쎈 정답 및 풀이

I 집합과 명제

01 집합의 뜻과 표현 2
02 집합의 연산 14
03 명제 28

II 함수

04 함수 49
05 유리식과 유리함수 70
06 무리식과 무리함수 90

III 순열과 조합

07 순열과 조합 104

⋯→ 정답을 확인하려 할 때에는 「**빠른 정답 찾기**」를 이용하면 편리합니다.

01 집합의 뜻과 표현

0001 답 $\times$

0002 답 ○

0003 답 $\times$

0004 답 ○

0005 답 $\in$

0006 답 $\in$

0007 답 $\notin$

0008 답 $\in$

0009 답 $\in$

0010 답 $\notin$

0011 답 $\in$

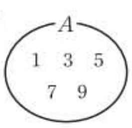
0012 답 $\in$

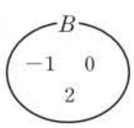
0013 답 $\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$

0014 답 $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

0015 답 $\{x \mid x$는 자연수$\}$

0016 답 $\{x \mid x$는 100 이하의 10의 양의 배수$\}$

0017 답 

0018 답 

0019 답 무

0020 답 유

0021 답 유, 공

0022 답 무

0023 답 3

0024 답 0

0025 $x^2-2x+1=0$에서 $\quad (x-1)^2=0$
$\therefore x=1$
따라서 $A=\{1\}$이므로 $\quad n(A)=1$ 답 1

0026 $x^2-3<0$에서 $\quad (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})<0$
$\therefore -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$
$1<\sqrt{3}<2$이므로 $\quad -2<-\sqrt{3}<-1$
이때 x는 정수이므로 x는 $-1, 0, 1$이다.
따라서 $A=\{-1, 0, 1\}$이므로 $\quad n(A)=3$ 답 3

0027 $X=\{3, 6, 9, \cdots\}$, $Y=\{6, 12, 18, \cdots\}$이므로
$Y \subset X$ 답 $Y \subset X$

0028 모든 정사각형은 마름모이므로
$X \subset Y$ 답 $X \subset Y$

0029 $x^2=4$에서 $\quad x=\pm 2$
따라서 $X=\{-2, 2\}$이므로
$Y \subset X$ 답 $Y \subset X$

0030 $X=\varnothing$
$|y| \le 1$에서 $\quad -1 \le y \le 1$
이때 y는 정수이므로 y는 $-1, 0, 1$이다.
따라서 $Y=\{-1, 0, 1\}$이므로
$X \subset Y$ 답 $X \subset Y$

0031 답 $\varnothing$

0032 답 $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

0033 답 $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

0034 답 $\{a, b, c\}$

0035 답 $\varnothing, \{\varnothing\}$

0036 답 $\varnothing, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}$

0037 답 $\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}$

0038 답 $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$

0039 $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
ㄱ. $2 \in A$ ㄴ. $17 \in A$
ㄷ. 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\quad \varnothing \subset A$
ㄹ. $4 \notin A$이므로 $\quad \{4, 15\} \not\subset A$
ㅁ. $1 \notin A$이므로 $\quad \{1, 13, 19\} \not\subset A$
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

0040 답 $A=B$

0041 $x^2-3x=0$에서 $\quad x(x-3)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=3$
따라서 $A=\{0, 3\}$이므로
$A \neq B$ 답 $A \neq B$

0042 $A=\{8,\ 16,\ 24,\ 32,\ \cdots\}$이므로

$A=B$ 　　답 $A=B$

0043 $B=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$이므로

$A\neq B$ 　　답 $A\neq B$

0044 9의 양의 약수는 1, 3, 9이므로 집합 $\{1,\ 3,\ 9\}$의 진부분집합은

$\varnothing,\ \{1\},\ \{3\},\ \{9\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 9\},\ \{3,\ 9\}$

답 풀이 참조

0045 $n(A)=5$이므로 부분집합의 개수는

$2^5=32$ 　　답 32

0046 $n(A)=5$이므로 진부분집합의 개수는

$2^5-1=31$ 　　답 31

0047 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$ ─ 집합 $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합의 개수와 같다. 　　답 16

0048 1, 3을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$ ─ 집합 $\{2,\ 4,\ 5\}$의 부분집합의 개수와 같다. 　　답 8

유형 01 집합과 원소 　본책 12쪽

집합 ➡ 어떤 조건에 의하여 그 대상을 분명히 정할 수 있는 것들의 모임

0049 '훌륭한', '가까운', '작은', '잘 어울리는'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

답 ④

0050 '높은', '큰'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ의 3개이다. 　　답 ③

0051 $x^3+2x^2-3x=0$에서

$x(x^2+2x-3)=0,\qquad x(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 $0\in A,\ 1\in A,\ 2\notin A,\ 3\notin A$이므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 　　답 ①

0052 ① $\sqrt{2}$는 실수이므로 　$\sqrt{2}\in R$

② i는 허수이므로 　$i\notin R$

③ $i^4=1$은 실수이므로 　$i^4\in R$

④ $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$은 무리수이므로 　$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\notin Q$

⑤ $\sqrt{9}=3$은 유리수이므로 　$\sqrt{9}\in Q$ 　　답 ③

유형 02 집합의 표현 방법 　본책 12쪽

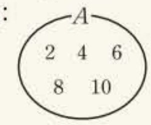
집합을 나타내는 방법에는 원소나열법, 조건제시법, 벤다이어그램이 있다.

예 10 이하의 짝수인 자연수의 집합을 A라 할 때

① 원소나열법: $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

② 조건제시법: $A=\{x\,|\,x$는 10 이하의 짝수인 자연수$\}$

③ 벤다이어그램:



0053 ① $A=\{1,\ 5\}$

② $A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$

③ $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$

④ $A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$

⑤ $A=\{5,\ 10,\ 15\}$ 　　답 ③

0054 ④ $\{2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9\}$ 　　답 ④

0055 ① $6=2^1\times3^1$

② $12=2^2\times3^1$

③ $18=2^1\times3^2$

④ $45=3^2\times5^1$

⑤ $54=2^1\times3^3$ 　　답 ④

0056 □보다 작은 5의 양의 배수가 5, 10, 15, 20, 25이므로 □ 안에 들어갈 수 있는 자연수는 26, 27, 28, 29, 30의 5개이다. 　　답 5

참고 □$=25$일 때, $\{x\,|\,x$는 25보다 작은 5의 양의 배수$\}$를 원소나열법으로 나타내면 　$\{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$

유형 03 유한집합과 무한집합 　본책 13쪽

① 유한집합 ➡ 원소가 유한개인 집합

② 무한집합 ➡ 원소가 무수히 많은 집합

③ 공집합 ➡ 원소가 하나도 없는 집합

0057 ② $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\}$: 무한집합

③ $\{1\}$: 유한집합

④ $\left\{\cdots,\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \cdots\right\}$: 무한집합

⑤ $\{a+b\,|\,0<a+b<2\}$: 무한집합 　　답 ③

0058 ① 원소가 1개 있으므로 공집합이 아니다.
③ $\{x|-1<x<1\}$이므로 공집합이 아니다.
④ $\{1\}$이므로 공집합이 아니다.
⑤ $\{-1\}$이므로 공집합이 아니다.

답 ②

0059 6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 집합 A가 공집합이 되려면 $1\notin A$, $2\notin A$, $3\notin A$, $6\notin A$이어야 한다. ⋯ ❶
따라서 k의 값이 될 수 있는 자연수는 6, 7, 8, 9이므로 구하는 합은

$6+7+8+9=30$ ⋯ ❷

답 30

채점 기준	비율
❶ 집합 A가 공집합이 되기 위한 조건을 알 수 있다.	40 %
❷ 모든 k의 값의 합을 구할 수 있다.	60 %

참고 $k=5$일 때, $A=\{x|x$는 $5<x<10$인 6의 양의 약수$\}$이므로
$A=\{6\}$
$k=6$일 때, $A=\{x|x$는 $6<x<10$인 6의 양의 약수$\}$이므로 $A=\varnothing$

유형 04 유한집합의 원소의 개수

본책 13쪽

$n(A)$ ➡ 유한집합 A의 원소의 개수
예 $n(\varnothing)=0$, $n(\{\varnothing\})=1$, $n(\{1, 2\})=2$

0060 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{11, 22, 33, \cdots, 99\}$
$x^2+2\le 0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 $C=\varnothing$
따라서 $n(A)=5$, $n(B)=9$, $n(C)=0$이므로

$n(B)+n(C)-n(A)=4$

답 ①

0061 ① $n(\{1, 2, 3\})=n(\{4, 5, 6\})=3$
② $A=\{0\}$이면 $n(A)=1$이다.
③ $n(A)=0$이면 $A=\varnothing$이다.
④ $n(\{\varnothing\})-n(\varnothing)=1-0=1$
⑤ $n(\{60\})-n(\{55\})=1-1=0$

답 ④

0062 $A=\{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$이므로

$n(A)=4$ ⋯ ❶

또 $n(B)=k$이므로 $n(A)+n(B)=11$에서

$4+k=11$ $\therefore k=7$ ⋯ ❷

답 7

채점 기준	비율
❶ $n(A)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %

0063 이차방정식 $x^2+3x+4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=3^2-4\cdot 4=-7<0$

이므로 이차방정식 $x^2+3x+4=0$은 실근을 갖지 않는다.

$\therefore n(A)=0$

이때 $n(A)=n(B)$가 되려면 $n(B)=0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2-2kx+7k=0$은 실근을 갖지 않아야 한다.
이차방정식 $x^2-2kx+7k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-k)^2-7k<0$

$k(k-7)<0$ $\therefore 0<k<7$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, ⋯, 6의 6개이다.

답 ①

0064 $\sqrt{16}=4$ 이하의 자연수는 1, 2, 3, 4의 4개이므로

$n(A_{16})=4$

$\sqrt{27}$ 이하의 자연수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이므로

$n(A_{27})=5$

$\therefore n(A_k)=n(A_{16})+n(A_{27})=9$

즉 $\sqrt{k}$ 이하의 자연수의 개수가 9이려면

$9\le\sqrt{k}<10$ $\therefore 81\le k<100$

따라서 자연수 k는 81, 82, 83, ⋯, 99의 19개이다.

답 ④

유형 05 새로운 집합 구하기

본책 14쪽

주어진 집합의 원소를 이용하여 새로운 집합을 만들 때에는 표를 이용하여 원소를 구하는 것이 편리하다. 이때 같은 원소는 중복하여 나열하지 않고, 원소를 빠짐없이 구해야 함에 주의한다.

0065 집합 A의 두 원소 a, b에 대하여 ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	-1	0	2
-1	1	0	-2
0	0	0	0
2	-2	0	4

$X=\{-2, 0, 1, 4\}$

따라서 집합 X의 모든 원소의 합은

$-2+0+1+4=3$

답 3

0066 $B=\{2, 3, 5, 7\}$
$x\in A$, $y\in B$인 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	2	3	5	7
1	3	4	6	8
2	4	5	7	9
3	5	6	8	10

$C=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\therefore n(C)=8$

답 ④

0067 $x\in A$, $y\in B$인 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	2	4	6
1	3	5	7
2	4	6	8
3	5	7	9
a	$a+2$	$a+4$	$a+6$

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $a+2$, $a+4$, $a+6$ ⋯ ❶

이때 $n(X)=9$가 되려면 $a+2$, $a+4$, $a+6$ 중 하나만 3, 4, 5, ⋯, 9 중 하나와 같아야 한다.
한편 a는 자연수이므로

$3\le a+2<a+4<a+6$

즉 $a+2$만 3, 4, 5, …, 9 중 하나와 같아야 하므로

$3\le a+2\le 9$, $a+4>9$

$\therefore 5<a\le 7$

따라서 자연수 a의 최댓값은 7이다. …❷

답 7

채점 기준	비율
❶ $x+y$의 값을 모두 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 최댓값을 구할 수 있다.	60 %

참고 $a+6$이 3, 4, 5, …, 9 중 하나와 같은 경우

$a+4<3$, $3\le a+6\le 9$ $\therefore -3\le a<-1$

따라서 a가 자연수라는 조건에 맞지 않는다.

0068 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

x \ y	a	b	c
a	$2a$	$a+b$	$a+c$
b	$a+b$	$2b$	$b+c$
c	$a+c$	$b+c$	$2c$

이때 $a<b<c$이므로

$2a<a+b<a+c$,

$a+b<2b<b+c$,

$a+c<b+c<2c$

그런데 $a+c$와 $2b$의 대소 관계는 알 수 없다.

(i) $a+c=2b$일 때,

$B=\{2a,\ a+b,\ a+c,\ b+c,\ 2c\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$2a+(a+b)+(a+c)+(b+c)+2c=40$

$4(a+c)+2b=40$, $8b+2b=40$

$10b=40$ $\therefore b=4$

즉 $a+c=8$이므로 순서쌍 (a, b, c)는

$(1, 4, 7)$, $(2, 4, 6)$, $(3, 4, 5)$의 3개

(ii) $a+c\ne 2b$일 때,

$B=\{2a,\ a+b,\ a+c,\ 2b,\ b+c,\ 2c\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$2a+(a+b)+(a+c)+2b+(b+c)+2c=40$

$4(a+b+c)=40$ $\therefore a+b+c=10$

즉 순서쌍 (a, b, c)는

$(1, 2, 7)$, $(1, 3, 6)$, $(1, 4, 5)$, $(2, 3, 5)$의 4개

(i), (ii)에서 구하는 집합 A의 개수는

$3+4=7$

답 7

유형 06 기호 ∈, ⊂의 사용

본책 15쪽

① 원소와 집합 사이의 관계
➡ $\in$, $\notin$를 사용하여 나타낸다.
② 집합과 집합 사이의 포함 관계
➡ $\subset$, $\not\subset$를 사용하여 나타낸다.

0069 ① a는 집합 A의 원소이므로 $\{a\}\subset A$ — 또는 $a\in A$

② $\{b\}$는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{b\}\notin A$

③ $\{b, c\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{b, c\}\in A$

④ $b\notin A$이므로 $\{a, b\}\not\subset A$

⑤ $b\notin A$, $c\notin A$이므로 $\{a, b, c\}\not\subset A$

답 ③

SSEN 특강 집합을 원소로 갖는 집합

집합 $A=\{a, \{b, c\}\}$는 집합을 원소로 갖는 집합이다. 집합 A의 원소는 a와 $\{b, c\}$이고, 집합 $\{\{b, c\}\}$는 집합 A의 부분집합이다. 즉

$a\in A$, $\{b, c\}\in A$, $\{\{b, c\}\}\subset A$

0070 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$

③ $\{1, 2, 3\}\subset B$

답 ③

0071 ① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$

②, ④ $1\in A$, $3\in A$이므로 $\{1, 3\}\subset A$

⑤ $\{2\}\notin A$

답 ⑤

유형 07 집합 사이의 포함 관계

본책 15쪽

집합 사이의 포함 관계는 각 집합을 원소나열법으로 나타내어 두 집합의 모든 원소를 비교하여 판단한다.
➡ 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속하면 $A\subset B$이다.

0072 $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{0\}$, $Z=\{0, \overset{|-1|=|1|=1}{1}\}$이므로

$Y\subset Z\subset X$

답 ④

0073 주어진 벤다이어그램에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $A\subset B$이다.

① $A\not\subset B$, $B\not\subset A$

② $B\subset A$

③ $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $B=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이므로

$B\subset A$

④ $A=\{3, 6, 9\}$, $B=\{1, 3, 5, 15\}$이므로

$A\not\subset B$, $B\not\subset A$

⑤ $A\subset B$

답 ⑤

0074 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $x-2y$, $x-y$의 값을 구하면 각각 다음 [표 1], [표 2]와 같다.

x \ y	0	1	2
0	0	-2	-4
1	1	-1	-3
2	2	0	-2

[표 1]

x \ y	0	1	2
0	0	-1	-2
1	1	0	-1
2	2	1	0

[표 2]

따라서 $B=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$,

$C=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$이므로

$A\subset C\subset B$

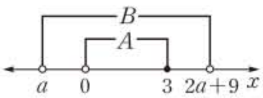
답 ②

유형 08 집합 사이의 포함 관계가 성립하도록 하는 상수 구하기

본책 16쪽

집합 사이의 포함 관계가 성립하도록 하는 상수를 구할 때에는
① 각 집합을 원소나열법으로 나타내어 각 원소를 비교한다.
➡ $A\subset B$이면 A의 원소는 모두 B의 원소이다.
② 집합을 수직선에 나타내어 포함 관계가 성립할 조건을 찾는다.

0075 $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



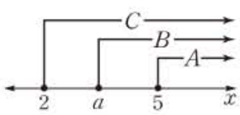
$a\le 0$, $2a+9>3$

$2a+9>3$에서 $a>-3$이므로

$-3<a\le 0$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0의 3개이다. 답 3

0076 $A\subset B\subset C$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$2\le a\le 5$

따라서 정수 a는 2, 3, 4, 5의 4개이다. 답 ④

0077 $x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$\therefore A=\{-3, 2\}$ ⋯ ❶

$A\subset B$이려면 $a>2$ ⋯ ❷

따라서 정수 a의 최솟값은 3이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0078 $A\subset B$이므로 $4\in A$에서 $4\in B$

$\therefore 2-a=4$ 또는 $b+6=4$

(i) $2-a=4$, 즉 $a=-2$일 때,

$A=\{-3, 4\}$, $B=\{1, 4, b+6\}$이므로 $A\subset B$이려면

$b+6=-3$ $\therefore b=-9$

$\therefore a+b=-11$

(ii) $b+6=4$, 즉 $b=-2$일 때,

$A=\{4, a-1\}$, $B=\{1, 2-a, 4\}$이므로 $A\subset B$이려면

$a-1=1$ 또는 $a-1=2-a$

$\therefore a=2$ 또는 $a=\dfrac{3}{2}$

$\therefore a+b=0$ 또는 $a+b=-\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $M=0$, $m=-11$이므로

$M-m=11$ 답 ⑤

유형 09 부분집합 구하기

본책 16쪽

집합 $A=\{1, 2, 3\}$의 부분집합을 모두 구하면
➡ 원소가 0개인 것: $\varnothing$
원소가 1개인 것: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$
원소가 2개인 것: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$
원소가 3개인 것: $\{1, 2, 3\}$

0079 n은 2, 3, 5이므로 주어진 집합은 $\{4, 7, 13\}$

따라서 구하는 부분집합은

$\varnothing$, $\{4\}$, $\{7\}$, $\{13\}$, $\{4, 7\}$, $\{4, 13\}$, $\{7, 13\}$, $\{4, 7, 13\}$

답 풀이 참조

0080 집합 $P(A)$는 집합 A의 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로 $P(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

따라서 집합 $P(A)$의 원소가 아닌 것은 ④ $\{\varnothing\}$이다. 답 ④

0081 $A=\{3, 6, 9, 12\}$에 대하여 $B\subset A$이고 $n(B)=3$을 만족시키는 집합 B는 A의 부분집합 중에서 원소가 3개인 집합이므로

$\{3, 6, 9\}$, $\{3, 6, 12\}$, $\{3, 9, 12\}$, $\{6, 9, 12\}$

의 4개이다. 답 4

0082 집합 A의 부분집합 중에서 모든 원소의 합이 20 이상이 되려면 원소가 3개 이상이어야 한다.

(i) 원소가 3개인 경우

$\{2, 8, 10\}$, $\{4, 6, 10\}$, $\{4, 8, 10\}$, $\{6, 8, 10\}$의 4개이다. ⋯ ❶

(ii) 원소가 4개인 경우

$\{2, 4, 6, 8\}$, $\{2, 4, 6, 10\}$, $\{2, 4, 8, 10\}$, $\{2, 6, 8, 10\}$, $\{4, 6, 8, 10\}$의 5개이다. ⋯ ❷

(iii) 원소가 5개인 경우

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$의 1개이다. ⋯ ❸

이상에서 구하는 부분집합의 개수는

$4+5+1=10$ ⋯ ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ 원소가 3개일 때의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 원소가 4개일 때의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 원소가 5개일 때의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 원소의 합이 20 이상인 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	10 %

유형 10 서로 같은 집합

본책 17쪽

$A\subset B$, $B\subset A$ ➡ $A=B$ ➡ 두 집합 A, B의 모든 원소가 같다.

0083 $A=B$이므로 $a^2-2a=3$

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

(i) $a=-1$일 때,

$A=\{-2, 3, 4\}$, $B=\{-2, 3, 4\}$이므로

$A=B$

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{3, 6, 8\}$, $B=\{-2, 3, 4\}$이므로

$A\neq B$

(i), (ii)에서 $a=-1$

답 -1

0084 $A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$

이때 $x-2<x+1<x+3$이므로

$x-2=3$, $x+1=6$, $x+3=8$

$\therefore x=5$

답 ③

0085 ㄱ. $\{2, 4\}$ ㄴ. $\{1, 2, 4\}$

ㄷ. $\{2, 4, 6\}$ ㄹ. $\{2, 4\}$

이상에서 집합 A와 서로 같은 집합인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

0086 $A=B$이므로

$a+2b=-5$, $2a-3b=4$ ··· ❶

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-2$ ··· ❷

$\therefore ab=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 두 일차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0087 $A=B$이므로

$a^2=9$, $b^2-4b=5$

$a^2=9$에서 $a=-3$ 또는 $a=3$

$b^2-4b=5$에서 $b^2-4b-5=0$

$(b+1)(b-5)=0$

$\therefore b=-1$ 또는 $b=5$

따라서 $a=-3$, $b=-1$일 때 $a+b$의 값은 최소이고 그 값은

-4

답 ②

유형 11 부분집합의 개수

본책 17쪽

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

① A의 부분집합의 개수 ➡ 2^n

② A의 진부분집합의 개수

➡ 부분집합 중에서 자기 자신을 제외한 집합의 개수

➡ 2^n-1

0088 $n(A)=a$, $n(B)=b$라 하면

$2^a=64$, $2^b-1=127$

$2^a=64=2^6$에서 $a=6$

$2^b=128=2^7$에서 $b=7$

$\therefore n(A)+n(B)=13$

답 ③

0089 $x^3-3x^2-x+3=0$에서

$x^2(x-3)-(x-3)=0$

$(x^2-1)(x-3)=0$

$(x+1)(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$ ··· ❶

$\therefore A=\{1, 3\}$ ··· ❷

즉 $n(A)=2$이므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^2=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 방정식 $x^3-3x^2-x+3=0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 집합 A의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %

참고 조립제법을 이용하여

x^3-3x^2-x+3을 인수분해할 수도 있다.

$\therefore x^3-3x^2-x+3$

$=(x+1)(x-1)(x-3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ & & -1 & 4 & -3 \\ \hline 1 & 1 & -4 & 3 & \boxed{0} \\ & & 1 & -3 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

0090 집합 A의 원소 중에서 12의 약수는

1, 2, 3, 4, 6, 12

구하는 부분집합은 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로

$2^6-1=63$

답 63

0091 $3x^2-14x-5<0$에서

$(3x+1)(x-5)<0$

$\therefore -\frac{1}{3}<x<5$

$\therefore A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$

이때 집합 X는 집합 A의 진부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는

$2^5-1-1=30$

답 30

유형 12 특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수

본책 18쪽

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

① A의 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수

➡ 2^{n-k} (단, $k<n$)

② A의 특정한 원소 l개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수

➡ 2^{n-l} (단, $l<n$)

③ A의 원소 중에서 k개는 반드시 원소로 갖고, l개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수

➡ 2^{n-k-l} (단, $k+l<n$)

0092 $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
집합 X는 A의 진부분집합이고, 1, 2를 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는 ─ 집합 $\{3, 6, 9, 18\}$의 진부분집합의 개수와 같다.

$2^{6-2}-1=2^4-1=15$ 답 15

0093 2, 3을 반드시 원소로 갖고 7을 원소로 갖지 않는 부분집합 X의 개수는

$2^{7-2-1}=2^4=16$ 답 ④

0094 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
집합 A의 원소 중에서 4의 약수는 1, 2, 4이므로 이를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{9-3}=2^6=64$ 답 64

0095 두 개의 홀수를 원소로 가지려면 홀수 중에서 1, 5 또는 1, 7 또는 5, 7만을 원소로 가져야 한다. ··· ❶
이때 집합 A의 부분집합 중에서 1, 5를 반드시 원소로 갖고 7을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 ─ 홀수 중 1, 5만을 원소로 갖는 부분집합

$2^{7-2-1}=2^4=16$

마찬가지로 홀수 중에서 1, 7 또는 5, 7만을 원소로 갖는 집합 A의 부분집합의 개수도 각각 16이므로 구하는 부분집합의 개수는

$16\cdot3=48$ ··· ❷

답 48

채점 기준	비율
❶ 두 개의 홀수를 원소로 갖는 집합의 조건을 알 수 있다.	30 %
❷ 두 개의 홀수를 원소로 갖는 집합의 개수를 구할 수 있다.	70 %

0096 $n(A)=k$이므로 1, 2를 반드시 원소로 갖고 3, 4, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{k-2-3}=32=2^5$

$k-5=5$ $\quad\therefore k=10$ 답 ③

유형 13 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수 본책 18쪽

$A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수
➡ B의 부분집합 중에서 A의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수

0097 $x^2-7x+10=0$에서 $\quad (x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=5$

$\therefore A=\{2, 5\}$

$x^2-4x-5\le0$에서 $\quad (x+1)(x-5)\le0$

$\therefore -1\le x\le5$

$\therefore B=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 X의 개수는 B의 부분집합 중에서 2, 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-2}=2^5=32$ 답 ④

0098 집합 X의 개수는 B의 부분집합 중에서 a, b, f를 반드시 원소로 갖고 d를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로 $\quad 2^{6-3-1}=2^2=4$ 답 ②

0099 $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ─ 12의 양의 약수의 집합 ··· ❶
따라서 집합 X의 개수는 B의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 6을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로 ··· ❷

$2^{6-4}=2^2=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 조건을 만족시키는 집합 X의 개수와 같은 경우를 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0100 집합 X의 개수는 A의 진부분집합 중에서 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{n-3}-1=15,\quad 2^{n-3}=16=2^4$

$n-3=4\quad \therefore n=7$ 답 7

유형 14 여러 가지 부분집합의 개수 본책 19쪽

① (특정한 원소 k개 중에서 적어도 한 개를 원소로 갖는 부분집합의 개수)
=(전체 부분집합의 개수)
−(특정한 원소를 제외한 집합의 부분집합의 개수)
② (a 또는 b를 원소로 갖는 부분집합의 개수)
=(전체 부분집합의 개수)
−(a, b를 제외한 집합의 부분집합의 개수)

0101 $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$의 부분집합 중에서 3 또는 6을 원소로 갖는 부분집합은 A의 부분집합 중에서 $\{9, 12, 15, 18\}$의 부분집합을 제외하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^6-2^4=64-16=48$ 답 ①

다른 풀이 3 또는 6을 원소로 갖는 집합은 $\{9, 12, 15, 18\}$의 부분집합에 3만 추가하거나 6만 추가하거나 3, 6을 모두 추가하면 된다. 따라서 구하는 부분집합의 개수는

$2^4\cdot3=48$

0102 $A=\{5, 10, 15, 20, 25\}$의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합은 A의 부분집합 중에서 $\{10, 20\}$의 부분집합을 제외하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는 $\quad 2^5-2^2=32-4=28$ 답 28

0103 $M(X)\ge4$를 만족시키려면 집합 X는 4, 5, 6 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다.
따라서 집합 B의 부분집합 중에서 $\{1, 2, 3\}$의 부분집합을 제외하면 되므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^6-2^3=64-8=56$ 답 ③

유형 15 조건을 만족시키는 집합의 개수 본책 19쪽

집합 A가 '$a\in A$이면 $b\in A$'임을 만족시킨다.
➡ a가 A의 원소이면 b도 반드시 A의 원소이다.

0104 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 A의 원소는 18의 양의 약수이어야 한다.
이때 18의 양의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18이고 조건 (나)에 의하여 1과 18, 2와 9, 3과 6은 어느 하나가 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.
따라서 공집합이 아닌 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^3-1=7$$

답 ③

참고 집합 A를 구하면 다음과 같다.
$\{1, 18\}, \{2, 9\}, \{3, 6\}, \{1, 2, 9, 18\}, \{1, 3, 6, 18\}$,
$\{2, 3, 6, 9\}, \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

0105 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 B는 공집합이 아니어야 하고, 집합 B의 원소는 16의 양의 약수이어야 한다.
이때 16의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16이고 조건 (나)에 의하여 1과 16, 2와 8은 어느 하나가 B의 원소이면 나머지 하나도 반드시 B의 원소이다.
(i) $n(B)=1$인 경우는 $\{4\}$이므로 $a_1=1$
(ii) $n(B)=3$인 경우는 $\{1, 4, 16\}, \{2, 4, 8\}$이므로 $a_3=2$
(i), (ii)에서 $a_1+a_3=3$

답 3

0106 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 A의 원소는 100의 양의 약수이어야 한다.
이때 100의 양의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100이고 조건 (나)에 의하여 1과 100, 2와 50, 4와 25, 5와 20은 어느 하나가 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.
$n(A)$가 홀수가 되려면 집합 A는 10을 반드시 원소로 가져야 하므로 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같다.
따라서 구하는 집합 A의 개수는

$$2^4=16$$

답 16

유형 16 부분집합의 원소의 합과 곱 본책 20쪽

집합 $A=\{a, b, c\}$에 대하여 a, b, c를 각각 원소로 갖는 부분집합의 개수는
$2^{3-1}=2^2=4$
① 집합 A의 부분집합을 각각 $A_k\ (k=1, 2, 3, \cdots, 8)$라 하고 집합 A_k의 모든 원소의 합을 p_k라 할 때,
$p_1+p_2+\cdots+p_8=4(a+b+c)$
② 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합을 각각 $B_k\ (k=1, 2, 3, \cdots, 7)$라 하고 집합 B_k의 모든 원소의 곱을 q_k라 할 때,
$q_1\times q_2\times\cdots\times q_7=a^4\times b^4\times c^4$

0107 $1\notin X$, $3\in X$인 집합 X의 개수는

$$2^{6-1-1}=2^4=16$$

한편 16개의 집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는 $1\notin X$, $2\in X$, $3\in X$인 집합의 개수와 같으므로

$$2^{6-1-2}=2^3=8$$

마찬가지로 4, 5, 6을 각각 원소로 갖는 집합의 개수도 8이므로 $S(X)$의 합은

$$16\cdot3+8(2+4+5+6)=184$$

답 ③

0108 집합 B_k 중에서 1을 원소로 갖는 집합은
$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}$
의 4개이다.
마찬가지로 2, 3, 4, 5를 각각 원소로 갖는 집합의 개수도 4이므로

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{10}=4(1+2+3+4+5)$$
$$=60$$

답 ②

0109 집합 A의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$$2^{4-1}=2^3=8$$

마찬가지로 3, 5, 7을 각각 원소로 갖는 집합의 개수도 8이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{16}=8(1+3+5+7)$$
$$=128$$

답 128

0110 집합 A의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$$2^{5-1}=2^4=16$$

마찬가지로 2, 4, 8, 16을 각각 원소로 갖는 집합의 개수도 16이므로

$$f(A_1)\times f(A_2)\times f(A_3)\times\cdots\times f(A_{31})$$
$$=1^{16}\cdot2^{16}\cdot4^{16}\cdot8^{16}\cdot16^{16}$$
$$=2^{16}\cdot(2^2)^{16}\cdot(2^3)^{16}\cdot(2^4)^{16}$$
$$=2^{16}\cdot2^{32}\cdot2^{48}\cdot2^{64}$$
$$=2^{16+32+48+64}$$
$$=2^{160}$$
$$\therefore k=160$$

답 160

0111 전략 집합 S를 원소나열법으로 나타내고, 주어진 조건을 이용하여 나머지 원소를 구한다.
풀이 집합 S의 원소가 3개이므로 $S=\{0, 5, a\}\ (a\neq0,\ a\neq5)$라 하자. 조건 (나)에 의하여 $(5+a)\in S$이므로

$$5+a=0 \text{ 또는 } 5+a=5$$
$$\therefore a=-5 \text{ 또는 } a=0$$

그런데 $a\neq0$이므로 $a=-5$
따라서 $S=\{-5, 0, 5\}$이므로 0과 5를 제외한 집합 S의 나머지 원소는 -5이다.

답 -5

0112 전략 집합 A를 원소나열법으로 나타내고, 이를 이용하여 집합 B의 원소를 구한다.

풀이 집합 $A=\{x|x=3n^2-1,\ n$은 $n<4$인 자연수$\}$에서

$n=1$일 때, $x=3\cdot1^2-1=2$

$n=2$일 때, $x=3\cdot2^2-1=11$

$n=3$일 때, $x=3\cdot3^2-1=26$

이므로 $A=\{2,\ 11,\ 26\}$ ⋯➊

집합 $B=\{y|y$는 x를 4로 나누었을 때의 나머지, $x\in A\}$이므로

$x=2$일 때, $y=2$

$x=11$일 때, $y=3$

$x=26$일 때, $y=2$

$\therefore B=\{2,\ 3\}$ ⋯➋

따라서 집합 B의 모든 원소의 곱은

$2\cdot3=6$ ⋯➌

답 6

채점 기준	비율
➊ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
➋ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
➌ 집합 B의 모든 원소의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0113 전략 최대공약수의 성질을 이용하여 집합 $A_k(n)$의 원소를 구한다.

풀이 ㄱ. $A_4(20)=\{x|G(20,\ x)=4\}$

이때 $G(20,\ 8)=4$이므로

$8\in A_4(20)$

ㄴ. $A_3(6)=\{x|G(6,\ x)=3\}$의 원소는 3을 인수로 갖고 2를 인수로 갖지 않는 100 이하의 자연수이다.

또 $A_3(12)=\{x|G(12,\ x)=3\}$의 원소는 3을 인수로 갖고 2를 인수로 갖지 않는 100 이하의 자연수이다.

$\therefore A_3(6)=A_3(12)$

ㄷ. $A_1(7)=\{x|G(7,\ x)=1\}$의 원소는 7과 서로소인 100 이하의 자연수이다.

이때 7과 서로소가 아닌 자연수는 7의 배수뿐이고 100 이하의 자연수 중에서 7의 배수는 14개이므로 $A_1(7)$의 원소의 개수는

$100-14=86$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0114 전략 홀수가 포함된 수의 합이 짝수가 되려면 홀수의 개수는 짝수이어야 함을 이용한다.

풀이 조건 ㈎에서 $\{3,\ 5,\ 7\}\subset X$이므로

$3\in X,\ 5\in X,\ 7\in X$ ⋯⋯ ㉠

또 $\{2,\ 4,\ 5\}\not\subset X$이므로

$2\notin X$ 또는 $4\notin X$ ⋯⋯ ㉡ ⋯➊

조건 ㈐에서 $n(X)=6$이고 ㉠에 의하여 집합 X는 집합 A의 원소 중 3, 5, 7을 제외한 3개의 원소를 더 갖는다.

이때 $3+5+7=15$는 홀수이고 조건 ㈏에서 $S(X)$의 값이 짝수이므로 나머지 3개의 원소의 합은 홀수이다.

3개의 수의 합이 홀수가 되는 경우는

짝수가 2개, 홀수가 1개 또는 홀수가 3개

일 때이고 ㉡을 만족시키면서 $S(X)$가 최소가 되는 경우는

$1\in X,\ 2\in X,\ 6\in X$ ⋯➋

따라서 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$일 때, $S(X)$가 최소가 되므로 $S(X)$의 최솟값은

$1+2+3+5+6+7=24$ ⋯➌

답 24

채점 기준	비율
➊ 조건 ㈎를 만족시키는 집합 X의 원소에 대한 조건을 구할 수 있다.	30 %
➋ 조건 ㈏, ㈐를 만족시키고 $S(X)$가 최소일 때의 집합 X의 원소에 대한 조건을 구할 수 있다.	50 %
➌ $S(X)$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0115 전략 A_{25}를 원소나열법으로 나타내고 n의 값의 범위를 구한다.

풀이 $A_{25}=\{x|x$는 $\sqrt{25}$ 이하의 홀수$\}=\{1,\ 3,\ 5\}$

$A_n\subset A_{25}$이려면 $7\notin A_n$이어야 하므로

$1\le\sqrt{n}<7$

$\therefore 1\le n<49$

따라서 자연수 n의 최댓값은 48이다. 답 48

0116 전략 집합 M이 되기 위한 조건을 생각한다.

풀이 어떤 두 원소의 곱도 6의 배수가 아닌 수들로만 이루어진 집합을 X라 하면 X는 다음 조건을 만족시킨다.

(i) 6과 서로소인 수들은 모두 집합 X의 원소가 될 수 있다.

(ii) 2의 배수가 집합 X의 원소이면 3의 배수는 X의 원소가 될 수 없고, 3의 배수가 집합 X의 원소이면 2의 배수는 X의 원소가 될 수 없다.

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 30\}$의 원소 중에서 2의 배수의 개수가 15, 3의 배수의 개수가 10이므로 집합 X의 원소의 개수가 최대이려면 2의 배수는 모두 집합 X의 원소이어야 한다.

따라서 집합 M은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 30\}$의 원소 중 3의 배수를 제외한 나머지 원소의 집합이므로 집합 M의 원소의 개수는

$30-10=20$ 답 20

0117 전략 집합 A에 반드시 속해야 하는 원소를 먼저 찾는다.

풀이 $U=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 16,\ 17,\ 19,\ 20,\ 22,\ 23,\ 25,\ 26,\ 28,\ 29\}$

집합 A의 모든 원소의 합이 100이므로 집합 A에는 25 이상인 원소가 적어도 2개 속해야 한다.

집합 U에서 25 이상인 원소는 25, 26, 28, 29의 4개이다.

(i) 집합 A에 25 이상인 원소가 3개 속하는 경우

① 원소 25, 26, 29가 속하는 경우

$A=\{20,\ 25,\ 26,\ 29\}$이므로

$x_4-x_3+x_2-x_1=29-26+25-20=8$

② 원소 26, 28, 29가 속하는 경우

$A=\{17,\ 26,\ 28,\ 29\}$이므로

$$x_4-x_3+x_2-x_1=29-28+26-17=10$$

③ 25, 26, 28 또는 25, 28, 29가 속하는 경우

모든 원소의 합이 100이 되려면 나머지 한 원소는 3의 배수가 되어야 하므로 주어진 조건을 만족시키는 집합 A가 존재하지 않는다.

(ii) 집합 A에 25 이상인 원소가 2개 속하는 경우

25보다 작은 U의 원소 중 가장 큰 두 원소의 합은

$$22+23=45$$

따라서 네 원소의 합이 100이 되려면 25 이상인 두 원소의 합이 55 이상이어야 한다.

① 원소 26, 29가 속하는 경우

$A=\{22,\ 23,\ 26,\ 29\}$이므로

$$x_4-x_3+x_2-x_1=29-26+23-22=4$$

② 원소 28, 29가 속하는 경우

$A=\{20,\ 23,\ 28,\ 29\}$이므로

$$x_4-x_3+x_2-x_1=29-28+23-20=4$$

(i), (ii)에서 $x_4-x_3+x_2-x_1$의 최댓값은 10이다. 답 10

다른 풀이 $x_1+x_2+x_3+x_4=100$에서

$x_1+x_3=100-(x_2+x_4)$

$$\begin{aligned}\therefore\ x_4-x_3+x_2-x_1&=x_4+x_2-(x_3+x_1)\\&=x_4+x_2-\{(100-(x_2+x_4)\}\\&=2(x_2+x_4)-100\end{aligned}$$

이 값이 최대이려면 x_2+x_4의 값이 최대이어야 하므로

$x_4=29$

$x_4>x_3>x_2$에서 $x_3=28,\ x_2=26$

따라서 구하는 최댓값은

$$2\cdot(26+29)-100=10$$

0118 **전략** m의 값에 따라 두 집합 A_m, B_m을 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 ㄱ. 3 이하의 소수는 2, 3이므로

$A_3=\{2,\ 3\}$

3의 양의 약수는 1, 3이므로

$B_3=\{1,\ 3\}$

$\therefore\ n(A_3)+n(B_3)=2+2=4$

ㄴ. 6 이하의 소수는 2, 3, 5이므로

$A_6=\{2,\ 3,\ 5\}$

$\{2,\ 3,\ 5\}\subset B_m$이려면 m은 2, 3, 5의 공배수이어야 한다. 따라서 $A_6\subset B_m$을 만족시키는 m의 최솟값은 2, 3, 5의 최소공배수인 30이다.

ㄷ. $m=12$일 때,

$A_{12}=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$, $B_{12}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

따라서 두 집합 A_{12}, B_{12}의 부분집합의 개수는 각각 $2^5=32$, $2^6=64$이므로 집합 A_{12}의 부분집합의 개수가 집합 B_{12}의 부분집합의 개수보다 적다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

참고 ㄷ. 집합의 원소의 개수가 많을수록 부분집합의 개수도 많다. 따라서 $m>6$이면서 집합 A_m의 원소의 개수가 집합 B_m의 원소의 개수보다 적은 경우를 찾아본다.

0119 **전략** 집합 A를 원소나열법으로 나타내고 집합 X에 속하지 않는 원소를 찾는다.

풀이 $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23\}$

조건 (가)에서 집합 X는 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합이다.

조건 (나)에서 집합 X의 개수는 A의 부분집합 중에서 2, 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{9-3}-1=2^6-1=63$ 답 63

0120 **전략** 짝수인 원소가 1개, 2개, 3개인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 짝수인 원소가 1개일 때,

2를 반드시 원소로 갖고 4, 6을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 $2^{7-1-2}=2^4=16$

마찬가지로 4를 반드시 원소로 갖고 2, 6을 원소로 갖지 않는 부분집합과 6을 반드시 원소로 갖고 2, 4를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수도 각각 16이므로

$a_1=16\cdot3=48$ ··· ❶

(ii) 짝수인 원소가 2개일 때,

2, 4를 반드시 원소로 갖고 6을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 $2^{7-2-1}=2^4=16$

마찬가지로 2, 6을 반드시 원소로 갖고 4를 원소로 갖지 않는 부분집합과 4, 6을 반드시 원소로 갖고 2를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수도 각각 16이므로

$a_2=16\cdot3=48$ ··· ❷

(iii) 짝수인 원소가 3개일 때,

2, 4, 6을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$a_3=2^{7-3}=2^4=16$ ··· ❸

이상에서 $a_1+a_2+a_3=112$ ··· ❹

답 112

채점 기준	비율
❶ a_1의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a_2의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a_3의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a_1+a_2+a_3$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0121 **전략** 특정한 원소를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 이용하여 $f(n)$을 구한다.

풀이 $f(n)$은 n을 반드시 원소로 갖고 $\underbrace{n\text{보다 작은 자연수}}_{(n-1)\text{개}}$를 원소로 갖지 않는 집합 X의 부분집합의 개수이므로

$f(n)=2^{10-1-(n-1)}=2^{10-n}$ (단, $1\le n<10$)

ㄱ. $f(8)=2^{10-8}=2^2=4$

ㄴ. $a=7,\ b=8$일 때, $7\in X,\ 8\in X$이고 $7<8$이지만

$f(7)=2^{10-7}=2^3=8,\ f(8)=2^{10-8}=2^2=4$

이므로 $f(7)>f(8)$

ㄷ. $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$

$=2^{10-1}+2^{10-3}+2^{10-5}+2^{10-7}+2^{10-9}$

$=2^9+2^7+2^5+2^3+2$

$=682$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

참고 $n=10$일 때, 10을 최소의 원소로 갖는 집합은 $\{10\}$뿐이므로

$f(10)=1$

0122 전략 먼저 집합 X가 반드시 갖는 원소와 집합 X의 가장 큰 원소를 구한다.

풀이 $A \ll X$이므로 집합 X는 집합 A의 가장 큰 원소인 4를 반드시 원소로 갖는다.

또 $X \ll B$이므로 집합 B는 집합 X의 가장 큰 원소를 반드시 원소로 갖는다.

따라서 집합 X의 가장 큰 원소는 6 또는 8이다. ⋯ ❶

(i) 집합 X의 가장 큰 원소가 6인 경우

집합 X는 6 이하의 자연수 중 4, 6을 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ ⋯ ❷

(ii) 집합 X의 가장 큰 원소가 8인 경우

집합 X는 8 이하의 자연수 중 4, 8을 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는

$2^{8-2}=2^6=64$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 구하는 집합 X의 개수는

$16+64=80$ ⋯ ❹

답 80

채점 기준	비율
❶ 집합 X가 반드시 갖는 원소와 집합 X의 가장 큰 원소를 구할 수 있다.	30 %
❷ 집합 X의 가장 큰 원소가 6일 때, 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 집합 X의 가장 큰 원소가 8일 때, 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0123 전략 $2\in A$, $5\in A$인 경우를 나누어 집합 A의 원소를 구한다.

풀이 (i) $2\in A$에서 조건 (나)에 의하여 $2\cdot 2\in U$이므로

$4\in A$

또 조건 (나)에 의하여 $2\cdot 4\in U$이므로

$8\in A$

이와 같이 계속하면 2^n $(n=1, 2, 3, 4, 5, 6)$은 집합 A의 원소이다.

$\therefore \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}\subset A$

(ii) $5\in A$에서 조건 (나)에 의하여 $2\cdot 5\in U$이므로

$10\in A$

또 조건 (나)에 의하여 $2\cdot 10\in U$이므로

$20\in A$

이와 같이 계속하면

$\{5, 10, 20, 40, 80\}\subset A$

(i), (ii)에서

$\{2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 64, 80\}\subset A$

이므로 원소의 개수가 최소인 집합 A는

$A=\{2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 64, 80\}$

따라서 집합 A의 원소의 개수의 최솟값은 11이다. 답 ③

0124 전략 $a\in A$이면 $(10-a)\in A$임을 이용하여 집합 A의 부분집합이 될 수 있는 집합을 찾는다.

풀이 조건 (가)에 의하여 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 어느 하나가 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.

또 $A=\{5\}$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

따라서 집합 A는 집합

$\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$, $\{5\}$

중에서 일부 또는 전부를 부분집합으로 갖는다. ⋯ ❶

네 집합 $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$은 원소의 합이 모두 10이고 조건 (나)에서 집합 A의 모든 원소의 합은 20보다 크고 30보다 작으므로 집합 A는 네 집합

$\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$

중에서 2개와 집합 $\{5\}$를 부분집합으로 갖는다. ⋯ ❷

네 집합 $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$의 각 집합의 원소의 곱은 9, 16, 21, 24이므로 집합 A의 모든 원소의 곱이 최소일 때의 집합 A는

$A=\{1, 2, 5, 8, 9\}$

따라서 구하는 집합 A의 모든 원소의 곱의 최솟값은

$1\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdot 9=720$ ⋯ ❸

답 720

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)를 만족시키는 집합 A의 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ 조건 (나)를 만족시키는 집합 A의 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 A의 모든 원소의 곱의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0125 전략 집합 B는 3을 반드시 원소로 갖는 A의 부분집합이다.

풀이 조건 (나)에 의하여 $3\in B$이고, 조건 (다)에 의하여

$\frac{12}{3}=4\in B$

이므로 집합 B는 3, 4를 반드시 원소로 갖는다.

또 조건 (다)에 의하여 1과 12, 2와 6은 어느 하나가 집합 B의 원소이면 나머지 하나도 반드시 B의 원소이다.

따라서 집합 B의 개수는 집합 $\{1, 2\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^2=4$ 답 4

0126 전략 집합 U의 각 원소를 제곱한 수의 일의 자릿수가 같은 것을 찾는다.

풀이 집합 U의 원소 1, 2, 3, ⋯, 9를 제곱한 수의 일의 자릿수는 각각

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1

즉 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.

따라서 공집합이 아닌 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4-1=15$ 답 15

참고 $5\in A$인 경우는 $m\in A$이면 $n\in A\,(m\neq n)$인 조건을 만족시키지 않으므로

$5\notin A$

0127 전략 집합 A_n의 원소의 개수가 1, 2, 3인 경우를 나누어 생각한다.

풀이 집합 A_n의 원소의 개수는 1 또는 2 또는 3이다.

(i) 원소가 1개인 집합

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$이므로 각 집합의 모든 원소의 평균의 합은 $1+2+3+4=10$

(ii) 원소가 2개인 집합

1을 원소로 갖는 집합은

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}$

의 3개이다. 마찬가지로 2, 3, 4를 각각 원소로 갖는 집합의 개수도 3이므로 각 집합의 모든 원소의 평균의 합은

$$\frac{3\cdot(1+2+3+4)}{2}=15$$

(iii) 원소가 3개인 집합

1을 원소로 갖는 집합은

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$

의 3개이다. 마찬가지로 2, 3, 4를 각각 원소로 갖는 집합의 개수도 3이므로 각 집합의 모든 원소의 평균의 합은

$$\frac{3\cdot(1+2+3+4)}{3}=10$$

이상에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{14}=10+15+10=35$ 답 ④

참고 (ii) 원소가 2개인 집합

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$이므로 각 집합의 모든 원소의 평균의 합은

$$\frac{1+2}{2}+\frac{1+3}{2}+\frac{1+4}{2}+\frac{2+3}{2}+\frac{2+4}{2}+\frac{3+4}{2}$$
$$=\frac{3\cdot(1+2+3+4)}{2}$$
$$=15$$

(iii) 원소가 3개인 집합

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$이므로 각 집합의 모든 원소의 평균의 합은

$$\frac{1+2+3}{3}+\frac{1+2+4}{3}+\frac{1+3+4}{3}+\frac{2+3+4}{3}$$
$$=\frac{3\cdot(1+2+3+4)}{3}$$
$$=10$$

0128 전략 a_n이 될 수 있는 원소는 4, 6, 8, 10임을 이용한다.

풀이 집합 A_n의 원소는 2개 이상이므로

$a_n\geq 4$

(i) $a_n=10$인 경우

집합 A_n은 10을 반드시 원소로 가져야 하므로 그 개수는

$2^{5-1}\underline{-1}=2^4-1=15$

10을 원소로 갖는 부분집합 중에서 원소의 개수가 1인 $\{10\}$을 제외해야 한다.

(ii) $a_n=8$인 경우

집합 A_n은 10을 원소로 갖지 않고 8을 반드시 원소로 가져야 하므로 그 개수는

$2^{5-1-1}-1=2^3-1=7$

(iii) $a_n=6$인 경우

집합 A_n은 8, 10을 원소로 갖지 않고 6을 반드시 원소로 가져야 하므로 그 개수는

$2^{5-2-1}-1=2^2-1=3$

(iv) $a_n=4$인 경우

집합 A_n은 6, 8, 10을 원소로 갖지 않고 4를 반드시 원소로 가져야 하므로 그 개수는

$2^{5-3-1}-1=2-1=1$ ··· ❶

이상에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{26}=10\cdot15+8\cdot7+6\cdot3+4\cdot1$
$=228$ ··· ❷

답 228

채점 기준	비율
❶ a_n의 값이 각각 10, 8, 6, 4인 경우의 집합 A_n의 개수를 구할 수 있다.	70 %
❷ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{26}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

02 집합의 연산

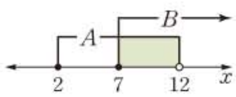
0129 답 $\{a, b, c, d, e\}$ **0130** 답 $\{x \mid x$는 자연수$\}$

0131 $A=\{3, 6, 9, \cdots, 99\}$, $B=\{6, 12, 18, \cdots, 96\}$이므로
$A\cup B=\{3, 6, 9, \cdots, 99\}$ 답 $\{3, 6, 9, \cdots, 99\}$

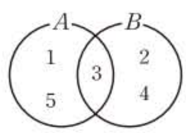
0132 답 $\{x, y, z\}$ **0133** 답 $\varnothing$

0134 $A=\{2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로
$A\cap B=\{2, 3\}$ 답 $\{2, 3\}$

0135 오른쪽 그림에서
$A\cap B=\{x \mid 7\le x<12\}$
답 $\{x \mid 7\le x<12\}$



0136 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{2, 3, 4\}$ 답 $\{2, 3, 4\}$



0137 ㄴ. $A=\{1, 3, 9\}$, $B=\{3, 6, 9\}$이므로
$A\cap B=\{3, 9\}$
따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.
ㄷ. $A=\{x \mid -1\le x\le 1\}$, $B=\{-2, 2\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 두 집합 A, B는 서로소이다.
이상에서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ㄱ, ㄷ

0138 $A\cap(B\cup C)\overset{\text{분배법칙}}{=}(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$=\{b, c\}\cup\{c, e\}$
$=\{b, c, e\}$ 답 $\{b, c, e\}$

0139 $(A\cup B)\cap(A\cup C)\overset{\text{분배법칙}}{=}A\cup(B\cap C)$
$=\{1, 2\}\cup\{5\}$
$=\{1, 2, 5\}$ 답 $\{1, 2, 5\}$
다른 풀이 $(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1, 2, 4, 5\}\cap\{1, 2, 3, 5\}$
$=\{1, 2, 5\}$

0140 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$이므로 $A^C=\{1, 2, 6, 7, 8\}$
답 $\{1, 2, 6, 7, 8\}$

0141 $B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로 $B^C=\{1, 3, 5, 7\}$
답 $\{1, 3, 5, 7\}$

0142 답 $\{b, c\}$

0143 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로
$A-B=\varnothing$ 답 $\varnothing$

0144 답 $\{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

0145 답 $\{1, 3, 4, 8, 9\}$

0146 답 $\{1, 4\}$

0147 답 $\{5, 6, 7\}$

0148 답 $\{3, 8, 9\}$

0149 답 $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

0150 답 A **0151** 답 U

0152 답 $\varnothing$ **0153** 답 A

0154 답 $\varnothing$ **0155** 답 U

0156 $A\cap B^C=A-B=\{1\}$ 답 $\{1\}$

0157 $A^C\cap B=B\cap A^C=B-A=\{7, 8\}$ 답 $\{7, 8\}$

0158 $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B=\{2, 4\}$ 답 $\{2, 4\}$

0159 $B-A^C=B\cap(A^C)^C=B\cap A=\{2, 4\}$ 답 $\{2, 4\}$

0160 $A\subset B$일 때
③ $A\cap B^C=A-B=\varnothing$이므로 $(A\cap B^C)\subset B$
④ $B\cap A^C=(B-A)\not\subset A$ 답 ④

0161 답 ㈎ 드모르간의 법칙 ㈏ 결합법칙

0162 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이고 $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$이므로
$A^C\cap B^C=\{4, 8, 10\}$ 답 $\{4, 8, 10\}$

0163 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=5+4-7=2$ 답 2

0164 $n(A^C)=n(U)-n(A)$
$=50-32=18$ 답 18

0165 $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=18-6=12$ 답 12

0166 $n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=32-6=26$ 답 26

0167 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=32+18-6=44$ 답 44

0168 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$

$=50-(35+23-10)$

$=2$ 답 2

0169 $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)$

$=n(U)-n(A\cap B)$

$=50-10=40$ 답 40

0170 $n(X\cup Y\cup Z)$

$=n(X)+n(Y)+n(Z)-n(X\cap Y)-n(Y\cap Z)$

$\quad -n(Z\cap X)+n(X\cap Y\cap Z)$

$=20+5+13-3-2-10+2$

$=25$ 답 25

0171 힙합을 좋아하는 학생의 집합을 A, 발라드를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(A)=22$, $n(B)=16$, $n(A\cap B)=9$

이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=22+16-9=29$

따라서 힙합 또는 발라드를 좋아하는 학생 수는 29이다.

답 29

유형 01 합집합과 교집합 본책 28쪽

각 집합을 원소나열법으로 나타낸 후 주어진 집합의 합집합과 교집합을 구한다.

① $A\cup B=\{x|x\in A$ 또는 $x\in B\}$

➡ 두 집합 A, B 중 적어도 어느 한쪽에 속하는 원소를 모두 택한다.

② $A\cap B=\{x|x\in A$ 그리고 $x\in B\}$

➡ 두 집합 A, B에 공통으로 속하는 원소를 모두 택한다.

0172 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$, $C=\{1, 2, 4\}$

이므로

$(A\cup B)\cap C=\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}\cap\{1, 2, 4\}$

$=\{1, 2\}$ 답 ①

0173 $C=\{1, 2, 4, 8\}$

③ $A\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ 답 ③

0174 집합 B는 b, d를 반드시 원소로 갖고, a, c를 원소로 갖지 않아야 하므로 B가 될 수 있는 것은 ④이다. 답 ④

유형 02 서로소인 집합 본책 28쪽

두 집합 A, B가 서로소 ➡ $A\cap B=\varnothing$

➡ 공통인 원소가 하나도 없다.

0175 ① $A\cap B=\{8\}$

② $x^2+4x+3=0$에서 $\quad (x+3)(x+1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$

$\therefore A=\{-3, -1\}$

$x^2=1$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore B=\{-1, 1\}$

$\therefore A\cap B=\{-1\}$

③ $A=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, $B=\{1, 2, 3, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{1, 2, 3, \cdots\}$

④ $A=\{2, 3, 5, 7, \cdots\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{3, 5, 7, \cdots\}$

답 ⑤

0176 ㄱ. $\{2, 4, 6, \cdots\}$ ㄴ. $\{1, 3, 5, \cdots\}$

ㄷ. $\{3, 6, 9, \cdots\}$ ㄹ. $\varnothing$

ㅁ. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ㅂ. $\{1, 3, 5, 15\}$

이상에서 집합 $\{2, 4, 6\}$과 서로소인 집합은 ㄴ, ㄹ, ㅂ의 3개이다. 답 ③

참고 ㄹ. $x^2+2x=0$에서 $\quad x(x+2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-2$

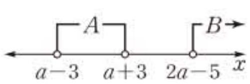
따라서 $x^2+2x=0$을 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다.

0177 구하는 집합의 개수는 집합 A의 부분집합 중 a, b를 원소로 갖지 않는 집합의 개수, 즉 $\{c, d, e\}$의 부분집합의 개수와 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^3=8$ 답 8

0178 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이려면 오른쪽 그림과 같아야 한다. ··· ❶



따라서 $a+3\le 2a-5$에서

$a\ge 8$ ··· ❷

이므로 a의 최솟값은 8이다. ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B가 서로소가 되도록 수직선 위에 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 두 집합 A, B가 서로소일 때의 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

유형 03 여집합과 차집합
본책 29쪽

각 집합을 원소나열법으로 나타낸 후 주어진 집합의 연산을 한다. 이때 원소나열법으로 나타내기 어려운 경우에는 수직선을 이용한다.

① $A^C=\{x|x\in U$ 그리고 $x\notin A\}$
➡ 전체집합 U에서 집합 A의 원소를 제외한다.

② $A-B=\{x|x\in A$ 그리고 $x\notin B\}$
➡ 집합 A에서 집합 B의 원소를 제외한다.

0179 $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 4, 6\}$이므로

$B^C=\{1, 3, 5\}$

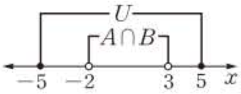
$\therefore A-B^C=\{1, 2, 3, 6\}-\{1, 3, 5\}=\{2, 6\}$

따라서 집합 $A-B^C$의 모든 원소의 합은

$2+6=8$

답 8

0180 $A\cap B=\{x|-2<x<3\}$이므로 오른쪽 그림에서



$(A\cap B)^C$

$=\{x|-5\le x\le -2$ 또는 $3\le x\le 5\}$

답 ④

0181 $A\cup B=\{a, b, c, d, e\}$, $(A-B)^C=\{c, d, e, f, g\}$

$\therefore (A\cup B)\cap(A-B)^C=\{c, d, e\}$

답 $\{c, d, e\}$

0182 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 4, 7, 10\}$이므로 ⋯ ❶

$A\cup B=\{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$, $A\cap B=\{1, 7\}$ ⋯ ❷

$\therefore (A\cup B)-(A\cap B)=\{3, 4, 5, 9, 10\}$ ⋯ ❸

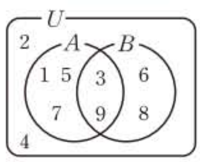
답 $\{3, 4, 5, 9, 10\}$

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 두 집합 $A\cup B$, $A\cap B$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$를 구할 수 있다.	30 %

유형 04 조건을 만족시키는 집합 구하기
본책 29쪽

주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내어 구하려는 집합을 찾는다.

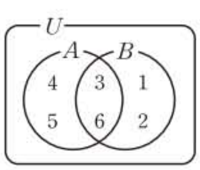
0183 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=\{3, 6, 8, 9\}$

답 ⑤

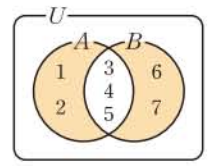
0184 $B=\{1, 2, 3, 6\}$, $A\cap B=\{3, 6\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 오른쪽 벤다이어그램에서



$A=\{3, 4, 5, 6\}$

답 $\{3, 4, 5, 6\}$

0185 집합 $(A-B)\cup(B-A)$는 오른쪽 벤다이어그램의 색칠한 부분과 같고



$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로

$A-B=\{1, 2\}$, $B-A=\{6, 7\}$

따라서

$B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$ ⋯ ❶

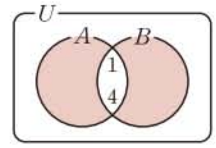
이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$3+4+5+6+7=25$ ⋯ ❷

답 25

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 구할 수 있다.	70 %
❷ 집합 B의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	30 %

0186 $A\cap B=\{1, 4\}$, $A\cup B=U$이므로 이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분에 들어갈 원소가 5, 7, 8이다.



이때 $2S(A)=S(B)$에서

$S(A)<S(B)$이므로 5, 7, 8 중 집합 A에 속하는 원소는 한 개 이하이어야 한다.

(i) $5\in A$인 경우

$A=\{1, 4, 5\}$, $B=\{1, 4, 7, 8\}$이므로

$S(A)=10$, $S(B)=20$ $\quad\therefore 2S(A)=S(B)$

(ii) $7\in A$인 경우

$A=\{1, 4, 7\}$, $B=\{1, 4, 5, 8\}$이므로

$S(A)=12$, $S(B)=18$ $\quad\therefore 2S(A)\ne S(B)$

(iii) $8\in A$인 경우

$A=\{1, 4, 8\}$, $B=\{1, 4, 5, 7\}$이므로

$S(A)=13$, $S(B)=17$ $\quad\therefore 2S(A)\ne S(B)$

(iv) $5\in B$, $7\in B$, $8\in B$인 경우

$A=\{1, 4\}$, $B=\{1, 4, 5, 7, 8\}$이므로

$S(A)=5$, $S(B)=25$ $\quad\therefore 2S(A)\ne S(B)$

이상에서 $A=\{1, 4, 5\}$, $B=\{1, 4, 7, 8\}$이므로

$B-A=\{7, 8\}$

답 $\{7, 8\}$

다른 풀이 $S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)$

$=(1+4+5+7+8)+(1+4)=30$

이때 $2S(A)=S(B)$이므로

$3S(A)=30 \quad \therefore S(A)=10$

$\therefore S(B)=2\cdot 10=20$

$S(A)=10$, $S(B)=20$을 만족시키는 집합 A, B는

$A=\{1, 4, 5\}$, $B=\{1, 4, 7, 8\}$

$\therefore B-A=\{7, 8\}$

유형 05 집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기
본책 30쪽

(i) 주어진 집합의 연산을 이용하여 미지수의 값을 모두 구한다.
(ii) 미지수의 값을 대입하여 각 집합의 원소를 구한다.
(iii) 구한 집합이 주어진 조건을 만족시키는지 확인한다.

0187 $A\cap B=\{-1,\ 2\}$이므로 $\quad 2\in A$

따라서 $a^2+a-4=2$이므로 $\quad a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0 \quad \therefore a=-3$ 또는 $a=2$

(i) $a=-3$일 때,

$A=\{-1,\ 0,\ 2\}$, $B=\{2,\ 6,\ 9\}$이므로 $\quad A\cap B=\{2\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{-1,\ 0,\ 2\}$, $B=\{-1,\ 1,\ 2\}$이므로

$A\cap B=\{-1,\ 2\}$

(i), (ii)에서 $\quad a=2$

답 2

0188 $A-B=\{5\}$이므로 $1,\ 4,\ 3a-b$는 집합 B의 원소이다.

이때 $B=\{1,\ 7,\ a-2b\}$이므로

$3a-b=7,\ a-2b=4$ ··· ❶

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-1$ ··· ❷

$\therefore a+b=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 두 방정식을 세울 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0189 $A\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이고 $B=\{2,\ 3,\ a-1\}$이므로

$a-1=0$ 또는 $a-1=1$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

(i) $a=1$일 때,

$A=\{-1,\ 1,\ 3\}$, $B=\{0,\ 2,\ 3\}$이므로

$A\cup B=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{0,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$이므로

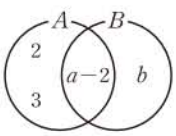
$A\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

(i), (ii)에서 $\quad A=\{0,\ 2,\ 3\}$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은 $\quad 0+2+3=5$

답 5

0190 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $(a-2)\in A\cap B$이므로 $a-2$는 B의 원소이다.

