정답 및 풀이

01 지수함수

유제

본책 12~30쪽

001-1 (1) $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{27}$, $\sqrt[5]{81}$을 밑이 3인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$

$\sqrt[5]{81}=\sqrt[5]{3^4}=3^{\frac{4}{5}}$

이때 $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$이고, 지수함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{4}{5}}$

$\therefore \sqrt[3]{9}<\sqrt[4]{27}<\sqrt[5]{81}$

(2) $\sqrt{0.2}$, $\sqrt[4]{0.008}$, $\sqrt[5]{0.0016}$을 밑이 0.2인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$\sqrt{0.2}=0.2^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[4]{0.008}=\sqrt[4]{0.2^3}=0.2^{\frac{3}{4}}$

$\sqrt[5]{0.0016}=\sqrt[5]{0.2^4}=0.2^{\frac{4}{5}}$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$이고, 지수함수 $y=0.2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$0.2^{\frac{4}{5}}<0.2^{\frac{3}{4}}<0.2^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \sqrt[5]{0.0016}<\sqrt[4]{0.008}<\sqrt{0.2}$

답 (1) $\sqrt[3]{9}<\sqrt[4]{27}<\sqrt[5]{81}$ (2) $\sqrt[5]{0.0016}<\sqrt[4]{0.008}<\sqrt{0.2}$

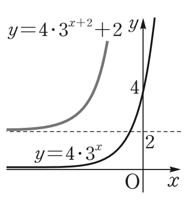
001-2 $0<x<1$에서 $x^2-2x=x(x-2)<0$이므로

$x^2<2x$

그런데 $0<x<1$이므로 $x^{x^2}>x^{2x}$

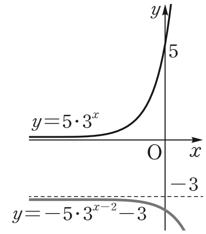
답 $x^{x^2}>x^{2x}$

002-1 (1) $y=4\cdot 3^{x+2}+2$의 그래프는 $y=4\cdot 3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y>2\}$이고 점근선의 방정식은 $y=2$이다.

(2) $y=-5\cdot 3^{x-2}-3$의 그래프는 $y=5\cdot 3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y<-3\}$이고 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.

답 풀이 참조

003-1 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=3^{x-2}$

$y=3^{x-2}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=3^{-x-2}$

답 $y=3^{-x-2}$

003-2 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$

$\therefore y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}+n$ …… ㉠

$y=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$에서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-1$

이것이 ㉠과 일치해야 하므로

$m=3$, $n=-1$

답 $m=3$, $n=-1$

004-1 (1) 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+1$에서 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $x-1$이 최대일 때 y는 최소가 되고, $x-1$이 최소일 때 y는 최대가 된다.

따라서 구간 $[1, 3]$에서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+1$은

$x=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}+1=2$

$x=3$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}+1=\frac{5}{4}$

(2) $y=(3^x)^2\cdot 4^{-x}$에서 $\quad y=9^x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left(\frac{9}{4}\right)^x$

함수 $y=\left(\frac{9}{4}\right)^x$에서 밑이 $\frac{9}{4}$이고 $\frac{9}{4}>1$이므로 x가 최대일 때 y도 최대가 되고, x가 최소일 때 y도 최소가 된다.

따라서 구간 $[-2, 1]$에서 함수 $y=(3^x)^2\cdot 4^{-x}$은 $x=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$$\left(\frac{9}{4}\right)^1=\frac{9}{4}$$

$x=-2$일 때 최소이고, 최솟값은

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{-2}=\frac{16}{81}$$

답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: $\frac{5}{4}$

(2) 최댓값: $\frac{9}{4}$, 최솟값: $\frac{16}{81}$

004-2 함수 $y=2^{x^2-2x+3}$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로 x^2-2x+3이 최대일 때 y도 최대가 되고, x^2-2x+3이 최소일 때 y도 최소가 된다.

이때 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$이므로 $0\le x\le 3$에서

$$2\le x^2-2x+3\le 6$$

따라서 함수 $y=2^{x^2-2x+3}$은

$x^2-2x+3=6$일 때 최대이고, 최댓값은

$$2^6=64$$

$x^2-2x+3=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$$2^2=4$$

답 최댓값: 64, 최솟값: 4

Remark 정의역이 제한된 범위일 때, 이차함수의 최대 · 최소

이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q\ (m\le x\le n)$에서

① $x=p$가 정의역에 포함되는 경우
➡ $f(p)$, $f(m)$, $f(n)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② $x=p$가 정의역에 포함되지 않는 경우
➡ $f(m)$, $f(n)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

005-1 (1) $y=9^x-3^x+3=(3^x)^2-3^x+3$

$3^x=t$로 놓으면 구간 $[0, 1]$에서

$$3^0\le 3^x\le 3^1 \qquad \therefore 1\le t\le 3$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-t+3=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$$

따라서 $1\le t\le 3$에서 함수 $y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$은

$t=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$$3^2-3+3=9$$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$$1^2-1+3=3$$

(2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$

$$=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$로 놓으면 구간 $[-1, 3]$에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \qquad \therefore \frac{1}{8}\le t\le 2$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$$

따라서 $\frac{1}{8}\le t\le 2$에서 함수 $y=(t-1)^2+1$은

$t=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$$(2-1)^2+1=2$$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$$(1-1)^2+1=1$$

답 (1) 최댓값: 9, 최솟값: 3 (2) 최댓값: 2, 최솟값: 1

Remark a^x의 값의 범위

① $a>1$이면
$x_1\le x\le x_2 \iff a^{x_1}\le a^x\le a^{x_2}$

② $0<a<1$이면
$x_1\le x\le x_2 \iff a^{x_2}\le a^x\le a^{x_1}$

005-2 임의의 실수 x에 대하여

$$2^{1+x}>0,\ 2^{1-x}>0$$

이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^{1+x}+2^{1-x}\ge 2\sqrt{2^{1+x}\cdot 2^{1-x}}$$

$$=2\sqrt{2^2}=4$$

(단, 등호는 $2^{1+x}=2^{1-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 4이다.

답 4

Remark 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,
$a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

006-1 (1) 주어진 방정식을 변형하면

$$(3^3)^{x-1}=3^2\cdot 3^{2x+1},\qquad 3^{3x-3}=3^{2x+3}$$

이므로

$$3x-3=2x+3 \qquad \therefore x=6$$

(2) 주어진 방정식을 변형하면

$$5^{x^2-2}=(5^{-1})^{x-4},\qquad 5^{x^2-2}=5^{-x+4}$$

이므로

$$x^2-2=-x+4,\qquad x^2+x-6=0$$

$$(x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

(3) 주어진 방정식을 변형하면

$$(2^{\frac{1}{2}})^{x^2}=2^2,\qquad 2^{\frac{1}{2}x^2}=2^2$$

이므로

$$\frac{1}{2}x^2=2,\qquad x^2=4$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

(4) 주어진 방정식을 변형하면

$$(2^2)^{x^2}=2^{9x+5},\qquad 2^{2x^2}=2^{9x+5}$$

이므로

$$2x^2=9x+5,\qquad 2x^2-9x-5=0$$

$$(2x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=5$$

답 (1) $x=6$ (2) $x=-3$ 또는 $x=2$ (3) $x=-2$ 또는 $x=2$ (4) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=5$

007-1 (1) 주어진 방정식을 변형하면

$$(3^x)^2-6\cdot 3^x-27=0$$

이때 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$t^2-6t-27=0,\qquad (t+3)(t-9)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=9$$

그런데 $t>0$이므로 $t=9$

따라서 $3^x=9$이므로

$$3^x=3^2 \qquad \therefore x=2$$

(2) 주어진 방정식을 변형하면

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-3=0$$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$t^2+2t-3=0,\qquad (t+3)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=1$$

그런데 $t>0$이므로 $t=1$

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=1$이므로

$$x=0$$

(3) 주어진 방정식을 변형하면

$$3^x-\frac{9}{3^x}=8$$

이때 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t-\frac{9}{t}=8$

양변에 t를 곱하여 정리하면

$$t^2-8t-9=0,\qquad (t+1)(t-9)=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=9$$

그런데 $t>0$이므로 $t=9$

따라서 $3^x=9$이므로

$$3^x=3^2 \qquad \therefore x=2$$

(4) $2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$이므로 주어진 방정식을 변형하면

$$(2+\sqrt{3})^x+\frac{1}{(2+\sqrt{3})^x}=4$$

이때 $(2+\sqrt{3})^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t+\frac{1}{t}=4$

양변에 t를 곱하여 정리하면

$$t^2-4t+1=0$$

$$\therefore t=2\pm\sqrt{3}$$

따라서 $(2+\sqrt{3})^x=2+\sqrt{3}$ 또는 $(2+\sqrt{3})^x=2-\sqrt{3}$ 이므로

$$x=1 \text{ 또는 } x=-1$$

답 (1) $x=2$ (2) $x=0$ (3) $x=2$ (4) $x=1$ 또는 $x=-1$

007-2 $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2$이므로 주어진 방정식을 변형하면

$$(2^x+2^{-x})^2+(2^x+2^{-x})-6=0$$

이때 $2^x+2^{-x}=t\ (t\ge 2)$로 놓으면

$$t^2+t-6=0,\qquad (t+3)(t-2)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=2$$

그런데 $t\ge 2$이므로 $t=2$

따라서 $2^x+2^{-x}=2$이므로 $x=0$

답 $x=0$

Remark

$2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

008-1 (1) $x^{2x+1}=x^{-x+10}$에서

$2x+1=-x+10,\quad 3x=9$

$\therefore x=3$

또 밑이 1, 즉 $x=1$이면 주어진 방정식은 $1^3=1^9$ 이므로 등식이 성립한다.

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=1$ 또는 $x=3$

(2) $(x+1)^{x^2}=(x+1)^{2x}$에서

$x^2=2x,\quad x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

또 밑이 1, 즉 $x=0$이면 주어진 방정식은 $1^0=1^0$ 이므로 등식이 성립한다.

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=0$ 또는 $x=2$

(3) $3^x=(x+2)^x$에서

$3=x+2\quad \therefore x=1$

또 지수가 0, 즉 $x=0$이면 주어진 방정식은 $3^0=2^0$ 이므로 등식이 성립한다.

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=0$ 또는 $x=1$

(4) $x^{2x-1}=7^{2x-1}$에서

$x=7$

또 지수가 0, 즉 $x=\frac{1}{2}$이면 주어진 방정식은 $\left(\frac{1}{2}\right)^0=7^0$이므로 등식이 성립한다.

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=7$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=3$ (2) $x=0$ 또는 $x=2$ (3) $x=0$ 또는 $x=1$ (4) $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=7$

009-1 주어진 방정식을 변형하면

$(2^x)^2-40\cdot 2^x+k=0$

이때 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-40t+k=0\quad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 ㉠의 두 근은 $2^\alpha,\ 2^\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$k=2^\alpha\cdot 2^\beta=2^{\alpha+\beta}=2^3=8$

답 8

009-2 주어진 방정식을 변형하면

$(5^x)^2-2(a-3)5^x+3a+1=0$

이때 $5^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2(a-3)t+3a+1=0\quad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 ㉠은 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-3)^2-(3a+1)>0$

$a^2-9a+8>0,\quad (a-1)(a-8)>0$

$\therefore a<1$ 또는 $a>8\quad \cdots\cdots$ ㉡

(ii) (두 근의 합)$=2(a-3)>0$에서

$a-3>0\quad \therefore a>3\quad \cdots\cdots$ ㉢

(iii) (두 근의 곱)$=3a+1>0$에서

$3a>-1\quad \therefore a>-\frac{1}{3}\quad \cdots\cdots$ ㉣

㉡, ㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면

$a>8$

답 $a>8$

010-1 (1) 주어진 부등식을 변형하면

$5^{x-2}\le(5^{-1})^{-2x+1},\quad 5^{x-2}\le 5^{2x-1}$

밑이 5이고 $5>1$이므로

$x-2\le 2x-1\quad \therefore x\ge -1$

(2) 주어진 부등식을 변형하면

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{x+2}>\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-2}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+4}>\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-2}$

밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$2x+4<5x-2,\quad -3x<-6$

$\therefore x>2$

(3) 주어진 부등식을 변형하면

$\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right\}^{-x^2-2x}<\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+2x}<\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}$

밑이 $\frac{3}{2}$이고 $\frac{3}{2}>1$이므로

$x^2+2x<x+2,\quad x^2+x-2<0$

$(x+2)(x-1)<0\quad \therefore -2<x<1$

(4) 주어진 부등식을 변형하면

$0.2^{x^2-1}\ge(0.2^2)^{x+1},\quad 0.2^{x^2-1}\ge 0.2^{2x+2}$

밑이 0.2이고 $0<0.2<1$이므로

$x^2-1\le 2x+2,\quad x^2-2x-3\le 0$

$(x+1)(x-3)\le 0 \quad \therefore -1\le x\le 3$

답 (1) $x\ge -1$ (2) $x>2$
(3) $-2<x<1$ (4) $-1\le x\le 3$

011-1 (1) 주어진 부등식을 변형하면

$(2^x)^2+2\cdot 2^x-3\ge 0$

이때 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2+2t-3\ge 0,\quad (t+3)(t-1)\ge 0$

$\therefore t\le -3$ 또는 $t\ge 1$

그런데 $t>0$이므로 $\quad t\ge 1$

따라서 $2^x\ge 1$이므로 $\quad 2^x\ge 2^0$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$x\ge 0$

(2) 주어진 부등식을 변형하면

$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}^{2x-1}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-1>0$

$3\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-1>0$

이때 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$3t^2+2t-1>0,\quad (t+1)(3t-1)>0$

$\therefore t<-1$ 또는 $t>\frac{1}{3}$

그런데 $t>0$이므로 $\quad t>\frac{1}{3}$

따라서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x>\frac{1}{3}$이므로 $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^1$

밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x<1$

(3) 주어진 부등식을 변형하면

$\frac{5}{5^x}-5^x+4<0$

이때 $5^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$\frac{5}{t}-t+4<0$

양변에 t를 곱하여 정리하면

$t^2-4t-5>0,\quad (t+1)(t-5)>0$

$\therefore t<-1$ 또는 $t>5$

그런데 $t>0$이므로 $\quad t>5$

따라서 $5^x>5$이므로 $\quad 5^x>5^1$

밑이 5이고 $5>1$이므로

$x>1$

(4) 주어진 부등식을 변형하면

$\left\{\left(\frac{1}{10}\right)^x\right\}^2-10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^x-\left(\frac{1}{10}\right)^x+10\le 0$

$\left\{\left(\frac{1}{10}\right)^x\right\}^2-11\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^x+10\le 0$

이때 $\left(\frac{1}{10}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-11t+10\le 0,\quad (t-1)(t-10)\le 0$

$\therefore 1\le t\le 10$

따라서 $1\le\left(\frac{1}{10}\right)^x\le 10$이므로

$\left(\frac{1}{10}\right)^0\le\left(\frac{1}{10}\right)^x\le\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$

밑이 $\frac{1}{10}$이고 $0<\frac{1}{10}<1$이므로

$-1\le x\le 0$

답 (1) $x\ge 0$ (2) $x<1$ (3) $x>1$ (4) $-1\le x\le 0$

012-1 (1) (i) $x>1$일 때,

$3x-2>7,\quad 3x>9$

$\therefore x>3$

그런데 $x>1$이므로 $\quad x>3$

(ii) $0<x<1$일 때,

$3x-2<7,\quad 3x<9$

$\therefore x<3$

그런데 $0<x<1$이므로 $\quad 0<x<1$

(iii) $x=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로

(좌변)$=$(우변)

따라서 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

이상에서 주어진 부등식의 해는

$0<x<1$ 또는 $x>3$

(2) (i) $x>1$일 때,

$x^2-6<3x+4,\quad x^2-3x-10<0$

$(x+2)(x-5)<0$

$\therefore -2<x<5$

그런데 $x>1$이므로 $\quad 1<x<5$

(ii) $0<x<1$일 때,

$x^2-6>3x+4,\quad x^2-3x-10>0$

$(x+2)(x-5)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>5$

그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.

(iii) $x=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로

(좌변)$=$(우변)

따라서 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

이상에서 주어진 부등식의 해는

$1<x<5$

답 (1) $0<x<1$ 또는 $x>3$ (2) $1<x<5$

중단원 연습 문제

본책 31~35쪽

01 (1) $\sqrt{2}<\sqrt[7]{32}<\sqrt[3]{16}$ (2) $\sqrt[3]{0.25}<\sqrt[5]{0.125}<\sqrt{0.5}$

02 0 **03** 32 **04** -3 **05** ①

06 $x=-4$ 또는 $x=1$ **07** ⑤ **08** ④

09 ④ **10** ① **11** 34 **12** ① **13** 14

14 $4\sqrt{2}$ **15** ② **16** 12 **17** ⑤ **18** 71

19 ③ **20** ① **21** 15 **22** 28

01 전략 (1)은 밑이 2인 거듭제곱의 꼴로, (2)는 밑이 0.5인 거듭제곱의 꼴로 나타낸 후, 지수함수의 성질을 이용한다.

풀이 (1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[7]{32}$를 밑이 2인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}},\ \sqrt[7]{32}=\sqrt[7]{2^5}=2^{\frac{5}{7}}$$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{5}{7}<\frac{4}{3}$이고, 지수함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{5}{7}}<2^{\frac{4}{3}}$$

$$\therefore \sqrt{2}<\sqrt[7]{32}<\sqrt[3]{16}$$

(2) $\sqrt{0.5}$, $\sqrt[3]{0.25}$, $\sqrt[5]{0.125}$를 밑이 0.5인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$$\sqrt{0.5}=0.5^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{0.25}=\sqrt[3]{0.5^2}=0.5^{\frac{2}{3}},$$

$$\sqrt[5]{0.125}=\sqrt[5]{0.5^3}=0.5^{\frac{3}{5}}$$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$이고, 지수함수 $y=0.5^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$$0.5^{\frac{2}{3}}<0.5^{\frac{3}{5}}<0.5^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \sqrt[3]{0.25}<\sqrt[5]{0.125}<\sqrt{0.5}$$

답 (1) $\sqrt{2}<\sqrt[7]{32}<\sqrt[3]{16}$ (2) $\sqrt[3]{0.25}<\sqrt[5]{0.125}<\sqrt{0.5}$

02 해결과정 • $y=-3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-3^{-x}$ ➜ 30% 배점

$y=-3^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-(-3)=-3^{-(x-1)}$$

$\therefore y=-3^{-x+1}-3$ ➜ 30% 배점

답구하기 • 따라서 $y=-3^{-x+1}-3$, 즉 $y=-3\cdot3^{-x}-3$이 $y=a\cdot3^{-x}+b$와 일치해야 하므로

$$a=-3,\ b=-3$$

$\therefore a-b=0$ ➜ 40% 배점

답 0

03 전략 밑 a가 $a>1$이면 주어진 함수의 지수가 최대일 때 최대, $0<a<1$이면 주어진 함수의 지수가 최소일 때 최대가 됨을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=2^x$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로 x가 최대일 때 $f(x)$는 최대가 된다.

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)=2^x$은 $x=3$에서 최대이고, 최댓값은

$$f(3)=2^3=8 \qquad \therefore a=8$$

또 함수 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{4}\right)^x$에서 밑이 $\frac{1}{4}$이고

$0<\frac{1}{4}<1$이므로 x가 최소일 때 $g(x)$는 최대가 된다.

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$은 $x=-1$에서 최대이고, 최댓값은

$$g(-1)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4 \qquad \therefore b=4$$

$\therefore ab=32$

답 32

04 문제이해 • $y=9^{-x}-2\cdot3^{-x}$

$$=\left(\frac{1}{9}\right)^x-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ➜ 20% 배점

해결과정 • $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$로 놓으면 $-1\le x\le1$에서

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$\therefore \frac{1}{3}\le t\le3$ ➜ 20% 배점

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t=(t-1)^2-1$ ➜ 20% 배점

따라서 $\frac{1}{3} \le t \le 3$에서 함수 $y=(t-1)^2-1$은

$t=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$(3-1)^2-1=3$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$(1-1)^2-1=-1$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 $M=3$, $m=-1$이므로

$\frac{M}{m}=-3$ ➔ 10% 배점

답 -3

05 전략 지수법칙을 이용하여 밑을 5로 같게 한 후, 지수에 대한 방정식을 세운다.

풀이 주어진 방정식을 변형하면

$5^{x^2-x}=5^{-3(x-1)}$, $5^{x^2-x}=5^{-3x+3}$

이므로

$x^2-x=-3x+3$, $x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 주어진 방정식의 두 근은 -3, 1이므로

$\alpha^2+\beta^2=9+1=10$ 답 ①

06 전략 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1일 때 등식이 성립한다.

풀이 $(x+5)^{x^2+2x}=(x+5)^{-x+4}$에서

$x^2+2x=-x+4$, $x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

또 밑이 1, 즉 $x=-4$이면 주어진 방정식은 $1^8=1^8$이므로 등식이 성립한다.

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=-4$ 또는 $x=1$ 답 $x=-4$ 또는 $x=1$

07 전략 지수법칙을 이용하여 밑을 $\frac{1}{5}$로 같게 한 후, 지수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 주어진 부등식을 변형하면

$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1} \le \left(\frac{1}{5}\right)^3$

밑이 $\frac{1}{5}$이고 $0<\frac{1}{5}<1$이므로 $2x-1 \ge 3$

$2x \ge 4$ $\therefore x \ge 2$

따라서 주어진 부등식의 해의 집합은

$\{x \mid x \ge 2\}$ 답 ⑤

08 전략 (밑)>1, $0<$(밑)<1, (밑)$=1$의 세 가지 경우로 나누어 주어진 부등식을 푼다.

풀이 (i) $x>1$일 때,

$-x+1>3x-11$, $-4x>-12$

$\therefore x<3$

그런데 $x>1$이므로 $1<x<3$

(ii) $0<x<1$일 때,

$-x+1<3x-11$, $-4x<-12$

$\therefore x>3$

그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.

(iii) $x=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (좌변)$=$(우변)

따라서 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

이상에서 주어진 부등식의 해는 $1<x<3$

따라서 $m=1$, $n=3$이므로

$m-n=-2$ 답 ④

09 전략 $y=2^x$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구한 후, 점근선의 방정식과 y절편을 구한다.

풀이 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-b=2^{x-a}$ $\therefore y=2^{x-a}+b$

$y=2^{x-a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=b$, y절편이 $2^{-a}+b$이므로

$b=4$, $2^{-a}+b=8$

$b=4$를 $2^{-a}+b=8$에 대입하면

$2^{-a}+4=8$, $2^{-a}=4$ $\therefore a=-2$

$\therefore a^2+b^2=4+16=20$ 답 ④

10 전략 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 지수가 최대일 때 $f(x)$가 최솟값을 가짐을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x+a}$의 밑이 $\frac{1}{2}$이고

$0<\frac{1}{2}<1$이므로 $-x^2+4x+a$가 최대일 때 $f(x)$는 최소가 된다.

이때 $-x^2+4x+a=-(x-2)^2+a+4$이므로

$-x^2+4x+a$는 $x=2$일 때 최댓값 $a+4$를 갖는다.

따라서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x+a}$은 $x=2$일 때 최소이고, 최솟값은 $f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{a+4}$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+4}=2$이므로 $\quad a+4=-1$

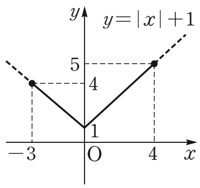
$\therefore a=-5$ 답 ①

11 전략 밑이 2이고 2>1이므로 주어진 함수는 지수가 최대일 때 최대, 지수가 최소일 때 최소가 됨을 이용한다.

풀이 함수 $y=2^{|x|+1}$의 밑이 2이고 $2>1$이므로 $|x|+1$이 최대일 때 y도 최대가 되고, $|x|+1$이 최소일 때 y도 최소가 된다.

함수 $y=|x|+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $-3\le x\le 4$에서

$1\le |x|+1\le 5$



따라서 함수 $y=2^{|x|+1}$은

$|x|+1=5$일 때 최대이고, 최댓값은

$2^5=32$

$|x|+1=1$일 때 최소이고, 최솟값은

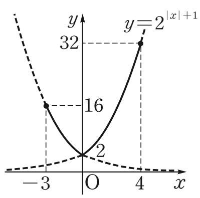
$2^1=2$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$32+2=34$ 답 34

다른 풀이 $y=2^{|x|+1}=\begin{cases}2^{x+1} & (0\le x\le 4)\\ 2^{-x+1} & (-3\le x<0)\end{cases}$ 이므로

$y=2^{|x|+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$-3\le x\le 4$에서 함수 $y=2^{|x|+1}$은 $x=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$2^{|4|+1}=32$

$x=0$일 때 최소이고, 최솟값은

$2^{|0|+1}=2$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$32+2=34$

12 전략 지수법칙을 이용하여 좌변과 우변의 식이 서로 같은지 확인한다.

풀이 ㄱ. $f(x+y)=3^{x+y}=3^x\cdot 3^y=f(x)f(y)$

ㄴ. $f(2x)=3^{2x}=9^x$, $2f(x)=2\cdot 3^x$

$\therefore f(2x)\ne 2f(x)$

ㄷ. $f(x^2)=3^{x^2}$, $\{f(x)\}^2=(3^x)^2=3^{2x}$

$\therefore f(x^2)\ne\{f(x)\}^2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

13 해결과정 • 주어진 방정식을 변형하면

$(2^3)^{2x-3}=2^{\frac{1}{3}}$, $\quad 2^{6x-9}=2^{\frac{1}{3}}$ ➔ 40% 배점

이므로

$6x-9=\frac{1}{3}$, $\quad 6x=\frac{28}{3}$

$\therefore x=\frac{14}{9}$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $a=\frac{14}{9}$이므로

$9a=14$ ➔ 20% 배점

답 14

14 문제이해 • 주어진 방정식을 변형하면

$(2^x)^2-a\cdot 2^x+8=0$

이때 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-at+8=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠ ➔ 20% 배점

해결과정 • 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지면 ㉠은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다.

㉠이 양의 실근 1개와 음의 실근 1개를 갖는다고 하면

(두 근의 곱)<0

그런데 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 곱)$=8$

이므로 ㉠은 양수인 중근을 갖는다. ➔ 30% 배점

㉠의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-32=0$ $\quad\therefore a=\pm4\sqrt{2}$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 방정식 ㉠은

$t^2\mp4\sqrt{2}t+8=0$, $\quad (t\mp2\sqrt{2})^2=0$

$\therefore t=\pm2\sqrt{2}$ (복호동순)

이때 ㉠의 근이 양수이어야 하므로

$a=4\sqrt{2}$ ➔ 30% 배점

답 $4\sqrt{2}$

15 전략 $k=3\times10^7$, $t=6$일 때 $ka^t=1.5\times10^8$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 처음에 3×10^7마리인 박테리아가 6시간 후에 1.5×10^8마리가 되므로

$3\times10^7\times a^6=1.5\times10^8$, $\quad a^6=5$

$\therefore a=5^{\frac{1}{6}}$

처음에 3×10^7마리인 박테리아가 t시간 후에 7.5×10^8마리가 된다고 하면

$3\times10^7\times a^t=7.5\times10^8$

$\therefore a^t=25$

이때 $a=5^{\frac{1}{6}}$이므로

$5^{\frac{t}{6}}=25, \quad 5^{\frac{t}{6}}=5^2$

$\frac{t}{6}=2 \quad \therefore t=12$

즉 12시간 후에 7.5×10^8마리가 된다. 답 ②

16 문제이해 • 곡선 $y=2^{x-1}$은 곡선 $y=2^{x+3}$을 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이고 사각형 ABCD에서 $\overline{AB}$가 x축에 평행하므로

$\overline{AB}=4$ ➔ 40% 배점

해결과정 • 사각형 ABCD가 정사각형이므로

$n=\overline{AD}=4$ ➔ 20% 배점

점 $A(m, 4)$는 곡선 $y=2^{x-1}$ 위의 점이므로

$4=2^{m-1}, \quad 2^{m-1}=2^2$

$m-1=2 \quad \therefore m=3$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore mn=12$ ➔ 10% 배점

답 12

다른 풀이 점 B의 x좌표를 $p\ (p<m)$라 하면 정사각형 ABCD에서 $\overline{AD}=\overline{BC}$이므로

$2^{m-1}=2^{p+3}, \quad m-1=p+3$

$\therefore m-p=4$

이때 $\overline{CD}=m-p=4$이므로

$\overline{AD}=2^{m-1}=4, \quad 2^{m-1}=2^2$

$m-1=2 \quad \therefore m=3$

점 $A(3, n)$이 곡선 $y=2^{x-1}$ 위의 점이므로

$n=2^{3-1}=4$

$\therefore mn=12$

17 전략 $P(a, 4^a)$이라 하고 선분 OP를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표를 구한 후, 이 점이 $g(x)=2^x$의 그래프 위의 점임을 이용한다.

풀이 점 P가 $f(x)=4^x$의 그래프 위의 점이므로 $P(a, 4^a)$이라 하자.

선분 OP를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot a+3\cdot 0}{1+3}, \frac{1\cdot 4^a+3\cdot 0}{1+3}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{a}{4}, 4^{a-1}\right)$$

점 $\left(\frac{a}{4}, 4^{a-1}\right)$이 $g(x)=2^x$의 그래프 위의 점이므로

$4^{a-1}=2^{\frac{a}{4}}, \quad 2^{2(a-1)}=2^{\frac{a}{4}}, \quad 2^{2a-2}=2^{\frac{a}{4}}$

$2a-2=\frac{a}{4}, \quad \frac{7}{4}a=2$

$\therefore a=\frac{8}{7}$ 답 ⑤

Remark 좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 잇는 선분 AB를 $m:n\ (m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 하면

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right),$$

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right) \text{ (단, } m\neq n)$$

18 전략 점 A가 두 곡선 $y=2^x-1$과 $y=2^{-x}+\frac{a}{9}$ 위의 점임을 이용한다.

풀이 $A(m, n)$이라 하면 삼각형 AOB의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot n=16 \quad \therefore n=8$

점 $A(m, 8)$이 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점이므로

$8=2^m-1 \quad \therefore 2^m=9$

또 점 $A(m, 8)$이 곡선 $y=2^{-x}+\frac{a}{9}$ 위의 점이므로

$8=2^{-m}+\frac{a}{9}$

이때 $2^m=9$이므로 $\quad 8=\frac{1}{9}+\frac{a}{9}$

$a+1=72 \quad \therefore a=71$ 답 71

19 전략 3^x의 값의 범위를 구한 후, 그 범위에 속하는 자연수 x의 값을 구한다.

풀이 $(3^x-5)(3^x-100)<0$에서 $\quad 5<3^x<100$

이때 $3<5<3^2$, $3^4<100<3^5$이므로

$3^x=3^2$ 또는 $3^x=3^3$ 또는 $3^x=3^4$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은

$2+3+4=9$ 답 ③

20 전략 직선의 기울기를 이용하거나 반례를 찾아 주어진 보기의 참, 거짓을 판별한다.

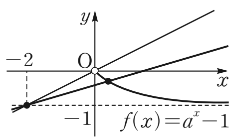
풀이 ㄱ. [반례] $a=2$이고 $x=1$이면 $a>1$이고 $x>0$이지만

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{2^1-1}{1}=1$$

이므로 $\frac{f(x)}{x}>1$이 성립하지 않는다.

ㄴ. $\dfrac{f(x)+1}{x+2}=\dfrac{f(x)-(-1)}{x-(-2)}$이므로 $\dfrac{f(x)+1}{x+2}$은 두 점 $(x,\ f(x))$, $(-2,\ -1)$을 지나는 직선의 기울기와 같다.

곡선 $f(x)=a^x-1$의 점근선의 방정식이 $y=-1$이므로 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(x, f(x))$, $(-2,\ -1)$을 지나는 직선의 기울기는 0보다 크고, 원점과 점 $(-2,\ -1)$을 지나는 직선의 기울기인 $\dfrac{1}{2}$보다 작다.



$$\therefore\ 0<\frac{f(x)+1}{x+2}<\frac{1}{2}$$

ㄷ. [반례] $a=4$이고 $x=\dfrac{1}{2}$이면 $a>1$이고 $0<x<1$ 이지만

$$\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{(4^{\frac{1}{2}}-1)-1}{\frac{1}{2}-1}=0$$

이므로 $0<\dfrac{f(x)-1}{x-1}<1$이 성립하지 않는다.

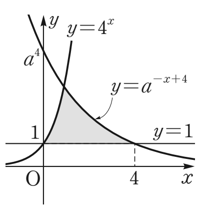
이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

21 (전략) 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역을 나타내 본다.

(풀이) 곡선 $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는 $a^{-x+4}=1$에서 $\quad -x+4=0 \quad \therefore\ x=4$

이때 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$x=1,\ 2,\ 3$일 때, 부등식 $y\le 4^x$의 영역에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 각각 4, 16, 64이다.

또 $x=1,\ 2,\ 3$일 때, 부등식 $y\le a^{-x+4}$의 영역에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 각각 a^3, a^2, a이다.

따라서 $\min(m,\ n)=\begin{cases} m & (m\le n) \\ n & (m>n)\end{cases}$이라 하면 주어진 영역에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$$1+\min(4,\ a^3)+\min(16,\ a^2)+\min(64,\ a)+1$$

(i) $a=2$일 때,

$$1+4+4+2+1=12<20$$

(ii) $a=3$일 때,

$$1+4+9+3+1=18<20$$

(iii) $4\le a\le 63$일 때,

$$1+4+16+a+1=22+a$$

$$20\le 22+a\le 40 \qquad \therefore\ -2\le a\le 18$$

그런데 $4\le a\le 63$이므로 $\qquad 4\le a\le 18$

(iv) $a\ge 64$일 때,

$$1+4+16+64+1=86>40$$

이상에서 $4\le a\le 18$이므로 자연수 a는

4, 5, 6, $\cdots$, 18

의 15개이다.

답 15

22 해결과정 • 집합 A의 부등식을 변형하면

$2^{x^2}\cdot 2^5\le 2^{-2x+8}, \qquad 2^{x^2+5}\le 2^{-2x+8}$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$x^2+5\le -2x+8, \qquad x^2+2x-3\le 0$

$(x+3)(x-1)\le 0$

$\therefore\ -3\le x\le 1$

$\therefore\ A=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1\}$ ➔ 30% 배점

집합 B의 부등식을 변형하면

$2^{2x}-2^x<0, \qquad 2^{2x}<2^x$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$2x<x \qquad \therefore\ x<0$

$\therefore\ B=\{\cdots,\ -3,\ -2,\ -1\}$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 부분집합의 개수는 -3, -2, -1 중 적어도 한 개를 원소로 갖는 A의 부분집합의 개수이므로 A의 모든 부분집합의 개수에서 집합 $\{0,\ 1\}$의 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.

$\therefore\ 2^5-2^2=32-4=28$ ➔ 40% 배점

답 28

Remark 부분집합의 개수

원소의 개수가 n인 집합 A에 대하여

① 집합 A의 부분집합의 개수: 2^n

② 집합 A의 특정한 원소 r $(r\le n)$개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수: 2^{n-r}

③ 집합 A의 특정한 원소 k $(k\le n)$개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수: 2^{n-k}

④ 집합 A의 특정한 원소 l $(l\le n)$개 중에서 적어도 한 개를 원소로 갖는 부분집합의 개수: 2^n-2^{n-l}

02 로그함수

유제

본책 39~64쪽

013-1 (1) $y=10^{\frac{x}{2}-1}$에서 로그의 정의에 의하여

$\frac{x}{2}-1=\log y,\quad \frac{x}{2}=\log y+1$

$\therefore x=2\log y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=2\log x+2$

(2) $y=\log_3 2x$에서 로그의 정의에 의하여

$2x=3^y\quad \therefore x=\frac{3^y}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{3^x}{2}$

답 (1) $y=2\log x+2$ (2) $y=\frac{3^x}{2}$

Remark

(1) 주어진 함수는 정의역 $\{x|x$는 실수$\}$에서 치역 $\{y|y>0\}$으로의 일대일 대응이다.
(2) 주어진 함수는 정의역 $\{x|x>0\}$에서 치역 $\{y|y$는 실수$\}$로의 일대일 대응이다.

013-2 $y=\frac{1}{2}(3^x-3^{-x})$에서

$2y=3^x-3^{-x}$

위의 식의 양변에 3^x을 곱하면

$2y\cdot 3^x=(3^x)^2-1\quad \therefore (3^x)^2-2y\cdot 3^x-1=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-2yt-1=0$

$\therefore t=y\pm\sqrt{y^2+1}$

그런데 $t>0$이므로

$t=y+\sqrt{y^2+1}$, 즉 $3^x=y+\sqrt{y^2+1}$

로그의 정의에 의하여

$x=\log_3(y+\sqrt{y^2+1})$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\log_3(x+\sqrt{x^2+1})$

답 $y=\log_3(x+\sqrt{x^2+1})$

Remark

주어진 함수는 정의역 $\{x|x$는 실수$\}$에서 치역 $\{y|y$는 실수$\}$로의 일대일 대응이다.

014-1 (1) $-2\log_{\frac{1}{3}}2$와 $-\log_9\frac{1}{27}$을 밑이 3인 로그로 나타내면

$-2\log_{\frac{1}{3}}2=2\log_3 2=\log_3 2^2=\log_3 4$

$-\log_9\frac{1}{27}=-\log_{3^2}\frac{1}{27}=-\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{27}$

$=\log_3\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}=\log_3\sqrt{27}$

이때 $\sqrt{10}<4<\sqrt{27}$이고, 로그함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_3\sqrt{10}<\log_3 4<\log_3\sqrt{27}$

$\therefore \log_3\sqrt{10}<-2\log_{\frac{1}{3}}2<-\log_9\frac{1}{27}$

(2) $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}$과 -1을 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그로 나타내면

$\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}=\log_{(\frac{1}{2})^2}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

$=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$-1=-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{2}}2$

이때 $\frac{1}{4}<\sqrt{\frac{1}{2}}<2$이고, 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{2}}2<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

$\therefore -1<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

답 (1) $\log_3\sqrt{10}<-2\log_{\frac{1}{3}}2<-\log_9\frac{1}{27}$

(2) $-1<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

다른 풀이 (2) $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}=\log_{(\frac{1}{2})^2}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2=2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=2$

$\therefore -1<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

014-2 $0<a<b<1$이므로

$\log_a a>\log_a b>\log_a 1$, 즉 $1>\log_a b>0$

$\log_b a>\log_b b$, 즉 $\log_b a>1$

$\therefore 0<\log_a b<\log_b a\quad \cdots\cdots ㉠$

$\log_b\frac{b}{a}=\log_b b-\log_b a=1-\log_b a$에서 $\log_b a>1$이므로 $\quad 1-\log_b a<0$

$\therefore \log_b \dfrac{b}{a} < 0$ ...... ㉡

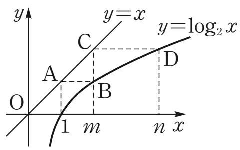
㉠, ㉡에서

$\log_b \dfrac{b}{a} < \log_a b < \log_b a$

답 $\log_b \dfrac{b}{a} < \log_a b < \log_b a$

015-1 오른쪽 그림에서 A(1, 1)이므로

B$(m, 1)$



점 B는 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점이므로

$1=\log_2 m \qquad \therefore m=2$

따라서 C(2, 2)이므로

D$(n, 2)$

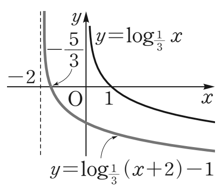
점 D는 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점이므로

$2=\log_2 n \qquad \therefore n=4$

$\therefore mn=8$

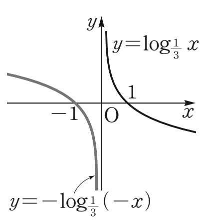
답 8

016-1 (1) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)-1$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x>-2\}$이고 점근선의 방정식은 $x=-2$이다.

(2) $y=-\log_{\frac{1}{3}}(-x)$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x<0\}$이고 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

답 풀이 참조

017-1 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_5 x$

$\therefore y=-\log_5 x$

$y=-\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+3=-\log_5(x-2)$

$\therefore y=-\log_5(x-2)-3$

답 $y=-\log_5(x-2)-3$

017-2 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=\log_3(x-m)$

$\therefore y=\log_3(x-m)+n$

이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_3(x-m)+n$

$\therefore y=-\log_3(x-m)-n$

$=\log_{\frac{1}{3}}(x-m)-n$ ...... ㉠

$y=\log_{\frac{1}{3}}(3x-18)-1$에서

$y=\log_{\frac{1}{3}} 3(x-6)-1$

$=\log_{\frac{1}{3}} 3+\log_{\frac{1}{3}}(x-6)-1$

$=\log_{\frac{1}{3}}(x-6)-2$ ...... ㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$m=6,\ n=2$

$\therefore m+n=8$

답 8

018-1 (1) $y=\log_5(x^2-6x+13)$에서 밑이 5이고 $5>1$이므로 $x^2-6x+13$이 최대일 때 y도 최대가 되고, $x^2-6x+13$이 최소일 때 y도 최소가 된다.

이때 $x^2-6x+13=(x-3)^2+4$이므로 구간 $[3,\ 7]$에서

$4 \le x^2-6x+13 \le 20$

따라서 $y=\log_5(x^2-6x+13)$은

$x^2-6x+13=20$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_5 20$

$x^2-6x+13=4$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_5 4$

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}(|x-1|+2)$에서 밑이 $\dfrac{1}{2}$이고 $0<\dfrac{1}{2}<1$이므로 $|x-1|+2$가 최대일 때 y는 최소가 되고, $|x-1|+2$가 최소일 때 y는 최대가 된다.

