정답 및 풀이

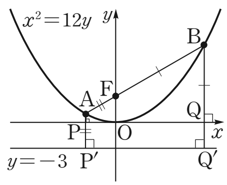
01 이차곡선

유제

본책 11~39쪽

001-1 $x^2=12y=4\cdot3y$에서 포물선의 초점은 $\mathrm{F}(0,\ 3)$이고 준선의 방정식은 $y=-3$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 직선 $y=-3$에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면 포물선의 정의에 의하여



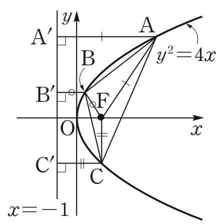
$$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AP'}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PP'}}$$
$$=1+3=4$$
$$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BQ'}}=\overline{\mathrm{BQ}}+\overline{\mathrm{QQ'}}$$
$$=9+3=12$$
$$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}$$
$$=4+12=16$$

답 16

001-2 포물선 $y^2=4x$ 위의 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 a, b, c라 하면

$$\frac{a+b+c}{3}=2$$
$$\therefore\ a+b+c=6$$

포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 세 점 A, B, C에서 직선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AA'}},\ \overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BB'}},$$
$$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{CC'}}$$
$$\therefore\ \overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{CF}}$$
$$=\overline{\mathrm{AA'}}+\overline{\mathrm{BB'}}+\overline{\mathrm{CC'}}$$
$$=(a+1)+(b+1)+(c+1)$$
$$=(a+b+c)+3$$
$$=6+3=9$$

답 9

002-1 주어진 조건을 만족시키는 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하고, 점 P에서 직선 $y=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=|y+1|$$

양변을 제곱하면

$$(x-1)^2+y^2+4y+4=y^2+2y+1$$
$$\therefore\ (x-1)^2=-2\left(y+\frac{3}{2}\right)$$

따라서 $a=-1, b=-2, c=\frac{3}{2}$이므로

$$a+b+c=-\frac{3}{2}$$

답 $-\frac{3}{2}$

다른 풀이 주어진 점의 자취는 초점의 좌표가 $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$이고 준선의 방정식이 $y=\frac{1}{2}$인 포물선 $x^2=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)y=-2y$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이므로

$$(x-1)^2=-2\left(y+\frac{3}{2}\right)$$

따라서 $a=-1,\ b=-2,\ c=\frac{3}{2}$이므로

$$a+b+c=-\frac{3}{2}$$

003-1 (1) 주어진 포물선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$y^2=6(x+1)$$

따라서 이 포물선은 포물선 $y^2=6x$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=6x=4\cdot\frac{3}{2}x$에서

초점의 좌표: $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$

준선의 방정식: $x=-\frac{3}{2}$

꼭짓점의 좌표: $(0,\ 0)$

이므로 포물선 $y^2=6(x+1)$에서

초점의 좌표: $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

준선의 방정식: $x=-\frac{5}{2}$

꼭짓점의 좌표: $(-1,\ 0)$

(2) 주어진 포물선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$x^2-10x+25=2y$$
$$\therefore\ (x-5)^2=2y$$

따라서 이 포물선은 포물선 $x^2=2y$를 x축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2=2y=4\cdot\frac{1}{2}y$에서

초점의 좌표: $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$

준선의 방정식: $y=-\frac{1}{2}$

꼭짓점의 좌표: $(0,\ 0)$

이므로 포물선 $(x-5)^2=2y$에서

초점의 좌표: $\left(5,\ \frac{1}{2}\right)$

준선의 방정식: $y=-\frac{1}{2}$

꼭짓점의 좌표: $(5,\ 0)$

답 풀이 참조

003-2 축이 x축에 평행하므로 구하는 포물선의 방정식을

$y^2+Ax+By+C=0$

으로 놓으면 이 포물선은 세 점 $(1,\ 0)$, $(4,\ -1)$, $(-2,\ 2)$를 지나므로

$A+C=0$

$1+4A-B+C=0$

$4-2A+2B+C=0$

위의 식을 연립하여 풀면

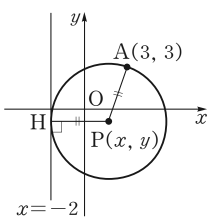
$A=-2,\ B=-5,\ C=2$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$y^2-2x-5y+2=0$

답 $y^2-2x-5y+2=0$

004-1 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 원과 직선 $x=-2$의 접점이므로



$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PH}}$

이때 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=|x+2|$

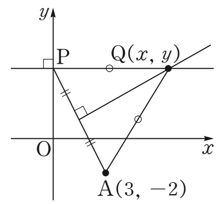
양변을 제곱하면

$x^2-6x+9+(y-3)^2=x^2+4x+4$

$\therefore\ (y-3)^2=10\left(x-\frac{1}{2}\right)$

답 $(y-3)^2=10\left(x-\frac{1}{2}\right)$

004-2 오른쪽 그림에서 점 Q는 선분 AP의 수직이등분선 위의 점이므로



$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}$

이때 점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=|x|$

양변을 제곱하면

$x^2-6x+9+(y+2)^2=x^2$

$\therefore\ (y+2)^2=6\left(x-\frac{3}{2}\right)$

답 $(y+2)^2=6\left(x-\frac{3}{2}\right)$

005-1 초점이 x축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하자.

초점의 좌표가 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이므로

$a^2-b^2=5^2$

$\therefore\ (a+b)(a-b)=25$ …… ㉠

또 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 장축의 길이와 단축의 길이의 차가 2이므로

$2a-2b=2\qquad \therefore\ a-b=1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a+b=25$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

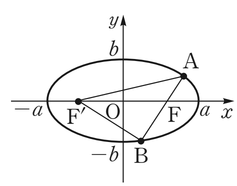
$a=13,\ b=12$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$$

답 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

006-1 타원의 정의에 의하여



$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}$

$=\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}$

$=2a$

이므로 삼각형 ABF′의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{F'A}}$

$=(\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}})+\overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{AF'}}$

$=(\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}})+(\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}})$

$=2a+2a=4a$

즉 $4a=12$이므로 $\quad a=3$

이때 초점이 $F(2,\ 0)$, $F'(-2,\ 0)$이므로

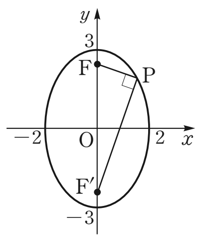
$$b^2=3^2-2^2=5$$

$$\therefore b=\sqrt{5}\ (\because b>0)$$

$$\therefore ab=3\sqrt{5}$$

답 $3\sqrt{5}$

006-2 타원의 정의에 의하여



$$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\cdot 3=6$$

$\overline{PF}=p$라 하면

$$\overline{PF'}=6-p$$

또 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$에서

$$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

이므로 타원의 초점의 좌표는

$$(0,\ \sqrt{5}),\ (0,\ -\sqrt{5})$$

$$\therefore \overline{FF'}=2\sqrt{5}$$

$\triangle FPF'$에서 피타고라스 정리에 의하여

$$p^2+(6-p)^2=(2\sqrt{5})^2$$

$$p^2-6p+8=0,\qquad (p-2)(p-4)=0$$

$$\therefore p=2 \text{ 또는 } p=4$$

$$\therefore \overline{PF}=2\ (\because \overline{PF'}>\overline{PF})$$

답 2

007-1 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{PF}+\overline{PF'}=6$이므로

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=6$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=6-\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=2y+7$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$9(x-1)^2+5(y-1)^2=45$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{5}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

답 $\dfrac{(x-1)^2}{5}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

다른 풀이 $\overline{FF'}=4$이므로 점 P의 자취는 초점의 좌표가 $(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$이고 두 초점에서의 거리의 합이 6인 타원을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

장축의 길이가 6이고, $3^2-2^2=5$이므로 평행이동하기 전의 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$$

따라서 구하는 자취의 방정식은

$$\frac{(x-1)^2}{5}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

008-1 (1) 주어진 타원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$(x^2-4x+4)+4(y^2+2y+1)=4$$

$$(x-2)^2+4(y+1)^2=4$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1$$

따라서 이 타원은 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$에서

초점의 좌표: $(\sqrt{3},\ 0)$, $(-\sqrt{3},\ 0)$

(장축의 길이)$=2\cdot 2=4$

이므로 타원 $\dfrac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1$에서

초점의 좌표: $(2+\sqrt{3},\ -1)$, $(2-\sqrt{3},\ -1)$

장축의 길이: 4

(2) 주어진 타원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$3(x^2+6x+9)+2(y^2-2y+1)=12$$

$$3(x+3)^2+2(y-1)^2=12$$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{6}=1$$

따라서 이 타원은 타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{6}=1$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{6}=1$에서

초점의 좌표: $(0,\ \sqrt{2})$, $(0,\ -\sqrt{2})$

(장축의 길이)$=2\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

이므로 타원 $\dfrac{(x+3)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{6}=1$에서

초점의 좌표: $(-3,\ 1+\sqrt{2})$, $(-3,\ 1-\sqrt{2})$

장축의 길이: $2\sqrt{6}$

답 풀이 참조

009-1 $A(a,\ 0)$, $B(0,\ b)$라 하면 $\overline{AB}=9$이므로

$\sqrt{a^2+b^2}=9$

$\therefore\ a^2+b^2=81$ …… ㉠

이때 점 P는 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $P(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{2\cdot 0+1\cdot a}{2+1}=\frac{a}{3},$$

$$y=\frac{2\cdot b+1\cdot 0}{2+1}=\frac{2}{3}b$$

$\therefore\ a=3x,\ b=\frac{3}{2}y$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$(3x)^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2=81$$

$$\therefore\ x^2+\frac{y^2}{4}=9$$

답 $x^2+\frac{y^2}{4}=9$

009-2 원 $(x-4)^2+y^2=36$의 중심을 $C(4,\ 0)$이라 하고, 두 원의 접점을 Q라 하면

$\overline{CP}=\overline{CQ}-\overline{PQ}$

$=6-\overline{PO}$

따라서 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=6-\sqrt{x^2+y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3\sqrt{x^2+y^2}=2x+5$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$5(x-2)^2+9y^2=45$

$$\therefore\ \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

답 $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

다른 풀이 $\overline{CP}=6-\overline{PO}$에서

$\overline{CP}+\overline{PO}=6$

즉 점 P의 자취는 두 점 C, O를 초점으로 하고 장축의 길이가 6인 타원이다. 이것은 초점의 좌표가 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$이고 장축의 길이가 6인 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 자취의 방정식은

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

Remark 두 원의 위치 관계

반지름의 길이가 $r,\ r'(r>r')$이고 중심 사이의 거리가 d인 두 원의 위치 관계는 다음과 같다.

① 외접한다. ➡ $d=r+r'$

② 두 점에서 만난다. ➡ $r-r'<d<r+r'$

③ 내접한다. ➡ $d=r-r'$

010-1 초점이 x축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하자.

초점의 좌표가 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=5^2=25$ …… ㉠

또 점근선의 방정식이 $y=\pm 2x$이므로

$$\frac{b}{a}=\pm 2$$

$\therefore\ b=\pm 2a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a^2=5,\ b^2=20$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$$

답 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$

011-1 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$에서 $\sqrt{9+16}=5$이므로 초점의 좌표는

$(0,\ 5)$, $(0,\ -5)$

$\therefore\ \overline{FF'}=10$

쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2\cdot 4=8$

이때 $\overline{PF'}=2\overline{PF}$이므로

$\overline{PF}=8,\ \overline{PF'}=16$

따라서 $\triangle PFF'$의 둘레의 길이는

$\overline{PF}+\overline{FF'}+\overline{PF'}=8+10+16=34$

답 34

011-2 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$에서 $\sqrt{4+5}=3$이므로 초점의 좌표는

$(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$

$\therefore\ \overline{FF'}=6$

쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2\cdot 2=4$

$\triangle PF'F$의 둘레의 길이가 24이므로

$\overline{PF}+\overline{FF'}+\overline{PF'}=24$

$\therefore \overline{PF}+\overline{PF'}=18$

$\therefore |\overline{PF}^2-\overline{PF'}^2|=|\overline{PF}+\overline{PF'}|\cdot|\overline{PF}-\overline{PF'}|$

$=18\cdot 4=72$

답 72

012-1 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=8$, 즉 $\overline{PF}-\overline{PF'}=\pm 8$이므로

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2}=\pm 8$$

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\pm 8+\sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\pm 4\sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2}=5x+21$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$9(x+1)^2-16(y-2)^2=144$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

답 $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$

다른 풀이 $\overline{FF'}=10$이므로 점 P의 자취는 초점의 좌표가 $(5, 0)$, $(-5, 0)$이고 두 초점에서의 거리의 차가 8인 쌍곡선을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

두 초점에서의 거리의 차가 8이고 $5^2-4^2=9$이므로 평행이동하기 전의 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

따라서 구하는 자취의 방정식은

$$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

013-1 (1) 주어진 쌍곡선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$5(x^2+2x+1)-4(y^2-4y+4)=20$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$$

따라서 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$에서

초점의 좌표: $(3, 0)$, $(-3, 0)$

점근선의 방정식: $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$

이므로 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(2, 2)$, $(-4, 2)$

점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x+1)+2$$

$$\therefore y=\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2}+2,\ y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x-\frac{\sqrt{5}}{2}+2$$

(2) 주어진 쌍곡선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$9(x^2-4x+4)-4(y^2-2y+1)=-36$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{9}=-1$$

따라서 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$에서

초점의 좌표: $(0, \sqrt{13})$, $(0, -\sqrt{13})$

점근선의 방정식: $y=\pm\frac{3}{2}x$

이므로 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(2, 1+\sqrt{13})$, $(2, 1-\sqrt{13})$

점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{3}{2}(x-2)+1$$

$$\therefore y=\frac{3}{2}x-2,\ y=-\frac{3}{2}x+4$$

답 풀이 참조

014-1 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$Q(0, y)$

$\therefore \overline{AQ}=\sqrt{(-2)^2+y^2}$, $\overline{PQ}=|x|$

$\overline{AQ}=\overline{PQ}$에서

$\sqrt{4+y^2}=|x|$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-y^2=4$

답 $x^2-y^2=4$

Remark

$x^2-y^2=4$에서 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

따라서 점 P의 자취는 초점의 좌표가 $(2\sqrt{2}, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$이고 주축의 길이가 4인 쌍곡선이다.

중단원 연습 문제

본책 41~45쪽

01 ⑤	02 ③	03 25	04 10	
05 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=-1$	06 4	07 4	08 ②	
09 $27\sqrt{2}$	10 2	11 36	12 105	13 10
14 ④	15 19	16 ⑤	17 $\frac{9}{10}$	18 5
19 3	20 ①	21 ②	22 ⑤	

01 전략 포물선의 정의를 이용한다.

풀이 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=3$이므로 $\triangle\mathrm{PHF}$는 이등변삼각형이다.
이때 점 P에서 선분 HF에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\triangle\mathrm{HPM}$은 직각삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{HM}}=\overline{\mathrm{PH}}\cos 30^\circ=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{FH}}=2\overline{\mathrm{HM}}=2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

답 ⑤

02 전략 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$라 하고 a, b를 각각 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P는 포물선 $x^2=12y$ 위를 움직이므로

$$a^2=12b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 Q는 선분 OP의 중점이므로 $\mathrm{Q}(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2} \qquad \therefore a=2x,\ b=2y$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$(2x)^2=12\cdot 2y \qquad \therefore x^2=6y$$

따라서 점 Q의 자취의 방정식은 $x^2=6y$이다.

답 ③

03 해결과정 • $\overline{\mathrm{PA}}=a$, $\overline{\mathrm{PB}}=b$라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a+b=2\cdot 5=10$$ ➜ 40% 배점

이때 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b\ge 2\sqrt{ab}, \qquad 10\ge 2\sqrt{ab}$$

$\therefore ab\le 25$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

➜ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$의 최댓값은 25이다.

➜ 20% 배점

답 25

다른 풀이 $\overline{\mathrm{PA}}=a$라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PB}}=10-a\ (0<a<10)$

$$\therefore \overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=a(10-a)=10a-a^2=-(a-5)^2+25$$

즉 $\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$는 $a=5$일 때 최댓값 25를 갖는다.

04 해결과정 • $3x^2+2y^2-12x+4y+2=0$에서

$$3(x-2)^2+2(y+1)^2=12$$ ➜ 40% 배점

타원 $3(x-2)^2+2(y+1)^2=12$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$$3(x-2-a)^2+2(y+1-b)^2=12$$ ➜ 40% 배점

답구하기 • 이것이 $3x^2+2y^2=c$와 일치하므로

$a=-2,\ b=1,\ c=12$

$\therefore ab+c=10$ ➜ 20% 배점

답 10

05 전략 두 초점으로부터의 거리의 차가 4인 점의 자취는 쌍곡선이다.

풀이 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$에서 $\sqrt{25-16}=3$이므로 타원의 초점의 좌표는

$(0,\ 3),\ (0,\ -3)$

따라서 초점 $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$으로부터의 거리의 차가 4인 점의 자취의 방정식은

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=-1$$

답 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=-1$

다른 풀이 주어진 조건을 만족시키는 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하고, $\mathrm{F}(0,\ 3)$, $\mathrm{F}'(0,\ -3)$이라 하면

$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=4$, 즉 $\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=\pm 4$

이므로

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}-\sqrt{x^2+(y+3)^2}=\pm 4$$
$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=\pm 4+\sqrt{x^2+(y+3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\pm 2\sqrt{x^2+(y+3)^2}=3y+4$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 $4x^2-5y^2=-20$

$$\therefore \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=-1$$

06 전략 일반형으로 주어진 쌍곡선의 방정식은 표준형으로 변형한다.

풀이 주어진 쌍곡선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$(x+1)^2-3(y-3)^2=12$

$\therefore \dfrac{(x+1)^2}{12}-\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

따라서 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표가 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이므로 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(3,\ 3)$, $(-5,\ 3)$

$\therefore a+b+c+d=3+3+(-5)+3=4$

답 4

07 해결과정 • 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AP}$, $\overline{BF}=\overline{BQ}$

$\overline{AB}=8$에서 $\quad \overline{AF}+\overline{BF}=8$

이므로 $\quad \overline{AP}+\overline{BQ}=8$ ➔ 50% 배점

답구하기 • 이때 $\overline{AP}\,/\!/\,\overline{MR}\,/\!/\,\overline{BQ}$이고, 점 M이 $\overline{AB}$의 중점이므로

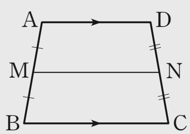
$\overline{MR}=\dfrac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{BQ})=\dfrac{1}{2}\cdot 8=4$ ➔ 50% 배점

답 4

Remark 사다리꼴에서 삼각형의 중점 연결 정리의 응용

$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$인 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 중점을 각각 M, N이라 하면

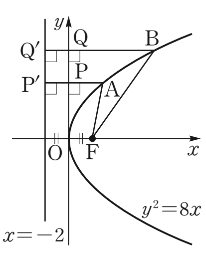
$\overline{MN}=\dfrac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$



08 전략 포물선의 정의를 이용하여 $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y^2=8x=4\cdot 2x$에서 포물선의 초점은 $F(2,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$\overline{AP'}=\overline{AF}=a$,

$\overline{BQ'}=\overline{BF}=2a$

$\therefore \overline{AP}=\overline{AP'}-\overline{PP'}=a-2$

$\overline{BQ}=\overline{BQ'}-\overline{QQ'}=2a-2$

이때 $\overline{BQ}=3\overline{AP}$이므로

$2a-2=3(a-2)$

$\therefore a=4$

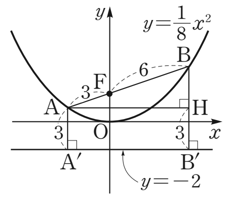
답 ②

09 문제이해 • $y=\dfrac{1}{8}x^2$에서 $\quad x^2=8y=4\cdot 2y$

따라서 점 $F(0,\ 2)$와 직선 $y=-2$는 각각 포물선 $y=\dfrac{1}{8}x^2$의 초점과 준선이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AA'}=\overline{AF}=3$, $\overline{BB'}=\overline{BF}=6$ ➔ 40% 배점

해결과정 • 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BB'}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{BH}=\overline{BB'}-\overline{HB'}$

$=6-3=3$

직각삼각형 BAH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}$

$=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 □AA′B′B의 넓이는

$\dfrac{1}{2}(\overline{AA'}+\overline{BB'})\cdot\overline{AH}=\dfrac{1}{2}(3+6)\cdot 6\sqrt{2}$

$=27\sqrt{2}$ ➔ 20% 배점

답 $27\sqrt{2}$

10 전략 포물선의 꼭짓점은 포물선의 축 위의 점임을 이용한다.

풀이 직선 $y=-2$를 축으로 하는 포물선의 방정식을

$(y+2)^2=4p(x-m)$

이라 하면 이 포물선이 두 점 $(4,\ -4)$, $(12,\ 4)$를 지나므로

$4=4p(4-m)$ …… ㉠

$36=4p(12-m)$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad m=3,\ p=1$

$\therefore (y+2)^2=4(x-3)$

따라서 이 포물선은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는

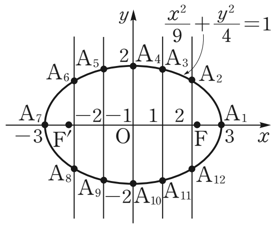
$(1+3,\ 0-2)$, 즉 $(4,\ -2)$

따라서 $a=4$, $b=-2$이므로

$a+b=2$

답 2

11 해결과정 • 다음 그림과 같이 A_1, A_2, $\cdots$, A_{12}를 정하고 주어진 타원의 다른 한 초점을 F′이라 하자.



타원의 정의에 의하여

$\overline{A_iF}+\overline{A_iF'}=2\cdot 3$
$=6\ (i=1, 2, \cdots, 12)$

$\therefore \sum_{i=1}^{12}(\overline{A_iF}+\overline{A_iF'})=6\cdot 12=72$ ➜ 50% 배점

그런데 주어진 타원은 y축에 대하여 대칭이므로

$\sum_{i=1}^{12}\overline{A_iF}=\sum_{i=1}^{12}\overline{A_iF'}$ ➜ 30% 배점

답구하기 • $\therefore \overline{A_1F}+\overline{A_2F}+\overline{A_3F}+\cdots+\overline{A_{12}F}$
$=\sum_{i=1}^{12}\overline{A_iF}$
$=\frac{1}{2}\cdot 72=36$ ➜ 20% 배점

답 36

Remark

주어진 타원이 y축에 대하여 대칭이므로 위의 그림에서 초점 F와 F′, 타원 위의 점 A_2와 점 A_6도 y축에 대하여 대칭이다.

$\therefore \overline{A_2F}=\overline{A_6F'}$

나머지 점들도 같은 방법으로 $\sum_{i=1}^{12}\overline{A_iF}=\sum_{i=1}^{12}\overline{A_iF'}$임을 알 수 있다.

12 전략 타원의 정의에 의하여 $\overline{FP}+\overline{F'P}=10$임을 이용한다.

풀이 타원의 정의에 의하여

$\overline{FP}+\overline{F'P}=2\cdot 5=10$

이므로 $\overline{FP}=10-\overline{F'P}$

$\therefore \overline{AP}-\overline{FP}=\overline{AP}-(10-\overline{F'P})$
$=\overline{AP}+\overline{F'P}-10$
$\geq \overline{AF'}-10$

$\overline{AP}-\overline{FP}$의 최솟값이 1이므로 $\overline{AF'}=11$

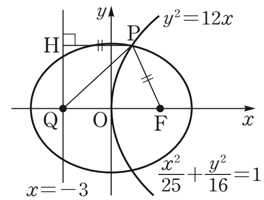
이때 $F'(-4, 0)$이므로

$\overline{AF'}=\sqrt{16+a^2}=11$, $16+a^2=121$

$\therefore a^2=105$

답 105

13 전략 타원의 정의와 포물선의 정의를 이용한다.



풀이 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$에서 $\sqrt{25-16}=3$이므로 타원의 초점의 좌표는

$(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$

$F(3,\ 0)$이라 하면 타원의 초점은 두 점 F, Q이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PQ}=2\cdot 5=10$

한편 $y^2=12x=4\cdot 3x$에서 포물선의 초점은 점 F이고, 준선은 직선 $x=-3$이다.

포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF}=\overline{PH}$

$\therefore \overline{PH}+\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{PQ}=10$

답 10

14 전략 타원의 정의를 이용하여 삼각형 AFB의 넓이를 b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서

$\overline{OA}=|a|$, $\overline{OB}=|b|$, $\overline{OF}=c$

이때 삼각형 OFB는 직각삼각형이고, $c^2=a^2-b^2$이므로

$\overline{OA}^2=\overline{OF}^2+\overline{OB}^2=\overline{BF}^2$

$\therefore \overline{OA}=\overline{BF}$

$\overline{BF}=\frac{\overline{OB}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}|b|$, $\overline{OF}=\frac{\overline{OB}}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{|b|}{\sqrt{3}}$이므로 삼각형 AFB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AF}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OF})\cdot\overline{OB}$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}|b|+\frac{|b|}{\sqrt{3}}\right)\cdot|b|$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}b^2$

즉 $\frac{\sqrt{3}}{2}b^2=6\sqrt{3}$이므로 $b^2=12$

이때 $\overline{OA}=\overline{BF}$, 즉 $|a|=\frac{2}{\sqrt{3}}|b|$이므로

$a^2=\frac{4}{3}b^2=16$

$\therefore a^2+b^2=28$

답 ④

15 (전략) 사각형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

(풀이) 타원 $x^2+\frac{y^2}{a^2}=1$에서 $a>1$이므로 두 초점의 좌표는

$(0,\ \sqrt{a^2-1}),\ (0,\ -\sqrt{a^2-1})$

쌍곡선 $x^2-y^2=1$에서 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 두 초점의 좌표는

$(\sqrt{2},\ 0),\ (-\sqrt{2},\ 0)$

위의 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 마름모이고 넓이가 12이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{a^2-1}=12$$

$$\sqrt{a^2-1}=3\sqrt{2},\qquad a^2-1=18$$

$$\therefore a^2=19$$

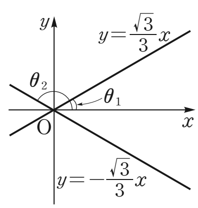
답 19

16 (전략) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{b}{a}x$임을 이용한다.

(풀이) 쌍곡선 $x^2-3y^2=-12$, 즉 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=-1$의 점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{2}{2\sqrt{3}}x,\ \text{즉}\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

두 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면



$$\tan\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\tan\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \theta_1=\frac{\pi}{6},\ \theta_2=\frac{5}{6}\pi$$

따라서 두 점근선이 이루는 예각의 크기는

$$\theta_1+(\pi-\theta_2)=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

답 ⑤

17 (전략) $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 길이는 각각 점 P와 두 점근선 사이의 거리와 같음을 이용한다.

(풀이) 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$의 점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{1}{3}x\qquad \therefore x\pm 3y=0$$

점 P에서 두 직선 $x+3y=0$, $x-3y=0$에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 길이는 각각 점 $P(a,\ b)$와 두 직선 $x+3y=0$, $x-3y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{PA}=\frac{|a+3b|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|a+3b|}{\sqrt{10}}$$

$$\overline{PB}=\frac{|a-3b|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|a-3b|}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \overline{PA}\cdot\overline{PB}=\frac{|a+3b|}{\sqrt{10}}\cdot\frac{|a-3b|}{\sqrt{10}}$$

$$=\frac{|a^2-9b^2|}{10}\qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 점 $P(a,\ b)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{9}-b^2=1\qquad \therefore a^2-9b^2=9\qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\frac{9}{10}$$

답 $\frac{9}{10}$

18 문제이해 • 주축이 x축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하자.

주축의 길이가 2이므로

$$2a=2\qquad \therefore a=1$$

점근선의 방정식이 $y=\pm 2x$이므로

$$\frac{b}{a}=2\qquad \therefore b=2a=2$$

따라서 쌍곡선의 방정식은

$$x^2-\frac{y^2}{4}=1\qquad \cdots\cdots ㉠$$

➔ 40% 배점

해결과정 • 점 P의 좌표를 $(s,\ t)$라 하면 점 P는 쌍곡선 ㉠ 위의 점이므로

$$s^2-\frac{t^2}{4}=1$$

$$\therefore t^2=4s^2-4\qquad \cdots\cdots ㉡$$

점 $A(5,\ 0)$과 점 P 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\sqrt{(s-5)^2+t^2}$$

$$=\sqrt{(s-5)^2+4s^2-4}\ (\because ㉡)$$

$$=\sqrt{5s^2-10s+21}$$

$$=\sqrt{5(s-1)^2+16}$$

➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 d는 $s=1$일 때 최소이고, 이때의 최솟값은 4이므로

$p=1,\ m=4$

또 $s=1$을 ㉡에 대입하면

$t^2=4\cdot1^2-4=0 \qquad \therefore t=0$

$\therefore q=0$

$\therefore p+q+m=5$ → 20% 배점

답 5

19 문제이해 • $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$에서 $\sqrt{4+12}=4$, $x^2-\dfrac{y^2}{15}=1$에서 $\sqrt{1+15}=4$이므로 두 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(4,\ 0),\ (-4,\ 0)$

즉 두 점 P, Q는 두 쌍곡선의 초점이다. → 30% 배점

해결과정 • 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{AQ}-\overline{AP}=2\cdot2=4$

$\overline{BQ}-\overline{BP}=2\cdot1=2$ …… ㉠ → 30% 배점

답구하기 • 삼각형 QAB의 둘레의 길이가 12이므로

$\overline{BQ}+\overline{AQ}+\overline{AB}=12$

$\overline{BQ}+\overline{AQ}+(\overline{BP}-\overline{AP})=12$

㉠에서 $\overline{BQ}=\overline{BP}+2$이므로

$(\overline{BP}+2)+(\overline{AQ}-\overline{AP})+\overline{BP}=12$

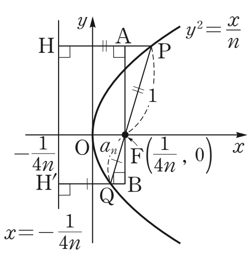
$2\overline{BP}+6=12 \qquad \therefore \overline{BP}=3$ → 40% 배점

답 3

20 전략 포물선의 정의를 이용한다.

풀이 포물선 $y^2=\dfrac{x}{n}$의 초점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{4n},\ 0\right)$이고, 준선의 방정식은 $x=-\dfrac{1}{4n}$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 준선 $x=-\dfrac{1}{4n}$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$\overline{PH}=\overline{PF}=1,$

$\overline{QH'}=\overline{QF}=a_n$

따라서 점 F에서 두 직선 PH와 QH′에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면

$\overline{PA}=1-2\cdot\dfrac{1}{4n}=1-\dfrac{1}{2n},$

$\overline{QB}=2\cdot\dfrac{1}{4n}-a_n=\dfrac{1}{2n}-a_n$

또 △FAP∽△FBQ이므로

$\overline{PF} : \overline{QF}=\overline{PA} : \overline{QB}$

$1 : a_n=\left(1-\dfrac{1}{2n}\right) : \left(\dfrac{1}{2n}-a_n\right)$

$\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)a_n=\dfrac{1}{2n}-a_n$

$\left(2-\dfrac{1}{2n}\right)a_n=\dfrac{1}{2n}, \qquad \dfrac{4n-1}{2n}a_n=\dfrac{1}{2n}$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{4n-1}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{10}\dfrac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)$

$=4\cdot\dfrac{10\cdot11}{2}-10$

$=210$

답 ①

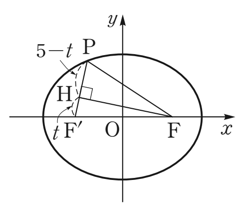
21 전략 타원의 정의를 이용한다.

풀이 타원의 정의에 의하여

$\overline{FP}+\overline{F'P}=2\cdot7=14$

$\overline{FP}=9$이므로 $\qquad \overline{F'P}=14-9=5$

오른쪽 그림에서 $\overline{F'H}=t\,(0<t<5)$라 하면



$\overline{HP}=5-t$

직각삼각형 PHF에서

$(5-t)^2+(6\sqrt{2})^2=9^2$

$\therefore (5-t)^2=9$

이때 $0<t<5$이므로 $\qquad t=2$

따라서 직각삼각형 FHF′에서

$\overline{FF'}=\sqrt{2^2+(6\sqrt{2})^2}=2\sqrt{19}$

이므로 주어진 타원의 두 초점은

$(\sqrt{19},\ 0),\ (-\sqrt{19},\ 0)$

따라서 $\sqrt{49-a}=\sqrt{19}$이므로

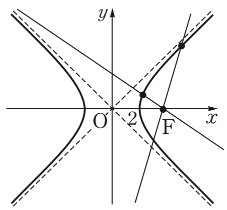
$a=49-19=30$

답 ②

22 (전략) 점근선의 방정식을 이용하여 초점과 점 P를 지나는 직선의 위치에 따른 기울기를 알아본다.

(풀이) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{11}=1$에서

$c=\sqrt{4+11}=\sqrt{15}$



오른쪽 그림에서

$2\le s<\sqrt{15}$이면

$a(s)\le 0$ …… ㉠

$s>\sqrt{15}$이면

$a(s)>0$

이때 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}x$이므로

$a(s)>\frac{\sqrt{11}}{2}$

$\therefore a(s)\le 0$ 또는 $a(s)>\frac{\sqrt{11}}{2}$

ㄱ. ㉠에서 $a(s)\le 0$인 정수 s는 2, 3의 2개이다.

