정답과 해설

수학의 힘 유형 β

I 함수의 극한과 연속

II 미분

III 적분

1 | 함수의 극한

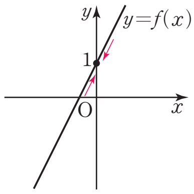
본책 6쪽~22쪽

STEP 1 | 기초 Build

0001 답 1

$f(x)=2x+1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

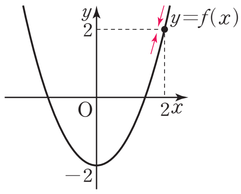
$\lim_{x\to 0}(2x+1)=1$



0002 답 2

$f(x)=x^2-2$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

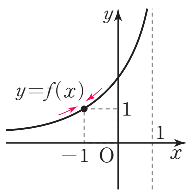
$\lim_{x\to 2}(x^2-2)=2$



0003 답 1

$f(x)=\frac{-2}{x-1}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

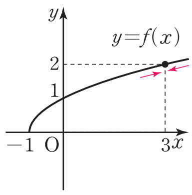
$\lim_{x\to -1}\frac{-2}{x-1}=1$



0004 답 2

$f(x)=\sqrt{x+1}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

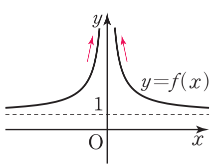
$\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$



0005 답 ∞

$f(x)=1+\frac{1}{x^2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

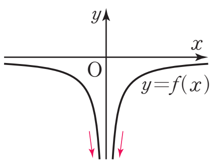
$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\infty$



0006 답 $-\infty$

$f(x)=-\frac{1}{|x|}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

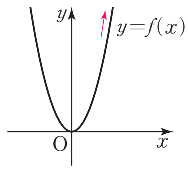
$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=-\infty$



0007 답 ∞

$f(x)=2x^2$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

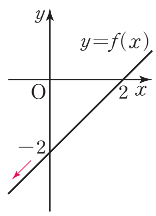
$\lim_{x\to\infty}2x^2=\infty$



0008 답 $-\infty$

$f(x)=x-2$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

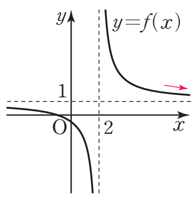
$\lim_{x\to -\infty}(x-2)=-\infty$



0009 답 1

$f(x)=1+\frac{3}{x-2}$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

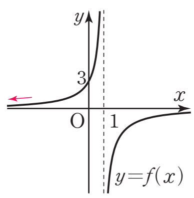
$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)=1$



0010 답 0

$f(x)=\frac{3}{1-x}$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to -\infty}\frac{3}{1-x}=0$

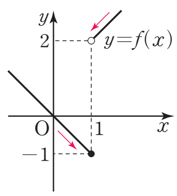


0011 답 (1) -1 (2) 2

$y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

(1) $\lim_{x\to 1-}f(x)=-1$

(2) $\lim_{x\to 1+}f(x)=2$



0012 답 풀이 참조

(1) $\lim_{x\to 1-}f(x)=0$

(2) $\lim_{x\to 1+}f(x)=0$

(3) $\lim_{x\to 2-}f(x)=1$

(4) $\lim_{x\to 2+}f(x)=0$

(5) $\lim_{x\to 1}f(x)=0$

(6) $\lim_{x\to 2-}f(x)\neq\lim_{x\to 2+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

0013 답 -1

$\lim_{x\to 1}(x-2)=1-2=-1$

0014 답 -6

$\lim_{x\to 2} x(-x^2+1)=2(-2^2+1)=-6$

0015 답 3

$\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{x^2-1}=\frac{-3}{-1}=3$

0016 답 2

$\lim_{x\to -1}\sqrt{-3x+1}=\sqrt{-3\cdot(-1)+1}=2$

0017 답 5

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$$

0018 답 3

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

0019 답 $\frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x+1}=\frac{2}{3}$$

0020 답 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}=\lim_{x\to -2}\frac{1}{\sqrt{x+3}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

0021 답 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)=2$$

0022 답 0

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$$

0023 답 ∞

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\infty$$

0024 답 5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x+1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=5$$

0025 답 $\frac{8}{5}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+9}{5x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8+\frac{9}{x}}{5+\frac{7}{x}}=\frac{8}{5}$$

0026 답 -3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-3x^2}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-3x^2}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-3}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=-3$$

0027 답 0

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-x+2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=0$$

0028 답 2

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=2$$

0029 답 -1

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=-1$$

0030 답 -8

$$\lim_{x\to\infty}2x\left(1-\frac{x+1}{x-3}\right)=\lim_{x\to\infty}2x\cdot\frac{-4}{x-3}=\lim_{x\to\infty}-\frac{8x}{x-3}=-8$$

0031 답 $a=3$, $b=3$

$x\longrightarrow -1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다. 즉, $\lim_{x\to -1}(ax+b)=0$이므로 $-a+b=0$

$\therefore b=a$

위의 식을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to -1}\frac{ax+a}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{a(x+1)}{x+1}=a=3$$

$\therefore a=3,\ b=3$

0032 답 $a=0$, $b=-1$

$x\longrightarrow 1$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$

위의 식을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax-a-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+a+1}=\frac{1}{a+2}=\frac{1}{2}$$

$\therefore a=0, b=-1$

0033 답 -1

$\lim_{x\to0}(-x^2-1)=-1$, $\lim_{x\to0}(2x^2-1)=-1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에서 $\lim_{x\to0}f(x)=-1$

0034 답 $\frac{2}{5}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+7}{5x+1}=\frac{2}{5}$이므로 함수의 극한의 대소 관계에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{2}{5}$

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 함수의 극한값이 존재하기 위한 조건 본책 10쪽

우극한과 좌극한을 각각 구하여 비교한다.
(1) 두 값이 같으면 극한값이 존재한다.
(2) 두 값이 다르거나 수렴하지 않으면 극한값이 존재하지 않는다.

0035 답 ㄴ, ㄹ

ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=1$

ㄷ. $\lim_{x\to3-}f(x)=0$, $\lim_{x\to3+}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄹ. $1\le a<3$인 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값은 항상 존재한다.

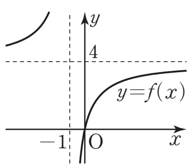
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

참고 ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)=\infty$에서 ∞는 일정한 값이 아닌 한없이 커지는 상태를 나타내므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

0036 답 ②

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}(1-x)=-\infty$이므로 $\lim_{x\to\infty}(1-x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=\frac{4x}{x+1}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+1}=4$

ㄷ. $\lim_{x\to2-}|x-2|=\lim_{x\to2-}\{-(x-2)\}=0$

$\lim_{x\to2+}|x-2|=\lim_{x\to2+}(x-2)=0$

이므로 $\lim_{x\to2}|x-2|=0$

ㄹ. $\lim_{x\to2-}\frac{|x^2-4|}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{-(x+2)(x-2)}{x-2}$
$=\lim_{x\to2-}\{-(x+2)\}=-4$

$\lim_{x\to2+}\frac{|x^2-4|}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}(x+2)=4$

이므로 $\lim_{x\to2}\frac{|x^2-4|}{x-2}$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0037 답 11

$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2-}(2x^2-ax+b)=8+2a+b$

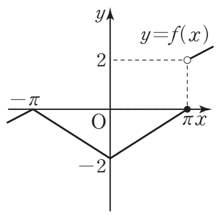
$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2+}(x-1)=-3$

이때, $\lim_{x\to-2}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2+}f(x)$이어야 하므로

$8+2a+b=-3$ $\quad\therefore -2a-b=11$

0038 답 π

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\lim_{x\to\pi-}f(x)=\lim_{x\to\pi-}\left(\left|\frac{2}{\pi}x\right|-2\right)=0$

$\lim_{x\to\pi+}f(x)=\lim_{x\to\pi+}\left(\frac{x}{\pi}+1\right)=2$

이므로 $\lim_{x\to\pi}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore a=\pi$

유형 02 함수의 극한값 구하기 본책 10쪽

(1) $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=L$
(2) 절댓값 기호를 포함한 함수는 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 함수의 식을 구한 후 극한값을 구한다.

0039 답 ②

$\lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to2}f(x)$
$=1+2+(-1)=2$

0040 답 ④

$a>2$에서

$$\lim_{x\to1}\frac{|x-a|-(a-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-x+a-(a-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-x+1}{x-1}=-1$$

0041 답 0

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x-2)}{-(x-1)}=\lim_{x\to1-}-(x-2)=1$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x-2)=-1$

이므로 $p=1, q=-1$

$\therefore p+q=0$

0042 답 ⑤

$1-x=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1+$일 때 $t \longrightarrow 0-$이므로

$\lim_{x\to1+} f(1-x)=\lim_{t\to0-} f(t)=2$

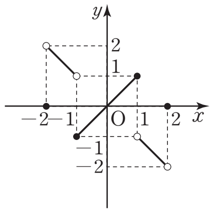
$\therefore \lim_{x\to1+} f(x)f(1-x)=\lim_{x\to1+} f(x)\cdot\lim_{x\to1+} f(1-x)$

$=1\cdot2=2$

0043 답 -3

정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 $-2\le x\le 2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore \lim_{x\to-1+} f(x)+\lim_{x\to2-} f(x)$

$=-1+(-2)=-3$

유형 03 합성함수의 극한값 구하기 본책 11쪽

$\lim_{x\to a+} g(f(x))$의 값은 $f(x)=t$로 놓고 다음을 이용하여 구한다.

(1) $x \longrightarrow a+$일 때, $t \longrightarrow b+$이면

$\lim_{x\to a+} g(f(x))=\lim_{t\to b+} g(t)$

(2) $x \longrightarrow a+$일 때, $t \longrightarrow b-$이면

$\lim_{x\to a+} g(f(x))=\lim_{t\to b-} g(t)$

(3) $x \longrightarrow a+$일 때, $t=b$이면

$\lim_{x\to a+} g(f(x))=g(b)$

0044 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $g(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to1} f(g(x))=\lim_{t\to0+} f(t)=1$

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1-$일 때 $t \longrightarrow 2-$이므로

$\lim_{x\to1-} g(f(x))=\lim_{t\to2-} g(t)=1$이고, $g(0)=1$

$\therefore \lim_{x\to1-} g(f(x))=g(0)$

ㄷ. $g(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 2+$일 때 $t \longrightarrow 1+$이므로

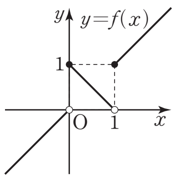
$\lim_{x\to2+} f(g(x))=\lim_{t\to1+} f(t)=1$

ㄹ. $\lim_{x\to1-} f(x)=2$이므로 $g\left(\lim_{x\to1-} f(x)\right)=g(2)=1$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0045 답 ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1+$일 때 $t \longrightarrow 1+$이므로

$\lim_{x\to1+} f(f(x))=\lim_{t\to1+} f(t)=1$

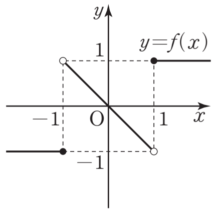
또, $x \longrightarrow 1-$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to1-} f(f(x))=\lim_{t\to0+} f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to1+} f(f(x))+\lim_{x\to1-} f(f(x))=1+1=2$

0046 답 1

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1-$일 때 $t \longrightarrow -1+$이므로

$\lim_{x\to1-} f(f(x))=\lim_{t\to-1+} f(t)=1$

또, $x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow 0-$이므로

$\lim_{x\to0+} f(f(x))=\lim_{t\to0-} f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to1-} f(f(x))-\lim_{x\to0+} f(f(x))=1-0=1$

0047 답 -2

$f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\frac{3}{2}+$일 때 $t \longrightarrow -1+$이므로

$\lim_{x\to-\frac{3}{2}+} f(f(x))=\lim_{t\to-1+} f(t)=\lim_{t\to-1+} (t^2-t-k)=2-k$

또, $x \longrightarrow -\frac{3}{2}-$일 때 $t \longrightarrow -1-$이므로

$\lim_{x\to-\frac{3}{2}-} f(f(x))=\lim_{t\to-1-} f(t)=\lim_{t\to-1-} (2t+2)=0$

이때, $\lim_{x\to-\frac{3}{2}} f(f(x))$의 값이 존재하므로

$2-k=0 \qquad \therefore k=2$

따라서 $x \longrightarrow 0$일 때 $t \longrightarrow -2$이므로

$\lim_{x\to0} f(f(x))=\lim_{t\to-2} f(t)=\lim_{t\to-2} (2t+2)=-2$

0048 답 4

$\frac{t}{t-1}=m$으로 놓으면 $m=1+\frac{1}{t-1}$에서

$t \longrightarrow \infty$일 때 $m \longrightarrow 1+$이므로

$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t}{t-1}\right)=\lim_{m\to1+} f(m)=3$

$\frac{-2t+2}{2t+1}=n$으로 놓으면 $n=-1+\frac{3}{2t+1}$에서

$t \longrightarrow \infty$일 때 $n \longrightarrow -1+$이므로

$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{-2t+2}{2t+1}\right)=\lim_{n\to-1+} f(n)=1$

$\therefore \lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t}{t-1}\right)+\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{-2t+2}{2t+1}\right)=3+1=4$

유형 04 가우스 기호를 포함한 함수의 극한값 구하기 본책 12쪽

$[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n에 대하여

(1) $n\le x<n+1$이면 $[x]=n$ ⇨ $\lim_{x\to n+} [x]=n$

(2) $n-1\le x<n$이면 $[x]=n-1$ ⇨ $\lim_{x\to n-} [x]=n-1$

0049 답 ⑤

① $\lim_{x\to0+} [x]=0$이므로 $\lim_{x\to0+} \frac{[x]}{x}=0$

② $\lim_{x\to0-} [x-2]=-3$이므로 $\lim_{x\to0-} \frac{x-2}{[x-2]}=\frac{2}{3}$

③ $x \longrightarrow -2$일 때 x^2+4x+4는 0보다 큰 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to-2} [x^2+4x+4]=0$

④ $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x+1}{2x-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[2+\frac{3}{2x-1}\right]=2$

⑤ $\lim_{x\to 2-}[x]=1$이므로 $\lim_{x\to 2-}\frac{[x]^2-x}{[x]}=-1$
따라서 가장 작은 것은 ⑤이다.

0050 답 $-\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}([x]+a)^2=(a+1)^2$

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}([x]+a)^2=a^2$

이때, $\lim_{x\to 1}f(x)$의 값이 존재하므로 $(a+1)^2=a^2$

$a^2+2a+1=a^2$, $2a+1=0$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

유형 05 함수의 극한에 대한 성질 (1) 본책 12쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha$($\alpha$는 실수)일 때, $f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면 $g(x)=f(x)-h(x)$이고 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$이다.

0051 답 2

$f(x)-2g(x)=h(x)$로 놓으면 $g(x)=\frac{f(x)-h(x)}{2}$이고

$\lim_{x\to\infty}h(x)=2$이다.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2g(x)}{-2f(x)+6g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+f(x)-h(x)}{-2f(x)+3\{f(x)-h(x)\}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-h(x)}{f(x)-3h(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{h(x)}{f(x)}}{1-3\cdot\frac{h(x)}{f(x)}}$$
$$=2\left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0\right)$$

0052 답 -1

$2f(x)-3g(x)=h(x)$로 놓으면 $g(x)=\frac{2f(x)-h(x)}{3}$이고

$\lim_{x\to a}h(x)=7$이다.

$$\therefore \lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{2f(x)-h(x)}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{2\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}h(x)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}(4-7)=-1$$

0053 답 $-\frac{5}{2}$

$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x}+2\right\}=0$에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to\infty}2=0$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{-5f(x)+1}{2f(x)-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5\cdot\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x}}{2\cdot\frac{f(x)}{x}-\frac{3}{x}}$$
$$=\frac{-5\cdot(-2)+0}{2\cdot(-2)-0}=-\frac{5}{2}$$

0054 답 $\frac{5}{7}$

$$\lim_{x\to a}\frac{2f(x)-g(x)}{f(x)+4g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{2\cdot\frac{f(x)}{x-a}-\frac{g(x)}{x-a}}{\frac{f(x)}{x-a}+4\cdot\frac{g(x)}{x-a}}$$
$$=\frac{2\cdot 3-1}{3+4\cdot 1}=\frac{5}{7}$$

0055 답 $\frac{1}{6}$

$x-2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 2$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=2$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x-2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+4}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x-2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2+2x+4}$$
$$=2\cdot\frac{1}{2^2+4+4}=\frac{1}{6}$$

유형 06 함수의 극한에 대한 성질 (2) 본책 13쪽

$x\longrightarrow a$일 때의 극한값이 존재하지 않는 함수의 예를 들 때, $x=a$에서 좌극한과 우극한이 다른 함수를 찾는다.

0056 답 ㄴ

ㄱ. [반례] $f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\ge 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-x+1 & (x\ge 0)\\ x & (x<0)\end{cases}$이면

$f(x)-g(x)=\begin{cases}2x & (x\ge 0)\\ -2x & (x<0)\end{cases}$

이때, $\lim_{x\to 0}\{f(x)-g(x)\}=0$이지만 $\lim_{x\to 0}f(x)$, $\lim_{x\to 0}g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$ (α, β는 상수)로 놓고, $f(x)+g(x)=h(x)$, $f(x)-g(x)=k(x)$라 하면 $f(x)=\frac{h(x)+k(x)}{2}$이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)+k(x)}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$

즉, $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재한다.

ㄷ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=[x^2+1]$이면 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$,

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이지만 $\lim_{x\to 1}g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

0057 답 ㄴ

ㄱ. [반례] $f(x)=\begin{cases}x & (x\ne 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$이면 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이지만 $f(0)\ne 0$

이다.

ㄴ. $1-\frac{2}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{x\to\infty}f\left(1-\frac{2}{x}\right)=\lim_{t\to 1-}f(t)=2$

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases} -(x-2)^2+4 & (x\neq 2) \\ 0 & (x=2) \end{cases}$, $g(x)=4$이면 모든 양수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이지만

$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} g(x)=4$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

유형 07 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 ; 유리식 본책 13쪽

분자, 분모가 다항식이면

⇨ 분자, 분모를 각각 인수분해하여 공통인수를 약분한다.

0058 답 ①

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-x^2-2x}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{x(x-2)}{x^2-x+1}=1$$

0059 답 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{5(x^6-1)}{(x^3-1)f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{5(x^3-1)(x^3+1)}{(x^3-1)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{5(x^3+1)}{f(x)}=\frac{10}{f(1)}=10$$

$\therefore f(1)=1$

0060 답 3

$$\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-f(x)}{x^2f(x)-a^2f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\{f(x)-1\}}{(x^2-a^2)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x^2-a^2}=3$$

0061 답 -2

$$\lim_{x\to 0+}\frac{3x+|x|}{|x|}=\lim_{x\to 0+}\frac{4x}{x}=4$$

또, $-2<x<2$일 때 $x^2-4<0$이므로

$$\lim_{x\to -2+}\frac{2x+x^2}{|x^2-4|}=\lim_{x\to -2+}\frac{2x+x^2}{4-x^2}=\lim_{x\to -2+}\frac{x(2+x)}{(2-x)(2+x)}$$
$$=\lim_{x\to -2+}\frac{x}{2-x}=-\frac{1}{2}$$

따라서 $p=4$, $q=-\frac{1}{2}$이므로 $pq=-2$

유형 08 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 ; 무리식 본책 14쪽

분자, 분모 중 무리식이 있으면

⇨ 근호가 들어 있는 쪽을 유리화하고 공통인수를 약분한다.

0062 답 16

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x+2}+2)$$
$$=(2+2)(2+2)=16$$

0063 답 24

$$\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)f(x)}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)f(x)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)f(x)(\sqrt{x}+3)}{x-9}$$
$$=\lim_{x\to 9}f(x)(\sqrt{x}+3)=4(3+3)=24$$

0064 답 ①

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x^3-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\frac{1}{(1+1+1)(1+1)}=\frac{1}{6}$$

0065 답 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x^2}-\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x^2+4}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-x})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2+4})}{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x^2+4})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2+4})(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(4-x^2-4+x)(\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2+4})}{(x+4-x^2-4)(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-x}}$$
$$=\frac{2+2}{2+2}=1$$

유형 09 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 본책 14쪽

(i) 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

(ii) $\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^n}=0$ (n은 자연수, c는 상수)임을 이용한다.

0066 답 -4

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\sqrt{x^2+2x+3}}{\sqrt{4x^2+2}+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t-\sqrt{t^2-2t+3}}{\sqrt{4t^2+2}-t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3-\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{3}{t^2}}}{\sqrt{4+\frac{2}{t^2}}-1}$$
$$=\frac{-3-1}{2-1}=-4$$

0067 답 5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{3x+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\frac{4}{3+1}=1$$

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-8t}{\sqrt{t^2+1}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-8}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+1}$$
$$=\frac{-8}{1+1}=-4$$
$\therefore$ (주어진 식)$=1-(-4)=5$

0068 답 3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2\{f(x)\}^2}{3x^2-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2\cdot\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{3-\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1+2\cdot(-2)^2}{3-(-2)\cdot 0}=3$$

0069 답 ③

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$, $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{-t}=a$$
$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{t}=-a$$
이때,
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-f(x)}+f(x)}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t-1}{\sqrt{t^2-f(-t)}+f(-t)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2-\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{f(-t)}{t}\cdot\frac{1}{t}}+\frac{f(-t)}{t}}$$
$$=\frac{-2}{1-a}$$
따라서 $\frac{-2}{1-a}=1$이므로

$-2=1-a$ $\quad\therefore a=3$

유형 10 $\infty-\infty$ 꼴의 극한 본책 15쪽

(1) 다항식은 최고차항으로 묶는다.

(2) 무리식은 근호가 들어 있는 쪽을 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

0070 답 ③

$x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-x}+2x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2+t}-2t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{4t^2+t}-2t)(\sqrt{4t^2+t}+2t)}{\sqrt{4t^2+t}+2t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\sqrt{4t^2+t}+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{t}}+2}$$
$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

0071 답 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}(\log\sqrt{10x+5}-\log\sqrt{x+1})=\lim_{x\to\infty}\log\frac{\sqrt{10x+5}}{\sqrt{x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{\sqrt{10+\frac{5}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$
$$=\log\sqrt{10}=\frac{1}{2}$$

0072 답 4

$x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(-x)}\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\{\sqrt{f(-t)}-\sqrt{f(t)}\}=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+4t}-\sqrt{t^2-4t})$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+4t}-\sqrt{t^2-4t})(\sqrt{t^2+4t}+\sqrt{t^2-4t})}{\sqrt{t^2+4t}+\sqrt{t^2-4t}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{8t}{\sqrt{t^2+4t}+\sqrt{t^2-4t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{8}{\sqrt{1+\frac{4}{t}}+\sqrt{1-\frac{4}{t}}}$$
$$=\frac{8}{1+1}=4$$

0073 답 ③

$\sqrt{4n^2}<\sqrt{4n^2+1}<\underbrace{\sqrt{4n^2+4n+1}}_{\sqrt{(2n+1)^2}}$이므로

$f(n)=\sqrt{4n^2+1}-2n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}nf(n)=\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{4n^2+1}-2n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{4n^2+1}-2n)(\sqrt{4n^2+1}+2n)}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2}$$
$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

유형 11 $\infty\times 0$ 꼴의 극한 본책 15쪽

$\infty\times c$, $\frac{c}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ (c는 상수) 꼴로 변형한다.

0074 답 $\frac{5}{9}$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{x^2}{x+2}-\frac{1}{3}\right)=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\cdot\frac{3x^2-x-2}{3(x+2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x-1)(3x+2)}{3(x+2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{3x+2}{3(x+2)}$$
$$=\frac{3+2}{3(1+2)}=\frac{5}{9}$$

0075 답 ②

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{-2}{1+1}=-1$$

0076 답 $-\frac{\sqrt{3}}{18}$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x+9}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{x+3})(\sqrt{3}+\sqrt{x+3})}{x\sqrt{3x+9}(\sqrt{3}+\sqrt{x+3})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{3x+9}(\sqrt{3}+\sqrt{x+3})}$$
$$=\frac{-1}{3(\sqrt{3}+\sqrt{3})}$$
$$=-\frac{1}{6\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{18}$$

0077 답 ⑤

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2+2}-3x)$$
$$=\lim_{x\to\infty} x\{(\sqrt{x^2+1}-x)+(\sqrt{4x^2+2}-2x)\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{2x}{\sqrt{4x^2+2}+2x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}+\frac{2}{\sqrt{4+\frac{2}{x^2}}+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

유형 12 미정계수의 결정 본책 16쪽

(1) 분수 꼴의 함수에서 $x \longrightarrow a$일 때
① (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하면 ⇨ (분자) $\longrightarrow$ 0
② (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 ⇨ (분모) $\longrightarrow$ 0

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수에서 $x \longrightarrow \infty$일 때 극한값이 존재하면
⇨ 분자와 분모의 최고차항의 차수와 계수를 비교한다.

(3) $\infty-\infty$ 꼴의 함수에서 $x \longrightarrow \infty$일 때 극한값이 존재하면
⇨ $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 (2)와 같이 한다.

0078 답 -1

$x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$이므로 $4+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-4$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+a+2)=a+4$$

$a+4=1$에서 $a=-3$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a+b=-1$

0079 답 1

$x \longrightarrow -1$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(bx^2-2x-3)=0$이므로 $b+2-3=0$

$\therefore b=1$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+(1-a)x-a}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-a)}{(x+1)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-a}{x-3}=\frac{a+1}{4}$$

$\frac{a+1}{4}=\frac{1}{2}$에서 $a=1$이므로 $ab=1$

0080 답 ④

$x \longrightarrow 1$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^3+ax^2+bx)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^3+ax^2-(a+1)x}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x(x-1)(x+a+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x(x+a+1)}=\frac{1}{a+2}$$

$\frac{1}{a+2}=\frac{1}{3}$에서 $a=1$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-2x$이므로 $f(2)=8$

0081 답 3

$x \longrightarrow 3$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to3}(\sqrt{x+a}-b)=0$이므로 $\sqrt{3+a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{3+a}$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{3+a}}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{3+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a})}{(x-3)(\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a})}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a})}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a}}=\frac{1}{2\sqrt{3+a}}$$

$\frac{1}{2\sqrt{3+a}}=\frac{1}{6}$에서 $a=6$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore a-b=3$

0082 답 $\frac{5}{6}$

$x \longrightarrow -3$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -3}(\sqrt{x^2-x-3}+ax)=0$이므로 $3-3a=0$

$\therefore a=1$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \to -3}\frac{\sqrt{x^2-x-3}+x}{x+3}$$
$$=\lim_{x \to -3}\frac{(\sqrt{x^2-x-3}+x)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}{(x+3)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}$$
$$=\lim_{x \to -3}\frac{-(x+3)}{(x+3)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}$$
$$=\lim_{x \to -3}\frac{-1}{\sqrt{x^2-x-3}-x}=-\frac{1}{6}$$

따라서 $b=-\frac{1}{6}$이므로 $a+b=\frac{5}{6}$

0083 답 8

$\lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x+b}\right)=\lim_{x \to 0}\frac{x+b-a}{ax(x+b)}=\frac{1}{4}$에서

$x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 0}(x+b-a)=0$이므로 $b-a=0$

$\therefore b=a$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x+b}\right)=\lim_{x \to 0}\frac{1}{a(x+a)}=\frac{1}{a^2}$$

$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{4}$에서 $a^2=4$이므로 $a=2$ ($\because a>0$)

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a^2+b^2=8$

0084 답 -1

$x=-t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x \to -\infty}(\sqrt{ax^2-bx+1}+x)=\lim_{t \to \infty}(\sqrt{at^2+bt+1}-t)$$
$$=\lim_{t \to \infty}\frac{(a-1)t^2+bt+1}{\sqrt{at^2+bt+1}+t} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 극한값이 존재하려면 $a-1=0$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t \to \infty}\frac{bt+1}{\sqrt{t^2+bt+1}+t}=\lim_{t \to \infty}\frac{b+\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{b}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}=\frac{b}{2}$$

$\frac{b}{2}=1$에서 $b=2$이므로 $a-b=-1$

0085 답 $\frac{3}{2}$

$$\lim_{x \to \infty}f(x)=\lim_{x \to \infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+x}=1$$이므로 $a=1$

$$\lim_{x \to 0}f(x)=\lim_{x \to 0}\frac{x^2+bx+c}{x^2+x}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

에서 $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 0}(x^2+bx+c)=0$이므로 $c=0$

$c=0$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \to 0}\frac{x^2+bx}{x^2+x}=\lim_{x \to 0}\frac{x+b}{x+1}=b$$

$\therefore b=2$

따라서 $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2+x}$이므로 $f(1)=\frac{3}{2}$

유형 13 다항식의 결정

본책 17쪽

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 0이 아닌 상수)이면

⇨ $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같다.

② $\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$($\beta$는 상수)일 때, $\lim_{x \to a}g(x)=0$이면

⇨ $\lim_{x \to a}f(x)=0$

0086 답 1

$\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)-3x^2}{x}=a$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3이고 일차항의 계수가 a인 일차식이다. 즉, $f(x)=3x^2+ax+b$(b는 상수)로 놓을 수 있다.

또, $\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 0}(3x^2+ax+b)=0$에서 $b=0$이므로

$$\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x \to 0}\frac{3x^2+ax}{x}=\lim_{x \to 0}(3x+a)=a$$

$\therefore a=1$

0087 답 ⑤

$\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)}{x^2-2}=2$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차식이다.

$\lim_{x \to 1}\frac{f(x)}{x-1}=7$에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다. $\therefore f(1)=0$

즉, $f(x)=2(x-1)(x+a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있으므로

$$\lim_{x \to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{2(x-1)(x+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1}2(x+a)=2(1+a)$$

$2(1+a)=7$에서 $a=\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right)=(x-1)(2x+5)$이므로

구하는 나머지는 $f(2)=1\cdot 9=9$

Lecture

나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

⇨ $R=f(\alpha)$

0088 답 6

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 각각 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

$\therefore f(0)=0, f(1)=0$

즉, $f(x)=x(x-1)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)Q(x)}{x}=\lim_{x\to0}(x-1)Q(x)=1$

$\therefore Q(0)=-1$ …… ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)Q(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}xQ(x)=1$

$\therefore Q(1)=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 다항식 $Q(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차식이므로 $Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

㉠, ㉡에서 $b=-1$, $a+b=1$ $\quad\therefore a=2, b=-1$

따라서 $g(x)=x(x-1)(2x-1)$이므로

$g(2)=6$

참고 $Q(x)$의 차수가 낮을수록 $f(x)$의 차수도 낮다.

0089 답 22

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 0+$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}f(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}=5$$

따라서 $f(t)$는 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 5인 삼차식이다.

즉, $f(x)=x^3+5x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^3+5x^2+ax+b)=0$이므로 $6+a+b=0$

$\therefore b=-a-6$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}&=\lim_{x\to1}\frac{x^3+5x^2+ax-a-6}{x^2+x-2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+6x+a+6)}{(x-1)(x+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+6x+a+6}{x+2}=\frac{a+13}{3}\end{aligned}$$

$\frac{a+13}{3}=\frac{1}{3}$에서 $a=-12$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $b=6$

따라서 $f(x)=x^3+5x^2-12x+6$이므로 $f(-1)=22$

유형 14 함수의 극한의 대소 관계

본책 17쪽

$f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$($\alpha$는 실수)이면

⇨ $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

0090 답 4

$x>0$일 때, $4x^2-1\le x^2f(x)\le 4x^2+2$의 각 변을 x^2으로 나누면

$\frac{4x^2-1}{x^2}\le f(x)\le\frac{4x^2+2}{x^2}$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2}{x^2}=4$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=4$

0091 답 $\frac{1}{4}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{4x^2+1}=\frac{1}{4}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{4x^2}=\frac{1}{4}$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{4}$

0092 답 7

$x>-\frac{1}{7}$일 때, $7x+1<f(x)<7x+5$의 각 변을 제곱하면

$(7x+1)^2<\{f(x)\}^2<(7x+5)^2$

각 변을 $7x^2+2$로 나누면

$\frac{(7x+1)^2}{7x^2+2}<\frac{\{f(x)\}^2}{7x^2+2}<\frac{(7x+5)^2}{7x^2+2}$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{(7x+1)^2}{7x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(7x+5)^2}{7x^2+2}=7$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{7x^2+2}=7$

유형 15 함수의 극한의 활용

본책 18쪽

(i) 구하는 선분의 길이 또는 점의 좌표를 식으로 나타낸다.
(ii) 함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

0093 답 1

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+(\sqrt{2t})^2}=\sqrt{t^2+2t}$, $\overline{OH}=t$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}(\overline{OP}-\overline{OH})&=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+2t}-t)\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+2t}-t)(\sqrt{t^2+2t}+t)}{\sqrt{t^2+2t}+t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{\sqrt{t^2+2t}+t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{t}}+1}=\frac{2}{2}=1\end{aligned}$$

0094 답 4

$A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{t}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$이므로

$\overline{AB}=2-\frac{1}{t}$, $\overline{AP}=t-\frac{1}{2}$

따라서 점 P가 점 B에 한없이 가까워질 때 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$의 극한값은

$$\lim_{t\to\frac{1}{2}+}\frac{2-\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{2}}=\lim_{t\to\frac{1}{2}+}\frac{\frac{2t-1}{t}}{\frac{2t-1}{2}}=\lim_{t\to\frac{1}{2}+}\frac{2}{t}=4$$

0095 답 2

$\overline{AB}=\sqrt{a^2+36}$이고,

$\triangle OAB=\triangle OCA+\triangle OCB+\triangle CAB$이므로

$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot a=\frac{1}{2}r(a+6+\sqrt{a^2+36})$

$\therefore r=\frac{6a}{a+6+\sqrt{a^2+36}}$

$\therefore \lim_{a\to 0+}\frac{4r}{a}=\lim_{a\to 0+}\frac{24}{a+6+\sqrt{a^2+36}}$

$=\frac{24}{6+6}=2$

0096 답 25

두 점 $P(a,\ a^2)$, $Q(a+1,\ a^2+2a+1)$에 대하여 직선 PQ의 방정식은

$y-a^2=\frac{(a^2+2a+1)-a^2}{(a+1)-a}(x-a)$

$\therefore y=(2a+1)x-a^2-a$

따라서 직선 $y=(2a+1)x-a^2-a$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x=(2a+1)x-a^2-a$, $2ax=a^2+a$

$\therefore f(a)=\frac{a^2+a}{2a}=\frac{a+1}{2}$ ($\because a\neq 0$)

$\therefore 50\lim_{a\to 0}f(a)=50\lim_{a\to 0}\frac{a+1}{2}$

$=50\cdot\frac{1}{2}=25$

0097 답 ⑤

선분 OA와 원의 교점을 B, 원과 직선 $y=x$의 교점을 C라 하면 원의 반지름의 길이는 선분 AC의 길이와 같다. 이때, 선분 AC의 길이는 점 $A\left(a,\ a+\frac{1}{a}\right)$과 직선 $x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{AC}=\frac{\left|a-a-\frac{1}{a}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2a}$

또, $\overline{OA}=\sqrt{a^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{2a^2+2+\frac{1}{a^2}}$이므로

$d=\overline{OA}-\overline{AB}=\overline{OA}-\overline{AC}$

$=\sqrt{2a^2+2+\frac{1}{a^2}}-\frac{\sqrt{2}}{2a}$

$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{2d}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{2\sqrt{2a^2+2+\frac{1}{a^2}}-\frac{\sqrt{2}}{a}}{a}$

$=\lim_{a\to\infty}\left(2\sqrt{2+\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^4}}-\frac{\sqrt{2}}{a^2}\right)$

$=2\sqrt{2}$

0098 답 1

TIP 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P의 좌표를 $(t,\ \sqrt{4-t^2})$ $(0<t<2)$으로 놓는다.

원 O의 방정식이 $x^2+y^2=4$이므로 원 위의 한 점 P의 좌표를 $(t, \sqrt{4-t^2})$ $(0<t<2)$으로 놓으면

$\triangle OQP=\frac{1}{2}t\sqrt{4-t^2}$

$\overline{PA}=\sqrt{(t-2)^2+(\sqrt{4-t^2})^2}=2\sqrt{-t+2}$

$\therefore \lim_{P\to A}\frac{\overline{PA}}{\triangle OQP}=\lim_{t\to 2}\frac{2\sqrt{-t+2}}{\frac{1}{2}t\sqrt{4-t^2}}$

$=\lim_{t\to 2}\frac{4\sqrt{-t+2}}{t\sqrt{2-t}\sqrt{2+t}}$

$=\lim_{t\to 2}\frac{4}{t\sqrt{2+t}}$

$=\frac{4}{2\sqrt{4}}=1$

STEP 3 | 심화 Master

0099 답 5

TIP $x\longrightarrow 5-$일 때 $f(x)=2$, $x\longrightarrow 5+$일 때 $f(x)=3$임을 이용한다.

(i) $x\longrightarrow 5-$일 때, 함수 $f(x)$는 1에서 4까지의 자연수 중에서 홀수의 개수이므로 $f(x)=2$

이때, $x>2f(x)=4$이므로 $g(x)=1+f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 5-}g(x)=\lim_{x\to 5-}\{1+f(x)\}=1+2=3$

(ii) $x\longrightarrow 5+$일 때, 함수 $f(x)$는 1에서 5까지의 자연수 중에서 홀수의 개수이므로 $f(x)=3$

이때, $x<2f(x)=6$이므로 $g(x)=1-f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 5+}g(x)=\lim_{x\to 5+}\{1-f(x)\}=1-3=-2$

(i), (ii)에 의하여

$\lim_{x\to 5-}g(x)-\lim_{x\to 5+}g(x)=3-(-2)=5$

0100 답 ㄱ, ㄴ

TIP $\lim_{x\to a}f(x)=L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=L$임을 이용한다.

$\lim_{x\to 1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to 1-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to 1+}g(x)=-1$,

$\lim_{x\to 1-}g(x)=1$이므로

ㄱ. $\lim_{x\to 1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 1+}f(x)+\lim_{x\to 1+}g(x)=1-1=0$

$\lim_{x\to 1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 1-}g(x)=-1+1=0$

$\therefore \lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=0$

ㄴ. $\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)\cdot\lim_{x\to 1+}g(x)=1\cdot(-1)=-1$

$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)\cdot\lim_{x\to 1-}g(x)=-1\cdot 1=-1$

$\therefore \lim_{x\to 1}f(x)g(x)=-1$

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1+$일 때 $t\longrightarrow 1-$,

$x\longrightarrow 1-$일 때 $t\longrightarrow -1+$이므로

$\lim_{x\to 1+}g(f(x))=\lim_{t\to 1-}g(t)=1$

$\lim_{x\to 1-}g(f(x))=\lim_{t\to -1+}g(t)=-1$

$\lim_{x\to 1+}g(f(x))\neq\lim_{x\to 1-}g(f(x))$이므로 $\lim_{x\to 1}g(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0101 답 ④

TIP $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$의 값은 $f(x)=t$로 놓고 좌극한과 우극한의 값을 비교하여 구한다.

ㄱ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 0+$일 때 $t\longrightarrow 0+$, $x\longrightarrow 0-$일 때 $t\longrightarrow 0-$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+} g(f(x))=\lim\limits_{t\to 0+} g(t)=-2$

$\lim\limits_{x\to 0-} g(f(x))=\lim\limits_{t\to 0-} g(t)=0$

$\lim\limits_{x\to 0+} g(f(x))\neq\lim\limits_{x\to 0-} g(f(x))$이므로 $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 2+$일 때 $t=-1$, $x\longrightarrow 2-$일 때 $t=1$이므로

$\lim\limits_{x\to 2+} g(f(x))=g(-1)=1$, $\lim\limits_{x\to 2-} g(f(x))=g(1)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} g(f(x))=1$

ㄷ. $2k+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow 2k+$이고

$f(x+4)=f(x)$이므로

$$\lim_{x\to\infty} g\left(f\left(6+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty} g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{t\to 2+} g(f(t))=1\ (\because ㄴ)$$

$$\lim_{x\to\infty} g\left(f\left(8+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty} g\left(f\left(4+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty} g\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{t\to 0+} g(f(t))=-2\ (\because ㄱ)$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{4} g\left(f\left(2k+\frac{1}{x}\right)\right)=1+(-2)+1+(-2)=-2$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0102 답 3

TIP 정수 n에 대하여 $n<x<n+1$이면 $[x]=n$, $\langle x\rangle=n+1$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 1+}([x]-2)^{\langle x\rangle}+\lim_{x\to 1-}([x]+2)^{\langle x\rangle}=(1-2)^2+(0+2)^1=1+2=3$$

0103 답 ①

TIP 주어진 식의 분자, 분모에 $f(x)$를 곱하여 식을 변형한다.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)}=1$에서 $x\longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{f(x)}=2$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{(2x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))f(x)}{(2x+1)(x-1)f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x+1}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때, $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로 ㉠에서

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x+1}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

0104 답 ①

TIP $x\to a$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\to 0$이다.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-2x}{x-1}$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1}\{g(x)-2x\}=0$이므로 $g(1)=2$

$f(x)+x-1=(x-1)g(x)$에서

$f(x)=(x-1)g(x)-(x-1)=(x-1)\{g(x)-1\}$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{g(x)-1\}g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{g(x)-1\}g(x)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\{g(x)-1\}g(x)}{x+1}=\frac{(2-1)\cdot 2}{2}=1$$

0105 답 26

TIP 분모를 유리화하고 주어진 식이 0이 아닌 극한값을 가지는 조건을 이용하여 n의 값을 구한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5+6x^3}{x^n(\sqrt{x+4}-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^5+6x^3)(\sqrt{x+4}+2)}{x^n(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^5+6x^3)(\sqrt{x+4}+2)}{x^{n+1}}=4\lim_{x\to 0}\frac{x^5+6x^3}{x^{n+1}}=4\lim_{x\to 0}\frac{x^3(x^2+6)}{x^{n+1}}$$

이때, 0이 아닌 극한값이 존재하려면 분모가 삼차식이어야 한다.

즉, $n+1=3$이므로 $n=2$

$\therefore$ (주어진 식) $=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3(x^2+6)}{x^3}=4\lim\limits_{x\to 0}(x^2+6)=24$

따라서 $n=2$, $a=24$이므로 $n+a=26$

0106 답 -36

TIP $x\to a$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\to 0$이다.

$f(x)=x^3+2x^2-x-2=(x+2)(x+1)(x-1)$이므로

$f(x)=0$의 세 근은 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$이다.

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=p$에서 $x\longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다. 즉, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$이므로

$f(a)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{x-b}=q$에서 $x\longrightarrow b$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다. 즉, $\lim\limits_{x\to b} f(x)=0$이므로

$f(b)=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{x-c}=r$에서 $x\longrightarrow c$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다. 즉, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$이므로

$f(c)=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 a, b, c는 $f(x)=0$의 세 근이고 $a<b<c$이므로
$a=-2$, $b=-1$, $c=1$

$$\therefore p=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}(x+1)(x-1)=3$$
$$q=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x+2)(x-1)=-2$$
$$r=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+2)(x+1)=6$$
$\therefore pqr=-36$

0107 답 2

TIP $\infty-\infty$ 꼴은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 바꾸고 함수의 극한의 성질을 이용한다.

$x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로
$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2-4x+3}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{at^2+4t+3}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-1)t^2+4t+3}{\sqrt{at^2+4t+3}+t}\quad\cdots\cdots ㉠$$
이때, 극한값이 존재하므로 $a-1=0$이어야 한다.
$\therefore a=1$
$a=1$을 ㉠에 대입하면
$$b=\lim_{t\to\infty}\frac{4t+3}{\sqrt{t^2+4t+3}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{3}{t}}{\sqrt{1+\frac{4}{t}+\frac{3}{t^2}}+1}$$
$$=\frac{4}{1+1}=2$$
또, $x\longrightarrow2-$일 때 $|x-3|=-(x-3)$, $[x]=1$이므로
$$c=\lim_{x\to2-}\frac{|x-3|}{[x]^2}=\lim_{x\to2-}\frac{-(x-3)}{[x]^2}=\frac{1}{1^2}=1$$
$\therefore abc=2$

0108 답 ⑤

TIP 조건 ㈏에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례대로 대입한다.

조건 ㈏에 $n=1$을 대입하면 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ $\cdots\cdots$ ㉠
㉠과 조건 ㈎에 의하여 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$
즉, $f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$, $g(x)=(x-1)(x^2+cx+d)$
(a, b, c, d는 상수)로 놓으면
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+ax+b)}{(x-1)(x^2+cx+d)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}=0$$
이때, $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1+a+b=0$
$\therefore b=-a-1$
$$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+ax-a-1)$$
$$=(x-1)^2(x+a+1)$$
조건 ㈏에 $n=2$를 대입하면 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $f(2)=0$이므로 $a+3=0$ $\quad\therefore a=-3$
$\therefore f(x)=(x-1)^2(x-2)$
조건 ㈏에 $n=3$을 대입하면
$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x^2+cx+d)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+cx+d}$$
$$=\frac{2}{9+3c+d}=2$$
$\therefore 3c+d=-8$ $\cdots\cdots$ ㉢
조건 ㈏에 $n=4$를 대입하면
$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x^2+cx+d)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+cx+d}$$
$$=\frac{6}{16+4c+d}=6$$
$\therefore 4c+d=-15$ $\cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $c=-7$, $d=13$
따라서 $g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$이므로
$g(5)=4\cdot3=12$

0109 답 60

TIP $x\longrightarrow a$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하면 (분자)$\longrightarrow0$이다.

조건 ㈎에서 $a\longrightarrow\pm2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.
즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-5x\}=0$, $\lim_{x\to-2}\{f(x)-5x\}=0$이므로
$f(2)-10=0$, $f(-2)+10=0$
이때, $f(x)-5x=0$의 두 근이 $x=2$ 또는 $x=-2$이고 $f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)-5x=(x+2)(x-2)g(x)$ ($g(x)$는 다항식)로 놓을 수 있다.
조건 ㈏에서
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{f(x)}-3x+1)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{\sqrt{f(x)}-(3x-1)\}\{\sqrt{f(x)}+(3x-1)\}}{\sqrt{f(x)}+(3x-1)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(3x-1)^2}{\sqrt{f(x)}+3x-1}\quad\cdots\cdots ㉠$$
㉠의 값이 존재하므로 $f(x)$는 이차항의 계수가 9인 이차함수이다.
즉, $f(x)-5x=9(x+2)(x-2)$이므로
$f(x)=9(x+2)(x-2)+5x$
$\therefore f(3)=60$

0110 답 10

TIP $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수가 0이 아닌 극한값을 가지면 분자와 분모의 차수가 같음을 이용한다.

조건 ㈎에서 각 변을 x^2으로 나누면
$$\frac{2x^2-5x}{x^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{2x^2+2}{x^2}$$
이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x}{x^2}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2}{x^2}=2$이므로
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$$

따라서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차식이다.

조건 (나)에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다. 즉, $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

따라서 $f(x)=2(x-1)(x+a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x+a)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{2(x+a)}{x+3}=\frac{2(1+a)}{4}=\frac{a+1}{2}$$

$\dfrac{a+1}{2}=\dfrac{1}{4}$에서 $a=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore f(x)=2(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=(x-1)(2x-1)$

$\therefore f(3)=2\cdot5=10$

0111 답 ④

TIP $\lim\limits_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하면 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\lim\limits_{x\to a-} f(x)$임을 이용한다.

$f(x)=x^2+px+q$ (p, q는 상수)로 놓으면

$\lim\limits_{x\to0} |x|\left\{f\left(\dfrac{1}{x}\right)-f\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right\}=a$에서

$$\lim_{x\to0+} x\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}=\lim_{x\to0-}(-x)\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}$$

이때, $\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow -\infty$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-f(-t)}{t}=\lim_{t\to-\infty}\left\{-\frac{f(t)-f(-t)}{t}\right\}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{2pt}{t}=\lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{2pt}{t}\right)$$

$2p=-2p$, $4p=0$ $\quad\therefore p=0$

따라서 $a=0$이고 $f(x)=x^2+q$

또, $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+q\right)=q$에서 $q=3$이므로

$f(x)=x^2+3$

$\therefore f(2)=2^2+3=7$

0112 답 1

TIP 점 A의 좌표를 $(t,\ 2t^2)$ $(t>0)$으로 놓고 $\overline{OQ}$를 t에 대한 식으로 나타낸다.

점 A의 좌표를 $(t,\ 2t^2)(t>0)$이라 하면

$\overline{OA}=\sqrt{t^2+(2t^2)^2}=t\sqrt{4t^2+1}$

$\overline{OA}=\overline{OP}$이므로 $P(t\sqrt{4t^2+1},\ 0)$

두 점 A, P를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2t^2=\frac{-2t^2}{t\sqrt{4t^2+1}-t}(x-t)$$

점 Q는 두 점 A, P를 지나는 직선의 y절편이므로 위의 식에 $x=0$을 대입하면

$$y=\frac{2t^2}{\sqrt{4t^2+1}-1}+2t^2$$

$\therefore Q\left(0,\ \dfrac{2t^2}{\sqrt{4t^2+1}-1}+2t^2\right)$

$A \longrightarrow O$이면 $t \longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{A\to O}\overline{OQ}=\lim_{t\to0+}\left(\frac{2t^2}{\sqrt{4t^2+1}-1}+2t^2\right)=\lim_{t\to0+}\frac{2t^2}{\sqrt{4t^2+1}-1}+0$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{2t^2(\sqrt{4t^2+1}+1)}{(\sqrt{4t^2+1}-1)(\sqrt{4t^2+1}+1)}=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{4t^2+1}+1}{2}=1$$

0113 답 $\frac{8}{5}$

TIP 선분 PQ가 ∠APB를 이등분하므로 $\overline{PA}:\overline{PB}=\overline{AQ}:\overline{BQ}$임을 이용하여 $f(t)$를 t에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{PA}=\sqrt{t^2+1}$, $\overline{PB}=\sqrt{t^2+16}$

이때, 선분 PQ가 ∠APB를 이등분하므로

$\overline{AQ}:\overline{BQ}=\overline{PA}:\overline{PB}=\sqrt{t^2+1}:\sqrt{t^2+16}$

즉, 점 Q는 선분 AB를 $\sqrt{t^2+1}:\sqrt{t^2+16}$으로 내분하는 점이므로 점 Q의 y좌표는

$$f(t)=\frac{4\sqrt{t^2+1}+\sqrt{t^2+16}}{\sqrt{t^2+1}+\sqrt{t^2+16}}$$

$$\therefore \lim_{t\to0} f(t)=\lim_{t\to0}\frac{4\sqrt{t^2+1}+\sqrt{t^2+16}}{\sqrt{t^2+1}+\sqrt{t^2+16}}=\frac{4+4}{1+4}=\frac{8}{5}$$

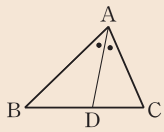
Lecture

각의 이등분선의 성질

오른쪽 그림의 △ABC에서

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$=\triangle ABD:\triangle ACD$



0114 답 ②

TIP 삼각형 PRO가 이등변삼각형이므로 점 R는 선분 OP의 수직이등분선의 y절편이다.

삼각형 POQ가 이등변삼각형이므로 $Q(2t,\ 0)$

$\therefore S(t)=\dfrac{1}{2}\cdot2t\cdot t^2=t^3$

한편, 삼각형 PRO가 이등변삼각형이므로 점 R는 선분 OP의 수직이등분선이 y축과 만나는 점이다.

직선 OP의 기울기가 t이므로 그 수직이등분선의 기울기는 $-\dfrac{1}{t}$이고, 이 직선은 $\overline{OP}$의 중점을 지난다.

따라서 점 $\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{2}\right)$을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{t}$인 직선의 방정식은

$y-\dfrac{t^2}{2}=-\dfrac{1}{t}\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$ $\quad\therefore y=-\dfrac{1}{t}x+\dfrac{t^2+1}{2}$

이 직선의 y절편은 $\dfrac{t^2+1}{2}$이므로

$T(t)=\dfrac{1}{2}\cdot t\cdot\dfrac{t^2+1}{2}=\dfrac{t^3+t}{4}$

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{t^3+t}{4}-t^3}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{-3t^2+1}{4}=\frac{1}{4}$$

0115 답 ④

TIP 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$이다.

원 C의 반지름의 길이는 $\overline{OP}=\sqrt{t^2+(\sqrt{2t})^2}=\sqrt{t^2+2t}$이므로

$S(t)=(\sqrt{t^2+2t})^2\pi=(t^2+2t)\pi$

또, 원 C의 방정식이 $x^2+y^2=t^2+2t$이므로 점 $P(t, \sqrt{2t})$에서의 접선의 방정식은

$tx+\sqrt{2t}y=t^2+2t$ …… ㉠

이때, 점 Q의 x좌표는 직선 ㉠의 x절편이므로 $\overline{OQ}=t+2$

한편, $Q(t+2, 0)$이므로

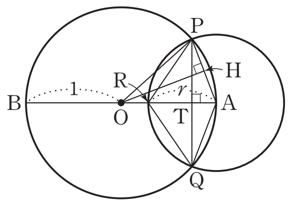
$\overline{PQ}=\sqrt{(t+2-t)^2+(\sqrt{2t})^2}=\sqrt{2t+4}$

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{\overline{OQ}-\overline{PQ}}=\lim_{t\to0+}\frac{(t^2+2t)\pi}{t+2-\sqrt{2t+4}}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\pi(t^2+2t)(t+2+\sqrt{2t+4})}{t^2+2t}$$
$$=\lim_{t\to0+}(t+2+\sqrt{2t+4})\pi=4\pi$$

0116 답 ④

TIP 원의 중심 O에서 $\overline{AP}$에 수선의 발을 내리고 $\triangle OAP$의 넓이를 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{AP}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{OA}$와 $\overline{PQ}$의 교점을 T라 하면



$$\triangle OAP=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{PT}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{OH}$$

즉, $\frac{1}{2}\cdot1\cdot\overline{PT}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{OH}$에서 $\overline{PT}=r\cdot\overline{OH}$

이때, $\overline{OH}=\sqrt{1-\frac{r^2}{4}}=\frac{\sqrt{4-r^2}}{2}$이므로 $\overline{PT}=\frac{r\sqrt{4-r^2}}{2}$

$$\therefore \triangle RAP=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{r\sqrt{4-r^2}}{2}=\frac{r^2\sqrt{4-r^2}}{4}$$

$$\therefore S(r)=2\triangle RAP=\frac{r^2\sqrt{4-r^2}}{2}$$

$$\therefore \lim_{r\to2-}\frac{S(r)}{\sqrt{2-r}}=\lim_{r\to2-}\frac{r^2\sqrt{4-r^2}}{2\sqrt{2-r}}$$
$$=\lim_{r\to2-}\frac{r^2\sqrt{2-r}\sqrt{2+r}}{2\sqrt{2-r}}$$
$$=\lim_{r\to2-}\frac{r^2\sqrt{2+r}}{2}$$
$$=\frac{4\cdot2}{2}=4$$

2 | 함수의 연속

본책 24쪽~38쪽

STEP 1 | 기초 Build

0117 답 (1) ㄱ (2) ㄴ (3) ㄷ

(2) $\lim_{x\to1-}f(x)\neq\lim_{x\to1+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재하지 않는다.

0118 답 연속

$f(2)=-1$, $\lim_{x\to2}f(x)=-1$이고 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

0119 답 불연속

$f(x)$가 $x=2$에서 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

0120 답 불연속

$$f(2)=1, \lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+1)=3$$

이므로

$\lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

0121 답 연속

$f(2)=2$이고,

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(4-x)=2$,

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x^2-2)=2$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

0122 답 $[-2, 1]$

0123 답 $[0, 5)$

0124 답 $(1, 3]$

0125 답 $(-5, 2)$

0126 답 $(\infty, 4]$

0127 답 $(6, \infty)$

0128 답 $(-\infty, 1), (1, \infty)$

$f(x)=\frac{2}{x-1}$의 정의역은 $x-1\neq0$, 즉 $x\neq1$인 모든 실수 x의 집합이므로 열린구간 $(-\infty, 1), (1, \infty)$이다.

0129 답 $(-\infty, \infty)$

$f(x)=3x^2+x$의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 열린구간 $(-\infty, \infty)$이다.

0130 답 $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$

$f(x)=\sqrt{5-2x}$의 정의역은 $5-2x\geq 0$, 즉 $x\leq\frac{5}{2}$인 x의 값들의 집합이므로 반닫힌 구간 $\left(-\infty,\ \frac{5}{2}\right]$이다.

0131 답 $[-3, 3]$
$f(x)=\sqrt{9-x^2}$의 정의역은 $9-x^2\geq 0$, 즉 $-3\leq x\leq 3$인 x의 값들의 집합이므로 닫힌구간 $[-3, 3]$이다.

0132 답 $(-\infty, \infty)$
$f(x)=-1$은 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

0133 답 $(-\infty, \infty)$
$f(x)=2x$는 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

0134 답 $[2, \infty)$
$f(x)=\sqrt{x-2}$는 $x-2\geq 0$일 때, 즉 반닫힌 구간 $[2, \infty)$에서 연속이다.

0135 답 $(-\infty, -4), (-4, \infty)$
$f(x)=\frac{x}{x+4}$는 유리함수이므로 $x\neq -4$인 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, -4), (-4, \infty)$에서 연속이다.

0136 답 $(-\infty, \infty)$
$f(x)+g(x)=(4x-2)+(x^2-4)=x^2+4x-6$
즉, $f(x)+g(x)$는 다항함수이므로 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

0137 답 $(-\infty, \infty)$
$f(x)g(x)=(4x-2)(x^2-4)=4x^3-2x^2-16x+8$
즉, $f(x)g(x)$는 다항함수이므로 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

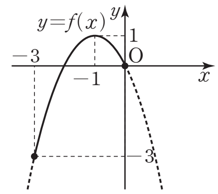
0138 답 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2-4}{4x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{2(2x-1)}$$
는 유리함수이므로 $x\neq\frac{1}{2}$인 모든 실수, 즉 열린구간 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$에서 연속이다.

0139 답 $(-\infty, -2), (-2, 2), (2, \infty)$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{4x-2}{x^2-4}=\frac{4x-2}{(x-2)(x+2)}$$
는 유리함수이므로 $x\neq -2$, $x\neq 2$인 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, -2), (-2, 2), (2, \infty)$에서 연속이다.

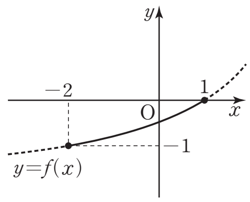
0140 답 $(-\infty, \infty)$
$3f(x)-2g(x)=3(3x^2-1)-2(3x+5)=9x^2-6x-13$
즉, $3f(x)-2g(x)$는 다항함수이므로 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

0141 답 $(-\infty, -1), (-1, 2), (2, \infty)$
$$\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}=\frac{(3x^2-1)+(3x+5)}{(3x^2-1)-(3x+5)}=\frac{3x^2+3x+4}{3x^2-3x-6}=\frac{3x^2+3x+4}{3(x+1)(x-2)}$$
는 유리함수이므로 $x\neq -1$, $x\neq 2$인 모든 실수, 즉 열린구간 $(-\infty, -1), (-1, 2), (2, \infty)$에서 연속이다.

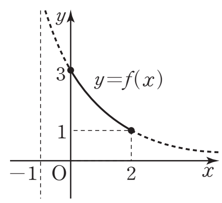
0142 답 최댓값 : 1, 최솟값 : -3
$f(x)=-x^2-2x$는 닫힌구간 $[-3, 0]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 1, $x=-3$에서 최솟값 -3을 갖는다.



0143 답 최댓값 : 0, 최솟값 : -1
$f(x)=1-\sqrt{-x+2}$는 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 0, $x=-2$에서 최솟값 -1을 갖는다.



0144 답 최댓값 : 3, 최솟값 : 1
$f(x)=\frac{3}{x+1}$은 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 3, $x=2$에서 최솟값 1을 갖는다.



0145 답 (가) $\neq$ (나) 사잇값

0146 답 (가) 연속 (나) $>$ (다) 0

0147 답 풀이 참조
$f(x)=x^3+2x^2-2$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 $f(-1)=-1<0$, $f(1)=1>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 주어진 방정식은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

0148 답 풀이 참조
$f(x)=x^4+3x^3+x-3$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 $f(-1)=-6<0$, $f(1)=2>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 주어진 방정식은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 함수의 연속

본책 28쪽

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면
① $f(a)$가 정의되어 있다.
② $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재한다. ⇨ $\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)$
③ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$
(2) 위의 세 조건 중 하나라도 만족시키지 않으면 $x=a$에서 불연속이다.

0149 답 ㄷ

ㄱ. $f(-2)$가 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to -2-} g(x)=\lim_{x\to -2-} \frac{-(x+2)}{x+2}=-1$

$\lim_{x\to -2+} g(x)=\lim_{x\to -2+} \frac{x+2}{x+2}=1$

$\therefore \lim_{x\to -2-} g(x)\neq \lim_{x\to -2+} g(x)$

즉, $\lim_{x\to -2} g(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $g(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

ㄷ. $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다. 이때, $h(1)=3$이고,

$\lim_{x\to 1} h(x)=\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1} (x^2+x+1)=3$

즉, $\lim_{x\to 1} h(x)=h(1)$이므로 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

0150 답 ⑤

① $\lim_{x\to 0-} [x]=-1$, $\lim_{x\to 0+} [x]=0$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(x)\neq \lim_{x\to 0+} f(x)$

② $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x}=-1$,

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} \frac{x}{x}=1$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(x)\neq \lim_{x\to 0+} f(x)$

③ $f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x}=\lim_{x\to 0} \frac{x(x-2)}{x}$

$=\lim_{x\to 0} (x-2)=-2$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$

④ $f(0)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} (-x)=0$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} x^2=0$

이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

0151 답 2

$f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이면 된다.