구간 $[0,\ 3]$에서

$2 \le |x-1|+2 \le 4$

따라서 $y=\log_{\frac{1}{2}}(|x-1|+2)$는

$|x-1|+2=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{2}} 2=\log_{2^{-1}} 2=-1$

$|x-1|+2=4$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{2}} 4=\log_{2^{-1}} 2^2=-2$

답 (1) 최댓값: $\log_5 20$, 최솟값: $\log_5 4$

(2) 최댓값: -1, 최솟값: -2

018-2 $y=\log_3(x^2-4x+31)$에서 밑이 3이고 $3>1$이므로 $x^2-4x+31$이 최소일 때 y도 최소가 된다. 이때 $x^2-4x+31=(x-2)^2+27$이므로 함수 $y=\log_3(x^2-4x+31)$은 $x=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_3 27=\log_3 3^3=3$ 답 3

019-1 (1) $\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 놓으면 $\frac{1}{27}\le x\le 3$에서

$\log_{\frac{1}{3}} 3\le\log_{\frac{1}{3}} x\le\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$

$\therefore\ -1\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

따라서 $-1\le t\le 3$에서 함수 $y=(t-2)^2-3$은

$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$(-1-2)^2-3=6$

$t=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$(2-2)^2-3=-3$

(2) $y=\log_3 x\cdot\log_{\frac{1}{3}} x+2\log_3 x+10$

$=\log_3 x\cdot(-\log_3 x)+2\log_3 x+10$

$=-(\log_3 x)^2+2\log_3 x+10$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 81$에서

$\log_3 1\le\log_3 x\le\log_3 81$

$\therefore\ 0\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+2t+10=-(t-1)^2+11$

따라서 $0\le t\le 4$에서 함수 $y=-(t-1)^2+11$은

$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$-(1-1)^2+11=11$

$t=4$일 때 최소이고, 최솟값은

$-(4-1)^2+11=2$

답 (1) 최댓값: 6, 최솟값: -3

(2) 최댓값: 11, 최솟값: 2

020-1 (1) 진수의 조건에서 $x+3>0$이므로

$x>-3$ ...... ㉠

주어진 방정식을 변형하면

$\log_5(x+3)=\log_{5^2} 2^2$

$\log_5(x+3)=\log_5 2$

따라서 $x+3=2$이므로

$x=-1$

$x=-1$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(2) 밑의 조건에서 $x+1>0$, $x+1\ne 1$이므로

$x>-1$, $x\ne 0$

$\therefore\ -1<x<0$ 또는 $x>0$ ...... ㉠

$\log_{x+1} 4=2$에서 $4=(x+1)^2$

따라서 $x+1=\pm 2$이므로

$x=-3$ 또는 $x=1$

㉠에 의하여 구하는 해는

$x=1$

(3) 진수의 조건에서 $x+1>0$, $19x-11>0$이므로

$x>-1$, $x>\frac{11}{19}$

$\therefore\ x>\frac{11}{19}$ ...... ㉠

주어진 방정식을 변형하면

$\log_2(x+1)=\log_{2^3}(19x-11)$

$\log_2(x+1)=\frac{1}{3}\log_2(19x-11)$

$3\log_2(x+1)=\log_2(19x-11)$

$\log_2(x+1)^3=\log_2(19x-11)$

따라서 $(x+1)^3=19x-11$이므로

$x^3+3x^2-16x+12=0$

$(x+6)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-6$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

㉠에 의하여 구하는 해는

$x=1$ 또는 $x=2$

(4) 진수의 조건에서 $x>0$, $x-2>0$, $2x+3>0$이므로

$x>0$, $x>2$, $x>-\frac{3}{2}$

$\therefore\ x>2$ ...... ㉠

주어진 방정식을 변형하면

$2\log_3 x=\log_3(x-2)+\log_3(2x+3)$

$\log_3 x^2=\log_3(x-2)(2x+3)$

따라서 $x^2=(x-2)(2x+3)$이므로

$x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

㉠에 의하여 구하는 해는

$x=3$

답 (1) $x=-1$ (2) $x=1$
(3) $x=1$ 또는 $x=2$ (4) $x=3$

021-1 (1) $\log x=t$로 놓으면

$t^2-4t=0,\quad t(t-4)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=4$

따라서 $\log x=0$ 또는 $\log x=4$이므로

$x=1$ 또는 $x=10000$

(2) 주어진 방정식을 변형하면

$$\frac{1}{3}\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}=\frac{4}{3}$$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$$\frac{t}{3}+\frac{1}{t}=\frac{4}{3}$$

양변에 $3t$를 곱하여 정리하면

$t^2-4t+3=0,\quad (t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 $\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=2$ 또는 $x=8$

(3) 주어진 방정식을 변형하면

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x-4=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-3t-4=0,\quad (t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

따라서 $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=4$이므로

$x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=81$

(4) 주어진 방정식을 변형하면

$(\log_2 4+\log_2 x)(\log_2 2+\log_2 x)=6$

$(2+\log_2 x)(1+\log_2 x)=6$

$(\log_2 x)^2+3\log_2 x-4=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+3t-4=0,\quad (t+4)(t-1)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

따라서 $\log_2 x=-4$ 또는 $\log_2 x=1$이므로

$x=\frac{1}{16}$ 또는 $x=2$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=10000$ (2) $x=2$ 또는 $x=8$
(3) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=81$ (4) $x=\frac{1}{16}$ 또는 $x=2$

022-1 (1) $x^{\log_3 x}=\frac{81}{x^3}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 \frac{81}{x^3}$

$\log_3 x\cdot\log_3 x=\log_3 81-\log_3 x^3$

$\therefore (\log_3 x)^2+3\log_3 x-4=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2+3t-4=0,\quad (t+4)(t-1)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

따라서 $\log_3 x=-4$ 또는 $\log_3 x=1$이므로

$x=\frac{1}{81}$ 또는 $x=3$

(2) $x^{\log 5}=5^{\log x}$이므로 주어진 방정식은

$(5^{\log x})^2-6\cdot 5^{\log x}+5=0$

$5^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+5=0,\quad (t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

따라서 $5^{\log x}=1$ 또는 $5^{\log x}=5$이므로

$\log x=0$ 또는 $\log x=1$

$\therefore x=1$ 또는 $x=10$

답 (1) $x=\frac{1}{81}$ 또는 $x=3$ (2) $x=1$ 또는 $x=10$

022-2 $5^{3-x}=2^x$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 5^{3-x}=\log 2^x,\quad (3-x)\log 5=x\log 2$

$3\log 5-x\log 5=x\log 2$

$x(\log 2+\log 5)=3\log 5$

$x\log 10=3\log 5$

$\therefore x=3\log 5=\log 5^3=\log 125$

$\therefore k=125$

답 125

023-1 $(\log_3 x)^2-4\log_3 x+2=0$에서 $\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-4t+2=0$ …… ㉠

이때 주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 ㉠의 두 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=4,\ \log_3\alpha\cdot\log_3\beta=2$

$$\therefore \log_\alpha 3+\log_\beta 3=\frac{1}{\log_3\alpha}+\frac{1}{\log_3\beta}=\frac{\log_3\alpha+\log_3\beta}{\log_3\alpha\cdot\log_3\beta}=\frac{4}{2}=2$$

답 2

023-2 주어진 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\log a+2)^2-(\log a+8)=0$

$(\log a)^2+3\log a-4=0$

$\log a=t$로 놓으면

$t^2+3t-4=0,\quad (t+4)(t-1)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

즉 $\log a=-4$ 또는 $\log a=1$이므로

$a=\frac{1}{10000}$ 또는 $a=10$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$\frac{1}{10000}\cdot 10=\frac{1}{1000}$

답 $\frac{1}{1000}$

024-1 (1) 진수의 조건에서 $x-2>0$, $x+10>0$이므로

$x>2$, $x>-10$

$\therefore x>2$ ...... ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$\log(x-2)^2\leq\log(x+10)$

밑이 10이고 $10>1$이므로

$(x-2)^2\leq x+10,\quad x^2-5x-6\leq 0$

$(x+1)(x-6)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq 6$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$2<x\leq 6$

(2) 진수의 조건에서 $x-4>0$, $x-2>0$이므로

$x>4$, $x>2$

$\therefore x>4$ ...... ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$\log_{0.5}(x-4)^2>\log_{0.5}(x-2)$

밑이 0.5이고 $0<0.5<1$이므로

$(x-4)^2<x-2,\quad x^2-9x+18<0$

$(x-3)(x-6)<0$

$\therefore 3<x<6$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$4<x<6$

답 (1) $2<x\leq 6$ (2) $4<x<6$

024-2 진수의 조건에서

$4x-3>0\quad \therefore x>\frac{3}{4}$ ...... ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$\log_x(4x-3)>\log_x x^2$

(i) $x>1$일 때,

밑이 x이고 $x>1$이므로

$4x-3>x^2,\quad x^2-4x+3<0$

$(x-1)(x-3)<0$

$\therefore 1<x<3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<3$

(ii) $0<x<1$일 때,

밑이 x이고 $0<x<1$이므로

$4x-3<x^2,\quad x^2-4x+3>0$

$(x-1)(x-3)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>3$

그런데 $0<x<1$이므로

$0<x<1$ ...... ㉢

㉠, ㉢의 공통 범위를 구하면

$\frac{3}{4}<x<1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$\frac{3}{4}<x<1$ 또는 $1<x<3$

답 $\frac{3}{4}<x<1$ 또는 $1<x<3$

025-1 (1) 진수의 조건에서

$x>0$, $x^3>0$

$\therefore x>0$ ...... ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$(\log x)^2-3\log x<0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-3t<0,\quad t(t-3)<0$

$\therefore 0<t<3$

따라서 $0<\log x<3$이므로

$\log 10^0<\log x<\log 10^3$

밑이 10이고 $10>1$이므로

$1<x<1000$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<1000$

(2) 진수의 조건에서

$4x>0$, $8x>0$

$\therefore x>0$ ...... ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$(\log_{\frac{1}{2}}4+\log_{\frac{1}{2}}x)(\log_{\frac{1}{2}}8+\log_{\frac{1}{2}}x)\le 2$

$(-2+\log_{\frac{1}{2}}x)(-3+\log_{\frac{1}{2}}x)\le 2$

$(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-5\log_{\frac{1}{2}}x+6\le 2$

$\therefore (\log_{\frac{1}{2}}x)^2-5\log_{\frac{1}{2}}x+4\le 0$

$\log_{\frac{1}{2}}x=t$로 놓으면

$t^2-5t+4\le 0,\quad (t-1)(t-4)\le 0$

$\therefore 1\le t\le 4$

따라서 $1\le\log_{\frac{1}{2}}x\le 4$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\le\log_{\frac{1}{2}}x\le\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$\frac{1}{16}\le x\le\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{16}\le x\le\frac{1}{2}$

답 (1) $1<x<1000$ (2) $\frac{1}{16}\le x\le\frac{1}{2}$

026-1 (1) 진수의 조건에서 $x>0$ ⋯⋯ ㉠

$x^{\log_{0.1}x}<\sqrt{\frac{x}{10}}$의 양변에 밑이 0.1인 로그를 취하면

$\log_{0.1}x^{\log_{0.1}x}>\log_{0.1}\sqrt{\frac{x}{10}}$

$\log_{0.1}x\times\log_{0.1}x>\log_{0.1}\left(\frac{x}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$

$(\log_{0.1}x)^2>\frac{1}{2}\log_{0.1}(0.1\times x)$

$(\log_{0.1}x)^2-\frac{1}{2}(\log_{0.1}0.1+\log_{0.1}x)>0$

$\therefore (\log_{0.1}x)^2-\frac{1}{2}\log_{0.1}x-\frac{1}{2}>0$

$\log_{0.1}x=t$로 놓으면

$t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}>0,\quad 2t^2-t-1>0$

$(2t+1)(t-1)>0$

$\therefore t<-\frac{1}{2}$ 또는 $t>1$

따라서 $\log_{0.1}x<-\frac{1}{2}$ 또는 $\log_{0.1}x>1$이므로

$\log_{0.1}x<\log_{0.1}0.1^{-\frac{1}{2}}$ 또는 $\log_{0.1}x>\log_{0.1}0.1$

밑이 0.1이고 $0<0.1<1$이므로

$x>0.1^{-\frac{1}{2}}$ 또는 $x<0.1$

$\therefore x<0.1$ 또는 $x>\sqrt{10}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<0.1$ 또는 $x>\sqrt{10}$

(2) $2^{x+2}<3^{x-1}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 2^{x+2}<\log 3^{x-1}$

$(x+2)\log 2<(x-1)\log 3$

$x(\log 3-\log 2)>2\log 2+\log 3$

$\log 3-\log 2>0$이므로

$x>\frac{2\log 2+\log 3}{\log 3-\log 2}$

답 (1) $0<x<0.1$ 또는 $x>\sqrt{10}$ (2) $x>\frac{2\log 2+\log 3}{\log 3-\log 2}$

Remark

양변에 밑이 a인 로그를 취할 때, $0<a<1$이면 부등호의 방향이 바뀜에 주의한다.

027-1 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 실근이 존재하지 않으므로

$\frac{D}{4}=(1+\log a)^2-(3+\log a)<0$

$(\log a)^2+\log a-2<0$

$(\log a+2)(\log a-1)<0$

$\therefore -2<\log a<1$

즉 $\log 10^{-2}<\log a<\log 10$이므로

$\frac{1}{100}<a<10$

답 $\frac{1}{100}<a<10$

028-1 노트북의 가격이 1개월마다 3%씩 하락하므로 n개월 후의 노트북의 가격은

$50(1-0.03)^n=50\times 0.97^n$ (만 원)

n개월 후의 노트북의 가격이 현재 가격의 절반 이하가 되려면

$50\times 0.97^n\le 50\times\frac{1}{2}\quad\therefore 0.97^n\le\frac{1}{2}$

$0.97^n\le\frac{1}{2}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 0.97^n\le\log\frac{1}{2},\quad n\log 0.97\le\log 2^{-1}$

$\therefore n\log 0.97\le -\log 2$

$\log 2=0.30$, $\log 0.97=-0.01$이므로

$-0.01n\le -0.30$

$\therefore n\ge 30$

따라서 노트북의 가격이 처음으로 현재 가격의 절반 이하가 되는 것은 30개월 후이다.

답 30개월

중단원 연습 문제

본책 65~69쪽

01 ③	02 3	03 ⑤	04 ①	05 -3
06 11	07 243	08 ④	09 18년	10 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
11 ③	12 ③	13 ④	14 ④	15 16
16 50	17 83	18 $0<k\le 4$		19 ④
20 ①	21 ③	22 30	23 5	

01 전략 먼저 $g(x)$를 구한 다음 $f(x-1)$의 역함수를 구하여 $g(x)$로 나타낸다.

풀이 $y=\log_3 x-2$로 놓으면 $y+2=\log_3 x$이므로 로그의 정의에 의하여

$$x=3^{y+2}$$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$$y=3^{x+2} \qquad \therefore g(x)=3^{x+2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x-1)=\log_3(x-1)-2$에서 $y=\log_3(x-1)-2$로 놓으면

$$y+2=\log_3(x-1)$$

이므로 로그의 정의에 의하여

$$x-1=3^{y+2} \qquad \therefore x=3^{y+2}+1$$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$$y=3^{x+2}+1$$

따라서 ㉠에 의하여 함수 $f(x-1)$의 역함수는 $g(x)+1$이다. 답 ③

다른 풀이 함수 $f(x)$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 하면

$$f^{-1}(x)=g(x)$$

$y=f(x-1)$에서 $x-1=f^{-1}(y)$이므로

$$x-1=g(y) \qquad \therefore x=g(y)+1$$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=g(x)+1$

따라서 함수 $f(x-1)$의 역함수는 $g(x)+1$이다.

02 해결과정 • 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-2=\log_2(x-1)$$

$$\therefore f(x)=\log_2(x-1)+2$$ ➜ 30% 배점

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=\log_2(-x)$$

$$\therefore g(x)=-\log_2(-x)$$ ➜ 30% 배점

답구하기 • $\therefore f(5)+g(-2)$

$$=\{\log_2(5-1)+2\}+(-\log_2 2)$$

$$=\log_2 4+2-\log_2 2$$

$$=2+2-1=3$$ ➜ 40% 배점

답 3

03 전략 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 $\log_3 x=t$로 치환한다.

풀이 $y=\log_3\frac{x}{3}\cdot\log_3\frac{x}{27}$

$$=(\log_3 x-\log_3 3)(\log_3 x-\log_3 27)$$

$$=(\log_3 x-1)(\log_3 x-3)$$

$$=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3$$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{3}\le x\le 27$에서

$$\log_3\frac{1}{3}\le\log_3 x\le\log_3 27$$

$$\therefore -1\le t\le 3$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$$

따라서 $-1\le t\le 3$에서 함수 $y=(t-2)^2-1$은 $t=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$$M=(-1-2)^2-1=8$$

$t=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$$m=(2-2)^2-1=-1$$

$$\therefore M-m=9$$

답 ⑤

04 전략 지수에 밑이 10인 로그가 있으므로 양변에 상용로그를 취하여 푼다.

풀이 $3^{\log 3x}=5^{\log 5x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 3^{\log 3x}=\log 5^{\log 5x}$$

$$\log 3x\cdot\log 3=\log 5x\cdot\log 5$$

$$(\log 3+\log x)\log 3=(\log 5+\log x)\log 5$$

$$(\log 3)^2+\log 3\cdot\log x=(\log 5)^2+\log 5\cdot\log x$$

$$(\log 3-\log 5)\log x=(\log 5)^2-(\log 3)^2$$

$$\therefore \log x=\frac{(\log 5+\log 3)(\log 5-\log 3)}{\log 3-\log 5}$$

$$=-(\log 5+\log 3)$$

$$=-\log 15=\log 15^{-1}$$

$$=\log\frac{1}{15}$$

즉 $\log x=\log\frac{1}{15}$이므로 $\quad x=\frac{1}{15}$ 답 ①

05 문제이해 • 주어진 방정식을 변형하면

$\log_2 x - \frac{2}{3}\log_x 2 + k = 0$

$\therefore \log_2 x - \frac{2}{3\log_2 x} + k = 0$ ➜ 20% 배점

해결과정 • $\log_2 x = t$로 놓으면

$t - \frac{2}{3t} + k = 0$

양변에 $3t$를 곱하여 정리하면

$3t^2 + 3kt - 2 = 0$ …… ㉠ ➜ 30% 배점

이때 주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 ㉠의 두 근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = -k$

$\therefore \log_2 \alpha\beta = -k$ ➜ 30% 배점

답구하기 • 주어진 조건에서 $\alpha\beta = 8$이므로

$\log_2 8 = -k \quad \therefore k = -3$ ➜ 20% 배점

답 -3

06 전략 밑을 2로 같게 한 후 진수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 진수의 조건에서 $7-x>0$, $7+x>0$이므로

$x<7$, $x>-7$

$\therefore -7<x<7$ …… ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$\log_2(7-x)(7+x) > \log_2 2^4$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$(7-x)(7+x)>2^4, \quad x^2<33$

$\therefore -\sqrt{33}<x<\sqrt{33}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-\sqrt{33}<x<\sqrt{33}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -5, -4, -3, $\cdots$, 5의 11개이다.

답 11

07 문제이해 • 진수의 조건에서 $\frac{9}{x}>0$, $\frac{27}{x}>0$이므로

$x>0$ …… ㉠ ➜ 20% 배점

해결과정 • 주어진 부등식을 변형하면

$(\log_3 9 - \log_3 x)(\log_3 27 - \log_3 x) \le 12$

$(2-\log_3 x)(3-\log_3 x) \le 12$

$(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 6 \le 12$

$\therefore (\log_3 x)^2 - 5\log_3 x - 6 \le 0$ ➜ 30% 배점

$\log_3 x = t$로 놓으면

$t^2-5t-6\le 0, \quad (t+1)(t-6)\le 0$

$\therefore -1\le t\le 6$

따라서 $-1\le \log_3 x \le 6$이므로

$\log_3 3^{-1} \le \log_3 x \le \log_3 3^6$

밑이 3이고 $3>1$이므로

$\frac{1}{3}\le x\le 729$ …… ㉡ ➜ 30% 배점

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{3}\le x\le 729$ ➜ 10% 배점

답구하기 • 따라서 $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=729$이므로

$\alpha\beta = 243$ ➜ 10% 배점

답 243

08 전략 지수에 밑이 $\frac{1}{3}$인 로그가 있으므로 양변에 밑이 $\frac{1}{3}$인 로그를 취한 후, $\log_{\frac{1}{3}} x = t$로 치환한다.

풀이 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{3}} x} < \frac{x^3}{81}$의 양변에 밑이 $\frac{1}{3}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{3}} x^{\log_{\frac{1}{3}} x} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^3}{81}$

$\log_{\frac{1}{3}} x \cdot \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} x^3 - \log_{\frac{1}{3}} 81$

$\therefore (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - 3\log_{\frac{1}{3}} x - 4 > 0$

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$로 놓으면

$t^2-3t-4>0, \quad (t+1)(t-4)>0$

$\therefore t<-1$ 또는 $t>4$

따라서 $\log_{\frac{1}{3}} x < -1$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}} x > 4$이므로

$\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^4$

밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x>\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ 또는 $x<\left(\frac{1}{3}\right)^4$

$\therefore x<\frac{1}{81}$ 또는 $x>3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<\frac{1}{81}$ 또는 $x>3$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 가장 작은 정수는 4이다.

답 ④

09 문제이해 • 현재 개구리의 개체 수를 a라 하면 n년 후의 개체 수는

$a(1+0.04)^n=1.04^n a$ ➔ 30% 배점

해결과정 • n년 후의 개체 수가 현재 개체 수의 2배 이상이 되려면

$1.04^n a \geq 2a$

이때 $a>0$이므로 양변을 a로 나누면

$1.04^n \geq 2$ ➔ 30% 배점

$1.04^n \geq 2$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 1.04^n \geq \log 2 \quad \therefore n\log 1.04 \geq \log 2$

$\log 1.04=0.0170$, $\log 2=0.3010$이므로

$0.0170n \geq 0.3010$

$\therefore n \geq \frac{0.3010}{0.0170}=17.\cdots$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 개구리의 개체 수가 처음으로 현재 개체 수의 2배 이상이 되는 것은 18년 후이다.

➔ 10% 배점

답 18년

10 전략 $\mathrm{H}(a, 0)$으로 놓고 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{PH}}$임을 이용하여 a에 대한 식을 세운다.

풀이 점 P의 x좌표를 a라 하면

$\mathrm{P}(a, \log_{\frac{3}{2}} a)$, $\mathrm{H}(a, 0)$

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로 $\quad a-1=\log_{\frac{3}{2}} a$

따라서 점 P와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a-\log_{\frac{3}{2}} a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|a-(a-1)|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Remark 점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

11 전략 두 점 A, B의 x좌표가 같고, 두 점 B, C의 y좌표가 같음을 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표를 구한다.

풀이 점 B는 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 있고 x좌표가 $\frac{1}{2}$이므로 점 B의 y좌표를 b라 하면

$b=\log_2 \frac{1}{2}=-1 \qquad \therefore \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

점 A는 곡선 $y=\log_4 \frac{1}{x}$ 위에 있고 x좌표가 $\frac{1}{2}$이므로 점 A의 y좌표를 a라 하면

$a=\log_4 \frac{1}{\frac{1}{2}}=\log_4 2=\frac{1}{2} \qquad \therefore \mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

점 C는 곡선 $y=\log_4 \frac{1}{x}$ 위에 있고 y좌표가 -1이므로 점 C의 x좌표를 c라 하면

$-1=\log_4 \frac{1}{c}, \qquad \frac{1}{c}=4^{-1} \qquad \therefore c=4$

$\therefore \mathrm{C}(4, -1)$

따라서 두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-1-\frac{1}{2}}{4-\frac{1}{2}}=-\frac{3}{7}$$

답 ③

12 전략 $f(x)$에 $x=1, 2, \cdots, 93$을 대입한 후 로그의 성질을 이용한다.

풀이 $f(x)=\log_a\left(1+\frac{1}{x+2}\right)=\log_a \frac{x+3}{x+2}$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(93)$

$=\log_a \frac{4}{3}+\log_a \frac{5}{4}+\log_a \frac{6}{5}+\cdots+\log_a \frac{96}{95}$

$=\log_a\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{96}{95}\right)$

$=\log_a \frac{96}{3}=\log_a 32$

따라서 $\log_a 32=-5$이므로 로그의 정의에 의하여

$a^{-5}=32, \qquad a^{-5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

답 ③

13 전략 $f(x)=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$에서

$a>1$일 때 $x_1<x_2$이면 $\quad f(x_1)<f(x_2)$

$0<a<1$일 때 $x_1<x_2$이면 $\quad f(x_1)>f(x_2)$

풀이 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+5)$

$\qquad =\log_{\frac{1}{2}}\{(x-1)^2+4\}$

ㄱ. $g(x)=(x-1)^2+4$라 하면 $x>1$에서 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값도 증가한다.

이때 $f(x)$의 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $g(x)$가 증가하면 $f(x)$는 감소한다.

따라서 $1<x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

ㄴ. $f(2)=f(0)=\log_{\frac{1}{2}}5$이므로 함수 $f(x)$는 일대일 대응이 아니다.
따라서 함수 $f(x)$의 역함수는 존재하지 않는다.
ㄷ. $g(x)=(x-1)^2+4$가 최소일 때 $f(x)$는 최대가 된다.
$g(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 4를 가지므로 $f(x)$의 최댓값은

$$f(1)=\log_{\frac{1}{2}}4=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=-2$$

따라서 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)\le -2$이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

Remark 일대일 대응

함수 $f(x)$가 일대일 대응이면
① 정의역의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$이다.
② 치역과 공역이 같다.

14

전략 주어진 로그함수의 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

풀이 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-a)$에서 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $x-a$가 최대일 때 y는 최소가 된다.
따라서 $5\le x\le 25$에서 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-a)$는 $x=25$일 때 최소이므로

$$-2=\log_{\frac{1}{3}}(25-a),\qquad 25-a=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$25-a=9\qquad \therefore a=16$$

답 ④

15

전략 로그의 정의에 의하여 $\log_a f(x)=b \iff f(x)=a^b$임을 이용한다.

풀이 진수의 조건에서 $x>0$, $\log_2 x>0$이므로

$x>0$, $x>1$ $\quad\therefore x>1$ …… ㉠

$\log_4(\log_2 x)=1$에서 $\quad\log_2 x=4$
따라서 $\log_2 x=4$에서

$x=2^4=16$

$x=16$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 x의 값이다.

답 16

16

문제이해 • 진수의 조건에서 $x-1>0$이므로

$x>1$ …… ㉠ ➔ 20% 배점

해결과정 • $|\log_4(x-1)|<1$에서

$-1<\log_4(x-1)<1$

$\log_4 4^{-1}<\log_4(x-1)<\log_4 4$

밑이 4이고 $4>1$이므로 $\quad\frac{1}{4}<x-1<4$

$\therefore \frac{5}{4}<x<5$ …… ㉡ ➔ 30% 배점

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{5}{4}<x<5$ ➔ 10% 배점

따라서 이차방정식 $4x^2+ax+b=0$의 두 근이 $x=\frac{5}{4}$ 또는 $x=5$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{5}{4}+5=-\frac{a}{4}$, $\frac{5}{4}\cdot 5=\frac{b}{4}$

$\therefore a=-25,\ b=25$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore b-a=50$ ➔ 10% 배점

답 50

17

전략 진수의 조건에서 $x>0$, $\log_3 x>0$임에 주의하여 로그부등식을 푼다.

풀이 진수의 조건에서 $x>0$, $\log_3 x>0$이므로

$x>0$, $x>1$ $\quad\therefore x>1$ …… ㉠

$\log_4(\log_3 x)\le 1$에서 $\quad\log_4(\log_3 x)\le\log_4 4$
밑이 4이고 $4>1$이므로 $\quad\log_3 x\le 4$

$\log_3 x\le\log_3 3^4$

밑이 3이고 $3>1$이므로 $\quad x\le 81$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad 1<x\le 81$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값은 81, 최솟값은 2이므로 $\quad M=81,\ m=2$

$\therefore M+m=83$

답 83

18

문제이해 • 진수의 조건에서

$k>0$ …… ㉠ ➔ 10% 배점

해결과정 • 주어진 부등식을 변형하면

$(\log_2 x)^2+2(\log_2 2+\log_2 x)-\log_4 k\ge 0$

$(\log_2 x)^2+2(1+\log_2 x)-\log_4 k\ge 0$

$\therefore (\log_2 x)^2+2\log_2 x+2-\log_4 k\ge 0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+2t+2-\log_4 k\ge 0$ ➔ 30% 배점

주어진 부등식이 모든 양의 실수 x에 대하여 성립하므로 이 부등식은 모든 실수 t에 대하여 성립해야 한다.
이차방정식 $t^2+2t+2-\log_4 k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(2-\log_4 k)\leq 0, \quad \log_4 k\leq 1$

$\therefore\ k\leq 4$ …… ㉡ ➔ 40% 배점

답구하기 • ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<k\leq 4$ ➔ 20% 배점

답 $0<k\leq 4$

Remark 이차부등식이 항상 성립할 조건

a, b, c가 실수이고 $a\neq 0$, $D=b^2-4ac$일 때, 모든 실수 x에 대하여

① $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건 ➡ $a>0$, $D<0$
② $ax^2+bx+c\geq 0$이 성립할 조건 ➡ $a>0$, $D\leq 0$
③ $ax^2+bx+c<0$이 성립할 조건 ➡ $a<0$, $D<0$
④ $ax^2+bx+c\leq 0$이 성립할 조건 ➡ $a<0$, $D\leq 0$

19 전략 $a>1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \iff x_1<x_2$, $\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1<x_2$임을 이용한다.

풀이 (i) $2^{x+3}>4$에서 $\quad 2^{x+3}>2^2$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $\quad x+3>2$

$\therefore\ x>-1$ …… ㉠

(ii) 진수의 조건에서 $x+3>0$, $5x+15>0$이므로

$x>-3$ …… ㉡

$2\log(x+3)<\log(5x+15)$에서

$\log(x+3)^2<\log(5x+15)$

밑이 10이고 $10>1$이므로

$(x+3)^2<5x+15, \quad x^2+x-6<0$

$(x+3)(x-2)<0$

$\therefore\ -3<x<2$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$-3<x<2$ …… ㉣

주어진 연립부등식의 해는 ㉠, ㉣의 공통 범위이므로

$-1<x<2$

따라서 정수 x는 0, 1이므로 구하는 합은 1이다.

답 ④

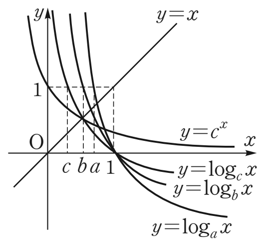
20 전략 함수 $y=c^x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프는 함수 $y=\log_c x$의 그래프임을 이용한다.

풀이 주어진 세 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=c^x$은 모두 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$0<a<1$, $0<b<1$, $0<c<1$

함수 $y=c^x$의 역함수는 $y=\log_c x$이므로 $y=\log_c x$의 그래프는 $y=c^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 세 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 세 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표가 각각 a, b, c이므로

$a>b>c$

답 ①

21 전략 세 점 P, Q, R가 각각 어떤 두 곡선의 교점인지 파악한다.

풀이 $y=|\log_2 x|=\begin{cases}\log_2 x & (x\geq 1)\\ -\log_2 x & (0<x<1)\end{cases}$

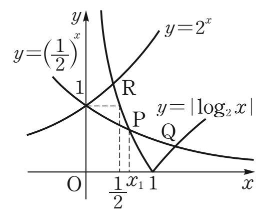
$=\begin{cases}\log_2 x & (x\geq 1)\\ \log_{\frac{1}{2}} x & (0<x<1)\end{cases}$

ㄱ. $\log_{\frac{1}{2}} x=1$에서

$x=\frac{1}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서

$\frac{1}{2}<x_1<1$



ㄴ. 점 $Q(x_2,\ y_2)$는 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\log_2 x$의 교점이고, 점 $R(x_3,\ y_3)$은 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=2^x$의 교점이다.

이때 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, 두 곡선 $y=\log_2 x$와 $y=2^x$은 각각 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 Q, R도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 $x_2=y_3$, $x_3=y_2$이므로

$x_2y_2-x_3y_3=y_3y_2-y_2y_3=0$

ㄷ. 점 $P(x_1,\ y_1)$은 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 교점이고, 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

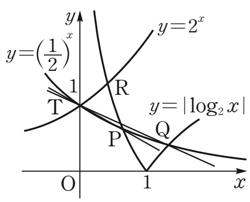
따라서 $x_1=y_1$이므로

$$x_2(x_1-1)>y_1(y_2-1)$$
$$\Longleftrightarrow x_2(y_1-1)>x_1(y_2-1)$$

$x_1>0$, $x_2>0$이므로 부등식의 양변을 x_1x_2로 나누면

$$\frac{y_1-1}{x_1}>\frac{y_2-1}{x_2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\mathrm{T}(0,\ 1)$이라 하면 $\frac{y_1-1}{x_1}$은 직선 PT의 기울기이고 $\frac{y_2-1}{x_2}$은 직선 QT의 기울기이므로 다음 그림에서 $\frac{y_1-1}{x_1}<\frac{y_2-1}{x_2}$



따라서 ㉠은 성립하지 않는다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

22 문제이해 • $y=4x^{\log_2 x-2}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 y=\log_2 4x^{\log_2 x-2}$$
$$=\log_2 4+\log_2 x^{\log_2 x-2}$$
$$=2+(\log_2 x-2)\log_2 x$$
$$=(\log_2 x)^2-2\log_2 x+2$$ ➔ 30% 배점

해결과정 • $\log_2 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{2}\le x\le 2$에서

$$\log_2\frac{1}{2}\le\log_2 x\le\log_2 2$$
$$\therefore\ -1\le t\le 1$$

이때 주어진 함수는

$$\log_2 y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$$

따라서 $-1\le t\le 1$에서 함수 $\log_2 y=(t-1)^2+1$은 $t=1$일 때 최솟값 1, $t=-1$일 때 최댓값 5를 가지므로

$$1\le\log_2 y\le 5,\qquad \log_2 2\le\log_2 y\le\log_2 2^5$$
$$\therefore\ 2\le y\le 32$$ ➔ 50% 배점

답구하기 • 따라서 $M=32$, $m=2$이므로

$$M-m=30$$ ➔ 20% 배점

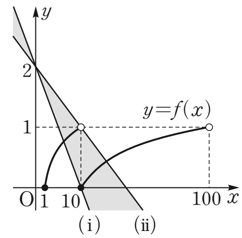
답 30

23 (전략) 문제의 정의에 따라 함수 $f(x)$의 식을 구하고 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $1\le x<10$일 때 $0\le\log x<1$이고,
$10\le x<100$일 때 $1\le\log x<2$이므로

$$f(x)=\begin{cases}\log x & (1\le x<10)\\ \log x-1 & (10\le x<100)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



직선 $y=2-\frac{x}{n}$는 n의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2-\frac{x}{n}$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

(i) 직선 $y=2-\frac{x}{n}$가 점 $(10,\ 0)$을 지날 때,

$$0=2-\frac{10}{n}\text{에서}\qquad n=5$$

(ii) 직선 $y=2-\frac{x}{n}$가 점 $(10,\ 1)$을 지날 때,

$$1=2-\frac{10}{n}\text{에서}\qquad n=10$$

(i), (ii)에서 $5\le n<10$이므로 자연수 n은 5, 6, 7, 8, 9의 5개이다.

답 5

Remark

직선 $y=2-\frac{x}{n}$는 항상 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 이 직선이 색칠한 부분에 있을 때 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=2-\frac{x}{n}$는 두 점에서 만난다.

03 지수함수와 로그함수의 미분

유제

본책 73~85쪽

029-1 (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-3^x}{2^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}=-1$

(2) $\lim_{x\to\infty}(4^x-3^{x+1})=\lim_{x\to\infty}4^x\left\{1-3\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}=\infty$

(3) $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{5^{-t}-5^t}{5^{-t}+5^t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^t-5^t}{\left(\frac{1}{5}\right)^t+5^t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{25}\right)^t-1}{\left(\frac{1}{25}\right)^t+1}=-1$$

답 (1) -1 (2) ∞ (3) -1

030-1 (1) $\lim_{x\to\infty}\{\log_{\frac{1}{3}}(3x+1)-\log_{\frac{1}{3}}x\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x+1}{x}$$
$$=\log_{\frac{1}{3}}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x}\right)$$
$$=\log_{\frac{1}{3}}3=-1$$

(2) $\lim_{x\to3}(\log_2|x-3|-\log_2|\sqrt{x+1}-2|)$

$$=\lim_{x\to3}\left(\log_2\left|\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}\right|\right)$$
$$=\lim_{x\to3}\left\{\log_2\left|\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}\right|\right\}$$
$$=\lim_{x\to3}\left\{\log_2\left|\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}\right|\right\}$$
$$=\lim_{x\to3}(\log_2|\sqrt{x+1}+2|)$$
$$=\log_2\left(\lim_{x\to3}|\sqrt{x+1}+2|\right)$$
$$=\log_2(\sqrt{4}+2)$$
$$=\log_2 4=2$$

답 (1) -1 (2) 2

031-1 (1) $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{x}}\right\}^{\frac{3}{4}}=e^{\frac{3}{4}}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2}}$

$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

(3) $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}$$
$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

(4) $-\frac{1}{3x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{6x}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{2}{t}}$$
$$=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-2}$$
$$=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

답 (1) $e^{\frac{3}{4}}$ (2) $\sqrt{e}$ (3) $\frac{1}{e}$ (4) $\frac{1}{e^2}$

032-1 (1) $\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1-e^{2x}+1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot3-\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2$$
$$=1\cdot3-1\cdot2=1$$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-5^{-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-5^{-x}+1}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{5^{-x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{5^{-x}-1}{-x}$$
$$=1+\ln5=\ln5e$$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\log_2(2+x)-1}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\{\log_2(2+x)-\log_2 2\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\log_2\frac{2+x}{2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\log_2\left(1+\frac{x}{2}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\log_2\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\log_2\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=\log_2 e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 e$$
$$=\frac{1}{2\ln2}$$

(4) $\lim_{x\to\infty} x\{\ln(x+1)-\ln x\}=\lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+1}{x}$

$=\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$=\ln e=1$

답 (1) 1 (2) $\ln 5e$ (3) $\frac{1}{2\ln 2}$ (4) 1

033-1 $x \longrightarrow 0$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}\ln(a+4x)=0$이므로

$\ln a=0 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{e^{3x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot\frac{3x}{e^{3x}-1}\cdot\frac{4}{3}$$

$$=1\cdot 1\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

$\therefore b=\frac{4}{3}$

답 $a=1,\ b=\frac{4}{3}$

033-2 $x \longrightarrow \frac{1}{3}$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to\frac{1}{3}}(ax-b)=0$이므로

$\frac{1}{3}a-b=0 \quad \therefore a=3b$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3bx-b}{\ln 3x}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{b(3x-1)}{\ln 3x} \quad \cdots\cdots ㉡$$

$x-\frac{1}{3}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \frac{1}{3}$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로 ㉡은

$$\lim_{t\to 0}\frac{3bt}{\ln(1+3t)}=\lim_{t\to 0}\frac{3t}{\ln(1+3t)}\cdot b$$

$$=1\cdot b=b$$

즉 $b=4$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $\quad a=12$

$\therefore a+b=16$

답 16

034-1 (1) $y=e^{2x}=e^x\cdot e^x$이므로

$y'=(e^x)'e^x+e^x(e^x)'=e^{2x}+e^{2x}=2e^{2x}$

(2) $y'=(3x+1)'5^x+(3x+1)(5^x)'$

$=3\cdot 5^x+(3x+1)\cdot 5^x\ln 5$

$=5^x\{3+(3x+1)\ln 5\}$

(3) $y'=(x^2+3)'\left(\frac{1}{2}\right)^x+(x^2+3)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}'$

$=2x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+(x^2+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln\frac{1}{2}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^x\left\{2x+(x^2+3)\ln\frac{1}{2}\right\}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^x\{2x-(x^2+3)\ln 2\}$

답 풀이 참조

034-2 $f(x)=3^{x+1}=3\cdot 3^x$이므로

$f'(x)=3\cdot 3^x\ln 3=3^{x+1}\ln 3$

따라서 $x=0$에서의 미분계수는

$f'(0)=3\ln 3$

답 $3\ln 3$

035-1 (1) $y=\frac{\ln x^4}{3}=\frac{4\ln x}{3}$이므로

$y'=\frac{4}{3x}$

(2) $y=(4x^2-1)\ln x^3$

$=3(4x^2-1)\ln x$

$=(12x^2-3)\ln x$

이므로

$y'=(12x^2-3)'\ln x+(12x^2-3)(\ln x)'$

$=24x\ln x+(12x^2-3)\cdot\frac{1}{x}$

$=24x\ln x+12x-\frac{3}{x}$

(3) $y'=(e^x)'\log_5 x+e^x(\log_5 x)'$

$=e^x\log_5 x+e^x\cdot\frac{1}{x\ln 5}$

$=e^x\left(\log_5 x+\frac{1}{x\ln 5}\right)$

(4) $y=(\log_3 x)^2+\frac{1}{3}\ln x=\log_3 x\cdot\log_3 x+\frac{1}{3}\ln x$

이므로

$y'=(\log_3 x)'\log_3 x+\log_3 x(\log_3 x)'+\left(\frac{1}{3}\ln x\right)'$

$=\frac{1}{x\ln 3}\cdot\log_3 x+\log_3 x\cdot\frac{1}{x\ln 3}+\frac{1}{3x}$

$=\frac{2\log_3 x}{x\ln 3}+\frac{1}{3x}$

$=\frac{6\log_3 x+\ln 3}{3x\ln 3}$

답 풀이 참조

중단원 연습 문제

본책 86~89쪽

01 3	02 ⑤	03 $a=0$, $b=-\ln 2$		
04 ①	05 e	06 ②	07 $\log 6$	08 ①
09 e	10 ②	11 -5	12 ④	13 28
14 ③	15 ①	16 4		

01 (전략) $\log_a M-\log_a N=\log_a \dfrac{M}{N}(a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0)$임을 이용한다.

(풀이) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\log_2(2+8x^2)-2\log_2 x\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\{\log_2(2+8x^2)-\log_2 x^2\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\log_2\frac{2+8x^2}{x^2}\right)$$
$$=\log_2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2+8x^2}{x^2}\right)$$
$$=\log_2 8=3$$

답 3

02 (전략) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0,\ a\neq 1)$임을 이용한다.

(풀이) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+12)^x-a^x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a+12)^x-1-a^x+1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a+12)^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$$
$$=\ln(a+12)-\ln a$$
$$=\ln\frac{a+12}{a}$$

즉 $\ln\dfrac{a+12}{a}=\ln 3$에서 $\dfrac{a+12}{a}=3$이므로

$a+12=3a,\qquad 2a=12$

$\therefore a=6$

답 ⑤

03 (전략) $x\longrightarrow a$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow 0$임을 이용한다.

(풀이) $x\longrightarrow 2$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 2}\{\ln(x+a)+b\}=0$이므로

$\ln(2+a)+b=0$

$\therefore b=-\ln(2+a)$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하고, $x-2=t$로 놓으면

$x\longrightarrow 2$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x+a)+b}{x^2-4}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+2+a)-\ln(2+a)}{(t+2)^2-4}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+2+a)-\ln(2+a)}{t^2+4t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t(t+4)}\ln\frac{t+2+a}{2+a}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+4}\cdot\frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{t}{2+a}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+4}\ln\left(1+\frac{t}{2+a}\right)^{\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+4}\ln\left\{\left(1+\frac{t}{2+a}\right)^{\frac{2+a}{t}}\right\}^{\frac{1}{2+a}}$$
$$=\frac{1}{4}\ln e^{\frac{1}{2+a}}=\frac{1}{4(2+a)}$$

즉 $\dfrac{1}{4(2+a)}=\dfrac{1}{8}$에서 $\quad a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=-\ln 2$

답 $a=0$, $b=-\ln 2$

04 (전략) 곱의 미분법을 이용하여 도함수를 구한 후 $x=0$을 대입한다.

(풀이) $f(x)=(x^2+1)e^x$에서

$$f'(x)=(x^2+1)'e^x+(x^2+1)(e^x)'$$
$$=2xe^x+(x^2+1)e^x$$
$$=e^x(x^2+2x+1)$$
$$=e^x(x+1)^2$$

$\therefore f'(0)=e^0(0+1)^2=1$

답 ①

05 해결과정 • $f'(x)=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'$

$$=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}$$
$$=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

▶ 80% 배점

답구하기 • $\therefore f'(1)=e(\ln 1+1)=e$ ▶ 20% 배점

답 e

06 (전략) 지수함수와 로그함수의 극한을 이용하여 극한을 조사한다.

(풀이) ㄱ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=0$이므로 $\quad\lim\limits_{x\to\infty}3^{\frac{2}{x}}=1$

$x>0$일 때, $3^{\frac{2}{x}}>1$이므로 $\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-3^{\frac{2}{x}}}=-\infty$

ㄴ. $\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}=\infty$이므로 $\quad \lim_{x\to0+}2^{\frac{1}{x}}=\infty$

$\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty$이므로 $\quad \lim_{x\to0-}2^{\frac{1}{x}}=0$

이때 $\lim_{x\to0+}\frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$, $\lim_{x\to0-}\frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$$

ㄷ. $x\longrightarrow1+$일 때, $\log_7 x\longrightarrow0+$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{x}{\log_7 x}=\infty$$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

07 해결과정 • $f(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(2^n+2^{-n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log 2^n(1+2^{-2n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\log 2^n+\log(1+2^{-2n})\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log 2+\frac{1}{n}\log(1+2^{-2n})\right\}$$
$$=\log 2$$
➔ 40% 배점

$$f(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(3^n+3^{-n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log 3^n(1+3^{-2n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\log 3^n+\log(1+3^{-2n})\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log 3+\frac{1}{n}\log(1+3^{-2n})\right\}$$
$$=\log 3$$
➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore f(2)+f(3)=\log 2+\log 3$
$=\log 6$ ➔ 20% 배점

답 $\log 6$

08 전략 주어진 식을 간단히 한 후 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$임을 이용한다.

풀이 $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+n}\right)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{n+n}$$
$$=\frac{2n+1}{2n}=1+\frac{1}{2n}$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

답 ①

09 전략 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$임을 이용할 수 있도록 치환한다.

풀이 $h-1=t$로 놓으면 $h\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{h\to1}\frac{e^h-e}{h-1}=\lim_{t\to0}\frac{e^{t+1}-e}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{e(e^t-1)}{t}=e\cdot1=e$$

답 e

10 전략 $f(x)=x^2+ax+b$라 하고 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)} & (x\neq0,\ x>-1)\\ 8b & (x=0)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=8b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow0$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(x^2+ax+b)=0$이므로

$b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면

$$0=\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x+a}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=\frac{a}{1}$$

$\therefore a=0$

따라서 $f(x)=x^2$이므로 $\quad f(3)=9$ 답 ②

Remark

$x\neq a$인 모든 실수 x에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\neq a)\\ k & (x=a)(k\text{는 상수})\end{cases}$$

가 모든 실수 x에서 연속이면 ➡ $\lim_{x\to a}g(x)=k$

11 해결과정 • $g(x)=(\ln x+2x)f(x)$에서

$$g'(x)=(\ln x+2x)'f(x)+(\ln x+2x)f'(x)$$
$$=\left(\frac{1}{x}+2\right)f(x)+(\ln x+2x)f'(x)$$

➔ 40% 배점

$g(1)=(\ln 1+2)f(1)=6$이므로

$2f(1)=6 \qquad \therefore f(1)=3$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $g'(1)=3f(1)+2f'(1)=-1$이므로

$3\cdot 3+2f'(1)=-1, \qquad 2f'(1)=-10$

$\therefore f'(1)=-5$ ➔ 30% 배점

답 -5

12 전략 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$임을 이용하여 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e-h)}{h}$를 변형한다.

풀이 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e)-f(e-h)+f(e)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(e-h)-f(e)}{-h}$$
$$=f'(e)+f'(e)$$
$$=2f'(e)$$

이때

$$f'(x)=(x^3)'\ln x+x^3(\ln x)'$$
$$=3x^2\ln x+x^3\cdot\frac{1}{x}$$
$$=3x^2\ln x+x^2$$

이므로 구하는 값은

$$2f'(e)=2(3e^2\ln e+e^2)=2(3e^2+e^2)=8e^2$$

답 ④

13 해결과정 • 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0+}\{a\ln(x+1)+b\}=\lim_{x\to 0-}(3^{x+1}-2)=f(0)$$

$\therefore b=1$ ➔ 30% 배점

또 $f'(0)$이 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x+1} & (x>0)\\ 3^{x+1}\ln 3 & (x<0)\end{cases}$$

에서

$$\lim_{x\to 0+}\frac{a}{x+1}=\lim_{x\to 0-}3^{x+1}\ln 3$$

$\therefore a=\ln 27$ ➔ 50% 배점

답구하기 • $\therefore e^a+b=e^{\ln 27}+1=27+1$

$=28$ ➔ 20% 배점

답 28

Remark

함수 $F(x)=\begin{cases}f(x) & (x\ge a)\\ g(x) & (x<a)\end{cases}$가 다음 조건을 모두 만족시키면 $x=a$에서 미분가능하다.