이때 $a-2\neq a+4$이므로 $\quad a-2=a^2-4a-8$

$a^2-5a-6=0, \quad (a+1)(a-6)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=6$

(i) $a=-1$일 때,

$A=\{-3,\ 2,\ 3\}$, $B=\{-3,\ 3\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{2\}$

에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=6$일 때,

$A=\{2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{4,\ 10\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{2,\ 3,\ 10\}$

(i), (ii)에서 $a=6$, $b=10$이므로

$a+b=16$

답 ④

유형 06 집합의 연산의 성질 본책 31쪽

(1) 집합의 연산 법칙

① 교환법칙: $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$

② 결합법칙: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$,
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$

③ 분배법칙: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(2) 집합의 연산의 성질

① $A\cup A=A,\ A\cap A=A$ ② $A\cup\varnothing=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing$

③ $A\cup U=U,\ A\cap U=A$ ④ $U^C=\varnothing,\ \varnothing^C=U$

⑤ $(A^C)^C=A$ ⑥ $A\cup A^C=U,\ A\cap A^C=\varnothing$

⑦ $A-B=A\cap B^C$

0191 ① $U-A^C=A$

③ $(A\cup B)\subset U$

④ $U^C=\varnothing$이므로 $\quad U^C\subset A$

⑤ $U\cap B^C=B^C$

답 ②

0192 ① $(A^C)^C=A$

② $A\cup\varnothing=A$

③ $A\cup A^C=U$

④ $A^C\cap B=B-A$

답 ⑤

0193 ① $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

② $A\cap(U-B^C)=A\cap B$

③ $B-A^C=B\cap(A^C)^C=A\cap B$

④ $A\cap(B\cup B^C)=A\cap U=A$

⑤ $(A\cap B)\cup(A\cap A^C)=(A\cap B)\cup\varnothing=A\cap B$

답 ④

유형 07 집합의 연산의 성질; 포함 관계가 있는 두 집합 본책 31쪽

(1) $A\subset B$이면

① $A\cup B=B,\ A\cap B=A$ ② $A-B=\varnothing,\ A\cap B^C=\varnothing$

③ $A^C\cup B=U$ ④ $B^C\subset A^C$

(2) $A\cap B=\varnothing$이면

① $A-B=A,\ B-A=B$ ② $A\subset B^C,\ B\subset A^C$

0194 $A\cap B=A$이므로 $\quad A\subset B$

②, ③ $A\subset B$이면 $B^C\subset A^C$이므로

$A^C\cap B^C=B^C$

⑤ $B\cap A^C=B-A$에서 $A\subset B$이고 $A\neq B$이므로

$B-A\neq\varnothing$

답 ⑤

0195 $A^C \subset B^C$이면 $\quad B \subset A$

① $A \cup B = A$

② $A \cap (A \cup B) = A \cap A = A$

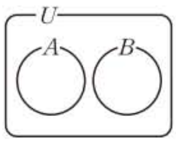
③ $(A \cap B) \cup B = B \cup B = B$

④ $A \cup (B - A) = A \cup \varnothing = A$

⑤ $(A \cup B) \cup (A \cap B) = A \cup B = A$ 답 ③

0196 $A - B = A$이면 $\quad A \cap B = \varnothing$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B - A = B,\ B \subset A^C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

0197 $(A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) = (A - B) \cup (B - A) = \varnothing$이므로

$A - B = \varnothing,\ B - A = \varnothing$

따라서 $A \subset B,\ B \subset A$이므로

$A = B$ 답 ①

유형 08 집합의 연산과 집합의 개수

본책 32쪽

주어진 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 집합 X에 반드시 속하는 원소 또는 속하지 않는 원소를 찾는다.

(ii) (i)을 만족시키는 집합 X의 개수를 구한다.

0198 $(B - A) \cup X = X$에서

$(B - A) \subset X$

$\therefore \{-1\} \subset X$ …… ㉠

$A \cup X = X$에서 $\quad A \subset X$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 집합 X는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$을 반드시 원소로 가져야 하므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^{6-4} = 2^2 = 4$ 답 4

0199 $A \cup B = U$이므로 집합 B는 집합 A^C의 원소

$-3,\ -1,\ 1,\ 3$

을 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 B의 개수는

$2^{7-4} = 2^3 = 8$ 답 ①

0200 $A - X = A$이므로

$A \cap X = \varnothing$ ··· ❶

즉 집합 X는 집합 U의 부분집합 중 $a,\ d$를 원소로 갖지 않는 집합이다. ··· ❷

따라서 집합 X의 개수는

$2^{6-2} = 2^4 = 16$ ··· ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ $A \cap X = \varnothing$임을 알 수 있다.	30 %
❷ 집합 X가 ❶을 만족시키기 위한 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0201 U의 부분집합 X가

$\{1,\ 2,\ 4,\ 8\} \cup X = \{2,\ 3,\ 8,\ 9\} \cup X$

를 만족시키려면 집합 X는 두 집합 $\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $\{2,\ 3,\ 8,\ 9\}$의 공통인 원소 2, 8을 제외한 나머지 원소 1, 3, 4, 9를 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{9-4} = 2^5 = 32$ 답 ④

0202 $x^2 - 6x + 5 = 0$에서 $\quad (x-1)(x-5) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 5$

$\therefore B = \{1,\ 5\}$

이때 $X - (A - B) = \varnothing$이므로

$X \subset (A - B)$

$A - B = \{2,\ 6,\ 8,\ 14\}$이고 $n(X) = 2$이므로 집합 X의 개수는 2, 6, 8, 14 중 2개를 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

따라서 집합 X는

$\{2,\ 6\},\ \{2,\ 8\},\ \{2,\ 14\},\ \{6,\ 8\},\ \{6,\ 14\},\ \{8,\ 14\}$

의 6개이다. 답 6

0203 $A \cup X = X$에서 $\quad A \subset X$ …… ㉠

$B - A = \{1,\ 3,\ 6\}$이고 $(B - A) \cap X = \{1,\ 6\}$이므로

$1 \in X,\ 3 \notin X,\ 6 \in X$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 집합 X는 1, 2, 4, 6을 반드시 원소로 갖고 3을 원소로 갖지 않아야 한다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{7-4-1} = 2^2 = 4$ 답 4

0204 조건 (나)의 $\{(A \cup B) - (A \cap B)\} \subset (A - B)$에서

$\{(A - B) \cup (B - A)\} \subset (A - B)$

$\therefore B - A = \varnothing$

$\therefore B \subset A$

조건 (가)에서 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$이므로 집합 B는 공집합이 아닌 집합 A의 진부분집합이다.

따라서 구하는 집합 B의 개수는

$2^4 - 1 - 1 = 14$ 답 14

유형 09 드모르간의 법칙

본책 33쪽

전체집합 U의 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C,\ (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

0205 $(A\cup B)\cup(A^C\cup B^C)^C=(A\cup B)\cup((A\cap B)^C)^C$

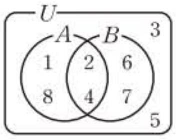
$=\underbrace{(A\cup B)\cup(A\cap B)}_{(A\cap B)\subset(A\cup B)}$

$=A\cup B$

$=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 6이다. 답 ④

0206 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{3,\ 5\}$이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore\ B=\{2,\ 4,\ 6,\ 7\}$

답 $\{2,\ 4,\ 6,\ 7\}$

0207 $A\cap(B^C\cup C^C)=A\cap(B\cap C)^C$

$=A-(B\cap C)$

이므로 $A-(B\cap C)=\{1,\ 4,\ 5,\ 8\}$

이때 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}$이므로

$2\in(B\cap C),\ 9\in(B\cap C)$ 답 ②

유형 10 집합의 연산을 간단히 하기

본책 33쪽

집합의 연산이 복잡하게 주어지면 집합의 연산 법칙과 연산의 성질을 이용하여 간단히 한다.
특히 차집합의 꼴이 주어지면 $A-B=A\cap B^C$임을 이용한다.

0208 $(A-B)-(A-C)$

$=(A\cap B^C)\cap(A\cap C^C)^C$

$=(A\cap B^C)\cap(A^C\cup C)$

$=\{(A\cap B^C)\cap A^C\}\cup\{(A\cap B^C)\cap C\}$

$=\underbrace{\{(A\cap A^C)\cap B^C\}}_{A\cap A^C=\varnothing\text{이므로 } (A\cap A^C)\cap B^C=\varnothing}\cup\{(A\cap C)\cap B^C\}$

$=\varnothing\cup\{(A\cap C)\cap B^C\}$

$=(A\cap C)-B$ 답 ⑤

0209 $A-(A-B)=A\cap(A\cap B^C)^C$

$=A\cap(A^C\cup B)$

$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$

$=\varnothing\cup(A\cap B)$

$=A\cap B$ ··· ❶

이때 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 29\}$, $B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$이므로

$A\cap B=\{3,\ 9,\ 15\}$ ··· ❷

따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은

$3+9+15=27$ ··· ❸

답 27

채점 기준	비율
❶ 집합 $A-(A-B)$를 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ 집합 $A-(A-B)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 $A-(A-B)$의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

0210 ㄱ. $(A\cup B)\cup(A^C\cap B^C)=(A\cup B)\cup(A\cup B)^C$

$=U$

ㄴ. $A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)^C$

$=A\cap(B^C\cup C^C)$

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$

$=(A-B)\cup(A-C)$

ㄷ. $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)^C$

$=(A\cap B)\cap(A^C\cup C^C)$

$=\{(A\cap B)\cap A^C\}\cup\{(A\cap B)\cap C^C\}$

$=\varnothing\cup\{(A\cap B)\cap C^C\}$

$=(A\cap B)-C$

ㄹ. $(A-B)\cup(A\cap C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)$

$=A\cap(B^C\cup C)$

$=A\cap(B\cap C^C)^C$

$=A-(B-C)$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

0211 $(A\cup B^C)\cap(A^C\cup B)$

$=\{(A\cup B^C)\cap A^C\}\cup\{(A\cup B^C)\cap B\}$

$=\{(A\cap A^C)\cup(B^C\cap A^C)\}\cup\{(A\cap B)\cup(B^C\cap B)\}$

$=\{\varnothing\cup(B^C\cap A^C)\}\cup\{(A\cap B)\cup\varnothing\}$

$=(A^C\cap B^C)\cup(A\cap B)$

이때 $A-B=\varnothing$에서 $A\subset B$, $B^C\subset A^C$이므로

$A^C\cap B^C=B^C$, $A\cap B=A$

$\therefore$ (주어진 식)$=B^C\cup A$

$=A\cup B^C$ 답 ②

0212 조건 (가)에서 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로

$(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$

$\therefore\ A\cap B=\{4\}$ ······ ㉠ ··· ❶

조건 (나)에서

$(B-A)^C\cap\{A\cap(A\cap B)^C\}$

$=(B-A)^C\cap\{A\cap(A^C\cup B^C)\}$

$=(B\cap A^C)^C\cap\{(A\cap A^C)\cup(A\cap B^C)\}$

$=(B^C\cup A)\cap\{\varnothing\cup(A\cap B^C)\}$

$=(A\cup B^C)\cap(A\cap B^C)$

$=\underbrace{A\cap B^C}_{(A\cap B^C)\subset(A\cup B^C)}$

$=A-B$

$\therefore\ A-B=\{1\}$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 $A=\{1,\ 4\}$ ··· ❸

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은

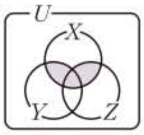
$1+4=5$ ··· ❹

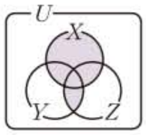
답 5

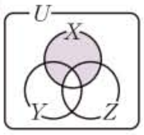
채점 기준	비율
❶ 집합 $A\cap B$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $(B-A)^C\cap\{A\cap(A\cap B)^C\}$를 간단히 할 수 있다.	50 %
❸ 집합 A를 구할 수 있다.	20 %
❹ 집합 A의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

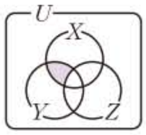
유형 11 벤다이어그램과 집합 본책 34쪽

① 벤다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합을 찾을 때
➡ 각 집합을 벤다이어그램으로 나타낸 후 주어진 벤다이어그램과 비교한다.
② 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타낼 때
➡ 집합의 연산 법칙이나 연산의 성질을 이용하여 주어진 집합을 간단히 한 후 벤다이어그램으로 나타낸다.

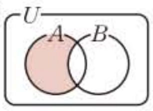
0213 ①


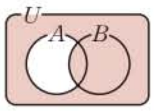
②


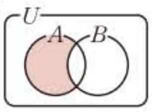
③


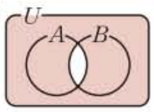
⑤


답 ④

0214 ①


③


④


⑤


답 ②

0215 $(B-A)\cup(B-C)=(B\cap A^C)\cup(B\cap C^C)$
$=B\cap(A^C\cup C^C)$
$=B\cap(A\cap C)^C$
$=B-(A\cap C)$
따라서 $(B-A)\cup(B-C)$를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ④이다. 답 ④

유형 12 배수와 약수의 집합의 연산 본책 35쪽

① 자연수 p의 배수를 원소로 하는 집합을 A_p라 하면 자연수 m, n에 대하여
$A_m\cap A_n$ ➡ m과 n의 공배수의 집합
② 자연수 q의 약수를 원소로 하는 집합을 B_q라 하면 자연수 m, n에 대하여
$B_m\cap B_n$ ➡ m과 n의 공약수의 집합

0216 $A_3\cap(A_4\cup A_6)=(A_3\cap A_4)\cup(A_3\cap A_6)$
$=A_{12}\cup A_6$
$=A_6$
전체집합 U의 원소 중 6의 배수는 16개이므로 구하는 원소의 개수는 16이다. 답 16

SSEN 특강 배수와 약수의 집합

자연수 k에 대하여
① k의 배수의 집합을 A_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면 $A_m\subset A_n$이므로
➡ $A_m\cap A_n=A_m$, $A_m\cup A_n=A_n$
예 4는 2의 배수이므로
$A_4\subset A_2$ ➡ $A_4\cap A_2=A_4$, $A_4\cup A_2=A_2$
② k의 약수의 집합을 B_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 약수이면 $B_m\subset B_n$이므로
➡ $B_m\cap B_n=B_m$, $B_m\cup B_n=B_n$
예 2는 4의 약수이므로
$B_2\subset B_4$ ➡ $B_2\cap B_4=B_2$, $B_2\cup B_4=B_4$

0217 $(A_4\cup A_8)\cap(A_3\cup A_{12})=A_4\cap A_3=A_{12}$ 답 ④

0218 $A_{18}\cap A_{24}\cap A_{30}=(A_{18}\cap A_{24})\cap A_{30}$
$=A_6\cap A_{30}$
$=A_6=\{1, 2, 3, 6\}$
따라서 집합 $A_{18}\cap A_{24}\cap A_{30}$에 속하는 원소가 아닌 것은 ④이다.
답 ④

0219 집합 $A_6\cap A_9$는 6과 9의 양의 공배수의 집합, 즉 18의 양의 배수의 집합이므로
$A_6\cap A_9=A_{18}$
따라서 $A_p\subset A_{18}$을 만족시키는 p는 18의 양의 배수이므로 자연수 p의 최솟값은 18이다. ··· ❶
또 집합 $B_{12}\cap B_{18}$은 12와 18의 양의 공약수의 집합, 즉 6의 양의 약수의 집합이므로
$B_{12}\cap B_{18}=B_6$
따라서 $B_q\subset B_6$을 만족시키는 q는 6의 양의 약수이므로 자연수 q의 최댓값은 6이다. ··· ❷
따라서 구하는 합은
$18+6=24$ ··· ❸
답 24

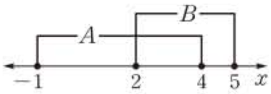
채점 기준	비율
❶ 자연수 p의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 자연수 q의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 p의 최솟값과 자연수 q의 최댓값의 합을 구할 수 있다.	20 %

유형 13 방정식 또는 부등식의 해의 집합의 연산 본책 36쪽

방정식 또는 부등식의 해의 집합의 교집합은 연립방정식 또는 연립부등식의 해의 집합임을 이용한다. 이때 부등식에 대한 문제는 수직선을 이용하면 편리하다.

0220 $x^2-3x-4\le0$에서 $(x+1)(x-4)\le0$
$\therefore -1\le x\le 4$
$\therefore A=\{x\mid -1\le x\le 4\}$

$A\cap B=\{x|2\le x\le 4\}$,
$A\cup B=\{x|-1\le x\le 5\}$가 성립하려면 집합 B는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$B=\{x|2\le x\le 5\}$
$=\{x|(x-2)(x-5)\le 0\}$
$=\{x|x^2-7x+10\le 0\}$

따라서 $p=-7$, $q=10$이므로

$q-p=17$ 답 17

0221 $A\cap B=\{3\}$이므로 $3\in A$, $3\in B$

$3\in A$에서 $9-6+a=0$

$\therefore a=-3$

$x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{-1, 3\}$ ...... ㉠ ⋯ ❶

$3\in B$에서 $27+3b+12=0$

$\therefore b=-13$

$x^3-13x+12=0$에서 $(x+4)(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore B=\{-4, 1, 3\}$ ...... ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $A\cup B=\{-4, -1, 1, 3\}$ ⋯ ❸

답 $\{-4, -1, 1, 3\}$

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 구할 수 있다.	40 %
❷ 집합 B를 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 $A\cup B$를 구할 수 있다.	20 %

0222 $(x-4)(x-20)\ge 0$에서

$x\le 4$ 또는 $x\ge 20$

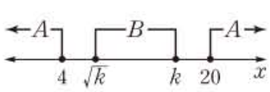
$\therefore A=\{x|x\le 4$ 또는 $x\ge 20\}$

$(x-\sqrt{k})(x-k)\le 0$에서 $\sqrt{k}\le k$이므로

$\sqrt{k}\le x\le k$

$\therefore B=\{x|\sqrt{k}\le x\le k\}$

$A\cap B=\varnothing$이 되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\sqrt{k}>4$, $k<20$

$\sqrt{k}>4$에서 $k>16$이므로

$16<k<20$

따라서 자연수 k는 17, 18, 19의 3개이다. 답 ③

0223 $x^2-x-6<0$에서 $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$

$\therefore A=\{x|-2<x<3\}$

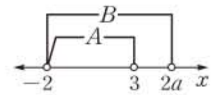
$x^2-2(a-1)x-4a<0$에서

$(x+2)(x-2a)<0$

$\therefore B=\{x|(x+2)(x-2a)<0\}$

이때 $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$

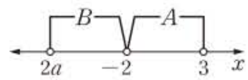
$A\subset B$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$2a\ge 3$ $\therefore a\ge \frac{3}{2}$

따라서 구하는 a의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다. 답 $\frac{3}{2}$

참고 $2a<-2$인 경우는 오른쪽 그림과 같으므로 $A\subset B$일 수 없다.

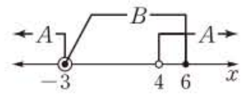


0224 $x^2-x-12>0$에서 $(x+3)(x-4)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>4$

$\therefore A=\{x|x<-3$ 또는 $x>4\}$

이때 $A\cup B=R$,
$A\cap B=\{x|4<x\le 6\}$이 성립하려면 집합 B는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$B=\{x|-3\le x\le 6\}$
$=\{x|(x+3)(x-6)\le 0\}$
$=\{x|x^2-3x-18\le 0\}$

따라서 $a=-3$, $-b=-18$이므로

$a=-3$, $b=18$

$\therefore a+b=15$ 답 ③

유형 14 새로운 집합의 연산 본책 36쪽

새로운 집합의 연산을 약속한 경우
➡ 집합의 연산 법칙을 이용하여 간단한 연산으로 정리한다.

0225 ① $U\diamond A=(U-A)\cup(A-U)=A^C\cup\varnothing=A^C$

② $\varnothing\diamond A=(\varnothing-A)\cup(A-\varnothing)=\varnothing\cup A=A$

③ $A\diamond A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing$

④ $U\diamond\varnothing=(U-\varnothing)\cup(\varnothing-U)=U\cup\varnothing=U$

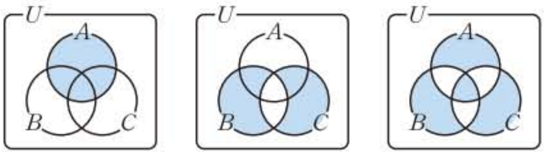
⑤ $A\diamond B=(A-B)\cup(B-A)$
$=(B-A)\cup(A-B)$
$=B\diamond A$ 답 ③

0226 $A\triangleright B=(A\cup B)\cap(A^C\cup B)$
$=(A\cap A^C)\cup B$
$=\varnothing\cup B=B$

$\therefore (A\triangleright B)\triangleright B=B\triangleright B$
$=(B\cup B)\cap(B^C\cup B)$
$=B\cap U=B$ 답 ②

0227 $A\circledcirc B=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$

이므로 $A\circledcirc(B\circledcirc C)$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$A \quad ⊚ \quad B⊚C \quad = \quad A⊚(B⊚C)$

답 ③

유형 15 유한집합의 원소의 개수 본책 37쪽

① $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
② $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
③ $n(A^C)=n(U)-n(A)$
④ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(B)$

0228 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로
$4=30-n(A\cup B)$
$\therefore n(A\cup B)=26$
$\therefore n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=20+15-26$
$=9$ 답 ④

0229 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=28+42-63$
$=7$
$\therefore n((A-B)\cup(B-A))=n((A\cup B)-(A\cap B))$
$=n(A\cup B)-n(A\cap B)$
$=63-7$
$=56$ 답 ②

다른 풀이 두 집합 $A-B$와 $B-A$가 서로소이므로
$n((A-B)\cup(B-A))=n(A-B)+n(B-A)$
$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$
$=63-42$
$=21$
$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$
$=63-28$
$=35$
$\therefore n((A-B)\cup(B-A))=21+35=56$

0230 $A\subset B^C$이므로 $\quad A\cap B=\varnothing$
$\therefore n(A\cap B)=0$
$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=7+13$
$=20$ 답 20

0231 $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$이므로
$25=30-n(A\cap B)$
$\therefore n(A\cap B)=5$ ··· ❶
이때 $n(A)=n(U)-n(A^C)=30-16=14$이므로 ··· ❷
$n(A\cap B^C)=n(A-B)$
$=n(A)-n(A\cap B)$
$=14-5$
$=9$ ··· ❸
답 9

채점 기준	비율
❶ $n(A\cap B)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $n(A)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ $n(A\cap B^C)$를 구할 수 있다.	40 %

0232 두 집합 A와 C가 서로소이므로
$A\cap C=\varnothing$, $A\cap B\cap C=\varnothing$
$\therefore n(A\cap C)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=6+5-9=2$,
$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)=5+4-6=3$
이므로
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=6+5+4-2-3-0+0$
$=10$ 답 ②

유형 16 유한집합의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값 본책 38쪽

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(B)<n(A)$일 때
① $n(A\cap B)$가 최대가 되는 경우
➡ $n(A\cup B)$가 최소가 될 때, 즉 $B\subset A$
② $n(A\cap B)$가 최소가 되는 경우
➡ $n(A\cup B)$가 최대가 될 때, 즉 $A\cup B=U$

0233 (i) $Y\subset X$일 때, $n(X\cap Y)$가 최대이므로
$M=n(Y)=8$
(ii) $X\cup Y=U$일 때, $n(X\cap Y)$가 최소이므로
$n(X\cap Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cup Y)$에서
$m=14+8-20=2$
(i), (ii)에서 $\quad M-m=6$ 답 ④

다른 풀이 $n(X\cap Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cup Y)$
$=14+8-n(X\cup Y)$
$=22-n(X\cup Y)$ ······ ㉠
$X\subset(X\cup Y)$, $Y\subset(X\cup Y)$이므로
$n(X)\le n(X\cup Y)$, $n(Y)\le n(X\cup Y)$ ······ ㉡
$(X\cup Y)\subset U$이므로 $\quad n(X\cup Y)\le n(U)$ ······ ㉢
㉡, ㉢에서 $14\le n(X\cup Y)\le 20$이므로
$-20\le -n(X\cup Y)\le -14$
$\therefore 2\le 22-n(X\cup Y)\le 8$
따라서 ㉠에서 $2\le n(X\cap Y)\le 8$이므로
$M=8$, $m=2$
$\therefore M-m=6$

0234 $(A\cap B)\subset A$, $(A\cap B)\subset B$이므로

$\underline{n(A\cap B)\le n(A),\ n(A\cap B)\le n(B)}$

이고 $n(A\cap B)\ge 3$이므로 └ $n(A)=6,\ n(B)=9$이므로 $n(A\cap B)\le 6$

$3\le n(A\cap B)\le 6$ ···➊

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

(i) $n(A\cap B)=3$일 때,

$n(A\cup B)=6+9-3=12$

(ii) $n(A\cap B)=6$일 때,

$n(A\cup B)=6+9-6=9$

(i), (ii)에서 $9\le n(A\cup B)\le 12$ ···➋

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 12, 최솟값은 9이므로 구하는 합은

$12+9=21$ ···➌

답 21

채점 기준	비율
➊ $n(A\cap B)$의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➋ $n(A\cup B)$의 범위를 구할 수 있다.	50 %
➌ $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0235 (i) $A\cup B=U$일 때, $n(B)$가 최대이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$k-3=k+n(B)-8$

$\therefore n(B)=5$

$\therefore M=5$

(ii) $B\subset A$일 때, $n(B)$가 최소이므로

$n(B)=n(A\cap B)=k-3$

$\therefore m(k)=k-3$

(i), (ii)에서 $M+m(6)=5+(6-3)=8$

답 8

유형 17~18 유한집합의 원소의 개수의 활용 본책 38, 39쪽

주어진 조건을 전체집합 U와 그 부분집합 A, B로 나타낸 후 다음을 이용한다.

- 둘 다 ~하는 ➡ $A\cap B$
- 둘 중 어느 것도 ~하지 않는 ➡ $A^C\cap B^C$
- ~만 ~하는 ➡ $A-B$ 또는 $B-A$
- 둘 중 하나만 ~하는 ➡ $(A-B)\cup(B-A)$

0236 학생 전체의 집합을 U, A 은행의 통장을 갖고 있는 학생의 집합을 A, B 은행의 통장을 갖고 있는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=28,\ n(B)=16,\ n(A^C\cap B^C)=4$

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$에서

$n(A\cup B)=40-4=36$

따라서 A 은행과 B 은행의 통장을 모두 갖고 있는 학생 수는

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=28+16-36$

$=8$

답 8

0237 회원 전체의 집합을 U, 야구를 좋아하는 회원의 집합을 A, 축구를 좋아하는 회원의 집합을 B라 하면

$n(U)=50,\ n(A)=24,\ n(B)=32,$

$n(A^C\cap B^C)=5$ ···➊

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$에서

$n(A\cup B)=50-5=45$

$\therefore n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=24+32-45$

$=11$ ···➋

따라서 축구만 좋아하는 회원 수는

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=32-11$

$=21$ ···➌

답 21

채점 기준	비율
➊ 주어진 조건을 집합으로 나타낼 수 있다.	30 %
➋ $n(A\cap B)$를 구할 수 있다.	40 %
➌ 축구만 좋아하는 회원 수를 구할 수 있다.	30 %

0238 학생 전체의 집합을 U, 수학 강의를 수강하는 학생의 집합을 A, 과학 강의를 수강하는 학생의 집합을 B라 하면 조건 (가), (나), (다)에서

$n(U)=50,\ n(A)=32,\ n(A-B)=13,\ n(A^C\cap B^C)=10$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cap B)=32-13=19$

또 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$에서

$n(A\cup B)=50-10=40$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$40=32+n(B)-19$

$\therefore n(B)=27$

따라서 과학 강의를 수강하는 학생 수는 27이다.

답 ⑤

0239 학생 전체의 집합을 U, 세 문제 A, B, C를 맞힌 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=n(A\cup B\cup C)=40,\ n(A)=16,\ n(B)=20,$

$n(C)=22,\ n(A\cap B\cap C)=3$

세 문제 중 두 문제만 맞힌 학생 수는

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)$ ······ ㉠

이때

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

이므로

$40=16+20+22-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+3$

$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=21$

따라서 ㉠에서 구하는 학생 수는

$21-3\cdot 3=12$

답 12

02 집합의 연산

0240 입장객 전체의 집합을 U, 범퍼카를 이용한 입장객의 집합을 A, 롤러코스터를 이용한 입장객의 집합을 B라 하면

$n(U)=85$, $n(A)=46$, $n(B)=53$

범퍼카와 롤러코스터를 모두 이용한 입장객의 집합은 $A\cap B$이므로 $A\subset B$일 때 $n(A\cap B)$가 최대이다.

$\therefore M=n(A)=46$

또 $A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$m=46+53-85=14$

$\therefore M-m=32$ 답 ③

0241 주부 전체의 집합을 U, A 통조림을 구입해 본 주부의 집합을 A, B 통조림을 구입해 본 주부의 집합을 B라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=23$, $n(B)=27$

B 통조림만 구입해 본 주부의 집합은 $B-A$이고

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$ …… ㉠

이므로 $n(A\cap B)$가 최소일 때 $n(B-A)$는 최대가 된다.

$A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로 $n(A\cap B)$의 최솟값을 m이라 하면 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$m=23+27-40=10$

따라서 $n(A\cap B)$의 최솟값은 10이므로 ㉠에서 구하는 최댓값은

$27-10=17$ 답 ④

0242 고객 전체의 집합을 U, 반지를 착용한 고객의 집합을 A, 목걸이를 착용한 고객의 집합을 B라 하면

$n(U)=35$, $n(A)=12$, $n(B)=18$

반지와 목걸이 중 어느 것도 착용하지 않은 고객 수는

$$\begin{aligned} n(A^C\cap B^C)&=n((A\cup B)^C)\\ &=n(U)-n(A\cup B)\\ &=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}\\ &=35-12-18+n(A\cap B)\\ &=5+n(A\cap B) \end{aligned}$$

이때 $n(A\cap B)$의 최댓값이 12, 최솟값이 0이므로

$M=5+12=17$, $m=5+0=5$

$\therefore M+m=22$ 답 22

참고 ① $A\subset B$일 때, 즉 $n(A\cap B)=n(A)$일 때, $n(A\cap B)$의 값이 최대이므로 $n(A\cap B)$의 최댓값은 12

② $n(A)+n(B)=30<35=n(U)$이므로 $A\cap B=\varnothing$일 때, $n(A\cap B)$의 값이 최소이다.

따라서 $n(A\cap B)$의 최솟값은 0

0243 전략 어떤 수를 10으로 나누었을 때의 나머지는 그 수의 일의 자리의 숫자와 같다.

풀이 8^n-1, 7^n을 10으로 나누었을 때의 나머지는 각각 8^n-1, 7^n의 일의 자리의 숫자와 같다.

$n=1, 2, 3, 4, \cdots$일 때 8^n의 일의 자리의 숫자는 8, 4, 2, 6이 이 순서대로 반복되므로 8^n-1의 일의 자리의 숫자는 7, 3, 1, 5가 이 순서대로 반복된다.

$\therefore A=\{1, 3, 5, 7\}$ ⋯➊

$n=1, 2, 3, 4, \cdots$일 때 7^n의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복되므로

$B=\{1, 3, 7, 9\}$ ⋯➋

따라서 $A\cap B=\{1, 3, 7\}$이므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^3=8$ ⋯➌

답 8

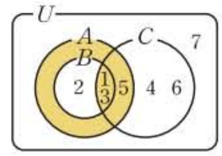
채점 기준	비율
➊ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
➋ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
➌ 집합 $A\cap B$의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	20 %

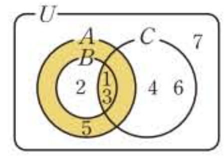
0244 전략 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타낸다.

풀이 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 7\}$이고 $A\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로

$(A\cup C)^C=\{7\}$

주어진 조건을 만족시키는 집합 U, A, B, C를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 두 가지 중 하나이고, 집합 $A\cap(B^C\cup C)$는 색칠한 부분과 같다.





$\therefore A\cap(B^C\cup C)=\{1, 3, 5\}$ 답 ④

0245 전략 $A=\{4, 6, a, b\}$로 놓고 주어진 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $A\cap B=\{4, 6\}$이므로 $A=\{4, 6, a, b\}$ (a, b는 자연수)라 하면 집합 A의 모든 원소의 합이 21이므로

$4+6+a+b=21$

$\therefore a+b=11$ …… ㉠

한편 $B=\{x+k\mid x\in A\}$이므로

$B=\{4+k, 6+k, a+k, b+k\}$

조건 (나)에서 $A\cup B$의 모든 원소의 합이 40이고, B의 모든 원소의 합은 $21+4k$이므로

($A\cup B$의 모든 원소의 합)

=(A의 모든 원소의 합)+(B의 모든 원소의 합)

−($A\cap B$의 모든 원소의 합)

$40=21+(21+4k)-10$

$40=4k+32$ $\quad\therefore k=2$

$B=\{6, 8, a+2, b+2\}$에서 $A\cap B=\{4, 6\}$이므로 $a+2$, $b+2$ 중 어느 하나는 4이어야 한다.

(i) $a+2=4$이면 $\quad a=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad b=9$

(ii) $b+2=4$이면 $\quad b=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad a=9$

(i), (ii)에서 $A=\{2, 4, 6, 9\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 곱은

$2\cdot4\cdot6\cdot9=432$ 답 432

0246 전략 ㄷ에서 $n(A\cap B)=2$가 되는 경우를 나누어 k의 값을 구한다.

풀이 ㄱ. $A\cap B=\{2, 5\}$이면 $2\in A$, $5\in A$

2와 5가 k의 양의 약수이려면 k는 10의 양의 배수이면서 18 이하의 자연수이어야 하므로

$k=10$

ㄴ. $A\cap B=\{5, 6\}$이면 $5\in A$, $6\in A$

5와 6이 k의 양의 약수이려면 k는 30의 양의 배수이면서 18 이하의 자연수이어야 하는데 이러한 k는 존재하지 않는다.

ㄷ. (i) $A\cap B=\{2, 5\}$일 때,

$k=10$이므로 $A=\{1, 2, 5, 10\}$

이때 $A-B=\{1, 10\}$의 모든 원소의 합은

$1+10=11$

(ii) $A\cap B=\{2, 6\}$일 때,

2와 6이 k의 양의 약수이려면 k는 6의 양의 배수이면서 18 이하의 자연수이어야 하므로

$k=6$ 또는 $k=12$ 또는 $k=18$

ⓘ $k=6$일 때,

$A=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $A-B=\{1, 3\}$의 모든 원소의 합은

$1+3=4$

ⓘⓘ $k=12$일 때,

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로 $A-B=\{1, 3, 4, 12\}$의 모든 원소의 합은

$1+3+4+12=20$

ⓘⓘⓘ $k=18$일 때,

$A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로 $A-B=\{1, 3, 9, 18\}$의 모든 원소의 합은

$1+3+9+18=31$

(i), (ii)에서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 k의 값은 10, 18이므로 그 합은

$10+18=28$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0247 전략 집합의 연산 법칙을 이용하여 집합 B를 먼저 구한다.

풀이
$$\begin{aligned}(A^C\cup B)\cap(A\cup B)&=(A^C\cap A)\cup B\\&=\varnothing\cup B\\&=B\end{aligned}$$

이므로

$B=\{3, 8, 9\}$ ··· ❶

그런데 $3\in A$이므로 집합 $A\cap B$의 원소의 합은

$A\cap B=B=\{3, 8, 9\}$일 때 최대이고 $A\cap B=\{3\}$일 때 최소이다.

따라서 $M=3+8+9=20$, $m=3$이므로 ··· ❷

$M+m=23$ ··· ❸

답 23

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 구할 수 있다.	30 %
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	10 %

다른 풀이
$$\begin{aligned}(A\cup B)-(A^C\cup B)&=(A\cup B)\cap(A^C\cup B)^C\\&=(A\cup B)\cap(A\cap B^C)\\&=\underbrace{(A\cup B)\cap(A-B)}_{(A-B)\subset(A\cup B)}\\&=A-B\end{aligned}$$

이므로

$A-B=\{4, 6\}$

$\therefore B=(A\cup B)-(A-B)=\{3, 8, 9\}$

0248 전략 $A\cup B=A$이면 $B\subset A$임을 이용한다.

풀이 $A\cup B=A$이므로 $B\subset A$

(i) $B=\varnothing$인 경우

방정식 $ax+1=x$의 해가 존재하지 않아야 하므로

$(a-1)x=-1$에서 $a=1$

(ii) $B\neq\varnothing$인 경우

$-1\in B$ 또는 $2\in B$이어야 하므로

$-a+1=-1$ 또는 $2a+1=2$

$\therefore a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$\frac{1}{2}+1+2=\frac{7}{2}$ 답 $\frac{7}{2}$

0249 전략 $P-R=\varnothing$이면 $P\subset R$이고 $Q\cap R=R$이면 $R\subset Q$임을 이용한다.

풀이 $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$이므로

$A\cap B=\{1, 2, 4, 8\}$,

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$

이때 $(A\cap B)-X=\varnothing$, $(A\cup B)\cap X=X$에서

$(A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$

이므로 집합 X는 집합 $A\cup B$의 부분집합 중에서 1, 2, 4, 8을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

그런데 집합 X의 모든 원소의 합이 30이고,

$1+2+4+8=15$

이므로 1, 2, 4, 8을 제외한 집합 X의 원소의 합은 15이다.

3, 6, 12, 16, 24 중에서 몇 개의 수를 선택하여 그 합이 15가 되는 경우는 3, 12를 선택하는 경우뿐이므로

$X=\{1, 2, 3, 4, 8, 12\}$

따라서 집합 X의 원소의 개수는 6이다. 답 ③

0250 전략 자연수의 서로소의 뜻을 이용하여 집합 X의 원소가 되기 위한 조건을 찾는다.

풀이 조건 (나)에서 $X\cap B=\varnothing$이므로 집합 X의 모든 원소는 50과 서로소가 아니고, $50=2\cdot5^2$이므로 집합 X의 모든 원소는 2 또는 5의 배수이다.

조건 (다)에서 $12=2^2\cdot3$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

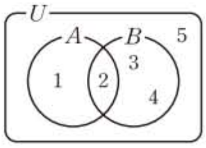
따라서 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 자연수이다.
즉 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는

$5,\ 25,\ 35,\ 55,\ 65,\ 85,\ 95$

이때 조건 (가)에서 $X \neq \varnothing$이므로 집합 X는
$\{5,\ 25,\ 35,\ 55,\ 65,\ 85,\ 95\}$의 공집합이 아닌 부분집합이다.
즉 집합 X의 개수는 $2^7-1=127$ 답 127

0251 전략 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타낸 후 조건을 만족시키는 경우를 나누어 생각한다.

풀이 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고



$A \cap B=\{2\}$

(i) $2 \in X$인 경우

$X \cap A \neq \varnothing$, $X \cap B \neq \varnothing$이므로 집합 X의 개수는 집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{5-1}=2^4=16$

(ii) $2 \notin X$인 경우

2를 제외한 집합 A의 원소는 1이고, 2를 제외한 집합 B의 원소는 3, 4이므로 $\underline{X \cap A \neq \varnothing,\ X \cap B \neq \varnothing}$이려면
└집합 X는 1을 반드시 원소로 갖고 3 또는 4를 원소로 가져야 한다.

$1 \in X,\ 3 \in X,\ 4 \notin X$ 또는 $1 \in X,\ 3 \notin X,\ 4 \in X$
또는 $1 \in X,\ 3 \in X,\ 4 \in X$

이때 각 경우에서 집합 X는 집합 $(A \cup B)^C$의 원소인 5를 원소로 갖거나 갖지 않을 수 있으므로 집합 X의 개수는

$3 \cdot 2=6$

(i), (ii)에서 구하는 집합 X의 개수는

$16+6=22$ 답 22

0252 전략 서로소인 두 집합의 교집합은 공집합임을 이용한다.

풀이 A와 B^C가 서로소이므로

$A \cap B^C=A-B=\varnothing$

$\therefore A \subset B$

A와 C가 서로소이므로 $A \cap C=\varnothing$

ㄱ. $A=\{1\}$, $B=\{1,\ 2\}$, $C=\{2,\ 3\}$이면 $A \subset B$, $A \cap C=\varnothing$ 이지만

$B \cap C=\{2\} \neq \varnothing$

ㄴ. $(A \cap B)^C \cap C=A^C \cap C=C$

ㄷ. $(B-A) \cup (B-C)=(B \cap A^C) \cup (B \cap C^C)$

$=B \cap (A^C \cup C^C)$

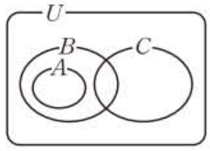
$=B \cap \underbrace{(A \cap C)^C}_{A \cap C=\varnothing,\ \varnothing^C=U}$

$=B \cap U$

$=B$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

참고 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 만족시키는 한 가지 경우를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 이 벤다이어그램에서 ㄱ이 항상 성립하는 것은 아님을 알 수 있다.



0253 전략 집합 $A_p \cap A_q$는 p와 q의 공배수의 집합임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 집합 $A_n \cap A_2$는 n과 2의 공배수의 집합이므로 $A_n \cap A_2=A_{2n}$이면 n과 2의 최소공배수는 $2n$이다. 즉 n과 2는 서로소이므로 n은 홀수이다. ··· ❶

조건 (나)에서 홀수 n에 대하여

$A_n-A_2=\{n,\ 3n,\ 5n,\ 7n,\ \cdots\}$ ··· ❷

(i) n이 3의 배수가 아니면

$A_n-A_3=\{n,\ 2n,\ 4n,\ 5n,\ 7n,\ \cdots\}$

이므로 $(A_n-A_3) \not\subset (A_n-A_2)$

(ii) n이 3의 배수이면

$A_n-A_3=\varnothing$

이므로 $(A_n-A_3) \subset (A_n-A_2)$

(i), (ii)에서 n은 3의 배수이므로 주어진 조건을 모두 만족시키는 n은 50 이하의 자연수 중 홀수인 3의 배수이다. ··· ❸

따라서 자연수 n은

$3,\ 9,\ 15,\ 21,\ 27,\ 33,\ 39,\ 45$

의 8개이다. ··· ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)를 만족시키는 n의 조건을 구할 수 있다.	20 %
❷ 집합 A_n-A_2를 n을 사용하여 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ 주어진 조건을 모두 만족시키는 n의 조건을 구할 수 있다.	50 %
❹ n의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0254 전략 집합의 연산 법칙을 이용하여 $A * B$를 파악한다.

풀이 $A * B$

$=(A-B)^C \cap (B-A)^C$

$=(A \cap B^C)^C \cap (B \cap A^C)^C$

$=(A^C \cup B) \cap (B^C \cup A)$

$=\{(A^C \cup B) \cap B^C\} \cup \{(A^C \cup B) \cap A\}$

$=\{(A^C \cap B^C) \cup (B \cap B^C)\} \cup \{(A^C \cap A) \cup (B \cap A)\}$

$=\{(A^C \cap B^C) \cup \varnothing\} \cup \{\varnothing \cup (A \cap B)\}$

$=(A \cup B)^C \cup (A \cap B)$

ㄱ. $\{1,\ 2\} \cup \{2,\ 3\}=\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 2\} \cap \{2,\ 3\}=\{2\}$이므로

$\{1,\ 2\} * \{2,\ 3\}=\{4,\ 5,\ 6\} \cup \{2\}$

$=\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$

ㄴ. $A^C * B^C=(A^C \cup B^C)^C \cup (A^C \cap B^C)$

$=(A \cap B) \cup (A \cup B)^C$

$=(A \cup B)^C \cup (A \cap B)$

$=A * B$

ㄷ. $A * B=(A \cup B)^C \cup (A \cap B)=\varnothing$에서

$(A \cup B)^C=\varnothing$, $A \cap B=\varnothing$

즉 $A \cup B=U$, $A \cap B=\varnothing$이므로 $B=A^C$

따라서 $A * B=\varnothing$을 만족시키는 집합 A가 정해지면 집합 B도 정해지므로 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 전체집합 U의 부분집합 A의 개수와 같다.

$\therefore 2^6=64$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0255 전략 $B\subset U$이므로 집합 B의 원소는 모두 자연수임을 이용한다.

풀이 $B\subset U$에서 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$가 자연수이므로 a, b, c는 모두 자연수의 제곱인 수이다.

조건 (나)에서 $a<b<c$, $a+c=53$이므로

$a=4$, $c=49$

$\therefore A=\{4, b, 49\}$, $B=\{2, \sqrt{b}, 7\}$

또 $n(A)=3$, $n(B)=3$, $n(A\cup B)=5$에서

$n(A\cap B)=3+3-5=1$

이때 $4<b<49$, $2<\sqrt{b}<7$이므로

$b=7$ 또는 $\sqrt{b}=4$

$\therefore b=7$ 또는 $b=16$

그런데 $\sqrt{b}$는 자연수이므로

$b=16$

따라서 $B=\{2, 4, 7\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$2+4+7=13$ 답 ③

0256 전략 두 집합 A, B는 집합 U의 부분집합을 원소로 갖는 집합이다.

풀이 집합 A는 a를 반드시 원소로 갖는 U의 부분집합을 원소로 가지므로

$n(A)=2^{4-1}=2^3=8$ ··· ❶

집합 B는 b를 반드시 원소로 갖는 U의 부분집합을 원소로 가지므로

$n(B)=2^{4-1}=2^3=8$ ··· ❷

집합 $A\cap B$는 a, b를 반드시 원소로 갖는 U의 부분집합을 원소로 가지므로

$n(A\cap B)=2^{4-2}=2^2=4$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=8+8-4$

$=12$ ··· ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ $n(A)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $n(B)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $n(A\cup B)$를 구할 수 있다.	40 %

0257 전략 집합 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$의 부분집합의 개수는 2^n임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $s(A)=4$이면 $2^{n(A)}=4=2^2$

$\therefore n(A)=2$

따라서 $n(A^C)=n(U)-n(A)=5-2=3$이므로

$s(A^C)=2^3=8$

ㄴ. $A^C\subset B^C$이면 $B\subset A$이므로 $n(B)\le n(A)$

$\therefore s(B)\le s(A)$

ㄷ. $n(A)=2$, $n(B)=3$, $\underbrace{A\cap B=\varnothing}_{n(A\cap B)=0}$이면

$s(A)+s(B)=2^2+2^3=12$

이때 $n(A\cup B)=2+3=5$이므로

$s(A\cup B)=2^5=32$

$\therefore s(A\cup B)\ne s(A)+s(B)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

0258 전략 주어진 조건을 집합의 연산 법칙을 이용하여 간단히 정리한다.

풀이 조건 (나)에서

$A\cap(A^C\cup B)=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$

$=\varnothing\cup(A\cap B)$

$=A\cap B$

이므로 $A\cap B\ne\varnothing$

$\therefore n(A\cap B)\ge 1$

조건 (다)에서 $n(A-B)=11$이므로

$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)$

$\ge 11+1$

$=12$

조건 (가)에서 $n(U)=25$이므로

$n(U)\ge n(A)+n(B-A)$

$\therefore n(B-A)\le n(U)-n(A)$

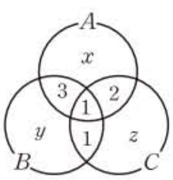
$\le 25-12$

$=13$

따라서 $n(B-A)$의 최댓값은 13이다. 답 13

0259 전략 각 집합에 속하는 원소의 개수를 벤다이어그램을 이용하여 나타낸다.

풀이 a, b, c를 초과한 사람의 집합을 각각 A, B, C라 하고 각 부분에 속하는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 벤다이어그램으로 나타내면 $n(A\cup B\cup C)=15$이므로



$x+y+z+3+1+2+1=15$

$\therefore x+y+z=8$ ······ ㉠

$n(A\cup B)=12$이므로

$x+y+3+1+2+1=12$

$\therefore x+y=5$ ······ ㉡

$n(B\cup C)=12$이므로

$y+z+3+1+2+1=12$

$\therefore y+z=5$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $x=3$, $y=2$, $z=3$

㉠−㉡을 하면 $z=3$
㉠−㉢을 하면 $x=3$
$x=3$을 ㉡에 대입하면 $y=2$

따라서 a 또는 c를 초과한 사람 수는

$n(A\cup C)=x+z+3+1+2+1=13$ 답 13

0260 전략 주어진 조건을 집합으로 나타낸 후 합집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 학생 전체의 집합을 U, 인문학 특강을 신청한 학생의 집합을 A, 자연 과학 특강을 신청한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=120$ ······ ㉠

$n(A)=n(B)-16$ ······ ㉡

$n(A\cup B)=n(A^C\cap B^C)+80$ ······ ㉢ ··· ❶

ⓒ에서 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$n(A\cup B)=n(U)-n(A\cup B)+80$

$2\times n(A\cup B)=120+80$ ($\because$ ㉠)

$\therefore n(A\cup B)=100$ ··· ❷

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$100=n(B)-16+n(B)-n(A\cap B)$ ($\because$ ㉡)

$\therefore n(B)=\frac{1}{2}\times n(A\cap B)+58$

자연 과학 특강만 신청한 학생의 수는

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}\times n(A\cap B)+58-n(A\cap B)$$
$$=58-\frac{1}{2}\times n(A\cap B)$$ ··· ❸

위의 식에서 $n(B-A)$가 최대일 때는 $n(A\cap B)$가 최소일 때이고 $n(A\cap B)$의 최솟값은 0이므로 $n(B-A)$의 최댓값은 58

$A\cap B=\varnothing$

따라서 자연 과학 특강만 신청한 학생 수의 최댓값은 58이다.

··· ❹

답 58

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 집합으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $n(A\cup B)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $n(B-A)$를 $n(A\cap B)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❹ 자연 과학 특강만 신청한 학생 수의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

참고 $n(A)=n(B)-16$에서 $n(A)<n(B)$이므로 $n(A\cap B)$의 최댓값은 $n(A)$이다.
또 $n(A\cup B)=100<n(U)$이므로 $n(A\cap B)$의 최솟값은 0이다.
$\therefore 0\le n(A\cap B)\le n(A)$

03 명제

0261 답 참인 명제: ㄷ, ㅂ, 거짓인 명제: ㄱ, ㄹ

0262 답 ㄱ, ㄹ

0263 $x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$
따라서 조건 p의 진리집합은 $\{-3, 1\}$ 답 $\{-3, 1\}$

0264 10보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7이므로 조건 q의 진리집합은
$\{2, 3, 5, 7\}$ 답 $\{2, 3, 5, 7\}$

0265 답 $\sqrt{4}$는 무리수가 아니다. (참)

0266 답 1은 합성수이거나 소수이다. (거짓)

0267 $\sim p$: x는 8의 약수가 아니다.
8의 약수는 1, 2, 4, 8이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은
$\{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$ 답 풀이 참조

0268 $\sim q$: $x^2-5x+6\neq0$
$x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$
따라서 조건 $\sim q$의 진리집합은
$\{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 답 풀이 참조

0269 답 $x\neq1$이고 $x\neq2$

0270 답 $x<-2$ 또는 $x\ge3$

0271 답 가정: 18의 약수이다., 결론: 9의 약수이다.

0272 답 가정: $ab=0$이다., 결론: $a=0$ 또는 $b=0$이다.

0273 [반례] $x=1$, $y=3$이면 $x+y=4$이므로 $x+y$는 짝수이지만 x, y는 모두 홀수이다. 따라서 주어진 명제는 거짓이다.
답 거짓

0274 $xy\neq0$이면 $x\neq0$, $y\neq0$이므로 $x^2+y^2\neq0$이다.
따라서 주어진 명제는 참이다. 답 참

0275 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이려면 집합 P의 원소 중에서 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 구하는 집합은 $P\cap Q^C$ 답 ④

0276 [반례] $x=0$이면 $|x|=0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

답 거짓

0277 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 주어진 명제는 참이다.

답 참

0278 $x=0$이면 $x^2=0$이므로 주어진 명제는 참이다. 답 참

0279 $\sqrt{x}<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

0280 답 어떤 실수 x에 대하여 $x^2<0$이다. (거짓)

0281 답 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq0$이다. (참)

0282 답 역: $x=1$이면 $x^2=1$이다.
대우: $x\neq1$이면 $x^2\neq1$이다.

0283 답 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다.
대우: $x\neq0$ 또는 $y\neq0$이면 $x^2+y^2\neq0$이다.

0284 답 역: $a>0$ 또는 $b>0$이면 $a+b>0$이다.
대우: $a\le0$이고 $b\le0$이면 $a+b\le0$이다.

0285 명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우인 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 항상 참이다.
이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

0286 답 (1) x, y가 모두 유리수이면 $x+y$는 유리수이다.
(2) 참 (3) 참

0287 주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$x=4$이면 $x^2+1=k$이다.'
도 참이다.
$x=4$를 $x^2+1=k$에 대입하면
$k=4^2+1=17$ 답 17

0288 $|x|<1$에서 $-1<x<1$
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

답 충분조건

0289 $x>0$, $y>0$이면 $x+y>0$, $xy>0$
$x+y>0$, $xy>0$이면 $x>0$, $y>0$
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 필요충분조건

0290 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Q=\{1, 2, 3, 6\}$
이므로 $Q\subset P$
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

답 필요조건

0291 모든 정수는 유리수이므로 $p \Longrightarrow q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다. 답 충분조건

0292 $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$
(1) $ab=0 \Longleftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$
따라서 $ab=0$은 $a^2+b^2=0$이기 위한 필요조건이다.
(2) $a+b=0 \Longleftrightarrow a=-b$
따라서 $a+b=0$은 $a^2+b^2=0$이기 위한 필요조건이다.
(3) $|a|+|b|=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$
따라서 $|a|+|b|=0$은 $a^2+b^2=0$이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) 필요조건 (2) 필요조건 (3) 필요충분조건

0293 답 (가) $=$ (나) $=$

0294 답 (가) $\ge$ (나) $\ge$

0295 $a^2+2b^2-2ab=a^2-2ab+b^2+b^2$
$=(\boxed{a-b})^2+b^2\ge0$
a, b가 실수이므로 $(a-b)^2\ge0$, $b^2\ge0$
$\therefore a^2+2b^2 \boxed{\ge} 2ab$
이때 등호는 $a-b=0,\ b=0$에서 $a=b=\boxed{0}$일 때 성립한다.
$(a-b)^2\ge0$, $b^2\ge0$에서 $a-b=0$, $b=0$일 때 등호가 성립한다.

답 (가) $a-b$ (나) $\ge$ (다) 0

0296 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}-(a+b)$
$=\boxed{2\sqrt{ab}}>0$
$\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \boxed{>} (\sqrt{a+b})^2$
그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a+b}>0$이므로
$\sqrt{a}+\sqrt{b} \boxed{>} \sqrt{a+b}$ 답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $>$ (다) $>$

참고 $a>0$, $b>0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.

0297 $a^2+ab+b^2=\left(a^2+ab+\frac{b^2}{4}\right)+\frac{3}{4}b^2$
$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$
a, b가 실수이므로 $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2\ge0$, $\frac{3}{4}b^2\ge0$
$\therefore a^2+ab+b^2\ge0$ (단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

답 풀이 참조

참고 $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2\ge0$에서 $a+\frac{b}{2}=0$일 때 등호가 성립한다.
또 $\frac{3}{4}b^2\ge0$에서 $b=0$일 때 등호가 성립한다.
따라서 $a=b=0$일 때 $a^2+ab+b^2=0$이 성립한다.

03 명제

0298 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})$

$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$$

$\therefore\ \dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

답 풀이 참조

0299 $x>0$, $\dfrac{1}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2 \text{ (단, 등호는 } x=1\text{일 때 성립)}$$

따라서 $x+\dfrac{1}{x}$의 최솟값은 2이다. 답 2

참고 등호는 $x=\dfrac{1}{x}$에서 $x^2=1$, 즉 $x=1(\because x>0)$일 때 성립한다.

0300 $4x>0$, $\dfrac{9}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4x+\frac{9}{x}\geq 2\sqrt{4x\cdot\frac{9}{x}}$$

$$=2\cdot 6=12\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $4x+\dfrac{9}{x}$의 최솟값은 12이다. 답 12

참고 등호는 $4x=\dfrac{9}{x}$에서 $x^2=\dfrac{9}{4}$, 즉 $x=\dfrac{3}{2}$ $(\because x>0)$일 때 성립한다.

0301 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$$

$$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$$

$$=(\boxed{bx-ay})^2\geq 0$$

$\therefore\ (a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

이때 등호는 $bx-ay=0$, 즉 $\dfrac{x}{a}=\boxed{\dfrac{y}{b}}$일 때 성립한다.

답 (가) $bx-ay$ (나) $\dfrac{y}{b}$

참고 (가)에 $ay-bx$를 써넣어도 된다.

유형 **01** **명제** 본책 50쪽

① 명제인 것 ➡ { 참인 문장 또는 식 / 거짓인 문장 또는 식
② 명제가 아닌 것 ➡ 참, 거짓을 판별할 수 없는 문장 또는 식

0302 ① x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.
②, ④, ⑤ 참인 명제이다.
③ 거짓인 명제이다. 답 ①

0303 ㄱ. 거짓인 명제이다.
ㄴ. $x-3=x+5$에서 $-3=5$이므로 거짓인 명제이다.
ㄷ. $3x=x+2x$에서 $3x=3x$이므로 참인 명제이다.
ㄹ. x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.
이상에서 명제인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ②

0304 ① 참인 명제이다.
② 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
③ 거짓인 명제이다.
④ x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.
⑤ $-x+3\geq 1-x$에서 $3\geq 1$이므로 참인 명제이다.

답 ③

유형 **02** **명제와 조건의 부정** 본책 50쪽

① '$a\leq x\leq b$'의 부정 ➡ '$x<a$ 또는 $x>b$'
② '$x=a$'의 부정 ➡ '$x\neq a$'
③ '또는'의 부정 ➡ '그리고'
④ '그리고'의 부정 ➡ '또는'

0305 'p 또는 $\sim q$'의 부정은 '$\sim p$ 그리고 q'
$\sim p$: $x\leq -2$ 또는 $x>3$, q: $-3\leq x<5$이므로 '$\sim p$ 그리고 q'는
$-3\leq x\leq -2$ 또는 $3<x<5$ 답 ④

0306 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.
① 3은 소수가 아니다. (거짓)
② $6\leq 2$ (거짓)
③ $\underbrace{(-1)^5+1}_{-1+1=0}\neq\underbrace{-1^5+1}_{-1+1=0}$ (거짓)
④ 4는 18의 약수가 아니다. (참)
⑤ $\varnothing\not\subset\{1, 2, 3, 4\}$ (거짓)

답 ④

다른 풀이 명제가 거짓이면 그 부정은 참이다. 주어진 명제 ①, ②, ③, ⑤는 참, ④는 거짓이므로 명제의 부정이 참인 것은 ④이다.

0307 '$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$'의 부정은
'$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$'
이므로
$(a-b)^2\neq 0$ 또는 $(b-c)^2\neq 0$ 또는 $(c-a)^2\neq 0$
$\therefore\ a\neq b$ 또는 $b\neq c$ 또는 $c\neq a$
즉 a, b, c 중에 서로 다른 것이 적어도 하나 있다. 답 ⑤

유형 **03** **진리집합** 본책 51쪽

진리집합 ➡ 전체집합 U의 원소 중에서 어떤 조건이 참이 되게 하는 모든 원소의 집합

0308 $U=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 3\}$, $Q=\{2, 3, 4, 6\}$

① 조건 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{4, 6, 12\}$이므로
$n(P^C)=3$

② 조건 $\sim q$의 진리집합은 $Q^C=\{1, 12\}$이므로
$n(Q^C)=2$

③ 조건 'p이고 q'의 진리집합은 $P\cap Q=\{2, 3\}$이므로
$n(P\cap Q)=2$

④ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은 $P^C\cup Q=\{2, 3, 4, 6, 12\}$이므로 $n(P^C\cup Q)=5$

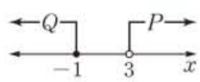
⑤ 조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cup Q^C=\{1, 2, 3, 12\}$이므로 $n(P\cup Q^C)=4$

답 ④

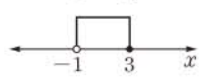
0309 20 이하의 자연수 중 4의 배수는 4, 8, 12, 16, 20이고, 16의 약수는 1, 2, 4, 8, 16이므로 조건 p의 진리집합은

$\{4, 8, 16\}$ 답 $\{4, 8, 16\}$

0310 두 진리집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



또 조건 '$-1<x\le 3$'의 진리집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 집합은



$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$ 답 ⑤

참고 ① $P\cap Q=\varnothing$
② $P\cup Q^C=\{x|x>-1\}$
③ $P^C\cup Q=\{x|x\le 3\}$
④ $(P\cap Q)^C=\varnothing^C$

0311 $x^3-x=0$에서 $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

조건 p의 진리집합을 P라 하면 $P=\{-1, 0, 1\}$ ⋯ ❶

$x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

조건 q의 진리집합을 Q라 하면 $Q=\{-3, 1\}$ ⋯ ❷

이때 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은 $P^C\cup Q$이고 $P^C=\{-3, -2, 2, 3\}$이므로

$P^C\cup Q=\{-3, -2, 1, 2, 3\}$ ⋯ ❸

따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은

$-3+(-2)+1+2+3=1$ ⋯ ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ 조건 p의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건 q의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❸ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

유형 04 명제의 참, 거짓

본책 51쪽

(1) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때
① $P\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
② $P\not\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
(2) 어떤 명제가 거짓임을 보이려면 ➡ 명제의 반례를 찾는다.

0312 ㄱ. [반례] $x=-2$, $y=-1$, $z=1$이면 $x<y<z$이지만 $xy>yz$이다. $2>-1$

ㄷ. [반례] $x=-1$, $y=0$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $y=0$이다.

이상에서 참인 명제인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0313 ① [반례] $x=-1$이면 $x^2+x=0$이지만 $x<0$이다.

② $2x-1=3$에서 $x=2$이고 $2^2+2-6=0$이므로 주어진 명제는 참이다.

③ [반례] $x=3$이면 x는 3의 배수이지만 9의 배수는 아니다.

④ [반례] 2는 소수이지만 $2^2=4$는 짝수이다.

⑤ [반례] $x=0$, $y=1$이면 $xy=0$이지만 $x^2+y^2\ne 0$이다.

답 ②

0314 ㄱ. 두 조건 p, q를

p: x는 4의 양의 약수이다., q: x는 8의 양의 약수이다.

라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 4\}$, $Q=\{1, 2, 4, 8\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. [반례] $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이면 a, b는 모두 무리수이지만 $a+b=0$이므로 $a+b$는 유리수이다.

ㄷ. 삼각형 ABC가 정삼각형이면

$\angle A=\angle B=\angle C=60°$

따라서 $\angle B=\angle C$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄹ. $(a-2)(b-3)=0$이면

$a-2=0$ 또는 $b-3=0$

$\therefore a=2$ 또는 $b=3$

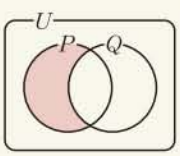
따라서 주어진 명제는 참이다.

이상에서 거짓인 명제는 ㄴ의 1개이다. 답 1

유형 05 거짓인 명제의 반례

본책 52쪽

전체집합 U에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠한 부분, 즉 $P-Q=P\cap Q^C$의 원소이다.



0315 명제 'p이면 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 P의 원소 중에서 집합 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 구하는 원소는 $P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$의 원소인 b이다.

답 ②

0316 두 조건 p, q를

p: n은 2의 배수이다., q: n은 3의 배수이다.

라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 4, 6, \cdots, 18\}$, $Q=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

이때 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않으므로 집합 $P\cap Q^C$의 원소이다.

따라서 구하는 반례는 2, 4, 8, 10, 14, 16이다.

답 2, 4, 8, 10, 14, 16

0317 명제 '$\sim p$이면 $\sim q$이고 r이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P^C에는 속하고 집합 $Q^C\cap R$에는 속하지 않는다.

따라서 구하는 집합은

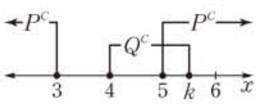
$P^C\cap(Q^C\cap R)^C=P^C\cap(Q\cup R^C)=(Q\cup R^C)-P$

답 ④

0318 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|3<x<5\}$, $Q=\{x|x<4 \text{ 또는 } x>k\}$

이때 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P^C에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않으므로 집합 $P^C\cap Q^C$의 원소이다.



$P^C=\{x|x\le 3 \text{ 또는 } x\ge 5\}$,

$Q^C=\{x|4\le x\le k\}$이므로 집합 $P^C\cap Q^C$의 정수인 원소가 5뿐이려면 오른쪽 그림에서

$5\le k<6$

답 $5\le k<6$

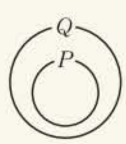
유형 06 명제의 참, 거짓과 진리집합

본책 52쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

① 명제 $p \longrightarrow q$가 참 ➡ $P\subset Q$

② $P\subset Q$ ➡ 명제 $p \longrightarrow q$가 참

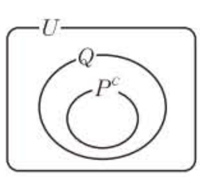


0319 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로

$P^C\subset Q$

따라서 오른쪽 그림에서

$P\cup Q=U$



답 ④

0320 주어진 벤다이어그램에서 $Q\subset P$, $Q\subset R$이므로 두 명제

$q \longrightarrow p$, $q \longrightarrow r$

가 모두 참이다.

또한 $P^C\subset Q^C$, $R^C\subset Q^C$이므로 두 명제

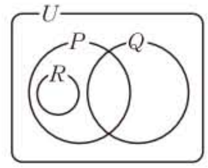
$\sim p \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow \sim q$

도 모두 참이다.

그러나 $P^C\not\subset R^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$는 거짓이다.

답 ④

0321 세 집합 P, Q, R에 대하여 $R\subset(P-Q)$를 만족시키도록 벤다이어그램을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $Q\subset R^C$, $R\subset P$, $R\subset Q^C$이므로 세 명제 $q \longrightarrow \sim r$, $r \longrightarrow p$, $r \longrightarrow \sim q$는 모두 참이다.

이상에서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

답 ④

0322 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 $P^C\subset Q$

이때 $P=\{2, 4, 6, 8\}$이므로 $P^C=\{1, 3, 5, 7\}$

따라서 집합 Q는 1, 3, 5, 7을 반드시 원소로 가져야 하므로 집합 Q의 개수는

$2^{8-4}=2^4=16$

답 16

유형 07 명제가 참이 되도록 하는 상수 구하기

본책 53쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되도록 하는 상수를 구하려면

➡ $P\subset Q$가 되도록 수직선 위에 나타낸다.

