개념과 유형이 하나로

개념+유형

확률과 통계

정답과 해설

I-1. 순열과 조합

01 여러 가지 순열

1 개념 CHECK p.8

1. 답 **120**

$(6-1)!=5!=120$

1 유제 & 문제 p.9~11

유제 01 답 (1) **144** (2) **144** (3) **24**

(1) A, B, C를 한 묶음으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)!=4!=24$

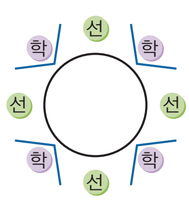
묶음 안에서 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times6=144$

(2) 선생님 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!=6$

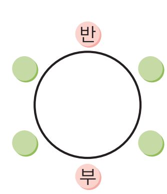
학생 4명은 선생님 사이사이의 4개의 자리에 앉아야 하므로 그 경우의 수는 ${}_4P_4=4!=24$



따라서 구하는 경우의 수는

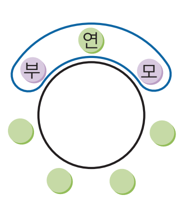
$6\times24=144$

(3) 반장의 자리가 결정되면 부반장의 자리는 마주 보는 자리에 고정된다. 따라서 구하는 경우의 수는 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같으므로 $(5-1)!=4!=24$



문제 01-1 답 **48**

부모님과 연우를 한 묶음으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)!=4!=24$



부모님이 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times2=48$

유제 02 답 **30**

가운데 원을 색칠하는 경우의 수는 5

나머지 4개의 도형을 색칠하는 경우의 수는 가운데 원에 칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times6=30$

문제 02-1 답 **12**

주황과 파랑을 한 묶음으로 생각하여 4가지 색을 칠하는 경우의 수는 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$

주황과 파랑이 칠해진 위치를 서로 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times2=12$

문제 02-2 답 **180**

서로 다른 6가지 색 중 크기가 다른 두 밑면을 색칠하는 경우의 수는 ${}_6P_2=30$

옆면을 색칠하는 경우의 수는 두 밑면에 칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

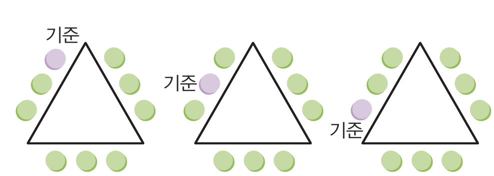
$30\times6=180$

유제 03 답 ③

9명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(9-1)!=8!$

정삼각형 모양의 탁자에서는 원형으로 둘러앉는 1가지 경우에 대하여 다음 그림과 같이 기준이 되는 자리에 따라 3가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

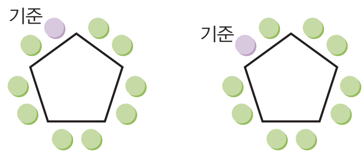
$8!\times3$

문제 **03-1** 답 **2**

10명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

정오각형 모양의 탁자에서는 원형으로 둘러앉는 1가지 경우에 대하여 다음 그림과 같이 기준이 되는 자리에 따라 2가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

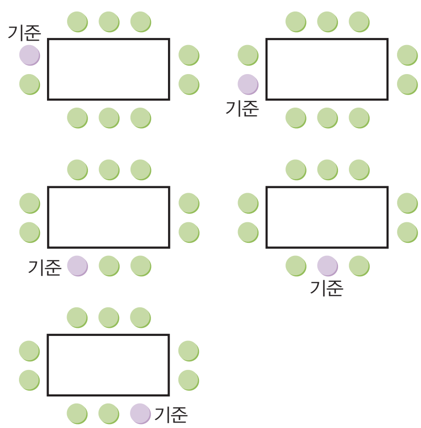
$9!\times2$ $\quad\therefore a=2$

문제 **03-2** 답 ③

10명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

직사각형 모양의 탁자에서는 원형으로 둘러앉는 1가지 경우에 대하여 다음 그림과 같이 기준이 되는 자리에 따라 5가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는 $9!\times5$

2 개념 CHECK p.12

1. 답 (1) **64** (2) **32** (3) **25** (4) **4**

(1) ${}_4\Pi_3=4^3=64$ (2) ${}_2\Pi_5=2^5=32$

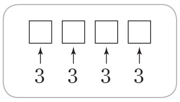
(3) ${}_5\Pi_2=5^2=25$ (4) ${}_4\Pi_1=4^1=4$

2. 답 (1) **125** (2) **81**

(1) 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

(2) 구하는 문자열의 개수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

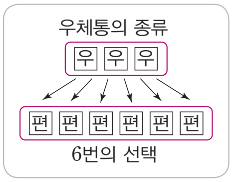


${}_3\Pi_4=3^4=81$

2 유제 & 문제 p.13~15

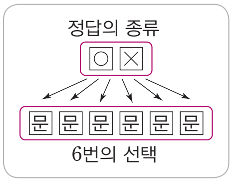
유제 **04** 답 (1) **729** (2) **64**

(1) 구하는 경우의 수는 중복이 가능한 서로 다른 3개의 우체통에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로



${}_3\Pi_6=3^6=729$

(2) 구하는 경우의 수는 ○, × 의 2개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로



${}_2\Pi_6=2^6=64$

문제 **04-1** 답 **62**

깃발을 1번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_1=2$

깃발을 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

깃발을 3번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

깃발을 4번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

깃발을 5번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 깃발을 1번 이상 5번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$2+4+8+16+32=62$

문제 **04-2** 답 **8**

두 기호 •와 —를 n개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 ${}_2\Pi_n=2^n$

만들 수 있는 서로 다른 신호가 200개 이상이므로

$2^n\ge200$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $2^7=128$, $2^8=256$이므로 ㉠을 만족하는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

개념편

유제 05 답 (1) **540** (2) **647**

(1) 짝수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 짝수인 수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 0, 2, 4의 3

$$\begin{array}{cccc} \boxed{\text{천}} & \boxed{\text{백}} & \boxed{\text{십}} & \boxed{\text{일}} \\ \uparrow & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\quad}} & \uparrow \\ 5 & \multicolumn{2}{c}{{}_6\Pi_2} & 3 \end{array}$$

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5

백의 자리와 십의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_6\Pi_2=6^2=36$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$3\times5\times36=540$

(2) 3000보다 큰 수는 3□□□, 4□□□, 5□□□의 꼴이다. 각각의 경우에 대하여 백의 자리와 십의 자리와 일의 자리에 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하면 되므로 $3\times{}_6\Pi_3=3\times6^3=648$

이 중에는 3000이 포함되어 있으므로 3000은 제외해야 한다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$648-1=647$

문제 05-1 답 **61**

2, 3, 4, 6, 9로 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수 중 숫자 2를 반드시 포함하는 자연수의 개수는 만들 수 있는 모든 세 자리의 자연수의 개수에서 숫자 2를 포함하지 않는 세 자리의 자연수의 개수를 빼서 구하면 된다.

만들 수 있는 모든 세 자리의 자연수의 개수는 5개의 숫자 중에서 3개의 숫자를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

숫자 2를 포함하지 않는 세 자리의 자연수의 개수는 2를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개의 숫자를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$125-64=61$

유제 06 답 **185**

X에서 Y로의 함수의 개수는 집합 Y의 5개의 원소 a, b, c, d, e에서 3개를 뽑아 집합 X의 3개의 원소 1, 2, 3에 각각 대응시키는 중복순열의 수와 같으므로

$a={}_5\Pi_3=5^3=125$

X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 집합 Y의 5개의 원소 a, b, c, d, e에서 서로 다른 3개를 뽑아 집합 X의 3개의 원소 1, 2, 3에 각각 대응시키는 순열의 수와 같으므로

$b={}_5P_3=60$

$\therefore a+b=125+60=185$

문제 06-1 답 **81**

$f(1)=0$이므로 구하는 함수의 개수는 집합 X에서 원소 1을 제외한 집합 $X'=\{2, 3, 4, 5\}$에서 집합 $Y=\{-1, 0, 1\}$로의 함수의 개수와 같다.

따라서 집합 Y의 3개의 원소에서 4개를 뽑아 집합 X'의 4개의 원소에 각각 대응시키는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

문제 06-2 답 **36**

치역과 공역이 같은 함수의 개수는 전체 함수의 개수에서 치역과 공역이 같지 않은 함수의 개수를 빼서 구한다.

X에서 Y로의 함수의 개수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

이 중에서 치역과 공역이 같지 않은 함수는 치역의 원소가 1개인 함수와 치역의 원소가 2개인 함수이다.

(i) 치역의 원소가 1개인 함수

치역이 $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$인 함수의 개수는 3

(ii) 치역의 원소가 2개인 함수

치역이 $\{a, b\}$인 함수의 개수는 공역이 $\{a, b\}$인 함수의 개수에서 치역이 $\{a\}$, $\{b\}$인 함수의 개수를 빼면 되므로

${}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$

같은 방법으로 치역이 $\{b, c\}$, $\{c, a\}$인 함수의 개수도 각각 14이므로 치역이 $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$인 함수의 개수는

$3\times14=42$

(i), (ii)에 의해 치역과 공역이 같은 함수의 개수는

$81-(3+42)=36$

3 개념 CHECK

p.16

1. 답 **30**

5개의 숫자 중 1이 2개, 2가 2개이므로 구하는 자연수의 개수는

$\dfrac{5!}{2!\times2!}=30$

2. 답 **60**

6개의 문자 중 a가 3개, n이 2개이므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!\times2!}=60$

유제 07 답 (1) **78** (2) **7**

(1) 0, 1, 1, 2, 2, 3을 모두 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 짝수는 □□□□□0, □□□□□2의 꼴이다.

(i) □□□□□0 꼴인 짝수의 개수

0을 뺀 나머지 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같고, 이때 1이 2개, 2가 2개이므로

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

(ii) □□□□□2 꼴인 짝수의 개수

0, 1, 1, 2, 3의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 5개의 숫자 중 1이 2개이므로 $\frac{5!}{2!}=60$

0□□□□2 꼴의 순열의 수는 1, 1, 2, 3의 4개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같고, 이때 1이 2개이므로 $\frac{4!}{2!}=12$

따라서 만들 수 있는 짝수의 개수는 $60-12=48$

(i), (ii)에 의해 구하는 짝수의 개수는

$30+48=78$

(2) 2, 2, 2, 3, 3의 5개의 숫자에서 3개의 숫자를 택하는 서로 다른 경우는 (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 3)이다.

(i) (2, 2, 2)로 만들 수 있는 자연수의 개수는 1

(ii) (2, 2, 3)으로 만들 수 있는 자연수의 개수는 2가 2개이므로 $\frac{3!}{2!}=3$

(iii) (2, 3, 3)으로 만들 수 있는 자연수의 개수는 3이 2개이므로 $\frac{3!}{2!}=3$

(i), (ii), (iii)에 의해 구하는 자연수의 개수는

$1+3+3=7$

유제 08 답 (1) **2520** (2) **2520** (3) **15120**

(1) e□□□□□□□e와 같이 양 끝에 e를 고정하고 중간에 x, c, e, l, l, n, t의 7개의 문자를 일렬로 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는 $\frac{7!}{2!}=2520$

(2) 3개의 문자 e를 하나의 문자 P로 생각하여 P, x, c, l, l, n, t의 7개의 문자를 일렬로 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는 $\frac{7!}{2!}=2520$

(3) c, t를 모두 ○로 놓고 e, x, ○, e, l, l, e, n, ○의 9개의 문자를 일렬로 배열한 후 첫 번째 ○는 c로, 두 번째 ○는 t로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$\frac{9!}{3!\times2!\times2!}=15120$

문제 08-1 답 **7560**

happiness에서 모음 a, i, e를 하나의 문자 X로 생각하여 h, p, p, n, s, s, X의 7개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 p와 s가 각각 2개씩이므로

$\frac{7!}{2!\times2!}=1260$

모음 a, i, e가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$1260\times6=7560$

문제 08-2 답 **168**

diligent의 자음을 알파벳 순서로 배열하면 d, g, l, n, t이고, 순서가 일정하므로 d, g, l, n, t를 모두 ○로 놓고 i, i, e, ○, ○, ○, ○, ○의 8개의 문자를 일렬로 배열한 후 ○를 앞에서부터 순서대로 d, g, l, n, t로 바꾸면 된다.

이때 i가 2개, ○가 5개이므로 구하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!\times5!}=168$

유제 09 답 **132**

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라 하자.

A 지점에서 Y 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 오른쪽으로 5칸, 위쪽으로 4칸이므로 a, a, a, a, a, b, b, b, b를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다.

$\therefore \frac{9!}{5!\times4!}=126$

A 지점에서 X 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 2칸이므로 a, a, b, b를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다.

$\therefore \frac{4!}{2!\times2!}=6$

X 지점에서 Y 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 오른쪽으로 3칸, 위쪽으로 2칸이므로 a, a, a, b, b를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다.

$\therefore \frac{5!}{3!\times2!}=10$

따라서 A 지점에서 X 지점을 거치지 않고 Y 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

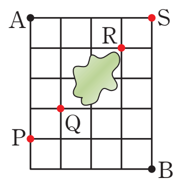
$126-6\times10=66$

이때 Y 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 2이므로 구하는 최단 거리로 가는 경우의 수는

$66\times2=132$

문제 09-1 답 66

오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 P, Q, R, S 중 어느 한 지점을 반드시 거치는 한편 P, Q, R, S를 동시에 거쳐 최단 거리로 가는 경우는 없으므로 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는 A → P → B, A → Q → B, A → R → B, A → S → B의 네 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.



(ⅰ) A → P → B로 가는 경우의 수는

$$1\times\frac{5!}{4!}=5$$

(ⅱ) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\times\frac{5!}{3!\times2!}=40$$

(ⅲ) A → R → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\times\frac{5!}{4!}=20$$

(ⅳ) A → S → B로 가는 경우의 수는

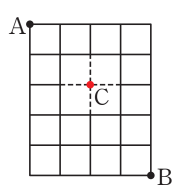
$$1\times1=1$$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의해 구하는 최단 거리로 가는 경우의 수는

$5+40+20+1=66$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 그 길이 만나는 곳을 C 지점이라 하면 구하는 최단 거리로 가는 경우의 수는 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 C 지점을 거쳐 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로



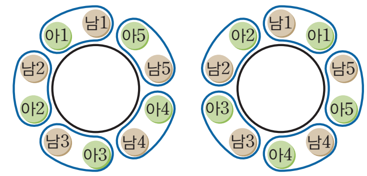
$$\frac{9!}{4!\times5!}-\left(\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{5!}{2!\times3!}\right)=126-60=66$$

기본 연습문제 p.20~21

1 48	2 ①	3 360	4 81	5 ①
6 30	7 192	8 22	9 ⑤	10 54

1 각 부부를 한 묶음으로 생각하면 5쌍의 부부가 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)!=4!=24$

이때 남편과 아내가 교대로 앉으므로 모든 아내들은 다음 그림과 같이 자기 남편의 왼쪽 또는 오른쪽에만 앉을 수 있는 2가지 경우가 있다.



따라서 구하는 경우의 수는 $24\times2=48$

2 정육면체의 모든 면은 합동이므로 특정한 색을 한 밑면에 칠하여 자리를 고정하면 다른 밑면을 칠하는 경우의 수는 5이다.

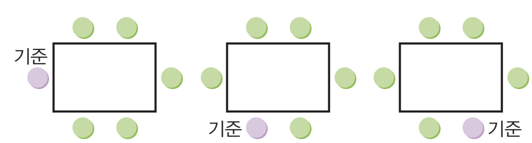
이때 옆면을 칠하는 경우의 수는 두 밑면에 칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로 $(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $5\times6=30$

3 6명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

직사각형 모양의 탁자에서는 원형으로 둘러앉는 1가지 경우에 대하여 다음 그림과 같이 기준이 되는 자리에 따라 3가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는 $120\times3=360$

4 서로 다른 지역의 3개의 숙소가 중복이 가능하므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$\therefore {}_3\Pi_4=3^4=81$

5 2개의 숫자 1, 2로 중복을 허용하여 만들 수 있는 자연수 m 중에서 $10<m<10000$을 만족하는 것은 두 자리의 자연수, 세 자리의 자연수, 네 자리의 자연수이므로 각 경우의 자연수의 개수를 구하면

(ⅰ) 두 자리의 자연수의 개수 ➡ ${}_2\Pi_2=2^2=4$

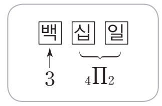
(ⅱ) 세 자리의 자연수의 개수 ➡ ${}_2\Pi_3=2^3=8$

(ⅲ) 네 자리의 자연수의 개수 ➡ ${}_2\Pi_4=2^4=16$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 구하는 자연수 m의 개수는

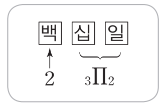
$4+8+16=28$

6 0, 1, 2, 3으로 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는



$3\times{}_4\Pi_2=3\times4^2=48$

숫자 1을 포함하지 않는 세 자리의 자연수의 개수는



$2\times{}_3\Pi_2=2\times3^2=18$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$48-18=30$

7 $f(3)\neq0$에서 집합 X의 원소 3에 대응시킬 수 있는 수는 0을 제외한 3개이므로 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 3이다.

또 $f(2)=0$이므로 집합 Y의 원소 0, 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 4, 5에 대응시키면 되므로 $f(1)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 함수의 개수는

$3\times64=192$

8 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

7개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3에서 4개를 택하였을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는 (1, 1, 2, 2), (1, 2, 3, 3), (2, 2, 2, 3)의 3가지가 있다.

(i) (1, 1, 2, 2)로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 $\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

(ii) (1, 2, 3, 3)으로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

(iii) (2, 2, 2, 3)으로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

(i), (ii), (iii)에 의해 구하는 자연수의 개수는

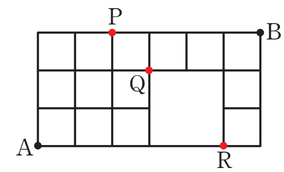
$6+12+4=22$

9 W, N, S, Y의 순서가 일정하므로 W, N, S, Y를 모두 ○로 놓고, ○, E, D, ○, E, ○, D, A, ○의 9개의 문자를 일렬로 배열한 후 나열된 4개의 ○를 앞에서부터 순서대로 W, N, S, Y로 바꾸면 된다.

이때 E가 2개, D가 2개, ○가 4개이므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{9!}{2!\times2!\times4!}=3780$

10 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R를 잡으면 P, Q, R 중 어느 한 지점을 반드시 거치는 한편 P, Q, R를 동시에 거쳐 최단 거리로 가는 경우는 없으므로 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는 A → P → B, A → Q → B, A → R → B의 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.



(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\times3!}\times1=10$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!\times2!}\times\dfrac{4!}{3!}=40$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

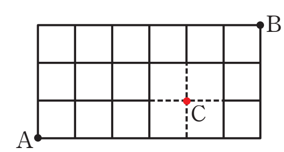
$1\times\dfrac{4!}{3!}=4$

(i), (ii), (iii)에 의해 구하는 최단 거리로 가는 경우의 수는

$10+40+4=54$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 길이 없는 부분을 점선으로 연결하고 그 길이 만나는 곳을 C 지점이라 하면 구하는 최단 거리로 가는 경우의 수는 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 C 지점을 거쳐 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로



$\dfrac{9!}{6!\times3!}-\dfrac{5!}{4!}\times\dfrac{4!}{2!\times2!}=84-5\times6=54$

실전 연습문제 p.22

1 22 **2** 131 **3** 35 **4** ③

1 수신 가능한 문자열의 개수는 전체 경우의 수에서 a가 연속되어 수신이 불가능한 경우의 수를 뺀 것과 같다.

3개의 문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 만들 수 있는 문자열의 개수는 $_3\Pi_3=3^3=27$

이때 a가 연속하여 있는 경우의 수는

(i) a가 2개, b가 1개인 경우는 aab, baa의 2개

(ii) a가 2개, c가 1개인 경우는 aac, caa의 2개

(iii) a가 3개인 경우는 aaa의 1개

(i), (ii), (iii)에 의해 수신이 불가능한 문자열의 개수는

$2+2+1=5$

따라서 구하는 수신 가능한 문자열의 개수는 $27-5=22$

2 ○, △, ×가 표시되는 경우의 수는 ○, △, ×에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{3}\Pi_{5}=3^5=243$

(i) ○가 0번 표시되는 경우

5개 음식점에 △ 또는 ×가 표시되는 경우의 수와 같으므로 ${}_{2}\Pi_{5}=2^5=32$

(ii) ○가 1번 표시되는 경우

5개 음식점 중 1개에 ○가 표시되고 나머지 4개의 음식점에 △ 또는 ×가 표시되는 경우의 수와 같으므로

$5\times{}_{2}\Pi_{4}=5\times2^4=80$

(i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는

$243-(32+80)=131$

3 학생 A가 가위바위보를 하여 이기는 횟수를 x, 지는 횟수를 y라 하면 7번의 가위바위보를 하므로

$x+y=7$ …… ㉠

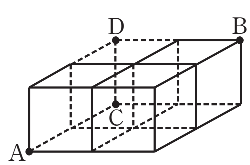
또 이기면 두 계단을, 지면 한 계단을 올라가 총 10계단을 올라가므로

$2x+y=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=4$

따라서 7개의 숫자 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{7!}{3!\times4!}=35$

4 오른쪽 그림과 같이 정육면체 4개가 붙어 있다고 할 때, 오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 뒤쪽으로 한 칸 가는 것을 b, 위로 한 칸 가는 것을 c라 하면 꼭짓점 A를 출발하여 꼭짓점 B까지 정육면체의 모서리를 따라 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, b, b, c를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{5!}{2!\times2!}=30$



이때 구하는 경우의 수는 꼭짓점 A를 출발하여 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 꼭짓점 A를 출발하여 C 또는 D를 거쳐 꼭짓점 B로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

(i) A → C → B로 가는 경우의 수는

$1\times\frac{3!}{2!}=3$

(ii) A → D → B로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times1=3$

그런데 (i), (ii)에서 A → C → D → B로 가는 경우 1가지가 중복되어 있으므로 구하는 경우의 수는

$30-(3+3-1)=25$

02 중복조합과 이항정리

1 개념 CHECK p.24

1. 답 (1) **20** (2) **5** (3) **1** (4) **126**

(1) ${}_{4}H_{3}={}_{4+3-1}C_{3}={}_{6}C_{3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

(2) ${}_{2}H_{4}={}_{2+4-1}C_{4}={}_{5}C_{4}={}_{5}C_{1}=5$

(3) ${}_{5}H_{0}={}_{5+0-1}C_{0}={}_{4}C_{0}=1$

(4) ${}_{5}H_{5}={}_{5+5-1}C_{5}={}_{9}C_{5}={}_{9}C_{4}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

2. 답 (1) **56** (2) **330**

(1) 서로 다른 4개의 숫자 중에서 순서를 생각하지 않고 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}H_{5}={}_{4+5-1}C_{5}={}_{8}C_{5}={}_{8}C_{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

(2) 서로 다른 5명의 학생 중에서 순서를 생각하지 않고 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{5}H_{7}={}_{5+7-1}C_{7}={}_{11}C_{7}={}_{11}C_{4}=\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$

1 유제 & 문제 p.25~27

유제 01 답 (1) **220** (2) **21**

(1) 4명의 각 후보가 9명의 유권자로부터 받는 득표의 수의 가짓수, 즉 투표 결과의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}H_{9}={}_{4+9-1}C_{9}={}_{12}C_{9}={}_{12}C_{3}=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$

(2) 각 색깔의 공을 1개씩 미리 꺼내 놓으면 구하는 경우의 수는 3종류의 공에서 나머지 5개를 꺼내는 경우의 수와 같다. 즉, 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{5}={}_{3+5-1}C_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

문제 01-1 답 **165**

바둑통 A, B에 각각 3개, 2개의 바둑돌을 미리 담아 놓으면 구하는 경우의 수는 4개의 바둑통에 나머지 8개의 바둑돌을 나누어 담는 경우의 수와 같다.

즉, 서로 다른 4개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}H_{8}={}_{11}C_{8}={}_{11}C_{3}=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$

문제 **01-2** 답 **15**

주머니에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 모두 같은 수일 수도 있으므로 5개의 공을 택하여 크기순으로 나열하는 경우의 수는 1, 2, 3의 세 수에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

이 중에서 5개의 수의 합이 12 이상인 경우는 33333, 23333, 22333, 22233, 13333, 12333의 6가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $21-6=15$

유제 **02** 답 (1) **220** (2) **56**

(1) 방정식 $x+y+z+w=9$의 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 4개의 문자 x, y, z, w에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$

(2) x, y, z, w가 모두 양의 정수해이므로

$x\ge1$, $y\ge1$, $z\ge1$, $w\ge1$

$\therefore\ x-1\ge0$, $y-1\ge0$, $z-1\ge0$, $w-1\ge0$

이때 $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$, $w-1=d$라 하면

$x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$, $w=d+1$

이를 방정식 $x+y+z+w=9$에 대입하면

$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)=9$

$\therefore\ \underbrace{a+b+c+d=5}_{x,\ y,\ z,\ w\text{를 미리 1개씩 택한 경우로 볼 수 있다.}}$ (단, $a\ge0$, $b\ge0$, $c\ge0$, $d\ge0$) …… ㉠

따라서 구하는 해의 개수는 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수, 즉 서로 다른 4개의 문자 a, b, c, d에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

문제 **02-1** 답 **91**

x, y, z가 $x\ge-1$, $y\ge-1$, $z\ge-1$인 정수이므로

$x+1\ge0$, $y+1\ge0$, $z+1\ge0$

이때 $x+1=p$, $y+1=q$, $z+1=r$라 하면

$x=p-1$, $y=q-1$, $z=r-1$

이를 방정식 $x+y+z=9$에 대입하면

$(p-1)+(q-1)+(r-1)=9$

$\therefore\ p+q+r=12$ (단, $p\ge0$, $q\ge0$, $r\ge0$) …… ㉠

따라서 구하는 해의 개수는 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수, 즉 서로 다른 3개의 문자 p, q, r에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=\dfrac{14\times13}{2\times1}=91$

유제 **03** 답 (1) **840** (2) **35** (3) **210**

(1) 주어진 조건을 만족하는 함수 f는 일대일함수이다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 정의역의 원소 4개에 대응할 공역의 원소 7개 중 4개를 택한 후 순서를 생각하여 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로

${}_7P_4=7\times6\times5\times4=840$

(2) 주어진 조건에 의해 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대한 함숫값 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 대소 관계는

$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$ …… ㉠

따라서 이를 만족하는 함수 f의 개수는 정의역의 원소 4개에 대응할 공역의 원소 7개 중 4개를 순서에 상관없이 뽑은 후 ㉠을 만족하도록 크기순으로 배열하면 되는 조합의 수와 같으므로

${}_7C_4={}_7C_3$

$=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

(3) 주어진 조건에 의해 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대한 함숫값 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 대소 관계는

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$ …… ㉠

따라서 이를 만족하는 함수 f의 개수는 정의역의 원소 4개에 대응할 공역의 원소 7개 중 4개를 순서에 상관없이 중복을 허용하여 뽑은 후 ㉠을 만족하도록 크기순으로 배열하면 되는 중복조합의 수와 같으므로

${}_7H_4={}_{10}C_4$

$=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

문제 **03-1** 답 **63**

$f(3)=6$이므로 주어진 조건에 의해 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대한 함숫값 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 대소 관계는

$f(1)\le f(2)\le f(3)=6\le f(4)$

정의역의 원소 1, 2에 대응할 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 2개를 순서에 상관없이 중복을 허용하여 뽑은 후 $f(1)\le f(2)\le6$이 되도록 크기순으로 배열하면 되는 중복조합의 수는

${}_6H_2={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

또 정의역의 원소 4에는 공역의 원소 6, 7, 8 중 1개를 뽑아 대응시키면 되므로 $f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 3개이다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$21\times3=63$

2 개념 CHECK p.28

1. 답 (1) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

(2) $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$

(1) $(x+2y)^3={}_3C_0x^3+{}_3C_1x^2(2y)+{}_3C_2x(2y)^2+{}_3C_3(2y)^3$
$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

(2) $(x-1)^5={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4(-1)+{}_5C_2x^3(-1)^2$
$+{}_5C_3x^2(-1)^3+{}_5C_4x(-1)^4+{}_5C_5(-1)^5$
$=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$

2 유제 & 문제 p.29~30

유제 04 답 (1) 40 (2) 60

(1) $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(x^2)^{5-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_5C_r2^r\frac{x^{10-2r}}{x^r} \quad \cdots\cdots ㉠$$

x^4항은 $10-2r-r=4$일 때이므로 $r=2$

따라서 ㉠의 ${}_5C_r2^r$에 $r=2$를 대입하면 x^4의 계수는

${}_5C_22^2=10\times4=40$

(2) $\left(2x-\dfrac{1}{y}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r(2x)^{6-r}\left(-\frac{1}{y}\right)^r={}_6C_r2^{6-r}(-1)^r\frac{x^{6-r}}{y^r} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\dfrac{x^2}{y^4}$항은 $6-r=2$, $r=4$일 때이므로 $r=4$

따라서 ㉠의 ${}_6C_r2^{6-r}(-1)^r$에 $r=4$를 대입하면 $\dfrac{x^2}{y^4}$의 계수는

${}_6C_42^2(-1)^4=15\times4\times1=60$

문제 04-1 답 -2

$\left(ax-\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(ax)^{4-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_ra^{4-r}(-1)^r\frac{x^{4-r}}{x^r} \quad \cdots\cdots ㉠$$

x^2항은 $4-r-r=2$일 때이므로 $r=1$

㉠의 ${}_4C_ra^{4-r}(-1)^r$에 $r=1$을 대입하면

${}_4C_1a^3(-1)^1=-4a^3$

이때 x^2의 계수가 32이므로

$-4a^3=32$, $a^3=-8$

$\therefore a=-2$ ($\because$ a는 실수)

문제 04-2 답 5

$\left(x+\dfrac{1}{x^n}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_rx^{6-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r={}_6C_r\frac{x^{6-r}}{x^{nr}}$$

상수항은 $6-r-nr=0$일 때이므로

$r(1+n)=6 \quad \cdots\cdots ㉠$

이때 r는 $0\le r\le6$인 정수이고, n은 자연수이므로

㉠을 만족하는 r, n의 순서쌍 (r, n)은

$(3, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 5)$

따라서 n의 최댓값은 5이다.

유제 05 답 (1) 16 (2) -10

(1) $(1+x)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3C_rx^r$

$(2-x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_s2^{4-s}(-x)^s={}_4C_s2^{4-s}(-1)^sx^s$

따라서 $(1+x)^3(2-x)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_3C_rx^r\times{}_4C_s2^{4-s}(-1)^sx^s={}_3C_r{}_4C_s(-1)^s2^{4-s}x^{r+s} \quad \cdots\cdots ㉠$$

x항은 $r+s=1$($0\le r\le3$, $0\le s\le4$인 정수)일 때이므로

$r=1$, $s=0$ 또는 $r=0$, $s=1$

(i) $r=1$, $s=0$인 경우

㉠에서 ${}_3C_1{}_4C_0(-1)^02^4x=48x$

(ii) $r=0$, $s=1$인 경우

㉠에서 ${}_3C_0{}_4C_1(-1)^12^3x=-32x$

(i), (ii)에 의해 구하는 x의 계수는

$48+(-32)=16$

(2) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_rx^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r(-1)^r\frac{x^{5-r}}{x^r} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(x^2-x)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5=x^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5-x\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$의

전개식에서 x^2항은

(i) x^2과 ㉠의 상수항의 곱

(ii) $-x$와 ㉠의 x항의 곱

일 때 나타난다.

(i) ㉠의 상수항은 $5-r-r=0$일 때이므로 $r=\dfrac{5}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le5$인 정수이므로 ㉠에서 상수항은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠의 x항은 $5-r-r=1$일 때이므로 $r=2$

㉠에서 ${}_5C_2(-1)^2x=10x$

(i), (ii)에 의해 x^2항은 $-x\times10x=-10x^2$

따라서 x^2의 계수는 -10이다.

문제 05-1 답 **3**

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r\,x^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r\,\frac{x^{6-r}}{x^r} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(ax^2-2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6=ax^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-2\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의

전개식에서 x^2항은

(i) ax^2과 ㉠의 상수항의 곱

(ii) -2와 ㉠의 x^2항의 곱

일 때 나타난다.

(i) ㉠의 상수항은 $6-r-r=0$, 즉 $r=3$일 때이므로

$\quad {}_6C_3=20$

(ii) ㉠의 x^2항은 $6-r-r=2$, 즉 $r=2$일 때이므로

$\quad {}_6C_2\,x^2=15x^2$

(i), (ii)에 의해 x^2항은

$ax^2\times20+(-2)\times15x^2=(20a-30)x^2$

이때 x^2의 계수가 30이므로

$20a-30=30 \qquad \therefore a=3$

3 유제 & 문제

p.33~35

유제 06 답 ④

$${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$$
$$=\underline{{}_3C_3+{}_3C_2}+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$$
$$=\underline{{}_4C_3+{}_4C_2}+\cdots+{}_{10}C_2$$
$$={}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_2$$
$$\vdots$$
$$=\underline{{}_{10}C_3+{}_{10}C_2}$$
$$={}_{11}C_3$$

${}_2C_2={}_3C_3$

${}_3C_2+{}_3C_3={}_4C_3$

${}_4C_2+{}_4C_3={}_5C_3$

문제 06-1 답 (1) **35** (2) **70**

(1) $${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4$$
$$=\underline{{}_3C_0+{}_3C_1}+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4$$
$$=\underline{{}_4C_1+{}_4C_2}+{}_5C_3+{}_6C_4$$
$$=\underline{{}_5C_2+{}_5C_3}+{}_6C_4$$
$$=\underline{{}_6C_3+{}_6C_4}$$
$$={}_7C_4=35$$

${}_2C_0={}_3C_0$

${}_3C_0+{}_3C_1={}_4C_1$

${}_4C_1+{}_4C_2={}_5C_2$

${}_5C_2+{}_5C_3={}_6C_3$

(2) $${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3$$
$$=\underline{{}_4C_4+{}_4C_3}+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3$$
$$=\underline{{}_5C_4+{}_5C_3}+{}_6C_3+{}_7C_3$$
$$=\underline{{}_6C_4+{}_6C_3}+{}_7C_3$$
$$=\underline{{}_7C_4+{}_7C_3}$$
$$={}_8C_4=70$$

${}_3C_3={}_4C_4$

${}_4C_3+{}_4C_4={}_5C_4$

${}_5C_3+{}_5C_4={}_6C_4$

${}_6C_3+{}_6C_4={}_7C_4$

문제 06-2 답 **126**

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r\,x^r$이고 $4\le n\le8$인 경우에만 x^4항이 나온다.

$(1+x)^4$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_4C_4$

$(1+x)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_5C_4$

$\quad\vdots$

$(1+x)^8$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_8C_4$

따라서 x^4의 계수는

$${}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4$$
$$=\underline{{}_5C_5+{}_5C_4}+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4$$
$$=\underline{{}_6C_5+{}_6C_4}+{}_7C_4+{}_8C_4$$
$$=\underline{{}_7C_5+{}_7C_4}+{}_8C_4$$
$$=\underline{{}_8C_5+{}_8C_4}$$
$$={}_9C_5=126$$

${}_4C_4={}_5C_5$

${}_5C_4+{}_5C_5={}_6C_5$

${}_6C_4+{}_6C_5={}_7C_5$

${}_7C_4+{}_7C_5={}_8C_5$

다른 풀이 수학 I 을 학습한 학생은 등비수열의 합을 이용하여 다음과 같이 풀 수 있습니다.

$$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^8 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠은 첫째항이 $1+x$, 공비가 $1+x$, 항의 개수가 8인 등비수열의 합이므로

$$\frac{(1+x)\{(1+x)^8-1\}}{(1+x)-1}=\frac{(1+x)^9-(1+x)}{x} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 전개식에서 x^4의 계수는 ㉡의 $(1+x)^9$의 전개식에서 x^5의 계수와 같다.