이때, $f(a)=a^2-3a$이고,

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a-} (x^2-3x)=a^2-3a$

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+} (x-4)=a-4$

$f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$a^2-3a=a-4$, $a^2-4a+4=0$, $(a-2)^2=0$

$\therefore a=2$

참고 $f(a)=\lim_{x\to a-} f(x)$이므로 따로 구하지 않아도 된다.

0152 답 ③

$f(x)=\frac{1}{x-\frac{1}{x}}=\frac{1}{\frac{x^2-1}{x}}=\frac{x}{x^2-1}$

따라서 $x=0$, $x^2-1=0$인 x의 값에서 함수 $f(x)$가 정의되지 않으므로 불연속이 되는 점의 개수는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$의 3이다.

유형 02 함수의 그래프와 연속

본책 28쪽

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 끊어져 있으면
⇨ $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

0153 답 ㄷ

ㄱ. $\lim_{x\to 1-} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to 1-} f(x)\neq \lim_{x\to 1+} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=2$

ㄷ. $f(x)$는 $x=1$, $x=2$에서 연속이 아니므로 불연속인 점의 개수는 2이다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

참고 $x=1$에서는 $\lim_{x\to 1-} f(x)\neq \lim_{x\to 1+} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않고, $x=2$에서는 $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$이므로 극한값과 함숫값이 다르므로 불연속이다.

0154 답 3

$\lim_{x\to 3-} f(x)\neq \lim_{x\to 3+} f(x)$이므로 $f(x)$는 $x=3$에서 극한값이 존재하지 않는다.

$\therefore m=1$

$\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$, $\lim_{x\to 5} f(x)\neq f(5)$이므로 $f(x)$는 $x=1$, $x=5$에서 극한값과 함숫값이 다르다. $\therefore n=2$

$\therefore m+n=3$

0155 답 ㄱ

ㄴ. $\lim_{x\to -1-} f(x)\neq \lim_{x\to -1+} f(x)$이므로 $\lim_{x\to -1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 연속이 아니므로 불연속인 점의 개수는 2이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

0156 답 -2

직선 $y=2x+k$와 곡선 $y=x^2-1$의 교점의 개수는 방정식

$2x+k=x^2-1$, 즉

$x^2-2x-1-k=0$ …… ㉠

의 실근의 개수와 같다. 방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-1-k)=2+k$

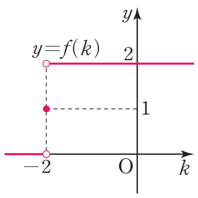
(i) $\frac{D}{4}>0$, 즉 $k>-2$일 때, ㉠은 서로 다른 두 실근을 가지므로 $f(k)=2$

(ii) $\frac{D}{4}=0$, 즉 $k=-2$일 때, ㉠은 중근을 가지므로 $f(-2)=1$

(iii) $\frac{D}{4}<0$, 즉 $k<-2$일 때, ㉠은 허근을 가지므로 $f(k)=0$

(i)~(iii)에서 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $f(k)$는 $k=-2$에서 불연속이다.

$\therefore a=-2$



0157 답 ㄴ, ㄷ

TIP $k=0$, $k\neq0$일 때로 나누어서 $f(k)$를 구한다.

$kx^2+2(k+2)x-(k+2)=0$에서

(i) $k=0$일 때

$4x-2=0$에서 $x=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore f(0)=1$

(ii) $k\neq0$일 때

$kx^2+2(k+2)x-(k+2)=0$의 판별식을 D라 하면

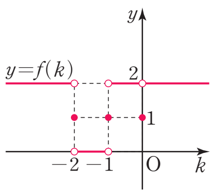
$\frac{D}{4}=(k+2)^2+k(k+2)=2k^2+6k+4=2(k+1)(k+2)$

$\frac{D}{4}>0$, 즉 $k<-2$ 또는 $-1<k<0$ 또는 $k>0$일 때, $f(k)=2$

$\frac{D}{4}=0$, 즉 $k=-2$ 또는 $k=-1$일 때, $f(k)=1$

$\frac{D}{4}<0$, 즉 $-2<k<-1$일 때, $f(k)=0$

(i), (ii)에서 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $\lim_{k\to0}f(k)=2$, $f(0)=1$이므로

$\lim_{k\to0}f(k)\neq f(0)$

ㄴ. 우극한과 좌극한이 서로 다른 실수 a는 -2, -1로 그 개수는 2이다.

ㄷ. $f(k)$는 $k=-2$, $k=-1$, $k=0$에서 연속이 아니므로 불연속인 점의 개수는 3이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

유형 03 합과 곱의 꼴로 주어진 함수의 연속 본책 29쪽

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

⇨ $\lim_{x\to a-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a+}\{f(x)+g(x)\}=f(a)+g(a)$

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

⇨ $\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=f(a)g(a)$

0158 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to1+}g(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=0$

ㄴ. $x-1=t$라 하면 $x\longrightarrow1-$일 때 $t\longrightarrow0-$이고,

$x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x-1)=\lim_{t\to0-}f(t)=-1$

$\lim_{x\to1+}f(x-1)=\lim_{t\to0+}f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to1-}f(x-1)\neq\lim_{x\to1+}f(x-1)$

즉, $\lim_{x\to1}f(x-1)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x-1)$은 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $x+1=t$라 하면 $x\longrightarrow0-$일 때 $t\longrightarrow1-$이고,

$x\longrightarrow0+$일 때 $t\longrightarrow1+$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)g(x+1)=\lim_{x\to0-}f(x)\cdot\lim_{t\to1-}g(t)$

$=(-1)\cdot0=0$

$\lim_{x\to0+}f(x)g(x+1)=\lim_{x\to0+}f(x)\cdot\lim_{t\to1+}g(t)$

$=0\cdot(-1)=0$

$f(0)g(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)g(x+1)=f(0)g(1)$

즉, 함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0159 답 ㄷ

$f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고 $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)g_k(x)$ $(k=1, 2, 3)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이면 된다.

ㄱ. $\lim_{x\to1-}f(x)g_1(x)=0\cdot2=0$

$\lim_{x\to1+}f(x)g_1(x)=2\cdot2=4$

$\therefore \lim_{x\to1-}f(x)g_1(x)\neq\lim_{x\to1+}f(x)g_1(x)$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)g_1(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)g_1(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to1-}f(x)g_2(x)=0\cdot2=0$

$\lim_{x\to1+}f(x)g_2(x)=2\cdot2=4$

$\therefore \lim_{x\to1-}f(x)g_2(x)\neq\lim_{x\to1+}f(x)g_2(x)$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)g_2(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)g_2(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to1}f(x)g_3(x)=f(1)g_3(1)=0$이므로 $f(x)g_3(x)$는

$x=1$에서 연속이다.

즉, $f(x)g_3(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

다른 풀이 $\lim_{x\to1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to1+}f(x)=2$, $f(1)=1$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)g_k(x)=\lim_{x\to1+}f(x)g_k(x)=f(1)g_k(1)$이 성립하려면

$\lim_{x\to1}g_k(x)=g_k(1)=0$이어야 한다.

ㄱ. $g_1(1)=2$

ㄴ. $g_2(1)=2$

ㄷ. $g_3(1)=0$

0160 답 ㄱ, ㄷ

$f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고 $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)g_k(x)(k=1, 2, 3)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1$, $x=1$에서 연속이면 된다.

ㄱ. $\lim_{x\to-1}f(x)g_1(x)=f(-1)g_1(-1)=0$이므로 $f(x)g_1(x)$는

$x=-1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1}f(x)g_1(x)=f(1)g_1(1)=0$이므로 $f(x)g_1(x)$는

$x=1$에서 연속이다.

즉, $f(x)g_1(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to-1-}f(x)g_2(x)=1\cdot2=2$

$\lim_{x\to-1+}f(x)g_2(x)=0\cdot2=0$

$\therefore \lim_{x\to-1-}f(x)g_2(x)\neq\lim_{x\to-1+}f(x)g_2(x)$

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)g_2(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)g_2(x)$는

$x=-1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to-1}f(x)g_3(x)=f(-1)g_3(-1)=0$이므로 $f(x)g_3(x)$는

$x=-1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1}f(x)g_3(x)=f(1)g_3(1)=0$이므로 $f(x)g_3(x)$는

$x=1$에서 연속이다.

즉, $f(x)g_3(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

참고 ㄴ. $\lim_{x\to1}f(x)g_2(x)=f(1)g_2(1)=0$이므로 $f(x)g_2(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

유형 04 **합성함수의 연속** 본책 30쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 합성함수 $f(g(x))$가 $x=a$에서 연속이려면

⇨ $\lim_{x\to a-}f(g(x))=\lim_{x\to a+}f(g(x))=f(g(a))$

0161 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $f(1)g(1)=0$이고,

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=0\cdot0=0$

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=-1\cdot0=0$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이므로 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서

연속이다.

ㄴ. $f(g(0))=f(1)=-1$이고,

$g(x)=t$라 하면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow1-$이므로

$\lim_{x\to0}f(g(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=0$

즉, $\lim_{x\to0}f(g(x))\neq f(g(0))$이므로 $f(g(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $g(f(-1))=g(0)=1$이고,

$f(x)=t$라 하면 $x\longrightarrow-1-$일 때 $t\longrightarrow0+$이고,

$x\longrightarrow-1+$일 때 $t\longrightarrow0-$이므로

$\lim_{x\to-1-}g(f(x))=\lim_{t\to0+}g(t)=1$

$\lim_{x\to-1+}g(f(x))=\lim_{t\to0-}g(t)=1$

즉, $\lim_{x\to-1}g(f(x))=g(f(-1))$이므로 $g(f(x))$는 $x=-1$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0162 답 ⑤

① $f(f(1))=f(0)=0$

② $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

③ $f(x)=t$라 하면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow-1+$이므로

$\lim_{x\to1}f(f(x))=\lim_{t\to-1+}f(t)=1$

④ $f(f(0))=f(0)=0$이고,

$f(x)=t$라 하면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to0}f(f(x))=\lim_{t\to0}f(t)=0$

즉, $\lim_{x\to0}f(f(x))=f(f(0))$이므로 $f(f(x))$는 $x=0$에서

연속이다.

⑤ $f(f(1))=f(0)=0$이고,

$f(x)=t$라 하면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow-1+$이므로

$\lim_{x\to1}f(f(x))=\lim_{t\to-1+}f(t)=1$

즉, $\lim_{x\to1}f(f(x))\neq f(f(1))$이므로 $f(f(x))$는 $x=1$에서

불연속이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0163 답 ㄴ, ㄹ

ㄱ. $\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}=-1+0=-1$

$\lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}=1+0=1$

$\therefore \lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}\neq\lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}$

즉, $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재하지 않으므로

$f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(0)g(0)=0$이고,

$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=-1\cdot0=0$

$\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=1\cdot0=0$

즉, $\lim_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$이므로 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서

연속이다.

ㄷ. $f(g(0))=f(0)=-1$이고,

$g(x)=t$라 하면 $x \longrightarrow 0$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to 0} f(g(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=1$

즉, $\lim_{x\to 0} f(g(x)) \neq f(g(0))$이므로 $f(g(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄹ. $g(f(0))=g(-1)=0$이고,

$f(x)=t$라 하면 $x \longrightarrow 0-$일 때 $t=-1$이고,

$x \longrightarrow 0+$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x\to 0-} g(f(x))=g(-1)=0$

$\lim_{x\to 0+} g(f(x))=g(1)=0$

즉, $\lim_{x\to 0} g(f(x))=g(f(0))$이므로 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 구하는 함수는 ㄴ, ㄹ이다.

0164 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $f(g_1(0))=f(0)=0$이고,

$g_1(x)=t$라 하면 $x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow -1+$이고,

$x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow 1+$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(g_1(x))=\lim_{t\to -1+} f(t)=0$

$\lim_{x\to 0+} f(g_1(x))=\lim_{t\to 1+} f(t)=0$

즉, $\lim_{x\to 0} f(g_1(x))=f(g_1(0))$이므로 $f(g_1(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $g_2(x)=t$라 하면 $x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow 0+$이고,

$x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(g_2(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=1$

$\lim_{x\to 0+} f(g_2(x))=\lim_{t\to 1-} f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0-} f(g_2(x)) \neq \lim_{x\to 0+} f(g_2(x))$

즉, $\lim_{x\to 0} f(g_2(x))$의 값이 존재하지 않으므로 $f(g_2(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(g_3(0))=f(0)=0$이고,

$g_3(x)=t$라 하면 $x \longrightarrow 0$일 때 $t \longrightarrow -1+$이므로

$\lim_{x\to 0} f(g_3(x))=\lim_{t\to -1+} f(t)=0$

즉, $\lim_{x\to 0} f(g_3(x))=f(g_3(0))$이므로 $f(g_3(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

유형 05 함수의 연속과 미정계수의 결정 (1) 본책 30쪽

> 함수 $g(x)$가 $x\neq a$인 모든 실수에서 연속일 때,
>
> 함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\neq a) \\ k & (x=a) \end{cases}$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면
>
> ⇨ $\lim_{x\to a} g(x)=k$ (k는 상수)

0165 답 4

$f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1} \frac{3x^3+3x^2+x+1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1} \frac{(3x^2+1)(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1} (3x^2+1)=4$$

이므로 $k=4$

0166 답 -16

$f(0)=-2$이므로 $b=-2$

$f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3+} f(x)=f(3)$

$3+b=-3+a \qquad \therefore a=4$

또, $x=-3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -3-} f(x)=\lim_{x\to -3+} f(x)=f(-3)$

$-3c+7=3+b \qquad \therefore c=2$

$\therefore abc=4\cdot(-2)\cdot 2=-16$

0167 답 0

$f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이어야 한다. 이때,

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} \frac{x^2}{2x-(-x)}=\lim_{x\to 0-} \frac{x}{3}=0$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{2x-x}=\lim_{x\to 0+} x=0$$

이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

$\therefore a=0$

0168 답 ④

$f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$

$a^2-b=a+b$에서 $2b=a^2-a$, $2b=a(a-1)$

이때, a, b가 10 이하의 자연수이므로 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 1)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 6)$, $(5,\ 10)$이고, 그 개수는 4이다.

0169 답 7

$f(x)=f(x+4)$이므로 $f(0)=f(4)$

$f(0)=b$, $f(4)=2\log_2 4=4 \qquad \therefore b=4$

또, $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$

$4+2a+b=2\log_2 2$, $2a=-6 \qquad \therefore a=-3$

$\therefore b-a=4+3=7$

유형 06 함수의 연속과 미정계수의 결정 (2) 본책 31쪽

> (1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$
>
> (2) 분수 꼴의 함수에서 $x \longrightarrow a$일 때,
>
> ① (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.
>
> ② (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

0170 답 -2

$f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \to -1} f(x)=f(-1)$

$\therefore \lim_{x \to -1} \dfrac{x^2-ax+4}{x+1}=b$ …… ㉠

$x \longrightarrow -1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -1} (x^2-ax+4)=0$이므로

$1+a+4=0 \qquad \therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+5x+4}{x+1}=\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x+4)}{x+1}=\lim_{x \to -1}(x+4)=3$$

이므로 $b=3$

$\therefore a+b=-2$

0171 답 ③

$f(x)$가 $x=-2$에서 연속이려면 $\lim_{x \to -2} f(x)=f(-2)$

$\therefore \lim_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x-a}+b}{x+2}=\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

$x \longrightarrow -2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -2} (\sqrt{x-a}+b)=0$이므로

$\sqrt{-2-a}+b=0 \qquad \therefore b=-\sqrt{-2-a}$ …… ㉡

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{-a-2}}{x+2}$$
$$=\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x-a}+\sqrt{-a-2})}$$
$$=\lim_{x \to -2} \frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{-a-2}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{-2-a}}=\frac{1}{2}$$

즉, $\sqrt{-2-a}=1$에서 $a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면 $b=-1$

$\therefore ab=3$

0172 답 10

$\lim_{x \to \infty} g(x)=3$에서 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)-x^2}{x-1}=3$이므로

$f(x)-x^2=3x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$\therefore f(x)=x^2+3x+a$

이때, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \to 1} g(x)=g(1)$

$\therefore \lim_{x \to 1} \dfrac{3x+a}{x-1}=k$ …… ㉠

$x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 1} (3x+a)=0$이므로 $3+a=0 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=x^2+3x-3$이므로 $f(2)=7$

또, $a=-3$을 ㉠에 대입하면

$$k=\lim_{x \to 1} \frac{3x-3}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{3(x-1)}{x-1}=3$$

$\therefore k+f(2)=3+7=10$

유형 07 합과 곱의 꼴로 주어진 함수의 연속과 미정계수의 결정 본책 32쪽

(ⅰ) 주어진 함수가 불연속인 점에서의 좌극한, 우극한, 함숫값을 구한다.

(ⅱ) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x \to a-} f(x)=\lim_{x \to a+} f(x)=f(a)$ 임을 이용하여 미정계수를 결정한다.

0173 답 -2

함수 $y=f(x)$가 $x \neq 0$인 모든 실수에서 연속이므로 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하여 얻어진 함수 $y=f(x)+k$도 $x \neq 0$인 모든 실수에서 연속이다.

(ⅰ) $\lim_{x \to 0-} g(x)=\lim_{x \to 0-} f(x)\{f(x)+k\}$
$=\lim_{x \to 0-} f(x) \cdot \lim_{x \to 0-} \{f(x)+k\}$
$=2(2+k)=2k+4$

(ⅱ) $\lim_{x \to 0+} g(x)=\lim_{x \to 0+} f(x)\{f(x)+k\}$
$=\lim_{x \to 0+} f(x) \cdot \lim_{x \to 0+} \{f(x)+k\}$
$=0(0+k)=0$

(ⅲ) $g(0)=f(0)\{f(0)+k\}=2(2+k)=2k+4$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 $2k+4=0$

$\therefore k=-2$

0174 답 ②

$f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이면 된다.

(ⅰ) $\lim_{x \to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x \to 1-} (-x)(x+k)$
$=-1-k$

(ⅱ) $\lim_{x \to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x \to 1+} (x+2)(x+k)$
$=3+3k$

(ⅲ) $f(1)g(1)=3+3k$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 $-1-k=3+3k$

$\therefore k=-1$

0175 답 -2

$f(x)$가 $x=0$에서 불연속이므로 $k \neq 1$ …… ㉠

또, $f(x)f(2-x)$가 $x=2$에서 연속이고 $2-x=t$라 하면

$x \longrightarrow 2-$일 때 $t \longrightarrow 0+$이고, $x \longrightarrow 2+$일 때 $t \longrightarrow 0-$이므로

(ⅰ) $\lim_{x \to 2-} f(x)f(2-x)=\lim_{x \to 2-} f(x) \cdot \lim_{t \to 0+} f(t)$
$=(2+k)k=2k+k^2$

(ⅱ) $\lim_{x \to 2+} f(x)f(2-x)=\lim_{x \to 2+} f(x) \cdot \lim_{t \to 0-} f(t)$
$=(2+k) \cdot 1=2+k$

(ⅲ) $f(2)f(0)=(2+k) \cdot 1=2+k$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 $2k+k^2=2+k$

$k^2+k-2=0$, $(k+2)(k-1)=0$

$\therefore k=-2$ ($\because k\neq1$)

유형 08 가우스 기호를 포함한 함수의 연속 본책 32쪽

정수 n에 대하여

(1) $n-1\le f(x)<n$이면 ⇨ $[f(x)]=n-1$

(2) $n\le f(x)<n+1$이면 ⇨ $[f(x)]=n$

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

0176 답 ③

$f(x)$가 $x=n$에서 연속이므로 $\lim_{x\to n}f(x)=f(n)$이다.

이때,

$\lim_{x\to n-}f(x)=\lim_{x\to n-}([x]^2-5[x]+3)$

$=(n-1)^2-5(n-1)+3=n^2-7n+9$

$\lim_{x\to n+}f(x)=\lim_{x\to n+}([x]^2-5[x]+3)$

$=n^2-5n+3$

$f(n)=n^2-5n+3$

이므로 $n^2-7n+9=n^2-5n+3$

$2n=6$ $\therefore n=3$

0177 답 -3

$f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)$이다.

이때, $\lim_{x\to-2-}f(x)=(-2)^2-3(-2k-3)=6k+13$

$\lim_{x\to-2+}f(x)=(-1)^2-2(-2k-3)=4k+7$

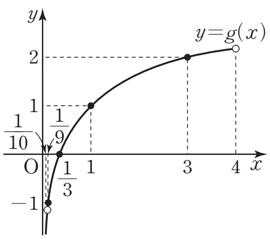
$f(-2)=(-1)^2-2(-2k-3)=4k+7$

이므로 $6k+13=4k+7$

$2k=-6$ $\therefore k=-3$

0178 답 4

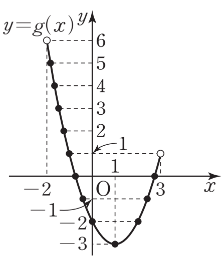
$g(x)=\log_3 3x\ \left(\frac{1}{10}<x<4\right)$라 하면 $g(x)=1+\log_3 x$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$g(x)=-1,\ 0,\ 1,\ 2$를 만족시키는 x에서 $f(x)$가 불연속이고 이를 만족시키는 x의 값은 각각 1개씩 존재하므로 구하는 x의 값의 개수는 4이다.

0179 답 11

$g(x)=x^2-2x-2\ (-2<x<3)$라 하면 $g(x)=(x-1)^2-3$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$g(x)=-2,\ \cdots,\ 5$를 만족시키는 x에서 $f(x)$가 불연속이고

$g(x)=-2,\ -1,\ 0$을 만족시키는 x의 값은 각각 2개씩 존재하고 $g(x)=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$를 만족시키는 x의 값은 각각 1개씩 존재하므로 구하는 x의 값의 개수는 11이다.

유형 09 $(x-a)f(x)$ 꼴의 함수의 연속 본책 33쪽

연속함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)$가 $(x-a)f(x)=g(x)$를 만족할 때, $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이면

⇨ $f(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}$

0180 답 ⑤

$x\neq2$일 때 $f(x)=\frac{x^2+ax-8}{x-2}$

$f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$이어야 한다.

$\therefore f(2)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-8}{x-2}$ …… ㉠

$x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+ax-8)=0$이므로 $4+2a-8=0$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$f(2)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+4)(x-2)}{x-2}=6$

0181 답 32

$x\neq2$일 때 $f(x)=\frac{x^4-16}{x-2}$

$f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+2)(x^2+4)=32$

0182 답 12

$\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\neq0$, 즉 $x\neq0$일 때

$f(x)=\frac{x^2+6x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$

$f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+6x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x(x+6)(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(x+6)(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{2}=12$

0183 답 2

$x^2+x\neq0$일 때, 즉 $x\neq-1$, $x\neq0$일 때

$f(x)=\frac{x^3+ax^2+bx}{x^2+x}=\frac{x^2+ax+b}{x+1}$ …… ㉠

$f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로 $f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)$이어야 한다.

$\therefore f(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+b}{x+1}$

$x \longrightarrow -1$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로
(분자) $\longrightarrow$ 0이다.
즉, $\lim_{x \to -1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1-a+b=0$
$\therefore b=a-1$
$b=a-1$을 ㉠에 대입하면
$f(x)=\dfrac{x^2+ax+a-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}=x+a-1$
이때, $f(2)=3$이므로 $1+a=3$ $\quad \therefore a=2$
따라서 $b=1$이므로 $ab=2$

유형 10 연속함수의 성질
본책 33쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면
⇨ $cf(x)$ (단, c는 상수), $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a) \neq 0$)
도 $x=a$에서 연속이다.

0184 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=f(x)-h(x)$
이때, $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.
ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 2 & (x<0) \end{cases}$
이면 $f(g(x))$는 연속함수이지만 $f(x)$와 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
ㄷ. $f(x)$가 연속함수이고 $\{f(x)\}^2=f(x)f(x)$이므로 $\{f(x)\}^2$도 연속함수이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0185 답 ③

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속함수의 성질에 의하여 ①, ②, ④는 모든 실수 x에서 연속이다.
③ $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2+4}{x^3-1}=\dfrac{x^2+4}{(x-1)(x^2+x+1)}$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.
⑤ $f(g(x))=f(x^3-1)=(x^3-1)^2+4$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

0186 답 ②

ㄱ. [반례] $f(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -1 & (x \geq 0) \\ 1 & (x<0) \end{cases}$
이면 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=0$에서 불연속이지만 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $f(x)=t$라 하면 $x \longrightarrow a$일 때 $t \longrightarrow f(a)$이므로
$\lim_{x \to a} g(f(x))=\lim_{t \to f(a)} g(t)=g(f(a))$
따라서 $g(f(x))$는 $x=a$에서 연속이다.
ㄷ. [반례] $f(x)=x$, $a=-1$이면 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이지만 $f(a)=-1$이므로 $\sqrt{f(a)}$는 정의되지 않는다. 따라서 함수 $\sqrt{f(x)}$는 $x=a$에서 불연속이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

유형 11 최대 · 최소 정리
본책 34쪽

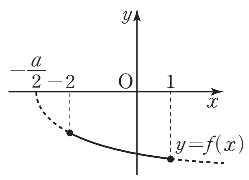
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

0187 답 ③

① $\lim_{x \to 1-} f(x)=\lim_{x \to 1+} f(x)=1$이므로 $\lim_{x \to 1} f(x)=1$
② 불연속이 되는 x의 값은 -1, 1의 2개이다.
③ 구간 $[-1,\ 0]$에서 최댓값은 존재하지 않는다.
④ 구간 $[0,\ 1)$에서 $x=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.
⑤ $\lim_{x \to -1-} f(x)=0$, $\lim_{x \to -1+} f(x)=1$이므로 $\lim_{x \to -1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

0188 답 8

$f(x)=-\sqrt{2x+a}=-\sqrt{2\left(x+\dfrac{a}{2}\right)}$



함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{a}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 -2를 가지므로
$f(-2)=-\sqrt{-4+a}=-2$, $\sqrt{-4+a}=2$
$-4+a=4 \qquad \therefore a=8$

0189 답 ㄴ, ㄹ

ㄱ. [반례] $f(x)=1$, $g(x)=x$이면 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 연속이지만 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{x}$은 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 최댓값과 최솟값을 갖지 않는다.
ㄴ. $f(x)-g(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이므로 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.
ㄷ. [반례] $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x-1$이면 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 연속이지만 $f(g(x))=\dfrac{1}{x-1}$은 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 최댓값을 갖지 않는다.
ㄹ. $f(x)g(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이므로 $|f(x)g(x)|$도 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.
따라서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

유형 12 사잇값의 정리 ; 방정식의 실근이 존재하는 구간
본책 34쪽

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면, 즉 $f(a)f(b)<0$이면
⇨ $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.
⇨ 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

0190 답 ②
$f(x)=x^3+x^2+x-2$라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고
$f(-1)=-3<0$, $f(0)=-2<0$, $f(1)=1>0$,
$f(2)=12>0$, $f(3)=37>0$, $f(4)=82>0$
따라서 $f(0)f(1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(0,\ 1)$이다.

0191 답 ㄴ, ㄷ
ㄱ. $g(x)=f(x)+4x$라 하면 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 $g(0)=2>0$, $g(1)=4>0$이므로 $g(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재하는지 알 수 없다. 즉, 방정식 $f(x)+4x=0$이 열린구간 $(0,\ 1)$에서 실근을 갖는지 알 수 없다.
ㄴ. $g(x)=f(x)-2x^2$이라 하면 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 $g(0)=2>0$, $g(1)=-2<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $g(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x)-2x^2=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
ㄷ. $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{x+1}$이라 하면 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 $g(0)=1>0$, $g(1)=-\dfrac{1}{2}<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $g(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x)-\dfrac{1}{x+1}=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

0192 답 $0<a<3$
$f(x)=2x^2-5x+a$라 하면 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 $f(0)=a$, $f(1)=a-3$이므로
$f(0)f(1)=a(a-3)<0$
$\therefore 0<a<3$

다른 풀이 $f(x)=2x^2-5x+a=2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2-\dfrac{25}{8}+a$는 열린구간 $(0,\ 1)$에서 감소하므로 $f(0)=a>0$, $f(1)=a-3<0$이어야 한다.
$\therefore 0<a<3$

0193 답 ①
$f(x)=\cos\pi x-2x$라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고
$f(0)=1>0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1<0$, $f(1)=-3<0$,
$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-3<0$, $f(2)=-3<0$, $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=-5<0$
따라서 $f(0)f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$이다.

유형 13 사잇값의 정리 ; 방정식의 실근의 개수 본책 35쪽

방정식 $f(x)+g(x)=0$의 실근의 개수를 조사할 때에는
⇨ $f(x)+g(x)=h(x)$로 놓고 $h(x)$의 함숫값의 부호를 살펴본다.

0194 답 5
$g(x)=f(x)+x$라 하면 함수 $g(x)$는 연속함수이고
$g(0)=-2<0$, $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{6}>0$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{5}{2}<0$,
$g\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{17}{12}>0$, $g\left(\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{1}{5}<0$, $g(1)=\dfrac{1}{6}>0$
즉,
$g(0)g\left(\dfrac{1}{3}\right)<0$, $g\left(\dfrac{1}{3}\right)g\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)g\left(\dfrac{2}{3}\right)<0$,
$g\left(\dfrac{2}{3}\right)g\left(\dfrac{4}{5}\right)<0$, $g\left(\dfrac{4}{5}\right)g(1)<0$이므로
사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 구간
$\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{5}\right)$, $\left(\dfrac{4}{5},\ 1\right)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 구간 $(0,\ 1)$에서 $f(x)=-x$는 적어도 5개의 실근을 갖는다.

0195 답 5
$g(x)=f(x)-x^2-4x$라 하면 함수 $g(x)$는 연속함수이고
$g(0)=2>0$, $g(1)=a^2-2a-8$, $g(2)=3>0$이므로
$g(1)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 구간 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
즉, $a^2-2a-8<0$에서
$(a+2)(a-4)<0$ $\quad\therefore -2<a<4$
따라서 구하는 정수 a는 -1, 0, 1, 2, 3이므로 그 합은 5이다.

0196 답 18
$f(x)=(x-18)(x-19)+(x-19)(x-20)+(x-20)(x-18)$이라 하면
$f(18)=2>0$, $f(19)=-1<0$, $f(20)=2>0$
이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(18,\ 19)$, $(19,\ 20)$에서 각각 하나의 실근을 갖는다. 이때, $\alpha<\beta$이므로 α는 구간 $(18,\ 19)$에 속한다.
$\therefore n=18$

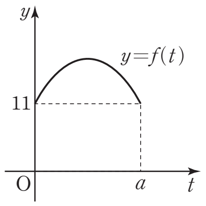
0197 답 2
$f(0)f(1)<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 이때, $f(x)=f(-x)$에서 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 구간 $(-1,\ 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 2개의 실근을 갖는다.

유형 14 사잇값의 정리 ; 실생활에의 활용 본책 35쪽

적당한 함수를 세워 연속인 구간을 찾은 다음 사잇값의 정리를 이용한다.

0198 답 ㄷ
육상 선수가 출발선을 떠난 지 t초 후의 속력을 $f(t)$ m/s로 놓고 다시 출발선에 올 때까지 걸린 시간을 a초라 하면 함수 $f(t)$는 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 연속이다.

ㄱ. 함수 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으면 $f(t)=11$인 순간은 $t=0$, $t=a$로 2번 뿐이다.



ㄴ. 함수 $y=f(t)$의 그래프가 ㄱ과 같으면 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 $f(t)\ge 11$이다.

ㄷ. 최대·최소 정리에 의하여 $f(t)$는 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때, 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

(i) $M=m=11$이면 주어진 명제는 참이다.

(ii) $M>11$일 때, $f(b)=M(0<b<a)$이라 하면 $11<k<M$인 k에 대하여 $f(0)=11<k$, $f(b)=M>k$, $f(a)=11<k$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=k$의 해가 열린구간 $(0,\ b)$, $(b,\ a)$에 각각 적어도 하나씩 존재한다. 따라서 어느 두 순간의 속력이 k로 같다.

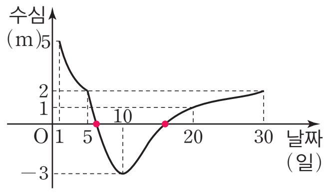
(iii) $m<11$일 때, (ii)와 같은 방법으로 증명할 수 있다.

(i)~(iii)에 의하여 출발선을 떠날 때와 다시 출발선에 왔을 때를 제외하고 어느 두 순간의 속력이 같은 경우가 있다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

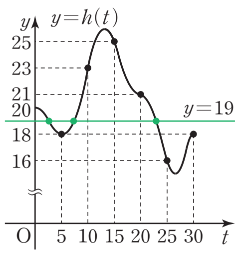
0199 답 2번

기준 수심을 0으로 놓고 저수지의 물의 양이 기준 수심보다 높으면 $+$, 기준 수심보다 낮으면 $-$로 나타내어 수심의 변화에 따라 그래프의 개형을 그려 보면 오른쪽 그림과 같다. 따라서 기준 수심과 같은 순간은 9월 한 달 동안 적어도 2번 있다.



0200 답 ㄴ

주어진 표를 이용하여 $y=h(t)$의 그래프의 개형을 그려 보면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. [반례] 오른쪽 그래프와 같이 $h(t)>25$인 경우도 있다.

ㄴ. 사잇값의 정리에 의하여 $(0,\ 5)$, $(5,\ 10)$, $(20,\ 25)$에서 $h(t)=19$인 순간이 적어도 한 번씩 있으므로 $h(t)=19$인 순간이 적어도 3번 존재한다.

ㄷ. [반례] 위의 그래프와 같이 $h(t)<16$인 경우도 있다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

STEP 3 | 심화 Master

0201 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

TIP $x \longrightarrow n$ (n은 정수)일 때, x가 유리수이면서 $x \longrightarrow n$인 경우와 x가 무리수이면서 $x \longrightarrow n$인 경우로 나누어 생각한다.

ㄱ. x가 유리수일 때 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x=0$

x가 무리수일 때 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

ㄴ. n이 자연수이면 $1-\dfrac{1}{n}$은 유리수이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} f\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=1$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$이고,

$x=0$은 유리수이므로 $f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄹ. 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 무리수는 무수히 많으므로 방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 해는 무한개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0202 답 0

TIP 조건 (가)의 식의 양변에 $x=0, y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 먼저 구한다.

(가)에서 $f(x+y)=f(x)+f(y)+a$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+a \qquad \therefore f(0)=-a$

(나)에서 $x-1=t$라 하면 $x \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$

이때, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$에서 $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

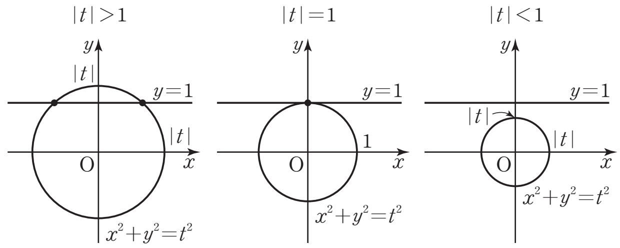
$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

이때, $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

즉, $0=-a$에서 $a=0$

0203 답 ③

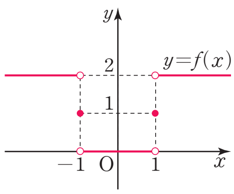
TIP t의 값의 범위를 나누어 $f(t)$를 먼저 구한다.



원 $x^2+y^2=t^2$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 개수는 위의 그림과 같으므로

$$f(t)=\begin{cases} 2 & (t<-1 \text{ 또는 } t>1) \\ 1 & (t=-1 \text{ 또는 } t=1) \\ 0 & (-1<t<1) \end{cases}$$

이때, $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $(x+k)f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로



$\lim_{x\to1-}(x+k)f(x)$

$=\lim_{x\to1+}(x+k)f(x)$

$=(1+k)f(1)$

이때,

$\lim_{x\to1-}(x+k)f(x)=(1+k)\cdot0=0$

$\lim_{x\to1+}(x+k)f(x)=(1+k)\cdot2=2+2k$

$(1+k)f(1)=1+k$

이므로 $0=2+2k=1+k$ $\quad\therefore k=-1$

$\therefore f(1)+k=1-1=0$

0204 답 ②

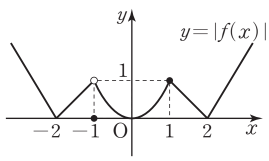
TIP 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$를 만족시키면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄱ. $-x=t$라 하면 $x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow-1-$이므로

$\lim_{x\to1+}\{f(x)+f(-x)\}=\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{t\to-1-}f(t)$

$=-1+1=0$

ㄴ. $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)-|f(x)|$이 불연속일 수 있는 점은 $x=-1$, $x=1$일 때이다.



(i) $x=-1$일 때

$\lim_{x\to-1}\{f(x)-|f(x)|\}=1-1=0$

$f(-1)-|f(-1)|=0-0=0$

$\therefore \lim_{x\to-1}\{f(x)-|f(x)|\}=f(-1)-|f(-1)|$

따라서 $f(x)-|f(x)|$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii) $x=1$일 때

$\lim_{x\to1-}\{f(x)-|f(x)|\}=1-1=0$

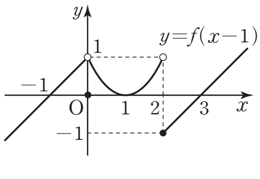
$\lim_{x\to1+}\{f(x)-|f(x)|\}=-1-1=-2$

$\therefore \lim_{x\to1-}\{f(x)-|f(x)|\}\neq\lim_{x\to1+}\{f(x)-|f(x)|\}$

따라서 $f(x)-|f(x)|$는 $x=1$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 $f(x)-|f(x)|$가 불연속인 점은 1개이다.

ㄷ. [반례] $a=1$일 때, $y=f(x-1)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x-1)$은 $x=-1$, $x=1$에서 함숫값이 모두 0이고, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 함숫값이 0이므로 함수 $f(x)f(x-1)$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0205 답 ㄱ, ㄴ

TIP (좌극한)=(우극한)이면 극한값이 존재하고, (극한값)=(함숫값)이면 함수가 연속이다.

ㄱ. $-x=t$라 하면 $x\longrightarrow0-$일 때 $t\longrightarrow0+$이고,

$x\longrightarrow0+$일 때 $t\longrightarrow0-$이므로

$\lim_{x\to0-}\{f(x)+f(-x)\}=\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{t\to0+}f(t)$

$=-1+1=0$

$\lim_{x\to0+}\{f(x)+f(-x)\}=\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{t\to0-}f(t)$

$=1+(-1)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}\{f(x)+f(-x)\}=0$

ㄴ. $|f(0)|=|-1|=1$이고,

$\lim_{x\to0-}|f(x)|=|-1|=1$

$\lim_{x\to0+}|f(x)|=|1|=1$

이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $f(-1)f(1)=-1\cdot1=-1$이고,

$x-1=t$, $x+1=s$라 하면

$x\longrightarrow0-$일 때 $t\longrightarrow-1-$, $s\longrightarrow1-$이고,

$x\longrightarrow0+$일 때 $t\longrightarrow-1+$, $s\longrightarrow1+$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x-1)f(x+1)=\lim_{t\to-1-}f(t)\cdot\lim_{s\to1-}f(s)$

$=-1\cdot2=-2$

$\lim_{x\to0+}f(x-1)f(x+1)=\lim_{t\to-1+}f(t)\cdot\lim_{s\to1+}f(s)$

$=-2\cdot1=-2$

즉, $\lim_{x\to0}f(x-1)f(x+1)\neq f(-1)f(1)$이므로

$f(x-1)f(x+1)$은 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0206 답 ⑤

TIP 합성함수 $g(f(x))$의 연속성을 조사할 때에는 $f(x)$가 불연속인 점과 $g(x)$가 불연속인 $x=a$에 대하여 $f(x)=a$가 되는 점에서의 연속성을 조사한다.

ㄱ. $g(f(0))=g(0)=0$

ㄴ. $g(f(0))=0$이고,

$f(x)=t$라 하면 $x\longrightarrow0-$일 때 $t\longrightarrow0-$이고,

$x\longrightarrow0+$일 때 $t\longrightarrow2-$이므로

$\lim_{x\to0-}g(f(x))=\lim_{t\to0-}g(t)=0$

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to2-}g(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}g(f(x))=g(f(0))$

따라서 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $-1\le x\le3$에서 $y=g(f(x))$가 불연속일 수 있는 점은 $y=f(x)$가 불연속인 $x=0$, $x=2$일 때와 $y=g(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로 $f(x)=1$, 즉 $x=\frac{1}{2}$일 때이다.

(i) $x=0$일 때, ㄴ에 의하여 $y=g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $x=\frac{1}{2}$일 때,

$g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=g(1)=0$이고,

$f(x)=t$라 하면

$\lim_{x\to\frac{1}{2}-} g(f(x))=\lim_{t\to 1+} g(t)=1$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}+} g(f(x))=\lim_{t\to 1-} g(t)=1$

따라서 $\lim_{x\to\frac{1}{2}} g(f(x))\neq g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$이므로 $y=g(f(x))$는 $x=\frac{1}{2}$에서 불연속이다.

(iii) $x=2$일 때, $f(x)=s$라 하면

$\lim_{x\to 2-} g(f(x))=\lim_{s\to -2+} g(s)=-2$

$\lim_{x\to 2+} g(f(x))=\lim_{s\to -1+} g(s)=-1$

따라서 $\lim_{x\to 2-} g(f(x))\neq\lim_{x\to 2+} g(f(x))$이므로 $y=g(f(x))$는 $x=2$에서 불연속이다.

(i)~(iii)에서 $y=g(f(x))$가 불연속인 x의 값은 $x=\frac{1}{2}$, $x=2$의 2개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0207 답 ㄷ

TIP 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$를 찾는다.

ㄱ. $\lim_{x\to 3+} g(x)=\lim_{x\to 3+}\frac{(f\circ f)(x)}{x}=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)}{3}=\frac{2}{3}$

$\lim_{x\to 3-} g(x)=\lim_{x\to 3-}\frac{\{f(x)\}^2}{2}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 3} g(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 3+} g(x)=\lim_{x\to 3+}\frac{(f\circ f)(x)}{x}=\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)}{3}=\frac{4}{3}$

$\lim_{x\to 3-} g(x)=\lim_{x\to 3-}\frac{\{f(x)\}^2}{2}=2$

$\lim_{x\to 3} g(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

ㄷ. $g(3)=\frac{\{f(3)\}^2}{2}=2$이고,

$\lim_{x\to 3+} g(x)=\lim_{x\to 3+}\frac{(f\circ f)(x)}{x}=\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)}{3}=2$

$\lim_{x\to 3-} g(x)=\lim_{x\to 3-}\frac{\{f(x)\}^2}{2}=2$

따라서 $\lim_{x\to 3} g(x)=g(3)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다. 즉, 함수 $g(x)$가 구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

0208 답 ③

TIP 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 불연속이므로 $k\neq 1$, $k\neq -1$인 경우 $f(kx)$는 $x=2$에서 연속이다.

$x=2$에서 $f(x)$가 불연속이므로 $f(x)f(kx)$는 $k=1$, $k=-1$일 때 불연속일 수 있다.

(i) $k=1$일 때,

$\lim_{x\to 2-} f(x)f(x)=(-2)^2=4$

$\lim_{x\to 2+} f(x)f(x)=(-6)^2=36$

$\therefore \lim_{x\to 2-} f(x)f(x)\neq\lim_{x\to 2+} f(x)f(x)$

따라서 $f(x)f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(ii) $k=-1$일 때,

$\lim_{x\to 2-} f(x)f(-x)=(-2)^2=4$

$\lim_{x\to 2+} f(x)f(-x)=(-6)^2=36$

$\therefore \lim_{x\to 2-} f(x)f(-x)\neq\lim_{x\to 2+} f(x)f(-x)$

따라서 $f(x)f(-x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iii) $k\neq -1$ 또는 $k\neq 1$인 경우 $f(x)f(kx)$가 $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2-} f(x)f(kx)=\lim_{x\to 2+} f(x)f(kx)=f(2)f(2k)$

이어야 한다. 이때,

$\lim_{x\to 2-} f(x)f(kx)=-2f(2k)$

$\lim_{x\to 2+} f(x)f(kx)=-6f(2k)$

$f(2)f(2k)=-2f(2k)$

따라서 $-6f(2k)=-2f(2k)$이어야 하므로 $f(2k)=0$

이때, $x=-4,\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 4$에서 $f(x)=0$이므로

$2k=-4,\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 4$

$\therefore k=-2,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 2$

(i)~(iii)에서 모든 상수 k의 값의 곱은 2이다.

0209 답 1

TIP $n-1\le x<n$일 때 $[x]=n-1$, $n\le x<n+1$일 때 $[x]=n$임을 이용한다.

$f(x)$가 $x=n$ (n은 정수)에서 연속이려면

$\lim_{x\to n-} f(x)=\lim_{x\to n+} f(x)=f(n)$이어야 한다. 이때,

$\lim_{x\to n-} f(x)=\lim_{x\to n-}\{[x]^2-(px+q)[x]\}$

$=(n-1)^2-(pn+q)(n-1)$

$\lim_{x\to n+} f(x)=\lim_{x\to n+}\{[x]^2-(px+q)[x]\}$

$=n^2-(pn+q)n$

$f(n)=n^2-(pn+q)n$

따라서 $(n-1)^2-(pn+q)(n-1)=n^2-(pn+q)n$

$(p-2)n+q+1=0$

이 식이 모든 정수 n에 대하여 성립하므로

$p-2=0,\ q+1=0$

$\therefore p=2,\ q=-1$

$\therefore p+q=1$

0210 답 ④

TIP 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $f(a)f(b)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

① $a>0$, $b>0$인 경우, $f(a)f(b)=ab>0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(a,\ b)$에서 실근을 갖는지 알 수 없다.

② $g(x)=f(x)-f(a)$로 놓으면 $g(x)$는 연속함수이고
$g(a)=f(a)-f(a)=0$, $g(b)=f(b)-f(a)=a-b<0$
따라서 $g(a)g(b)=0$이므로 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=f(a)$는 열린구간 $(a,\ b)$에서 실근을 갖는지 알 수 없다.

③ $g(x)=f(x)-f(b)$로 놓으면 $g(x)$는 연속함수이고
$g(a)=f(a)-f(b)=b-a>0$, $g(b)=f(b)-f(b)=0$
따라서 $g(a)g(b)=0$이므로 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=f(b)$는 열린구간 $(a,\ b)$에서 실근을 갖는지 알 수 없다.

④ $g(x)=f(x)-x$로 놓으면 $g(x)$는 연속함수이고
$g(a)=f(a)-a=b-a>0$, $g(b)=f(b)-b=a-b<0$
따라서 $g(a)g(b)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=x$는 열린구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

⑤ $g(x)=f(x)+x$로 놓으면 $g(x)$는 연속함수이고
$g(a)=f(a)+a=b+a$, $g(b)=f(b)+b=a+b$
따라서 $g(a)g(b)=(a+b)^2\geq 0$이므로 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=-x$는 열린구간 $(a,\ b)$에서 실근을 갖는지 알 수 없다.

따라서 구하는 방정식은 ④이다.

0211 답 ㄱ, ㄷ

TIP 사잇값의 정리와 주기함수의 성질을 이용한다.

ㄱ. $f(x)=f(x+3)$에서 $f(1)=f(4)=f(7)=f(10)$

ㄴ. $f(0)=f(3)$이므로 $f(2)f(3)=f(0)f(2)<0$

ㄷ. 주어진 조건에 의해서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 5)$, $(5,\ 6)$, $(6,\ 8)$, $(8,\ 9)$, $(9,\ 11)$, $(11,\ 12)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가진다.
따라서 $0<x<12$에서 $f(x)=0$인 x가 적어도 8개 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0212 답 ⑤

TIP 함수의 연속 조건과 사잇값의 정리를 이용한다.

ㄴ. $f(0)f(3)=0$이고,
$\lim_{x\to 0-} f(x)f(x+3)=1\cdot 0=0$
$\lim_{x\to 0+} f(x)f(x+3)=2\cdot 0=0$
따라서 $f(x)f(x+3)$은 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $g(x)=f(x)f(x+1)+2x-5$라 하면
$g(x)$는 $x=1$, $x=2$에서 연속이고 함수 $f(x)$가 열린구간 $(1,\ 2)$, $(2,\ \infty)$에서 연속이므로 함수 $g(x)$는 $[1,\ 3]$에서 연속이다. 이때,
$g(1)=f(1)f(2)-3=-3<0$
$g(3)=f(3)f(4)+1=1>0$
에서 $g(1)g(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $g(c)=0$인 실수 c가 열린구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x)f(x+1)+2x-5=0$은 열린구간 $(1,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

참고 ㄷ. $\lim_{x\to 1-}\{f(x)f(x+1)+2x-5\}$
$=\lim_{x\to 1+}\{f(x)f(x+1)+2x-5\}$
$=f(1)f(2)+2-5=-3$
또,
$\lim_{x\to 2-}\{f(x)f(x+1)+2x-5\}$
$=\lim_{x\to 2+}\{f(x)f(x+1)+2x-5\}$
$=f(2)f(3)+4-5=-1$
이므로 $g(x)$는 $x=1$, $x=2$에서 연속이다.

0213 답 56

TIP 사잇값의 정리와 주기함수의 성질을 이용한다.

$f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고, 조건 (가)에 의하여 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로
$f(0)f(2)<0$, $a(a-12)<0$
$\therefore\ 0<a<12$
조건 (나)에서 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면
$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=f(a)g(a)$이어야 한다. 이때,
$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=(a^2-8a+a)f(a+4)$
$=(a^2-7a)\{(a+4)^2-8(a+4)+a\}$
$=a(a-7)(a^2+a-16)$
$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=(a^2-8a+a)(2a+5a)$
$=7a^2(a-7)$
$f(a)g(a)=7a^2(a-7)$
따라서 $a(a-7)(a^2+a-16)=7a^2(a-7)$에서
$a(a+2)(a-7)(a-8)=0$
$\therefore\ a=7$ 또는 $a=8$ $(\because\ 0<a<12)$
따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은 56이다.

2 함수의 연속

3 | 미분계수와 도함수

본책 40쪽~56쪽

STEP 1 | 기초 Build

0214 답 -1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{1-4}{3}=-1$$

0215 답 -1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{2-5}{3}=-1$$

0216 답 9

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{1-(-26)}{3}=9$$

0217 답 (1) -3 (2) -3

(1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{-13-(-4)}{3}=-3$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{(1+\Delta x)-1}=\frac{\{-3(1+\Delta x)+2\}-(-1)}{\Delta x}$

$=\frac{-3\Delta x}{\Delta x}=-3$

0218 답 2

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}=\frac{\{2(a+\Delta x)-1\}-(2a-1)}{\Delta x}$$

$$=\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

0219 답 $2a+1+\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$$

$$=\frac{\{(a+\Delta x)^2+a+\Delta x\}-(a^2+a)}{\Delta x}$$

$$=\frac{(2a+1)\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=2a+1+\Delta x$$

0220 답 -1

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(1+\Delta x)-(-1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

0221 답 $\frac{1}{10}$

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left\{\frac{1}{10}(1+\Delta x)+1\right\}-\frac{11}{10}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{10}\Delta x}{\Delta x}=\frac{1}{10}$$

0222 답 2

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2-1\}-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$$

0223 답 -1

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-2(1+\Delta x)^3+5(1+\Delta x)+1\}-4}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2(\Delta x)^3-6(\Delta x)^2-\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\{-2(\Delta x)^2-6\Delta x-1\}=-1$$

0224 답 $\frac{1}{2}$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(2x^2-6)-(2a^2-6)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2(x+a)(x-a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}2(x+a)=4a$$

$4a=2$에서 $a=\frac{1}{2}$

0225 답 1

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^3-x)-(a^3-a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)-(x-a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\{(x^2+ax+a^2)-1\}=3a^2-1$$

$3a^2-1=2$에서 $a=1$ ($\because a>0$)

0226 답 -1

$$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(-1+\Delta x)^2+3(-1+\Delta x)\}-(-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x)^2-\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2\Delta x-1)=-1$$

0227 답 2

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-(\Delta x)^3+2\Delta x\}-0}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\{-(\Delta x)^2+2\}=2$$

0228 답 (가) 연속 (나) -1 (다) 미분가능하지 않다.

0229 답 (1) 연속이다. (2) 미분가능하지 않다.

(1) $f(1)=2$이고,

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}2x^2=2$$
$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x^2+3)=2$$

따라서 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=2$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(2) $$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{2x^2-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}2(x+1)=4$$
$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(-x^2+3)-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{-(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=-\lim_{x\to 1-}(x+1)=-2$$
$$\therefore \lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

따라서 $f'(1)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

0230 답 $f'(x)=0$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-1}{\Delta x}=0$$

0231 답 $f'(x)=1$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(x+\Delta x)+2\}-(x+2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

0232 답 $f'(x)=2x$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(x+\Delta x)^2+2\}-(x^2+2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

0233 답 $y'=6x^5$

$y'=(x^6)'=6x^5$

0234 답 $y'=0$

$y'=(10)'=0$

0235 답 $y'=-16x^7$

$y'=(-2x^8)'=-16x^7$

0236 답 $y'=\frac{1}{2}$

$$y'=\left(\frac{1}{2}x-5\right)'=\left(\frac{1}{2}x\right)'-(5)'=\frac{1}{2}$$

0237 답 $y'=2x-3$

$y'=(x^2-3x+4)'=(x^2)'-(3x)'+(4)'=2x-3$

0238 답 $y'=-3x^8+5x^4$

$$y'=\left(-\frac{1}{3}x^9+x^5+1\right)'=\left(-\frac{1}{3}x^9\right)'+(x^5)'+(1)'$$
$$=-3x^8+5x^4$$

0239 답 (1) -4 (2) 13

(1) 함수 $f(x)+2g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$f'(1)+2g'(1)=2+2\cdot(-3)=-4$

(2) 함수 $2f(x)-3g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$2f'(1)-3g'(1)=2\cdot2-3\cdot(-3)=13$

0240 답 (가) $f(x)g(x+h)$ (나) $f'(x)g(x)$

0241 답 $y'=-10x-1$

$y'=(-x)'(5x+1)-x(5x+1)'$
$=-(5x+1)-x\cdot5=-10x-1$

0242 답 $y'=-8x+4$

$y'=(2x+1)'(-2x+3)+(2x+1)(-2x+3)'$
$=2(-2x+3)-2(2x+1)=-8x+4$

0243 답 $y'=6x^2-16x$

$y'=(2x^2)'(x-4)+2x^2(x-4)'$
$=4x(x-4)+2x^2=6x^2-16x$

0244 답 $y'=-18x^2+4x+9$

$y'=(-2x^2+3)'(3x-1)+(-2x^2+3)(3x-1)'$
$=-4x(3x-1)+3(-2x^2+3)=-18x^2+4x+9$

0245 답 $y'=3x^2+2x-2$

$$y'=(x)'(x-1)(x+2)+x(x-1)'(x+2)+x(x-1)(x+2)'$$
$$=(x-1)(x+2)+x(x+2)+x(x-1)$$
$$=3x^2+2x-2$$

0246 답 $y'=8x^3-12x^2+12x-12$

$$y'=(2x)'(x-2)(x^2+3)+2x(x-2)'(x^2+3)+2x(x-2)(x^2+3)'$$
$$=2(x-2)(x^2+3)+2x(x^2+3)+4x^2(x-2)$$
$$=8x^3-12x^2+12x-12$$

0247 답 $y'=6(3x-4)$

$$y'=\{(3x-4)^2\}'=2(3x-4)(3x-4)'$$
$$=6(3x-4)$$

0248 답 $y'=3(x^2-3x)^2(2x-3)$

$$y'=\{(x^2-3x)^3\}'=3(x^2-3x)^2(x^2-3x)'$$
$$=3(x^2-3x)^2(2x-3)$$

0249 답 $y'=4(5x-2)(5x^2-x+5)$

$$y'=(x^2+2)'(5x-2)^2+(x^2+2)\{(5x-2)^2\}'$$
$$=2x(5x-2)^2+(x^2+2)\cdot 2(5x-2)(5x-2)'$$
$$=2x(5x-2)^2+10(x^2+2)(5x-2)$$
$$=4(5x-2)(5x^2-x+5)$$

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 평균변화율 본책 44쪽

(1) 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ (\text{단, } \Delta x=b-a)$$

(2) 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 그래프 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

0250 답 6

x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{(3a^2-2a+1)-1}{a}$$
$$=\frac{a(3a-2)}{a}=3a-2$$

따라서 $3a-2=16$이므로 $a=6$

0251 답 -1

구간 $[-2, 1]$에서의 함수 $g(x)$의 평균변화율은

$$\frac{g(1)-g(-2)}{1-(-2)}=\frac{(f\circ f)(1)-(f\circ f)(-2)}{3}$$
$$=\frac{f(f(1))-f(f(-2))}{3}$$
$$=\frac{f(3)-f(0)}{3}=\frac{5-8}{3}=-1$$

0252 답 5

구간 $[n, n+1]$에서의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=f(n+1)-f(n)$$

$\therefore f(n+1)-f(n)=2n-1$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & f(2)-f(1)=2\cdot1-1 \\ & f(3)-f(2)=2\cdot2-1 \\ & f(4)-f(3)=2\cdot3-1 \\ & f(5)-f(4)=2\cdot4-1 \\ +) & f(6)-f(5)=2\cdot5-1 \\ \hline & f(6)-f(1)=2(1+2+3+4+5)-5 \\ & \qquad\qquad =30-5=25 \end{array}$$

따라서 구간 $[1, 6]$에서의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(6)-f(1)}{6-1}=\frac{25}{5}=5$$

0253 답 -3

직선 AB의 기울기는 x의 값이 3에서 6까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{f(6)-f(3)}{6-3}=\frac{f(6)-f(3)}{3}=3$$

한편, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 $f(0)=f(6)$

따라서 x의 값이 0에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{f(3)-f(6)}{3}=-\frac{f(6)-f(3)}{3}=-3$$

유형 02 평균변화율과 미분계수 본책 44쪽

(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(2) 함수 $f(x)$에서 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

0254 답 $\frac{1}{2}$

x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{10-(-2)}{3}=4$$

또, 함수 $f(x)$의 $x=k$에서의 미분계수는

$$f'(k)=\lim_{h\to0}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(k+h)^2+3(k+h)\}-(k^2+3k)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2kh+h^2+3h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(2k+h+3)=2k+3$$

따라서 $2k+3=4$이므로 $k=\frac{1}{2}$

0255 답 7

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=a^2+2a$, $f(0)=0$이므로 $f(a)=a^3+2a^2$

즉, $f(x)=x^3+2x^2$

$\therefore f'(1)=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}\dfrac{x^3+2x^2-3}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+3x+3)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}(x^2+3x+3)=7$

유형 03 미분계수를 이용한 극한값의 계산 ; $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 본책 44쪽

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는
⇨ $f'(a)=\lim_{■\to0}\dfrac{f(a+■)-f(a)}{■}$

0256 답 18

$\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\dfrac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-2h)-f(1)\}}{h}$
$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot2$
$=f'(1)+2f'(1)=3f'(1)$
$=3\cdot6=18$

0257 답 6

$\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-2h)}{2h}$
$=\lim_{h\to0}\dfrac{\{f(a+h)-f(a)\}-\{f(a-2h)-f(a)\}}{2h}$
$=\lim_{h\to0}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to0}\dfrac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}$
$=\dfrac{1}{2}f'(a)+f'(a)=\dfrac{3}{2}f'(a)$
$=\dfrac{3}{2}\cdot4=6$

0258 답 -12

$\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)-g(h)}{h}=0$에서

$\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot2-\lim_{h\to0}\dfrac{g(h)}{h}=0$

$\therefore \lim_{h\to0}\dfrac{g(h)}{h}=2f'(a)=2\cdot(-6)=-12$

0259 답 $-\dfrac{1}{4}$

$\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1+kh)}{f(1-h)-f(1+kh)}$
$=\lim_{h\to0}\dfrac{\dfrac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1+kh)}{h}}{\dfrac{f(1-h)-f(1)+f(1)-f(1+kh)}{h}}$
$=\dfrac{\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2-\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+kh)-f(1)}{kh}\cdot k}{\lim_{h\to0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}\cdot(-1)-\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+kh)-f(1)}{kh}\cdot k}$
$=\dfrac{2f'(1)-kf'(1)}{-f'(1)-kf'(1)}=\dfrac{2-k}{-1-k}=-3$

따라서 $2-k=3+3k$이므로 $k=-\dfrac{1}{4}$

0260 답 ④

$\dfrac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow0$이므로

$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\dfrac{k}{n}\right)-f\left(1-\dfrac{k}{n}\right)\right\}$
$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+kh)-f(1-kh)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\dfrac{\{f(1+kh)-f(1)\}-\{f(1-kh)-f(1)\}}{h}$
$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+kh)-f(1)}{kh}\cdot k+\lim_{h\to0}\dfrac{f(1-kh)-f(1)}{-kh}\cdot k$
$=kf'(1)+kf'(1)=2kf'(1)$

유형 04 미분계수를 이용한 극한값의 계산 ; $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 본책 45쪽

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는
⇨ $f'(a)=\lim_{▲\to a}\dfrac{f(▲)-f(a)}{▲-a}$

0261 답 12

$\lim_{x\to2}\dfrac{f(x^3)-f(8)}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{f(x^3)-f(8)}{x^3-8}\cdot(x^2+2x+4)$
$=\lim_{x\to2}\dfrac{f(x^3)-f(8)}{x^3-8}\cdot\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)$
$=12f'(8)=12$

0262 답 2

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-xf(1)}{\sqrt{x}-1}$
$=\lim_{x\to1}\dfrac{\{f(x)-f(1)\}+\{f(1)-xf(1)\}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\cdot(\sqrt{x}+1)$
$=\left\{\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}+\lim_{x\to1}\dfrac{-(x-1)f(1)}{x-1}\right\}\times\lim_{x\to1}(\sqrt{x}+1)$
$=2\{f'(1)-f(1)\}=2(5-4)=2$

3 미분계수와 도함수

0263 답 6

$f(4)=0$이므로

$$\lim_{x\to4}\frac{2x^2-4x-16}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)(x+2)}{f(x)-f(4)}$$
$$=2\lim_{x\to4}\frac{x-4}{f(x)-f(4)}\cdot(x+2)$$
$$=2\lim_{x\to4}\frac{x-4}{f(x)-f(4)}\times\lim_{x\to4}(x+2)$$
$$=2\cdot\frac{1}{f'(4)}\cdot6=6$$

0264 답 ②

$\lim_{x\to3}\frac{f(x-1)-6}{x^2-9}=3$에서 $x \longrightarrow 3$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}\{f(x-1)-6\}=0$이므로 $f(2)=6$

한편, $x-1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 3$일 때 $t \longrightarrow 2$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x-1)-6}{x^2-9}=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-6}{t^2+2t-8}$$
$$=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-f(2)}{(t-2)(t+4)}$$
$$=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}\times\lim_{t\to2}\frac{1}{t+4}$$
$$=\frac{1}{6}f'(2)$$

$\frac{1}{6}f'(2)=3$에서 $f'(2)=18$

$\therefore f(2)+f'(2)=6+18=24$

유형 05 관계식이 주어질 때 미분계수 구하기

본책 46쪽

(i) 주어진 식의 x, y에 적당한 수를 대입하여 $f(0)$의 값을 구한다.

