Solution

Lecture Book

Ⅰ 함수의 극한과 연속

Ⅱ 다항함수의 미분법

Ⅲ 다항함수의 적분법

Work Book

Ⅰ 함수의 극한과 연속

Ⅱ 다항함수의 미분법

Ⅲ 다항함수의 적분법

빠른 정답 찾기 Lecture Book

01 함수의 극한

7쪽 Lecture 01 01 3 02 2 03 1 04 $\sqrt{5}$
05 0 06 2 07 ∞ 08 $-\infty$ 09 $-\infty$ 10 ∞
11 -2 12 -1 13 2 14 -1 15 존재하지 않는다.
16 1 17 1 18 1 19 존재하지 않는다. 20 0

8쪽 유형 Q+Q 01 2 02 ④ 03 ㄴ, ㄷ 04 ③
05 1 06 ②

10쪽 Lecture 02 01 -22 02 13 03 17 04 -1
05 -20 06 -7 07 12 08 6 09 ∞ 10 0
11 2 12 ∞ 13 ∞ 14 $-\frac{1}{2}$ 15 $a=-6$, $b=-4$
16 $a=9$, $b=3$ 17 6

11쪽 유형 Q+Q 01 -2 02 ④ 03 ② 04 $\frac{1}{3}$
05 ⑤ 06 4 07 3 08 ④ 09 ⑤ 10 ㄱ, ㄴ
11 ③ 12 -12 13 11 14 9 15 2 16 $\frac{2}{3}$
17 ④ 18 ④ 19 2

14쪽 중단원 마무리 01 ② 02 ③ 03 ③ 04 ②
05 1 06 3 07 $-\frac{3}{5}$ 08 ③ 09 ① 10 8
11 48 12 ③ 13 5 14 -5 15 ③ 16 ⑤
17 ②

02 함수의 연속

19쪽 Lecture 03 01 ㄷ 02 ㄴ 03 ㄱ 04 연속
05 연속 06 불연속 07 불연속 08 $(-\infty, \infty)$
09 $(-\infty, -2)$, $(-2, \infty)$ 10 $(-\infty, 3]$
11 $(-\infty, \infty)$ 12 $(-\infty, 5)$, $(5, \infty)$ 13 $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$
14 $x\neq0$인 모든 실수 x에서 연속이다. 15 모든 실수 x에서 연속이다.
16 $x\neq n$ (n은 정수)인 모든 실수 x에서 연속이다.

20쪽 유형 Q+Q 01 ② 02 ① 03 ⑤ 04 ㄴ, ㄷ
05 ⑤ 06 ㄱ, ㄴ 07 31 08 ③ 09 ⑤ 10 -6
11 14 12 ①

23쪽 Lecture 04 01 $(-\infty, \infty)$
02 $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$
03 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$ (3) $(-\infty, -3)$, $(-3, 2)$, $(2, \infty)$
(4) $(-\infty, 9)$, $(9, \infty)$
04 최댓값: $-\frac{1}{3}$, 최솟값: -2 05 최댓값: 3, 최솟값: 2
06 풀이 21쪽 07 풀이 21쪽

24쪽 유형 Q+Q 01 ④ 02 ④ 03 -5 04 ②
05 ③ 06 ③ 07 2 08 ⑤

26쪽 중단원 마무리 01 ③ 02 2 03 ① 04 14
05 ② 06 ⑤ 07 ③ 08 $2\sqrt{3}$ 09 ③ 10 8
11 ① 12 -4 13 3개 14 ④ 15 ③ 16 ①

03 미분계수와 도함수

32쪽 Lecture 05 01 -1 02 6 03 $-6+3\Delta x$
04 7 05 2 06 12 07 5
08 연속이지만 미분가능하지 않다. 09 연속이고 미분가능하다.

33쪽 유형 Q+Q 01 ③ 02 2 03 ④ 04 2
05 ③ 06 ⑤ 07 -1 08 12 09 ② 10 ①
11 6 12 ③ 13 2 14 ⑤ 15 ④

36쪽 Lecture 06 01 $f'(x)=0$ 02 $f'(x)=6x$
03 $y'=10x^9$ 04 $y'=10x+6$ 05 $y'=-3x^2+4x$
06 $y'=5x^4-\frac{1}{2}x+1$ 07 -4 08 17 09 $y'=3x^2-6x-28$
10 $y'=18x^2-26x-9$ 11 $y'=20(5x-1)^3$

37쪽 유형 Q+Q 01 ⑤ 02 50 03 ① 04 2
05 ③ 06 8 07 ① 08 ④ 09 -1 10 3
11 ① 12 ③ 13 120 14 -5 15 ② 16 ①
17 25

40쪽 중단원 마무리 01 ③ 02 ① 03 18 04 ⑤
05 ② 06 ④ 07 3 08 1 09 14 10 25
11 ④ 12 19 13 1 14 7 15 ⑤ 16 -12
17 ② 18 ①

04 도함수의 활용 (1)

44쪽 **Lecture 07** **01** $y=5x+3$ **02** $y=-4x-1$

03 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$ **04** $f(3)=0,\ f'(3)=6$ **05** $y=4x+2$

06 $y=-9x-20,\ y=-9x+12$ **07** $y=3x-4,\ y=-5x+4$

08 $y=14x+16$

45쪽 **유형 Q+Q** **01** ② **02** 3 **03** ④ **04** $(4,\ 33)$

05 8 **06** -5 **07** ④ **08** ⑤ **09** ① **10** $8\sqrt{2}$

11 ⑤ **12** ② **13** -20 **14** ④ **15** $\frac{7}{2}$ **16** ④

17 ② **18** ③ **19** ② **20** 6 **21** ①

49쪽 **Lecture 08** **01** 3 **02** $-\frac{1}{3}$ **03** 0 **04** 2

05 1 **06** $\sqrt{13}$ **07** $(a,\ x),\ 0,\ f(a)$

50쪽 **유형 Q+Q** **01** ① **02** ⑤ **03** 2 **04** ②

05 4

51쪽 **중단원 마무리** **01** ③ **02** 28 **03** $y=-x-3$

04 20 **05** -3 **06** ① **07** ② **08** ② **09** ④

10 ⑤ **11** $\frac{125}{2}$ **12** ④ **13** 3 **14** 9 **15** ④

16 ④ **17** 97 **18** ④

05 도함수의 활용 (2)

55쪽 **Lecture 09** **01** 감소 **02** 증가 **03** 감소

04 구간 $[2,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty,\ 2]$에서 감소한다.

05 구간 $(-\infty,\ -1],\ [1,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1,\ 1]$에서 감소한다.

06 구간 $\left[-\frac{1}{3},\ 2\right]$에서 증가하고, 구간 $\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right],\ [2,\ \infty)$에서 감소한다.

07 구간 $[-\sqrt{2},\ 0],\ [\sqrt{2},\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty,\ -\sqrt{2}],\ [0,\ \sqrt{2}]$에서 감소한다.

08 구간 $[-3,\ 1]$에서 증가하고, 구간 $(-\infty,\ -3],\ [1,\ \infty)$에서 감소한다.

09 $-3\le a\le 3$ **10** (1) $c,\ e$ (2) $a,\ d$

11 극댓값: 1, 극솟값: $-1,\ \frac{11}{16}$ **12** 5

13 극댓값: 4, 극솟값: -23 **14** 극댓값: $\frac{81}{2}$, 극솟값: 27

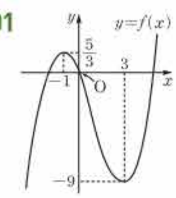
15 극댓값: 0, 극솟값: $-32,\ -5$ **16** 극댓값: 17, 극솟값: 1

56쪽 **유형 Q+Q** **01** ② **02** -33 **03** ① **04** ②

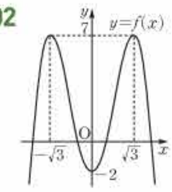
05 -10 **06** ③ **07** ⑤ **08** $-\frac{11}{2}$ **09** $-\frac{17}{3}$ **10** ③

11 ④ **12** ③ **13** ② **14** ⑤ **15** ④ **16** ③

59쪽 **Lecture 10** **01**



02



03 $a<-6$ 또는 $a>6$ **04** 최댓값: 6, 최솟값: -14

05 최댓값: 32, 최솟값: -11

06 (1) $0<x<\frac{5}{2}$ (2) $4x^3-26x^2+40x$ (3) 18

60쪽 **유형 Q+Q** **01** ④ **02** ③ **03** ② **04** ①

05 ⑤ **06** $\frac{28}{3}<a<12$ **07** ⑤ **08** ④ **09** $\frac{25}{2}$

10 ① **11** ③ **12** ⑤ **13** $48\sqrt{6}$ **14** ④

63쪽 **중단원 마무리** **01** ③ **02** -2 **03** ① **04** $a\ge 1$

05 ② **06** ② **07** $6\sqrt{3}$ **08** $3\sqrt{10}$ **09** 5 **10** ⑤

11 $-\frac{64}{9}$ **12** 1 **13** ③ **14** $-\frac{19}{2}$ **15** 12 **16** ④

17 ⑤ **18** ①

06 도함수의 활용 (3)

66쪽 **Lecture 11** **01** 3 **02** 3 **03** 2

04 (1) $-2<k<2$ (2) $-2,\ 2$ (3) $k<-2$ 또는 $k>2$

05 2, 2, 0 **06** 풀이 60쪽 **07** $k>\frac{1}{4}$

67쪽 **유형 Q+Q** **01** ① **02** 17 **03** ④ **04** ②

05 25 **06** ③ **07** $-28<k<80$ **08** 5

09 $-1<a<1$ **10** 2 **11** ② **12** 9 **13** $k\le -7$

14 -59

69쪽 **Lecture 12** **01** (1) 1 (2) -2 (3) $\frac{4}{3}$ **02** 4초

03 b **04** 32 **05** 64π

06 (1) $3(3+t)^2\ \mathrm{cm^3/s}$ (2) $108\ \mathrm{cm^3/s}$

70쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** 13 **03** 4 **04** $3<t<5$

05 126 m **06** ② **07** ④ **08** 25 m/s **09** ㄴ, ㄹ **10** ②

11 $200\pi\ \mathrm{cm^3/s}$ **12** 3 m/s

72쪽 **중단원 마무리** **01** ④ **02** 4 **03** ① **04** 4
05 ② **06** ① **07** 198 **08** ③ **09** 34 **10** 81
11 $m<0$ **12** 36 **13** ① **14** ⑤ **15** -60 m/s
16 ㄴ, ㄷ, ㅁ **17** $\frac{5}{4}\pi$ cm^3/s **18** 21 **19** 32

07 부정적분

78쪽 **Lecture 13** **01** $f(x)=6x^2-20x+1$ **02** x^2-9x
03 x^2-9x+C **04** $\frac{1}{7}x^7+C$ **05** $5x^2+4x+C$
06 $\frac{1}{4}x^4-3x^2+3x+C$ **07** $\frac{4}{3}x^3-2x^2+x+C$ **08** $\frac{2}{3}x^3+2x+C$
09 $\frac{1}{2}x^2-2x+C$ **10** $f(x)=2x^2-9x+3$
11 $f(x)=-x^3+4x^2+5x-7$

79쪽 **유형** **01** 8 **02** 7 **03** 6 **04** ③
05 -4 **06** ⑤ **07** ④ **08** $-\frac{11}{6}$ **09** 6 **10** ①
11 $f(x)=-8x^3+3x^2-6$ **12** ④ **13** ⑤ **14** -2
15 1 **16** -27 **17** ③ **18** -22 **19** ② **20** ③
21 ① **22** 5

83쪽 **중단원 마무리** **01** 7 **02** ④ **03** ① **04** 4
05 ② **06** -15 **07** 3 **08** -1 **09** ④ **10** ③
11 ② **12** ⑤

08 정적분

87쪽 **Lecture 14** **01** $-\frac{16}{3}$ **02** 36 **03** -28 **04** -9
05 -22 **06** 32 **07** 0 **08** -4 **09** 4 **10** $\frac{19}{3}$
11 45 **12** -66 **13** 24 **14** -4 **15** 36 **16** $-\frac{3}{2}$
17 $\frac{5}{2}$ **18** $\frac{29}{6}$ **19** 60 **20** -6 **21** 56

88쪽 **유형** **01** ② **02** $f(x)=-x^3+3x^2+x-1$
03 ③ **04** -4 **05** 3 **06** ④ **07** -4 **08** 4
09 ⑤ **10** 3 **11** ④ **12** 30 **13** 10 **14** ①

90쪽 **Lecture 15** **01** x^2-7x+2 **02** x^3+2x^2+6x-5
03 15 **04** $-2x+8$ **05** $f(x)=4x-9$
06 $f(x)=3x^2+10x-1$ **07** $f(x)=2x-3$, $a=3$
08 $f(x)=-6x^2+4x+7$, $a=2$ **09** 30 **10** 3 **11** 13
12 -4

91쪽 **유형** **01** ① **02** 44 **03** 10 **04** ④
05 16 **06** 4 **07** ① **08** $\frac{11}{6}$ **09** ② **10** -1
11 80 **12** ③

93쪽 **중단원 마무리** **01** ③ **02** 4 **03** ④ **04** ②
05 ① **06** $\frac{34}{3}$ **07** ② **08** 7 **09** ① **10** -3
11 ④ **12** ① **13** ② **14** 3 **15** $-1<x<4$
16 110 **17** ⑤

09 정적분의 활용

96쪽 **Lecture 16** **01** $\frac{125}{6}$ **02** $\frac{1}{2}$ **03** $\frac{4}{3}$ **04** 3
05 $\frac{79}{6}$ **06** 13 **07** $\frac{9}{2}$ **08** $\frac{125}{6}$ **09** 8 **10** $\frac{8}{3}$
11 $\frac{64}{3}$ **12** $\frac{4}{3}$

97쪽 **유형** **01** ② **02** 4 **03** ⑤ **04** $\frac{10}{3}$
05 $\frac{27}{4}$ **06** ④ **07** 9 **08** ② **09** ③ **10** $\frac{3}{2}$
11 32 **12** ① **13** ④ **14** $\frac{2}{3}$ **15** ② **16** $\frac{22}{3}$
17 20 **18** ②

100쪽 **Lecture 17** **01** (1) 10 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 2 **02** (1) 4 (2) 24
03 (1) 6 (2) 18 **04** (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$

101쪽 **유형** **01** 10 **02** 8 **03** ③ **04** 3
05 ② **06** ㄱ, ㄴ

102쪽 **중단원 마무리** **01** -3 **02** ④ **03** ② **04** 3
05 14 **06** ② **07** $\frac{4}{3}$ **08** 17 **09** ④ **10** $\frac{3}{2}$
11 $\frac{1}{3}$ **12** ③ **13** -2 **14** ① **15** 45 m **16** ④
17 ⑤

빠른 정답 찾기 Work Book

01 함수의 극한

W 2쪽 01 3 02 ② 03 ⑤ 04 ④ 05 2
06 ② 07 ② 08 ④ 09 0 10 3 11 ②
12 -15 13 $-\frac{1}{5}$ 14 ⑤ 15 ③ 16 -1 17 ②
18 $-\frac{1}{4}$ 19 ④ 20 ① 21 ② 22 ① 23 3
24 1 25 ③ 26 $-\frac{1}{4}$ 27 33 28 -4 29 ②
30 ④ 31 24 32 ① 33 ② 34 16 35 ①
36 6 37 ④ 38 3 39 2 40 ④ 41 8

W 9쪽 **도전!** 수능 기출
01 ① 02 ④ 03 ③ 04 ②

02 함수의 연속

W 10쪽 01 ④ 02 ③ 03 5 04 ⑤ 05 ③
06 ㄴ, ㄷ 07 2 08 ① 09 8 10 ② 11 ③
12 18 13 4 14 ④ 15 ① 16 ⑤ 17 5
18 -12 19 ④ 20 17 21 2 22 ③ 23 10
24 ① 25 ⑤ 26 5개 27 ②

W 15쪽 **도전!** 수능 기출
01 ⑤ 02 ③ 03 ④ 04 56

03 미분계수와 도함수

W 16쪽 01 ④ 02 -3 03 ③ 04 4 05 ⑤
06 ④ 07 ② 08 3 09 ② 10 ③ 11 -24
12 ④ 13 ② 14 12 15 ④ 16 ③ 17 ③
18 ⑤ 19 ④ 20 -3 21 ② 22 ④ 23 ③
24 ② 25 ④ 26 -84 27 64 28 ② 29 ④
30 ① 31 $-\frac{1}{4}$ 32 ④ 33 -15 34 ④ 35 ⑤
36 -11 37 21 38 ③ 39 -12 40 ② 41 ③
42 $\frac{3}{4}$

W 23쪽 **도전!** 수능 기출
01 ① 02 ④ 03 ② 04 ②

04 도함수의 활용 (1)

W 24쪽 01 ① 02 ② 03 -21 04 ⑤ 05 -4
06 ④ 07 $y=12x-21$ 08 ① 09 ③ 10 ③
11 $\frac{7}{2}$ 12 -17 13 ③ 14 $\frac{1}{8}$ 15 ④ 16 ③
17 ② 18 11 19 7 20 ① 21 ④ 22 $\frac{17}{9}$
23 2 24 ④ 25 ④ 26 ② 27 $\frac{32}{5}$ 28 4
29 ① 30 31 31 ③ 32 24 33 ③ 34 $\frac{5}{8}$
35 ④ 36 ④ 37 ② 38 ① 39 ⑤ 40 2
41 ④

W 31쪽 **도전!** 수능 기출
01 ⑤ 02 ③ 03 32 04 ③

05 도함수의 활용 (2)

W 32쪽 01 ③ 02 -6 03 ⑤ 04 ⑤ 05 6
06 ③ 07 ③ 08 ① 09 3 10 ② 11 7
12 ④ 13 -5 14 ③ 15 ⑤ 16 -7 17 ④
18 ④ 19 9 20 ③ 21 -1 22 ④ 23 ③
24 ② 25 ③ 26 ④ 27 2 28 $-3\le a\le 0$
29 ④ 30 ① 31 $\frac{3}{2}$ 32 ⑤ 33 ③ 34 ③
35 ④ 36 1 37 ② 38 ③ 39 -11 40 2
41 $\frac{7}{3}$ 42 ② 43 $\frac{81}{16}$ 44 ③ 45 ④ 46 $\sqrt{5}-1$

W 40쪽 **도전!** 수능 기출
01 10 02 ③ 03 ③ 04 11

06 도함수의 활용 (3)

W 41쪽

	01 ③	02 $\frac{11}{4}$	03 ③	04 55	05 ⑤
06 $0<k<2$		07 ②	08 ①	09 $\frac{7}{3}$	10 ②
11 ③	12 10	13 $a<1$ 또는 $a>\frac{5}{4}$		14 ②	15 ④
16 -16	17 ④	18 ⑤	19 $k\le-28$		20 ②
21 7	22 ③	23 41	24 8	25 ④	26 ①
27 $\frac{70}{3}$	28 ①	29 ②	30 2	31 ②	32 ③
33 $\frac{8}{3}$	34 ②	35 ④	36 ③	37 $\frac{\sqrt{3}}{2}$	38 ①
39 $500\pi\ \mathrm{cm}^3$					

W 48쪽 **도전!** 수능 기출

01 ⑤ 02 ⑤ 03 ⑤ 04 ③

07 부정적분

W 49쪽

	01 ①	02 26	03 ②	04 ①	05 9
06 ④	07 5060	08 ②	09 18	10 ①	11 ④
12 $\frac{1}{2}$	13 -18	14 13	15 ②	16 113	17 ④
18 $-\frac{1}{3}$	19 5	20 ③	21 22	22 ①	23 -14
24 ⑤	25 20	26 ②	27 10	28 ⑤	29 ④
30 -11	31 -21	32 ⑤	33 ③	34 9	35 -15
36 ④					

W 55쪽 **도전!** 수능 기출

01 ⑤ 02 ① 03 ②

08 정적분

W 56쪽

	01 ①	02 ③	03 -4	04 29	05 ②
06 2	07 19	08 $\frac{52}{3}$	09 ②	10 ④	11 ①
12 60	13 12	14 54	15 ⑤	16 ②	17 650
18 160	19 ①	20 15	21 42	22 ①	23 ④
24 -16	25 8	26 ⑤	27 18	28 ③	29 83
30 ④	31 ⑤	32 2	33 ③	34 16	35 $-\frac{4}{3}$
36 ②	37 -4	38 ④	39 ②	40 7	41 ①
42 ⑤					

W 63쪽 **도전!** 수능 기출

01 ⑤ 02 7 03 8 04 35

09 정적분의 활용

W 64쪽

	01 $\frac{43}{4}$	02 ⑤	03 ③	04 108	05 ②
06 ④	07 3	08 36	09 $\frac{1}{2}$	10 ⑤	11 $\frac{64}{3}$
12 ④	13 $-\frac{3}{2}$	14 ⑤	15 $\frac{2}{3}$	16 ③	17 2
18 ④	19 ⑤	20 $\frac{1}{2}$	21 ②	22 $2\sqrt{2}$	23 $\frac{1}{2}$
24 24	25 ④	26 13	27 8	28 7	29 33
30 ①	31 22	32 12	33 ②	34 ③	35 40
36 $\frac{9}{2}$	37 ⑤	38 ④	39 4	40 5	41 ②

W 71쪽 **도전!** 수능 기출

01 40 02 ② 03 ② 04 ①

Lecture Book

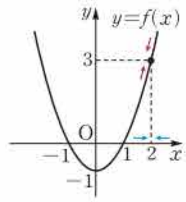
I. 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한

Lecture 01 함수의 극한

7쪽

01 $f(x)=x^2-1$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

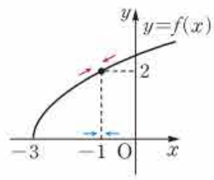


따라서 x의 값이 2가 아니면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to2}(x^2-1)=3$$

답 3

02 $f(x)=\sqrt{2x+6}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 -1이 아니면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-1}\sqrt{2x+6}=2$$

답 2

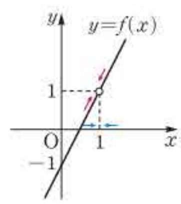
$y=\sqrt{2x+6}=\sqrt{2(x+3)}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

03 $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}=\dfrac{(2x-1)(x-1)}{x-1}$

이라 하면 $x\neq1$일 때

$f(x)=2x-1$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



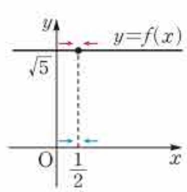
따라서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-3x+1}{x-1}=1$$

답 1

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되지 않을 때도 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재할 수 있다.

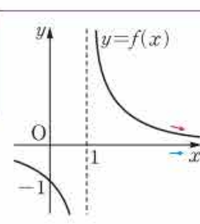
04 $f(x)=\sqrt{5}$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 $\dfrac{1}{2}$이 아니면서 $\dfrac{1}{2}$에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\sqrt{5}$이므로 $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{5}=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

05 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

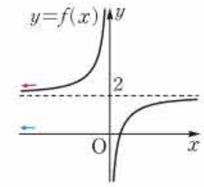


따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$

답 0

$y=\dfrac{1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

06 $f(x)=2-\dfrac{1}{x}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

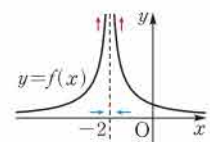


따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2$$

답 2

07 $f(x)=\dfrac{1}{|x+2|}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$y=\dfrac{1}{|x+2|}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{|x|}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

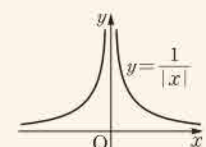
따라서 x의 값이 -2가 아니면서 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{1}{|x+2|}=\infty$$

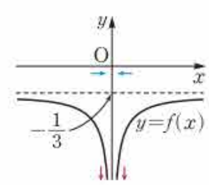
답 ∞

쌤한마디

오른쪽 그림과 같은 함수 $y=\dfrac{1}{|x|}$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 $y=\dfrac{1}{|x+2|}$, $y=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{|x|}$과 같은 함수의 그래프를 그릴 수 있다.



08 $f(x)=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{|x|}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

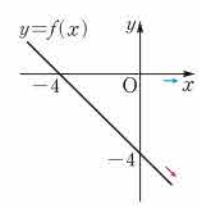


따라서 x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{|x|}\right)=-\infty$$

답 $-\infty$

09 $f(x)=-x-4$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

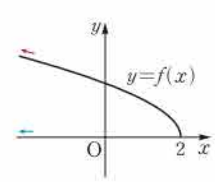


따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to\infty}(-x-4)=-\infty$$

답 $-\infty$

10 $f(x)=\sqrt{2-x}$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

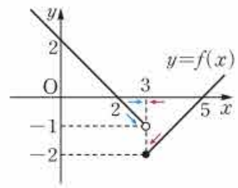


따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=\infty$$

답 ∞

11 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 3보다 크면서 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -2에 한없이 가까워진다.



$\therefore \lim_{x\to3+} f(x)=-2$ 　　답 -2

12 **11**의 그래프에서 x의 값이 3보다 작으면서 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to3-} f(x)=-1$ 　　답 -1

13 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to2+} f(x)=2$ 　　답 2

14 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to2-} f(x)=-1$ 　　답 -1

15 $\lim_{x\to2+} f(x)\neq\lim_{x\to2-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to2} f(x)$는 존재하지 않는다. 　　답 존재하지 않는다.

16 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1보다 크면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-1+} f(x)=1$ 　　답 1

17 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1보다 작으면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-1-} f(x)=1$ 　　답 1

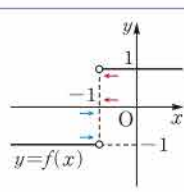
18 $\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to-1} f(x)=1$ 　　답 1

19 $f(x)=\dfrac{|x+1|}{x+1}$이라 하면

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x>-1)\\ -1 & (x<-1)\end{cases}$$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to-1+} f(x)=1$,

$\lim_{x\to-1-} f(x)=-1$

따라서 $\lim_{x\to-1+} f(x)\neq\lim_{x\to-1-} f(x)$

이므로 $\lim_{x\to-1} f(x)$, 즉 $\lim_{x\to-1}\dfrac{|x+1|}{x+1}$은 존재하지 않는다.

답 존재하지 않는다.

QBOX

$|x-1|$

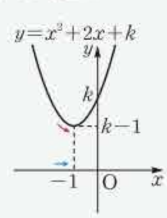
$=\begin{cases}x-1 & (x\geq1)\\ -(x-1) & (x<1)\end{cases}$

우극한과 좌극한이 모두 존재하더라도 그 값이 같지 않으면 극한값은 존재하지 않는다.

$|x+1|$

$=\begin{cases}x+1 & (x\geq-1)\\ -(x+1) & (x<-1)\end{cases}$

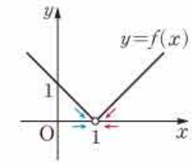
$f(x)$는 $x=-1$에서 정의되지 않는다.



20 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}=\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|}$이라 하면

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & (x>1)\\ -x+1 & (x<1)\end{cases}$$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



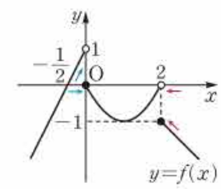
$\lim_{x\to1+} f(x)=0$,

$\lim_{x\to1-} f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}=\lim_{x\to1} f(x)=0$ 　　답 0

표준+발전 유형 Q+Q 　　8쪽

01 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to0-} f(x)-\lim_{x\to2+} f(x)$

$=1-(-1)=2$

답 2

02 ④ $\lim_{x\to1+} f(x)=1$ 　　답 ④

03 ㄱ. $\lim_{x\to2+} f(x)=0$, $\lim_{x\to2-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to2+} f(x)\neq\lim_{x\to2-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to2} f(x)$가 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to3+} f(x)=\lim_{x\to3-} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to3} f(x)=-1$

ㄷ. $0<a<2$인 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)$

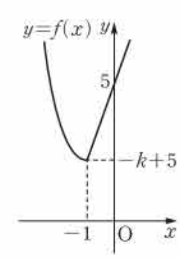
이므로 $\lim_{x\to a} f(x)$가 항상 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 　　답 ㄴ, ㄷ

04 $\lim_{x\to-1} f(x)$가 존재하려면

$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)$

이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



이때

$\lim_{x\to-1+} f(x)=-k+5$,

$\lim_{x\to-1-} f(x)=k-1$

이므로

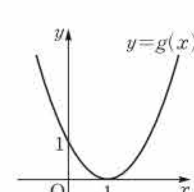
$-k+5=k-1$, 　$2k=6$

$\therefore k=3$ 　　답 ③

05 $f(x)=t$로 놓으면

$x\to-1+$일 때 $t\to1-$이고

$y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to-1+} g(f(x))=\lim_{t\to1-} g(t)$

$=0$

또 $x \longrightarrow 1-$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{x \to 1-} g(f(x)) = \lim_{t \to 0+} g(t) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to -1+} g(f(x)) + \lim_{x \to 1-} g(f(x)) = 1$$

답 1

쌤한마디

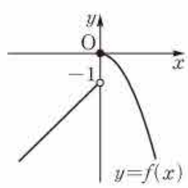
두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a+} g(f(x))$의 값은 $f(x)=t$로 놓고 다음을 이용하여 구한다.

① $x \longrightarrow a+$일 때 $t \longrightarrow b+$이면
$$\lim_{x \to a+} g(f(x)) = \lim_{t \to b+} g(t)$$

② $x \longrightarrow a+$일 때 $t \longrightarrow b-$이면
$$\lim_{x \to a+} g(f(x)) = \lim_{t \to b-} g(t)$$

③ $x \longrightarrow a+$일 때 $t=b$이면
$$\lim_{x \to a+} g(f(x)) = g(b)$$

06 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow 0-$이므로

$$\lim_{x \to 0+} f(f(x)) = \lim_{t \to 0-} f(t) = -1$$

답 ②

Lecture 02 함수의 극한에 대한 성질

10쪽

01 $\lim_{x \to 1} \{f(x) - 4g(x)\} = \lim_{x \to 1} f(x) - 4\lim_{x \to 1} g(x)$
$= -2 - 4 \cdot 5$
$= -22$

답 -22

02 $\lim_{x \to 1} \{6f(x) + 5g(x)\} = 6\lim_{x \to 1} f(x) + 5\lim_{x \to 1} g(x)$
$= 6 \cdot (-2) + 5 \cdot 5$
$= 13$

답 13

03 $\lim_{x \to 1} \{-f(x)g(x) + 7\}$
$= -\lim_{x \to 1} f(x) \cdot \lim_{x \to 1} g(x) + \lim_{x \to 1} 7$
$= -(-2) \cdot 5 + 7 = 17$

답 17

04 $\lim_{x \to 1} \dfrac{4f(x)}{g(x)+3} = \dfrac{4\lim_{x \to 1} f(x)}{\lim_{x \to 1} g(x) + \lim_{x \to 1} 3}$
$= \dfrac{4 \cdot (-2)}{5+3} = -1$

답 -1

05 $\lim_{x \to 3} (x+2)(x^2-4x-1)$
$= \lim_{x \to 3} (x+2) \cdot \lim_{x \to 3} (x^2-4x-1)$
$= (3+2) \cdot (3^2 - 4 \cdot 3 - 1) = -20$

답 -20

함수 $f(x)$가 다항함수이면
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

06 $\lim_{x \to -2} \dfrac{2x^2+x+1}{x+1} = \dfrac{\lim_{x \to -2} (2x^2+x+1)}{\lim_{x \to -2} (x+1)}$
$= \dfrac{2 \cdot (-2)^2 + (-2) + 1}{-2+1}$
$= -7$

답 -7

07 $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$
$= \lim_{x \to 2} (x^2+2x+4)$
$= 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12$

답 12

08 $\lim_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+10}-3}$
$= \lim_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(\sqrt{x+10}+3)}{(\sqrt{x+10}-3)(\sqrt{x+10}+3)}$
$= \lim_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(\sqrt{x+10}+3)}{x+1}$
$= \lim_{x \to -1} (\sqrt{x+10}+3)$
$= 3+3 = 6$

답 6

분모의 최고차항 x로 분자, 분모를 각각 나눈다.

09 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+6}{9x+1} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{3x + \frac{6}{x}}{9 + \frac{1}{x}} = \infty$

답 ∞

10 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2-2x+5}{x^3-4x-1} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{1 - \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = 0$

답 0

분모의 최고차항은 $\sqrt{x^2}$, 즉 x이다.

11 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}+4} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} + \frac{4}{x}} = 2$

답 2

$\infty \times$(0이 아닌 상수) 꼴

12 $\lim_{x \to \infty} (x^3-4x^2-9x+2)$
$= \lim_{x \to \infty} x^3\left(1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{9}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right) = \infty$

답 ∞

13 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$
$= \lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}$
$= \lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = \infty$

답 ∞

14 $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}$
$= \lim_{x \to 0} \left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}\right\}$
$= -\dfrac{1}{2}$

답 $-\dfrac{1}{2}$

15 $x \longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x \to 1} (x^2+ax+5) = 0$이므로

$1+a+5=0 \qquad \therefore a=-6$

$a=-6$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-6x+5}{x-1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-5)}{x-1}$
$= \lim_{x \to 1} (x-5) = -4$

$\therefore b=-4$

답 $a=-6$, $b=-4$

16 $x \longrightarrow 0$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+a}-b)=0$이므로

$\sqrt{a}-b=0 \qquad \therefore b=\sqrt{a}$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})$$
$$=2\sqrt{a}$$

따라서 $2\sqrt{a}=6$이므로 $\qquad \sqrt{a}=3 \qquad \therefore a=9$

$a=9$를 ㉠에 대입하면

$b=3$ 답 $a=9$, $b=3$

17 모든 양의 실수 x에 대하여

$6x-2<f(x)<6x+3$이므로 각 변을 x로 나누면

$x>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$$\frac{6x-2}{x}<\frac{f(x)}{x}<\frac{6x+3}{x}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{6x-2}{x}=6$, $\lim_{x\to\infty}\frac{6x+3}{x}=6$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한에서 분자의 차수와 분모의 차수가 같으면 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=6$$ 답 6

표준+발전 유형 Q+Q

11쪽

01 $h(x)=3f(x)-g(x)$라 하면

$\lim_{x\to 2}h(x)=3$

$g(x)=3f(x)-h(x)$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{4f(x)-3g(x)}{-5f(x)+2g(x)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{4f(x)-3\{3f(x)-h(x)\}}{-5f(x)+2\{3f(x)-h(x)\}}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{-5f(x)+3h(x)}{f(x)-2h(x)}$$
$$=\frac{-5\cdot(-1)+3\cdot 3}{-1-2\cdot 3}=-2$$ 답 -2

02 $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+6f(x)}{7x-2f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+6\cdot\frac{f(x)}{x}}{7-2\cdot\frac{f(x)}{x}}$$
$$=\frac{0+6\cdot 2}{7-2\cdot 2}=4$$ 답 ④

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$를 이용할 수 있도록 분자, 분모를 각각 x로 나누어 식을 변형한다.

03 $\lim_{x\to 4+}[x]=4$, $\lim_{x\to 4-}[x]=3$이므로

$$\lim_{x\to 4+}\frac{[x]^2-x}{[x]}+\lim_{x\to 4-}\frac{[x]^2+[x]}{x}$$
$$=\frac{4^2-4}{4}+\frac{3^2+3}{4}=3+3=6$$ 답 ②

쌤한마디

함수 $y=[x]$ ($[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)에서 정수 n에 대하여

$n\le x<n+1$이면 $\qquad [x]=n$

이므로 $[x]$가 정수가 되는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 $[x]$의 값을 구하면

⋮ ⋮

$-2\le x<-1$일 때, $\quad [x]=-2$

$-1\le x<0$일 때, $\quad [x]=-1$

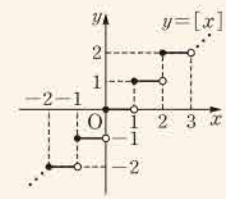
$0\le x<1$일 때, $\quad [x]=0$

$1\le x<2$일 때, $\quad [x]=1$

$2\le x<3$일 때, $\quad [x]=2$

⋮ ⋮

따라서 함수 $y=[x]$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- $x=n$ (n은 정수)일 때,

  $\lim_{x\to n+}[x]=n$,

  $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$

- 함수 $y=[x]$는

  $x=n$ (n은 정수)에서 극한값이 존재하지 않는다.

04 $\lim_{x\to 2+}[x]=2$이므로

$$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(a[x]^2-[x])$$
$$=a\cdot 2^2-2=4a-2$$

$\lim_{x\to 2-}[x]=1$이므로

$$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(a[x]^2-[x])$$
$$=a\cdot 1^2-1=a-1$$

$\lim_{x\to 2}f(x)$가 존재하려면 $\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2-}f(x)$이어야 하므로

$4a-2=a-1, \qquad 3a=1$

$\therefore a=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

05 $$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+4x+3}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+3)}$$
$$+\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x^2+8}-3)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x+1}+\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x+1}+\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}$$
$$=\frac{-6}{-2}+\frac{2}{3+3}=\frac{10}{3}$$ 답 ⑤

06 $$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^4-4}{(x^2-2)f(x)}=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(x^2+2)(x^2-2)}{(x^2-2)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2+2}{f(x)}$$
$$=\frac{4}{f(\sqrt{2})}$$

따라서 $\frac{4}{f(\sqrt{2})}=1$이므로 $\qquad f(\sqrt{2})=4$ 답 4

QBOX

07 $x=-t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{16x^2+1}-5x}{\sqrt{x^2-3x}-2x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{16t^2+1}+5t}{\sqrt{t^2+3t}+2t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{16+\frac{1}{t^2}}+5}{\sqrt{1+\frac{3}{t}}+2}$$

$$=\frac{4+5}{1+2}=3$$

답 3

$x \longrightarrow -\infty$일 때의 극한은 $x=-t$로 치환하여 계산한다.

다른 풀이 $x<0$이면 $\sqrt{x^2}=-x$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{16x^2+1}-5x}{\sqrt{x^2-3x}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{16+\frac{1}{x^2}}+5}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+2}$$

$$=\frac{4+5}{1+2}=3$$

08 $$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-x^2}{f(x)+6x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2-1}{\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}+6}$$

$$=\frac{3^2-1}{3\cdot0+6}=\frac{4}{3}$$

답 ④

09 $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

$$=\frac{4}{1+1}=2$$

답 ⑤

10 ㄱ. $x=-t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+6x+1}+x)$$

$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-6t+1}-t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-6t+1}-t)(\sqrt{t^2-6t+1}+t)}{\sqrt{t^2-6t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-6t+1}{\sqrt{t^2-6t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-6+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{6}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}$$

$$=\frac{-6}{1+1}=-3$$

ㄴ. $$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{x}$$

$\frac{0}{0}$ 꼴

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x(x+1)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

ㄷ. $$\lim_{x\to0}\frac{9}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+9}}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{9}{x}\cdot\frac{3-\sqrt{x+9}}{3\sqrt{x+9}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3(3-\sqrt{x+9})(3+\sqrt{x+9})}{x\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-3x}{x\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-3}{\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}$$

$$=\frac{-3}{3\cdot(3+3)}=-\frac{1}{6}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

11 $x \longrightarrow -2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(x^2+ax+b)=0$이므로

$4-2a+b=0$

$\therefore\ b=2a-4$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+2a-4}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+a-2)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}(x+a-2)$$

$$=a-4$$

따라서 $a-4=3$이므로 $a=7$

$a=7$을 ㉠에 대입하면 $b=10$

$\therefore\ a+b=17$

답 ③

12 $x \longrightarrow 3$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}(ax+b)=0$이므로

$3a+b=0$ $\quad\therefore\ b=-3a$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{3\sqrt{7+x^2}-4x}{ax-3a}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(3\sqrt{7+x^2}-4x)(3\sqrt{7+x^2}+4x)}{a(x-3)(3\sqrt{7+x^2}+4x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{63-7x^2}{a(x-3)(3\sqrt{7+x^2}+4x)}$$

$63-7x^2$
$=-7(x^2-9)$
$=-7(x+3)(x-3)$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-7(x+3)(x-3)}{a(x-3)(3\sqrt{7+x^2}+4x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-7(x+3)}{a(3\sqrt{7+x^2}+4x)}$$

$$=\frac{-7\cdot6}{a(12+12)}=-\frac{7}{4a}$$

따라서 $-\frac{7}{4a}=-\frac{7}{8}$이므로

$4a=8$ $\quad\therefore\ a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-6$

$\therefore\ ab=-12$

답 -12

13 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2-bx}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{ax^2-bx}-x)(\sqrt{ax^2-bx}+x)}{\sqrt{ax^2-bx}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(a-1)x^2-bx}{\sqrt{ax^2-bx}+x}$ ...... ㉠

㉠의 극한값이 존재하려면

$a-1=0$ $\quad\therefore a=1$

Q BOX: $a-1\neq0$이면 (분자의 차수) > (분모의 차수) 이므로 극한값이 존재하지 않는다.

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{-bx}{\sqrt{x^2-bx}+x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-b}{\sqrt{1-\frac{b}{x}}+1}$

$=\dfrac{-b}{1+1}=-\dfrac{b}{2}$

따라서 $-\dfrac{b}{2}=5$이므로 $\quad b=-10$

$\therefore a-b=11$

답 11

14 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+x}=2$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차식임을 알 수 있다.

Q BOX: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+x}$의 값이 2, 즉 0이 아닌 실수이므로
① $f(x)$와 x^2+x의 차수가 같다.
② $f(x)$와 x^2+x의 최고차항의 계수의 비는 2이다.
➡ $f(x)$는 x^2의 계수가 2인 이차식이다.

또 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^2-3x+2}=-7$에서 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(2x+a)$ (a는 상수)라 하면

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(2x+a)}{(x-1)(x-2)}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{2x+a}{x-2}$

$=-2-a$

즉 $-2-a=-7$이므로

$a=5$

따라서 $f(x)=(x-1)(2x+5)$이므로

$f(2)=1\cdot9=9$

답 9

쌤한마디

다항식 $P(x)$에 대하여 다음은 모두 같은 의미이다.
① $P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어진다.
② $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지가 0이다.
③ $P(a)=0$
④ $P(x)$가 $x-a$를 인수로 갖는다.

15 $\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{x+1}=-3$에서 $x\longrightarrow-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로

$f(-1)=0$

또 $\lim_{x\to2}\dfrac{x-2}{f(x)}=-\dfrac{1}{6}$에서 $x\longrightarrow2$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow$ 0이므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로

$f(2)=0$

$f(x)=(x+1)(x-2)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

Q BOX: $f(x)$는 삼차식이므로 $a\neq0$

$\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x-2)(ax+b)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(x-2)(ax+b)$

$=-3\cdot(-a+b)=3(a-b)$

이므로 $\quad 3(a-b)=-3$

$\therefore a-b=-1$ ...... ㉠

또

$\lim_{x\to2}\dfrac{x-2}{f(x)}=\lim_{x\to2}\dfrac{x-2}{(x+1)(x-2)(ax+b)}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{1}{(x+1)(ax+b)}$

$=\dfrac{1}{3(2a+b)}$

이므로 $\quad\dfrac{1}{3(2a+b)}=-\dfrac{1}{6}$

$\therefore 2a+b=-2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=0$

따라서 $f(x)=-x(x+1)(x-2)$이므로

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{-x(x+1)(x-2)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\{-(x+1)(x-2)\}$

$=-1\cdot(-2)$

$=2$

답 2

16 모든 실수 x에 대하여

$x^3+4x^2-1<f(x)<x^3+4x^2+5$

이므로 각 변에서 x^3을 빼면

$4x^2-1<f(x)-x^3<4x^2+5$

위의 부등식의 각 변을 $6x^2+2$로 나누면

Q BOX: $6x^2+2>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$\dfrac{4x^2-1}{6x^2+2}<\dfrac{f(x)-x^3}{6x^2+2}<\dfrac{4x^2+5}{6x^2+2}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-1}{6x^2+2}=\dfrac{2}{3}$, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5}{6x^2+2}=\dfrac{2}{3}$이므로

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{6x^2+2}=\dfrac{2}{3}$

답 $\dfrac{2}{3}$

17 모든 실수 x에 대하여

$2x+1<f(x)<2x+4$

이므로 각 변을 세제곱하면

$(2x+1)^3<\{f(x)\}^3<(2x+4)^3$

$x^3-8>0$, 즉 $x>2$일 때, 위의 부등식의 각 변을 x^3-8로 나누면

Q BOX: $x^3-8>0$에서 $(x-2)(x^2+2x+4)>0$
이때 $x^2+2x+4=(x+1)^2+3>0$
이므로 $x-2>0 \quad\therefore x>2$

$\dfrac{(2x+1)^3}{x^3-8}<\dfrac{\{f(x)\}^3}{x^3-8}<\dfrac{(2x+4)^3}{x^3-8}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3}{x^3-8}=8$, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(2x+4)^3}{x^3-8}=8$이므로

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\{f(x)\}^3}{x^3-8}=8$

답 ④

쌤한마디

$x\longrightarrow\infty$일 때의 극한값을 구하는 것이므로 $x^3-8>0$인 경우만 생각해도 된다.

18 점 $\mathrm{Q}(a, b)$가 $y=\sqrt{2x-4}$의 그래프 위의 점이므로

$b=\sqrt{2a-4}$

즉 $\mathrm{Q}(a, \sqrt{2a-4})$, $\mathrm{R}(a, 2)$이고 $a>4$이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=a-4$, $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{2a-4}-2$

$$\therefore \lim_{a\to 4+}\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PR}}}$$

$$=\lim_{a\to 4+}\frac{\sqrt{2a-4}-2}{a-4}$$

$$=\lim_{a\to 4+}\frac{(\sqrt{2a-4}-2)(\sqrt{2a-4}+2)}{(a-4)(\sqrt{2a-4}+2)}$$

$$=\lim_{a\to 4+}\frac{2(a-4)}{(a-4)(\sqrt{2a-4}+2)}$$

$$=\lim_{a\to 4+}\frac{2}{\sqrt{2a-4}+2}$$

$$=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$$ 답 ④

두 점 P, R의 y좌표가 같으므로 $\overline{\mathrm{PR}}$의 길이는 x좌표의 차와 같고, 두 점 Q, R의 x좌표가 같으므로 $\overline{\mathrm{QR}}$의 길이는 y좌표의 차와 같다.

19 직선 OP의 기울기가 $\dfrac{\frac{t^2}{2}}{t}=\dfrac{t}{2}$이므로 직선 OP와 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{2}{t}$이다.

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 수직이면 $mm'=-1$

따라서 점 P를 지나고 직선 OP와 수직인 직선의 방정식은

$$y-\frac{t^2}{2}=-\frac{2}{t}(x-t)$$

$$\therefore y=-\frac{2}{t}x+\frac{t^2}{2}+2$$

$$\therefore f(t)=\frac{t^2}{2}+2$$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\longrightarrow 0$이므로 구하는 값은

$$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t^2}{2}+2\right)=2$$ 답 2

중단원 마무리

14쪽

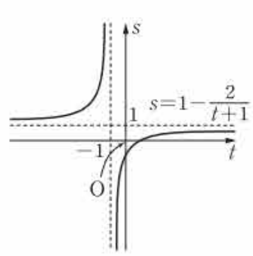
01 전략 그래프에서 각 극한값을 구한다.

풀이 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to 2-}f(x)+\lim_{x\to -1}f(x)$

$=1+2+1=4$ 답 ②

02 전략 $\dfrac{t-1}{t+1}=s$, $\dfrac{4t-1}{t+1}=k$로 치환하여 각각 $t\longrightarrow\infty$, $t\longrightarrow-\infty$일 때 s, k가 가까워지는 값을 구한다.

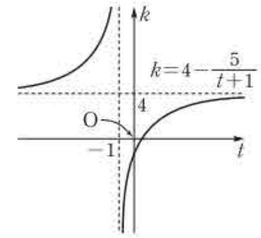
풀이 $s=\dfrac{t-1}{t+1}=1-\dfrac{2}{t+1}$로 놓으면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t\longrightarrow\infty$일 때 $s\longrightarrow 1-$이다.



$$\therefore \lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$$

$$=\lim_{s\to 1-}f(s)=2$$

$k=\dfrac{4t-1}{t+1}=4-\dfrac{5}{t+1}$로 놓으면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t\longrightarrow-\infty$일 때 $k\longrightarrow 4+$이다.



$$\therefore \lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$$

$$=\lim_{k\to 4+}f(k)=3$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=5$$ 답 ③

03 전략 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=\beta$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\alpha\beta$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to -1-}f(x)=1$, $f(-1)=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to -1-}f(x)=f(-1)$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)\cdot\lim_{x\to 1+}g(x)$

$=1\cdot 0=0$,

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)\cdot\lim_{x\to 1-}g(x)$

$=0\cdot 1=0$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)$

ㄷ. ㄴ에서 $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=0$이고

$f(1)g(1)=1\cdot 1=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)g(x)\neq f(1)g(1)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

04 전략 $p(x)=2f(x)+g(x)$, $q(x)=-f(x)+3g(x)$라 하고 $f(x)$, $g(x)$를 각각 $p(x)$, $q(x)$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $p(x)=2f(x)+g(x)$ …… ㉠

$q(x)=-f(x)+3g(x)$ …… ㉡

라 하면

$\displaystyle\lim_{x\to 3}p(x)=11$, $\displaystyle\lim_{x\to 3}q(x)=-2$

㉠×3−㉡을 하면

$3p(x)-q(x)=7f(x)$

이므로 $f(x)=\dfrac{1}{7}\{3p(x)-q(x)\}$

$$\therefore \lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{1}{7}\{3p(x)-q(x)\}$$

$$=\frac{1}{7}\{3\cdot 11-(-2)\}=5$$

㉠+㉡×2를 하면

$p(x)+2q(x)=7g(x)$

이므로 $g(x)=\dfrac{1}{7}\{p(x)+2q(x)\}$

$$\therefore \lim_{x\to 3}g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{1}{7}\{p(x)+2q(x)\}$$

$$=\frac{1}{7}\{11+2\cdot(-2)\}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 3}f(x)g(x)=5\cdot 1=5$$ 답 ②

05 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 생각하고, 정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to 3+}\frac{x^2-3x}{|x^2-9|}=\lim_{x\to 3+}\frac{x^2-3x}{x^2-9}$

$=\lim_{x\to 3+}\frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}$

$=\lim_{x\to 3+}\frac{x}{x+3}$

$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$x\to 1-$일 때 $x-2\to -1-$이므로

$\lim_{x\to 1-}[x-2]=-2$

따라서 $\lim_{x\to 1-}\frac{x-2}{[x-2]}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{x\to 3+}\frac{x^2-3x}{|x^2-9|}+\lim_{x\to 1-}\frac{x-2}{[x-2]}=1$ 답 1

$x>3$에서 $x^2-9>0$이므로 $|x^2-9|=x^2-9$

06 전략 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴은 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나누고, $\frac{0}{0}$ 꼴은 인수분해하여 약분한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1-\frac{1}{x^2}}=a$이므로

$a=2$

$\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{x+1}$

$=\frac{2}{2}=1$

이므로 $b=1$

$\therefore a+b=3$ 답 3

07 전략 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$의 값을 구하고 이를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\{f(x)-3x^2\}=0$에서

$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x^2}-3\right\}=0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=3$ ···· ❶

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{5x-2f(x)}{x^2+3f(x)+1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}-2\cdot\frac{f(x)}{x^2}}{1+3\cdot\frac{f(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}}$

$=\frac{-2\cdot 3}{1+3\cdot 3}=-\frac{3}{5}$ ···· ❷

답 $-\frac{3}{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-2f(x)}{x^2+3f(x)+1}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

08 전략 주어진 극한을 $\frac{0}{0}$ 꼴로 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}-2)\left(1+\frac{8}{x^2-16}\right)$

$=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}-2)\cdot\frac{x^2-8}{x^2-16}$

$=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}-2)\cdot\frac{x^2-8}{(x+4)(x-4)}$

$=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}-2)\cdot\frac{x^2-8}{(x+4)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$

$=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-8}{(x+4)(\sqrt{x}+2)}=\frac{8}{8\cdot 4}=\frac{1}{4}$

따라서 $p=4$, $q=1$이므로

$p-q=3$ 답 ③

09 전략 $x\to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$임을 이용하여 $f(2)$의 값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\frac{1}{2}$에서 $x\to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=0$이므로 $f(2)=3$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\{f(x)+3\}\{f(x)-3\}}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{f(x)+3}\cdot\frac{x-2}{f(x)-3}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{f(x)+3}\cdot\frac{1}{\frac{f(x)-3}{x-2}}$

$=\frac{1}{3+3}\cdot 2=\frac{1}{3}$ 답 ①

10 전략 $x\to 1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3+ax^2+bx}=\frac{1}{6}$ ······ ㉠

$x\to 1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}(x^3+ax^2+bx)=0$이므로

$1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ ······ ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3+ax^2-(a+1)x}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x-1)(x+a+1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x(x+a+1)}=\frac{1}{a+2}$

$x^3+ax^2-(a+1)x$
$=x\{x^2+ax-(a+1)\}$
$=x(x-1)(x+a+1)$

즉 $\frac{1}{a+2}=\frac{1}{6}$이므로

$a+2=6$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면 $b=-5$

따라서 $f(x)=x^3+4x^2-5x$이므로

$f(-1)=-1+4+5=8$ 답 8

11 전략 $x \to -2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$임을 이용한다.