0323 $|x-3|<k$에서 $-k<x-3<k$

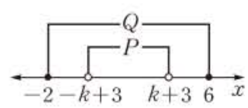
$\therefore -k+3<x<k+3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-k+3<x<k+3\}$,

$Q=\{x|-2\le x\le 6\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k+3\ge -2$, $k+3\le 6$

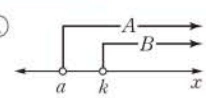
$\therefore 0<k\le 3$ ($\because k>0$)

따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

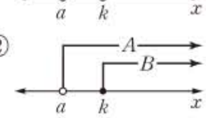
SSEN 특강 $B\subset A$가 되도록 하는 a의 값의 범위 구하기

①



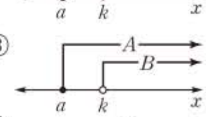
➡ $a\le k$

②



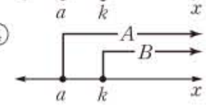
➡ $a<k$

③



➡ $a\le k$

④

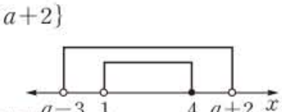


➡ $a\le k$

0324 주어진 명제가 참이 되려면

$\{x|1<x\le 4\}\subset\{x|a-3<x<a+2\}$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-3\le 1$, $\underline{a+2>4}$

└ $a+2=4$, 즉 $a=2$이면 $\{x|1<x\le 4\}\not\subset\{x|-1<x<4\}$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

$\therefore 2<a\le 4$

답 $2<a\le 4$

0325 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x|-1\le x\le 3$ 또는 $x\ge 5\}$,

$Q=\{x|x\ge a\}$,

$R=\{x|x\ge b\}$ ··· ❶

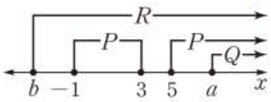
명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면

$Q\subset P$

이고, 명제 $p \longrightarrow r$가 참이 되려면

$P\subset R$

이어야 하므로 위의 그림에서



$a\ge 5$, $b\le -1$ ··· ❷

따라서 a의 최솟값은 5, b의 최댓값은 -1이므로 구하는 합은

$5+(-1)=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 세 조건 p, q, r의 진리집합을 구할 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ a의 최솟값과 b의 최댓값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0326 $|x-1|\ge k$에서

$x-1\le -k$ 또는 $x-1\ge k$

$\therefore x\le -k+1$ 또는 $x\ge k+1$

q: $x^2+4x-12<0$에서 $\sim q$: $x^2+4x-12\ge 0$이므로

$(x+6)(x-2)\ge 0$

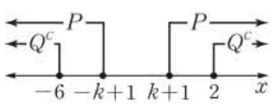
$\therefore x\le -6$ 또는 $x\ge 2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x\le -k+1$ 또는 $x\ge k+1\}$,

$Q^C=\{x|x\le -6$ 또는 $x\ge 2\}$

명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q^C\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k+1\ge -6$, $k+1\le 2$

$\therefore 0<k\le 1$ ($\because k>0$)

따라서 k의 최댓값은 1이다.

답 1

유형 08 '모든'이나 '어떤'이 있는 명제 본책 53쪽

① '모든 x에 대하여 p이다.'가 참이면

⇒ 전체집합의 원소 중 한 개도 빠짐없이 p를 만족시킨다.

② '어떤 x에 대하여 p이다.'가 참이면

⇒ 전체집합의 원소 중 한 개 이상이 p를 만족시킨다.

0327 ① 2는 소수이고, 짝수이다.

③ $x=\frac{1}{2}$이면 $x^2=\frac{1}{4}$이므로 $x^2<x$

④ $x=0$이면 $x^2+x=0$

⑤ [반례] $x=1+\sqrt{2}$이면 $x^2=3+2\sqrt{2}$는 무리수이다.

답 ⑤

0328 ① [반례] $x=1$이면 $2x=2$이고 $2\notin U$이다.

② [반례] $x=0$이면 $x^2=0$이다.

③ -1, 0, 1은 모두 $x-1>0$을 만족시키지 않으므로 거짓이다.

④ $x=0$이면 $x^2=0$이므로 참이다.

⑤ [반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2+y^2=2$이다.

답 ④

0329 주어진 명제의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $x^2+4kx+8\le 0$이다.'

이다. ··· ❶

위의 명제가 참이려면 이차방정식 $x^2+4kx+8=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(2k)^2-8\ge 0$, $4k^2-8\ge 0$

$k^2-2\ge 0$, $(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})\ge 0$

$\therefore k\le -\sqrt{2}$ 또는 $k\ge \sqrt{2}$

따라서 양수 k의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다. ··· ❷

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 부정을 구할 수 있다.	40 %
❷ 양수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

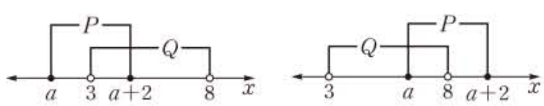
0330 두 조건 p, q를

p: $a\le x\le a+2$, q: $3<x<8$

이라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|a\le x\le a+2\}$, $Q=\{x|3<x<8\}$

한편 주어진 명제가 참이 되기 위해서는 $P\cap Q\ne\varnothing$이어야 하므로 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $a+2>3$, $a<8$이어야 하므로

$1<a<8$

답 $1<a<8$

유형 09~10 명제와 역, 대우의 참, 거짓 본책 54, 55쪽

(1) 명제 $p \longrightarrow q$에서

① 역: $q \longrightarrow p$ ② 대우: $\sim q \longrightarrow \sim p$

(2) 명제가 참이면 그 대우도 참이고, 명제가 거짓이면 그 대우도 거짓이다.

0331 ① 역: $xy=0$이면 $x=0$이다.

[반례] $x=3$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x\ne 0$이다.

② 역: $x>2$이면 $3x-7>0$이다.

[반례] $x=\frac{7}{3}$이면 $x>2$이지만 $3x-7=0$이다.

③ 역: xy가 짝수이면 x, y는 짝수이다.

[반례] $x=2$, $y=3$이면 $xy=6$은 짝수이지만 y는 홀수이다.

④ 역: $x+y>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다.

[반례] $x=5$, $y=-4$이면 $x+y>0$이지만 $x>0$, $y<0$이다.

⑤ 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (참)

답 ⑤

0332 명제 $p \longrightarrow \sim q$의 역인 $\sim q \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우인

$\sim p \longrightarrow q$

도 참이다. 답 ②

0333 ㄱ. 명제: [반례] $a=\sqrt{3}$, $b=-\sqrt{3}$이면 $ab=-3$은 유리수이지만 a, b는 유리수가 아니다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

ㄴ. 대우: $a \le 0$ 또는 $b \le 0$이면 $ab \le 0$이다.

[반례] $a=-2$, $b=-3$이면 $a \le 0$, $b \le 0$이지만 $ab=6>0$이다.

$(a-1)(a-3)<0 \quad \therefore 1<a<3$

ㄷ. 대우: $a^2-4a+3<0$이면 $-1 \le a<3$이다. (참)

이상에서 대우가 거짓인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0334 ① 역: $x>1$이면 $x>0$이다. (참)

명제: [반례] $x=\frac{1}{2}$이면 $x>0$이지만 $x<1$이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

② 역: $\underbrace{x+1=0}_{x=-1}$이면 $x^2=1$이다. (참)

명제: [반례] $x=1$이면 $x^2=1$이지만 $x+1=2$이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

③ 역: $x(x-2)=0$이면 $x=2$이다.

[반례] $x=0$이면 $x(x-2)=0$이지만 $x \ne 2$이다.

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

④ 역: $ac=bc$이면 $a=b$이다.

[반례] $a=1$, $b=2$, $c=0$이면 $ac=bc=0$이지만 $a \ne b$이다.

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

⑤ 역: $A \cap B=A$이면 $A \subset B$이다. (참)

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

따라서 그 역과 대우가 모두 참인 명제는 ⑤이다.

답 ⑤

0335 명제 $p \longrightarrow q$의 역은 $q \longrightarrow p$이다.

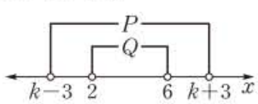
$|x-k|<3$에서 $\quad -3<x-k<3$

$\therefore k-3<x<k+3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|k-3<x<k+3\}$, $Q=\{x|2<x<6\}$

이때 명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q \subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$k-3 \le 2$, $k+3 \ge 6$

$\therefore 3 \le k \le 5$

따라서 정수 k는 3, 4, 5의 3개이다. 답 3

0336 주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$a \ge k$이고 $b \ge -1$이면 $a+b \ge 4$이다.'

도 참이다. $a \ge k$, $b \ge -1$에서 $a+b \ge k-1$이므로

$k-1 \ge 4$ $\quad \{(a, b)|a+b \ge k-1\} \subset \{(a, b)|a+b \ge 4\}$

$\therefore k \ge 5$

따라서 k의 최솟값은 5이다. 답 5

0337 주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$x-a=0$이면 $x^2-8x+15=0$이다.'

도 참이다.

이때 $x-a=0$, 즉 $x=a$를 $x^2-8x+15=0$에 대입하면

$a^2-8a+15=0, \qquad (a-3)(a-5)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=5$

따라서 구하는 합은

$3+5=8$ 답 8

0338 명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되어야 한다. ···➊

$\sim p$: $|x-1|<2$에서 $\quad -2<x-1<2$

$\therefore -1<x<3$ ···➋

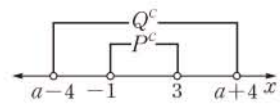
$\sim q$: $|x-a|<4$에서 $\quad -4<x-a<4$

$\therefore a-4<x<a+4$ ···➌

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\{x|-1<x<3\}$, $Q^C=\{x|a-4<x<a+4\}$

명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P^C \subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-4 \le -1$, $a+4 \ge 3$

$\therefore -1 \le a \le 3$ ···➍

답 $-1 \le a \le 3$

채점 기준	비율
➊ 주어진 명제의 대우가 참임을 알 수 있다.	10 %
➋ 조건 $\sim p$가 참이 되는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
➌ 조건 $\sim q$가 참이 되는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
➍ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 p: $|x-1| \ge 2$에서

$x-1 \le -2$ 또는 $x-1 \ge 2$

$\therefore x \le -1$ 또는 $x \ge 3$

q: $|x-a| \ge 4$에서

$x-a \le -4$ 또는 $x-a \ge 4$

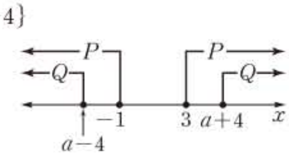
$\therefore x \le a-4$ 또는 $x \ge a+4$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x \le -1$ 또는 $x \ge 3\}$,

$Q=\{x|x \le a-4$ 또는 $x \ge a+4\}$

명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q \subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-4 \le -1$, $a+4 \ge 3$

$\therefore -1 \le a \le 3$

유형 **11** **삼단논법** 본책 55쪽

세 조건 p, q, r에 대하여 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이면
⇒ 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다.

0339 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $r \longrightarrow q$가 모두 참이므로 각각의 대우 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim q \longrightarrow \sim r$도 모두 참이다.
또 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이고, 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $p \longrightarrow r$이다.

답 ①

0340 ㄱ. 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$가 참이다. 따라서 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.
ㄴ. 두 명제 $q \longrightarrow r$, $s \longrightarrow q$가 참이므로 명제 $s \longrightarrow r$는 참이지만 명제 $r \longrightarrow s$의 참, 거짓은 추론할 수 없다.
ㄷ. 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\underline{\sim q \longrightarrow \sim s}$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim s$가 참이다.
└ $s \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim s$도 참이다.
이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

0341 명제 $\sim r \longrightarrow \sim s$가 참이므로 그 대우 $s \longrightarrow r$도 참이다.
두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $s \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$가 참이 되려면 명제 $\sim q \longrightarrow s$가 참이어야 한다.
또 명제 $\sim q \longrightarrow s$가 참이면 그 대우 $\sim s \longrightarrow q$도 참이다.
따라서 명제 $p \longrightarrow r$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 $\sim s \longrightarrow q$이다. 답 ⑤

유형 12 삼단논법과 명제의 추론 (본책 55쪽)

주어진 문장에서 조건 p, q를 찾아 $p \longrightarrow q$ 꼴로 나타낸 후 명제가 참이면 그 대우도 참임과 삼단논법을 이용하여 참인 명제를 찾는다.

0342 세 조건 p, q, r를
p: 음악을 좋아한다., q: 미술을 좋아한다.,
r: 체육을 좋아한다.
로 놓으면 명제 $p \longrightarrow q$와 $\sim p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$와 $r \longrightarrow p$도 참이다.
또 명제 $r \longrightarrow p$와 $p \longrightarrow q$가 참이므로 명제 $r \longrightarrow q$가 참이고, 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.
따라서 반드시 참인 명제는 ④이다. 답 ④

참고 각 보기를 p, q, r로 나타내면 다음과 같다.
① $p \longrightarrow r$ ② $q \longrightarrow r$ ③ $\sim p \longrightarrow \sim q$
④ $r \longrightarrow q$ ⑤ $r \longrightarrow \sim p$

0343 (i) A가 남학생인 경우
(나)에 의하여 B가 남학생이거나 C가 여학생이어야 하는데 (다)에 의하여 C가 남학생이어야 하므로 B가 남학생이다.
즉 A, B, C 모두 남학생이므로 (가)에 모순이다. ··· ❶
(ii) A가 여학생인 경우
(다)에 의하여 C는 여학생이고, (라)에 의하여 B도 여학생이다.
즉 A, B, C 모두 여학생이다. ··· ❷
(i), (ii)에서 A, B, C 모두 여학생이다. ··· ❸
답 A, B, C

채점 기준	비율
❶ A가 남학생일 때, 모순임을 알 수 있다.	50 %
❷ A가 여학생일 때, B, C의 성별을 알 수 있다.	40 %
❸ 여학생을 모두 고를 수 있다.	10 %

유형 13 충분조건, 필요조건, 필요충분조건 (본책 56쪽)

① $p \underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} q$ ➡ p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
② $p \underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} q$ ➡ p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.
③ $p \underset{\circ}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} q$ ➡ p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

0344 ① $x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이고, $xy=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이므로 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
② z가 양수이므로 $x>y \Longleftrightarrow xz>yz$, 즉 $p \Longleftrightarrow q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
③ $xy=|xy|$이면 $xy \ge 0$이므로 $x \ge 0$, $y \ge 0$ 또는 $x \le 0$, $y \le 0$이다.
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
④ $x^2=x$이면 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ $x^2=y^2$이면 $x=y$ 또는 $x=-y$이므로 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0345 ① [$\longrightarrow$의 반례] $x=-1$, $y=-1$이면 $|x+y|=|x|+|y|$이지만 $x<0$, $y<0$이다.
$x \ge 0$, $y \ge 0$이면 $|x+y|=|x|+|y|$이므로 $q \Longrightarrow p$
② $x \ge 0$, $y \ge 0$이면 $xy \ge 0$이므로 $p \Longrightarrow q$
[$\longleftarrow$의 반례] $x=-1$, $y=-1$이면 $xy \ge 0$이지만 $x<0$, $y<0$이다.
③ p: $x^2>y^2 \Longleftrightarrow q$: $|x|>|y|$
④ [$\longrightarrow$의 반례] $x=2$, $y=-4$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $x+y<0$이다.
$x+y>0$이면 $x^2+y^2>0$이므로 $q \Longrightarrow p$
⑤ [$\longrightarrow$의 반례] $x=1$, $y=2$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $xy>0$이다.
$xy<0$이면 $x^2+y^2>0$이므로 $q \Longrightarrow p$
따라서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ③이다. 답 ③

0346 ㄱ. $a=b=c=0$이면
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$
이므로 $p \Longrightarrow q$
$\underline{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0}$이면 $a=b=c$이므로 $q \not\Longrightarrow p$
└ $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. $a-c>b-c$의 양변에 c를 더하면 $a>b$이므로
$p \Longrightarrow q$

$a>b$의 양변에 $-c$를 더하면 $a-c>b-c$이므로

$q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. [$\longrightarrow$의 반례] $a=-2$, $b=-1$이면 $ab+1>2$이지만 $a<1$, $b<1$이다.

$a>1$, $b>1$이면 $ab>1$에서 $ab+1>2$이므로

$q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

이상에서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0347 p: $|a|+|b|=0$에서 $a=0$, $b=0$

q: $a^2-2ab+b^2=0$에서 $(a-b)^2=0$ $\therefore a=b$

r: $|a+b|=|a-b|$에서

$a+b=a-b$ 또는 $a+b=-(a-b)$

$\therefore a=0$ 또는 $b=0$

ㄱ. $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $\sim p$: $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$, $\sim r$: $a \neq 0$, $b \neq 0$

따라서 $\sim p \not\Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow \sim p$이므로 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. q이고 r: $a=b=0$

따라서 (q이고 r) $\Longleftrightarrow p$이므로 q이고 r는 p이기 위한 필요충분조건이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

유형 14 충분·필요조건과 명제의 참, 거짓 본책 57쪽

① p가 q이기 위한 충분조건 ➡ 명제 $p \longrightarrow q$가 참이다. ➡ $p \Longrightarrow q$
② p가 q이기 위한 필요조건 ➡ 명제 $q \longrightarrow p$가 참이다. ➡ $q \Longrightarrow p$

0348 $q \Longrightarrow p$, $r \Longrightarrow q$이므로 $r \Longrightarrow p$

$q \Longrightarrow p$이므로 $\sim p \Longrightarrow \sim q$

이상에서 참인 명제인 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

0349 ㄱ. $q \Longrightarrow p$이므로 q는 p이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $\sim r \Longrightarrow \sim p$이므로 $p \Longrightarrow r$

따라서 r는 p이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $q \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow r$이므로 $q \Longrightarrow r$

따라서 q는 r이기 위한 충분조건이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

유형 15 충분·필요·필요충분조건과 진리집합 본책 57쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때
① $P \cap Q=P$ ➡ $P \subset Q$ ➡ $p \Longrightarrow q$ ➡ p는 q이기 위한 충분조건
② $P \cup Q=P$ ➡ $Q \subset P$ ➡ $q \Longrightarrow p$ ➡ p는 q이기 위한 필요조건
③ $P \subset Q$, $Q \subset P$ ➡ $P=Q$ ➡ $p \Longleftrightarrow q$
➡ p는 q이기 위한 필요충분조건

0350 p는 q이기 위한 충분조건이므로

$P \subset Q$

q는 r이기 위한 충분조건이므로

$Q \subset R$

따라서 $P \subset Q \subset R$이므로 항상 옳은 것은 ②이다. 답 ②

0351 ① $R \subset P$이므로 p는 r이기 위한 필요조건이다.

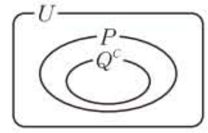
③ $Q \subset P$이므로 q는 p이기 위한 충분조건이다.

⑤ $P^C \subset R^C$이므로 $\sim r$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다. 답 ③

0352 $\sim q$가 p이기 위한 충분조건이므로

$Q^C \subset P$

두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



③ $P \cup Q=U$ ④ $P \cap Q^C=Q^C$

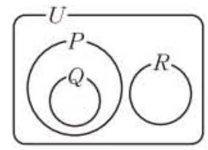
⑤ $P \cup Q^C=P$ 답 ③

0353 $(P-R^C) \cup (Q-P)=\varnothing$이므로

$\underline{P-R^C=\varnothing}$, $Q-P=\varnothing$ $P-R^C=P \cap (R^C)^C=P \cap R=\varnothing$

$\therefore P \cap R=\varnothing$, $Q \subset P$

세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $Q \subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

④ $Q \subset R^C$이므로 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

⑤ $R \subset Q^C$이므로 r는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다. 답 ④

유형 16 충분·필요·필요충분조건이 되도록 하는 상수 구하기 본책 58쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때
① p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건 ➡ $P \subset Q$
② p는 q이기 위한 필요충분조건 ➡ $P=Q$
임을 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구한다.

0354 $(x-3)(x+5) \geq 0$에서 $x \leq -5$ 또는 $x \geq 3$

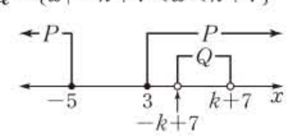
또 $|x-7|<k$에서 $-k<x-7<k$

$\therefore -k+7<x<k+7$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid x \leq -5$ 또는 $x \geq 3\}$, $Q=\{x \mid -k+7<x<k+7\}$

p는 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q \subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k+7 \geq 3$

$\therefore 0<k \leq 4$ ($\because k>0$)

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다. 답 4

0355 p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 명제 '$4x^2-4x-3\neq0$이면 $2x+a\neq0$이다.'가 참이어야 하고, 이 명제의 대우 '$2x+a=0$이면 $4x^2-4x-3=0$이다.'도 참이어야 한다. ⋯ ❶

$2x+a=0$에서 $x=-\dfrac{a}{2}$이므로 이것을 $4x^2-4x-3=0$에 대입하면

$$4\left(-\frac{a}{2}\right)^2-4\left(-\frac{a}{2}\right)-3=0$$

$a^2+2a-3=0$, $\quad (a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$ ⋯ ❷

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$-3+1=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ p가 q이기 위한 충분조건임을 이용하여 참인 명제를 찾을 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 모두 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0356 $x+1=2x-1$에서 $\quad x=2$

이때 $x+1=2x-1$은 $x^2-ax+b=0$이기 위한 필요충분조건이므로 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 해는 2뿐이어야 한다.

중근 $x=2$를 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $(x-2)^2=0$이므로 $\quad x^2-ax+b=(x-2)^2$

$x^2-ax+b=x^2-4x+4$

따라서 $a=4$, $b=4$이므로 $\quad a+b=8$

답 8

0357 p는 q이기 위한 충분조건이므로

$P\subset Q$ ⋯⋯ ㉠

또 r는 p이기 위한 필요조건이므로

$P\subset R$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $4\in Q$이어야 하므로

$1-a=4$ 또는 $b^2=4$

(i) $1-a=4$일 때,

$a=-3$이므로 $\quad Q=\{4, b^2\}$, $R=\{-2, 2b-2\}$

㉡에서 $4\in R$이어야 하므로

$2b-2=4 \quad \therefore b=3$

(ii) $b^2=4$일 때,

$b=\pm2$이므로

$Q=\{1-a, 4\}$, $R=\{1+a, 2\}$

또는 $Q=\{1-a, 4\}$, $R=\{1+a, -6\}$

㉡에서 $4\in R$이어야 하므로

$1+a=4 \quad \therefore a=3$

(i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은 $3+2=5$이다.

답 ④

0358 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\mid-1<x<0$ 또는 $x\geq3\}$,

$Q=\{x\mid x\leq a\}$,

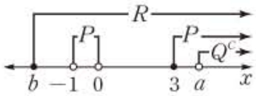
$R=\{x\mid x\geq b\}$

이때 $\sim p$는 q이기 위한 충분조건이고 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로 두 명제 $\sim p\longrightarrow q$, $\sim r\longrightarrow\sim p$는 참이다.

즉 $P^C\subset Q$, $R^C\subset P^C$이므로 $\quad Q^C\subset P$, $P\subset R$

$\therefore Q^C\subset P\subset R$

오른쪽 그림에서 $a\geq3$, $b\leq-1$이므로



$a\geq3$, $-b\geq1 \quad \therefore a-b\geq4$

따라서 $a-b$의 최솟값은 4이다.

답 4

유형 17 집합의 연산과 필요충분조건 본책 58쪽

$A\subset B\Longleftrightarrow A\cap B=A\Longleftrightarrow A\cup B=B$
$\Longleftrightarrow A-B=\varnothing\Longleftrightarrow B^C\subset A^C$

0359 $(A\cup B)\cap(B-A)^C=(A\cup B)\cap(B\cap A^C)^C$

$=(A\cup B)\cap(B^C\cup A)$

$=A\cup(B\cap B^C)$

$=A\cup\varnothing=A$

따라서 $A\cup B=A$가 성립하기 위한 필요충분조건은 $B\subset A$이다.

답 ②

0360 두 집합 A, B가 서로소 $\Longleftrightarrow A\cap B=\varnothing\Longleftrightarrow B\subset A^C$

따라서 두 집합 A, B가 서로소이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

0361 ㄱ. $A-B=\varnothing$이면 $\quad A\subset B$

따라서 $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $A\cap(B\cup C)=B\cup C$이면 $\quad (B\cup C)\subset A$

$A\cup(B\cup C)=A$이면 $\quad (B\cup C)\subset A$

따라서 $p\Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $A^C\cup B^C=U$이면 $\quad (A\cap B)^C=U \quad \therefore A\cap B=\varnothing$

$A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 5\}$이면 $A\not\subset B$, $B\not\subset A$이지만

$A\cap B=\{1\}$이므로 $A^C\cup B^C\neq U$이다.

따라서 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

이상에서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

유형 18 대우를 이용한 명제의 증명 본책 59쪽

명제 'p이면 q이다.'의 대우 '$\sim q$이면 $\sim p$이다.'가 참임을 이용하여 주어진 명제가 참임을 증명한다.

0362 $n=3k-2$ 또는 $n=\boxed{3k-1}$ (k는 자연수)이라 하면

k가 자연수이므로 $n=3k+1$ 또는 $n=3k+2$라 하면 n은 3 이상의 3의 배수가 아닌 자연수이므로 1, 2는 표현할 수 없다.

(i) $n=3k-2$일 때,

$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4$

$=3(\boxed{3k^2-4k+1})+1$

03 명제

(ii) $n=3k-1$일 때,

$$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1$$
$$=3(3k^2-2k)+\boxed{1}$$

따라서 $f(k)=3k-1$, $g(k)=3k^2-4k+1$, $a=1$이므로

$$f(3a)+g(a)=f(3)+g(1)$$
$$=8+0=8$$

답 ②

0363 주어진 명제의 대우는

'$a\neq0$ 또는 $b\neq0$이면 $a^2+b^2\neq0$이다.'

(i) $a\neq0$이면

$a^2>0$이고 $b^2\geq0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\neq0$이다.

(ii) $b\neq0$이면

$a^2\geq0$이고 $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\neq0$이다.

(i), (ii)에서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

0364 (1) 주어진 명제의 대우는

'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.' ⋯ ❶

(2) $n=2k-1$(k는 자연수)이라 하면

$$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1$$

이때 $2k^2-2k$는 0 또는 자연수이므로 n^2도 홀수이다. ⋯ ❷

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. ⋯ ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우를 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 명제의 대우가 참임을 보일 수 있다.	50 %
❸ 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.	20 %

유형 19 귀류법

본책 59쪽

명제가 참임을 직접 증명하는 것이 복잡할 때

➡ 명제의 결론을 부정하여 가정에 모순이 됨을 보인다.

0365 $\sqrt{5}$가 $\boxed{\text{유리수}}$라고 가정하면

$\sqrt{5}=\dfrac{a}{b}$ (a, b는 $\boxed{\text{서로소}}$인 자연수)

로 나타낼 수 있다. 양변을 제곱하여 정리하면

$a^2=5b^2$ ⋯⋯ ㉠

이때 a^2이 $\boxed{\text{5의 배수}}$이므로 a도 5의 배수이다.

$a=5k$ (k는 자연수)로 놓으면 ㉠에서

$25k^2=5b^2$ $\quad\therefore b^2=5k^2$

따라서 b^2이 5의 배수이므로 b도 5의 배수이다.

그러므로 a, b가 서로소라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{5}$는 무리수이다.

∴ (가) 유리수 (나) 서로소 (다) 5의 배수

답 ③

0366 $b\neq0$이라 가정하면 $a+b\sqrt{2}=0$에서 $\quad\sqrt{2}=-\dfrac{a}{b}$

a, b가 유리수이므로 $-\dfrac{a}{b}$, 즉 $\sqrt{2}$가 유리수이다.

이때 $\sqrt{2}$가 무리수라는 사실에 모순이므로 $b=0$이다.

$a+b\sqrt{2}=0$에 $b=0$을 대입하면 $a=0$이다.

따라서 유리수 a, b에 대하여 $a+b\sqrt{2}=0$이면 $a=b=0$이다.

답 풀이 참조

0367 a, b가 모두 홀수라고 가정하자. ⋯ ❶

방정식 $x^2+ax-b=0$의 정수인 해를 $x=m$이라 하면

$m^2+am=b$

(i) m이 홀수일 때,

m^2은 홀수이고, am은 두 홀수의 곱이므로 홀수이다.

따라서 m^2+am, 즉 b가 짝수이므로 가정에 모순이다.

(ii) m이 짝수일 때,

m^2은 짝수이고, am은 홀수와 짝수의 곱이므로 짝수이다.

따라서 m^2+am, 즉 b가 짝수이므로 가정에 모순이다. ⋯ ❷

(i), (ii)에서 a, b 중 적어도 하나는 짝수이다. ⋯ ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 결론을 부정할 수 있다.	20 %
❷ 가정에 모순임을 보일 수 있다.	60 %
❸ 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.	20 %

유형 20 실수의 성질을 이용한 절대부등식의 증명

본책 60쪽

실수 A, B에 대하여

① $A\geq B \Longleftrightarrow A-B\geq0$

② $A^2\geq0$, $A^2+B^2\geq0$ (단, 등호는 $A=0$, $B=0$일 때 성립)

임을 이용하여 증명한다.

0368 $a^2+b^2-ab=\left(a-\boxed{\dfrac{b}{2}}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\geq0$에서

$a^2+b^2\geq ab$

이때 등호는 $a-\dfrac{b}{2}=0$, $\dfrac{3}{4}b^2=0$, 즉 $a=b=\boxed{0}$일 때 성립한다.

답 (가) $\dfrac{b}{2}$ (나) 0

0369 ㄱ. [반례] $x=5$이면 $\quad x^2+25=10x$

ㄴ. $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

x가 실수이므로 $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2\geq0$에서

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

$$\therefore x^2+x+1>0$$

ㄷ. $(x+4y)^2-8xy=x^2+8xy+16y^2-8xy$

$=x^2+16y^2$

x, y가 실수이므로 $x^2\geq 0$, $16y^2\geq 0$에서

$x^2+16y^2\geq 0$

$\therefore (x+4y)^2\geq 8xy$ (단, 등호는 $x=y=0$일 때 성립)

이상에서 절대부등식인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0370 $A-B=(ab-1)^2-(a^2-1)(b^2-1)$

$=a^2b^2-2ab+1-(a^2b^2-a^2-b^2+1)$

$=a^2-2ab+b^2$

$=(a-b)^2$

a, b가 실수이므로 $(a-b)^2\geq 0$

$\therefore A\geq B$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립) 답 ②

0371 $(a^2+b^2+1)-(ab+a+b)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2-2ab-2a-2b+2)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}\geq 0$

$\therefore a^2+b^2+1\geq ab+a+b$ ··· ❶

이때 등호는 $a-b=0$, $a-1=0$, $b-1=0$, 즉 $a=b=1$일 때 성립한다. ··· ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$임을 증명할 수 있다.	70 %
❷ 등호가 성립하는 경우를 구할 수 있다.	30 %

유형 21 절댓값 기호를 포함한 절대부등식 본책 61쪽

실수 A, B, C에 대하여

① $|A|\geq 0$, $|B|\geq 0$이므로

$|A|\geq |B| \Longleftrightarrow |A|^2\geq |B|^2$

$\Longleftrightarrow |A|^2-|B|^2\geq 0$

② $|A|+|B|\geq 0$, $|C|\geq 0$이므로

$|A|+|B|\geq |C| \Longleftrightarrow (|A|+|B|)^2\geq |C|^2$

$\Longleftrightarrow (|A|+|B|)^2-|C|^2\geq 0$

0372 $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a+b)^2$

$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(\boxed{|ab|-ab})\geq 0$ ($\because \underbrace{|ab|\geq ab}_{\text{모든 실수 } A\text{에 대하여 } |A|\geq A}$)

$\therefore (|a|+|b|)^2\geq |a+b|^2$

그런데 $|a|+|b|\geq 0$, $|a+b|\geq 0$이므로

$|a|+|b|\geq |a+b|$

(단, 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $\boxed{ab\geq 0}$일 때 성립)

$\therefore$ (가) $|ab|-ab$ (나) $ab\geq 0$ 답 ④

0373 ㄱ. $(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$

$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a-b)^2$

$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$

$=2(|ab|+ab)\geq 0$ ($\because |ab|\geq -ab$)

$\therefore (|a|+|b|)^2\geq |a-b|^2$

그런데 $|a|+|b|\geq 0$, $|a-b|\geq 0$이므로

$|a|+|b|\geq |a-b|$

(단, 등호는 $|ab|=-ab$, 즉 $ab\leq 0$일 때 성립)

ㄴ. [반례] $a=1$, $b=-1$이면

$|a+b|=0$, $|a-b|=2$

$\therefore |a+b|<|a-b|$

$|a+b|^2-|a-b|^2=4ab$의 부호는 알 수 없으므로 ㄱ과 같은 방법으로 증명하기 어렵다.

ㄷ. (i) $|a|\geq |b|$일 때,

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$

$=a^2-2ab+b^2-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\geq 0$ ($\because |ab|\geq ab$)

$\therefore |a-b|^2\geq (|a|-|b|)^2$

그런데 $|a-b|\geq 0$, $|a|-|b|\geq 0$이므로

$|a-b|\geq |a|-|b|$

(ii) $|a|<|b|$일 때,

$|a-b|>0$, $|a|-|b|<0$이므로 $|a-b|>|a|-|b|$

(i), (ii)에서

$|a-b|\geq |a|-|b|$

(단, 등호는 $|ab|=ab$, $|a|\geq |b|$일 때 성립)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

유형 22 산술평균과 기하평균의 관계 ; 곱의 최솟값 구하기 본책 61쪽

곱을 전개하여 양수 a, b에 대하여

(상수)$+a+b$

꼴로 변형한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

이때 세 양수 a, b, c에 대해서도 다음이 성립한다.

$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}$

$=8abc$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

0374 $x>0$, $y>0$에서 $xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right)=xy+8+2+\frac{16}{xy}$

$\geq 10+2\sqrt{xy\cdot\frac{16}{xy}}$ ← $xy>0$이므로 $\frac{16}{xy}>0$이다.

$=10+2\cdot 4=18$

등호는 $xy=\frac{16}{xy}$일 때 성립하므로 $(xy)^2=16$에서

$xy=4$ ($\because xy>0$)

따라서 $\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right)$은 $xy=4$일 때 최솟값 18을 가지므로

$a=4$, $b=18$

$\therefore a+b=22$ 답 22

참고 $x+\frac{2}{y}\geq 2\sqrt{\frac{2x}{y}}$ ⋯ ㉠, $y+\frac{8}{x}\geq 2\sqrt{\frac{8y}{x}}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 곱하면 $\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right)\geq 4\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{8y}{x}}=16$

따라서 $\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right)$의 최솟값을 16이라 하면 잘못된 풀이이다.

㉠에서 등호가 성립하는 것은 $x=\frac{2}{y}$일 때이고 ㉡에서 등호가 성립하는 것은 $y=\frac{8}{x}$일 때인데, ㉠, ㉡의 등호가 동시에 성립하도록 하는 양수 x, y가 존재하지 않기 때문이다.

0375 $a>0$에서 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{4}{a}\right)&=a^2-4-1+\frac{4}{a^2}\\&\geq -5+2\sqrt{a^2\cdot\frac{4}{a^2}}\\&=-5+2\cdot 2=-1\end{aligned}$$

등호는 $a^2=\frac{4}{a^2}$일 때 성립하므로 $a^4=4$

$a^2=2$ ($\because a^2>0$) $\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$) 답 $\sqrt{2}$

0376 $x>0$에서 $\frac{1}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}(2x^2+x)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)&=4x+2+2+\frac{1}{x}\\&\geq 4+2\sqrt{4x\cdot\frac{1}{x}}\\&=4+2\cdot 2\\&=8\ \left(\text{단, 등호는 } x=\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 8이다. 답 ④

참고 등호는 $4x=\frac{1}{x}$일 때 성립하므로

$4x^2=1$ $\therefore x=\frac{1}{2}$ ($\because x>0$)

0377 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)\\&\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}\cdot 2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}\cdot 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}}\\&=8\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}\\&=8\ (\text{단, 등호는 } a=b=c\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 8이다. 답 ④

참고 등호는 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$일 때 성립하므로

$b^2=ac$ ⋯ ㉠, $c^2=ab$ ⋯ ㉡, $a^2=bc$ ⋯ ㉢

㉠÷㉡을 하면 $\frac{b^2}{c^2}=\frac{c}{b}$, $b^3=c^3$ $\therefore b=c$

㉡÷㉢을 하면 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{a}{c}$, $a^3=c^3$ $\therefore a=c$

$\therefore a=b=c$

0378 $a>0$, $b>0$, $c>0$에서 $\frac{a}{b+c}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)&=\{a+(b+c)\}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)\\&=1+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}+1\\&=2+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a} &&\cdots❶\\&\geq 2+2\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b+c}{a}}\\&=4\ (\text{단, 등호는 } a=b+c\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 4이다. ⋯ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	60 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

참고 등호는 $\frac{a}{b+c}=\frac{b+c}{a}$일 때 성립하므로

$a^2=(b+c)^2$ $\therefore a=b+c$ ($\because a>0$, $b+c>0$)

유형 23 산술평균과 기하평균의 관계 ; 합의 최솟값 구하기 본책 62쪽

$f(x)+\frac{1}{f(x)}$ $(f(x)>0)$ 꼴을 포함하도록 식을 변형한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.
이때 세 양수 a, b, c에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}&\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}\\&=4\ (\text{단, 등호는 } a=b=c\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

0379 $x>-1$에서 $x+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}9x+\frac{9}{x+1}&=9(x+1)+\frac{9}{x+1}-9\\&\geq 2\sqrt{9(x+1)\cdot\frac{9}{x+1}}-9\\&=2\cdot 9-9=9\end{aligned}$$

등호는 $9(x+1)=\frac{9}{x+1}$일 때 성립하므로

$(x+1)^2=1$, $x+1=1$ ($\because x+1>0$) $\therefore x=0$

따라서 $9x+\frac{9}{x+1}$는 $x=0$일 때 최솟값 9를 가지므로

$m=9$, $n=0$ $\therefore m+n=9$ 답 ④

0380 $x>3$에서 $x-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x-3}&=x-3+\frac{1}{x-3}+3\\&\geq 2\sqrt{(x-3)\cdot\frac{1}{x-3}}+3\\&=2+3=5\ (\text{단, 등호는 } x=4\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

따라서 $x+\frac{1}{x-3}$의 최솟값은 5이다. 답 5

참고 등호는 $x-3=\frac{1}{x-3}$일 때 성립하므로

$(x-3)^2=1,\quad x-3=1\ (\because x-3>0)\quad \therefore x=4$

0381 $x>0,\ y>0,\ z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}$$
$$=\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}$$
$$=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}+2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}}$$
$$=2+2+2=6\ (\text{단, 등호는 } x=y=z\text{일 때 성립})$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 6이다. 답 ③

참고 등호는 $\frac{y}{x}=\frac{x}{y},\ \frac{z}{y}=\frac{y}{z},\ \frac{z}{x}=\frac{x}{z}$일 때 성립하므로

$x^2=y^2=z^2\quad \therefore x=y=z\ (\because x>0,\ y>0,\ z>0)$

SSEN 특강

이 문제에서는 세 식 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\ge 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}$, $\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\ge 2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}$, $\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\ge 2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}}$에서 등호가 성립할 조건이 동시에 성립할 수 있으므로 위와 같이 풀 수 있다.

그런데 예를 들어 $x+\frac{1}{x}+x+\frac{9}{x}\ (x>0)$의 최솟값을 구할 때,

$$x+\frac{1}{x}+x+\frac{9}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}=2+2\cdot3=8$$

에서 $x+\frac{1}{x}+x+\frac{9}{x}$의 최솟값이 8이라 생각하면 안 된다.

이 경우 $x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}$에서 등호가 성립하는 조건은 $x=1$이고, $x+\frac{9}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}$에서 등호가 성립하는 조건은 $x=3$이므로 두 식의 등호가 동시에 성립할 수 없기 때문이다.

0382 $x>2$에서 $x-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4x-4+\frac{4}{x-2}=4(x-2)+\frac{4}{x-2}+4 \quad \cdots ①$$
$$\ge 2\sqrt{4(x-2)\cdot\frac{4}{x-2}}+4$$
$$=2\cdot4+4$$
$$=12\ (\text{단, 등호는 } x=3\text{일 때 성립}) \quad \cdots ②$$

따라서 $4x-4+\frac{4}{x-2}\ge m$이 항상 성립하려면 $m\le 12$이어야 하므로 m의 최댓값은 12이다. ⋯ ③

답 12

채점 기준	비율
① 주어진 부등식의 좌변을 변형할 수 있다.	30 %
② 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	40 %
③ m의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

참고 등호는 $4(x-2)=\frac{4}{x-2}$일 때 성립하므로

$(x-2)^2=1,\quad x-2=1\ (\because x-2>0)$

$\therefore x=3$

0383 $|x|=x,\ x\ne0$에서 $x>0,\ x^2+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{4x}{x^2+1}}$$
$$=2\cdot2$$
$$=4\ (\text{단, 등호는 } x=1\text{일 때 성립})$$

따라서 $x+\frac{1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}$의 최솟값은 4이다. 답 ④

참고 등호는 $\frac{x^2+1}{x}=\frac{4x}{x^2+1}$일 때 성립하므로

$(x^2+1)^2=4x^2,\quad x^4-2x^2+1=0$

$(x^2-1)^2=0,\quad x^2=1$

$\therefore x=1\ (\because x>0)$

0384 $x=a+\frac{2}{b},\ y=b+\frac{2}{a}$이므로

$$x^2+y^2=\left(a+\frac{2}{b}\right)^2+\left(b+\frac{2}{a}\right)^2$$
$$=\left(a^2+\frac{4a}{b}+\frac{4}{b^2}\right)+\left(b^2+\frac{4b}{a}+\frac{4}{a^2}\right)$$
$$=\left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)+\left(\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}\right)+\left(b^2+\frac{4}{b^2}\right)$$

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2+\frac{4}{a^2}\ge 2\sqrt{a^2\cdot\frac{4}{a^2}}=2\cdot2=4\ (\text{단, 등호는 } a=\sqrt{2}\text{일 때 성립})$$
$$\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=2\cdot4=8$$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
$$b^2+\frac{4}{b^2}\ge 2\sqrt{b^2\cdot\frac{4}{b^2}}=2\cdot2=4\ (\text{단, 등호는 } b=\sqrt{2}\text{일 때 성립})$$
$$\therefore x^2+y^2\ge 4+8+4=16\ (\text{단, 등호는 } a=b=\sqrt{2}\text{일 때 성립})$$

따라서 x^2+y^2은 $a=b=\sqrt{2}$일 때 최솟값 16을 가지므로

$\alpha=16,\ \beta=\sqrt{2},\ \gamma=\sqrt{2}$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta\gamma}=\frac{16}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=8$$

답 ①

다른 풀이 $x^2>0,\ y^2>0,\ a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot y^2} \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$=2xy$$
$$=2\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)$$
$$=2\left(ab+\frac{4}{ab}+4\right)$$
$$\ge 2\left(2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+4\right) \quad \cdots\cdots ㉡$$
$$=2(2\cdot2+4)=16$$

㉠에서 등호는 $x=y$일 때, ㉡에서 등호는 $ab=2$일 때 성립한다.

$x=y$에서 $\quad a+\frac{2}{b}=b+\frac{2}{a}$

$\frac{ab+2}{b}=\frac{ab+2}{a} \qquad \therefore a=b$

또 $ab=2$이므로 등호는 $a=b=\sqrt{2}$일 때 성립한다.

유형 24 산술평균과 기하평균의 관계 ; 합 또는 곱이 일정할 때 본책 63쪽

$a>0$, $b>0$일 때, $a+b\ge 2\sqrt{ab}$가 항상 성립하므로
➡ $a+b$가 일정하면 ab는 $a=b$일 때 최댓값을 갖는다.
➡ ab가 일정하면 $a+b$는 $a=b$일 때 최솟값을 갖는다.

0385 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+3y\ge 2\sqrt{2x\cdot 3y}=2\sqrt{6xy}$

그런데 $2x+3y=6$이므로

$6\ge 2\sqrt{6xy}, \quad 3\ge\sqrt{6xy}$

양변을 제곱하면 $\quad 9\ge 6xy$

$\therefore xy\le\frac{3}{2}$

이때 등호는 $2x=3y$일 때 성립하고 $2x+3y=6$이므로

$2x=3,\ 3y=3 \qquad \therefore x=\frac{3}{2},\ y=1$

따라서 xy는 $x=\frac{3}{2}$, $y=1$일 때 최댓값 $\frac{3}{2}$을 가지므로

$\alpha=\frac{3}{2},\ \beta=\frac{3}{2},\ \gamma=1$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=4$

답 ②

0386 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a+2b\ge 2\sqrt{4a\cdot 2b}$
$=2\sqrt{8ab}$

그런데 $ab=18$이므로

$4a+2b\ge 2\sqrt{8\cdot 18}$
$=24$ (단, 등호는 $2a=b$일 때 성립)

따라서 $4a+2b$의 최솟값은 24이다.

답 24

다른 풀이 $ab=18$에서 $a>0$이므로 $\quad b=\frac{18}{a}$

$\therefore 4a+2b=4a+2\cdot\frac{18}{a}=4a+\frac{36}{a}$
$\ge 2\sqrt{4a\cdot\frac{36}{a}}$
$=2\cdot 12$
$=24$ (단, 등호는 $a=3$일 때 성립)

$4a=\frac{36}{a}$에서 $a^2=9$
$\therefore a=3\ (\because a>0)$

0387 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{4}{ab}$ …… ㉠

한편 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$

그런데 $a+b=4$이므로

$4\ge 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $\quad 16\ge 4ab \qquad \therefore \frac{4}{ab}\ge 1$

따라서 ㉠에서 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$의 최솟값은 1이다.

답 ③

0388 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $\quad 4x^2+9y^2\ge 2\sqrt{4x^2\cdot 9y^2}=12|xy|$

그런데 $4x^2+9y^2=48$이므로

$48\ge 12|xy|, \quad |xy|\le 4$

$\therefore \underline{-4\le xy<0 \text{ 또는 } 0<xy\le 4}$

$x\ne 0,\ y\ne 0$

(단, 등호는 $2|x|=3|y|$일 때 성립)

따라서 xy의 최댓값은 4, 최솟값은 -4이므로 구하는 곱은

$4\cdot(-4)=-16$

답 ①

참고 등호는 $4x^2=9y^2$일 때 성립하므로
$(2x)^2=(3y)^2 \qquad \therefore 2|x|=3|y|$

0389 $x>0$, $y>0$이므로

$(\sqrt{3x}+\sqrt{5y})^2=3x+5y+2\sqrt{3x}\sqrt{5y}$
$=10+2\sqrt{15xy}$ …… ㉠

이고, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3x+5y\ge 2\sqrt{3x\cdot 5y}$
$=2\sqrt{15xy}$

그런데 $3x+5y=10$이므로

$10\ge 2\sqrt{15xy}$ (단, 등호는 $3x=5y$일 때 성립) …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$(\sqrt{3x}+\sqrt{5y})^2=10+2\sqrt{15xy}$
$\le 10+10=20$

$\therefore \sqrt{3x}+\sqrt{5y}\le\sqrt{20}=2\sqrt{5}\ (\because \sqrt{3x}+\sqrt{5y}>0)$

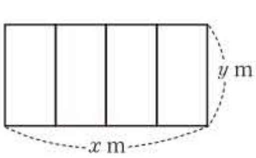
따라서 $\sqrt{3x}+\sqrt{5y}$의 최댓값은 $2\sqrt{5}$이다.

답 $2\sqrt{5}$

유형 25 산술평균과 기하평균의 관계 ; 도형에서의 활용 본책 63쪽

변하는 값을 각각 x, y로 놓고 주어진 값 또는 구하는 값을 $x+y$, xy로 나타낸다.

0390 오른쪽 그림과 같이 바깥쪽 직사각형의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면 줄의 전체 길이가 100 m이므로



$2x+5y=100$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+5y\ge 2\sqrt{2x\cdot 5y}=2\sqrt{10xy}$ …… ㉠

㉠에서 등호는 $2x=5y$일 때 성립하고 이때 구역의 전체 넓이 xy가 최대가 되므로 $2x+5y=100$에서

$2x=50,\ 5y=50 \qquad \therefore x=25,\ y=10$

따라서 가로의 길이가 25 m, 세로의 길이가 10 m일 때, 구역 전체 테두리인 바깥쪽 직사각형의 둘레의 길이는

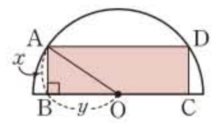
$2(25+10)=70\,(\mathrm{m})$ 　답 70 m

참고 $2x+5y=100$에서 $y=20-\frac{2}{5}x$이므로 구역의 전체 넓이를 S라 할 때,

$S=x\left(20-\frac{2}{5}x\right)=-\frac{2}{5}(x-25)^2+250\ (0<x<50)$

따라서 이차함수의 최대·최소를 이용하여 답을 구할 수도 있다.

0391 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=x$, $\overline{BO}=y$라 하면 직사각형의 넓이는



$\overline{AB}\cdot\overline{BC}=x\cdot 2y=2xy$

또 직각삼각형 ABO에서

$x^2+y^2=100$

이때 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot y^2}=2xy$

그런데 $x^2+y^2=100$이므로

$2xy\le 100$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은 100이다. 　답 ③

0392 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=y$라 하면 펜스의 설치 비용은

$\frac{1}{2}x+(x+2y)=\frac{3}{2}x+2y$

에 비례한다.

또 텃밭의 넓이가 2700이므로

$xy=2700$ 　…… ㉠

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{3}{2}x+2y\ge 2\sqrt{\frac{3}{2}x\cdot 2y}$

$=2\sqrt{3xy}$ 　…… ㉡

㉡에서 등호는 $\frac{3}{2}x=2y$, 즉 $y=\frac{3}{4}x$일 때 성립하고 이때 펜스의 설치 비용이 최소가 되므로 ㉠에 $y=\frac{3}{4}x$를 대입하면

$x\cdot\frac{3}{4}x=2700$, 　$x^2=3600$

$\therefore x=60\ (\because x>0)$

따라서 펜스의 설치 비용이 최소일 때 A 지점에서 B 지점까지 설치하는 펜스의 길이는 60이다. 　답 60

0393 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(a, 0)$, $(0, b)$이므로 삼각형 OBC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}ab$ 　…… ㉠

또 점 A(2, 3)이 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 위의 점이므로

$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\ge 2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\frac{3}{b}}=2\sqrt{\frac{6}{ab}}$

그런데 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$이므로

$1\ge 2\sqrt{\frac{6}{ab}}$ (단, 등호는 $\underline{3a=2b}$일 때 성립)

└ $\frac{2}{a}=\frac{3}{b}$에서 $3a=2b$

양변을 제곱하면 　$1\ge 4\cdot\frac{6}{ab}$

$\therefore ab\ge 24$ 　…… ㉡

㉠, ㉡에서

$S=\frac{1}{2}ab\ge\frac{1}{2}\cdot 24=12$

따라서 삼각형 OBC의 넓이의 최솟값은 12이다. 　답 12

유형 26~28 코시-슈바르츠 부등식 　본책 64, 65쪽

① a, b, x, y가 실수일 때,

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$

② a, b, c, x, y, z가 실수일 때,

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\ge(ax+by+cz)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\text{일 때 성립}\right)$

0394 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\ge(2x+3y)^2$

그런데 $x^2+y^2=52$이므로

$13\cdot 52\ge(2x+3y)^2$, 　$13^2\cdot 2^2\ge(2x+3y)^2$

$\therefore -26\le 2x+3y\le 26$

한편 등호는 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$, 즉 $y=\frac{3}{2}x$일 때 성립하므로 $y=\frac{3}{2}x$를 $x^2+y^2=52$에 대입하면

$x^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2=52$, 　$x^2=16$

$\therefore x=\pm 4$, $y=\pm 6$ (복호동순)

따라서 $2x+3y$는 $x=4$, $y=6$일 때 최댓값 26을 가지므로

$\alpha=26$, $\beta=4$, $\gamma=6$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=36$ 　답 36

0395 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+2^2)(x^2+y^2)\ge(x+2y)^2$

그런데 $x^2+y^2=5$이므로

$25\ge(x+2y)^2$

$\therefore -5\le x+2y\le 5\ \left(\text{단, 등호는 } x=\frac{y}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $x+2y$의 최댓값은 5, 최솟값은 -5이므로 구하는 곱은

$5\cdot(-5)=-25$ 　답 ①

0396 $x^2+y^2=3$이므로

$x^2+4x+y^2+3y=4x+3y+3$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(4^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (4x+3y)^2$

그런데 $x^2+y^2=3$이므로

$75 \geq (4x+3y)^2$

$\therefore\ -5\sqrt{3} \leq 4x+3y \leq 5\sqrt{3}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{4}=\frac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore\ 3-5\sqrt{3} \leq 4x+3y+3 \leq 3+5\sqrt{3}$

따라서 x^2+4x+y^2+3y의 최댓값은 $3+5\sqrt{3}$이다. 답 $3+5\sqrt{3}$

0397 x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$\{1^2+(-2)^2+3^2\}(x^2+y^2+z^2) \geq (x-2y+3z)^2$

그런데 $x^2+y^2+z^2=2$이므로

$28 \geq (x-2y+3z)^2$

$\therefore\ -2\sqrt{7} \leq x-2y+3z \leq 2\sqrt{7}$

$\left(\text{단, 등호는 } x=-\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $x-2y+3z$의 최솟값은 $-2\sqrt{7}$이다. 답 ①

0398 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(3^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (3x+y)^2$

그런데 $x^2+y^2=a$이므로

$10a \geq (3x+y)^2$

$\therefore\ -\sqrt{10a} \leq 3x+y \leq \sqrt{10a}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{3}=y\text{일 때 성립}\right)$ ··· ❶

따라서 $3x+y$의 최댓값은 $\sqrt{10a}$, 최솟값은 $-\sqrt{10a}$이고 그 차가 20이므로

$2\sqrt{10a}=20$, $10a=100$ $\therefore\ a=10$ ··· ❷

답 10

채점 기준	비율
❶ $3x+y$의 값의 범위를 a를 사용하여 나타낼 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0399 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$

그런데 $3x+4y=5$이므로

$25(x^2+y^2) \geq 25$

$\therefore\ x^2+y^2 \geq 1$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{3}=\frac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 1이다. 답 ①

0400 a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}(a^2+b^2) \geq \left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2$

그런데 $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=\sqrt{13}$이므로

$\frac{13}{36}(a^2+b^2) \geq 13$

$\therefore\ a^2+b^2 \geq 36$ (단, 등호는 $2a=3b$일 때 성립)

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 36이다. 답 ④

0401 ㄱ. $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$

그런데 $x+y=9$이므로

$9 \geq 2\sqrt{xy}$

$\therefore\ \sqrt{xy} \leq \frac{9}{2}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

ㄴ. x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$

$2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$

그런데 $x+y=9$이므로

$2(x^2+y^2) \geq 81$

$\therefore\ x^2+y^2 \geq \frac{81}{2}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

ㄷ. $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2\} \geq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

$2(x+y) \geq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

그런데 $x+y=9$이므로

$2 \cdot 9 \geq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$0<\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq 3\sqrt{2}$ (단, 등호는 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$일 때 성립)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0402 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면 원의 지름이 직사각형의 대각선이므로

$x^2+y^2=2^2$

한편 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$

$2 \cdot 4 \geq (x+y)^2$

$\therefore\ (x+y)^2 \leq 8$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$0<x+y \leq 2\sqrt{2}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

직사각형의 둘레의 길이는 $2(x+y)$이므로

$0<2(x+y) \leq 4\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $4\sqrt{2}$이다. 답 ④

0403 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 직육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=27$ ··· ❶

한편 a, b, c는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$

$3 \cdot 27 \geq (a+b+c)^2$

$\therefore\ (a+b+c)^2 \leq 81$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

$0<a+b+c \leq 9$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립) ··· ❷

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$이므로

$0<4(a+b+c) \leq 36$

따라서 구하는 최댓값은 36이다. ··· ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 코시-슈바르츠 부등식을 이용할 수 있다.	40 %
❸ 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0404 세 원 O_1, O_2, O_3의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3이라 하면 $\overline{O_1O_3}=6$이므로

$r_1+2r_2+r_3=6$ …… ㉠

한편 r_1, r_2, r_3이 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+1^2)(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\ge(r_1+2r_2+r_3)^2$

$6(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\ge36$

$\therefore r_1^2+r_2^2+r_3^2\ge6$

세 원의 넓이의 합은 $\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)$이므로

$\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\ge6\pi$

이때 등호는 $r_1=\frac{r_2}{2}=r_3$일 때 성립하므로 ㉠에 $r_1=\frac{r_2}{2}$, $r_3=\frac{r_2}{2}$를 대입하면

$\frac{r_2}{2}+2r_2+\frac{r_2}{2}=6$, $3r_2=6$ $\therefore r_2=2$

따라서 $r_1=1$, $r_2=2$, $r_3=1$일 때 세 원의 넓이의 합이 최소이므로 구하는 반지름의 길이의 합은

$1+2+1=4$

답 4

0405 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $P\subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 참이다.

$\therefore p \Rightarrow q$

ㄴ. $P\not\subset R$이므로 명제 $p \longrightarrow r$는 거짓이다.

$\therefore p \not\Rightarrow \sim r$

ㄷ. $Q\subset R$이므로 $R^C\subset Q^C$

따라서 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$는 참이다.

$\therefore \sim r \Rightarrow q$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0406 전략 주어진 조건을 이용하여 진리집합 P, Q를 각각 구하고 참, 거짓을 판단한다.

풀이 $P=\{x|a(x-1)(x-2)<0\}$, $Q=\{x|x>b\}$

ㄱ. $a=0$을 $a(x-1)(x-2)<0$에 대입하면

$0\cdot(x-1)(x-2)<0$

위의 부등식을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로

$P=\varnothing$

ㄴ. $a>0$일 때 $a(x-1)(x-2)<0$에서

$(x-1)(x-2)<0$

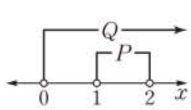
$\therefore 1<x<2$

$\therefore P=\{x|1<x<2\}$

$b=0$일 때 $x>b$에서 $x>0$

$\therefore Q=\{x|x>0\}$

따라서 오른쪽 그림에서



$P\subset Q$

ㄷ. $a<0$일 때 $a(x-1)(x-2)<0$에서

$(x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

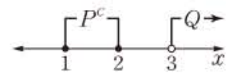
$\therefore P=\{x|x<1$ 또는 $x>2\}$

$b=3$일 때 $x>b$에서 $x>3$

$\therefore Q=\{x|x>3\}$

한편 명제 '$\sim p$이면 q이다.'가 참이려면 $P^C\subset Q$이어야 한다.

이때 $P^C=\{x|1\le x\le2\}$이므로 오른쪽 그림에서



$P^C\not\subset Q$

따라서 명제 '$\sim p$이면 q이다.'는 거짓이다.

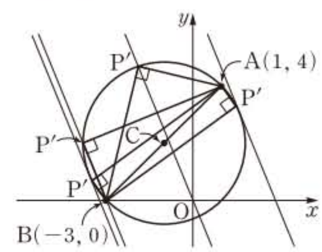
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0407 전략 반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$임을 이용한다.

풀이 주어진 명제가 참이 되려면 $\angle APB=90°$를 만족시키는 직선 l 위의 점 P가 적어도 하나 존재하면 된다.

두 점 A(1, 4), B(−3, 0)을 지름의 양 끝 점으로 하는 원을 C라 하면 원 C 위의 점 중에서 A, B를 제외한 모든 점 P′에 대하여 $\angle AP'B=90°$이다.



따라서 원 C와 직선 l이 두 점 A, B가 아닌 어떤 점에서 만나면 주어진 명제는 참이 된다. ··· ❶

원 C의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$C\left(\frac{1-3}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$, 즉 C(−1, 2)

원 C의 반지름의 길이는

$\overline{CA}=\sqrt{(1+1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$

이므로 원 C와 직선 l이 만나려면 원의 중심 C(−1, 2)와 직선 $y=-3x+k$, 즉 $3x+y-k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작거나 같아야 한다. 즉

$\frac{|-3+2-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}\le2\sqrt{2}$

$|-k-1|\le4\sqrt{5}$

$-4\sqrt{5}\le k+1\le4\sqrt{5}$

$\therefore -4\sqrt{5}-1\le k\le4\sqrt{5}-1$ ··· ❷

이때 $8<4\sqrt{5}<9$, $-9<-4\sqrt{5}<-8$이므로

$7<4\sqrt{5}-1<8$, $-10<-4\sqrt{5}-1<-9$

따라서 정수 k는

$-9, -8, -7, \cdots, 6, 7$

의 17개이다. ··· ❸

답 17

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제가 참이 되는 경우를 알 수 있다.	30 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	10 %

03 명제

참고 직선 l이 점 A(또는 점 B)를 지날 때에는 원 C와 만나는 점 중에서 점 A(또는 점 B)가 아닌 점이 점 P가 된다.

0408 **전략** 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참임을 이용한다.

풀이 $\sim q$: $x^2+2x-3\ge 0$에서

$(x+3)(x-1)\ge 0$

$\therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 1$

$\sim p$: $(x^2-mx+m)(x^2+2x-3)\ge 0$

명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$에서 $x^2-mx+m\ge 0$이어야 한다. $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$에서 $x^2+2x-3\ge 0$이므로 $x^2-mx+m\ge 0$이어야 한다.

즉 $f(x)=x^2-mx+m$이라 할 때, $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$에서 $f(x)\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2-mx+m=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $D\le 0$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$을 만족시키므로

$D=(-m)^2-4m\le 0,\quad m(m-4)\le 0$

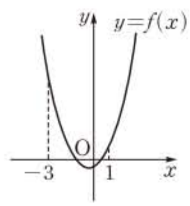
$\therefore 0\le m\le 4$

(ii) $D>0$일 때, 즉

$m<0$ 또는 $m>4$ …… ㉠

일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이때 $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$에서 $f(x)\ge 0$이려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



ⓘ $f(-3)=9+4m\ge 0$에서

$m\ge -\dfrac{9}{4}$ …… ㉡

ⓘⓘ $f(1)=1\ge 0$

ⓘⓘⓘ $-3<\dfrac{m}{2}<1$에서 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\dfrac{m}{2}$이다.

$-6<m<2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-\dfrac{9}{4}\le m<0$

(i), (ii)에서 $-\dfrac{9}{4}\le m\le 4$이므로 $a=4,\ b=-\dfrac{9}{4}$

$\therefore -8ab=72$

답 72

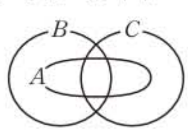
0409 **전략** 두 조건 p, q에 대하여 $q \Longrightarrow p$이고, $p \not\Longrightarrow q$인 것을 찾는다.

풀이 ㄱ. p: $A\cap B=A$에서 $A\subset B$

q: $A-B=\varnothing$에서 $A\subset B$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. [⟶의 반례] 오른쪽 벤다이어그램에서



$p \not\Longrightarrow q$

$A\subset B$ 또는 $A\subset C$이면 $A\subset(B\cup C)$이므로

$q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. [⟶의 반례] $a=2,\ b=1,\ c=4$이면 $|a-b|<|a-c|$이지만 $b<a<c$이므로 $p \not\Longrightarrow q$

$|a-b|$는 수직선 위에서 a를 나타내는 점과 b를 나타내는 점 사이의 거리이므로 $a<b<c$이면 $|a-b|<|a-c|$이다.

$\therefore q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄹ. $a^2+b^2-ab=0 \Longleftrightarrow \left(a-\dfrac{1}{2}b\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2=0$

$\Longleftrightarrow a=b=0$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

이상에서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

0410 **전략** 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, p가 q이기 위한 필요조건이면 $Q\subset P$이다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P$이어야 한다.

이때 $(x-1)^2\le 0$에서 $x=1$이므로 $P=\{1\}$

(i) $1\in Q$일 때,

$2x^2-(3k+7)x+2=0$이 $x=1$을 근으로 가지므로

$2-(3k+7)+2=0 \qquad \therefore k=-1$

(ii) $Q=\varnothing$일 때,

이차방정식 $2x^2-(3k+7)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(3k+7)\}^2-4\cdot 2\cdot 2<0$

$3k^2+14k+11<0,\qquad (3k+11)(k+1)<0$

$\therefore -\dfrac{11}{3}<k<-1$

(i), (ii)에서 정수 k는 $-3,\ -2,\ -1$이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)=-6$

답 ②

참고 (i)에서 $k=-1$일 때,

$2x^2-4x+2=0,\quad 2(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$

따라서 $Q=\{1\}$이므로 $Q\subset P$를 만족시킨다.

0411 **전략** 귀류법을 이용한다.

풀이 $p^2(n^2-1)=q^2$에서 p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로 $p=1$이다.

따라서 $1^2\cdot(n^2-1)=q^2$이므로 $n^2=\boxed{q^2+1}$

자연수 k에 대하여

(i) $q=2k$일 때, $n^2=(2k)^2+1=4k^2+1$이고

$(2k)^2<4k^2+1<\underbrace{(2k+1)^2}_{4k^2+4k+1}$

이므로

$(2k)^2<n^2<\boxed{(2k+1)^2}$

$\therefore 2k<n<2k+1$ $2k,\ 2k+1$은 연속하는 두 자연수이므로 그 사이에 자연수가 존재하지 않는다.

이때 위의 부등식을 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때, $n^2=(2k+1)^2+1=4k^2+4k+2$이고

$(2k+1)^2<4k^2+4k+2<\underbrace{(2k+2)^2}_{4k^2+8k+4}$

이므로

$(2k+1)^2<n^2<(2k+2)^2$

$\therefore 2k+1<n<2k+2$

이때 위의 부등식을 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

이때 $f(q)=q^2+1$, $g(k)=(2k+1)^2$이므로

$f(2)=2^2+1=5$, $g(3)=(2\cdot3+1)^2=49$

$\therefore f(2)+g(3)=54$ 답 ③

0412 전략 x에 대한 이차방정식 $x^2-2axy+by^2=0$의 판별식을 D라 할 때, $D\le0$이면 주어진 부등식이 항상 성립함을 이용한다.

풀이 부등식 $x^2-2axy+by^2\ge0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 x에 대한 이차방정식 $x^2-2ayx+by^2=0$의 판별식을 D라 할 때, $\frac{D}{4}=(-ay)^2-by^2\le0$ $\therefore y^2(a^2-b)\le0$

이때 $y^2\ge0$이므로 $a^2-b\le0$ $\therefore a^2\le b$ ⋯ ❶

(i) $a=1$이면 $b=1, 2, 3, \cdots, 10$

(ii) $a=2$이면 $b=4, 5, 6, \cdots, 10$

(iii) $a=3$이면 $b=9, 10$ ⋯ ❷

이상에서 10 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$10+7+2=19$ ⋯ ❸

답 19

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❷ $a=1, 2, 3$일 때, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0413 전략 근호를 포함한 식은 제곱의 차를 이용하여 부등식이 성립하는지 확인한다.