ㄴ. $\frac{\sqrt{11}}{2}>\frac{3}{2}$이므로 $a(s)=\frac{3}{2}$인 s의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{s\to\sqrt{15}+}a(s)=\infty$, $\lim_{s\to\sqrt{15}-}a(s)=-\infty$이므로

$$\lim_{s\to c}\frac{1}{a(s)}=\lim_{s\to\sqrt{15}}\frac{1}{a(s)}=0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

02 평면 곡선의 접선

유제

본책 49~70쪽

015-1 (1) 주어진 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2x+2y\frac{dy}{dx}-2+4\frac{dy}{dx}=0$$

$$(2y+4)\frac{dy}{dx}=2-2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1-x}{y+2}\ (y\neq -2)$$

(2) 주어진 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$6x^2-y-x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$(x-3y^2)\frac{dy}{dx}=6x^2-y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{6x^2-y}{x-3y^2}\ (x\neq 3y^2)$$

답 풀이 참조

015-2 주어진 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2x+3y+3x\frac{dy}{dx}=0,\quad 3x\frac{dy}{dx}=-2x-3y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-2x-3y}{3x}$$

$x=2$를 $x^2+3xy=10$에 대입하면

$4+6y=10$ $\therefore y=1$

따라서 $x=2$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{-2\cdot2-3\cdot1}{3\cdot2}=-\frac{7}{6}$$

답 $-\frac{7}{6}$

016-1 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$에서

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\ (x\neq 0)$$

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-1$$

이므로 접선의 방정식은

$y-1=-(x-1)$ $\therefore y=-x+2$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=5$

답 5

016-2 $x^3+x=xy^2$에서

$$3x^2+1=y^2+2xy\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y^2+1}{2xy}$$

점 $(2, \sqrt{5})$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\cdot 2^2-(\sqrt{5})^2+1}{2\cdot 2\cdot \sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}(x-2)$$

$$\therefore y=\frac{2\sqrt{5}}{5}x+\frac{\sqrt{5}}{5}$$

이 직선의 x절편은 $-\frac{1}{2}$, y절편은 $\frac{\sqrt{5}}{5}$이므로

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{10}$$

답 $-\frac{\sqrt{5}}{10}$

017-1 포물선 $x^2=8y=4\cdot 2y$ 위의 점 $(4, 2)$에서의 접선의 방정식은

$$4x=2\cdot 2(y+2) \qquad \therefore y=x-2$$

따라서 구하는 직선의 기울기는 1이고 점 $(-2, 1)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-1=1\cdot(x+2)$$

$$\therefore y=x+3$$

답 $y=x+3$

017-2 $y^2=-8x$에 $x=-2$를 대입하면

$$y^2=16 \qquad \therefore y=4 \text{ 또는 } y=-4$$

따라서 교점의 좌표는 $(-2, 4)$, $(-2, -4)$

(i) 점 $(-2, 4)$에서의 접선의 방정식은

$$4y=2\cdot(-2)\{x+(-2)\}$$

$$\therefore y=-x+2$$

(ii) 점 $(-2, -4)$에서의 접선의 방정식은

$$-4y=2\cdot(-2)\{x+(-2)\}$$

$$\therefore y=x-2$$

(i), (ii)에서 구하는 접선의 방정식은

$$y=-x+2,\ y=x-2$$

답 $y=-x+2$, $y=x-2$

018-1 타원 $x^2+2y^2=6$ 위의 점 $(2, -1)$에서의 접선의 방정식은

$$2x+2\cdot(-y)=6 \qquad \therefore y=x-3$$

따라서 직선 $y=x-3$에 수직인 직선의 기울기는 -1이고 이 직선이 점 $(6, 1)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-1=-(x-6) \qquad \therefore y=-x+7$$

답 $y=-x+7$

Remark

타원 $Ax^2+By^2=C$ (A, B, C는 상수) 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식을 구할 때에는 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 꼴로 변형할 필요없이 $Ax^2+By^2=C$에 x^2 대신 x_1x, y^2 대신 y_1y를 대입하면 된다.

018-2 $4x^2+y^2=20$에 $x=1$을 대입하면

$$4+y^2=20, \qquad y^2=16$$

$$\therefore y=-4 \text{ 또는 } y=4$$

따라서 교점의 좌표는 $(1, -4)$, $(1, 4)$

(i) 점 $(1, -4)$에서의 접선의 방정식은

$$4\cdot 1\cdot x+(-4)\cdot y=20 \qquad \therefore x-y=5$$

(ii) 점 $(1, 4)$에서의 접선의 방정식은

$$4\cdot 1\cdot x+4y=20 \qquad \therefore x+y=5$$

(i), (ii)에서 구하는 접선의 방정식은

$$x-y=5,\ x+y=5$$

답 $x-y=5$, $x+y=5$

019-1 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{2}-1\cdot y=1 \qquad \therefore y=x-1$$

따라서 구하는 y절편은 -1이다.

답 -1

019-2 $x^2-4y^2=-5$에 $x=2$를 대입하면

$$4-4y^2=-5, \qquad y^2=\frac{9}{4}$$

$$\therefore y=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } y=\frac{3}{2}$$

따라서 교점의 좌표는 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$, $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$

(i) 점 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$2x-4\cdot\frac{3}{2}y=-5$$

$$\therefore 2x-6y=-5$$

(ⅱ) 점 $\left(2,\ -\frac{3}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$2x-4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)y=-5$$

$$\therefore\ 2x+6y=-5$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 접선의 방정식은

$$2x-6y=-5,\ 2x+6y=-5$$

답 $2x-6y=-5,\ 2x+6y=-5$

020-1 포물선 $y^2=-3x=4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)(x+x_1)$$

$$\therefore\ y=-\frac{3}{2y_1}x-\frac{3x_1}{2y_1}$$

접선의 기울기가 $\tan 60°=\sqrt{3}$이므로

$$-\frac{3}{2y_1}=\sqrt{3}\qquad \therefore\ y_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $y_1{}^2=-3x_1$이므로 $\quad x_1=-\frac{y_1{}^2}{3}=-\frac{1}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

답 $y=\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{4}$

020-2 초점의 좌표가 $(0,\ 1)$이고 준선의 방정식이 $y=-1$인 포물선의 방정식은

$$x^2=4y$$

포물선 $x^2=4y$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2(y+y_1)\qquad \therefore\ y=\frac{x_1}{2}x-y_1$$

직선 $2x+y+1=0$, 즉 $y=-2x-1$에 평행한 직선의 기울기는 -2이므로

$$\frac{x_1}{2}=-2\qquad \therefore\ x_1=-4$$

이때 $x_1{}^2=4y_1$이므로 $\quad y_1=\frac{x_1{}^2}{4}=4$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=-2x-4$$

답 $y=-2x-4$

021-1 타원 $4x^2+y^2=12$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$4x_1x+y_1y=12\qquad \therefore\ y=-\frac{4x_1}{y_1}x+\frac{12}{y_1}$$

직선 $3x-y+5=0$, 즉 $y=3x+5$와 평행한 직선의 기울기는 3이므로

$$-\frac{4x_1}{y_1}=3\qquad \therefore\ x_1=-\frac{3}{4}y_1\qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 $4x_1{}^2+y_1{}^2=12$이므로 ㉠을 대입하여 정리하면

$$\frac{13}{4}y_1{}^2=12\qquad \therefore\ y_1=\pm\frac{4\sqrt{39}}{13}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=3x\pm\sqrt{39}$$

답 $y=3x\pm\sqrt{39}$

021-2 타원 $x^2+2y^2=16$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+2y_1y=16\qquad \therefore\ y=-\frac{x_1}{2y_1}x+\frac{8}{y_1}$$

접선의 기울기가 $\tan 45°=1$이므로

$$-\frac{x_1}{2y_1}=1\qquad \therefore\ x_1=-2y_1\qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 $x_1{}^2+2y_1{}^2=16$이므로 ㉠을 대입하여 정리하면

$$6y_1{}^2=16\qquad \therefore\ y_1=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=x\pm2\sqrt{6}$$

답 $y=x\pm2\sqrt{6}$

022-1 쌍곡선 $3x^2-4y^2=12$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$3x_1x-4y_1y=12\qquad \therefore\ y=\frac{3x_1}{4y_1}x-\frac{3}{y_1}$$

접선의 기울기가 $\tan 120°=-\sqrt{3}$이므로

$$\frac{3x_1}{4y_1}=-\sqrt{3}\qquad \therefore\ x_1=-\frac{4\sqrt{3}}{3}y_1\qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 $3x_1{}^2-4y_1{}^2=12$이므로 ㉠을 대입하여 정리하면

$$12y_1{}^2=12\qquad \therefore\ y_1=\pm1$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=-\sqrt{3}x\pm3$$

답 $y=-\sqrt{3}x\pm3$

022-2 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{9}-\frac{y_1y}{16}=1\qquad \therefore\ y=\frac{16x_1}{9y_1}x-\frac{16}{y_1}$$

접선의 기울기가 2이므로

$\frac{16x_1}{9y_1}=2 \quad \therefore x_1=\frac{9}{8}y_1$ …… ㉠

이때 $\frac{x_1^2}{9}-\frac{y_1^2}{16}=1$이므로 ㉠을 대입하여 정리하면

$\frac{5}{64}y_1^2=1 \quad \therefore y_1=\pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$

따라서 직선의 방정식은 $y=2x\pm2\sqrt{5}$

이때 두 직선 $y=2x-2\sqrt{5}$와 $y=2x+2\sqrt{5}$ 사이의 거리는 직선 $y=2x-2\sqrt{5}$ 위의 점 $(0, -2\sqrt{5})$와 직선 $y=2x+2\sqrt{5}$, 즉 $2x-y+2\sqrt{5}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-(-2\sqrt{5})+2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=4$$

답 4

023-1 포물선 $x^2=8y=4\cdot2y$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$x_1x=2\cdot2(y+y_1) \quad \therefore x_1x=4(y+y_1)$

이 직선이 점 $(1, -1)$을 지나므로

$x_1=4(y_1-1) \quad \therefore y_1=\frac{1}{4}x_1+1$ …… ㉠

이때 $x_1^2=8y_1$이므로 ㉠을 대입하여 정리하면

$x_1^2-2x_1-8=0, \quad (x_1+2)(x_1-4)=0$

$\therefore x_1=-2$ 또는 $x_1=4$

따라서 $x_1=-2$일 때 $y_1=\frac{1}{2}$, $x_1=4$일 때 $y_1=2$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, \ y=x-2$

답 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, \ y=x-2$

023-2 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2(x+x_1)$

이 직선이 점 $(2, 3)$을 지나므로

$3y_1=2(x_1+2)$

$\therefore x_1=\frac{3}{2}y_1-2$ …… ㉠

이때 $y_1^2=4x_1$이므로 ㉠을 대입하여 정리하면

$y_1^2-6y_1+8=0, \quad (y_1-2)(y_1-4)=0$

$\therefore y_1=2$ 또는 $y_1=4$

따라서 $y_1=2$일 때 $x_1=1$, $y_1=4$일 때 $x_1=4$이므로 두 접선의 접점은

$(1, 2), (4, 4)$

따라서 선분 PQ의 길이는

$\overline{PQ}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{13}$

답 $\sqrt{13}$

024-1 타원 $4x^2+y^2=4$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$4x_1x+y_1y=4$

이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$4x_1+y_1=4$

$\therefore y_1=-4x_1+4$ …… ㉠

이때 $4x_1^2+y_1^2=4$이므로 ㉠을 대입하여 정리하면

$5x_1^2-8x_1+3=0, \quad (5x_1-3)(x_1-1)=0$

$\therefore x_1=\frac{3}{5}$ 또는 $x_1=1$

따라서 $x_1=\frac{3}{5}$일 때 $y_1=\frac{8}{5}$, $x_1=1$일 때 $y_1=0$이므로 구하는 접선의 방정식은

$3x+2y=5, \ x=1$

답 $3x+2y=5, \ x=1$

024-2 타원 $x^2+2y^2=4$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$x_1x+2y_1y=4$

이 직선이 점 $(-4, 0)$을 지나므로

$-4x_1=4 \quad \therefore x_1=-1$ …… ㉠

이때 $x_1^2+2y_1^2=4$이므로 ㉠을 대입하면

$2y_1^2=3 \quad \therefore y_1=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 접선의 방정식은

$-x\pm\sqrt{6}y=4 \quad \therefore x\pm\sqrt{6}y+4=0$

따라서 $a=\pm\sqrt{6}$, $b=4$이므로

$a^2+b^2=6+16=22$

답 22

025-1 쌍곡선 $x^2-2y^2=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1x-2y_1y=1$

이 직선이 점 $(-1, 1)$을 지나므로

$-x_1-2y_1=1$

$\therefore x_1=-2y_1-1$ …… ㉠

이때 $x_1^2-2y_1^2=1$이므로 ㉠을 대입하여 정리하면

$y_1^2+2y_1=0, \quad y_1(y_1+2)=0$

$\therefore y_1=0$ 또는 $y_1=-2$

따라서 $y_1=0$일 때 $x_1=-1$, $y_1=-2$일 때 $x_1=3$이므로 구하는 접선의 방정식은

$x=-1, \ 3x+4y=1$

답 $x=-1, \ 3x+4y=1$

025-2 쌍곡선 $x^2-4y^2=4$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x-4y_1y=4$$

이 직선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$$-4y_1=4 \qquad \therefore y_1=-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $x_1^2-4y_1^2=4$이므로 ㉠을 대입하면

$$x_1^2=8 \qquad \therefore x_1=\pm2\sqrt{2}$$

따라서 두 접선의 접점의 x좌표가 $\pm2\sqrt{2}$이므로

$$ac=2\sqrt{2}\cdot(-2\sqrt{2})=-8$$

답 -8

026-1 (1) $x=t^2+1$에서 $\dfrac{dx}{dt}=2t$

$y=2t^3-t+3$에서 $\dfrac{dy}{dt}=6t^2-1$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t^2-1}{2t}\ (t\neq0)$$

(2) $x=t^2$에서 $\dfrac{dx}{dt}=2t$

$y=t+\dfrac{1}{t}$에서 $\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{1}{t^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{t^2}}{2t}=\frac{t^2-1}{2t^3}$$

답 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6t^2-1}{2t}\ (t\neq0)$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t^2-1}{2t^3}$

027-1 $x=3\cos\theta$에서 $\dfrac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta$

$y=2\sin\theta$에서 $\dfrac{dy}{d\theta}=2\cos\theta$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2\cos\theta}{-3\sin\theta}$$

$$=-\frac{2}{3}\cot\theta\ (\sin\theta\neq0)$$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$일 때,

$$x=3\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2},\ y=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2},$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}\cot\frac{\pi}{4}=-\frac{2}{3}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{2}=-\frac{2}{3}\left(x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore y=-\frac{2}{3}x+2\sqrt{2}$$

답 $y=-\dfrac{2}{3}x+2\sqrt{2}$

027-2 $x=t^2-t+2$에서 $\dfrac{dx}{dt}=2t-1$

$y=2t^3+at$에서 $\dfrac{dy}{dt}=6t^2+a$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t^2+a}{2t-1}\ \left(t\neq\frac{1}{2}\right)$$

$t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6+a}{2-1}=6+a$$

즉 $6+a=3$이므로 $a=-3$

답 -3

중단원 연습 문제

본책 71~74쪽

01 0, 3	**02** -1	**03** 2	**04** ③	**05** ④
06 $\dfrac{4e^4}{e^4+1}$		**07** 2	**08** 5	**09** ①
10 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**11** ④	**12** $5\sqrt{2}$	**13** $2\sqrt{7}$	**14** -1
15 ④	**16** ①	**17** 15	**18** 9	

01 전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

풀이 $y^2=3xy-x^3$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=3y+3x\frac{dy}{dx}-3x^2$$

$$(3x-2y)\frac{dy}{dx}=3x^2-3y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3(x^2-y)}{3x-2y}\ (3x\neq2y) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x=2$를 주어진 식에 대입하면

$$y^2=6y-8,\qquad (y-2)(y-4)=0$$

$$\therefore y=2 \text{ 또는 } y=4$$

$x=2,\ y=2$를 ㉠에 대입하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(2^2-2)}{3\cdot2-2\cdot2}=3$$

$x=2,\ y=4$를 ㉠에 대입하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(2^2-4)}{3\cdot2-2\cdot4}=0$$

답 0, 3

02 해결과정 • $x^2+axy+by^2=4$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2x+ay+ax\frac{dy}{dx}+2by\frac{dy}{dx}=0$$

$$(ax+2by)\frac{dy}{dx}=-2x-ay$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+ay}{ax+2by}\ (ax+2by\neq0)$$

➜ 40% 배점

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{2+a}{a+2b}$

즉 $-\frac{2+a}{a+2b}=-\frac{3}{5}$이므로 $10+5a=3a+6b$

$\therefore a-3b=-5$ …… ㉠ ➜ 20% 배점

또 점 $(1,\ 1)$은 주어진 곡선 위의 점이므로

$1+a+b=4$

$\therefore a+b=3$ …… ㉡ ➜ 20% 배점

답구하기 • ㉠, ㉡을 연립하면 $a=1,\ b=2$

$\therefore a-b=-1$ ➜ 20% 배점

답 -1

03 해결과정 • $x^2=2y=4\cdot\frac{1}{2}y$에서 포물선의 초점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ ➜ 20% 배점

포물선 $x^2=2y$ 위의 점 $(4,\ 8)$에서의 접선의 방정식은

$4x=2\cdot\frac{1}{2}(y+8)$ $\therefore y=4x-8$ ➜ 30% 배점

직선 $y=4x-8$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이고,

이 직선이 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ ➜ 30% 배점

답구하기 • 이 식에 $y=0$을 대입하면

$0=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ $\therefore x=2$

따라서 구하는 x절편은 2이다. ➜ 20% 배점

답 2

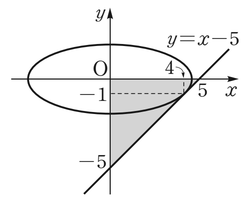
04 전략 타원 $ax^2+by^2=c$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $ax_1x+by_1y=c$임을 이용한다.

풀이 타원 $x^2+4y^2=20$ 위의 점 $(4,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$4x+4\cdot(-y)=20$

$\therefore y=x-5$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot5\cdot5=\frac{25}{2}$

답 ③

05 전략 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용한다.

풀이 $x=t-\frac{1}{t}$에서 $\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{t^2}=\frac{t^2+1}{t^2}$

$y=t+\frac{1}{t}$에서 $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{t^2+1}{t^2}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

따라서 $t=2$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{2^2-1}{2^2+1}=\frac{3}{5}$$

답 ④

다른 풀이 $x=t-\frac{1}{t}$의 양변을 제곱하면

$x^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2$

$\therefore t^2+\frac{1}{t^2}=x^2+2$ …… ㉠

또 $y=t+\frac{1}{t}$의 양변을 제곱하면

$y^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$y^2=(x^2+2)+2$ $\therefore y^2=x^2+4$

위의 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2y\frac{dy}{dx}=2x$ $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$

따라서 $t=2$일 때 $x=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ y=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$이

므로 구하는 값은

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{3}{5}$$

06 (전략) 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

(풀이) $e^x-e^y=e^2-1$에서 $\quad e^x-e^y\frac{dy}{dx}=0$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{e^y}$$

점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $\quad \frac{dy}{dx}=e^2$

이므로 접선의 방정식은

$$y=e^2(x-2) \qquad \therefore e^2x-y-2e^2=0$$

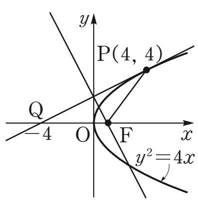
따라서 직선 $e^2x-y-2e^2=0$과 원점 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|-2e^2|}{\sqrt{(e^2)^2+(-1)^2}}=\frac{2e^2}{\sqrt{e^4+1}}$$

$$\therefore d^2=\frac{4e^4}{e^4+1}$$

답 $\frac{4e^4}{e^4+1}$

07 문제이해 • 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ 4)$에서의 접선의 방정식은



$$4y=2(x+4)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x+2$$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$$0=\frac{1}{2}x+2 \qquad \therefore x=-4$$

$\therefore \mathrm{Q}(-4,\ 0)$ ➜ 30% 배점

해결과정 • 주어진 포물선의 초점은 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이므로

$$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(4-1)^2+4^2}=5$$

$$\overline{\mathrm{QF}}=|1-(-4)|=5$$

즉 삼각형 PQF는 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QF}}$인 이등변삼각형이다.

➜ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $\angle\mathrm{PFQ}$의 이등분선은 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점 $\left(\frac{4-4}{2},\ \frac{4}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 2)$를 지나므로 구하는 y절편은 2이다. ➜ 30% 배점

답 2

08 (전략) 접선의 방정식과 점근선의 방정식을 연립하여 교점의 좌표를 구한다.

(풀이) 쌍곡선 $y^2-x^2=5$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$$3y-2x=5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

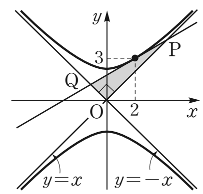
$y^2-x^2=5$에서 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{5}=-1$이므로 점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}x,\ 즉\ y=\pm x \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x=-1,\ y=1\ 또는\ x=5,\ y=5$$

오른쪽 그림과 같이 $\mathrm{P}(5,\ 5)$, $\mathrm{Q}(-1,\ 1)$이라 하면 두 점근선의 기울기의 곱이 -1이므로



$$\angle\mathrm{POQ}=\frac{\pi}{2}$$

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\cdot5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=5$$

답 5

09 (전략) 쌍곡선 $ax^2-by^2=c$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $ax_1x-by_1y=c$임을 이용한다.

(풀이) 쌍곡선 $x^2-4y^2=a$ 위의 점 $(b,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$bx-4y=a \qquad \therefore y=\frac{b}{4}x-\frac{a}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x^2-4y^2=a$에서 $\frac{x^2}{a}-\frac{4y^2}{a}=1$이므로 점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{\frac{\sqrt{a}}{2}}{\sqrt{a}}x,\ 즉\ y=\pm\frac{1}{2}x \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉠과 ㉡의 한 직선이 수직이므로

$$\frac{b}{4}\cdot\frac{1}{2}=-1\ 또는\ \frac{b}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$b>0$이므로 $\quad b=8$

즉 점 $(8,\ 1)$이 쌍곡선 $x^2-4y^2=a$ 위의 점이므로

$$a=8^2-4\cdot1^2=60$$

$$\therefore a+b=68$$

답 ①

10 (전략) 점 P에서의 접선이 직선 $x+y-2=0$과 평행할 때, 점 P와 직선 사이의 거리가 최소임을 이용한다.

(풀이) 직선 $x+y-2=0$, 즉 $y=-x+2$의 기울기가 -1이므로 구하는 최솟값은 점 P에서의 접선의 기울기가 -1일 때의 점 P와 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리와 같다.
점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 포물선 $y^2=-4x=4\cdot(-1)x$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=-2(x+x_1)$$

$$\therefore y=-\frac{2}{y_1}x-\frac{2x_1}{y_1}$$

직선의 기울기가 -1이므로

$$-\frac{2}{y_1}=-1 \qquad \therefore y_1=2$$

이때 $y_1^2=-4x_1$이므로

$$x_1=-\frac{y_1^2}{4}=-1$$

따라서 접점의 좌표가 $(-1,\ 2)$이므로 점 $(-1,\ 2)$와 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1+2-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

즉 구하는 최솟값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(다른 풀이) 점 P의 좌표를 $\left(-\frac{a^2}{4},\ a\right)$로 놓으면 점 P와 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|-\frac{a^2}{4}+a-2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\frac{1}{4}(a-2)^2-1\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{4}(a-2)^2+1\right\}$$

따라서 $a=2$일 때 구하는 거리의 최솟값은 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

11 (전략) 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$임을 이용한다.

(풀이) 포물선 $y^2=8x=4\cdot2x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=4(x+x_1)$$

$$\therefore y=\frac{4}{y_1}x+\frac{4x_1}{y_1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$2x^2-3x+1=0$에서 $\quad(2x-1)(x-1)=0$

$$\therefore x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=1$$

이때 $m_1=\frac{1}{2}$, $m_2=1$이라 하면 직선 l_1의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 ㉠에서

$$\frac{4}{y_1}=\frac{1}{2} \qquad \therefore y_1=8$$

이때 $y_1^2=8x_1$이므로 $\quad x_1=\frac{y_1^2}{8}=8$

따라서 직선 l_1의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x+4$$

또 직선 l_2의 기울기가 1이므로 ㉠에서

$$\frac{4}{y_1}=1 \qquad \therefore y_1=4$$

이때 $y_1^2=8x_1$이므로 $\quad x_1=\frac{y_1^2}{8}=2$

따라서 직선 l_2의 방정식은

$$y=x+2$$

두 직선 l_1, l_2의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{2}x+4=x+2$에서

$$\frac{1}{2}x=2 \qquad \therefore x=4$$

답 ④

12 (전략) 직선 $x-y=5$와 평행한 타원의 접선의 접점을 구한다.

(풀이) 직선 $x-y=5$, 즉 $y=x-5$의 기울기는 1이므로 최댓값 또는 최솟값은 타원 $2x^2+y^2=6$에 접하고 기울기가 1인 직선의 접점과 직선 $x-y=5$ 사이의 거리와 같다.
타원 $2x^2+y^2=6$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$2x_1x+y_1y=6$$

$$\therefore y=-\frac{2x_1}{y_1}x+\frac{6}{y_1}$$

접선의 기울기가 1이므로

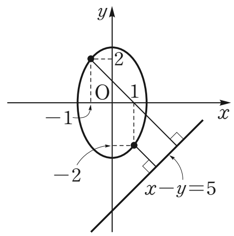
$$-\frac{2x_1}{y_1}=1 \qquad \therefore x_1=-\frac{y_1}{2}$$

이때 $2x_1^2+y_1^2=6$이므로

$$\frac{3}{2}y_1^2=6 \qquad \therefore y_1=\pm2$$

즉 접점의 좌표는 $\quad(-1,\ 2),\ (1,\ -2)$

따라서 오른쪽 그림과 같이 최댓값은 직선 $x-y=5$와 점 $(-1,\ 2)$ 사이의 거리와 같으므로



$$\frac{|-1-2-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$$

최솟값은 직선 $x-y=5$와 점 $(1,\ -2)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1+2-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$4\sqrt{2}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ 답 $5\sqrt{2}$

13 해결과정 • 초점의 좌표가 $(\sqrt{2},\ 0)$, $(-\sqrt{2},\ 0)$이므로 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면

$a^2-b^2=2$ …… ㉠ ➔ 20% 배점

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad \therefore y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{b^2}{y_1}$$

이 직선이 직선 $y=-x+4$와 일치해야 하므로

$$-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}=-1,\ \frac{b^2}{y_1}=4$$

$$\therefore y_1=\frac{b^2}{4},\ x_1=\frac{a^2}{b^2}y_1=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{4}=\frac{a^2}{4}$$

이때 $\dfrac{x_1^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_1^{\ 2}}{b^2}=1$이므로 $\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{b^2}{16}=1$

$\therefore a^2+b^2=16$ …… ㉡ ➔ 40% 배점

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a^2=9,\ b^2=7$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 단축의 길이는

$2b=2\sqrt{7}$ ➔ 20% 배점

답 $2\sqrt{7}$

14 문제이해 • 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2(x+x_1)$

$\therefore y=\dfrac{2}{y_1}x+\dfrac{2x_1}{y_1}$ ➔ 20% 배점

해결과정 • 이 직선이 점 $(a,\ -a)$를 지나므로

$$-a=\frac{2}{y_1}a+\frac{2x_1}{y_1},\qquad 2x_1=-ay_1-2a$$

$$\therefore x_1=-\frac{a}{2}y_1-a$$

이때 $y_1^{\ 2}=4x_1$이므로

$y_1^{\ 2}+2ay_1+4a=0$ ➔ 30% 배점

이 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 접선의 기울기는 $\dfrac{2}{\alpha}$, $\dfrac{2}{\beta}$

이고 두 접선이 수직이므로 $\dfrac{4}{\alpha\beta}=-1$

$\therefore \alpha\beta=-4$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 한편 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4a=-4 \qquad \therefore a=-1$ ➔ 20% 배점

답 -1

15 전략 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x=t+t^2+t^3+\cdots+t^n$에서

$$\frac{dx}{dt}=1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t\to1}\frac{dx}{dt}&=\lim_{t\to1}(1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1})\\&=1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

$y=t+\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{5}{3}t^3+\cdots+\dfrac{2n-1}{n}t^n$에서

$$\frac{dy}{dt}=1+3t+5t^2+\cdots+(2n-1)t^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t\to1}\frac{dy}{dt}&\\=\lim_{t\to1}&\{1+3t+5t^2+\cdots+(2n-1)t^{n-1}\}\\=1+3&+5+\cdots+(2n-1)\\=\sum_{k=1}^{n}&(2k-1)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\\=n^2&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t\to1}\frac{dy}{dx}&=\lim_{t\to1}\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}\\&=\frac{2n}{n+1}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{t\to 1}\frac{dy}{dx}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$$

답 ④

16 전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

풀이 두 직각삼각형 AQP, BQP에서 $\overline{AQ}=x$, $\overline{BQ}=y$라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{x^2+9}$, $\overline{BP}=\sqrt{y^2+9}$

$\overline{AP}+\overline{PB}=20$에서

$\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=20$ …… ㉠

㉠의 각 항을 시간 t에 대하여 미분하면

$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{2y}{2\sqrt{y^2+9}}\cdot\frac{dy}{dt}=0$$

$$\therefore \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{y}{\sqrt{y^2+9}}\cdot\frac{dy}{dt}=0$$

…… ㉡

$x=4$를 ㉠에 대입하면

$\sqrt{4^2+9}+\sqrt{y^2+9}=20$, $\quad\sqrt{y^2+9}=15$

$y^2=216 \quad \therefore y=6\sqrt{6}\ (\because y>0)$

한편 점 A가 점 Q를 출발하여 직선 l을 따라 초속 1 m의 속력으로 움직이므로 $\frac{dx}{dt}=1$

$x=4$, $y=6\sqrt{6}$, $\frac{dx}{dt}=1$을 ㉡에 대입하면

$$\frac{4}{5}+\frac{6\sqrt{6}}{15}\cdot\frac{dy}{dt}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

즉 선분 BQ의 길이의 시간에 대한 변화율은 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$이다.

답 ①

17 전략 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$임을 이용한다.

풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P$(4, k)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$$\frac{4x}{a^2}=1 \quad \therefore x=\frac{a^2}{4}$$

점 P에서의 접선과 x축과의 교점의 좌표 $\left(\frac{a^2}{4}, 0\right)$은 선분 F′F를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표

$\left(\frac{2\cdot 3+1\cdot(-3)}{2+1}, \frac{0}{2+1}\right)$, 즉 $(1, 0)$

과 같으므로

$$\frac{a^2}{4}=1 \quad \therefore a^2=4$$

즉 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 F$(3, 0)$, F′$(-3, 0)$이므로

$b^2=3^2-4=5$

따라서 점 P$(4, k)$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 위의 점이므로

$$4-\frac{k^2}{5}=1 \quad \therefore k^2=15$$

답 15

18 전략 점 P에서의 쌍곡선과 타원의 접선의 방정식을 각각 구한다.

풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 위의 점 P$\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{5}}{4}x-\frac{1}{2}y=1 \quad \therefore y=\frac{\sqrt{5}}{2}x-2$$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P$\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{5}}{a^2}x+\frac{1}{2b^2}y=1 \quad \therefore y=-\frac{2\sqrt{5}b^2}{a^2}x+2b^2$$

두 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}b^2}{a^2}\right)=-1$$

$\therefore a^2=5b^2$ …… ㉠

또 점 P$\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$이 타원 위의 점이므로

$\frac{5}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{5}{5b^2}+\frac{1}{4b^2}=1 \quad \therefore b^2=\frac{5}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=5$이므로

$p+q=9$

답 9

03 벡터의 연산

유제

본책 81~95쪽

028-1 (1) $\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}=-\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$

(4) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}=\vec{b}$

답 풀이 참조

028-2 $\overrightarrow{AC}$와 같은 벡터는 $\overrightarrow{FD}$이고

$\overline{FD}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

이므로 $|\overrightarrow{FD}|=3\sqrt{2}$

답 $\overrightarrow{FD}$, $3\sqrt{2}$

029-1 (1) $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}$
$=\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}$
$=-\vec{a}+\vec{b}$

답 (1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $-\vec{a}+\vec{b}$

029-2 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$
$=\overrightarrow{AA}$
$=\vec{0}$ …… 증명 끝

답 풀이 참조

030-1 (1) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BO}$
$=\vec{b}+(-\vec{a}+\vec{b})$
$=-\vec{a}+2\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{AB}$
$=(-\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}$
$=-2\vec{a}+\vec{b}$

답 (1) $-\vec{a}+2\vec{b}$ (2) $-2\vec{a}+\vec{b}$

031-1 (1) $2(\vec{a}+3\vec{b})-3(2\vec{a}-\vec{x})=\vec{x}$에서
$2\vec{a}+6\vec{b}-6\vec{a}+3\vec{x}=\vec{x}$
$2\vec{x}=4\vec{a}-6\vec{b}$
$\therefore \vec{x}=\frac{1}{2}(4\vec{a}-6\vec{b})$
$=2\vec{a}-3\vec{b}$

(2) $3(\vec{a}-3\vec{b}-2\vec{x})-2(\vec{a}-3\vec{c})=7\vec{a}+3\vec{b}$에서
$3\vec{a}-9\vec{b}-6\vec{x}-2\vec{a}+6\vec{c}=7\vec{a}+3\vec{b}$
$-6\vec{x}=6\vec{a}+12\vec{b}-6\vec{c}$
$\therefore \vec{x}=-\frac{1}{6}(6\vec{a}+12\vec{b}-6\vec{c})$
$=-\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$

답 (1) $2\vec{a}-3\vec{b}$ (2) $-\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$

031-2 (1) $\begin{cases}\vec{x}-\vec{y}=-2\vec{a} & \cdots\cdots ㉠\\ -\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}+\vec{b} & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠+㉡을 하면
$\vec{y}=-\vec{a}+\vec{b}$
이것을 ㉠에 대입하면
$\vec{x}-(-\vec{a}+\vec{b})=-2\vec{a}$
$\vec{x}+\vec{a}-\vec{b}=-2\vec{a}$
$\therefore \vec{x}=-3\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\begin{cases}2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}-3\vec{b} & \cdots\cdots ㉠\\ \vec{x}-3\vec{y}=2\vec{a}+\vec{b} & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠×3+㉡을 하면
$7\vec{x}=5\vec{a}-8\vec{b}$
$\therefore \vec{x}=\frac{5}{7}\vec{a}-\frac{8}{7}\vec{b}$
이것을 ㉠에 대입하면
$2\left(\frac{5}{7}\vec{a}-\frac{8}{7}\vec{b}\right)+\vec{y}=\vec{a}-3\vec{b}$
$\frac{10}{7}\vec{a}-\frac{16}{7}\vec{b}+\vec{y}=\vec{a}-3\vec{b}$
$\therefore \vec{y}=-\frac{3}{7}\vec{a}-\frac{5}{7}\vec{b}$

답 풀이 참조

032-1 (1) $(m+2)\vec{a}+(3n-1)\vec{b}$
$=4\vec{a}-(m+3)\vec{b}$
에서
$m+2=4,\ 3n-1=-(m+3)$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$m=2,\ n=-\frac{4}{3}$

(2) $(m+n-3)\vec{a}+(mn+10)\vec{b}=\vec{0}$에서
$m+n-3=0,\ mn+10=0$
$\therefore m+n=3,\ mn=-10$
이를 만족시키는 실수 m, n은 이차방정식
$x^2-3x-10=0$의 두 실근이다.