풀이 $x \to -2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x \to -2}(\sqrt{x^2+a}-b)=0$이므로 $\sqrt{4+a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{4+a}$ …… ㉠ ➊

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to -2}\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a}}{x+2}$$
$$=\lim_{x \to -2}\frac{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}{(x+2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}$$
$$=\lim_{x \to -2}\frac{x^2-4}{(x+2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}$$
$$=\lim_{x \to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}$$
$$=\lim_{x \to -2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a}}=\frac{-4}{2\sqrt{4+a}}=-\frac{2}{\sqrt{4+a}}$$

따라서 $-\frac{2}{\sqrt{4+a}}=-\frac{1}{2}$이므로

$\sqrt{4+a}=4$, $4+a=16$ $\therefore a=12$ ➋

$a=12$를 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore ab=48$ ➌

답 48

단계	채점 기준	비율
➊	b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
➋	a의 값을 구할 수 있다.	50 %
➌	ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

12 전략 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

풀이 $a \le 0$이면 $\lim_{x \to -\infty}(\sqrt{2x^2+x}+ax)=\infty$이므로

$a>0$

$x=-t$로 놓으면 $x \to -\infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$$\lim_{x \to -\infty}(\sqrt{2x^2+x}+ax)$$
$$=\lim_{t \to \infty}(\sqrt{2t^2-t}-at)$$
$$=\lim_{t \to \infty}\frac{(\sqrt{2t^2-t}-at)(\sqrt{2t^2-t}+at)}{\sqrt{2t^2-t}+at}$$
$$=\lim_{t \to \infty}\frac{(2-a^2)t^2-t}{\sqrt{2t^2-t}+at} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 극한값이 존재하려면

$2-a^2=0$, $a^2=2$ $\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

$a=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t \to \infty}\frac{-t}{\sqrt{2t^2-t}+\sqrt{2}t}=\lim_{t \to \infty}\frac{-1}{\sqrt{2-\frac{1}{t}}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\therefore b=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \frac{b}{a}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{4}$

답 ③

Q BOX

$2-a^2\neq0$이면 (분자의 차수) > (분모의 차수) 이므로 극한값이 존재하지 않는다.

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$이다.

기울기가 -1이다.

13 전략 두 다항식 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $\lim_{x \to \infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\alpha$ ($\alpha\neq0$)이면 $g(x)$와 $h(x)$의 차수가 같고, 최고차항의 계수의 비가 α임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=4$에서 $f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 4인 이차식임을 알 수 있다.

$f(x)-x^3=4x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=x^3+4x^2+ax+b$ …… ㉠

$\lim_{x \to 0}\frac{x}{f(x)}=-\frac{1}{2}$에서 $x \to 0$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x \to 0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

㉠에서 $b=0$이므로 $f(x)=x^3+4x^2+ax$

$$\therefore \lim_{x \to 0}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x \to 0}\frac{x}{x^3+4x^2+ax}$$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{1}{x^2+4x+a}=\frac{1}{a}$$

즉 $\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}$이므로 $a=-2$

따라서 $f(x)=x^3+4x^2-2x$이므로 구하는 나머지는

$f(-1)=-1+4+2=5$

답 5

14 전략 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{x \to -1}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값을 구한 후 이 값을 이용할 수 있도록 극한값을 구하는 식을 변형한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여

$$-x^2-3x-5\le\frac{f(x)}{g(x)}\le x^2+x-3$$

이고

$\lim_{x \to -1}(-x^2-3x-5)=-1+3-5=-3$,

$\lim_{x \to -1}(x^2+x-3)=1-1-3=-3$

이므로 $\lim_{x \to -1}\frac{f(x)}{g(x)}=-3$

$$\therefore \lim_{x \to -1}\frac{\{f(x)\}^2+6\{g(x)\}^2}{f(x)g(x)}$$
$$=\lim_{x \to -1}\frac{\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}^2+6}{\frac{f(x)}{g(x)}}$$
$$=\frac{(-3)^2+6}{-3}$$
$$=-5$$

답 -5

15 전략 $\overline{AP}^2$, $\overline{AQ}^2$을 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $A(-1, 0)$, $P(t, t+1)$이므로

$\overline{AP}^2=(t+1)^2+(t+1)^2$

$=2t^2+4t+2$

점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선의 방정식은

$y-(t+1)=-(x-t)$

$\therefore y=-x+2t+1$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0,\ 2t+1)$이므로

$$\overline{AQ}^2=\{-(-1)\}^2+(2t+1)^2$$
$$=4t^2+4t+2$$
$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}{2+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}$$
$$=\frac{4}{2}=2$$

답 ③

16 전략 조건 (나)에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 대입하여 $g(x)$를 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $g(x)$는 $x-1$을 인수로 갖고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 x^2의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여

$$g(x)=(x-1)h(x)$$

라 하자.

조건 (나)에서 $n=1$일 때

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

$\lim_{x\to1}g(x)=g(1)=0$

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 x^2의 계수가 1인 이차함수 $k(x)$에 대하여

$$f(x)=(x-1)k(x)$$

라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)k(x)}{(x-1)h(x)}=\lim_{x\to1}\frac{k(x)}{h(x)}$$
$$=\frac{k(1)}{h(1)}$$

이때 ㉠에서 $\frac{k(1)}{h(1)}=0$이므로 $\quad k(1)=0$

즉 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로

$$f(x)=(x-1)^2(x-a)\ (a\text{는 상수})$$

라 하자.

조건 (나)에서 $n=2$일 때 $\quad \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)^2(x-a)}{(x-1)h(x)}=\frac{2-a}{h(2)}\text{이므로}$$
$$\frac{2-a}{h(2)}=0 \qquad \therefore a=2$$
$$\therefore f(x)=(x-1)^2(x-2)$$

따라서 $x\neq1$일 때,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)h(x)}=\frac{(x-1)(x-2)}{h(x)}$$

조건 (나)에서 $n=3$일 때 $\quad \lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=2\cdot1=2$

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-2)}{h(x)}=\frac{2}{h(3)}\text{이므로}$$
$$\frac{2}{h(3)}=2 \qquad \therefore h(3)=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

조건 (나)에서 $n=4$일 때 $\quad \lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=3\cdot2=6$

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-1)(x-2)}{h(x)}=\frac{6}{h(4)}\text{이므로}$$
$$\frac{6}{h(4)}=6 \qquad \therefore h(4)=1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

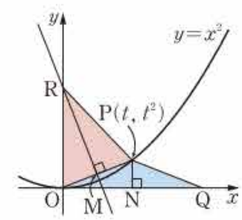
㉡, ㉢에서 $h(x)-1=(x-3)(x-4)$이므로

$h(3)-1=0$, $h(4)-1=0$이고 $h(x)-1$은 x^2의 계수가 1인 이차함수이다.

$$h(x)=(x-3)(x-4)+1$$
$$\therefore g(x)=(x-1)\{(x-3)(x-4)+1\}$$
$$\therefore g(5)=4\cdot(2\cdot1+1)=12$$

답 ⑤

17 전략 이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선은 밑변을 이등분함을 이용한다.



풀이 점 $P(t,\ t^2)$에서 x축에 내린 수선의 발을 N이라 하면

$$N(t,\ 0)$$

$\triangle POQ$가 이등변삼각형이므로

$$\overline{ON}=\overline{QN}$$
$$\therefore Q(2t,\ 0)$$
$$\therefore S(t)=\frac{1}{2}\overline{OQ}\cdot\overline{PN}=\frac{1}{2}\cdot2t\cdot t^2=t^3$$

$\triangle PRO$가 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선이 y축과 만나는 점이 R이다.

선분 OP의 중점을 M이라 하면 $\quad M\left(\frac{t}{2},\ \frac{t^2}{2}\right)$

직선 OP의 기울기가 $\frac{t^2}{t}=t$이므로 직선 MR의 기울기는 $-\frac{1}{t}$이다.

두 직선 OP와 MR는 서로 수직이다.

따라서 직선 MR의 방정식은

$$y-\frac{t^2}{2}=-\frac{1}{t}\left(x-\frac{t}{2}\right) \qquad \therefore y=-\frac{1}{t}x+\frac{t^2+1}{2}$$
$$\therefore R\left(0,\ \frac{t^2+1}{2}\right)$$
$$\therefore T(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2+1}{2}\cdot t=\frac{1}{4}(t^3+t)$$

$\overline{OR}$를 밑변으로 할 때 $\triangle PRO$의 높이는 점 P의 x좌표와 같다.

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{4}(t^3+t)-t^3}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$

답 ②

다른 풀이 $\overline{RM}=\sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{2}$,

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+(t^2)^2}=\sqrt{t^2+t^4}$이므로

$$T(t)=\frac{1}{2}\overline{OP}\cdot\overline{RM}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{t^2+t^4}\cdot\frac{\sqrt{t^2+1}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{t^2(1+t^2)}\sqrt{t^2+1}}{4}$$
$$=\frac{t(t^2+1)}{4}\ (\because t>0)$$

02 함수의 연속

Lecture 03 함수의 연속

Ⓛ 19쪽

01 $f(2)=3$, $\lim_{x \to 2} f(x)=2$이므로

$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$ 답 ㄷ

02 $\lim_{x \to 2+} f(x)=3$, $\lim_{x \to 2-} f(x)=2$이므로

$\lim_{x \to 2+} f(x) \neq \lim_{x \to 2-} f(x)$

따라서 $\lim_{x \to 2} f(x)$가 존재하지 않는다. 답 ㄴ

03 답 ㄱ

04 $f(1)=2$, $\lim_{x \to 1} f(x)=2$이므로

$\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

05 $f(1)=0$, $\lim_{x \to 1} f(x)=0$이므로

$\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

06 $f(x)$가 $x=1$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 답 불연속

> 유리함수는 분모가 0이 되는 값에서 정의되어 있지 않다.

07 $\lim_{x \to 1+} f(x)=\lim_{x \to 1+} \sqrt{x-1}=0$,

$\lim_{x \to 1-} f(x)=\lim_{x \to 1-} \left(-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{x \to 1+} f(x) \neq \lim_{x \to 1-} f(x)$

따라서 $\lim_{x \to 1} f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 답 불연속

쌤한마디

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속임은 다음 세 가지 조건

(i) $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$

를 모두 만족시키는지 보여야 한다.

그러나 $x=a$에서 불연속임은 위의 세 가지 중 만족시키지 않는 것이 한 가지라도 있음을 보이면 된다.

08 함수 $f(x)=-4x-9$의 정의역은 실수 전체의 집합이므로

$(-\infty, \infty)$ 답 $(-\infty, \infty)$

09 함수 $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$의 정의역은 $x \neq -2$, 즉 $x<-2$ 또는 $x>-2$인 모든 실수 x의 값의 집합이므로

$(-\infty, -2)$, $(-2, \infty)$

답 $(-\infty, -2)$, $(-2, \infty)$

> 유리함수에서 정의역이 주어지지 않을 때에는 분모가 0이 되지 않도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

10 함수 $f(x)=\sqrt{-x+3}$의 정의역은 $-x+3 \geq 0$, 즉 $x \leq 3$인 모든 실수 x의 값의 집합이므로

$(-\infty, 3]$ 답 $(-\infty, 3]$

> 무리함수에서 정의역이 주어지지 않을 때에는 근호 안의 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

11 함수 $f(x)=x^2-4x+3$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

12 함수 $f(x)=\frac{2x+1}{x-5}$은 $x \neq 5$, 즉 $x<5$ 또는 $x>5$인 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $(-\infty, 5)$, $(5, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, 5)$, $(5, \infty)$

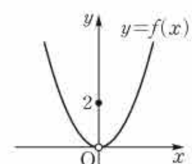
13 함수 $f(x)=-\sqrt{4x-1}$은 $4x-1 \geq 0$, 즉 $x \geq \frac{1}{4}$인 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$에서 연속이다. 답 $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$

14 $f(0)=2$,

$\lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0} x^2=0$이므로

$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 $x \neq 0$인 모든 실수 x에서 연속이다.



답 $x \neq 0$인 모든 실수 x에서 연속이다.

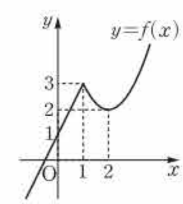
15 $f(1)=3$이고

$\lim_{x \to 1+} f(x)$

$=\lim_{x \to 1+} (x^2-4x+6)=3$,

$\lim_{x \to 1-} f(x)$

$=\lim_{x \to 1-} (2x+1)=3$



에서 $\lim_{x \to 1} f(x)=3$이므로

$\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

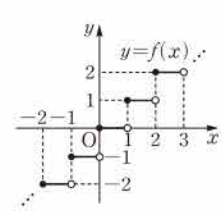
답 모든 실수 x에서 연속이다.

16 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정수 n에 대하여

$\lim_{x \to n+} f(x)=n$,

$\lim_{x \to n-} f(x)=n-1$

$\therefore \lim_{x \to n+} f(x) \neq \lim_{x \to n-} f(x)$



즉 $\lim_{x \to n} f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 불연속이다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x \neq n$인 모든 실수 x에서 연속이다.

답 $x \neq n$ (n은 정수)인 모든 실수 x에서 연속이다.

표준 + 발전 유형 Q+Q 20쪽

01 ㄱ. $f(3)=-6$, $\lim_{x\to3}f(x)=-6$이므로

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

> $x=3$에서의 함숫값과 극한을 조사한다.

ㄴ. $f(x)$가 $x=3$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}\frac{|x-3|}{x-3}$

$=\lim_{x\to3+}\frac{x-3}{x-3}=1$,

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}\frac{|x-3|}{x-3}$

$=\lim_{x\to3-}\frac{-(x-3)}{x-3}=-1$

이므로 $\lim_{x\to3+}f(x)\neq\lim_{x\to3-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to3}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

ㄹ. $f(3)=\sqrt{6}$, $\lim_{x\to3}f(x)=\sqrt{6}$이므로

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

ㅁ. $f(3)=3$이고

$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}$

$=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{x}{x+3}=\frac{1}{2}$

이므로 $\lim_{x\to3}f(x)\neq f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

이상에서 $x=3$에서 연속인 것은 ㄱ, ㄹ의 2개이다.

답 ②

02 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=f(a)$

이어야 한다.

이때 $f(a)=-6a$이고

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(-6x)=-6a$,

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(x^2-16)=a^2-16$

이므로

$-6a=a^2-16$, $a^2+6a-16=0$

$(a+8)(a-2)=0$ $\therefore$ $a=-8$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 곱은

$-8\cdot2=-16$

답 ①

03 ③ $x+1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow2$이므로

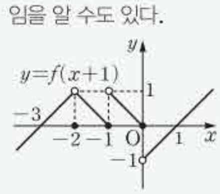
$\lim_{x\to1}f(x+1)=\lim_{t\to2}f(t)=0$

이때 $f(1+1)=f(2)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x+1)=f(1+1)$

따라서 함수 $f(x+1)$은 $x=1$에서 연속이다.

> 다음 그림과 같이 함수 $y=f(x+1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것임을 이용하여 $x=1$에서 연속임을 알 수도 있다.



④ $\lim_{x\to0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$

즉 $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않는다.

$\lim_{x\to1+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

즉 $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 구간 $(-2, 2)$에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 0, 1의 2개이다.

⑤ 구간 $(-2, 2)$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 -1, 0, 1의 3개이다.

> 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 끊어져 있으므로 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 불연속임을 직관적으로 알 수 있다.

답 ⑤

참고 $\lim_{x\to-1}f(x)\neq f(-1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이고 $\lim_{x\to0}f(x)$, $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 불연속이다.

04 ㄱ, ㄴ. $\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)\cdot\lim_{x\to0+}g(x)$

$=4\cdot2=8$,

$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to0-}f(x)\cdot\lim_{x\to0-}g(x)$

$=4\cdot(-2)=-8$

이므로 $\lim_{x\to0+}f(x)g(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)g(x)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)g(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $\{g(0)\}^2=2^2=4$이고

$\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0+}g(x)\cdot\lim_{x\to0+}g(x)$

$=2\cdot2=4$,

$\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0-}g(x)\cdot\lim_{x\to0-}g(x)$

$=-2\cdot(-2)=4$

에서 $\lim_{x\to0}\{g(x)\}^2=4$이므로

$\lim_{x\to0}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$

따라서 함수 $\{g(x)\}^2$은 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

05 ㄱ. $f(1)=1$, $\lim_{x\to1}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow2-$이므로

$\lim_{x\to1}f(f(x))=\lim_{t\to2-}f(t)=1$

ㄷ. $f(f(1))=f(1)=1$이므로

$\lim_{x\to1}f(f(x))=f(f(1))$

따라서 함수 $f(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

쌤한마디

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 합성함수 $f(g(x))$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a+}f(g(x))=\lim_{x\to a-}f(g(x))=f(g(a))$

이어야 한다.

06 ㄱ. $\lim_{x\to 2+} f(x)g(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) \cdot \lim_{x\to 2+} g(x)$

$= 1 \cdot 0 = 0,$

$\lim_{x\to 2-} f(x)g(x) = \lim_{x\to 2-} f(x) \cdot \lim_{x\to 2-} g(x)$

$= 2 \cdot 0 = 0$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)g(x) = 0$

이때 $f(2)g(2) = 2 \cdot 0 = 0$이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)g(x) = f(2)g(2)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 2$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x\to 2} f(g(x)) = \lim_{t\to 0} f(t) = 3$

이때 $f(g(2)) = f(0) = 3$이므로

$\lim_{x\to 2} f(g(x)) = f(g(2))$

따라서 함수 $f(g(x))$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 2+$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x\to 2+} g(f(x)) = g(1) = 1$

$x \longrightarrow 2-$일 때 $t=2$이므로

$\lim_{x\to 2-} g(f(x)) = g(2) = 0$

$\therefore \lim_{x\to 2+} g(f(x)) \neq \lim_{x\to 2-} g(f(x))$

따라서 $\lim_{x\to 2} g(f(x))$가 존재하지 않으므로 함수 $g(f(x))$는 $x=2$에서 불연속이다.

이상에서 $x=2$에서 연속인 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

07 $f(0)=5$이므로 $-b=5$ $\therefore b=-5$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=4$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 4+} f(x) = \lim_{x\to 4-} f(x) = f(4)$

이때

$\lim_{x\to 4+} f(x) = \lim_{x\to 4+} (3x+a) = 12+a,$

$\lim_{x\to 4-} f(x) = \lim_{x\to 4-} (x^2+5) = 21,$

$f(4) = 12+a$

이므로 $12+a=21$ $\therefore a=9$

또 $x=-4$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -4+} f(x) = \lim_{x\to -4-} f(x) = f(-4)$

이때

$\lim_{x\to -4+} f(x) = \lim_{x\to -4+} (x^2+5) = 21,$

$\lim_{x\to -4-} f(x) = \lim_{x\to -4-} (-x+c) = 4+c,$

$f(-4) = 21$

이므로 $21=4+c$ $\therefore c=17$

$\therefore a-b+c = 9-(-5)+17 = 31$

답 31

08 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$

$\therefore \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x+1} = -\frac{1}{2}$ ...... ㉠

$x \longrightarrow -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to -1} (\sqrt{x^2+a}-b) = 0$이므로

$\sqrt{1+a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{1+a}$ ...... ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a}}{x+1}$

$= \lim_{x\to -1} \frac{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}{(x+1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}$

$= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{(x+1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}$

$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}$

$= \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a}}$

$= \frac{-2}{2\sqrt{1+a}} = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$

따라서 $-\frac{1}{\sqrt{1+a}} = -\frac{1}{2}$이므로

$\sqrt{1+a}=2,$ $1+a=4$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=2$

$\therefore ab=6$

답 ③

09 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -2+} f(x) = \lim_{x\to -2-} f(x) = f(-2)$

이때

$\lim_{x\to -2+} [x] = -2$

$\lim_{x\to -2+} f(x) = \lim_{x\to -2+} ([x]^2 - ax[x])$

$= (-2)^2 - a \cdot (-2) \cdot (-2)$

$= 4-4a,$

$\lim_{x\to -2-} [x] = -3$

$\lim_{x\to -2-} f(x) = \lim_{x\to -2-} ([x]^2 - ax[x])$

$= (-3)^2 - a \cdot (-2) \cdot (-3)$

$= 9-6a,$

$f(-2) = [-2]^2 - a \cdot (-2) \cdot [-2]$

$= (-2)^2 - a \cdot (-2) \cdot (-2)$

$= 4-4a$

이므로 $4-4a = 9-6a$

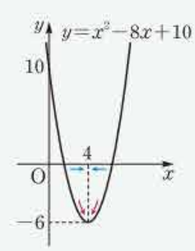
$2a=5$ $\therefore a=\frac{5}{2}$

답 ⑤

10 함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$

$\therefore \lim_{x\to 4} [x^2-8x+10] = a$



$x \longrightarrow 4$일 때 $x^2-8x+10 \longrightarrow -6+$이므로

$a = \lim_{x\to 4} [x^2-8x+10] = -6$

답 -6

참고 $x=3$, $x=5$일 때 $x^2-8x+10=-5$이므로

$3<x<5$일 때 $-6 \le x^2-8x+10 < -5$

$\therefore [x^2-8x+10] = -6$

$\therefore \lim_{x\to 4} [x^2-8x+10] = -6$

11 $x\neq2$일 때,

$$f(x)=\frac{ax^2-bx}{x-2}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{ax^2-bx}{x-2}$$

$x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(ax^2-bx)=0$이므로

$4a-2b=0$

$\therefore b=2a$ …… ㉠

$f(1)=7$이므로 주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-1\cdot7=a-b,\quad -7=a-2a\ (\because ㉠)$

$\therefore a=7$

$a=7$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=14$

$$\therefore f(2)=\lim_{x\to2}\frac{7x^2-14x}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{7x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}7x=14$$

답 14

$x\neq2$이므로 $(x-2)f(x)=ax^2-bx$의 양변을 $x-2$로 나눌 수 있다.

12 $x\neq-3$, $x\neq1$일 때,

$$f(x)=\frac{x^3+ax+b}{x^2+2x-3}$$

$x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=1$ 따라서 $x\neq-3$, $x\neq1$일 때 $x^2+2x-3\neq0$이다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-3$에서 연속이므로

$$f(-3)=\lim_{x\to-3}f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{x^3+ax+b}{x^2+2x-3}$$

$x\to-3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-3}(x^3+ax+b)=0$이므로

$-27-3a+b=0$

$\therefore 3a-b=-27$ …… ㉠

또 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{x^2+2x-3}$$

$x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^3+ax+b)=0$이므로

$1+a+b=0$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-7,\ b=6$

따라서 $x\neq-3$, $x\neq1$일 때,

$$f(x)=\frac{x^3-7x+6}{x^2+2x-3}=\frac{(x+3)(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-1)}=x-2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)=(x+3)(x-1)(x-2)$

이므로

$$f(-3)+f(1)=\lim_{x\to-3}f(x)+\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to-3}(x-2)+\lim_{x\to1}(x-2)=-5+(-1)=-6$$

답 ①

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

Lecture 04 연속함수의 성질

23쪽

01 $f(x)=-x^3-2x^2+8x+5$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, \infty)$

쌤한마디

일차함수 $y=x$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수

$y=x^2,\ y=x^3,\ \cdots,\ y=x^n$ (n은 자연수)

도 모든 실수 x에서 연속이다. 또 상수함수도 모든 실수 x에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 다항함수

$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

($a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1,\ a_0$은 상수)

도 모든 실수 x에서 연속이다.

02 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x-2}=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-2)}$은 유리함수이므로 $(x+1)(x-2)\neq0$, 즉 $x\neq-1$, $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$

03 (1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)-g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(3) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$인 x에서 불연속이다.

$g(x)=x^2+x-6=0$에서 $\quad (x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x\neq-3$, $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, -3)$, $(-3, 2)$, $(2, \infty)$에서 연속이다.

(4) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $f(x)=0$인 x에서 불연속이다.

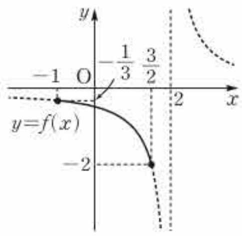
$f(x)=-x+9=0$에서 $\quad x=9$

따라서 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x\neq9$인 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, 9)$, $(9, \infty)$에서 연속이다.

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$
(3) $(-\infty, -3)$, $(-3, 2)$, $(2, \infty)$
(4) $(-\infty, 9)$, $(9, \infty)$

04 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$은 구간 $\left[-1, \dfrac{3}{2}\right]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



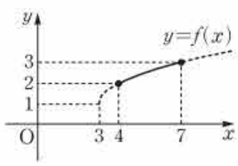
따라서 함수 $f(x)$는

$x=-1$에서 최댓값 $-\dfrac{1}{3}$, $x=\dfrac{3}{2}$에서 최솟값 -2를 갖는다.

답 최댓값: $-\dfrac{1}{3}$, 최솟값: -2

Q BOX: 최댓값과 최솟값을 구할 때에는 그래프를 그려서 생각한다.

05 함수 $f(x)=\sqrt{x-3}+1$은 구간 $[4, 7]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=7$에서 최댓값 3, $x=4$에서 최솟값 2를 갖는다.

답 최댓값: 3, 최솟값: 2

06 함수 $f(x)=x^2-2$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이다.

또 $f(1)=-1$, $f(2)=2$에서

$f(1)\neq f(2)$

$f(1)=1-2=-1$, $f(2)=4-2=2$

이고 $f(1)<1<f(2)$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=1$인 c가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

답 풀이 참조

07 $f(x)=x^3-4x^2+5x+1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 연속이다.

또 $f(-1)=-9$, $f(0)=1$에서

$f(-1)=-1-4-5+1=-9$

$f(-1)f(0)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 0)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3-4x^2+5x+1=0$은 열린구간 $(-1, 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

표준+발전 유형 Q+Q

24쪽

01 ① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 두 함수 $3f(x)$, $2g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 함수 $3f(x)+2g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

② 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

③ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$인 x에서 불연속이다.

그런데 $g(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$이므로

함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

④ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $f(x)=0$인 x에서 불연속이다.

$f(x)=x^2-4=0$에서

$(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=-2$, $x=2$에서 불연속이다.

⑤ $f(g(x))=\{g(x)\}^2-4$

$=g(x)\cdot g(x)-4$

이때 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(g(x))$도 모든 실수 x에서 연속이다.

답 ④

02 ㄱ. $f(x)$가 연속함수이면

$\{f(x)\}^2=f(x)\cdot f(x)$도 연속함수이다.

ㄴ. $p(x)=f(x)+g(x)$, $q(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$$f(x)=\frac{p(x)+q(x)}{2},\ g(x)=\frac{p(x)-q(x)}{2}$$

이때 $p(x)$와 $q(x)$가 연속함수이므로 $f(x)$, $g(x)$도 연속함수이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$, $g(x)=0$이라 하면

$f(x)g(x)=0$

이때 $g(x)$와 $f(x)g(x)$가 연속함수이지만 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄹ. 임의의 실수 a에 대하여 $f(a)=b$라 하면 $f(x)$가 연속함수이므로

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$

즉 $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow a$일 때 $t\longrightarrow b$이므로

$\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=\lim\limits_{t\to b}g(t)$

$=g(b)$ ($\because$ $g(x)$가 연속함수)

$=g(f(a))$

따라서 $g(f(x))$는 $x=a$에서 연속이므로 연속함수이다.

임의의 실수 a에 대하여 함수 $g(f(x))$가 $x=a$에서 연속이므로 이 함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

03 함수 $f(x)$는 $x>a$, $x<a$인 모든 실수 x에서 각각 연속이고 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다. 즉

$$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=f(a)g(a)$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}(-x+10)(2x+a)$$
$$=(-a+10)\cdot 3a,$$
$$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}(x^2+4x-4)(2x+a)$$
$$=(a^2+4a-4)\cdot 3a,$$
$$f(a)g(a)=(-a+10)\cdot 3a$$

이므로 $\quad (-a+10)\cdot 3a=(a^2+4a-4)\cdot 3a$

$$3a(a^2+5a-14)=0$$
$$3a(a+7)(a-2)=0$$
$$\therefore\ a=-7 \text{ 또는 } a=0 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 구하는 합은

$-7+0+2=-5$ 답 -5

쌤한마디

$x\ge a$일 때, $f(x)=-x+10$, $g(x)=2x+a$는 구간 $[a, \infty)$에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)g(x)=(-x+10)(2x+a)$도 구간 $[a, \infty)$에서 연속이다.
또 $x<a$일 때, $f(x)=x^2+4x-4$, $g(x)=2x+a$는 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)g(x)=(x^2+4x-4)(2x+a)$도 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이다.
따라서 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다.

04 함수 $f(x)$는 $x>2$, $x<2$인 모든 실수 x에서 각각 연속이고 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 한다. 즉

$$\lim_{x\to 2+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)g(x)=f(2)g(2)$$

이어야 한다.

$\lim_{x\to 2-} f(x)g(x)=f(2)g(2)$에서

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{x-2}=f(2)g(2)$$

이고 $x\to 2-$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2-} g(x)=0$이므로 $\quad g(2)=0$

$4+2a+b=0 \quad \therefore\ b=-2a-4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

따라서

$$\lim_{x\to 2+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{x+2}=\frac{g(2)}{4}=0,$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 2-}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2} \quad (\because \text{㉠})$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}(x+a+2)$$
$$=a+4,$$
$$f(2)g(2)=0$$

이므로 $\quad a+4=0 \quad \therefore\ a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=4$

$\therefore\ ab=-16$ 답 ②

Q BOX

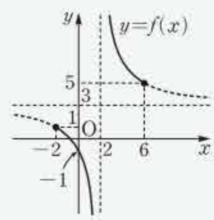
05 ① 구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 1, 3의 2개이다.
② 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 $x=-1$일 때 최댓값 3, $x=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.
③ 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 2]$에서 최댓값을 갖지 않는다.
⑤ 함수 $f(x)$는 구간 $[3, 4]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$x=4$에서 최댓값 2, $x=3$에서 최솟값 1을 갖는다.

답 ③

06 함수 $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-2}=\dfrac{8}{x-2}+3$은 $x\ne 2$인 모든 실수 x에서 연속이다.

구간 $[-2, 6]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



①, ⑤ 함수 $f(x)$는 주어진 닫힌구간에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.
② 구간 $[-1, 2)$에서 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소하므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $\frac{1}{3}$을 갖고, 최솟값을 갖지 않는다.
③ 구간 $(2, 4]$에서 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소하므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최솟값 7을 갖고, 최댓값을 갖지 않는다.
④ 구간 $[3, 6)$에서 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소하므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 11을 갖고, 최솟값을 갖지 않는다.

답 ③

07 $g(x)=f(x)-x$라 하면

$$g(-2)=f(-2)-(-2)=-3+2=-1,$$
$$g(-1)=f(-1)-(-1)=-2+1=-1,$$
$$g(0)=f(0)-0=1,$$
$$g(1)=f(1)-1=-1-1=-2$$

이므로

$$g(-2)g(-1)=-1\cdot(-1)=1>0,$$
$$g(-1)g(0)=-1\cdot 1=-1<0,$$
$$g(0)g(1)=1\cdot(-2)=-2<0$$

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 구간 $(-1, 0)$, $(0, 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)-x=0$은 적어도 2개의 실근을 가지므로 $\quad n=2$ 답 2

08 $f(x)=g(x)$에서

$$x^3-x^2+2x+k=-x^2+3x+1$$
$$\therefore\ x^3-x+k-1=0$$

$h(x)=x^3-x+k-1$이라 하면 함수 $h(x)$는 구간 $[-3, -2]$에서 연속이므로 $h(-3)h(-2)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 구간 $(-3, -2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때

$h(-3)=-27+3+k-1=k-25$,

$h(-2)=-8+2+k-1=k-7$

이므로 $\quad (k-25)(k-7)<0$

$\therefore 7<k<25$

따라서 정수 k는 8, 9, 10, ⋯, 24의 17개이다.

답 ⑤

중단원 마무리

26쪽

01 전략 함수 $y=\sqrt{f(x)}$는 $f(x)\geq 0$인 모든 실수 x에서 연속이고, 함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)\neq 0$인 모든 실수 x에서 연속임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 함수 $y=\sqrt{6-2x}$는 $6-2x\geq 0$, 즉 $x\leq 3$인 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $(-\infty, 3]$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $y=\dfrac{x}{x^2-4}$는 $x^2-4\neq 0$인 모든 실수 x에서 연속이다.

$x^2-4=0$에서 $\quad (x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

즉 $x\neq -2$, $x\neq 2$인 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, \infty)$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $y=\dfrac{5}{x^2+x+1}$는 $x^2+x+1\neq 0$인 모든 실수 x에서 연속이다.

이때 $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이므로 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

02 전략 그래프에서 극한값은 존재하지만 불연속인 점을 찾는다.

풀이 주어진 함수의 그래프에서 함수 $f(x)$는 구간 $[-2, 3]$에서 $x=-1$, $x=0$, $x=2$에서 불연속이다.

이때 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$는 존재하지 않고

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-1$,

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0-}f(x)$

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=-2$,

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2-}f(x)$

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=1$이므로 조건 (가), (나)를 만족시키는 a의 값은 -1이다.

따라서 조건 (다)에서

$f(a+3)=f(-1+3)=f(2)=-2$

$\therefore b=-2$

$\therefore ab=2$

답 2

03 전략 $(f\circ g)(x)$를 구하고 함수 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$는 $q(x)=0$인 x에서 불연속임을 이용한다.

풀이 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+4)$

$$=\frac{2}{(x+4)^2-1}=\frac{2}{x^2+8x+15}$$

즉 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x^2+8x+15=0$인 x에서 불연속이므로

$(x+5)(x+3)=0 \qquad \therefore x=-5$ 또는 $x=-3$

따라서 구하는 합은

$-5+(-3)=-8$

답 ①

04 전략 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to k+}f(x)=\lim\limits_{x\to k-}f(x)=f(k)$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=f(-1)$

이때

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1+}(x^2+7x+b)=b-6$,

$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1-}(ax-2)=-a-2$,

$f(-1)=-a-2$

이므로 $\quad b-6=-a-2$

$\therefore a+b=4 \qquad$ ⋯⋯ ㉠

또 $x=3$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 3+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3-}f(x)=f(3)$

이때

$\lim\limits_{x\to 3+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3+}(ax-2)=3a-2$,

$\lim\limits_{x\to 3-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3-}(x^2+7x+b)=b+30$,

$f(3)=3a-2$

이므로 $\quad 3a-2=b+30$

$\therefore 3a-b=32 \qquad$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=9$, $b=-5$

$\therefore a-b=14$

답 14

05 전략 함수 $\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 0+}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to 0-}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$임을 이용한다.

풀이 함수 $\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to 0-}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$

이때

$\lim\limits_{x\to 0+}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to 0+}\{f(x-1)\}^2=\{f(-1)\}^2$

$=(2+a)^2$,

$\lim\limits_{x\to 0-}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to 0-}\{f(x+1)\}^2=\{f(1)\}^2=a^2$,

$\{g(0)\}^2=\{f(1)\}^2=a^2$

이므로 $\quad (2+a)^2=a^2$, $\quad a^2+4a+4=a^2$

$4a=-4 \qquad \therefore a=-1$

답 ②

06 전략 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 함을 이용한다.

풀이 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to a+}|f(x)|=\lim\limits_{x\to a-}|f(x)|=|f(a)|$

이때

$\lim\limits_{x\to a+}|f(x)|=\lim\limits_{x\to a+}|x^2-4|=|a^2-4|$,

$\lim\limits_{x\to a-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to a-}|x+2|=|a+2|$,

$|f(a)|=|a+2|$

이므로 $|a^2-4|=|a+2|$

$\therefore a^2-4=\pm(a+2)$

(i) $a^2-4=a+2$일 때,

$a^2-a-6=0$이므로 $(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

(ii) $a^2-4=-(a+2)$일 때,

$a^2+a-2=0$이므로 $(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$

따라서 구하는 합은

$-2+1+3=2$ 답 ⑤

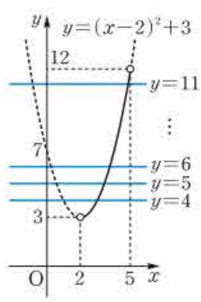
07 전략 함수 $y=[x^2-4x+7]$은 x^2-4x+7의 값이 정수가 되게 하는 x에서 불연속임을 이용한다.

풀이 함수 $y=[x^2-4x+7]$은 x^2-4x+7의 값이 정수가 되게 하는 x에서 불연속이다.

오른쪽 그림과 같이 구간 $(2, 5)$에서 곡선

$y=x^2-4x+7$
$=(x-2)^2+3$

과 직선 $y=k$ $(k=4, 5, 6, \cdots, 11)$는 한 점에서 만나므로 x^2-4x+7의 값이 정수가 되게 하는 x의 값의 개수는 8이다.



$11-4+1=8$

따라서 구간 $(2, 5)$에서 함수 $y=[x^2-4x+7]$이 불연속인 x의 값의 개수는 8이다. 답 ③

쌤한마디

구간 $(2, 5)$에서 곡선 $y=(x-2)^2+3$과 직선 $y=k$ $(k=4, 5, 6, \cdots, 11)$의 교점의 x좌표를 각각 $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_8$이라 하면 함수 $y=[x^2-4x+7]$의 그래프는 다음 그림과 같다.

08 전략 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$임을 이용한다.

풀이 $x\neq1$일 때,

$$f(x)=\frac{2x^2+ax+1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}$$

$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}=0$에서
$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+2}$
$2x+1=x+2$
$\therefore x=1$
따라서 $x\neq1$일 때
$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\neq0$이다.

함수 $f(x)$가 $x\geq-\frac{1}{2}$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax+1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}} \quad \cdots ❶$$

$x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(2x^2+ax+1)=0$이므로

$2+a+1=0$ $\therefore a=-3$ $\cdots$ ❷

$\therefore f(1)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2-3x+1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-3x+1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(2x-1)(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2})}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(2x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2})$$
$$=1\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{3})=2\sqrt{3} \quad \cdots ❸$$

답 $2\sqrt{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(1)$의 값을 극한을 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷	a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	$f(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

09 전략 함수의 식을 구한 후 불연속인 점이 존재하는지 확인한다.

풀이 ① $f(x)g(x)=\frac{x^2-4}{x+3}$이므로 $x=-3$에서 불연속이다.

② $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{(x^2-4)(x+3)}=\frac{1}{(x+3)(x+2)(x-2)}$
이므로 $x=-3$, $x=-2$, $x=2$에서 불연속이다.

③ $\frac{f(x)}{g(x^2)}=\frac{x^2-4}{\frac{1}{x^2+3}}=(x^2-4)(x^2+3)$이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$x^2+3>0$

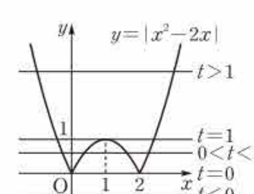
④ $g(f(x))=\frac{1}{(x^2-4)+3}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}$이므로
$x=-1$, $x=1$에서 불연속이다.

⑤ $f(g(x))=\left(\frac{1}{x+3}\right)^2-4$이므로 $x=-3$에서 불연속이다. 답 ③

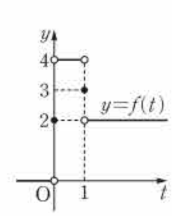
10 전략 t의 값에 따라 $f(t)$를 구하여 $y=f(t)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=|x^2-2x|$
$=|(x-1)^2-1|$

에서 t의 값에 따라 직선 $y=t$와 곡선 $y=|x^2-2x|$의 위치 관계는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(t)$와 그 그래프는 다음과 같다.



$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 2 & (t=0)\\ 4 & (0<t<1)\\ 3 & (t=1)\\ 2 & (t>1)\end{cases}$$



함수 $f(t)$는 $t\neq0$, $t\neq1$인 모든 실수 t에서 연속이고 이차함수 $g(t)$는 모든 실수 t에서 연속이므로 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속이면 $t=0$, $t=1$에서 연속이다.

함수 $f(t)g(t)$가 $t=0$에서 연속이므로

$$\lim_{t\to0+}f(t)g(t)=\lim_{t\to0-}f(t)g(t)=f(0)g(0)$$

이때 $g(t)=t^2+at+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\lim_{t\to0+}f(t)g(t)=4\cdot g(0)=4b,$$

$$\lim_{t\to0-}f(t)g(t)=0\cdot g(0)=0,$$

$$f(0)g(0)=2b$$

이므로 $b=0$

함수 $f(t)g(t)$가 $t=1$에서 연속이므로

$$\lim_{t\to1+}f(t)g(t)=\lim_{t\to1-}f(t)g(t)=f(1)g(1)$$

이때 $g(t)=t^2+at$에서

$$\lim_{t\to1+}f(t)g(t)=2\cdot g(1)=2(1+a),$$

$$\lim_{t\to1-}f(t)g(t)=4\cdot g(1)=4(1+a),$$

$$f(1)g(1)=3(1+a)$$

이므로 $1+a=0$ $\quad\therefore a=-1$

따라서 $g(t)=t^2-t$이므로

$$f(3)+g(3)=2+(9-3)=8$$

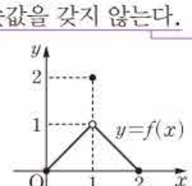
답 8

11 전략 최대·최소 정리를 이용한다.

풀이 ㄱ. 함수 $f(x)$가 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이면 $f(x)$는 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

ㄴ. [반례] $f(x)=x$이면 함수 $f(x)$는 구간 $(-2,\ 0)$에서 연속이지만 이 구간에서 최솟값을 갖지 않는다.

ㄷ. [반례] 구간 $[0,\ 2]$에서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으면 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지만 $x=1$에서 불연속이다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

12 전략 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $f(-2)=\lim_{x\to-2}f(x)$임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $x\neq-2$일 때, $\quad f(x)=\dfrac{x^3+ax+b}{x+2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)$$

$$\therefore \lim_{x\to-2}\frac{x^3+ax+b}{x+2}=7 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to-2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(x^3+ax+b)=0$이므로

$$-8-2a+b=0$$

$$\therefore b=2a+8 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+ax+2a+8}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-2x+a+4)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}(x^2-2x+a+4)$$

$$=a+12$$

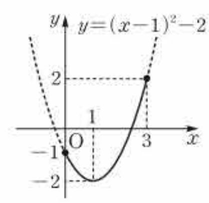
즉 $a+12=7$이므로 $\quad a=-5$

$a=-5$를 ㉡에 대입하면 $\quad b=-2$

구간 $[0,\ 3]$에서

$$f(x)=\frac{x^3-5x-2}{x+2}=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$$

이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ 3]$에서 $x=3$일 때 최댓값 2, $x=1$일 때 최솟값 -2를 가지므로

$$M=2,\ m=-2$$

$$\therefore Mm=-4$$

답 -4

Q BOX

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & a & 2a+8 \\ & & -2 & 4 & -2a-8 \\ \hline & 1 & -2 & a+4 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3+ax+2a+8$
$=(x+2)$
$\times(x^2-2x+a+4)$

$4b=2b=0$이므로
$b=0$

$2(1+a)=4(1+a)$
$=3(1+a)$
이므로 $1+a=0$

최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.

최댓값 2, 최솟값 0을 갖는다.

구간 $[-1,\ 4]$에서 방정식 $f(x)=0$의 근은 $x=-1$, $x=4$와 구간 $(-1,\ 4)$에 있는 근이다.

13 전략 주어진 극한을 이용하여 $f(x)$의 식을 세운 후 사잇값의 정리를 이용한다.

풀이 조건 (가), (나)에서 $x\to-1$, $x\to4$일 때 각각 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $f(-1)=0$, $f(4)=0$이므로

$f(x)=(x+1)(x-4)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항함수)

라 하자. ⋯ ❶

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-4)Q(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-4)Q(x)$$

$$=-5Q(-1)$$

즉 $-5Q(-1)=5$이므로

$$Q(-1)=-1$$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to4}\frac{(x+1)(x-4)Q(x)}{x-4}=\lim_{x\to4}(x+1)Q(x)$$

$$=5Q(4)$$

즉 $5Q(4)=10$이므로

$Q(4)=2$ ⋯ ❷

다항함수 $Q(x)$는 구간 $[-1,\ 4]$에서 연속이고 $Q(-1)Q(4)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $Q(x)=0$은 구간 $(-1,\ 4)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $[-1,\ 4]$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다. ⋯ ❸

답 3개

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$의 식을 세울 수 있다.	30 %
❷	$Q(-1)$, $Q(4)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	방정식 $f(x)=0$이 구간 $[-1,\ 4]$에서 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구할 수 있다.	30 %

14 전략 버스의 속력은 시간에 따른 연속함수이므로 사잇값의 정리를 이용한다.

풀이 버스의 속력은 시간에 따른 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의하여

① P 지점에서 Q 지점까지 속력이 30 km/h가 되는 때는 존재하지 않을 수도 있다.

② P 지점에서 Q 지점까지 속력이 60 km/h가 되는 때는 적어도 한 번 존재한다.

③ P 지점에서 R 지점까지 속력이 50 km/h가 되는 때는 P 지점에서 Q 지점까지 적어도 한 번 존재하고, Q 지점에서 R 지점까지는 존재하지 않을 수도 있다.

④ P 지점에서 R 지점까지 속력이 90 km/h가 되는 때는 P 지점에서 Q 지점까지 적어도 한 번, Q 지점에서 R 지점까지 적어도 한 번 존재하므로 적어도 두 번 존재한다.

$40<90<100$, $100>90>80$

⑤ Q 지점에서 R 지점까지 속력이 70 km/h가 되는 때는 존재하지 않을 수도 있다.

답 ④

15 전략 우극한, 좌극한, 함숫값을 비교하여 $x=0$에서의 연속성을 판단한다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+}\{f(x)+|f(x)|\}$

$=0+0=0,$

$\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0-}\{f(x)+|f(x)|\}$

$=-1+|-1|=0$

$\therefore \lim_{x\to0} g(x)=0$

ㄴ. $-x=t$로 놓으면

$x\to0+$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim_{x\to0+} h(x)=\lim_{x\to0+}\{f(x)+f(-x)\}$

$=\lim_{x\to0+} f(x)+\lim_{t\to0-} f(t)$

$=0+(-1)=-1$

$x\to0-$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to0-} h(x)=\lim_{x\to0-}\{f(x)+f(-x)\}$

$=\lim_{x\to0-} f(x)+\lim_{t\to0+} f(t)$

$=-1+0=-1$

$\therefore \lim_{x\to0} h(x)=-1$

$\therefore \lim_{x\to0} |h(x)|=1$

이때 $|h(0)|=|2f(0)|=\left|2\cdot\frac{1}{2}\right|=1$이므로

$\lim_{x\to0}|h(x)|=|h(0)|$

따라서 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $g(0)=f(0)+|f(0)|=\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{2}\right|=1$이므로

$g(0)|h(0)|=1\cdot1=1$

$\lim_{x\to0} g(x)|h(x)|=\lim_{x\to0} g(x)\cdot\lim_{x\to0}|h(x)|$

$=0\cdot1=0$

ㄱ, ㄴ의 결과를 이용한다.

이므로 $\lim_{x\to0} g(x)|h(x)|\neq g(0)|h(0)|$

따라서 함수 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

16 전략 $f(x)$의 식을 세운 후 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x)g(x)=x(x+3)$에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=0$

이때 조건 (나)에서 $g(0)=1$이므로 $f(0)=0$

즉 $f(x)$는 x를 인수로 갖고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

라 하자.

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$x(x^2+ax+b)g(x)=x(x+3)$

이므로 $x^2+ax+b\neq0$일 때,

$g(x)=\dfrac{x+3}{x^2+ax+b}$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0} g(x)=g(0)$

$\lim_{x\to0}\dfrac{x+3}{x^2+ax+b}=1$

$\dfrac{3}{b}=1 \quad \therefore b=3$

이때 $x^2+ax+3\neq0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 판별식을 D라 하면

이차방정식 $x^2+ax+3=0$이 실근을 갖지 않아야 한다.

$D=a^2-4\cdot3<0$

$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0$

$\therefore -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

$f(1)=a+4$가 자연수이므로 a는 -3 이상인 정수이다.

$f(x)=x(x^2+ax+3)$이므로 $f(1)=1\cdot(1+a+3)$ $=a+4$

따라서 a의 값은

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

$g(x)=\dfrac{x+3}{x^2+ax+3}$에서

$g(2)=\dfrac{5}{2a+7}$

이고 분모가 클수록 $g(2)$의 값이 작아지므로 $g(2)$의 최솟값은 $a=3$일 때 $\frac{5}{13}$이다. 답 ①

03 미분계수와 도함수

Lecture 05 미분계수

32쪽

01 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}$

$=\frac{4-7}{3}=-1$ 답 -1

02 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$

$=\frac{16-4}{2}=6$ 답 6

03 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{(-1+\Delta x)-(-1)}$

$=\frac{\{3(-1+\Delta x)^2-1\}-2}{\Delta x}$

$=\frac{-6\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=-6+3\Delta x$ 답 $-6+3\Delta x$

$f(-1+\Delta x)$는 $f(x)$에 x 대신 $-1+\Delta x$를 대입한 것이다.

04 $f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{7(2+\Delta x)+2\}-16}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7\Delta x}{\Delta x}=7$ 답 7

다른 풀이 $f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(7x+2)-16}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{7(x-2)}{x-2}=7$

05 $f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-(\Delta x)^2+2\Delta x+5\}-5}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-\Delta x+2)=2$ 답 2

06 $f(x)=-2x^2+10$이라 하면 점 $(-3,\ -8)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-3+\Delta x)-f(-3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-2(-3+\Delta x)^2+10\}-(-8)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{12\Delta x-2(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(12-2\Delta x)=12$ 답 12

07 $f(x)=x^3+x^2+4$라 하면 점 $(1,\ 6)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^3+(1+\Delta x)^2+4\}-6}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3+4(\Delta x)^2+5\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{(\Delta x)^2+4\Delta x+5\}=5$ 답 5

08 (i) $f(1)=0$, $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}|x^2-1|=0$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}(x+1)=2,$

$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}\frac{-(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}\{-(x+1)\}=-2$

이므로 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이 존재하지 않는다.

미분계수 $f'(1)$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

답 연속이지만 미분가능하지 않다.

09 (i) $\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}2x^2=2$,

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(x^3+x)=2$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=2$

이때 $f(1)=2$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{2x^2-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}2(x+1)$

$=4,$

$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+x-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}(x^2+x+2)=4$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3+x-2$
$=(x-1)(x^2+x+2)$

이므로 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=4$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 미분가능하다.

답 연속이고 미분가능하다.

01 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(a)}{3-a}=\frac{19-(a^3-8)}{3-a}=\frac{a^3-27}{a-3}$$
$$=\frac{(a-3)(a^2+3a+9)}{a-3}$$
$$=a^2+3a+9$$

따라서 $a^2+3a+9=9$이므로

$a^2+3a=0$, $a(a+3)=0$

$\therefore a=-3\ (\because a<0)$ 답 ③

02 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -2에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{4-(-11)}{3}=5$$

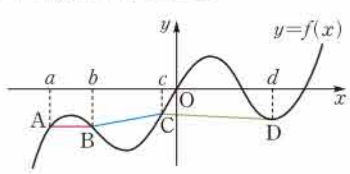
함수 $f(x)$에서 x의 값이 -3에서 k까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(k)-f(-3)}{k-(-3)}=\frac{(-k^2+4k+1)-(-20)}{k+3}$$
$$=\frac{-(k+3)(k-7)}{k+3}$$
$$=-(k-7)$$

따라서 $-(k-7)=5$이므로

$k-7=-5$ $\therefore k=2$ 답 2

03 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지, b에서 c까지, c에서 d까지 변할 때의 평균변화율 α, β, γ는 각각 다음 그림에서 두 점 A와 B, B와 C, C와 D를 지나는 직선의 기울기와 같으므로



$\alpha=0$, $\beta>0$, $\gamma<0$

$\therefore \gamma<\alpha<\beta$ 답 ④

$f(a)=f(b)$이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 0이다.

04 $f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{-(1+h)^3+a(1+h)+7\}-(a+6)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-h^3-3h^2+(a-3)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(-h^2-3h+a-3)=a-3$$

따라서 $a-3=-1$이므로

$a=2$ 답 2

미분계수의 정의에서 Δx 대신 h를 사용하여

$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

와 같이 나타내기도 한다.