풀이 ㄱ. $(a+b)^2-3ab=a^2-ab+b^2=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\ge0$

(단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

$\therefore (a+b)^2\ge3ab$

ㄴ. $(\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|})^2-\{\sqrt{2(|a|+|b|)}\}^2$

$=|a|+2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}+|b|-2(|a|+|b|)$

$=-(|a|-2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}+|b|)$

$=-\{(\sqrt{|a|})^2-2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}+(\sqrt{|b|})^2\}$

$=-(\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|})^2\le0$ (단, 등호는 $|a|=|b|$일 때 성립)

$\therefore (\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|})^2\le\{\sqrt{2(|a|+|b|)}\}^2$

그런데 $\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}\ge0$, $\sqrt{2(|a|+|b|)}\ge0$이므로

$\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}\le\sqrt{2(|a|+|b|)}$

ㄷ. $(|a|+|b|)^2-(\sqrt{a^2+b^2})^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a^2+b^2)$

$=a^2+2|ab|+b^2-a^2-b^2$

$=2|ab|\ge0$ (단, 등호는 $ab=0$일 때 성립)

$\therefore (|a|+|b|)^2\ge(\sqrt{a^2+b^2})^2$

그런데 $|a|+|b|\ge0$, $\sqrt{a^2+b^2}\ge0$이므로

$|a|+|b|\ge\sqrt{a^2+b^2}$

ㄹ. $a^2+b^2+1-2(a+b-ab)$

$=a^2+b^2+(-1)^2+2a\cdot(-1)+2b\cdot(-1)+2ab$

$=(a+b-1)^2\ge0$ (단, 등호는 $a+b=1$일 때 성립)

$\therefore a^2+b^2+1\ge2(a+b-ab)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

0414 전략 부등식의 좌변을 전개하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 주어진 부등식의 좌변을 전개하면

$(x-y)\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{y}\right)=1-\frac{4x}{y}-\frac{y}{x}+4$

$=5-\left(\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\right)$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\ge2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}$

$=2\cdot2$

$=4$ (단, 등호는 $2x=y$일 때 성립) ⋯ ㉡

$\frac{4x}{y}=\frac{y}{x}$에서 $4x^2=y^2$

$\therefore 2x=y$ ($\because x>0, y>0$)

㉠, ㉡에 의하여

$5-\left(\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\right)\le5-4=1$

이므로 $(x-y)\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{y}\right)\le1$ ⋯ ❷

따라서 $(x-y)\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{y}\right)\le k$가 항상 성립하려면 $k\ge1$이어야 하므로 k의 최솟값은 1이다. ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식의 좌변을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $(x-y)\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{y}\right)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0415 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 ㄱ. $f(2)g(2)=(a_1+a_2)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)$

$=2+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}$

$\ge2+2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}}$

$=4$ (단, 등호는 $a_1=a_2$일 때 성립)

ㄴ. $f(n)+g(n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$

$=\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$

$\ge2\sqrt{a_1\cdot\frac{1}{a_1}}+2\sqrt{a_2\cdot\frac{1}{a_2}}+\cdots+2\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}$

$=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n\text{개}}=2n$

(단, 등호는 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$일 때 성립)

ㄷ. $f(n)$, $g(n)$이 모두 n보다 작으면 ㄴ에 모순이 된다.

따라서 $f(n)$, $g(n)$ 중 적어도 하나는 n보다 크거나 같다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0416 전략 $S(A)+S(B)$의 값이 일정함을 이용한다.

풀이 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A\cap B=\{1, 4\}$이므로

$S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)$

$=(1+2+3+\cdots+10)+(1+4)$

$=60$ ⋯ ❶

$S(A)>0$, $S(B)>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S(A)+S(B)\geq 2\sqrt{S(A)S(B)}$$

$$60\geq 2\sqrt{S(A)S(B)},\qquad \sqrt{S(A)S(B)}\leq 30$$

$\therefore S(A)S(B)\leq 900$ (단, 등호는 $S(A)=S(B)$일 때 성립)

따라서 $S(A)S(B)$의 최댓값은 900이다. ⋯ ❷

답 900

채점 기준	비율
❶ $S(A)+S(B)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $S(A)S(B)$의 최댓값을 구할 수 있다.	60 %

참고 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$, $B=\{1, 4, 7, 8, 10\}$일 때, $S(A)=S(B)=30$이므로 등호가 성립하는 경우가 존재함을 확인할 수 있다.

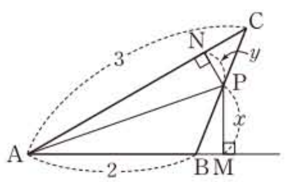
0417

전략 $\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$임을 이용하여 $\overline{PM}$과 $\overline{PN}$ 사이의 관계식을 구하고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $\overline{PM}=x$, $\overline{PN}=y\,(x>0,\ y>0)$라 하면 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=3$이므로

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}=\frac{2}{x}+\frac{3}{y} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}$를 그으면 $\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$이므로



$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot y$$

$$\therefore 2x+3y=3$$

이때 ㉠에 $2x+3y$를 곱하면

$$(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=4+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}+9$$

$$=13+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이고 $\frac{x}{y}>0$, $\frac{y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}\geq 2\sqrt{\frac{6x}{y}\cdot\frac{6y}{x}}=12$$

$2x+3y=3$이므로 ㉡에서

$3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)\geq 13+12=25$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$\frac{6x}{y}=\frac{6y}{x}$에서 $x^2=y^2$
$\therefore x=y$ ($\because x>0,\ y>0$)

$$\therefore \frac{2}{x}+\frac{3}{y}\geq\frac{25}{3}$$

따라서 ㉠에서 $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값은 $\frac{25}{3}$이므로

$p=3$, $q=25$

$\therefore p+q=28$

답 28

0418

전략 피타고라스 정리를 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구하고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

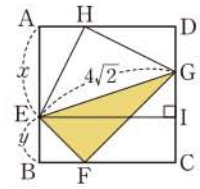
풀이 $\triangle EFG=\square EBCG-\triangle EBF-\triangle GFC$

$$=\frac{1}{2}(x+y)^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2$$

$$=xy$$

이므로 xy의 최댓값을 구해야 한다.

이때 오른쪽 그림과 같이 점 E에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 I라 하면



$\overline{EI}=\overline{BC}=x+y$,

$\overline{IG}=\overline{CG}-\overline{BE}=x-y$

이므로 직각삼각형 EIG에서

$$(x+y)^2+(x-y)^2=(4\sqrt{2})^2$$

$$\therefore x^2+y^2=16$$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$$

$$2xy\leq 16$$

$\therefore xy\leq 8$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 $\triangle EFG$의 넓이의 최댓값은 8이다.

답 ②

0419

전략 x 이외의 문자들을 x에 대한 식으로 나타내고 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

풀이 $x+y+z=1$에서

$y+z=1-x$ ⋯⋯ ㉠

구하는 것이 x의 최댓값, 최솟값이므로 x 이외의 문자들을 x에 대한 식으로 나타낸다.

$x^2+y^2+z^2=3$에서

$y^2+z^2=3-x^2$ ⋯⋯ ㉡

y, z는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(y^2+z^2)\geq(y+z)^2$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$$2(3-x^2)\geq(1-x)^2,\qquad 3x^2-2x-5\leq 0$$

$$(x+1)(3x-5)\leq 0$$

$\therefore -1\leq x\leq\frac{5}{3}$ (단, 등호는 $y=z$일 때 성립)

따라서 $M=\frac{5}{3}$, $m=-1$이므로

$3M+m=4$

답 ④

다른 풀이 $x+y+z=1$에서

$y+z=1-x$ ⋯⋯ ㉠

$x^2+y^2+z^2=3$에서

$y^2+z^2=3-x^2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 $(y+z)^2=y^2+z^2+2yz$에 대입하면

$$(1-x)^2=3-x^2+2yz$$

$\therefore yz=x^2-x-1$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉢에서 y, z는 t에 대한 이차방정식

$t^2-(y+z)t+yz=0$, 즉 $t^2-(1-x)t+x^2-x-1=0$

의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(1-x)\}^2-4(x^2-x-1)\geq 0$$

$$3x^2-2x-5\leq 0,\qquad (x+1)(3x-5)\leq 0$$

$$\therefore -1\leq x\leq\frac{5}{3}$$

0420

전략 주어진 식을 a, b에 대한 식으로 나타내고 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

풀이 $\overline{BQ}=1-b$, $\overline{QC}=a$이므로 $\qquad S_1=\frac{1}{2}a(1-b)$

$\overline{CP}=b$, $\overline{PA}=1-a$이므로 $\qquad S_2=\frac{1}{2}b(1-a)$

$$\therefore \frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+4S_1+4S_2+8$$

산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 없다.

$$=\frac{2}{a(1-b)}+\frac{2}{b(1-a)}+2a(1-b)+2b(1-a)+8 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 점 C가 직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로

$$b=-a+1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

즉 $1-b=a$, $1-a=b$이므로 ㉠에서

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+4S_1+4S_2+8=\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}+2a^2+2b^2+8$$

$$=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+a^2+b^2+4\right)$$

산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 없다.

$$=2\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\} \quad \cdots ❶$$

a, b는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2)\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\}\ge\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2$$

이때 등호는 $a=b$일 때 성립하고 ㉡에서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$$a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}+2=5$$

따라서

$$2\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\}\ge5^2=25$$

이므로 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+4S_1+4S_2+8$의 최솟값은 25이다. $\cdots$ ❷

답 25

채점 기준	비율
❶ $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+4S_1+4S_2+8$을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+4S_1+4S_2+8$의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

04 함수

0421 X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 4, 5의 2개이므로 함수가 아니다. 답 함수가 아니다.

0422 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

$\therefore$ 정의역: $\{1, 3, 5, 7\}$, 공역: $\{1, 2\}$, 치역: $\{1, 2\}$

답 풀이 참조

0423 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

$\therefore$ 정의역: $\{-1, 0, 1\}$, 공역: $\{1, 3, 5, 7\}$, 치역: $\{1, 5, 7\}$

답 풀이 참조

0424 X의 원소 2, 4에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다. 답 함수가 아니다.

0425 답 정의역과 치역은 모두 실수 전체의 집합이다.

0426 답 정의역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y|y\le4\}$

0427 함수 $y=|x|+1$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

또 $|x|\ge0$에서 $|x|+1\ge1$ $\therefore y\ge1$

즉 치역은 $\{y|y\ge1\}$이다. 답 풀이 참조

0428 답 정의역: $\{x|x\ne0$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\ne0$인 실수$\}$

0429 $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(1)=g(1)=1$

$\therefore f=g$ 답 서로 같은 함수이다.

참고 두 함수 f, g의 치역은 $\{-1, 1\}$, 공역은 실수 전체의 집합이다.

0430 $f(-1)=g(-1)=1$, $f(1)=g(1)=1$

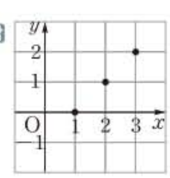
$\therefore f=g$ 답 서로 같은 함수이다.

0431 $f(-1)=g(-1)=-1$

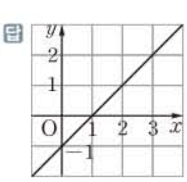
$f(1)=1$, $g(1)=-1$에서 $f(1)\ne g(1)$

$\therefore f\ne g$ 답 서로 같은 함수가 아니다.

0432 답



0433 답



0434 답 ㄴ, ㄹ

0435 답 ㄴ, ㄹ

0436 답 ㄹ

0437 답 ㄱ

0438 답 ㄱ, ㄷ

0439 답 ㄱ, ㄷ

0440 답 ㄷ

0441 답 ㄴ

0442 $(g\circ f)(6)=g(f(6))=g(a)=6$ 답 6

0443 $(g\circ f)(8)=g(f(8))=g(d)=6$ 답 6

0444 $(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(8)=d$ 답 d

0445 $(f\circ g)(c)=f(g(c))=f(2)=b$ 답 b

0446 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-1)$
$=(3x-1)^2=9x^2-6x+1$
답 $(g\circ f)(x)=9x^2-6x+1$

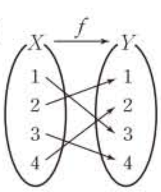
0447 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=3x^2-1$
답 $(f\circ g)(x)=3x^2-1$

0448 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(3x-1)$
$=3(3x-1)-1=9x-4$
답 $(f\circ f)(x)=9x-4$

0449 $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2)=(x^2)^2=x^4$
답 $(g\circ g)(x)=x^4$

0450 $(f\circ g)(x)=f(2x-1)=(2x-1)+1=2x$이므로
$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(x^2)=2x^2$
$(g\circ h)(x)=g(x^2)=2x^2-1$이므로
$(f\circ(g\circ h))(x)=f(2x^2-1)=(2x^2-1)+1=2x^2$
따라서 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$가 성립한다. 답 풀이 참조

0451 (1)



(2) $f(2)=1$, $f^{-1}(2)=4$이므로 $f(2)+f^{-1}(2)=5$
(3) $f^{-1}(3)=1$이므로 $f^{-1}(a)+1=3$ $\therefore f^{-1}(a)=2$
$\therefore a=1$ 답 풀이 참조

0452 $f^{-1}(3)=a$에서 $f(a)=3$이므로
$-a+4=3$ $\therefore a=1$ 답 1

0453 $f^{-1}(a)=5$에서 $f(5)=a$이므로
$a=-5+4=-1$ 답 -1

0454 함수 $y=2x+3$은 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=2x+3$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$2x=y-3$ $\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ 답 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

0455 함수 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$은 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$\frac{1}{2}x=y+\frac{1}{4}$ $\therefore x=2y+\frac{1}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=2x+\frac{1}{2}$ 답 $y=2x+\frac{1}{2}$

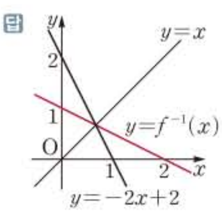
0456 답 3

0457 $(f^{-1})^{-1}(3)=f(3)=1$ 답 1

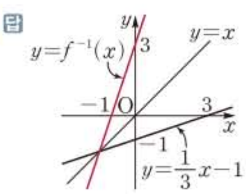
0458 $(f\circ f^{-1})(5)=f(f^{-1}(5))=f(2)=5$ 답 5

0459 $(f^{-1}\circ f)(4)=f^{-1}(f(4))=f^{-1}(7)=4$ 답 4

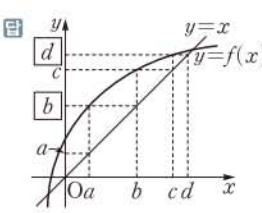
0460 답



0461 답



0462 답



0463 $f^{-1}(c)=k$라 하면 $f(k)=c$ $\therefore k=b$
$\therefore f^{-1}(c)=b$ 답 b

0464 $f^{-1}(d)=l$이라 하면 $f(l)=d$ $\therefore l=c$
$\therefore f^{-1}(d)=c$ 답 c

0465 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로 $4x+6=x$에서
$3x=-6$ $\therefore x=-2$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(-2,\ -2)$ 답 $(-2,\ -2)$

0466 $-2x+3=x$에서 $3x=3$ $\therefore x=1$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(1,\ 1)$ 답 $(1,\ 1)$

0467 $-\frac{2}{3}x+5=x$에서 $\frac{5}{3}x=5$ $\therefore x=3$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(3,\ 3)$ 답 $(3,\ 3)$

0468 (1) $x\geq-2$일 때, $\underbrace{x+2\geq0}_{|x+2|=x+2}$이므로

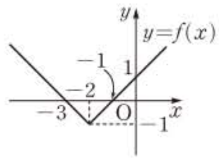
$f(x)=x+2-1=x+1$

(2) $x<-2$일 때, $\underbrace{x+2<0}_{|x+2|=-(x+2)}$이므로

$f(x)=-(x+2)-1=-x-3$

(3) $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 $\{y\,|\,y\geq-1\}$이다.

답 풀이 참조



0469 $|x|+|y|=1$에서

(i) $x\geq0,\ y\geq0$일 때, $x+y=1$ $\therefore y=-x+1$

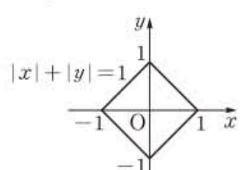
(ii) $x\geq0,\ y<0$일 때, $x-y=1$ $\therefore y=x-1$

(iii) $x<0,\ y\geq0$일 때, $-x+y=1$ $\therefore y=x+1$

(iv) $x<0,\ y<0$일 때, $-x-y=1$ $\therefore y=-x-1$

이상에서 $|x|+|y|=1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



다른 풀이 $|x|+|y|=1$의 그래프는 $x+y=1\,(x\geq0,\ y\geq0)$의 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동하여 그릴 수도 있다.

0470 $|x|-|y|=2$에서

(i) $x\geq0,\ y\geq0$일 때, $x-y=2$ $\therefore y=x-2$

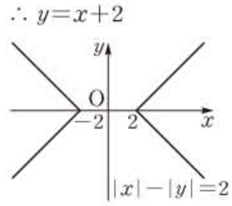
(ii) $x\geq0,\ y<0$일 때, $x+y=2$ $\therefore y=-x+2$

(iii) $x<0,\ y\geq0$일 때, $-x-y=2$ $\therefore y=-x-2$

(iv) $x<0,\ y<0$일 때, $-x+y=2$ $\therefore y=x+2$

이상에서 $|x|-|y|=2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



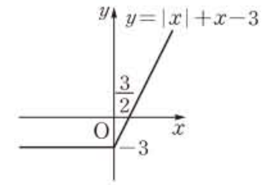
0471 $y=|x|+x-3$에서

(i) $x\geq0$일 때, $y=x+x-3$ $\therefore y=2x-3$

(ii) $x<0$일 때, $y=-x+x-3$ $\therefore y=-3$

(i), (ii)에서 $y=|x|+x-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0472 $y=|\overset{x+2=0\text{에서 }x=-2}{x+2}|+|\overset{x-1=0\text{에서 }x=1}{x-1}|$에서

(i) $x<-2$일 때, $x+2<0,\ x-1<0$이므로

$y=-(x+2)-(x-1)$ $\therefore y=-2x-1$

(ii) $-2\leq x<1$일 때, $x+2\geq0,\ x-1<0$이므로

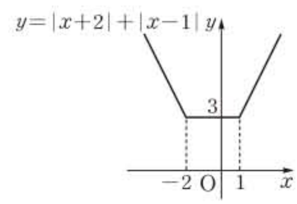
$y=x+2-(x-1)$ $\therefore y=3$

(iii) $x\geq1$일 때, $x+2>0,\ x-1\geq0$이므로

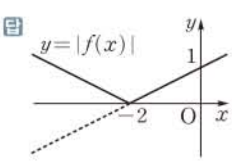
$y=x+2+x-1$ $\therefore y=2x+1$

이상에서 $y=|x+2|+|x-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

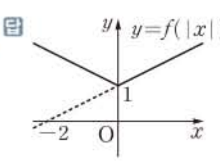
답 풀이 참조



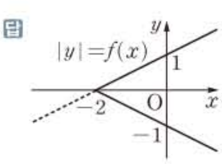
0473 답



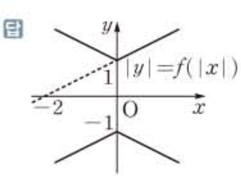
0474 답



0475 답

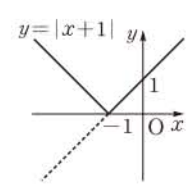


0476 답



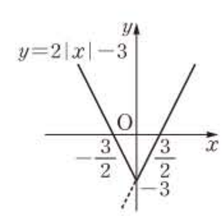
0477 $y=|x+1|$의 그래프는 $y=x+1$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



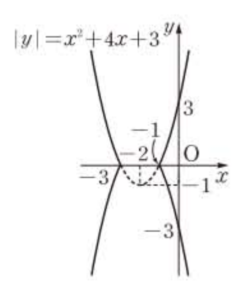
0478 $y=2|x|-3$의 그래프는 $y=2x-3$의 그래프에서 $x\geq0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분은 $x\geq0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0479 $|y|=x^2+4x+3$의 그래프는 $y=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분만 남기고, $y<0$인 부분은 $y\geq0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

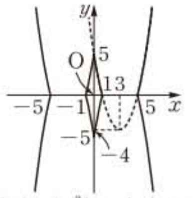
답 풀이 참조



0480 $|y|=|x^2|-6|x|+5$

$\qquad =|x|^2-6|x|+5$

의 그래프는 $y=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$의 그래프에서 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분만 남기고, 이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



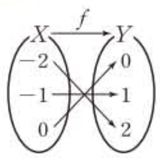
$|y|=|x^2|-6|x|+5$

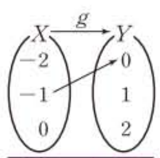
답 풀이 참조

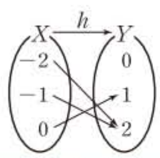
유형 01 함수의 뜻 (본책 78쪽)

두 집합 X, Y에 대하여
① X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응한다.
➡ X에서 Y로의 함수이다.
② X의 각 원소에 대응하는 Y의 원소가 없거나 2개 이상이다.
➡ X에서 Y로의 함수가 아니다.

0481 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


이상에서 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

X의 원소 -2와 0에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

답 ③

0482 ㄱ, ㄹ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

ㄴ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 만나지 않거나 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

ㄷ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

이상에서 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

0483 ① $-1\leq x\leq 1$에서 $\quad 0\leq x+1\leq 2$

$\therefore 0\leq f(x)\leq 2$

② $-1\leq x\leq 1$에서 $\quad -2\leq -2x\leq 2$

$-1\leq -2x+1\leq 3 \quad \therefore -1\leq f(x)\leq 3$

③ $-1\leq x\leq 1$에서 $\quad -2\leq x-1\leq 0$

$0\leq |x-1|\leq 2, \quad 0\leq \frac{1}{2}|x-1|\leq 1$

$\therefore 0\leq f(x)\leq 1$

④ $-1\leq x\leq 1$에서 $\quad 0\leq x^2\leq 1$

$2\leq x^2+2\leq 3 \quad \therefore 2\leq f(x)\leq 3$

⑤ $-1\leq x\leq 1$에서 $\quad 0\leq x+1\leq 2$

$0\leq (x+1)^2\leq 4, \quad -2\leq (x+1)^2-2\leq 2$

$\therefore -2\leq f(x)\leq 2$

따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

유형 02 함숫값 (본책 78쪽)

① 함수 $f(x)$에서 $f(k)$의 값 구하기
➡ x 대신 k를 대입한다.
② 함수 $f(ax+b)$에서 $f(k)$의 값 구하기
➡ $ax+b=k$를 만족시키는 x의 값을 구하여 x 대신 그 수를 대입한다.

0484 $f(3)=3+1=4$

$f(29)=f(29-4)=f(25-4)=\cdots=f(5-4)$

$\quad =f(1)=1+1=2$

$\therefore f(3)+f(29)=4+2=6$ 답 6

0485 $\frac{x+1}{3}=2$에서 $\quad x+1=6 \quad \therefore x=5$

$f\left(\frac{x+1}{3}\right)=x^2-5$에 $x=5$를 대입하면

$f(2)=5^2-5=20$ 답 ④

0486 이차방정식 $x^2+6x-3=0$에서 $x=-3\pm 2\sqrt{3}$이므로 α, β는 무리수이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=-3$

$\therefore f(\alpha)+f(\beta)-f(\alpha\beta)=-\alpha-\beta-(\alpha\beta+1)$

$\qquad =-(\alpha+\beta)-(\alpha\beta+1)$

$\qquad =-(-6)-(-2)=8$ 답 ③

유형 03 함수의 정의역, 공역, 치역 (본책 79쪽)

함수 $f: X \longrightarrow Y$에 대하여
➡ 정의역: X, 공역: Y, 치역: $\{f(x)|x\in X\}$

0487 (i) $a>0$일 때,

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-1)=-1$, $f(3)=3$

$-a+b=-1$, $3a+b=3$

$\therefore a=1$, $b=0$

그런데 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-1)=3$, $f(3)=-1$

$-a+b=3$, $3a+b=-1$

$\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore ab=-2$

(i), (ii)에서 $\quad ab=-2$ 답 -2

0488 $x^2-3x+1=-1$에서 $\quad x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

$x^2-3x+1=5$에서 $\quad x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 정의역은 $\{-1, 1, 2, 4\}$이므로

$a=1$, $b=4 \quad \therefore a-b=-3$ 답 ④

0489 $f(-1)=k\cdot(-1)^2-2=k-2$

$f(0)=k\cdot 0^2-2=-2$

$f(1)=k\cdot 1^2-2=k-2$

$f(2)=k\cdot 2^2-2=4k-2$

따라서 치역은 $\{k-2,\ -2,\ 4k-2\}$이고, 치역의 모든 원소의 합이 9이므로

$k-2+(-2)+4k-2=9$

$5k=15 \qquad \therefore k=3$ 답 3

참고 $k-2$, -2, $4k-2$ 중에서 같은 원소가 있으면 $k=0$이고, 이때 모든 원소의 합은 -2이므로 주어진 조건에 모순이다. 따라서 $k-2$, -2, $4k-2$는 모두 다른 원소이다.

0490 (i) $a>0$일 때, 치역은 $\{y|a+1\le y\le 2a+1\}$이므로

$a+1\ge 2,\ 2a+1\le 6$

$\therefore 1\le a\le \frac{5}{2}$ ⋯ ❶

(ii) $a<0$일 때, 치역은 $\{y|2a+1\le y\le a+1\}$이므로

$2a+1\ge 2,\ a+1\le 6$

$\therefore \frac{1}{2}\le a\le 5$

그런데 $a<0$이어야 하므로 성립하지 않는다. ⋯ ❷

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는

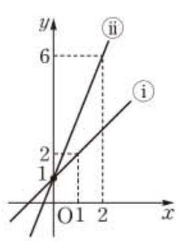
$1\le a\le \frac{5}{2}$ ⋯ ❸

답 $1\le a\le \frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ $a>0$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $a<0$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

참고 $y=ax+1$은 일차함수이므로 $\quad a\ne 0$

다른 풀이 일차함수 $y=ax+1$의 그래프는 a의 값에 관계없이 점 $(0,\ 1)$을 지나는 직선이므로 정의역이 $\{x|1\le x\le 2\}$, 공역이 $\{y|2\le y\le 6\}$이려면 직선 $y=ax+1$의 기울기가 오른쪽 그림과 같이 직선 ⓘ의 기울기보다 크거나 같고 직선 ⓘⓘ의 기울기보다 작거나 같아야 한다.



직선 ⓘ의 방정식은 $y=x+1$, 직선 ⓘⓘ의 방정식은 $y=\frac{5}{2}x+1$이므로 구하는 a의 값의 범위는

$1\le a\le \frac{5}{2}$

0491 음이 아닌 정수 k에 대하여

(i) $x=2k$일 때,

$x^2=(2k)^2=4k^2$이므로 $\qquad f(x)=0$

(ii) $x=2k+1$일 때,

$x^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$

이므로 $\qquad f(x)=1$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$의 치역은 $\{0,\ 1\}$이다. 답 ③

유형 04 조건을 이용하여 함숫값 구하기 본책 79쪽

$f(x+y)=f(x)f(y)$ 또는 $f(x+y)=f(x)+f(y)$의 조건이 주어졌을 때, $f(a)$의 값 구하기

➡ 적당한 값을 x, y에 대입하여 $f(a)$의 값을 유도한다.

0492 주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1+1)=f(1)f(1)=2\cdot 2=4 \qquad \therefore f(2)=4$

주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=2$를 대입하면

$f(1+2)=f(1)f(2)=2\cdot 4=8 \qquad \therefore f(3)=8$

주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=3$을 대입하면

$f(1+3)=f(1)f(3)=2\cdot 8=16 \qquad \therefore f(4)=16$

주어진 식의 양변에 $x=3$, $y=4$를 대입하면

$f(3+4)=f(3)f(4)=8\cdot 16=128$

$\therefore f(7)=128$ 답 128

0493 $f(252)=f(2^2\cdot 3^2\cdot 7)=f(2^2\cdot 3^2)+f(7)$

$=f(2^2)+f(3^2)+f(7)$

$=2f(2)+2f(3)+f(7)$ $\quad f(2^2)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=2f(2)$

$=2\cdot 2+2\cdot 3+7=17$ 답 17

0494 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ⋯⋯ ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

ㄴ. ㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)+f(1)$

$4=2f(1) \qquad \therefore f(1)=2$

㉠의 양변에 $x=-1$, $y=1$을 대입하면

$f(0)=f(-1)+f(1)$

$0=f(-1)+2 \qquad \therefore f(-1)=-2$

ㄷ. $f(2x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

$f(3x)=f(x+2x)=f(x)+f(2x)=f(x)+2f(x)=3f(x)$

$f(4x)=f(x+3x)=f(x)+f(3x)=f(x)+3f(x)=4f(x)$

⋮

$\therefore f(nx)=f(x+(n-1)x)=f(x)+f((n-1)x)$

$=f(x)+(n-1)f(x)=nf(x)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

유형 05 서로 같은 함수 본책 80쪽

두 함수 f, g가 서로 같은 함수이다.

➡ ① 정의역과 공역이 각각 같다.

② 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $\qquad f(x)=g(x)$

0495 $f(-1)=g(-1)$에서 $\qquad -a+b=-5$ ⋯⋯ ㉠

$f(1)=g(1)$에서 $\qquad a+b=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=3,\ b=-2$

$\therefore ab=-6$ 답 ③

0496 ㄱ. $f(1)=1$, $g(1)=-1$이므로 $\quad f(1)\neq g(1)$

$\therefore f\neq g$

ㄴ. $f(-1)=-1$, $g(-1)=1$이므로 $\quad f(-1)\neq g(-1)$

$\therefore f\neq g$

ㄷ. $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$ 이므로 $\quad f=g$

이상에서 $f=g$인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

0497 $f(1)=g(1)$에서 $\quad 1+2a+3b=-a+b$

$\therefore 3a+2b=-1$ ...... ㉠

$f(2)=g(2)$에서 $\quad 8+8a+3b=-2a+b$

$10a+2b=-8 \quad \therefore 5a+b=-4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1$, $b=1$

$\therefore f(1)=g(1)=2$, $f(2)=g(2)=3$

따라서 함수 f의 치역은 $\quad \{2, 3\}$ 답 $\{2, 3\}$

0498 $x^2=4x-3$에서 $\quad x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=3$ ··· ❶

따라서 구하는 집합 X는 집합 $\{1, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로

$\{1\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$ ··· ❷

답 $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 집합 X를 모두 구할 수 있다.	50 %

유형 06 일대일함수와 일대일대응

본책 80쪽

① 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일함수

➡ 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$

② 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일대응

➡ 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $\underbrace{x_1\neq x_2\text{이면 } f(x_1)\neq f(x_2)}_{\text{일대일함수}}$, (치역)=(공역)

0499 ① [반례] $f(x)=\frac{1}{2}$이라 하면 $x_1=1$, $x_2=2$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=\frac{1}{2}$, $f(x_2)=\frac{1}{2} \quad \therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=\frac{1}{2}$은 일대일대응이 아니다.

③ [반례] $f(x)=x+|x|$라 하면 $x_1=-1$, $x_2=-2$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=-1+|-1|=0$, $f(x_2)=-2+|-2|=0$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=x+|x|$는 일대일대응이 아니다.

④ [반례] $f(x)=-x^2+2x$라 하면 $x_1=-1$, $x_2=3$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=-(-1)^2-2=-3$, $f(x_2)=-3^2+2\cdot 3=-3$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=-x^2+2x$는 일대일대응이 아니다.

답 ②, ⑤

0500 ㄱ, ㅁ. 양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 두 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

ㄴ, ㅂ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

ㄷ. 양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다. 그런데 치역이 $\{y|\, y>0\}$이므로 일대일대응이 아니다.

ㄹ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

이상에서 그 그래프가 일대일함수인 것은 ㄴ, ㄷ, ㅂ의 3개, 일대일대응인 것은 ㄴ, ㅂ의 2개이다.

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$a+b=5$ 답 5

유형 07 일대일대응이 되기 위한 조건

본책 81쪽

정의역의 원소 x가 범위로 주어진 경우 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면

① x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 증가하거나 감소해야 한다.

② 정의역의 양 끝 값의 함숫값이 공역의 양 끝 값이어야 한다.

0501 $a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이면

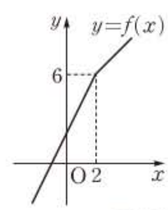
$f(-3)=1$, $f(3)=13$

$-3a+b=1$, $3a+b=13$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $b=7$

$\therefore a+b=9$ 답 ④

0502 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



직선 $y=2x+a$가 점 $(2, 6)$을 지나야 하므로

$6=2\cdot 2+a$, $\quad 4+a=6$

$\therefore a=2$ 답 ④

0503 $f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$이므로 $x\geq 3$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 함수 f가 일대일대응이 되려면 $f(3)=2$이어야 하므로

$9-6+a=2 \quad \therefore a=-1$ ··· ❶

즉 $f(x)=x^2-2x-1$이므로

$f(4)=4^2-2\cdot 4-1=7$ ··· ❷

답 7

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ $f(4)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0504 (i) $x\geq 3$일 때,

$f(x)=a(x-3)+2x-1=(a+2)x-3a-1$

(ii) $x<3$일 때,

$f(x)=-a(x-3)+2x-1=(2-a)x+3a-1$

(i), (ii)에서 함수 f가 일대일대응이려면 $x\geq 3$일 때와 $x<3$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 같아야 한다.

따라서 $(a+2)(2-a)>0$이므로 — $a+2>0,\ 2-a>0$ 또는 $a+2<0,\ 2-a<0$

$(a+2)(a-2)<0 \quad \therefore -2<a<2$ 답 $-2<a<2$

유형 08 항등함수와 상수함수 (본책 82쪽)

① 항등함수: 함수 $f: X\longrightarrow X$에서 $f(x)=x\ (x\in X)$
② 상수함수: 함수 $f: X\longrightarrow Y$에서 $f(x)=c\ (x\in X,\ c\in Y)$

0505 함수 f는 항등함수이므로 $f(2)=2,\ f(5)=5$

$f(2)+g(-1)=5$이므로

$2+g(-1)=5 \quad \therefore g(-1)=3$

함수 g는 상수함수이므로 $g(3)=g(-1)=3$

$\therefore f(5)+g(3)=5+3=8$ 답 8

0506 함수 f가 항등함수이려면 $f(x)=x$이어야 하므로

$x^2-12=x,\quad x^2-x-12=0$

$(x+3)(x-4)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=4$

따라서 집합 X는 집합 $\{-3, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^2-1=3$ 답 3

0507 함수 g는 항등함수이므로

$g(-1)=-1,\ g(1)=1$ ··· ❶

$f(-1)=g(1)=h(0)$에서 $f(-1)=h(0)=1$

$f(-1)+f(1)=f(0)$에서 $1+f(1)=f(0)$

함수 f는 일대일대응이므로

$f(0)=-1,\ f(1)=0$ 또는 $f(0)=0,\ f(1)=-1$

그런데 $f(0)=-1,\ f(1)=0$이면 $1+f(1)\neq f(0)$이므로

$f(0)=0,\ f(1)=-1$ ··· ❷

또 함수 h는 상수함수이므로

$h(-1)=h(0)=1$ ··· ❸

$\therefore f(1)g(-1)h(-1)=-1\cdot(-1)\cdot 1=1$ ··· ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ $g(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $h(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(1)g(-1)h(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0508 함수 f가 항등함수이므로 — $f(x)=x$

(i) $x<2$일 때, $x=1$

(ii) $2\leq x<6$일 때,

$3x-8=x,\quad 2x=8 \quad \therefore x=4$

(iii) $x\geq 6$일 때,

$x^2-8x+14=x,\quad x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0 \quad \therefore x=7\ (\because x\geq 6)$

이상에서 $X=\{1, 4, 7\}$이므로

$a+b+c=1+4+7=12$ 답 12

유형 09 함수의 개수 (본책 82쪽)

집합 X의 원소의 개수가 n, 집합 Y의 원소의 개수가 m일 때
① X에서 Y로의 함수의 개수 ➡ m^n
② X에서 Y로의 일대일함수의 개수
➡ $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$ (단, $m\geq n$)
③ X에서 X로의 일대일대응의 개수
➡ $n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$
④ X에서 Y로의 상수함수의 개수 ➡ m

0509 일대일대응을 $f: X\longrightarrow X$라 하면

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3 중 하나이므로 3개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 2개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 1개

따라서 일대일대응의 개수는

$3\cdot 2\cdot 1=6$

또 항등함수는 1개, 상수함수는 3개이므로

$p=6,\ q=1,\ r=3$

$\therefore p+q+r=10$ 답 10

0510 구하는 함수의 개수는 집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수에서 상수함수의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^3-2=6$ 답 6

0511 조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이고, 조건 (나)에서 $f(x)$의 값이 될 수 있는 것은 $-2, -1, 0, 1, 2$이다.

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-2, -1, 0, 1, 2$ 중 하나이므로 5개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 4개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 3개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외한 2개

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 개수는

$5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$ 답 ④

0512 (i) x가 홀수일 때,

$x+f(x)$가 홀수이려면 $f(x)$가 짝수이어야 하므로

$f(1)=2,\ f(3)=4$ 또는 $f(1)=4,\ f(3)=2$

(ii) x가 짝수일 때,

$x+f(x)$가 홀수이려면 $f(x)$가 홀수이어야 하므로

$f(2)=1,\ f(4)=3$ 또는 $f(2)=3,\ f(4)=1$

(i), (ii)에서 함수 f의 개수는 $2\cdot 2=4$ 답 ③

0513 $f(x)-f(-x)=0$에서 $\quad f(x)=f(-x)$

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $-3,\ 0,\ 3$ 중 하나이므로 $\quad$ 3개

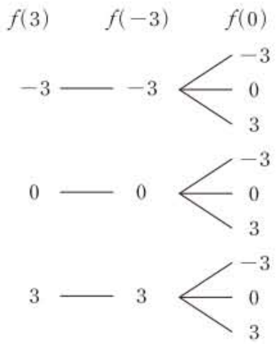
$f(-3)=f(3)$에서 $f(-3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(3)$의 값과 같으므로 $\quad$ 1개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $-3,\ 0,\ 3$ 중 하나이므로 $\quad$ 3개

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$3\cdot1\cdot3=9$ 답 9

참고 주어진 조건을 만족시키는 $f(3)$, $f(-3)$, $f(0)$의 값을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



유형 10 합성함수의 함숫값 구하기 본책 83쪽

두 함수 f, g에 대하여 $(f\circ g)(a)$의 값 구하기

➡ 합성함수 $(f\circ g)(x)$를 구하여 a를 대입할 수도 있지만 $(f\circ g)(a)=f(g(a))$이므로 $g(a)$의 값을 구하여 $f(x)$의 x에 대입하는 것이 더 편리하다.

즉 $g(a)=m$, $f(m)=n$이면

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(m)=n$

0514 $g(-1)=(-1)^2-4=-3$이므로

$(f\circ g)(-1)=f(g(-1))$

$=f(-3)=-3\cdot(-3)+1=10$

또 $f(2)=4$이므로

$(g\circ f)(2)=g(f(2))$

$=g(4)=4^2-4=12$

$\therefore\ (f\circ g)(-1)-(g\circ f)(2)=10-12=-2$ 답 ①

0515 $f(3)=1$이고

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=2$,

$(f\circ f\circ f)(3)=f((f\circ f)(3))=f(2)=4$

이므로 $\quad$ (주어진 식)$=1+2+4=7$ 답 ②

0516 $\underline{(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)}$ 합성함수에서는 결합법칙이 성립한다.

$=(h\circ g)(f(x))$

$=(h\circ g)(x+2)$

$=7(x+2)-6$

$=7x+8$

즉 $7a+8=-6$이므로 $\quad a=-2$ 답 -2

0517 $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(1)=2$

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(1)=2$

이때 $f(3)=g(2)=1$이고 두 함수 f, g는 각각 일대일대응이므로 $\quad f(2)=3,\ g(3)=3$

$\therefore\ f(2)+g(3)=3+3=6$ 답 ⑤

유형 11 $f\circ g=g\circ f$인 경우 본책 84쪽

합성함수 $f\circ g$와 $g\circ f$를 각각 구하여 동류항의 계수를 비교한다.

➡ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면

$a=a',\ b=b',\ c=c'$

0518 $f(x)=ax+1,\ g(x)=-x-2$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=a(-x-2)+1=-ax-2a+1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=-(ax+1)-2=-ax-3$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $\quad -ax-2a+1=-ax-3$

$-2a+1=-3 \quad \therefore\ a=2$ 답 ②

0519 주어진 그림에서

$f(1)=4,\ f(2)=1,\ f(3)=2,\ f(4)=3$

$f\circ g=g\circ f$에서 $\quad f(g(x))=g(f(x))$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $\quad f(g(1))=g(f(1))$

$f(3)=g(4) \quad \therefore\ g(4)=2$

㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면 $\quad f(g(4))=g(f(4))$

$f(2)=g(3) \quad \therefore\ g(3)=1$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 $\quad f(g(3))=g(f(3))$

$f(1)=g(2) \quad \therefore\ g(2)=4$

$\therefore\ g(2)-g(4)=4-2=2$ 답 ④

0520 $f(x)=2x+3,\ g(x)=ax+b$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(ax+b)+3$

$=2ax+2b+3$ $\cdots$ ❶

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=a(2x+3)+b$

$=2ax+3a+b$ $\cdots$ ❷

$f\circ g=g\circ f$이므로 $\quad 2ax+2b+3=2ax+3a+b$

$2b+3=3a+b \quad \therefore\ b=3a-3$

$g(x)=ax+b$에 $b=3a-3$을 대입하면

$g(x)=ax+3a-3=a(x+3)-3$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 점 $(-3,\ -3)$을 지난다. $\cdots$ ❸

답 $(-3,\ -3)$

채점 기준	비율
❶ $(f\circ g)(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $(g\circ f)(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

유형 12 $f\circ g$에 대한 조건이 주어진 경우 본책 84쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미지수를 포함한 식으로 주어지고 함수 $f\circ g$에 대한 조건이 주어진 경우

➡ $(f\circ g)(x)$를 미지수를 포함한 식으로 나타낸 후 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값 또는 범위를 구한다.

0521 $f(2)=3$이므로

$2+a=3 \qquad \therefore a=1$

또 $(f\circ g)(x)=4x-2$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=bx+c+1$

따라서 $bx+c+1=4x-2$이므로

$b=4,\ c+1=-2$

$\therefore b=4,\ c=-3$

$\therefore abc=1\cdot4\cdot(-3)=-12$ 답 -12

0522 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=(x^2-a)^2-a$

$=x^4-2ax^2+a^2-a$

$(f\circ f)(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로

$(f\circ f)(2)=16-8a+a^2-a=0$

$\therefore \underline{a^2-9a+16=0}$ (판별식) >0이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 9이다. 답 ⑤

0523 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=\{f(x)\}^2-4f(x)+a$

$=\{f(x)-2\}^2-4+a$

에서 $f(x)=2$, 즉 $x=\frac{3}{2}$일 때 함수 $(g\circ f)(x)$가 최솟값 $-4+a$를 가지므로 $(g\circ f)(x)\ge0$이 되려면

$-4+a\ge0$

이어야 한다.

$\therefore a\ge4$

따라서 구하는 a의 최솟값은 4이다. 답 ④

다른 풀이 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=(2x-1)^2-4(2x-1)+a$

$=4x^2-12x+5+a$

$(g\circ f)(x)\ge0$이 되려면 이차방정식 $4x^2-12x+5+a=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-6)^2-4(5+a)\le0$

$-4a+16\le0 \qquad \therefore a\ge4$

따라서 구하는 a의 최솟값은 4이다.

0524 $g(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x)))$

$=f(f(-2x+a))=f(-2(-2x+a)+a)$

$=f(4x-a)=-2(4x-a)+a$

$=-8x+3a$ ···➊

함수 $g(x)$는 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소하므로 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 최솟값 -17을 갖는다. 즉 $g(4)=-17$이므로

$-8\cdot4+3a=-17, \qquad 3a=15$

$\therefore a=5$ ···➋

따라서 $g(x)=-8x+15$이고 $x=b$에서 최댓값 7을 가지므로

$g(b)=7$에서 $\qquad -8b+15=7$

$8b=8 \qquad \therefore b=1$ ···➌

$\therefore ab=5$ ···➍

답 5

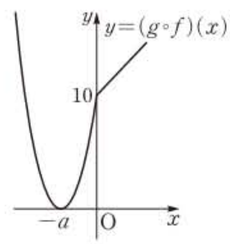
채점 기준	비율
➊ $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
➋ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
➍ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0525 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} x^2+2ax+10 & (x<0) \\ x+10 & (x\ge0)\end{cases}$

$a<0$이면 함수 $y=x^2+2ax+10=(x+a)^2+10-a^2$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 양수이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y|y\ge10\}$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a>0$

$a>0$이면 함수 $y=x^2+2ax+10$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 음수이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y|y\ge0\}$이려면 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 한다.



즉 $10-a^2=0$이므로

$a=\sqrt{10}$ ($\because a>0$)

답 $\sqrt{10}$

유형 13 $f\circ g=h$를 만족시키는 함수 f 또는 g 구하기 본책 85쪽

① 두 함수 $f(x)$, $h(x)$가 주어진 경우
➡ $f(g(x))=h(x)$임을 이용하여 $g(x)$를 구한다.

② 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 주어진 경우
➡ $f(g(x))=h(x)$이므로 $g(x)=t$로 치환하여 $f(t)$를 구한다.

0526 $(g\circ h)(x)=f(x)$이므로 $\qquad g(h(x))=f(x)$

$2h(x)-3=2x^2+1, \qquad 2h(x)=2x^2+4$

$\therefore h(x)=x^2+2$ 답 ③

0527 $(h\circ g\circ f)(x)=((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))$

이므로

$4x+3=-2f(x)+5, \qquad 2f(x)=-4x+2$

$\therefore f(x)=-2x+1$

$\therefore f(-2)=-2\cdot(-2)+1=5$ 답 5

다른 풀이 $(h\circ g\circ f)(-2)=(h\circ g)(f(-2))$에서

$4\cdot(-2)+3=-2f(-2)+5 \qquad \therefore f(-2)=5$

0528 (1) $(f\circ h)(x)=g(x)$이므로 $\qquad f(h(x))=g(x)$

$3h(x)-2=-x+1, \qquad 3h(x)=-x+3$

$\therefore h(x)=-\frac{1}{3}x+1$ ···➊

(2) $(k\circ f)(x)=g(x)$이므로

$k(f(x))=g(x), \qquad k(3x-2)=-x+1$

$3x-2=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}$이므로

$k(t)=-\left(\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}\right)+1=-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}$

$$\therefore k(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$ ···→ ❷

답 (1) $h(x)=-\frac{1}{3}x+1$ (2) $k(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $h(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $k(x)$를 구할 수 있다.	60 %

0529 $(g\circ f)(x)=-2x+1$에서 $g(f(x))=-2x+1$

$$g\left(\frac{2x+1}{3}\right)=-2x+1$$

$\frac{2x+1}{3}=t$로 놓으면 $2x+1=3t$ $\therefore x=\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}$

따라서 $g(t)=-2\left(\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\right)+1=-3t+2$이므로

$$g(3)=-3\cdot3+2=-7$$ 답 -7

다른 풀이 $g\left(\frac{2x+1}{3}\right)=-2x+1$ ······ ㉠

$\frac{2x+1}{3}=3$에서 $2x+1=9$ $\therefore x=4$

㉠에 $x=4$를 대입하면 $g(3)=-7$

유형 14 f^n 꼴의 합성함수

본책 85쪽

함수 f에 대하여 $f^n=f\circ f^{n-1}$일 때, $f^n(a)$의 값 구하기
➡ [방법 1] $f^2(x)$, $f^3(x)$, $f^4(x)$, …를 직접 구하여 $f^n(x)$를 추정한 다음 x 대신 a를 대입한다.
[방법 2] $f(a)$, $f^2(a)$, $f^3(a)$, …에서 규칙을 찾아 $f^n(a)$의 값을 추정한다.

0530 $f^1(2)=f(2)=1$이므로

$f^2(2)=f(f(2))=f(1)=4$
$f^3(2)=f(f^2(2))=f(4)=3$
$f^4(2)=f(f^3(2))=f(3)=2$
$f^5(2)=f(f^4(2))=f(2)=1$
⋮

즉 $f^n(2)$는 1, 4, 3, 2가 이 순서대로 반복된다.
이때 $50=4\cdot12+2$이므로

$f^{50}(2)=f^2(2)=4$ 답 4

0531 $f^1(1)=f(1)=3$이므로

$f^2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=2$
$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(2)=1$
$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(1)=3$
⋮

즉 $f^n(1)$은 3, 2, 1이 이 순서대로 반복된다.
이때 $2020=3\cdot673+1$이므로

$f^{2020}(1)=f^1(1)=3$

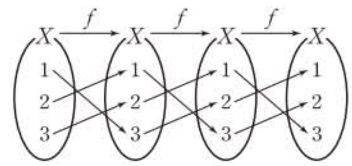
또 $f^1(2)=f(2)=1$이므로

$f^2(2)=(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(1)=3$
$f^3(2)=(f\circ f^2)(2)=f(f^2(2))=f(3)=2$
$f^4(2)=(f\circ f^3)(2)=f(f^3(2))=f(2)=1$
⋮

즉 $f^n(2)$는 1, 3, 2가 이 순서대로 반복된다.
이때 $2021=3\cdot673+2$이므로 $f^{2021}(2)=f^2(2)=3$

$\therefore f^{2020}(1)-f^{2021}(2)=0$ 답 ③

다른 풀이 f^1, f^2, f^3의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



즉 $f^3(x)=x$이므로

$f^{2020}(1)=f^{3\cdot673+1}(1)=f^1(1)=3$
$f^{2021}(2)=f^{3\cdot673+2}(2)=f^2(2)=3$
$\therefore f^{2020}(1)-f^{2021}(2)=0$

0532 $f(x)=-x+2$에서 $f_1(x)=f(x)=-x+2$

$f_2(x)=(f\circ f)(x)=-(-x+2)+2=x$ ···→ ❶

따라서 $f_3(x)=f(x)$, $f_4(x)=f_2(x)$, …이므로

$$f_n(x)=\begin{cases}-x+2 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$ ···→ ❷

답 $f_n(x)=\begin{cases}-x+2 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

채점 기준	비율
❶ $f_1(x)$, $f_2(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f_n(x)$를 구할 수 있다.	60 %

0533 $f^{n+1}=f^n\circ f=f\circ f^n$이고

$f^1(100)=f(100)=\frac{100}{2}=50$이므로

$$f^2(100)=(f\circ f)(100)=f(f(100))$$
$$=f(50)=\frac{50}{2}=25$$
$$f^3(100)=(f\circ f^2)(100)=f(f^2(100))$$
$$=f(25)=\frac{25+1}{2}=13$$
$$f^4(100)=(f\circ f^3)(100)=f(f^3(100))$$
$$=f(13)=\frac{13+1}{2}=7$$
$$f^5(100)=(f\circ f^4)(100)=f(f^4(100))$$
$$=f(7)=\frac{7+1}{2}=4$$
$$f^6(100)=(f\circ f^5)(100)=f(f^5(100))$$
$$=f(4)=\frac{4}{2}=2$$
$$f^7(100)=(f\circ f^6)(100)=f(f^6(100))$$
$$=f(2)=\frac{2}{2}=1$$

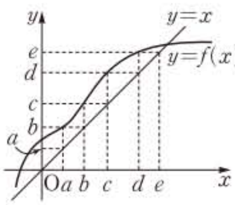
따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다. 답 ③

유형 15 그래프가 주어질 때 합성함수의 함숫값 구하기 본책 86쪽

함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 (a, b), (b, c)를 지나면
⇒ $(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=c$

0534 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ f)(b)&=f(f(f(b)))\\&=f(f(c))\\&=f(d)\\&=e\end{aligned}$$



답 ⑤

0535 $f(x)=\begin{cases}3x & (0\le x<1)\\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2} & (1\le x\le 3)\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}2 & (0\le x<2)\\ -2x+6 & (2\le x\le 3)\end{cases}$ 이므로

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=-\dfrac{1}{2}\cdot 2+\dfrac{7}{2}=\dfrac{5}{2}$

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g\left(\dfrac{5}{2}\right)=-2\cdot\dfrac{5}{2}+6=1$

$\therefore (f\circ g)(1)+(g\circ f)(2)=\dfrac{7}{2}$

답 ④

0536 $f(a)=b$라 하면 $(f\circ f)(a)=4$에서

$f(f(a))=f(b)=4$

주어진 그래프에서 $f(b)=4$를 만족시키는 b의 값은

$b=2$ 또는 $b=4$

이므로 $f(a)=2$ 또는 $f(a)=4$

(i) $f(a)=2$일 때, $a=3$

(ii) $f(a)=4$일 때, $a=2$ 또는 $a=4$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$2+3+4=9$

답 9

0537 $g(a)=t$라 하면

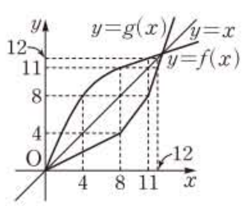
$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(t)$

이므로 $f(t)=8$에서 $t=4$

즉 $g(a)=4$이므로 $a=8$

또 $(g\circ f\circ g)(11)=b$에서

$$\begin{aligned}(g\circ f\circ g)(11)&=g(f(g(11)))\\&=g(f(8))=g(11)=8\end{aligned}$$



$\therefore b=8$

$\therefore a+b=16$

답 16

유형 16 합성함수의 그래프 그리기 본책 87쪽

두 함수 f, g가 구간에 따라 다르게 정의된 함수일 때, 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.

(i) 두 함수 f, g의 식의 경계가 되는 값을 기준으로 정의역을 나누어 $g\circ f$의 식을 구한다.

(ii) 각 구간을 나누어 그래프를 그린다.

0538 $f(x)=\begin{cases}-x^2 & (-1\le x<0)\\ x & (0\le x\le 1)\end{cases}$ 에서

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-\{f(x)\}^2 & (-1\le f(x)<0)\\ f(x) & (0\le f(x)\le 1)\end{cases}$

(i) $-1\le x<0$일 때, $-1\le f(x)<0$이므로

$(f\circ f)(x)=-(-x^2)^2=-x^4$

(ii) $0\le x\le 1$일 때, $0\le f(x)\le 1$이므로

$(f\circ f)(x)=x$

(i), (ii)에서 $(f\circ f)(x)=\begin{cases}-x^4 & (-1\le x<0)\\ x & (0\le x\le 1)\end{cases}$ 이므로 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은 ③이다.

답 ③

0539 $f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<1)\\ -2x+4 & (1\le x\le 2)\end{cases}$ 이므로

$f(f(x))=\begin{cases}2f(x) & (0\le f(x)<1)\\ -2f(x)+4 & (1\le f(x)\le 2)\end{cases}$

(i) $0\le x<\dfrac{1}{2}$일 때, $0\le f(x)<1$이므로

$f(f(x))=2\cdot 2x=4x$

(ii) $\dfrac{1}{2}\le x<1$일 때, $1\le f(x)<2$이므로

$f(f(x))=-2\cdot 2x+4=-4x+4$

(iii) $1\le x<\dfrac{3}{2}$일 때, $1<f(x)\le 2$이므로

$f(f(x))=-2(-2x+4)+4=4x-4$

(iv) $\dfrac{3}{2}\le x\le 2$일 때, $0\le f(x)\le 1$이므로

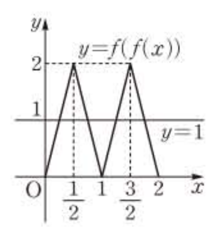
$f(f(x))=2(-2x+4)=-4x+8$

이상에서

$$f(f(x))=\begin{cases}4x & \left(0\le x<\dfrac{1}{2}\right)\\ -4x+4 & \left(\dfrac{1}{2}\le x<1\right)\\ 4x-4 & \left(1\le x<\dfrac{3}{2}\right)\\ -4x+8 & \left(\dfrac{3}{2}\le x\le 2\right)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

방정식 $f(f(x))=1$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(f(x))$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수와 같으므로 4이다.



답 4

다른 풀이 $f(f(x))=1$에서 $2f(x)=1$ 또는 $-2f(x)+4=1$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}$ 또는 $f(x)=\dfrac{3}{2}$

(i) $f(x)=\dfrac{1}{2}$일 때, $2x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $-2x+4=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{1}{4}$ 또는 $x=\dfrac{7}{4}$

(ii) $f(x)=\dfrac{3}{2}$일 때, $2x=\dfrac{3}{2}$ 또는 $-2x+4=\dfrac{3}{2}$

$\therefore x=\dfrac{3}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}$

(i), (ii)에서 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

0540 $f(x)=\begin{cases} -2x+2 & (0\le x<1) \\ x-1 & (1\le x\le 4) \end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<1) \\ -x+3 & (1\le x<2) \\ 1 & (2\le x<3) \\ 3x-8 & (3\le x\le 4) \end{cases}$ 이므로

$(f\circ g)(x)=\begin{cases} -2g(x)+2 & (0\le g(x)<1) \\ g(x)-1 & (1\le g(x)\le 4) \end{cases}$

(i) $0\le x<\dfrac{1}{2}$일 때, $0\le g(x)<1$이므로

$(f\circ g)(x)=-2\cdot 2x+2=-4x+2$

(ii) $\dfrac{1}{2}\le x<1$일 때, $1\le g(x)<2$이므로

$(f\circ g)(x)=2x-1$

(iii) $1\le x<2$일 때, $1<g(x)\le 2$이므로

$(f\circ g)(x)=-x+3-1=-x+2$

(iv) $2\le x<3$일 때, $g(x)=1$이므로

$(f\circ g)(x)=1-1=0$

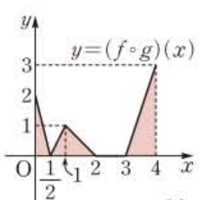
(v) $3\le x\le 4$일 때, $1\le g(x)\le 4$이므로

$(f\circ g)(x)=3x-8-1=3x-9$

이상에서

$(f\circ g)(x)=\begin{cases} -4x+2 & \left(0\le x<\dfrac{1}{2}\right) \\ 2x-1 & \left(\dfrac{1}{2}\le x<1\right) \\ -x+2 & (1\le x<2) \\ 0 & (2\le x<3) \\ 3x-9 & (3\le x\le 4) \end{cases}$

이므로 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot 1+\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 3$

$=\dfrac{11}{4}$ 답 $\dfrac{11}{4}$

유형 17 역함수와 함숫값 본책 87쪽

함수 f의 역함수가 f^{-1}일 때

➡ $f(x)=y \Longleftrightarrow f^{-1}(y)=x$

0541 $f^{-1}(4)=2$이므로 $f(2)=4$

$\therefore 2a+b=4$ …… ㉠

$f^{-1}(-5)=-1$이므로 $f(-1)=-5$

$\therefore -a+b=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

$\therefore a^2+b^2=3^2+(-2)^2=13$ 답 13

0542 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$, a, b, c는 상수)라 하면

$f(0)=0$에서 $c=0$ $\therefore f(x)=ax^2+bx$

$f^{-1}(-10)=-2$이므로 $f(-2)=-10$

$4a-2b=-10$ $\therefore 2a-b=-5$ …… ㉠

$f^{-1}(32)=4$이므로 $f(4)=32$

$16a+4b=32$ $\therefore 4a+b=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=6$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+6x$이므로

$f(2)=\dfrac{1}{2}\cdot 2^2+6\cdot 2=14$ 답 ③

0543 $\dfrac{3-x}{2}=t$로 놓으면 $3-x=2t$ $\therefore x=-2t+3$

따라서 $f(t)=4(-2t+3)+1=-8t+13$이므로

$f(x)=-8x+13$ ··· ❶

$f^{-1}(0)=k$라 하면 $f(k)=0$이므로

$-8k+13=0$ $\therefore k=\dfrac{13}{8}$

$\therefore f^{-1}(0)=\dfrac{13}{8}$ ··· ❷

답 $\dfrac{13}{8}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f^{-1}(0)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0544 $x<5$일 때, $f(x)=x+3<8$

$x\ge 5$일 때, $f(x)=2x-2\ge 8$

$f^{-1}(6)=m$이라 하면 $f(m)=6$이므로

6<8이므로 $f(x)=x+3$에 대입한다.

$m+3=6$ $\therefore m=3$

$f^{-1}(12)=n$이라 하면 $f(n)=12$이므로

12>8이므로 $f(x)=2x-2$에 대입한다.

$2n-2=12$ $\therefore n=7$

$\therefore f^{-1}(6)+f^{-1}(12)=3+7=10$ 답 ②

유형 18 역함수가 존재하기 위한 조건 본책 88쪽

함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재한다.

➡ f가 일대일대응이다.

➡ ① 정의역의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$

② 치역과 공역이 서로 같다.

0545 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.

$y=f(x)$의 그래프의 기울기가 양수이므로

x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$f(2)=a$, $f(6)=b$

이때 $f(2)=3\cdot 2-2=4$, $f(6)=3\cdot 6-2=16$이므로

$a=4$, $b=16$ $\therefore a+b=20$ 답 ③

0546 $f(x)=x^2-2x-40=(x-1)^2-41$이고, 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$a\ge 1$, $f(a)=a$

$f(a)=a$에서 $a^2-2a-40=a$

$a^2-3a-40=0$, $(a+5)(a-8)=0$

$\therefore a=8$ ($\because a\ge1$)

답 8

0547 $f(x)=kx+|x-1|+2$에서

(i) $x\ge1$일 때,

$f(x)=kx+x-1+2=(k+1)x+1$ ⋯ ❶

(ii) $x<1$일 때,

$f(x)=kx-(x-1)+2=(k-1)x+3$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 함수 f의 역함수가 존재하려면 f가 일대일대응이어야 하므로 $x\ge1$일 때와 $x<1$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

따라서 $(k+1)(k-1)>0$이므로 $k<-1$ 또는 $k>1$ ⋯ ❸

답 $k<-1$ 또는 $k>1$

채점 기준	비율
❶ $x\ge1$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $x<1$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

0548 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.

따라서 $3+a=3\cdot3-1$이므로 $a=5$

$x<3$일 때, $f(x)=x+5<8$

$x\ge3$일 때, $f(x)=3x-1\ge8$

$f^{-1}(11)=k$라 하면 $\underline{f(k)=11}$이므로

11>8이므로 $f(x)=3x-1$에 대입한다.

$3k-1=11$ $\therefore k=4$

$f^{-1}(4)=m$이라 하면 $\underline{f(m)=4}$이므로

4<8이므로 $f(x)=x+5$에 대입한다.

$m+5=4$ $\therefore m=-1$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(11)=f^{-1}(f^{-1}(11))$

$=f^{-1}(4)=-1$

답 ⑤

유형 19 역함수 구하기 본책 89쪽

일차함수 $y=ax+b$의 역함수 구하기

(i) x를 y에 대한 식으로 나타낸다. ➡ $x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$

(ii) x와 y를 서로 바꾼다. ➡ $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$

0549 $y=ax-6$이라 하면 $ax=y+6$

$\therefore x=\frac{1}{a}y+\frac{6}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x+\frac{6}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x+\frac{6}{a}$

따라서 $\frac{1}{a}x+\frac{6}{a}=\frac{1}{2}x+b$이므로

$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$, $\frac{6}{a}=b$ $\therefore a=2$, $b=3$

$\therefore ab=6$

답 ④

0550 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=-(2x+8)-3=-2x-11$ ⋯ ❶

$y=-2x-11$이라 하면 $2x=-y-11$

$\therefore x=-\frac{1}{2}y-\frac{11}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}$

$\therefore h^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}$ ⋯ ❷

답 $h^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}$

채점 기준	비율
❶ $h(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $h^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	50 %

0551 $y=ax-1$이라 하면 $ax=y+1$

$\therefore x=\frac{1}{a}y+\frac{1}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$

$f=f^{-1}$에서 $ax-1=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$이므로

$a=\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a}=-1$ $\therefore a=-1$

답 ②

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로 $\underline{(f\circ f)(x)=x}$

$(f\circ f)(x)=(f\circ f^{-1})(x)=x$

$f(x)=ax-1$에서

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax-1)-1=a^2x-a-1$

따라서 $a^2x-a-1=x$이므로 $a^2=1$, $-a-1=0$

$\therefore a=-1$

0552 $2x-1=t$로 놓으면 $2x=t+1$

$\therefore x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

따라서 $f(t)=4\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+3=2t+5$이므로

$f(x)=2x+5$

$y=2x+5$라 하면 $2x=y-5$ $\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편은 5, y절편은 $-\frac{5}{2}$이므로 구하는 합은

$5+\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

다른 풀이 $f(x)=2x+5$에서 $y=f(x)$의 그래프의 x절편은 $-\frac{5}{2}$, y절편은 5이므로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편은 5, y절편은 $-\frac{5}{2}$이다.

따라서 구하는 합은 $5+\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$

유형 20 합성함수와 역함수 본책 89쪽

두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때

① $(f^{-1}\circ g)(a)$의 값 구하기

(i) $g(a)$의 값을 구한다.

(ii) $f^{-1}(g(a))=k$로 놓으면 $f(k)=g(a)$이므로 이를 만족시키는 k의 값을 구한다.

② $(f\circ g^{-1})(a)$의 값 구하기

(i) $g^{-1}(a)=k$로 놓으면 $g(k)=a$이므로 이를 만족시키는 k의 값을 구한다.

(ii) $f(x)$에 x 대신 k의 값을 대입한다.

0553 $(f^{-1}\circ g)(a)=f^{-1}(g(a))=1$에서

$f(1)=g(a)$

$3\cdot 1-2=a-1 \qquad \therefore a=2$

답 ⑤

0554 $(f\circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))$

이때 $g(2)=1$이므로 $\quad g^{-1}(1)=2$

$\therefore (f\circ g^{-1})(1)=f(2)=4$

답 ⑤

0555 $x\geq 0$일 때, $\quad f(x)=x^2-2\geq -2$

$x<0$일 때, $\quad f(x)=2x-2<-2$

$g(2)=2+5=7$이므로

$(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))=f^{-1}(7)$

$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로

$k^2-2=7, \qquad k^2=9$ └ $7>-2$이므로 $f(x)=x^2-2$에 대입한다.