(ii) $f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$에서 $f(a+h)$에 주어진 관계식을 대입하여 $f'(a)$의 값을 구한다.

0265 답 5

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$　　$\therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+2h-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2$$
$$=f'(0)+2=3+2=5$$

0266 답 1

$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy^2-x^2y$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$　　$\therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-h^2-h-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-h^2-h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-\lim_{h\to0}(h+1)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-1$$
$$=f'(0)-1=2-1=1$$

0267 답 ①

$f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)-f(0)$　　$\therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(5)=\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(5)-f(-h)-5h(5+h)-f(5)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-f(-h)-5h(5+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-h)}{-h}-\lim_{h\to0}5(5+h)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}-25$$
$$=f'(0)-25=5-25=-20$$

0268 답 6050

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$　　$\therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(k)=\lim_{h\to0}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(k)+f(h)+2kh-f(k)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2kh}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2k$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2k$$
$$=f'(0)+2k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}k^2\{f'(k)-f'(0)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^2\{f'(0)+2k-f'(0)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}2k^3$$
$$=2\cdot\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2=6050$$

유형 06 미분계수의 기하학적 의미
본책 46쪽

(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.
(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta(0^\circ\le\theta<90^\circ)$라 하면 $\tan\theta=f'(a)$이다.

0269 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\dfrac{f(a)}{a}$는 원점과 점 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기이고,
$\dfrac{f(b)}{b}$는 원점과 점 $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기이므로
$\dfrac{f(a)}{a}<\dfrac{f(b)}{b}$

ㄴ. 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기인 1보다 크므로
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>1$
이때, $b-a>0$이므로 $f(b)-f(a)>b-a$

ㄷ. $f'(a)$는 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기이므로
$f'(a)<f'(b)$

ㄹ. 점 $(k,\ f(k))$에서의 접선의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기인 1보다 크므로 $f'(k)>1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

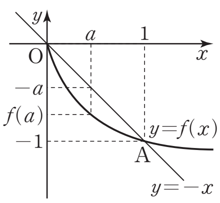
0270 답 -3

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같고, 이 접선은 두 점 $(0,\ -1)$, $(1,\ 4)$를 지나므로

$$f'(1)=\frac{4-(-1)}{1-0}=5$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^3f(1)-f(x^3)}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{\{x^3f(1)-f(1)\}-\{f(x^3)-f(1)\}}{x-1}\\&=f(1)\cdot\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}\\&=f(1)\cdot\lim_{x\to1}(x^2+x+1)-\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)\\&=3f(1)-3f'(1)\\&=3\cdot4-3\cdot5=-3\end{aligned}$$

0271 답 ㄱ, ㄷ



ㄱ. $0<a<1$이고 오른쪽 그림에서
$f(a)<-a$ $\quad\therefore a+f(a)<0$

ㄴ. 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 -1보다 클 수도 있고 작을 수도 있다.

ㄷ. $f'(a)$는 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이므로 $f'(a)<0$
이때, $a>0$이므로 $\dfrac{f'(a)}{a}<0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0272 답 0

곡선 $y=-x^3+3x^2-1$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(-x^3+3x^2-1)-3}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(-x^2+x+2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}(-x^2+x+2)=0\end{aligned}$$

이때, $\tan\theta$의 값은 이 접선의 기울기와 같으므로
$\tan\theta=0$

유형 07 미분가능성과 연속성 ; 정의를 이용하는 경우
본책 47쪽

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여
(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이면 $x=a$에서 연속이다.
(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재하면 $x=a$에서 미분가능하다.

0273 답 ③

① $f(0)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

② $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=-2$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-2-(-2)}{h}=0$$
이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

③ $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-|h|}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h}{h}=1$$
$$\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{-|h|}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{-h}{h}=-1$$
이므로 $f'(0)$의 값이 존재하지 않는다.
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

④ $f(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\-1 & (x<0)\end{cases}$이고, $x=0$에서 정의되지 않는다.
즉, $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

⑤ $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=1$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{(-2h+1)-1}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-2h}{h}=-2$$
$$\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(h-1)^2-1}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2-2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}(h-2)=-2$$
이므로 $f'(0)=-2$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

0274 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h}{h}=-1$$
$$\lim_{h\to0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h}{h}=1$$
이므로 $f'(-1)$의 값이 존재하지 않는다.
따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)=2$이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h^2-2h+2)-2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(h-2)=-2$$

이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)=0$이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|h^2-2h|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{h^2-2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}(h-2)=-2$$
$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{|h^2-2h|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{-h^2+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}(-h+2)=2$$

이므로 $f'(-1)$의 값이 존재하지 않는다.
따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

ㄹ. $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)=-1$이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-1+h+|h|-(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{0}{h}=0$$
$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{-1+h+|h|-(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{2h}{h}=2$$

이므로 $f'(-1)$의 값이 존재하지 않는다.
따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

유형 08 미분가능성과 연속성 ; 그래프가 주어진 경우

본책 47쪽

함수 $y=f(x)$의 그래프에서
(1) 불연속인 점 ⇨ 연결되어 있지 않고 끊어져 있는 점
(2) 미분가능하지 않은 점 ⇨ 불연속인 점, 뾰족한 점

0275 답 ②

함수 $y=f(x)$는 $x=-2$, $x=1$, $x=2$에서 불연속이므로
$m=3$
또, $x=-2$, $x=-1$, $x=1$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로
$n=4$
$\therefore mn=12$

0276 답 ①

① $x=1.5$에서의 접선의 기울기는 0이므로 $f'(1.5)=0$
② $x=0$에서의 접선의 기울기는 0이므로 $f'(0)=0$
$x=2.2$에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $f'(2.2)>0$
$\therefore f'(0)<f'(2.2)$
③ $\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3+} f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to 3} f(x)$의 값이 존재한다.
④ 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 $x=2$, $x=3$의 2개이다.
⑤ 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점은 $x=1$, $x=2$, $x=3$의 3개이다.
따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

0277 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $x=2$에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $f'(2)>0$
ㄴ. 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 $x=3$, $x=5$의 2개이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점은 $x=1$, $x=3$, $x=5$의 3개이다.
ㄹ. $f'(x)=0$인 점은 구간 $(-1,\ 1)$에서 1개 존재한다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

유형 09 도함수의 정의를 이용하여 도함수 구하기

본책 48쪽

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

0278 답 (가) $(x+h)^2$ (나) $2x+h$ (다) $x^2f'(x)+2xf(x)$

$x^2f(x)=g(x)$로 놓으면 $y=g(x)$에서
$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2f(x+h)-x^2f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2\{f(x+h)-f(x)\}+f(x)\{(x+h)^2-x^2\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\boxed{(가)\ (x+h)^2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$+f(x)\cdot\lim_{h\to 0}(\boxed{(나)\ 2x+h})$$
$$=\boxed{(다)\ x^2f'(x)+2xf(x)}$$

0279 답 ①

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{n(\boxed{(가)\ t^n-x^n})}{t-x}$$
$$=\lim_{t\to x}\frac{n(\boxed{(나)\ t-x})(t^{n-1}+xt^{n-2}+\cdots+x^{n-1})}{t-x}$$
$$=\lim_{t\to x}n(t^{n-1}+xt^{n-2}+\cdots+tx^{n-2}+x^{n-1})$$
$$=\boxed{(다)\ n^2x^{n-1}}$$

유형 10 관계식이 주어질 때 도함수 구하기

본책 48쪽

(i) 주어진 식의 x, y에 적당한 수를 대입하여 $f(0)$의 값을 구한다.
(ii) $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$의 값을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

0280 답 $f'(x)=2x-3$

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)$　　$\therefore f(0)=0$
$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2xh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+2x$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2x$$
$$=f'(0)+2x=2x-3$$

0281 답 2

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+1$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1 \qquad \therefore f(0)=-1$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh+1-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+xh+1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}+x\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+x\\&=f'(0)+x\end{aligned}$$

이때, $f'(0)$은 상수이므로 $f'(x)$는 일차함수이다.

따라서 $f(x)$는 이차함수이므로 $f(x)$의 차수는 2이다.

유형 11 미분법의 공식 본책 48쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

(1) $y=x^n$ (n은 양의 정수) ⇨ $y'=nx^{n-1}$

(2) $y=c$ (c는 상수) ⇨ $y'=0$

(3) $y=cf(x)$ (c는 상수) ⇨ $y'=cf'(x)$

(4) $y=f(x)+g(x)$ ⇨ $y'=f'(x)+g'(x)$

(5) $y=f(x)-g(x)$ ⇨ $y'=f'(x)-g'(x)$

0282 답 16

$f(x)=x^3+x^2f'(1)-6x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+2xf'(1)-6$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=3+2f'(1)-6 \qquad \therefore f'(1)=3$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-6x$, $f'(x)=3x^2+6x-6$이므로

$f(1)+f'(2)=-2+18=16$

0283 답 23

$f'(x)=-21x^2+a$이므로 $f'(1)=a-21$

$a-21=2 \qquad \therefore a=23$

0284 답 0

$f(2)=6$에서 $4a+2b+c=6$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(0)=2$에서 $b=2$

$f'(1)=4$에서 $2a+b=4$ $\cdots\cdots$ ㉡

$b=2$를 ㉡에 대입하면 $a=1$

$a=1$, $b=2$를 ㉠에 대입하면 $c=-2$

$\therefore ab+c=2-2=0$

0285 답 ③

$f(x)=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{x^{10}}{10}$이므로

$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^9$

$$\begin{aligned}\therefore f'\left(\frac{1}{3}\right)&=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^9\\&=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}\end{aligned}$$

0286 답 $\dfrac{n(n+1)}{2}$

$f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n$이므로

$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1)&=1+2+3+\cdots+n\\&=\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

유형 12 미분계수를 이용한 극한값의 계산 ; 함수식이 주어진 경우 본책 49쪽

(i) 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 $f'(a)$가 포함된 식으로 변형한다.

(ii) 미분법의 공식을 이용하여 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구한 후, $f'(x)$에 $x=a$를 대입하여 $f'(a)$의 값을 구한다.

(iii) (i)의 식에 $f'(a)$의 값을 대입한다.

0287 답 -8

$\dfrac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow0$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(-1+\frac{1}{n}\right)-f(-1)\right\}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\\&=f'(-1)\end{aligned}$$

$f'(x)=6x-2$이므로 $f'(-1)=-8$

0288 답 -4

$$\begin{aligned}g(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot2\\&=2f'(x)\end{aligned}$$

$f'(x)=3x^2-2x$이므로 $g(x)=6x^2-4x$

이때, $g(0)=0$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=g'(0)$$

$g'(x)=12x-4$이므로 $g'(0)=-4$

0289 답 -2

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(1)\}^2}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\{f(x)+f(1)\}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\{f(x)+f(1)\}\\&=f'(1)\cdot2f(1)\end{aligned}$$

$f'(x)=6x^2-2x-3$이므로

$f'(1)\cdot2f(1)=1\cdot2\cdot(-1)=-2$

3 미분계수와 도함수

0290 답 $\frac{1}{2}$

$f(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}+1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{f(x)}+1}$$
$$=f'(1)\cdot\frac{1}{2}$$

$f'(x)=3x^2-2x$이므로

$f'(1)\cdot\frac{1}{2}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

유형 13 $y=f(x)g(x)$ 꼴의 미분법 본책 50쪽

세 함수 $f(x), g(x), h(x)$가 미분가능할 때,

(1) $y=f(x)g(x) \Rightarrow y'=\underbrace{f'(x)g(x)}_{\text{미분 그대로}}+\underbrace{f(x)g'(x)}_{\text{그대로 미분}}$

(2) $y=f(x)g(x)h(x)$

$\Rightarrow y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

0291 답 60

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{f(2-3h)-f(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h}\cdot3$$
$$=f'(2)+3f'(2)=4f'(2)$$

$f'(x)=(x^2+5x+1)'(x-2)+(x^2+5x+1)(x-2)'$

$\quad=(2x+5)(x-2)+(x^2+5x+1)\cdot1$

$\therefore f'(2)=15$

따라서 구하는 값은 $4f'(2)=4\cdot15=60$

0292 답 -12

$g'(x)=(x^3)'f(x)+x^3f'(x)$

$\quad=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

$\therefore g'(1)=3f(1)+f'(1)$

이때, $g(1)=f(1)=4$이므로

$0=3\cdot4+f'(1) \qquad \therefore f'(1)=-12$

0293 답 21

$h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$$

그런데 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이고,

$g'(x)=x'(x+1)(x+2)+x(x+1)'(x+2)+x(x+1)(x+2)'$

$\quad=(x+1)(x+2)+x(x+2)+x(x+1)$

에서 $g(1)=6$, $g'(1)=11$이므로

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$\quad=-2\cdot6+3\cdot11=21$

0294 답 ③

$f'(x)=(x-a)'(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b)'(x-c)+(x-a)(x-b)(x-c)'$

$\quad=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$

이므로

$f'(a)=(a-b)(a-c)$, $f'(b)=(b-a)(b-c)$,

$f'(c)=(c-a)(c-b)$

$$\therefore \frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{f'(b)}+\frac{1}{f'(c)}$$
$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{-(b-c)-(c-a)-(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{-b+c-c+a-a+b}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$$

유형 14 $y=\{f(x)\}^n$ 꼴의 미분법 본책 50쪽

함수 $f(x)$가 미분가능할 때,

$y=\{f(x)\}^n$ (n은 자연수) $\Rightarrow y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

0295 답 0

$f'(x)=\{(4x^2-x+1)^2\}'(2x+3)^3+(4x^2-x+1)^2\{(2x+3)^3\}'$

$\quad=2(4x^2-x+1)(8x-1)(2x+3)^3+6(4x^2-x+1)^2(2x+3)^2$

$\therefore f'(0)=-54+54=0$

0296 답 9

$f'(x)=3(x^2+x-1)^2(x^2+x-1)'$

$\quad=3(x^2+x-1)^2(2x+1)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=9$

0297 답 ③

$$\lim_{x\to-2}\frac{2f(x)+xf(-2)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{2\{f(x)-f(-2)\}+\{xf(-2)+2f(-2)\}}{x-(-2)}$$
$$=2\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}+\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)f(-2)}{x+2}$$
$$=2f'(-2)+f(-2)$$

이때, $f'(x)=4(2x+5)^3(2x+5)'=8(2x+5)^3$이므로

$f'(-2)=8$, $f(-2)=1$

$\therefore 2f'(-2)+f(-2)=2\cdot8+1=17$

0298 답 -2

$f(-1)=g(0)$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-1+2h)-g(-3h)}{4h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(-1+2h)-f(-1)\}-\{g(-3h)-g(0)\}}{4h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{2h}\cdot\frac{1}{2}+\lim_{h\to0}\frac{g(0-3h)-g(0)}{-3h}\cdot\frac{3}{4}$$
$$=\frac{1}{2}f'(-1)+\frac{3}{4}g'(0)$$

이때,

$f'(x)=2(x+x^2+x^3)(x+x^2+x^3)'$
$\quad=2(x+x^2+x^3)(1+2x+3x^2)$

에서 $f'(-1)=-4$

$g'(x)=4x^3$에서 $g'(0)=0$

$\therefore \frac{1}{2}f'(-1)+\frac{3}{4}g'(0)=-2$

유형 15 미분계수를 이용한 미정계수의 결정 본책 51쪽

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=c$ (c는 실수)에서 얻은 두 식 $f(a)=0$, $f'(a)=c$를 이용하여 함수 $f(x)$의 미정계수를 구한다.

0299 답 ②

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=-1$에서 $x\longrightarrow -1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$

$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=-1$

한편, $f(x)=x^4+ax^2+bx+1$, $f'(x)=4x^3+2ax+b$이므로

$f(-1)=0$에서 $a-b=-2$ …… ㉠

$f'(-1)=-1$에서 $-2a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$\therefore ab=-1$

0300 답 -1

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\cdot(-1)$
$=-f'(1)=-3$

$\therefore f'(1)=3$

$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{f(x)-f(-2)}$
$=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{f(x)-f(-2)}\cdot\lim_{x\to -2}(x^2-2x+4)$
$=\frac{1}{f'(-2)}\cdot 12=2$

$\therefore f'(-2)=6$

이때, $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(1)=3$에서 $2a+b=0$ …… ㉠

$f'(-2)=6$에서 $4a-b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

$\therefore a+b=-1$

0301 답 170

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $x\longrightarrow 1$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$

한편, $f(x)=(2x^2-1)(ax^2+bx-2)$,

$f'(x)=(2x^2-1)'(ax^2+bx-2)+(2x^2-1)(ax^2+bx-2)'$
$\quad=4x(ax^2+bx-2)+(2x^2-1)(2ax+b)$

이므로

$f(1)=0$에서 $a+b=2$ …… ㉠

$f'(1)=3$에서 $6a+5b=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

따라서 $f(x)=(2x^2-1)(x^2+x-2)$이므로

$f(3)=17\cdot 10=170$

0302 답 8

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+3}=2$이므로 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차함수이다. 즉, $a=0$, $b=2$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-19}{x-2}=13$에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-19\}=0$이므로 $f(2)=19$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-19}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=13$

이때, $f(x)=2x^2+cx+d$, $f'(x)=4x+c$이므로

$f(2)=19$에서 $2c+d=11$ …… ㉠

$f'(2)=13$에서 $c=5$

$c=5$를 ㉠에 대입하면 $d=1$

$\therefore a+b+c+d=0+2+5+1=8$

유형 16 접선의 기울기를 이용한 미정계수의 결정 본책 51쪽

(i) $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구한다.
(ii) 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용하여 함수 $f(x)$의 미정계수를 구한다.

0303 답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나므로 $f(2)=4$에서

$4a+b=-4$ …… ㉠

또, 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 9이므로 $f'(2)=9$

$f'(x)=3x^2+2ax$이므로 $4a=-3$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{4}$

$a=-\frac{3}{4}$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

$\therefore a+b=-\frac{7}{4}$

0304 답 9

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $f(1)=1$에서

$a-7b-c=0$ …… ㉠

또, 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$

$f'(x)=3x^2-2ax+7b$이므로

$f'(1)=2$에서 $2a-7b=1$ …… ㉡

$f'(2)=3$에서 $4a-7b=9$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$

$a=4$, $b=1$을 ㉠에 대입하면 $c=-3$
따라서 $f(x)=x^3-4x^2+7x-3$이므로
$f(3)=27-36+21-3=9$

유형 17 함수의 미분가능성을 이용한 미정계수의 결정 본책 51쪽

다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $F(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le a) \\ g(x) & (x>a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

⇨ (1) 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 연속이다. 즉
$$f(a)=\lim_{x\to a+}g(x)$$
(2) $x=a$에서 함수 $F(x)$의 미분계수가 존재한다. 즉
$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

0305 답 ②

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.
즉, $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$에서
$1=a+b$ ······ ㉠
또, $f'(1)$이 존재하므로
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-(1+h)^2+2-1}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h^2-2h}{h}=-2$$
$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{a(1+h)+b-(a+b)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{ah}{h}=a$$
에서 $a=-2$
이 값을 ㉠에 대입하면 $b=3$
$\therefore ab=-6$

0306 답 -1

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.
즉, $f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$에서
$4a+b=8$ ······ ㉠
또, $f'(2)$가 존재하므로
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{(2+h)^3-8}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h^3+6h^2+12h}{h}=12$$
$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{a(2+h)^2+b-(4a+b)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{4ah+ah^2}{h}=4a$$
에서 $4a=12$ $\therefore a=3$
이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-4$
$\therefore a+b=-1$

0307 답 -2

$f(x)=\begin{cases} -(x-2)(x+k) & (x\le2) \\ (x-2)(x+k) & (x>2)\end{cases}$이므로
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0-}(-2-h-k)=-2-k$$
$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0+}(2+h+k)=2+k$$
$f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $-2-k=2+k$
$\therefore k=-2$

0308 답 -3

함수 $f(x)=\begin{cases} 2(x^2+ax+b) & \left(\frac{1}{2}\le x<1\right) \\ 3(x^2+ax+b) & \left(1\le x<\frac{3}{2}\right)\end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.
즉, $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$에서
$1+a+b=0$ $\therefore a+b=-1$ ······ ㉠
또, $f'(1)$이 존재하므로
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{2\{(1+h)^2+a(1+h)+b\}-2(1+a+b)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{2h(h+2+a)}{h}=2a+4$$
$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{3\{(1+h)^2+a(1+h)+b\}-3(1+a+b)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{3h(h+2+a)}{h}=3a+6$$
에서 $2a+4=3a+6$ $\therefore a=-2$
이 값을 ㉠에 대입하면 $b=1$
$\therefore a-b=-3$

0309 답 -12

TIP 구간에 따라 다르게 정의된 함수가 모든 실수 x에서 미분가능하려면 각 구간의 경계점에서 연속이고 미분계수가 존재해야 한다.

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.
즉, $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$에서
$f(1)=f(-3)+b$
$a-1=9a-21+b$ $\therefore 8a+b=20$ ······ ㉠
또, $g'(1)$이 존재하므로
$\lim_{x\to1-}g'(x)=\lim_{x\to1+}g'(x)$
이때, 함수 $y=f(x-4)+b$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수와 $f(x)$의 $x=-3$에서의 미분계수가 같아야 한다.
즉, $f'(x)=3x^2+2ax-2$이고 $f'(1)=f'(-3)$이므로
$2a+1=-6a+25$ $\therefore a=3$
이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-4$
$\therefore ab=-12$

유형 18 치환을 이용한 극한값의 계산 본책 52쪽

분자에 인수분해가 힘든 복잡한 식이 나오면
(i) 분자의 적당한 식을 $f(x)$로 치환한다.
(ii) 미분계수의 정의 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

0310 답 33

$f(x)=x^n-3x$로 놓으면 $f(1)=-2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}f'(1)$$

$f'(x)=nx^{n-1}-3$이므로 $f'(1)=n-3$

$\frac{n-3}{2}=15$에서 $n=33$

0311 답 ①

$f(x)=x^{99}-x^{98}+x^{97}$으로 놓으면 $f(-1)=-3$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^{99}-x^{98}+x^{97}+3}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}f'(-1)$$

$f'(x)=99x^{98}-98x^{97}+97x^{96}$이므로

$f'(-1)=99+98+97=294$

$\therefore \frac{1}{3}f'(-1)=98$

0312 답 28

$f(x)=x^7+x^6+x^5+\cdots+x$로 놓으면 $f(1)=7$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^7+x^6+x^5+\cdots+x-7}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

$f'(x)=7x^6+6x^5+5x^4+\cdots+1$이므로

$f'(1)=7+6+5+\cdots+1=\frac{7\cdot8}{2}=28$

0313 답 13

$f(x)=x^n+2x$로 놓으면 $f(1)=3$

$g(x)=x^8+x^7$으로 놓으면 $g(1)=2$

주어진 식의 분모, 분자를 $x-1$로 나누면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n+2x-3}{x^8+x^7-2}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{x^n+2x-3}{x-1}}{\frac{x^8+x^7-2}{x-1}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{f'(1)}{g'(1)}$$

이때, $f'(x)=nx^{n-1}+2$이므로 $f'(1)=n+2$

$g'(x)=8x^7+7x^6$이므로 $g'(1)=15$

따라서 $\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{n+2}{15}=1$ $\quad\therefore n=13$

유형 19 미분의 항등식에의 활용 본책 53쪽

조건에 맞게 $f(x)$의 식을 세우고, $f'(x)$를 포함한 조건식에 대입한 후 항등식의 성질을 이용한다.
(1) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식 $\iff a=0, b=0, c=0$
(2) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식
$\iff a=a', b=b', c=c'$

0314 답 0

$f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$(x+1)(2ax+b)-2(ax^2+bx+c)-x-5=0$

$\therefore (2a-b-1)x+b-2c-5=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a-b-1=0,\ b-2c-5=0$ ······ ㉠

또, $f(0)=-2$이므로 $c=-2$

이 값을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=1, b=1$

따라서 $f(x)=x^2+x-2$이므로 $f(1)=0$

0315 답 -1

$\{f(x)+g(x)\}'=x^3-4x+1$에서

$f'(x)+g'(x)=x^3-4x+1$

$\therefore f'(x)+f(x)=x^3-4x+1$ ······ ㉠

따라서 $f(x)$가 삼차함수이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(x)$와 $f'(x)$를 ㉠에 대입하면

$(3ax^2+2bx+c)+(ax^3+bx^2+cx+d)=x^3-4x+1$

$ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+c+d=x^3-4x+1$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=1,\ 3a+b=0,\ 2b+c=-4,\ c+d=1$

$\therefore a=1, b=-3, c=2, d=-1$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$이므로 $f(2)=-1$

0316 답 21

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n $(a\neq0)$으로 놓으면 $f'(x)$의 최고차항은 nax^{n-1}이므로 $\{f'(x)\}^2$의 최고차항은 $n^2a^2x^{2(n-1)}$이다.

$\{f'(x)\}^2=f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 양변의 최고차항의 차수가 같아야 한다.

$2(n-1)=n$ $\quad\therefore n=2$

또, 양변의 최고차항의 계수도 같아야 하므로

$n^2a^2=a$에서 $4a^2=a$

$4a\left(a-\frac{1}{4}\right)=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

3 미분계수와 도함수

즉, $f(x)=\frac{1}{4}x^2+bx+c$(b, c는 상수)로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{2}x+b$

$f'(2)f'(-2)=20$에서 $(1+b)(-1+b)=20$

$-1+b^2=20$ $\quad\therefore b^2=21$

$\therefore f(0)=\{f'(0)\}^2=b^2=21$

유형 20 다항식의 나눗셈에서 미분법의 활용

본책 53쪽

(1) 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어질 때,
$\Rightarrow f(a)=0,\ f'(a)=0$

(2) 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$에서
$f'(x)=g'(x)Q(x)+g(x)Q'(x)+R'(x)$

0317 답 ④

$f(x)=x^5+ax^2+b$로 놓으면 $f(x)$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로 $f(-1)=0,\ f'(-1)=0$

$f(-1)=0$에서 $a+b=1$ …… ㉠

$f'(x)=5x^4+2ax$이므로 $f'(-1)=0$에서

$5-2a=0$ $\quad\therefore a=\frac{5}{2}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-\frac{3}{2}$

$\therefore a^2+b^2=\frac{25}{4}+\frac{9}{4}=\frac{17}{2}$

0318 답 9900

$f(x)=x^{100}+ax-b$로 놓으면 $f(x)$가 $(x-1)^4$으로 나누어떨어지므로 $f(1)=0,\ f'(1)=0$

$f(1)=0$에서 $a-b=-1$ …… ㉠

$f'(x)=100x^{99}+a$이므로 $f'(1)=0$에서

$100+a=0$ $\quad\therefore a=-100$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-99$

$\therefore ab=9900$

0319 답 -16

다항식 x^5을 $x(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면

$x^5=x(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $c=0$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $32=4a+2b$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4=\{(x-2)^2+2x(x-2)\}Q(x)+x(x-2)^2Q'(x)+2ax+b$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$80=4a+b$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=32,\ b=-48$

따라서 $R(x)=32x^2-48x$이므로

$R(1)=-16$

0320 답 3

다항식 $2x^4+ax^2+bx+6$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$로 놓으면

$2x^4+ax^2+bx+6=(x-1)^2Q(x)+5x-4$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a+b+8=1$ $\quad\therefore a+b=-7$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$8x^3+2ax+b=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+5$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2a+b+8=5$ $\quad\therefore 2a+b=-3$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=-11$

$f(x)=6x^5+2ax+b$로 놓으면

$f(x)=6x^5+8x-11$

이때, $f(x)$를 일차식 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=6+8-11=3$

STEP 3 | 심화 Master

0321 답 4

TIP 함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$임을 이용한다.

x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$M(a,\ b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2b^2(a+b)-2a^2(a+b)}{b-a}$$
$$=\frac{2(a+b)(b^2-a^2)}{b-a}$$
$$=\frac{2(a+b)^2(b-a)}{b-a}$$

$M(a,\ b)\le 2$에서 $\frac{2(a+b)^2(b-a)}{b-a}\le 2$

$\therefore (a+b)^2\le 1$ $(\because b-a>0)$

위의 식을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(-2,\ 1),\ (-1,\ 0),\ (-1,\ 1),\ (0,\ 1)$로 그 개수는 4이다.

0322 답 ④

TIP $0<t\le 1$과 $t>1$일 때로 나누어 평균변화율 $g(t)$를 구한다.

(i) $0<t\le 1$일 때

닫힌구간 $[0,\ t]$에서의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

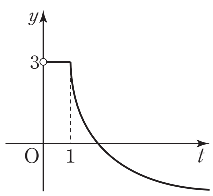
$$g(t)=\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\frac{3t}{t}=3$$

(ii) $t>1$일 때

닫힌구간 $[0,\ t]$에서의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$g(t)=\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\frac{6-3t}{t}=\frac{6}{t}-3$$

따라서 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0323 답 ①

TIP 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면 $f(x)=f(-x)$임을 이용한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$f(x)=f(-x)$

이때, $f'(-x)=\lim_{t\to -x}\frac{f(t)-f(-x)}{t-(-x)}$에서

$t=-s$로 놓으면 $t\longrightarrow -x$일 때 $s\longrightarrow x$이므로

$$f'(-x)=\lim_{t\to -x}\frac{f(t)-f(-x)}{t-(-x)}$$
$$=\lim_{s\to x}\frac{f(-s)-f(-x)}{-s-(-x)}$$
$$=-\lim_{s\to x}\frac{f(s)-f(x)}{s-x}=-f'(x)$$

$\therefore f'(-x)=-f'(x)$

따라서 $f'(-2)=-f'(2)=3$이다.

$$\therefore \lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(2)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\left\{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot\frac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)}\cdot(x-2)\right\}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot\lim_{x\to -2}\frac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)}\cdot\lim_{x\to -2}(x-2)$$
$$=\lim_{t\to 4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}\cdot\frac{1}{f'(-2)}\cdot(-4)$$

($x^2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow -2$일 때 $t\longrightarrow 4$)

$$=f'(4)\cdot\frac{1}{f'(-2)}\cdot(-4)$$
$$=6\cdot\frac{1}{3}\cdot(-4)=-8$$

0324 답 36

TIP 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구하고 도함수의 정의를 이용한다.

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)-1$ $\qquad \therefore f(0)=1$

한편,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)+f(h)+2xh-1\}-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)-1}{h}+2x\right\}=2x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=2x+f'(0)$$

이때, $f'(x)$가 일차함수이므로 $f(x)$는 이차함수이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b=2x+f'(0)$에서

$a=1$, $b=f'(0)$ $\qquad$ …… ㉠

또, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=18$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다. 즉, $f(1)=f'(1)$에서

$a+b+c=2a+b$ $\qquad \therefore c-a=0$ $\qquad$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a=1$, $b=f'(0)$, $c=1$

$\therefore f(x)=x^2+f'(0)x+1$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\{x^2+f'(0)x+1\}-\{2x+f'(0)\}}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\{f'(0)-2\}x+1-f'(0)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{x+f'(0)-1\}}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{f'(0)}{2}=18$$

$\therefore f'(0)=36$

0325 답 $\sqrt{15}$

TIP $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$임을 이용한다.

두 점 $(2,\ f(2))$, $(a,\ f(a))$ 사이의 거리가 a^2-4이므로

$\sqrt{(a-2)^2+\{f(a)-f(2)\}^2}=a^2-4$

$(a-2)^2+\{f(a)-f(2)\}^2=(a^2-4)^2$

$$\{f(a)-f(2)\}^2=(a^2-4)^2-(a-2)^2$$
$$=a^4-9a^2+4a+12$$
$$=(a-2)^2(a+1)(a+3)$$

$\therefore f(a)-f(2)=(a-2)\sqrt{(a+1)(a+3)}$ ($\because f(a)>f(2)$)

$$\therefore f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\sqrt{(x+1)(x+3)}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\sqrt{(x+1)(x+3)}=\sqrt{15}$$

> **Lecture**
> **두 점 사이의 거리**
> 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는
> $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

0326 답 ③

TIP 주어진 함수를 $k(x)$로 놓고 $x=0$에서 연속이고 미분계수 $k'(0)$이 존재하는지 확인한다.

ㄱ. $k(x)=xf(x)$로 놓으면

$$k(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geq 0) \\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0}k(x)=k(0)=0$이므로 $k(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hf(h)}{h}=\lim_{h\to 0}f(h)=0$$

이므로 $k(x)$, 즉 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. $k(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$$k(x)=\begin{cases} 2x^2+x & (x\geq 0) \\ x^2+x & (x<0)\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0}k(x)=k(0)=0$이므로 $k(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0-}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0-}(h+1)=1$$
$$\lim_{h\to 0+}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{2h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0+}(2h+1)=1$$

이므로 $k(x)$, 즉 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

3 미분계수와 도함수

ㄷ. $k(x)=|f(x)-g(x)|$로 놓으면

$$k(x)=\begin{cases} x+1 & (x\ge 0) \\ 1 & (x<0) \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0}k(x)=k(0)=1$이므로 $k(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0-}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{1-1}{h}=0$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(h+1)-1}{h}=1$$

이므로 $k(x)$, 즉 $|f(x)-g(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

참고 ㄷ. $f(x)=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x\ge 0) \\ -x-1 & (x<0) \end{cases}$에 대하여

$x\ge 0$일 때, $g(x)>f(x)$이고, $x<0$일 때, $f(x)>g(x)$이므로

$k(x)=\begin{cases} g(x)-f(x)=x+1 & (x\ge 0) \\ f(x)-g(x)=1 & (x<0) \end{cases}$이다.

0327 답 385

TIP 다항함수 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ (a_n은 상수)의 도함수는 $f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$임을 이용한다.

$$h(x)=\sum_{n=1}^{10}f_n(x)g_n(x)=\sum_{n=1}^{10}nx^n$$
$$=x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10}$$

따라서 $h'(x)=1+2^2x+3^2x^2+\cdots+10^2x^9$이므로

$$h'(1)=1+2^2+3^2+\cdots+10^2=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}=385$$

Lecture

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

0328 답 605

TIP $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$임을 이용한다.

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\lim_{h\to 0}\frac{f(n+2h)-f(n)}{h}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\lim_{h\to 0}\frac{f(n+2h)-f(n)}{2h}\cdot 2=\sum_{n=1}^{5}f'(n)$$
$$=\sum_{n=1}^{5}(4n^3-20n+1)=4\left(\frac{5\cdot6}{2}\right)^2-20\cdot\frac{5\cdot6}{2}+5$$
$$=900-300+5=605$$

0329 답 56

TIP $f(x)=x(x+2t)(x-t)$로 놓고 양수 t에 대하여 $f'(4)$의 최댓값을 구한다.

$f(x)=x(x+2t)(x-t)$로 놓으면

$$f'(x)=x'(x+2t)(x-t)+x(x+2t)'(x-t)+x(x+2t)(x-t)'$$
$$=(x+2t)(x-t)+x(x-t)+x(x+2t)$$

따라서

$$f'(4)=(4+2t)(4-t)+4(4-t)+4(4+2t)$$
$$=-2t^2+8t+48$$
$$=-2(t-2)^2+56$$

이므로 $f'(4)$는 $t=2$에서 최댓값 56을 갖는다.

0330 답 8

TIP $f(x)-2=a(x-1)(x-2)(x-3)$ $(a\ne0)$으로 놓고 $f(4)=14$임을 이용한다.

$f(1)=f(2)=f(3)=2$에서 삼차방정식 $f(x)-2=0$의 세 근이 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로

$f(x)-2=a(x-1)(x-2)(x-3)$ $(a\ne0)$으로 놓을 수 있다.

위의 식에 $x=4$를 대입하면 $f(4)=14$이므로

$f(4)-2=6a$, $12=6a$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore f(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)+2$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right\}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\cdot\lim_{x\to1}(x+1)$$

($x^2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow1$)

$$=2f'(1)$$

이때,

$$f'(x)=2(x-2)(x-3)+2(x-1)(x-3)+2(x-1)(x-2)$$

이므로 $f'(1)=4$

$\therefore 2f'(1)=2\cdot4=8$

0331 답 -1, 1

TIP $g'(x)=(2x+1)f(x)+(x^2+x)f'(x)$에 $x=-2, -1, 0, 1, 2$를 대입한다.

$g(x)=(x^2+x)f(x)$에서

$$g'(x)=(2x+1)f(x)+(x^2+x)f'(x)$$
$$g'(-2)=-3f(-2)+2f'(-2)$$
$$=0+2f'(-2)<0\ (\because f(-2)=0, f'(-2)<0)$$
$$g'(-1)=-f(-1)+0>0\ (\because f(-1)<0)$$
$$g'(0)=f(0)+0=0$$
$$g'(1)=3f(1)+2f'(1)$$
$$=3f(1)+0>0\ (\because f(1)>0, f'(1)=0)$$
$$g'(2)=5f(2)+6f'(2)=0$$

따라서 집합 S의 원소 중 $\{x|g'(x)>0\}$의 원소인 것은 -1, 1이다.

0332 답 2

TIP 함수 $f(x)$가 실수 전체에서 미분가능하려면 $x=\pm1$에서 연속이고 미분가능해야 한다.

$f(x)=\begin{cases} -x & (x\le-1) \\ ax^2+bx+c & (-1<x<1) \\ x & (x\ge1) \end{cases}$로 놓으면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 미분가능하므로 $x=-1$, $x=1$에서 연속이고 $f'(-1)$과 $f'(1)$의 값이 존재해야 한다.

(i) $x=-1$, $x=1$에서 연속이므로

$f(-1)=a-b+c=1$, $f(1)=a+b+c=1$

$\therefore a+c=1$, $b=0$

(ii) $f'(x)=\begin{cases}-1 & (x<-1)\\ 2ax & (-1<x<1)\\ 1 & (x>1)\end{cases}$ 이고, $x=-1$, $x=1$에서 미분가능해야 하므로

$f'(-1)=-2a=-1$, $f'(1)=2a=1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{2}$ ($\because a+c=1$)

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$, $b=0$, $c=\frac{1}{2}$이므로 구하는 값은

$a+2b+3c=\frac{1}{2}+2\cdot 0+3\cdot\frac{1}{2}=2$

0333 답 $\frac{9}{5}$

TIP $h(x)=axf(x)$로 놓고 $f'(1)=3$임을 이용한다.

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{axf(x)-2a}{x-1}=9$

$x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{axf(x)-2a\}=0$이므로 $af(1)-2a=0$

$\therefore f(1)=2$ ($\because a\neq 0$)

$h(x)=axf(x)$로 놓으면 $h(1)=af(1)=2a$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{axf(x)-2a}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)=9$

이때, $h'(x)=af(x)+axf'(x)$이므로

$h'(1)=af(1)+af'(1)$

$=2a+3a=5a$

따라서 $h'(1)=9$에서 $5a=9$

$\therefore a=\frac{9}{5}$

0334 답 7

TIP $f(x)$를 n차 다항식으로 나타낸 후 주어진 조건을 만족시키는 $f(x)$를 구한다.

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n $(a\neq 0)$으로 놓으면 $f'(x)$의 최고차항은 nax^{n-1}이다.

$(x^k+3)f'(x)=f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 양변의 최고차항의 차수가 같아야 한다.

$n-1+k=n$ $\quad\therefore k=1$

또, 양변의 최고차항의 계수도 같아야 하므로

$an=a$ $\quad\therefore n=1$

따라서 $f(x)=ax+b$로 놓으면 $f'(x)=a$이므로

$(x^k+3)f'(x)=f(x)$에서 $(x+3)a=ax+b$

$ax+3a=ax+b$

$\therefore b=3a$

이때, $f(1)=8$에서 $4a=8$이므로 $a=2$, $b=6$

$\therefore k+f(0)=1+6=7$

4 | 도함수의 활용 (1)

본책 58쪽~74쪽

STEP 1 | 기초 Build

0335 답 -1

$f(x)=3x^2-x+6$으로 놓으면 $f'(x)=6x-1$

따라서 점 $(0,\ 6)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=-1$

0336 답 1

$f(x)=-x^3+2x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=-3x^2+4x$

따라서 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-3+4=1$

0337 답 $y=-5x-6$

$f(x)=x^2-x-2$로 놓으면 $f'(x)=2x-1$

점 $(-2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=-5$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-4=-5(x+2)$

$\therefore y=-5x-6$

0338 답 $y=-2x+21$

$f(x)=-\frac{1}{4}x^2-x+20$으로 놓으면 $f'(x)=-\frac{1}{2}x-1$

점 $(2,\ 17)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-17=-2(x-2)$

$\therefore y=-2x+21$

0339 답 $y=-1$

$f(x)=x^3+2x^2-1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+4x$

점 $(0,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=0$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-(-1)=0$

$\therefore y=-1$

0340 답 $y=3x-7$

$f(x)=x^2-3x+2$로 놓으면 $f'(x)=2x-3$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-3t+2)$라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=2t-3=3$ $\quad\therefore t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3,\ 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=3(x-3)$ $\quad\therefore y=3x-7$

0341 답 $y=3x+5$

$f(x)=3x^2+3x+5$로 놓으면 $f'(x)=6x+3$

접점의 좌표를 $(t,\ 3t^2+3t+5)$라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=6t+3=3$ $\quad\therefore t=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 5)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-5=3(x-0)$ $\quad\therefore y=3x+5$

0342 답 $y=3x+10\sqrt{5}$, $y=3x-10\sqrt{5}$

$f(x)=x^3-12x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-12$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-12t)$라 하면 접선의 기울기가 3이므로
$f'(t)=3t^2-12=3,\ t^2-5=0$
$(t+\sqrt{5})(t-\sqrt{5})=0 \qquad \therefore t=-\sqrt{5}$ 또는 $t=\sqrt{5}$
따라서 접점의 좌표는 $(-\sqrt{5},\ 7\sqrt{5}),\ (\sqrt{5},\ -7\sqrt{5})$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-7\sqrt{5}=3(x+\sqrt{5}),\ y-(-7\sqrt{5})=3(x-\sqrt{5})$
$\therefore y=3x+10\sqrt{5},\ y=3x-10\sqrt{5}$

0343 답 $y=2x+9$
$f(x)=-x^2-2x+5$로 놓으면 $f'(x)=-2x-2$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2-2t+5)$라 하면 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$에 수직인 직선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=-2t-2=2 \qquad \therefore t=-2$
따라서 구하는 접선은 점 $(-2,\ 5)$를 지나고 기울기가 2인 직선이므로 $y-5=2(x+2)$
$\therefore y=2x+9$

0344 답 $y=5x+1,\ y=5x-3$
$f(x)=x^3+2x-1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2t-1)$이라 하면 직선 $y=5x-1$에 평행한 직선의 기울기가 5이므로
$f'(t)=3t^2+2=5,\ t^2-1=0$
$(t+1)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ -4),\ (1,\ 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-(-4)=5(x+1),\ y-2=5(x-1)$
$\therefore y=5x+1,\ y=5x-3$

0345 답 (1) $y-(-a^2-4a-2)=(-2a-4)(x-a)$
(2) $-1,\ -5$
(3) $y=-2x-1,\ y=6x+23$

(1) $f'(x)=-2x-4$이고 접점의 좌표는 $(a,\ -a^2-4a-2)$이므로 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=-2a-4$
따라서 접선의 방정식은
$y-(-a^2-4a-2)=(-2a-4)(x-a)$
(2) 이 직선이 점 $(-3,\ 5)$를 지나므로
$5-(-a^2-4a-2)=(-2a-4)(-3-a)$
$a^2+6a+5=0,\ (a+1)(a+5)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=-5$
(3) $a=-1$을 (1)에서 구한 접선의 방정식에 대입하면
$y-1=-2(x+1) \qquad \therefore y=-2x-1$
$a=-5$를 (1)에서 구한 접선의 방정식에 대입하면
$y+7=6(x+5) \qquad \therefore y=6x+23$

0346 답 $y=-7x+3,\ y=5x+3$
$f(x)=3x^2-x+6$으로 놓으면 $f'(x)=6x-1$
접점의 좌표를 $(t,\ 3t^2-t+6)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=6t-1$이므로 접선의 방정식은
$y-(3t^2-t+6)=(6t-1)(x-t)$ …… ㉠
이 직선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로
$3-(3t^2-t+6)=(6t-1)(-t)$
$t^2-1=0,\ (t+1)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$
이것을 ㉠에 대입하면
$t=-1$일 때, $y-10=-7(x+1) \qquad \therefore y=-7x+3$
$t=1$일 때, $y-8=5(x-1) \qquad \therefore y=5x+3$

0347 답 $y=-x+3$
$f(x)=-x^3+2x+1$로 놓으면 $f'(x)=-3x^2+2$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+2t+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-3t^2+2$이므로 접선의 방정식은
$y-(-t^3+2t+1)=(-3t^2+2)(x-t)$ …… ㉠
이 직선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로
$3-(-t^3+2t+1)=(-3t^2+2)(-t)$
$t^3-1=0,\ (t-1)(t^2+t+1)=0$
$\therefore t=1\ (\because t^2+t+1>0)$
이것을 ㉠에 대입하면
$y-2=-(x-1) \qquad \therefore y=-x+3$

0348 답 (1) $a=1,\ b=0$ (2) $y=4x-2$
(1) $f(x)=x^3+ax,\ g(x)=2x^2+b$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=4x$
두 곡선이 $x=1$인 점에서 공통인 접선을 가지므로
$f(1)=g(1),\ f'(1)=g'(1)$
$f(1)=g(1)$에서 $a+1=b+2$
$\therefore a-b=1$ …… ㉠
$f'(1)=g'(1)$에서 $a+3=4 \qquad \therefore a=1$
$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=0$
(2) 두 곡선 $f(x)=x^3+x,\ g(x)=2x^2$의 접점의 좌표가 $(1,\ 2)$이고 접선의 기울기가 $f'(1)=4$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-2=4(x-1) \qquad \therefore y=4x-2$

0349 답 (1) -1 (2) $y=3x+3$
(1) $f(x)=x^3+1,\ g(x)=-3x^2-3x$로 놓으면
$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=-6x-3$
접점의 좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t),\ f'(t)=g'(t)$이어야 한다.
$f(t)=g(t)$에서
$t^3+1=-3t^2-3t,\ (t+1)^3=0$
$\therefore t=-1$
$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2=-6t-3,\ 3(t+1)^2=0$
$\therefore t=-1$
따라서 $t=-1$이므로 접점의 x좌표는 -1이다.
(2) 접점의 좌표는 $(-1,\ 0)$이고 $f'(-1)=g'(-1)=3$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-0=3(x+1) \qquad \therefore y=3x+3$

0350 답 $\frac{3}{2}$
함수 $f(x)=x^2-3x$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(3)=0$이므로 $f'(c)=0$인 c가

구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=2x-3$이므로 $f'(c)=2c-3=0$
$\therefore c=\frac{3}{2}$

0351 답 2
함수 $f(x)=-x^2+4x$는 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(3)=3$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=-2x+4$이므로 $f'(c)=-2c+4=0$
$\therefore c=2$

0352 답 $\frac{5}{2}$
함수 $f(x)=(x-1)(x-4)=x^2-5x+4$는 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 4)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(4)=0$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=2x-5$이므로 $f'(c)=2c-5=0$
$\therefore c=\frac{5}{2}$

0353 답 1
함수 $f(x)=x^3-3x$는 닫힌구간 $[0,\ \sqrt{3}]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ \sqrt{3})$에서 미분가능하며 $f(0)=f(\sqrt{3})=0$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(0,\ \sqrt{3})$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=3x^2-3$이므로 $f'(c)=3c^2-3=0$
$3(c+1)(c-1)=0$
$\therefore c=1\ (\because 0<c<\sqrt{3})$

0354 답 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
함수 $f(x)=x^3-4x+1$은 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=1$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=3x^2-4$이므로 $f'(c)=3c^2-4=0$
$(\sqrt{3}c+2)(\sqrt{3}c-2)=0$
$\therefore c=\frac{2}{3}\sqrt{3}\ (\because 0<c<2)$

0355 답 0
함수 $f(x)=x^2+2x$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=2x+2$이므로 $\frac{3-(-1)}{1-(-1)}=2c+2$
$\therefore c=0$

0356 답 2
함수 $f(x)=-x^2+4$는 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$인 c가 구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=-2x$이므로 $\frac{-5-3}{3-1}=-2c$
$\therefore c=2$

0357 답 $\frac{5}{2}$
함수 $f(x)=-x^2+4x-2$는 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 4)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$인 c가 구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=-2x+4$이므로 $\frac{-2-1}{4-1}=-2c+4$
$\therefore c=\frac{5}{2}$

0358 답 1
함수 $f(x)=(x+1)(2x-5)=2x^2-3x-5$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하므로
$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$인 c가 구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=4x-3$이므로 $\frac{-3-(-5)}{2-0}=4c-3$
$\therefore c=1$

0359 답 $\sqrt{3}$
함수 $f(x)=x^3-4x+3$은 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$인 c가 구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=3x^2-4$이므로 $\frac{18-3}{3-0}=3c^2-4$
$c^2-3=0,\ (c+\sqrt{3})(c-\sqrt{3})=0$
$\therefore c=\sqrt{3}\ (\because 0<c<3)$

0360 답 (가) $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (나) 0 (다) $f(x)=f(a)$

0361 답 (가) 0 (나) 상수
참고 상수 c에 대하여 $f(x)=c \Longleftrightarrow f'(x)=0$

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식
본책 62쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$가 주어졌을 때
(1) 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.
(2) $y-b=f'(a)(x-a)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

0362 답 $1,\ \frac{3}{2}$
$f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=2x^2-5x$
점 A의 좌표를 $\left(t,\ \frac{2}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+2\right)$라 하면 직선 $y=-3x+1$에 평행한 직선의 기울기가 -3이므로
$f'(t)=2t^2-5t=-3,\ (t-1)(2t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=\frac{3}{2}$

따라서 점 A의 x좌표는 $1, \frac{3}{2}$이다.

0363 답 -1

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=-1$에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=0$이므로 $f(2)=3$

이때, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=-1$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기는 -1이다.

0364 답 $(-2,\ 2)$

$f(x)=-2x^3+x^2+5x+1$로 놓으면 $f'(x)=-6x^2+2x+5$

점 $(1,\ 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 직선 l의 방정식은 $y-5=x-1$

$\therefore y=x+4$ …… ㉠

점 $(-1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-3$이므로 직선 m의 방정식은 $y-(-1)=-3(x+1)$

$\therefore y=-3x-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-2,\ y=2$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(-2,\ 2)$이다.

0365 답 ④

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-8}{x^2-1}=\frac{3}{8}$에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)-8\}=0$이므로 $f(1)=8$

이때,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-8}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{3}{8}$$

$\therefore f'(1)=\frac{3}{4}$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 8)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{3}{4}$이므로 접선의 방정식은

$y-8=\frac{3}{4}(x-1)$ $\quad\therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{29}{4}$

0366 답 -2

$y=(x-2)f(x)$에서 $y'=f(x)+(x-2)f'(x)$이므로 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는

$f(2)+(2-2)f'(2)=f(2)=1$

따라서 점 $(2,\ 0)$을 지나고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y=x-2$

즉, $a=1,\ b=-2$이므로 $ab=-2$

0367 답 8

$g(x)=x^2f(x)$로 놓으면

$g(-2)=4f(-2)=4\cdot(-1)=-4$

또, $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로 $x=-2$인 점에서의 접선의 기울기는

$g'(-2)=-4f(-2)+4f'(-2)=-4\cdot(-1)+4\cdot 0=4$

따라서 점 $(-2,\ -4)$를 지나고 기울기가 4인 접선의 방정식은

$y-(-4)=4(x+2)$

$\therefore y=4x+4$

즉, $a=4,\ b=4$이므로 $a+b=8$

0368 답 ③

$y=x^3+kx^2+(2k-1)x+k+2$를 k에 대하여 정리하면

$(x+1)^2k+x^3-x-y+2=0$

위의 등식이 k에 대한 항등식이므로

$(x+1)^2=0,\ x^3-x-y+2=0$

$\therefore x=-1,\ y=2$

즉, 곡선 $y=x^3+kx^2+(2k-1)x+k+2$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $P(-1,\ 2)$를 지난다.

이때, $f(x)=x^3+kx^2+(2k-1)x+k+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2kx+(2k-1)$이므로 $x=-1$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3-2k+2k-1=2$

따라서 점 $P(-1,\ 2)$를 지나고 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y-2=2(x+1)$

$\therefore y=2x+4$

즉, $a=2,\ b=4$이므로 $a^2+b^2=20$

유형 02 접선과 수직인 직선의 방정식 본책 63쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$를 지나고, 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

⇨ $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ (단, $f'(a)\neq 0$)

0369 답 2

$f(x)=x^3-2x+3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$

점 $(-1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=1$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

따라서 점 $(-1,\ 4)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-4=-(x+1)$

$\therefore y=-x+3$

즉, $a=-1,\ b=3$이므로 $a+b=2$

0370 답 $\frac{1}{6}$

$f(x)=-3x^2+\frac{1}{3}$로 놓으면 $f'(x)=-6x$

점 $A\left(t,\ -3t^2+\frac{1}{3}\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-6t$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{6t}$이다.

따라서 점 $A\left(t,\ -3t^2+\frac{1}{3}\right)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{6t}$인 직선의 방정

식은

$y-\left(-3t^2+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6t}(x-t)$

$\therefore y=\frac{1}{6t}x-3t^2+\frac{1}{6}$

이때, $x=0$을 대입하면 $g(t)=-3t^2+\frac{1}{6}$이므로

$\lim_{t\to 0} g(t)=\lim_{t\to 0}\left(-3t^2+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$

0371 답 6

$y=-2x^3-kx^2-kx+1$을 k에 대하여 정리하면

$-x(x+1)k-2x^3-y+1=0$

위의 등식이 k에 대한 항등식이므로

$-x(x+1)=0$, $-2x^3-y+1=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=0, y=1$ 또는 $x=-1, y=3$

즉, 곡선 $y=-2x^3-kx^2-kx+1$은 k의 값에 관계없이 항상 두 점 $(0,\ 1)$, $(-1,\ 3)$을 지난다.

$y'=-6x^2-2kx-k$이고, 두 점 $(0,\ 1)$, $(-1,\ 3)$에서의 접선이 서로 수직이므로

$-k(k-6)=-1$

$\therefore k^2-6k-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=10>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 6이다.

유형 03 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용한 미정계수의 결정

본책 63쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 k일 때

⇨ $f(a)=b$, $f'(a)=k$

0372 답 1

$f(x)=x^2+ax+b$로 놓으면

$f(2)=4$에서 $4+2a+b=4$ $\quad\therefore 2a+b=0$ ······ ㉠

또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(2)=3$

$f'(x)=2x+a$이므로 $a+4=3$ $\quad\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a+b=1$

0373 답 ④

$f(x)=ax^3+bx^2+c$로 놓으면

$f(-1)=-1$에서 $-a+b+c=-1$ ······ ㉠

$f(3)=3$에서 $27a+9b+c=3$ ······ ㉡

또, $y=f(x)$ 위의 두 점 $(-1,\ -1)$, $(3,\ 3)$에서의 접선이 서로 평행하므로 $f'(-1)=f'(3)$

$f'(x)=3ax^2+2bx$이므로 $3a-2b=27a+6b$

$\therefore 3a+b=0$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1, b=-3, c=3$

$\therefore a+b+c=1$

0374 답 12

$f(x)=x^3+x^2+ax+b$로 놓으면

$f(-1)=-5$에서 $-a+b=-5$ ······ ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ -5)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{4}$이므로 점 A에서의 접선의 기울기는 4이다.

$f'(x)=3x^2+2x+a$이므로

$f'(-1)=4$에서 $a+1=4$ $\quad\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore ab^2=12$

유형 04 곡선과 접선의 교점

본책 64쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선 $y=g(x)$가 이 곡선과 다시 만나는 점의 x좌표는

⇨ 방정식 $f(x)=g(x)$의 $x\neq a$인 실근과 같다.

0375 답 14

$f(x)=x^3-3x^2$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x$

$f'(3)=9$이므로 점 $(3,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0=9(x-3)$ $\quad\therefore y=9x-27$

직선 $y=9x-27$이 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$x^3-3x^2=9x-27$, $x^3-3x^2-9x+27=0$

$(x-3)^2(x+3)=0$ $\quad\therefore x=3$ 또는 $x=-3$

따라서 점 P의 좌표는 $(-3,\ -54)$이고 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(-3)=45$이므로 접선의 방정식은

$y-(-54)=45(x+3)$ $\quad\therefore y=45x+81$

즉, $a=45$, $b=81$이므로 $\frac{a+b}{9}=14$

0376 답 1 : 2

$f(x)=-x^3+2x+1$로 놓으면 $f'(x)=-3x^2+2$

$f'(1)=-1$이므로 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+3$

즉, 점 Q의 좌표는 $(0,\ 3)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

또, 직선 $y=-x+3$이 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$-x^3+2x+1=-x+3$, $x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 점 R의 좌표는 $(-2,\ 5)$이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{2}:2\sqrt{2}=1:2$

0377 답 $\left(\frac{35}{3},\ -\frac{23}{6}\right)$

$f(x)=x^3-4x^2$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2-8x$

$f'(1)=-5$이므로 점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-3)=-5(x-1)$

$\therefore y=-5x+2$

직선 $y=-5x+2$가 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는
$x^3-4x^2=-5x+2$, $x^3-4x^2+5x-2=0$
$(x-1)^2(x-2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서 다시 만나는 점의 좌표가 P$(2, -8)$이고 $f'(2)=-4$이므로 점 P를 지나고 점 P에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은
$y-(-8)=\frac{1}{4}(x-2)$ $\therefore y=\frac{1}{4}x-\frac{17}{2}$
이 직선과 x축, y축의 교점의 좌표는 각각 B$(34, 0)$, C$\left(0, -\frac{17}{2}\right)$이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{1+34+0}{3}, \frac{-3+0-\frac{17}{2}}{3}\right)$ $\therefore \left(\frac{35}{3}, -\frac{23}{6}\right)$

Lecture
삼각형의 무게중심
세 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면
⇨ G$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

0378 답 -75
$f(x)=x^3+nx^2-x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2nx-1$
$f'(1)=2n+2$이므로 점 $(1, n)$에서의 접선의 방정식은
$y-n=(2n+2)(x-1)$
$\therefore y=(2n+2)x-n-2$
직선 $y=(2n+2)x-n-2$가 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는
$x^3+nx^2-x=(2n+2)x-n-2$
$(x-1)^2(x+n+2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=-n-2$
따라서 $x_n=-n-2$이므로
$\sum_{n=1}^{10} x_n=\sum_{n=1}^{10}(-n-2)=-\frac{10\cdot 11}{2}-20=-75$

유형 05 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식의 활용
본책 64쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점의 좌표가 주어졌을 때
(i) a_1을 구한다.
(ii) 점 $(a_n, f(a_n))$에서의 접선의 방정식을 구하여 $a_{n+1}=pa_n$ 꼴로 나타낸다.
(iii) 수열 $\{a_n\}$이 등비수열임을 이용한다.