05 함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 5까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{85-1}{4}=21$$

함수 $f(x)$의 $x=c$에서의 미분계수는

$$f'(c)=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{4(c+h)^2-3(c+h)\}-(4c^2-3c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{4h^2+(8c-3)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(4h+8c-3)=8c-3$$

따라서 $8c-3=21$이므로

$c=3$ 답 ③

06 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+5h)-f(2-2h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+5h)-f(2)+f(2)-f(2-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+5h)-f(2)\}-\{f(2-2h)-f(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+5h)-f(2)}{5h}\cdot5-\lim_{h\to0}\frac{f(2-2h)-f(2)}{-2h}\cdot(-2)$$
$$=5f'(2)+2f'(2)=7f'(2)$$
$$=7\cdot3=21$$ 답 ⑤

분자가 $f(2+5h)-f(2)$이므로 분모가 $5h$가 되도록 변형한다.

분자가 $f(2-2h)-f(2)$이므로 분모가 $-2h$가 되도록 변형한다.

07 $\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-3}{h}=-4$에서 $h\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{h\to0}\{f(-1+h)-3\}=0$이므로

$f(-1)=3$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)$$

따라서 $f'(-1)=-4$이므로

$f(-1)+f'(-1)=-1$ 답 -1

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

08 $\lim_{x\to4}\frac{4f(x)-xf(4)}{x-4}$

$$=\lim_{x\to4}\frac{4f(x)-4f(4)+4f(4)-xf(4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{4\{f(x)-f(4)\}-(x-4)f(4)}{x-4}$$
$$=4\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}-f(4)$$
$$=4f'(4)-f(4)$$
$$=4\cdot5-8=12$$ 답 12

09 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x^2-1}=2$에서 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)+2\}=0$이므로

$f(1)=-2$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-(-2)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=f'(1)\cdot\frac{1}{2}$$

따라서 $\frac{1}{2}f'(1)=2$이므로

$f'(1)=4$ 답 ②

함수의 극한에 대한 성질을 이용하면
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
$\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$
$=f'(1)\cdot\frac{1}{2}$

10 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$

주어진 식은 모든 실수 x, y에 대하여 성립하는 항등식이므로 $x=0$, $y=0$을 대입해도 등식이 성립한다.

$$\therefore f'(-5)=\lim_{h\to0}\frac{f(-5+h)-f(-5)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-5)+f(h)-f(-5)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=f'(0)=7$$
답 ①

11 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0$ $\quad\therefore f(0)=0$

이때

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)-2h-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-2$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-2$$
$$=f'(0)-2$$

이므로

$f'(0)-2=3$ $\quad\therefore f'(0)=5$

$\therefore f'(-1)$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1)+f(h)-(-h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+1$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+1$$
$$=f'(0)+1=6$$
답 6

12 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ f(3))$에서의 접선의 기울기가 5이므로

$f'(3)=5$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-x-6}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{(x+2)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+2}$$
$$=f'(3)\cdot\frac{1}{5}=5\cdot\frac{1}{5}=1$$
답 ③

13 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같고, 이 접선은 두 점 $(1,\ 0)$, $(2,\ 1)$을 지나므로

$$f'(2)=\frac{1-0}{2-1}=1$$
$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2+6h)-f(2)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+6h)-f(2)}{6h}\cdot2$$
$$=2f'(2)=2\cdot1=2$$
답 2

14 ① (i) $f(0)=10$, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}10=10$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{10-10}{x}=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

② (i) $f(0)=0$, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x|x|=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x\cdot x}{x}$
$=\lim_{x\to0+}x=0,$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x\cdot(-x)}{x}$
$=\lim_{x\to0-}(-x)=0$

이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

③ 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 정의되어 있지 않으므로 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

④ (i) $f(0)=0$, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}|x^3|=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^3}{x}$
$=\lim_{x\to0+}x^2=0,$

$x<0$일 때, $x^3<0$이므로 $|x^3|=-x^3$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x^3}{x}$
$=\lim_{x\to0-}(-x^2)=0$

이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

⑤ (i) $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(2x+1)=1$,

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(x-1)^2=1$

이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=1$

이때 $f(0)=1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{(2x+1)-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0+}2=2,$

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{(x-1)^2-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x^2-2x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0-}(x-2)=-2$

이므로 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

답 ⑤

15 ㄱ. $\lim\limits_{x\to4+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to4-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to4}f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=4$, $x=5$에서 불연속이므로 불연속인 x의 값은 2개이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=4$, $x=5$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x의 값은 3개이다.

ㄹ. $f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$의 1개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

> 함수 $f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 꺾인 경우
> ➡ $f'(a)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

Lecture 06 도함수

36쪽

01 $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{5-5}{h}=0$ 답 $f'(x)=0$

02 $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{3(x+h)^2+2\}-(3x^2+2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{6xh+3h^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}(6x+3h)$

$=6x$ 답 $f'(x)=6x$

03 $y'=(x^{10})'=10x^9$ 답 $y'=10x^9$

04 $y'=(5x^2+6x+1)'=(5x^2)'+(6x)'+(1)'$

$=10x+6$ 답 $y'=10x+6$

> $(5x^2)'=5(x^2)'=5\cdot2x$
> $=10x$

05 $y'=(-x^3+2x^2-7)'=(-x^3)'+(2x^2)'-(7)'$

$=-3x^2+4x$ 답 $y'=-3x^2+4x$

06 $y'=\left(x^5-\dfrac{1}{4}x^2+x\right)'=(x^5)'-\left(\dfrac{1}{4}x^2\right)'+(x)'$

$=5x^4-\dfrac{1}{2}x+1$ 답 $y'=5x^4-\dfrac{1}{2}x+1$

07 함수 $f(x)+2g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$f'(1)+2g'(1)=2+2\cdot(-3)=-4$ 답 -4

> $\{f(x)+2g(x)\}'$
> $=f'(x)+2g'(x)$

QBOX

08 함수 $4f(x)-3g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$4f'(1)-3g'(1)=4\cdot2-3\cdot(-3)=17$ 답 17

09 $y'=(x^2+4x)'(x-7)+(x^2+4x)(x-7)'$

$=(2x+4)(x-7)+(x^2+4x)\cdot1$

$=3x^2-6x-28$ 답 $y'=3x^2-6x-28$

> 함수의 곱의 미분법을 이용하면 곱의 꼴로 나타낸 함수식을 전개하지 않고 미분할 수 있다.

10 $y'=(x+1)'(2x-5)(3x-2)$

$+(x+1)(2x-5)'(3x-2)$

$+(x+1)(2x-5)(3x-2)'$

$=1\cdot(2x-5)(3x-2)+(x+1)\cdot2\cdot(3x-2)$

$+(x+1)(2x-5)\cdot3$

$=18x^2-26x-9$ 답 $y'=18x^2-26x-9$

11 $y'=\{(5x-1)^4\}'=4(5x-1)^3(5x-1)'$

$=4(5x-1)^3\cdot5=20(5x-1)^3$

답 $y'=20(5x-1)^3$

표준+발전 유형 Q+Q

37쪽

01 $f(-2)=-3$에서

$4a-2b-5=-3$ $\quad\therefore 2a-b=1$ …… ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로 $f'(1)=7$에서

$2a+b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$

따라서 $f(x)=2x^2+3x-5$이므로

$f(-3)=18-9-5=4$ 답 ⑤

02 $f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{48}+x^{49}$이므로

$f'(1)=1+1+1+\cdots+1+1=50$ 답 50

> 1을 50번 더한 값이다.

03 $f'(x)=(x^2+x-1)'(x^3-x^2+x-1)$

$+(x^2+x-1)(x^3-x^2+x-1)'$

$=(2x+1)(x^3-x^2+x-1)$

$+(x^2+x-1)(3x^2-2x+1)$

$\therefore f'(2)=5\cdot5+5\cdot9=70$ 답 ①

> 함숫값을 구하는 문제이므로 $f'(x)$의 식을 전개하지 않고 $x=2$를 대입하는 것이 편리하다.

04 $g'(x)=(x^3-5x)'f(x)+(x^3-5x)f'(x)$

$=(3x^2-5)f(x)+(x^3-5x)f'(x)$

$\therefore g'(-1)=-2f(-1)+4f'(-1)$

$=-2\cdot3+4\cdot2=2$ 답 2

05 $f'(x)=3\left(\dfrac{1}{3}x-a\right)^2\left(\dfrac{1}{3}x-a\right)'=\left(\dfrac{1}{3}x-a\right)^2$

$f'(3)=4$에서

$(1-a)^2=4,\quad 1-a=\pm2$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 $f'(0)=(-3)^2=9$이므로

$a+f'(0)=12$ 답 ③

06 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3+3h)}{7h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)+f(3)-f(3+3h)}{7h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(3-h)-f(3)\}-\{f(3+3h)-f(3)\}}{7h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)$

$-\lim_{h\to 0}\frac{f(3+3h)-f(3)}{3h}\cdot\frac{3}{7}$

$=-\frac{1}{7}f'(3)-\frac{3}{7}f'(3)=-\frac{4}{7}f'(3)$

이때 $f'(x)=-3x^2+4x+1$이므로

$-\frac{4}{7}f'(3)=-\frac{4}{7}\cdot(-27+12+1)$

$=-\frac{4}{7}\cdot(-14)=8$ 답 8

07 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x^2f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)+f(1)-x^2f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)-(x^2-1)f(1)}{x-1}$

$x^2-1=(x+1)(x-1)$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to 1}(x+1)f(1)$

$=f'(1)-2f(1)$

이때

$f'(x)=2(3x-1)\cdot 3=6(3x-1)$

이므로 $f'(1)=6\cdot 2=12$

또 $f(1)=2^2=4$이므로

$f'(1)-2f(1)=12-2\cdot 4=4$ 답 ①

08 $\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)+9}{h}=26$에서 $h\longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{h\to 0}\{f(-2+h)+9\}=0$이므로

$f(-2)=-9$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)+9}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=f'(-2)$

$\therefore f'(-2)=26$

이때 $f'(x)=3ax^2+2$이므로

$12a+2=26$ $\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2x^3+2x+b$이므로 $f(-2)=-9$에서

$-16-4+b=-9$ $\therefore b=11$

$\therefore b-a=9$ 답 ④

09 조건 (가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$의 값이 1, 즉 0이 아닌 실수이므로
① $f(x)$와 x^2의 차수가 같다.
② $f(x)$와 x^2의 최고차항의 계수의 비가 1이다.
➡ $f(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차함수이다.

조건 (나)의 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=-3$에서 $x\longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f(0)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

$\therefore f'(0)=-3$

이때 $f'(x)=2x+a$이므로

$a=-3$

또 $f(0)=1$에서 $b=1$

따라서 $f(x)=x^2-3x+1$이므로

$f(2)=4-6+1=-1$ 답 -1

10 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$
➡ $\lim_{x\to 2+}f(x)$
$=\lim_{x\to 2-}f(x)$
$=f(2)$

즉 $\lim_{x\to 2-}(ax+b)=f(2)$이므로

$2a+b=10$ ······ ㉠

$f'(x)=\begin{cases}2x+3 & (x>2)\\ a & (x<2)\end{cases}$이고 $f'(2)$가 존재하므로

$\lim_{x\to 2+}(2x+3)=\lim_{x\to 2-}a$

$\lim_{x\to 2+}f'(x)=\lim_{x\to 2-}f'(x)$

$4+3=a$ $\therefore a=7$

$a=7$을 ㉠에 대입하면

$14+b=10$ $\therefore b=-4$

$\therefore a+b=3$ 답 3

다른 풀이 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$

즉 $\lim_{x\to 2-}(ax+b)=f(2)$이므로

$2a+b=10$ $\therefore b=10-2a$ ······ ㉠

$f'(2)$가 존재하므로

$x=2$에서의 미분계수가 존재
➡ $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$가 존재

$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x^2+3x)-10}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}\frac{(x+5)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}(x+5)=7,$

$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(ax+b)-10}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}\frac{ax-2a}{x-2}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim_{x\to 2-}\frac{a(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}a$

$=a$

에서 $a=7$

$a=7$을 ㉠에 대입하면 $b=-4$

$\therefore a+b=3$

11 $f(x)=\begin{cases}(x+a)(x-3) & (x\ge 3)\\ -(x+a)(x-3) & (x<3)\end{cases}$이므로

$f'(x)=\begin{cases}(x-3)+(x+a) & (x>3)\\ -(x-3)-(x+a) & (x<3)\end{cases}$

$f'(3)$이 존재하므로

$\lim_{x\to 3+}\{(x-3)+(x+a)\}$

$=\lim_{x\to 3-}\{-(x-3)-(x+a)\}$

$3+a=-(3+a)$ $\therefore a=-3$ 답 ①

다른 풀이 $f'(3)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{(x+a)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}(x+a)$$
$$=3+a,$$
$$\lim_{x\to3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{-(x+a)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\{-(x+a)\}$$
$$=-(3+a)$$

에서 $3+a=-(3+a)$

$\therefore a=-3$

Q BOX

$f(3)=(3+a)\cdot0$
$=0$

12 $f(x)=x^n+3x$라 하면 $f(1)=4$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)$$

$\therefore f'(1)=13$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}+3$이므로

$n+3=13$ $\therefore n=10$ 답 ③

13 $f(x)=x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdots+x^2+x$라 하면

$f(1)=15$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdots+x^2+x-15}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)$$

이때 $f'(x)=15x^{14}+14x^{13}+13x^{12}+\cdots+2x+1$이므로

$$f'(1)=15+14+13+\cdots+2+1$$
$$=\sum_{k=1}^{15}k$$
$$=\frac{15\cdot16}{2}=120$$ 답 120

14 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$(2x-1)(2ax+b)-4(ax^2+bx+c)+5=0$

$\therefore 2(a+b)x+b+4c-5=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2(a+b)=0$ $\therefore a+b=0$ ...... ㉠

$b+4c-5=0$ $\therefore b+4c=5$ ...... ㉡

$f(1)=1$에서 $a+b+c=1$ ...... ㉢

㉠을 ㉢에 대입하면 $c=1$

$c=1$을 ㉡에 대입하면

$b+4=5$ $\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$a+1=0$ $\therefore a=-1$

따라서 $f'(x)=-2x+1$이므로

$f'(3)=-6+1=-5$ 답 -5

ax^2+bx+c
$=a'x^2+b'x+c'$
이 x에 대한 항등식이면
$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

$f(x)=ax^2+b$가 이차함수이므로 $a\neq0$

$ax+b=0$이 x에 대한 항등식이면
$a=b=0$

다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수이거나 일차식이다.

다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면
$A=BQ+R$
특히 $R=0$이면 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

15 $f'(x)=2ax$이므로 $f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$ax^2+b=(2ax)^2+3$

$\therefore ax^2+b=4a^2x^2+3$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=4a^2$, $b=3$

$a=4a^2$에서 $4a^2-a=0$

$a(4a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{4}$ ($\because a\neq0$)

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+3$이므로

$f(4)=4+3=7$ 답 ②

16 $f(x)=x^3-3x^2+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x$

$f(x)$가 $(x-b)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(b)=0$, $f'(b)=0$

$f(b)=0$에서

$b^3-3b^2+a=0$ ...... ㉠

$f'(b)=0$에서 $3b^2-6b=0$

$b(b-2)=0$

$\therefore b=2$ ($\because b>0$)

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$8-12+a=0$ $\therefore a=4$

$\therefore a+b=6$ 답 ①

쌤한마디

다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어질 때, 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-a)^2Q(x)$ ... ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$ ... ㉡

이때 $x=a$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$f(a)=0$, $f'(a)=0$

17 x^9-1을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^9-1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2=-a+b$

$\therefore a-b=2$ ...... ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$9x^8=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a=9$

$a=9$를 ㉡에 대입하면

$9-b=2$ $\therefore b=7$

따라서 $R(x)=9x+7$이므로

$R(2)=18+7=25$ 답 25

중단원 마무리

L 40쪽

01 전략 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$임을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{h\to 0}\frac{f(5+kh)-f(5)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(5+kh)-f(5)}{kh}\cdot k=kf'(5)$

따라서 $kf'(5)=6$이므로

$3k=6\qquad \therefore k=2$

답 ③

02 전략 $x\to -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$임을 이용하여 $f(-1)$의 값을 구하고, 주어진 등식의 좌변을 $f'(-1)$을 포함한 식으로 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-4}{x^3+1}=1$에서 $x\to -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

$\lim_{x\to -1}(x^3+1)=-1+1=0$

즉 $\lim_{x\to -1}\{f(x)-4\}=0$이므로

$f(-1)=4$

$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{f(x)-4}{x^3+1}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}$

$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}$

$=f'(-1)\cdot\frac{1}{3}$

따라서 $\frac{1}{3}f'(-1)=1$이므로

$f'(1)=3$

답 ①

03 전략 $f(x)=-f(-x)$와 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x^2)-f(9)}{f(x)+f(-3)}$

$f(x)=-f(-x)$이므로 $f(-3)=-f(3)$

$=\lim_{x\to 3}\frac{f(x^2)-f(9)}{f(x)-f(3)}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}\cdot\frac{x-3}{f(x)-f(3)}\cdot(x+3)$

$=\lim_{x\to 3}\frac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}\cdot\frac{1}{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}}\cdot(x+3)$

$x^2=t$로 놓으면 $x\to 3$일 때 $t\to 9$이므로

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}$

$=\lim_{t\to 9}\frac{f(t)-f(9)}{t-9}$

$=f'(9)$

$=f'(9)\cdot\frac{1}{f'(3)}\cdot 6$

$=\frac{36}{f'(3)}$ ······ ㉠ ··· ❶

$f(x)=-f(-x)$이므로

$f(3+h)$

$=-f(-(3+h))$

$=-f(-3-h)$

$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{-f(-3-h)+f(-3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-3-h)-f(-3)}{-h}$

$=f'(-3)=2$ ··· ❷

따라서 ㉠에서

$\frac{36}{f'(3)}=\frac{36}{2}$

$=18$ ··· ❸

답 18

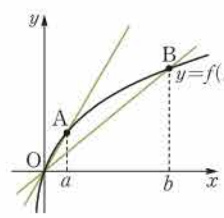
단계	채점 기준	비율
❶	주어진 극한을 변형할 수 있다.	50 %
❷	$f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	극한값을 구할 수 있다.	20 %

04 전략 주어진 식의 기하적 의미를 파악하고 그래프를 이용하여 참, 거짓을 확인한다.

풀이 ① 다음 그림에서 직선 OA의 기울기가 직선 OB의 기울기보다 크므로

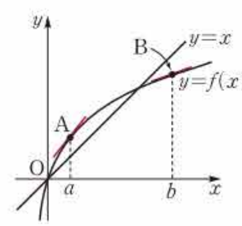
$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}>\frac{f(b)-f(0)}{b-0}$

$\therefore \frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$



② 오른쪽 그림에서 점 B에서의 접선의 기울기가 직선 $y=x$의 기울기보다 작으므로

$f'(b)<1$

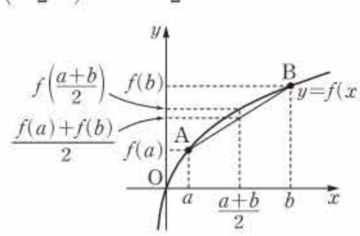


③ 오른쪽 그림에서 점 A에서의 접선의 기울기가 점 B에서의 접선의 기울기보다 크므로

$f'(a)>f'(b)$

④ $a\le x\le b$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로 다음 그림에서

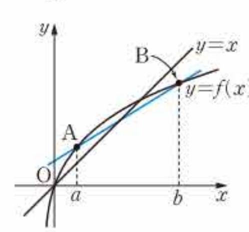
$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$



⑤ 오른쪽 그림에서 직선 AB의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기보다 작으므로

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$

$\therefore f(b)-f(a)<b-a$



답 ⑤

05 전략 그래프를 해석하여 함수의 극한, 연속과 미분가능성 등을 파악한다.

풀이 ㄱ. $-3<a<3$인 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to a} f(x)$가 항상 존재한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 불연속이므로 불연속인 x의 값은 2개이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=1$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x의 값은 3개이다.

ㄹ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않으므로 $f'(1)$이 존재하지 않는다.

따라서 도함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

QBOX: 그래프가 꺾여 있으므로 미분가능하지 않다.

QBOX: 도함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 정의되어 있지 않다.

06 전략 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$에서 $f(x+h)$를 주어진 항등식을 이용하여 변형한다.

풀이 ㄱ. 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0-1$

$\therefore f(0)=1$

ㄴ. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}+2x$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+2x$

$=f'(0)+2x$

$=2x-5$

ㄷ. $f'(x)$가 일차함수이므로 $f(x)$는 이차함수이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

QBOX: $n\geq 2$일 때, $f(x)$가 n차함수이면 $f'(x)$는 $(n-1)$차함수이므로 $n-1=1$에서 $n=2$ 따라서 $f(x)$는 이차함수이다.

07 전략 평균변화율을 a에 대한 식으로 나타내고, 도함수를 구하여 $f'(2)$의 값을 구한 후 a에 대한 방정식을 세운다.

풀이 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a^3-3a^2+5a}{a}$

$=a^2-3a+5$

$f'(x)=3x^2-6x+5$이므로

$f'(2)=12-12+5=5$

따라서 $a^2-3a+5=5$이므로

$a^2-3a=0,\quad a(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 3

08 전략 $y'=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=(2x-5)'(x^2-ax+1)$
$+(2x-5)(x^2-ax+1)'$
$=2(x^2-ax+1)+(2x-5)(2x-a)$ ⋯ ❶

$y=f(x)g(x)$에서

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이므로 곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=\{2(2-a)-3(2-a)\}\cdot 2-3(2-a)\cdot(-3)$

$=7(2-a)$ ⋯ ❷

따라서 $7(2-a)=7$이므로

$2-a=1\quad \therefore a=1$ ⋯ ❸

답 1

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷	$x=1$인 점에서의 접선의 기울기를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸	a의 값을 구할 수 있다.	20 %

09 전략 주어진 극한값을 이용하여 $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구한 후 $g'(x)$에 대입한다.

풀이 $g(x)=xf(x)$에서

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$

$\therefore g'(1)=f(1)+f'(1)$ ⋯⋯ ㉠

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-5}{x-1}=9$에서 $x\to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x)-5\}=0$이므로

$f(1)=5$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-5}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$\therefore f'(1)=9$

따라서 ㉠에서

$g'(1)=5+9=14$ 답 14

10 전략 $\frac{1}{n}=h$로 치환하여 주어진 극한을 함수 $f(x)$의 미분계수로 나타낸다.

풀이 $\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $h\to 0$이므로

$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+3h)-f(1)\}-\{f(1-2h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot 3$

$-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)$

$=3f'(1)+2f'(1)=5f'(1)$

이때 $f'(x)=8x^3-3$이므로

$5f'(1)=5\cdot(8-3)=25$ 답 25

11 전략 주어진 두 극한값을 이용하여 $f'(2)$, $f'(3)$의 값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=-13$

$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)+f(3)-f(3-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(3+h)-f(3)\}-\{f(3-h)-f(3)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$-\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\cdot(-1)$

$=f'(3)+f'(3)=2f'(3)$

이므로 $2f'(3)=6$ $\therefore f'(3)=3$

이때 $f'(x)=4x^3+3ax^2+b$이므로

$f'(2)=-13$에서

$32+12a+b=-13$

$\therefore 12a+b=-45$ …… ㉠

$f'(3)=3$에서

$108+27a+b=3$

$\therefore 27a+b=-105$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=3$

따라서 $f(x)=x^4-4x^3+3x+1$이므로

$f(-1)=1+4-3+1=3$ 답 ④

12 전략 두 조건에서 극한값이 존재함을 이용하여 함수 $f(x)$를 유추한다.

풀이 다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\neq0$, $a\neq1$, n은 자연수)이라 하면 조건 (가)의

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}=4$에서 분자의 최고차항은 $(a^2-a)x^{2n}$, 분모의 최고차항은 ax^{n+3}이다.

$\{f(x)\}^2$의 최고차항은 a^2x^{2n}, $f(x^2)$의 최고차항은 ax^{2n}이다.

또 $x\to\infty$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하므로 분자와 분모의 차수가 같고, 극한값은 최고차항의 계수의 비와 같다.

즉 $2n=n+3$이므로 $n=3$

$f(x)$는 삼차함수이다.

또 $\frac{a^2-a}{a}=4$이므로

$a-1=4$ ($\because a\neq0$)

$\therefore a=5$

$f(x)=5x^3+bx^2+cx+d$ (b, c, d는 상수)라 하면

$f'(x)=15x^2+2bx+c$

조건 (나)에서

$\lim_{x\to0}\frac{15x^2+2bx+c}{x}=4$ …… ㉠

$x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(15x^2+2bx+c)=0$이므로 $c=0$

$c=0$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{15x^2+2bx}{x}=\lim_{x\to0}(15x+2b)=2b$

이므로 $2b=4$ $\therefore b=2$

따라서 $f'(x)=15x^2+4x$이므로

$f'(1)=15+4=19$ 답 19

13 전략 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이고 $x=-1$에서의 미분계수가 존재함을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하면 $x=-1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-1$에서 미분가능하다.

즉 $\lim_{x\to-1-}(-x^2+bx+3)=f(-1)$이므로

$-1-b+3=-a+5$

$\therefore a-b=3$ …… ㉠

$f'(x)=\begin{cases}3ax^2-5 & (x>-1)\\ -2x+b & (x<-1)\end{cases}$이고 $f'(-1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to-1+}(3ax^2-5)=\lim_{x\to-1-}(-2x+b)$

$3a-5=2+b$

$\therefore 3a-b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-1$

$\therefore a+b=1$ 답 1

14 전략 주어진 식의 일부를 $f(x)$로 치환하여 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $f(x)=x^{3n+1}-x^{n+1}-x$라 하면 $f(1)=-1$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x^{3n+1}-x^{n+1}-x+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)$ … ❶

이때 $f'(x)=(3n+1)x^{3n}-(n+1)x^n-1$이므로

$f'(1)=(3n+1)-(n+1)-1$

$=2n-1$ … ❷

따라서 $2n-1=13$이므로

$n=7$ … ❸

답 7

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 등식의 좌변을 미분계수로 나타낼 수 있다.	50 %
❷	$f'(1)$의 값을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸	n의 값을 구할 수 있다.	10 %

15 전략 $f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하여 x에 대한 항등식을 세운다.

풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$x(2ax+b)=ax^2+bx+c+2x^2-5$

$\therefore 2ax^2+bx=(a+2)x^2+bx+c-5$

앞의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a=a+2,\ 0=c-5$

$\therefore a=2,\ c=5$

또 $f'(3)=4$이므로

$2\cdot 2\cdot 3+b=4$

$\therefore b=-8$

따라서 $f(x)=2x^2-8x+5$이므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $2x^2-8x+5=0$의 두 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{-8}{2}=4$ 답 ⑤

16 전략 $f(x)$를 몫과 나머지를 이용하여 나타낸 후 그래프 위의 점의 좌표와 그 점에서의 접선의 기울기를 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

$f(1)=4$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

> 점 (1, 4)가 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $f(1)=4$

$a+b=4$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

$f'(1)=-8$이므로 위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

> $y=f(x)$의 그래프 위의 점 (1, 4)에서의 접선의 기울기가 -8이므로 $f'(1)=-8$

$a=-8$

$a=-8$을 ㉡에 대입하면

$-8+b=4 \qquad \therefore b=12$

따라서 $R(x)=-8x+12$이므로

$R(3)=-24+12=-12$ 답 -12

17 전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$의 식을 세우고 부등식을 만족시키도록 두 함수 $y=|f'(x)|$, $y=4x^2+5$의 그래프를 그려 본다.

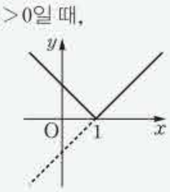
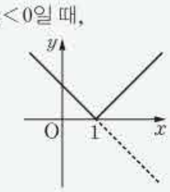
풀이 이차함수 $y=f(x)$의 최고차항의 계수가 a이고, $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$이므로

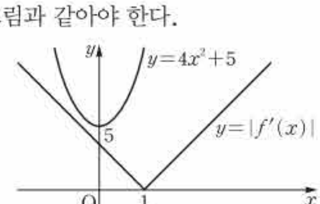
$f(x)=a(x-1)^2+b$ (b는 상수)라 하면

> $f(x)$가 이차함수이므로 $a\neq 0$

$f'(x)=2a(x-1)$

함수 $y=f'(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 (1, 0)을 지나는 직선이고, $|f'(x)|\le 4x^2+5$를 만족시키려면 두 함수 $y=4x^2+5$, $y=|f'(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.

> $y=|2a(x-1)|$의 그래프는
>
> $a>0$일 때,
>
> 
>
>
> $a<0$일 때,
>
> 
>
>
> 즉 $a>0$일 때와 $a<0$일 때의 그래프는 일치한다.



이때 a는 $y=|f'(x)|$의 그래프에서 $x<1$인 부분이 함수 $y=4x^2+5$의 그래프와 접할 때 최댓값을 갖는다.

$a>0$일 때, $|f'(x)|=4x^2+5$에서

$|2a(x-1)|=4x^2+5$

$-2a(x-1)=4x^2+5$ ($\because a>0,\ x<1$)

$\therefore 4x^2+2ax+5-2a=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-4(5-2a)=0$

$a^2+8a-20=0, \qquad (a+10)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

따라서 a의 최댓값은 2이다. 답 ②

쌤한마디

$a>0$일 때와 $a<0$일 때, 함수 $y=|f'(x)|$의 그래프는 일치하고, a의 최댓값을 구해야 하므로 $a>0$인 경우만 생각하면 된다.

18 전략 주어진 두 극한값을 이용하여 $f(0)$, $g(0)$, $f'(0)$, $g'(0)$의 값을 구한다.

풀이 $h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\therefore h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$ …… ㉠

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$에서 $x\to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=0$이므로

$f(0)+g(0)=0$ …… ㉡

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$에서 $x\to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\{f(x)+3\}=0$이므로

$f(0)=-3$

$f(0)=-3$을 ㉡에 대입하면

$-3+g(0)=0 \qquad \therefore g(0)=3$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-g(0)+g(x)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\\&=f'(0)+g'(0)\end{aligned}$$

이므로 $f'(0)+g'(0)=3$ …… ㉢

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\frac{1}{g(x)}=\frac{f'(0)}{g(0)}$$

이므로 $\dfrac{f'(0)}{g(0)}=2$

$\therefore f'(0)=2g(0)=2\cdot 3=6$

$f'(0)=6$을 ㉢에 대입하면

$6+g'(0)=3 \qquad \therefore g'(0)=-3$

따라서 $f(0)=-3$, $f'(0)=6$, $g(0)=3$, $g'(0)=-3$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}h'(0)&=6\cdot 3+(-3)\cdot(-3)\\&=27\end{aligned}$$ 답 ①

04 도함수의 활용 (1)

Lecture 07 접선의 방정식

44쪽

01 $f(x)=-x^2+3x+2$라 하면

$f'(x)=-2x+3$

점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=2+3=5$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-2)=5\{x-(-1)\}$

$\therefore\ y=5x+3$ 답 $y=5x+3$

02 $f(x)=x^3-4x^2-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-8x$

점 $(2,\ -9)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=12-16=-4$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-9)=-4(x-2)$

$\therefore\ y=-4x-1$ 답 $y=-4x-1$

03 $f(x)=x^3+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2$

점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3$

이므로 점 $(1,\ 4)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 점 $(1,\ 4)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y-4=-\frac{1}{3}(x-1)$

$\therefore\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$ 답 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$

04 $g(x)=2x^2-6x$라 하면

$g'(x)=4x-6$

$\therefore\ f(3)=g(3)=18-18=0,$

$f'(3)=g'(3)=12-6=6$

답 $f(3)=0,\ f'(3)=6$

05 $f(x)=3x^2-2x+5$라 하면

$f'(x)=6x-2$

접점의 좌표를 $(t,\ 3t^2-2t+5)$라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=4,\qquad 6t-2=4$

$\therefore\ t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 6)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-6=4(x-1)$

$\therefore\ y=4x+2$ 답 $y=4x+2$

Q BOX

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 수직이면 $mm'=-1$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$

주어진 곡선에 접하고 기울기가 -9인 직선은 2개이다.

$x=1$을 $y=-x^2+x-5$에 대입하면 $y=-1+1-5=-5$이므로 점 $(1,\ -1)$은 곡선 위의 점이 아니다.

06 $f(x)=-x^3+3x-4$라 하면

$f'(x)=-3x^2+3$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+3t-4)$라 하면 접선의 기울기가 -9이므로

$f'(t)=-9,\qquad -3t^2+3=-9$

$t^2=4\qquad \therefore\ t=-2$ 또는 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ -2)$, $(2,\ -6)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-2)=-9\{x-(-2)\}$,

$y-(-6)=-9(x-2)$

$\therefore\ y=-9x-20,\ y=-9x+12$

답 $y=-9x-20,\ y=-9x+12$

07 $f(x)=-x^2+x-5$라 하면

$f'(x)=-2x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+t-5)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=-2t+1$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+t-5)=(-2t+1)(x-t)$

$\therefore\ y=(-2t+1)x+t^2-5$ ...... ㉠

직선 ㉠이 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$-1=-2t+1+t^2-5,\qquad t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0\qquad \therefore\ t=-1$ 또는 $t=3$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=3x-4$

$t=3$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-5x+4$

답 $y=3x-4,\ y=-5x+4$

08 $f(x)=x^3+2x$라 하면

$f'(x)=3x^2+2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2t)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+2$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t)=(3t^2+2)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2+2)x-2t^3$ ...... ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ 16)$을 지나므로

$16=-2t^3,\qquad t^3=-8$

$\therefore\ t=-2$

$t=-2$를 ㉠에 대입하면

$y=14x+16$ 답 $y=14x+16$

표준+발전 유형 Q+Q

45쪽

01 점 $(-1,\ 4)$가 곡선 $y=x^3+ax^2-bx+2$ 위의 점이므로

$4=-1+a+b+2$

$\therefore\ a+b=3$ ...... ㉠

$f(x)=x^3+ax^2-bx+2$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax-b$

점 $(-1,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(-1)=3, \qquad 3-2a-b=3$

$\therefore\ 2a+b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=6$

$\therefore\ ab=-18$

답 ②

02 $f(x)=-x^3+3x^2+15x-1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x+15=-3(x-1)^2+18$

이므로 이차함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 최댓값 18을 갖는다.

$\therefore\ a=1,\ k=18$

점 $(a,\ b)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$b=f(1)=-1+3+15-1=16$

$\therefore\ a-b+k=3$

답 3

곡선 $y=f(x)$ 위의 점에서의 접선의 기울기의 최댓값 또는 최솟값은 $f'(x)$의 최대·최소를 이용하여 구한다.

이차함수

$y=a(x-p)^2+q$는

① $a>0$일 때,

$x=p$에서 최솟값 q를 갖고 최댓값은 없다.

② $a<0$일 때,

$x=p$에서 최댓값 q를 갖고 최솟값은 없다.

03 점 $(2,\ -5)$가 곡선 $y=-x^3+ax+7$ 위의 점이므로

$-5=-8+2a+7$

$\therefore\ a=-2$

$f(x)=-x^3-2x+7$이라 하면

$f'(x)=-3x^2-2$

점 $(2,\ -5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=-12-2=-14$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-5)=-14(x-2)$

$\therefore\ y=-14x+23$

따라서 $b=-14,\ c=23$이므로

$a+b+c=7$

답 ④

04 $f(x)=2x^3+4x^2-3x-3$이라 하면

$f'(x)=6x^2+8x-3$

점 $(-2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=24-16-3=5$

이므로 직선 l의 방정식은

$y-3=5\{x-(-2)\}$

$\therefore\ y=5x+13 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=6+8-3=11$

이므로 직선 m의 방정식은

$y=11(x-1)$

$\therefore\ y=11x-11 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=4,\ y=33$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(4,\ 33)$이다.

답 $(4,\ 33)$

두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$의 교점의 좌표

$\Longleftrightarrow$ 연립방정식 $\begin{cases} y=ax+b \\ y=a'x+b' \end{cases}$의 해

05 $f(x)=-x^3+6x^2-2$라 하면

$f'(x)=-3x^2+12x$

점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-3+12=9$

이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{9}$이다.

즉 점 $(1,\ 3)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{9}$인 직선의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{9}(x-1) \qquad \therefore\ x+9y-28=0$

따라서 $a=1,\ b=9$이므로

$b-a=8$

답 8

06 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이 곡선 $y=ax^2-bx$ 위의 점이므로

$\frac{1}{2}=\frac{a}{4}-\frac{b}{2} \qquad \therefore\ a-2b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=4x^3,\ g(x)=ax^2-bx$라 하면

$f'(x)=12x^2,\ g'(x)=2ax-b$

점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'\left(\frac{1}{2}\right)g'\left(\frac{1}{2}\right)=-1, \qquad 3(a-b)=-1$

$\therefore\ a-b=-\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{8}{3},\ b=-\frac{7}{3}$

$\therefore\ a+b=-5$

답 -5

07 $f(x)=x^3-8x^2+3x-8$이라 하면

$f'(x)=3x^2-16x+3$

점 $(0,\ -8)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=3$이므로 접선의 방정식은

$y-(-8)=3x \qquad \therefore\ y=3x-8$

직선 $y=3x-8$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표는 $x^3-8x^2+3x-8=3x-8$에서

$x^3-8x^2=0, \qquad x^2(x-8)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=8$

따라서 다시 만나는 점의 좌표가 $(8,\ 16)$이므로

$a=8,\ b=16$

$\therefore\ a+b=24$

답 ④

다시 만나는 점의 y좌표는 $x=8$을 곡선 또는 접선의 방정식에 대입하여 구한다.

이때 접선의 방정식에 대입하는 것이 계산이 간단하다. 즉

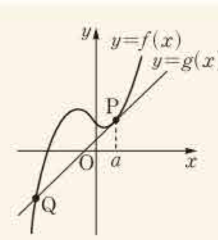
$y=3\cdot 8-8=16$

쌤한마디

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선 $y=g(x)$가 이 곡선과 접점이 아닌 점 Q에서 만날 때

① 점 Q의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 $x\neq a$인 실근이다.

② 방정식 $f(x)=g(x)$는 중근 $x=a$를 갖는다.



08 $f(x)=-x^3+5x^2-4$라 하면

$f'(x)=-3x^2+10x$

점 (1, 0)에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-3+10=7$

이므로 접선의 방정식은

$y=7(x-1)$

$\therefore y=7x-7$

직선 $y=7x-7$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표는 $-x^3+5x^2-4=7x-7$에서

$x^3-5x^2+7x-3=0$

$(x-1)^2(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 점 P의 좌표는 (3, 14)이다.

이때 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=-27+30=3$

이므로 접선의 방정식은

$y-14=3(x-3)$

$\therefore y=3x+5$ 답 ⑤

09 $f(x)=-x^3+3x^2-7x+9$라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x-7$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+3t^2-7t+9)$라 하면 접선의 기울기가 -4이므로

직선 $y=-4x+1$에 평행한 직선의 기울기는 -4이다.

$f'(t)=-4, \quad -3t^2+6t-7=-4$

$t^2-2t+1=0, \quad (t-1)^2=0$

$\therefore t=1$

즉 접점의 좌표는 (1, 4)이므로 접선의 방정식은

$y-4=-4(x-1)$

$\therefore y=-4x+8$

따라서 구하는 x절편은 2이다. 답 ①

$-4x+8=0$에서 $x=2$

10 직선 $x+5y-1=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{5}$과 수직인 직선의 기울기는 5이다.

$f(x)=2x^3-7x+6$이라 하면

$f'(x)=6x^2-7$

접점의 좌표를 $(t,\ 2t^3-7t+6)\ (t<0)$이라 하면 접선의 기울기가 5이므로

$f'(t)=5, \quad 6t^2-7=5$

$t^2=2 \quad \therefore t=-\sqrt{2}\ (\because t<0)$

따라서 접점의 좌표는 $(-\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}+6)$이므로 접선의 방정식은

$-4\sqrt{2}+7\sqrt{2}+6$
$=3\sqrt{2}+6$

$y-(3\sqrt{2}+6)=5\{x-(-\sqrt{2})\}$

$\therefore y=5x+8\sqrt{2}+6$

즉 $g(x)=5x+8\sqrt{2}+6$이므로

$g\left(-\dfrac{6}{5}\right)=-6+8\sqrt{2}+6=8\sqrt{2}$ 답 $8\sqrt{2}$

11 $f(x)=-2x^3+3x^2+10x-1$이라 하면

$f'(x)=-6x^2+6x+10$

접점의 좌표를 $(t,\ -2t^3+3t^2+10t-1)$이라 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(t)=-2, \quad -6t^2+6t+10=-2$

$t^2-t-2=0, \quad (t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

즉 접점의 좌표는 $(-1,\ -6)$, $(2,\ 15)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-6)=-2\{x-(-1)\}$, $y-15=-2(x-2)$

$\therefore 2x+y+8=0,\ 2x+y-19=0$

따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+y+8=0$ 위의 점 $(0,\ -8)$과 직선 $2x+y-19=0$ 사이의 거리와 같으므로

직선 $2x+y+8=0$ 위의 점 중에서 계산이 간단한 점을 택한다.

$\dfrac{|0-8-19|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{27\sqrt{5}}{5}$ 답 ⑤

점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

쌤 한마디

평행한 두 직선 사이의 거리

① 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

② 평행한 두 직선 $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

12 $f(x)=2x^3-3x^2+ax$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x+a$

접점의 좌표를 $(t,\ 2t^3-3t^2+at)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=6t^2-6t+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t^3-3t^2+at)=(6t^2-6t+a)(x-t)$

$\therefore y=(6t^2-6t+a)x-4t^3+3t^2$

이 직선이 직선 $y=-x-1$과 일치해야 하므로

$6t^2-6t+a=-1$ …… ㉠

$-4t^3+3t^2=-1$ …… ㉡

㉡에서

$4t^3-3t^2-1=0, \quad (t-1)(4t^2+t+1)=0$

$\therefore t=1\ (\because 4t^2+t+1>0)$

$4t^2+t+1$
$=4\left(t+\dfrac{1}{8}\right)^2+\dfrac{15}{16}>0$

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$6-6+a=-1 \quad \therefore a=-1$ 답 ②

13 $f(x)=x^3-16x-10$이라 하면

$f'(x)=3x^2-16$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-16t-10)$이라 하면 접선의 기울기가 11이므로

$f'(t)=11, \quad 3t^2-16=11$

$t^2=9 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=3$

(i) $t=-3$일 때, 접점의 좌표는 $(-3,\ 11)$

이 점은 직선 $y=11x+k$ 위의 점이므로

$11=-33+k$

$\therefore k=44$

(ii) $t=3$일 때, 접점의 좌표는 $(3,\ -31)$

이 점은 직선 $y=11x+k$ 위의 점이므로

$-31=33+k$

$\therefore k=-64$

(i), (ii)에서 모든 k의 값의 합은

$44+(-64)=-20$ 답 -20

14 $f(x)=-x^2+9x-15$라 하면

$f'(x)=-2x+9$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=-x+12$와 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+9t-15)$라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(t)=-1$

$-2t+9=-1$

$\therefore t=5$

따라서 접점의 좌표는 $(5,\ 5)$이고, 점 $(5,\ 5)$와 직선 $y=-x+12$, 즉 $x+y-12=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

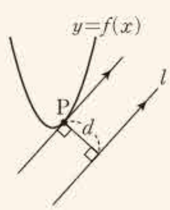
$$\frac{|5+5-12|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$ 답 ④

쌤한마디

곡선 $y=f(x)$ 위의 점과 직선 l 사이의 거리의 최솟값 d는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 직선 l과 평행하고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 접점 P의 좌표를 구한다.

(ii) 접점 P와 직선 l 사이의 거리를 구한다.



15 $f(x)=2x^2+3$이라 하면

$f'(x)=4x$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=2x-1$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ 2t^2+3)$이라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=2,\qquad 4t=2$

$\therefore t=\frac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right)$이고, 점 P의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right)$일 때 △ABP의 넓이가 최소이다.

△ABP의 넓이가 최소이려면 $\overline{AB}$를 밑변으로 할 때, △ABP의 높이, 즉 점 P와 직선 $y=2x-1$ 사이의 거리가 최소이어야 한다.

점 P$\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right)$과 직선 $y=2x-1$, 즉 $2x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|1-\frac{7}{2}-1\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{7}{2\sqrt{5}}$$

$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2}=2\sqrt{5}$이므로 △ABP의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{7}{2\sqrt{5}}=\frac{7}{2}$$ 답 $\frac{7}{2}$

16 $f(x)=x^3+4x$라 하면 $\quad f'(x)=3x^2+4$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+4t)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+4$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+4t)=(3t^2+4)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+4)x-2t^3$ ⋯⋯ ㉠

직선 ㉠이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=-2t^3-3t^2-4,\qquad 2t^3+3t^2+4=0$

$(t+2)(2t^2-t+2)=0$

$\therefore t=-2\ (\because 2t^2-t+2>0)$

$2t^2-t+2=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$

$t=-2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=16x+16$

따라서 구하는 y절편은 16이다. 답 ④

17 $f(x)=x^3-3x^2+x-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+t-1)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+t-1)=(3t^2-6t+1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-6t+1)x-2t^3+3t^2-1$

이 직선이 점 $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$-\frac{1}{2}=-2t^3+3t^2-1$

$\therefore 4t^3-6t^2+1=0$

위의 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근이 세 접점의 x좌표이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 x좌표의 합은

$-\frac{-6}{4}=\frac{3}{2}$ 답 ②

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$,

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$,

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

쌤한마디

$4t^3-6t^2+1=0$에서

$(2t-1)(2t^2-2t-1)=0$

이차방정식 $2t^2-2t-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot(-1)=3>0$

이므로 방정식 $2t^2-2t-1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, $t=\frac{1}{2}$을 근으로 갖지 않는다.

따라서 삼차방정식 $4t^3-6t^2+1=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

18 $f(x)=x^3-1,\ g(x)=-2x^2+4x+7$이라 하면

$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=-4x+4$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가진다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\qquad t^3-1=-2t^2+4t+7$

$t^3+2t^2-4t-8=0,\qquad (t+2)^2(t-2)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$ ⋯⋯ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\qquad 3t^2=-4t+4$

$3t^2+4t-4=0,\qquad (t+2)(3t-2)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=\frac{2}{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad t=-2$

따라서 점 $(-2,\ -9)$에서 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(-2)=g'(-2)=12$이므로 공통인 접선의 방정식은

$f(-2)=g(-2)=-9$

$$y-(-9)=12\{x-(-2)\}$$
$$\therefore\ y=12x+15$$

답 ③

19 $f(x)=x^3+ax+12,\ g(x)=x^2-5x$라 하면

$$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2x-5$$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가진다고 하면

$f(t)=g(t)$에서

$$t^3+at+12=t^2-5t \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 3t^2+a=2t-5$

$$\therefore\ a=-3t^2+2t-5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$2t^3-t^2-12=0, \quad (t-2)(2t^2+3t+6)=0$$
$$\therefore\ t=2\ (\because\ 2t^2+3t+6>0)$$

$$2t^2+3t+6=2\left(t+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{39}{8}>0$$

$t=2$를 ㉡에 대입하면

$$a=-12+4-5=-13$$

답 ②

20 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$이라 하면 $\quad f'(x)=x$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=t$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}t^2=t(x-t)$$
$$\therefore\ y=tx-\frac{1}{2}t^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(4,\ 6)$을 지나므로

$$6=4t-\frac{1}{2}t^2, \quad t^2-8t+12=0$$
$$(t-2)(t-6)=0 \quad \therefore\ t=2\ 또는\ t=6$$

$t=2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$y=2x-2$$

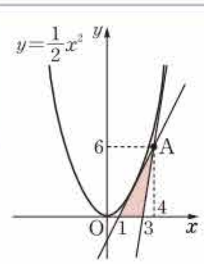
$t=6$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$y=6x-18$$

따라서 오른쪽 그림과 같이 두 접선의 x축과의 교점의 좌표는 $(1,\ 0),\ (3,\ 0)$이므로 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이는

$\mathrm{B}(1,\ 0),\ \mathrm{C}(3,\ 0)$ 또는 $\mathrm{B}(3,\ 0),\ \mathrm{C}(1,\ 0)$

$$\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot6=6$$



답 6

21 $f(x)=3x^3-x^2-4x-1$이라 하면

$$f'(x)=9x^2-2x-4$$

점 $\mathrm{P}(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=9-2-4=3$$

이므로 직선 l의 방정식은

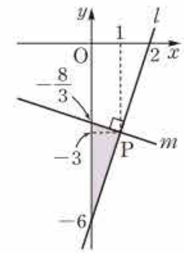
$$y-(-3)=3(x-1)$$
$$\therefore\ y=3x-6$$

직선 l과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로 점 P를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선 m의 방정식은

$$y-(-3)=-\frac{1}{3}(x-1)$$
$$\therefore\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{-\frac{8}{3}-(-6)\right\}\cdot1=\frac{5}{3}$$



답 ①

Lecture 08 평균값 정리

L 49쪽

01 함수 $f(x)=-x^2+6x-5$는 닫힌구간 $[1,\ 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 5)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(5)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-2x+6$이므로

$$-2c+6=0 \quad \therefore\ c=3$$

답 3

02 함수 $f(x)=x^3-4x^2-3x$는 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(3)=-18$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-8x-3$이므로

$$3c^2-8c-3=0, \quad (3c+1)(c-3)=0$$
$$\therefore\ c=-\frac{1}{3}\ (\because\ -2<c<3)$$

답 $-\frac{1}{3}$

03 함수 $f(x)=x^4-10x^2+10$은 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)=1$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4x^3-20x$이므로

$$4c^3-20c=0, \quad c(c^2-5)=0$$
$$\therefore\ c=0\ (\because\ -1<c<1)$$

$c^2-5=0$에서 $\quad c^2=5$
$\therefore\ c=-\sqrt{5}$ 또는 $c=\sqrt{5}$
이때 $-\sqrt{5},\ \sqrt{5}$는 $-\sqrt{5}<-1,\ \sqrt{5}>1$이므로 주어진 구간에 속하지 않는다.

답 0

04 함수 $f(x)=x^2-7x+1$은 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-7$이므로

$f(1)=1-7+1=-5,$
$f(3)=9-21+1=-11$

$$\frac{-11-(-5)}{3-1}=2c-7, \quad 2c-7=-3$$
$$\therefore\ c=2$$

답 2

05 함수 $f(x)=-2x^3+5x$는 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-6x^2+5$이므로

$$\frac{-6-(-3)}{2-(-1)}=-6c^2+5, \qquad c^2=1$$

$$\therefore\ c=1\ (\because\ -1<c<2)$$

답 1

06 함수 $f(x)=x^3-3$은 닫힌구간 $[2,\ 5]$에서 연속이고 열린구간 $(2,\ 5)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(2,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2$이므로

$$\frac{122-5}{5-2}=3c^2, \qquad c^2=13$$

$$\therefore\ c=\sqrt{13}\ (\because\ 2<c<5)$$

답 $\sqrt{13}$

07 답 $(a,\ x)$, 0, $f(a)$

표준+발전 유형 Q+Q

50쪽

01 함수 $f(x)=(x+4)(x-2)^2=x^3-12x+16$은 닫힌구간 $[-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}]$에서 연속이고 열린구간 $(-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$에서 미분가능하며
$f(-2\sqrt{3})=f(2\sqrt{3})=16$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2-12$이므로

$$3c^2-12=0, \qquad c^2=4$$

$$\therefore\ c=-2 \text{ 또는 } c=2$$

따라서 모든 상수 c의 값의 곱은

$$-2\cdot 2=-4$$

답 ①

02 함수 $f(x)=-x^2+ax$는 닫힌구간 $[-4,\ -1]$에서 연속이고 열린구간 $(-4,\ -1)$에서 미분가능하다.
이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-4)=f(-1)$이어야 하므로

$$-16-4a=-1-a \qquad \therefore\ a=-5$$

한편 $f'(b)=0$인 b가 열린구간 $(-4,\ -1)$에 적어도 하나 존재한다.
$f(x)=-x^2-5x$에서 $f'(x)=-2x-5$이므로

$$-2b-5=0 \qquad \therefore\ b=-\frac{5}{2}$$

$$\therefore\ b-a=\frac{5}{2}$$

답 ⑤

03 함수 $f(x)=x^3-4x+9$는 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(-2,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2-4$이므로

$$\frac{24-9}{3-(-2)}=3c^2-4, \qquad c^2=\frac{7}{3}$$

$$\therefore\ c=-\frac{\sqrt{21}}{3} \text{ 또는 } c=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

따라서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 $-\frac{\sqrt{21}}{3}$, $\frac{\sqrt{21}}{3}$의 2개이다.