따라서 $(x+2)(x-5)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=5$

$\therefore \begin{cases} m=-2 \\ n=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} m=5 \\ n=-2 \end{cases}$

답 풀이 참조

다른 풀이 (1) 주어진 식의 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면

$(m-2)\vec{a}+(m+3n+2)\vec{b}=\vec{0}$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$m-2=0,\ m+3n+2=0$

$\therefore m=2,\ n=-\frac{4}{3}$

033-1 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가 서로 평행하려면

$\vec{q}=k\vec{p}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다.

$\vec{p}=m\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=8\vec{a}+m\vec{b}$이므로

$8\vec{a}+m\vec{b}=k(m\vec{a}+2\vec{b})$

$=km\vec{a}+2k\vec{b}$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$8=km,\ m=2k$

$m=2k$를 $8=km$에 대입하면

$2k^2=8, \quad k^2=4$

$\therefore k=\pm2,\ m=\pm4$ (복호동순)

답 -4, 4

033-2 두 벡터 $\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{q}-\vec{r}$가 서로 평행하려면

$\vec{q}-\vec{r}=k(\vec{p}+\vec{q})$ …… ㉠

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다.

세 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$에 대하여

$\vec{p}+\vec{q}=(\vec{a}+\vec{b})+(m\vec{a}-2\vec{b})$

$=(m+1)\vec{a}-\vec{b}$

$\vec{q}-\vec{r}=(m\vec{a}-2\vec{b})-(3\vec{a}+2\vec{b})$

$=(m-3)\vec{a}-4\vec{b}$

이를 ㉠에 대입하면

$(m-3)\vec{a}-4\vec{b}=k\{(m+1)\vec{a}-\vec{b}\}$

$=k(m+1)\vec{a}-k\vec{b}$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$m-3=k(m+1),\ -4=-k$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=4,\ m=-\frac{7}{3}$

답 $-\frac{7}{3}$

034-1 서로 다른 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ …… ㉠

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다.

이때

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(\vec{a}+\vec{b})-(2\vec{a}-\vec{b})$

$=-\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

$=(-\vec{a}+m\vec{b})-(2\vec{a}-\vec{b})$

$=-3\vec{a}+(m+1)\vec{b}$

이를 ㉠에 대입하면

$-3\vec{a}+(m+1)\vec{b}=k(-\vec{a}+2\vec{b})$

$=-k\vec{a}+2k\vec{b}$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$-3=-k,\ m+1=2k$

$\therefore k=3,\ m=5$

답 5

중단원 연습 문제

본책 96~99쪽

01 3	**02** $-\frac{3}{10}\vec{a}+\vec{b}-\frac{9}{5}\vec{c}$		**03** 2
04 ③	**05** D, E **06** ③	**07** 8	**08** ②
09 $3\sqrt{2}$	**10** $-\vec{b}+\sqrt{2}\vec{c}$	**11** ①	**12** $\frac{5}{2}$
13 $m=1,\ n=0$	**14** $\frac{\pi}{3}$	**15** ②	**16** ⑤

01 해결과정 • $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$

$=2\overrightarrow{AB}$ ➔ 60% 배점

답구하기 • 즉 $|2\overrightarrow{AB}|=6$이므로

$|\overrightarrow{AB}|=3$

따라서 정사각형의 한 변의 길이는 3이다. ➔ 40% 배점

답 3

02 (전략) 실수를 계수, 벡터를 문자로 생각하여 주어진 등식을 다항식의 연산과 같은 방법으로 간단히 한다.

풀이 $\frac{1}{2}(\vec{a}+4\vec{x})-\frac{1}{3}(2\vec{b}+\vec{x})=-3\vec{c}+\vec{b}$에서

$\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{x}-\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{x}=-3\vec{c}+\vec{b}$

$\frac{5}{3}\vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}-3\vec{c}$

$\therefore \vec{x}=-\frac{3}{10}\vec{a}+\vec{b}-\frac{9}{5}\vec{c}$

답 $-\frac{3}{10}\vec{a}+\vec{b}-\frac{9}{5}\vec{c}$

03 해결과정 • $(4m+2n)\vec{a}+(3m-2n-5)\vec{b}$
$=(3m-n)\vec{a}+(m+3n+6)\vec{b}$

에서

$4m+2n=3m-n,\ 3m-2n-5=m+3n+6$

$\therefore m+3n=0,\ 2m-5n-11=0$ ➔ 50% 배점

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=3,\ n=-1$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore m+n=2$ ➔ 10% 배점

답 2

다른 풀이 주어진 식의 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면

$(m+3n)\vec{a}+(2m-5n-11)\vec{b}=\vec{0}$

이므로 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$m+3n=0,\ 2m-5n-11=0$

위의 식을 연립하여 풀면

$m=3,\ n=-1$

$\therefore m+n=2$

04 (전략) 보기에 주어진 벡터 중 $k(\vec{a}+\vec{b})$ 꼴인 것을 찾는다.

풀이 ㄱ. $2\vec{a}-\vec{c}=2\vec{a}-(2\vec{a}-\vec{b})$
$=\vec{b}$

ㄴ. $-3\vec{a}+\vec{c}=-3\vec{a}+(2\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$
$=-(\vec{a}+\vec{b})$

ㄷ. $3\vec{b}+\vec{c}=3\vec{b}+(2\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$
$=2(\vec{a}+\vec{b})$

ㄹ. $\vec{b}-\vec{c}=\vec{b}-(2\vec{a}-\vec{b})=-2\vec{a}+2\vec{b}$
$=-2(\vec{a}-\vec{b})$

이상에서 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 서로 평행한 벡터는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

05 해결과정 • $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$이고

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{a}-3\vec{b})-\vec{a}$
$=\vec{a}-3\vec{b}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(4\vec{a}-3\vec{b})-\vec{a}=3\vec{a}-3\vec{b}$
$=-3(\vec{b}-\vec{a})$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=(5\vec{a}-4\vec{b})-\vec{a}=4\vec{a}-4\vec{b}$
$=-4(\vec{b}-\vec{a})$ ➔ 70% 배점

답구하기 • 따라서 $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}=-4\overrightarrow{AB}$이므로 직선 AB 위의 점인 것은 D, E이다. ➔ 30% 배점

답 D, E

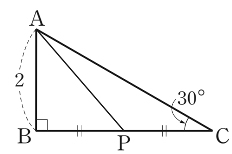
06 (전략) 먼저 주어진 조건을 만족시키는 점 P의 위치를 찾은 후 삼각형 ABC를 그린다.

풀이 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PC}$

즉 점 P는 선분 BC의 중점이다.

오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서



$\overline{BC}=\frac{2}{\tan 30°}$
$=2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{PB}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\sqrt{3}$

따라서 $\overline{PA}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$이므로

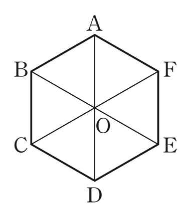
$|\overrightarrow{PA}|^2=\overline{PA}^2=7$

답 ③

07 (전략) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$를 A, B, C, D를 시점과 종점으로 하는 벡터로 나타낸다.

풀이 $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{BA}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$
$=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BD}$
$=\overrightarrow{BE}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$의 교점을 O라 하면



$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$
$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO})$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$
$=\vec{0}$

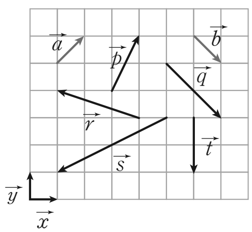
$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}\\&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{DC}\\&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FA}\\&=\overrightarrow{FC}\end{aligned}$$

따라서 $|-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=|\overrightarrow{BE}|=4$, $|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=0$, $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=|\overrightarrow{FC}|=4$이므로 구하는 값은

$4+0+4=8$ 답 8

08 전략 주어진 벡터들을 $m\vec{a}+n\vec{b}$ 꼴로 나타낸 후 $mn<0$을 만족시키는 벡터를 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\vec{x}$, $\vec{y}$를 정하면



$\vec{a}=\vec{x}+\vec{y}$,

$\vec{b}=\vec{x}-\vec{y}$

이므로 위의 식을 정리하면

$\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$,

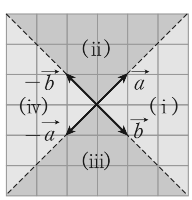
$\vec{y}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \vec{p}&=\vec{x}+2\vec{y}=\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\\ \vec{q}&=2\vec{x}-2\vec{y}=2\vec{b}\\ \vec{r}&=-3\vec{x}+\vec{y}=-\vec{a}-2\vec{b}\\ \vec{s}&=-4\vec{x}-2\vec{y}=-3\vec{a}-\vec{b}\\ \vec{t}&=-2\vec{y}=-\vec{a}+\vec{b}\end{aligned}$$

이때 집합 C의 원소는 $m\vec{a}+n\vec{b}$ 꼴로 나타내었을 때 $mn<0$이어야 한다.

따라서 집합 C의 원소인 벡터는 $\vec{p}$, $\vec{t}$이다. 답 ②

다른 풀이 네 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $-\vec{a}$, $-\vec{b}$가 [그림 1]과 같으므로 벡터 $m\vec{a}+n\vec{b}$의 방향을 다음과 같이 4가지로 나눌 수 있다.



[그림 1]

(i) $m>0$, $n>0$

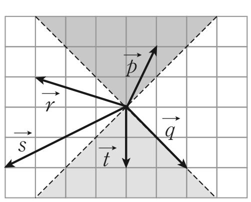
(ii) $m>0$, $n<0$

(iii) $m<0$, $n>0$

(iv) $m<0$, $n<0$

즉 집합 C의 원소이려면 [그림 1]에서 영역 (ii) 또는 (iii)에 있어야 한다.

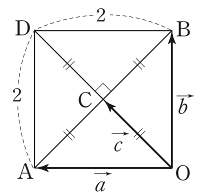
따라서 [그림 2]에서 집합 C의 원소인 벡터는 벡터 $\vec{p}$, $\vec{t}$이다.



[그림 2]

09 전략 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$를 이웃하는 두 변으로 하는 정사각형을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 정사각형 AOBD를 그리면



$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OD}=2\vec{c}$

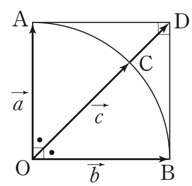
이므로

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}&=2\vec{c}+\vec{c}\\&=3\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|&=|3\vec{c}|\\&=\frac{3}{2}|2\vec{c}|=\frac{3}{2}|\overrightarrow{OD}|\\&=\frac{3}{2}\sqrt{2^2+2^2}\\&=3\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 $3\sqrt{2}$

10 해결과정 • 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$를 이웃하는 두 변으로 하는 정사각형을 그리고 나머지 꼭짓점을 D라 하면



$|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{OB}|$

이때 $\overrightarrow{OC}$는 $\overrightarrow{OD}$와 방향이 같고 크기가 $|\overrightarrow{OB}|$이므로

$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OD}$ ➔ 70% 배점

답구하기 • 따라서 $\overrightarrow{OD}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{OC}$이므로

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{OC}$

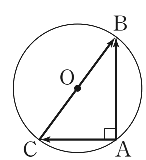
$\vec{a}+\vec{b}=\sqrt{2}\,\vec{c}$

$\therefore\ \vec{a}=-\vec{b}+\sqrt{2}\,\vec{c}$ ➔ 30% 배점

답 $-\vec{b}+\sqrt{2}\,\vec{c}$

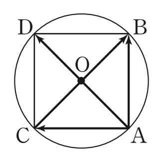
11 전략 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 직각삼각형과 정삼각형의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\angle BAC=90°$이면 $\overline{BC}$는 원 O의 지름이므로



$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|&=|\overrightarrow{CB}|\\&=\overline{CB}=2\end{aligned}$$

ㄴ. [반례] 원에 내접하는 정사각형의 네 꼭짓점을 각각 A, B, D, C라 하면 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$는 원 O의 지름이므로



$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|$

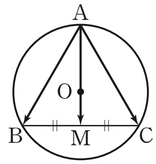
$=\overline{AD}=2$

$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{CB}|$

$=\overline{CB}=2$

$\therefore |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 △ABC가 정삼각형일 때, 선분 BC의 중점을 M이라 하자.



$\overline{AB}$, $\overline{AC}$를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형에 대하여 나머지 꼭짓점을 D라 하면 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$이고, $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}$이므로

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AM}|$

그런데 △ABC가 정삼각형이므로 원의 중심 O는 △ABC의 무게중심과 같다.

즉 $\overline{AM}=\frac{3}{2}\overline{AO}=\frac{3}{2}$이므로

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\overline{AM}$

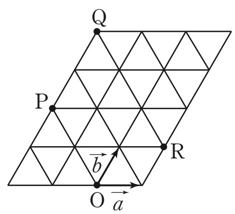
$=2\cdot\frac{3}{2}=3$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

12 전략 점 O를 시점으로 하는 두 벡터를 잡아 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$를 두 벡터로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 O를 시점으로 하는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 잡으면



$\overrightarrow{OP}=-2\vec{a}+2\vec{b}$,

$\overrightarrow{OQ}=-2\vec{a}+4\vec{b}$,

$\overrightarrow{OR}=\vec{a}+\vec{b}$

위의 식을 $\overrightarrow{OQ}=m\overrightarrow{OP}+n\overrightarrow{OR}$에 대입하면

$-2\vec{a}+4\vec{b}=m(-2\vec{a}+2\vec{b})+n(\vec{a}+\vec{b})$

$=(-2m+n)\vec{a}+(2m+n)\vec{b}$

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$-2=-2m+n,\ 4=2m+n$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=\frac{3}{2},\ n=1$

$\therefore m+n=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

다른 풀이 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RQ}$ ······ ㉠

이때 $\overrightarrow{OP}\,/\!/\,\overrightarrow{RQ}$이고 $|\overrightarrow{RQ}|=\frac{3}{2}|\overrightarrow{OP}|$이므로

$\overrightarrow{RQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP}$

따라서 이를 ㉠에 대입하면

$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}$

즉 $m=\frac{3}{2}$, $n=1$이므로

$m+n=\frac{5}{2}$

13 문제이해 • 서로 다른 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다. ➔ 20% 배점

해결과정 • 세 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$에 대하여

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{a}+\vec{b})-(m\vec{a}+2\vec{b})$

$=(2-m)\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(3\vec{a}+n\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}+(n-1)\vec{b}$

이므로

$(2-m)\vec{a}-\vec{b}=k\{\vec{a}+(n-1)\vec{b}\}$

$=k\vec{a}+k(n-1)\vec{b}$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$2-m=k$ ······ ㉠

$-1=k(n-1)$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(m-2)(n-1)=1$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $m-2$, $n-1$은 정수이므로

$\begin{cases} m-2=-1 \\ n-1=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} m-2=1 \\ n-1=1 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} m=1 \\ n=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$

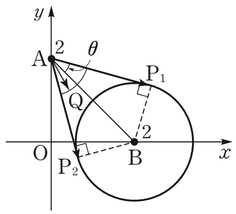
그런데 $\overrightarrow{OA}\neq\overrightarrow{OC}$이므로

$m=1,\ n=0$ ➔ 40% 배점

답 $m=1,\ n=0$

14 문제이해 • $|\overrightarrow{AQ}|=\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AP}|}=1$이므로 벡터 $\overrightarrow{AQ}$는 벡터 $\overrightarrow{AP}$와 방향이 같은 단위벡터이다. ➔ 30% 배점

해결과정 • 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 원 $(x-2)^2+y^2=2$에 그은 두 접선의 접점을 각각 P_1, P_2라 하고, 원의 중심을 B, $\angle BAP_1=\theta$라 하면



$$\sin\theta=\frac{\overline{BP_1}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}$ ➔ 40% 배점

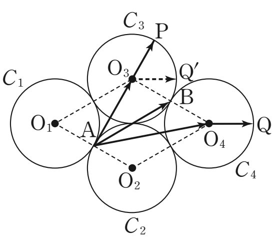
답구하기 • 따라서 $\angle P_1AP_2=2\theta=\frac{\pi}{3}$이므로 점 Q가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴의 호이므로 그 길이는 $\frac{\pi}{3}$이다.

➔ 30% 배점

답 $\frac{\pi}{3}$

15 전략 주어진 네 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 사각형이 마름모임을 이용한다.

풀이 다음 그림과 같이 네 원 C_1, C_2, C_3, C_4의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3, O_4라 하고, 두 원 C_3, C_4의 접점을 B라 하자. 사각형 $O_1O_2O_4O_3$은 한 변의 길이가 2인 마름모이고, 두 점 A, B는 각각 변 O_1O_2, 변 O_3O_4의 중점이다.



$$\therefore\ \overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{AO_4}=2\overrightarrow{AB}$$
$$=2\overrightarrow{O_1O_3}$$

한편 벡터 $\overrightarrow{O_4Q}$를 시점이 O_3이 되도록 평행이동하였을 때의 종점을 Q′이라 하면

$\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_4Q}=\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_3Q'}$이므로

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$$
$$=(\overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{O_3P})+(\overrightarrow{AO_4}+\overrightarrow{O_4Q})$$
$$=(\overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{AO_4})+(\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_4Q})$$
$$=2\overrightarrow{O_1O_3}+\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_3Q'}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$$
$$\le 2|\overrightarrow{O_1O_3}|+|\overrightarrow{O_3P}|+|\overrightarrow{O_3Q'}|$$
$$=2\cdot2+1+1$$
$$=6$$

따라서 구하는 최댓값은 6이다.

답 ②

Remark

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

16 전략 벡터의 덧셈, 뺄셈을 이용하여 $\overrightarrow{PB}$를 $\overrightarrow{AP}$에 대하여 나타낸다.

풀이 ㄱ. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}$에서

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}$

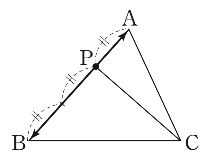
$\therefore\ \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AP}$

ㄴ. ㄱ에서 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AP}$이므로

$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{PA}$

$=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AP}$

ㄷ. ㄴ에서 $\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{AP}$, 즉 $\overrightarrow{PB}=-2\overrightarrow{PA}$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 P는 변 AB를 $1:2$로 내분하는 점이다.



$\therefore\ \triangle ACP:\triangle BCP$

$=\overline{PA}:\overline{PB}$

$=1:2$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

04 평면벡터의 성분

유제

본책 106~116쪽

035-1 두 점 P, Q의 위치벡터를 각각 $\vec{p}$, $\vec{q}$라 하면

$$\vec{p}=\frac{3\vec{b}+2\vec{a}}{3+2}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5},$$

$$\vec{q}=\frac{\vec{b}-2\vec{a}}{1-2}=2\vec{a}-\vec{b}$$

따라서 선분 PQ의 중점의 위치벡터를 $\vec{m}$이라 하면

$$\vec{m}=\frac{\vec{p}+\vec{q}}{2}=\frac{\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}+2\vec{a}-\vec{b}}{2}$$

$$=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}+10\vec{a}-5\vec{b}}{10}$$

$$=\frac{6\vec{a}-\vec{b}}{5}$$

답 $\frac{6\vec{a}-\vec{b}}{5}$

Remark

$\vec{m}=\frac{6\vec{a}-\vec{b}}{5}=\frac{\vec{b}-6\vec{a}}{1-6}$이므로 선분 PQ의 중점은 선분 AB를 1 : 6으로 외분하는 점과 같다.

035-2 $\overline{\mathrm{AM}}$이 △ABC의 중선이므로 점 M은 선분 BC의 중점이다. 즉

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

이므로 $\quad\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$$

따라서 $m=\frac{1}{3}$, $n=-\frac{2}{3}$이므로

$$m+n=-\frac{1}{3}$$

답 $-\frac{1}{3}$

다른 풀이 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=-\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$

이때 점 G는 $\overline{\mathrm{AM}}$을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{CM}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}}{2+1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CM}}$$

$$=-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$$

따라서 $m=\frac{1}{3}$, $n=-\frac{2}{3}$이므로

$$m+n=-\frac{1}{3}$$

036-1 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB이다.

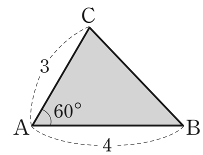
따라서 구하는 도형의 길이는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-3)^2+(3-2)^2}$$

$$=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

036-2 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 △ABC의 내부와 그 둘레이다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=3\sqrt{3}$$

답 $3\sqrt{3}$

037-1 (1) $3(-2\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}$

$=-6\vec{a}+3\vec{b}-\vec{a}$

$=-7\vec{a}+3\vec{b}$

$=-7(2,\ 3)+3(3,\ -2)$

$=(-14+9,\ -21-6)$

$=(-5,\ -27)$

(2) $5\vec{a}-2(\vec{a}+3\vec{b})=5\vec{a}-2\vec{a}-6\vec{b}$

$=3\vec{a}-6\vec{b}$

$=3(2,\ 3)-6(3,\ -2)$

$=(6-18,\ 9+12)$

$=(-12,\ 21)$

답 (1) $(-5,\ -27)$ (2) $(-12,\ 21)$

037-2 (1) $\vec{p}=k\vec{a}+h\vec{b}$ (k, h는 실수)라 하면

$(3,\ 4)=k(1,\ -2)+h(-1,\ 0)$

$=(k-h,\ -2k)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$3=k-h$, $4=-2k$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=-2$, $h=-5$

$\therefore \vec{p}=-2\vec{a}-5\vec{b}$

(2) $\vec{q}=k\vec{a}+h\vec{b}$($k$, h는 실수)라 하면

$(0,\ 1)=k(1,\ -2)+h(-1,\ 0)$

$=(k-h,\ -2k)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$0=k-h,\ 1=-2k$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=-\frac{1}{2},\ h=-\frac{1}{2}$

$\therefore \vec{q}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

답 (1) $-2\vec{a}-5\vec{b}$ (2) $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

037-3 $\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 1)+(-3,\ 2)=(-1,\ 3)$

$k\vec{a}+(1-k)\vec{b}=k(2,\ 1)+(1-k)(-3,\ 2)$

$=(5k-3,\ 2-k)$

두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 $k\vec{a}+(1-k)\vec{b}$가 서로 평행하면

$k\vec{a}+(1-k)\vec{b}=m(\vec{a}+\vec{b})$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 m이 존재하므로

$(5k-3,\ 2-k)=m(-1,\ 3)=(-m,\ 3m)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$5k-3=-m,\ 2-k=3m$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=\frac{1}{2},\ k=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

038-1 점 B의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AB}=(x+1,\ y-4)$

$\vec{p}=\overrightarrow{AB}$이므로

$(2,\ -3)=(x+1,\ y-4)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$2=x+1,\ -3=y-4$

$\therefore x=1,\ y=1$

따라서 점 B의 좌표는 $(1,\ 1)$이다. 답 $B(1,\ 1)$

039-1 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x+2,\ y-1),\ \overrightarrow{BP}=(x-4,\ y+3)$

(1) $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$이므로

$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3x-2y-5=0$

(2) $|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{BP}|$이므로

$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=2\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3x^2+3y^2-36x+26y+95=0$

답 풀이 참조

Remark

(1)에서 점 P의 자취는 선분 AB의 수직이등분선이고, (2)에서 점 P의 자취는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원(아폴로니오스의 원)이다.

중단원 연습 문제

본책 117~119쪽

01 $-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$ **02** ③ **03** $\frac{2}{3}$

04 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ **05** $\frac{1}{5}$ **06** ③ **07** $\sqrt{29}$

08 ② **09** $\overrightarrow{AB}=(5,\ -\sqrt{3}),\ |\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{7}$

10 $P(1,\ 3)$ **11** 33 **12** ⑤ **13** ③

01 해결과정 • 점 M이 $\overline{BC}$의 중점이므로

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ ➔ 30% 배점

이때 점 G가 △ABC의 무게중심이므로 점 G는 $\overline{AM}$을 2 : 1로 내분한다.

$\therefore \overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$ ➔ 50% 배점

답구하기 • $\therefore \overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{GM}$

$=-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$ ➔ 20% 배점

답 $-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$

02 전략 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같은 벡터는 양수 k에 대하여 $k\vec{a}$로 놓을 수 있다.

풀이 $2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=2(1,\ -1)-(2,\ 4)+(3,\ 3)$

$=(3,\ -3)$

이므로 $2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$와 방향이 같은 벡터 $\vec{p}$를

$\vec{p}=k(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$

$=k(3,\ -3)$

$=(3k,\ -3k)$ (k는 양수)

로 놓을 수 있다. 이때 $|\vec{p}|=2$이므로

$\sqrt{(3k)^2+(-3k)^2}=2,\quad 3\sqrt{2}k=2$

$\therefore k=\frac{\sqrt{2}}{3}$

따라서 $\vec{p}=(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$이므로

$x=\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}$

$\therefore\ x-y=2\sqrt{2}$ 답 ③

03 (전략) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면 $\vec{a}=k\vec{b}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재함을 이용한다.

(풀이) $\vec{a}-\vec{b}=(-1,\ 3)-(-2,\ -3)=(1,\ 6)$

$\vec{a}+m\vec{c}=(-1,\ 3)+m\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$

$=\left(-1+3m,\ 3+\frac{9}{2}m\right)$

이때 두 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}+m\vec{c}$가 서로 평행하면

$\vec{a}+m\vec{c}=k(\vec{a}-\vec{b})$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하므로

$\left(-1+3m,\ 3+\frac{9}{2}m\right)=k(1,\ 6)=(k,\ 6k)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$-1+3m=k,\ 3+\frac{9}{2}m=6k$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=\frac{2}{3},\ k=1$ 답 $\frac{2}{3}$

04 (전략) 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고, 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

(풀이) 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x+2,\ y)$, $\overrightarrow{BP}=(x-2,\ y)$

$|\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{BP}|=6$이므로

$\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=6$

$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=6-\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

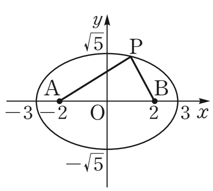
양변을 제곱하여 정리하면

$3\sqrt{(x-2)^2+y^2}=-2x+9$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 $5x^2+9y^2=45$

$\therefore\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 답 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

(다른 풀이) $|\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{BP}|=6$에서 $\overline{AP}+\overline{BP}=6$이므로 점 P는 두 점 A, B에서의 거리의 합이 6인 점이다. 따라서 점 P의 자취는 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B를 초점으로 하고 장축의 길이가 6인 타원이므로



$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

05 해결과정 • 평행사변형 ABCD에서

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ ...... ㉠

변 BC의 중점이 M이므로

$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}$ ...... ㉡

변 CD를 2 : 1로 내분하는 점이 N이므로

$\overrightarrow{AN}=\frac{2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}}{3}$

$\therefore\ \overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AN}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AN}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AN}$

$\therefore\ \overrightarrow{AC}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AM}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AN}$ ➔ 80% 배점

답구하기 • 따라서 $x=\frac{4}{5},\ y=\frac{3}{5}$이므로

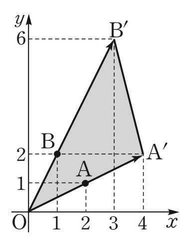
$x-y=\frac{1}{5}$ ➔ 20% 배점

답 $\frac{1}{5}$

06 (전략) 세 점 O, A, B에 대하여 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\ (0\le m+n\le 1,\ m\ge 0,\ n\ge 0)$를 만족시키는 점 P의 자취는 삼각형 OAB의 내부와 그 둘레임을 이용한다.

(풀이) $\overrightarrow{OP}=m(2\overrightarrow{OA})+n(3\overrightarrow{OB})$

이므로 두 벡터 $2\overrightarrow{OA}$, $3\overrightarrow{OB}$의 종점을 각각 A′, B′이라 하면 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 △OA′B′의 내부와 그 둘레이다.



이때

$\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}=2(2,\ 1)$

$=(4,\ 2)$

$\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}=3(1,\ 2)$

$=(3,\ 6)$

따라서 구하는 도형의 넓이는

△OA′B′

$=4\times6-\frac{1}{2}(4\times2+3\times6+1\times4)$

$=9$ 답 ③

07 해결과정 • $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$에서

$(x+3,\ 2y-1)=(1-y,\ -10-3x)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$x+3=1-y,\ 2y-1=-10-3x$

$\therefore x+y=-2,\ 3x+2y=-9$ ➔ 50% 배점

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-5,\ y=3$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 $\overrightarrow{a}=(-2,\ 5)$이므로

$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{(-2)^2+5^2}$

$=\sqrt{29}$ ➔ 30% 배점

답 $\sqrt{29}$

08 전략 두 벡터 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$가 서로 평행하면 $\overrightarrow{a}=m\overrightarrow{b}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 m이 존재함을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{AB}=(4,\ -1)-(3,\ 2)=(1,\ -3)$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{p}$가 서로 평행하면

$\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{AB}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 m이 존재하므로

$(4+2k,\ -1+5k)=m(1,\ -3)=(m,\ -3m)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$4+2k=m,\ -1+5k=-3m$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=-1,\ m=2$

답 ②

09 전략 두 점 A, B의 좌표를 구한다.

풀이 16개의 정삼각형의 한 변의 길이가 2이므로

$A(2,\ 2\sqrt{3}),\ B(7,\ \sqrt{3})$

$\therefore \overrightarrow{AB}=(7,\ \sqrt{3})-(2,\ 2\sqrt{3})=(5,\ -\sqrt{3})$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5^2+(-\sqrt{3})^2}$

$=2\sqrt{7}$

답 $\overrightarrow{AB}=(5,\ -\sqrt{3}),\ |\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{7}$

10 전략 구하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고 각각의 벡터를 성분으로 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{PA}=(-2-x,\ 6-y),\ \overrightarrow{PB}=(1-x,\ -2-y),$

$\overrightarrow{PC}=(4-x,\ 5-y)$

$\therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$

$=(-2-x,\ 6-y)+(1-x,\ -2-y)$

$\quad+(4-x,\ 5-y)$

$=(3-3x,\ 9-3y)$

이때 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$이므로

$(3-3x,\ 9-3y)=(0,\ 0)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$3-3x=0,\ 9-3y=0$

$\therefore x=1,\ y=3$

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ 3)$이다.

답 $P(1,\ 3)$

11 전략 선분 AD의 내분점의 위치벡터를 이용한다.

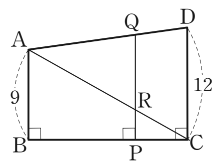
풀이 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점을 Q라 하면

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PD}}{3}$$

$\therefore |\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PD}|=3|\overrightarrow{PQ}|$

따라서 선분 PQ의 길이가 최소일 때 $|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PD}|$가 최소이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P가 점 Q에서 선분 BC에 내린 수선의 발일 때 $\overline{PQ}$의 길이가 최소이고, 이때 $\overline{QP}$와 $\overline{AC}$의 교점을 R라 하자.



$\overline{AQ}:\overline{AD}=2:3$이므로

$\overline{QR}=12\cdot\frac{2}{3}=8$

$\overline{PC}:\overline{BC}=1:3$이므로

$\overline{RP}=9\cdot\frac{1}{3}=3$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{QR}+\overline{RP}=11$

따라서 $|\overrightarrow{PQ}|\ge 11$이므로 $|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PD}|$의 최솟값은

$3\times 11=33$

답 33

12 전략 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$라 할 때, 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점의 위치벡터는 $\frac{m\overrightarrow{b}+n\overrightarrow{a}}{m+n}$임을 이용한다.

풀이 $5\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$에서

$5\overrightarrow{AP}=-3\overrightarrow{BP}-4\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}$

$$\therefore \frac{5}{7}\overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}}{3+4}$$

이때 $\frac{3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}}{3+4}=\overrightarrow{PD}$라 하면 점 D는 선분 BC를 $4:3$으로 내분하는 점이다.