0379 답 $\frac{1}{32}$
$f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$
$f'(1)=2$이므로 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은
$y-1=2(x-1)$ $\therefore y=2x-1$
직선 $y=2x-1$과 x축과의 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$이므로
$a_1=\frac{1}{2}$
또, 곡선 위의 점 $(a_n, a_n{}^2)$에서의 접선의 기울기는 $2a_n$이므로 접선의 방정식은
$y-a_n{}^2=2a_n(x-a_n)$ $\therefore y=2a_nx-a_n{}^2$
직선 $y=2a_nx-a_n{}^2$과 x축과의 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}a_n, 0\right)$이므로
$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로
$a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$
$\therefore a_5=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

Lecture
등비수열의 귀납적 정의
(1) $a_{n+1}\div a_n=r$ 또는 $a_{n+1}=ra_n$ ⇨ 공비가 r인 등비수열
(2) $a_{n+1}\div a_n=a_{n+2}\div a_{n+1}$ 또는 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$
⇨ a_{n+1}은 a_n과 a_{n+2}의 등비중항

0380 답 ②
$f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
$f'(1)=3$이므로 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은
$y-1=3(x-1)$ $\therefore y=3x-2$
직선 $y=3x-2$와 x축과의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$이므로
$a_1=\frac{2}{3}$
또, 곡선 위의 점 $(a_n, a_n{}^3)$에서의 접선의 기울기는 $3a_n{}^2$이므로 접선의 방정식은
$y-a_n{}^3=3a_n{}^2(x-a_n)$ $\therefore y=3a_n{}^2x-2a_n{}^3$
접선 $y=3a_n{}^2x-2a_n{}^3$과 x축과의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}a_n, 0\right)$이므로
$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로
$a_n=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$
$\therefore a_{10}=\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

유형 06 기울기가 주어진 접선의 방정식
본책 65쪽

(1) 곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선의 기울기 m이 주어졌을 때
(i) 접점의 좌표를 $(a, f(a))$로 놓는다.
(ii) $f'(a)=m$임을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.
(iii) $y-f(a)=m(x-a)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.
(2) 기울기가 직접적으로 주어지지 않은 경우
① 평행한 두 직선은 기울기가 서로 같고, 두 직선이 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.
② 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기 θ $(0°\le\theta<90°)$가 주어지면 (기울기)$=\tan\theta$임을 이용한다.

0381 답 ②
$f(x)=x^3-3x^2+5$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x$
접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+5)라 하면 직선 $x-3y+2=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 -3이므로
$f'(t)=3t^2-6t=-3$

$t^2-2t+1=0$, $(t-1)^2=0$

$\therefore t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1, 3)$이므로 직선의 방정식은

$y-3=-3(x-1)$ $\quad\therefore y=-3x+6$

0382 답 2

$f(x)=x^2+2x+3$으로 놓으면 $f'(x)=2x+2$

접점의 좌표를 (t, t^2+2t+3)이라 하면 직선 $y=4x-1$에 평행한 직선의 기울기는 4이므로

$f'(t)=2t+2=4$ $\quad\therefore t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1, 6)$이므로 직선의 방정식은

$y-6=4(x-1)$ $\quad\therefore y=4x+2$

따라서 구하는 y절편은 2이다.

0383 답 8

$f(x)=x^4-4x^3+6x^2+4$로 놓으면 $f'(x)=4x^3-12x^2+12x$

곡선 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(a)=4$에서 $4a^3-12a^2+12a=4$

$a^3-3a^2+3a-1=0$, $(a-1)^3=0$

$\therefore a=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1, 7)$이므로 $a=1$, $b=7$

$\therefore a+b=8$

0384 답 ④

$f(x)=-2x^3+6x^2+x-1$로 놓으면

$f'(x)=-6x^2+12x+1=-6(x-1)^2+7$

이므로 $f'(x)$는 $x=1$에서 최댓값 7을 갖는다.

따라서 구하는 기울기 m의 최댓값은 7이다.

0385 답 ①

$f(x)=\frac{1}{6}x^3+x^2+x+\frac{4}{3}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1=\frac{1}{2}(x+2)^2-1$

이므로 $f'(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

즉, 기울기가 최소인 접선의 접점의 좌표는 $(-2, 2)$이고 접선의 기울기가 -1이므로 접선 l의 방정식은

$y-2=-(x+2)$ $\quad\therefore y=-x$

따라서 직선 l 위의 점은 $(1, -1)$이다.

0386 답 -6

$f(x)=-x^2+3x+2$로 놓으면 $f'(x)=-2x+3$

곡선 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

접점의 좌표를 $(t, -t^2+3t+2)$라 하면

$f'(t)=-2t+3=-1$ $\quad\therefore t=2$

즉, 접점의 좌표는 $(2, 4)$이므로 직선의 방정식은

$y-4=-(x-2)$ $\quad\therefore y=-x+6$

따라서 $a=-1$, $b=6$이므로 $ab=-6$

0387 답 2

$f(x)=x^2-3x-1$로 놓으면 $f'(x)=2x-3$

접점의 좌표를 (t, t^2-3t-1)이라 하면 접선의 기울기는

$\tan 135^\circ=-1$이므로

$f'(t)=2t-3=-1$ $\quad\therefore t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1, -3)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-3)=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x-2$

점 $\mathrm{P}(a, b)$가 직선 $y=-x-2$ 위의 점이므로

$b=-a-2$

$\therefore a^2+b^2=a^2+(-a-2)^2=2(a+1)^2+2$

따라서 a^2+b^2은 $a=-1$일 때 최솟값 2를 갖는다.

유형 07 곡선과 직선이 접할 때 미정계수의 결정

본책 66쪽

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx+n$이 접할 때

(ⅰ) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓고 접선의 방정식을 세운다.

(ⅱ) (ⅰ)에서 구한 접선의 방정식과 직선 $y=mx+n$이 일치함을 이용하여 t의 값을 구한다.

(ⅲ) 구한 t의 값을 $y=f(x)$에 대입하여 미정계수를 구한다.

0388 답 -25

$f(x)=x^3-3x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2)라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+2)=(3t^2-6t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+2$

이 직선이 직선 $y=9x+k$와 일치하므로

$3t^2-6t=9$, $-2t^3+3t^2+2=k$

두 식을 연립하여 풀면

$t=-1$, $k=7$ 또는 $t=3$, $k=-25$

이때, k는 음수이므로 구하는 k의 값은 -25이다.

0389 답 ①

$f(x)=x^3+x^2-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2x$

접점의 좌표를 (t, t^3+t^2-2)라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+t^2-2)=(3t^2+2t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2t)x-2t^3-t^2-2$

이 직선이 직선 $y=x-k+3$과 일치하므로

$3t^2+2t=1$, $-2t^3-t^2-2=-k+3$

두 식을 연립하여 풀면

$t=-1$, $k=4$ 또는 $t=\frac{1}{3}$, $k=\frac{140}{27}$

이때, k는 정수이므로 구하는 k의 값은 4이다.

0390 답 $\sqrt{2}$

$f(x)=x^3+kx-1$이라 하면 $f'(x)=3x^2+k$

접점의 좌표를 (t, t^3+kt-1)이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+k$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+kt-1)=(3t^2+k)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+k)x-2t^3-1$

이 직선이 직선 $y=2x+1$과 일치하므로

$3t^2+k=2,\ -2t^3-1=1$

두 식을 연립하여 풀면 $t=-1,\ k=-1$

따라서 점 P의 좌표는 $(-1,\ -1)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

Lecture

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

(1) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

(2) 원점 O와 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}}$

0391 답 8

$f(x)=x^3-kx^2+2kx-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2kx+2k$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-kt^2+2kt-2)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-2kt+2k$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-kt^2+2kt-2)=(3t^2-2kt+2k)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-2kt+2k)x-2t^3+kt^2-2$

이 직선이 직선 $y=4x-2$와 일치하므로

$3t^2-2kt+2k=4$ …… ㉠

$-2t^3+kt^2-2=-2$ …… ㉡

㉡에서 $-t^2(2t-k)=0$ $\quad\therefore\ t=0$ 또는 $t=\dfrac{k}{2}$

(i) $t=0$을 ㉠에 대입하면 $k=2$

(ii) $t=\dfrac{k}{2}$를 ㉠에 대입하면

$\dfrac{3}{4}k^2-k^2+2k=4,\ (k-4)^2=0 \qquad \therefore\ k=4$

(i), (ii)에서 모든 상수 k의 값의 곱은 $2\cdot4=8$

유형 08 기울기가 주어진 접선의 방정식의 활용

본책 66쪽

(i) 곡선의 접선 중 주어진 직선과 평행한 접선의 접점의 좌표를 구한다.
(ii) 이 접점과 직선 사이의 거리가 구하는 거리의 최솟값이다.

0392 답 $8\sqrt{2}$

$f(x)=x^2-5x+10$으로 놓으면 $f'(x)=2x-5$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=-x-10$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2-5t+10)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 -1이어야 하므로

$f'(t)=2t-5=-1 \qquad \therefore\ t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 4)$이고, 점 $(2,\ 4)$와 직선 $y=-x-10$, 즉 $x+y+10=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$\dfrac{|2+4+10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{16}{\sqrt{2}}=8\sqrt{2}$

Lecture

점과 직선 사이의 거리

점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

0393 답 ②

$f(x)=x^3-6x^2+6x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-12x+6$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $x=3y$, 즉 $y=\dfrac{1}{3}x$와 수직인 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-6t^2+6t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 -3이어야 하므로

$f'(t)=3t^2-12t+6=-3$

$t^2-4t+3=0,\ (t-1)(t-3)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$, $(3,\ -9)$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-3(x-1),\ y-(-9)=-3(x-3)$

$\therefore\ 3x+y-4=0,\ 3x+y=0$

위의 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+y-4=0$ 위의 점 $(0,\ 4)$와 직선 $3x+y=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$\dfrac{|0+4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{10}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{10}$

0394 답 ③

$f(x)=x^2-3x$로 놓으면 $f'(x)=2x-3$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=x$와 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2-3t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이어야 하므로

$f'(t)=2t-3=1 \qquad \therefore\ t=2$

따라서 접점의 좌표는 $\mathrm{P}(2,\ -2)$이고, 이때 삼각형 OAP의 넓이가 최대이다.

0395 답 1

$f(x)=-x^2+4$로 놓으면 $f'(x)=-2x$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 PQ와 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가

$\dfrac{0-4}{2-0}=-2$이어야 하므로

$f'(t)=-2t=-2 \qquad \therefore\ t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1,\ 3)$이므로 $\mathrm{A}(1,\ 3)$일 때 삼각형 PQA의 넓이가 최대이다.

한편, 두 점 $\mathrm{P}(0,\ 4)$, $\mathrm{Q}(2,\ 0)$을 지나는 직선은

$y-4=-2x \qquad \therefore\ 2x+y-4=0$

이때, 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$과 직선 $2x+y-4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2+3-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$이므로 삼각형 PQA의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}=1$

0396 답 24

TIP 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$로 놓으면 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$이다.

세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$\overline{\mathrm{AC}}=6$에서 $\gamma-\alpha=6$

$f'(x)=(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)$

이고 점 C에서의 접선의 기울기는 $f'(\gamma)=12$이므로

$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=12$, $6(\gamma-\beta)=12$ $\quad\therefore \gamma-\beta=2$

이때, $\beta-\alpha=4$이고 점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(\alpha)$이므로

$f'(\alpha)=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)=-4\cdot(-6)=24$

유형 09 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식 본책 67쪽

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$가 주어졌을 때
(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓는다.
(ii) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 점 $(a,\ b)$의 좌표를 대입하여 t의 값을 구한다.
(iii) 구한 t의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

0397 답 ①, ⑤

$f(x)=-(x+1)^2+2=-x^2-2x+1$로 놓으면

$f'(x)=-2x-2$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2-2t+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2-2t+1)=(-2t-2)(x-t)$

$\therefore y=(-2t-2)x+t^2+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로

$3=t^2+2t+3$, $t(t+2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=-2$

$t=0$을 ㉠에 대입하면 $y=-2x+1$

$t=-2$를 ㉠에 대입하면 $y=2x+5$

0398 답 -4

$f(x)=-x^2+4x$로 놓으면 $f'(x)=-2x+4$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+4t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+4$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+4t)=(-2t+4)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+4)x+t^2$

이 직선이 점 $(3,\ 7)$을 지나므로

$7=t^2-6t+12$, $t^2-6t+5=0$

$(t-1)(t-5)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=5$

따라서 두 접선의 기울기의 합은

$f'(1)+f'(5)=2+(-6)=-4$

0399 답 1

$f(x)=x^3+5$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+5)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3+5$

이 직선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=-2t^3+5$, $t^3-1=0$

$(t-1)(t^2+t+1)=0$ $\quad\therefore t=1\ (\because t^2+t+1>0)$

즉, 접점은 $(1,\ 6)$의 1개이므로 구하는 접선의 개수는 1이다.

0400 답 $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

$f(x)=x^3+x^2-x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2x-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+t^2-t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2t-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+t^2-t)=(3t^2+2t-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2t-1)x-2t^3-t^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$1=-2t^3+5t^2+4t-2$, $2t^3-5t^2-4t+3=0$

$(t+1)(t-3)(2t-1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=3$

따라서 접선의 기울기는 각각

$f'(-1)=0$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$, $f'(3)=32$

즉, $t=\frac{1}{2}$일 때 기울기 m이 $0<m<1$이므로 구하는 접선의 방정식은 $t=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

0401 답 ③

$f(x)=x^3-x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3$

이 직선이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=-2t^3$, $t^3-1=0$

$(t-1)(t^2+t+1)=0$ $\quad\therefore t=1\ (\because t^2+t+1>0)$

따라서 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 점 $(-1,\ 3)$을 지나고 기울기가 2인 직선 l의 방정식은

$y-3=2(x+1)$ $\quad\therefore y=2x+5$

따라서 직선 $y=2x+5$ 위의 점은 $(-2,\ 1)$이다.

유형 10 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식의 활용 (1) 본책 68쪽

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$가 주어졌을 때
(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 접선의 방정식을 세운다.
(ii) 점 $(a,\ b)$의 좌표를 접선의 방정식에 대입하여 t에 대한 방정식을 세운다.
(iii) t에 대한 방정식의 해가 접점의 x좌표임을 이용한다.

0402 답 2

$f(x)=-x^2+x$로 놓으면 $f'(x)=-2x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+t)=(-2t+1)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+1)x+t^2$

이 직선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=t^2-2t+1$

$\therefore t^2-2t-1=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 두 접점의 x좌표의 합은 2이다.

0403 답 -1

$f(x)=x^3-3x+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-3$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t+1)=(3t^2-3)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-3)x-2t^3+1$

이 직선이 점 $(2,\ k)$를 지나므로

$k=-2t^3+6t^2-5$

$\therefore 2t^3-6t^2+5+k=0$ …… ㉠

이 방정식의 세 근이 등차수열을 이루므로 세 근을 $a-d,\ a,\ a+d$라 하면 근과 계수의 관계에서

$(a-d)+a+(a+d)=3 \qquad \therefore a=1$

㉠의 한 근이 1이므로 $x=1$을 ㉠에 대입하면

$2-6+5+k=0 \qquad \therefore k=-1$

유형 11 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식의 활용 (2) 본책 68쪽

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$가 주어졌을 때

(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 접선의 방정식을 세운다.

(ii) 점 $(a,\ b)$의 좌표를 접선의 방정식에 대입하여 t의 값을 구한 후 접점의 좌표를 구한다.

0404 답 18

$f(x)=x^3-2x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t)=(3t^2-2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-2)x-2t^3$

이 직선이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=-2t^3,\ t^3-1=0$

$(t-1)(t^2+t+1)=0 \qquad \therefore t=1\ (\because t^2+t+1>0)$

즉, 접점의 좌표는 $\mathrm{P}(1,\ -1)$이고 이 점에서의 접선의 방정식은 $y=x-2$이므로 직선 $y=x-2$가 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$x^3-2x=x-2,\ x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=-2$

따라서 접선과 곡선이 만나는 다른 한 점은 $\mathrm{Q}(-2,\ -4)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(1+2)^2+(-1+4)^2=18$

0405 답 2

$f(x)=x^4+2x^2+5$로 놓으면 $f'(x)=4x^3+4x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^4+2t^2+5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3+4t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4+2t^2+5)=(4t^3+4t)(x-t)$

$\therefore y=(4t^3+4t)x-3t^4-2t^2+5$

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-3t^4-2t^2+5,\ (t+1)(t-1)(3t^2+5)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 8),\ (1,\ 8)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2$

유형 12 공통인 접선 본책 68쪽

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$가 $x=t$에서 공통인 접선을 가지면

(1) $x=t$에서 두 곡선이 만난다. ⇨ $f(t)=g(t)$

(2) $x=t$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같다. ⇨ $f'(t)=g'(t)$

0406 답 3

$f(x)=x^2+3x-1,\ g(x)=x^3+2x$로 놓으면

$f'(x)=2x+3,\ g'(x)=3x^2+2$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^2+3t-1=t^3+2t$

$(t+1)(t-1)^2=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$

$f'(t)=g'(t)$에서 $2t+3=3t^2+2$

$(t-1)(3t+1)=0 \qquad \therefore t=-\frac{1}{3}$ 또는 $t=1$

따라서 $t=1$일 때, 즉 점 $(1,\ 3)$에서 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(1)=g'(1)=5$이므로 공통인 접선의 방정식은

$y-3=5(x-1) \qquad \therefore y=5x-2$

즉, $a=5,\ b=-2$이므로 $a+b=3$

0407 답 2

$f(x)=x^3+ax,\ g(x)=ax^2+b$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2ax$

두 곡선이 $x=1$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(1)=g(1)$에서 $a+1=a+b \qquad \therefore b=1$

$f'(1)=g'(1)$에서 $3+a=2a \qquad \therefore a=3$

$\therefore a-b=2$

0408 답 -2

$f(x)=x^4+ax,\ g(x)=bx^2+c$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+a,\ g'(x)=2bx$

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$f(-1)=0$에서 $1-a=0 \qquad \therefore a=1$ …… ㉠

$g(-1)=0$에서 $b+c=0$ …… ㉡

점 $(-1,\ 0)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 서로 같으므로

$f'(-1)=g'(-1)$에서 $a-4=-2b$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=1,\ b=\frac{3}{2},\ c=-\frac{3}{2}$

$\therefore a-b+c=-2$

0409 답 ②

$f(x)=x^3+ax,\ g(x)=x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^3+at=t^2-1$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2+a=2t$

$\therefore a=-3t^2+2t$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^3+(-3t^2+2t)t=t^2-1$, $2t^3-t^2-1=0$
$(t-1)(2t^2+t+1)=0$ $\quad\therefore t=1$ ($\because 2t^2+t+1>0$)
$t=1$을 ㉡에 대입하면 $a=-1$

유형 13 접선과 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이 (본책 69쪽)

(i) 접선의 방정식을 구한다.
(ii) 접선의 x절편과 y절편을 찾아 도형의 넓이를 구한다.

0410 답 ③
$f(x)=x^3+2x^2-1$이라 하면 $f'(x)=3x^2+4x$
점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=7$이므로 접선의 방정식은 $y-2=7(x-1)$ $\quad\therefore y=7x-5$
이 접선의 x절편이 $\frac{5}{7}$, y절편이 -5이므로 구하는 삼각형의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\cdot5=\frac{25}{14}$

0411 답 32
$f(x)=-(x-1)(x+4)=-x^2-3x+4$라 하면
$f'(x)=-2x-3$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2-3t+4)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로
$f'(t)=-2t-3=1$ $\quad\therefore t=-2$
따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ 6)$이므로 접선의 방정식은
$y-6=x+2$ $\quad\therefore y=x+8$
이 접선의 x절편이 -8, y절편이 8이므로 구하는 도형의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot8\cdot8=32$

0412 답 $\frac{1}{2}$
$f(x)=x^3+ax$, $g(x)=bx^2+c$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2bx$
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$를 지나므로
$f(1)=2$에서 $a+1=2$ $\quad\therefore a=1$ ...... ㉠
$g(1)=2$에서 $b+c=2$ ...... ㉡
점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 서로 같으므로
$f'(1)=g'(1)$에서 $a+3=2b$ ...... ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $a=1$, $b=2$, $c=0$
점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=g'(1)=4$이므로 접선의 방정식은 $y-2=4(x-1)$ $\quad\therefore y=4x-2$
이 접선의 x절편이 $\frac{1}{2}$, y절편이 -2이므로 구하는 삼각형의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot2=\frac{1}{2}$

0413 답 2
$f(x)=x^4-x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=4x^3-2x$
접점의 좌표를 $(t,\ t^4-t^2+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3-2t$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^4-t^2+2)=(4t^3-2t)(x-t)$
$\therefore y=(4t^3-2t)x-3t^4+t^2+2$
이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로
$0=-3t^4+t^2+2$, $(t-1)(t+1)(3t^2+2)=0$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$
따라서 접점의 좌표는 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$이므로
$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$

0414 답 16
$f(x)=x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=2x$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$로 놓으면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^2+1)=2t(x-t)$
$\therefore y=2tx-t^2+1$
이 직선이 점 $\mathrm{P}(1,\ -2)$를 지나므로
$-2=-t^2+2t+1$, $t^2-2t-3=0$
$(t+1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=3$
따라서 두 접점의 좌표는 $\mathrm{Q}(-1,\ 2)$, $\mathrm{R}(3,\ 10)$이고, 접선의 방정식은
$y=-2x$, $y=6x-8$
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-1-1)^2+(2+2)^2}=2\sqrt{5}$이고,
점 $\mathrm{R}(3,\ 10)$과 직선 PQ, 즉 $2x+y=0$ 사이의 거리는
$\frac{|6+10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{16\sqrt{5}}{5}$
$\therefore \triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{16\sqrt{5}}{5}=16$

0415 답 $8\sqrt{2}$
TIP 접선의 방정식을 구하여 x절편과 직선 $y=8$과의 교점을 찾아 사다리꼴의 넓이를 구한다.
$f(x)=2x^2$으로 놓으면 $f'(x)=4x$
접점의 좌표를 $(t,\ 2t^2)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=4t$이므로 접선의 방정식은
$y-2t^2=4t(x-t)$ $\quad\therefore y=4tx-2t^2$
이 직선이 x축과 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{t}{2},\ 0\right)$, 직선 $y=8$과 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{t^2+4}{2t},\ 8\right)$이므로 사다리꼴의 넓이 S는
$S=\frac{1}{2}\cdot8\cdot\left(\frac{t}{2}+\frac{t^2+4}{2t}\right)=4\left(t+\frac{2}{t}\right)$
이때, $t>0$, $\frac{2}{t}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$S=4\left(t+\frac{2}{t}\right)\geq4\cdot2\sqrt{t\cdot\frac{2}{t}}=4\cdot2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$
(단, 등호는 $t=\sqrt{2}$일 때 성립)
따라서 사다리꼴의 넓이의 최솟값은 $8\sqrt{2}$이다.

유형 14 곡선과 원의 접선 (본책 70쪽)

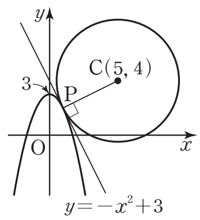
곡선 $y=f(x)$와 원 C가 접할 때,
(1) (원 C의 반지름의 길이)=(원 C의 중심과 접점 사이의 거리)
(2) 원 C의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선과 수직이다.

0416 답 20π

$f(x)=-x^2+3$으로 놓으면

$f'(x)=-2x$

오른쪽 그림과 같이 접점을 $\mathrm{P}(t,\ -t^2+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$이고, 직선 CP의 기울기는



$\dfrac{-t^2-1}{t-5}$

이때, 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로

$-2t\cdot\dfrac{-t^2-1}{t-5}=-1$

$2t^3+3t-5=0,\ (t-1)(2t^2+2t+5)=0$

$\therefore\ t=1\ (\because\ 2t^2+2t+5>0)$

즉, 구하는 접점의 좌표는 $\mathrm{P}(1,\ 2)$이므로 원의 반지름의 길이는

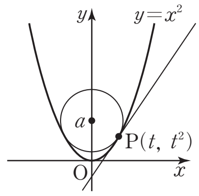
$\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 넓이는 $(2\sqrt{5})^2\pi=20\pi$이다.

0417 답 ④

$f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$

오른쪽 그림과 같이 접점을 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이고, 점 $(0,\ a)$와 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$을 지나는 직선의 기울기는



$\dfrac{t^2-a}{t}$

이때, 원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선과 서로 수직이므로

$2t\cdot\dfrac{t^2-a}{t}=-1,\ 2(t^2-a)=-1$

$\therefore\ t^2=a-\dfrac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

또, 원의 반지름의 길이, 즉 점 $(0,\ a)$와 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ 사이의 거리가 1이므로

$\sqrt{t^2+(t^2-a)^2}=1,\ t^2+(t^2-a)^2=1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$a-\dfrac{1}{2}+\left(a-\dfrac{1}{2}-a\right)^2=1\qquad\therefore\ a=\dfrac{5}{4}$

0418 답 ④

$f(x)=x^4$으로 놓으면 $f'(x)=4x^3$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=4$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 점 $(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{4}$인 직선의 방정식은

$y-1=-\dfrac{1}{4}(x-1)\qquad\therefore\ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉠

또, 중심이 x축 위에 있는 원의 방정식을 $(x-a)^2+y^2=r^2$이라 하면 직선 ㉠이 원의 중심 $(a,\ 0)$을 지나야 하므로

$0=-\dfrac{1}{4}a+\dfrac{5}{4}\qquad\therefore\ a=5$

이때, 반지름의 길이는 두 점 $(1,\ 1)$, $(5,\ 0)$ 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(5-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{17}$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는 $2\sqrt{17}\pi$이다.

유형 15 롤의 정리 본책 70쪽

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

⇨ $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

0419 답 -6

함수 $f(x)=2x^2+ax$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 롤의 정리가 성립하려면 $f(0)=f(4)$이어야 한다.

$f(0)=0$이므로 $f(4)=32+4a=0\qquad\therefore\ a=-8$

즉, $f(x)=2x^2-8x$이므로 $f'(x)=4x-8$

이때, 상수 b에 대하여 $f'(b)=0$이므로

$4b-8=0\qquad\therefore\ b=2$

$\therefore\ a+b=-6$

0420 답 ㄷ, ㄹ

ㄱ. 함수 $f(x)=x^2(x-2)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하다. 이때 $f(0)=f(2)=0$이므로 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄴ. 함수 $f(x)=3$은 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하다. 이때 $f(0)=f(2)=3$이므로 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)=2|x-1|$은 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이지만 $x=1$에서 미분가능하지 않으므로 롤의 정리가 성립하지 않는다.

ㄹ. 함수 $f(x)=2x+|x+1|$에서 $f(0)=1,\ f(2)=7$이므로 $f(0)\neq f(2)$

따라서 롤의 정리가 성립하지 않는다.

따라서 롤의 정리가 성립하지 않는 함수는 ㄷ, ㄹ이다.

0421 답 16

함수 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+4x^2-10x+1$은 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(-a,\ a)$에서 미분가능하다.

이때, 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$이어야 하므로

$-\dfrac{2}{3}a^3+4a^2+10a+1=\dfrac{2}{3}a^3+4a^2-10a+1$

$\dfrac{4}{3}a^3-20a=0,\ \dfrac{4}{3}a(a^2-15)=0$

$\therefore\ a=\sqrt{15}\ (\because\ a>0)$

한편, $f'(x)=2x^2+8x-10$이고, $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-\sqrt{15},\ \sqrt{15})$에 적어도 하나 존재하므로

$f'(c)=2c^2+8c-10=0$

$2(c-1)(c+5)=0\qquad\therefore\ c=1\ (\because\ -\sqrt{15}<c<\sqrt{15})$

$\therefore\ a^2+c=16$

유형 16 **평균값 정리** 본책 71쪽

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면
⇨ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

0422 답 $\dfrac{5}{2}$

함수 $g(x)=f'(x)=x^2-4x+6$은 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$에서 미분가능하므로

$\dfrac{g(4)-g(1)}{4-1}=g'(c)$

인 c가 구간 $(1, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$g'(x)=2x-4$이므로 $\dfrac{6-3}{4-1}=2c-4$

$\therefore c=\dfrac{5}{2}$

0423 답 3

함수 $f(x)=x^2+2x-2$에 대하여 닫힌구간 $[-2, a]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값이 $\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{f(a)-f(-2)}{a-(-2)}=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$

인 상수 $\dfrac{1}{2}$이 구간 $(-2, a)$에 존재한다.

$f'(x)=2x+2$이므로 $\dfrac{(a^2+2a-2)-(-2)}{a+2}=3$

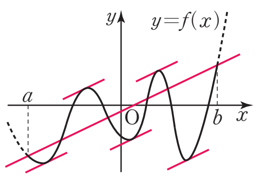
$a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>-2$)

0424 답 5

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이고, $f'(c)$는 곡선 $y=f(x)$의 $x=c$에서의 접선의 기울기이다.

이때, 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 5개 그을 수 있으므로 주어진 조건을 만족시키는 상수 c의 개수는 5이다.



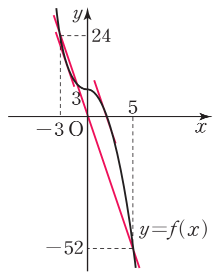
0425 답 2

닫힌구간 $[-3, 5]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-3, 24)$, $(5, -52)$를 지나는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

함수 $f(x)=\begin{cases} -2x^2-x+3 & (x\geq 0) \\ 2x^2-x+3 & (x<0) \end{cases}$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 두 점 $(-3, 24)$, $(5, -52)$를 지나는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 상수 c의 개수는 2이다.



0426 답 $-\dfrac{5}{6}$

함수 $f(x)$가 미분가능하므로 함수 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x+1}$도 닫힌구간 $[0, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 5)$에서 미분가능하다.

즉,

$\dfrac{g(5)-g(0)}{5-0}=g'(c)$

인 c가 열린구간 $(0, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

$\therefore g'(c)=\dfrac{-\dfrac{1}{6}-4}{5-0}=-\dfrac{5}{6}$

0427 답 -25

함수 $f(x)=x^2-3x$는 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$에서 미분가능하므로

$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$

인 c가 구간 $(1, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-3$이므로 $\dfrac{4-(-2)}{4-1}=2c-3$

$\therefore c=\dfrac{5}{2}$

따라서 점 $\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{5}{4}\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\dfrac{5}{2}\right)=2$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(-\dfrac{5}{4}\right)=2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$ $\quad\therefore y=2x-\dfrac{25}{4}$

즉, $m=2$, $n=-\dfrac{25}{4}$이므로 $2mn=-25$

유형 17 **평균값 정리의 변형** 본책 71쪽

(ⅰ) 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구한다.
(ⅱ) 주어진 식에 $f(x)$와 $f'(x)$를 대입하여 θ에 대한 식으로 정리한 후 극한값을 구한다.

0428 답 $\dfrac{1}{2}$

$f(x)=3x^2$에서 $f'(x)=6x$

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$에서

$3(a+h)^2=3a^2+h\{6(a+\theta h)\}$

$3h^2=6\theta h^2$

$\therefore \theta=\dfrac{1}{2}$

0429 답 12

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-2,\ x+2]$에서 연속이고 열린구간 $(x-2,\ x+2)$에서 미분가능하므로

$$\frac{f(x+2)-f(x-2)}{(x+2)-(x-2)}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(x-2,\ x+2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x+2)-f(x-2)=4f'(c)$에서 $x \longrightarrow \infty$일 때 $c \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x+2)-f(x-2)\}=\lim_{c\to\infty}4f'(c)=4\cdot 3=12$$

STEP 3 | 심화 Master

0430 답 $\frac{1}{6}$

TIP 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 역함수 관계이면 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선과 $y=g(x)$ 위의 점 $(b,\ a)$에서의 접선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$f(x)=x^3+3x+2$에서 $f'(x)=3x^2+3$

$y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 6)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=6$이므로 접선의 방정식은

$y-6=6(x-1)$ $\quad \therefore y=6x$

이 접선과 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 직선의 방정식은

$x=6y$, 즉 $y=\frac{1}{6}x$이므로

$a=\frac{1}{6}$, $b=0$ $\quad \therefore a+b=\frac{1}{6}$

0431 답 $\frac{5}{6}$

TIP 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다.

$f(x)=-x^3+4x^2-3x$에서 $f'(x)=-3x^2+8x-3$

점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-3t^2+8t-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3+4t^2-3t)=(-3t^2+8t-3)(x-t)$

$\therefore y=(-3t^2+8t-3)x+2t^3-4t^2$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$\therefore \mathrm{A}\left(\frac{2t^3-4t^2}{3t^2-8t+3},\ 0\right)$

또, 점 $\mathrm{B}(3,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=-6$이므로 접선의 방정식은 $y=-6(x-3)$

$\therefore y=-6x+18$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

두 접선 ㉠, ㉡이 만나는 점 C의 x좌표는

$(-3t^2+8t-3)x+2t^3-4t^2=-6x+18$

$(3t^2-8t-3)x=2t^3-4t^2-18$

$(3t+1)(t-3)x=2(t-3)(t^2+t+3)$

$\therefore x=\frac{2(t^2+t+3)}{3t+1}$ $(\because t\neq 3)$

$\therefore \mathrm{D}\left(\frac{2(t^2+t+3)}{3t+1},\ 0\right)$

이때, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BD}}=4:1$에서 $4\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$$4\left\{3-\frac{2(t^2+t+3)}{3t+1}\right\}=3-\frac{2t^3-4t^2}{3t^2-8t+3}$$

$$\frac{8(t^2+t+3)}{3t+1}=\frac{2t^3-4t^2}{3t^2-8t+3}+9$$

$$\frac{8(t^2+t+3)}{3t+1}=\frac{2t^3+23t^2-72t+27}{3t^2-8t+3}$$

$(3t+1)(2t^3+23t^2-72t+27)-8(t^2+t+3)(3t^2-8t+3)=0$

$6t^4-37t^3+75t^2-59t+15=0$

$(t-1)(t-3)(2t-1)(3t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=\frac{5}{3}$ $(\because t\neq 3)$

따라서 모든 실수 t의 값의 곱은 $1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{6}$

0432 답 97

TIP $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 극한값이 존재할 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이면 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

조건 (나)에서 $x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로

$f(2)-g(2)=0$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$=f'(2)-g'(2)=2$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

조건 (가)에 주어진 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=8f(2)-7$ $\quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $f(2)=g(2)=1$

또, 조건 (가)에 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

이 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)=12+8f'(2)$ $\quad \cdots\cdots$ ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $7g'(2)=-28$

$\therefore g'(2)=-4$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 방정식은

$y-g(2)=g'(2)(x-2)$

$y-1=-4(x-2)$ $\quad \therefore y=-4x+9$

즉, $a=-4$, $b=9$이므로 $a^2+b^2=97$

0433 답 ㄱ

TIP 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 k이면 $f(a)=b$, $f'(a)=k$이다.

$f(x)=4x-5$, 즉 $f(x)-4x+5=0$에서

$g(x)=f(x)-4x+5$로 놓으면 $g'(x)=f'(x)-4$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

또, $g(x)=0$의 두 근이 a, b이고 $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$g(x)=(x-a)(x-b)$로 놓을 수 있다.

ㄱ. 곡선 $y=f(x)-4x+5$, 즉 $y=g(x)$의 $x=a$에서의 접선의 기울기는 $g'(a)$이다. 이때 $f'(a)=-3$이므로 ㉠에서
$g'(a)=f'(a)-4=-3-4=-7$

ㄴ. $g(x)=(x-a)(x-b)$에서
$g'(x)=(x-b)+(x-a)=2x-a-b$
이 식과 ㉠을 연립하면
$f'(x)-4=2x-a-b$ …… ㉡
양변에 $x=a$를 대입하면
$f'(a)-4=2a-a-b$, $-7=a-b$
$\therefore b-a=7$
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 점 B에서의 접선의 기울기는 $f'(b)$이므로 ㉡에 $x=b$를 대입하면
$f'(b)-4=2b-a-b$
$\therefore f'(b)=b-a+4=7+4=11$
따라서 점 B에서의 접선의 기울기는 11이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

0434 답 20

TIP 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다.

$g(x)=x^3+2$로 놓으면 $g'(x)=3x^2$
점 $P(t, t^3+2)$에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은 $y-(t^3+2)=3t^2(x-t)$
$\therefore 3t^2x-y-2t^3+2=0$
이 접선과 원점 사이의 거리 $f(t)$는

$$f(t)=\frac{|-2t^3+2|}{\sqrt{(3t^2)^2+(-1)^2}}=\frac{|-2t^3+2|}{\sqrt{9t^4+1}}$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^3-2}{t\sqrt{9t^4+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2-\frac{2}{t^3}}{\sqrt{9+\frac{1}{t^4}}}=\frac{2}{3}$$

따라서 $a=\frac{2}{3}$이므로 $30a=20$

0435 답 1

TIP 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다.

$f(x)=x^3+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 (t, t^3+1)이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^3+1)=3t^2(x-t)$
$\therefore y=3t^2x-2t^3+1$
이 접선이 직선 $y=mx+3$과 일치하므로
$3t^2=m$, $-2t^3+1=3$
두 식을 연립하여 풀면 $t=-1$, $m=3$
따라서 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$이므로
$\triangle ABP=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$

0436 답 3

TIP 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 1인 두 직선의 접점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $f'(x)=1$의 두 근이 α, β임을 이용한다.

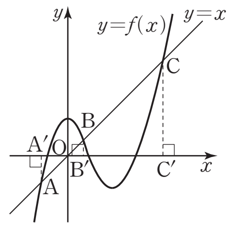
$f(x)=x^3+kx^2$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2kx$
접점의 좌표를 (t, t^3+kt^2)이라 하면 접선의 기울기는
$f'(t)=3t^2+2kt=1$
$\therefore 3t^2+2kt-1=0$
이 식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\frac{2}{3}k$, $\alpha\beta=-\frac{1}{3}$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta=\frac{4}{9}k^2+1=5$$

따라서 $\frac{4}{9}k^2=4$이므로 $k^2=9$
$\therefore k=3$ $(\because k>0)$

0437 답 7

TIP 세 점 A, B, C의 x좌표를 α, $\alpha+k$, $\alpha+3k$ $(k>0)$로 놓으면 방정식 $f(x)=x$의 세 근이 α, $\alpha+k$, $\alpha+3k$임을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 A′, B′, C′이라 하면
$\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$에서
$\overline{A'B'}:\overline{B'C'}=1:2$
$A'(\alpha, 0)$이라 하면
$B'(\alpha+k, 0)$, $C'(\alpha+3k, 0)$ $(k>0)$
이때, 방정식 $f(x)=x$, 즉 $f(x)-x=0$의 세 근이 α, $\alpha+k$, $\alpha+3k$이므로
$f(x)-x=(x-\alpha)(x-\alpha-k)(x-\alpha-3k)$
$\therefore f(x)=(x-\alpha)(x-\alpha-k)(x-\alpha-3k)+x$
$\therefore f'(x)=(x-\alpha-k)(x-\alpha-3k)+(x-\alpha)(x-\alpha-3k)+(x-\alpha)(x-\alpha-k)+1$
점 A에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(\alpha)=4$에서
$3k^2+1=4$, $k^2=1$
$\therefore k=1$ $(\because k>0)$
따라서 점 C에서의 접선의 기울기는
$f'(\alpha+3k)=6k^2+1=7$

0438 답 ④

TIP 직선 AC와 같은 기울기를 갖는 접선의 접점이 P일 때 선분 AC에서 점 P까지의 거리가 최대임을 이용한다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{0-(-6)}{2-(-1)}=2$, 직선 BC의 기울기는 $\frac{4-0}{4-2}=2$이므로 세 점 A, B, C는 일직선 위에 있다.
□AQCP=△ACP+△ACQ이므로 두 삼각형 ACP, ACQ의 밑변을 선분 AC라 하면 높이는 각각 점 P, Q와 선분 AC 사이의 거리이므로 접선의 기울기가 2인 접점이 P, Q일 때 사각형 AQCP의 넓이가 최대이다.
$f(x)=x^3-5x^2+4x+4$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-10x+4$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t^2+4t+4)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-10t+4=2$

$\therefore 3t^2-10t+2=0$

이 식의 두 근이 두 점 P, Q의 x좌표이므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 x좌표의 곱은 $\frac{2}{3}$이다.

0439 답 3

TIP 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다.

$f(x)=ax^2$으로 놓으면 $f'(x)=2ax$

접점의 좌표를 $\mathrm{P}(t,\ at^2)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2at$이므로 접선의 방정식은

$y-at^2=2at(x-t)$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$을 지나므로

$-at^2=2at(3-t)$, $at^2-6at=0$

$at(t-6)=0 \qquad \therefore t=6\ (\because t\neq 0)$

즉, 접점이 $\mathrm{P}(6,\ 36a)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(6-3)^2+(36a-0)^2}=\sqrt{9+(36a)^2}$

$\therefore \lim\limits_{a\to 0}\overline{\mathrm{AP}}=\lim\limits_{a\to 0}\sqrt{9+(36a)^2}=\sqrt{9}=3$

0440 답 40

TIP 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다.

$f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2$이므로 접선의 방정식은

$y-a^3=3a^2(x-a) \qquad \therefore y=3a^2x-2a^3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, $g(x)=x^3+4$로 놓으면 $g'(x)=3x^2$

점 Q의 좌표를 $\mathrm{Q}(b,\ b^3+4)$라 하면 접선의 기울기는 $g'(b)=3b^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(b^3+4)=3b^2(x-b)$

$\therefore y=3b^2x-2b^3+4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

직선 ㉠, ㉡은 일치하므로

$3a^2=3b^2$, $-2a^3=-2b^3+4$

이때, $3a^2=3b^2$에서 $3(a+b)(a-b)=0$

$\therefore a=-b\ (\because a\neq b)$

$-2a^3=-2b^3+4$에서 $2b^3=-2b^3+4$

$b^3=1 \qquad \therefore b=1,\ a=-1$

따라서 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(1,\ 5)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(1+1)^2+(5+1)^2=40$

0441 답 9

TIP 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 점 $(2,\ 3)$에서 접하므로 $f(2)=g(2)$, $f'(2)=g'(2)$이다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$f(2)=g(2)=3$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{3}{2}$이므로

$f'(2)=g'(2)=\frac{3}{2}$

이때, $h(x)=f(x)g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이고 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(2,\ h(2))$에서의 접선의 기울기는 $h'(2)$이다.

$\therefore h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

$\qquad =\frac{3}{2}\cdot 3+3\cdot\frac{3}{2}=9$

0442 답 ⑤

TIP 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다.

$f(x)=x^2$에서 $f'(x)=2x$

점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 접선의 방정식은 $y-1=2(x-1)$

$\therefore y=2x-1$

곡선 $y=g(x)$의 접점 Q의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 접선의 기울기는 2이므로 $g'(x)=-2x+6$에서

$g'(a)=-2a+6=2 \qquad \therefore a=2$

이때, 점 $\mathrm{Q}(2,\ b)$는 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로

$b=4-1=3 \qquad \therefore \mathrm{Q}(2,\ 3)$

또, 점 $\mathrm{Q}(2,\ 3)$은 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$3=-(2-3)^2+k \qquad \therefore k=4$

두 점 R, S의 x좌표는 방정식 $g(x)=0$의 두 근이므로

$-(x-3)^2+4=0$, $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

$\therefore \triangle\mathrm{QRS}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$

0443 답 $-1\le k<3$

TIP 평균값의 정리를 이용한다.

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+4$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하므로

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$

인 c가 구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=x^2-2x$이므로 $f'(c)=c^2-2c=(c-1)^2-1$

$0<c<3$에서 $-1\le f'(c)<3$이므로

$-1\le k<3$

5 | 도함수의 활용 (2)

본책 76쪽~94쪽

STEP 1 | 기초 Build

0444 답 (가) > (나) 감소

0445 답 증가

$0<a<b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$f(a)-f(b)=2a^2-2b^2=2(a^2-b^2)$

$=2(a+b)(a-b)<0$

$\therefore f(a)<f(b)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

0446 답 감소

$a<b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$f(a)-f(b)=-a^3-(-b^3)=-(a^3-b^3)$

$=-(a-b)(a^2+ab+b^2)$

이때, $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$이므로

$f(a)-f(b)>0 \quad \therefore f(a)>f(b)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

0447 답 증가

$1<a<b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$f(a)-f(b)=(a^2+a)-(b^2+b)=a^2-b^2+a-b$

$=(a-b)(a+b+1)<0$

$\therefore f(a)<f(b)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(1, \infty)$에서 증가한다.

0448 답 풀이 참조

$f(x)=x^2-6x+3$에서

$f'(x)=2x-6$

$f'(x)=0$에서 $x=3$

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 3]$에서 감소하고, 구간 $[3, \infty)$에서 증가한다.

참고 $f'(x)=0$인 x의 값은 증가하는 구간과 감소하는 구간에 모두 포함될 수 있다.

0449 답 풀이 참조

$f(x)=-2x^2+4x+4$에서

$f'(x)=-4x+4$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1]$에서 증가하고, 구간 $[1, \infty)$에서 감소한다.

0450 답 풀이 참조

$f(x)=x^3-3x+5$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$과 구간 $[1, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1, 1]$에서 감소한다.

0451 답 풀이 참조

$f(x)=2x^3-12x+1$에서

$f'(x)=6x^2-12=6(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -\sqrt{2}]$와 구간 $[\sqrt{2}, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$에서 감소한다.

0452 답 풀이 참조

$f(x)=-x^3+3x^2-3x$에서

$f'(x)=-3x^2+6x-3$

$=-3(x^2-2x+1)$

$=-3(x-1)^2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘		↘

$f'(x)=0$에서 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

0453 답 풀이 참조

$f(x)=x^4-2x^2+3$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 0]$과 구간 $[1, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$과 구간 $[0, 1]$에서 감소한다.

0454 답 풀이 참조

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 2이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$과 구간 $[2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1, 2]$에서 감소한다.

0455 답 극댓값 : 5, 극솟값 : -3

함수 $f(x)$는 $x=-1$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이며 극댓값은

$f(-1)=-2+6+1=5$

또, $x=1$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이며 극솟값은

$f(1)=2-6+1=-3$

0456 답 (1) q, s, u (2) r, t, v

(1) $x=q$, $x=s$, $x=u$의 좌우에서 함수 $f(x)$가 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=q$, $x=s$, $x=u$에서 극대이다.

(2) $x=r$, $x=t$, $x=v$의 좌우에서 함수 $f(x)$가 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=r$, $x=t$, $x=v$에서 극소이다.

0457 답 4

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하고 $x=2$에서 극값 4를 가지므로 $f(2)=4$, $f'(2)=0$

$\therefore f(2)+f'(2)=4$

0458 답 극댓값 : 3, 극솟값 : -1

$f(x)=x^3-3x+1$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=3$, 극솟값은 $f(1)=-1$이다.

0459 답 극댓값 : 2, 극솟값 : -7

$f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x-\frac{1}{3}$에서

$f'(x)=2x^2-2x-4=2(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-7	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=2$, 극솟값은 $f(2)=-7$이다.

0460 답 극댓값 : 5, 극솟값 : 2

$f(x)=3x^4-6x^2+5$에서

$f'(x)=12x^3-12x=12x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗	5	↘	2	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=5$, 극솟값은 $f(-1)=f(1)=2$이다.

0461 답 극댓값 : 0, 극솟값 : -1

$f(x)=-x^4+2x^2-1$에서

$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↘	-1	↗	0	↘

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=f(1)=0$, 극솟값은 $f(0)=-1$이다.

0462 답 풀이 참조

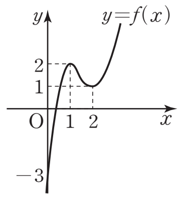
$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0463 답 풀이 참조

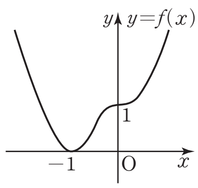
$f(x)=3x^4+4x^3+1$에서

$f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0464 답 풀이 참조

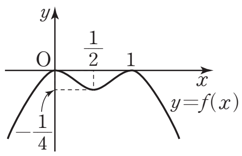
$f(x)=-4x^2(x-1)^2$에서

$f'(x)=-8x(x-1)^2-8x^2(x-1)=-8x(x-1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0465 답 최댓값 : 31, 최솟값 : 3

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-1$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	3	↗	31

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 31, $x=2$일 때 최솟값 3을 갖는다.

0466 답 최댓값 : 7, 최솟값 : -13

$f(x)=-x^3+3x^2+3$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	7	↘	3	↗	7	↘	-13

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=2$일 때 최댓값 7, $x=4$일 때 최솟값 -13을 갖는다.

0467 답 최댓값 : 5, 최솟값 : 1

$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	5	↘	3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 5, $x=0$일 때 최솟값 1을 갖는다.

0468 답 최댓값 : 21, 최솟값 : 4

$f(x)=3x^4-4x^3+5$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	12	↘	5	↘	4	↗	21

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 21, $x=1$일 때 최솟값 4를 갖는다.

0469 답 최댓값 : 1, 최솟값 : -6

$f(x)=-x^4+4x^3+2x^2-12x+1$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2+4x-12=-4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	-6	↗	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=2$일 때 최댓값 1, $x=1$일 때 최솟값 -6을 갖는다.

0470 답 최댓값 : 9, 최솟값 : $-\frac{7}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}x^4+2x^3-x^2-6x+1$에서

$f'(x)=2x^3+6x^2-2x-6=2(x+3)(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ ($\because -2\le x\le 2$)

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{9}{2}$	↘	$-\frac{7}{2}$	↗	9

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 9, $x=1$일 때 최솟값 $-\frac{7}{2}$을 갖는다.

0471 답 (1) $0<x<4$ (2) $V(x)=4x^3-32x^2+64x$ (3) $\frac{4}{3}$

(1) 잘라 내고 남은 부분을 접어서 만든 상자의 밑면의 한 변의 길이는 $(8-2x)$ cm이므로 $8-2x>0$

$\therefore x<4$

그런데 $x>0$이므로 $0<x<4$

(2) $V(x)=x(8-2x)^2=4x^3-32x^2+64x$

(3) $V'(x)=12x^2-64x+64=4(3x-4)(x-4)$

$V'(x)=0$에서 $x=\frac{4}{3}$ ($\because 0<x<4$)

따라서 $V(x)$는 $x=\frac{4}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 상자의 부피가 최대일 때, x의 값은 $\frac{4}{3}$이다.

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 함수의 증가·감소 본책 80쪽

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x)>0$ ⇨ $f(x)$는 그 구간에서 증가

(2) $f'(x)<0$ ⇨ $f(x)$는 그 구간에서 감소

0472 답 ③

$f(x)=x^3-3x^2-9x$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$
삼차함수 $f(x)$는 $f'(x)\le 0$인 구간에서 감소하므로
$3(x-3)(x+1)\le 0$ $\quad\therefore -1\le x\le 3$
따라서 $\alpha=-1$, $\beta=3$이므로 $\alpha+\beta=2$

0473 답 -9
$f(x)=(3x^2-1)(4-3x)$에서
$f'(x)=6x(4-3x)-3(3x^2-1)=-27x^2+24x+3$
삼차함수 $f(x)$는 $f'(x)\ge 0$인 구간에서 증가하므로
$-27x^2+24x+3\ge 0$, $9x^2-8x-1\le 0$
$(9x+1)(x-1)\le 0$ $\quad\therefore -\frac{1}{9}\le x\le 1$
따라서 $\alpha=-\frac{1}{9}$, $\beta=1$이므로 $\frac{\beta}{\alpha}=-9$

0474 답 -12
$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+ax^2+bx+3$에서 $f'(x)=-2x^2+2ax+b$
주어진 조건에 의하여 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -3과 2이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-3+2=a$, $-3\cdot 2=-\frac{b}{2}$
$\therefore a=-1$, $b=12$
$\therefore ab=-12$

0475 답 148
$f(x)=-2x^3+3x^2+ax+1$에서 $f'(x)=-6x^2+6x+a$
함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위가 $-1\le x\le b$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -1, b이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-1+b=1$, $-1\cdot b=\frac{a}{-6}$
$\therefore a=12$, $b=2$
$\therefore a^2+b^2=144+4=148$

유형 02 실수 전체의 집합에서 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

본책 80쪽

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서
(1) 증가하면 ⇨ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$
(2) 감소하면 ⇨ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$

0476 답 ③
$f(x)=x^3+kx^2+kx+16$에서 $f'(x)=3x^2+2kx+k$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=k^2-3k\le 0$, $k(k-3)\le 0$
$\therefore 0\le k\le 3$

0477 답 $-1\le k\le 2$
$f(x)=-x^3+(k+1)x^2-(k+1)x$에서
$f'(x)=-3x^2+2(k+1)x-(k+1)$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(k+1)^2-3(k+1)\le 0$, $(k+1)(k-2)\le 0$
$\therefore -1\le k\le 2$

0478 답 0
함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다. 그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$는 감소해야 한다.
$f(x)=-x^3-kx^2-kx+1$에서 $f'(x)=-3x^2-2kx-k$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=k^2-3k\le 0$, $k(k-3)\le 0$
$\therefore 0\le k\le 3$
따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 0이다.

0479 답 5
함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다. 그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 증가해야 한다.
$f(x)=x^3-kx^2+2x+5$에서 $f'(x)=3x^2-2kx+2$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=k^2-6\le 0$, $(k+\sqrt{6})(k-\sqrt{6})\le 0$
$\therefore -\sqrt{6}\le k\le\sqrt{6}$
따라서 정수 k는 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5개이다.

0480 답 -3
$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.
$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2-(k-6)x+3$에서
$f'(x)=x^2-2kx-k+6$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=k^2+k-6\le 0$, $(k+3)(k-2)\le 0$
$\therefore -3\le k\le 2$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은
$-3+(-2)+(-1)+0+1+2=-3$

0481 답 $k\le -3$

$x_1\ne x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\ne f(x_2)$가 성립하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다.
$f(x)=kx^3-3x^2-x$에서 $f'(x)=3kx^2-6x-1$
(i) 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로
$k>0$ …… ㉠
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=9+3k\le 0$ $\quad\therefore k\le -3$ …… ㉡
이때, ㉠, ㉡을 만족시키는 실수 k는 없다.
(ii) 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로
$k<0$ …… ㉢
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=9+3k\le 0$ $\quad\therefore k\le -3$ …… ㉣
㉢, ㉣에서 $k\le -3$
(iii) $k=0$이면 $f(x)=-3x^2-x$에서 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.
(i)~(iii)에서 구하는 범위는 $k\le -3$

0482 답 ①

TIP $x\ge a$, $x<a$일 때로 나누어서 $f(x)$를 나타내고, 각 범위에서의 $f'(x)$를 구한다.

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+4a+8 & (x\ge a)\\ -\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x-4a+8 & (x<a)\end{cases}$$ 에서

$$f'(x)=\begin{cases}-x^2+3x-4 & (x>a) & \cdots\cdots ㉠\\ -x^2+3x+4 & (x<a) & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

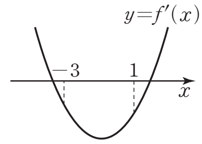
$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 $f'(x)\le 0$이어야 한다.
㉠에서 $-x^2+3x-4=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}<0$이므로 a의 값의 범위에 관계없이 $f(x)$는 감소한다.
㉡에서 $-x^2+3x+4\le 0$, $x^2-3x-4\ge 0$
$(x-4)(x+1)\ge 0$ $\quad\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 4$
따라서 a의 값의 범위는 $a\le -1$

유형 03 주어진 구간에서 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건 본책 81쪽

삼차함수 $f(x)$가 주어진 구간에서 증가 또는 감소하기 위한 조건은 $y=f'(x)$의 그래프를 그려서 찾는다. 주어진 구간에서 $f(x)$가
(1) 증가하려면 ⇨ $f'(x)\ge 0$
(2) 감소하려면 ⇨ $f'(x)\le 0$

0483 답 $2\le k\le 6$

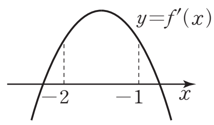
$f(x)=x^3+kx^2-15x-4$에서 $f'(x)=3x^2+2kx-15$
함수 $f(x)$가 $-3<x<1$에서 감소하려면 $-3<x<1$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.
오른쪽 그림에서



$f'(-3)=27-6k-15\le 0$
$6k\ge 12$ $\quad\therefore k\ge 2$
$f'(1)=3+2k-15\le 0$
$2k\le 12$ $\quad\therefore k\le 6$
따라서 k의 값의 범위는 $2\le k\le 6$

0484 답 ④

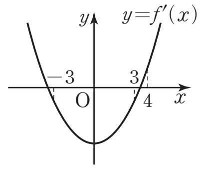
$f(x)=-x^3-\frac{3}{2}x^2+kx-3$에서 $f'(x)=-3x^2-3x+k$
함수 $f(x)$가 구간 $(-2, -1)$에서 증가하려면 $-2<x<-1$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.
오른쪽 그림에서



$f'(-2)=-12+6+k\ge 0$
$\therefore k\ge 6$
$f'(-1)=-3+3+k\ge 0$
$\therefore k\ge 0$
따라서 k의 값의 범위는 $k\ge 6$이므로 $a=6$

0485 답 ⑤

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx+2$에서 $f'(x)=x^2-k$
함수 $f(x)$가 구간 $(-3, 3)$에서 감소하고, 구간 $(4, \infty)$에서 증가하려면 $-3<x<3$에서 $f'(x)\le 0$, $x>4$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.
오른쪽 그림에서



$f'(-3)=f'(3)=9-k\le 0$
$\therefore k\ge 9$
$f'(4)=16-k\ge 0$
$\therefore k\le 16$
따라서 k의 값의 범위는 $9\le k\le 16$이므로 정수 k의 개수는 8이다.

유형 04 함수의 그래프와 증가·감소 본책 82쪽

$y=f'(x)$의 그래프에서
(1) x축의 위쪽 부분 ⇨ $f'(x)>0$ ⇨ 이 구간에서 $f(x)$가 증가한다.
(2) x축의 아래쪽 부분 ⇨ $f'(x)<0$ ⇨ 이 구간에서 $f(x)$가 감소한다.

0486 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. 구간 $(-\infty, a)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
ㄴ. 구간 (a, b)에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
ㄷ. 구간 (b, c)에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
ㄹ. 구간 (c, ∞)에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

0487 답 ④

집합 A는 함수 $f(x)$가 감소하는 구간을 의미하고 주어진 그래프에서 $x<b$ 또는 $d<x<f$일 때 $f(x)$는 감소한다.
따라서 옳은 것은 $\{x|d<x<f\}\subset A$이다.

0488 답 ③

$h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$
함수 $h(x)$가 증가하는 구간은 $h'(x)>0$, 즉 $f'(x)>g'(x)$인 구간이므로 $(b,\ d)$이다.

유형 05 함수의 극대·극소 (본책 82쪽)

미분가능한 함수 $f(x)$의 극값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $f'(x)$를 구한다.
(ii) $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.
(iii) (ii)에서 구한 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다. 이때, $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 극대, 음에서 양으로 바뀌면 극소이다.

0489 답 ①

$f(x)=x^3-3x^2-9x+2$에서
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	-25	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 7, $x=3$에서 극솟값 -25를 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은
$7+(-25)=-18$

0490 답 -34

$f(x)=x^4-4x^3-7$에서 $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-7	↘	-34	↗

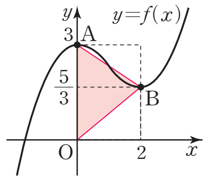
따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 -34를 갖고, $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=0$에서는 극값을 갖지 않는다.
즉, 구하는 극값은 -34이다.

0491 답 3

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+3$에서 $f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	$\frac{5}{3}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 3, $x=2$에서 극솟값 $\frac{5}{3}$를 가지므로



$\mathrm{A}(0,\ 3)$, $\mathrm{B}\left(2,\ \frac{5}{3}\right)$
$\therefore \triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2=3$

0492 답 $4\sqrt{2}$

$f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)-f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$
이때, $f'(0)=8$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=8$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)-f(-h)+x(-h)(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(-h)}{-h}-x^2-hx\right\}\\&=8-x^2\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2\sqrt{2}$에서 극대, $x=-2\sqrt{2}$에서 극소이므로 $\alpha=2\sqrt{2}$, $\beta=-2\sqrt{2}$
$\therefore \alpha-\beta=4\sqrt{2}$

유형 06 함수의 극대·극소를 이용한 미정계수의 결정 (본책 83쪽)

(1) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값 β를 가지면
⇨ $f(\alpha)=\beta$, $f'(\alpha)=0$
(2) 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지면
⇨ α, β는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이다.

0493 답 ④

$f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=-6x^2+2ax+b$
$f'(x)=0$의 두 근이 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$1+2=\frac{2a}{6}$, $1\cdot2=-\frac{b}{6}$ $\quad\therefore a=9$, $b=-12$
$\therefore f(x)=-2x^3+9x^2-12x+c$
한편, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로
$f(1)=-2+9-12+c=-2$ $\quad\therefore c=3$
$\therefore a+b-c=9-12-3=-6$

0494 답 -2

$f(x)=x^3+ax^2+b$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값 2를 가지므로
$f(-2)=2$, $f'(-2)=0$에서
$-8+4a+b=2$, $12-4a=0$ $\therefore a=3, b=-2$
즉, $f(x)=x^3+3x^2-2$이므로
$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 -2를 갖는다.