답 2

$\sqrt{16}<\sqrt{21}<\sqrt{25}$, 즉 $4<\sqrt{21}<5$이므로
$\frac{4}{3}<\frac{\sqrt{21}}{3}<\frac{5}{3}$,
$-\frac{5}{3}<-\frac{\sqrt{21}}{3}<-\frac{4}{3}$
따라서 $-\frac{\sqrt{21}}{3}$, $\frac{\sqrt{21}}{3}$은 모두 열린구간 $(-2,\ 3)$에 속한다.

04 함수 $f(x)=-x^2+3x+5$는 닫힌구간 $[1,\ k]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ k)$에서 미분가능하다.
이때 평균값 정리를 만족시키는 상수가 3이므로

$$\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'(3)$$

$f'(x)=-2x+3$이므로

$$\frac{(-k^2+3k+5)-7}{k-1}=-6+3$$

$$k^2-6k+5=0, \qquad (k-1)(k-5)=0$$

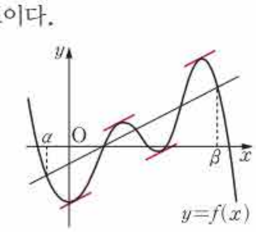
$$\therefore\ k=5\ (\because\ k>3)$$

답 ②

05 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, 평균값 정리는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점이 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재함을 의미한다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 4개 그을 수 있으므로 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 개수는 4이다.



답 4

중단원 마무리

51쪽

01 전략 평행한 두 직선은 기울기가 같음을 이용한다.

풀이 두 점 $(-3,\ -4)$, $(1,\ 8)$이 곡선 $y=2x^3+ax^2+bx+c$ 위의 점이므로
$-4=-54+9a-3b+c$에서

$$9a-3b+c=50 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$8=2+a+b+c$에서

$$a+b+c=6 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$라 하면

$$f'(x)=6x^2+2ax+b$$

두 점 $(-3,\ -4)$, $(1,\ 8)$에서의 접선이 서로 평행하므로

$f'(-3)=f'(1)$, $\quad 54-6a+b=6+2a+b$

$\therefore a=6$

$a=6$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$54-3b+c=50,\ 6+b+c=6$

$\therefore 3b-c=4,\ b+c=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad b=1,\ c=-1$

$\therefore abc=-6$ 　　답 ③

02 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용한다.

풀이 $g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$이므로

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)$

점 $(2,\ 1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=1$

점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(2)=2$

$\therefore g'(2)=12\cdot1+8\cdot2=28$ 　　답 28

03 전략 곱의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구한다.

풀이 $h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는

$h(-1)$
$=f(-1)g(-1)$
$=-2\cdot1=-2$

$h'(-1)=f'(-1)g(-1)+f(-1)g'(-1)$

$=3\cdot1+(-2)\cdot2=-1$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-2)=-\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-x-3$ 　　답 $y=-x-3$

04 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$임을 이용한다.

풀이 $g(x)=x^3$이라 하면 $\quad g'(x)=3x^2$

점 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-t^3=3t^2(x-t)$

$\therefore 3t^2x-y-2t^3=0$

이 접선과 원점 사이의 거리는

$$f(t)=\frac{|-2t^3|}{\sqrt{(3t^2)^2+(-1)^2}}=\frac{|-2t^3|}{\sqrt{9t^4+1}}$$

$t\longrightarrow\infty$일 때 $|-2t^3|=2t^3$이므로

$$a=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\cdot\frac{2t^3}{\sqrt{9t^4+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2}{\sqrt{9t^4+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{9+\frac{1}{t^4}}}=\frac{2}{3}$$

$\therefore 30a=20$ 　　답 20

QBOX

05 전략 $g(x,\ y)+k\cdot h(x,\ y)=0$ 꼴로 변형하여 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구한다.

풀이 $y=x^3+kx^2-(k+1)x-1$에서

$x^3-x-y-1+kx(x-1)=0$

위의 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x^3-x-y-1=0,\ x(x-1)=0$

$x(x-1)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=1$
$x^3-x-y-1=0$에서
$y=x^3-x-1$
$x=0$일 때, $\quad y=-1$
$x=1$일 때, $\quad y=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=0,\ y=-1$ 또는 $x=1,\ y=-1$

즉 주어진 곡선은 k의 값에 관계없이 항상 두 점 $(0,\ -1)$, $(1,\ -1)$을 지난다. 　···➊

$f(x)=x^3+kx^2-(k+1)x-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2kx-(k+1)$

두 점 $(0,\ -1)$, $(1,\ -1)$에서의 접선이 서로 수직이므로

$f'(0)f'(1)=-1$

$\{-(k+1)\}(k+2)=-1$

$\therefore k^2+3k+1=0$ 　···➋

이차방정식
$k^2+3k+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=3^2-4\cdot1\cdot1$
$=5>0$
이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 -3이다. 　···➌

답 -3

단계	채점 기준	비율
➊	k의 값에 관계없이 항상 지나는 두 점의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
➋	k에 대한 이차방정식을 구할 수 있다.	30 %
➌	모든 실수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

06 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선 $y=g(x)$가 이 곡선과 다시 만나는 점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 $x\neq a$인 실근임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^3+x+2$라 하면

$f'(x)=-3x^2+1$

점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-3+1=-2$

이므로 접선의 방정식은

$y-2=-2(x-1)$

$\therefore y=-2x+4$

$-2x+4=0$에서

$x=2$

$\therefore \mathrm{Q}(2,\ 0)$

직선 $y=-2x+4$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표는 $-x^3+x+2=-2x+4$에서

$x^3-3x+2=0$

$(x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 $\mathrm{R}(-2,\ 8)$이므로

$y=-2\cdot(-2)+4=8$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(2-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$,

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{(-2-1)^2+(8-2)^2}=3\sqrt{5}$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{5}:3\sqrt{5}$

$=1:3$ 　　답 ①

07 **전략** 기울기가 k $(k\neq0)$인 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{k}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2-5x+4$라 하면

$f'(x)=2x-5$

점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=4-5=-1$

이므로 직선 l과 수직인 직선의 기울기는 1이다.

직선 l과 수직이고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2-5t+4)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=1,\qquad 2t-5=1$

$\therefore t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3,\ -2)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-2)=x-3$

$\therefore x-y-5=0$ 답 ②

08 **전략** 점 A에서의 접선의 기울기와 점 B에서의 접선의 기울기가 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

점 A의 x좌표가 3이므로 점 A에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=27-18+1=10$

점 B의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+t+1)$이라 하면 점 B에서의 접선의 기울기가 10이므로

$f'(t)=10,\qquad 3t^2-6t+1=10$

$t^2-2t-3=0,\qquad (t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1\ (\because t\neq3)$

따라서 점 $B(-1,\ -4)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-4)=10\{x-(-1)\}$

$\therefore y=10x+6$

즉 구하는 y절편은 6이다. 답 ②

QBOX

두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하므로 점 B에서의 접선의 기울기는 $f'(3)$과 같다.

두 점 A, B가 서로 다른 점이므로 $t\neq3$

09 **전략** 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+kt^2-kt-2)$라 하고 접선의 방정식을 구하여 주어진 직선의 방정식과 비교한다.

풀이 $f(x)=x^3+kx^2-kx-2$라 하면

$f'(x)=3x^2+2kx-k$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+kt^2-kt-2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2kt-k$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+kt^2-kt-2)=(3t^2+2kt-k)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2kt-k)x-2t^3-kt^2-2$

이 직선이 직선 $y=x-2$와 일치해야 하므로

$3t^2+2kt-k=1$ ...... ㉠

$-2t^3-kt^2-2=-2$ ...... ㉡

㉡에서 $\quad 2t^3+kt^2=0,\qquad t^2(2t+k)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=-\frac{k}{2}$

(i) $t=0$을 ㉠에 대입하면

$-k=1\qquad \therefore k=-1$

(ii) $t=-\frac{k}{2}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{4}k^2-k^2-k=1,\qquad k^2+4k+4=0$

$(k+2)^2=0\qquad \therefore k=-2$

(i), (ii)에서 구하는 곱은

$-1\cdot(-2)=2$ 답 ④

10 **전략** 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^2+6x$라 하면

$f'(x)=-2x+6$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+6t)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+6$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+6t)=(-2t+6)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+6)x+t^2$

이 직선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로 $\qquad k=t^2$

$\therefore t=-\sqrt{k}$ 또는 $t=\sqrt{k}\ (\because k>0)$

따라서 두 접선의 기울기는 각각

$f'(-\sqrt{k})=2\sqrt{k}+6,\ f'(\sqrt{k})=-2\sqrt{k}+6$

이고 두 접선이 서로 수직이므로

$(2\sqrt{k}+6)(-2\sqrt{k}+6)=-1$

$-4k+36=-1$

$\therefore k=\frac{37}{4}$ 답 ⑤

11 **전략** 접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{4}t^2+1\right)$이라 하고 접선의 방정식을 세운 후 이 접선이 점 A를 지남을 이용하여 t의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+1$이라 하면 $\qquad f'(x)=\frac{1}{2}x$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{4}t^2+1\right)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{2}t$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{4}t^2+1\right)=\frac{1}{2}t(x-t)$

$\therefore y=\frac{1}{2}tx-\frac{1}{4}t^2+1$ ...... ㉠

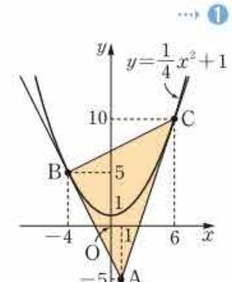
직선 ㉠이 점 $A(1,\ -5)$를 지나므로

$-5=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}t^2+1$

$t^2-2t-24=0,\qquad (t+4)(t-6)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=6$ ···· ❶

따라서 오른쪽 그림과 같이 $B(-4,\ 5)$, $C(6,\ 10)$이라 하면



$B(6,\ 10)$, $C(-4,\ 5)$라 할 수도 있다.

$\overline{AB}$

$=\sqrt{(-4-1)^2+\{5-(-5)\}^2}$

$=5\sqrt{5}$

$t=-4$를 ㉠에 대입하면 직선 AB의 방정식은

$y=-2x-3\qquad \therefore 2x+y+3=0$

따라서 점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|12+10+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=5\sqrt{5}$$

이므로 △ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{5}=\frac{125}{2}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{125}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	두 점 B, C의 x좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷	△ABC의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

12 전략 곡선 $y=x^4-1$ 위의 점 $(1, 0)$을 지나고, 이 점에서의 접선과 수직인 직선이 원의 중심을 지남을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4-1$이라 하면

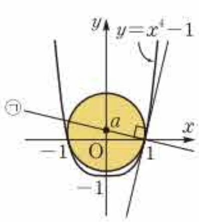
$f'(x)=4x^3$

점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다.

점 $(1, 0)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{4}$인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{4}(x-1)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ㉠$$



y축 위에 있는 원의 중심의 좌표를 $(0, a)$라 하면 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 점 $(0, a)$를 지나야 하므로

$$a=\frac{1}{4}$$

이때 원의 반지름의 길이는 두 점 $(1, 0)$, $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(0-1)^2+\left(\frac{1}{4}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2=\frac{17}{16}\pi$$

답 ④

쌤한마디

곡선 $y=f(x)$와 원 C가 접할 때
① (원 C의 반지름의 길이)
=(원 C의 중심과 접점 사이의 거리)
② 원 C의 중심과 접점을 지나는 직선은 접점에서의 접선과 수직이다.

13 전략 두 점 P, Q에서의 접선의 방정식을 각각 구하여 넓이를 구하려는 도형을 좌표평면 위에 나타낸다.

풀이 $f(x)=-(x+k)(x-k)=-x^2+k^2$이라 하면

$f'(x)=-2x$

Q BOX

△ABC에서 $\overline{AB}$를 밑변으로 할 때의 높이

P$(k, 0)$, Q$(-k, 0)$이라 할 수도 있다.

두 점 P, Q에서의 두 접선은 y축에 대하여 대칭이므로 이등변삼각형이다.

두 점 $(-2, f(-2))$, $(2, f(2))$를 지나는 직선의 기울기

$$y=\frac{|x|}{x^2}=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>0)\\ -\frac{1}{x} & (x<0)\end{cases}$$

P$(-k, 0)$, Q$(k, 0)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(-k)=2k$이므로 접선의 방정식은

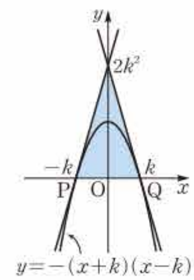
$$y=2k\{x-(-k)\}$$

$$\therefore y=2kx+2k^2$$

점 Q에서의 접선의 기울기는 $f'(k)=-2k$이므로 접선의 방정식은

$$y=-2k(x-k)$$

$$\therefore y=-2kx+2k^2$$



따라서 오른쪽 그림에서 두 점 P, Q에서의 접선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\{k-(-k)\}\cdot 2k^2=2k^3$$

즉 $2k^3=54$이므로

$k^3=27$

$\therefore k=3$

답 3

14 전략 $f(-k)=f(k)$임을 이용하여 k의 값을 먼저 구한다.

풀이 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x+2$는 닫힌구간 $[-k, k]$에서 연속이고 열린구간 $(-k, k)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-k)=f(k)$이어야 하므로

$$-\frac{1}{3}k^3+3k+2=\frac{1}{3}k^3-3k+2$$

$$k(k+3)(k-3)=0$$

$\therefore k=3$ ($\because$ k는 자연수)

따라서 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=x^2-3$이므로

$c^2-3=0$ $\quad\therefore c=-\sqrt{3}$ 또는 $c=\sqrt{3}$

즉 $\alpha=-\sqrt{3}$, $\beta=\sqrt{3}$ 또는 $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=-\sqrt{3}$이므로

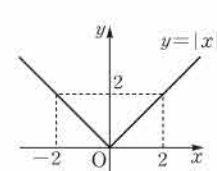
$$\alpha^2+\beta^2+k=3+3+3=9$$

답 9

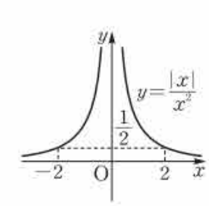
15 전략 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 함수 $f(x)$를 찾는다.

풀이 $\frac{f(2)-f(-2)}{4}=f'(c)$에서

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=f'(c) \quad \cdots\cdots ㉠$$

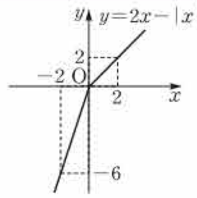


① 함수 $y=|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ㉠을 만족시키는 c가 구간 $(-2, 2)$에 존재하지 않는다.



② 함수 $y=\frac{|x|}{x^2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ㉠을 만족시키는 c가 구간 $(-2, 2)$에 존재하지 않는다.

③ 함수 $y=2x-|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ㉠을 만족시키는 c가 구간 $(-2,\ 2)$에 존재하지 않는다.



> **Q BOX**
> $y=2x-|x|$
> $=\begin{cases} 2x-x & (x\ge0) \\ 2x-(-x) & (x<0) \end{cases}$
> $=\begin{cases} x & (x\ge0) \\ 3x & (x<0) \end{cases}$

④ $f(x)=-x|x|=\begin{cases} -x^2 & (x\ge0) \\ x^2 & (x<0) \end{cases}$이므로

$$f'(x)=\begin{cases} -2x & (x>0) \\ 2x & (x<0) \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0+} f'(x)=\lim\limits_{x\to0+}(-2x)=0$,

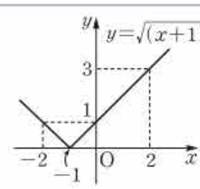
$\lim\limits_{x\to0-} f'(x)=\lim\limits_{x\to0-} 2x=0$에서

$$\lim_{x\to0} f'(x)=0$$

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 ㉠을 만족시키는 c가 구간 $(-2,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

⑤ 함수 $y=\sqrt{(x+1)^2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ㉠을 만족시키는 c가 구간 $(-2,\ 2)$에 존재하지 않는다.



> $y=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$
> $=\begin{cases} x+1 & (x\ge-1) \\ -x-1 & (x<-1) \end{cases}$

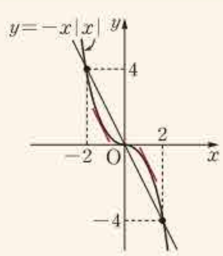
답 ④

쌤한마디

$y=-x|x|$

$=\begin{cases} -x^2 & (x\ge0) \\ x^2 & (x<0) \end{cases}$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 점 $(-2,\ 4)$, $(2,\ -4)$를 지나는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있다. 따라서 ㉠을 만족시키는 상수 c가 2개 존재함을 알 수 있다.



참고 ①, ③, ⑤의 함수는 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 미분가능하지 않은 x의 값이 존재하고, ②의 함수는 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 불연속인 x의 값이 존재하므로 평균값 정리가 성립하지 않는다.

16 전략 주어진 등식을 이용하여 θ를 h에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(x)=x^3-1$에서

$$f'(x)=3x^2$$

$f(1+h)=f(1)+hf'(1+\theta h)$에서

$$(1+h)^3-1=0+h\cdot3(1+\theta h)^2$$

$$1+3h+3h^2+h^3-1=3h+6h^2\theta+3h^3\theta^2$$

$$3h^3\theta^2+6h^2\theta-h^3-3h^2=0$$

$$\therefore\ 3h\theta^2+6\theta-h-3=0\ (\because\ h\neq0)$$

위의 θ에 대한 이차방정식을 풀면

> 근의 공식을 이용한다.

$$\theta=\frac{-3\pm\sqrt{9+9h+3h^2}}{3h}$$

이때 $3h>0$, $\sqrt{9+9h+3h^2}>\sqrt{9}=3$이므로

$$\theta=\frac{-3+\sqrt{9+9h+3h^2}}{3h}\ (\because\ \theta>0)$$

$$\therefore\ \lim_{h\to0+}\theta$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{\sqrt{9+9h+3h^2}-3}{3h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{(\sqrt{9+9h+3h^2}-3)(\sqrt{9+9h+3h^2}+3)}{3h(\sqrt{9+9h+3h^2}+3)}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{3h(3+h)}{3h(\sqrt{9+9h+3h^2}+3)}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{3+h}{\sqrt{9+9h+3h^2}+3}$$

$$=\frac{3}{3+3}=\frac{1}{2}$$

답 ④

쌤한마디

주어진 등식은 평균값 정리를 변형한 것이다. 평균값 정리

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ (a<c<b)\quad\cdots\cdots ㉠$$

의 양변에 $b-a$를 곱하고 $f(b)$에 대하여 정리하면

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$$

이때 $b-a=h$로 놓으면 $b=a+h$이므로

$$f(a+h)=f(a)+hf'(c)$$

그런데 $a<c<b$이므로 $0<\theta<1$인 θ에 대하여

$$c=a+\theta(b-a)=a+\theta h$$

인 θ가 존재한다.

따라서 ㉠을

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)\ (0<\theta<1)$$

로 나타낼 수 있다.

17 전략 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 실수)일 때, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서 $x\longrightarrow2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로

$$f(2)=g(2)\quad\cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)+g(2)-g(x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=f'(2)-g'(2)$$

즉 $f'(2)-g'(2)=2$이므로

$$f'(2)=g'(2)+2\quad\cdots\cdots ㉡$$

$g(x)=x^3f(x)-7$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$g(2)=8f(2)-7$$

$$=8g(2)-7\ (\because\ ㉠)$$

$$\therefore\ g(2)=1$$

$g(x)=x^3f(x)-7$에서

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)$

$=12\cdot1+8\{g'(2)+2\}$ (∵ ㉡)

$f(2)=g(2)=1$

$7g'(2)=-28\qquad\therefore g'(2)=-4$

즉 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 -4이므로 접선의 방정식은

$y-1=-4(x-2)\qquad\therefore y=-4x+9$

따라서 $a=-4$, $b=9$이므로

$a^2+b^2=97$

답 97

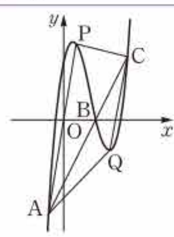
18 전략 두 점 P, Q에서의 접선이 모두 직선 AC에 평행할 때 □AQCP의 넓이가 최대임을 이용한다.

풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 오른쪽 그림에서

직선 AB의 기울기는 $\frac{0-(-6)}{2-(-1)}=2$

직선 BC의 기울기는 $\frac{4-0}{4-2}=2$

따라서 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.



□AQCP의 넓이는 △PAC의 넓이와 △AQC의 넓이의 합이고, 두 삼각형의 밑변을 $\overline{AC}$라 할 때 높이는 각각 두 점 P, Q와 $\overline{AC}$ 사이의 거리이다.

따라서 □AQCP의 넓이가 최대이려면 두 점 P, Q와 $\overline{AC}$ 사이의 거리가 각각 최대이어야 하므로 두 점 P, Q에서의 접선이 모두 직선 AC에 평행해야 한다.

$f(x)=x^3-5x^2+4x+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-10x+4$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t^2+4t+4)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

직선 AC의 기울기가 2이므로 두 점 P, Q에서의 접선의 기울기가 2이어야 한다.

$f'(t)=2,\qquad 3t^2-10t+4=2$

$\therefore 3t^2-10t+2=0$

이 이차방정식의 두 실근이 □AQCP의 넓이가 최대일 때의 두 점 P, Q의 x좌표이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 곱은

$\frac{2}{3}$

답 ④

05 도함수의 활용 (2)

Lecture 09 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

55쪽

01 $1\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=(-x_1^2+2x_1)-(-x_2^2+2x_2)$

$=-(x_1^2-x_2^2)+2(x_1-x_2)$

$=-(x_1+x_2)(x_1-x_2)+2(x_1-x_2)$

$=-(x_1+x_2-2)(x_1-x_2)>0$

$x_1\ge1$, $x_2>1$이므로 $x_1+x_2>2$ $\therefore x_1+x_2-2>0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1,\ \infty)$에서 감소한다.

답 감소

02 $0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^4-x_2^4$

$=(x_1^2+x_2^2)(x_1^2-x_2^2)$

$=(x_1^2+x_2^2)(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$

$x_1\ge0$, $x_2>0$이므로 $x_1^2\ge0$, $x_2^2>0$ $\therefore x_1^2+x_2^2>0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가한다.

답 증가

03 $x_1<x_2<-1$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1+1}-\frac{1}{x_2+1}$

$=\frac{x_2-x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}>0$

$x_1<-1$, $x_2<-1$이므로 $x_1+1<0$, $x_2+1<0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 감소한다.

답 감소

04 $f'(x)=2x-4$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗

도함수의 부호를 조사하여 함수의 증가와 감소를 표로 나타낸 것을 증감표라 하며 증감표에서 ↗는 함수의 증가를, ↘는 함수의 감소를 나타낸다.

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[2,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty,\ 2]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

05 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-3	↘	-7	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1]$, $[1,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1,\ 1]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

06 $f'(x)=-6x^2+10x+4=-2(3x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{19}{27}$	↗	12	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left[-\frac{1}{3},\ 2\right]$에서 증가하고, 구간 $\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right]$, $[2,\ \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

07 $f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-\sqrt{2},\ 0]$, $[\sqrt{2},\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty,\ -\sqrt{2}]$, $[0,\ \sqrt{2}]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

08 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -3, 1이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-3,\ 1]$에서 증가하고, 구간 $(-\infty,\ -3]$, $[1,\ \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

09 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$f'(x)=3x^2-2ax+3$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3\cdot 3\le 0$

$a^2-9\le 0,\quad (a+3)(a-3)\le 0$

$\therefore\ -3\le a\le 3$

답 $-3\le a\le 3$

쌤한마디

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$이 성립하려면

$a>0,\ D\le 0$

② 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$이 성립하려면

$a<0,\ D\le 0$

Q BOX

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=c$에서 뾰족한 모양이어도 $f(x)$는 $x=c$에서 극값을 가질 수 있다.

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 p를 갖는다.
➡ $f(a)=p,\ f'(a)=0$

삼차 이상인 다항함수 $f(x)$의 극대와 극소를 판정할 때에는 함수의 증감표를 이용한다.

10 (1) 함수 $f(x)$가 $x=c$, $x=e$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 극댓값을 갖는 x의 값은 c, e이다.

(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$, $x=d$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 극솟값을 갖는 x의 값은 a, d이다.

답 (1) c, e (2) a, d

11 함수 $f(x)$가 $x=0$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이며 극댓값은

$f(0)=1$

또 $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$에서 극소이며 극솟값은

$f(-1)=-1,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{16}$

답 극댓값: 1, 극솟값: -1, $\frac{11}{16}$

12 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값 5를 가지므로

$f(1)=5,\ f'(1)=0$

$\therefore\ f(1)+f'(1)=5$

답 5

13 $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	-23	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 4, $x=2$에서 극솟값 -23을 갖는다.

답 극댓값: 4, 극솟값: -23

14 $f'(x)=-3x^2+9x=-3x(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	27	↗	$\frac{81}{2}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 $\frac{81}{2}$, $x=0$에서 극솟값 27을 갖는다.

답 극댓값: $\frac{81}{2}$, 극솟값: 27

15 $f'(x)=12x^3+12x^2-24x$

$=12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-32	↗	0	↘	-5	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0, $x=-2$에서 극솟값 -32, $x=1$에서 극솟값 -5를 갖는다.

답 극댓값: 0, 극솟값: -32, -5

16 $f'(x)=-4x^3+16x=-4x(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	17	↘	1	↗	17	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 극댓값 17, $x=0$에서 극솟값 1을 갖는다.
답 극댓값: 17, 극솟값: 1

표준+발전 유형 Q+Q

56쪽

01 $f'(x)=-12x^2+12x+9$
$=-3(2x+1)(2x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{31}{2}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$에서 증가하므로
$\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$
$\therefore \beta-\alpha=2$
답 ②

02 $f'(x)=6x^2+2ax+b$
주어진 조건에서 함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=2$의 좌우에서 증가와 감소가 바뀌므로 $x=-3$, $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.
즉 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 -3, 2이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-3+2=-\frac{2a}{6}$, $-3\cdot2=\frac{b}{6}$
$\therefore a=3$, $b=-36$
$\therefore a+b=-33$
답 -33

03 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 한다.
$f'(x)=3kx^2-2x-2$이므로
$3k<0$ $\therefore k<0$ ⋯⋯ ㉠
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-3k\cdot(-2)\le0$
$1+6k\le0$
$\therefore k\le-\frac{1}{6}$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$k\le-\frac{1}{6}$
답 ①

Q BOX

역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, 음수이면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

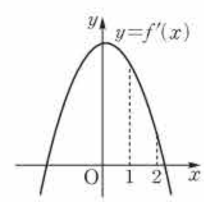
$y=-3x^2+x-k$
$=-3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-k+\frac{1}{12}$
의 그래프는 위로 볼록하고 축의 방정식이 $x=\frac{1}{6}$인 포물선이다.

04 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.
이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.
즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 한다.
$f'(x)=3x^2+6x+2a$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=3^2-3\cdot2a\le0$, $9-6a\le0$
$\therefore a\ge\frac{3}{2}$
따라서 정수 a의 최솟값은 2이다.
답 ②

쌤 한마디

다음 표현은 삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소함을 나타낸다.
① 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$ 또는 $f(x_1)>f(x_2)$이다.
② 함수 $f(x)$가 일대일대응 또는 일대일함수이다.
③ 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

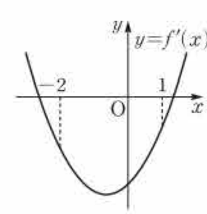
05 함수 $f(x)$가 $1<x<2$에서 증가하려면 $1<x<2$에서 $f'(x)\ge0$이어야 한다.
$f'(x)=-3x^2+x-k$이고, 오른쪽 그림에서



$f'(1)\ge0$이어야 하므로
$-3+1-k\ge0$
$\therefore k\le-2$ ⋯⋯ ㉠
$f'(2)\ge0$이어야 하므로
$-12+2-k\ge0$
$\therefore k\le-10$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $k\le-10$
따라서 실수 k의 최댓값은 -10이다.
답 -10

참고 함수 $f'(x)$는 구간 $\left[\frac{1}{6}, \infty\right)$에서 감소하고 $\frac{1}{6}<1<2$이므로 $f'(2)\ge0$이면 $f'(1)\ge0$도 성립함을 알 수 있다. 즉 $f'(2)\ge0$을 만족시키는 k의 값의 범위만 생각해도 된다.

06 함수 $f(x)$가 구간 $(-2, 1)$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\le0$이어야 한다.
$f'(x)=3x^2-2ax-10$이고, 오른쪽 그림에서



$f'(-2)\le0$이어야 하므로
$12+4a-10\le0$
$\therefore a\le-\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉠
$f'(1)\le0$이어야 하므로
$3-2a-10\le0$
$\therefore a\ge-\frac{7}{2}$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$-\frac{7}{2}\le a\le-\frac{1}{2}$

따라서 $M=-\frac{1}{2}$, $m=-\frac{7}{2}$이므로

$M+m=-4$ 　　답 ③

07 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 　$x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-26	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 6, $x=3$에서 극솟값 -26을 가지므로 극댓값과 극솟값의 차는

$6-(-26)=32$ 　　답 ⑤

08 $f'(x)=24x^3+12x^2-12x$

$=12x(x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{11}{8}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 2, $x=-1$에서 극솟값 -2, $x=\frac{1}{2}$에서 극솟값 $\frac{11}{8}$을 가지므로 모든 극값의 곱은

$2\cdot(-2)\cdot\frac{11}{8}=-\frac{11}{2}$ 　　답 $-\frac{11}{2}$

09 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값 5를 가지므로

$f(2)=5$, $f'(2)=0$

$f(2)=5$에서 　$-\frac{8}{3}+2a+b=5$

$\therefore 2a+b=\frac{23}{3}$ 　…… ㉠

$f'(x)=-x^2+a$이므로 $f'(2)=0$에서

$-4+a=0$ 　$\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 　$8+b=\frac{23}{3}$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$

즉 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+4x-\frac{1}{3}$이므로

$f'(x)=-x^2+4=-(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 　$x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{17}{3}$	$\nearrow$	5	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 $-\frac{17}{3}$을 갖는다. 　　답 $-\frac{17}{3}$

Q BOX

10 $f'(x)=3x^2-6kx-9k^2=3(x+k)(x-3k)$

$f'(x)=0$에서

$x=-k$ 또는 $x=3k$

$k>0$이므로
$-k<0<3k$

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	$3k$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$5k^3$	$\searrow$	$-27k^3$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-k$에서 극댓값 $5k^3$, $x=3k$에서 극솟값 $-27k^3$을 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 차가 108이므로

$5k^3-(-27k^3)=108$, 　$k^3=\frac{27}{8}$

$k>0$이므로
$-27k^3<0<5k^3$

$\therefore k=\frac{3}{2}$ 　　답 ③

11 $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x-6=\frac{3}{4}(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 　$x=-2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-20	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 7, $x=4$에서 극솟값 -20을 가지므로

$A(-2, 7)$, $B(4, -20)$

따라서 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot4+1\cdot(-2)}{2+1}, \frac{2\cdot(-20)+1\cdot7}{2+1}\right)$

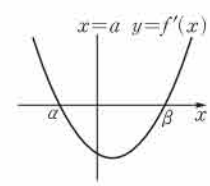
좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n\,(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

$\therefore (2, -11)$ 　　답 ④

12 $f(x)=x^3-ax^2-15x+7$이라 하면

$f'(x)=3x^2-2ax-15$

방정식 $f'(x)=0$의 두 근을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면 오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소이다.



이때 직선 $x=a$가 곡선 $y=f(x)$의 극대가 되는 점과 극소가 되는 점 사이를 지나야 하므로

$\alpha<a<\beta$

즉 $f'(a)<0$이어야 하므로

$3a^2-2a^2-15<0$, 　$a^2-15<0$

$(a+\sqrt{15})(a-\sqrt{15})<0$

$\therefore -\sqrt{15}<a<\sqrt{15}$

$-\sqrt{16}<-\sqrt{15}<-\sqrt{9}$이므로
$-4<-\sqrt{15}<-3$
$\sqrt{9}<\sqrt{15}<\sqrt{16}$이므로
$3<\sqrt{15}<4$

따라서 정수 a는 $-3, -2, -1, \cdots, 3$의 7개이다.

답 ③

13 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서

$x\longrightarrow\infty$일 때 $f(x)\longrightarrow\infty$이므로

$a>0$

또 그래프가 y축과 양의 부분에서 만나므로

$d>0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 α, β이고, $\alpha<0$, $\beta>0$, $|\alpha|<|\beta|$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{2b}{3a}>0$, $\dfrac{c}{3a}<0$

이때 $a>0$이므로 $b<0$, $c<0$

$\therefore ab<0$, $ac<0$, $ad>0$, $bc>0$, $bd<0$

답 ②

Q BOX

$\alpha<0$, $\beta>0$, $|\alpha|<|\beta|$이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta<0$

$f'(4)=0$이지만 $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=4$에서 극값을 갖지 않는다.

쌤 한마디

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에 대하여

① $x \longrightarrow \infty$일 때 $f(x) \longrightarrow \infty$이면 ⊙ $a>0$, $f(x) \longrightarrow -\infty$이면 ⊙ $a<0$

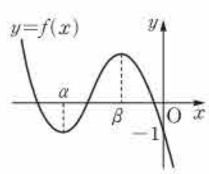
② $y=f(x)$의 그래프가 y축과 양의 부분에서 만나면 ⊙ $d>0$, 음의 부분에서 만나면 ⊙ $d<0$

③ 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지면 ⊙ 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 α, β이다.

14 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$의 그래프에서 $x \longrightarrow \infty$일 때 $f(x) \longrightarrow -\infty$이므로

$a<0$

오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대라 하면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 α, β이고, α, β는 서로 다른 두 음수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여



$-\dfrac{2b}{3a}<0$, $\dfrac{c}{3a}>0$

$\alpha<0$, $\beta<0$이므로 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

이때 $a<0$이므로 $b<0$, $c<0$

$\therefore abc<0$, $a+b<0$

또 $bc>0$이므로 $a-bc<0$

$ab>0$이므로 $ab-c>0$

답 ⑤

15 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 1, 3이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f'(1)=0$에서

$3+2a+b=0$ $\quad \therefore 2a+b=-3$ ······ ㉠

$f'(3)=0$에서 $27+6a+b=0$

$\therefore 6a+b=-27$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-6$, $b=9$

즉 $f(x)=x^3-6x^2+9x+c$이므로 $f(1)=8$에서

$1-6+9+c=8$ $\quad \therefore c=4$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x+4$이므로 구하는 극솟값은

$f(3)=27-54+27+4=4$

답 ④

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 8을 갖는다.

16 ㄱ. 구간 $(-2, -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 구간 $(0, 4)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

$\therefore f(1)<f(3)$

ㄷ. $f'(4)=0$이므로 $f(x)$는 $x=4$에서 미분가능하다.

ㄹ. 구간 $(-4, 6)$에서 $f(x)$는 $x=-3$, $x=-1$에서 극값을 가지므로 극값을 갖는 x의 값은 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

Lecture 10 함수의 그래프

59쪽

01 $f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

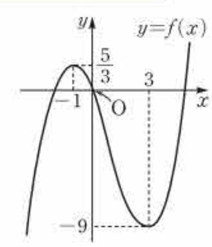
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{5}{3}$	↘	-9	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

$f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지난다.



02 $f'(x)=-4x^3+12x$

$=-4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

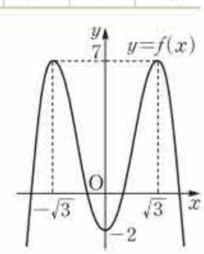
$f'(x)=0$에서

$x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	7	↘	-2	↗	7	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



03 $f'(x)=6x^2-2ax+6$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다. ⟺ 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-6\cdot 6>0$

$a^2-36>0$, $\quad (a+6)(a-6)>0$

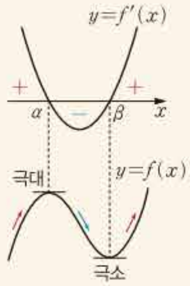
$\therefore a<-6$ 또는 $a>6$

답 $a<-6$ 또는 $a>6$

쌤한마디

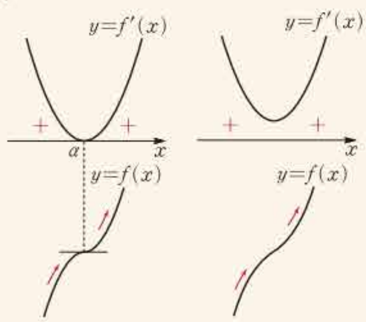
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$에 대하여 이차방정식

① $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.



극값을 갖는다.

② $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.



극값을 갖지 않는다.

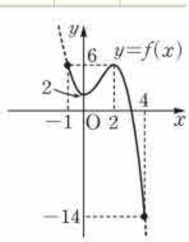
04 $f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	6	↘	2	↗	6	↘	-14

주어진 구간에서 증감표를 만든다.

따라서 구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$일 때 최댓값 6, $x=4$일 때 최솟값 -14를 갖는다.



답 최댓값: 6, 최솟값: -14

05 $f'(x)=12x^3-12x^2-12x+12$

$=12(x^3-x^2-x+1)$

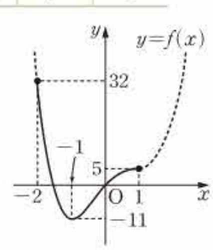
$=12(x+1)(x-1)^2$

x^3-x^2-x+1
$=x^2(x-1)-(x-1)$
$=(x^2-1)(x-1)$
$=(x+1)(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	32	↘	-11	↗	5

따라서 구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 32, $x=-1$일 때 최솟값 -11을 갖는다.



답 최댓값: 32, 최솟값: -11

06 (1) 상자의 밑면은 가로의 길이가 $8-2x$, 세로의 길이가 $5-2x$인 직사각형이다.

이때 $x>0$, $8-2x>0$, $5-2x>0$이므로

$0<x<\frac{5}{2}$

$8-2x>0$에서 $\quad x<4$
$5-2x>0$에서 $\quad x<\frac{5}{2}$
공통 범위를 구하면
$x<\frac{5}{2}$

(2) 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(8-2x)(5-2x)$

$=4x^3-26x^2+40x$

(3) $V'(x)=12x^2-52x+40=4(x-1)(3x-10)$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=1\left(\because 0<x<\frac{5}{2}\right)$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	18	↘	

따라서 $0<x<\frac{5}{2}$에서 $V(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 18을 가지므로 상자의 부피의 최댓값은 18이다.

답 (1) $0<x<\frac{5}{2}$ (2) $4x^3-26x^2+40x$ (3) 18

표준+발전 유형 Q+Q

60쪽

01 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 2이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고, $x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=-2$에서 극값을 갖지 않는다.

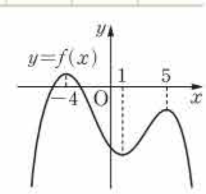
답 ④

02 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -4, 1, 5이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-4$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

$f(1)<f(5)<0<f(-4)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(x)$는 구간 $(1, 5)$에서 증가하고 $f(5)<0$이므로

$f(3)<f(5)<0$

ㄴ. $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

03 $f'(x)=x^2+2kx+k$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-k>0,\qquad k(k-1)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>1$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다. 답 ②

04 $f'(x)=-3x^2+2(a-2)x+3a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(-3)\cdot 3a\le 0$

$a^2+5a+4\le 0,\qquad (a+4)(a+1)\le 0$

$\therefore -4\le a\le -1$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다. 답 ①

05 $f'(x)=3x^2-4x+k$

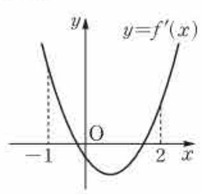
삼차함수 $f(x)$가 구간 $(-1,\ 2)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 구간 $(-1,\ 2)$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-3k>0$

$4-3k>0$

$\therefore k<\frac{4}{3}$



(ii) $f'(-1)>0$에서

$3+4+k>0\qquad \therefore k>-7$

$f'(2)>0$에서

$12-8+k>0\qquad \therefore k>-4$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=\frac{2}{3}$이고 $-1<\frac{2}{3}<2$이다.

이상에서 k의 값의 범위는 $\quad -4<k<\frac{4}{3}$

따라서 정수 k는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)+0+1=-5$ 답 ⑤

06 $f'(x)=6x^2+2(a-1)x+a$

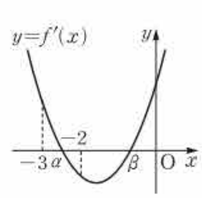
삼차함수 $f(x)$가 $-3<x<-2$에서 극댓값, $x>-2$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 할 때, $-3<\alpha<-2,\ \beta>-2$이어야 한다.

$f'(-3)>0$에서

$54-6(a-1)+a>0$

$60-5a>0$

$\therefore a<12$ ...... ㉠



$f'(-2)<0$에서

$24-4(a-1)+a<0,\qquad 28-3a<0$

$\therefore a>\frac{28}{3}$ ...... ㉡

QBOX

사차함수 $f(x)$에 대하여

① 최고차항의 계수가 양수 ➡ $f(x)$는 항상 극솟값을 갖는다.

② 최고차항의 계수가 음수 ➡ $f(x)$는 항상 극댓값을 갖는다.

$x=0$이 이차방정식 $2x^2-12x-k=0$의 근이 아니어야 하므로

$0-0-k\ne 0$

$\therefore k\ne 0$

$3x^2-4x+k$

$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+k-\frac{4}{3}$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 4 & 0 & -(a+4) & -a \\ & & -4 & 4 & a \\ \hline & 4 & -4 & -a & 0 \end{array}$$

$\therefore 4x^3-(a+4)x-a$

$=(x+1)(4x^2-4x-a)$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{28}{3}<a<12$ 답 $\frac{28}{3}<a<12$

07 $f'(x)=-4x^3+24x^2+2kx$

$=-2x(2x^2-12x-k)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $2x^2-12x-k=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2-12x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$k\ne 0,\ \frac{D}{4}=(-6)^2-2\cdot(-k)>0$

에서 $\quad k\ne 0,\ k>-18$

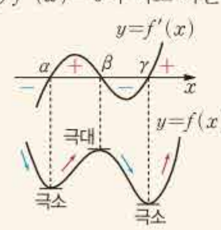
$\therefore -18<k<0$ 또는 $k>0$

따라서 k의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

쌤 한마디

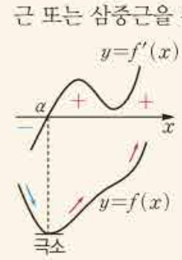
최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$에 대하여 삼차방정식

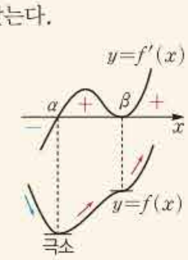
① $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

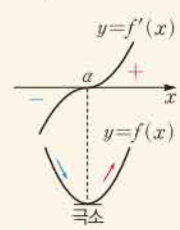


➲ 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

② $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는다.







➲ 극솟값을 갖고 극댓값을 갖지 않는다.

08 $f'(x)=8x^3-2(a+4)x-2a$

$=2\{4x^3-(a+4)x-a\}$

$=2(x+1)(4x^2-4x-a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(ⅰ) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=-1$이므로 이차방정식 $4x^2-4x-a=0$이 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $4x^2-4x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-4\cdot(-a)<0 \qquad \therefore a<-1$$

(ⅱ) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=-1$이므로 이차방정식 $4x^2-4x-a=0$이 $x=-1$을 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $4x^2-4x-a=0$이 $x=-1$을 근으로 가지면

$$4+4-a=0 \qquad \therefore a=8$$

이차방정식 $4x^2-4x-a=0$이 중근을 가지면 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-4\cdot(-a)=0 \qquad \therefore a=-1$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad a\le -1$ 또는 $a=8$

따라서 a의 최댓값은 8이다. 답 ④

참고 $4x^2-4x-a=0$이 중근을 갖는 경우 $a=-1$이므로

$4x^2-4x+1=0$에서 $\quad (2x-1)^2=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$

따라서 $4x^2-4x-a=0$이 $x=-1$을 중근으로 가질 수 없으므로 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

09 $f'(x)=2x^3-12x^2+16x=2x(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=2$ ($\because -1\le x\le 3$)

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{27}{2}$	↘	1	↗	9	↘	$\frac{11}{2}$

따라서 구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $\frac{27}{2}$, $x=0$일 때 최솟값 1을 갖는다.

즉 $M=\frac{27}{2}$, $m=1$이므로

$$M-m=\frac{25}{2}$$

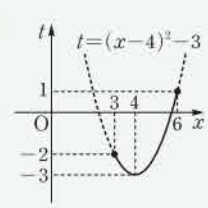
답 $\frac{25}{2}$

10 $x^2-8x+13=t$로 놓으면

$t=x^2-8x+13=(x-4)^2-3$

이므로 $3\le x\le 6$에서

$-3\le t\le 1$



$g(t)=t^3-3t-2$라 하면

$g'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $\qquad t=-1$ 또는 $t=1$

t	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-20	↗	0	↘	-4

따라서 $-3\le t\le 1$에서 함수 $g(t)$는 $t=-1$일 때 최댓값 0, $t=-3$일 때 최솟값 -20을 가지므로 구하는 합은

$$0+(-20)=-20$$

답 ①

11 $f'(x)=-3x^2-12x=-3x(x+4)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-4$ ($\because -5\le x\le -1$)

x	-5	$\cdots$	-4	$\cdots$	-1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-25$	↘	$k-32$	↗	$k-5$

따라서 구간 $[-5, -1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $k-5$, $x=-4$일 때 최솟값 $k-32$를 갖는다.

$k-32<k-25<k-5$

이때 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 15이므로

$(k-5)+(k-32)=15, \qquad 2k=52$

$\therefore k=26$

답 ③

12 $f'(x)=6ax^2-6ax=6ax(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=1$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-28a+b$	↗	b	↘	$-a+b$

따라서 구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 b, $x=-2$일 때 최솟값 $-28a+b$를 가지므로

$a>0$이므로
$-28a+b<-a+b$
$<b$

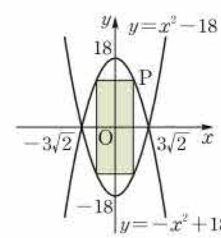
$b=24, \ -28a+b=-4$

$\therefore a=1, b=24$

$\therefore a+b=25$

답 ⑤

13 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 꼭짓점 중 제1사분면 위에 있는 점을 P라 하고 점 P의 x좌표를 t라 하면



$P(t, -t^2+18)$

$(0<t<3\sqrt{2})$

$-t^2+18=0$에서
$t^2=18 \quad \therefore t=\pm 3\sqrt{2}$
이때 $t>0$이므로
$0<t<3\sqrt{2}$

직사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=2t\cdot 2(-t^2+18)=-4t^3+72t$

두 곡선 $y=x^2-18$, $y=-x^2+18$은 x축에 대하여 대칭이므로 직사각형의 세로의 길이는 점 P의 y좌표의 2배이다.

$\therefore S'(t)=-12t^2+72=-12(t+\sqrt{6})(t-\sqrt{6})$

$S'(t)=0$에서 $\qquad t=\sqrt{6}$ ($\because 0<t<3\sqrt{2}$)

t	0	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$	$3\sqrt{2}$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$48\sqrt{6}$	↘	

따라서 $0<t<3\sqrt{2}$에서 $S(t)$는 $t=\sqrt{6}$일 때 최댓값 $48\sqrt{6}$을 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $48\sqrt{6}$이다.

답 $48\sqrt{6}$

14 점 P의 좌표를 $(t, 2t^2)$이라 하면 점 P와 점 $(-9, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-9-t)^2+(-2t^2)^2}=\sqrt{4t^4+t^2+18t+81}$

$f(t)=4t^4+t^2+18t+81$이라 하면

$f'(t)=16t^3+2t+18$

$=2(t+1)(8t^2-8t+9)$

$f'(t)=0$에서 $\qquad t=-1$ ($\because 8t^2-8t+9>0$)

$8t^2-8t+9$
$=8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+7>0$

t	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	68	↗

따라서 $f(t)$는 $t=-1$에서 최솟값 68을 가지므로 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{68}$, 즉 $2\sqrt{17}$이다. 답 ④

중단원 마무리

63쪽

01 전략 어떤 구간의 모든 x에 대하여 $g'(x)>0$이면 $g(x)$는 이 구간에서 증가한다.

풀이 $y=\{f(x)\}^2$에서 $y'=2f(x)f'(x)$

① 구간 (a, b)에서 $f(x)>0$, $f'(x)<0$이므로
$2f(x)f'(x)<0$
따라서 구간 (a, b)에서 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.

② 구간 (c, d)에서 $f(x)<0$, $f'(x)>0$이므로
$2f(x)f'(x)<0$
따라서 구간 (c, d)에서 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.

③ 구간 (d, e)에서 $f(x)<0$, $f'(x)<0$이므로
$2f(x)f'(x)>0$
따라서 구간 (d, e)에서 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.

④ 구간 (e, f)에서 $f(x)<0$, $f'(x)>0$이므로
$2f(x)f'(x)<0$
따라서 구간 (e, f)에서 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.

⑤ 구간 (g, h)에서 $f(x)>0$, $f'(x)<0$이므로
$2f(x)f'(x)<0$
따라서 구간 (g, h)에서 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.

답 ③

02 전략 구간 $[t, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(t)$가 되려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 함을 이용한다.

풀이 모든 실수 t에 대하여 구간 $[t, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(t)$가 되려면 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.
즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.
$f'(x)=-3x^2+4kx-(k+9)$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-(-3)\cdot\{-(k+9)\}\le 0$$

$4k^2-3k-27\le 0$, $(4k+9)(k-3)\le 0$

$\therefore -\frac{9}{4}\le k\le 3$

따라서 정수 k의 최솟값은 -2이다. 답 -2

03 전략 x의 값의 범위를 $x\ge 2a$, $x<2a$로 나누어 $f'(x)$를 구한다.

풀이 (i) $x\ge 2a$일 때,

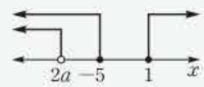
$$f(x)=x^3+6x^2+15(x-2a)+3$$
$$=x^3+6x^2+15x-30a+3$$
$$\therefore f'(x)=3x^2+12x+15$$
$$=3(x+2)^2+3>0$$

즉 함수 $f(x)$는 $x\ge 2a$에서 증가한다.

(ii) $x<2a$일 때,

$$f(x)=x^3+6x^2+15(-x+2a)+3$$
$$=x^3+6x^2-15x+30a+3$$
$$\therefore f'(x)=3x^2+12x-15=3(x+5)(x-1)$$

함수 $f(x)$가 $x<2a$에서 증가하려면 $x<2a$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.
$f'(x)\ge 0$에서 $x\le -5$ 또는 $x\ge 1$
즉 $x<2a$에서 $f'(x)\ge 0$이려면



$2a\le -5$

$\therefore a\le -\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 a의 값의 범위는

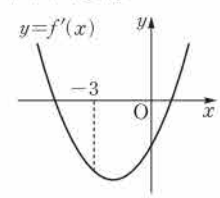
$a\le -\frac{5}{2}$

따라서 구하는 a의 최댓값은 $-\frac{5}{2}$이다. 답 ①

04 전략 주어진 조건을 만족시키도록 $y=f'(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 구간 $(-3, 0)$에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 이 구간에서 감소해야 한다.
즉 구간 $(-3, 0)$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.
$f'(x)=x^2+4x-6(a-1)$이고, 오른쪽 그림에서

$y=x^2+4x-6(a-1)$
$=(x+2)^2-6a+2$
의 그래프는 아래로 볼록하고 축의 방정식이 $x=-2$인 포물선이다.



$f'(-3)\le 0$이어야 하므로

$9-12-6(a-1)\le 0$

$\therefore a\ge \frac{1}{2}$ ...... ㉠

$f'(0)\le 0$이어야 하므로

$-6(a-1)\le 0$ $\therefore a\ge 1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a\ge 1$ 답 $a\ge 1$

참고 직선 $x=0$이 직선 $x=-3$보다 대칭축 $x=-2$에서 멀리 떨어져 있음을 이용하면 $f'(0)\le 0$이면 $f'(-3)\le 0$도 성립함을 알 수 있다. 즉 $f'(0)\le 0$을 만족시키는 a의 값의 범위만 생각해도 된다.

05 전략 주어진 조건을 이용하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식을 세우고 함수 $y=f(x)g(x)$의 그래프의 개형을 유추한다.