이때 $(1+x)^9$의 전개식의 일반항은 ${}_9C_r\,x^r$

따라서 $r=5$일 때이므로 구하는 계수는

${}_9C_5=126$

유제 07 답 (1) **8** (2) **1**

(1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-{}_nC_0=2^n-1$

$200<{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n<300$에서

$200<2^n-1<300,\ 201<2^n<301$

이때 $2^7=128,\ 2^8=256,\ 2^9=512$이므로

$n=8$

(2) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n\,{}_nC_n=0$이므로

${}_{30}C_0-{}_{30}C_1+{}_{30}C_2-\cdots-{}_{30}C_{29}+{}_{30}C_{30}=0$

${}_{30}C_0-({}_{30}C_1-{}_{30}C_2+\cdots+{}_{30}C_{29}-{}_{30}C_{30})=0$

$\therefore {}_{30}C_1-{}_{30}C_2+\cdots+{}_{30}C_{29}-{}_{30}C_{30}={}_{30}C_0=1$

문제 **07-1** 답 **9**

${}_{18}C_0+{}_{18}C_2+{}_{18}C_4+\cdots+{}_{18}C_{18}=2^{18-1}=2^{17}$

또 ${}_9C_0+{}_9C_1+\cdots+{}_9C_4={}_9C_9+{}_9C_8+\cdots+{}_9C_5$이고

$({}_9C_0+{}_9C_1+\cdots+{}_9C_4)+({}_9C_5+{}_9C_6+\cdots+{}_9C_9)=2^9$이므로

$2({}_9C_0+{}_9C_1+\cdots+{}_9C_4)=2^9$

$\therefore\ {}_9C_0+{}_9C_1+\cdots+{}_9C_4=2^8$

따라서 $\dfrac{{}_{18}C_0+{}_{18}C_2+{}_{18}C_4+\cdots+{}_{18}C_{18}}{{}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4}=\dfrac{2^{17}}{2^8}=2^9$이므로

$n=9$

문제 **07-2** 답 **512**

$n(A)=10$이므로 집합 A의 부분집합 중

원소의 개수가 1인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_1$

원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_3$

원소의 개수가 5인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_5$

원소의 개수가 7인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_7$

원소의 개수가 9인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_9$

$\therefore\ {}_{10}C_1+{}_{10}C_3+{}_{10}C_5+{}_{10}C_7+{}_{10}C_9=2^{10-1}$

$=2^9=512$

유제 **08** 답 (1) $\mathbf{4^{10}}$ (2) **21**

(1) $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=3$, $n=10$을 대입하면

${}_{10}C_0+3\,{}_{10}C_1+3^2\,{}_{10}C_2+\cdots+3^{10}\,{}_{10}C_{10}=(1+3)^{10}$

$=4^{10}$

(2) $21=1+20$이므로

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=20$, $n=21$을 대입하면

$21^{21}=(1+20)^{21}$

$={}_{21}C_0+20\,{}_{21}C_1+20^2\,{}_{21}C_2+20^3\,{}_{21}C_3+\cdots+20^{21}\,{}_{21}C_{21}$

$=1+20\times21+20^2({}_{21}C_2+20\,{}_{21}C_3+\cdots+20^{19}\,{}_{21}C_{21})$

$=421+400({}_{21}C_2+20\,{}_{21}C_3+\cdots+20^{19}\,{}_{21}C_{21})$

따라서 21^{21}을 40으로 나누었을 때의 나머지는 421을 40으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 구하는 나머지는 21이다.

문제 **08-1** 답 ⑤

$f(x)={}_{10}C_x4^{10-x}={}_{10}C_x4^{10-x}\times1^x$이므로

$f(1)+f(2)+\cdots+f(10)$

$={}_{10}C_14^9\times1^1+{}_{10}C_24^8\times1^2+\cdots+{}_{10}C_{10}4^0\times1^{10}$

$=({}_{10}C_04^{10}\times1^0+{}_{10}C_14^9\times1^1+{}_{10}C_24^8\times1^2+\cdots+{}_{10}C_{10}4^0\times1^{10})$

$-{}_{10}C_04^{10}\times1^0$

$=(4+1)^{10}-4^{10}$

$=5^{10}-4^{10}$

기본 연습문제 p.36~37

1 455	**2** 13	**3** 45	**4** 35	**5** 80
6 ㄴ, ㄷ	**7** 11	**8** ④	**9** 534	**10** ㄱ, ㄴ

1 서로 다른 소수 a, b, c, d에서 중복을 허용하여 12개를 택한 후 모두 곱하여 정수를 만드는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_{12}={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3=455$

2 먼저 자두맛 사탕과 오렌지맛 사탕을 각각 1개씩 꺼낸 후 3종류의 사탕 중에서 6개를 꺼내면 된다.

(i) 레몬맛 사탕을 꺼내지 않는 경우

자두맛, 오렌지맛 2종류의 사탕 중에서 6개를 꺼내는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

(ii) 레몬맛 사탕을 1개 꺼내는 경우

자두맛, 오렌지맛 2종류의 사탕 중에서 5개를 꺼내는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

(i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는 $7+6=13$

3 $(x+y+z)^8=\underbrace{(x+y+z)}_{①}\underbrace{(x+y+z)}_{②}\cdots\underbrace{(x+y+z)}_{⑧}$

이므로 $(x+y+z)^8$의 전개식에서 각 항은 ①~⑧의 8개의 인수의 x, y, z 중에서 하나씩을 택하여 곱한 것이다.

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

4 x, y, z, w가 음이 아닌 정수이므로

$x+y+z+w=0$ 또는 $x+y+z+w=1$ 또는

$x+y+z+w=2$ 또는 $x+y+z+w=3$

(i) 방정식 $x+y+z+w=0$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_4H_0={}_3C_0=1$

(ii) 방정식 $x+y+z+w=1$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_4H_1={}_4C_1=4$

(iii) 방정식 $x+y+z+w=2$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_4H_2={}_5C_2=10$

(iv) 방정식 $x+y+z+w=3$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_4H_3={}_6C_3=20$

(i)~(iv)에 의해 구하는 해의 개수는

$1+4+10+20=35$

5 n이 자연수일 때, $(1+2x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r 2^r x^r$ …… ㉠

x^4항은 $r=4$일 때이므로 ㉠의 ${}_nC_r 2^r$에 $r=4$를 대입하면

${}_nC_4 2^4$

이때 x^4의 계수가 80이므로

${}_nC_4 2^4=80$, ${}_nC_4=5$ $\therefore n=5$

따라서 x^3의 계수는 ㉠의 ${}_nC_r 2^r$에 $n=5$, $r=3$을 대입하면

${}_5C_3 2^3=10\times 8=80$

6 ㄱ. $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

${}_{10}C_r x^{10-r}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^r={}_{10}C_r \dfrac{x^{10-r}}{x^{2r}}$

이때 상수항은 $10-r-2r=0$일 때이므로 $r=\dfrac{10}{3}$

그런데 r는 $0\le r\le 10$인 정수이므로 상수항은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\left(x^2+\dfrac{4}{x}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

${}_{10}C_r (x^2)^{10-r}\left(\dfrac{4}{x}\right)^r={}_{10}C_r 4^r \dfrac{x^{20-2r}}{x^r}$ …… ㉠

$(1+x)\left(x^2+\dfrac{4}{x}\right)^{10}$의 전개식에서 상수항은

(i) $(1+x)$의 1과 ㉠의 상수항의 곱

(ii) $(1+x)$의 x와 ㉠의 $\dfrac{1}{x}$항의 곱

일 때 나타난다.

(i) ㉠의 상수항은 $20-2r-r=0$, 즉 $r=\dfrac{20}{3}$일 때이다. 그런데 r는 $0\le r\le 10$인 정수이므로 ㉠에서 상수항은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠의 $\dfrac{1}{x}$항은 $r-(20-2r)=1$, 즉 $r=7$일 때이므로 $\dfrac{1}{x}$항이 존재한다.

즉, 주어진 식의 전개식에서 상수항이 존재한다.

ㄷ. $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

${}_8C_r (x^2)^{8-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_8C_r(-1)^r\dfrac{x^{16-2r}}{x^r}$ …… ㉠

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^8$의 전개식에서 상수항은

(i) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$의 1과 ㉠의 상수항의 곱

(ii) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$의 $\dfrac{1}{x}$과 ㉠의 x항의 곱

일 때 나타난다.

(i) ㉠의 상수항은 $16-2r-r=0$, 즉 $r=\dfrac{16}{3}$일 때이다. 그런데 r는 $0\le r\le 8$인 정수이므로 ㉠에서 상수항은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠의 x항은 $16-2r-r=1$, 즉 $r=5$일 때이므로 x항이 존재한다.

즉, 주어진 식의 전개식에서 상수항이 존재한다.

따라서 상수항이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

7 $(1+ax)^2$의 전개식의 일반항은 ${}_2C_r a^r x^r$

$(1-x)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5C_s(-1)^s x^s$

따라서 $(1+ax)^2(1-x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_2C_r a^r x^r\times{}_5C_s(-1)^s x^s={}_2C_r\,{}_5C_s(-1)^s a^r x^{r+s}$ …… ㉠

x^2항은 $r+s=2$ $(0\le r\le 2,\ 0\le s\le 5$인 정수$)$일 때이므로

$r=2$, $s=0$ 또는 $r=1$, $s=1$ 또는 $r=0$, $s=2$

(i) $r=2$, $s=0$인 경우

㉠에서 ${}_2C_2\,{}_5C_0(-1)^0a^2=a^2$

(ii) $r=1$, $s=1$인 경우

㉠에서 ${}_2C_1\,{}_5C_1(-1)^1a^1=-10a$

(iii) $r=0$, $s=2$인 경우

㉠에서 ${}_2C_0\,{}_5C_2(-1)^2a^0=10$

(i), (ii), (iii)에 의해

$a^2-10a+10=21$, $a^2-10a-11=0$

$(a+1)(a-11)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=11$

이때 a는 자연수이므로 $a=11$

8 ${}_{2022}C_{20}+{}_{2021}C_{19}+{}_{2020}C_{18}+{}_{2019}C_{17}+\underline{{}_{2018}C_{16}+{}_{2018}C_{15}}$

$={}_{2022}C_{20}+{}_{2021}C_{19}+{}_{2020}C_{18}+\underline{{}_{2019}C_{17}+{}_{2019}C_{16}}$

$={}_{2022}C_{20}+{}_{2021}C_{19}+\underline{{}_{2020}C_{18}+{}_{2020}C_{17}}$

$={}_{2022}C_{20}+\underline{{}_{2021}C_{19}+{}_{2021}C_{18}}$

$=\underline{{}_{2022}C_{20}+{}_{2022}C_{19}}$

$={}_{2023}C_{20}$

9 $A={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{21}C_{19}$ ${}_2C_0={}_3C_0$

$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{21}C_{19}$ ${}_3C_0+{}_3C_1={}_4C_1$

$={}_4C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{21}C_{19}$ ${}_4C_1+{}_4C_2={}_5C_2$

$={}_5C_2+\cdots+{}_{21}C_{19}$

$\vdots$

$={}_{21}C_{18}+{}_{21}C_{19}={}_{22}C_{19}={}_{22}C_3$

$B={}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{89}C_2$ ${}_2C_2={}_3C_3$

$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{89}C_2$ ${}_3C_2+{}_3C_3={}_4C_3$

$={}_4C_3+{}_4C_2+\cdots+{}_{89}C_2$ ${}_4C_2+{}_4C_3={}_5C_3$

$={}_5C_3+\cdots+{}_{89}C_2$

$\vdots$

$={}_{89}C_3+{}_{89}C_2={}_{90}C_3$

따라서 $\dfrac{B}{A}=\dfrac{{}_{90}C_3}{{}_{22}C_3}=\dfrac{90\times 89\times 88}{22\times 21\times 20}=\dfrac{534}{7}$이므로

$k=534$

10 ㄱ. $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n$의 양변에 $x=4$를 대입하면

$${}_nC_0 + 4\,{}_nC_1 + 4^2\,{}_nC_2 + \cdots + 4^n\,{}_nC_n = 5^n$$

ㄴ. $(1+x)^{3n} = {}_{3n}C_0 + {}_{3n}C_1 x + {}_{3n}C_2 x^2 + \cdots + {}_{3n}C_{3n} x^{3n}$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$${}_{3n}C_0 + {}_{3n}C_1 + {}_{3n}C_2 + \cdots + {}_{3n}C_{3n} = 2^{3n} = 8^n$$

ㄷ. $(1+x)^k = {}_kC_0 + {}_kC_1 x + {}_kC_2 x^2 + \cdots + {}_kC_k x^k$의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면 $k=2n$이므로

$${}_kC_0 + {}_kC_1 + {}_kC_2 + \cdots + {}_kC_k = 2^k \quad \cdots\cdots ㉠$$

$${}_kC_0 - {}_kC_1 + {}_kC_2 - \cdots + {}_kC_k = 0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$2\,{}_kC_0 + 2\,{}_kC_2 + 2\,{}_kC_4 + \cdots + 2\,{}_kC_k = 2^k$$

$$2({}_kC_0 + {}_kC_2 + {}_kC_4 + \cdots + {}_kC_k) = 2^k$$

$$\therefore\ {}_kC_0 + {}_kC_2 + {}_kC_4 + \cdots + {}_kC_k = 2^{k-1} = 2^{2n-1}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

실전 연습문제

p.38

1 86 **2** 150 **3** 466 **4** 8

1 조건 ㈎에서 정의역의 원소 1, 2, 3, 4, 5에 대한 함숫값 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 대소 관계는

$$f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \quad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 이를 만족하는 함수 f의 개수는 정의역의 원소 5개에 대응할 공역의 5개를 순서에 상관없이 중복을 허용하여 뽑은 후 ㉠을 만족하도록 크기순으로 배열하면 되는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_5 = {}_9C_5 = {}_9C_4 = 126$$

이 중에서 $f(2)=2$를 만족하는 함수는 공역의 원소 1, 2에서 중복을 허용하여 1개를 뽑은 후 정의역의 원소 1에 대응시키고 공역의 원소 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 3개를 뽑은 후 작은 수부터 정의역의 원소 3, 4, 5에 차례대로 대응시키면 된다.

그러므로 $f(2)=2$를 만족하는 함수의 개수는

$${}_2H_1 \times {}_4H_3 = {}_2C_1 \times {}_6C_3 = 2 \times 20 = 40$$

따라서 조건을 만족하는 함수 f의 개수는 조건 ㈎를 만족하는 함수의 개수에서 $f(2)=2$를 만족하는 함수의 개수를 빼면 되므로

$$126 - 40 = 86$$

2 $\left(x^7 + \dfrac{1}{x^3}\right)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r (x^7)^{n-r} \left(\frac{1}{x^3}\right)^r = {}_nC_r \frac{x^{7n-7r}}{x^{3r}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 상수항은 $7n-7r-3r=0$, 즉 $n=\dfrac{10}{7}r$일 때이다.

이때 7과 10은 서로소이므로 r는 7의 배수이고, n은 10의 배수이다.

따라서 자연수 n의 값을 작은 것부터 차례대로 나열하면 10, 20, 30, 40, 50, $\cdots$이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150$$

3 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 9개의 점으로 만들 수 있는 다각형은 삼각형, 사각형, $\cdots$, 구각형이므로 한 원 위의 서로 다른 9개의 점으로 만들 수 있는 각 다각형의 개수는

$${}_9C_3,\ {}_9C_4,\ \cdots,\ {}_9C_9$$

따라서 구하는 모든 다각형의 개수는

$$\begin{aligned} &{}_9C_3 + {}_9C_4 + \cdots + {}_9C_9 \\ &= {}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4 + \cdots + {}_9C_9 - ({}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2) \\ &= 2^9 - (1+9+36) \\ &= 512 - 46 \\ &= 466 \end{aligned}$$

4 $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n$의 양변에 $x=10$, $n=11$을 대입하면

$$\begin{aligned} 11^{11} &= (1+10)^{11} \\ &= {}_{11}C_0 + 10\,{}_{11}C_1 + 10^2\,{}_{11}C_2 + 10^3\,{}_{11}C_3 + \cdots + 10^{11}\,{}_{11}C_{11} \\ &= 1 + 10 \times 11 + 100 \times 55 + 10^3({}_{11}C_3 + 10\,{}_{11}C_4 + \cdots + 10^8\,{}_{11}C_{11}) \\ &= 5611 + 1000\underbrace{({}_{11}C_3 + 10\,{}_{11}C_4 + \cdots + 10^8\,{}_{11}C_{11})}_{㉠} \end{aligned}$$

이때 ㉠은 1000의 배수이므로 11^{11}의 백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자는 5611에서 각각 6, 1, 1이다.

따라서 $a=6$, $b=1$, $c=1$이므로

$$a+b+c=8$$

Ⅱ-1. 확률의 뜻과 활용

01 확률의 뜻과 활용

1 개념 CHECK p.40

1. 답 (1) $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
(2) $A=\{1,\ 3\}$

1 유제 & 문제 p.41

유제 01 답 4

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 한 개의 동전을 2회 던질 때, 표본공간을 S라 하면

$S=\{(\mathrm{H},\ \mathrm{H}),\ (\mathrm{H},\ \mathrm{T}),\ (\mathrm{T},\ \mathrm{H}),\ (\mathrm{T},\ \mathrm{T})\}$

2회 모두 같은 면이 나오는 사건이 A이므로

$A=\{(\mathrm{H},\ \mathrm{H}),\ (\mathrm{T},\ \mathrm{T})\}$

사건 A에 대하여 그 여사건 A^C을 구하면

$A^C=\{(\mathrm{H},\ \mathrm{T}),\ (\mathrm{T},\ \mathrm{H})\}$

사건 A와 서로 배반인 사건은 A^C의 부분집합이고, A^C의 원소가 2개이므로 구하는 사건의 개수는

$2^2=4$

문제 01-1 답 ㄱ, ㄴ

사건 $A,\ B,\ C,\ D$에 대하여

$A=\{8,\ 16\}$

$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}$

$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$

$D=\{1,\ 4,\ 9,\ 16\}$

$\therefore A\cap B=\varnothing,\ A\cap C=\varnothing,$

$B\cap D=\{1,\ 9\},\ C\cap D=\{1,\ 9\}$

따라서 서로 배반인 사건은 사건 A와 B, A와 C이다.

문제 01-2 답 2

사건 A와 배반인 사건은 A의 여사건 A^C의 부분집합이고, 사건 B와 배반인 사건은 B의 여사건 B^C의 부분집합이므로 두 사건 $A,\ B$와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

이때 $A^C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\},\ B^C=\{2,\ 5,\ 8\}$이므로

$A^C\cap B^C=\{5\}$

따라서 $A^C\cap B^C$의 원소가 1개이므로 구하는 사건의 개수는

$2^1=2$

2 개념 CHECK p.43

1. 답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{200}$

(1) 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

서로 같은 수의 눈이 나오는 경우는 $(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$의 6가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(2) 1000개당 5개꼴로 불량품이 있으므로 구하는 확률은

$\frac{5}{1000}=\frac{1}{200}$

2. 답 (1) $\frac{3}{8}$ (2) 1 (3) 0

2 유제 & 문제 p.44～47

유제 02 답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{2}{9}$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

(1) 나오는 두 눈의 수의 차가 3인 경우는 $(1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 1),\ (5,\ 2),\ (6,\ 3)$의 6가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(2) 나오는 두 눈의 수의 곱이 완전제곱수인 경우는 $(1,\ 1),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$의 8가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

문제 02-1 답 $\frac{1}{2}$

집합 A의 원소가 4개이므로 집합 A의 부분집합의 개수는

$2^4=16$

원소 3이 포함되어 있는 집합 A의 부분집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

문제 02-2 답 $\frac{3}{4}$

서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

이차방정식 $x^2-2ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-b>0 \qquad \therefore a^2>b$

$a^2>b$를 만족하는 순서쌍 (a, b)는

(2, 1), (2, 2), (2, 3)

(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)

(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)

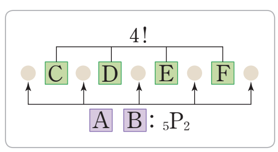
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)

의 27가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$

유제 03 답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{10}$

(1) A, B, C, D, E, F의 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!$

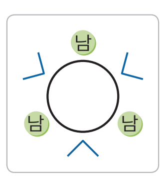


A, B를 이웃하지 않게 세우는 경우의 수는 이웃해도 좋은 C, D, E, F를 먼저 배열하고 그 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 2개를 택하여 A, B를 배열하면 되므로

$4!\times{}_5P_2=4!\times20$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4!\times20}{6!}=\frac{2}{3}$

(2) 남자 3명과 여자 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(6-1)!=5!$



남자와 여자가 교대로 앉는 경우의 수는 남자 3명이 먼저 원탁에 둘러앉은 후 여자 3명은 남자들 사이사이의 3개의 자리에 앉으면 되므로

$(3-1)!\times3!=2!\times3!$

따라서 구하는 확률은 $\frac{2!\times3!}{5!}=\frac{1}{10}$

문제 03-1 답 $\frac{3}{5}$

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5로 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 $_5\Pi_3=5^3$

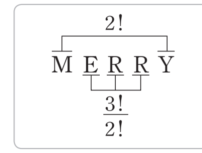
세 자리의 자연수가 홀수인 경우는 일의 자리의 숫자가 홀수, 즉 □□1, □□3, □□5의 꼴이어야 하므로 홀수의 개수는 $_5\Pi_2\times3=5^2\times3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5^2\times3}{5^3}=\frac{3}{5}$

문제 03-2 답 $\frac{1}{10}$

M, E, R, R, Y의 알파벳이 각각 적힌 5장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 R가 2개이므로

$\frac{5!}{2!}=60$



M과 Y가 적힌 카드가 양 끝에 오는 경우의 수는 맨 왼쪽 또는 맨 오른쪽에 M 또는 Y를 고정시키고, 남은 E, R, R를 그 사이에 배열하면 되는데 R가 2개이므로

$2!\times\frac{3!}{2!}=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$

유제 04 답 (1) $\frac{1}{70}$ (2) $\frac{5}{21}$

10개의 사탕 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는

$_{10}C_4=210$

(1) 포도맛 사탕 3개 중에서 2개를 꺼내고, 딸기맛 사탕 2개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$_3C_2\times{}_2C_2=3\times1=3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{210}=\frac{1}{70}$

(2) 복숭아맛 사탕 5개 중에서 1개를 꺼내고, 나머지 5개의 사탕 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$_5C_1\times{}_5C_3=5\times10=50$

따라서 구하는 확률은 $\frac{50}{210}=\frac{5}{21}$

문제 04-1 답 $\frac{45}{56}$

8개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$_8C_3=56$

이때 3개의 점을 연결하여 삼각형이 되기 위해서는 세 점이 모두 직선 l 위에 있거나 직선 m 위에 있지 않아야 한다.

즉, 삼각형을 만들려면 3개의 점을 직선 l에서 2개, 직선 m에서 1개 또는 직선 l에서 1개, 직선 m에서 2개 택해야 한다.

(i) 직선 l에서 2개, 직선 m에서 1개의 점을 택하는 경우

$_3C_2\times{}_5C_1=3\times5=15$

(ii) 직선 l에서 1개, 직선 m에서 2개의 점을 택하는 경우

$_3C_1\times{}_5C_2=3\times10=30$

(i), (ii)에 의해 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$15+30=45$

따라서 구하는 확률은 $\frac{45}{56}$

문제 04-2 답 $\frac{55}{136}$

3개의 주머니 A, B, C에 크기와 모양이 같은 구슬 15개를 나누어 담는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 15개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{15}={}_{17}C_{15}={}_{17}C_2=136$

3개의 주머니 모두에 적어도 2개 이상씩의 구슬을 담는 경우의 수는 각 주머니에 구슬을 2개씩 미리 담아 놓고 남은 9개의 구슬을 3개의 주머니에 나누어 담는 경우의 수와 같다. 즉, 서로 다른 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

따라서 구하는 확률은 $\frac{55}{136}$

문제 04-3 답 4

6개의 구슬 중에서 2개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

빨간 구슬의 개수를 x라 하면 x개의 빨간 구슬 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_xC_2$이므로 2개 모두 빨간 구슬일 확률은

$\frac{{}_xC_2}{15}=\frac{2}{5}$, $\frac{x(x-1)}{30}=\frac{2}{5}$

$x^2-x-12=0$, $(x-4)(x+3)=0$

$\therefore x=4$ ($\because x>0$)

따라서 빨간 구슬의 개수는 4이다.

유제 05 답 6개

주머니에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n이라 하면 10개 중 2개의 제비를 꺼낼 때, 모두 당첨 제비일 확률은

$\frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2}=\frac{n(n-1)}{90}$ …… ㉠

이 시행에서 3번에 1번꼴로 2개 모두 당첨 제비를 꺼냈으므로 통계적 확률은 $\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{n(n-1)}{90}=\frac{1}{3}$, $n^2-n-30=0$

$(n-6)(n+5)=0$ $\quad\therefore n=6$ ($\because n>0$)

따라서 주머니에 들어 있는 당첨 제비는 6개이다.

문제 05-1 답 $\frac{21}{80}$

조사한 전체 학생 수는 $130+105+85+80=400$(명)이므로 임의로 택한 한 학생이 B 통신사를 이용할 확률은

$\frac{105}{400}=\frac{21}{80}$

문제 05-2 답 $\frac{11}{50}$

7시간 이상 9시간 미만인 학생 수가 $24+20=44$(명)이므로 구하는 확률은

$\frac{44}{200}=\frac{11}{50}$

3 개념 CHECK

p.50

1. 답 $\frac{3}{20}$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-1=\frac{3}{20}$$

2. 답 $\frac{1}{12}$

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

3. 답 $\frac{5}{6}$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 서로 같은 수의 눈이 나오는 경우는 (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지이다.

이때 서로 같은 수의 눈이 나오는 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

3 유제 & 문제

p.51～53

유제 06 답 $\frac{5}{6}$

6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 짝수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}$

$A\cap B$는 나오는 눈의 수가 2, 6인 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}$

따라서 두 사건 A, B는 서로 배반사건이 아니므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

문제 06-1 답 $\frac{7}{9}$

4개의 숫자 0, 1, 4, 5를 모두 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 $3\times3!=18$

네 자리의 자연수가 홀수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하자.

(i) 홀수인 경우는 일의 자리의 숫자가 1 또는 5일 때이다.

일의 자리의 숫자가 1인 자연수의 개수는 $2\times2!=4$

일의 자리의 숫자가 5인 자연수의 개수는 $2\times2!=4$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{8}{18}$

(ii) 5의 배수인 경우는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5일 때이다.

일의 자리의 숫자가 0인 자연수의 개수는 $3!=6$

일의 자리의 숫자가 5인 자연수의 개수는 $2\times2!=4$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{10}{18}$

(iii) 홀수이면서 5의 배수인 경우는 일의 자리의 숫자가 5일 때이다.

일의 자리의 숫자가 5인 자연수의 개수는 $2\times2!=4$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{18}$

(i), (ii), (iii)에 의해 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{8}{18}+\frac{10}{18}-\frac{4}{18}\\&=\frac{7}{9}\end{aligned}$$

문제 06-2 답 $\frac{7}{15}$

이차방정식 $15x^2-8nx+n^2=0$을 풀면

$(5x-n)(3x-n)=0$

$\therefore x=\frac{n}{5}$ 또는 $x=\frac{n}{3}$

이때 이차방정식이 정수해를 가지려면 자연수 n이 5의 배수 또는 3의 배수이어야 한다.

n이 5의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 15의 배수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{30}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{10}{30}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{30}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{6}{30}+\frac{10}{30}-\frac{2}{30}\\&=\frac{7}{15}\end{aligned}$$

유제 07 답 $\frac{4}{9}$

꺼낸 공에 적힌 수의 합이 짝수이려면 두 공에 적힌 숫자가 (짝수, 짝수) 또는 (홀수, 홀수)이어야 한다.

두 공에 적힌 숫자가 (짝수, 짝수)인 사건을 A, (홀수, 홀수)인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{10}{45}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{10}{45}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{10}{45}+\frac{10}{45}\\&=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

문제 07-1 답 $\frac{11}{36}$

두 눈의 수의 합이 6인 사건을 A, 차가 3인 사건을 B라 할 때, 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 사건 A가 일어나는 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{36}$

(ii) 사건 B가 일어나는 경우는 (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{6}{36}$

두 사건 A, B는 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{5}{36}+\frac{6}{36}\\&=\frac{11}{36}\end{aligned}$$

문제 07-2 답 $\frac{13}{66}$

1학년 학생이 2학년 학생보다 많으려면 뽑은 4명의 배우 중에서 1학년 학생이 3명 또는 4명이어야 한다.

1학년 학생이 3명인 사건을 A, 4명인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{11}\mathrm{C}_4}=\frac{60}{330}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{11}\mathrm{C}_4}=\frac{5}{330}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{60}{330}+\frac{5}{330}\\&=\frac{13}{66}\end{aligned}$$

유제 **08** 답 $\dfrac{8}{15}$

적어도 하나의 당첨 제비를 뽑을 확률은

1−(당첨 제비를 하나도 뽑지 못할 확률)

적어도 하나의 당첨 제비를 뽑는 사건을 A라 하면 당첨 제비를 하나도 뽑지 못하는 사건은 A^C이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

문제 **08**-1 답 $\dfrac{5}{7}$

t와 s가 이웃하지 않을 확률은

1−(t와 s가 이웃할 확률)

t와 s가 이웃하지 않는 사건을 A라 하면 t와 s가 이웃하는 사건은 A^C이다.

7개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{7!}{2!}=2520$

t와 s를 하나로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!}=360$

t와 s의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

$$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{360\times2}{2520}=\frac{2}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

문제 **08**-2 답 $\dfrac{4}{5}$

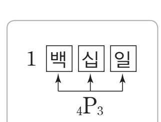
네 자리의 자연수가 2100 이상일 확률은

1−(2100 미만일 확률)

네 자리의 자연수가 2100 이상인 사건을 A라 하면 2100 미만인 사건은 A^C이다.

5개의 숫자 중에서 4개를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 ${}_5\mathrm{P}_4=120$

2100 미만인 네 자리의 자연수의 개수는 천의 자리의 숫자가 1인 네 자리의 자연수의 개수와 같으므로 ${}_4\mathrm{P}_3=24$



$$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{P}_3}{{}_5\mathrm{P}_4}=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

문제 **08**-3 답 6

여학생이 1명 이하로 뽑힐 확률은

1−(2명의 대표가 모두 여학생일 확률)

여학생이 1명 이하로 뽑히는 사건을 A라 하면 2명의 대표가 모두 여학생인 사건은 A^C이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{{}_{n+10}\mathrm{C}_2}=\frac{90}{(n+10)(n+9)}$$

이때 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{8}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{90}{(n+10)(n+9)}=\frac{5}{8}$$

$$\frac{90}{(n+10)(n+9)}=\frac{3}{8},\ n^2+19n-150=0$$

$(n-6)(n+25)=0$ $\quad\therefore n=6(\because n$은 자연수)

기본 연습문제 p.54~55

1 ④	2 $\frac{1}{9}$	3 $\frac{2}{5}$	4 $\frac{2}{5}$	5 $\frac{59}{256}$
6 $\frac{11}{12}$	7 $\frac{7}{15}$	8 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{7}{9}$	10 $\frac{11}{21}$

1 두 눈의 수의 합이 9 이하인 사건 A의 여사건 A^C은 두 눈의 수의 합이 10 이상인 사건이므로

$$A^C=\{\underbrace{(4,6),(5,5),(6,4)}_{\text{합이 10}},\underbrace{(5,6),(6,5)}_{\text{합이 11}},\underbrace{(6,6)}_{\text{합이 12}}\}$$

사건 A와 배반인 사건은 여사건 A^C의 부분집합이므로 구하는 사건의 개수는

$2^6=64$

2 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

이때 두 직선 $ax+6y-1=0$, $x+by-3=0$이 평행하기 위한 조건은

$$\frac{1}{a}=\frac{b}{6}\neq\frac{-3}{-1},\ \frac{1}{a}=\frac{b}{6}$$

$$\therefore ab=6\ \left(\text{단, } a\neq\frac{1}{3},\ b\neq18\right)$$

$ab=6$을 만족하는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$의 4가지이다.

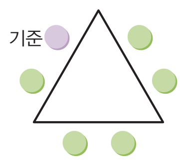
따라서 구하는 확률은

$$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

3 6명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

정삼각형 모양의 탁자에서는 원형으로 둘러앉는 1가지 경우에 대하여 다음 그림과 같이 기준이 되는 자리에 따라 2가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 6명이 정삼각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는 $120\times2=240$

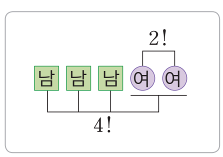
이때 남자와 여자가 탁자의 같은 변에 이웃하여 앉는 경우의 수는 남자 3명을 탁자의 세 변에 각각 앉힌 후 여자 3명을 남은 세 자리에 앉히고 각 변에서 남녀가 서로 자리를 바꾸는 경우를 생각하면 되므로

$(3-1)!\times3!\times2^3=96$

따라서 구하는 확률은 $\frac{96}{240}=\frac{2}{5}$

4 남자 6명 중에서 3명, 여자 4명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수는 ${}_6C_3\times{}_4C_2\times5!$

이때 여자끼리 이웃하는 경우의 수는



${}_6C_3\times{}_4C_2\times4!\times2!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{{}_6C_3\times{}_4C_2\times4!\times2!}{{}_6C_3\times{}_4C_2\times5!}=\frac{2}{5}$

5 집합 X에서 Y로의 함수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

이때 $i\neq j$이면 $f(i)\neq f(j)$인 함수의 개수는

${}_4P_4=4!=24 \quad \therefore a=\frac{24}{256}$

또 $i<j$이면 $f(i)\leq f(j)$인 함수의 개수는

${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35 \quad \therefore b=\frac{35}{256}$

$\therefore a+b=\frac{24}{256}+\frac{35}{256}=\frac{59}{256}$

6 문화센터에서 강좌를 들을 때, 요리 강좌를 듣는 사건을 A, 미술 강좌를 듣는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$$

7 $A\cap B=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{4}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A)=\frac{4}{5}-\mathrm{P}(A) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 $\frac{1}{3}\leq\mathrm{P}(A)\leq\frac{2}{3}$이므로

$-\frac{2}{3}\leq-\mathrm{P}(A)\leq-\frac{1}{3}$

$\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\leq\frac{4}{5}-\mathrm{P}(A)\leq\frac{4}{5}-\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{2}{15}\leq\mathrm{P}(B)\leq\frac{7}{15}$ ($\because$ ㉠)

따라서 $\mathrm{P}(B)$의 최댓값은 $\frac{7}{15}$이다.

8 2, 3, 4, 5가 각각 적힌 4장의 카드에서 동시에 2장을 뽑을 때, 그 합의 최솟값은 $2+3=5$, 최댓값은 $4+5=9$이므로 뽑은 카드에 적힌 수의 합이 소수이려면 숫자의 합이 5 또는 7이어야 한다.