또 $\frac{5}{7}\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PD}$에서 $5\overrightarrow{AP}=7\overrightarrow{PD}$이므로

$|\overrightarrow{AP}|:|\overrightarrow{PD}|=\overline{AP}:\overline{PD}=7:5$

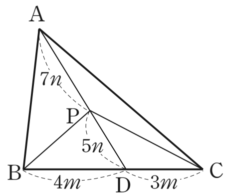
즉 점 P는 선분 AD를 $7:5$로 내분하는 점이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 $\triangle$ABC에서

$\overline{\text{BD}}=4m$, $\overline{\text{DC}}=3m$,

$\overline{\text{AP}}=7n$, $\overline{\text{PD}}=5n$

이라 하면



$$\triangle\text{PAB}=\frac{7}{12}\times\triangle\text{ABD}$$

$$=\frac{7}{12}\times\frac{4}{7}\times\triangle\text{ABC}=\frac{1}{3}\triangle\text{ABC}$$

$$\triangle\text{PBC}=\frac{5}{12}\triangle\text{ABC}$$

$$\triangle\text{PCA}=\frac{7}{12}\times\triangle\text{ADC}=\frac{7}{12}\times\frac{3}{7}\times\triangle\text{ABC}$$

$$=\frac{1}{4}\triangle\text{ABC}$$

$$\therefore\ \triangle\text{PAB} : \triangle\text{PBC} : \triangle\text{PCA}$$

$$=\frac{1}{3}\triangle\text{ABC} : \frac{5}{12}\triangle\text{ABC} : \frac{1}{4}\triangle\text{ABC}$$

$$=4 : 5 : 3$$

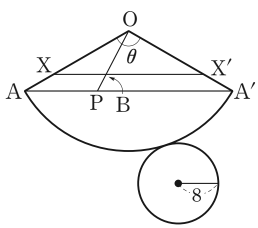
답 ⑤

13 전략 $\overrightarrow{\text{AB}}=\dfrac{m\overrightarrow{\text{AO}}+n\overrightarrow{\text{AP}}}{m+n}$ $(m>0,\ n>0)$일 때, 점 B는 선분 PO를 $m : n$으로 내분하는 점임을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{\text{AB}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{AO}}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{AP}}=\dfrac{3\overrightarrow{\text{AP}}+\overrightarrow{\text{AO}}}{4}$이므로

점 B는 선분 OP를 $3 : 1$로 내분하는 점이다.

오른쪽 그림과 같은 원뿔의 전개도에서 L은 선분 AA′이므로 선분 OA와 선분 OA′을 $3 : 1$로 내분하는 점을 각각 X, X′이라 하면 점 B의 자취는 선분 XX′이다.



부채꼴 OAA′의 중심각의 크기를 θ라 하면

$$\widehat{\text{AA}'}=24\theta=2\pi\times 8 \qquad \therefore\ \theta=\frac{2}{3}\pi$$

이때 $\triangle$OAA′은 이등변삼각형이므로

$$\angle\text{OAA}'=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{6}$$

따라서 점 O에서 $\overline{\text{AA}'}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\text{AA}'}=2\overline{\text{AH}}=2\cdot 24\cos\frac{\pi}{6}=2\cdot 24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \overline{\text{XX}'}=\frac{3}{4}\overline{\text{AA}'}=18\sqrt{3}$$

따라서 구하는 자취의 길이는 $18\sqrt{3}$이다.

답 ③

05 평면벡터의 내적

유제

본책 123~147쪽

040-1 $\overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{BC}}=\overrightarrow{\text{AC}}$, $\overrightarrow{\text{DE}}+\overrightarrow{\text{EF}}=\overrightarrow{\text{DF}}$이고

$$|\overrightarrow{\text{AC}}|=|\overrightarrow{\text{DF}}|=2\overline{\text{AB}}\cos 30°=\sqrt{3}$$

또 $\overrightarrow{\text{AC}}$와 $\overrightarrow{\text{DF}}$는 방향이 반대이므로 두 벡터가 이루는 각의 크기는 π이다.

$$\therefore\ (\overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{BC}})\cdot(\overrightarrow{\text{DE}}+\overrightarrow{\text{EF}})$$

$$=\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{DF}}$$

$$=|\overrightarrow{\text{AC}}||\overrightarrow{\text{DF}}|\cos\pi$$

$$=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times(-1)=-3$$

답 -3

041-1 $\vec{a}+\vec{b}=(-1,\ 3)+(2,\ 1)=(1,\ 4)$이므로

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=(-1,\ 3)\cdot(1,\ 4)$$

$$=(-1)\times 1+3\times 4=11$$

답 11

041-2 점 P의 좌표를 $(m,\ 2m^2)$이라 하면

$$\overrightarrow{\text{AP}}=(m,\ 2m^2)-(-3,\ 2)$$

$$=(m+3,\ 2m^2-2)$$

$$\overrightarrow{\text{AB}}=(1,\ 3)-(-3,\ 2)$$

$$=(4,\ 1)$$

이므로

$$\overrightarrow{\text{AP}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=(m+3,\ 2m^2-2)\cdot(4,\ 1)$$

$$=4(m+3)+2m^2-2$$

$$=2m^2+4m+10$$

$$=2(m+1)^2+8$$

따라서 $\overrightarrow{\text{AP}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}$는 $m=-1$, 즉 P$(-1,\ 2)$일 때 최솟값 8을 갖는다.

답 8

042-1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(6,\ 8)\cdot(1,\ x)=6+8x$

즉 $6+8x=-50$이므로 $\quad x=-7$

따라서 두 벡터가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-50}{\sqrt{6^2+8^2}\sqrt{1^2+(-7)^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \theta=\frac{3}{4}\pi$$

답 $\frac{3}{4}\pi$

043-1 $\vec{b}$와 $\vec{c}$가 서로 수직이면 $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$이므로

$(4,\ 6)\cdot(3,\ y)=0,\qquad 12+6y=0$

$\therefore\ y=-2$

$\vec{a}$와 $\vec{c}$가 서로 평행하면

$\vec{a}=k\vec{c}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하므로

$(x,\ 4)=k(3,\ -2)=(3k,\ -2k)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$x=3k,\ 4=-2k$

$\therefore\ k=-2,\ x=-6$

답 $x=-6,\ y=-2$

044-1
$$|\vec{a}-3\vec{b}|^2=(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$$
$$|\vec{a}+3\vec{b}|^2=(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$$
이므로
$$|\vec{a}-3\vec{b}|^2+|\vec{a}+3\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+18|\vec{b}|^2$$
$$=2\times2^2+18\times1^2$$
$$=26$$

답 26

044-2
$$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$$
$$=4\vec{a}\cdot\vec{a}-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
이므로

$7^2=4\times4^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+5^2$

$4\vec{a}\cdot\vec{b}=40\qquad\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=10$

답 10

045-1 $\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2)-(1,\ -1)=(-2,\ 3)$, $\overrightarrow{AC}=(3,\ 4)-(1,\ -1)=(2,\ 5)$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}|(-2)\times5-3\times2|=8$

답 8

046-1 $4(x+1)=3(y-4)$에서

$\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{4}$

이므로 구하는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(3,\ 4)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{4}$

답 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{4}$

다른 풀이 $4(x+1)=3(y-4)$에서

$4x-3y+16=0$

이므로 구하는 직선의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{n}=(4,\ -3)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$4(x-1)-3(y+1)=0\qquad\therefore\ 4x-3y-7=0$

046-2 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(-3,\ 4)$

구하는 직선은 주어진 직선에 수직이므로 법선벡터가 $\vec{u}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$-3(x-2)+4(y+3)=0$

$\therefore\ 3x-4y-18=0$

답 $3x-4y-18=0$

047-1 (1) 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ 3),\ \vec{v}=(5,\ 1)$

이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|2\times5+3\times1|}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{5^2+1^2}}$$
$$=\frac{13}{\sqrt{13}\sqrt{26}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

(2) 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ \sqrt{3}),\ \vec{v}=(\sqrt{3},\ 5)$

이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|2\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times5|}{\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}\sqrt{(\sqrt{3})^2+5^2}}$$
$$=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{28}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}$$

답 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{6}$

047-2 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(-k,\ 1),\ \vec{v}=(3,\ k)$

두 직선이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로
$$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{|-3k+k|}{\sqrt{(-k)^2+1^2}\sqrt{3^2+k^2}}=\frac{1}{2}$$

$4k=\sqrt{(k^2+1)(k^2+9)}$

양변을 제곱하여 정리하면 $k^4-6k^2+9=0$

$(k^2-3)^2=0,\quad k^2=3$

$\therefore k=\sqrt{3}\ (\because k>0)$ 답 $\sqrt{3}$

048-1 $x-1=-ky$에서 $\frac{x-1}{-k}=y$

주어진 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(-2,\ 5)$, $\vec{v}=(-k,\ 1)$

두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$2k+5=0\qquad \therefore k=-\frac{5}{2}$ 답 $-\frac{5}{2}$

048-2 주어진 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ k+1)$, $\vec{v}=(k,\ 4)$

두 직선이 서로 평행하므로

$\vec{u}=t\vec{v}$ (t는 실수)

라 하면 $(2,\ k+1)=t(k,\ 4)$

$\therefore 2=kt,\ k+1=4t$

위의 식에서 t를 소거하면 $\frac{2}{k}=\frac{k+1}{4}$이므로

$k(k+1)=8$

$\therefore k^2+k-8=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 실수 k의 값의 곱은 -8이다. 답 -8

Remark

이차방정식 $k^2+k-8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times(-8)=33>0$

이므로 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

049-1 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-5,\ y-2)$, $\overrightarrow{BP}=(x+1,\ y-4)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서

$(x-5,\ y-2)\cdot(x+1,\ y-4)=0$

$(x-5)(x+1)+(y-2)(y-4)=0$

$x^2-4x-5+y^2-6y+8=0$

$\therefore (x-2)^2+(y-3)^2=10$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$2\pi\times\sqrt{10}=2\sqrt{10}\pi$ 답 $2\sqrt{10}\pi$

다른 풀이 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서 $\angle APB=90°$이므로 점 P가 나타내는 도형은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-5)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{10}$이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는 $2\sqrt{10}\pi$이다.

049-2 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\vec{p}=(x,\ y)$이므로

$\vec{p}-\vec{a}=(x-3,\ y-1)$, $\vec{p}-\vec{b}=(x+1,\ y-5)$

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$에서

$(x-3,\ y-1)\cdot(x+1,\ y-5)=0$

$(x-3)(x+1)+(y-1)(y-5)=0$

$x^2-2x-3+y^2-6y+5=0$

$\therefore (x-1)^2+(y-3)^2=8$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1,\ 3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{2})^2=8\pi$ 답 8π

중단원 연습 문제

본책 148~151쪽

01 ①	02 4	03 ②	04 ③	05 $\frac{\sqrt{10}}{10}$
06 $\frac{\sqrt{7}}{14}$	07 1	08 ②	09 $\frac{\pi}{3}$	10 $\frac{1}{3}$
11 ④	12 ③	13 $\frac{2\sqrt{5}}{25}$	14 2π	15 7
16 17				

01 전략 벡터의 내적을 성분으로 나타낸다.

풀이 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(x,\ -3)\cdot(x+4,\ 4)$

$=x^2+4x-12$

$=(x+2)^2-16$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 $x=-2$일 때 최솟값 -16을 갖는다.

답 ①

02 해결과정 • 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times3}$$

$$=\frac{1}{3}$$ ➔ 40% 배점

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore \square ABCD=\overline{AB}\times\overline{BC}\sin\theta$

$$=\sqrt{2}\times3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=4$$ ➔ 30% 배점

답 4

다른 풀이 $|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{BC}|=3$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{2}$이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2|\overrightarrow{BC}|^2-(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2\times3^2-(\sqrt{2})^2}=2$$

$$\therefore \square ABCD=2\triangle ABC=4$$

03 전략 $\vec{p}\perp\vec{q}$이면 $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$임을 이용한다.

풀이 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{a}+t\vec{b}$가 서로 수직이므로

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=0$$

$$|\vec{a}|^2+t(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$$

$$2^2+2t=0 \qquad \therefore t=-2$$

답 ②

04 전략 $|\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{13}$의 양변을 제곱한다.

풀이 $|\vec{b}|=1$이고, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $60°$이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60°$$

$$=|\vec{a}|\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}|$$

$|\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{13}$의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}-3\vec{b}|^2=13, \qquad (\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=13$$

$$\therefore |\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=13$$

이때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}|\vec{a}|$이므로

$$|\vec{a}|^2-6\times\frac{1}{2}|\vec{a}|+9=13$$

$$|\vec{a}|^2-3|\vec{a}|-4=0$$

$$\therefore (|\vec{a}|+1)(|\vec{a}|-4)=0$$

그런데 $|\vec{a}|>0$이므로 $\quad|\vec{a}|=4$

답 ③

05 전략 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구한다.

풀이 점 G의 좌표는

$$G\left(\frac{-1+2+5}{3},\ \frac{3+5-2}{3}\right),\ \text{즉 } G(2,\ 2)$$

두 직선 AG, BG의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

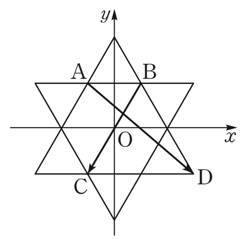
$$\vec{u}=\overrightarrow{AG}=(3,\ -1),\ \vec{v}=\overrightarrow{BG}=(0,\ -3)$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2}\sqrt{(-3)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

답 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

06 문제이해 • 주어진 도형을 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 놓으면 네 점 A, B, C, D의 좌표는



$A(-1,\ \sqrt{3})$,

$B(1,\ \sqrt{3})$,

$C(-1,\ -\sqrt{3})$,

$D(3,\ -\sqrt{3})$ ➔ 30% 배점

해결과정 • $\therefore \overrightarrow{AD}=(3,\ -\sqrt{3})-(-1,\ \sqrt{3})$

$$=(4,\ -2\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{BC}=(-1,\ -\sqrt{3})-(1,\ \sqrt{3})$$

$$=(-2,\ -2\sqrt{3})$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore \cos\theta$

$$=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|}$$

$$=\frac{4\times(-2)-2\sqrt{3}\times(-2\sqrt{3})}{\sqrt{4^2+(-2\sqrt{3})^2}\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}}$$

$$=\frac{4}{8\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$$ ➔ 40% 배점

답 $\frac{\sqrt{7}}{14}$

07 전략 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적을 이용한다.

풀이 $\vec{a}-\vec{b}=(x,\ 6-x)$이므로

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{x^2+(6-x)^2}=\sqrt{2x^2-12x+36}$$

이때 $|\vec{a}-\vec{b}|=5\sqrt{2}$이므로

$$\sqrt{2x^2-12x+36}=5\sqrt{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $\quad x^2-6x-7=0$

$(x+1)(x-7)=0$

$\therefore x=-1(\because x<0)$

따라서 $\vec{a}=(0,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ -5)$이므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{0\times1+2\times(-5)}{2\sqrt{1^2+(-5)^2}}=-\frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\therefore \cos^2\theta=\frac{25}{26}$$

즉 $p=26$, $q=25$이므로

$p-q=1$

답 1

08 전략 두 벡터가 서로 수직이면 두 벡터의 내적이 0임을 이용하여 t에 대한 항등식을 세운다.

풀이 $\vec{a}+t\vec{b}=(x,\ y)+t(1,\ -3)=(x+t,\ y-3t)$

$\vec{b}+t\vec{c}=(1,\ -3)+t(3,\ 1)=(1+3t,\ -3+t)$

두 벡터 $\vec{a}+t\vec{b}$, $\vec{b}+t\vec{c}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{b}+t\vec{c})=0$

$(x+t,\ y-3t)\cdot(1+3t,\ -3+t)=0$

$(x+t)(1+3t)+(y-3t)(-3+t)=0$

$\therefore (3x+y+10)t+(x-3y)=0$

이 식이 t의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$3x+y+10=0,\ x-3y=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-3,\ y=-1$

$\therefore x+y=-4$

답 ②

09 전략 벡터의 내적의 성질을 이용한다.

풀이 $\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}$가 서로 수직이므로

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\left(\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}\right)=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{5}\vec{b}\cdot\vec{b}=0$$

$$|\vec{a}|^2+\frac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{5}|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{b}|=2|\vec{a}|$이므로

$$|\vec{a}|^2+\frac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{5}\times4|\vec{a}|^2=0$$

$$\frac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{5}|\vec{a}|^2$$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2$

따라서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\times2|\vec{a}|}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$$

답 $\frac{\pi}{3}$

10 문제이해 • $|k\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2}|\vec{a}-k\vec{b}|$의 양변을 제곱하면

$k^2|\vec{a}|^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=2(|\vec{a}|^2-2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2|\vec{b}|^2)$ ➔ 30% 배점

해결과정 • $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로

$k^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+1=2(1-2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2)$

$6k\vec{a}\cdot\vec{b}=k^2+1$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{k^2+1}{6k}=\frac{k}{6}+\frac{1}{6k}$ ➔ 30% 배점

$k>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{k}{6}+\frac{1}{6k}\ge2\sqrt{\frac{k}{6}\times\frac{1}{6k}}=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{k}{6}=\frac{1}{6k}\text{ 일 때 성립}\right)$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}\ge\frac{1}{3}$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

➔ 10% 배점

답 $\frac{1}{3}$

11 전략 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$임을 이용하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 구한다.

풀이 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$에서 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$이므로

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{c}|$, 즉 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$

따라서 $|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$이므로

$6^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+10^2=14^2$ $\quad\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=30$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{30}{6\times10}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta=60°$

답 ④

12 전략 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$로 놓고, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{DE}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낸다.

풀이 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\vec{a},\ \overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\vec{b},\ \overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$$

따라서 $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}=-\frac{5}{3}\vec{a}+\vec{b}$이므로

$$|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2=\left|-\frac{5}{3}\vec{a}+\vec{b}\right|^2$$

$$=\frac{25}{9}|\vec{a}|^2-\frac{10}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

이때 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=3$이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{9}{2}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2=\frac{25}{9}\times 3^2-\frac{10}{3}\times\frac{9}{2}+3^2$$

$$=19$$

답 ③

13 전략 두 직선의 방향벡터와 법선벡터가 이루는 각의 크기를 이용한다.

풀이 직선 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$$\vec{u}=(3,\ 4)$$

이므로 이 직선에 수직인 직선을 l이라 하면 직선 l의 법선벡터는 $\vec{u}$이다.

또 직선 $\frac{1-x}{2}=y+3$을 m이라 하고, 직선 m의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면

$$\vec{v}=(-2,\ 1)$$

이때 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기가 θ이면 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$=\frac{|3\times(-2)+4\times 1|}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{(-2)^2+1^2}}$$

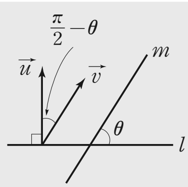
$$=\frac{2}{5\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

답 $\frac{2\sqrt{5}}{25}$

Remark

직선 l의 법선벡터가 $\vec{u}$, 직선 m의 방향벡터가 $\vec{v}$이고 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기가 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$이면 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$가 이루는 각의 크기는 위의 그림과 같이 $\frac{\pi}{2}-\theta$이다.



14 해결과정 • $\overrightarrow{PA}=(-x,\ 2-y)$, $\overrightarrow{PB}=(2-x,\ -2-y)$이므로

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-x,\ 2-y)\cdot(2-x,\ -2-y)$$

$$=-x(2-x)+(2-y)(-2-y)$$

$$=x^2-2x+y^2-4\le -1$$

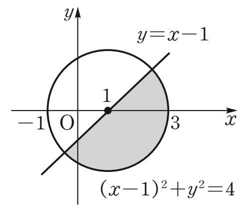
$$\therefore (x-1)^2+y^2\le 4 \quad \cdots\cdots ㉠$$ ➔ 30% 배점

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BO}=(x,\ y)\cdot(-2,\ 2)$$

$$=-2x+2y\le -2$$

$$\therefore y\le x-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$ ➔ 30% 배점

즉 점 P가 나타내는 도형은 ㉠, ㉡의 공통부분이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다. ➔ 20% 배점



답구하기 • 따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\pi\times 2^2=2\pi$$ ➔ 20% 배점

답 2π

15 전략 점 P가 선분 AH 위를 움직이므로 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AH}(0\le k\le 1)$임을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$이고, 점 P가 $\overline{AH}$ 위의 점이므로

$$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AH}\ (0\le k\le 1)$$

라 하면

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

한편 $\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}$이므로

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$$

$$=-\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})$$

$$=-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AP}|^2$$

$$=-\frac{1}{2}k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}+k^2|\overrightarrow{AH}|^2$$

$$=-\frac{1}{2}k|\overrightarrow{AB}|^2-\frac{1}{2}k\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+k^2|\overrightarrow{AH}|^2$$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos\frac{\pi}{3}=2\times 2\times\frac{1}{2}=2$이므로

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$$

$$=-\frac{1}{2}k\times 2^2-\frac{1}{2}k\times 2+k^2(\sqrt{3})^2$$

$$=3k^2-3k=3\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$$

이때 $0\le k\le 1$이므로 $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 $k=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{3}{4}$이다.

따라서 $p=4$, $q=3$이므로

$$p+q=7$$

답 7

05 평면벡터의 내적

16 (전략) $\overrightarrow{CX}$를 시점을 A로 하는 벡터의 연산으로 나타낸다.

(풀이) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

에서 세 점 A, C, D는 고정된 점이므로 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$는 상수이다. 따라서 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$가 최소가 되려면 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}$가 최소이어야 한다.

이때 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AX}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

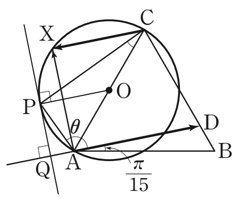
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AX}|\cos\theta$

에서 $|\overrightarrow{AD}|$는 상수이므로 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}$가 최소가 되려면 $|\overrightarrow{AX}|\cos\theta$의 값이 최소이어야 한다.

점 X에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 Q라 하면 직각삼각형 XAQ에서

$||\overrightarrow{AX}|\cos\theta|=\overline{AQ}$

$\theta>\frac{\pi}{2}$이면 $\overline{AQ}$의 길이가 클수록 $|\overrightarrow{AX}|\cos\theta$의 값이 작으므로 점 P의 위치는 오른쪽 그림과 같다.



이때 직선 PQ가 원 O의 접선이므로

$\overline{PO}\perp\overline{PQ}$

따라서 $\overline{PO}/\!/\overline{AD}$이므로

$$\angle POA=\angle OAD=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{15}=\frac{4}{15}\pi$$

$$\therefore \angle ACP=\frac{1}{2}\angle AOP=\frac{1}{2}\times\frac{4}{15}\pi=\frac{2}{15}\pi$$

따라서 $p=15$, $q=2$이므로

$p+q=17$

답 17

06 평면 운동

유제

본책 155~163쪽

050-1 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{4}$$

$t=a$에서 점 P의 속력이 0이라 하면

$$\left|-\frac{1}{2}\sin\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right|=0,\quad \sin\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$$

$a\ge0$이므로

$$\frac{a}{2}=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{17}{6}\pi,\ \cdots$$

$$\therefore a=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{13}{3}\pi,\ \frac{17}{3}\pi,\ \cdots$$

따라서 점 P의 속력이 처음으로 0이 되는 시각은 $\frac{\pi}{3}$이다.

답 $\frac{\pi}{3}$

050-2 점 P의 시각 t에서의 속도, 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=\frac{\pi}{2}\times m\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2}\times n\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$a(t)=f''(t)$$

$$=-\frac{\pi^2}{4}\times m\sin\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi^2}{4}\times n\cos\frac{\pi}{2}t$$

$t=1$에서 점 P의 속도와 가속도는

$$v(1)=\frac{\pi}{2}\times m\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\times n\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=-\frac{n}{2}\pi$$

$$a(1)=-\frac{\pi^2}{4}\times m\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{4}\times n\cos\frac{\pi}{2}$$

$$=-\frac{m}{4}\pi^2$$

따라서 $-\frac{n}{2}\pi=-\pi$, $-\frac{m}{4}\pi^2=\pi^2$이므로

$m=-4$, $n=2$

답 $m=-4$, $n=2$

051-1 $\frac{dx}{dt}=3$, $\frac{dy}{dt}=-4t+4$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(3,\ -4t+4)$

따라서 점 P의 속력은

$$|\vec{v}|=\sqrt{3^2+(-4t+4)^2}$$
$$=\sqrt{16(t-1)^2+9}$$

이므로 $t=1$일 때 속력이 최소이다.

$t=1$일 때 $x=3$, $y=-2+4=2$이므로 점 P의 위치는 $(3,\ 2)$이다. 답 $(3,\ 2)$

051-2 $\frac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$$\vec{v}=(1-\cos t,\ -\sin t)$$

따라서 $t=\frac{\pi}{2}$에서 점 P의 속도는

$$\vec{v}=\left(1-\cos\frac{\pi}{2},\ -\sin\frac{\pi}{2}\right)=(1,\ -1)$$
$$\therefore m=|\vec{v}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

또 $\frac{d^2x}{dt^2}=\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $\vec{a}$라 하면

$$\vec{a}=(\sin t,\ -\cos t)$$

따라서 $t=\frac{\pi}{2}$에서 점 P의 가속도는

$$\vec{a}=\left(\sin\frac{\pi}{2},\ -\cos\frac{\pi}{2}\right)=(1,\ 0)$$
$$\therefore n=|\vec{a}|=\sqrt{1^2+0^2}=1$$
$$\therefore mn=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

052-1 (1) $t=0$에서의 점 P의 위치가 $x=0$이므로 구하는 위치 x는

$$x=0+\int_0^t (t+3)e^{-t}dt$$
$$=\left[-(t+3)e^{-t}\right]_0^t-\int_0^t(-e^{-t})dt$$
$$=-(t+3)e^{-t}+3-\left[e^{-t}\right]_0^t$$
$$=-(t+3)e^{-t}+3-(e^{-t}-1)$$
$$=4-(t+4)e^{-t}$$

(2) $\int_1^3 |(t+3)e^{-t}|dt$

$$=\int_1^3 (t+3)e^{-t}dt$$
$$=\left[-(t+3)e^{-t}\right]_1^3-\int_1^3(-e^{-t})dt$$
$$=-\frac{6}{e^3}+\frac{4}{e}-\left[e^{-t}\right]_1^3$$
$$=-\frac{6}{e^3}+\frac{4}{e}-\frac{1}{e^3}+\frac{1}{e}$$
$$=-\frac{7}{e^3}+\frac{5}{e}$$

답 (1) $4-(t+4)e^{-t}$ (2) $-\frac{7}{e^3}+\frac{5}{e}$

053-1 $\frac{dx}{dt}=6t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2$이므로 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{(6t)^2+(3t^2)^2}dt$$
$$=\int_0^2 3t\sqrt{4+t^2}dt$$

$4+t^2=u$로 놓으면 $2t=\frac{du}{dt}$이고, $t=0$일 때 $u=4$, $t=2$일 때 $u=8$이므로

$$s=\int_4^8\frac{3}{2}\sqrt{u}\,du=\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$$
$$=16\sqrt{2}-8=8(2\sqrt{2}-1)$$

답 $8(2\sqrt{2}-1)$

054-1 (1) $y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^2\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right\}^2}dx$$
$$=\int_0^2\sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})}dx$$
$$=\int_0^2\sqrt{\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2(e^x+e^{-x})dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_0^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$$

(2) $y'=\sqrt{x}-\frac{1}{4\sqrt{x}}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_4^9\sqrt{1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^2}dx$$
$$=\int_4^9\sqrt{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x}}dx$$
$$=\int_4^9\sqrt{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^2}dx$$

$$=\int_4^9\left(\sqrt{x}+\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right]_4^9$$
$$=\frac{39}{2}-\frac{19}{3}=\frac{79}{6}$$

답 (1) $\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$ (2) $\frac{79}{6}$

054-2 $\frac{dx}{dt}=2\sqrt{2}$, $\frac{dy}{dt}=t-\frac{2}{t}$이므로 구하는 곡선의 길이는
$$\int_1^2\sqrt{(2\sqrt{2})^2+\left(t-\frac{2}{t}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^2\sqrt{t^2+4+\frac{4}{t^2}}\,dt$$
$$=\int_1^2\sqrt{\left(t+\frac{2}{t}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^2\left(t+\frac{2}{t}\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2+2\ln t\right]_1^2$$
$$=\frac{3}{2}+2\ln 2$$

답 $\frac{3}{2}+2\ln 2$

중단원 연습 문제

본책 164~166쪽

01 ①	**02** 1	**03** 2	**04** ⑤	**05** $\frac{3}{4}\pi$
06 8	**07** 14	**08** ③	**09** ③	**10** 5
11 64	**12** ⑤			

01 전략 점 P의 시각 t에서의 위치 $f(t)$를 미분하여 속도를 구한다.

풀이 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면
$$v(t)=f'(t)=2\cos 2t-2\sin 2t$$
$$=-2(\sin 2t-\cos 2t)$$
$$=-2\sqrt{2}\left(\sin 2t\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos 2t\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=-2\sqrt{2}\left(\sin 2t\cos\frac{\pi}{4}-\cos 2t\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-2\sqrt{2}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$t=a$에서 점 P의 속도가 $2\sqrt{2}$라 하면
$$v(a)=-2\sqrt{2}\sin\left(2a-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$$
$$\therefore \sin\left(2a-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$0\le a\le\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le 2a-\frac{\pi}{4}\le\frac{7}{4}\pi$이므로 ㉠에서
$$2a-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi \qquad \therefore a=\frac{7}{8}\pi$$

따라서 구하는 점 P의 위치는
$$f\left(\frac{7}{8}\pi\right)=\sin\frac{7}{4}\pi+\cos\frac{7}{4}\pi$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

답 ①

다른 풀이 $f(t)=\sin 2t+\cos 2t$
$$=\sqrt{2}\left(\sin 2t\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos 2t\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin 2t\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2t\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 $v(t)=f'(t)=2\sqrt{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$

$v(t)=2\sqrt{2}$에서 $2\sqrt{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$
$$\therefore \cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$0\le t\le\pi$에서 $\frac{\pi}{4}\le 2t+\frac{\pi}{4}\le\frac{9}{4}\pi$이므로
$$2t+\frac{\pi}{4}=2\pi$$

따라서 구하는 점 P의 위치는 ㉠에서
$$\sqrt{2}\sin 2\pi=0$$

Remark 삼각함수의 덧셈정리

① $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ (복호동순)
② $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ (복호동순)
③ $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ (복호동순)

02 전략 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 속도는 $\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$이고, 속력은 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=2t+a$, $\frac{dy}{dt}=4at+8$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면
$$\vec{v}=(2t+a,\ 4at+8)$$

따라서 $t=1$에서 점 P의 속도는

$\vec{v}=(2+a,\ 4a+8)$

속력이 $3\sqrt{17}$이므로 $|\vec{v}|=3\sqrt{17}$

$\sqrt{(2+a)^2+(4a+8)^2}=3\sqrt{17}$

$\sqrt{17(a+2)^2}=3\sqrt{17}$

$(a+2)^2=9,\quad a+2=\pm3$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

답 1

03 해결과정 • 2초 후의 점 P의 위치는

$\int_0^2 e^t dt=\left[e^t\right]_0^2=e^2-1$ → 30% 배점

2초 후의 점 Q의 위치는

$\int_0^2 te^t dt=\left[te^t\right]_0^2-\int_0^2 e^t dt$

$=2e^2-\left[e^t\right]_0^2=2e^2-(e^2-1)$

$=e^2+1$ → 50% 배점

답구하기 • 따라서 두 점 사이의 거리는

$|(e^2+1)-(e^2-1)|=2$ → 20% 배점

답 2

04 전략 두 점이 서로 반대 방향으로 움직이면 두 점의 시각 t에서의 속도의 부호가 서로 다름을 이용한다.

풀이 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\dfrac{dx_P}{dt}=2t-a$

$v_Q=\dfrac{dx_Q}{dt}=\dfrac{2t-1}{t^2-t+1}$

P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 두 점의 속도의 부호가 다르므로 $v_Pv_Q<0$에서

$\dfrac{(2t-a)(2t-1)}{t^2-t+1}<0$

이때 $t^2-t+1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이므로

$(2t-a)(2t-1)<0$

이 부등식의 해가 $\dfrac{1}{2}<t<2$이므로

$\dfrac{a}{2}=2\quad\therefore a=4$

답 ⑤

05 전략 두 평면벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t+\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=\sin t$이므로

$\vec{v}=(-\sin t+\cos t,\ \sin t)$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{2}$에서 점 P의 속도는

$\vec{v}=(-1,\ 1)$

이때 x축의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(1,\ 0)$이므로

$\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta=\dfrac{3}{4}\pi\ (\because 0\le\theta\le\pi)$

답 $\dfrac{3}{4}\pi$

06 문제이해 • t초 후 점 P의 위치는

$\int_0^t \cos t\,dt=\left[\sin t\right]_0^t=\sin t$

t초 후 점 Q의 위치는

$\int_0^t 2\cos 2t\,dt=\left[\sin 2t\right]_0^t$

$=\sin 2t$ → 40% 배점

해결과정 • 두 점의 위치가 같을 때 두 점이 만나므로 $\sin t=\sin 2t$에서

$\sin t=2\sin t\cos t,\quad \sin t(1-2\cos t)=0$

$\therefore \sin t=0$ 또는 $\cos t=\dfrac{1}{2}$

이때 $0<t\le4\pi$이므로 $\sin t=0$에서

$t=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi$

$\cos t=\dfrac{1}{2}$에서

$t=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi,\ \dfrac{11}{3}\pi$ → 50% 배점

답구하기 • 따라서 두 점 P, Q가 만난 횟수는 8이다.

→ 10% 배점

답 8

07 문제이해 • $\dfrac{dx}{dt}=6t$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2-3$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(6t,\ 3t^2-3)$ → 30% 배점

해결과정 • 따라서 점 P의 속력 $|\vec{v}|$는

$|\vec{v}|=\sqrt{(6t)^2+(3t^2-3)^2}=\sqrt{9t^4+18t^2+9}$

$=\sqrt{(3t^2+3)^2}=3t^2+3$

$|\vec{v}|=15$에서 $3t^2+3=15$

$t^2=4\quad\therefore t=2\ (\because t>0)$ → 40% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 거리는 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리이므로

$$\int_0^2 |\vec{v}|dt=\int_0^2 (3t^2+3)dt$$
$$=\left[t^3+3t\right]_0^2=14$$

➔ 30% 배점

답 14

08 (전략) 점 P가 움직인 거리는 속력을 적분하여 구한다.

