$의 값이 최소일 때, 즉 $B \subset A$일 때이므로

$n(A \cap B)$의 최댓값은

$n(A \cap B) = n(B) = 17$

$\therefore M = 17$

(ii) $n(A \cap B)$의 값이 최소인 경우

$n(A \cup B)$의 값이 최대일 때, 즉 $A \cup B = U$일 때이므로

$n(A \cap B)$의 최솟값은

$n(A \cap B) = 39 - n(A \cup B)$

$= 39 - n(U)$

$= 39 - 35 = 4$

$\therefore m = 4$

(i), (ii)에서 $M + m = 21$

답 ③

13 전략 야구와 축구를 좋아하는 학생의 집합을 각각 A, B라 할 때, 구하는 값은 $n(A \cap B)$임을 이용한다.

풀이 학생 전체의 집합을 U, 야구를 좋아하는 학생의 집합을 A, 축구를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U) = 37$, $n(A) = 17$, $n(B) = 25$, $n(A^C \cap B^C) = 5$

이때

$n(A^C \cap B^C) = n((A \cup B)^C) = n(U) - n(A \cup B)$

에서

$n(A \cup B) = n(U) - n(A^C \cap B^C)$

$= 37 - 5 = 32$

따라서 야구와 축구를 모두 좋아하는 학생 수는

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=17+25-32=10$ 답 10

14 전략 주어진 문제 상황을 집합으로 나타내어 본다.

풀이 1부터 100까지의 자연수 전체의 집합을 U, 1부터 100까지의 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지는 자연수의 집합을 A_3, 5로 나누어떨어지는 자연수의 집합을 A_5라 하자.

$100=3\times 33+1$에서 $n(A_3)=33$

$100=5\times 20$에서 $n(A_5)=20$

$A_3\cap A_5$는 3과 5로 나누어떨어지는 자연수의 집합, 즉 3과 5의 최소공배수 15로 나누어떨어지는 자연수의 집합이므로

$100=15\times 6+10$에서 $n(A_3\cap A_5)=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$n(A_3\cup A_5)=n(A_3)+n(A_5)-n(A_3\cap A_5)$

$=33+20-6=47$ 답 47

15 전략 $a-3<1$일 때와 $a-3\ge 1$일 때로 나누어 집합 $A\cap B$에 속하는 자연수를 구한다.

풀이 $x^2-1>0$에서 $(x+1)(x-1)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>1$

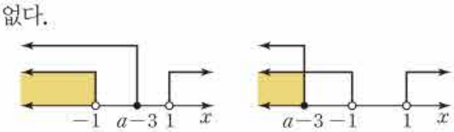
$\therefore A=\{x|x<-1$ 또는 $x>1\}$

$x+3\le a$에서 $x\le a-3$

$\therefore B=\{x|x\le a-3\}$ ··· ❶

(i) $a-3<1$, 즉 $a<4$일 때,

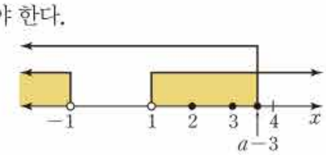
다음 그림과 같이 두 경우 모두 집합 $A\cap B$에 속하는 자연수는 없다.



··· ❷

(ii) $a-3\ge 1$, 즉 $a\ge 4$일 때,

집합 $A\cap B$의 원소 중 자연수의 개수가 2가 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



(i), (ii)에서 $3\le a-3<4$, 즉 $6\le a<7$이어야 하므로 구하는 정수 a는 6이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 집합 A, B를 구할 수 있다.	20%
❷ $a<4$일 때 조건을 만족시키는 정수 a가 없음을 알 수 있다.	40%
❸ $a\ge 4$일 때 조건을 만족시키는 정수 a의 값을 구할 수 있다.	40%

16 전략 $A\cap B=\{1, 3, 5\}$이므로 $2\in(A-B)$이면 $2\notin(B-A)$임을 이용한다.

풀이 $A\cap B=\{1, 3, 5\}$, $A\cup B=U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 원소 2, 4, 6 중 집합 $A-B$에 속하는 원소는 반드시 집합 $B-A$에 속하지 않는다.

따라서 집합 $A-B$의 원소의 개수에 따라 경우를 나누어 생각하면

(i) $n(A-B)=0$인 경우

$A-B=\varnothing$이므로 $B-A=\{2, 4, 6\}$

따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는 1

(ii) $n(A-B)=1$인 경우

$A-B=\{2\}$일 때, $B-A=\{4, 6\}$

$A-B=\{4\}$일 때, $B-A=\{2, 6\}$

$A-B=\{6\}$일 때, $B-A=\{2, 4\}$

따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는 3

(iii) $n(A-B)=2$인 경우

$A-B=\{2, 4\}$일 때, $B-A=\{6\}$

$A-B=\{2, 6\}$일 때, $B-A=\{4\}$

$A-B=\{4, 6\}$일 때, $B-A=\{2\}$

따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는 3

(iv) $n(A-B)=3$인 경우

$A-B=\{2, 4, 6\}$이므로 $B-A=\varnothing$

따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는 1

이상에서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$1+3+3+1=8$ 답 8

17 전략 $A\cap B=B$이면 $B\subset A$임을 이용한다.

풀이 $A\cap B=B$이므로 $B\subset A$

(i) $B=\varnothing$인 경우

공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $B\subset A$

$B=\varnothing$이려면 방정식 $mx=x-1$의 해가 존재하지 않아야 하므로 $(m-1)x=-1$에서 $m=1$ ··· ❶

(ii) $B\ne\varnothing$인 경우

$B=\{-2\}$ 또는 $B=\{-1\}$이어야 한다.

$B=\{-2\}$이면

$-2m=-3$ $\therefore m=\frac{3}{2}$

$B=\{-1\}$이면

$-m=-2$ $\therefore m=2$ ··· ❷

(i), (ii)에서 모든 실수 m의 값의 합은

$1+\frac{3}{2}+2=\frac{9}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{9}{2}$

채점 기준	비율
❶ $B=\varnothing$일 때, m의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $B\neq\varnothing$일 때, m의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 실수 m의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

18 전략 집합의 연산 법칙을 이용하여 $A*B$를 파악한다.

풀이 ㄱ. $A*B=(A\cup B)^C\cup(A\cap B)$

$=(B\cup A)^C\cup(B\cap A)=B*A$

ㄴ. $A*A=A^C\cup A=U$

ㄷ. $A*A*A=U*A=U^C\cup A=\varnothing\cup A=A$

$A*A*A*A=A*A=U$

$A*A*A*A*A=U*A=A$

$\vdots$

따라서

$\underbrace{A*A*A*\cdots*A}_{A\text{가 짝수 개}}=U,$

$\underbrace{A*A*A*\cdots*A}_{A\text{가 홀수 개}}=A$

임을 알 수 있다. 2020이 짝수이므로

$\underbrace{A*A*A*\cdots*A}_{A\text{가 }2020\text{개}}=U$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

참고 연산 $*$에 대한 결합법칙 $A*(B*C)=(A*B)*C$가 성립하므로 $A*(B*C)$, $(A*B)*C$는 모두 $A*B*C$로 나타낼 수 있다.

19 전략 집합의 연산 법칙과 드모르간의 법칙을 이용하여 좌변을 간단히 한다.

풀이 ① $(A\cup B^C)-(B-C)=(A\cup B^C)\cap(B\cap C^C)^C$

$=(A\cup B^C)\cap(B^C\cup C)$

$=(A\cup B^C)\cap(C\cup B^C)$

$=(A\cap C)\cup B^C$

② $(A-C)\cup(B-C)=(A\cap C^C)\cup(B\cap C^C)$

$=(A\cup B)\cap C^C$

$=(A\cup B)-C$

③ $(A\cup B)-(A^C\cap C)=(A\cup B)\cap(A^C\cap C)^C$

$=(A\cup B)\cap(A\cup C^C)$

$=A\cup(B\cap C^C)$

$=A\cup(B-C)$

④ $(A\cap B)\cup(A-C)=(A\cap B)\cup(A\cap C^C)$

$=A\cap(B\cup C^C)$

$=A\cap(B^C\cap C)^C$

$=A\cap(C\cap B^C)^C$

$=A-(C-B)$

⑤ $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$

$=A\cap(B^C\cup C^C)$

$=A\cap(B\cap C)^C$

$=A-(B\cap C)$ 답 ④

20 전략 주어진 조건을 집합과 그 원소의 개수로 나타내어 본다.

풀이 학생 전체의 집합을 U, 문학 체험을 신청한 학생의 집합을 A, 역사 체험을 신청한 학생의 집합을 B, 과학 체험을 신청한 학생의 집합을 C라 하면

$n(U)=212,\ n(A)=80,\ n(B)=90,\ n(A\cap B)=45,$

$n(A^C\cap B^C\cap C^C)=12$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=80+90-45=125$

이때

$n(A^C\cap B^C\cap C^C)=n((A\cup B\cup C)^C)$

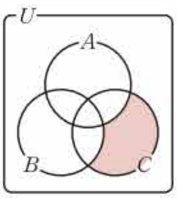
$=n(U)-n(A\cup B\cup C)$

에서

$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n(A^C\cap B^C\cap C^C)$

$=212-12=200$

과학 체험만 신청한 학생의 집합은 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠한 부분과 같으므로 구하는 학생 수는



$n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)$

$=200-125=75$

답 75

16 명제

01 명제와 조건

확인 본책 40~41쪽

1 ㄱ, ㄷ. 참인 명제이다.

ㄴ, ㄹ. 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

ㅁ, ㅂ. 거짓인 명제이다.

이상에서 명제인 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

2 답 (1) 3은 21의 약수가 아니다. (거짓)

(2) $5+8\neq10$ (참)

3 답 (1) $x\neq-1$

(2) $x\leq5$

(3) $x\neq0$이고 $y\neq-3$

(4) $x<2$ 또는 $x\geq10$

4 (1) $x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 조건 p의 진리집합은 $\{1, 3\}$

(2) $3\leq x-4\leq7$에서 $7\leq x\leq11$

이때 전체집합이 자연수 전체의 집합이므로 조건 q의 진리집합은 $\{7, 8, 9, 10, 11\}$

답 (1) $\{1, 3\}$ (2) $\{7, 8, 9, 10, 11\}$

유제 본책 42~43쪽

1 ①, ④ 거짓인 명제이다.

② x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

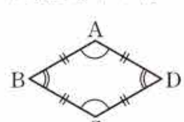
③, ⑤ 참인 명제이다. 답 ②

2 ㄱ. x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

ㄴ. 6은 3의 배수이지만 9의 배수가 아니므로 거짓인 명제이다.

ㄷ. 오른쪽 그림에서 사각형 ABCD는 마름모이지만 정사각형이 아니다.

따라서 거짓인 명제이다.



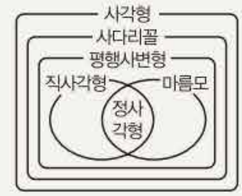
ㄹ. 참인 명제이다.

이상에서 참인 명제인 것은 ㄹ뿐이다. 답 ㄹ

라이트 UP

여러 가지 사각형

여러 가지 사각형의 집합 사이의 포함 관계는 오른쪽 벤다이어그램과 같다.



3 ①, ②, ④, ⑤ 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.

③ 명제가 거짓이므로 그 부정은 참이다.

답 ③

4 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 4, 6, \cdots, 30\}$, $Q=\{3, 6, 9, \cdots, 30\}$

이므로 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은

$P\cap Q=\{6, 12, 18, 24, 30\}$ 답 $\{6, 12, 18, 24, 30\}$

5 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

p: $x^2-9\leq0$에서 $(x+3)(x-3)\leq0$

$\therefore -3\leq x\leq3$

$\therefore P=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

q: $x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore Q=\{-1, 2\}$

조건 'p 그리고 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cap Q^C$이므로

$P\cap Q^C=P-Q=\{-3, -2, 0, 1, 3\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 5이다. 답 5

6 $-3\leq x\leq1$에서 $x\geq-3$이고 $x\leq1$ ······ ㉠

p: $x>1$에서 $\sim p$: $x\leq1$이므로 $P^C=\{x|x\leq1\}$

q: $x\geq-3$이므로 $Q=\{x|x\geq-3\}$

따라서 ㉠의 진리집합은 $P^C\cap Q$ 답 $P^C\cap Q$

02 명제 $p \longrightarrow q$

확인 본책 44~45쪽

1 답 (1) 가정: $x=1$이다., 결론: $2x-3=1$이다.

(2) 가정: a가 홀수이다., 결론: a^2은 홀수이다.

2 (1) p: $x<4$, q: $x<3$으로 놓고 그 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{x|x<4\}$, $Q=\{x|x<3\}$

따라서 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

(2) p: $x^2+y^2=0$, q: $xy=0$으로 놓고 그 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{(x, y)|x=0$이고 $y=0\}$

$Q=\{(x, y)|x=0$ 또는 $y=0\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

답 (1) 거짓 (2) 참

3 (1) $x^2+6x+12=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=3^2-12=-3<0$$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+6x+12>0$이다.

따라서 주어진 명제는 참이다.

(2) 실수 x에 대하여 $x^2\geq0$이므로 $x^2<-4$를 만족시키는 x는 없다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다. 답 (1) 참 (2) 거짓

4 답 (1) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2<0$이다.

(2) 모든 실수 x에 대하여 $x+2\neq7$이다.

유제 본책 46~49쪽

1 (1) p: $3x+1=7$, q: $x^2+x-6=0$으로 놓고 그 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $3x+1=7$에서 $x=2$ $\therefore P=\{2\}$

q: $x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ $\therefore Q=\{-3, 2\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

(2) p: $x^2\geq1$, q: $x\geq1$로 놓고 그 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $x^2\geq1$에서 $x^2-1\geq0$, $(x+1)(x-1)\geq0$

$\therefore x\leq-1$ 또는 $x\geq1$

$\therefore P=\{x|x\leq-1$ 또는 $x\geq1\}$

q: $x\geq1$에서 $Q=\{x|x\geq1\}$

따라서 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

(3) p: $xy>0$, q: $x>0$이고 $y>0$으로 놓고 그 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{(x, y)|x>0$이고 $y>0$ 또는 $x<0$이고 $y<0\}$,

$Q=\{(x, y)|x>0$이고 $y>0\}$

따라서 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

(4) 모든 평행사변형은 사다리꼴이므로 주어진 명제는 참이다.

답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 거짓 (4) 참

다른 풀이 (2) [반례] $x=-2$이면 $x^2\geq1$이지만 $x<1$이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

(3) [반례] $x=-1$이고 $y=-1$이면 $xy>0$이지만 $x<0$이고 $y<0$이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

2 ㄱ. [반례] $x=0$이면 $|x-1|=1$이지만 $x\neq2$이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

ㄴ. p: x는 8의 양의 배수, q: x는 4의 양의 배수로 놓고 그 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{8, 16, 24, 32, \cdots\}$, $Q=\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄷ. p: $x^2+3x-4=0$, q: $x\leq1$로 놓고 그 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $x^2+3x-4=0$에서 $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$ $\therefore P=\{-4, 1\}$

q: $x\leq1$에서 $Q=\{x|x\leq1\}$

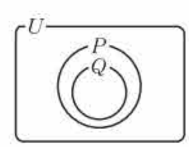
따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄹ. [반례] $x=-2$, $y=1$이면 $x+y<0$이지만 $x<0$, $y>0$이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

이상에서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

3 명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 $Q\subset P$



① $P\cup Q=P$

② $P\cup Q^C=U$

③ $P-Q\neq P$

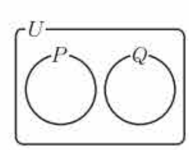
④ $P-Q^C=P\cap Q=Q$

⑤ $P\cap Q^C=P-Q\neq\varnothing$

답 ④

4 $P\cap Q=\varnothing$이므로

$P\subset Q^C$, $Q\subset P^C$

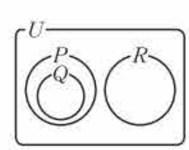


따라서 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $q \longrightarrow \sim p$는 참이므로 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

5 $P\cap Q=Q$, $P\cap R=\varnothing$이므로

$P\subset R^C$, $Q\subset P$, $R\subset P^C$, $R\subset Q^C$



따라서 명제 $p \longrightarrow \sim r$, $q \longrightarrow p$, $r \longrightarrow \sim p$, $r \longrightarrow \sim q$는 모두 참이다.

그러나 $P\neq Q$이면 $Q^C\not\subset P^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.

답 ③

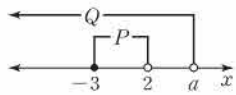
16 명제

6 p: $-3 \le x < 2$, q: $x < a$로 놓고 그 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid -3 \le x < 2\}$,

$Q=\{x \mid x < a\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a \ge 2$

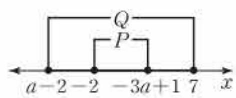
답 $a \ge 2$

7 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid -2 \le x \le -3a+1\}$,

$Q=\{x \mid a-2 \le x \le 7\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-2 \le -2$, $-3a+1 \le 7$

$\therefore -2 \le a \le 0$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0의 3개이다.

답 3

8 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $|x-1| \le a$에서 $\quad -a \le x-1 \le a$

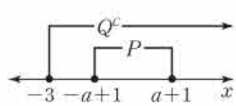
$\therefore -a+1 \le x \le a+1$

$\therefore P=\{x \mid -a+1 \le x \le a+1\}$

q: $x < -3$에서 $\quad Q=\{x \mid x < -3\}$

$\therefore Q^C=\{x \mid x \ge -3\}$

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P \subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-a+1 \ge -3$, $\quad -a \ge -4 \quad \therefore a \le 4$

따라서 a의 최댓값은 4이다.

답 4

9 ① p: $2x-1 \le 3$으로 놓고 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$2x-1 \le 3$에서

$2x \le 4 \quad \therefore x \le 2$

$\therefore P=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

따라서 $P=U$이므로 주어진 명제는 참이다.

② p: $x^2-4 \le 0$으로 놓고 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$x^2-4 \le 0$에서

$(x+2)(x-2) \le 0 \quad \therefore -2 \le x \le 2$

$\therefore P=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

따라서 $P=U$이므로 주어진 명제는 참이다.

③ p: $|x| > x$로 놓고 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$|x| > x$에서 $\quad x < 0$

$\therefore P=\{-2, -1\}$

따라서 $P \ne \varnothing$이므로 주어진 명제는 참이다.

④ p: $x^2-x+1 < 0$으로 놓고 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$x^2-x+1 < 0$에서

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

이므로 $x^2-x+1 < 0$을 만족시키는 실수 x는 없다.

$\therefore P=\varnothing$

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

⑤ p: $3x+1 > x-5$로 놓고 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$3x+1 > x-5$에서

$2x > -6 \quad \therefore x > -3$

$\therefore P=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

따라서 $P \ne \varnothing$이므로 주어진 명제는 참이다.

답 ④

10 ㄴ. $P \ne \varnothing$이어도 $P \ne U$이면 '모든 x에 대하여 p이다.'는 거짓이다.

ㄷ. $P=U$이면 $P \ne \varnothing$이므로 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

03 명제 사이의 관계

확인

본책 50~51쪽

1 답 (1) 역: $x^2=16$이면 $x=-4$이다.

대우: $x^2 \ne 16$이면 $x \ne -4$이다.

(2) 역: $x^2 > y^2$이면 $x > y$이다.

대우: $x^2 \le y^2$이면 $x \le y$이다.

2 (1) 대우: x가 홀수가 아니면 x는 소수가 아니다. (거짓)

[반례] $x=2$이면 x는 홀수가 아니지만 소수이다.

(2) 대우: $|x| \ne 5$이면 $x \ne 5$이다. (참)

답 풀이 참조

3 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

(1) $P=\{9, 18, 27, \cdots\}$, $Q=\{3, 6, 9, \cdots\}$

즉 $P \subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(2) $Q \subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(3) $(x-4)^2=0$에서 $\quad x=4$

따라서 $P=Q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) 충분조건 (2) 필요조건 (3) 필요충분조건

유제 본책 52~55쪽

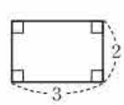
1 (1) 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다. (참)
대우: $x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$이면 $x^2+y^2\neq 0$이다. (참)
(2) 역: $xy>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $xy>0$이지만 $x\leq 0$, $y\leq 0$이다.
대우: $xy\leq 0$이면 $x\leq 0$ 또는 $y\leq 0$이다. (참)

답 풀이 참조

2 ① 역: $x^2=y^2$이면 $x=y$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2=y^2$이지만 $x\neq y$이다.
② 역: $xy<0$이면 $x>0$이고 $y<0$이다. (거짓)
[반례] $x=-2$, $y=1$이면 $xy<0$이지만 $x\leq 0$이고 $y\geq 0$이다.
③ 역: $x+z>y+z$이면 $x>y$이다. (참)
④ 역: $xy=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x\neq 0$이다.
⑤ 역: xy가 정수이면 x, y도 정수이다. (거짓)
[반례] $x=0$, $y=\frac{1}{2}$이면 xy는 정수이지만 y는 정수가 아니다.

답 ③

3 ㄱ. 역: $x^2>0$이면 $x\neq 0$이다. (참)
대우: $x^2\leq 0$이면 $x=0$이다. (참)
ㄴ. 역: $xy=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $|x|+|y|\neq 0$이다.
대우: $xy\neq 0$이면 $|x|+|y|\neq 0$이다. (참)
ㄷ. 역: 직사각형이면 정사각형이다. (거짓)
[반례] 오른쪽 그림의 사각형은 직사각형이지만 정사각형이 아니다.



대우: 직사각형이 아니면 정사각형이 아니다. (참)
ㄹ. 역: 3의 배수는 6의 배수이다. (거짓)
[반례] 9는 3의 배수이지만 6의 배수가 아니다.
대우: 3의 배수가 아니면 6의 배수가 아니다. (참)
이상에서 역은 거짓이고 대우는 참인 명제는 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

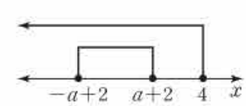
4 ① $x-y>0$에서 $x>y$
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=2$, $y=1$이면 $x-y>0$이지만 $y\geq 0$이다.
② $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
[$q \longrightarrow p$의 반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 $x+y$, xy는 유리수이지만 x, y는 유리수가 아니다.
③ $x^3\neq y^3$에서 $x\neq y$
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
④ $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=2$, $y=3$이면 xy는 짝수이지만 y는 짝수가 아니다.
⑤ $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=15$이면 x는 5의 양의 배수이지만 10의 양의 배수가 아니다.

답 ②

5 ㄱ. $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
[$q \longrightarrow p$의 반례] $x=2$, $y=6$이면 $xy=12$이지만 $x\neq 3$이고 $y\neq 4$이다.
ㄴ. $x^2=y^2$에서 $x=y$ 또는 $x=-y$
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2=y^2$이지만 $x\neq y$이다.
ㄷ. $|x|+|y|=0$에서 $x=0$이고 $y=0$
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
이상에서 필요충분조건인 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

6 $x\leq 4$가 $|x-2|\leq a$이기 위한 필요조건이므로 명제 '$|x-2|\leq a$이면 $x\leq 4$이다.'가 참이다.
$|x-2|\leq a$에서 $-a\leq x-2\leq a$
$\therefore -a+2\leq x\leq a+2$
따라서 오른쪽 그림에서



$a+2\leq 4$ $\therefore a\leq 2$
즉 a의 최댓값은 2이다.

답 2

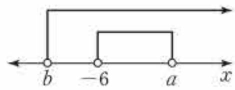
7 $x+3=0$, 즉 $x=-3$은 $x^2+ax+b=0$이기 위한 필요충분조건이므로 명제 '$x=-3$이면 $x^2+ax+b=0$이다.'와 명제 '$x^2+ax+b=0$이면 $x=-3$이다.'가 참이다.
따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해는 $x=-3$뿐이므로
$(x+3)^2=0$에서 $x^2+6x+9=0$
즉 $a=6$, $b=9$이므로 $b-a=3$

답 3

8 p가 q이기 위한 충분조건이므로 명제 '$-6<x<a$이면 $x>b$이다.'가 참이다.

16 명제

따라서 오른쪽 그림에서

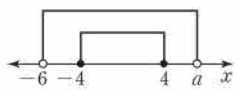


$b \le -6$

이므로 정수 b의 최댓값은 -6이다.

p가 r이기 위한 필요조건이므로 명제 '$|x| \le 4$이면 $-6 < x < a$이다.'가 참이다.

따라서 오른쪽 그림에서



$a > 4$

이므로 정수 a의 최솟값은 5이다.