$\therefore k=-3$ 또는 $k=3$

그런데 $k\geq 0$이므로 $\quad k=3$

답 3

0556 (1) $g^{-1}(3)=2$이므로 $\quad g(2)=3$

즉 $\frac{1}{3}\cdot 2+b=3$이므로 $\quad b=\frac{7}{3}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=x+c$이므로

$a\left(\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}\right)-3=x+c$, 즉 $\frac{a}{3}x+\frac{7}{3}a-3=x+c$

따라서 $\frac{a}{3}=1$, $\frac{7}{3}a-3=c$이므로

$a=3$, $c=4$

$\therefore a+b+c=\frac{28}{3}$ ⋯❶

(2) $g^{-1}(f(-1))=k$라 하면 $\quad g(k)=f(-1)$

이때 $f(x)=3x-3$에서 $f(-1)=3\cdot(-1)-3=-6$이므로

$g(k)=-6$

즉 $g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$에서 $\quad \frac{1}{3}k+\frac{7}{3}=-6$

$\therefore k=-25$

$\therefore g^{-1}(f(-1))=-25$ ⋯❷

답 (1) $\frac{28}{3}$ (2) -25

채점 기준	비율
❶ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $g^{-1}(f(-1))$의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 21 역함수의 성질 본책 90쪽

두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때

① $(f^{-1})^{-1}=f$

② $(f^{-1}\circ f)(x)=x$, $(f\circ f^{-1})(y)=y$

③ $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}\neq g^{-1}\circ f^{-1}$

0557 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(8)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(8)$

$=(g^{-1}\circ f)(8)$

$=g^{-1}(f(8))$

$=g^{-1}(-23)$

$g^{-1}(-23)=k$라 하면 $\quad g(k)=-23$

$4k+1=-23 \qquad \therefore k=-6$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(8)=-6$

답 -6

0558 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$이므로

$(g\circ f)^{-1}(2)+(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=(f^{-1}\circ g^{-1})(2)+(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=2(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=2f^{-1}(g^{-1}(2))$

$g^{-1}(2)=a$라 하면 $\quad g(a)=2$

$a-3=2 \qquad \therefore a=5$

$f^{-1}(5)=b$라 하면 $\quad f(b)=5$

$b^2+1=5, \qquad b^2=4$

$\therefore b=2\ (\because b\geq 0)$

$\therefore$ (주어진 식)$=2f^{-1}(g^{-1}(2))$

$=2f^{-1}(5)$

$=2\cdot 2=4$

답 ①

0559 $f(1)=2$, $g(3)=2$이고, 두 함수 f, g의 역함수가 모두 존재하므로

$f^{-1}(2)=1$, $g^{-1}(2)=3$

$(g\circ f^{-1})(2)=1$이므로 $\quad g(f^{-1}(2))=1$

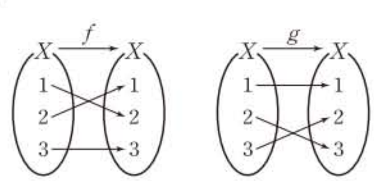
$\therefore g(1)=1$

$(g\circ f^{-1})^{-1}(2)=3$에서 $(f\circ g^{-1})(2)=3$이므로

$f(g^{-1}(2))=3$

$\therefore f(3)=3$

두 함수 f, g의 역함수가 모두 존재하므로 두 함수 f, g는 일대일대응이다. 즉 두 함수 f, g의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore f(2)+g^{-1}(3)=1+2=3$

답 3

0560 $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=2(-3x+4)=-6x+8$

$y=-6x+8$이라 하면 $\quad x=-\frac{1}{6}y+\frac{4}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(x)=-\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$

$\therefore (g^{-1}\circ f^{-1}\circ h)(x)=(f\circ g)^{-1}(h(x))$

$=-\frac{1}{6}h(x)+\frac{4}{3}$

즉 $-\frac{1}{6}h(x)+\frac{4}{3}=f(x)$이므로

$-\frac{1}{6}h(1)+\frac{4}{3}=f(1), \quad -\frac{1}{6}h(1)+\frac{4}{3}=2$

$\therefore h(1)=-4$ 답 ②

다른 풀이 $((f\circ g)^{-1}\circ h)(x)=f(x)$에서

$((f\circ g)\circ(f\circ g)^{-1}\circ h)(x)=(f\circ g\circ f)(x)$

$\therefore h(x)=(f\circ g\circ f)(x)$

$\therefore h(1)=f(g(f(1)))$

$=f(g(2))$

$=f(-2)=-4$

유형 22 그래프가 주어질 때 역함수의 함숫값 구하기 본책 90쪽

함수 f와 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지난다.
➡ $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 (b, a)를 지난다.
➡ $f^{-1}(b)=a$

0561 $f^{-1}(c)=k$라 하면

$f(k)=c \quad \therefore k=d$

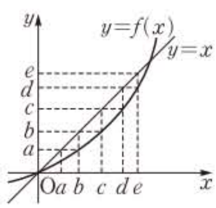
$f^{-1}(d)=l$이라 하면

$f(l)=d \quad \therefore l=e$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$=f^{-1}(d)$

$=e$



답 ⑤

0562 $f^{-1}(3)=a$, $f^{-1}(5)=b$라 하면

$f(a)=3$, $f(b)=5$

함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$a=3$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=3$

$\therefore f^{-1}(3)+f^{-1}(5)=a+b=7$ 답 7

0563 $f^{-1}(c)=q$이므로 $\quad f(q)=c$

$\therefore (f\circ f)(q)=f(f(q))=f(c)=s$

또 $f(a)=r$이므로 $\quad f^{-1}(r)=a$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(r)=(f^{-1}\circ f^{-1})(r)$

$=f^{-1}(f^{-1}(r))$

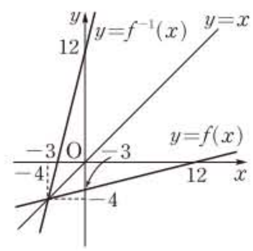
$=f^{-1}(a)=0$

$\therefore (f\circ f)(q)+(f\circ f)^{-1}(r)=s$ 답 s

유형 23 역함수의 그래프의 성질 본책 91쪽

함수 f와 역함수 f^{-1}에 대하여
① $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
② $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이다.

0564 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로 $\frac{1}{4}x-3=x$에서



$-\frac{3}{4}x=3 \quad \therefore x=-4$

따라서 교점의 좌표는 $\underline{(-4, -4)}$이므로
교점은 직선 $y=x$ 위의 점이다.

$a=-4$, $b=-4$

$\therefore a+b=-8$ 답 ③

0565 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같으므로 $x^2-4x+6=x$에서

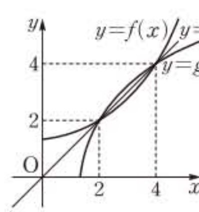
$x^2-5x+6=0, \quad (x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 모든 근의 합은 $\quad 2+3=5$ 답 ②

참고 $X=\{x|x\geq 2\}$에서 정의되므로 2, 3 모두 근이 된다.

0566 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로



$\frac{1}{6}(x^2+8)=x$에서 $\quad x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=4$ ···➊

따라서 두 교점의 좌표는 $(2, 2)$, $(4, 4)$이므로 구하는 거리는

$\sqrt{(4-2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$ ···➋

답 $2\sqrt{2}$

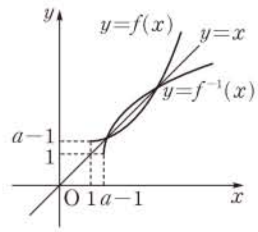
채점 기준	비율
➊ 두 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	70 %
➋ 두 교점 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

SSEN 특강 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

① 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는
$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
② 원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는
$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

0567 $f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1\ (x\geq 1)$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



따라서 이차방정식 $x^2-2x+a=x$, 즉 $x^2-3x+a=0$이 1보다 크거나 같은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4a>0$

$\therefore a<\frac{9}{4}$

(ii) $\underline{1-3+a\geq 0}$이므로 $\quad a\geq 2$

└ $g(x)=x^2-3x+a$라 하면 $g(1)\geq 0$이어야 한다.

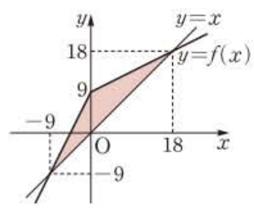
(iii) $\underline{-\frac{-3}{2}}>1$

└ $y=x^2-3x+a$의 그래프의 축의 방정식

이상에서 $\quad 2\leq a<\frac{9}{4}$

답 $2\leq a<\frac{9}{4}$

0568 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 다음과 같다.

(i) $x\geq 0$일 때,

$\frac{1}{2}x+9=x$에서 $\quad x=18$

(ii) $x<0$일 때,

$2x+9=x$에서 $\quad x=-9$

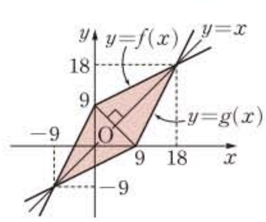
이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

따라서 구하는 넓이는

$$2\left(\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 18\right)=243$$

답 243

다른 풀이 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형은 마름모이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(9-0)^2+(0-9)^2}\cdot\sqrt{(18+9)^2+(18+9)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 9\sqrt{2}\cdot 27\sqrt{2}=243$$

참고 두 대각선의 길이가 a, b인 마름모의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다.

유형 24~25 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프 본책 91, 92쪽

① $y=|f(x)|$의 그래프
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.

② $y=f(|x|)$의 그래프
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.

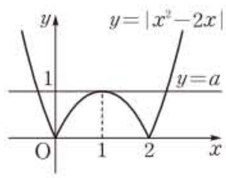
③ $|y|=f(x)$의 그래프
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분은 $y\geq 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.

④ $|y|=f(|x|)$의 그래프
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한다.

0569 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그 개형은 ④와 같다.

답 ④

0570 $y=|x^2-2x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면



$a=1$

답 1

0571 $y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ㄴ과 같다.

또 $|y|=f(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분만 남기고, $y<0$인 부분은 $y\geq 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ㄱ과 같다.

따라서 구하는 그래프의 개형은 차례대로 ㄴ, ㄱ이다.

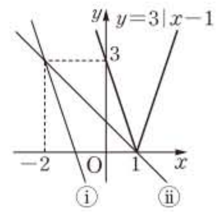
답 ㄴ, ㄱ

0572 $y=3|x-1|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 1이므로

(i) $x<1$일 때, $\quad y=-3(x-1)=-3x+3$

(ii) $x\geq 1$일 때, $\quad y=3(x-1)=3x-3$

(i), (ii)에서 $y=3|x-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



한편 직선

$y=m(x+2)+3 \quad\cdots\cdots$ ㉠

은 m의 값에 관계없이 점 $(-2, 3)$을 지난다.

ⓘ 직선 ㉠이 직선 $y=-3x+3$과 평행할 때,

$m=-3$

ⓘⓘ 직선 ㉠이 점 $(1, 0)$을 지날 때,

$0=3m+3 \quad \therefore m=-1$

ⓘ, ⓘⓘ에서 두 그래프가 만나려면

$m<-3$ 또는 $m\geq -1$

따라서 m의 값이 아닌 것은 ②이다.

답 ②

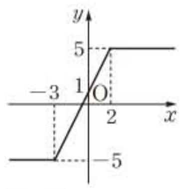
0573 $y=|x+3|-|x-2|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 -3, 2이므로

(i) $x<-3$일 때, $y=-(x+3)+x-2=-5$

(ii) $-3\le x<2$일 때, $y=x+3+x-2=2x+1$

(iii) $x\ge 2$일 때, $y=x+3-(x-2)=5$

이상에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$M=5$, $m=-5$

$\therefore Mm=-25$ 답 -25

참고 $y=|x-p|+|x-q|$의 그래프 (단, $p<q$)

⇒ $x<p$, $p\le x<q$, $x\ge q$일 때로 나누어 그래프를 그린다.

0574 (i) $x\ge 0$, $y\ge 0$일 때,

$2x+y=8$, 즉 $y=-2x+8$

(ii) $x\ge 0$, $y<0$일 때,

$2x-y=8$, 즉 $y=2x-8$

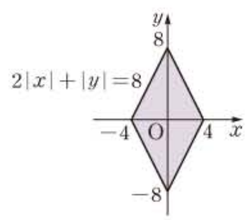
(iii) $x<0$, $y\ge 0$일 때,

$-2x+y=8$, 즉 $y=2x+8$

(iv) $x<0$, $y<0$일 때,

$-2x-y=8$, 즉 $y=-2x-8$

이상에서 $2|x|+|y|=8$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그래프가 나타내는 도형은 마름모이다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 16=64$ 답 ④

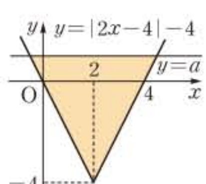
참고 $2|x|+|y|=8$의 그래프는 $2x+y=8$, 즉 $y=-2x+8$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$)의 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동하여 그릴 수도 있다.

0575 $y=|2x-4|-4$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 2이므로

(i) $x<2$일 때, $y=-(2x-4)-4=-2x$

(ii) $x\ge 2$일 때, $y=2x-4-4=2x-8$

(i), (ii)에서 $y=|2x-4|-4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프와 직선 $y=a$ $(a>0)$의 교점의 x좌표는 $|2x-4|-4=a$에서

$|2x-4|=a+4$

$2x-4=a+4$ 또는 $2x-4=-a-4$

$\therefore x=\frac{1}{2}a+4$ 또는 $x=-\frac{1}{2}a$

$y=|2x-4|-4$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$이므로 $a>0$이다.

이때 색칠한 부분의 넓이가 18이므로

$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}a+4-\left(-\frac{1}{2}a\right)\right\}\{a-(-4)\}=18$

$(a+4)^2=36$, $a+4=\pm 6$ — $a>0$이므로 $\frac{1}{2}a+4>-\frac{1}{2}a$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 2

0576 $y=|x+1|+|x-5|+|x-7|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 -1, 5, 7이므로

(i) $x<-1$일 때,

$y=-(x+1)-(x-5)-(x-7)=-3x+11$

(ii) $-1\le x<5$일 때,

$y=x+1-(x-5)-(x-7)=-x+13$

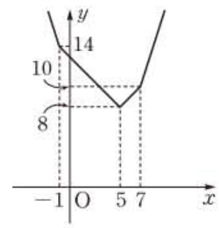
(iii) $5\le x<7$일 때,

$y=x+1+x-5-(x-7)=x+3$

(iv) $x\ge 7$일 때,

$y=x+1+x-5+x-7=3x-11$

이상에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=5$일 때 최솟값 8을 갖는다.



따라서 $a=5$, $b=8$이므로

$a+b=13$

답 ②

0577 전략 공역의 원소 중 정의역의 원소에 대응되지 않은 원소를 m이라 하고 조건 (나)를 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 7이므로 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족시키는 집합 X의 원소 n의 개수는 1이다.

공역의 원소 중 치역의 원소가 아닌 원소를 m이라 하면

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)=\underbrace{36}_{\text{1부터 8까지의 합}}+n-m$

즉 조건 (나)에 의하여 $36+n-m=42$이므로

$n-m=6$

(i) $n=8$, $m=2$일 때, — 치역: {1, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

치역의 원소의 최댓값은 8, 최솟값은 1이므로 최댓값과 최솟값의 차는 7이다.

(ii) $n=7$, $m=1$일 때, — 치역: {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

치역의 원소의 최댓값은 8, 최솟값은 2이므로 최댓값과 최솟값의 차는 6이다.

(i), (ii)에서 $n=7$ 답 7

0578 전략 $f(n)f(n+2)$의 값이 짝수임을 이용하여 $f(x)$의 함숫값을 생각해 본다.

풀이 $3\le n\le 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n+2)$의 값이 짝수이므로

$f(3)f(5)$, $f(4)f(6)$, $f(5)f(7)$

의 값이 모두 짝수이다. 이때 $f(4)f(6)$의 값이 짝수이므로 $f(4)$ 또는 $f(6)$의 값은 적어도 하나가 짝수이어야 한다.

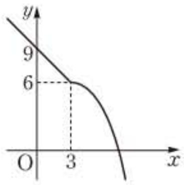
그런데 집합 X의 원소 중 짝수인 것은 4, 6의 2개이므로 $f(3)f(5)$와 $f(5)f(7)$의 값이 모두 짝수이려면 $f(5)$의 값이 짝수이어야 한다.

따라서 $f(3)$, $f(7)$의 값은 모두 홀수이므로 $f(3)+f(7)$의 최댓값은 $5+7=12$ 답 12

0579 전략 함수 f가 일대일대응이기 위한 그래프의 개형을 그려 보고, a의 부호를 구한다.

풀이 $y=-ax^2+6ax+b$

$=-a(x-3)^2+9a+b$



이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 $-a<0$이므로 $\quad a>0$

또 $y=-ax^2+6ax+b$의 그래프가 점 $(3, 6)$을 지나야 하므로

$9a+b=6$

한편 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$9a+b\geq 2\sqrt{9ab}$

$6\geq 6\sqrt{ab}, \quad 1\geq\sqrt{ab}$

$\therefore ab\leq 1\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{3},\ b=3\text{일 때 성립}\right)$

따라서 ab의 최댓값은 1이다.

답 1

0580 **전략** 함수 f가 일대일함수이려면 $n(A)\leq n(B)$이어야 함을 이용하여 $n(A)$, $n(B)$를 구한다.

풀이 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)$

$=4+1=5$

$n(A)>n(B)$이면 집합 A의 서로 다른 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$인 x_1, x_2가 존재한다.

이때 함수 f가 일대일함수이므로 $\quad n(A)\leq n(B)$

$\therefore n(A)=1,\ n(B)=4$ 또는 $n(A)=2,\ n(B)=3$ ⋯ ❶

(i) $n(A)=1$, $n(B)=4$일 때,

$A\cap B=\{1\}$이면 $A=\{1\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$이므로 함수 f의 개수는 4이다.

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개이다.

$A\cap B$가 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$인 경우도 각각 4개씩 있으므로 함수 f의 개수는

$4\cdot 4=16$ ⋯ ❷

(ii) $n(A)=2$, $n(B)=3$일 때,

$A\cap B=\{1\}$이면

$A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 3, 4\}$

또는 $A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 2, 4\}$

또는 $A=\{1, 4\}$, $B=\{1, 2, 3\}$

의 3가지이고, 위의 각각의 경우에 대하여 함수 f는 $3\cdot 2=6$개씩 있다.

$A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 3, 4\}$일 때, $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 3, 4 중 하나이므로 3개이고, $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 2개이다.

$\therefore 3\cdot 6=18$

$A\cap B$가 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$인 경우도 각각 18개씩 있으므로 함수 f의 개수는

$4\cdot 18=72$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$16+72=88$ ⋯ ❹

답 88

채점 기준	비율
❶ 함수 f가 일대일함수가 되는 $n(A)$, $n(B)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $n(A)=1$, $n(B)=4$일 때, 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ $n(A)=2$, $n(B)=3$일 때, 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❹ 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0581 **전략** 함수 f의 치역의 원소가 2개일 때와 1개일 때로 나누어 순서쌍 (f, g)의 개수를 구한다.

풀이 (i) 함수 f의 치역의 원소가 2개일 때,

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3 중 하나이므로 2개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 1개

따라서 함수 f의 개수는

$2\cdot 1=2$

$g(2)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1 중 하나이므로 2개

$g(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $g(2)$의 값의 1개

따라서 함수 f에 대하여 함수 g의 개수는

$2\cdot 1=2$

따라서 순서쌍 (f, g)의 개수는

$2\cdot 2=4$ ⋯ ❶

(ii) 함수 f의 치역의 원소가 1개일 때,

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3 중 하나이므로 2개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값의 1개

따라서 함수 f의 개수는

$2\cdot 1=2$

$g(2)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1 중 하나이므로 2개

$g(3)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1 중 하나이므로 2개

따라서 함수 f에 대하여 함수 g의 개수는

$2\cdot 2=4$

따라서 순서쌍 (f, g)의 개수는

$2\cdot 4=8$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (f, g)의 개수는

$4+8=12$ ⋯ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 함수 f의 치역의 원소가 2개일 때, 순서쌍 (f, g)의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 함수 f의 치역의 원소가 1개일 때, 순서쌍 (f, g)의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 순서쌍 (f, g)의 개수를 구할 수 있다.	20 %

참고 (ii)에서 $f(1)=2$, $f(2)=2$이고 $g(2)=0$이라 하면 $g(3)=1$이어도 $(g\circ f)(x)=0$이므로 $g\circ f$는 상수함수이다.

0582 **전략** $x>2$, $-2\leq x\leq 2$, $x<-2$일 때로 나누어 $(g\circ f)(x)$, $(f\circ g)(x)$를 구한다.

풀이 ㄱ. $g(2)=2^2-2=2$이므로

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2)=-2$

ㄴ. $(g\circ f)(-x)=g(f(-x))$에서

(i) $x>2$일 때, $-x<-2$이므로

$f(-x)=2$

$\therefore g(f(-x))=g(2)=2$

(ii) $-2\leq x\leq 2$일 때, $-2\leq -x\leq 2$이므로

$f(-x)=-(-x)=x$

$\therefore g(f(-x))=g(x)=x^2-2$

(iii) $x<-2$일 때, $-x>2$이므로

$f(-x)=-2$

$\therefore g(f(-x))=g(-2)=2$

또 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

ⅰ $x>2$일 때, $g(f(x))=g(-2)=2$

ⅱ $-2\le x\le 2$일 때, $g(f(x))=g(-x)=x^2-2$

ⅲ $x<-2$일 때, $g(f(x))=g(2)=2$

$\therefore (g\circ f)(-x)=(g\circ f)(x)$

ㄷ. $(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

(i) $x>2$일 때, $x^2-2>2$이므로

$f(x^2-2)=-2$

$\therefore f(g(x))=f(x^2-2)=-2$

(ii) $-2\le x\le 2$일 때, $-2\le x^2-2\le 2$이므로

$f(x^2-2)=-(x^2-2)=-x^2+2$

$\therefore f(g(x))=f(x^2-2)=-x^2+2$

(iii) $x<-2$일 때, $x^2-2>2$이므로

$f(x^2-2)=-2$

$\therefore f(g(x))=f(x^2-2)=-2$

$\therefore (f\circ g)(x)=-(g\circ f)(x)$ ($\because$ ㄴ)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 ㄴ. $f(-x)=-f(x)$이므로

$$\begin{aligned}(g\circ f)(-x)&=g(f(-x))\\&=\{f(-x)\}^2-2\\&=\{-f(x)\}^2-2\\&=\{f(x)\}^2-2\end{aligned}$$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\{f(x)\}^2-2$

$\therefore (g\circ f)(-x)=(g\circ f)(x)$

0583 전략 항등함수와 일대일함수의 정의를 이용한다.

풀이 ㄱ. f, g가 모두 항등함수이면 $f(x)=x$, $g(x)=x$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=x$

따라서 $g\circ f$는 항등함수이다.

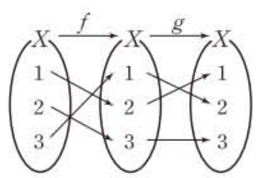
ㄴ. $g\circ f$가 항등함수이면 $g\circ f$는 일대일함수이다. 귀류법을 이용한다.

f가 일대일함수가 아니라고 가정하면 집합 X의 서로 다른 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$인 x_1, x_2가 존재한다.

이때 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$, 즉 $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$이므로 $g\circ f$가 일대일함수라는 사실에 모순이다.

따라서 f는 일대일함수이다.

ㄷ. [반례] 두 함수 f, g가 오른쪽 그림과 같으면 $g\circ f$는 일대일함수이지만 f, g는 모두 항등함수가 아니다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0584 전략 $a>4$일 때와 $a\le 4$일 때로 나누어 $(f\circ g)(4)$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=\underbrace{g(1+a)}_{}=(1+a)^2$

└ $1+a>a$이므로 $g(x)=x^2$에 대입한다.

$(f\circ g)(4)=f(g(4))$에서

(i) $a>4$일 때,

$g(4)=2\cdot 4-6=2$이므로

$(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(2)=2+a$

$$\begin{aligned}\therefore (g\circ f)(1)+(f\circ g)(4)&=(1+a)^2+2+a\\&=a^2+3a+3\end{aligned}$$

즉 $a^2+3a+3=57$에서

$a^2+3a-54=0$, $(a+9)(a-6)=0$

$\therefore a=6$ ($\because a>4$)

(ii) $a\le 4$일 때,

$g(4)=4^2=16$이므로

$(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(16)=16+a$

$$\begin{aligned}\therefore (g\circ f)(1)+(f\circ g)(4)&=(1+a)^2+16+a\\&=a^2+3a+17\end{aligned}$$

즉 $a^2+3a+17=57$에서

$a^2+3a-40=0$, $(a+8)(a-5)=0$

$\therefore a=-8$ ($\because a\le 4$)

(i), (ii)에서 a의 값은 -8, 6이므로

$S=-8+6=-2$

$\therefore 10S^2=10\cdot(-2)^2=40$ 답 40

0585 전략 $f^1\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f^2\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f^3\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\cdots$과 $f^1\left(\frac{1}{2}\right)$, $f^2\left(\frac{1}{2}\right)$, $f^3\left(\frac{1}{2}\right)$, $\cdots$을 차례대로 구하여 규칙성을 찾는다.

풀이 $f^{n+1}(x)=f^n(f(x))=f(f^n(x))$이고

$f^1\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$이므로

$f^2\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f(0)=1$

$f^3\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(f^2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)=-1$

$f^4\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(f^3\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f(-1)=1$

$f^5\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(f^4\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)=-1$

$\vdots$

$\therefore f^{2021}\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

같은 방법으로 하면 $f^{2022}\left(\frac{1}{2}\right)=1$이므로

$f^{2021}\left(-\frac{1}{2}\right)+f^{2022}\left(\frac{1}{2}\right)=-1+1=0$ 답 0

참고 $f^n\left(\frac{1}{2}\right)=f^n\left(-\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}0 & (n=1)\\ 1 & (n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots)\\ -1 & (n=3,\ 5,\ 7,\ \cdots)\end{cases}$

0586 전략 $0\le x<1$, $1\le x\le 3$일 때로 나누어 함수 $f(x)$를 구하고 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프를 그린다.

풀이 $f(x)=\begin{cases}-3x+3 & (0\le x<1)\\ x-1 & (1\le x\le 3)\end{cases}$이므로

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-3f(x)+3 & (0\le f(x)<1)\\ f(x)-1 & (1\le f(x)\le 3)\end{cases}$

(i) $0\le x<\frac{2}{3}$일 때, $1<f(x)\le 3$이므로

$f(f(x))=(-3x+3)-1=-3x+2$

(ii) $\frac{2}{3}\le x<1$일 때, $0<f(x)\le 1$이므로

$$f(f(x))=-3(-3x+3)+3=9x-6$$

(iii) $1\le x<2$일 때, $0\le f(x)<1$이므로

$$f(f(x))=-3(x-1)+3=-3x+6$$

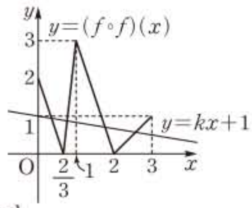
(iv) $2\le x\le 3$일 때, $1\le f(x)\le 2$이므로

$$f(f(x))=(x-1)-1=x-2$$

이상에서

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-3x+2 & \left(0\le x<\frac{2}{3}\right)\\ 9x-6 & \left(\frac{2}{3}\le x<1\right)\\ -3x+6 & (1\le x<2)\\ x-2 & (2\le x\le 3)\end{cases} \quad \cdots ❶$$

이므로 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 방정식 $(f\circ f)(x)=kx+1$의 서로 다른 실근의 개수가 4이려면 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+1$의 교점의 개수가 4이어야 한다.
└ k의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$을 지난다.

(i) 직선 $y=kx+1$이 점 $(2, 0)$을 지날 때,

$$0=2k+1 \qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 $y=kx+1$이 점 $(3, 1)$을 지날 때,

$$1=3k+1 \qquad \therefore k=0$$

(i), (ii)에서 방정식 $(f\circ f)(x)=kx+1$의 서로 다른 실근의 개수가 4인 k의 값의 범위는

$$-\frac{1}{2}<k<0\ (\because k\ne 0) \quad \cdots ❷$$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$이므로 $\quad b-a=\frac{1}{2} \quad \cdots ❸$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $(f\circ f)(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0587 전략 f의 역함수 f^{-1}에 대하여 $f(x)=y$이면 $f^{-1}(y)=x$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $a<b$이므로 조건 (나)에 의하여 $\quad f(a)>f(b)$

$$\therefore f(f(a))<f(f(b)),\ 즉\ (f\circ f)(a)<(f\circ f)(b)$$

ㄴ. $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$라 하면 $x_1<x_2$일 때,

$$y_1>y_2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $f^{-1}(y_1)=x_1$, $f^{-1}(y_2)=x_2$이므로

$$f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $y_2<y_1$이면 $f^{-1}(y_2)>f^{-1}(y_1)$임을 알 수 있다.
따라서 $a<b$이므로 $f^{-1}(a)>f^{-1}(b)$이다.

ㄷ. ㄴ에서 $f^{-1}(a)>f^{-1}(b)$이므로

$$f^{-1}(f^{-1}(a))<f^{-1}(f^{-1}(b)),$$
$$즉\ (f^{-1}\circ f^{-1})(a)<(f^{-1}\circ f^{-1})(b)$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0588 전략 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응임을 이용하여 a의 값을 구한다.

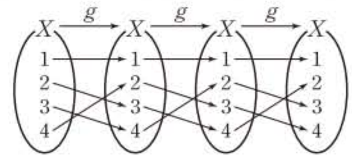
풀이 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일대응이고

$$f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=3+a,\ f(4)=4+a$$

이므로 $\quad f(3)=2,\ f(4)=3$
└ $f(3)=3$, $f(4)=2$를 만족시키는 a의 값은 없다.

$$\therefore a=-1$$

따라서 $g(1)=1$, $g(2)=3$, $g(3)=4$, $g(4)=2$이므로 g^1, g^2, g^3의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



즉 $g^3(x)=x$이므로

$$g^{10}(2)=g^{3\cdot3+1}(2)=g^1(2)=3,$$
$$g^{11}(2)=g^{3\cdot3+2}(2)=g^2(2)=4$$
$$\therefore a+g^{10}(2)+g^{11}(2)=6$$

답 ③

0589 전략 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 식을 이용하여 $y=g(4x+3)$의 식을 구한 후 $y=g(x)$의 식을 구한다.

풀이 $f(x)=2x+4$에서 $y=2x+4$라 하면

$$2x=y-4 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}y-2$$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{2}x-2$

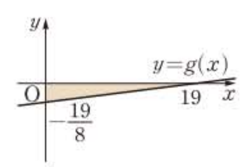
즉 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-2$이므로

$$g(4x+3)=\frac{1}{2}x-2 \quad \cdots ❶$$

이때 $4x+3=t$로 놓으면 $x=\frac{t-3}{4}$이므로

$$g(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t-3}{4}-2=\frac{1}{8}t-\frac{19}{8}$$
$$\therefore g(x)=\frac{1}{8}x-\frac{19}{8} \quad \cdots ❷$$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot19\cdot\frac{19}{8}=\frac{361}{16} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{361}{16}$

채점 기준	비율
❶ $g(4x+3)$을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

0590 전략 $(g\circ f)^{-1}(a)=k$이면 $(g\circ f)(k)=a$임을 이용한다.

풀이 $(g\circ f)^{-1}(7)=3$, $(g\circ f)^{-1}(8)=1$, $(g\circ f)^{-1}(9)=2$에서

$$(g\circ f)(1)=8,\ (g\circ f)(2)=9,\ (g\circ f)(3)=7$$

이때 $g(6)=9$이고 함수 g가 일대일대응이므로
└ $(g\circ f)(2)=g(6)$

$$f(2)=6$$

또 $f(1)=4$, $f(2)=6$이고 함수 f가 일대일대응이므로

$$f(3)=5$$

$(g\circ f)(3)=7$에서 $f(3)=5$이므로 $\quad g(5)=7$

$\therefore\ f(2)+g(5)=6+7=13$

답 ③

0591 전략 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=x^2-2\ (x\geq 0)$의 그래프가 y축과 점 $(0,\ -2)$에서 만나므로 $\quad A(0,\ -2)$

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 x축과 점 $(-2,\ 0)$에서 만난다. $\quad \therefore\ B(-2,\ 0)$

$y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로

$x^2-2=x$에서 $\quad x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq 0$이므로 $\quad x=2$

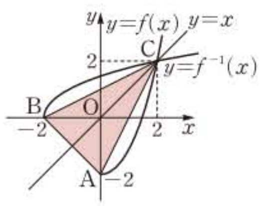
$\therefore\ C(2,\ 2)$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2}_{\triangle AOB}+\overbrace{2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right)}^{\triangle BOC+\triangle COA}$$

$=6$

답 6



0592 전략 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

풀이 조건 (가)에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 2이므로

(i) $0\leq x<2$일 때, $\quad f(x)=4+2x-4=2x$

(ii) $2\leq x\leq 4$일 때, $\quad f(x)=4-(2x-4)=-2x+8$

(i), (ii)에서 $\quad f(x)=\begin{cases} 2x & (0\leq x<2) \\ -2x+8 & (2\leq x\leq 4)\end{cases}$

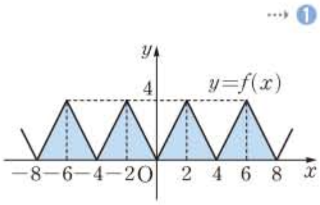
조건 (나)에서 $f(1-x)=f(3+x)$의 양변에 x 대신 $x-1$을 대입하면

$f(2-x)=f(2+x)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

또 조건 (다)의 $f(x)=f(-x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. ⋯ ❶

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❷



따라서 $-8\leq x\leq 8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$4\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=32$ ⋯ ❸

답 32

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 추정할 수 있다.	40 %
❷ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

0593 전략 $x<-1,\ -1\leq x<2,\ x\geq 2$일 때로 나누어 주어진 함수의 그래프를 그린다.

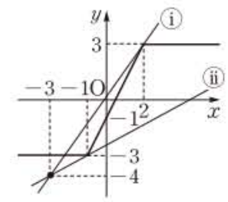
풀이 $y=|x+1|-|x-2|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 $-1,\ 2$이므로

(i) $x<-1$일 때, $\quad y=-(x+1)+x-2=-3$

(ii) $-1\leq x<2$일 때, $\quad y=x+1+x-2=2x-1$

(iii) $x\geq 2$일 때, $\quad y=x+1-(x-2)=3$

이상에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



한편 직선 $mx-y+3m-4=0$에서

$y=m(x+3)-4 \quad\cdots\cdots ㉠$

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 점 $(-3,\ -4)$를 지난다.

ⓘ 직선 ㉠이 점 $(2,\ 3)$을 지날 때,

$3=5m-4 \quad \therefore\ m=\frac{7}{5}$

ⓘⓘ 직선 ㉠이 점 $(-1,\ -3)$을 지날 때,

$-3=2m-4 \quad \therefore\ m=\frac{1}{2}$

ⓘ, ⓘⓘ에서 직선이 $y=|x+1|-|x-2|$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나려면

$\frac{1}{2}<m<\frac{7}{5}$

답 $\frac{1}{2}<m<\frac{7}{5}$

05 유리식과 유리함수

0594 답 ㄴ, ㄷ

0595 답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

0596 $\dfrac{b}{2a^2xy}$, $\dfrac{1}{3abx^2}$의 분모의 최소공배수는 $6a^2bx^2y$이므로

두 식을 통분하면 $\dfrac{3b^2x}{6a^2bx^2y}$, $\dfrac{2ay}{6a^2bx^2y}$

답 $\dfrac{3b^2x}{6a^2bx^2y}$, $\dfrac{2ay}{6a^2bx^2y}$

0597 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, $x^2-4=(x+2)(x-2)$이므로 두 식을 통분하면

$$\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x+2)},\ \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)(x+2)}$$

답 $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x+2)}$, $\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)(x+2)}$

0598 답 $\dfrac{3z}{4y}$

0599 $\dfrac{x^3-2x^2-8x}{x^2-4x}=\dfrac{x(x+2)(x-4)}{x(x-4)}=x+2$ 답 $x+2$

0600 $$\frac{x-3}{x-1}+\frac{5x+3}{x^2+2x-3}=\frac{x-3}{x-1}+\frac{5x+3}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{(x+3)(x-3)+5x+3}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{x^2+5x-6}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{(x+6)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{x+6}{x+3}$$
답 $\dfrac{x+6}{x+3}$

0601 $$\frac{x+3}{x^2+x-2}\times\frac{3x^2+2x-8}{2x^2+x-1}\div\frac{3x^2+5x-12}{x^2-1}$$
$$=\frac{x+3}{(x+2)(x-1)}\times\frac{(x+2)(3x-4)}{(x+1)(2x-1)}\times\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(3x-4)}$$
$$=\frac{1}{2x-1}$$
답 $\dfrac{1}{2x-1}$

0602 분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같으면 분자의 차수가 분모의 차수보다 작아지도록 변형한다.
$$\frac{x+2}{x-3}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{x-3+5}{x-3}-\frac{x-2+1}{x-2}$$
$$=1+\frac{5}{x-3}-\left(1+\frac{1}{x-2}\right)$$
$$=\frac{5}{x-3}-\frac{1}{x-2}=\frac{5(x-2)-(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$
$$=\frac{4x-7}{(x-3)(x-2)}$$
답 $\dfrac{4x-7}{(x-3)(x-2)}$

0603 $x^2+4x+7=x(x+1)+3(x+1)+4$
$=(x+1)(x+3)+4$

$x^2+2x-2=x(x-1)+3(x-1)+1$
$=(x-1)(x+3)+1$

$$\therefore \frac{x^2+4x+7}{x+1}-\frac{x^2+2x-2}{x-1}$$
$$=\frac{(x+1)(x+3)+4}{x+1}-\frac{(x-1)(x+3)+1}{x-1}$$
$$=x+3+\frac{4}{x+1}-(x+3)-\frac{1}{x-1}$$
$$=\frac{4(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{3x-5}{(x+1)(x-1)}$$
답 $\dfrac{3x-5}{(x+1)(x-1)}$

0604 $$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$
$$=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$$
답 $\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$

0605 $$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+3)-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{x+3-x}{x(x+3)}=\frac{3}{x(x+3)}$$
답 $\dfrac{3}{x(x+3)}$

0606 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{x}{x-1}$ 답 $\dfrac{x}{x-1}$

0607 $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x+1}{x}}=\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x}}{\dfrac{x+1}{x}}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}=x-1$ 답 $x-1$

분자, 분모에 각각 x를 곱한다.

0608 $x:y=2:3$이므로 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$

이때 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=k\ (k\neq0)$로 놓으면 $x=2k,\ y=3k$

$\therefore \dfrac{2x-y}{x+y}=\dfrac{4k-3k}{2k+3k}=\dfrac{k}{5k}=\dfrac{1}{5}$ 답 $\dfrac{1}{5}$

참고 비례식에서는 비의 값이 일정하므로 일정한 비의 값을 비례상수 k로 놓고, 각 문자를 k에 대한 식으로 표현한 후 주어진 식에 대입하여 식의 값을 계산한다.

0609 $a:b=3:4$이므로 $\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}$

이때 $\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}=k\ (k\neq0)$로 놓으면 $a=3k,\ b=4k$

$\therefore \dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{9k^2-12k^2+16k^2}{9k^2+16k^2}=\dfrac{13k^2}{25k^2}=\dfrac{13}{25}$

답 $\dfrac{13}{25}$

0610 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x=2k,\ y=4k,\ z=5k$

$\therefore \dfrac{(x-2y+3z)^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{(2k-8k+15k)^2}{4k^2+16k^2+25k^2}$

$=\dfrac{81k^2}{45k^2}=\dfrac{9}{5}$

답 $\dfrac{9}{5}$

0611 답 ㄱ, ㄹ

0612 답 ㄴ, ㄷ, ㅁ

0613 $2x+3=0$에서 $\quad x=-\dfrac{3}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x \,\middle|\, x\neq-\dfrac{3}{2}\text{인 실수}\right\}$

답 $\left\{x \,\middle|\, x\neq-\dfrac{3}{2}\text{인 실수}\right\}$

0614 $x-5=0$에서 $\quad x=5$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq5\text{인 실수}\}$

답 $\{x\,|\,x\neq5\text{인 실수}\}$

0615 $x^2-4=0$에서 $\quad x=\pm2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq\pm2\text{인 실수}\}$

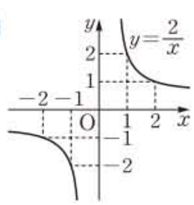
답 $\{x\,|\,x\neq\pm2\text{인 실수}\}$

0616 $x^2+1>0$이므로 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

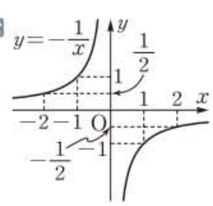
└ 주어진 함수의 분모를 0으로 만드는 실수 x의 값이 존재하지 않는다.

답 실수 전체의 집합

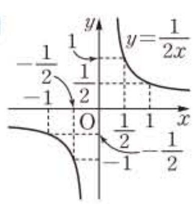
0617 답



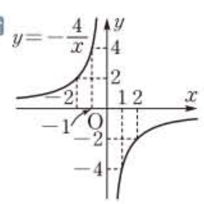
0618 답



0619 답



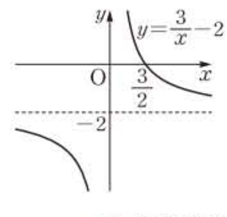
0620 답



0621 답 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$

0622 답 $y=-\dfrac{2}{x+2}-1$

0623 $y=\dfrac{3}{x}-2$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

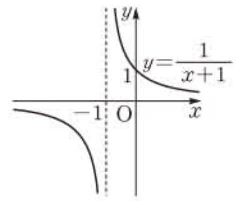


정의역: $\{x\,|\,x\neq0\text{인 실수}\}$,

치역: $\{y\,|\,y\neq-2\text{인 실수}\}$

답 풀이 참조

0624 $y=\dfrac{1}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

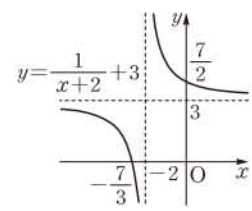


정의역: $\{x\,|\,x\neq-1\text{인 실수}\}$,

치역: $\{y\,|\,y\neq0\text{인 실수}\}$

답 풀이 참조

0625 $y=\dfrac{1}{x+2}+3$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

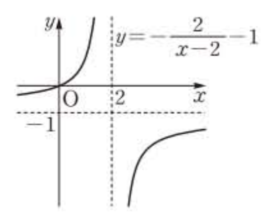


정의역: $\{x\,|\,x\neq-2\text{인 실수}\}$,

치역: $\{y\,|\,y\neq3\text{인 실수}\}$

답 풀이 참조

0626 $y=-\dfrac{2}{x-2}-1$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



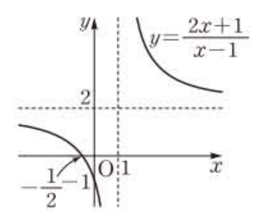
정의역: $\{x\,|\,x\neq2\text{인 실수}\}$,

치역: $\{y\,|\,y\neq-1\text{인 실수}\}$

답 풀이 참조

0627 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

따라서 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은

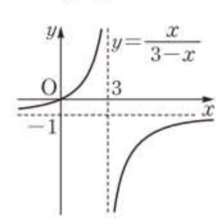


$x=1,\ y=2$

답 풀이 참조

0628 $y=\dfrac{x}{3-x}=\dfrac{-x}{x-3}=\dfrac{-(x-3)-3}{x-3}=-\dfrac{3}{x-3}-1$

따라서 $y=\dfrac{x}{3-x}$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은

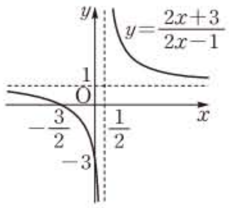


$x=3,\ y=-1$

답 풀이 참조

0629 $y=\dfrac{2x+3}{2x-1}=\dfrac{(2x-1)+4}{2x-1}=\dfrac{2}{x-\frac{1}{2}}+1$

따라서 $y=\dfrac{2x+3}{2x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은

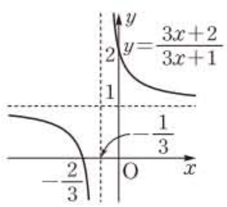


$x=\dfrac{1}{2}$, $y=1$

답 풀이 참조

0630 $y=\dfrac{3x+2}{3x+1}=\dfrac{(3x+1)+1}{3x+1}=\dfrac{1}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}+1$

따라서 $y=\dfrac{3x+2}{3x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은



$x=-\dfrac{1}{3}$, $y=1$

답 풀이 참조

유형 01 유리식의 덧셈과 뺄셈

본책 100쪽

유리식의 덧셈과 뺄셈은 분모를 통분하여 분자끼리 계산한다.

0631 $\dfrac{x-1}{x^2-x+1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{\underline{x^3+1}}$ ← $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$=\dfrac{(x+1)(x-1)-(x^2-x+1)+3}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{x^2-1-(x^2-x+1)+3}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{1}{x^2-x+1}$

답 $\dfrac{1}{x^2-x+1}$

0632 $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{-ab+ca-bc+ab-ca+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$

답 ③

0633 $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}$

$=\underline{\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)}$

간단한 식이 되도록 적당히 두 개씩 묶어서 계산한다.

$=\dfrac{3}{(x-2)(x+1)}+\dfrac{3}{x(x+3)}$

$=\dfrac{3(x^2+3x)+3(x^2-x-2)}{(x-2)(x+1)x(x+3)}$

$=\dfrac{6(x^2+x-1)}{x(x+3)(x+1)(x-2)}$

답 $\dfrac{6(x^2+x-1)}{x(x+3)(x+1)(x-2)}$

유형 02 유리식의 곱셈과 나눗셈

본책 100쪽

(i) 각 유리식의 분자, 분모를 인수분해한다.
(ii) 분자와 분모에 공통인 인수가 있을 때에는 분자, 분모를 약분하여 간단히 한다.
(iii) 유리식의 곱셈, 나눗셈을 한다.

0634 $\dfrac{a^2-6a}{a^2+a-2}\times\dfrac{a^2+5a+6}{a+1}\div\dfrac{a^2-3a-18}{a-1}$

$=\dfrac{a(a-6)}{(a+2)(a-1)}\times\dfrac{(a+3)(a+2)}{a+1}\times\dfrac{a-1}{(a+3)(a-6)}$

$=\dfrac{a}{a+1}$

답 $\dfrac{a}{a+1}$

0635 $\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{2(a^2+b^2)}{(a-b)(a+b)}$

$\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{4ab}{(a-b)(a+b)}$

$\therefore \left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}\right)\div\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right)$

$=\dfrac{2(a^2+b^2)}{(a-b)(a+b)}\times\dfrac{(a-b)(a+b)}{4ab}$

$=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$

$=\dfrac{5}{6}$

답 $\dfrac{5}{6}$

0636 $(x^2\triangle x)\div\{x^2\triangle(-5x+6)\}$

$=\dfrac{x^2-x}{x^2+x}\div\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-5x+6}$

$=\dfrac{x(x-1)}{x(x+1)}\times\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+6)(x-1)}$

$=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+6)}$

답 $\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+6)}$

유형 03 유리식과 항등식

본책 100쪽

주어진 유리식이 항등식일 때
➡ 적절한 식을 양변에 곱하여 정리한 후 동류항의 계수를 비교한다.

0637 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$이므로 주어진 식의 양변에 x^3+1을 곱하여 정리하면

$x+7=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$

$\therefore x+7=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$-a+b+c=1$

$\therefore a-b-c=-1$

답 ③

SSEN 특강 항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식
$\iff a=b=c=0$
② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식
$\iff a=a',\ b=b',\ c=c'$
③ $ax+by+c=0$이 $x,\ y$에 대한 항등식
$\iff a=b=c=0$
④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 $x,\ y$에 대한 항등식
$\iff a=a',\ b=b',\ c=c'$

0638 주어진 식의 양변에 $x(x+1)^2$을 곱하여 정리하면

$1=a(x+1)^2+bx(x+1)+cx$

$\therefore\ 1=(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ 2a+b+c=0,\ a=1$

$a+b=0$에 $a=1$을 대입하면

$1+b=0 \qquad \therefore\ b=-1$

$2a+b+c=0$에 $a=1,\ b=-1$을 대입하면

$2-1+c=0 \qquad \therefore\ c=-1$

$\therefore\ abc=1$

답 1

0639 $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{4}{x^4-1}-\dfrac{4}{x^4+1}=\dfrac{8}{x^8-1}$ ⋯ ❶

따라서 $\dfrac{8}{x^8-1}=\dfrac{a}{x^b-1}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=8,\ b=8$ ⋯ ❷

$\therefore\ ab=64$ ⋯ ❸

답 64

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0640 주어진 식의 양변에 $(x-1)^{10}$을 곱하여 정리하면

$x^9+1=a_1(x-1)^9+a_2(x-1)^8+\cdots+a_9(x-1)+a_{10}$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^9+1=a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_{10}=513$

답 ②

유형 04 (분자의 차수)≥(분모의 차수)인 유리식 본책 101쪽

분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같은 유리식은 다항식과 분수식의 합으로 변형한다.

0641 $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x+3}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{2x-3}{x-2}$

$=\dfrac{(x-1)+1}{x-1}+\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}-\dfrac{(x+2)+1}{x+2}$

$\quad-\dfrac{2(x-2)+1}{x-2}$

$=\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)+\left(2+\dfrac{1}{x+1}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)-\left(2+\dfrac{1}{x-2}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

$=\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}+\dfrac{-3}{(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{3(x^2-x-2)-3(x^2+x-2)}{(x-1)(x+2)(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{\boxed{-6x}}{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}$

답 ①

0642 $\dfrac{3x^2+3x+5}{x^2+x}-\dfrac{9x^2-3x+4}{3x^2-x}$

$=\dfrac{3(x^2+x)+5}{x^2+x}-\dfrac{3(3x^2-x)+4}{3x^2-x}$

$=3+\dfrac{5}{x^2+x}-\left(3+\dfrac{4}{3x^2-x}\right)$

$=\dfrac{5}{x^2+x}-\dfrac{4}{3x^2-x}$

$=\dfrac{5}{x(x+1)}-\dfrac{4}{x(3x-1)}$

$=\dfrac{5(3x-1)-4(x+1)}{x(x+1)(3x-1)}$

$=\dfrac{11x-9}{x(x+1)(3x-1)}$

답 $\dfrac{11x-9}{x(x+1)(3x-1)}$

0643 $x^3=x(x^2+x+1)-(x^2+x+1)+1$

$=(x^2+x+1)(x-1)+1$

이므로 $\dfrac{x^3}{x^2+x+1}=x-1+\dfrac{1}{x^2+x+1}$

$x^3=x(x^2-x+1)+(x^2-x+1)-1$

$=(x^2-x+1)(x+1)-1$

이므로 $\dfrac{x^3}{x^2-x+1}=x+1-\dfrac{1}{x^2-x+1}$

$\therefore\ \dfrac{x^3}{x^2+x+1}+\dfrac{x^3}{x^2-x+1}-2x$

$=\left(x-1+\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)+\left(x+1-\dfrac{1}{x^2-x+1}\right)-2x$

$=\dfrac{1}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{x^2-x+1}=\dfrac{x^2-x+1-(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{-2x}{x^4+x^2+1}$

답 $\dfrac{-2x}{x^4+x^2+1}$

유형 05 부분분수로의 변형 본책 101쪽

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

0644 $\dfrac{2}{x(x+2)}+\dfrac{3}{(x+2)(x+5)}+\dfrac{4}{(x+5)(x+9)}$

$=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+5}\right)+\left(\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+9}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+9}=\dfrac{9}{x(x+9)}$

따라서 $\dfrac{9}{x(x+9)}=\dfrac{a}{x(x+b)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=9,\ b=9$

$\therefore\ a+b=18$

답 18

0645 $f(n)=\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}=\dfrac{1}{x+n}-\dfrac{1}{x+n+1}$

이므로

$f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(10)$

$=\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}\right)+\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+5}\right)+\left(\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+6}\right)$

$+\cdots+\left(\dfrac{1}{x+10}-\dfrac{1}{x+11}\right)$

$=\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+11}$

$=\dfrac{8}{(x+3)(x+11)}$

따라서 $\dfrac{8}{(x+3)(x+11)}=\dfrac{c}{(x+a)(x+b)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=3,\ b=11,\ c=8$ 또는 $a=11,\ b=3,\ c=8$

$\therefore\ a+b-c=6$

답 6

0646 $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{48}+\cdots+\dfrac{1}{440}$

$=\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot8}+\cdots+\dfrac{1}{20\cdot22}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)+\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{20}-\dfrac{1}{22}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{22}\right)=\dfrac{5}{22}$

답 ③

0647 $f(x)=4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$이므로

$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x+1}\right)$ ··· ❶

$\therefore\ \dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(49)}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{97}-\dfrac{1}{99}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{99}\right)=\dfrac{49}{99}$ ··· ❷

답 $\dfrac{49}{99}$

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{1}{f(x)}$을 부분분수로 변형할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

유형 06 분모 또는 분자가 분수식인 유리식

본책 102쪽

분모 또는 분자가 분수식인 유리식은 분자에 분모의 역수를 곱하여 계산한다.

➡ $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$

0648 $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\frac{x-1}{x}}}}$

$=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}}$

$=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\frac{-1}{x-1}}}$

$=1-\dfrac{1}{1+x-1}$

$=1-\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{x-1}{x}$

답 $\dfrac{x-1}{x}$

0649 $f(x)=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=1+\dfrac{1}{\frac{x+2}{1+x}}$

$=1+\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{2x+3}{x+2}$

따라서 $\dfrac{2k+3}{k+2}=\dfrac{11}{6}$에서 $\quad 12k+18=11k+22$

$\therefore\ k=4$

답 ④

0650 $\dfrac{\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+5}}{\dfrac{1}{n+5}-\dfrac{1}{n+8}}=\dfrac{\dfrac{3}{(n+2)(n+5)}}{\dfrac{3}{(n+5)(n+8)}}$

$=\dfrac{n+8}{n+2}$

$=\dfrac{(n+2)+6}{n+2}$

$=1+\dfrac{6}{n+2}$

이것이 자연수가 되려면 $n+2$가 6의 양의 약수이어야 하므로

$n+2=1,\ 2,\ 3,\ 6$

따라서 정수 n은 $-1,\ 0,\ 1,\ 4$의 4개이다.

답 4

다른 풀이 (주어진 식)$=\dfrac{n+8}{n+2}=k$ (k는 자연수)로 놓으면

$n+8=k(n+2)$, $\quad (k-1)n=-2k+8$ $k=1$이면 $0\cdot n=6$이므로 모순이다. $\therefore\ k\neq1$

$\therefore\ n=\dfrac{-2k+8}{k-1}=\dfrac{-2(k-1)+6}{k-1}=-2+\dfrac{6}{k-1}$

n이 정수이려면 $k-1$이 6의 양의 약수이어야 하므로

$k-1=1,\ 2,\ 3,\ 6$

$\therefore\ k=2,\ 3,\ 4,\ 7$

따라서 정수 n은 4, 1, 0, -1의 4개이다.

0651 $\frac{43}{19}=2+\frac{5}{19}=2+\cfrac{1}{\frac{19}{5}}=2+\cfrac{1}{3+\frac{4}{5}}$

$=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{5}{4}}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}$

따라서 $a=2,\ b=3,\ c=1,\ d=4$이므로

$abcd=24$ 답 ④

유형 07 유리식의 값; $x\pm\frac{1}{x}$의 값 이용 본책 103쪽

(i) 주어진 식을 변형하여 $x+\frac{1}{x}$, $x-\frac{1}{x}$의 값을 구한다.

(ii) 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

➡ ① $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

② $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

③ $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

0652 $x^2-2x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x^2-2x-1=0$의 좌변에 $x=0$을 대입하면 $0^2-2\cdot0-1=-1\neq0$이므로 $x\neq0$

$x-2-\frac{1}{x}=0\qquad\therefore\ x-\frac{1}{x}=2$

$\therefore\ 3x^2+2x-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$

$=3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-1$

$=3\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-1$

$=3\cdot(2^2+2)+2\cdot2-1=21$ 답 ②

0653 $ab\neq0$이므로 $a^2-3ab+b^2=0$의 양변을 ab로 나누면

$\frac{a}{b}-3+\frac{b}{a}=0\qquad\therefore\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$

$\therefore\ \frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

$=3^3-3\cdot3$

$=18$ 답 ③

0654 $-1<x<0$에서 $x\neq0$이므로 $x^2+3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+3+\frac{1}{x}=0\qquad\therefore\ x+\frac{1}{x}=-3$ ⋯ ❶

한편 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$이므로

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(-3)^2-4=5$

이때 $-1<x<0$에서 $x<0,\ x^2-1<0$이므로

$x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}>0\qquad\therefore\ x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ ⋯ ❷

$\therefore\ x^4-\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$

$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=\{(-3)^2-2\}\cdot(-3)\cdot\sqrt{5}$

$=-21\sqrt{5}$ ⋯ ❸

답 $-21\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $x-\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $x^4-\frac{1}{x^4}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 08 유리식의 값; $a+b+c=0$ 이용 본책 103쪽

$a+b+c=0$이 주어질 때

① 주어진 식에 $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$를 대입하여 식을 간단히 한다.

② $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에 $a+b+c=0$을 대입하면 $a^3+b^3+c^3=3abc$임을 이용한다.

0655 $a+b+c=0$에서 $a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$이므로

$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$

$=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}$

$=-3$ 답 -3

다른 풀이 $a+b+c=0$이므로

$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=a\cdot\frac{b+c}{bc}+b\cdot\frac{c+a}{ca}+c\cdot\frac{a+b}{ab}$

$=a\cdot\frac{-a}{bc}+b\cdot\frac{-b}{ca}+c\cdot\frac{-c}{ab}$

$=-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

이때

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

에서 $a+b+c=0$이면

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore$ (주어진 식)$=-\frac{3abc}{abc}=-3$

0656 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$에서 $\quad \frac{ab+bc+ca}{\underbrace{abc}_{0\text{이 아닌 세 실수 } a,\, b,\, c\text{에 대하여 } abc\neq 0}}=0$

$\therefore ab+bc+ca=0$

$$\therefore \frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$$
$$=\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$=0$$

답 ③

0657 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$
이므로

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=0, \qquad \frac{a+b+c}{abc}=0$$

$\therefore a+b+c=0$ ⋯ ❶

따라서

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

에서

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$ ⋯ ❷

$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $a+b+c=0$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $a^3+b^3+c^3=3abc$임을 알 수 있다.	40 %
❸ $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 09 유리식의 값; 비례식이 주어질 때 (본책 104쪽)

조건이 비례식으로 주어지면 다음과 같이 비례상수 k를 이용하여 각 문자를 k에 대한 식으로 나타낸 후 유리식에 대입하여 식의 값을 구한다.

① $x:y=a:b \Longleftrightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}$
$\Longleftrightarrow x=ak,\ y=bk$ (단, $k\neq 0$)

② $x:y:z=a:b:c \Longleftrightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$
$\Longleftrightarrow x=ak,\ y=bk,\ z=ck$ (단, $k\neq 0$)

0658 $\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}=k\ (k\neq 0)$로 놓으면

$x+y=3k,\ y+z=4k,\ z+x=5k$ ⋯⋯ ㉠

세 식을 변끼리 더하면 $\quad 2(x+y+z)=12k$

$\therefore x+y+z=6k$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad x=2k,\ y=k,\ z=3k$

$$\therefore \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}=\frac{6k^3}{8k^3+k^3+27k^3}$$
$$=\frac{6k^3}{36k^3}=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

0659 $x=3k,\ y=4k,\ z=5k\ (k\neq 0)$로 놓으면

$$\frac{-2x+3y-z}{x-y+z}=\frac{-6k+12k-5k}{3k-4k+5k}$$
$$=\frac{k}{4k}=\frac{1}{4}$$

답 ②

0660 $2x=3y$이므로 $\quad x=\frac{3}{2}y$

$5z=4y$이므로 $\quad z=\frac{4}{5}y$

$\therefore x:y:z=\frac{3}{2}y:y:\frac{4}{5}y=15:10:8$ ⋯ ❶

$x=15k,\ y=10k,\ z=8k\ (k\neq 0)$로 놓으면

$$\frac{3x-y-3z}{x+y+z}=\frac{45k-10k-24k}{15k+10k+8k}$$
$$=\frac{11k}{33k}=\frac{1}{3}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $x:y:z$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\frac{3x-y-3z}{x+y+z}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 $x=\frac{3}{2}y,\ z=\frac{4}{5}y$이므로

$$\frac{3x-y-3z}{x+y+z}=\frac{\frac{9}{2}y-y-\frac{12}{5}y}{\frac{3}{2}y+y+\frac{4}{5}y}=\frac{\frac{11}{10}y}{\frac{33}{10}y}=\frac{1}{3}$$

유형 10 유리식의 값; 방정식이 주어질 때 (본책 104쪽)

주어진 방정식을 이용하여 각 문자를 한 문자에 대한 식으로 나타낸 후 구하는 유리식에 대입한다.

0661 $\begin{cases} x+y-2z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-3y+2z=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $\quad 4x-2y=0 \quad \therefore y=2x$

㉠에 $y=2x$를 대입하면 $\quad x+2x-2z=0$

$2z=3x \quad \therefore z=\frac{3}{2}x$

$$\therefore \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{2x^2+3x^2+\frac{3}{2}x^2}{x^2+4x^2+\frac{9}{4}x^2}=\frac{\frac{13}{2}x^2}{\frac{29}{4}x^2}=\frac{26}{29}$$

답 $\frac{26}{29}$

0662 $x+\frac{1}{2y}=1$에서 $\quad x=1-\frac{1}{2y}=\frac{2y-1}{2y}$

$2y+\frac{4}{z}=1$에서 $\quad \frac{4}{z}=1-2y \quad \therefore z=\frac{4}{1-2y}$

$$\therefore \frac{4}{x}+z=\frac{8y}{2y-1}+\frac{4}{1-2y}$$
$$=\frac{8y-4}{2y-1}=\frac{4(2y-1)}{2y-1}=4$$

답 ④

0663 $\begin{cases} 2x+y-3z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-3y+z=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡$\times 2$를 하면 $\quad 7y-5z=0 \quad \therefore\ z=\frac{7}{5}y$ ⋯ ❶

㉡에 $z=\frac{7}{5}y$를 대입하면

$$x-3y+\frac{7}{5}y=0 \quad \therefore\ x=\frac{8}{5}y \quad \cdots ❷$$

$$\therefore\ \frac{x-y}{x+z}=\frac{\frac{8}{5}y-y}{\frac{8}{5}y+\frac{7}{5}y}=\frac{\frac{3}{5}y}{3y}=\frac{1}{5} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{1}{5}$

채점 기준	비율
❶ z를 y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ x를 y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\frac{x-y}{x+z}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 11 비례식의 활용

본책 104쪽

$x:y=a:b$이면
➡ $x=ak$, $y=bk\,(k\neq 0)$로 놓는다.

0664 A, B 두 학교의 합격자 수를 각각 $3k$, $4k\,(k\neq 0)$로 놓고, 불합격자 수를 각각 $2l$, $5l\,(l\neq 0)$로 놓으면 지원자 수는 각각 $3k+2l$, $4k+5l$이다.

이때 $(3k+2l):(4k+5l)=1:2$이므로

$$2(3k+2l)=4k+5l, \qquad 6k+4l=4k+5l$$

$$\therefore\ l=2k$$

따라서 A 학교의 지원자 수는 $3k+2l=3k+4k=7k$, 합격자 수는 $3k$이므로 A 학교의 합격률은

$$\frac{3k}{7k}=\frac{3}{7}$$

답 ③

0665 넓이가 A, B, C, D인 정사각형의 한 변의 길이를 각각 a, b, c, d라 하면

$$c=2d,\ b=c+d,\ a=b+c$$

$$\therefore\ a=(c+d)+2d=2d+d+2d=5d$$

따라서 $a:d=5:1$이므로

$$A:D=5^2:1^2=25:1$$

답 ④

SSEN 특강 닮은 도형의 성질

(1) 닮은 두 평면도형의 닮음비가 $m:n$일 때
① 둘레의 길이의 비 ➡ $m:n$
② 넓이의 비 ➡ $m^2:n^2$

(2) 닮은 두 입체도형의 닮음비가 $m:n$일 때
① 겉넓이의 비 ➡ $m^2:n^2$
② 부피의 비 ➡ $m^3:n^3$

0666 1학년의 남학생과 여학생 수를 각각 k, $2k\,(k\neq 0)$로 놓고, 2학년의 남학생과 여학생 수를 각각 l, $5l\,(l\neq 0)$로 놓으면 방송반 전체의 남학생과 여학생 수는 각각 $k+l$, $2k+5l$이다.

이때 $(k+l):(2k+5l)=4:11$이므로

$$11(k+l)=4(2k+5l), \qquad 11k+11l=8k+20l$$

$$9l=3k \qquad \therefore\ l=\frac{k}{3}$$

따라서 방송반 전체의 학생 수는

$$(k+l)+(2k+5l)=3k+6l=3k+6\cdot\frac{k}{3}=5k$$

이고 1학년 학생 수는 $\underbrace{3k}_{k+2k=3k}$이므로 구하는 비율은

$$\frac{3k}{5k}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

유형 12 유리함수의 정의역과 치역

본책 105쪽

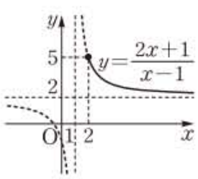
유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$의 정의역과 치역은 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하여

정의역은 $\{x\,|\,x\neq p$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq q$인 실수$\}$임을 이용한다.

0667 $y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+2$이므로 함수 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2<y\leq 5$에서 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은

$$\{x\,|\,x\geq 2\}$$



답 ④

0668 $y=\frac{bx+4}{a-x}=\frac{-b(a-x)+ab+4}{a-x}=\frac{ab+4}{a-x}-b$

이므로

정의역: $\{x\,|\,x\neq a$인 실수$\}$,

치역: $\{y\,|\,y\neq -b$인 실수$\}$

따라서 $a=1$, $b=4$이므로

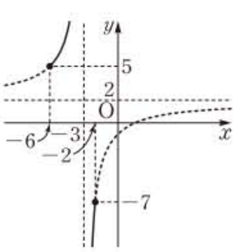
$$ab=4$$

답 4

0669 $y=\frac{2x-3}{x+3}=\frac{2(x+3)-9}{x+3}=-\frac{9}{x+3}+2$이므로 함수 $y=\frac{2x-3}{x+3}$의 그래프는 $y=-\frac{9}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$y\leq -7$ 또는 $y\geq 5$에서 $y=\frac{2x-3}{x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은

$$\{x\,|\,-6\leq x<-3 \text{ 또는 } -3<x\leq -2\}$$



따라서 정의역에 속하는 정수는

$$-6,\ -5,\ -4,\ -2$$

의 4개이다.

답 ②

유형 13~15 유리함수의 그래프 본책 105, 106쪽

함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프

① $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
② 점근선의 방정식: $x=p$, $y=q$
③ 점 (p, q)에 대하여 대칭이다.
④ 점 (p, q)를 지나고 기울기가 ±1인 직선에 대하여 각각 대칭이다.

