정답과 해설

수학의 힘 개념 α

I. 경우의 수

01 원순열

유제 — 본문 9~12쪽

01 남자 4명 중 3명을 선택하는 경우의 수는
${}_4C_3={}_4C_1=4$
여자 4명 중 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$
선택한 5명의 남녀를 원탁에 둘러앉히는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $4\cdot6\cdot24=576$

답 576

02 여학생 3명을 한 사람으로 생각하면 6명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우와 같으므로 그 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
여학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $120\cdot6=720$

답 720

03 2, 4가 적힌 돌이 이웃하지 않으므로 이웃해도 되는 나머지 3개의 돌을 먼저 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(3-1)!=2!=2$
원형으로 배열된 3개의 돌 사이사이, 즉 3곳 중에서 2곳을 택하여 2, 4가 적힌 돌을 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $2\cdot6=12$

답 12

04 (1) 한 명의 야구 선수의 자리가 결정되면 나머지 한 명의 자리는 마주 보는 자리로 고정되므로 구하는 경우의 수는 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 $(5-1)!=4!=24$

(2) 축구 선수 4명 중에서 야구 선수 2명 사이에 앉는 축구 선수 한 명을 뽑는 경우의 수는 4
(야구 선수, 뽑힌 축구 선수 한 명, 야구 선수)를 한 묶음으로 생각하면 4명이 원탁에 둘러앉는 경우와 같으므로 그 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
묶음 속의 야구 선수 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는 $4\cdot6\cdot2=48$

답 (1) 24 (2) 48

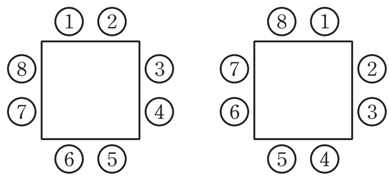
05 첫 번째 부부가 원탁의 임의의 자리에 서로 마주 보도록 앉은 후, 나머지 4자리에 두 쌍의 부부가 앉으면 된다.
이때 두 번째 부부가 서로 마주 보고 앉는 경우의 수는
$2\cdot2!=4$
세 번째 부부가 서로 마주 보고 앉는 경우의 수는
$1\cdot2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot2=8$

답 8

06 (부회장, 회장, 부회장)을 한 묶음으로 생각하면 7명이 원탁에 둘러앉는 경우와 같으므로 그 경우의 수는
$(7-1)!=6!=720$
묶음 속의 부회장 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$720\cdot2=1440$

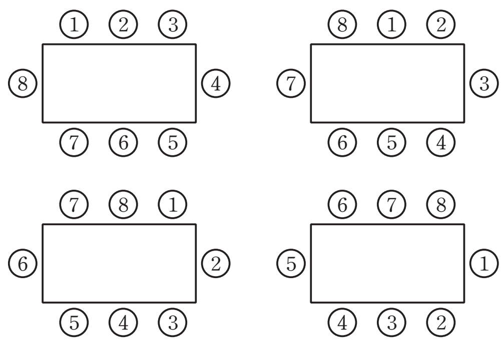
답 1440

07 8명을 원형으로 배열하는 방법의 수는
$(8-1)!=7!=5040$
(1) 다음 그림과 같이 정사각형 모양의 탁자에서 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는
$5040\cdot2=10080$

(2) 다음 그림과 같이 직사각형 모양의 탁자에서 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 4가지씩 존재한다.



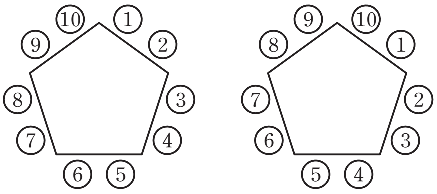
따라서 구하는 방법의 수는
$5040\cdot4=20160$

답 (1) 10080 (2) 20160

08 10명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(10-1)!=9!$

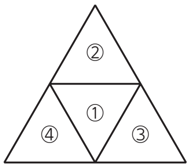
다음 그림과 같이 정오각형 모양의 탁자에서 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는 $9!\cdot2$

답 ④

09 오른쪽 그림의 가운데 영역 ①을 색칠하는 방법의 수는 4



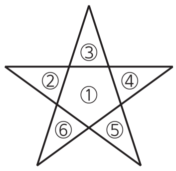
나머지 영역인 ②, ③, ④를 색칠하는 방법의 수는 가운데 영역 ①에 색칠한 색을 제외한 나머지 3가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $4\cdot2=8$

답 8

10 오른쪽 그림의 가운데 영역 ①을 색칠하는 방법의 수는 6



나머지 영역인 ②, ③, ④, ⑤, ⑥을 색칠하는 방법의 수는 가운데 영역 ①에 색칠한 색을 제외한 나머지 5가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot24=144$

답 144

연습 문제

본문 13~14쪽

01 ③	**02** ③	**03** 144	**04** 108
05 24	**06** ④	**07** 120	**08** 24
09 72	**10** (1) 8 (2) 40		**11** 30
12 2304	**13** ③	**14** 360	

01 각 쌍을 묶어서 세 사람으로 생각하면 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

세 쌍의 부부가 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\cdot8=16$

02 남학생끼리 이웃하지 않으므로 이웃해도 되는 여학생 5명을 먼저 원탁에 둘러앉히는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

원탁에 앉은 여학생 5명 사이사이, 즉 5곳 중에서 3곳을 택하여 남학생을 앉히는 경우의 수는 ${}_5P_3=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot60=1440$

03 모자를 쓴 사람 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

원탁에 앉은 모자를 쓴 사람 4명 사이사이의 4개의 자리에 모자를 쓰지 않은 사람 4명을 앉히는 경우의 수는

${}_4P_4=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$

04 남학생 4명 중 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

여학생 3명 중 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

뽑힌 4명의 학생을 정사각형 모양의 테이블의 네 개의 의자에 앉히는 방법의 수는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot3\cdot6=108$

05 남학생 2명이 원탁에 마주 보고 앉는 경우의 수는 1

나머지 4명이 자리에 앉는 경우의 수는 남은 4개의 자리에 일렬로 앉는 경우의 수와 같으므로 $4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$1\cdot24=24$

06 학생이 5명이므로 선생님 사이에 앉는 학생 한 명을 뽑는 경우의 수는 5

(선생님, 뽑힌 학생 한 명, 선생님)을 한 묶음으로 생각하면 5명이 원탁에 둘러앉는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

묶음 속의 선생님 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot24\cdot2=240$

07 서로 다른 색깔의 5개의 공에 색깔이 없는 1개의 공을 추가하여 총 6개의 공을 6개의 구멍에 올려놓는다고 하면 그 방법의 수는 원순열의 수이므로

$(6-1)!=5!=120$

여기서 색깔이 없는 1개의 공을 빼면 6개의 구멍에 서로 다른 색깔의 5개의 공을 올려놓는 경우가 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 120

08 1학년 학생 2명을 한 사람으로 생각하면 1학년, 2학년 학생이 원탁에 둘러앉는 경우는 3명이 원탁에 둘러앉는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

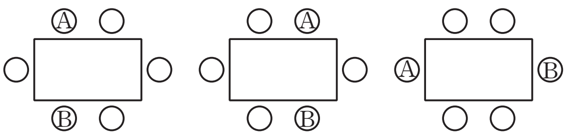
1학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

3학년 학생 2명은 이웃하지 않으므로 원탁에 앉은 3명 사이사이, 즉 3곳 중에서 2곳을 택하여 3학년 학생 2명을 앉히는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot2\cdot6=24$

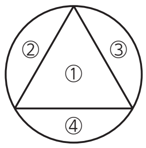
09 다음 그림과 같이 A, B가 마주 보는 경우는 3가지이다.



나머지 4명이 자리에 앉는 경우의 수는 남은 4개의 자리에 일렬로 앉는 경우의 수와 같으므로 $4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는 $3\cdot24=72$

10 (1) 오른쪽 그림의 가운데 영역 ①을 색칠하는 방법의 수는 4



나머지 영역인 ②, ③, ④를 색칠하는 방법의 수는 가운데 영역 ①에 색칠한 색을 제외한 나머지 3가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로 $(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$4\cdot2=8$

(2) 1, 2, 3, 4, 5 중 네 수를 택하는 방법의 수는 ${}_5C_4={}_5C_1=5$

네 수 중 하나를 영역 ①에 써넣는 방법의 수는 4

나머지 세 수를 영역 ②, ③, ④에 써넣는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot4\cdot2=40$

11 정사각뿔의 바닥을 색칠하는 방법의 수는 5

정사각뿔의 옆면을 색칠하는 방법의 수는 바닥에 색칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로 $(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot6=30$

12 남학생 4명을 먼저 앉히면 각 면의 두 개의 의자 중 하나에 앉으면 되므로 그 경우의 수는

$(4-1)!\cdot2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=96$

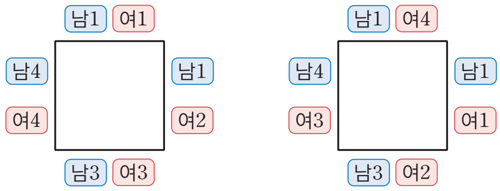
남은 네 자리에 여학생 4명이 앉는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$96\cdot24=2304$

주의

남학생 4명이 먼저 앉고 남은 네 자리에 여학생 4명이 앉는 경우를 살펴보자.



[그림 1] [그림 2]

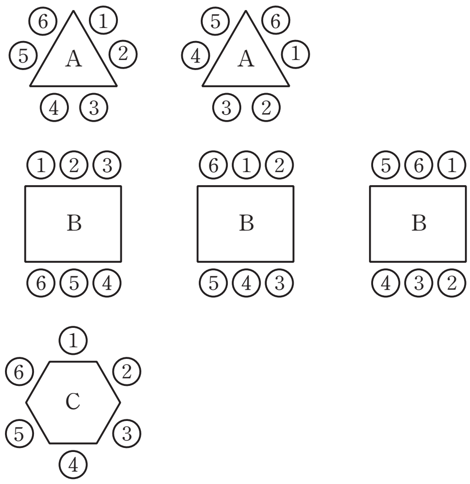
[그림 1]과 같이 자리를 정했을 때 [그림 1]에서 여학생들만 시계 방향으로 한 칸씩 옮긴 [그림 2]를 살펴 보면 [그림 1]과 [그림 2]는 다른 경우가 된다.

따라서 여학생이 앉는 경우의 수는 원형으로 배열하는 원순열의 수인 $(4-1)!$이 아니라 일렬로 배열하는 순열의 수인 $4!$이다.

13 6명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

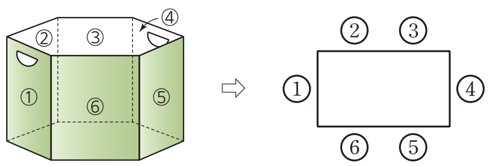
$(6-1)!=5!=120$

다음 그림과 같이 탁자 A, B, C에서 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 A는 2가지씩, B는 3가지씩, C는 1가지씩 존재한다.



따라서 $x=120\cdot2=240$, $y=120\cdot3=360$, $z=120\cdot1=120$이므로 $y>x>z$

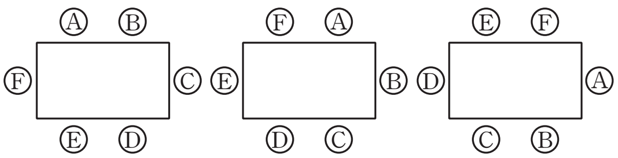
14 같은 모양의 구멍이 마주 보는 같은 위치의 두 면에 있으므로 옆면에 서로 다른 색을 칠하는 것은 다음 그림과 같이 직사각형 둘레의 6곳에 서로 다른 색을 배열하는 것과 같다.



서로 다른 6가지 색을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$

다음 그림과 같이 직사각형 둘레의 6곳에서 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는

$120 \cdot 3 = 360$

02 중복순열

유제

본문 16～18쪽

01 (1) (ⅰ) 한 자리의 정수의 개수는 6

(ⅱ) 두 자리의 정수의 개수

십의 자리에는 0이 올 수 없으므로 5가지, 일의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5가 올 수 있으므로 6가지

$\therefore\ 5 \cdot 6 = 30$

(ⅲ) 세 자리의 정수의 개수

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 5가지, 십의 자리와 일의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5가 모두 중복하여 올 수 있으므로 ${}_{6}\Pi_{2} = 6^2 = 36$

$\therefore\ 5 \cdot 36 = 180$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 정수의 개수는

$6 + 30 + 180 = 216$

다른 풀이

0이 앞에 오는 경우인 0□□, 00□는 각각 두 자리의 정수, 한 자리의 정수이다.

따라서 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 0을 포함한 6개의 숫자가 모두 중복하여 올 수 있다.

즉 6개 중 중복을 허용하여 3개를 뽑는 중복순열이므로 경우의 수는

${}_{6}\Pi_{3} = 6^3 = 216$

(2) 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 5가지

백의 자리, 십의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5가 모두 중복하여 올 수 있으므로 ${}_{6}\Pi_{2} = 6^2 = 36$

일의 자리에는 1, 3, 5가 올 수 있으므로 3가지

따라서 구하는 홀수의 개수는

$5 \cdot 36 \cdot 3 = 540$

답 (1) 216　(2) 540

02 2000보다 큰 네 자리의 수는 2□□□, 3□□□, 4□□□ 꼴이다. 2□□□, 3□□□, 4□□□ 꼴의 자연수의 개수는 5개의 숫자에서 중복하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$3 \cdot {}_{5}\Pi_{3} = 3 \cdot 5^3 = 375$

그런데 2000보다 큰 자연수이므로 2000은 제외된다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$375 - 1 = 374$

답 374

03 A, B, C의 세 민박집에 다섯 사람이 투숙할 때, 한 사람이 여러 민박집에서 투숙할 수는 없지만 여러 명이 한 민박집을 중복하여 선택해서 투숙할 수는 있다.

따라서 구하는 방법의 수는 서로 다른 세 민박집에서 중복을 허용하여 다섯 개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_{5}\Pi_{3} = 5^3 = 125$

답 125

04 A, B, C의 세 개의 우체통으로 네 통의 편지를 넣을 때, 한 통의 편지가 여러 우체통으로 들어갈 수는 없지만 여러 통의 편지가 한 우체통을 중복하여 선택해서 들어갈 수는 있다.

따라서 구하는 방법의 수는 서로 다른 3개의 우체통에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_{3}\Pi_{4} = 3^4 = 81$

답 81

05 흰색, 빨간색의 2가지 깃발에서 중복을 허용하여 깃발을 4번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_{2}\Pi_{4} = 2^4 = 16$

답 16

06 2개의 모스 부호 중에서 중복을 허용하여 n개를 택하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_{2}\Pi_{n} = 2^n$

이때 100개 이상의 신호를 만들려면 $2^n \ge 100$이어야 한다.

즉 $n \ge 7$

따라서 이를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 7이다.

답 7

07 (1) X에서 Y로의 함수의 개수는 집합 Y의 원소 a, b, c, d, e의 5개에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 중복순열의 수와 같다.

$\therefore\ {}_{5}\Pi_{4} = 5^4 = 625$

(2) X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 집합 Y의 원소 a, b, c, d, e의 5개에서 서로 다른 4개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 순열의 수와 같다.

$\therefore\ {}_{5}P_{4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

답 (1) 625　(2) 120

08 (1) X에서 Y로의 함수 f의 개수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 중복순열의 수와 같다.

$\therefore {}_5\Pi_3=5^3=125$

(2) $f(1)=1$이고 $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 5개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 4를 제외한 4개이므로 구하는 함수 f의 개수는

$5\cdot4=20$

답 (1) 125 (2) 20

연습 문제

본문 19~20쪽

01 ⑤	02 ④	03 ④	04 171
05 ④	06 ⑤	07 56	08 63
09 ①	10 ③	11 ⑤	12 ⑤
13 50	14 729	15 768	

01 (i) 한 자리의 정수의 개수는 4

(ii) 두 자리의 정수의 개수

십의 자리, 일의 자리에는 1, 2, 3, 4가 모두 중복하여 올 수 있으므로 ${}_4\Pi_2=4^2=16$

(iii) 세 자리의 정수의 개수

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 1, 2, 3, 4가 모두 중복하여 올 수 있으므로 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 정수의 개수는

$4+16+64=84$

02 2000 이상인 네 자리의 자연수는 2□□□, 3□□□ 꼴이다.

2□□□, 3□□□ 꼴의 자연수의 개수는 4개의 숫자에서 3개를 중복하여 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$2\cdot{}_4\Pi_3=2\cdot4^3=128$

03 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 5가지

백의 자리, 십의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5가 모두 중복하여 올 수 있으므로 ${}_6\Pi_2=6^2=36$

일의 자리에는 0, 2, 4가 올 수 있으므로 3가지

따라서 구하는 짝수의 개수는

$5\cdot36\cdot3=540$

04 (i) 1이 포함되지 않을 때

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 2, 3, 4가 모두 중복하여 올 수 있으므로 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

(ii) 1이 하나 포함될 때

□1□□, □□1□, □□□1 꼴이고 □에 2, 3, 4가 모두 중복하여 올 수 있다.

$\therefore 3\cdot{}_3\Pi_3=3\cdot3^3=81$

(iii) 1이 두 개 포함될 때

□1□1 꼴이고 □에 2, 3, 4가 모두 중복하여 올 수 있다.

$\therefore {}_3\Pi_2=3^2=9$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 정수의 개수는

$81+81+9=171$

05 각 자리 숫자의 곱이 홀수이려면 각 자리 숫자가 모두 홀수이어야 한다.

따라서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이므로 각 자리의 숫자가 모두 홀수인 세 자리의 자연수의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

06 방송반, 독서반, 과학반 3개의 반 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열이므로 구하는 경우의 수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$

07 (i) 암호 숫자가 4자리일 때

맨 앞에 올 수 있는 숫자는 1

나머지 세 자리에는 0, 1이 중복하여 올 수 있으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

(ii) 암호 숫자가 5자리일 때

맨 앞에 올 수 있는 숫자는 1

나머지 네 자리에는 0, 1이 중복하여 올 수 있으므로

${}_2\Pi_4=2^4=16$

(iii) 암호 숫자가 6자리일 때

맨 앞에 올 수 있는 숫자는 1

나머지 다섯 자리에는 0, 1이 중복하여 올 수 있으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 암호 숫자의 개수는

$1\cdot8+1\cdot16+1\cdot32=56$

08 여섯 개의 전구 각각은 불이 켜지거나 꺼지는 경우 두 가지가 있으므로 모든 경우의 수는

${}_2\Pi_6=2^6=64$

이때 모든 전구가 꺼진 경우는 신호에서 제외하므로 구하는 신호의 개수는

$64-1=63$

09 X에서 Y로의 함수의 개수는 집합 Y의 원소 a, b, c, d의 4개에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 중복순열의 수와 같다.

$\therefore m={}_4\Pi_4=4^4=256$

$x_1\in X$, $x_2\in X$에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $g(x_1)\neq g(x_2)$를 만족시키는 함수 g는 일대일함수이다. 이때 X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 집합 Y의 원소 a, b, c, d의 4개에서 서로 다른 4개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 순열의 수와 같다.

$\therefore n={}_4P_4=4!=24$

$\therefore m-n=256-24=232$

10 $f(a)=1$이고 $f(b)$와 $f(c)$의 값이 될 수 있는 수는 집합 Y의 원소 0, 1, 2, 3 중 하나이다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는 집합 Y의 원소 0, 1, 2, 3의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 집합 X의 원소 b, c에 대응시키는 중복순열의 수와 같다.
$\therefore\ {}_4\Pi_2=4^2=16$

11 (ⅰ) 양 끝에 배열하는 같은 문자가 적힌 카드가 2장일 때
2개의 같은 문자를 써넣는 방법의 수는 5
이때 같은 문자가 A인 경우는 다음과 같다.

A				A

나머지 세 자리에 4개의 문자 B, C, D, E에서 중복을 허용하여 3개를 택하고 일렬로 나열하여 써넣으면 되므로
${}_4\Pi_3=4^3=64$
이때 나머지 세 자리에 모두 같은 문자가 오면 안 되므로 같은 문자가 오는 4가지 경우를 빼야한다. 즉 $64-4=60$
$\therefore\ 5\cdot60=300$
(ⅱ) 양 끝에 배열하는 같은 문자가 적힌 카드가 3장일 때
3개의 같은 문자를 써넣는 방법의 수는 5
이때 같은 문자가 A인 경우는 다음과 같이 3가지이다.

A	A			A
A		A		A
A			A	A

나머지 두 자리에 4개의 문자 B, C, D, E에서 중복을 허용하여 2개를 택하고 일렬로 나열하면 되므로 ${}_4\Pi_2=4^2=16$
$\therefore\ 5\cdot3\cdot16=240$
(ⅲ) 양 끝에 배열하는 같은 문자가 적힌 카드가 4장일 때
4개의 같은 문자를 써넣는 방법의 수는 5
이때 같은 문자가 A인 경우는 다음과 같다.

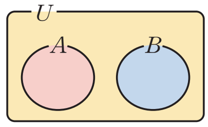
A	A		A	A

나머지 한 자리에 4개의 문자 B, C, D, E에서 하나를 써넣으면 되므로 그 경우의 수는 4
$\therefore\ 5\cdot4=20$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는
$300+240+20=560$

12 1, 2, 3, 4를 적어도 하나 포함하는 세 자리의 자연수는 세 자리의 자연수 전체에서 1, 2, 3, 4를 모두 포함하지 않는 자연수를 제외하면 된다.
(ⅰ) 세 자리의 자연수는 100에서 999까지이므로 개수는 900
(ⅱ) 1, 2, 3, 4를 모두 포함하지 않는 세 자리의 자연수는
0, 5, 6, 7, 8, 9로 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수이다.
이때 백의 자리에는 0이 올 수 없고 십의 자리와 일의 자리에는 0, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 일렬로 나열하면 되므로
$5\cdot{}_6\Pi_2=5\cdot6^2=180$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는
$900-180=720$

13 (ⅰ) 1, 2, 3으로 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는
${}_3\Pi_4=3^4=81$
(ⅱ) ① 1을 포함하지 않는 경우, 즉 2와 3으로 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는
${}_2\Pi_4=2^4=16$
② 2를 포함하지 않는 경우, 즉 1과 3으로 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는
${}_2\Pi_4=2^4=16$
③ 1과 2를 모두 포함하지 않는 경우, 즉 3으로만 이루어진 네 자리의 자연수는 1가지
따라서 1 또는 2를 포함하고 않는 자연수의 개수는
$16+16-1=31$
(ⅰ), (ⅱ)에서 1과 2를 모두 포함하고 있는 자연수의 개수는
$81-31=50$

14 $A\subset U$, $B\subset U$이고 $A\cap B=\varnothing$이므로
벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉 집합 U의 6개의 각 원소가 서로소인 세 집합 A, B, $(A\cup B)^C$ 중 하나에 속하므로 구하는 경우의 수는 3개의 집합에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
$\therefore\ {}_3\Pi_6=3^6=729$

15 (ⅰ) $f(2)=1$인 경우
1, 3, 4, 5는 각각 1을 제외한 2, 3, 4, 5 중 하나에 대응되므로 구하는 함수 f의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$
(ⅱ) $f(2)=3$인 경우
1, 3, 4, 5는 각각 3을 제외한 1, 2, 4, 5 중 하나에 대응되므로 구하는 함수 f의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$
(ⅲ) $f(2)=5$인 경우
1, 3, 4, 5는 각각 5를 제외한 1, 2, 3, 4 중 하나에 대응되므로 구하는 함수 f의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 개수는
$3\cdot256=768$

03 같은 것이 있는 순열

유제

본문 22~24쪽

01 (1) 6개의 숫자 중 2가 3개, 3이 3개이므로 구하는 정수의 개수는 $\dfrac{6!}{3!3!}=20$

(2) 2, 2, 2, 3, 3, 3 중 5개를 택하는 방법은 (2, 2, 2, 3, 3), (2, 2, 3, 3, 3)의 2가지가 있다.

(i) (2, 2, 2, 3, 3)을 택하는 경우

2가 3개, 3이 2개이므로 만들 수 있는 정수의 개수는

$\dfrac{5!}{3!2!}=10$

(ii) (2, 2, 3, 3, 3)을 택하는 경우

2가 2개, 3이 3개이므로 만들 수 있는 정수의 개수는

$\dfrac{5!}{2!3!}=10$

(i), (ii)에서 구하는 정수의 개수는 $10+10=20$

답 (1) 20 (2) 20

02 10개의 문자 중 S가 3개, T가 3개, I가 2개이므로 구하는 방법의 수는 $\dfrac{10!}{3!3!2!}=50400$

답 50400

03 (i) 일의 자리에 0이 오는 경우

나머지 다섯 자리에 1, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 5개의 숫자 중 1이 3개, 2가 2개이므로

$\dfrac{5!}{3!2!}=10$

(ii) 일의 자리에 2가 오는 경우

나머지 다섯 자리에 0, 1, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 5개의 숫자 중 1이 3개이므로

$\dfrac{5!}{3!}=20$

맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 나머지 4개의 숫자 1, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 즉 4개의 숫자 중 1이 3개이므로 $\dfrac{4!}{3!}=4$

따라서 만들 수 있는 짝수의 개수는 $20-4=16$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는 $10+16=26$

답 26

04 (1) 맨 앞에 올 수 있는 문자는 모음 U, E 중 하나이므로 경우의 수는 2

맨 앞에 모음 중 하나가 오면 남은 문자는 U, E 중 1개와 S, C, C, S, S의 5개이므로 6개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!2!}=60$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\cdot 60=120$

(2) C와 C 사이에 들어갈 수 있는 문자는 S, U, E, S, S 중 하나이다.

C와 C 사이에

(i) S가 들어가면 남은 문자는 U, E, S, S이므로 경우의 수는

$1\cdot\dfrac{5!}{2!}=60$

(ii) U, E 중 하나가 들어가면 남은 문자는 U, E 중 1개와 S 3개이므로 경우의 수는

$2\cdot\dfrac{5!}{3!}=40$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $60+40=100$

답 (1) 120 (2) 100

05 모음 i, e의 순서가 알파벳순으로 정해져 있으므로 e, i를 모두 같은 문자 A로 생각하면 A, A, k, n, d, n, s, s의 8개의 문자를 일렬로 나열한 후 첫 번째, 두 번째 A를 각각 e, i로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 $\dfrac{8!}{2!2!2!}=5040$

답 5040

06 도로망에서 오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라 하자.