(i) 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}g(x)=F(a)$$

(ii) $F'(a)$가 존재한다. ➡ $\displaystyle\lim_{x\to a+}f'(x)=\lim_{x\to a-}g'(x)$

14 전략 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ $(a>0,\ a\ne 1)$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot x$$
$$=1\cdot 0=0$$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{f(x)}\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{3^x-1}{x}$

$$=1\cdot 1\cdot\ln 3$$
$$=\ln 3$$

ㄷ. [반례] $f(x)=|x|$이면 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0$이지만

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{-x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{-x}-1}{-x}\cdot(-1)$$
$$=1\cdot(-1)$$
$$=-1$$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}$이 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

15 전략 $x\longrightarrow a$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow 0$임을 이용한다.

풀이 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty} x^a \ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(b+ct^2)}{t^a}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$t \longrightarrow 0$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{t\to 0}\ln(b+ct^2)=0$이므로

$\ln b=0 \qquad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+ct^2)}{t^a}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{ct^2}{t^a}\cdot\frac{\ln(1+ct^2)}{ct^2}\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{ct^2}{t^a}$$
$$=\lim_{t\to 0}ct^{2-a}=2$$

즉 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$2-a=0 \qquad \therefore a=2$

따라서 $\lim_{t\to 0}ct^{2-a}=\lim_{t\to 0}c=2$이므로

$c=2$

$\therefore a+b+c=5$

답 ①

16 전략 점 A의 x좌표를 t라 하고 S_1, S_2를 t에 대한 식으로 나타낸 후 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$임을 이용한다.

풀이 점 A의 좌표를 $(t,\ \ln(4t+1))$이라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot\ln(4t+1)=\frac{1}{2}\ln(4t+1)$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OC}}\cdot t=\frac{t}{2}$$

$a \longrightarrow \infty$이면 곡선 $y=ax^2$은 y축에 한없이 가까워지므로 $t \longrightarrow 0$이다.

$$\therefore a=\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\ln(4t+1)}{\frac{t}{2}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(4t+1)}{4t}\cdot 4$$
$$=1\cdot 4=4$$

답 4

Ⅱ. 삼각함수

04 삼각함수

유제

본책 97~115쪽

036-1 θ가 제 4 사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+270^\circ<\theta<360^\circ\times n+360^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 180^\circ\times n+135^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times n+180^\circ$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+135^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+180^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제 2 사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+315^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+360^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제 4 사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 제 2 사분면 또는 제 4 사분면

037-1 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$6\theta-\theta=360^\circ\times n$ (n은 정수)

$5\theta=360^\circ\times n \qquad \therefore \theta=72^\circ\times n$

그런데 $0^\circ<\theta<90^\circ$이므로

$0^\circ<72^\circ\times n<90^\circ \qquad \therefore 0<n<\frac{5}{4}$

n은 정수이므로 $\quad n=1$

$\therefore \theta=72^\circ\times 1=72^\circ$

답 72°

037-2 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$4\theta+\theta=360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)

$5\theta=360^\circ\times n+180^\circ$

$\therefore \theta=72^\circ\times n+36^\circ$

그런데 $90^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$90^\circ<72^\circ\times n+36^\circ<180^\circ$

$54^\circ<72^\circ\times n<144^\circ$

$\therefore \frac{3}{4}<n<2$

n은 정수이므로 $\quad n=1$

$\therefore \theta=72^\circ\times 1+36^\circ=108^\circ$

답 108°

038-1 주어진 원뿔의 옆면은 반지름의 길이가 8인 부채꼴이다.
옆면인 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$2\pi\cdot5=10\pi$

따라서 부채꼴인 옆넓이는

$\frac{1}{2}\cdot8\cdot10\pi=40\pi$

답 40π

038-2 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 부채꼴의 넓이가 9이므로

$9=\frac{1}{2}rl \qquad \therefore l=\frac{18}{r}$

즉 부채꼴의 둘레의 길이는

$l+2r=\frac{18}{r}+2r$

이때 $\frac{18}{r}>0$, $2r>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{18}{r}+2r\ge2\sqrt{\frac{18}{r}\cdot2r}$

$=2\cdot6=12$ (단, 등호는 $r=3$일 때 성립)

따라서 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 12이다.

답 12

039-1 $\angle B=45^\circ$이므로

$\angle ABD=\angle DBC=22.5^\circ$

직각삼각형 BCD에서

$\angle BDC=90^\circ-\angle DBC$

$=90^\circ-22.5^\circ=67.5^\circ$

각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{BC}:\overline{AB}=\overline{CD}:\overline{AD}$

이고, $\overline{AB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$1:\sqrt{2}=\overline{CD}:\overline{AD}$

그런데 $\overline{CD}+\overline{AD}=1$이므로

$1:\sqrt{2}=\overline{CD}:(1-\overline{CD})$

$\sqrt{2}\,\overline{CD}=1-\overline{CD}, \qquad (\sqrt{2}+1)\overline{CD}=1$

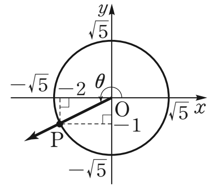
$\therefore \overline{CD}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

따라서 △BCD에서

$\tan67.5^\circ=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

답 $\sqrt{2}+1$

040-1 θ가 제3사분면의 각이고 $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$이므로 오른쪽 그림과 같이 중심을 원점으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원을 그리면 각 θ의 동경과 만나는 점 P는



$P(-2,\ -1)$

따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \tan\theta=\frac{1}{2}$

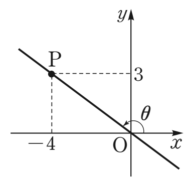
$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{5}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

답 $-\frac{3}{2}$

040-2 $3x+4y=0$에서 $y=-\frac{3}{4}x$이므로

$\tan\theta=-\frac{3}{4}$

θ가 제2사분면의 각이고 $\tan\theta=-\frac{3}{4}$이므로 점 P의 좌표를 $(-4,\ 3)$으로 놓고 동경 OP를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=\frac{3}{5},\ \sec\theta=-\frac{5}{4}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{4\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)-2}{\frac{3}{5}\left\{8\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+1\right\}}$

$=\frac{-7}{-3}=\frac{7}{3}$

답 $\frac{7}{3}$

Remark

직선 $3x+4y=0$이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ이므로 $\tan\theta$의 값은 이 직선의 기울기와 같다.

041-1 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\sin\theta<0,\ 1-\sin\theta>0$

$\therefore \sqrt{\sin^2\theta}-|1-\sin\theta|=|\sin\theta|-|1-\sin\theta|$

$=-\sin\theta-(1-\sin\theta)$

$=-1$

답 -1

041-2 (i) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}<0$에서

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$

이므로 θ는 제 2 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$에서

$\cos\theta>0,\ \tan\theta<0$ 또는 $\cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

이므로 θ는 제 3 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제 4 사분면의 각이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta<0$

$\therefore \sin\theta+\tan\theta<0,\ \sin\theta-\cos\theta<0$

$\therefore$ (주어진 식)

$=|\sin\theta+\tan\theta|-|\tan\theta|-|\sin\theta-\cos\theta|$

$=-(\sin\theta+\tan\theta)+\tan\theta+(\sin\theta-\cos\theta)$

$=-\cos\theta$

답 $-\cos\theta$

042-1 (1) $\dfrac{\sin^3\theta}{\cos\theta-\cos^3\theta}=\dfrac{\sin^3\theta}{\cos\theta(1-\cos^2\theta)}$

$=\dfrac{\sin\theta\sin^2\theta}{\cos\theta\sin^2\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\tan\theta$

(2) $\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}=\dfrac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$

$=2\sec^2\theta$

답 (1) $\tan\theta$ (2) $2\sec^2\theta$

043-1 $\csc^2\theta=1+\cot^2\theta$

$=1+\left(-\dfrac{5}{12}\right)^2=\dfrac{169}{144}$

그런데 θ가 제2 사분면의 각이므로 $\csc\theta>0$

$\therefore \csc\theta=\dfrac{13}{12}$

$\sin\theta=\dfrac{1}{\csc\theta}=\dfrac{12}{13}$ 이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2=\dfrac{25}{169}$

그런데 θ가 제2 사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\dfrac{5}{13}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\dfrac{12}{13}+\left(-\dfrac{5}{13}\right)=\dfrac{7}{13}$

답 $\dfrac{7}{13}$

043-2 $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=2+\sqrt{3}$에서

$1-\tan\theta=2+\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})\tan\theta$

$(3+\sqrt{3})\tan\theta=-1-\sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{-(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

즉 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로

$\cos\theta=-\sqrt{3}\sin\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta+(-\sqrt{3}\sin\theta)^2=1,\quad 4\sin^2\theta=1$

$\therefore \sin^2\theta=\dfrac{1}{4}$

그런데 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \csc\theta=2$

답 2

다른 풀이 $\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\cot\theta=-\sqrt{3}$

$\therefore \csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+(-\sqrt{3})^2=4$

그런데 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\csc\theta>0$

$\therefore \csc\theta=2$

044-1 (1) $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0,\ \cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

(3) $\csc\theta+\sec\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}$

$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{1}{4}}=2\sqrt{6}$$

답 (1) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (2) $\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$ (3) $2\sqrt{6}$

045-1 이차방정식 $(1+\sqrt{2})x^2+x+p=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1-\sqrt{2} \quad \cdots ㉠$$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{p}{1+\sqrt{2}} \quad \cdots ㉡$$

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=3-2\sqrt{2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=3-2\sqrt{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=1-\sqrt{2} \quad \cdots ㉢$

㉡, ㉢에서 $\dfrac{p}{1+\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$이므로

$p=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$

답 -1

중단원 연습 문제

본책 116~119쪽

01 ⑤	**02** $\pi-2$	**03** ④	**04** 2	**05** 0
06 14	**07** 11	**08** ④	**09** 16	**10** ④
11 $-\frac{10}{3}$	**12** ⑤	**13** ④	**14** ③	**15** $\frac{8}{3}\pi$
16 342	**17** ④			

01 전략 두 동경 OP, OQ가 나타내는 각을 각각 α, β라 할 때, 두 동경 OP, OQ가 x축에 대하여 대칭이면 $\alpha+\beta=360°\times n$ (n은 정수)이다.

풀이 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=360°\times n$ (n은 정수)

$6\theta=360°\times n \qquad \therefore \theta=60°\times n \quad \cdots\cdots ㉠$

그런데 $0°<\theta<360°$이므로

$0°<60°\times n<360° \qquad \therefore 0<n<6$

n은 정수이므로 $\quad n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=60°,\ 120°,\ 180°,\ 240°,\ 300°$

따라서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$60°+120°+180°+240°+300°=900°$

답 ⑤

02 문제이해 • 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이는

$2r+l$

원의 반지름의 길이도 r이므로 원의 둘레의 길이는

$2\pi r$ ➔ 20% 배점

해결과정 • 즉 $2\pi r=2(2r+l)$이므로

$\pi r=2r+l \qquad \therefore l=(\pi-2)r$ ➔ 40% 배점

부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 $l=r\theta$에서

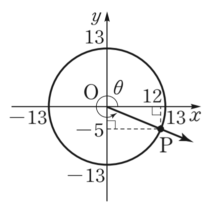
$\theta=\dfrac{l}{r}=\dfrac{(\pi-2)r}{r}=\pi-2$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 부채꼴의 중심각의 크기는 $\pi-2$이다. ➔ 10% 배점

답 $\pi-2$

03 전략 좌표평면 위에 각 θ의 동경을 나타낸 후 조건에 맞는 점 P를 잡는다.

풀이 $a<0$이므로 점 P는 제4사분면 위의 점이다. 즉 θ가 제 4 사분면의 각이고 $\cos\theta=\dfrac{12}{13}$이므로 오른쪽 그림과 같이 중심을 원점으로 하고 반지름의 길이가 13인 원을 그리면 각 θ의 동경과 만나는 점 P는 $\quad$P$(12,\ -5)$



따라서 $a=-5$, $r=13$이므로

$a+r=8$

답 ④

04 전략 $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 삼각함수의 값의 부호를 살펴본다.

풀이 $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로 θ는 제 4 사분면의 각이다.

즉 $\sin\theta<0$, $\csc\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\sec\theta>0$, $\tan\theta<0$이므로

$\sec\theta>0$, $\csc\theta<0$, $\cos\theta-\sin\theta>0$,

$\tan\theta-\cos\theta<0$

따라서 그 값이 양수인 것은 $\sec\theta$, $\cos\theta-\sin\theta$의 2개이다.

답 2

05 (전략) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용하여 식을 간단히 한다.

(풀이) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$\frac{1-2\cos^2\theta}{1-2\sin\theta\cos\theta}+\frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{1-2\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{(\sin\theta-\cos\theta)^2}+\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{(\sin\theta-\cos\theta)^2}+\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}$$
$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}-\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$
$$=0$$

답 0

06 (전략) 주어진 식의 양변을 제곱하여 $\sin\theta\cos\theta$의 값을 먼저 구한다.

(풀이) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$
$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\qquad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$$
$$\therefore \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$$
$$=\frac{1-2\cdot\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}}=14$$

답 14

07 (전략) 주어진 식의 양변을 제곱하여 $\sin\theta\cos\theta$의 값을 먼저 구한다.

(풀이) $\sin\theta+\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta\cos\theta)^2$$
$$1+2\sin\theta\cos\theta=(\sin\theta\cos\theta)^2$$
$$(\sin\theta\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta-1=0$$
$$\therefore \sin\theta\cos\theta=1-\sqrt{2}\ (\because -1\le\sin\theta\cos\theta\le1)$$

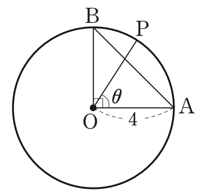
따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$$10a-b=10\cdot1-(-1)=11$$

답 11

08 (전략) 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$이다. 이때 θ의 단위는 라디안임에 유의한다.

(풀이) △OAB에서 선분 OA를 밑변으로 생각하면 오른쪽 그림과 같이 △OAB의 넓이는 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$일 때 최대이고, 이때 △OAB의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8$이므로 △OAB의 넓이의 최댓값은 8이다.

부채꼴 AOP의 넓이가 △OAB의 넓이의 최댓값과 같아질 때의 부채꼴 AOP의 중심각의 크기를 θ라 하면

$$\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\theta=8\qquad\therefore \theta=1$$

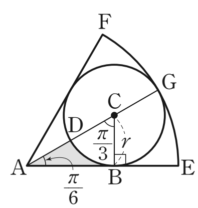
따라서 $\angle BOP=\frac{\pi}{2}-1$이므로 부채꼴 BOP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=4\pi-8$$

답 ④

09 (전략) 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$이다. 이때 θ의 단위는 라디안임에 유의한다.

(풀이) 오른쪽 그림의 부채꼴 AEF의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면



$\angle CAB=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$이므로

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=2r$, $\overline{AB}=\sqrt{3}r$

$\overline{AG}=6$이므로 $\quad 2r+r=6\quad\therefore r=2$

이때 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이는

△ABC−(부채꼴 BCD의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{3}$$
$$=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

따라서 $S=12\left(2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi\right)=24\sqrt{3}-8\pi$이므로

$p=24,\ q=-8 \qquad \therefore p+q=16$ 답 16

10 전략 직각삼각형의 외심의 성질을 이용하여 θ와 크기가 같은 각을 찾는다.

풀이 $\angle BAC=90°$이고, 점 M이 직각삼각형 ABC의 빗변의 중점이므로 점 M은 삼각형 ABC의 외심이다.

$\therefore \overline{AM}=\overline{BM}$

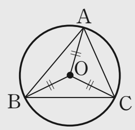
$\angle ABM=\angle BAM=\theta$, $\overline{BC}=\sqrt{8^2+15^2}=17$이므로

$$\sin\theta=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{15}{17},\ \cos\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{8}{17}$$

$$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{15}{17}-\frac{8}{17}=\frac{7}{17}$$ 답 ④

Remark 삼각형의 외심의 성질

삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.
➡ 오른쪽 그림에서 점 O가 $\triangle ABC$의 외심일 때,
$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$
=(외접원의 반지름의 길이)



11 해결과정 • 점 P의 좌표를 $(-a,\ 3a)(a>0)$라 하면

$$\overline{OP}=\sqrt{(-a)^2+(3a)^2}=\sqrt{10}a$$

이므로

$$\sec\theta=\frac{\sqrt{10}a}{-a}=-\sqrt{10}$$

$$\csc\theta=\frac{\sqrt{10}a}{3a}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$ ➜ 70% 배점

답구하기 • $\therefore \sec\theta\csc\theta=(-\sqrt{10})\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}$

$$=-\frac{10}{3}$$ ➜ 30% 배점

답 $-\frac{10}{3}$

다른 풀이 점 P의 좌표에 관계없이 동경 OP가 나타내는 각 θ의 삼각함수의 값은 유일하므로 점 P의 좌표를 $(-1,\ 3)$이라 하면

$$\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$

$$\therefore \sec\theta=\frac{\sqrt{10}}{-1}=-\sqrt{10},\ \csc\theta=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\therefore \sec\theta\csc\theta=(-\sqrt{10})\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}=-\frac{10}{3}$$

12 전략 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$의 양변을 제곱한 후 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

풀이 $\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$이고,

$\tan^2\theta=3^2=9$이므로

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=9,\qquad 9\cos^2\theta=1-\cos^2\theta,$$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{10}$$

$$\therefore \cos\theta=\pm\frac{\sqrt{10}}{10} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$$\sin^2\theta=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

$$\therefore \sin\theta=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$\tan\theta>0$에서 θ는 제 1 사분면 또는 제 3 사분면의 각이고, $\sin\theta+\cos\theta<0$이므로 θ는 제 3 사분면의 각이다.

즉 $\sin\theta<0,\ \cos\theta<0$이므로 ㉠, ㉡에서

$$\sin\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore \cos\theta-\sin\theta=-\frac{\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

답 ⑤

13 전략 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$임을 이용한다.

풀이 $\tan x+\cot x=6$에서

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=6$$

$$\therefore \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=6$$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로 $\qquad \frac{1}{\sin x\cos x}=6$

$$\therefore \sin x\cos x=\frac{1}{6}$$

$\therefore (\sin x+\cos x)^2$

$=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$

$=1+2\sin x\cos x$

$=1+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$

그런데 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin x>0$, $\cos x>0$이므로

$\sin x+\cos x>0$

$\therefore \sin x+\cos x=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 답 ④

14 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\tan\alpha+\tan\beta$, $\tan\alpha\tan\beta$의 값을 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-2$, $\tan\alpha\tan\beta=-4$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\sec^2\alpha$, $\sec^2\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sec^2\alpha+\sec^2\beta=-a$, $\sec^2\alpha\sec^2\beta=b$

이때 $\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha$, $\sec^2\beta=1+\tan^2\beta$이므로

$\sec^2\alpha+\sec^2\beta$
$=(1+\tan^2\alpha)+(1+\tan^2\beta)$
$=2+\tan^2\alpha+\tan^2\beta$
$=2+(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta$
$=2+(-2)^2-2\cdot(-4)$
$=14$

$\sec^2\alpha\sec^2\beta$
$=(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)$
$=1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\alpha\tan^2\beta$
$=1+(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta$
$\quad+(\tan\alpha\tan\beta)^2$
$=1+(-2)^2-2\cdot(-4)+(-4)^2$
$=29$

따라서 $a=-14$, $b=29$이므로 $a+b=15$ 답 ③

다른 풀이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$는 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근이므로

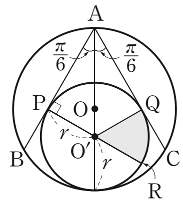
$\tan^2\alpha=-2\tan\alpha+4$, $\tan^2\beta=-2\tan\beta+4$

$\therefore \sec^2\alpha+\sec^2\beta=(1+\tan^2\alpha)+(1+\tan^2\beta)$
$=5-2\tan\alpha+5-2\tan\beta$
$=10-2(\tan\alpha+\tan\beta)$
$=10-2\cdot(-2)=14$

$\sec^2\alpha\sec^2\beta$
$=(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)$
$=(5-2\tan\alpha)(5-2\tan\beta)$
$=25-10(\tan\alpha+\tan\beta)+4\tan\alpha\tan\beta$
$=25-10\cdot(-2)+4\cdot(-4)=29$

따라서 $a=-14$, $b=29$이므로 $a+b=15$

15 전략 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ (라디안)인 부채꼴의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$임을 이용한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, O′을 잇는 선분을 그으면

$\angle PAO'=\frac{1}{2}\angle PAQ$
$=\frac{\pi}{6}$

원 O'의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{AO'}=12-r$이므로 직각삼각형 APO′에서

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{O'P}}{\overline{AO'}}=\frac{r}{12-r}$, 즉 $\frac{1}{2}=\frac{r}{12-r}$

$12-r=2r$ $\therefore r=4$

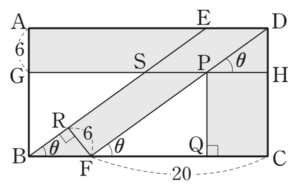
한편 $\angle PO'Q=2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\angle QO'R=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$

따라서 부채꼴 QO′R의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi$ 답 $\frac{8}{3}\pi$

16 문제이해 •



위의 그림과 같이 점 F에서 $\overline{BE}$에 내린 수선의 발을 R, $\overline{BE}$와 $\overline{GH}$가 만나는 점을 S라 하자. ➔ 10% 배점

해결과정 • $\triangle$FRB에서 $\overline{FR}=6$이므로

$\tan\theta=\frac{6}{\overline{BR}}$

$\therefore \overline{BR}=\frac{6}{\tan\theta}=6\cdot\frac{4}{3}=8$

$\therefore \overline{BF}=\sqrt{\overline{FR}^2+\overline{BR}^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$\triangle$DFC에서 $\tan\theta=\frac{\overline{CD}}{20}$이므로

$\overline{CD}=20\tan\theta=20\cdot\frac{3}{4}=15$

$\overline{PQ}=\overline{CH}=\overline{CD}-\overline{DH}=15-6=9$

또 $\triangle$DPH에서 $\tan\theta=\frac{6}{\overline{PH}}$

$\therefore \overline{PH}=\frac{6}{\tan\theta}=6\cdot\frac{4}{3}=8$ ➔ 60% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 넓이는 세 사각형 AGHD, BFPS, PQCH의 넓이의 합과 같으므로

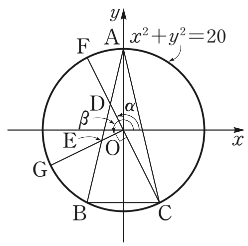
$$(10+20)\cdot 6+10\cdot 9+8\cdot 9=180+90+72=342$$

➔ 30% 배점

답 342

17 전략 선분 OD, OE의 연장선이 원과 만나는 점을 이용하여 $\sin\alpha$, $\cos\beta$의 값을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=20$이 선분 OD의 연장선과 제 2 사분면에서 만나는 점을 F, 선분 OE의 연장선과 제 3 사분면에서 만나는 점을 G라 하자.



이때 $\overline{BC}=4$이므로 점 C의 x좌표는 2이고 $x=2$를 $x^2+y^2=20$에 대입하면

$$y^2=16 \qquad \therefore y=-4\ (\because y<0)$$

즉 점 C의 좌표가 $(2,\ -4)$이고 두 점 C, F는 원점에 대하여 대칭이므로 점 F의 좌표는 $(-2,\ 4)$이다.

$$\therefore \sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{20}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

한편 직선 CO의 기울기가 $\frac{-4}{2}=-2$이고 직선 OE는 직선 CO와 수직이므로 직선 OE의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x$$

점 G는 원 $x^2+y^2=20$과 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 교점이므로

$x^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2=20$에서

$$\frac{5}{4}x^2=20, \qquad x^2=16 \qquad \therefore x=-4\ (\because x<0)$$

$x=-4$를 $y=\frac{1}{2}x$에 대입하면 $\quad y=-2$

따라서 점 G의 좌표는 $(-4,\ -2)$이므로

$$\cos\beta=\frac{-4}{\sqrt{20}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \sin\alpha\cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{4}{5}$$

답 ④

Remark

수직인 두 직선의 기울기를 m, m'이라 하면

$$mm'=-1$$

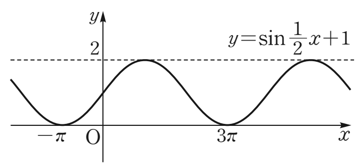
05 삼각함수의 그래프

유제

본책 128~147쪽

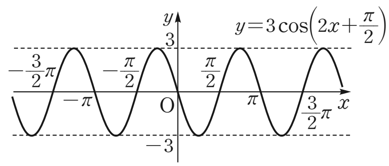
046-1 (1) 함수 $y=\sin\frac{1}{2}x+1$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배 한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 2, 최솟값은 0, 주기는 4π이다.



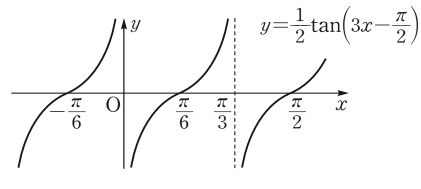
(2) 함수 $y=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배 하고, x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 3, 최솟값은 -3, 주기는 π이다.



(3) 함수 $y=\frac{1}{2}\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\tan 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 하고, x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값과 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{3}$이다.



답 풀이 참조

047-1 $f(x)$의 최솟값이 -5이고 $a>0$이므로

$-a+c=-5$ ...... ㉠

또 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi \qquad \therefore b=3$

따라서 $f(x)=a\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+c$이고 $f\left(\frac{\pi}{9}\right)=1$이므로

$a\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{9}-\frac{\pi}{6}\right)+c=1, \qquad a\sin\frac{\pi}{6}+c=1$

$\therefore \frac{1}{2}a+c=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ c=-1$

$\therefore a+b+c=6$

답 6

047-2 $f(x)$의 최댓값이 3이고 $a>0$이므로

$a+c=3$ ...... ㉠

또 주기가 π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$

따라서 $f(x)=a\cos 2x+c$이고 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$이므로

$a\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+c=-1, \qquad a\cos\pi+c=-1$

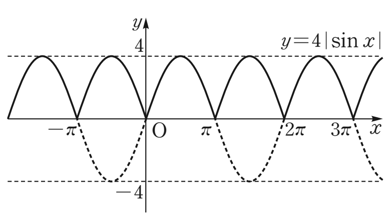
$\therefore -a+c=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ c=1$

$\therefore a^2+b^2+c^2=2^2+2^2+1^2=9$

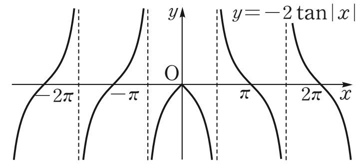
답 9

048-1 (1) $y=4|\sin x|$의 그래프는 $y=4\sin x$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값은 4, 최솟값은 0이다.

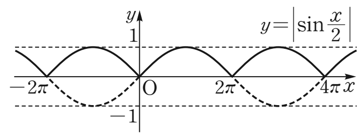
(2) $y=-2\tan|x|$의 그래프는 $y=-2\tan x$의 그래프에서 $x\ge0$인 부분만 남기고, $x\ge0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값, 최솟값은 없다.

답 (1) 최댓값: 4, 최솟값: 0
(2) 최댓값, 최솟값: 없다.

048-2 $y=\left|\sin\frac{x}{2}\right|$의 그래프는 $y=\sin\frac{x}{2}$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값은 1, 최솟값은 0이므로

$M=1,\ m=0 \qquad \therefore M+m=1$

답 1

049-1 $\sin(-780^\circ)=-\sin780^\circ$
$=-\sin(90^\circ\times8+60^\circ)$
$=-\sin60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos510^\circ=\cos(90^\circ\times5+60^\circ)$
$=-\sin60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan585^\circ=\tan(90^\circ\times6+45^\circ)$
$=\tan45^\circ=1$

$\therefore$ (주어진 식)$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1$
$=1$

답 1

049-2 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$,

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta,\ \sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

이므로

(주어진 식)$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$
$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$
$=2$

답 2

050-1 (1) $\sin 170° = \sin(90° \times 2 - 10) = \sin 10°$

$\cos 100° = \cos(90° + 10°) = -\sin 10°$

$\tan 390° = \tan(90° \times 4 + 30°) = \tan 30°$

$\therefore$ (주어진 식)$= \sin 10° - \sin 10° + \tan 30°$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\tan 50° = \tan(90° - 40°) = \cot 40°$

$\tan 130° = \tan(90° + 40°) = -\cot 40°$

$\therefore$ (주어진 식)

$= (\tan 40° + \cot 40°)^2 - (\tan 40° - \cot 40°)^2$

$= \tan^2 40° + 2 + \cot^2 40°$

$\quad - (\tan^2 40° - 2 + \cot^2 40°)$

$= 4$

(3) $\cos 1° = \cos(90° - 89°) = \sin 89°$

$\cos 2° = \cos(90° - 88°) = \sin 88°$

$\vdots$

$\cos 44° = \cos(90° - 46°) = \sin 46°$

$\therefore$ (주어진 식)

$= (\cos^2 1° + \cos^2 89°) + (\cos^2 2° + \cos^2 88°)$

$\quad + \cdots + (\cos^2 44° + \cos^2 46°) + \cos^2 45°$

$= (\sin^2 89° + \cos^2 89°) + (\sin^2 88° + \cos^2 88°)$

$\quad + \cdots + (\sin^2 46° + \cos^2 46°) + \cos^2 45°$

$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{44\text{개}} + \cos^2 45°$

$= 44 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{89}{2}$

답 (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (2) 4 (3) $\dfrac{89}{2}$

050-2 $\sin 70° = \sin(90° - 20°) = \cos 20°$

그런데 $\sin^2 20° + \cos^2 20° = 1$이고 $\cos 20° > 0$이므로

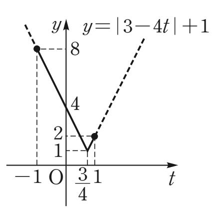
$\cos 20° = \sqrt{1 - \sin^2 20°} = \sqrt{1 - a^2}$

$\therefore \sin 70° = \sqrt{1 - a^2}$

답 $\sqrt{1 - a^2}$

051-1 (1) $\sin x = t$로 놓으면 $-1 \le t \le 1$이고 주어진 함수는 $\quad y = |3 - 4t| + 1$

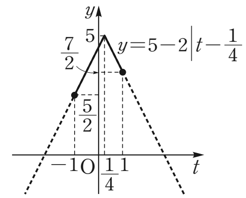
따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t = -1$일 때 최댓값은 8, $t = \dfrac{3}{4}$일 때 최솟값은 1이다.



(2) $\cos x = t$로 놓으면 $-1 \le t \le 1$이고 주어진 함수는

$y = 5 - 2\left|t - \dfrac{1}{4}\right|$

따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t = \dfrac{1}{4}$일 때 최댓값은 5, $t = -1$일 때 최솟값은 $\dfrac{5}{2}$이다.

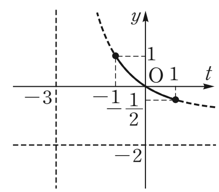


(3) $\cos x = t$로 놓으면 $-1 \le t \le 1$이고 주어진 함수는

$y = -\dfrac{2t}{t+3} = \dfrac{-2(t+3)+6}{t+3}$

$= \dfrac{6}{t+3} - 2$

따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t = -1$일 때 최댓값은 1, $t = 1$일 때 최솟값은 $-\dfrac{1}{2}$이다.



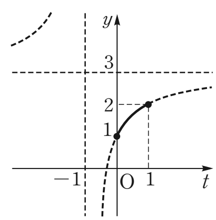
(4) $\tan x = t$로 놓으면 $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$에서 $0 \le t \le 1$이고

주어진 함수는

$y = \dfrac{3t+1}{t+1} = \dfrac{3(t+1)-2}{t+1}$

$= -\dfrac{2}{t+1} + 3$

따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t = 1$일 때 최댓값은 2, $t = 0$일 때 최솟값은 1이다.



답 풀이 참조

Remark 함수 $y = \dfrac{k}{x-p} + q \ (k \ne 0)$의 그래프

① 함수 $y = \dfrac{k}{x} \ (k \ne 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
② 점 (p, q)에 대하여 대칭이다.
③ 점근선은 두 직선 $x = p$, $y = q$이다.

052-1 (1) $\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi + x\right) = -\cos x$이므로 주어진

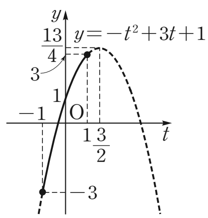
함수는

$$y=3\cos x+\sin^2 x$$
$$=3\cos x+(1-\cos^2 x)$$
$$=-\cos^2 x+3\cos x+1$$

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=-t^2+3t+1$$
$$=-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$$

따라서 오른쪽 그래프에서 $t=1$일 때 최댓값은 3, $t=-1$일 때 최솟값은 -3이다.



(2) $\tan(4\pi-x)=-\tan x$, $\tan\left(\frac{5}{2}\pi-x\right)=\cot x$

이므로 주어진 함수는

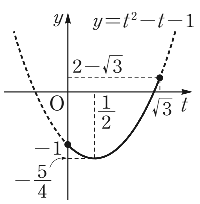
$$y=(-\tan x)^2-\tan x-1$$
$$=\tan^2 x-\tan x-1$$

이때 $\tan x=t$로 놓으면 $0\le x\le\frac{\pi}{3}$에서

$0\le t\le\sqrt{3}$이고

$$y=t^2-t-1$$
$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

따라서 오른쪽 그래프에서 $t=\sqrt{3}$일 때 최댓값은 $2-\sqrt{3}$, $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $-\frac{5}{4}$이다.



답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -3

(2) 최댓값: $2-\sqrt{3}$, 최솟값: $-\frac{5}{4}$

053-1 (1) $x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $-\pi<x<\pi$에서

$-\frac{7}{6}\pi<t<\frac{5}{6}\pi$이고, 주어진 방정식은

$$\sqrt{2}\sin t=1,\qquad \sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore t=\frac{\pi}{4}\text{ 또는 }t=\frac{3}{4}\pi$$

즉 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}\pi$이므로

$$x=\frac{5}{12}\pi\text{ 또는 }x=\frac{11}{12}\pi$$

(2) $\frac{x}{2}=t$로 놓으면 $-\pi<x<\pi$에서 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$이고, 주어진 방정식은

$$\sqrt{3}\sin t+\cos t=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos t\ne 0$이므로 ㉠을 $\cos t$로 나누면

$$\frac{\sin t}{\cos t}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \tan t=-\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore t=-\frac{\pi}{6}$$

즉 $\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{6}$이므로 $\quad x=-\frac{\pi}{3}$

답 (1) $x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$ (2) $x=-\frac{\pi}{3}$

054-1 $2\sin^2 x-5\cos x=4$에서

$$2(1-\cos^2 x)-5\cos x=4$$
$$2\cos^2 x+5\cos x+2=0$$
$$(2\cos x+1)(\cos x+2)=0$$

그런데 $-1\le\cos x\le 1$이므로

$$\cos x=-\frac{1}{2}$$

$0\le x<2\pi$이므로

$$x=\frac{2}{3}\pi\text{ 또는 }x=\frac{4}{3}\pi$$

답 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

054-2 $\tan x+\cot x=2$, 즉 $\tan x+\frac{1}{\tan x}=2$의 양변에 $\tan x$를 곱하면

$$\tan^2 x+1=2\tan x$$
$$\tan^2 x-2\tan x+1=0$$
$$\therefore (\tan x-1)^2=0$$

즉 $\tan x=1$이고 $0\le x<2\pi$이므로

$$x=\frac{\pi}{4}\text{ 또는 }x=\frac{5}{4}\pi$$

따라서 구하는 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$$

답 $\frac{3}{2}\pi$

다른 풀이 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$를 $\tan x+\cot x=2$에 대입하면

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=2$$

$$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\sin x}=2$$

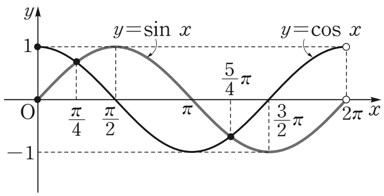
$\sin^2 x+\cos^2 x=2\cos x\sin x$

$\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x\sin x=0$

$(\sin x-\cos x)^2=0$

$\therefore \sin x=\cos x$

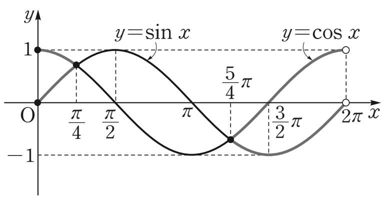
$0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$이므로 구하는 모든 해의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

055-1 부등식 $\sin x\le\cos x$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프와 만나는 부분 또는 $y=\cos x$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다.



위의 그래프에서 구하는 부등식의 해는

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi\le x<2\pi$

답 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi\le x<2\pi$

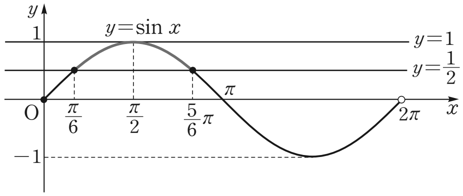
055-2 $2\cos^2 x+3\sin x-3\ge0$에서

$2(1-\sin^2 x)+3\sin x-3\ge0$

$2\sin^2 x-3\sin x+1\le0$

$(2\sin x-1)(\sin x-1)\le0$

$\therefore \frac{1}{2}\le\sin x\le1$



앞의 그래프에서 구하는 부등식의 해는

$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$

따라서 $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{5}{6}\pi$이므로

$b-a=\frac{2}{3}\pi$

답 $\frac{2}{3}\pi$

056-1 이차방정식 $x^2-4x\sin\theta+3=0$이 중근을 가지므로 주어진 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2\sin\theta)^2-3=0$

즉 $4\sin^2\theta-3=0$에서 $\sin^2\theta=\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\le\theta<\pi$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

답 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

056-2 이차함수 $y=x^2-2\sqrt{2}x\sin\theta-3\cos\theta$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나면 이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}x\sin\theta-3\cos\theta=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-\sqrt{2}\sin\theta)^2-(-3\cos\theta)>0$

$\therefore 2\sin^2\theta+3\cos\theta>0$ …… ㉠

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$를 ㉠에 대입하면

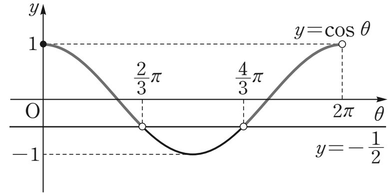
$2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta>0$

$2\cos^2\theta-3\cos\theta-2<0$

$\therefore (2\cos\theta+1)(\cos\theta-2)<0$

그런데 $\cos\theta-2<0$이므로

$2\cos\theta+1>0$ $\therefore \cos\theta>-\frac{1}{2}$



위의 그래프에서 구하는 θ의 값의 범위는

$0\le\theta<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<\theta<2\pi$

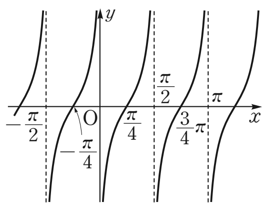
답 $0\le\theta<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<\theta<2\pi$

중단원 연습 문제 본책 149~153쪽

01 ⑤	02 8	03 ②	04 $\frac{8}{3}$	05 $-\frac{1}{2}$
06 $\frac{\pi}{2}$	07 ③	08 8	09 ㄱ, ㅁ	10 11
11 ④	12 5	13 ④	14 ④	15 $\frac{\pi}{6}$
16 $a\le 7$	17 ③	18 0	19 ⑤	20 ④

01 전략 $y=a\tan(bx-c)$의 그래프는 $y=a\tan bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{c}{b}$만큼 평행이동한 것과 같다.

풀이 함수 $y=3\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=3\tan 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=3\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 $y=3\tan 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고, 최댓값과 최솟값은 없으며 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

또 직선 $x=\frac{\pi}{2}$는 점근선이므로 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$을 지나지 않는다.

답 ⑤

02 해결과정 • 주어진 함수의 그래프에서 최댓값이 $\frac{5}{2}$, 최솟값이 $-\frac{1}{2}$이고 $a>0$이므로

$$a+c=\frac{5}{2},\ -a+c=-\frac{1}{2}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{3}{2},\ c=1$$ ➔ 40% 배점

주기가 $\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}=\pi$이고 $b>0$이므로

$$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore 2a+b+3c=2\cdot\frac{3}{2}+2+3\cdot 1$

$=8$ ➔ 20% 배점

답 8

03 전략 주어진 각을 $\frac{\pi}{2}\times n\pm\theta$ (n은 정수) 꼴로 고친 후 각을 θ로 통일한다.

풀이 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta$,

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta,\ \sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta,\ \cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$,

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$이므로

(주어진 식)

$$=\frac{-\sin\theta\tan^2\theta}{-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta(-\cos\theta)}$$

$$=\tan^2\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta-1}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=-1$$

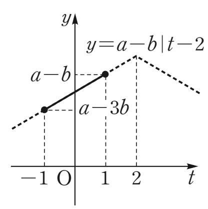
답 ②

04 전략 $\sin x=t$로 치환하여 최대 · 최소를 가질 때의 t의 값을 구한다.

풀이 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$$y=a-b|t-2|$$

이므로 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 함수는 $t=1$일 때 최댓값 $\frac{10}{3}$, $t=-1$일 때 최솟값 2를 가지므로

$$a-b=\frac{10}{3},\ a-3b=2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=4,\ b=\frac{2}{3}$$

$$\therefore ab=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

다른 풀이 $-1\le\sin x\le 1$이므로

$-3\le\sin x-2\le -1,\qquad 1\le|\sin x-2|\le 3$

$-3b\le -b|\sin x-2|\le -b$

$\therefore a-3b\le a-b|\sin x-2|\le a-b$

따라서 주어진 함수의 최댓값이 $a-b$, 최솟값이 $a-3b$이므로

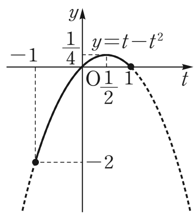
$$a-b=\frac{10}{3},\ a-3b=2 \qquad \therefore a=4,\ b=\frac{2}{3}$$

$$\therefore ab=\frac{8}{3}$$

05 문제이해 • $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$,
$\cos(x+\pi)=-\cos x$이므로

$$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2(x+\pi)$$
$$=\cos x-\cos^2 x$$ ➔ 30% 배점

해결과정 • 이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고



$$y=t-t^2$$
$$=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

따라서 오른쪽 그래프에서

$t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{1}{4}$이고,

$t=-1$일 때 최솟값은 -2이므로

$$M=\frac{1}{4},\ m=-2$$ ➔ 60% 배점

답구하기 • $\therefore Mm=-\frac{1}{2}$ ➔ 10% 배점

답 $-\frac{1}{2}$

06 문제이해 • $2\sin^2 x+\cos x=2$에
$\sin^2 x=1-\cos^2 x$를 대입하면

$$2(1-\cos^2 x)+\cos x=2$$
$$2\cos^2 x-\cos x=0$$
$$\cos x(2\cos x-1)=0$$
$$\therefore \cos x=0 \text{ 또는 } \cos x=\frac{1}{2}$$ ➔ 30% 배점

해결과정 • (i) $\cos x=0$일 때, $0\le x<3\pi$이므로

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } x=\frac{5}{2}\pi$$

(ii) $\cos x=\frac{1}{2}$일 때, $0\le x<3\pi$이므로

$$x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x=\frac{5}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{7}{3}\pi$$ ➔ 60% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서 구하는 방정식의 해를 작은 것부터 차례대로 나열할 때, 두 번째에 오는 해는 $\frac{\pi}{2}$이다.

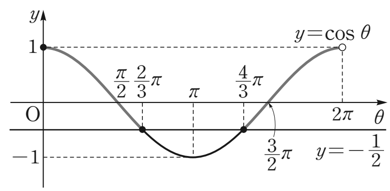
➔ 10% 배점

답 $\frac{\pi}{2}$

07 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면 $D\ge 0$이어야 한다.

풀이 이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}x+1-2\cos\theta=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-\sqrt{2})^2-(1-2\cos\theta)\ge 0$$
$$2-1+2\cos\theta\ge 0 \qquad \therefore \cos\theta\ge-\frac{1}{2}$$



위의 그림에서 구하는 θ의 값의 범위는

$$0\le\theta\le\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi\le\theta<2\pi$$

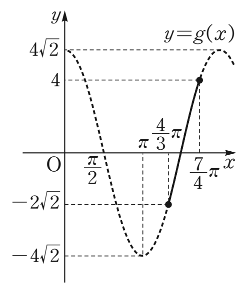
따라서 조건을 만족시키지 않는 θ의 값은 ③이다.

답 ③

08 전략 합성함수의 정의를 이용하여 $(f\circ g)(x)$를 구한다.

풀이 $\frac{4}{3}\pi\le x\le\frac{7}{4}\pi$에서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$-2\sqrt{2}\le g(x)\le 4$$



이때

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$
$$=[g(x)]$$

이므로

$-2\sqrt{2}\le g(x)<-2$일 때, $y=(f\circ g)(x)=-3$
$-2\le g(x)<-1$일 때, $y=(f\circ g)(x)=-2$
$-1\le g(x)<0$일 때, $y=(f\circ g)(x)=-1$
⋮
$3\le g(x)<4$일 때, $y=(f\circ g)(x)=3$
$g(x)=4$일 때, $y=(f\circ g)(x)=4$

따라서 $A=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로 구하는 원소의 개수는 8이다.