풀이 $\dfrac{dx}{dt}=\pi\{-\sin t(1+\cos t)-\cos t\sin t\}$
$=-\pi(\sin t+\sin 2t)$

$\dfrac{dy}{dt}=\pi\{\cos t(1+\cos t)-\sin^2 t\}$
$=\pi(\cos t+\cos 2t)$

이므로 $t=0$에서 $t=\dfrac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\pi^2(\sin t+\sin 2t)^2+\pi^2(\cos t+\cos 2t)^2}dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\pi^2(1+\sin t\sin 2t+\cos t\cos 2t)}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\pi^2\{1+\cos(2t-t)\}}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\pi^2(1+\cos t)}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\pi^2\cos^2\frac{t}{2}}\,dt$$
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{t}{2}\,dt$$
$$=2\pi\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=2\sqrt{2}\pi$$

답 ③

Remark 반각의 공식

① $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ ② $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

③ $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

09 (전략) 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는 $\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$이다.

풀이 $y'=\dfrac{2x}{x^2-1}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_2^4\sqrt{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_2^4\sqrt{\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2-1)^2}}\,dx$$
$$=\int_2^4\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}\,dx=\int_2^4\frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$$
$$=\int_2^4\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx$$
$$=\int_2^4\left\{1+\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right\}dx$$
$$=\int_2^4\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\Big[x+\ln|x-1|-\ln|x+1|\Big]_2^4$$
$$=2+2\ln 3-\ln 5=2+\ln\frac{9}{5}$$

답 ③

10 (전략) 구간을 나누어 적분한다.

풀이 $0\le t\le 1$에서 $v(t)\ge 0$이고 $t=0$에서의 위치가 0이므로 $0<t\le 1$에서 점 P의 위치는 양수이다.

따라서 점 P의 위치가 $-\dfrac{2}{5}$일 때의 시각을 $t=a\ (a>1)$라 하면

$$\int_0^1 t\sqrt{t}\,dt+\int_1^a\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\frac{2}{5}$$
$$\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1+\left[\frac{1}{t}\right]_1^a=-\frac{2}{5}$$
$$\frac{2}{5}+\frac{1}{a}-1=-\frac{2}{5},\qquad \frac{1}{a}=\frac{1}{5}$$
$$\therefore\ a=5$$

답 5

11 (전략) 점 P가 움직인 거리는 속력을 적분하여 구한다.

풀이 $\dfrac{dx}{dt}=4(-\sin t+\cos t)$, $\dfrac{dy}{dt}=-2\sin 2t$이므로 점 P가 $t=0$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{16(\cos t-\sin t)^2+4\sin^2 2t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{16(1-\sin 2t)+4\sin^2 2t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4(2-\sin 2t)^2}\,dt$$

이때 $2-\sin 2t>0$이므로

$$s=\int_0^{2\pi}2(2-\sin 2t)dt=\int_0^{2\pi}(4-2\sin 2t)dt$$

$$=\Big[4t+\cos 2t\Big]_0^{2\pi}=8\pi$$

즉 $a=8$이므로 $a^2=64$

답 64

12 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 속력이 최소일 때의 시각을 구한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=8$, $\frac{dy}{dt}=t+2-\frac{16}{t+2}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$$\vec{v}=\left(8,\ t+2-\frac{16}{t+2}\right)$$

따라서 점 P의 속력 $|\vec{v}|$는

$$|\vec{v}|=\sqrt{8^2+\left(t+2-\frac{16}{t+2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(t+2+\frac{16}{t+2}\right)^2}$$

$$=t+2+\frac{16}{t+2}$$

이때 $t+2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t+2+\frac{16}{t+2}\ge 2\sqrt{(t+2)\times\frac{16}{t+2}}$$

$$=2\times 4=8$$

이때 등호는 $t+2=\frac{16}{t+2}$일 때 성립하므로

$(t+2)^2=16$, $\quad t+2=\pm 4$

$\therefore t=2\ (\because t\ge 0)$

즉 $t=2$일 때 속력이 최소이다.

따라서 점 P가 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리는

$$\int_0^2|\vec{v}|dt=\int_0^2\left(t+2+\frac{16}{t+2}\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2+2t+16\ln|t+2|\right]_0^2$$

$$=6+16\ln 2$$

답 ⑤

Ⅲ. 공간도형

07 공간도형

유제

본책 172~192쪽

055-1 주어진 사각뿔에서 5개의 꼭짓점으로 만들 수 있는 서로 다른 평면은

평면 ABCD, 평면 OAB, 평면 OBC,
평면 OCD, 평면 OAD, 평면 OAC, 평면 OBD

의 7개이다.

답 7

Remark

평면 ABC, 평면 ABD, 평면 ACD, 평면 BCD는 모두 평면 ABCD와 같은 평면이다.

056-1 꼬인 위치에 있는 두 직선은

직선 AB와 직선 CD, 직선 AC와 직선 BD,
직선 AD와 직선 BC

이다.

답 풀이 참조

056-2 (1) 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는

$\overline{CF}$, $\overline{DF}$, $\overline{EF}$

(2) 면 ABC와 평행한 모서리는

$\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$

답 (1) $\overline{CF}$, $\overline{DF}$, $\overline{EF}$ (2) $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$

057-1 (1) $\overleftrightarrow{EG}\,/\!/\,\overleftrightarrow{AC}$이므로 두 직선 AF와 EG가 이루는 각의 크기는 두 직선 AF와 AC가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 △AFC는 정삼각형이므로

$\angle CAF=60°$

따라서 두 직선 AF와 EG가 이루는 각의 크기는 $60°$이다.

(2) $\overleftrightarrow{AD}\,/\!/\,\overleftrightarrow{BC}$이므로 두 직선 AD와 BE가 이루는 각의 크기는 두 직선 BC와 BE가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 □BCHE는 직사각형이므로

$\angle EBC=90°$

따라서 두 직선 AD와 BE가 이루는 각의 크기는 $90°$이다.

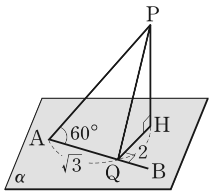
답 (1) $60°$ (2) $90°$

058-1 $\overline{PQ}$를 그으면

$\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{QH}\perp\overline{AQ}$이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PQ}\perp\overline{AQ}$



이때 $\angle PAQ=60°$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{3}\tan 60°$

$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$

따라서 직각삼각형 PQH에서

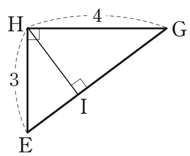
$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{QH}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

058-2 $\overline{DH}\perp$(평면 EFGH), $\overline{DI}\perp\overline{EG}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HI}\perp\overline{EG}$

따라서 오른쪽 그림에서



$\frac{1}{2}\overline{EG}\cdot\overline{HI}=\frac{1}{2}\overline{HE}\cdot\overline{HG}$

이므로

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}\cdot\overline{HI}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4$

$\therefore \overline{HI}=\frac{12}{5}$

따라서 직각삼각형 DHI에서

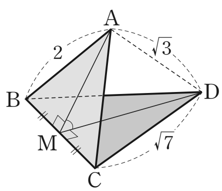
$\overline{DI}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HI}^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{61}}{5}$

답 $\frac{2\sqrt{61}}{5}$

059-1 변 BC의 중점을 M이라 하면

$\overline{AM}\perp\overline{BC}$,

$\overline{DM}\perp\overline{BC}$



이므로 두 삼각형 ABC, DBC가 이루는 각의 크기는 두 직선 AM, DM이 이루는 각의 크기와 같다.

한편 정삼각형 ABC에서

$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot2=\sqrt{3}$

직각삼각형 DMC에서

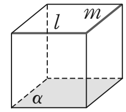
$\overline{DM}=\sqrt{\overline{DC}^2-\overline{MC}^2}=\sqrt{(\sqrt{7})^2-1^2}=\sqrt{6}$

이때 $\overline{AM}^2+\overline{AD}^2=\overline{DM}^2$이고, $\overline{AM}=\overline{AD}$이므로 삼각형 AMD는 직각이등변삼각형이다.

따라서 $\angle AMD=45°$이므로 구하는 각의 크기는 45°이다.

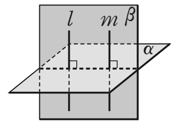
답 45°

060-1 ㄱ. [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $l \,/\!/\, \alpha$, $m \,/\!/\, \alpha$이지만 $l\perp m$이다.

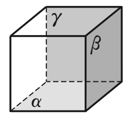


ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m을 포함하는 평면을 β라 하면 β는 α와 수직이다.

이때 m은 평면 β 위의 직선이므로 $m\perp\alpha$이다.



ㄷ. [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $\alpha\perp\beta$, $\alpha\perp\gamma$이지만 $\beta\perp\gamma$이다.



이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

061-1 타원의 장축의 길이를 $2a$라 하면 타원의 장축의 밑면 위로의 정사영은 밑면의 지름이므로

$10=2a\cos 45°$

$\therefore a=\frac{10}{2\cos 45°}=\frac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

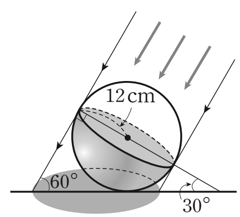
타원의 단축의 길이를 $2b$라 하면 타원의 단축의 밑면 위로의 정사영은 밑면의 지름과 같으므로

$2b=10 \qquad \therefore b=5$

이때 $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-5^2}=5$이므로 타원의 두 초점 사이의 거리는 $\quad 5\cdot2=10$

답 10

061-2 오른쪽 그림과 같이 축구공의 그림자는 햇빛과 수직이고 반지름의 길이가 12 cm인 원의 그림자와 같다.



이때 원을 포함하고 햇빛과 수직인 평면과 지면이 이루는 각의 크기는 30°이므로 원의 넓이를 S, 축구공의 그림자의 넓이를 S'이라 하면

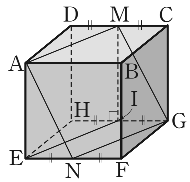
$S=S'\cos 30°$

$\therefore S'=\frac{S}{\cos 30°}=\frac{\pi\cdot12^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=96\sqrt{3}\pi(\text{cm}^2)$

답 $96\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^2$

062-1 $\overline{HG}$의 중점을 I라 하면 마름모 ANGM의 평면 EFGH 위로의 정사영은 사각형 ENGI이므로



$\square ENGI$
$=\square ANGM\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\square ENGI}{\square ANGM}$

이때

$\square ANGM=\dfrac{1}{2}\overline{MN}\cdot\overline{AG}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$

$\square ENGI=1\cdot 2=2$

이므로 $\cos\theta=\dfrac{2}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 답 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

062-2 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

이므로 $\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$\square ABCD$의 두 대각선의 교점을 P라 하면 $\triangle OAB$의 평면 ABCD 위로의 정사영은 $\triangle PAB$이고

$\triangle PAB=\dfrac{1}{4}\cdot 2\cdot 2=1$

이때 면 OAB와 면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\triangle PAB=\triangle OAB\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\triangle PAB}{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$\square ABCD\cos\theta=2^2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

다른 풀이 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 중점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{AB}\perp\overline{OM}$, $\overline{AB}\perp\overline{MN}$

따라서 평면 OAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\angle OMN=\theta$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{MN}}{\overline{OM}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$\square ABCD\cos\theta=2^2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$

중단원 연습 문제

본책 193~197쪽

01 10	**02** 5	**03** $60°$	**04** ③	
05 풀이 참조		**06** ③	**07** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**08** ④
09 ④	**10** ②	**11** $60°$	**12** 0	**13** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$
14 ⑤	**15** $\dfrac{\sqrt{15}}{6}$	**16** ②	**17** 40	**18** $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$
19 11				

01 전략 평면의 결정 조건을 이용한다.

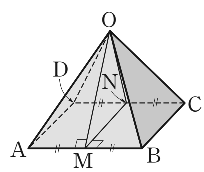
풀이 한 직선 위에 있지 않은 세 점은 하나의 평면을 결정한다.
따라서 구하는 평면의 개수는 서로 다른 다섯 개에서 세 개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$ 답 10

02 해결과정 • $\overline{AC}$와 꼬인 위치에 있는 모서리는
$\overline{BE}$, $\overline{DE}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$
의 4개이므로 $a=4$ ➔ 40% 배점
면 ABC와 평행한 면은
면 DEF
의 1개이므로 $b=1$ ➔ 40% 배점
답구하기 • $\therefore a+b=5$ ➔ 20% 배점

답 5

03 문제이해 • $\overline{AB}$의 중점을 M, $\overline{CD}$의 중점을 N이라 하면



$\overline{OM}\perp\overline{AB}$, $\overline{NM}\perp\overline{AB}$

따라서 사각뿔의 옆면과 밑면이 이루는 각의 크기는 두 직선 OM, MN이 이루는 각의 크기와 같다. ➔ 30% 배점

해결과정 • 직각삼각형 OAM에서

$\overline{OM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AM}^2}$

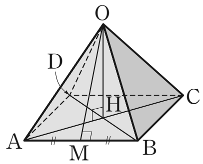
$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$ ➔ 30% 배점

따라서 $\overline{OM}=\overline{MN}=\overline{ON}=2$이므로 $\triangle OMN$은 정삼각형이다. ➔ 30% 배점

답구하기 • 즉 $\angle OMN=60°$이므로 구하는 각의 크기는 $60°$이다. ➔ 10% 배점

답 $60°$

다른 풀이 밑면인 정사각형의 두 대각선의 교점을 H라 하면 꼭짓점 O에서 밑면 ABCD에 내린 수선의 발은 H이고, $\triangle$OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영은 $\triangle$HAB이다.



이때 $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 OAM에서

$$\overline{OM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AM}^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$$
$$\therefore \triangle OAB=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OM}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$$

또 $\triangle HAB=\frac{1}{4}\square ABCD=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2=1$이므로

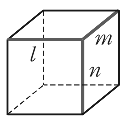
$\triangle$OAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\triangle HAB}{\triangle OAB}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore \theta=60^\circ$$

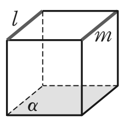
04

전략 직육면체를 이용하여 반례를 찾아본다.

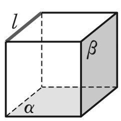
풀이 ① [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $l\perp m$, $l\perp n$이지만 $m\perp n$이다.



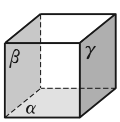
② [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $l /\!/ \alpha$, $m /\!/ \alpha$이지만 $l /\!/ m$이다.



④ [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $l /\!/ \alpha$, $\alpha\perp\beta$이지만 $l /\!/ \beta$이다.



⑤ [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $\alpha\perp\beta$, $\alpha\perp\gamma$이지만 $\beta /\!/ \gamma$이다.



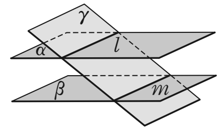
이상에서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

05

전략 한 평면 위에 있는 두 직선이 만나지 않으면 두 직선은 평행함을 이용한다.

풀이 두 평면 α, β는 평행하므로 만나지 않는다. 이때 두 직선 l, m은 각각 두 평면 α, β 위에 있으므로 두 직선 l, m도 만나지 않는다.



그런데 두 직선 l, m은 모두 평면 γ 위에 있으므로

$l /\!/ m$ … 증명 끝

답 풀이 참조

06

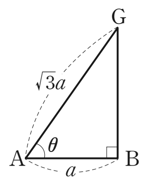
전략 두 직선이 한 점에서 만나도록 평행이동하여 생각한다.

풀이 ① $\overline{EH} /\!/ \overline{AD}$이고 $\overline{AD}\perp\overline{AB}$이므로
$\overline{EH}\perp\overline{AB}$
$\therefore \cos\theta=\cos 90^\circ=0$

② $\overline{CG} /\!/ \overline{BF}$이고 $\overline{BF}\perp\overline{AB}$이므로 $\overline{CG}\perp\overline{AB}$
$\therefore \cos\theta=\cos 90^\circ=0$

③ $\overline{FH} /\!/ \overline{BD}$이고 $\angle DBA=45^\circ$이므로 $\overline{FH}$와 $\overline{AB}$가 이루는 각의 크기는 45°이다.
$\therefore \cos\theta=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면 $\overline{AG}=\sqrt{3}a$이므로 오른쪽 그림에서



$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

⑤ $\overline{AB} /\!/ \overline{EF}$이고 $\overline{CF}\perp\overline{EF}$이므로
$\overline{CF}\perp\overline{AB}$
$\therefore \cos\theta=\cos 90^\circ=0$

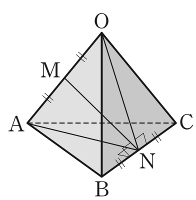
이상에서 $\cos\theta$의 값이 가장 큰 것은 ③이다.

답 ③

07

전략 직선과 평면의 수직 관계를 이용한다.

풀이 $\overline{OA}$, $\overline{BC}$의 중점을 각각 M, N이라 하면 $\triangle$ABC, $\triangle$OBC는 모두 정삼각형이므로



$$\overline{AN}\perp\overline{BC},\ \overline{ON}\perp\overline{BC}$$

따라서 (평면 OAN)$\perp\overline{BC}$이므로

$$\overline{MN}\perp\overline{BC}$$

같은 방법으로 하면 $\overline{MN}\perp\overline{OA}$이므로 $\overline{MN}$은 꼬인 위치에 있는 두 모서리 OA, BC의 공통인 수선이다.

따라서 구하는 두 모서리 사이의 거리는 $\overline{MN}$의 길이와 같으므로 직각삼각형 OMN에서

$$\overline{MN}=\sqrt{\overline{ON}^2-\overline{OM}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

08 전략 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AC}\perp\overline{BC}$임을 알아낸다.

풀이 직각삼각형 ACD에서

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$$

$\overline{AD}\perp\overline{BD}$, $\overline{AD}\perp\overline{CD}$이므로 $\overline{AD}\perp$(평면 BCD)
또 $\overline{CD}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{AC}\perp\overline{BC}$$
$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3=6$$

답 ④

09 전략 평면 ABCD와 점 M에 대하여 삼수선의 정리를 적용한다.

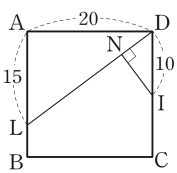
풀이 점 M에서 모서리 CD에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{MI}\perp(\text{평면 ABCD}),\ \overline{MN}\perp\overline{LD}$$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{NI}\perp\overline{LD}$$

오른쪽 그림에서
$\triangle NDI\backsim\triangle ALD$이고



$$\overline{AL}=\frac{3}{4}\overline{AB}=15,$$
$$\overline{DI}=\frac{1}{2}\overline{CD}=10,$$
$$\overline{LD}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{AL}^2}$$
$$=\sqrt{20^2+15^2}=25$$

이므로

$$\overline{NI}:\overline{AD}=\overline{DI}:\overline{LD}$$
$$\therefore \overline{NI}=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{DI}}{\overline{LD}}=\frac{20\cdot10}{25}=8$$

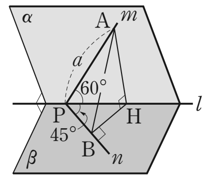
이때 삼각형 MIN은 직각삼각형이므로

$$\overline{MN}=\sqrt{\overline{MI}^2+\overline{NI}^2}$$
$$=\sqrt{20^2+8^2}=4\sqrt{29}$$

답 ④

10 전략 수선을 그어 삼수선의 정리를 이용한다.

풀이 직선 m 위의 한 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 n에 내린 수선의 발을 B라 하면 삼수선의 정리에 의하여



$$\overline{AB}\perp\overline{PB}$$

한편 △APH, △HPB가 모두 직각삼각형이므로 $\overline{PA}=a$라 하면

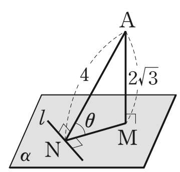
$$\overline{PH}=\overline{PA}\cos60^\circ=\frac{1}{2}a,$$
$$\overline{PB}=\overline{PH}\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}a$$

이때 두 직선 m, n이 이루는 각의 크기 θ는 ∠APB의 크기와 같으므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ②

11 문제이해 • 점 A에서 평면 α와 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면



$$\overline{AM}\perp\alpha,\ \overline{AN}\perp l$$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{MN}\perp l$$

➔ 40% 배점

해결과정 • 따라서 점 A와 직선 l에 의하여 만들어지는 평면이 평면 α와 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\angle ANM=\theta$$

➔ 30% 배점

답구하기 • △ANM에서

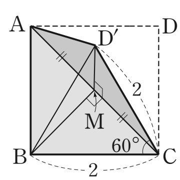
$$\sin\theta=\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \theta=60^\circ\ (\because 0^\circ<\theta<90^\circ)$$

➔ 30% 배점

답 60°

12 전략 점 B, D′에서 $\overline{AC}$에 각각 수선의 발을 내려 θ의 값을 구한다.

풀이 △ABC와 △ACD′은 모두 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AC}$의 중점을 M이라 하면



$$\overline{BM}\perp\overline{AC},\ \overline{D'M}\perp\overline{AC}$$

따라서 두 평면 ABC, ACD′이 이루는 각의 크기는 두 직선

BM, D′M이 이루는 각의 크기와 같으므로

$\angle \mathrm{BMD'}=\theta$

이때 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{D'C}}=2$이고 $\angle \mathrm{BCD'}=60^\circ$이므로 $\triangle \mathrm{D'BC}$는 정삼각형이다.

$\therefore \overline{\mathrm{BD'}}=2$ …… ㉠

또 $\triangle \mathrm{BCM}$과 $\triangle \mathrm{CD'M}$에서

$\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{D'M}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{BD'}}^2=\overline{\mathrm{BM}}^2+\overline{\mathrm{D'M}}^2$

따라서 $\triangle \mathrm{BMD'}$은 $\angle \mathrm{BMD'}=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\cos\theta=\cos 90^\circ=0$ 답 0

13 해결과정 • $\triangle \mathrm{OAB}$의 평면 ABCD 위로의 정사영이 $\triangle \mathrm{MAB}$이고

$\triangle \mathrm{OAB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\triangle \mathrm{MAB}=\dfrac{1}{4}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{1}{4}$ → 30% 배점

이때 $\triangle \mathrm{OAB}$와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\triangle \mathrm{MAB}=\triangle \mathrm{OAB}\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\triangle \mathrm{MAB}}{\triangle \mathrm{OAB}}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ → 40% 배점

답구하기 • 따라서 $\triangle \mathrm{MAB}$의 평면 OAB 위로의 정사영의 넓이는

$\triangle \mathrm{MAB}\cos\theta=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ → 30% 배점

답 $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

14 전략 원뿔의 밑면을 포함한 평면과 평면 α가 이루는 각의 코사인 값을 구한다.

풀이 원뿔의 모선의 길이는

$\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$

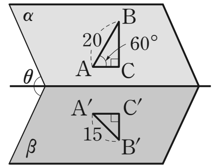
원뿔의 밑면을 포함한 평면과 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

따라서 원뿔의 밑면의 넓이를 S, 원뿔의 밑면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$S'=S\cos\theta=\pi\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{3}$ 답 ⑤

15 문제이해 • $\overline{\mathrm{AC}}\,/\!/\,l$, $\overline{\mathrm{BC}}\perp l$이 되도록 평면 α 위에 한 점 C를 잡으면



$\overline{\mathrm{AC}}=20\cos 60^\circ$

$=20\cdot\dfrac{1}{2}=10$

$\overline{\mathrm{BC}}=20\sin 60^\circ$

$=20\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$ → 30% 배점

해결과정 • 이때 점 C의 평면 β 위로의 정사영을 C′이라 하면

$\overline{\mathrm{A'C'}}=\overline{\mathrm{AC}}\cos 0^\circ=10$ → 20% 배점

직각삼각형 A′B′C′에서

$\overline{\mathrm{B'C'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{A'B'}}^2-\overline{\mathrm{A'C'}}^2}=\sqrt{15^2-10^2}$

$=5\sqrt{5}$ → 30% 배점

답구하기 • 이때 $\overline{\mathrm{B'C'}}=\overline{\mathrm{BC}}\cos\theta$이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{B'C'}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{10\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$ → 20% 배점

답 $\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

Remark

직선 AB와 직선 A′B′이 이루는 각의 크기가 θ가 아니므로 $\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$와 같이 생각하지 않도록 주의한다.

16 전략 직선과 평면의 수직 관계에 의하여 $\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{MP}}$임을 이용한다.

풀이 두 삼각형 OAB, OAC가 모두 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{BM}}$, $\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{CM}}$

$\therefore \overline{\mathrm{OM}}\perp$(평면 BCM)

$\therefore \overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{MP}}$

한편 점 H는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}$

$=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

$\angle \mathrm{OAH}=\theta$라 하면

$\tan\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}=\dfrac{\frac{4\sqrt{6}}{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{2}$

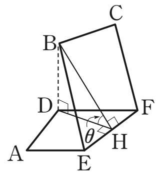
이때 직각삼각형 OMP에서 $\angle\text{OPM}=\theta$이므로

$$\tan\theta=\frac{\overline{\text{OM}}}{\overline{\text{MP}}}$$

$$\therefore\ \overline{\text{MP}}=\frac{\overline{\text{OM}}}{\tan\theta}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$ 답 ②

17 전략 점 B에서 선분 EF에 수선의 발을 내린 다음 삼수선의 정리를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\text{BD}}\perp$(평면 AEFD),

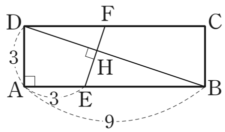
$\overline{\text{BH}}\perp\overline{\text{EF}}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\text{DH}}\perp\overline{\text{EF}}$

$\therefore\ \angle\text{BHD}=\theta$

또 오른쪽 그림에서



$\overline{\text{BD}}=\sqrt{9^2+3^2}=3\sqrt{10}$이고

$\triangle\text{BDA}\backsim\triangle\text{BEH}$

이므로

$\overline{\text{BD}}:\overline{\text{BE}}=\overline{\text{BA}}:\overline{\text{BH}}$

$3\sqrt{10}:6=9:\overline{\text{BH}}$

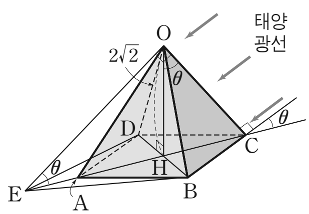
$$\therefore\ \overline{\text{BH}}=\frac{6\cdot9}{3\sqrt{10}}=\frac{9\sqrt{10}}{5}$$

따라서 $\overline{\text{DH}}=3\sqrt{10}-\dfrac{9\sqrt{10}}{5}=\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{\text{DH}}}{\overline{\text{BH}}}=\frac{\frac{6\sqrt{10}}{5}}{\frac{9\sqrt{10}}{5}}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ 60\cos\theta=60\cdot\frac{2}{3}=40$$ 답 40

18 문제이해 • 다음 그림과 같이 태양광선과 지면이 이루는 각의 크기를 θ라 하고, $\overline{\text{OE}}\perp\overline{\text{OC}}$인 점 E를 $\overline{\text{AC}}$의 연장선 위에 잡으면



$\angle\text{OEC}=\angle\text{COH}=\theta$ ➔ 20% 배점

해결과정 • 직각삼각형 OHC에서

$$\tan\theta=\frac{\overline{\text{CH}}}{\overline{\text{OH}}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

직각삼각형 OEH에서 $\tan\theta=\dfrac{\overline{\text{OH}}}{\overline{\text{EH}}}$이므로

$$\overline{\text{EH}}=\frac{\overline{\text{OH}}}{\tan\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}$$

따라서 도형 P의 넓이를 S라 하면

$$S=\triangle\text{DEB}-\triangle\text{DAB}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$$
$$=6$$ ➔ 30% 배점

한편 태양광선에 수직인 평면 α는 $\overline{\text{OC}}$와 평행하므로 지면과 평면 α가 이루는 각의 크기는 $\angle\text{OCH}$의 크기와 같다.

이때 $\angle\text{OCH}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로 직각삼각형 OHC에서

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{\overline{\text{CH}}}{\overline{\text{OC}}}=\frac{\overline{\text{CH}}}{\sqrt{\overline{\text{OH}}^2+\overline{\text{CH}}^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{5}$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 도형 P의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

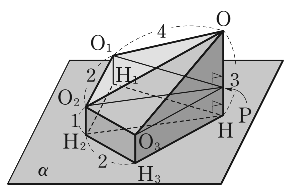
$$S\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=6\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$ ➔ 20% 배점

답 $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

19 전략 네 구의 중심 O, O_1, O_2, O_3에 대하여 주어진 조건을 그림으로 그려 본다.

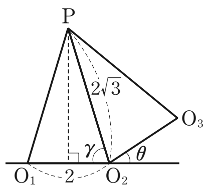
풀이 다음 그림과 같이 구 S의 중심을 O라 하고 네 점 O, O_1, O_2, O_3에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 H, H_1, H_2, H_3이라 하면 조건 (가)에 의하여

$\overline{\text{OH}}=3$, $\overline{\text{O}_1\text{H}_1}=\overline{\text{O}_2\text{H}_2}=\overline{\text{O}_3\text{H}_3}=1$



또 점 O_1에서 선분 OH에 내린 수선의 발을 P라 하면 (평면 $\text{O}_1\text{O}_2\text{O}_3\text{P})\perp\overline{\text{OH}}$이므로

$\overline{O_2P} \perp \overline{OH}$, $\overline{O_3P} \perp \overline{OH}$
두 구 S, S_1이 외접하므로
$\overline{OO_1}=3+1=4$
같은 방법으로 하면
$\overline{OO_2}=\overline{OO_3}=4$
직각삼각형 OO_1P에서 $\overline{OP}=3-1=2$이므로
$\overline{O_1P}=\sqrt{\overline{OO_1}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$
같은 방법으로 하면
$\overline{O_2P}=\overline{O_3P}=2\sqrt{3}$
한편 평면 $O_1O_2H_2H_1$은 평면 β와 같고, 평면 $O_2H_2H_3O_3$은 단면 D를 포함한다.
이때 두 평면 $O_1O_2H_2H_1$, $O_2H_2H_3O_3$의 교선이 직선 O_2H_2이므로 오른쪽 그림과 같이 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면



$\theta=\pi-\angle O_1O_2O_3$
이등변삼각형 PO_1O_2에서 $\angle O_1O_2P=\gamma$라 하면
$$\cos\gamma=\frac{\frac{1}{2}\overline{O_1O_2}}{\overline{O_2P}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$
이때 두 삼각형 PO_1O_2, PO_2O_3은 합동이므로
$\angle O_1O_2O_3=2\gamma$이고
$$\cos 2\gamma=2\cos^2\gamma-1=-\frac{5}{6}$$
이므로
$$\cos\theta=\cos(\pi-2\gamma)=-\cos 2\gamma=\frac{5}{6}$$
이때 단면 D는 반지름의 길이가 1인 원이므로 단면 D의 넓이는 π이다.
따라서 단면 D의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는
$$\pi\cos\theta=\pi\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{6}\pi$$
즉 $p=6$, $q=5$이므로
$p+q=11$

답 11

08 공간좌표

유제

본책 204~228쪽

063-1 점 P가 z축 위에 있으므로 $P(0,\ 0,\ c)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$$(-4)^2+(-1)^2+(c-3)^2=(-2)^2+3^2+(c-1)^2$$
$4c=12 \qquad \therefore c=3$
$\therefore P(0,\ 0,\ 3)$

답 $P(0,\ 0,\ 3)$

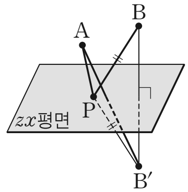
064-1 $\overline{AB}=\sqrt{(1-6)^2+(2+1)^2+(-2-2)^2}$
$=5\sqrt{2}$
두 점 A, B의 yz평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면
$A'(0,\ -1,\ 2)$, $B'(0,\ 2,\ -2)$
$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{(2+1)^2+(-2-2)^2}$
$=5$
직선 AB와 yz평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$
이므로
$$\cos\theta=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$\therefore \theta=45°$

답 45°

064-2 $\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(a-1)^2+(2-5)^2}$
$=\sqrt{a^2-2a+26}$
두 점 A, B의 zx평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면
$A'(2,\ 0,\ 5)$, $B'(-2,\ 0,\ 2)$
$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{(-2-2)^2+(2-5)^2}=5$
이때 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos 45°$이므로
$$5=\sqrt{a^2-2a+26}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$5\sqrt{2}=\sqrt{a^2-2a+26}$
양변을 제곱하여 정리하면
$a^2-2a-24=0, \qquad (a+4)(a-6)=0$
$\therefore a=6\ (\because a>0)$

답 6

065-1 두 점 A, B의 y좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 zx평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.



이때 점 B$(-1,\ 2,\ 6)$의 zx평면에 대한 대칭점을 B′이라 하면 $\mathrm{B'}(-1,\ -2,\ 6)$

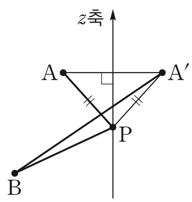
$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}&=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\\&\geq\overline{\mathrm{AB'}}\\&=\sqrt{(-1-5)^2+(-2-1)^2+(6-4)^2}\\&=7\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 7이다.

답 7

065-2 두 점 A, B의 x좌표가 0이고 y좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 yz평면 위에 있고 z축을 기준으로 같은 쪽에 있다.



이때 점 A$(0,\ -2,\ 5)$의 z축에 대한 대칭점을 A′이라 하면

$\mathrm{A'}(0,\ 2,\ 5)$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}&=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\\&\geq\overline{\mathrm{A'B}}\\&=\sqrt{(-4-2)^2+(-3-5)^2}\\&=10\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 10이다.