풀이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 세 점 $(a, 0)$, $(c, 0)$, $(e, 0)$을 지나고 $x\longrightarrow\infty$일 때 $f(x)\longrightarrow\infty$이므로

$f(x)=k(x-a)(x-c)(x-e)$ $(k>0)$

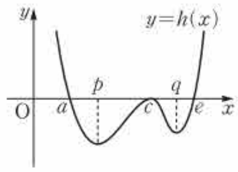
라 하자.
또 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(c, 0)$을 지나고 기울기가 양수이므로

$g(x)=m(x-c)$ $(m>0)$

라 하자.
$h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$h(x)=km(x-a)(x-c)^2(x-e)$

이때 함수 $h(x)$가 $x=p$와 $x=q$에서 극소이고 $km>0$이므로 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



한편 $h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=b$를 대입하면

$h'(b)=f'(b)g(b)+f(b)g'(b)$

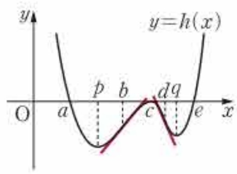
$=f(b)\cdot m>0$ ...... ㉡

㉠의 양변에 $x=d$를 대입하면

$h'(d)=f'(d)g(d)+f(d)g'(d)$

$=f(d)\cdot m<0$ ...... ㉢

$a<b<c$, $c<d<e$이면서 ㉡, ㉢을 만족시키는 b, d를 그래프 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

06 전략 함수 $f(x)$의 극댓값을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-1)$

$=3(x-a+1)(x-a-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=a-1$ 또는 $x=a+1$

x	$\cdots$	$a-1$	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	a^3-3a+2	↘	a^3-3a-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a-1$에서 극댓값 a^3-3a+2를 가지므로

$a^3-3a+2=4$, $a^3-3a-2=0$

$(a+1)^2(a-2)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때, $f(x)=x^3+3x^2$이므로

$f(-2)=-8+12=4>0$

(ii) $a=2$일 때, $f(x)=x^3-6x^2+9x$이므로

$f(-2)=-8-24-18=-50<0$

즉 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-1$

즉 $f(x)=x^3+3x^2$이므로

$f(-1)=-1+3=2$

답 ②

07 전략 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 기함수임을 이용하여 식을 세운다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x)$는 기함수이므로

$f(x)=ax^3+bx$ (a, b는 정수, $a\neq0$)라 하자.

조건 (나)에서 $f(-1)=8$이므로 $-a-b=8$

$\therefore b=-a-8$

$f(x)=ax^3+(-a-8)x$에서

$f'(x)=3ax^2-a-8$

이므로 $f'(1)=2a-8$

Q BOX

$g(x)=m(x-c)$에서

$g'(x)=m$

$f'(b)=0$

$f'(d)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore a^3-3a-2$

$=(a+1)(a^2-a-2)$

$=(a+1)^2(a-2)$

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

다항함수 $f(x)$가

① 우함수이면 $f(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항의 합으로 이루어져 있다.

② 기함수이면 $f(x)$는 홀수 차수의 항의 합으로 이루어져 있다.

조건 (다)에서 $-10<2a-8<-4$이므로

$-2<2a<4$ $\therefore -1<a<2$

이때 a는 $a\neq0$인 정수이므로

$a=1$

즉 $f(x)=x^3-9x$이므로

$f'(x)=3x^2-9=3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$6\sqrt{3}$	↘	$-6\sqrt{3}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$에서 극댓값 $6\sqrt{3}$을 갖는다.

답 $6\sqrt{3}$

08 전략 함수 $f(x)$가 극소가 되는 점의 좌표와 직선 l의 방정식을 구하여 점과 직선 사이의 거리를 구한다.

풀이 $f'(x)=-x^2-2x+3=-(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-8	↗	$\frac{8}{3}$	↘

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극솟값 -8을 가지므로

$a=-3$, $b=-8$

한편 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=3$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

즉 점 $(0, 1)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선 l의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{3}x$ $\therefore x+3y-3=0$

따라서 점 $(-3, -8)$과 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|-3-24-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=3\sqrt{10}$$

답 $3\sqrt{10}$

09 전략 삼차함수 $h(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $h'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $f'(x)=3x^2-4ax-2a$이고, 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-2a)^2-3\cdot(-2a)>0$

$4a^2+6a>0$, $a(2a+3)>0$

$\therefore a<-\frac{3}{2}$ 또는 $a>0$ ...... ㉠ ⋯ ❶

$g'(x)=-3x^2+12x-a^2$이고, 삼차함수 $g(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $g'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=6^2-(-3)\cdot(-a^2)>0$$

$$36-3a^2>0, \quad a^2-12<0$$

$$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0$$

$$\therefore\ -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3} \quad \cdots\cdots ㉡ \quad ⋯➋$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$-2\sqrt{3}<a<-\frac{3}{2} \text{ 또는 } 0<a<2\sqrt{3}$$

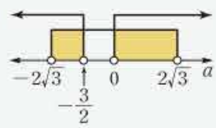
따라서 정수 a는 -3, -2, 1, 2, 3의 5개이다. ⋯➌

답 5

단계	채점 기준	비율
➊	함수 $f(x)$가 극값을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➋	함수 $g(x)$가 극값을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➌	정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

Q BOX

$f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$는 항상 극댓값을 갖는다.



$-\sqrt{16}<-\sqrt{12}<-\sqrt{9}$이므로

$-4<-2\sqrt{3}<-3$

$\sqrt{9}<\sqrt{12}<\sqrt{16}$이므로

$3<2\sqrt{3}<4$

10 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 극값을 갖지 않거나 $x<0$에서만 극값을 가져야 한다.

풀이 $f'(x)=3x^2+6ax-a+2$

함수 $f(x)$가 $x\ge0$에서 극값을 갖지 않으려면 실수 전체의 집합에서 극값을 갖지 않거나 $x<0$에서만 극값을 가져야 한다.

(i) 실수 전체의 집합에서 극값을 갖지 않는 경우

이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(3a)^2-3(-a+2)\le0$$

$$9a^2+3a-6\le0$$

$$(a+1)(3a-2)\le0$$

$$\therefore\ -1\le a\le\frac{2}{3}$$

(ii) $x<0$에서만 극값을 갖는 경우

이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 음의 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(3a)^2-3(-a+2)>0$$

$$9a^2+3a-6>0$$

$$(a+1)(3a-2)>0$$

$$\therefore\ a<-1 \text{ 또는 } a>\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{6a}{3}<0, \quad \frac{-a+2}{3}>0$$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha<0$, $\beta<0$이므로 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

에서 $\quad a>0,\ a<2$

$$\therefore\ 0<a<2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$\frac{2}{3}<a<2$$

(i), (ii)에서 $\quad -1\le a<2$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

11 전략 사차함수 $f(x)$가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $f'(x)=-4x^3+3ax^2-4x$

$\qquad=-x(4x^2-3ax+4)$

사차함수 $f(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $4x^2-3ax+4=0$이 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $4x^2-3ax+4=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-3a)^2-4\cdot4\cdot4<0$$

$$9a^2-64<0, \quad (3a+8)(3a-8)<0$$

$$\therefore\ -\frac{8}{3}<a<\frac{8}{3}$$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $4x^2-3ax+4=0$이 $x=0$을 근으로 가질 수 없으므로 중근을 가져야 한다.

$4x^2-3ax+4=0$에 $x=0$을 대입하면 $4\ne0$

이차방정식 $4x^2-3ax+4=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-3a)^2-4\cdot4\cdot4=0$$

$$9a^2-64=0, \quad (3a+8)(3a-8)=0$$

$$\therefore\ a=-\frac{8}{3} \text{ 또는 } a=\frac{8}{3}$$

(i), (ii)에서 $\quad -\frac{8}{3}\le a\le\frac{8}{3}$

따라서 $M=\frac{8}{3}$, $m=-\frac{8}{3}$이므로

$$Mm=-\frac{64}{9}$$

답 $-\frac{64}{9}$

참고 $4x^2-3ax+4=0$이 중근을 갖는 경우 $a=-\frac{8}{3}$ 또는 $a=\frac{8}{3}$이므로 $4x^2+8x+4=0$, $4x^2-8x+4=0$에서

$4(x+1)^2=0$, $4(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 $4x^2-3ax+4=0$이 $x=0$을 중근으로 가질 수 없으므로 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

12 전략 주어진 구간에서 $f(x)$의 최솟값을 k에 대한 식으로 나타내어 $g(k)$를 구한 후 $0<k<1$에서 $g(k)$의 최댓값을 구한다.

풀이 $f'(x)=3x^2-6kx=3x(x-2k)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2k$

$0<k<1$이므로 $0<2k<2$

x	0	$\cdots$	$2k$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$3k$	↘	$-4k^3+3k$	↗	$-9k+8$

따라서 구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2k$일 때 최솟값 $-4k^3+3k$를 가지므로

$$g(k)=-4k^3+3k$$

$$\therefore\ g'(k)=-12k^2+3$$

$$=-3(2k+1)(2k-1)$$

$g'(k)=0$에서 $\quad k=\frac{1}{2}$ ($\because 0<k<1$)

k	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(k)$		$+$	0	$-$	
$g(k)$		↗	1	↘	

따라서 $0<k<1$에서 $g(k)$는 $k=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 1을 갖는다. 답 1

13 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만든다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 α, β, γ이므로 $f'(x)=0$에서

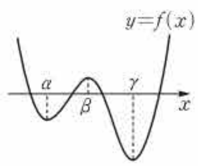
$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄴ. 구간 $[\alpha, \gamma]$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(\alpha)$, $f(\gamma)$ 중에서 작은 값이다. 이때 $f(\gamma)<f(\alpha)$이므로 $f(x)$의 최솟값은 $f(\gamma)$이다.

> 구간 $[\alpha, \gamma]$에서 $f(x)$는 $x=\beta$일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $f(\beta)$이다.

ㄷ. $f(\gamma)<f(\alpha)<0<f(\beta)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 네 점에서 만난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

14 전략 극값과 양 끝 점의 함숫값 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=0$에서 $\quad 3-2a+b=0$

$\therefore 2a-b=3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(2)=0$에서 $\quad 12+4a+b=0$

$\therefore 4a+b=-12 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{3}{2}$, $b=-6$ $\quad \cdots$ ❶

$\therefore f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+c$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$c-2$	↗	$c+\frac{7}{2}$	↘	$c-10$	↗	$c-\frac{9}{2}$

따라서 구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $c+\frac{7}{2}$, $x=2$일 때 최솟값 $c-10$을 가지므로

> $c-10<c-\frac{9}{2}<c-2<c+\frac{7}{2}$

$c+\frac{7}{2}=4 \quad \therefore c=\frac{1}{2}$ $\quad \cdots$ ❷

즉 구하는 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{19}{2}$이다. $\quad \cdots$ ❸

> $c-10=\frac{1}{2}-10$
> $=-\frac{19}{2}$

답 $-\frac{19}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	c의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	함수 $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

15 전략 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-a$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

x	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a^3+2	↘	$-\frac{5}{27}a^3+2$	↗	a^3+2

따라서 구간 $[-a, a]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-a$, $x=a$일 때 최댓값 a^3+2, $x=\frac{a}{3}$일 때 최솟값 $-\frac{5}{27}a^3+2$를 가지므로

$-\frac{5}{27}a^3+2=\frac{14}{27}$, $\quad a^3=8 \quad \therefore a=2$

즉 $f(x)$의 최댓값은 10이므로

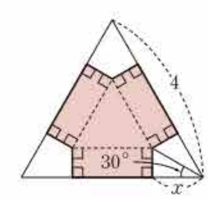
> $a^3+2=8+2=10$

$M=10$

$\therefore a+M=12$ 답 12

16 전략 정삼각형의 한 꼭짓점으로부터의 거리가 x인 부분까지 자른다고 하고 상자의 부피를 x에 대한 함수로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 정삼각형의 한 꼭짓점으로부터의 거리가 x ($0<x<2$)인 부분까지 자른다고 하면 상자의 밑면은 한 변의 길이가 $4-2x$인 정삼각형이고 상자의 높이는



> 길이가 4인 한 변에서 $2x$만큼 잘라 내므로 $4-2x>0$에서
> $x<2$
> 이때 $x>0$이므로
> $0<x<2$

$x\tan 30°=\frac{x}{\sqrt{3}}$

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(4-2x)^2\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}$

> 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$=x^3-4x^2+4x$

$\therefore V'(x)=3x^2-8x+4$

$=(3x-2)(x-2)$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{2}{3}$ ($\because 0<x<2$)

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	$\frac{32}{27}$	↘	

따라서 $0<x<2$에서 $V(x)$는 $x=\frac{2}{3}$일 때 최댓값 $\frac{32}{27}$를 가지므로 구하는 상자의 부피의 최댓값은 $\frac{32}{27}$이다.

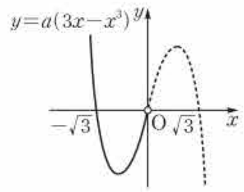
답 ④

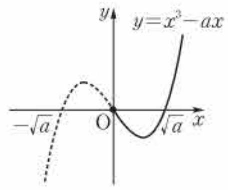
17 전략 a의 값의 범위에 따른 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 (i) $a>0$인 경우

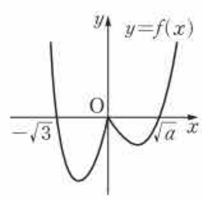
$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\ge 0) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -ax(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) & (x<0) \\ x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) & (x\ge 0) \end{cases}$$

이므로 두 삼차함수 $y=a(3x-x^3)$, $y=x^3-ax$의 그래프의 개형은 각각 다음 그림과 같다.





따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
즉 주어진 조건을 만족시키지 않는다.



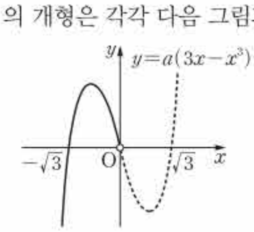
(ii) $a=0$인 경우

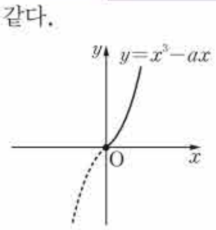
$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ x^3 & (x\ge 0) \end{cases}$에서 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a<0$인 경우

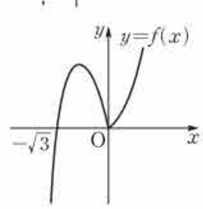
두 삼차함수 $y=a(3x-x^3)$, $y=x^3-ax$의 그래프의 개형은 각각 다음 그림과 같다.

$g(x)=x^3-ax$라 하면
$g'(x)=3x^2-a$
이때 $-a>0$이므로 모든 실수 x에 대하여
$g'(x)>0$
따라서 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.





따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x<0$에서 극댓값을 갖는다.



$f(x)=a(3x-x^3)$ $(x<0)$
에서

$$f'(x)=a(3-3x^2)$$
$$=-3a(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ ($\because x<0$)

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $-2a$를 가지므로

$f(-1)=a\cdot(-3+1)$
$=-2a$

$$-2a=5 \qquad \therefore a=-\frac{5}{2}$$

이상에서 $a=-\frac{5}{2}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{5}{2}(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3+\frac{5}{2}x & (x\ge 0) \end{cases}$$

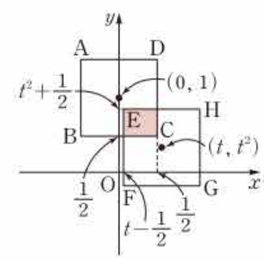
$\therefore f(2)=8+5=13$

답 ⑤

18 전략 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표를 (t, t^2)이라 하고 두 정사각형의 공통부분의 넓이를 t에 대한 함수로 나타낸다.

풀이 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표가 (0, 1)이므로

$$C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표를 (t, t^2) $(0<t<1)$이라 하면

$$E\left(t-\frac{1}{2}, t^2+\frac{1}{2}\right)$$

두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\left\{\frac{1}{2}-\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\}\left\{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}$$
$$=-t^3+t^2$$
$$\therefore S'(t)=-3t^2+2t=-t(3t-2)$$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=\frac{2}{3}$ ($\because 0<t<1$)

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	$\frac{4}{27}$	↘	

따라서 $0<t<1$에서 $S(t)$는 $t=\frac{2}{3}$일 때 최댓값 $\frac{4}{27}$를 가지므로 구하는 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{27}$이다.

답 ①

쌤 한마디

$t\le -1$ 또는 $t=0$ 또는 $t\ge 1$일 때에는 두 정사각형 ABCD, EFGH의 내부의 공통부분이 존재하지 않으므로 t의 값의 범위는 $-1<t<0$ 또는 $0<t<1$이다.
이때 $-1<t<0$에서도 공통부분이 생기지만 곡선 $y=x^2$이 y축에 대하여 대칭이므로 $0<t<1$에서의 최댓값은 $-1<t<0$에서의 최댓값과 같다.
따라서 $0<t<1$에서만 최댓값을 구해도 된다.

06 도함수의 활용 (3)

Lecture 11 방정식과 부등식에의 활용

66쪽

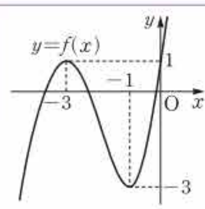
01 $f(x)=x^3+6x^2+9x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2+12x+9$
$=3(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



답 3

함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만난다.

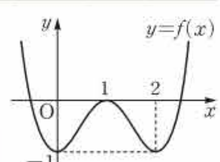
02 $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$이라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2+8x$
$=4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



답 3

방정식 $f(x)=0$은 $x=1$을 중근으로 갖고 서로 다른 두 실근을 가지므로 서로 다른 세 실근을 갖는다.

03 $4x^4+6x^2-2=x^4-8x^3$에서

$3x^4+8x^3+6x^2-2=0$

$f(x)=3x^4+8x^3+6x^2-2$라 하면

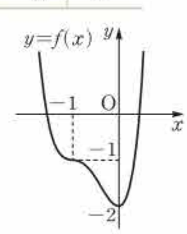
$f'(x)=12x^3+24x^2+12x=12x(x+1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

우변을 좌변으로 이항하여 $f(x)=0$ 꼴로 만든다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



답 2

04 $f(x)=x^3-3x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

(1) 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-1)f(1)<0$이어야 하므로

$(k+2)(k-2)<0$ $\quad\therefore -2<k<2$

(2) 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(1)=0$이어야 하므로

$(k+2)(k-2)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=2$

(3) 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(-1)f(1)>0$이어야 하므로

$(k+2)(k-2)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>2$

답 (1) $-2<k<2$ (2) -2, 2
(3) $k<-2$ 또는 $k>2$

05 답 2, 2, 0

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

06 $x^3-8x^2+10x>x^2-14x-1$에서

$x^3-9x^2+24x+1>0$

$f(x)=x^3-9x^2+24x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↗	21	↘	17	↗

$x\geq0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 1을 가지므로 $f(x)>0$

$f(x)\geq1>0$

따라서 $x\geq0$일 때, 부등식 $x^3-8x^2+10x>x^2-14x-1$이 성립한다.

답 풀이 참조

07 $f(x)=\frac{3}{4}x^4-x^3+k$라 하면

$f'(x)=3x^3-3x^2=3x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	k	↘	$k-\frac{1}{4}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $k-\frac{1}{4}$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$k-\frac{1}{4}<k$

$k-\frac{1}{4}>0$ $\quad\therefore k>\frac{1}{4}$

답 $k>\frac{1}{4}$

쌤 한마디

모든 실수 x에 대하여
① 부등식 $f(x)\geq0$이 성립하려면
(함수 $f(x)$의 최솟값)≥0
② 부등식 $f(x)\leq0$이 성립하려면
(함수 $f(x)$의 최댓값)≤0

표준+발전 유형 Q+Q

67쪽

01 $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+3$이라 하면

$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$

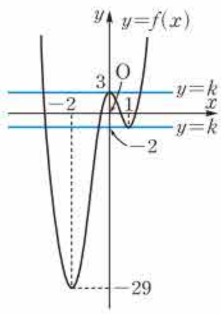
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-29	↗	3	↘	-2	↗

Q BOX

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 한 중근과 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 접점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$k=-2$ 또는 $k=3$

즉 모든 k의 값의 합은

$-2+3=1$ ▣ ①

02 $x^4-8x^3+16x^2-k=0$에서

$x^4-8x^3+16x^2=k$

$f(x)=x^4-8x^3+16x^2$이라 하면

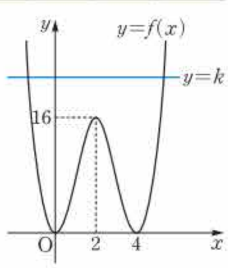
$f'(x)=4x^3-24x^2+32x$

$=4x(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	16	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하고 그 점에서 접하지 않아야 하므로



$k>16$

즉 정수 k의 최솟값은 17이다. ▣ 17

$k=0$일 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 접하므로 두 중근을 갖는다.

03 $-2x^3+16x-k=3x^2-20x$에서

$-2x^3-3x^2+36x=k$

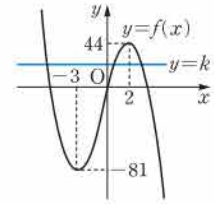
$f(x)=-2x^3-3x^2+36x$라 하면

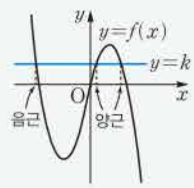
$f'(x)=-6x^2-6x+36=-6(x+3)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-81	↗	44	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고 한 개는 음수이어야 하므로





$0<k<44$

즉 정수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 43의 43개이다. ▣ ④

04 $2x^4+4x^3-7x=x^4+2x^2+5x+a$에서

$x^4+4x^3-2x^2-12x=a$

$f(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x$라 하면

$f'(x)=4x^3+12x^2-4x-12$

$=4(x^3+3x^2-x-3)$

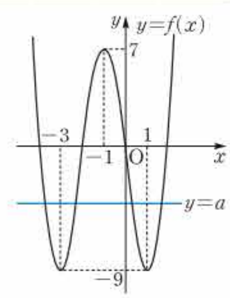
$=4(x+3)(x+1)(x-1)$

x^3+3x^2-x-3
$=x^2(x+3)-(x+3)$
$=(x^2-1)(x+3)$
$=(x+3)(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 네 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고 두 개는 음수이어야 하므로



$-9<a<0$ ▣ ②

05 $f(x)=2x^3-15x^2+24x+k$라 하면

$f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=4$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(1)f(4)<0$이어야 하므로

$(k+11)(k-16)<0$ $\therefore -11<k<16$

따라서 정수 k의 최댓값은 15, 최솟값은 -10이므로 구하는 차는

$15-(-10)=25$ ▣ 25

다른 풀이 $2x^3-15x^2+24x+k=0$에서

$2x^3-15x^2+24x=-k$

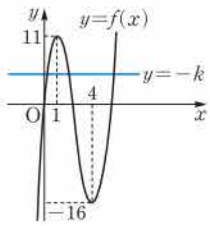
$f(x)=2x^3-15x^2+24x$라 하면

$f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	11	↘	-16	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 $\quad -16<-k<11 \quad \therefore -11<k<16$

06 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2-18x+k$라 하면

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-6x-18=\frac{3}{2}(x+2)(x-6)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=6$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-2)f(6)=0$이어야 하므로

$$(k+20)(k-108)=0$$

$$\therefore k=-20 \text{ 또는 } k=108$$

따라서 모든 k의 값의 합은

$$-20+108=88$$

답 ③

07 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$$x^3+3x^2-10x=14x+k, \text{ 즉}$$

$$x^3+3x^2-24x-k=0$$

이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-24x-k$라 하면

$$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-4$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-4)f(2)<0$이어야 하므로

$$(-k+80)(-k-28)<0$$

$$(k-80)(k+28)<0$$

$$\therefore -28<k<80$$

답 $-28<k<80$

다른 풀이 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$$x^3+3x^2-10x=14x+k, \text{ 즉 } x^3+3x^2-24x=k$$

가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

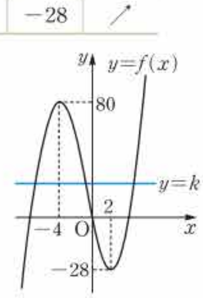
$f(x)=x^3+3x^2-24x$라 하면

$$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-4$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	80	↘	-28	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$-28<k<80$$

Q BOX

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 근
① 서로 다른 세 실근
② 한 실근과 중근 (서로 다른 두 실근)
③ 한 실근과 두 허근

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수
➡ 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수

접점의 개수

08 주어진 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식

$$-x^3+4x^2=x^2+k, \text{ 즉 } x^3-3x^2+k=0$$

이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+k$라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근, 즉 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(0)f(2)>0$이어야 하므로

$$k(k-4)>0 \qquad \therefore k<0 \text{ 또는 } k>4$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 5이다.

답 5

09 $y=2x^3-1$에서 $\quad y'=6x^2$

점 $(1,\ a)$에서 곡선 $y=2x^3-1$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ 2t^3-1)$이라 하면 접선의 기울기는 $6t^2$이므로 접선의 방정식은

$$y-(2t^3-1)=6t^2(x-t)$$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$$a-(2t^3-1)=6t^2(1-t)$$

$$\therefore 4t^3-6t^2+1+a=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

점 $(1,\ a)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(t)=4t^3-6t^2+1+a$라 하면

$$f'(t)=12t^2-12t=12t(t-1)$$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=1$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(0)f(1)<0$이어야 하므로

$$(a+1)(a-1)<0$$

$$\therefore -1<a<1$$

답 $-1<a<1$

쌤 한마디

삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점에서 이 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수에 대한 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.

(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 접선의 방정식을 세운다.
(ii) (i)의 접선이 주어진 곡선 밖의 한 점을 지남을 이용하여 t에 대한 방정식을 세운다.
(iii) (ii)의 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 주어진 곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수임을 이용한다.

10 $y=x^3+kx$에서 $\quad y'=3x^2+k$

점 $(2,\ 4)$에서 곡선 $y=x^3+kx$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+kt)$라 하면 접선의 기울기는 $3t^2+k$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+kt)=(3t^2+k)(x-t)$$

이 직선이 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$$4-(t^3+kt)=(3t^2+k)(2-t)$$

$$\therefore 2t^3-6t^2+4-2k=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

점 (2, 4)에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=2t^3-6t^2+4-2k$라 하면

$f'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(0)f(2)=0$이어야 하므로

$(-2k+4)(-2k-4)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k\neq -2$)

답 2

11 $f(x)=3x^4+4kx^3+16$이라 하면

$f'(x)=12x^3+12kx^2=12x^2(x+k)$

$f'(x)=0$에서 $x=-k$ 또는 $x=0$

k가 자연수이므로 $-k<0$

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-k^4+16$	↗	16	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-k$에서 최솟값 $-k^4+16$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-k^4+16\geq 0$, $k^4-16\leq 0$

$(k^2+4)(k+2)(k-2)\leq 0$

$k-2\leq 0$ ($\because k^2+4>0$, $k+2>0$)

$\therefore k\leq 2$

즉 자연수 k는 1, 2의 2개이다.

답 ②

12 $f(x)\leq g(x)$에서 $2x^2-12x\leq x^4-4x^3+a$

$\therefore -x^4+4x^3+2x^2-12x-a\leq 0$

$h(x)=-x^4+4x^3+2x^2-12x-a$라 하면

$h'(x)=-4x^3+12x^2+4x-12$

$=-4(x^3-3x^2-x+3)$

$=-4(x+1)(x-1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	$-a+9$	↘	$-a-7$	↗	$-a+9$	↘

따라서 함수 $h(x)$는 $x=-1$, $x=3$에서 최댓값 $-a+9$를 가지므로 모든 실수 x에서 부등식 $h(x)\leq 0$이 성립하려면

$h(x)=f(x)-g(x)\leq 0$이면 $f(x)\leq g(x)$

$-a+9\leq 0$ $\therefore a\geq 9$

즉 a의 최솟값은 9이다.

답 9

쌤 한마디

모든 실수 x에 대하여
① 부등식 $f(x)\leq g(x)$가 성립하려면
$h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때,
(함수 $h(x)$의 최댓값)≤ 0
② 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립하려면
$h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때,
(함수 $h(x)$의 최솟값)≥ 0

13 $2x^3+3x^2-12x\geq k$에서

$2x^3+3x^2-12x-k\geq 0$

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-k$라 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-k+9$	↗	$-k+20$	↘	$-k-7$	↗

따라서 $x\geq -3$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-k-7$을 가지므로 $x\geq -3$일 때, 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-k-7<-k+9<-k+20$

$-k-7\geq 0$ $\therefore k\leq -7$

답 $k\leq -7$

14 $2x^3+3x^2+k<2x^2+\frac{4}{3}x$에서

$2x^3+x^2-\frac{4}{3}x+k<0$

$f(x)=2x^3+x^2-\frac{4}{3}x+k$라 하면

$f'(x)=6x^2+2x-\frac{4}{3}$

$=\frac{2}{3}(3x+2)(3x-1)$

$1<x<3$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(1, 3)$에서 증가한다.

$x>\frac{1}{3}$일 때, $3x+2>0$, $3x-1>0$이므로 $f'(x)>0$

따라서 $1<x<3$일 때, 부등식 $f(x)<0$이 성립하려면

$f(3)\leq 0$, $54+9-4+k\leq 0$

$\therefore k\leq -59$

즉 k의 최댓값은 -59이다.

답 -59

쌤 한마디

구간 (a, b)에서
① 함수 $f(x)$가 증가할 때, 이 구간에서
부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(a)\geq 0$
부등식 $f(x)<0$이 성립하려면 $f(b)\leq 0$
② 함수 $f(x)$가 감소할 때, 이 구간에서
부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(b)\geq 0$
부등식 $f(x)<0$이 성립하려면 $f(a)\leq 0$

Lecture 12 속도와 가속도

69쪽

01 (1) 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+4t$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$v=-3+4=1$

(2) 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=-6t+4$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는

$a=-6+4=-2$

(3) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때 속도가 0이므로

$-3t^2+4t=0, \quad t(3t-4)=0$

$\therefore t=\frac{4}{3}$ ($\because t>0$)

답 (1) 1 (2) -2 (3) $\frac{4}{3}$

02 제동을 건 지 t초 후의 자동차의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=16-4t$

자동차가 정지할 때 $v=0$이므로

$16-4t=0 \quad \therefore t=4$

따라서 정지할 때까지 걸린 시간은 4초이다. 답 4초

03 점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로 $t=b$에서 처음으로 운동 방향을 바꾼다. 답 b

04 $l=3t^2+2t+4$에서 $\frac{dl}{dt}=6t+2$

따라서 $t=5$에서의 물체의 길이의 변화율은

$6\cdot5+2=32$ 답 32

05 구의 겉넓이를 S라 하면

$S=4\pi\cdot(2t)^2=16\pi t^2$

반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이는 $4\pi r^2$

$\therefore \frac{dS}{dt}=32\pi t$

따라서 $t=2$에서의 구의 겉넓이의 변화율은

$32\pi\cdot2=64\pi$ 답 64π

06 (1) t초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(3+t)$ cm이므로 정육면체의 부피를 $V\text{cm}^3$라 하면

$V=(3+t)^3$

$\therefore \frac{dV}{dt}=3(3+t)^2$

따라서 t초 후의 정육면체의 부피의 변화율은

$3(3+t)^2\ \text{cm}^3/\text{s}$

(2) 3초 후의 정육면체의 부피의 변화율은

$3\cdot(3+3)^2=108\ (\text{cm}^3/\text{s})$

답 (1) $3(3+t)^2\ \text{cm}^3/\text{s}$ (2) $108\ \text{cm}^3/\text{s}$

표준+발전 유형 Q+Q

70쪽

01 점 P가 원점을 지나는 순간 $x=0$이므로

원점을 지날 때 ➡ 위치가 0이다.

$t^3-t^2-2t=0, \quad t(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-2t-2,\ a=\frac{dv}{dt}=6t-2$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$6\cdot2-2=10$ 답 ③

02 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-4t^3+2kt+5,$

$a=\frac{dv}{dt}=-12t^2+2k$

$t=1$에서의 점 P의 가속도가 0이므로

$-12\cdot1^2+2k=0 \quad \therefore k=6$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$-4\cdot1^3+2\cdot6\cdot1+5=13$ 답 13

03 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-18t+24$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$3t^2-18t+24=0, \quad (t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

$t=2$에서의 점 P의 위치는

$2^3-9\cdot2^2+24\cdot2=20$

$t=4$에서의 점 P의 위치는

$4^3-9\cdot4^2+24\cdot4=16$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는

$20-16=4$ 답 4

04 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-6,$

$v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=2t-10$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

두 점의 속도의 부호가 반대이다.

$(2t-6)(2t-10)<0$

$(t-3)(t-5)<0$

$\therefore 3<t<5$ 답 $3<t<5$

05 제동을 건 지 t초 후의 자동차의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=42-7t$

자동차가 정지할 때 $v=0$이므로

$42-7t=0 \quad \therefore t=6$

따라서 제동을 건 후 자동차가 6초 동안 움직인 거리는

$42\times6-3.5\times6^2=126$ (m) 답 126 m

06 제동을 건 지 t초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=30-2at$

이때 열차에 제동을 건 지 25초 후에 정지하므로 $t=25$에서 $v=0$이다.

따라서 $30-50a=0$이므로

$a=0.6$ 답 ②

07 t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=49-9.8t$$

물체가 최고 높이에 도달할 때 $v=0$이므로

$$49-9.8t=0$$

$$\therefore t=5$$

따라서 5초 후의 지면으로부터의 높이는

$$49\times5-4.9\times5^2=122.5\ (\text{m})$$

답 ④

> 위로 던진 물체가 최고 높이에 도달할 때 물체는 정지하므로 이때의 속도는 0이다.

08 로켓이 지면에 떨어지는 순간 $h=0$이므로

$$20+15t-5t^2=0, \qquad t^2-3t-4=0$$

$$(t+1)(t-4)=0$$

$$\therefore t=4\ (\because t>0)$$

t초 후의 로켓의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=15-10t$$

이므로 4초 후의 로켓의 속도는

$$15-10\cdot4=-25\ (\text{m/s})$$

따라서 로켓이 지면에 떨어지는 순간의 속력은 25 m/s이다.

답 25 m/s

> 로켓의 속력은 $|v|$ m/s이므로
> $|-25|=25\,(\text{m/s})$

09 ㄱ. $a<t<b$에서 $x'(t)<0$이므로 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

ㄴ. $x'(c)=0$이고 $t=c$의 좌우에서 $x'(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=c$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

ㄷ. $x(b)=0$, $x(d)=0$이므로 점 P는 $t=b$, $t=d$에서 원점을 지난다.

ㄹ. $0<t<d$에서 $t=a$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P는 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

> 시각 t에서의 점 P의 속도는 $x'(t)$이고, $x'(t)$의 부호는 점 P의 운동 방향을 나타낸다.

> 원점에서 점 P까지의 거리는 $|x(t)|$이다.

10 ① $v'(4)>0$이므로 $t=4$에서의 점 P의 가속도는 양의 값이다.

② $1<t<3$에서 $v(t)<0$이므로 점 P는 움직이고 있다.

③ $3<t<4$에서 $v(t)<0$이므로 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

④ $5<t<6$에서 $v'(t)$는 음수인 상수로 일정하므로 점 P의 가속도는 일정하다.

⑤ $v(4)=0$, $v(6)=0$이고 $t=4$, $t=6$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=4$, $t=6$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

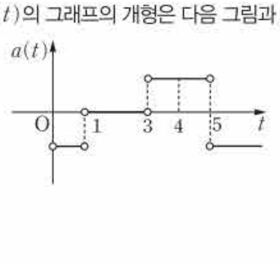
따라서 $0<t<7$에서 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다.

답 ②

> 시각 t에서의 점 P의 가속도는 $v'(t)$이다.

> $1<t<3$에서 점 P가 정지해 있으려면 $v(t)=0$이어야 한다.

참고 가속도 $a(t)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



쌤한마디

시각 t에서의 위치의 그래프가 주어졌을 때 각 점에서의 접선의 기울기는 속도를 나타내고, 속도의 그래프가 주어졌을 때 각 점에서의 접선의 기울기는 가속도를 나타낸다.
따라서 위치의 그래프가 주어지고 속도에 대한 문제를 해결하거나 속도의 그래프가 주어지고 가속도에 대한 문제를 해결할 때에는 각 점에서의 접선을 그려 본다.

11 t초 후의 풍선의 반지름의 길이는 $(7+0.5t)$ cm이므로 풍선의 부피를 V cm³라 하면

$$V=\frac{4}{3}\pi(7+0.5t)^3$$

> 반지름의 길이가 r인 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi r^3$

풍선의 반지름의 길이가 10 cm일 때

$$7+0.5t=10 \qquad \therefore t=6$$

풍선의 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt}=4\pi(7+0.5t)^2\times0.5=2\pi(7+0.5t)^2$$

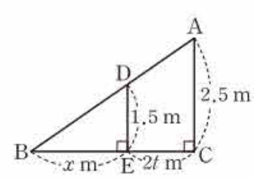
이므로 $t=6$에서의 부피의 변화율은

$$2\pi\times(7+0.5\times6)^2=200\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$$

답 200π cm³/s

12 출발한 지 t초 후의 가로등 바로 밑에서부터 재희까지의 거리는 $2t$ m

t초 후의 재희의 그림자의 길이를 x m라 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC \backsim \triangle DBE$ (AA 닮음)

이므로

> $\triangle ABC$와 $\triangle DBE$에서
> $\angle B$는 공통,
> $\angle C=\angle DEB$
> $\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DBE$ (AA 닮음)

$$2.5:1.5=(x+2t):x, \qquad 5:3=(x+2t):x$$

$$5x=3x+6t \qquad \therefore x=3t$$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=3$$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 3 m/s이다.

답 3 m/s

중단원 마무리

Ⓛ 72쪽

01 전략 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형하고 곡선 $y=f(x)$를 그린 후 서로 다른 네 점에서 만나도록 직선 $y=k$를 움직여 본다.

풀이 $3x^4-4x^3-24x^2+48x-k=0$에서

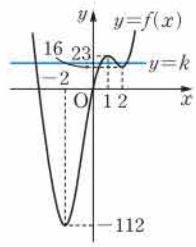
$$3x^4-4x^3-24x^2+48x=k$$

$f(x)=3x^4-4x^3-24x^2+48x$라 하면

$$f'(x)=12x^3-12x^2-48x+48$$
$$=12(x^3-x^2-4x+4)$$
$$=12(x+2)(x-1)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-112	↗	23	↘	16	↗



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$16<k<23$

즉 정수 k의 최댓값은 22이다. 답 ④

02 전략 주어진 방정식을 $g(x)=k$ 꼴로 변형하고 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 알아본다.

풀이 $2x^3-9x^2-k=0$에서

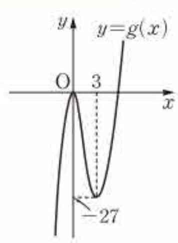
$2x^3-9x^2=k$

$g(x)=2x^3-9x^2$이라 하면

$g'(x)=6x^2-18x=6x(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	0	↘	-27	↗



따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 서로 다른 교점의 개수와 같으므로

$$f(k)=\begin{cases} 3 & (-27<k<0) \\ 2 & (k=-27 \text{ 또는 } k=0) \\ 1 & (k<-27 \text{ 또는 } k>0) \end{cases}$$

$\therefore \lim_{k\to 0+}f(k)+\lim_{k\to -27+}f(k)=1+3$

$=4$ 답 4

다른 풀이 $h(x)=2x^3-9x^2-k$라 하면

$h'(x)=6x^2-18x=6x(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

(i) 삼차방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $h(0)h(3)<0$이어야 하므로

$-k(-k-27)<0, \quad k(k+27)<0$

$\therefore -27<k<0$

(ii) 삼차방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $h(0)h(3)=0$이어야 하므로

$-k(-k-27)=0$

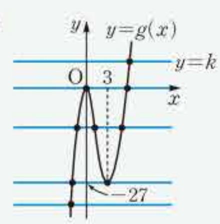
$\therefore k=-27$ 또는 $k=0$

(iii) 삼차방정식 $h(x)=0$이 오직 하나의 실근, 즉 한 실근과 두 허근을 가지려면 $h(0)h(3)>0$이어야 하므로

$-k(-k-27)>0, \quad k(k+27)>0$

$\therefore k<-27$ 또는 $k>0$

Q BOX



$h(0)=-k$,
$h(3)=54-81-k$
$=-k-27$

이상에서

$$f(k)=\begin{cases} 3 & (-27<k<0) \\ 2 & (k=-27 \text{ 또는 } k=0) \\ 1 & (k<-27 \text{ 또는 } k>0) \end{cases}$$

$\therefore \lim_{k\to 0+}f(k)+\lim_{k\to -27+}f(k)=1+3=4$

03 전략 주어진 방정식을 $h(x)=a$ 꼴로 변형하고 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표의 부호를 알아본다.

풀이 $f(x)=g(x)$에서

$3x^3-x^2-3x=x^3-4x^2+9x+a$

$\therefore 2x^3+3x^2-12x=a$

$h(x)=2x^3+3x^2-12x$라 하면

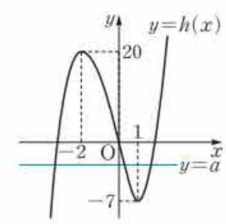
$h'(x)=6x^2+6x-12$

$=6(x+2)(x-1)$

$h'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	20	↘	-7	↗



따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가지려면 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고 한 개는 음수이어야 하므로

$-7<a<0$

따라서 정수 a는 $-6, -5, -4, -3, -2, -1$의 6개이다. 답 ①

04 전략 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면 (극댓값)$\times$(극솟값)>0이어야 한다.

풀이 $f'(x)=6x^2-6(n+1)x+6n$

$=6(x-1)(x-n)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=n$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(1)f(n)>0$이어야 하므로

$(3n-1)(-n^3+3n^2)>0$ ⋯ ❶

$n^2(3n-1)(n-3)<0$

$(3n-1)(n-3)<0 \ (\because n^2>0)$

$\therefore \frac{1}{3}<n<3$

즉 가장 큰 자연수 n의 값은 2이므로

$a=2$ ⋯ ❷

$n=2$일 때

$f(x)=2x^3-9x^2+12x$

이므로 $\quad f'(x)=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 4를 갖는다.

···· ❸

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	n에 대한 부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷	a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	$n=a$일 때 $f(x)$의 극솟값을 구할 수 있다.	30 %

05 전략 주어진 극한을 이용하여 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to-4}\frac{f(x)-k-3}{x+4}=0$에서 $x\to-4$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to-4}\{f(x)-k-3\}=0$이므로

$f(-4)=k+3$

$\therefore \lim_{x\to-4}\frac{f(x)-k-3}{x+4}=\lim_{x\to-4}\frac{f(x)-f(-4)}{x-(-4)}$

$=f'(-4)$

$\therefore f'(-4)=0$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2k}{x-2}=0$에서 $x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)-2k\}=0$이므로 $\quad f(2)=2k$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-2k}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$\therefore f'(2)=0$

$f'(-4)=0,\ f'(2)=0$이므로 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-4)f(2)<0$이어야 한다.

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 -4, 2이므로 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

즉 $(k+3)\cdot2k<0$이어야 하므로

$k(k+3)<0 \qquad \therefore -3<k<0$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$-2+(-1)=-3$

답 ②

06 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

풀이 직선 $y=5x+k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식

$5x+k=x(x+1)(x-4)$, 즉

$x^3-3x^2-9x-k=0$

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$g(x)=x^3-3x^2-9x-k$라 하면

$g'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $g(-1)g(3)=0$이어야 하므로

$(-k+5)(-k-27)=0$

$\therefore k=5\ (\because k>0)$

답 ①

다른 풀이 직선 $y=5x+k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=5x+k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프의 접선이어야 한다.

$f(x)=x(x+1)(x-4)=x^3-3x^2-4x$에서

$f'(x)=3x^2-6x-4$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2-4t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 5이므로 $f'(t)=5$에서

$3t^2-6t-4=5, \qquad 3t^2-6t-9=0$

$(t+1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 또는 $(3,\ -12)$이고 접점은 직선 $y=5x+k$ 위의 점이므로

$0=-5+k$ 또는 $-12=15+k$

$\therefore k=5\ (\because k>0)$

07 전략 한 점에서 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 접점의 개수와 같다.

풀이 $y=x^3-12x^2+2$에서 $\qquad y'=3x^2-24x$

점 $(0,\ a)$에서 곡선 $y=x^3-12x^2+2$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-12t^2+2)$라 하면 접선의 기울기는 $3t^2-24t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-12t^2+2)=(3t^2-24t)(x-t)$

이 직선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로

$a-(t^3-12t^2+2)=(3t^2-24t)\cdot(-t)$

$\therefore 2t^3-12t^2+a-2=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

점 $(0,\ a)$에서 주어진 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 t에 대한 삼차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$f(t)=2t^3-12t^2+a-2$라 하면

$f'(t)=6t^2-24t=6t(t-4)$

$f'(t)=0$에서 $\qquad t=0$ 또는 $t=4$

(i) 삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(0)f(4)<0$이어야 하므로

$f(0)=a-2$, $f(4)=128-192+a-2=a-66$

$(a-2)(a-66)<0 \qquad \therefore 2<a<66$

(ii) 삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(0)f(4)=0$이어야 하므로

$(a-2)(a-66)=0 \qquad \therefore a=2$ 또는 $a=66$

(iii) 삼차방정식 $f(t)=0$이 오직 하나의 실근, 즉 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(0)f(4)>0$이어야 하므로

$(a-2)(a-66)>0 \qquad \therefore a<2$ 또는 $a>66$

이상에서

$n(3)=n(4)=n(5)=\cdots=n(65)=3$,

$n(2)=n(66)=2$,

$n(1)=n(67)=n(68)=n(69)=n(70)=1$

이므로

$65-3+1=63$

$\sum_{a=1}^{70}n(a)=63\cdot3+2\cdot2+5\cdot1=198$

답 198

08 **전략** 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge 0$이 성립하려면 (함수 $f(x)$의 최솟값)≥ 0이어야 함을 이용한다.

풀이 $4x^4-12x+a^2+2\ge x^4-6ax(x-2)$에서

$3x^4+6ax^2-12(a+1)x+a^2+2\ge 0$

$f(x)=3x^4+6ax^2-12(a+1)x+a^2+2$라 하면

$f'(x)=12x^3+12ax-12(a+1)$

$=12\{x^3+ax-(a+1)\}$

$=12(x-1)(x^2+x+a+1)$

1	1	0	a	$-(a+1)$
		1	1	$a+1$
	1	1	$a+1$	0

$\therefore x^3+ax-(a+1)$
$=(x-1)(x^2+x+a+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ ($\because x^2+x+a+1>0$)

$a>0$이므로
$x^2+x+a+1$
$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}>0$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	a^2-6a-7	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 a^2-6a-7을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$a^2-6a-7\ge 0$

$(a+1)(a-7)\ge 0$

$\therefore a\ge 7$ ($\because a>0$)

즉 a의 최솟값은 7이다. 답 ③

09 **전략** 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\le 0$이 성립하려면 (함수 $h(x)$의 최댓값)≤ 0이어야 함을 이용한다.

$A<B<C$ 꼴의 부등식
➡ 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 바꾸어 푼다.

풀이 $f(x)\le 12x+k$에서

$-x^4-2x^3-x^2\le 12x+k$

$\therefore -x^4-2x^3-x^2-12x-k\le 0$

$h(x)=-x^4-2x^3-x^2-12x-k$라 하면

$h'(x)=-4x^3-6x^2-2x-12$

$=-2(2x^3+3x^2+x+6)$

$=-2(x+2)(2x^2-x+3)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ ($\because 2x^2-x+3>0$)

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	$-k+20$	↘

따라서 함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $-k+20$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\le 0$이 성립하려면

$-k+20\le 0 \quad \therefore k\ge 20$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$12x+k\le g(x)$에서

$12x+k\le 3x^2+a$

$\therefore 3x^2-12x+a-k\ge 0$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $3x^2-12x+a-k\ge 0$이 성립하려면 이차방정식 $3x^2-12x+a-k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-6)^2-3(a-k)\le 0$

$36-3a+3k\le 0$

$\therefore k\le a-12$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는

$20\le k\le a-12$

㉠, ㉡에서 $a-12<20$이면 주어진 부등식을 만족시키는 k의 값이 존재하지 않는다.

이를 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이므로

20, 21, 22의 3개

$a-12=22$

$\therefore a=34$ 답 34

10 **전략** 구간 (x_1, x_2)에서 함수 $f(x)$가 증가할 때, 부등식 $a<f(x)<b$가 항상 성립하려면 $f(x_1)\ge a$, $f(x_2)\le b$이어야 한다.

풀이 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-1$이라 하면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=2$
이므로 $-2<x<1$일 때 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

$-2<x<1$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-2, 1)$에서 증가한다. $\cdots$ ❶

따라서 $-2<x<1$일 때, 부등식 $f(x)>a$가 성립하려면

$f(-2)\ge a \quad \therefore a\le -77$

또 $-2<x<1$일 때, 부등식 $f(x)<b$가 성립하려면

$f(1)\le b \quad \therefore b\ge 4$ $\cdots$ ❷

즉 $a=-77$, $b=4$일 때 $b-a$의 값이 최소이므로 구하는 최솟값은

$4-(-77)=81$ $\cdots$ ❸

답 81

단계	채점 기준	비율
❶	함수 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-1$이 구간 $(-2, 1)$에서 증가함을 알 수 있다.	40 %
❷	a, b의 값의 범위를 각각 구할 수 있다.	40 %
❸	$b-a$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

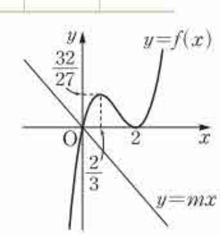
11 **전략** $x>0$일 때, 곡선 $y=x^3-4x^2+4x$가 직선 $y=mx$보다 항상 위쪽에 있을 조건을 찾는다.

풀이 $f(x)=x^3-4x^2+4x$라 하면

$f'(x)=3x^2-8x+4=(3x-2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{32}{27}$	↘	0	↗



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 $y=mx$의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 $x>0$일 때, 부등식 $f(x)>mx$가 성립하려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=mx$보다 항상 위쪽에 있어야 한다.

$\therefore m<0$ 답 $m<0$

12 **전략** 출발 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 두 번 있으려면 $t>0$에서 방정식 $f'(t)=g'(t)$가 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=f'(t)=t^3-9t^2+24t$, $v_Q=g'(t)=a$

$v_P=v_Q$에서 $\quad t^3-9t^2+24t=a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

출발 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 두 번 있으려면 $t>0$에서 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

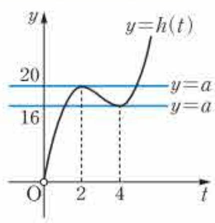
$h(t)=t^3-9t^2+24t\ (t>0)$라 하면

$$h'(t)=3t^2-18t+24$$
$$=3(t-2)(t-4)$$

$h'(t)=0$에서 $\quad t=2$ 또는 $t=4$

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(t)$		↗	20	↘	16	↗

따라서 함수 $y=h(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$t>0$에서 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=h(t)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$a=16 \text{ 또는 } a=20$$

즉 모든 a의 값의 합은

$$16+20=36$$

답 36

13 전략 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0임을 이용한다.

풀이 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2at+b$$

$t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸므로

$$3\cdot1^2+2a\cdot1+b=0$$
$$\therefore b=-2a-3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=6t+2a$$

$t=2$에서 점 P의 가속도는 0이므로

$$6\cdot2+2a=0$$
$$\therefore a=-6$$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면

$$b=-2\cdot(-6)-3=9$$
$$\therefore a+b=3$$

답 ①

운동 방향을 바꿀 때 ➡ 속도가 0이다.

14 전략 자동차가 정지할 때의 속도는 0임을 이용한다.

풀이 브레이크를 밟은 지 t초 후의 자동차의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=7.2-2kt$$

브레이크를 밟은 지 8초 후에 자동차가 정지하므로 $t=8$에서 $v=0$이다.

즉 $7.2-2k\times8=0$이므로

$$k=0.45$$

따라서 $v=7.2-0.9t$이므로 브레이크를 밟은 지 3초 후의 자동차의 속도는

$$7.2-0.9\times3=4.5\ (\text{m/s})$$

답 ⑤

15 전략 지면으로부터의 높이가 180 m일 때 물체가 최고 높이에 도달하므로 이때의 속도가 0 m/s임을 이용한다.

풀이 t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=a-10t$$

최고 높이에 도달할 때 $v=0$이므로

$$a-10t=0$$
$$\therefore t=\frac{a}{10}$$

즉 $\frac{a}{10}$초 후의 물체의 높이가 180 m이므로

$$a\cdot\frac{a}{10}-5\left(\frac{a}{10}\right)^2=180$$
$$\frac{a^2}{20}=180, \qquad a^2=3600$$
$$\therefore a=60\ (\because a>0) \quad \cdots ❶$$

따라서 $h=60t-5t^2$이고 지면에 떨어지는 순간 $h=0$이므로

$$60t-5t^2=0, \qquad t(t-12)=0$$
$$\therefore t=12\ (\because t>0) \quad \cdots ❷$$

12초 후의 물체의 속도는

$$60-10\cdot12=-60\ (\text{m/s}) \quad \cdots ❸$$

답 -60 m/s

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	물체가 지면에 떨어지는 시각을 구할 수 있다.	30 %
❸	물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도를 구할 수 있다.	20 %

16 전략 속도 $v(t)$의 부호는 운동 방향을 나타내고, 속도의 그래프에서 접선의 기울기는 가속도임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $0<t<a$에서 $v(t)>0$이므로 점 P는 원점을 출발하여 양의 방향으로 움직인다.
따라서 $t=a$에서의 점 P의 위치는 원점보다 오른쪽에 있다.