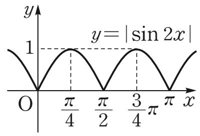
답 8

09 전략 주어진 함수의 주기를 각각 구한다.

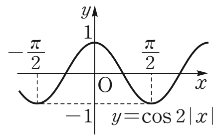
풀이 각 함수의 주기를 구하면 다음과 같다.

ㄱ. $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ㄴ. 2π ㄷ. $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

ㄹ. $y=|\sin 2x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.



ㅁ. $y=\cos 2|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기는 π이다.



이상에서 주기가 π인 것은ㄱ, ㅁ이다. **답** ㄱ, ㅁ

10 (전략) $f(13)=-3$임을 이용하여 $\sin\alpha$의 값을 구한다.

(풀이) $f(13)=3\sin(13\pi+\alpha)+7\cos\left(\frac{13}{2}\pi+\alpha\right)$

$$=3\sin(2\pi\times6+\pi+\alpha)+7\cos\left(2\pi\times3+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

$$=3\sin(\pi+\alpha)+7\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

$$=-3\sin\alpha-7\sin\alpha=-10\sin\alpha$$

$f(13)=-3$이므로 $-10\sin\alpha=-3$에서

$$\sin\alpha=\frac{3}{10}$$

$$\therefore f(15)=3\sin(15\pi+\alpha)+7\cos\left(\frac{15}{2}\pi+\alpha\right)$$

$$=3\sin(2\pi\times7+\pi+\alpha)+7\cos\left(2\pi\times3+\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$$

$$=3\sin(\pi+\alpha)+7\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$$

$$=-3\sin\alpha+7\sin\alpha=4\sin\alpha$$

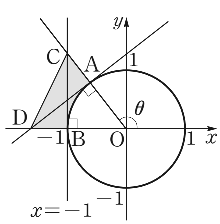
$$=4\cdot\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$$

따라서 $m=5$, $n=6$이므로

$m+n=11$ **답** 11

11 (전략) $\pi-\theta$에 대한 삼각함수의 값을 이용한다.

(풀이) 오른쪽 그림의 $\triangle$CBO에서 $\angle$COB$=\pi-\theta$이므로



$\overline{BC}=\tan(\pi-\theta)$

$=-\tan\theta$

또 $\triangle$OAD에서 $\angle$DOA$=\pi-\theta$이므로

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{1}{\overline{OD}}$$

$$\therefore \overline{OD}=\frac{1}{\cos(\pi-\theta)}=-\frac{1}{\cos\theta}$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$\triangle$OCD$-$(부채꼴 OAB의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right)\cdot(-\tan\theta)-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot(\pi-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\pi+\theta\right)$$ **답** ④

12 문제이해 • $\cos^2x=1-\sin^2x$이므로

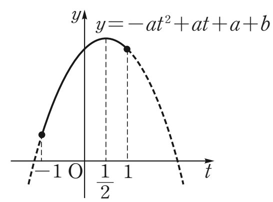
$f(x)=a(1-\sin^2x)+a\sin x+b$

$=-a\sin^2x+a\sin x+a+b$ ➔ 20% 배점

해결과정 • $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$$y=-at^2+at+a+b=-a\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a+b$$

$a>0$이므로 오른쪽 그래프에서 $t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{5}{4}a+b$이므로



$\frac{5}{4}a+b=\frac{11}{2}$

$\therefore 5a+4b=22$ …… ㉠

$t=-1$일 때 최솟값은 $-a+b$이므로

$-a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

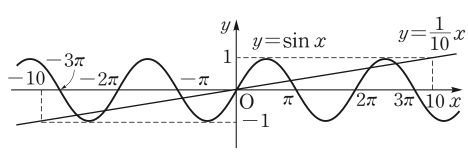
$a=2$, $b=3$ ➔ 70% 배점

답구하기 • $\therefore a+b=5$ ➔ 10% 배점

답 5

13 (전략) 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

(풀이) 방정식 $\sin x=\frac{1}{10}x$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{10}x$의 교점의 개수와 같다.



앞의 그림에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{10}x$는 $-10\le x\le 10$에서 서로 다른 7개의 점에서 만나고, $x<-10$ 또는 $x>10$에서는 만나지 않는다.
따라서 구하는 실근의 개수는 7이다.

답 ④

14 전략 $\sin x=t$로 치환하고 주어진 그래프를 이용하여 $f(t)=0$을 만족시키는 t의 값을 구한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표가 $(0, 0)$, $(2, 0)$이므로 방정식 $f(x)=0$의 해는

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 $f(\sin x)=0$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이므로 방정식 $f(t)=0$의 해는

$t=0$, 즉 $\sin x=0$

따라서 $0\le x\le 2\pi$에서 $\sin x=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

이므로 방정식 $f(\sin x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

답 ④

15 문제이해 • 직각삼각형 AOC에서

$\overline{OC}=\overline{AO}\cos\theta=\cos\theta$,

$\overline{AC}=\overline{AO}\sin\theta=\sin\theta$

또 직각삼각형 DOB에서

$\overline{BD}=\overline{OB}\tan\theta=\tan\theta$ ➔ 30% 배점

해결과정 • $\overline{OC}=3\overline{AC}\cdot\overline{BD}$에서

$\cos\theta=3\sin\theta\tan\theta$

$\cos\theta=3\sin\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cos^2\theta=3\sin^2\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$1-\sin^2\theta=3\sin^2\theta$, $\sin^2\theta=\frac{1}{4}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ ➔ 60% 배점

답구하기 • $\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$ ➔ 10% 배점

답 $\frac{\pi}{6}$

16 전략 $\cos\theta=t$로 치환하여 t에 대한 이차부등식을 푼다.

풀이 부등식 $\cos^2\theta-3\cos\theta-a+9\ge 0$에서 $\cos\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$t^2-3t-a+9\ge 0$

$f(t)=t^2-3t-a+9$로 놓으면

$f(t)=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-a+\frac{27}{4}$

$-1\le t\le 1$에서 $f(t)$는 $t=1$일 때 최솟값을 가지므로 $-1\le t\le 1$인 모든 실수 t에 대하여 $f(t)\ge 0$이려면 $f(1)\ge 0$이어야 한다.

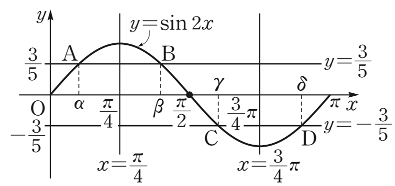
$f(1)=1-3-a+9=7-a\ge 0$

$\therefore a\le 7$

답 $a\le 7$

17 전략 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용한다.

풀이 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.



위의 그림과 같이 두 점 A, B는 직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$ $\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ …… ㉠

두 점 C, D는 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{4}\pi$ $\therefore \gamma+\delta=\frac{3}{2}\pi$ …… ㉡

두 점 B, C는 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \beta+\gamma=\pi$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\alpha+2\beta+2\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\delta)$

$=\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3}{2}\pi=3\pi$

답 ③

다른 풀이 두 점 A, D는 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\delta}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \alpha+\delta=\pi$ …… ㉣

두 점 B, C는 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore \beta+\gamma=\pi$ ...... ㉤

㉣, ㉤에서

$$\begin{aligned}\alpha+2\beta+2\gamma+\delta&=(\alpha+\delta)+2(\beta+\gamma)\\&=\pi+2\pi=3\pi\end{aligned}$$

18 문제이해 • $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\alpha$, $g^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)=\beta$로 놓으면

$f(\alpha)=\sin\alpha=\frac{1}{3}$,

$g(\beta)=\cos\beta=-\frac{1}{3}$ ...... ㉠

$0<\sin\alpha<1$이므로 $\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$-1<\cos\beta<0$이므로 $\quad \frac{\pi}{2}<\beta<\pi$

$\therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ ...... ㉡ ➜ 30% 배점

해결과정 • ㉠에서 $\sin\alpha=-\cos\beta$이고,

$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, $\cos\beta=-\cos(\pi-\beta)$이므로

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\pi-\beta)$

이때 ㉡에서 $0<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\pi-\beta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{2}-\alpha=\pi-\beta$ $\quad\therefore \beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$ ➜ 40% 배점

답구하기 • $\therefore g\left(g^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

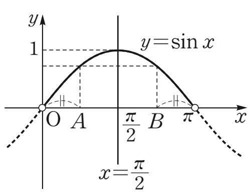
$=g(\beta-\alpha)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{2}=0$ ➜ 30% 배점

답 0

19 전략 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭임을 이용하여 A, B 사이의 관계식을 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 $y=\sin x\,(0<x<\pi)$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로



$0<A<B<\pi$이고 $\sin A=\sin B$이면

$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore A+B=\pi$

ㄱ. $A+B=\pi$이므로 함수 $y=\sin(A+B)x=\sin\pi x$의 주기는

$\frac{2\pi}{\pi}=2$

ㄴ. $A+B=\pi$에서 $\quad B=\pi-A$

따라서 $\frac{B}{2}=\frac{\pi-A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}&=\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\\&=\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\\&=1\end{aligned}$$

ㄷ. $0\le x<2\pi$이고, $0<A<\pi$이므로

$-\pi<x-A<2\pi$

따라서 방정식 $\sin(x-A)=1$의 근은

$x-A=\frac{\pi}{2}$에서 $\quad x=A+\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha=A+\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore \cos\alpha+\sin B&=\cos\left(A+\frac{\pi}{2}\right)+\sin B\\&=-\sin A+\sin B\\&=0\end{aligned}$$

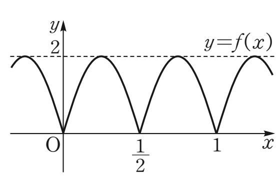
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

20 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 $f(x)$의 주기를 찾는다.

풀이 ㄱ. $$\begin{aligned}f(-x)&=|2\sin(-2\pi x)|\\&=|-2\sin 2\pi x|\\&=|2\sin 2\pi x|\\&=f(x)\end{aligned}$$

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{1}{2}$이다.



즉 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 p는 $\frac{1}{2}n$ (n은 정수) 꼴이다.

$0<p<10$이므로 $\quad 0<\frac{1}{2}n<10$

$\therefore 0<n<20$

따라서 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 19$이므로 p의 개수는 19이다.

ㄷ. $|2\sin 2\pi x|>1$에서

$|\sin 2\pi x|>\frac{1}{2}$

$\therefore \sin 2\pi x<-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin 2\pi x>\frac{1}{2}$

$2\pi x=t$로 놓으면 $0\le x\le 1$에서 $0\le t\le 2\pi$이고 주어진 부등식은

$\sin t<-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin t>\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\pi}{6}<t<\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<t<\frac{11}{6}\pi$

즉 $\frac{\pi}{6}<2\pi x<\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<2\pi x<\frac{11}{6}\pi$이므로

$\frac{1}{12}<x<\frac{5}{12}$ 또는 $\frac{7}{12}<x<\frac{11}{12}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

06 삼각함수의 미분

유제 본책 158~179쪽

057-1 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$, $\cos\beta>0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$

$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{5\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{14}-\frac{11}{14}\cdot\frac{13}{14}=-\frac{1}{2}$

그런데 $0<\alpha+\beta<\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi$ 답 $\frac{2}{3}\pi$

Remark

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{11}{14}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{14}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{13}{14}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

그런데 $0<\alpha+\beta<\pi$이므로 $\alpha+\beta$의 값이 $\frac{\pi}{3}$인지 $\frac{2}{3}\pi$인지 확인해야 한다. 따라서 $\cos(\alpha+\beta)$의 값을 이용하여 $\alpha+\beta$의 값을 구하는 것이 편리하다.

057-2 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-4,\ \tan\alpha\tan\beta=-7$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{-4}{1-(-7)}=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

058-1 두 직선 $y=2x-2$, $y=\frac{1}{2}x+3$이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=2,\ \tan\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}\right|=\frac{3}{4}$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$에서

$\sec^2\theta=1+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$

$\therefore \cos^2\theta=\dfrac{1}{\sec^2\theta}=\dfrac{16}{25}$

이때 θ는 예각이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{4}{5}$

답 $\dfrac{4}{5}$

058-2 $x+3y-4=0$에서 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$

$ax+y-3=0$에서 $y=-ax+3$

두 직선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$$\tan\alpha=-\frac{1}{3},\ \tan\beta=-a$$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1,\qquad \frac{-\frac{1}{3}+a}{1+\frac{1}{3}a}=\pm1$$

$$-\frac{1}{3}+a=1+\frac{1}{3}a \text{ 또는 } -\frac{1}{3}+a=-1-\frac{1}{3}a$$

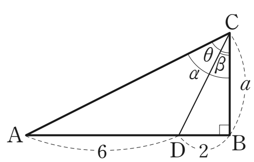
$$\therefore\ a=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=2$$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$$-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$$

답 $\dfrac{3}{2}$

059-1 오른쪽 그림과 같이 $\angle\mathrm{ACB}=\alpha$, $\angle\mathrm{DCB}=\beta$라 하면



$$\tan\alpha=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\frac{8}{a}$$

$$\tan\beta=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\frac{2}{a}$$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{8}{a}-\frac{2}{a}}{1+\frac{8}{a}\cdot\frac{2}{a}}=\frac{6a}{a^2+16}$$

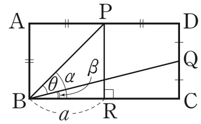
이때 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$이므로 $\dfrac{6a}{a^2+16}=\dfrac{3}{4}$

$a^2-8a+16=0,\qquad (a-4)^2=0$

$\therefore a=4$

답 4

059-2 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 R, $\overline{\mathrm{BR}}=a$, $\angle\mathrm{PBR}=\alpha$, $\angle\mathrm{QBC}=\beta$라 하면



$$\tan\alpha=\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{BR}}}=\frac{a}{a}=1$$

$$\tan\beta=\frac{\overline{\mathrm{QC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\frac{\frac{a}{2}}{2a}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+1\cdot\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$$

답 $\dfrac{3}{5}$

060-1 $5\sin\theta+12\cos\theta$

$$=13\left(\frac{5}{13}\sin\theta+\frac{12}{13}\cos\theta\right)$$

$$=13(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)$$

$$=13\sin(\theta+\alpha)\ \left(\text{단, }\cos\alpha=\frac{5}{13},\ \sin\alpha=\frac{12}{13}\right)$$

$\therefore\ r=13$

$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}=\dfrac{5}{12}$이므로

$$r\cot\alpha=13\cdot\frac{5}{12}=\frac{65}{12}$$

답 $\dfrac{65}{12}$

061-1 $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos x\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{3}$

$$=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\therefore y=2\sqrt{3}\sin x+3\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{3}{2}\cos x$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$

$$=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

이때 $-1\le\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\le1$이므로

$$-\sqrt{3}\le\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le\sqrt{3}$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $\sqrt{3}$, 최솟값은 $-\sqrt{3}$이다.

답 최댓값: $\sqrt{3}$, 최솟값: $-\sqrt{3}$

06 삼각함수의 미분

061-2 $y=a\sin x+\sqrt{2}a\cos x$

$=\sqrt{3}a\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos x\right)$

$=\sqrt{3}a\sin(x+\alpha)$

$\left(단,\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

이때 $a>0$이고, $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-\sqrt{3}a\le\sqrt{3}a\sin(x+\alpha)\le\sqrt{3}a$

주어진 함수의 최댓값이 $3\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{3}a=3\sqrt{2}$

$\therefore a=\sqrt{6}$ 답 $\sqrt{6}$

062-1 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore \sin2\theta+\cos2\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)$

$=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)+\left\{1-2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}$

$=-\frac{3\sqrt{7}+1}{8}$ 답 $-\frac{3\sqrt{7}+1}{8}$

062-2 (1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+\sin2\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin2\theta=-\frac{3}{4}$

(2) $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$이므로

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore \sin3\theta-\cos3\theta$

$=(3\sin\theta-4\sin^3\theta)-(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$

$=3(\sin\theta+\cos\theta)-4(\sin^3\theta+\cos^3\theta)$

$=3(\sin\theta+\cos\theta)$

$\quad-4(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=3\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{3}{8}\right)$

$=-\frac{5}{4}$

답 (1) $-\frac{3}{4}$ (2) $-\frac{5}{4}$

063-1 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\frac{\theta}{2}>0,\ \cos\frac{\theta}{2}>0,\ \tan\frac{\theta}{2}>0$

(1) $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{2}{3}$

$\therefore \sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

(2) $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{1}{3}$

$\therefore \cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}=2$

$\therefore \tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}$

답 (1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (3) $\sqrt{2}$

다른 풀이 (3) $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{2}$

063-2 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

$1-\sin2\theta=\frac{1}{5}$ $\quad\therefore \sin2\theta=\frac{4}{5}$

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $0<2\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos2\theta>0$

$\therefore \cos2\theta=\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\therefore \tan^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}=\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

다른 풀이 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$에서

$\sin\theta=\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{5}}$이므로 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하여 정리하면

$5\cos^2\theta-\sqrt{5}\cos\theta-2=0$

$(\sqrt{5}\cos\theta+1)(\sqrt{5}\cos\theta-2)=0$

$\therefore \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

따라서 $\cos^2\theta=\frac{4}{5}$이므로 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

$\therefore \tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{4}$

064-1 (1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}$

$=\frac{1}{1}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1-\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 (1) 1 (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

065-1 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

$=2\cdot1^2=2$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin x+\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin x+\sin 3x}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot2}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 3x}{3x}\cdot3}$

$=\frac{1\cdot2}{1+1\cdot3}=\frac{1}{2}$

(3) $180°=\pi$에서 $1°=\frac{\pi}{180}$이므로 $x°=\frac{\pi}{180}x$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x°}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{\frac{\pi}{180}x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{180}{\pi}$

$=1\cdot\frac{180}{\pi}=\frac{180}{\pi}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\tan 2x)}{3x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\tan 2x)}{\tan 2x}\cdot\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}$

$=1\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

답 (1) 2 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{180}{\pi}$ (4) $\frac{2}{3}$

066-1 (1) $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1+t)}{1-(1+t)}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)}{-t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{-\sin\frac{\pi}{2}t}{-t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\pi}{2}$

$=1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

(2) $x-\pi=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\pi$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{4\cos\frac{x}{2}}{x^2-\pi^2}=\lim\limits_{t\to0}\frac{4\cos\frac{\pi+t}{2}}{(\pi+t)^2-\pi^2}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{4\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}\right)}{2t\pi+t^2}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{-4\sin\frac{t}{2}}{t(2\pi+t)}$

$=\lim\limits_{t\to0}(-4)\cdot\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2(2\pi+t)}$

$=-4\cdot1\cdot\frac{1}{4\pi}=-\frac{1}{\pi}$

(3) $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{-\sin t}{t}$

$=-1$

(4) $x-2=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 2$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin\left(\cos\frac{\pi}{4}x\right)}{x-2}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left\{\cos\frac{\pi}{4}(2+t)\right\}}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}t\right)\right\}}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(-\sin\frac{\pi}{4}t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\left(\sin\frac{\pi}{4}t\right)}{\sin\frac{\pi}{4}t}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}t}{\frac{\pi}{4}t}\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$=-1\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$$

답 (1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $-\frac{1}{\pi}$ (3) -1 (4) $-\frac{\pi}{4}$

067-1 (1) $x \longrightarrow 0$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(a-b\cos x)=0$이므로

$a-b=0 \quad \therefore b=a$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{a-a\cos x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos^2 x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}a\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=a\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$$

즉 $\frac{a}{2}=1$에서 $\quad a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=2$

(2) $x \longrightarrow 0$일 때, (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(\sqrt{ax+b}-1)=0$이므로

$\sqrt{b}-1=0 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{ax+1}-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{ax+1}+1)}{(\sqrt{ax+1}-1)(\sqrt{ax+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{ax+1}+1)}{ax}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{a}\cdot\frac{\sin x}{x}(\sqrt{ax+1}+1)$$
$$=\frac{1}{a}\cdot 1\cdot 2=\frac{2}{a}$$

즉 $\frac{2}{a}=1$에서 $\quad a=2$

답 (1) $a=2,\ b=2$ (2) $a=2,\ b=1$

다른 풀이 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos x)}{x^2}$에서 반각의 공식을 이용하면 $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{x^2}\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}=\lim_{x\to 0}2a\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$$
$$=2a\cdot 1^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{a}{2}$$

068-1 $\triangle$ABC에서

$\overline{\text{AC}}=\overline{\text{AB}}\tan\theta=\tan\theta$

또 $\triangle$ABH에서

$\overline{\text{AH}}=\overline{\text{AB}}\sin\theta=\sin\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\text{AC}}-\overline{\text{AH}}}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\theta-\tan\theta\cos\theta}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$$
$$=1\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

069-1 (1) $y=\cos x-\ln x$에서

$$y'=(\cos x)'-(\ln x)'=-\sin x-\frac{1}{x}$$

(2) $y=(x^2-3)\sin x$에서

$$y'=(x^2-3)'\sin x+(x^2-3)(\sin x)'$$
$$=2x\sin x+(x^2-3)\cos x$$

(3) $y=x\cos x-1$에서

$$y'=(x)'\cos x+x(\cos x)'-(1)'$$
$$=\cos x-x\sin x$$

답 풀이 참조

069-2 $f(x)=3\cos x$에서 $f'(x)=-3\sin x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3\sin\frac{\pi}{2}=-3$ 답 -3

중단원 연습 문제

본책 180~184쪽

01 ①	02 -16	03 $-2\sqrt{7}$	04 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	
05 ③	06 $2\sqrt{2}$	07 ①	08 ②	09 ⑤
10 $\frac{\sqrt{3}}{4}$	11 ⑤	12 10	13 ⑤	14 1
15 $\frac{2}{\pi}$	16 $\frac{14}{5}$	17 2	18 -3	19 ②
20 -2	21 ⑤	22 $\sqrt{15}$	23 65	24 $\frac{\pi}{2}$

01 전략 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 $\cos\alpha$, $\sin\beta$의 값을 구한 후, 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

풀이 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha<0$, $\sin\beta>0$이므로

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$$
$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$$
$$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=-\frac{12}{13}\cdot\frac{12}{13}-\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}$$
$$=-1$$

답 ①

다른 풀이 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$이므로

$$\cos^2\alpha=\cos^2\beta$$

이때 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\beta=\pi-\alpha \qquad \therefore \alpha+\beta=\pi$$
$$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\pi=-1$$

02 문제이해 • $x-2y+1=0$에서 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$mx+y+3=0$에서 $y=-mx-3$

두 직선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$$\tan\alpha=\frac{1}{2},\ \tan\beta=-m$$ ➔ 20% 배점

해결과정 • 두 직선이 이루는 예각의 크기가 $60°$이므로

$$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan 60°$$
$$\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\sqrt{3}$$
$$\left|\frac{\frac{1}{2}-(-m)}{1+\frac{1}{2}\cdot(-m)}\right|=\sqrt{3}$$
$$\left|\frac{1+2m}{2-m}\right|=\sqrt{3}$$ ➔ 40% 배점

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\frac{1+4m+4m^2}{4-4m+m^2}=3$$
$$\therefore m^2+16m-11=0$$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 m의 값의 합은 -16이다. ➔ 20% 배점

답 -16

03 문제이해 • 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$$ ➔ 30% 배점

해결과정 • $\therefore y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$$=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$
$$+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)$$
$$=-\sin x+3\sqrt{3}\cos x$$
$$=2\sqrt{7}\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\sin x+\frac{3\sqrt{21}}{14}\cos x\right)$$
$$=2\sqrt{7}\sin(x+\alpha)$$

$\left(\text{단, } \cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{14},\ \sin\alpha=\frac{3\sqrt{21}}{14}\right)$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$$-2\sqrt{7}\le2\sqrt{7}\sin(x+\alpha)\le2\sqrt{7}$$

따라서 주어진 함수의 최솟값은 $-2\sqrt{7}$이다.

➔ 30% 배점

답 $-2\sqrt{7}$

04 전략 배각 · 삼배각의 공식을 이용하여 주어진 등식을 $\sin\theta$에 대한 등식으로 변형한다.

풀이 $\sin3\theta=\cos2\theta$에서

$$3\sin\theta-4\sin^3\theta=1-2\sin^2\theta$$

$$4\sin^3\theta-2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$$

$$(\sin\theta-1)(4\sin^2\theta+2\sin\theta-1)=0$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin\theta<1$이므로

$$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

답 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Remark

$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$에서 $\sin\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$이지만 $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}<0$이므로 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta$의 값이 될 수 없다.

05 전략 반각의 공식과 삼각함수의 합성을 이용하여 주어진 함수를 간단히 한다.

풀이 $f(x)=2\cos^2x+k\sin2x-1$

$$=2\cdot\frac{1+\cos2x}{2}+k\sin2x-1$$

$$=k\sin2x+\cos2x$$

$$=\sqrt{k^2+1}\sin(2x+\alpha)$$

$$\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{k}{\sqrt{k^2+1}},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right)$$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{k^2+1}$이므로

$$\sqrt{k^2+1}=\sqrt{10},\qquad k^2+1=10,\qquad k^2=9$$

$k>0$이므로 $k=3$

답 ③

06 전략 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2x-1}{\sin x-\cos x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\cos^2x}}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}{\cos^2x(\sin x-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{\cos^2x}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

07 전략 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$임을 이용한다.

풀이 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(3x^3+5x^2+4x)}{2x^3+2x^2+x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^3+5x^2+4x)}{3x^3+5x^2+4x}\cdot\frac{3x^3+5x^2+4x}{2x^3+2x^2+x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^3+5x^2+4x)}{3x^3+5x^2+4x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{3x^2+5x+4}{2x^2+2x+1}$$

$$=1\cdot\frac{4}{1}=4$$

답 ①

08 전략 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{2\cos x+a}{x\sin x}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow0$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to0}(2\cos x+a)=0$이므로

$$2+a=0\qquad\therefore a=-2$$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-2}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(\cos x-1)(\cos x+1)}{x\sin x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2x}{x\sin x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}(-2)\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x+1}$$

$$=-2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=-1$$

즉 $b=-1$이므로

$$a+b=-3$$

답 ②

09 전략 주어진 식의 양변을 각각 제곱한 후, 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

풀이 $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{5}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{25}\quad\cdots ㉠$$

$\cos\alpha-\cos\beta=-\frac{1}{5}$의 양변을 제곱하면

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{25}\quad\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\beta$$
$$-2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=\frac{2}{25}$$
$$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{2}{25}$$
$$2-2\cos(\alpha-\beta)=\frac{2}{25}$$
$$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=\frac{24}{25}$$

답 ⑤

10 해결과정 • $p=\cos20^\circ\cos40^\circ-\sin20^\circ\sin40^\circ$
$=\cos(20^\circ+40^\circ)=\cos60^\circ$
$=\frac{1}{2}$ ➔ 40% 배점

$q=\cos20^\circ\sin40^\circ+\sin20^\circ\cos40^\circ$
$=\sin(20^\circ+40^\circ)=\sin60^\circ$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore\ pq=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ ➔ 20% 배점

답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

11 전략 $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$를 삼각함수의 합성을 이용하여 $a\sin(\theta+\alpha)$ 꼴로 나타낸 후, $\sin^2x+\cos^2x=1$임을 이용한다.

풀이 $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta+\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta\right)$$
$$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

이므로 주어진 식은

$$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$$

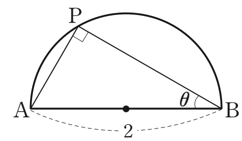
이때 $0<\theta<\pi$에서 $\quad\frac{\pi}{6}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{7}{6}\pi$

또 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$이므로 $\quad\sin\frac{\pi}{6}>\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

$$\therefore\ \frac{\pi}{2}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{7}{6}\pi$$
$$\therefore\ \cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{15}}{4}$$

답 ⑤

12 해결과정 • $\angle APB=90^\circ$이므로 $\angle ABP=\theta$라 하면



$\overline{AP}=2\sin\theta$,
$\overline{BP}=2\cos\theta$
➔ 30% 배점

$$\therefore\ 4\overline{AP}+3\overline{BP}=8\sin\theta+6\cos\theta$$
$$=10\left(\frac{4}{5}\sin\theta+\frac{3}{5}\cos\theta\right)$$
$$=10\sin(\theta+\alpha)$$
$$\left(단,\ \cos\alpha=\frac{4}{5},\ \sin\alpha=\frac{3}{5}\right)$$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\theta+\alpha<\pi$이므로

$0<\sin(\theta+\alpha)\le1$

$\therefore\ 0<10\sin(\theta+\alpha)\le10$

따라서 구하는 최댓값은 10이다. ➔ 30% 배점

답 10

13 전략 배각의 공식을 이용하여 분자와 분모를 θ의 삼각함수로 나타낸다.

풀이 $$\frac{\sin2\theta}{1-\cos2\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1-(1-2\sin^2\theta)}$$
$$=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin^2\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\cot\theta$$

답 ⑤

다른 풀이 $$\frac{\sin2\theta}{1-\cos2\theta}=\frac{\frac{\sin2\theta}{2}}{\frac{1-\cos2\theta}{2}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$$

14 (전략) 반각의 공식을 이용하여 $\tan^2\frac{\theta_n}{2}$을 $\cos\theta_n$에 대한 식으로 나타낸다.

(풀이) $\tan^2\frac{\theta_n}{2}=\frac{1-\cos\theta_n}{1+\cos\theta_n}$

$$=\frac{1-\frac{2^n-1}{2^n+1}}{1+\frac{2^n-1}{2^n+1}}=\frac{2}{2\cdot 2^n}=\frac{1}{2^n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\tan^2\frac{\theta_n}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

답 1

Remark 등비급수의 합

$a\neq 0$, $|r|<1$일 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$$

15 (전략) 반각의 공식을 이용하여 $f(x)$에서 근호를 없앤다.

(풀이) $f(x)=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}+\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

$$=\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}}+\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}}$$

이때 $0<x\le\pi$에서 $0<\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{2}$이므로

$$\sin\frac{x}{2}>0,\ \cos\frac{x}{2}\ge 0$$

$$\therefore f(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0<\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\le\frac{3}{4}\pi$이므로

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$$

$$\therefore 1\le\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이고 최솟값은 1이므로

$$M=\sqrt{2},\ m=1$$

$\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$에서 $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\qquad\therefore x=\frac{\pi}{2}$$

$\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1$에서 $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi\qquad\therefore x=\pi$$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\pi$이므로

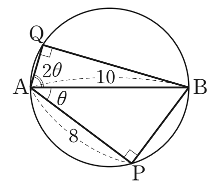
$$\frac{M^2+m^2}{\alpha+\beta}=\frac{(\sqrt{2})^2+1^2}{\frac{\pi}{2}+\pi}=\frac{2}{\pi}$$

답 $\frac{2}{\pi}$

16 (전략) 배각의 공식을 이용하여 $\overline{AQ}$의 길이를 $\angle PAB$에 대한 삼각함수로 나타낸다.

(풀이) $\angle PAB=\theta$라 하면

$\angle QAB=2\theta$



$\triangle ABP$에서 $\angle APB=90°$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{4}{5}$$

$\triangle ABQ$에서 $\angle AQB=90°$이므로

$$\overline{AQ}=\overline{AB}\cos 2\theta$$

$$=10(2\cos^2\theta-1)$$

$$=10\left\{2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2-1\right\}=\frac{14}{5}$$

답 $\frac{14}{5}$

17 (전략) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$임을 이용하여 $f(n)$을 구한다.

(풀이) $f(n)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}+\cdots+\frac{\sin nx}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2+\cdots+\frac{\sin nx}{nx}\cdot n}$$

$$=\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

답 2

18 해결과정 • $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+\sin bx}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}a+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin bx}{x}$$
$$=a+0=a$$

이므로 $a=2$ ➔ 40% 배점

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{ax+\sin bx}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{a+\frac{\sin bx}{bx}\cdot b}$$
$$=\frac{1}{a+b}=\frac{1}{2+b}$$

즉 $\frac{1}{2+b}=2$이므로 $2+b=\frac{1}{2}$

$\therefore b=-\frac{3}{2}$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore ab=-3$ ➔ 20% 배점

답 -3

Remark

$-1\le\sin x\le1$의 각 변을 x $(x>0)$로 나누면

$-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$이고, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$이다.

19 전략 구하는 식을 $\tan\alpha$와 $\tan\beta$에 대한 식으로 변형한다.

풀이 △POA에서 $\tan\alpha=\frac{1}{h}$ …… ㉠

또 △POB에서 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{3}{h}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$에 대입하면

$$\frac{3}{h}=\frac{\frac{1}{h}+\tan\beta}{1-\frac{1}{h}\cdot\tan\beta}$$
$$\frac{3}{h}=\frac{1+h\tan\beta}{h-\tan\beta}$$
$$3(h-\tan\beta)=h(1+h\tan\beta)$$
$$3h-3\tan\beta=h+h^2\tan\beta$$
$$(h^2+3)\tan\beta=2h$$
$$\therefore \tan\beta=\frac{2h}{h^2+3}$$

$h\to\infty$일 때 $\alpha\to0$, $\beta\to0$이므로

$$\lim_{h\to\infty}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{h\to\infty}\frac{\alpha}{\tan\alpha}\cdot\frac{\tan\beta}{\beta}\cdot\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$$
$$=\lim_{\alpha\to0}\frac{\alpha}{\tan\alpha}\cdot\lim_{\beta\to0}\frac{\tan\beta}{\beta}\cdot\lim_{h\to\infty}\frac{\frac{1}{h}}{\frac{2h}{h^2+3}}$$
$$=1\cdot1\cdot\lim_{h\to\infty}\frac{h^2+3}{2h^2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

20 전략 $x-\pi=t$로 치환한 후 $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\cos^2x=\cos x\cos x$이므로

$$f'(x)=(\cos x)'\cos x+\cos x(\cos x)'$$
$$=-\sin x\cos x+\cos x(-\sin x)$$
$$=-2\sin x\cos x$$
$$=-\sin 2x$$

이때 $x-\pi=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f'(x)}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{f'(\pi+t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin(2\pi+2t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin 2t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot(-2)=-2$$

답 -2

21 전략 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$의 값을 구한다.

풀이 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{2+4}{1-2\cdot4}=-\frac{6}{7}$$

이므로

$$\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}$$
$$=\frac{-\frac{6}{7}+13}{1-\left(-\frac{6}{7}\right)\cdot13}$$
$$=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

그런데 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$이고

$$\tan\frac{\pi}{4}<\tan\alpha<\tan\beta<\tan\gamma$$

이므로 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \frac{3}{4}\pi<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{2}\pi$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{4}\pi$

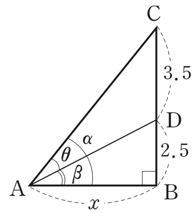
답 ⑤

22 전략 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\theta$의 값이 최대일 때, θ가 최대임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이

$\angle CAB=\alpha$, $\angle DAB=\beta$,

$\overline{AB}=x$라 하면



$$\tan\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{6}{x}$$

$$\tan\beta=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{2.5}{x}$$

$$\therefore\ \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{6}{x}-\frac{2.5}{x}}{1+\frac{6}{x}\times\frac{2.5}{x}}=\frac{\frac{3.5}{x}}{\frac{x^2+15}{x^2}}$$

$$=\frac{3.5x}{x^2+15}=\frac{3.5}{x+\frac{15}{x}}$$

즉 $x+\frac{15}{x}$가 최소일 때 $\tan\theta$가 최대이고,

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\theta$가 최대일 때 θ도 최대이다.

$x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{15}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{15}{x}}=2\sqrt{15}$$

이때 등호는 $x=\frac{15}{x}$일 때 성립하므로

$x^2=15 \qquad \therefore\ x=\sqrt{15}$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $\sqrt{15}$ m이다.

답 $\sqrt{15}$

23 전략 $f(\theta)$, $g(\theta)$를 삼각함수를 포함한 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{OA}=1$이므로 $\triangle AOS$에서

$\overline{OS}=\overline{OA}\sin\theta=\sin\theta$

$\overline{AS}=\overline{OA}\cos\theta=\cos\theta$

$$\therefore\ f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$\triangle AOP$에서 $\overline{OP}=\overline{OA}=1$이므로

$\angle APO=\angle PAO=\theta$

$$\therefore\ \angle POQ=2\theta,\ \angle OPQ=\frac{\pi}{2}-2\theta$$

$\overline{PQ}=\overline{OP}\sin 2\theta=\sin 2\theta$

$$\overline{PR}=\overline{PQ}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$

$$=\sin 2\theta\sin 2\theta=\sin^2 2\theta$$

$$\overline{RQ}=\overline{PQ}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$

$$=\sin 2\theta\cos 2\theta=\frac{1}{2}\sin 4\theta$$

이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\overline{PR}\cdot\overline{RQ}$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\cdot\frac{1}{2}\sin 4\theta$$

$$=\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\sin 4\theta$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2 f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{4}\theta^2\sin 2\theta}{\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\sin 4\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2}{\sin 2\theta\sin 4\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta}{\sin 2\theta}\cdot\frac{4\theta}{\sin 4\theta}\cdot\frac{1}{8}$$

$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

따라서 $p=8$, $q=1$이므로

$p^2+q^2=64+1=65$

답 65

24 문제이해 • $f(x)=\frac{1}{2}\sin^2 x+\cos^2 x$

$$=\frac{1}{2}\sin x\sin x+\cos x\cos x$$

에서

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\sin x\cos x-2\sin x\cos x$$

$$=-\sin x\cos x$$

$$=-\frac{1}{2}\sin 2x$$

➜ 30% 배점

해결과정 • $f'(x)=0$에서 $\sin 2x=0$

$0\leq x<\pi$이면 $0\leq 2x<2\pi$이므로 $\sin 2x=0$일 때,

$2x=0$ 또는 $2x=\pi$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

➜ 50% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 모든 x의 값의 합은

$0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

➜ 20% 배점

답 $\frac{\pi}{2}$

Ⅲ. 미분법

07 여러 가지 미분법

유제

본책 190~206쪽

070-1 (1) $y'=\dfrac{(2x-1)'(3x-1)-(2x-1)(3x-1)'}{(3x-1)^2}$

$=\dfrac{2(3x-1)-(2x-1)\cdot 3}{(3x-1)^2}$

$=\dfrac{1}{(3x-1)^2}$

(2) $y'=\dfrac{(x^3+3x^2-1)'x^4-(x^3+3x^2-1)(x^4)'}{(x^4)^2}$

$=\dfrac{(3x^2+6x)\cdot x^4-(x^3+3x^2-1)\cdot 4x^3}{x^8}$

$=\dfrac{-x^6-6x^5+4x^3}{x^8}$

$=\dfrac{-x^3-6x^2+4}{x^5}$

(3) $y'=\dfrac{(x^2+1)'\cdot e^x-(x^2+1)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}$

$=\dfrac{2x\cdot e^x-(x^2+1)\cdot e^x}{e^{2x}}$

$=\dfrac{-e^x(x^2-2x+1)}{e^{2x}}=-\dfrac{(x-1)^2}{e^x}$

답 풀이 참조

다른 풀이 (2) $y=\dfrac{x^3+3x^2-1}{x^4}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}$

$=x^{-1}+3x^{-2}-x^{-4}$

이므로

$y'=-1\cdot x^{-1-1}+3\cdot(-2)x^{-2-1}-(-4)x^{-4-1}$

$=-x^{-2}-6x^{-3}+4x^{-5}$

$=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}+\dfrac{4}{x^5}$

$=\dfrac{-x^3-6x^2+4}{x^5}$

070-2 $y'=\dfrac{(x^2+x+2)'(x+1)-(x^2+x+2)(x+1)'}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+2)\cdot 1}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

이므로 $x=-2$에서의 미분계수는

$\dfrac{(-2)^2+2\cdot(-2)-1}{(-2+1)^2}=-1$

답 -1

071-1 (1) $y=(x^2-1)\sec x$에서

$y'=(x^2-1)'\sec x+(x^2-1)(\sec x)'$

$=2x\sec x+(x^2-1)\sec x\tan x$

$=\sec x(x^2\tan x-\tan x+2x)$

(2) $y=\sec x\tan x$에서

$y'=(\sec x)'\tan x+\sec x(\tan x)'$

$=\sec x\tan^2 x+\sec^3 x$

$=\sec x(\tan^2 x+\sec^2 x)$

(3) $y=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$에서

$y'=\dfrac{(1-\sin x)'(1+\cos x)-(1-\sin x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{-\cos x(1+\cos x)-(1-\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{-\cos x-\cos^2 x+\sin x-\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{\sin x-\cos x-1}{(1+\cos x)^2}$

답 풀이 참조

Remark

(2) $\sec x(\tan^2 x+\sec^2 x)=\dfrac{1}{\cos x}\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$

$=\dfrac{\sin^2 x+1}{\cos^3 x}$

071-2 $f(x)=\dfrac{1+\sec x}{\tan x}$에서

$f'(x)=\dfrac{(1+\sec x)'\tan x-(1+\sec x)(\tan x)'}{\tan^2 x}$

$=\dfrac{\sec x\tan^2 x-(1+\sec x)\sec^2 x}{\tan^2 x}$

$=\sec x-\csc^2 x(1+\sec x)$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sec\dfrac{\pi}{4}-\csc^2\dfrac{\pi}{4}\left(1+\sec\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}-2(1+\sqrt{2})$

$=-2-\sqrt{2}$

답 $-2-\sqrt{2}$

072-1 (1) $y=\left(\dfrac{x^2+x+2}{x^2}\right)^4=\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)^4$

$=(1+x^{-1}+2x^{-2})^4$

이므로

$$y'=4(1+x^{-1}+2x^{-2})^3(1+x^{-1}+2x^{-2})'$$
$$=4(1+x^{-1}+2x^{-2})^3(-x^{-2}-4x^{-3})$$
$$=-4x^{-2}(1+x^{-1}+2x^{-2})^3(1+4x^{-1})$$
$$=-\frac{4}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^3\left(1+\frac{4}{x}\right)$$
$$=-\frac{4}{x^2}\left(\frac{x^2+x+2}{x^2}\right)^3\cdot\frac{x+4}{x}$$
$$=-\frac{4}{x^2}\cdot\frac{(x^2+x+2)^3}{x^6}\cdot\frac{x+4}{x}$$
$$=-\frac{4(x^2+x+2)^3(x+4)}{x^9}$$

(2) $y'=2\cos(\tan x)\{\cos(\tan x)\}'$
$$=2\cos(\tan x)\{-\sin(\tan x)\}(\tan x)'$$
$$=-2\sin(\tan x)\cos(\tan x)\sec^2 x$$
$$=-\sin(2\tan x)\sec^2 x$$

답 풀이 참조

Remark

(2) 배각의 공식 $2\sin x\cos x=\sin 2x$에 의하여
$2\sin(\tan x)\cos(\tan x)=\sin(2\tan x)$

다른 풀이 (1) $u=\dfrac{x^2+x+2}{x^2}$라 하면 $y=u^4$이므로
$$\frac{dy}{du}=4u^3$$
$$\frac{du}{dx}=\frac{(2x+1)x^2-(x^2+x+2)\cdot 2x}{(x^2)^2}$$
$$=\frac{-x^2-4x}{x^4}=\frac{-x-4}{x^3}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=4u^3\cdot\frac{-x-4}{x^3}$$
$$=\frac{4(x^2+x+2)^3}{x^6}\cdot\frac{-x-4}{x^3}$$
$$=-\frac{4(x^2+x+2)^3(x+4)}{x^9}$$

072-2 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서
$$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$$
$f(x)=(x^2-3)^2$에서
$$f'(x)=2(x^2-3)\cdot 2x=4x^3-12x$$
$g(x)=\dfrac{1}{x^2}$에서
$$g'(x)=\frac{-2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$$
$f(2)=(2^2-3)^2=1$, $f'(2)=4\cdot 2^3-12\cdot 2=8$이므로
$$h'(2)=g'(f(2))f'(2)$$
$$=8g'(1)=8\cdot\left(-\frac{2}{1^3}\right)$$
$$=-16$$

답 -16

다른 풀이 $h(x)=g(f(x))$에서

$h(x)=g((x^2-3)^2)=\dfrac{1}{(x^2-3)^4}$이므로
$$h'(x)=\frac{-\{(x^2-3)^4\}'}{\{(x^2-3)^4\}^2}=\frac{-4(x^2-3)^3\cdot 2x}{(x^2-3)^8}$$
$$=\frac{-8x}{(x^2-3)^5}$$
$$\therefore h'(2)=\frac{-8\cdot 2}{(2^2-3)^5}=-16$$

073-1 (1) $y'=2^{x^2+1}\ln 2\cdot(x^2+1)'$
$$=2^{x^2+1}\ln 2\cdot 2x$$
$$=2^{x^2+2}\cdot x\ln 2$$
(2) $y'=(x)'e^{\sin x}+x(e^{\sin x})'$
$$=e^{\sin x}+x\cdot e^{\sin x}(\sin x)'$$
$$=e^{\sin x}+x\cdot e^{\sin x}\cos x$$
$$=e^{\sin x}(1+x\cos x)$$
(3) $y'=\dfrac{(2^x-2^{-x})'(2^x+2^{-x})-(2^x-2^{-x})(2^x+2^{-x})'}{(2^x+2^{-x})^2}$
$$=\frac{(2^x+2^{-x})\ln 2\cdot(2^x+2^{-x})-(2^x-2^{-x})(2^x-2^{-x})\ln 2}{(2^x+2^{-x})^2}$$
$$=\frac{\{(2^x+2^{-x})^2-(2^x-2^{-x})^2\}\ln 2}{(2^x+2^{-x})^2}$$
$$=\frac{4\ln 2}{(2^x+2^{-x})^2}$$