답 10

066-1 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:3$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot3+3\cdot(-1)}{1+3},\ \frac{1\cdot(-6)+3\cdot2}{1+3},\ \frac{1\cdot0+3\cdot(-4)}{1+3}\right)$$

$\therefore$ P$(0,\ 0,\ -3)$

또 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:3$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot3-3\cdot(-1)}{1-3},\ \frac{1\cdot(-6)-3\cdot2}{1-3},\ \frac{1\cdot0-3\cdot(-4)}{1-3}\right)$$

$\therefore$ Q$(-3,\ 6,\ -6)$

$$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-3)^2+6^2+(-6+3)^2}=3\sqrt{6}$$

답 $3\sqrt{6}$

066-2 점 P의 점 A에 대한 대칭점을 P′이라 하면 점 A는 $\overline{\mathrm{PP'}}$의 중점이다.

점 P′의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 $\overline{\mathrm{PP'}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+a}{2},\ \frac{2+b}{2},\ \frac{1+c}{2}\right)$$

이 점이 점 A$(3,\ -6,\ -2)$와 일치하므로

$$\frac{-2+a}{2}=3,\ \frac{2+b}{2}=-6,\ \frac{1+c}{2}=-2$$

$\therefore a=8,\ b=-14,\ c=-5$

$\therefore$ P′$(8,\ -14,\ -5)$

답 $(8,\ -14,\ -5)$

067-1 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+4}{2},\ \frac{3+(-5)}{2},\ \frac{1+5}{2}\right),\ 즉\ (2,\ -1,\ 3)$$

점 D의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5+a}{2},\ \frac{-4+b}{2},\ \frac{4+c}{2}\right)$$

이때 사각형 ABCD가 평행사변형이므로 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 일치한다. 즉

$$2=\frac{5+a}{2},\ -1=\frac{-4+b}{2},\ 3=\frac{4+c}{2}$$

$\therefore a=-1,\ b=2,\ c=2$

$\therefore$ D$(-1,\ 2,\ 2)$

답 D$(-1,\ 2,\ 2)$

067-2 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-1}{2},\ \frac{-5+6}{2},\ \frac{-3+2}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

$\overline{\mathrm{BD}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{b+2}{2},\ \frac{-1+2}{2},\ \frac{2-3}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{b+2}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

이때 사각형 ABCD가 마름모이므로 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 일치한다. 즉

$$\frac{a-1}{2}=\frac{b+2}{2}\qquad \therefore b=a-3\quad \cdots\cdots ㉠$$

또 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$에서

$$\sqrt{(2-a)^2+(2+5)^2+(-3+3)^2}$$
$$=\sqrt{(2+1)^2+(2-6)^2+(-3-2)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-4a+53=50, \qquad (a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=3 \ (\because a>2)$

이를 ㉠에 대입하면 $\qquad b=0$

$\therefore a+b=3$

답 3

068-1 점 C의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-1)+a}{3},\ \frac{1+0+b}{3},\ \frac{1+4+c}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+1}{3},\ \frac{b+1}{3},\ \frac{c+5}{3}\right)$$

이 점이 점 $(1,\ 3,\ 2)$와 일치하므로

$$\frac{a+1}{3}=1,\ \frac{b+1}{3}=3,\ \frac{c+5}{3}=2$$

$\therefore a=2, b=8, c=1$

$\therefore$ C$(2,\ 8,\ 1)$

답 C$(2,\ 8,\ 1)$

068-2 점 A의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 $\overline{\mathrm{AM}}$을 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot2+1\cdot a}{2+1},\ \frac{2\cdot4+1\cdot b}{2+1},\ \frac{2\cdot3+1\cdot c}{2+1}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+4}{3},\ \frac{b+8}{3},\ \frac{c+6}{3}\right)$$

이 점이 점 G$(2,\ 3,\ 3)$과 일치하므로

$$\frac{a+4}{3}=2,\ \frac{b+8}{3}=3,\ \frac{c+6}{3}=3$$

$\therefore a=2,\ b=1,\ c=3$

$\therefore$ A$(2,\ 1,\ 3)$ 답 A$(2,\ 1,\ 3)$

다른 풀이 A$(x,\ y,\ z)$, B$(x_1,\ y_1,\ z_1)$, C$(x_2,\ y_2,\ z_2)$라 하면 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

이 점이 점 M$(2,\ 4,\ 3)$과 일치하므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=2,\ \frac{y_1+y_2}{2}=4,\ \frac{z_1+z_2}{2}=3$$

$\therefore x_1+x_2=4,\ y_1+y_2=8,\ z_1+z_2=6$

또 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x+x_1+x_2}{3},\ \frac{y+y_1+y_2}{3},\ \frac{z+z_1+z_2}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{x+4}{3},\ \frac{y+8}{3},\ \frac{z+6}{3}\right)$$

이 점이 점 G$(2,\ 3,\ 3)$과 일치하므로

$$\frac{x+4}{3}=2,\ \frac{y+8}{3}=3,\ \frac{z+6}{3}=3$$

$\therefore x=2,\ y=1,\ z=3$

$\therefore$ A$(2,\ 1,\ 3)$

069-1 구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$\mathrm{C}\left(\frac{5+3}{2},\ \frac{-2+2}{2},\ \frac{1+(-5)}{2}\right)$$

$\therefore$ C$(4,\ 0,\ -2)$

또 구의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(3-5)^2+(2+2)^2+(-5-1)^2}$$
$$=\sqrt{14}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-4)^2+y^2+(z+2)^2=14$

답 $(x-4)^2+y^2+(z+2)^2=14$

다른 풀이 구의 중심이 C$(4,\ 0,\ -2)$이므로 구의 반지름의 길이는

$$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(5-4)^2+(-2)^2+(1+2)^2}$$
$$=\sqrt{14}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-4)^2+y^2+(z+2)^2=14$

070-1 구가 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하고 점 $(1,\ -5,\ 4)$를 지나므로 반지름의 길이를 r라 하면 구의 중심의 좌표는

$(r,\ -r,\ r)$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-r)^2+(y+r)^2+(z-r)^2=r^2$

이 구가 점 $(1,\ -5,\ 4)$를 지나므로

$(1-r)^2+(-5+r)^2+(4-r)^2=r^2$

$r^2-10r+21=0, \qquad (r-3)(r-7)=0$

$\therefore r=3$ 또는 $r=7$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9,$

$(x-7)^2+(y+7)^2+(z-7)^2=49$

답 풀이 참조

070-2 중심의 좌표가 $(k,\ 3,\ 2)$이고 y축에 접하는 구의 방정식은

$(x-k)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=k^2+4$

이때 구의 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로

$k^2+4=20, \quad k^2=16$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$)

답 4

071-1 중심의 좌표가 $(2,\ 0,\ -3)$이고 반지름의 길이가 4인 구의 방정식은

$(x-2)^2+y^2+(z+3)^2=16$

$\therefore x^2+y^2+z^2-4x+6z-3=0$

이 방정식이 $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$과 일치하므로

$a=-4,\ b=0,\ c=6,\ d=-3$

답 $a=-4,\ b=0,\ c=6,\ d=-3$

072-1 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$에서 $2\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

이므로

$4\{x^2+(y-2)^2+(z+2)^2\}$

$=x^2+(y+1)^2+(z-1)^2$

$\therefore x^2+y^2+z^2-6y+6z+10=0$

따라서 $a=0,\ b=-6,\ c=6,\ d=10$이므로

$a+b+c+d=10$

답 10

073-1 $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+3-k=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=k+11$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(1,\ 2,\ 3)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{k+11}$이다.

또 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-11=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(1,\ -2,\ 0)$, 반지름의 길이는 4이다.

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(1-1)^2+(-2-2)^2+(-3)^2}=5$

이때 두 구가 내접하므로

$|\sqrt{k+11}-4|=5$

$\therefore \sqrt{k+11}-4=\pm5$

그런데 $\sqrt{k+11}>0$이므로 $\quad \sqrt{k+11}=9$

양변을 제곱하면 $\quad k+11=81$

$\therefore k=70$

답 70

073-2 $x^2+y^2+z^2-4x-2z-11=0$에서

$(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=16$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(2,\ 0,\ 1)$, 반지름의 길이는 4이다.

또 $x^2+y^2+z^2-2x+2ky+k^2-8=0$에서

$(x-1)^2+(y+k)^2+z^2=9$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(1,\ -k,\ 0)$, 반지름의 길이는 3이다.

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(1-2)^2+(-k)^2+(-1)^2}=\sqrt{k^2+2}$

이때 두 구가 서로 만나려면

$4-3\le\sqrt{k^2+2}\le4+3, \quad 1\le\sqrt{k^2+2}\le7$

$1\le k^2+2\le49$

$\therefore -1\le k^2\le47$

그런데 실수 k에 대하여 $k^2\ge0$이므로 $\quad 0\le k^2\le47$

$\therefore -\sqrt{47}\le k\le\sqrt{47}$

답 $-\sqrt{47}\le k\le\sqrt{47}$

074-1 주어진 구의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$(x+1)^2+(-2)^2+(z+3)^2=20$

$\therefore (x+1)^2+(z+3)^2=16$

따라서 주어진 구를 zx평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 4인 원이므로 구하는 단면의 넓이는

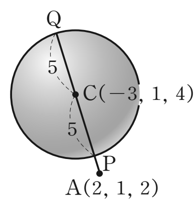
$\pi\cdot4^2=16\pi$

답 16π

075-1 $x^2+y^2+z^2+6x-2y-8z+1=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=25$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(-3,\ 1,\ 4)$, 반지름의 길이는 5이다.



오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C, 직선 AC가 구와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면

$\overline{AC}=\sqrt{(-3-2)^2+(1-1)^2+(4-2)^2}$

$=\sqrt{29}$

따라서 선분의 길이의 최댓값은

$\overline{AQ}=\overline{AC}+\overline{CQ}=\sqrt{29}+5$

선분의 길이의 최솟값은

$\overline{AP}=\overline{AC}-\overline{CP}=\sqrt{29}-5$

이므로 구하는 곱은

$(\sqrt{29}+5)(\sqrt{29}-5)=29-25$

$=4$

답 4

중단원 연습 문제

본책 229~232쪽

01 ③ **02** C$(-4,\ 5,\ -3)$, D$(-6,\ 7,\ -1)$

03 $\frac{4}{3}$ **04** 160π **05** 13π

06 C$\left(0,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$, C$(0,\ 1,\ 2)$ **07** 13

08 ② **09** ① **10** -2 **11** $2\sqrt{3}\pi$ **12** $2\sqrt{15}$

13 ⑤ **14** ③ **15** $2\sqrt{2}$ **16** 17 **17** 48

18 ② **19** 124

01 전략 두 점 A, B의 xy평면 위로의 정사영을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{(4-6)^2+(-2-2)^2+(-7+3)^2}=6$

두 점 A, B의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면

$A'(6,\ 2,\ 0)$, $B'(4,\ -2,\ 0)$

$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{(4-6)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}$

이때 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 답 ③

02 전략 평행사변형의 두 대각선의 교점은 각 대각선의 중점임을 이용한다.

풀이 점 C의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+a}{2},\ \frac{-1+b}{2},\ \frac{3+c}{2}\right)$

이 점이 점 $M(-1,\ 2,\ 0)$과 일치하므로

$\frac{2+a}{2}=-1,\ \frac{-1+b}{2}=2,\ \frac{3+c}{2}=0$

$\therefore a=-4,\ b=5,\ c=-3$

$\therefore C(-4,\ 5,\ -3)$

또 점 D의 좌표를 $(a',\ b',\ c')$이라 하면 $\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{4+a'}{2},\ \frac{-3+b'}{2},\ \frac{1+c'}{2}\right)$

이 점이 점 $M(-1,\ 2,\ 0)$과 일치하므로

$\frac{4+a'}{2}=-1,\ \frac{-3+b'}{2}=2,\ \frac{1+c'}{2}=0$

$\therefore a'=-6,\ b'=7,\ c'=-1$

$\therefore D(-6,\ 7,\ -1)$

답 C$(-4,\ 5,\ -3)$, D$(-6,\ 7,\ -1)$

03 전략 세 점 A, B, C의 좌표를 구한 후 삼각형의 무게중심의 좌표를 구하는 공식에 대입한다.

풀이 $P(1,\ 5,\ -2)$에서

$A(1,\ 5,\ 2)$, $B(-1,\ 5,\ -2)$,

$C(1,\ -5,\ -2)$

이때 △ABC의 무게중심이 $G(a,\ b,\ c)$이므로

$a=\frac{1+(-1)+1}{3}=\frac{1}{3}$,

$b=\frac{5+5+(-5)}{3}=\frac{5}{3}$,

$c=\frac{2+(-2)+(-2)}{3}=-\frac{2}{3}$

$\therefore a+b+c=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

04 해결과정• 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$에서 $2\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로 ➔ 20% 배점

$4\{x^2+y^2+(z+3)^2\}=x^2+(y-9)^2+z^2$

$x^2+y^2+z^2+6y+8z-15=0$

$\therefore x^2+(y+3)^2+(z+4)^2=40$ ➔ 40% 배점

답구하기• 따라서 점 P의 자취가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{40}=2\sqrt{10}$인 구이므로 구하는 겉넓이는

$4\pi\cdot(2\sqrt{10})^2=160\pi$ ➔ 40% 배점

답 160π

05 해결과정• 구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$C\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{4+4}{2},\ \frac{2+(-6)}{2}\right)$

$\therefore C(2,\ 4,\ -2)$

또 구의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2+(4-4)^2+(-6-2)^2}$

$=\sqrt{17}$

이므로 주어진 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=17$ ➔ 30% 배점

위의 방정식에 $x=0$을 대입하면

$(-2)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=17$

$\therefore (y-4)^2+(z+2)^2=13$ ➔ 40% 배점

답구하기• 따라서 주어진 구와 yz평면이 만나서 생기는 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$인 원이므로 구하는 단

면의 넓이는

$\pi\cdot(\sqrt{13})^2=13\pi$ → 30% 배점

답 13π

06 전략 yz평면 위의 점 C에 대하여 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이어야 함을 이용한다.

풀이 점 C가 yz평면 위에 있으므로 $C(0,\ b,\ c)$라 하자.

이때 △ABC가 정삼각형이려면

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$, 즉 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

이어야 하므로 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서

$(2-1)^2+(-2)^2+1^2=(-2)^2+b^2+(c-1)^2$

$\therefore b^2+c^2-2c-1=0$ …… ㉠

또 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$에서

$(-2)^2+b^2+(c-1)^2=1^2+(2-b)^2+(-c)^2$

$\therefore c=2b$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$5b^2-4b-1=0,\quad (5b+1)(b-1)=0$

$\therefore b=-\frac{1}{5}$ 또는 $b=1$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$b=-\frac{1}{5}$일 때 $c=-\frac{2}{5}$, $b=1$일 때 $c=2$

$\therefore C\left(0,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$, $C(0,\ 1,\ 2)$

답 $C\left(0,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$, $C(0,\ 1,\ 2)$

07 전략 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발 H의 좌표를 구한 후 $\overline{AP}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HP}^2}$임을 이용한다.

풀이 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(9, 0, 0)$

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HP}^2}=\sqrt{5^2+\overline{HP}^2}$

$P(-3,\ 0,\ 0)$일 때 $\overline{HP}$의 길이가 최대이므로

$\overline{AP}\le\sqrt{5^2+(-3-9)^2}$

$=\sqrt{5^2+12^2}=13$

답 13

08 전략 xy평면 위의 점은 z좌표가 0임을 이용한다.

풀이 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 P라 하면 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{2\cdot2+1\cdot4}{2+1},\ \frac{2\cdot3+1\cdot0}{2+1},\ \frac{2\cdot a+1\cdot2}{2+1}\right)$

$\therefore P\left(\frac{8}{3},\ 2,\ \frac{2a+2}{3}\right)$

이때 점 P가 xy평면 위에 있으므로

$\frac{2a+2}{3}=0 \qquad \therefore a=-1$

답 ②

09 전략 먼저 내분점의 좌표를 구하는 공식을 이용하여 두 점 P, Q의 좌표를 구한다.

풀이 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

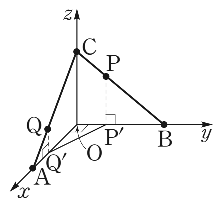
$P\left(\frac{2\cdot0+1\cdot0}{2+1},\ \frac{2\cdot0+1\cdot3}{2+1},\ \frac{2\cdot3+1\cdot0}{2+1}\right)$

$\therefore P(0,\ 1,\ 2)$

선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 Q의 좌표는

$Q\left(\frac{1\cdot0+2\cdot3}{1+2},\ \frac{1\cdot0+2\cdot0}{1+2},\ \frac{1\cdot3+2\cdot0}{1+2}\right)$

$\therefore Q(2,\ 0,\ 1)$



따라서 $P'(0,\ 1,\ 0)$, $Q'(2,\ 0,\ 0)$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=1$

답 ①

10 문제이해 • 주어진 구의 방정식에서

$x^2+y^2+z^2-4x+4y-az-b=0$ …… ㉠

$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+b+8$

따라서 이 구의 중심의 좌표는 $\left(2,\ -2,\ \frac{a}{2}\right)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{a^2}{4}+b+8}$이다. → 30% 배점

해결과정 • 이 구가 xy평면에 접하므로

$\left|\frac{a}{2}\right|=\sqrt{\frac{a^2}{4}+b+8}$

양변을 제곱하면

$\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+b+8$

$\therefore b=-8$ → 30% 배점

또 점 $(5,\ -2,\ 3)$이 구 위의 점이므로 ㉠에 대입하면

$25+4+9-20-8-3a+8=0$

$3a=18 \qquad \therefore a=6$ → 30% 배점

답구하기 • $\therefore a+b=-2$ → 10% 배점

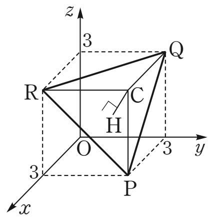
답 -2

11 전략 점 C에서 평면 PQR에 내린 수선의 발이 △PQR의 무게중심임을 이용하여 원뿔의 높이를 구한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2-6x-6y-6z+18=0$에서

$$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$$

이므로



C(3, 3, 3),
P(3, 3, 0),
Q(0, 3, 3),
R(3, 0, 3)

점 C에서 평면 PQR에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 정삼각형 PQR의 무게중심이므로

$$\mathrm{H}\left(\frac{3+0+3}{3},\ \frac{3+3+0}{3},\ \frac{0+3+3}{3}\right)$$

$$\therefore \mathrm{H}(2,\ 2,\ 2)$$

또 점 H는 원뿔의 밑면인 원의 중심이므로 밑면의 반지름의 길이는

$$\overline{\mathrm{HP}}=\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2+(-2)^2}$$
$$=\sqrt{6}$$

원뿔의 높이는

$$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{(2-3)^2+(2-3)^2+(2-3)^2}$$
$$=\sqrt{3}$$

따라서 구하는 원뿔의 부피는

$$\frac{1}{3}\pi\cdot(\sqrt{6})^2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi$$

답 $2\sqrt{3}\pi$

12 해결과정 • 구의 중심의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 구의 반지름의 길이가 5이므로 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=25$$

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 구의 방정식에 $z=0$을 대입하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(-c)^2=25$$

$$\therefore (x-a)^2+(y-b)^2=25-c^2$$ ➔ 40% 배점

이 방정식이 $(x-2)^2+(y-3)^2=10$과 일치하므로

$$a=2,\ b=3,\ 25-c^2=10$$

$$\therefore a=2,\ b=3,\ c=\pm\sqrt{15}$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 두 구의 중심의 좌표가 각각

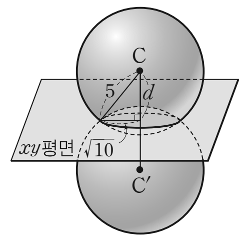
$$(2,\ 3,\ \sqrt{15}),\ (2,\ 3,\ -\sqrt{15})$$

이므로 두 구의 중심 사이의 거리는 $2\sqrt{15}$이다.

➔ 30% 배점

답 $2\sqrt{15}$

다른 풀이 두 구의 중심을 각각 C, C′이라 하고, 점 C에서 xy평면까지의 거리를 d라 하면 오른쪽 그림에서



$$d=\sqrt{5^2-(\sqrt{10})^2}$$
$$=\sqrt{15}$$

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{CC'}}=2d=2\sqrt{15}$$

13 전략 y축 위의 점은 x좌표와 z좌표가 모두 0임을 이용한다.

풀이 y축 위의 점은 x좌표, z좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$, $z=0$을 대입하면

$$y^2-2y-24=0,\qquad (y+4)(y-6)=0$$

$$\therefore y=-4 \text{ 또는 } y=6$$

따라서 주어진 구와 y축의 두 교점 A, B의 좌표는

$$(0,\ -4,\ 0),\ (0,\ 6,\ 0)$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=|6-(-4)|=10$$

답 ⑤

Remark 구와 좌표축의 교점의 좌표

구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$과 좌표축의 교점의 좌표는 다음과 같이 구한다.

① x축: 구의 방정식에 $y=0$, $z=0$을 대입한 후 x에 대한 이차방정식을 푼다.
② y축: 구의 방정식에 $x=0$, $z=0$을 대입한 후 y에 대한 이차방정식을 푼다.
③ z축: 구의 방정식에 $x=0$, $y=0$을 대입한 후 z에 대한 이차방정식을 푼다.

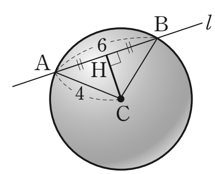
14 전략 구의 중심 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{\mathrm{CH}}$의 길이를 구한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2+4x-6y-2z-2=0$에서

$$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=16$$

이므로 이 구의 반지름의 길이는 4이다.

구의 중심을 C, 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=3$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{4^2-3^2}$$
$$=\sqrt{7}$$

따라서 구의 중심과 직선 l 사이의 거리는 $\sqrt{7}$이다.

답 ③

15 문제이해 • 주어진 구의 방정식에 $z=0$을 대입하면

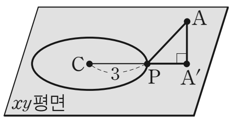
$$x^2+y^2+4x+2y-4=0$$

$$\therefore (x+2)^2+(y+1)^2=9$$

따라서 주어진 구와 xy평면의 교선은 중심의 좌표가 $(-2,\ -1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다.

→ 40% 배점

해결과정 • 오른쪽 그림과 같이 이 원의 중심을 C, 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 A′, $\overline{\mathrm{CA'}}$이 원과 만나는 점을 P라 하면 점 A에서 이 원 위의 점까지의 거리의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이와 같다.



A′(1, 3, 0)이므로

$$\overline{\mathrm{CA'}}=\sqrt{(1+2)^2+(3+1)^2}=5$$

$$\therefore \overline{\mathrm{PA'}}=\overline{\mathrm{CA'}}-\overline{\mathrm{CP}}=5-3=2$$ → 40% 배점

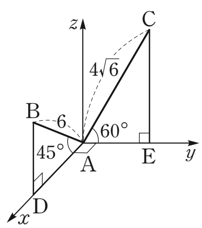
답구하기 • 이때 $\overline{\mathrm{AA'}}=2$이므로 직각삼각형 APA′에서

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PA'}}^2+\overline{\mathrm{AA'}}^2}$$

$$=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$ → 20% 배점

답 $2\sqrt{2}$

16 문제이해 • 오른쪽 그림과 같이 점 A를 원점으로 하고, 선분 AD, AE가 각각 x축, y축의 양의 방향과 일치하도록 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$를 좌표공간에 놓자. → 10% 배점



해결과정 • 삼각형 ABD에서

$$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos 45^\circ=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

$$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin 45^\circ=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

$$\therefore \mathrm{B}(3\sqrt{2},\ 0,\ 3\sqrt{2}),\ \mathrm{D}(3\sqrt{2},\ 0,\ 0)$$ → 20% 배점

삼각형 CAE에서

$$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AC}}\cos 60^\circ=4\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{6}$$

$$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{AC}}\sin 60^\circ=4\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{2}$$

$$\therefore \mathrm{C}(0,\ 2\sqrt{6},\ 6\sqrt{2}),\ \mathrm{E}(0,\ 2\sqrt{6},\ 0)$$ → 20% 배점

한편 선분 BC의 평면 α 위로의 정사영은 선분 DE이고

$$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(-3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{6})^2+(6\sqrt{2}-3\sqrt{2})^2}$$

$$=2\sqrt{15}$$

$$\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{(-3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{6})^2}$$

$$=\sqrt{42}$$

이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{BC}}\cos\theta$에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{DE}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$$

$$=\frac{\sqrt{42}}{2\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{70}}{10}$$

$$\therefore \cos^2\theta=\frac{7}{10}$$ → 40% 배점

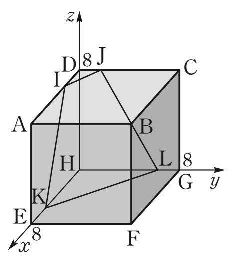
답구하기 • 따라서 $p=10,\ q=7$이므로

$$p+q=17$$ → 10% 배점

답 17

17 전략 점 H를 원점으로 하는 좌표공간을 설정하여 각 점의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 H를 원점으로 하고, 세 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓자.



이때 두 선분 IJ, KL의 중점을 각각 M, N이라 하면

A(8, 0, 8), C(0, 8, 8), D(0, 0, 8)이므로

$$\mathrm{I}(2,\ 0,\ 8),\ \mathrm{J}(0,\ 2,\ 8)$$

$$\therefore \mathrm{M}(1,\ 1,\ 8)$$

또 E(8, 0, 0), G(0, 8, 0), H(0, 0, 0)이므로

$$\mathrm{K}(6,\ 0,\ 0),\ \mathrm{L}(0,\ 6,\ 0)$$

$$\therefore \mathrm{N}(3,\ 3,\ 0)$$

따라서 □IKLJ에서

$$\overline{\mathrm{IJ}}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

$$\overline{\mathrm{KL}}=\sqrt{(-6)^2+6^2}=6\sqrt{2}$$

$$\overline{\mathrm{MN}}=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2+(-8)^2}$$

$$=6\sqrt{2}$$

이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2}+6\sqrt{2})\cdot 6\sqrt{2}=48$$

답 48

18 (전략) 구의 중심의 좌표를 (a, b, c)라 하고, 반지름의 길이를 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

(풀이) 구 S의 반지름의 길이를 r, 중심의 좌표를 $C(a, b, c)$ $(a>0, b>0, c>0)$라 하자.

구 S가 x축과 y축에 접하는 점을 각각 A, B라 하면

$$A(a, 0, 0),\ B(0, b, 0)$$

$r=\overline{AC}=\overline{BC}$이므로

$$r^2=b^2+c^2=a^2+c^2$$

$$\therefore a=b\ (\because a>0, b>0)$$

따라서 구 S의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2 \quad \cdots ㉠$$

한편 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 방정식은 ㉠에 $z=0$을 대입하면 되므로

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(-c)^2=a^2+c^2$$

$$\therefore (x-a)^2+(y-a)^2=a^2$$

이 원의 넓이가 64π이므로

$$a^2\pi=64\pi, \qquad a^2=64$$

$$\therefore a=8\ (\because a>0)$$

$a=8$을 ㉠에 대입하면

$$(x-8)^2+(y-8)^2+(z-c)^2=64+c^2 \quad \cdots ㉡$$

또 구 S가 z축과 만나는 두 점의 z좌표는 $x=0$, $y=0$을 ㉡에 대입하면 되므로

$$64+64+(z-c)^2=64+c^2$$

$$(z-c)^2=c^2-64$$

$$\therefore z=c\pm\sqrt{c^2-64}$$

구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로

$$(c+\sqrt{c^2-64})-(c-\sqrt{c^2-64})=8$$

$$\sqrt{c^2-64}=4, \qquad c^2-64=16$$

$$\therefore c^2=80$$

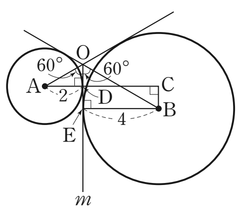
따라서 구 S의 반지름의 길이는

$$r=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{64+80}=12$$

답 ②

19 (전략) 먼저 세 반평면과 두 구를 모두 평면 π 위로 정사영시켜 본다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 반평면 α, β, γ와 두 구의 평면 π 위로의 정사영에서 반평면 β의 정사영을 m, 반지름의 길이가 2, 4인 구의 중심의 정사영을 각각 A, B라 하자.



또 직선 l과 평면 π의 교점을 O, 두 점 A, B에서 반직선 m에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면

$$\overline{AD}=2,\ \overline{BE}=4$$

직각삼각형 OAD에서

$$\overline{OD}=\overline{AD}\tan 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

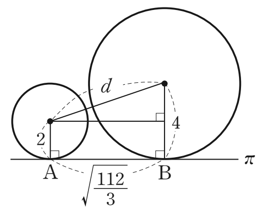
직각삼각형 OEB에서

$$\overline{OE}=\overline{BE}\tan 30^\circ=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{BC}=\overline{DE}=\overline{OE}-\overline{OD}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이므로 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{(2+4)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{112}{3}}$$

또 두 구의 반지름의 길이의 차가 2이므로 오른쪽 그림에서



$$d^2=2^2+\left(\sqrt{\frac{112}{3}}\right)^2=\frac{124}{3}$$

$$\therefore 3d^2=124$$

답 124

Ⅳ. 공간벡터

09 공간벡터

유제

본책 240~249쪽

076-1 $\vec{c}=k\vec{a}+h\vec{b}$이므로

$(-4,\ 12,\ 5)=k(1,\ 3,\ -2)+h(-2,\ 2,\ 3)$
$=(k-2h,\ 3k+2h,\ -2k+3h)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$-4=k-2h,\ 12=3k+2h,\ 5=-2k+3h$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$k=2,\ h=3$

답 $k=2,\ h=3$

076-2 $3(\vec{a}+\vec{b})+2(\vec{a}-3\vec{c})$

$=5\vec{a}+3\vec{b}-6\vec{c}$
$=5(-1,\ 1,\ 1)+3(4,\ 1,\ -3)-6(1,\ 2,\ 0)$
$=(-5+12-6,\ 5+3-12,\ 5-9+0)$
$=(1,\ -4,\ -4)$

$\therefore\ |3(\vec{a}+\vec{b})+2(\vec{a}-3\vec{c})|$
$=\sqrt{1^2+(-4)^2+(-4)^2}$
$=\sqrt{33}$

답 $\sqrt{33}$

076-3 두 벡터 $\vec{a}-\vec{b},\ -\vec{a}+\vec{c}$가 서로 평행하려면

$\vec{a}-\vec{b}=k(-\vec{a}+\vec{c})$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다. 이때

$\vec{a}-\vec{b}=(-3,\ 0,\ 2)-(m-1,\ -n+2,\ 0)$
$=(-m-2,\ n-2,\ 2),$
$-\vec{a}+\vec{c}=-(-3,\ 0,\ 2)+(-7,\ -2,\ 3)$
$=(-4,\ -2,\ 1)$

이므로

$(-m-2,\ n-2,\ 2)=k(-4,\ -2,\ 1)$
$=(-4k,\ -2k,\ k)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$-m-2=-4k,\ n-2=-2k,\ 2=k$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$k=2, m=6, n=-2$

답 $m=6, n=-2$

077-1 $\overrightarrow{AB}=(3,\ 3,\ -4)-(1,\ 2,\ -2)$
$=(2,\ 1,\ -2)$

이므로 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$

따라서 $\overrightarrow{AB}$와 방향이 같고 크기가 9인 벡터는

$9\times\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=9\times\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$
$=3(2,\ 1,\ -2)$
$=(6,\ 3,\ -6)$

답 $(6,\ 3,\ -6)$

077-2 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x,\ y,\ z-1)$
$\overrightarrow{BP}=(x-2,\ y-1,\ z-3)$

$\sqrt{2}|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$이므로

$\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}$
$=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}$
$2\{x^2+y^2+(z-1)^2\}=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2$
$\therefore\ (x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=18$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{18}$인 구이므로 구하는 도형의 겉넓이는

$4\pi\times(\sqrt{18})^2=72\pi$

답 72π

078-1 (1) △ABE는 정삼각형이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각의 크기는 $60°$이다.

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\cos 60°$
$=2\times2\times\dfrac{1}{2}=2$

(2) □ABFD는 정사각형이므로 $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{BD}$

$\therefore\ \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{BD}|\cos 90°$
$=2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times0=0$

답 (1) 2 (2) 0

079-1 $|\vec{a}|=7$이므로

$\sqrt{(x-4)^2+3^2+x^2}=7$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-4x-12=0,\quad (x+2)(x-6)=0$
$\therefore\ x=6\ (\because\ x>0)$

즉 $\vec{a}=(2,\ 3,\ 6),\ \vec{b}=(12,\ 1,\ 1)$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times12+3\times1+6\times1=33$

답 33

079-2 $t\vec{a}+\vec{b}=t(1,\ -1,\ 0)+(-3,\ 1,\ 4)$
$=(t-3,\ -t+1,\ 4),$
$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ -1,\ 0)+t(-3,\ 1,\ 4)$
$=(-3t+1,\ t-1,\ 4t)$

이므로

$$f(t)=(t\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})$$
$$=(t-3,\ -t+1,\ 4)\cdot(-3t+1,\ t-1,\ 4t)$$
$$=(t-3)(-3t+1)+(-t+1)(t-1)+16t$$
$$=-4t^2+28t-4$$
$$=-4\left(t-\frac{7}{2}\right)^2+45$$

따라서 $f(t)$는 $t=\frac{7}{2}$일 때 최댓값 45를 갖는다.