0495 답 -2
$f(x)=-x^3+ax^2+bx+1$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax+b$
$f'(x)=0$의 두 근이 $x=1$ 또는 $x=3$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$1+3=\frac{2a}{3}$, $1\cdot3=-\frac{b}{3}$ $\therefore a=6, b=-9$
$\therefore f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$
따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(1)=-3$, 극댓값은 $f(3)=1$이므로 구하는 합은
$-3+1=-2$

0496 답 -4
$f(x)=(x+3k)(x+2k)(x+k)$에서
$$\begin{aligned}f'(x)&=(x+2k)(x+k)+(x+3k)(x+k)+(x+3k)(x+2k)\\&=(x^2+3kx+2k^2)+(x^2+4kx+3k^2)+(x^2+5kx+6k^2)\\&=3x^2+12kx+11k^2\end{aligned}$$
$f'(x)=0$의 두 근이 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\frac{12k}{3}=-4k$
$\therefore \frac{\alpha+\beta}{k}=\frac{-4k}{k}=-4$

0497 답 97
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극값을 가지므로 $f'(0)=0$에서
$b=0$ …… ㉠
한편, $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=3$에서 $x\longrightarrow3$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.
즉, $\lim_{x\to3}f(x)=0$이므로 $f(3)=0$
$\therefore 27+9a+3b+c=0$ …… ㉡
또, $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$이므로 $f'(3)=3$
$\therefore 27+6a+b=3$ …… ㉢
㉡, ㉢에 ㉠을 대입하여 풀면 $a=-4$, $c=9$이므로
$a^2+b^2+c^2=16+0+81=97$

유형 07 **극대·극소의 활용** 본책 83쪽

함수의 도함수와 증감표를 이용하여 극댓값 또는 극솟값을 구하고, 주어진 조건과 이를 이용하여 문제를 해결한다.

0498 답 -16
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면
조건 (가)에서 $a=0$, $c=0$
따라서 $f(x)=x^3+bx$이므로 $f'(x)=3x^2+b$
조건 (나)에서 $f'(-2)=0$이므로
$12+b=0$ $\therefore b=-12$
즉, $f(x)=x^3-12x$이므로
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 -16을 갖는다.

Lecture
다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
(1) $f(-x)=f(x)$를 만족시키면 $f(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어져 있다.
(2) $f(-x)=-f(x)$를 만족시키면 $f(x)$는 홀수 차수의 항으로만 이루어져 있다.

0499 답 ④
$f(x)=x^3-3x+a$에서 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$a+2$	$\searrow$	$a-2$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $a+2$, $x=1$에서 극솟값 $a-2$를 가지므로
$A(-1,\ a+2)$, $B(1,\ a-2)$
이때, 선분 AB의 중점의 좌표가 $(b,\ 2)$이므로
$\frac{-1+1}{2}=b$, $\frac{a+2+a-2}{2}=2$ $\therefore a=2, b=0$
$\therefore 2a+b=4$

0500 답 -25
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 7을 가지므로
$f(-1)=7$, $f'(-1)=0$에서
$-1+a-b+c=7$ …… ㉠
$3-2a+b=0$ …… ㉡

또, $x=0$인 점과 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(0)=f'(2)$에서

$b=12+4a+b \qquad \therefore a=-3$

이 값을 ㉠, ㉡에 대입하여 풀면 $b=-9$, $c=2$

즉, $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$이므로

$f(3)=27-27-27+2=-25$

0501 답 25

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(1)=4$, $f'(1)=0$

이때, $g(x)=(2x+5)f(x)$에서

$g(1)=7f(1)=7\cdot4=28$

$g'(x)=2f(x)+(2x+5)f'(x)$에서

$g'(1)=2f(1)+7f'(1)=2\cdot4+7\cdot0=8$

따라서 $y=g(x)$의 그래프 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식은

$y-28=8(x-1) \qquad \therefore y=8x+20$

이 직선의 x절편이 $-\frac{5}{2}$, y절편이 20이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot20=25$

0502 답 81

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+\frac{8}{3}$에서

$f'(x)=x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	12	↘	-24	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 12를 가지므로

$a=-2$, $b=12$

한편, 점 $(1,\ f(1))$, 즉 점 $(1,\ -6)$에서의 접선 l의 기울기는

$f'(1)=-9$이므로 접선 l의 방정식은

$y+6=-9(x-1) \qquad \therefore 9x+y-3=0$

따라서 점 $(-2,\ 12)$에서 직선 $9x+y-3=0$까지의 거리 d는

$d=\frac{|-18+12-3|}{\sqrt{9^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{82}}$

$\therefore 82d^2=82\cdot\frac{81}{82}=81$

유형 08 극대·극소의 활용 ; 함수의 계수의 부호 결정 본책 84쪽

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에 대하여

(1) $x \longrightarrow \infty$일 때, $f(x) \longrightarrow \infty$이면 $a>0$

$x \longrightarrow \infty$일 때, $f(x) \longrightarrow -\infty$이면 $a<0$

(2) $y=f(x)$의 그래프가 y축과 양의 부분에서 만나면 $d>0$

$y=f(x)$의 그래프가 y축과 음의 부분에서 만나면 $d<0$

(3) 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지면 $f'(\alpha)=0$

0503 답 ③

함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서 $x \longrightarrow \infty$일 때,

$f(x) \longrightarrow \infty$이므로 $a>0$

또, 그래프가 y축과 양의 부분에서 만나므로 $d>0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고, $\alpha<0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta>0$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0$, $\alpha\beta=\frac{c}{3a}<0$

$a>0$이므로 $b<0$, $c<0$

따라서 그 값이 양수인 것은 ③이다.

0504 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$의 그래프가 y축과 음의 부분에서 만나므로 $c<0$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β라 하면 α, β는 서로 다른 음수이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3}<0$, $\alpha\beta=\frac{b}{3}>0 \qquad \therefore a>0,\ b>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $ab>0$, $bc<0$, $ac<0$

한편, $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로

$3x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3b>0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

유형 09 도함수의 그래프와 함수의 극값 본책 84쪽

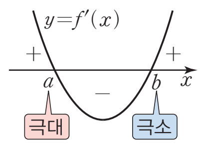
함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

(1) 양에서 음으로 바뀌면

⇨ $x=a$에서 $f(x)$가 극대

(2) 음에서 양으로 바뀌면

⇨ $x=b$에서 $f(x)$가 극소



0505 답 11

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 2이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=-6x^2+2ax+b$

$f'(x)=0$의 두 근이 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=\frac{2a}{6}$, $-1\cdot2=-\frac{b}{6} \qquad \therefore a=3,\ b=12$

즉, $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+c$이고 $f(-2)=-5$이므로

$16+12-24+c=-5$에서 $c=-9$

따라서 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$이므로 구하는 극댓값은

$f(2)=-16+12+24-9=11$

0506 답 ③

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌는 점의 x좌표는 0이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이다. 또, $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌는 점의 x좌표는 -2, 3이므로 함수 $f(x)$

는 $x=-2$, $x=3$에서 극소이다.
따라서 극대 또는 극소가 되는 점의 개수는 3이다.

0507 답 0
주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌는 점의 x좌표는 -2, 4이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=4$에서 극댓값을 갖는다.
$\therefore m=-2+4=2$
또, $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌는 점의 x좌표는 2이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
$\therefore n=2$
$\therefore m-n=0$

0508 답 68
함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -3, 1이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$
$f'(x)=0$의 두 근이 $x=-3$ 또는 $x=1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+1=-\dfrac{2a}{6}$, $-3\cdot1=\dfrac{b}{6}$ $\quad\therefore a=6, b=-18$

즉, $f(x)=2x^3+6x^2-18x+c$이고, $f(x)$의 극솟값이 4이므로
$f(1)=4$에서 $2+6-18+c=4$ $\quad\therefore c=14$
따라서 $f(x)=2x^3+6x^2-18x+14$이므로 구하는 극댓값은
$f(-3)=-54+54+54+14=68$

유형 10 $f'(x)$의 그래프를 이용한 $f(x)$의 해석

본책 85쪽

$y=f'(x)$의 그래프를 보고 함수 $f(x)$에 대한 증감표를 만든다.
(1) $f'(x)>0$인 구간에서 $f(x)$는 증가하고, $f'(x)<0$인 구간에서 $f(x)$는 감소한다.
(2) $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다.

0509 답 ㄱ, ㄷ
$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 a, 0, d이므로 $f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=d$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$	d	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

ㄱ. 구간 $(a, 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
ㄴ. 구간 (c, d)에서는 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가하고,
구간 (d, ∞)에서는 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
ㄷ. $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.
ㄹ. $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 점은 2개이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0510 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ
$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 2, 4이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $x<2$에서 $f'(x)\geq0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
ㄴ. $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.
ㄷ. $f'(4)=0$이므로 $f(x)$는 $x=4$에서 미분가능하다.
ㄹ. 구간 $(3, 4)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
즉, $f(x)<f(3)=0$
$\therefore f(x)f'(x)>0$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

0511 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ
$h(x)=g(x)-f(x)$에서 $h'(x)=g'(x)-f'(x)$
$h'(x)=0$, 즉 $g'(x)=f'(x)$에서 $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=6$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	6	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

ㄱ. 구간 $(0, 1)$에서는 $h'(x)>0$이므로 $h(x)$는 증가하고 구간 $(1, 3)$에서는 $h'(x)<0$이므로 $h(x)$는 감소한다.
ㄴ. $h(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. $h(x)$가 극대가 되는 점은 $x=1$, $x=6$의 2개이다.
ㄹ. $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고 $h(1)=g(1)-f(1)=0$이므로 $y=h(x)$의 그래프는 $x=1$에서 x축에 접한다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

유형 11 그래프의 개형 유추하기

본책 86쪽

$y=f'(x)$의 그래프를 보고 함수 $f(x)$에 대한 증감표를 만든 후 함수 $f(x)$가 증가 또는 감소하는 구간, 극값을 갖는 x의 값 등을 찾아 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 유추한다.

0512 답 ①
$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 1이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

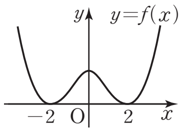
즉, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이고, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

0513 답 ㄱ, ㄴ

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 $-2,\ 0,\ 2$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$을 지나므로 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(0)>0$, $f(2)=0$이므로 $f(0)>f(2)$

ㄴ. $f(-1)>0$, $f(1)>0$이므로 $f(-1)f(1)>0$

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0514 답 ⑤

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 $a,\ b,\ c$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

즉, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소, $x=c$에서 극대이다. 또, $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=b$에서는 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

유형 12 삼차함수가 극값을 갖거나 갖지 않을 조건 본책 87쪽

삼차함수 $f(x)$에 대하여

(1) $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

⇨ 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⇨ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$

(2) $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.

⇨ 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

⇨ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D\le 0$

0515 답 13

$f(x)=x^3+kx^2+4kx+5$에서 $f'(x)=3x^2+2kx+4k$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-12k>0,\ k(k-12)>0$

$\therefore\ k<0$ 또는 $k>12$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 13이다.

참고 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.

$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

0516 답 $k<0$ 또는 $k>3$

$f(x)=x^3+kx^2+kx+3$에서 $f'(x)=3x^2+2kx+k$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-3k>0,\ k(k-3)>0$

$\therefore\ k<0$ 또는 $k>3$

0517 답 7

$f(x)=x^3+kx^2+3x-1$에서 $f'(x)=3x^2+2kx+3$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-9\le 0,\ (k+3)(k-3)\le 0$

$\therefore\ -3\le k\le 3$

따라서 정수 k는 $-3,\ -2,\ \cdots,\ 2,\ 3$의 7개이다.

0518 답 0

$f(x)=-x^3+kx^2-3kx+2$에서

$f'(x)=-3x^2+2kx-3k$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-9k\le 0,\ k(k-9)\le 0$

$\therefore\ 0\le k\le 9$

따라서 $\alpha=0,\ \beta=9$이므로

$\alpha\beta=0$

0519 답 ④

$f(x)=kx^3+6x^2+2kx+1$이 삼차함수이므로 $k\ne 0$이고,

$f'(x)=3kx^2+12x+2k$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=36-6k^2>0,\ 6(k+\sqrt{6})(k-\sqrt{6})<0$

$\therefore\ -\sqrt{6}<k<0$ 또는 $0<k<\sqrt{6}$ ($\because\ k\ne 0$)

따라서 정수 k는 $-2,\ -1,\ 1,\ 2$의 4개이다.

0520 답 5

$f(x)=\dfrac{1}{3}kx^3+2kx^2+(k+12)x+3$이 삼차함수이므로 $k\ne 0$이고, $f'(x)=kx^2+4kx+(k+12)$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4k^2-k(k+12)\le 0$, $3k(k-4)\le 0$

$\therefore 0<k\le 4$ ($\because k\ne 0$)

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 4, 최솟값은 1이므로 그 합은 $4+1=5$

유형 13 삼차함수가 주어진 구간에서 극값을 가질 조건 본책 87쪽

삼차함수 $f(x)$가 구간 (a, b)에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

⇨ (i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$

(ii) $f'(a)$, $f'(b)$의 부호를 조사한다.

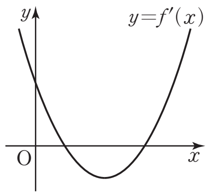
(iii) $y=f'(x)$의 그래프에서 축의 방정식이 $x=k$이면 $a<k<b$

0521 답 $k>2$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+(k+2)x$에서

$f'(x)=x^2-2kx+(k+2)$

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k+2)>0$, $(k+1)(k-2)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>2$

(ii) $f'(0)>0$에서 $k+2>0$ $\quad\therefore k>-2$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=k$이므로 $k>0$

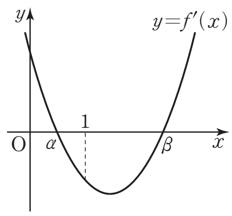
(i)~(iii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는 $k>2$

0522 답 6

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}kx^2+(k+3)x-1$에서

$f'(x)=x^2+kx+(k+3)$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 오른쪽 그림에서 $0<\alpha<1$, $\beta>1$이어야 한다.



$f'(0)>0$에서 $k+3>0$

$\therefore k>-3$ …… ㉠

$f'(1)<0$에서 $2k+4<0$

$\therefore k<-2$ …… ㉡

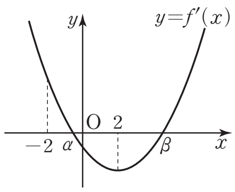
㉠, ㉡에서 $-3<k<-2$

따라서 $a=-3$, $b=-2$이므로 $ab=6$

0523 답 ②

$f(x)=x^3-kx^2-k^2x+5$에서 $f'(x)=3x^2-2kx-k^2$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 오른쪽 그림에서 $-2<\alpha<2$, $\beta>2$이어야 한다.



$f'(-2)=12+4k-k^2>0$에서

$(k+2)(k-6)<0$

$\therefore -2<k<6$ …… ㉠

$f'(2)=12-4k-k^2<0$에서

$(k+6)(k-2)>0$

$\therefore k<-6$ 또는 $k>2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2<k<6$

따라서 정수 k의 값이 될 수 있는 것은 ②이다.

유형 14 사차함수가 극값을 갖거나 갖지 않을 조건 본책 88쪽

사차함수 $f(x)$에 대하여

(1) $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

⇨ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(2) $f(x)$가 극댓값 또는 극솟값을 갖지 않는다.

⇨ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 '한 실근과 두 허근' 또는 '한 실근과 중근' 또는 '삼중근'을 갖는다.

0524 답 ③

$f(x)=2x^4-kx^3+x^2$에서

$f'(x)=8x^3-3kx^2+2x=x(8x^2-3kx+2)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 방정식 $8x^2-3kx+2=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $8x^2-3kx+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9k^2-64>0$, $(3k+8)(3k-8)>0$

$\therefore k<-\frac{8}{3}$ 또는 $k>\frac{8}{3}$

따라서 정수 k의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

참고 사차함수 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+d$ $(a\ne 0)$에 대하여 $a>0$이면 $f(x)$는 항상 극솟값을 갖고, $a<0$이면 $f(x)$는 항상 극댓값을 갖는다.

0525 답 $k<0$ 또는 $0<k<\frac{3}{2}$

$f(x)=-3x^4+4x^3-kx^2$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2-2kx=-2x(6x^2-6x+k)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 방정식 $6x^2-6x+k=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $6x^2-6x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-6k>0$ $\quad\therefore k<\frac{3}{2}$ …… ㉠

이때, $k=0$이면 방정식 $6x^2-6x+k=0$이 $x=0$을 근으로 가지므로 $k\ne 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k<0$ 또는 $0<k<\frac{3}{2}$

0526 답 -4

$f(x)=x^4+\frac{8}{3}kx^3+8x^2+3$에서

$f'(x)=4x^3+8kx^2+16x=4x(x^2+2kx+4)$

사차함수 $f(x)$가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2+2kx+4=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=k^2-4<0$, $(k+2)(k-2)<0$
$\therefore\ -2<k<2$
(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2+2kx+4=0$은 $x=0$을 근으로 갖지 않으므로 중근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=k^2-4=0$, $(k+2)(k-2)=0$
$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=2$
(iii) $f'(x)=0$이 삼중근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2+2kx+4=0$은 $x=0$을 근으로 갖지 않으므로 이를 만족시키는 k의 값은 없다.
(i)~(iii)에서 실수 k의 값의 범위는 $-2\le k\le 2$
따라서 정수 k의 최댓값과 최솟값의 곱은 $-2\cdot 2=-4$

0527 답 2

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}(k+1)x^2-kx$에서
$f'(x)=x^3-(k+1)x-k=(x+1)(x^2-x-k)$
사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.
(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2-x-k=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D=1+4k<0$ $\quad\therefore\ k<-\frac{1}{4}$
(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우
ⓘ 이차방정식 $x^2-x-k=0$이 $x=-1$을 근으로 가질 때,
$1+1-k=0$ $\quad\therefore\ k=2$
ⓘⓘ 이차방정식 $x^2-x-k=0$이 -1이 아닌 실수를 중근으로 가질 때, 판별식을 D라 하면
$D=1+4k=0$ $\quad\therefore\ k=-\frac{1}{4}$
(iii) $f'(x)=0$이 삼중근을 갖는 경우는 없다.
(i)~(iii)에서 실수 k의 값의 범위는 $k\le-\frac{1}{4}$ 또는 $k=2$
따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

유형 15 함수의 최대·최소 본책 89쪽

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같이 구한다.
(i) 열린구간 $(a,\ b)$에서 $f(x)$의 극값을 구한다.
(ii) 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 구한다.
(iii) (i), (ii)에서 구한 극값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

0528 답 −124

$f(x)=4x^3+9x^2-12x+3$에서
$f'(x)=12x^2+18x-12=6(x+2)(2x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	12	↗	31	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	4

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 31, $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{4}$을 가지므로 $M=31$, $m=-\frac{1}{4}$
$\therefore\ \frac{M}{m}=-124$

0529 답 25

$f(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{4}{3}x^3+9$에서
$f'(x)=\frac{4}{3}x^3-4x^2=\frac{4}{3}x^2(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	25	↘	9	↘	0	↗	9

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 25, $x=3$일 때 최솟값 0을 가지므로 $M=25$, $m=0$
$\therefore\ M+m=25$

0530 답 54

$x^2+2x=t$로 놓으면
$t=x^2+2x=(x+1)^2-1$
$-2\le x\le 1$에서 t의 값의 범위는 $-1\le t\le 3$
$g(t)=2t^3-12t^2+3$이라 하면
$g'(t)=6t^2-24t=6t(t-4)$
$g'(t)=0$에서 $t=0$ ($\because\ -1\le t\le 3$)

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-11	↗	3	↘	-51

따라서 함수 $g(t)$는 $t=0$일 때 최댓값 3, $t=3$일 때 최솟값 -51을 가지므로 $M=3$, $m=-51$
$\therefore\ M-m=54$

Lecture
함수 $f(x)$의 식에 공통부분이 있으면
(i) 공통부분을 t로 놓고 주어진 구간에서 t의 값의 범위를 구한다.
(ii) $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타낸다.
(iii) (i)에서 구한 t의 값의 범위에서 $g(t)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

0531 답 6

$g(x)=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$이므로

$g(x)=t$로 놓으면 $t\geq1$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=-t^3+3t^2+2$

$\therefore f'(t)=-3t^2+6t=-3t(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because t\geq1$)

따라서 함수 $f(t)$는 $t=2$일 때 최댓값 6을 갖는다.

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$	4	↗	6	↘

0532 답 ①

TIP $\log x=t$로 놓고 주어진 범위에서 t의 값의 범위를 구한 후, 주어진 함수를 t에 대한 함수로 나타낸다.

$\log x=t$로 놓으면 $1\leq x\leq100$에서 t의 값의 범위는 $0\leq t\leq2$

$g(t)=-t^3+6t^2-9t-1$이라 하면

$g'(t)=-3t^2+12t-9=-3(t-1)(t-3)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because 0\leq t\leq2$)

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	-1	↘	-5	↗	-3

따라서 함수 $g(t)$는 $t=0$일 때 최댓값 -1, $t=1$일 때 최솟값 -5를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은 -6이다.

유형 16 **함수의 최대·최소를 이용한 미정계수의 결정** 본책 89쪽

미정계수를 포함한 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값이 주어지면

⇨ $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값을 직접 구하여 주어진 값과 비교한다.

0533 답 ②

$f(x)=x^3-3x^2-9x-k$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because -2\leq x\leq2$)

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-2-k$	↗	$5-k$	↘	$-22-k$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $5-k$, $x=2$일 때 최솟값 $-22-k$를 갖는다.

이때, 최댓값과 최솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 반대이므로

$f(-1)+f(2)=0$

$(5-k)+(-22-k)=0$, $-17-2k=0$

$\therefore k=-\dfrac{17}{2}$

0534 답 -5

$f(x)=2kx^3-3kx^2$에서

$f'(x)=6kx^2-6kx=6kx(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-5k$	↗	0	↘	$-k$	↗	$4k$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $4k$, $x=-1$일 때 최솟값 $-5k$를 갖는다.

이때, 최댓값이 4이므로 $4k=4$ $\quad\therefore k=1$

따라서 $f(x)$의 최솟값은 -5이다.

0535 답 18

$f(x)=ax^4-4ax^3+b$ $(a>0)$에서

$f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$5a+b$	↘	b	↘	$-27a+b$	↗	b

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $5a+b$, $x=3$일 때 최솟값 $-27a+b$를 갖는다.

즉, $5a+b=7$, $-27a+b=-9$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{9}{2}$

$\therefore 27a+b=18$

0536 답 -13

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 그래프에서 $f'(x)=0$의 두 근이 $x=1$ 또는 $x=3$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=-\dfrac{2a}{3}$, $1\cdot3=\dfrac{b}{3}$ $\quad\therefore a=-6$, $b=9$

즉, $f(x)=x^3-6x^2+9x+c$

이때, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $x=1$에서 극대이고 극댓값이 7이므로

$f(1)=7$에서 $1-6+9+c=7$ $\quad\therefore c=3$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x+3$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-13	↗	7	↘	3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 -13을 갖는다.

0537 답 4

조건 ㈎에서 $a=0$, $c=0$

따라서 $f(x)=x^4+bx^2+d$이므로 $f'(x)=4x^3+2bx$

조건 ㈏에서 $f(1)=-5$, $f'(1)=0$이므로

$1+b+d=-5$, $4+2b=0$ $\quad\therefore b=-2$, $d=-4$

$\therefore f(x)=x^4-2x^2-4$

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	-5	↗	-4	↘	-5	↗	4

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$ 또는 $x=2$일 때 최댓값 4를 갖는다.

유형 17 최대·최소의 활용 ; 실생활

본책 90쪽

함수에 대한 증감표를 만든 후 최댓값 또는 최솟값을 구한다. 이때, 함수의 정의역에 주의한다.

0538 답 3시간 후

$E(t)=27t-t^3$에서

$E'(t)=27-3t^2=-3(t-3)(t+3)$

$E'(t)=0$에서 $t=3$ ($\because t>0$)

따라서 함수 $E(t)$는 $t=3$일 때 극대이면서 최대이므로 약효가 최대일 때는 약품을 투여한 지 3시간 후이다.

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$E'(t)$		$+$	0	$-$
$E(t)$		↗	극대	↘

0539 답 180만 원

반지 한 개의 이익금이 60만 원이므로 반지의 가격을 $10x$만 원 인상하면 반지 한 개에 대한 이익금은 $(60+10x)$만 원이고 한 달 판매량은 $(36-x^2)$개이다.

이때, $x>0$, $36-x^2>0$에서 $0<x<6$

한 달 이익금을 $f(x)$라 하면

$f(x)=(60+10x)(36-x^2)$

$f'(x)=10(36-x^2)-2x(60+10x)$

$=-30x^2-120x+360=-30(x^2+4x-12)$

$=-30(x+6)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0<x<6$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 이익금이 최대가 되게 하는 반지 한 개의 가격은

$160+20=180$(만 원)

유형 18 최대·최소의 활용 ; 길이

본책 90쪽

좌표평면에서 길이의 최댓값은 움직이는 점의 x좌표를 t로 놓고 길이를 t에 대한 함수로 나타내어 구한다.

0540 답 $\sqrt{5}$

점 T의 좌표를 $(t,\ t^2)$으로 놓으면 점 T와 점 P$(3,\ 0)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{PT}}=\sqrt{(3-t)^2+(-t^2)^2}=\sqrt{t^4+t^2-6t+9}$

$f(t)=t^4+t^2-6t+9$로 놓으면 $f(t)$가 최소일 때 $\overline{\mathrm{PT}}$도 최소이다.

$f'(t)=4t^3+2t-6=2(t-1)(2t^2+2t+3)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because 2t^2+2t+3>0$)

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=5$

따라서 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소	↗

0541 답 35

점 P의 좌표를 $(t,\ -t^2+2)$로 놓으면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=(t-4)^2+(-t^2+2)^2+(t-4)^2+(-t^2-3)^2$

$=2t^4+4t^2-16t+45$

$f(t)=2t^4+4t^2-16t+45$로 놓으면

$f'(t)=8t^3+8t-16=8(t-1)(t^2+t+2)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because t^2+t+2>0$)

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은 $f(1)=35$

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소	↗

유형 19 최대·최소의 활용 ; 넓이

본책 91쪽

좌표평면에서 넓이의 최댓값은 움직이는 점의 x좌표를 t로 놓고 넓이를 t에 대한 함수로 나타내어 구한다.

0542 답 $\frac{27}{4}$

두 점 P, Q의 좌표가 각각 $\mathrm{P}\left(t,\ -\frac{t}{2}\right)$, $\mathrm{Q}(t,\ -t^2+4t)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=(-t^2+4t)-\left(-\frac{t}{2}\right)=-t^2+\frac{9}{2}t$

삼각형 OPQ의 넓이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\frac{1}{2}t\left(-t^2+\frac{9}{2}t\right)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{9}{4}t^2$

$f'(t)=-\frac{3}{2}t^2+\frac{9}{2}t=-\frac{3}{2}t(t-3)$

$f'(t)=0$에서 $t=3$ ($\because 0<t<4$)

따라서 함수 $f(t)$는 $t=3$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(3)=\frac{27}{4}$

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	극대	↘	

0543 답 4

$\mathrm{D}(t,\ -t^2+3)$으로 놓으면 $0<t<\sqrt{3}$

직사각형 ABCD의 넓이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=2t(-t^2+3)=-2t^3+6t$

$f'(t)=-6t^2+6=-6(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because 0<t<\sqrt{3}$)

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $f(1)=4$

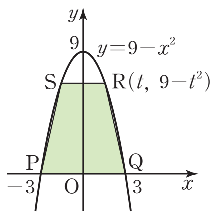
t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	극대	↘	

0544 답 8

$9-x^2=0$에서 $(3+x)(3-x)=0$　　$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

즉, $\mathrm{P}(-3, 0)$, $\mathrm{Q}(3, 0)$

오른쪽 그림과 같이 등변사다리꼴의 나머지 두 꼭짓점을 R, S라 하고, 점 R의 좌표를 $(t,\ 9-t^2)$으로 놓으면 $0<t<3$



사다리꼴 PQRS의 넓이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\frac{1}{2}(2t+6)(9-t^2)$

$\quad=-t^3-3t^2+9t+27$

$f'(t)=-3t^2-6t+9=-3(t+3)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because 0<t<3$)

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 극대이면서 최대이다. 이때, 사다리꼴의 높이는 점 R의 y좌표와 같으므로 $9-1=8$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	극대	↘	

유형 20 **최대 · 최소의 활용 ; 부피** 본책 91쪽

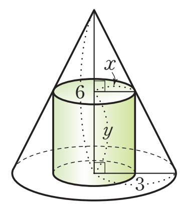
입체도형의 부피의 최댓값은 변의 길이에서 줄어들거나 늘어나는 부분을 x로 놓고 부피를 x에 대한 함수로 나타내어 구한다.

0545 답 8π

내접하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면

$(6-y):x=6:3$에서 $6x=3(6-y)$

$\therefore y=6-2x$ $(0<x<3)$



원기둥의 부피를 $f(x)$라 하면

$f(x)=\pi x^2y=\pi x^2(6-2x)$

$\quad=\pi(-2x^3+6x^2)$

$f'(x)=\pi(-6x^2+12x)=-6\pi x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0<x<3$)

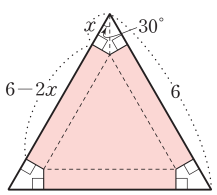
따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $f(2)=8\pi$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

0546 답 10

삼각기둥의 밑면의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}(6-2x)^2=\sqrt{3}(x-3)^2$



이때, $x>0$, $6-2x>0$에서 $0<x<3$

상자의 높이는 $x\cdot\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}x$이므로 상자의 부피를 $f(x)$라 하면

$f(x)=\sqrt{3}(x-3)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}x=x(x-3)^2=x^3-6x^2+9x$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0<x<3$)

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극대이면서 최대이므로 $k=1$

$\therefore 10k=10$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

참고 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이 S는 ⇨ $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

0547 답 $8\sqrt{10}$

상자의 겉넓이가 60이므로

$2\cdot4x^2+2xh+2\cdot4xh=60$, $8x^2+10xh=60$

$\therefore xh=6-\frac{4}{5}x^2$

$x>0$, $h>0$이므로 $6-\frac{4}{5}x^2>0$에서 $0<x<\sqrt{\frac{15}{2}}$

상자의 부피를 $f(x)$라 하면

$f(x)=4x^2h=4x\cdot xh$

$\quad=4x\left(6-\frac{4}{5}x^2\right)$

$\quad=-\frac{16}{5}x^3+24x$

$f'(x)=-\frac{48}{5}x^2+24=-\frac{48}{5}\left(x-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

$f'(x)=0$에서 $x=\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\left(\because 0<x<\sqrt{\frac{15}{2}}\right)$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{15}{2}}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{\frac{5}{2}}$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 부피의 최댓값은

$f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=-\frac{16}{5}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^3+24\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\quad=-\frac{16}{5}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}+24\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\quad=-4\sqrt{10}+12\sqrt{10}=8\sqrt{10}$

STEP 3 | 심화 Master

0548 답 13

TIP 접선의 방정식을 이용하여 $g(t)$를 먼저 구하고 주어진 구간에서 증가하려면 $g'(t)\geq0$임을 이용한다.

$f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$

점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-\{t^3-(a+2)t^2+at\}=\{3t^2-2(a+2)t+a\}(x-t)$

y절편 $g(t)$는 $x=0$일 때의 y좌표와 같으므로

$g(t)-\{t^3-(a+2)t^2+at\}=\{3t^2-2(a+2)t+a\}(0-t)$

$\therefore\ g(t)=-2t^3+(a+2)t^2$

함수 $g(t)$가 열린구간 $(0,\ 5)$에서 증가하려면 $0<t<5$에서 $g'(t)\geq 0$이어야 한다.

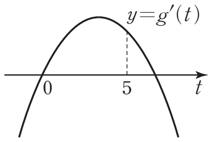
$g'(t)=-6t^2+2(a+2)t=-2t\{3t-(a+2)\}$

$g'(0)=0$이고,

$g'(5)=-10\{15-(a+2)\}\geq 0$

$\therefore\ a\geq 13$

따라서 a의 최솟값은 13이다.



0549 답 9

TIP 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지면 극대, 극소가 되는 점의 x좌표는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq 0$)라 하면 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근이 x_1, x_2, x_3이므로

$x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}$ …… ㉠

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}$ …… ㉡

이때, $\alpha+\beta=6$을 ㉡에 대입하면

$-\dfrac{2b}{3a}=6 \qquad \therefore\ -\dfrac{b}{a}=9$

따라서 ㉠에서 $x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}=9$

0550 답 32

TIP 삼차함수를 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0, b, c, d$는 상수)로 놓고 주어진 조건을 이용한다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq 0$)로 놓으면

조건 ㈎에서 $b=0, d=0$

즉, $f(x)=ax^3+cx$에서 $f'(x)=3ax^2+c$

조건 ㈏에서 $a+c=5 \qquad \therefore\ c=5-a$ …… ㉠

조건 ㈐에서 $1<3a+c<7$

이 식에 ㉠을 대입하여 정리하면 $1<2a+5<7$

$-4<2a<2 \qquad \therefore\ -2<a<1$

이때, $a\neq 0$인 정수이므로

$a=-1$

㉠에서 $c=6$이므로 $f(x)=-x^3+6x$

$f'(x)=-3x^2+6=-3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{2}$에서 극대이므로

$m=f(\sqrt{2})=4\sqrt{2}$

$\therefore\ m^2=32$

0551 답 $-\dfrac{5}{2}$

TIP a의 값의 부호에 따라 범위를 나누어 $f(x)$의 극댓값을 각각 구해본다.

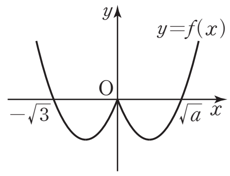
$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$에서

(i) $a>0$일 때

$f(x)=\begin{cases} ax(\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x) & (x<0) \\ x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) & (x\geq 0) \end{cases}$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때, 함수 $f(x)$의 극댓값은 $x=0$일 때 0이므로 모순이다.

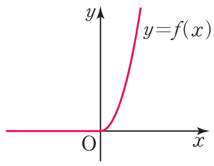


(ii) $a=0$일 때

$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ x^3 & (x\geq 0) \end{cases}$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

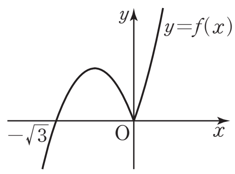
이때, 함수 $f(x)$의 극댓값은 존재하지 않으므로 모순이다.



(iii) $a<0$일 때

$f(x)=\begin{cases} ax(\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x) & (x<0) \\ x(x^2-a) & (x\geq 0) \end{cases}$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, $x<0$에서 함수 $f(x)$의 극댓값이 존재하므로



$f(x)=a(3x-x^3)$에서

$f'(x)=a(3-3x^2)$

$\quad=3a(1+x)(1-x)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because\ x<0$)

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $-2a$를 가지므로

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	극대	↘	

$-2a=5 \qquad \therefore\ a=-\dfrac{5}{2}$

(i)~(iii)에서 $a=-\dfrac{5}{2}$

0552 답 4

TIP 삼차함수를 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓고 주어진 조건을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 ㈎에서 $a=0$

즉, $f(x)=x^3+bx+c$이고 $f'(x)=3x^2+b$

조건 ㈏에서 $f(1)=0, f'(1)=0$이므로

$1+b+c=0,\ 3+b=0$

$\therefore\ b=-3, c=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x+2$이고

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$f(-1)=4$

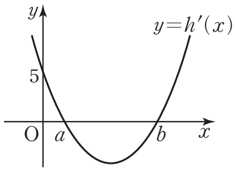
0553 답 ⑤

TIP 주어진 그래프를 이용하여 $y=h'(x)$의 그래프를 그려본다.

$h(x)=f(x)-g(x)$에서

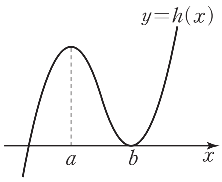
$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$y=h'(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. $h(b)=0$이면 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



ㄷ. 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 열린구간 (α, β)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)$를 만족시키는 γ가 열린구간 (α, β)에 적어도 하나 존재한다.

열린구간 $(0, b)$에 있는 모든 실수 x에 대하여

$h'(x)<5$이므로 $\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}<5$

$\therefore h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0554 답 ⑤

TIP 삼차함수를 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)로 놓고 주어진 조건을 이용한다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(-3)=f'(3)$에서

$27a-6b+c=27a+6b+c \qquad \therefore b=0$

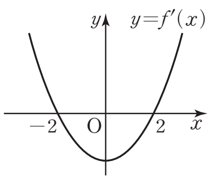
조건 (가)에서 $f'(-2)=0$이므로

$12a+c=0 \qquad \therefore c=-12a$

즉, $f'(x)=3ax^2-12a$

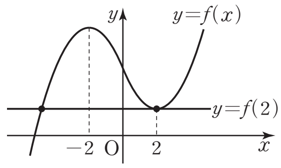
$\qquad =3a(x+2)(x-2)$

$f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같고 $a>0$



ㄱ. $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.



ㄷ. $f'(-1)=-9a$이고, $f(x)=ax^3-12ax+d$에서 $f(-1)=11a+d$이므로 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 방정식은 $y-(11a+d)=-9a(x+1)$

$y=-9ax+2a+d$ …… ㉠

㉠에 점 $(2,\ f(2))$, 즉 $(2,\ -16a+d)$를 대입하면

$-16a+d=-18a+2a+d$

이 등식이 성립하므로 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0555 답 ②

TIP $f'(x)$의 부호가 바뀌는 지점을 찾는다.

주어진 그래프에서 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 극솟값을 갖고, $x<-2$, $x>2$에서 $f'(x)=0$이므로 $f(x)$는 기울기가 0인 직선이다. 또, $f(x)$가 연속이므로 $x=2$ 또는 $x=-2$에서도 연속이다.

이 조건을 모두 만족시키는 그래프는 ②이다.

0556 답 ①

TIP 접선의 방정식을 구하고 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, b, c는 상수)로 놓고 주어진 조건을 이용한다.

이차함수 $f(x)$의 그래프 위의 임의의 점 $(t,\ f(t))$에서 그은 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t) \qquad \therefore y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$

이 식이 $y=f'(t)x+g(t)$와 일치하므로

$g(t)=-tf'(t)+f(t)$

한편, $f(x)$는 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, b, c는 상수)로 놓으면

$g(t)=-tf'(t)+f(t)=-t(2at+b)+(at^2+bt+c)$

$\qquad =-at^2+c$

이때, 함수 $g(t)$는 극댓값 $g(0)=c$를 갖고 그 값이 양수이므로

$-a<0,\ g(0)>0 \qquad \therefore a>0,\ c>0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

0557 답 ①

TIP 주어진 등식을 이용하여 y^2을 x에 대한 식으로 정리한다.

$x^2+3y^2=9$에서 $y^2=\dfrac{1}{3}(9-x^2)$ …… ㉠

$y^2\geq0$이므로 $\dfrac{1}{3}(9-x^2)\geq0 \qquad \therefore -3\leq x\leq3$

㉠을 x^2+xy^2에 대입하여 정리하면

$x^2+xy^2=x^2+x\left(3-\dfrac{1}{3}x^2\right)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x$

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\ (-3\le x\le 3)$라 하면

$f'(x)=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	9	↘	극소	↗	9

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$f(-1)=-\frac{5}{3}$

0558 답 1

TIP 접선의 기울기가 같음을 이용하여 a와 p사이의 관계식을 먼저 구한다.

$f(x)=2x^3+3x^2+c$에서 $f'(x)=6x^2+6x$

이때, 두 점 $A(a,\ b)$, $B(p,\ q)$에서 각각 그은 접선의 기울기가 서로 같으므로 $f'(a)=f'(p)$에서

$6a^2+6a=6p^2+6p$

$6(a^2-p^2)+6(a-p)=0$

$6(a-p)(a+p)+6(a-p)=0$

$6(a-p)(a+p+1)=0$

$\therefore a+p+1=0\ (\because a\ne p)$

즉, $p=-a-1$이므로

$f(a)-f(p)$

$=(2a^3+3a^2+c)-(2p^3+3p^2+c)$

$=2a^3+3a^2-2(-a-1)^3-3(-a-1)^2$

$=2a^3+3a^2+2(a^3+3a^2+3a+1)-3(a^2+2a+1)$

$=4a^3+6a^2-1$

$g(a)=4a^3+6a^2-1$이라 하면

$g'(a)=12a^2+12a=12a(a+1)$

$g'(a)=0$에서 $a=-1$ 또는 $a=0$

한편, $a<p$에서 $a<-1-a$, $2a<-1$ $\quad\therefore a<-\frac{1}{2}$

이때, 함수 $g(a)$는 $a=-1$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

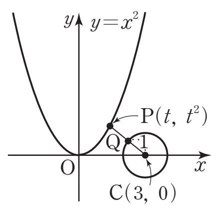
$g(-1)=1$

a	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$
$g'(a)$	$+$	0	$-$	
$g(a)$	↗	극대	↘	

0559 답 $\sqrt{5}-1$

TIP 중심이 C인 원 밖의 한 점 P에서 원에 이르는 거리의 최솟값은 $\overline{PC}-$(원의 반지름의 길이)이다.

$\overline{PQ}$의 길이가 최소일 때는 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q를 지나는 직선이 원의 중심 $C(3,\ 0)$을 지나고 $\overline{PC}$의 길이가 최소인 경우이다. 즉, 곡선 $y=x^2$ 위의 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2)$으로 놓으면



$\overline{PC}=\sqrt{(t-3)^2+(t^2)^2}$

$\quad=\sqrt{t^4+t^2-6t+9}$

이때, $f(t)=t^4+t^2-6t+9$라 하면

$f'(t)=4t^3+2t-6=2(t-1)(2t^2+2t+3)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(1)=5$이고 이때 $\overline{PC}=\sqrt{5}$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$\overline{PC}-\overline{CQ}=\sqrt{5}-1$

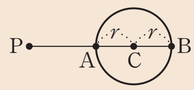
t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소	↗

Lecture

원 밖의 한 점 P에서 원에 이르는 거리의

(1) 최솟값 ⇨ $\overline{PA}=\overline{PC}-r$

(2) 최댓값 ⇨ $\overline{PB}=\overline{PC}+r$



0560 답 64

TIP 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 먼저 구한다.

$f(x)=(x-2)^2$에서 $f'(x)=2(x-2)$

점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-(a-2)^2=2(a-2)(x-a)$

$\therefore y=2(a-2)x-a^2+4$

$y=0$일 때 $x=\frac{a+2}{2}$이므로 $P\left(\frac{a+2}{2},\ 0\right)$

$x=0$일 때 $y=-a^2+4$이므로 $Q(0,\ -a^2+4)$

$\triangle OPQ$의 넓이를 $g(a)$라 하면

$g(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+2}{2}(-a^2+4)=-\frac{1}{4}(a^3+2a^2-4a-8)$

$g'(a)=-\frac{1}{4}(3a^2+4a-4)=-\frac{1}{4}(a+2)(3a-2)$

$g'(a)=0$에서 $a=\frac{2}{3}\ (\because\ 0<a<2)$

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $g(a)$는 $a=\frac{2}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 $\triangle OPQ$의 넓이의 최댓값은 $k=g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{64}{27}$

$\therefore 27k=64$

6 | 도함수의 활용 (3)

본책 96쪽~110쪽

STEP 1 | 기초 Build

0561 답 3

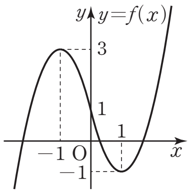
$f(x)=x^3-3x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



0562 답 1

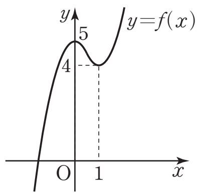
$f(x)=2x^3-3x^2+5$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	4	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 한 실근을 갖는다.



0563 답 2

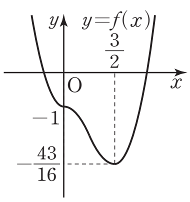
$f(x)=x^4-2x^3-1$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↘	$-\frac{43}{16}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



0564 답 2

$x^3-5x-5=3x^2+4x$에서 $x^3-3x^2-9x-5=0$

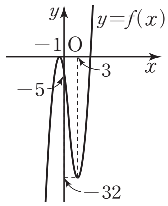
$f(x)=x^3-3x^2-9x-5$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-32	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



다른 풀이 $f(-1)f(3)=0\cdot(-32)=0$이므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0565 답 4

$x^4+3x^3+1=3x^3+4x^2$에서 $x^4-4x^2+1=0$

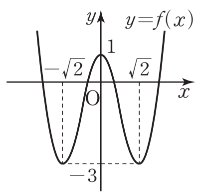
$f(x)=x^4-4x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 갖는다.



0566 답 (1) $0<k<1$ (2) $k=0$ 또는 $k=1$ (3) $k<0$ 또는 $k>1$

$f(x)=2x^3-3x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

(1) 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(0)f(1)<0$이어야 하므로 $k(k-1)<0$

$\therefore 0<k<1$

(2) 삼차방정식이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(0)f(1)=0$이어야 하므로 $k(k-1)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=1$

(3) 삼차방정식이 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(0)f(1)>0$이어야 하므로 $k(k-1)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>1$

6 도함수의 활용 (3)

0567 답 (가) 1 (나) >

$f(x)=x^3-x^2-x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\ge0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	1	↗

$x\ge0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $\boxed{(가)\ 1}$이다.

즉, $x\ge0$에서 $f(x)\ \boxed{(나)\ >}\ 0$

$\therefore x^3-x^2-x+2>0$

0568 답 풀이 참조

$f(x)=3x^4-4x^3+1$로 놓으면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘	0	↗

$x\ge0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 0이다.

즉, $x\ge0$에서 $f(x)\ge0$이다.

$\therefore 3x^4-4x^3+1\ge0$

0569 답 $a\ge3$

$f(x)=x^4-4x+a$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-3$	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge0$이 성립하려면 $f(1)\ge0$이어야 하므로

$a-3\ge0\qquad\therefore a\ge3$

0570 답 $v=1$, $a=4$

$v=\dfrac{dx}{dt}=4t-3$, $a=\dfrac{dv}{dt}=4$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=4-3=1$, $a=4$

0571 답 $v=19$, $a=18$

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-8$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t$이므로 $t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=27-8=19$, $a=18$

0572 답 $v=4$, $a=-30$

$v=\dfrac{dx}{dt}=-4t^3+18t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-12t^2+18$이므로 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=-32+36=4$, $a=-48+18=-30$

0573 답 27

$\dfrac{dl}{dt}=3t^2+6t+3$이므로 $t=2$에서의 고무줄의 길이의 변화율은

$12+12+3=27$

0574 답 (1) 3.2π (2) 3.2π

(1) 구의 겉넓이를 S라 하면

$S=4\pi(0.2t)^2=0.16\pi t^2$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=0.32\pi t$

따라서 $t=10$에서의 구의 겉넓이의 변화율은

$0.32\pi\times10=3.2\pi$

(2) 구의 부피를 V라 하면

$V=\dfrac{4}{3}\pi(0.2t)^3=\dfrac{0.032\pi t^3}{3}$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=0.032\pi t^2$

따라서 $t=10$에서의 구의 부피의 변화율은

$0.032\pi\times10^2=3.2\pi$

참고 반지름의 길이가 r인 구에 대하여

(1) 구의 겉넓이 : $4\pi r^2$

(2) 구의 부피 : $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수 본책 98쪽

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

0575 답 -4

$3x^4-4x^3-12x^2+1-k=0$에서

$3x^4-4x^3-12x^2+1=k$ ······ ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=3x^4-4x^3-12x^2+1$과 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

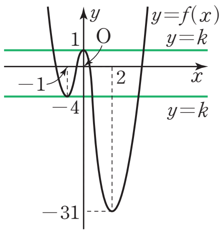
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗	1	↘	-31	↗

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면



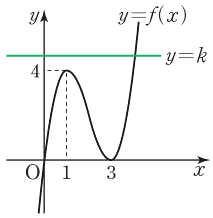
$k=-4$ 또는 $k=1$
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은
$-4\cdot 1=-4$

0576 답 ①

$x^3-6x^2+9x-k=0$에서
$x^3-6x^2+9x=k$ …… ㉠
방정식 ㉠이 한 실근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=x^3-6x^2+9x$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다.
$f(x)=x^3-6x^2+9x$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나려면



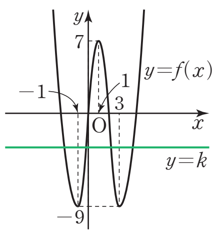
$k<0$ 또는 $k>4$
따라서 실수 k의 값이 될 수 있는 것은 ①이다.

0577 답 ⑤

$x^4-4x^3-2x^2+12x-k=0$에서
$x^4-4x^3-2x^2+12x=k$ …… ㉠
방정식 ㉠이 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y=x^4-4x^3-2x^2+12x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.
$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$로 놓으면
$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나려면 $-9<k<7$



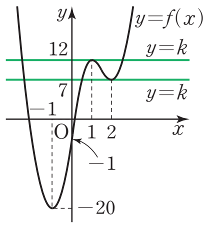
따라서 $\alpha=-9$, $\beta=7$이므로
$\beta-\alpha=16$

0578 답 19

$3x^4-8x^3-6x^2+24x-1-k=0$에서
$3x^4-8x^3-6x^2+24x-1=k$ …… ㉠
방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=3x^4-8x^3-6x^2+24x-1$과 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.
$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-1$로 놓으면
$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$
$\quad=12(x+1)(x-1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	-20	↗	12	↘	7	↗

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $k=7$ 또는 $k=12$



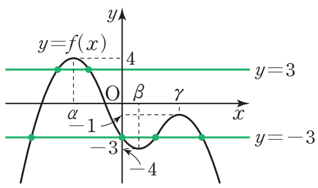
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$7+12=19$

0579 답 6

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 α, β, γ이므로
$f'(x)=0$에서 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	4	↘	-4	↗	-1	↘

이때, $f(0)=-3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 방정식 $|f(x)|-3=0$, 즉 $|f(x)|=3$의 실근의 개수는 $f(x)=3$ 또는 $f(x)=-3$을 만족시키는 x의 개수와 같으므로
$2+4=6$

0580 답 ⑤

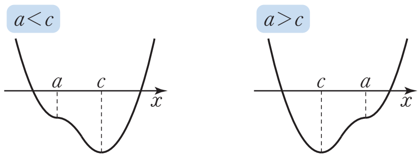
TIP a, b, c의 조건에 따라 $f'(x)$를 구한 후 증감표를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

ㄱ. $a=b=c$이면 $f'(x)=(x-a)^3$
$f'(x)=0$에서 $x=a$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(a)$이다. 이때, $f(a)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

ㄴ. $a=b\neq c$이면 $f'(x)=(x-a)^2(x-c)$
$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=c$
함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극소이고, $f(a)<0$이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

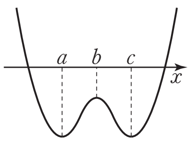


따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $a<b<c$이면 $f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때, $f(b)<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

유형 02 방정식 $f(x)=k$의 실근의 부호

본책 99쪽

방정식 $f(x)=k$의 실근의 부호는
⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표의 부호와 같다.

0581 답 $-5<a<0$

$x^3-2x^2+a=x^2+9x$에서 $-x^3+3x^2+9x=a$

$f(x)=-x^3+3x^2+9x$로 놓으면

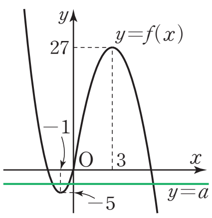
$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-5	↗	27	↘

이때, $f(0)=0$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 1개는 양수, 2개는 음수이려면

$-5<a<0$



0582 답 ①

$\frac{4}{3}x^3-2x^2-8x+a=0$에서 $-\frac{4}{3}x^3+2x^2+8x=a$

$f(x)=-\frac{4}{3}x^3+2x^2+8x$로 놓으면

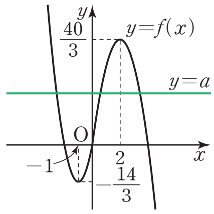
$f'(x)=-4x^2+4x+8=-4(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{14}{3}$	↗	$\frac{40}{3}$	↘

이때, $f(0)=0$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 2개는 양수, 1개는 음수이려면

$0<a<\frac{40}{3}$



따라서 $M=13$, $m=1$이므로

$M-m=12$

0583 답 8

$2x^3-x^2-13x=2x^2-x+a$에서 $2x^3-3x^2-12x=a$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$로 놓으면

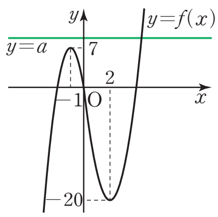
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	-20	↗

이때, $f(0)=0$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 오직 1개의 양수이려면

$a>7$



따라서 정수 a의 최솟값은 8이다.

0584 답 6

$3x^4-8x^3-18x^2-k=0$에서 $3x^4-8x^3-18x^2=k$

$f(x)=3x^4-8x^3-18x^2$으로 놓으면

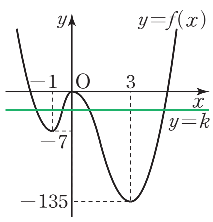
$f'(x)=12x^3-24x^2-36x=12x(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-7	↗	0	↘	-135	↗

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 2개는 양수, 2개는 음수이려면

$-7<k<0$



따라서 정수 k는 $-6, -5, \cdots, -1$로 그 개수는 6이다.

유형 03 삼차방정식의 근의 판별

본책 99쪽

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$라 할 때, 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$이

(1) 서로 다른 세 실근을 가지면 ⇨ $f(\alpha)f(\beta)<0$

(2) 한 실근과 중근을 가지면 ⇨ $f(\alpha)f(\beta)=0$

(3) 한 실근과 두 허근을 가지면 ⇨ $f(\alpha)f(\beta)>0$

0585 답 $-3<k<5$

$f(x)=2x^3-6x^2+3+k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(0)f(2)<0$이어야 하므로

$(k+3)(k-5)<0 \qquad \therefore -3<k<5$

0586 답 9

함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되므로 $g(x)=f(x)+a$

즉, $g(x)=x^3-2x^2-4x-3+a$

$g'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$g\left(-\frac{2}{3}\right)g(2)<0$이어야 하므로

$\left(a-\frac{41}{27}\right)(a-11)<0 \qquad \therefore \frac{41}{27}<a<11$

따라서 정수 a는 $2, 3, \cdots, 10$으로 그 개수는 9이다.

0587 답 ②

$f(x)=x^3-3x^2-a+5$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 한 실근과 중근을 가져야 하므로 $f(0)f(2)=0$이어야 한다.

즉, $(-a+5)(-a+1)=0$이므로 $a=1$ 또는 $a=5$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $1+5=6$

0588 답 1

$f(x)=x^3-3ax^2+4a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 한 실근과 중근을 가져야 하므로 $f(0)f(2a)=0$이어야 한다.

즉, $4a(-4a^3+4a)=0$이므로 $-16a^2(a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=1 \ (\because a>0)$

0589 답 29

$f(x)=x^3-3x^2-24x-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(-2)f(4)>0$이어야 하므로

$(-k+28)(-k-80)>0 \qquad \therefore k<-80$ 또는 $k>28$

따라서 자연수 k의 최솟값은 29이다.

0590 답 ①

$f(x)=2x^3-6a^2x+4$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6a^2=6(x^2-a^2)=6(x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$a\neq0$ ...... ㉠

또, 삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면

$f(-a)f(a)>0$이어야 하므로

$(4a^3+4)(-4a^3+4)>0$, $(a^3+1)(a^3-1)<0$

$(a+1)(a-1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)<0$

이때, $a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,

$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$(a+1)(a-1)<0 \qquad \therefore -1<a<1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $-1<a<0$ 또는 $0<a<1$

따라서 정수 a는 존재하지 않는다.

유형 04 두 그래프의 교점의 개수 본책 100쪽

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는

⇨ 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

0591 답 $-1<a<1$

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $4x^3-2x=x+a$, 즉 $4x^3-3x-a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=4x^3-3x-a$로 놓으면

$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f\left(-\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)<0$이어야 하므로

$(-a+1)(-a-1)<0 \qquad \therefore -1<a<1$

0592 답 ②

주어진 곡선과 직선이 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만나려면 방정식 $x^3-4x+a=8x$, 즉 $x^3-12x+a=0$이 한 실근과 중근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-12x+a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

$f(-2)f(2)=0$이어야 하므로

$(a+16)(a-16)=0 \qquad \therefore a=16 \ (\because a>0)$

0593 답 5

주어진 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^3-x^2=2x^2-a$, 즉 $x^3-3x^2+a=0$이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.

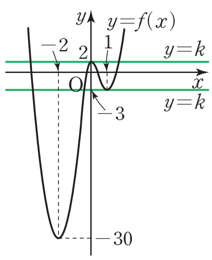
$f(x)=x^3-3x^2+a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면
$f(0)f(2)>0$이어야 하므로
$a(a-4)>0$ $\quad\therefore a<0$ 또는 $a>4$
따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다.

0594 답 -6
주어진 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식
$3x^4+4x^3+5x+2=12x^2+5x+k$, 즉 $3x^4+4x^3-12x^2+2=k$
가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+2$로 놓으면
$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x-1)(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-30	↗	2	↘	-3	↗

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 세 점에서 만나려면
$k=-3$ 또는 $k=2$
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은
$-3\cdot2=-6$



유형 05 접선의 개수 　본책 100쪽

> 곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 접점의 개수와 같음을 이용한다.

0595 답 $2<a<3$
$y=x^3-3x$에서 $y'=3x^2-3$
점 $(-1,\ a)$에서 이 곡선에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t)$라 하면 접선의 방정식은
$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$
이 직선이 점 $(-1,\ a)$를 지나므로
$a-(t^3-3t)=(3t^2-3)(-1-t)$
$\therefore 2t^3+3t^2+a-3=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
점 $(-1,\ a)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(t)=2t^3+3t^2+a-3$으로 놓으면
$f'(t)=6t^2+6t=6t(t+1)$
$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=0$
삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면
$f(-1)f(0)<0$이어야 하므로
$(a-2)(a-3)<0$ $\quad\therefore 2<a<3$

0596 답 1
$y=-x^3+3kx+1$에서 $y'=-3x^2+3k$
점 $(-1,\ 0)$에서 이 곡선에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+3kt+1)$이라 하면 접선의 방정식은
$y-(-t^3+3kt+1)=(-3t^2+3k)(x-t)$
이 직선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로
$t^3-3kt-1=(-3t^2+3k)(-1-t)$
$2t^3+3t^2-3k+1=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
점 $(-1,\ 0)$에서 주어진 곡선에 오직 하나의 접선을 그으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.
$f(t)=2t^3+3t^2-3k+1$로 놓으면
$f'(t)=6t^2+6t=6t(t+1)$
$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=0$
삼차방정식 $f(t)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면
$f(-1)f(0)>0$이어야 하므로
$(-3k+2)(-3k+1)>0$ $\quad\therefore k<\frac{1}{3}$ 또는 $k>\frac{2}{3}$
따라서 자연수 k의 최솟값은 1이다.

유형 06 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건 ; 증가·감소의 활용 　본책 101쪽

> (1) 구간 $(a,\ b)$에서 감소하는 함수 $f(x)$에 대하여 부등식 $f(x)>k$가 항상 성립하려면 ⇨ $f(b)\ge k$
> (2) 구간 $(a,\ b)$에서 증가하는 함수 $f(x)$에 대하여 부등식 $f(x)<k$가 항상 성립하려면 ⇨ $f(b)\le k$

0597 답 ⑤
$f(x)=4x^3-3x^2-6x+a$로 놓으면
$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$
$-\frac{1}{2}<x<1$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$에서 감소한다.
따라서 $-\frac{1}{2}<x<1$에서 $f(x)>0$이려면 $f(1)\ge0$이어야 하므로
$4-3-6+a\ge0$ $\quad\therefore a\ge5$

0598 답 -9
$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+a$로 놓으면
$f'(x)=-x^2+4x=-x(x-4)$
$1\le x\le3$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[1,\ 3]$에서 증가한다.
따라서 $1\le x\le3$에서 $f(x)\le0$이려면 $f(3)\le0$이어야 하므로
$-9+18+a\le0$ $\quad\therefore a\le-9$
즉, 실수 a의 최댓값은 -9이다.

0599 답 -4
$f(x)=-2x^3+3x^2-a$로 놓으면
$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$
$x>2$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(2,\ \infty)$에서 감소한다.
따라서 $x>2$에서 $f(x)<0$이려면 $f(2)\le0$이어야 하므로
$-16+12-a\le0$ $\quad\therefore a\ge-4$
즉, 실수 a의 최솟값은 -4이다.

0600 답 $a<2$

$x^3-3x^2-x<8x-a$에서

$x^3-3x^2-9x+a<0$

$f(x)=x^3-3x^2-9x+a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$x\le-2$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -2]$에서 증가한다.

따라서 $x\le-2$에서 $f(x)<0$이려면 $f(-2)<0$이어야 하므로

$-8-12+18+a<0$ $\quad\therefore a<2$

유형 07 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건 ; 최대·최소의 활용 본책 101쪽

(1) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\le a$를 증명하려면
⇨ 그 구간에서 (함수 $f(x)$의 최댓값) $\le a$임을 보인다.