(i) A에서 B로 가는 최단 경로의 수는 a, a, a, a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{8!}{5!3!}=56$

(ii) A에서 P로 가는 최단 경로의 수는 a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{5!}{3!2!}=10$

P에서 B로 가는 최단 경로의 수는 a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{3!}{2!}=3$

따라서 A에서 P를 거쳐 B로 가는 최단 경로의 수는

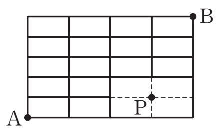
$10\cdot 3=30$

(i), (ii)에서 A에서 P를 거치지 않고 B로 가는 최단 경로의 수는

$56-30=26$

답 26

07 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고, 그 교차점을 P로 놓으면 오른쪽 그림과 같다. 점선 길까지 포함하여 A에서 B로 가는 최단 경로의 수는 $\dfrac{9!}{4!5!}=126$



A에서 P를 거쳐 B로 가는 최단 경로의 수는

$\dfrac{4!}{3!}\cdot\dfrac{5!}{4!}=4\cdot 5=20$

따라서 구하는 최단 경로의 수는

$126-20=106$

답 106

연습 문제

본문 25~26쪽

01 ③	02 ②	03 150	04 ⑤
05 ②	06 840	07 132	08 900
09 ②	10 12	11 90	12 24
13 120	14 30	15 32	16 12

01 6개의 깃발을 일렬로 나열할 때 같은 색의 깃발이 각각 3개, 2개, 1개이므로 만들 수 있는 신호의 개수는

$\frac{6!}{3!2!}=60$

02 6개의 숫자 중 2가 2개, 3이 3개이므로 구하는 정수의 개수는 $\frac{6!}{2!3!}=60$

03 6개의 숫자 중 1이 2개, 2가 2개이므로 0, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!2!}=180$

이 중 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 나머지 5개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 즉 1이 2개, 2가 2개이므로

$\frac{5!}{2!2!}=30$

따라서 구하는 정수의 개수는 $180-30=150$

다른 풀이 맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 1 또는 2 또는 3이 오는 경우로 나누어 생각한다.

(i) 맨 앞자리에 1이 오는 경우

0, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하면 되므로 $\frac{5!}{2!}=60$

(ii) 맨 앞자리에 2가 오는 경우

0, 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하면 되므로 $\frac{5!}{2!}=60$

(iii) 맨 앞자리에 3이 오는 경우

0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하면 되므로 $\frac{5!}{2!2!}=30$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 정수의 개수는 $60+60+30=150$

04 홀수이므로 일의 자리에는 7 또는 9가 올 수 있다.

일의 자리에 7이 오는 경우 남은 숫자는 2, 2, 4, 4, 4, 9이므로 6개를 일렬로 나열하면 홀수의 개수는 $\frac{6!}{2!3!}=60$

일의 자리에 9가 오는 경우 남은 숫자는 2, 2, 4, 4, 4, 7이므로 6개를 일렬로 나열하면 홀수의 개수는 $\frac{6!}{2!3!}=60$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$60+60=120$

05 s, p의 순서가 정해져 있으므로 s, p를 모두 A로 생각하면 A, A, e, e, d의 5개의 문자를 일렬로 나열한 후 첫 번째, 두 번째 A를 각각 s, p로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 $\frac{5!}{2!2!}=30$

06 모음 u, a, e의 순서가 알파벳순으로 정해져 있으므로 a, e, u를 모두 같은 문자 A로 생각하면 A, A, A, c, h, n, j의 7개의 문자를 일렬로 나열한 후 첫 번째, 두 번째, 세 번째 A를 각각 a, e, u로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 $\frac{7!}{3!}=840$

07 6개의 문자 중 a가 2개, c가 2개이므로 문자의 개수는

$\frac{6!}{2!2!}=180$ $\quad\therefore m=180$

a와 a 사이에 들어갈 수 있는 문자는 b, c, c, d 중 하나이다.

a와 a 사이에

(i) c가 들어가면 남은 문자는 b, c, d이므로 문자의 개수는

$1\cdot 4!=24$

(ii) b, d 중 하나가 들어가면 남은 문자는 b, d 중 1개와 c 2개이므로 문자의 개수는 $2\cdot\frac{4!}{2!}=24$

(i), (ii)에서 $n=24+24=48$

$\therefore m-n=132$

08 t, i를 모두 같은 문자 A로 생각하고 A, A, m, n, g의 5개의 문자를 일렬로 나열한 후 첫 번째, 두 번째 A를 각각 t, i로 바꾸는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$

(나)에서 문자 e는 연속하여 쓰지 않으므로 오른쪽 그림과 같이

∨○∨○∨○∨○∨○∨

A, A, m, n, g를 배열하고 양 끝과 그 사이사이의 6개의 자리에서 2개의 자리를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_6C_2=15$

따라서 구하는 문자의 개수는

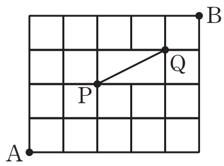
$60\cdot 15=900$

09 A에서 C로 가는 최단 경로의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

C에서 B로 가는 최단 경로의 수는 $\frac{5!}{2!3!}=10$

따라서 구하는 최단 경로의 수는 $4\cdot 10=40$

10 오른쪽 그림과 같이 점 P, Q를 잡으면 최단 경로는 A에서 선분 PQ를 지나 B로 가는 길이다.



A에서 P로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{2!2!}=6$

P에서 Q로 가는 최단 경로의 수는 1

Q에서 B로 가는 최단 경로의 수는 2

따라서 구하는 최단 경로의 수는 $6\cdot 1\cdot 2=12$

11 (ⅰ) 십만 자리의 숫자가 4인 경우

1, 2, 2, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!2!}=30$

(ⅱ) 십만 자리의 숫자가 5인 경우

1, 2, 2, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!}=60$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는 $30+60=90$

12 홀수 1, 1, 1, 3을 홀수 번째의 자리에 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

짝수 2, 2, 4, 4를 짝수 번째의 자리에 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!2!}=6$

따라서 만들 수 있는 정수의 개수는 $4\cdot6=24$

13 원점에서 점 A$(2, 2)$까지 가기 위해서는 최소 오른쪽으로 2번, 위쪽으로 2번 움직이면 된다. 움직이는 방향을 화살표로 나타내면 →, →, ↑, ↑를 일렬로 나열하면 된다. 그런데 6번 움직여서 점 A$(2, 2)$로 오므로 나머지 두 번은 제자리로 오는 경우, 즉 (→, ←) 또는 (↑, ↓)로 움직여야 한다.

(ⅰ) →, →, ↑, ↑, →, ←를 일렬로 나열하는 경우

$\frac{6!}{3!2!}=60$

(ⅱ) →, →, ↑, ↑, ↑, ↓를 일렬로 나열하는 경우

$\frac{6!}{2!3!}=60$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $60+60=120$

14 5일 동안 A를 들은 횟수를 x, B를 들은 횟수를 y, C를 들은 횟수를 z라 하면 $0\le x\le5$, $0\le y\le5$, $0\le z\le5$

하루에 하나씩 5일 동안 강의를 들으므로

$x+y+z=5$ …… ㉠

총 강의 시간의 합계가 4시간이므로

$\frac{1}{2}x+y+\frac{3}{2}z=4$ …… ㉡

㉠－㉡에서 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z=1$, 즉 $x-z=2$ …… ㉢

㉢을 만족시키는 x, z를 구하면 $x=2$일 때 $z=0$, $x=3$일 때 $z=1$, $x=4$일 때 $z=2$, $x=5$일 때 $z=3$이다.

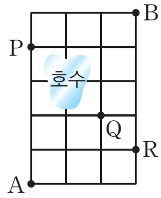
이때 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)를 구하면

$(2, 3, 0)$, $(3, 1, 1)$

따라서 5일 동안 A 두 번, B 세 번 또는 A 세 번, B 한 번, C 한 번의 강의를 들으면 되므로 작성할 수 있는 강의 계획서의 가짓수는

$\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{3!}=10+20=30$

15 A에서 B로 갈 때, 오른쪽 그림과 같이 점 P, Q, R를 잡으면 어느 한 점은 반드시 지나고, 두 점을 동시에 지나지 않는다.



(ⅰ) A → P → B의 최단 경로의 수는

$1\cdot\frac{4!}{3!}=4$

(ⅱ) A → Q → B의 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{4!}{3!}=6\cdot4=24$

(ⅲ) A → R → B의 최단 경로의 수는

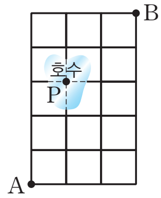
$\frac{4!}{3!}\cdot1=4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 최단 경로의 수는

$4+24+4=32$

다른 풀이

지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고, 그 교차점을 P로 놓으면 오른쪽 그림과 같다.



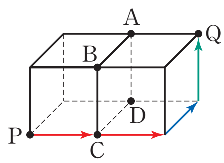
점선 길까지 포함하여 A에서 B로 가는 최단 경로의 수는 $\frac{8!}{3!5!}=56$

A에서 P를 거쳐 B로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{4!}{2!2!}=4\cdot6=24$

따라서 구하는 최단 경로의 수는 $56-24=32$

16 →, ↗, ↑ 방향으로 각각 2번, 1번, 1번씩 가면 P에서 Q로 가는 최단 경로가 된다. 즉 →, →, ↗, ↑를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 최단 경로의 수는



$\frac{4!}{2!}=12$

04 중복조합

유제 　본문 28~30쪽

01 서로 다른 4개에서 5개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

답 56

02 사과, 오렌지, 배의 서로 다른 3개에서 7개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

답 36

03 빈 상자가 없어야 하므로 먼저 3개의 상자에 초콜릿을 하나씩 담는다. 나머지 7개의 초콜릿을 서로 다른 3개의 상자에 담으면 되므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
$\therefore {}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

답 36

04 딸기맛 우유, 커피맛 우유, 바나나맛 우유를 각각 하나씩 산 후, 나머지 딸기맛 우유, 커피맛 우유, 바나나맛 우유 중에서 중복을 허용하여 2개 이상 4개 이하를 사면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_3H_2+{}_3H_3+{}_3H_4&={}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4\\&={}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2\\&=6+10+15=31\end{aligned}$$

답 31

05 초코 쿠키 3개, 버터 쿠키 4개를 먼저 산 후, 나머지 5개의 쿠키를 사면 되므로 그 경우의 수는
${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$ ⋯⋯ ㉠
이때 땅콩 쿠키는 3개 이하를 사야 하므로 ㉠에서 땅콩 쿠키를 4개, 5개 사는 경우의 수를 빼면 된다.
땅콩 쿠키를 4개 사는 경우 초코 쿠키, 버터 쿠키 중에서 1개를 사면 되므로 그 경우의 수는 2이다.
땅콩 쿠키를 5개 사는 경우 초코 쿠키, 버터 쿠키는 사지 않으면 되므로 그 경우의 수는 1이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$21-2-1=18$

답 18

06 $(x+y+z+w)^3$
$\quad=(x+y+z+w)(x+y+z+w)(x+y+z+w)$
이므로 4개의 문자 x, y, z, w 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 곱하면 주어진 다항식을 전개할 때 생기는 항이 하나씩 만들어진다.
따라서 $(x+y+z+w)^3$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_3={}_6C_3=20$

답 20

07 $(x-y)^4=(x-y)(x-y)(x-y)(x-y)$이므로 2개의 문자 x, y 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 곱하면 $(x-y)^4$을 전개할 때 생기는 항이 하나씩 만들어진다.
그 경우의 수는 ${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$
$(a+b+c)^3=(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$이므로 3개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 곱하면 $(a+b+c)^3$을 전개할 때 생기는 항이 하나씩 만들어진다.
그 경우의 수는 ${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$
따라서 구하는 항의 개수는 $5\cdot 10=50$

답 50

08 (1) 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 4개의 문자 x, y, z, w 중에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4H_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=286$
(2) $x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$, $w=d+1$이라 하면
$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)=10$
$\therefore a+b+c+d=6$ (단, a, b, c, d는 음이 아닌 정수)
따라서 구하는 양의 정수해의 개수는 방정식 $a+b+c+d=6$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로
${}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

답 (1) 286　(2) 84

09 $x=a+1$, $y=b+2$, $z=c+3$이라 하면
$(a+1)+(b+2)+(c+3)=10$
$\therefore a+b+c=4$ (단, a, b, c는 음이 아닌 정수)
따라서 구하는 정수해의 개수는 방정식 $a+b+c=4$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로
${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

답 15

10 주어진 조건에서 $f(3)\le f(2)\le f(1)$
즉 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 3개를 중복을 허용하여 뽑아 크기가 작은 것부터 차례로 $f(3)$, $f(2)$, $f(1)$에 대응시키면 된다.
따라서 함수 f의 개수는 집합 Y의 원소 5개 중 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_5H_3={}_7C_3=35$

답 35

11 $f(2)=2$이고 (나)에서 $f(1)\le f(2)$이므로 $f(1)$의 값은 1 또는 2이다.
또 $f(2)\le f(3)\le f(4)$이므로 공역의 원소 2, 3, 4, 5 중 2개를 중복을 허용하여 뽑아 크기가 작은 것부터 차례로 $f(3)$, $f(4)$에 대응시키면 된다. 즉 집합 Y의 원소 4개 중 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_2={}_5C_2=10$
따라서 구하는 함수 f의 개수는 $2\cdot10=20$

답 20

연습 문제

본문 31~32쪽

01 126	02 21	03 35	04 ②
05 ④	06 ④	07 30	08 ⑤
09 28	10 18	11 ②	12 ②
13 ⑤	14 52	15 160	16 32

01 ${}_3H_r={}_{2+r}C_r={}_{2+r}C_2=\dfrac{(r+2)(r+1)}{2}$
이때 ${}_7C_2=21$이므로 $\dfrac{(r+2)(r+1)}{2}=21$
$(r+2)(r+1)=42=7\cdot6$
$\therefore r=5$
$\therefore {}_5H_5={}_9C_5={}_9C_4=126$

02 모자, 티셔츠, 수건 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는
${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

03 빨간색, 파란색, 노란색 색연필을 각각 하나씩 선택한 후, 나머지 색연필에서 중복을 허용하여 4개 이하를 선택하면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는
$${}_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2+{}_3H_3+{}_3H_4={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4$$
$$={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2$$
$$=1+3+6+10+15=35$$

04 (i) 3이 적힌 공을 한 개 뽑을 경우
1, 2, 4가 각각 하나씩 적힌 공을 중복을 허용하여 4개를 뽑는 중복조합의 수를 구하면 된다.
$\therefore {}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
(ii) 3이 적힌 공을 하나도 안 뽑을 경우
1, 2, 4가 각각 하나씩 적힌 공을 중복을 허용하여 5개를 뽑는 중복조합의 수를 구하면 된다.
$\therefore {}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $15+21=36$

05 콤비네이션피자, 불고기피자, 포테이토피자 중에서 중복을 허용하여 m개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_m={}_{2+m}C_m={}_{2+m}C_2=\dfrac{(m+2)(m+1)}{2}=45$
$(m+1)(m+2)=90=9\cdot10$이므로 $m=8$
콤비네이션피자, 불고기피자, 포테이토피자를 각각 하나씩 주문한 후 나머지 피자 중에서 중복을 허용하여 $(m-3)$개, 즉 5개를 주문하면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

06 4명 중 선물을 하나도 받지 못한 학생 1명을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
나머지 3명의 학생에게 선물을 1개씩 나누어 준 후 나머지 2개의 선물을 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는
${}_3H_2={}_4C_2=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $4\cdot6=24$

07 $(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)$이므로 3개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 곱하면 $(a+b+c)^2$을 전개할 때 생기는 항이 하나씩 만들어진다.
그 경우의 수는 ${}_3H_2={}_4C_2=6$
$(x+y)^4=(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$이므로 2개의 문자 x, y 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 곱하면 $(x+y)^4$을 전개할 때 생기는 항이 하나씩 만들어진다.
그 경우의 수는 ${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$
따라서 구하는 항의 개수는 $6\cdot5=30$

08 $x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$이라 하면
$(a+1)+(b+1)+(c+1)=8$
$\therefore a+b+c=5$ (단, a, b, c는 음이 아닌 정수)
따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $a+b+c=5$의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로
${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

09 $x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$이라 하면
$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)=15$, $2a+2b+2c=12$
$\therefore a+b+c=6$ (단, a, b, c는 음이 아닌 정수)
따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $a+b+c=6$의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로
${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

10 (ⅰ) $z=2$일 때 $x+y=0$이므로 $x=0$, $y=0$
순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $(0, 0, 2)$의 1
(ⅱ) $z=1$일 때 $x+y=5$
순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $x+y=5$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 ${}_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$
(ⅲ) $z=0$일 때 $x+y=10$
순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $x+y=10$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 ${}_2H_{10}={}_{11}C_{10}={}_{11}C_1=11$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$1+6+11=18$

11 x, y, z는 주사위의 눈의 수이므로
$1\le x\le 6$, $1\le y\le 6$, $1\le z\le 6$인 정수
이때 $x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$이라 하면
$(a+1)+(b+1)+(c+1)=6$
$\therefore a+b+c=3$ (단, $0\le a\le 5$, $0\le b\le 5$, $0\le c\le 5$인 정수)
따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $a+b+c=3$의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로
${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

12 같은 종류의 사탕 5개를 3명의 아이에게 1개 이상씩 나누어 주는 경우의 수는 방정식 $x+y+z=2$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.
이것은 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_2={}_4C_2=6$
(ⅰ) 1개의 사탕을 받은 아이가 2명일 때
2명을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$
먼저 1개의 사탕을 받은 2명의 아이에게 초콜릿 1개씩 나누어 준 다음 나머지 2개의 초콜릿을 그 2명의 아이에게 나누어 주면 되므로 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
$\therefore {}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$
(ⅱ) 1개의 사탕을 받은 아이가 1명일 때
1명을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
초콜릿을 나누어 주는 경우는 1가지이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $3\cdot 3+3\cdot 1=12$

13 $0<a<b\le 5<c\le d\le 10$ …… ㉠
㉠에서 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 두 자연수를 택하는 조합의 수와 같으므로
${}_5C_2=10$
자연수 c, d의 순서쌍 (c, d)의 개수는 6, 7, 8, 9, 10 중에서 중복을 허용하여 두 자연수를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_5H_2={}_6C_2=15$
따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$10\cdot 15=150$

14 집합 X의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 $a<b$일 때, $f(a)\ge f(b)$를 만족시키는 함수 f의 개수에서 $f(2)=3$을 만족시키는 함수의 개수를 뺀다.
(나)를 만족시키는 함수의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 4개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로
${}_5H_4={}_8C_4=70$
이 중에서 $f(2)=3$을 만족시키는 함수는 공역의 3, 4, 5에서 1개를 뽑은 후 정의역의 1에 대응시키고 공역의 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 큰 수부터 정의역의 3, 4에 차례대로 대응시키면 된다. 즉 이를 만족시키는 함수의 개수는
${}_3C_1\cdot {}_3H_2=3\cdot {}_4C_2=18$
따라서 f의 개수는 $70-18=52$

15 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 세 자연수를 택하면 작은 수부터 차례로 $|a|$, $|b|$, $|c|$의 값이 되므로
순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수는 ${}_4H_3={}_6C_3=20$
이때 a, b, c의 값은 각각 2가지씩 생기므로
구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$20\cdot 2\cdot 2\cdot 2=160$

16 (가)에서 $a+b+c=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 서로 다른 3개의 문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$
(나)에서 $2^a\times 4^b=2^a\times 2^{2b}=2^{a+2b}$이 8의 배수이려면 $a+2b\ge 3$이어야 한다.
이때 $a+2b<3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$의 4이다.
따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$36-4=32$

05 이항정리

유제

본문 35~38쪽

01 (1) $(2x+3y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2x)^{5-r}(3y)^r={}_5C_r2^{5-r}3^rx^{5-r}y^r$

x^2y^3항은 $5-r=2$일 때이므로 $r=3$

따라서 x^2y^3의 계수는

${}_5C_3\times2^2\times3^3=1080$

(2) $(3-2x)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r3^{6-r}(-2x)^r={}_6C_r3^{6-r}(-2)^rx^r$

x^2항은 $r=2$일 때이므로 x^2의 계수는

${}_6C_2\times3^4\times(-2)^2=4860$

답 (1) 1080 (2) 4860

02 $(ax-y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(ax)^{5-r}(-y)^r={}_5C_ra^{5-r}(-1)^rx^{5-r}y^r$

x^3y^2항은 $5-r=3$일 때이므로 $r=2$

이때 x^3y^2의 계수는 ${}_5C_2\times a^3\times(-1)^2=10a^3=80$

따라서 $a^3=8$이므로 $a=2$

답 2

03 (1) $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_rx^{6-r}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r={}_6C_r(-2)^rx^{6-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6C_r(-2)^rx^{6-2r}$

상수항은 $6-2r=0$일 때이므로 $r=3$

따라서 상수항은 ${}_6C_3\times(-2)^3=-160$

(2) $\left(x+\dfrac{2}{y}\right)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_rx^{7-r}\left(\dfrac{2}{y}\right)^r={}_7C_r2^rx^{7-r}y^{-r}$

$\dfrac{x^5}{y^2}$항, 즉 x^5y^{-2}항은 $7-r=5$일 때이므로 $r=2$

따라서 $\dfrac{x^5}{y^2}$의 계수는 ${}_7C_2\times2^2=84$

답 (1) -160 (2) 84

04 (1) $(x^2+1)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8=\underbrace{x^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8}_{㉠}+\underbrace{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8}_{㉡}$

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8$의 전개식에서 일반항은

${}_8C_rx^{8-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_8C_r(-1)^rx^{8-2r}$ …… ①

(i) ㉠의 전개식에서 상수항은 $x^2\times\left(\text{①의 }\dfrac{1}{x^2}\text{항}\right)$일 때이다.

①에서 $\dfrac{1}{x^2}$항은 $8-2r=-2$, 즉 $r=5$일 때이므로

${}_8C_5(-1)^5x^{-2}=-\dfrac{56}{x^2}$

따라서 상수항은 $x^2\times\left(-\dfrac{56}{x^2}\right)=-56$

(ii) ㉡의 전개식에서 상수항은 ①에서 $8-2r=0$, 즉 $r=4$일 때이므로 ${}_8C_4(-1)^4=70$

(i), (ii)에서 구하는 상수항은 $-56+70=14$

(2) $(x^2+x+1)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6=\underbrace{x^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6}_{㉠}+\underbrace{x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6}_{㉡}+\underbrace{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6}_{㉢}$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_rx^{6-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6C_rx^{6-2r}$ …… ①

(i) ㉠의 전개식에서 상수항은 $x^2\times\left(\text{①의 }\dfrac{1}{x^2}\text{항}\right)$일 때이다.

①에서 $\dfrac{1}{x^2}$항은 $6-2r=-2$, 즉 $r=4$일 때이므로

${}_6C_4x^{-2}=\dfrac{15}{x^2}$

따라서 상수항은 $x^2\times\dfrac{15}{x^2}=15$

(ii) ㉡의 전개식에서 상수항은 $x\times\left(\text{①의 }\dfrac{1}{x}\text{항}\right)$일 때이다.

①에서 $\dfrac{1}{x}$항은 없으므로 ㉡의 전개식에서 상수항은 없다.

(iii) ㉢의 전개식에서 상수항은 ①에서 $6-2r=0$, 즉 $r=3$일 때이므로 ${}_6C_3=20$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 상수항은 $15+20=35$

답 (1) 14 (2) 35

05 $(1+2x)^4$의 전개식에서 일반항은

${}_4C_r1^{4-r}(2x)^r={}_4C_r(2x)^r$ …… ㉠

$(1-x)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_r1^{5-r}(-x)^r={}_5C_r(-x)^r$ …… ㉡

$(1+2x)^4(1-x)^5$의 전개식에서 x^2항은

(㉠의 x^2항)×(㉡의 상수항)+(㉠의 x항)×(㉡의 x항)

+(㉠의 상수항)×(㉡의 x^2항)이므로

${}_4C_2(2x)^2\times1+{}_4C_1(2x)\times{}_5C_1(-x)+1\times{}_5C_2x^2$

$=24x^2-40x^2+10x^2=-6x^2$

따라서 x^2의 계수는 -6이다.

답 -6

06 $(2x-1)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_r(2x)^{5-r}(-1)^r={}_5C_r2^{5-r}(-1)^rx^{5-r}$ …… ㉠

$(1+x)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_nC_r1^{n-r}x^r={}_nC_rx^r$ …… ㉡

$(2x-1)^5(1+x)^n$의 전개식에서 x^2항은

(㉠의 x^2항)×(㉡의 상수항)+(㉠의 x항)×(㉡의 x항)

+(㉠의 상수항)×(㉡의 x^2항)이므로

${}_5C_32^2(-1)^3x^2\times1+{}_5C_4 2x\times{}_nC_1x+(-1)^5\times{}_nC_2x^2$

$=-40x^2+10nx^2-\dfrac{n(n-1)}{2}x^2=\dfrac{-n^2+21n-80}{2}x^2$

이때 x^2의 계수가 -13이므로

$$\frac{-n^2+21n-80}{2}=-13$$

$n^2-21n+54=0$, $(n-3)(n-18)=0$

∴ $n=3$ 또는 $n=18$

따라서 자연수 n의 최솟값은 3이다.