ㄴ. $v'(c)=0$, $v'(e)=0$이므로 $t=c$, $t=e$에서의 점 P의 가속도가 0이다. $t=c$에서의 속력은 $|-3|=3$, $t=e$에서의 속력은 $|3|=3$이므로 점 P의 가속도가 0인 두 시각에서의 속력은 서로 같다.

속도 v의 절댓값 $|v|$를 시각 t에서의 점 P의 속력이라 한다.

ㄷ. $a<t<d$에서 $t=c$일 때 $|v(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P의 속력은 $t=c$일 때 최대이다.

ㄹ. $v(a)=0$, $v(d)=0$, $v(f)=0$이고 $t=a$, $t=d$, $t=f$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=a$, $t=d$, $t=f$에서 운동 방향을 바꾼다.
즉 $0<t<g$에서 점 P는 운동 방향을 세 번 바꾼다.

ㅁ. $v(b)<0$, $v(g)<0$이므로 $t=b$, $t=g$에서 점 P는 음의 방향으로 움직인다.
따라서 $t=b$에서와 $t=g$에서의 점 P의 운동 방향은 서로 같다.

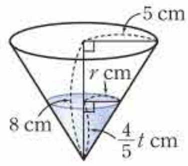
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㅁ

17 전략 시각 t에서의 부피가 V일 때, 부피의 변화율은 $\frac{dV}{dt}$이다.

풀이 t초 후의 수면의 높이는 $\frac{4}{5}t$ cm

t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면 오른쪽 그림에서



$5 : r = 8 : \frac{4}{5}t$

$8r = 4t \qquad \therefore r = \frac{t}{2}$

t초 후의 물의 부피를 V cm³라 하면

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{4}{5}t = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 \cdot \frac{4}{5}t = \frac{\pi}{15}t^3$

> 밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

즉 물의 부피의 변화율은 $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{5}t^2$

수면의 높이가 2 cm일 때 $\frac{4}{5}t = 2 \qquad \therefore t = \frac{5}{2}$

따라서 $\frac{5}{2}$초 후의 물의 부피의 변화율은

$\frac{\pi}{5} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}\pi$ (cm³/s) 답 $\frac{5}{4}\pi$ cm³/s

> $\{(x-1)^2(2x+1)\}'$
> $=2(x-1)(2x+1)$
> $+(x-1)^2 \cdot 2$
> $=6x(x-1)$

18 전략 주어진 방정식을 $g(x)=k$ 꼴로 변형하고 절댓값이 포함된 함수 $y=g(x)$의 그래프는 구간을 나누어 그린다.

풀이 $f(x)+|f(x)+x|=6x+k$에서

$f(x)+|f(x)+x|-6x=k$

$f(x)+x=0$에서

> 절댓값 기호 안의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 찾는다.

$\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x\right)+x=0$

$x(x^2-9x+22)=0$

$\therefore x=0$ ($\because x^2-9x+22>0$)

즉 $x \ge 0$일 때 $f(x)+x \ge 0$이고, $x<0$일 때 $f(x)+x<0$이므로

$g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$라 하면

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+f(x)+x-6x & (x\ge 0) \\ f(x)-\{f(x)+x\}-6x & (x<0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2f(x)-5x & (x\ge 0) \\ -7x & (x<0) \end{cases}$$

$h(x)=2f(x)-5x=2\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x\right)-5x$

$=x^3-9x^2+15x$ $(x \ge 0)$

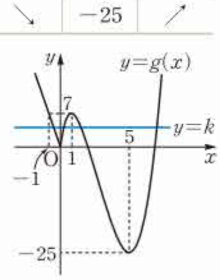
라 하면

$h'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$h'(x)$		+	0	−	0	+
$h(x)$	0	↗	7	↘	−25	↗

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 $0<k<7$

즉 모든 정수 k의 값의 합은

$1+2+3+4+5+6=21$ 답 21

19 전략 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 이용하여 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge g(x)$를 만족시키기 위한 조건을 찾는다.

풀이 조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$

즉 $\lim_{x\to a+} (x-1)^2(2x+1)=0$이므로

$(a-1)^2(2a+1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$ …… ㉠

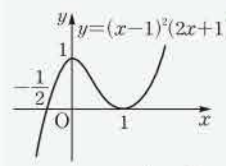
$f'(x)=\begin{cases} 0 & (x<a) \\ 6x(x-1) & (x>a) \end{cases}$이고 $f'(a)$가 존재하므로

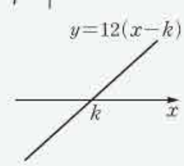
$\lim_{x\to a+} 6x(x-1) = \lim_{x\to a-} 0$

$6a(a-1)=0$

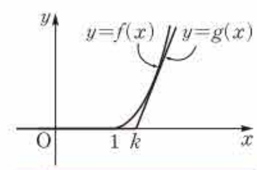
$\therefore a=0$ 또는 $a=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$





조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge g(x)$이려면 오른쪽 그림과 같이 $x \ge 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 $y=g(x)$의 그래프와 접해야 한다.



즉 $x \ge 1$에서 부등식

$(x-1)^2(2x+1) \ge 12(x-k)$, 즉

$2x^3-3x^2-12x+12k+1 \ge 0$

이 성립해야 한다.

$h(x)=2x^3-3x^2-12x+12k+1$ $(x \ge 1)$이라 하면

$h'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x+1)(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x \ge 1$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		−	0	+
$h(x)$	$12k-12$	↘	$12k-19$	↗

따라서 $x \ge 1$에서 함수 $h(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $12k-19$를 가지므로 $x \ge 1$에서 부등식 $h(x) \ge 0$이 성립하려면

$12k-19 \ge 0 \qquad \therefore k \ge \frac{19}{12}$

k의 최솟값이 $\frac{19}{12}$이므로

$p=12$, $q=19$

$\therefore a+p+q=32$ 답 32

07 부정적분

Lecture 13 부정적분

78쪽

01 $f(x)=(2x^3-10x^2+x+C)'=6x^2-20x+1$

답 $f(x)=6x^2-20x+1$

02 $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$이므로

$\frac{d}{dx}\int (x^2-9x)\,dx=x^2-9x$

답 x^2-9x

03 $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-9x)\right\}dx=x^2-9x+C$

답 x^2-9x+C

04 $\int x^6\,dx=\frac{1}{6+1}x^{6+1}+C$

$=\frac{1}{7}x^7+C$

답 $\frac{1}{7}x^7+C$

05 $\int (10x+4)\,dx=\int 10x\,dx+\int 4\,dx$

$=10\int x\,dx+\int 4\,dx$

$=10\cdot\frac{1}{2}x^2+4x+C$

$=5x^2+4x+C$

답 $5x^2+4x+C$

06 $\int (x^3-6x+3)\,dx=\int x^3\,dx-\int 6x\,dx+\int 3\,dx$

$=\int x^3\,dx-6\int x\,dx+\int 3\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4-6\cdot\frac{1}{2}x^2+3x+C$

$=\frac{1}{4}x^4-3x^2+3x+C$

답 $\frac{1}{4}x^4-3x^2+3x+C$

07 $\int (2x-1)^2\,dx=\int (4x^2-4x+1)\,dx$

$=\int 4x^2\,dx-\int 4x\,dx+\int dx$

$=4\int x^2\,dx-4\int x\,dx+\int dx$

$=4\cdot\frac{1}{3}x^3-4\cdot\frac{1}{2}x^2+x+C$

$=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x+C$

답 $\frac{4}{3}x^3-2x^2+x+C$

Q BOX

$\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$
$=\int\{f(x)\pm g(x)\}\,dx$
(복호동순)

$f(x)$를 적분한 후 미분하면 ➡ $f(x)$
$f(x)$를 미분한 후 적분하면 ➡ $f(x)+C$
(단, C는 적분상수)

도함수 $f'(x)$가 주어지면 $f(x)=\int f'(x)\,dx$임을 이용하여 $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타낼 수 있다.

함수의 합, 차의 부정적분에서 적분상수는 각각의 적분상수를 더하거나 뺀 것으로 나타내지 않고 하나의 적분상수로 나타낼 수 있다.

$\int 1\,dx$를 간단히 $\int dx$로 나타내기도 한다.

08 $\int (x+1)^2\,dx+\int (x-1)^2\,dx$

$=\int (x^2+2x+1)\,dx+\int (x^2-2x+1)\,dx$

$=\int (x^2+2x+1+x^2-2x+1)\,dx$

$=\int (2x^2+2)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^3+2x+C$

답 $\frac{2}{3}x^3+2x+C$

09 $\int \frac{x^2}{x+2}\,dx-\int \frac{4}{x+2}\,dx$

$=\int \frac{x^2-4}{x+2}\,dx$

$=\int \frac{(x+2)(x-2)}{x+2}\,dx$

$=\int (x-2)\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2-2x+C$

답 $\frac{1}{2}x^2-2x+C$

10 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (4x-9)\,dx$

$=2x^2-9x+C$

$f(0)=3$이므로 $C=3$

$\therefore f(x)=2x^2-9x+3$

답 $f(x)=2x^2-9x+3$

11 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (-3x^2+8x+5)\,dx$

$=-x^3+4x^2+5x+C$

$f(1)=1$이므로

$-1+4+5+C=1$ $\therefore C=-7$

$\therefore f(x)=-x^3+4x^2+5x-7$

답 $f(x)=-x^3+4x^2+5x-7$

표준+발전 유형 Q+Q

79쪽

01 $(x+1)f(x)=(x^3+x^2-x+C)'$

$=3x^2+2x-1$

$=(x+1)(3x-1)$

이므로 $f(x)=3x-1$

$\therefore f(3)=9-1=8$

답 8

02 $f(x)=F'(x)=(2x^3+ax^2+bx)'$

$=6x^2+2ax+b$

$f(0)=3$이므로 $b=3$

$f'(x)=12x+2a$이고 $f'(0)=-8$이므로

$2a=-8$ $\therefore a=-4$

$\therefore b-a=7$

답 7

쌤한마디

$F(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이다.
$\Longleftrightarrow F'(x)=f(x)$
$\Longleftrightarrow$ 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$이다.
$\Longleftrightarrow \int f(x)\,dx=F(x)+C$ (단, C는 적분상수)

03 $g(x)=\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)=5x^3+x$이므로

$g(-2)=-40-2=-42$

$h(x)=\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C=5x^3+x+C$이고

$h(-1)=0$이므로

$-5-1+C=0 \qquad \therefore C=6$

따라서 $h(x)=5x^3+x+6$이므로

$h(2)=40+2+6=48$

$\therefore g(-2)+h(2)=6$ 답 6

04 $f(x)=\int\left\{\dfrac{d}{dx}(-x^2+6x)\right\}dx=-x^2+6x+C$

$=-(x-3)^2+C+9$

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $C+9$를 가지므로

$C+9=7 \qquad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=-x^2+6x-2$이므로

$f(1)=-1+6-2=3$ 답 ③

05 $\int\{f(x)+x\}\,dx=x^3+ax^2+bx+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+x=3x^2+2ax+b$

$\therefore f(x)=3x^2+(2a-1)x+b$

$f(0)=2$이므로 $\quad b=2$

$f'(x)=6x+2a-1$이고 $f'(-3)=-9$이므로

$-18+2a-1=-9 \qquad \therefore a=5$

따라서 $f(x)=3x^2+9x+2$이므로

$f(-2)=12-18+2=-4$ 답 -4

06 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2$에서

$\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 2\,dx$

$\therefore f(x)+g(x)=2x+C_1$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=C_1$

이때 $f(0)=6$, $g(0)=-6$이므로 $\quad C_1=0$

$\therefore f(x)+g(x)=2x$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=2x$에서

$\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 2x\,dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^2+C_2$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C_2$

이때 $f(0)=6$, $g(0)=-6$이므로

$C_2=-36$

$\therefore f(x)g(x)=x^2-36$

$=(x+6)(x-6)$ $\cdots\cdots$ ㉡

$f(x)$, $g(x)$가 일차함수이므로 ㉠, ㉡에서

$\begin{cases} f(x)=x+6 \\ g(x)=x-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=x-6 \\ g(x)=x+6 \end{cases}$

그런데 $f(0)=6$, $g(0)=-6$이므로

$f(x)=x+6$, $g(x)=x-6$

$\therefore f(3)-g(3)=9-(-3)=12$ 답 ⑤

다른 풀이 $f(x)$, $g(x)$가 일차함수이고 $f(0)=6$, $g(0)=-6$이므로

$f(x)=ax+6$, $g(x)=bx-6$

(a, b는 0이 아닌 상수)

이라 하면

$f(x)+g(x)=(a+b)x$,

$f(x)g(x)=(ax+6)(bx-6)$

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=\dfrac{d}{dx}\{(a+b)x\}=a+b$이므로

$a+b=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=\dfrac{d}{dx}\{(ax+6)(bx-6)\}$

$=a(bx-6)+(ax+6)\cdot b$

$=2abx-6a+6b$

이므로 $2abx-6a+6b=2x$에서

$2ab=2$, $-6a+6b=0$

$\therefore ab=1$, $a=b$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=1$

따라서 $f(x)=x+6$, $g(x)=x-6$이므로

$f(3)-g(3)=9-(-3)=12$

07 $f(x)=\int(4+\sqrt{x})^2\,dx+\int(4-\sqrt{x})^2\,dx$

$=\int(16+8\sqrt{x}+x)\,dx+\int(16-8\sqrt{x}+x)\,dx$

$=\int(16+8\sqrt{x}+x+16-8\sqrt{x}+x)\,dx$

$=\int(2x+32)\,dx$

$=x^2+32x+C$

$f(3)=92$이므로

$9+96+C=92 \qquad \therefore C=-13$

따라서 $f(x)=x^2+32x-13$이므로

$f(2)=4+64-13=55$ 답 ④

08 $f(x)$

$=\int\left(x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{5}x^5\right)dx$

$=\dfrac{1}{1\cdot2}x^2+\dfrac{1}{2\cdot3}x^3+\dfrac{1}{3\cdot4}x^4+\dfrac{1}{4\cdot5}x^5+\dfrac{1}{5\cdot6}x^6+C$

이므로

Q BOX

이차함수의 최대·최소
$y=ax^2+bx+c$ 꼴의 최댓값 또는 최솟값은 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 구한다.
① $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 갖는다.
② $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다.

$ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식이면
$a=a'$, $b=b'$

좌변과 우변을 각각 적분하고 각 변의 적분상수를 하나로 묶어서 C_1로 나타낼 수 있다.

$$f(1)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+C$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+C$$
$$=1-\frac{1}{6}+C$$
$$=\frac{5}{6}+C$$

즉 $\frac{5}{6}+C=-1$이므로 $\quad C=-\frac{11}{6}$

$\therefore f(0)=-\frac{11}{6}$ 답 $-\frac{11}{6}$

09 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (9x^2-ax+4)\,dx$

$=3x^3-\frac{a}{2}x^2+4x+C$

$f(0)=4$이므로 $\quad C=4$

$f(x)=3x^3-\frac{a}{2}x^2+4x+4$이고 $f(-2)=8$이므로

$-24-2a-8+4=8$

$\therefore a=-18$

따라서 $f(x)=3x^3+9x^2+4x+4$이므로

$f(-1)=-3+9-4+4=6$ 답 6

10 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (4x^3+10x+k)\,dx$

$=x^4+5x^2+kx+C$

다항식 $f(x)$가 $x^2-1=(x+1)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0,\ f(1)=0$

$f(-1)=0$이므로

$1+5-k+C=0$

$\therefore k-C=6$ ⋯⋯ ㉠

$f(1)=0$이므로

$1+5+k+C=0$

$\therefore k+C=-6$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$k=0,\ C=-6$

따라서 $f(x)=x^4+5x^2-6$이므로

$f(2)=16+20-6=30$ 답 ①

11 $F'(x)=f(x)$이므로 $F(x)=xf(x)+6x^4-2x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+24x^3-6x^2$

$xf'(x)=-24x^3+6x^2$

$\therefore f'(x)=-24x^2+6x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(-24x^2+6x)\,dx$

$=-8x^3+3x^2+C$

Q BOX

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

구간에 따라 다르게 정의된 함수는 각 구간에서의 식을 각각 적분한다. 이때 적분상수를 C_1, C_2와 같이 서로 다른 문자를 사용하여 나타내어야 함에 주의한다.

다항식 $P(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어지면 $P(a)=0$

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$0=2x-2$에서 $x=1$

$f(-1)=5$이므로

$8+3+C=5 \quad \therefore C=-6$

$\therefore f(x)=-8x^3+3x^2-6$

답 $f(x)=-8x^3+3x^2-6$

12 $2\int f(x)\,dx-xf(x)=f(x)-4x+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)-\{f(x)+xf'(x)\}=f'(x)-4$

$\therefore f(x)=(x+1)f'(x)-4$ ⋯⋯ ㉠

$f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f'(x)=a$

$f(x)$와 $f'(x)$를 ㉠에 대입하면

$ax+b=a(x+1)-4$

$\therefore a-b=4$ ⋯⋯ ㉡

$f(3)=4$이므로

$3a+b=4$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-2$

따라서 $f(x)=2x-2$이므로 직선 $y=f(x)$의 x절편은 1이다. 답 ④

13 $f(x)=\begin{cases} x^3+C_1 & (x>2) \\ x^2-x+C_2 & (x<2)\end{cases}$

$f(1)=3$이므로

$1-1+C_2=3 \quad \therefore C_2=3$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$

즉 $\lim_{x\to 2+}(x^3+C_1)=\lim_{x\to 2-}(x^2-x+3)$에서

$8+C_1=4-2+3 \quad \therefore C_1=-3$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^3-3 & (x\geq 2) \\ x^2-x+3 & (x<2)\end{cases}$이므로

$f(-1)+f(3)=(1+1+3)+(27-3)$

$=29$ 답 ⑤

쌤 한마디

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로

$f(x)=\begin{cases} x^3-3 & (x>2) \\ x^2-x+3 & (x\leq 2)\end{cases}$

과 같이 등호를 아래 식의 x의 값의 범위에 포함하여 나타내어도 상관없다.

14 $f(x)=\begin{cases} 3x^2+x+C_1 & (x>-1) \\ kx+C_2 & (x<-1)\end{cases}$

$f(2)=9$이므로

$12+2+C_1=9 \quad \therefore C_1=-5$

$f(-2)=-1$이므로 $\quad -2k+C_2=-1$

$\therefore 2k-C_2=1$ ⋯⋯ ㉠

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)=f(-1)$$

즉 $\lim_{x\to-1+}(3x^2+x-5)=\lim_{x\to-1-}(kx+C_2)$에서

$$3-1-5=-k+C_2$$

$$\therefore k-C_2=3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$-$㉡을 하면 $\quad k=-2$ 답 -2

참고 $k=-2$를 ㉡에 대입하면 $\quad -2-C_2=3$

$\therefore C_2=-5$

15 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{1}{3}f'(1)$$

$f(x)=\int(x^2+x+1)(x^2-x+1)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$\therefore f'(1)=(1+1+1)\cdot(1-1+1)=3$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{3}f'(1)=\frac{1}{3}\cdot3=1$$ 답 1

$f'(a)$
$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

16 $\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x-2h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)+f(x)-f(x-2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x-h)-f(x)\}-\{f(x-2h)-f(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\cdot(-1)$$

$$-\lim_{h\to0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}\cdot(-2)$$

$$=-f'(x)+2f'(x)=f'(x)$$

즉 $f'(x)=4x^3-15x^2-1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x^3-15x^2-1)\,dx$$

$$=x^4-5x^3-x+C$$

$f(-1)=6$이므로

$$1+5+1+C=6 \qquad \therefore C=-1$$

따라서 $f(x)=x^4-5x^3-x-1$이므로

$$f(2)=16-40-2-1=-27$$ 답 -27

17 $f'(x)=2x^3+1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x^3+1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^4+x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-2, 3)$을 지나므로

$$3=8-2+C \qquad \therefore C=-3$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+x-3$이므로

$$f(1)=\frac{1}{2}+1-3=-\frac{3}{2}$$ 답 ③

18 $f'(x)=-4x+k$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-4x+k)\,dx$$

$$=-2x^2+kx+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 5)$를 지나므로

$$C=5$$

$$\therefore f(x)=-2x^2+kx+5$$

따라서 이차방정식 $-2x^2+kx+5=0$의 두 근의 합이 $\frac{5}{8}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{k}{-2}=\frac{5}{8} \qquad \therefore k=\frac{5}{4}$$

즉 $f(x)=-2x^2+\frac{5}{4}x+5$이므로

$$f(4)=-32+5+5=-22$$ 답 -22

19 $f(x)=\int(x^2-4x+3)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값 $\frac{2}{3}$를 갖는다.

이때

$$f(x)=\int(x^2-4x+3)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+C$$

이고 $f(3)=\frac{2}{3}$이므로

$$9-18+9+C=\frac{2}{3} \qquad \therefore C=\frac{2}{3}$$

즉 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+\frac{2}{3}$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$$f(1)=\frac{1}{3}-2+3+\frac{2}{3}=2$$ 답 ②

삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$는 이차함수이고, $y=f'(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2, 3)$이므로

$f'(x)=a(x+2)^2+3$

이라 할 수 있다.

이때 주어진 $y=f'(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로 $a<0$이다.

20 $f'(x)=a(x+2)^2+3\ (a<0)$이라 하면

$y=f'(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$$4a+3=0 \qquad \therefore a=-\frac{3}{4}$$

$$\therefore f'(x)=-\frac{3}{4}(x+2)^2+3$$

$$=-\frac{3}{4}x^2-3x$$

$$=-\frac{3}{4}x(x+4)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-4$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 2를 갖고, $x=-4$에서 극솟값을 갖는다.

이때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(-\frac{3}{4}x^2-3x\right)dx$$
$$=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+C$$

이고 $f(0)=2$이므로 $\quad C=2$

즉 $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(-4)=16-24+2=-6$ 답 ③

21 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0 \quad \therefore f(0)=0$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-2xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-2x$$
$$=f'(0)-2x$$
$$=1-2x$$

$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$
$=f'(0)$

이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(1-2x)\,dx$$
$$=-x^2+x+C$$

이때 $f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=-x^2+x$이므로

$f(-3)=-9-3=-12$ 답 ①

22 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(kx-5)\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(kx-5+2\Delta x)$$
$$=kx-5$$

Δy는 Δx에 대한 y의 증분이므로
$f(x+\Delta x)-f(x)$
$=\Delta y$

이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(kx-5)\,dx$$
$$=\frac{k}{2}x^2-5x+C$$

$f(0)=3$이므로 $\quad C=3$

$f(1)=1$이므로

$\frac{k}{2}-5+3=1 \quad \therefore k=6$

따라서 $f(x)=3x^2-5x+3$이므로

$f(2)=12-10+3=5$ 답 5

중단원 마무리

83쪽

01 전략 $\int f(x)\,dx=F(x)$에서 $f(x)=F'(x)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\{x^3g(x)\}'=3x^2g(x)+x^3g'(x)$

이므로

$$f(-1)=3g(-1)+(-1)\cdot g'(-1)$$
$$=3\cdot2+(-1)\cdot(-1)=7$$

답 7

02 전략 부정적분과 미분의 관계를 이용한다.

풀이 $\frac{d}{dx}\int\{f(x)-x^2+4\}\,dx=f(x)-x^2+4$,

$\int\frac{d}{dx}\{2f(x)-3x+1\}\,dx=2f(x)-3x+1+C$이므로

$f(x)-x^2+4=2f(x)-3x+1+C$

$\therefore f(x)=-x^2+3x+3-C$

$f(1)=3$이므로

$-1+3+3-C=3 \quad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=-x^2+3x+1$이므로

$f(0)=1$ 답 ④

03 전략 $\int f(x)\,dx+2\int g(x)\,dx=\int\{f(x)+2g(x)\}\,dx$임을 이용한다.

풀이 $h(x)=\int f(x)\,dx+2\int g(x)\,dx$

$$=\int\{f(x)+2g(x)\}\,dx$$

이때

$f(x)-g(x)=3x^3-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$2f(x)+g(x)=x^3+3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

에서 ㉡$-$㉠을 하면

$f(x)+2g(x)=-2x^3+4$

㉠, ㉡을 연립하여 $f(x)$, $g(x)$를 각각 구한 후 대입할 수도 있다.

$$\therefore h(x)=\int\{f(x)+2g(x)\}\,dx$$
$$=\int(-2x^3+4)\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}x^4+4x+C$$

$h(2)=1$이므로

$-8+8+C=1 \quad \therefore C=1$

따라서 $h(x)=-\frac{1}{2}x^4+4x+1$이므로

$h(-2)=-8-8+1=-15$ 답 ①

04 전략 두 등식의 양변을 적분하여 적분상수를 포함한 식으로 나타낸 후 주어진 함숫값을 이용하여 적분상수를 구한다.

풀이 $\int\{f'(x)+g'(x)\}\,dx=\int 2x\,dx$이므로

$f(x)+g(x)=x^2+C_1$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=C_1$

이때 $f(0)=-1$, $g(0)=1$이므로 $\quad C_1=0$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2 \quad \cdots\cdots ㉠$

$$\int\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx=\int(3x^2-4x+2)\,dx$$

이므로

$f(x)g(x)=x^3-2x^2+2x+C_2$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C_2$

이때 $f(0)=-1$, $g(0)=1$이므로

$C_2=-1$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-2x^2+2x-1$

$=(x-1)(x^2-x+1) \quad \cdots\cdots ㉡$

⋯ ❶

㉠, ㉡에서

$\begin{cases} f(x)=x-1 \\ g(x)=x^2-x+1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=x^2-x+1 \\ g(x)=x-1 \end{cases}$

그런데 $f(0)=-1$, $g(0)=1$이므로

$f(x)=x-1$, $g(x)=x^2-x+1$ ⋯ ❷

$\therefore f(2)+g(-1)=(2-1)+(1+1+1)$

$=4$ ⋯ ❸

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$를 각각 구할 수 있다.	50 %
❷	$f(x)$, $g(x)$를 각각 구할 수 있다.	40 %
❸	$f(2)+g(-1)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

05 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$와 $f'(x)$ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $3\int f(x)\,dx-f(x)=xf(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3f(x)-f'(x)=f(x)+xf'(x)$

$\therefore 2f(x)=(x+1)f'(x) \quad \cdots\cdots ㉠$

$f(x)$의 최고차항을 ax^n $(a\neq0)$이라 하면 ㉠의 좌변의 최고차항은 $2ax^n$, 우변의 최고차항은 anx^n이므로

$2ax^n=anx^n$

$\therefore n=2$

즉 $f(x)$는 이차함수이고 $f(0)=3$이므로

$f(x)=ax^2+bx+3$ (b는 상수)

이라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 ㉠에 대입하면

$2(ax^2+bx+3)=(x+1)(2ax+b)$

$\therefore 2ax^2+2bx+6=2ax^2+(2a+b)x+b$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2b=2a+b$, $6=b$

$\therefore a=3$, $b=6$

따라서 $f(x)=3x^2+6x+3$이므로

$f(1)=3+6+3=12$

답 ②

Q BOX

$x\geq1$이면
$|x-1|+|x+1|$
$=x-1+x+1$
$=2x$,
$-1\leq x<1$이면
$|x-1|+|x+1|$
$=-(x-1)+(x+1)$
$=2$,
$x<-1$이면
$|x-1|+|x+1|$
$=-(x-1)-(x+1)$
$=-2x$

$f'(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}이므로 $(x+1)f'(x)$의 최고차항은
$x\cdot anx^{n-1}=anx^n$

06 전략 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 모든 실수 x에서 연속임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=|x-1|+|x+1|$

$=\begin{cases} 2x & (x\geq1) \\ 2 & (-1\leq x<1) \\ -2x & (x<-1) \end{cases}$

이므로

$f(x)=\begin{cases} x^2+C_1 & (x\geq1) \\ 2x+C_2 & (-1\leq x<1) \\ -x^2+C_3 & (x<-1) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

즉 $\lim_{x\to1+}(x^2+C_1)=\lim_{x\to1-}(2x+C_2)$에서

$1+C_1=2+C_2$

$\therefore C_1-C_2=1 \quad \cdots\cdots ㉠$

또 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

즉 $\lim_{x\to-1+}(2x+C_2)=\lim_{x\to-1-}(-x^2+C_3)$에서

$-2+C_2=-1+C_3$

$\therefore C_2-C_3=1 \quad \cdots\cdots ㉡$

$\therefore f(-2)-f(3)$

$=(-4+C_3)-(9+C_1)$

$=-13+C_3-C_1$

$=-13+(C_2-1)-(C_2+1)$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=-13-2$

$=-15$

답 -15

07 전략 극한의 성질과 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x+1}=6$에서 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 6인 일차함수이므로

$f'(x)=6x+k$ (k는 상수)

라 하자.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-6$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$\therefore f'(1)=-6$

이때 $f'(x)=6x+k$에서 $f'(1)=6+k$이므로

$6+k=-6 \quad \therefore k=-12$

$\therefore f'(x)=6x-12$ ⋯ ❶

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x-12)\,dx$

$=3x^2-12x+C$

이고 $f(1)=0$이므로

$3-12+C=0 \quad \therefore C=9$

$\therefore f(x)=3x^2-12x+9$ ⋯ ❷

따라서 이차방정식 $3x^2-12x+9=0$의 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{9}{3}=3$ ⋯ ❸

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷	$f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸	방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱을 구할 수 있다.	20 %

08 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이다.

풀이 $f'(x)=-2x+4$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-2x+4)\,dx$$
$$=-x^2+4x+C=-(x-2)^2+4+C$$

이차함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $4+C$를 갖는다.

함수 $f(x)$의 최댓값이 8이므로

$4+C=8$ $\quad\therefore C=4$

$\therefore f(x)=-x^2+4x+4$

따라서 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 $-1-4+4=-1$을 갖는다. 답 -1

구간 $[-1, 2]$에서 $f(x)$는 증가하므로 $x=-1$일 때 최솟값을 갖는다.

09 전략 주어진 조건을 이용하여 $f'(x)$의 식을 세우고 $f(x)=\int f'(x)\,dx$임을 이용한다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

x	⋯	-1	⋯	1	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 4, $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

$f'(x)=a(x+1)(x-1)\ (a>0)$이라 하면

이차함수 $f'(x)$에 대하여 $f'(-1)=0$, $f'(1)=0$이므로 $f'(x)=a(x+1)(x-1)$이라 할 수 있다. 이때 주어진 $y=f'(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 $a>0$이다.

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int a(x+1)(x-1)\,dx$$
$$=\int(ax^2-a)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}ax^3-ax+C$$

$f(-1)=4$이므로 $\quad -\frac{1}{3}a+a+C=4$

$\therefore \frac{2}{3}a+C=4$ ⋯⋯ ㉠

$f(1)=0$이므로 $\quad \frac{1}{3}a-a+C=0$

$\therefore \frac{2}{3}a-C=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $C=2$

즉 $f(x)=x^3-3x+2$이므로

$f(3)=27-9+2=20$ 답 ④

10 전략 도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이
$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+\frac{1}{3}h^2-kxh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{1}{3}h-kx\right)=-kx$$
$$\therefore f(x)=\int(-kx)\,dx=-\frac{k}{2}x^2+C$$

$f(-1)=0$이므로 $\quad -\frac{k}{2}+C=0$ ⋯⋯ ㉠

$f(2)=1$이므로 $\quad -2k+C=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면

$\frac{3}{2}k=-1$ $\quad\therefore k=-\frac{2}{3}$

따라서 $f'(x)=\frac{2}{3}x$이므로

$f'(-3)=-2$ 답 ③

11 전략 주어진 조건을 이용하여 $g(x)$의 차수와 $f(x)$의 최고차항의 계수를 파악한다.

풀이 $f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$에서 $f(x)$가 이차함수이므로 $g(x)$도 이차함수이다.

즉 $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$에서 $x^2+f(x)$는 일차함수이다.

$f(x)=-x^2+ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$x^2+f(x)$가 일차함수이려면 이차함수 $f(x)$의 최고차항은 $-x^2$이어야 한다.

$$g(x)=\int(x^2-x^2+ax+b)dx=\int(ax+b)dx$$
$$=\frac{a}{2}x^2+bx+C$$

이므로

$$f(x)g(x)=(-x^2+ax+b)\left(\frac{a}{2}x^2+bx+C\right)$$
$$=-\frac{a}{2}x^4+\left(\frac{a^2}{2}-b\right)x^3+\left(\frac{3}{2}ab-C\right)x^2$$
$$+(aC+b^2)x+bC$$

$$\therefore -\frac{a}{2}x^4+\left(\frac{a^2}{2}-b\right)x^3+\left(\frac{3}{2}ab-C\right)x^2$$
$$+(aC+b^2)x+bC$$
$$=-2x^4+8x^3$$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$-\frac{a}{2}=-2$, $\frac{a^2}{2}-b=8$, $\frac{3}{2}ab-C=0$,

$aC+b^2=0$, $bC=0$

$\therefore a=4$, $b=0$, $C=0$

따라서 $g(x)=2x^2$이므로

$g(1)=2$ 답 ②

다른 풀이 $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=x^2+f(x)$ ⋯⋯ ㉠

$g'(x)$는 일차함수이므로 이차함수 $f(x)$의 최고차항은 $-x^2$이어야 한다.

이때 $f(x)g(x)=-2x^4+8x^3=-2x^3(x-4)$에서

$\begin{cases} f(x)=-x^2 \\ g(x)=2x(x-4) \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=-x(x-4) \\ g(x)=2x^2 \end{cases}$

(i) $f(x)=-x^2$일 때, ㉠에서

$g'(x)=x^2+(-x^2)=0$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)=-x(x-4)$일 때, ㉠에서

$g'(x)=x^2+\{-x(x-4)\}=4x$

(i), (ii)에서 $f(x)=-x(x-4)$, $g(x)=2x^2$

$\therefore g(1)=2$

12 전략 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$임을 이용하여 조건 (가)에서 $f(x)$와 $g(x)$ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$, $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$이므로

$f(x)=x(x-\alpha)^2$

조건 (가)에서

$$\int g'(x)dx=\int\{f(x)+xf'(x)\}dx$$
$$=\int\{xf(x)\}'dx$$

$\therefore g(x)=xf(x)+C=x^2(x-\alpha)^2+C$

$\therefore g'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)$
$=2x(2x-\alpha)(x-\alpha)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{\alpha}{2}$ 또는 $x=\alpha$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\alpha}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $g(x)$는 $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극댓값 81, $x=0$, $x=\alpha$에서 극솟값 0을 갖는다.

$g(0)=g(\alpha)=0$에서 $C=0$

$g\left(\frac{\alpha}{2}\right)=81$에서

$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4=81$, $\frac{\alpha}{2}=3$ ($\because \alpha>0$)

$\therefore \alpha=6$

즉 $g(x)=x^2(x-6)^2$이므로

$g\left(\frac{\alpha}{3}\right)=g(2)=4\cdot16=64$ 답 ⑤

Q BOX

$g'(x)$가 일차함수가 아니다.

$g'(x)$가 일차함수이다.

정적분에서 변수를 x 대신 다른 문자를 사용해도 그 값은 변하지 않는다. 즉
$\int_a^b f(x)dx$
$=\int_a^b f(t)dt$
$=\int_a^b f(u)du$

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는다.

$\alpha>0$이므로 $0<\frac{\alpha}{2}<\alpha$

08 정적분

Lecture 14 정적분

87쪽

01 $\int_1^3(x^2-7)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-7x\right]_1^3$
$=(9-21)-\left(\frac{1}{3}-7\right)$
$=-\frac{16}{3}$ 답 $-\frac{16}{3}$

02 $\int_0^4(3t^2-4t+1)dt=\left[t^3-2t^2+t\right]_0^4$
$=64-32+4$
$=36$ 답 36

03 $\int_{-2}^0(8x^3+3x^2+2x)dx=\left[2x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^0$
$=-(32-8+4)$
$=-28$ 답 -28

04 $\int_{-1}^2(x+1)(x-3)dx$
$=\int_{-1}^2(x^2-2x-3)dx$
$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-1}^2$
$=\left(\frac{8}{3}-4-6\right)-\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)=-9$ 답 -9

05 $\int_{-3}^{-1}(y-1)(y^2+y+1)dy=\int_{-3}^{-1}(y^3-1)dy$
$=\left[\frac{1}{4}y^4-y\right]_{-3}^{-1}$
$=\left(\frac{1}{4}+1\right)-\left(\frac{81}{4}+3\right)$
$=-22$ 답 -22

06 $\int_4^8\frac{x^2-4}{x-2}dx=\int_4^8\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}dx$
$=\int_4^8(x+2)dx$
$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_4^8$
$=(32+16)-(8+8)$
$=32$ 답 32

07 $\int_{-1}^{-1}f(x)dx=\int_{-1}^{-1}(3x^2+x-7)dx$
$=\left[x^3+\frac{1}{2}x^2-7x\right]_{-1}^{-1}$
$=\left(-1+\frac{1}{2}+7\right)-\left(-1+\frac{1}{2}+7\right)$
$=0$ 답 0

08 $\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (3x^2+x-7)\,dx$

$=\left[x^3+\frac{1}{2}x^2-7x\right]_0^2$

$=8+2-14=-4$ 답 -4

09 $\int_2^0 f(x)\,dx=\int_2^0 (3x^2+x-7)\,dx$

$=\left[x^3+\frac{1}{2}x^2-7x\right]_2^0$

$=-(8+2-14)=4$ 답 4

쌤한마디

함수 $f(x)$가 두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

① $\int_a^a f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^a=F(a)-F(a)=0$

② $\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$,

$\int_b^a f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_b^a=F(a)-F(b)$

$=-\{F(b)-F(a)\}$

이므로 $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

10 $\int_0^1 (x^2-2x)\,dx+\int_0^1 (2x+6)\,dx$

$=\int_0^1 (x^2-2x+2x+6)\,dx$

$=\int_0^1 (x^2+6)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+6x\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}+6=\frac{19}{3}$ 답 $\frac{19}{3}$

11 $\int_{-2}^1 (2x^2+3x+1)\,dx+\int_{-2}^1 (4x^2-5x+7)\,dx$

$=\int_{-2}^1 (2x^2+3x+1+4x^2-5x+7)\,dx$

$=\int_{-2}^1 (6x^2-2x+8)\,dx$

$=\left[2x^3-x^2+8x\right]_{-2}^1$

$=(2-1+8)-(-16-4-16)$

$=45$ 답 45

12 $\int_{-3}^0 (x^2+10x+2)\,dx-\int_{-3}^0 (x^2+9)\,dx$

$=\int_{-3}^0 \{x^2+10x+2-(x^2+9)\}\,dx$

$=\int_{-3}^0 (10x-7)\,dx$

$=\left[5x^2-7x\right]_{-3}^0$

$=-(45+21)=-66$ 답 -66

Q BOX

피적분함수가 같고, 한 정적분의 위끝과 다른 정적분의 아래끝이 같은 정적분의 계산은 적분 구간을 하나로 나타내어 적분한다.

아래끝과 위끝이 같은 정적분의 값은 0이다.

적분 구간이 같은 정적분의 계산은 하나의 정적분으로 나타낸 후 피적분함수를 간단히 정리하여 적분한다.

$x=1$을 경계로 함수식이 다르므로 이 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값, 즉 $x=2$를 경계로 적분 구간을 나눈다.

13 $\int_2^4 (x+1)^2\,dx-\int_2^4 (x-1)^2\,dx$

$=\int_2^4 \{(x+1)^2-(x-1)^2\}\,dx$

$=\int_2^4 \{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)\}\,dx$

$=\int_2^4 4x\,dx$

$=\left[2x^2\right]_2^4$

$=32-8=24$ 답 24

14 $\int_0^1 (-3x^2+6x-4)\,dx+\int_1^2 (-3x^2+6x-4)\,dx$

$=\int_0^2 (-3x^2+6x-4)\,dx$

$=\left[-x^3+3x^2-4x\right]_0^2$

$=-8+12-8=-4$ 답 -4

15 $\int_{-1}^0 (8x^3+4x)\,dx+\int_0^2 (8x^3+4x)\,dx$

$=\int_{-1}^2 (8x^3+4x)\,dx$

$=\left[2x^4+2x^2\right]_{-1}^2$

$=(32+8)-(2+2)=36$ 답 36

16 $\int_0^2 f(x)\,dx$

$=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$

$=\int_0^1 (x-2)\,dx+\int_1^2 (2x-3)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_0^1+\left[x^2-3x\right]_1^2$

$=\left(\frac{1}{2}-2\right)+\{(4-6)-(1-3)\}$

$=-\frac{3}{2}$ 답 $-\frac{3}{2}$

17 $|x-2|=\begin{cases} x-2 & (x\ge 2) \\ -x+2 & (x\le 2)\end{cases}$이므로

$\int_0^3 |x-2|\,dx$

$=\int_0^2 (-x+2)\,dx+\int_2^3 (x-2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3$

$=(-2+4)+\left\{\left(\frac{9}{2}-6\right)-(2-4)\right\}=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

18 $x^2+x=0$에서 $x(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

따라서

$|x^2+x|=\begin{cases} x^2+x & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 0) \\ -x^2-x & (-1\le x\le 0)\end{cases}$

이므로

$$\int_{-1}^{2}|x^2+x|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2-x)dx+\int_{0}^{2}(x^2+x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{8}{3}+2\right)=\frac{29}{6}$$

답 $\frac{29}{6}$

19 $\int_{-3}^{3}(1+2x+3x^2+4x^3)dx$

$$=\int_{-3}^{3}(1+3x^2)dx+\int_{-3}^{3}(2x+4x^3)dx$$
$$=2\int_{0}^{3}(1+3x^2)dx$$
$$=2\left[x+x^3\right]_{0}^{3}=2\cdot(3+27)=60$$

답 60

$\int_{-3}^{3}(2x+4x^3)dx=0$

쌤한마디

정적분의 아래끝과 위끝의 절댓값이 같고 부호가 다른 경우 다음을 이용하면 정적분의 계산 과정이 간단해진다.

n이 짝수일 때 ○ $\int_{-a}^{a}x^n dx=2\int_{0}^{a}x^n dx$

n이 홀수일 때 ○ $\int_{-a}^{a}x^n dx=0$

20 $\int_{-1}^{1}(5x^4-8x^3-12x^2+x)dx$

$$=\int_{-1}^{1}(5x^4-12x^2)dx+\int_{-1}^{1}(-8x^3+x)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(5x^4-12x^2)dx$$
$$=2\left[x^5-4x^3\right]_{0}^{1}$$
$$=2\cdot(1-4)=-6$$

답 -6

21 $\int_{-2}^{2}(-3x^3+9x^2-x+2)dx$

$$=\int_{-2}^{2}(-3x^3-x)dx+\int_{-2}^{2}(9x^2+2)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(9x^2+2)dx$$
$$=2\left[3x^3+2x\right]_{0}^{2}$$
$$=2\cdot(24+4)=56$$

답 56

표준+발전 유형 Q+Q

88쪽

01 $\int_{-2}^{-1}(x+1)(3x-5)dx+\int_{-1}^{-1}(3x+2)(x-1)dx$

$$=\int_{-2}^{-1}(x+1)(3x-5)dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(3x^2-2x-5)dx$$
$$=\left[x^3-x^2-5x\right]_{-2}^{-1}$$
$$=(-1-1+5)-(-8-4+10)=5$$

답 ②

아래끝과 위끝이 같은 정적분의 값은 0이다.

Q BOX

02 $f'(x)=-3x^2+6x+1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(-3x^2+6x+1)dx$$
$$=-x^3+3x^2+x+C$$

따라서

$$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}(-x^3+3x^2+x+C)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2+Cx\right]_{0}^{1}$$
$$=-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}+C=\frac{5}{4}+C$$

이므로

$\frac{5}{4}+C=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore C=-1$

$\therefore f(x)=-x^3+3x^2+x-1$

답 $f(x)=-x^3+3x^2+x-1$

03 $\int_{0}^{2}\frac{x^3}{x+1}dx-\int_{2}^{0}\frac{1}{y+1}dy$

$$=\int_{0}^{2}\frac{x^3}{x+1}dx-\int_{2}^{0}\frac{1}{x+1}dx$$
$$=\int_{0}^{2}\frac{x^3}{x+1}dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{x+1}dx$$
$$=\int_{0}^{2}\frac{x^3+1}{x+1}dx$$
$$=\int_{0}^{2}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$$
$$=\int_{0}^{2}(x^2-x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{8}{3}-2+2$$
$$=\frac{8}{3}$$

답 ③

$\int_{2}^{0}\frac{1}{x+1}dx$
$=-\int_{0}^{2}\frac{1}{x+1}dx$

04 $\int_{1}^{k}(4-x)dx+3\int_{1}^{k}(1-x-x^2)dx$

$$=\int_{1}^{k}\{4-x+3(1-x-x^2)\}dx$$
$$=\int_{1}^{k}(-3x^2-4x+7)dx$$
$$=\left[-x^3-2x^2+7x\right]_{1}^{k}$$
$$=(-k^3-2k^2+7k)-(-1-2+7)$$
$$=-k^3-2k^2+7k-4$$

즉 $-k^3-2k^2+7k-4=0$이므로

$k^3+2k^2-7k+4=0$

$(k+4)(k-1)^2=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=1$

따라서 구하는 곱은

$-4\cdot1=-4$

답 -4

$3\int_{1}^{k}(1-x-x^2)dx$
$=\int_{1}^{k}3(1-x-x^2)dx$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -7 & 4 \\ & & 1 & 3 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore k^3+2k^2-7k+4$
$=(k-1)(k^2+3k-4)$
$=(k+4)(k-1)^2$

05 $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx - \int_{2}^{7} f(x)\,dx + \int_{3}^{7} f(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{7} f(x)\,dx + \int_{7}^{2} f(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (2x^3+x-2)\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^{2}$

$= (8+2-4) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2\right) = 3$ 답 3

쌤한마디

함수 $f(x)$가 네 실수 a, b, c, d를 포함하는 구간에서 연속일 때, 다음이 성립한다.

$\int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{d} f(x)\,dx$

$= \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{d} f(x)\,dx$

$= \int_{a}^{d} f(x)\,dx$

a, b, c, d의 대소에 관계없이 성립한다.

06 $\int_{0}^{8} f(x)\,dx$

주어진 정적분의 값을 이용할 수 있도록 적분 구간을 나누어 식을 변형한다.

$= \int_{0}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{8} f(x)\,dx$

$= \int_{0}^{4} f(x)\,dx + \left\{\int_{4}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{8} f(x)\,dx\right\}$

$= \int_{0}^{4} f(x)\,dx + \left\{-\int_{2}^{4} f(x)\,dx + \int_{2}^{8} f(x)\,dx\right\}$

$= 3 + (-1+6) = 8$ 답 ④

07 $xf(x) = \begin{cases} -3x^2+7x & (x \ge 2) \\ 6x^2-11x & (x \le 2) \end{cases}$이므로

$\int_{1}^{3} xf(x)\,dx$

$= \int_{1}^{2} xf(x)\,dx + \int_{2}^{3} xf(x)\,dx$

$= \int_{1}^{2} (6x^2-11x)\,dx + \int_{2}^{3} (-3x^2+7x)\,dx$

$= \left[2x^3 - \frac{11}{2}x^2\right]_{1}^{2} + \left[-x^3 + \frac{7}{2}x^2\right]_{2}^{3}$

$= \left\{(16-22) - \left(2-\frac{11}{2}\right)\right\}$

$\quad + \left\{\left(-27+\frac{63}{2}\right) - (-8+14)\right\}$

$= -4$ 답 -4

08 $a>1$이므로

$\int_{-1}^{a} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{a} f(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{1} (3x^2+2)\,dx + \int_{1}^{a} (4x+1)\,dx$

$= \left[x^3+2x\right]_{-1}^{1} + \left[2x^2+x\right]_{1}^{a}$

$= \{(1+2)-(-1-2)\}$

$\quad + \{(2a^2+a)-(2+1)\}$

$= 2a^2+a+3$

따라서 $2a^2+a+3=39$이므로

$2a^2+a-36=0$, $\quad (2a+9)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>1$) 답 4

09 $|x^2-9| = \begin{cases} x^2-9 & (x \le -3 \text{ 또는 } x \ge 3) \\ -x^2+9 & (-3 \le x \le 3) \end{cases}$이므로

$x^2-9=0$에서

$(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

즉 $x=-3$, $x=3$을 경계로 x^2-9의 값의 부호가 바뀐다.

$\int_{-2}^{4} \frac{|x^2-9|}{x+3}\,dx$

$= \int_{-2}^{3} \frac{-x^2+9}{x+3}\,dx + \int_{3}^{4} \frac{x^2-9}{x+3}\,dx$

$= -\int_{-2}^{3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3}\,dx$

$\quad + \int_{3}^{4} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3}\,dx$

$= -\int_{-2}^{3} (x-3)\,dx + \int_{3}^{4} (x-3)\,dx$

$= -\left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_{-2}^{3} + \left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_{3}^{4}$

$= -\left\{\left(\frac{9}{2}-9\right)-(2+6)\right\} + \left\{(8-12)-\left(\frac{9}{2}-9\right)\right\}$

$= 13$ 답 ⑤

10 $|2x^2-4x| = \begin{cases} 2x^2-4x & (x \le 0 \text{ 또는 } x \ge 2) \\ -2x^2+4x & (0 \le x \le 2) \end{cases}$

$2x^2-4x=0$에서

$x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

이고, $a>2$이므로

$\int_{0}^{a} |2x^2-4x|\,dx$

$= \int_{0}^{2} (-2x^2+4x)\,dx + \int_{2}^{a} (2x^2-4x)\,dx$

$= \left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{2} + \left[\frac{2}{3}x^3-2x^2\right]_{2}^{a}$

$= \left(-\frac{16}{3}+8\right) + \left\{\left(\frac{2}{3}a^3-2a^2\right) - \left(\frac{16}{3}-8\right)\right\}$

$= \frac{2}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{16}{3}$

따라서 $\frac{2}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$이므로

$a^3-3a^2=0$, $\quad a^2(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>2$) 답 3

11 $\int_{-a}^{a} (15x^2+10x)\,dx = \int_{-a}^{a} 15x^2\,dx + \int_{-a}^{a} 10x\,dx$

$= 2\int_{0}^{a} 15x^2\,dx$

$= 2\left[5x^3\right]_{0}^{a}$

$= 2 \cdot 5a^3$

$= 10a^3$

따라서 $10a^3 = \frac{2}{25}$이므로

$a^3 = \frac{1}{125}$ $\qquad \therefore a = \frac{1}{5}$

$\therefore 20a = 20 \cdot \frac{1}{5} = 4$ 답 ④

12 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(-ax^2+bx+9)\,dx$

$$=\int_{-1}^{1}(-ax^2+9)\,dx+\int_{-1}^{1}bx\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-ax^2+9)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{a}{3}x^3+9x\right]_0^1$$
$$=2\left(-\frac{a}{3}+9\right)=-\frac{2}{3}a+18$$

즉 $-\frac{2}{3}a+18=2$이므로

$\frac{2}{3}a=16$

$\therefore a=24$

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx=\int_{-1}^{1}x(-24x^2+bx+9)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-24x^3+bx^2+9x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-24x^3+9x)\,dx+\int_{-1}^{1}bx^2\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}bx^2\,dx$$
$$=2\left[\frac{b}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}b$$

즉 $\frac{2}{3}b=4$이므로 $b=6$

$\therefore a+b=30$ 답 30

13 $f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이고
$g(x)=-g(-x)$에서 $g(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^{2}\{f(x)+g(x)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}f(x)\,dx+\int_{-2}^{2}g(x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}f(x)\,dx$$
$$=2\cdot5=10$$

답 10

14 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로
$x^3f(x)$, $xf(x)$는 모두 기함수이다.

$$\therefore \int_{-3}^{3}(4x^3+2x-1)f(x)\,dx$$
$$=4\int_{-3}^{3}x^3f(x)\,dx+2\int_{-3}^{3}xf(x)\,dx-\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$$
$$=-2\int_{0}^{3}f(x)\,dx$$
$$=-2\cdot6=-12$$

답 ①

쌤한마디

우함수와 기함수의 곱

① (우함수)×(우함수)=(우함수)
② (우함수)×(기함수)=(기함수)
③ (기함수)×(기함수)=(우함수)

Q BOX

① $f(-x)=f(x)$이면
$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx$
$=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx$
② $f(-x)=-f(x)$이면
$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$

$\int_{1}^{1}f(t)\,dt=0$

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는
$f'(a)$
$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Lecture 15 정적분으로 정의된 함수

90쪽

01 답 x^2-7x+2

02 답 x^3+2x^2+6x-5

03 $\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+3}(5t-11)\,dt$
$=\{5(x+3)-11\}-(5x-11)=15$ 답 15

04 $\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+1}(-t^2+9t+2)\,dt$
$=\{-(x+1)^2+9(x+1)+2\}-(-x^2+9x+2)$
$=-2x+8$

답 $-2x+8$

05 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_{2}^{x}f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(2x^2-9x+10)$

$\therefore f(x)=4x-9$

답 $f(x)=4x-9$

06 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_{-3}^{x}f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(x^3+5x^2-x-21)$

$\therefore f(x)=3x^2+10x-1$

답 $f(x)=3x^2+10x-1$

07 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=2x-a$
또 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=1-a+2$ $\therefore a=3$
$\therefore f(x)=2x-3$

답 $f(x)=2x-3$, $a=3$

08 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=-6x^2+2ax+7$
또 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$0=16+4a-14-10$
$4a=8$ $\therefore a=2$
$\therefore f(x)=-6x^2+4x+7$

답 $f(x)=-6x^2+4x+7$, $a=2$

09 $f(t)=3t^2+9t$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}(3t^2+9t)\,dt$
$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}f(t)\,dt$
$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$
$=F'(2)=f(2)$
$=12+18=30$

답 30

10 $f(t)=-t^3+4t+6$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x}(-t^3+4t+6)\,dt$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}$$
$$=F'(-1)=f(-1)$$
$$=1-4+6=3$$

답 3

11 $f(t)=2t^2-5$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{3}^{x+3}(2t^2-5)\,dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{3}^{x+3}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x+3)-F(3)}{x}$$
$$=F'(3)=f(3)$$
$$=18-5=13$$

답 13

12 $f(t)=t^2+2t-12$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{2}^{x+2}(t^2+2t-12)\,dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{2}^{x+2}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x+2)-F(2)}{x}$$
$$=F'(2)=f(2)$$
$$=4+4-12=-4$$

답 -4

표준+발전 유형 Q+Q

91쪽

01 $\int_{0}^{1}f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^2+8x+2k$

$f(t)=3t^2+8t+2k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_{0}^{1}(3t^2+8t+2k)\,dt=\Big[t^3+4t^2+2kt\Big]_{0}^{1}$$
$$=1+4+2k=5+2k$$

즉 ㉠에서 $5+2k=k$이므로 $k=-5$

따라서 $f(x)=3x^2+8x-10$이므로

$f(1)=3+8-10=1$

답 ①

02 $f(x)=4x^3+\int_{0}^{2}(2x-1)f(t)\,dt$

$$=4x^3+(2x-1)\int_{0}^{2}f(t)\,dt$$

$\int_{0}^{2}f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면

$f(x)=4x^3+(2x-1)k=4x^3+2kx-k$

$f(t)=4t^3+2kt-k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_{0}^{2}(4t^3+2kt-k)\,dt=\Big[t^4+kt^2-kt\Big]_{0}^{2}$$
$$=16+4k-2k=16+2k$$

Q BOX

아래끝과 위끝이 상수인 정적분을 포함하는 경우

아래끝 또는 위끝에 변수가 있는 정적분을 포함하는 경우

정적분의 아래끝과 위끝이 모두 상수이면 정적분의 결과도 상수이다.