답 풀이 참조

073-2 $f'(x)=(e^{-x})'\sin x+e^{-x}(\sin x)'$
$$=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$$
$$=e^{-x}(\cos x-\sin x)$$
이므로 $x=0$에서의 미분계수는
$$f'(0)=1\cdot(1-0)=1$$

답 1

074-1 (1) $y'=\dfrac{(\sin x)'}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

(2) $y=(4x^2-1)\ln|2x-1|^3$
$$=3(4x^2-1)\ln|2x-1|$$
$$=(12x^2-3)\ln|2x-1|$$
이므로

$$y'=(12x^2-3)'\ln|2x-1|$$
$$+(12x^2-3)(\ln|2x-1|)'$$
$$=24x\ln|2x-1|+(12x^2-3)\cdot\frac{(2x-1)'}{2x-1}$$
$$=24x\ln|2x-1|+\frac{2(12x^2-3)}{2x-1}$$
$$=24x\ln|2x-1|+6(2x+1)$$

(3) $y=\frac{\ln|x|^3}{x^4}=\frac{3\ln|x|}{x^4}$ 이므로

$$y'=\frac{(3\ln|x|)'\cdot x^4-3\ln|x|\cdot(x^4)'}{(x^4)^2}$$
$$=\frac{\frac{3}{x}\cdot x^4-3\ln|x|\cdot 4x^3}{x^8}$$
$$=\frac{3x^3-12x^3\ln|x|}{x^8}=\frac{3x^3(1-4\ln|x|)}{x^8}$$
$$=\frac{3(1-4\ln|x|)}{x^5}$$

(4) $y'=\frac{(\ln|x|)'}{\ln|x|\cdot\ln 3}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln|x|\cdot\ln 3}$

$$=\frac{1}{x\ln|x|\cdot\ln 3}$$

답 풀이 참조

075-1 (1) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=\ln\left|\frac{(x-1)^4}{(x+1)(x+2)^2}\right|$$
$$=4\ln|x-1|-\ln|x+1|-2\ln|x+2|$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}$$
$$=\frac{x^2+11x+12}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$
$$\therefore y'=y\cdot\frac{x^2+11x+12}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{(x-1)^4}{(x+1)(x+2)^2}$$
$$\times\frac{x^2+11x+12}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{(x-1)^3(x^2+11x+12)}{(x+1)^2(x+2)^3}$$

(2) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y=\ln x^x=x\ln x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$
$$\therefore y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

답 풀이 참조

075-2 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln(\ln x)^x=x\ln(\ln x)$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(\ln x)+x\cdot\frac{(\ln x)'}{\ln x}$$
$$=\ln(\ln x)+x\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$
$$=\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}$$
$$\therefore f'(x)=f(x)\left\{\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right\}$$
$$=(\ln x)^x\left\{\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right\}$$
$$\therefore f'(e)=1$$

답 1

076-1 (1) $y=\frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}=(x^2-1)(x+1)^{-\frac{1}{2}}$

이므로

$$y'=2x(x+1)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+(x^2-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 1$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}\{4x(x+1)-(x^2-1)\}$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}(3x^2+4x+1)$$
$$=\frac{3x^2+4x+1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$
$$=\frac{(x+1)(3x+1)}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$
$$=\frac{3x+1}{2\sqrt{x+1}}$$

(2) $y'=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot(\sqrt{1-x^2})'$

$$=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$$
$$=-\frac{x\cos\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

답 풀이 참조

다른 풀이 (1) $y'=\dfrac{(x^2-1)'\sqrt{x+1}-(x^2-1)(\sqrt{x+1})'}{(\sqrt{x+1})^2}$

$$=\frac{2x\sqrt{x+1}-(x^2-1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$=\frac{\dfrac{4x(x+1)-(x^2-1)}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$=\frac{3x^2+4x+1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}=\frac{3x+1}{2\sqrt{x+1}}$$

076-2 $f'(x)=\dfrac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1+\dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

이므로 $f'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{0^2+1}}=1$ 답 1

077-1 (1) $y=\sqrt[4]{4x-1}$에서 $y^4=4x-1$이므로

$$x=\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{4}$$

양변을 y에 대하여 미분하면 $\dfrac{dx}{dy}=y^3$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{y^3}\ (\text{단}, y\neq0)$$

(2) $x=\dfrac{1}{y^2+1}$에서

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-2y}{(y^2+1)^2}=-2y\cdot\left(\frac{1}{y^2+1}\right)^2$$

$$=-2x^2y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=-\frac{1}{2x^2y}\ (\text{단}, xy\neq0)$$

(3) $x=2y\sqrt{1+3y}$에서

$$\frac{dx}{dy}=2\sqrt{1+3y}+2y\cdot\frac{3}{2\sqrt{1+3y}}$$

$$=\frac{2(1+3y)+3y}{\sqrt{1+3y}}$$

$$=\frac{9y+2}{\sqrt{1+3y}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{\sqrt{1+3y}}{9y+2}\ \left(\text{단}, y\neq-\frac{2}{9}\right)$$

답 풀이 참조

077-2 $y=f(x)$라 하면 $y=\tan x$의 역함수 $x=\tan y$에서 양변을 y에 대하여 미분하면 $\dfrac{dx}{dy}=\sec^2 y$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

따라서 $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$이므로

$$g'(1)=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

다른 풀이 $f'(x)=\sec^2 x$이고, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$이므로

$$g(1)=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore g'(1)=\frac{1}{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sec^2\dfrac{\pi}{4}}=\frac{1}{(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2}$$

078-1 (1) $y=\ln(5x-2)$에서

$$y'=\frac{(5x-2)'}{5x-2}=\frac{5}{5x-2}$$

$$\therefore y''=-\frac{5\cdot(5x-2)'}{(5x-2)^2}=-\frac{25}{(5x-2)^2}$$

(2) $y=\sqrt{x^2-2}$에서

$$y'=\frac{(x^2-2)'}{2\sqrt{x^2-2}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$$

$$\therefore y''=\frac{(x)'\cdot\sqrt{x^2-2}-x\cdot(\sqrt{x^2-2})'}{(\sqrt{x^2-2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-2}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}}{x^2-2}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}}{x^2-2}$$

$$=\frac{(x^2-2)-x^2}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}$$

$$=-\frac{2}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}$$

(3) $y=xe^x$에서

$$y'=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

$$\therefore y''=(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'$$
$$=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$$

답 풀이 참조

078-2 $y=(ax+b)e^x$에서

$$y'=(ax+b)'e^x+(ax+b)(e^x)'$$
$$=ae^x+(ax+b)e^x=e^x(ax+a+b)$$
$$y''=(e^x)'(ax+a+b)+e^x(ax+a+b)'$$
$$=e^x(ax+a+b)+e^x\cdot a=e^x(ax+2a+b)$$

$y+y''=ky'$에서

$$(ax+b)e^x+e^x(ax+2a+b)=ke^x(ax+a+b)$$
$$e^x\{a(2-k)x+a(2-k)+b(2-k)\}=0$$

이때 $e^x\neq 0$이므로

$$a(2-k)x+a(2-k)+b(2-k)=0$$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$$a(2-k)=0,\ b(2-k)=0$$
$$\therefore k=2\ (\because a\neq 0)$$

답 2

중단원 연습 문제

본책 207~211쪽

01 ③	**02** 588	**03** $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$		**04** 1
05 21	**06** ②	**07** $\frac{1}{2}$	**08** ④	**09** $-\frac{1}{4}$
10 $-\frac{33}{25}$	**11** 15	**12** ③	**13** ⑤	**14** 10
15 6	**16** ①	**17** ⑤	**18** 10	**19** ①
20 4	**21** ①			

01 전략 몫의 미분법을 이용하여 함수 $f(x)$를 미분한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$이므로

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$
$$\therefore f'(-1)=\frac{-1-2+1}{(1+1)^2}=-\frac{1}{2}$$

답 ③

다른 풀이 $f(x)=(x-1)(x^2+1)^{-1}$이므로

$$f'(x)=(x^2+1)^{-1}+(x-1)\cdot(-1)(x^2+1)^{-2}\cdot 2x$$
$$=(x^2+1)^{-1}-2x(x-1)(x^2+1)^{-2}$$
$$=(x^2+1)^{-2}(-x^2+2x+1)$$
$$\therefore f'(-1)=2^{-2}\cdot(-2)=\frac{1}{4}\cdot(-2)=-\frac{1}{2}$$

02 해결과정 • $g(x)=x^3\{f(2x)\}^2$이므로

$$g'(x)=3x^2\{f(2x)\}^2+x^3\cdot 2f(2x)f'(2x)\cdot(2x)'$$
$$=3x^2\{f(2x)\}^2+4x^3f(2x)f'(2x)$$

▶ 60% 배점

답구하기 • $\therefore g'(2)=12\{f(4)\}^2+32f(4)f'(4)$

$$=12\cdot 3^2+32\cdot 3\cdot 5=588$$

▶ 40% 배점

답 588

03 해결과정 • $(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$f(g(x))=\cos^3 2x$이므로 ▶ 20% 배점

$$(f\circ g)'(x)=3\cos^2 2x\cdot(\cos 2x)'$$
$$=3\cos^2 2x\cdot(-\sin 2x)\cdot(2x)'$$
$$=-3\cos 2x\cdot(2\sin 2x\cos 2x)$$
$$=-3\cos 2x\sin 4x$$

▶ 50% 배점

답구하기 • $\therefore (f\circ g)'\left(\frac{\pi}{8}\right)=-3\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{2}$

$$=-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1$$
$$=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

▶ 30% 배점

답 $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

04 전략 곱의 미분법과 합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구한 후 $x=0$을 대입한다.

풀이 $f(x)=(x^2+1)e^{\sin x}$에서

$$f'(x)=(x^2+1)'e^{\sin x}+(x^2+1)(e^{\sin x})'$$
$$=2xe^{\sin x}+(x^2+1)e^{\sin x}\cdot\cos x$$
$$=e^{\sin x}(x^2\cos x+2x+\cos x)$$
$$\therefore f'(0)=e^0(0+0+1)=1$$

답 1

05 전략 $y=\ln|f(x)|$일 때,

$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\ (f(x)\neq 0)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\ln(2x-1)$에서

$$f'(x)=\frac{(2x-1)'}{2x-1}=\frac{2}{2x-1}$$

$$\therefore f'(10)=\frac{2}{19}$$

따라서 $p=19$, $q=2$이므로

$p+q=21$ 답 21

06

전략 $x>0$일 때 $x^{\cos x}>0$이므로 주어진 함수의 양변에 자연로그를 취한 후, 양변을 미분한다.

풀이 $f(x)=x^{\cos x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln x^{\cos x}=\cos x\cdot\ln x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=(\cos x)'\ln x+\cos x(\ln x)'$$

$$=-\sin x\cdot\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\left(-\sin x\cdot\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$$

$$=x^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$$

$$\therefore f'(\pi)=\pi^{\cos\pi}\left(-\sin\pi\cdot\ln\pi+\frac{\cos\pi}{\pi}\right)$$

$$=\pi^{-1}\left(0-\frac{1}{\pi}\right)=-\frac{1}{\pi^2}$$ 답 ②

07

전략 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=g(x)$가 존재하고 $g(a)=b$이면

$g'(a)=\dfrac{1}{f'(b)}$ $(f'(b)\neq0)$임을 이용한다.

풀이 $f^{-1}=g$이므로 $f(1)=3$에서

$f^{-1}(3)=1$, 즉 $g(3)=1$

$$\therefore g'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$$ 답 $\frac{1}{2}$

다른 풀이 $g=f^{-1}$이므로 $g(f(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x)=1$$

$x=1$을 대입하면

$$g'(f(1))f'(1)=1$$

$$g'(3)\cdot2=1 \qquad \therefore g'(3)=\frac{1}{2}$$

08

전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$, $f''(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=xe^{ax+b}$에서

$$f'(x)=x'\cdot e^{ax+b}+x(e^{ax+b})'=e^{ax+b}+axe^{ax+b}$$

$$=e^{ax+b}(1+ax)$$

$$f''(x)=(e^{ax+b})'\cdot(1+ax)+e^{ax+b}(1+ax)'$$

$$=ae^{ax+b}(1+ax)+e^{ax+b}\cdot a$$

$$=ae^{ax+b}(2+ax)$$

이때 $f'(0)=3$, $f''(0)=3$이므로

$e^b=3$, $2ae^b=3$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\ln3$이므로

$$ab=\frac{1}{2}\ln3=\ln\sqrt{3}$$ 답 ④

09

문제이해 • $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$이므로

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$ ➔ 20% 배점

해결과정 • $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-3}{x+1}=2$, $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{g(x)+2}{x+1}=-1$

에서 $x\longrightarrow-1$일 때, 각각 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to-1}\{f(x)-3\}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-1}\{g(x)+2\}=0$이므로

$f(-1)=3$, $g(-1)=-2$ ➔ 30% 배점

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-3}{x+1}=2$, $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{g(x)+2}{x+1}=-1$

에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(-1)=2,$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=g'(-1)=-1$$

➔ 20% 배점

답구하기 • $$h'(-1)=\frac{f'(-1)g(-1)-f(-1)g'(-1)}{\{g(-1)\}^2}$$

$$=\frac{2\cdot(-2)-3\cdot(-1)}{(-2)^2}$$

$$=-\frac{1}{4}$$ ➔ 30% 배점

답 $-\frac{1}{4}$

Remark 분수 꼴의 극한의 성질

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{(\text{분자})}{(\text{분모})}=\alpha$ (α는 실수)일 때

① (분모) $\longrightarrow$ 0이면 (분자) $\longrightarrow$ 0

② (분자) $\longrightarrow$ 0, $\alpha\neq0$이면 (분모) $\longrightarrow$ 0

10 (전략) 미분계수의 정의를 이용하여 $\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$를 변형하고, 몫의 미분법을 이용하여 $f'(2)$와 $f(2)$의 값을 구한다.

(풀이) $\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-2f(2)+2f(2)-xf(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2\{f(x)-f(2)\}-(x-2)f(2)}{x-2}$$
$$=2\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{(x-2)f(2)}{x-2}$$
$$=2f'(2)-f(2)$$

그런데 $f(x)=\frac{3x+1}{x^2-2x+5}$에서

$$f'(x)=\frac{3(x^2-2x+5)-(3x+1)(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2}$$
$$=\frac{-3x^2-2x+17}{(x^2-2x+5)^2}$$

이므로

$$f(2)=\frac{3\cdot2+1}{2^2-2\cdot2+5}=\frac{7}{5},$$
$$f'(2)=\frac{-3\cdot2^2-2\cdot2+17}{(2^2-2\cdot2+5)^2}=\frac{1}{25}$$

$\therefore$ (구하는 값)$=2f'(2)-f(2)$

$$=2\cdot\frac{1}{25}-\frac{7}{5}=-\frac{33}{25}$$

답 $-\frac{33}{25}$

11 문제이해 • 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, -3)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f(2)=-3,\ f'(2)=3$

또 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 5이므로

$g(1)=2,\ g'(1)=5$ ➜ 30% 배점

해결과정 • $h(x)=f(g(x))$로 놓으면

$h(1)=f(g(1))=f(2)=-3$

이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(g(x))+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1)$$ ➜ 50% 배점

답구하기 • $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$에서

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(2)\cdot g'(1)$

$=3\cdot5=15$ ➜ 20% 배점

답 15

Remark 미분계수의 기하학적 의미

함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

12 (전략) $g(x)=\ln f'(x)$에 $f'(x)=1+\{f(x)\}^2$을 대입한 후 x에 대하여 미분한다.

(풀이) $g(x)=\ln f'(x)=\ln[1+\{f(x)\}^2]$에서

$$g'(x)=\frac{2f(x)f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}$$
$$=\frac{2f(x)[1+\{f(x)\}^2]}{1+\{f(x)\}^2}=2f(x)$$
$$\therefore g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot1=2$$

답 ③

(다른 풀이) $g(x)=\ln f'(x)$에서

$$g'(x)=\frac{f''(x)}{f'(x)}$$

$f'(x)=1+\{f(x)\}^2$에서

$f''(x)=2f(x)f'(x)$

이므로 $g'(x)=\frac{2f(x)f'(x)}{f'(x)}=2f(x)$

13 (전략) 미분계수의 정의를 이용하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(e+h)-f(e-h)}{h}$를 변형하고, 로그미분법을 이용하여 $f(x)=x^{\ln x}$을 미분한다.

(풀이) $\lim_{h\to0}\frac{f(e+h)-f(e-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(e+h)-f(e)+f(e)-f(e-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(e-h)-f(e)}{-h}$$
$$=f'(e)+f'(e)=2f'(e)$$

한편 $f(x)=x^{\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\ln x}=(\ln x)^2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=2\ln x(\ln x)'=\frac{2\ln x}{x}$$
$$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\frac{2\ln x}{x}=x^{\ln x}\cdot\frac{2\ln x}{x}$$

따라서 구하는 값은

$$2f'(e)=2e^{\ln e}\cdot\frac{2\ln e}{e}=2e\cdot\frac{2}{e}=4$$

답 ⑤

14 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $h'(x)$를 구한다.

풀이 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이고 $f(0)=1$이므로

$$h'(0)=g'(f(0))f'(0)=g'(1)f'(0)=15$$

이때 $f'(x)=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$$f'(0)=\frac{3}{2}$$

따라서 $g'(1)\cdot\frac{3}{2}=15$이므로

$$g'(1)=15\cdot\frac{2}{3}=10$$

답 10

15 전략 분수 꼴의 극한의 성질과 미분계수의 정의를 이용하여 $f(1)$과 $f'(1)$의 값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x-1}=2$에서 $x\longrightarrow 1$일 때,

(분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-4\}=0$이므로 $f(1)=4$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$$

$g(x)=f(x)\sqrt{f(x)}$에서

$$g'(x)=f'(x)\sqrt{f(x)}+f(x)\cdot\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{2f'(x)f(x)+f(x)f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{3}{2}f'(x)\sqrt{f(x)}$$

$$\therefore g'(1)=\frac{3}{2}f'(1)\sqrt{f(1)}=\frac{3}{2}\cdot2\cdot\sqrt{4}=6$$

답 6

다른 풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x-1}=2$에서

$$f(1)=4,\ f'(1)=2$$

$g(x)=f(x)\sqrt{f(x)}=\{f(x)\}^{\frac{3}{2}}$이므로

$$g'(x)=\frac{3}{2}\{f(x)\}^{\frac{1}{2}}f'(x)$$

$$\therefore g'(1)=\frac{3}{2}\{f(1)\}^{\frac{1}{2}}f'(1)=\frac{3}{2}\cdot4^{\frac{1}{2}}\cdot2=6$$

16 전략 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$임을 이용한다.

(단, $f'(g(x))\neq0$)

풀이 $g(a)=b$라 하면 $f(b)=a$이므로

$$\ln(e^b-1)=a \qquad \therefore e^b-1=e^a$$

이때 $f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$이므로

$$g'(a)=\frac{1}{f'(b)}=\frac{e^b-1}{e^b}=\frac{e^a}{e^a+1}$$

$$\therefore \frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}=\frac{e^a-1}{e^a}+\frac{e^a+1}{e^a}=2$$

답 ①

17 전략 조건 (나)에서 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서 $f^{-1}=g$이므로 조건 (가)에 의하여

$$g(2)=1$$

조건 (다)에서

$$f'(1)=1+\{f(1)\}^2=1+2^2=5$$

$$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5}$$

$F(x)=h(g(x))$이므로

$$F'(x)=h'(g(x))g'(x)$$

$$\therefore F'(2)=h'(g(2))g'(2)=h'(1)\cdot\frac{1}{5}$$

이때 $F'(2)=4$이므로

$$h'(1)\cdot\frac{1}{5}=4 \qquad \therefore h'(1)=20$$

답 ⑤

18 해결과정 • $f(x)=e^{2x}\sin x$에서

$$f'(x)=(e^{2x})'\sin x+e^{2x}(\sin x)'=2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x=e^{2x}(2\sin x+\cos x)$$

$$f''(x)=(e^{2x})'(2\sin x+\cos x)+e^{2x}(2\sin x+\cos x)'=2e^{2x}(2\sin x+\cos x)+e^{2x}(2\cos x-\sin x)=e^{2x}(3\sin x+4\cos x)$$

➔ 40% 배점

$f'(\theta)-f''(\theta)=0$이므로

$$e^{2\theta}(2\sin\theta+\cos\theta)-e^{2\theta}(3\sin\theta+4\cos\theta)=0$$

$$-e^{2\theta}(\sin\theta+3\cos\theta)=0$$

이때 $e^{2\theta}>0$이므로

$$\sin\theta+3\cos\theta=0, \qquad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-3$$

$\therefore \tan\theta=-3$ ➔ 40% 배점

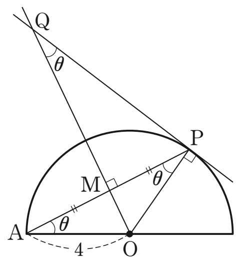
답구하기 • $\therefore \sec^2\theta=1+\tan^2\theta$

$=1+(-3)^2=10$ ➔ 20% 배점

답 10

19 전략 $\overline{\mathrm{QM}}$을 θ에 대한 식으로 나타내어 $f(\theta)$를 구한 후 미분한다.

풀이 오른쪽 그림에서



$\triangle$OAP는

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OP}}$(반지름)

인 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=4,\ \angle\mathrm{OPA}=\theta$

또 $\triangle\mathrm{OPQ}\backsim\triangle\mathrm{OMP}$

(AA 닮음)이므로

$\angle\mathrm{OQP}=\theta$

$\triangle$OMA에서 $\angle\mathrm{OMA}=90°$이므로

$\overline{\mathrm{OM}}=4\sin\theta$

$\triangle$OPQ에서 $\angle\mathrm{OPQ}=90°$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}\sin\theta=\overline{\mathrm{OP}}=4$

$$\therefore \overline{\mathrm{OQ}}=\frac{4}{\sin\theta}=4\csc\theta$$

$$\therefore f(\theta)=\overline{\mathrm{QM}}=\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OM}}$$
$$=4\csc\theta-4\sin\theta$$

$f'(\theta)=-4\csc\theta\cot\theta-4\cos\theta$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-4\csc\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}-4\cos\frac{\pi}{6}$$
$$=-4\cdot2\cdot\sqrt{3}-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=-10\sqrt{3}$$

답 ①

다른 풀이 $\overline{\mathrm{PM}}=4\cos\theta$이므로 $\triangle$PQM에서

$\overline{\mathrm{QM}}\tan\theta=\overline{\mathrm{PM}}$

$$\therefore f(\theta)=\overline{\mathrm{QM}}=\overline{\mathrm{PM}}\cot\theta$$
$$=4\cos\theta\cot\theta$$

$f'(\theta)=-4\sin\theta\cot\theta-4\cos\theta\csc^2\theta$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-4\sin\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}-4\cos\frac{\pi}{6}\csc^2\frac{\pi}{6}$$
$$=-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot4$$
$$=-10\sqrt{3}$$

20 해결과정 • $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2+x}{2-x}$

$$=\frac{1}{2}\{\ln(2+x)-\ln(2-x)\}$$

이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-x+2+x}{4-x^2}=\frac{2}{4-x^2}$$

$\therefore a=f'(0)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ ➔ 50% 배점

$g(0)=k$라 하면 $f(k)=0$이므로

$$\ln\sqrt{\frac{2+k}{2-k}}=0, \qquad \sqrt{\frac{2+k}{2-k}}=1$$

$$\frac{2+k}{2-k}=1, \qquad 2+k=2-k$$

$\therefore k=0$

즉 $g(0)=0$이므로

$b=g'(0)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=2$이므로

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=4$ ➔ 10% 배점

답 4

21 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)일 때, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이다.

풀이 조건 ㈏에서 $x\longrightarrow1$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to1}\{f'(f(x))-1\}=0$이므로

$f'(f(1))=1$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f''(f(1))f'(1)=f''(2)\cdot5$$

따라서 $5f''(2)=5$이므로

$f''(2)=1$

답 ①

08 도함수의 활용 (1)

유제

본책 216~233쪽

079-1 (1) $f(x)=(x-1)e^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$이므로 점 $(2,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=2e^2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-e^2=2e^2(x-2)$$

$$\therefore\ y=2e^2x-3e^2$$

(2) $f(x)=\log_5(1+x^2)$으로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)\ln 5}$이므로 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=\frac{2\cdot 2}{(1+2^2)\ln 5}=\frac{4}{5\ln 5}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{4}{5\ln 5}(x-2)$$

$$\therefore\ y=\frac{4}{5\ln 5}x-\frac{8}{5\ln 5}+1$$

답 풀이 참조

079-2 $f(x)=\tan^2 x$로 놓으면

$$f'(x)=2\tan x\sec^2 x$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot 1\cdot(\sqrt{2})^2=4$$

따라서 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{4}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{16}+1$$

답 $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{\pi}{16}+1$

080-1 (1) $f(x)=e^{2x}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=2e^{2x}$

접점의 좌표를 $(a,\ e^{2a})$이라 하면 직선 $y=2e(x+1)$에 평행한 직선의 기울기는 $2e$이므로

$$f'(a)=2e^{2a}=2e \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\dfrac{1}{2},\ e\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-e=2e\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore\ y=2ex$$

(2) $f(x)=\cos 2x$로 놓으면

$$f'(x)=-2\sin 2x$$

접점의 좌표를 $(a,\ \cos 2a)$라 하면 직선 $x-2y+3=0$, 즉 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 -2이므로

$$f'(a)=-2\sin 2a=-2, \qquad \sin 2a=1$$

그런데 $0\le a\le\pi$이므로 $\quad 2a=\dfrac{\pi}{2} \qquad \therefore\ a=\dfrac{\pi}{4}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-0=-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \therefore\ y=-2x+\frac{\pi}{2}$$

답 (1) $y=2ex$ (2) $y=-2x+\dfrac{\pi}{2}$

080-2 $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{(2x+1)^2}$$

접점의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{a}{2a+1}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(a)=\frac{1}{(2a+1)^2}=1, \qquad (2a+1)^2=1$$

$$2a+1=\pm 1 \qquad \therefore\ a=-1 \text{ 또는 } a=0$$

따라서 두 접점의 좌표는 $(-1,\ 1)$, $(0,\ 0)$이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(0+1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

081-1 $f(x)=xe^x$으로 놓으면

$$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$$

접점의 좌표를 $(a,\ ae^a)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=e^a(a+1)$이므로 접선의 방정식은

$$y-ae^a=e^a(a+1)(x-a)$$

이 직선이 점 $(-4,\ 0)$을 지나므로

$$0-ae^a=e^a(a+1)(-4-a)$$

$$e^a(a^2+4a+4)=0, \qquad e^a(a+2)^2=0$$

$$\therefore\ a=-2\ (\because\ e^a>0)$$

따라서 구하는 접점의 좌표는 $\quad\left(-2,\ -\dfrac{2}{e^2}\right)$

답 $\left(-2,\ -\dfrac{2}{e^2}\right)$

081-2 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

접점의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{\ln a}{a}\right)(a>0)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=\dfrac{1-\ln a}{a^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{\ln a}{a}=\frac{1-\ln a}{a^2}(x-a) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0-\frac{\ln a}{a}=\frac{1-\ln a}{a^2}(0-a)$$

$$a\ln a=a(1-\ln a), \qquad a(2\ln a-1)=0$$

$$\therefore a=\sqrt{e}\ (\because a>0)$$

$a=\sqrt{e}$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2\sqrt{e}}=\frac{1}{2e}(x-\sqrt{e}) \qquad \therefore y=\frac{1}{2e}x$$

답 $y=\dfrac{1}{2e}x$

082-1 $f(x)=xe^{-x}$으로 놓으면

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$$

접점의 좌표를 $(t,\ te^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=e^{-t}(1-t)$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-te^{-t}=e^{-t}(1-t)(x-t)$$

이 직선이 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$$0-te^{-t}=e^{-t}(1-t)(4-t)$$

$$e^{-t}(t^2-4t+4)=0, \qquad e^{-t}(t-2)^2=0$$

$$\therefore t=2\ (\because e^{-t}>0)$$

따라서 접점은 $x=2$에서 1개뿐이므로 점 $(4,\ 0)$에서 곡선 $y=xe^{-x}$에 그을 수 있는 접선은 1개이다.

답 1

083-1 $f(x)=\cos^2 x,\ g(x)=a+\sin x$에서

$$f'(x)=-2\sin x\cos x,\ g'(x)=\cos x$$

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$가 $x=t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$인 점에서 접하므로

$f(t)=g(t)$에서 $\qquad \cos^2 t=a+\sin t \quad \cdots\cdots ㉠$

$f'(t)=g'(t)$에서 $\qquad -2\sin t\cos t=\cos t$

$$\cos t(1+2\sin t)=0$$

$$\therefore \sin t=-\frac{1}{2}\left(\because -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore t=-\frac{\pi}{6}\left(\because -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$$

$t=-\dfrac{\pi}{6}$를 ㉠에 대입하면

$$\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{3}{4}=a-\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{5}{4}$$

답 $\dfrac{5}{4}$

083-2 $f(x)=\ln x,\ g(x)=ax+\dfrac{b}{x}$에서

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g'(x)=a-\frac{b}{x^2}$$

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$가 점 $(e^2,\ 2)$에서 접하므로

$f(e^2)=g(e^2)$에서 $\qquad 2=ae^2+\dfrac{b}{e^2} \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f'(e^2)=g'(e^2)$에서 $\qquad \dfrac{1}{e^2}=a-\dfrac{b}{e^4}$

$$\therefore 1=ae^2-\frac{b}{e^2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$3=2ae^2 \qquad \therefore a=\frac{3}{2e^2}$$

$a=\dfrac{3}{2e^2}$을 ㉠에 대입하면

$$2=\frac{3}{2e^2}\cdot e^2+\frac{b}{e^2} \qquad \therefore b=\frac{e^2}{2}$$

$$\therefore ab=\frac{3}{4}$$

답 $\dfrac{3}{4}$

084-1 (1) $f(x)=x^2e^{-x}$에서

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=2\ (\because e^{-x}>0)$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0),\ (2,\ \infty)$에서 감소하고, 구간 $(0,\ 2)$에서 증가한다.

(2) $f(x)=\cos x+x\sin x$에서

$$f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x$$
$$=x\cos x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=0$ ($\because x\neq0$)

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}\pi$	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$에서 증가하고, 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$에서 감소한다.

(3) $f(x)=x+\sqrt{9-x^2}$에서

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\sqrt{9-x^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $\quad x^2=\dfrac{9}{2}$

$\therefore x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ($\because 0<x<3$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$에서 증가하고, 구간 $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ 3\right)$에서 감소한다.

(4) $f(x)=x+\ln x$에서 $x>0$이고,

$$f'(x)=1+\frac{1}{x}$$

이때 $x>0$이므로 $\quad f'(x)>0$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

085-1 (1) $f(x)=ax-\dfrac{1}{x}+\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=a+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$$

함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하려면 $x>0$에서 $f'(x)\geq0$, 즉 $a+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\geq0$이어야 한다.

이때 $x>0$에서 $\dfrac{1}{x^2}>0$, $\dfrac{1}{x}>0$이므로

$a\geq0$

(2) $f(x)=2e^x-ex^2+ax$에서

$$f'(x)=2e^x-2ex+a$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 하므로

$2e^x-2ex+a\geq0$

$\therefore 2e^x\geq2ex-a \quad \cdots\cdots$ ㉠

$g(x)=2e^x$, $h(x)=2ex-a$로 놓으면

$g'(x)=2e^x$

직선 $y=h(x)$와 평행하면서 곡선 $y=g(x)$에 접하는 직선의 기울기는 $2e$이므로 $2e^x=2e$에서

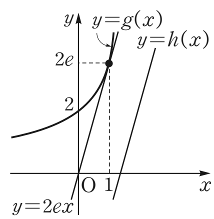
$x=1$

즉 접점이 $(1,\ 2e)$이므로 접선의 방정식은

$y-2e=2e(x-1)$

$\therefore y=2ex$

이때 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=h(x)$가 직선 $y=2ex$와 일치하거나 아래쪽에 있어야 하므로



$-a\leq0$

$\therefore a\geq0$

답 (1) $a\geq0$ (2) $a\geq0$

086-1 (1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$에서 $x\neq1$이고,

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=0$에서 극댓값 $f(0)=-1$,

$x=2$에서 극솟값 $f(2)=3$

을 갖는다.

(2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$에서

$$f'(x)=\frac{x^2+3-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}=\frac{-(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-3$에서 극솟값 $f(-3)=-\dfrac{1}{6}$,

$x=1$에서 극댓값 $f(1)=\dfrac{1}{2}$

을 갖는다.

답 (1) 극댓값: -1, 극솟값: 3

(2) 극댓값: $\dfrac{1}{2}$, 극솟값: $-\dfrac{1}{6}$

087-1 (1) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$에서 $x\geq 0$, $4-x\geq 0$이므로 $0\leq x\leq 4$이고,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}=\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{4-x}=\sqrt{x}$

양변을 제곱하면

$4-x=x$ $\therefore x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	극대	$\searrow$	2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $f(2)=2\sqrt{2}$를 갖는다.

(2) $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x+1}}$에서 $x+1>0$이므로 $x>-1$이고,

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x+1}-(x+3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=2\sqrt{2}$를 갖는다.

답 (1) 극댓값: $2\sqrt{2}$ (2) 극솟값: $2\sqrt{2}$

088-1 (1) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$에서 $x\neq 0$이고,

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because e^x>0$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=e$를 갖는다.

(2) $f(x)=x\ln x$에서 $x>0$이고,

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{e}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e}$에서 극솟값 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$을 갖는다.

답 (1) 극솟값: e (2) 극솟값: $-\dfrac{1}{e}$

다른 풀이 (2) $f''(x)=\frac{1}{x}$에서 $\quad f''\left(\frac{1}{e}\right)=e>0$

따라서 $f(x)$의 극솟값은 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$이다.

089-1 (1) $f(x)=\sin^2 x$에서

$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$f'(x)=0$에서

$2x=\pi$ 또는 $2x=2\pi$ 또는 $2x=3\pi$

$(\because 0<2x<4\pi)$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $x=\pi$에서 극솟값 $f(\pi)=0$, $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극댓값 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$을 갖는다.

(2) $f(x)=\frac{2-\cos x}{\sin x}$에서

$$f'(x)=\frac{\sin x\sin x-(2-\cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{\sin^2 x-2\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{1-2\cos x}{\sin^2 x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}\ (\because 0<x<\pi)$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극솟값 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$을 갖는다.

답 (1) 극댓값: 1, 극솟값: 0 (2) 극솟값: $\sqrt{3}$

다른 풀이 (1) $f''(x)=2\cos 2x$에서

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\pi=-2<0$

$f''(\pi)=2\cos 2\pi=2>0$

$f''\left(\frac{3}{2}\pi\right)=2\cos 3\pi=-2<0$

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$, 극솟값은 $f(\pi)=0$이다.

090-1 $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+1}$에서 $x\neq-1$이고,

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x+1)-(x^2+ax+b)\cdot 1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x+a-b}{(x+1)^2}$$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 1을 가지므로

$f(2)=1, f'(2)=0$

$f(2)=\frac{4+2a+b}{3}=1,\ f'(2)=\frac{8+a-b}{9}=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=5$

$\therefore f(x)=\frac{x^2-3x+5}{x+1}$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}=\frac{(x+4)(x-2)}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-4$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극댓값 $f(-4)=-11$을 갖는다.

답 $a=-3,\ b=5$, 극댓값: -11

Remark

$f'(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$에서 $h(x)$가 이차식이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$이면

① $f(x)$가 극값을 갖는다.
➡ $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
➡ $h(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

090-2 $f(x)=(x^2-3a)e^x$에서

$$f'(x)=2x\cdot e^x+(x^2-3a)e^x$$
$$=(x^2+2x-3a)e^x$$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $x^2+2x-3a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1+3a>0 \qquad \therefore a>-\frac{1}{3}$$

답 $a>-\frac{1}{3}$

중단원 연습 문제

본책 234~237쪽

01 ①	02 1	03 $a<-\sqrt{3}$ 또는 $a>\sqrt{3}$		
04 ③	05 극솟값: $-4\sqrt{2}$	06 $\frac{1}{2e}$	07 ②	
08 ②	09 ③	10 -4	11 ④	12 ②
13 3	14 $y=ex+e$	15 8	16 50	
17 $\frac{6-\pi}{4}$	18 3	19 ④		

01 전략 곱의 미분법을 이용하여 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구한다.

풀이 $f(x)=x^2\ln x$로 놓으면

$$f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x$$

점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(e)=2e\ln e+e=2e+e=3e$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-e^2=3e(x-e),\ \text{즉}\ y=3ex-2e^2$$

이므로 구하는 y절편은 $-2e^2$이다. 답 ①

02 전략 두 곡선의 접점을 각각 $(s,\ e^s)$, $(t,\ \ln t)$로 놓고 두 접선이 모두 원점을 지남을 이용하여 s, t의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=e^x$, $g(x)=\ln x$로 놓으면

$$f'(x)=e^x,\ g'(x)=\frac{1}{x}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 접점의 좌표를 $(s,\ e^s)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(s)=e^s \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 접선의 방정식은 $\quad y-e^s=e^s(x-s)$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0-e^s=e^s(0-s), \qquad e^s(1-s)=0$$
$$\therefore s=1\ (\because e^s>0)$$

㉠에서 $f'(1)=e$이므로 $\quad m=e$

또 곡선 $y=g(x)$ 위의 접점의 좌표를 $(t,\ \ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$g'(t)=\frac{1}{t} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이므로 접선의 방정식은 $\quad y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0-\ln t=\frac{1}{t}(0-t), \qquad \ln t=1$$
$$\therefore t=e$$

㉡에서 $g'(e)=\frac{1}{e}$이므로 $\quad n=\frac{1}{e}$

$$\therefore mn=1$$

답 1

03 해결과정 • $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{1+t^2}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{1+t^2}=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}(x-t)$$

➔ 40% 배점

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$$0-\frac{1}{1+t^2}=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}(a-t)$$
$$\therefore 3t^2-2at+1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=\frac{1}{1+x^2}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3>0, \qquad (a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})>0$$

➔ 50% 배점

답구하기 • $\therefore a<-\sqrt{3}$ 또는 $a>\sqrt{3}$ ➔ 10% 배점

답 $a<-\sqrt{3}$ 또는 $a>\sqrt{3}$

04 (전략) 미분가능한 함수 $f(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 증가하려면 $x>0$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

풀이 $f(x)=a\ln x+x^2-4x\ (x>0)$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{a}{x}+2x-4=\frac{2x^2-4x+a}{x}$$

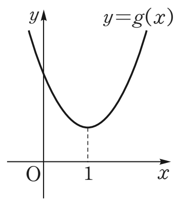
함수 $f(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 증가하려면 $x>0$에서 $f'(x)\geq 0$, 즉

$$2x^2-4x+a\geq 0$$

이어야 한다.

$g(x)=2x^2-4x+a$라 하면

$$g(x)=2x^2-4x+a$$
$$=2(x-1)^2+a-2$$



이므로 $x>0$에서 $g(x)\geq 0$이려면

$$g(1)\geq 0,\ 즉\ a-2\geq 0$$
$$\therefore a\geq 2$$

답 ③

05 해결과정 • $f(x)=(x-3)\sqrt{x+3}$에서 $x+3\geq 0$이므로 $x\geq -3$이고,

$$f'(x)=\sqrt{x+3}+(x-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$
$$=\frac{2(x+3)+x-3}{2\sqrt{x+3}}$$
$$=\frac{3x+3}{2\sqrt{x+3}}$$

➔ 40% 배점

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	극소	↗

➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $f(-1)=-4\sqrt{2}$를 갖는다. ➔ 20% 배점

답 극솟값: $-4\sqrt{2}$

06 (전략) 지수함수의 도함수를 이용하여 $f'(x)=0$인 x의 값을 찾아 증감표를 만든다.

풀이 $f(x)=e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x+1}$에서

$$f'(x)=-e^{-x}+e^{-2x+1}=-e^{-x}(1-e^{-x+1})$$

$f'(x)=0$에서 $e^{-x+1}=1\ (\because e^{-x}>0)$

$$\therefore x=1$$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=\frac{1}{2e}$을 갖는다.

즉 $a=1$, $b=\frac{1}{2e}$이므로 $ab=\frac{1}{2e}$ 답 $\frac{1}{2e}$

다른 풀이 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값 b를 가지므로

$$f(a)=b,\ f'(a)=0$$

$$e^{-a}-\frac{1}{2}e^{-2a+1}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$-e^{-a}(1-e^{-a+1})=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 $1-e^{-a+1}=0\ (\because e^{-a}>0)$

$$-a+1=0 \quad \therefore a=1$$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{e}-\frac{1}{2e}=\frac{1}{2e}$$

$$\therefore ab=\frac{1}{2e}$$

07 (전략) 함수의 몫의 미분법을 이용하여 $f'(x)=0$인 x의 값을 찾아 증감표를 만든다. 이때 주어진 x의 값의 범위에 주의한다.

풀이 $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$에서

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot e^x-\sin x\cdot e^x}{e^{2x}}$$
$$=\frac{e^x(\cos x-\sin x)}{e^{2x}}$$
$$=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x-\sin x=0$

$$\therefore x=\frac{\pi}{4}\ 또는\ x=\frac{5}{4}\pi\ (\because 0\leq x\leq 2\pi)$$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	극대	↘	극소	↗	0

따라서 $f(x)$의 극댓값 A와 극솟값 B는

$$A=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{e^{\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$$

$$B=f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{\sin\frac{5}{4}\pi}{e^{\frac{5}{4}\pi}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}$$

$$\therefore \frac{A}{B}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}}=-e^{\pi}$$

답 ②

08 전략 먼저 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(1, e)$에서의 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=e^x$

점 $(1, e)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$

따라서 접선의 방정식은

$y-e=e(x-1)$ $\therefore y=ex$

직선 $y=ex$가 곡선 $y=2\sqrt{x-k}$에 접하므로

$ex=2\sqrt{x-k}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$e^2x^2-4x+4k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-4e^2k=0$

$\therefore k=\frac{1}{e^2}$

답 ②

다른 풀이 $g(x)=2\sqrt{x-k}$로 놓으면

$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x-k}}$

이므로 점 $(t, g(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-2\sqrt{t-k}=\frac{1}{\sqrt{t-k}}(x-t)$

$\therefore y=\frac{1}{\sqrt{t-k}}x+\frac{t-2k}{\sqrt{t-k}}$

이 직선이 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(1, e)$에서의 접선 $y=ex$와 일치하므로

$\frac{1}{\sqrt{t-k}}=e$, $\frac{t-2k}{\sqrt{t-k}}=0$

$t-2k=0$에서 $t=2k$이므로 $e=\frac{1}{\sqrt{k}}$

$\therefore k=\frac{1}{e^2}$

09 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(a)}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\cos 2x+1$로 놓으면

$f'(x)=-2\sin 2x$

점 $\mathrm{P}(t, \cos 2t+1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-2\sin 2t$

따라서 점 P에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$\frac{1}{2\sin 2t}$이므로 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-(\cos 2t+1)=\frac{1}{2\sin 2t}(x-t)$

y절편은 $x=0$일 때의 y의 값이므로

$g(t)=\cos 2t+1-\frac{t}{2\sin 2t}$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t\to 0}g(t)&=\lim_{t\to 0}\left(\cos 2t+1-\frac{t}{2\sin 2t}\right)\\&=\lim_{t\to 0}(\cos 2t+1)-\lim_{t\to 0}\frac{t}{2\sin 2t}\\&=\lim_{t\to 0}(\cos 2t+1)-\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\sin 2t}\\&=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}\end{aligned}$$

답 ③

10 전략 접점의 좌표를 $(t, (t-k)e^{-t})$으로 놓고 접선의 방정식을 구한 후, 이 접선의 방정식에 $x=0$, $y=0$을 대입하여 얻은 방정식의 해가 1개일 때의 k의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=(x-k)e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{-x}-(x-k)e^{-x}=e^{-x}(1-x+k)$

접점의 좌표를 $(t, (t-k)e^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=e^{-t}(1-t+k)$

따라서 접선의 방정식은

$y-(t-k)e^{-t}=e^{-t}(1-t+k)(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-(t-k)e^{-t}=e^{-t}(1-t+k)(-t)$

$(t^2-kt-k)e^{-t}=0$

$\therefore t^2-kt-k=0$ $(\because e^{-t}>0)$ …… ㉠

이때 원점에서 주어진 곡선에 단 하나의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=k^2+4k=0$, $k(k+4)=0$

그런데 $k\neq 0$이므로 $k=-4$

답 -4

11 전략 로그함수의 도함수를 이용하여 $f'(x)=0$인 x의 값을 찾아 증감표를 만든다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x$에서 $x>0$이고,

$$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}$$
$$=\frac{(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=\sqrt{a}$ $(\because x>0)$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{a}$에서 극솟값 0을 가지므로

$\frac{1}{2}(\sqrt{a})^2-a\ln\sqrt{a}=0$, $\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}=0$

$\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}$, $\ln a=1$

$\therefore a=e$

답 ④

12 전략 $a>1$임을 이용하여 주어진 범위에서 $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=x+a\cos x$에서

$$f'(x)=1-a\sin x$$
$$=-a\left(\sin x-\frac{1}{a}\right)\ (0<x<2\pi)$$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{a}$

$a>1$에서 $0<\frac{1}{a}<1$이므로

$\sin\theta=\frac{1}{a}\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

이라 하면

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{1}{a}$

$\therefore f'(\theta)=f'(\pi-\theta)=0$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	θ	$\cdots$	$\pi-\theta$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

이때 $f(x)$는 $x=\pi-\theta$에서 극솟값 0을 가지므로

$$f(\pi-\theta)=\pi-\theta+a\cos(\pi-\theta)$$
$$=\pi-\theta-a\cos\theta=0$$

$\therefore \theta+a\cos\theta=\pi$

따라서 $f(x)$는 $x=\theta$에서 극댓값

$f(\theta)=\theta+a\cos\theta=\pi$를 갖는다.