답 3

07 (1) ${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_3$

$=({}_4C_4+{}_4C_3)+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_3$ ($\because$ ${}_3C_3={}_4C_4$)

$=({}_5C_4+{}_5C_3)+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3$ ($\because$ ${}_4C_4+{}_4C_3={}_5C_4$)

$=({}_6C_4+{}_6C_3)+\cdots+{}_{10}C_3$ ($\because$ ${}_5C_4+{}_5C_3={}_6C_4$)

$\vdots$

$={}_{10}C_4+{}_{10}C_3={}_{11}C_4=330$

(2) ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{11}C_9$

$=({}_3C_0+{}_3C_1)+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{11}C_9$ ($\because$ ${}_2C_0={}_3C_0$)

$=({}_4C_1+{}_4C_2)+{}_5C_3+\cdots+{}_{11}C_9$ ($\because$ ${}_3C_0+{}_3C_1={}_4C_1$)

$=({}_5C_2+{}_5C_3)+\cdots+{}_{11}C_9$ ($\because$ ${}_4C_1+{}_4C_2={}_5C_2$)

$\vdots$

$={}_{11}C_8+{}_{11}C_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=220$

답 (1) 330 (2) 220

08 $(1+x^2)^n$의 전개식에서 일반항은 ${}_nC_rx^{2r}$이고 $3\le n\le 8$인 경우에만 x^6항이 나오므로

$(1+x^2)^3$의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_3C_3$

$(1+x^2)^4$의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_4C_3$

$\vdots$

$(1+x^2)^8$의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_8C_3$

따라서 x^6의 계수는

${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_8C_3$

$=({}_4C_4+{}_4C_3)+{}_5C_3+\cdots+{}_8C_3$ ($\because$ ${}_3C_3={}_4C_4$)

$=({}_5C_4+{}_5C_3)+{}_6C_3+\cdots+{}_8C_3$ ($\because$ ${}_4C_4+{}_4C_3={}_5C_4$)

$=({}_6C_4+{}_6C_3)+\cdots+{}_8C_3$ ($\because$ ${}_5C_4+{}_5C_3={}_6C_4$)

$\vdots$

$={}_8C_4+{}_8C_3={}_9C_4=126$

답 126

09 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1=255$

$2^n=256=2^8$

∴ $n=8$

답 8

10 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^n-{}_nC_0-{}_nC_n=2^n-2$

따라서 주어진 부등식은 $2^{13}<2^n-2<2^{14}$이므로

$2^{13}+2<2^n<2^{14}+2$

∴ $n=14$

답 14

11 ${}_{16}C_0+{}_{16}C_2+{}_{16}C_4+\cdots+{}_{16}C_{16}=2^{16-1}=2^{15}$이므로

${}_{16}C_2+{}_{16}C_4+{}_{16}C_6+\cdots+{}_{16}C_{14}=2^{15}-{}_{16}C_0-{}_{16}C_{16}$

$=2^{15}-2$

답 $2^{15}-2$

12 ${}_{15}C_r={}_{15}C_{15-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 15)$이므로

${}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_7$

$={}_{15}C_{15}+{}_{15}C_{14}+{}_{15}C_{13}+\cdots+{}_{15}C_8$

이때 ${}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_{15}=2^{15}$이므로

${}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_7=\frac{1}{2}\times2^{15}=2^{14}$

∴ $\log_2({}_{15}C_0+{}_{15}C_1+\cdots+{}_{15}C_7)=\log_2 2^{14}=14$

답 14

Drill

본문 39쪽

1 (1) 15 (2) 80 (3) 720 (4) 6 (5) -18
(6) 80 (7) -560 (8) 1674 (9) -5 (10) -54

2 (1) ${}_1C_1$, ${}_2C_0$, ${}_3C_2$, 1, 2, 1 (2) ㄴ

3 (1) 256 (2) 0 (3) 32 (4) 256

1 (1) $(a+b)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6C_ra^{6-r}b^r$

a^2b^4항은 $6-r=2$일 때이므로 $r=4$

따라서 a^2b^4의 계수는 ${}_6C_4=15$

(2) $(2a-b)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2a)^{5-r}(-b)^r={}_5C_r2^{5-r}(-1)^ra^{5-r}b^r$

a^3b^2항은 $5-r=3$일 때이므로 $r=2$

따라서 a^3b^2의 계수는 ${}_5C_2\times2^3=80$

(3) $(2x-3)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2x)^{5-r}(-3)^r={}_5C_r2^{5-r}(-3)^rx^{5-r}$

x^3항은 $5-r=3$일 때이므로 $r=2$

따라서 x^3의 계수는 ${}_5C_2\times2^3\times(-3)^2=720$

(4) $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_rx^{4-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r={}_4C_rx^{4-4r}$

$\frac{1}{x^4}$, 즉 x^{-4}항은 $4-4r=-4$일 때이므로 $r=2$

따라서 $\frac{1}{x^4}$의 계수는 ${}_4C_2=6$

(5) $\left(3x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r(3x^2)^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r3^{6-r}(-1)^rx^{12-3r}$$

$\dfrac{1}{x^3}$, 즉 x^{-3}항은 $12-3r=-3$일 때이므로 $r=5$

따라서 $\dfrac{1}{x^3}$의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_5\times3\times(-1)=-18$

(6) $\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5\mathrm{C}_r(x^3)^{5-r}\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r2^rx^{15-5r}$$

상수항은 $15-5r=0$일 때이므로 $r=3$

따라서 상수항은 ${}_5\mathrm{C}_3\times2^3=80$

(7) $\left(2x-\dfrac{1}{y}\right)^7$의 전개식의 일반항은

$${}_7\mathrm{C}_r(2x)^{7-r}\left(-\dfrac{1}{y}\right)^r={}_7\mathrm{C}_r2^{7-r}(-1)^rx^{7-r}y^{-r}$$

$\dfrac{x^4}{y^3}$, 즉 x^4y^{-3}항은 $7-r=4$일 때이므로 $r=3$

따라서 $\dfrac{x^4}{y^3}$의 계수는 ${}_7\mathrm{C}_3\times2^4\times(-1)=-560$

(8) $(1+2x)^3$의 전개식에서 일반항은

${}_3\mathrm{C}_r1^{3-r}(2x)^r={}_3\mathrm{C}_r(2x)^r$ ...... ㉠

$(3+x)^4$의 전개식에서 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r3^{4-r}x^r$ ...... ㉡

$(1+2x)^3(3+x)^4$의 전개식에서 x^2항은

(㉠의 x^2항)$\times$(㉡의 상수항)$+$(㉠의 x항)$\times$(㉡의 x항)

$+$(㉠의 상수항)$\times$(㉡의 x^2항)이므로

${}_3\mathrm{C}_2(2x)^2\times{}_4\mathrm{C}_03^4+{}_3\mathrm{C}_1(2x)\times{}_4\mathrm{C}_13^3x+1\times{}_4\mathrm{C}_23^2x^2$

$=972x^2+648x^2+54x^2=1674x^2$

따라서 x^2의 계수는 1674이다.

(9) $(x^2+1)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6=\underbrace{x^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6}_{㉠}+\underbrace{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6}_{㉡}$

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6\mathrm{C}_rx^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r(-1)^rx^{6-2r}$ ...... ①

(i) ㉠의 전개식에서 상수항은 $x^2\times$(①의 $\dfrac{1}{x^2}$항)일 때이다.

①에서 $\dfrac{1}{x^2}$항은 $6-2r=-2$, 즉 $r=4$일 때이므로

${}_6\mathrm{C}_4(-1)^4x^{-2}=15\times\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{15}{x^2}$

따라서 상수항은 $x^2\times\dfrac{15}{x^2}=15$

(ii) ㉡의 전개식에서 상수항은 ①에서 $6-2r=0$, 즉 $r=3$일 때이므로 ${}_6\mathrm{C}_3(-1)^3=-20$

(i), (ii)에서 구하는 상수항은 $15-20=-5$

(10) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 일반항은

${}_4\mathrm{C}_rx^{4-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_4\mathrm{C}_rx^{4-2r}$ ...... ㉠

$(2x-1)^3$의 전개식에서 일반항은

${}_3\mathrm{C}_r(2x)^{3-r}(-1)^r={}_3\mathrm{C}_r2^{3-r}(-1)^rx^{3-r}$ ...... ㉡

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4(2x-1)^3$의 전개식에서 상수항은

(㉠의 상수항)$\times$(㉡의 상수항)$+$(㉠의 $\dfrac{1}{x^2}$항)$\times$(㉡의 x^2항)

이므로

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_3(-1)+{}_4\mathrm{C}_3x^{-2}\times{}_3\mathrm{C}_12^2(-1)x^2=-6-48=-54$

따라서 상수항은 -54이다.

2 (1) $n=1, 2, 3$일 때, $(a+b)^n$을 전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면 각각 다음과 같다.

$(a+b)^1={}_1\mathrm{C}_0a+{}_1\mathrm{C}_1b=a+b$

$(a+b)^2={}_2\mathrm{C}_0a^2+{}_2\mathrm{C}_1ab+{}_2\mathrm{C}_2b^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3={}_3\mathrm{C}_0a^3+{}_3\mathrm{C}_1a^2b+{}_3\mathrm{C}_2ab^2+{}_3\mathrm{C}_3b^3$

$\qquad=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

각각의 전개식에서 계수만을 나열하면 다음과 같다.

$n=1$일 때	${}_1\mathrm{C}_0$ $\boxed{{}_1\mathrm{C}_1}$	$\boxed{1}$ 1
$n=2$일 때	$\boxed{{}_2\mathrm{C}_0}$ ${}_2\mathrm{C}_1$ ${}_2\mathrm{C}_2$	1 $\boxed{2}$ 1
$n=3$일 때	${}_3\mathrm{C}_0$ ${}_3\mathrm{C}_1$ $\boxed{{}_3\mathrm{C}_2}$ ${}_3\mathrm{C}_3$	$\boxed{1}$ 3 3 1

(2) ㄴ. ${}_2\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_2$

3 (1) ${}_8\mathrm{C}_0+{}_8\mathrm{C}_1+{}_8\mathrm{C}_2+\cdots+{}_8\mathrm{C}_8=2^8=256$

(2) ${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$이므로

${}_7\mathrm{C}_0-{}_7\mathrm{C}_1+{}_7\mathrm{C}_2-{}_7\mathrm{C}_3+\cdots-{}_7\mathrm{C}_7=0$

(3) ${}_6\mathrm{C}_0+{}_6\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_6=2^{6-1}=32$

(4) ${}_9\mathrm{C}_1+{}_9\mathrm{C}_3+{}_9\mathrm{C}_5+{}_9\mathrm{C}_7+{}_9\mathrm{C}_9=2^{9-1}=256$

연습 문제

본문 40~41쪽

01 ②	02 ②	03 -672	04 ④
05 3	06 ②	07 ④	08 2640
09 3	10 ④	11 9	12 119
13 30	14 ④	15 601	16 127

01 $(2x-a)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(2x)^{5-r}(-a)^r={}_5C_r2^{5-r}(-a)^rx^{5-r}$
x항은 $5-r=1$일 때이므로 $r=4$
x의 계수는 ${}_5C_4 2a^4=10a^4$ $\quad\therefore p=10a^4$
x^2항은 $5-r=2$일 때이므로 $r=3$
x^2의 계수는 ${}_5C_3 2^2(-a)^3=-40a^3$ $\quad\therefore q=-40a^3$
$p+q=10a^4-40a^3=0,\ 10a^3(a-4)=0$
$\therefore a=4\ (\because a\neq 0)$

02 $\left(ax^3-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(ax^3)^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_ra^{5-r}(-1)^rx^{15-4r}$
x^3항은 $15-4r=3$일 때이므로 $r=3$
x^3의 계수는 ${}_5C_3(-1)a^2=-10a^2$
이때 $-10a^2=-90$이므로 $a^2=9$
$\therefore a=3\ (\because a>0)$

03 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^9$의 전개식의 일반항은
${}_9C_r(\sqrt{x})^{9-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_9C_r(-2)^rx^{\frac{9-3r}{2}}$
상수항은 $\frac{9-3r}{2}=0$일 때이므로 $r=3$
따라서 상수항은 ${}_9C_3(-2)^3=-672$

04 $\left(ax+\frac{1}{y}\right)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(ax)^{5-r}\left(\frac{1}{y}\right)^r={}_5C_ra^{5-r}x^{5-r}y^{-r}$
$\frac{x^3}{y^2}$, 즉 x^3y^{-2}항은 $5-r=3$일 때이므로 $r=2$
$\frac{x^3}{y^2}$의 계수는 ${}_5C_2a^3=10a^3$
이때 $10a^3=80$이므로 $a^3=8$
$\therefore a=2$

05 $\left(ax^2-\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r(ax^2)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_ra^{6-r}(-1)^rx^{12-3r}$
상수항은 $12-3r=0$일 때이므로 $r=4$
상수항은 ${}_6C_4a^2=15a^2$
이때 $15a^2=135$이므로 $a^2=9$
$\therefore a=3\ (\because a>0)$

06 $(2x+1)^3$의 전개식에서 일반항은
${}_3C_r(2x)^{3-r}1^r={}_3C_r2^{3-r}x^{3-r}$ ...... ㉠
$(x-3)^4$의 전개식에서 일반항은
${}_4C_rx^{4-r}(-3)^r$ ...... ㉡
$(2x+1)^3(x-3)^4$의 전개식에서 x^4항은
(㉠의 x^3항)×(㉡의 x항)+(㉠의 x^2항)×(㉡의 x^2항)
+(㉠의 x항)×(㉡의 x^3항)+(㉠의 상수항)×(㉡의 x^4항)이므로
${}_3C_02^3x^3\times{}_4C_3(-3)^3x+{}_3C_12^2x^2\times{}_4C_2(-3)^2x^2$
$+{}_3C_22x\times{}_4C_1(-3)x^3+1\times{}_4C_0x^4$
$=-864x^4+648x^4-72x^4+x^4=-287x^4$
따라서 x^4의 계수는 -287이다.

07 $(x+a)^4$의 전개식에서 일반항은
${}_4C_rx^{4-r}a^r$ ...... ㉠
$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$의 전개식에서 일반항은
${}_3C_rx^{3-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_3C_r(-1)^rx^{3-2r}$ ...... ㉡
$(x+a)^4\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$의 전개식에서 x^2항은
(㉠의 x항)×(㉡의 x항)+(㉠의 x^3항)×$\left(\text{㉡의 }\frac{1}{x}\text{항}\right)$이므로
${}_4C_3a^3x\times{}_3C_1(-1)x+{}_4C_1ax^3\times{}_3C_2x^{-1}$
$=-12a^3x^2+12ax^2=(-12a^3+12a)x^2$
이때 $-12a^3+12a=-72$이므로
$a^3-a-6=0$
$(a-2)(a^2+2a+3)=0$ $\quad\therefore a=2$

08 $(1+2x)^n$의 전개식의 일반항은
${}_nC_r(2x)^r={}_nC_r2^rx^r$
이고 $3\leq n\leq 10$인 경우에만 x^3항이 나오므로
$(1+2x)^3$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_3C_32^3$
$(1+2x)^4$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_4C_32^3$
⋮
$(1+2x)^{10}$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_{10}C_32^3$
따라서 x^3의 계수는
${}_3C_32^3+{}_4C_32^3+{}_5C_32^3+\cdots+{}_{10}C_32^3$
$=2^3({}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_3)$
$=2^3\{({}_4C_4+{}_4C_3)+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_3\}\ (\because {}_3C_3={}_4C_4)$
$=2^3\{({}_5C_4+{}_5C_3)+\cdots+{}_{10}C_3\}\ (\because {}_4C_4+{}_4C_3={}_5C_4)$
⋮
$=2^3({}_{10}C_4+{}_{10}C_3)$
$=2^3{}_{11}C_4=2640$

다른 풀이 $(1+2x)+(1+2x)^2+(1+2x)^3+\cdots+(1+2x)^{10}$ ...... ㉠

㉠은 첫째항이 $1+2x$, 공비가 $1+2x$, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로

$$\frac{(1+2x)\{(1+2x)^{10}-1\}}{(1+2x)-1}=\frac{(1+2x)^{11}-(1+2x)}{2x} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡의 분모가 x이므로 x^3의 계수는 $(1+2x)^{11}$의 전개식에서 x^4의 계수와 같다.

즉 $(1+2x)^{11}$의 전개식의 일반항은 ${}_{11}C_r2^rx^r$이므로 $r=4$

따라서 구하는 계수는 $\frac{{}_{11}C_4 2^4}{2}=2640$

09 $(1+x)^n$의 전개식에서 일반항은 ${}_nC_rx^r$이므로

x^2의 계수는 ${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}=55$

$n(n-1)=110=11\cdot 10$

$\therefore n=11$

이때 x^8의 계수는 ${}_{11}C_8$이고, x^k의 계수는 ${}_{11}C_k$이므로

${}_{11}C_k={}_{11}C_8={}_{11}C_3$

$\therefore k=3\ (\because k\neq 8)$

10 ㄷ. ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_7C_7=2^7$이고

${}_7C_0+{}_7C_2+{}_7C_4+{}_7C_6={}_7C_1+{}_7C_3+{}_7C_5+{}_7C_7$이므로

$2({}_7C_0+{}_7C_2+{}_7C_4+{}_7C_6)=2^7$

$\therefore {}_7C_0+{}_7C_2+{}_7C_4+{}_7C_6=2^6$

ㄹ. ${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2$

$=({}_3C_3+{}_3C_2)+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2\ (\because {}_2C_2={}_3C_3)$

$=({}_4C_3+{}_4C_2)+{}_5C_2+{}_6C_2\ (\because {}_3C_3+{}_3C_2={}_4C_3)$

$=({}_5C_3+{}_5C_2)+{}_6C_2\ (\because {}_4C_3+{}_4C_2={}_5C_3)$

$={}_6C_3+{}_6C_2={}_7C_3$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^n-1$

즉 $2^n-1=511$이므로 $2^n=512=2^9$

$\therefore n=9$

12 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

${}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_7$

$={}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_9C_2$

$=({}_3C_3+{}_3C_2)+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_9C_2-{}_3C_3$

$=({}_4C_3+{}_4C_2)+{}_5C_2+\cdots+{}_9C_2-1\ (\because {}_3C_3+{}_3C_2={}_4C_3)$

$=({}_5C_3+{}_5C_2)+\cdots+{}_9C_2-1\ (\because {}_4C_3+{}_4C_2={}_5C_3)$

$\vdots$

$={}_9C_3+{}_9C_2-1$

$={}_{10}C_3-1=119$

13 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$3^n={}_nC_0+2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+\cdots+2^n{}_nC_n$

$\log_3({}_nC_0+2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+\cdots+2^n{}_nC_n)=\log_3 3^n=n$

$\therefore n=30$

14 $(1+x)^n$의 전개식에서 일반항은 ${}_nC_rx^r$이므로 x^8의 계수는 ${}_nC_8$, x^9의 계수는 ${}_nC_9$, x^{10}의 계수는 ${}_nC_{10}$이다.

이 세 수가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2{}_nC_9={}_nC_8+{}_nC_{10}$

$$2\cdot\frac{n!}{9!(n-9)!}=\frac{n!}{8!(n-8)!}+\frac{n!}{10!(n-10)!}$$

양변에 $\frac{10!(n-8)!}{n!}$을 곱하면

$2\cdot 10(n-8)=10\cdot 9+(n-8)(n-9)$

$20n-160=90+n^2-17n+72$

$n^2-37n+322=0,\ (n-14)(n-23)=0$

$\therefore n=14$ 또는 $n=23$

따라서 구하는 자연수 n 중 가장 큰 수는 23이다.

15 $31^{50}=(1+30)^{50}={}_{50}C_0+{}_{50}C_1 30+{}_{50}C_2 30^2+\cdots+{}_{50}C_{50}30^{50}$

이때 세 번째 항 이후로는 900으로 나누어떨어지므로 31^{50}을 900으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{50}C_0+{}_{50}C_1 30$을 900으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

${}_{50}C_0+{}_{50}C_1 30=1+1500=1501$이므로 31^{50}을 900으로 나누었을 때의 나머지는 601이다.

16 다음과 같이 a, b, c, d, e, f, g, h 사이에는 모두 7군데의 빈 곳이 있다.

$a\square b\square c\square d\square e\square f\square g\square h$

이것을 두 부분으로 나누려면 7군데 중에서 경계가 되는 한 곳만 선택하면 되므로

${}_7C_1$

세 부분으로 나누려면 7군데 중에서 경계가 되는 두 곳을 선택하면 되므로

${}_7C_2$

$\cdots$

8부분으로 나누려면 7군데 모두를 선택하면 되므로

${}_7C_7$

따라서 두 개 이상의 부분으로 나누는 방법의 수는

${}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3+\cdots+{}_7C_7$

이때 ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3+\cdots+{}_7C_7=2^7$이므로

${}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3+\cdots+{}_7C_7=2^7-1=127$

Ⅱ. 확률

01 확률의 뜻

유제

본문 45, 48~52쪽

01 $A=\{4, 8\}$, $B=\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C=\{2, 3, 5, 7\}$, $D=\{1, 3, 9\}$이므로
$A\cap B=\{8\}$, $A\cap C=\varnothing$, $A\cap D=\varnothing$, $B\cap C=\{5, 7\}$, $B\cap D=\{9\}$, $C\cap D=\{3\}$
따라서 서로 배반인 두 사건은 A와 C, A와 D이다.

답 A와 C, A와 D

02 사건 A와 서로 배반인 사건은 A의 여사건, 즉 $A^C=\{1, 3, 4, 6\}$의 부분집합이다.
따라서 구하는 사건의 개수는 $2^4=16$

답 16

03 사건 A와 서로 배반인 사건은 A의 여사건, 즉 $A^C=\{2, 4, 6, 8\}$의 부분집합이고,
사건 B와 서로 배반인 사건은 B의 여사건, 즉 $B^C=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$의 부분집합이다.
따라서 두 사건 A, B와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B^C=\{2, 6\}$의 부분집합이다.
따라서 구하는 사건의 개수는 $2^2=4$

답 4

04 표본공간을 S라 하면 $n(S)=6\times6=36$
(1) 나오는 두 눈의 수의 합이 5보다 작게 되는 사건을 A라 하면
$A=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$
이므로 $n(A)=6$
따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$
(2) 나오는 두 눈의 수의 곱이 짝수가 되는 사건을 B라 하자.
(홀수)$\times$(짝수)$=$(짝수), (짝수)$\times$(홀수)$=$(짝수), (짝수)$\times$(짝수)$=$(짝수)이고, 주사위의 눈의 수 중 홀수는 1, 3, 5의 3개, 짝수는 2, 4, 6의 3개이므로
$n(B)=3\times3+3\times3+3\times3=27$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{27}{36}=\dfrac{3}{4}$
(3) 나오는 두 눈의 수의 차가 3 이상이 되는 사건을 C라 하자.
(i) 나오는 두 눈의 수의 차가 3인 경우
$(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)$의 6가지
(ii) 나오는 두 눈의 수의 차가 4인 경우
$(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)$의 4가지
(iii) 나오는 두 눈의 수의 차가 5인 경우
$(1, 6), (6, 1)$의 2가지
(i), (ii), (iii)에서 $n(C)=6+4+2=12$
따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

답 (1) $\dfrac{1}{6}$ (2) $\dfrac{3}{4}$ (3) $\dfrac{1}{3}$

05 $A=\{1, 2, 3\}$의 부분집합의 개수는 $2^3=8$
A의 부분집합 중 원소 2를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는
$2^{3-1}=2^2=4$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

06 5명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $5!$
부모를 제외한 3명의 자녀가 일렬로 앉는 경우의 수는 $3!$

∨○∨○∨○∨

자녀 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중 2개의 자리에 부모가 앉는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2$
즉 부모가 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 $3!\times{}_4\mathrm{P}_2$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3!\times{}_4\mathrm{P}_2}{5!}=\dfrac{3}{5}$

답 $\dfrac{3}{5}$

07 6명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $6!$
A, B 사이에 앉을 2명을 택하여 일렬로 앉히는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2$
A, B를 포함한 4명을 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 앉히는 경우의 수는 $3!$
A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$
즉 A, B 사이에 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2\times3!\times2!$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{{}_4\mathrm{P}_2\times3!\times2!}{6!}=\dfrac{1}{5}$

답 $\dfrac{1}{5}$

08 1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 3개의 숫자로 만든 세 자리의 수의 개수는 ${}_5\mathrm{P}_3$
이때 이 수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.
즉 세 수는 $(1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)$이고 각 경우 만들 수 있는 세 자리의 수는 $3!$가지씩 있으므로 $4\times3!$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{4\times3!}{{}_5\mathrm{P}_3}=\dfrac{2}{5}$

답 $\dfrac{2}{5}$

09 네 쌍의 부부가 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(8-1)!=7!$
부부 2명씩을 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!$
네 쌍 모두 부부 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!\times2!\times2!\times2!$
즉 네 쌍 모두 부부끼리 이웃하게 앉는 경우의 수는
$3!\times2!\times2!\times2!\times2!$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3!\times2!\times2!\times2!\times2!}{7!}=\dfrac{2}{105}$

답 $\dfrac{2}{105}$

10 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 정수의 개수는
천의 자리에 올 수 있는 수가 1, 2, 3, 4의 4개이고, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 수가 0, 1, 2, 3, 4의 5개이므로
$4\times{}_5\Pi_3=4\times5^3=500$
이때 짝수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4, 즉
□□□0 또는 □□□2 또는 □□□4이어야 하므로
짝수의 개수는 $3\times\underbrace{4}_{\text{천의 자리에 올 수 있는 수}}\times\underbrace{{}_5\Pi_2}_{\text{백의 자리, 십의 자리에 올 수 있는 수}}=3\times4\times5^2=300$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{300}{500}=\dfrac{3}{5}$

답 $\dfrac{3}{5}$

11 7개의 문자 B, A, L, L, B, O, Y를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{7!}{2!2!}=1260$
B와 L을 제외한 나머지 문자 A, O, Y를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

∨○∨○∨○∨

A, O, Y 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 B, B, L, L을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$
즉 B와 L끼리는 서로 이웃하지 않는 경우의 수는 $6\times6=36$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{36}{1260}=\dfrac{1}{35}$

답 $\dfrac{1}{35}$

12 7개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_7C_3=35$
(1) 2개의 흰 공 중에서 1개, 3개의 빨간 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_2C_1\times{}_3C_2=2\times3=6$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{6}{35}$
(2) 2개의 검은 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_2C_2=1$
이때 나머지 1개의 공을 흰 공 중에서 꺼내는 경우의 수는
${}_2C_1=2$
또는 나머지 1개의 공을 빨간 공 중에서 꺼내는 경우의 수는
${}_3C_1=3$
즉 검은 공이 2개일 경우의 수는 $1\times(2+3)=5$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{5}{35}=\dfrac{1}{7}$

답 (1) $\dfrac{6}{35}$ (2) $\dfrac{1}{7}$

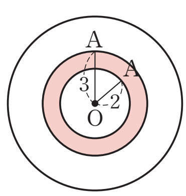
13 8명의 농구 선수 중에서 4명의 대표 선수를 뽑는 경우의 수는 ${}_8C_4=70$
4명의 대표 선수 중에 A는 포함되고 B는 포함되지 않는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{20}{70}=\dfrac{2}{7}$

답 $\dfrac{2}{7}$

14 주머니 속에 n개의 흰 공과 m개의 검은 공이 들어 있다고 하자.
주머니 속 총 $m+n$개의 공 중에서 1개를 꺼낼 때,
흰 공일 확률은 $\dfrac{{}_nC_1}{{}_{m+n}C_1}=\dfrac{n}{m+n}$
5번에 2번 꼴로 흰 공이 나왔으므로 통계적 확률은 $\dfrac{2}{5}$이다.
즉 $\dfrac{n}{m+n}=\dfrac{2}{5}$이므로 $5n=2m+2n$
$\therefore n=\dfrac{2}{3}m$
따라서 흰 공의 수는 검은 공의 수의 $\dfrac{2}{3}$배라고 볼 수 있다.