(2) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\ge a$를 증명하려면
⇨ 그 구간에서 (함수 $f(x)$의 최솟값) $\ge a$임을 보인다.

0601 답 23

$2x^2-9\le x^3-4x^2+a$에서 $x^3-6x^2+a+9\ge0$

$f(x)=x^3-6x^2+a+9$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$a-23$	↗	$a+9$	↘	$a-23$	↗

$x\ge-2$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$ 또는 $x=4$일 때 최소이므로 최솟값은 $a-23$

이때, $f(x)\ge0$이려면 $a-23\ge0$이어야 하므로

$a\ge23$

따라서 실수 a의 최솟값은 23이다.

0602 답 ⑤

$f(x)=4x^3-12x-2+a$로 놓으면

$f'(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\ge0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$a-2$	↘	$a-10$	↗

$x\ge0$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $a-10$

이때, $f(x)\ge0$이려면 $f(1)\ge0$이어야 하므로

$a-10\ge0$ $\quad\therefore a\ge10$

0603 답 34

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k+20$	↘	$k-7$	↗	$k+4$

$-2\le x\le2$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최대이므로 최댓값은 $k+20$, $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $k-7$

이때, $0\le f(x)\le30$이려면 $f(1)\ge0$, $f(-2)\le30$이어야 하므로

$k-7\ge0$, $k+20\le30$ $\quad\therefore 7\le k\le10$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$7+8+9+10=34$

0604 답 6

TIP $a\le0$일 때와 $a>0$일 때로 나누어 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구한다.

$x^3\ge a(x^2-a)$에서 $x^3-ax^2+a^2\ge0$

$f(x)=x^3-ax^2+a^2$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}a$

(i) $\frac{2}{3}a\le0$, 즉 $a\le0$일 때

$x>0$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 $x>0$에서 $f(x)\ge0$이려면 $f(0)\ge0$이어야 하므로

$f(0)=a^2\ge0$

이 식이 항상 성립하므로 $a\le0$일 때 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $\frac{2}{3}a>0$, 즉 $a>0$일 때

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{4}{27}a^3+a^2$	↗

$x>0$에서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}a$일 때 극소이면서 최소이므로

최솟값은 $f\left(\frac{2}{3}a\right)=-\frac{4}{27}a^3+a^2=-\frac{4}{27}a^2\left(a-\frac{27}{4}\right)$

이때, $f(x)\ge0$이려면 $f\left(\frac{2}{3}a\right)\ge0$이어야 하므로

$-\frac{4}{27}a^2\left(a-\frac{27}{4}\right)\ge0$ $\quad\therefore 0<a\le\frac{27}{4}$

(i), (ii)에서 $a\le\frac{27}{4}$이므로 정수 a의 최댓값은 6이다.

유형 08 모든 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건 본책 102쪽

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge0$이 성립하려면
⇨ (함수 $f(x)$의 최솟값) ≥0

0605 답 ①

$f(x)=x^4-4x^3+k-2$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$k-2$	↘	$k-29$	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $k-29$

이때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $f(3)>0$이어야 하므로

$k-29>0$ $\quad\therefore k>29$

따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

0606 답 ②

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2-k$로 놓으면

$f'(x)=x^3-x^2-2x=x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-k-\frac{5}{12}$	↗	$-k$	↘	$-k-\frac{8}{3}$	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$-k-\frac{8}{3}$

이때, 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이려면 $f(2)\geq 0$이어야 하므로

$-k-\frac{8}{3}\geq 0$ $\quad\therefore k\leq -\frac{8}{3}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $-\frac{8}{3}$이다.

0607 답 5

$f(x)=x^4-4k^3x+48$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4k^3=4(x-k)(x^2+kx+k^2)$

$f'(x)=0$에서 $x=k$ ($\because x^2+kx+k^2>0$)

x	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-3k^4+48$	↗

함수 $f(x)$는 $x=k$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$-3k^4+48$

이때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이려면 $f(k)\geq 0$이어야 하므로 $-3k^4+48\geq 0$, $k^4-16\leq 0$

$(k^2+4)(k+2)(k-2)\leq 0$

$(k+2)(k-2)\leq 0$ ($\because k^2+4>0$)

$\therefore -2\leq k\leq 2$

따라서 정수 k는 $-2, -1, 0, 1, 2$로 그 개수는 5이다.

유형 09 부등식 $f(x)>g(x)$ 꼴 본책 102쪽

어떤 구간에서 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립하려면
$h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때
⇨ 그 구간에서 (함수 $h(x)$의 최솟값)>0

0608 답 $a>8$

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=x^4+6x^2+a-(4x^3+8x)$

$\quad=x^4-4x^3+6x^2-8x+a$

$h'(x)=4x^3-12x^2+12x-8=4(x-2)(x^2-x+1)$

$h'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x^2-x+1>0$)

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$a-8$	↗

함수 $h(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $a-8$

이때, 모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이려면 $h(2)>0$이어야 하므로 $a-8>0$ $\quad\therefore a>8$

0609 답 ②

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=x^3+2x^2-3x+2-(2x^2+k+1)$

$\quad=x^3-3x-k+1$

$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\leq x\leq 3$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-k+1$	↘	$-k-1$	↗	$-k+19$

$0\leq x\leq 3$에서 함수 $h(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $-k-1$

이때, $h(x)\geq 0$이려면 $h(1)\geq 0$이어야 하므로

$-k-1\geq 0$ $\quad\therefore k\leq -1$

따라서 실수 k의 최댓값은 -1이다.

0610 답 $0<k<2$

$x\geq -1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으므로 $x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=x^3-3kx^2+x+10-(-x^3+x+2)$

$\quad=2x^3-3kx^2+8$

$h'(x)=6x^2-6kx=6x(x-k)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=k$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	k	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-3k+6$	↗	8	↘	$-k^3+8$	↗

이때, $x\geq -1$에서 $h(x)>0$이려면 $h(-1)>0$, $h(k)>0$이어야 하므로

$h(-1)=-3k+6>0$에서 $k<2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$h(k)=-k^3+8>0$에서

$k^3-8<0$, $(k-2)(k^2+2k+4)<0$

$\therefore k<2$ ($\because k^2+2k+4>0$) $\quad\cdots\cdots$ ㉡

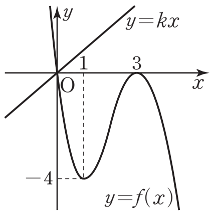
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $k<2$
따라서 양수 k의 값의 범위는 $0<k<2$

0611 답 $k>0$

$f(x)=-x^3+6x^2-9x$로 놓으면
$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	0	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때, 직선 $y=kx$의 그래프는 원점을 지나므로 $x>0$에서 $f(x)<kx$이려면
$k>0$



유형 10 속도와 가속도 본책 103쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는
⇨ $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$, $a=\dfrac{dv}{dt}=v'(t)$

0612 답 ①

점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t$
$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-12$
$6t-12=0$에서 $t=2$이므로
$t=2$일 때 점 P의 속도는
$3\cdot2^2-12\cdot2=-12$

0613 답 12

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_{P}, v_{Q}라 하면
$v_{\mathrm{P}}=\dfrac{dx_{\mathrm{P}}}{dt}=t^2+4$, $v_{\mathrm{Q}}=\dfrac{dx_{\mathrm{Q}}}{dt}=4t$
$v_{\mathrm{P}}=v_{\mathrm{Q}}$에서 $t^2+4=4t$, $(t-2)^2=0$ $\quad\therefore t=2$
$t=2$일 때 두 점 P, Q의 위치는 각각
$\dfrac{8}{3}+8-\dfrac{2}{3}=10$, $8-10=-2$
이므로 구하는 두 점 사이의 거리는
$10-(-2)=12$

0614 답 $2<t<4$

점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=t^3-9t^2+24t-5$
$a=\dfrac{dv}{dt}=3t^2-18t+24$
점 P의 속도가 감소하면 $a<0$이므로 $3t^2-18t+24<0$
$3(t-2)(t-4)<0$ $\quad\therefore 2<t<4$

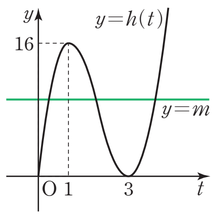
0615 답 $0<m<16$

TIP 방정식 $f(x)=k$의 실근의 부호는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=k$의 교점의 x좌표의 부호와 같다.

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_{P}, v_{Q}라 하면
$v_{\mathrm{P}}=f'(t)=4t^3-24t^2+36t$
$v_{\mathrm{Q}}=g'(t)=m$
$v_{\mathrm{P}}=v_{\mathrm{Q}}$에서 $4t^3-24t^2+36t=m$이 서로 다른 세 개의 양의 실근을 가져야 한다.
$h(t)=4t^3-24t^2+36t$로 놓으면
$h'(t)=12t^2-48t+36=12(t-1)(t-3)$
$h'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(t)$	0	↗	16	↘	0	↗

$t\geq0$에서 $y=h(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=m$의 교점이 3개이고 그 교점의 x좌표가 모두 양수이려면
$0<m<16$



유형 11 속력의 최댓값 본책 103쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속력은
⇨ (속력)$=|f'(t)|$

0616 답 ④

$f(t)=\dfrac{1}{3}t^3-4t^2+7t$로 놓으면 점 P의 속도 v는
$v=f'(t)=t^2-8t+7=(t-4)^2-9$
$0\leq t\leq5$에서 $-9\leq f'(t)\leq7$이고, 속력은 $|f'(t)|$이므로
$0\leq|f'(t)|\leq9$
따라서 점 P의 속력의 최댓값은 9이다.

0617 답 36

점 P의 속도를 v라 하면
$v=f'(t)=3t^2-12t=3(t-2)^2-12$
$0\leq t\leq6$에서 $-12\leq f'(t)\leq36$이고, 속력은 $|f'(t)|$이므로
$0\leq|f'(t)|\leq36$
따라서 점 P의 속력의 최댓값은 36이다.

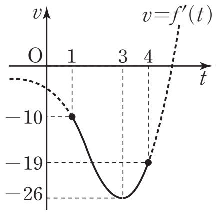
0618 답 ③

$f(t)=\dfrac{1}{4}t^4-t^3-\dfrac{9}{2}t^2+t+3$으로 놓으면 점 P의 속도 v는
$v=f'(t)=t^3-3t^2-9t+1$
$v'(t)=3t^2-6t-9=3(t+1)(t-3)$
$v'(t)=0$에서 $t=3$ ($\because 1\leq t\leq4$)

t	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$v'(t)$		$-$	0	$+$	
$v(t)$	-10	↘	-26	↗	-19

따라서 $v=f'(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $1\le t\le 4$에서

$-26\le f'(t)\le -10$



이때, 속력은 $|f'(t)|$이므로

$10\le |f'(t)|\le 26$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 $t=3$일 때 26이므로

$M=26$, $a=3$ $\quad\therefore M+a=29$

유형 12 속도·가속도와 운동 방향 본책 104쪽

(1) 수직선 위를 움직이는 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이다.

(2) 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면
⇨ (두 점의 속도의 곱)<0

0619 답 ④

점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=2$ ($\because t\ge 0$)

$t=2$일 때 점 P의 위치는 원점, 즉 0이므로

$0=8-24+k$ $\quad\therefore k=16$

0620 답 -2

점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+4t-1=-(3t-1)(t-1)$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=\dfrac{1}{3}$ 또는 $t=1$

즉, 점 P는 $t=\dfrac{1}{3}$일 때 첫 번째로 운동 방향을 바꾸고, $t=1$일 때 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=-6t+4$

따라서 $t=1$일 때 점 P의 가속도는

$-6+4=-2$

0621 답 $\dfrac{1}{2}<t<4$

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=f'(t)=4t-2$

$v_Q=g'(t)=2t-8$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

$(4t-2)(2t-8)<0$ $\quad\therefore \dfrac{1}{2}<t<4$

0622 답 -8

$t=3$일 때 점 P의 위치가 -5이므로

$27+9a+3b+4=-5$ $\quad\therefore 3a+b=-12$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2+2at+b$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$t=3$일 때 $v=0$, 즉 $0=27+6a+b$

$\therefore 6a+b=-27$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=3$

따라서 $v=3t^2-10t+3=(3t-1)(t-3)$이므로

$v=0$에서 $t=\dfrac{1}{3}$ 또는 $t=3$

점 P의 가속도는 $\dfrac{dv}{dt}=6t-10$이므로

$t=\dfrac{1}{3}$일 때 점 P의 가속도는 $2-10=-8$

유형 13 속도의 그래프가 주어진 경우 본책 104쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프에서

(1) $y=v(t)$의 그래프가 t축과 $t=a$에서 만나고 $t=a$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌면 ⇨ 점 P는 $t=a$일 때 운동 방향을 바꾼다.

(2) $y=v(t)$의 그래프가 증가하는 구간
⇨ 점 P의 가속도는 양의 값이다.

(3) $y=v(t)$의 그래프가 감소하는 구간
⇨ 점 P의 가속도는 음의 값이다.

0623 답 ①

ㄱ. 점 P의 가속도는 $v'(t)$이고, $3<t<5$일 때 $v'(t)=2$이므로 가속도는 일정하다.

ㄴ. $t=2$, $t=4$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
따라서 $0<t<7$에서 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다.

ㄷ. $5<t<6$일 때 $v(t)>0$이므로 점 P는 움직이고 있다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

0624 답 ③

① $t=a$일 때, $v'(a)>0$이므로 속도가 증가하고 있다.

② $t=b$일 때, $v'(b)<0$이므로 속도가 감소하고 있다.

③ $t=c$일 때, $v'(c)<0$이므로 가속도는 음의 값이다.

④ $t=d$일 때, $v'(d)>0$이므로 가속도는 양의 값이다.

⑤ $t>e$일 때, $v(t)>0$이므로 출발할 때와 같은 양의 방향으로 움직인다.

유형 14 정지하는 물체의 움직인 거리 본책 105쪽

어떤 열차가 제동을 건 후 t초 동안 움직인 거리를 x m라 하면

(1) 제동을 건 지 t초 후의 속도 ⇨ $\dfrac{dx}{dt}$

(2) 열차가 정지할 때의 속도 ⇨ 0

0625 답 ④

자동차의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=30-2t$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$30-2t=0 \qquad \therefore t=15$

따라서 자동차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$30\cdot15-15^2=225\ (\mathrm{m})$

0626 답 ③

기차의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=16-0.8t$

기차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$16-0.8t=0 \qquad \therefore t=20$

따라서 기차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$16\cdot20-0.4\cdot20^2=160\ (\mathrm{m})$

따라서 목적지로부터 전방 160 m의 지점에서 제동을 걸어야 한다.

$\therefore a=160$

0627 답 $20\sqrt{2}$

기차의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=a-0.8t$

기차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$a-0.8t=0 \qquad \therefore t=\dfrac{5}{4}a$

이때, 기차가 멈출 때까지 움직인 거리는

$x=\dfrac{5}{4}a^2-0.4\left(\dfrac{5}{4}a\right)^2=\dfrac{5}{8}a^2$

그런데 $\dfrac{5}{8}a^2\le500$이어야 하므로 $a^2\le800$

$a^2-800\le0,\ (a+20\sqrt{2})(a-20\sqrt{2})\le0$

$\therefore -20\sqrt{2}\le a\le20\sqrt{2}$

따라서 a의 최댓값은 $20\sqrt{2}$이다.

유형 15 위로 던진 물체의 위치와 속도 본책 105쪽

지면에서 똑바로 위로 던진 물체의 t초 후의 높이를 h m라 하면

(1) t초 후의 물체의 속도 ⇨ $\dfrac{dh}{dt}$

(2) 물체가 최고 지점에 도달했을 때의 속도 ⇨ 0

0628 답 ④

공의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=40-10t$

공이 최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$40-10t=0 \qquad \therefore t=4$

따라서 4초 후 이 공의 지면으로부터의 높이는

$40\cdot4-5\cdot4^2=80\ (\mathrm{m})$

0629 답 2.5초

물체의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=24.5-9.8t$

물체가 최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$24.5-9.8t=0 \qquad \therefore t=2.5$

따라서 물체는 2.5초 후에 최고 지점에 도달한다.

0630 답 30 m/s

물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0 m이므로 $h=0$에서

$25+20t-5t^2=0,\ -5(t-5)(t+1)=0$

$\therefore t=5\ (\because t>0)$

물체의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=20-10t$

$t=5$일 때 물체의 속도는

$20-10\cdot5=-30\ (\mathrm{m/s})$

따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속력은 30 m/s이다.

0631 답 60

물체의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=a-10t$

물체가 최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$a-10t=0 \qquad \therefore t=\dfrac{a}{10}$

즉, $t=\dfrac{a}{10}$일 때 물체의 높이가 최대가 되므로

$a\cdot\dfrac{a}{10}-5\left(\dfrac{a}{10}\right)^2\ge180,\ a^2\ge3600$

$a^2-3600\ge0,\ (a+60)(a-60)\ge0 \qquad \therefore a\ge60\ (\because a>0)$

따라서 상수 a의 최솟값은 60이다.

유형 16 위치의 그래프가 주어진 경우 본책 106쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$의 그래프에서

(1) $x'(t)>0$인 구간 ⇨ 점 P의 속도는 양의 값이다.

(2) $x'(t)=0$일 때 ⇨ 점 P의 속도는 0이다.

(3) $x'(t)<0$인 구간 ⇨ 점 P의 속도는 음의 값이다.

0632 답 ③

① $t=1$의 좌우에서 $x'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 운동 방향이 바뀐다.

② t의 값이 1, 2, 3, 5, 6, 7일 때 운동 방향이 바뀐다.

③ 1초와 2초, 3초와 4초 사이에 점 P는 수직선의 음의 방향으로 움직인다.

④ $t=5$일 때의 위치와 $t=7$일 때의 위치는 -3으로 같다.

⑤ $x'(2)=0,\ x'(4)<0$이므로 $|x'(2)|<|x'(4)|$

따라서 $t=4$일 때의 속력이 $t=2$일 때의 속력보다 빠르다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

6 도함수의 활용 (3)

0633 답 b

$t=b$와 $t=d$의 좌우에서 $x'(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 처음으로 바뀐 시각은 $t=b$이다.

0634 답 $\frac{10}{3}$

$x(t)$는 t에 대한 삼차식이고 $x(t)$의 그래프가 t축과 만나는 점의 t좌표가 각각 0, 4, 6이므로

$x(t)=kt(t-4)(t-6)=kt^3-10kt^2+24kt\ (k>0)$

로 놓을 수 있다.

점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=x'(t)=3kt^2-20kt+24k$

$a=\frac{dv}{dt}=6kt-20k$

따라서 가속도가 0이 되는 시각은 $a=0$에서

$6kt-20k=0 \qquad \therefore t=\frac{10}{3}$

0635 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$x(t)$는 t에 대한 삼차식이고 $x(t)$의 그래프가 t축과 만나는 점의 t좌표가 각각 0, 6이므로

$x(t)=kt(t-6)^2\ (k>0)$

으로 놓을 수 있다.

이때, $x(2)=\frac{32}{3}$에서 $\frac{32}{3}=2k\cdot(-4)^2 \qquad \therefore k=\frac{1}{3}$

$\therefore x(t)=\frac{1}{3}t(t-6)^2=\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t$

점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=x'(t)=t^2-8t+12$

$a=\frac{dv}{dt}=2t-8$

ㄱ. $t=0$일 때 $v=12$이므로 점 P의 출발할 때의 속도는 12이다.

ㄴ. $t=3$일 때 $a=6-8=-2$이므로 점 P의 가속도는 -2이다.

ㄷ. $x(8)=\frac{1}{3}\cdot8\cdot(8-6)^2=\frac{32}{3}$에서 $x(2)=x(8)$이므로 점 P의 $t=2$일 때의 위치와 $t=8$일 때의 위치는 서로 같다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

유형 17 시각에 대한 길이의 변화율

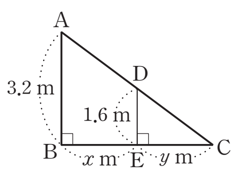
본책 106쪽

어떤 물체의 시각 t에서의 길이가 l일 때, 시각 t에서의 길이의 변화율을 구하려면

⇨ t초 후의 길이에 대한 관계식을 세운 후 변화율 $\frac{dl}{dt}$에 주어진 조건을 만족시키는 t의 값을 대입한다.

0636 답 1.5 m/s

t초 동안 사람이 움직인 거리를 x m, 사람의 그림자의 길이를 y m라 하면 오른쪽 그림에서 △ABC∽△DEC이므로



$3.2:1.6=(x+y):y$

$3.2y=1.6x+1.6y,\ 1.6y=1.6x$

$\therefore y=x$

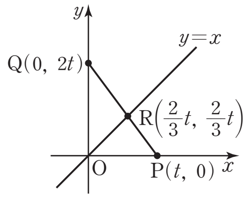
그런데 $x=1.5t$이므로

$y=1.5t \qquad \therefore \frac{dy}{dt}=1.5$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 1.5 m/s이다.

0637 답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 P$(t,\ 0)$, Q$(0,\ 2t)$이므로 직선 PQ의 방정식은



$y-2t=\frac{-2t}{t}x$

$\therefore y=-2x+2t$

이때, 직선 PQ와 직선 $y=x$의 교점 R의 x좌표는 $-2x+2t=x$에서

$x=\frac{2}{3}t \qquad \therefore \mathrm{R}\left(\frac{2}{3}t,\ \frac{2}{3}t\right)$

선분 OR의 길이를 l이라 하면

$l=\sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{2}{3}t\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}t \qquad \therefore \frac{dl}{dt}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 선분 OR의 길이의 변화율은 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

유형 18 시각에 대한 넓이의 변화율

본책 107쪽

어떤 물체의 시각 t에서의 넓이가 S일 때, 시각 t에서의 넓이의 변화율을 구하려면

⇨ t초 후의 넓이에 대한 관계식을 세운 후 변화율 $\frac{dS}{dt}$에 주어진 조건을 만족시키는 t의 값을 대입한다.

0638 답 ③

t초 후의 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이는 $0.5t$이므로 원의 넓이를 $S\ \mathrm{m}^2$라 하면

$S=\pi(0.5t)^2=0.25\pi t^2 \qquad \therefore \frac{dS}{dt}=0.5\pi t$

따라서 $t=6$일 때 원의 넓이의 변화율은

$0.5\pi\cdot6=3\pi\ (\mathrm{m}^2/\mathrm{s})$

0639 답 ②

t초 후의 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이는 각각 $10-t$, $10+4t$이고, $\angle\mathrm{B}=60°$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\sin 60°$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(10-t)(10+4t)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(-4t^2+30t+100)$

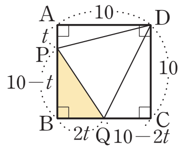
$\therefore \frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{4}(-8t+30)$

따라서 $t=3$일 때 삼각형 ABC의 넓이의 변화율은

$\frac{\sqrt{3}}{4}(-24+30)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

0640 답 8

t초 후에 $\overline{AP}=t$, $\overline{BQ}=2t$이므로



$\overline{PB}=10-t$, $\overline{QC}=10-2t$

t초 후의 사각형 DPBQ의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\square ABCD-\triangle APD-\triangle CQD$

$=100-\frac{1}{2}\cdot 10t-\frac{1}{2}\cdot 10(10-2t)$

$=50+5t$

그런데 S_1이 사각형 ABCD의 넓이의 $\frac{11}{20}$배가 되려면

$50+5t=\frac{11}{20}\cdot 100=55 \qquad \therefore t=1$

t초 후의 삼각형 PBQ의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot 2t(10-t)=-t^2+10t$

$\therefore \frac{dS}{dt}=-2t+10$

따라서 $t=1$일 때 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은

$-2+10=8$

유형 19 **시각에 대한 부피의 변화율** 본책 107쪽

어떤 물체의 시각 t에서의 부피가 V일 때, 시각 t에서의 부피의 변화율을 구하려면

⇨ t초 후의 부피에 대한 관계식을 세운 후 변화율 $\frac{dV}{dt}$에 주어진 조건을 만족시키는 t의 값을 대입한다.

0641 답 ④

t초 후의 고무풍선의 반지름의 길이는 $3+t$이므로 고무풍선의 부피를 $V\text{ cm}^3$라 하면

$V=\frac{4}{3}\pi(3+t)^3$

$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\cdot 3(3+t)^2=4\pi(3+t)^2$

따라서 $t=3$일 때 고무풍선의 부피의 변화율은

$4\pi\cdot 6^2=144\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$

0642 답 45

t초 후의 가로, 세로의 길이는 각각 $10+2t$, 높이는 $20+t$이므로 이 직육면체가 정육면체가 되는 순간은

$10+2t=20+t \qquad \therefore t=10$

직육면체의 부피를 $V\text{ cm}^3$라 하면

$V=(10+2t)^2(20+t)$

$\therefore \frac{dV}{dt}=4(10+2t)(20+t)+(10+2t)^2$

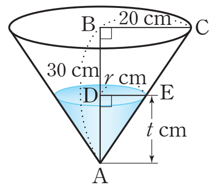
따라서 $t=10$일 때 직육면체의 부피의 변화율은

$a=4\cdot 30^2+30^2=4500$

$\therefore \frac{a}{100}=45$

0643 답 ⑤

t초 후의 수면의 높이는 t cm이고 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$이므로 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$30:20=t:r$, $30r=20t$

$\therefore r=\frac{2}{3}t$

물의 부피를 $V\text{ cm}^3$라 하면

$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{2}{3}t\right)^2\cdot t=\frac{4}{27}\pi t^3$

$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{4}{9}\pi t^2$

따라서 $t=6$일 때 물의 부피의 변화율은

$\frac{4}{9}\pi\cdot 6^2=16\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$

STEP 3 | 심화 Master

0644 답 13

TIP $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 실수 t에 대하여 실근의 개수가 일정하므로 함수 $f(x)$는 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.

$f(x)=-2x^3+ax^2-6x+5$라 하면 방정식

$-2x^3+ax^2-6x+5=t$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같다. 이때, 함수 $f(x)$의 극값이 존재하면 $y=t$가 $f(x)$의 극점을 지날 때 함수 $g(t)$의 불연속점이 생기므로 함수 $g(t)$가 연속이려면 최고차항이 음수인 함수 $f(x)$가 극점을 갖지 않는 감소함수이어야 한다.

즉, $f'(x)=-6x^2+2ax-6\le 0$이어야 한다.

이차방정식 $-6x^2+2ax-6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-36\le 0$, $(a+6)(a-6)\le 0$

$\therefore -6\le a\le 6$

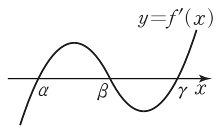
따라서 구하는 정수 a의 개수는 13이다.

참고 $-6\le a\le 6$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점은 항상 1개이므로 $g(t)=1$이다.

0645 답 ③

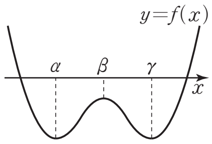
TIP 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 알아본다.

ㄱ. 삼차방정식 $f'(x)=0$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

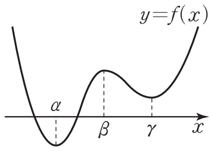


이때, $x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.

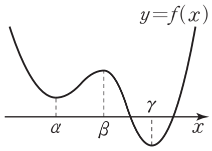
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 보면
$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$에서
(ⅰ) $f(\alpha)<0$, $f(\beta)<0$, $f(\gamma)<0$일 때



(ⅱ) $f(\alpha)<0$, $f(\beta)>0$, $f(\gamma)>0$일 때



(ⅲ) $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$, $f(\gamma)<0$일 때

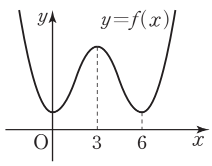


따라서 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. $f(\alpha)>0$이면 $f(\beta)>0$, $f(\gamma)<0$이므로 ㄴ의 (ⅲ)과 같다. 즉, 방정식 $f(x)=0$은 β보다 큰 실근을 2개 갖는다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

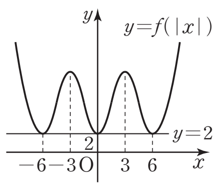
0646 답 83

TIP 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 알아본 후 함수식을 구한다.

사차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 모든 실수 x에 대하여 $f(3+x)=f(3-x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=3$에 대하여 대칭이다.
이때, $f(0)<f(3)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축 대칭인 함수의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것과 같으므로



$f(x)=(x-3)^4+a(x-3)^2+b$ (a, b는 상수)
로 놓을 수 있다.
방정식 $f(|x|)=2$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극솟값 2를 갖고 $x=3$에서 극댓값을 가져야 한다.



$f(0)=f(6)=2$에서
$81+9a+b=2$ ...... ㉠
$f'(x)=4(x-3)^3+2a(x-3)$이고 $f'(0)=f'(6)=0$에서
$108+6a=0$ $\quad\therefore a=-18$
$a=-18$을 ㉠에 대입하면 $b=83$
따라서 $f(x)=(x-3)^4-18(x-3)^2+83$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(3)=83$이다.

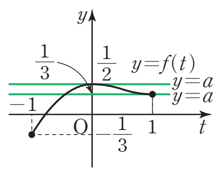
0647 답 $\frac{1}{3}\le a<\frac{1}{2}$

TIP 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

$\frac{1}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta-a=0$에서
$\frac{1}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta)-a=0$
$\therefore \frac{1}{3}\cos^3\theta-\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}=a$ ...... ㉠
$\cos\theta=t$라 하면 $-1\le\cos\theta\le1$에서 $-1\le t\le1$
이때, $f(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$로 놓으면
$f'(t)=t^2-t=t(t-1)$
$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	$-\frac{1}{3}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{1}{3}$

이때, 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $-1\le t\le1$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 구하는 실수 a의 값의 범위는

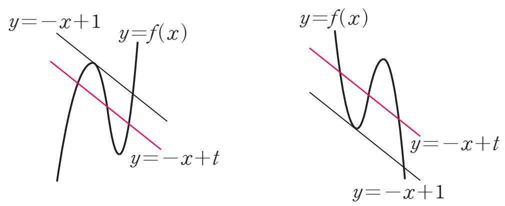


$\frac{1}{3}\le a<\frac{1}{2}$

0648 답 ③

TIP 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수와 같음을 이용한다.

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$는 한 점에서 만나므로
$g(t)=1$
따라서 함수 $g(t)$는 상수함수이다.
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+1$의 교점의 개수가 2인 경우는 다음과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수가 3, 즉 $g(t)=3$인 t가 존재한다.
ㄷ. 주어진 명제의 대우는 '삼차함수 $f(x)$의 극값이 존재하면 함수 $g(t)$는 상수함수가 아니다.'
[반례] $f(x)=x^3-x$이면 $f'(x)=3x^2-1$이고 함수 $f(x)$의 극값이 존재한다.
이때, $x^3-x=-x+t$에서 $x^3=t$이고, $y=x^3$의 그래프와 직선 $y=t$는 t의 값에 관계없이 항상 한 점에서 만나므로 $g(t)=1$로

상수함수이다.

따라서 대우가 거짓이므로 주어진 명제도 거짓이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0649 답 99번

TIP 두 점 P, Q가 움직인 거리의 차가 4의 배수일 때, 두 점이 만난다.

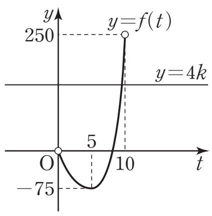
$f(t)=t^3-7t^2-5t$로 놓으면

$f'(t)=3t^2-14t-5=(3t+1)(t-5)$

$f'(t)=0$에서 $t=5$ ($\because 0<t<10$)

t	0	$\cdots$	5	$\cdots$	10
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	-75	↗	

이때, 오른쪽 그림에서 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=4k$ (k는 정수)의 교점은 $k=-1, -2, \cdots, -18$일 때 2개씩, $k=0, 1, \cdots, 62$일 때 1개씩 존재하므로 $0<t<10$에서 두 점 P, Q는 $18\cdot2+63=99$(번) 만난다.



0650 답 1

TIP 구간 $(a,\ b)$에서 증가하는 함수 $f(x)$가 $f(x)>k$이려면 $f(a)\ge k$임을 이용한다.

$nx^{n+1}-2\sum_{k=1}^{n}kx>-\sum_{k=1}^{n}k^2$에서

$nx^{n+1}-n(n+1)x>-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$nx^{n+1}-n(n+1)x+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}>0$

$\therefore x^{n+1}-(n+1)x+\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}>0$

$f(x)=x^{n+1}-(n+1)x+\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$로 놓으면

$f'(x)=(n+1)x^n-(n+1)$

$\quad=(n+1)(x^n-1)$

이때, $x>1$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 주어진 구간에서 증가한다.

$x>1$에서 $f(x)>0$이려면 $f(1)\ge0$이어야 하므로

$1-(n+1)+\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}\ge0$

$6-6n-6+2n^2+3n+1\ge0$

$2n^2-3n+1\ge0$, $(n-1)(2n-1)\ge0$

$\therefore n\ge1$ ($\because n$은 자연수)

따라서 자연수 n의 최솟값은 1이다.

0651 답 -36

TIP ($f(x)$의 최솟값)$\ge$($g(x)$의 최댓값)이어야 한다.

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\ge g(x_2)$이려면 ($f(x)$의 최솟값)$\ge$($g(x)$의 최댓값)이어야 한다.

$f'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 2x^2+2x+3>0$)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 -4이다.

한편,

$g(x)=-2x^2-16x+a$

$\quad=-2(x+4)^2+a+32\le a+32$

이므로 함수 $g(x)$의 최댓값은 $a+32$이다.

즉, $-4\ge a+32$에서 $a\le-36$

따라서 실수 a의 최댓값은 -36이다.

0652 답 ⑤

TIP $g(x)=f(x)-f'(x)$로 놓고 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 알아본 후 함수식을 구한다.

조건 (가)에 의하여 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (나)에서 $f(0)=f'(0)$이므로 $c=b$

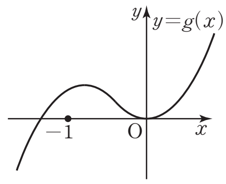
$\therefore f(x)=x^3+ax^2+bx+b$

$g(x)=f(x)-f'(x)$로 놓으면

$g(x)=x^3+ax^2+bx+b-(3x^2+2ax+b)$

$\quad=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$

이때, $g(0)=f(0)-f'(0)=0$이고, 조건 (다)에서 $x\ge-1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge0$이므로 오른쪽 그림과 같이 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가진다.



따라서 $g'(0)=0$이므로

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$에서

$b-2a=0 \qquad \therefore b=2a$

$\therefore g(x)=x^3+(a-3)x^2$

이때, $g(-1)\ge0$이어야 하므로

$-1+a-3\ge0 \qquad \therefore a\ge4$

따라서 $f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$에서

$f(2)=8+4a+4a+2a=10a+8\ge48$

이므로 $f(2)$의 최솟값은 48이다.

0653 답 ②

TIP 가속도를 나타내는 그래프는 속도를 나타내는 그래프의 도함수의 그래프이다.

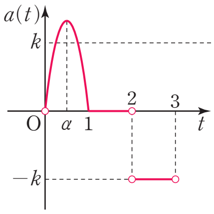
$a(t)=v'(t)$이므로 가속도 $a(t)$를 나타내는 그래프는 주어진 그래프의 도함수의 그래프이다.

$0<t\le1$일 때, $v'(t)$는 증가하다가 감소하고 $t=\alpha$ $(0<\alpha<1)$에서 $v'(t)$의 값이 최대라고 하면 $x=\alpha$에서의 접선의 기울기는 k보다 크다.

$1\le t<2$일 때, $v(t)=k$이므로 $v'(t)=0$

$2<t<3$일 때, $v(t)=-kt+3k$이므로 $v'(t)=-k$

따라서 $v'(t)$를 나타내는 그래프, 즉 가속도 $a(t)$를 나타내는 그래프의 개형은 ②와 같다.



0654 답 ③

TIP 수직선 위를 움직이는 점이 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0임을 이용한다.

점 M의 좌표를 x_3이라 하면

$$x_3=\frac{(2t^3-9t^2)+(t^2+8t)}{2}=t^3-4t^2+4t$$

세 점 P, Q, M의 속도를 각각 v_1, v_2, v_3이라 하면

$v_1=6t^2-18t=6t(t-3)$

$v_2=2t+8=2(t+4)$

$v_3=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$

움직이는 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v_1=0$에서 $t=3$이므로 $a=1$

$v_2>0$이므로 $v_2=0$의 해는 없다. $\quad \therefore b=0$

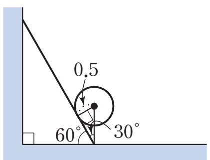
$v_3=0$에서 $t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=2$이므로 $c=2$

$\therefore a+b+c=3$

0655 답 -30

TIP 공이 경사면과 처음으로 충돌하는 순간은 공과 경사면이 접할 때임을 이용한다.

공이 경사면과 처음으로 충돌하는 순간은 오른쪽 그림과 같으므로 이때의 바닥으로부터 공의 중심까지의 높이를 x m라 하면



$\sin 30^\circ=\frac{0.5}{x} \qquad \therefore x=1$

$x=1$일 때 $1=46-5t^2$에서

$t^2-9=0$, $(t+3)(t-3)=0 \qquad \therefore t=3$ ($\because t>0$)

공의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=-10t$$

따라서 $t=3$일 때 공의 속도는

$-10\cdot3=-30$ (m/s)

$\therefore a=-30$

0656 답 15

TIP t초 후의 $\overline{BP}$, $\overline{BQ}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸 후 $\overline{PQ}^2$의 변화율을 구한다.

t초 후에 $\overline{DP}=t$, $\overline{CQ}=2t$이므로

$\overline{BP}=6\sqrt{2}-t$, $\overline{BQ}=6+2t$

이때, $\angle PBQ=\angle DBC=45^\circ$이므로 $\overline{PQ}^2=l$이라 하면

코사인법칙에 의하여

$$l=(6\sqrt{2}-t)^2+(6+2t)^2-2(6\sqrt{2}-t)(6+2t)\cos 45^\circ$$
$$=(6\sqrt{2}-t)^2+(6+2t)^2-\sqrt{2}(6\sqrt{2}-t)(6+2t)$$

$$\therefore \frac{dl}{dt}=-2(6\sqrt{2}-t)+4(6+2t)+\sqrt{2}(6+2t)-2\sqrt{2}(6\sqrt{2}-t)$$
$$=(10+4\sqrt{2})t-6\sqrt{2}$$

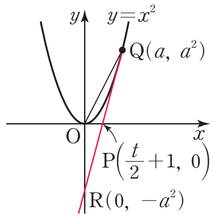
따라서 $t=1.5$일 때 $\overline{PQ}^2$의 변화율은

$1.5(10+4\sqrt{2})-6\sqrt{2}=15$

0657 답 24

TIP t초 후의 두 점 Q, R의 좌표를 t에 대한 식으로 나타낸다.

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 접점 Q의 좌표를 $(a,\ a^2)$이라 할 때 점 Q에서의 접선의 방정식은



$y-a^2=2a(x-a) \qquad \therefore y=2ax-a^2$

$\therefore R(0,\ -a^2)$

그런데 이 직선이 점 $P\left(\frac{t}{2}+1,\ 0\right)$을 지나므로

$0=2a\left(\frac{t}{2}+1\right)-a^2$, $a(t+2-a)=0$

$\therefore a=t+2$ ($\because a\neq0$)

따라서 두 점 Q, R의 좌표는 각각

$Q(t+2,\ (t+2)^2)$, $R(0,\ -(t+2)^2)$

이므로 삼각형 OQR의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}(t+2)^2\cdot(t+2)=\frac{1}{2}(t+2)^3$$

$$\therefore \frac{dS}{dt}=\frac{3}{2}(t+2)^2$$

따라서 $t=2$일 때 삼각형 OQR의 넓이의 변화율은

$\frac{3}{2}(2+2)^2=24$

0658 답 0

TIP 시각 t에서의 넓이가 S일 때 넓이의 변화율은 $\frac{dS}{dt}$이다.

점 P의 위치에 따른 삼각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

(i) $0\le t<2$일 때, $\overline{BP}=t$이므로

$\quad S(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BP}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot t=t$

$\quad$즉, $v(t)=S'(t)=1$

(ii) $2\le t<4$일 때, 삼각형 PAB의 높이는 2로 일정하므로

$\quad S(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot(\text{높이})=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$

$\quad$즉, $v(t)=S'(t)=0$

(iii) $4\le t<6$일 때, $\overline{AP}=6-t$이므로

$\quad S(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AP}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot(6-t)=6-t$

$\quad$즉, $v(t)=S'(t)=-1$

따라서

$$v(t)=\begin{cases}1 & (0\le t<2)\\ 0 & (2\le t<4)\\ -1 & (4\le t<6)\end{cases}$$

$\therefore v(1)+v(3)+v(5)=1+0+(-1)=0$

7 | 부정적분

본책 112쪽~122쪽

STEP 1 | 기초 Build

0659 답 $f(x)=6x+5$

$f(x)=(3x^2+5x+C)'=6x+5$

0660 답 $f(x)=-3x+4$

$f(x)=\left(-\frac{3}{2}x^2+4x+C\right)'=-3x+4$

0661 답 $f(x)=3x^2-2x+2$

$f(x)=(x^3-x^2+2x+C)'=3x^2-2x+2$

0662 답 $f(x)=-6x^2+6x$

$f(x)=(-2x^3+3x^2+C)'=-6x^2+6x$

0663 답 $f(x)=x^3+x^2+x+1$

$f(x)=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C\right)'=x^3+x^2+x+1$

0664 답 x^3-2x

$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$이므로

$\frac{d}{dx}\int (x^3-2x)dx=x^3-2x$

0665 답 x^3-2x+C

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3-2x)\right\}dx=x^3-2x+C$

0666 답 $3x+C$

$\int 3dx=3x+C$

0667 답 $\frac{1}{8}x^8+C$

$\int x^7dx=\frac{1}{8}x^8+C$

0668 답 $\frac{1}{201}x^{201}+C$

$\int x^{200}dx=\frac{1}{201}x^{201}+C$

0669 답 $\frac{1}{6}x^6+C$

$\int x^2\cdot x^3dx=\int x^5dx=\frac{1}{6}x^6+C$

0670 답 $\frac{1}{7}x^7+C$

$\int (x^2)^3dx=\int x^6dx=\frac{1}{7}x^7+C$

0671 답 x^2+4x+C

$$\begin{aligned}\int(2x+4)dx&=\int 2xdx+\int 4dx\\&=2\int xdx+\int 4dx\\&=x^2+4x+C\end{aligned}$$

0672 답 x^4-5x^2+5x+C

$$\begin{aligned}\int(4x^3-10x+5)dx&=\int 4x^3dx-\int 10xdx+\int 5dx\\&=4\int x^3dx-10\int xdx+\int 5dx\\&=x^4-5x^2+5x+C\end{aligned}$$

0673 답 x^3-x^2-x+C

$$\begin{aligned}\int(x-1)(3x+1)dx&=\int(3x^2-2x-1)dx\\&=\int 3x^2dx-\int 2xdx-\int 1dx\\&=3\int x^2dx-2\int xdx-\int 1dx\\&=x^3-x^2-x+C\end{aligned}$$

0674 답 $\frac{1}{4}x^4-x+C$

$$\begin{aligned}\int(x-1)(x^2+x+1)dx&=\int(x^3-1)dx\\&=\int x^3dx-\int 1dx\\&=\frac{1}{4}x^4-x+C\end{aligned}$$

0675 답 $6x^2+C$

$\int(3x+1)^2dx-\int(3x-1)^2dx$

$=\int(9x^2+6x+1)dx-\int(9x^2-6x+1)dx$

$=\int 12xdx=12\int xdx=6x^2+C$

0676 답 $\frac{1}{2}x^2-x+C$

$\int\frac{x^2}{x+1}dx-\int\frac{1}{x+1}dx$

$=\int\frac{x^2-1}{x+1}dx=\int(x-1)dx$

$=\int xdx-\int 1dx$

$=\frac{1}{2}x^2-x+C$

0677 답 $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

$\int\frac{x^3}{x-1}dx-\int\frac{1}{x-1}dx$

$=\int\frac{x^3-1}{x-1}dx=\int(x^2+x+1)dx$

$=\int x^2dx+\int xdx+\int 1dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

7 부정적분

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 부정적분의 정의 본책 114쪽

함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$이다.
$\Longleftrightarrow F'(x)=f(x)$
$\Longleftrightarrow F(x)$는 $f(x)$의 부정적분이다.
$\Longleftrightarrow \int f(x)dx=F(x)+C$ (단, C는 적분상수)

0678 답 4

$\int(x-1)f(x)dx=x^3-x^2-x+C$에서
$(x-1)f(x)=(x^3-x^2-x+C)'=3x^2-2x-1$
$=(3x+1)(x-1)$
따라서 $f(x)=3x+1$이므로 $f(1)=4$

0679 답 13

$F(x)=2x^3-3x^2+x-2$로 놓으면
$f(x)=F'(x)=(2x^3-3x^2+x-2)'=6x^2-6x+1$
$\therefore f(2)=24-12+1=13$

0680 답 $-\frac{1}{3}$

$\int f(x)dx=F(x)$에서
$f(x)=F'(x)=3x^2+2x+k$
$f(1)=-1$이므로 $3+2+k=-1$ $\therefore k=-6$
이때, $f(a)=-5$에서 $3a^2+2a-6=-5$
$3a^2+2a-1=0$, $(3a-1)(a+1)=0$
$\therefore a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=-1$
따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 $-\frac{1}{3}$이다.

0681 답 ①

$f(x)=F'(x)=(8x^3+ax^2+bx+4)'=24x^2+2ax+b$
이므로 $f(0)=-2$에서 $b=-2$
$f'(x)=48x+2a$이므로 $f'(1)=24$에서
$48+2a=24$ $\therefore a=-12$
$\therefore a+b=-14$

유형 02 부정적분과 미분의 관계 ; $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$ 본책 114쪽

$F'(x)=f(x)$일 때, $\int f(x)dx=F(x)+C$이므로
⇨ $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=\frac{d}{dx}\{F(x)+C\}=f(x)$

0682 답 ③

$F(x)=\frac{d}{dx}\int(x-3)f(x)dx=(x-3)f(x)$
$=(x-3)(x^2+3x+1)$
$\therefore F(-2)=-5(4-6+1)=5$

0683 답 ②

$\frac{d}{dx}\int(ax^3+bx+4)dx=ax^3+bx+4$이므로
$ax^3+bx+4=2x^3+4x+c$
따라서 $a=2$, $b=4$, $c=4$이므로
$a-b+c=2$

0684 답 5

$\log_x\left(\frac{d}{dx}\int x^5dx\right)=\log_x x^5=5$이므로
$5=x^3-5x^2-x+10$에서
$x^3-5x^2-x+5=0$, $(x+1)(x-1)(x-5)=0$
$\therefore x=5$ ($\because x>0$, $x\neq1$)
따라서 구하는 근은 5이다.

Lecture
로그의 정의
$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때
$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

유형 03 부정적분과 미분의 관계 ; $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ 본책 115쪽

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=\int f'(x)dx=f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

0685 답 7

$F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x-1)(x^2+1)\right\}dx=(x-1)(x^2+1)+C$이고
$F(1)=2$에서 $C=2$
따라서 $F(x)=(x-1)(x^2+1)+2$이므로
$F(2)=5+2=7$

0686 답 4

$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$이므로
$g(x)=x^2-4x$
$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로
$h(x)=x^2-4x+C$
$h(0)=3$이므로 $C=3$
따라서 $h(x)=x^2-4x+3$이므로
$g(2)+h(-1)=-4+8=4$

0687 답 8

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-6x)\right\}dx=x^2-6x+C$
조건 (나)에서 $\log_{\frac{1}{2}}f(x)$가 최댓값 -2를 가지려면 $f(x)$는 최솟값 4를 가져야 한다.
$f(x)=x^2-6x+C=(x-3)^2+C-9$
에서 $f(x)$는 $x=3$일 때 최솟값 $C-9$를 가지므로
$C-9=4$ $\therefore C=13$
따라서 $f(x)=x^2-6x+13$이므로
$f(1)=1-6+13=8$

0688 답 5051

$$\int\left[\frac{d}{dx}\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx$$
$$=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$$
$$=\int f'(x)dx$$
$$=f(x)+C_2$$

이므로

$F(x)=100x^{100}+99x^{99}+\cdots+2x^2+x+C_2$

이때, $F(0)=1$이므로 $C_2=1$

따라서 $F(x)=100x^{100}+99x^{99}+\cdots+2x^2+x+1$이므로

$F(1)=100+99+\cdots+2+1+1$

$=\frac{100\cdot101}{2}+1=5051$

유형 04 부정적분의 계산 본책 115쪽

(1) m, n이 음이 아닌 정수일 때

$$\int x^n dx+\int x^m dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\frac{1}{m+1}x^{m+1}+C$$

(단, C는 적분상수)

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 두 상수 k, l에 대하여

$$\int\{kf(x)\pm lg(x)\}dx=k\int f(x)dx\pm l\int g(x)dx$$ (복호동순)

0689 답 $\frac{7}{3}$

$$f(x)=\int\frac{x^4+1}{x+1}dx+\int\left(-\frac{2}{x+1}\right)dx$$
$$=\int\frac{x^4-1}{x+1}dx$$
$$=\int\frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{x+1}dx$$
$$=\int(x-1)(x^2+1)dx$$
$$=\int(x^3-x^2+x-1)dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C$$

이때, $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+1$이므로

$f(2)=4-\frac{8}{3}+2-2+1=\frac{7}{3}$

0690 답 π

$$f(x)=\int(\sin x+\cos x)^2dx+\int(\sin x-\cos x)^2dx$$
$$=\int(1+2\sin x\cos x)dx+\int(1-2\sin x\cos x)dx$$
$$=\int2dx=2x+C$$

이때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\pi$이므로 $\pi+C=3\pi$ $\quad\therefore C=2\pi$

따라서 $f(x)=2x+2\pi$이므로

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$

0691 답 $\frac{50}{51}$

$f(x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{50}x^{50}$이므로

$$F(x)=\int f(x)dx$$
$$=\frac{1}{1\cdot2}x^2+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1}{3\cdot4}x^4+\cdots+\frac{1}{50\cdot51}x^{51}+C$$

이때, $F(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $F(x)=\frac{1}{1\cdot2}x^2+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1}{3\cdot4}x^4+\cdots+\frac{1}{50\cdot51}x^{51}$

이므로

$$F(1)=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{50\cdot51}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{51}\right)$$
$$=1-\frac{1}{51}=\frac{50}{51}$$

0692 답 ①

$$f_n(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$$
$$=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+C$$

이때, $f_n(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f_5(x)=x+x^2+x^3+x^4+x^5+1$,

$f_3(x)=x+x^2+x^3+1$이므로

$f_5(x)-f_3(x)=x^4+x^5$

$\therefore f_5(-2)-f_3(-2)=(-2)^4+(-2)^5$

$=16-32$

$=-16$

유형 05 $f'(x)$가 주어질 때 $f(x)$ 구하기 본책 116쪽

함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$에 대하여

⇨ $f(x)=\int f'(x)dx$

0693 답 ①

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(4x+k)dx$$
$$=2x^2+kx+C$$

$f(1)=2$에서 $2+k+C=2$ …… ㉠

$f(2)=12$에서 $8+2k+C=12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $k=4$, $C=-4$

따라서 $f(x)=2x^2+4x-4$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{4}{2}=-2$

Lecture

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

7 부정적분

0694 답 0

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(9x^2+2x-3)dx$

$=3x^3+x^2-3x+C$

$f(x)$가 일차식 $x-1$로 나누어떨어지므로

$f(1)=0$

$3+1-3+C=0 \qquad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=3x^3+x^2-3x-1$이므로

$f(-1)=-3+1+3-1=0$

0695 답 ④

$f'(x)=2x^3-3x-5$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x^3-3x-5)dx$

$=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2-5x+C_1$

$f(0)=2$이므로 $C_1=2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2-5x+2$이므로

$F(x)=\int f(x)dx=\int\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2-5x+2\right)dx$

$=\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+C_2$

$F(1)=-\frac{11}{10}$이므로

$\frac{1}{10}-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+2+C_2=-\frac{11}{10}$

$\therefore C_2=-\frac{1}{5}$

따라서 $F(x)=\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2+2x-\frac{1}{5}$이므로

$F(2)=\frac{32}{10}-4-10+4-\frac{1}{5}=-7$

0696 답 2

TIP 다항식 $f(x)$가 $k(x-a)(x-b)$ (k, a, b는 상수, $k\neq0$)로 나누어떨어지면 $f(a)=0, f(b)=0$이다.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int g(x)dx$

$=\int(2x^3-3x^2-12x+p)dx$

$=\frac{1}{2}x^4-x^3-6x^2+px+C$

$f(0)=q$에서 $C=q$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^3-6x^2+px+q$

이때, $h(x)=g'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$이고

$f(x)$가 $h(x)$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=-\frac{9}{2}-p+q=0$

$f(2)=-24+2p+q=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $p=\frac{13}{2}$, $q=11$이므로

$2p-q=13-11=2$

유형 06 부정적분과 미분의 관계의 활용 ; 함수의 추정 본책 116쪽

(1) $\int f(x)dx=g(x)$꼴이 주어지면

⇨ 양변을 미분하여 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$임을 이용한다.

(2) $\frac{d}{dx}f(x)=g(x)$꼴이 주어지면

⇨ 양변을 적분하여 $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$임을 이용한다.

(단, C는 적분상수)

0697 답 2

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=3$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 3dx$

$\therefore f(x)+g(x)=3x+C_1$

위의 식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)+g(0)=C_1$

따라서 $C_1=1+2=3$이므로

$f(x)+g(x)=3x+3=3(x+1)$

또, $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=4x+4$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(4x+4)dx$

$\therefore f(x)g(x)=2x^2+4x+C_2$

위의 식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)g(0)=C_2$

따라서 $C_2=1\cdot2=2$이므로

$f(x)g(x)=2x^2+4x+2=2(x+1)^2$

$\therefore h(x)=\frac{f(x)g(x)}{f(x)+g(x)}=\frac{2(x+1)^2}{3(x+1)}=\frac{2}{3}(x+1)$

$\therefore h(2)=\frac{2}{3}\cdot3=2$

0698 답 3

$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+C$에서

$f(x)+g(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+x^2+C\right)'=x^2+2x \qquad \cdots\cdots ㉠$

또, $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 3x^2dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^3+C_1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$f(0)=1$이므로 $x=0$을 ㉠에 대입하면

$f(0)+g(0)=0$, $1+g(0)=0 \qquad \therefore g(0)=-1$

이때, $x=0$을 ㉡에 대입하면

$f(0)g(0)=C_1 \qquad \therefore C_1=-1$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉢에서 $\begin{cases}f(x)=x-1\\g(x)=x^2+x+1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=x^2+x+1\\g(x)=x-1\end{cases}$

그런데 $f(0)=1$, $g(0)=-1$이므로

$f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=x-1$

$\therefore f(1)-g(1)=3-0=3$

0699 답 3

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=3$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 3dx$

$\therefore f(x)+g(x)=3x+C_1$

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\{f(x)g(x)\}'=4x+1$에서

$f(x)g(x)=\int(4x+1)dx=2x^2+x+C_2$

$f(0)=-3,\ g(0)=2$이므로

$f(0)+g(0)=C_1=-1$

$f(0)g(0)=C_2=-6$

따라서

$f(x)+g(x)=3x-1$,

$f(x)g(x)=2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)$

이므로

$\begin{cases}f(x)=2x-3\\g(x)=x+2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=x+2\\g(x)=2x-3\end{cases}$

그런데 $f(0)=-3,\ g(0)=2$이므로

$f(x)=2x-3,\ g(x)=x+2$

$\therefore f(1)+g(2)=-1+4=3$

0700 답 1

$\int(x+2)f'(x)dx=x^3+\frac{1}{2}x^2-10x$에서

$(x+2)f'(x)=\left(x^3+\frac{1}{2}x^2-10x\right)'$

$=3x^2+x-10=(3x-5)(x+2)$

$\therefore f'(x)=3x-5$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-5)dx=\frac{3}{2}x^2-5x+C$

$f(1)=-1$이므로 $\frac{3}{2}-5+C=-1$ $\quad\therefore C=\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-5x+\frac{5}{2}$이므로

$f(3)=1$

유형 07 부정적분과 미분의 관계의 활용 ; $xf(x)$ 꼴을 포함하는 경우 본책 117쪽

$\int f(x)dx=g(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면 ⇨ $f(x)=g'(x)$

0701 답 $-\frac{1}{4}$

$F(x)=xf(x)-3x^4+2x^3+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+6x^2+2x$

$xf'(x)=12x^3-6x^2-2x$

$\therefore f'(x)=12x^2-6x-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x^2-6x-2)dx$

$=4x^3-3x^2-2x+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=4x^3-3x^2-2x+1$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{1}{4}$

Lecture

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α,β,γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

0702 답 ⑤

$2\int f(x)dx=xf(x)-2f(x)+4x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=f(x)+xf'(x)-2f'(x)+4$

$f(x)=(x-2)f'(x)+4$ ······ ㉠

$f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f'(x)=a$

$f(x)=ax+b,\ f'(x)=a$를 ㉠에 대입하면

$ax+b=a(x-2)+4$

$=ax-2a+4$

$\therefore b=-2a+4$ ······ ㉡

$f(-1)=1$이므로 $-a+b=1$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=2$

따라서 $f(x)=x+2$이므로 $f(1)=3$

0703 답 7

$f(x)+\int xf(x)dx=\frac{1}{2}x^4+2x^3+\frac{3}{2}x^2+6x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+xf(x)=2x^3+6x^2+3x+6$ ······ ㉠

$f(x)$를 n차함수라 하면 $xf(x)$는 $(n+1)$차함수이므로 ㉠에서

$n+1=3$ $\quad\therefore n=2$

즉, $f(x)$는 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 놓을 수 있다.

$f(x)=ax^2+bx+c,\ f'(x)=2ax+b$를 ㉠에 대입하면

$2ax+b+x(ax^2+bx+c)=2x^3+6x^2+3x+6$

$\therefore ax^3+bx^2+(2a+c)x+b=2x^3+6x^2+3x+6$

이 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=2,\ b=6,\ 2a+c=3$에서 $c=-1$

따라서 $f(x)=2x^2+6x-1$이므로 $f(1)=2+6-1=7$

유형 08 부정적분과 함수의 연속성 본책 117쪽

연속함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=\begin{cases}g(x) & (x<a)\\h(x) & (x>a)\end{cases}$이면

⇨ $f(x)=\begin{cases}\int g(x)dx & (x<a)\\\int h(x)dx & (x\geq a)\end{cases}$

⇨ $\lim_{x\to a-}\int g(x)dx=\lim_{x\to a+}\int h(x)dx$

0704 답 18

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & (x<2) \\ x-2 & (x>2) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} x^3-x+C_1 & (x<2) \\ \frac{1}{2}x^2-2x+C_2 & (x\geq 2) \end{cases}$

$f(0)=4$이므로 $C_1=4$

$\therefore f(x)=x^3-x+4\,(x<2)$

$f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}(x^3-x+4)=\lim_{x\to 2+}\left(\frac{1}{2}x^2-2x+C_2\right)$

$10=-2+C_2 \qquad \therefore C_2=12$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+12\,(x\geq 2)$

$\therefore f(6)=18-12+12=18$

0705 답 2

$f'(x)=\begin{cases} k & (x<1) \\ 2x-3 & (x>1) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} kx+C_1 & (x<1) \\ x^2-3x+C_2 & (x\geq 1) \end{cases}$

$f(0)=1$에서 $C_1=1$

$f(4)=9$에서 $4+C_2=9 \qquad \therefore C_2=5$

$\therefore f(x)=\begin{cases} kx+1 & (x<1) \\ x^2-3x+5 & (x\geq 1) \end{cases}$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}(kx+1)=\lim_{x\to 1+}(x^2-3x+5)$

$k+1=3 \qquad \therefore k=2$

0706 답 $\frac{7}{2}$

주어진 그래프에서 $f'(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x\geq 1) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x+C_1 & (x<1) \\ -x^2+4x+C_2 & (x\geq 1) \end{cases}$

$f(0)=2$에서 $C_1=2$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+2\,(x<1)$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}\left(\frac{1}{2}x^2+x+2\right)=\lim_{x\to 1+}(-x^2+4x+C_2)$

$\frac{7}{2}=3+C_2 \qquad \therefore C_2=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-x^2+4x+\frac{1}{2}\,(x\geq 1)$이므로

$f(3)=-9+12+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

0707 답 10

$f'(x)=|x|+|x-2|$에서 $f'(x)=\begin{cases} -2x+2 & (x<0) \\ 2 & (0\leq x<2) \\ 2x-2 & (x\geq 2) \end{cases}$

$\therefore f(x)=\begin{cases} -x^2+2x+C_1 & (x<0) \\ 2x+C_2 & (0\leq x<2) \\ x^2-2x+C_3 & (x\geq 2) \end{cases}$

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}(-x^2+2x+C_1)=\lim_{x\to 0+}(2x+C_2)$

$\therefore C_1=C_2$ ...... ㉠

또, $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}(2x+C_2)=\lim_{x\to 2+}(x^2-2x+C_3)$

$\therefore 4+C_2=C_3$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $C_3-C_1=4$

$\therefore f(3)-f(-1)=3+C_3-(-3+C_1)$

$=6+C_3-C_1$

$=6+4=10$

유형 09 부정적분과 접선의 기울기

본책 118쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로

⇨ $f(x)=\int f'(x)dx$

0708 답 8

$f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x)dx$

$=x^3-2x^2+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 9)$를 지나므로

$9=8-8+C \qquad \therefore C=9$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+9$이므로

$f(1)=1-2+9=8$

0709 답 ①

$f'(x)=(2x+1)k$ (k는 상수, $k\neq 0$)이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+1)kdx$

$=kx^2+kx+C$

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(0, 1)$, $(1, 5)$를 지나므로

$f(0)=1$에서 $C=1$

$f(1)=5$에서 $2k+C=2k+1=5 \qquad \therefore k=2$

따라서 $f(x)=2x^2+2x+1$이므로

$f(-1)=2-2+1=1$

0710 답 ④

$f'(x)=2x+k$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+k)dx$

$=x^2+kx+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$f(0)=0$에서 $C=0$

$f(2)=2$에서 $4+2k+C=4+2k=2 \qquad \therefore k=-1$

따라서 $f(x)=x^2-x$이므로

$f(5)=25-5=20$

유형 10 부정적분과 미분계수 본책 118쪽

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$\Rightarrow f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

0711 답 -38

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)-f(2-h)+f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$

한편, $f(x)=\int(x-3)(x^2+3x+9)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-3)(x^2+3x+9)=x^3-27$

$\therefore f'(2)=8-27=-19$

따라서 구하는 값은

$2f'(2)=2\cdot(-19)=-38$

0712 답 ②

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$

$=2f'(1)$

한편, $f(x)=\int(3x^2-2)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-2$

$\therefore f'(1)=1$

따라서 구하는 값은

$2f'(1)=2\cdot1=2$

0713 답 1

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)-f(x-h)+f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot2+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=2f'(x)+f'(x)=3f'(x)$

즉, $3f'(x)=9x^2+6x-3$에서

$f'(x)=3x^2+2x-1$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2x-1)dx$

$=x^3+x^2-x+C$

$f(1)=4$이므로 $1+C=4$ $\quad\therefore C=3$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+3$이므로

$f(-2)=-8+4+2+3=1$

0714 답 4

조건 (가)에서 $f'(x)$는 일차항의 계수가 6인 일차식이다.