4장의 카드에서 2장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

두 카드에 적힌 수의 합이 5인 사건을 A, 7인 사건을 B라 하면 사건 A가 일어나는 경우는 2, 3을 뽑는 경우이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$

사건 B가 일어나는 경우는 2, 5 또는 3, 4를 뽑는 경우이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1}{2}$$

9 2장의 카드에 적힌 숫자가 서로 다를 확률은

1−(2장의 카드에 적힌 숫자가 같을 확률)

2장의 카드에 적힌 숫자가 서로 다른 사건을 A라 하면

2장의 카드에 적힌 숫자가 같은 사건은 A^C이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1+3+6}{45}=\frac{2}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

10 가로로 한 칸 가는 것을 a, 세로로 한 칸 가는 것을 b라 할 때, A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $a, a, a, a, a, b, b, b, b$를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{9!}{5!\times4!}=126$$

A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

(a, a, a, b, b를 일렬로 배열하는 경우의 수)

$\times$(a, a, b, b를 일렬로 배열하는 경우의 수)

$$=\frac{5!}{3!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=60$$

P 지점을 거치지 않고 가는 사건을 A라 하면 P 지점을 거쳐서 가는 사건은 A^C이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{60}{126}=\frac{10}{21}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{10}{21}=\frac{11}{21}$$

실전 연습문제 p.56

1 $\frac{3}{8}$ **2** ④ **3** $\frac{5}{12}$ **4** $\frac{8}{15}$

1 세 개의 정사면체 X, Y, Z를 던져서 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

$(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$인 사건은

$x-y\neq0$이고 $y-z\neq0$이고 $z-x\neq0$인 사건이다.

이는 세 개의 정사면체에서 나온 숫자 x, y, z가 모두 다르다는 뜻이므로 이 사건이 일어나는 경우의 수는 3, 4, 5, 6의 4개의 숫자에서 3개를 뽑아 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다.

$\therefore {}_4\mathrm{P}_3=24$

따라서 구하는 확률은

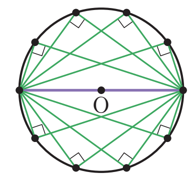
$$\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$$

2 원 위의 10개의 점은 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 10개의 점 중에서 세 점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$${}_{10}\mathrm{C}_3=120$$

모든 점은 원 위에 있으므로 직각삼각형이 되려면 두 점을 이은 선분 중 하나는 원의 중심을 지나야 한다.

이때 모든 점은 등분되어 있으므로 마주 보는 점을 이으면 원의 중심 O를 지난다.



따라서 오른쪽 그림과 같이 한 지름에서 만들 수 있는 직각삼각형은 8개이고, 지름은 모두 5개 존재하므로 직각삼각형의 개수는

$$8\times5=40$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$$

3 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=\frac{13}{12}-\mathrm{P}(A\cup B)$$

이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최소일 때 $\mathrm{P}(A\cap B)$가 최대이고 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대일 때 $\mathrm{P}(A\cap B)$가 최소이다.

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)\geq\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cup B)\geq\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cup B)\leq1$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)\geq\frac{3}{4},\ \mathrm{P}(A\cup B)\geq\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cup B)\leq1$$

즉, $\frac{3}{4}\leq\mathrm{P}(A\cup B)\leq1$이므로 $\frac{1}{12}\leq\frac{13}{12}-\mathrm{P}(A\cup B)\leq\frac{1}{3}$

$$\therefore \frac{1}{12}\leq\mathrm{P}(A\cap B)\leq\frac{1}{3}$$

따라서 $M=\frac{1}{3}$, $m=\frac{1}{12}$이므로

$$M+m=\frac{5}{12}$$

4 카드에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 카드에 적힌 수가 5의 배수인 사건을 B라 하면 카드에 적힌 수가 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 사건은 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이다.

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$이고, $A\cap B$는 카드에 적힌 수가 3과 5의 최소공배수인 15의 배수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{7}{15}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

Ⅱ-2. 조건부확률

01 조건부확률

1 개념 CHECK p.59

1. 답 (1) **0.75** (2) **0.6**

(1) $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.3}{0.4}=0.75$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{0.3}{0.5}=0.6$

2. 답 $\dfrac{2}{3}$

$A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $A\cap B=\{3, 5\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$

3. 답 (1) $\dfrac{1}{6}$ (2) $\dfrac{2}{3}$

(1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{3}$

1 유제 & 문제 p.60～64

유제 01 답 (1) **0.75** (2) **0.5**

(1) $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)=0.2$

이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=0.8$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.8=0.7+0.4-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=0.3$

$\therefore\ \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{0.3}{0.4}=0.75$

(2) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.7=0.5+\mathrm{P}(B)-0.2 \qquad \therefore\ \mathrm{P}(B)=0.4$

$\therefore\ \mathrm{P}(A^C|B^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\dfrac{\mathrm{P}((A\cup B)^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$

$=\dfrac{1-\mathrm{P}(A\cup B)}{1-\mathrm{P}(B)}$

$=\dfrac{1-0.7}{1-0.4}=0.5$

문제 01-1 답 **0.2**

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$0.8=\mathrm{P}(A)+0.5-0.25\times\mathrm{P}(A)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=0.4$

$\therefore\ \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(B)}$

$=\dfrac{0.4\times0.25}{0.5}=0.2$

유제 02 답 $\dfrac{4}{7}$

임의로 뽑은 한 학생이 남학생인 사건을 A, 지하철로 통학하는 학생인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{14}{30}=\dfrac{7}{15}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{8}{30}=\dfrac{4}{15}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{15}}=\dfrac{4}{7}$

다른 풀이

$\dfrac{(\text{지하철로 통학하는 남학생의 수})}{(\text{전체 남학생의 수})}=\dfrac{8}{14}=\dfrac{4}{7}$

문제 02-1 답 **0.6**

임의로 뽑은 한 학생이 혈액형이 B형인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.5$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.3$

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.3}{0.5}=0.6$

다른 풀이

$\dfrac{(\text{B형인 여학생의 수})}{(\text{B형인 전체 학생의 수})}=\dfrac{0.3a}{0.5a}=0.6$

문제 02-2 답 $\dfrac{2}{5}$

두 눈의 수의 합이 8인 사건을 A, 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 B라 하면

$A=\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

$B=\{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5),$
$(5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$

$A\cap B=\{(3, 5), (5, 3)\}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{36}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{36}}=\dfrac{2}{5}$

유제 03 답 $\dfrac{21}{55}$

첫 번째에 불량품을 꺼내지 않는 사건을 A, 두 번째에 불량품을 꺼내지 않는 사건을 B라 하자.

첫 번째에 불량품을 꺼내지 않을 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{7}{11}$

첫 번째에 불량품을 꺼내지 않았을 때, 두 번째에도 불량품을 꺼내지 않을 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{7}{11}\times\frac{3}{5}=\frac{21}{55}\end{aligned}$$

문제 03-1 답 $\dfrac{24}{95}$

첫 번째에 여자 회원을 뽑는 사건을 A, 두 번째에 남자 회원을 뽑는 사건을 B라 하자.

첫 번째에 여자 회원을 뽑을 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$

첫 번째에 여자 회원을 뽑았을 때, 두 번째에 남자 회원을 뽑을 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{8}{19}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{3}{5}\times\frac{8}{19}=\frac{24}{95}\end{aligned}$$

문제 03-2 답 13

첫 번째에 파란 구슬을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 빨간 구슬을 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{n}{n+6}$, $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{6}{n+5}$

첫 번째는 파란 구슬, 두 번째는 빨간 구슬을 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{n}{n+6}\times\frac{6}{n+5}\\&=\frac{6n}{(n+6)(n+5)}\end{aligned}$$

이때 $\dfrac{6n}{(n+6)(n+5)}=\dfrac{1}{4}$이므로

$n^2-13n+30=0$, $(n-3)(n-10)=0$

$\therefore n=3$ 또는 $n=10$

따라서 모든 n의 값의 합은 13이다.

유제 04 답 $\dfrac{3}{10}$

A, B가 당첨제비를 뽑는 사건을 각각 A, B라 하자.

(i) A가 당첨제비를 뽑고, B도 당첨제비를 뽑을 확률

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}\end{aligned}$$

(ii) A가 당첨제비를 뽑지 않고, B가 당첨제비를 뽑을 확률

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^c\cap B)&=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)\\&=\left(1-\frac{3}{10}\right)\times\frac{3}{9}=\frac{7}{30}\end{aligned}$$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)\\&=\frac{1}{15}+\frac{7}{30}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

문제 04-1 답 0.54

주말에 비가 오는 사건을 A, 경기에서 이기는 사건을 B라 하자.

(i) 주말에 비가 오고, 경기를 이길 확률

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=0.3\times0.4=0.12\end{aligned}$$

(ii) 주말에 비가 오지 않고, 경기를 이길 확률

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^c\cap B)&=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)\\&=(1-0.3)\times0.6=0.42\end{aligned}$$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)\\&=0.12+0.42=0.54\end{aligned}$$

문제 04-2 답 $\dfrac{1}{5}$

남자가 뽑은 카드가 'free'인 사건을 A, 여자가 뽑은 카드가 'free'인 사건을 B라 하자.

(i) 남자가 뽑은 카드가 'free'이고, 여자가 뽑은 카드도 'free'일 확률

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{4}{20}\times\frac{3}{19}=\frac{3}{95}\end{aligned}$$

(ii) 남자가 뽑은 카드가 '꽝'이고, 여자가 뽑은 카드는 'free'일 확률

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^c\cap B)&=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)\\&=\frac{16}{20}\times\frac{4}{19}=\frac{16}{95}\end{aligned}$$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)\\&=\frac{3}{95}+\frac{16}{95}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

유제 **05** 답 $\frac{6}{13}$

꽃무늬 상자를 택하는 사건을 A, 2개 모두 흰 공이 나오는 사건을 B라 하자.

(i) 꽃무늬 상자에서 2개 모두 흰 공이 나올 확률

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{12}$$

(ii) 별무늬 상자에서 2개 모두 흰 공이 나올 확률

$$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{14}$$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 2개 모두 흰 공이 나올 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=\frac{1}{12}+\frac{1}{14}=\frac{13}{84}$$

따라서 2개 모두 흰 공이 나왔을 때, 이 공 2개가 모두 별무늬 상자에서 나왔을 확률은

$$P(A^c|B)=\frac{P(A^c\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{14}}{\frac{13}{84}}=\frac{6}{13}$$

문제 **05-1** 답 $\frac{7}{19}$

A 구장에서 경기를 치르는 사건을 A, 승리하는 사건을 B라 하자.

(i) A 구장에서 승리할 확률

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=0.2\times0.7=0.14$$

(ii) 타 구장에서 승리할 확률

$$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)=(1-0.2)\times0.3=0.24$$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 이 팀이 승리할 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=0.14+0.24=0.38$$

따라서 어떤 경기에서 이 팀이 승리하였을 때, 그 경기장이 A 구장이었을 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.14}{0.38}=\frac{7}{19}$$

2 개념 CHECK p.66

1. 답 **(1) 종속 (2) 독립**

(1) $P(A)P(B)=0.2\times0.5=0.1\neq P(A\cap B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

(2) $P(A)P(B)=0.4\times0.55=0.22=P(A\cap B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

2 유제 & 문제 p.67~68

유제 **06** 답 ㄴ, ㄹ

표본공간 S는 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 29, 30\}$이고

$A=\{1, 3, 5, \cdots, 27, 29\}$,

$B=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$,

$C=\{11, 12, 13, \cdots, 19, 20\}$

이므로

$A\cap B=\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$,

$A\cap C=\{11, 13, 15, 17, 19\}$

$B^c\cap C=\{12, 14, 15, 16, 18, 20\}$,

ㄱ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{3}{10}$이므로

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

ㄴ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap C)=\frac{1}{6}$이므로

$P(A\cap C)=P(A)P(C)$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $P(B^c)=1-P(B)=\frac{2}{3}$, $P(C)=\frac{1}{3}$,

$P(B^c\cap C)=\frac{1}{5}$이므로

$P(B^c\cap C)\neq P(B^c)P(C)$

따라서 두 사건 B^c과 C는 서로 종속이다.

ㄹ. ㄴ에 의해 두 사건 A와 C가 서로 독립이므로 두 사건 A^c과 C^c은 서로 독립이다.

따라서 두 사건이 서로 독립인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

문제 **06-1** 답 ㄴ

표본공간 S는 $S=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 4\}$, $C=\{3, 4, 12\}$,

$D=\{1, 3, 6, 12\}$, $E=\{1, 2, 3, 4, 6\}$이라 하면

$A\cap B=\{1, 4\}$, $A\cap C=\{3, 4\}$, $A\cap D=\{1, 3\}$,

$A\cap E=\{1, 2, 3, 4\}$

ㄱ. $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$이므로

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

ㄴ. $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(C)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap C)=\frac{1}{3}$이므로

$P(A\cap C)=P(A)P(C)$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(D)=\frac{2}{3}$, $P(A\cap D)=\frac{1}{3}$이므로

$P(A\cap D)\neq P(A)P(D)$

따라서 두 사건 A와 D는 서로 종속이다.

ㄹ. $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(E)=\frac{5}{6}$, $\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E)$

따라서 두 사건 A와 E는 서로 종속이다.

따라서 사건 $\{1, 2, 3, 4\}$와 서로 독립인 사건은 ㄴ뿐이다.

유제 **07** 답 (1) **0.5** (2) **0.85**

A, B 두 선수가 10점에 명중시키는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(1) A만 10점에 명중시킬 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

$=0.7\times(1-0.5)=0.35$

B만 10점에 명중시킬 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

$=(1-0.7)\times0.5=0.15$

따라서 구하는 확률은

$0.35+0.15=0.5$

(2) A, B 중 적어도 한 선수는 10점에 명중시키는 사건은 A, B 모두 10점에 명중시키지 못하는 사건의 여사건이다.

A, B가 모두 10점에 명중시키지 못하는 사건은 $A^C\cap B^C$이고, 두 사건 A^C, B^C은 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

$=(1-0.7)\times(1-0.5)=0.15$

따라서 구하는 확률은

$1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-0.15=0.85$

문제 **07**-1 답 $\frac{2}{3}$

A, B 두 선수가 승부차기를 성공하는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이다.

이때 두 선수 중 A만 성공할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{4}\times(1-p)$

즉, $\frac{3}{4}(1-p)=\frac{1}{4}$이므로 $1-p=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore p=\frac{2}{3}$

3 개념 CHECK

p.69

1. 답 (1) $\frac{15}{128}$ (2) $\frac{40}{243}$

(1) 한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 동전을 10번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

${}_{10}\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{15}{128}$

(2) 한 개의 주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률이 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 주사위를 5번 던져서 3의 배수의 눈이 3번 나올 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$

3 유제 & 문제

p.70~71

유제 **08** 답 (1) **0.972** (2) **0.999**

(1) 페널티킥 성공률이 $\frac{90}{100}=0.9$이고, 3번의 페널티킥에서 2번 이상 성공할 확률은 2번 또는 3번 성공할 확률이다.

(i) 2번 성공할 확률은

${}_3\mathrm{C}_2(0.9)^2(0.1)^1=0.243$

(ii) 3번 성공할 확률은

${}_3\mathrm{C}_3(0.9)^3(0.1)^0=0.729$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$0.243+0.729=0.972$

(2) 적어도 1번 이상 페널티킥을 성공할 확률은 전체 확률에서 1번도 성공하지 못할 확률을 뺀 것과 같으므로

$1-{}_3\mathrm{C}_0(0.9)^0(0.1)^3=1-0.001=0.999$

문제 **08**-1 답 $\frac{1}{8}$

A 팀이 5번째 경기에서 우승하려면 4번째 경기까지는 3승 1패가 되어야 하고, 5번째 경기에서는 승리해야 한다.

4번째 경기까지 3승 1패일 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$

5번째 경기에서 A 팀이 이길 확률은 $\frac{1}{2}$

따라서 5번째 경기에서 A 팀이 우승할 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

문제 **08**-2 답 $\frac{7}{144}$

한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 한 개의 주사위를 한 번 던져서 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

(ⅰ) 동전의 앞면이 나와서 주사위를 2번 던질 때, 1의 눈이 2번 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times{}_2C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{72}$

(ⅱ) 동전의 뒷면이 나와서 주사위를 3번 던질 때, 1의 눈이 2번 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times{}_3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{5}{144}$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{72}+\frac{5}{144}=\frac{7}{144}$

유제 09 답 $\frac{5}{16}$

한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

동전을 5번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 x, 뒷면이 나오는 횟수를 y라 하면 점 P가 원점에 있으므로

$x+y=5,\ 3x-2y=0 \qquad \therefore\ x=2,\ y=3$

따라서 구하는 확률은 동전을 5번 던져서 앞면이 2번, 뒷면이 3번 나올 확률과 같으므로

${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

문제 09-1 답 $\frac{35}{128}$

한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

동전을 7번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 x, 뒷면이 나오는 횟수를 y라 할 때, 점 O에서 점 A까지 이동하려면 오른쪽으로 4칸, 위쪽으로 3칸 이동해야 하므로

$x=4,\ y=3$

따라서 구하는 확률은 동전을 7번 던져서 앞면이 4번, 뒷면이 3번 나올 확률과 같으므로

${}_7C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{35}{128}$

기본 연습문제 p.72~73

1 $\frac{3}{4}$	2 $\frac{15}{31}$	3 $\frac{1}{12}$	4 $\frac{5}{16}$	5 $\frac{19}{45}$
6 6	7 ③	8 3197	9 $\frac{13}{125}$	10 91

1 $P(B)=\frac{3}{5},\ P(A|B)=\frac{1}{3}$이므로

$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

$P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$

$\therefore\ P(A|B^C)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{P(A\cap B^C)}{1-P(B)}$

$=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{3}{4}$

2 임의로 뽑은 한 명이 음악회를 관람하지 않는 학생인 사건을 A, A 학급의 학생인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{31}{70},\ P(A\cap B)=\frac{15}{70}=\frac{3}{14}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{14}}{\frac{31}{70}}=\frac{15}{31}$

3 영주가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 민서가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하면 영주가 당첨 제비를 뽑을 확률은

$P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

영주가 당첨 제비를 뽑았을 때, 민서도 당첨 제비를 뽑을 확률은

$P(B|A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

4 첫 번째 검사한 마우스가 불량품인 사건을 A, 두 번째 검사한 마우스가 불량품인 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 첫 번째 검사한 마우스가 불량품이고, 두 번째 검사한 마우스도 불량품일 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

$=\frac{5}{16}\times\frac{4}{15}=\frac{1}{12}$

(ⅱ) 첫 번째 검사한 마우스가 양호품, 두 번째 검사한 마우스가 불량품일 확률은

$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)$

$=\left(1-\frac{5}{16}\right)\times\frac{5}{15}=\frac{11}{48}$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 두 번째 검사한 마우스가 불량품일 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=\frac{1}{12}+\frac{11}{48}=\frac{5}{16}$

5 (i) A 주머니에서 흰 구슬 2개를 꺼낸 경우

흰 구슬 2개를 B 주머니에 더 넣었으므로 B 주머니에는 흰 구슬 5개, 검은 구슬 4개가 들어 있다.

여기에서 1개의 구슬을 꺼낼 때, 그것이 흰 구슬일 확률은 $\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_5C_1}{{}_9C_1}=\frac{1}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{18}$

(ii) A 주머니에서 흰 구슬 1개, 검은 구슬 1개를 꺼낸 경우

흰 구슬 1개와 검은 구슬 1개를 B 주머니에 더 넣었으므로 B 주머니에는 흰 구슬 4개, 검은 구슬 5개가 들어 있다.

여기에서 1개의 구슬을 꺼낼 때, 그것이 흰 구슬일 확률은 $\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_4C_1}{{}_9C_1}=\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$

(iii) A 주머니에서 검은 구슬 2개를 꺼낸 경우

검은 구슬 2개를 B 주머니에 더 넣었으므로 B 주머니에는 흰 구슬 3개, 검은 구슬 6개가 들어 있다.

여기에서 1개의 구슬을 꺼낼 때, 그것이 흰 구슬일 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_3C_1}{{}_9C_1}=\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$

(i), (ii), (iii)은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{18}+\frac{4}{15}+\frac{1}{10}=\frac{19}{45}$

6 임의로 뽑은 USB 메모리가 A 회사의 제품인 사건을 A, USB 메모리에서 오류가 발생하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{20}{50}\times\frac{5}{100}=\frac{1}{50}$$

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{30}{50}\times\frac{x}{100}=\frac{3x}{500}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{50}+\frac{3x}{500}=\frac{10+3x}{500}$$

이때 50개의 USB 메모리 중 임의로 한 개를 뽑아 조사해 보니 오류가 발생하였을 때, 그것이 A 회사의 제품일 확률이 $\frac{5}{14}$이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{50}}{\frac{10+3x}{500}}=\frac{10}{10+3x}=\frac{5}{14}$$

$5(10+3x)=140$

$10+3x=28 \quad \therefore x=6$

7 표본공간 S는 $S=\{11, 12, 21, 32\}$

$A_1=\{11, 12\}$, $A_2=\{21\}$, $A_3=\{32\}$

$B_1=\{11, 21\}$, $B_2=\{12, 32\}$

$A_1\cap B_2=\{12\}$, $A_2\cap B_1=\{21\}$, $A_3\cap B_2=\{32\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A_1)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B_2)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A_1\cap B_2)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A_1\cap B_2)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B_2)$

따라서 두 사건 A_1과 B_2는 서로 독립이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(A_2)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B_1)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A_2\cap B_1)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A_2\cap B_1)\neq\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B_1)$

따라서 두 사건 A_2와 B_1은 서로 종속이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(A_3)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B_2)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A_3\cap B_2)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A_3\cap B_2)\neq\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(B_2)$

따라서 두 사건 A_3과 B_2는 서로 종속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

8 A가 이긴 경기를 ○, 진 경기를 ×로 나타내면 5번째 경기에서 A가 우승하는 경우는 ×○×○○이다.

이때 한 경기에서 A가 B를 이길 확률이 $\frac{2}{5}$이므로 5번째 경기에서 A가 우승할 확률은

$$\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{72}{3125}$$

따라서 $p=3125$, $q=72$이므로 $p+q=3197$

9 문제를 풀 때, 평균적으로 5문제 중 4문제를 맞히므로 한 문제를 풀 때 맞힐 확률은 $\frac{4}{5}$이다.

3문제 중 2문제 이상을 맞히면 합격하므로 구하는 확률은 1문제만 맞히거나 1문제도 맞히지 못할 확률이다.

(i) 3문제 중 1문제만 맞힐 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{12}{125}$$

(ii) 3문제 중 1문제도 맞히지 못할 확률은

$${}_3C_0\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{12}{125}+\frac{1}{125}=\frac{13}{125}$

10 구매한 제품 1개가 불량품일 확률은 $\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$이다.

구매한 5개의 제품 중 불량품이 4개 이상일 확률은 불량품이 4개 또는 5개일 확률이다.

(i) 불량품이 4개일 확률은 ${}_5C_4\left(\frac{1}{20}\right)^4\left(\frac{19}{20}\right)^1=\frac{95}{20^5}$

(ii) 불량품이 5개일 확률은 ${}_5C_5\left(\frac{1}{20}\right)^5\left(\frac{19}{20}\right)^0=\frac{1}{20^5}$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{95}{20^5}+\frac{1}{20^5}=\frac{96}{20^5}$

따라서 $p=5$, $q=96$이므로 $q-p=91$

실전 연습문제 p.74

1 $\frac{20}{61}$　2 ④　3 ③　4 $\frac{3}{8}$

1 학교에 가는 사건을 A, 학교를 거쳐 학원을 가는 사건을 B, 학교에서 학원을 거쳐 독서실을 가는 사건을 C, 우산을 두고 오는 사건을 D라 하자.

민수는 평균 5번에 1번꼴로 우산을 두고 오므로

(i) 우산을 학교에 두고 올 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap D)=\frac{1}{5}$$

(ii) 우산을 학원에 두고 올 확률은 학교에서는 우산을 가져와야 하므로

$$\mathrm{P}(B\cap D)=\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$$

(iii) 우산을 독서실에 두고 올 확률은 학교와 학원에서는 우산을 가져와야 하므로

$$\mathrm{P}(C\cap D)=\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$$

(i), (ii), (iii)은 서로 배반사건이므로 우산을 두고 올 확률은

$$\mathrm{P}(D)=\mathrm{P}(A\cap D)+\mathrm{P}(B\cap D)+\mathrm{P}(C\cap D)=\frac{1}{5}+\frac{4}{25}+\frac{16}{125}=\frac{61}{125}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|D)=\frac{\mathrm{P}(B\cap D)}{\mathrm{P}(D)}=\frac{\frac{4}{25}}{\frac{61}{125}}=\frac{20}{61}$$

2 ㄱ. A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이때 $A\cap B^C=A-(A\cap B)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

ㄴ. A, B가 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때 주어진 조건에서 $\mathrm{P}(A)\neq 0$, $\mathrm{P}(B)\neq 0$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq 0$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq \mathrm{P}(A\cap B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

ㄷ. A, B가 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=0$$

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=0$$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$

ㄹ. A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$$\begin{aligned}&\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\}\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

3 두 팀이 이길 확률이 서로 같으므로 매 경기에서 A, B 두 팀이 이길 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다.

이때 A 팀이 우승하려면 나머지 네 경기 중에서 세 경기를 이겨야 하므로 A 팀이 우승하는 경우와 그에 따른 확률은 다음과 같다.

(i) A가 3번 연속 이길 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

(ii) 마지막 경기에서 A가 이기고 그 사이 세 경기 중 2번을 A가 이길 확률은 ${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

(i), (ii)에 의해 A 팀이 우승할 확률 p는

$$p=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$$

이때 B 팀이 우승할 확률 q는

$$q=1-p=\frac{11}{16}\ (\because p+q=1)$$

$$\therefore p:q=\frac{5}{16}:\frac{11}{16}=5:11$$

4 한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

동전을 3번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 x, 뒷면이 나오는 횟수를 y라 할 때, 동전을 3번 던지므로

$x+y=3$ …… ㉠

또한 동전을 3번 던져서 앞면이 x회 나와 $2x$만큼, 뒷면이 y회 나와 y만큼 변을 따라 움직인 결과, 점 P가 점 A에 되돌아오기 위해서는 정사각형의 네 변의 길이의 합인 4만큼 움직여야 하므로

$2x+y=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=2$

따라서 구하는 확률은 동전을 3번 던져서 앞면이 1번, 뒷면이 2번 나올 확률과 같으므로

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

01 이산확률변수와 이항분포

1 개념 CHECK p.77

1. 답 (1) **0, 1, 2** (2) **풀이 참조** (3) **풀이 참조**

(1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(2) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 소수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 그 외의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(3)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

2. 답 (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{5}{8}$

(1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{8}$

(2) $\mathrm{P}(X=1$ 또는 $X=3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

(3) $\mathrm{P}(X\geq2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

1 유제 & 문제 p.78~79

유제 01 답 (1) **10** (2) $\frac{3}{10}$

(1) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{3}{k}$	$\frac{4}{k}$	1

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}=1 \qquad \therefore k=10$

(2) $\mathrm{P}(x\leq2)=\mathrm{P}(x=1)+\mathrm{P}(x=2)=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}=\frac{3}{10}$

문제 01-1 답 $\frac{5}{8}$

$0\leq a^2\leq1,\ 0\leq\frac{a}{2}\leq1 \qquad \therefore 0\leq a\leq1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+a^2+\frac{a}{2}=1,\ 2a^2+a-1=0$

$(a+1)(2a-1)=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because ㉠)$

$X^2-X-2<0$을 풀면

$(X+1)(X-2)<0 \qquad \therefore -1<X<2$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X^2-X-2<0)=\mathrm{P}(-1<X<2)$

$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

문제 01-2 답 $\frac{9}{8}$

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$+\cdots+\mathrm{P}(X=9)=1$

$\frac{k}{2\times1}+\frac{k}{3\times2}+\frac{k}{4\times3}+\cdots+\frac{k}{9\times8}=1$

$k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\right\}=1$

$k\left(1-\frac{1}{9}\right)=1,\ \frac{8}{9}k=1$

$\therefore k=\frac{9}{8}$

유제 02 답 (1) $\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{3-x}}{{}_7\mathrm{C}_3}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

(2) **풀이 참조** (3) $\frac{16}{35}$

(1) 3명의 대표를 뽑을 때, 대표로 뽑힌 여학생의 수가 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.
이때 남학생 4명과 여학생 3명 중에서 3명의 대표를 뽑는 모든 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_3$이고, 뽑힌 대표 중에서 여학생이 x명인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{3-x}$이다.
따라서 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{3-x}}{{}_7\mathrm{C}_3}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

(2) 확률변수 X가 가질 수 있는 각 값에 대한 확률을 구하면

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

(3) 대표로 뽑힌 여학생이 없거나 2명일 확률은

$$\mathrm{P}(X=0 \text{ 또는 } X=2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)$$
$$=\frac{4}{35}+\frac{12}{35}=\frac{16}{35}$$

문제 **02**-1 답 $\mathbf{P}(X=x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{36} & (x=2,\ 3,\ \cdots,\ 7) \\ \dfrac{13-x}{36} & (x=8,\ 9,\ \cdots,\ 12)\end{cases}$, $\dfrac{1}{4}$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 두 눈의 수의 합이 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, $\cdots$, 12이다.

X가 가질 수 있는 각 값에 대한 확률을 구하면

$X=2$: (1, 1)
➡ $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{36}$

$X=3$: (1, 2), (2, 1)
➡ $\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{36}$

$X=4$: (1, 3), (2, 2), (3, 1)
➡ $\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{36}$

$X=5$: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)
➡ $\mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{36}$

$X=6$: (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)
➡ $\mathrm{P}(X=6)=\frac{5}{36}$

$X=7$: (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)
➡ $\mathrm{P}(X=7)=\frac{6}{36}$

$X=8$: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)
➡ $\mathrm{P}(X=8)=\frac{5}{36}$

$X=9$: (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)
➡ $\mathrm{P}(X=9)=\frac{4}{36}$

$X=10$: (4, 6), (5, 5), (6, 4)
➡ $\mathrm{P}(X=10)=\frac{3}{36}$

$X=11$: (5, 6), (6, 5)
➡ $\mathrm{P}(X=11)=\frac{2}{36}$

$X=12$: (6, 6)
➡ $\mathrm{P}(X=12)=\frac{1}{36}$

따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{36} & (x=2,\ 3,\ \cdots,\ 7) \\ \dfrac{13-x}{36} & (x=8,\ 9,\ \cdots,\ 12)\end{cases}$$

$X^2-13X+40=0$을 풀면

$(X-5)(X-8)=0$ $\quad\therefore X=5$ 또는 $X=8$

$$\therefore \mathrm{P}(X^2-13X+40=0)=\mathrm{P}(X=5 \text{ 또는 } X=8)$$
$$=\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=8)$$
$$=\frac{4}{36}+\frac{5}{36}=\frac{1}{4}$$

2 개념 CHECK p.81

1. 답 (1) **2** (2) **1** (3) **1**

(1) $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{8}=2$

(2) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$$=\left(1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}+4^2\times\frac{1}{8}\right)-2^2$$
$$=1$$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{1}=1$

2 유제 & 문제 p.82~83

유제 **03** 답 $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{2}+b+\frac{1}{4}=1$ $\quad\therefore b=\frac{1}{4}$

$\mathrm{E}(X)=-\frac{1}{2}$이므로

$-a\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$

$\frac{a}{4}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=2$

확률변수 X의 확률분포를 나타낸 표를 완성하면

X	-2	0	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}=3$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=3-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

문제 03-1 답 1

확률의 총합은 1이므로

$\frac{4}{a}+\frac{3}{a}+\frac{2}{a}+\frac{1}{a}=1$, $\frac{10}{a}=1$ $\quad\therefore a=10$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{10}=1$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{10}=2$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=2-1^2=1$

문제 03-2 답 $\frac{5}{12}$

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{3}+b=1 \quad \therefore a+b=\frac{2}{3}$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=0\times a+3\times\frac{1}{3}+4\times b=1+4b$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times a+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times b=3+16b$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=3+16b-(1+4b)^2$

$=-16b^2+8b+2$

$=-16\left(b-\frac{1}{4}\right)^2+3$

따라서 분산 $\mathrm{V}(X)$는 $b=\frac{1}{4}$일 때 최대이므로 이를 ㉠에 대입하면 $a+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore a=\frac{5}{12}$

유제 04 답 $\frac{28}{75}$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{7}{15}+1^2\times\frac{7}{15}+2^2\times\frac{1}{15}=\frac{11}{15}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{11}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{28}{75}$

문제 04-1 답 평균: $\frac{9}{5}$, 표준편차: $\frac{3}{5}$

홀수가 적힌 공은 1, 3, 5의 3개이고, 짝수가 적힌 공은 2, 4의 2개이므로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 홀수가 적힌 공은 적어도 1개 꺼내게 된다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{10}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{18}{5}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{18}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

문제 04-2 답 150원

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 서로 다른 3개의 동전을 동시에 던져서 받을 수 있는 상금은

(H, H, H) ➡ 300원

(H, H, T), (H, T, H), (T, H, H) ➡ 200원

(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H) ➡ 100원

(T, T, T) ➡ 0원

상금으로 받는 금액을 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 200, 300이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X=100)=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(X=200)=\frac{3}{8}$,

$\mathrm{P}(X=300)=\frac{1}{8}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	200	300	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+100\times\frac{3}{8}+200\times\frac{3}{8}+300\times\frac{1}{8}$

$=150$

따라서 구하는 기댓값은 150원이다.

개념편

3 개념 CHECK

p.84

1. 답 (1) **평균: 10, 분산: 36, 표준편차: 6**

(2) **평균: 13, 분산: 81, 표준편차: 9**

$\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{V}(X)=9$, $\sigma(X)=\sqrt{9}=3$이므로

(1) $\mathrm{E}(2X)=2\mathrm{E}(X)=2\times5=10$

$\mathrm{V}(2X)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times9=36$

$\sigma(2X)=|2|\sigma(X)=2\times3=6$

(2) $\mathrm{E}(3X-2)=3\mathrm{E}(X)-2=3\times5-2=13$

$\mathrm{V}(3X-2)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times9=81$

$\sigma(3X-2)=|3|\sigma(X)=3\times3=9$

3 유제 & 문제

p.85~86

유제 05 답 **평균: 2, 분산: 13, 표준편차: $\sqrt{13}$**

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{8}+2a+\frac{1}{8}=1$

$3a=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

확률변수 X의 확률분포의 표를 완성하면

X	-2	0	1	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=(-2)\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{8}=\frac{7}{2}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{7}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{13}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

따라서 $Y=2X+1$의 평균 $\mathrm{E}(Y)$, 분산 $\mathrm{V}(Y)$, 표준편차 $\sigma(Y)$를 구하면

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X+1)=2\mathrm{E}(X)+1$

$=2\times\frac{1}{2}+1=2$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X+1)=2^2\mathrm{V}(X)$

$=4\times\frac{13}{4}=13$

$\sigma(Y)=\sigma(2X+1)=|2|\sigma(X)$

$=2\times\frac{\sqrt{13}}{2}=\sqrt{13}$

문제 05-1 답 **-13**

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	k	$2k$	$3k$	$4k$	1

확률의 총합은 1이므로

$k+2k+3k+4k=1$

$10k=1$ $\quad\therefore k=\frac{1}{10}$

$\therefore \mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{4}{10}=4$

$\therefore \mathrm{E}(-5X+7)=-5\mathrm{E}(X)+7=-5\times4+7=-13$

문제 05-2 답 **70**

확률변수 $Y=aX+b$에 대하여

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

이때 $\mathrm{E}(X)=1$, $\mathrm{E}(Y)=30$이므로

$a+b=30$ …… ㉠

또 $\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

이때 $\mathrm{V}(X)=4$, $\mathrm{V}(Y)=1600$이므로

$4a^2=1600$ $\quad\therefore a=-20$ ($\because a<0$)

이를 ㉠에 대입하면

$-20+b=30$ $\quad\therefore b=50$

$\therefore b-a=50-(-20)=70$

유제 06 답 **평균: 8, 분산: 3**

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_0}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}=1$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{2}{3}+2^2\times\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{4}{3}-1^2=\frac{1}{3}$

따라서 $Y=3X+5$의 평균 $\mathrm{E}(Y)$와 분산 $\mathrm{V}(Y)$를 구하면

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X+5)=3\mathrm{E}(X)+5=3\times1+5=8$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(3X+5)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times\frac{1}{3}=3$

문제 06-1 답 $3\sqrt{5}$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{10}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{2}$,

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{27}{10}$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{27}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{20}$$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{9}{20}}=\frac{3}{2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$

$\therefore\ \sigma(-10X+3)=|-10|\sigma(X)=3\sqrt{5}$

4 개념 CHECK

p.88

1. 답 (1) **$\mathrm{B}(10,\ 0.4)$** (2) **이항분포를 따르지 않는다.**

2. 답 (1) **$\mathrm{P}(X=x)={}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$**

(2) **$\frac{20}{243}$**

(2) $\mathrm{P}(X=4)={}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}$

3. 답 (1) **평균: 180, 분산: 90, 표준편차: $3\sqrt{10}$**

(2) **평균: 12, 분산: 9, 표준편차: 3**

(1) $\mathrm{E}(X)=360\times\frac{1}{2}=180$

$\mathrm{V}(X)=360\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=90$

$\sigma(X)=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

(2) $\mathrm{E}(X)=48\times\frac{1}{4}=12$

$\mathrm{V}(X)=48\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=9$

$\sigma(X)=\sqrt{9}=3$

4 유제 & 문제

p.89~90

유제 07 답 (1) **$\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{10}\right)$**

(2) **$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{10-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$**

(3) **91**

(1) 10개의 제품을 고르는 것이므로 10회의 독립시행이고, 생산되는 제품의 10 %가 불량품이므로 1개의 제품을 고를 때 불량품이 나올 확률은 $\frac{1}{10}$이다.