답 $\dfrac{2}{3}$

15 원판의 넓이는 $\pi\times5^2=25\pi$
$2\le\overline{OA}\le3$을 만족시키는 점 A의 영역은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분이고,
그 넓이는
$\pi\times3^2-\pi\times2^2=5\pi$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{5\pi}{25\pi}=\dfrac{1}{5}$



답 $\dfrac{1}{5}$

연습 문제

본문 53~55쪽

01 ⑤	02 ⑤	03 ②	04 ⑤
05 ③	06 $\frac{1}{6}$	07 ②	08 $\frac{5}{8}$
09 ②	10 ③	11 $\frac{1}{5}$	12 $\frac{3}{14}$
13 $\frac{5}{14}$	14 ①	15 $\frac{13}{20}$	16 ③
17 ①	18 $\frac{1}{6}$	19 $\frac{3}{5}$	20 $\frac{3}{7}$
21 $\frac{1}{3}$			

01 서로 다른 두 주사위를 던지는 시행에서 근원사건의 개수는
$6\times6=36$
두 눈의 수의 합이 6인 사건 A는
$A=\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$
즉 사건 A의 근원사건의 개수는 5이다.
따라서 $a=36$, $b=5$이므로 $a+b=41$

02 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 표본공간을 S라 하면
$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 2\}$,
$B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{1, 3, 5\}$, $D=\{5, 6\}$
① $A\cap B\cap C=\varnothing$이므로 공사건이다.
② $B^C=\{1, 3, 5\}=C$이므로 C는 B의 여사건이다.
③ $A\cap D=\varnothing$이므로 A와 D는 배반사건이다.
④ $B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}=S$이므로 $B\cup C$는 표본공간과 같다.
⑤ $C\cap D=\{5\}\neq\varnothing$이므로 C와 D는 배반사건이 아니다.

03 사건 A와 배반인 사건은 $A^C=\{1, 4, 6\}$의 부분집합이다.
따라서 사건 A와 배반인 사건 B의 개수는
$2^3-1=7$ ($\because B\neq\varnothing$)

04 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
나오는 눈의 수의 합이 3인 경우는
$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2가지
나오는 눈의 수의 합이 5인 경우는
$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4가지
즉 나오는 눈의 수의 합이 3 또는 5인 경우의 수는 6이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

05 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
한 주사위의 눈의 수가 다른 주사위의 눈의 수의 배수가 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$,
$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(2, 6)$,
$(3, 1)$, $(3, 3)$, $(3, 6)$,
$(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$,
$(5, 1)$, $(5, 5)$,
$(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(6, 6)$
의 22가지이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$

다른 풀이 한 주사위의 눈의 수가 다른 주사위의 눈의 수의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.
(i) 두 주사위의 눈의 수가 같은 경우
$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$의 6가지
(ii) 두 주사위의 눈의 수가 다른 경우
$(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 4)$, $(2, 6)$, $(3, 6)$의 8가지
이고, 각각은 순서를 바꿔도 되므로
$2\times8=16$
(i), (ii)에서 $6+16=22$
따라서 구하는 확률은 $\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$

06 1, 2, 3, 4를 모두 사용하여 네 자리 자연수를 만드는 경우의 수는 $4!=24$
백의 자리와 일의 자리에 홀수 1, 3이 오는 경우의 수는
$2!=2$
천의 자리와 십의 자리에 나머지 수 2, 4가 오는 경우의 수는
$2!=2$
즉 백의 자리의 수와 일의 자리의 수가 모두 홀수인 경우의 수는
$2\times2=4$
따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$

07 7명의 학생 중에 5명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수는 ${}_7P_5$
A, B 2명을 양 끝에 세우는 방법의 수는 $2!$
A, B를 제외한 나머지 5명의 학생 중 3명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수는 ${}_5P_3$
따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{2!\times{}_5P_3}{{}_7P_5}=\frac{1}{21}$

08 5장의 카드로 세 자리 정수를 만들 때, 백의 자리의 숫자는 1, 2, 3, 4 중 하나이고, 십의 자리의 숫자는 0을 포함한 나머지 4개의 숫자 중 하나이고, 일의 자리의 숫자는 나머지 3개의 숫자 중 하나가 오면 된다.
따라서 그 경우의 수는 $4\times4\times3=48$
세 자리 정수가 짝수이려면 일의 자리의 숫자가 0, 2, 4 중 하나이어야 한다.
(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우
백의 자리의 숫자는 1, 2, 3, 4 중 하나이고, 십의 자리의 수는 나머지 3개의 숫자 중 하나이므로 경우의 수는
$4\times3=12$
(ii) 일의 자리의 숫자가 2 또는 4인 경우
백의 자리의 숫자는 일의 자리의 숫자와 0을 제외한 3개의 숫자 중 하나이고, 십의 자리의 숫자는 나머지 3개의 숫자 중 하나이므로 경우의 수는
$2\times(3\times3)=18$
(i), (ii)에서 짝수인 경우의 수는 $12+18=30$
따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{48}=\frac{5}{8}$

09 A, B, C 세 사람을 포함한 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!=720$
이때 A, B, C를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$
그 각각에 대하여 A, B, C 세 사람이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$
즉 A, B, C가 이웃하게 서는 경우의 수는 $24\times6=144$
따라서 구하는 확률은 $\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$

10 집합 $A=\{a, b, c\}$에서 집합 $B=\{1, 2, 3, 4\}$로의 함수 f의 개수는
${}_4\Pi_3=4^3=64$
A의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$인 함수 f의 개수를 구하면 집합 A의 원소 a에 대응될 수 있는 B의 원소는 1, 2, 3, 4의 4가지, b에 대응될 수 있는 원소는 a에 대응된 원소를 제외한 3가지, c에 대응될 수 있는 원소는 a와 b에 대응된 원소를 제외한 2가지이므로
$4\times3\times2=24$
따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$

11 회전판에 6가지 색을 모두 한 번씩 사용하여 칠하는 경우의 수는 $(6-1)!=5!$
노랑색을 칠한 맞은 편에 파랑색을 칠하고 나머지 4가지 색을 칠하는 경우의 수는 $4!$
따라서 구하는 확률은 $\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$

12 8개의 문자 E, V, E, R, Y, D, A, Y를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{8!}{2!2!}=10080$
모음 E, E, A를 한 문자로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$6!=720$
E, E, A를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$
즉 모음끼리 이웃하도록 나열하는 경우의 수는 $720\times3=2160$
따라서 구하는 확률은 $\frac{2160}{10080}=\frac{3}{14}$

13 밀크맛 사탕 4개, 딸기맛 사탕 5개 총 9개의 사탕 중에서 3개를 임의로 꺼내는 경우의 수는
${}_9C_3=84$
밀크맛 사탕 2개, 딸기맛 사탕 1개를 꺼내는 경우의 수는
${}_4C_2\times{}_5C_1=30$
따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$

14 10장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$
카드에 적혀 있는 수 중 가장 큰 수가 6인 경우는 6이 적힌 카드를 꺼내고 6보다 작은 수인 1, 2, 3, 4, 5가 적힌 카드 중에서 두 장을 뽑으면 되므로 그 경우의 수는 ${}_5C_2=10$
따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

15 조사한 전체 학생 수는 100명이고 인터넷 이용 시간이 2시간 미만인 학생이 $25+40=65$(명)이므로 구하는 확률은
$\frac{65}{100}=\frac{13}{20}$

16 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

이차방정식 $x^2+2ax+b=0$이 허근을 가질 조건은 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-b<0$

이때 $a^2<b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)$

의 7가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{36}$

17 10장의 카드 중에서 세 장의 카드를 임의로 택하는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_3=120$

택한 세 장의 카드에 적힌 수를 크기 순서대로 순서쌍으로 나타내면

(i) 공차가 1인 경우

$(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), \cdots, (8, 9, 10)$의 8가지

(ii) 공차가 2인 경우

$(1, 3, 5), (2, 4, 6), (3, 5, 7), \cdots, (6, 8, 10)$의 6가지

(iii) 공차가 3인 경우

$(1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9), (4, 7, 10)$의 4가지

(iv) 공차가 4인 경우

$(1, 5, 9), (2, 6, 10)$의 2가지

(i)~(iv)에서 세 장의 카드에 적힌 세 수가 등차수열을 이루는 경우의 수는 $8+6+4+2=20$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$

18 analysis의 8개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{8!}{2!2!}$

n, l, y가 이 순서로 배열되는 경우의 수는 n, l, y를 같은 문자라고 생각하고 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{8!}{2!2!3!}$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{8!}{2!2!3!}}{\frac{8!}{2!2!}}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$

19 6명을 3명씩 두 팀으로 나누는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_3\times\frac{1}{2!}=20\times1\times\frac{1}{2}=10$

A와 B가 서로 다른 팀에 속하게 되는 경우는 A와 B를 서로 다른 팀으로 하여 나머지 4명을 A가 속하는 팀과 B가 속하는 팀으로 나누는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

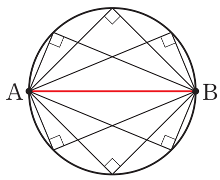
${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\frac{1}{2!}\times2!=6\times1\times\frac{1}{2}\times2=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

20 삼각형은 같은 직선 위에 있지 않은 세 점에 의해 결정되므로 만들 수 있는 삼각형의 총 개수는

${}_8\mathrm{C}_3=56$

오른쪽 그림과 같이 지름이 삼각형의 한 변이 되어야 직각삼각형이 되므로 마주 보는 두 점을 먼저 선택해야 한다.



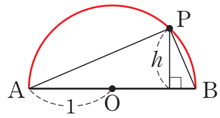
이때 마주 보는 두 점을 선택하는 방법의 수는 4가지이고, 그 각각에 대하여 6개의 직각삼각형이 생기므로 구하는 직각삼각형의 개수는

$4\times6=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$

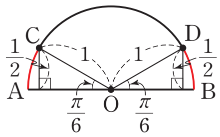
21 점 P는 반원의 둘레 위의 임의의 점이므로 점 P가 움직일 수 있는 전체 영역은 호 AB의 길이 π이다.

점 P에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 길이를 h라 할 때, △PAB의 넓이가 $\frac{1}{2}$ 이하가 되려면



$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\times2\times h\le\frac{1}{2}$에서 $h\le\frac{1}{2}$ …… ㉠

오른쪽 그림과 같이 조건 ㉠을 만족시키는 점 P가 존재하는 영역은 호 AC와 호 DB의 길이의 합이고, 호 AC와 호 DB의 길이는 같으므로



$2\times1\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{\pi}{3}}{\pi}=\frac{1}{3}$

02 확률의 덧셈정리

유제

본문 57~59쪽

01 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$
주사위의 눈의 수의 합이 3의 배수인 사건을 A, 4의 배수인 사건을 B라 하자.
(i) 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우
$(1, 2), (2, 1),$
$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1),$
$(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3),$
$(6, 6)$
이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{12}{36}$
(ii) 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우
$(1, 3), (2, 2), (3, 1),$
$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2),$
$(6, 6)$
이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{9}{36}$
이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{36}$이므로 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{12}{36}+\frac{9}{36}-\frac{1}{36}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$
답 $\frac{5}{9}$

02 사과를 생산하는 농가를 고르는 사건을 A, 배를 생산하는 농가를 고르는 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=0.6, \mathrm{P}(B)=0.5, \mathrm{P}(A\cap B)=0.25$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=0.6+0.5-0.25=0.85$$
답 0.85

03 8송이의 장미 중에서 3송이를 고르는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_3=56$
8송이의 장미 중 3송이를 고를 때, 3송이 모두 붉은 장미인 사건을 A, 3송이 모두 노란 장미인 사건을 B라 하면
$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{10}{56},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1}{56}$$
그런데 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{10}{56}+\frac{1}{56}=\frac{11}{56}$$
답 $\frac{11}{56}$

04 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$
눈의 수의 합이 5인 사건을 A, 10인 사건을 B라 하면
$A=\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$
$B=\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$
$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{4}{36},\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{36}$
이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{4}{36}+\frac{3}{36}=\frac{7}{36}$$
답 $\frac{7}{36}$

05 $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\frac{4}{5}$에서
$$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{5}$$
$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$
$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서
$\frac{1}{4}=\mathrm{P}(A)-\frac{1}{5}\qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{9}{20}$
$\therefore \mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$
답 $\frac{11}{20}$

06 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼낼 때 나오는 모든 경우의 수는 ${}_9\mathrm{C}_3=84$
흰 공이 2개 이하로 나오는 사건을 A라 하면
흰 공이 3개 이상으로 나오는 사건은 A^C이므로
$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$$
$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$
답 $\frac{20}{21}$

07 5개의 동전을 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $2^5=32$
앞면이 1개 이상 나오는 사건이 A이므로 앞면이 1개도 나오지 않는 사건, 즉 뒷면만 나오는 사건은 A^C이다.
$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{32}$
따라서 $\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$이므로
$m=32,\ n=31\qquad \therefore m+n=63$
답 63

08 10개의 제비 중에서 2개를 뽑을 때, 적어도 한 개가 당첨 제비일 사건을 A라 하면 당첨 제비가 한 개도 뽑히지 않는 사건, 즉 2개 모두 당첨 제비가 아닌 사건은 A^C이다.
10개의 제비 중에서 2개의 제비를 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_2$이고, 당첨 제비가 아닌 7개의 제비 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{7}C_2$이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_{7}C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

답 $\frac{8}{15}$

09 10개의 공이 들어 있는 주머니에서 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 적어도 1개의 흰 공이 포함되는 사건을 A라 하면 흰 공이 1개도 포함되지 않는 사건, 즉 4개 모두 검은 공인 사건은 A^C이다.
10개의 공 중에서 4개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_{10}C_4$이고, 5개의 검은 공 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{5}C_4$이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_{5}C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{42}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{42}=\frac{41}{42}$$

답 $\frac{41}{42}$

10 20장의 카드 중에서 3장의 카드를 동시에 뽑을 때, 홀수가 적힌 카드가 적어도 한 장 포함될 사건을 A라 하면 홀수가 적힌 카드가 한 장도 포함되지 않는 사건, 즉 3장 모두 짝수가 적힌 카드인 사건은 A^C이다.
20장의 카드 중에서 3장의 카드를 동시에 뽑는 경우의 수는 ${}_{20}C_3$이고, 짝수가 적힌 10장의 카드 중에서 3장의 카드를 동시에 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_3$이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_{10}C_3}{{}_{20}C_3}=\frac{2}{19}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{19}=\frac{17}{19}$$

답 $\frac{17}{19}$

연습 문제

본문 60~61쪽

01 ①	02 ⑤	03 $\frac{3}{7}$	04 $\frac{1}{24}$
05 ③	06 $\frac{1}{4}$	07 $\frac{1}{3}$	08 ④
09 ②	10 ⑤	11 $\frac{17}{24}$	12 $\frac{4}{7}$
13 $\frac{1}{3}$	14 $\frac{4}{7}$	15 $\frac{7}{12}$	16 19

01 11개의 공 중에서 한 개의 공을 꺼내는 경우의 수는
${}_{11}C_1=11$
홀수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 A, 흰 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{6}{11},\ P(B)=\frac{6}{11},\ P(A\cap B)=\frac{3}{11}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{6}{11}+\frac{6}{11}-\frac{3}{11}=\frac{9}{11}\end{aligned}$$

02 축구를 좋아하는 학생을 뽑는 사건을 A, 야구를 좋아하는 학생을 뽑는 사건을 B라 하면
$P(A)=0.64$, $P(B)=0.58$, $P(A\cap B)=0.34$
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=0.64+0.58-0.34=0.88\end{aligned}$$

03 7명의 학생 중 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{7}C_2=21$
7명의 학생 중 2명을 뽑을 때, 2명 모두 남학생인 사건을 A, 2명 모두 여학생인 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{{}_{3}C_2}{{}_{7}C_2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7},\ P(B)=\frac{{}_{4}C_2}{{}_{7}C_2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$$

그런데 두 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$$

04 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6\times6=216$
눈의 수의 합이 4인 사건을 A, 5인 사건을 B라 하면
$A=\{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$
$B=\{(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)\}$

$$\therefore P(A)=\frac{3}{216},\ P(B)=\frac{6}{216}$$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{216}+\frac{6}{216}=\frac{9}{216}=\frac{1}{24}$$

05 9개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_9C_2=36$
9개의 공 중 2개를 꺼낼 때, 2개 모두 빨간 공이 나오는 사건을 A, 2개 모두 노란 공이 나오는 사건을 B, 2개 모두 파란 공이 나오는 사건을 C라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2C_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{36}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3C_2}{{}_9C_2}=\frac{3}{36}$

$\mathrm{P}(C)=\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}=\frac{6}{36}$

이때 세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

$=\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{6}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

06 4개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 꺼내고, 남은 2개의 공 중에서 1개의 공을 꺼내는 경우의 수는
${}_4C_2\times{}_2C_1=6\times2=12$
$ab<c$가 되려면
(i) $c=4$일 때, $a=1$, $b=2$ 또는 $a=1$, $b=3$
(ii) $c=3$일 때, $a=1$, $b=2$
(iii) $c=1$ 또는 $c=2$일 때 $ab<c$를 만족시키는 a, b는 존재하지 않는다.
(i), (ii), (iii)에서 $ab<c$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 2, 3)$의 3이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

07 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

08 꺼낸 4개의 공 중에서 세 가지 색의 공이 모두 나오려면 4개의 공 중 2개의 공이 같은 색이어야 한다. 흰 공 2개, 검은 공 1개, 노란 공 1개를 꺼내는 사건을 A, 흰 공 1개, 검은 공 2개, 노란 공 1개를 꺼내는 사건을 B, 흰 공 1개, 검은 공 1개, 노란 공 2개를 꺼내는 사건을 C라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3C_2\times{}_4C_1\times{}_2C_1}{{}_9C_4}=\frac{4}{21}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_1}{{}_9C_4}=\frac{6}{21}$

$\mathrm{P}(C)=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1\times{}_2C_2}{{}_9C_4}=\frac{2}{21}$

이때 세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

$=\frac{4}{21}+\frac{6}{21}+\frac{2}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

09 $n+10$개의 공이 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 적어도 한 개가 검은 공인 사건을 A라 하면 검은 공이 한 개도 없는 사건, 즉 2개 모두 흰 공인 사건은 A^C이다.
$n+10$개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_{n+10}C_2$이고, 10개의 흰 공 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_2$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{10}C_2}{{}_{n+2}C_2}=\frac{90}{(n+2)(n+1)}$

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{90}{(n+2)(n+1)}=\frac{5}{8}$이므로

$\frac{90}{(n+2)(n+1)}=\frac{3}{8}$

즉 $(n+1)(n+2)=240=15\times16$

$\therefore n=14$

10 A 또는 B가 뽑히는 사건을 A라 하면 A, B 모두 뽑히지 않는 사건은 A^C이다.
8명 중에서 5명을 뽑는 경우의 수는 ${}_8C_5$이고, A, B를 제외한 6명 중에서 5명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_5$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6C_5}{{}_8C_5}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{28}=\frac{25}{28}$

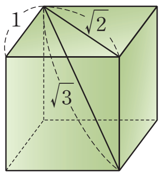
다른 풀이 8명의 요리 동아리 회원 중에서 5명의 회원을 임의로 뽑는 경우의 수는 ${}_8C_5=56$
5명의 회원 중 A가 포함되는 사건을 A, B가 포함되는 사건을 B라 하자.
8명 중에서 A를 포함한 5명을 뽑는 경우는 A를 제외한 7명 중에서 4명을 뽑는 경우와 같으므로 그 경우의 수는 ${}_7C_4=35$
마찬가지로 8명 중에서 B를 포함한 5명을 뽑는 경우의 수는 ${}_7C_4=35$
8명 중에서 A, B를 둘 다 포함한 5명을 뽑는 경우는 A, B를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 경우와 같으므로 그 경우의 수는 ${}_6C_3=20$
이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{35}{56}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{35}{56}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{20}{56}$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{35}{56}+\frac{35}{56}-\frac{20}{56}=\frac{25}{28}$

11 10개의 숫자 중 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_3$
뽑힌 숫자 중에 민서가 적은 숫자가 하나라도 포함되는 사건을 A라 하면 민서가 적은 숫자를 하나도 포함하지 않는 사건은 A^C이다.
이때 A^C의 경우의 수는 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 중 3개를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_7\mathrm{C}_3$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=1-\dfrac{7}{24}=\dfrac{17}{24}$

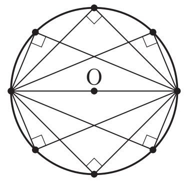
12 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서 두 꼭짓점을 택하여 이어 만들 수 있는 선분의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{3}$이다.



따라서 두 꼭짓점을 택하여 이은 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 이상인 사건을 A라 하면 두 꼭짓점을 택하여 이은 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 미만, 즉 1인 사건은 A^C이다.
두 꼭짓점을 택하는 모든 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2$이고, 선분의 길이가 1인 사건, 즉 A^C의 경우의 수는 모서리의 수와 같으므로 12이다.
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{12}{{}_8\mathrm{C}_2}=1-\dfrac{12}{28}=\dfrac{4}{7}$

13 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
두 눈의 수의 합은 2, 3, 4, ⋯, 12 중 하나이고, 이 중에서 6과 서로인 것은 5, 7, 11이다.
두 눈의 수의 합이 5, 7, 11인 사건을 각각 A, B, C라 하면
$A=\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$
$B=\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$
$C=\{(5, 6), (6, 5)\}$
$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{36}, \mathrm{P}(B)=\dfrac{6}{36}, \mathrm{P}(C)=\dfrac{2}{36}$
이때 세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$
$=\dfrac{4}{36}+\dfrac{6}{36}+\dfrac{2}{36}=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

14 8개의 점 중에서 세 점을 택하여 삼각형을 만드는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_3=56$
이 삼각형이 예각삼각형 또는 둔각삼각형이 되는 사건을 A라 하면 예각삼각형도 아니고 둔각삼각형도 아닌 삼각형, 즉 직각삼각형이 되는 사건은 A^C이다.
오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O를 지나는 한 개의 지름에 대하여 만들 수 있는 직각삼각형이 6개이고 서로 다른 지름이 4개이므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는



$4\times6=24$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{24}{56}=\dfrac{4}{7}$

15 9장의 카드에서 임의로 3장의 카드를 꺼내는 경우의 수는 ${}_9\mathrm{C}_3$
이때 적어도 두 수가 연속하는 세 수를 뽑는 사건을 A라 하면 세 수 모두 연속하지 않는 수, 즉 서로 이웃하지 않는 세 수를 뽑는 사건은 A^C이다.
뽑힌 세 수를 a, b, c $(1\le a<b<c\le 9)$라 하면
$1\le a<b-1<c-2\le 7$을 만족시킬 때 서로 이웃하지 않는 경우가 된다.
즉 1부터 7까지의 수에서 a, $b-1$, $c-2$의 세 수를 뽑으면 되므로 세 수 모두 서로 이웃하지 않는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_3$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}$
$=1-\dfrac{5}{12}=\dfrac{7}{12}$

16 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$
$(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$을 만족시키는 사건을 A라 하면
$(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 사건은 A^C이다.
이때 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이므로
$x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$
$x=y$인 경우의 순서쌍의 개수는
$(0, 0, 10), (1, 1, 8), (2, 2, 6), (3, 3, 4), (4, 4, 2), (5, 5, 0)$의 6
같은 방법으로 $y=z$, $z=x$를 만족시키는 경우의 수도 각각 6이다.
즉 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 경우의 수는
$3\times6=18$
$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{18}{66}=1-\dfrac{3}{11}=\dfrac{8}{11}$
따라서 $p=11$, $q=8$이므로 $p+q=19$

03 조건부확률

유제

본문 63~66쪽

01 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$
$=\mathrm{P}(A)+0.4-0.6$
$=\mathrm{P}(A)-0.2$

$\therefore \mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=0.2$ ...... ㉠

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=0.2$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0.2\mathrm{P}(A)$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{20}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{20}}{0.4}=\dfrac{1}{8}$

답 $\dfrac{1}{8}$

02 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(B^C|A^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\dfrac{\mathrm{P}((A\cup B)^C)}{\mathrm{P}(A^C)}$
$=\dfrac{1-\mathrm{P}(A\cup B)}{1-\mathrm{P}(A)}=\dfrac{1-\frac{5}{8}}{1-\frac{3}{8}}=\dfrac{3}{5}$

답 $\dfrac{3}{5}$

03 $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A^C|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$에서

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C|B)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{24}$

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(U\cap B)$
$=\mathrm{P}((A\cup A^C)\cap B)$
$=\mathrm{P}((A\cap B)\cup(A^C\cap B))$
$=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

이므로 $\dfrac{1}{4}=\mathrm{P}(A\cap B)+\dfrac{1}{24}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{5}{24}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{5}{8}$

답 $\dfrac{5}{8}$

04 임의로 뽑은 공에 적힌 수가 홀수일 사건을 A, 소수일 사건을 B라 하면

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{10}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{10}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{10}}=\dfrac{3}{5}$

답 $\dfrac{3}{5}$

05 임의로 뽑은 한 명이 여자일 사건을 A, A라켓을 선호할 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{30}{60}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{14}{60}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{14}{60}}{\frac{30}{60}}=\dfrac{14}{30}=\dfrac{7}{15}$

답 $\dfrac{7}{15}$

06 임의로 선택한 한 명이 야구를 좋아하는 학생일 사건을 A, 남학생일 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}$이다.