답 ②

13 전략 몫의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구하고, $f(1)=5$, $f'(1)=0$을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{4x^2+ax+b}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{(8x+a)(x^2+1)-(4x^2+ax+b)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-ax^2-2(b-4)x+a}{(x^2+1)^2}$$

$f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 5를 가지므로

$f(1)=5$, $f'(1)=0$

$\frac{4+a+b}{2}=5$, $\frac{b-4}{2}=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=4$

$$\therefore f(x)=\frac{4x^2+2x+4}{x^2+1}$$
$$f'(x)=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $f(-1)=3$을 갖는다.

답 3

14 문제이해 • $f(x)$가 $x=0$에서 극값 e를 가지므로 $f(0)=e$, $f'(0)=0$ → 20% 배점

해결과정 • $g(x)=f(x)e^x$으로 놓으면

$g(0)=f(0)e^0=e$

이므로 접점의 좌표는 $(0, e)$

또 $g'(x)=f'(x)e^x+f(x)e^x$이므로 점 $(0, e)$에서의 접선의 기울기는

$g'(0)=f'(0)e^0+f(0)e^0=0+e=e$ → 60% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-e=e(x-0)$

$\therefore y=ex+e$ → 20% 배점

답 $y=ex+e$

15 문제이해 • $f(x)=8\ln x+\dfrac{a}{x}-2x$에서 $x>0$이고,

$$f'(x)=\frac{8}{x}-\frac{a}{x^2}-2=\frac{-2x^2+8x-a}{x^2}=-\frac{2x^2-8x+a}{x^2}$$

이므로 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다. ➔ 40% 배점

해결과정 • $g(x)=2x^2-8x+a$로 놓으면 이차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=16-2a>0 \qquad \therefore a<8$$

(ii) (두 근의 합)$=4>0$

(iii) (두 근의 곱)$=\dfrac{a}{2}>0 \qquad \therefore a>0$

이상에서 $0<a<8$ ➔ 50% 배점

답구하기 • 따라서 정수 a의 최솟값은 1, 최댓값은 7이므로 구하는 값은

$1+7=8$ ➔ 10% 배점

답 8

16 전략 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(a, g(a))$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{g'(a)}$임을 이용한다.

풀이 $g(x)=f(x)\ln x^4$에서

$$g'(x)=f'(x)\ln x^4+f(x)\cdot\frac{4x^3}{x^4}=f'(x)\ln x^4+\frac{4f(x)}{x}$$

$$\therefore g'(e)=4f'(e)+\frac{4\cdot(-e)}{e}=4f'(e)-4$$

이때 $f'(e)\cdot g'(e)=-1$이므로

$$f'(e)\cdot\{4f'(e)-4\}=-1$$

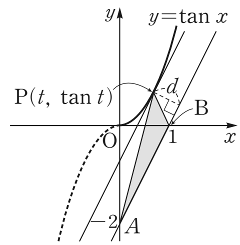
$$\{2f'(e)-1\}^2=0$$

$$\therefore f'(e)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 100f'(e)=100\cdot\frac{1}{2}=50$$

답 50

17 문제이해 • 삼각형 PAB의 넓이는 오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 밑변으로 하였을 때의 높이, 즉 곡선 $y=\tan x$ 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소일 때 최소가 되므로 점 P는 직선 AB에 평행한 직선과 곡선 $y=\tan x$의 접점이어야 한다.



➔ 30% 배점

해결과정 • 이때 직선 AB의 방정식은

$$y-0=\frac{0-(-2)}{1-0}(x-1)$$

$$\therefore y=2x-2$$

$f(x)=\tan x$로 놓으면

$$f'(x)=\sec^2 x$$

점 P의 좌표를 $(t, \tan t)$라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 2이어야 하므로

$$f'(t)=\sec^2 t=2$$

$$\frac{1}{\cos^2 t}=2, \qquad \cos t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore t=\frac{\pi}{4}\left(\because 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$$ ➔ 30% 배점

점 P의 좌표가 $\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$일 때 점 P와 직선 $y=2x-2$, 즉 $2x-y-2=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{\left|2\cdot\frac{\pi}{4}-1-2\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\left|\frac{\pi}{2}-3\right|}{\sqrt{5}}=\frac{3-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{5}}$$

➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+2^2}\cdot\frac{3-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{6-\pi}{4}$$

➔ 10% 배점

답 $\dfrac{6-\pi}{4}$

18 전략 함수 $y=\ln x+2$의 역함수는 $y=e^{x-2}$임을 이용하여 구하는 거리가 최대일 때를 살펴본다.

풀이 $f(x)=\ln x+2$, $g(x)=e^{x-2}$으로 놓으면 $f(x)$는 $g(x)$의 역함수이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

따라서 구하는 거리는 직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 사이의 거리의 두 배와 같고, 이것이 최대가 되려면 직선 $y=-x+k$와 곡선 $y=f(x)$의 교점에서의 접선이 직선 $y=x$와 평행해야 한다.

$f(x)=\ln x+2$에서 $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{t}$이므로

$\dfrac{1}{t}=1 \qquad \therefore t=1$

따라서 직선 $y=-x+k$와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로

$2=-1+k \qquad \therefore k=3$

답 3

19 전략 $f'(x)=0$인 x의 값의 규칙을 찾는다.

풀이 $f(x)=e^x\cos x$에서

$$f'(x)=e^x\cos x+e^x\cdot(-\sin x)$$
$$=e^x(\cos x-\sin x)$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad \cos x-\sin x=0\ (\because e^x>0)$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=2\pi+\dfrac{\pi}{4}$ $\cdots$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\pi+\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗	극대	↘	극소

x	$\cdots$	$2\pi+\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$3\pi+\frac{\pi}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

위의 증감표에서 $f(x)$가 극대인 x의 값을 작은 것부터 차례대로 나열하면

$x_1=\dfrac{\pi}{4},\ x_2=2\pi+\dfrac{\pi}{4},\ x_3=4\pi+\dfrac{\pi}{4},\ \cdots$

$\therefore x_k=2(k-1)\pi+\dfrac{\pi}{4}$ (k는 자연수)

$$\therefore \frac{x_{10}}{x_9}=\frac{18\pi+\frac{\pi}{4}}{16\pi+\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{73}{4}\pi}{\frac{65}{4}\pi}=\frac{73}{65}$$

따라서 $m=65,\ n=73$이므로

$m+n=138$

답 ④

09 도함수의 활용 (2)

유제

본책 243~260쪽

091-1 (1) $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$$
$$f''(x)=6x-6=6(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=1$

$f''(x)=0$에서 $\qquad x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↗

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(1,\ \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

또 이 곡선의 변곡점의 좌표는 $(1,\ 3)$이다.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$
$$f''(x)=\frac{-2(x^2+1)^2-(-2x)\cdot2(x^2+1)\cdot2x}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{-2(x^2+1)\{(x^2+1)-4x^2\}}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{-2(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$$
$$=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$
$$=\frac{2(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)}{(x^2+1)^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$

$f''(x)=0$에서 $\qquad x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↘

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 또는 구간 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \infty\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

또 이 곡선의 변곡점의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)$이다.

(3) $f(x)=xe^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

$f''(x)=0$에서 $x=-2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{e^2}$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -2)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(-2,\ \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

또 이 곡선의 변곡점의 좌표는 $\left(-2,\ -\frac{2}{e^2}\right)$이다.

(4) $f(x)=x+\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1-\sin x$

$f''(x)=-\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ $(\because 0<x<2\pi)$

$f''(x)=0$에서

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ $(\because 0<x<2\pi)$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{3}{2}\pi$	↗	

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 또는 구간 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

또 이 곡선의 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)$이다.

답 풀이 참조

092-1 $f(x)=1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}$에서

$f'(x)=-\frac{a}{x^2}-\frac{2b}{x^3}$

$f''(x)=\frac{2a}{x^3}+\frac{6b}{x^4}$

점 $\left(-\frac{9}{2},\ \frac{35}{27}\right)$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로

$f\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{35}{27}$에서 $1-\frac{2a}{9}+\frac{4b}{81}=\frac{35}{27}$

$\therefore -9a+2b=12$ ⋯⋯ ㉠

$f''\left(-\frac{9}{2}\right)=0$에서 $2a\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^3+6b\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^4=0$

$\therefore 3a-2b=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=-3$

답 $a=-2,\ b=-3$

092-2 $f(x)=ax^2+bx+\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2ax+b+\frac{1}{x}$

$f''(x)=2a-\frac{1}{x^2}$

$x=1$에서 극소이므로 $f'(1)=0$에서

$2a+b+1=0$ ⋯⋯ ㉠

변곡점의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이므로 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서

$2a-4=0$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-5$

$f(x)=2x^2-5x+\ln x$이므로

$f'(x)=4x-5+\frac{1}{x}=\frac{4x^2-5x+1}{x}$

$=\frac{(4x-1)(x-1)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$-\frac{9}{8}-\ln 4$	↘	-3	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{8}-\ln 4$$

답 $-\frac{9}{8}-\ln 4$

093-1 (1) $f(x)=-x^3+3x^2-3x+1$에서

$$f'(x)=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2$$
$$f''(x)=-6x+6=-6(x-1)$$

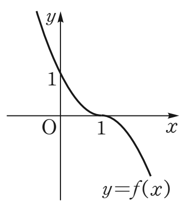
$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=x^4-6x^2+6$에서

$$f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)$$
$$=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$
$$f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1)$$
$$=12(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

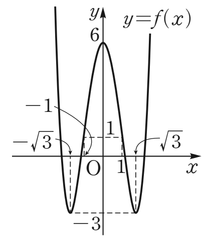
$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↗	6	↘	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



094-1 (1) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$에서

(i) 정의역은 $x\neq0$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(-x)=-f(x)$이므로 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(iii) $f'(x)=\dfrac{2x\cdot2x-(x^2+1)\cdot2}{(2x)^2}=\dfrac{2x^2-2}{4x^2}$

$$=\frac{x^2-1}{2x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{2x^2}$$

$$f''(x)=\frac{2x\cdot2x^2-(x^2-1)\cdot4x}{(2x^2)^2}=\frac{1}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

따라서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	-1	↘		↘	1	↗

(iv) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2}x$에서

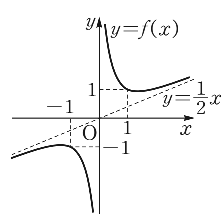
$$\lim_{x\to0+}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to0-}f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}=0$$

이므로 점근선은 y축과 직선 $y=\frac{1}{2}x$이다.

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=\sqrt{x}-x$에서

(i) 정의역은 $x\geq 0$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-1$

$f''(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$

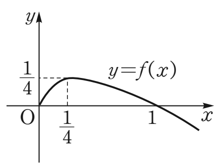
$f'(x)=0$에서 $\quad x=\dfrac{1}{4}$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

따라서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘

(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

095-1 (1) $f(x)=e^{-x^2}$에서

(i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0)=1$이므로 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

(iii) $f(-x)=f(x)$이므로 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

(iv) $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f''(x)=-2e^{-x^2}-2xe^{-x^2}\cdot(-2x)$

$\quad=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

$\quad=2(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)e^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

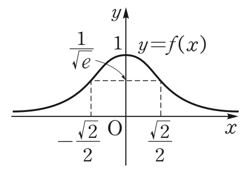
$f''(x)=0$에서 $\quad x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

(v) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$에서

(i) 정의역은 $\{x\,|\,x>0\}$이다.

(ii) $f'(x)=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}$

$f''(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0$

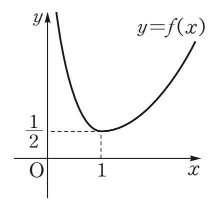
$f'(x)=0$에서 $\quad x=1\ (\because x>0)$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘	$\frac{1}{2}$	↗

(iii) $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\infty$이므로 점근선은 y축이다.

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

096-1 (1) $f(x)=x+\cos 2x$에서

$f'(x)=1-2\sin 2x$

$f''(x)=-4\cos 2x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin 2x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{12}$ 또는 $x=\dfrac{5}{12}\pi\ (\because 0\leq x\leq\pi)$

$f''(x)=0$에서 $\quad \cos 2x=0$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}\pi\ (\because 0\leq x\leq\pi)$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

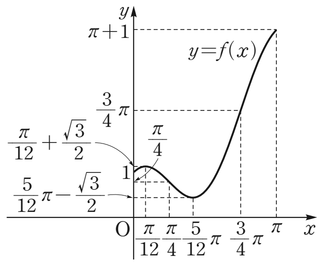
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{12}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{12}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	극대	↘	$\frac{\pi}{4}$	↘	극소	↗	$\frac{3}{4}\pi$	↗	$\pi+1$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값, 극솟값은

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f\left(\frac{5}{12}\pi\right)=\frac{5}{12}\pi+\cos\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$에서

$f(0)=0,\ f(\pi)=0$

$$f'(x)=\frac{\cos x(1+\sin x)-\sin x\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$f''(x)$

$$=\frac{-\sin x(1+\sin x)^2-\cos x\cdot 2(1+\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^4}$$

$$=\frac{-\sin x(1+\sin x)^2-2(1+\sin x)(1-\sin^2 x)}{(1+\sin x)^4}$$

$$=\frac{(1+\sin x)\{-\sin x(1+\sin x)-2(1-\sin^2 x)\}}{(1+\sin x)^4}$$

$$=\frac{\sin^2 x-\sin x-2}{(1+\sin x)^3}$$

$$=\frac{(\sin x+1)(\sin x-2)}{(1+\sin x)^3}$$

$$=\frac{\sin x-2}{(1+\sin x)^2}<0$$

$f'(x)=0$에서

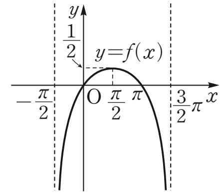
$$\cos x=0 \qquad \therefore x=\frac{\pi}{2}\ \left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi\right)$$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{1}{2}$	↘	

또 $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi-}f(x)=-\infty$이므로 점근선은 두 직선 $x=-\dfrac{\pi}{2},\ x=\dfrac{3}{2}\pi$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

Remark

$$\text{(2)}\ \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}\frac{1+\sin x-1}{1+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}\left(1-\frac{1}{1+\sin x}\right)=-\infty$$

097-1 (1) $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+3}$에서

$$f'(x)=\frac{-(x^2+3)-(1-x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=3\ (\because 0\le x\le 4)$

구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	↘	$-\frac{1}{6}$	↗	$-\frac{3}{19}$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=0$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{3}$,

$x=3$일 때 최솟값 $-\dfrac{1}{6}$

을 갖는다.

(2) $f(x)=x^3\sqrt{4-x^2}$에서

$$f'(x)=3x^2\sqrt{4-x^2}+x^3\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\frac{3x^2(4-x^2)-x^4}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{-4x^4+12x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\frac{-4x^2(x^2-3)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\frac{-4x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-3\sqrt{3}$	↗	0	↗	$3\sqrt{3}$	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는

$x=\sqrt{3}$일 때 최댓값 $3\sqrt{3}$,

$x=-\sqrt{3}$일 때 최솟값 $-3\sqrt{3}$

을 갖는다.

답 풀이 참조

098-1 (1) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$에서

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{x(x-2)e^x}{x^4}$$
$$=\frac{(x-2)e^x}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

구간 $[1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e	↘	$\dfrac{e^2}{4}$	↗	$\dfrac{e^3}{9}$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=1$일 때 최댓값 e,

$x=2$일 때 최솟값 $\dfrac{e^2}{4}$

을 갖는다.

(2) $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$에서

$$f'(x)=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x)^2\cdot 1}{x^2}$$
$$=\frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=0$ 또는 $\ln x=2$

$\therefore x=1$ 또는 $x=e^2$

구간 $\left[\dfrac{1}{e},\ e^3\right]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$	e^3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e	↘	0	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘	$\dfrac{9}{e^3}$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=\dfrac{1}{e}$일 때 최댓값 e,

$x=1$일 때 최솟값 0

을 갖는다.

답 풀이 참조

099-1 (1) $f(x)=\sin 2x+2\cos x$에서

$$f'(x)=2\cos 2x-2\sin x$$
$$=2(1-2\sin^2 x)-2\sin x$$
$$=-4\sin^2 x-2\sin x+2$$
$$=-2(2\sin^2 x+\sin x-1)$$
$$=-2(2\sin x-1)(\sin x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $0\le x\le\pi$일 때 $\sin x\ne-1$이므로

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

구간 $[0,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	-2

따라서 함수 $f(x)$는

$x=\dfrac{\pi}{6}$일 때 최댓값 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,

$x=\dfrac{5}{6}\pi$일 때 최솟값 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

을 갖는다.

(2) $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$에서

$$f'(x)$$
$$=\frac{(\cos x+\sin x)(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$$
$$=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$$

이때 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$는

$x=\frac{\pi}{2}$일 때 최댓값 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$,

$x=0$일 때 최솟값 $f(0)=-1$

을 갖는다. 답 풀이 참조

100-1 $\ln x=t$로 놓으면 $1\le x\le e^2$에서

$0\le t\le 2$

주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+3t^2-9t$

$\therefore g'(t)=3t^2+6t-9=3(t+3)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because 0\le t\le 2$)

구간 [0, 2]에서 함수 $g(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	↘	-5	↗	2

따라서 주어진 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 -5이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -5

100-2 $f(x)=\sin^3 x+3\cos^2 x+2$

$=\sin^3 x+3(1-\sin^2 x)+2$

$=\sin^3 x-3\sin^2 x+5$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$

주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3-3t^2+5$

$\therefore g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ ($\because -1\le t\le 1$)

구간 [-1, 1]에서 함수 $g(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	1	↗	5	↘	3

따라서 주어진 함수의 최댓값은 5, 최솟값은 1이다.

답 최댓값: 5, 최솟값: 1

101-1 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+2}$에서

$$f'(x)=\frac{a(x^2+2)-(ax+b)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{-ax^2-2bx+2a}{(x^2+2)^2}$$

이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수에 대하여 연속이며 미분가능하다.

한편 $f(x)$가 $x=1$에서 최댓값 2를 가지므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다.

즉 $f(1)=2$, $f'(1)=0$이므로

$\dfrac{a+b}{3}=2$, $\dfrac{-a-2b+2a}{9}=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=2$ 답 $a=4$, $b=2$

101-2 $f(x)=2a\sin x-ax$에서

$f'(x)=2a\cos x-a=a(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서

$\cos x=\dfrac{1}{2}$ $\therefore x=\dfrac{\pi}{3}$ ($\because 0\le x\le \pi$)

구간 [0, π]에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$a\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$	↘	$-a\pi$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{3}$에서 극대이고 최댓값을 가지므로

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=a\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}-\pi$

$\therefore a=3$

즉 $f(x)$의 최솟값은

$f(\pi)=-3\pi$ 답 -3π

102-1 점 P의 좌표를 (x, y) $(0<x<2, y>0)$라 하면

$x^2+y^2=4$

$\therefore y=\sqrt{4-x^2}$ ($\because y>0$)

이때 □PROQ의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=xy=x\sqrt{4-x^2}$

$$S'(x)=\sqrt{4-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\frac{(4-x^2)-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\frac{-2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{\sqrt{4-x^2}}$$

$S'(x)=0$에서 $x=\sqrt{2}$ ($\because 0<x<2$)

$0<x<2$에서 $S(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

따라서 $S(x)$는 $x=\sqrt{2}$일 때 극대이면서 최대이므로 □PROQ의 넓이의 최댓값은 2이다. 답 2

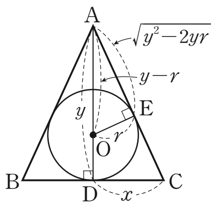
다른 풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 □PROQ의 넓이는 xy이다.
또 $x^2+y^2=4$이고 $x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\ge 2xy, \qquad 2xy\le 4$$

$$\therefore\ xy\le 2\ (\text{단, 등호는 } x=y\text{일 때 성립})$$

따라서 □PROQ의 넓이의 최댓값은 2이다.

102-2 반지름의 길이가 r인 구에 외접하는 원뿔의 단면은 오른쪽 그림과 같다.



원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면
$\triangle ADC \backsim \triangle AEO$이므로
$\overline{AD} : \overline{AE} = \overline{DC} : \overline{EO}$에서

$$y : \sqrt{y^2-2yr} = x : r$$

$$\therefore\ x=\frac{yr}{\sqrt{y^2-2yr}}$$

원뿔의 부피를 $V(y)$라 하면

$$V(y)=\frac{1}{3}\pi x^2 y=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{y^2r^2}{y^2-2yr}\cdot y$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\frac{y^2}{y-2r}$$

$$V'(y)=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\frac{2y(y-2r)-y^2}{(y-2r)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\frac{y(y-4r)}{(y-2r)^2}$$

$V'(y)=0$에서 $\qquad y=4r\ (\because\ y>2r)$
$y>2r$에서 $V(y)$의 증감표는 다음과 같다.

y	$2r$	$\cdots$	$4r$	$\cdots$
$V'(y)$		$-$	0	$+$
$V(y)$		$\searrow$	$\frac{8}{3}\pi r^3$	$\nearrow$

따라서 $V(y)$는 $y=4r$일 때 극소이면서 최소이므로 원뿔의 부피의 최솟값은 $\frac{8}{3}\pi r^3$이다. 답 $\frac{8}{3}\pi r^3$

103-1 (1) $f(x)=e^x-4x$로 놓으면

$$f'(x)=e^x-4$$

$f'(x)=0$에서

$$e^x-4=0 \qquad \therefore\ x=\ln 4$$

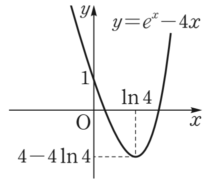
함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같고

x	$\cdots$	$\ln 4$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$4-4\ln 4$	$\nearrow$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $e^x-4x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

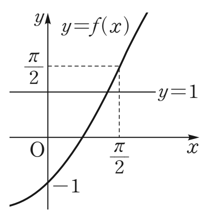


(2) 방정식 $x-\cos x=1$의 실근의 개수는 곡선 $y=x-\cos x$와 직선 $y=1$의 교점의 개수와 같다.
$f(x)=x-\cos x$로 놓으면

$$f'(x)=1+\sin x$$

$f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

이때 $f(0)=-1,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



답 (1) 2 (2) 1

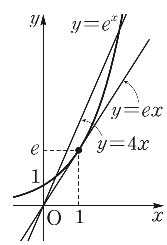
다른 풀이 (1) $e^x-4x=0$에서 $e^x=4x$이므로 방정식 $e^x-4x=0$의 실근의 개수는 $y=e^x$과 $y=4x$의 그래프의 교점의 개수와 같다.
$y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식은

$$y-e^t=e^t(x-t)$$

이 접선이 원점을 지날 때

$$-e^t=e^t(-t)$$

$$\therefore\ t=1$$



즉 원점을 지나는 접선의 방정식은 $y=ex$이고 $4>e$이므로 직선 $y=4x$는 곡선 $y=e^x$과 서로 다른 두 점에서 만난다.
따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

103-2 $\ln x - kx = 0$에서 $x > 0$이므로 $\quad k = \dfrac{\ln x}{x}$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$로 놓으면

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$에서 $\quad \ln x = 1 \quad \therefore x = e$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같고

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$

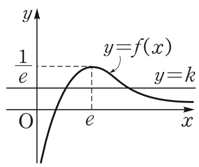
따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 방정식 $\ln x - kx = 0$의 실근의 개수는

(i) $k > \frac{1}{e}$이면 $\quad 0$

(ii) $k = \frac{1}{e}$이면 $\quad 1$

(iii) $0 < k < \frac{1}{e}$이면 $\quad 2$

(iv) $k \le 0$이면 $\quad 1$



답 풀이 참조

다른 풀이 방정식 $\ln x - kx = 0$의 실근의 개수는 $y = \ln x$와 $y = kx$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

$y = \ln x$에서 $y' = \frac{1}{x}$이므로 곡선 $y = \ln x$ 위의 점 $(t, \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$$y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t)$$

이 접선이 원점을 지날 때

$$-\ln t = -1 \quad \therefore t = e$$

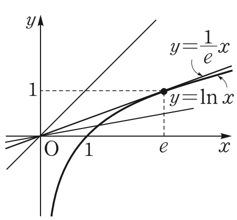
따라서 원점을 지나는 접선의 방정식은 $y = \frac{1}{e}x$이므로 방정식 $\ln x - kx = 0$의 실근의 개수는 다음 그림에서

(i) $k > \frac{1}{e}$이면 $\quad 0$

(ii) $k = \frac{1}{e}$이면 $\quad 1$

(iii) $0 < k < \frac{1}{e}$이면 $\quad 2$

(iv) $k \le 0$이면 $\quad 1$



104-1 $f(x) = x^2 + \cos x - k$로 놓으면

$$f'(x) = 2x - \sin x,\ f''(x) = 2 - \cos x$$

$x > 0$일 때, $f''(x) > 0$이므로 $x > 0$에서 함수 $f'(x)$는 증가하고 $f'(0) = 0$이므로 $\quad f'(x) > 0$

또 $x > 0$일 때, $f'(x) > 0$이므로 $x > 0$에서 함수 $f(x)$도 증가하고 $f(0) = 1 - k$이므로 $f(x) > 0$이 성립하려면 $\quad 1 - k \ge 0 \quad \therefore k \le 1$

답 $k \le 1$

104-2 $f(x) = e^x - 2x$로 놓으면 $\quad f'(x) = e^x - 2$

$f'(x) = 0$에서 $\quad x = \ln 2$

따라서 함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같고, $f(x)$의 최솟값은 $2 - 2\ln 2$이므로

x	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$2-2\ln 2$	$\nearrow$

$k \le 2 - 2\ln 2$

따라서 k의 최댓값은 $2 - 2\ln 2$이다.

답 $2 - 2\ln 2$

중단원 연습 문제

본책 261~265쪽

01 3 **02** $(2,\ 2)$ **03** ④

04 $\frac{27\sqrt{2}}{2}$ **05** $-\frac{27}{16}$

06 최댓값: $\frac{121}{27}$, 최솟값: -2 **07** ① **08** 7

09 3 **10** ⑤ **11** ③ **12** 5 **13** ⑤

14 20 **15** ③ **16** 3 **17** ③

18 48만 원 **19** ⑤ **20** $\frac{4}{e^2}$

01 전략 $f''(x) = 0$을 만족시키는 x의 값을 구한 후 그 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사한다.

풀이 $f(x) = xe^{-x^2}$으로 놓으면

$$f'(x) = e^{-x^2} + xe^{-x^2}\cdot(-2x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4xe^{-x^2} + (1-2x^2)\cdot(-2x)e^{-x^2} \\ &= (4x^3 - 6x)e^{-x^2} = 2x(2x^2-3)e^{-x^2} \\ &= 2x(\sqrt{2}x + \sqrt{3})(\sqrt{2}x - \sqrt{3})e^{-x^2} \end{aligned}$$

$f''(x) = 0$에서 $\quad x = 0$ 또는 $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

구간 $\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$에서 $f''(x) < 0$, 구간 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ 0\right)$에서 $f''(x) > 0$, 구간 $\left(0,\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$에서 $f''(x) < 0$, 구간 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ \infty\right)$에서 $f''(x) > 0$이다.

따라서 $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$의 좌우에서

$f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 3이다. 답 3

02 문제이해 • 삼차함수의 그래프는 변곡점에 대하여 대칭이므로 점 P는 곡선 $y=x^3-6x^2+9x$의 변곡점이다. → 30% 배점

해결과정 • $f(x)=x^3-6x^2+9x$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-12x+9,\ f''(x)=6x-12$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=2$

구간 $(-\infty,\ 2)$에서 $f''(x)<0$이고, 구간 $(2,\ \infty)$에서 $f''(x)>0$이다.

즉 $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(2,\ 2)$이다. → 60% 배점

답구하기 • 따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ 2)$이다. → 10% 배점

답 $(2,\ 2)$

03 전략 함수의 증가 · 감소, 곡선의 오목 · 볼록을 조사한 후 그래프의 개형을 그린다.

풀이 $f(x)=e^x\cos x$에서

$$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$$

$$f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)$$

$$=-2e^x\sin x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=\sin x$

$$\therefore x=\frac{\pi}{4}\ \left(\because -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$$

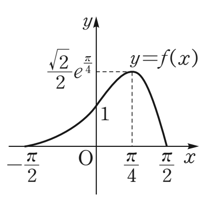
$f''(x)=0$에서 $\quad \sin x=0$

$$\therefore x=0\ \left(\because -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$$

$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$	↘	0

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프의 개형으로 옳은 것은 ④이다.



답 ④

04 문제이해 • $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$에서 $9-x^2\ge 0$이어야 하므로

$$(x+3)(x-3)\le 0 \qquad \therefore -3\le x\le 3$$

즉 함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,-3\le x\le 3\}$이다. → 20% 배점

해결과정 • $f'(x)=\sqrt{9-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}$

$$=\frac{(9-x^2)-x^2}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$=\frac{-(\sqrt{2}x+3)(\sqrt{2}x-3)}{\sqrt{9-x^2}}$$

→ 30% 배점

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$-3\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	$\frac{9}{2}$	↘	0

→ 30% 배점

답구하기 • 따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$일 때 최댓값 $\frac{9}{2}$, $x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{9}{2}$를 가지므로

$$a=\frac{3\sqrt{2}}{2},\ b=\frac{9}{2},\ c=-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ d=-\frac{9}{2}$$

$$\therefore ab+cd=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{9}{2}+\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)$$

$$=\frac{27\sqrt{2}}{2}$$

→ 20% 배점

답 $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

05 해결과정 • $f(x)=\sin x(\cos x-1)$에서

$$f'(x)=\cos x(\cos x-1)+\sin x(-\sin x)$$

$$=\cos^2 x-\cos x-\sin^2 x$$

$$=2\cos^2 x-\cos x-1$$

$$=(2\cos x+1)(\cos x-1)$$

→ 40% 배점

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$

$\cos x=-\frac{1}{2}$에서

$$x=-\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{2}{3}\pi\ \ (\because -\pi\le x\le\pi)$$

$\cos x=1$에서 $\quad x=0\ (\because -\pi\le x\le\pi)$

구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{2}{3}\pi$일 때 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x=\frac{2}{3}\pi$일 때 최솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$을 가지므로

$$M=\frac{3\sqrt{3}}{4},\ m=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore Mm=-\frac{27}{16}$$

➔ 20% 배점 답 $-\frac{27}{16}$

06 전략 $f(x)$를 하나의 삼각함수에 대한 식으로 변형한 후 치환을 이용하여 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=\sin^3 x+2\cos^2 x-4\sin x+1$

$=\sin^3 x+2(1-\sin^2 x)-4\sin x+1$

$=\sin^3 x-2\sin^2 x-4\sin x+3$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x\le 2\pi$에서 $\quad -1\le t\le 1$

주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3-2t^2-4t+3$

$\therefore g'(t)=3t^2-4t-4=(3t+2)(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=-\frac{2}{3}\ (\because -1\le t\le 1)$

$-1\le t\le 1$에서 함수 $g(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	4	↗	$\frac{121}{27}$	↘	-2

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $\frac{121}{27}$, 최솟값은 -2이다.

답 최댓값: $\frac{121}{27}$, 최솟값: -2

07 전략 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

풀이 $f(x)=x-a\sin x-1$로 놓으면

$f'(x)=1-a\cos x$

$-1\le\cos x\le 1$, $0<a<1$이므로

$-a\le a\cos x\le a$

$\therefore 1-a\le 1-a\cos x\le 1+a$

이때 $0<a<1$에서 $1-a>0$이므로

$f'(x)=1-a\cos x>0$

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, $f(0)=-1<0$이므로 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 1이다.

답 ①

08 전략 $f(x)=8\cos x+4x^2-1$로 놓고 a의 값이 $x\ge 0$에서 $f(x)$의 최솟값보다 작거나 같아야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=8\cos x+4x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=-8\sin x+8x$

$f''(x)=-8\cos x+8=8(1-\cos x)$

$x\ge 0$일 때, $1-\cos x\ge 0$이므로 $\quad f''(x)\ge 0$

따라서 $x\ge 0$에서 함수 $f'(x)$는 증가하고 $f'(0)=0$이므로 $\quad f'(x)\ge 0$

또 $x\ge 0$일 때, $f'(x)\ge 0$이므로 $x\ge 0$에서 함수 $f(x)$도 증가하고 $f(0)=7$이므로

$f(x)\ge 7$

즉 $x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 7이므로 $a\le 7$이어야 한다.

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 7이다.

답 7

09 문제이해 • $f(x)=ax^2+\cos 2x-3x$에서

$f'(x)=2ax-2\sin 2x-3$

$f''(x)=2a-4\cos 2x$

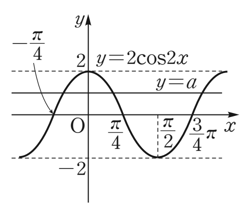
주어진 곡선이 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

➔ 30% 배점

해결과정 • $f''(x)=0$에서

$2a-4\cos 2x=0 \quad \therefore 2\cos 2x=a$

이 방정식이 실근을 가지려면 곡선 $y=2\cos 2x$와 직선 $y=a$가 만나야 하므로 오른쪽 그림에서



$-2\le a\le 2$

이때 $a=-2$이면

$f''(x)=-4(1+\cos 2x)\le 0$

$a=2$이면

$f''(x)=4(1-\cos 2x)\ge 0$

즉 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 존재하지 않는다.

➔ 60% 배점

답구하기 • 따라서 $-2<a<2$이므로 구하는 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다. ➔ 10% 배점

답 3

10 전략 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌는지 확인한다.

풀이 $f(x)=\left(\ln\frac{1}{ax}\right)^2=(-\ln ax)^2=(\ln ax)^2$에서

$$f'(x)=2\ln ax\cdot\frac{a}{ax}=\frac{2\ln ax}{x}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$$

$f''(x)=0$에서 $1-\ln ax=0$ $\therefore x=\frac{e}{a}$

구간 $\left(-\infty,\ \frac{e}{a}\right)$에서 $f''(x)>0$이고, 구간 $\left(\frac{e}{a},\ \infty\right)$에서 $f''(x)<0$이다.

$x=\frac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{a},\ 1\right)$

이때 변곡점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$1=\frac{2e}{a}$ $\therefore a=2e$

답 ⑤

11 전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 파악하고, 합성함수의 미분법을 이용하여 함수 $g(x)$를 미분한다.

풀이 주어진 표에서 $x<1$, $1<x<3$일 때, $f''(x)>0$이므로 이 구간에서 함수 $f'(x)$는 증가하고 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

또 $f'(1)=0$이므로 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

ㄱ. $g(x)=\sin(f(x))$에서

$$g'(x)=\cos(f(x))\cdot f'(x)$$

이므로

$$g'(3)=\cos(f(3))\cdot f'(3)=\cos\pi\cdot 1=-1$$

ㄴ. $1<x<3$에서 $f(x)$는 증가하고, $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로

$$\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$$

한편 $\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$에서 $g(x)$는 감소하고 $g(x)=\sin(f(x))$의 그래프는 위로 볼록하다.

$$g'(1)=\cos(f(1))\cdot f'(1)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot 0=0,$$
$$g'(3)=-1$$

이므로 $1<a<b<3$에서

$$-1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$$

ㄷ. $g''(x)=-\sin(f(x))f'(x)f'(x)+\cos(f(x))f''(x)$

$$\therefore g''(1)=-\sin(f(1))\cdot f'(1)\cdot f'(1)+\cos(f(1))\cdot f''(1)=0+\cos\frac{\pi}{2}\cdot f''(1)=0$$

그러나 $x<1$과 $1<x<3$에서 $g''(x)$의 부호가 같으므로 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

12 문제이해 • $2^x=t$로 놓으면 $-1\le x\le 1$에서

$\frac{1}{2}\le t\le 2$ ➔ 10% 배점

해결과정 • $f(x)=-2^{3x}-3\cdot 2^{2x-1}+6\cdot 2^x$을 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$$g(t)=-t^3-\frac{3}{2}t^2+6t$$

$$\therefore g'(t)=-3t^2-3t+6=-3(t+2)(t-1)$$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ $\left(\because \frac{1}{2}\le t\le 2\right)$

구간 $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$에서 함수 $g(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$\frac{5}{2}$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	-2

➔ 50% 배점

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $\frac{7}{2}$, 최솟값은 -2이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{7}{2}+(-2)=\frac{3}{2}$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $p=2,\ q=3$이므로

$p+q=5$ ➔ 10% 배점 답 5

13 전략 y축에 평행한 직선을 $x=t$로 놓고 $\overline{PQ}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 y축에 평행한 직선을 $x=t$라 하면 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(t,\ e^t)$, $(t,\ t)$이므로 $\overline{PQ}=l(t)$라 하면

$$l(t)=e^t-t \qquad \therefore l'(t)=e^t-1$$

$l'(t)=0$에서 $\quad e^t=1 \qquad \therefore t=0$

따라서 함수 $l(t)$의 증감표는 오른쪽과 같고, 함수 $l(t)$는 $t=0$일 때 극소이면서 최소이다. 즉 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 1이다. 답 ⑤

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$l'(t)$	$-$	0	$+$
$l(t)$	↘	1	↗

14 전략 넓이 D를 함수로 나타낸 후, 삼각함수의 도함수와 합성함수의 미분법을 이용하여 미분한다.

풀이 $\angle SOT=\theta$이므로

$$\angle POS=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$$

$\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}=t\left(0\le t\le\frac{\pi}{4}\right)$로 놓으면 $\overline{OP}=\overline{QP}=\cos t$, $\overline{SP}=\sin t$이고 $\overline{QS}=\cos t-\sin t$이므로

$$D=\cos^2 t-\frac{1}{2}\cdot(\cos t-\sin t)^2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\cos^2 t-\frac{\pi}{4}(1-2\sin t\cos t)$$

$$=\cos^2 t-\frac{\pi}{4}(1-\sin 2t)$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dD}{dt}=-2\cos t\sin t-\frac{\pi}{4}(-2\cos 2t)$$

$$=-\sin 2t+\frac{\pi}{2}\cos 2t$$

$\frac{dD}{dt}=0$에서 $\qquad \sin 2t=\frac{\pi}{2}\cos 2t$

$$\therefore \tan 2t=\frac{\pi}{2}$$

$\tan 2t=\frac{\pi}{2}$를 만족시키는 t의 값을 α라 하면 $t=\alpha$의 좌우에서 $\frac{dD}{dt}$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 D는 $t=\alpha$일 때 극대이면서 최대이다.

이때 $\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}=\alpha$에서 $\theta=\frac{\pi}{2}-2\alpha$이므로

$$\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cot 2\alpha=\frac{2}{\pi}$$

$\therefore 10\pi\tan\theta=20$ 답 20

15 전략 $y=\frac{2x}{x^2+1}$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f''(x)$

$$=\frac{-4x(x^2+1)^2-(-2x^2+2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{4x(x^2+1)(x^2-3)}{(x^2+1)^4}=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

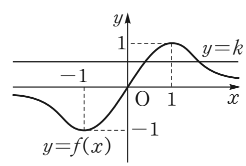
함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘

또 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$,

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 교점을 갖도록 하는 k의 값의 범위는

$$-1\le k\le 1$$

이므로 정수 k는 $-1,\ 0,\ 1$의 3개이다. 답 ③

16 해결과정 • $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x-2a+7$로 놓으면

$$f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}-\frac{2}{x}=\frac{2\ln x-2}{x}$$
$$=\frac{2(\ln x-1)}{x}$$ ➔ 30% 배점

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1 \quad \therefore x=e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-2a+6$	↗

따라서 $x>0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극소이면서 최소이고, 최솟값은 $-2a+6$이다. ➔ 50% 배점

답구하기 • $x>0$일 때 $f(x)\ge0$이어야 하므로

$-2a+6\ge0 \quad \therefore a\le3$

따라서 실수 a의 최댓값은 3이다. ➔ 20% 배점

답 3

17 전략 삼각함수의 도함수를 이용하여 주어진 함수의 이계도함수를 구한 후 a_n을 구한다.

풀이 $f(x)=\cos^n x$로 놓으면

$$f'(x)=-n\cos^{n-1}x\sin x$$
$$f''(x)=n(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2 x-n\cos^n x$$
$$=n\cos^{n-2}x\{(n-1)\sin^2 x-\cos^2 x\}$$
$$=n\cos^{n-2}x(n-1-n\cos^2 x)$$

$f''(x)=0$에서 $\quad \cos x=0$ 또는 $\cos^2 x=1-\frac{1}{n}$

그런데 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x>0$이므로

$$\cos^2 x=1-\frac{1}{n} \quad \therefore \cos x=\sqrt{1-\frac{1}{n}}$$

따라서 $a_n=\cos^n x=\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$ 답 ③

Remark 무리수 e의 정의를 이용한 극한

0이 아닌 상수 a, b에 대하여

① $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

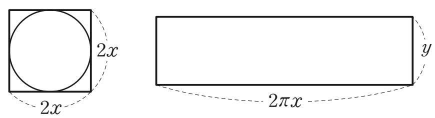
② $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}=\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{ax}\cdot ab}=e^{ab}$

③ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{bx}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax\cdot\frac{b}{a}}=e^{\frac{b}{a}}$

18 전략 물통의 밑면의 반지름의 길이를 x m, 높이를 y m라 하고 물통의 부피를 x, y를 이용하여 나타낸다.

풀이 원기둥 모양의 물통의 밑면의 반지름의 길이를 x m, 높이를 y m라 하면 물통의 부피는

$$\pi x^2 y=32 \quad \therefore y=\frac{32}{\pi x^2} \quad\cdots\cdots ㉠$$



물통을 만드는 데 필요한 철판의 모양은 위의 그림과 같으므로 철판의 구입 가격을 $f(x)$만 원이라 하면

$$f(x)=(2x)^2+2\pi xy$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$f(x)=4x^2+2\pi x\cdot\frac{32}{\pi x^2}=4x^2+\frac{64}{x}\quad(x>0)$$
$$\therefore f'(x)=8x-\frac{64}{x^2}=\frac{8(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because x^2+2x+4>0)$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	48	↗

따라서 $x=2$일 때 극소이면서 최소이고 최솟값 48을 가지므로 구하는 최소 비용은 48만 원이다. 답 48만 원

19 전략 먼저 도함수 $f'(x)$를 구한 후, 각각의 보기의 참 · 거짓을 판별한다.

풀이 $f(x)=2x\cos x$에서

$$f'(x)=2\cos x-2x\sin x$$

ㄱ. $f'(a)=2\cos a-2a\sin a$이므로 $f'(a)=0$에서

$$2\cos a=2a\sin a$$

이때 $f'(0)=2$에서 $a\ne0$이므로

$$\tan a=\frac{1}{a}$$

ㄴ. $f'(x)$는 구간 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$에서 연속이고

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)>0,$$
$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi<0$$

이므로 사이값 정리에 의하여 $f'(a)=0$인 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$에 존재한다.

따라서 극댓값을 가지는 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$에 존

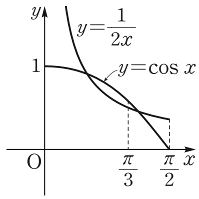
재한다.

ㄷ. $x\neq0$일 때 $2x\cos x=1$에서 $\quad \cos x=\dfrac{1}{2x}$

이때 $x=\dfrac{\pi}{3}$이면

$\cos\dfrac{\pi}{3}>\dfrac{3}{2\pi}$

이므로 오른쪽 그림과 같이 $y=\cos x$의 그래프가 $y=\dfrac{1}{2x}$의 그래프보다 위에 있다.