0670 $y=\frac{bx+7}{x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{b(x-3)+7}{(x-3)+a}-2$$
$$=\frac{b(x-3+a)+7-ab}{x-3+a}-2$$
$$=\frac{7-ab}{x-3+a}+b-2$$

이 함수의 그래프가 $y=\frac{1}{x}$의 그래프와 일치해야 하므로

$-3+a=0$, $b-2=0$, $7-ab=1$

$\therefore a=3$, $b=2$

$\therefore a+b=5$ 답 ⑤

다른 풀이 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{1}{x+3}+2=\frac{1+2(x+3)}{x+3}=\frac{2x+7}{x+3}$$

이 함수의 그래프가 $y=\frac{bx+7}{x+a}$의 그래프와 일치해야 하므로

$a=3$, $b=2$

0671 $y=-\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-\frac{6}{x+2}-5 \quad \cdots ❶$$

이 함수의 그래프가 점 $(1, k)$를 지나므로

$$k=-\frac{6}{1+2}-5=-7 \quad \cdots ❷$$

답 -7

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	60 %

0672 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{3}{x-a}+b=\frac{3+b(x-a)}{x-a}=\frac{bx-ab+3}{x-a}$$

이 함수의 그래프가 $y=\frac{2x-7}{x-5}$의 그래프와 일치해야 하므로

$a=5$, $b=2$, $-ab+3=-7$

$\therefore a-b=3$ 답 3

0673 ㄱ. $y=\frac{1}{5x-5}=\frac{1}{5(x-1)}$

따라서 $y=\frac{1}{5x-5}$의 그래프는 $y=\frac{1}{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{10x+1}{5x}=\frac{2\cdot5x+1}{5x}=\frac{1}{5x}+2$

따라서 $y=\frac{10x+1}{5x}$의 그래프는 $y=\frac{1}{5x}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{10x+3}{5x+5}=\frac{2(5x+5)-7}{5x+5}=-\frac{7}{5(x+1)}+2$

따라서 $y=\frac{10x+3}{5x+5}$의 그래프는 $y=-\frac{7}{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\frac{x-2}{5-5x}=\frac{(x-1)-1}{-5(x-1)}=\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{5}$

따라서 $y=\frac{x-2}{5-5x}$의 그래프는 $y=\frac{1}{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{5}$만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동에 의하여 $y=\frac{1}{5x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0674 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=2$이므로 주어진 함수의 식을

$$y=\frac{k}{x+1}+2\ (k\neq0)$$

라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$$1=\frac{k}{2+1}+2 \qquad \therefore k=-3$$

$$\therefore y=\frac{-3}{x+1}+2=\frac{-3+2(x+1)}{x+1}=\frac{2x-1}{x+1}$$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=1$이므로

$a^2+b^2+c^2=2^2+(-1)^2+1^2=6$ 답 6

다른 풀이 $y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}$

$$=\frac{-ac+b}{x+c}+a \quad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 ㉠의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-c$, $y=a$ $\qquad \therefore c=1$, $a=2$ $\quad \cdots\cdots ㉡$

또 ㉠의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$$1=\frac{-ac+b}{2+c}+a \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉢에 ㉡을 대입하면

$$1=\frac{-2+b}{3}+2 \qquad \therefore b=-1$$

0675 $y=\frac{4x+5}{x+3}=\frac{4(x+3)-7}{x+3}=-\frac{7}{x+3}+4$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-3$, $y=4$

따라서 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-3,\ 4)$이므로

$a=-3,\ b=4$

$\therefore\ b-a=7$ 답 ③

0676 $y=\dfrac{3x-2}{-x+2}=\dfrac{-3(-x+2)+4}{-x+2}=\dfrac{4}{-x+2}-3$이므로 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=-3$ ··· ❶

$y=\dfrac{bx-1}{2x+a}=\dfrac{\frac{b}{2}(2x+a)-\frac{ab}{2}-1}{2x+a}=\dfrac{-\frac{ab}{2}-1}{2x+a}+\dfrac{b}{2}$이므로 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{a}{2},\ y=\dfrac{b}{2}$ ··· ❷

따라서 $-\dfrac{a}{2}=2,\ \dfrac{b}{2}=-3$이므로

$a=-4,\ b=-6$

$\therefore\ ab=24$ ··· ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ $y=\dfrac{3x-2}{-x+2}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ $y=\dfrac{bx-1}{2x+a}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

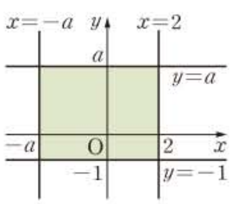
0677 $y=-\dfrac{x}{x+a}=-\dfrac{(x+a)-a}{x+a}=\dfrac{a}{x+a}-1$이므로 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=-1$

$y=\dfrac{ax+1}{x-2}=\dfrac{a(x-2)+2a+1}{x-2}=\dfrac{2a+1}{x-2}+a$이므로 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=a$

따라서 두 함수의 그래프의 점근선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의 넓이가 20이므로



$(a+2)(a+1)=20$

$a^2+3a-18=0$

$(a+6)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$ 답 3

0678 주어진 함수의 그래프가 점 $\left(-1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=-\dfrac{1}{2}$

주어진 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x+1}-\dfrac{1}{2}\ (k\neq 0)$

이라 하면 이 함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 1이므로

$1=k-\dfrac{1}{2}\qquad \therefore\ k=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ y=\dfrac{\frac{3}{2}}{x+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3-(x+1)}{2(x+1)}=\dfrac{-x+2}{2x+2}$

따라서 $a=-1,\ b=1,\ c=2$이므로

$a+b+c=2$ 답 ②

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 1이므로

$1=\dfrac{2b}{c}\qquad \therefore\ c=2b$

$y=\dfrac{ax+2b}{2x+c}$에 $c=2b$를 대입하면

$y=\dfrac{ax+2b}{2x+2b}=\dfrac{\frac{a}{2}x+b}{x+b}$

$=\dfrac{\frac{a}{2}(x+b)+b-\frac{ab}{2}}{x+b}$

$=\dfrac{b-\frac{ab}{2}}{x+b}+\dfrac{a}{2}$

이 함수의 그래프가 점 $\left(-1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로

$-b=-1,\ \dfrac{a}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a=-1,\ b=1,\ c=2$

0679 $y=\dfrac{2}{x-8}+k$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=8,\ y=k$

이때 $y=\dfrac{2}{x-8}+k$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 $(8,\ k)$는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

$\therefore\ k=8$ 답 ④

0680 $y=\dfrac{4x-3}{2x+1}=\dfrac{2(2x+1)-5}{2x+1}=-\dfrac{5}{2x+1}+2$이므로 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{1}{2},\ y=2$ ··· ❶

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 2\right)$에 대하여 대칭이므로

$a=-\dfrac{1}{2},\ b=2$ ··· ❷

또 점 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 2\right)$는 직선 $y=x+c$ 위의 점이므로

$2=-\dfrac{1}{2}+c\qquad \therefore\ c=\dfrac{5}{2}$ ··· ❸

$\therefore\ abc=-\dfrac{5}{2}$ ··· ❹

답 $-\dfrac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ abc의 값을 구할 수 있다.	10 %

05 유리식과 유리함수

0681 $y=\dfrac{bx+2}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-ab+2}{x+a}=\dfrac{-ab+2}{x+a}+b$이므로 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=b$

이때 점 $(-a,\ b)$가 두 직선 $y=x+3,\ y=-x-2$의 교점이므로

$b=-a+3,\ b=a-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

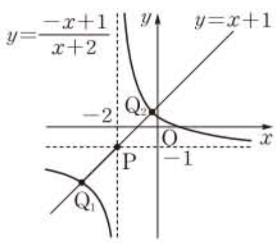
$a=\dfrac{5}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 2b-a=2\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{3}{2}$ 　　답 $-\dfrac{3}{2}$

0682 $y=\dfrac{-x+1}{x+2}=\dfrac{-(x+2)+3}{x+2}=\dfrac{3}{x+2}-1$이므로 점근선의 방정식은 $x=-2,\ y=-1$이다.

즉 점 $\mathrm{P}(-2,\ -1)$은 두 점근선의 교점이다. ⋯ ❶

점 P가 두 점근선의 교점이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이가 최소일 때의 점 Q는 오른쪽 그림과 같이 $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2$로 두 개가 존재한다.



한편 곡선 $y=\dfrac{-x+1}{x+2}$은 점 $\mathrm{P}(-2,\ -1)$에 대하여 대칭이므로 직선 $\underline{y+1=x+2}$, 즉 $y=x+1$에 대하여 대칭이다.

└ 점 $(-2,\ -1)$을 지나고 기울기가 1인 직선

$\underline{\dfrac{-x+1}{x+2}=x+1}$에서

└ 두 점 $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2$는 곡선 $y=\dfrac{-x+1}{x+2}$과 직선 $y=x+1$의 교점이다.

$-x+1=(x+1)(x+2)$

$x^2+4x+1=0$

$\therefore\ x=-2\pm\sqrt{3}$

따라서 두 점 $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2$의 좌표는 각각 $(-2-\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3})$, $(-2+\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3})$이고 $\overline{\mathrm{PQ}_1}=\overline{\mathrm{PQ}_2}$이므로 ⋯ ❷

$m=\overline{\mathrm{PQ}_1}$

$=\sqrt{(-2-\sqrt{3}+2)^2+(-1-\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{6}$

$\therefore\ m^2=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 점 P가 두 점근선의 교점임을 알 수 있다.	30 %
❷ 두 점 $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2$의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❸ m^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

SSEN 특강 유리함수의 그래프의 대칭성

유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq0)$의 그래프는 두 직선 $y=x,\ y=-x$에 대하여 각각 대칭이므로 평행이동에 의하여 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프는 점근선 $x=p,\ y=q$의 교점 $(p,\ q)$를 지나고 기울기가 ±1인 두 직선에 대하여 각각 대칭이다.

즉 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프는 두 직선

$y-q=x-p,\ y-q=-(x-p)$

에 대하여 각각 대칭임을 알 수 있다.

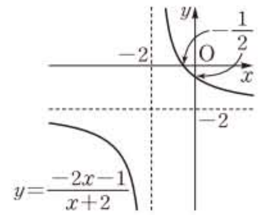
유형 16 유리함수의 그래프가 지나는 사분면

본책 107쪽

함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하여 그래프를 그려 본다.

0683 $y=\dfrac{-2x-1}{x+2}=\dfrac{-2(x+2)+3}{x+2}=\dfrac{3}{x+2}-2$

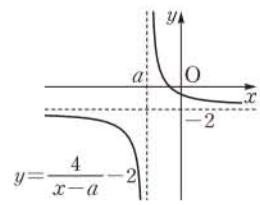
따라서 $y=\dfrac{-2x-1}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 즉 그래프가 지나지 않는 사분면은 제1사분면이다.



답 제1사분면

0684 $y=\dfrac{4}{x-a}-2$의 그래프는 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\dfrac{4}{x-a}-2$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $a<0$이고 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작거나 같아야 하므로



$-\dfrac{4}{a}-2\le0,\qquad \dfrac{4}{a}\ge-2$

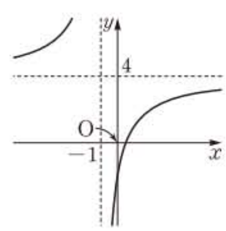
$-2a\ge4\qquad \therefore\ a\le-2$ 　　답 $a\le-2$

참고 $a\ge0$이면 $y=\dfrac{4}{x-a}-2$의 그래프는 제1사분면을 지나므로 　$a<0$

0685 $y=\dfrac{4x+k-6}{x+1}=\dfrac{4(x+1)+k-10}{x+1}=\dfrac{k-10}{x+1}+4$이므로 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=4$

함수 $y=\dfrac{4x+k-6}{x+1}$의 그래프가 제4사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $k-10<0$이어야 한다.



$\therefore\ k<10$ ⋯⋯ ㉠

또 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작아야 하므로

$k-6<0\qquad \therefore\ k<6$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<6$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다. 　　답 ①

유형 17 그래프를 이용하여 유리함수의 식 구하기

본책 108쪽

점근선의 방정식이 $x=p,\ y=q$이고, 점 $(a,\ b)$를 지나는 유리함수의 식

➡ $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$로 놓고 $x=a,\ y=b$를 대입하여 상수 k의 값을 구한다.

0686 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=1$이므로 주어진 함수의 식을

$$y=\frac{k}{x+2}+1\ (k>0)$$

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$$2=\frac{k}{0+2}+1 \qquad \therefore k=2$$

$$\therefore y=\frac{2}{x+2}+1=\frac{2+x+2}{x+2}=\frac{x+4}{x+2}$$

따라서 $a=1$, $b=4$, $c=2$이므로

$abc=8$

답 8

0687 $y=\dfrac{k}{x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=2$이므로

$a=-3$, $b=2$

따라서 함수 $y=\dfrac{k}{x-3}+2$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$$0=\frac{k}{1-3}+2 \qquad \therefore k=4$$

$\therefore a+b+k=3$

답 ②

0688 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a$, $y=c$

이므로 주어진 그래프에서

$a>0$, $c<0$

또 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프가 제2사분면과 제4사분면을 지나므로

$b<0$

ㄱ. $a>0$, $c<0$이므로 $\qquad a-c>0$

ㄴ. 함수 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프가 원점을 지나므로

$$-\frac{b}{a}+c=0, \qquad -b+ac=0 \qquad \therefore b=ac$$

ㄷ. $\dfrac{b}{a}<0$, $\dfrac{a}{c}<0$이므로 $\qquad \dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{c}<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

유형 18 유리함수의 그래프의 성질

본책 108쪽

함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프

① $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

② 정의역: $\{x|x\neq p$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq q$인 실수$\}$

③ 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.

④ 점근선의 방정식: $x=p$, $y=q$

0689 $y=\dfrac{-3x-5}{x+2}=\dfrac{-3(x+2)+1}{x+2}=\dfrac{1}{x+2}-3$

① 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=-3$이므로 그래프는 점 $(-2,\ -3)$에 대하여 대칭이다.

② $x+2=0$에서 $\qquad x=-2$

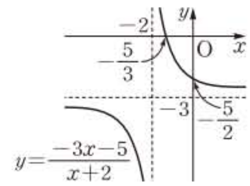
따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\neq -2$인 실수$\}$이다.

③ $y=\dfrac{-3x-5}{x+2}$에 $y=0$을 대입하면

$$0=\frac{-3x-5}{x+2}, \qquad -3x-5=0$$

$$\therefore x=-\frac{5}{3}$$

따라서 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $\left(-\dfrac{5}{3},\ 0\right)$이다.



④ 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3, 4사분면을 지난다.

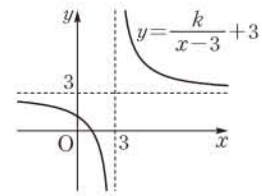
⑤ 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

답 ④

0690 ㄱ. $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=3$이므로 치역은 $\{y|y\neq 3$인 실수$\}$이다.

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프는 점 $(3,\ 3)$을 지나고 기울기가 1인 직선, 즉 $y=x$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. (i) $f(0)\geq 0$일 때,

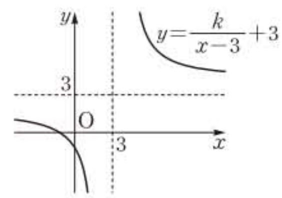


오른쪽 그림과 같이

$f(0)=-\dfrac{k}{3}+3\geq 0$,

즉 $0<k\leq 9$이면 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.

(ii) $f(0)<0$일 때,



오른쪽 그림과 같이

$f(0)=-\dfrac{k}{3}+3<0$,

즉 $k>9$이면 그래프는 모든 사분면을 지난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0691 $y=\dfrac{a}{x}$, $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프는 제2사분면을 지나므로

$a<0$, $b<0$

이때 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프가 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$|a|>|b| \qquad \therefore a<b<0$ ⋯ ❶

음수끼리는 절댓값이 클수록 작다.

$y=\dfrac{c}{x}$, $y=\dfrac{d}{x}$의 그래프는 제1사분면을 지나므로

$c>0$, $d>0$

이때 $y=\dfrac{d}{x}$의 그래프가 $y=\dfrac{c}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$|d|>|c| \qquad \therefore 0<c<d$ ⋯ ❷

양수끼리는 절댓값이 클수록 크다.

$\therefore a<b<c<d$ ⋯ ❸

답 $a<b<c<d$

채점 기준	비율
❶ $a<b<0$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $0<c<d$임을 알 수 있다.	40 %
❸ a, b, c, d의 대소를 비교할 수 있다.	20 %

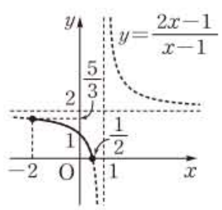
유형 19 유리함수의 최대 · 최소

본책 109쪽

함수 $y=f(x)$의 정의역이 주어졌을 때
➡ 주어진 정의역에서 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, y의 최댓값과 최솟값을 구한다.

0692 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+2$이므로 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\le x\le \dfrac{1}{2}$에서 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-2$일 때 최댓값 $\dfrac{5}{3}$,

$x=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값 0

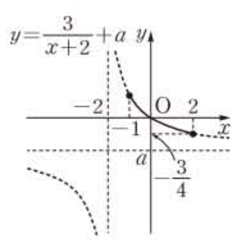
을 갖는다.

즉 $a=\dfrac{5}{3}$, $b=0$이므로 $\quad a+b=\dfrac{5}{3}$

답 $\dfrac{5}{3}$

0693 $y=\dfrac{3}{x+2}+a$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이때 $-1\le x\le 2$에서 $y=\dfrac{3}{x+2}+a$의 최솟값이 $-\dfrac{3}{4}$이려면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



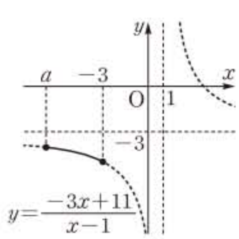
따라서 주어진 함수는 $x=2$일 때 최솟값 $\dfrac{3}{4}+a$를 가지므로

$\dfrac{3}{4}+a=-\dfrac{3}{4} \qquad \therefore a=-\dfrac{3}{2}$

답 ①

0694 $y=\dfrac{-3x+11}{x-1}=\dfrac{-3(x-1)+8}{x-1}=\dfrac{8}{x-1}-3$이므로 함수 $y=\dfrac{-3x+11}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{8}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a\le x\le -3$에서 $y=\dfrac{-3x+11}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=a$일 때 최댓값 $\dfrac{-3a+11}{a-1}$,

$x=-3$일 때 최솟값 -5

를 갖는다.

즉 $\dfrac{-3a+11}{a-1}=-4$에서

$-3a+11=-4a+4 \qquad \therefore a=-7$

이때 $m=-5$이므로 $\quad am=35$

답 ⑤

0695 조건 ㈎에서 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=1$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x-3}+1\,(k\ne 0)$

이라 하자.

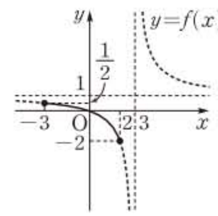
이때 조건 ㈏에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\dfrac{k}{-3}+1 \qquad \therefore k=3$

$\therefore f(x)=\dfrac{3}{x-3}+1$ ⋯ ❶

$y=f(x)$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-3$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{2}$,

$x=2$일 때 최솟값 -2

를 갖는다.

즉 구하는 합은

$\dfrac{1}{2}+(-2)=-\dfrac{3}{2}$ ⋯ ❷

답 $-\dfrac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	40 %

유형 20 유리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

본책 109쪽

① 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 한 점에서 만난다.
➡ 방정식 $f(x)=g(x)$가 이차방정식일 때 판별식을 D라 하면
$D=0$
② $y=f(x)$의 그래프를 그리고 주어진 조건을 만족시키도록 직선 $y=g(x)$를 움직여 본다.

0696 함수 $y=\dfrac{x-2}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=kx+1$이 한 점에서 만나므로 $\dfrac{x-2}{x+1}=kx+1$에서

$x-2=(kx+1)(x+1)$

$x-2=kx^2+(k+1)x+1$

$\therefore kx^2+kx+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-12k=0$

$k(k-12)=0$

$\therefore k=12\ (\because k>0)$

답 12

0697 함수 $y=\dfrac{x}{x-2}$의 그래프와 직선 $y=mx-2m$이 만나지 않으므로 $\dfrac{x}{x-2}=\underbrace{mx-2m}_{m(x-2)}$에서

$x=m(x-2)^2$

$\therefore mx^2-(4m+1)x+4m=0$

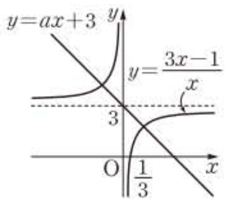
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(4m+1)\}^2-16m^2<0$

$8m+1<0 \qquad \therefore m<-\frac{1}{8}$

따라서 정수 m의 최댓값은 -1이다. 답 ⑤

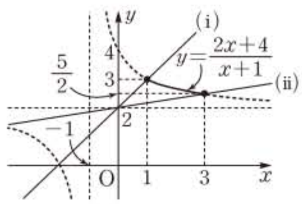
0698 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 $y=\frac{3x-1}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+3$이 만난다.



$y=\frac{3x-1}{x}$, 즉 $y=-\frac{1}{x}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax+3$은 a의 값에 관계없이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$a<0$ 답 $a<0$

0699 $y=\frac{2x+4}{x+1}=\frac{2(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+2$이므로



$1\le x\le 3$에서 $y=\frac{2x+4}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax+2$는 a의 값에 관계없이 점 $(0,\ 2)$를 지난다.

(i) 직선 $y=ax+2$가 점 $(1,\ 3)$을 지날 때,

$3=a+2 \qquad \therefore a=1$

(ii) 직선 $y=ax+2$가 점 $\left(3,\ \frac{5}{2}\right)$를 지날 때,

$\frac{5}{2}=3a+2 \qquad \therefore a=\frac{1}{6}$

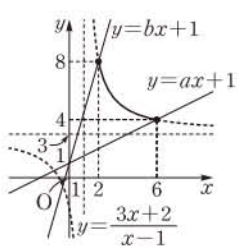
(i), (ii)에서 함수 $y=\frac{2x+4}{x+1}\ (1\le x\le 3)$의 그래프와 직선 $y=ax+2$가 한 점에서 만나려면

$\frac{1}{6}\le a\le 1$

따라서 a의 최댓값은 1, 최솟값은 $\frac{1}{6}$이므로 구하는 합은

$1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$ 답 ③

0700 $y=\frac{3x+2}{x-1}=\frac{3(x-1)+5}{x-1}=\frac{5}{x-1}+3$이므로



$2\le x\le 6$에서 $y=\frac{3x+2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ···➊

이때 두 직선 $y=ax+1$, $y=bx+1$은 a, b의 값에 관계없이 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

(i) 직선 $y=ax+1$이 점 $(6,\ 4)$를 지날 때,

$4=6a+1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $ax+1\le\frac{3x+2}{x-1}$이려면 $\quad a\le\frac{1}{2}$ ···➋

(ii) 직선 $y=bx+1$이 점 $(2,\ 8)$을 지날 때,

$8=2b+1 \qquad \therefore b=\frac{7}{2}$

따라서 $\frac{3x+2}{x-1}\le bx+1$이려면 $\quad b\ge\frac{7}{2}$ ···➌

(i), (ii)에서 $a-b$의 최댓값은

$\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=-3$ ···➍

답 -3

채점 기준	비율
➊ $y=\frac{3x+2}{x-1}$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
➋ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
➌ b의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
➍ $a-b$의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

유형 21 유리함수의 그래프의 활용
본책 110쪽

유리함수의 그래프의 활용 문제는 주어진 유리함수의 그래프 위의 한 점의 좌표를 한 문자를 이용하여 나타낸 후 도형의 길이 또는 넓이를 그 문자에 대한 식으로 나타낸다.
이때 도형의 길이 또는 넓이의 최솟값을 구하는 경우 양수 조건이 있으면 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.
➡ $a>0$, $b>0$일 때,
$a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

0701 점 P의 좌표를 $\left(k,\ \frac{9}{k-1}+3\right)\ (k>1)$이라 하면

$\mathrm{Q}(k,\ 3)$, $\mathrm{R}\left(1,\ \frac{9}{k-1}+3\right)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left(\frac{9}{k-1}+3\right)-3=\frac{9}{k-1}$, $\overline{\mathrm{PR}}=k-1$이고 $k>1$에서 $k-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}&=\frac{9}{k-1}+k-1\\&\ge 2\sqrt{\frac{9}{k-1}\cdot(k-1)}\\&=2\cdot 3\\&=6\ (\text{단, 등호는 }k=4\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

$\frac{9}{k-1}=k-1$에서 $(k-1)^2=9$
$k-1=\pm 3 \quad \therefore k=4\ (\because k>1)$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값은 6이다. 답 ③

0702 점 P의 좌표를 $\left(k,\ \frac{4}{k}\right)\ (k>0)$라 하면

$\mathrm{Q}(k,\ 0)$, $\mathrm{R}\left(0,\ \frac{4}{k}\right)$

사각형 OQPR의 둘레의 길이는

$2\overline{\mathrm{PR}}+2\overline{\mathrm{PQ}}=2k+\frac{8}{k}$

이때 $k>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}2k+\frac{8}{k}&\ge 2\sqrt{2k\cdot\frac{8}{k}}\\&=2\cdot 4\\&=8\ (\text{단, 등호는 }k=2\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

$2k=\frac{8}{k}$에서 $k^2=4$
$\therefore k=2\ (\because k>0)$

따라서 사각형 OQPR의 둘레의 길이의 최솟값은 8이다. 답 8

0703 두 점 P, Q의 좌표를

$\mathrm{P}\left(a,\ \frac{6}{a}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-b,\ -\frac{6}{b}\right)\ (a>0,\ b>0)$

이라 하면

$$A(a,\ 0),\ B\left(0,\ \frac{6}{a}\right),\ C(-b,\ 0),\ D\left(0,\ -\frac{6}{b}\right)$$

육각형 APBCQD의 넓이를 S라 하면

$$S=\square OAPB+\square OCQD+\triangle OBC+\triangle ODA$$
$$=a\cdot\frac{6}{a}+b\cdot\frac{6}{b}+\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{6}{a}+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{6}{b}$$
$$=12+3\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

이때 $a>0$, $b>0$에서 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S=12+3\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$
$$\geq 12+3\cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}$$
$$=12+3\cdot 2$$
$$=18\ (\text{단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립})$$

$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$에서 $a^2=b^2$
$\therefore a=b\ (\because a>0,\ b>0)$

따라서 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값은 18이다. 답 18

0704 점 A의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{a}\right)(a>0)$이라 하면 점 B의 y좌표는 $\frac{1}{a}$이므로 $\frac{1}{a}=\frac{k}{x}$에서

$$x=ak \qquad \therefore B\left(ak,\ \frac{1}{a}\right)$$

또 점 C의 x좌표가 a이므로 점 C의 좌표는 $\left(a,\ \frac{k}{a}\right)$

$$\therefore \overline{AB}=ak-a=a(k-1),\ \overline{AC}=\frac{k}{a}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a}(k-1)$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 72이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=72$$
$$\frac{1}{2}\cdot a(k-1)\cdot\frac{1}{a}(k-1)=72$$
$$(k-1)^2=144, \qquad k-1=\pm 12$$
$$\therefore k=13\ (\because k>1)$$

답 ④

유형 22 유리함수의 합성 본책 111쪽

$f^n(k)$의 값 구하기 (단, n은 자연수)
➡ [방법 1] $f^1(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, …를 직접 구하여 $f^n(x)$를 추정한 다음 x 대신 k를 대입한다.
[방법 2] $f^1(k)$, $f^2(k)$, $f^3(k)$, …에서 규칙을 찾아 $f^n(k)$의 값을 추정한다.

0705 $f(x)=\frac{x-1}{x}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{-1}{x-1}$$
$$f^3(x)=(f^2\circ f)(x)=f^2(f(x))=\frac{-1}{\frac{x-1}{x}-1}=x$$

따라서 함수 $f^3(x)=f^6(x)=f^9(x)=\cdots=f^{3n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$$f^{100}(x)=f^{3\times 33+1}(x)=f(x)$$
$$\therefore f^{100}(8)=f(8)=\frac{8-1}{8}=\frac{7}{8}$$

답 $\frac{7}{8}$

참고 $f^1(8)=\frac{7}{8}$, $f^2(8)=-\frac{1}{7}$, $f^3(8)=8$, $f^4(8)=\frac{7}{8}$, …이므로 $f^n(8)$은 $\frac{7}{8}$, $-\frac{1}{7}$, 8이 이 순서대로 반복된다.

0706 $$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=x$$

즉 $(f\circ f)(k)=\frac{1}{k}$에서 $\qquad k=\frac{1}{k}$

$$k^2=1 \qquad \therefore k=-1\ (\because k\neq 1)$$

함수 $y=f(x)$의 정의역이 $\{x\,|\,x\neq 1\text{인 실수}\}$이므로 $k\neq 1$

답 ③

0707 $f(x)=\frac{x}{1-x}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$$
$$=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x} \quad \cdots ❶$$
$$f^3(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))$$
$$=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x} \quad \cdots ❷$$

같은 방법으로 하면 $\quad f^{10}(x)=\frac{x}{1-10x}$ $\cdots$ ❸

따라서 $a=1$, $b=0$, $c=-10$이므로

$$a+b+c=-9 \quad \cdots ❹$$

답 -9

채점 기준	비율
❶ $f^2(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f^3(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f^{10}(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 $f^n(x)=\frac{x}{1-nx}$ (단, n은 자연수)

0708 주어진 그래프에서

$$f^1(0)=f(0)=1,\ f^1(1)=f(1)=0$$

이므로

$$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f^1(1))=f(0)=1$$
$$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(1)=0$$
$$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(0)=1$$
$$f^5(1)=(f\circ f^4)(1)=f(f^4(1))=f(1)=0$$
$$\vdots$$
$$\therefore f^n(1)=\begin{cases}0 & (n\text{은 홀수})\\ 1 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$
$$\therefore f^{2021}(1)=0$$

답 0

다른 풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=2$이고 두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$을 지나므로

$$f(x)=\frac{2}{x-2}+2$$

$f(x)=\dfrac{2}{x-2}+2$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{2}{\dfrac{2}{x-2}+2-2}+2=x$$

따라서 함수 $f^2(x)=f^4(x)=f^6(x)=\cdots=f^{2n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{2021}(x)=f^{2\times1010+1}(x)=f(x)$

$\therefore f^{2021}(1)=f(1)=0$

유형 23 유리함수의 역함수

본책 111쪽

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq0,\ ad-bc\neq0)$의 역함수 구하기

(i) x를 y에 대한 식으로 나타낸다. ➡ $x=\dfrac{dy-b}{-cy+a}$

(ii) x와 y를 서로 바꾼다. ➡ $y=\dfrac{dx-b}{-cx+a}$

0709 $y=\dfrac{ax}{2x+3}$라 하면 $\quad y(2x+3)=ax$

$(2y-a)x=-3y \qquad \therefore x=\dfrac{-3y}{2y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{-3x}{2x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-3x}{2x-a}$

$f=f^{-1}$이므로 $\quad \dfrac{ax}{2x+3}=\dfrac{-3x}{2x-a}$

$\therefore a=-3$

답 ①

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로 $\quad (f\circ f)(x)=x$

$f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$에서

$$f(f(x))=\dfrac{af(x)}{2f(x)+3}=\dfrac{a\cdot\dfrac{ax}{2x+3}}{2\cdot\dfrac{ax}{2x+3}+3}=\dfrac{a^2x}{2(a+3)x+9}$$

따라서 $\dfrac{a^2x}{2(a+3)x+9}=x$이므로

$2(a+3)x^2+9x=a^2x$

$\therefore 2(a+3)x^2+(9-a^2)x=0$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+3=0,\ 9-a^2=0$

$\therefore a=-3$

0710 $y=\dfrac{4x-3}{x+a}$이라 하면 $\quad y(x+a)=4x-3$

$(y-4)x=-ay-3 \qquad \therefore x=\dfrac{-ay-3}{y-4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{-ax-3}{x-4}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-ax-3}{x-4}$

따라서 $\dfrac{-ax-3}{x-4}=\dfrac{2x+b}{x+c}$이므로

$-a=2,\ b=-3,\ c=-4$

$\therefore a=-2,\ b=-3,\ c=-4$

$\therefore abc=-24$

답 ①

0711 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 그래프가 점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$-2=\dfrac{3a+b}{3-2} \qquad \therefore 3a+b=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 역함수의 그래프가 점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 그래프는 점 $(-2,\ 3)$을 지난다. 즉

$3=\dfrac{-2a+b}{-2-2} \qquad \therefore -2a+b=-12 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=-8$

$\therefore a+b=-6$

답 ③

SSEN 특강 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점을 $(a,\ b)$라 하면

$b=f(a) \Longleftrightarrow a=f^{-1}(b)$

가 성립한다.

0712 두 직선 $y=x+5$, $y=-x-3$의 교점의 x좌표는

$x+5=-x-3 \qquad \therefore x=-4$

$\therefore y=1$

즉 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-4,\ 1)$에 대하여 대칭이므로 그 역함수의 그래프는 점 $(1,\ -4)$에 대하여 대칭이다.

따라서 점 $(1,\ -4)$는 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$의 교점이므로

$a+b=-4,\ c+d=-4$

$\therefore a+b+c+d=-8$

답 -8

유형 24 유리함수의 합성함수와 역함수

본책 112쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$에 대하여

➡ $(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))$

$\quad (g^{-1}\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))$

0713 $f^{-1}\circ f=I$(항등함수)이므로

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(5)=(I\circ f^{-1})(5)=f^{-1}(5)$

$f^{-1}(5)=k$라 하면 $\quad f(k)=5$

$\dfrac{2k-3}{k-3}=5, \qquad 2k-3=5k-15$

$\therefore k=4$

답 4

0714 $(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(3)=k$라 하면 $\quad f(k)=3$

$\dfrac{2k-4}{k-1}=3, \qquad 2k-4=3k-3$

$\therefore k=-1 \qquad \cdots$ ❶

$g(-1)=t$라 하면 $\quad f(t)=-1$

$\dfrac{2t-4}{t-1}=-1, \qquad 2t-4=-t+1$

$\therefore t=\dfrac{5}{3} \qquad \cdots$ ❷

$\therefore (g \circ g)(3)=g(g(3))=g(-1)=\frac{5}{3}$ ⋯ ❸

답 $\frac{5}{3}$

채점 기준	비율
❶ $g(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(-1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $(g \circ g)(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $y=\frac{2x-4}{x-1}$라 하면 $\quad y(x-1)=2x-4$

$(y-2)x=y-4 \qquad \therefore x=\frac{y-4}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{x-4}{x-2}$

$\therefore g(x)=\frac{x-4}{x-2}$

따라서 $g(3)=\frac{3-4}{3-2}=-1$, $g(-1)=\frac{-1-4}{-1-2}=\frac{5}{3}$이므로

$(g \circ g)(3)=g(g(3))=g(-1)=\frac{5}{3}$

0715 $(f^{-1} \circ g)^{-1}(3)=(g^{-1} \circ f)(3)$

$=g^{-1}(f(3))$

$=g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

$g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=k$라 하면 $\quad g(k)=\frac{3}{2}$

$\frac{2k-1}{k}=\frac{3}{2}, \qquad 4k-2=3k$

$\therefore k=2$

$\therefore (f^{-1} \circ g)^{-1}(3)=2$

답 ③

0716 **전략** 주어진 저항이 직렬 연결인지 병렬 연결인지 확인하여 식에 대입한다.

풀이 병렬 연결된 부분의 전체 저항의 크기를 $R'(\Omega)$이라 하면

$$\frac{1}{R'}=\frac{1}{R+1}+\frac{1}{2R}=\frac{2R+(R+1)}{2R(R+1)}=\frac{3R+1}{2R^2+2R}$$

$\therefore R'=\frac{2R^2+2R}{3R+1}(\Omega)$

따라서 구하는 전체 저항의 크기는

$$R+R'=R+\frac{2R^2+2R}{3R+1}$$
$$=\frac{3R^2+R+2R^2+2R}{3R+1}$$
$$=\frac{5R^2+3R}{3R+1}(\Omega)$$

답 ④

0717 **전략** $\frac{-4x+6y+a}{3x-by+2}=k$ (k는 실수)로 놓고 식을 변형하여 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 $\frac{-4x+6y+a}{3x-by+2}=k$ (k는 실수)로 놓으면

$-4x+6y+a=k(3x-by+2)$

$\therefore (3k+4)x-(bk+6)y+2k-a=0$ ⋯ ❶

이 식이 x, y에 대한 항등식이므로

$3k+4=0$, $bk+6=0$, $2k-a=0$

$\therefore k=-\frac{4}{3}$, $a=-\frac{8}{3}$, $b=\frac{9}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=\frac{11}{6}$ ⋯ ❸

답 $\frac{11}{6}$

채점 기준	비율
❶ $\frac{-4x+6y+a}{3x-by+2}=k$ (k는 실수)로 놓고 식을 변형할 수 있다.	40 %
❷ a, b, k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0718 **전략** $f(n)f(101-n)=1$임을 이용하여 $\frac{1}{1+f(n)}$을 구한다.

풀이 $f(n)f(101-n)=1$이므로 $\quad f(n)=\frac{1}{f(101-n)}$

$$\therefore \frac{1}{1+f(n)}=\frac{1}{1+\frac{1}{f(101-n)}}=\frac{f(101-n)}{1+f(101-n)}$$

따라서

$$\frac{1}{1+f(n)}+\frac{1}{1+f(101-n)}=\frac{f(101-n)+1}{1+f(101-n)}=1$$

이므로

$$\frac{1}{1+f(1)}+\frac{1}{1+f(2)}+\frac{1}{1+f(3)}+\cdots+\frac{1}{1+f(100)}=50$$

답 50

0719 **전략** $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=k\,(k>0)$로 놓고 $b=ak$, $d=ck$임을 이용하여 식을 정리한다.

풀이 ㄱ. $ad-bc=0$에서 $bc=ad$이므로 양변을 ac로 나누면

$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

ㄴ. $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=k\ (k>0)$로 놓으면 $b=ak$, $d=ck$이므로

$$\frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{a^2+c^2}{a\cdot ak+c\cdot ck}=\frac{a^2+c^2}{(a^2+c^2)k}=\frac{1}{k}$$
$$\frac{2ac}{ad+bc}=\frac{2ac}{a\cdot ck+ak\cdot c}=\frac{2ac}{2ack}=\frac{1}{k}$$
$$\therefore \frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{2ac}{ad+bc}$$

ㄷ. ㄴ에서 $b=ak$, $d=ck$이므로

$$\frac{b^3+d^3}{a^3+c^3}=\frac{a^3k^3+c^3k^3}{a^3+c^3}=\frac{(a^3+c^3)k^3}{a^3+c^3}=k^3$$
$$\frac{(b+d)^3}{(a+c)^3}=\frac{(ak+ck)^3}{(a+c)^3}=\frac{(a+c)^3k^3}{(a+c)^3}=k^3$$
$$\therefore \frac{b^3+d^3}{a^3+c^3}=\frac{(b+d)^3}{(a+c)^3}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

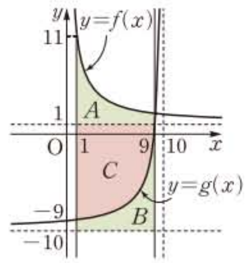
답 ⑤

0720 **전략** 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그려 도형의 넓이를 구한다.

풀이 함수 $y=\frac{10}{x}+1$의 그래프는 함수 $y=\frac{10}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

또 함수 $y=\frac{10}{10-x}-10$의 그래프는 함수 $y=\frac{10}{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 10만큼, y축의 방향으로 -10만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



이때

$(A$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$ ⋯ ❷

이므로 구하는 넓이는

$(A$의 넓이$)+(C$의 넓이$)$

$=(B$의 넓이$)+(C$의 넓이$)$

$=(9-1)\cdot\{1-(-10)\}$

$=8\cdot 11=88$ ⋯ ❸

답 88

채점 기준	비율
❶ 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷ $(A$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$임을 알 수 있다.	30 %
❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

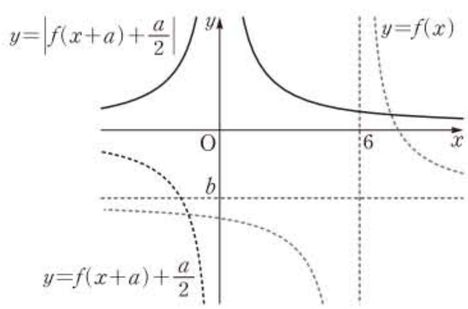
0721 전략 $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때의 조건을 생각한다.

풀이 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $\frac{a}{2}$만큼 평행이동한 것이고,

$y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$의 그래프는 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이려면

$y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식은 다음 그림과 같이 $x=0$, $y=0$이어야 한다.



이때 $f(x)=\frac{a}{x-6}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=6$, $y=b$이므로 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=6-a$, $y=b+\frac{a}{2}$

이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 하므로

$6-a=0$, $b+\frac{a}{2}=0$

$\therefore a=6$, $b=-3$

따라서 $f(x)=\frac{6}{x-6}-3$이므로

$f(b)=f(-3)=\frac{6}{-3-6}-3=-\frac{11}{3}$

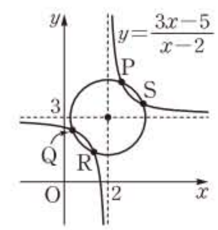
답 ④

0722 전략 원의 중심이 두 점근선의 교점임을 이용한다.

풀이 $y=\frac{3x-5}{x-2}=\frac{3(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}+3$이므로 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=3$

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\frac{3x-5}{x-2}$의 그래프와 중심의 좌표가 $(2, 3)$인 원이 만나는 네 점을 각각 P, Q, R, S라 하면 두 점 P, R와 S, Q는 각각 점 $(2, 3)$에 대하여 대칭이다.



따라서 네 점 P, Q, R, S의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3, x_4라 하면

$\frac{x_1+x_3}{2}=2$, $\frac{x_2+x_4}{2}=2$ — $\overline{PR}$, $\overline{SQ}$의 중점의 x좌표가 2이다.

$\therefore x_1+x_3=4$, $x_2+x_4=4$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=8$

답 ②

0723 전략 평행이동한 그래프의 점근선을 이용한다.

풀이 $y=\frac{3x-10}{x-4}=\frac{3(x-4)+2}{x-4}=\frac{2}{x-4}+3$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{2}{x-m-4}+3+n$

이 그래프의 점근선의 방정식은

$x=m+4$, $y=3+n$

이므로 그래프가 y축과 만나지 않으려면

$m+4=0$ $\quad\therefore m=-4$ — 그래프의 점근선의 방정식 중 하나가 $x=0$이어야 한다.

점 $(m+4, 3+n)$, 즉 $(0, 3+n)$은 직선 $y=x-3$ 위의 점이므로

$3+n=-3$ $\quad\therefore n=-6$

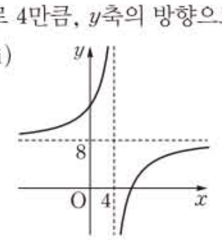
$\therefore mn=24$

답 24

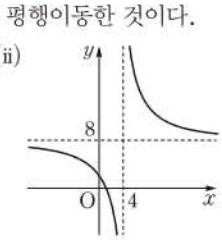
0724 전략 $k<0$, $k>0$일 때로 나누어 조건을 만족시키는 함수의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\frac{k}{x-4}+8$의 그래프는 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것이다.

(i)



(ii)



(i) $k<0$일 때, k의 값에 관계없이 $y=\frac{k}{x-4}+8$의 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.

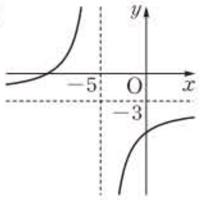
(ii) $k>0$일 때, 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 $x=0$일 때 $y\geq 0$이어야 하므로 $y<0$이면 모든 사분면을 지난다.

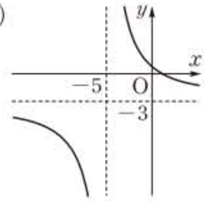
$\dfrac{k}{0-4}+8\geq 0$, $\quad \dfrac{k}{4}\leq 8$

$\therefore\ 0<k\leq 32\ (\because\ k>0)$

(i), (ii)에서 $\quad k<0$ 또는 $0<k\leq 32$ ······ ㉠

한편 $y=\dfrac{k}{x+5}-3$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

(iii) 

(iv) 

(iii) $k<0$일 때, k의 값에 관계없이 $y=\dfrac{k}{x+5}-3$의 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

(iv) $k>0$일 때, 그래프가 모든 사분면을 지나려면 $x=0$일 때 $y>0$이어야 하므로 $y\leq 0$이면 제1사분면을 지나지 않는다.

$\dfrac{k}{0+5}-3>0$, $\quad \dfrac{k}{5}>3$

$\therefore\ k>15$

(iii), (iv)에서 $\quad k>15$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 15<k\leq 32$

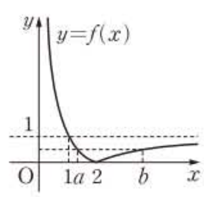
따라서 구하는 정수 k는 16, 17, 18, ⋯, 32의 17개이다.

답 ④

0725 전략 $y=f(x)$의 그래프를 그려 $f(a)=f(b)$를 만족시키는 a, b의 위치를 찾는다.

풀이 $f(x)=\left|\dfrac{2-x}{x}\right|=\left|\dfrac{2}{x}-1\right|$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(a)=f(b)$이려면

$1<a<2$, $b>2$

이어야 한다.

ㄴ. 위의 그림에서 $\quad 0<f(b)<1$

ㄷ. $f(a)=\dfrac{2-a}{a}$, $f(b)=\dfrac{b-2}{b}$이므로

$$f(a)+f(b)=\frac{2-a}{a}+\frac{b-2}{b}=\frac{2b-ab+ab-2a}{ab}=\frac{2(b-a)}{ab}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

참고 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 그린다.

0726 전략 함수 $y=\dfrac{l}{x}$의 그래프는 $l>0$인 경우 제1사분면과 제3사분면을 지나고, $l<0$인 경우 제2사분면과 제4사분면을 지남을 이용한다.

풀이 $y=\dfrac{2x+k}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+k-2}{x+1}=\dfrac{k-2}{x+1}+2$ ⋯ ❶

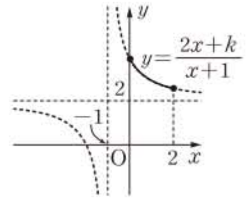
$k=2$이면 $y=\dfrac{2x+k}{x+1}=2$이므로 최댓값이 1이 아니다.

$\therefore\ k\neq 2$

(i) $k>2$일 때,

주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $0\leq x\leq 2$에서 $x=0$일 때 최대이므로 $\quad k=1$

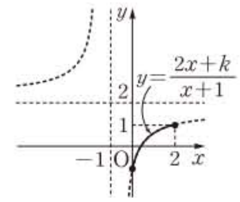
그런데 $k>2$이어야 하므로 모순이다. ⋯ ❷



(ii) $k<2$일 때,

주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $0\leq x\leq 2$에서 $x=2$일 때 최대이므로 $\quad \dfrac{4+k}{3}=1$

$\therefore\ k=-1$ ⋯ ❸



(i), (ii)에서 $\quad k=-1$ ⋯ ❹

답 -1

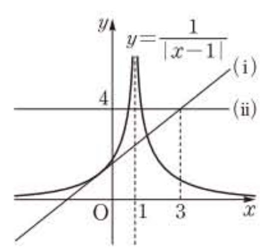
채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $y=\dfrac{l}{x-p}+q$ 꼴로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $k>2$일 때, k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $k<2$일 때, k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0727 전략 함수 $y=\dfrac{1}{|x-1|}$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\dfrac{1}{|x-1|}=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & (x>1)\\ -\dfrac{1}{x-1} & (x<1)\end{cases}$

직선 $y=kx+4-3k=k(x-3)+4$는 k의 값에 관계없이 점 $(3,\ 4)$를 지난다.

함수 $y=\dfrac{1}{|x-1|}$의 그래프와 직선 $y=kx+4-3k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 함수 $y=-\dfrac{1}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=kx+4-3k$가 접할 때,

$-\dfrac{1}{x-1}=kx+4-3k$에서

$kx^2+4x-3kx-kx-4+3k=-1$

$\therefore\ kx^2+4(1-k)x-3(1-k)=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{2(1-k)\}^2+3k(1-k)=0$

$(1-k)\{4(1-k)+3k\}=0$

$(1-k)(4-k)=0 \quad \therefore\ k=1$ 또는 $k=4$

이때 직선 $y=kx+4-3k$의 y절편은 0보다 크므로 $\quad k=1$

$4-3k>0$에서 $k<\dfrac{4}{3}$

(ii) 직선 $y=kx+4-3k$가 x축에 평행할 때,

$k=0$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은 $\quad 1+0=1$

답 1

0728 전략 주어진 조건을 이용하여 S_1+S_2를 a에 대한 식으로 나타내고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 두 점 $A(-1, -1)$, $B\left(a, \frac{1}{a}\right)$ $(a>1)$을 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{\frac{1}{a}-(-1)}{a-(-1)}=\frac{\frac{1}{a}+1}{a+1}=\frac{\frac{a+1}{a}}{a+1}=\frac{1}{a}$$

이므로 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{a}(x+1)-1 \qquad \therefore y=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}-1$$

이때 점 P, Q의 좌표는

$$P(a-1, 0), Q\left(0, \frac{1}{a}-1\right)$$

이므로

$$\overline{OP}=a-1, \overline{OQ}=1-\frac{1}{a},$$

$$\overline{PB'}=a-(a-1)=1, \overline{BB'}=\frac{1}{a}$$

삼각형의 넓이 S_1, S_2는

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=\frac{1}{2}\cdot(a-1)\cdot\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\frac{a^2-2a+1}{2a}=\frac{a}{2}-1+\frac{1}{2a},$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{BB'}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}$$

$$\therefore S_1+S_2=\frac{a}{2}-1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}$$

$$=\frac{a}{2}+\frac{1}{a}-1$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a}}-1$$

$\frac{a}{2}>0$, $\frac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$=\sqrt{2}-1$ (단, 등호는 $a=\sqrt{2}$일 때 성립)

따라서 S_1+S_2의 최솟값은 $\sqrt{2}-1$이다. 답 ⑤

0729 전략 먼저 세 점 A, B, P의 좌표를 구한다.

풀이 $y=\frac{k}{x-1}+3$에서

$y=0$이면 $x=1-\frac{k}{3}=\frac{3-k}{3}$이므로 $\quad A\left(\frac{3-k}{3}, 0\right)$

$x=0$이면 $y=3-k$이므로 $\quad B(0, 3-k)$

두 점근선의 교점을 R라 하면 $\quad R(1, 3)$

이때 선분 BP의 중점이 R이므로 $P(a, b)$라 하면

$$\frac{0+a}{2}=1, \frac{3-k+b}{2}=3$$

$$\therefore a=2, b=3+k$$

$$\therefore P(2, 3+k)$$

ㄱ. $k=1$이면 $\quad P(2, 4)$

ㄴ. 직선 AB의 기울기는 $\quad \dfrac{0-(3-k)}{\frac{3-k}{3}-0}=-3$

직선 AP의 기울기는 $\quad \dfrac{0-(3+k)}{\frac{3-k}{3}-2}=3$

따라서 두 기울기의 합은

$$-3+3=0$$

ㄷ. $\square PBAQ=\square PBOQ-\triangle OAB$

$$=\frac{1}{2}\cdot\{(3-k)+(3+k)\}\cdot2-\frac{1}{2}\cdot\frac{3-k}{3}\cdot(3-k)$$

$$=6-\frac{(3-k)^2}{6}$$

점 A의 x좌표는 1보다 작고 점 B의 y좌표는 3보다 작으므로 $\triangle OAB$의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot1\cdot3=\frac{3}{2}$보다 작다.

이때 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{3}{2}$보다 작고, 사각형 PBAQ의 넓이가 자연수이므로 삼각형 OAB의 넓이는 1이어야 한다.

$\frac{(3-k)^2}{6}=1$에서 $\qquad (3-k)^2=6$

$\therefore k=3-\sqrt{6}$ ($\because 0<k<3$)

직선 BP의 기울기는 $\frac{(3+k)-(3-k)}{2-0}=k$이고

$0<k=3-\sqrt{6}<1$이므로 직선 BP의 기울기는 0과 1 사이의 값이다.

$2<\sqrt{6}<3$이므로 $0<3-\sqrt{6}<1$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0730 전략 $(f\circ f)(x)=x$이면 $f(x)=f^{-1}(x)$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $ab=-6$이면 $b=-\frac{6}{a}$이므로

$$f(x)=\frac{ax+6}{x-b}=\frac{a\left(x+\frac{6}{a}\right)}{x+\frac{6}{a}}=a$$

따라서 함수 $f(x)$는 상수함수이므로

$$ab\neq-6$$

ㄴ. $(f\circ f)(x)=x$이므로 $\qquad f(x)=f^{-1}(x)$

$y=\frac{ax+6}{x-b}$이라 하면 $\qquad (x-b)y=ax+6$

$$(y-a)x=by+6 \qquad \therefore x=\frac{by+6}{y-a}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\frac{bx+6}{x-a}$

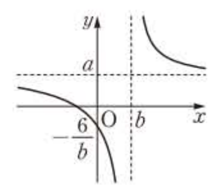
따라서 $f^{-1}(x)=\frac{bx+6}{x-a}$이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$에서

$$\frac{ax+6}{x-b}=\frac{bx+6}{x-a} \qquad \therefore a=b$$

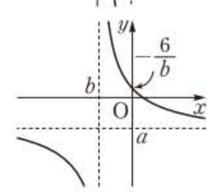
ㄷ. $f(x)=\frac{ax+6}{x-b}=\frac{a(x-b)+ab+6}{x-b}=\frac{ab+6}{x-b}+a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=b$, $y=a$이고 y절편은 $-\frac{6}{b}$이다.

한편 ㄴ에서 $a=b$이므로 $\qquad ab+6=a^2+6>0$

(i) $a>0$, $b>0$일 때, $-\frac{6}{b}<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 2, 3, 4사분면을 모두 지난다.



(ii) $a<0$, $b<0$일 때, $-\frac{6}{b}>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 2, 3, 4사분면을 모두 지난다.



(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제1, 2, 3, 4사분면을 모두 지난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0731 전략 도형의 평행이동을 이용하여 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{2x+b}{x-a}=\frac{2(x-a)+2a+b}{x-a}=\frac{2a+b}{x-a}+2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=2$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(a, 2)$이다.

이때 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(2, a)$이다.

조건 (가)에서 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표는 $(a+4, -2)$이다.

점 $(a, 2)$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점의 좌표

점 $(2, a)$와 점 $(a+4, -2)$가 같으므로

$a=-2$

한편 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\frac{2a+b}{x}$의 그래프를 평행이동한 그래프와 일치하고 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 평행이동하면 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프와 일치하므로

$2a+b=3, \quad -4+b=3 \quad \therefore b=7$

$\therefore a+b=5$ 답 ⑤

다른 풀이 $y=\frac{2x+b}{x-a}$라 하면 $\quad (x-a)y=2x+b$

$(y-2)x=ay+b \quad \therefore x=\frac{ay+b}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{ax+b}{x-2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{ax+b}{x-2}$

함수 $y=\frac{2x+b}{x-a}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{2(x-4)+b}{(x-4)-a}-4$$
$$=\frac{2(x-4)+b-4(x-4-a)}{x-4-a}$$
$$=\frac{-2x+4a+8+b}{x-4-a}$$

조건 (가)에 의하여

$$\frac{ax+b}{x-2}=\frac{-2x+4a+8+b}{x-4-a}$$

이므로

$a=-2$, $b=4a+8+b$, $-2=-4-a$

한편 $f(x)=\frac{2x+b}{x+2}=\frac{2(x+2)+b-4}{x+2}=\frac{b-4}{x+2}+2$이므로 조건 (나)에 의하여

$b-4=3 \quad \therefore b=7$

$\therefore a+b=5$

06 무리식과 무리함수

0732 $x+2\geq0$이므로 $\quad x\geq-2$ 답 $x\geq-2$

0733 $x-1\geq0$, $x+4\geq0$이므로 $\quad x\geq1$, $x\geq-4$

$\therefore x\geq1$ 답 $x\geq1$

0734 $x-2\geq0$, $\underbrace{3-x>0}_{(\text{근호 안의 식의 값})\geq0,\ (\text{분모})\neq0}$이므로 $\quad x\geq2$, $x<3$

$\therefore 2\leq x<3$ 답 $2\leq x<3$

0735 $x\geq0$, $6x+6>0$이므로 $\quad x\geq0$, $x>-1$

$\therefore x\geq0$ 답 $x\geq0$

0736 $x+1\geq0$, $5-x>0$이므로 $\quad x\geq-1$, $x<5$

$\therefore -1\leq x<5$ 답 $-1\leq x<5$

0737 $a>0$, $2b<0$, $a-b>0$이므로

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{4b^2}+\sqrt{(a-b)^2}=|a|+|2b|+|a-b|$$
$$=a-2b+a-b$$
$$=2a-3b$$ 답 $2a-3b$

0738 $x-1>0$, $x-2<0$이므로

$$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=|x-1|+|x-2|$$
$$=x-1-(x-2)$$
$$=1$$ 답 1

0739 $(\sqrt{x-1}+3)(\sqrt{x-1}-3)=(\sqrt{x-1})^2-3^2$
$$=x-1-9$$
$$=x-10$$ 답 $x-10$

0740 $(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})=(\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{x})^2$
$$=x-2-x$$
$$=-2$$ 답 -2

0741 $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})$
$$=(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2$$
$$=x+1-(x-1)$$
$$=2$$ 답 2

0742 $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$
$$=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}$$
$$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$ 답 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

0743 $\dfrac{4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$

$=\dfrac{4(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}$

$=\dfrac{4(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{x+2-(x-2)}$

$=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$ 답 $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$

0744 $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$

$=\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}$ 답 $\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}$

0745 $\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}=\dfrac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}$

$=\dfrac{x-1+2\sqrt{x(x-1)}+x}{x-1-x}$

$=-2x+1-2\sqrt{x(x-1)}$

답 $-2x+1-2\sqrt{x(x-1)}$

0746 $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}$

$=\dfrac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1}{x^2-x^2+1}$

$=2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}$

답 $2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}$

0747 $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$

$=\dfrac{2\sqrt{a}}{a-b}$ 답 $\dfrac{2\sqrt{a}}{a-b}$

0748 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{x-\sqrt{3x}+\sqrt{3x}+3}{x-3}$

$=\dfrac{x+3}{x-3}$ 답 $\dfrac{x+3}{x-3}$

0749 $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}+1}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}-1}$

$=\dfrac{(x-1)(\sqrt{x+1}-1)-(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}$

$=\dfrac{-2x-2\sqrt{x+1}}{x+1-1}$

$=\dfrac{-2(x+\sqrt{x+1})}{x}$ 답 $\dfrac{-2(x+\sqrt{x+1})}{x}$

0750 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+6}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})}$

$+\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4})}$

$+\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+6}}{(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+6})(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+6})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{x-(x+2)}+\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}}{x+2-(x+4)}+\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+6}}{x+4-(x+6)}$

$=-\dfrac{1}{2}(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})-\dfrac{1}{2}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4})$

$-\dfrac{1}{2}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+6})$

$=\dfrac{-\sqrt{x}+\sqrt{x+6}}{2}$ 답 $\dfrac{-\sqrt{x}+\sqrt{x+6}}{2}$

0751 $\underbrace{\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}=\dfrac{2}{1-x}}$ 먼저 주어진 식을 간단히 한다.

$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$를 $\dfrac{2}{1-x}$에 대입하면

$\dfrac{2}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{4}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{4(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=2(2+\sqrt{2})$

답 $2(2+\sqrt{2})$

0752 ㄴ. $y=-\sqrt{3}x$는 다항함수이다.

ㄹ. $y=\sqrt{(x+2)^2}$, 즉 $y=|x+2|$는 무리함수가 아니다.

이상에서 무리함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ

0753 $x+1\geq0$에서 $x\geq-1$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\geq-1\}$ 답 $\{x|x\geq-1\}$

0754 $-x\geq0$에서 $x\leq0$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\leq0\}$ 답 $\{x|x\leq0\}$

0755 $2x-3\geq0$에서 $x\geq\dfrac{3}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x\middle|x\geq\dfrac{3}{2}\right\}$ 답 $\left\{x\middle|x\geq\dfrac{3}{2}\right\}$

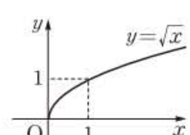
0756 $4-x^2\geq0$에서 $x^2-4\leq0$

$(x+2)(x-2)\leq0$ $\therefore -2\leq x\leq2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|-2\leq x\leq2\}$ 답 $\{x|-2\leq x\leq2\}$

0757 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

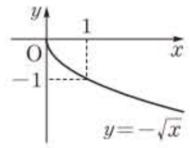


정의역: $\{x|x\geq0\}$,

치역: $\{y|y\geq0\}$

답 풀이 참조

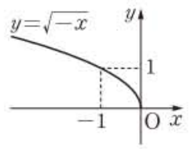
0758 $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



정의역: $\{x|x\geq 0\}$,
치역: $\{y|y\leq 0\}$

답 풀이 참조

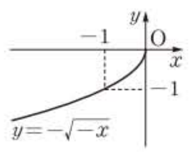
0759 $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



정의역: $\{x|x\leq 0\}$,
치역: $\{y|y\geq 0\}$

답 풀이 참조

0760 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



정의역: $\{x|x\leq 0\}$,
치역: $\{y|y\leq 0\}$

답 풀이 참조

0761 y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=\sqrt{-3x}$ $\therefore y=-\sqrt{-3x}$

답 $y=-\sqrt{-3x}$

0762 x 대신 $-x$를 대입하면
$y=\sqrt{-3(-x)}$ $\therefore y=\sqrt{3x}$

답 $y=\sqrt{3x}$

0763 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=\sqrt{-3(-x)}$ $\therefore y=-\sqrt{3x}$

답 $y=-\sqrt{3x}$

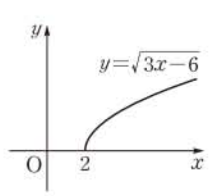
0764 $y=\sqrt{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-1=\sqrt{5\{x-(-1)\}}$ $\therefore y=\sqrt{5(x+1)}+1$

답 $y=\sqrt{5(x+1)}+1$

0765 $y=\sqrt{4-2x}+2=\sqrt{-2(x-2)}+2$
따라서 $y=\sqrt{4-2x}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
$\therefore a=2,\ b=2$

답 $a=2,\ b=2$

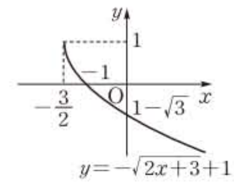
0766 $y=\sqrt{3x-6}=\sqrt{3(x-2)}$
따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



정의역: $\{x|x\geq 2\}$,
치역: $\{y|y\geq 0\}$

답 풀이 참조

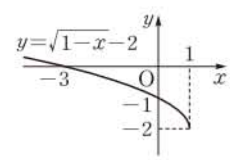
0767 $y=-\sqrt{2x+3}+1=-\sqrt{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}+1$
따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



정의역: $\left\{x \middle| x\geq -\frac{3}{2}\right\}$,
치역: $\{y|y\leq 1\}$

답 풀이 참조

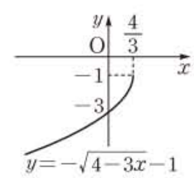
0768 $y=\sqrt{1-x}-2=\sqrt{-(x-1)}-2$
따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



정의역: $\{x|x\leq 1\}$,
치역: $\{y|y\geq -2\}$

답 풀이 참조

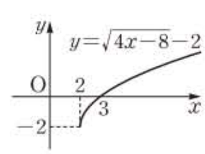
0769 $y=-\sqrt{4-3x}-1=-\sqrt{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}-1$
따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



정의역: $\left\{x \middle| x\leq \frac{4}{3}\right\}$,
치역: $\{y|y\leq -1\}$

답 풀이 참조

0770 $y=\sqrt{4x-8}-2=\sqrt{4(x-2)}-2$
따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. 치역은 $\{y|y\geq -2\}$이다.
ㄷ. 그래프는 함수 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

유형 01 무리식의 값이 실수가 되기 위한 조건 본책 122쪽

① $\sqrt{A}$의 값이 실수이려면 ➡ $A\geq 0$
② $\frac{1}{\sqrt{A}}$의 값이 실수이려면 ➡ $A>0$

0771 $6x^2+5x-4\geq 0$에서 $(3x+4)(2x-1)\geq 0$
$\therefore x\leq -\frac{4}{3}$ 또는 $x\geq \frac{1}{2}$

답 $x\leq -\frac{4}{3}$ 또는 $x\geq \frac{1}{2}$

0772 $4-3x\ge 0$에서 $\quad x\le\frac{4}{3}$

$x+3>0$에서 $\quad x>-3$

$\therefore\ -3<x\le\frac{4}{3}$

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4개이다. 답 ④

0773 $x+3\ge 0$이므로 $\quad x\ge -3$ ······ ㉠

$3-x\ge 0$이므로 $\quad x\le 3$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는 $\quad -3\le x\le 3$ ··· ❶

$-3\le x\le 3$일 때, $2x-7<0,\ x-4<0$이므로

$$\begin{aligned}|2x-7|-\sqrt{x^2-8x+16}&=|2x-7|-\sqrt{(x-4)^2}\\&=|2x-7|-|x-4|\\&=-(2x-7)+(x-4)\\&=-x+3\end{aligned}$$ ··· ❷

답 $-x+3$

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %

0774 $n+x\ge 0$이므로 $\quad x\ge -n$ ······ ㉠

$n-x\ge 0$이므로 $\quad x\le n$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{n+x}-\sqrt{n-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는

$-n\le x\le n$

$n=3$일 때 x의 값의 범위는 $-3\le x\le 3$이므로 $\quad f(3)=7$

$n=4$일 때 x의 값의 범위는 $-4\le x\le 4$이므로 $\quad f(4)=9$

$\therefore\ f(3)+f(4)=16$ 답 ⑤

참고 $-n\le x\le n$을 만족시키는 정수 x는

$\underbrace{-n,\ -(n-1),\ \cdots,\ -1}_{n\text{개}},\ 0,\ \underbrace{1,\ \cdots,\ n-1,\ n}_{n\text{개}}$의 $(2n+1)$개이므로

$f(n)=2n+1$

유형 02 무리식의 계산 본책 122쪽

무리식의 계산은 제곱근의 성질과 분모의 유리화를 이용한다.
이때 분모에 근호를 포함한 수 또는 식은
$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$
임을 이용하여 분모를 유리화한다.