이때 $A^C\cap B$는 임의로 선택한 한 명이 야구를 좋아하지 않는 남학생일 사건이므로 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{16}{50}$

또 A^C는 임의로 선택한 한 명이 야구를 좋아하지 않는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{50-(14+6)}{50}=\dfrac{30}{50}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}=\dfrac{\frac{16}{50}}{\frac{30}{50}}=\dfrac{16}{30}=\dfrac{8}{15}$

답 $\dfrac{8}{15}$

07 A가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, A가 뽑은 후에 B가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하면

A가 당첨 제비를 뽑을 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

A가 당첨 제비를 뽑았을 때, B도 당첨 제비를 뽑을 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{1}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{45}$

답 $\dfrac{1}{45}$

08 시합에서 불펜 투수 중 오른손 투수가 나오는 사건을 A, A 선수가 불펜 투수와의 대결에서 안타를 칠 사건을 E라 하면

(i) 오른손 투수가 나오고 안타를 칠 확률

$P(A)=0.4$, $P(E|A)=0.3$이므로

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=0.4\times 0.3=0.12$

(ii) 왼손 투수가 나오고 안타를 칠 확률

$P(A^C)=1-0.4=0.6$, $P(E|A^C)=0.25$이므로

$P(A^C\cap E)=P(A^C)P(E|A^C)=0.6\times 0.25=0.15$

(i), (ii)에서 $P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)$

$=0.12+0.15=0.27$

따라서 $p=0.27$이므로 $100p=27$

답 27

09 첫 번째에 꺼낸 공이 검은 공인 사건을 A, 두 번째에 꺼낸 공이 검은 공인 사건을 B라 하면

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$

이때 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$,

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$

이므로 $P(B)=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

10 A상자를 택하는 사건을 A, B상자를 택하는 사건을 B, 흰 공 1개, 검은 공 1개가 나오는 사건을 E라 하면

(i) A상자에서 흰 공 1개, 검은 공 1개가 나올 확률

$$P(A\cap E)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}=\frac{3}{10}$$

A, B 중 A상자를 택할 확률이 $\frac{1}{2}$

(ii) B상자에서 흰 공 1개, 검은 공 1개가 나올 확률

$$P(B\cap E)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{15}=\frac{4}{15}$$

A, B 중 B상자를 택할 확률이 $\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 사건 A는 사건 B의 여사건이므로

$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)=\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=\frac{17}{30}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{17}{30}}=\frac{9}{17}$$

답 $\frac{9}{17}$

11 자가용으로 출퇴근하는 직장인 중 한 명을 뽑았을 때, 남자인 사건을 A, 경차를 이용하는 사람인 사건을 E라 하면

$P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)$

이때 $P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=0.8\times 0.1=0.08$,

$P(A^C\cap E)=P(A^C)P(E|A^C)=0.2\times 0.3=0.06$

이므로 $P(E)=0.08+0.06=0.14$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{0.08}{0.14}=\frac{4}{7}$$

답 $\frac{4}{7}$

Drill

본문 67쪽

1 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{9}$ (3) 0.4 (4) $\frac{1}{3}$ (5) $\frac{3}{5}$ (6) $\frac{1}{5}$ (7) $\frac{4}{11}$ (8) $\frac{1}{2}$

2 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1

3 $\frac{2}{9}$ **4** $\frac{3}{10}$ **5** (1) $\frac{4}{7}$ (2) $\frac{4}{7}$

1 (1) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.2}{0.5}=\frac{2}{5}$

(2) $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=\frac{9}{16}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{16}$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{9}{16}}=\frac{1}{9}$$

(3) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{0.3}=0.8$이므로

$P(A\cap B)=0.24$

$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.24}{0.6}=0.4$

(4) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}$이므로

$P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

$$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}$$

(5) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A\cap B)}{\frac{1}{2}}=2P(A\cap B)=\dfrac{3}{5}$

이므로 $P(A\cap B)=\dfrac{3}{10}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

(6) $P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=0.2$이므로

$P(A\cup B)=1-P((A\cup B)^C)=1-0.2=0.8$

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=0.4+0.5-0.8=0.1$

$\therefore P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.1}{0.5}=\dfrac{1}{5}$

(7) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{3}{8}$이므로

$P(B)=\dfrac{8}{3}P(A\cap B)$

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1}{2}$이므로

$P(A)=2P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=2P(A\cap B)+\dfrac{8}{3}P(A\cap B)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{11}{3}P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}$

따라서 $P(A\cap B)=\dfrac{3}{22}$이므로 $P(B)=\dfrac{8}{3}\times\dfrac{3}{22}=\dfrac{4}{11}$

(8) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1}{3}$에서

$P(A\cap B)=\dfrac{1}{3}P(A)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}+P(B)-\dfrac{1}{6}$

$\therefore P(B)=\dfrac{1}{3}$

$\therefore P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$

2 $A=\{2, 4, 6, \cdots, 18, 20\}$, $B=\{4, 8, 12, 16, 20\}$이므로 $A\cap B=\{4, 8, 12, 16, 20\}$, $A\cup B=\{2, 4, 6, \cdots, 18, 20\}$

$P(A\cap B)=\dfrac{5}{20}$, $P(A\cup B)=\dfrac{10}{20}$

(1) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{5}{20}}{\frac{10}{20}}=\dfrac{1}{2}$

(2) $P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)$

$=1-P(A\cup B)=1-\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore P(B^C|A^C)=\dfrac{P(A^C\cap B^C)}{P(A^C)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-P(A)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

3 첫 번째 뽑은 제비가 당첨 제비인 사건을 A, 두 번째 뽑은 제비가 당첨 제비인 사건을 B라 하자.

첫 번째에 당첨 제비를 뽑았을 때, 두 번째 뽑은 제비도 당첨 제비일 확률은

$P(B|A)=\dfrac{2}{9}$

4 첫 번째에 빨간 공이 나올 사건을 A, 두 번째에 흰 공이 나올 사건을 B라 하면

$P(A)=\dfrac{3}{5}$

첫 번째에 빨간 공이 나왔을 때, 두 번째에 흰 공이 나올 확률은

$P(B|A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{10}$

5 A가 흰 공을 뽑는 사건을 A, B가 흰 공을 뽑는 사건을 B라 하면

(1) A가 흰 공을 뽑을 확률은 $P(A)=\dfrac{4}{7}$

(2) (ⅰ) A가 흰 공을 뽑고 B가 흰 공을 뽑을 확률

A가 흰 공을 뽑았을 때, B도 흰 공을 뽑을 확률은

$P(B|A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{7}$

(ⅱ) A가 검은 공을 뽑고 B가 흰 공을 뽑을 확률

A가 검은 공을 뽑았을 때, B가 흰 공을 뽑을 확률은

$P(B|A^C)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$이고,

$P(A^C)=1-P(A)=1-\dfrac{4}{7}=\dfrac{3}{7}$이므로

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\dfrac{3}{7}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{7}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)=\dfrac{2}{7}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{4}{7}$

연습 문제

본문 68~69쪽

01 ④	02 ②	03 ②	04 ⑤
05 $\frac{3}{10}$	06 11	07 $\frac{13}{20}$	08 0.56
09 $\frac{3}{7}$	10 $\frac{2}{7}$	11 $\frac{1}{2}$	12 7
13 $\frac{16}{25}$	14 $\frac{2}{7}$		

01 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$이므로

$\frac{1}{3}=\frac{1}{12}+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C|B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$

02 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$

03 임의로 선택한 한 명의 회원이 여성인 사건을 A, 이 회원이 마라톤에서 완주하였을 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{50}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{50}$

$\therefore p=\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{9}{50}}{\frac{15}{50}}=\frac{3}{5}$

$\therefore 100p=60$

04 임의로 선택한 한 학생이 수학경시대회를 신청한 학생일 사건을 A, 과학경시대회를 신청한 학생일 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.1$

이때 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$이므로

$0.4=0.1+\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=0.3$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.3}{0.4}=\frac{3}{4}$

05 이 사람이 당첨 제비를 뽑을 사건을 A, 거짓말을 할 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

이 사람이 거짓말을 안 했을 때, 당첨 제비를 뽑을 확률은

$\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{10}$

06 A가 노란 공을 꺼낼 사건을 A, B가 노란 공을 꺼낼 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$

(ⅰ) A가 노란 공을 꺼내고 B도 노란 공을 꺼낼 확률

A가 노란 공을 꺼냈을 때, B도 노란 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{7}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$

(ⅱ) A가 노란 공을 꺼내지 않고 B가 노란 공을 꺼낼 확률

A가 노란 공을 꺼내지 않았을 때, B가 노란 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{7}$이고,

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{3}{28}+\frac{15}{56}=\frac{21}{56}=\frac{3}{8}$

따라서 $a=3$, $b=8$이므로 $a+b=11$

07 흰 공을 꺼내는 경우를 ○, 검은 공을 꺼내는 경우를 ×로 나타내면 갑이 이기는 경우는 다음과 같다.

1회(갑)	2회(을)	3회(갑)
○		
×	×	○

(ⅰ) 1회에 갑이 흰 공을 꺼낼 확률을 P_1이라 하면

$P_1=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(ⅱ) 1회에 갑이 검은 공, 2회에 을이 검은 공, 3회에 갑이 흰 공을 꺼낼 확률을 P_2라 하면

$P_2=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 갑이 이길 확률은

$P_1+P_2=\frac{1}{2}+\frac{3}{20}=\frac{13}{20}$

08 H축구팀과의 경기가 예정된 날에 비가 오는 사건을 A, C축구팀이 경기에 이기는 사건을 E라 하면

(ⅰ) 비가 내리고 C축구팀이 경기에 이길 확률

$\mathrm{P}(A)=\frac{40}{100}=0.4$, $\mathrm{P}(E|A)=0.5$이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=0.4\times0.5=0.2$

(ⅱ) 비가 내리지 않고 C축구팀이 경기에 이길 확률

$\mathrm{P}(A^C)=1-0.4=0.6$, $\mathrm{P}(E|A^C)=0.6$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=0.6\times0.6=0.36$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=0.2+0.36=0.56$

09 첫 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{35}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{4}{35}$

이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{35}+\frac{4}{35}=\frac{7}{35}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{3}{35}}{\frac{7}{35}}=\frac{3}{7}$$

10 부품 P를 하나 검사하였을 때 불량품인 사건을 E, 이 부품이 A업체에서 납품받은 부품인 사건을 A, B업체에서 납품받은 부품인 사건을 B라 하자.

불량품인 것은 A업체에서 납입한 부품이거나 B업체에서 납입한 부품이므로 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$

이때 $\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=0.6\times0.05=0.03$,

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=0.4\times0.03=0.012$

이므로 $\mathrm{P}(E)=0.03+0.012=0.042$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.012}{0.042}=\frac{2}{7}$$

11 학교 전체 학생 중 임의로 한 명을 선택하였을 때 버스로 등교한 학생일 사건을 A, 지각한 학생일 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

이때 $\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{60}{100}\times\frac{1}{30}=\frac{1}{50}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{40}{100}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{50}$

이므로 $\mathrm{P}(E)=\frac{1}{50}+\frac{1}{50}=\frac{1}{25}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{50}}{\frac{1}{25}}=\frac{1}{2}$$

12 임의로 뽑은 한 명이 여자일 사건을 A, 이 회원이 축구를 선호할 사건을 B라 하면 전체 회원 수는

$15+a+5+21=41+a$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{21+a}{41+a}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{a}{41+a}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{a}{41+a}}{\frac{21+a}{41+a}}=\frac{a}{21+a}=\frac{1}{4}$

이므로 $4a=21+a$

$\therefore a=7$

13 두 주머니 A, B에서 흰 공을 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{5}$

주머니 B에서 흰 공을 꺼내는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 주머니 A에서 흰 공을 꺼내는 경우

주머니 B에 흰 공 2개를 넣으므로 주머니 B에는 흰 공 4개, 검은 공 1개가 들어 있다. 이때 주머니 B에서 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$

(ⅱ) 주머니 A에서 검은 공을 꺼내는 경우

주머니 B에 검은 공 2개를 넣으므로 주머니 B에는 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있다. 이때 주머니 B에서 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{12}{25}+\frac{4}{25}=\frac{16}{25}$

14 주머니 A, B를 택하는 사건을 각각 A, B, 짝수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 E라 하면

(ⅰ) 주머니 A를 택하여 꺼낸 카드에 적힌 수가 짝수일 확률

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$

(ⅱ) 주머니 B를 택하여 꺼낸 카드에 적힌 수가 짝수일 확률

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 사건 B는 사건 A의 여사건이므로

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{2}{15}+\frac{1}{3}=\frac{7}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{7}{15}}=\frac{2}{7}$$

04 사건의 독립과 종속

유제

본문 72~73쪽, 75~76쪽

01 동전을 2번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$2\times2=4$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$A=\{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T})\}$, $B=\{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{T},\mathrm{H})\}$,

$C=\{(\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{T},\mathrm{H})\}$

$A\cap B=\{(\mathrm{H},\mathrm{H})\}$, $B\cap C=\{(\mathrm{T},\mathrm{H})\}$, $A\cap C=\{(\mathrm{H},\mathrm{T})\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 B와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

이상에서 두 사건이 서로 독립인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 서로 다른 두 개의 정사면체를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $4\times4=16$

밑면에 적힌 두 수를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}$,

$B=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(4,1),(4,2)\}$,

$C=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(4,1)\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

또 $A\cap B=\{(1,1),(2,2),(2,4),(4,2)\}$,

$B\cap C=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(4,1)\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{16}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이고, 두 사건 B와 C는 서로 종속이다.

답 A와 B는 서로 독립, B와 C는 서로 종속

03 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A-B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$

답 $\frac{1}{8}$

04 두 학생 A, B가 어떤 문제의 정답을 맞히는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이다.

(1) (ⅰ) A만 정답을 맞힐 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$

(ⅱ) B만 정답을 맞힐 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

(2) A, B 중 적어도 한 사람이 정답을 맞히는 사건은 A, B 모두 정답을 맞히지 못하는 사건의 여사건이다.

A, B 모두 정답을 맞히지 못할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은 $1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{7}{8}$

05 (1) 활을 한 번 쏘아 10점 과녁을 맞힐 확률은 $\frac{4}{5}$, 10점 과녁을 맞히지 못할 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

따라서 구하는 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{48}{125}$

(2) 문제를 맞힐 확률은 $\frac{2}{3}$, 맞히지 못할 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{27}$

답 (1) $\frac{48}{125}$ (2) $\frac{16}{27}$

06 가영이가 온라인 게임에서 이길 확률은 $\frac{1}{2}$, 이기지 못할 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(ⅰ) 8번 이길 확률은

${}_{10}\mathrm{C}_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2={}_{10}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{45}{1024}$

(ⅱ) 9번 이길 확률은

${}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1={}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{10}{1024}$

(ⅲ) 10번 이길 확률은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$\frac{45}{1024}+\frac{10}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{7}{128}$

답 $\frac{7}{128}$

07 1개의 제비를 뽑을 때, 당첨 제비를 뽑을 확률은 $\frac{1}{3}$, 당첨 제비가 아닐 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

적어도 한 번 당첨 제비를 뽑는 사건의 여사건은 5번 모두 당첨 제비가 나오지 않는 사건이므로 구하는 확률은

$1-\left(\frac{2}{3}\right)^5=1-\frac{32}{243}=\frac{211}{243}$

답 $\frac{211}{243}$

08 한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

(ⅰ) 두 개의 동전을 던질 때 2개 모두 앞면이 나오고, 한 개의 주사위를 3번 던져서 3의 배수가 한 번만 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(ⅱ) 두 개의 동전을 던질 때 뒷면이 하나 이상 나오고, 한 개의 주사위를 2번 던져서 3의 배수가 한 번만 나올 확률은

$\frac{3}{4}\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

답 $\frac{4}{9}$

09 한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(ⅰ) 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 소수가 적힌 공이 나오고, 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$\frac{2}{6}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{8}$

(ⅱ) 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 짝수가 적힌 공이 나오고, 한 개의 동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$\frac{3}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

10 한 개의 주사위를 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$, 그 이외의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

주사위를 4번 던져 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 x, 그 이외의 눈이 나오는 횟수를 y라 하면

$x+y=4$ ...... ㉠

또 점수의 합계가 5점이므로

$2x-y=5$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=1$

따라서 주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 3회, 그 이외의 눈이 1회 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$$

답 $\frac{32}{81}$

연습 문제

본문 77~79쪽

01 ④	02 ⑤	03 ③	04 ③
05 98	06 $\frac{26}{27}$	07 ⑤	08 $\frac{1}{4}$
09 ②	10 $\frac{23}{80}$	11 ①	12 ④
13 $\frac{32}{81}$	14 ②	15 ③	16 ③
17 $\frac{1}{24}$	18 ④	19 $\frac{5}{16}$	

01 $n(A)=3$, $n(B)=2$, $n(C)=3$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

또 $n(A\cap B)=1$, $n(B\cap C)=1$, $n(A\cap C)=1$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

ㄴ. $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

ㄷ. $\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 B, C는 서로 독립이다.

ㄹ. $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}\neq 0$이므로 두 사건 A, C는 서로 배반사건이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

02 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{3}{2}-\frac{9}{16}=\frac{15}{16}\end{aligned}$$

03 두 사건 A, C는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 $A\cap B=\varnothing$,

즉 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

04 A, B가 전 구간을 완주하는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이다.

(i) A만 완주할 확률

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$

(ii) B만 완주할 확률

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

05 두 선수 A, B가 표적에 명중시킬 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이다.

A, B 두 선수 중 적어도 한 사람이 표적에 명중시킬 사건은 A, B 두 선수 모두 표적에 명중시키지 못할 사건의 여사건이다.

A, B 모두 표적에 명중시키지 못할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=(1-0.9)\times(1-0.8)=0.02$

$\therefore p=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-0.02=0.98$

$\therefore 100p=98$

06 이 선수가 자유투를 한 번 던질 때, 성공시킬 확률은 $\frac{2}{3}$, 성공시키지 못할 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

3개의 자유투를 던질 때, 적어도 한 개의 자유투를 성공시킬 사건의 여사건은 3번 모두 성공시키지 못할 사건이므로 구하는 확률은

$1-\left(\frac{1}{3}\right)^3=1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27}$

07 한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 2번 나올 확률은

$P_1={}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

한 개의 동전을 6번 던질 때, 앞면이 3번 나올 확률은

$P_2={}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

$P_1:P_2=\frac{3}{8}:\frac{5}{16}=6:5$이므로

$5P_1=6P_2$

08 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p이므로 A가 일어나지 않을 확률은 $1-p$이다.

4회의 독립시행에서 사건 A가 3회 일어날 확률은

${}_4C_3\,p^3(1-p)=4p^3(1-p)=\frac{3}{64}$이므로

$p^3(1-p)=\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1-\frac{1}{4}\right)$

$\therefore p=\frac{1}{4}$

09 3번 이상 안타를 치는 경우는 3번 또는 4번 또는 5번 안타를 치는 경우이므로 구하는 확률은

${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^5$

$=40\left(\frac{1}{3}\right)^5+10\left(\frac{1}{3}\right)^5+\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{51}{243}=\frac{17}{81}$

10 한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 짝수가 적힌 공을 꺼내고, 한 개의 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$\frac{2}{5}\times{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{10}$

(ii) 홀수가 적힌 공을 꺼내고, 한 개의 동전을 5번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$\frac{3}{5}\times{}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{5}\times10\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{16}$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{10}+\frac{3}{16}=\frac{23}{80}$

11 한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다르고, 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}\times{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{12}{21}\times3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{14}$

(ii) 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같고, 한 개의 동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$\frac{{}_4C_2+{}_3C_2}{{}_7C_2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6+3}{21}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{28}$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{3}{14}+\frac{3}{28}=\frac{9}{28}$

12 다섯 번째 시합에서 진영이가 우승하려면 네 번째 시합까지 2번 이기고 다섯 번째 시합에서 이겨야 하므로 구하는 확률은

${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$

따라서 $p=81$, $q=16$이므로

$p+q=97$

13 한 개의 주사위를 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$, 그 이외의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

주사위를 4번 던져 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 x, 그 이외의 눈이 나오는 횟수를 y라 하면

$x+y=4$ ...... ㉠

또 점수의 합계가 10점이므로

$3x+y=10$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=1$

따라서 주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 3회, 그 이외의 눈이 1회 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$

14 한 개의 주사위를 던질 때, 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

주사위를 3번 던져 짝수의 눈이 나오는 횟수를 x, 홀수의 눈이 나오는 횟수를 y라 하면

$x+y=3$ …… ㉠

또 점 A를 출발한 점 P가 다시 점 A에 도착하려면 4만큼 움직여야 하므로

$2x+y=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=2$

따라서 주사위를 3번 던져서 짝수의 눈이 1회, 홀수의 눈이 2회 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

15 (나)에서 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{8}$ …… ㉠

$P(A|B^C)=P(A)$, $P(B|A^C)=P(B)$이므로

(다)에서 $P(A)+P(B)=\frac{3}{4}$

$\therefore P(B)=\frac{3}{4}-P(A)$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$P(A)\left(\frac{3}{4}-P(A)\right)=\frac{1}{8}$

$\{P(A)\}^2-\frac{3}{4}P(A)+\frac{1}{8}=0$, $\left(P(A)-\frac{1}{2}\right)\left(P(A)-\frac{1}{4}\right)=0$

$\therefore P(A)=\frac{1}{2}$ 또는 $P(A)=\frac{1}{4}$

$\therefore P(A)=\frac{1}{2}$이면 $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{4}$이면 $P(B)=\frac{1}{2}$

이때 (가)에서 $P(A)<P(B)$이므로

$P(A)=\frac{1}{4}$

16 (i) 관람객 투표 점수 A(40점), 심사 위원 점수 C(30점)을 받을 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

(ii) 관람객 투표 점수 B(30점), 심사 위원 점수 B(40점)을 받을 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(iii) 관람객 투표 점수 C(20점), 심사 위원 점수 A(50점)을 받을 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{5}{18}$

17 한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이고,

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

$0\le a\le 3$, $0\le b\le 3$이므로 $a+b=5$일 때

(i) $a=2$, $b=3$인 경우

즉 한 개의 주사위를 3번 던질 때 3의 배수의 눈이 2번 나오고, 한 개의 동전을 3번 던질 때 앞면이 3번 나올 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{36}$

(ii) $a=3$, $b=2$인 경우

즉 한 개의 주사위를 3번 던질 때 3의 배수의 눈이 3번 나오고, 한 개의 동전을 3번 던질 때 앞면이 2번 나올 확률은

$\left(\frac{1}{3}\right)^3\times{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{27}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{72}$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{36}+\frac{1}{72}=\frac{1}{24}$

18 B팀이 5 : 4로 이기려면 A팀의 5명의 선수 중 4명만 성공해야하고, B팀의 5명의 선수 중 5명 모두 성공해야 한다.

A팀의 5명의 선수 중 4명이 성공할 확률은

${}_5C_4(0.8)^4(0.2)^1=5\times0.8^4\times0.2=0.8^4$

B팀의 5명의 선수가 모두 성공할 확률은

0.8^5

따라서 구하는 확률은

$0.8^4\times0.8^5=0.8^9$

19 한 개의 주사위를 던질 때, 소수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 소수가 아닌 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

주사위를 5번 던져 소수의 눈이 나오는 횟수를 x, 소수가 아닌 눈이 나오는 횟수를 y라 하면 $x+y=5$

이때 원점을 출발한 점 P가 점 A(3, 2)에 도착하려면 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 이동해야 하므로

$x=3$, $y=2$

따라서 주사위를 5번 던져서 소수의 눈이 3회, 소수가 아닌 눈이 2회 나올 확률은

${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

III. 통계

01 확률변수와 확률분포

유제

본문 84~85쪽

01 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{6}$	$\frac{k}{12}$	1

이때 확률의 총합은 1이므로

$\frac{k}{2}+\frac{k}{6}+\frac{k}{12}=1$

$9k=12 \qquad \therefore k=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

02 (1) 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{6}+2a+\frac{1}{3}=1,\ 3a+\frac{1}{2}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{6}$

(2) $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(X=2$ 또는 $X=3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{2}$

03 확률의 총합은 1이므로

$a+3a+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=1,\ 4a+\frac{5}{9}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{9}$

$\mathrm{P}(X=-2)=\frac{1}{9},\ \mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(-2\le X\le 0)=\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=0)$

$=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

답 $\frac{4}{9}$

04 (1) 확률변수 X는 배드민턴 팀에서 임의로 3명의 대표 선수를 선발할 때 선발되는 남자 선수의 수이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

이때 8명의 선수 중에서 임의로 3명의 대표 선수를 선발하는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_3$이고, 선발된 선수 중에서 남자 선수가 x명인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_x\times{}_5\mathrm{C}_{3-x}$이므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x\times{}_5\mathrm{C}_{3-x}}{{}_8\mathrm{C}_3}\ (x=0, 1, 2, 3)$

이때 X의 각 값에 대한 확률은 다음과 같다.

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_5\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{15}{56}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_0}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1}{56}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

(2) $\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{15}{28}+\frac{15}{56}=\frac{45}{56}$

답 (1) 풀이 참조 (2) $\frac{45}{56}$

05 확률변수 X는 2개의 제품을 뽑을 때 나오는 불량품의 개수이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

5개의 제품 중에서 2개를 임의로 택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2$이고, 택한 제품 중에서 불량품이 x개인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_{2-x}\times{}_2\mathrm{C}_x$이므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_{2-x}\times{}_2\mathrm{C}_x}{{}_5\mathrm{C}_2}\ (x=0, 1, 2)$

이때 X의 각 값에 대한 확률은 다음과 같다.

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$\therefore \mathrm{P}(X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{3}{10}+\frac{3}{5}=\frac{9}{10}$

답 $\frac{9}{10}$

Drill

본문 86쪽

1 (1) 이산확률변수 (2) 연속확률변수 (3) 이산확률변수
(4) 연속확률변수

2 (1) $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{8}$,
$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$ (2) 풀이 참조

3 (1) 0, 1 (2) $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{3}$ (3) 풀이 참조

4 (1) 0, 1, 2 (2) $\mathrm{P}(X=0)=\frac{2}{7}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{7}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{7}$
(3) 풀이 참조

5 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$

6 (1) $\frac{1}{15}$ (2) $\frac{3}{5}$

2 (1) 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$X=0$인 경우는 (T, T, T)의 1가지이므로 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8}$

$X=1$인 경우는 (H, T, T), (T, H, T), (T, T, H)의 3가지이므로 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{8}$

$X=2$인 경우는 (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H)의 3가지이므로 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{8}$

$X=3$인 경우는 (H, H, H)의 1가지이므로 $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$

(2)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

3 (1) 확률변수 X는 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 나오는 흰 공의 개수이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1이다.