답 a의 최솟값: 5, b의 최댓값: -6

9 p는 q이기 위한 필요조건이므로 $\quad Q \subset P$

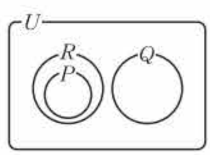
r는 q이기 위한 충분조건이므로 $\quad R \subset Q$

$\therefore R \subset Q \subset P$

답 ⑤

10 $P \cup R = R$에서 $\quad P \subset R$

따라서 세 집합 P, Q, R의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) $R \subset Q^C$이므로 $\quad r \Longrightarrow \sim q$

따라서 $\sim q$는 r이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$조건이다.

(2) $R^C \subset P^C$이므로 $\quad \sim r \Longrightarrow \sim p$

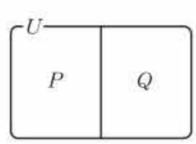
따라서 $\sim r$는 $\sim p$이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$조건이다.

(3) $Q \subset P^C$이므로 $\quad q \Longrightarrow \sim p$

따라서 q는 $\sim p$이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$조건이다.

답 (1) 필요 (2) 충분 (3) 충분

11 주어진 조건을 만족시키도록 두 집합 P, Q의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $P = Q^C$이므로 p는 $\sim q$이기 위한 필요충분조건이다.

답 필요충분조건

04 여러 가지 증명법

확인

본책 56~58쪽

1 두 명제 $q \longrightarrow r$, $\sim p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 각각의 대우인 $\sim r \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow p$도 참이다.

또 두 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow p$가 참이므로 삼단논법에 의하여 $\sim r \longrightarrow p$가 참이다.

답 ⑤

2 ㄱ. $x < -2$일 때만 성립하는 부등식이다.

ㄴ. $x^2 > x^2 - 3$에서 $\quad 0 > -3$

x에 어떤 실수를 대입하여도 항상 성립하므로 절대부등식이다.

ㄷ. $x \ne 1$일 때만 성립하는 부등식이다.

ㄹ. $x^2 + 4x + 5 = 0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 5 < 0$$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2 + 4x + 5 > 0$이 항상 성립한다.

이상에서 절대부등식인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

3 $a^2 + 4ab + 4b^2 \ge 0$의 좌변을 변형하면

$$a^2 + 4ab + 4b^2 = \boxed{(a+2b)^2}$$

$$\therefore a^2 + 4ab + 4b^2 \boxed{\ge} 0$$

여기서 등호는 $\boxed{a = -2b}$일 때 성립한다.

답 (가) $(a+2b)^2$ (나) $\ge$ (다) $a = -2b$

4 (1) $a > 0$, $\frac{1}{a} > 0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + \frac{1}{a} \ge 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$$

$$\left(\text{단, 등호는 } a = \frac{1}{a}\text{, 즉 } a = 1\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $a + \frac{1}{a}$의 최솟값은 2이다.

(2) $\frac{4a}{b} > 0$, $\frac{b}{a} > 0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2\sqrt{\frac{4a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{4a}{b} = \frac{b}{a}\text{, 즉 } a = \frac{b}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\frac{4a}{b} + \frac{b}{a}$의 최솟값은 4이다.

답 (1) 2 (2) 4

5 a, b, x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \ge (ax + by)^2$$

$a^2 + b^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 8$이므로

$$2 \cdot 8 \ge (ax+by)^2, \qquad (ax+by)^2 \le 16$$

$$\therefore -4 \le ax + by \le 4 \left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a} = \frac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$$

답 $-4 \le ax + by \le 4$

유제

본책 59~63쪽

1 (1) 주어진 명제의 대우는

'$x \le 0$이고 $y \le 0$이면 $x + y \le 0$이다.'

이고 이것은 참이므로 주어진 명제도 참이다.

(2) 주어진 명제의 대우는

'x, y가 모두 홀수이면 xy는 홀수이다.'

이다.

x, y가 모두 홀수이면

$x=2m+1$, $y=2n+1$ (m, n은 음이 아닌 정수)

로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned} xy &= (2m+1)(2n+1) \\ &= 4mn+2m+2n+1 \\ &= 2(2mn+m+n)+1 \end{aligned}$$

이때 $2mn+m+n$은 음이 아닌 정수이므로 xy는 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

2 (1) n^2이 3의 배수일 때, n이 3의 배수가 아니라고 가정하면

$n=3k-1$ 또는 $n=3k-2$ (k는 자연수)

로 나타낼 수 있다.

(i) $n=3k-1$일 때,

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k-1)^2 \\ &= 9k^2-6k+1 \\ &= 3(3k^2-2k)+1 \end{aligned}$$

(ii) $n=3k-2$일 때,

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k-2)^2 \\ &= 9k^2-12k+4 \\ &= 3(3k^2-4k+1)+1 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 n^2은 3으로 나누면 나머지가 1이므로 n^2이 3의 배수라는 가정에 모순이다.

따라서 n^2이 3의 배수이면 n도 3의 배수이다.

(2) $\sqrt{2}+1$이 무리수가 아니라고 가정하면 $\sqrt{2}+1$은 유리수이므로 유리수 a에 대하여 $\sqrt{2}+1=a$로 나타내면

$\sqrt{2}=a-1$

이때 유리수끼리의 뺄셈은 유리수이므로 $a-1$은 유리수이다.

그런데 좌변의 $\sqrt{2}$는 무리수이므로 모순이다.

따라서 $\sqrt{2}+1$은 무리수이다.

답 풀이 참조

3 ㄱ. 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우인 $q \longrightarrow r$가 참이다.

따라서 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다.

ㄷ. 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우인 $\sim q \longrightarrow p$가 참이다.

따라서 두 명제 $\sim q \longrightarrow p$, $p \longrightarrow r$가 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $\sim q \longrightarrow r$가 참이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

4 두 명제 $p \longrightarrow q$, $r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 각각의 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

또 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 삼단논법에 의하여 $p \longrightarrow \sim r$가 참이고, 그 대우인 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

답 ②

5 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우인 $p \longrightarrow \sim q$도 참이다.

또 명제 $\sim s \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우인 $r \longrightarrow s$도 참이다.

따라서 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $r \longrightarrow s$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow s$가 참이 되려면 명제 $\sim q \longrightarrow r$도 참이어야 한다.

답 ③

6 (1)
$$\begin{aligned} a^2-4ab+5b^2 &= (a^2-4ab+4b^2)+b^2 \\ &= (a-2b)^2+b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\therefore a^2-4ab+5b^2 \geq 0$

여기서 등호는 $a-2b=0$, $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.

(2) (i) $|a| \geq |b|$일 때,

$$\begin{aligned} &(|a|-|b|)^2-|a-b|^2 \\ &= (|a|^2-2|a||b|+|b|^2)-(a-b)^2 \\ &= (a^2-2|ab|+b^2)-(a^2-2ab+b^2) \\ &= 2(ab-|ab|) \leq 0 \ (\because ab \leq |ab|) \end{aligned}$$

$\therefore (|a|-|b|)^2 \leq |a-b|^2$

그런데 $|a|-|b| \geq 0$, $|a-b| \geq 0$이므로

$|a|-|b| \leq |a-b|$

(ii) $|a| < |b|$일 때,

$|a|-|b| < 0$, $|a-b| > 0$이므로

$|a|-|b| < |a-b|$

(i), (ii)에서 $|a|-|b| \leq |a-b|$

여기서 등호는 $|a| \geq |b|$, $|ab|=ab$일 때 성립한다.

답 풀이 참조

7
$$\begin{aligned} &(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2 \\ &= (a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b) \\ &= 2\sqrt{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

$\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2$

그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq 0$, $\sqrt{a+b} \geq 0$이므로

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

여기서 등호는 $ab=0$일 때 성립한다.

답 풀이 참조

8 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

$a+b+c>0$

또

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$

이므로 $\quad a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0$

$\therefore a^3+b^3+c^3\geq 3abc$

여기서 등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, 즉 $a=b=c$일 때 성립한다. 답 풀이 참조

9 (1) $\frac{9b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{9b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{9b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2\cdot 3=6$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{9b}{a}=\frac{a}{b}\text{, 즉 } a=3b\text{일 때 성립}\right)$

(2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1$

$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$

$\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2=2\cdot 1+2=4$$

$\therefore (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{b}=\frac{b}{a}\text{, 즉 } a=b\text{일 때 성립}\right)$

답 풀이 참조

10 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ …… ㉠

$b+c\geq 2\sqrt{bc}$ …… ㉡

$c+a\geq 2\sqrt{ca}$ …… ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

답 풀이 참조

11 (1) $a>0$, $4b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a+4b}{2}\geq\sqrt{4ab}$ (단, 등호는 $a=4b$일 때 성립)

그런데 $a+4b=16$이므로

$8\geq 2\sqrt{ab}$, $\quad 4\geq\sqrt{ab}$

$\therefore ab\leq 16$

따라서 ab의 최댓값은 16이다.

(2) $(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\right)=4+\frac{9a}{b}+\frac{4b}{a}+9$

$=\frac{9a}{b}+\frac{4b}{a}+13$

$\frac{9a}{b}>0$, $\frac{4b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{9a}{b}+\frac{4b}{a}+13\geq 2\sqrt{\frac{9a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}+13$$

$=2\cdot 6+13=25$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{9a}{b}=\frac{4b}{a}\text{, 즉 } 3a=2b\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\right)$의 최솟값은 25이다.

답 (1) 16 (2) 25

12 (1) x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+3^2)\{x^2+(2y)^2\}\geq(x+6y)^2$

그런데 $x^2+4y^2=40$이므로

$400\geq(x+6y)^2$

$\therefore -20\leq x+6y\leq 20$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{2}{3}y\text{, 즉 } 3x=2y\text{일 때 성립}\right)$

(2) x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}(x^2+y^2)\geq\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)^2$$

그런데 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=25$이므로

$\frac{25}{144}(x^2+y^2)\geq 25^2$

$\therefore x^2+y^2\geq 3600$ (단, 등호는 $3x=4y$일 때 성립)

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 3600이다.

답 (1) $-20\leq x+6y\leq 20$ (2) 3600

13 x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(x+2y+3z)^2$

그런데 $x^2+y^2+z^2=14$이므로

$14^2\geq(x+2y+3z)^2$

$\therefore -14\leq x+2y+3z\leq 14$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\text{일 때 성립}\right)$

답 $-14\leq x+2y+3z\leq 14$

14 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+3^2)(x^2+y^2)\geq(x+3y)^2$

그런데 $x^2+y^2=a$이므로

$10a\geq(x+3y)^2$

$\therefore -\sqrt{10a}\leq x+3y\leq\sqrt{10a}$ $\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $x+3y$의 최댓값은 $\sqrt{10a}$, 최솟값은 $-\sqrt{10a}$이고 그 차가 20이므로

$2\sqrt{10a}=20, \quad \sqrt{10a}=10, \quad 10a=100$

$\therefore a=10$

답 10

중단원 연습 문제

본책 64~67쪽

01 ④	02 ③	03 12	04 ①	05 ⑤
06 6	07 ⑤	08 ③, ④	09 풀이 참조	
10 ④	11 ㄷ, ㄹ	12 $a\geq 10$	13 ②	14 ㄴ
15 풀이 참조		16 ③	17 17	18 ②
19 ②	20 14	21 ①	22 ⑤	23 풀이 참조
24 ⑤				

01 전략 참, 거짓을 판별할 수 없는 문장이나 식을 찾는다.

풀이 ①, ②, ⑤ 참인 명제이다.

③ $-3=5$이므로 거짓인 명제이다.

④ 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

답 ④

02 전략 '또는'의 부정 ➡ '그리고'

풀이 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$에서

$a-b=0$ 또는 $b-c=0$ 또는 $c-a=0$

$\therefore a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

따라서 주어진 조건의 부정은

$a\neq b$이고 $b\neq c$이고 $c\neq a$

답 ③

03 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 조건 '$\sim p$ 그리고 q'의 진리집합은 $P^C\cap Q$임을 이용한다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $Q=\{1, 2, 5, 10\}$ ···➊

조건 '$\sim p$ 그리고 q'의 진리집합은 $P^C\cap Q$이므로

$P^C\cap Q=\{2, 4, 6, 8, 10\}\cap\{1, 2, 5, 10\}$

$=\{2, 10\}$ ···➋

따라서 구하는 진리집합의 모든 원소의 합은

$2+10=12$ ···➌

답 12

채점 기준	비율
➊ 진리집합 P, Q를 구할 수 있다.	40%
➋ 진리집합 $P^C\cap Q$를 구할 수 있다.	50%
➌ 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10%

04 전략 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 집합은 $P\cap Q^C$이다.

풀이 명제 'p이면 q이다.'가 거짓임을 보이려면 P의 원소 중에서 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 구하는 원소는

$P\cap Q^C=P-Q$

의 원소인 a이다.

답 ①

05 전략 명제와 진리집합 사이의 관계를 이용하여 항상 참인 명제를 찾는다.

풀이 주어진 벤다이어그램에서 $\quad R\subset P$

따라서 $P^C\subset R^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$가 참이다.

답 ⑤

06 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P\subset Q$가 되도록 수직선 위에 나타낸다.

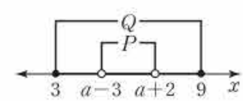
풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

q: $|x-6|\leq 3$에서

$-3\leq x-6\leq 3 \quad \therefore 3\leq x\leq 9$

$\therefore P=\{x|a-3<x<a+2\}$, $Q=\{x|3\leq x\leq 9\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-3\geq 3$, $a+2\leq 9$

$\therefore 6\leq a\leq 7$

따라서 정수 a의 최솟값은 6이다.

답 6

07 전략 반례를 찾아본다.

풀이 ① 2는 소수이다.

③ $x=\frac{1}{2}$이면 $\quad x<\frac{1}{x}$

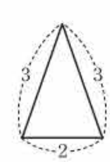
⑤ [반례] $x=1+\sqrt{2}$이면 $x^2=3+2\sqrt{2}$는 무리수이다.

답 ⑤

08 전략 명제 $p \longrightarrow q$의 역은 $q \longrightarrow p$이다.

풀이 ① 역: 이등변삼각형이면 정삼각형이다. (거짓)

[반례] 오른쪽 그림의 삼각형은 이등변삼각형이지만 정삼각형이 아니다.



② 역: 9의 약수이면 3의 약수이다. (거짓)

[반례] 9는 9의 약수이지만 3의 약수가 아니다.

③ 역: 자연수 x, y에 대하여 x, y가 홀수이면 xy가 홀수이다. (참)

④ 역: $x=3$이면 $3x-2=7$이다. (참)

16 명제

⑤ 역: $5-2x>3$이면 $x>1$이다. (거짓)

$5-2x>3$이면 $\quad -2x>-2$

$\therefore x<1$

답 ③, ④

09 전략 명제 $p \longrightarrow q$의 대우는 $\sim q \longrightarrow \sim p$이고 명제와 그 대우는 참, 거짓이 일치함을 이용한다.

풀이 '$a+b+c\geq 0$'의 부정은 $\quad$ '$a+b+c<0$'

'적어도 하나는 ~이다.'의 부정은 '모두 ~가 아니다.'이므로

'a, b, c 중 적어도 하나는 양수이다.'의 부정은

'a, b, c는 모두 양수가 아니다.'

따라서 주어진 명제의 대우는

'a, b, c가 모두 양수가 아니면 $a+b+c<0$이다.' ⋯➊

[반례] $a=b=c=0$은 모두 양수가 아니지만 $a+b+c=0$이다.

따라서 대우가 거짓이므로 주어진 명제는 거짓이다. ⋯➋

답 풀이 참조

채점 기준	비율
➊ 명제의 대우를 구할 수 있다.	70%
➋ 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있다.	30%

10 전략 $p \not\Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow p$인 것을 찾는다.

풀이 ① $|x+2|=6$에서 $\quad x=-8$ 또는 $x=4$

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $x^2=9$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=3$

$|x|=3$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=3$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

③ $x^2=2x$에서 $\quad x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

④ $x^2>9$에서 $\quad (x+3)(x-3)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>3$

따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

⑤ $xy\geq 0$에서 $\quad$ '$x\geq 0$이고 $y\geq 0$' 또는 '$x\leq 0$이고 $y\leq 0$'

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

답 ④

11 전략 '$x=0$이고 $y=0$'과 서로 같은 것을 찾는다.

풀이 ㄱ. $x+y=0 \Longleftrightarrow x=-y$

따라서 $x+y=0$은 $x=0$이고 $y=0$이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $xy=0 \Longleftrightarrow x=0$ 또는 $y=0$

따라서 $xy=0$은 $x=0$이고 $y=0$이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $|x|+|y|=0 \Longleftrightarrow x=0$이고 $y=0$

따라서 $|x|+|y|=0$은 $x=0$이고 $y=0$이기 위한 필요충분조건이다.

ㄹ. $x^2+y^2=0 \Longleftrightarrow x=0$이고 $y=0$

따라서 $x^2+y^2=0$은 $x=0$이고 $y=0$이기 위한 필요충분조건이다.

이상에서 필요충분조건인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄷ, ㄹ

12 전략 충분조건을 만족시키도록 부등식을 수직선 위에 나타낸다.

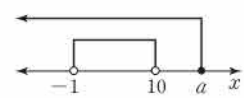
풀이 $x^2-9x-10<0$이 $x\leq a$이기 위한 충분조건이므로 명제 '$x^2-9x-10<0$이면 $x\leq a$이다.'가 참이다. ⋯➊

$x^2-9x-10<0$에서 $\quad (x+1)(x-10)<0$

$\therefore -1<x<10$

따라서 오른쪽 그림에서

$a\geq 10$ ⋯➋



답 $a\geq 10$

채점 기준	비율
➊ $p \longrightarrow q$가 참인 명제임을 알 수 있다.	40%
➋ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%

13 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때,

p는 q이기 위한 충분조건이면 $\quad P\subset Q$

p는 q이기 위한 필요조건이면 $\quad Q\subset P$

풀이 p는 r이기 위한 충분조건이므로

$P\subset R$

q는 r이기 위한 필요조건이므로

$R\subset Q$

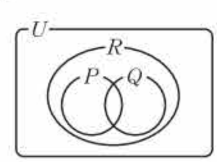
$\therefore P\subset R\subset Q$

답 ②

14 전략 $P\subset Q \Longleftrightarrow p$는 q이기 위한 충분조건

$\Longleftrightarrow q$는 p이기 위한 필요조건

풀이 세 집합 P, Q, R의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $P\subset R$이므로 $\quad p \Longrightarrow r$

따라서 p는 r이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $R^C\subset Q^C$이므로 $\quad \sim r \Longrightarrow \sim q$

따라서 $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $(P\cup Q)\subset R$이므로 $\quad (p$ 또는 $q) \Longrightarrow r$

따라서 r는 p 또는 q이기 위한 필요조건이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

15 전략 주어진 명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

풀이 주어진 명제의 대우는 'a, b, c가 자연수일 때, a, b, c가 모두 홀수이면 $a^2+b^2 \neq c^2$이다.'이다.

a, b, c가 모두 홀수이면 a^2, b^2, c^2은 모두 홀수이고, a^2+b^2은 짝수이다.

이때 c^2은 홀수이므로 $a^2+b^2 \neq c^2$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

16 전략 주어진 명제와 그 대우의 참, 거짓이 항상 일치함과 삼단논법을 이용한다.

풀이 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $p \longrightarrow \sim r$가 참이고, 그 대우인 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

답 ③

17 전략 식을 변형한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $x+\dfrac{49}{x-3}=(x-3)+\dfrac{49}{x-3}+3$ ⋯ ❶

$x-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(x-3)+\frac{49}{x-3}+3 \geq 2\sqrt{(x-3)\cdot\frac{49}{x-3}}+3$$
$$=2\cdot7+3$$
$$=17$$

$\left(\text{단, 등호는 } x-3=\dfrac{49}{x-3}\text{, 즉 } x=10\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $x+\dfrac{49}{x-3}$의 최솟값은 17이다. ⋯ ❷

답 17

채점 기준	비율
❶ 식을 변형할 수 있다.	30%
❷ $x+\dfrac{49}{x-3}$의 최솟값을 구할 수 있다.	70%

18 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}$$

그런데 $a^2+b^2=12$이므로

$6 \geq |ab|$

$\therefore -6 \leq ab \leq 6$ (단, 등호는 $a^2=b^2$일 때 성립)

따라서 ab의 최솟값은 -6이다.

답 ②

19 전략 참인 명제와 진리집합 사이의 관계를 이용한다.

풀이 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$(x-a)(x+a)>0$에서

$x<-a$ 또는 $x>a$

$\therefore P=\{x|x>4\}$,

$Q=\{x|x>5-a\}$,

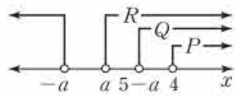
$R=\{x|x<-a$ 또는 $x>a\}$

명제 $p \longrightarrow q$와 명제 $q \longrightarrow r$가 모두 참이 되려면

$P \subset Q \subset R$

이어야 한다.

오른쪽 그림에서



(i) $P \subset Q$이므로

$5-a \leq 4 \qquad \therefore a \geq 1$

(ii) $Q \subset R$이므로

$a \leq 5-a \qquad \therefore a \leq \dfrac{5}{2}$

(i), (ii)에서 $\quad 1 \leq a \leq \dfrac{5}{2}$

따라서 양수 a의 최댓값과 최솟값의 합은

$\dfrac{5}{2}+1=\dfrac{7}{2}$

답 ②

20 전략 '어떤'의 부정은 '모든'임을 이용한다.

풀이 주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-kx+k+3>0$' ⋯ ❶

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-kx+k+3>0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 한다. 즉

$D=(-k)^2-4(k+3)<0$

$k^2-4k-12<0$

$(k+2)(k-6)<0$

$\therefore -2<k<6$ ⋯ ❷

따라서 구하는 모든 정수 k의 값의 합은

$(-1)+0+1+2+3+4+5=14$ ⋯ ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 부정을 구할 수 있다.	30%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%
❸ 모든 정수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

21 전략 명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 p이면서 $\sim q$인 예가 있으면 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓임을 이용한다.

16 명제

풀이 ㄱ. 명제: $|x|+|y|=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다. (참)

역: $x=0$이고 $y=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (참)

대우: 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

ㄴ. 명제: $x<0$이고 $y<0$이면 $x+y<0$이다. (참)

역: $x+y<0$이면 $x<0$이고 $y<0$이다. (거짓)

[반례] $x=-2$, $y=1$이면 $x+y<0$이지만

$x<0$이고 $y>0$

대우: 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

ㄷ. 명제: $x^2>y^2$이면 $x>y$이다. (거짓)

[반례] $x=-2$, $y=1$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y$

역: $x>y$이면 $x^2>y^2$이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=-2$이면 $x>y$이지만 $x^2<y^2$

대우: 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

이상에서 명제의 역과 대우가 모두 참인 명제는 ㄱ뿐이다.

답 ①

22 전략 먼저 진리집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 구한다.

풀이 q가 p이기 위한 필요조건이므로 $P\subset Q$

q가 r이기 위한 충분조건이므로 $Q\subset R$

① $P\subset Q$, $Q\subset R$이므로 $P\subset R$

② $P\subset Q$이므로 $P\cap Q=P$

③ $Q\subset R$이므로 $Q\cup R=R$

④ $P\subset Q$에서 $P\cup Q=Q$이므로

$P\cup Q=Q\not\subset R^C$

⑤ $P\subset R$에서 $R^C\subset P^C$이므로

$P^C\cap R^C=R^C$

$\therefore P^C\cap R^C=R^C\subset Q^C$ ($\because Q\subset R$)

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

23 전략 결론을 부정하여 모순이 생김을 보임으로써 명제가 참임을 증명한다.

풀이 명제의 결론을 부정하여 $b\neq0$이라 가정하면

$a+b\sqrt{2}=0$에서 $b\sqrt{2}=-a$

$\therefore \sqrt{2}=-\frac{a}{b}$

이때 $\sqrt{2}$는 무리수, $-\frac{a}{b}$는 유리수이므로 모순이다.

$\therefore b=0$

$b=0$을 $a+b\sqrt{2}=0$에 대입하면

$a=0$

따라서 명제 '두 유리수 a, b에 대하여 $a+b\sqrt{2}=0$이면 $a=b=0$이다.'는 참이다.

답 풀이 참조

24 전략 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$임을 이용한다.

풀이 a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2\right\}(a^2+b^2)\geq\left(\frac{a}{2}+b\right)^2$$

그런데 $\frac{a}{2}+b=10$이므로

$$\frac{5}{4}(a^2+b^2)\geq100$$

$\therefore a^2+b^2\geq80$ (단, 등호는 $2a=b$일 때 성립)

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 80이다.

답 ⑤

17 함수

01 함수

확인

본책 71~72쪽

1 (1) X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 4, 7의 2개이므로 함수가 아니다.