0775 $$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\\&=\frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})+(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}\\&=\frac{2\sqrt{x-1}}{x-1-x}\\&=-2\sqrt{x-1}\end{aligned}$$

답 ⑤

0776 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$에서 $a>0,\ b<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-2ab+b^2}+2|a|-\sqrt{b^2}&=\sqrt{(a-b)^2}+2|a|-\sqrt{b^2}\\&=|a-b|+2|a|-|b|\\&=(a-b)+2a-(-b)\\&=3a\end{aligned}$$

답 $3a$

0777 $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}&=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\\&=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}\end{aligned}$$ ······ ㉠

이때

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=12-8=4$

이므로 $\quad x-y=2\ (\because\ x>y)$

따라서 ㉠에서

$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 답 ③

0778 $\sqrt{5}-2=\frac{1}{4+a_1}$에서

$4+a_1=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$

$\therefore\ a_1=\sqrt{5}+2-4=\sqrt{5}-2$

$a_1=\frac{1}{4+a_2}$, 즉 $\sqrt{5}-2=\frac{1}{4+a_2}$에서

$4+a_2=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$

$\therefore\ a_2=\sqrt{5}-2$

$a_2=\frac{1}{4+a_3}$, 즉 $\sqrt{5}-2=\frac{1}{4+a_3}$에서

$4+a_3=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$

$\therefore\ a_3=\sqrt{5}-2$

$\vdots$

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=\sqrt{5}-2$

$\therefore\ a_7+a_8=(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}-2)=2\sqrt{5}-4$ 답 ②

유형 03 무리식의 값 구하기 본책 123쪽

주어진 무리식을 간단히 한 후 미지수의 값을 대입한다.

0779 $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}&=\frac{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\\&=\frac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1}{x-1}\\&=\frac{2(x+1)}{x-1}\end{aligned}$$ ······ ㉠

← 통분한다.

06 무리식과 무리함수

이때 $x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$이므로 ㉠에서

$$\begin{aligned}\frac{2(x+1)}{x-1}&=\frac{2(3+2\sqrt{2}+1)}{3+2\sqrt{2}-1}=\frac{4+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\\&=\frac{(4+2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}\\&=-(4-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}-4)\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ④

0780 $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}=\frac{(\sqrt{1-x})^2+(\sqrt{1+x})^2}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}$

$$\begin{aligned}&=\frac{(1-x)+(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\quad \leftarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{을 대입한다.}\\&=\frac{2}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}\\&=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4\end{aligned}$$

답 ④

0781 $\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}$ ← 분모를 유리화하여 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned}&=\frac{(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x})^2}{(\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x})(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x})}\\&=\frac{3+x+3-x-2\sqrt{9-x^2}}{3+x-(3-x)}\\&=\frac{6-2\sqrt{9-x^2}}{2x}\\&=\frac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}\quad \leftarrow x=\sqrt{5}\text{를 대입한다.}\\&=\frac{3-\sqrt{4}}{\sqrt{5}}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

0782 $\sqrt{x+2}=2$의 양변을 제곱하면

$x+2=4 \qquad \therefore x=2$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}}&=\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1)}\\&=-1\end{aligned}$$

답 ③

0783 $f(n)=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

$$\begin{aligned}&=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}\\&=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\end{aligned}$$ ⋯ ❶

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

$=(1-0)+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$\quad+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$=\sqrt{n}$ ⋯ ❷

이때 $\sqrt{n}>9$이므로 $\quad n>81$

따라서 자연수 n의 최솟값은 82이다. ⋯ ❸

답 82

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$을 간단히 할 수 있다.	30 %
❸ 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

유형 04 무리식의 값 구하기 ; $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $y=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 꼴

본책 124쪽

$x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $y=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 꼴로 주어지면
➡ $x+y$, $x-y$, xy의 값을 구한 후 이 값을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

0784 $x+y=2\sqrt{3}$, $xy=1$이므로

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1}}=2\sqrt{3}$$

답 ③

0785 $x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$,

$y=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=3-2\sqrt{2}$이므로

$x+y=6$, $x-y=4\sqrt{2}$, $xy=1$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}\therefore x^2+x^2y-xy^2-y^2&=(x^2-y^2)+(x^2y-xy^2)\\&=(x+y)(x-y)+xy(x-y)\\&=(x-y)(x+y+xy)\\&=4\sqrt{2}(6+1)\\&=28\sqrt{2}\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 $28\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $x+y$, $x-y$, xy의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $x^2+x^2y-xy^2-y^2$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0786 $x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,

$y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$이므로

$x+y=\sqrt{6}$, $x-y=\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}&=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\\&=\frac{2(x+y)}{x-y}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\\&=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

답 $2\sqrt{3}$

유형 05 무리함수의 정의역과 치역

본책 124쪽

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a>0)$에 대하여

➡ 정의역: $\left\{x \middle| x\geq -\frac{b}{a}\right\}$, 치역: $\{y|y\geq c\}$

0787 $-2x+2\geq 0$에서 $\quad 2x\leq 2 \quad \therefore x\leq 1$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\leq 1\}$이므로 $\quad a=1$

또 함수 $y=\sqrt{-2x+2}+b$의 치역은 $\{y|y\geq b\}$이므로

$b=3$

$\therefore ab=3$

답 ④

0788 $ax+2a\geq 0$에서 $\quad ax\geq -2a$

이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\geq -2\}$이므로

$a>0$

주어진 함수의 치역이 $\{y|y\geq 1\}$이므로 $\quad b=1$

즉 $y=\sqrt{ax+2a}+1$의 그래프의 y절편이 3이므로

$3=\sqrt{2a}+1, \quad \sqrt{2a}=2$

$2a=4 \quad \therefore a=2$

$\therefore a+b=3$

답 ④

0789 $y=\dfrac{4x+13}{x+5}=\dfrac{4(x+5)-7}{x+5}=-\dfrac{7}{x+5}+4$이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-5,\ y=4$

$\therefore a=-5,\ b=4$ ····· ❶

$f(x)=\sqrt{-5x+4}+c$에서 $f(0)=1$이므로

$2+c=1 \quad \therefore c=-1$ ····· ❷

$\therefore f(x)=\sqrt{-5x+4}-1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\left\{x \middle| x\leq \frac{4}{5}\right\}$이고, 치역은 $\{y|y\geq -1\}$이다. ····· ❸

답 정의역: $\left\{x \middle| x\leq \frac{4}{5}\right\}$, 치역: $\{y|y\geq -1\}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 함수 $y=f(x)$의 정의역과 치역을 구할 수 있다.	40 %

0790 $y=\dfrac{ax+3}{x+b}=\dfrac{a(x+b)+3-ab}{x+b}=\dfrac{3-ab}{x+b}+a$이고, 점근선의 방정식이 $x=4,\ y=-1$이므로

$a=-1,\ b=-4$

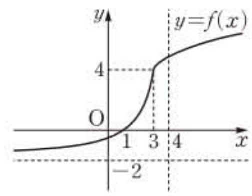
따라서 함수 $y=\sqrt{-4x-1}$의 정의역은 $\left\{x \middle| x\leq -\frac{1}{4}\right\}$이므로 구하는 정수의 최댓값은 -1이다.

답 ②

0791 $x<3$일 때,

$f(x)=\dfrac{2-2x}{x-4}=\dfrac{-2(x-4)-6}{x-4}=\dfrac{-6}{x-4}-2$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 치역이 $\{y|y>-2\}$이고, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 일대일함수이므로 함수 $f(x)=\sqrt{x-3}+a\ (x\geq 3)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(3,\ 4)$를 지나야 한다.



즉 $4=\sqrt{3-3}+a$이므로 $\quad a=4$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-2x}{x-4} & (x<3)\\ \sqrt{x-3}+4 & (x\geq 3)\end{cases}$$

$f(-2)=\dfrac{2+4}{-2-4}=-1$이므로 $f(-2)f(k)=-7$에서

$-f(k)=-7 \quad \therefore f(k)=7$

즉 $\sqrt{k-3}+4=7$에서 $\quad \sqrt{k-3}=3$

$k-3=9 \quad \therefore k=12$

답 12

유형 06~09 무리함수의 그래프

본책 125~127쪽

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a>0)$의 그래프

① $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$

➡ $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

② 정의역: $\left\{x \middle| x\geq -\frac{b}{a}\right\}$, 치역: $\{y|y\geq c\}$

③ x축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-\sqrt{ax+b}-c$

y축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=\sqrt{-ax+b}+c$

원점에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-\sqrt{-ax+b}-c$

0792 $y=\sqrt{a(x-1)}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-b-1)}+3+c$

이 함수의 그래프가

$y=\sqrt{6-3x}=\sqrt{-3(x-2)}$

의 그래프와 일치하므로

$a=-3,\ -b-1=-2,\ 3+c=0$

따라서 $a=-3,\ b=1,\ c=-3$이므로

$abc=9$

답 9

0793 ㄱ. $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ. $y=-\sqrt{3-x}=-\sqrt{-(x-3)}$

따라서 $y=-\sqrt{3-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄹ. $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-3}+1=\sqrt{\dfrac{1}{4}(4x-3)}+1=\sqrt{x-\dfrac{3}{4}}+1$

따라서 $y=\frac{1}{2}\sqrt{4x-3}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{3}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

0794 $y=\sqrt{-x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-(x-2)+1}-1=\sqrt{-x+3}-1$ ⋯ ❶

이 함수의 그래프를 다시 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{x+3}-1$ ⋯ ❷

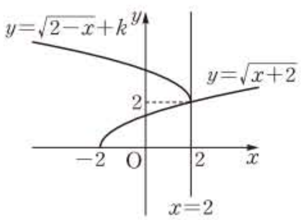
따라서 $a=1$, $b=3$, $c=-1$이므로

$a+b+c=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0795 함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=\sqrt{2-x}+k=\sqrt{-(x-2)}+k$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.



오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프와 직선 $x=2$의 교점의 좌표는 $(2, 2)$이므로 함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프와 함수 $y=\sqrt{2-x}+k$의 그래프가 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은 함수 $y=\sqrt{2-x}+k$의 그래프가 점 $(2, 2)$를 지날 때이다.

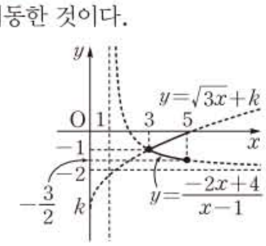
즉 $2=\sqrt{2-2}+k$에서 $\quad k=2$

따라서 k의 최댓값은 2이다. 답 2

참고 함수 $y=\sqrt{2-x}+k$의 그래프가 점 $(-2, 0)$을 지날 때 $k=-2$이므로 두 함수의 그래프가 만나도록 하는 k의 값의 범위는

$-2\le k\le 2$

0796 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}-2$이므로 함수 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $3\le x\le 5$에서 정의된 함수 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 점 $(3, -1)$을 지날 때 k의 값이 최대이다. 즉

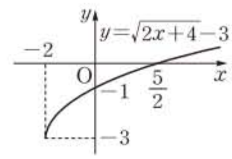
$-1=\sqrt{3\cdot 3}+k \qquad \therefore k=-4$

따라서 k의 최댓값은 -4이다. 답 -4

참고 함수 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 점 $\left(5, -\dfrac{3}{2}\right)$을 지날 때 $k=-\dfrac{3}{2}-\sqrt{15}$이므로 두 함수의 그래프가 한 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는

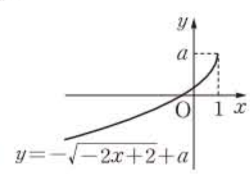
$-\dfrac{3}{2}-\sqrt{15}\le k\le -4$

0797 $y=\sqrt{2x+4}-3=\sqrt{2(x+2)}-3$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $y=\sqrt{2x+4}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3, 4사분면을 지난다. 답 ⑤

0798 $y=-\sqrt{-2x+2}+a=-\sqrt{-2(x-1)}+a$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.



함수 $y=-\sqrt{-2x+2}+a$의 그래프가 제1, 2, 3사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 $\underbrace{y>0}_{y\le 0\text{이면 제2사분면을 지나지 않는다.}}$이어야 하므로

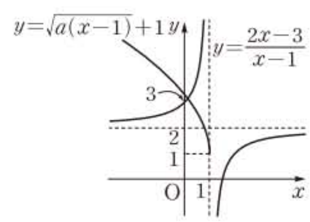
$-\sqrt{2}+a>0 \qquad \therefore a>\sqrt{2}$

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다. 답 2

0799 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-1)}+1$

$y=\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-1}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}+2$이므로 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $y=\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프가 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프와 제1사분면에서 만나려면 $x=0$일 때 $y>3$이어야 한다.

즉 $\sqrt{-a}+1>3$이어야 하므로

$\sqrt{-a}>2, \qquad -a>4$

$\therefore a<-4$

답 ①

0800 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+1)}-1$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{a}-1, \qquad \sqrt{a}=2 \qquad \therefore a=4$

㉠에 $a=4$를 대입하면

$y=\sqrt{4(x+1)}-1=\sqrt{4x+4}-1$

따라서 $a=4$, $b=4$, $c=-1$이므로

$a+b+c=7$

답 7

0801 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x-p)}+q$ ···· ❶

이 함수가 $y=\sqrt{a(x+b)}+c$와 같으므로

$b=-p$, $c=q$ ···· ❷

이때 $p>0$, $q<0$이므로

$a<0$, $b<0$, $c<0$ ···· ❸

답 $a<0$, $b<0$, $c<0$

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 그래프의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ b, c를 p, q에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a, b, c의 부호를 구할 수 있다.	30 %

참고 주어진 함수의 정의역이 $\{x\mid x\le p\}$이므로 $a<0$임을 알 수 있다.

0802 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=-2$이므로 함수의 식을 $y=\frac{k}{x-3}-2\ (k>0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{4-3}-2 \qquad \therefore k=2$

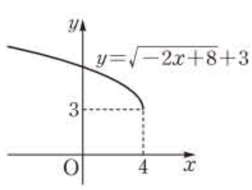
즉 $y=\frac{2}{x-3}-2=\frac{-2x+8}{x-3}$이므로

$a=-2$, $b=8$, $c=-3$

$y=\sqrt{-2x+8}+3=\sqrt{-2(x-4)}+3$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{-2x+8}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2사분면을 지난다.

답 ①



0803 주어진 그래프의 모양에서 $\quad b>0$

$y=\frac{b}{x+a}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=c$이므로

$-a<0$, $c<0 \qquad \therefore a>0$, $c<0$

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$이므로 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a>0$, $-\frac{b}{a}<0$, $c<0$이므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형은 ⑤와 같다.

$a>0$, $b>0$이므로 $-\frac{b}{a}<0$

답 ⑤

0804 ① $6-2x\ge0$에서 $\quad x\le3$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x\mid x\le3\}$이다.

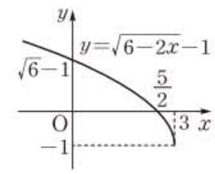
② $\sqrt{6-2x}\ge0$에서 $\sqrt{6-2x}-1\ge-1$이므로 주어진 함수의 치역은 $\{y\mid y\ge-1\}$이다.

③ $y=\sqrt{6-2x}-1$에 $x=3$을 대입하면 $\quad y=-1$

따라서 점 $(3,\ -1)$을 지난다.

④ $y=\sqrt{6-2x}-1=\sqrt{-2(x-3)}-1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\sqrt{6-2x}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



답 ④

0805 ㄱ. $2-x\ge0$에서 $x\le2$이므로 주어진 함수의 정의역은 $\{x\mid x\le2\}$이다.

또 $\sqrt{2-x}\ge0$에서 $\quad -\sqrt{2-x}\le0$

$\therefore -\sqrt{2-x}+2\le2$

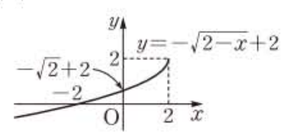
따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y\mid y\le2\}$이다.

ㄴ. $y=-\sqrt{2-x}+2$에 $x=0$을 대입하면 $\quad y=-\sqrt{2}+2$

따라서 점 $(0,\ -\sqrt{2}+2)$를 지난다.

ㄷ. $y=-\sqrt{2-x}+2=-\sqrt{-(x-2)}+2$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=-\sqrt{2-x}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 3사분면을 지난다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

0806 ㄱ. $a>0$, $b<0$이면 정의역이 $\{x\mid x\le0\}$, 치역이 $\{y\mid y\ge0\}$이므로 그래프는 제2사분면을 지난다.

ㄷ. 그래프는 $y=-a\sqrt{bx}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

유형 10 무리함수의 최대·최소

본책 128쪽

정의역이 $\{x\mid p\le x\le q\}$인 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$의 최대·최소

➡ ① $a>0$일 때, 최솟값은 $f(p)$, 최댓값은 $f(q)$

② $a<0$일 때, 최솟값은 $f(q)$, 최댓값은 $f(p)$

0807 $y=-\sqrt{2x+k}+3=-\sqrt{2\left(x+\frac{k}{2}\right)}+3$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{k}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=-\sqrt{2x+k}+3$은 $x=3$일 때 최솟값 0을 가지므로

$0=-\sqrt{6+k}+3, \qquad \sqrt{6+k}=3$

$6+k=9 \qquad \therefore k=3$

즉 함수 $y=-\sqrt{2x+3}+3$은 $x=-1$일 때 최댓값 2를 갖는다.
$-\sqrt{-2+3}+3=-1+3=2$

답 ④

0808 $y=\sqrt{3x-6}+a=\sqrt{3(x-2)}+a$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.
즉 $x=2$일 때 최솟값 a를 가지므로 $\quad a=4$
따라서 $y=\sqrt{3(x-2)}+4$의 그래프가 점 $(b,\ 7)$을 지나므로

$7=\sqrt{3(b-2)}+4, \qquad \sqrt{3(b-2)}=3$

$3(b-2)=9 \qquad \therefore b=5$

$\therefore a+b=9$

답 ③

0809 $y=\sqrt{3x+a}-5=\sqrt{3\left(x+\frac{a}{3}\right)}-5$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{a}{3}$만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=\sqrt{3x+a}-5$는 $x=17$일 때 최댓값 2를 가지므로

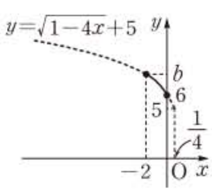
$2=\sqrt{3\cdot17+a}-5, \qquad 7=\sqrt{51+a}$

$49=51+a \qquad \therefore a=-2$

즉 함수 $y=\sqrt{3x-2}-5$는 $x=2$일 때 최솟값 -3을 갖는다.
$\sqrt{3\cdot2-2}-5=2-5=-3$

답 ③

0810 $y=\sqrt{1-4x}+5=\sqrt{-4\left(x-\frac{1}{4}\right)}+5$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
$-2\le x\le a$에서 $y=\sqrt{1-4x}+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
정의역이 $\left\{x\,\middle|\,x\le\frac{1}{4}\right\}$이므로 $a\le\frac{1}{4}$



$x=-2$일 때 최댓값 b,
$x=a$일 때 최솟값 6
을 갖는다. 즉

$b=\sqrt{1-4\cdot(-2)}+5=8,$

$\sqrt{1-4a}+5=6$ $\quad \sqrt{1-4a}=1, \quad 1-4a=1 \quad \therefore a=0$

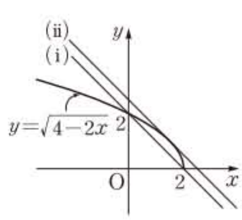
따라서 $a=0$, $b=8$이므로 $\quad a+b=8$

답 8

유형 11 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계 본책 128쪽

① 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 위치 관계
➡ 그래프를 직접 그려 본다.
② 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접할 때
➡ 이차방정식 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$의 판별식을 D라 하면
$D=0$

0811 $y=\sqrt{4-2x}=\sqrt{-2(x-2)}$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$0=-2+k \qquad \therefore k=2$

(ii) 함수 $y=\sqrt{4-2x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때,
$\sqrt{4-2x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$4-2x=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-2(k-1)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

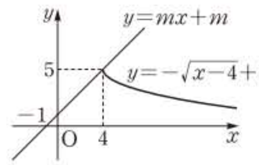
$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-4)=0$

$-2k+5=0 \qquad \therefore k=\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 $\quad 2\le k<\frac{5}{2}$

답 ⑤

0812 함수 $y=-\sqrt{x-4}+5$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=mx+m$, 즉 $y=m(x+1)$은 m의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.
$y=-\sqrt{x-4}+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=mx+m$이 점 $(4,\ 5)$를 지날 때 m의 값이 최대이다. 즉



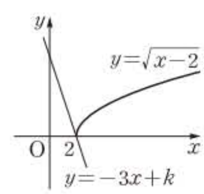
$5=4m+m, \qquad 5m=5$

$\therefore m=1$

따라서 m의 최댓값은 1이다.

답 1

0813 함수 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, $y=-3x+k$는 기울기가 -3이고 y절편이 k인 직선이다.
이때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 함수 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=-3x+k$가 만나야 한다.



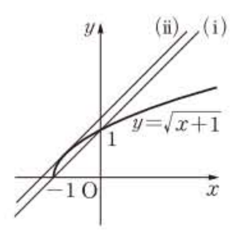
직선 $y=-3x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$0=-6+k \qquad \therefore k=6$

따라서 직선 $y=-3x+k$가 함수 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프와 만나려면 $k\ge6$이어야 하므로 k의 최솟값은 6이다.

답 ④

0814 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고, $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때,

$0=-1+k \qquad \therefore k=1$ ⋯ ❶

(ii) 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,
$\sqrt{x+1}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x+1=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$

$-4k+5=0 \qquad \therefore k=\frac{5}{4}$ ··· ❷

(i), (ii)에서

$$f(k)=\begin{cases} 0 & \left(k>\frac{5}{4}\right) \\ 1 & \left(k=\frac{5}{4} \text{ 또는 } k<1\right) \\ 2 & \left(1\le k<\frac{5}{4}\right) \end{cases}$$ ··· ❸

$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right)+f(1)+f\left(\frac{5}{4}\right)+f(2)=1+2+1+0$

$=4$ ··· ❹

답 4

채점 기준	비율
❶ 직선 $y=x+k$가 점 $(-1, 0)$을 지날 때 k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 함수의 그래프가 접할 때 k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(k)$를 구할 수 있다.	20 %
❹ $f\left(\frac{1}{4}\right)+f(1)+f\left(\frac{5}{4}\right)+f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 12 무리함수의 역함수

본책 129쪽

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\,(a\neq0)$의 역함수 구하기

(i) x를 y에 대한 식으로 나타낸다.

➡ $y-c=\sqrt{ax+b}$의 양변을 제곱하면 $\quad (y-c)^2=ax+b$

➡ $x=\frac{1}{a}\{(y-c)^2-b\}$

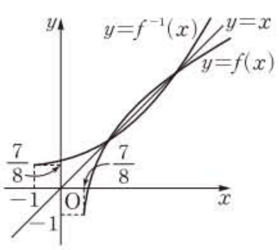
(ii) x와 y를 서로 바꾼다.

➡ $y=\frac{1}{a}\{(x-c)^2-b\}$

(iii) $y=\sqrt{ax+b}+c$의 치역이 $\{y|y\ge c\}$이므로 역함수의 정의역은

➡ $\{x|x\ge c\}$

0815 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{8x-7}-1$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{8x-7}-1=x$에서 $\qquad \sqrt{8x-7}=x+1$

위의 식의 양변을 제곱하면

$8x-7=x^2+2x+1, \qquad x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 두 교점의 좌표는 $(2, 2)$, $(4, 4)$이므로 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(4-2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$

답 ②

0816 $y=\sqrt{4-x}+4\ (y\ge4)$라 하면 $\qquad y-4=\sqrt{4-x}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$(y-4)^2=4-x \qquad \therefore x=-(y-4)^2+4$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=-(x-4)^2+4\ (x\ge4)$

$\therefore g(x)=-(x-4)^2+4\ (x\ge4)$

이때 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면 $y=-x^2$의 그래프의 일부와 겹쳐진다.

따라서 $a=-1$, $p=-4$, $q=-4$이므로

$a+pq=15$

답 15

0817 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(4, 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{4a+b} \qquad \therefore 4a+b=9$ ······ ㉠

역함수의 그래프가 점 $(5, -12)$를 지나므로 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 점 $(-12, 5)$를 지난다. 즉

$\sqrt{-12a+b}=5 \qquad \therefore -12a+b=25$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=-1, b=13$

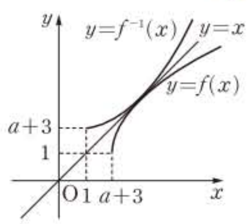
$\therefore b-a=14$

답 ③

0818 $y=2\sqrt{x-3}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2\sqrt{x-a-3}+1$ ··· ❶

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 접한다. ··· ❷



$2\sqrt{x-a-3}+1=x$에서 $\qquad 2\sqrt{x-a-3}=x-1$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4(x-a-3)=x^2-2x+1$

$\therefore x^2-6x+4a+13=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(4a+13)=0$

$-4a-4=0 \qquad \therefore a=-1$ ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	20 %
❷ $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 접함을 알 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

0819 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 두 점 $(3, 4)$, $(5, 0)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(4, 3)$, $(0, 5)$를 지난다.

또 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역이 $\{x|x\ge3\}$, 치역이 $\{y|y\le4\}$이므로 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x|x\le4\}$, 치역은 $\{y|y\ge3\}$이다.

즉 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$는 $y=\sqrt{ax}\,(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식이므로

$\frac{b}{a}=-4, c=3$

또 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 점 $(0, 5)$를 지나므로

$5=\sqrt{b}+c$, $\quad 5=\sqrt{b}+3$

$\sqrt{b}=2 \quad \therefore b=4$

$\frac{b}{a}=-4$에 $b=4$를 대입하면

$\frac{4}{a}=-4 \quad \therefore a=-1$

$\therefore a+b+c=6$ 답 ①

다른 풀이 $f^{-1}(x)=k(x-3)^2+4\ (k<0,\ x\geq3)$라 하면

꼭짓점의 좌표가 $(3, 4)$이고 위로 볼록한 이차함수의 그래프 중 $x\geq3$인 부분이다.

$y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(5, 0)$을 지나므로

$k(5-3)^2+4=0$, $\quad 4k=-4$

$\therefore k=-1$

$\therefore f^{-1}(x)=-(x-3)^2+4\ (x\geq3)$

$y=-(x-3)^2+4$라 하면 $\quad \underbrace{(x-3)^2=-y+4}_{x-3=\pm\sqrt{-y+4}}$

$x-3=\sqrt{-y+4}\ (\because x\geq3)$

$\therefore x=\sqrt{-y+4}+3$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\sqrt{-x+4}+3$

$\therefore f(x)=\sqrt{-x+4}+3$

따라서 $a=-1$, $b=4$, $c=3$이므로

$a+b+c=6$

참고 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq0,\ y\geq c)$라 하면

$y-c=\sqrt{ax+b}$, $\quad (y-c)^2=ax+b$

$\therefore x=\frac{1}{a}\{(y-c)^2-b\}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{a}\{(x-c)^2-b\}$

즉 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq0)$의 역함수는

$y=\frac{1}{a}(x-c)^2-\frac{b}{a}\ (x\geq c)$

따라서 주어진 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$의 역함수를 $f^{-1}(x)=k(x-3)^2+4\ (k<0,\ x\geq3)$로 놓을 수 있다.

유형 13 무리함수의 합성함수와 역함수

본책 130쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$에 대하여

① $(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))$

② $(g^{-1}\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))$

③ $g^{-1}(f(a))=k$이면 $\quad g(k)=f(a)$

0820 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)$

$=(g^{-1}\circ f)(3)$

$=g^{-1}(f(3))$

이때 $f(3)=\frac{3+1}{3-1}=2$이므로

$g^{-1}(f(3))=g^{-1}(2)$

$g^{-1}(2)=k$라 하면 $\quad g(k)=2$

$\sqrt{3k-2}=2$, $\quad 3k-2=4 \quad \therefore k=2$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=2$ 답 ②

0821 $(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(4)=k$라 하면 $\quad f(k)=4$

$\sqrt{2k-4}=4$, $\quad 2k-4=16 \quad \therefore k=10$

$g(10)=m$이라 하면 $\quad f(m)=10$

$\sqrt{2m-4}=10$, $\quad 2m-4=100$

$\therefore m=52$

$\therefore (g\circ g)(4)=g(g(4))=g(10)=52$ 답 ③

0822 $f^{-1}(g(x))=2x$에서

$f(f^{-1}(g(x)))=f(2x)$

$\therefore g(x)=f(2x)$

$\therefore g(4)=f(8)=\sqrt{3\cdot8-12}=2\sqrt{3}$ 답 ⑤

다른 풀이 $f(x)=\sqrt{3x-12}$에서

$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x^2+4\ (x\geq0)$

$f^{-1}(g(x))=2x$에서 $\quad \frac{1}{3}\{g(x)\}^2+4=2x$

이때 $x\geq2$에서 $g(x)\geq0$이므로

$g(x)=\sqrt{6x-12}$

$\therefore g(4)=\sqrt{6\cdot4-12}=2\sqrt{3}$

0823 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=16$에서

$(f\circ f)^{-1}(a)=16$

$\therefore (f\circ f)(16)=a$ ⋯ ❶

이때 $f(16)=1-\sqrt{16}=1-4=-3$이고,

$f(-3)=\sqrt{1-(-3)}=\sqrt{4}=2$이므로

$a=(f\circ f)(16)=f(f(16))$

$=f(-3)=2$ ⋯ ❷

답 2

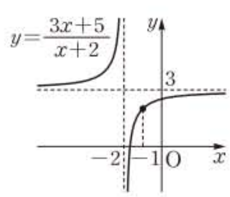
채점 기준	비율
❶ $(f\circ f)(16)=a$임을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %

0824 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}-1$에 대하여 $y=\sqrt{x+2}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

정의역: $\{x|x>-2\}$, 치역: $\{y|y>-1\}$

한편 $g(x)=\frac{3x+5}{x+2}=\frac{3(x+2)-1}{x+2}=\frac{-1}{x+2}+3$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x>-1$에서 $g(-1)<g(x)<3$이고

$g(-1)=2$이므로

$2<g(x)<3$

따라서 $x>-2$에서 정의된 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 치역은

$\{y|2<y<3\}$ 답 $\{y|2<y<3\}$

0825 **전략** 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식과 x절편, y절편을 구한 후 그래프를 이용하여 부호를 확인한다.

풀이 $y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)-\frac{ad}{c}+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{\frac{-ad+bc}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}$

이므로 점근선의 방정식은

$$x=-\frac{d}{c},\ y=\frac{a}{c}$$

이고 x절편은 $-\frac{b}{a}$, y절편은 $\frac{b}{d}$이다.

주어진 그래프에서

$$-\frac{d}{c}>0,\ \frac{a}{c}>0,\ -\frac{b}{a}>0,\ \frac{b}{d}>0,\ \frac{-ad+bc}{c^2}>0$$

이므로

$$cd<0,\ ac>0,\ ab<0,\ bd>0,\ ad-bc<0$$

$$\therefore\ a>0,\ b<0,\ c>0,\ d<0,\ ad-bc<0$$

또는 $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d>0,\ ad-bc<0$

따라서 $ad-bc<0$, $\frac{c}{b}<0$, $\frac{b}{c}<0$이므로

$$\sqrt{(ad-bc)^2}+\sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{b}{c}}=|ad-bc|-\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}$$

$$=-(ad-bc)-1$$

$p<0$, $q<0$이면 $\sqrt{p}\sqrt{q}=-\sqrt{pq}$

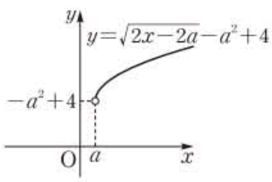
$$=bc-ad-1$$

답 $bc-ad-1$

0826

전략 무리함수의 그래프가 오직 하나의 사분면을 지나도록 하는 함수의 그래프의 개형을 생각해 본다.

풀이 정의역이 $\{x|x>a\}$인 함수 $y=\sqrt{2x-2a}-a^2+4$의 그래프가 오직 하나의 사분면을 지나려면 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같아야 한다. ⋯ ❶



즉 $a\ge0$이고 $-a^2+4\ge0$이어야 한다.

즉 $-a^2+4\ge0$에서 $a^2\le4$ $\therefore\ -2\le a\le2$

따라서 $0\le a\le2$이므로 ⋯ ❷

$$M=2,\ m=0$$

$$\therefore\ M-m=2$$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 조건을 만족시키는 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

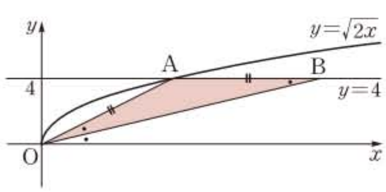
0827

전략 먼저 점 A의 좌표를 구한 후 △AOB가 어떤 삼각형인지 생각해 본다.

풀이 점 A의 x좌표는 $\sqrt{2x}=4$에서 $2x=16$ $\therefore\ x=8$

즉 점 A의 좌표는 $(8,\ 4)$

다음 그림과 같이 ∠ABO와 직선 BO가 x축의 양의 방향과 이루는 각은 엇각으로 그 크기가 같으므로 삼각형 AOB는 이등변삼각형이다.



$\overline{OA}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$이므로

$$\overline{AB}=\overline{OA}=4\sqrt{5}$$

△AOB의 넓이는 밑변의 길이가 $4\sqrt{5}$이고 높이가 4인 직각삼각형의 넓이와 같다.

$$\therefore\ \triangle AOB=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot4=8\sqrt{5}$$

답 $8\sqrt{5}$

0828

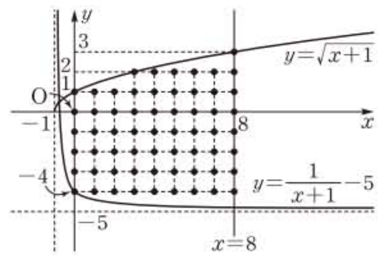
전략 유리함수 $y=f(x)$와 무리함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 ㄱ. 함수 $f(x)=\frac{1}{x+1}-5$의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=-1$, $y=-5$이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=-5$와 만나지 않는다.

ㄴ. $0\le x\le8$일 때, 함수 $g(x)=\sqrt{x+1}$에서 $x=0,\ 3,\ 8$일 때만 함숫값이 각각 $1,\ 2,\ 3$으로 정수이다.

따라서 y좌표가 정수인 점의 개수는 3이다.

ㄷ. 다음 그림과 같이 곡선 $y=\frac{1}{x+1}-5$는 점 $(0,\ -4)$를 지나고, 곡선 $y=\sqrt{x+1}$은 점 $(0,\ 1)$을 지난다.



$0\le x\le8$에서 곡선 $y=\frac{1}{x+1}-5$는 $x=0$일 때만 y좌표가 정수이고 곡선 $y=\sqrt{x+1}$은 $x=0,\ 3,\ 8$일 때만 y좌표가 정수이다.

두 곡선 $y=\frac{1}{x+1}-5$, $y=\sqrt{x+1}$과 두 직선 $x=0$, $x=8$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$x=0,\ 1,\ 2$일 때 각각 6

$x=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$일 때 각각 7

$x=8$일 때 8

이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 점의 개수는

$$3\cdot6+5\cdot7+1\cdot8=61$$

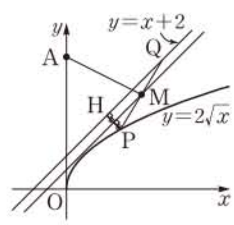
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0829

전략 무리함수의 그래프 위의 점과 직선 사이의 거리를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프 위의 임의의 점 P에서 직선 $y=x+2$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 PQ의 중점 M은 선분 PH의 수직이등분선 위에 있으므로 두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값은 점 A와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값과 같다.



점 $P(a,\ 2\sqrt{a})$라 할 때, 점 P와 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a-2\sqrt{a}+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|(\sqrt{a}-1)^2+1|}{\sqrt{2}}$$

이므로 점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리의 최솟값은 $a=1$일 때 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 직선 $y=x+2$와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

이때 점 A$(0, 8)$과 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-8+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$

이므로 두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값은

$$\frac{\sqrt{2}}{4}+3\sqrt{2}=\frac{13\sqrt{2}}{4}$$

답 ①

참고 직선 $y=x+2$ 위의 한 점 Q′을 선택하고 선분 PQ′의 중점을 M′이라 하자.

(i) 점 Q′이 점 H와 같은 경우 점 M′은 선분 PH의 중점이다.

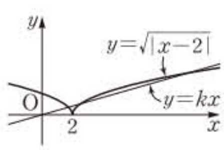
(ii) 점 Q′이 점 H와 같지 않은 경우
점 M′에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 I라 하자. 이때 직각삼각형 PM′I와 직각삼각형 PQ′H는 닮은 도형이고 $\overline{PM'}=\overline{M'Q'}$이므로 $\overline{PI}=\overline{IH}$이다.
즉 점 M′은 선분 PH의 수직이등분선 위의 점이다.

(i), (ii)에서 점 P가 고정되었을 때 직선 $y=x+2$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 선분 PQ의 중점 M은 선분 PH의 수직이등분선 위의 점이다.

0830

전략 무리함수의 그래프와 직선이 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 함수의 그래프의 개형을 생각해 본다.

풀이 함수 $y=\sqrt{|x-2|}$의 그래프와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=kx$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



이때 $k>0$이어야 하고 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=kx$가 접할 때, $\sqrt{x-2}=kx$의 양변을 제곱하면

$$x-2=k^2x^2$$

$$\therefore\ k^2x^2-x+2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4\cdot k^2\cdot 2=0$$

$$1-8k^2=0,\qquad k^2=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\ k=\frac{\sqrt{2}}{4}\ (\because\ k>0)$$

따라서 $n(A\cap B)=3$을 만족시키는 k의 값의 범위는

$$0<k<\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ③

0831

전략 삼각형 ABP의 넓이는 점 P가 직선 AB와 평행한 접선의 접점일 때 최대가 됨을 이용한다.

풀이 삼각형 ABP의 넓이는 점 P가 직선 AB와 평행한 접선의 접점일 때 최대이다. ⋯ ❶

직선 AB의 방정식은

$$y=\frac{3-0}{4-1}(x-1),\ \text{즉}\ y=x-1$$

이므로 직선 AB와 평행한 접선의 방정식을 $y=x+k$ (k는 실수)라 하면 $\sqrt{3x-3}=x+k$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$3x-3=x^2+2kx+k^2$$

$$\therefore\ x^2+(2k-3)x+k^2+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(2k-3)^2-4(k^2+3)=0$$

$$-12k-3=0\qquad\therefore\ k=-\frac{1}{4}$$ ⋯ ❷

두 직선 $y=x-1$, $y=x-\frac{1}{4}$ 사이의 거리는 직선 $y=x-1$ 위의 점 $(1, 0)$과 직선 $y=x-\frac{1}{4}$, 즉 $4x-4y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4-1|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+3^2}=3\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{9}{8}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{9}{8}$

채점 기준	비율
❶ 삼각형 ABP의 넓이가 최대일 때의 점 P의 위치를 알 수 있다.	20 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

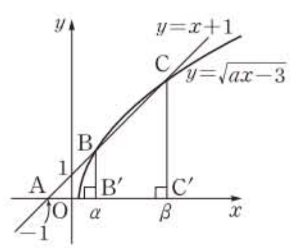
0832

전략 두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 B′, C′이라 할 때, $\overline{AB'}:\overline{B'C'}=\overline{AB}:\overline{BC}$임을 이용한다.

풀이 $a<0$이면 함수 $y=\sqrt{ax-3}$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 한 점에서 만나거나 만나지 않으므로

$$a>0$$

함수 $y=\sqrt{ax-3}$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 오른쪽 그림과 같고 두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 B′$(\alpha, 0)$, C′$(\beta, 0)$이라 하자.



A$(-1, 0)$이고 점 B가 선분 AC를 $2:3$으로 내분하므로

$$\overline{AB'}:\overline{B'C'}=\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$$

즉 $(\alpha+1):(\beta-\alpha)=2:3$이므로

$$2(\beta-\alpha)=3(\alpha+1),\qquad 2\beta-2\alpha=3\alpha+3$$

$$\therefore\ \beta=\frac{5\alpha+3}{2}$$ ⋯⋯ ㉠

직선 $y=x+1$과 함수 $y=\sqrt{ax-3}$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 $\sqrt{ax-3}=x+1$에서

$$ax-3=(x+1)^2$$

$$ax-3=x^2+2x+1$$

$$\therefore\ x^2+(2-a)x+4=0$$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a-2$ ...... ㉡

$\alpha\beta=4$ ...... ㉢

㉢에 ㉠을 대입하면 $\alpha\cdot\dfrac{5\alpha+3}{2}=4$

$5\alpha^2+3\alpha-8=0$, $(5\alpha+8)(\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=1$ ($\because \alpha>0$)

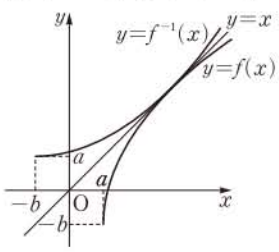
㉠에 $\alpha=1$을 대입하면 $\beta=4$이므로 ㉡에서

$1+4=a-2$ $\therefore a=7$

답 7

0833 전략 직선 $y=x$가 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접함을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=\sqrt{x-a}-b$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프가 한 점에서 만날 때, 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 접한다.



$\sqrt{x-a}-b=x$에서

$\sqrt{x-a}=x+b$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x-a=x^2+2bx+b^2$

$\therefore x^2+(2b-1)x+a+b^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2b-1)^2-4(a+b^2)=0$

$-4(a+b)+1=0$

$\therefore a+b=\dfrac{1}{4}$

이때 a, b가 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$, $\dfrac{1}{4}\ge 2\sqrt{ab}$

$\therefore ab\le\dfrac{1}{64}$ $\left(\text{단, 등호는 } a=b=\dfrac{1}{8}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 ab의 최댓값은 $\dfrac{1}{64}$이다.

답 ①

0834 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 관계를 파악한 후 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 조건을 구한다.

풀이 함수 $y=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k$ $(x\ge0)$는 집합 $\{x|x\ge0\}$에서 집합 $\left\{y\,\middle|\,y\ge\dfrac{1}{5}k\right\}$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

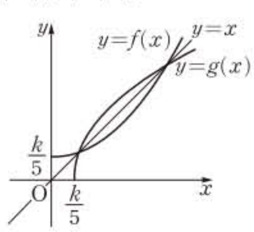
$y=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k$라 하면 $\dfrac{1}{5}x^2=y-\dfrac{1}{5}k$

$x^2=5y-k$ $\therefore x=\sqrt{5y-k}$ ($\because x\ge0$)

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{5x-k}$

즉 함수 $g(x)=\sqrt{5x-k}$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k=x$에서 $x^2-5x+k=0$

이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\underbrace{k\ge0}_{(\text{두 근의 곱})\ge0}$, $D=(-5)^2-4k>0$

$\therefore 0\le k<\dfrac{25}{4}$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, $\cdots$, 6의 7개이다.

답 ②

0835 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 역함수 관계임을 이용한다.

풀이 $y=\sqrt{3x+4}$ $(y\ge0)$라 하면

$y^2=3x+4$ $\therefore x=\dfrac{1}{3}y^2-\dfrac{4}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{4}{3}$ $(x\ge0)$

즉 함수 $g(x)=\dfrac{1}{3}(x^2-4)$ $(x\ge0)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{3x+4}=x$에서 $3x+4=x^2$

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=4$ ($\because x\ge0$)

$\therefore$ A$(4, 4)$

점 B와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

C$\left(3, \dfrac{5}{3}\right)$

$\therefore \overline{\text{BC}}=\sqrt{\left(3-\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(\dfrac{5}{3}-3\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

직선 l은 기울기가 -1이고 점 B를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y=-\left(x-\dfrac{5}{3}\right)+3$ $\therefore 3x+3y-14=0$

점 A$(4, 4)$와 직선 l 사이의 거리는

$\dfrac{|12+12-14|}{\sqrt{3^2+3^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{5\sqrt{2}}{3}=\dfrac{20}{9}$

답 ③

06 무리식과 무리함수

07 순열과 조합

0836 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 4가 되는 경우는
$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$의 3가지
(ii) 눈의 수의 합이 7이 되는 경우는
$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$의 6가지
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$3+6=9$ 답 9

0837 5의 배수가 적힌 공은 $5, 10, 15, \cdots, 50$의 10개
11의 배수가 적힌 공은 $11, 22, 33, 44$의 4개
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$10+4=14$ 답 14

0838 3의 배수가 적힌 공은 $3, 6, 9, \cdots, 48$의 16개
7의 배수가 적힌 공은 $7, 14, 21, \cdots, 49$의 7개
3과 7의 최소공배수인 21의 배수가 적힌 공은 $21, 42$의 2개
따라서 구하는 경우의 수는
$16+7-2=21$ 답 21

0839 $3\cdot2=6$ 답 6

0840 $3\cdot3=9$ 답 9

0841 $2\cdot2=4$ 답 4

0842 첫 번째에 홀수의 눈이 나오는 경우는
$1, 3, 5$의 3가지
두 번째에 4의 약수의 눈이 나오는 경우는
$1, 2, 4$의 3가지
따라서 구하는 경우의 수는 $3\cdot3=9$ 답 9

0843 (i) A 지점에서 B 지점을 거쳐 C 지점으로 가는 방법의 수는
$3\cdot2=6$
(ii) A 지점에서 B 지점을 거치지 않고 C 지점으로 가는 방법의 수는
1
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $6+1=7$ 답 7

0844 ${}_6P_3=6\cdot5\cdot4=120$ 답 120

0845 답 1

0846 ${}_4P_4=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

0847 ${}_5P_1\cdot3!=5\cdot3\cdot2\cdot1=30$ 답 30

0848 ${}_nP_2=n(n-1)$이므로
$n(n-1)=30=6\cdot5 \quad \therefore n=6$ 답 6

0849 $60=5\cdot4\cdot3$이므로 ${}_5P_3=60 \quad \therefore r=3$ 답 3

0850 ${}_7P_r=\dfrac{7!}{(7-r)!}$이므로 $\dfrac{7!}{(7-r)!}=\dfrac{7!}{4!}$
$7-r=4 \quad \therefore r=3$ 답 3

0851 ${}_nP_n=n!$, $120=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$이므로
$n!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 \quad \therefore n=5$ 답 5

0852 8명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는
${}_8P_3=8\cdot7\cdot6=336$ 답 336

0853 5장의 카드 중에서 3장을 뽑는 순열의 수이므로
${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$ 답 60

0854 (i) 일의 자리에 2가 오는 경우
2가 적힌 카드를 제외한 나머지 4장의 카드 중에서 2장을 뽑는 순열의 수이므로
${}_4P_2=4\cdot3=12$
(ii) 일의 자리에 4가 오는 경우
4가 적힌 카드를 제외한 나머지 4장의 카드 중에서 2장을 뽑는 순열의 수이므로
${}_4P_2=4\cdot3=12$
(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는
$12+12=24$ 답 24

0855 4개를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

0856 A를 제외한 3개를 일렬로 나열하고, 그 뒤에 A를 나열하면 되므로 구하는 방법의 수는
$3!=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

0857 B와 C를 한 문자로 생각하여 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=3\cdot2\cdot1=6$
이때 각 경우에 대하여 B와 C가 자리를 바꾸는 방법의 수가 $2!=2$이므로 구하는 방법의 수는
$6\cdot2=12$ 답 12

0858 ${}_9C_2=\frac{{}_9P_2}{2!}=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}=36$ 답 36

0859 ${}_{10}C_8={}_{10}C_2=\frac{{}_{10}P_2}{2!}=\frac{10\cdot9}{2\cdot1}=45$ 답 45

0860 답 1

0861 답 1

0862 ${}_nC_3=56$에서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=56$

$n(n-1)(n-2)=8\cdot7\cdot6$ $\therefore n=8$ 답 8

0863 ${}_{2n+1}C_2=78$에서 $\frac{(2n+1)\cdot2n}{2\cdot1}=78$

$2n^2+n-78=0$, $(2n+13)(n-6)=0$

$\therefore n=-\frac{13}{2}$ 또는 $n=6$

그런데 $n\geq\frac{1}{2}$이므로 $n=6$ 답 6

$2n+1\geq2$이므로 $n\geq\frac{1}{2}$

0864 ${}_nC_4={}_nC_{n-4}$이므로 ${}_nC_4={}_nC_6$에서

$n-4=6$ $\therefore n=10$ 답 10

0865 ${}_7C_r={}_7C_{r-3}$에서

$r=r-3$ 또는 $7-r=r-3$

그런데 $r\neq r-3$이므로

$7-r=r-3$, $2r=10$ $\therefore r=5$ 답 5

0866 ${}_9C_6={}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$ 답 84

0867 동호회 회원 8명 중에서 2명을 택하는 방법의 수와 같으므로 악수한 총횟수는

${}_8C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$ 답 28

0868 7명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

0869 남학생 4명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

여학생 3명 중에서 1명을 뽑는 방법의 수는 ${}_3C_1=3$

따라서 구하는 방법의 수는 $6\cdot3=18$ 답 18

0870 원소 1을 제외한 6개의 원소 중에서 3개를 택한 후 각각의 경우에 원소 1을 포함하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ 답 20

0871 원소 1을 제외한 6개의 원소 중에서 4개를 택하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ 답 15

0872 원소 2와 3을 제외한 5개의 원소 중에서 3개를 택한 후 각각의 경우에 원소 2를 포함하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

0873 9명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$

여자만 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 방법의 수는 $84-4=80$ 답 80

0874 6개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ 답 15

0875 서로 다른 사탕 9개를 2개, 3개, 4개의 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

${}_9C_2\cdot{}_7C_3\cdot{}_4C_4=36\cdot35\cdot1=1260$ 답 1260

0876 서로 다른 사탕 9개를 2개, 2개, 5개의 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

${}_9C_2\cdot{}_7C_2\cdot{}_5C_5\cdot\frac{1}{2!}=36\cdot21\cdot1\cdot\frac{1}{2}=378$ 답 378

0877 서로 다른 사탕 9개를 3개, 3개, 3개의 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

${}_9C_3\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{3!}=84\cdot20\cdot1\cdot\frac{1}{6}=280$ 답 280

0878 서로 다른 종류의 꽃 10송이를 3송이, 3송이, 4송이의 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

${}_{10}C_3\cdot{}_7C_3\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=120\cdot35\cdot1\cdot\frac{1}{2}=2100$

세 묶음을 3명에게 나누어 주는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 방법의 수는

$2100\cdot6=12600$ 답 12600

유형 01 합의 법칙 본책 138쪽

① 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면
(사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수)$=m+n$
② 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고, A, B가 동시에 일어나는 경우의 수가 l이면
(사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수)$=m+n-l$

0879 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 5가 되는 경우는
$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4가지
(ii) 눈의 수의 합이 10이 되는 경우는
$(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$의 3가지
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$4+3=7$ 답 7

0880 꺼낸 공에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 세 수의 곱이 3이 되는 경우는
$(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$, $(3, 1, 1)$의 3가지 ··· ❶
(ii) 세 수의 곱이 4가 되는 경우는
$(1, 1, 4)$, $(1, 4, 1)$, $(4, 1, 1)$,
$(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$의 6가지 ··· ❷
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$3+6=9$ ··· ❸
답 9

채점 기준	비율
❶ 세 수의 곱이 3이 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 세 수의 곱이 4가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 세 수의 곱이 3 또는 4가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0881 1부터 100까지의 자연수 중에서
(i) 2로 나누어떨어지는 수, 즉 2의 배수는
2, 4, 6, ⋯, 100의 50개
(ii) 5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는
5, 10, 15, ⋯, 100의 20개
(iii) 2와 5로 나누어떨어지는 수, 즉 10의 배수는
10, 20, 30, ⋯, 100의 10개
이상에서 2 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수는
$50+20-10=60$
이므로 2와 5로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는
$100-60=40$ 답 ③

유형 02 방정식과 부등식의 해의 개수 본책 138쪽

① 방정식 $ax+by+cz=d$ (a, b, c, d는 상수)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 x, y, z 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입하여 구한다.
② 부등식 $ax+by\le c$ (a, b, c는 상수)를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수는 주어진 x, y의 값의 조건을 이용하여 부등식이 성립하는 $ax+by$의 값을 찾은 후, $ax+by=d$ 꼴의 방정식을 만들어 이 방정식의 해의 개수를 구한다.

0882 (i) $z=1$일 때, $x+2y=17$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(15, 1)$, $(13, 2)$, $(11, 3)$, $(9, 4)$,
$(7, 5)$, $(5, 6)$, $(3, 7)$, $(1, 8)$의 8개
(ii) $z=2$일 때, $x+2y=14$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(12, 1)$, $(10, 2)$, $(8, 3)$,
$(6, 4)$, $(4, 5)$, $(2, 6)$의 6개
(iii) $z=3$일 때, $x+2y=11$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(9, 1)$, $(7, 2)$, $(5, 3)$, $(3, 4)$, $(1, 5)$의 5개
(iv) $z=4$일 때, $x+2y=8$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(6, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 3)$의 3개
(v) $z=5$일 때, $x+2y=5$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(3, 1)$, $(1, 2)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$8+6+5+3+2=24$ 답 24

0883 x, y가 자연수이므로 $2x+y\le6$을 만족시키는 경우는
$2x+y=3$, $2x+y=4$, $2x+y=5$, $2x+y=6$
(i) $2x+y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$의 1개
(ii) $2x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 2)$의 1개
(iii) $2x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 3)$, $(2, 1)$의 2개
(iv) $2x+y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 4)$, $(2, 2)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+1+2+2=6$ 답 ②
다른 풀이 (i) $x=1$일 때, $2+y\le6$, 즉 $y\le4$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$의 4개
(ii) $x=2$일 때, $4+y\le6$, 즉 $y\le2$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(2, 1)$, $(2, 2)$의 2개
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $4+2=6$

0884 x, y가 음이 아닌 정수이므로 $x+y\le4$를 만족시키는 경우는
$x+y=0$, $x+y=1$, $x+y=2$, $x+y=3$, $x+y=4$
(i) $x+y=0$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(0, 0)$의 1개
(ii) $x+y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(0, 1)$, $(1, 0)$의 2개
(iii) $x+y=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$의 3개
(iv) $x+y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(0, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$의 4개

(v) $x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)$의 5개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+2+3+4+5=15$ 답 15

0885 이차함수 $y=x^2+(a+b)x+ab+1$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+(a+b)x+ab+1=0$이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$D=(a+b)^2-4(ab+1)<0$

$a^2+2ab+b^2-4ab-4<0$

$(a-b)^2-4<0$

$\{(a-b)+2\}\{(a-b)-2\}<0$

$\therefore -2<a-b<2$

이때 $a-b$의 값은 정수이므로

$a-b=-1,\ a-b=0,\ a-b=1$

(i) $a-b=-1$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$의 5개

(ii) $a-b=0$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$의 6개

(iii) $a-b=1$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$의 5개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+6+5=16$ 답 ③

유형 03 곱의 법칙 본책 139쪽

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면

(두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수) $=m\times n$

0886 십의 자리의 숫자는 8의 약수이므로 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 4, 8의 4개

짝수이므로 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0, 2, 4, 6, 8의 5개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\cdot 5=20$ 답 ③

0887 a가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개

b가 될 수 있는 것은 2, 4, 6의 3개

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $4\cdot 3=12$이므로

$n(C)=12$ 답 12

0888 $(a+b+c+d)(x+y+z)$에서 a, b, c, d에 곱해지는 항이 각각 x, y, z의 3개이므로 항의 개수는

$4\cdot 3=12$ 답 ④

SSEN 특강 항의 개수

두 다항식 A, B의 각 항의 문자가 모두 다르면 AB의 전개식에서 항의 개수는

(A의 항의 개수) $\times$ (B의 항의 개수)

유형 04 약수의 개수 본책 139쪽

자연수 N이 $N=x^ay^b$ (x, y는 서로 다른 소수, a, b는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수는 x^a의 양의 약수와 y^b의 양의 약수 중에서 각각 하나씩 택하여 곱한 수이므로 그 개수는

➡ $\underbrace{(a+1)}_{1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^a\text{의 } (a+1)\text{개}}\underbrace{(b+1)}_{1,\ y,\ y^2,\ \cdots,\ y^b\text{의 } (b+1)\text{개}}$

0889 72를 소인수분해하면 $72=2^3\cdot 3^2$

72의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(2+1)=12$ $\therefore a=12$

120을 소인수분해하면 $120=2^3\cdot 3\cdot 5$

120의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(1+1)(1+1)=16$ $\therefore b=16$

$\therefore b-a=4$ 답 4

0890 280을 소인수분해하면 $280=2^3\cdot 5\cdot 7$

420을 소인수분해하면 $420=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$

즉 280과 420의 최대공약수는 $2^2\cdot 5\cdot 7$이다.

따라서 280과 420의 양의 공약수의 개수는 $2^2\cdot 5\cdot 7$의 양의 약수의 개수와 같으므로 구하는 개수는

$(2+1)(1+1)(1+1)=12$ 답 ②

0891 24를 소인수분해하면 $24=2^3\cdot 3$

$24^n=(2^3\cdot 3)^n=2^{3n}\cdot 3^n$의 양의 약수의 개수는

$(3n+1)(n+1)$

따라서 $(3n+1)(n+1)=65$이므로

$3n^2+4n-64=0$

$(3n+16)(n-4)=0$

$\therefore n=4$ ($\because n$은 자연수) 답 4

0892 540을 소인수분해하면 $540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$ ···➊

짝수는 2를 소인수로 가지므로 540의 양의 약수 중 짝수의 개수는 $2\cdot 3^3\cdot 5$의 양의 약수의 개수와 같다.

$2\cdot 3^3\cdot 5$의 양의 약수에 각각 2를 곱한 것이 540의 양의 약수 중 짝수이다.

$\therefore p=(1+1)(3+1)(1+1)=16$ ···➋

3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 540의 양의 약수 중 3의 배수의 개수는 $2^2\cdot 3^2\cdot 5$의 양의 약수의 개수와 같다.

$\therefore q=(2+1)(2+1)(1+1)=18$ ···➌

$2^2\cdot 3^2\cdot 5$의 양의 약수에 각각 3을 곱한 것이 540의 양의 약수 중 3의 배수이다.

$\therefore p+q=34$ ···➍

답 34

채점 기준	비율
❶ 540을 소인수분해할 수 있다.	10 %
❷ p의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 05 지불 방법의 수와 지불 금액의 수

본책 139쪽

① 지불 방법의 수
x원짜리 동전 n개로 지불할 수 있는 방법
➡ 0개, 1개, 2개, ⋯, n개의 $(n+1)$가지
② 지불 금액의 수
x원짜리 동전 n개로 지불할 수 있는 금액과 y원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같을 때
➡ y원짜리 동전 1개를 x원짜리 동전 n개로 바꾸어 생각한다.

0893 (i) 지불할 수 있는 방법의 수
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개의 2가지
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는
$2\cdot4\cdot3-1=23$
$\therefore a=23$
(ii) 지불할 수 있는 금액의 수
50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 1개를 50원짜리 동전 2개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 5개, 10원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 50원, 100원, ⋯, 250원의 6가지
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원의 3가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는
$6\cdot3-1=17$
$\therefore b=17$
(i), (ii)에서 $a-b=6$ 답 ③

0894 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지 ⋯ ❶
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지 ⋯ ❷
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지 ⋯ ❸
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는
$3\cdot4\cdot5-1=59$ ⋯ ❹
답 59

채점 기준	비율
❶ 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❹ 동전의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %

0895 5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 2장을 5000원짜리 지폐 4장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000원짜리 지폐 6장, 1000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
5000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은
0원, 5000원, 10000원, ⋯, 30000원의 7가지
1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은
0원, 1000원, 2000원, 3000원의 4가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는
$7\cdot4-1=27$ 답 ②

유형 06 도로망에서의 방법의 수

본책 140쪽

① 동시에 갈 수 없는 길이면 ➡ 합의 법칙
② 이어지는 길이면 ➡ 곱의 법칙

0896 (i) A → B → C로 가는 방법의 수는
$4\cdot2=8$
(ii) A → D → C로 가는 방법의 수는
$3\cdot4=12$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$8+12=20$ 답 20

0897 (i) 집 → A → 도서관으로 가는 방법의 수는
$3\cdot2=6$
(ii) 집 → B → 도서관으로 가는 방법의 수는
$1\cdot3=3$
(iii) 집 → A → B → 도서관으로 가는 방법의 수는
$3\cdot2\cdot3=18$
(iv) 집 → B → A → 도서관으로 가는 방법의 수는
$1\cdot2\cdot2=4$
이상에서 구하는 방법의 수는
$6+3+18+4=31$ 답 31

0898 B 지점과 D 지점을 연결하는 x개의 도로를 추가한다고 하면
(i) A → B → C로 가는 방법의 수는
$2\cdot3=6$

(ii) A → D → C로 가는 방법의 수는

$3\cdot2=6$

(iii) A → B → D → C로 가는 방법의 수는

$2\cdot x\cdot2=4x$

(iv) A → D → B → C로 가는 방법의 수는

$3\cdot x\cdot3=9x$

이상에서 A 지점에서 C 지점으로 가는 방법의 수는

$6+6+4x+9x=13x+12$

$13x+12=90$에서 $13x=78$ $\therefore x=6$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 6이다. 답 ④

유형 07 색칠하는 방법의 수 본책 140쪽

다음과 같이 각 영역을 색칠하는 방법의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용하여 색칠하는 모든 방법의 수를 구한다.
① 인접한 영역이 가장 많은 영역에 색칠하는 방법의 수를 먼저 구한다.
② 같은 색을 칠할 수 있는 영역은 같은 색인 경우와 다른 색인 경우로 나누어 생각한다.

0899 A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot3\cdot3=540$ 답 540

0900 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$4\cdot3\cdot3=36$ 답 ④

0901 (i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 방법의 수는

$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$ ···➊

(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 방법의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ ···➋

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$36+48=84$ ···➌

답 84

채점 기준	비율
➊ A와 C에 같은 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
➋ A와 C에 다른 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
➌ 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0902 A, B, C, D, E의 순서로 칠할 때, A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

(i) B와 D에 같은 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 방법의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot3=180$

(ii) B와 D에 다른 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 방법의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2=240$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$180+240=420$ 답 ④

다른 풀이 (i) 모두 다른 색을 칠하는 방법의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

(ii) B와 D에만 같은 색을 칠하는 방법의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot2=120$

(iii) C와 E에만 같은 색을 칠하는 방법의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

(iv) B와 D, C와 E에 각각 같은 색을 칠하는 방법의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot1=60$

이상에서 구하는 방법의 수는

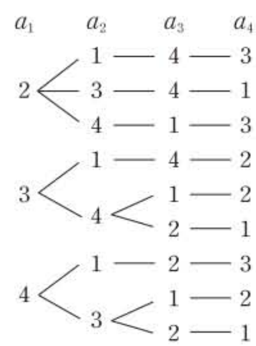
$120+120+120+60=420$

유형 08 수형도를 이용하는 경우의 수 본책 141쪽

규칙성을 찾기 어려운 경우의 수를 구할 때
➡ 수형도를 이용하면 중복되지 않고 빠짐없이 모든 경우를 나열할 수 있다. └ 사건이 일어나는 모든 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타낸 것을 수형도라 한다.

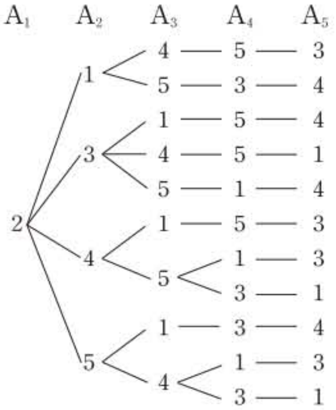
0903 $a_1\neq1$이므로 a_1이 2, 3, 4인 경우에 대하여 $a_2\neq2$, $a_3\neq3$, $a_4\neq4$인 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 9이다.



답 ①

0904 2가 적힌 공은 A_1에 넣고 k가 적힌 공은 A_k에 넣지 않는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 구하는 방법의 수는 11이다. 답 ①



유형 09 순열의 수 본책 141쪽

① 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 방법의 수 ➡ ${}_nP_r$
② 서로 다른 n개를 모두 나열하는 방법의 수 ➡ ${}_nP_n=n!$

0905 5개의 문자 중에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$ 답 ②

0906 7개의 의자 중에서 4개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 ${}_7P_4=7\cdot6\cdot5\cdot4=840$ 답 ⑤

0907 ${}_nP_2=210$이므로
$n(n-1)=210=15\cdot14$ $\therefore n=15$ 답 15

유형 10 이웃하는 순열의 수 본책 142쪽

(ⅰ) 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.
(ⅱ) (ⅰ)의 결과와 이웃하는 것끼리 자리를 바꾸는 방법의 수를 곱한다.

0908 1학년 학생 3명을 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$
1학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 방법의 수는 $120\cdot6=720$ 답 ④

0909 P와 R를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$
P와 R의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot2=48$ 답 48

0910 초등학생 4명을 한 사람, 중학생 3명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$
초등학생끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $4!=24$
중학생끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot24\cdot6=3456$ 답 ②

0911 여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 $(n+1)$명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $(n+1)!$
여학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 $(n+1)!\cdot6=36$이므로
$(n+1)!=6=3!$
$n+1=3$ $\therefore n=2$ 답 2

0912 c와 d를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5!=120$
c와 d의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
즉 c와 d를 이웃하게 나열하는 방법의 수는
$120\cdot2=240$
마찬가지로 d와 e를 이웃하게 나열하는 방법의 수는
$120\cdot2=240$
c와 d, d와 e가 동시에 이웃하는 경우는 cde, edc의 2가지이고 c, d, e를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$이므로 c와 d, d와 e가 동시에 이웃하게 나열하는 방법의 수는 $2\cdot24=48$
따라서 구하는 방법의 수는
$240+240-48=432$ 답 ③

유형 11 이웃하지 않는 순열의 수 본책 142쪽

(ⅰ) 이웃해도 상관없는 것을 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.
(ⅱ) (ⅰ)에서 나열한 것 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열하는 방법의 수를 구한다.
(ⅲ) (ⅰ)과 (ⅱ)의 결과를 곱한다.