따라서 불량품의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

(2) X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{10-x}$ $(x=0,\ 1,\ \cdots,\ 10)$

(3) 불량품이 9개 이상 나올 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge9)&=\mathrm{P}(X=9)+\mathrm{P}(X=10)\\&={}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{10}\right)^9\left(\frac{9}{10}\right)^1+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{10}\left(\frac{9}{10}\right)^0\\&=\frac{90+1}{10^{10}}\\&=\frac{91}{10^{10}}\end{aligned}$$

$\therefore\ a=91$

문제 07-1 답 **$\frac{113}{625}$**

4번의 각각의 타석에서 안타를 치는 것이므로 4회의 독립시행이고, 각 타석에서 안타를 칠 확률은 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$이다.

따라서 안타를 친 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

이때 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

이므로 4번의 타석에서 안타를 적어도 2번 칠 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge2)&=1-\mathrm{P}(X<2)\\&=1-\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\}\\&=1-\left\{{}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^3\right\}\\&=1-\frac{4^4+4^4}{5^4}\\&=1-\frac{512}{625}\\&=\frac{113}{625}\end{aligned}$$

유제 08 답 (1) **평균: 6, 표준편차: 2**
(2) **평균: 1000, 표준편차: 30**

(1) 18번 전화를 거는 것이므로 18회의 독립시행이고, 전화를 걸면 3번에 1번꼴로 통화 연결이 되지 않으므로 1번 전화를 걸었을 때 통화가 연결되지 않을 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=18\times\frac{1}{3}=6$

$\sigma(X)=\sqrt{18\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=\sqrt{4}=2$

(2) 씨앗 10000개를 뿌리는 것이므로 10000회의 독립시행이고, 씨앗의 발아율이 10 %이므로 하나의 씨앗이 발아할 확률은 $\frac{1}{10}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10000, \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=10000\times\frac{1}{10}=1000$

$\sigma(X)=\sqrt{10000\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}=\sqrt{900}=30$

문제 08-1 답 **평균: 59, 분산: 108**

전구 1개를 꺼내어 보고 다시 넣는 작업을 50회 반복하는 것이므로 50회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 불량인 전구가 나올 확률은 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$이다.

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=50\times\frac{2}{5}=20$, $\mathrm{V}(X)=50\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=12$

따라서 $Y=3X-1$의 평균 $\mathrm{E}(Y)$와 분산 $\mathrm{V}(Y)$를 구하면

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X-1)=3\mathrm{E}(X)-1=3\times20-1=59$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(3X-1)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times12=108$

문제 08-2 답 **154**

주사위를 n번 던지는 것이므로 n회의 독립시행이고, 주사위를 1번 던질 때 2의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

이때 $\mathrm{E}(X)=12$이므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{6}=12 \qquad \therefore n=72$

따라서 $\mathrm{V}(X)=72\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=10$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=10+12^2=154$

기본 연습문제 p.92~93

1 $\frac{3}{4}$ **2** 6 **3** $-\frac{1}{5}$ **4** 6 **5** 7
6 37 **7** 10
8 평균: 50점, 분산: 100, 표준편차: 10점 **9** $\frac{1013}{1024}$
10 $n=16$, $p=\frac{1}{4}$

1 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4}$

$X^2+X-2<0$을 풀면

$(X+2)(X-1)<0 \qquad \therefore -2<X<1$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X^2+X-2<0)&=\mathrm{P}(-2<X<1)\\&=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

2 정사면체를 두 번 던져서 바닥에 닿는 면에 적힌 수의 합이 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이다.

이때 정사면체를 두 번 던져서 나오는 경우의 수는 모두 $4\times4=16$이므로 X가 가질 수 있는 각 값에 대한 확률을 구하면

$X=2$: (1, 1)
 ➡ $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{16}$

$X=3$: (1, 2), (2, 1)
 ➡ $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$

$X=4$: (1, 3), (2, 2), (3, 1)
 ➡ $\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{16}$

$X=5$: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)
 ➡ $\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{4}$

$X=6$: (2, 4), (3, 3), (4, 2)
 ➡ $\mathrm{P}(X=6)=\frac{3}{16}$

$X=7$: (3, 4), (4, 3)
 ➡ $\mathrm{P}(X=7)=\frac{1}{8}$

$X=8$: (4, 4)
 ➡ $\mathrm{P}(X=8)=\frac{1}{16}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

이때 $\mathrm{P}(X=6)+\mathrm{P}(X=7)+\mathrm{P}(X=8)=\frac{3}{8}$이므로

$\mathrm{P}(X\geq 6)=\frac{3}{8}$ $\quad\therefore a=6$

3 확률의 총합은 1이므로 $a+b+c=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{E}(X)=1$이므로

$0\times a+1\times b+2\times c=1$ $\quad\therefore b+2c=1$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\mathrm{V}(X)=\frac{2}{5}$이므로

$(0^2\times a+1^2\times b+2^2\times c)-1^2=\frac{2}{5}$

$b+4c-1=\frac{2}{5}$ $\quad\therefore b+4c=\frac{7}{5}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢$-$㉡을 하면 $2c=\frac{2}{5}$ $\quad\therefore c=\frac{1}{5}$

$c=\frac{1}{5}$을 ㉡에 대입하면

$b+\frac{2}{5}=1$ $\quad\therefore b=\frac{3}{5}$

$b=\frac{3}{5}$, $c=\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면

$a+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{5}$

$\therefore a-b+c=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=-\frac{1}{5}$

4 1부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 8장의 카드 중에서 동시에 선택한 2장의 카드에 적힌 숫자의 차가 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이다.

8장의 카드 중에서 동시에 2장의 카드를 뽑을 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2=28$이므로 X가 가질 수 있는 각 값에 대한 확률을 구하면

$X=1$: (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8)

➡ $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{4}$

$X=2$: (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7), (6, 8)

➡ $\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{14}$

$X=3$: (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)

➡ $\mathrm{P}(X=3)=\frac{5}{28}$

$X=4$: (1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)

➡ $\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{7}$

$X=5$: (1, 6), (2, 7), (3, 8)

➡ $\mathrm{P}(X=5)=\frac{3}{28}$

$X=6$: (1, 7), (2, 8)

➡ $\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{14}$

$X=7$: (1, 8)

➡ $\mathrm{P}(X=7)=\frac{1}{28}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{28}$	1

확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{3}{14}+3\times\frac{5}{28}+4\times\frac{1}{7}+5\times\frac{3}{28}+6\times\frac{1}{14}+7\times\frac{1}{28}=3$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{3}{14}+3^2\times\frac{5}{28}+4^2\times\frac{1}{7}+5^2\times\frac{3}{28}+6^2\times\frac{1}{14}+7^2\times\frac{1}{28}=12$$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=12-3^2=3$

$\therefore \mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=3+3=6$

5 받을 수 있는 상금을 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 10000, -5000이므로

$\mathrm{P}(X=10000)=\frac{8}{8+a}$

$\mathrm{P}(X=-5000)=\frac{a}{8+a}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10000	-5000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{8}{8+a}$	$\frac{a}{8+a}$	1

이때 $\mathrm{E}(X)=3000$이므로

$10000\times\frac{8}{8+a}+(-5000)\times\frac{a}{8+a}=3000$

$\frac{80-5a}{8+a}=3$, $80-5a=24+3a$

$8a=56$ $\quad\therefore a=7$

따라서 파란색 제비의 개수는 7이다.

6 $\sigma(-2-\sqrt{3}X)=6$이므로

$\sigma(-2-\sqrt{3}X)=|-\sqrt{3}|\sigma(X)=6$

$\therefore\ \sigma(X)=2\sqrt{3}$

$\therefore\ V(X)=\{\sigma(X)\}^2=(2\sqrt{3})^2=12$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

$=12+5^2=37$

7 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	0	1	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=(-2)\times\frac{1}{10}+(-1)\times\frac{1}{5}+0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{2}{5}=0$

$E(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{10}+(-1)^2\times\frac{1}{5}+0^2\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{2}{5}$

$=1$

$\therefore\ V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1-0^2=1$

$E(Y)=E(aX+b)=aE(X)+b=b=2$

$V(Y)=V(aX+b)=a^2V(X)=a^2=6$

$\therefore\ a^2+b^2=6+2^2=10$

8 $E(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$이므로 표준점수 T의 평균, 분산, 표준편차는

$E(T)=E\left(10\times\frac{X-m}{\sigma}+50\right)$

$=\frac{10}{\sigma}E(X)-\frac{10m}{\sigma}+50$

$=\frac{10m}{\sigma}-\frac{10m}{\sigma}+50=50$(점)

$V(T)=V\left(10\times\frac{X-m}{\sigma}+50\right)=\left(\frac{10}{\sigma}\right)^2V(X)$

$=\frac{100}{\sigma^2}\times\sigma^2=100$

$\sigma(T)=\sigma\left(10\times\frac{X-m}{\sigma}+50\right)=\left|\frac{10}{\sigma}\right|\sigma(X)$

$=\frac{10}{\sigma}\times\sigma=10$(점)

9 10문제를 각각 푸는 것이므로 10회의 독립시행이고, ○, ×의 답을 임의로 고르므로 각 문제를 맞힐 확률은 $\frac{1}{2}$이다.
따라서 맞힌 문제의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

이때 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$

이므로 2문제 이상을 맞힐 확률은

$P(X\geq 2)=1-P(X<2)$

$=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}$

$=1-\left\{{}_{10}C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9\right\}$

$=1-\frac{11}{1024}=\frac{1013}{1024}$

10 $E(X)=4$, $V(X)=3$이므로

$E(X)=np=4$ …… ㉠

$V(X)=np(1-p)=3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $4(1-p)=3$ $\therefore\ p=\frac{1}{4}$

$p=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{4}n=4$ $\therefore\ n=16$

실전 연습문제

p.94

1 $\frac{3}{5}$ **2** ② **3** 0.0804 **4** 30

1 빨간색 구슬이 2개, 초록색 구슬이 4개이므로 빨간색 구슬 2개가 나올 때까지의 시행 횟수가 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이다.

(i) $X=5$일 때

4번째 시행까지 빨간색 구슬 1개와 초록색 구슬 3개를 꺼내고 5번째 시행에서 빨간색 구슬을 꺼내야 하므로

$P(X=5)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_3}{{}_6C_4}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{15}$

(ii) $X=6$일 때

5번째 시행까지 빨간색 구슬 1개와 초록색 구슬 4개를 꺼내고 6번째 시행에서 빨간색 구슬을 꺼내야 하므로

$P(X=6)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_4}{{}_6C_5}\times 1=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에 의해

$P(X>4)=P(X=5)+P(X=6)$

$=\frac{4}{15}+\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$

2 $\mathrm{P}(X=k)=p_k(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$라 하면

$\mathrm{E}(X)=p_1+2p_2+\cdots+5p_5=4$

$$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=\left(\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}\right)+2\left(\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}\right)+\cdots+5\left(\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(p_1+2p_2+\cdots+5p_5)+\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\cdots+\frac{5}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+\frac{3}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\times4+\frac{3}{2}$$
$$=\frac{7}{2}$$

3 40명의 사람이 각각 비행기에 탑승하는 것이므로 40회의 독립시행이고, 예약 취소율이 0.1이므로 비행기에 탑승할 확률은 0.9이다.

비행기에 탑승하는 사람 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(40,\ 0.9)$를 따른다.

이때 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{40}\mathrm{C}_x\,0.9^x\,0.1^{40-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 40)$

따라서 좌석이 부족할 확률은

$$\mathrm{P}(X>38)=\mathrm{P}(X=39)+\mathrm{P}(X=40)$$
$$={}_{40}\mathrm{C}_{39}\,0.9^{39}\,0.1^{1}+{}_{40}\mathrm{C}_{40}\,0.9^{40}\,0.1^{0}$$
$$=40\times0.0164\times0.1+0.0148$$
$$=0.0656+0.0148$$
$$=0.0804$$

4 한 개의 동전을 120번 던지는 것은 120회의 독립시행이고, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(120,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=120\times\frac{1}{2}=60$

$\mathrm{V}(X)=120\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=30$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=30+60^2=3630$$
$$\therefore\ f(a)=\mathrm{E}((X-a)^2)=\mathrm{E}(X^2-2aX+a^2)$$
$$=\mathrm{E}(X^2)-2a\mathrm{E}(X)+a^2$$
$$=a^2-120a+3630$$
$$=(a-60)^2+30$$

따라서 $f(a)$의 최솟값은 30이다.

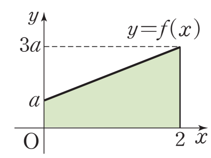
02 연속확률변수와 정규분포

1 유제 & 문제 p.96

유제 01 답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{5}{8}$

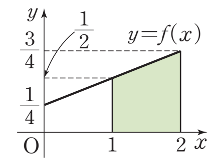
(1) $f(x)\ge0$이어야 하므로 $a\ge0$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로



$\frac{1}{2}\times(a+3a)\times2=1 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{4}$

(2) 구하는 확률은 오른쪽 그림에서 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

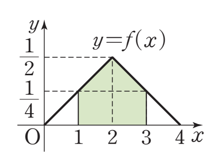


$$\mathrm{P}(x\ge1)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\times1$$
$$=\frac{5}{8}$$

문제 01-1 답 $\frac{3}{4}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로 $\frac{1}{2}\times4\times a=1 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$

$0\le x\le2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0,\ 0)$, $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나는 직선이므로 그 직선의 방정식은



$y=\frac{\frac{1}{2}}{2}x \qquad \therefore\ y=\frac{1}{4}x \qquad \therefore\ f(x)=\frac{1}{4}x\ (0\le x\le2)$

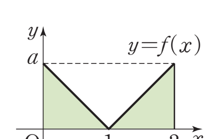
따라서 $f(1)=\frac{1}{4}$이고 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(1\le X\le3)=1-2\times\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$

문제 01-2 답 $\frac{13}{72}$

$f(x)\ge0$이어야 하므로 $a>0$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로

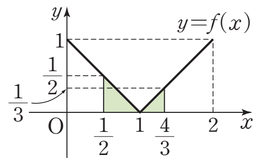


$2\times\left(\frac{1}{2}\times1\times a\right)=1 \qquad \therefore\ a=1$

$\therefore f(x)=|x-1|\ (0\le x\le 2)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2},\ f\left(\frac{4}{3}\right)=\left|\frac{4}{3}-1\right|=\frac{1}{3}$ …… ㉠

따라서 구하는 확률은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로 ㉠에서



$P\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{4}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{72}$

2 개념 CHECK p.100

1. 답 (1) $\mathbf{N(8,\ 2^2)}$ (2) $\mathbf{N(-10,\ 5^2)}$

2. 답 (1) $Z=\frac{X-5}{3}$ (2) $Z=\frac{X+12}{4}$

2 유제 & 문제 p.101~104

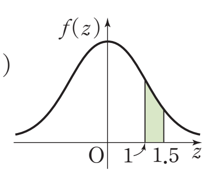
유제 02 답 (1) **0.0919** (2) **0.2417** (3) **0.0668** (4) **0.5328**

(1) $P(1\le Z\le 1.5)$

$=P(0\le Z\le 1.5)-P(0\le Z\le 1)$

$=0.4332-0.3413$

$=0.0919$



(2) $P(-1.5\le Z\le -0.5)$

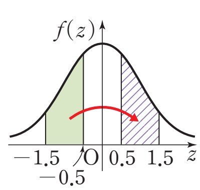
$=P(0.5\le Z\le 1.5)$

$=P(0\le Z\le 1.5)$

$\quad -P(0\le Z\le 0.5)$

$=0.4332-0.1915$

$=0.2417$



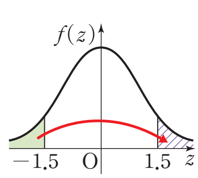
(3) $P(Z\le -1.5)$

$=P(Z\ge 1.5)$

$=0.5-P(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5-0.4332$

$=0.0668$



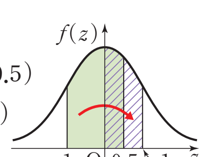
(4) $P(-1\le Z\le 0.5)$

$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 0.5)$

$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 0.5)$

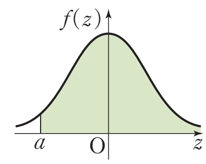
$=0.3413+0.1915$

$=0.5328$



문제 02-1 답 (1) **−2** (2) **1.5**

(1) $P(Z\ge a)=0.9772$를 그림으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$P(Z\ge a)$

$=P(a\le Z\le 0)+0.5$

$=P(0\le Z\le -a)+0.5=0.9772$

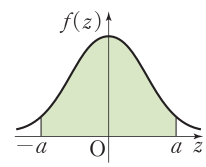
$\therefore P(0\le Z\le -a)=0.4772$

이때 주어진 조건에서 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$a=-2$

(2) $|Z|\le a$이면 $-a\le Z\le a$

$P(-a\le Z\le a)=0.8664$를 그림으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$2P(0\le Z\le a)=0.8664$

$\therefore P(0\le Z\le a)=0.4332$

이때 주어진 조건에서 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$a=1.5$

유제 03 답 (1) **0.1359** (2) **0.6247**

$Z=\frac{X-3}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

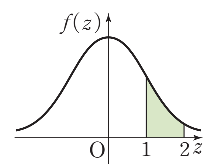
(1) $P(7\le X\le 11)$

$=P\left(\frac{7-3}{4}\le Z\le\frac{11-3}{4}\right)$

$=P(1\le Z\le 2)$

$=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1)$

$=0.4772-0.3413=0.1359$



(2) $P(1\le X\le 9)$

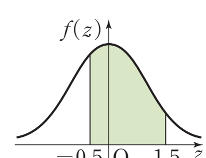
$=P\left(\frac{1-3}{4}\le Z\le\frac{9-3}{4}\right)$

$=P(-0.5\le Z\le 1.5)$

$=P(-0.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)$

$=P(0\le Z\le 0.5)+P(0\le Z\le 1.5)$

$=0.1915+0.4332=0.6247$



문제 03-1 답 **−35**

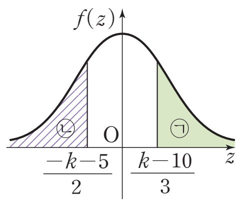
$Z=\frac{X-10}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

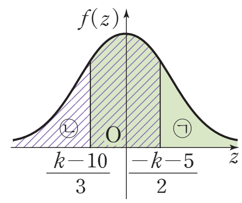
$P(X\ge k)=P\left(Z\ge\frac{k-10}{3}\right)$ …… ㉠

또 $Z=\frac{Y-5}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(Y\le -k)=P\left(Z\le\frac{-k-5}{2}\right)$ …… ㉡

주어진 조건에서 ㉠=㉡이므로 이를 만족하는 경우는 다음 두 경우 중 하나이다.





이때 $\frac{k-10}{3}=-\frac{-k-5}{2}$이어야 하므로

$2(k-10)=-3(-k-5)$

$2k-20=3k+15 \qquad \therefore k=-35$

문제 03-2 답 **1.65**

$Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(m-k\sigma\le X\le m+k\sigma)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{(m-k\sigma)-m}{\sigma}\le Z\le\frac{(m+k\sigma)-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(-k\le Z\le k)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.901$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.4505$

이때 주어진 조건에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.65)=0.4505$이므로

$k=1.65$

유제 04 답 (1) **62.47 %** (2) **228명**

신입생의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포

$\mathrm{N}(165,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-165}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(163\le X\le 171)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{163-165}{4}\le Z\le\frac{171-165}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.1915+0.4332$

$=0.6247$

따라서 키가 163 cm 이상 171 cm 이하인 신입생은 전체의 62.47 %에 해당한다.

(2) $\mathrm{P}(X\ge 173)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{173-165}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

따라서 키가 173 cm 이상인 신입생의 수는

$10000\times 0.0228=228$(명)

문제 04-1 답 **730**

생산하는 파이프의 지름의 길이를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-150}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 출고 합격을 받는 제품의 지름의 길이는

$147\le X\le 155$이므로 그 확률을 구하면

$\mathrm{P}(147\le X\le 155)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{147-150}{2}\le Z\le\frac{155-150}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 2.5)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=0.4332+0.4938=0.927$

따라서 출고 합격을 받는 제품의 개수는

$10000\times 0.927=9270$이므로 출고 불합격을 받는 제품의 개수는 $10000-9270=730$

유제 05 답 **179.6점**

지원자의 시험 성적을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(160,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-160}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 전체 지원자 1000명에 대하여 합격자 25명이 차지하는 비율은 $\frac{25}{1000}=0.025$이므로 합격자의 최저 점수를 a점이라 하면

$\mathrm{P}(X\ge a)=0.025$

X를 $Z=\frac{X-160}{10}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-160}{10}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-160}{10}\right)=0.025$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-160}{10}\right)=0.475$

이때 주어진 표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.475$이므로

$\frac{a-160}{10}=1.96 \qquad \therefore a=179.6$

따라서 이 시험 합격자의 최저 점수는 179.6점이다.

문제 05-1 답 **155.9 cm**

학생들의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포

$\mathrm{N}(170,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-170}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

키가 작은 쪽에서 80번째인 학생의 키를 a cm라 하면

$\mathrm{P}(X\le a)=0.08$

X를 $Z=\frac{X-170}{10}$으로 표준화하면

$P(X\le a)=P\left(Z\le\frac{a-170}{10}\right)=P\left(Z\ge\frac{170-a}{10}\right)$

$=0.5-P\left(0\le Z\le\frac{170-a}{10}\right)=0.08$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{170-a}{10}\right)=0.42$

이때 $P(0\le Z\le 1.41)=0.42$이므로

$\frac{170-a}{10}=1.41 \quad \therefore a=155.9$

따라서 키가 작은 쪽에서 80번째인 학생의 키는 155.9 cm 이다.

3 개념 CHECK p.105

1. 답 (1) $\mathbf{N(50,\ 5^2)}$ (2) $\mathbf{N(240,\ (4\sqrt{10})^2)}$

(1) 확률변수 X가 이항분포 $B(100,\ 0.5)$를 따르므로

$E(X)=100\times0.5=50$

$V(X)=100\times0.5\times0.5=25=5^2$

이때 시행 횟수 $n=100$은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따른다.

(2) 확률변수 X가 이항분포 $B\left(720,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=720\times\frac{1}{3}=240$

$V(X)=720\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=160=(4\sqrt{10})^2$

이때 시행 횟수 $n=720$은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(240,\ (4\sqrt{10})^2)$을 따른다.

3 유제 & 문제 p.106~107

유제 06 답 **0.0668**

150명의 환자 중 치유되는 환자의 수를 확률변수 X라 하면 환자마다 치유될 확률은 0.6이고, 150회의 독립시행을 하는 것과 같으므로 X는 이항분포 $B(150,\ 0.6)$을 따른다.

$\therefore E(X)=150\times0.6=90,\ V(X)=150\times0.6\times0.4=36$

이때 시행 횟수 $n=150$은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(90,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-90}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(X\ge 99)=P\left(Z\ge\frac{99-90}{6}\right)=P(Z\ge1.5)$

$=0.5-P(0\le Z\le1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

문제 06-1 답 **31**

뮤지컬 공연의 관람객 400명에 대하여 초대권으로 입장하는 관람객의 수를 확률변수 X라 하면 각 관람객이 초대권으로 입장할 확률이 $\frac{1}{10}$이고, 400회의 독립시행을 하는 것과 같으므로 X는 이항분포 $B\left(400,\ \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=400\times\frac{1}{10}=40,\ V(X)=400\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=36$

이때 시행 횟수 $n=400$은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(40,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-40}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(X\le a)=0.07$에서

$P(X\le a)=P\left(Z\le\frac{a-40}{6}\right)$

$=P\left(Z\ge-\frac{a-40}{6}\right)$

$=0.5-P\left(0\le Z\le\frac{40-a}{6}\right)=0.07$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{40-a}{6}\right)=0.43$

이때 주어진 표에서 $P(0\le Z\le1.5)=0.43$이므로

$\frac{40-a}{6}=1.5 \quad \therefore a=31$

유제 07 답 **0.1587**

한 개의 주사위를 72회 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 1회의 시행에서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 72회의 독립시행을 하므로 X는 이항분포 $B\left(72,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=72\times\frac{1}{3}=24,\ V(X)=72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=16$

이때 시행 횟수 $n=72$는 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(24,\ 4^2)$을 따른다.

한편 X에 대하여 3의 배수가 아닌 눈이 나오는 횟수는 $72-X$이므로 획득한 상금을 확률변수 Y라 하면

$Y=1500\times X+(-300)\times(72-X)$

$=1800X-21600$

따라서 $Z=\frac{X-24}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(Y\ge28800)=P(1800X-21600\ge28800)$

$=P(X\ge28)$

$=P\left(Z\ge\frac{28-24}{4}\right)$

$=P(Z\ge1)=0.5-P(0\le Z\le1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

문제 **07-1** 답 **0.1359**

150개 지역을 조사하여 석유가 발견되는 지역의 수를 확률변수 X라 하면 각 지역에서 석유가 발견될 확률은 0.4이고, 150회의 독립시행을 하는 것과 같으므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}(150,\ 0.4)$를 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=150\times0.4=60,\ \mathrm{V}(X)=150\times0.4\times0.6=36$

이때 시행 횟수 $n=150$은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 6^2)$을 따른다.

한편 X에 대하여 석유가 발견되지 않은 지역의 수는 $150-X$이므로 정유회사의 이익금을 확률변수 Y라 하면

$Y=5\times X+(-1)\times(150-X)=6X-150$

따라서 $Z=\dfrac{X-60}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(246\le Y\le282)&=\mathrm{P}(246\le 6X-150\le282)\\&=\mathrm{P}(66\le X\le72)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{66-60}{6}\le Z\le\frac{72-60}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le2)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.4772-0.3413=0.1359\end{aligned}$$

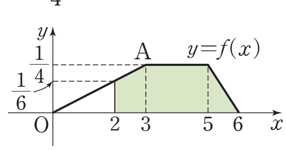
기본 연습문제 p.108~109

1 $\dfrac{5}{6}$	**2** $p=r<q$	**3** ②	**4** 16370
5 360점	**6** 영어	**7** ④	**8** 0.9772 **9** 16

1 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\dfrac{1}{2}\times(2+6)\times k=1\qquad \therefore\ k=\dfrac{1}{4}$

$0\le x\le3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0,\ 0)$, $\left(3,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 지나는 직선이므로 그 직선의 방정식은



$y=\dfrac{\frac{1}{4}-0}{3-0}x\qquad \therefore\ y=\dfrac{1}{12}x$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{1}{12}x\ (0\le x\le3)$

따라서 $f(2)=\dfrac{1}{6}$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(2\le X\le6)&=1-\mathrm{P}(0\le X\le2)\\&=1-\left(\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

2 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ a^2)$, $\mathrm{N}(40,\ b^2)$ $(0<a<b)$을 따르므로 X, Y를 각각 $Z=\dfrac{X-40}{a}$, $Z=\dfrac{Y-40}{b}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

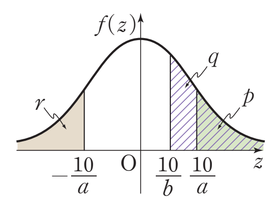
따라서 주어진 확률을 구하면

$p=\mathrm{P}(X\ge50)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{50-40}{a}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{10}{a}\right)$

$q=\mathrm{P}(Y\ge50)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{50-40}{b}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{10}{b}\right)$

$r=\mathrm{P}(X\le30)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{30-40}{a}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{10}{a}\right)$

이때 $0<a<b$에서 $\dfrac{10}{b}<\dfrac{10}{a}$이므로 세 확률 p, q, r를 표준정규분포곡선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore\ p=r<q$

3 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-50}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

확률변수 $Y=2X-1$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le89)=\mathrm{P}(2X-1\le89)&=\mathrm{P}(X\le45)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{45-50}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)\\&=0.5-0.1915=0.3085\end{aligned}$$

4 생산되는 제품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-170}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 제품의 무게가 $165\le X\le180$이면 합격품이므로 그 확률을 구하면

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(165\le X\le180)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{165-170}{5}\le Z\le\frac{180-170}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

따라서 합격품의 개수는

$20000\times0.8185=16370$

5 수험생의 성적을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(278,\ 41^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-278}{41}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이때 전체 수험생 2000명에 대하여 경찰청에 근무할 합격자 46명이 차지하는 비율은 $\frac{46}{2000}=0.023$이므로 경찰청에 근무할 합격자의 최저 점수를 a점이라 하면
$\mathrm{P}(X\ge a)=0.023$에서
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge a)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-278}{41}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-278}{41}\right)\\&=0.023\end{aligned}$$
$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-278}{41}\right)=0.477$
이때 주어진 표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.477$이므로
$\frac{a-278}{41}=2\qquad \therefore\ a=360$
따라서 경찰청에 근무할 합격자의 최저 점수는 360점이다.

6 영어, 수학, 과학 성적을 각각 확률변수 X_1, X_2, X_3이라 하면 X_1, X_2, X_3은 각각 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 20^2)$, $\mathrm{N}(70,\ 20^2)$, $\mathrm{N}(63,\ 16^2)$을 따르므로 $Z_1=\frac{X_1-60}{20}$, $Z_2=\frac{X_2-70}{20}$, $Z_3=\frac{X_3-63}{16}$으로 놓으면 Z_1, Z_2, Z_3은 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
비상이가 다른 학생들보다 영어, 수학, 과학 시험 성적이 높을 확률은 각각
$\mathrm{P}(X_1<82)=\mathrm{P}\left(Z_1<\frac{82-60}{20}\right)=\mathrm{P}(Z_1<1.1)$
$\mathrm{P}(X_2<90)=\mathrm{P}\left(Z_2<\frac{90-70}{20}\right)=\mathrm{P}(Z_2<1)$
$\mathrm{P}(X_3<75)=\mathrm{P}\left(Z_3<\frac{75-63}{16}\right)=\mathrm{P}(Z_3<0.75)$
이때 $\mathrm{P}(Z_1<1.1)>\mathrm{P}(Z_2<1)>\mathrm{P}(Z_3<0.75)$이므로
$\mathrm{P}(X_1<82)>\mathrm{P}(X_2<90)>\mathrm{P}(X_3<75)$
따라서 비상이의 성적이 상대적으로 가장 좋은 과목은 영어이다.

7 한 개의 주사위를 720번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수 X에 대하여 1회의 시행에서 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이고, 720회의 독립시행을 하므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.
$\therefore\ \mathrm{E}(X)=720\times\frac{1}{6}=120,\ \mathrm{V}(X)=720\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=100$
이때 시행 횟수 $n=720$은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.
따라서 $m=120$, $\sigma=10$이므로 주어진 그림을 이용하여 확률을 구하면
$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(110\le X\le 140)\\&=\mathrm{P}(120-10\le X\le 120+20)\\&=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)\\&=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)\\&=\frac{1}{2}\times 0.683+\frac{1}{2}\times 0.954\\&=0.8185\end{aligned}$$

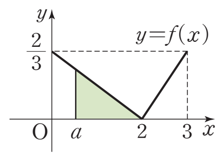
8 400명의 예약 손님에 대하여 예약을 취소하는 손님의 수를 확률변수 X라 하면 각 손님이 예약을 취소할 확률은 0.1이고, 400회의 독립시행을 하는 것과 같으므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.1)$을 따른다.
$\therefore\ \mathrm{E}(X)=400\times 0.1=40,$
$\quad\mathrm{V}(X)=400\times 0.1\times 0.9=36$
이때 시행 횟수 $n=400$은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 6^2)$을 따른다.
따라서 극장에 온 손님 모두가 영화를 관람하게 될 확률은 예약을 취소하는 손님이 $(400-372)$명 이상, 즉 $X\ge 28$일 확률이므로
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 28)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{28-40}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

9 100번의 숏블록에서 성공한 횟수를 확률변수 X라 하면 1회의 시행에서 숏블록을 성공할 확률은 0.2이고, 100회의 독립시행을 하므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.2)$를 따른다.
$\therefore\ \mathrm{E}(X)=100\times 0.2=20,\ \mathrm{V}(X)=100\times 0.2\times 0.8=16$
이때 시행 횟수 $n=100$은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.
숏블록을 성공한 횟수가 k번 이하일 확률이 0.16이므로
$\mathrm{P}(X\le k)=0.16$에서
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le k)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-20}{4}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{20-k}{4}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{20-k}{4}\right)=0.16\end{aligned}$$
$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{20-k}{4}\right)=0.34$
이때 주어진 표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.34$이므로
$\frac{20-k}{4}=1\qquad \therefore\ k=16$

실전 연습문제 p.110

1 $\frac{1}{2}$ 2 ㄱ, ㄷ 3 0.16 4 0.0062

1 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$P(2\le X\le 3)=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$P(a\le X\le 3)=\frac{17}{24}$이므로

$P(a\le X\le 2)=\frac{17}{24}-\frac{1}{3}=\frac{3}{8}$

이때 $P(a\le X\le 2)$는 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times(2-a)\times\frac{1}{3}(2-a)=\frac{3}{8}$

$(2-a)^2=\frac{9}{4}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because 0\le a<2$)

2 ㄱ. $P(X\le 2m)=P(Y\le m)$에서

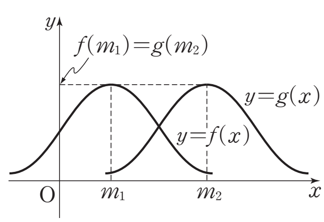
$P(X\le 2m)=P\left(Z\le\frac{2m-m_1}{\sigma}\right)$,

$P(Y\le m)=P\left(Z\le\frac{m-m_2}{\sigma}\right)$이므로

$P\left(Z\le\frac{2m-m_1}{\sigma}\right)=P\left(Z\le\frac{m-m_2}{\sigma}\right)$

$\frac{2m-m_1}{\sigma}=\frac{m-m_2}{\sigma}$ $\quad\therefore m_1-m_2=m$

ㄴ. 두 확률변수 X, Y는 표준편차가 σ로 같고, $m_1\ne m_2$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 모양은 같고, 대칭축은 다르다.