정적분에서 변수가 t이므로 t 이외의 문자는 상수로 생각한다.

즉 ㉠에서 $16+2k=k$이므로 $k=-16$

따라서 $f(x)=4x^3-32x+16$이므로

$f(-1)=-4+32+16=44$

답 44

03 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x+a$

또 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=2a^2+a^2-12$, $3a^2=12$

$a^2=4$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$)

따라서 $f(x)=4x+2$이므로

$f(a)=f(2)=8+2=10$

답 10

쌤 한마디

정적분을 포함한 등식에서 함수 $f(x)$는 다음과 같은 방법을 이용하여 구한다.

① $f(x)=g(x)+\int_{a}^{b}f(t)\,dt$ (a, b는 실수) 꼴

$\int_{a}^{b}f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=g(x)+k$이므로 이 식을 ㉠에 대입하여 k의 값을 구한다.

② $\int_{a}^{x}f(t)\,dt=g(x)$ (a는 실수) 꼴

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=g'(x)$

양변에 $x=a$를 대입하면 $0=g(a)$

임을 이용한다.

04 $\int_{-1}^{0}f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면

$$\int_{0}^{x}f(t)\,dt=x^3-x^2-7kx$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-2x-7k$

$f(t)=3t^2-2t-7k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_{-1}^{0}(3t^2-2t-7k)\,dt=\Big[t^3-t^2-7kt\Big]_{-1}^{0}$$
$$=-(-1-1+7k)$$
$$=2-7k$$

즉 ㉠에서 $2-7k=k$이므로

$8k=2$ $\therefore k=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-\frac{7}{4}$이므로

$f(0)=-\frac{7}{4}$

답 ④

05 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$x\int_{3}^{x}f(t)\,dt-\int_{3}^{x}tf(t)\,dt=x^3-4x^2-3x+18$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{3}^{x}f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-8x-3$$
$$\therefore \int_{3}^{x}f(t)\,dt=3x^2-8x-3$$

L 08 정적분

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-8$

$\therefore f(4)=24-8=16$ 답 16

06 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$x\int_{-2}^{x}f(t)\,dt-\int_{-2}^{x}tf(t)\,dt=-3x^3+ax^2+8x+20$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-2}^{x}f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=-9x^2+2ax+8$

$\therefore \int_{-2}^{x}f(t)\,dt=-9x^2+2ax+8$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-18x+2a$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$0=24+4a-16+20,\quad 4a=-28$

$\therefore a=-7$

따라서 $f(x)=-18x-14$이므로

$f(-1)=18-14=4$ 답 4

$\int_{-2}^{x}f(t)\,dt$ $=-9x^2+2ax+8$ 의 양변에 $x=-2$를 대입하여 a의 값을 구할 수 도 있다.

07 $f(x)=\int_{1}^{x}(3t^2+4t-4)\,dt$에서

$f'(x)=3x^2+4x-4=(x+2)(3x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 b를 가지므로

$a=-2,$

$b=f(-2)=\int_{1}^{-2}(3t^2+4t-4)\,dt$

$=\left[t^3+2t^2-4t\right]_{1}^{-2}$

$=(-8+8+8)-(1+2-4)=9$

$\therefore ab=-18$ 답 ①

08 $f(x)=\int_{0}^{x}(t^2+at+b)\,dt$에서

$f'(x)=x^2+ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 극솟값 $-\frac{8}{3}$을 가지므로

$f'(4)=0,\ f(4)=-\frac{8}{3}$

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 갖는다.
➡ $f'(a)=0,\ f(a)=b$

$f'(4)=0$에서 $16+4a+b=0$

$\therefore 4a+b=-16$ ...... ㉠

$f(4)=-\frac{8}{3}$에서

$f(4)=\int_{0}^{4}(t^2+at+b)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_{0}^{4}=\frac{64}{3}+8a+4b$

이므로 $\frac{64}{3}+8a+4b=-\frac{8}{3}$

$\therefore 2a+b=-6$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5,\ b=4$

따라서 $f'(x)=x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$이므로

$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=4$

즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(1)=\int_{0}^{1}(t^2-5t+4)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4=\frac{11}{6}$ 답 $\frac{11}{6}$

09 $f(x)=\int_{x}^{x+1}(t^3-7t)\,dt$에서

$f'(x)=\{(x+1)^3-7(x+1)\}-(x^3-7x)$

$=3x^2+3x-6$

$=3(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1\ (\because -1\le x\le 2)$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

이때

$f(-1)=\int_{-1}^{0}(t^3-7t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{7}{2}t^2\right]_{-1}^{0}$

$=-\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{2}\right)=\frac{13}{4},$

$f(1)=\int_{1}^{2}(t^3-7t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{7}{2}t^2\right]_{1}^{2}$

$=(4-14)-\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{2}\right)=-\frac{27}{4},$

$f(2)=\int_{2}^{3}(t^3-7t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{7}{2}t^2\right]_{2}^{3}$

$=\left(\frac{81}{4}-\frac{63}{2}\right)-(4-14)=-\frac{5}{4}$

이므로 $M=\frac{13}{4},\ m=-\frac{27}{4}$

$-1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(1)$이고, 최댓값은 $f(-1)$, $f(2)$ 중 큰 값이다.

$\therefore M+m=-\frac{7}{2}$ 답 ②

10 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$x\int_{-1}^{x}f(t)\,dt-\int_{-1}^{x}tf(t)\,dt=x^4+2x^3+x^2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-1}^{x}f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+6x^2+2x$

$\therefore \int_{-1}^{x}f(t)\,dt=4x^3+6x^2+2x$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2+12x+2$

$=12\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 최솟값 -1을 갖는다. 답 -1

11 $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_4^{x^2} f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x^2)-F(4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x^2)-F(4)}{x^2-4}\cdot(x+2)$$
$$=F'(4)\cdot 4=4f(4)$$
$$=4\cdot(64-36-8)=80$$

답 80

12 $f(x)=-x^2+6x+a$, $F'(x)=f(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+2h}(-x^2+6x+a)\,dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+2h}f(x)\,dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1)+F(1)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{F(1+2h)-F(1)\}-\{F(1-h)-F(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}\cdot 2-\lim_{h\to 0}\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}\cdot(-1)$$
$$=2F'(1)+F'(1)=3F'(1)=3f(1)$$
$$=3(-1+6+a)=3a+15$$

따라서 $3a+15=6$이므로

$3a=-9 \qquad \therefore a=-3$

답 ③

중단원 마무리

L 93쪽

01 전략 주어진 등식의 좌변을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\int_0^a(3x^2-2x-6)\,dx=\Big[x^3-x^2-6x\Big]_0^a$
$=a^3-a^2-6a$

따라서 $a^3-a^2-6a=0$이므로

$a(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

답 ③

02 전략 $f(a)=0$이면 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 가짐을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(-1)=f(1)=f(3)=0$이므로

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)=x^3-3x^2-x+3$

$$\therefore \int_2^4 f(x)\,dx$$
$$=\int_2^4(x^3-3x^2-x+3)\,dx$$
$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\Big]_2^4$$
$$=(64-64-8+12)-(4-8-2+6)$$
$$=4$$

답 4

Q BOX

$x^2=s$로 놓으면 $x\to 2$일 때 $s\to 4$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{F(x^2)-F(4)}{x^2-4}=\lim_{s\to 4}\frac{F(s)-F(4)}{s-4}=F'(4)$$

$$\int_{-1}^3 f(x)\,dx=-\int_3^{-1}f(x)\,dx$$

a^3-a^2-6a
$=a(a^2-a-6)$
$=a(a+2)(a-3)$

03 전략 $\int_a^b\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$ (복호동순)임을 이용한다.

풀이 $\int_3^5\{f(x)-2\}^2dx$

$$=\int_3^5[\{f(x)\}^2-4f(x)+4]\,dx$$
$$=\int_3^5\{f(x)\}^2dx-4\int_3^5 f(x)\,dx+\int_3^5 4\,dx$$
$$=\int_3^5\{f(x)\}^2dx+4\int_5^3 f(x)\,dx+\Big[4x\Big]_3^5$$
$$=6+4\cdot 2+(20-12)=22$$

답 ④

04 전략 $\int_p^q f(x)\,dx+\int_q^r f(x)\,dx=\int_p^r f(x)\,dx$임을 이용하여 주어진 등식의 좌변을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\int_{-1}^a f(x)\,dx-\int_{-1}^3 f(x)\,dx$

$$=\int_3^{-1}f(x)\,dx+\int_{-1}^a f(x)\,dx$$
$$=\int_3^a f(x)\,dx=\int_3^a(2ax-9)\,dx$$
$$=\Big[ax^2-9x\Big]_3^a$$
$$=(a^3-9a)-(9a-27)=a^3-18a+27$$

따라서 $a^3-18a+27=a^3+a^2-13$이므로

$a^2+18a-40=0, \qquad (a+20)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

답 ②

05 전략 정적분의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. [반례] $f(x)=2x$이면

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_0^3=9,$$
$$3\int_0^1 f(x)\,dx=3\int_0^1 2x\,dx=3\Big[x^2\Big]_0^1=3\cdot 1=3$$
$$\therefore \int_0^3 f(x)\,dx\neq 3\int_0^1 f(x)\,dx$$

ㄷ. [반례] $f(x)=x$이면

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\int_0^1 x^2\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{1}{3},$$
$$\Big\{\int_0^1 f(x)\,dx\Big\}^2=\Big(\int_0^1 x\,dx\Big)^2=\Big(\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1\Big)^2$$
$$=\Big(\frac{1}{2}\Big)^2=\frac{1}{4}$$
$$\therefore \int_0^1\{f(x)\}^2dx\neq\Big\{\int_0^1 f(x)\,dx\Big\}^2$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

06 전략 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$$

즉 $\lim_{x\to 1+}(-x^2+4x)=\lim_{x\to 1-}(-2x+a)$에서

$-1+4=-2+a \qquad \therefore a=5$ ··· ❶

L 08 정적분

따라서 $f(x)=\begin{cases} -x^2+4x & (x\ge1) \\ -2x+5 & (x\le1) \end{cases}$이므로

$$\int_0^3 f(x)\,dx$$
$$=\underline{\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx}$$
$$=\int_0^1(-2x+5)\,dx+\int_1^3(-x^2+4x)\,dx$$
$$=\Big[-x^2+5x\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\Big]_1^3$$
$$=(-1+5)+\Big\{(-9+18)-\Big(-\frac{1}{3}+2\Big)\Big\}$$
$$=\frac{34}{3}$$
··· ❷

답 $\frac{34}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	$\int_0^3 f(x)\,dx$의 값을 구할 수 있다.	60 %

$x=1$을 경계로 함수식이 다르므로 이 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.

07 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 기준으로 구간을 나눈다.

풀이 $|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\ge a) \\ -x+a & (x\le a) \end{cases}$이고 $1<a<5$이므로

$$\int_1^5 |x-a|\,dx$$
$$=\int_1^a(-x+a)\,dx+\int_a^5(x-a)\,dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{2}x^2+ax\Big]_1^a+\Big[\frac{1}{2}x^2-ax\Big]_a^5$$
$$=\Big\{\Big(-\frac{1}{2}a^2+a^2\Big)-\Big(-\frac{1}{2}+a\Big)\Big\}$$
$$+\Big\{\Big(\frac{25}{2}-5a\Big)-\Big(\frac{1}{2}a^2-a^2\Big)\Big\}$$
$$=a^2-6a+13=(a-3)^2+4$$

따라서 $\int_1^5 |x-a|\,dx$는 $a=3$에서 최솟값 4를 가지므로

$p=3,\ q=4$

$\therefore pq=12$

답 ②

08 전략 $f(x)=f(-x)$이면 $\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_{-4}^4 f(x)\,dx=22$에서 $\quad 2\int_0^4 f(x)\,dx=22$

$$\therefore \int_0^4 f(x)\,dx=11$$
$$\therefore \int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^0 f(x)\,dx+\int_0^4 f(x)\,dx$$
$$=-\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^4 f(x)\,dx$$
$$=-4+11=7$$

답 7

09 전략 주어진 $f(x)$, $g(x)$의 조건을 이용하여 $h(x)$, $h'(x)$가 우함수인지 기함수인지 확인한다.

풀이 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$이므로

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$

즉 $h(x)$는 기함수이므로 $h'(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-3}^3(x+5)h'(x)\,dx$$
$$=\int_{-3}^3\{xh'(x)+5h'(x)\}\,dx$$
$$=\int_{-3}^3 \underline{xh'(x)}\,dx+5\int_{-3}^3 h'(x)\,dx$$
$$=2\cdot5\int_0^3 h'(x)\,dx$$
$$=10\Big[h(x)\Big]_0^3$$
$$=10\{h(3)-h(0)\}$$

(기함수)×(우함수) =(기함수)

따라서 $10\{h(3)-h(0)\}=10$이므로

$h(3)-h(0)=1$

$\therefore h(3)=h(0)+1$

이때 $h(-x)=-h(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$h(0)=-h(0) \qquad \therefore h(0)=0$

$\therefore h(3)=1$

답 ①

참고 $f(x)$, $g(x)$가 다항함수이므로 $h(x)=f(x)g(x)$도 다항함수이다.
또 $h(x)$가 기함수이므로
$h(x)=a_1x+a_2x^3+a_3x^5+\cdots$ (a_1, a_2, a_3, $\cdots$은 상수)
이라 하면
$h'(x)=a_1+3a_2x^2+5a_3x^4+\cdots$
따라서 $h'(x)$는 우함수이다.

10 전략 $\int_1^3 f(t)\,dt$, $\int_{-1}^0 g(t)\,dt$가 모두 상수임을 이용한다.

풀이 $\int_1^3 f(t)\,dt=a$ (a는 상수) ······ ㉠

$\int_{-1}^0 g(t)\,dt=b$ (b는 상수) ······ ㉡

로 놓으면

$f(x)=2x+b$, $g(x)=3x^2+a$

$f(t)=2t+b$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_1^3(2t+b)\,dt=\Big[t^2+bt\Big]_1^3$$
$$=(9+3b)-(1+b)$$
$$=8+2b$$

즉 ㉠에서 $8+2b=a$이므로

$a-2b=8$ ······ ㉢

$g(t)=3t^2+a$를 ㉡의 좌변에 대입하면

$$\int_{-1}^0(3t^2+a)\,dt=\Big[t^3+at\Big]_{-1}^0$$
$$=-(-1-a)=1+a$$

즉 ㉡에서 $1+a=b$이므로

$a-b=-1$ ······ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $\quad a=-10,\ b=-9$

따라서 $f(x)=2x-9$, $g(x)=3x^2-10$이므로

$\underline{f(2)+g(2)}=-5+2=-3$

답 -3

$f(2)=4-9=-5$,
$g(2)=12-10=2$

11 전략 주어진 등식의 양변에 $x=1$, $x=0$을 대입하여 a의 값을 구하고, 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=2+a+3a+0$$

$$\therefore f(1)=4a+2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$0=3a+\int_1^0 f(t)\,dt, \quad 0=3a-\int_0^1 f(t)\,dt$$

$$\therefore \int_0^1 f(t)\,dt=3a$$

이때 $f(1)=\int_0^1 f(t)\,dt$이므로

$$4a+2=3a \quad \therefore a=-2$$

또 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=6x^2-4x+f(x)$$

$$xf'(x)=6x^2-4x$$

$$\therefore f'(x)=6x-4$$

즉

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x-4)\,dx$$

$$=3x^2-4x+C$$

이고, ㉠에서 $f(1)=-8+2=-6$이므로

$$3-4+C=-6 \quad \therefore C=-5$$

따라서 $f(x)=3x^2-4x-5$이므로

$$f(3)=27-12-5=10$$

$$\therefore a+f(3)=8$$

답 ④

12 전략 주어진 식의 좌변을 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$x\int_{-2}^x f(t)\,dt-\int_{-2}^x tf(t)\,dt=x^4+2x^3-2x^2+8$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{-2}^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+6x^2-4x$$

$$\therefore \int_{-2}^x f(t)\,dt=4x^3+6x^2-4x$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=12x^2+12x-4$$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $12x^2+12x-4=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3}$$

답 ①

13 전략 $f(x)$가 삼차함수이므로 $F(x)$가 사차함수임을 이용하여 극값을 가질 조건을 파악한다.

풀이 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$에서

$$F'(x)=f(x)$$

이때 $f(x)$가 삼차함수이므로 $F(x)$는 사차함수이다.

사차함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 삼차방정식 $F'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$이 한 실근과 중근 또는 한 실근과 두 허근 또는 삼중근을 가져야 한다.

Q BOX

$a=-2$이므로
$xf(x)=2x^3-2x^2-6+\int_1^x f(t)\,dt$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

삼차방정식 $f(x)=0$이 삼중근을 갖는 경우가 제외된다.

$a<0$이므로
$x<3$일 때 $g'(x)>0$
$x>3$일 때 $g'(x)<0$

$f(x)=x^3-3x+a$에서

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지므로 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근 또는 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(-1)f(1)\ge 0$이어야 한다.

즉 $(a+2)(a-2)\ge 0$이어야 하므로

$$a\le -2 \text{ 또는 } a\ge 2$$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

답 ②

쌤 한마디

(1) 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 근은 다음과 같이 판별한다.
① (극댓값)×(극솟값)<0 ⟺ 서로 다른 세 실근
② (극댓값)×(극솟값)=0 ⟺ 한 실근과 중근
③ (극댓값)×(극솟값)>0 ⟺ 한 실근과 두 허근

(2) 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 삼차방정식 $f(x)=0$은 삼중근을 갖거나 한 실근과 두 허근을 갖는다.

14 전략 주어진 그래프를 이용하여 $f(x)$의 식을 세운다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(3, 0)$, $(9, 0)$을 지나므로

$$f(x)=a(x-3)(x-9)\ (a<0)$$

라 하자. ··· ❶

$g(x)=\int_x^{x+6} f(t)\,dt$에서

$$g'(x)=f(x+6)-f(x)$$
$$=a(x+3)(x-3)-a(x-3)(x-9)$$
$$=a(x-3)(x+3-x+9)$$
$$=12a(x-3)$$

··· ❷

$g'(x)=0$에서 $\quad x=3$

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극대이면서 최대이므로

$$k=3$$

··· ❸

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$의 식을 세울 수 있다.	30 %
❷	$g'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸	k의 값을 구할 수 있다.	30 %

15 전략 미분계수의 정의를 이용하여 $g'(x)$를 구한다.

풀이 $F'(t)=f(t)$라 하면

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$
$$=F'(x)=f(x)=2x-3$$

이므로

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=\int(2x-3)\,dx$$
$$=x^2-3x+C$$

이때 $g(1)=-6$이므로

$1-3+C=-6 \qquad \therefore C=-4$

따라서 $g(x)=x^2-3x-4$이므로 $g(x)<0$에서

$x^2-3x-4<0, \qquad (x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$ 답 $-1<x<4$

16 전략 주어진 조건을 이용하여 $1\le x\le 2$에서의 $f(x)$를 구한다.

풀이 조건 (나)에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\quad f(1)=b$

이때 조건 (가)에서 $f(1)=1$이므로 $\quad b=1$

즉 $f(x+1)-xf(x)=ax+1$이므로 구간 $[0, 1]$에서

$f(x+1)-x\cdot x=ax+1$

$\therefore f(x+1)=x^2+ax+1$

$x+1=t$로 놓으면 $0\le x\le 1$에서 $1\le t\le 2$이고

$$f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+1$$
$$=t^2+(a-2)t-a+2$$

구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\le x\le 1) \\ x^2+(a-2)x-a+2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$ 이므로

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & (0<x<1) \\ 2x+a-2 & (1<x<2)\end{cases}$$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f'(1)$이 존재한다.

즉 $\lim\limits_{x\to1+}f'(x)=\lim\limits_{x\to1-}f'(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}(2x+a-2)=\lim\limits_{x\to1-}1 \qquad \therefore a=1$

따라서 $1\le x\le 2$일 때 $f(x)=x^2-x+1$이므로

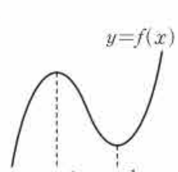
$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2(x^2-x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{8}{3}-2+2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=\frac{11}{6}$$

$\therefore 60\times\int_1^2 f(x)\,dx=60\times\frac{11}{6}=110$ 답 110

17 전략 주어진 조건을 이용하여 $y=f(x)$, $y=f'(x)$의 그래프의 개형을 추론한다.

풀이 ㄱ. $\int_0^k f'(x)\,dx=\Big[f(x)\Big]_0^k$
$=f(k)-f(0)$

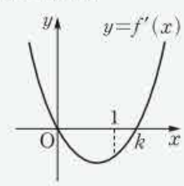
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



QBOX

t에 대한 함수이다.

$k>1$이면 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $t>1$에서 $f'(t)<0$인 t의 값이 존재한다.



$x=t-1$

$f(x)=ax^3+\cdots\ (a>0)$이라 하면
$f'(x)=3ax^2+\cdots$
이므로 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 $3a$이다.

$a>0$, $k^3>0$이므로
$-\frac{1}{2}ak^3<0$

이때 $f(k)$는 극솟값, $f(0)$은 극댓값이고 $f(k)<f(0)$이므로

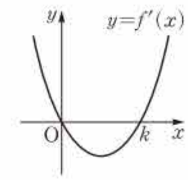
$f(k)-f(0)<0$

$\therefore \int_0^k f'(x)\,dx<0$

ㄴ. 조건 (나)에서 $\int_0^t |f'(x)|\,dx=f(t)+f(0)$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$|f'(t)|=f'(t) \qquad \therefore f'(t)\ge0$

조건 (가)에서 $f'(0)=0$, $f'(k)=0$이고 함수 $y=f'(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t>1$에서 $f'(t)\ge0$이려면

$0<k\le1$

ㄷ. $t>1$이고 ㄴ에서 $0<k\le1$이므로 $\quad k<t$

조건 (나)에서

$$\int_0^t|f'(x)|\,dx$$
$$=\int_0^k|f'(x)|\,dx+\int_k^t|f'(x)|\,dx$$
$$=\int_0^k\{-f'(x)\}\,dx+\int_k^t f'(x)\,dx$$
$$=\Big[-f(x)\Big]_0^k+\Big[f(x)\Big]_k^t$$
$$=\{-f(k)+f(0)\}+\{f(t)-f(k)\}$$
$$=-2f(k)+f(0)+f(t)$$

즉 $-2f(k)+f(0)+f(t)=f(t)+f(0)$이므로

$f(k)=0$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 ㄱ. 조건 (가)에 의하여

$f'(x)=3ax(x-k)\ (a>0,\ k>0)$라 하면

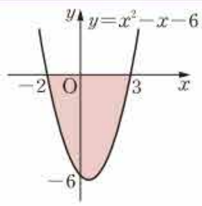
$$\int_0^k f'(x)\,dx=\int_0^k 3ax(x-k)\,dx$$
$$=3a\int_0^k(x^2-kx)\,dx$$
$$=3a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2\right]_0^k$$
$$=3a\left(\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^3\right)$$
$$=-\frac{1}{2}ak^3<0$$

09 정적분의 활용

Lecture 16 두 곡선 사이의 넓이

96쪽

01 곡선 $y=x^2-x-6$과 x축의 교점의 x좌표는



$x^2-x-6=0$에서

$(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

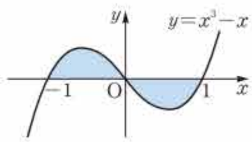
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{3}\{-(x^2-x-6)\}\,dx=\int_{-2}^{3}(-x^2+x+6)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{3}$$
$$=\frac{125}{6}$$

답 $\frac{125}{6}$

Q BOX: 정적분을 이용하여 넓이를 구할 때에는 먼저 곡선의 개형을 그려 넓이를 구하는 부분을 나타낸다.

02 곡선 $y=x^3-x$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^3-x=0$에서

$x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

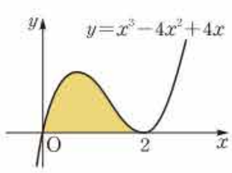
$$\int_{-1}^{1}|x^3-x|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 $y\ge0$, 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $y\le0$이다.

곡선 $y=x^3-x$가 원점에 대하여 대칭이므로 $\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx=\int_{0}^{1}(-x^3+x)\,dx$임을 이용하여 간단히 계산할 수도 있다.

03 곡선 $y=x^3-4x^2+4x$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^3-4x^2+4x=0$에서

$x(x-2)^2=0$

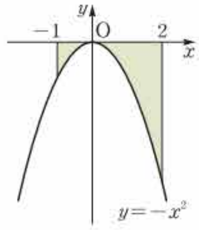
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{2}(x^3-4x^2+4x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

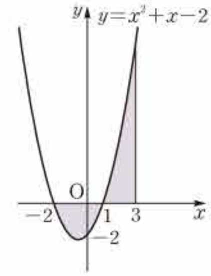
04 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{2}\{-(-x^2)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{2}x^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}$$
$$=3$$

답 3

05 곡선 $y=x^2+x-2$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^2+x-2=0$에서

$(x+2)(x-1)=0$

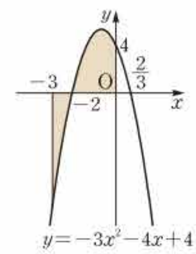
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{3}|x^2+x-2|\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)\,dx+\int_{1}^{3}(x^2+x-2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{1}^{3}$$
$$=\frac{9}{2}+\frac{26}{3}=\frac{79}{6}$$

답 $\frac{79}{6}$

06 곡선 $y=-3x^2-4x+4$와 x축의 교점의 x좌표는



$-3x^2-4x+4=0$에서

$(x+2)(3x-2)=0$

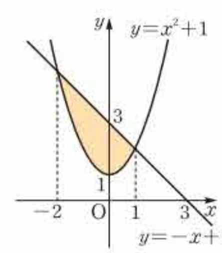
$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-3}^{0}|-3x^2-4x+4|\,dx$$
$$=\int_{-3}^{-2}(3x^2+4x-4)\,dx+\int_{-2}^{0}(-3x^2-4x+4)\,dx$$
$$=\left[x^3+2x^2-4x\right]_{-3}^{-2}+\left[-x^3-2x^2+4x\right]_{-2}^{0}$$
$$=5+8=13$$

답 13

07 곡선 $y=x^2+1$과 직선 $y=-x+3$의 교점의 x좌표는 $x^2+1=-x+3$에서



$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

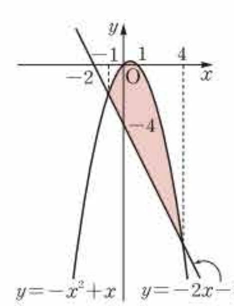
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{-x+3-(x^2+1)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 $-x+3\ge x^2+1$이다.

08 곡선 $y=-x^2+x$와 직선 $y=-2x-4$의 교점의 x좌표는 $-x^2+x=-2x-4$에서



$x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

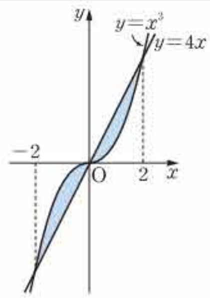
$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{4}\{-x^2+x-(-2x-4)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{4}$$
$$=\frac{125}{6}$$

답 $\frac{125}{6}$

09 곡선 $y=x^3$과 직선 $y=4x$의 교점의 x좌표는 $x^3=4x$에서



$x^3-4x=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

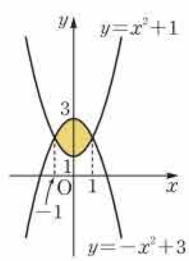
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(4x-x^3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2}$$
$$=4+4=8$$

답 8

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 대하여 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)$와 $g(x)$의 대소 관계가 바뀔 때에는 $f(x)-g(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 넓이를 구한다.

10 두 곡선 $y=x^2+1$, $y=-x^2+3$의 교점의 x좌표는 $x^2+1=-x^2+3$에서



$x^2=1$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{-x^2+3-(x^2+1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx=2\int_{0}^{1}(-2x^2+2)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_{0}^{1}$$
$$=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

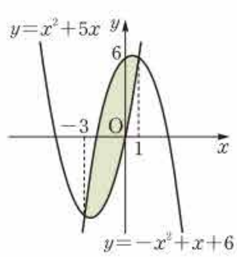
답 $\frac{8}{3}$

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $-x^2+3\geq x^2+1$이다.

① $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

② $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

11 두 곡선 $y=x^2+5x$, $y=-x^2+x+6$의 교점의 x좌표는



$x^2+5x=-x^2+x+6$에서

$2x^2+4x-6=0$

$(x+3)(x-1)=0$

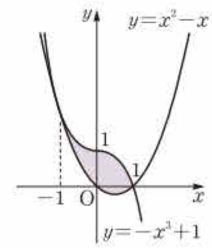
$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-3}^{1}\{-x^2+x+6-(x^2+5x)\}dx$$
$$=\int_{-3}^{1}(-2x^2-4x+6)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-2x^2+6x\right]_{-3}^{1}=\frac{64}{3}$$

답 $\frac{64}{3}$

12 두 곡선 $y=-x^3+1$, $y=x^2-x$의 교점의 x좌표는 $-x^3+1=x^2-x$에서



$x^3+x^2-x-1=0$

$(x+1)^2(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

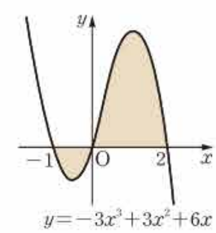
$$\int_{-1}^{1}\{-x^3+1-(x^2-x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-x^3-x^2+x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}$$
$$=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

표준+발전 유형 Q+Q

97쪽

01 곡선 $y=-3x^3+3x^2+6x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-3x^3+3x^2+6x=0$에서



$x(x+1)(x-2)=0$

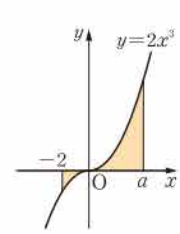
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}|-3x^3+3x^2+6x|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(3x^3-3x^2-6x)dx+\int_{0}^{2}(-3x^3+3x^2+6x)dx$$
$$=\left[\frac{3}{4}x^4-x^3-3x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{3}{4}x^4+x^3+3x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{5}{4}+8=\frac{37}{4}$$

답 ②

02 곡선과 x축 및 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^{a}|2x^3|dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(-2x^3)dx+\int_{0}^{a}2x^3dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^4\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^4\right]_{0}^{a}$$
$$=8+\frac{a^4}{2}$$

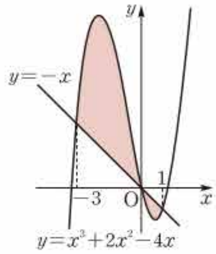
따라서 $8+\frac{a^4}{2}=136$이므로

$a^4=256$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

답 4

03 곡선 $y=x^3+2x^2-4x$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는 $x^3+2x^2-4x=-x$에서



$x^3+2x^2-3x=0$

$x(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-3}^{0}\{x^3+2x^2-4x-(-x)\}dx+\int_{0}^{1}\{-x-(x^3+2x^2-4x)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{0}(x^3+2x^2-3x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-2x^2+3x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{45}{4}+\frac{7}{12}$$

$$=\frac{71}{6}$$

답 ⑤

04 곡선 $y=-2x^2+8x$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는 $-2x^2+8x=2x$에서

$2x^2-6x=0,\quad x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

$$\therefore S_1=\int_{0}^{3}(-2x^2+8x-2x)dx$$

$$=\int_{0}^{3}(-2x^2+6x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{3}$$

$$=9$$

곡선 $y=-2x^2+8x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

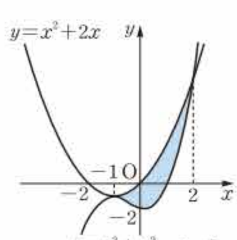
$$\int_{0}^{4}(-2x^2+8x)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2\right]_{0}^{4}=\frac{64}{3}$$

$$\therefore S_2=\frac{64}{3}-S_1=\frac{64}{3}-9=\frac{37}{3}$$

$$\therefore S_2-S_1=\frac{10}{3}$$

답 $\frac{10}{3}$

05 두 곡선 $y=x^3+x^2-x-2$, $y=x^2+2x$의 교점의 x좌표는 $x^3+x^2-x-2=x^2+2x$에서



$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{x^2+2x-(x^3+x^2-x-2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$$

답 $\frac{27}{4}$

06 두 곡선 $y=-x^3+6x$, $y=-x^2$의 교점의 x좌표는 $-x^3+6x=-x^2$에서 $\quad x^3-x^2-6x=0$

$x(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

따라서

$$S_1=\int_{-2}^{0}\{-x^2-(-x^3+6x)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3-x^2-6x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{-2}^{0}=\frac{16}{3},$$

$$S_2=\int_{0}^{3}\{-x^3+6x-(-x^2)\}dx$$

$$=\int_{0}^{3}(-x^3+x^2+6x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{3}=\frac{63}{4}$$

이므로

$$3S_1+4S_2=3\cdot\frac{16}{3}+4\cdot\frac{63}{4}=79$$

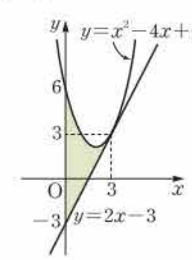
답 ④

07 $y=x^2-4x+6$에서 $\quad y'=2x-4$

점 $(3,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $2\cdot3-4=2$이므로 접선의 방정식은

$y-3=2(x-3)\quad \therefore y=2x-3$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{0}^{3}\{x^2-4x+6-(2x-3)\}dx$$

$$=\int_{0}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_{0}^{3}$$

$$=9$$

답 9

08 $y=-x^3+2x^2+1$에서 $\quad y'=-3x^2+4x$

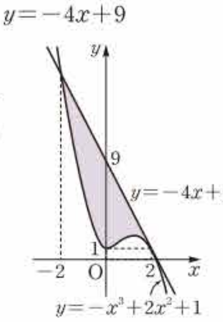
점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$-3\cdot2^2+4\cdot2=-4$

이므로 접선의 방정식은

$y-1=-4(x-2)\quad \therefore y=-4x+9$

곡선 $y=-x^3+2x^2+1$과 직선 $y=-4x+9$의 교점의 x좌표는 $-x^3+2x^2+1=-4x+9$에서



$x^3-2x^2-4x+8=0$

$(x+2)(x-2)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

Q BOX

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$S_1+S_2=\frac{64}{3}$이므로
$S_2=\frac{64}{3}-S_1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}\{-4x+9-(-x^3+2x^2+1)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(x^3-2x^2-4x+8)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-2x^2+8)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2$$
$$=2\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$$

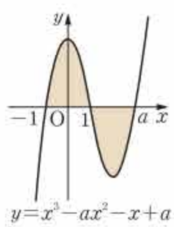
답 ②

09 곡선 $y=x^3-ax^2-x+a$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-ax^2-x+a=0$에서

$(x+1)(x-1)(x-a)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=a$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로



$$\int_{-1}^{a}(x^3-ax^2-x+a)\,dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{-1}^{a}=0$$
$$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}=0$$

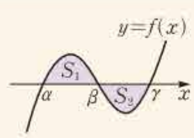
$a^4-6a^2-8a-3=0,\qquad (a+1)^3(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>1)$

답 ③

쌤한마디

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면



$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx=\int_{\beta}^{\gamma}\{-f(x)\}\,dx$$
$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx=-\int_{\beta}^{\gamma}f(x)\,dx$$
$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx+\int_{\beta}^{\gamma}f(x)\,dx=0$$
$$\therefore \int_{\alpha}^{\gamma}f(x)\,dx=0$$

10 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_{0}^{2}\left\{\frac{3}{2}x^2(x-2)-ax(x-2)\right\}dx=0$$
$$\int_{0}^{2}\left\{\frac{3}{2}x^3-(a+3)x^2+2ax\right\}dx=0$$
$$\left[\frac{3}{8}x^4-\frac{a+3}{3}x^3+ax^2\right]_0^2=0$$

$\frac{4}{3}a-2=0\qquad \therefore a=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

11 곡선 $y=x^2-4x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는 $x^2-4x=mx$에서

$x^2-(m+4)x=0,\qquad x\{x-(m+4)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=m+4$

Q BOX

곡선 $y=x^2-4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4x=0$에서

$x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 0 & -6 & -8 & -3 \\
 & & -1 & 1 & 5 & 3 \\ \hline
-1 & 1 & -1 & -5 & -3 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 2 & 3 & \\ \hline
 & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\therefore a^4-6a^2-8a-3$
$=(a+1)^2(a^2-2a-3)$
$=(a+1)^3(a-3)$

$a>0$이므로 $a+1>1$

$\therefore 0<\frac{3}{a+1}<3$

곡선 $y=-x^2+3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x=0$에서

$x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때

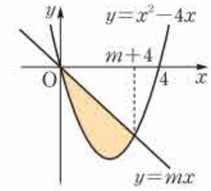
$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\frac{k}{2}=\frac{1}{8k}$에서 $k^2=\frac{1}{4}$

$\therefore k=\frac{1}{2}\ (\because k>0)$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{m+4}\{mx-(x^2-4x)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{m+4}\{-x^2+(m+4)x\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{m+4}{2}x^2\right]_0^{m+4}$$
$$=-\frac{(m+4)^3}{3}+\frac{(m+4)^3}{2}=\frac{(m+4)^3}{6}$$

곡선 $y=x^2-4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{4}(-x^2+4x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

따라서 $\frac{(m+4)^3}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}$이므로

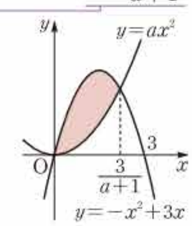
$(m+4)^3=32$

답 32

12 두 곡선 $y=-x^2+3x$, $y=ax^2$의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x=ax^2$에서 $\quad (a+1)x^2-3x=0$

$x\{(a+1)x-3\}=0\qquad \therefore x=0$ 또는 $x=\frac{3}{a+1}$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{\frac{3}{a+1}}(-x^2+3x-ax^2)\,dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{3}{a+1}}\{-(a+1)x^2+3x\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^{\frac{3}{a+1}}$$
$$=-\frac{9}{(a+1)^2}+\frac{27}{2(a+1)^2}=\frac{9}{2(a+1)^2}$$

곡선 $y=-x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{3}(-x^2+3x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

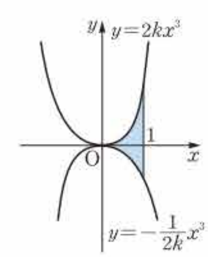
따라서 $\frac{9}{2(a+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}$이므로

$(a+1)^2=2,\qquad a^2+2a-1=0$

$\therefore a=-1+\sqrt{2}\ (\because a>0)$

답 ①

13 오른쪽 그림에서 두 곡선 $y=2kx^3$, $y=-\frac{1}{2k}x^3$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{0}^{1}\left\{2kx^3-\left(-\frac{1}{2k}x^3\right)\right\}dx$$
$$=\left(2k+\frac{1}{2k}\right)\int_{0}^{1}x^3\,dx$$
$$=\left(2k+\frac{1}{2k}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{k}{2}+\frac{1}{8k}$$

이때 $\frac{k}{2}>0$, $\frac{1}{8k}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{k}{2}+\frac{1}{8k}\ge2\sqrt{\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{8k}}=\frac{1}{2}$$

(단, 등호는 $\frac{k}{2}=\frac{1}{8k}$일 때 성립)

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

답 ④

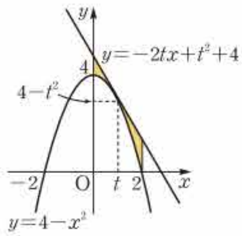
14 $y=4-x^2$에서 $\quad y'=-2x$

점 $(t,\ 4-t^2)$에서의 접선의 기울기는 $-2t$이므로 접선의 방정식은

$$y-(4-t^2)=-2t(x-t)$$

$$\therefore\ y=-2tx+t^2+4$$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_0^2\{-2tx+t^2+4-(4-x^2)\}\,dx$$

$$=\int_0^2(x^2-2tx+t^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}-4t+2t^2$$

$$=2(t-1)^2+\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 $t=1$일 때 $\frac{2}{3}$이다.

답 $\frac{2}{3}$

15 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+3)=f(x)$$

이므로

$$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_4^7 f(x)\,dx=\int_7^{10} f(x)\,dx$$

$$=\int_{10}^{13} f(x)\,dx=\int_{13}^{16} f(x)\,dx=5$$

$$\therefore\ \int_7^{16} f(x)\,dx$$

$$=\int_7^{10} f(x)\,dx+\int_{10}^{13} f(x)\,dx+\int_{13}^{16} f(x)\,dx$$

$$=3\cdot 5=15$$

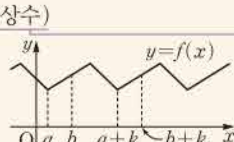
답 ②

쌤한마디

연속함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+k)=f(x)\ (k\text{는 상수})$$

를 만족시키면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 일정한 모양이 반복된다.



① 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a+k$, $x=b+k$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a+k}^{b+k} f(x)\,dx$$

② 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=a+k$로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=b$, $x=b+k$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\int_a^{a+k} f(x)\,dx=\int_b^{b+k} f(x)\,dx$$

Q BOX

함수 $f(x)$에서 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+k)=f(x)$를 만족시키는 0이 아닌 상수 k가 존재할 때, 함수 $f(x)$를 주기함수라 한다.

16 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+2)=f(x)$$

이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx=\int_3^5 f(x)\,dx$$

$$=\int_5^7 f(x)\,dx=\int_7^9 f(x)\,dx$$

이때

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^0(-2x+1)\,dx+\int_0^1(2x^2+1)\,dx$$

$$=\left[-x^2+x\right]_{-1}^0+\left[\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$$

이므로

$$\int_5^9 f(x)\,dx=\int_5^7 f(x)\,dx+\int_7^9 f(x)\,dx$$

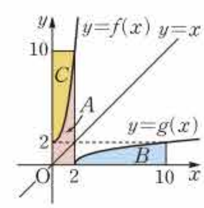
$$=2\cdot\frac{11}{3}=\frac{22}{3}$$

답 $\frac{22}{3}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

가로, 세로의 길이가 각각 2, 10인 직사각형의 넓이

17 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서



$$(B\text{의 넓이})=(C\text{의 넓이})$$

$$\therefore\ \int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^{10} g(x)\,dx$$

$$=(A\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})$$

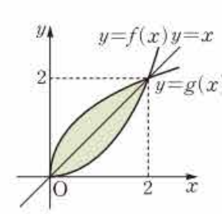
$$=(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})$$

$$=2\cdot 10=20$$

답 20

18 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

$\frac{1}{2}x^2=x$에서



$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

$$\therefore\ x=0\ \text{또는}\ x=2$$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2$$

$$=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 ②

Lecture 17 속도와 거리

L 100쪽

01 (1) $t=0$에서의 점 P의 위치가 4이므로 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$4+\int_0^3 v(t)\,dt=4+\int_0^3 (t^2-1)\,dt$$
$$=4+\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_0^3$$
$$=4+6=10$$

(2) $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2 (t^2-1)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_0^2=\frac{2}{3}$$

(3) $0\le t\le 1$에서 $v(t)\le 0$, $1\le t\le 2$에서 $v(t)\ge 0$이므로 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^2 |t^2-1|\,dt$$
$$=\int_0^1 (-t^2+1)\,dt+\int_1^2 (t^2-1)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_1^2$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$

답 (1) 10 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 2

02 (1) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

$12-3t=0$ $\quad\therefore t=4$

(2) $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^4 v(t)\,dt=\int_0^4 (12-3t)\,dt$$
$$=\left[12t-\frac{3}{2}t^2\right]_0^4=24$$

답 (1) 4 (2) 24

03 (1) 점 P가 원점으로 되돌아오는 시각을 $t=a\ (a>0)$라 하면 $\int_0^a v(t)\,dt=0$이므로

$\int_0^a (6-2t)\,dt=0,\qquad \left[6t-t^2\right]_0^a=0$

$6a-a^2=0,\qquad a(6-a)=0$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$

(2) $0\le t\le 3$에서 $v(t)\ge 0$, $3\le t\le 6$에서 $v(t)\le 0$이므로 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^6 |v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^6 |6-2t|\,dt$$
$$=\int_0^3 (6-2t)\,dt+\int_3^6 (-6+2t)\,dt$$
$$=\left[6t-t^2\right]_0^3+\left[-6t+t^2\right]_3^6$$
$$=9+9=18$$

답 (1) 6 (2) 18

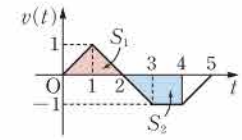
QBOX

다음과 같은 상황에서 물체의 속도는 0이다.
① 물체가 정지할 때
② 물체가 운동 방향을 바꿀 때
③ 위로 쏘아 올린 물체가 최고 높이에 도달할 때

점 P가 원점을 출발하여 원점으로 되돌아오므로 위치의 변화량은 0이다.

$v(t)=3t(t-2)$이므로
$0\le t\le 2$에서 $v(t)\le 0$,
$2\le t\le 3$에서 $v(t)\ge 0$

04 (1) $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은 오른쪽 그림에서



$$\int_0^4 v(t)\,dt=S_1-S_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot(2+1)\cdot 1$$
$$=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

(2) $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^4 v(t)\,dt=-\frac{1}{2}$$

(3) $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는 위의 그림에서

$$\int_0^4 |v(t)|\,dt=S_1+S_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot(2+1)\cdot 1$$
$$=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$

표준+발전 유형 Q+Q

L 101쪽

01 $t=0$에서의 점 P의 위치를 x_0이라 하면 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$x_0+\int_0^2 v(t)\,dt=x_0+\int_0^2 (5-4t)\,dt$$
$$=x_0+\left[5t-2t^2\right]_0^2$$
$$=x_0+2$$

즉 $x_0+2=12$이므로 $\qquad x_0=10$

따라서 $t=0$에서의 점 P의 위치는 10이다. 답 10

02 점 P가 원점으로 되돌아오는 시각을 $t=a\ (a>0)$라 하면 $\int_0^a v(t)\,dt=0$이므로

$\int_0^a (3t^2-6t)\,dt=0,\qquad \left[t^3-3t^2\right]_0^a=0$

$a^3-3a^2=0,\qquad a^2(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^3 |3t^2-6t|\,dt$$
$$=\int_0^2 (-3t^2+6t)\,dt+\int_2^3 (3t^2-6t)\,dt$$
$$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^3$$
$$=4+4=8$$

답 8

03 자동차가 정지할 때 $v(t)=0$이므로

$16-2t=0 \qquad \therefore t=8$

따라서 자동차가 제동을 건 지 8초 후에 정지하므로 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^8 |v(t)|dt=\int_0^8 (16-2t)\,dt$$
$$=\Big[16t-t^2\Big]_0^8$$
$$=64\,(\mathrm{m})$$

답 ③

04 점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

$kt-t^2=0, \qquad t(k-t)=0$

$\therefore t=k\ (\because t>0)$

따라서 출발 후 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리는

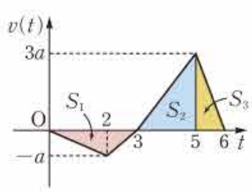
$$\int_0^k |v(t)|dt=\int_0^k (kt-t^2)\,dt$$
$$=\left[\frac{k}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^k$$
$$=\frac{k^3}{6}$$

$v(t)=t(k-t)$이므로 $0\le t\le k$에서 $v(t)\ge 0$

즉 $\frac{k^3}{6}=\frac{9}{2}$이므로 $\qquad k^3=27 \qquad \therefore k=3$

답 3

05 $t=5$에서의 점 P의 위치는 오른쪽 그림에서



$$0+\int_0^5 v(t)\,dt$$
$$=-S_1+S_2$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3a$$
$$=\frac{3}{2}a$$

즉 $\frac{3}{2}a=3$이므로 $\qquad a=2$

따라서 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는 위의 그림에서

$$\int_0^6 |v(t)|dt=S_1+(S_2+S_3)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6=12$$

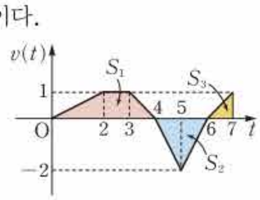
답 ②

06 ㄱ. 점 P는 $t=4$, $t=6$에서 운동 방향을 바꾸므로 두 번 바꾼다.

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 속력은 $|v(t)|$이므로 그 값이 가장 큰 것은 $t=5$일 때이다.

ㄷ. (i) 점 P는 출발 후 $t=4$까지 양의 방향으로 움직이고, $t=4$에서의 위치는 오른쪽 그림에서



$$0+\int_0^4 v(t)\,dt=S_1$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(1+4)\cdot 1=\frac{5}{2}$$

이므로 $t=4$일 때 원점에서 $\frac{5}{2}$만큼 떨어져 있다.

(ii) 점 P는 $t=4$에서 운동 방향을 바꾸어 $t=6$까지 음의 방향으로 움직이고, $t=6$에서의 위치는 앞의 그림에서

$$0+\int_0^6 v(t)\,dt=S_1-S_2$$
$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\frac{1}{2}$$

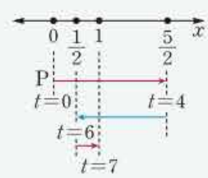
이므로 $t=6$일 때 원점에서 $\frac{1}{2}$만큼 떨어져 있다.

(iii) 점 P는 $t=6$에서 운동 방향을 바꾸어 $t=7$까지 양의 방향으로 움직이고, $t=7$에서의 위치는 앞의 그림에서

$$0+\int_0^7 v(t)\,dt=S_1-S_2+S_3$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=1$$

이므로 $t=7$일 때 원점에서 1만큼 떨어져 있다.