즉 두 곡선 $y=\cos x$와 $y=\dfrac{1}{2x}$이 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

20 전략 주어진 방정식을 $k=f(x)$ 꼴로 변형하고 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

풀이 $x^2=ke^x$에서 $\quad k=x^2e^{-x}$

$f(x)=x^2e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=-x(x-2)e^{-x}$

$f''(x)=2e^{-x}-2xe^{-x}-2xe^{-x}+x^2e^{-x}$

$=(x^2-4x+2)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

$f''(x)=0$에서 $\quad x^2-4x+2=0 \quad \therefore x=2\pm\sqrt{2}$

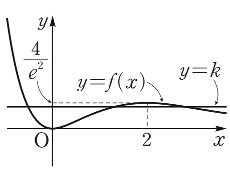
함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	변곡점	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘	변곡점	↘

또 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{-x}=\infty$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=x^2e^{-x}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $0<k<\dfrac{4}{e^2}$이므로 $\quad \alpha=0,\ \beta=\dfrac{4}{e^2} \quad \therefore \beta-\alpha=\dfrac{4}{e^2}$ 답 $\dfrac{4}{e^2}$

10 여러 가지 적분법

유제 본책 271~287쪽

105-1 (1) $\displaystyle\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$

$\displaystyle=\int\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$\displaystyle=\int(x^2-x^{-2})dx$

$\displaystyle=\frac{1}{3}x^3+x^{-1}+C=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+C$

(2) $\displaystyle\int\sqrt{x}(x+1)^2dx=\int x^{\frac{1}{2}}(x^2+2x+1)dx$

$\displaystyle=\int(x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}})dx$

$\displaystyle=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

$\displaystyle=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

(3) $\displaystyle\int\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)dx=\int(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}})dx$

$\displaystyle=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$

$\displaystyle=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{x^3-1}{x^2-x}dx=\int\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)}dx$

$\displaystyle=\int\frac{x^2+x+1}{x}dx$

$\displaystyle=\int\left(x+1+\frac{1}{x}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x|+C$

답 풀이 참조

106-1 (1) $\displaystyle\int(e^x-5^{2x})\,dx=\int(e^x-25^x)dx$

$\displaystyle=e^x-\frac{25^x}{\ln 25}+C$

(2) $\displaystyle\int3^x(3^x+1)dx=\int(3^{2x}+3^x)dx$

$\displaystyle=\int(9^x+3^x)dx$

$\displaystyle=\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{3^x}{\ln 3}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1}\,dx=\int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^{2x}+e^x+1}\,dx$

$\displaystyle=\int (e^x-1)\,dx$

$=e^x-x+C$

(4) $\displaystyle\int \frac{x\cdot 5^x-1}{x}\,dx=\int\left(5^x-\frac{1}{x}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{5^x}{\ln 5}-\ln|x|+C$

답 풀이 참조

107-1 (1) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x+4}{\sin^2 x}\,dx=\int\left(1+\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx$

$\displaystyle=\int (1+4\csc^2 x)\,dx$

$=x-4\cot x+C$

(2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx=\int (\sec^2 x-1)\,dx$

$=\tan x-x+C$

(3) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx=\int\frac{1}{2}\sin x\,dx$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}\cos x+C$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos 2x}\,dx=\int\frac{1}{2\cos^2 x}\,dx$

$\displaystyle=\int\frac{1}{2}\sec^2 x\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\tan x+C$

답 풀이 참조

108-1 (1) $4x^2+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=8x$이므로

$\displaystyle\int 8x(4x^2+1)^6\,dx=\int t^6\,dt=\frac{1}{7}t^7+C$

$\displaystyle=\frac{1}{7}(4x^2+1)^7+C$

(2) $4x^3-6x+7=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=12x^2-6$이므로

$\displaystyle\int (2x^2-1)(4x^3-6x+7)\,dx$

$\displaystyle=\int t\cdot\frac{1}{6}\,dt=\frac{1}{12}t^2+C$

$\displaystyle=\frac{1}{12}(4x^3-6x+7)^2+C$

답 풀이 참조

다른 풀이 (2) $\displaystyle\int (2x^2-1)(4x^3-6x+7)\,dx$

$\displaystyle=\int (8x^5-16x^3+14x^2+6x-7)\,dx$

$\displaystyle=\frac{4}{3}x^6-4x^4+\frac{14}{3}x^3+3x^2-7x+C$

109-1 (1) $x^2-2x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x-2$이므로

$\displaystyle\int (x-1)\sqrt{x^2-2x}\,dx$

$\displaystyle=\int\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C$

$\displaystyle=\frac{1}{3}(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}+C$

(2) $x^3+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=3x^2$이므로

$\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$

$\displaystyle=\frac{1}{3}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{t}+C$

$\displaystyle=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$

답 풀이 참조

다른 풀이 (1) $\sqrt{x^2-2x}=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$
이므로

$\displaystyle\int (x-1)\sqrt{x^2-2x}\,dx$

$\displaystyle=\int t\cdot t\,dt=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C$

$\displaystyle=\frac{1}{3}(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}+C$

(2) $\sqrt{x^3+1}=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$이므로

$\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx=\int\frac{2}{3}\,dt=\frac{2}{3}t+C$

$\displaystyle=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$

110-1 (1) $e^x+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=e^x$이므로

$\displaystyle\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$

$\displaystyle=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$\displaystyle=\frac{2}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1}+C$

(2) $\ln(x^2+1)=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{2x}{x^2+1}$이므로

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\ln(x^2+1)dx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=\frac{1}{2}\{\ln(x^2+1)\}^2+C$$

답 풀이 참조

다른 풀이 (1) $\sqrt{e^x+1}=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$

이므로

$$\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx=\int t\cdot 2t dt$$
$$=\int 2t^2 dt$$
$$=\frac{2}{3}t^3+C$$
$$=\frac{2}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1}+C$$

111-1 (1) $\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int(\sin^2 x+\sin x+1)\cos x\,dx$$
$$=\int(t^2+t+1)dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t+C$$
$$=\frac{1}{3}\sin^3 x+\frac{1}{2}\sin^2 x+\sin x+C$$

(2) $\displaystyle\int\sin^3 x\,dx=\int\sin^2 x\sin x\,dx$
$$=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

에서 $\cos x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$
$$=\int(1-t^2)\cdot(-1)dt$$
$$=\int(t^2-1)dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3-t+C$$
$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

답 풀이 참조

Remark 삼각함수 사이의 관계

① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
② $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

111-2 $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx$
$$=\int\frac{\cos x\cdot\cos^2 x}{1+\sin x}dx$$
$$=\int\frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{1+\sin x}dx$$
$$=\int\frac{\cos x(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x}dx$$
$$=\int\cos x(1-\sin x)dx$$

에서 $1-\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-\cos x$이므로

$$\int\frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx=\int t\cdot(-1)dt$$
$$=-\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=-\frac{1}{2}(1-\sin x)^2+C$$

답 $-\dfrac{1}{2}(1-\sin x)^2+C$

112-1 (1) $(2+\cos x)'=-\sin x$이므로

$$\int\frac{\sin x}{2+\cos x}dx=-\int\frac{(2+\cos x)'}{2+\cos x}dx$$
$$=-\ln(2+\cos x)+C$$
$$(\because 2+\cos x>0)$$

(2) $(x+\sin x)'=1+\cos x$이므로

$$\int\frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx=\int\frac{(x+\sin x)'}{x+\sin x}dx$$
$$=\ln|x+\sin x|+C$$

(3) $(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$이므로

$$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx$$
$$=\ln(e^x+e^{-x})+C$$
$$(\because e^x+e^{-x}>0)$$

(4) $\{\ln(x+1)\}'=\dfrac{1}{x+1}$이므로

$$\int\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx=\int\frac{\{\ln(x+1)\}'}{\ln(x+1)}dx$$
$$=\ln|\ln(x+1)|+C$$

답 풀이 참조

다른 풀이 (1) $2+\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx=\int \frac{1}{t}\cdot(-1)dt$$
$$=-\ln|t|+C$$
$$=-\ln(2+\cos x)+C$$
$$(\because 2+\cos x>0)$$

(2) $x+\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1+\cos x$이므로

$$\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\,dx=\int \frac{1}{t}\,dt=\ln|t|+C$$
$$=\ln|x+\sin x|+C$$

(3) $e^x+e^{-x}=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x-e^{-x}$이므로

$$\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx=\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+C$$
$$=\ln(e^x+e^{-x})+C$$
$$(\because e^x+e^{-x}>0)$$

(4) $\ln(x+1)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x+1}$이므로

$$\int \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\,dx$$
$$=\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+C$$
$$=\ln|\ln(x+1)|+C$$

113-1 (1) $\frac{x^3-x+2}{x+1}=x^2-x+\frac{2}{x+1}$이므로

$$\int \frac{x^3-x+2}{x+1}dx$$
$$=\int\left(x^2-x+\frac{2}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2\ln|x+1|+C$$

(2) $\frac{x-8}{x^2-x-6}=\frac{x-8}{(x+2)(x-3)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}$

(a, b는 상수)로 놓으면

$$\frac{x-8}{x^2-x-6}=\frac{(a+b)x-(3a-2b)}{(x+2)(x-3)}$$

이므로

$$a+b=1,\ 3a-2b=8$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=-1$$

$$\therefore \int \frac{x-8}{x^2-x-6}\,dx$$
$$=\int\left(\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-3}\right)dx$$
$$=2\ln|x+2|-\ln|x-3|+C$$
$$=\ln\left|\frac{(x+2)^2}{x-3}\right|+C$$

(3) $\frac{1-x^2}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$$\frac{1-x^2}{x(x^2+1)}=\frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}$$

이므로

$$a+b=-1,\ c=0,\ a=1$$
$$\therefore a=1,\ b=-2,\ c=0$$
$$\therefore \int \frac{1-x^2}{x(x^2+1)}\,dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\ln|x|-\ln|x^2+1|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x}{x^2+1}\right|+C$$

답 풀이 참조

114-1 (1) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int \ln x\,dx=\ln x\cdot x-\int \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

(2) $f(x)=x$, $g'(x)=e^{2x}$으로 놓으면 $f'(x)=1$,

$g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$이므로

$$\int xe^{2x}dx=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx$$
$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$$

(3) $f(x)=2x$, $g'(x)=\sin 2x$로 놓으면 $f'(x)=2$,

$g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$$\int 2x\sin 2x\,dx$$
$$=2x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int 2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$=-x\cos 2x+\int \cos 2x\,dx$$
$$=-x\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$$

답 풀이 참조

115-1 (1) $f(x)=x^2+1,\ g'(x)=\sin x$로 놓으면
$f'(x)=2x,\ g(x)=-\cos x$이므로

$$\int(x^2+1)\sin x\,dx$$
$$=(x^2+1)\cdot(-\cos x)-\int 2x\cdot(-\cos x)dx$$
$$=-(x^2+1)\cos x+2\int x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int x\cos x\,dx$에서 $u(x)=x,\ v'(x)=\cos x$로 놓으면 $u'(x)=1,\ v(x)=\sin x$이므로

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int 1\cdot\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int(x^2+1)\sin x\,dx$$
$$=-(x^2+1)\cos x+2x\sin x+2\cos x+2C_1$$
$$=(1-x^2)\cos x+2x\sin x+C\ (\text{단, } 2C_1=C)$$

(2) $f(x)=\cos 2x,\ g'(x)=e^x$으로 놓으면
$f'(x)=-2\sin 2x,\ g(x)=e^x$이므로

$$\int e^x\cos 2x\,dx$$
$$=\cos 2x\cdot e^x-\int(-2\sin 2x)\cdot e^x\,dx$$
$$=e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int e^x\sin 2x\,dx$에서 $u(x)=\sin 2x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면 $u'(x)=2\cos 2x,\ v(x)=e^x$이므로

$$\int e^x\sin 2x\,dx$$
$$=\sin 2x\cdot e^x-\int 2\cos 2x\cdot e^x\,dx$$
$$=e^x\sin 2x-2\int e^x\cos 2x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^x\cos 2x\,dx$$
$$=e^x\cos 2x+2e^x\sin 2x-4\int e^x\cos 2x\,dx$$
$$5\int e^x\cos 2x\,dx=e^x(2\sin 2x+\cos 2x)$$
$$\therefore \int e^x\cos 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{5}e^x(2\sin 2x+\cos 2x)+C$$

답 풀이 참조

중단원 연습 문제

본책 288~293쪽

01 -4 **02** $f(x)=\frac{3^{2x-1}}{2\ln 3}$ **03** $2-e$ **04** ①
05 18 **06** e **07** ⑤ **08** 11 **09** 3
10 풀이 참조 **11** ② **12** $\pi-1$ **13** 0
14 3 **15** ① **16** $\frac{\ln 2+e}{e^2}$ **17** ④
18 $f(x)=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+C$ **19** ③ **20** ④
21 ② **22** $x=\frac{\pi}{4}$ **23** ④ **24** 84 **25** $8f(a)$
26 ④

01 전략 피적분함수를 x^n (n은 실수) 꼴로 변형한 후 부정적분을 구한다.

풀이 $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx=\int\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx$
$$=\int\left(1-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=x-4x^{\frac{1}{2}}+\ln|x|+C$$
$$=x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$$

따라서 $p=1,\ q=-4,\ r=1$이므로 $pqr=-4$

답 -4

02 전략 지수함수의 부정적분은 지수법칙을 이용하여 간단하게 변형한 후 구한다.

풀이 $f'(x)=3^{2x-1}$이므로

$$f(x)=\int 3^{2x-1}dx=\frac{1}{3}\int 9^x dx$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{9^x}{\ln 9}+C=\frac{3^{2x-1}}{2\ln 3}+C$$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\ln 3}$에서 $\frac{1}{2\ln 3}+C=\frac{1}{2\ln 3}$

$\therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{3^{2x-1}}{2\ln 3}$

답 $f(x)=\frac{3^{2x-1}}{2\ln 3}$

03 전략 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분한 후 $F'(x)=f(x)$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $F(x)=xf(x)+(x-1)e^x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x)+xf'(x)+e^x+(x-1)e^x$$

$F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)=f(x)+xf'(x)+e^x+xe^x-e^x$

$xf'(x)=-xe^x$

$\therefore f'(x)=-e^x$

$\therefore f(x)=\int(-e^x)dx=-e^x+C$

$f(0)=1$에서 $\quad -1+C=1 \quad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=-e^x+2$이므로

$f(1)=2-e$

답 $2-e$

04 (전략) 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$임을 이용한다.

(풀이) $f'(x)=x+\cos x$이므로

$$f(x)=\int(x+\cos x)dx=\frac{1}{2}x^2+\sin x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0)=0$에서

$C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\sin x$이므로 $\quad f(\pi)=\frac{1}{2}\pi^2$

답 ①

05 (전략) 피적분함수가 무리함수를 포함한 경우에는 근호 안의 함수를 t로 치환하여 부정적분을 구한다.

(풀이) $f'(x)=2x\sqrt{x^2+1}$이므로

$$f(x)=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt\\&=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C\\&=\frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C\end{aligned}$$

$f(0)=\frac{2}{3}$에서 $\quad \frac{2}{3}+C=\frac{2}{3} \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$이므로

$f(2\sqrt{2})=\frac{2}{3}\cdot 9\cdot 3=18$

답 18

(다른 풀이) $\sqrt{x^2+1}=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int 2t\cdot t\,dt\\&=\int 2t^2\,dt=\frac{2}{3}t^3+C\\&=\frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C\end{aligned}$$

06 (전략) 피적분함수가 $\sin x$와 $\cos x$를 포함한 경우에는 $\sin x=t$ 또는 $\cos x=t$로 치환하여 부정적분을 구한다.

(풀이) $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int e^{\sin x}\cos x\,dx=\int e^t dt\\&=e^t+C=e^{\sin x}+C\end{aligned}$$

$f(0)=1$에서 $\quad 1+C=1 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=e^{\sin x}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$

답 e

07 (전략) 피적분함수의 분자가 분모의 도함수이면 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$임을 이용한다.

(풀이) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{(\ln x)'}{\ln x}dx\\&=\ln|\ln x|+C\end{aligned}$$

$f(e)=2$에서 $\quad C=2$

따라서 $f(x)=\ln|\ln x|+2$이므로

$f(e^3)+f(e^2)=(\ln 3+2)+(\ln 2+2)=\ln 6+4$

답 ⑤

(다른 풀이) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{1}{t}dt\\&=\ln|t|+C=\ln|\ln x|+C\end{aligned}$$

08 해결과정 • $\frac{x}{(x-3)^2}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{(x-3)^2}$

(a, b는 상수)로 놓으면

$$\frac{x}{(x-3)^2}=\frac{ax-3a+b}{(x-3)^2}$$

이므로 $\quad a=1,\ -3a+b=0$

$\therefore a=1,\ b=3$ ➔ 40% 배점

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=\int\frac{x}{(x-3)^2}dx\\&=\int\left\{\frac{1}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}\right\}dx\\&=\ln|x-3|-\frac{3}{x-3}+C\end{aligned}$$

$f(4)=5$에서

$-3+C=5 \quad \therefore C=8$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $f(x)=\ln|x-3|-\dfrac{3}{x-3}+8$이므로

$f(2)=3+8=11$ ➔ 20% 배점

답 11

다른 풀이 $x-3=t$로 놓으면 $x=t+3$에서 $\dfrac{dx}{dt}=1$이므로

$$f(x)=\int\frac{x}{(x-3)^2}dx=\int\frac{t+3}{t^2}dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}\right)dt=\ln|t|-\frac{3}{t}+C$$
$$=\ln|x-3|-\frac{3}{x-3}+C$$

09 전략 피적분함수가 두 함수의 곱의 꼴일 때에는 부분적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$이므로

$$f(x)=\int x\cos x\,dx$$
$$=x\sin x-\int 1\cdot\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C$$

$f(\pi)=1$에서 $\quad -1+C=1 \quad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=x\sin x+\cos x+2$이므로

$f(0)=1+2=3$

답 3

10 해결과정 • $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=1$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{2}{x}\ln x$, $g(x)=x$이므로

$$\int(\ln x)^2dx$$
$$=x(\ln x)^2-\int\frac{2}{x}\ln x\cdot x\,dx$$
$$=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

➔ 40% 배점

$\int\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면 $u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int\ln x\,dx=x\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$=x\ln x-x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

➔ 40% 배점

답구하기 • ㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int(\ln x)^2dx$$
$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x-2C_1$$
$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C \text{ (단, } -2C_1=C)$$

➔ 20% 배점

답 $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$

11 전략 $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C\,(a>0,\ a\neq1)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int 3^x\ln 3\,dx=\ln 3\int 3^x dx$

$$=\ln 3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C=3^x+C$$

$f(0)=1$에서 $\quad 1+C=1 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=3^x$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

답 ②

Remark 등비급수의 합

첫째항이 a, 공비가 $r\ (-1<r<1)$인 등비급수의 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.

12 해결과정 • $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2\cos x+1$에서

$$f(x)+g(x)=\int(2\cos x+1)dx$$
$$=2\sin x+x+C_1$$

$f(0)+g(0)=1+(-1)=0$이므로 $\quad C_1=0$

$\therefore f(x)+g(x)=2\sin x+x \quad \cdots\cdots ㉠$

➔ 40% 배점

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=-2\sin x+1$에서

$$f(x)-g(x)=\int(-2\sin x+1)dx$$
$$=2\cos x+x+C_2$$

$f(0)-g(0)=1-(-1)=2$이므로 $2+C_2=2$에서

$C_2=0$

$\therefore f(x)-g(x)=2\cos x+x \quad \cdots\cdots ㉡$

➔ 40% 배점

답구하기 • ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(x)=\sin x+\cos x+x$, $g(x)=\sin x-\cos x$이므로

$f(\pi)=\pi-1$, $g(\pi)=1$

$\therefore f(\pi)g(\pi)=\pi-1$ ➔ 20% 배점

답 $\pi-1$

13 문제이해 • $g(x)=e^{-x}f(x)$에서 곱의 미분법에 의하여

$$g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)$$
$$=e^{-x}\{f'(x)-f(x)\}$$ ➔ 40% 배점

해결과정 • 이때 $f'(x)=f(x)+e^x\cos x$에서

$f'(x)-f(x)=e^x\cos x$이므로

$$g'(x)=e^{-x}\cdot e^x\cos x=\cos x$$

$$\therefore g(x)=\int\cos x\,dx=\sin x+C$$

$g(x)=e^{-x}f(x)$이고 $f(0)=0$에서 $g(0)=0$이므로

$C=0$ ➔ 50% 배점

답구하기 • 따라서 $g(x)=\sin x$이므로

$g(\pi)=0$ ➔ 10% 배점

답 0

14 해결과정 • $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{\ln x}{x}dx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$ ➔ 30% 배점

$f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}=0$에서 $x=1$

$\dfrac{1}{e}\le x\le e^2$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로

$f(1)=1$ $\therefore C=1$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 즉 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+1$에서

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2+1=\frac{3}{2}$$

$$f(e^2)=\frac{1}{2}(\ln e^2)^2+1=3$$

따라서 $f(x)$는 $x=e^2$에서 최댓값 3을 갖는다.

➔ 30% 배점

답 3

15 전략 $x=\sin\theta$를 주어진 식에 대입한 후 치환적분법을 이용한다.

풀이 $x=\sin\theta$에서 $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$이므로

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta\ (\because \cos\theta\ge0)$$
$$=\int\cos^2\theta\,d\theta=\int\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)+C$$

답 ①

16 전략 곱의 미분법에 의하여 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{d}{dx}\{xf(x)\}=f(x)+xf'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$이므로

$$xf(x)=\int\frac{1}{x\ln x}dx$$

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이므로

$$xf(x)=\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{1}{t}dt$$
$$=\ln|t|+C$$
$$=\ln(\ln x)+C\ (\because \ln x>0)$$

$f(e)=1$에서 $e\cdot1=C$ $\therefore C=e$

따라서 $f(x)=\dfrac{\ln(\ln x)+e}{x}$이므로

$$f(e^2)=\frac{\ln2+e}{e^2}$$

답 $\dfrac{\ln2+e}{e^2}$

17 전략 주어진 식을 적분하여 h를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{35}{t+1}$이므로

$$h=\int\frac{35}{t+1}dt=35\ln|t+1|+C$$

$t=0$일 때 $h=0$이므로 $C=0$

$\therefore h=35\ln|t+1|$

따라서 구하는 값은 $t=3$일 때의 h의 값이므로

$$h=35\ln4=35\ln2^2=70\ln2=70\times0.7=49$$

답 ④

18 (전략) 치환적분법과 부분분수로의 변형을 이용하여 부정적분을 구한다.

(풀이) $e^x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{e^x-1}dx=\int\frac{1}{t-1}\cdot\frac{1}{t}dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\ln|t-1|-\ln|t|+C$$
$$=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+C$$

답 $f(x)=\ln\left|\dfrac{e^x-1}{e^x}\right|+C$

(다른 풀이) $e^x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{e^x-1}dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t+1}dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\ln|t|-\ln|t+1|+C$$
$$=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+C$$

19 (전략) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\{f(x)g(x)\}'$임을 이용한다.

(풀이) (가)에서 $\{f(x)g(x)\}'=h(x)$이므로

$$f(x)g(x)=\int h(x)dx$$

$f(x)=x$, $h(x)=\ln x$이므로

$$xg(x)=\int \ln x\,dx$$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$xg(x)=x\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$=x\ln x-x+C$$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$g(1)=-1+C=-1$$
$$\therefore C=0$$

따라서 $xg(x)=x\ln x-x$이므로

$$g(x)=\ln x-1$$
$$\therefore g(e)=\ln e-1=0$$

답 ③

20 (전략) 부분적분법을 이용하여 a_{n+1}을 구한다.

(풀이) $a_{n+1}=\int x^{n+1}e^x\,dx$에서

$f(x)=x^{n+1}$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=(n+1)x^n$, $g(x)=e^x$이므로

$$a_{n+1}=\int x^{n+1}e^x dx$$
$$=x^{n+1}e^x-\int(n+1)x^ne^x\,dx$$
$$=x^{n+1}e^x-(n+1)\int x^ne^x\,dx$$
$$=x^{n+1}e^x-(n+1)a_n$$
$$\therefore a_{n+1}+(n+1)a_n=x^{n+1}e^x$$

답 ④

21 (전략) $f(x)=g'(x)$이므로 $\int xf(x)dx$를 $\int xg'(x)dx$로 변형한 후 부분적분법을 이용한다.

(풀이) $\int f(x)dx=g(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=g'(x)$

$$\therefore \int xf(x)dx=\int xg'(x)dx$$
$$=xg(x)-\int 1\cdot g(x)dx$$
$$=xg(x)-h(x)+C$$

답 ②

22 해결과정 • $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면 $u'(x)=-\sin x$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$=\cos x\cdot(-e^{-x})-\int(-\sin x)\cdot(-e^{-x})dx$$
$$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx \quad\cdots\cdots ㉠$$

➔ 20% 배점

$\int e^{-x}\sin x\,dx$에서 $p(x)=\sin x$, $q'(x)=e^{-x}$으로 놓으면 $p'(x)=\cos x$, $q(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int e^{-x}\sin x\,dx$$
$$=\sin x\cdot(-e^{-x})-\int\cos x\cdot(-e^{-x})dx$$
$$=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx \quad\cdots\cdots ㉡$$

➔ 20% 배점

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^{-x}\cos x\,dx=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x-\int e^{-x}\cos x\,dx$$

$$2\int e^{-x}\cos x\,dx=e^{-x}(\sin x-\cos x)$$

$$\therefore f(x)=\int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$$

➔ 10% 배점

$f'(x)=e^{-x}\cos x$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0\le x\le\pi$)

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값 $\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$을 가지므로

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)+C=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$\therefore C=0$

➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)$이므로 방정식 $f(x)=0$의 근은

$$\sin x-\cos x=0,\qquad \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ ($\because 0\le x\le\pi$)

➔ 20% 배점

답 $x=\frac{\pi}{4}$

23 전략 $\frac{1}{x}$의 부정적분을 구한 후 각각의 함숫값을 구하여 확인한다.

풀이 $f'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

$f(1)=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\ln|x|$이므로

$$f(b)-f(a)=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}\ (\because a,\ b\text{는 양수})$$

ㄱ. $f(b+1)-f(a+1)=\ln(b+1)-\ln(a+1)=\ln\frac{b+1}{a+1}$

ㄴ. $f(4b)-f(4a)=\ln 4b-\ln 4a=\ln\frac{4b}{4a}=\ln\frac{b}{a}$

ㄷ. $f\left(\frac{1}{a}\right)-f\left(\frac{1}{b}\right)=\ln\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{b}=\ln\frac{b}{a}$

이상에서 같은 값을 갖는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

24 문제이해 • $f'(x)=3e^x\sqrt{e^x+8}>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값, $x=\ln 8$에서 최댓값을 갖는다.

➔ 30% 배점

해결과정 • $f(x)=\int 3e^x\sqrt{e^x+8}\,dx$에서 $e^x+8=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=3\int\sqrt{t}\,dt=2t^{\frac{3}{2}}+C=2t\sqrt{t}+C=2(e^x+8)\sqrt{e^x+8}+C$$

$f(0)=10$에서 $2\cdot 9\cdot 3+C=10$

$\therefore C=-44$

➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $f(x)=2(e^x+8)\sqrt{e^x+8}-44$이므로 $f(x)$의 최댓값은

$f(\ln 8)=2\cdot 16\cdot 4-44=84$

➔ 30% 배점

답 84

25 전략 $\ln x=t$로 치환하여 $\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$의 부정적분을 구한다.

풀이 $f'(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\int\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$$

$f(1)=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}$이므로

$$f(a^4)=\frac{2}{3}(\ln a^4)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}(4\ln a)^{\frac{3}{2}}=8\cdot\frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}=8f(a)$$

답 $8f(a)$

26 (전략) 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

(풀이) $f(x)=\int \sin x \ln(\cos x)dx$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$f(x)=\int \sin x \ln(\cos x)dx=-\int \ln t\,dt$$

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면 $u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=-\int \ln t\,dt=-\left(\ln t\cdot t-\int \frac{1}{t}\cdot t\,dt\right)\\&=-t\ln t+\int dt=-t\ln t+t+C\\&=-\cos x\ln(\cos x)+\cos x+C\end{aligned}$$

$f(0)=1$에서 $\quad 1+C=1 \qquad \therefore C=0$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=-\cos x\ln(\cos x)+\cos x\\&=\cos x\{1-\ln(\cos x)\}\end{aligned}$$

ㄱ. $f(-x)=\cos(-x)[1-\ln\{\cos(-x)\}]$

$\quad =\cos x\{1-\ln(\cos x)\}=f(x)$

$\quad \therefore f(-x)=f(x)$

ㄴ. 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $0<\cos x\le 1$이므로

$\ln(\cos x)\le 0$, 즉 $1-\ln(\cos x)\ge 1$

$\therefore f(x)=\cos x\{1-\ln(\cos x)\}>0$

따라서 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $f(x)>0$이므로 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 0이다.

ㄷ. $f'(x)=\sin x\ln(\cos x)$이므로 $f'(x)=0$에서

$\sin x=0$ 또는 $\ln(\cos x)=0$, 즉

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=1$

$\therefore x=0 \left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이면서 최대이고 $f(0)=1$이므로 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. (답) ④

11 정적분

유제

본책 297~319쪽

116-1 (1) $\int_2^5 \frac{x+1}{x-1}dx=\int_2^5\left(1+\frac{2}{x-1}\right)dx$

$$\begin{aligned}&=\Big[x+2\ln|x-1|\Big]_2^5\\&=(5+2\ln 4)-2\\&=3+4\ln 2\end{aligned}$$

(2) $\int_1^2 \frac{1}{x^2+3x+2}dx=\int_1^2\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$

$$\begin{aligned}&=\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx\\&=\Big[\ln|x+1|-\ln|x+2|\Big]_1^2\\&=(\ln 3-\ln 4)-(\ln 2-\ln 3)\\&=2\ln 3-3\ln 2\\&=\ln\frac{9}{8}\end{aligned}$$

(3) $\int_0^1 (x+\sqrt{x})^2dx=\int_0^1(x^2+2x\sqrt{x}+x)dx$

$$\begin{aligned}&=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\\&=\frac{1}{3}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=\frac{49}{30}\end{aligned}$$

(4) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx=\int_1^4\left(x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$

$$\begin{aligned}&=\left[-\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^4\\&=\left(-\frac{1}{4}-1\right)-(-1-2)=\frac{7}{4}\end{aligned}$$

(답) (1) $3+4\ln 2$ (2) $\ln\frac{9}{8}$ (3) $\frac{49}{30}$ (4) $\frac{7}{4}$

117-1 (1) $\int_0^1(2^x+2^{-x})^2dx$

$$\begin{aligned}&=\int_0^1(4^x+2+4^{-x})dx\\&=\left[\frac{4^x}{\ln 4}+2x-\frac{4^{-x}}{\ln 4}\right]_0^1\\&=\left(\frac{4}{\ln 4}+2-\frac{1}{4\ln 4}\right)-\left(\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 4}\right)\\&=\frac{15}{4\ln 4}+2=\frac{15}{8\ln 2}+2\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}-e^x+1}dx=\int_1^2 \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^{2x}-e^x+1}dx$

$\displaystyle=\int_1^2 (e^x+1)dx$

$\displaystyle=\Big[e^x+x\Big]_1^2$

$=(e^2+2)-(e+1)$

$=e^2-e+1$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$

$\displaystyle=\int_0^\pi\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$\displaystyle=\int_0^\pi(1+\sin x)\,dx=\Big[x-\cos x\Big]_0^\pi$

$=(\pi+1)-(-1)=\pi+2$

답 (1) $\dfrac{15}{8\ln 2}+2$ (2) e^2-e+1 (3) $\pi+2$

118-1 (1) $0\le x\le\pi$일 때 $f(x)=\cos x$, $\pi\le x\le 2\pi$일 때 $f(x)=-\sin x-1$이므로

$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)dx$

$\displaystyle=\int_0^\pi f(x)dx+\int_\pi^{2\pi}f(x)dx$

$\displaystyle=\int_0^\pi\cos x\,dx+\int_\pi^{2\pi}(-\sin x-1)dx$

$\displaystyle=\Big[\sin x\Big]_0^\pi+\Big[\cos x-x\Big]_\pi^{2\pi}$

$=2-\pi$

(2) $-\pi\le x\le\pi$일 때 $f(x)=\cos x$, $\pi\le x\le 3\pi$일 때 $f(x)=-\sin x-1$이므로

$\displaystyle\int_{-\pi}^{3\pi}f(x)dx$

$\displaystyle=\int_{-\pi}^\pi f(x)dx+\int_\pi^{3\pi}f(x)dx$

$\displaystyle=\int_{-\pi}^\pi\cos x\,dx+\int_\pi^{3\pi}(-\sin x-1)dx$

$\displaystyle=\Big[\sin x\Big]_{-\pi}^\pi+\Big[\cos x-x\Big]_\pi^{3\pi}$

$=-2\pi$

답 (1) $2-\pi$ (2) -2π

119-1 (1) $x-2=0$에서 $x=2$이므로

$|x-2|=\begin{cases}x-2 & (x\ge2)\\ -x+2 & (x\le2)\end{cases}$

$\displaystyle\therefore\int_1^6\sqrt{|x-2|}\,dx$

$\displaystyle=\int_1^2\sqrt{-x+2}\,dx+\int_2^6\sqrt{x-2}\,dx$

$\displaystyle=\Big[-\frac{2}{3}(-x+2)^{\frac{3}{2}}\Big]_1^2+\Big[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\Big]_2^6$

$=\dfrac{2}{3}+\dfrac{16}{3}=6$

(2) $e^x-1=0$에서 $x=0$이므로

$|e^x-1|=\begin{cases}e^x-1 & (x\ge0)\\ -e^x+1 & (x\le0)\end{cases}$

$\displaystyle\therefore\int_{-1}^2|e^x-1|dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^0(-e^x+1)dx+\int_0^2(e^x-1)dx$

$\displaystyle=\Big[-e^x+x\Big]_{-1}^0+\Big[e^x-x\Big]_0^2$

$=\{-1-(-e^{-1}-1)\}+\{(e^2-2)-1\}$

$=e^2+\dfrac{1}{e}-3$

답 (1) 6 (2) $e^2+\dfrac{1}{e}-3$

119-2 $\sin 2x-\sin x=0$에서

$2\sin x\cos x-\sin x=0$

$\sin x(2\cos x-1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{3}$ $\left(\because 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서

$|\sin 2x-\sin x|=\begin{cases}\sin 2x-\sin x & \left(0\le x\le\dfrac{\pi}{3}\right)\\ -\sin 2x+\sin x & \left(\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

이므로

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2x-\sin x|dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(-\sin2x+\sin x)dx$

$\displaystyle=\Big[-\frac{1}{2}\cos2x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\Big[\frac{1}{2}\cos2x-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\right)$

$=\dfrac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

11 정적분

120-1 (1) $\cos\frac{\pi}{2}x$는 우함수이므로

$$\int_{-1}^{1}\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=2\int_{0}^{1}\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$\sin\pi x$, $\cos\pi x\tan\frac{\pi}{4}x$는 기함수이므로

$$\int_{-1}^{1}\left(\sin\pi x+\cos\pi x\tan\frac{\pi}{4}x\right)dx=0$$

$$\therefore\ (\text{주어진 식})=2\int_{0}^{1}\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$=2\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=\frac{4}{\pi}$$

(2) 2^x+2^{-x}은 우함수이므로

$$\int_{-1}^{1}(2^x+2^{-x})dx=2\int_{0}^{1}(2^x+2^{-x})dx$$

3^x-3^{-x}은 기함수이므로

$$\int_{-1}^{1}(3^x-3^{-x})dx=0$$

$$\therefore\ (\text{주어진 식})=2\int_{0}^{1}(2^x+2^{-x})dx$$

$$=2\left[\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{2\ln 2}\right)$$

$$=2\cdot\frac{3}{2\ln 2}=\frac{3}{\ln 2}$$

답 (1) $\frac{4}{\pi}$ (2) $\frac{3}{\ln 2}$

Remark

$a>0$, $a\neq 1$일 때

① $f(x)=a^x+a^{-x}$이면

$f(-x)=a^{-x}+a^x=f(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수이다.

② $g(x)=a^x-a^{-x}$이면

$g(-x)=a^{-x}-a^x=-(a^x-a^{-x})=-g(x)$

이므로 $g(x)$는 기함수이다.

121-1 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(e^x+e^{-x})dx$

$$=2\int_{0}^{1}(e^x+e^{-x})dx$$

$$=2\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1=2\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

한편 $f(x-1)=f(x+1)$, 즉 $f(x)=f(x+2)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx=\cdots=\int_{9}^{11}f(x)dx$$

$$\therefore\ \int_{-1}^{11}f(x)dx=6\int_{-1}^{1}f(x)dx$$

$$=6\cdot 2\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

$$=12\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

답 $12\left(e-\frac{1}{e}\right)$

122-1 (1) $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{0}^{1}x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_{1}^{2}\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

(2) $x^2-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-1$이고, $x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{1}^{2}(2x-1)3^{x^2-x}dx=\int_{0}^{2}3^t\,dt$$

$$=\left[\frac{3^t}{\ln 3}\right]_0^2$$

$$=\frac{9}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 3}=\frac{8}{\ln 3}$$

(3) $\ln x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고, $x=1$일 때 $t=1$, $x=e$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{1}^{e}\frac{1}{x(\ln x+1)^2}dx=\int_{1}^{2}\frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2$$

$$=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$$

(4) $e^{2x}+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2e^{2x}$이고, $x=0$일 때 $t=2$, $x=\ln 2$일 때 $t=5$이므로

$$\int_{0}^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\int_{2}^{5}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ln|t|\Big]_2^5$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 2)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$$

(5) $\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로

$$\int_{0}^{\pi}\sin^3 x\,dx=\int_{0}^{\pi}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$\cos x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=\pi$일 때 $t=-1$이므로

$$\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$
$$=\int_1^{-1}\{-(1-t^2)\}dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt$$
$$=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

(6) $1+\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}dx=\int_1^2\frac{1}{t}dt$$
$$=\Big[\ln|t|\Big]_1^2=\ln 2$$

답 (1) $\dfrac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$ (2) $\dfrac{8}{\ln 3}$ (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}$ (5) $\dfrac{4}{3}$ (6) $\ln 2$

다른 풀이 (1) $\sqrt{x^2+1}=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{t}$$

또 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=\sqrt{2}$이므로

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_1^{\sqrt{2}}t^2\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

123-1 (1) $x=2\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$이고, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

(2) $x=\sqrt{3}\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\sec^2\theta$이고, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=3$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$$\int_0^3\frac{1}{3+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3(1+\tan^2\theta)}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3\sec^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta$$
$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

답 (1) $\dfrac{\pi}{2}$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

124-1 (1) $f(x)=x$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_0^1 xe^{-x}dx=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^1-\int_0^1(-e^{-x})dx$$
$$=-\frac{1}{e}-\Big[e^{-x}\Big]_0^1$$
$$=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{2}{e}$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=-\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{e}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$
$$=-\frac{1}{e}+\left(-\frac{1}{e}+1\right)=1-\frac{2}{e}$$

(3) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x+\cos x$로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x+\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x+\cos x)dx$$
$$=\Big[x(-\cos x+\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x+\sin x)dx$$
$$=\frac{\pi}{2}-\Big[-\sin x-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\{-1-(-1)\}=\frac{\pi}{2}$$

답 (1) $1-\dfrac{2}{e}$ (2) $1-\dfrac{2}{e}$ (3) $\dfrac{\pi}{2}$

125-1 (1) $\int_1^2 tf(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $\quad f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+k$

$f(t)=\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}+k$를 ㉠에 대입하면

$$\int_1^2 t\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}+k\right)dt$$

$$=\int_1^2\left(2-\frac{1}{t}+kt\right)dt$$

$$=\left[2t-\ln|t|+\frac{k}{2}t^2\right]_1^2$$

$$=\frac{3}{2}k-\ln 2+2=k$$

$\therefore k=2\ln 2-4$

따라서 $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+2\ln 2-4$이므로

$f(1)=2-1+2\ln 2-4=2\ln 2-3$

(2) $\int_0^1 f(t)e^{-t}dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $\quad f(x)=e^x+k$

$f(t)=e^t+k$를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 (e^t+k)e^{-t}dt=\int_0^1 (1+ke^{-t})dt$$

$$=\left[t-ke^{-t}\right]_0^1$$

$$=1-\frac{k}{e}+k=k$$

$\therefore k=e$

따라서 $f(x)=e^x+e$이므로

$f(1)=e+e=2e$

답 (1) $2\ln 2-3$ (2) $2e$

126-1 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(\sin x+\cos x)+x(\cos x-\sin x)$

$\therefore f(\pi)=-1+\pi\cdot(-1)=-\pi-1$

답 $-\pi-1$

126-2 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=e^x+xe^x-e^x, \quad xf(x)=xe^x$

$\therefore f(x)=e^x \quad \therefore f(0)=1$ 답 1

127-1 $G(x)=\int_0^x (x-t)f'(t)dt$

$$=x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt$$

이므로 $G(x)=x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$G'(x)=\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)$$

$$\therefore G'(x)=\int_0^x f'(t)dt$$

$f'(t)$의 한 부정적분은 $f(t)$이므로

$$\int_0^x f'(t)dt=\Big[f(t)\Big]_0^x=f(x)-f(0)$$

$\therefore G'(x)=f(x)-f(0)$

$=(e^{2x}-x+2)-(1+2)$

$=e^{2x}-x-1$ 답 $G'(x)=e^{2x}-x-1$

127-2 $\int_0^x (x-t)f'(t)dt=\sin x\cos x-x$에서

$$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=\frac{1}{2}\sin 2x-x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=\cos 2x-1$$

$$\int_0^x f'(t)dt=\cos 2x-1$$

$$\Big[f(t)\Big]_0^x=\cos 2x-1$$

$f(x)-f(0)=\cos 2x-1$

$f(0)=1$이므로 $\quad f(x)=\cos 2x$ 답 $f(x)=\cos 2x$

128-1 $f(x)=\int_0^x \sqrt{t}(1-t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sqrt{x}(1-x)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극대이고

$$f(1)=\int_0^1 \sqrt{t}(1-t)dt=\int_0^1 (t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}})dt$$

$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

이므로 극댓값은 $\frac{4}{15}$이다. 답 극댓값: $\frac{4}{15}$

Remark

$f''(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x)-\sqrt{x}$에서 $f''(1)=-1<0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다.

128-2 $f(x)=\int_0^x (e^t-1)(e^t+1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(e^x-1)(e^x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because e^x+1>0$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극소이면서 최소이고

$f(0)=\int_0^0 (e^t-1)(e^t+1)dt=0$

이므로 최솟값은 0이다. 답 0

129-1 (1) $f(t)=t(1-\cos t)^2$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_\pi^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\Big[F(t)\Big]_\pi^x=\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}$$
$$=F'(\pi)=f(\pi)=\pi(1-\cos\pi)^2=4\pi$$

(2) $f(t)=e^t\ln(t+1)$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_1^{1-x}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_1^{1-x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(1-x)-F(1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(1-x)-F(1)}{-x}\cdot(-1)$$
$$=-F'(1)=-f(1)=-e\ln2$$

답 (1) 4π (2) $-e\ln2$

130-1 (1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n}{n+k}}\cdot\frac{1}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$$

에서 $\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=0$이고,

$k=n$이면 $x=1$

이므로 적분 구간은 $[0,\ 1]$이다.

$$\therefore (\text{주어진 식})=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$$
$$=\Big[2\sqrt{1+x}\Big]_0^1=2(\sqrt{2}-1)$$

(2) $(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}\cdot\frac{2}{n}$$

에서 $\frac{2k}{n}$를 x로, $\frac{2}{n}$를 dx로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=0$이고,

$k=n$이면 $x=2$

이므로 적분 구간은 $[0,\ 2]$이다.

$$\therefore (\text{주어진 식})=\frac{1}{2}\int_0^2 e^x dx=\frac{1}{2}\Big[e^x\Big]_0^2$$
$$=\frac{1}{2}(e^2-1)$$

답 (1) $2(\sqrt{2}-1)$ (2) $\frac{1}{2}(e^2-1)$

다른 풀이 (2) $\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낼 때,

$$(\text{주어진 식})=\int_0^1 e^{2x}dx=\Big[\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}(e^2-1)$$

중단원 연습 문제 본책 320~325쪽

01 (1) $\frac{8}{3}$ (2) $\pi+2$ **02** e^2+e-2 **03** $\frac{4}{3}$
04 ④ **05** $\pi-2$ **06** ① **07** 1 **08** ①
09 e^9-e^6-38 **10** ⑤ **11** 0 **12** 2
13 $\frac{1}{3}$ **14** ① **15** ① **16** ① **17** 30
18 ④ **19** $\frac{19}{3}\ln3$ **20** ⑤
21 $2\left(e^2+\frac{1}{e^3}\right)-1$ **22** ④

01 (전략) 정적분의 성질을 이용하여 계산한다.

풀이 (1) (주어진 식)

$$=\int_1^2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx+\int_2^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$

$$=\left(\frac{16}{3}-4\right)-\left(\frac{2}{3}-2\right)=\frac{8}{3}$$

(2) (주어진 식)

$$=\int_0^\pi(\sin\theta+\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\int_0^\pi(1+\sin\theta+\cos\theta)d\theta$$

$$=\Big[\theta-\cos\theta+\sin\theta\Big]_0^\pi$$

$$=(\pi+1)-(-1)=\pi+2$$

답 (1) $\frac{8}{3}$ (2) $\pi+2$

02 (전략) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나누어 구한다.

풀이 $f(x)=\begin{cases}e^x & (x\geq0)\\ e^{-x} & (x\leq0)\end{cases}$ 이고 $y=f(x-1)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$$\int_0^3 f(x-1)dx=\int_{-1}^2 f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^0 e^{-x}dx+\int_0^2 e^x dx$$

$$=\Big[-e^{-x}\Big]_{-1}^0+\Big[e^x\Big]_0^2$$

$$=(-1+e)+(e^2-1)$$

$$=e^2+e-2$$

답 e^2+e-2

03 (전략) $\ln x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고, $x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^e\frac{\ln x^2+(\ln x)^2}{x}dx=\int_1^e\frac{2\ln x+(\ln x)^2}{x}dx$$

$$=\int_0^1(2t+t^2)dt$$

$$=\left[t^2+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

04 (전략) $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$로 치환한 후 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}$임을 이용한다.