(2) X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

(3) X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

$\therefore$ 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{4, 5, 6, 7\}$, 치역: $\{4, 5, 7\}$

답 함수: (3), 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{4, 5, 6, 7\}$, 치역: $\{4, 5, 7\}$

2 (1) $f(-1)=(-1)^2-1=0$, $f(0)=0^2-1=-1$,
$f(1)=1^2-1=0$, $f(2)=2^2-1=3$
이므로 치역은 $\{-1, 0, 3\}$

(2) $f(-1)=|-1|+1=2$, $f(0)=|0|+1=1$,
$f(1)=|1|+1=2$, $f(2)=|2|+1=3$
이므로 치역은 $\{1, 2, 3\}$

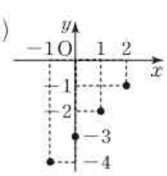
답 (1) $\{-1, 0, 3\}$ (2) $\{1, 2, 3\}$

3 (1) $f(-1)=2$, $g(-1)=-2$이므로
$f(-1)\neq g(-1)$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.

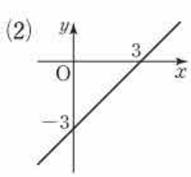
(2) $f(-1)=g(-1)=1$, $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.

답 (1) 서로 같은 함수가 아니다.
(2) 서로 같은 함수이다.

4 답 (1)



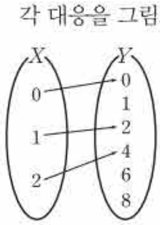
(2)

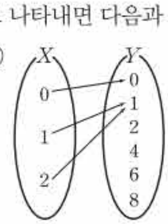


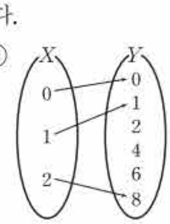
유제

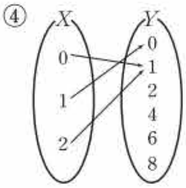
본책 73~76쪽

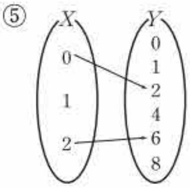
1 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


⑤에서 X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

2 ① $f(6)=-1$에서 6에 대응하는 X의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

② $f(1)=\frac{5}{4}$에서 1에 대응하는 X의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

③ $f(2)=-1$에서 2에 대응하는 X의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

④ $f(1)=2$, $f(2)=12$, $f(3)=36$, $\cdots$, 즉 X의 각 원소에 X의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

⑤ $f(1)=\frac{1}{3}$에서 1에 대응하는 X의 원소가 없으므로 함수가 아니다. 답 ④

3 정의역은 $X=\{1, 3, 5, 7\}$,
공역은 $Y=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$이므로
$f(1)=1$, $f(3)=1$, $f(5)=3$, $f(7)=5$
따라서 치역은 $\{1, 3, 5\}$ 답 $\{1, 3, 5\}$

4 $2-\sqrt{2}\geq 0$이므로
$f(2-\sqrt{2})=-(2-\sqrt{2})=-2+\sqrt{2}$
$\sqrt{2}-3<0$이므로
$f(\sqrt{2}-3)=(\sqrt{2}-3)+1=\sqrt{2}-2$
$\therefore f(2-\sqrt{2})-f(\sqrt{2}-3)=-2+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-2)$
$=0$ 답 0

5 정의역이 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$이므로
$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=0$
따라서 치역은 $\{0, 1\}$ 답 $\{0, 1\}$

6 ㄱ. $f(2)=4$, $g(2)=5$이므로 $f(2)\neq g(2)$
$\therefore f\neq g$

ㄴ. $f(1)=g(1)=2$, $f(2)=g(2)=6$이므로
$f=g$

ㄷ. $f(2)=\frac{1}{2}$, $g(2)=\frac{1}{4}$이므로 $f(2)\neq g(2)$
$\therefore f\neq g$

ㄹ. $f(1)=g(1)=0$, $f(2)=g(2)=1$이므로

$f=g$

이상에서 $f=g$인 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

7 $f(-1)=g(-1)$에서 $5=1-a+b$

$\therefore a-b=-4$ …… ㉠

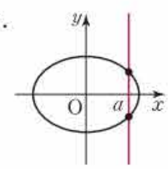
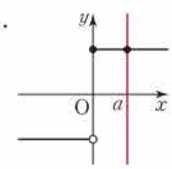
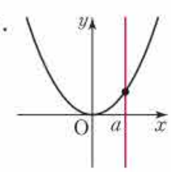
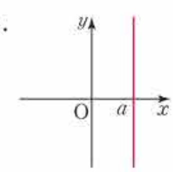
$f(1)=g(1)$에서 $3=1+a+b$

$\therefore a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=3$ 답 $a=-1$, $b=3$

8 주어진 그래프에 정의역의 각 원소 a에 대하여 직선 $x=a$를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.

ㄱ.

ㄴ.

ㄷ.

ㄹ.


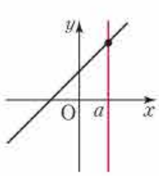
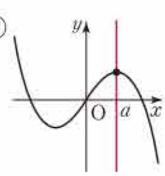
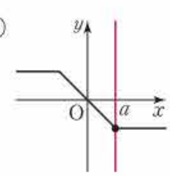
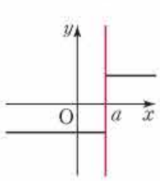
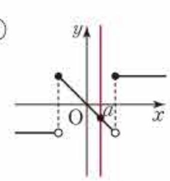
ㄱ. 직선 $x=a$와 2개의 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

ㄴ, ㄷ. 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

ㄹ. 직선 $x=a$와 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

이상에서 함수의 그래프인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

9 주어진 그래프에 정의역의 각 원소 a에 대하여 직선 $x=a$를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.

①

②

③

④

⑤


①, ②, ③, ⑤ 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

④ 직선 $x=a$와 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다. 답 ④

02 여러 가지 함수

확인

본책 78쪽

1 일대일함수는 정의역의 서로 다른 원소에 공역의 서로 다른 원소가 대응하는 함수이므로 (1), (4)이다.

일대일대응은 일대일함수이고 치역과 공역이 같은 함수이므로 (1)이다.

답 일대일함수: (1), (4), 일대일대응: (1)

2 (1) 일대일함수는 정의역의 서로 다른 원소에 공역의 서로 다른 원소가 대응하는 함수이므로 ㄱ, ㄷ이다.

(2) 일대일대응은 일대일함수이고 치역과 공역이 같은 함수이므로 ㄷ이다.

(3) 항등함수는 정의역의 각 원소에 그 자신이 대응하는 함수이므로 ㄷ이다.

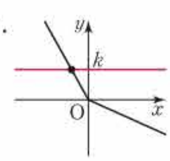
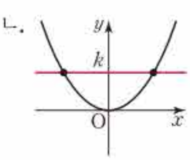
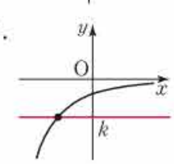
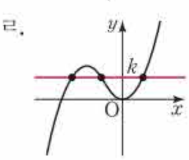
(4) 상수함수는 치역의 원소가 1개인 함수이므로 ㄴ이다.

답 (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄷ (3) ㄷ (4) ㄴ

유제

본책 79~81쪽

1 주어진 그래프에 치역의 각 원소 k에 대하여 직선 $y=k$를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.

ㄱ.

ㄴ.

ㄷ.

ㄹ.


ㄱ. 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나고 치역이 실수 전체의 집합인 함수이므로 일대일대응이다.

ㄴ. 직선 $y=k$와 2개의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

ㄷ. 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다. 그런데 공역은 실수 전체의 집합이고 치역은 $\{y|y<0\}$이므로 일대일대응이 아니다.

ㄹ. 직선 $y=k$와 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

이상에서 구하는 함수의 그래프는 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

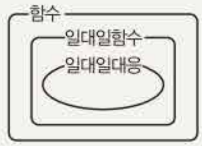
라이트 UP

함수, 일대일함수, 일대일대응

함수, 일대일함수, 일대일대응 전체의 집합의 포함 관계는 오른쪽 벤다이어그램과 같다.

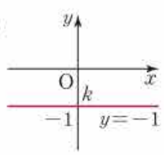
① 일대일대응이면 일대일함수이다.

② 일대일함수라고 해서 모두 일대일대응인 것은 아니다.

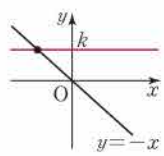


2 주어진 함수의 그래프를 각각 좌표평면 위에 나타낸 후, 치역의 각 원소 k에 대하여 직선 $y=k$를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.

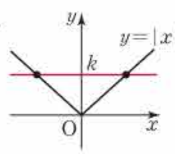
ㄱ.



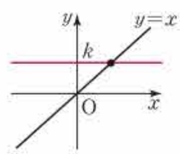
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



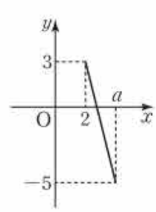
(1) 일대일대응은 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나고 치역이 실수 전체의 집합인 함수이므로 ㄴ, ㄹ이다.

(2) 항등함수는 그래프가 직선 $y=x$인 함수이므로 ㄹ이다.

(3) 상수함수는 그래프가 x축에 평행한 직선인 함수이므로 ㄱ이다.

답 (1) ㄴ, ㄹ (2) ㄹ (3) ㄱ

3 함수 f가 일대일대응이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$\therefore f(2)=3,\ f(a)=-5$

$f(x)=-4x+b$이므로

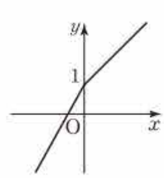
$-8+b=3,\ -4a+b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=11$

답 $a=4,\ b=11$

4 함수 f가 일대일대응이고 $x\geq0$에서 직선의 기울기가 양수이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉 직선 $y=(a+2)x+1$의 기울기도 양수이어야 하므로

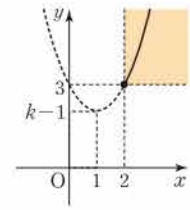


$a+2>0 \qquad \therefore a>-2$

답 $a>-2$

5 $f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$이므로 $x\geq2$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 함수 f가 일대일대응이 되려면 치역과 공역이 같아야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $f(2)=3$이므로

$(2-1)^2+k-1=3 \qquad \therefore k=3$

답 3

6 X에서 X로의 일대일대응의 개수는

$4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

X에서 X로의 항등함수의 개수는 $\quad 1$

X에서 X로의 상수함수의 개수는 $\quad 4$

따라서 $a=24,\ b=1,\ c=4$이므로

$a+b+c=29$

답 29

7 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, d, e 중 하나이므로

4개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, d, e 중에서 $f(2)$의 값을 제외한 3개

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $\quad 4\cdot3=12$

답 12

중단원 연습 문제

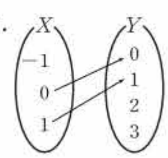
본책 82~83쪽

01 ④	02 ⑤	03 ②	04 ④	05 3
06 ④	07 1	08 −5	09 17	10 7
11 ③	12 172	13 ③	14 12	15 25

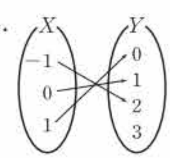
01 전략 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하는 것을 찾는다.

풀이 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

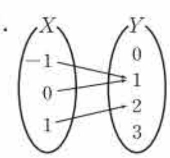
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



이상에서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

02 전략 $f(2)$의 값을 구하기 위해 $f(x-2)=2x^2-x$에 대입해야 할 x의 값을 구한다.

풀이 $x-2=2$에서 $\quad x=4$

$f(x-2)=2x^2-x$에 $x=4$를 대입하면

$f(2)=2\cdot4^2-4=32-4=28$

답 ⑤

다른 풀이 $x-2=t$라 하면 $x=t+2$이므로

$f(t)=2(t+2)^2-(t+2)$

$=2t^2+7t+6$

$\therefore f(2)=2\cdot 2^2+7\cdot 2+6=28$

라이트 UP

함수 $f(ax+b)$에서 $f(k)$의 값 구하기

$ax+b=k$를 만족시키는 x의 값을 구하여 x 대신 그 수를 대입한다.

03 **전략** $14=2\cdot 7$, $20=2^2\cdot 5$임을 이용하여 함숫값을 구한다.

풀이 $f(14)=2f(7)$이고

$f(7)=f(2\cdot 4-1)=(-1)^4=1$

이므로 $f(14)=2f(7)=2$

$f(20)=2f(10)=2^2f(5)$이고

$f(5)=f(2\cdot 3-1)=(-1)^3=-1$

이므로 $f(20)=4f(5)=-4$

$\therefore f(14)+f(20)=2+(-4)=-2$

답 ②

04 **전략** $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^2-4x+3$에서

$f(0)=3$, $f(1)=1$, $f(2)=3$

$g(x)=a|x-1|+b$에서

$g(0)=a+b$, $g(1)=b$, $g(2)=a+b$

두 함수 f와 g가 서로 같으려면

$f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$

이어야 한다.

따라서 $a+b=3$, $b=1$이므로 $a=2$, $b=1$

$\therefore 2a-b=2\cdot 2-1=3$

답 ④

05 **전략** 서로 같은 함수는 정의역의 각 원소 x에 대한 함숫값이 같다.
⇒ 방정식 $f(x)=g(x)$의 해를 구한다.

풀이 두 함수 f, g가 서로 같으려면 정의역 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이어야 하므로

$x^2-3=-x^2+x$에서

$2x^2-x-3=0$, $(x+1)(2x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ ⋯ ❶

따라서 구하는 집합 X는 공집합이 아닌 $\left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$의 부분집합이어야 하므로

$\{-1\}$, $\left\{\frac{3}{2}\right\}$, $\left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$

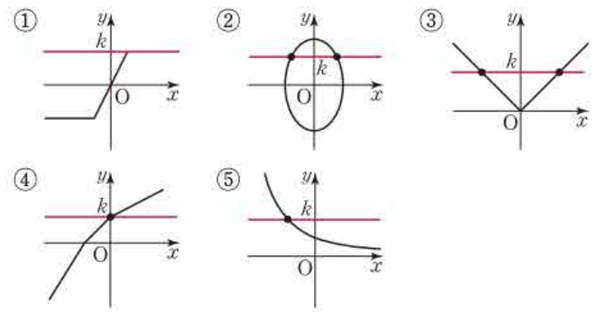
의 3개이다. ⋯ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	50%

06 **전략** y축과 수직인 직선을 그어 교점이 1개인지 확인하고, 치역과 공역이 같은지 확인한다.

풀이 주어진 그래프에 y축에 수직인 직선 $y=k$ (k는 상수)를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



④ 치역의 각 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나고 치역이 실수 전체의 집합이므로 일대일대응의 그래프이다.

답 ④

07 **전략** 일대일대응의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

풀이 $f(2)-f(3)=-3$에서

$f(2)=3$, $f(3)=6$

$f(1)=5$이고 함수 f가 일대일대응이므로 $f(4)=4$

$\therefore f(4)-f(2)=4-3=1$

답 1

08 **전략** 일차함수 $y=f(x)$가 $\{f(x)|x\in X\}=Y$를 만족시키면 함수 f는 일대일대응이다.

풀이 일차함수 $y=f(x)$가 $\{f(x)|x\in X\}=Y$를 만족시키므로 일대일대응이다. ⋯ ❶

$a<0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면

$f(-1)=4$, $f(3)=-8$

이어야 한다.

$f(-1)=4$에서

$-a+b=4$ ⋯⋯ ㉠

$f(3)=-8$에서

$3a+b=-8$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=1$ ⋯ ❷

따라서 $f(x)=-3x+1$이므로

$f(2)=-3\cdot 2+1=-5$ ⋯ ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ 함수 f가 일대일대응임을 알 수 있다.	30%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20%

라이트 UP

함수 f: $X \longrightarrow Y$가 일대일대응일 때

① $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$ (단, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$)

② $\{f(x) \mid x \in X\}=Y$

09 전략 항등함수와 상수함수의 정의를 이용한다.

풀이 함수 f가 항등함수이므로

$f(x)=x \quad \therefore f(3)=3$

함수 g는 상수함수이고 $f(3)=g(3)$이므로

$g(x)=3$

따라서 $h(x)=f(x)+g(x)=x+3$이므로

$h(5)+h(6)=(5+3)+(6+3)=17$

답 17

10 전략 집합 X의 원소 x에 대하여 $f(x)=x$임을 이용한다.

풀이 함수 f가 항등함수이려면 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=x$이어야 하므로

$\frac{1}{16}x^3=x$에서 $\quad x^3=16x$

$x^3-16x=0, \quad x(x^2-16)=0$

$x(x+4)(x-4)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$ ⋯ ❶

따라서 구하는 집합 X는 공집합이 아닌 $\{-4, 0, 4\}$의 부분집합이어야 하므로 집합 X의 개수는

$2^3-1=7$ ⋯ ❷

답 7

채점 기준	비율
❶ 집합 X의 원소의 조건을 구할 수 있다.	60%
❷ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	40%

11 전략 집합 Y가 n개의 원소를 가질 때 일대일함수의 개수를 구한다.

풀이 일대일함수 f를 f: $X \longrightarrow Y$라 하고 집합 Y가 n개의 원소를 갖는다고 하면

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $\quad n$개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(3)$의 값을 제외한

$(n-1)$개

$f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(3)$, $f(4)$의 값을 제외한

$(n-2)$개

$f(6)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 제외한

$(n-3)$개

일대일함수의 개수가 120이므로

$n(n-1)(n-2)(n-3)=120=5\times4\times3\times2$

$\therefore n=5$

따라서 공역 Y의 원소의 개수는 5이고 이때 X에서 Y로의 상수함수의 개수는 공역 Y의 원소의 개수와 같으므로 5이다.

답 ③

12 전략 조건 (가)에서 $1\le x\le3$인 x의 값에 대해서만 함숫값을 구할 수 있으므로 조건 (나)를 이용하여 $f(2015)$를 변형한다.

풀이 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned} f(2015)&=f\left(3\cdot\frac{2015}{3}\right)\\ &=3f\left(\frac{2015}{3}\right)\\ &=3^2f\left(\frac{2015}{3^2}\right)\\ &\ \ \vdots\\ &=3^6f\left(\frac{2015}{3^6}\right) \end{aligned}$$

이때 $2<\frac{2015}{3^6}<3$이므로 조건 (가)에 의하여

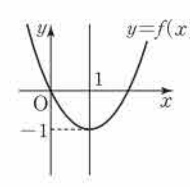
$$\begin{aligned} f\left(\frac{2015}{3^6}\right)&=1-\left|\frac{2015}{3^6}-2\right|\\ &=1-\frac{2015}{3^6}+2\\ &=3-\frac{2015}{3^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(2015)&=3^6f\left(\frac{2015}{3^6}\right)\\ &=3^6\left(3-\frac{2015}{3^6}\right)\\ &=3^7-2015\\ &=172 \end{aligned}$$

답 172

13 전략 일대일대응이 되려면 함수 f의 (치역)=(공역)임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 f가 일대일대응이 되려면 x의 값이 증가하면 y의 값은 증가 또는 감소해야 하므로 $x=1$을 기준으로 어느 한 쪽의 전체 또는 일부분이어야 한다.

$\therefore a\ge1$ ⋯⋯ ㉠

또한 일대일대응이 되려면 함수 f의 치역과 공역이 같아야 하므로 치역은 $\{y \mid y\ge a\}$이어야 한다.

즉 $f(a)=a$에서 $\quad a^2-2a=a$

$a^2-3a=0, \quad a(a-3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=3$

답 ③

14 전략 일대일함수 $f(x)$의 치역은 $\{1, 3, 4\}$이거나 $\{1, 2, 6\}$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이고, 조건 (나)에서 $f(a)f(b)f(c)=12$이므로 치역이 $\{1, 3, 4\}$일 때와 치역이 $\{1, 2, 6\}$일 때의 두 가지 경우로 나누어서 생각할 수 있다.

(i) 치역이 $\{1, 3, 4\}$일 때,

$f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 3, 4 중 하나이므로

3개

$f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$의 값을 제외한

2개

$f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$, $f(b)$의 값을 제외한

1개

따라서 일대일함수의 개수는

$3\cdot2\cdot1=6$ ⋯➜ ❶

(ii) 치역이 $\{1, 2, 6\}$일 때,

$f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 6 중 하나이므로

3개

$f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$의 값을 제외한

2개

$f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$, $f(b)$의 값을 제외한

1개

따라서 일대일함수의 개수는

$3\cdot2\cdot1=6$ ⋯➜ ❷

(i), (ii)에서 두 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 12이다. ⋯➜ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 치역이 $\{1, 3, 4\}$인 함수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❷ 치역이 $\{1, 2, 6\}$인 함수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❸ 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	20%

15 전략 $f(-2)=-f(2)$, $f(-1)=-f(1)$, $f(0)=0$임을 이용한다.

풀이 함수 f가 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$$f(-2)=-f(2),\ f(-1)=-f(1),\ f(0)=0$$

이어야 한다.

따라서 $f(2)$와 $f(1)$의 값은 $f(-2)$와 $f(-1)$의 값에 따라 결정되고, $f(-2)$와 $f(-1)$이 될 수 있는 값은 각각 5가지이므로 함수 f의 개수는

$5\cdot5=25$

답 25

Ⅵ. 함수

18 합성함수와 역함수

01 합성함수

확인

본책 86~87쪽

1 (1) $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(2)=3$

(2) $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(8)=1$

(3) $(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(2)=2$

(4) $(f\circ g)(8)=f(g(8))=f(1)=6$

답 (1) 3 (2) 1 (3) 2 (4) 6

2 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$

$=-(2x-1)+5=-2x+6$

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+5)$

$=2(-x+5)-1=-2x+9$

(3) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x-1)$

$=2(2x-1)-1=4x-3$

(4) $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(-x+5)$

$=-(-x+5)+5=x$

답 풀이 참조

3 (1) $f(-1)=3\cdot(-1)-1=-4$이므로

$((h\circ g)\circ f)(-1)=(h\circ g)(f(-1))$

$=(h\circ g)(-4)$

$=(-2)\cdot(-4)+6$

$=14$

(2) $f(1)=3\cdot1-1=2$이므로

$(h\circ(g\circ f))(1)=((h\circ g)\circ f)(1)$

$=(h\circ g)(f(1))$

$=(h\circ g)(2)$

$=(-2)\cdot2+6$

$=2$

답 (1) 14 (2) 2

유제

본책 88~91쪽

1 $f(3)=4$이므로

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(4)=1$

$\therefore f(3)+(f\circ f)(3)=5$

답 5

2 $f(-2)=3\cdot(-2)+1=-5$,

$g(2)=2\cdot2-1=3$이므로

$(g\circ f)(-2)+(f\circ g)(2)$

$=g(f(-2))+f(g(2))$

$=g(-5)+f(3)$

$=-(-5)^2+2\cdot(-5)+3\cdot3+1$

$=-25$

답 -25

3 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=1$이고 $f(1)=0$이므로

$g(0)=1$

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=1$이고 $g(2)=0$이므로

$f(0)=1$

두 함수 f, g는 각각 일대일대응이므로

$f(2)=2$, $g(1)=2$

$\therefore f(2)+g(1)=4$

답 4

4 $f(x)=ax+2$, $g(x)=4x-3$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4x-3)$

$=a(4x-3)+2$

$=4ax-3a+2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+2)$

$=4(ax+2)-3$

$=4ax+5$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$4ax-3a+2=4ax+5$에서

$-3a=3 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-x+2$이므로

$f(-1)=-(-1)+2=3$

답 3

5 $g(2)=-2$에서 $\qquad 2b+4=-2$

$\therefore b=-3$

따라서 $f(x)=ax-1$, $g(x)=-3x+4$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-3x+4)$

$=a(-3x+4)-1$

$=-3ax+4a-1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-1)$

$=-3(ax-1)+4$

$=-3ax+7$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$-3ax+4a-1=-3ax+7$에서

$4a=8 \qquad \therefore a=2$

답 $a=2$, $b=-3$

6 $g(x)=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)라 하면

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b)$$
$$=2(ax+b)-3$$
$$=2ax+2b-3$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-3)$$
$$=a(2x-3)+b$$
$$=2ax-3a+b$$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $2ax+2b-3=2ax-3a+b$에서

$3a+b=3$ …… ㉠

$g(2)=0$에서

$2a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-6$

따라서 $g(x)=3x-6$이므로

$g(4)=3\cdot4-6=6$ 답 6

다른 풀이 $f\circ g=g\circ f$이므로 $f(g(x))=g(f(x))$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(g(2))=g(f(2))$