(2) 흰 공 1개, 빨간 공 2개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$

빨간 공만 2개 꺼내는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_2$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$

흰 공 1개, 빨간 공 1개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1$이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3}$

(3)

X	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

4 (1) 확률변수 X는 3개의 공을 동시에 꺼낼 때 나오는 흰 공의 개수이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(2) 흰 공 2개, 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_3$

검은 공만 3개 꺼내는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$

흰 공 1개, 검은 공 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2$이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$

흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_1$이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$

(3)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

5 (1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+a=1$, $a+\frac{2}{3}=1$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

(2) $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=2 \text{ 또는 } X=3)&=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)\\&=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(3) $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{6}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 2)&=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\\&=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

다른 풀이 $$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 2)&=1-\mathrm{P}(X>2)\\&=1-\mathrm{P}(X=3)\\&=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

6 (1) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	k	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$	1

확률의 총합은 1이므로

$k+2k+3k+4k+5k=1$, $15k=1$ $\therefore k=\frac{1}{15}$

(2) $\mathrm{P}(X=4)=\frac{4}{15}$, $\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(X\ge 4)=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{15}+\frac{1}{3}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

연습 문제

본문 87~88쪽

01 ①	02 ②	03 ④	04 ③
05 ②	06 $\frac{19}{20}$	07 $\frac{3}{8}$	08 1
09 $\frac{1}{2}$	10 ②	11 ⑤	12 $\frac{4}{5}$
13 $\frac{3}{8}$			

01 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$k+\frac{1}{7}$	$k+\frac{2}{7}$	k	k	k	1

확률의 총합은 1이므로

$k+\frac{1}{7}+k+\frac{2}{7}+k+k+k=1$, $5k+\frac{3}{7}=1$

$\therefore k=\frac{4}{35}$

02 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+k+\frac{1}{3}=1$, $k+\frac{1}{2}=1$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X^2=1)=\mathrm{P}(X=-1$ 또는 $X=1)$

$=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

$\therefore k\times\mathrm{P}(X^2=1)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

03 확률의 총합은 1이므로

$2k+\frac{1}{4}+k+\frac{1}{4}=1$, $3k+\frac{1}{2}=1$

$\therefore k=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(2\le X\le 3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

04 확률의 총합은 1이므로

$a+2a+3a+4a=1$, $10a=1$

$\therefore a=\frac{1}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-X-2=0)=\mathrm{P}((X-2)(X+1)=0)$

$=\mathrm{P}(X=-1$ 또는 $X=2)$

$=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{10}+\frac{4}{10}=\frac{1}{2}$

05 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times 6=36$

두 눈의 수의 합이 10인 경우는 $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$의 3가지

두 눈의 수의 합이 11인 경우는 $(5, 6)$, $(6, 5)$의 2가지

두 눈의 수의 합이 12인 경우는 $(6, 6)$의 1가지

즉 $\mathrm{P}(X=10)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(X=11)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$,

$\mathrm{P}(X=12)=\frac{1}{36}$이므로

$\mathrm{P}(X\ge 10)=\mathrm{P}(X=10)+\mathrm{P}(X=11)+\mathrm{P}(X=12)$

$=\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$

참고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	1

06 확률변수 X는 6개의 제품 중 3개를 뽑을 때 나오는 불량품의 개수이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$

$\therefore \mathrm{P}(|X-2|\le 1)=\mathrm{P}(-1\le X-2\le 1)$

$=\mathrm{P}(1\le X\le 3)$

$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{9}{20}+\frac{9}{20}+\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$

07 정사면체를 2번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$4\times 4=16$

이때 $|a-b|=1$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$의 6

$\therefore \mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(|a-b|=1)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

08 확률변수 X는 3개의 공을 동시에 꺼낼 때 나오는 흰 공의 개수이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$

이때 $\mathrm{P}(X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{35}+\frac{12}{35}=\frac{13}{35}$

이므로 $k=1$

09 4장의 카드 중 동시에 2장을 뽑을 때 나오는 모든 경우의 수는

${}_4C_2=6$

두 수의 차가 1인 경우는 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$의 3가지

두 수의 차가 2인 경우는 $(1, 3)$, $(2, 4)$의 2가지

두 수의 차가 3인 경우는 $(1, 4)$의 1가지

따라서 X의 각 값에 대한 확률은 다음과 같다.

$P(X=1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(X=3)=\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}\therefore P(X^2-2X<0)&=P(X(X-2)<0)\\&=P(0<X<2)\\&=P(X=1)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

10
$$\begin{aligned}P(X=x)&=\frac{k}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\&=\frac{k(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}\\&=k(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\end{aligned}$$

이때 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=24)$

$=k\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})\}$

$=k(\sqrt{25}-\sqrt{1})=1$

$4k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$

$\therefore P(4\le X\le 8)$

$=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)$

$=\frac{1}{4}\{(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{9}-\sqrt{8})\}$

$=\frac{1}{4}(\sqrt{9}-\sqrt{4})=\frac{1}{4}$

11 확률 P_1, P_2, P_3, P_4가 이 순서대로 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열을 이루므로 $P_2=\frac{1}{3}P_1$, $P_3=\left(\frac{1}{3}\right)^2P_1$, $P_4=\left(\frac{1}{3}\right)^3P_1$

이때 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

$=P_1+P_2+P_3+P_4$

$=P_1+\frac{1}{3}P_1+\left(\frac{1}{3}\right)^2P_1+\left(\frac{1}{3}\right)^3P_1$

$=P_1\left\{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}$

$=P_1\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^4}{1-\frac{1}{3}}=\frac{40}{27}P_1=1 \qquad \therefore P_1=\frac{27}{40}$

$\therefore P(X=2)=P_2=\frac{1}{3}P_1=\frac{1}{3}\times\frac{27}{40}=\frac{9}{40}$

12 6장의 카드에서 동시에 3장을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

(i) 뽑힌 카드에 적힌 수 중 1이 가장 작은 수인 경우
1이 적힌 카드를 뽑고, 그 외에 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 5장의 카드에서 2장을 뽑으면 되므로 그 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

(ii) 뽑힌 카드에 적힌 수 중 2가 가장 작은 수인 경우
2가 적힌 카드를 뽑고, 그 외에 3, 4, 5, 6이 적힌 4장의 카드에서 2장을 뽑으면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

(iii) 뽑힌 카드에 적힌 수 중 3이 가장 작은 수인 경우
3이 적힌 카드를 뽑고, 그 외에 4, 5, 6이 적힌 3장의 카드에서 2장을 뽑으면 되므로 그 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

(iv) 뽑힌 카드에 적힌 수 중 4가 가장 작은 수인 경우
4가 적힌 카드를 뽑고, 그 외에 5, 6이 적힌 2장의 카드에서 2장을 뽑으면 되므로 그 경우의 수는 ${}_2C_2=1$

(i)~(iv)에서 X의 각 값에 대한 확률은 다음과 같다.

$P(X=1)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$, $P(X=3)=\frac{3}{20}$,

$P(X=4)=\frac{1}{20}$

$\therefore P(X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{4}{5}$

13 한 개의 동전을 4번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$2^4=16$

이때 한 개의 동전을 4번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 x, 뒷면이 나오는 횟수를 y라 하면

$x+y=4$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 점 P의 좌표가 확률변수 X이므로 $X=x-y$

즉 $X=0$이려면 $x-y=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\therefore x=2, y=2$

따라서 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나오면 되므로

그 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$

$\therefore P(X=0)=P(x-y=0)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

02 이산확률변수의 기댓값과 표준편차

유제

본문 91~94쪽

01 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+a^2=1,\ 4a^2+4a-3=0$

$(2a-1)(2a+3)=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because 0\le a\le 1)$

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}=\frac{11}{2}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{11}{2}-2^2=\frac{3}{2}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

답 $\mathrm{E}(X)=2,\ \mathrm{V}(X)=\frac{3}{2},\ \sigma(X)=\frac{\sqrt{6}}{2}$

02 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{5}+a+\frac{3}{10}+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$

X의 평균이 $\frac{3}{2}$이므로

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times a+2\times\frac{3}{10}+3\times b$

$=a+\frac{3}{5}+3b=\frac{3}{2}$

$\therefore a+3b=\frac{9}{10} \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{10},\ b=\frac{1}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{5}=\frac{33}{10}$

따라서 X의 분산 $\mathrm{V}(X)$는

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{33}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{21}{20}$

답 $\frac{21}{20}$

03 $\mathrm{P}(0\le X\le 2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{6}+\frac{2+a}{6}+\frac{1}{6}$

$=\frac{4+a}{6}=\frac{5}{6}$

이므로 $a=1$

따라서 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

04 (1) 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

앞면이 0개인 경우는

(T, T, T)의 1가지

앞면이 1개인 경우는

(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H)의 3가지

앞면이 2개인 경우는

(H, H, T), (H, T, H), (T, H, H)의 3가지

앞면이 3개인 경우는

(H, H, H)의 1가지

즉 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{8},\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{8},$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(2) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

또 $\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}=3$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 (1) 풀이 참조 (2) $\mathrm{E}(X)=\frac{3}{2},\ \mathrm{V}(X)=\frac{3}{4},\ \sigma(X)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

05 확률변수 X는 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 나오는 검은 공의 개수이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{1}{10}=1$

따라서 X의 분산 $\mathrm{V}(X)$는

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

답 $\frac{9}{25}$

06 정사면체 두 개를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$4\times4=16$
두 수의 합이 2인 경우는 $(1, 1)$의 1가지
두 수의 합이 3인 경우는 $(1, 2), (2, 1)$의 2가지
두 수의 합이 4인 경우는 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$의 3가지
두 수의 합이 5인 경우는 $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$의 4가지
두 수의 합이 6인 경우는 $(2, 4), (3, 3), (4, 2)$의 3가지
두 수의 합이 7인 경우는 $(3, 4), (4, 3)$의 2가지
두 수의 합이 8인 경우는 $(4, 4)$의 1가지
즉 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이고, 그 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{16}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{16}$, $\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{16}$,

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{16}$, $\mathrm{P}(X=6)=\frac{3}{16}$, $\mathrm{P}(X=7)=\frac{2}{16}$,

$\mathrm{P}(X=8)=\frac{1}{16}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

따라서 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는
$\mathrm{E}(X)$
$=2\times\frac{1}{16}+3\times\frac{2}{16}+4\times\frac{3}{16}+5\times\frac{4}{16}+6\times\frac{3}{16}+7\times\frac{2}{16}+8\times\frac{1}{16}$
$=5$

답 5

07 공 3개를 꺼낼 때 받을 수 있는 금액을 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 100, 200, 300이고, 그 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=100)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$,

$\mathrm{P}(X=200)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$,

$\mathrm{P}(X=300)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	100	200	300	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{5}+200\times\frac{3}{5}+300\times\frac{1}{5}=200$

따라서 구하는 기댓값은 200원이다.

답 200원

08 $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-2)=2\mathrm{E}(X)-2=10$이므로
$\mathrm{E}(X)=6$
$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X-2)=4\mathrm{V}(X)=8$이므로
$\mathrm{V}(X)=2$

답 $\mathrm{E}(X)=6$, $\mathrm{V}(X)=2$

09 $\mathrm{E}(X)=10$, $\mathrm{V}(X)=3$이므로
$\mathrm{E}(Y)=25$에서 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b=25$
$\therefore\ 10a+b=25$ ...... ㉠
$\mathrm{V}(Y)=12$에서
$\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)=3a^2=12$
$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$
㉠에서 $10\times2+b=25$ $\therefore\ b=5$
$\therefore\ ab=10$

답 10

10 확률의 총합은 1이므로
$a+2a+3a=1$, $6a=1$ $\therefore\ a=\frac{1}{6}$
확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차는

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore\ \mathrm{E}(6X)=6\mathrm{E}(X)=6\times\frac{4}{3}=8$

$\mathrm{V}(6X)=6^2\mathrm{V}(X)=36\times\frac{5}{9}=20$

$\sigma(6X)=|6|\sigma(X)=6\times\frac{\sqrt{5}}{3}=2\sqrt{5}$

답 평균 : 8, 분산 : 20, 표준편차 : $2\sqrt{5}$

11 확률변수 X는 2명의 대표를 뽑을 때 여학생 대표의 수이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

확률변수 X의 평균, 분산은

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(5X+8)=5\mathrm{E}(X)+8=5\times\frac{6}{5}+8=14$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(5X+8)=5^2\mathrm{V}(X)=25\times\frac{9}{25}=9$

답 평균 : 14, 분산 : 9

Drill

본문 95쪽

1 (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{9}{25}$ (3) $\frac{3}{5}$

2 (1) 2 (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

3 (1) 풀이 참조 (2) $\mathrm{E}(X)=1$, $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{2}$, $\sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

4 (1) 평균 : 32, 분산 : 36, 표준편차 : 6
(2) 평균 : 19, 분산 : 16, 표준편차 : 4
(3) 평균 : 25, 분산 : 16, 표준편차 : 4

5 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{11}{16}$ (3) 11

6 (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\mathrm{E}(X)=\frac{12}{5}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{16}{25}$, $\sigma(X)=\frac{4}{5}$
(3) 평균 : -19, 분산 : 64, 표준편차 : 8

1 (1) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$

(2) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$$=0^2\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{1}{10}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

2 (1) $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$

(2) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$$=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{5}-2^2=\frac{2}{5}$$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

3 (1) 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.
앞면이 0개인 경우는 (T, T)의 1가지
앞면이 1개인 경우는 (H, T), (T, H)의 2가지
앞면이 2개인 경우는 (H, H)의 1가지
즉 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 각각의 확률은 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$
이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(2) 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차는

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$$=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}-1^2=\frac{1}{2}$$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

4 (1) $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X+2)$

$$=3\mathrm{E}(X)+2=3\times10+2=32$$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(3X+2)$

$$=3^2\mathrm{V}(X)=9\times4=36$$

$\sigma(Y)=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{36}=6$

(2) $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-1)$

$$=2\mathrm{E}(X)-1=2\times10-1=19$$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X-1)$

$$=2^2\mathrm{V}(X)=4\times4=16$$

$\sigma(Y)=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{16}=4$

(3) $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X+5)$

$$=2\mathrm{E}(X)+5=2\times10+5=25$$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X+5)$

$$=2^2\mathrm{V}(X)=4\times4=16$$

$\sigma(Y)=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{16}=4$

5 (1) $\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(2) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$$=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$$

(3) $\mathrm{V}(4X+5)=4^2\mathrm{V}(X)=16\times\frac{11}{16}=11$

6 (1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{10}+\frac{1}{2}+a+\frac{1}{10}=1$, $a+\frac{7}{10}=1$

$\therefore a=\frac{3}{10}$

(2) 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차는

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{1}{10}=\frac{12}{5}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$$=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{1}{10}-\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

(3) 확률변수 Y의 평균, 분산, 표준편차는

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(-10X+5)$

$$=-10\mathrm{E}(X)+5=-10\times\frac{12}{5}+5=-19$$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(-10X+5)$

$$=(-10)^2\mathrm{V}(X)=100\times\frac{16}{25}=64$$

$\sigma(Y)=\sigma(-10X+5)$

$$=|-10|\sigma(X)=10\times\frac{4}{5}=8$$

연습 문제

본문 96~97쪽

01 $\frac{11}{6}$	**02** 2	**03** $\frac{5\sqrt{2}}{6}$	**04** ③
05 ④	**06** 1100원	**07** ①	**08** ③
09 $\mathrm{E}(T)=100$, $\sigma(T)=20$		**10** 7	**11** ③
12 100원	**13** 1	**14** $\frac{4}{3}$	**15** 1

01 확률의 총합은 1이므로

$$a+a+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=1,\ 2a+\frac{5}{6}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{12}$$

따라서 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$$

02 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{10}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{10}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{10}=2$$

03 확률의 총합은 1이므로 $\frac{1}{4}+a+b+\frac{1}{3}=1$

$\therefore a+b=\frac{5}{12}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{E}(X)=\frac{5}{3}$이므로

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times a+2\times b+3\times\frac{1}{3}$$
$$=a+2b+1=\frac{5}{3}$$

$\therefore a+2b=\frac{2}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{4}$

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{3}=\frac{25}{6}$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{25}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{18}$$

따라서 X의 표준편차 $\sigma(X)$는

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{25}{18}}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$$

04 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{6}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$$

05 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{2}{7}+1^2\times\frac{4}{7}+2^2\times\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$$

따라서 X의 분산 $\mathrm{V}(X)$는

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{8}{7}-\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{20}{49}$$

06 1장의 복권으로 받을 수 있는 당첨금을 확률변수 X라 하면

$\mathrm{P}(X=10000)=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$, $\mathrm{P}(X=5000)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$,

$\mathrm{P}(X=2000)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(X=0)=\frac{68}{100}=\frac{17}{25}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10000	5000	2000	0	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{17}{25}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=10000\times\frac{1}{50}+5000\times\frac{1}{10}+2000\times\frac{1}{5}+0\times\frac{17}{25}$$
$$=1100$$

따라서 복권 1장에 대한 당첨금의 기댓값은 1100원이다.

07 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{a}{2}+a^2=1,\ 2a^2+3a-2=0$

$(2a-1)(a+2)=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because 0\le a\le 1)$

확률변수 X의 평균, 분산은

$E(X)=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=(-1)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$

$\therefore V(aX)=V\left(\frac{X}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2V(X)=\frac{1}{4}\times\frac{11}{16}=\frac{11}{64}$

08 $E(3X-1)=5$에서 $3E(X)-1=5$

$\therefore E(X)=2$

$\sigma(2X+3)=1$에서 $|2|\sigma(X)=1$

$\therefore \sigma(X)=\frac{1}{2}$

이때 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{1}{2}$이므로 $V(X)=\frac{1}{4}$

즉 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{1}{4}$에서 $E(X^2)-2^2=\frac{1}{4}$

$\therefore E(X^2)=\frac{17}{4}$

09 $E(X)=m,\ \sigma(X)=\sigma\ (\sigma>0)$이므로

$E(T)=E\left(20\times\frac{X-m}{\sigma}+100\right)$

$=E\left(\frac{20}{\sigma}X-\frac{20m}{\sigma}+100\right)$

$=\frac{20}{\sigma}E(X)-\frac{20m}{\sigma}+100$

$=\frac{20m}{\sigma}-\frac{20m}{\sigma}+100=100$

$\sigma(T)=\sigma\left(20\times\frac{X-m}{\sigma}+100\right)$

$=\left|\frac{20}{\sigma}\right|\sigma(X)=\frac{20}{\sigma}\times\sigma=20$

10 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 4이고, 그 각각의 확률은

$P(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ P(X=2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ P(X=4)=\frac{1}{6}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{6}=2$

$\therefore E(2X+3)=2E(X)+3=2\times2+3=7$

11 확률의 총합은 1이므로 $a+\frac{1}{2}+b=1$

$\therefore b=\frac{1}{2}-a \qquad \cdots\cdots ㉠$

$E(X)=1\times a+2\times\frac{1}{2}+3\times b$

$=a+1+3\left(\frac{1}{2}-a\right)\ (\because ㉠)$

$=-2a+\frac{5}{2}$

$E(X^2)=1^2\times a+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times b$

$=a+2+9\left(\frac{1}{2}-a\right)\ (\because ㉠)$

$=-8a+\frac{13}{2}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=-8a+\frac{13}{2}-\left(-2a+\frac{5}{2}\right)^2$

$=-4a^2+2a+\frac{1}{4}$

$=-4\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}$

따라서 X의 분산은 $a=\frac{1}{4}$일 때 최대이다.

12 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

앞면이 0개인 경우는 (T, T)의 1가지이고

$X=-100-100=-200$

앞면이 1개인 경우는 (H, T), (T, H)의 2가지이고

$X=100\times2-100=100$

앞면이 2개인 경우는 (H, H)의 1가지이고

$X=100\times2+100\times2=400$

즉 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 -200, 100, 400이고, 그 각각의 확률은

$P(X=-200)=\frac{1}{4},\ P(X=100)=\frac{1}{2},\ P(X=400)=\frac{1}{4}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-200	100	400	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore E(X)=(-200)\times\frac{1}{4}+100\times\frac{1}{2}+400\times\frac{1}{4}=100$

따라서 구하는 X의 기댓값은 100원이다.

13 5장의 카드 중 2장을 동시에 뽑는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=10$

두 수의 차가 1인 경우는 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$의 4가지

두 수의 차가 2인 경우는 $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$의 3가지

두 수의 차가 3인 경우는 $(1, 4)$, $(2, 5)$의 2가지

두 수의 차가 4인 경우는 $(1, 5)$의 1가지

즉 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 그 각각의 확률은 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{10}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{10}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

이때 $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{10}=2$,

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$\qquad=1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{10}-2^2=1$

따라서 X의 표준편차 $\sigma(X)$는

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{1}=1$

14 $\mathrm{E}(Y)=5$에서 $\mathrm{E}(2X-3)=2\mathrm{E}(X)-3=5$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=4$

$\mathrm{E}(Y^2)=37$에서

$\mathrm{E}((2X-3)^2)=\mathrm{E}(4X^2-12X+9)$

$\qquad=4\mathrm{E}(X^2)-12\mathrm{E}(X)+9$

$\qquad=4\mathrm{E}(X^2)-12\times4+9$

$\qquad=4\mathrm{E}(X^2)-39=37$

$\therefore\ \mathrm{E}(X^2)=19$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=19-4^2=3$

이므로 $\frac{\mathrm{E}(X)}{\mathrm{V}(X)}=\frac{4}{3}$

15 바구니 속에 들어 있는 축구공의 개수를 x라 하면 농구공의 개수는 $10-x$이다.

$X=1$인 경우는 다음의 두 가지 경우가 있다.

(i) 동전 2개를 동시에 던질 때 1개만 앞면이 나오고, 바구니 속에서 1개의 공을 꺼낼 때 축구공 1개를 꺼내는 경우

이때의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{{}_x\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_1}=\frac{x}{20}$

(ii) 동전 2개를 동시에 던질 때 2개 모두 앞면이 나오고, 바구니 속에서 2개의 공을 꺼낼 때 축구공 1개, 농구공 1개를 꺼내는 경우

이때의 확률은 $\frac{1}{4}\times\frac{{}_x\mathrm{C}_1\times{}_{10-x}\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{x(10-x)}{180}$

(i), (ii)에서 $X=1$인 확률 $\mathrm{P}(X=1)$은

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{x}{20}+\frac{x(10-x)}{180}$

이때 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{15}$에서 $\frac{x}{20}+\frac{x(10-x)}{180}=\frac{4}{15}$

양변에 180을 곱하면 $9x+x(10-x)=48$

$x^2-19x+48=0$, $(x-3)(x-16)=0$

$\therefore\ x=3$ ($\because\ 0\le x\le10$)

$X=2$인 경우는 동전 2개를 동시에 던질 때 2개 모두 앞면이 나오고, 바구니 속에서 2개의 공을 꺼낼 때 축구공 2개를 꺼내는 경우이므로 이때의 확률은

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{60}$

이때 $\mathrm{P}(X=0)=k$라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	k	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{60}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)=0\times k+1\times\frac{4}{15}+2\times\frac{1}{60}=\frac{3}{10}$

이므로 $\mathrm{E}(10X-2)=10\mathrm{E}(X)-2=10\times\frac{3}{10}-2=1$

참고 $X=0$인 경우는 다음의 세 가지 경우가 있다.

(i) 동전 2개를 동시에 던질 때 앞면이 나오지 않아서 바구니 속에서 공을 꺼내지 않는 경우

이때의 확률은 $\frac{1}{4}$

(ii) 동전 2개를 동시에 던질 때 1개만 앞면이 나오고, 바구니 속에서 1개의 공을 꺼낼 때 농구공 1개를 꺼내는 경우

이때의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_1}=\frac{7}{20}$

(iii) 동전 2개를 동시에 던질 때 2개 모두 앞면이 나오고, 바구니 속에서 2개의 공을 꺼낼 때 농구공 2개를 꺼내는 경우

이때의 확률은 $\frac{1}{4}\times\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{21}{180}=\frac{7}{60}$

(i)~(iii)에서 $X=0$인 확률 $\mathrm{P}(X=0)$은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4}+\frac{7}{20}+\frac{7}{60}=\frac{43}{60}$

03 이항분포

유제

본문 101~103쪽

01 (1) 씨앗 4개를 화분에 심으므로 4회의 독립시행이며, 씨앗 1개가 발아하는 확률이 0.3이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(4, 0.3)$을 따른다.