$\therefore f(m_1)=g(m_2)$

ㄷ. $P(X\le 2k)+P(Y\ge k)=1$에서

$P(X\le 2k)=P\left(Z\le\frac{2k-m_1}{\sigma}\right)$,

$P(Y\ge k)=P\left(Z\ge\frac{k-m_2}{\sigma}\right)$이므로

$P\left(Z\le\frac{2k-m_1}{\sigma}\right)+P\left(Z\ge\frac{k-m_2}{\sigma}\right)=1$

$\frac{2k-m_1}{\sigma}=\frac{k-m_2}{\sigma}$

$\therefore k=m_1-m_2=m$ ($\because$ ㄱ)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3 제품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(30,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-30}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 제품이 불량품으로 판정받을 확률은

$P(X\ge 40)=P\left(Z\ge\frac{40-30}{5}\right)=P(Z\ge 2)$

$=0.5-P(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.48=0.02$

즉, 하나의 제품을 임의추출할 때 불량품이 나올 확률이 0.02이므로 임의추출한 제품 2500개 중에서 불량품이 나오는 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B(2500,\ 0.02)$를 따른다.

$\therefore E(X)=2500\times 0.02=50$,

$V(X)=2500\times 0.02\times 0.98=49$

이때 시행 횟수 $n=2500$은 충분히 크므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 7^2)$을 따른다.

따라서 2500개 중에서 불량품이 57개 이상일 확률은

$P(Y\ge 57)=P\left(Z\ge\frac{57-50}{7}\right)=P(Z\ge 1)$

$=0.5-P(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.34=0.16$

4 192개의 문제를 풀어서 맞힌 문제의 개수를 확률변수 X라 하면 각 문제를 맞힐 확률은 $\frac{1}{4}$이고, 192회의 독립시행을 하는 것과 같으므로 X는 이항분포 $B\left(192,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=192\times\frac{1}{4}=48$, $V(X)=192\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=36$

이때 시행 횟수 $n=192$는 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(48,\ 6^2)$을 따른다.

한편 X에 대하여 희정이가 틀린 문제의 개수는 $192-X$이므로 부모님께 추가로 받는 용돈을 확률변수 Y라 하면

$Y=400\times X+(-100)\times(192-X)$

$=500X-19200$

따라서 $Z=\frac{X-48}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 용돈을 12300원 이상 추가로 받을 확률은

$P(Y\ge 12300)=P(500X-19200\ge 12300)$

$=P(X\ge 63)$

$=P\left(Z\ge\frac{63-48}{6}\right)=P(Z\ge 2.5)$

$=0.5-P(0\le Z\le 2.5)$

$=0.5-0.4938=0.0062$

01 통계적 추정

1 유제 & 문제 p.113

유제 01 답 ㄷ

ㄱ. 모든 건전지의 수명을 조사하면 사용할 수 있는 건전지가 없게 되므로 전수조사보다는 표본조사가 적합하다.

ㄴ. 자동차 충돌 안정성 조사는 표본조사가 적합하다.

ㄷ. 전국에 등록된 자동차 대수 조사는 전수조사이다.

ㄹ. 투표 후 유권자에 대한 출구 조사는 모든 유권자를 조사하는 것은 시간이 오래 걸리므로 전수조사보다는 표본조사가 적합하다.

따라서 전수조사가 적합한 것은 ㄷ이다.

문제 01-1 답 (1) **216** (2) **120** (3) **20**

(1) 한 개씩 복원추출하는 경우의 수는 6개의 공에서 중복을 허용하여 3개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$_6\Pi_3=6^3=216$

(2) 한 개씩 비복원추출하는 경우의 수는 6개의 공에서 3개를 꺼내어 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$_6P_3=6\times5\times4=120$

(3) 동시에 추출하는 경우의 수는 6개의 공에서 3개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

2 개념 CHECK p.116

1. 답 $\mathbf{E(\overline{X})=10,\ V(\overline{X})=\frac{1}{25},\ \sigma(\overline{X})=\frac{1}{5}}$

모평균 $m=10$, 모분산 $\sigma^2=4$, 모표준편차 $\sigma=2$이고, 표본의 크기 $n=100$이므로

$E(\overline{X})=m=10$

$V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{4}{100}=\dfrac{1}{25}$

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

2. 답 (1) $\mathbf{E(\overline{X})=7,\ V(\overline{X})=1,\ \sigma(\overline{X})=1}$

(2) **정규분포 $\mathbf{N(7,\ 1^2)}$을 따른다.**

(1) 모평균 $m=7$, 모분산 $\sigma^2=36$, 모표준편차 $\sigma=6$이고, 표본의 크기 $n=36$이므로

$E(\overline{X})=m=7$

$V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{36}{36}=1$

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{6}{\sqrt{36}}=1$

2 유제 & 문제 p.117～118

유제 02 답 $\mathbf{E(\overline{X})=2,\ V(\overline{X})=\frac{1}{6}}$

카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore\ m=E(X)=1\times\dfrac{1}{4}+2\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{4}=2,$

$\sigma^2=V(X)=1^2\times\dfrac{1}{4}+2^2\times\dfrac{1}{2}+3^2\times\dfrac{1}{4}-2^2=\dfrac{1}{2}$

이때 표본의 크기 $n=3$이므로

$E(\overline{X})=m=2,\ V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{\frac{1}{2}}{3}=\dfrac{1}{6}$

문제 02-1 답 **110**

모평균 $m=10$, 모분산 $\sigma^2=64$이므로

$E(\overline{X})=m=10$

$\dfrac{64}{n}=\dfrac{16}{25}$에서 $n=100$

$\therefore\ E(\overline{X})+n=110$

문제 02-2 답 **400**

모표준편차 $\sigma=10$이고 표본의 크기가 n일 때, 표본평균 $\overline{X}$의 표준편차가 0.5 이하가 되어야 하므로

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{10}{\sqrt{n}}\le0.5$

$\sqrt{n}\ge20\qquad\therefore\ n\ge400$

따라서 n의 최솟값은 400이다.

유제 03 답 **0.2857**

모집단이 정규분포 $N(71,\ 16^2)$을 따르고, 표본의 크기 $n=64$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(71,\ \dfrac{16^2}{64}\right)$, 즉 $N(71,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-71}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(72\leq\overline{X}\leq75)$
$=P\left(\frac{72-71}{2}\leq Z\leq\frac{75-71}{2}\right)$
$=P(0.5\leq Z\leq2)$
$=P(0\leq Z\leq2)-P(0\leq Z\leq0.5)$
$=0.4772-0.1915=0.2857$

문제 03-1 답 **296**

모집단이 정규분포 $N(300,\ 40^2)$을 따르고, 표본의 크기 $n=100$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(300,\ \frac{40^2}{100}\right)$, 즉 $N(300,\ 4^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-300}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\geq a)\leq0.8413$에서

$P(\overline{X}\geq a)=P\left(Z\geq\frac{a-300}{4}\right)$
$=P\left(\frac{a-300}{4}\leq Z\leq0\right)+0.5$
$=P\left(0\leq Z\leq\frac{300-a}{4}\right)+0.5\leq0.8413$

$\therefore\ P\left(0\leq Z\leq\frac{300-a}{4}\right)\leq0.3413$

이때 주어진 표에서 $P(0\leq Z\leq1)=0.3413$이므로

$\frac{300-a}{4}\leq1\qquad\therefore\ a\geq296$

따라서 상수 a의 최솟값은 296이다.

3 개념 CHECK

p.120

1. 답 (1) $\mathbf{7.02\leq m\leq8.98}$ (2) $\mathbf{6.71\leq m\leq9.29}$

표본의 크기는 16, 표본평균은 8, 모표준편차는 2이므로

(1) 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$8-1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}\leq m\leq8+1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}$

$8-0.98\leq m\leq8+0.98$

$\therefore\ 7.02\leq m\leq8.98$

(2) 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$8-2.58\times\frac{2}{\sqrt{16}}\leq m\leq8+2.58\times\frac{2}{\sqrt{16}}$

$8-1.29\leq m\leq8+1.29$

$\therefore\ 6.71\leq m\leq9.29$

2. 답 (1) **1.47** (2) **1.935**

(1) 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{3}{\sqrt{64}}=1.47$

(2) 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{3}{\sqrt{64}}=1.935$

3 유제 & 문제

p.121~122

유제 04 답 (1) $\mathbf{492.16\leq m\leq507.84}$

(2) $\mathbf{489.68\leq m\leq510.32}$

표본의 크기 $n=100$, 표본평균 $\overline{x}=500$이고, n은 충분히 크므로 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 $S=40$을 이용하면

(1) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$500-1.96\times\frac{40}{\sqrt{100}}\leq m\leq500+1.96\times\frac{40}{\sqrt{100}}$

$\therefore\ 492.16\leq m\leq507.84$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$500-2.58\times\frac{40}{\sqrt{100}}\leq m\leq500+2.58\times\frac{40}{\sqrt{100}}$

$\therefore\ 489.68\leq m\leq510.32$

문제 04-1 답 **64**

표본의 크기가 n, 표본평균 $\overline{x}=168.5$, 모표준편차 $\sigma=16$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$168.5-2\times\frac{16}{\sqrt{n}}\leq m\leq168.5+2\times\frac{16}{\sqrt{n}}$

이때 $164.5\leq m\leq172.5$이므로

$2\times\frac{16}{\sqrt{n}}=4,\ \sqrt{n}=8\qquad\therefore\ n=64$

유제 05 답 **16**

표본의 크기가 n, 모표준편차 $\sigma=5$이므로 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

이때 신뢰구간의 길이가 4.9 mg 이하가 되어야 하므로

$2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\leq4.9$

$\sqrt{n}\geq\frac{2\times1.96\times5}{4.9}=4\qquad\therefore\ n\geq16$

n은 자연수이므로 구하는 n의 최솟값은 16이다.

문제 05-1 답 144

표본의 크기가 n, 모표준편차 $\sigma=4$이므로 신뢰도 99 %로 추정할 때 모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차의 범위는

$|m-\overline{x}| \le 2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}$

이때 두 값의 차가 0.86분 이하가 되어야 하므로

$2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le 0.86$

$\sqrt{n}\ge\frac{2.58\times4}{0.86}=12 \qquad \therefore n\ge144$

n은 자연수이므로 구하는 n의 최솟값은 144이다.

기본 연습문제

p.123~124

1 $\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{7}{5}$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{13}{25}$ **2** 0.7745 **3** 0.0062
4 $48.04\le m\le 51.96$ **5** $2.5\le m\le 2.64$ **6** ②
7 36 **8** ⑤

1 모평균 m과 모분산 σ^2을 구하면

$m=\frac{0+1+1+2+3}{5}=\frac{7}{5}$

$\sigma^2=\frac{0^2+1^2+1^2+2^2+3^2}{5}-\left(\frac{7}{5}\right)^2=\frac{26}{25}$

표본의 크기 $n=2$이므로 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=\frac{7}{5}$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\frac{26}{25}}{2}=\frac{13}{25}$

2 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(250,\ 40^2)$을 따르고, 표본의 크기 $n=100$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(250,\ \frac{40^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(250,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-250}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(246\le\overline{X}\le256)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{246-250}{4}\le Z\le\frac{256-250}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le1.5)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$
$=0.3413+0.4332=0.7745$

3 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 16^2)$을 따르고, 표본의 크기 $n=100$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \frac{16^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(120,\ \left(\frac{8}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-120}{\frac{8}{5}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\le116)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{116-120}{\frac{8}{5}}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le-2.5)=\mathrm{P}(Z\ge2.5)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)$
$=0.5-0.4938=0.0062$

4 표본의 크기 $n=100$, 표본평균 $\overline{x}=50$이고, n은 충분히 크므로 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 $S=10$을 이용하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$50-1.96\times\frac{10}{\sqrt{100}}\le m\le50+1.96\times\frac{10}{\sqrt{100}}$

$\therefore 48.04\le m\le51.96$

5 표본의 크기 $n=100$, 표본평균 $\overline{x}=2.57$이고, n은 충분히 크므로 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 $S=0.35$를 이용하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$2.57-2\times\frac{0.35}{\sqrt{100}}\le m\le2.57+2\times\frac{0.35}{\sqrt{100}}$

$\therefore 2.5\le m\le2.64$

6 $\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$이고 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는 $2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로 각 경우의 신뢰구간의 길이를 구하면

① $2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=0.392\sigma$

② $2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=0.516\sigma$

③ $2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{200}}\fallingdotseq0.365\sigma$ ($\because \sqrt{2}\fallingdotseq1.414$)

④ $2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}=0.196\sigma$

⑤ $2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}=0.258\sigma$

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 ②이다.

7 모표준편차 $\sigma=2$이고 모평균 m을 신뢰도 α %로 추정한다고 할 때, 표본의 크기 $n_1=9$일 때의 신뢰구간의 길이가 1이므로

$2\times k\times\frac{2}{\sqrt{9}}=1\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right) \qquad \therefore k=\frac{3}{4}$

크기가 n_2인 표본을 추출하여 모평균 m을 같은 신뢰도 α %로 추정할 때, 신뢰구간의 길이가 $\frac{1}{2}$이 되어야 하므로

$2\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{\sqrt{n_2}}=\frac{1}{2}$, $\sqrt{n_2}=6 \qquad \therefore n_2=36$

8 표본의 크기가 n, 모표준편차 $\sigma=0.5$이므로 신뢰도 95 %로 추정할 때 모평균 m과 표본평균 $\bar{x}$의 차의 범위는

$|m-\bar{x}|\le 1.96\times\dfrac{0.5}{\sqrt{n}}$

이때 두 값의 차가 0.049 kg 이하가 되어야 하므로

$1.96\times\dfrac{0.5}{\sqrt{n}}\le 0.049$

$\sqrt{n}\ge\dfrac{1.96\times 0.5}{0.049}=20$

$\therefore\ n\ge 400$

n은 자연수이므로 구하는 n의 최솟값은 400이다.

실전 연습문제 p.125

1 13 **2** 98 **3** 100 **4** 14000

1 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(1500,\ 100^2)$을 따르고, 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(1500,\ \dfrac{100^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-1500}{\frac{100}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(1450\le\overline{X}\le 1550)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{1450-1500}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\le Z\le\dfrac{1550-1500}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.92$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.46$

이때 주어진 표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.75)=0.46$이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{2}\ge 1.75,\ \sqrt{n}\ge 3.5\qquad\therefore\ n\ge 12.25$

n은 자연수이므로 구하는 n의 최솟값은 13이다.

2 표본의 크기 $n=25$, 표본평균 $\bar{x}=122.6$, 모표준편차 $\sigma=10$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$122.6-k\times\dfrac{10}{\sqrt{25}}\le m\le 122.6+k\times\dfrac{10}{\sqrt{25}}$

$\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}\right)$

$\therefore\ 122.6-2k\le m\le 122.6+2k$

이때 $117.6\le m\le 127.6$이므로

$122.6-2k=117.6,\ 122.6+2k=127.6$

$\therefore\ k=2.5$

$\therefore\ \mathrm{P}(|Z|\le 2.5)=\dfrac{\alpha}{100}$ ...... ㉠

주어진 표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.49$이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le 2.5)=0.98$

㉠에 의해

$\dfrac{\alpha}{100}=0.98\qquad\therefore\ \alpha=98$

3 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르고, 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\bar{x}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{5^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\bar{x}-m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(|m-\bar{x}|\le 0.98)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{|\bar{x}-m|}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\le\dfrac{0.98}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(|Z|\le\dfrac{0.98}{5}\sqrt{n}\right)\ge 0.95$ ...... ㉠

이때 주어진 표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.475$이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$

㉠에 의해

$\dfrac{0.98}{5}\sqrt{n}\ge 1.96$

$\sqrt{n}\ge\dfrac{1.96\times 5}{0.98}=10\qquad\therefore\ n\ge 100$

n은 자연수이므로 구하는 n의 최솟값은 100이다.

4 표본의 크기가 100일 때, 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이 l은

$l=2\times 1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$ ...... ㉠

표본의 크기가 $f(k)$일 때, 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 $\dfrac{l}{k}$이므로

$\dfrac{l}{k}=2\times 1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{f(k)}}$ ...... ㉡

㉠÷㉡을 하면

$k=\dfrac{\sqrt{f(k)}}{10}\qquad\therefore\ f(k)=100k^2$

$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(7)$

$=100+400+900+1600+2500+3600+4900$

$=14000$

I-1. 순열과 조합

01 여러 가지 순열

기초 문제 Training

p.4

1 (1) **120** (2) **720**

2 (1) **24** (2) **12**

3 **6**

4 (1) **5** (2) **16** (3) **64** (4) **81**

5 (1) **6** (2) **5**

6 **64**

7 **128**

8 **210**

9 (1) **630** (2) **180**

핵심 유형 Training

p.5∼9

1 96	**2** ②	**3** 720	**4** 480	**5** 30
6 840	**7** 504	**8** ②	**9** 720	**10** 2304
11 81	**12** 240	**13** 336	**14** 6	**15** 648
16 37	**17** 1875번째		**18** 102	**19** 88
20 ②	**21** 232	**22** 150	**23** 360	**24** 60
25 120	**26** 10080	**27** 420	**28** ①	**29** ②
30 10	**31** 40	**32** 44	**33** 53	**34** ②
35 50	**36** ④			

1 같은 반 학생을 한 사람으로 생각하면 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!=6$
같은 반 회장, 부회장끼리 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 각각 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times2\times2\times2\times2=96$

2 여학생 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
남학생 3명이 여학생 사이사이의 4개의 자리에 앉는 경우의 수는
${}_4P_3=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times24=144$

3 조부모님 중 한 분의 자리가 결정되면 다른 한 분의 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 구하는 경우의 수는 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$(7-1)!=6!=720$

4 어른 4명과 어린이 5명 중에서 어른 3명과 어린이 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_4C_3\times{}_5C_3=40$
어른 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(3-1)!=2!=2$
어린이 3명이 어른 사이사이의 3개의 자리에 앉는 경우의 수는
${}_3P_3=3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$40\times2\times6=480$

5 가운데 사각형을 색칠하는 경우의 수는 5
나머지 4개의 영역을 색칠하는 경우의 수는 가운데 사각형에 칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(4-1)!=3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$5\times6=30$

6 7가지 색 중에서 6가지 색을 택하는 경우의 수는
${}_7C_6={}_7C_1=7$
서로 다른 6가지 색으로 6개의 영역을 칠하는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
따라서 구하는 경우의 수는
$7\times120=840$

7 정오각기둥의 두 밑면을 칠하는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

두 밑면에 칠한 색을 제외한 나머지 5가지 색으로 5개의 옆면을 칠하는 경우의 수는

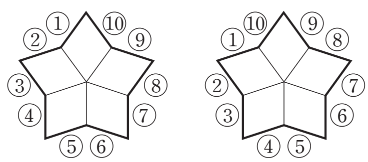
$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $21\times24=504$

8 10명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

이때 원형으로 둘러앉는 1가지 경우에 대하여 별 모양의 탁자에서는 다음과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.

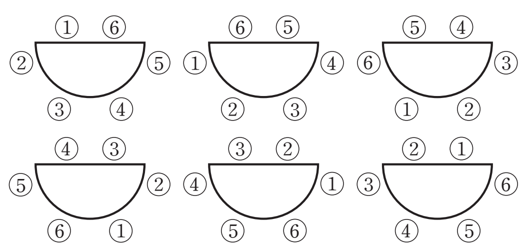


따라서 구하는 경우의 수는 $9!\times2$

9 6명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 원형으로 둘러앉는 1가지 경우에 대하여 반원 모양의 탁자에서는 다음과 같이 서로 다른 경우가 6가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는 $120\times6=720$

10 4개국 남자 대표 4명이 정사각형 모양의 탁자의 각 변에 1명씩 앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

나머지 의자에 여자 대표 4명이 앉는 경우의 수는

${}_4P_4=4!=24$

이때 각 변에 앉은 남녀가 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는

$2\times2\times2\times2=16$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times24\times16=2304$

11 서로 다른 3가지 맛이 중복이 가능하므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$\therefore\ {}_3\Pi_4=3^4=81$

12 6명 중 설악산에 투표하는 2명을 정하는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

나머지 4명이 지리산, 한라산 중 하나의 산에 투표하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_4=2^4=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times16=240$

13 기호 ♡, ☆, ◎, ▲를 중복을 허용하므로 기호 2개를 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

기호 3개를 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

기호 4개를 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

따라서 구하는 서로 다른 신호의 개수는

$16+64+256=336$

14 깃발을 1번 들어 올려서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는 ${}_3\Pi_1=3$

깃발을 2번 들어 올려서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는 ${}_3\Pi_2=3^2$

깃발을 3번 들어 올려서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는 ${}_3\Pi_3=3^3$

같은 방법으로 깃발을 4번, 5번, 6번 들어 올려서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는 각각 ${}_3\Pi_4$, ${}_3\Pi_5$, ${}_3\Pi_6$이다.

깃발을 5번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는

${}_3\Pi_1+{}_3\Pi_2+{}_3\Pi_3+{}_3\Pi_4+{}_3\Pi_5$

$=3+3^2+3^3+3^4+3^5=363<1000$

깃발을 6번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는

${}_3\Pi_1+{}_3\Pi_2+{}_3\Pi_3+{}_3\Pi_4+{}_3\Pi_5+{}_3\Pi_6$

$=3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6=1092>1000$

따라서 n의 최솟값은 6이다.

15 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 5, 7의 3가지이다.

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 3, 4, 5, 6, 7, 8의 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_6\Pi_3=6^3=216$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$3\times216=648$

16 4개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

6을 제외한 나머지 3개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 세 자리의 자연수의 개수는

$64-27=37$

17 한 자리의 자연수의 개수는 4

두 자리의 자연수의 개수는 $4\times{}_5\Pi_1=4\times5=20$

세 자리의 자연수의 개수는 $4\times{}_5\Pi_2=4\times5^2=100$

네 자리의 자연수의 개수는 $4\times{}_5\Pi_3=4\times5^3=500$

다섯 자리의 자연수 중에서 만의 자리의 숫자가 1 또는 2인 자연수의 개수는 $2\times{}_5\Pi_4=2\times5^4=1250$

$\therefore\ 4+20+100+500+1250=1874$

따라서 30000보다 작은 자연수의 개수는 1874이므로 30000은 1875번째 수이다.

18 0부터 9까지의 10개의 숫자 중 3개의 숫자 3, 6, 9를 제외한 나머지 숫자 7개에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 200 이하의 자연수의 개수는 다음과 같다.

한 자리의 자연수의 개수는 6

두 자리의 자연수의 개수는 $6\times{}_7\Pi_1=6\times7=42$

백의 자리의 숫자가 1인 세 자리의 자연수의 개수는

${}_7\Pi_2=7^2=49$

백의 자리의 숫자가 2인 세 자리의 자연수는 200뿐이므로 그 개수는 1

즉, 1부터 200까지의 자연수 중에서 3 또는 6 또는 9의 숫자가 들어가지 않은 수의 개수는

$6+42+49+1=98$

따라서 박수를 친 횟수는 $200-98=102$

19 X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 원소 a, b, c, d의 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$a={}_4\Pi_3=4^3=64$

X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 Y의 원소 a, b, c, d의 4개에서 서로 다른 3개를 택하여 X의 원소 2, 4, 6에 각각 대응시키는 순열의 수와 같으므로

$b={}_4P_3=24$

$\therefore\ a+b=88$

20 $f(b)\neq h$인 함수의 개수는 전체 함수의 개수에서 $f(b)=h$인 함수의 개수를 뺀 것과 같다.

X에서 Y로의 함수의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

X에서 Y로의 함수 중에서 $f(b)=h$인 함수의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수의 개수는 $125-25=100$

다른 풀이

$f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 5개, $f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 h를 제외한 4개, $f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 5개이므로 구하는 함수의 개수는

$5\times4\times5=100$

21 $f(x_1)=f(x_2)$인 서로 다른 x_1, x_2가 존재하면 함수 f는 일대일함수가 아니다.

X에서 X로의 함수의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$

X에서 X로의 일대일함수의 개수는 ${}_4P_4=24$

따라서 구하는 함수의 개수는

$256-24=232$

22 치역과 공역이 같은 함수의 개수는 전체 함수의 개수에서 치역과 공역이 다른 함수의 개수를 빼면 된다.

X에서 Y로의 함수의 개수는 ${}_3\Pi_5=3^5=243$

(ⅰ) 치역의 원소가 1개인 함수

치역이 $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$인 함수의 개수는 3

(ⅱ) 치역의 원소가 2개인 함수

치역이 $\{1, 3\}$인 함수의 개수는 공역이 $\{1, 3\}$인 함수의 개수에서 치역이 $\{1\}$, $\{3\}$인 함수의 개수를 빼면 되므로

${}_2\Pi_5-2=2^5-2=30$

같은 방법으로 치역이 $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$인 함수의 개수도 각각 30이므로 치역의 원소가 2개인 함수의 개수는 $3\times30=90$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 함수의 개수는

$243-(3+90)=150$

23 7개의 숫자 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{3!\times2!}=420$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 6개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{3!\times2!}=60$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$420-60=360$

24 가운데를 기준으로 한쪽에 빨간 공 1개, 파란 공 2개, 흰 공 3개를 일렬로 배열하면 반대쪽은 그 반대의 순서로 공의 배열이 정해지므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times3!}=60$

25 p와 i를 제외한 5개의 문자 a, s, s, o, n을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

양 끝에 p와 i를 배열하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\times2=120$

26 모음 i, u, i, o를 한 문자 X로 생각하여 7개의 문자 X, d, s, c, s, s, n을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!}=840$

이때 모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$840\times12=10080$

27 3, 4, 5, 6의 순서가 정해져 있으므로 3, 4, 5, 6을 모두 x로 놓으면 1, 1, 2, 2, x, x, x, x의 8개의 숫자를 일렬로 배열한 후 나열된 4개의 x를 앞에서부터 순서대로 6, 5, 4, 3으로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$\frac{8!}{2!\times2!\times4!}=420$

28 b, d와 a, e, f의 순서가 각각 정해져 있으므로 b, d를 모두 x로 놓고 a, e, f를 모두 y로 놓으면 6개의 문자 y, x, c, x, y, y를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times3!}=60$

이때 두 개의 x 중 첫 번째 x는 b, 두 번째 x는 d로 바꾸고, 세 개의 y 중 맨 뒤에 있는 y는 f, 첫 번째, 두 번째 y는 a와 e 또는 e와 a로 바꾸면 되므로 그 경우의 수는 2이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$60\times2=120$

29 5개의 함숫값의 곱이 9이므로 함숫값에 따라 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) 함숫값이 1, 1, 1, 1, 9인 경우

함수 f의 개수는 $\frac{5!}{4!}=5$

(ⅱ) 함숫값이 1, 1, 1, 3, 3인 경우

함수 f의 개수는 $\frac{5!}{3!\times2!}=10$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 함수의 개수는

$5+10=15$

30 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

6개의 숫자 4, 4, 4, 5, 5, 6에서 4개를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 것은 (4, 4, 4, 6), (4, 4, 5, 5)의 2가지가 있다.

(ⅰ) (4, 4, 4, 6)으로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 $\frac{4!}{3!}=4$

(ⅱ) (4, 4, 5, 5)로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 $\frac{4!}{2!\times2!}=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $4+6=10$

31 A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times3!}=10$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

따라서 구하는 경우의 수는 $10\times4=40$

32 (ⅰ) A 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times3!}=20$

A 지점에서 P 지점을 거쳐 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=9$

따라서 A 지점에서 P 지점을 거치지 않고 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $20-9=11$

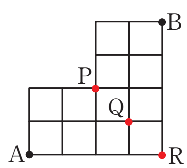
(ⅱ) Q 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 경우의 수는

$11\times4=44$

33 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 갈 때, 반드시 P, Q, R 중 어느 한 지점을 지나고 P, Q, R를 동시에 지나는 경우는 없다.



(ⅰ) A → P → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=36$

(ⅱ) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{3!}=16$

(ⅲ) A → R → B로 가는 경우의 수는

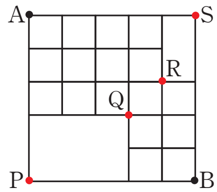
$1\times1=1$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의해 구하는 경우의 수는

$36+16+1=53$

유형편

34 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 갈 때, 반드시 P, Q, R, S 중 어느 한 지점을 지나고 P, Q, R, S를 동시에 지나는 경우는 없다.



(ⅰ) A → P → B로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$

(ⅱ) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!\times3!}\times\dfrac{4!}{2!\times2!}=120$

(ⅲ) A → R → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{4!\times2!}\times\dfrac{4!}{3!}=60$

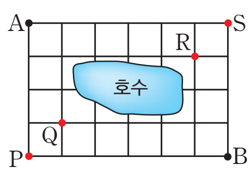
(ⅳ) A → S → B로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의해 구하는 경우의 수는

$1+120+60+1=182$

35 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 갈 때, 반드시 P, Q, R, S 중 어느 한 지점을 지나고 P, Q, R, S를 동시에 지나는 경우는 없다.



(ⅰ) A → P → B로 가는 경우의 수는 $1\times1=1$

(ⅱ) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}\times\dfrac{6!}{5!}=24$

(ⅲ) A → R → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{5!}\times\dfrac{4!}{3!}=24$

(ⅳ) A → S → B로 가는 경우의 수는 $1\times1=1$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의해 구하는 경우의 수는

$1+24+24+1=50$

36 (ⅰ) 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 3번, 3번, 3번 이동해야 하므로 그 경우의 수는

$\dfrac{9!}{3!\times3!\times3!}=1680$

(ⅱ) 꼭짓점 A에서 모서리 CD를 거쳐 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\times1\times\dfrac{5!}{3!\times2!}=30$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 경우의 수는

$1680-30=1650$

02 중복조합과 이항정리

기초 문제 Training

p.10

1 (1) **35** (2) **56** (3) **1** (4) **3**

2 (1) **9** (2) **6** (3) **3** (4) **6**

3 84

4 28

5 (1) $x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$

(2) $a^5-10a^4+40a^3-80a^2+80a-32$

(3) $16x^4+32x^3y+24x^2y^2+8xy^3+y^4$

(4) $x^3+3x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}$

6 (1) **135** (2) **90** (3) **24**

7

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & \boxed{2} & & 1 & & & \\ & & 1 & & \boxed{3} & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & \boxed{4} & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & \boxed{10} & & \boxed{10} & & \boxed{5} & & 1 \end{array}$$

$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

8 (1) **6** (2) **8**

9 (1) **64** (2) **0** (3) **128** (4) **256**

핵심 유형 Training

p.11~14

1 165	**2** 264	**3** 220	**4** 25	**5** 94
6 20	**7** 78	**8** 34	**9** 126	**10** ⑤
11 17	**12** 1	**13** 5	**14** ②	**15** 176
16 35	**17** 2	**18** −31	**19** ③	**20** ④
21 216	**22** 330	**23** ①	**24** ①	**25** ④
26 1024	**27** ③	**28** ③	**29** 30	**30** ④

1 4명의 학생들에게 같은 종류의 과자 8개를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

2 무기명으로 투표하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$ $\quad\therefore a=21$

기명으로 투표하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$ $\quad\therefore b=243$

$\therefore a+b=264$

3 먼저 4명의 학생에게 연필을 한 자루씩 나누어 주고 남은 9자루의 연필을 나누어 주면 된다.

이때 4명의 학생에게 9자루의 연필을 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=220$

4 파란색 카드가 1장이므로 파란색 카드를 선택하지 않는 경우와 선택하는 경우로 나누어 생각한다.

(i) 파란색 카드를 선택하지 않는 경우

빨간색, 노란색, 초록색 카드에서 4장을 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

(ii) 파란색 카드를 선택하는 경우

빨간색, 노란색, 초록색 카드에서 3장을 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

(i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는

$15+10=25$

5 방정식 $x+y+z+w=6$의 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 4개의 문자 x, y, z, w에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$a={}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

한편 x, y, z, w가 모두 양의 정수이면 $x-1$, $y-1$, $z-1$, $w-1$은 모두 음이 아닌 정수이다.

$x-1=x'$, $y-1=y'$, $z-1=z'$, $w-1=w'$이라 하면

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$

이를 $x+y+z+w=6$에 대입하면

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)+(w'+1)=6$

$\therefore x'+y'+z'+w'=2$

(단, x', y', z', w'은 음이 아닌 정수)

즉, b의 값은 서로 다른 4개의 문자 x', y', z', w'에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$b={}_4H_2={}_5C_2=10$

$\therefore a+b=94$

6 x, y, z가 음이 아닌 정수이므로 $x+y+z=0$ 또는 $x+y+z=1$ 또는 $x+y+z=2$ 또는 $x+y+z=3$

(i) $x+y+z=0$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_0={}_2C_0=1$

(ii) $x+y+z=1$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_1={}_3C_1=3$

(iii) $x+y+z=2$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_2={}_4C_2=6$

(iv) $x+y+z=3$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

(i)~(iv)에 의해 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$1+3+6+10=20$

7 $x-2=a$, $y-3=b$, $z-4=c$라 하면

$a\ge0$, $b\ge0$, $c\ge0$

$x=a+2$, $y=b+3$, $z=c+4$를 $x+y+z=20$에 대입하면

$(a+2)+(b+3)+(c+4)=20$

$\therefore a+b+c=11$ …… ㉠

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_3H_{11}={}_{13}C_{11}={}_{13}C_2=78$

8 x의 값에 따라 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

(i) $x=0$인 경우

$y+z+w=6$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

(ii) $x=1$인 경우

$y+z+w=2$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_2={}_4C_2=6$

(i), (ii)에 의해 구하는 정수해의 수는

$28+6=34$

유형편

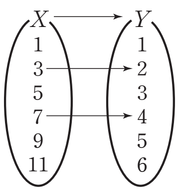
9 주어진 조건에 의해

$f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4)$

즉, 조건을 만족하는 함수 f의 개수는 중복을 허용하여 집합 Y의 원소 6개 중 4개를 뽑은 후 크기순으로 집합 X의 원소에 대응시키는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6H_4 = {}_9C_4 = 126$

10 조건 (가), (나)에 의해 $f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2의 2개



$f(5)$의 값이 될 수 있는 수는 2, 3, 4의 3개

$f(9)$, $f(11)$의 값이 될 수 있는 수는 4, 5, 6이고, $f(9) \le f(11)$이어야 하므로 4, 5, 6에서 2개를 뽑은 후 크기순으로 대응시키면 된다.

$\therefore$ ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$2 \times 3 \times 6 = 36$

11 $f(x) = x+1$을 만족하는 x의 값이 단 하나만 반드시 존재하려면 $f(2)=3$, $f(6) \ne 7$ 또는 $f(2) \ne 3$, $f(6)=7$이어야 한다.

(ⅰ) $f(2)=3$, $f(6) \ne 7$인 경우

$f(2)=3$, $f(6) \ne 7$인 함수의 개수는 $f(2)=3$인 함수의 개수에서 $f(2)=3$, $f(6)=7$인 함수의 개수를 빼면 된다.