이때 $g(2)=0$, $f(2)=2\cdot2-3=1$이므로

$f(0)=g(1)$

$\therefore g(1)=f(0)=2\cdot0-3=-3$

$g(x)=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)라 하면

$g(2)=0$, $g(1)=-3$이므로

$2a+b=0$, $a+b=-3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-6$

따라서 $g(x)=3x-6$이므로

$g(4)=3\cdot4-6=6$

7 $f\left(\frac{x+1}{3}\right)=2x+1$에서 $\frac{x+1}{3}=t$로 놓으면 $x=3t-1$이므로

$f(t)=2(3t-1)+1=6t-1$

$\therefore f(x)=6x-1$ 답 $f(x)=6x-1$

8 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$이고,

$(g\circ f)(x)=x^2+1$이므로

$g(2x-1)=x^2+1$

$2x-1=t$로 놓으면 $x=\frac{t+1}{2}$이므로

$$g(t)=\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{5}{4}$$

$\therefore g(1)=\frac{1}{4}\cdot1^2+\frac{1}{2}\cdot1+\frac{5}{4}=2$ 답 2

다른 풀이 $(g\circ f)(x)=x^2+1$에서

$g(2x-1)=x^2+1$

$2x-1=1$에서 $x=1$

$x=1$을 $g(2x-1)=x^2+1$에 대입하면

$g(1)=1^2+1=2$

9 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-x+2)$
$$=3(-x+2)-5=-3x+1$$

$(h\circ g\circ f)(x)=g(x)$에서 $(h\circ(g\circ f))(x)=g(x)$이므로

$h(-3x+1)=3x-5$

$-3x+1=t$로 놓으면 $x=-\frac{t-1}{3}$이므로

$$h(t)=3\cdot\left(-\frac{t-1}{3}\right)-5=-t-4$$

$\therefore h(x)=-x-4$ 답 $h(x)=-x-4$

10 $f^1(x)=f(x)=-x+1$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-x+1)$$
$$=-(-x+1)+1=x$$

따라서 $f^3(x)=f(x)$, $f^4(x)=f^2(x)$, …이므로

$f^{2019}(x)=f(x)=-x+1$

$f^{2020}(x)=f^2(x)=x$

$\therefore f^{2019}(2)+f^{2020}(2)=(-2+1)+2=1$ 답 1

11 $f^1(x)=f(x)=\frac{x}{2}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x}{2^2}$$
$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{x}{2^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2^2}=\frac{x}{2^3}$$
$$\vdots$$
$$\therefore f^n(x)=\frac{x}{2^n}$$

따라서 $f^{10}(x)=\frac{x}{2^{10}}$이므로 $f^{10}(a)=2$에서

$\frac{a}{2^{10}}=2$ $\therefore a=2^{11}$ 답 ③

12 $f^1(1)=f(1)=2$

$f^2(1)=f(f(1))=f(2)=3$

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(3)=1$

$f^4(1)=f(f^3(1))=f(1)=2$

$\vdots$

즉 $f^n(1)$의 값은 2, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $100=3\cdot33+1$이므로 $\quad f^{100}(1)=f(1)=2$

$f^{1}(2)=f(2)=3$

$f^{2}(2)=f(f(2))=f(3)=1$

$f^{3}(2)=f(f^{2}(2))=f(1)=2$

$f^{4}(2)=f(f^{3}(2))=f(2)=3$

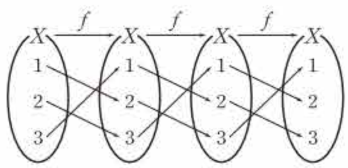
$\vdots$

즉 $f^{n}(2)$의 값은 3, 1, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $200=3\cdot66+2$이므로 $\quad f^{200}(2)=f^{2}(2)=1$

$\therefore f^{100}(1)+f^{200}(2)=3$ 답 3

다른 풀이 f^{1}, f^{2}, f^{3}의 대응 관계를 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $f^{3}(x)=x$이므로

$f^{100}(1)=f^{3\cdot33+1}(1)=f(1)=2$

$f^{200}(2)=f^{3\cdot66+2}(2)=f^{2}(2)=1$

$\therefore f^{100}(1)+f^{200}(2)=3$

02 역함수

확인

본책 92~94쪽

1 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 역함수가 존재하는 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

2 (1) $f^{-1}(8)=5$

(2) $(f^{-1})^{-1}(3)=f(3)=2$

(3) $(f^{-1}\circ f)(7)=f^{-1}(f(7))=f^{-1}(4)=7$

(4) $(f\circ f^{-1})(6)=f(f^{-1}(6))=f(1)=6$

답 (1) 5 (2) 2 (3) 7 (4) 6

3 (1) 함수 $y=-3x+3$은 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

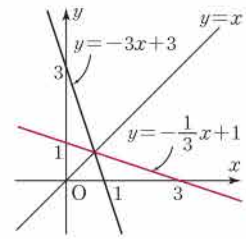
$y=-3x+3$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$3x=-y+3 \qquad \therefore x=-\frac{1}{3}y+1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\frac{1}{3}x+1$

따라서 함수 $y=-3x+3$의 역함수 $y=-\frac{1}{3}x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) 함수 $y=\frac{1}{2}x-2$는 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

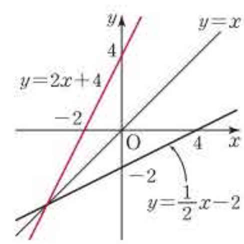
$y=\frac{1}{2}x-2$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$\frac{1}{2}x=y+2 \qquad \therefore x=2y+4$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=2x+4$

따라서 함수 $y=\frac{1}{2}x-2$의 역함수 $y=2x+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

유제

본책 95~100쪽

1 $f(3)=2\cdot3+1=7$

$f^{-1}(-1)=k$라 하면 $f(k)=-1$이므로

$2k+1=-1 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore f^{-1}(-1)=-1$

$\therefore f(3)+f^{-1}(-1)=7-1=6$ 답 6

2 $f^{-1}(4)=3$에서 $f(3)=4$이므로

$3a+b=4$ …… ㉠

$(f\circ f)(3)=7$에서 $f(f(3))=f(4)=7$이므로

$4a+b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-5$

$\therefore f(x)=3x-5$

$f^{-1}(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$이므로

$3k-5=-2 \qquad \therefore k=1$

$\therefore f^{-1}(-2)=1$ 답 1

3 $(g \circ f^{-1})(a)=g(f^{-1}(a))=-2f^{-1}(a)+5$이고,

$(g \circ f^{-1})(a)=-1$이므로

$-2f^{-1}(a)+5=-1, \qquad -2f^{-1}(a)=-6$

$\therefore f^{-1}(a)=3$

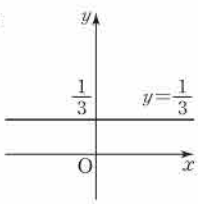
따라서 $f(3)=a$이므로

$3 \cdot 3-2=a \qquad \therefore a=7$

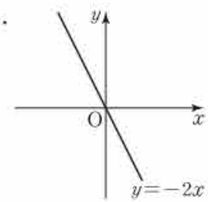
답 7

4 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

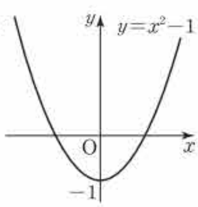
ㄱ.



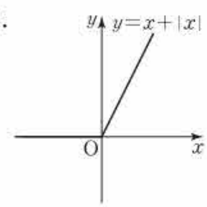
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



이상에서 역함수가 존재하는 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

5 함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 X에서 Y로의 일대일대응이다.

직선 $y=f(x)$의 기울기가 음수이므로

$f(3)=b, \ f(a)=-10$

$f(x)=-3x+2$이므로 $f(3)=b$에서

$-3 \cdot 3+2=b \qquad \therefore b=-7$

$f(a)=-10$에서

$-3a+2=-10 \qquad \therefore a=4$

$\therefore a+b=-3$

답 -3

6 함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 R에서 R로의 일대일대응이다.

(i) $x \geq 1$일 때,

$f(x)=x-1+kx=(k+1)x-1$

(ii) $x<1$일 때,

$f(x)=-(x-1)+kx=(k-1)x+1$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $x \geq 1$인 부분과 $x<1$인 부분에서의 직선의 기울기가 같은 부호이어야 하므로

$(k+1)(k-1)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>1$

답 $k<-1$ 또는 $k>1$

7 $f(2)=4, \ g(4)=3$에서

$f^{-1}(4)=2, \ g^{-1}(3)=4$

$$\begin{aligned}\therefore (g \circ f)^{-1}(3)&=(f^{-1} \circ g^{-1})(3)\\&=f^{-1}(g^{-1}(3))\\&=f^{-1}(4)=2\end{aligned}$$

답 2

8
$$\begin{aligned}((f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f)(4)&=(g^{-1} \circ f \circ f)(4)\\&=g^{-1}(f(f(4)))\\&=g^{-1}(f(-3))\\&=g^{-1}(10)\end{aligned}$$

$g^{-1}(10)=k$라 하면 $g(k)=10$이므로

$3k-2=10 \qquad \therefore k=4$

$\therefore ((f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f)(4)=g^{-1}(10)=4$

답 4

9
$$\begin{aligned}(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(a)&=(f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(a)\\&=(f \circ g^{-1})(a)\\&=f(g^{-1}(a))=9\end{aligned}$$

에서 $g^{-1}(a)=k$라 하면 $f(k)=9$이므로

$4k-7=9 \qquad \therefore k=4$

$g^{-1}(a)=4$에서 $g(4)=a$이므로

$a=\frac{1}{2} \cdot 4+5=7$

답 7

10 함수 $y=\frac{1}{3}x+4$는 집합 $\{x \mid x \geq 3\}$에서 집합 $\{y \mid y \geq 5\}$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{1}{3}x+4$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$\frac{1}{3}x=y-4 \qquad \therefore x=3y-12$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=3x-12 \ (x \geq 5)$

답 $y=3x-12 \ (x \geq 5)$

11 $h(x)=(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(5x-3)$

$=-(5x-3)+2=-5x+5$

$y=-5x+5$로 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$5x=-y+5 \qquad \therefore x=-\frac{1}{5}y+1$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-\frac{1}{5}x+1$

$\therefore h^{-1}(x)=-\frac{1}{5}x+1$

답 $h^{-1}(x)=-\frac{1}{5}x+1$

12 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=2x$에서 $\frac{x+1}{2}=t$로 놓으면 $x=2t-1$이므로

$f(t)=2(2t-1)=4t-2$

$\therefore f(x)=4x-2$

$y=4x-2$로 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

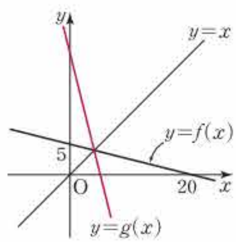
$4x=y+2 \quad \therefore x=\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ 답 $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

13 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

$-\frac{1}{4}x+5=x$에서 $\quad \frac{5}{4}x=5 \quad \therefore x=4$

따라서 교점의 좌표는 $(4, 4)$이므로

$a=4, b=4$

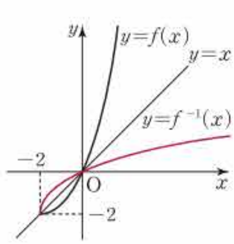
$\therefore a+b=8$ 답 8

14 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-1, -1)$을 지나므로

$5\cdot(-1)+k=-1 \quad \therefore k=4$ 답 4

15 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 교점 P, Q의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로 $\frac{1}{2}x^2+2x=x$에서

$x^2+2x=0, \quad x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

즉 두 점 P, Q의 좌표는 $(-2, -2)$, $(0, 0)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

라이트 UP

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

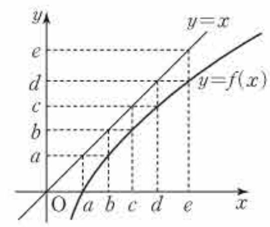
좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

특히 원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

16 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 주어진 그림에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(a)=k$라 하면 $f(k)=a$이므로

$k=b$

$f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$이므로

$l=c$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(a)=f^{-1}(f^{-1}(a))$

$=f^{-1}(b)$

$=c$ 답 c

17 $f^{-1}(2)=k, f^{-1}(5)=l$이라 하면

$f(k)=2, f(l)=5$

이때 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$k=1, l=5$ 또는 $k=5, l=1$

$\therefore f^{-1}(2)+f^{-1}(5)=k+l=6$ 답 6

중단원 연습 문제

본책 101~103쪽

01 11	**02** ⑤	**03** 9	**04** 21	**05** 9
06 ②	**07** ④	**08** ④	**09** ②	**10** 25
11 ③	**12** 10	**13** ⑤	**14** $3\sqrt{2}$	**15** ①
16 13	**17** 6	**18** 4	**19** 6	**20** ④

01 전략 합성함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

풀이 $g(1)=2\cdot1-4=-2$,

$f(-1)=(-1)^2+3=4$이므로

$(f\circ g)(1)+(g\circ f)(-1)$

$=f(g(1))+g(f(-1))$

$=f(-2)+g(4)$

$=(-2)^2+3+2\cdot4-4$

$=11$ 답 11

02 전략 주어진 $f(x)$에 대하여 $g(x)=(f\circ f\circ f)(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=-3x+2$에서

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))\\&=-3(-3x+2)+2\\&=9x-4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ f)(x)&=f((f\circ f)(x))\\&=-3(9x-4)+2\\&=-27x+14\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore g(x)&=(f\circ f\circ f)(x)\\&=-27x+14\end{aligned}$$

$g(a)=23$에서

$-27a+14=23$

$-27a=9 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{3}$ 답 ⑤

다른 풀이 $g(a)=f(f(f(a)))=23$에서

$f(f(a))=b$라 하면 $f(b)=23$이므로

$-3b+2=23 \qquad \therefore b=-7$

$f(f(a))=-7$에서

$f(a)=c$라 하면 $f(c)=-7$이므로

$-3c+2=-7 \qquad \therefore c=3$

$f(a)=3$이므로

$-3a+2=3 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{3}$

03 전략 합성함수 $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$를 각각 구하여 동류항의 계수를 비교한다.

풀이 $f(x)=2x+3,\ g(x)=4x+a$에서

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f(4x+a)\\&=2(4x+a)+3\\&=8x+2a+3\end{aligned}$$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\&=g(2x+3)\\&=4(2x+3)+a\\&=8x+12+a\end{aligned}$$ ⋯ ❷

$f\circ g=g\circ f$이므로 $8x+2a+3=8x+12+a$에서

$a=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $(f\circ g)(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $(g\circ f)(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

04 전략 $\dfrac{2x-1}{3}=t$로 놓고 $f(t)$를 구한다.

풀이 $f\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)=5-4x$에서 $\dfrac{2x-1}{3}=t$로 놓으면 $x=\dfrac{3t+1}{2}$이므로

$f(t)=5-4\cdot\dfrac{3t+1}{2}=-6t+3$

$\therefore f(x)=-6x+3$

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ f)(1)&=f(f(1))=f(-3)\\&=-6\cdot(-3)+3\\&=21\end{aligned}$$ 답 21

05 전략 합성함수의 결합법칙을 이용하여 $(h\circ(g\circ f))(x)$를 $f(x)$로 나타낸다.

풀이 $(h\circ g)(x)=2x-3$이므로

$$\begin{aligned}(h\circ(g\circ f))(x)&=((h\circ g)\circ f)(x)\\&=(h\circ g)(f(x))\\&=2f(x)-3\end{aligned}$$ ⋯ ❶

또 $(h\circ(g\circ f))(x)=4x^2+2x-5$이므로

$2f(x)-3=4x^2+2x-5$

$2f(x)=4x^2+2x-2$

따라서 $f(x)=2x^2+x-1$이므로

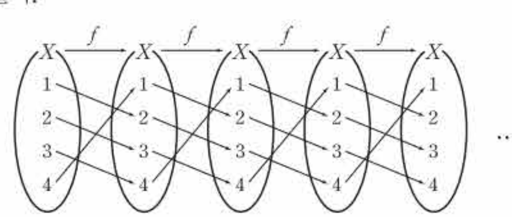
$f(2)=2\cdot2^2+2-1=9$ ⋯ ❷

답 9

채점 기준	비율
❶ $(h\circ(g\circ f))(x)$를 $f(x)$로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	60%

06 전략 $f^1, f^2, f^3, f^4, \cdots$를 구하여 규칙성을 찾아 f^n을 추론한다.

풀이 주어진 함수의 정의에 따라 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



즉 $f^4(x)=x$이므로

$f^{99}(3)=f^{4\times24+3}(3)=f^3(3)=2$

$f^{100}(2)=f^{4\times25}(2)=2$

$\therefore f^{99}(3)+f^{100}(2)=4$ 답 ②

07 전략 합성함수와 역함수의 뜻을 이해한다.

풀이 $f^{-1}(2)=3$에서 $\quad f(3)=2$

$\therefore g(2)=g(f(3))=3\cdot3-1=8$ 답 ④

08 전략 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

풀이 함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 X에서 X로의 일대일대응이다.

따라서 $f(x)=x^2-4x-6=(x-2)^2-10$에서

$a\ge2,\ f(a)=a$

$f(a)=a$에서 $\quad a^2-4a-6=a$

$a^2-5a-6=0,\quad (a+1)(a-6)=0$

$\therefore a=6\ (\because a\ge2)$ 답 ④

09 전략 $(f\circ g)^{-1}(a)=(g^{-1}\circ f^{-1})(a)$, $(g\circ f)^{-1}(a)=(f^{-1}\circ g^{-1})(a)$임을 이용한다.

풀이 $(g\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=f^{-1}(g^{-1}(2))$

$=f^{-1}(4)=4$

$(f\circ g)^{-1}(6)=(g^{-1}\circ f^{-1})(6)$

$=g^{-1}(f^{-1}(6))$

$=g^{-1}(1)=2$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(2)+(f\circ g)^{-1}(6)=6$ 답 ②

10 전략 역함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

풀이 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=4$에서

$(f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ f)(3)$

$=g^{-1}(f(3))$

$=g^{-1}(29)$

$=4$

따라서 $g(4)=29$이므로

$4+k=29 \quad \therefore k=25$ 답 25

11 전략 역함수와 합성함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

풀이 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)$

$=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(2)$

$=(g^{-1}\circ f)(2)$

$=g^{-1}(f(2))$

$=g^{-1}(-4)$

$g^{-1}(-4)=k$라 하면 $g(k)=-4$이므로

$2k-4=-4,\quad 2k=0$

$\therefore k=0$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(-4)=0$ 답 ③

12 전략 함수 $f(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$를 구하여 계수를 비교한다.

풀이 $f(3x+3)=6x+1$에서

$3x+3=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t-3}{3}$이므로

$f(t)=6\cdot\dfrac{t-3}{3}+1=2t-5$

$\therefore f(x)=2x-5$ ··· ❶

$y=2x-5$로 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$2x=y+5 \quad \therefore x=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{5}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ ··· ❷

따라서 $a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{5}{2}$이므로

$8ab=8\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{2}=10$ ··· ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $f^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $8ab$의 값을 구할 수 있다.	20%

13 전략 $f=f^{-1}$이면 $(f\circ f)(x)=x$임을 이용한다.

풀이 $f=f^{-1}$이므로 $\quad (f\circ f)(x)=x$

일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,5)$를 지나므로

$f(x)=a(x-1)+5=ax-a+5\ (a\neq0,\ a$는 상수)

라 하면

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=af(x)-a+5$

$=a(ax-a+5)-a+5$

$=a^2x-a^2+4a+5$

따라서 $a^2x-a^2+4a+5=x$이므로

$a^2=1,\ -a^2+4a+5=0$

$\therefore a=-1$

즉 $f(x)=-x+6$이므로

$f(-1)=-(-1)+6=7$ 답 ⑤

다른 풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 5)$를 지나므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(5, 1)$을 지난다. 이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치하므로 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(1, 5)$, $(5, 1)$을 지난다.

$f(x)=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)라 하면

$a+b=5$, $5a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면

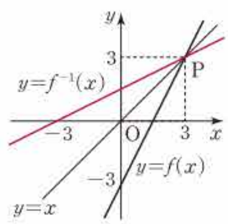
$a=-1$, $b=6$

따라서 $f(x)=-x+6$이므로

$f(-1)=-(-1)+6=7$

14 전략 점 P는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점임을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다. ➊

$2x-3=x$에서 $x=3$

따라서 P(3, 3)이므로 ➋

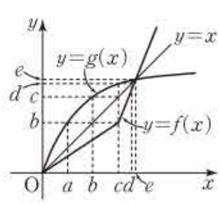
$\overline{OP}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ ➌

답 $3\sqrt{2}$

채점 기준	비율
➊ $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점임을 알 수 있다.	30%
➋ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40%
➌ $\overline{OP}$의 길이를 구할 수 있다.	30%

15 전략 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지나면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 (b, a)를 지남을 이용한다.

풀이 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 주어진 그림에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$f(c)=b$이므로

$g^{-1}(f(c))=g^{-1}(b)$

$g^{-1}(b)=k$라 하면 $g(k)=b$

이때 $g(a)=b$이므로 $k=a$

$\therefore g^{-1}(f(c))=g^{-1}(b)=a$

답 ①

16 전략 $f(1)=4$일 때와 $f(1)=6$일 때로 나누어 생각한다.

풀이 함수 f가 일대일대응이고, $f(2)=5$이므로 $f(1)$의 값은 4 또는 6이다. ➊

(i) $f(1)=4$일 때,

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(4)=8\neq7$

(ii) $f(1)=6$일 때,

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(6)=7$

$g(4)=8$, $g(6)=7$이므로 $g(5)=9$ ➋

(i), (ii)에서 $f(1)=6$이고 $f(2)=5$이므로 $f(3)=4$

$\therefore f(3)+g(5)=13$ ➌

답 13

채점 기준	비율
➊ $f(1)$의 값이 4 또는 6임을 알 수 있다.	30%
➋ $f(1)$, $g(5)$의 값을 구할 수 있다.	50%
➌ $f(3)+g(5)$의 값을 구할 수 있다.	20%

17 전략 $f^n(50)$의 값을 $n=1, 2, 3, \cdots$의 순서대로 구하여 $f^n(50)=1$이 되는 자연수 n의 최솟값을 찾는다.

풀이 $f^{n+1}(x)=(f^n\circ f)(x)=f^n(f(x))=f(f^n(x))$이므로

$f(50)=\frac{50}{2}=25$

$f^2(50)=f(f(50))=f(25)=\frac{25+1}{2}=13$

$f^3(50)=f(f^2(50))=f(13)=\frac{13+1}{2}=7$

$f^4(50)=f(f^3(50))=f(7)=\frac{7+1}{2}=4$

$f^5(50)=f(f^4(50))=f(4)=\frac{4}{2}=2$

$f^6(50)=f(f^5(50))=f(2)=\frac{2}{2}=1$

$f^7(50)=f(f^6(50))=f(1)=\frac{1+1}{2}=1$

⋮

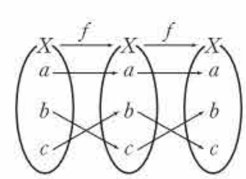
따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다. 답 6

18 전략 $f\circ f$가 항등함수인 것의 개수를 구한다.

풀이 $f=f^{-1}$이므로 $f\circ f$가 항등함수인 것의 개수를 구하면 된다.

(i) $f(x)=x$인 함수: 1개

(ii) 오른쪽 그림과 같이 자기 자신에 대응되는 원소가 1개이고, 나머지 2개는 서로 엇갈려 대응되는 함수는 자기 자신에 대응되는 원소가 a, b, c인 3가지 경우가 있으므로



3개

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$1+3=4$ 답 4

19 전략 함수 f가 일대일대응이 되도록 하는 상수 a의 값을 구한 후 역함수의 성질을 이용한다.

풀이 함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 일대일대응이다.

즉 $2\cdot7-a=7+3$이므로

$a=4$ ⋯ ❶

$x<7$일 때, $f(x)=2x-4<10$

$x\geq7$일 때, $f(x)=x+3\geq10$

$f^{-1}(11)=k$라 하면 $f(k)=11\geq10$

즉 $k\geq7$에서 $k+3=11$

$\therefore k=8$

$f^{-1}(8)=l$이라 하면 $f(l)=8<10$

즉 $l<7$에서 $2l-4=8$

$\therefore l=6$ ⋯ ❷

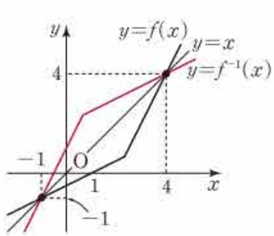
$$\begin{aligned}\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(11)&=f^{-1}(f^{-1}(11))\\&=f^{-1}(8)\\&=6\end{aligned}$$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $f^{-1}(11)$, $f^{-1}(8)$의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $(f^{-1}\circ f^{-1})(11)$의 값을 구할 수 있다.	20%

20 전략 세 함수 $y=x$, $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 x의 값을 구한다.