0913 여자 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$
여자들 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 남자 2명을 세우는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$
따라서 구하는 방법의 수는
$6\cdot12=72$ 답 72

0914 4개의 자음 c, l, m, t를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$4!=24$
자음의 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 3개의 모음 i, a, e를 나열하는 방법의 수는 ${}_5P_3=60$
따라서 구하는 방법의 수는
$24\cdot60=1440$ 답 ⑤

0915 의자 3개에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 5개이다.
빈 의자들 사이사이 및 양 끝의 6개의 자리에 학생이 앉을 의자 3개를 놓으면 되므로 구하는 방법의 수는
${}_6P_3=120$ 답 120

0916 2, 3을 한 숫자로 생각하여 4, 5, 6을 제외한 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$
2와 3의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
3개의 숫자 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 3개의 숫자 4, 5, 6을 나열하는 방법의 수는 ${}_4P_3=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot2\cdot24=288$ 답 ④

유형 12 자리에 대한 조건이 있는 순열의 수

본책 143쪽

특정한 자리에 대한 조건이 있을 때
➡ 특정한 자리에 오는 것의 위치를 고정시킨 후 나머지를 나열한다.

0917 여학생은 4명이므로 양 끝에 여학생 2명을 세우는 방법의 수는 $_4P_2=12$
양 끝의 여학생 2명을 제외한 나머지 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$
따라서 구하는 방법의 수는

$12\cdot120=1440$ 답 ⑤

0918 자음은 p, r, m, s의 4개, 모음은 o, i, e의 3개이므로 자음 4개를 일렬로 나열하고 그 사이사이에 모음 3개를 나열하면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는

$4!\cdot3!=24\cdot6=144$ 답 ③

0919 2송이의 노란색 꽃을 세 군데의 홀수 번째 자리 중 두 군데에 심는 방법의 수는

$_3P_2=6$ ···➊

나머지 빈 세 자리에 빨간색 꽃 3송이를 심는 방법의 수는

$3!=6$ ···➋

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot6=36$ ···➌

답 36

채점 기준	비율
➊ 노란색 꽃을 홀수 번째 자리에 심는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
➋ 빨간색 꽃을 심는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
➌ 꽃을 심는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0920 w와 t 사이에 w와 t를 제외한 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하는 방법의 수는 $_4P_2=12$
w, t와 그 사이의 2개의 문자를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$
w와 t의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는

$12\cdot6\cdot2=144$ 답 144

SSEN 특강 특정한 두 개 사이에 일부가 들어가는 순열의 수

특정한 A, B 사이에 일부가 들어가도록 나열하는 방법의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) A, B 사이에 일부를 넣어 한 묶음을 만드는 방법의 수를 구한다.
(ii) (i)의 묶음과 나머지를 나열하는 방법의 수를 구한다.
(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

유형 13 '적어도'의 조건이 있는 순열의 수

본책 143쪽

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
$=$(모든 경우의 수)$-$(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

0921 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$6!=720$
자음은 s, l, n, t의 4개이므로 양 끝에 모두 자음이 오도록 나열하는 방법의 수는

$\underbrace{_4P_2}_{\text{자음 4개에서 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 방법의 수}}\cdot\underbrace{4!}_{\text{양 끝의 자음을 제외한 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수}}=288$

따라서 구하는 방법의 수는

$720-288=432$ 답 ⑤

0922 (1) 10명의 학생 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로

$_{10}P_2=90$ ···➊

(2) 남학생 4명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로

$_4P_2=12$ ···➋

(3) 모든 방법의 수에서 대표, 부대표 모두 남학생을 뽑는 방법의 수를 뺀 것과 같으므로

$90-12=78$ ···➌

답 (1) 90 (2) 12 (3) 78

채점 기준	비율
➊ 모든 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
➋ 대표, 부대표 모두 남학생을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
➌ 대표, 부대표 중에서 적어도 한 명은 여학생을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %

0923 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5!=120$
a, b, c의 3개의 문자 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는 d, e를 일렬로 나열하고 d와 e 사이 및 양 끝의 3개의 자리에 a, b, c를 나열하는 방법의 수와 같으므로

$2!\cdot3!=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$120-12=108$ 답 ⑤

유형 14 자연수의 개수

본책 144쪽

① 서로 다른 n개의 한 자리 자연수 중에서 서로 다른 r개를 이용하여 만들 수 있는 r자리 자연수의 개수
➡ $_nP_r$
② 0과 서로 다른 n개의 한 자리 자연수 중에서 서로 다른 r개를 이용하여 만들 수 있는 r자리 자연수의 개수
➡ $\underbrace{n}_{\text{최고 자리의 숫자에는 0이 올 수 없다.}}\times{}_nP_{r-1}$

0924 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

0, 1, 2 또는 0, 2, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 3, 4

(ⅰ) 0, 1, 2로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2\cdot 2!=4$

(ⅱ) 0, 2, 4로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2\cdot 2!=4$

(ⅲ) 1, 2, 3으로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

(ⅳ) 2, 3, 4로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

이상에서 구하는 3의 배수의 개수는

$4+4+6+6=20$ 답 ③

0925 백의 자리와 일의 자리에는 2, 4, 6의 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_3P_2=6$

천의 자리와 십의 자리에는 백의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6\cdot 12=72$ 답 72

0926 홀수이려면 일의 자리의 숫자가 홀수이어야 하므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5의 3개

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 5개이고, 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_5P_2=20$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$3\cdot 5\cdot 20=300$ 답 ③

0927 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다. ··· ❶

(ⅰ) 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수

0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_5P_3=60$ ··· ❷

(ⅱ) 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 7, 9의 4개

백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_4P_2=12$

따라서 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수는

$4\cdot 12=48$ ··· ❸

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$60+48=108$ ··· ❹

답 108

채점 기준	비율
❶ 5의 배수가 되는 경우를 알 수 있다.	20 %
❷ 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❹ 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	10 %

유형 15 사전식으로 배열하는 방법의 수

본책 145쪽

문자를 사전식으로 배열하거나 자연수를 크기순으로 나열하는 방법의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(ⅰ) 기준이 되는 문자열 또는 수의 꼴을 살핀 후 먼저 자리를 정할 수 있는 자리에 문자 또는 수를 배열한다.

(ⅱ) 순열을 이용하여 나머지 자리에 올 수 있는 것을 배열하는 방법의 수를 구한다.

0928 A로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

B로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

CA로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

CBA로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

CBD로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

CBE로 시작하는 것은 순서대로

CBEAD, CBEDA의 2개

따라서 CBEDA까지의 개수는

$24+24+6+2+2+2=60$

이므로 CBEDA는 60번째에 온다. 답 60번째

0929 4300보다 큰 자연수는 43○○, 45○○, 46○○, 5○○○, 6○○○ 꼴이다. ··· ❶

43○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

45○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

46○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

5○○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$

6○○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$ ··· ❷

따라서 구하는 자연수의 개수는

$12+12+12+60+60=156$ ··· ❸

답 156

채점 기준	비율
❶ 4300보다 큰 자연수의 꼴을 구할 수 있다.	30 %
❷ 각 자연수의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 4300보다 큰 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0930 D로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$

E로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$

FD로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

FE로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

FID로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

FIE로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

따라서 D로 시작하는 것부터 FIE로 시작하는 것까지의 총개수는

$120+120+24+24+6+6=300$

이므로 301번째에 오는 것은 FINDER

답 ②

0931 54○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

53○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

52○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

51○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

504○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

503○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

따라서 543210부터 503124까지의 자연수의 개수는

$24+24+24+24+6+6=108$

이므로 구하는 수는 502431, 502413, …에서 502413이다.

답 ④

유형 16 ${}_n\mathrm{P}_r$와 ${}_n\mathrm{C}_r$의 계산 본책 145쪽

① ${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)

$=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

② ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

③ ${}_n\mathrm{P}_n=n!$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$, $0!=1$, ${}_n\mathrm{C}_0=1$, ${}_n\mathrm{C}_n=1$

④ ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

0932 ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$이므로 $15=\dfrac{360}{r!}$

$r!=24=4\cdot3\cdot2\cdot1$ $\quad\therefore r=4$

또 ${}_n\mathrm{P}_4=360=6\cdot5\cdot4\cdot3$에서 $n=6$

$\therefore n+r=10$

답 ⑤

0933 ${}_n\mathrm{P}_4=20\cdot{}_n\mathrm{P}_2$에서

$n(n-1)(n-2)(n-3)=20n(n-1)$

${}_n\mathrm{P}_4$에서 $n\ge4$이므로 등식의 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$(n-2)(n-3)=20,\quad n^2-5n-14=0$

$(n+2)(n-7)=0\quad\therefore n=7\ (\because n\ge4)$

답 7

0934 ${}_{14}\mathrm{C}_{r^2}={}_{14}\mathrm{C}_{r+2}$에서

$r^2=r+2$ 또는 $14-r^2=r+2$

(i) $r^2=r+2$일 때,

$r^2-r-2=0,\quad(r+1)(r-2)=0$

$\therefore r=2\ (\because r>0)$

(ii) $14-r^2=r+2$일 때,

$r^2+r-12=0,\quad(r+4)(r-3)=0$

$\therefore r=3\ (\because r>0)$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 r의 값의 합은

$2+3=5$

답 ①

0935 ${}_n\mathrm{P}_2+6\cdot{}_n\mathrm{C}_2=12\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_3$에서

$$n(n-1)+6\cdot\frac{n(n-1)}{2\cdot1}=12\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot2\cdot1}$$

${}_{n-1}\mathrm{C}_3$에서 $n-1\ge3$, 즉 $n\ge4$이므로 등식의 양변을 $n-1$로 나누면

$n+3n=2(n-2)(n-3),\quad 4n=2n^2-10n+12$

$n^2-7n+6=0,\quad(n-1)(n-6)=0$

$\therefore n=6\ (\because n\ge4)$

답 6

0936 이차방정식 ${}_n\mathrm{C}_2x^2-{}_n\mathrm{C}_3x+{}_n\mathrm{C}_5=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_2}$, $\alpha\beta=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_5}{{}_n\mathrm{C}_2}$

이때 $\alpha\beta=1$이므로 $\dfrac{{}_n\mathrm{C}_5}{{}_n\mathrm{C}_2}=1,\quad{}_n\mathrm{C}_5={}_n\mathrm{C}_2$

$n-5=2\quad\therefore n=7$ ··· ❶

$$\therefore\alpha+\beta=\frac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{7\cdot6}{2\cdot1}}=\frac{5}{3}$$ ··· ❷

답 $\dfrac{5}{3}$

채점 기준	비율
❶ n의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 17 ${}_n\mathrm{P}_r$와 ${}_n\mathrm{C}_r$를 이용한 증명 본책 146쪽

다음과 같은 순열과 조합의 수에 대한 식을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 증명한다.

① ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$, ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

② $n!=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n\cdot(n-1)!$

0937 ${}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

$$=\frac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\boxed{(n-r)!}}$$

분모, 분자에 각각 r를 곱한다.

분모, 분자에 각각 $n-r$를 곱한다.

$$=\frac{(\boxed{n-r})\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{r\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{\{(n-r)+r\}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{\boxed{n!}}{r!(n-r)!}={}_n\mathrm{C}_r$$

$\therefore$ (가) $(n-r)!$ (나) $n-r$ (다) $n!$

답 (가) $(n-r)!$ (나) $n-r$ (다) $n!$

0938 $${}_n\mathrm{C}_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(\boxed{n-r})\}!}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!\boxed{r!}}={}_n\mathrm{C}_r$$

$\therefore$ (가) $n-r$ (나) $r!$

답 (가) $n-r$ (나) $r!$

0939 ${}_{n-1}\mathrm{P}_r+r\cdot{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$
$$=\frac{(n-1)!(n-r)}{(n-r)!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$
$$=\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\{(n-r)+r\}=\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\cdot\boxed{n}$$
$$=\frac{\boxed{n!}}{(n-r)!}={}_n\mathrm{P}_r$$

∴ (가) n (나) $n!$

답 ①

0940 $n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\boxed{(n-r)!}}$$
$$=\frac{\boxed{n!}}{(r-1)!(n-r)!}$$
$$=\frac{r\cdot n!}{\boxed{r!}(n-r)!}=r\cdot{}_n\mathrm{C}_r$$

∴ (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$

답 ⑤

유형 18 조합의 수

본책 147쪽

① 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 방법의 수 ➡ ${}_n\mathrm{C}_r$

② 서로 다른 n개에서 a개를 택한 후 나머지에서 b개를 택하는 방법의 수 ➡ ${}_n\mathrm{C}_a\cdot{}_{n-a}\mathrm{C}_b$

0941 의사 7명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_3=35$

간호사 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$35+20=55$

답 55

0942 색연필 n자루 중에서 3자루를 택하는 방법의 수는

${}_n\mathrm{C}_3$

공책 5권 중에서 2권을 택하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$

따라서 ${}_n\mathrm{C}_3\cdot 10=200$이므로 ${}_n\mathrm{C}_3=20$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=20,\quad n(n-1)(n-2)=6\cdot5\cdot4$

∴ $n=6$

답 6

0943 5개의 동아리 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

택한 3개의 동아리에서 각각 1명씩 뽑는 방법의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1=4\cdot4\cdot4=64$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot64=640$

답 ⑤

0944 세 수의 합이 짝수가 되기 위해서는 세 수 모두 짝수이거나 하나는 짝수, 두 수는 홀수이어야 한다.

(i) 세 수 모두 짝수인 경우

2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 3장을 꺼내는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$ ⋯ ❶

(ii) 하나는 짝수, 두 수는 홀수인 경우

2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 1장을 꺼내고 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 2장을 꺼내는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_2=4\cdot10=40$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4+40=44$ ⋯ ❸

답 44

채점 기준	비율
❶ 짝수가 적힌 카드 3장을 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 짝수가 적힌 카드 1장, 홀수가 적힌 카드 2장을 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 카드에 적힌 수의 총합이 짝수가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0945 1부터 20까지의 홀수 중 4로 나누었을 때 나머지가 1, 3인 수의 집합을 각각 A, B라 하면

$A=\{1, 5, 9, 13, 17\}$, $B=\{3, 7, 11, 15, 19\}$

두 수의 합이 4의 배수가 되려면 두 집합 A, B에서 각각 1개씩 택하면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1=5\cdot5=25$

답 25

유형 19 특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수

본책 147쪽

① 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 방법의 수
➡ $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 뽑는 방법의 수와 같다.
➡ ${}_{n-k}\mathrm{C}_{r-k}$

② 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 제외하고 r개를 뽑는 방법의 수
➡ $(n-k)$개에서 r개를 뽑는 방법의 수와 같다.
➡ ${}_{n-k}\mathrm{C}_r$

0946 혜원이와 민준이를 제외한 10명의 회원 중에서 3명을 뽑는 방법의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=120$

답 ①

0947 2와 7이 적힌 공을 제외한 8개의 공 중에서 2개를 꺼내는 방법의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는

${}_8\mathrm{C}_2=28$

답 28

0948 (1) 5를 제외한 11개의 자연수 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_{11}\mathrm{C}_2=55$ ⋯ ❶

(2) 3, 6, 9, 12를 제외한 8개의 자연수 중에서 4개 이하를 택하는 방법의 수와 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$_8C_4+_8C_3+_8C_2+_8C_1+_8C_0=70+56+28+8+1$
$=163$ ⋯ ❷

답 (1) 55 (2) 163

채점 기준	비율
❶ 5를 원소로 갖고 원소의 개수가 3인 집합 A의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 3의 배수를 원소로 갖지 않고 원소의 개수가 4 이하인 집합 A의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	60 %

0949 (i) A와 B가 공통으로 신청하는 봉사활동이 0개인 경우
A가 6개의 봉사활동 중에서 2개를 택하고, B가 남은 4개의 봉사활동 중에서 2개를 택하면 되므로 방법의 수는
$_6C_2\cdot{}_4C_2=15\cdot6=90$
(ii) A와 B가 공통으로 신청하는 봉사활동이 1개인 경우
A가 6개의 봉사활동 중에서 2개를 택하는 방법의 수는
$_6C_2=15$
B가 A가 택한 2개의 봉사활동 중에서 하나를 택하고, A가 택하지 않은 4개의 봉사활동 중에서 하나를 택하는 방법의 수는 $_2C_1\cdot{}_4C_1=2\cdot4=8$
따라서 A와 B가 공통으로 신청하는 봉사활동이 1개인 방법의 수는 $15\cdot8=120$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$90+120=210$ 답 ⑤

다른 풀이 (ii) A와 B가 공통으로 신청하는 봉사활동이 1개인 경우
6개의 봉사활동 중에서 A와 B가 공통으로 신청할 봉사활동을 택하는 방법의 수는 $_6C_1=6$
남은 5개의 봉사활동 중에서 A와 B가 각각 하나씩 신청할 봉사활동을 택하는 방법의 수는 $_5P_2=20$
따라서 A와 B가 공통으로 신청하는 봉사활동이 1개인 방법의 수는 $6\cdot20=120$

0950 짝이 맞는 구두 한 켤레를 택하는 방법의 수는
$_5C_1=5$
한 켤레를 제외한 구두 8짝 중에서 2짝을 택하는 방법의 수는
$_8C_2=28$
이때 구두 8짝 중에서 짝이 맞는 2짝, 즉 구두 4켤레 중에서 한 켤레를 택하는 방법의 수는
$_4C_1=4$
이므로 구두 8짝 중에서 짝이 맞지 않는 2짝을 택하는 방법의 수는 $28-4=24$
따라서 구하는 방법의 수는
$5\cdot24=120$ 답 120

유형 20 '적어도'의 조건이 있는 조합의 수

본책 148쪽

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
$=$(모든 경우의 수)$-$(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

0951 12명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는
$_{12}C_4=495$
남자만 4명을 뽑는 방법의 수는 $_6C_4={}_6C_2=15$
여자만 4명을 뽑는 방법의 수는 $_6C_4={}_6C_2=15$
따라서 구하는 방법의 수는
$495-(15+15)=465$ 답 ②

0952 (1) 10송이 중에서 4송이를 고르는 방법의 수는
$_{10}C_4=210$
노란색 꽃과 보라색 꽃 중에서 4송이를 고르는 방법의 수는
$_6C_4={}_6C_2=15$
따라서 구하는 방법의 수는
$210-15=195$ ⋯ ❶
(2) (i) 노란색 꽃이 2송이 포함되도록 고르는 방법의 수는
$_3C_2\cdot{}_7C_2=3\cdot21=63$
(ii) 노란색 꽃이 3송이 포함되도록 고르는 방법의 수는
$_3C_3\cdot{}_7C_1=1\cdot7=7$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$63+7=70$ ⋯ ❷

답 (1) 195 (2) 70

채점 기준	비율
❶ 빨간색 꽃이 적어도 1송이 포함되도록 고르는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 노란색 꽃이 적어도 2송이 포함되도록 고르는 방법의 수를 구할 수 있다.	60 %

다른 풀이 (2) 10송이 중에서 4송이를 고르는 방법의 수는
$_{10}C_4=210$
(i) 노란색 꽃이 하나도 포함되지 않도록 고르는 방법의 수는 빨간색 꽃과 보라색 꽃 중에서 4송이를 고르는 방법의 수와 같으므로
$_7C_4={}_7C_3=35$
(ii) 노란색 꽃이 1송이만 포함되도록 고르는 방법의 수는 빨간색 꽃과 보라색 꽃 중에서 3송이를 고르고, 노란색 꽃 중에서 1송이를 고르는 방법의 수와 같으므로
$_7C_3\cdot{}_3C_1=35\cdot3=105$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$210-(35+105)=70$

0953 10 미만의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 자연수를 뽑는 방법의 수는
$_9C_4=126$
10 미만의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이므로
(i) 홀수만 4개를 뽑는 방법의 수는 $_5C_4={}_5C_1=5$
(ii) 짝수만 4개를 뽑는 방법의 수는 $_4C_4=1$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$126-(5+1)=120$ 답 120

0954 12명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_{12}C_3=220$

여자 지원자 수를 $n(n\geq 3)$이라 하면 여자만 3명을 뽑는 방법의 수는 $_nC_3$

이때 남자 지원자가 적어도 한 명 포함되도록 뽑는 방법의 수가 164이므로

$220-{_nC_3}=164$, $_nC_3=56$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=56$, $n(n-1)(n-2)=8\cdot7\cdot6$

$\therefore n=8$

따라서 여자 지원자가 8명이므로 남자 지원자 수는

$12-8=4$ 답 4

참고 12명의 지원자 중 여자 지원자가 3명 미만이면 3명을 뽑을 때 항상 남자 지원자가 적어도 한 명 포함되므로 남자 지원자를 적어도 한 명 포함하도록 3명을 뽑는 방법의 수는 $_{12}C_3=220$

즉 주어진 조건에 맞지 않으므로 $n\geq 3$

유형 21 뽑아서 나열하는 방법의 수

본책 148쪽

m개 중에서 r개, n개 중에서 s개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수

➡ $_mC_r\cdot{_nC_s}\cdot(r+s)!$

0955 어른 5명 중에서 1명을 뽑는 방법의 수는

$_5C_1=5$

어린이 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_6C_2=15$

3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot15\cdot6=450$ 답 ④

0956 1부터 9까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이므로

홀수 3개를 택하는 방법의 수는

$_5C_3={_5C_2}=10$

짝수 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

5개의 자연수를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$10\cdot6\cdot120=7200$ 답 ④

0957 지원이와 수현이를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 $_6C_3=20$ ⋯ ❶

지원이와 수현이를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$이고, 이때 지원이와 수현이가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이므로 지원이와 수현이를 이웃하도록 세우는 방법의 수는 $24\cdot2=48$ ⋯ ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$20\cdot48=960$ ⋯ ❸

답 960

채점 기준	비율
❶ 지원이와 수현이를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 지원이와 수현이를 이웃하도록 세우는 방법의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 지원이와 수현이가 모두 포함되고 이들이 서로 이웃하도록 세우는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

유형 22 함수의 개수

본책 149쪽

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, $n(m\leq n)$일 때

① 함수 $f: X \longrightarrow Y$ 중에서 일대일함수인 함수 f의 개수

➡ $_nP_m$

② 함수 $f: X \longrightarrow X$ 중에서 일대일대응인 함수 f의 개수

➡ $_mP_m=m!$

③ 함수 $f: X \longrightarrow Y$ 중에서 $a<b$이면 $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수 f의 개수

➡ $_nC_m$

0958 주어진 조건을 만족시키려면 공역의 원소 중에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 3, 5에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$_5C_3={_5C_2}=10$ 답 ③

0959 일대일함수 f의 개수는 집합 Y의 5개의 원소 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$_5P_4=120$

$\therefore a=120$ ⋯ ❶

$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$를 만족시키려면 집합 Y의 5개의 원소 중에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

따라서 $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$인 함수 f의 개수는

$_5C_4={_5C_1}=5$

$\therefore b=5$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=115$ ⋯ ❸

답 115

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0960 주어진 조건을 만족시키려면 공역의 원소 중에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 3, 4, 5에 대응시키면 된다.

즉 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 방법의 수는

$_5C_3={_5C_2}=10$

정의역의 원소 1, 2에 대응하는 공역의 원소를 택하는 방법의 수는 각각 $_5C_1=5$이므로 구하는 함수 f의 개수는

$10\cdot5\cdot5=250$ 답 ⑤

0961 조건 (가), (나)에서 함수 f는 집합 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에서 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$으로의 일대일대응으로 생각할 수 있다.
조건 (다)에서 $f(2)\le2$이므로 $f(2)$의 값을 정하는 방법의 수는

$_2C_1$

$f(3)\le3$, $f(3)\ne f(2)$이므로 $f(3)$의 값을 정하는 방법의 수는

$_2C_1$

마찬가지로 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 방법의 수는 각각 $_2C_1$이고, $f(7)$의 값을 정하는 방법의 수는 1이다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는

$_2C_1\cdot{_2C_1}\cdot{_2C_1}\cdot{_2C_1}\cdot{_2C_1}\cdot1=32$ 답 32

0962 $f(1)\le f(2)<f(3)<f(4)$를 만족시키려면

$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$

또는 $f(1)=f(2)<f(3)<f(4)$

(i) $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$인 경우
집합 Y의 6개의 원소 중에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로

$_6C_4={_6C_2}=15$

(ii) $f(1)=f(2)<f(3)<f(4)$인 경우
집합 Y의 6개의 원소 중에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1과 2, 3, 4에 대응시키면 되므로

$_6C_3=20$

(i), (ii)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 방법의 수는 $15+20=35$
$f(5)<f(6)$을 만족시키려면 집합 Y의 6개의 원소 중에서 서로 다른 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 5, 6에 대응시키면 되므로

$_6C_2=15$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$35\cdot15=525$ 답 ④

유형 23 직선과 대각선의 개수 본책 150쪽

① 서로 다른 n개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않을 때, 주어진 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수
➡ $_nC_2$

② n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 변의 개수인 n을 뺀 것과 같다.
➡ $_nC_2-n$

0963 5개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

$_5C_2=10$ 답 ②

0964 구하는 대각선의 개수는 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 방법의 수에서 변의 개수인 8을 뺀 것과 같으므로

$_8C_2-8=28-8=20$ 답 20

0965 두 직선 위의 점을 각각 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

$_4C_1\cdot{_5C_1}=4\cdot5=20$

한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 연결한 직선의 개수는 2
└ 주어진 두 직선

따라서 구하는 직선의 개수는

$20+2=22$ 답 22

다른 풀이 9개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_9C_2=36$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_5C_2=10$

주어진 두 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$36-6-10+2=22$

0966 10개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_{10}C_2=45$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

이때 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 5개이므로 구하는 직선의 개수는

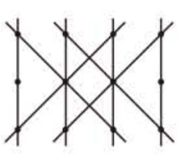
$45-6\cdot5+5=20$ 답 ④

0967 12개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_{12}C_2=66$

(i) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우
3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

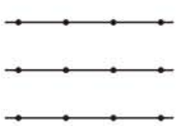
$_3C_2={_3C_1}=3$



이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 8개이므로 $3\cdot8=24$ ··· ❶

(ii) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우
4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$



이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이므로 $6\cdot3=18$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 직선의 개수는

$66-24-18+8+3=35$ ··· ❸

답 35

채점 기준	비율
❶ 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 점 이상을 지나는 서로 다른 직선의 개수를 구할 수 있다.	20 %

유형 24 다각형의 개수

본책 150쪽

서로 다른 n개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않을 때, 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수 ➡ ${}_nC_3$

0968 9개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_9C_3=84$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이다.
그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-4\cdot3=72$ 답 72

0969 직선 l 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_2=6$

직선 m 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_2=10$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$6\cdot10=60$ 답 60

다른 풀이 9개의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

${}_9C_4=126$

직선 l 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 m 위의 점 중에서 1개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_3\cdot{}_5C_1={}_4C_1\cdot5=4\cdot5=20$

직선 m 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 l 위의 점 중에서 1개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_3\cdot{}_4C_1={}_5C_2\cdot4=10\cdot4=40$

직선 l 위의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_4=1$

직선 m 위의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$126-(20+40+1+5)=60$

0970 7개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_7C_3=35$

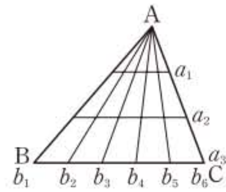
한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$35-4=31$ 답 ②

0971 오른쪽 그림과 같이 각각의 선을 a_i, b_j($i=1, 2, 3$, $j=1, 2, 3, 4, 5, 6$)라 하자.



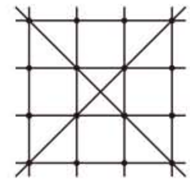
삼각형을 만들려면 a_1, a_2, a_3 중 한 개, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 중 두 개를 택해야 하므로 구하는 삼각형의 개수는

${}_3C_1\cdot{}_6C_2=3\cdot15=45$ 답 45

0972 16개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_{16}C_3=560$

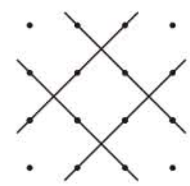
(i) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우
4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는



${}_4C_3={}_4C_1=4$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 10개이므로 $4\cdot10=40$

(ii) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우
3개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는



${}_3C_3=1$

이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 4개이므로 $1\cdot4=4$

(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 개수는

$560-40-4=516$ 답 ⑤

유형 25 평행사변형의 개수

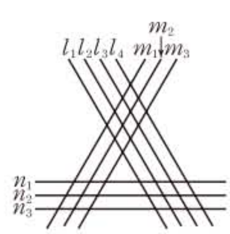
본책 151쪽

m개의 평행한 직선과 n개의 평행한 직선이 만날 때, 이 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수 ➡ ${}_mC_2\cdot{}_nC_2$

0973 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_5C_2\cdot{}_4C_2=10\cdot6=60$ 답 ④

0974 오른쪽 그림과 같이 평행한 직선을 l_i, m_j, n_k ($i=1, 2, 3, 4$, $j=1, 2, 3$, $k=1, 2, 3$)라 하자.



(i) l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 2개를 택하고, m_1, m_2, m_3 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_2\cdot{}_3C_2=6\cdot{}_3C_1=6\cdot3=18$

(ii) m_1, m_2, m_3 중에서 2개를 택하고, n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_3C_2\cdot{}_3C_2={}_3C_1\cdot{}_3C_1=3\cdot3=9$

(iii) n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하고, l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_3C_2\cdot{}_4C_2={}_3C_1\cdot6=3\cdot6=18$

이상에서 구하는 평행사변형의 개수는

$18+9+18=45$ 답 45

0975 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어지므로 직사각형의 개수는 $\quad {}_4C_2\cdot{}_4C_2=6\cdot6=36$ ··· ❶

한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형의 개수는 각각 9, 4, 1이므로 정사각형의 개수는

$9+4+1=14$ ··· ❷

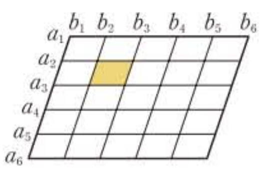
따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$36-14=22$ ··· ❸

답 22

채점 기준	비율
❶ 만들어지는 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 만들어지는 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 만들어지는 정사각형이 아닌 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0976 오른쪽 그림과 같이 각각의 평행한 선을 a_i, b_j ($i=1$, 2, 3, 4, 5, 6, $j=1$, 2, 3, 4, 5, 6)라 하자.



색칠한 부분을 포함하는 평행사변형을 만들려면 가로 방향의 선 2개는 a_1, a_2 중 한 개, a_3, a_4, a_5, a_6 중 한 개를 택해야 하므로 가로 방향의 선을 택하는 방법의 수는

${}_2C_1\cdot{}_4C_1=2\cdot4=8$

마찬가지로 세로 방향의 선 2개는 b_1, b_2 중 한 개, b_3, b_4, b_5, b_6 중 한 개를 택해야 하므로 세로 방향의 선을 택하는 방법의 수는

${}_2C_1\cdot{}_4C_1=2\cdot4=8$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$8\cdot8=64$ 답 ③

0977 n개의 평행한 직선 중에서 2개, $(n+2)$개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로

${}_nC_2\cdot{}_{n+2}C_2=210$

$\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}\cdot\dfrac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1}=210$

$(n+2)(n+1)n(n-1)=7\cdot6\cdot5\cdot4$

$\therefore n=5$ 답 5

유형 26 분할하는 방법의 수 본책 152쪽

서로 다른 n개를 p개, q개, r개$(p+q+r=n)$로 분할하는 방법의 수는

① p, q, r가 모두 다른 수일 때 ➡ ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r$

② p, q, r 중 어느 두 수가 같을 때 ➡ ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r\cdot\dfrac{1}{2!}$

③ p, q, r가 모두 같은 수일 때 ➡ ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r\cdot\dfrac{1}{3!}$

0978 6개의 과일을 똑같은 바구니 3개에 빈 바구니가 없도록 나누어 담을 때, 각 바구니에 담을 수 있는 과일의 개수는

1, 1, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 2, 2

(i) 1개, 1개, 4개로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_4\cdot\dfrac{1}{2!}=6\cdot5\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=15$

(ii) 1개, 2개, 3개로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\cdot10\cdot1=60$

(iii) 2개, 2개, 2개로 나누는 방법의 수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\dfrac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\dfrac{1}{6}=15$

이상에서 구하는 방법의 수는

$15+60+15=90$ 답 90

0979 남자 8명 중 2명이 여자 4명과 한 조를 이루면 되므로 남자 8명을 2명, 6명으로 나누면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

${}_8C_2\cdot{}_6C_6=28\cdot1=28$ 답 28

0980 10명을 5명, 5명으로 나누는 방법의 수는

${}_{10}C_5\cdot{}_5C_5\cdot\dfrac{1}{2!}=252\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=126$ ··· ❶

경찰관 7명을 2명, 5명으로 나누는 방법의 수는 (경찰관만 포함된 조가 있도록 나누는 방법)

${}_7C_2\cdot{}_5C_5=21\cdot1=21$ ··· ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$126-21=105$ ··· ❸

답 105

채점 기준	비율
❶ 10명을 5명, 5명으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 경찰관 7명을 2명, 5명으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 각 조에 적어도 한 명의 소방관이 포함되도록 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 각 조에 적어도 한 명의 소방관이 포함되려면

경찰관 4명과 소방관 1명, 경찰관 3명과 소방관 2명

의 두 개의 조로 나눠야 한다.

경찰관 4명과 함께 한 조가 될 소방관 1명을 뽑으면 나머지 한 조가 자동으로 결정되므로 구하는 방법의 수는

${}_7C_4\cdot{}_3C_1={}_7C_3\cdot3=35\cdot3=105$

유형 27 분할한 후 분배하는 방법의 수 본책 152쪽

n묶음으로 분할하여 n명에게 분배하는 방법의 수

➡ (n묶음으로 분할하는 방법의 수)$\cdot n!$

0981 7명의 학생을 3명, 3명, 1명의 3개의 조로 나누는 방법의 수는

${}_7C_3\cdot{}_4C_3\cdot{}_1C_1\cdot\dfrac{1}{2!}=35\cdot4\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=70$

3개의 조를 3곳의 청소 구역에 배정하는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$70\cdot6=420$ 답 ④

0982 8명의 학생을 2명, 2명, 2명, 2명의 4개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_{8}C_{2}\cdot{}_{6}C_{2}\cdot{}_{4}C_{2}\cdot{}_{2}C_{2}\cdot\frac{1}{4!}=28\cdot15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{24}=105 \quad \cdots ❶$$

4개의 조가 4종류의 컴퓨터 게임을 하는 방법의 수는

$4!=24$ ⋯ ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$105\cdot24=2520$ ⋯ ❸

답 2520

채점 기준	비율
❶ 8명의 학생을 2명씩 4개의 조로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 4개의 조가 4종류의 컴퓨터 게임을 하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 2명씩 짝을 이루어 4종류의 컴퓨터 게임을 하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0983 2층부터 7층까지 6개의 층 중에서 사람들이 내리는 3개의 층을 택하는 방법의 수는 ${}_{6}C_{3}=20$

7명을 2명, 2명, 3명의 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_{7}C_{2}\cdot{}_{5}C_{2}\cdot{}_{3}C_{3}\cdot\frac{1}{2!}=21\cdot10\cdot1\cdot\frac{1}{2}=105$$

3개의 조를 3개의 층에 분배하는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$20\cdot105\cdot6=12600$ 답 ④

다른 풀이 7명을 2명, 2명, 3명의 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_{7}C_{2}\cdot{}_{5}C_{2}\cdot{}_{3}C_{3}\cdot\frac{1}{2!}=105$$

3개의 조가 2층부터 7층까지 6개의 층 중에서 3개의 층에 각각 내리면 되므로 구하는 방법의 수는

$105\cdot{}_{6}P_{3}=105\cdot120=12600$

0984 운전자를 제외한 나머지 7명을 3개의 조로 나눌 때, 각 승용차에 탑승하는 인원수는

1, 3, 3 또는 2, 2, 3

(i) 1명, 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_{7}C_{1}\cdot{}_{6}C_{3}\cdot{}_{3}C_{3}\cdot\frac{1}{2!}=7\cdot20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=70$$

(ii) 2명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_{7}C_{2}\cdot{}_{5}C_{2}\cdot{}_{3}C_{3}\cdot\frac{1}{2!}=21\cdot10\cdot1\cdot\frac{1}{2}=105$$

(i), (ii)에서 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$70+105=175$

3개의 조를 3대의 승용차에 배정하는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$175\cdot6=1050$ 답 1050

0985 6명을 3개의 조로 나눌 때, 각 관광지에 사전 답사를 가는 인원수는

1, 1, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 2, 2

(i) 1명, 1명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$${}_{6}C_{1}\cdot{}_{5}C_{1}\cdot{}_{4}C_{4}\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot5\cdot1\cdot\frac{1}{2}=15$$

(ii) 1명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_{6}C_{1}\cdot{}_{5}C_{2}\cdot{}_{3}C_{3}=6\cdot10\cdot1=60$$

(iii) 2명, 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$${}_{6}C_{2}\cdot{}_{4}C_{2}\cdot{}_{2}C_{2}\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}=15$$

이상에서 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$15+60+15=90$

3개의 조를 3곳의 관광지에 배정하는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$90\cdot6=540$ 답 540

유형 28 대진표 작성하기

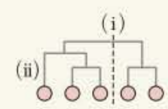
본책 153쪽

오른쪽 그림과 같은 대진표에서

(i) 5명을 3명, 2명의 2개의 조로 나눈다.
➡ ${}_{5}C_{3}\cdot{}_{2}C_{2}$

(ii) 3명인 조에서 부전승으로 올라가는 1명을 택한다. ➡ ${}_{3}C_{1}$

(iii) (i), (ii)의 결과를 곱한다. ➡ ${}_{5}C_{3}\cdot{}_{2}C_{2}\cdot{}_{3}C_{1}$



0986 구하는 방법의 수는 먼저 6명을 3명, 3명의 2개의 조로 나눈 후 각 조에서 부전승으로 올라가는 1명을 택하는 방법의 수와 같으므로

$$\left({}_{6}C_{3}\cdot{}_{3}C_{3}\cdot\frac{1}{2!}\right)\cdot{}_{3}C_{1}\cdot{}_{3}C_{1}=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot3=90$$

답 ④

0987 구하는 방법의 수는 먼저 6개의 학급을 2개, 4개의 학급으로 나눈 후 4개의 학급을 다시 2개, 2개의 학급으로 나누는 방법의 수와 같으므로

$$({}_{6}C_{2}\cdot{}_{4}C_{4})\cdot\left({}_{4}C_{2}\cdot{}_{2}C_{2}\cdot\frac{1}{2!}\right)=15\cdot1\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=45$$

답 45

0988 9개의 팀을 5개, 4개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$${}_{9}C_{5}\cdot{}_{4}C_{4}=126\cdot1=126$$

5개의 팀을 3개, 2개의 팀으로 나눈 후 3개의 팀 중에서 부전승으로 올라가는 1개의 팀을 택하는 방법의 수는

$$({}_{5}C_{3}\cdot{}_{2}C_{2})\cdot{}_{3}C_{1}=10\cdot1\cdot3=30$$

4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$${}_{4}C_{2}\cdot{}_{2}C_{2}\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$$

따라서 구하는 방법의 수는

$126\cdot30\cdot3=11340$ 답 11340

0989 전략 사다리꼴의 넓이가 2이기 위한 윗변과 아랫변의 길이를 구한다.

풀이 두 평행한 직선에서 각각 두 점을 택할 때 사각형이 되고, 이 사각형은 사다리꼴이다.

사다리꼴의 윗변과 아랫변의 길이를 각각 a, b라 할 때, 사다리꼴의 넓이가 2이려면

$\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot 1=2 \qquad \therefore a+b=4$ ··· ❶

(i) $a=1$, $b=3$일 때,

$a=1$인 경우는 4가지, $b=3$인 경우는 2가지이므로

$4\cdot 2=8$ ··· ❷

(ii) $a=2$, $b=2$일 때, 평행사변형도 사다리꼴이다.

$a=2$인 경우는 3가지, $b=2$인 경우는 3가지이므로

$3\cdot 3=9$ ··· ❸

(iii) $a=3$, $b=1$일 때,

$a=3$인 경우는 2가지, $b=1$인 경우는 4가지이므로

$2\cdot 4=8$ ··· ❹

이상에서 구하는 사각형의 개수는

$8+9+8=25$ ··· ❺

답 25

채점 기준	비율
❶ 사다리꼴의 윗변과 아랫변의 길이에 대한 관계식을 세울 수 있다.	20 %
❷ 윗변의 길이가 1, 아랫변의 길이가 3인 사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 윗변의 길이가 2, 아랫변의 길이가 2인 사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❹ 윗변의 길이가 3, 아랫변의 길이가 1인 사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❺ 넓이가 2인 사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0990 전략 $x>0$인 집합 X의 원소 x에 대하여 $f(x)=1$, $f(x)=2$, $f(x)=3$인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 $|f(x)+f(-x)|=1$에서

$f(x)+f(-x)=1$ 또는 $f(x)+f(-x)=-1$

$x>0$인 집합 X의 원소 x에 대하여

(i) $f(x)=1$일 때, $\quad f(-x)=-2$

(ii) $f(x)=2$일 때, $\quad f(-x)=-3$ 또는 $f(-x)=-1$

(iii) $f(x)=3$일 때, $\quad f(-x)=-2$

이상에서 $f(x)$의 값에 따라 $f(-x)$의 값이 정해진다.

따라서 $f(1)$과 $f(-1)$, $f(2)$와 $f(-2)$, $f(3)$과 $f(-3)$의 값을 정하는 경우의 수가 각각 4이므로 구하는 함수 $f(x)$의 개수는

$4\cdot 4\cdot 4=64$

답 64

0991 전략 다섯 개의 영역 A, B, C, D, E의 넓이를 각각 구한 후, 가장 넓은 영역인 E에 칠하는 색을 기준으로 조건을 만족시키는 경우를 구한다.

풀이 영역 A의 넓이는 $\quad \pi\cdot 1^2=\pi$

영역 B의 넓이는 $\quad \pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2=3\pi$

영역 C의 넓이는 $\quad \pi\cdot 3^2-\pi\cdot 2^2=5\pi$

영역 D의 넓이는 $\quad \pi\cdot 4^2-\pi\cdot 3^2=7\pi$

영역 E의 넓이는 $\quad \pi\cdot 5^2-\pi\cdot 4^2=9\pi$

이때 각 물감은 10통 이하만 사용할 수 있고 물감 1통으로는 영역 A의 넓이인 π만큼만 칠할 수 있으므로 한 가지 색의 물감으로는 10π만큼의 넓이까지 칠할 수 있다.

3가지 색을 빨강, 노랑, 파랑이라 하고 가장 넓은 영역인 E에 빨강을 칠하는 경우를 모두 구하면 다음과 같다.

영역 E (넓이: 9π)	영역 D (넓이: 7π)	영역 C (넓이: 5π)	영역 B (넓이: 3π)	영역 A (넓이: π)
빨강	파랑	노랑	파랑	빨강
빨강	파랑	노랑	파랑	노랑
빨강	노랑	파랑	노랑	빨강
빨강	노랑	파랑	노랑	파랑

마찬가지로 영역 E에 노랑, 파랑을 칠하는 경우도 각각 4가지씩이므로 구하는 문양의 개수는

$4\cdot 3=12$

답 ②

0992 전략 A와 B, C와 D가 앉는 경우의 수를 먼저 구한다.

풀이 조건 (가)에서 A와 B가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자는 마부가 앉는 의자를 제외한 3개이고, A, B 두 사람이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 A와 B가 앉는 경우의 수는

$3\cdot 2=6$

남은 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 경우의 수는 $\quad {}_5P_2=20$

이때 C와 D가 이웃하여 앉는 경우의 수는 A와 B가 앉는 의자와 마부가 앉는 의자를 제외한 2개이고, C, D 두 사람이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 그 경우의 수는

$2\cdot 2=4$

조건 (나)에서 C와 D가 이웃하여 앉지 않아야 하므로 그 경우의 수는

$20-4=16$

남은 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 16\cdot 6=576$

답 576

0993 전략 흰 공을 먼저 놓고, 그 각각의 경우에 대하여 검은 공을 놓는 방법을 생각한다.

1행, 2행, 3행, 4행의 4가지

풀이 1열에 흰 공을 놓을 수 있는 방법은 4가지, 2열에 흰 공을 놓을 수 있는 방법은 1열에 흰 공을 놓은 행을 제외한 3가지, 3열에 흰 공을 놓을 수 있는 방법은 1, 2열에 흰 공을 놓은 행을 제외한 2가지, 4열에 흰 공을 놓을 수 있는 방법은 1, 2, 3열에 흰 공을 놓은 행을 제외한 1가지이다.

따라서 흰 공을 놓을 수 있는 방법의 수는

$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$

이때 조건 (다)에 의하여 검은 공은 다음과 같이 놓을 수 있다.

(i) 1행에 놓인 흰 공과 같은 열에서 검은 공은 3행 또는 4행에 놓을 수 있다.

(ii) 2행에 놓인 흰 공과 같은 열에서 검은 공은 4행에 놓을 수 있다.

(iii) 3행에 놓인 흰 공과 같은 열에서 검은 공은 1행에 놓을 수 있다.

(iv) 4행에 놓인 흰 공과 같은 열에서 검은 공은 1행 또는 2행에 놓을 수 있다.

이상에서 검은 공을 놓을 수 있는 방법의 수는

$2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

따라서 구하는 방법의 수는

$24 \cdot 4 = 96$ 답 ②

0994 전략 같은 숫자가 없을 때, 한 쌍 있을 때, 두 쌍 있을 때로 나누어 각각의 자연수의 개수를 구한다.

풀이 (i) 같은 숫자가 없는 경우

네 자리 자연수의 개수는 $_5P_4 = 120$ ⋯ ❶

(ii) 같은 숫자가 한 쌍 있는 경우

∨□∨□, □∨□∨, ∨□□∨의 3가지

∨의 자리에 서로 같은 수를 넣고 □의 자리에 서로 다른 두 수를 각각 넣으면 되므로 네 자리 자연수의 개수는

$3 \cdot \underbrace{2}_{\text{4 또는 5를 택하는 방법의 수}} \cdot {_4P_2} = 72$ ⋯ ❷

(iii) 같은 숫자가 두 쌍 있는 경우

네 자리 자연수는 4545, 5454의 2개 ⋯ ❸

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$120 + 72 + 2 = 194$ ⋯ ❹

답 194

채점 기준	비율
❶ 같은 숫자가 없는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 같은 숫자가 한 쌍 있는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 같은 숫자가 두 쌍 있는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 같은 숫자끼리는 이웃하지 않는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0995 전략 숫자를 나열하는 경우와 알파벳을 나열하는 경우를 나누어 생각한다.

풀이 (i) 숫자를 나열하는 경우

ⓘ 0을 사용하지 않거나 1개 사용하는 경우

0, 5, 7, 1, 3 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$_5P_4 = 120$

ⓘⓘ 0을 2개 사용하는 경우

0끼리 서로 이웃하므로 00□□, □00□, □□00 꼴의 3가지이고, 그 각각에 대하여 5, 7, 1, 3 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수가 $_4P_2 = 12$이므로

$3 \cdot 12 = 36$

ⓘ, ⓘⓘ에서 숫자를 나열하는 방법의 수는

$120 + 36 = 156$

(ii) 알파벳을 나열하는 경우

ⓘⓘⓘ g△g□ 또는 □g△g인 경우

△에는 i, o 중에서 한 개, □에는 l, d, n과 사용하지 않은 모음 중에서 한 개를 택하여 나열하는 방법의 수가

$2 \cdot 4 = 8$

이므로 구하는 방법의 수는

$2 \cdot 8 = 16$

ⓘⓥ g△□g인 경우

△, □에 적어도 한 개의 모음을 나열해야 하므로

$_5P_2 - {_3P_2} = 20 - 6 = 14$

ⓘⓘⓘ, ⓘⓥ에서 알파벳을 나열하는 방법의 수는

$16 + 14 = 30$

(i), (ii)에서 구하는 비밀번호의 개수는

$156 \cdot 30 = 4680$ 답 ④

0996 전략 $_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$임을 이용한다.

풀이 $_{n+3}C_n - {_{n+3}C_{n-1}}$

$= \dfrac{(n+3)!}{n!3!} - \dfrac{(n+3)!}{(n-1)!4!}$

$= (\boxed{n+3})!\left\{\dfrac{1}{n!3!} - \dfrac{1}{(n-1)!4!}\right\}$

$= (n+3)!\left(\dfrac{4}{n!4!} - \dfrac{n}{n!4!}\right)$

$= (n+3)! \cdot \dfrac{\boxed{4-n}}{n!4!}$

$= \boxed{\dfrac{4-n}{n+4}} \cdot \dfrac{(n+4)!}{n!4!}$

$= \dfrac{4-n}{n+4} \cdot {_{n+4}C_4}$

따라서 $f(n) = n+3$, $g(n) = 4-n$, $h(n) = \dfrac{4-n}{n+4}$이므로

$\dfrac{f(1)+g(2)}{h(3)} = \dfrac{4+2}{\frac{1}{7}} = 42$ 답 ②

0997 전략 $1+2+3+\cdots+9=45$이므로 세 수의 합이 15가 되는 경우를 먼저 구한다.

풀이 $1+2+3+\cdots+9=45$이므로 각 행의 세 수의 합은

$\dfrac{45}{3} = 15$이다.

세 수의 합이 15가 되도록 자연수를 나누는 방법은

(1, 5, 9), (2, 6, 7), (3, 4, 8)

또는 (1, 6, 8), (2, 4, 9), (3, 5, 7)

(i) 각 행에 (1, 5, 9), (2, 6, 7), (3, 4, 8)을 적는 경우

조건 (나)에 의하여 2행에 (1, 5, 9)를 적고 1과 9는 자리를 바꿀 수 있으므로 그 방법의 수는 $2! = 2$

1행과 3행에 (2, 6, 7), (3, 4, 8)을 적는 방법의 수는

$2! = 2$

이때 조건 (다)에 의하여 1행의 양 끝의 두 수의 합이 짝수이면 3행의 양 끝의 두 수의 합도 짝수이어야 한다. 즉 각 행의 가운데에는 홀수를 적고 양 끝의 짝수는 자리를 바꿀 수 있으므로 그 방법의 수는 $2! \cdot 2! = 4$

또 1행의 양 끝의 두 수의 합이 홀수이면 3행의 양 끝의 두 수의 합도 홀수이어야 한다. 즉 각 행의 가운데에 적을 짝수를 하나 택하고 양 끝의 두 수는 자리를 바꿀 수 있으므로 그 방법의 수는

$({_2C_1} \cdot 2!) \cdot ({_2C_1} \cdot 2!) = 4 \cdot 4 = 16$

따라서 적는 방법의 수는 $2 \cdot 2 \cdot (4+16) = 80$

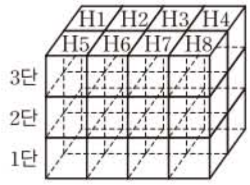
(ii) 각 행에 (1, 6, 8), (2, 4, 9), (3, 5, 7)을 적는 경우도 (i)과 마찬가지이므로 그 방법의 수는 80

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$80+80=160$ 답 160

0998 전략 [그림 1]과 같은 모양이 되려면 최소 6개, [그림 2]와 같은 모양이 되려면 최소 5개를 바꾸어야 한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직육면체에서 높이로 쌓아 올린 세 개의 정육면체를 묶어서 각각 H1, H2, H3, …, H8이라 하자.



6개의 유리 상자를 바꾸어 [그림 1]과 같은 모양이 되기 위해서는 H1, H2, H3, H4, H6, H7에서 정육면체를 각각 한 개씩 바꾸어야 한다.

(i) H1, H2, H3, H4에서 정육면체를 각각 한 개씩 바꿀 때, [그림 2]와 같은 모양이 되기 위해서는 어느 단에서는 2개를 바꾸어야 하고, 나머지 단에서는 한 개씩 바꾸어야 한다.

2개를 바꿀 단을 택하는 방법의 수는 $_3C_1=3$

그 단에서 바꿀 2개를 택하는 방법의 수는 $_4C_2=6$

나머지 두 단에서 한 개씩 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 방법의 수는

$3\cdot6\cdot2=36$

(ii) H6, H7에서 정육면체를 각각 한 개씩 바꿀 때, [그림 2]와 같은 모양이 되기 위해서는 1단과 3단에서 한 개씩 바꾸어야 하므로 그 방법의 수는 $2!=2$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$36\cdot2=72$ 답 72

0999 전략 1명의 학생은 2개를 받으므로 이 학생이 받는 젤리와 쿠키의 개수를 기준으로 경우를 나눈다.

풀이 젤리 3개와 쿠키 2개를 조건을 만족시키도록 4명의 학생에게 나누어 주는 경우는 다음과 같다.

(i) 1명의 학생이 쿠키 2개를 받는 경우

쿠키 2개를 받는 학생을 정하는 방법의 수는 $_4C_1=4$

나머지 3명의 학생에게 젤리를 각각 1개씩 주는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 1명의 학생이 쿠키 2개를 받는 방법의 수는

$4\cdot6=24$ ⋯ ❶

(ii) 1명의 학생이 젤리 2개를 받는 경우

3개의 젤리 중에서 2개의 젤리를 고르는 방법의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

이 2개의 젤리를 받는 학생과 남은 한 개의 젤리를 줄 학생을 정하는 방법의 수는 각각 4, 3이다.

젤리를 받지 못한 2명의 학생에게 쿠키를 각각 1개씩 주는 방법의 수는 1

따라서 1명의 학생이 젤리 2개를 받는 방법의 수는

$3\cdot4\cdot3\cdot1=36$ ⋯ ❷

(iii) 1명의 학생이 젤리 1개와 쿠키 1개를 받는 경우

3개의 젤리를 3명의 학생에게 각각 1개씩 주는 방법의 수는

$_4P_3=24$

젤리를 받지 못한 학생에게 쿠키 1개를 주는 방법의 수는

1

젤리를 받은 학생 3명 중 1명에게 남은 쿠키 1개를 주는 방법의 수는 $_3C_1=3$

따라서 1명의 학생이 젤리 1개와 쿠키 1개를 받는 방법의 수는

$24\cdot1\cdot3=72$ ⋯ ❸

이상에서 구하는 방법의 수는

$24+36+72=132$ ⋯ ❹

답 132

채점 기준	비율
❶ 1명의 학생이 쿠키 2개를 받는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 1명의 학생이 젤리 2개를 받는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 1명의 학생이 젤리 1개와 쿠키 1개를 받는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 전체 방법의 수를 구할 수 있다.	10 %

1000 전략 먼저 5의 배수의 일의 자리의 숫자는 0 또는 5임을 이용하여 e의 값을 구한 후 c의 값에 따라 경우를 나누어 생각한다.

풀이 다섯 자리의 자연수 $abcde$가 5의 배수이고 e는 0이 아니므로 $e=5$

따라서 $c<d<5$이므로

$c=1$ 또는 $c=2$ 또는 $c=3$

(i) $c=1$일 때,

d의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4 중 1개이므로 $_3C_1=3$

a, b의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 중에서 d의 값을 제외한 6개 중 2개이고 $a>b$에서 a, b의 값은 큰 수부터 차례로 정하면 되므로 $_6C_2=15$

따라서 자연수의 개수는

$3\cdot15=45$

(ii) $c=2$일 때,

d의 값이 될 수 있는 것은 3, 4 중 1개이므로 $_2C_1=2$

a, b의 값이 될 수 있는 것은 3, 4, 6, 7, 8, 9 중에서 d의 값을 제외한 5개 중 2개이고 $a>b$에서 a, b의 값은 큰 수부터 차례로 정하면 되므로 $_5C_2=10$

따라서 자연수의 개수는

$2\cdot10=20$

(iii) $c=3$일 때,

d의 값이 될 수 있는 것은 4의 1개이다.

a, b의 값이 될 수 있는 것은 6, 7, 8, 9의 4개 중 2개이고 $a>b$에서 a, b의 값은 큰 수부터 차례로 정하면 되므로

$_4C_2=6$

따라서 자연수의 개수는

$1\cdot6=6$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$45+20+6=71$ 답 ③

1001 **전략** 민아를 기준으로 7명을 4명, 3명으로 나누는 경우를 구한다.

풀이 7명을 4명, 3명으로 나누는데 조건 (나)에 의하여 민아는 4명에 포함되어야 한다.

(i) {(민아, 여), (여, 여)}, {남, 남, 남}으로 나누는 경우

여학생 4명이 한 레일바이크에 탑승하는 방법의 수는

$4!=24$

남학생 3명이 한 레일바이크에 탑승하는 방법의 수는

${}_4P_3=24$

따라서 서로 다른 두 레일바이크에 탑승하는 방법의 수는

$(24\cdot24)\cdot2!=1152$

(ii) {(민아, 여), (남, 남)}, {(여, 여), 남}으로 나누는 경우

민아와 같이 앉을 여학생을 한 명 택하고, 남학생 3명 중에서 2명을 택하여 한 레일바이크에 탑승하는 방법의 수는

짝끼리 자리를 바꿔 앉는 방법의 수

${}_3C_1\cdot{}_3C_2\cdot2!\cdot2!\cdot2!=72$

앞자리와 뒷자리로 바꿔 앉는 방법의 수

남은 사람들이 한 레일바이크에 탑승하는 방법의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!=8$

따라서 서로 다른 두 레일바이크에 탑승하는 방법의 수는

$(72\cdot8)\cdot2!=1152$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$1152+1152=2304$

답 2304

다른 풀이 민아가 탑승하는 방법의 수는 두 레일바이크 중에서 한 레일바이크를 택하고, 택한 레일바이크의 네 자리 중에서 한 자리를 택하므로

${}_2C_1\cdot{}_4C_1=2\cdot4=8$

민아가 탑승한 레일바이크를 A, 다른 레일바이크를 B라 하면 나머지 여학생 3명, 남학생 3명이 탑승하는 경우는

(i) 3명의 여학생이 모두 A에 탑승하는 경우

여학생 3명은 민아가 앉고 남은 3자리에 앉으므로

$3!=6$

이때 남학생 3명은 B에 탑승하고, 4자리 중에서 3자리에 앉으므로

${}_4P_3=24$

(ii) 1명의 여학생이 A에, 2명의 여학생이 B에 탑승하는 경우

민아 옆에 앉을 여학생을 택하는 방법의 수는

${}_3C_1=3$

나머지 2명의 여학생이 B에 탑승하여 옆자리에 앉는 방법의 수는

$2!\cdot2!=4$

남학생 3명 중에서 2명은 A에, 1명은 B에 탑승하므로 B에 1명이 탑승하는 방법의 수는

${}_3C_1\cdot2!=3\cdot2=6$

A에 나머지 2명이 탑승하는 방법의 수는

$2!=2$

(i), (ii)에서 여학생 3명, 남학생 3명이 탑승하는 방법의 수는

$6\cdot24+3\cdot4\cdot6\cdot2=288$

따라서 구하는 방법의 수는

$8\cdot288=2304$

1002 **전략** 조합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구한다.

풀이 함수 f와 함수 $f\circ f$의 치역을 각각 A와 B라 하자.

$n(A)=6$이면 함수 f는 일대일대응이고, 함수 $f\circ f$도 일대일대응이므로 $n(B)=6$이다.

또한 $n(A)\le4$이면 $B\subset A$이므로 $n(B)\le4$이다.

그러므로 $n(A)=5$, 즉 $B=A$인 경우만 생각하면 된다.

(i) $n(A)=5$인 X의 부분집합 A를 선택하는 경우의 수는 집합 X의 6개의 원소 중에서 5개를 택하면 되므로 $\boxed{{}_6C_5=6}$이다.

(ii) (i)에서 선택한 집합 A에 대하여, X의 원소 중 A에 속하지 않은 원소를 k라 하자.

$n(A)=5$이므로 집합 A에서 $f(k)$를 선택하는 경우의 수는 k를 제외한 5개의 원소 중에서 하나를 택하면 되므로 $\boxed{{}_5C_1=5}$이다.

(iii) (i)에서 선택한 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$와 (ii)에서 선택한 $f(k)$에 대하여, $f(k)\in A$이며 $A=B$이므로

$A=\{f(a_1),\ f(a_2),\ f(a_3),\ f(a_4),\ f(a_5)\}$ …… (＊)

이다. (＊)을 만족시키는 경우의 수는 집합 A에서 집합 A로의 일대일대응의 개수와 같으므로 $\boxed{5!=120}$이다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $6\times5\times120$이다.

즉 $p=6$, $q=5$, $r=120$이므로

$p+q+r=131$

답 ①

1003 **전략** 사각형의 네 꼭짓점이 각각 위치해야 하는 점을 조사한다.

풀이 주어진 삼각형을 포함하는 사각형의 네 꼭짓점은 다음과 같이 택하면 된다.

(i) 원점 (0, 0)

(ii) x축 위의 점 (4, 0), (8, 0) 중에서 한 점

(iii) y축 위의 점 (0, 4), (0, 8) 중에서 한 점

(iv) 제1사분면 위의 점 (4, 4), (4, 8), (8, 4), (8, 8) 중에서 한 점

이상에서 조건을 만족시키는 사각형의 꼭짓점이 될 4개의 점을 택하는 방법의 수는

$1\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_4C_1=1\cdot2\cdot2\cdot4=16$

그런데 네 점 (0, 0), (8, 0), (4, 4), (0, 8)을 택하는 경우는 사각형을 만들 수 없으므로 구하는 사각형의 개수는

$16-1=15$

답 15

1004 **전략** $f(f(x))=x$를 만족시키는 대응 관계를 파악하여 함수 f의 개수를 구한다.

풀이 $(f\circ f)(x)=x$를 만족시키는 함수 f에 대하여 $f\circ f$는 항등함수이고 f는 일대일대응이다.

$f(x)=y\ (x\ne y)$라 하면

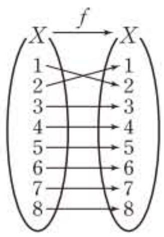
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(y)=x$ …… ㉠

즉 f가 항등함수가 아니면 $f(x)=y\ (x\ne y)$를 만족시키는 두 원소 x, y에 대하여 $f(y)=x$를 만족시켜야 한다.

(i) 집합 X의 모든 원소 x에 자기 자신이 대응되는 함수의 개수는 $\quad 1$ ← $f(x)$는 항등함수

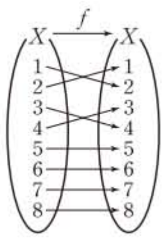
(ii) ㉠을 만족시키는 x, y가 한 쌍인 경우
오른쪽 그림과 같이 ㉠을 만족시키는 x, y 한 쌍을 택하고 나머지 6개의 원소에는 자기 자신이 대응되면 되므로

$${}_8C_2=28$$



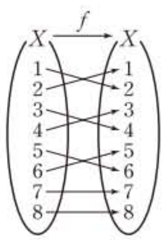
(iii) ㉠을 만족시키는 x, y가 두 쌍인 경우
오른쪽 그림과 같이 ㉠을 만족시키는 x, y 두 쌍을 택하고 나머지 4개의 원소에는 자기 자신이 대응되면 되므로

$${}_8C_2\cdot{}_6C_2\cdot\frac{1}{2!}=28\cdot15\cdot\frac{1}{2}=210$$



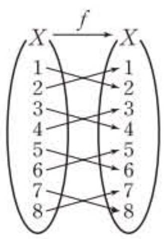
(iv) ㉠을 만족시키는 x, y가 세 쌍인 경우
오른쪽 그림과 같이 ㉠을 만족시키는 x, y 세 쌍을 택하고 나머지 2개의 원소에는 자기 자신이 대응되면 되므로

$${}_8C_2\cdot{}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot\frac{1}{3!}=28\cdot15\cdot6\cdot\frac{1}{6}=420$$



(v) ㉠을 만족시키는 x, y가 네 쌍인 경우
오른쪽 그림과 같이 ㉠을 만족시키는 x, y 네 쌍을 택하는 방법의 수는

$${}_8C_2\cdot{}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{4!}$$
$$=28\cdot15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{24}=105$$



이상에서 구하는 함수의 개수는

$$1+28+210+420+105=764$$

답 ④

1005 전략 승객 6명을 2개의 조로 나누어 세 정류장 A, B, C 중에서 두 정류장에 분배한다.

풀이 세 정류장 A, B, C 중에서 승객이 내리는 2개의 정류장을 택하는 방법의 수는 $\quad {}_3C_2={}_3C_1=3$ ⋯ ❶

승객 6명을 2개의 조로 나눌 때, 각 조의 인원수는

1, 5 또는 2, 4 또는 3, 3

(i) 승객을 1명, 5명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_1\cdot{}_5C_5=6\cdot1=6$$

(ii) 승객을 2명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_4C_4=15\cdot1=15$$

(iii) 승객을 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=10$$

이상에서 승객을 2개의 조로 나누는 방법의 수는

$6+15+10=31$ ⋯ ❷

2개의 조를 2개의 정류장에 분배하는 방법의 수는

$2!=2$ ⋯ ❸

따라서 구하는 방법의 수는

$3\cdot31\cdot2=186$ ⋯ ❹

답 186

채점 기준	비율
❶ 세 정류장 중에서 2개의 정류장을 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 승객을 2개의 조로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 2개의 조를 2개의 정류장에 분배하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❹ 2개의 정류장에 모든 승객이 내리는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

1006 전략 먼저 6명을 세 팀으로 나눈 후 세 팀을 A, B, C에 배정한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 6명의 학생을 세 팀으로 나눌 때, 각 팀의 인원수는

1, 2, 3 또는 2, 2, 2

(i) 1명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\cdot10\cdot1=60$$

세 팀을 A, B, C에 배정하는 방법의 수는

$$3!=6$$

이때 조건 (나)에 의하여 3명인 팀의 학생이 각자 다른 팀의 학생과 시합을 해야 하므로 그 방법의 수는 나머지 팀의 3명을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다. 즉

$$3!=6$$

따라서 대진표를 작성하는 방법의 수는

$60\cdot6\cdot6=2160$ ⋯ ❶

(ii) 2명, 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}=15$$

세 팀을 A, B, C에 배정하는 방법의 수는

$$3!=6$$

이때 조건 (나)에 의하여 A팀의 2명이 B, C팀에서 한 명씩과 시합하고, B, C팀에서 각각 남은 한 명끼리 시합을 해야 하므로 그 방법의 수는 B, C팀에서 한 명씩 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다. 즉

$${}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot2!=2\cdot2\cdot2=8$$

따라서 대진표를 작성하는 방법의 수는

$15\cdot6\cdot8=720$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$2160+720=2880$ ⋯ ❸

답 2880

채점 기준	비율
❶ 각 팀을 1명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 각 팀을 2명, 2명, 2명으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 대진표를 작성하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

memo

memo

memo