즉, $f'(x)=6x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

이때, $f'(1)=6+a=1$에서 $a=-5$이므로 $f'(x)=6x-5$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-5)dx=3x^2-5x+C$

$f(1)=0$에서 $3-5+C=0$ $\quad\therefore C=2$

따라서 $f(x)=3x^2-5x+2$이므로

$f(2)=12-10+2=4$

유형 11 부정적분과 도함수의 정의 본책 119쪽

$f(x+y)=f(x)+f(y)+\cdots$꼴의 식이 주어지면

(i) $x=0$, $y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구한다.

(ii) 도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(iii) 부정적분을 구하고, $f(0)$의 값을 대입하여 적분상수를 구한다.

0715 답 ⑤

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$ $\quad\therefore f(0)=0$

$f'(1)=4$이므로

$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)+2h-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+2=4$

즉, $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=2$이므로

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+2x$

$=2+2x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2+2x)dx$

$=x^2+2x+C$

그런데 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x^2+2x$이므로

$f(3)=9+6=15$

0716 답 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x$

$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy(x+y)$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0$ $\quad\therefore f(0)=0$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=2$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-x^2$$
$$=2-x^2$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2-x^2)dx$$
$$=-\frac{1}{3}x^3+2x+C$$
그런데 $f(0)=0$이므로 $C=0$
$$\therefore f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x$$

0717 답 ①

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{kxh+3h^2}{h}=kx$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int kx\,dx=\frac{k}{2}x^2+C$$
$f(1)=1$이므로 $\frac{k}{2}+C=1$ ...... ㉠

$f(2)=10$이므로 $2k+C=10$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $k=6$, $C=-2$

따라서 $f(x)=3x^2-2$이므로

$f(-3)=27-2=25$

다른 풀이 1 $f(t+h)-f(t)=kth+3h^2$에 $t=1$, $h=1$을 대입하면

$f(2)-f(1)=k+3$, $10-1=k+3$ $\quad\therefore k=6$

$\therefore f(t+h)-f(t)=6th+3h^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{6xh+3h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(6x+3h)=6x$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int 6xdx=3x^2+C$$
그런데 $f(1)=1$이므로 $3+C=1$ $\quad\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=3x^2-2$이므로

$f(-3)=27-2=25$

다른 풀이 2 $f(t+h)-f(t)=kth+3h^2$에 $t=0$, $h=1$을 대입하면

$f(1)-f(0)=3$ $\quad\therefore f(0)=-2$

이때, 주어진 식에 $t=0$, $h=x$를 대입하면

$f(x)-f(0)=3x^2$ $\quad\therefore f(x)=3x^2-2$

$\therefore f(-3)=25$

유형 12 부정적분과 극대·극소

본책 119쪽

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

(1) 양에서 음으로 바뀌면 ⇨ $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

(2) 음에서 양으로 바뀌면 ⇨ $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

0718 답 3

주어진 그래프에서 $f'(x)=ax(x-2)$ $(a<0)$로 놓으면

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

즉, $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고, $x=2$에서 극댓값을 가지므로

$f(0)=3$, $f(2)=7$

이때,
$$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax(x-2)dx$$
$$=\int(ax^2-2ax)dx=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$$
$f(0)=3$에서 $C=3$

$f(2)=7$에서 $-\frac{4}{3}a+C=-\frac{4}{3}a+3=7$ $\quad\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2+3$이므로

$f(3)=-27+27+3=3$

0719 답 0

$f(x)=\int 6(x-1)(x-2)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 1을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다. 이때,
$$f(x)=\int 6(x-1)(x-2)dx=\int(6x^2-18x+12)dx$$
$$=2x^3-9x^2+12x+C$$
$f(1)=1$이므로 $5+C=1$ $\quad\therefore C=-4$

따라서 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-4$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(2)=16-36+24-4=0$

0720 답 $\frac{7}{2}$

주어진 그래프에서 $f'(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$ $(a>0)$으로 놓으면

$f'(0)=0$이므로 $\frac{1}{4}a-\frac{3}{4}=0$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore f'(x)=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}=3x^2-3x=3x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값 3을 갖는다.

이때,

$f(x)=\int f'(x)dx$

$\quad=\int(3x^2-3x)dx=x^3-\frac{3}{2}x^2+C$

$f(1)=3$이므로 $C-\frac{1}{2}=3 \qquad \therefore C=\frac{7}{2}$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f(0)=\frac{7}{2}$

0721 답 14

조건 (가)에서

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot2=2f'(x)$

이므로

$2f'(x)=6x^2-12x+a$

$\therefore f'(x)=3x^2-6x+\frac{a}{2}$

조건 (나)에서 $f'(-1)=0$이므로

$9+\frac{a}{2}=0 \qquad \therefore a=-18$

$\therefore f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다. 이때,

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-6x-9)dx$

$\quad=x^3-3x^2-9x+C$

이므로

$M=f(-1)=C+5,\ m=f(3)=C-27$

$\therefore a+M-m=-18+(C+5)-(C-27)=14$

STEP 3 | 심화 Master

0722 답 12

TIP $F(x)$, $G(x)$가 $f(x)$의 부정적분이므로 $F'(x)=G'(x)$이다.

$F'(x)=G'(x)$이므로

$G(x)=F(x)+C$ (C는 상수)

이때, $F(200)-G(200)=3$에서 $G(200)=F(200)-3$이므로

$C=-3$

$\therefore G(x)=F(x)-3$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}G(k)=\sum_{k=1}^{20}\{F(k)-3\}$

$\quad=\sum_{k=1}^{20}F(k)-60$

$\quad=72-60=12$

0723 답 0

TIP $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$임을 이용한다.

$\int\{f(x)+g(x)\}dx=x^2-4x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+g(x)=2x-4$ …… ㉠

$\int\{f(x)-g(x)\}dx=x^2+6x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-g(x)=2x+6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(x)=2x+1,\ g(x)=-5$

$\therefore f(2)+g(-2)=5-5=0$

0724 답 ②

TIP $f(x)$가 이차함수이고 $f(x)g(x)$가 사차함수이므로 $g(x)$는 이차함수임을 이용한다.

$f(x)$가 이차함수이고 $f(x)g(x)$가 사차함수이므로 $g(x)$는 이차함수이다.

이때, $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$이므로 $x^2+f(x)$는 일차함수이다.

따라서 $f(x)=-x^2+ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$g(x)=\int(x^2-x^2+ax+b)dx=\int(ax+b)dx$

$\quad=\frac{a}{2}x^2+bx+C$

$\therefore f(x)g(x)$

$\quad=(-x^2+ax+b)\left(\frac{a}{2}x^2+bx+C\right)$

$\quad=-\frac{a}{2}x^4+\left(\frac{a^2}{2}-b\right)x^3+\left(\frac{3}{2}ab-C\right)x^2+(aC+b^2)x+bC$

위의 식이 $-2x^4+8x^3$과 같으므로 양변의 계수를 비교하면

$-\frac{a}{2}=-2,\ \frac{a^2}{2}-b=8,\ \frac{3}{2}ab-C=0,\ aC+b^2=0,\ bC=0$

$\therefore a=4,\ b=0,\ C=0$

따라서 $g(x)=2x^2$이므로

$g(1)=2\cdot1=2$

0725 답 23

TIP 주어진 식에서 $g'(x)$를 구한 후 $g(x)=\int g'(x)dx$임을 이용한다.

$f(x)-g(x)=-x^3+2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-g'(x)=-3x^2+2$

$\therefore f'(x)=g'(x)-3x^2+2$ …… ㉠

이때, $xf'(x)=\frac{d}{dx}\{g(x)+x^3-2x^2\}=g'(x)+3x^2-4x$

이므로 위의 식에 ㉠을 대입하면

$xg'(x)-3x^3+2x=g'(x)+3x^2-4x$

$(x-1)g'(x)=3x^3+3x^2-6x=3x(x-1)(x+2)$

$\therefore g'(x)=3x(x+2)=3x^2+6x$

7 부정적분

$g(x)=\int g'(x)dx=\int(3x^2+6x)dx=x^3+3x^2+C$

$g(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $g(x)=x^3+3x^2+3$이므로

$g(2)=8+12+3=23$

0726 답 ①

TIP 그래프를 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용한다.

주어진 그래프에서

$f'(x)=kx(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=kx^3-2kx\ (k>0)$

로 놓으면

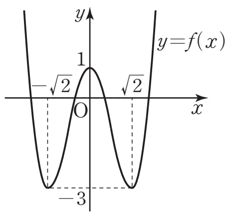
$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(kx^3-2kx)dx$$
$$=\frac{k}{4}x^4-kx^2+C$$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

$f(\sqrt{2})=-3$이므로 $-k+C=-k+1=-3$ $\quad\therefore k=4$

$\therefore f(x)=x^4-4x^2+1$

이때, $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$f(-2)=f(2)=1, f(0)=1,$

$f(-1)=f(1)=-2$

이므로

$f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 정수 m의 값은 $-2, -1, 0, 1$이다.

따라서 모든 정수 m의 값의 합은

$-2+(-1)+1=-2$

0727 답 5

TIP $F_{i+1}(x)=\int(n+i)F_i(x)dx$에 $i=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 $F_i(x)$를 구한다.

조건 (가)에서

$$F_1(x)=\int f(x)dx=\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C_1$$

$F_1(0)=0$이므로 $C_1=0$ $\quad\therefore F_1(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

조건 (나)에서

$$F_2(x)=\int(n+1)F_1(x)dx$$
$$=\int x^{n+1}dx=\frac{1}{n+2}x^{n+2}+C_2$$

$F_2(0)=0$이므로 $C_2=0$ $\quad\therefore F_2(x)=\frac{1}{n+2}x^{n+2}$

$$F_3(x)=\int(n+2)F_2(x)dx$$
$$=\int x^{n+2}dx=\frac{1}{n+3}x^{n+3}+C_3$$

$F_3(0)=0$이므로 $C_3=0$ $\quad\therefore F_3(x)=\frac{1}{n+3}x^{n+3}$

$\vdots$

따라서 $F_i(x)=\frac{1}{n+i}x^{n+i}\ (i=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{F_i(1)}=\sum_{i=1}^{n}(n+i)=\sum_{i=1}^{n}n+\sum_{i=1}^{n}i$$
$$=n^2+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3n^2+n}{2}$$

즉, $\frac{3n^2+n}{2}=40$이므로 $3n^2+n-80=0$

$(3n+16)(n-5)=0$ $\quad\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)

0728 답 ⑤

TIP $f(x)=\int xg(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=xg(x)$임을 이용한다.

$f(x)=\int xg(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=xg(x)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$에서

$f'(x)-g'(x)=4x^3+2x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$xg(x)-g'(x)=4x^3+2x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이므로

$g(x)=4x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면 $g'(x)=8x+a$

위의 식을 ㉢에 대입하면

$x(4x^2+ax+b)-(8x+a)=4x^3+2x$

$4x^3+ax^2+(b-8)x-a=4x^3+2x$

양변의 계수를 비교하면

$a=0, b=10$

따라서 $g(x)=4x^2+10$이므로 $g(1)=14$

0729 답 15

TIP 절댓값 부호에 주의하여 x의 값의 범위를 나눈 후 $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용한다.

$f'(x)=\begin{cases}3x^2+2x-2 & (|x|<1)\\ 4x-5 & (|x|>1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}2x^2-5x+C_1 & (x<-1)\\ x^3+x^2-2x+C_2 & (-1\le x<1)\\ 2x^2-5x+C_3 & (x\ge 1)\end{cases}$

$f(2)=2$이므로 $8-10+C_3=2$ $\quad\therefore C_3=4$

이때, $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)$에서

$\lim_{x\to 1-}(x^3+x^2-2x+C_2)=\lim_{x\to 1+}(2x^2-5x+C_3)$

$1+1-2+C_2=2-5+4$ $\quad\therefore C_2=1$

또, $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)$에서

$\lim_{x\to -1-}(2x^2-5x+C_1)=\lim_{x\to -1+}(x^3+x^2-2x+C_2)$

$2+5+C_1=-1+1+2+1$ $\quad\therefore C_1=-4$

$\therefore f(-2)+f(0)=(8+10-4)+1$

$=15$

0730 답 2

TIP 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$\therefore y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$

이 식이 $y=2(1-t)x+g(t)$와 같으므로

$f'(t)=2(1-t)$, $g(t)=-tf'(t)+f(t)$

$f(t)=\int f'(t)dt=\int(-2t+2)dt=-t^2+2t+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(t)=-t^2+2t$

따라서 $g(t)=-t(-2t+2)+(-t^2+2t)=t^2$이므로

$f(1)+g(-1)=1+1=2$

0731 답 900원

TIP $y=f(x)$에 대하여 $f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$이다.

$\Delta y=(3x^2-2x)\Delta x+k(\Delta x)^2$의 양변을 Δx로 나누면

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2-2x+k\Delta x$

$y=f(x)$라 하면

$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(3x^2-2x+k\Delta x)$

$=3x^2-2x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-2x)dx$

$=x^3-x^2+C$

이때, 재료를 쓰지 않았을 때의 제품의 가격은 0원이므로

$f(0)=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=x^3-x^2$이므로 10 g의 재료가 사용될 때의 제품의 가격은

$f(10)=10^3-10^2=900$(원)

0732 답 ②

TIP 그래프가 원점에 대하여 대칭인 삼차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지면 $x=-1$에서도 극값을 갖고, 그래프는 원점을 지남을 이용한다.

삼차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 갖고, 그 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $x=-1$에서도 극값을 갖는다.

즉, $f'(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a$ (a는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax^2-a)dx=\frac{a}{3}x^3-ax+C$

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 원점을 지난다.

즉, $f(0)=0$에서 $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{a}{3}x^3-ax=\frac{a}{3}x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표 중에서 양수인 것은 $\sqrt{3}$이다.

0733 답 ⑤

TIP 주어진 식에서 $g'(x)$를 구한 후 $g'(a)=0$일 때 $x=a$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 극대, 음에서 양으로 바뀌면 극소임을 이용한다.

주어진 그래프에서

$f(x)=x(x-\alpha)^2=x^3-2\alpha x^2+\alpha^2x$

조건 (가)에서

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$

$=\{xf(x)\}'$

$=(x^4-2\alpha x^3+\alpha^2x^2)'$

$=4x^3-6\alpha x^2+2\alpha^2x$

이므로

$g(x)=\int g'(x)dx=x^4-2\alpha x^3+\alpha^2x^2+C$

$g'(x)=2x(2x-\alpha)(x-\alpha)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\frac{\alpha}{2}$ 또는 $x=\alpha$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\alpha}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $g(x)$는 $x=0$ 또는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고, $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극댓값을 가지므로

$g(0)=g(\alpha)=0$, $g\left(\frac{\alpha}{2}\right)=81$

$g(0)=g(\alpha)=0$에서 $C=0$

$g\left(\frac{\alpha}{2}\right)=81$에서 $\frac{\alpha^4}{16}=81$ $\quad\therefore \alpha=6$ ($\because \alpha>0$)

따라서 $g(x)=x^4-12x^3+36x^2$이므로

$g\left(\frac{\alpha}{3}\right)=g(2)=16-96+144=64$

8 | 정적분

본책 124쪽~136쪽

STEP 1 | 기초 Build

0734 답 1

$\int_{0}^{1} 4x^3 dx = \left[x^4\right]_0^1 = 1$

0735 답 $\frac{3}{4}$

$\int_{-1}^{2} (x^3-2x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2\right]_{-1}^{2}$

$= (4-4) - \left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{3}{4}$

0736 답 $\frac{46}{3}$

$\int_{1}^{3} (2x^2-x+1)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^3$

$= \left(18 - \frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 1\right)$

$= \frac{46}{3}$

0737 답 40

$\int_{-2}^{3} (3t^2+2t)dt = \left[t^3+t^2\right]_{-2}^{3}$

$= (27+9) - (-8+4) = 40$

0738 답 0

$\int_{2}^{2} (3x^2+6x+1)dx = 0$

0739 답 -4

$\int_{0}^{-1} (4x^3+5)dx = -\int_{-1}^{0} (4x^3+5)dx$

$= -\left[x^4+5x\right]_{-1}^{0}$

$= -\{0-(1-5)\} = -4$

0740 답 -18

$\int_{3}^{1} (x-1)(x^2+x+1)dx = -\int_{1}^{3} (x^3-1)dx$

$= -\left[\frac{1}{4}x^4 - x\right]_1^3$

$= -\left\{\left(\frac{81}{4}-3\right) - \left(\frac{1}{4}-1\right)\right\}$

$= -18$

0741 답 x^2-5x

$\frac{d}{dx}\int_{-2}^{x} (t^2-5t)dt = x^2-5x$

0742 답 $-x^3+2x^2-1$

$\frac{d}{dx}\int_{1}^{x} (-t^3+2t^2-1)dt = -x^3+2x^2-1$

0743 답 32

$\int_{1}^{3} (3x^2-2x+1)dx + \int_{1}^{3} (2x+2)dx$

$= \int_{1}^{3} (3x^2-2x+1+2x+2)dx$

$= \int_{1}^{3} (3x^2+3)dx$

$= \left[x^3+3x\right]_1^3$

$= (27+9) - (1+3) = 32$

0744 답 $\frac{8}{3}$

$\int_{0}^{1} (x-1)^2 dx - \int_{1}^{0} (x+1)^2 dx$

$= \int_{0}^{1} (x^2-2x+1)dx + \int_{0}^{1} (x^2+2x+1)dx$

$= \int_{0}^{1} (x^2-2x+1+x^2+2x+1)dx$

$= \int_{0}^{1} (2x^2+2)dx$

$= \left[\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1$

$= \frac{2}{3}+2 = \frac{8}{3}$

0745 답 116

$\int_{-1}^{2} (4x^3+3x^2+2)dx + \int_{2}^{3} (4x^3+3x^2+2)dx$

$= \int_{-1}^{3} (4x^3+3x^2+2)dx$

$= \left[x^4+x^3+2x\right]_{-1}^{3}$

$= (81+27+6) - (1-1-2) = 116$

0746 답 24

$\int_{-2}^{0} (5x^4-3)dx - \int_{1}^{0} (5x^4-3)dx$

$= \int_{-2}^{0} (5x^4-3)dx + \int_{0}^{1} (5x^4-3)dx$

$= \int_{-2}^{1} (5x^4-3)dx$

$= \left[x^5-3x\right]_{-2}^{1}$

$= (1-3) - (-32+6) = 24$

0747 답 4

$\int_{-1}^{1} (2x^5-7x^3+3x^2+1)dx$

$= \int_{-1}^{1} (3x^2+1)dx + \int_{-1}^{1} (2x^5-7x^3)dx$

$= 2\int_{0}^{1} (3x^2+1)dx = 2\left[x^3+x\right]_0^1$

$= 2 \cdot 2 = 4$

0748 답 144

$\int_{-2}^{2}(x^5+10x^4-4x^3+3x^2)dx$

$=\int_{-2}^{2}(10x^4+3x^2)dx+\int_{-2}^{2}(x^5-4x^3)dx$

$=2\int_{0}^{2}(10x^4+3x^2)dx=2\Big[2x^5+x^3\Big]_0^2$

$=2\cdot72=144$

0749 답 $f(x)=2x-2$

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-2$

0750 답 $f(x)=3x^2+7$

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+7$

0751 답 -3

$F'(x)=(x-1)(x+3)$이라 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^h(x-1)(x+3)dx=\lim_{h\to0}\frac{F(h)-F(0)}{h}$

$=F'(0)=-3$

0752 답 4

$F'(t)=6t^2-3t+1$이라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(6t^2-3t+1)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=F'(1)=4$

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 정적분의 정의 본책 126쪽

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

0753 답 2

$\int_0^k(3x^2-4)dx=\Big[x^3-4x\Big]_0^k$

$=k^3-4k$

$=k(k+2)(k-2)$

이므로 $k(k+2)(k-2)=0$에서

$k=2$ ($\because$ $k>0$)

0754 답 -8

$\int_0^1(6x^2+ax)dx=\Big[2x^3+\frac{a}{2}x^2\Big]_0^1=2+\frac{a}{2}$

이때, $f(1)=6+a$이므로

$2+\frac{a}{2}=6+a \qquad \therefore a=-8$

0755 답 2

$\int_0^2\{f'(x)-2x\}dx=\Big[f(x)-x^2\Big]_0^2$

$=\{f(2)-4\}-f(0)$

$=-f(0)-4$ ($\because$ $f(2)=0$)

즉, $-f(0)-4=-6$이므로 $f(0)=2$

$\therefore \int_{-1}^0 f'(x)dx=f(0)-f(-1)$

$=2$ ($\because$ $f(-1)=0$)

0756 답 5

$y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것은

$y-b=(x-a)^2 \qquad \therefore y=(x-a)^2+b$

$\therefore g(x)=(x-a)^2+b=x^2-2ax+a^2+b$

$\int_a^{2a}g(x)dx-\int_0^a f(x)dx$

$=\int_a^{2a}(x^2-2ax+a^2+b)dx-\int_0^a x^2dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3-ax^2+a^2x+bx\Big]_a^{2a}-\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^a$

$=\left(\frac{1}{3}a^3+ab\right)-\frac{1}{3}a^3$

$=ab=8$ ...... ㉠

한편, $g(0)=0$이므로 $a^2+b=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-4$

따라서 $g(x)=(x+2)^2-4$이므로

$g(1)=5$

유형 02 정적분의 계산 ; 적분 구간이 같은 경우 본책 126쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\{f(x)\pm g(x)\}dx$ (복호동순)

⇨ 적분 구간이 같으므로 하나의 정적분 기호로 묶는다.

0757 답 8

$\int_0^2(x^2+4)dx+2\int_0^2(x^2-x-1)dx$

$=\int_0^2(x^2+4)dx+\int_0^2(2x^2-2x-2)dx$

$=\int_0^2(x^2+4+2x^2-2x-2)dx$

$=\int_0^2(3x^2-2x+2)dx$

$=\Big[x^3-x^2+2x\Big]_0^2$

$=8-4+4=8$

0758 답 $\frac{5}{6}$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx-\int_1^0 \frac{1}{t+1}dt$$
$$=\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx-\int_1^0 \frac{1}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1 (x^2-x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{5}{6}$$

0759 답 ④

$$f(x)=\int_1^3 (t+x)^2dt-\int_3^1 (2t^2+1)dt$$
$$=\int_1^3 (t+x)^2dt+\int_1^3 (2t^2+1)dt$$
$$=\int_1^3 (t^2+2xt+x^2)dt+\int_1^3 (2t^2+1)dt$$
$$=\int_1^3 (t^2+2xt+x^2+2t^2+1)dt$$
$$=\int_1^3 (3t^2+2xt+x^2+1)dt$$
$$=\left[t^3+xt^2+x^2t+t\right]_1^3$$
$$=2x^2+8x+28=2(x+2)^2+20$$

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 20을 가지므로

$a=-2,\ b=20 \qquad \therefore a+b=18$

0760 답 1

$$\int_{-1}^a \left(\frac{1}{\cos^2 x}+2x\right)dx-\int_{-1}^a (\tan^2 x+2)dx$$
$$=\int_{-1}^a \left(\frac{1}{\cos^2 x}+2x-\tan^2 x-2\right)dx$$
$$=\int_{-1}^a \left(\frac{1}{\cos^2 x}+2x-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-2\right)dx$$
$$=\int_{-1}^a \left(\frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}+2x-2\right)dx$$
$$=\int_{-1}^a \left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+2x-2\right)dx$$
$$=\int_{-1}^a (2x-1)dx$$
$$=\left[x^2-x\right]_{-1}^a=(a^2-a)-(1+1)$$
$$=a^2-a-2=-2$$

따라서 $a^2-a=0,\ a(a-1)=0$이므로

$a=1\ (\because a>0)$

> **Lecture**
>
> **삼각함수 사이의 관계**
>
> $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$
>
> $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

유형 03 정적분의 계산 ; 피적분함수가 같은 경우 본책 127쪽

세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 함수 $f(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

⇨ 적분 구간을 합쳐 계산한다.

0761 답 ④

$$\int_3^5 f(x)dx-\int_4^5 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx$$
$$=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx+\int_5^4 f(x)dx$$
$$=\int_0^5 f(x)dx+\int_5^4 f(x)dx$$
$$=\int_0^4 f(x)dx$$

이때, $f(x)=x^2-x$이므로

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4 (x^2-x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$
$$=\frac{64}{3}-8=\frac{40}{3}$$

0762 답 6

$$\int_{-1}^0 (x^2+2x)dx+\int_0^1 (y^2+2y)dy+\int_1^2 (z^2+2z)dz$$
$$=\int_{-1}^0 (x^2+2x)dx+\int_0^1 (x^2+2x)dx+\int_1^2 (x^2+2x)dx$$
$$=\int_{-1}^2 (x^2+2x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-1}^2$$
$$=\frac{20}{3}-\frac{2}{3}=6$$

0763 답 4

$$\int_2^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx-\int_0^2 f(x)dx$$
$$=2+5-3=4$$

0764 답 1

$$\int_{-3}^3 f(x)dx=\int_{-3}^0 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx$$

이때,

$\int_{-3}^3 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx=\int_{-3}^0 f(x)dx$이므로

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx$$

$$\therefore \int_0^3 f(x)dx=0$$

$\therefore \int_{-3}^{3} f(x)dx=0,\ \int_{-3}^{0} f(x)dx=0$

따라서 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 (x^2+ax+b)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^3$$

$$=9+\frac{9}{2}a+3b=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\int_{-3}^{0} f(x)dx=\int_{-3}^{0} (x^2+ax+b)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{-3}^{0}$$

$$=9-\frac{9}{2}a+3b=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$

따라서 $f(x)=x^2-3$이므로

$f(2)=1$

유형 04 정적분의 계산 ; 구간에 따라 다르게 정의된 함수

본책 127쪽

$a<c<b$인 세 상수 a, b, c에 대하여 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x<c) \\ h(x) & (x\ge c) \end{cases}$이면

⇨ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c g(x)dx+\int_c^b h(x)dx$

0765 답 $\frac{25}{6}$

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 (x+2)dx+\int_1^2 (-x^2+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_1^2$$

$$=\frac{5}{2}+\frac{5}{3}=\frac{25}{6}$$

0766 답 ②

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} (2x+2)dx+\int_0^a (-x^2+2x+2)dx$$

$$=\left[x^2+2x\right]_{-a}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+2x\right]_0^a$$

$$=(-a^2+2a)+\left(-\frac{1}{3}a^3+a^2+2a\right)$$

$$=-\frac{1}{3}a^3+4a$$

$g(a)=-\frac{1}{3}a^3+4a$로 놓으면

$g'(a)=-a^2+4=-(a+2)(a-2)$

$g'(a)=0$에서 $a=2$ ($\because a>0$)

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$		↗	$\frac{16}{3}$	↘

따라서 $g(a)$는 $a=2$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $\frac{16}{3}$이다.

0767 답 ①

$f(x)=\begin{cases} x & (x\le 1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$에서

$(x-1)f(x)=\begin{cases} x(x-1) & (x\le 1) \\ x-1 & (x>1) \end{cases}$

$\therefore \int_0^2 (x-1)f(x)dx$

$$=\int_0^1 (x^2-x)dx+\int_1^2 (x-1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$$

$$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

유형 05 정적분의 계산 ; 절댓값 기호를 포함한 함수

본책 128쪽

(1) 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.

(2) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용한다.

0768 답 1

$|x^2+x-2|=\begin{cases} x^2+x-2 & (x\le -2 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x^2-x+2 & (-2<x<1) \end{cases}$이므로

$$\int_0^2 \frac{|x^2+x-2|}{3}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{-x^2-x+2}{3}dx+\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{3}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right)\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right)\right]_1^2$$

$$=\frac{7}{18}+\frac{11}{18}=1$$

0769 답 ③

$|x|=\begin{cases} -x & (x<0) \\ x & (x\ge 0) \end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^{2} (a-|x|)dx=\int_{-2}^{0} (a+x)dx+\int_0^2 (a-x)dx$$

$$=\left[ax+\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0}+\left[ax-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$

$$=(2a-2)+(2a-2)=4a-4$$

따라서 $4a-4=8$이므로 $a=3$

0770 답 $\frac{1}{2}$

$|x-k|=\begin{cases} -x+k & (x<k) \\ x-k & (x\ge k) \end{cases}$이므로

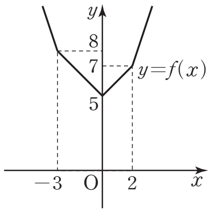
$$f(k)=\int_0^1 |x-k|\,dx=\int_0^k (-x+k)dx+\int_k^1 (x-k)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+kx\right]_0^k+\left[\frac{1}{2}x^2-kx\right]_k^1$$
$$=\frac{1}{2}k^2+\left(\frac{1}{2}k^2-k+\frac{1}{2}\right)$$
$$=k^2-k+\frac{1}{2}=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

따라서 $f(k)=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$은 $k=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{1}{4}$을 가지므로 실수 k의 값은 $\frac{1}{2}$이다.

0771 답 $\frac{39}{2}$

$$f(x)=\begin{cases} -3x-1 & (x<-3) \\ -x+5 & (-3\le x<0) \\ x+5 & (0\le x<2) \\ 3x+1 & (x\ge 2) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 5를 가지므로



$a=0,\ b=5$

$$\therefore \int_{-3}^{ab} f(x)dx=\int_{-3}^{0}(-x+5)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+5x\right]_{-3}^{0}=\frac{39}{2}$$

유형 06 우함수·기함수의 정적분 ; 피적분함수가 주어진 경우 본책 128쪽

적분 구간이 $[-a,\ a]$인 정적분의 계산은 함수 $f(x)$가 우함수인지, 기함수인지를 파악한 후 다음을 이용한다.

(1) $f(x)$가 우함수이면 ⇨ $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

(2) $f(x)$가 기함수이면 ⇨ $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

0772 답 ③

$$\int_{-a}^{a}(3x^2+2x)dx=\int_{-a}^{a}3x^2dx+\int_{-a}^{a}2x\,dx$$
$$=2\int_0^a 3x^2dx=2\left[x^3\right]_0^a$$
$$=2a^3=\frac{1}{4}$$

따라서 $a^3=\frac{1}{8}$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore 50a=25$

0773 답 2

$$\int_{-2}^{2}(3x^2-12x+4)(x+a)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}\{3x^3+(3a-12)x^2+(4-12a)x+4a\}dx$$
$$=\int_{-2}^{2}\{(3a-12)x^2+4a\}dx+\int_{-2}^{2}\{3x^3+(4-12a)x\}dx$$
$$=\int_{-2}^{2}\{(3a-12)x^2+4a\}dx$$
$$=2\int_0^2\{(3a-12)x^2+4a\}dx$$
$$=2\left[(a-4)x^3+4ax\right]_0^2=2(16a-32)$$

따라서 $2(16a-32)=0$이므로 $a=2$

0774 답 100

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+100x^{99})dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(1+3x^2+\cdots+99x^{98})dx+\int_{-1}^{1}(2x+4x^3+\cdots+100x^{99})dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(1+3x^2+\cdots+99x^{98})dx$$
$$=2\int_0^1(1+3x^2+\cdots+99x^{98})dx$$
$$=2\left[x+x^3+\cdots+x^{99}\right]_0^1=2\cdot 50=100$$

0775 답 $\frac{2}{3}$

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx+\int_{-1}^{1}2x\,dx$$
$$=2\int_0^1(x^2+1)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+1)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}x\,dx+\int_{-1}^{1}1\,dx$$
$$=2\int_0^1 1\,dx=2\left[x\right]_0^1=2$$

따라서 $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=k\left\{\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\right\}^2$에서

$\frac{8}{3}=4k \qquad \therefore k=\frac{2}{3}$

유형 07 우함수·기함수의 정적분 ; 피적분함수가 주어지지 않은 경우 본책 129쪽

(1) $f(-x)=f(x)$이면 ⇨ $f(x)$는 우함수

(2) $f(-x)=-f(x)$이면 ⇨ $f(x)$는 기함수

0776 답 ⑤

$f(-x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이고, $xf(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^{2}(x-1)f(x)dx=\int_{-2}^{2}xf(x)dx-\int_{-2}^{2}f(x)dx$$
$$=0-2\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=-2\cdot(-2)=4$$

0777 답 6

$f(x)=f(-x)$, $g(x)=-g(-x)$이므로 $f(x)$는 우함수이고, $g(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_{-1}^{1}g(x)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}f(x)dx-0$$
$$=2\cdot3=6$$

0778 답 ③

$f(x)=f(-x)$, $g(x)=-g(-x)$이므로 $f(x)$는 우함수이고, $g(x)$는 기함수이다.

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)+g(x)\}dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{-1}^{1}g(x)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}f(x)dx+0=6$$

$$\therefore \int_{0}^{1}f(x)dx=3$$

또, $\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=3$이므로

$$\int_{-1}^{0}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx-\int_{-1}^{0}g(x)dx$$
$$=3-\int_{-1}^{0}g(x)dx=5$$

$$\therefore \int_{-1}^{0}g(x)dx=-2$$

이때, $\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{0}g(x)dx+\int_{0}^{1}g(x)dx=0$에서

$$\int_{0}^{1}g(x)dx=-\int_{-1}^{0}g(x)dx=2$$

$$\therefore \int_{0}^{1}\{2f(x)-3g(x)\}dx=2\int_{0}^{1}f(x)dx-3\int_{0}^{1}g(x)dx$$
$$=2\cdot3-3\cdot2=0$$

유형 08 $f(x)=f(x+k)$인 함수의 정적분 본책 129쪽

함수 $y=f(x)$에서 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+k)$인 연속함수 $f(x)$의 정적분은

⇨ $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a+k}^{b+k}f(x)dx$, $\int_{a}^{a+k}f(x)dx=\int_{b}^{b+k}f(x)dx$임을 이용한다.

0779 답 300

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{2}^{3}f(x)dx$$

$$\therefore \int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=\int_{2}^{3}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{3}f(x)dx=3$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{300}\int_{k-1}^{k}f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx+\cdots+\int_{299}^{300}f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{6}f(x)dx+\cdots+\int_{297}^{300}f(x)dx$$
$$=100\int_{0}^{3}f(x)dx=100\cdot3=300$$

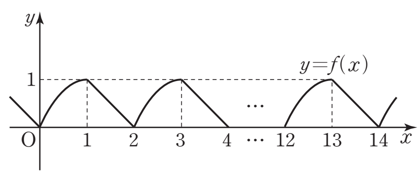
0780 답 ④

$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & (0\le x<1)\\ -x+2 & (1\le x<2)\end{cases}$, $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_{0}^{1}(-x^2+2x)dx=\int_{2}^{3}f(x)dx=\cdots=\int_{12}^{13}f(x)dx$$
$$\int_{1}^{2}(-x+2)dx=\int_{3}^{4}f(x)dx=\cdots=\int_{11}^{12}f(x)dx$$

$$\therefore \int_{0}^{13}f(x)dx=7\int_{0}^{1}(-x^2+2x)dx+6\int_{1}^{2}(-x+2)dx$$
$$=7\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_0^1+6\Big[-\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_1^2$$
$$=7\cdot\frac{2}{3}+6\cdot\frac{1}{2}=\frac{23}{3}$$

다른 풀이 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $0\le x\le13$에서 $f(x)=-x^2+2x$ $(0\le x<1)$는 7번, $f(x)=-x+2$ $(1\le x<2)$는 6번 나오므로

$$\int_{0}^{13}f(x)dx=7\int_{0}^{1}(-x^2+2x)dx+6\int_{1}^{2}(-x+2)dx$$
$$=\frac{23}{3}$$

0781 답 32

TIP $f(-x)=f(x)$이므로 $\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$이다.

$f(-x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이고

$$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=4$$

또, 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로

$\int_{-2}^{-1} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx=4$

$\therefore \int_{-2}^{0} f(x)dx=\int_{-2}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{0} f(x)dx$

$=4+4=8$

$\therefore \int_{-2}^{6} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{6} f(x)dx$

$=4\int_{-2}^{0} f(x)dx=4\cdot 8=32$

유형 09 적분 구간이 상수로 주어진 정적분을 포함한 등식 본책 130쪽

상수 a, b에 대하여 $\int_{a}^{b} f(t)dt$를 포함한 등식

⇨ $\int_{a}^{b} f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓고 $f(x)$를 x, k에 대한 식으로 나타낸 다음 $\int_{a}^{b} f(t)dt=k$의 $f(t)$에 대입하여 k의 값을 구한다.

0782 답 $\frac{3}{2}$

$\int_{0}^{3} f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^2-4x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{3} (t^2-4t+k)dt=k$, $\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+kt\right]_{0}^{3}=k$

$3k-9=k \qquad \therefore k=\frac{9}{2}$

따라서 $f(x)=x^2-4x+\frac{9}{2}$이므로

$f(1)=1-4+\frac{9}{2}=\frac{3}{2}$

0783 답 ①

$\int_{0}^{1} tf(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^2-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{1} t(t^2-2t+k)dt=k$, $\int_{0}^{1} (t^3-2t^2+kt)dt=k$

$\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_{0}^{1}=k$, $\frac{k}{2}-\frac{5}{12}=k \qquad \therefore k=-\frac{5}{6}$

따라서 $f(x)=x^2-2x-\frac{5}{6}$이므로

$f(3)=9-6-\frac{5}{6}=\frac{13}{6}$

0784 답 -2

$f(x)=x-\int_{0}^{2} (x-2)f(t)dt$

$=x-(x-2)\int_{0}^{2} f(t)dt$

에서 $\int_{0}^{2} f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=x-(x-2)k=(1-k)x+2k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{2} \{(1-k)t+2k\}dt=k$, $\left[\frac{1-k}{2}t^2+2kt\right]_{0}^{2}=k$

$2k+2=k \qquad \therefore k=-2$

$\therefore \int_{0}^{2} f(x)dx=-2$

0785 답 16

$\int_{0}^{1} f'(x)dx=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=2x^2+4k$이므로

$f'(x)=4x$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{1} 4x\,dx=k$, $\left[2x^2\right]_{0}^{1}=k \qquad \therefore k=2$

따라서 $f(x)=2x^2+8$이므로

$f(2)=8+8=16$

0786 답 $\frac{4}{9}$

$\int_{-1}^{1} g(t)dt=a$, $\int_{-1}^{1} f(t)dt=b$ (a, b는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^2+a$, $g(x)=x+b$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{-1}^{1} (t+b)dt=a$에서 $\left[\frac{1}{2}t^2+bt\right]_{-1}^{1}=a$

$\therefore 2b=a$ …… ㉡

$\int_{-1}^{1} (t^2+a)dt=b$에서 $\left[\frac{1}{3}t^3+at\right]_{-1}^{1}=b$

$\therefore \frac{2}{3}+2a=b$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-\frac{4}{9}$, $b=-\frac{2}{9}$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{4}{9}$, $g(x)=x-\frac{2}{9}$이므로

$f\left(\frac{2}{3}\right)+g\left(\frac{2}{3}\right)=0+\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$

유형 10 적분 구간에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식 ; $\int_{a}^{x} f(t)dt$ 꼴 본책 130쪽

함수 $f(x)$가 $\int_{a}^{x} f(t)dt=g(x)$ (a는 상수)를 만족시킬 때

(1) 양변에 $x=a$를 대입하면 ⇨ $\int_{a}^{a} f(t)dt=0$, 즉 $g(a)=0$

(2) 양변을 x에 대하여 미분하면 ⇨ $f(x)=g'(x)$

0787 답 0

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-a \qquad \therefore a=1$

$\int_{1}^{x} f(t)dt=x^3-2x^2+x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x+1$
$\therefore f(a)=f(1)=3-4+1=0$

0788 답 ④
주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=x^2+x+a$
$f'(-2)=9$에서 $4-2+a=9$ $\quad\therefore a=7$

0789 답 ③
$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{f(2-h)-f(2)\}}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\cdot\frac{1}{2}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}f'(2)+\frac{1}{2}f'(2)=f'(2)$$
이때, $f(x)=\int_0^x(3t^2-4t+3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=3x^2-4x+3$
$\therefore f'(2)=12-8+3=7$

0790 답 -1
주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)=-3$
주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)+xf'(x)=3x^2-8x+f(x)$
$xf'(x)=3x^2-8x$
$\therefore f'(x)=3x-8$
이때, $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-8)dx=\frac{3}{2}x^2-8x+C$이므로
$f(1)=-3$에서 $C-\frac{13}{2}=-3$ $\quad\therefore C=\frac{7}{2}$
따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+\frac{7}{2}$이므로 $f(k)=13$에서
$\frac{3}{2}k^2-8k+\frac{7}{2}=13$, $3k^2-16k-19=0$
$(k+1)(3k-19)=0$ $\quad\therefore k=-1$ ($\because$ k는 정수)

0791 답 ②
$\int_0^1 f(t)dt=a$ (a는 상수)로 놓으면
$\int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2-2ax$
위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$\int_0^1 f(t)dt=-2a-1$
$a=-2a-1$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{3}$
$\therefore \int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2+\frac{2}{3}x$
위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=3x^2-4x+\frac{2}{3}$
따라서 $k=f(0)=\frac{2}{3}$이므로 $30k=20$

유형 11 적분 구간에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식 ; $\int_x^{x+a}f(t)dt$ 꼴

본책 131쪽

$\int_x^{x+a}f(t)dt=g(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면
⇨ $f(x+a)-f(x)=g'(x)$ (단, a는 상수)

0792 답 ①
$f(x)=\int_x^{x+2}(t^2-3t+2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=\{(x+2)^2-3(x+2)+2\}-(x^2-3x+2)$
$\quad=4x-2$
$\therefore f'(0)=-2$

0793 답 $\frac{13}{6}$
$f(x)=\int_x^{x+1}(t^2+2t-1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=\{(x+1)^2+2(x+1)-1\}-(x^2+2x-1)$
$\quad=2x+3$
$$\therefore \int_0^1 xf'(x)dx=\int_0^1 x(2x+3)dx$$
$$=\int_0^1(2x^2+3x)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1=\frac{13}{6}$$

유형 12 적분 구간과 피적분함수에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식 ; $\int_a^x(x-t)f(t)dt$ 꼴

본책 131쪽

$\int_a^x(x-t)f(t)dt$를 포함한 등식은
⇨ $x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$로 변형하여 양변을 x에 대하여 미분한다.

0794 답 0
주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=a+2$ $\quad\therefore a=-2$
즉, $\int_1^x(x-t)f(t)dt=x^2-2x+1$에서
$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^2-2x+1$
위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=2x-2$
$\therefore \int_1^x f(t)dt=2x-2$
위의 식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면
$f(x)=2$ $\quad\therefore b=f(2)=2$
$\therefore a+b=-2+2=0$

0795 답 6

$\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^3-3x+2$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3-3x+2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-3$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2-3$

위의 식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x$

$\therefore f(1)=6$

0796 답 $f(x)=3x^2-1$

$\int_0^x (x-t)f'(t)dt=x^3$에서

$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=x^3$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=3x^2$에서

$\int_0^x f'(t)dt=3x^2$

$\Big[f(t)\Big]_0^x=3x^2$

$\therefore f(x)-f(0)=3x^2$

이때, $f(0)=-1$이므로 $f(x)=3x^2-1$

0797 답 -10

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a+b+2 \qquad \therefore a+b=-2$ ······ ㉠

또, $\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^4-2x^3+ax^2+bx+3$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^4-2x^3+ax^2+bx+3$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=4x^3-6x^2+2ax+b$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=4x^3-6x^2+2ax+b$ ······ ㉡

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=2a+b-2 \qquad \therefore 2a+b=2$ ······ ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-6$

이 값을 ㉡에 대입하여 ㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2-12x+8$

이므로 $f(1)=8$

$\therefore a+b-f(1)=4+(-6)-8=-10$

유형 **13** 정적분으로 정의된 함수의 극대·극소 본책 132쪽

$f(x)=\int_a^x g(t)dt$와 같이 정의된 함수 $f(x)$의 극값은

⇨ 양변을 x에 대하여 미분하고 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.

0798 답 $-\frac{10}{3}$

$f(x)=\int_0^x (t^2+at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+ax+b$

$f'(-1)=0$에서 $1-a+b=0 \qquad \therefore a-b=1$ ······ ㉠

한편, $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{7}{6}$을 가지므로

$f(-1)=\int_0^{-1} (t^2+at+b)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^{-1}$

$=-\frac{1}{3}+\frac{a}{2}-b$

에서 $-\frac{1}{3}+\frac{a}{2}-b=\frac{7}{6} \qquad \therefore a-2b=3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

$\therefore f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=2$일 때 극소이므로 극솟값은

$f(2)=\int_0^2 (t^2-t-2)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^2$

$=-\frac{10}{3}$

0799 답 0

$f(x)=\int_0^x (3t^2-4t+1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-4x+1=(x-1)(3x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $f(x)$는 $x=\frac{1}{3}$일 때 극대이므로 극댓값 a는

$a=f\left(\frac{1}{3}\right)=\int_0^{\frac{1}{3}} (3t^2-4t+1)dt$

$=\left[t^3-2t^2+t\right]_0^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{27}$

또, $x=1$일 때 극소이므로 극솟값 b는

$b=f(1)=\int_0^1 (3t^2-4t+1)dt$

$=\left[t^3-2t^2+t\right]_0^1=0$

$\therefore ab=0$

0800 답 ③

$f(x)=\int_0^x t(t-a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $f(x)$는 $x=0$일 때 극대이므로 극댓값 M은

$M=f(0)=\int_0^0 t(t-a)dt=0$

또, $x=a$일 때 극소이므로 극솟값 m은

$m=f(a)=\int_0^a t(t-a)dt$

$=\int_0^a (t^2-at)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_0^a=-\frac{a^3}{6}$

따라서 $M-m=\frac{a^3}{6}$이므로 $\frac{a^3}{6}=\frac{4}{3}$

$a^3=8 \qquad \therefore a=2$

0801 답 $\frac{27}{4}$

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a+3 \qquad \therefore a=-3$

즉, $\int_1^x (x-t)f'(t)dt=x^4-x^3-3x^2+5x-2$에서

$x\int_1^x f'(t)dt-\int_1^x tf'(t)dt=x^4-x^3-3x^2+5x-2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=4x^3-3x^2-6x+5$

$\therefore \int_1^x f'(t)dt=4x^3-3x^2-6x+5$

위의 식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=12x^2-6x-6=6(x-1)(2x+1)$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x^2-6x-6)dx$

$=4x^3-3x^2-6x+C$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$일 때 극대이므로 극댓값 M은

$M=f\left(-\frac{1}{2}\right)=C+\frac{7}{4}$

또, $x=1$일 때 극소이므로 극솟값 m은

$m=f(1)=C-5$

$\therefore M-m=\left(C+\frac{7}{4}\right)-(C-5)=\frac{27}{4}$

0802 답 31

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

이때, 사차함수 $F(x)$가 극댓값을 가지려면 $F(x)$의 도함수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

(극댓값)×(극솟값)<0

이어야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2-9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

즉, $f(x)$의 극값은 $f(-1)$, $f(3)$이므로

$f(-1)f(3)<0$, $(a+5)(a-27)<0$

$\therefore -5<a<27$

따라서 구하는 정수 a는 $-4, -3, \cdots, 26$으로 그 개수는 31이다.

유형 14 정적분으로 정의된 함수의 최대·최소

본책 133쪽

주어진 등식을 미분하여 $f(x)$ 또는 $f'(x)$를 구한 후 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

0803 답 $\frac{9}{2}$

$f(x)=\int_0^x (3t-t^2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x-x^2=-x(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$		↘	극소	↗	

$f(-1)=\int_0^{-1} (3t-t^2)dt=\left[\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^{-1}=\frac{11}{6}$

$f(0)=\int_0^0 (3t-t^2)dt=0$

$f(3)=\int_0^3 (3t-t^2)dt=\left[\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3=\frac{9}{2}$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{9}{2}$, 최솟값은 0이므로

$a=\frac{9}{2}$, $b=0 \qquad \therefore a+b=\frac{9}{2}$

8 정적분

0804 답 ②

$\int_0^x (x-t)f(t)dt=-x^4+4x^3-2x^2$에서

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=-x^4+4x^3-2x^2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-4x^3+12x^2-4x$

$\therefore \int_0^x f(t)dt=-4x^3+12x^2-4x$

위의 식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-12x^2+24x-4=-12(x-1)^2+8$

따라서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 8을 갖는다.

0805 답 ②

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-|x|$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $0\le x\le 2$에서 $x=1$일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$f(1)=\int_{-1}^1 (1-|t|)dt$

$=2\int_0^1 (1-|t|)dt$ $y=1-|x|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 우함수

$=2\int_0^1 (1-t)dt$

$=2\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=1$

유형 15 정적분으로 정의된 함수의 그래프 본책 133쪽

> $F(x)=\int_a^x f(t)dt$에 대하여 $y=F(x)$의 그래프가 주어질 때,
> (i) 그래프로부터 $F(x)$의 식을 구한다.
> (ii) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$, $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt=f(x+a)-f(x)$
> 임을 이용한다.

0806 답 $-\frac{3}{4}$

주어진 그래프에서

$F(x)=a(x-1)(x-2)=a(x^2-3x+2)$ $(a>0)$

로 놓을 수 있다.

이때, $\int_1^x f(t)dt=a(x^2-3x+2)$이므로 이 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=a(2x-3)$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, -3)$을 지나므로

$-3=-a \qquad \therefore a=3$

$\therefore F(x)=3(x^2-3x+2)$

$F'(x)=f(x)=3(2x-3)$이므로

$F'(x)=0$에서 $x=\frac{3}{2}$

x	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $F(x)$는 $x=\frac{3}{2}$일 때 극소이므로 극솟값은

$F\left(\frac{3}{2}\right)=3\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+2\right)=-\frac{3}{4}$

0807 답 $\frac{3}{2}$

주어진 그래프에서

$f(x)=a(x+1)(x-3)$ $(a<0)$

으로 놓을 수 있다.

이때, $g(x)=\int_{x-2}^{x+1} f(t)dt=\int_{x-2}^{x+1} a(t+1)(t-3)dt$이므로

이 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=a(x+2)(x-2)-a(x-1)(x-5)$

$=a(6x-9)=3a(2x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=\frac{3}{2}$

x	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{3}{2}$일 때 극대이면서 최대이므로

$k=\frac{3}{2}$

0808 답 ④

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $F'(x)=f(x)$

이므로 $f(x)$는 $F(x)$의 도함수이다.

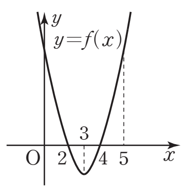
그런데 $y=F(x)$의 그래프가

$x\le 2$에서 증가하므로 $f(x)\ge 0$

$2\le x\le 4$에서 감소하므로 $f(x)\le 0$

$x\ge 4$에서 증가하므로 $f(x)\ge 0$

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로



$f(2)=0$, $f(3)<0$, $f(4)=0$, $f(5)>0$

ㄱ. $f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 2, 4이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

유형 16 정적분으로 정의된 함수의 극한 ; $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt$ 꼴 본책 134쪽

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt$의 값을 구하려면
(i) $F'(t)=f(t)$로 놓는다.
(ii) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x+a)-F(a)}{x}=F'(a)=f(a)$
임을 이용한다.

0809 답 ②

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=1$
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)+xf'(x)=2x+f(x)$
$xf'(x)=2x \qquad \therefore f'(x)=2$
$f(x)=\int f'(x)dx=\int 2dx=2x+C$
이때, $f(1)=1$에서 $2+C=1 \qquad \therefore C=-1$
$\therefore f(x)=2x-1$
$F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=f(0)=-1$$

0810 답 18

$f(x)=3x^3-2x^2-4x+1$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h}(3x^3-2x^2-4x+1)dx\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h}f(x)dx\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2-h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{F(2+h)-F(2)\}-\{F(2-h)-F(2)\}}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{F(2-h)-F(2)}{-h}\\&=F'(2)+F'(2)=2F'(2)=2f(2)\\&=2\cdot9=18\end{aligned}$$

0811 답 ①

$f(x)=|x+a|$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{3-h}^{3+h}|x+a|dx\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{3-h}^{3+h}f(x)dx\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(3+h)-F(3-h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{F(3+h)-F(3)\}-\{F(3-h)-F(3)\}}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(3+h)-F(3)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{F(3-h)-F(3)}{-h}\\&=F'(3)+F'(3)=2F'(3)=2f(3)\\&=2|3+a|=8\end{aligned}$$

따라서 $|3+a|=4$에서 $3+a=4$ 또는 $3+a=-4$
이때, a는 양수이므로 $a=1$

유형 17 정적분으로 정의된 함수의 극한 ; $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$ 꼴 본책 134쪽

$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$의 값을 구하려면
(i) $F'(t)=f(t)$로 놓는다.
(ii) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$
임을 이용한다.

0812 답 2

$F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt&=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}\cdot\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt\\&=\frac{1}{4}\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\\&=\frac{1}{4}F'(2)\\&=\frac{1}{4}f(2)\\&=\frac{1}{4}\cdot8=2\end{aligned}$$

0813 답 ①

$F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^x f(t)dt&=\lim_{x\to-1}\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}\\&=F'(-1)\\&=f(-1)\end{aligned}$$

따라서 $f(-1)=2$이므로 $k+7=2$
$\therefore k=-5$

0814 답 70

$f(t)=t(k-t)$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x t(k-t)dt&=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt\\&=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\\&=F'(2)\\&=f(2)\\&=2(k-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}\left\{\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x t(k-t)dt\right\}&=\sum_{k=1}^{10}2(k-2)\\&=\sum_{k=1}^{10}(2k-4)\\&=2\cdot\frac{10\cdot11}{2}-4\cdot10\\&=70\end{aligned}$$

8 정적분

0815 답 150

$f(t)=t^2+nt$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$a_n=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x (t^2+nt)dt$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=f(2)=4+2n$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(4+2k)=4\cdot 10+2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=150$$

STEP 3 | 심화 Master

0816 답 3

TIP 주어진 등식을 이용하여 먼저 $f(x)$의 차수를 알아본다.

다항식 $f(x)$의 차수를 n이라 하면 $f(f(x))$, $\int_0^x f(t)dt$의 차수는 각각 n^2, $n+1$이다.

이때, $n\geq 2$이면 주어진 식의 좌변과 우변의 차수는 각각 n^2, $n+1$이다.

그런데 $n^2=n+1$을 만족시키는 자연수 n의 값은 없으므로 $n<2$이다.

즉, $n=1$이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)로 놓으면

$f(f(x))=\int_0^x f(t)dt-x^2+3x+3$에서

$$a(ax+b)+b=\int_0^x (at+b)dt-x^2+3x+3$$
$$=\frac{a}{2}x^2+bx-x^2+3x+3$$
$$\therefore a^2x+ab+b=\left(\frac{a}{2}-1\right)x^2+(b+3)x+3$$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$0=\frac{a}{2}-1$, $a^2=b+3$, $ab+b=3$

$\therefore a=2,\ b=1$

$\therefore f(x)=2x+1$

따라서 구하는 $f(x)$의 계수들의 합은 $2+1=3$

0817 답 $\frac{10}{3}$

TIP $x=p+\sqrt{q}$, $y=p-\sqrt{q}$ 꼴로 주어지면 $x+y$, $x-y$, xy의 값을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

주어진 식에서

$$c\left(\int_a^c x\,dx+\int_c^b x\,dx\right)=\int_a^c x^2dx+\int_c^b x^2dx$$
$$c\int_a^b x\,dx=\int_a^b x^2dx$$
$$c\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b$$
$$\frac{c}{2}(b^2-a^2)=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$
$$\therefore c=\frac{2}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{(b-a)(b+a)}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{(b+a)^2-ab}{b+a}=\frac{2}{3}\cdot\frac{6^2-6}{6}$$
$$=\frac{10}{3}$$

0818 답 $2^{100}-101$

TIP $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$를 이용하여 먼저 $\int_1^n f(x)dx$의 값을 구한다.

임의의 자연수 n에 대하여

$$\int_1^n f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)dx$$
$$=1+2+\cdots+2^{n-2}$$
$$=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^{n-1}-1$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{100}\left\{\int_1^n f(x)dx\right\}=\sum_{n=1}^{100}(2^{n-1}-1)$$
$$=\frac{2^{100}-1}{2-1}-100$$
$$=2^{100}-101$$

Lecture

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

(1) $r\neq 1$일 때 ⇨ $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

(2) $r=1$일 때 ⇨ $S_n=na$

0819 답 0

TIP $f(x+y)=f(x)+f(y)$의 x, y에 적당한 값을 대입하여 $f(x)$의 성질을 알아본다.

$f(x+y)=f(x)+f(y)$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$

또, $y=-x$를 대입하면

$f(0)=f(x)+f(-x)$, $0=f(x)+f(-x)$

$\therefore f(-x)=-f(x)$

따라서 함수 $f(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-3}^1 f(x)dx+\int_{-1}^3 f(x)dx$$
$$=\int_{-3}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx$$
$$=\int_{-3}^3 f(x)dx+\int_{-1}^1 f(x)dx$$
$$=0+0=0$$

0820 답 ①

TIP 주어진 조건을 이용하여 함수 $h(x)$의 성질을 알아본다.

$f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$이므로

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$

따라서 함수 $h(x)$는 기함수이고 $h'(x)$는 우함수이다.

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=\int_{-3}^{3}xh'(x)dx+5\int_{-3}^{3}h'(x)dx$$
$$=10\int_{0}^{3}h'(x)dx$$
$$=10\{h(3)-h(0)\}=10$$

$\therefore h(3)-h(0)=1$

이때, $h(-x)=-h(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$h(0)=-h(0)$ $\quad\therefore h(0)=0$

$\therefore h(3)=h(0)+1=1$

참고 $h(x)$가 기함수이므로

$h(x)=a_1x+a_2x^3+a_3x^5+\cdots(a_1, a_2, a_3, \cdots$은 상수)으로 놓으면

$$h'(x)=a_1+3a_2x^2+5a_3x^4+\cdots$$
$$=a_1+3a_2(-x)^2+5a_3(-x)^4+\cdots$$
$$=h'(-x)$$

이므로 $h'(x)$는 우함수이다.

또, $xh'(x)=a_1x+3a_2x^3+5a_3x^5+\cdots=-(-x)h'(-x)$

이므로 $xh'(x)$는 기함수이다.

0821 답 8

TIP 주어진 식을 변형하여 정적분의 성질을 이용한다.

$$\int_0^1(x-k)^2f(x)dx$$
$$=\int_0^1(x^2-2kx+k^2)f(x)dx$$
$$=\int_0^1x^2f(x)dx-2k\int_0^1xf(x)dx+k^2\int_0^1f(x)dx$$
$$=\int_0^1x^2f(x)dx-4k+k^2$$

$\int_0^1x^2f(x)dx=a$ (a는 상수)로 놓으면

$$\int_0^1(x-k)^2f(x)dx=k^2-4k+a$$
$$=(k-2)^2+a-4$$

이때, 최솟값은 $a-4$이므로 $a-4=4$ $\quad\therefore a=8$

$\therefore \int_0^1x^2f(x)dx=8$

0822 답 43

TIP $\int_a^bf(x)dx=\int_a^cf(x)dx+\int_c^bf(x)dx$를 이용한다.

$$\int_a^{a+4}f(x)dx=\int_a^4(-x^2+4x)dx+\int_4^{a+4}(x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_a^4+\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^{a+4}$$
$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$$

$g(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$로 놓으면

$g'(a)=a^2-3a=a(a-3)$

$g'(a)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=3$

a	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(a)$	0	$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	극소	↗	

즉, $g(a)$는 $a=3$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$g(3)=9-\frac{27}{2}+\frac{32}{3}=\frac{37}{6}$

따라서 $p=6$, $q=37$이므로 $p+q=43$

0823 답 ②

TIP $0\le x<1$, $x\ge1$인 경우로 나누어 그래프의 개형을 알아본다.