풀이 세 함수 $y=x$, $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\{f(x)\}^2=f(x)f^{-1}(x)$에서

$f(x)\{f(x)-f^{-1}(x)\}=0$

$\therefore f(x)=0$ 또는 $f(x)=f^{-1}(x)$

(i) $f(x)=0$일 때,

$y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하면 되므로 $x=1$

(ii) $f(x)=f^{-1}(x)$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 구하면 되므로

$x=-1$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 $x=-1, 1, 4$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$(-1)+1+4=4$ 답 ④

19 유리함수

01 유리식

확인

본책 106~108쪽

1 답 ㄴ, ㄹ

2 (1) $x^2-1=(x+1)(x-1)$, $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$이므로 두 식을 통분하면

$$\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+1)(x-1)},\ \frac{3(x+1)}{(x+2)(x+1)(x-1)}$$

(2) $\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1}=\frac{(x+4)(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x+4}{x-1}$ 답 풀이 참조

3 (1) $\frac{5}{x-4}+3=\frac{5+3(x-4)}{x-4}=\frac{3x-7}{x-4}$

(2) $\frac{3x-1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-x}=\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{x(x-1)}$

$=\frac{x(3x-1)-(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$

$=\frac{3x^2-2x-1}{x(x+1)(x-1)}$

$=\frac{(3x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$

$=\frac{3x+1}{x(x+1)}$

(3) $\frac{5}{x+3}\times\frac{x^2+3x}{x-2}=\frac{5}{x+3}\times\frac{x(x+3)}{x-2}=\frac{5x}{x-2}$

(4) $\frac{x-4}{x+3}\div\frac{x^2-2x-8}{x-2}=\frac{x-4}{x+3}\times\frac{x-2}{x^2-2x-8}$

$=\frac{x-4}{x+3}\times\frac{x-2}{(x+2)(x-4)}$

$=\frac{x-2}{(x+3)(x+2)}$

답 (1) $\frac{3x-7}{x-4}$ (2) $\frac{3x+1}{x(x+1)}$ (3) $\frac{5x}{x-2}$ (4) $\frac{x-2}{(x+3)(x+2)}$

4 (1) $\frac{5x+2}{x-1}=\frac{5(x-1)+7}{x-1}=5+\frac{\boxed{7}}{x-1}$

(2) $\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{(x+1)-(x-1)}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$

$=\frac{1}{\boxed{2}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\boxed{x+1}}\right)$

(3) $\frac{\frac{x+1}{x}}{x+4}=\frac{x+1}{x}\div(x+4)=\frac{x+1}{x}\times\frac{1}{x+4}=\frac{x+1}{\boxed{x(x+4)}}$

답 (1) 7 (2) 2, $x+1$ (3) $x(x+4)$

5 (1) $x=2k$, $y=3k$ $(k\neq0)$로 놓으면

$$\frac{x}{x-y}=\frac{2k}{2k-3k}=\frac{2k}{-k}=-2$$

(2) $x=k$, $y=2k$, $z=4k$ $(k\neq0)$로 놓으면

$$\frac{xy+z^2}{2x^2+y^2}=\frac{k\cdot2k+(4k)^2}{2\cdot k^2+(2k)^2}=\frac{18k^2}{6k^2}=3$$

답 (1) -2 (2) 3

유제

본책 109~113쪽

1 (1) $\frac{x+2}{x^2-2x-8}+\frac{x^2-x}{x^2-1}$

$=\frac{x+2}{(x+2)(x-4)}+\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{1}{x-4}+\frac{x}{x+1}$

$=\frac{x+1+x(x-4)}{(x+1)(x-4)}$

$=\frac{x^2-3x+1}{(x+1)(x-4)}$

(2) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}$

$=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{2}{x^2+1}$

$=\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+1}$

$=\frac{2(x^2+1)-2(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$=\frac{4}{x^4-1}$

(3) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-x-2}\times\frac{x-2}{x^2+4x+3}$

$=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-2)}\times\frac{x-2}{(x+3)(x+1)}$

$=\frac{x-1}{(x+1)^2}$

(4) $\frac{x-1}{x^2-4}\div\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x+2}$

$=\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}\div\frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)(x+1)}$

$=\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}\times\frac{(x+2)(x+1)}{(x-3)(x-1)}$

$=\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$

답 (1) $\frac{x^2-3x+1}{(x+1)(x-4)}$ (2) $\frac{4}{x^4-1}$ (3) $\frac{x-1}{(x+1)^2}$ (4) $\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$

2 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{x^2-2x}{x^3+1}$

$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{x^2-2x}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\frac{(x^2-x+1)+(x+1)+(x^2-2x)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\frac{2x^2-2x+2}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\frac{2(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\frac{2}{x+1}$ 　　답 $\frac{2}{x+1}$

3 주어진 식의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-5}=\frac{x-5+2(x-2)}{(x-2)(x-5)}=\frac{3x-9}{x^2-7x+10}$$

즉

$$\frac{ax+b}{x^2-7x+10}=\frac{3x-9}{x^2-7x+10}$$

가 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a=3$, $b=-9$ 　　답 $a=3$, $b=-9$

라이트 UP

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이다. ➡ $a=b=c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이다.
➡ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

③ $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이다. ➡ $a=b=c=0$

④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 x, y에 대한 항등식이다.
➡ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

4 주어진 식의 좌변을 통분하여 계산하면

$\frac{a}{x-1}-\frac{ax+b}{x^2+x+1}$

$=\frac{a(x^2+x+1)-(ax+b)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{(2a-b)x+a+b}{x^3-1}$

즉

$$\frac{(2a-b)x+a+b}{x^3-1}=\frac{5x+1}{x^3-1}$$

이 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$2a-b=5$, $a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-1$

$\therefore a-b=2-(-1)=3$ 　　답 3

5 주어진 식의 좌변을 통분하여 계산하면

$\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$

$=\frac{a(x-1)^2+bx(x-1)+cx}{x(x-1)^2}$

$=\frac{(a+b)x^2+(-2a-b+c)x+a}{x(x-1)^2}$

즉

$$\frac{(a+b)x^2+(-2a-b+c)x+a}{x(x-1)^2}=\frac{3}{x(x-1)^2}$$

이 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b=0$, $-2a-b+c=0$, $a=3$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-3$, $c=3$

$\therefore abc=-27$ 　　답 -27

6 (1) $\frac{x}{x-1}-\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-5}{x-6}$

$=\frac{(x-1)+1}{x-1}-\frac{(x+2)+1}{x+2}+\frac{(x-3)+1}{x-3}-\frac{(x-6)+1}{x-6}$

$=\left(1+\frac{1}{x-1}\right)-\left(1+\frac{1}{x+2}\right)+\left(1+\frac{1}{x-3}\right)-\left(1+\frac{1}{x-6}\right)$

$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-6}$

$=\frac{x+2-(x-1)}{(x+2)(x-1)}+\frac{x-6-(x-3)}{(x-3)(x-6)}$

$=\frac{3}{(x+2)(x-1)}-\frac{3}{(x-3)(x-6)}$

$=\frac{3(x-3)(x-6)-3(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-3)(x-6)}$

$=\frac{-30(x-2)}{(x+2)(x-1)(x-3)(x-6)}$

(2) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\frac{4}{(x+4)(x+8)}$

$=\frac{1}{(x+2)-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$

$+\frac{2}{(x+4)-(x+2)}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$

$+\frac{4}{(x+8)-(x+4)}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+8}\right)$

$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+8}\right)$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+8}$

$=\frac{x+8-(x+1)}{(x+8)(x+1)}$

$=\frac{7}{(x+8)(x+1)}$

(3) $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}=\dfrac{\dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{x+1+x-1}{(x+1)(x-1)}}=\dfrac{\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}}$

$=\dfrac{2(x+1)(x-1)}{2x(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{x}$

답 (1) $\dfrac{-30(x-2)}{(x+2)(x-1)(x-3)(x-6)}$

(2) $\dfrac{7}{(x+8)(x+1)}$ (3) $\dfrac{1}{x}$

다른 풀이 (3) $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}=\dfrac{(x+1)(x-1)\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)}{(x+1)(x-1)\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)}$

$=\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)+(x-1)}=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$

라이트 UP

분모 또는 분자가 유리식인 경우 [방법 1]과 같이 제일 아래에 있는 유리식부터 차례대로 통분하여 계산하거나 [방법 2]와 같이 분자, 분모에 같은 다항식을 곱하여 간단히 한다.

[방법 1] $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}=\dfrac{x}{x+1}$

[방법 2] $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x\cdot 1}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{x}{x+1}$

7 $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x+1-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}\right)$

$=1-\dfrac{1}{11}=\dfrac{10}{11}$ 답 $\dfrac{10}{11}$

8 $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{2}=k\ (k\neq0)$로 놓으면 $x=5k,\ y=2k$

(1) $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{5k+2k}{5k-2k}=\dfrac{7k}{3k}=\dfrac{7}{3}$

(2) $\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}=\dfrac{(5k)^2+(2k)^2}{(5k+2k)^2}=\dfrac{29k^2}{49k^2}=\dfrac{29}{49}$

답 (1) $\dfrac{7}{3}$ (2) $\dfrac{29}{49}$

9 $3x=y$이므로 $x=\dfrac{y}{3}$

$2y=5z$이므로 $z=\dfrac{2}{5}y$

$\therefore x:y:z=\dfrac{y}{3}:y:\dfrac{2}{5}y=5:15:6$

$x=5k,\ y=15k,\ z=6k\ (k\neq0)$로 놓으면

$\dfrac{xy-z^2}{(2x-y+z)^2}=\dfrac{5k\cdot15k-(6k)^2}{(2\cdot5k-15k+6k)^2}=\dfrac{39k^2}{k^2}=39$ 답 39

10 $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x+y=3k,\ y+z=4k,\ z+x=5k$

위의 세 식을 변끼리 더하면

$2(x+y+z)=12k$

$\therefore x+y+z=6k$ …… ㉠

㉠에 위의 세 식을 각각 대입하여 정리하면

$x=2k,\ y=k,\ z=3k$

$\therefore \dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\dfrac{(2k)^3+k^3+(3k)^3}{2k\cdot k\cdot 3k}=\dfrac{36k^3}{6k^3}=6$ 답 6

02 유리함수

확인 본책 114~115쪽

1 (1) $x+5=0$에서 $x=-5$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\neq-5$인 실수$\}$

(2) $x^2-1=0$에서 $x=\pm1$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\neq\pm1$인 실수$\}$

(3) $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이므로 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x$는 실수$\}$

답 (1) $\{x|x\neq-5$인 실수$\}$

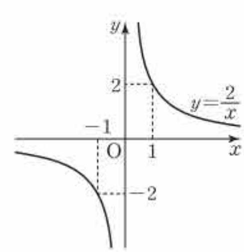
(2) $\{x|x\neq\pm1$인 실수$\}$

(3) $\{x|x$는 실수$\}$

2 (1) $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역: $\{x|x\neq0$인 실수$\}$,

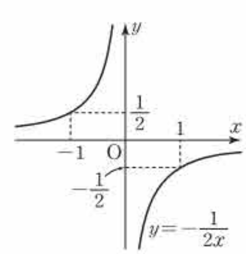
치역: $\{y|y\neq0$인 실수$\}$



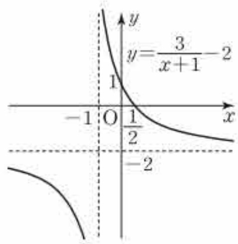
(2) $y=-\dfrac{1}{2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역: $\{x|x\neq0$인 실수$\}$,

치역: $\{y|y\neq0$인 실수$\}$

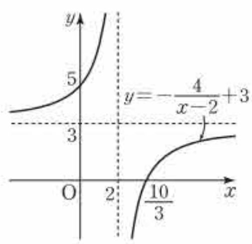


(3) $y=\dfrac{3}{x+1}-2$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



정의역: $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$,
치역: $\{y\,|\,y\neq-2$인 실수$\}$

(4) $y=-\dfrac{4}{x-2}+3$의 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



정의역: $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$,
치역: $\{y\,|\,y\neq3$인 실수$\}$

답 풀이 참조

2 $y=\dfrac{4x-4}{2x+1}=\dfrac{4\left(x+\frac{1}{2}\right)-6}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=-\dfrac{3}{x+\frac{1}{2}}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore a=-\dfrac{1}{2},\ b=2,\ k=-3$ 답 $a=-\dfrac{1}{2},\ b=2,\ k=-3$

3 ㄱ. $y=\dfrac{-x-1}{x+3}=\dfrac{-(x+3)+2}{x+3}=\dfrac{2}{x+3}-1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{(x+3)-2}{x+3}=-\dfrac{2}{x+3}+1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\dfrac{2x-4}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+2}{x-3}=\dfrac{2}{x-3}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

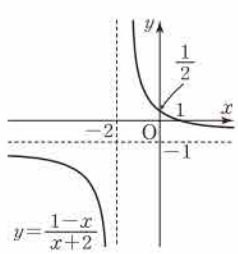
이상에서 평행이동하여 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

유제 본책 116~120쪽

1 (1) $y=\dfrac{1-x}{x+2}=\dfrac{-(x+2)+3}{x+2}=\dfrac{3}{x+2}-1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은

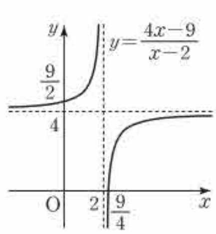


$\{x\,|\,x\neq-2$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq-1$인 실수$\}$, 점근선의 방정식은 $x=-2,\ y=-1$이다.

(2) $y=\dfrac{4x-9}{x-2}=\dfrac{4(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}+4$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq4$인 실수$\}$, 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=4$이다.



답 풀이 참조

4 $y=\dfrac{-x-5}{x+3}=\dfrac{-(x+3)-2}{x+3}=-\dfrac{2}{x+3}-1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

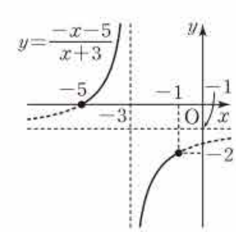
$x=-5$일 때 $y=\dfrac{5-5}{-5+3}=0$,

$x=-1$일 때 $y=\dfrac{1-5}{-1+3}=-2$

이므로 정의역이

$\{x\,|\,-5\leq x<-3$ 또는 $-3<x\leq-1\}$

일 때 $y=\dfrac{-x-5}{x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



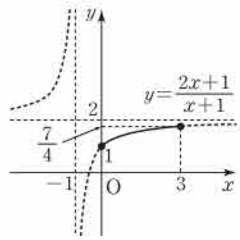
따라서 치역은

$\{y\,|\,y\leq-2$ 또는 $y\geq0\}$ 답 $\{y\,|\,y\leq-2$ 또는 $y\geq0\}$

5 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le 3$에서 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=3$일 때 최댓값 $\dfrac{6+1}{3+1}=\dfrac{7}{4}$,

$x=0$일 때 최솟값 $\dfrac{0+1}{0+1}=1$

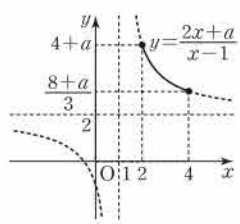
을 갖는다.

답 최댓값: $\dfrac{7}{4}$, 최솟값: 1

6 $y=\dfrac{2x+a}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+a+2}{x-1}=\dfrac{a+2}{x-1}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\dfrac{a+2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a+2>0$이므로 $y=\dfrac{2x+a}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



$x=2$일 때 최댓값 $4+a$,

$x=4$일 때 최솟값 $\dfrac{8+a}{3}$

를 갖는다.

즉 $\dfrac{8+a}{3}=3$이므로 $\quad 8+a=9 \quad \therefore a=1$

따라서 구하는 최댓값은 $\quad 4+1=5$

답 5

7 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=-2$이므로 $\quad a=-4$, $c=-2$

함수 $y=\dfrac{b}{x-4}-2$의 그래프가 점 $(0, -3)$을 지나므로

$-3=\dfrac{b}{0-4}-2 \quad \therefore b=4$

$\therefore abc=(-4)\cdot 4\cdot(-2)=32$

답 32

8 $y=\dfrac{bx+8}{a-x}=\dfrac{-b(a-x)+ab+8}{a-x}=\dfrac{ab+8}{a-x}-b$

따라서

정의역은 $\{x\,|\,x\ne a$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ne -b$인 실수$\}$

이므로 $\quad a=-2$, $b=3$

$\therefore a-b=-5$

답 -5

9 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3$, $y=1$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x+3}+1\ (k\ne 0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다. ㉠의 그래프가 점 $(2, 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{k}{2+3}+1 \quad \therefore k=5$

$k=5$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{5}{x+3}+1=\dfrac{5+(x+3)}{x+3}=\dfrac{x+8}{x+3}$

$\therefore a=1$, $b=8$, $c=3$

답 $a=1$, $b=8$, $c=3$

다른 풀이 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{a(x+c)-ac+b}{x+c}$

$=\dfrac{-ac+b}{x+c}+a$ …… ㉠

이므로 ㉠의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-c$, $y=a$

$\therefore c=3$, $a=1$ …… ㉡

또 ㉠의 그래프가 점 $(2, 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{-ac+b}{2+c}+a$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면 $\quad b=8$

10 $y=\dfrac{3x+5}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+3$

이므로 $y=\dfrac{3x+5}{x+1}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=3$

이때 주어진 함수의 그래프가 직선 $y=x+k$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x+k$는 점근선의 교점 $(-1, 3)$을 지난다. 즉

$3=-1+k \quad \therefore k=4$

답 4

11 주어진 함수의 그래프가 점 $(3, 2)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은

$x=3$, $y=2$

주어진 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-3}+2\ (k\ne 0)$ …… ㉠

로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$3=\dfrac{k}{1-3}+2 \quad \therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-2}{x-3}+2=\dfrac{-2+2(x-3)}{x-3}=\dfrac{2x-8}{x-3}$

$\therefore a=2$, $b=-8$, $c=-3$

답 $a=2$, $b=-8$, $c=-3$

12 $y=\dfrac{5x+4}{x+1}=\dfrac{5(x+1)-1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+5$

이므로 $y=\dfrac{5x+4}{x+1}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=5$

따라서 두 직선 $y=-x+a$, $y=x+b$가 점근선의 교점 $(-1,\ 5)$를 지나므로

$5=-(-1)+a,\ 5=-1+b$

$\therefore a=4,\ b=6$

답 $a=4,\ b=6$

13 $(f\circ g)(x)=x$에서 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$f(x)=\dfrac{5x-1}{x+2}$에서 $y=\dfrac{5x-1}{x+2}$로 놓으면

$y(x+2)=5x-1,\qquad (y-5)x=-2y-1$

$\therefore x=\dfrac{-2y-1}{y-5}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{-2x-1}{x-5}$

$\therefore g(x)=\dfrac{-2x-1}{x-5}$

답 $g(x)=\dfrac{-2x-1}{x-5}$

14 $f(x)=\dfrac{4x-3}{x+a}$에서 $y=\dfrac{4x-3}{x+a}$으로 놓으면

$y(x+a)=4x-3,\qquad (y-4)x=-ay-3$

$\therefore x=\dfrac{-ay-3}{y-4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{-ax-3}{x-4}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-ax-3}{x-4}$

$f=f^{-1}$이므로 $\quad \dfrac{4x-3}{x+a}=\dfrac{-ax-3}{x-4}$

$\therefore a=-4$

답 -4

다른 풀이 $f=f^{-1}$에서 $f\circ f=I$(항등함수)이므로

$(f\circ f)(x)=x$ (단, $x\neq -a$, $f(x)\neq -a$)

$$f(f(x))=\frac{4\cdot f(x)-3}{f(x)+a}=\frac{4\cdot\dfrac{4x-3}{x+a}-3}{\dfrac{4x-3}{x+a}+a}$$

$$=\frac{13x-3a-12}{(a+4)x+a^2-3}=x$$

이므로 $\quad 13x-3a-12=(a+4)x^2+(a^2-3)x$

$\therefore (a+4)x^2+(a^2-16)x+3a+12=0$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a+4=0,\ a^2-16=0,\ 3a+12=0$

$\therefore a=-4$

15 $y=\dfrac{ax-7}{x+b}$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{2a-7}{2+b},\qquad 2a-7=2+b$

$\therefore 2a-b=9$ ······ ㉠

또 $y=\dfrac{ax-7}{x+b}$의 역함수의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$y=\dfrac{ax-7}{x+b}$의 그래프는 점 $(1,\ 2)$를 지난다.

즉 $2=\dfrac{a-7}{1+b}$이므로 $\qquad a-7=2+2b$

$\therefore a-2b=9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-3$

답 $a=3,\ b=-3$

라이트 UP

함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점을 $(a,\ b)$라 하면

$b=f(a) \Longleftrightarrow a=f^{-1}(b)$

가 성립한다.

중단원 연습 문제

본책 121~123쪽

01 0	**02** ②	**03** 1	**04** ④	**05** ②
06 ③	**07** 1	**08** ④	**09** $a=-1,\ b=-5$	
10 13	**11** 30	**12** 3	**13** ③	**14** 148
15 ④	**16** ①	**17** ①	**18** ②	**19** 8

01 전략 분모를 통분하여 계산한다.

풀이 $\dfrac{a}{(a-b)(c-a)}+\dfrac{b}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(b-c)}$

$=\dfrac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{ab-ac+bc-ab+ac-bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=0$

답 0

02 전략 $\dfrac{A}{B}\div\dfrac{D}{C}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{a^2-4a}{a^2+2a-3}\times\dfrac{a^2+5a+6}{a+1}\div\dfrac{a^2-2a-8}{a-1}$

$=\dfrac{a(a-4)}{(a+3)(a-1)}\times\dfrac{(a+3)(a+2)}{a+1}\times\dfrac{a-1}{(a+2)(a-4)}$

$=\dfrac{a}{a+1}$

답 ②

19 유리함수

03 전략 좌변의 분모를 통분한 후 분자의 동류항의 계수를 비교한다.

풀이 주어진 식의 좌변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{2x+3}+\frac{b}{x-1}=\frac{a(x-1)+b(2x+3)}{(2x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{(a+2b)x+(-a+3b)}{2x^2+x-3} \quad \cdots ❶$$

즉

$$\frac{(a+2b)x+(-a+3b)}{2x^2+x-3}=\frac{7x+3}{2x^2+x-3}$$

이 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a+2b=7,\ -a+3b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=2$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 통분하여 정리할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10%

04 전략 $\dfrac{1}{\frac{A}{B}}=\dfrac{B}{A}$임을 이용하여 유리식을 간단히 한다.

풀이
$$\frac{x-\frac{x}{x+1}}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{\frac{x(x+1)-x}{x+1}}{1-\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}$$
$$=\frac{\frac{x^2+x-x}{x+1}}{1-\frac{x}{x+1}}$$
$$=\frac{\frac{x^2}{x+1}}{\frac{x+1-x}{x+1}}$$
$$=\frac{\frac{x^2}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}$$
$$=\frac{(x+1)x^2}{x+1}$$
$$=x^2$$

답 ④

05 전략 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$의 그래프는 $|k|$의 값이 커질수록 원점으로부터 멀어짐을 이용한다.

풀이 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프는 제2사분면을 지나므로

$a<0$

$y=\dfrac{b}{x}$, $y=\dfrac{c}{x}$의 그래프는 제1사분면을 지나므로

$b>0,\ c>0$

이때 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프가 $y=\dfrac{c}{x}$의 그래프보다 원점에서 멀리 떨어져 있으므로

$|b|>|c| \qquad \therefore b>c\ (\because b>0,\ c>0)$

$\therefore a<c<b$

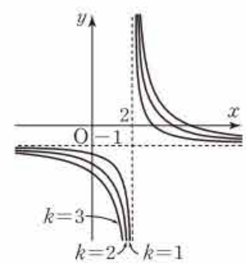
답 ②

06 전략 함수 $y=\dfrac{k}{x-2}-1$의 그래프를 그려 본다.

풀이 ㄱ. $y=\dfrac{k}{x-2}-1$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=-1$

ㄴ. $k>0$이므로 함수 $y=\dfrac{k}{x-2}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 제1, 3, 4사분면을 지난다.



ㄷ. $k>0$이므로 k의 값이 커질수록 그래프가 점 $(2,\ -1)$에서 멀어진다.
따라서 함수의 그래프와 y축과의 교점의 y좌표는 작아진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

07 전략 $y=\dfrac{-2x+5}{x-2}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다.

풀이
$$y=\frac{-2x+5}{x-2}$$
$$=\frac{-2(x-2)+1}{x-2}$$
$$=\frac{1}{x-2}-2$$
$$=\frac{1}{(x-5)+3}+2-4 \quad \cdots ❶$$

이므로 함수 $y=\dfrac{-2x+5}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{x+3}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=5,\ n=-4$이므로 ⋯ ❷

$m+n=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $y=\dfrac{-2x+5}{x-2}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형할 수 있다.	50%
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	10%

08 전략 주어진 정의역에서 함수의 그래프를 이용한다.