$f(2)=3$인 함수의 개수는 중복을 허용하여 집합 Y의 원소 4개 중 3개를 뽑은 후 크기순으로 집합 X의 원소에 대응시키는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$

$f(2)=3$, $f(6)=7$이면 $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 3, 7의 2개이고, $f(8)$의 값이 될 수 있는 수는 7, 11, 15의 3개이므로 함수의 개수는

$2 \times 3 = 6$

따라서 $f(2)=3$, $f(6) \ne 7$인 함수 f의 개수는

$20 - 6 = 14$

(ⅱ) $f(2) \ne 3$, $f(6)=7$인 경우

$f(2) \ne 3$이므로 $f(2)=f(4)=7$

또 $f(8)$의 값이 될 수 있는 수는 7, 11, 15의 3개

따라서 $f(2) \ne 3$, $f(6)=7$인 함수 f의 개수는

$1 \times 3 = 3$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 함수 f의 개수는

$14 + 3 = 17$

12 $\left(2x^2 + \dfrac{a}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r (2x^2)^{4-r} \left(\dfrac{a}{x}\right)^r = {}_4C_r a^r 2^{4-r} \dfrac{x^{8-2r}}{x^r}$

x^5항은 $8-2r-r=5$일 때이므로 $r=1$

이때 x^5의 계수가 32이므로

${}_4C_1 \times a \times 2^3 = 32 \qquad \therefore a=1$

13 $(1+x^3)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r 1^{n-r} (x^3)^r = {}_nC_r x^{3r}$

x^6항은 $3r=6$일 때이므로 $r=2$

이때 x^6의 계수가 10이므로

${}_nC_r = {}_nC_2 = 10$

$\dfrac{n(n-1)}{2} = 10$, $n^2 - n - 20 = 0$

$(n+4)(n-5)=0 \qquad \therefore n=5$ ($\because$ n은 자연수)

14 $\left(x - \dfrac{3}{x^n}\right)^8$의 전개식의 일반항은

${}_8C_r x^{8-r} \left(-\dfrac{3}{x^n}\right)^r = {}_8C_r (-3)^r \dfrac{x^{8-r}}{x^{nr}}$

상수항은 $8-r=nr$일 때이므로

$r(n+1) = 8$ …… ㉠

이때 r는 $0 \le r \le 8$인 정수이고, n은 자연수이므로 ㉠을 만족하는 r, n의 순서쌍 (r, n)은

$(4, 1)$, $(2, 3)$, $(1, 7)$

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 3이다.

15 $(\sqrt{5}+x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r (\sqrt{5})^{5-r} x^r$

이때 계수 ${}_5C_r (\sqrt{5})^{5-r}$이 정수가 되려면 r는 $0 \le r \le 5$인 정수이므로 $5-r=0$ 또는 $5-r=2$ 또는 $5-r=4$이어야 한다.

$\therefore$ $r=5$ 또는 $r=3$ 또는 $r=1$

즉, 계수가 정수인 항은 x, x^3, x^5이므로

x의 계수는 ${}_5C_1 (\sqrt{5})^4 = 125$

x^3의 계수는 ${}_5C_3 (\sqrt{5})^2 = 50$

x^5의 계수는 ${}_5C_5 (\sqrt{5})^0 = 1$

따라서 계수가 정수인 모든 항의 계수의 합은

$125 + 50 + 1 = 176$

16 $\dfrac{(1+x)^7 - 10}{x^2}$의 전개식에서 x^2의 계수는 $(1+x)^7$의 전개식에서 x^4의 계수와 같다.

$(1+x)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r 1^{7-r} x^r = {}_7C_r x^r$

따라서 x^4항은 $r=4$일 때이므로 구하는 x^2의 계수는

${}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$

17 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\frac{x^{4-r}}{x^r} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 $(ax^2+1)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^2항은 ax^2과 ㉠의 상수항, 1과 ㉠의 x^2항이 곱해질 때 나타난다.

(ⅰ) ㉠의 상수항은 $4-r=r$, 즉 $r=2$일 때이므로
$\quad {}_4C_2=6$

(ⅱ) ㉠의 x^2항은 $4-r-r=2$, 즉 $r=1$일 때이므로
$\quad {}_4C_1=4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 x^2항은 $ax^2\times 6+1\times 4x^2$
이때 x^2의 계수가 16이므로
$6a+4=16 \qquad \therefore a=2$

18 $(1-x)^3$의 전개식의 일반항은
${}_3C_r 1^{3-r}(-x)^r={}_3C_r(-1)^r x^r$
$(1+2x^2)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_s 1^{5-s}(2x^2)^s={}_5C_s 2^s x^{2s}$
따라서 $(1-x)^3(1+2x^2)^5$의 전개식의 일반항은
${}_3C_r(-1)^r x^r\times{}_5C_s 2^s x^{2s}$
$={}_3C_r\,{}_5C_s(-1)^r 2^s x^{r+2s}$
x^3항은 $r+2s=3\,(0\le r\le 3,\ 0\le s\le 5$인 정수$)$일 때이므로 $r=3$, $s=0$인 경우 또는 $r=1$, $s=1$인 경우의 2가지에서 나타난다.
그러므로 구하는 x^3의 계수는
${}_3C_3\,{}_5C_0(-1)^3\times 2^0+{}_3C_1\,{}_5C_1(-1)^1\times 2^1$
$=-1-30=-31$

19 $(1+x)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5C_r x^r$
$(1+x^3)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_s x^{3s}$
따라서 $(1+x)^5(1+x^3)^n$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r x^r\times{}_nC_s x^{3s}={}_5C_r\,{}_nC_s x^{r+3s}$
x^4항은 $r+3s=4\,(0\le r\le 5,\ 0\le s\le n$인 정수$)$일 때이므로 $r=4$, $s=0$인 경우 또는 $r=1$, $s=1$인 경우의 2가지에서 나타난다.
이때 x^4의 계수가 35이므로 ${}_5C_4\,{}_nC_0+{}_5C_1\,{}_nC_1=5+5n$에서
$5+5n=35 \qquad \therefore n=6$

20 ${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{12}C_2$
$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{12}C_2$
$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{12}C_2$
$={}_5C_3+{}_5C_2+\cdots+{}_{12}C_2$
$\quad\vdots$
$={}_{12}C_3+{}_{12}C_2$
$={}_{13}C_3={}_{13}C_{10}$

21

$$\begin{array}{c}
1\\
{}_1C_0\quad {}_1C_1\\
{}_2C_0\quad {}_2C_1\quad {}_2C_2\\
{}_3C_0\quad {}_3C_1\quad {}_3C_2\quad {}_3C_3\\
{}_4C_0\quad {}_4C_1\quad {}_4C_2\quad {}_4C_3\quad {}_4C_4\\
\vdots\\
{}_{10}C_0\quad {}_{10}C_1\quad {}_{10}C_2\quad \cdots\quad {}_{10}C_8\quad {}_{10}C_9\quad {}_{10}C_{10}\\
{}_{11}C_0\quad {}_{11}C_1\quad {}_{11}C_2\quad {}_{11}C_3\quad \cdots\quad {}_{11}C_9\quad {}_{11}C_{10}\quad {}_{11}C_{11}
\end{array}$$

구하는 합을 S라 하면 위의 그림에서
${}_1C_1+{}_2C_1+{}_2C_2+S={}_{11}C_2+{}_{11}C_3$
$1+2+1+S=55+165$
$\therefore S=216$

22 $f(x-1)=x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x+1$에서 $x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이므로
$f(t)=(1+t)^{10}+(1+t)^9+(1+t)^8+\cdots+(1+t)+1$
이때 t^6이 나오는 식은
$(1+t)^6$, $(1+t)^7$, $(1+t)^8$, $(1+t)^9$, $(1+t)^{10}$이고
각 식에서 t^6의 계수를 각각 구하면
${}_6C_6$, ${}_7C_6$, ${}_8C_6$, ${}_9C_6$, ${}_{10}C_6$
따라서 $f(t)$에서 t^6의 계수 a_6의 값은
$a_6={}_6C_6+{}_7C_6+{}_8C_6+{}_9C_6+{}_{10}C_6$
$\quad={}_{11}C_7={}_{11}C_4=330$

23 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이고, ${}_nC_n=1$이므로
${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^n-1$
$300<{}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}<3000$에서
$300<2^n-1<3000$, $301<2^n<3001$
이때 $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로 부등식을 만족하는 자연수 n의 값은 9, 10, 11의 3개이다.

24 ${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$이므로 n의 값이 1, 2, 3, $\cdots$, 100일 때, 주어진 식의 값을 구하면
1, 3, 7, 15, 31, 63, $\cdots$, $2^{100}-1$
즉, n이 짝수일 때 2^n-1은 3의 배수가 된다.
따라서 구하는 n의 개수는 50이다.

25 ${}_{17}C_r={}_{17}C_{17-r}$이므로
${}_{17}C_0+{}_{17}C_1+{}_{17}C_2+\cdots+{}_{17}C_8$
$\qquad={}_{17}C_{17}+{}_{17}C_{16}+{}_{17}C_{15}+\cdots+{}_{17}C_9$
${}_{17}C_0+{}_{17}C_1+{}_{17}C_2+{}_{17}C_3+\cdots+{}_{17}C_{17}=2^{17}$이므로
${}_{17}C_0+{}_{17}C_1+{}_{17}C_2+\cdots+{}_{17}C_8=\dfrac{1}{2}\times 2^{17}=2^{16}$

26 원소의 개수가 1인 부분집합의 개수는 ${}_{11}C_1$
원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는 ${}_{11}C_3$
원소의 개수가 5인 부분집합의 개수는 ${}_{11}C_5$
$\vdots$
원소의 개수가 11인 부분집합의 개수는 ${}_{11}C_{11}$
$\therefore\ {}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11-1}=2^{10}$
$=1024$

27 ${}_{30}C_0\times 9+{}_{30}C_1\times 9^2+{}_{30}C_2\times 9^3+\cdots+{}_{30}C_{30}\times 9^{31}$
$=9({}_{30}C_0+{}_{30}C_1\times 9^1+{}_{30}C_2\times 9^2+\cdots+{}_{30}C_{30}\times 9^{30})$
$=9(1+9)^{30}$
$=9\times 10^{30}$

28 $31^{100}=(1+30)^{100}$
$={}_{100}C_0+30\,{}_{100}C_1+30^2\,{}_{100}C_2+30^3\,{}_{100}C_3+\cdots+30^{100}\,{}_{100}C_{100}$
$=1+30\times 100+30^2({}_{100}C_2+30\,{}_{100}C_3+\cdots+30^{98}\,{}_{100}C_{100})$
$=3001+\underbrace{900({}_{100}C_2+30\,{}_{100}C_3+\cdots+30^{98}\,{}_{100}C_{100})}_{㉠}$
이때 ㉠은 900의 배수이므로 31^{100}을 900으로 나누었을 때의 나머지는 3001을 900으로 나누었을 때의 나머지와 같다.
따라서 구하는 나머지는 301이다.

29 $11^{15}=(1+10)^{15}$
$={}_{15}C_0+10\,{}_{15}C_1+10^2\,{}_{15}C_2+10^3\,{}_{15}C_3+\cdots+10^{15}\,{}_{15}C_{15}$
$=1+10\times 15+100\times 105+10^3({}_{15}C_3+10\,{}_{15}C_4+\cdots+10^{12}\,{}_{15}C_{15})$
$=10651+\underbrace{1000({}_{15}C_3+10\,{}_{15}C_4+\cdots+10^{12}\,{}_{15}C_{15})}_{㉠}$
이때 ㉠은 1000의 배수이므로 11^{15}의 백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자는 각각 6, 5, 1이므로
$a=6,\ b=5,\ c=1$
$\therefore\ abc=30$

30 집합 B의 원소의 개수를 k $(0\le k\le 10,\ k$는 정수)라 하면 집합 B를 정하는 경우의 수는 ${}_{10}C_k$
또 $A\subset B$이므로 집합 A를 정하는 경우의 수는 2^k
따라서 두 집합 A, B를 정하는 경우의 수는 ${}_{10}C_k\times 2^k$이므로 구하는 모든 경우의 수는
${}_{10}C_0\times 2^0+{}_{10}C_1\times 2^1+{}_{10}C_2\times 2^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\times 2^{10}$
$=(1+2)^{10}=3^{10}$

Ⅱ-1. 확률의 뜻과 활용

01 확률의 뜻과 활용

기초 문제 Training p.16

1 (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(2) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ (3) $\{1, 2, 3, 6\}$

2 (1) $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$ (2) $\{6\}$
(3) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (4) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$

3 ㄱ, ㄴ

4 (1) $\frac{5}{36}$ (2) $\frac{1}{6}$

5 $\frac{2}{5}$

6 (1) $\frac{3}{5}$ (2) 1 (3) 0

7 $\frac{5}{12}$

8 $\frac{11}{20}$

9 $\frac{7}{8}$

핵심 유형 Training p.17~24

1 ⑤	**2** ③	**3** 16	**4** ④	**5** ④
6 $\frac{11}{49}$	**7** ②	**8** $\frac{1}{7}$	**9** $\frac{1}{10}$	**10** $\frac{7}{20}$
11 $\frac{3}{10}$	**12** $\frac{1}{35}$	**13** ⑤	**14** $\frac{1}{5}$	**15** ④
16 ③	**17** ⑤	**18** ②	**19** ③	**20** $\frac{5}{21}$
21 ③	**22** ③	**23** 1	**24** ①	**25** $\frac{1}{2}$
26 $\frac{5}{12}$	**27** $\frac{3}{7}$	**28** $\frac{3}{25}$	**29** C	**30** 6개
31 $\frac{5}{8}$	**32** $1-\frac{\pi}{8}$	**33** $\frac{7}{8}$	**34** ④	**35** ㄱ, ㄷ
36 ㄱ	**37** $\frac{7}{10}$	**38** $\frac{1}{6}$	**39** $\frac{7}{15}$	**40** $\frac{11}{12}$
41 0.8	**42** $\frac{3}{10}$	**43** $\frac{2}{3}$	**44** $\frac{7}{16}$	**45** ②
46 ④	**47** ③	**48** $\frac{11}{12}$	**49** ⑤	**50** $\frac{4}{5}$
51 $\frac{57}{64}$	**52** 5	**53** ③	**54** $\frac{5}{9}$	

1 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{1, 3, 9\}$

② $A\cup B=\{1, 3, 5, 9\}$

③ $A\cap B=\{1, 3\}$

④ $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{2, 4, 6, 7, 8, 10\}$이므로
$n(A^C\cap B^C)=6$

⑤ $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$이므로 $n(A^C\cup B^C)=8$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

2 $A=\{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$, $B=\{6, 8, 10\}$, $C=\{3, 5\}$, $D=\{3, 6\}$이므로

$A\cap B=\{6, 8, 10\}$, $A\cap C=\{3, 5\}$, $B\cap C=\varnothing$, $B\cap D=\{6\}$, $C\cap D=\{3\}$

따라서 서로 배반사건인 것은 ③이다.

3 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$, $A=\{3, 6, 9, 12\}$, $B=\{2, 3, 5, 7, 11\}$

사건 A와 배반인 사건은 사건 A^C의 부분집합이고, 사건 B와 배반인 사건은 사건 B^C의 부분집합이므로 두 사건 A, B와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{1, 4, 8, 10\}$

따라서 $A^C\cap B^C$의 원소가 4개이므로 구하는 사건의 개수는 $2^4=16$

4 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^5=32$

집합 A의 부분집합 중 b, e를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$

5 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

두 눈의 수의 합이 5 이하인 경우는 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)의 10가지이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

6 $x+y=50$을 만족하는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 (1, 49), (2, 48), (3, 47), $\cdots$, (49, 1)의 49개이다.

이때 $y=50-x$이므로 $xy\ge600$에서

$x(50-x)\ge600$, $x^2-50x+600\le0$

$(x-20)(x-30)\le0$ $\quad\therefore 20\le x\le30$

$x+y=50$을 만족하는 순서쌍 (x, y) 중에서 $20\le x\le30$을 만족하는 경우는 (20, 30), (21, 29), (22, 28), $\cdots$, (30, 20)의 11개이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{11}{49}$

7 7개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $7!$

S, E를 한 묶음으로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $6!$이고, 그 각각에 대하여 S, E가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

즉, S, E가 이웃하는 경우의 수는 $6!\times2!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6!\times2!}{7!}=\frac{2}{7}$

8 7명이 일렬로 줄을 서는 경우의 수는 $7!$

맨 앞과 맨 뒤에 남자가 서는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2$

나머지 5명이 일렬로 줄을 서는 경우의 수는 $5!$

즉, 일렬로 줄을 설 때 맨 앞과 맨 뒤에 남자가 서는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2\times5!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{P}_2\times5!}{7!}=\frac{1}{7}$

9 안내문 6장을 일렬로 붙이는 경우의 수는 $6!$

교내, 교외 대회의 순서로 안내문을 번갈아 붙이는 경우의 수는 $3!\times3!$

교외, 교내 대회의 순서로 안내문을 번갈아 붙이는 경우의 수는 $3!\times3!$

즉, 교내와 교외 대회 안내문을 번갈아 붙이는 경우의 수는 $3!\times3!+3!\times3!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3!\times3!+3!\times3!}{6!}=\frac{1}{10}$

10 5개의 숫자 3, 4, 5, 6, 7을 모두 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는 $5!=120$

이때 64000보다 큰 자연수는 64□□□, 65□□□, 67□□□, 7□□□□ 꼴이다.

(i) 64□□□, 65□□□, 67□□□ 꼴의 자연수의 개수는 각각 $3!$이므로
$3!\times3=18$

(ii) 7□□□□ 꼴의 자연수의 개수는 $4!=24$

(i), (ii)에 의해 64000보다 큰 자연수의 개수는

$18+24=42$

따라서 구하는 확률은 $\frac{42}{120}=\frac{7}{20}$

유형편

11 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(6-1)!=5!$
제과제빵반 학생 3명을 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!$
그 각각에 대하여 제과제빵반 학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!$
즉, 제과제빵반 학생끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는 $3!\times3!$
따라서 구하는 확률은 $\frac{3!\times3!}{5!}=\frac{3}{10}$

12 8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(8-1)!=7!$
남자 4명이 먼저 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!$
남자 4명 사이사이의 4개의 자리에 여자 4명이 앉는 경우의 수는 $4!$
즉, 남녀가 교대로 앉는 경우의 수는 $3!\times4!$
따라서 구하는 확률은 $\frac{3!\times4!}{7!}=\frac{1}{35}$

13 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(6-1)!=5!$
2학년 학생 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!$
2학년 학생 사이사이의 4개의 자리 중에서 2개의 자리에 1학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2$
즉, 1학년 학생끼리는 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 $3!\times{}_4P_2$
따라서 구하는 확률은 $\frac{3!\times{}_4P_2}{5!}=\frac{3}{5}$

14 6가지 색을 원에 모두 칠하는 경우의 수는
$(6-1)!=5!$
빨간색을 칠한 맞은편에 노란색을 칠하고 나머지 4가지 색을 4개의 영역에 칠하는 경우의 수는 ${}_4P_4=4!$
따라서 구하는 확률은 $\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$

15 3개의 숫자 2, 6, 9에서 중복을 허용하여 5개를 뽑아 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_5=3^5=243$
이때 만든 다섯 자리의 자연수 중 홀수인 것은 □□□□9 꼴이므로 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
$\therefore {}_3\Pi_4=3^4=81$
따라서 구하는 확률은 $\frac{81}{243}=\frac{1}{3}$

16 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$
이때 일대일대응인 함수 f의 개수는 ${}_4P_4=4!=24$
따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{256}=\frac{3}{32}$

17 세 사람이 가위바위보를 한 번 할 때 모든 경우의 수는
${}_3\Pi_3=3^3=27$
이기는 한 명을 정하는 경우의 수는 3이고, 그 각각에 대하여 이기는 경우는 (가위, 보, 보), (바위, 가위, 가위), (보, 바위, 바위)의 3가지이므로 한 명이 이기는 경우의 수는 $3\times3=9$
따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

18 9개의 문자 H, A, P, P, I, N, E, S, S를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{9!}{2!\times2!}$
모음 A, I, E를 한 묶음으로 생각하여 7개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{2!\times2!}$
그 각각에 대하여 A, I, E가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!$
즉, 모음끼리 이웃하는 경우의 수는 $\frac{7!}{2!\times2!}\times3!$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{7!}{2!\times2!}\times3!}{\frac{9!}{2!\times2!}}=\frac{1}{12}$

19 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는 ${}_2\Pi_3=2^3=8$
$f(a)+f(b)+f(c)=11$을 만족하는 함수 f의 개수는 3, 4, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{8}$

20 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{10!}{6!\times4!}=210$
A 지점에서 출발하여 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!\times3!}\times\frac{5!}{4!}=50$
따라서 구하는 확률은 $\frac{50}{210}=\frac{5}{21}$

21 6장의 사진 중에서 2장을 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$
체험학습 보고서에 사진 B는 반드시 택하고 사진 D는 택하지 않는 경우는 B는 미리 뽑아 놓고, 뽑아 놓은 B와 D를 제외한 4장 중에서 1장을 택하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{15}$

22 9명의 회원 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_9C_3=84$

남자 1명, 여자 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_5C_2=40$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{40}{84}=\dfrac{10}{21}$

23 독서 캠프에 참가한 남학생의 수를 x라 하면 여학생의 수는 $9-x$이므로

$\dfrac{{}_xC_1\times{}_{9-x}C_1}{{}_9C_2}=\dfrac{5}{9}$, $\dfrac{x(9-x)}{36}=\dfrac{5}{9}$

$x^2-9x+20=0$, $(x-4)(x-5)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=5$

따라서 남학생이 4명, 여학생이 5명 또는 남학생이 5명, 여학생이 4명이므로 구하는 학생 수의 차는 1이다.

24 4명의 학생에게 같은 종류의 스티커 7장을 나누어 주는 경우의 수는

${}_4H_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$

모든 학생이 적어도 한 장의 스티커를 받는 경우는 먼저 4명의 학생에게 스티커를 한 장씩 나누어 주고 나머지 스티커 3장을 중복을 허용하여 4명의 학생에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는

${}_4H_3={}_6C_3=20$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$

25 6장의 카드 중에서 3장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

이때 세 수의 합이 홀수가 되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) (홀수)+(홀수)+(홀수)인 경우

홀수가 적힌 3장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$

(ⅱ) (홀수)+(짝수)+(짝수)인 경우

홀수가 적힌 3장의 카드 중에서 1장, 짝수가 적힌 3장의 카드 중에서 2장을 뽑는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_3C_2=9$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 세 수의 합이 홀수인 경우의 수는

$1+9=10$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$

26 x, y, z가 음이 아닌 정수인 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

한편 x, y, z가 양의 정수이면 $x-1$, $y-1$, $z-1$은 모두 음이 아닌 정수이다.

$x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$라 하면 $x+y+z=7$에서

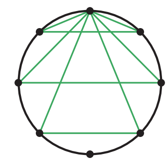
$(a+1)+(b+1)+(c+1)=7$

$\therefore a+b+c=4$ (단, a, b, c는 음이 아닌 정수)

즉, x, y, z가 모두 양의 정수로만 이루어진 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 ${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$

27 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_8C_3=56$



오른쪽 그림과 같이 원 위에 있는 임의의 점 1개에 대하여 만들 수 있는 이등변삼각형은 3개이고, 점은 모두 8개이므로 이등변삼각형의 개수는 $3\times8=24$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{24}{56}=\dfrac{3}{7}$

28 전체 나비의 수는 $11+12+42+15+20=100$

100마리의 나비 중 산호랑나비는 12마리이므로 구하는 확률은 $\dfrac{12}{100}=\dfrac{3}{25}$

29 세 선수가 각각 자유투를 한 번씩 던질 때, 성공할 확률은 각각 다음과 같다.

A: $\dfrac{65}{120}=\dfrac{13}{24}$, B: $\dfrac{104}{200}=\dfrac{13}{25}$, C: $\dfrac{84}{150}=\dfrac{14}{25}$

$\dfrac{13}{25}<\dfrac{13}{24}<\dfrac{14}{25}$이므로 자유투에 성공할 확률이 가장 큰 선수는 C이다.

30 주머니에 들어 있는 파란 구슬의 개수를 n이라 하면

$\dfrac{{}_nC_1\times{}_{10-n}C_1}{{}_{10}C_2}=\dfrac{8}{15}$, $\dfrac{n(10-n)}{45}=\dfrac{8}{15}$

$n(10-n)=24$, $n^2-10n+24=0$

$(n-4)(n-6)=0$ $\quad\therefore n=4$ 또는 $n=6$

이때 파란 구슬은 노란 구슬보다 많으므로 주머니에 들어 있는 파란 구슬은 6개이다.

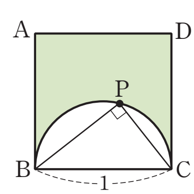
31 반지름의 길이가 4인 원의 넓이는 $\pi\times4^2=16\pi$

색칠한 부분의 넓이는

$\pi\times4^2-\pi\times3^2+\pi\times2^2-\pi\times1^2=10\pi$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{10\pi}{16\pi}=\dfrac{5}{8}$

32 점 P가 $\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때 △PBC는 직각삼각형이 되므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 △PBC는 예각삼각형이 된다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})}=\frac{1-\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1\times1}=1-\frac{\pi}{8}$$

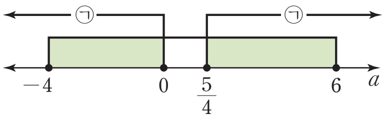
유형편

33 이차방정식 $x^2+4ax+5a=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-5a\ge0,\ 4a^2-5a\ge0$

$a(4a-5)\ge0 \qquad \therefore a\le0$ 또는 $a\ge\frac{5}{4}$ ...... ㉠

이때 $-4\le a\le6$과 ㉠을 수직선 위에 나타내면



$\therefore -4\le a\le0$ 또는 $\frac{5}{4}\le a\le6$ ...... ㉡

따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{㉡의 구간의 길이})}{(\text{전체 구간의 길이})}=\frac{\{0-(-4)\}+\left(6-\frac{5}{4}\right)}{6-(-4)}=\frac{7}{8}$$

34 표본공간을 S라 하면 $S=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

$A=\{2\}$, $B=\varnothing$, $C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $D=\varnothing$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B)=0$, $\mathrm{P}(C)=1$, $\mathrm{P}(D)=0$

따라서 확률이 0인 사건은 ㄴ, ㄹ이다.

35 ㄱ. $\mathrm{P}(\varnothing)=0$, $\mathrm{P}(S)=1$이므로 $\mathrm{P}(\varnothing)+\mathrm{P}(S)=1$

ㄴ. [반례] $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2,\ 6\}$이면 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$이지만 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}\ne S$

ㄷ. $0\le\mathrm{P}(A)\le1$, $0\le\mathrm{P}(B)\le1$이므로 $0\le\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

36 ㄱ. $\varnothing\subset(A\cap B)\subset S$이므로 $\mathrm{P}(\varnothing)\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(S)$

$\therefore 0\le\mathrm{P}(A\cap B)\le1$

ㄴ. [반례] $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$이면

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)<\mathrm{P}(S)$

ㄷ. [반례] 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 3의 배수가 나오는 사건을 A, 6의 약수가 나오는 사건을 B라 하면 $A=\{3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

이때 $A\cap B=\{3,\ 6\}\ne\varnothing$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

37 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

또 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{5}=\frac{3}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{11}{10}-\frac{2}{5}$

$=\frac{7}{10}$

38 $\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

또 $\mathrm{P}(B\cap A^C)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap A^C)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\mathrm{P}(A\cap B) \qquad \therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

39 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}$

A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{2}{3}=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}-\mathrm{P}(B)$

이때 $\frac{1}{5}\le\mathrm{P}(A)\le\frac{1}{4}$이므로 $\frac{1}{5}\le\frac{2}{3}-\mathrm{P}(B)\le\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{5}{12}\le\mathrm{P}(B)\le\frac{7}{15}$

따라서 $\mathrm{P}(B)$의 최댓값은 $\frac{7}{15}$이다.

40 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-P(A\cap B)$

$=\frac{7}{12}-P(A\cap B)$

이므로 $P(A\cap B)$가 최소일 때 $P(A\cup B)$는 최대이고 $P(A\cap B)$가 최대일 때 $P(A\cup B)$는 최소이다.

이때 $P(A\cap B)\le P(A)$, $P(A\cap B)\le P(B)$, $P(A\cap B)\ge 0$이므로

$P(A\cap B)\le\frac{1}{4}$, $P(A\cap B)\le\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)\ge 0$

즉, $0\le P(A\cap B)\le\frac{1}{4}$이므로

$\frac{1}{3}\le\frac{7}{12}-P(A\cap B)\le\frac{7}{12}$

$\therefore \frac{1}{3}\le P(A\cup B)\le\frac{7}{12}$

따라서 $M=\frac{7}{12}$, $m=\frac{1}{3}$이므로

$M+m=\frac{11}{12}$

41 게임을 좋아하는 학생을 택하는 사건을 A, 웹툰을 좋아하는 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=0.6$, $P(B)=0.5$, $P(A\cap B)=0.3$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=0.6+0.5-0.3$

$=0.8$

42 두 주머니 A, B에서 각각 공을 한 개씩 꺼내는 모든 경우의 수는

$6\times5=30$

두 공에 적힌 수의 합이 11 이상인 사건을 A, 6의 배수인 사건을 B라 할 때, 두 공에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(4, 7), (5, 6), (5, 7), (6, 5), (6, 6), (6, 7)\}$

$B=\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (5, 7), (6, 6)\}$

$A\cap B=\{(5, 7), (6, 6)\}$

$\therefore P(A)=\frac{1}{5}$, $P(B)=\frac{1}{6}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{15}$

$=\frac{3}{10}$

43 A가 뽑히는 사건을 A, B가 뽑히는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{{}_9C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{{}_9C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{2}{5}$

$P(A\cap B)=\frac{{}_8C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{2}{15}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{2}{15}=\frac{2}{3}$

44 $f(1)=2$인 사건을 A, $f(3)=1$인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_3}=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_3}=\frac{1}{4}$

$P(A\cap B)=\frac{4}{{}_4\Pi_3}=\frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$

45 E가 맨 앞에 오는 사건을 A, E가 맨 뒤에 오는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$, $P(B)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

46 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

두 눈의 수의 합이 3인 사건을 A, 차가 3인 사건을 B라 할 때, 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(1, 2), (2, 1)\}$

$B=\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$

$\therefore P(A)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$, $P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{1}{18}+\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$

47 남학생이 여학생보다 많으려면 뽑은 6명의 학생 중 남학생이 4명 또는 5명이어야 한다.

남학생이 4명인 사건을 A, 5명인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{{}_5C_4\times{}_3C_2}{{}_8C_6}=\frac{15}{28}$, $P(B)=\frac{{}_5C_5\times{}_3C_1}{{}_8C_6}=\frac{3}{28}$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{15}{28}+\frac{3}{28}=\frac{9}{14}$

48 두 눈의 수의 합이 10 이하인 사건을 A라 하면 A^C은 두 눈의 수의 합이 10 초과인 사건이다.
나오는 두 눈의 수의 합이 10 초과인 경우를 순서쌍으로 나타내면 (5, 6), (6, 5), (6, 6)의 3가지이므로
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$
$=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

49 3명의 대표 중 적어도 한 명이 여학생인 사건을 A라 하면 A^C은 3명이 모두 남학생인 사건이므로
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{5}{28}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$
$=1-\frac{5}{28}=\frac{23}{28}$

50 적어도 한쪽 끝에 남학생을 세우는 사건을 A라 하면 A^C은 양쪽 끝에 모두 여학생을 세우는 사건이므로
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3\mathrm{P}_2\times4!}{6!}=\frac{1}{5}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$
$=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

51 두 문제 이상 맞히는 사건을 A라 하면 A^C은 한 문제를 맞히거나 모두 틀리는 사건이다.
(i) 한 문제를 맞힐 확률은
$\frac{{}_6\mathrm{C}_1}{{}_2\Pi_6}=\frac{3}{32}$
(ii) 한 문제도 맞히지 못할 확률은
$\frac{{}_6\mathrm{C}_0}{{}_2\Pi_6}=\frac{1}{64}$
(i), (ii)에 의해
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{32}+\frac{1}{64}=\frac{7}{64}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$
$=1-\frac{7}{64}=\frac{57}{64}$

52 적어도 한 개가 당첨 제비인 사건을 A라 하면 A^C은 두 개 모두 당첨 제비가 아닌 사건이므로
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{15-n}\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{(15-n)(14-n)}{210}$
이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{7}$이므로
$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{3}{7}$
즉, $\frac{(15-n)(14-n)}{210}=\frac{3}{7}$이므로
$(15-n)(14-n)=90$, $n^2-29n+120=0$
$(n-5)(n-24)=0 \qquad \therefore n=5$ ($\because n<15$)

53 서로 다른 세 수를 택하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{P}_3=120$
만들어진 삼각형이 정삼각형이 아닌 사건을 A라 하면 A^C은 만들어진 삼각형이 정삼각형인 사건이다.
정삼각형이 되는 경우는 (1, 3, 5) 또는 (2, 4, 6)을 붙인 꼭짓점을 연결하는 경우이므로 그 경우의 수는
$3!+3!=12$
$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$
$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

54 서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
$f(a)f(b)=0$을 만족하는 사건을 A라 하면 A^C은
$f(a)f(b)\neq0$, 즉 $f(a)\neq0$이고 $f(b)\neq0$을 만족하는 사건이다.
$f(a)=a^2-3a+2=(a-1)(a-2)\neq0$
$f(b)=b^2-3b+2=(b-1)(b-2)\neq0$
따라서 a, b의 값은 각각 3, 4, 5, 6 중 하나이어야 하므로 $f(a)\neq0$이고 $f(b)\neq0$을 만족하는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$4\times4=16$
$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$
$=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

Ⅱ-2. 조건부확률

01 조건부확률

기초 문제 Training p.26

1 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{3}$

2 (1) $\frac{1}{36}$ (2) $\frac{1}{9}$

3 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{3}{7}$ (3) 종속

4 (1) 독립 (2) 종속

5 (1) 0.07 (2) 0.28 (3) 0.2 (4) 0.65

6 0.48

7 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{8}$

8 $\frac{2}{9}$

9 $\frac{48}{125}$

핵심 유형 Training p.27~32

1 $\frac{7}{15}$	2 ②	3 $\frac{3}{10}$	4 $\frac{1}{3}$	5 $\frac{2}{5}$
6 $\frac{1}{3}$	7 10	8 $\frac{1}{3}$	9 ①	10 11
11 $\frac{17}{30}$	12 $\frac{2}{5}$	13 4	14 $\frac{7}{144}$	15 $\frac{3}{7}$
16 $\frac{9}{17}$	17 $\frac{2}{3}$	18 ⑤	19 독립	20 12
21 ③	22 ④	23 ⑤	24 ③	25 $\frac{1}{6}$
26 ④	27 $\frac{4}{15}$	28 ⑤	29 $\frac{8}{15}$	30 $\frac{1}{4}$
31 25	32 $\frac{63}{64}$	33 ⑤	34 ④	35 ②
36 $\frac{11}{72}$	37 $\frac{80}{243}$			

1 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{5}$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{3}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\mathrm{P}(A\cap B)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{30}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{7}{30}}{\frac{1}{2}}=\frac{7}{15}$

2 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.7=0.5+0.4-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.2$

$\therefore \mathrm{P}(B|A^C)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{1-\mathrm{P}(A)}$

$=\frac{0.4-0.2}{1-0.5}=\frac{0.2}{0.5}=0.4$

3 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing$ $\quad\therefore B\subset A^C$

따라서 $B\cap A^C=B$이므로

$\mathrm{P}(B\cap A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A^C)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$

4 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$에서

$\frac{1}{4}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{3}}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$에서

$\frac{1}{5}=\frac{\frac{1}{12}}{\mathrm{P}(A)}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{5}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

5 여학생을 뽑는 사건을 A, T 영화를 관람한 학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}}=\frac{2}{5}$

유형편

6 온라인 사이트 회원인 학생을 뽑는 사건을 A, 남학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{27}{50}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{50}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{9}{50}}{\frac{27}{50}}=\frac{1}{3}$$

7 여자 회원을 뽑는 사건을 A, 크로아티아를 선호하는 회원을 뽑는 사건을 B라 하면 전체 동호회 회원 수는 $20+x$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{8+x}{20+x}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{20+x}$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{x}{20+x}}{\frac{8+x}{20+x}}=\frac{x}{8+x}$$

이때 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{9}$이므로

$\frac{x}{8+x}=\frac{5}{9}$, $9x=5(8+x)$

$4x=40 \qquad \therefore x=10$

8 B 상자를 택하는 사건을 A, 흰 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

9 현우가 당첨권을 뽑는 사건을 A, 선재가 당첨권을 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{25}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{25}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{50}$$

10 첫 번째에 꺼낸 구슬이 파란 구슬인 사건을 A, 두 번째에 꺼낸 구슬이 노란 구슬인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{n}{n+6}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{6}{n+5}$

따라서 첫 번째에 파란 구슬을 꺼내고 두 번째에 노란 구슬을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{n+6}\times\frac{6}{n+5}=\frac{6n}{(n+6)(n+5)}$$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{11}$이므로

$\frac{6n}{(n+6)(n+5)}=\frac{3}{11}$

$(n+6)(n+5)=22n$, $n^2-11n+30=0$

$(n-5)(n-6)=0 \qquad \therefore n=5$ 또는 $n=6$

따라서 모든 n의 값의 합은 11이다.