(2) $\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_4\mathrm{C}_0(0.7)^4 & (x=0) \\ {}_4\mathrm{C}_x(0.3)^x(0.7)^{4-x} & (x=1, 2, 3) \\ {}_4\mathrm{C}_4(0.3)^4 & (x=4) \end{cases}$

(3) $\mathrm{P}(X\ge 3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$={}_4\mathrm{C}_3(0.3)^3(0.7)^1+{}_4\mathrm{C}_4(0.3)^4$

$=4\times 0.0189+0.0081=0.0837$

답 (1) $\mathrm{B}(4, 0.3)$ (2) 풀이 참조 (3) 0.0837

02 회사에서 생산되는 텀블러 중에서 불량품의 개수를 확률변수 X라 하자. 3개의 텀블러를 임의추출했으므로 3회의 독립시행이며, 1개의 텀블러가 불량품일 확률이 $\frac{1}{10}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3, \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{9}{10}\right)^3 & (x=0) \\ {}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{3-x} & (x=1, 2) \\ {}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{10}\right)^3 & (x=3) \end{cases}$$

$\therefore \mathrm{P}(X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{9}{10}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^2$

$=\left(\frac{9}{10}\right)^3+\frac{3}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^2=\frac{972}{1000}=\frac{243}{250}$

답 $\frac{243}{250}$

03 3점 슛을 10번 시도하므로 10회의 독립시행이고, 3점 슛을 성공할 확률이 $\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=10\times\frac{4}{5}=8$

$\mathrm{V}(X)=10\times\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{5}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{8}{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

답 $\mathrm{E}(X)=8$, $\mathrm{V}(X)=\frac{8}{5}$, $\sigma(X)=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

04 4개의 동전을 동시에 32번 던지므로 32회의 독립시행이고, 4개의 동전을 동시에 한 번 던질 때 앞면이 2개, 뒷면이 2개 나올 확률은 ${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(32, \frac{3}{8}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(X)=32\times\frac{3}{8}=12$,

$\mathrm{V}(X)=32\times\frac{3}{8}\times\left(1-\frac{3}{8}\right)=\frac{15}{2}$,

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{15}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$

이므로 $m=12$, $\sigma=\frac{\sqrt{30}}{2}$

$\therefore m\sigma=6\sqrt{30}$

답 $6\sqrt{30}$

05 정사면체를 16번 던지므로 16회의 독립시행이고, 정사면체를 한 번 던질 때 바닥에 닿은 면에 1이 놓이는 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=16\times\frac{1}{4}=4$, $\mathrm{V}(X)=16\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=3$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=3+4^2=19$

답 19

06 2개의 동전을 동시에 4회 던지므로 4회의 독립시행이고, 동전 2개 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=4\times\frac{1}{4}=1$, $\mathrm{V}(X)=4\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$

따라서 확률변수 $Y=2X+5$의 평균과 분산은 각각

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X+5)=2\mathrm{E}(X)+5=2\times 1+5=7$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X+5)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times\frac{3}{4}=3$

답 $\mathrm{E}(Y)=7$, $\mathrm{V}(Y)=3$

07 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=np=4$ …… ㉠

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=18-4^2=2$이므로

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4(1-p)=2$, $1-p=\frac{1}{2}$ $\therefore p=\frac{1}{2}$

$p=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{2}n=4$ $\therefore n=8$

즉 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(8, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X=6)={}_8\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2=28\times\frac{1}{256}=\frac{7}{64}$

따라서 $a=64$, $b=7$이므로 $a+b=71$

답 71

연습 문제

본문 104~105쪽

01 ⑤	02 $\frac{1}{2}$	03 $\frac{\sqrt{10}}{3}$	04 ②
05 1600	06 ④	07 $\frac{3}{2}$	08 ⑤
09 500	10 13	11 23	12 ①
13 4	14 24	15 1	16 2

01 2개의 공을 10번 반복해서 꺼내므로 10회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 같은 색의 공이 나올 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}+\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

02 한 개의 동전을 4번 던지므로 4회의 독립시행이고, 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나오는 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore$ $P(X=1$ 또는 $X=3)=P(X=1)+P(X=3)$

$$={}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

03 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$V(X)=5\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{9}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

04 확률변수 X가 이항분포 $B(10, p)$를 따르므로

$P(X=7)={}_{10}C_7p^7(1-p)^3$, $P(X=8)={}_{10}C_8p^8(1-p)^2$

$5P(X=7)=4P(X=8)$에서

$5{}_{10}C_7p^7(1-p)^3=4{}_{10}C_8p^8(1-p)^2$

$5\times120(1-p)=4\times45p$

$10(1-p)=3p \qquad \therefore p=\frac{10}{13}$

05 독감 백신을 접종한 사람이 10000명이므로 10000회의 독립시행이고, 면역력이 생기는 확률이 0.8이므로 확률변수 X는 이항분포 $B(10000, 0.8)$을 따른다.

$\therefore V(X)=10000\times0.8\times(1-0.8)=1600$

06 한 개의 주사위를 n번 던지므로 n회의 독립시행이고, 한 개의 주사위를 던질 때 1의 눈이 나오는 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

$$\therefore V(X)=n\times\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{36}n$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{36}n}=5$$

즉 $\frac{5}{36}n=25$이므로 $n=180$

07 주머니에 흰 공이 x개, 파란 공이 $(8-x)$개 들어 있다고 하자. 공을 12번 꺼내므로 12회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 흰 공이 나올 확률은 $\frac{{}_xC_1}{{}_8C_1}=\frac{x}{8}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(12, \frac{x}{8}\right)$를 따른다.

X의 평균이 3이므로 $E(X)=12\times\frac{x}{8}=3$

$\therefore x=2$

즉 확률변수 X는 이항분포 $B\left(12, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$V(X)=12\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

08 한 개의 주사위를 8번 던지므로 8회의 독립시행이고, 한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나오는 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(8, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(X)=8\times\frac{1}{2}=4,\ V(X)=8\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=2$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=2+4^2=18$

09 $E(3X-4)=56$에서 $E(3X-4)=3E(X)-4=56$

$\therefore E(X)=20$

확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따르므로

$E(X)=np=20 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=416-20^2=16$이므로

$V(X)=np(1-p)=16 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$20(1-p)=16,\ 1-p=\frac{4}{5} \qquad \therefore p=\frac{1}{5}$

$p=\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{5}n=20 \qquad \therefore n=100$

$$\therefore \frac{n}{p}=500$$

10 공을 b번 꺼내므로 b회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 흰 공이 나올 확률은 $\frac{{}_{a}C_{1}}{{}_{10}C_{1}}=\frac{a}{10}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(b, \frac{a}{10}\right)$를 따른다.

X의 평균이 4이므로 $E(X)=b\times\frac{a}{10}=4$

$\therefore ab=40$ ...... ㉠

X의 분산이 $\frac{4}{5}$이므로

$V(X)=b\times\frac{a}{10}\times\left(1-\frac{a}{10}\right)=\frac{4}{5}$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{40}{10}\left(1-\frac{a}{10}\right)=\frac{4}{5}$

$\therefore a=8$

$a=8$을 ㉠에 대입하면 $b=5$

$\therefore a+b=13$

11 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따른다고 하면

$E(X)=np=6$ ...... ㉠

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=38-6^2=2$이므로

$V(X)=np(1-p)=2$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6(1-p)=2,\ 1-p=\frac{1}{3}$ $\therefore p=\frac{2}{3}$

$p=\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{3}n=6$ $\therefore n=9$

즉 확률변수 X가 이항분포 $B\left(9, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$P(X=2)={}_{9}C_{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^7=\frac{144}{3^9}=\frac{16}{3^7}$

따라서 $a=7,\ b=16$이므로

$a+b=23$

12 서로 다른 세 개의 주사위를 30번 던지므로 30회의 독립시행이고 세 개 모두 다른 눈이 나올 확률은 $\frac{{}_{6}P_{3}}{6^3}=\frac{5}{9}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(30, \frac{5}{9}\right)$를 따른다.

$\therefore a=E(X)=30\times\frac{5}{9}=\frac{50}{3}$

$b=V(X)=30\times\frac{5}{9}\times\left(1-\frac{5}{9}\right)=\frac{200}{27}$

$\therefore \frac{4a}{b}=4\times\frac{50}{3}\times\frac{27}{200}=9$

참고 세 개의 주사위를 A, B, C라 할 때, A, B, C 모두 다른 눈의 수가 나오는 경우, A에 나올 수 있는 눈의 수가 6가지라면 B에 나올 수 있는 눈의 수는 A에서 나온 눈의 수를 제외한 5가지, 마찬가지로 C에 나올 수 있는 눈의 수는 A와 B에서 나온 눈의 수를 제외한 4가지이다.
따라서 경우의 수는 $6\times5\times4$, 즉 ${}_{6}P_{3}$과 같다.

13 제품이 불량품일 확률이 $\frac{1}{10}$, 상자가 불량품일 확률이 $\frac{1}{9}$이므로 포장된 한 상자의 제품에서 제품과 상자가 모두 합격품일 확률은 $\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{4}{5}$

이때 100개의 포장된 제품 상자 중 제품과 상자가 모두 합격품인 상자의 개수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

따라서 $V(X)=100\times\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=16$

이므로 $\sigma(X)=\sqrt{16}=4$

14 두 개의 주사위의 눈의 수의 합이 5가 되는 경우는 오른쪽 표에서 색칠한 부분의 12가지이다.

+	1	2	2	3	3	3
1	2	3	3	4	4	4
2	3	4	4	5	5	5
2	3	4	4	5	5	5
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6

따라서 두 개의 주사위를 한 번 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 5일 확률은 $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$이고, 이 시행을 12번 반복하므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(12, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

이때 $V(X)=12\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}$이므로

$V(Y)=V(3X-2)$

$=3^2V(X)=9\times\frac{8}{3}=24$

15 한 개의 동전을 4번 던지므로 4회의 독립시행이고, 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나오는 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=4\times\frac{1}{2}=2,\ V(X)=4\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=1$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=1+2^2=5$

이때 $f(a)=E((X-a)^2)$

$=E(X^2-2aX+a^2)$

$=E(X^2)-2aE(X)+a^2$

$=5-2a\times2+a^2=a^2-4a+5$

$=(a-2)^2+1$

따라서 $f(a)$의 최솟값은 1이다.

16 두 사람 A, B가 각각 주사위를 한 개씩 동시에 던지는 경우의 수는 $6\times6=36$

눈의 수의 차가 2보다 작은 경우는 다음과 같다.

(i) 차가 0인 경우

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$의 6가지

(ii) 차가 1인 경우

$(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)$의 10가지

(i), (ii)에서 눈의 수의 차가 2보다 작은 경우는

$6+10=16$(가지)이므로 그 확률은

$\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

따라서 A가 1점을 얻을 확률은 $\frac{4}{9}$이고, B가 1점을 얻을 확률은 $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$이다.

18회의 시행에서 A가 얻는 점수의 합을 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18, \frac{4}{9}\right)$를 따르고, B가 얻는 점수의 합을 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18, \frac{5}{9}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=18\times\frac{4}{9}=8, \mathrm{E}(Y)=18\times\frac{5}{9}=10$

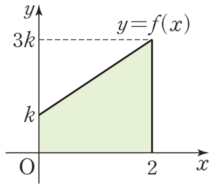
따라서 A가 얻는 점수의 합의 기댓값과 B가 얻는 점수의 합의 기댓값의 차는 $10-8=2$

04 연속확률변수의 확률분포

유제

본문 108쪽

01 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

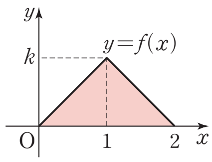


$\frac{1}{2}\times(k+3k)\times2=1, 4k=1$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

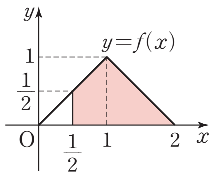
02 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times2\times k=1$

$\therefore k=1$

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le2\right)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le2\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times1\times1$

$=\frac{7}{8}$

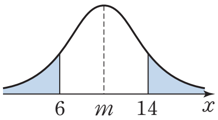
답 $\frac{7}{8}$

05 정규분포

유제

본문 111~113쪽

01 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고,
$P(X\le 6)=P(X\ge 14)$이므로



$m=\dfrac{6+14}{2}=10$

한편 $V\left(\dfrac{1}{2}X\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 V(X)=9$에서

$V(X)=36$이므로

$\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{36}=6$

$\therefore\ m+\sigma=16$

답 16

02 $Z=\dfrac{X-27}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

(1) $P(X\le 23)=P\left(Z\le\dfrac{23-27}{4}\right)$
$=P(Z\le -1)$
$=P(Z\ge 1)$
$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)$
$=0.5-0.3413=0.1587$

(2) $P(29\le X\le 33)=P\left(\dfrac{29-27}{4}\le Z\le\dfrac{33-27}{4}\right)$
$=P(0.5\le Z\le 1.5)$
$=P(0\le Z\le 1.5)-P(0\le Z\le 0.5)$
$=0.4332-0.1915=0.2417$

답 (1) 0.1587 (2) 0.2417

03 일주일 동안의 독서 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(41, 6^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-41}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

(1) $P(29\le X\le 53)=P\left(\dfrac{29-41}{6}\le Z\le\dfrac{53-41}{6}\right)$
$=P(-2\le Z\le 2)$
$=P(-2\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$
$=0.4772+0.4772=0.9544$

따라서 일주일 동안의 독서 시간이 29분 이상 53분 이하인 학생은 전체의 95.44%이다.

(2) $P(X\ge 47)=P\left(Z\ge\dfrac{47-41}{6}\right)=P(Z\ge 1)$
$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)$
$=0.5-0.3413=0.1587$

따라서 일주일 동안의 독서 시간이 47분 이상인 학생은 $500\times 0.1587=79.35$, 즉 약 79명이다.

답 (1) 95.44% (2) 79명

04 남학생들의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(170, 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-170}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(166\le X\le 176)=P\left(\dfrac{166-170}{5}\le Z\le\dfrac{176-170}{5}\right)$
$=P(-0.8\le Z\le 1.2)$
$=P(-0.8\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.2)$
$=P(0\le Z\le 0.8)+P(0\le Z\le 1.2)$
$=0.288+0.385=0.673$

따라서 키가 166 cm 이상 176 cm 이하인 학생은 전체의 67.3%이다.

답 67.3%

05 수학 성적을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(70, 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-70}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
상위 20등 이내에 들기 위한 최저 점수를 k라 하면

$P(X\ge k)=\dfrac{20}{1000}=0.02$에서 $P\left(Z\ge\dfrac{k-70}{10}\right)=0.02$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\dfrac{k-70}{10}\right)=0.02$

$0.5-P\left(0\le Z\le\dfrac{k-70}{10}\right)=0.02$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\dfrac{k-70}{10}\right)=0.48$

이때 주어진 표준정규분포표에서 $P(0\le Z\le 2)=0.48$이므로

$\dfrac{k-70}{10}=2\qquad\therefore\ k=90$

따라서 상위 20등 이내에 들기 위해서는 90점 이상을 받아야 한다.

답 90점

06 자격 시험의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(65, 9^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-65}{9}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
평점 A를 받기 위한 최저 점수를 k라 하면

$P(X\ge k)=0.07$에서 $P\left(Z\ge\dfrac{k-65}{9}\right)=0.07$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\dfrac{k-65}{9}\right)=0.07$

$0.5-P\left(0\le Z\le\dfrac{k-65}{9}\right)=0.07$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\dfrac{k-65}{9}\right)=0.43$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로 $\dfrac{k-65}{9}=1.5$

$\therefore\ k=78.5$

따라서 평점 A를 받기 위해서 적어도 78.5점을 받아야 한다.

답 78.5점

Drill

본문 114쪽

1 (1) 낮아지고 (2) 달라지지 않고
2 (1) 0.3413 (2) 0.6826 (3) 0.8413 (4) 0.1587
3 (1) 0.4772 (2) 0.8185 (3) 0.1574 (4) 3
4 (1) $Z=\frac{X-4}{3}$ (2) 0.6826
5 (1) 0.4332 (2) 0.3085

2 (1) $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$

(2) $\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.3413+0.3413=0.6826$

(3) $\mathrm{P}(Z\ge -1)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+0.5$
$=0.3413+0.5=0.8413$

(4) $\mathrm{P}(Z\ge 1)=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.5-0.3413=0.1587$

3 (1) $\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$

(2) $\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.3413+0.4772=0.8185$

(3) $\mathrm{P}(1\le Z\le 3)=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.4987-0.3413=0.1574$

(4) $\mathrm{P}(0\le Z\le 3)=0.4987$에서
$\mathrm{P}(-3\le Z\le 3)=\mathrm{P}(-3\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$
$=0.4987+0.4987=0.9974$
따라서 $\mathrm{P}(|Z|\le 3)=0.9974$이므로 $c=3$

4 (2) 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(1\le X\le 7)=\mathrm{P}\left(\frac{1-4}{3}\le Z\le \frac{7-4}{3}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.3413+0.3413=0.6826$

5 $Z=\frac{X-5}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(5\le X\le 8)=\mathrm{P}\left(\frac{5-5}{2}\le Z\le \frac{8-5}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$

(2) $\mathrm{P}(X\ge 6)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{6-5}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 0.5)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=0.5-0.1915=0.3085$

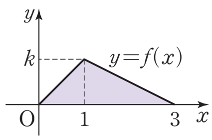
연습 문제

본문 115~117쪽

01 $\frac{4}{3}$	**02** $\frac{1}{2}$	**03** $\frac{2}{5}$	**04** ①
05 ③	**06** ④	**07** ④	**08** 0.8185
09 0.1587	**10** ④	**11** ③	**12** ④
13 57개	**14** 89점	**15** ④	**16** 32
17 0.053	**18** 84	**19** ①	**20** ③

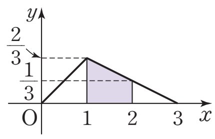
01 $0\le x\le k$에서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로
$\frac{1}{2}\times k+\frac{1}{2}\times k\times\frac{1}{2}=1$
$\frac{3}{4}k=1$ $\quad\therefore k=\frac{4}{3}$

02 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



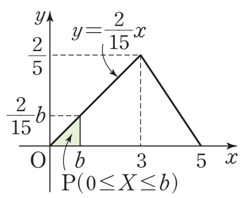
$\frac{1}{2}\times 3\times k=1$ $\quad\therefore k=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(1\le X\le 2)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\times 1=\frac{1}{2}$

03 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로
$\frac{1}{2}\times 5\times a=1$ $\quad\therefore a=\frac{2}{5}$
이때 $\mathrm{P}(0\le X\le b)=\frac{1}{15}$이므로 $b<3$이어야 한다.
따라서 $\mathrm{P}(0\le X\le b)$는 $y=\frac{2}{15}x$의 그래프와 x축 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

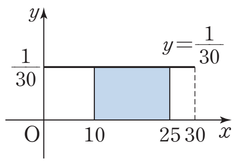


$\frac{1}{2}\times b\times\frac{2}{15}b=\frac{1}{15}$, $b^2=1$
$\therefore b=1$ ($\because b>0$)
$\therefore ab=\frac{2}{5}$

참고 $\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$이므로
$\mathrm{P}(0\le X\le b)<\mathrm{P}(0\le X\le 3)$임을 알 수 있다.
$\therefore b<3$

04 확률변수 X는 서울역에 도착하여 부산행 열차가 출발할 때까지 기다리는 시간이므로 X의 값은 $0\le x\le 30$인 임의의 실수이다.
이때 X는 0에서 30까지 같은 정도로 일어나므로 X의 확률밀도함수는 $f(x)=k$라 할 수 있다.

$0 \le x \le 30$에서 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로



$30 \times k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{30}$

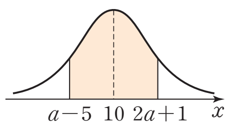
즉 확률밀도함수는 $f(x)=\frac{1}{30}(0 \le x \le 30)$이므로

$\mathrm{P}(10 \le X \le 25)=(25-10)\times\frac{1}{30}=\frac{1}{2}$

05 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, $\mathrm{P}(X \le 12)=\mathrm{P}(X \ge 26)$이므로

$m=\frac{12+26}{2}=19$

06 정규분포 $\mathrm{N}(10, 7^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=10$에서 최댓값을 갖고, 직선 $x=10$에 대하여 대칭이다.



따라서 $\mathrm{P}(a-5 \le X \le 2a+1)$이 최대가 되려면

$\frac{a-5+2a+1}{2}=10,\ 3a-4=20$

$\therefore a=8$

07 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 정규분포곡선의 대칭축이 직선 $x=m$이므로 정규분포곡선에서 대칭축을 찾으면 확률변수 X의 평균을 구할 수 있다. 이때 정규분포곡선 A와 B는 대칭축의 위치가 서로 같으므로

$m_A=m_B$

정규분포곡선에서 그래프의 대칭축이 오른쪽에 위치할수록 평균이 커지므로 m_C의 값이 가장 크다.

$\therefore m_A=m_B<m_C$

한편 표준편차가 커질수록 곡선의 높이가 낮아지고 양쪽으로 퍼지며, 표준편차가 일정할 때 평균이 달라지면 곡선의 모양은 같고 대칭축의 위치만 바뀌므로

$\sigma_A>\sigma_B=\sigma_C$

따라서 옳은 것은 ④이다.

08 $Z=\frac{X-47}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(44 \le X \le 53)=\mathrm{P}\left(\frac{44-47}{3} \le Z \le \frac{53-47}{3}\right)$
$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$
$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$=0.3413+0.4772=0.8185$

09 $\mathrm{E}(X)=30,\ \sigma(X)=5$에서

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X-2)=3\mathrm{E}(X)-2$
$=3\times30-2=88$

$\sigma(Y)=\sigma(3X-2)=|3|\sigma(X)=3\times5=15$

이때 X가 정규분포 $\mathrm{N}(30, 5^2)$을 따르므로 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(88, 15^2)$을 따른다.

$Z=\frac{Y-88}{15}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y \le 73)=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{73-88}{15}\right)=\mathrm{P}(Z \le -1)$
$=\mathrm{P}(Z \le 0)-\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0)$
$=0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$=0.5-0.3413=0.1587$

다른 풀이

$Y=3X-2$이므로

$\mathrm{P}(Y \le 73)=\mathrm{P}(3X-2 \le 73)=\mathrm{P}(X \le 25)$

$Z=\frac{X-30}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y \le 73)=\mathrm{P}(X \le 25)=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{25-30}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z \le -1)=\mathrm{P}(Z \le 0)-\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0)$
$=0.5-0.3413=0.1587$

10 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(20, 2^2), \mathrm{N}(30, 4^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-20}{2},\ Z_Y=\frac{Y-30}{4}$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(30 \le X \le 34)=\mathrm{P}(50 \le Y \le k)$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{30-20}{2} \le Z_X \le \frac{34-20}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{50-30}{4} \le Z_Y \le \frac{k-30}{4}\right)$

$\therefore \mathrm{P}(5 \le Z_X \le 7)=\mathrm{P}\left(5 \le Z_Y \le \frac{k-30}{4}\right)$

따라서 $\frac{k-30}{4}=7$이므로 $k-30=28 \qquad \therefore k=58$

11 과자의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100, 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-100}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X \le 97)=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{97-100}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(Z \le -1.5)=\mathrm{P}(Z \ge 1.5)$
$=\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$
$=0.5-0.43=0.07$

따라서 임의로 택한 과자의 무게가 97 g 이하일 확률은 7%이다.

12 계란의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(52, 8^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-52}{8}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(60\le X\le 68)&=\mathrm{P}\left(\frac{60-52}{8}\le Z\le \frac{68-52}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4772-0.3413=0.1359\end{aligned}$$

13 제품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30, 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-30}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge 40)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{40-30}{5}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

따라서 제품 2500개 중 불량품의 개수는 $2500\times 0.0228=57$

14 신입사원의 연수 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(83, 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-83}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

해외 연수의 기회를 얻기 위한 최저 점수를 k라 하면

$\mathrm{P}(X\ge k)=\dfrac{36}{300}=0.12$에서 $\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{k-83}{5}\right)=0.12$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{k-83}{5}\right)=0.12$

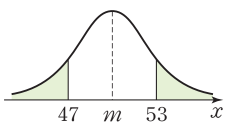
$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{k-83}{5}\right)=0.38$

이때 주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)=0.38$이므로

$\dfrac{k-83}{5}=1.2 \qquad \therefore k=89$

따라서 해외 연수의 기회를 얻기 위한 최저 점수는 89점이다.

15 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선은 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, (가)에서



$\mathrm{P}(X\le 47)=\mathrm{P}(X\ge 53)$이므로

$m=\dfrac{47+53}{2}=50$, 즉 $\mathrm{E}(X)=50$

(나)에 의하여

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=2525-2500=25$

$\therefore \sigma=\sqrt{25}=5$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\le 60)&=\mathrm{P}(X\le 50+2\times 5)\\&=\mathrm{P}(X\le m+2\sigma)\\&=\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

16 $Z=\dfrac{X-30}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(27\le X\le a)=0.7745$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{27-30}{2}\le Z\le \dfrac{a-30}{2}\right)=0.7745$

$\mathrm{P}\left(-1.5\le Z\le \dfrac{a-30}{2}\right)=0.7745$

$\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{a-30}{2}\right)=0.7745$

$0.4332+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{a-30}{2}\right)=0.7745$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{a-30}{2}\right)=0.3413$

이때 주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\dfrac{a-30}{2}=1 \qquad \therefore a=32$

17 $Z_X=\dfrac{X-15}{4}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X>k)=0.045$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X>\dfrac{k-15}{4}\right)=0.045$

$\mathrm{P}(Z_X\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le \dfrac{k-15}{4}\right)=0.045$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le \dfrac{k-15}{4}\right)=0.045$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z_X\le \dfrac{k-15}{4}\right)=0.455$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z_X\le 1.69)=0.455$이므로

$\dfrac{k-15}{4}=1.69$

$\therefore k=21.76$

한편 $Z_Y=\dfrac{Y-25}{2}$로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y<k)&=\mathrm{P}(Y<21.76)\\&=\mathrm{P}\left(Z_Y<\frac{21.76-25}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_Y<-1.62)\\&=\mathrm{P}(Z_Y>1.62)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 1.62)\\&=0.5-0.447=0.053\end{aligned}$$

18 음료수 A, B의 무게를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(a, 3^2)$을 따르고, Y는 정규분포 $\mathrm{N}(2a, 4^2)$을 따른다.

$Z_X=\dfrac{X-a}{3}$, $Z_Y=\dfrac{Y-2a}{4}$로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

이때 $\mathrm{P}(X\geq 90)=\mathrm{P}(Y\leq 160)$이므로

$\mathrm{P}\left(Z_X\geq \frac{90-a}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\leq \frac{160-2a}{4}\right)$

한편 $\mathrm{P}\left(Z_Y\leq \frac{160-2a}{4}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\geq -\frac{160-2a}{4}\right)$이므로

$\frac{90-a}{3}=-\frac{160-2a}{4}$, $360-4a=6a-480$

$10a=840 \qquad \therefore a=84$

19 신입생의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(164, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-164}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\geq 175)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{175-164}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 2.2)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.2)$

$=0.5-0.486=0.014$

신입생 전체 학생 수는 1000명이므로 키가 175 cm 이상인 학생 수는 $1000\times 0.014=14$

따라서 키가 175 cm인 학생은 14번째로 크다고 할 수 있다.

20 지원자의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(300, 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-300}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

한편 경쟁률이 10 : 1이므로 한 명의 지원자가 합격할 확률은 $\frac{1}{10}=0.1$이다.

합격할 수 있는 최저 점수를 k라 하면

$\mathrm{P}(X\geq k)=0.1$에서

$\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{k-300}{10}\right)=0.1$

$\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{k-300}{10}\right)=0.1$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{k-300}{10}\right)=0.1$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{k-300}{10}\right)=0.4$

이때 주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.28)=0.4$이므로

$\frac{k-300}{10}=1.28$, $k-300=12.8 \qquad \therefore k=312.8$

따라서 합격할 수 있는 최저 점수는 312.8점이다.