풀이 $y=\frac{2x+2}{x+3}=\frac{2(x+3)-4}{x+3}=-\frac{4}{x+3}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

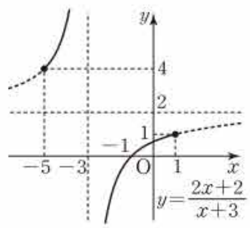
$x=-5$일 때 $y=\frac{-10+2}{-5+3}=4$,

$x=1$일 때 $y=\frac{2+2}{1+3}=1$

이므로 정의역이

$\{x|-5\le x<-3$ 또는 $-3<x\le 1\}$

일 때 $y=\frac{2x+2}{x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은

$\{y|y\le 1$ 또는 $y\ge 4\}$

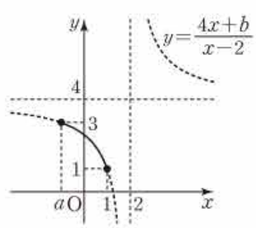
답 ④

09 전략 함수의 그래프를 그린 후 주어진 범위에서 최댓값, 최솟값을 구한다.

풀이 $y=\frac{4x+b}{x-2}=\frac{4(x-2)+8+b}{x-2}=\frac{b+8}{x-2}+4$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\frac{b+8}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

이때 $b+8>0$이므로 $y=\frac{4x+b}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



$x=a$일 때 최댓값 3,

$x=1$일 때 최솟값 1

을 갖는다.

즉 $\frac{4a+b}{a-2}=3$, $\frac{4+b}{-1}=1$이므로

$a=-1$, $b=-5$

답 $a=-1$, $b=-5$

10 전략 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\ne 0)$의 그래프의 점근선의 방정식

➡ $x=p$, $y=q$

풀이 $y=\frac{ax+b}{x-2}=\frac{a(x-2)+2a+b}{x-2}=\frac{2a+b}{x-2}+a$

이므로 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=a$ $\quad\therefore a=6$

또 $y=\frac{6x+b}{x-2}$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=\frac{6+b}{1-2}$ $\quad\therefore b=-7$

$\therefore a-b=13$

답 13

11 전략 유리함수의 그래프는 두 점근선의 교점을 지나면서 기울기가 -1, 1인 직선에 대하여 대칭이다.

풀이 $y=\frac{-3x+7}{x-2}=\frac{-3(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}-3$

이므로 이 함수의 그래프는 점근선의 교점 $(2,\ -3)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore a=2$, $b=-3$ ··· ❶

또 주어진 유리함수의 그래프가 직선 $y=x+c$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x+c$는 점 $(2,\ -3)$을 지난다.

즉 $-3=2+c$에서

$c=-5$ ··· ❷

$\therefore abc=2\cdot(-3)\cdot(-5)=30$ ··· ❸

답 30

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ c의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	10%

12 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수임을 이용한다.

풀이 함수 $y=\frac{x-1}{x+2}$의 그래프와 직선 $y=kx+1$이 한 점에서 만나므로 $\frac{x-1}{x+2}=kx+1$에서

$x-1=(kx+1)(x+2)$

$x-1=kx^2+(1+2k)x+2$

$kx^2+2kx+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3k=0$

$k(k-3)=0$ $\quad\therefore k=3\ (\because k>0)$

답 3

라이트 UP

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D=0 \Longleftrightarrow$ 중근을 갖는다.

③ $D<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

13 전략 $(g\circ f^{-1})^{-1}(a)=f(g^{-1}(a))$임을 이용한다.

풀이 $(g\circ f^{-1})^{-1}(3)=(f\circ g^{-1})(3)=f(g^{-1}(3))$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$이므로

$\frac{2k}{k+1}=3$, $\quad 2k=3k+3$ $\quad\therefore k=-3$

따라서 $g^{-1}(3)=-3$이므로

$$(g\circ f^{-1})^{-1}(3)=f(g^{-1}(3))$$
$$=f(-3)$$
$$=\frac{3\cdot(-3)+1}{-3}$$
$$=\frac{8}{3}$$

답 ③

14 전략 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)(A\neq B)$임을 이용하여 $\frac{1}{f(x)}$을 부분분수로 변형한다.

풀이 $f(x)=4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$이므로

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$
$$=\frac{1}{(2x+1)-(2x-1)}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(49)}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{99}\right)$$
$$=\frac{49}{99}$$

따라서 $p=99$, $q=49$이므로

$$p+q=148$$

답 148

15 전략 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$ 꼴로 변형하여 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.

풀이 $y=-\frac{x}{x+2a}=\frac{-(x+2a)+2a}{x+2a}=\frac{2a}{x+2a}-1$

이므로 점근선의 방정식은

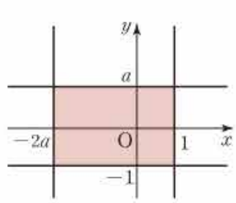
$$x=-2a,\ y=-1$$

$$y=\frac{ax+3}{x-1}=\frac{a(x-1)+a+3}{x-1}=\frac{a+3}{x-1}+a$$

이므로 점근선의 방정식은

$$x=1,\ y=a$$

따라서 두 함수의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로

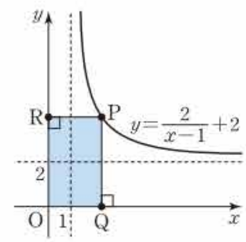


$$(a+1)(2a+1)=45$$
$$2a^2+3a-44=0$$
$$(2a+11)(a-4)=0$$
$$\therefore a=4\ (\because a>0)$$

답 ④

16 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $x>0$에서 정의된 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 함수 $y=\frac{2}{x-1}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$y=\frac{2}{x-1}+2$의 그래프 위의 점 $P\left(t,\ \frac{2}{t-1}+2\right)\ (t>1)$에 대하여 직사각형 ROQP의 넓이 S는 $\quad S=t\left(\frac{2}{t-1}+2\right)$

이때 $t>1$에서 $t-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S=\{(t-1)+1\}\left(\frac{2}{t-1}+2\right)$$
$$=2(t-1)+\frac{2}{t-1}+4$$
$$\geq 2\sqrt{2(t-1)\cdot\frac{2}{t-1}}+4$$
$$=2\cdot 2+4=8\ (\text{단, 등호는 } t=2\text{일 때 성립})$$

따라서 직사각형 ROQP의 넓이의 최솟값은 8이다.

답 ①

라이트 UP

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때, $\quad a+b\geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

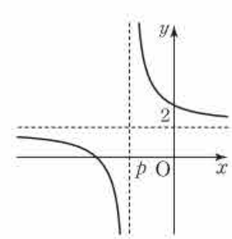
17 전략 $p\leq 0$, $p>0$일 때로 나누어 함수 $y=\frac{5}{x-p}+2$의 그래프를 그려 본다.

풀이 함수 $y=\frac{5}{x-p}+2$의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=p,\ y=2$$

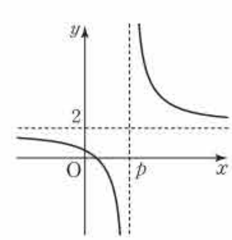
(i) $p\leq 0$일 때,

오른쪽 그림과 같이 p의 값에 관계없이 곡선 $y=\frac{5}{x-p}+2$는 제3사분면을 지난다.



(ii) $p>0$일 때,

곡선 $y=\frac{5}{x-p}+2$가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 한다. 즉



$$\frac{5}{0-p}+2\geq 0 \qquad \therefore p\geq\frac{5}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $p \geq \frac{5}{2}$

따라서 정수 p의 최솟값은 3이다. 답 ①

18 전략 $f^1(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, $\cdots$를 구하여 규칙을 찾아 $f^n(x)$를 추정한다.

풀이 $f(x)=\frac{x}{1-x}$에 대하여

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$$
$$=f\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}$$
$$=\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-x-x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$$
$$f^3(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))$$
$$=f\left(\frac{x}{1-2x}\right)=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}$$
$$=\frac{\frac{x}{1-2x}}{\frac{1-2x-x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}$$
$$\vdots$$
$$\therefore f^n(x)=\frac{x}{1-nx}$$

따라서 $f^{20}(x)=\frac{x}{1-20x}$이므로 $\frac{x}{1-20x}=\frac{ax+b}{cx+1}$에서

$a=1,\ b=0,\ c=-20$

$\therefore a+b+c=-19$ 답 ②

19 전략 주어진 유리함수를 $y=f(x)$로 놓고 x에 대하여 푼 후, x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{x+5}{x-3}=\frac{(x-3)+8}{x-3}=\frac{8}{x-3}+1$

$y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{8}{x-3-a}+1+b \quad \cdots\cdots ㉠ \quad ❶$$

$y=\frac{x+5}{x-3}$로 놓으면

$y(x-3)=x+5$

$(y-1)x=3y+5$

$\therefore x=\frac{3y+5}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면

$$y=\frac{3x+5}{x-1}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{3x+5}{x-1}$$
$$=\frac{3(x-1)+8}{x-1}$$
$$=\frac{8}{x-1}+3 \quad \cdots\cdots ㉡ \quad ❷$$

㉠, ㉡의 그래프가 일치하므로

$-3-a=-1,\ 1+b=3$

$\therefore a=-2,\ b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30%
❷ $f^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	50%
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20%

19 유리함수

20 무리함수

01 무리식

확인 본책 126쪽

1 (1) $x-2\geq 0$, $x+3\geq 0$이므로

$x\geq 2$, $x\geq -3$ $\therefore x\geq 2$

(2) $x-1\geq 0$, $5-x>0$이므로

$x\geq 1$, $x<5$ $\therefore 1\leq x<5$

답 (1) $x\geq 2$ (2) $1\leq x<5$

2 (1) $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})$

$=(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2$

$=x+1-(x-1)=2$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-4}$

답 (1) 2 (2) $\dfrac{2\sqrt{x}}{x-4}$

유제 본책 127~128쪽

1 (1) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$=\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}$

$=\dfrac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)}{x^2-(x^2-1)}$

$=2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}$

(2) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x+2\sqrt{xy}+y+x-2\sqrt{xy}+y}{x-y}$

$=\dfrac{2x+2y}{x-y}$

답 (1) $2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}$ (2) $\dfrac{2x+2y}{x-y}$

2 $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{x+1-(x+2)}$

$=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$

$\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3})}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{x+2-(x+3)}$

$=\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$

$=(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})+(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})$

$=\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}$

답 $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}$

3 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(16)$

$=(1-0)+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=\sqrt{16}=4$

답 4

4 $x+y=2\sqrt{3}$, $x-y=2\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+y}{x-y}$

$=\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

답 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

5 $x=-1+\sqrt{3}$에서 $x+1=\sqrt{3}$

양변을 제곱하면 $x^2+2x+1=3$

따라서 $x^2+2x-2=0$이므로

$x^3+2x^2-2x+1=x(x^2+2x-2)+1$

$=x\cdot 0+1=1$

답 1

02 무리함수

확인 본책 129~130쪽

1 (1) $x+1\geq 0$에서 $x\geq -1$

따라서 주어진 무리함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\geq -1\}$

(2) $2(3-x)\geq 0$에서 $x\leq 3$

따라서 주어진 무리함수의 정의역은

$\{x|x\leq 3\}$

(3) $4x-5\geq 0$에서 $x\geq\frac{5}{4}$

따라서 주어진 무리함수의 정의역은

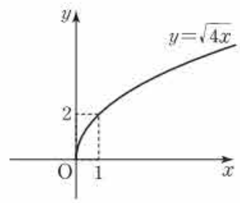
$\left\{x\middle|x\geq\frac{5}{4}\right\}$

답 (1) $\{x|x\geq -1\}$ (2) $\{x|x\leq 3\}$ (3) $\left\{x\middle|x\geq\frac{5}{4}\right\}$

2 (1) $y=\sqrt{4x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역: $\{x|x\geq 0\}$,

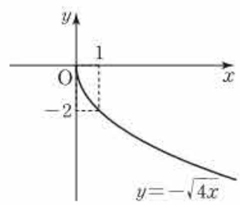
치역: $\{y|y\geq 0\}$



(2) $y=-\sqrt{4x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역: $\{x|x\geq 0\}$,

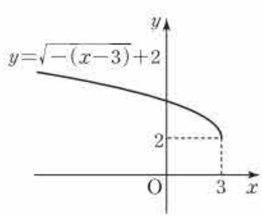
치역: $\{y|y\leq 0\}$



(3) $y=\sqrt{-(x-3)}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역: $\{x|x\leq 3\}$,

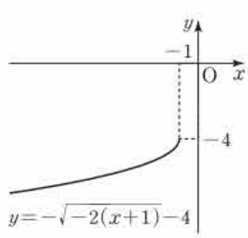
치역: $\{y|y\geq 2\}$



(4) $y=-\sqrt{-2(x+1)}-4$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역: $\{x|x\leq -1\}$,

치역: $\{y|y\leq -4\}$



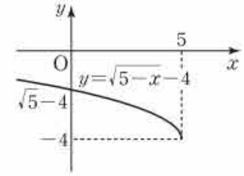
답 풀이 참조

유제 본책 131~135쪽

1 (1) $y=\sqrt{5-x}-4=\sqrt{-(x-5)}-4$

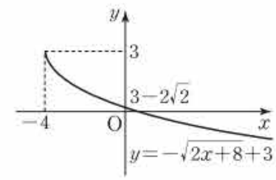
이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\leq 5\}$, 치역은 $\{y|y\geq -4\}$이다.



(2) $y=-\sqrt{2x+8}+3=-\sqrt{2(x+4)}+3$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\geq -4\}$, 치역은 $\{y|y\leq 3\}$이다.

답 풀이 참조

2 $y=\sqrt{-3x+6}-1=\sqrt{-3(x-2)}-1$

이므로 $y=\sqrt{-3x+6}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore a=2, b=-1, k=-3$

답 $a=2, b=-1, k=-3$

3 ㄴ. $y=-\sqrt{2x-6}=-\sqrt{2(x-3)}$

따라서 $y=-\sqrt{2x-6}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 다음 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ. $y=\sqrt{-2x}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이상에서 평행이동 또는 대칭이동하여 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

4 $y=-\sqrt{6-2x}+2=-\sqrt{-2(x-3)}+2$

이므로 $y=-\sqrt{6-2x}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$x=-5$일 때

$y=-\sqrt{6+10}+2=-2$,

$x=1$일 때

$y=-\sqrt{6-2}+2=0$

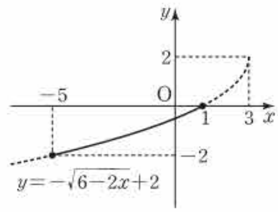
이므로 정의역이

$\{x \mid -5 \le x \le 1\}$일 때

$y=-\sqrt{6-2x}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은

$\{y \mid -2 \le y \le 0\}$



답 $\{y \mid -2 \le y \le 0\}$

5 $y=\sqrt{2x-3}+1=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2 \le x \le 6$에서 $y=\sqrt{2x-3}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

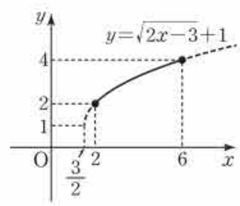
$x=6$일 때

최댓값 $y=\sqrt{12-3}+1=4$,

$x=2$일 때

최솟값 $y=\sqrt{4-3}+1=2$

를 갖는다.



답 최댓값: 4, 최솟값: 2

6 $y=-\sqrt{2x+6}+a=-\sqrt{2(x+3)}+a$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1 \le x \le 5$에서

$y=-\sqrt{2x+6}+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

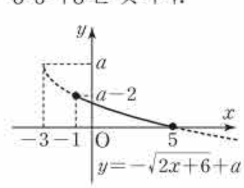
$x=-1$일 때

최댓값 $y=-\sqrt{-2+6}+a=a-2$,

$x=5$일 때

최솟값 $y=-\sqrt{10+6}+a=a-4$

를 갖는다.



즉 $a-4=0$이므로 $\quad a=4$

따라서 구하는 최댓값은 $\quad 4-2=2$

답 2

7 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x-1)}+3 \quad \cdots\cdots ㉠$

으로 놓을 수 있다. ㉠의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=-\sqrt{a(0-1)}+3, \qquad \sqrt{-a}=2$

$-a=4 \qquad \therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-4(x-1)}+3=-\sqrt{-4x+4}+3$

$\therefore b=4, c=3$

답 $a=-4, b=4, c=3$

8 $y=\sqrt{ax}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{5}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a\left(x-\frac{5}{2}\right)}-1$

이 그래프가 점 $(3, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{a\left(3-\frac{5}{2}\right)}-1, \qquad \sqrt{\frac{a}{2}}=2$

$\frac{a}{2}=4 \qquad \therefore a=8$

답 8

9 $ax+4 \ge 0$에서 $\qquad ax \ge -4$

이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x \mid x \le 4\}$이므로 $a<0$이고

$x \le -\frac{4}{a}$에서 $\qquad -\frac{4}{a}=4 \qquad \therefore a=-1$

또 함수 $y=\sqrt{4-x}+b$에서 $\sqrt{4-x} \ge 0$이므로 치역은

$\{y \mid y \ge b\} \qquad \therefore b=2$

답 $a=-1, b=2$

10 함수 $y=\sqrt{9-3x}+1$의 치역이 $\{y \mid y \ge 1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x \mid x \ge 1\}$이다.

$y=\sqrt{9-3x}+1$에서 $\qquad y-1=\sqrt{9-3x}$

양변을 제곱하면 $\qquad (y-1)^2=9-3x$

$\therefore x=-\frac{1}{3}(y-1)^2+3$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=-\frac{1}{3}(x-1)^2+3=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}\ (x \ge 1)$

따라서 $a=\frac{2}{3}, b=\frac{8}{3}, c=1$이므로

$a-b+c=\frac{2}{3}-\frac{8}{3}+1=-1$

답 -1

11 함수 $y=\sqrt{x+a}+b$의 치역이 $\{y \mid y \ge b\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x \mid x \ge b\}$이다.

$y=\sqrt{x+a}+b$에서 $\qquad y-b=\sqrt{x+a}$

양변을 제곱하면 $\qquad (y-b)^2=x+a$

$\therefore x=(y-b)^2-a$

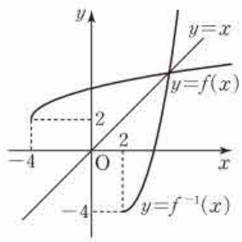
x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=(x-b)^2-a\ (x \ge b)$

함수 $y=(x-b)^2-a\ (x\geq b)$는 $x=b$일 때 최솟값 $-a$를 가지므로 $\quad b=3,\ -a=1$

$\therefore a=-1,\ b=3$ 답 $a=-1,\ b=3$

12 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x+4}+2=x$에서 $\quad \sqrt{x+4}=x-2$

양변을 제곱하면 $\quad x+4=(x-2)^2$

$x+4=x^2-4x+4,\quad x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$

이때 함수 $f(x)=\sqrt{x+4}+2$의 치역이 $\{y\,|\,y\geq 2\}$이므로 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 2\}$이다.

$\therefore x=5\ (\because x\geq 2)$

따라서 교점의 좌표는 $\quad (5,\ 5)$ 답 $(5,\ 5)$

13 $\sqrt{2x+4}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x+4=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

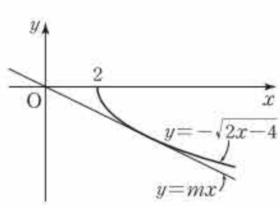
$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-4)=0$

$-2k+5=0 \quad \therefore k=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

14 $y=-\sqrt{2x-4}=-\sqrt{2(x-2)}$

이므로 $y=-\sqrt{2x-4}$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=mx$는 기울기가 m이고 원점을 지난다.

이때 $A\cap B=\varnothing$이므로 $y=-\sqrt{2x-4}$의 그래프와 직선 $y=mx$가 만나지 않아야 한다.



$y=-\sqrt{2x-4}$의 그래프와 직선 $y=mx$가 접할 때,

$-\sqrt{2x-4}=mx$의 양변을 제곱하면

$2x-4=m^2x^2$

$\therefore m^2x^2-2x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-4m^2=0$

$m^2=\frac{1}{4} \quad \therefore m=-\frac{1}{2}\ (\because m<0)$

따라서 $y=-\sqrt{2x-4}$의 그래프와 직선 $y=mx$가 만나지 않으려면 $\quad m<-\frac{1}{2}$ 답 $m<-\frac{1}{2}$

중단원 연습 문제

본책 136~138쪽

01 ③	**02** ④	**03** ④	**04** 9	**05** ②
06 26	**07** 29	**08** $(-4,\ -1)$		**09** ②
10 ③	**11** 30	**12** 1	**13** 4	**14** ④
15 ④	**16** ②	**17** 48	**18** 16	**19** $\frac{9}{4}$
20 ②				

01 전략 두 무리식 $\sqrt{2x-5}$, $\frac{1}{\sqrt{6-x}}$의 값이 실수가 될 조건을 각각 구하여 공통 범위를 구한다.

풀이 $2x-5\geq 0$에서 $\quad 2x\geq 5$

$\therefore x\geq \frac{5}{2}$ ······ ㉠

$6-x>0$에서 $\quad x<6$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad \frac{5}{2}\leq x<6$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$3+4+5=12$ 답 ③

02 전략 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$임을 이용하여 분모를 유리화한다.

풀이 $\frac{x}{\sqrt{2x+1}-1}-\frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}$

$=\frac{x(\sqrt{2x+1}+1)-x(\sqrt{2x+1}-1)}{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}$

$=\frac{x\sqrt{2x+1}+x-x\sqrt{2x+1}+x}{(2x+1)-1}$

$=\frac{2x}{2x}=1$ 답 ④

03 전략 주어진 식을 간단히 한 후 미지수의 값을 대입한다.

풀이 $x=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$

$y=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$

이므로 $\quad x+y=4,\ xy=1,\ x-y=2\sqrt{3}$

$$\therefore \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$
$$=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$$
$$=\frac{4+2}{2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{6\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{3}$$

답 ④

04 전략 주어진 함수의 그래프를 평행이동과 대칭이동하여 함수 $f(x)$를 구한다.

풀이 함수 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{4(x+3)}+5$ ⋯ ❶

이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{4(-x+3)}+5$

$=\sqrt{-4x+12}+5$ ⋯ ❷

이 함수의 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치하므로

$f(x)=\sqrt{-4x+12}+5$

$\therefore f(-1)=\sqrt{(-4)\cdot(-1)+12}+5$

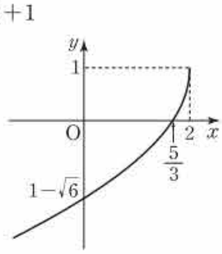
$=4+5=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40%
❷ 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40%
❸ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

05 전략 주어진 함수의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그린다.

풀이 $y=-\sqrt{6-3x}+1=-\sqrt{-3(x-2)}+1$



① $y=-\sqrt{6-3x}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

② $x=\frac{5}{3}$일 때 $y=-\sqrt{6-3\cdot\frac{5}{3}}+1=0$

이므로 그래프는 x축과 점 $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$에서 만난다.

③ 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.

④, ⑤ 위의 그림에서 정의역은 $\{x|x\le 2\}$, 치역은 $\{y|y\le 1\}$이다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

06 전략 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a<0)$의 정의역은 $\left\{x \middle| x\le -\frac{b}{a}\right\}$, 치역은 $\{y|y\ge c\}$임을 이용한다.

풀이 $5-2x\ge 0$이므로 $x\le\frac{5}{2}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x \middle| x\le\frac{5}{2}\right\}$이므로

$a=\frac{5}{2}$ ⋯ ❶

또 $\sqrt{5-2x}\ge 0$이므로 주어진 함수의 치역은

$\{y|y\ge 1-3b\}$

즉 $1-3b=-2$이므로 $b=1$ ⋯ ❷

$\therefore 10a+b=10\cdot\frac{5}{2}+1=26$ ⋯ ❸

답 26

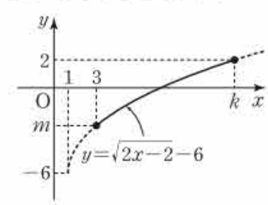
채점 기준	비율
❶ 정의역을 이용하여 a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 치역을 이용하여 b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $10a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

07 전략 주어진 함수의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그린다.

풀이 $y=\sqrt{2x-2}-6=\sqrt{2(x-1)}-6$

이므로 $y=\sqrt{2x-2}-6$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $3\le x\le k$에서 주어진 무리함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=3$일 때 최솟값 m을 가지므로

$m=\sqrt{2\cdot 3-2}-6$

$=2-6=-4$

$x=k$일 때 최댓값 2를 가지므로

$\sqrt{2k-2}-6=2,\quad \sqrt{2k-2}=8$

$2k-2=64\quad \therefore k=33$

$\therefore k+m=29$

답 29

라이트 UP

무리함수의 최대·최소

정의역이 $\{x|p\le x\le q\}$인 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$의 최대·최소

① $a>0$이면 최솟값은 $f(p)$, 최댓값은 $f(q)$

② $a<0$이면 최솟값은 $f(q)$, 최댓값은 $f(p)$

08 전략 주어진 함수의 그래프의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 나타낸 후 상수 a, b, c의 값을 구한다.