풀이 $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$이고, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{\cos^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\boxed{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\boxed{\cos2\theta})\,d\theta$$

$$=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$

∴ (가) $\cos^2\theta$ (나) $\cos2\theta$ (다) $\frac{\pi}{2}$

답 ④

05 해결과정 • $f(x)=x^2$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면 $f'(x)=2x$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx$$

$$=\Big[-x^2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2x\cos x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\cos x\,dx$$

➔ 50% 배점

답구하기 • 이때 $u(x)=2x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면 $u'(x)=2$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\cos x\,dx=\Big[2x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\,dx$$

$$=\pi-2\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi-2\cdot1=\pi-2$$

➔ 50% 배점

답 $\pi-2$

06 (전략) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x+a$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=1+a \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=e^x-1$이므로

$f(\ln 2)=e^{\ln 2}-1=2-1=1$ 답 ①

07 문제이해 • $f(x)=\int_0^x (x-t)\cos t\,dt$

$=x\int_0^x \cos t\,dt-\int_0^x t\cos t\,dt$

→ 30% 배점

해결과정 • $f(x)=x\int_0^x \cos t\,dt-\int_0^x t\cos t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\int_0^x \cos t\,dt+x\cos x-x\cos x$

$=\int_0^x \cos t\,dt=\Big[\sin t\Big]_0^x=\sin x$ → 50% 배점

답구하기 • $\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ → 20% 배점

답 1

08 전략 $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$임을 이용한다.

풀이 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_2^x$

$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$

$=F'(2)=f(2)$

$=1$ 답 ①

09 전략 적분변수를 정한 후 적분 구간을 구하고 급수를 정적분으로 나타낸다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}$

$=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

에서 $2+\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n \longrightarrow \infty$이면 $x=2$이고,

$k=n$이면 $x=3$

이므로 적분 구간은 $[2, 3]$이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=3\int_2^3 f(x)dx$

$=3\int_2^3 (e^{3x}-2x^2)dx$

$=3\Big[\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}x^3\Big]_2^3$

$=3\left\{\left(\frac{1}{3}e^9-18\right)-\left(\frac{1}{3}e^6-\frac{16}{3}\right)\right\}$

$=e^9-e^6-38$ 답 e^9-e^6-38

10 전략 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이면 그 직선의 기울기는 $\tan\theta$이다.

풀이 포물선 $y=x^2$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x, y)$에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta(x)$이면 $\tan\theta(x)$는 이 접선의 기울기가 된다.

$y=x^2$의 도함수는 $y'=2x$이므로 $\tan\theta(x)=2x$

$\therefore \int_0^1 \tan\theta(x)dx=\int_0^1 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_0^1=1$

답 ⑤

11 해결과정 • $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+4x-3}{x^{n+1}+1}$에서

(i) $x=0$일 때, $f(0)=-3$

(ii) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+4x-3}{x^{n+1}+1}=4x-3$

(iii) $x=1$일 때, $f(1)=1$

(iv) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+4x-3}{x^{n+1}+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^n}-\frac{3}{x^{n+1}}}{1+\frac{1}{x^{n+1}}}=\frac{1}{x}$ → 50% 배점

답구하기 • 따라서 $0\le x\le 1$일 때 $f(x)=4x-3$, $x\ge 1$일 때 $f(x)=\frac{1}{x}$이므로

$\int_0^e f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^e f(x)dx$

$=\int_0^1 (4x-3)dx+\int_1^e \frac{1}{x}dx$

$=\Big[2x^2-3x\Big]_0^1+\Big[\ln|x|\Big]_1^e$

$=-1+1=0$ → 50% 배점

답 0

12 (전략) 주기함수의 성질을 이용한다.

풀이 $f(x)=|\sin 4x|$로 놓으면 $f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_0^{\pi}|\sin 4x|dx=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x\,dx$$
$$=4\left[-\frac{1}{4}\cos 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=4\left\{\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=2$$

답 2

13 해결과정 • $f(x)=1-x^2$, $g(x)=\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(g(x))g(x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx$$

➔ 50% 배점

답구하기 • $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이고,

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx=\int_0^1 t^2\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

➔ 50% 배점

답 $\frac{1}{3}$

14 (전략) 치환적분법을 이용하여 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$를 변형한다.

풀이 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$에서 $x=\boxed{\frac{\pi}{2}-t}$로 놓으면

$\sin\left(\boxed{\frac{\pi}{2}-t}\right)=\cos t$, $\cos\left(\boxed{\frac{\pi}{2}-t}\right)=\sin t$이고

$\frac{dx}{dt}=\boxed{-1}$이다.

또 $x=0$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\left(-\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$\therefore$ (가) $\frac{\pi}{2}-t$ (나) -1 (다) $\frac{\pi}{4}$

답 ①

15 (전략) $\tan x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 ㄱ. $a_1+a_3=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\tan x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\tan^3 x\,dx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\tan x(1+\tan^2 x)dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\tan x\sec^2 x\,dx$$

$\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$이고, $x=-\frac{\pi}{4}$일 때 $t=-1$, $x=0$일 때 $t=0$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\tan x\sec^2 x\,dx=\int_{-1}^0 t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0=-\frac{1}{2}$$

ㄴ. $a_2+a_4=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\tan^2 x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\tan^4 x\,dx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\tan^2 x(1+\tan^2 x)dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\tan^2 x\sec^2 x\,dx$$

$\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$이고, $x=-\frac{\pi}{4}$일 때 $t=-1$, $x=0$일 때 $t=0$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\tan^2 x\sec^2 x\,dx=\int_{-1}^0 t^2\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^0=\frac{1}{3}$$

ㄱ에서 $a_1+a_3=-\frac{1}{2}$이므로

$$a_1+a_2+a_3+a_4=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$$

ㄷ. 음이 아닌 정수 k에 대하여

$$\begin{aligned}&a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3}+a_{4k+4}\\&=(a_{4k+1}+a_{4k+3})+(a_{4k+2}+a_{4k+4})\\&=\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan^{4k+1}x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan^{4k+3}x\,dx\right)\\&\quad+\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan^{4k+2}x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan^{4k+4}x\,dx\right)\\&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan^{4k+1}x\sec^2x\,dx\\&\quad+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan^{4k+2}x\sec^2x\,dx\\&=\int_{-1}^{0}t^{4k+1}dt+\int_{-1}^{0}t^{4k+2}dt\\&=\left[\frac{1}{4k+2}t^{4k+2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4k+3}t^{4k+3}\right]_{-1}^{0}\\&=-\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{100}a_k&=\sum_{k=0}^{24}(a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3}+a_{4k+4})\\&=\sum_{k=0}^{24}\left(-\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}\right)\\&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots\\&\quad-\frac{1}{98}+\frac{1}{99}\\&\neq-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{51}\right)\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

16 전략 부분적분법을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=x^2+\int_0^x t^2\sin(t-x)dt$에서 $u(t)=t^2$, $v'(t)=\sin(t-x)$로 놓으면

$$u'(t)=2t,\ v(t)=-\cos(t-x)$$

이므로

$$\begin{aligned}&f(x)\\&=x^2+\left[-t^2\cos(t-x)\right]_0^x-\int_0^x\{-2t\cos(t-x)\}dt\\&=x^2-x^2+\int_0^x 2t\cos(t-x)dt\\&=\int_0^x 2t\cos(t-x)dt\end{aligned}$$

이때 $p(t)=2t$, $q'(t)=\cos(t-x)$로 놓으면 $p'(t)=2$, $q(t)=\sin(t-x)$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\left[2t\sin(t-x)\right]_0^x-\int_0^x 2\sin(t-x)dt\\&=0-\int_0^x 2\sin(t-x)dt=\left[2\cos(t-x)\right]_0^x\\&=2-2\cos(-x)=2-2\cos x\end{aligned}$$

ㄱ. $\cos x=\cos(-x)$이므로 $f(x)=f(-x)$이다.

ㄴ. $f'(x)=2\sin x$이고, $f'(x)=0$에서

$x=-\pi$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\pi$

$(\because -2\pi<x<2\pi)$

구간 $(-2\pi,\ 2\pi)$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-2π	$\cdots$	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	

이때 $f(-\pi)=2-2\cos(-\pi)=4$, $f(0)=2-2\cos 0=0$, $f(\pi)=2-2\cos\pi=4$이므로 서로 다른 극값의 개수는 2이다.

ㄷ. $f(x)=2$에서 $2-2\cos x=2$, 즉 $\cos x=0$이므로 구간 $(-2\pi,\ 2\pi)$에서

$x=-\frac{3}{2}\pi$ 또는 $x=-\frac{\pi}{2}$

또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

따라서 방정식 $f(x)=2$의 실근의 개수는 4이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

17 해결과정 • 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)-3=2f(x)-3$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}$$ ➔ 20% 배점

위의 등식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\therefore \ln f(x)=\ln x+C\ (\because x>0,\ f(x)>0)$$

$\cdots\cdots$ ㉠ ➔ 20% 배점

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)-3=0 \qquad \therefore f(1)=3$ ➔ 20% 배점

$x=1$을 ㉠에 대입하면

$\ln f(1)=C$

$\therefore C=\ln 3$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 $\ln f(x)=\ln x+\ln 3=\ln 3x$이므로

$f(x)=3x \qquad \therefore f(10)=30$ → 20% 배점

답 30

18

(전략) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$임을 이용한다.

(풀이) 조건 (나)에서

$$\cos x\int_0^x f(t)dt=-\sin x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$-\sin x\int_0^x f(t)dt+\cos x f(x)$$
$$=-\cos x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt-\sin x f(x)$$

위의 등식의 양변에 $x=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt+\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt-\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt+f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt-f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$2f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$$
$$2f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$$

이때 조건 (가)에서 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=1$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

답 ④

19

(전략) 주어진 식을 합의 기호 $\sum$를 이용하여 나타낸 후 정적분으로 나타낸다.

(풀이) (주어진 식)

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n+2k}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2k}{n}}\cdot\frac{2}{n}$$
$$=\int_2^3 x^2dx\cdot\int_1^3\frac{1}{x}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3\cdot\Big[\ln|x|\Big]_1^3=\frac{19}{3}\ln 3$$

답 $\frac{19}{3}\ln 3$

20

(전략) $1-x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

(풀이) ㄱ. $1-x=t$로 놓으면 $x=1-t$에서 $\frac{dx}{dt}=-1$

이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^1\{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx$$
$$=\int_1^0\{f(1-t)g'(t)-g(1-t)f'(t)\}\cdot(-1)\,dt$$
$$=-\int_0^1\{f'(t)g(1-t)-g'(t)f(1-t)\}dt$$
$$=-k$$

ㄴ. $1-x=t$로 놓으면 $x=1-t$에서 $\frac{dx}{dt}=-1$이고,

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^1 g'(x)f(1-x)dx=\int_1^0 g'(1-t)f(t)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_0^1 f(t)g'(1-t)dt$$

에서

$$\int_0^1\{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$
$$=\int_0^1\{f'(x)g(1-x)-f(x)g'(1-x)\}dx$$
$$=\int_0^1\{f(x)g(1-x)\}'dx=\Big[f(x)g(1-x)\Big]_0^1$$
$$=f(1)g(0)-f(0)g(1)$$
$$\therefore f(1)g(0)-f(0)g(1)=k$$

이때 $f(0)=f(1)$, $g(0)=g(1)$이므로 $\quad k=0$

ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4)$에서 $\quad f(0)=0,\ f(1)=\ln 2$

$g(x)=\sin \pi x$에서 $\quad g(0)=0,\ g(1)=0$

ㄴ에서 $k=f(1)g(0)-f(0)g(1)$이므로

$$k=\ln 2\cdot 0-0\cdot 0=0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

21

문제이해 • $f(x)=\begin{cases}x-1 & (0\le x\le 3)\\ 2 & (3\le x\le 5)\end{cases}$이므로

$$f(x+3)=\begin{cases}x+2 & (-3\le x\le 0)\\ 2 & (0\le x\le 2)\end{cases}$$ → 20% 배점

$$\therefore \int_{-3}^{2}e^xf(x+3)dx$$
$$=\int_{-3}^{0}e^xf(x+3)dx+\int_0^2 e^xf(x+3)dx$$
$$=\int_{-3}^{0}(x+2)e^xdx+\int_0^2 2e^xdx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

→ 20% 배점

해결과정 • $\int_{-3}^{0}(x+2)e^x dx$에서 $u(x)=x+2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{0}(x+2)e^x dx&=\Big[(x+2)e^x\Big]_{-3}^{0}-\int_{-3}^{0}e^x dx\\&=(2+e^{-3})-\Big[e^x\Big]_{-3}^{0}\\&=2+e^{-3}-(1-e^{-3})\\&=1+\frac{2}{e^3}\qquad\cdots\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

➔ 40% 배점

답구하기 • ㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{2}e^x f(x+3)dx&=1+\frac{2}{e^3}+2\Big[e^x\Big]_{0}^{2}\\&=2\left(e^2+\frac{1}{e^3}\right)-1\end{aligned}$$

➔ 20% 배점

답 $2\left(e^2+\frac{1}{e^3}\right)-1$

22 전략 $f(f^{-1}(x))=x$와 역함수의 미분법을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int_a^x\{2+\sin(t^2)\}dt$에서

$$f'(x)=2+\sin(x^2),\ f''(x)=2x\cos(x^2)$$

$f''(a)=2a\cos(a^2)=\sqrt{3}a$이므로

$$\cos(a^2)=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore a^2=\frac{\pi}{6}\left(\because 0<a^2<\frac{\pi}{2}\right)$$

한편 $f(f^{-1}(x))=x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(f^{-1}(x))\{(f^{-1})'(x)\}=1$$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\therefore (f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$$

또 $f(x)=\int_a^x\{2+\sin(t^2)\}dt$에서 $f(a)=0$이므로

$$f^{-1}(0)=a$$

$$\begin{aligned}\therefore (f^{-1})'(0)&=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{2+\sin(a^2)}\\&=\frac{1}{2+\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

답 ④

Remark 역함수의 미분법

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$라 하면

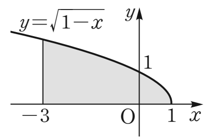
$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}\ (\text{단, } f'(g(x))\neq 0)$$

12 정적분의 활용

유제

본책 329~340쪽

131-1 (1) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는 $\sqrt{1-x}=0$에서

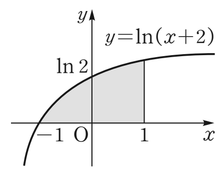


$$x=1$$

구간 $[-3, 1]$에서 $y\geq 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\int_{-3}^{1}\sqrt{1-x}\,dx\\&=\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{1}=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

(2) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는 $\ln(x+2)=0$에서



$$x+2=1$$
$$\therefore x=-1$$

구간 $[-1, 1]$에서 $y\geq 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{1}\ln(x+2)dx\\&=\Big[x\ln(x+2)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{x}{x+2}dx\\&=\ln 3-\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx\\&=\ln 3-\Big[x-2\ln|x+2|\Big]_{-1}^{1}\\&=\ln 3-(2-2\ln 3)\\&=3\ln 3-2\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{16}{3}$ (2) $3\ln 3-2$

132-1 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$에서 $\sqrt{x}=2-\sqrt{y}$

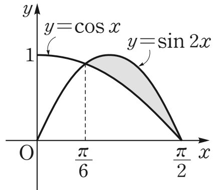
$$\therefore x=4-4\sqrt{y}+y$$

구간 $[0, 1]$에서 $x\geq 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\int_{0}^{1}(4-4\sqrt{y}+y)dy\\&=\left[4y-\frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}y^2\right]_{0}^{1}=\frac{11}{6}\end{aligned}$$

답 $\frac{11}{6}$

133-1 (1) 두 곡선의 교점의 x좌표는 $\sin 2x=\cos x$에서



$2\sin x\cos x=\cos x$

$\cos x(2\sin x-1)=0$

$\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

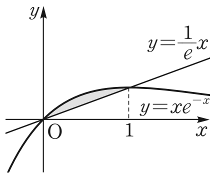
$\therefore\ x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}\left(\because\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\cos x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$$

(2) 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 $xe^{-x}=\frac{1}{e}x$에서



$xe^{-x}-e^{-1}x=0$

$x(e^{-x}-e^{-1})=0$

$x=0$ 또는 $e^{-x}=e^{-1}$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1\left(xe^{-x}-\frac{1}{e}x\right)dx$$

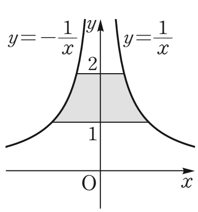
$$=\int_0^1 xe^{-x}dx-\int_0^1\frac{1}{e}x\,dx$$

$$=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1(-e^{-x})dx-\left[\frac{1}{2e}x^2\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{e}-\left[e^{-x}\right]_0^1-\frac{1}{2e}=1-\frac{5}{2e}$$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $1-\frac{5}{2e}$

134-1 (1) $y=\frac{1}{x}$에서 $x=\frac{1}{y}$



$y=-\frac{1}{x}$에서 $x=-\frac{1}{y}$

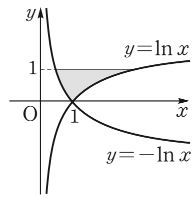
따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_1^2\left\{\frac{1}{y}-\left(-\frac{1}{y}\right)\right\}dy$$

$$=2\int_1^2\frac{1}{y}dy=2\Big[\ln|y|\Big]_1^2=2\ln 2$$

(2) $y=\ln x$에서 $x=e^y$

$y=-\ln x$에서 $x=e^{-y}$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1(e^y-e^{-y})dy$$

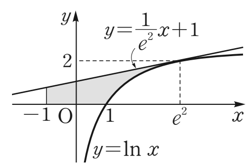
$$=\left[e^y+e^{-y}\right]_0^1$$

$$=e+\frac{1}{e}-2$$

답 (1) $2\ln 2$ (2) $e+\frac{1}{e}-2$

135-1 $y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 위의 점 $(e^2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{e^2}$이다.

이때 곡선 위의 점 $(e^2,\ 2)$에서의 접선의 방정식은



$$y-2=\frac{1}{e^2}(x-e^2)$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{e^2}x+1$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{e^2}\left(\frac{1}{e^2}x+1\right)dx-\int_1^{e^2}\ln x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2e^2}x^2+x\right]_{-1}^{e^2}-\left[x\ln x\right]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}dx$$

$$=\left(\frac{3}{2}e^2-\frac{1}{2e^2}+1\right)-2e^2+\left[x\right]_1^{e^2}$$

$$=\left(\frac{3}{2}e^2-\frac{1}{2e^2}+1\right)-2e^2+(e^2-1)$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}$$

답 $\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}$

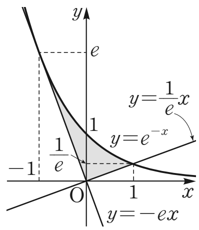
135-2 $y=e^{-x}$에서 $y'=-e^{-x}$이므로 곡선 위의 점 $(-1,\ e)$에서의 접선의 기울기는 $-e$이다.

따라서 곡선 위의 점 $(-1,\ e)$에서의 접선의 방정식은

$$y-e=-e(x+1)$$

$$\therefore\ y=-ex$$

한편 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{e}$이므로 기울기가 $\dfrac{1}{e}$이고 점 $\left(1,\ \dfrac{1}{e}\right)$을 지나는 직선의 방정식은



$$y-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(x-1)$$

$$\therefore y=\frac{1}{e}x$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{1} e^{-x}dx-\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot e+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{e}\right)$$
$$=\Big[-e^{-x}\Big]_{-1}^{1}-\left(\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{e}+e\right)-\left(\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}\right)$$
$$=\frac{e^2-3}{2e}$$

답 $\dfrac{e^2-3}{2e}$

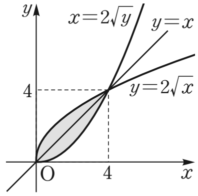
다른 풀이 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{0}\{e^{-x}-(-ex)\}dx+\int_{0}^{1}\left(e^{-x}-\frac{1}{e}x\right)dx$$
$$=\left[-e^{-x}+\frac{e}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-e^{-x}-\frac{1}{2e}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\left(-1+\frac{e}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2e}+1\right)$$
$$=\frac{e^2-3}{2e}$$

136-1 두 함수 $y=2\sqrt{x}$, $x=2\sqrt{y}$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 이때 두 곡선의 교점의 x좌표는 곡선 $y=2\sqrt{x}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로 $2\sqrt{x}=x$에서

$$4x=x^2,\qquad x^2-4x=0$$
$$x(x-4)=0$$
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

두 곡선 $y=2\sqrt{x}$, $x=2\sqrt{y}$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=2\sqrt{x}$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면

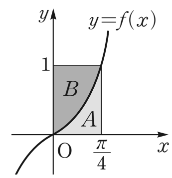


$$S=2\int_{0}^{4}(2\sqrt{x}-x)dx$$
$$=2\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{4}=\frac{16}{3}$$

답 $\dfrac{16}{3}$

136-2 $\displaystyle\int_{0}^{1}g(x)dx$는 $y=g(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

그런데 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\displaystyle\int_{0}^{1}g(x)dx$의 값은 오른쪽 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 B와 같다.



$$\therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx+\int_{0}^{1}g(x)dx=A+B$$
$$=\frac{\pi}{4}\cdot1=\frac{\pi}{4}$$

답 $\dfrac{\pi}{4}$

137-1 수면의 높이가 $x$cm일 때의 수면의 넓이가 $\ln(x+1)\text{cm}^2$이므로 수면의 높이가 4cm일 때의 물의 부피를 $V\ \text{cm}^3$라 하면

$$V=\int_{0}^{4}\ln(x+1)dx$$
$$=\Big[x\ln(x+1)\Big]_{0}^{4}-\int_{0}^{4}\frac{x}{x+1}dx$$
$$=4\ln5-\int_{0}^{4}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=4\ln5-\Big[x-\ln|x+1|\Big]_{0}^{4}$$
$$=4\ln5-(4-\ln5)$$
$$=5\ln5-4(\text{cm}^3)$$

답 $(5\ln5-4)\text{cm}^3$

다른 풀이 $V=\displaystyle\int_{0}^{4}\ln(x+1)dx$

이때 $x+1=t$라 하면 $x=t-1$에서 $\dfrac{dx}{dt}=1$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=4$일 때 $t=5$이므로

$$V=\int_{0}^{4}\ln(x+1)dx=\int_{1}^{5}\ln t\,dt$$
$$=\Big[t\ln t\Big]_{1}^{5}-\int_{1}^{5}dt=5\ln5-\Big[t\Big]_{1}^{5}$$
$$=5\ln5-4(\text{cm}^3)$$

137-2 수면의 높이가 t일 때 수면의 넓이를 $S(t)$라 하면 수면의 높이가 x일 때의 물의 부피는

$$\int_{0}^{x}S(t)dt=e^{3x}+2x^2$$

양변을 x에 대하여 미분하면

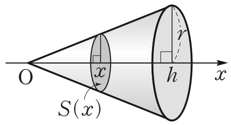
$$S(x)=3e^{3x}+4x$$

따라서 수면의 높이가 $\ln 2$일 때의 수면의 넓이는

$$S(\ln 2)=3e^{3\ln 2}+4\ln 2=24+4\ln 2$$

답 $24+4\ln 2$

138-1 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 꼭짓점 O를 원점, 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선을 x축으로 정하고, x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 원뿔을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하자.



이때 단면과 밑면은 닮은 도형이고 닮음비가 $x:h$이므로 넓이의 비는 $x^2:h^2$이다. 즉

$$S(x):\pi r^2=x^2:h^2 \qquad \therefore S(x)=\frac{\pi r^2}{h^2}x^2$$

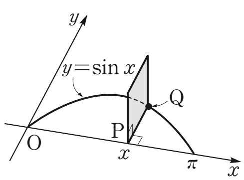
따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^2\,dx$$

$$=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

답 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

139-1 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{Q}(x, \sin x)$ $(0\le x\le \pi)$는 곡선 $y=\sin x$ 위를 움직인다. 이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sin x$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면



$$S(x)=\sin^2 x$$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

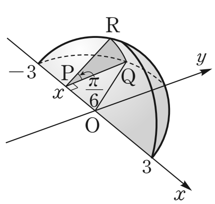
$$V=\int_0^\pi S(x)\,dx=\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$$

$$=\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$

답 $\frac{\pi}{2}$

140-1 오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점, 밑면의 지름을 x축으로 정하고, x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$ $(-3\le x\le 3)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면을 부채꼴 PQR라 하자. 이때



$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{9-x^2}$$

이므로 부채꼴 PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}(9-x^2)$$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_{-3}^3 S(x)\,dx=\int_{-3}^3 \frac{\pi}{12}(9-x^2)\,dx$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{12}\int_0^3 (9-x^2)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{6}\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=3\pi$$

답 3π

중단원 연습 문제

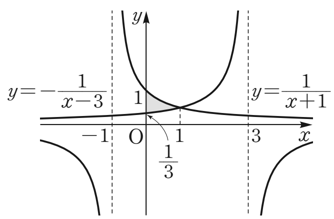
본책 341~345쪽

01 $\ln\frac{4}{3}$	02 ①	03 $\frac{2}{e}$	04 $\ln 2$	05 $\sqrt{3}-1$
06 ④	07 $\frac{\sqrt{3}}{4}$	08 $\ln 100$	09 ③	10 3π
11 $\frac{e^3}{e^2-1}$	12 ③	13 ③	14 ⑤	15 ②
16 $\frac{225}{2}\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$		17 $\frac{1}{2}$	18 ⑤	19 $\frac{128}{3}$

01 전략 두 함수의 그래프의 교점의 좌표를 구하고 위치 관계를 파악한다.

풀이 두 곡선의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{x-3}$에서

$$x-3=-x-1 \qquad \therefore x=1$$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1 \left\{\frac{1}{x+1}-\left(-\frac{1}{x-3}\right)\right\}dx$$

$$=\Big[\ln|x+1|+\ln|x-3|\Big]_0^1$$

$$=2\ln 2-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$$

답 $\ln\frac{4}{3}$

다른 풀이 $y=\dfrac{1}{x+1}$에서

$xy+y=1 \qquad \therefore x=\dfrac{1}{y}-1$

또 $y=-\dfrac{1}{x-3}$에서

$xy-3y=-1 \qquad \therefore x=-\dfrac{1}{y}+3$

두 곡선의 교점의 y좌표는 $\dfrac{1}{y}-1=-\dfrac{1}{y}+3$에서

$\dfrac{2}{y}=4 \qquad \therefore y=\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{y}+3\right)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{y}-1\right)dy\\&=\Big[-\ln|y|+3y\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}+\Big[\ln|y|-y\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}\\&=\left(\frac{1}{2}+\ln 2-\ln 3\right)+\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right)\\&=2\ln 2-\ln 3\\&=\ln\frac{4}{3}\end{aligned}$$

02 전략 $\displaystyle\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 곡선 $y=\ln(x+1)$과 직선 $y=a$의 교점의 x좌표를 k라 하면

$$\int_0^k\{a-\ln(x+1)\}dx=\int_k^{e-1}\{\ln(x+1)-a\}dx$$

$$\int_0^k a\,dx+\int_k^{e-1}a\,dx$$

$$=\int_0^k \ln(x+1)dx+\int_k^{e-1}\ln(x+1)dx$$

$$\int_0^{e-1}a\,dx=\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$$

$$\Big[ax\Big]_0^{e-1}=\Big[x\ln(x+1)\Big]_0^{e-1}-\int_0^{e-1}\frac{x}{x+1}dx$$

$$a(e-1)=e-1-\int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$a(e-1)=e-1-\Big[x-\ln|x+1|\Big]_0^{e-1}$$

$$a(e-1)=e-1-(e-2)$$

$$\therefore a=\frac{1}{e-1}$$

답 ①

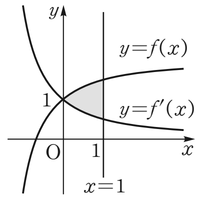
03 문제이해 • $f(x)=2-e^{-x}$에서

$f'(x)=e^{-x}$ ➔ 20% 배점

해결과정 • 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f'(x)$의 교점의 x좌표는 $2-e^{-x}=e^{-x}$에서

$e^{-x}=1 \qquad \therefore x=0$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 넓이를 S라 하면



$$\begin{aligned}S&=\int_0^1(2-e^{-x}-e^{-x})dx\\&=\int_0^1(2-2e^{-x})dx\\&=\Big[2x+2e^{-x}\Big]_0^1\\&=\frac{2}{e}\end{aligned}$$

➔ 50% 배점

답 $\dfrac{2}{e}$

Remark

$y=e^{-x}$의 그래프는 $y=e^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이고, $y=2-e^{-x}$의 그래프는 $y=e^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 다음 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

04 전략 먼저 주어진 세 부등식의 영역을 좌표평면에 나타내어 본다.

풀이 두 곡선 $y=e^x-1$과 $y=2e^{-x}$의 교점의 x좌표는

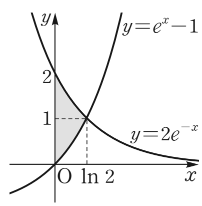
$e^x-1=2e^{-x}, \qquad (e^x)^2-e^x-2=0$

$(e^x+1)(e^x-2)=0$

그런데 $e^x>0$이므로 $\qquad e^x=2$

$\therefore x=\ln 2$

따라서 주어진 세 부등식의 영역을 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\ln 2}\{2e^{-x}-(e^x-1)\}dx\\&=\Big[-2e^{-x}-e^x+x\Big]_0^{\ln 2}\\&=(-3+\ln 2)-(-3)\\&=\ln 2\end{aligned}$$

답 $\ln 2$

다른 풀이 $y=e^x-1$에서 $\qquad x=\ln(y+1)\ (y>-1)$

$y=2e^{-x}$에서 $\qquad x=-\ln\dfrac{y}{2}\ (y>0)$

두 곡선의 교점의 y좌표는

$$\ln(y+1)=-\ln\frac{y}{2},\qquad y+1=\frac{2}{y}$$

$$y^2+y-2=0,\qquad (y+2)(y-1)=0$$

$$\therefore\ y=1\,(\because\ y>0)$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^1\ln(y+1)dy+\int_1^2\left(-\ln\frac{y}{2}\right)dy\\
&=\int_0^1\ln(y+1)dy-\int_1^2(\ln y-\ln 2)\,dy\\
&=\int_0^1\ln(y+1)dy-\int_1^2\ln y\,dy+\ln 2\int_1^2 dy\\
&=\Big[\,y\ln(y+1)\,\Big]_0^1-\int_0^1\frac{y}{y+1}\,dy\\
&\quad-\Big[\,y\ln y\,\Big]_1^2+\int_1^2 dy+\ln 2\Big[\,y\,\Big]_1^2\\
&=\ln 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy-2\ln 2+\Big[\,y\,\Big]_1^2+\ln 2\\
&=\ln 2-\Big[\,y-\ln|y+1|\,\Big]_0^1-2\ln 2+1+\ln 2\\
&=\ln 2-(1-\ln 2)-2\ln 2+1+\ln 2\\
&=\ln 2
\end{aligned}$$

05 해결과정 • $y=\sqrt{3}\cos x$와 $y=\sin x$의 교점의 x좌표는

$$\sqrt{3}\cos x=\sin x,\qquad \sin x-\sqrt{3}\cos x=0$$

$$2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=0$$

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\therefore\ x=\frac{\pi}{3}\left(\because\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$$ ➔ 30% 배점

$$\begin{aligned}
A&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sqrt{3}\cos x-\sin x)dx\\
&=\Big[\sqrt{3}\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=1
\end{aligned}$$ ➔ 30% 배점

$$\begin{aligned}
A+B&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3}\cos x\,dx\\
&=\Big[\sqrt{3}\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}
\end{aligned}$$

이므로

$$B=\sqrt{3}-A=\sqrt{3}-1$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore\ AB=\sqrt{3}-1$ ➔ 10% 배점

답 $\sqrt{3}-1$

06 (전략) 단면의 넓이를 주어진 구간에서 적분한다.

(풀이) x좌표가 t일 때의 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=2e^t+1$$

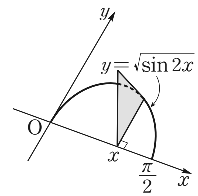
따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$\begin{aligned}
V&=\int_{-1}^1 S(t)dt=\int_{-1}^1(2e^t+1)dt\\
&=\Big[\,2e^t+t\,\Big]_{-1}^1=2\left(e-\frac{1}{e}+1\right)
\end{aligned}$$

답 ④

07 (전략) 밑면을 좌표평면에 나타낸다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 x축 위의 한 점 $(x,\ 0)\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\sin 2x}$인 정삼각형이므로 그 넓이를 $S(x)$라 하면



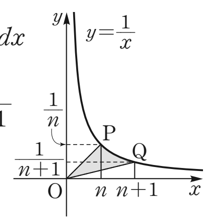
$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{\sin 2x})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x$$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}S(x)dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx\\
&=\frac{\sqrt{3}}{4}\Big[-\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

08 (전략) 보조선을 그어 도형을 분할한 후 넓이 a_n을 구한다.



(풀이)
$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{2}\cdot n\cdot\frac{1}{n}+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\\
&\quad-\frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot\frac{1}{n+1}\\
&=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\\
&=\Big[\ln|x|\Big]_n^{n+1}\\
&=\ln|n+1|-\ln|n|=\ln\left|\frac{n+1}{n}\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \sum_{n=1}^{99}a_n&=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{100}{99}\\
&=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{100}{99}\right)\\
&=\ln 100
\end{aligned}$$

답 $\ln 100$

09 (전략) 정적분을 이용하여 B와 $A+B$의 값을 구하고, 이를 이용하여 $\frac{A}{B}$의 값을 구한다.

(풀이) $\log_b x=\frac{\ln x}{\ln b}$이므로

$$B=\int_p^q \log_b x\,dx=\frac{1}{\ln b}\int_p^q \ln x\,dx$$
$$=\frac{1}{\ln b}\left(\Big[x\ln x\Big]_p^q-\int_p^q dx\right)$$
$$=\frac{1}{\ln b}\left\{(q\ln q-p\ln p)-\Big[x\Big]_p^q\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln b}\{(q\ln q-p\ln p)-(q-p)\} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$이므로

$$A+B=\int_p^q \log_a x\,dx=\frac{1}{\ln a}\int_p^q \ln x\,dx$$
$$=\frac{1}{\ln a}\left(\Big[x\ln x\Big]_p^q-\int_p^q dx\right)$$
$$=\frac{1}{\ln a}\left\{(q\ln q-p\ln p)-\Big[x\Big]_p^q\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln a}\{(q\ln q-p\ln p)-(q-p)\} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면

$$\frac{A+B}{B}=\frac{\ln b}{\ln a},\qquad \frac{A}{B}+1=\log_a b$$
$$\therefore \frac{A}{B}=\log_a b-1$$

답 ③

10 (전략) 주어진 식을 $y=f(x)$ 꼴로 변형하여 정적분의 값을 구한다.

(풀이) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$에서

$$y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\ (x\ge 0)$$

구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$$

이때 $x=4\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=4\cos\theta$이고, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=4$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$S=\int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4}\sqrt{16(1-\sin^2\theta)}\cdot 4\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 12\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$=6\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=3\pi$$

답 3π

11 해결과정 • 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=a_{n+1}$, $x=a_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 2이므로

$\int_{a_{n+1}}^{a_n}\frac{1}{x}\,dx=2$에서 ➔ 30% 배점

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n}\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln|x|\Big]_{a_{n+1}}^{a_n}=\ln a_n-\ln a_{n+1}$$
$$=\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=2$$

$\frac{a_n}{a_{n+1}}=e^2 \qquad \therefore a_{n+1}=\frac{1}{e^2}a_n$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 e이고, 공비가 $\frac{1}{e^2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{e}{1-\frac{1}{e^2}}=\frac{e^3}{e^2-1}$$ ➔ 40% 배점

답 $\frac{e^3}{e^2-1}$

12 (전략) $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$임을 이용한다.

(풀이) A와 B의 넓이가 같으므로

$$\int_0^k x\sin x\,dx=\int_k^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\sin x\right)dx$$
$$\int_0^k x\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_k^{\frac{\pi}{2}}dx-\int_k^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$
$$\int_0^k x\sin x\,dx+\int_k^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_k^{\frac{\pi}{2}}dx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_k^{\frac{\pi}{2}}dx$$
$$\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{\pi}{2}\Big[x\Big]_k^{\frac{\pi}{2}}$$

12 정적분의 활용

$$\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{k}{2}\pi$$

$$1=\frac{\pi^2}{4}-\frac{k}{2}\pi, \qquad \frac{k}{2}\pi=\frac{\pi^2}{4}-1$$

$$\therefore k=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$$

답 ③

13 전략 $\{$(위의 식)$-$(아래의 식)$\}$을 적분하여 두 곡선 사이의 넓이를 구한다.

풀이 두 곡선 $y=e^x$과 $y=xe^x$의 교점의 x좌표는

$$e^x=xe^x, \qquad (x-1)e^x=0$$

$$\therefore x=1\ (\because e^x>0)$$

$$a=\int_0^1 (e^x-xe^x)dx=\int_0^1 (1-x)e^x dx$$

$$=\left[(1-x)e^x\right]_0^1+\int_0^1 e^x dx$$

$$=-1+\left[e^x\right]_0^1=-1+(e-1)=e-2$$

$$b=\int_1^2 (xe^x-e^x)dx=\int_1^2 (x-1)e^x dx$$

$$=\left[(x-1)e^x\right]_1^2-\int_1^2 e^x dx$$

$$=e^2-\left[e^x\right]_1^2=e^2-(e^2-e)=e$$

$$\therefore b-a=e-(e-2)=2$$

답 ③

다른 풀이 두 곡선 $y=e^x$과 $y=xe^x$의 교점의 x좌표를 t라 하면

$$a=\int_0^t (e^x-xe^x)dx$$

$$b=\int_t^2 (xe^x-e^x)dx$$

$$\therefore b-a=\int_t^2 (xe^x-e^x)dx-\int_0^t (e^x-xe^x)dx$$

$$=\int_t^2 (xe^x-e^x)dx+\int_0^t (xe^x-e^x)dx$$

$$=\int_0^2 (xe^x-e^x)dx$$

$$=\int_0^2 (x-1)e^x dx$$

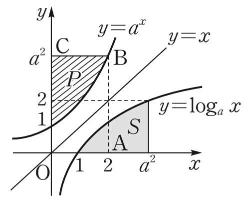
$$=\left[(x-1)e^x\right]_0^2-\int_0^2 e^x dx$$

$$=(e^2+1)-\left[e^x\right]_0^2$$

$$=(e^2+1)-(e^2-1)=2$$

14 전략 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $y=a^x$은 $y=\log_a x$의 역함수이므로 $y=a^x$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



$S=\int_1^{a^2} \log_a x\,dx$이고 오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이를 P라 하면 $S=P$이므로

$\int_0^2 a^x dx$의 값은 직사각형 OABC의 넓이에서 P를 뺀 것과 같다.

$$\therefore \int_0^2 a^x dx=2a^2-S$$

답 ⑤

다른 풀이 $S=\int_1^{a^2} \log_a x\,dx=\int_1^{a^2} \frac{\ln x}{\ln a}dx$

$$=\frac{1}{\ln a}\int_1^{a^2} \ln x\,dx$$

$$=\frac{1}{\ln a}\left(\left[x\ln x\right]_1^{a^2}-\int_1^{a^2} dx\right)$$

$$=\frac{1}{\ln a}\left(a^2\ln a^2-\left[x\right]_1^{a^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\ln a}(a^2\ln a^2-a^2+1)$$

$$=2a^2-\frac{a^2}{\ln a}+\frac{1}{\ln a} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore \int_0^2 a^x dx=\left[\frac{a^x}{\ln a}\right]_0^2$$

$$=\frac{a^2}{\ln a}-\frac{1}{\ln a}$$

$$=2a^2-S\ (\because ㉠)$$

15 전략 단면이 한 변의 길이가 $\sqrt{1-t^2}$인 정사각형이므로 $1-t^2\geq 0$이어야 한다.

풀이 $x=t$일 때 단면인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{1-t^2}$이므로 $1-t^2\geq 0$에서

$$t^2-1\leq 0, \qquad (t+1)(t-1)\leq 0$$

$$\therefore -1\leq t\leq 1$$

단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=(\sqrt{1-t^2})^2=1-t^2$$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_{-1}^{1}S(t)dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt$$
$$=2\int_{0}^{1}(1-t^2)dt$$
$$=2\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

답 ②

16 전략 단면인 정삼각형의 한 변의 길이를 구한 후 단면의 넓이를 식으로 나타낸다.

풀이 단면인 정삼각형의 한 변의 길이를 a cm라 하면 이 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ cm이므로

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{3x}\qquad\therefore a=3\sqrt{x}$$

이때 단면의 넓이를 $S(x)\text{cm}^2$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(3\sqrt{x})^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}x\ (\text{cm}^2)$$

따라서 구하는 부피를 $V\text{ cm}^3$라 하면

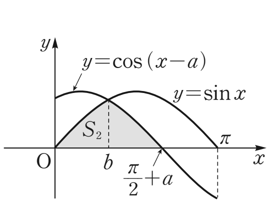
$$V=\int_0^{10}S(x)dx=\frac{9\sqrt{3}}{4}\int_0^{10}x\,dx$$
$$=\frac{9\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{10}=\frac{225}{2}\sqrt{3}\ (\text{cm}^3)$$

답 $\frac{225}{2}\sqrt{3}\text{ cm}^3$

Remark

정삼각형의 한 중선의 길이는 높이와 같고 삼각형의 무게중심은 중선을 꼭짓점으로부터 2 : 1로 내분하는 점이므로 무게중심에서 꼭짓점까지의 거리는 중선의 길이, 즉 높이의 $\frac{2}{3}$와 같다.

17 문제이해 • 곡선 $y=\sin x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2$$

➔ 30% 배점

해결과정 • S_1이 곡선 $y=\cos(x-a)$에 의하여 이등분되므로 위의 그림에서 색칠한 도형의 넓이를 S_2라 하면 $S_2=1$이다. 즉

$$S_2=\int_0^{b}\sin x\,dx+\int_b^{\frac{\pi}{2}+a}\cos(x-a)dx$$
$$=1\qquad\cdots\cdots ㉠$$

➔ 30% 배점

이때 $0\le x\le\frac{\pi}{2}+a$에서 $y=\sin x$의 그래프와 $y=\cos(x-a)$의 그래프는 직선 $x=b$에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^{b}\sin x\,dx=\int_b^{\frac{\pi}{2}+a}\cos(x-a)dx\ \cdots\cdots ㉡$$

➔ 30% 배점

답구하기 • ㉠, ㉡에서

$$2\int_b^{\frac{\pi}{2}+a}\cos(x-a)dx=1$$
$$\therefore\int_b^{\frac{\pi}{2}+a}\cos(x-a)dx=\frac{1}{2}$$

➔ 10% 배점

답 $\frac{1}{2}$

18 전략 먼저 주어진 조건을 이용하여 A_n을 구한다.

풀이 ㄱ. $f(x)>0$이므로 $\int_n^{n+1}f(x)dx$는 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=n$, $x=n+1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

또 두 점 P_n, Q_n에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P'_n, Q'_n이라 하면 직사각형 $P_nP'_nQ'_nQ_n$의 넓이는 $(n+1-n)f(n)$, 즉 $f(n)$이므로

$$\int_n^{n+1}f(x)dx=f(n)-(A_n+B_n)$$

ㄴ. $A_n=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\{f(n)-f(n+1)\}$

$$=\frac{1}{2}(e^{-n}-e^{-n-1})$$
$$=\frac{e^{-n-1}}{2}(e-1)$$
$$=\frac{e-1}{2}\cdot\frac{1}{e^{n+1}}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

따라서 수열 $\{A_n\}$은 첫째항이 $\frac{e-1}{2e^2}$, 공비가 $\frac{1}{e}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\frac{\frac{e-1}{2e^2}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{2e}$$

ㄷ. $\int_{n}^{n+1} f(x)dx = \int_{n}^{n+1} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_{n}^{n+1}$

$$= -e^{-n-1} + e^{-n} = \frac{e-1}{e^{n+1}}$$

$$= 2A_n \ (\because ㉠)$$

ㄱ에서 $2A_n = f(n) - (A_n + B_n)$이므로

$B_n = f(n) - 3A_n$

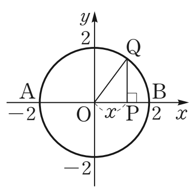
이때 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - 3\sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$= \frac{1}{e-1} - \frac{3}{2e} = \frac{3-e}{2e(e-1)}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

19 해결과정 • 오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점, 지름 AB를 x축으로 정하고, x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$ $(-2 \le x \le 2)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 이 원과 만나는 한 점을 Q라 하면



$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2^2 - x^2}$$

이때 점 P를 지나고 지름 AB에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $2\overline{\mathrm{PQ}}$인 정사각형이므로 그 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x) = (2\sqrt{2^2 - x^2})^2 = 4(4 - x^2)$$ ➔ 60% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V = \int_{-2}^{2} S(x)dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 4(4 - x^2)dx$$

$$= 2 \cdot 4\int_{0}^{2} (4 - x^2)dx$$

$$= 8\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{2} = \frac{128}{3}$$ ➔ 40% 배점

답 $\frac{128}{3}$