11 현서가 3점짜리 문제를 푸는 사건을 A, 정답을 맞히는 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 현서가 3점짜리 문제를 풀고, 정답을 맞히는 경우

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{6}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{15}$$

(ⅱ) 현서가 4점짜리 문제를 풀고, 정답을 맞히는 경우

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{7}{15}+\frac{1}{10}=\frac{17}{30}$$

12 서연이가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 민영이가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 서연이가 당첨 제비를 뽑고, 민영이도 당첨 제비를 뽑는 경우

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$$

(ⅱ) 서연이가 당첨 제비를 뽑지 않고, 민영이가 당첨 제비를 뽑는 경우

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{2}{5}$$

13 첫 번째에 불량품이 아닌 제품을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 불량품이 아닌 제품을 꺼내는 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 첫 번째에 불량품이 아닌 제품을 꺼내고, 두 번째에도 불량품이 아닌 제품을 꺼내는 경우

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{15-n}{15}\times\frac{14-n}{14}$$

(ⅱ) 첫 번째에 불량품을 꺼내고, 두 번째에 불량품이 아닌 제품을 꺼내는 경우

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\frac{n}{15}\times\frac{15-n}{14}$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 두 번째 꺼낸 제품이 불량품이 아닐 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{(15-n)(14-n)}{15\times14}+\frac{n(15-n)}{15\times14}$

$=\frac{(15-n)(14-n+n)}{15\times14}$

$=\frac{15-n}{15}$

따라서 $\frac{15-n}{15}=\frac{11}{15}$이므로

$n=4$

14 현정이가 동전 1개를 던져서 앞면이 나오는 사건을 A, 수민이가 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 합이 4인 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 현정이가 던진 동전이 앞면이 나오는 경우

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

수민이가 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수의 합이 4가 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{24}$

(ⅱ) 현정이가 던진 동전이 뒷면이 나오는 경우

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}$

수민이가 서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수의 합이 4가 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면 (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 3가지이므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{216}=\frac{1}{72}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{72}=\frac{1}{144}$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{1}{24}+\frac{1}{144}$

$=\frac{7}{144}$

15 비가 오는 사건을 A, 하루의 매출 목표를 달성하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=0.3\times0.7=0.21$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=(1-0.3)\times0.4=0.28$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=0.21+0.28=0.49$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.21}{0.49}=\frac{3}{7}$

16 A 상자를 택하는 사건을 A, 노란 카드 1장, 빨간 카드 1장을 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=\frac{17}{30}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{17}{30}}=\frac{9}{17}$

17 카드 A를 뽑는 사건을 A, 카드 B를 뽑는 사건을 B, 카드 C를 뽑는 사건을 C, 보이는 면에 ■가 그려져 있는 사건을 D라 하면

$\mathrm{P}(A\cap D)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D|A)$

$=\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(B\cap D)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(D|B)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(C\cap D)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(D|C)$

$=\frac{1}{3}\times0=0$

$\therefore \mathrm{P}(D)=\mathrm{P}(A\cap D)+\mathrm{P}(B\cap D)+\mathrm{P}(C\cap D)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+0=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|D)=\frac{\mathrm{P}(A\cap D)}{\mathrm{P}(D)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

유형편

18 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 표본공간은

{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

이고

$A=\{HHH, HHT, HTH, HTT\}$,

$B=\{HHH, HHT, HTH, THH\}$,

$C=\{HHH, TTT\}$

$\therefore A\cap B=\{HHH, HHT, HTH\}$, $A\cap C=\{HHH\}$,

$B\cap C=\{HHH\}$

ㄱ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{3}{8}$이므로

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

ㄴ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{4}$, $P(A\cap C)=\frac{1}{8}$이므로

$P(A\cap C)=P(A)P(C)$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{4}$, $P(B\cap C)=\frac{1}{8}$이므로

$P(B\cap C)=P(B)P(C)$

따라서 두 사건 B와 C는 서로 독립이다.

따라서 서로 독립인 사건은 ㄴ, ㄷ이다.

19 $P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$\frac{4}{5}=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}-P(A\cap B)$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{4}{15}$

이때 $P(A)P(B)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

20 $A=\{1, 2, 4\}$, $B_n=\{n-1, n\}$ ($2\le n\le 6$인 자연수)이므로

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(B_n)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B_n이 서로 독립이기 위해서는

$P(A\cap B_n)=P(A)P(B_n)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore n(A\cap B_n)=1$ …… ㉠

이때 $B_2=\{1, 2\}$, $B_3=\{2, 3\}$, $B_4=\{3, 4\}$, $B_5=\{4, 5\}$, $B_6=\{5, 6\}$이므로

$A\cap B_2=\{1, 2\}$, $A\cap B_3=\{2\}$, $A\cap B_4=\{4\}$,

$A\cap B_5=\{4\}$, $A\cap B_6=\varnothing$

따라서 구하는 n의 값은 3, 4, 5이므로 그 합은 12이다.

21 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$\therefore P(A^C\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

$=P(B)-P(A)P(B)$

$=\{1-P(A)\}P(B)$

$=P(A^C)P(B)$

따라서 두 사건 A^C, B는 서로 독립이다.

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0}{P(B)}=0$

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $P(A\cap B)=0$

이때 $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$이므로

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$P(A|B)=P(A)$, $P(A^C|B)=P(A^C)$

그런데 $P(A)$와 $P(A^C)$이 항상 같지는 않으므로

$P(A|B)=P(A^C|B)$는 항상 성립하지는 않는다.

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C과 B, A와 B^C도 서로 독립이므로

$P(B|A^C)=P(B)$, $P(B^C|A)=P(B^C)$

$\therefore P(B^C|A)=P(B^C)=1-P(B)=1-P(B|A^C)$

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로

$1-P(A\cup B)=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$

$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$

$=\{1-P(A)\}-P(B)\{1-P(A)\}$

$=\{1-P(A)\}\{1-P(B)\}$

$=P(A^C)P(B^C)$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

23 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

또 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이고

$P(A\cap B)=\frac{1}{2}P(A\cup B)$에서 $2P(A\cap B)=P(A\cup B)$

이므로 $2P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$3P(A\cap B)=P(A)+P(B)$

$3P(A)P(B)=P(A)+P(B)$

$\frac{9}{4}P(B)=\frac{3}{4}+P(B)$

$\frac{5}{4}P(B)=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore P(B)=\frac{3}{5}$

24 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\times\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(A)=x\,(0\le x\le 1$인 실수)라 하면 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{16}$에서

$(1-x)\times\frac{1}{4}x=\frac{1}{16}$

$4x^2-4x+1=0$

$(2x-1)^2=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

25 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B) \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

두 사건 B, C가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(B\cup C)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

$\frac{11}{12}=\frac{3}{4}+\mathrm{P}(C) \qquad \therefore \mathrm{P}(C)=\frac{1}{6}$

26 두 식물 A, B가 1년 동안 죽지 않는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.8\times0.6=0.48$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=0.8+0.6-0.48=0.92\end{aligned}$$

27 민아와 현서가 영어 단어 시험에 통과하는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

이때 두 사람 모두 시험에 통과하지 못할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{2}{5}(1-p)\end{aligned}$$

즉, $\frac{2}{5}(1-p)=\frac{2}{15}$이므로

$1-p=\frac{1}{3} \qquad \therefore p=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}\end{aligned}$$

28 지율이와 재호가 이번 달에 독서록을 제출하는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(i) 지율이만 독서록을 제출할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\\&=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

(ii) 재호만 독서록을 제출할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

(i), (ii)에 의해 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

29 두 수의 합이 짝수이려면 두 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다. 두 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수인 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(i) A, B에서 모두 짝수가 적힌 공을 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{15}\end{aligned}$$

(ii) A, B에서 모두 홀수가 적힌 공을 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\\&=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

(i), (ii)에 의해 구하는 확률은

$\frac{2}{15}+\frac{2}{5}=\frac{8}{15}$

30 세 스위치 A, B, C가 닫히는 사건을 각각 A, B, C라 하면 전구에 불이 켜지는 사건은 $A\cap(B\cup C)$이다.

두 사건 B와 C는 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B\cup C)&=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)\\&=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

또 두 사건 A와 $B\cup C$는 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap(B\cup C))&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\cup C)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

31 두 동아리 A, B에서 선택된 사람이 보육원에서 봉사활동을 하는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(i) A, B에서 선택된 사람이 모두 보육원에서 봉사활동을 할 확률을

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}=\frac{a}{100}\left(1-\frac{2a}{100}\right)\end{aligned}$$

유형편

(ⅱ) A, B에서 선택된 사람이 모두 요양원에서 봉사활동을 할 확률은

$$\begin{aligned}P(A^C \cap B^C) &= P(A^C)P(B^C)\\ &= \frac{100-a}{100} \times \frac{2a}{100}\\ &= \frac{2a}{100}\left(1-\frac{a}{100}\right)\end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 같은 장소에서 봉사활동을 할 확률은

$$\frac{a}{100}\left(1-\frac{2a}{100}\right)+\frac{2a}{100}\left(1-\frac{a}{100}\right)$$

이때 $\frac{a}{100}=x$라 하면 $x(1-2x)+2x(1-x)=\frac{1}{2}$에서

$8x^2-6x+1=0$, $(2x-1)(4x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{4}$ ($\because 0<a<50$)

따라서 $\frac{a}{100}=\frac{1}{4}$이므로 $a=25$

32 페널티킥을 한 번 이상 성공하는 사건을 A라 하면 A^C은 페널티킥을 한 번도 성공하지 못하는 사건이므로

$P(A^C)={}_3C_0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

$$\begin{aligned}\therefore P(A) &= 1-P(A^C)\\ &= 1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}\end{aligned}$$

33 앞면이 나온 횟수가 뒷면이 나온 횟수보다 크려면 앞면이 나온 횟수가 4 또는 5 또는 6이어야 한다.

(ⅰ) 앞면이 나온 횟수가 4일 확률은

${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$

(ⅱ) 앞면이 나온 횟수가 5일 확률은

${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{32}$

(ⅲ) 앞면이 나온 횟수가 6일 확률은

${}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{64}$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의해 구하는 확률은

$\frac{15}{64}+\frac{3}{32}+\frac{1}{64}=\frac{11}{32}$

34 4명의 학생 중 적어도 두 명의 학생이 B 대학교를 택하는 사건을 A라 하면 A^C은 네 학생 모두 B 대학교를 택하지 않거나 한 명만 B 대학교를 택하는 사건이다.

(ⅰ) 네 학생 모두 B 대학교를 택하지 않을 확률은

${}_4C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

(ⅱ) 네 학생 중 한 명만 B 대학교를 택할 확률은

${}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해

$P(A^C)=\frac{16}{81}+\frac{32}{81}=\frac{16}{27}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A) &= 1-P(A^C)\\ &= 1-\frac{16}{27}=\frac{11}{27}\end{aligned}$$

35 5번째 경기에서 우승자가 되려면 네 번째 경기까지 3번 이긴 사람이 5번째 경기에서 이겨야 한다.

(ⅰ) 5번째 경기에서 태현이가 우승할 확률은

${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}=\frac{64}{243}$

(ⅱ) 5번째 경기에서 준호가 우승할 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\frac{1}{3}=\frac{8}{243}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 확률은

$\frac{64}{243}+\frac{8}{243}=\frac{8}{27}$

36 동전의 뒷면이 3번 나오는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 2가 적힌 공을 꺼내고 동전을 3번 던져서 3번 모두 뒷면이 나올 확률은

$\frac{1}{3}\times{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{24}$

(ⅱ) 3이 적힌 공을 꺼내고 동전을 4번 던져서 뒷면이 3번 나올 확률은

$\frac{4}{9}\times{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{9}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 확률은

$\frac{1}{24}+\frac{1}{9}=\frac{11}{72}$

37 주사위를 5번 던질 때 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 x, 그 외의 눈이 나오는 횟수를 y라 하면

$x+y=5$ ······ ㉠

점 P가 이동하는 거리는 $3x+2y$이고, 주사위를 5번 던지므로 $10\le 3x+2y\le 15$

이때 점 P가 꼭짓점 A로 다시 돌아오려면 $3x+2y$의 값은 6의 배수이어야 하므로

$3x+2y=12$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=3$

따라서 구하는 확률은

${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$

01 이산확률변수와 이항분포

기초 문제 Training

p.34

1 ㄴ, ㄹ

2 (1) **0, 1, 2**

(2) $\mathbf{P(X=0)=\frac{2}{5},\ P(X=1)=\frac{8}{15},\ P(X=2)=\frac{1}{15}}$

(3)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

3 (1) **3** (2) **1** (3) **1**

4 (1)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $\mathbf{E(X)=\frac{2}{3},\ V(X)=\frac{4}{9},\ \sigma(X)=\frac{2}{3}}$

5 (1) **평균: 7, 분산: 6, 표준편차: $\sqrt{6}$**

(2) **평균: $\frac{3}{2}$, 분산: $\frac{3}{8}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{6}}{4}$**

6 **평균: 4, 분산: 13, 표준편차: $\sqrt{13}$**

7 (1) $\mathbf{B\left(20,\ \frac{1}{5}\right)}$

(2) **이항분포를 따르지 않는다.**

8 (1) $\mathbf{P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}}$ $\mathbf{(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)}$

(2) $\mathbf{\frac{5}{32}}$

9 (1) **평균: 120, 분산: 40, 표준편차: $2\sqrt{10}$**

(2) **평균: 90, 분산: 36, 표준편차: 6**

핵심 유형 Training

p.35~40

1 ②	**2** $\frac{7}{6}$	**3** ④	**4** ③	**5** ④
6 ④	**7** $\frac{13}{35}$	**8** ①	**9** ④	**10** 3
11 평균: $\frac{1}{2}$, 분산: $\frac{7}{12}$	**12** $\frac{\sqrt{33}}{6}$	**13** ③	**14** $\frac{4}{3}$	
15 $\frac{3}{4}$	**16** $\frac{\sqrt{6}}{3}$	**17** $\frac{63}{80}$	**18** 2600원	
19 3회	**20** 10000원		**21** 3	**22** 52
23 ①	**24** 44	**25** 32	**26** $\sqrt{11}$	**27** -4
28 7	**29** $\frac{28}{3}$	**30** $3\sqrt{3}$	**31** 224	**32** ①
33 ①	**34** ①	**35** 12	**36** ⑤	**37** $\frac{6}{7}$
38 40	**39** 215	**40** $\frac{75}{8}$	**41** 10	

1 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)$
$\qquad+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$

$\left(k+\frac{1}{6}\right)+\left(k+\frac{1}{12}\right)+k+\left(k+\frac{1}{12}\right)+\left(k+\frac{1}{6}\right)=1$

$5k+\frac{1}{2}=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{10}$

2 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=6)=1$

$\frac{k}{1\times2}+\frac{k}{2\times3}+\frac{k}{3\times4}+\cdots+\frac{k}{6\times7}=1$

$k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)\right\}=1$

$k\left(1-\frac{1}{7}\right)=1,\ \frac{6}{7}k=1$

$\therefore k=\frac{7}{6}$

3 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$
$\qquad+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)=1$

$\frac{k}{30}+\frac{2k}{30}+\frac{3k}{30}+\frac{4k}{30}+\frac{5k}{30}=1$

$\therefore k=2$

$\therefore \mathrm{P}(X=x)=\frac{x}{15}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\le3)$

$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}=\frac{2}{5}$

유형편

4 확률의 총합은 1이므로

$3a+a+2a+a+3a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은

$P(X^2=1)=P(X=-1 \text{ 또는 } X=1)$
$=P(X=-1)+P(X=1)$
$=a+a=2a$
$=2\times\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$

5 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a^2+\frac{3}{8}+\frac{a}{4}=1,\ 8a^2+2a-3=0$

$(4a+3)(2a-1)=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because 0\le a\le 1)$

따라서 구하는 확률은

$P(3X^2-7X+2\le 0)=P\left(\frac{1}{3}\le X\le 2\right)$
$=P(X=1)+P(X=2)$
$=a^2+\frac{3}{8}$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

6 확률의 총합은 1이므로

$p_1+p_2+p_3=1$ …… ㉠

$\frac{p_1+p_2}{3}=p_3$에서 $p_1+p_2=3p_3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3p_3+p_3=1,\ 4p_3=1 \qquad \therefore p_3=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$P(X\le 0)=P(X=-2)+P(X=0)$
$=p_1+p_2=3p_3$
$=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

7 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_4C_3\times{}_3C_0}{{}_7C_3}=\frac{4}{35},\ P(X=1)=\frac{{}_4C_2\times{}_3C_1}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_2}{{}_7C_3}=\frac{12}{35},\ P(X=3)=\frac{{}_4C_0\times{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$

즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

따라서 구하는 확률은

$P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)$
$=\frac{12}{35}+\frac{1}{35}=\frac{13}{35}$

8 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_5C_0\times{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{3}{28}$

$P(X=1)=\frac{{}_5C_1\times{}_3C_1}{{}_8C_2}=\frac{15}{28}$

$P(X=2)=\frac{{}_5C_2\times{}_3C_0}{{}_8C_2}=\frac{5}{14}$

즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$	1

따라서 구하는 확률은

$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)$
$=\frac{3}{28}+\frac{15}{28}=\frac{9}{14}$

9 $X^2-3X+2\le 0$에서 $(X-1)(X-2)\le 0$

$\therefore 1\le X\le 2$

이때 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이므로

$P(X^2-3X+2\le 0)=P(1\le X\le 2)$
$=P(X=1)+P(X=2)$

바닥에 놓인 면에 적힌 두 수를 a, b라 하면 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수의 차가 1인 경우는 (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)의 6가지이고, 두 수의 차가 2인 경우는 (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)의 4가지이므로 그 확률은 각각

$P(X=1)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8},\ P(X=2)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$P(X^2-3X+2\le 0)=P(X=1)+P(X=2)$
$=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

10 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$P(X=1)=\frac{{}_3C_3\times{}_7C_1}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{30},\ P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_7C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{3}{10}$

$P(X=3)=\frac{{}_3C_1\times{}_7C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{2},\ P(X=4)=\frac{{}_3C_0\times{}_7C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{6}$

즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$P(X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$
$=\frac{1}{30}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

$\therefore k=3$

11 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{12}+\frac{5}{12}+a+\frac{1}{12}=1 \qquad \therefore a=\frac{5}{12}$

확률변수 X에 대하여

$E(X)=(-1)\times\frac{1}{12}+0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{12}+0^2\times\frac{5}{12}+1^2\times\frac{5}{12}+2^2\times\frac{1}{12}$

$=\frac{5}{6}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{5}{6}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{12}$

따라서 X의 평균은 $\frac{1}{2}$, 분산은 $\frac{7}{12}$이다.

12 확률의 총합은 1이므로

$a+b+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1 \qquad \therefore a+b=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$E(X)=\frac{5}{2}$이므로

$a+2b+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{6}=\frac{5}{2}$

$\therefore a+2b=\frac{5}{6}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{3}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{6}=\frac{43}{6}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{43}{6}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{33}}{6}$

13 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{3}{4}$ …… ㉠

$E(X)=2$이므로

$1\times\frac{1}{4}+2a+3b=2 \qquad \therefore 2a+3b=\frac{7}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$

$\therefore V(X)+\{E(X)\}^2=E(X^2)$

$=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$

14 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_2C_2\times{}_4C_0}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$

$P(X=2)=\frac{{}_2C_0\times{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}$

즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{3}$

15 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$, $P(X=1)=\frac{{}_3C_1}{2^3}=\frac{3}{8}$

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{2^3}=\frac{3}{8}$, $P(X=3)=\frac{{}_3C_3}{2^3}=\frac{1}{8}$

즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}=3$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

16 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 한 개의 주사위를 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X의 확률은 각각

$P(X=0)={}_3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

$P(X=1)={}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$P(X=2)={}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$

$P(X=3)={}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{27}$

즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{27}=1$

$E(X^2)=0^2\times\frac{8}{27}+1^2\times\frac{4}{9}+2^2\times\frac{2}{9}+3^2\times\frac{1}{27}=\frac{5}{3}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{5}{3}-1^2=\frac{2}{3}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

유형편

17 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이므로 다음과 같은 경우로 나누어 생각한다.

(i) $X=1$인 경우

1이 적힌 카드 1장과 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 카드 중 2장을 뽑아야 하므로

$$P(X=1)=\frac{1\times{}_5C_2}{{}_6C_3}=\frac{1}{2}$$

(ii) $X=2$인 경우

2가 적힌 카드 1장과 3, 4, 5, 6이 적힌 카드 중 2장을 뽑아야 하므로

$$P(X=2)=\frac{1\times{}_4C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{10}$$

(iii) $X=3$인 경우

3이 적힌 카드 1장과 4, 5, 6이 적힌 카드 중 2장을 뽑아야 하므로

$$P(X=3)=\frac{1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{20}$$

(iv) $X=4$인 경우

4가 적힌 카드 1장과 5, 6이 적힌 카드 2장을 뽑아야 하므로

$$P(X=4)=\frac{1\times{}_2C_2}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$$

(i)~(iv)에 의해 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{3}{20}+4\times\frac{1}{20}=\frac{7}{4}$$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{3}{20}+4^2\times\frac{1}{20}=\frac{77}{20}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{77}{20}-\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{63}{80}$$

18 행운권 한 장으로 받을 수 있는 상금을 X원이라 하면 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	10000	50000	100000	300000	합계
$P(X=x)$	$\frac{9}{10}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{250}$	$\frac{3}{500}$	$\frac{1}{500}$	1

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\times\frac{9}{10}+10000\times\frac{2}{25}+50000\times\frac{3}{250}+100000\times\frac{3}{500}+300000\times\frac{1}{500}=2600$$

따라서 구하는 기댓값은 2600원이다.

19 강호의 학생증이 나올 때까지 시도한 횟수를 X회라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 그 확률은 각각

$$P(X=1)=\frac{1}{5}$$

$$P(X=2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=4)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=5)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{5}$$

즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}=3$$

따라서 구하는 기댓값은 3회이다.

20 한 번 참여하여 받을 수 있는 상금을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 7000, 10500, 14000이므로 그 확률은 각각

$$P(X=7000)=\frac{{}_3C_0\times{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$$

$$P(X=10500)=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$$

$$P(X=14000)=\frac{{}_3C_2\times{}_4C_0}{{}_7C_2}=\frac{1}{7}$$

즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	7000	10500	14000	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=7000\times\frac{2}{7}+10500\times\frac{4}{7}+14000\times\frac{1}{7}=10000$$

따라서 구하는 기댓값은 10000원이다.

21 $E(Y)=2$에서 $E(3X+1)=2$

$3E(X)+1=2 \qquad \therefore E(X)=\frac{1}{3}$

$\sigma(Y)=9$에서 $\sigma(3X+1)=9$

$3\sigma(X)=9 \qquad \therefore \sigma(X)=3$

$\therefore V(X)=\sigma^2(X)=3^2=9$

$\therefore E(X)V(X)=\frac{1}{3}\times9=3$

22 $E(2X-10)=4$에서

$2E(X)-10=4 \quad \therefore E(X)=7$

$V(2X)=12$에서

$2^2V(X)=12 \quad \therefore V(X)=3$

$\therefore E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=3+7^2=52$

23 $E(X)=-2$, $V(X)=3$이므로

$E(Y)=2$에서 $E(aX-2)=2$

$aE(X)-2=2$, $-2a-2=2 \quad \therefore a=-2$

$V(Y)=b$에서 $V(aX-2)=b$

$a^2V(X)=b$, $(-2)^2\times3=b \quad \therefore b=12$

$\therefore ab=(-2)\times12=-24$

24 $E(Y)=\frac{2}{3}$에서 $E\left(\frac{1}{3}X-2\right)=\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}E(X)-2=\frac{2}{3} \quad \therefore E(X)=8$

$E(Y^2)=\frac{40}{9}$이므로

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=\frac{40}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=4$

$V\left(\frac{1}{3}X-2\right)=4$, $\left(\frac{1}{3}\right)^2V(X)=4 \quad \therefore V(X)=36$

$\therefore E(X)+V(X)=8+36=44$

25 확률의 총합은 1이므로

$a+2a+a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=(-4)\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}=0$

$E(X^2)=(-4)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{4}=8$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=8-0^2=8$

$\therefore V(2X-3)=2^2V(X)=4\times8=32$

26 확률의 총합은 1이므로

$a+b+a^2=1$ …… ㉠

$E(X)=-\frac{1}{4}$에서

$(-1)\times a+0\times b+1\times a^2=-\frac{1}{4}$

$a^2-a=-\frac{1}{4}$, $4a^2-4a+1=0$

$(2a-1)^2=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}+b+\frac{1}{4}=1 \quad \therefore b=\frac{1}{4}$

확률변수 X에 대하여

$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{11}}{4}$

$\therefore \sigma(-4X+10)=|-4|\sigma(X)$

$=4\times\frac{\sqrt{11}}{4}=\sqrt{11}$

27 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+c=1 \quad \therefore c=\frac{1}{6}$

확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}=1$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{2}{3}+2^2\times\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{4}{3}-1^2=\frac{1}{3}$

$E(Y)=-2$에서 $E(aX+b)=-2$

$aE(X)+b=-2 \quad \therefore a+b=-2$ …… ㉠

$V(Y)=\frac{4}{3}$에서 $V(aX+b)=\frac{4}{3}$

$a^2V(X)=\frac{4}{3}$, $a^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

$a^2=4 \quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$2+b=-2 \quad \therefore b=-4$

$\therefore 3abc=3\times2\times(-4)\times\frac{1}{6}=-4$

28 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\times{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{1}{5}$

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{5}$

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_4C_1}{{}_6C_3}=\frac{1}{5}$

즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$

$\therefore E(4X+3)=4E(X)+3=4\times1+3=7$

29 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_7C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_7C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_7C_0}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{15}$$

즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{7}{15}+1^2\times\frac{7}{15}+2^2\times\frac{1}{15}=\frac{11}{15}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=\frac{11}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{28}{75}$$

$$\therefore V(-5X)=(-5)^2V(X)$$

$$=25\times\frac{28}{75}=\frac{28}{3}$$

30 주사위를 3번 던져서 받을 수 있는 점수는

(짝, 짝, 짝) ➡ $2\times3=6$(점)

(홀, 짝, 짝), (짝, 홀, 짝), (짝, 짝, 홀)

➡ $3\times1+2\times2=7$(점)

(홀, 홀, 짝), (홀, 짝, 홀), (짝, 홀, 홀)

➡ $3\times2+2\times1=8$(점)

(홀, 홀, 홀) ➡ $3\times3=9$(점)

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 6, 7, 8, 9이고, 그 확률은 각각 $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	6	7	8	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=6\times\frac{1}{8}+7\times\frac{3}{8}+8\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}=\frac{15}{2}$$

$$E(X^2)=6^2\times\frac{1}{8}+7^2\times\frac{3}{8}+8^2\times\frac{3}{8}+9^2\times\frac{1}{8}=57$$

따라서 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=57-\left(\frac{15}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

이므로

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sigma(6X-3)=6\sigma(X)=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

31 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(9,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_9C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{9-x}\quad(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X=6)={}_9C_6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$=\frac{224}{3^8}$$

$\therefore a=224$

32 불량품이 발생할 확률은 $\frac{1}{10}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(8,\ \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_8C_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{8-x}\quad(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X\le7)=1-P(X=8)$$

$$=1-{}_8C_8\left(\frac{1}{10}\right)^8\left(\frac{9}{10}\right)^0$$

$$=1-\frac{1}{10^8}$$

33 화살이 4의 배수가 적힌 영역에 맞을 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}\quad(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X\ge9)=P(X=9)+P(X=10)$$

$$={}_{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$=\frac{11}{1024}$$

34 $E(X)=25$에서

$125p=25\qquad\therefore p=\frac{1}{5}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(125,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$V(X)=125\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=20$$

$$\therefore E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$$

$$=20+25^2=645$$

35 $\mathrm{P}(X=x)={}_{48}\mathrm{C}_x\dfrac{3^x}{4^{48}}$

$={}_{48}\mathrm{C}_x\left(\dfrac{3}{4}\right)^x\left(\dfrac{1}{4}\right)^{48-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 48)$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \dfrac{3}{4}\right)$을 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{48\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}}=3$

$\therefore\ \sigma(-4X+1)=|-4|\sigma(X)$

$=12$

36 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{16}\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{16-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 16)$

이때 $\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{6}{7}\mathrm{P}(X=3)$에서

${}_{16}\mathrm{C}_2 p^2(1-p)^{14}=\dfrac{6}{7}{}_{16}\mathrm{C}_3 p^3(1-p)^{13}$

$p\neq0$이므로 위 식의 양변을 $p^2(1-p)^{13}$으로 나누면

${}_{16}\mathrm{C}_2(1-p)=\dfrac{6}{7}{}_{16}\mathrm{C}_3 p$

$120(1-p)=480p,\ 1-p=4p$

$\therefore\ p=\dfrac{1}{5}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=16\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{64}{25}$

$\therefore\ \mathrm{V}(5X+2)=5^2\mathrm{V}(X)$

$=25\times\dfrac{64}{25}=64$

37 $\mathrm{E}(X)=3,\ \mathrm{V}(X)=2$이므로

$\mathrm{E}(X)=np=3$ ······ ㉠

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=2$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $3(1-p)=2$

$1-p=\dfrac{2}{3}$ $\qquad\therefore\ p=\dfrac{1}{3}$

$p=\dfrac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{1}{3}n=3$ $\qquad\therefore\ n=9$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(9,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_9\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\left(\dfrac{2}{3}\right)^{9-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{P}(X=2)}{\mathrm{P}(X=3)}=\frac{{}_9\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^7}{{}_9\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^6}=\frac{{}_9\mathrm{C}_2\times2}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{6}{7}$$

38 재현이와 성연이가 가위바위보를 한 번 할 때 재현이가 이길 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=18\times\dfrac{1}{3}=6$

$\mathrm{V}(X)=18\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=4$

$\therefore\ \mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=4+6^2=40$

39 한 개의 윷가락을 던질 때 평평한 면이 나올 확률은 $\dfrac{3}{5}$, 둥근 면이 나올 확률은 $\dfrac{2}{5}$이므로 4개의 윷가락을 동시에 던져 개가 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{216}{625}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(125,\ \dfrac{216}{625}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=125\times\dfrac{216}{625}=\dfrac{216}{5}$

$\therefore\ \mathrm{E}(5X-1)=5\mathrm{E}(X)-1$

$=5\times\dfrac{216}{5}-1=215$

40 주머니에서 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 빨간 구슬이 나올 확률은 $\dfrac{3}{8}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{3}{8}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=15$에서

$n\times\dfrac{3}{8}=15$ $\qquad\therefore\ n=40$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=40\times\dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{75}{8}$

41 동전을 20번 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $20-Y$이므로

$X=2Y-(20-Y)=3Y-20$

한편 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\dfrac{1}{2}$이므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(Y)=20\times\dfrac{1}{2}=10$이므로

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(3Y-20)$

$=3\mathrm{E}(Y)-20$

$=3\times10-20=10$

유형편

02 연속확률변수와 정규분포

기초 문제 Training
p.41

1 ㄱ, ㄴ, ㄷ

2 (1) $\mathbf{\frac{1}{4}}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{8}}$

3 $\mathbf{\frac{1}{2}}$

4 (1) $\mathbf{N(6,\ 3^2)}$ (2) $\mathbf{N(-2,\ 5^2)}$

5 (1) **0.1498** (2) **0.1359** (3) **0.8185**
(4) **0.0228** (5) **0.9332**

6 (1) $\mathbf{Z=\frac{X-10}{2}}$ (2) **0.1525**

7 (1) $\mathbf{N(30,\ 5^2)}$ (2) $\mathbf{N(200,\ 10^2)}$

8 (1) $\mathbf{Z=\frac{X-120}{10}}$ (2) **0.1587**

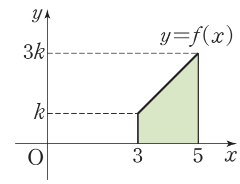
핵심 유형 Training
p.42~48

1 $\frac{1}{3}$	**2** $\frac{1}{4}$	**3** ③	**4** $\frac{1}{3}$	**5** $\frac{7}{16}$
6 $\frac{3}{8}$	**7** $\frac{1}{3}$	**8** ③	**9** ㄴ, ㄷ	**10** 12
11 ③	**12** 0.8185		**13** 12	**14** ④
15 ③	**16** 8	**17** ⑤	**18** 0.3446	
19 ①	**20** 24	**21** 1.5	**22** 2.58	**23** 5
24 국어, 수학, 영어		**25** ②	**26** C, A, B	
27 13.6 %	**28** 0.21	**29** 4	**30** ③	**31** 3
32 1954	**33** 72.2점		**34** 77.8점	
35 21.4 kg	**36** ②	**37** ③	**38** 0.4772	
39 0.1587	**40** 0.0228		**41** 0.9987	
42 162	**43** 90	**44** 56		

1 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times(2+4)\times k=1,\ 3k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{3}$

2 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=3,\ x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times(k+3k)\times 2=1$

$4k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$

3 ① $-2\le x<0$에서 $f(x)<0$이다.
② $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2,\ x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니다.
③ $-2\le x\le 2$에서 $f(x)\ge 0$이고 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{2}=1$
④ $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니다.
⑤ $-1<x<1$에서 $f(x)<0$이다.
따라서 $f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은 ③이다.