답 $\frac{7}{2}$

080-1 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$이므로

$$\cos\frac{2}{3}\pi=\frac{1\times2+3\times(-1)-3x}{\sqrt{1^2+3^2+x^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}}$$
$$-\frac{1}{2}=\frac{-3x-1}{\sqrt{x^2+10}\sqrt{14}}$$
$$6x+2=\sqrt{14(x^2+10)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$11x^2+12x-68=0,\qquad (11x+34)(x-2)=0$$
$$\therefore x=2\ (\because x>0)$$

답 2

080-2 $\overrightarrow{AB}=(1,\ -1,\ 2)-(1,\ -1,\ -1)$
$=(0,\ 0,\ 3)$,

$\overrightarrow{AC}=(2,\ 0,\ 1)-(1,\ -1,\ -1)=(1,\ 1,\ 2)$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$$
$$=\frac{3\times2}{3\sqrt{1^2+1^2+2^2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

081-1 $\vec{a}\perp\vec{b}$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이므로

$(1,\ 2,\ x)\cdot(-1,\ y,\ 7)=0$

$-1+2y+7x=0$ ...... ㉠

$\vec{b}\perp\vec{c}$이면 $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$이므로

$(-1,\ y,\ 7)\cdot(z,\ -1,\ 1)=0$

$-z-y+7=0$ ...... ㉡

$\vec{c}\perp\vec{a}$이면 $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$이므로

$(z,\ -1,\ 1)\cdot(1,\ 2,\ x)=0$

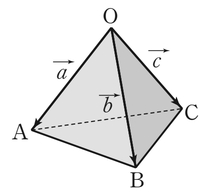
$z-2+x=0$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=-1,\ y=4,\ z=3$

답 $x=-1,\ y=4,\ z=3$

081-2 오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 하면



$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\vec{c}-\vec{b}$

이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})$
$=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}$ ...... ㉠

이때 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$이고 $\angle AOC=\angle AOB=\frac{\pi}{3}$이므로 ㉠에서

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\frac{\pi}{3}-|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=0$

$\therefore \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$, 즉 $\overline{OA}\perp\overline{BC}$

답 풀이 참조

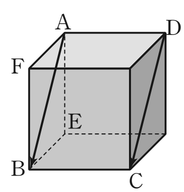
중단원 연습 문제

○ 본책 250~253쪽

01 ②	**02** ③	**03** $-\frac{8}{3}$	**04** $\frac{1}{3}$	
05 $P\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$		**06** $\frac{14}{17}$	**07** 12	
08 $-\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$		**09** ②	**10** ④	**11** 12
12 $\frac{11}{2}$	**13** ③	**14** ②	**15** ⑤	**16** 106
17 40	**18** 12			

01 (전략) 주어진 전개도로 정육면체를 만들어 $\overrightarrow{AB}$와 같은 벡터를 찾는다.

(풀이) 주어진 전개도로 정육면체를 만들면 오른쪽 그림과 같으므로



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

답 ②

02 (전략) 주어진 벡터를 꼭짓점 A를 시점으로 하는 벡터로 나타낸다.

(풀이) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$

답 ③

Remark

① $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$	② $\overrightarrow{DF}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$
④ $\overrightarrow{FH}=-\vec{a}+\vec{b}$	⑤ $\overrightarrow{HB}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

03 문제이해 • 두 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{c}$가 서로 평행하면

$\vec{a}-\vec{c}=k(\vec{a}+2\vec{b})$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

➔ 30% 배점

해결과정 • $\vec{a}+2\vec{b}=(-1,\ 4,\ 0)+2(2,\ 1,\ -1)$

$=(3,\ 6,\ -2)$,

$\vec{a}-\vec{c}=(-1,\ 4,\ 0)-(m+2,\ 2,\ n)$

$=(-m-3,\ 2,\ -n)$

이므로

$(-m-3,\ 2,\ -n)=k(3,\ 6,\ -2)$

$=(3k,\ 6k,\ -2k)$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$-m-3=3k,\ 2=6k,\ -n=-2k$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 위의 세 식을 연립하여 풀면

$k=\frac{1}{3},\ m=-4,\ n=\frac{2}{3}$

$\therefore mn=-\frac{8}{3}$ ➔ 30% 배점

답 $-\frac{8}{3}$

04 (전략) 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다.

(풀이) 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다. 이때

$\overrightarrow{AB}=(x,\ 2,\ y)-(2,\ 3,\ 5)$

$=(x-2,\ -1,\ y-5)$,

$\overrightarrow{AC}=(-y+1,\ 5,\ 2x-3)-(2,\ 3,\ 5)$

$=(-y-1,\ 2,\ 2x-8)$

이므로

$(-y-1,\ 2,\ 2x-8)=k(x-2,\ -1,\ y-5)$

$=(k(x-2),\ -k,\ k(y-5))$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$-y-1=k(x-2),\ 2=-k,$

$2x-8=k(y-5)$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$k=-2,\ x=\frac{14}{3},\ y=\frac{13}{3}$

$\therefore x-y=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

05 (전략) $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}$임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

(풀이) $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}$

$=2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})$

$=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}-6\overrightarrow{OP}$

이므로 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}-6\overrightarrow{OP}=\vec{0}$

$\therefore \overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC})$

이때 $\overrightarrow{OA}=(2,\ 1,\ -3)$, $\overrightarrow{OB}=(-1,\ 4,\ 2)$, $\overrightarrow{OC}=(1,\ -1,\ 2)$이므로

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}\{2(2,\ 1,\ -3)+(-1,\ 4,\ 2)$

$+3(1,\ -1,\ 2)\}$

$=\frac{1}{6}(6,\ 3,\ 2)$

$=\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$이다.

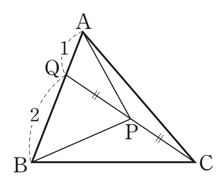
답 $\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$

(다른 풀이) $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=3\overrightarrow{CP}$

$\therefore \frac{2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{3}=\overrightarrow{CP}$

이때 $\frac{2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{3}=\overrightarrow{PQ}$라 하면 점 Q는 선분 BA를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 Q의 좌표는



$\left(\frac{4-1}{3},\ \frac{2+4}{3},\ \frac{-6+2}{3}\right)$, 즉 $\left(1,\ 2,\ -\frac{4}{3}\right)$

또 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PQ}$에서 점 P는 선분 CQ의 중점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1+1}{2},\ \frac{-1+2}{2},\ \frac{2+\left(-\frac{4}{3}\right)}{2}\right),\ 즉\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$$

06 (전략) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 크기와 내적을 이용한다.

(풀이) $\vec{a}=(2,\ -3,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ -4,\ 0)$에서

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2,\ -3,\ 2)\cdot(1,\ -4,\ 0)=14$$
$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{17}$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-4)^2+0^2}=\sqrt{17}$$
$$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{14}{\sqrt{17}\sqrt{17}}=\frac{14}{17}$$

답 $\frac{14}{17}$

07 해결과정 • $\vec{a}\perp\vec{b}$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이므로

$(9,\ x+1,\ -12)\cdot(-8,\ x,\ 7)=0$ ➔ 50% 배점

답구하기 • $-72+x(x+1)-84=0$

$x^2+x-156=0$

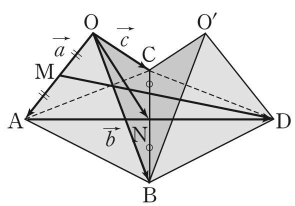
$(x+13)(x-12)=0$

$\therefore x=12\ (\because x>0)$ ➔ 50% 배점

답 12

08 (전략) $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{MA}$와 $\overrightarrow{AD}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타낸다.

(풀이) 다음 그림과 같이 선분 BC의 중점을 N이라 하자.



이때 $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$이므로

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}$$
$$=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

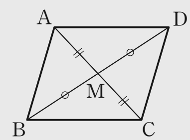
□ABDC가 마름모이므로

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AN}$$
$$\therefore \overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AN}$$
$$=\frac{1}{2}\vec{a}-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$
$$=-\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

답 $-\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

Remark 평행사변형에서 벡터의 성질

평행사변형 ABCD에서 두 대각선은 서로를 이등분하므로 두 대각선의 교점을 M이라 하면



$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$$

09 (전략) 점 P가 xy평면 위의 점임을 이용하여 주어진 벡터를 성분으로 나타낸다.

(풀이) 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ 0)$이라 하면

$$\overrightarrow{PA}=(3-x,\ 4-y,\ 5),$$
$$\overrightarrow{PB}=(4-x,\ 8-y,\ 6),$$
$$\overrightarrow{PC}=(5-x,\ 3-y,\ 7)$$

따라서 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(12-3x,\ 15-3y,\ 18)$이므로

$$\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}=(4-x,\ 5-y,\ 6)$$
$$\therefore \left|\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}\right|=\sqrt{(4-x)^2+(5-y)^2+6^2}$$

따라서 $x=4$, $y=5$일 때 구하는 최솟값은 6이다.

답 ②

(다른 풀이) 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

$$G\left(\frac{3+4+5}{3},\ \frac{4+8+3}{3},\ \frac{5+6+7}{3}\right),\ 즉$$
$$G(4,\ 5,\ 6)$$

$\left|\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}\right|=|\overrightarrow{PG}|$이고, $|\overrightarrow{PG}|$의 값이 최소이려면 점 G에서 xy평면에 내린 수선의 발이 점 P이어야 하므로 $\quad$ P(4, 5, 0)

따라서 $|\overrightarrow{PG}|$의 최솟값은 6이다.

10 (전략) 중심이 각각 A, B인 두 구가 원점 O에서 서로 접하면 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 있어야 한다.

풀이 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$의 중심을 A라 하면

$$A(1,\ 2,\ 1)$$

$x^2+y^2+z^2+6x+2ay+2bz=0$에서

$$(x+3)^2+(y+a)^2+(z+b)^2=9+a^2+b^2$$

이 구의 중심을 B라 하면

$$B(-3,\ -a,\ -b)$$

두 구가 원점 O에서 서로 접하면 세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$$

를 만족시키는 실수 k가 존재한다. 즉

$$(-3,\ -a,\ -b)=k(1,\ 2,\ 1)=(k,\ 2k,\ k)$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-3=k,\ -a=2k,\ -b=k$$

이므로 $k=-3,\ a=6,\ b=3$

$$\therefore a+b=9$$

답 ④

11 전략 주어진 입체도형을 좌표공간에 놓고 각 꼭짓점의 좌표를 구한다.

풀이 주어진 도형을 점 B를 원점, △BCD를 xy평면, $\overline{BD}$를 y축의 양의 방향으로 하는 좌표공간에 나타내면

$$B(0,\ 0,\ 0),\ D(0,\ 6,\ 0),\ C(3\sqrt{3},\ 3,\ 0)$$

따라서 △BCD의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{3},\ \frac{6+3}{3},\ 0\right),\ \text{즉 } (\sqrt{3},\ 3,\ 0)$$

이고, 두 점 A, E에서 xy평면에 내린 수선의 발이 △BCD의 무게중심과 일치하므로

$$A(\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6}),\ E(\sqrt{3},\ 3,\ -2\sqrt{6})$$

따라서 $\overrightarrow{BA}=(\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})$,

$\overrightarrow{DE}=(\sqrt{3},\ -3,\ -2\sqrt{6})$이므로

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DE}=(2\sqrt{3},\ 0,\ 0)$$

$$\therefore |\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DE}|^2=(2\sqrt{3})^2=12$$

답 12

12 해결과정 • 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$로 놓으면

$$\overrightarrow{PA}=(-3-x,\ 4-y,\ -3-z),$$

$$\overrightarrow{PB}=(5-x,\ -y,\ 3-z)$$

$$\therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(2-2x,\ 4-2y,\ -2z)$$

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=1$에서

$$\sqrt{(2-2x)^2+(4-2y)^2+(-2z)^2}=1$$

$$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

▶ 30% 배점

점 Q의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$로 놓으면

$$\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OA}=(x-3,\ y+4,\ z-3)$$

$|\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OA}|=1$에서

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2+(z-3)^2}=1$$

$$\therefore (x-3)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=1 \quad \cdots ㉡$$

▶ 30% 배점

㉠, ㉡에서 두 점 P, Q는 중심의 좌표가 각각 $(1,\ 2,\ 0)$, $(3,\ -4,\ 3)$이고 반지름의 길이가 각각 $\frac{1}{2}$, 1인 구 위의 점이다.

▶ 10% 배점

답구하기 • 이때 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-1)^2+(-4-2)^2+3^2}=7$$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값은

$$7-\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{11}{2}$$

▶ 30% 배점

답 $\frac{11}{2}$

13 전략 정사면체 ABCD의 각 면은 한 변의 길이가 2인 정삼각형임을 이용한다.

풀이 △ABC, △DBC는 정삼각형이므로

$$\overline{MA}=\overline{MD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$$

점 A에서 △BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 △BCD의 무게중심이므로

$$\overline{MH}=\frac{1}{3}\overline{MD}$$

$\angle AMH=\theta$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{MH}}{\overline{MA}}=\frac{\frac{1}{3}\overline{MD}}{\overline{MD}}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MD}=|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MD}|\cos\theta$$

$$=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=1$$

답 ③

14 전략 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$로 놓고, 각각의 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타낸다.

풀이 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라 하면

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

ㄱ. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{c}$,

$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\vec{b}-\vec{c}$ 이므로

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FC}=(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})$
$=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{c}$
$=-|\vec{c}|^2<0$

ㄴ. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$,
$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\vec{a}-\vec{c}$이므로
$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})$
$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}$
$-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{c}$
$=|\vec{a}|^2-|\vec{c}|^2$
이때 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB}=0$이면
$|\vec{a}|^2-|\vec{c}|^2=0$
$\therefore |\vec{a}|=|\vec{c}|$
따라서 사각형 AEFB는 정사각형이다.

ㄷ. $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ 이므로
$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CE}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$
$=-\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
$-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
$-\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}$
$=-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$
이때 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CE}=0$이면
$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$
따라서 직육면체 ABCD-EFGH는 정육면체가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

Remark

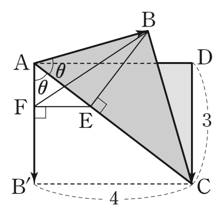
세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 서로 수직이면
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=0$

15 전략 주어진 입체도형을 좌표공간에 놓고 각 꼭짓점의 좌표를 구한다.

풀이 주어진 도형을 점 D를 원점으로 하고 $\overline{DA}$, $\overline{DF}$를 각각 z축, y축의 양의 방향으로 하는 좌표공간에 나타내면
$A(0,\ 0,\ 2)$, $B(\sqrt{3},\ 1,\ 2)$, $C(0,\ 2,\ 2)$,
$D(0,\ 0,\ 0)$, $E(\sqrt{3},\ 1,\ 0)$, $F(0,\ 2,\ 0)$
0 이상 2 이하의 실수 p, q, r, s에 대하여
$P(0,\ 0,\ p)$, $Q(0,\ 0,\ q)$, $R(\sqrt{3},\ 1,\ r)$,
$S(0,\ 2,\ s)$
라 하면
$\overrightarrow{PR}=(\sqrt{3},\ 1,\ r-p)$, $\overrightarrow{QS}=(0,\ 2,\ s-q)$
$\therefore \overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QS}=(\sqrt{3},\ 3,\ -p-q+r+s)$
$\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{QS}=(\sqrt{3},\ -1,\ -p+q+r-s)$
$\therefore |\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QS}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2+(-p-q+r+s)^2}$
$=\sqrt{(-p-q+r+s)^2+12}$
$|\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{QS}|$
$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2+(-p+q+r-s)^2}$
$=\sqrt{(-p+q+r-s)^2+4}$
따라서 $p=q=0$, $r=s=2$일 때 $|\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QS}|$가 최대이므로
$M=\sqrt{4^2+12}=2\sqrt{7}$
$p=s=0$, $q=r=2$일 때 $|\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{QS}|$가 최대이므로
$m=\sqrt{4^2+4}=2\sqrt{5}$
$\therefore M^2+m^2=28+20=48$ 답 ⑤

16 전략 삼수선의 정리를 이용하여 먼저 두 벡터가 이루는 각의 크기에 대한 코사인 값을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 종이를 접기 전에 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB'}$이므로



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}$
점 B에서 평면 ACD에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AB′에 내린 수선의 발을 F라 하면 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{BF}\perp\overline{AB'}$
이때 $\angle BAE=\angle CAB'=\theta$로 놓으면 $\triangle CAB'$에서
$$\cos\theta=\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}}=\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}$$
따라서 $\triangle AEB$에서
$$\overline{AE}=\overline{AB}\cos\theta=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$$
$\triangle AFE$에서
$$\overline{AF}=\overline{AE}\cos\theta=\frac{9}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{27}{25}$$
이므로 $\triangle BAF$에서
$$\cos(\angle BAF)=\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{27}{25}}{3}=\frac{9}{25}$$
$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}$
$=\overline{AB}\times\overline{AB'}\times\cos(\angle BAB')$
$=3\times3\times\frac{9}{25}=\frac{81}{25}$

따라서 $a=25$, $b=81$이므로

$$a+b=106$$

답 106

17 문제이해 • 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$\overrightarrow{CM}=\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}$$

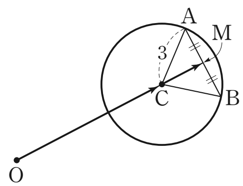
$$\therefore\ \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CM}$$

두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CM}$이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{OC}$$
$$=2|\overrightarrow{CM}||\overrightarrow{OC}|\cos\theta$$

➔ 30% 배점

해결과정 • $\overline{AB}=2$에서



$$|\overrightarrow{CM}|$$
$$=\sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2}$$
$$=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$$

이고 $C(3,\ 4,\ 5)$에서

$$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}$$
$$=5\sqrt{2}$$

또 $\cos\theta$의 값은 위의 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CM}$의 방향이 서로 같을 때 최대이므로

$$\cos\theta\le 1$$

➔ 50% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 최댓값은

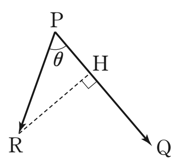
$$2\times2\sqrt{2}\times5\sqrt{2}\times1=40$$

➔ 20% 배점

답 40

18 전략 점 R에서 선분 PQ에 수선의 발을 내려 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$를 정사영을 이용한 식으로 나타낸다.

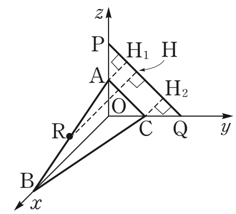
풀이 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$$
$$=|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|\cos\theta$$
$$=|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|\times\frac{|\overrightarrow{PH}|}{|\overrightarrow{PR}|}$$
$$=|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PH}|$$

이때 $|\overrightarrow{PQ}|$는 일정하므로 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$는 $|\overrightarrow{PH}|$, 즉 $\overline{PH}$의 길이가 최대, 최소일 때 각각 최댓값과 최솟값을 갖는다.

한편 두 점 A, C에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 점 H는 선분 H_1H_2 위에 놓이므로



$$\overline{PH_1}\le\overline{PH}\le\overline{PH_2}$$

이때

$$\overline{PH_1}=\overline{QH_2}=\frac{1}{2}(\overline{PQ}-\overline{H_1H_2})$$
$$=\frac{1}{2}(\overline{PQ}-\overline{AC})$$
$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{2}-\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\overline{PH}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ M=2\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=6$$

$$m=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$$

$$\therefore\ Mm=12$$

답 12

10 도형의 방정식

유제

본책 259~288쪽

082-1 (1) $x-1=6(y+1)=3(5-z)$에서

$$\frac{x-1}{6}=y+1=\frac{z-5}{-2}$$

이므로 방향벡터는

$(6,\ 1,\ -2)$

따라서 이 직선에 평행한 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(6,\ 1,\ -2)$

이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{6}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2}$$

$$\therefore \frac{x-3}{6}=y-1=\frac{z+1}{-2}$$

(2) z축에 평행한 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(0,\ 0,\ 1)$

이므로 구하는 직선의 방정식은

$x=1,\ y=2$

답 (1) $\frac{x-3}{6}=y-1=\frac{z+1}{-2}$ (2) $x=1,\ y=2$

083-1 $4(x+1)=2(y-5)=-z$에서

$x+1=\frac{y-5}{2}=-\frac{z}{4}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t-1,\ y=2t+5,\ z=-4t$ …… ㉠

또 $\frac{x+6}{2}=5-y=\frac{10-z}{3}=s$ (s는 실수)로 놓으면

$x=2s-6,\ y=5-s,\ z=10-3s$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$t=-1,\ s=2$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(-2,\ 3,\ 4)$이다.

답 $(-2,\ 3,\ 4)$

다른 풀이 $4(x+1)=2(y-5)=-z$에서 $y,\ z$를 x로 나타내면

$y=2x+7,\ z=-4x-4$ …… ㉠

또 $\frac{x+6}{2}=5-y=\frac{10-z}{3}$에서 $y,\ z$를 x로 나타내면

$y=\frac{-x+4}{2},\ z=\frac{-3x+2}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-2,\ y=3,\ z=4$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(-2,\ 3,\ 4)$이다.

083-2 $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=14$ …… ㉠

또 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=5-z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t-1,\ y=2t+1,\ z=5-t$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2t+1)^2+(2t)^2+(2-t)^2=14$

$9t^2=9,\quad t^2=1$

$\therefore t=\pm1$

$t=-1,\ t=1$을 ㉡에 대입하면 구하는 교점의 좌표는 $(-3,\ -1,\ 6),\ (1,\ 3,\ 4)$

답 $(-3,\ -1,\ 6),\ (1,\ 3,\ 4)$

084-1 두 직선 $l,\ m$의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$, 두 직선이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하자.

(1) $\vec{u}=(-2,\ 3,\ 1),\ \vec{v}=(1,\ 2,\ 3)$이므로

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$=\frac{|(-2)\times1+3\times2+1\times3|}{\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+3^2}}$$

$$=\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\ \left(\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

(2) $\vec{u}=(3,\ -2,\ 1),\ \vec{v}=(1,\ 2,\ 1)$이므로

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$=\frac{|3\times1+(-2)\times2+1\times1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+1^2}}$$

$$=\frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=0$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{2}\ \left(\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

답 (1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{2}$

084-2 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 1,\ 3),\ \mathrm{B}(1,\ -3,\ 4)$를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ -3,\ 4)-(2,\ 1,\ 3)$

$=(-1,\ -4,\ 1)$

또 두 점 $C(-3,\ 2,\ -1)$, $D(-1,\ 4,\ 0)$을 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면

$$\vec{v}=\overrightarrow{CD}=(-1,\ 4,\ 0)-(-3,\ 2,\ -1)$$
$$=(2,\ 2,\ 1)$$

두 점 A, B를 지나는 직선과 두 점 C, D를 지나는 직선이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$
$$=\frac{|(-1)\times2+(-4)\times2+1\times1|}{\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+2^2+1^2}}$$
$$=\frac{9}{3\sqrt{2}\times3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}\ \left(\because\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

답 $\frac{\pi}{4}$

085-1 직선 m의 방정식에서

$$\frac{x-1}{2k}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{3}$$

따라서 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$$\vec{u}=(-2,\ 5,\ k+1),\ \vec{v}=(2k,\ -2,\ 3)$$

이때 두 직선이 서로 수직이면 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$$(-2,\ 5,\ k+1)\cdot(2k,\ -2,\ 3)=0$$
$$-4k-10+3(k+1)=0$$
$$-k-7=0\qquad\therefore\ k=-7$$

답 -7

085-2 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$$\vec{u}=(a,\ b,\ 3),\ \vec{v}=(2,\ a+1,\ 4)$$

이때 두 직선이 서로 평행하므로

$$\vec{u}=t\vec{v}\ (t\ne0)$$
$$(a,\ b,\ 3)=t(2,\ a+1,\ 4)$$
$$\therefore\ a=2t,\ b=(a+1)t,\ 3=4t$$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$$t=\frac{3}{4},\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{15}{8}$$

답 $a=\frac{3}{2},\ b=\frac{15}{8}$

다른 풀이 두 직선이 서로 평행하려면 두 직선의 방향벡터가 서로 평행해야 한다.
두 직선 l, m의 방향벡터가 각각 $(a,\ b,\ 3)$, $(2,\ a+1,\ 4)$이므로

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{a+1}=\frac{3}{4}\qquad\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{15}{8}$$

086-1 $x-2=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$$x=t+2,\ y=3t,\ z=2t+1$$

점 A에서 주어진 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 이 직선 위의 점이므로 $H(t+2,\ 3t,\ 2t+1)$이라 할 수 있다.

$$\therefore\ \overrightarrow{AH}=(t+2,\ 3t,\ 2t+1)-(3,\ 5,\ 7)$$
$$=(t-1,\ 3t-5,\ 2t-6)$$

이때 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면
$\vec{u}=(1,\ 3,\ 2)$이고, $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$이므로

$$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$$
$$(t-1,\ 3t-5,\ 2t-6)\cdot(1,\ 3,\ 2)=0$$
$$t-1+3(3t-5)+2(2t-6)=0$$
$$14t-28=0\qquad\therefore\ t=2$$

따라서 $\overrightarrow{AH}=(1,\ 1,\ -2)$이므로 구하는 거리는

$$\overline{AH}=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}$$
$$=\sqrt{6}$$

답 $\sqrt{6}$

다른 풀이 점 A와 주어진 직선 사이의 거리는 점 A와 그 직선 위의 임의의 점 사이의 거리의 최솟값과 같다. 주어진 직선 위의 임의의 점을 P라 하면 점 P의 좌표는 $(t+2,\ 3t,\ 2t+1)$ (t는 실수)이므로

$$\overline{AP}=\sqrt{(t-1)^2+(3t-5)^2+(2t-6)^2}$$
$$=\sqrt{14t^2-56t+62}$$
$$=\sqrt{14(t-2)^2+6}$$

따라서 $\overline{AP}$의 길이의 최솟값은 $t=2$일 때 $\sqrt{6}$이다.

086-2 $\frac{x-2}{2}=y+1=z+2=t$ (t는 실수)로 놓으면

$$x=2t+2,\ y=t-1,\ z=t-2$$

점 A에서 주어진 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 이 직선 위의 점이므로 $H(2t+2,\ t-1,\ t-2)$라 할 수 있다.

$$\therefore\ \overrightarrow{AH}=(2t+2,\ t-1,\ t-2)-(2,\ -1,\ a-2)$$
$$=(2t,\ t,\ t-a)$$

이때 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면
$\vec{u}=(2,\ 1,\ 1)$이고, $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$이므로

$$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$$
$$(2t,\ t,\ t-a)\cdot(2,\ 1,\ 1)=0$$
$$4t+t+t-a=0,\qquad 6t-a=0$$
$$\therefore\ a=6t$$

따라서 $\overrightarrow{AH}=(2t,\ t,\ -5t)$이므로

$$\overline{AH}=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{(2t)^2+t^2+(-5t)^2}$$
$$=\sqrt{30t^2}$$

즉 $\sqrt{30t^2}=\sqrt{30}$이므로 $\quad t=\pm1$

$\therefore a=6$ ($\because a>0$)

답 6

087-1 (1) 주어진 직선의 방향벡터가 $(-1,\ 3,\ 2)$이므로 구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{n}=(-1,\ 3,\ 2)$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$-(x-4)+3(y+1)+2(z-2)=0$

$\therefore x-3y-2z-3=0$

(2) 주어진 평면의 법선벡터가 $(4,\ -3,\ 5)$이므로 구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{n}=(4,\ -3,\ 5)$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$4(x-2)-3(y-3)+5(z+2)=0$

$\therefore 4x-3y+5z+11=0$

답 풀이 참조

088-1 구하는 평면의 방정식을

$ax+by+cz+d=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이라 하면 이 평면이 세 점 A, B, C를 지나므로

$a+b-c+d=0$,

$-a+2b+c+d=0$,

$-2a+b-4c+d=0$

위의 세 식에서 b, c, d를 a로 나타내면

$b=4a,\ c=-a,\ d=-6a \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$ax+4ay-az-6a=0$

$a\neq0$이므로 위의 식의 양변을 a로 나누면 구하는 평면의 방정식은

$x+4y-z-6=0$

답 $x+4y-z-6=0$

다른 풀이 구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$라 하면

$\overrightarrow{AB}\perp\vec{n},\ \overrightarrow{AC}\perp\vec{n}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$에서

$(-2,\ 1,\ 2)\cdot(a,\ b,\ c)=0$

$\therefore -2a+b+2c=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0$에서

$(-3,\ 0,\ -3)\cdot(a,\ b,\ c)=0$

$\therefore -3a-3c=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 b, c를 a로 나타내면

$b=4a,\ c=-a$

따라서 구하는 평면은 점 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ -1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ 4a,\ -a)$이므로 그 방정식은

$a(x-1)+4a(y-1)-a(z+1)=0$

$a\neq0$이므로 위의 식의 양변을 a로 나누면 구하는 평면의 방정식은

$x+4y-z-6=0$

089-1 두 점 $(-1,\ 6,\ 8)$, $(3,\ 0,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-(-1)}{3-(-1)}=\frac{y-6}{0-6}=\frac{z-8}{4-8}$$

$$\therefore \frac{x+1}{2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-8}{-2}$$

$\frac{x+1}{2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-8}{-2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t-1,\ y=-3t+6,\ z=-2t+8$

이고 직선과 평면의 교점을 A라 하면 점 A는 직선 위의 점이므로 $\mathrm{A}(2t-1,\ -3t+6,\ -2t+8)$로 놓을 수 있다.

이때 점 A는 평면 $x-2y+z=1$ 위의 점이므로

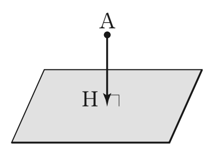
$2t-1-2(-3t+6)+(-2t+8)=1$

$6t=6 \quad \therefore t=1$

따라서 $\mathrm{A}(1,\ 3,\ 6)$이므로 교점의 z좌표는 6이다.

답 6

089-2 벡터 $\overrightarrow{AH}$와 평면 $4x-5y+3z=0$은 서로 수직이므로 직선 AH의 방향벡터는 주어진 평면의 법선벡터 $(4,\ -5,\ 3)$과 같다.



따라서 직선 AH의 방정식은

$$\frac{x-7}{4}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z-9}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\frac{x-7}{4}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z-9}{3}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=4t+7,\ y=-5t+1,\ z=3t+9$

이고 점 H는 직선 ㉠ 위의 점이므로

$\mathrm{H}(4t+7,\ -5t+1,\ 3t+9)$로 놓을 수 있다.

이때 점 H는 평면 $4x-5y+3z=0$ 위의 점이므로

$4(4t+7)-5(-5t+1)+3(3t+9)=0$

$50t+50=0 \quad \therefore t=-1$

따라서 점 H의 좌표는 $(3,\ 6,\ 6)$이다.

답 $\mathrm{H}(3,\ 6,\ 6)$

090-1 평면 α에 대하여 점 A와 대칭인 점을 $\mathrm{A}'(a,\ b,\ c)$라 하면 선분 AA'의 중점 $\left(\frac{a-4}{2},\ \frac{b+1}{2},\ \frac{c+3}{2}\right)$은 평면 α 위에 있으므로

$$3\times\frac{a-4}{2}-\frac{b+1}{2}+2\times\frac{c+3}{2}=7$$

$\therefore\ 3a-b+2c-21=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{n}=(3,\ -1,\ 2)$이고, $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}\,/\!/\,\vec{n}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AA}'}=t\vec{n}\ (t\neq0)$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}=(a+4,\ b-1,\ c-3)$이므로

$(a+4,\ b-1,\ c-3)=t(3,\ -1,\ 2)$

$a+4=3t,\ b-1=-t,\ c-3=2t$

$\therefore\ a=3t-4,\ b=-t+1,\ c=2t+3$ $\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3(3t-4)-(-t+1)+2(2t+3)-21=0$

$14t-28=0\qquad\therefore\ t=2$

$t=2$를 ㉡에 대입하면 $a=2,\ b=-1,\ c=7$이므로 구하는 점의 좌표는

$(2,\ -1,\ 7)$

답 $(2,\ -1,\ 7)$

091-1 $2x+3y+z-4=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x-y+z-1=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 z를 소거하면

$x+4y-3=0\qquad\therefore\ y=\frac{3-x}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉢

또 ㉠, ㉡에서 x를 소거하면

$5y-z-2=0\qquad\therefore\ y=\frac{z+2}{5}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 구하는 교선의 방정식은

$\frac{3-x}{4}=y=\frac{z+2}{5}$

답 $\frac{3-x}{4}=y=\frac{z+2}{5}$

091-2 주어진 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식을

$x-2y+z+3+k(3x+y-z-1)=0$

(k는 실수)

이라 하면 이 평면이 점 $(1,\ -1,\ 2)$를 지나므로

$1+2+2+3+k(3-1-2-1)=0$

$8-k=0\qquad\therefore\ k=8$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$x-2y+z+3+8(3x+y-z-1)=0$

$\therefore\ 25x+6y-7z-5=0$

답 $25x+6y-7z-5=0$

092-1 두 평면의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(3,\ -1,\ 2),\ \overrightarrow{n_2}=(2,\ 1,\ 3)$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

$$=\frac{|3\times2+(-1)\times1+2\times3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+3^2}}$$

$$=\frac{11}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{11}{14}$$

$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

답 $\frac{5\sqrt{3}}{14}$

092-2 두 평면의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(1,\ k-1,\ 2-k),\ \overrightarrow{n_2}=(1,\ 2,\ -2)$

두 평면이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$$\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{|1\times1+2(k-1)-2(2-k)|}{\sqrt{1^2+(k-1)^2+(2-k)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{|4k-5|}{3\sqrt{2(k^2-3k+3)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$|4k-5|=3\sqrt{k^2-3k+3}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$16k^2-40k+25=9(k^2-3k+3)$

$7k^2-13k-2=0,\qquad(7k+1)(k-2)=0$

$\therefore\ k=-\frac{1}{7}\ (\because\ k<0)$

답 $-\frac{1}{7}$

093-1 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{n}$이라 하면

$\vec{u}=(3,\ 5,\ 4),\ \vec{n}=(4,\ 5,\ -3)$

직선과 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$$

$$=\frac{|3\times4+5\times5+4\times(-3)|}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\sqrt{4^2+5^2+(-3)^2}}$$

$$=\frac{25}{\sqrt{50}\sqrt{50}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}\ \left(\because\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

답 $\frac{\pi}{6}$

094-1 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(2,\ k-3,\ 1)$, $\overrightarrow{n_2}=(k+2,\ -2,\ 2)$

두 평면이 서로 평행하면

$\overrightarrow{n_1}=t\,\overrightarrow{n_2}$ (t는 실수)

$(2,\ k-3,\ 1)=t(k+2,\ -2,\ 2)$

즉 $2=t(k+2)$, $k-3=-2t$, $1=2t$이므로

$t=\dfrac{1}{2}$, $k=2$

답 2

094-2 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{n}$이라 하면

$\vec{u}=(4,\ 1-k,\ k)$, $\vec{n}=(1,\ k,\ 2)$

직선과 평면이 평행하려면 $\vec{u}\perp\vec{n}$이어야 하므로

$\vec{u}\cdot\vec{n}=0$, $\quad(4,\ 1-k,\ k)\cdot(1,\ k,\ 2)=0$

$4+k(1-k)+2k=0$

$k^2-3k-4=0$, $\quad(k+1)(k-4)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=4$

답 -1, 4

095-1 법선벡터가 $\vec{n}=(3,\ -5,\ 4)$이므로 평면의 방정식을 $3x-5y+4z+d=0$이라 하자.
원점과 이 평면 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|d|}{\sqrt{3^2+(-5)^2+4^2}}=\sqrt{2}$$

$$\frac{|d|}{5\sqrt{2}}=\sqrt{2}\qquad\therefore d=\pm10$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$3x-5y+4z-10=0$,

$3x-5y+4z+10=0$

답 $3x-5y+4z-10=0$, $3x-5y+4z+10=0$

095-2 평면의 법선벡터는 $\overrightarrow{OA}=(-3,\ 5,\ 4)$이므로 점 A를 지나고 직선 OA에 수직인 평면의 방정식은

$-3(x+3)+5(y-5)+4(z-4)=0$

$\therefore 3x-5y-4z+50=0$

점 $(a,\ 0,\ 7)$과 평면 $3x-5y-4z+50=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|3a-5\times0-4\times7+50|}{\sqrt{3^2+(-5)^2+(-4)^2}}=\sqrt{2}$$

$$\frac{|3a+22|}{5\sqrt{2}}=\sqrt{2},\qquad |3a+22|=10$$

$3a+22=-10$ 또는 $3a+22=10$

$\therefore a=-\dfrac{32}{3}$ 또는 $a=-4$

따라서 구하는 정수 a의 값은 -4이다.