풀이 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x-4)}-3$ ⋯⋯ ㉠

으로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=\sqrt{a(0-4)}-3$, $\quad\sqrt{-4a}=2$

$-4a=4 \quad \therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-(x-4)}-3=\sqrt{-x+4}-3$

$\therefore b=4, c=-3$

$y=\dfrac{ax+c}{x+b}$에서

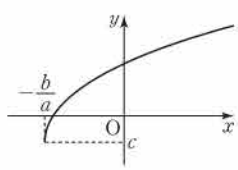
$y=\dfrac{-x-3}{x+4}=\dfrac{-(x+4)+1}{x+4}=\dfrac{1}{x+4}-1$

따라서 점근선의 방정식은 $x=-4$, $y=-1$이므로 점근선의 교점의 좌표는 $(-4, -1)$ 답 $(-4, -1)$

09 전략 제1, 2, 3사분면을 지나는 무리함수의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 제1, 2, 3사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a>0$, $-\dfrac{b}{a}<0$, $c<0$

$\therefore a>0, b>0, c<0$ 답 ②

10 전략 역함수의 정의역은 원래 함수의 치역과 같음을 이용한다.

풀이 $y=-\sqrt{4x-1}+2$의 치역이 $\{y\,|\,y\leq 2\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\leq 2\}$

$y=-\sqrt{4x-1}+2$에서 $\quad\sqrt{4x-1}=2-y$

양변을 제곱하면 $\quad 4x-1=(2-y)^2$

$4x=(2-y)^2+1$

$\therefore x=\dfrac{1}{4}(2-y)^2+\dfrac{1}{4}$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=\dfrac{1}{4}(2-x)^2+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}x^2-x+\dfrac{5}{4}\ (x\leq 2)$

따라서 $a=-1$, $b=\dfrac{5}{4}$, $c=2$이므로

$a+4b+c=(-1)+4\cdot\dfrac{5}{4}+2=6$ 답 ③

11 전략 $f^{-1}(a)=b \Longleftrightarrow f(b)=a$임을 이용한다.

풀이 무리함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(4, 3)$을 지나므로

$\sqrt{4a+b}=3$

$\therefore 4a+b=9$ …… ㉠ ➊

$y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(4, 3)$을 지나므로 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(3, 4)$를 지난다.

즉 $\sqrt{3a+b}=4$이므로 $\quad 3a+b=16$ …… ㉡ ➋

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-7, b=37$

$\therefore a+b=(-7)+37=30$ ➌

답 30

채점 기준	비율
➊ $y=f(x)$의 그래프가 점 $(4, 3)$을 지남을 이용하여 식을 세울 수 있다.	40%
➋ $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3, 4)$를 지남을 이용하여 식을 세울 수 있다.	40%
➌ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

다른 풀이 무리함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(4, 3)$을 지나므로

$\sqrt{4a+b}=3$

$\therefore 4a+b=9$ …… ㉠

$y=\sqrt{ax+b}$의 역함수를 구하면

$y=\dfrac{1}{a}x^2-\dfrac{b}{a}\ (x\geq 0)$

역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(4, 3)$을 지나므로

$3=\dfrac{16}{a}-\dfrac{b}{a}$

$\therefore 3a+b=16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-7, b=37$

$\therefore a+b=(-7)+37=30$

12 전략 합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 구하는 식을 간단히 한다.

풀이 $(g^{-1}\circ f)^{-1}(4)=(f^{-1}\circ g)(4)$

$=f^{-1}(g(4))$

이고 $g(4)=\dfrac{4}{4-2}=2$이므로

$f^{-1}(g(4))=f^{-1}(2)$

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

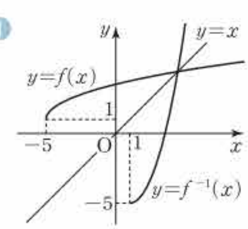
$\sqrt{2k-1}+1=2$, $\quad\sqrt{2k-1}=1$

$2k-1=1 \quad \therefore k=1$

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(4)=f^{-1}(2)=1$ 답 1

13 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

풀이



20 무리함수

$y=f(x)$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{x+5}+1$

$\therefore f(x)=\sqrt{x+5}+1$ ⋯ ❶

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다. ⋯ ❷

$\sqrt{x+5}+1=x$에서 $\quad x-1=\sqrt{x+5}$

양변을 제곱하면 $\quad (x-1)^2=x+5$

$x^2-2x+1=x+5,\quad x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

이때 함수 $f(x)=\sqrt{x+5}+1$의 치역이 $\{y\,|\,y\geq 1\}$이므로 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 1\}$이다.

$\therefore x=4\ (\because x\geq 1)$

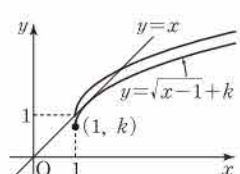
따라서 구하는 교점의 x좌표는 4이다. ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=f(x)$를 구할 수 있다.	20%
❷ $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같음을 알 수 있다.	40%
❸ 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40%

14 전략 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}+k$의 그래프와 직선 $y=x$가 두 점에서 만나도록 하는 상수 k의 조건을 구한다.

풀이 무리함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 $y=\sqrt{x-1}+k$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



따라서 $y=\sqrt{x-1}+k$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 최댓값은 1이다. 답 ④

15 전략 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하면 이차방정식 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$의 판별식 D에 대하여 $D=0$임을 이용한다.

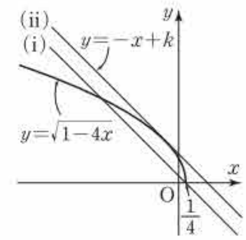
풀이 $y=\sqrt{1-4x}=\sqrt{-4\left(x-\frac{1}{4}\right)}$

이므로 $y=\sqrt{1-4x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.

(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$을 지날 때,

$0=-\frac{1}{4}+k$

$\therefore k=\frac{1}{4}$



(ii) $y=\sqrt{1-4x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때,

$\sqrt{1-4x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$1-4x=(-x+k)^2$

$1-4x=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(2-k)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2-k)^2-(k^2-1)=0$

$5-4k=0$

$\therefore k=\frac{5}{4}$

함수 $y=\sqrt{1-4x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 한 점에서 만나려면 직선이 (i)보다 아래쪽에 있거나 (ii)이어야 하므로

$k<\frac{1}{4}$ 또는 $k=\frac{5}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 k의 값이 아닌 것은 ④이다.

답 ④

16 전략 주어진 미지수의 값을 이용하여 주어진 식을 간단히 정리한다.

풀이 $x^2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}$이므로

$x^2-5=-2\sqrt{6}$

양변을 제곱하면 $\quad x^4-10x^2+25=24$

따라서 $x^4-10x^2+1=0$이므로

$x^4-11x^2+6=(x^4-10x^2+1)-(x^2-5)$

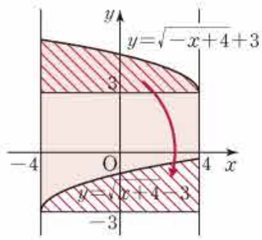
$=0-(-2\sqrt{6})$

$=2\sqrt{6}$ 답 ②

17 전략 두 그래프의 관계를 이용하여 두 그래프와 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

풀이 $y=\sqrt{x+4}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

또 $y=\sqrt{-x+4}+3=\sqrt{-(x-4)}+3$이므로 $y=\sqrt{-x+4}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



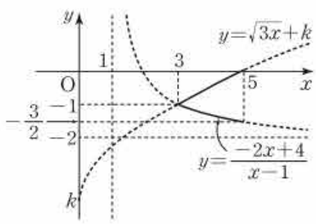
빗금친 두 부분의 넓이가 같으므로 위의 그림과 같이 도형을 이동시키면 구하는 도형의 넓이는

$\{3-(-3)\}\cdot\{4-(-4)\}=6\cdot 8=48$ 답 48

18 전략 주어진 범위에서 함수 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}$의 그래프를 그려서 두 그래프가 한 점에서 만날 조건을 구한다.

풀이 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}-2$

이므로 $3\le x\le 5$에서 정의된 두 함수 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}$, $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 점 $(3,\ -1)$을 지날 때, 실수 k가 최댓값을 가지므로

$-1=\sqrt{3\cdot 3}+k$ $\quad\therefore k=-4$

따라서 $M=-4$이므로

$M^2=16$ 답 16

19 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 접함을 이용한다.

풀이 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{(x-a)+2}=\sqrt{x-a+2}$ ··· ❶

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$도 접한다.

$\sqrt{x-a+2}=x$에서 양변을 제곱하면

$x-a+2=x^2$

$\therefore x^2-x+a-2=0$ ··· ❷

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4(a-2)=0,\quad 9-4a=0$

$\therefore a=\dfrac{9}{4}$ ··· ❸

답 $\dfrac{9}{4}$

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30%
❷ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하는 이차방정식을 세울 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

20 전략 $f^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ f)^{-1}$임을 이용한다.

풀이 $f^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ f)^{-1}$이므로

$(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=25$에서 $\quad (f\circ f)^{-1}(a)=25$

$\therefore (f\circ f)(25)=a$

이때 $f(25)=1-\sqrt{25}=1-5=-4$이고

$f(-4)=\sqrt{1-(-4)}=\sqrt{5}$이므로

$a=(f\circ f)(25)=f(f(25))$

$=f(-4)=\sqrt{5}$

답 ②

21 순열과 조합

01 경우의 수

확인 본책 140쪽

1 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 6인 경우는

$(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$의 5가지

(ii) 눈의 수의 합이 9인 경우는

$(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3)$의 4가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$5+4=9$ 답 9

2 A주사위에서 소수의 눈이 나오는 경우는

2, 3, 5의 3가지

B주사위에서 4 이하의 눈이 나오는 경우는

1, 2, 3, 4의 4가지

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times4=12$ 답 12

유제 본책 141~144쪽

1 두 개의 주머니에서 꺼낸 공에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 적힌 수의 차가 0인 경우는

$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5)$의 5가지

(ii) 적힌 수의 차가 1인 경우는

$(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (4,\ 3),\ (3,\ 2),$
$(2,\ 1)$의 8가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$5+8=13$ 답 13

2 (i) 2로 나누어떨어지는 수, 즉 2의 배수는

$2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 50$의 25개

(ii) 7로 나누어떨어지는 수, 즉 7의 배수는

$7,\ 14,\ 21,\ \cdots,\ 49$의 7개

(iii) 2와 7로 나누어떨어지는 수, 즉 14의 배수는

14, 28, 42의 3개

이상에서 구하는 수의 개수는

$25+7-3=29$ 답 29

3 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

2, 3, 5, 7의 4개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 3, 5, 7, 9의 5개

따라서 구하는 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times5=20$ 답 20

4 100과 150의 양의 공약수의 개수는 100과 150의 최대공약수의 양의 약수의 개수와 같다.

100과 150의 최대공약수는 50이고, 50을 소인수분해하면

$50=2\times5^2$

이므로 50의 양의 약수는

$2^m\times5^n\ (m=0,\ 1,\ n=0,\ 1,\ 2)$

으로 나타낼 수 있다.

이때 m을 택하는 경우의 수는 2이고, 그 각각에 대하여 n을 택하는 경우의 수는 3이다.

따라서 100과 150의 양의 공약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times3=6$ 답 6

5 $(a-b+c)(p+q+r)$에서 $a,\ -b,\ c$ 중 어느 하나를 택하면 그 각각에 대하여 $p,\ q,\ r$의 3가지의 선택이 가능하므로 항의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times3=9$

$(d+e)(x-y)$에서 $d,\ e$ 중 어느 하나를 택하면 그 각각에 대하여 $x,\ -y$의 2가지의 선택이 가능하므로 항의 개수는 곱의 법칙에 의하여 $2\times2=4$

이때 곱해지는 각 항이 모두 서로 다른 문자이므로 동류항은 없다.

따라서 구하는 항의 개수는 합의 법칙에 의하여

$9+4=13$ 답 13

6 (i) $\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{D}$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times2=4$

(ii) $\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times3=9$

(iii) $\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times1\times3=6$

(iv) $\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{B}\to\mathrm{D}$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times1\times2=6$

(i) ~ (iv)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

$4+9+6+6=25$ 답 25

7 (i) 태민이가 A → B → D로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $4\times3=12$

유리가 A → C → D로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times2=4$

따라서 태민이가 A → B → D, 유리가 A → C → D로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$12\times4=48$

(ii) 태민이가 A → C → D로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\times2=4$

유리가 A → B → D로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times3=12$

따라서 태민이가 A → C → D, 유리가 A → B → D로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times12=48$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

$48+48=96$ 답 96

8 주어진 그림에서 거실, 방 1, 방 2, 화장실, 방 3의 순서로 색을 칠할 때, 거실에 칠할 수 있는 색은 6가지, 방 1에 칠할 수 있는 색은 거실에 칠한 색을 제외한 5가지, 방 2에 칠할 수 있는 색은 거실, 방 1에 칠한 색을 제외한 4가지, 화장실에 칠할 수 있는 색은 거실, 방 2에 칠한 색을 제외한 4가지, 방 3에 칠할 수 있는 색은 거실, 화장실에 칠한 색을 제외한 4가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6\times5\times4\times4\times4=1920$ 답 1920

9 (i) A, E에 같은 색을 칠하는 경우

A, E, B, C, D에 칠할 수 있는 색은 각각 5가지, 1가지, 4가지, 3가지, 3가지이므로 칠하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$5\times1\times4\times3\times3=180$

(ii) A, E에 다른 색을 칠하는 경우

A, E, B, C, D에 칠할 수 있는 색은 각각 5가지, 4가지, 3가지, 3가지, 2가지이므로 칠하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$5\times4\times3\times3\times2=360$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

$180+360=540$ 답 540

02 순열

확인 본책 145~146쪽

1 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_6P_3=6\cdot5\cdot4=120$ 답 120

2 (1) $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

(2) $6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$

(3) $1!=1$

(4) $3!\cdot0!=3\cdot2\cdot1\cdot1=6$

답 (1) 24 (2) 720 (3) 1 (4) 6

3 (1) ${}_3P_1=3$

(2) ${}_8P_0=1$

(3) ${}_7P_3=7\cdot6\cdot5=210$

(4) ${}_4P_2\cdot2!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

답 (1) 3 (2) 1 (3) 210 (4) 24

유제 본책 147~152쪽

1 (1) ${}_nP_2=n(n-1)$이므로 ${}_nP_2=6n$에서

$n(n-1)=6n$

$n\geq2$이므로 $n-1=6$ $\therefore n=7$

(2) ${}_nP_3 : {}_{n+2}P_3=7 : 15$에서 $15{}_nP_3=7{}_{n+2}P_3$

$15n(n-1)(n-2)=7(n+2)(n+1)n$

$n\geq3$이므로

$15(n-1)(n-2)=7(n+2)(n+1)$

$8n^2-66n+16=0,\quad 4n^2-33n+8=0$

$(4n-1)(n-8)=0 \quad \therefore n=8$

(3) ${}_nP_2+{}_{n+1}P_2=n(n-1)+(n+1)n$이므로 ${}_nP_2+{}_{n+1}P_2=72$에서

$n(n-1)+(n+1)n=72,\quad 2n^2=72$

$n^2=36 \quad \therefore n=6\ (\because n\geq2)$

(4) ${}_5P_r\cdot3!=360$에서 ${}_5P_r\cdot6=360$

$\therefore {}_5P_r=60$

$60=5\cdot4\cdot3$이므로 $r=3$

답 (1) 7 (2) 8 (3) 6 (4) 3

2 (1) $n\cdot{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{\{n-1-(r-1)\}!}$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$={}_n\mathrm{P}_r$$

(2) ${}_{n-1}\mathrm{P}_r+r\cdot{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}=\dfrac{(n-1)!}{(n-1-r)!}+r\cdot\dfrac{(n-1)!}{\{n-1-(r-1)\}!}$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}+\frac{r\cdot(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{(n-r)\cdot(n-1)!}{(n-r)!}+\frac{r\cdot(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{(n-r+r)\cdot(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$={}_n\mathrm{P}_r$$

답 풀이 참조

3 서로 다른 6개에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{P}_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$ 답 360

4 (1) 서로 다른 9개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_9\mathrm{P}_3=9\cdot8\cdot7=504$

(2) 속초를 제외한 8곳에서 두 번째, 세 번째에 여행할 곳을 각각 1곳씩 뽑으면 된다.

따라서 서로 다른 8개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_8\mathrm{P}_2=8\cdot7=56$ 답 (1) 504 (2) 56

5 n명의 사람 중 3명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수는 서로 다른 n개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_n\mathrm{P}_3=720$, $n(n-1)(n-2)=10\cdot9\cdot8$

$\therefore n=10$ 답 10

6 (1) A, B를 한 묶음으로 생각하여 4개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

A, B가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot2=48$

(2) A, B, E를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$3!=6$

A, B, E의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중에서 2개의 자리에 C, D를 일렬로 나열하는 방법의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot12=72$ 답 (1) 48 (2) 72

다른 풀이 (2) 5개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$5!=120$

C, D가 이웃하도록 나열하는 방법의 수가 $4!\cdot2!=48$이므로 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는

$120-48=72$

7 (i) 청소년, 어린이의 순서로 번갈아 서는 방법의 수는

$3!\cdot3!=36$

(ii) 어린이, 청소년의 순서로 번갈아 서는 방법의 수는

$3!\cdot3!=36$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$36+36=72$ 답 72

8 (1) 민기를 맨 처음에, 동호를 맨 마지막에 고정시키고, 나머지 4명을 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$4!=24$

(2) 민기와 동호 사이에 민기와 동호를 제외한 4명 중 3명을 택하여 일렬로 세우는 방법의 수는

${}_4\mathrm{P}_3=24$

'민기□□□동호'를 한 사람으로 생각하여 2명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$2!=2$

이때 민기와 동호가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot2\cdot2=96$ 답 (1) 24 (2) 96

9 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는 전체 순열의 수에서 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수를 빼면 된다.

전체 순열의 수는 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수이므로

$6!=720$

양 끝에 자음인 t, r, v, l의 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하는 방법의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=12$

가운데에 나머지 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-12\cdot24=432$ 답 432

10 (1) 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이다. 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$4\cdot{}_4P_3=96$

(2) 홀수이려면 일의 자리의 숫자가 1 또는 3이어야 한다. 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지이고, 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 홀수의 개수는

$2\cdot3\cdot{}_3P_2=36$ 답 (1) 96 (2) 36

11 천의 자리와 일의 자리에는 2, 4, 6의 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_3P_2=6$

백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6\cdot12=72$ 답 72

12 4의 배수이려면 끝의 두 자리 수가 4의 배수이어야 한다.

(i) □04, □20, □40인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 3가지이므로

$3\cdot3=9$

(ii) □12, □24, □32인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 십의 자리, 일의 자리에 온 숫자를 제외한 2가지이므로

$3\cdot2=6$

(i), (ii)에서 구하는 4의 배수의 개수는

$9+6=15$ 답 15

라이트 UP

배수의 판정

① 2의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 2의 배수인 수
② 3의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 수
③ 4의 배수: 끝의 두 자리 수가 4의 배수인 수
④ 5의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 5인 수
⑤ 9의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 9의 배수인 수

13 'ㄱ□□□□' 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

'ㄴㄱ□□□' 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$

'ㄴㄷ□□□' 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$

'ㄴㄹ□□□' 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$

'ㄴㅁ□□□' 꼴인 문자열을 순서대로 나열하면

'ㄴㅁㄱㄷㄹ', 'ㄴㅁㄱㄹㄷ', 'ㄴㅁㄷㄱㄹ', ⋯

즉 'ㄴㅁㄷㄱㄹ'은 'ㄴㅁ□□□' 꼴에서 세 번째에 오는 문자열이므로

$24+6+6+6+3=45$(번째) 답 45번째

14 (1) 1□□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$5!=120$

2□□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$5!=120$

30□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$4!=24$

31□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$4!=24$

320□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$3!=6$

321□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$3!=6$

이때 $120+120+24+24+6+6=300$이므로 301번째 수는 324015이다.

(2) 34□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$4!=24$

35□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$4!=24$

4□□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$5!=120$

5□□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$5!=120$

따라서 340000보다 큰 자연수의 개수는

$24+24+120+120=288$

답 (1) 324015 (2) 288

03 조합

확인 본책 154~155쪽

1 (1) ${}_4C_2=\dfrac{{}_4P_2}{2!}=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

(2) ${}_6C_3=\dfrac{{}_6P_3}{3!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$

(3) ${}_7C_0=1$

(4) ${}_9C_9=\frac{{}_9P_9}{9!}=\frac{9!}{9!}=1$ 답 (1) 6 (2) 20 (3) 1 (4) 1

2 (1) ${}_8C_3=\frac{{}_8P_3}{3!}=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$

(2) ${}_7C_5=\frac{{}_7P_5}{5!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=21$ 답 (1) 56 (2) 21

3 (1) ${}_5C_4={}_5C_1=5$

(2) ${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

(3) ${}_6C_3+{}_6C_2={}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$

(4) ${}_8C_7+{}_8C_6={}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}=36$

답 (1) 5 (2) 15 (3) 35 (4) 36

4 (1) ${}_6C_1\cdot{}_5C_5=6$

(2) ${}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=15$

(3) ${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}\cdot3!=90$ 답 (1) 6 (2) 15 (3) 90

유제 본책 156~161쪽

1 (1) ${}_nC_4=\frac{{}_nP_4}{4!}=70$이므로

${}_nP_4=70\cdot4!=8\cdot7\cdot6\cdot5$

$\therefore n=8$

(2) ${}_nC_2={}_nC_{n-2}$이므로 ${}_nC_2={}_nC_6$에서 ${}_nC_{n-2}={}_nC_6$

따라서 $n-2=6$이므로 $n=8$

(3) ${}_{n+1}C_2-{}_nC_2=6$에서 $\frac{(n+1)n}{2\cdot1}-\frac{n(n-1)}{2\cdot1}=6$

$n^2+n-n^2+n=12,\quad 2n=12$

$\therefore n=6$

(4) ${}_nP_3+2\cdot{}_nC_3=n(n-1)(n-2)+2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}$

$=\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)$

이므로 $\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)=80$

$n(n-1)(n-2)=60=5\cdot4\cdot3 \quad \therefore n=5$

답 (1) 8 (2) 8 (3) 6 (4) 5

2 ${}_{12}C_{r+1}={}_{12}C_{2r-1}$에서

$r+1=2r-1$ 또는 $(r+1)+(2r-1)=12$

(i) $r+1=2r-1$일 때,

$r=2$

(ii) $(r+1)+(2r-1)=12$일 때,

$3r=12 \quad \therefore r=4$

(i), (ii)에서 $r=2$ 또는 $r=4$ 답 2, 4

3 $r\cdot{}_nC_r=r\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$

$n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{n-1-(r-1)\}!}$

$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$

$\therefore r\cdot{}_nC_r=n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$ 답 풀이 참조

4 서로 다른 볼펜 5자루 중에서 3자루를 꺼내는 방법의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

서로 다른 연필 4자루 중에서 2자루를 꺼내는 방법의 수는

${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot6=60$ 답 60

5 B, C를 제외한 8명의 학생 중에서 A를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 7명의 학생 중에서 4명을 뽑으면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_7C_4={}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

6 9개의 공 중에서 4개를 꺼내는 방법의 수는

${}_9C_4=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$

4개의 공 모두 홀수가 적힌 공을 꺼내는 방법의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

4개의 공 모두 짝수가 적힌 공을 꺼내는 방법의 수는

${}_4C_4=1$

따라서 구하는 방법의 수는

$126-5-1=120$ 답 120

7 1부터 7까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7의 4개, 짝수는 2, 4, 6의 3개이므로 홀수 2개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_2=6$

짝수 3개를 택하는 방법의 수는

${}_3C_3=1$

5개의 자연수를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6\cdot1\cdot120=720$ 답 720

8 (1) 7명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_{7}C_{3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$

위의 각각의 경우에 대하여 뽑힌 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$35\cdot6=210$

(2) 종현이와 민현이를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

종현이와 민현이를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!$이고, 그 각각의 경우에 대하여 종현이와 민현이가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!$이므로

$4!\cdot2!=48$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot48=480$ 답 (1) 210 (2) 480

다른 풀이 (1) 서로 다른 7개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로 $_{7}P_{3}=210$

9 빨간색 꽃 5송이 중 4송이를 고르는 방법의 수는

$_{5}C_{4}={}_{5}C_{1}=5$

노란색 꽃 4송이 중 3송이를 고르는 방법의 수는

$_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$

고른 빨간색 꽃 4송이를 일렬로 심고 그 사이사이에 노란색 꽃 3송이를 일렬로 심는 방법의 수는

$4!\cdot3!=144$

따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot4\cdot144=2880$ 답 2880

10 (1) 9개의 점에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_{9}C_{2}=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}=36$

직선 l_1 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_{4}C_{2}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

직선 l_2 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_{5}C_{2}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

이때 일직선 위에 있는 두 점을 연결하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$36-6-10+2=22$

(2) 9개의 점에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_{9}C_{3}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$

직선 l_1 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$

직선 l_2 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

이때 일직선 위에 있는 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-4-10=70$ 답 (1) 22 (2) 70

11 9개의 점에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_{9}C_{3}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$

이고, 일직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이다.