4 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

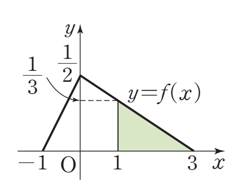
$\frac{1}{2}\times 4\times a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$0\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, $(3,\ 0)$을 지나는 직선이므로 그 직선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}=\frac{0-\frac{1}{2}}{3-0}(x-0),\ y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}$

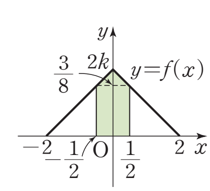
$\therefore f(x)=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}\ (0\le x\le 3)$

따라서 $f(1)=\frac{1}{3}$이고 $P(X\ge 1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$P(X\ge 1)=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

5 함수 $y=f(x)\,(-2\le x\le 2)$에서 $f(x)\ge 0$이므로 $k>0$
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times 4\times 2k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$

$0 \le x \le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, $(2,\ 0)$을 지나는 직선이므로 그 직선의 방정식은

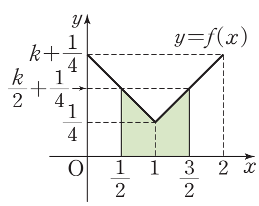
$$y-\frac{1}{2}=\frac{0-\frac{1}{2}}{2-0}(x-0),\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\ (0 \le x \le 2)$

따라서 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$이고 $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right)=1\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{8}=\frac{7}{16}$$

6 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로



$2\times\frac{1}{4}+1\times k=1$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

이때 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$이고 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right)=1\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

7 $f(2-x)=f(2+x)$가 성립하므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, $\mathrm{P}(0 \le X \le 4)=1$이므로

$\mathrm{P}(0 \le X \le 2)=\mathrm{P}(2 \le X \le 4)=\frac{1}{2}$

또 $\mathrm{P}(1 \le X \le 2)=\mathrm{P}(2 \le X \le 3)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(1 \le X \le 3)&=\mathrm{P}(1 \le X \le 2)+\mathrm{P}(2 \le X \le 3)\\&=2\mathrm{P}(1 \le X \le 2)\\&=2\{\mathrm{P}(0 \le X \le 2)-\mathrm{P}(0 \le X \le 1)\}\\&=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

8 ①, ② 확률변수 X_1의 정규분포 곡선의 대칭축이 확률변수 X_2의 정규분포 곡선의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로 $\mathrm{E}(X_1)<\mathrm{E}(X_2)$

③, ④ 확률변수 X_1의 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이가 확률변수 X_2의 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이보다 높으므로 $\sigma(X_1)<\sigma(X_2)$

⑤ $\mathrm{E}(X_1)=x_1$, $\mathrm{E}(X_2)=x_2$이므로

$\mathrm{P}(X_1 \le x_1)=\mathrm{P}(X_2 \ge x_2)=0.5$

따라서 옳은 것은 ③이다.

9 ㄱ. $x_1<m$일 때,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \le x_1)&=\mathrm{P}(X \le m)-\mathrm{P}(x_1 \le X \le m)\\&=0.5-\mathrm{P}(x_1 \le X \le m)\end{aligned}$$

ㄴ. 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, $\frac{a+b}{2}=m$이면 a, b는 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(X \le a)=\mathrm{P}(X \ge b)$

ㄷ. 정규분포 곡선과 x축 사이의 넓이가 1이므로

$\mathrm{P}(X \le a)+\mathrm{P}(X \ge a)=1$

$\therefore \mathrm{P}(X \le a)=1-\mathrm{P}(X \ge a)$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

10 정규분포 $\mathrm{N}(13,\ 3^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수는 $x=13$에서 최댓값을 갖고, 정규분포 곡선은 직선 $x=13$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\mathrm{P}(k-2 \le X \le k+4)$가 최대가 되려면

$\frac{(k-2)+(k+4)}{2}=13$, $2k+2=26$ $\qquad\therefore k=12$

11 $\mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m+2\sigma)=2a$에서

$2\mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)=2a$

$\therefore \mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)=a$

$\mathrm{P}(m-4\sigma \le X \le m+4\sigma)=4b$에서

$2\mathrm{P}(m \le X \le m+4\sigma)=4b$

$\therefore \mathrm{P}(m \le X \le m+4\sigma)=2b$

$\therefore \mathrm{P}(m-4\sigma \le X \le m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(m-4\sigma \le X \le m)+\mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)+\mathrm{P}(m \le X \le m+4\sigma)$

$=a+2b$

12 $m=45$, $\sigma=5$이므로

$\mathrm{P}(35 \le X \le 50)$

$=\mathrm{P}(45-2\times 5 \le X \le 45+5)$

$=\mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m+\sigma)$

$=\mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m)+\mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)$

$=\mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)+\mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)$

$=0.4772+0.3413=0.8185$

13 $\mathrm{P}(X \ge a)=0.9772$에서

$\mathrm{P}(a \le X \le m)+\mathrm{P}(X \ge m)=0.9772$

$\mathrm{P}(a \le X \le m)+0.5=0.9772$

$\therefore \mathrm{P}(a \le X \le m)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)=0.4772$이므로

$\mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m)=0.4772$

따라서 $a=m-2\sigma$이므로

$a=20-2\times 4=12$

14 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(7,\ 2^2)$, $\mathrm{N}(16,\ 3^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-7}{2}$, $Z_Y=\frac{Y-16}{3}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le 11)=\mathrm{P}(Y\le k)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\le \frac{11-7}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le \frac{k-16}{3}\right)$

$\therefore\ \mathrm{P}(Z_X\le 2)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le \frac{k-16}{3}\right)$

따라서 $\frac{k-16}{3}=2$이므로 $k-16=6$ $\quad\therefore\ k=22$

15 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 5^2)$, $\mathrm{N}(30,\ 4^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-100}{5}$, $Z_Y=\frac{Y-30}{4}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le 80)=\mathrm{P}(Y\ge k)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\le \frac{80-100}{5}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge \frac{k-30}{4}\right)$

$\therefore\ \mathrm{P}(Z_X\le -4)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le \frac{30-k}{4}\right)$

따라서 $\frac{30-k}{4}=-4$이므로 $30-k=-16$ $\quad\therefore\ k=46$

16 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(14,\ 2^2)$, $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-14}{2}$, $Z_Y=\frac{Y-m}{3}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$2\mathrm{P}(10\le X\le 14)=\mathrm{P}(2\le Y\le 2m-2)$에서

$2\mathrm{P}\left(\frac{10-14}{2}\le Z_X\le \frac{14-14}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{2-m}{3}\le Z_Y\le \frac{2m-2-m}{3}\right)$

$2\mathrm{P}(-2\le Z_X\le 0)=\mathrm{P}\left(-\frac{m-2}{3}\le Z_Y\le \frac{m-2}{3}\right)$

$2\mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)=2\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le \frac{m-2}{3}\right)$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)=\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le \frac{m-2}{3}\right)$

따라서 $\frac{m-2}{3}=2$이므로 $m-2=6$ $\quad\therefore\ m=8$

17 $Z=\frac{X-63}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(55\le X\le 67)=\mathrm{P}\left(\frac{55-63}{4}\le Z\le \frac{67-63}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772+0.3413=0.8185$

18 $Z=\frac{X-20}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(18\le X\le 20)=0.1554$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{18-20}{5}\le Z\le \frac{20-20}{5}\right)=0.1554$

$\mathrm{P}(-0.4\le Z\le 0)=0.1554$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le 0.4)=0.1554$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 22)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{22-20}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0.4)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.4)$

$=0.5-0.1554=0.3446$

19 $\mathrm{E}(X)=70$, $\sigma(X)=3$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X+3)=2\mathrm{E}(X)+3=2\times 70+3=143$

$\sigma(Y)=\sigma(2X+3)=2\sigma(X)=2\times 3=6$

즉, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(143,\ 6^2)$을 따른다.

$Z=\frac{Y-143}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(140\le Y\le 152)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{140-143}{6}\le Z\le \frac{152-143}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.1915+0.4332=0.6247$

20 $Z=\frac{X-21}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(20\le X\le a)=0.3721$에서

$\mathrm{P}(20\le X\le a)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{20-21}{4}\le Z\le \frac{a-21}{4}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-0.25\le Z\le \frac{a-21}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.25\le Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-21}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.25)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-21}{4}\right)$

$=0.0987+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-21}{4}\right)$

$=0.3721$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-21}{4}\right)=0.2734$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.75)=0.2734$이므로

$\frac{a-21}{4}=0.75$, $a-21=3$

$\therefore\ a=24$

21 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(m-k\sigma\le X\le m+k\sigma)=0.8664$에서

$\mathrm{P}(m-k\sigma\le X\le m+k\sigma)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{m-k\sigma-m}{\sigma}\le Z\le\dfrac{m+k\sigma-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(-k\le Z\le k)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le k)$

$=0.8664$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$k=1.5$

22 $\mathrm{P}(|X-1|\le 3k)=0.99$에서

$\mathrm{P}(|X-1|\le 3k)=\mathrm{P}(-3k\le X-1\le 3k)$

$=\mathrm{P}(-3k+1\le X\le 3k+1)$ ...... ㉠

$Z=\dfrac{X-1}{3}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 ㉠에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{-3k+1-1}{3}\le Z\le\dfrac{3k+1-1}{3}\right)=\mathrm{P}(-k\le Z\le k)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le k)$

$=0.99$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.495$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)=0.495$이므로

$k=2.58$

23 $Z=\dfrac{X-65}{\sigma}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\ge 55)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{55-65}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge-\dfrac{10}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{10}{\sigma}\le Z\le 0\right)+0.5$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{10}{\sigma}\right)+0.5=0.9772$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{10}{\sigma}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{10}{\sigma}=2\qquad\therefore\ \sigma=5$

24 주영이네 학교 2학년 전체 학생의 국어, 수학, 영어 시험 성적을 각각 확률변수 $X_1,\ X_2,\ X_3$이라 하면 $X_1,\ X_2,\ X_3$은 각각 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 12^2),\ \mathrm{N}(58,\ 14^2),\ \mathrm{N}(67,\ 10^2)$을 따르므로 $Z_1=\dfrac{X_1-70}{12},\ Z_2=\dfrac{X_2-58}{14},\ Z_3=\dfrac{X_3-67}{10}$로 놓으면 $Z_1,\ Z_2,\ Z_3$은 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

다른 학생들이 주영이보다 국어, 수학, 영어 시험 성적이 높을 확률은 각각

$\mathrm{P}(X_1>91)=\mathrm{P}\left(Z_1>\dfrac{91-70}{12}\right)=\mathrm{P}(Z_1>1.75)$

$\mathrm{P}(X_2>79)=\mathrm{P}\left(Z_2>\dfrac{79-58}{14}\right)=\mathrm{P}(Z_2>1.5)$

$\mathrm{P}(X_3>81)=\mathrm{P}\left(Z_3>\dfrac{81-67}{10}\right)=\mathrm{P}(Z_3>1.4)$

이때 $\mathrm{P}(Z_1>1.75)<\mathrm{P}(Z_2>1.5)<\mathrm{P}(Z_3>1.4)$이므로

$\mathrm{P}(X_1>91)<\mathrm{P}(X_2>79)<\mathrm{P}(X_3>81)$

따라서 확률이 낮은 과목일수록 상대적으로 성적이 좋으므로 주영이의 성적이 상대적으로 좋은 과목부터 순서대로 나열하면 국어, 수학, 영어이다.

25 세 확률변수 $W,\ X,\ Y$가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(45,\ 4^2)$, $\mathrm{N}(52,\ 3^2),\ \mathrm{N}(48,\ 8^2)$을 따르므로 $Z_W=\dfrac{W-45}{4}$, $Z_X=\dfrac{X-52}{3},\ Z_Y=\dfrac{Y-48}{8}$로 놓으면 $Z_W,\ Z_X,\ Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$p=\mathrm{P}(W\ge 46)=\mathrm{P}\left(Z_W\ge\dfrac{46-45}{4}\right)=\mathrm{P}(Z_W\ge 0.25)$

$q=\mathrm{P}(X\ge 46)=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\dfrac{46-52}{3}\right)=\mathrm{P}(Z_X\ge -2)$

$r=\mathrm{P}(Y\ge 46)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\dfrac{46-48}{8}\right)=\mathrm{P}(Z_Y\ge -0.25)$

이때 $\mathrm{P}(Z_W\ge 0.25)<\mathrm{P}(Z_Y\ge -0.25)<\mathrm{P}(Z_X\ge -2)$이므로

$\mathrm{P}(W\ge 46)<\mathrm{P}(Y\ge 46)<\mathrm{P}(X\ge 46)$

$\therefore\ p<r<q$

26 1반, 2반, 3반 학생의 몸무게를 각각 확률변수 $X_1,\ X_2,\ X_3$이라 하면 $X_1,\ X_2,\ X_3$은 각각 정규분포 $\mathrm{N}(52,\ 6^2)$, $\mathrm{N}(54.5,\ 5^2),\ \mathrm{N}(55,\ 8^2)$을 따르므로 $Z_1=\dfrac{X_1-52}{6}$, $Z_2=\dfrac{X_2-54.5}{5},\ Z_3=\dfrac{X_3-55}{8}$로 놓으면 $Z_1,\ Z_2,\ Z_3$은 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

1반, 2반, 3반 학생이 각각 A, B, C보다 몸무게가 무거울 확률은

$\mathrm{P}(X_1>55)=\mathrm{P}\left(Z_1>\dfrac{55-52}{6}\right)=\mathrm{P}(Z_1>0.5)$

$\mathrm{P}(X_2>56)=\mathrm{P}\left(Z_2>\dfrac{56-54.5}{5}\right)=\mathrm{P}(Z_2>0.3)$

$\mathrm{P}(X_3>60)=\mathrm{P}\left(Z_3>\dfrac{60-55}{8}\right)=\mathrm{P}(Z_3>0.625)$

이때 $\mathrm{P}(Z_3>0.625)<\mathrm{P}(Z_1>0.5)<\mathrm{P}(Z_2>0.3)$이므로

$\mathrm{P}(X_3>60)<\mathrm{P}(X_1>55)<\mathrm{P}(X_2>56)$

따라서 각자 자기 반에서 상대적으로 몸무게가 무거운 학생부터 순서대로 나열하면 C, A, B이다.

27 인터넷 강의 수강 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(45, 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-45}{15}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore P(60\le X\le 75)=P\left(\frac{60-45}{15}\le Z\le \frac{75-45}{15}\right)$
$=P(1\le Z\le 2)$
$=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1)$
$=0.477-0.341=0.136$

따라서 60분 이상 75분 이하인 학생은 13.6 %이다.

28 영주가 등교하는 데 걸리는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(20, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$P(X>24)=P\left(Z>\frac{24-20}{5}\right)=P(Z>0.8)$
$=0.5-P(0\le Z\le 0.8)$
$=0.5-0.29=0.21$

29 응시자들의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(84, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-84}{\sigma}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

점수가 78점 이상 90점 이하인 학생이 258명이므로

$P(78\le X\le 90)=\frac{258}{300}=0.86$

$P\left(\frac{78-84}{\sigma}\le Z\le \frac{90-84}{\sigma}\right)=P\left(-\frac{6}{\sigma}\le Z\le \frac{6}{\sigma}\right)$
$=2P\left(0\le Z\le \frac{6}{\sigma}\right)=0.86$

$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{6}{\sigma}\right)=0.43$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로

$\frac{6}{\sigma}=1.5 \qquad \therefore \sigma=4$

30 망고 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(600, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-600}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore P(590\le X\le 610)=P\left(\frac{590-600}{5}\le Z\le \frac{610-600}{5}\right)$
$=P(-2\le Z\le 2)$
$=2P(0\le Z\le 2)$
$=2\times 0.477=0.954$

따라서 무게가 590 g 이상 610 g 이하인 망고의 개수는

$1000\times 0.954=954$

31 사원들의 의복비를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(30, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-30}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore P(X\ge 40)=P\left(Z\ge \frac{40-30}{4}\right)$
$=P(Z\ge 2.5)$
$=0.5-P(0\le Z\le 2.5)$
$=0.5-0.494$
$=0.006$

따라서 의복비를 40만 원 이상 지출하는 사원의 수는

$500\times 0.006=3$

32 보조배터리의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(20000, 100^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20000}{100}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

19800 mAh 이상인 보조배터리는 불량품이 아니므로 그 확률은

$P(X\ge 19800)=P\left(Z\ge \frac{19800-20000}{100}\right)$
$=P(Z\ge -2)$
$=0.5+P(0\le Z\le 2)$
$=0.5+0.477$
$=0.977$

따라서 생산한 보조배터리 2000개 중에서 불량품이 아닌 보조배터리의 개수는

$2000\times 0.977=1954$

33 응시자들의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(68, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-68}{5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

상위 20 %에 속하는 최저 점수를 k점이라 하면

$P(X\ge k)=0.2$

$P(X\ge k)=P\left(Z\ge \frac{k-68}{5}\right)$
$=0.5-P\left(0\le Z\le \frac{k-68}{5}\right)$
$=0.2$

$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{k-68}{5}\right)=0.3$

이때 $P(0\le Z\le 0.84)=0.3$이므로

$\frac{k-68}{5}=0.84,\ k-68=4.2$

$\therefore k=72.2$

따라서 상위 20 %에 속하는 응시자의 최저 점수는 72.2점이다.

34 응시자들의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(65,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-65}{10}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 k점이라 하면

$\mathrm{P}(X\geq k)=\frac{100}{1000}=0.1$

$\mathrm{P}(X\geq k)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{k-65}{10}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-65}{10}\right)$

$=0.1$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-65}{10}\right)=0.4$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.28)=0.4$이므로

$\frac{k-65}{10}=1.28,\ k-65=12.8\qquad\therefore\ k=77.8$

따라서 합격자의 최저 점수는 77.8점이다.

35 돼지들의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-24}{5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

무게가 가벼운 쪽에서 60번째인 돼지의 무게를 a kg이라 하면

$\mathrm{P}(X\leq a)=\frac{60}{200}=0.3$

$\mathrm{P}(X\leq a)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{a-24}{5}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{24-a}{5}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{24-a}{5}\right)=0.3$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{24-a}{5}\right)=0.2$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.52)=0.2$이므로

$\frac{24-a}{5}=0.52,\ 24-a=2.6\qquad\therefore\ a=21.4$

따라서 무게가 가벼운 쪽에서 60번째인 돼지의 무게는 21.4 kg이다.

36 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(900,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=900\times\frac{1}{5}=180$

$\mathrm{V}(X)=900\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=144$

이때 900은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 12^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-180}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(174\leq X\leq 198)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{174-180}{12}\leq Z\leq\frac{198-180}{12}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\leq Z\leq 1.5)$

$=\mathrm{P}(-0.5\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.1915+0.4332$

$=0.6247$

37 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=450\times\frac{2}{3}=300$

$\mathrm{V}(X)=450\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=100$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 10^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-300}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\leq 296)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{296-300}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\leq -0.4)=\mathrm{P}(Z\geq 0.4)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.4)$

$=0.5-0.16$

$=0.34$

38 ${}_{64}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{64-x}$은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{1}{2}$인 어떤 사건이 64번의 독립시행에서 x번 일어날 확률이다. 이 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(64,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=64\times\frac{1}{2}=32$

$\mathrm{V}(X)=64\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=16$

이때 64는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 4^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-32}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ {}_{64}\mathrm{C}_{32}\left(\frac{1}{2}\right)^{64}+{}_{64}\mathrm{C}_{33}\left(\frac{1}{2}\right)^{64}+\cdots+{}_{64}\mathrm{C}_{40}\left(\frac{1}{2}\right)^{64}$

$=\mathrm{P}(X=32)+\mathrm{P}(X=33)+\cdots+\mathrm{P}(X=40)$

$=\mathrm{P}(32\leq X\leq 40)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{32-32}{4}\leq Z\leq\frac{40-32}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.4772$

39 3개의 동전이 모두 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(448,\ \frac{1}{8}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=448\times\frac{1}{8}=56$

$\mathrm{V}(X)=448\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{8}=49$

이때 448은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(56,\ 7^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-56}{7}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le49)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{49-56}{7}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

40 6점을 얻는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(192,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=192\times\frac{1}{4}=48$

$\mathrm{V}(X)=192\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=36$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 6^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-48}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

한편 6점을 얻는 횟수가 X이므로 2점을 잃는 횟수는 $192-X$이고 점수가 96점 이상이려면

$6X-2(192-X)\ge96$

$8X\ge480\qquad\therefore\ X\ge60$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge60)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{60-48}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

41 비행기를 타러 온 승객의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.9)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\times0.9=360$

$\mathrm{V}(X)=400\times0.9\times0.1=36$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 6^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-360}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

비행기를 타러 온 승객이 모두 비행기를 타려면 $X\le378$이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le378)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{378-360}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le3)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le3)\\&=0.5+0.4987\\&=0.9987\end{aligned}$$

42 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=450\times\frac{1}{3}=150$

$\mathrm{V}(X)=450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=100$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 10^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge k)=0.12$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge k)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-150}{10}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-150}{10}\right)\\&=0.12\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-150}{10}\right)=0.38$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.2)=0.38$이므로

$\frac{k-150}{10}=1.2,\ k-150=12$

$\therefore\ k=162$

43 108개의 화살 중에서 10점에 맞힌 화살의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(108,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=108\times\frac{3}{4}=81$

$\mathrm{V}(X)=108\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{81}{4}$

이때 108은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(81,\ \left(\frac{9}{2}\right)^2\right)$을 따르고 $Z=\frac{X-81}{\frac{9}{2}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

10점에 맞힌 화살이 k개 이상일 확률이 0.023이므로

$P(X \geq k)=0.023$에서

$$P(X \geq k)=P\left(Z \geq \frac{k-81}{\frac{9}{2}}\right)$$
$$=0.5-P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-81}{\frac{9}{2}}\right)$$
$$=0.023$$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-81}{\frac{9}{2}}\right)=0.477$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2)=0.477$이므로

$\frac{k-81}{\frac{9}{2}}=2$, $k-81=9$

$\therefore k=90$

44 확률변수 X는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=400 \times \frac{1}{5}=80$

$V(X)=400 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}=64$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(80, 8^2)$을 따르고 $Z=\frac{k-80}{8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore P(X \geq k)=P\left(Z \geq \frac{k-80}{8}\right)$ …… ㉠

또한 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(Y)=400 \times \frac{1}{2}=200$

$V(Y)=400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}=100$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 Y는 근사적으로 정규분포 $N(200, 10^2)$을 따르고 $Z=\frac{Y-200}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore P(Y \leq 230)=P\left(Z \leq \frac{230-200}{10}\right)$

$=P(Z \leq 3)$ …… ㉡

$P(X \geq k)=P(Y \leq 230)$이므로 ㉠, ㉡에 의해

$P\left(Z \geq \frac{k-80}{8}\right)=P(Z \leq 3)$

$\therefore P\left(Z \geq \frac{k-80}{8}\right)=P(Z \geq -3)$

따라서 $\frac{k-80}{8}=-3$이므로

$k=56$

Ⅲ-2. 통계적 추정

01 통계적 추정

기초 문제 Training p.50

1 ㄴ, ㄷ

2 (1) **25** (2) **20** (3) **10**

3 **평균: 60, 분산: $\frac{2}{5}$**

4 **평균: 2, 표준편차: $\frac{1}{3}$**

5 (1) **0.8413** (2) **0.6687** (3) **0.9332**

6 (1) **$122.04 \leq m \leq 125.96$**
(2) **$121.42 \leq m \leq 126.58$**

7 (1) **1.176** (2) **1.548**

핵심 유형 Training p.51~55

1 19 **2** 18 **3** 9 **4** $\frac{9}{8}$ **5** 40

6 6 **7** $E(\overline{X})=\frac{5}{2}$, $V(\overline{X})=\frac{5}{8}$ **8** 4

9 0.9987 **10** 0.8185 **11** 25 **12** ⑤

13 16 **14** 528 **15** $498.04 \leq m \leq 501.96$

16 $989.68 \leq m \leq 1010.32$ **17** 3 **18** ②

19 64 **20** 98 **21** ⑤ **22** ① **23** ④

24 ① **25** ⑤ **26** 98 **27** ③ **28** 16

29 18 **30** ⑤ **31** 3

1 $E(\overline{X})=18$, $V(\overline{X})=\frac{2^2}{4}=1$이므로

$E(\overline{X})+V(\overline{X})=18+1=19$

유형편

2 $E(\overline{X})=54=m$

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sqrt{V(X)}}{\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\sqrt{n}=6 \quad \therefore n=36$

$\therefore m-n=54-36=18$

3 표본평균의 표준편차가 $\dfrac{9}{\sqrt{n}}$이므로

$\dfrac{9}{\sqrt{n}}\le 3,\ \sqrt{n}\ge 3 \quad \therefore n\ge 9$

따라서 n의 최솟값은 9이다.

4 확률의 총합은 1이므로

$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+a=1 \quad \therefore a=\dfrac{1}{4}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=(-1)\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{4}=1$

$V(X)=(-1)^2\times\dfrac{1}{4}+1^2\times\dfrac{1}{2}+3^2\times\dfrac{1}{4}-1^2=2$

이때 표본의 크기가 16이므로

$E(\overline{X})=E(X)=1$

$V(\overline{X})=\dfrac{V(X)}{16}=\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8}$

$\therefore E(\overline{X}^2)=V(\overline{X})+\{E(\overline{X})\}^2$

$=\dfrac{1}{8}+1^2=\dfrac{9}{8}$

5 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=100\times\dfrac{1}{5}=20$

$V(X)=100\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=16$

이때 표본의 크기가 8이므로

$E(\overline{X})=20,\ V(\overline{X})=\dfrac{16}{8}=2$

$\therefore E(\overline{X})V(\overline{X})=40$

6 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\dfrac{1}{9}+1\times\dfrac{2}{9}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{2}{9}+4\times\dfrac{1}{9}=2$

$V(X)=0^2\times\dfrac{1}{9}+1^2\times\dfrac{2}{9}+2^2\times\dfrac{1}{3}+3^2\times\dfrac{2}{9}+4^2\times\dfrac{1}{9}-2^2$

$=\dfrac{4}{3}$

표본의 크기가 n일 때, $V(\overline{X})=\dfrac{2}{9}$이므로

$\dfrac{\frac{4}{3}}{n}=\dfrac{2}{9} \quad \therefore n=6$

7 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\dfrac{1}{4}+2\times\dfrac{1}{4}+3\times\dfrac{1}{4}+4\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{2}$

$V(X)=1^2\times\dfrac{1}{4}+2^2\times\dfrac{1}{4}+3^2\times\dfrac{1}{4}+4^2\times\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

이때 표본의 크기가 2이므로

$E(\overline{X})=\dfrac{5}{2},\ V(\overline{X})=\dfrac{\frac{5}{4}}{2}=\dfrac{5}{8}$

8 상자에서 임의로 카드 한 장을 꺼낼 때 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	5	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=3\times\dfrac{2}{7}+5\times\dfrac{3}{7}+7\times\dfrac{2}{7}=5$

$V(X)=3^2\times\dfrac{2}{7}+5^2\times\dfrac{3}{7}+7^2\times\dfrac{2}{7}-5^2=\dfrac{16}{7}$

표본의 크기가 n일 때, $V(\overline{X})=\dfrac{4}{7}$이므로

$\dfrac{\frac{16}{7}}{n}=\dfrac{4}{7} \quad \therefore n=4$

9 학생들이 등교하는 데 걸리는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(20,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(20,\ \dfrac{4^2}{16}\right)$, 즉 $N(20,\ 1^2)$을 따른다.

$Z=\overline{X}-20$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(\overline{X}\le 23)=P(Z\le 23-20)$

$=P(Z\le 3)$

$=0.5+P(0\le Z\le 3)$

$=0.5+0.4987=0.9987$

10 토마토 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(160,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(160,\ \dfrac{10^2}{4}\right)$, 즉 $N(160,\ 5^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-160}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(155\le\overline{X}\le170)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{155-160}{5}\le Z\le\dfrac{170-160}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le2)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$

11 수학 시험 성적을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(75,\ 15^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(75,\ \dfrac{15^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-75}{\frac{15}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(72\le\overline{X}\le78)=0.68$에서

$\mathrm{P}(72\le\overline{X}\le78)=\mathrm{P}\left(\dfrac{72-75}{\frac{15}{\sqrt{n}}}\le Z\le\dfrac{78-75}{\frac{15}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.68$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.34$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.34$이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{5}=1,\ \sqrt{n}=5\qquad\therefore\ n=25$

12 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 32^2)$을 따르고 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(200,\ \dfrac{32^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(200,\ 4^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-200}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le k)=0.0668$에서

$\mathrm{P}(\overline{X}\le k)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{k-200}{4}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(\dfrac{k-200}{4}\le Z\le0\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{200-k}{4}\right)$

$=0.0668$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{200-k}{4}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{200-k}{4}=1.5,\ 200-k=6\qquad\therefore\ k=194$

13 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(183,\ 24^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(183,\ \dfrac{24^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-183}{\frac{24}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(|\overline{X}-183|\le3)=0.383$에서

$\mathrm{P}(-3\le\overline{X}-183\le3)$

$=\mathrm{P}(180\le\overline{X}\le186)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{180-183}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\le Z\le\dfrac{186-183}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{8}\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{8}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{8}\right)$

$=0.383$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.1915$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)=0.1915$이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{8}=0.5,\ \sqrt{n}=4$

$\therefore\ n=16$

14 화물의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 8^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(30,\ \dfrac{8^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(30,\ 2^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-30}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

16개의 화물의 무게의 합이 a kg 이상이면 경고음이 울리므로 경고음이 울리려면 $16\overline{X}\ge a$, 즉 $\overline{X}\ge\dfrac{a}{16}$이어야 한다.

경고음이 울릴 확률이 0.07이므로

$\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge\dfrac{a}{16}\right)=0.07$에서

$\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge\dfrac{a}{16}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{\frac{a}{16}-30}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{a}{32}-15\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a}{32}-15\right)$

$=0.07$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a}{32}-15\right)=0.43$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.43$이므로

$\dfrac{a}{32}-15=1.5,\ \dfrac{a}{32}=16.5$

$\therefore\ a=528$

유형편

15 표본평균이 500, 모표준편차가 20, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$500-1.96\times\frac{20}{\sqrt{400}}\le m\le 500+1.96\times\frac{20}{\sqrt{400}}$

$\therefore$ $498.04\le m\le 501.96$

16 표본평균이 1000, 모표준편차가 16, 표본의 크기가 16이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$1000-2.58\times\frac{16}{\sqrt{16}}\le m\le 1000+2.58\times\frac{16}{\sqrt{16}}$

$\therefore$ $989.68\le m\le 1010.32$

17 표본평균이 50, 표본의 크기가 400이고 표본의 크기 400은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 15를 사용하여 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하면

$50-1.96\times\frac{15}{\sqrt{400}}\le m\le 50+1.96\times\frac{15}{\sqrt{400}}$

$\therefore$ $48.53\le m\le 51.47$

따라서 신뢰구간에 속하는 자연수는 49, 50, 51의 3개이다.

18 표본평균이 55, 표본의 크기가 100이고 표본의 크기 100은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 10을 사용하여 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하면

$55-2.58\times\frac{10}{\sqrt{100}}\le m\le 55+2.58\times\frac{10}{\sqrt{100}}$

$\therefore$ $52.42\le m\le 57.58$

19 표본평균이 501, 모표준편차가 4이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$501-2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le m\le 501+2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}$

이때 $499.71\le m\le 502.29$이므로

$501-2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}=499.71$, $501+2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}=502.29$

$2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}=1.29$, $\sqrt{n}=8$ $\qquad\therefore$ $n=64$

20 표본의 크기 64는 충분히 크므로 모평균 m에 대한 신뢰구간을 구할 때 모표준편차 대신 표본표준편차 1을 사용할 수 있다.

표본평균이 5이고 $\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$5-k\times\frac{1}{\sqrt{64}}\le m\le 5+k\times\frac{1}{\sqrt{64}}$

$5-\frac{k}{8}\le m\le 5+\frac{k}{8}$

이때 $4.7\le m\le 5.3$이므로

$5-\frac{k}{8}=4.7$, $5+\frac{k}{8}=5.3$

$\frac{k}{8}=0.3$ $\qquad\therefore$ $k=2.4$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.4)=0.49$이므로

$\mathrm{P}(-2.4\le Z\le 2.4)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2.4)$

$=2\times 0.49=0.98$

따라서 $\frac{\alpha}{100}=0.98$이므로 $\alpha=98$

21 모표준편차가 15, 표본의 크기가 100이므로 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.58\times\frac{15}{\sqrt{100}}=7.74$

22 모표준편차가 σ이고 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 95 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$2\times 2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=l$ $\qquad\therefore$ $l=\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서 표본의 크기가 $4n$일 때, 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.6\times\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}=\frac{2.6\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2.6}{4}\times\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}=0.65l$

23 모표준편차가 4이고, 신뢰도 95 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이가 0.98이므로

$2\times 1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}=0.98$, $\sqrt{n}=16$

$\therefore$ $n=256$

24 모표준편차가 2이고, 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이가 2 이하가 되려면

$2\times 2.6\times\frac{2}{\sqrt{n}}\le 2$, $\sqrt{n}\ge 5.2$

$\therefore$ $n\ge 27.04$

따라서 n의 최솟값은 28이다.

25 $\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때, 모표준편차가 4, 표본의 크기가 16, 신뢰구간의 길이가 4이므로

$2\times k\times\frac{4}{\sqrt{16}}=4$ $\qquad\therefore$ $k=2$

또 표본의 크기를 n이라 하고 같은 신뢰도로 모평균을 추정할 때, 신뢰구간의 길이가 1이 되려면

$2\times 2\times\frac{4}{\sqrt{n}}=1$, $\sqrt{n}=16$

$\therefore$ $n=256$

26 $P(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 121, 신뢰구간의 길이가 2이므로

$2\times k\times\frac{5}{\sqrt{121}}=2$ $\quad\therefore k=2.2$

즉, $P(-2.2\le Z\le 2.2)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$\alpha=100P(-2.2\le Z\le 2.2)$

$=200P(0\le Z\le 2.2)$

$=200\times 0.49=98$

27 표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 30, 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 99 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$\bar{x}-2.6\times\frac{30}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+2.6\times\frac{30}{\sqrt{n}}$

$-\frac{78}{\sqrt{n}}\le m-\bar{x}\le\frac{78}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\bar{x}|\le\frac{78}{\sqrt{n}}$

모평균 m과 표본평균 $\bar{x}$의 차가 10 이하가 되려면

$\frac{78}{\sqrt{n}}\le 10$, $\sqrt{n}\ge 7.8$

$\therefore n\ge 60.84$

따라서 n의 최솟값은 61이다.

28 표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$\bar{x}-2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\bar{x}\le\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\bar{x}|\le\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$

모평균 m과 표본평균 $\bar{x}$의 차가 $\frac{1}{2}\sigma$ 이하가 되려면

$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\le\frac{\sigma}{2}$, $\sqrt{n}\ge 4$

$\therefore n\ge 16$

따라서 n의 최솟값은 16이다.

29 신뢰도 96 %로 모평균을 추정하므로

$P(0\le Z\le 2.1)=0.48$에서

$P(-2.1\le Z\le 2.1)=2P(0\le Z\le 2.1)$

$=2\times 0.48$

$=0.96$

표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 6, 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 96 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$\bar{x}-2.1\times\frac{6}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+2.1\times\frac{6}{\sqrt{n}}$

$-\frac{12.6}{\sqrt{n}}\le m-\bar{x}\le\frac{12.6}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\bar{x}|\le\frac{12.6}{\sqrt{n}}$

모평균 m과 표본평균 $\bar{x}$의 차가 3 이하가 되려면

$\frac{12.6}{\sqrt{n}}\le 3$, $\sqrt{n}\ge 4.2$

$\therefore n\ge 17.64$

따라서 n의 최솟값은 18이다.

30 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

ㄱ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값은 작아진다.

즉, 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

ㄴ. 신뢰도를 높이면 k의 값이 커지고 표본의 크기를 작게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값은 커진다.

즉, 신뢰구간의 길이는 길어진다.

ㄷ. 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지고 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값은 작아진다.

즉, 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

31 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (단, k는 상수) …… ㉠

㉠에 n 대신 $\frac{1}{9}n$을 대입하면 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{\frac{1}{9}n}}=3\times 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서 표본의 크기가 $\frac{1}{9}$배가 되면 신뢰구간의 길이는 3배가 되므로

$a=3$

유형편

Memo