06 이항분포와 정규분포의 관계

유제

본문 119~120쪽

01 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{5}=20$, $\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20, 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(16\leq X\leq 26)=\mathrm{P}\left(\frac{16-20}{4}\leq Z\leq \frac{26-20}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 1.5)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.3413+0.4332=0.7745$

답 0.7745

02 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(432, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=432\times\frac{1}{4}=108$, $\mathrm{V}(X)=432\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=81$

이때 432는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(108, 9^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-108}{9}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(99\leq X\leq 126)=\mathrm{P}\left(\frac{99-108}{9}\leq Z\leq \frac{126-108}{9}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 2)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$

답 0.8185

03 한 개의 주사위를 던져 4의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{2}=200$, $\mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=100$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200, 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-200}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(190\le X\le 220)=\mathrm{P}\left(\frac{190-200}{10}\le Z\le\frac{220-200}{10}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.3413+0.4772=0.8185$

답 0.8185

04 혈액형이 O형인 사람의 수를 확률변수 X라 하면 혈액형이 O형일 확률이 0.25이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}(300, 0.25)$를 따른다.
$\therefore \mathrm{E}(X)=300\times 0.25=75,\ \mathrm{V}(X)=300\times 0.25\times 0.75=56.25$
이때 300은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(75, 7.5^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\frac{X-75}{7.5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
$\therefore \mathrm{P}(X\le 90)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{90-75}{7.5}\right)=\mathrm{P}(Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.5+0.4772=0.9772$

답 0.9772

05 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로
$\mathrm{E}(X)=450\times\frac{2}{3}=300,\ \mathrm{V}(X)=450\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=100$
이때 450은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300, 10^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\frac{X-300}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(300\le X\le k)=\mathrm{P}\left(\frac{300-300}{10}\le Z\le\frac{k-300}{10}\right)$
$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-300}{10}\right)=0.38$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)=0.38$이므로 $\frac{k-300}{10}=1.2$
$\therefore k=312$

답 312

연습 문제

본문 121~122쪽

01 ⑤	02 ④	03 ⑤	04 0.8413
05 0.1587	06 ①	07 0.0062	08 ②
09 9	10 0.9759	11 0.0228	12 0.8413
13 228			

01 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로
$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{3}=\frac{n}{3},\ \mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2n}{9}$
따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{n}{3}, \frac{2n}{9}\right)$을 따르므로 $\frac{n}{3}=150,\ \frac{2n}{9}=\sigma^2$
$\therefore n=450,\ \sigma^2=100,\ \sigma=10$
$\therefore n+\sigma=460$

02 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로
$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{2}=50,\ \mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$
이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50, 5^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
$\therefore \mathrm{P}(X\le k)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-50}{5}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{k-50}{5}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2)$
즉 $-\frac{k-50}{5}=2$이므로 $k=40$

03 한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나오는 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(144, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.
ㄱ. $\mathrm{E}(X)=144\times\frac{1}{2}=72$
ㄴ. $\mathrm{V}(X)=144\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=36$이므로
$\mathrm{V}(2X-1)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times 36=144$
ㄷ. 144는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(72, 6^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\frac{X-72}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
$\therefore \mathrm{P}(66\le X\le 78)=\mathrm{P}\left(\frac{66-72}{6}\le Z\le\frac{78-72}{6}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.3413+0.3413=0.6826$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

04 100개의 제품 중 불량품의 개수를 확률변수 X라 하면 제품 1개가 불량품일 확률은 0.1이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100, 0.1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=100\times0.1=10,\ \mathrm{V}(X)=100\times0.1\times0.9=9$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(10, 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-10}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge7)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{7-10}{3}\right)=\mathrm{P}(Z\ge-1)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}(Z\ge0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(Z\ge0)\\&=0.3413+0.5=0.8413\end{aligned}$$

05 100장의 복권 중 당첨 복권의 개수를 확률변수 X라 하면 구입한 복권 1장이 당첨 복권일 확률은 $\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \dfrac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=100\times\dfrac{1}{5}=20,\ \mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=16$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20, 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge24)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{24-20}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\ge1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

06 108번의 시행 중 동전 3개가 모두 같은 면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. 동전 3개를 동시에 던져 3개 모두 앞면이 나오거나 뒷면이 나올 확률은 $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(108, \dfrac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=108\times\dfrac{1}{4}=27,\ \mathrm{V}(X)=108\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{81}{4}$

이때 108은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(27, \left(\dfrac{9}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-27}{\frac{9}{2}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge36)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{36-27}{\frac{9}{2}}\right)=\mathrm{P}(Z\ge2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

07 환자 192명 중 치유되는 환자의 수를 확률변수 X라 하면 환자 한 명이 치유될 확률은 $\dfrac{3}{4}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(192, \dfrac{3}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=192\times\dfrac{3}{4}=144,\ \mathrm{V}(X)=192\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=36$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(144, 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-144}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge159)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{159-144}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\ge2.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)\\&=0.5-0.4938=0.0062\end{aligned}$$

08 승객 400명 중 실제로 탑승하는 승객의 수를 확률변수 X라 하면 승객 한 명이 실제 탑승할 확률은 0.8이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}(400, 0.8)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=400\times0.8=320,\ \mathrm{V}(X)=400\times0.8\times0.2=64$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(320, 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-320}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}&\therefore \mathrm{P}(0.79\times400\le X\le0.84\times400)\\&=\mathrm{P}(316\le X\le336)=\mathrm{P}\left(\frac{316-320}{8}\le Z\le\frac{336-320}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le2)=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.1915+0.4772=0.6687\end{aligned}$$

09 25개의 문제 중에서 맞힌 문제의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25, \dfrac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=25\times\dfrac{1}{5}=5,\ \mathrm{V}(X)=25\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=4$

이때 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(5, 2^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-5}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge a)=0.02$에서

$\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{a-5}{2}\right)=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-5}{2}\right)=0.02$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-5}{2}\right)=0.48$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.48$이므로 $\dfrac{a-5}{2}=2$

$\therefore a=9$

10 주어진 식은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{1}{4}$인 사건이 48번의 독립시행 중 6번 이상 21번 이하 일어날 확률이다.
48번의 독립시행에서 이 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=48\times\frac{1}{4}=12$, $\mathrm{V}(X)=48\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=9$

이때 48은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(12, 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-12}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \text{(주어진 식)}&=\mathrm{P}(X=6)+\mathrm{P}(X=7)+\cdots+\mathrm{P}(X=21)\\&=\mathrm{P}(6\le X\le 21)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{6-12}{3}\le Z\le\frac{21-12}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 3)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)\\&=0.4772+0.4987=0.9759\end{aligned}$$

11 100번의 시행 중 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X, 뒷면이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면

$X+Y=100$ ⋯⋯ ㉠

점수가 100점인 경우는

$3X-2Y=100$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $X=60$, $Y=40$

즉 게임을 100번 독립적으로 시행한 후의 점수가 100점 이상이려면 $X\ge 60$이어야 한다. 이때 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{2}=50$, $\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50, 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge 60)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{60-50}{5}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

12 직선 $y=2x-a$와 곡선 $y=x^2-3x+2$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $2x-a=x^2-3x+2$, 즉
$x^2-5x+2+a=0$의 판별식을 D라 할 때 $D>0$이어야 한다.
즉 $D=(-5)^2-4(2+a)=17-4a>0$

$\therefore a<\frac{17}{4}=4.25$

따라서 주사위의 눈의 수가 1, 2, 3, 4일 때 주어진 직선과 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나므로 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다.

한 개의 주사위를 450번 던지는 시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450, \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=450\times\frac{2}{3}=300$, $\mathrm{V}(X)=450\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=100$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300, 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-300}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge 290)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{290-300}{10}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -1)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=0.3413+0.5=0.8413\end{aligned}$$

13 정사면체 모양의 상자 2개를 동시에 던졌을 때, 바닥에 닿은 면에 적힌 두 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 두 상자에 적힌 숫자가 모두 홀수일 때이다.

따라서 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$

1200번의 시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1200, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=1200\times\frac{1}{4}=300$, $\mathrm{V}(X)=1200\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=225$

이때 1200은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300, 15^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-300}{15}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 사건 A가 일어나는 횟수가 270번 이하일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 270)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{270-300}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -2)=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

즉 $p=0.0228$이므로 $10000p=10000\times 0.0228=228$

07 모집단과 표본

유제

본문 125~126쪽

01 확률의 총합은 1이므로

$0.3+0.4+a=1 \qquad \therefore a=0.3$

모평균을 m, 모분산을 σ^2이라 하면

$m=\mathrm{E}(X)=1\times0.3+3\times0.4+5\times0.3=3$

$\sigma^2=\mathrm{V}(X)=1^2\times0.3+3^2\times0.4+5^2\times0.3-3^2=2.4$

이때 표본의 크기가 3이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=3,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{2.4}{3}=0.8$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=3,\ \mathrm{V}(\overline{X})=0.8$

02 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 오른쪽 표와 같다.

X	2	3	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

이때 모평균을 m, 모분산을 σ^2이라 하면

$m=\mathrm{E}(X)=2\times\dfrac{3}{6}+3\times\dfrac{2}{6}+6\times\dfrac{1}{6}=3$

$\sigma^2=\mathrm{V}(X)=2^2\times\dfrac{3}{6}+3^2\times\dfrac{2}{6}+6^2\times\dfrac{1}{6}-3^2=2$

따라서 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=3,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{2}{2}=1$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=3,\ \mathrm{V}(\overline{X})=1$

03 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(8,\ \dfrac{4^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(8,\ 2^2)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-8}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\le11)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{11-8}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\le1.5)$

$=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$=0.5+0.4332=0.9332$

답 0.9332

04 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(175,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(175,\ \dfrac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(175,\ 2^2)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-175}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(177\le\overline{X}\le179)=\mathrm{P}\left(\dfrac{177-175}{2}\le Z\le\dfrac{179-175}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(1\le Z\le2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.4772-0.3413=0.1359$

답 0.1359

연습 문제

본문 127~128쪽

01 ③	**02** 336	**03** 60	**04** $\frac{2}{9}$
05 3	**06** $\mathrm{E}(\overline{X})=5,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{10}{3}$		**07** 10
08 ③	**09** 0.6687	**10** ①	**11** ⑤
12 $\frac{21}{8}$	**13** 25	**14** 200	

01 전수조사 : ㄱ, ㄹ

표본조사 : ㄴ, ㄷ

02 복원추출하는 방법의 수는 6장의 카드에서 중복을 허용하여 3장을 뽑는 방법의 수와 같으므로

$a={}_6\Pi_3=6^3=216$

비복원추출하는 방법의 수는 6장의 카드에서 3장을 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$b={}_6\mathrm{P}_3=6\times5\times4=120$

$\therefore a+b=216+120=336$

03 $\mathrm{E}(\overline{X})=50$에서 $\mathrm{E}(\overline{X})=m$이므로

$m=50$

$\mathrm{V}(\overline{X})=25$에서 $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{\sigma^2}{4}=25$이므로

$\sigma^2=100 \qquad \therefore \sigma=10$

$\therefore m+\sigma=60$

04 모평균을 m, 모분산을 σ^2이라 하면

$m=\mathrm{E}(X)=(-1)\times\dfrac{1}{6}+0\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

$\sigma^2=\mathrm{V}(X)=(-1)^2\times\dfrac{1}{6}+0^2\times\dfrac{1}{3}+1^2\times\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

이때 표본의 크기가 5이므로 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=\dfrac{1}{3},\ \mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{\frac{5}{9}}{5}=\dfrac{1}{9}$

따라서 $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=\dfrac{1}{9}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$

05 모평균을 m, 모분산을 σ^2이라 하면

$m=\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{1}{8}+1\times\dfrac{3}{8}+2\times\dfrac{3}{8}+3\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{2}$

$\sigma^2=\mathrm{V}(X)=0^2\times\dfrac{1}{8}+1^2\times\dfrac{3}{8}+2^2\times\dfrac{3}{8}+3^2\times\dfrac{1}{8}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

$\therefore \sigma=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

표본의 크기가 n일 때 표본평균 $\overline{X}$의 표준편차가 0.5이므로

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{n}}=0.5$$

$\sqrt{n}=\sqrt{3}$ $\quad\therefore n=3$

06 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

이때 X의 평균 m과 분산 σ^2은

$$m=\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{1}{9}+\cdots+9\times\frac{1}{9}=5$$

$$\sigma^2=\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{1}{9}+2^2\times\frac{1}{9}+\cdots+9^2\times\frac{1}{9}-5^2=\frac{20}{3}$$

따라서 표본의 크기가 2인 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m=5,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\frac{20}{3}}{2}=\frac{10}{3}$$

07 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{7}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{2}{7}=2$$

$$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{2}{7}+2^2\times\frac{3}{7}+3^2\times\frac{2}{7}-2^2=\frac{4}{7}$$

표본의 크기가 n일 때 표본평균 $\overline{X}$의 분산이 $\frac{2}{35}$이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{\frac{4}{7}}{n}=\frac{2}{35}\qquad\therefore n=10$$

08 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60,\ \frac{4^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(60,\ 1^2)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{\overline{X}-60}{1}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(58\le\overline{X}\le k)&=\mathrm{P}\left(\frac{58-60}{1}\le Z\le\frac{k-60}{1}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le k-60)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le k-60)\\&=0.4772+\mathrm{P}(0\le Z\le k-60)=0.9544\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le k-60)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$k-60=2$ $\quad\therefore k=62$

09 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(250,\ 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(250,\ \frac{20^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(250,\ 4^2)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{\overline{X}-250}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(248\le\overline{X}\le 258)&=\mathrm{P}\left(\frac{248-250}{4}\le Z\le\frac{258-250}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.1915+0.4772=0.6687\end{aligned}$$

10 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 6^2)$을 따르고 표본으로 뽑은 36명의 평균 사용 시간을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(30,\ \frac{6^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(30,\ 1^2)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{\overline{X}-30}{1}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 32)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{32-30}{1}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

11 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(80,\ \frac{8^2}{n}\right)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{\overline{X}-80}{\frac{8}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le 84)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{84-80}{\frac{8}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.99$$

그런데 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.49$에서

$\mathrm{P}(Z\le 2.5)=0.5+0.49=0.99$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=2.5,\ \sqrt{n}=5$ $\quad\therefore n=25$

12 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(0,\ \frac{4^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(0,\ \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-0}{\frac{4}{3}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

한편 정규분포 $N(3, 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(3, \frac{2^2}{16}\right)$, 즉 $N\left(3, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

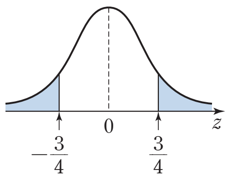
이때 $Z_Y=\dfrac{\overline{Y}-3}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(\overline{X}\ge 1)=P(\overline{Y}\le a)$에서

$$P\left(Z_X\ge \frac{1-0}{\frac{4}{3}}\right)=P\left(Z_Y\le \frac{a-3}{\frac{1}{2}}\right)$$

$\therefore P\left(Z_X\ge \frac{3}{4}\right)=P(Z_Y\le 2(a-3))$ …… ㉠

오른쪽 표준정규분포곡선에서



$P\left(Z_X\ge \frac{3}{4}\right)=P\left(Z_X\le -\frac{3}{4}\right)$

이므로 ㉠에서

$P\left(Z_X\le -\frac{3}{4}\right)=P(Z_Y\le 2(a-3))$

즉 $-\frac{3}{4}=2(a-3)$이므로 $a=\frac{21}{8}$

13 대중교통을 이용하여 출퇴근하는 직장인의 월 교통비를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(8, 1.2^2)$을 따르므로 직장인 n명을 임의추출하여 조사한 월 교통비의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=8$, $V(\overline{X})=\dfrac{1.2^2}{n}$

따라서 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(8, \left(\frac{1.2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z=\dfrac{\overline{X}-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}P(7.76\le \overline{X}\le 8.24)&=P\left(\frac{7.76-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\le Z\le \frac{8.24-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\right)\\&=P\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)\\&=2P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)\end{aligned}$$

이므로 $P(7.76\le \overline{X}\le 8.24)\ge 0.6826$에서

$2P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.6826$

$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.3413$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{5}\ge 1$, $\sqrt{n}\ge 5$ $\qquad\therefore n\ge 25$

따라서 구하는 n의 최솟값은 25이다.

14 한 개의 상자에 들어가는 귤의 개수는 100개이므로 귤 100개를 뽑아 그 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 모집단이 정규분포 $N(80, 10^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(80, \frac{10^2}{100}\right)$, 즉 $N(80, 1^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-80}{1}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

한편 불량품으로 분류하는 상자의 귤 100개의 무게의 합이 7800g 이하이므로 그 평균은 78g 이하이다.

따라서 불량품이 될 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le 78)&=P\left(Z\le \frac{78-80}{1}\right)\\&=P(Z\le -2)=P(Z\ge 2)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.48=0.02\end{aligned}$$

귤 100만 개로 10000개의 상자를 포장할 수 있으므로 불량품으로 판정되는 상자의 개수는

$10000\times 0.02=200$

08 모평균의 추정

유제

본문 130~132쪽

01 표본평균 $\overline{x}=50$, 표본의 크기 $n=49$, 표준편차 $\sigma=7$이므로 모평균 m의 신뢰도 95%인 신뢰구간은

$$50-1.96\times\frac{7}{\sqrt{49}}\le m\le 50+1.96\times\frac{7}{\sqrt{49}}$$

$\therefore 48.04\le m\le 51.96$

답 $48.04\le m\le 51.96$

02 표본평균 $\overline{x}=72$, 표본의 크기 $n=100$이고, n은 충분히 크므로 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 5를 이용한다.
모평균 m의 신뢰도 95%인 신뢰구간은

$$72-1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}\le m\le 72+1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 71.02\le m\le 72.98$

답 $71.02\le m\le 72.98$

03 표본평균 $\overline{x}=950$, 표본의 크기 $n=36$이고, n은 충분히 크므로 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 100을 이용한다.
모평균 m의 신뢰도 99%인 신뢰구간은

$$950-2.58\times\frac{100}{\sqrt{36}}\le m\le 950+2.58\times\frac{100}{\sqrt{36}}$$

$\therefore 907\le m\le 993$

답 $907\le m\le 993$

04 (1) 모표준편차가 4이고, 모평균 m의 신뢰도 95%인 신뢰구간 $a\le m\le b$에 대하여
$b-a=3.92$이므로

$$2\times 1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}=3.92,\ \sqrt{n}=4$$

$\therefore n=16$

(2) 표본평균 $\overline{x}=60$, 표본의 크기 $n=16$, 표준편차 $\sigma=4$이므로 신뢰도 95%인 신뢰구간은

$$60-1.96\times\frac{4}{\sqrt{16}}\le m\le 60+1.96\times\frac{4}{\sqrt{16}}$$

$\therefore 58.04\le m\le 61.96$

$\therefore a=58.04,\ b=61.96$

답 (1) 16 (2) $a=58.04$, $b=61.96$

05 표본의 크기를 n이라 하면 모표준편차가 5이고, 모평균 m의 신뢰도 99%인 신뢰구간 $a\le m\le b$에 대하여
$b-a\le 1.29$이므로

$$2\times 2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le 1.29,\ \sqrt{n}\ge 20$$

$\therefore n\ge 400$

따라서 표본의 최소 크기는 400이다.

답 400

06 표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은 $\overline{x}-1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}$

$$-1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le 1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}$$

$$|m-\overline{x}|\le 1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}$$

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 2 이하이어야 하므로

$$1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le 2,\ \sqrt{n}\ge 9.8 \qquad \therefore n\ge 96.04$$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 97이다.

답 97

07 표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 99%로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은 $\overline{x}-2.58\times\frac{0.25}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{0.25}{\sqrt{n}}$

$$-2.58\times\frac{0.25}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le 2.58\times\frac{0.25}{\sqrt{n}}$$

$$|m-\overline{x}|\le 2.58\times\frac{0.25}{\sqrt{n}}$$

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 0.05 이하이어야 하므로

$$2.58\times\frac{0.25}{\sqrt{n}}\le 0.05,\ \sqrt{n}\ge 12.9 \qquad \therefore n\ge 166.41$$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 167이다.

답 167

연습 문제

본문 133~134쪽

01 ②	**02** $232\le m\le 238$		**03** 2.58
04 ⑤	**05** ②	**06** ④	**07** ①
08 72	**09** 98	**10** ②	**11** ③

01 표본평균이 80, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m의 신뢰도 95%인 신뢰구간은

$$80-1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}\le m\le 80+1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 79.02\le m\le 80.98$

02 표본평균이 235, 모표준편차가 20, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m의 신뢰도 99%인 신뢰구간은

$$235-3\times\frac{20}{\sqrt{400}}\le m\le 235+3\times\frac{20}{\sqrt{400}}$$

$\therefore 232\le m\le 238$

참고 보통 모평균을 신뢰도 99%로 추정할 때 2.58을 사용하는 이유는 $\mathrm{P}(-2.58\le Z\le 2.58)=0.99$이기 때문이다.
그런데 이 문제에서는 조건으로 $\mathrm{P}(|Z|\le 3)=0.99$, 즉 $\mathrm{P}(-3\le Z\le 3)=0.99$가 주어져 있으므로 2.58이 아니라 3을 대입해야 한다.
문제에서 계산상의 편의를 위해 $\mathrm{P}(|Z|\le 2)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z|\le 3)=0.99$를 조건으로 주는 경우가 있으므로 무조건 1.96이나 2.58로 계산하여 실수하지 않도록 주의한다.

03 표본의 크기 100은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 5를 이용한다.
이때 표본평균이 173이므로 모평균 m의 신뢰도 99%인 신뢰구간은 $173-2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}\le m\le 173+2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}$
$\therefore 171.71\le m\le 174.29$
즉 $\alpha=171.71$, $\beta=174.29$이므로 $\beta-\alpha=2.58$

04 표본평균 $\overline{x}$를 구하면
$\overline{x}=\frac{26+15+17+27+29+14+13+10+11}{9}=18$
즉 표본평균이 18, 모표준편차가 6, 표본의 크기가 9이므로 모평균 m의 신뢰도 95%인 신뢰구간은
$18-2\times\frac{6}{\sqrt{9}}\le m\le 18+2\times\frac{6}{\sqrt{9}}$ $\quad\therefore 14\le m\le 22$
즉 $a=14$, $b=22$이므로 $a+b=36$

05 표본평균이 80, 모표준편차가 11이므로 모평균 m의 신뢰도 95%인 신뢰구간은
$80-2\times\frac{11}{\sqrt{n}}\le m\le 80+2\times\frac{11}{\sqrt{n}}$
이때 $78\le m\le 82$와 일치하여야 하므로 $2\times\frac{11}{\sqrt{n}}=2$, $\sqrt{n}=11$
$\therefore n=121$

06 모표준편차가 9이고, 모평균 m의 신뢰도 95%인 신뢰구간 $\alpha\le m\le\beta$에 대하여 $\beta-\alpha\le 3$이므로
$2\times 1.96\times\frac{9}{\sqrt{n}}\le 3$, $\sqrt{n}\ge 11.76$
$\therefore n\ge 138.2976$
따라서 구하는 n의 최솟값은 139이다.

07 신뢰도에 따른 신뢰구간
$\overline{x}-k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$에서
신뢰구간의 길이를 l이라 하면 $l=2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$\sigma=10$, $n=16$일 때 $l=8$이므로
$8=2\times k\times\frac{10}{\sqrt{16}}$ $\quad\therefore k=\frac{8}{5}$
이때 신뢰도를 그대로 유지하면서 신뢰구간의 길이가 4 이하가 되려면 $2\times\frac{8}{5}\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le 4$, $\sqrt{n}\ge 8$
$\therefore n\ge 64$
따라서 표본의 크기는 최소 64 이상이어야 한다.

08 모표준편차를 σ, 표본평균을 $\overline{x}$라 하자.
표본의 크기가 32인 신뢰도 95%의 신뢰구간 $a\le m\le b$에 대하여
$b-a=2\times 2\times\frac{\sigma}{\sqrt{32}}=\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
또 표본의 크기가 n인 신뢰도 99%의 신뢰구간 $c\le m\le d$에 대하여
$d-c=2\times 3\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6\sigma}{\sqrt{n}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠과 ㉡이 같으므로
$\frac{\sigma}{\sqrt{2}}=\frac{6\sigma}{\sqrt{n}}$, $\sqrt{n}=6\sqrt{2}$ $\quad\therefore n=72$

09 표본의 크기 100은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 500을 이용한다.
이때 모평균 m의 신뢰도 95%인 신뢰구간은
$\overline{x}-1.96\times\frac{500}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{500}{\sqrt{100}}$
$\therefore \overline{x}-98\le m\le\overline{x}+98$
이때 추정한 신뢰구간이 $\overline{x}-c\le m\le\overline{x}+c$이므로 $c=98$

10 표본평균이 84.5, 표본표준편차가 4.5이므로 모평균 m의 신뢰도 95%인 신뢰구간은
$\overline{x}-1.96\times\frac{4.5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{4.5}{\sqrt{n}}$
$-1.96\times\frac{4.5}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le 1.96\times\frac{4.5}{\sqrt{n}}$
$|m-\overline{x}|\le 1.96\times\frac{4.5}{\sqrt{n}}$
모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 1.4 이하이어야 하므로
$1.96\times\frac{4.5}{\sqrt{n}}\le 1.4$, $\sqrt{n}\ge 6.3$ $\quad\therefore n\ge 39.69$
따라서 표본의 크기의 최솟값은 40이다.

11 작년에 운행된 택시의 연간 주행거리를 확률변수 X라 하고, 모표준편차를 σ라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로
$Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 16이므로 모평균 m의 신뢰도 95%인 신뢰구간은
$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$
$\therefore \overline{x}-0.49\sigma\le m\le\overline{x}+0.49\sigma$
이때 추정한 신뢰구간이 $\overline{x}-c\le m\le\overline{x}+c$이므로 $c=0.49\sigma$
따라서 임의로 선택한 택시 1대의 연간 주행거리가 $m+c$ 이하일 확률은 $\mathrm{P}(X\le m+c)=\mathrm{P}(X\le m+0.49\sigma)$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{m+0.49\sigma-m}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0.49)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.49)$$
$$=0.5+0.1879=0.6879$$