이때 일직선 위에 있는 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-3\cdot4=72$ 답 72

12 구하는 대각선의 개수는 6개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 6을 뺀 것과 같으므로

$_{6}C_{2}-6=15-6=9$ 답 9

라이트 UP

n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 변의 개수인 n을 뺀 것과 같다.

➡ $_{n}C_{2}-n$

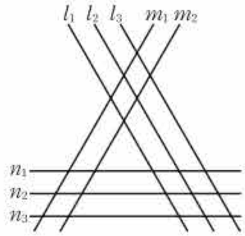
13 가로 방향의 평행한 직선 3개 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 $_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$

세로 방향의 평행한 직선 6개 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_{6}C_{2}=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

가로 방향의 평행한 직선 2개와 세로 방향의 평행한 직선 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는 $3\cdot15=45$ 답 45

14 오른쪽 그림과 같이 평행한 직선을 l_i, m_j, n_k ($i=1, 2, 3$, $j=1, 2$, $k=1, 2, 3$)라 하자.



(i) l_1, l_2, l_3 중에서 2개를 택하고, m_1, m_2를 택하는 방법의 수는

$${}_3C_2 \cdot {}_2C_2 = 3 \cdot 1 = 3$$

(ii) m_1, m_2를 택하고, n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_2C_2 \cdot {}_3C_2 = 1 \cdot 3 = 3$$

(iii) n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하고, l_1, l_2, l_3 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_3C_2 \cdot {}_3C_2 = 3 \cdot 3 = 9$$

이상에서 구하는 평행사변형의 개수는

$$3+3+9=15$$

답 15

15 (1) 가로선 4개 중에서 2개, 세로선 6개 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어지므로 구하는 직사각형의 개수는

$${}_4C_2 \cdot {}_6C_2 = 6 \cdot 15 = 90$$

(2) 가장 작은 정사각형 1개, 4개, 9개로 이루어진 정사각형의 개수는 각각

$$5 \cdot 3 = 15,\ 4 \cdot 2 = 8,\ 3 \cdot 1 = 3$$

이므로 정사각형의 개수는

$$15+8+3=26$$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$$90-26=64$$

답 (1) 90 (2) 64

16 (1) 9명의 학생을 1명, 4명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$${}_9C_1 \cdot {}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 315$$

3개의 조가 갈 봉사활동 장소를 정하는 방법의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$315 \cdot 6 = 1890$$

(2) 9명의 학생을 3명, 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 280$$

3개의 조가 갈 봉사활동 장소를 정하는 방법의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$280 \cdot 6 = 1680$$

답 (1) 1890 (2) 1680

17 6명을 1대에 적어도 2명이 타도록 나누는 방법은 (2명, 4명), (3명, 3명)의 두 가지이다.

(i) 2명, 4명으로 분할하여 2대에 나누어 타는 방법의 수는

$$({}_6C_2 \cdot {}_4C_4) \cdot 2! = 30$$

(ii) 3명, 3명으로 분할하여 2대에 나누어 타는 방법의 수는

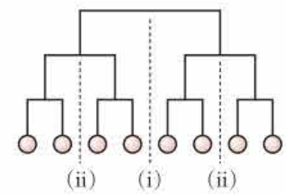
$$\left({}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!}\right) \cdot 2! = 20$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$$30+20=50$$

답 50

18 (i) 8개의 학급을 4개의 학급, 4개의 학급으로 나누는 방법의 수는



$${}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 35$$

(ii) 4개의 학급을 2개의 학급, 2개의 학급으로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 3$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$$35 \cdot 3 \cdot 3 = 315$$

답 315

중단원 연습 문제

본책 162~165쪽

01 33	**02** 21	**03** ④	**04** ⑤	**05** 240
06 91	**07** 8	**08** 36	**09** ⑤	**10** ④
11 288	**12** ④	**13** 60	**14** 270	**15** 5
16 ④	**17** ①	**18** 205	**19** ②	**20** 360
21 15	**22** 0	**23** ④	**24** 45	**25** 11
26 264	**27** 2520	**28** 450	**29** 62	**30** 11340

01 전략 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고 동시에 일어나는 경우의 수가 l이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n-l$임을 이용한다.

풀이 (i) 4의 배수는

$$4, 8, 12, \cdots, 100\text{의 } 25\text{개}$$

(ii) 6의 배수는

$$6, 12, 18, \cdots, 96\text{의 } 16\text{개}$$

(iii) 4와 6의 공배수인 12의 배수는

$$12, 24, 36, \cdots, 96\text{의 } 8\text{개}$$

이상에서 4의 배수 또는 6의 배수의 개수는

$$25+16-8=33$$

답 33

02 전략 곱의 법칙을 이용하여 서로 다른 항의 개수를 구한다.

풀이 $(a+b)(x+y+z)(p+q)$에서 a, b 중 어느 하나를 택하면 그 각각에 대하여 x, y, z의 3가지의 선택이 가능하고, 이들 각각에 대하여 p, q의 2가지의 선택이 가능하므로

$m=2\cdot3\cdot2=12$ ⋯ ❶

$(a+b)^2(x+y+z)$에서

$(a+b)^2(x+y+z)=(a^2+2ab+b^2)(x+y+z)$

이므로 a^2, $2ab$, b^2 중 어느 하나를 택하면 그 각각에 대하여 x, y, z의 3가지의 선택이 가능하므로

$n=3\cdot3=9$ ⋯ ❷

$\therefore m+n=21$ ⋯ ❸

답 21

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20%

03 전략 먼저 한 인형에게 셔츠와 바지를 입히는 방법의 수를 구하고, 남은 셔츠와 바지를 다른 인형에게 입히는 방법의 수를 구한다.

풀이 먼저 한 인형에게 셔츠와 바지를 입히는 방법의 수는

$3\cdot3=9$

한 인형에게 입힌 셔츠와 바지는 다른 인형에게 입히지 않으므로 나머지 인형에게 셔츠와 바지를 입히는 방법의 수는

$2\cdot2=4$

이때 두 인형 A, B 모두 셔츠와 바지의 색을 정하는 방법은 2가지씩이므로 구하는 경우의 수는

$9\cdot4\cdot2\cdot2=144$

답 ④

04 전략 A지점만 지나갈 때, B지점만 지나갈 때, A, B지점을 모두 지나갈 때로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 집 → A → 학교로 가는 방법의 수는

$2\cdot2=4$

(ii) 집 → B → 학교로 가는 방법의 수는

$1\cdot3=3$

(iii) 집 → A → B → 학교로 가는 방법의 수는

$2\cdot1\cdot3=6$

(iv) 집 → B → A → 학교로 가는 방법의 수는

$1\cdot1\cdot2=2$

이상에서 구하는 방법의 수는

$4+3+6+2=15$

답 ⑤

05 전략 각 영역에 칠할 수 있는 색의 개수를 각각 구하여 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 종로구에 칠할 수 있는 색은 5가지, 서대문구에 칠할 수 있는 색은 종로구에 칠한 색을 제외한 4가지, 중구에 칠할 수 있는 색은 종로구와 서대문구에 칠한 색을 제외한 3가지, 성북구에 칠할 수 있는 색은 종로구에 칠한 색을 제외한 4가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot4=240$

답 240

06 전략 지불하는 금액의 수를 구할 때, a원짜리 동전 1개로 지불하는 금액과 b원짜리 동전 k개로 지불하는 금액이 같으면 a원짜리 동전 1개를 b원짜리 동전 k개로 바꾸어 생각한다.

풀이 50원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로

$a=5\cdot4\cdot3-1=59$ ⋯ ❶

100원짜리 동전 1개로 지불하는 금액과 50원짜리 동전 2개로 지불하는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 3개를 50원짜리 동전 6개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 10개, 1000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, ⋯, 500원의 11가지

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은

0원, 1000원, 2000원의 3가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로

$b=11\cdot3-1=32$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=91$ ⋯ ❸

답 91

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

07 전략 ${}_n\mathrm{P}_r$는 n부터 1씩 작아지는 r개의 자연수의 곱임을 이용한다.

풀이 ${}_n\mathrm{P}_2=3\cdot{}_n\mathrm{P}_1+32$에서

$n(n-1)=3n+32,\qquad n^2-4n-32=0$

$(n+4)(n-8)=0$

$\therefore n=8\ (\because n\geq2)$

답 8

08 전략 이웃하는 경우는 이웃하는 문자를 한 묶음으로 생각하여 나열하고, 이웃하지 않는 경우는 이웃해도 되는 문자를 먼저 나열한다.

풀이 3개의 자음 s, m, l을 한 묶음으로 생각하여 3개의 문자를 나열하는 방법의 수는 $3!=6$

s, m, l이 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는

$3!=6$

$\therefore a=6\cdot6=36$ ⋯ ❶

3개의 자음 s, m, l을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$

자음 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중에서 2개의 자리에 모음 i, e를 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$

$\therefore b=6\cdot12=72$ ⋯ ❷

$\therefore b-a=36$ ⋯ ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20%

09 전략 짝수로 시작하는 경우와 홀수로 시작하는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 짝 – 홀 – 짝 – 홀 – 짝인 경우

4개의 짝수 중 3개를 택하여 나열하는 방법의 수는

${}_4P_3=24$

5개의 홀수 중 2개를 택하여 나열하는 방법의 수는

${}_5P_2=20$

따라서 방법의 수는

$24\cdot20=480$

(ii) 홀 – 짝 – 홀 – 짝 – 홀인 경우

5개의 홀수 중 3개를 택하여 나열하는 방법의 수는

${}_5P_3=60$

4개의 짝수 중 2개를 택하여 나열하는 방법의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 방법의 수는

$60\cdot12=720$

(i), (ii)에서 구하는 비밀번호의 개수는

$480+720=1200$

답 ⑤

10 전략 먼저 선생님 2명을 택하여 양 끝에 세운 후 나머지 사람들을 일렬로 세운다.

풀이 선생님 3명 중에서 2명을 택하여 양 끝에 세우는 방법의 수는

${}_3P_2=6$

나머지 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot120=720$

답 ④

11 전략 과학책 사이에 수학책을 먼저 나열한 후 이를 한 묶음으로 생각한다.

풀이 3권의 수학책 중 2권을 택하여 과학책 사이에 꽂는 방법의 수는

${}_3P_2=6$

'과학책 □□ 과학책'을 한 묶음으로 생각하여 4권의 책을 일렬로 꽂는 방법의 수는

$4!=24$

이때 과학책끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot24\cdot2=288$

답 288

12 전략 (적어도 사건 A가 한 번 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)
임을 이용한다.

풀이 9명의 학생 중에서 대표와 부대표를 1명씩 뽑는 방법의 수는 9명의 학생 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_9P_2=72$

대표와 부대표 모두 남학생을 뽑는 방법의 수는 남학생 4명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_4P_2=12$

따라서 대표와 부대표 중 적어도 한 명은 여학생을 뽑는 방법의 수는

$72-12=60$

답 ④

13 전략 일의 자리의 숫자가 0인 경우와 2 또는 4인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 나열하면 되므로

${}_4P_3=24$ ⋯ ❶

(ii) 일의 자리의 숫자가 2 또는 4인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지이고 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

$2 \cdot 3 \cdot {}_3P_2 = 36$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$24 + 36 = 60$ ··· ❸

답 60

채점 기준	비율
❶ □□□0 꼴인 짝수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❷ □□□2 꼴 또는 □□□4 꼴인 짝수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❸ 짝수의 개수를 구할 수 있다.	20%

14 전략 itsnle는 i로 시작하는 문자열의 마지막 문자열임을 이용한다.

풀이 itsnle는 i□□□□□ 꼴에서 마지막에 오는 문자열이다.

l□□□□□ 꼴인 문자열의 개수는

$5! = 120$

n□□□□□ 꼴인 문자열의 개수는

$5! = 120$

se□□□□ 꼴인 문자열의 개수는

$4! = 24$

sie□□□ 꼴인 문자열의 개수는

$3! = 6$

이때 silent는 sil□□□ 꼴에서 첫 번째에 오는 문자열이므로 itsnle와 silent 사이에 있는 문자열의 개수는

$120 + 120 + 24 + 6 = 270$

답 270

15 전략 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ $(0 \le r \le n)$임을 이용한다.

풀이 ${}_{12}C_{r^2} = {}_{12}C_{r+6}$에서

$r^2 = r + 6$ 또는 $r^2 + (r+6) = 12$

(i) $r^2 = r + 6$일 때,

$r^2 - r - 6 = 0, \quad (r+2)(r-3) = 0$

$\therefore r = 3$ ··· ❶

(ii) $r^2 + (r+6) = 12$일 때,

$r^2 + r - 6 = 0, \quad (r+3)(r-2) = 0$

$\therefore r = 2$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 자연수 r의 값의 합은

$3 + 2 = 5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $r^2 = r + 6$일 때 r의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $r^2 + (r+6) = 12$일 때 r의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 자연수 r의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

16 전략 순서를 생각하지 않고 뽑는 방법의 수는 조합을 이용한다.

풀이 10명의 학생 중에서 조장 1명을 뽑는 방법의 수는

${}_{10}C_1 = 10$

나머지 9명의 학생 중에서 부조장 2명을 뽑는 방법의 수는

${}_9C_2 = 36$

따라서 구하는 방법의 수는

$10 \cdot 36 = 360$

답 ④

다른 풀이 10명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_{10}C_3 = 120$

뽑힌 3명의 학생 중에서 조장 1명, 부조장 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_3C_1 \cdot {}_2C_2 = 3$

따라서 구하는 방법의 수는

$120 \cdot 3 = 360$

17 전략 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 방법의 수 ➡ ${}_{n-k}C_{r-k}$

풀이 민주와 다영이를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 7명의 학생 중에서 2명을 뽑으면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_7C_2 = 21$

답 ①

18 전략 '적어도 ~인' 사건이 일어나는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 사건이 일어나지 않는 경우의 수를 빼서 구한다.

풀이 원소의 개수가 4인 부분집합의 개수는 10 이하의 자연수 중에서 4개를 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_{10}C_4 = 210$

10 이하의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이므로 홀수 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$

따라서 구하는 집합의 개수는

$210 - 5 = 205$

답 205

19 전략 5장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 짝수인 경우를 생각한다.

풀이 1부터 8까지의 모든 자연수의 합은 36으로 짝수이다. 여기서 선택한 카드에 적혀 있는 5개의 수의 합이 짝수인 경우는 선택되지 않는 카드 3장에 적혀 있는 세 수의 합이 짝수인 경우와 같다.

세 수의 합이 짝수가 되는 경우는 세 수가 모두 짝수이거나, 세 수 중 짝수 1개, 홀수 2개인 경우이다.

(i) 세 수가 모두 짝수인 경우의 수는

$${}_4C_3=4$$

(ii) 세 수 중 짝수 1개, 홀수 2개인 경우의 수는

$${}_4C_1\cdot{}_4C_2=4\cdot 6=24$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4+24=28$ 답 ②

20 전략 먼저 6명을 학생 수가 모두 다른 세 묶음으로 나눈다.

풀이 각 샌드위치를 선택하는 학생 수는 1, 2, 3이어야 하므로 6명을 1명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=60$ ⋯ ❶

1명, 2명, 3명으로 나누어진 학생들이 샌드위치를 선택하는 방법의 수는

$3!=6$ ⋯ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$60\cdot 6=360$ ⋯ ❸

답 360

채점 기준	비율
❶ 6명을 1명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ 1명, 2명, 3명으로 나누어진 학생들이 샌드위치를 선택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 각 샌드위치를 선택하는 학생 수가 모두 다른 경우의 수를 구할 수 있다.	20%

21 전략 원에서 지름에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원의 서로 다른 지름 2개가 직사각형의 대각선이 되도록 원 위의 4개의 점을 연결하면 직사각형을 만들 수 있다.

따라서 원의 지름 6개 중에서 2개를 택하면 이들을 대각선으로 하는 직사각형이 만들어지므로 구하는 직사각형의 개수는

${}_6C_2=15$ 답 15

22 전략 먼저 분할하는 방법의 수를 구한 후 분배하는 방법의 수를 곱한다.

풀이 (i) 6개의 사탕을 2개씩 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15$$

이때 세 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는

$3!=6$

$\therefore a=15\cdot 6=90$ ⋯ ❶

(ii) 6개의 사탕을 1개, 1개, 4개의 묶음으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=15$$

이때 세 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는

$3!=6$

$\therefore b=15\cdot 6=90$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 $a-b=90-90=0$ ⋯ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20%

23 전략 $x^ay^bz^c$ (x, y, z는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수)의 양의 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)(c+1)$임을 이용한다.

풀이 8장의 카드에 적힌 숫자를 곱하여 만들 수 있는 자연수는

$2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$

의 양의 약수이다.

$2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$의 양의 약수는

$2^m\cdot 3^n\cdot 5^l$ ($m=0, 1, 2, 3$, $n=0, 1, 2$, $l=0, 1, 2$)

으로 나타낼 수 있다.

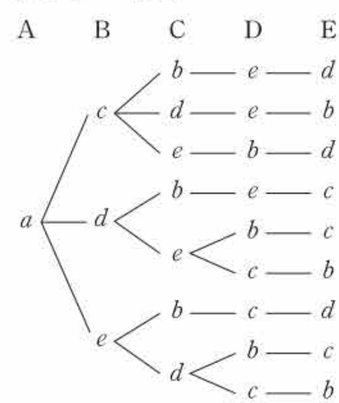
이때 m, n, l을 택하는 방법의 수가 각각 4, 3, 3이고 2장 이상의 카드를 뽑아야 하므로 1은 만들 수 없다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\cdot 3\cdot 3-1=35$ 답 ④

24 전략 조건을 만족시키도록 수형도를 그려 본다.

풀이 5명의 수험생 A, B, C, D, E의 휴대폰을 각각 a, b, c, d, e라 하고 A만 자신의 휴대폰을 가져가게 되는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



같은 방법으로 B 또는 C 또는 D 또는 E만 자신의 휴대폰을 가져가게 되는 경우도 각각 9가지씩 있으므로 구하는 경우의 수는

$9\cdot 5=45$ 답 45

라이트 UP

경우의 수를 구할 때, 규칙성을 찾기 어려운 경우 수형도를 이용하면 중복되지 않고 빠짐없이 모든 경우를 나열할 수 있다.

25 전략 ${}_nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$임을 이용한다.

풀이 $6\cdot{}_8P_r\geq{}_8P_{r+2}$에서

$$6\cdot\frac{8!}{(8-r)!}\geq\frac{8!}{\{8-(r+2)\}!}$$

$$6\cdot\frac{8!}{(8-r)!}\geq\frac{8!}{(6-r)!}$$

$$6\cdot(6-r)!\geq(8-r)!,\qquad 6\geq(8-r)(7-r)$$

$$r^2-15r+50\leq0,\qquad (r-5)(r-10)\leq0$$

$$\therefore 5\leq r\leq10$$

이때 $r+2\leq8$이므로 $\quad r\leq6$

따라서 $5\leq r\leq6$이므로 모든 자연수 r의 값의 합은

$5+6=11$ 답 11

26 전략 세 자연수의 합이 짝수이려면 모두 짝수이거나 1개만 짝수이어야 함을 이용한다.

풀이 (i) $f(1), f(2), f(3)$의 값이 모두 짝수인 경우

일대일함수 f의 개수는 Y의 짝수인 원소 4개 중에서 3개를 택하여 $f(1), f(2), f(3)$에 대응시키는 방법의 수와 같으므로

${}_4P_3=24$ ⋯ ❶

(ii) $f(1), f(2), f(3)$의 값 중 1개만 짝수인 경우

짝수인 함숫값을 갖는 집합 X의 원소를 결정하는 방법의 수는 $\quad 3$

이때 집합 Y의 짝수인 원소 4개 중에서 1개를 골라 짝수인 함숫값을 갖는 집합 X의 원소에 대응시킨다.

또 홀수인 원소 5개 중에서 2개를 택하여 집합 X의 나머지 2개의 원소에 대응시키면 되므로 함수의 개수는

$3\cdot{}_4P_1\cdot{}_5P_2=240$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 구하는 일대일함수의 개수는

$24+240=264$ ⋯ ❸

답 264

채점 기준	비율
❶ $f(1), f(2), f(3)$의 값이 모두 짝수인 경우의 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	40%
❷ $f(1), f(2), f(3)$의 값 중 1개만 짝수인 경우의 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	40%
❸ 조건을 만족시키는 일대일함수 f의 개수를 구할 수 있다.	20%

27 전략 순서가 정해져 있는 경우, 나열할 숫자를 택하면 순서가 결정된다.

풀이 1부터 9까지의 자연수 중에서 4개를 택하여 a_2, a_4, a_6, a_8을 정하는 방법의 수는 조건 (가)에서 그 순서가 정해져 있으므로 9개의 자연수 중에서 4개를 뽑는 방법의 수와 같다.

$\therefore {}_9C_4=126$

또 나머지 5개의 자연수 중에서 3개를 택하여 a_1, a_5, a_9를 정하는 방법의 수는 조건 (나)에서 그 순서가 정해져 있으므로 5개의 자연수 중에서 3개를 뽑는 방법의 수와 같다.

$\therefore {}_5C_3={}_5C_2=10$

남은 2개의 자연수 중 a_3, a_7을 정하는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$126\cdot10\cdot2=2520$ 답 2520

28 전략 먼저 바구니에 빨간색 공을 1개씩 넣는다.

풀이 우선 빨간색 공을 넣는 방법의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

모든 바구니에 공이 적어도 하나씩 들어가야 하므로 빨간색 공을 넣지 않은 빈 바구니에 파란색 공을 각각 1개씩 넣는다.

남은 4개의 파란색 공을 서로 다른 5개의 바구니에 각각 2개 이하로 넣는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $2+2$인 경우

파란색 공을 넣는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

(ii) $2+1+1$인 경우

파란색 공을 넣는 경우의 수는

${}_5C_3\cdot{}_3C_1=30$

(iii) $1+1+1+1$인 경우

파란색 공을 넣는 경우의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

이상에서 구하는 경우의 수는

$10\cdot(10+30+5)=450$ 답 450

29 전략 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수 ➡ ${}_nC_2$

풀이 16개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_{16}C_2=120$

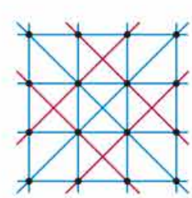
일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_2=6$

이때 오른쪽 그림과 같이 일직선 위에 3개의 점이 있는 경우는 4가지이고, 일직선 위에 4개의 점이 있는 경우는 10가지이므로 서로 다른 직선의 개수는

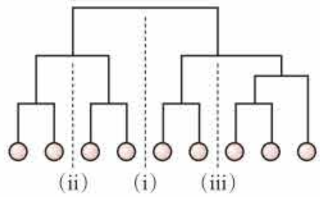


$120-4\cdot3-10\cdot6+4+10=62$

답 62

30 전략 먼저 선수를 4명, 5명으로 나눈 후 5명 중 부전승으로 올라갈 한 명을 정한다.

풀이



(i) 9명을 4명, 5명으로 나누는 방법의 수는

$${}_9C_4 \cdot {}_5C_5 = 126$$ ⋯❶

(ii) 4명을 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 3$$ ⋯❷

(iii) 5명을 2명, 3명으로 나누고 3명 중에서 부전승으로 올라갈 선수를 정하는 방법의 수는

$$({}_5C_2 \cdot {}_3C_3) \cdot {}_3C_1 = 30$$ ⋯❸

이상에서 구하는 방법의 수는

$$126 \cdot 3 \cdot 30 = 11340$$ ⋯❹

답 11340

채점 기준	비율
❶ 9명을 4명, 5명으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 4명을 2명, 2명으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ 5명을 2명, 3명으로 나누고 부전승으로 올라갈 1명을 정하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❹ 대진표를 작성하는 방법의 수를 구할 수 있다.	10%

MEMO

MEMO