답 -4

096-1 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y+4,\ z)$,

$\overrightarrow{BP}=(x-1,\ y-2,\ z+3)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서

$(x-3,\ y+4,\ z)\cdot(x-1,\ y-2,\ z+3)=0$

$(x-3)(x-1)+(y+4)(y-2)+z(z+3)=0$

$x^2-4x+3+y^2+2y-8+z^2+3z=0$

$$(x-2)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\dfrac{7}{2}$인 구이므로 구하는 겉넓이는

$4\pi\times\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=49\pi$

답 49π

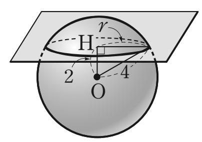
다른 풀이 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서 $\angle APB=90°$이므로 점 P가 나타내는 도형은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 구이다.

$\overline{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(2+4)^2+(-3)^2}=7$이므로 구의 반지름의 길이는 $\dfrac{7}{2}$

따라서 구하는 겉넓이는

$4\pi\times\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=49\pi$

097-1 오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 $O(0,\ 0,\ 0)$, 점 O에서 주어진 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OH}=\frac{|-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2$$

이때 구의 반지름의 길이는 4이므로 단면인 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r^2=4^2-2^2=12$

따라서 구하는 단면의 넓이는

$\pi r^2=12\pi$

답 12π

098-1 $x^2+y^2+z^2-2y+4z-6=0$에서

$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=11$

이므로 구의 중심을 C라 하면 $\quad C(0,\ 1,\ -2)$

$$\therefore \overrightarrow{CA}=(1,\ -2,\ -3)-(0,\ 1,\ -2)$$
$$=(1,\ -3,\ -1)$$

이때 벡터 $\overrightarrow{CA}$는 구하는 평면에 수직이므로 구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$$\vec{n}=(1,\ -3,\ -1)$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$x-1-3(y+2)-(z+3)=0$$
$$\therefore x-3y-z-10=0$$

답 $x-3y-z-10=0$

098-2 $x^2+y^2+z^2-4x+8y+3=0$에서

$$(x-2)^2+(y+4)^2+z^2=17$$

이므로 중심이 $(2,\ -4,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$인 구이다.

구와 평면이 접하면 구의 중심 $(2,\ -4,\ 0)$과 평면 $2x+ay+2z-9=0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|2\times2-4a+2\times0-9|}{\sqrt{2^2+a^2+2^2}}=\sqrt{17}$$
$$\frac{|-4a-5|}{\sqrt{a^2+8}}=\sqrt{17}$$
$$|-4a-5|=\sqrt{17(a^2+8)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2-40a+111=0, \qquad (a-3)(a-37)=0$$

이때 $0<a<10$이므로 $\qquad a=3$

답 3

중단원 연습 문제

본책 289~293쪽

01 ③	**02** $\frac{3-x}{2}=\frac{1-y}{3}=\frac{z+1}{5}$		**03** 5
04 ③	**05** $x+y-z-1=0$	**06** ⑤	**07** 10
08 3	**09** $6x+9y-7z-3=0$		**10** ③
11 ①	**12** $\frac{\sqrt{30}}{4}$	**13** ② **14** ②	**15** ②
16 풀이 참조	**17** 53	**18** -2	**19** 36
20 $\frac{27\sqrt{5}}{4}$	**21** ①	**22** $3\sqrt{3}$	**23** $8\sqrt{5}$

01 전략 방향벡터가 서로 같은 직선을 찾은 후 같은 점을 지나는지 확인한다.

풀이 ㄱ. 직선 $\vec{x}=(3,\ 1,\ 1)+t(-1,\ 2,\ 1)$의 방향벡터는 $\quad(-1,\ 2,\ 1)$

ㄴ. 직선 $-x+2=2y+3=z+2$에서

$\frac{x-2}{-2}=y+\frac{3}{2}=\frac{z+2}{2}$이므로 이 직선의 방향벡터는 $\quad(-2,\ 1,\ 2)$

ㄷ. 직선 $-x=\frac{y-1}{2}=z-1$의 방향벡터는

$(-1,\ 2,\ 1)$

ㄹ. 주어진 식에서 t를 소거하면

$$-x+7=\frac{y+7}{2}=z+3$$

이므로 이 직선의 방향벡터는

$(-1,\ 2,\ 1)$

ㄱ, ㄷ, ㄹ의 방향벡터가 서로 같으므로 ㄱ, ㄷ, ㄹ은 서로 평행한 직선이다.

이때 ㄱ의 직선이 점 $(3,\ 1,\ 1)$을 지나므로 ㄷ, ㄹ의 직선이 점 $(3,\ 1,\ 1)$을 지나는지 확인해야 한다.

ㄷ의 방정식에 $x=3$, $y=1$, $z=1$을 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 이 직선은 점 $(3,\ 1,\ 1)$을 지나지 않는다.

ㄹ의 방정식에 $x=3$, $y=1$, $z=1$을 대입하면 등식이 성립하므로 이 직선은 점 $(3,\ 1,\ 1)$을 지난다.

이상에서 ㄱ과 ㄹ은 서로 같은 직선이다.

답 ③

02 전략 두 직선을 각각 매개변수방정식으로 나타낸다.

풀이 $x-2=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$$x=t+2,\ y=2t-1,\ z=2t-3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{3-z}{4}=s$ (s는 실수)로 놓으면

$$x=2s+1,\ y=3s-2,\ z=3-4s \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$t=1,\ s=1$$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(3,\ 1,\ -1)$이므로 두 점 $(3,\ 1,\ -1)$, $(1,\ -2,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{1-3}=\frac{y-1}{-2-1}=\frac{z+1}{4+1}$$

$$\therefore \frac{3-x}{2}=\frac{1-y}{3}=\frac{z+1}{5}$$

답 $\frac{3-x}{2}=\frac{1-y}{3}=\frac{z+1}{5}$

03 전략 두 직선이 평행하면 두 직선의 방향벡터가 평행함을 이용한다.

풀이 주어진 두 직선의 방정식을 변형하면

$$l: \frac{2x+1}{a}=\frac{y}{4}=\frac{z+6}{8}$$

$$m: \frac{x+5}{b}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-1}{a}$$

두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$$\vec{u}=\left(\frac{a}{2},\ 4,\ 8\right),\ \vec{v}=(b,\ 2,\ a)$$

두 직선 l, m이 서로 평행하므로

$$\vec{u}=k\vec{v}\ (k\text{는 실수})$$

$$\left(\frac{a}{2},\ 4,\ 8\right)=k(b,\ 2,\ a)=(bk,\ 2k,\ ak)$$

즉 $\frac{a}{2}=bk,\ 4=2k,\ 8=ak$이므로

$$k=2,\ a=4,\ b=1$$

$$\therefore a+b=5$$

답 5

04 전략 직선과 평면이 서로 수직이면 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터가 서로 평행함을 이용한다.

풀이 두 점 P$(2,\ 3,\ 4)$, Q$(1,\ 4,\ 3)$을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{PQ}=(1,\ 4,\ 3)-(2,\ 3,\ 4)$$
$$=(-1,\ 1,\ -1)$$

이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선과 수직인 평면의 법선벡터는 벡터 $\overrightarrow{PQ}=(-1,\ 1,\ -1)$과 평행하다.
따라서 보기 중 법선벡터가 $(-1,\ 1,\ -1)$과 평행한 평면은 ③이다.

답 ③

05 문제이해 • 주어진 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식을

$$2x+5y-6z-3+k(x-2y+3z)=0$$

(k는 실수)

즉 $(2+k)x+(5-2k)y+(-6+3k)z-3=0$으로 놓자. ➔ 30% 배점

해결과정 • 이 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$$\vec{n}=(2+k,\ 5-2k,\ -6+3k)$$

이때 벡터 $\vec{h}$와 구하는 평면이 평행하므로 두 벡터 $\vec{h}$, $\vec{n}$은 서로 수직이다.

즉 $\vec{h}\perp\vec{n}$이므로 $\quad \vec{h}\cdot\vec{n}=0$ ➔ 30% 배점

$$(2,\ -1,\ 1)\cdot(2+k,\ 5-2k,\ -6+3k)=0$$

$$4+2k-5+2k-6+3k=0,\quad 7k-7=0$$

$$\therefore k=1$$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 평면의 방정식은

$$3x+3y-3z-3=0$$

$$\therefore x+y-z-1=0$$ ➔ 20% 배점

답 $x+y-z-1=0$

06 전략 두 평면이 평행하면 두 평면의 법선벡터가 평행하고, 두 평면이 수직이면 두 평면의 법선벡터가 수직임을 이용한다.

풀이 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$$\overrightarrow{n_1}=(2,\ k,\ -1),\ \overrightarrow{n_2}=(k,\ 8,\ 2)$$

α, β가 서로 평행하므로 $\quad \overrightarrow{n_1}=s\overrightarrow{n_2}$ (s는 실수)

$$(2,\ k,\ -1)=s(k,\ 8,\ 2)=(sk,\ 8s,\ 2s)$$

즉 $2=sk,\ k=8s,\ -1=2s$이므로

$$s=-\frac{1}{2},\ k=-4$$

두 평면 γ, δ의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_3}$, $\overrightarrow{n_4}$라 하면

$$\overrightarrow{n_3}=(1,\ 1,\ -2a),\ \overrightarrow{n_4}=(3,\ a,\ 1)$$

γ, δ가 서로 수직이므로

$$\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{n_4}=0$$

$$(1,\ 1,\ -2a)\cdot(3,\ a,\ 1)=0$$

$$3+a-2a=0\quad \therefore a=3$$

$$\therefore a-k=7$$

답 ⑤

07 전략 구가 평면에 접하면 구의 반지름의 길이는 구의 중심과 평면 사이의 거리와 같다.

풀이 구의 반지름의 길이를 r라 하면 구가 평면에 접하므로 구의 중심 $(1,\ 1,\ 1)$과 평면 $x+2y-2z=31$, 즉 $x+2y-2z-31=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 r와 같다.

$$\therefore r=\frac{|1\times1+2\times1-2\times1-31|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{30}{3}=10$$

답 10

08 문제이해 • 주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면 $\vec{n}=(a,\ 1,\ -1)$이고 이 평면과 수직인 직선의 방향벡터는 $\vec{n}$과 평행하다. 따라서 점 $(0,\ 2,\ -3)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{n}$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-1}$$

$$\therefore\ \frac{x}{a}=y-2=-z-3$$

$\frac{x}{a}=y-2=-z-3=t$ (t는 실수)로 놓으면

$$x=at,\ y=t+2,\ z=-t-3$$

따라서 이 직선 위의 점의 좌표를 $(at,\ t+2,\ -t-3)$으로 놓을 수 있다. ➔ 30% 배점

해결과정 • 점 $(at,\ t+2,\ -t-3)$을 $x^2+y^2+z^2=8$에 대입하면

$$(at)^2+(t+2)^2+(-t-3)^2=8$$

$$\therefore\ (a^2+2)t^2+10t+5=0\ \cdots\ ㉠$$ ➔ 30% 배점

이때 t에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수가 구와 직선의 교점의 개수와 같으므로 구와 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=5^2-5(a^2+2)>0,\qquad a^2<3$$

$$\therefore\ -\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 정수 a의 개수는 $-1,\ 0,\ 1$의 3이다. ➔ 10% 배점

답 3

09 문제이해 • 구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$라 하면 평면의 방정식은

$$a(x-2)+b(y+1)+cz=0$$

$$\therefore\ ax+by+cz-2a+b=0\ \cdots\ ㉠$$ ➔ 20% 배점

해결과정 • $\frac{x-1}{2}=y-2=\frac{z-3}{3}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$$x=2t+1,\ y=t+2,\ z=3t+3$$

이므로 직선 위의 임의의 점을 P라 하면 $\mathrm{P}(2t+1,\ t+2,\ 3t+3)$으로 놓을 수 있다.

이때 점 P는 평면 ㉠ 위의 점이므로

$$a(2t+1)+b(t+2)+c(3t+3)-2a+b=0$$

$$\therefore\ (2a+b+3c)t-a+3b+3c=0$$ ➔ 30% 배점

위의 식은 t에 대한 항등식이므로

$$2a+b+3c=0,\ -a+3b+3c=0$$

앞의 두 식에서 $b,\ c$를 a로 나타내면

$$b=\frac{3}{2}a,\ c=-\frac{7}{6}a\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • ㉡을 ㉠에 대입하면

$$ax+\frac{3}{2}ay-\frac{7}{6}az-2a+\frac{3}{2}a=0$$

$a\neq0$이므로 위의 식의 양변을 a로 나누면 구하는 평면의 방정식은

$$6x+9y-7z-3=0$$ ➔ 20% 배점

답 $6x+9y-7z-3=0$

다른 풀이 구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$라 하면 평면의 방정식은

$$a(x-2)+b(y+1)+cz=0\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

이때 주어진 직선 위의 두 점 $(1,\ 2,\ 3)$, $(-1,\ 1,\ 0)$은 평면 ㉠ 위에 있으므로

$$-a+3b+3c=0,\ -3a+2b=0$$

위의 두 식에서 $b,\ c$를 a로 나타내면

$$b=\frac{3}{2}a,\ c=-\frac{7}{6}a\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$6x+9y-7z-3=0\ (\because\ a\neq0)$$

10 전략 점 H의 좌표를 매개변수로 나타낸다.

풀이 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면 $\vec{n}=(1,\ -1,\ -1)$이고 α와 수직인 직선은 $\vec{n}$과 평행하다. 따라서 점 $\mathrm{P}(1,\ 1,\ 2)$를 지나고 $\vec{n}$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$$

$$\therefore\ x-1=1-y=2-z\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

$x-1=1-y=2-z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$$x=t+1,\ y=1-t,\ z=2-t$$

점 H는 직선 ㉠ 위의 점이므로 $\mathrm{H}(t+1,\ 1-t,\ 2-t)$로 놓을 수 있다.

이때 점 H는 평면 α 위의 점이므로

$$t+1-(1-t)-(2-t)=0$$

$$3t-2=0\qquad\therefore\ t=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \mathrm{H}\left(\frac{5}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\frac{5}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$이고, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ 3,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 0,\ 2)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$에서

$$\left(\frac{5}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)=a(3,\ 3,\ 0)+b(2,\ 0,\ 2)$$
$$=(3a+2b,\ 3a,\ 2b)$$

즉 $3a+2b=\frac{5}{3}$, $3a=\frac{1}{3}$, $2b=\frac{4}{3}$이므로

$$a=\frac{1}{9},\ b=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ a+b=\frac{7}{9}$$

답 ③

11 전략 두 평면의 교선의 방정식은 두 평면의 방정식을 연립하여 한 문자에 대한 방정식으로 나타낸다.

풀이 $x-2z-7=0$에서 $\quad z=\frac{x-7}{2}$

$y-3z-14=0$에서 $\quad z=\frac{y-14}{3}$

따라서 직선 l의 방정식은

$$\frac{x-7}{2}=\frac{y-14}{3}=z$$

$\frac{x-7}{2}=\frac{y-14}{3}=z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$$x=2t+7,\ y=3t+14,\ z=t$$

따라서 원점에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 l 위의 점이므로 $\mathrm{H}(2t+7,\ 3t+14,\ t)$로 놓을 수 있다.

이때 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(2,\ 3,\ 1)$이고, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\vec{u}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{u}=0$$
$$(2t+7,\ 3t+14,\ t)\cdot(2,\ 3,\ 1)=0$$
$$2(2t+7)+3(3t+14)+t=0$$
$$14t+56=0 \qquad \therefore\ t=-4$$

따라서 $\mathrm{H}(-1,\ 2,\ -4)$이므로

$$a=-1,\ b=2,\ c=-4$$
$$\therefore\ a+b+c=-3$$

답 ①

12 전략 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각의 크기를 이용하여 △OAB의 넓이를 구한다.

풀이 직선 l은 두 평면 $x-y=2$, $2x-z=5$의 교선이다.

$x-y=2$에서 $\quad x=y+2$

$2x-z=5$에서 $\quad x=\frac{z+5}{2}$

이므로 직선 l의 방정식은

$$x=y+2=\frac{z+5}{2}$$

두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$, $(2,\ 0,\ -1)$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right),\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 0,\ -1)$$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$$
$$=\frac{\frac{5}{2}\times2}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{\frac{10}{13}}$$
$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{10}{13}}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{39}}{13}$$

따라서 △OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{26}}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{39}}{13}$$
$$=\frac{\sqrt{30}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{30}}{4}$

13 전략 점 D에서 면 ABC에 내린 수선의 발이 △ABC의 무게중심과 일치함을 이용한다.

풀이 점 D의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하고 △ABC의 무게중심을 G라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{GD}}=(a-1,\ b-1,\ c-3)$$

점 D에서 면 ABC에 내린 수선의 발은 점 G와 일치하므로 $\overrightarrow{\mathrm{GD}}$는 평면 $2x-y+z=4$에 수직이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{GD}}$는 평면 $2x-y+z=4$의 법선벡터 $\vec{n}=(2,\ -1,\ 1)$과 평행하므로

$$\overrightarrow{\mathrm{GD}}=t\vec{n}\ (t\text{는 실수})$$
$$(a-1,\ b-1,\ c-3)=t(2,\ -1,\ 1)$$
$$a-1=2t,\ b-1=-t,\ c-3=t$$
$$\therefore\ a=2t+1,\ b=-t+1,\ c=t+3$$

이때 점 $\mathrm{D}(2t+1,\ -t+1,\ t+3)$은 평면 $x+y+z=3$ 위의 점이므로

$$(2t+1)+(-t+1)+(t+3)=3$$
$$2t+5=3 \qquad \therefore\ t=-1$$

따라서 $a=-1,\ b=2,\ c=2$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{GD}}=(-2,\ 1,\ -1)$

$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{GD}}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이를 x라 하면

$\overline{\mathrm{AG}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

따라서 △ADG에서

$x^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2+(\sqrt{6})^2,\qquad \dfrac{2}{3}x^2=6$

$\therefore\ x=3\ (\because\ x>0)$

답 ②

14 (전략) 한 평면 위의 점과 다른 평면 사이의 거리를 구한다.

풀이 점 $(a,\ b,\ c)$가 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위에 있으므로 $\quad a^2+b^2+c^2=4$

두 평면 $\alpha,\ \beta$는 서로 평행하므로 두 평면 사이의 거리는 평면 β 위의 한 점 $\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{c}\right)$과 평면 α 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{\left|a\times\dfrac{1}{a}+b\times\dfrac{1}{b}+c\times\dfrac{1}{c}-1\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{2}{\sqrt{4}}=1$$

답 ②

다른 풀이 점 $(a,\ b,\ c)$가 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위의 점이므로 $\quad a^2+b^2+c^2=4$

원점과 평면 α 사이의 거리는

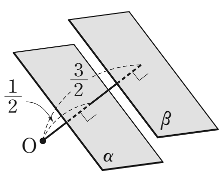
$$\frac{|-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$$

또 원점과 평면 β 사이의 거리는

$$\frac{|-3|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{3}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$$

이때 두 평면이 평행하므로 오른쪽 그림에서 구하는 두 평면 사이의 거리는

$\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1$



15 (전략) 구의 중심과 평면 사이의 거리를 이용한다.

풀이 구의 중심의 좌표가 $(1,\ 2,\ 3)$이므로 구의 중심과 평면 $x+y+z=10$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\times1+1\times2+1\times3-10|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

구의 반지름의 길이가 1이므로 구하는 최솟값은

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}-1=\frac{4\sqrt{3}-3}{3}$$

답 ②

Remark

구 위의 점과 평면 사이의 거리의 최댓값은 구의 중심과 평면 사이의 거리에서 구의 반지름의 길이를 더한 값과 같다. 즉 반지름의 길이가 r인 구의 중심과 평면 사이의 거리가 l일 때, 구 위의 점과 평면 사이의 거리의 최댓값은 $l+r$, 최솟값은 $l-r$이다. (단, $l>r$)

16 문제이해 • 주어진 등식에서

$3|\vec{p}|^2+(2\vec{a}-8\vec{b})\cdot\vec{p}+(2\vec{b}+\vec{a})\cdot(2\vec{b}-\vec{a})=0$

$\{3\vec{p}-(2\vec{b}+\vec{a})\}\cdot\{\vec{p}-(2\vec{b}-\vec{a})\}=0$

$\therefore\ \left(\vec{p}-\dfrac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}\right)\cdot\{\vec{p}-(2\vec{b}-\vec{a})\}=0$

▶ 30% 배점

해결과정 • 이때 $\dfrac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{a}}{2+1}$는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 위치벡터이고,

$2\vec{b}-\vec{a}=\dfrac{2\vec{b}-\vec{a}}{2-1}$는 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점의 위치벡터이다.

▶ 30% 배점

답구하기 • 따라서 점 P의 자취는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 구이다.

▶ 40% 배점

답 풀이 참조

17 (전략) 점 A의 좌표를 구하여 구의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 $\dfrac{x}{2}=y=z+3=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t,\ y=t,\ z=t-3$

점 A가 이 직선 위에 있으므로 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(2t,\ t,\ t-3)$으로 놓을 수 있다.

또 점 A는 평면 α 위의 점이므로

$2t+2t+2(t-3)=6,\qquad 6t-6=6$

$\therefore\ t=2$

$\therefore\ \mathrm{A}(4,\ 2,\ -1)$

중심이 점 $(1,\ -1,\ 5)$이고 점 $\mathrm{A}(4,\ 2,\ -1)$을 지나는 구의 반지름의 길이는

$\sqrt{(4-1)^2+(2+1)^2+(-1-5)^2}=3\sqrt{6}$

구의 중심 $(1,\ -1,\ 5)$와 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|1\times1+2\times(-1)+2\times5-6|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$$

따라서 구와 평면이 만나서 생기는 도형인 원의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(3\sqrt{6})^2-1^2}=\sqrt{53}$$

이므로 원의 넓이는

$$\pi\times(\sqrt{53})^2=53\pi$$

$$\therefore k=53$$

답 53

18 전략 평면과 구가 접하면 구의 중심과 평면 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같다.

풀이 구 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1$의 중심 $(1,\ 0,\ -1)$과 평면 $x-2y+2z+d=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|1\times1-2\times0+2\times(-1)+d|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=1$$

$$|d-1|=3$$

$d-1=-3$ 또는 $d-1=3$

$\therefore d=-2$ 또는 $d=4$ ...... ㉠

구 $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=1$의 중심 $(-1,\ 1,\ 4)$와 평면 $x-2y+2z+d=0$ 사이의 거리도 구의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|1\times(-1)-2\times1+2\times4+d|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=1$$

$$|d+5|=3$$

$d+5=-3$ 또는 $d+5=3$

$\therefore d=-8$ 또는 $d=-2$ ...... ㉡

주어진 평면이 두 구에 동시에 접하므로 ㉠, ㉡에서

$$d=-2$$

답 -2

19 해결과정 • $\mathrm{P}\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ 0\right)$이라 하면 평면 α는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 법선벡터로 하고 점 P를 지나므로 평면 α의 방정식은

$$\frac{4}{5}\left(x-\frac{4}{5}\right)+\frac{3}{5}\left(y-\frac{3}{5}\right)+0\times(z-0)=0$$

$\therefore 4x+3y-5=0$ ➔ 20% 배점

또 $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$라 하면 평면 β는 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 법선벡터로 하고 점 Q를 지나므로 평면 β의 방정식은

$$0\times(x-0)+\frac{3}{5}\left(y-\frac{3}{5}\right)+\frac{4}{5}\left(z-\frac{4}{5}\right)=0$$

$\therefore 3y+4z-5=0$ ➔ 20% 배점

두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$$\overrightarrow{n_1}=(4,\ 3,\ 0),\ \overrightarrow{n_2}=(0,\ 3,\ 4)$$

이고 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|3\times3|}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{25}$$

➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 평면 α 위의 넓이가 100인 삼각형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$$100\cos\theta=100\times\frac{9}{25}=36$$

➔ 20% 배점

답 36

20 전략 점 B를 평면 α에 대하여 대칭이동한 점이 직선 l 위의 점임을 이용한다.

풀이 점 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$의 좌표를 $x+y+2z=4$에 대입하면 등식이 성립하므로 점 A는 평면 α 위의 점이다.

점 B를 평면 α에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B}'(a,\ b,\ c)$라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{BB}'}=(a-3,\ b-p,\ c-q)$$

$\overrightarrow{\mathrm{BB}'}$과 평면 α의 법선벡터 $(1,\ 1,\ 2)$는 서로 평행하므로

$$(a-3,\ b-p,\ c-q)=t(1,\ 1,\ 2)\ (t\neq0)$$

$$a-3=t,\ b-p=t,\ c-q=2t$$

$$\therefore a=t+3,\ b=t+p,\ c=2t+q$$

이때 점 $\mathrm{B}'(t+3,\ t+p,\ 2t+q)$는 직선 l 위의 점이므로

$$t+2=\frac{t-1+p}{4}=\frac{2t-1+q}{2}$$

$$\therefore p=3t+9,\ q=5$$

따라서 $\mathrm{B}(3,\ 3t+9,\ 5)$, $\mathrm{B}'(t+3,\ 4t+9,\ 2t+5)$이므로 선분 BB'의 중점을 M이라 하면

$$\mathrm{M}\left(\frac{t+6}{2},\ \frac{7t+18}{2},\ t+5\right)$$

점 M은 평면 α 위의 점이므로

$$\frac{t+6}{2}+\frac{7t+18}{2}+2(t+5)=4$$

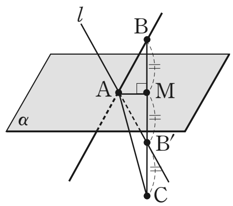
$12t=-36 \quad \therefore t=-3$

$\therefore B(3,\ 0,\ 5),\ B'(0,\ -3,\ -1),$

$M\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ 2\right)$

조건 (나)에서 $\overrightarrow{BC}$는 평면 α의 법선벡터와 평행하므로 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 점 C는 두 점 B, B′을 지나는 직선 위의 점이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 △ABC의 높이는 $\overline{AM}$의 길이와 같다. 이때



$$\overline{BC}=\frac{3}{2}\,\overline{BB'}$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt{3^2+3^2+6^2}$$
$$=\frac{9\sqrt{6}}{2}$$

$$\overline{AM}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(-\frac{3}{2}-1\right)^2+(2-1)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{30}}{2}$$

이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\,\overline{BC}\times\overline{AM}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{30}}{2}$$
$$=\frac{27\sqrt{5}}{4}$$

답 $\frac{27\sqrt{5}}{4}$

21 전략 평면 ABC와 yz평면이 이루는 각을 이용하여 평면 ABC와 평면 $x-2y+2z=1$이 이루는 각의 크기를 구한다.

풀이 삼각형 ABC를 포함한 평면과 yz평면이 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면 조건 (가), (나)에 의하여

$$6\cos\theta_1=3$$
$$\therefore \cos\theta_1=\frac{1}{2}$$

평면 $x-2y+2z=1$과 yz평면이 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면 평면 $x-2y+2z=1$의 법선벡터는 $(1,\ -2,\ 2)$이고 yz평면의 법선벡터는 $(1,\ 0,\ 0)$이므로

$$\cos\theta_2=\frac{|1\times1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}$$
$$=\frac{1}{3}$$

삼각형 ABC의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로의 정사영의 넓이가 최대가 되려면 삼각형 ABC를 포함한 평면과 평면 $x-2y+2z=1$이 이루는 각의 크기가 최소가 되어야 한다.

즉 삼각형 ABC를 포함한 평면과 평면 $x-2y+2z=1$이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\theta=\theta_2-\theta_1$$

$\cos\theta_1=\frac{1}{2}$에서

$$\sin\theta_1=\sqrt{1-\cos^2\theta_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos\theta_2=\frac{1}{3}$에서

$$\sin\theta_2=\sqrt{1-\cos^2\theta_2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \cos\theta=\cos(\theta_2-\theta_1)$$
$$=\cos\theta_2\cos\theta_1+\sin\theta_2\sin\theta_1$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이의 최댓값은

$$6\cos\theta=6\times\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$
$$=1+2\sqrt{6}$$

답 ①

22 전략 두 점 A, B의 xy평면 위로의 정사영을 이용한다.

풀이 직선 l의 방향벡터와 xy평면의 법선벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{n}$이라 하면

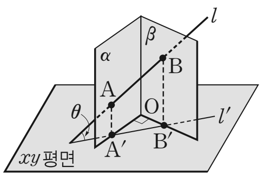
$$\vec{u}=(-1,\ 1,\ 1),\ \vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$$

직선 l과 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$$
$$=\frac{|1\times1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{3}\ \left(\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

한편 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하고, $\overline{\mathrm{OA'}}=a$, $\overline{\mathrm{OB'}}=b$라 하면 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여



$$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{a^2+b^2}\ge\sqrt{2ab}$$

이때 등호는 $a=b$일 때 성립하므로 $\overline{\mathrm{A'B'}}$의 길이의 최솟값은 $a=b$일 때, 즉 $\triangle\mathrm{OA'B'}$이 직각이등변삼각형일 때의 빗변의 길이와 같다.

두 점 A′, B′을 지나는 직선의 방정식을 l'이라 하면 직선 l'은 직선 l의 xy평면 위로의 정사영이므로 직선 l'의 방정식은

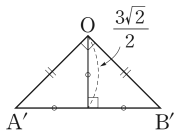
$$3-x=y,\ z=0$$

$$\therefore\ x+y-3=0,\ z=0$$

이때 원점과 직선 $x+y-3=0$, $z=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서



$$\overline{\mathrm{A'B'}}\ge2\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

이므로 $\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$에서

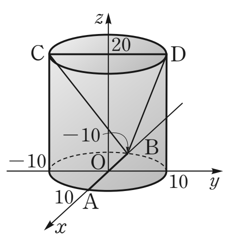
$$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\cos\theta}$$

$$\ge\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=3\sqrt{3}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{3}$이다.

답 $3\sqrt{3}$

23 문제이해 • 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B가 있는 원기둥의 밑면의 중심이 원점 O, 두 점 A, B가 x축 위에 오도록 원기둥을 좌표공간에 놓으면



A$(10,\ 0,\ 0)$,

B$(-10,\ 0,\ 0)$,

C$(0,\ -10,\ 20)$, D$(0,\ 10,\ 20)$ ➔ 30% 배점

해결과정 • 이때 세 점 B, C, D를 지나는 평면의 방정식을

$$ax+by+cz+d=0 \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

이라 하면

$$-10a+d=0,\ -10b+20c+d=0,$$

$$10b+20c+d=0$$

위의 세 식에서 a, b, c를 d로 나타내면

$$a=\frac{1}{10}d,\ b=0,\ c=-\frac{1}{20}d \qquad \cdots\cdots\ ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{10}dx-\frac{1}{20}dz+d=0$$

$d\ne0$이므로 위의 식의 양변을 d로 나누면 평면의 방정식은

$$\frac{1}{10}x-\frac{1}{20}z+1=0$$

$$\therefore\ 2x-z+20=0$$ ➔ 50% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 거리는 점 A$(10,\ 0,\ 0)$과 평면 $2x-z+20=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2\times10-1\times0+20|}{\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{40}{\sqrt{5}}$$

$$=8\sqrt{5}$$ ➔ 20% 배점

답 $8\sqrt{5}$

MEMO

MEMO