$f(x)=\begin{cases}-x & (0\le x<1)\\ x-2 & (x\ge1)\end{cases}$ 이므로 $F(x)=\int_0^xf(t)dt$에서

(i) $0\le x<1$일 때

$$F(x)=\int_0^x(-t)dt=\left[-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x=-\frac{1}{2}x^2$$

(ii) $x\ge1$일 때

$$F(x)=\int_0^1(-t)dt+\int_1^x(t-2)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}t^2-2t\right]_1^x=\frac{1}{2}x^2-2x+1$$

따라서 $y=F(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다.

0824 답 a

TIP $F'(x)=f(x)$로 놓고 $\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$임을 이용한다.

$F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{b\to a}\frac{\int_{a^3}^{b^3}f(x)dx}{\int_{a^2}^{b^2}f(x)dx}=\lim_{b\to a}\frac{\frac{\int_{a^3}^{b^3}f(x)dx}{b^3-a^3}\cdot(b^3-a^3)}{\frac{\int_{a^2}^{b^2}f(x)dx}{b^2-a^2}\cdot(b^2-a^2)}$$
$$=\lim_{b\to a}\frac{\frac{F(b^3)-F(a^3)}{b^3-a^3}}{\frac{F(b^2)-F(a^2)}{b^2-a^2}}\cdot\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}$$
$$=\frac{F'(a^3)}{F'(a^2)}\cdot\lim_{b\to a}\frac{b^2+ba+a^2}{b+a}$$
$$=\frac{f(a^3)}{f(a^2)}\cdot\frac{3a^2}{2a}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3a^2}{2a}=a$$

8 정적분

9 | 정적분의 활용

본책 138쪽~151쪽

STEP 1 | 기초 Build

0825 답 $\frac{1}{6}$

$$\int_{-1}^{0}\{-x(x+1)\}\,dx=\int_{-1}^{0}(-x^2-x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{6}$$

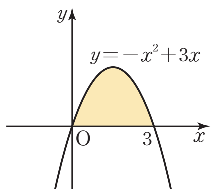
0826 답 $\frac{9}{2}$

곡선 $y=-x^2+3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x=0$에서

$-x(x-3)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{0}^{3}(-x^2+3x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}=\frac{9}{2}$$

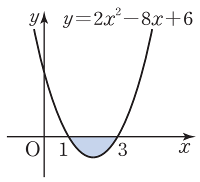
0827 답 $\frac{8}{3}$

곡선 $y=2x^2-8x+6$과 x축의 교점의 x좌표는 $2x^2-8x+6=0$에서

$2(x-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{1}^{3}\{-(2x^2-8x+6)\}\,dx$$
$$=-\left[\frac{2}{3}x^3-4x^2+6x\right]_{1}^{3}$$
$$=\frac{8}{3}$$

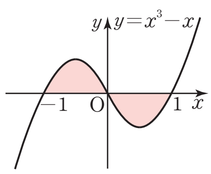
0828 답 $\frac{1}{2}$

곡선 $y=x^3-x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-x=0$에서

$x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{1}|x^3-x|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

0829 답 12

$$\int_{-2}^{1}(x^2+3)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_{-2}^{1}=\frac{10}{3}-\left(-\frac{26}{3}\right)=12$$

0830 답 2

$$\int_{-1}^{0}\{-(x^2+2x)\}\,dx+\int_{0}^{1}(x^2+2x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$

0831 답 $\frac{4}{3}$

$$\int_{0}^{2}\{-(y^2-2y)\}\,dy=\int_{0}^{2}(-y^2+2y)\,dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+y^2\right]_{0}^{2}=\frac{4}{3}$$

0832 답 $\frac{1}{6}$

곡선 $y=-x^2-2x-1$과 직선 $y=x+1$의 교점의 x좌표는

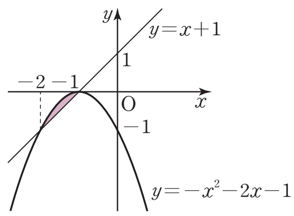
$-x^2-2x-1=x+1$에서

$-x^2-3x-2=0$

$-(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=-1$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^{-1}\{(-x^2-2x-1)-(x+1)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(-x^2-3x-2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{-1}$$
$$=\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

0833 답 $\frac{4}{3}$

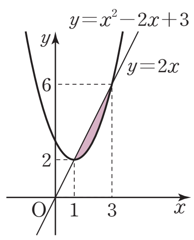
곡선 $y=x^2-2x+3$과 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x+3=2x$에서 $x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{1}^{3}\{2x-(x^2-2x+3)\}\,dx$$
$$=\int_{1}^{3}(-x^2+4x-3)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_{1}^{3}=\frac{4}{3}$$

0834 답 $\frac{1}{2}$

곡선 $y=x^3$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3=x$에서 $x^3-x=0$

$x(x+1)(x-1)=0$

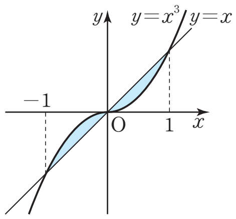
$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx+\int_{0}^{1}(x-x^3)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$



0835 답 $\frac{8}{3}$

두 곡선 $y=-x^2+1$, $y=x^2-1$의 교점의 x좌표는

$-x^2+1=x^2-1$에서 $2x^2-2=0$

$2(x+1)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=1$

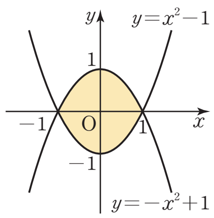
따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{1}\{(-x^2+1)-(x^2-1)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)\,dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_{-1}^{1}$

$=\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$



0836 답 9

두 곡선 $y=-x^2+2x$, $y=x^2-4$의 교점의 x좌표는

$-x^2+2x=x^2-4$에서

$2x^2-2x-4=0$

$2(x+1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=2$

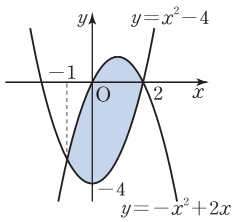
따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x)-(x^2-4)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}$

$=\frac{20}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right)=9$



0837 답 (1) 24 (2) 4 (3) 13

(1) $0+\int_{0}^{4}(4t-2)\,dt=\left[2t^2-2t\right]_{0}^{4}=24$

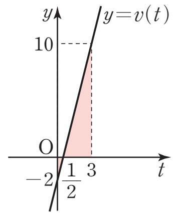
(2) $\int_{1}^{2}(4t-2)\,dt=\left[2t^2-2t\right]_{1}^{2}=4$

(3) $\int_{0}^{3}|4t-2|\,dt$

$=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-4t+2)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{3}(4t-2)\,dt$

$=\left[-2t^2+2t\right]_{0}^{\frac{1}{2}}+\left[2t^2-2t\right]_{\frac{1}{2}}^{3}$

$=\frac{1}{2}+\frac{25}{2}=13$

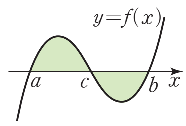


STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 곡선과 x축 사이의 넓이 본책 140쪽

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

⇨ $\int_{a}^{c}f(x)\,dx+\int_{c}^{b}\{-f(x)\}\,dx$



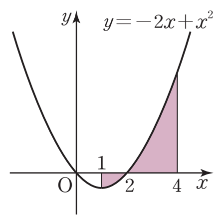
0838 답 $\frac{22}{3}$

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$\int_{1}^{2}(2x-x^2)\,dx+\int_{2}^{4}(-2x+x^2)\,dx$

$=\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{1}^{2}+\left[-x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_{2}^{4}$

$=\frac{2}{3}+\frac{20}{3}=\frac{22}{3}$



0839 답 3

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

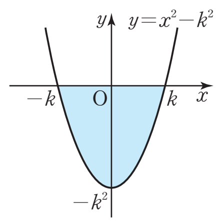
$\int_{-k}^{k}(-x^2+k^2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+k^2x\right]_{-k}^{k}$

$=\frac{2}{3}k^3-\left(-\frac{2}{3}k^3\right)=\frac{4}{3}k^3$

따라서 $\frac{4}{3}k^3=36$이므로 $k^3=27$

$\therefore$ $k=3$



0840 답 $\frac{32}{5}$

곡선 $y=x^3-x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-x^2-2x=0$에서

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$S_1=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{5}{12}$

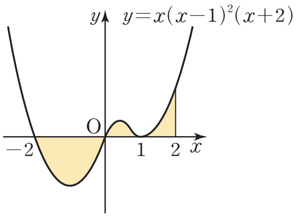
$S_2=\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}$

$\therefore$ $\frac{S_2}{S_1}=\frac{32}{5}$

0841 답 ④

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\int_{-2}^{0}\{-x(x-1)^2(x+2)\}\,dx$

$\quad+\int_{0}^{2}x(x-1)^2(x+2)\,dx$

$=\int_{-2}^{0}(-x^4+3x^2-2x)\,dx$

$\quad+\int_{0}^{2}(x^4-3x^2+2x)\,dx$

$=\left[-\frac{x^5}{5}+x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^5}{5}-x^3+x^2\right]_{0}^{2}$

$=\frac{28}{5}+\frac{12}{5}=8$

0842 답 27

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=xf'(x)+6x^2+6x-12$

$\therefore f(x)=6x^2+6x-12$

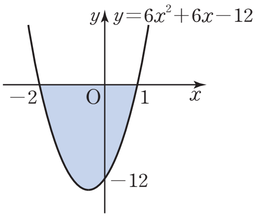
$\qquad\quad=6(x-1)(x+2)$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는

$6(x-1)(x+2)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\int_{-2}^{1}(-6x^2-6x+12)\,dx$

$=\left[-2x^3-3x^2+12x\right]_{-2}^{1}$

$=7-(-20)=27$

0843 답 $\frac{3}{2}$

$S_1+S_2+S_3=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx$

$\qquad\qquad\quad=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$

$\qquad\qquad\quad=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{9}{2}$

이때, S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S_2=S_1+S_3$

따라서 $3S_2=\frac{9}{2}$이므로 $S_2=\frac{3}{2}$

0844 답 ②

TIP $S(t)=\int_{a}^{t}f(x)\,dx$이다.

$S(a)=\int_{a}^{a}f(x)\,dx=0$이므로

$\lim\limits_{t\to a}\frac{S(t)}{t-a}=\lim\limits_{t\to a}\frac{S(t)-S(a)}{t-a}=S'(a)$

이때, $S(t)=\int_{a}^{t}f(x)\,dx$이므로 $S'(t)=f(t)$

$\therefore S'(a)=f(a)=b$

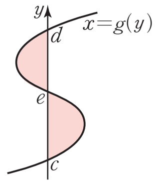
$\therefore \lim\limits_{t\to a}\frac{S(t)}{t-a}=b$

유형 02 곡선과 y축 사이의 넓이

본책 141쪽

오른쪽 그림과 같이 곡선 $x=g(y)$와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

⇨ $\int_{c}^{e}g(y)\,dy+\int_{e}^{d}\{-g(y)\}\,dy$



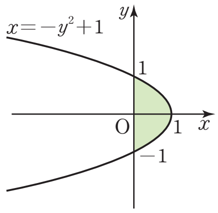
0845 답 $\frac{4}{3}$

곡선 $x=-y^2+1$과 y축의 교점의 y좌표는

$-y^2+1=0$에서 $(y+1)(y-1)=0$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=1$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\int_{-1}^{1}(-y^2+1)\,dy=\left[-\frac{1}{3}y^3+y\right]_{-1}^{1}$

$\qquad\qquad\qquad\quad=\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$

0846 답 8

$\int_{-2}^{0}y(y^2-4)\,dy+\int_{0}^{2}\{-y(y^2-4)\}\,dy$

$=\int_{-2}^{0}(y^3-4y)\,dy+\int_{0}^{2}(-y^3+4y)\,dy$

$=\left[\frac{1}{4}y^4-2y^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}y^4+2y^2\right]_{0}^{2}$

$=4+4=8$

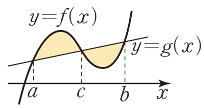
유형 03 곡선과 직선 사이의 넓이

본책 141쪽

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

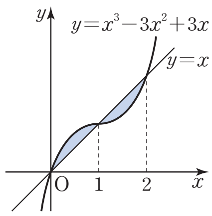
⇨ $\int_{a}^{c}\{f(x)-g(x)\}\,dx$

$\quad+\int_{c}^{b}\{g(x)-f(x)\}\,dx$



0847 답 ①

곡선 $y=x^3-3x^2+3x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



$x^3-3x^2+3x=x$에서

$x^3-3x^2+2x=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{1}\{(x^3-3x^2+3x)-x\}\,dx+\int_{1}^{2}\{x-(x^3-3x^2+3x)\}\,dx$

$=\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)\,dx+\int_{1}^{2}(-x^3+3x^2-2x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_{1}^{2}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

0848 답 ①

$y=|x^2-2x|=\begin{cases} -x^2+2x & (0\le x\le 2) \\ x^2-2x & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \end{cases}$

함수 $y=|x^2-2x|$의 그래프와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는

(i) $0\le x\le 2$일 때

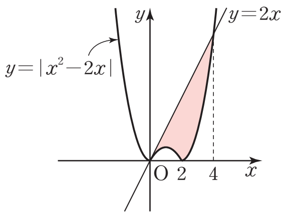
$-x^2+2x=2x$에서 $x^2=0$　　$\therefore x=0$

(ii) $x<0$, $x>2$일 때

$x^2-2x=2x$에서 $x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$　　$\therefore x=4$

따라서 구하는 넓이는



$\int_0^2 \{2x-(-x^2+2x)\}\,dx$

$\quad+\int_2^4 \{2x-(x^2-2x)\}\,dx$

$=\int_0^2 x^2\,dx+\int_2^4 (-x^2+4x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_2^4$

$=\frac{8}{3}+\frac{16}{3}=8$

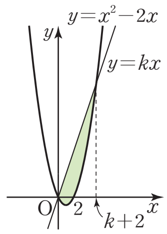
0849 답 3

곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=kx$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=kx$에서

$x^2-(k+2)x=0$, $x(x-k-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=k+2$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 $\frac{125}{6}$이고



$\int_0^{k+2} \{kx-(x^2-2x)\}\,dx=\int_0^{k+2} \{-x^2+(k+2)x\}\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k+2}{2}x^2\right]_0^{k+2}$

$=\frac{(k+2)^3}{6}$

따라서 $\frac{(k+2)^3}{6}=\frac{125}{6}$이므로 $(k+2)^3=125$

$k+2=5$　　$\therefore k=3$

0850 답 ④

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면 $h(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$의 해가 $x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$이고 $h(x)$는 삼차함수이므로

$h(x)=ax(x-3)(x-4)$ $(a\neq 0)$로 놓을 수 있다.

색칠한 부분의 넓이가 90이고

$\int_0^3 \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_0^3 h(x)\,dx$

$=\int_0^3 ax(x-3)(x-4)\,dx$

$=a\int_0^3 (x^3-7x^2+12x)\,dx$

$=a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3+6x^2\right]_0^3$

$=\frac{45}{4}a$

따라서 $\frac{45}{4}a=90$이므로 $a=8$

즉, $f(x)-g(x)=8x(x-3)(x-4)$

$\therefore f(2)-g(2)=8\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-2)=32$

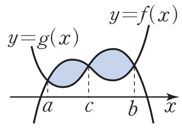
유형 04 두 곡선 사이의 넓이

본책 142쪽

오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

⇨ $\int_a^c \{f(x)-g(x)\}\,dx$

$\quad+\int_c^b \{g(x)-f(x)\}\,dx$



0851 답 ①

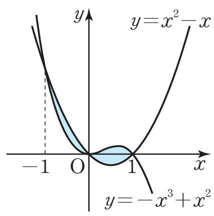
두 곡선 $y=-x^3+x^2$, $y=x^2-x$의 교점의 x좌표는

$-x^3+x^2=x^2-x$에서

$x^3-x=0$, $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{-1}^0 \{(x^2-x)-(-x^3+x^2)\}\,dx$

$\quad+\int_0^1 \{(-x^3+x^2)-(x^2-x)\}\,dx$

$=\int_{-1}^0 (x^3-x)\,dx+\int_0^1 (-x^3+x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

0852 답 9

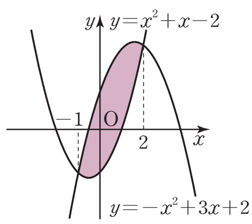
두 곡선 $y=x^2+x-2$, $y=-x^2+3x+2$의 교점의 x좌표는

$x^2+x-2=-x^2+3x+2$에서

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{-1}^2 \{(-x^2+3x+2)-(x^2+x-2)\}\,dx$

$=\int_{-1}^2 (-2x^2+2x+4)\,dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^2$

$=\frac{20}{3}+\frac{7}{3}=9$

0853 답 $\frac{125}{12}$

두 곡선 $y=x^3-6x$, $y=x^2$의 교점의 x좌표는

$x^3-6x=x^2$에서

$x^3-x^2-6x=0$, $x(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

$\therefore S_2-S_1$

$$=\int_0^3 \{x^2-(x^3-6x)\}\,dx-\int_{-2}^0 \{(x^3-6x)-x^2\}\,dx$$

$$=\int_0^3 (-x^3+x^2+6x)\,dx-\int_{-2}^0 (x^3-x^2-6x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^3-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{-2}^0$$

$$=\frac{63}{4}-\frac{16}{3}$$

$$=\frac{125}{12}$$

0854 답 ②

곡선 $y=-x^2$을 x축에 대하여 대칭이동시키면

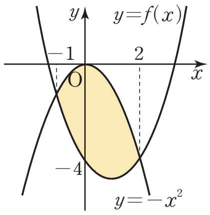
$-y=-x^2 \qquad \therefore y=x^2$

이 곡선을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동시키면

$y=(x-1)^2-5=x^2-2x-4$

$\therefore f(x)=x^2-2x-4$

이때, 두 곡선 $y=-x^2$, $y=x^2-2x-4$의 교점의 x좌표는



$-x^2=x^2-2x-4$에서

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^2 \{-x^2-(x^2-2x-4)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^2 (-2x^2+2x+4)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^2$$

$$=\frac{20}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right)=9$$

Lecture

도형의 평행이동

방정식 $f(x,\ y)=0$ 또는 $y=f(x)$가 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

(1) $f(x,\ y)=0 \Rightarrow f(x-a,\ y-b)=0$

(2) $y=f(x) \Rightarrow y-b=f(x-a)$

0855 답 3

곡선 $y=-x^2+9$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+9=0$에서 $x^2-9=0$

$(x+3)(x-3)=0$

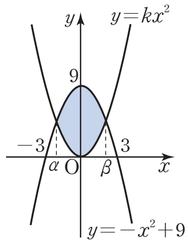
$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

곡선 $y=-x^2+9$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_{-3}^3 (-x^2+9)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+9x\right]_{-3}^3=36$$

한편, 두 곡선 $y=-x^2+9$, $y=kx^2$의 교점의 x좌표는 $-x^2+9=kx^2$,



즉 $(k+1)x^2-9=0$의 두 실근이다.

이때, $(k+1)x^2-9=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta=-\frac{9}{k+1}$

두 곡선 $y=-x^2+9$, $y=kx^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_\alpha^\beta \{(-x^2+9)-kx^2\}\,dx=\int_\alpha^\beta \{9-(k+1)x^2\}\,dx$$

$$=\left[9x-\frac{k+1}{3}x^3\right]_\alpha^\beta=(\beta-\alpha)\left\{9-\frac{k+1}{3}\underbrace{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}_{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}\right\}$$

$$=(\beta-\alpha)\left(9+\frac{k+1}{3}\cdot\alpha\beta\right)=6(\beta-\alpha)$$

이때, $\beta-\alpha=\sqrt{(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\frac{6}{\sqrt{k+1}}$이므로

$S_2=6\cdot\frac{6}{\sqrt{k+1}}=\frac{36}{\sqrt{k+1}}$

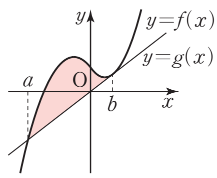
따라서 $S_1=2S_2$에서 $36=2\cdot\frac{36}{\sqrt{k+1}}$

$\sqrt{k+1}=2$, $k+1=4 \qquad \therefore k=3$

유형 05 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 본책 143쪽

접선의 방정식을 구한 후 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 접선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\Rightarrow \int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$



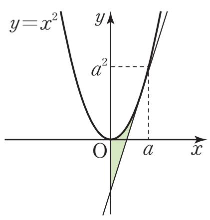
0856 답 ③

$y=x^2$에서 $y'=2x$

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(a,\ a^2)$에서의 접선의 기울기는 $2a$이므로 접선의 방정식은 $y-a^2=2a(x-a)$

$\therefore y=2ax-a^2$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 9이므로



$$\int_0^a \{x^2-(2ax-a^2)\}\,dx$$

$$=\int_0^a (x^2-2ax+a^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+a^2x\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{3}a^3=9$$

따라서 $a^3=27$이므로 $a=3$

0857 답 ④

$y=x^3-4x$에서 $y'=3x^2-4$

점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는 -1이므로 접선의 방정식은

$y-(-3)=-(x-1)$

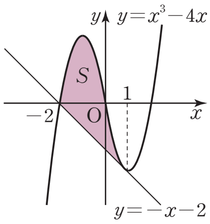
$\therefore\ y=-x-2$

곡선 $y=x^3-4x$와 직선 $y=-x-2$의 교점의 x좌표는

$x^3-4x=-x-2$에서 $x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{1}\{x^3-4x-(-x-2)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\frac{3}{4}-(-6)=\frac{27}{4}$$

$\therefore\ 4S=27$

0858 답 $\frac{4}{3}$

$y=x^3-x^2-x+2$에서 $y'=3x^2-2x-1$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 0이므로 접선의 방정식은 $y=1$

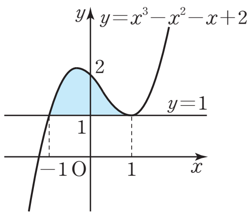
곡선 $y=x^3-x^2-x+2$와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는

$x^3-x^2-x+2=1$에서

$x^3-x^2-x+1=0$

$(x-1)^2(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{(x^3-x^2-x+2)-1\}\,dx=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}$$

0859 답 $\frac{2}{3}$

$y=-x^2+4x-1$에서 $y'=-2x+4$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+4t-1)$이라 하면 접선의 기울기는 $-2t+4$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+4t-1)=(-2t+4)(x-t)$ ······ ㉠

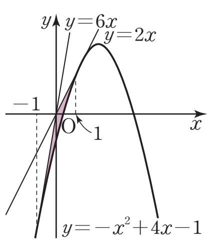
이 직선이 원점을 지나므로

$t^2-4t+1=2t^2-4t,\ t^2-1=0$

$(t+1)(t-1)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$

이것을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=6x,\ y=2x$이므로 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-1}^{0}\{6x-(-x^2+4x-1)\}\,dx+\int_{0}^{1}\{2x-(-x^2+4x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

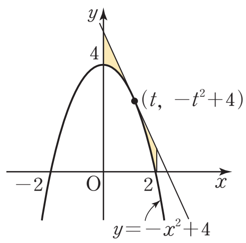
0860 답 $\frac{2}{3}$

$y=-x^2+4$에서 $y'=-2x$

점 $(t,\ -t^2+4)$에서의 접선의 기울기는 $-2t$이므로 접선의 방정식은 $y-(-t^2+4)=-2t(x-t)$

$\therefore\ y=-2tx+t^2+4$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



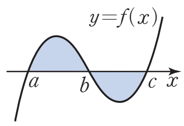
$$\int_{0}^{2}\{-2tx+t^2+4-(-x^2+4)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{2}(x^2-2tx+t^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_{0}^{2}$$
$$=2t^2-4t+\frac{8}{3}=2(t-1)^2+\frac{2}{3}$$

따라서 $0<t<2$에서 구하는 넓이의 최솟값은 $t=1$일 때 $\frac{2}{3}$이다.

유형 06 두 도형의 넓이가 같을 조건 본책 143쪽

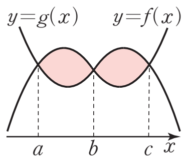
(1) 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으면

⇨ $\int_{a}^{c}f(x)\,dx=0$



(2) 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으면

⇨ $\int_{a}^{c}\{f(x)-g(x)\}\,dx=0$



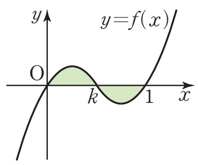
0861 답 $\frac{1}{2}$

곡선 $y=x(x-k)(x-1)$과 x축의 교점의 x좌표는

$x(x-k)(x-1)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=k$ 또는 $x=1$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_{0}^{1}x(x-k)(x-1)\,dx=0$$
$$\int_{0}^{1}\{x^3-(k+1)x^2+kx\}\,dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_{0}^{1}=0$$

$\frac{k}{6}-\frac{1}{12}=0\qquad\therefore\ k=\frac{1}{2}$

0862 답 $\frac{1}{3}$

$S_1=S_2$이므로

$$\int_0^1 \{(x-x^2)-mx\}\,dx=0$$

$$\int_0^1 \{-x^2+(1-m)x\}\,dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1-m}{2}x^2\right]_0^1=0$$

$$-\frac{1}{3}+\frac{1-m}{2}=0 \qquad \therefore m=\frac{1}{3}$$

0863 답 $\frac{17}{4}$

$y=-(x+1)^3+8$에서 $y=-x^3-3x^2-3x+7$

색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^1 \{(-x^3-3x^2-3x+7)-k\}\,dx=0$$

$$\int_0^1 (-x^3-3x^2-3x+7-k)\,dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{3}{2}x^2+(7-k)x\right]_0^1=0$$

$$\frac{17}{4}-k=0 \qquad \therefore k=\frac{17}{4}$$

0864 답 ④

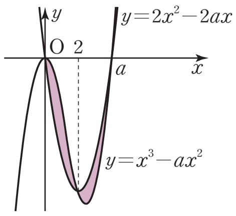
두 곡선 $y=x^3-ax^2$, $y=2x^2-2ax$의 교점의 x좌표는

$x^3-ax^2=2x^2-2ax$에서 $x^3-(a+2)x^2+2ax=0$

$x(x-2)(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=a$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이는 서로 같으므로



$$\int_0^a \{(x^3-ax^2)-(2x^2-2ax)\}\,dx=0$$

$$\int_0^a \{x^3-(a+2)x^2+2ax\}\,dx=0$$

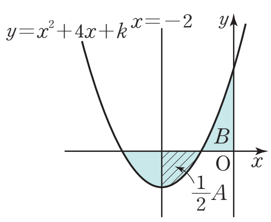
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_0^a=0$$

$$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3=0,\ a^4-4a^3=0$$

$$a^3(a-4)=0 \qquad \therefore a=4\ (\because a>2)$$

0865 답 $\frac{8}{3}$

$A:B=2:1$에서 $A=2B$이고, 곡선 $y=x^2+4x+k$가 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}A=B$이다.



즉, 곡선 $y=x^2+4x+k$와 x축, y축 및 직선 $x=-2$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{-2}^0 (x^2+4x+k)\,dx=0$$

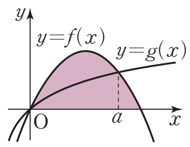
$$\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+kx\right]_{-2}^0=0$$

$$-\frac{16}{3}+2k=0 \qquad \therefore k=\frac{8}{3}$$

유형 07 넓이의 활용 ; 이등분 본책 144쪽

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S가 곡선 $y=g(x)$에 의하여 이등분되면

$$\Rightarrow \int_0^a \{f(x)-g(x)\}\,dx=\frac{1}{2}S$$



0866 답 $\frac{1}{2}$

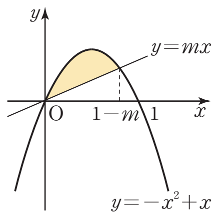
곡선 $y=-x^2+x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는

$-x^2+x=mx$에서 $x^2+(m-1)x=0$

$x(x+m-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1-m$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_0^{1-m} \{(-x^2+x)-mx\}\,dx$$

$$=\int_0^{1-m} \{-x^2+(1-m)x\}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1-m}{2}x^2\right]_0^{1-m}$$

$$=\frac{1}{6}(1-m)^3$$

이때, 곡선 $y=-x^2+x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 (-x^2+x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

이므로

$$\frac{1}{6}(1-m)^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} \qquad \therefore (1-m)^3=\frac{1}{2}$$

0867 답 ④

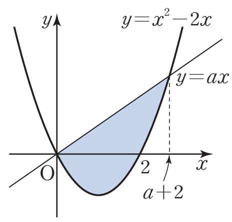
곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=ax$에서 $x^2-(a+2)x=0$

$x(x-a-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a+2$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_0^{a+2} \{ax-(x^2-2x)\}\,dx$$

$$=\int_0^{a+2} \{-x^2+(a+2)x\}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+2}{2}x^2\right]_0^{a+2}$$

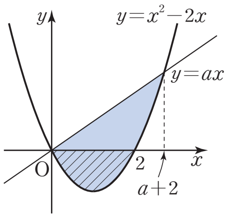
$$=\frac{1}{6}(a+2)^3$$

곡선 $y=x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는



$\int_{0}^{2}(-x^2+2x)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$

이므로

$\frac{1}{6}(a+2)^3=2\cdot\frac{4}{3}\qquad \therefore (a+2)^3=16$

0868 답 $\frac{3}{4}$

두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{0}^{1}\{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}\,dx$

$=\int_{0}^{1}(-2x^4+x^3+x)\,dx$

$=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{7}{20}$

두 곡선 $y=ax(1-x)$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{0}^{1}\{(-x^4+x)-ax(1-x)\}\,dx$

$=\int_{0}^{1}\{-x^4+ax^2+(1-a)x\}\,dx$

$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{a}{3}x^3+\frac{1-a}{2}x^2\right]_0^1=\frac{3}{10}-\frac{1}{6}a$

이므로

$\frac{3}{10}-\frac{1}{6}a=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{20}\qquad \therefore a=\frac{3}{4}$

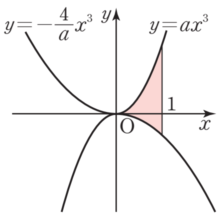
유형 08 넓이의 활용 ; 넓이의 최솟값

본책 145쪽

(i) 두 곡선 사이의 넓이를 정적분을 이용하여 나타낸다.
(ii) 산술평균과 기하평균의 관계, 증감표 등을 이용하여 넓이의 최솟값을 구한다.

0869 답 ②

두 곡선 $y=ax^3$, $y=-\frac{4}{a}x^3$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\int_{0}^{1}\left\{ax^3-\left(-\frac{4}{a}x^3\right)\right\}dx$

$=\left(a+\frac{4}{a}\right)\int_{0}^{1}x^3\,dx$

$=\left(a+\frac{4}{a}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{a}{4}+\frac{1}{a}$

이때, $\frac{a}{4}>0$, $\frac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a}{4}+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{4}\cdot\frac{1}{a}}=1$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{4}=\frac{1}{a}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 1이다.

Lecture

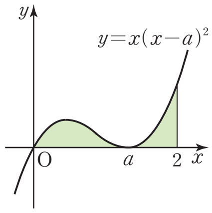
산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

0870 답 ④

함수 $y=x(x-a)^2$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 색칠한 부분의 넓이는



$\int_{0}^{2}x(x-a)^2\,dx$

$=\int_{0}^{2}(x^3-2ax^2+a^2x)\,dx$

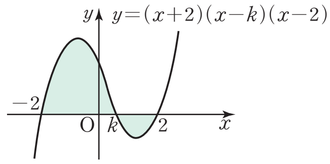
$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2a}{3}x^3+\frac{a^2}{2}x^2\right]_0^2$

$=2a^2-\frac{16}{3}a+4=2\left(a-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{4}{9}$

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{4}{9}$이다.

0871 답 8

곡선 $y=(x+2)(x-k)(x-2)$ $(-2<k<2)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(k)$라 하면 오른쪽 그림에서



$S(k)$

$=\int_{-2}^{k}(x+2)(x-k)(x-2)\,dx-\int_{k}^{2}(x+2)(x-k)(x-2)\,dx$

$=\int_{-2}^{k}(x^3-kx^2-4x+4k)\,dx-\int_{k}^{2}(x^3-kx^2-4x+4k)\,dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{k}{3}x^3-2x^2+4kx\right]_{-2}^{k}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{k}{3}x^3-2x^2+4kx\right]_{k}^{2}$

$=-\frac{k^4}{6}+4k^2+8$

$\therefore S'(k)=-\frac{2}{3}k^3+8k=-\frac{2}{3}k(k^2-12)$

$S'(k)=0$에서 $k=0$ $(\because -2<k<2)$

k	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		↘	극소	↗	

따라서 $k=0$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $S(0)=8$이다.

유형 09 함수와 그 역함수의 정적분

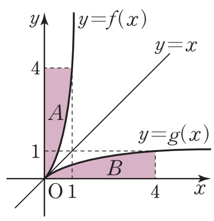
본책 145쪽

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
⇨ 넓이가 같은 도형을 이용한다.

0872 답 4

함수 $f(x)=x^3+2x^2+x$ $(x\geq0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

오른쪽 그림에서

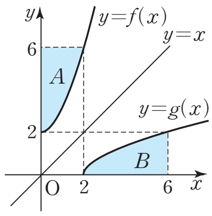


(A의 넓이)$=$(B의 넓이)

이므로

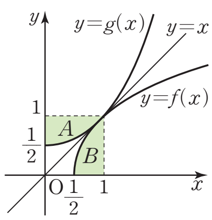
$$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^4 g(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+(B\text{의 넓이})$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+(A\text{의 넓이})$$
$$=1\cdot 4=4$$

0873 답 ②



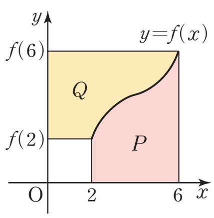
함수 $f(x)=x^2+2\ (x\geq 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
오른쪽 그림에서
$(A$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$
이므로
$$\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^6 g(x)\,dx$$
$$=\int_0^2 f(x)dx+(B\text{의 넓이})$$
$$=\int_0^2 f(x)dx+(A\text{의 넓이})$$
$$=2\cdot 6=12$$

0874 답 1



함수 $f(x)=\sqrt{2x-1}\ \left(x\geq\frac{1}{2}\right)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
오른쪽 그림에서
$(A$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$
이므로
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx$$
$$=(B\text{의 넓이})+\int_0^1 g(x)\,dx$$
$$=(A\text{의 넓이})+\int_0^1 g(x)\,dx$$
$$=1\cdot 1=1$$

0875 답 16



함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로
$y=f(x)$에서 $x=g(y)$
조건 (가), (다)에 의하여 오른쪽 그림에서
$(P$의 넓이$)=(Q$의 넓이$)$
이므로
$$\int_2^6 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\{6f(6)-2f(2)\}$$
$$=3f(6)-f(2)=16$$

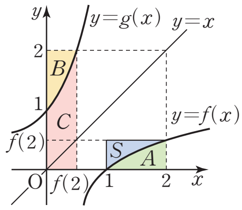
참고 $(P$의 넓이$)=\int_2^6 f(x)\,dx$, $(Q$의 넓이$)=\int_{f(2)}^{f(6)} g(y)\,dy$

유형 10 함수와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이

본책 146쪽

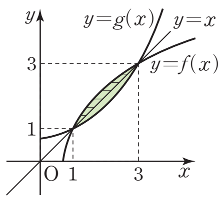
두 곡선 $y=f(x)$와 $x=f(y)$로 둘러싸인 도형의 넓이는
⇨ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

0876 답 ②



두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
오른쪽 그림에서
$$(A\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})$$
$$=\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{2}{5}$$
이고,
$$(C\text{의 넓이})=\int_0^{f(2)} g(x)\,dx=\frac{3}{5}\text{이므로}$$
$$(B\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})=2f(2)$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1$$
$$\therefore f(2)=\frac{1}{2}$$
따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면
$$S=2f(2)-1\cdot f(2)-(A\text{의 넓이})$$
$$=1-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$

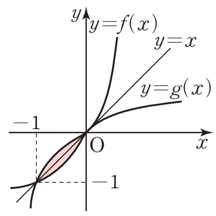
0877 답 2



오른쪽 그림과 같이 구하는 넓이는 직선 $y=x$에 의하여 이등분되고 빗금 친 부분의 넓이는
$$\int_1^3 f(x)\,dx-\frac{1}{2}(3^2-1^2)=5-4=1$$
따라서 구하는 넓이는 빗금 친 부분의 넓이의 2배이므로
$2\cdot 1=2$

0878 답 $\frac{1}{6}$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고
$$f'(x)=3x^2+2x+1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$$
이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.



두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로
$x^3+x^2+x=x$에서 $x^3+x^2=0$
$x^2(x+1)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=-1$
이때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$$2\int_{-1}^{0}\{f(x)-x\}\,dx=2\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+x-x)\,dx$$
$$=2\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$$
$$=2\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

유형 11 위치와 위치의 변화량 본책 146쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때

(1) 시각 t에서 점 P의 위치 x ⇨ $x=x_0+\int_a^t v(t)\,dt$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량 ⇨ $\int_a^b v(t)\,dt$

0879 답 2

$t=0$에서의 점 P의 좌표가 -2이므로 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$-2+\int_0^2(4-2t)\,dt=-2+\left[4t-t^2\right]_0^2$$
$$=-2+4=2$$

0880 답 39

$t=1$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^4(8t-t^2)\,dt=\left[4t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_1^4=39$$

0881 답 ④

$v(t)=0$일 때 점 P가 움직이는 방향이 바뀌므로

$12-4t=0 \qquad \therefore t=3$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3(12-4t)\,dt=\left[12t-2t^2\right]_0^3$$
$$=18$$

Lecture

물체의 운동과 속도의 관계

(1) 움직이던 물체가 정지할 때 ⇨ (속도)$=0$

(2) 움직이던 물체가 운동 방향을 바꿀 때 ⇨ (속도)$=0$

0882 답 5

$t=0$에서의 점 P의 좌표가 1이므로 $t=5$에서의 점 P의 위치는

$$1+\int_0^2(-3t^2+6t)\,dt+\int_2^5(t^2-6t+8)\,dt$$
$$=1+\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_2^5$$
$$=1+4+0=5$$

0883 답 1초

t초 후의 점 R의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=\frac{v_{\mathrm{P}}(t)+v_{\mathrm{Q}}(t)}{2}=\frac{3}{2}t^2-t$$

따라서 t초 후의 점 R의 위치를 $x(t)$라 하면

$$x(t)=\int_0^t v(t)\,dt=\int_0^t\left(\frac{3}{2}t^2-t\right)dt=\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t^2$$

따라서 점 R가 다시 원점을 지날 때에는 $x(t)=0$이므로

$\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t^2=0$에서 $\frac{1}{2}t^2(t-1)=0 \qquad \therefore t=1$(초)

유형 12 움직인 거리 본책 147쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s ⇨ $s=\int_a^b|v(t)|\,dt$

0884 답 6

$t^2+4t-5=(t-1)(t+5)=0$에서

$t=1$ ($\because t>0$)

$$\therefore \int_0^2|v(t)|\,dt=\int_0^1(-t^2-4t+5)\,dt+\int_1^2(t^2+4t-5)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3-2t^2+5t\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}t^3+2t^2-5t\right]_1^2$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{10}{3}=6$$

0885 답 ②

$v(t)=27-0.9t=0$에서 $t=30$

따라서 열차는 제동을 건 후 30초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^{30}|v(t)|\,dt=\int_0^{30}(27-0.9t)\,dt$$
$$=\left[27t-\frac{9}{20}t^2\right]_0^{30}=405\ (\mathrm{m})$$

0886 답 ③

$t=a$ $(a>0)$일 때 비행기가 난 거리가 18 km라 하면

$$\int_0^a|v_1(t)|\,dt=\int_0^a\left(\frac{3}{2}t^2+t\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}a^2=18$$

$a^3+a^2-36=0$, $(a-3)(a^2+4a+12)=0$

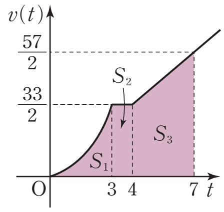
$\therefore a=3$ ($\because a^2+4a+12>0$)

$t=3$일 때 비행기의 속도는

$$v_1(3)=\frac{3}{2}\cdot 3^2+3=\frac{33}{2}\ (\mathrm{km/m})$$

출발 후 4분 이후의 속도는

$v_2(t)=4t+\frac{1}{2}$이므로 이 비행기의 속도의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



또, 비행기가 출발한 후 7분 동안 난 거리는 $S_1+S_2+S_3$의 값과 같으므로 구하는 거리는

$$18+\frac{33}{2}+\left(\frac{33}{2}+\frac{57}{2}\right)\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=102\ (\mathrm{km})$$

0887 답 295 m

$v(t)=49-9.8t=0$에서 $t=5$

따라서 물체는 위로 쏘아 올린 지 5초 후에 최고 높이에 도달하므로 최고 높이까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^5 |v(t)|\,dt=\int_0^5 (49-9.8t)\,dt$$
$$=\Big[49t-4.9t^2\Big]_0^5=122.5$$

따라서 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는

$122.5+122.5+50=295\ (\mathrm{m})$

0888 답 16 m

$v(t)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2+2t=0$에서

$t(t+1)(t-4)=0 \qquad \therefore t=4\ (\because t>0)$

따라서 구하는 최대 길이는

$$\int_0^4 |v(t)|\,dt=\int_0^4 \left(-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2+2t\right)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{8}t^4+\frac{1}{2}t^3+t^2\right]_0^4=16\ (\mathrm{m})$$

유형 13 그래프에서의 위치와 움직인 거리 본책 148쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 할 때

(1) $\int_a^b v(t)\,dt$ ⇨ $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량

(2) $\int_a^b |v(t)|\,dt$ ⇨ $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리

⇨ $y=v(t)$의 그래프와 t축 및 두 직선 $t=a$, $t=b$로 둘러싸인 도형의 넓이

0889 답 ㄷ

ㄱ. $v(t)=0$인 구간의 길이가 1이 되는 t의 값의 범위가 존재하지 않으므로 1초 동안 멈춘 적이 없다.

ㄴ. 점 P의 운동 방향은 $v(t)=0$, 즉 $t=3$, $t=5$일 때 바뀌므로 움직이는 동안 운동 방향을 2번 바꾼다.

ㄷ. $\int_3^5 v(t)\,dt=-\int_5^7 v(t)\,dt$이므로

$\int_0^7 v(t)\,dt=\int_0^3 v(t)\,dt>0$

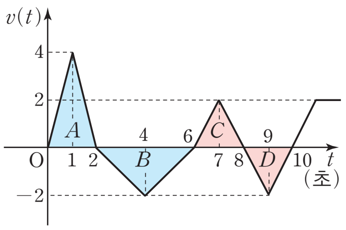
즉, 7초 후 점 P는 원점의 오른쪽에 위치한다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

0890 답 6초, 10초

$t=a$일 때 원점을 지난다고 하면 $\int_0^a v(t)\,dt=0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$A=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4$,

$B=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$, $C=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$, $D=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$

즉, $A=B$, $C=D$이므로 $t=6$, $t=10$일 때 다시 원점을 지난다.

0891 답 원점

$t=7$일 때의 점 P의 위치는 $\int_0^7 v(t)\,dt$이고, $\int_0^7 v(t)\,dt$의 값은 주어진 $v(t)$의 그래프에서 t축의 윗부분의 넓이에서 t축의 아랫부분의 넓이를 뺀 것과 같다.

$v(t)=0$인 t의 값을 구하면

(i) $2\le t<3$일 때

$v(t)=3t-7$이므로 $3t-7=0 \qquad \therefore t=\frac{7}{3}$

(ii) $t=5$일 때 $v(t)=0 \qquad \therefore t=5$

따라서 $t=7$일 때의 점 P의 위치는

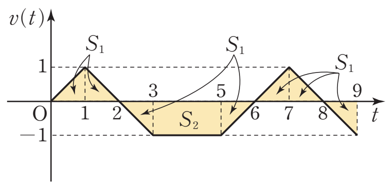
$$\int_0^7 v(t)\,dt=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{7}{3}\right)\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\left(5-\frac{7}{3}\right)\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1$$
$$=0$$

즉, $t=7$일 때의 점 P의 위치는 원점이다.

0892 답 ②

ㄱ. 점 P의 운동 방향은 $v(t)=0$, 즉 $t=2$, $t=6$, $t=8$일 때 바뀌므로 움직이는 동안 운동 방향을 3번 바꾼다.

ㄴ. 다음 그래프에서 각 넓이를 S_1, S_2라 하면



$\int_0^1 v(t)\,dt=\int_0^3 v(t)\,dt=S_1=\frac{1}{2}$

$\int_0^2 v(t)\,dt=2S_1=1$

$\int_0^5 v(t)\,dt=\int_0^7 v(t)\,dt=\int_0^9 v(t)\,dt$

$=S_1-S_2=-\frac{3}{2}$

$\int_0^6 v(t)\,dt=-S_2=-2$

$\int_0^8 v(t)\,dt=2S_1-S_2=-1$

따라서 $t=6$일 때 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있다.

ㄷ. $\int_0^{\frac{7}{2}} v(t)\,dt=0$이므로 $t=\frac{7}{2}$일 때 원점을 다시 지난다.

$\frac{7}{2}<t\le 9$에서 $\int_0^t v(t)\,dt<0$이므로 $t=\frac{7}{2}$ 이후에는 원점을 다시 지나지 않는다. 따라서 점 P는 출발 후 9초 동안 원점을 1번 지난다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

0893 답 ㄷ

ㄱ. 기구는 출발 후 1초에서 3초 사이에 2 m/초의 속도로 움직인다.

ㄴ. 기구의 운동 방향은 $v(t)=0$, 즉 $t=5$일 때 바뀌므로 움직이는 동안 운동 방향을 1번 바꾸었다.

ㄷ. $t=5$일 때 기구의 높이가 최대이고

$$\int_0^5 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2+2\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=7$$

이므로 기구가 올라간 최고 높이는 7 m이다.

ㄹ. 기구가 7초 동안 움직인 거리는

$$\int_0^7 |v(t)|\,dt=\int_0^5 v(t)\,dt+\int_5^7 \{-v(t)\}\,dt$$

$$=7+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=9\,(\mathrm{m})$$

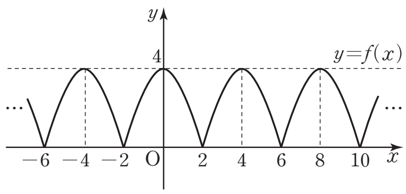
따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

STEP 3 | 심화 Master

0894 답 160

TIP 조건 (가), (나)에 맞게 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

조건 (가), (나)에 의하여 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때,

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (-x^2+4)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2=\frac{16}{3}$$

이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{60} f(x)\,dx=30\int_0^2 f(x)\,dx=30\cdot\frac{16}{3}=160$$

0895 답 ②

TIP 먼저 $\triangle$OAB의 넓이가 3임을 이용하여 S_1, S_2의 값을 구한다.

$\triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$이고, $S_1:S_2=13:3$이므로

$S_1=3\cdot\frac{13}{16}=\frac{39}{16}$, $S_2=3\cdot\frac{3}{16}=\frac{9}{16}$

직선 AB의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+3$이므로 직선 AB와 곡선 $y=ax^2$의 제1사분면에서의 교점의 x좌표를 k라 하면

$-\frac{3}{2}k+3=ak^2$ …… ㉠

$$S_1=\int_0^k\left\{\left(-\frac{3}{2}x+3\right)-ax^2\right\}dx$$
$$=\int_0^k\left(-ax^2-\frac{3}{2}x+3\right)dx$$
$$=\left[-\frac{a}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+3x\right]_0^k$$
$$=-\frac{a}{3}k^3-\frac{3}{4}k^2+3k$$

따라서 $-\frac{a}{3}k^3-\frac{3}{4}k^2+3k=\frac{39}{16}$, 즉

$-\frac{k}{3}\cdot ak^2-\frac{3}{4}k^2+3k=\frac{39}{16}$에 ㉠을 대입하면

$-\frac{k}{3}\left(-\frac{3}{2}k+3\right)-\frac{3}{4}k^2+3k=\frac{39}{16}$

$4k^2-32k+39=0$, $(2k-3)(2k-13)=0$

$\therefore k=\frac{3}{2}$ ($\because 0<k<2$)

$k=\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면

$-\frac{9}{4}+3=\frac{9}{4}a$, $\frac{9}{4}a=\frac{3}{4}$ $\qquad\therefore a=\frac{1}{3}$

0896 답 $\frac{10\sqrt{5}}{3}$

TIP 방정식 $\frac{1}{2}x^2=2x+k$의 두 근을 α, β로 놓고 근과 계수의 관계를 이용하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=10$을 만족시키는 상수 k의 값을 먼저 구한다.

곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 $y=2x+k$는 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{1}{2}x^2=2x+k$, 즉 $x^2-4x-2k=0$의 두 근을 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2k$ …… ㉠

이고 두 점 P, Q의 좌표는 $\mathrm{P}(\alpha,\ 2\alpha+k)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ 2\beta+k)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=10$에서 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=10^2$이므로

$(\beta-\alpha)^2+\{(2\beta+k)-(2\alpha+k)\}^2=100$

$5(\beta-\alpha)^2=100$ …… ㉡

$5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=100$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$5(16+8k)=100$, $16+8k=20$ $\qquad\therefore k=\frac{1}{2}$

이때, ㉠에서 $\alpha\beta=-1$이다.

또, ㉡에서 $(\beta-\alpha)^2=20$ $\qquad\therefore \beta-\alpha=2\sqrt{5}$ ($\because \alpha<\beta$)

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_\alpha^\beta\left\{\left(2x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}x^2\right\}dx$$
$$=\int_\alpha^\beta\left(-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{6}x^3+x^2+\frac{1}{2}x\right]_\alpha^\beta$$
$$=-\frac{1}{6}(\beta^3-\alpha^3)+(\beta^2-\alpha^2)+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$$
$$=-\frac{1}{6}\{(\beta-\alpha)^3+3\alpha\beta(\beta-\alpha)\}+(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$$
$$=-\frac{17\sqrt{5}}{3}+8\sqrt{5}+\sqrt{5}=\frac{10\sqrt{5}}{3}$$

0897 답 140

TIP 원의 중심과 접점을 지나는 직선이 접선과 수직임을 이용한다.

원의 중심을 A라 하고, 두 곡선의 교점을 P, Q라 하면

$\mathrm{P}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$, $\mathrm{Q}\left(-a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ $(a>0)$으로 놓을 수 있다.

$y=\frac{1}{2}x^2$에서 $y'=x$이므로 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 a이고, 이 접선과 직선 AP는 수직이므로

$$\alpha\cdot\frac{\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{3}{2}}{\alpha-0}=-1,\ \alpha^2=1 \qquad \therefore\ \alpha=1\ (\because\ \alpha>0)$$

즉, $P\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$, $Q\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$이고, 직선 AP의 방정식은

$y=-x+\frac{3}{2}$

이때, 원의 반지름의 길이는 두 점 A, P 사이의 거리와 같으므로

$r=\sqrt{(1-0)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$

원 C와 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$2\left\{\int_0^1\left(-x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx-\pi\times(\sqrt{2})^2\times\frac{1}{8}\right\}$$

$$=2\left\{\left[-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right]_0^1-\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$

따라서 $a=\frac{5}{3}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로 $120(a+b)=140$

0898 답 ①

TIP S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루면 $2S_2=S_1+S_3$이 성립한다.

$S_1=\int_0^1\frac{1}{2}x^2dx=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^1=\frac{1}{6}$, $S_1+S_2+S_3=1$이므로

$S_2+S_3=1-S_1=\frac{5}{6}$ ...... ㉠

S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S_2=S_1+S_3=\frac{1}{6}+S_3 \qquad \therefore\ 2S_2-S_3=\frac{1}{6}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $S_2=\frac{1}{3}$, $S_3=\frac{1}{2}$

곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는

$ax^2=1$에서 $(\sqrt{a}x+1)(\sqrt{a}x-1)=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{\sqrt{a}}\ (\because\ x>0)$

$$\therefore\ S_3=1\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}ax^2dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}-\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{3\sqrt{a}}=\frac{2}{3\sqrt{a}}$$

따라서 $\frac{2}{3\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$이므로

$3\sqrt{a}=4$, $\sqrt{a}=\frac{4}{3} \qquad \therefore\ a=\frac{16}{9}$

0899 답 $\frac{9}{4}$

TIP 두 접선 l, m의 방정식을 구한 후 $x=\frac{1}{2}$에서 구간을 나누어 넓이를 구한다.

$y=x^2$에서 $y'=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$으로 놓으면 접선의 기울기는 $2t$이므로 접선의 방정식은 $y-t^2=2t(x-t)$

$\therefore\ y=2tx-t^2$ ...... ㉠

이 접선이 점 $P\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$를 지나므로

$-2=t-t^2$, $t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0 \qquad \therefore\ t=-1$ 또는 $t=2$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-2x-1$

$t=2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=4x-4$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{x^2-(-2x-1)\}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\{x^2-(4x-4)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(x^2+2x+1)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\frac{9}{8}+\frac{9}{8}=\frac{9}{4}$$

0900 답 512

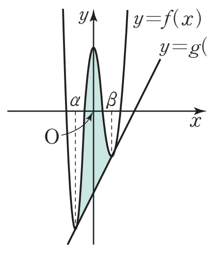
TIP 직선 l의 방정식을 $y=g(x)$라 하고 $f(x)-g(x)$를 구한다.

직선 l을 $g(x)=mx+n$이라 하면

$f(x)-g(x)=x^4-8x^2+(2-m)x+7-n$ ...... ㉠

직선 l이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 접하므로 방정식 $x^4-8x^2+2x+7=mx+n$, 즉 $f(x)-g(x)=0$은 서로 다른 두 중근을 갖는다.

$f(x)-g(x)=0$의 두 중근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면



$f(x)-g(x)$

$=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

이때, $f(x)-g(x)$의 x^3의 계수는 0이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+2\beta=0 \qquad \therefore\ \beta=-\alpha$

즉,

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$
$$=(x-\alpha)^2(x+\alpha)^2$$
$$=x^4-2\alpha^2x^2+\alpha^4 \qquad \text{...... ㉡}$$

㉠, ㉡의 x^2의 계수는 서로 같으므로

$-2\alpha^2=-8 \qquad \therefore\ \alpha=-2,\ \beta=2\ (\because\ \alpha<\beta)$

$\therefore\ f(x)-g(x)=x^4-8x^2+16$

$$\therefore\ S=\int_{-2}^{2}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(x^4-8x^2+16)\,dx$$

$$=2\int_0^2(x^4-8x^2+16)\,dx$$

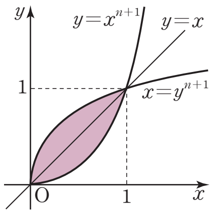
$$=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_0^2=\frac{512}{15}$$

$\therefore\ 15S=512$

0901 답 1

TIP 역함수 관계에 있는 두 곡선 $y=f(x)$, $x=f(y)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

$y=x^{n+1}$과 $y^{n+1}=x$는 서로 역함수 관계이므로 두 곡선의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
두 곡선 $y=x^{n+1}$, $y^{n+1}=x$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=x^{n+1}$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로
$x^{n+1}=x$에서 $x(x^n-1)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$
따라서 오른쪽 그림에서



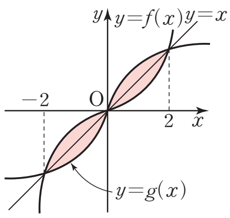
$S_n=2\int_0^1 (x-x^{n+1})\,dx$
$\quad=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1$
$\quad=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{n}{n+2}$

이므로
$k=S_1\times S_2\times S_3\times\cdots\times S_{10}$
$\quad=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{10}{12}=\frac{1}{66}$
$\therefore 66k=1$

0902 답 12

TIP 역함수 관계에 있는 두 곡선 $y=f(x)$, $x=f(y)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

조건 ㈎, ㈏에서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



이때, $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $0\le x\le 2$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 4배이다.
따라서 구하는 넓이는
$4\int_0^2 |x-f(x)|\,dx=4\cdot 3=12$

0903 답 7

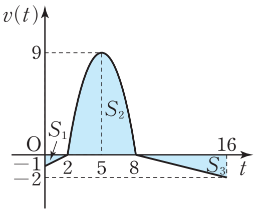
TIP 점 P가 다시 원점을 지날 때의 시각을 $t=a$라 하면 $\int_0^a v(t)\,dt=0$이 성립한다.

점 P가 $t=6$일 때 원점을 다시 지나므로
$\int_0^6 v(t)\,dt=0$에서
$\int_0^2 (-3t^2)\,dt+\int_2^6 \{a(t-2)-12\}\,dt=0$
$\left[-t^3\right]_0^2+\left[\frac{a}{2}t^2-(2a+12)t\right]_2^6=0$
$-8+(8a-48)=0$
$8a-56=0 \qquad \therefore a=7$

0904 답 35

TIP $v(t)$의 그래프를 그린 후 위치의 변화량이 최대인 구간에서 선분 OP의 길이를 구한다.

$v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



점 P의 $t=0$에서 $t=2$까지 위치의 변화량을 S_1이라 하면
$S_1=\int_0^2\left(\frac{1}{2}t-1\right)dt$
$\quad=\left[\frac{1}{4}t^2-t\right]_0^2=-1$
$t=2$에서 $t=8$까지 위치의 변화량을 S_2라 하면
$S_2=\int_2^8(-t^2+10t-16)\,dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+5t^2-16t\right]_2^8=36$
$t=8$에서 $t=16$까지 위치의 변화량을 S_3이라 하면
$S_3=\int_8^{16}\left(2-\frac{1}{4}t\right)dt=\left[2t-\frac{1}{8}t^2\right]_8^{16}=-8$
따라서 선분 OP의 길이의 최댓값은 점 P가 8초 동안 움직였을 때이므로
$S_1+S_2=-1+36=35$

0905 답 5

TIP 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때의 점 P의 위치가 $x_0+\int_a^t v(t)\,dt$임을 이용한다.

시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $s_{\mathrm{P}}(t)$, $s_{\mathrm{Q}}(t)$라 하면
$s_{\mathrm{P}}(t)=15+\int_0^t v_{\mathrm{P}}(t)\,dt$
$\quad=15+\int_0^t (2t-5)\,dt$
$\quad=t^2-5t+15$
$s_{\mathrm{Q}}(t)=0+\int_0^t v_{\mathrm{Q}}(t)\,dt$
$\quad=\int_0^t (15-8t)\,dt$
$\quad=-4t^2+15t$
두 점 P, Q가 만날 때의 시각은
$s_{\mathrm{P}}(t)=s_{\mathrm{Q}}(t)$에서 $t^2-5t+15=-4t^2+15t$, $5t^2-20t+15=0$
$5(t-1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=3$
즉, 두 점 P, Q는 $t=1$, $t=3$일 때 만나고, 두 점 P, Q 사이의 거리는
$|s_{\mathrm{P}}(t)-s_{\mathrm{Q}}(t)|=|(t^2-5t+15)-(-4t^2+15t)|$
$\quad=|5t^2-20t+15|$
$\quad=|5(t-2)^2-5|$
따라서 $1\le t\le 3$에서 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 $t=2$일 때 5이다.

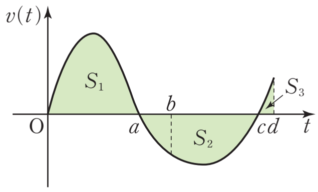
0906 답 ④

TIP 먼저 $\int_0^a |v(t)|\,dt=S_1$, $\int_a^c |v(t)|\,dt=S_2$, $\int_c^d |v(t)|\,dt=S_3$으로 놓는다.

$\int_0^a |v(t)|\,dt=S_1$,

$\int_a^c |v(t)|\,dt=S_2$,

$\int_c^d |v(t)|\,dt=S_3$



이라 하면

$\int_0^a |v(t)|\,dt$

$=\int_a^d |v(t)|\,dt$

이므로

$S_1=S_2+S_3$

ㄱ. $S_1=S_2+S_3$에서 $S_1>S_2$이므로 점 P는 출발하고 나서 원점을 다시 지나지 않는다.

ㄴ. $\int_0^c v(t)\,dt=\int_0^a v(t)\,dt+\int_a^c v(t)\,dt$

$=S_1+(-S_2)$

$=S_3=\int_c^d v(t)\,dt$

ㄷ. $\int_b^d |v(t)|\,dt=-\int_b^c v(t)\,dt+\int_c^d v(t)\,dt$

$=-\int_b^c v(t)\,dt+\int_0^c v(t)\,dt$ ($\because$ ㄴ)

$=\int_0^b v(t)\,dt$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

Memo

Memo