(i)~(iii)에서 점 P는 $t=4$일 때 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

중단원 마무리

L 102쪽

01 전략 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 좌표를 이용하여 $f(x)$의 식을 세운다.

풀이 $f(x)=ax^2(x-4)\ (a>0)$라 하면 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^4 \{-ax^2(x-4)\}\,dx=\int_0^4 (-ax^3+4ax^2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{a}{4}x^4+\frac{4}{3}ax^3\right]_0^4$$
$$=\frac{64}{3}a$$

즉 $\frac{64}{3}a=8$이므로 $\qquad a=\frac{3}{8}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{8}x^2(x-4)$이므로

$$f(2)=\frac{3}{8}\cdot 4\cdot(-2)=-3$$

답 -3

02 전략 $f(x)=\int f'(x)\,dx$임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-3x^2-2x+2)\,dx$

$=-x^3-x^2+2x+C$

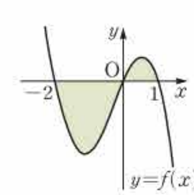
이때 $f(0)=0$이므로 $\qquad C=0$

$\therefore f(x)=-x^3-x^2+2x$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^3-x^2+2x=0$에서

$x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이는

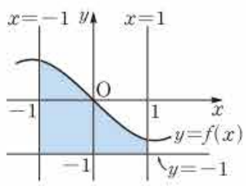
$$\int_{-2}^{1}|-x^3-x^2+2x|\,dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}$$

답 ④

03 전략 $\int_{0}^{2}g(x)\,dx$의 값을 $y=f(x)$의 그래프와 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이로 나타낸다.

풀이 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 평행이동시킨 것이므로 그래프의 모양은 변하지 않는다.

즉 $\int_{0}^{2}g(x)\,dx$의 값은 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 세 직선 $x=-1$, $x=1$, $y=-1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

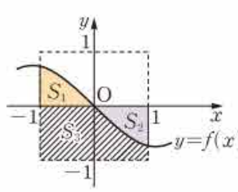


한편 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 오른쪽 그림에서

$S_1=S_2$

이므로



$$\int_{0}^{2}g(x)\,dx=S_1+S_3$$
$$=S_2+S_3$$
$$=2\cdot1=2$$

답 ②

가로, 세로의 길이가 각각 2, 1인 직사각형의 넓이

04 전략 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 곡선 $y=x^2-k$와 직선 $y=(k-1)x$의 교점의 x좌표는 $x^2-k=(k-1)x$에서

$x^2+(1-k)x-k=0,\qquad (x+1)(x-k)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=k$

곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{k}\{(k-1)x-(x^2-k)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{k}\{-x^2+(k-1)x+k\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k-1}{2}x^2+kx\right]_{-1}^{k}$$
$$=\frac{1}{6}k^3+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}$$

따라서 $\frac{1}{6}k^3+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}=\frac{32}{3}$이므로

$k^3+3k^2+3k-63=0$

$(k-3)(k^2+6k+21)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k^2+6k+21>0$)

답 3

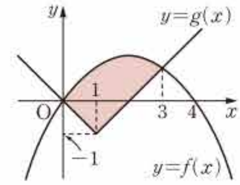
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 3 & 3 & -63 \\ & & 3 & 18 & 63 \\ \hline & 1 & 6 & 21 & 0 \end{array}$$

$\therefore k^3+3k^2+3k-63$
$=(k-3)(k^2+6k+21)$

05 전략 $x\ge1$, $x\le1$인 경우로 나누어 두 함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

풀이 $g(x)=\begin{cases}x-2 & (x\ge1)\\ -x & (x\le1)\end{cases}$

이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는



(i) $x\ge1$일 때,

$\frac{1}{3}x(4-x)=x-2$에서

$x^2-x-6=0,\qquad (x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x\ge1$)

(ii) $x\le1$일 때,

$\frac{1}{3}x(4-x)=-x$에서

$x^2-7x=0,\qquad x(x-7)=0$

$\therefore x=0$ ($\because x\le1$)

(i), (ii)에서

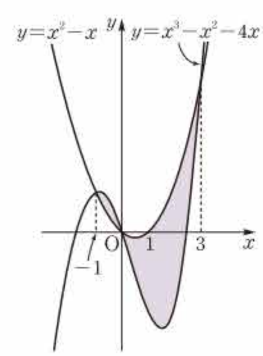
$$S=\int_{0}^{1}\left\{\frac{1}{3}x(4-x)-(-x)\right\}dx$$
$$+\int_{1}^{3}\left\{\frac{1}{3}x(4-x)-(x-2)\right\}dx$$
$$=\int_{0}^{1}\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x\right)dx$$
$$+\int_{1}^{3}\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{7}{6}x^2\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x\right]_{1}^{3}$$
$$=\frac{19}{18}+\frac{22}{9}=\frac{7}{2}$$

$\therefore 4S=4\cdot\frac{7}{2}=14$

답 14

06 전략 두 곡선의 위치 관계를 파악하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

풀이 두 곡선 $y=x^3-x^2-4x$, $y=x^2-x$의 교점의 x좌표는 $x^3-x^2-4x=x^2-x$에서



$x^3-2x^2-3x=0$

$x(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{x^3-x^2-4x-(x^2-x)\}\,dx$$
$$+\int_{0}^{3}\{x^2-x-(x^3-x^2-4x)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-2x^2-3x)\,dx+\int_{0}^{3}(-x^3+2x^2+3x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}$$
$$=\frac{7}{12}+\frac{45}{4}=\frac{71}{6}$$

답 ②

102~103쪽

07 전략 곡선과 접선의 접점의 x좌표를 t로 놓고 접선의 방정식을 세운 후 접선이 지나는 점의 좌표를 이용하여 t의 값을 구한다.

풀이 $y=2x^2-x$에서

$y'=4x-1$

접점의 좌표를 $(t,\ 2t^2-t)$라 하면 접선의 기울기는 $4t-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t^2-t)=(4t-1)(x-t)$

$\therefore\ y=(4t-1)x-2t^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=-2t^2,\quad t^2=1$

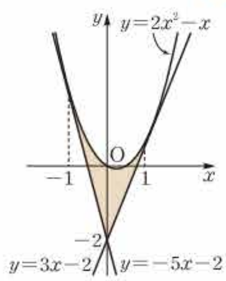
$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$ ··· ❶

즉 접선의 방정식은

$t=-1$일 때, ㉠에서 $\quad y=-5x-2$

$t=1$일 때, ㉠에서 $\quad y=3x-2$ ··· ❷

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{0}\{2x^2-x-(-5x-2)\}dx+\int_0^1\{2x^2-x-(3x-2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(2x^2+4x+2)dx+\int_0^1(2x^2-4x+2)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3+2x^2+2x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2+2x\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$ ··· ❸

답 $\frac{4}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	두 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷	두 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❸	곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

08 전략 점 A의 x좌표가 a이고 $S_1=S_2$이면 $\int_0^a\{f(x)-k\}dx=0$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=-(x+1)^3+8$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $-(x+1)^3+8=0$에서

$(x+1)^3=8$

$x+1=2$

$\therefore\ x=1$

즉 A$(1,\ 0)$이므로 직선 l의 방정식은 $x=1$이다.

$S_1=S_2$이면

$\int_0^1\{f(x)-k\}dx=0$

$\int_0^1\{-(x+1)^3+8-k\}dx=0$

$\int_0^1(-x^3-3x^2-3x+7-k)dx=0$

$\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{3}{2}x^2+(7-k)x\right]_0^1=0$

$\frac{17}{4}-k=0\qquad\therefore\ k=\frac{17}{4}$

$\therefore\ 4k=4\cdot\frac{17}{4}=17$

답 17

09 전략 곡선 $y=-x^2+2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이의 $\frac{1}{2}$임을 이용한다.

풀이 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=ax$에서

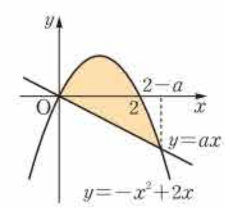
$x^2+(a-2)x=0,\qquad x\{x+(a-2)\}=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2-a$

$a<0$이므로 $\quad -a>0$

$\therefore\ 2-a>2$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_0^{2-a}(-x^2+2x-ax)dx$$

$$=\int_0^{2-a}\{-x^2+(2-a)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{2-a}{2}x^2\right]_0^{2-a}$$

$$=-\frac{(2-a)^3}{3}+\frac{(2-a)^3}{2}=\frac{(2-a)^3}{6}$$

곡선 $y=-x^2+2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

곡선 $y=-x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=0$에서

$x(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

$$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

따라서 $\frac{4}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2-a)^3}{6}$이므로

$(2-a)^3=16$

답 ④

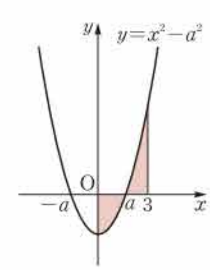
10 전략 구간 $[0,\ 3]$에서 곡선 $y=x^2-a^2$과 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 곡선 $y=x^2-a^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-a^2=0$에서

$(x+a)(x-a)=0$

$\therefore\ x=-a$ 또는 $x=a$

$0<a<3$이므로 구간 $[0,\ 3]$에서 곡선 $y=x^2-a^2$과 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면



$$S(a)=\int_0^a(-x^2+a^2)dx+\int_a^3(x^2-a^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+a^2x\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}x^3-a^2x\right]_a^3$$

$$=\frac{2}{3}a^3+\left(\frac{2}{3}a^3-3a^2+9\right)$$

$$=\frac{4}{3}a^3-3a^2+9$$

$\therefore\ S'(a)=4a^2-6a=2a(2a-3)$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=\frac{3}{2}$ ($\because 0<a<3$)

a	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

따라서 $0<a<3$에서 $S(a)$는 $a=\frac{3}{2}$일 때 극소이면서 최소이다. 답 $\frac{3}{2}$

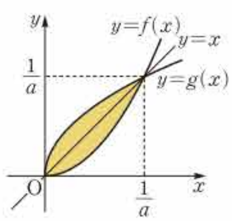
11 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

$ax^2=x$에서

$x(ax-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{a}$



이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로

$$2\int_0^{\frac{1}{a}}(x-ax^2)\,dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{a}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{a}}$$

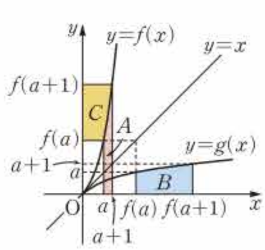
$$=2\cdot\frac{1}{6a^2}=\frac{1}{3a^2}$$

따라서 $\frac{1}{3a^2}=3$이므로 $\quad a^2=\frac{1}{9}$

$\therefore a=\frac{1}{3}$ ($\because a>0$) 답 $\frac{1}{3}$

12 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 각 정적분을 그래프 위에 나타낸다.

풀이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서



(B의 넓이)

$=$(C의 넓이)

$\therefore \int_a^{a+1}f(x)\,dx+\int_{f(a)}^{f(a+1)}g(x)\,dx$

$=$(A의 넓이)$+$(B의 넓이)

$=$(A의 넓이)$+$(C의 넓이)

가로, 세로의 길이가 각각 $a+1$, $f(a+1)$인 직사각형의 넓이에서 가로, 세로의 길이가 각각 a, $f(a)$인 직사각형의 넓이를 뺀 것과 같다.

$=(a+1)f(a+1)-af(a)$

$=(a+1)\{(a+1)^2+3(a+1)\}-a(a^2+3a)$

$=3a^2+9a+4$

따라서 $3a^2+9a+4=34$이므로

$a^2+3a-10=0, \quad (a+5)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 ③

13 전략 $t=4$에서의 점 P의 위치는 $0+\int_0^4 v(t)\,dt$임을 이용한다.

풀이 $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^4 v(t)\,dt=\int_0^2(3t^2-6t)\,dt+\int_2^4(t-2)\,dt$$

$$=\left[t^3-3t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}t^2-2t\right]_2^4$$

$$=-4+2=-2$$ 답 -2

14 전략 점 P의 속도는 $\int a(t)\,dt$임을 이용한다.

풀이 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면 $v'(t)=a(t)$이므로

$v(t)=\int a(t)\,dt$

$=\int(3t^2-18t+24)\,dt$

$=t^3-9t^2+24t+C$

이때 $t=0$에서의 점 P의 속도가 k이므로

$C=k$

$\therefore v(t)=t^3-9t^2+24t+k$

$t=1$에서 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리가 같으려면

$$\int_1^5 v(t)\,dt=\int_1^5|v(t)|\,dt$$

이어야 하므로 $1\le t\le 5$에서 $v(t)\ge 0$이어야 한다.

$v'(t)=0$, 즉 $a(t)=0$에서

$3t^2-18t+24=0$

$(t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$v'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$v(t)$	$k+16$	$\nearrow$	$k+20$	$\searrow$	$k+16$	$\nearrow$	$k+20$

따라서 $1\le t\le 5$에서 $v(t)$는 $t=1$, $t=4$일 때 최솟값 $k+16$을 가지므로 $v(t)\ge 0$이려면

$k+16<k+20$

$k+16\ge 0 \quad \therefore k\ge -16$

즉 k의 최솟값은 -16이다. 답 ①

15 전략 로켓이 최고 높이에 도달할 때 속도가 0임을 이용한다.

풀이 로켓이 최고 높이에 도달할 때 $v(t)=0$이므로

$20-10t=0 \quad \therefore t=2$ ⋯ ❶

따라서 로켓을 쏘아 올린 지 2초 후에 최고 높이에 도달하므로 로켓의 지면으로부터의 최고 높이는

$$25+\int_0^2(20-10t)\,dt=25+\left[20t-5t^2\right]_0^2$$

$$=25+20=45\,(\text{m})$$ ⋯ ❷

답 45 m

단계	채점 기준	비율
❶	로켓이 최고 높이에 도달할 때의 시각을 구할 수 있다.	40 %
❷	로켓의 지면으로부터의 최고 높이를 구할 수 있다.	60 %

16 전략 구하는 넓이를 정적분으로 나타낸 후 주어진 조건을 이용하여 그 값을 구한다.

풀이 조건 (나)에서 $\int_0^6 f(x)\,dx=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $[0,\ 6]$에서 x축과 만난다.
또 $f(x)$는 증가하는 함수이므로 구간 $[6,\ 9]$에서
$f(x)>0$
즉 구하는 넓이는 $\int_6^9 f(x)\,dx$와 같으므로

$$\begin{aligned}\int_6^9 f(x)\,dx&=\int_6^9 \{f(x-3)+4\}\,dx\\&=\int_6^9 f(x-3)\,dx+\int_6^9 4\,dx\\&=\int_3^6 f(x)\,dx+\Big[4x\Big]_6^9\\&=\int_3^6 f(x)\,dx+12 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}\end{aligned}$$

$x-3=t$로 놓으면
$x=6$일 때, $t=3$
$x=9$일 때, $t=6$
이므로
$\int_6^9 f(x-3)\,dx$
$=\int_3^6 f(t)\,dt$
$=\int_3^6 f(x)\,dx$

한편

$$\begin{aligned}&\int_0^6 f(x)\,dx\\&=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x)\,dx\\&=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 \{f(x-3)+4\}\,dx\\&=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x-3)\,dx+\int_3^6 4\,dx\\&=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_0^3 f(x)\,dx+\Big[4x\Big]_3^6\\&=2\int_0^3 f(x)\,dx+12\end{aligned}$$

이므로 $\quad 2\int_0^3 f(x)\,dx+12=0$

$\therefore \int_0^3 f(x)\,dx=-6$

$$\begin{aligned}\therefore \int_3^6 f(x)\,dx&=\int_3^0 f(x)\,dx+\int_0^6 f(x)\,dx\\&=-(-6)+0=6\end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는 ㉠에서

$\int_3^6 f(x)dx+12=6+12=18$ 답 ④

17 전략 시각 t에서의 물체 A, B의 높이는 각각 $\int_0^t f(t)\,dt$, $\int_0^t g(t)\,dt$임을 이용한다.

풀이 시각 t에서의 물체 A, B의 높이는 각각

$\int_0^t f(t)\,dt$, $\int_0^t g(t)\,dt$

ㄱ. $0\le t\le a$에서 $f(t)\ge g(t)$이므로

$\int_0^a f(t)\,dt>\int_0^a g(t)\,dt$

즉 $t=a$일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다.

ㄴ. 물체 A와 물체 B의 시각 t에서의 높이의 차를 $F(t)$라 하면

$F(t)=\int_0^t f(t)\,dt-\int_0^t g(t)\,dt$

$\therefore F'(t)=f(t)-g(t)$

$F'(t)=0$에서 $\quad f(t)=g(t)$

$\therefore t=b$

구간 $(0,\ b)$에서
$f(t)>g(t)$이므로
$f(t)-g(t)>0$
$\therefore F'(t)>0$
구간 $(b,\ c)$에서
$f(t)<g(t)$이므로
$f(t)-g(t)<0$
$\therefore F'(t)<0$

t	0	$\cdots$	b	$\cdots$	c
$F'(t)$		$+$	0	$-$	
$F(t)$	0	↗	극대	↘	0

따라서 $0\le t\le c$에서 $F(t)$는 $t=b$일 때 극대이면서 최대이다.

즉 $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다.

ㄷ. $\int_0^c f(t)dt=\int_0^c g(t)dt$이므로 $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

01 함수의 극한

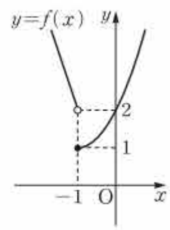
Ⓦ 2쪽

01 $\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 0-} f(x)-\lim_{x\to 1-} f(x)$

$=1+2-0=3$

답 3

02 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to -1+} f(x)-\lim_{x\to -1-} f(x)$

$=1-2=-1$

답 ②

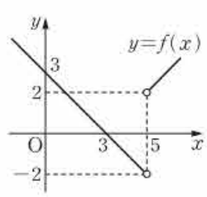
03 $f(x)=\dfrac{x^2-8x+15}{|x-5|}=\dfrac{(x-3)(x-5)}{|x-5|}$

$=\begin{cases} x-3 & (x>5) \\ -x+3 & (x<5) \end{cases}$

$|x-5|$

$=\begin{cases} x-5 & (x\ge 5) \\ -(x-5) & (x<5) \end{cases}$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

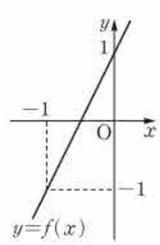


$\lim_{x\to 5+} f(x)\cdot\lim_{x\to 5-} f(x)$

$=2\cdot(-2)=-4$

답 ⑤

04 ㄱ. $f(x)=2x+1$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



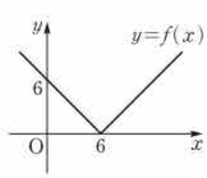
$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1-} f(x)$

$=-1$

$\therefore \lim_{x\to -1}(2x+1)$

$=\lim_{x\to -1} f(x)=-1$

ㄴ. $f(x)=|x-6|$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to 6+} f(x)=\lim_{x\to 6-} f(x)$

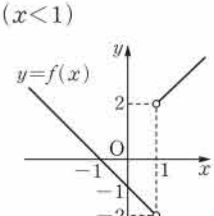
$=0$

$\therefore \lim_{x\to 6}|x-6|=\lim_{x\to 6} f(x)=0$

ㄷ. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\begin{cases} x+1 & (x>1) \\ -x-1 & (x<1) \end{cases}$

$x^2-1=(x+1)(x-1)$

이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\lim_{x\to 1+} f(x)=2$,

$\lim_{x\to 1-} f(x)=-2$에서

$\lim_{x\to 1+} f(x)\neq\lim_{x\to 1-} f(x)$

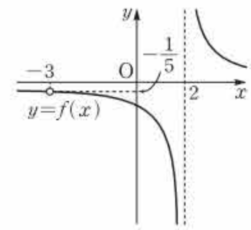
이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)$, 즉 $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$은 존재하지 않는다.

ㄹ. $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+x-6}=\dfrac{x+3}{(x+3)(x-2)}$

이라 하면 $x\neq -3$일 때

$f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서

$\lim_{x\to -3+} f(x)=\lim_{x\to -3-} f(x)=-\dfrac{1}{5}$

이므로 $\lim_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2+x-6}=\lim_{x\to -3} f(x)=-\dfrac{1}{5}$

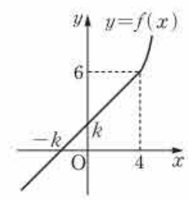
이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

05 $\lim_{x\to 4} f(x)$가 존재하려면

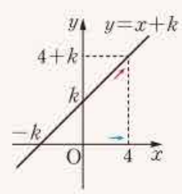
$\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4-} f(x)$

이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



이때

$\lim_{x\to 4+} f(x)=6,\ \lim_{x\to 4-} f(x)=4+k$



이므로

$6=4+k \qquad \therefore k=2$

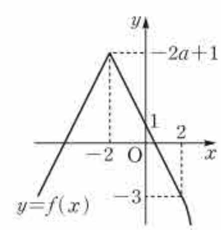
답 2

06 $\lim_{x\to 2} f(x)$, $\lim_{x\to -2} f(x)$가 각각 존재하려면

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)$,

$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2-} f(x)$

이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



이때

$\lim_{x\to 2+} f(x)=-3,\ \lim_{x\to 2-} f(x)=2a+1$

이므로

$-3=2a+1 \qquad \therefore a=-2$

또

$\lim_{x\to -2+} f(x)=-2a+1=5,\ \lim_{x\to -2-} f(x)=-4+b$

이므로

$5=-4+b \qquad \therefore b=9$

$\therefore a+b=7$

답 ②

07 ㄱ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to 0-$일 때 $t\to 2-$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(f(x))=\lim_{t\to 2-} f(t)=-1$

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to -1-$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to -1-} f(f(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=3$

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -2+$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$$\lim_{x\to-2+} f(f(x))=\lim_{t\to1-} f(t)=1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

08 $g(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -1+$일 때 $t \longrightarrow -1+$이므로

$$\lim_{x\to-1+} f(g(x))=\lim_{t\to-1+} f(t)=2$$

$f(x)=s$로 놓으면 $x \longrightarrow 1-$일 때 $s \longrightarrow 2+$이므로

$$\lim_{x\to1-} g(f(x))=\lim_{s\to2+} g(s)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to-1+} f(g(x))-\lim_{x\to1-} g(f(x))=1$$

답 ④

09 $-x=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1-$일 때 $t \longrightarrow -1+$이므로

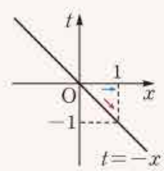
$$\lim_{x\to1-} f(-x)=\lim_{t\to-1+} f(t)=-1$$

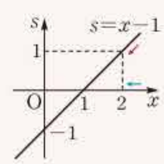
$x-1=s$로 놓으면 $x \longrightarrow 2+$일 때 $s \longrightarrow 1+$이므로

$$\lim_{x\to2+} f(x-1)=\lim_{s\to1+} f(s)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to1-} f(-x)+\lim_{x\to2+} f(x-1)=0$$

답 0

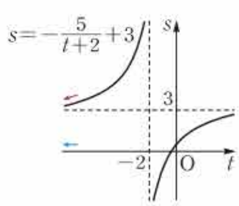




10 $s=\dfrac{3t+1}{t+2}$

$=-\dfrac{5}{t+2}+3$

으로 놓으면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t \longrightarrow -\infty$일 때

$s \longrightarrow 3+$이므로

$$\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{3t+1}{t+2}\right)=\lim_{s\to3+} f(s)$$

$$=3$$

답 3

11 $h(x)=2f(x)+3g(x)$라 하면

$$\lim_{x\to a} h(x)=7$$

$g(x)=\dfrac{h(x)-2f(x)}{3}$이므로

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} \frac{h(x)-2f(x)}{3}$$

$$=\frac{7-2\cdot5}{3}=-1$$

답 ②

12 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)+g(x)\}=6$에서

$\alpha+\beta=6$ ...... ㉠

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=-3$에서

$\dfrac{\alpha}{\beta}=-3 \quad \therefore \alpha+3\beta=0$ ...... ㉡

$\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} g(x)$가 모두 존재하므로 함수의 극한에 대한 성질을 이용할 수 있다.

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=9$, $\beta=-3$

따라서 $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=9\cdot(-3)=-27$이므로

$\gamma=-27$

$\therefore \alpha-\beta+\gamma=-15$

답 -15

13 $x+1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to-1} \frac{f(x+1)}{x+1}=\lim_{t\to0} \frac{f(t)}{t}=4$$

$$\therefore \lim_{x\to0} \frac{3x-2f(x)}{x+6f(x)}=\lim_{x\to0} \frac{3-2\cdot\frac{f(x)}{x}}{1+6\cdot\frac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{3-2\cdot4}{1+6\cdot4}$$

$$=-\frac{1}{5}$$

답 $-\dfrac{1}{5}$

$\lim_{t\to0} \dfrac{f(t)}{t}=4$, 즉 $\lim_{x\to0} \dfrac{f(x)}{x}=4$를 이용할 수 있도록 분자, 분모를 각각 x로 나누어 식을 변형한다.

14 ㄱ. $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}[\{f(x)+g(x)\}-f(x)]$$

$$=\beta-\alpha$$

따라서 $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}(x-4)f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{x-4}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} (x-4)f(x)\cdot\frac{g(x)}{x-4}$$

$$=\alpha\beta$$

따라서 $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$가 존재한다.

ㄷ. $\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\beta$ (α, β는 실수, $\alpha\neq0$)라 하면

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)}{g(x)}=\frac{\beta}{\alpha}$$

따라서 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

15 ① $x \longrightarrow 0+$일 때 $x-1 \longrightarrow -1+$이므로

$$\lim_{x\to0+} [x-1]=-1$$

$$\therefore \lim_{x\to0+} \frac{[x-1]}{x-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n+}[x-1]=n-1$, $\lim_{x\to n-}[x-1]=n-2$

② $x \longrightarrow -1+$일 때 $x+2 \longrightarrow 1+$이므로

$$\lim_{x\to-1+} [x+2]=1$$

$$\therefore \lim_{x\to-1+} \frac{2x+1}{[x+2]}=\frac{-1}{1}=-1$$

③ $x \longrightarrow 1-$일 때 $x-2 \longrightarrow -1-$, $x+3 \longrightarrow 4-$이므로

$$\lim_{x\to1-} [x-2]=-2, \lim_{x\to1-} [x+3]=3$$

$$\therefore \lim_{x\to1-} \frac{[x+3]}{[x-2]}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$$

④ $x \longrightarrow 2-$일 때 $x^2-4 \longrightarrow 0-$이므로

$$\lim_{x\to2-} [x]=1, \lim_{x\to2-} [x^2-4]=-1$$

$$\therefore \lim_{x\to2-} \frac{[x]^2-4}{[x^2-4]}=\frac{1^2-4}{-1}=3$$

⑤ $x \longrightarrow 3+$일 때 $x^2-6x+11 \longrightarrow 2+$이므로

$$\lim_{x\to3+} [x^2-6x+11]=2$$

$x^2-6x+11$
$=(x-3)^2+2$

따라서 극한값이 가장 작은 것은 ③이다. 답 ③

16 $x \to 1+$일 때 $x+1 \to 2+$이므로

$\lim_{x\to1+}[x]=1,\ \lim_{x\to1+}[x+1]=2$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to1+}f(x)&=\lim_{x\to1+}(a[x]^2+b[x+1]-[x])\\&=a\cdot1^2+b\cdot2-1\\&=a+2b-1\end{aligned}$$

$x \to 1-$일 때 $x+1 \to 2-$이므로

$\lim_{x\to1-}[x]=0,\ \lim_{x\to1-}[x+1]=1$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to1-}f(x)&=\lim_{x\to1-}(a[x]^2+b[x+1]-[x])\\&=a\cdot0^2+b\cdot1-0\\&=b\end{aligned}$$

$\lim_{x\to1}f(x)$가 존재하려면 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$이어야 하므로

$a+2b-1=b$

$\therefore a+b=1$ …… ㉠

$x \to -1+$일 때 $x+1 \to 0+$이므로

$\lim_{x\to-1+}[x]=-1,\ \lim_{x\to-1+}[x+1]=0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to-1+}f(x)&=\lim_{x\to-1+}(a[x]^2+b[x+1]-[x])\\&=a\cdot(-1)^2+b\cdot0-(-1)\\&=a+1\end{aligned}$$

$x \to -1-$일 때 $x+1 \to 0-$이므로

$\lim_{x\to-1-}[x]=-2,\ \lim_{x\to-1-}[x+1]=-1$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to-1-}f(x)&=\lim_{x\to-1-}(a[x]^2+b[x+1]-[x])\\&=a\cdot(-2)^2+b\cdot(-1)-(-2)\\&=4a-b+2\end{aligned}$$

$\lim_{x\to-1}f(x)$가 존재하려면 $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)$이어야 하므로

$a+1=4a-b+2$

$\therefore 3a-b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0,\ b=1$

$\therefore a-b=-1$ 답 -1

17 $\lim_{x\to n+}[x]=n$이므로

$$\lim_{x\to n+}\frac{[x]^2+3x}{[x]}=\frac{n^2+3n}{n}=n+3$$

$\lim_{x\to n-}[x]=n-1$이므로

$$\lim_{x\to n-}\frac{[x]^2+3x}{[x]}=\frac{(n-1)^2+3n}{n-1}=\frac{n^2+n+1}{n-1}$$

$\lim_{x\to n}\frac{[x]^2+3x}{[x]}$가 존재하려면

$\lim_{x\to n+}\frac{[x]^2+3x}{[x]}=\lim_{x\to n-}\frac{[x]^2+3x}{[x]}$이어야 하므로

$$n+3=\frac{n^2+n+1}{n-1}$$

$n^2+2n-3=n^2+n+1$

$\therefore n=4$

따라서 $\alpha=n+3=4+3=7$이므로

$n+\alpha=11$ 답 ②

$\alpha=\frac{4^2+4+1}{4-1}=7$과 같이 구할 수도 있다.

18
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{9-2x}-\sqrt{9+x}}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-x}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{9-2x}-\sqrt{9+x})(\sqrt{9-2x}+\sqrt{9+x})(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{9-2x}+\sqrt{9+x})}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-3x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-x})}{4x(\sqrt{9-2x}+\sqrt{9+x})}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-3(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-x})}{4(\sqrt{9-2x}+\sqrt{9+x})}\\&=\frac{-3\cdot(1+1)}{4\cdot(3+3)}=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{4}$

19
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{\sqrt{1+f(x)}-\sqrt{3-f(x)}}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-1\}\{\sqrt{1+f(x)}+\sqrt{3-f(x)}\}}{\{\sqrt{1+f(x)}-\sqrt{3-f(x)}\}\{\sqrt{1+f(x)}+\sqrt{3-f(x)}\}}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-1\}\{\sqrt{1+f(x)}+\sqrt{3-f(x)}\}}{2\{f(x)-1\}}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+f(x)}+\sqrt{3-f(x)}}{2}\\&=\frac{\sqrt{1+1}+\sqrt{3-1}}{2}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ④

$\lim_{x\to1}f(x)=1$이므로 $\frac{0}{0}$ 꼴이다.

20 $\lim_{x\to1-}\frac{x^2-x}{|x-1|}=\lim_{x\to1-}\frac{x(x-1)}{-(x-1)}=\lim_{x\to1-}(-x)$
$=-1$

이므로 $a=-1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2+}\frac{x^2-2x-8}{|x^2-4|}&=\lim_{x\to-2+}\frac{x^2-2x-8}{-(x^2-4)}\\&=\lim_{x\to-2+}\frac{(x+2)(x-4)}{-(x+2)(x-2)}\\&=\lim_{x\to-2+}\left(-\frac{x-4}{x-2}\right)=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

이므로 $b=-\frac{3}{2}$

$\therefore 2ab=3$ 답 ①

$-2<x<2$에서
$x^2-4<0$
이므로
$|x^2-4|=-(x^2-4)$

21 ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=0$

ㄴ.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+6}{(2x+3)^2}&=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+6}{4x^2+12x+9}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}}{4+\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}}\\&=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ㄷ.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}+8x}{\sqrt{4x^2+1}-x}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+8}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1}\\&=\frac{1+8}{2-1}=9\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

22 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x-f(x)}{4x+f(x)}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-\{f(x)-5x\}-2x}{\{f(x)-5x\}+9x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-\dfrac{f(x)-5x}{x-2}-\dfrac{2x}{x-2}}{\dfrac{f(x)-5x}{x-2}+\dfrac{9x}{x-2}}$

$=\dfrac{-(-3)-2}{-3+9}$

$=\dfrac{1}{6}$ 답 ①

23 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{xf(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{6x^2-x+3}\cdot\dfrac{4x-1}{f(x)}\cdot\dfrac{6x^2-x+3}{x(4x-1)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{6x^2-x+3}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{f(x)}{4x-1}}\cdot\dfrac{6-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{4-\dfrac{1}{x}}$

$=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{4}=3$ 답 3

$x(4x-1)=4x^2-x$에서 분모의 최고차항은 x^2이다.

24 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+3x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+3x}}{(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+3x})(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+3x})}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+3x}}{2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{5}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}}{2}$

$=\dfrac{1+1}{2}=1$ 답 1

25 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}x\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}}+1\right)$

$=\lim_{t\to\infty}\left\{-t\left(\dfrac{-t}{\sqrt{t^2+t}}+1\right)\right\}$

$=\lim_{t\to\infty}t\left(\dfrac{t}{\sqrt{t^2+t}}-1\right)$

$=\lim_{t\to\infty}t\cdot\dfrac{t-\sqrt{t^2+t}}{\sqrt{t^2+t}}$

$=\lim_{t\to\infty}t\cdot\dfrac{(t-\sqrt{t^2+t})(t+\sqrt{t^2+t})}{\sqrt{t^2+t}(t+\sqrt{t^2+t})}$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{-t^2}{\sqrt{t^2+t}(t+\sqrt{t^2+t})}$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{t}}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{t}}\right)}$

$=\dfrac{-1}{1\cdot(1+1)}=-\dfrac{1}{2}$ 답 ③

$x\to-\infty$일 때의 극한은 $x=-t$로 치환하여 계산한다.

$\sqrt{t^2+t}(t+\sqrt{t^2+t})$
$=t\sqrt{t^2+t}+t^2+t$
에서 분모의 최고차항은 t^2이다.

26 $4x^2+x=[4x^2+x]+\alpha\ (0\le\alpha<1)$라 하면

$[4x^2+x]=4x^2+x-\alpha$

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{[4x^2+x]}+2x)$

$=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x-\alpha}+2x)$

$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2-t-\alpha}-2t)$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{(\sqrt{4t^2-t-\alpha}-2t)(\sqrt{4t^2-t-\alpha}+2t)}{\sqrt{4t^2-t-\alpha}+2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{-t-\alpha}{\sqrt{4t^2-t-\alpha}+2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{-1-\dfrac{\alpha}{t}}{\sqrt{4-\dfrac{1}{t}-\dfrac{\alpha}{t^2}}+2}$

$=\dfrac{-1}{2+2}=-\dfrac{1}{4}$ 답 $-\dfrac{1}{4}$

27 $x\to3$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}(\sqrt{x^2+a}+b)=0$이므로

$\sqrt{9+a}+b=0\quad\therefore\ b=-\sqrt{9+a}$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{9+a}}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{(x-3)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{9+a})}{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{9+a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{9+a})}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{(x-3)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{9+a})}{x^2-9}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{(x-3)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{9+a})}{(x+3)(x-3)}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{9+a}}{x+3}$

$=\dfrac{2\sqrt{9+a}}{6}=\dfrac{\sqrt{9+a}}{3}$

따라서 $\dfrac{\sqrt{9+a}}{3}=2$이므로 $\sqrt{9+a}=6$

$9+a=36\quad\therefore\ a=27$

$a=27$을 ㉠에 대입하면 $b=-6$

$\therefore\ a-b=33$ 답 33

28 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+ax}-2x)$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{4x^2+ax}-2x)(\sqrt{4x^2+ax}+2x)}{\sqrt{4x^2+ax}+2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{ax}{\sqrt{4x^2+ax}+2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{a}{\sqrt{4+\dfrac{a}{x}}+2}=\dfrac{a}{2+2}=\dfrac{a}{4}$

따라서 $\dfrac{a}{4}=-1$이므로 $a=-4$ 답 -4

29 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+2x}-\sqrt{ax^2+5})$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{3x^2+2x}-\sqrt{ax^2+5})(\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{ax^2+5})}{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{ax^2+5}}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(3-a)x^2+2x-5}{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{ax^2+5}}$ ...... ㉠

㉠의 극한값이 존재하려면

$3-a=0 \quad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-5}{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3x^2+5}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}}{\sqrt{3+\frac{2}{x}}+\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore b=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore ab=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

답 ②

30 $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x+b}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x+b-a}{a(x+b)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+b-a}{a(x-1)(x+b)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x \longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x+b-a)=0$이므로 $\quad 1+b-a=0$

$\therefore b=a-1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{a(x-1)(x+a-1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{a(x+a-1)}$$

$$=\frac{1}{a^2}$$

따라서 $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{4}$이므로 $\quad a^2=4$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

$a=2$를 ㉡에 대입하면 $\quad b=1$

$\therefore a+b=3$

답 ④

31 $\lim_{x\to\infty}f(x)=4$에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-2x-3}=4$이므로

$a=4$

$\lim_{x\to3}f(x)=5$에서

$$\lim_{x\to3}\frac{4x^2+bx+c}{x^2-2x-3}=5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x \longrightarrow 3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}(4x^2+bx+c)=0$이므로

$36+3b+c=0$

$\therefore c=-3b-36 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{4x^2+bx-3b-36}{x^2-2x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(4x+12+b)}{(x+1)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{4x+12+b}{x+1}$$

$$=\frac{24+b}{4}$$

Q BOX

$3-a\neq0$이면 (분자의 차수) > (분모의 차수) 이므로 극한값이 존재하지 않는다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{f(x)}$의 값이 $\frac{1}{3}$, 즉 0이 아닌 실수이므로

① $f(x)$와 x^2+1의 차수가 같다.

② $f(x)$와 x^2+1의 최고차항의 계수의 비는 3이다.

➡ $f(x)$는 x^2의 계수가 3인 이차식이다.

분자와 분모의 차수가 같고, 최고차항의 계수의 비가 a이다.

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한에서 분자의 차수와 분모의 차수가 같으면 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

$4x^2+bx-3b-36$
$=4(x^2-9)+b(x-3)$
$=(x-3)\{4(x+3)+b\}$
$=(x-3)(4x+12+b)$

따라서 $\frac{24+b}{4}=5$이므로 $\quad 24+b=20$

$\therefore b=-4$

$b=-4$를 ㉡에 대입하면 $\quad c=-24$

$\therefore a+b-c=24$

답 24

32 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{f(x)}=\frac{1}{3}$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x^2-9}=\frac{5}{2}$에서 $x \longrightarrow 3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}f(x)=0$이므로 $\quad f(3)=0$

$f(x)=(x-3)(3x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(3x+a)}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{3x+a}{x+3}=\frac{9+a}{6}$$

즉 $\frac{9+a}{6}=\frac{5}{2}$이므로 $\quad 9+a=15$

$\therefore a=6$

따라서 $f(x)=(x-3)(3x+6)$이므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{3(x-3)(x+2)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}3(x-3)$$

$$=3\cdot(-5)=-15$$

답 ①

33 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^2}{4x-2}=a$에서 $f(x)-3x^2$은 최고차항의 계수가 $4a$인 일차식임을 알 수 있다.

$f(x)-3x^2=4ax+b$ (b는 상수)라 하면

$$f(x)=3x^2+4ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=12$에서 $x \longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $\quad f(0)=0$

㉠에서 $b=0$이므로 $\quad f(x)=3x^2+4ax$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2+4ax}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}(3x+4a)$$

$$=4a$$

따라서 $4a=12$이므로 $\quad a=3$

답 ②

34 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $g(x)$이므로

$$f(x)=(x-1)^2Q(x)+g(x) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=4$에서 $x \longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $\quad g(1)=0$

$g(x)=k(x-1)$ (k는 상수)이라 하면

$$f(x)=(x-1)^2Q(x)+k(x-1)$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2Q(x)+k(x-1)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{(x-1)Q(x)+k\}}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)Q(x)+k}{x+1}=\frac{k}{2}$$

즉 $\frac{k}{2}=4$이므로 $k=8$

따라서 $g(x)=8(x-1)$이므로

$g(3)=8\cdot2=16$ 답 16

35 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-3$에서 $x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=9$에서 $x\to3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}f(x)=0$이므로 $f(3)=0$

$f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)Q(x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(x-3)Q(x)$$

$$=-Q(2)$$

즉 $-Q(2)=-3$이므로 $Q(2)=3$ …… ㉠

또

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-2)(x-3)Q(x)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}(x-2)Q(x)$$

$$=Q(3)$$

이므로 $Q(3)=9$ …… ㉡

이때 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 다항식 $Q(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차식이므로

$Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

라 하면 ㉠, ㉡에서

$2a+b=3$, $3a+b=9$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=-9$

따라서 $g(x)=(x-2)(x-3)(6x-9)$이므로

$g(1)=-1\cdot(-2)\cdot(-3)=-6$ 답 ①

36 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{5x^2+2x-7}{x^2-1}<f(x)<\frac{5x^2-4x-1}{x-1}$$

이고

$$\lim_{x\to1+}\frac{5x^2+2x-7}{x^2-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(5x+7)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{5x+7}{x+1}=\frac{12}{2}=6,$$

QBOX

$g(x)$는 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지이므로 상수이거나 일차식이다.

$\frac{1}{4x^2}>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$Q(2)\neq Q(3)$이므로 $Q(x)$는 상수가 아니다.

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$\lim_{x\to1+}\frac{5x^2-4x-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(5x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}(5x+1)=6$$

이므로 $\lim_{x\to1+}f(x)=6$ 답 6

37 모든 양수 x에 대하여

$$3x^2-5x+1<\frac{x}{f(x)}<3x^2+2$$

이므로 각 변에 $\frac{1}{4x^2}$을 곱하면

$$\frac{3x^2-5x+1}{4x^2}<\frac{1}{4xf(x)}<\frac{3x^2+2}{4x^2}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+1}{4x^2}=\frac{3}{4}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{4x^2}=\frac{3}{4}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4xf(x)}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}4xf(x)=\frac{4}{3}$$ 답 ④

38 $|f(x)-x|<2$에서

$-2<f(x)-x<2$

$\therefore x-2<f(x)<x+2$

$x-2>0$, 즉 $x>2$일 때 위의 부등식의 각 변을 제곱하면

$(x-2)^2<\{f(x)\}^2<(x+2)^2$

이므로 각 변에 $5x^2$을 더하면

$5x^2+(x-2)^2<5x^2+\{f(x)\}^2<5x^2+(x+2)^2$

$\therefore 6x^2-4x+4<5x^2+\{f(x)\}^2<6x^2+4x+4$

위의 부등식의 각 변을 $2x^2+1$로 나누면

$$\frac{6x^2-4x+4}{2x^2+1}<\frac{5x^2+\{f(x)\}^2}{2x^2+1}<\frac{6x^2+4x+4}{2x^2+1}$$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-4x+4}{2x^2+1}=3,\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+4x+4}{2x^2+1}=3$$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+\{f(x)\}^2}{2x^2+1}=3$$ 답 3

39 $\mathrm{P}(t, \sqrt{t})$, $\mathrm{Q}(t+2, \sqrt{t+2})$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2+t}$,

$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{(t+2)^2+(\sqrt{t+2})^2}$

$=\sqrt{t^2+5t+6}$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OP}})$$

$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+5t+6}-\sqrt{t^2+t})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+5t+6}-\sqrt{t^2+t})(\sqrt{t^2+5t+6}+\sqrt{t^2+t})}{\sqrt{t^2+5t+6}+\sqrt{t^2+t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4t+6}{\sqrt{t^2+5t+6}+\sqrt{t^2+t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{6}{t}}{\sqrt{1+\frac{5}{t}+\frac{6}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t}}}$$

$$=\frac{4}{1+1}=2$$ 답 2

40 $x^2+y^2=9$에서 $\quad y^2=9-x^2$

$\therefore\ y=\sqrt{9-x^2}\ (\because\ y\ge 0)$

즉 점 P의 좌표는 $(a,\ \sqrt{9-a^2})\ (0<a<3)$이므로

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OH}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}a\sqrt{9-a^2}$$

$$\therefore \lim_{a\to 3-}\frac{\sqrt{3-a}}{S(a)}=\lim_{a\to 3-}\frac{\sqrt{3-a}}{\frac{1}{2}a\sqrt{9-a^2}}$$

Q BOX: $\sqrt{9-a^2}=\sqrt{(3+a)(3-a)}=\sqrt{3+a}\sqrt{3-a}$

$$=\lim_{a\to 3-}\frac{2\sqrt{3-a}}{a\sqrt{3+a}\sqrt{3-a}}=\lim_{a\to 3-}\frac{2}{a\sqrt{3+a}}=\frac{2}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{9}$$

답 ④

41 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $r\ (r>0)$인 원의 방정식은 $x^2+y^2=r^2$이므로

$\mathrm{P}(0,\ r)$

두 원 $x^2+y^2=r^2$, $(x-2)^2+y^2=4$의 교점의 x좌표는 $r^2-x^2=4-(x-2)^2$에서

$4x=r^2 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{4}r^2$

$\left(\frac{1}{4}r^2\right)^2+y^2=r^2$에서 $\qquad y^2=r^2-\frac{1}{16}r^4$

$\therefore\ y=\sqrt{r^2-\frac{1}{16}r^4}=\frac{r\sqrt{16-r^2}}{4}\ (\because\ r>0,\ y>0)$

Q BOX: $\sqrt{r^2-\frac{1}{16}r^4}=\sqrt{\frac{16r^2-r^4}{16}}=\sqrt{\frac{r^2(16-r^2)}{16}}=\frac{r\sqrt{16-r^2}}{4}$

$\therefore\ \mathrm{Q}\left(\frac{1}{4}r^2,\ \frac{r\sqrt{16-r^2}}{4}\right)$

직선 PQ의 기울기는

$$\frac{\frac{r\sqrt{16-r^2}}{4}-r}{\frac{1}{4}r^2-0}=\frac{r\sqrt{16-r^2}-4r}{r^2}=\frac{\sqrt{16-r^2}-4}{r}$$

이므로 직선 PQ의 방정식은

$$y-r=\frac{\sqrt{16-r^2}-4}{r}x$$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$$-r=\frac{\sqrt{16-r^2}-4}{r}x \qquad \therefore\ x=\frac{r^2}{4-\sqrt{16-r^2}}$$

$$\therefore\ \mathrm{R}\left(\frac{r^2}{4-\sqrt{16-r^2}},\ 0\right)$$

따라서 $r\longrightarrow 0+$일 때 점 R가 한없이 가까워지는 점의 x좌표는

Q BOX: $r>0$이므로 r가 0에 한없이 가까워지면 $r\longrightarrow 0+$

$$\lim_{r\to 0+}\frac{r^2}{4-\sqrt{16-r^2}}$$

$$=\lim_{r\to 0+}\frac{r^2(4+\sqrt{16-r^2})}{(4-\sqrt{16-r^2})(4+\sqrt{16-r^2})}$$

$$=\lim_{r\to 0+}\frac{r^2(4+\sqrt{16-r^2})}{r^2}$$

$$=\lim_{r\to 0+}(4+\sqrt{16-r^2})$$

$$=4+4=8$$

답 8

도전! 수능 기출

W 9쪽

01 1st 식을 변형한다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{(2x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\cdot\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{1}{2x+1} \quad\cdots\cdots\ ㉠$$

2nd $\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{f(x)}$의 값을 구한다.

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)}=2$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이므로 $\qquad f(1)=0$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{f(x)}$에서 $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

Q BOX: $\lim_{x\to 1}t=\lim_{x\to 1}f(x)=0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{f(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{t}{f(t)}}=1$$

3rd $\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}$의 값을 구한다.

㉠에서

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{x-1}{f(x)}}\cdot\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{1}{2x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

답 ①

02 1st $f(a)$의 값을 구한다.

$\lim_{x\to a}f(x)\ne 0$이면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=1\ne\frac{3}{5}$$

이므로 $\qquad \lim_{x\to a}f(x)=0$

$\therefore\ f(a)=0$

Q BOX: $f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다.

2nd a와 b 사이의 관계식을 구한다.

$f(x)=(x-a)(x-b)$ (b는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)+(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-b-1)}{(x-a)(x-b+1)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-b-1}{x-b+1}=\frac{a-b-1}{a-b+1}$$

즉 $\frac{a-b-1}{a-b+1}=\frac{3}{5}$이므로

$5a-5b-5=3a-3b+3$

$2a-2b=8 \qquad \therefore\ a-b=4$

3rd $|\alpha-\beta|$의 값을 구한다.

a, b는 방정식 $f(x)=0$의 두 근이므로

$|\alpha-\beta|=|a-b|=4$

답 ④

03 (1st) $n=1$일 때 $f(1)$의 값을 구한다.

(i) $n=1$일 때,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6,\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=4$$

위의 두 극한값이 존재하므로 $f(x)-4x^3+3x^2$은 최고차항의 계수가 6인 이차함수이고, $f(x)$는 x를 인수로 갖는다.

> $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=4$에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다. 즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$ 따라서 $f(x)$는 x를 인수로 갖는다.

$f(x)=4x^3+3x^2+ax$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{4x^3+3x^2+ax}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(4x^2+3x+a)=a$$

$\therefore a=4$

$f(x)=4x^3+3x^2+4x$이므로

$f(1)=4+3+4=11$

(2nd) $n=2$일 때 $f(1)$의 값을 구한다.

(ii) $n=2$일 때,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6,\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=4$$

위의 두 극한값이 존재하므로 $f(x)-4x^3+3x^2$은 최고차항의 계수가 6인 삼차함수이고, $f(x)$는 x^2을 인수로 갖는다.

$f(x)=10x^3+bx^2$ (b는 상수)이라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{10x^3+bx^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}(10x+b)=b$$

$\therefore b=4$

$f(x)=10x^3+4x^2$이므로

$f(1)=10+4=14$

(3rd) $n\geq3$일 때 $f(1)$의 값을 구한다.

(iii) $n\geq3$일 때,

> $n\geq3$일 때, 분모의 차수가 4 이상이고, $f(x)-4x^3+3x^2$에서 $-4x^3+3x^2$은 분자의 최고차항에 영향을 주지 않는다.

주어진 두 극한값이 존재하므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 6인 $(n+1)$차함수이고, x^n을 인수로 갖는다.

$f(x)=6x^{n+1}+cx^n$ (c는 상수)이라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{6x^{n+1}+cx^n}{x^n}$$
$$=\lim_{x\to0}(6x+c)=c$$

$\therefore c=4$

즉 $f(x)=6x^{n+1}+4x^n$이므로

$f(1)=6+4=10$

(4th) $f(1)$의 최댓값을 구한다.

이상에서 $f(1)$의 최댓값은 14이다. 답 ③

04 (1st) 직선 l의 기울기를 m이라 하고 직선 l의 방정식을 구한다.

직선 l이 정사각형 OABC의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 $\overline{OB}$와 $\overline{AC}$의 교점인 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

> 정사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 항상 정사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.

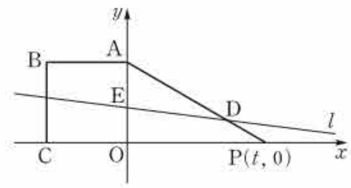
직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y-1=m\{x-(-1)\}\quad\therefore y=mx+m+1$

(2nd) 직선 l과 선분 AP가 만나는 점의 x좌표를 m과 t에 대한 식으로 나타낸다.

직선 AP의 방정식은

$y-2=-\frac{2}{t}x\quad\therefore y=-\frac{2}{t}x+2$



위의 그림과 같이 직선 l과 선분 AP가 만나는 점을 D라 하면 점 D의 x좌표는 $mx+m+1=-\frac{2}{t}x+2$에서

$mtx+(m+1)t=-2x+2t$

$(mt+2)x=(1-m)t$

$\therefore x=\frac{(1-m)t}{mt+2}$

(3rd) $f(t)$를 구한다.

또 위의 그림과 같이 직선 l과 y축이 만나는 점을 E라 하면

$E(0,\ m+1)$

$\triangle$AED의 넓이가 $\triangle$AOP의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot(1-m)\cdot\frac{(1-m)t}{mt+2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot t\cdot2\right)$$

> $\overline{AE}=2-(m+1)=1-m$

$(1-m)^2=mt+2\ (\because t\neq0)$

$m^2-(t+2)m-1=0$

$$\therefore m=\frac{t+2\pm\sqrt{(t+2)^2-4\cdot(-1)}}{2}$$
$$=\frac{t+2\pm\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$$

직선 l의 y절편이 $m+1$이고 $0<m+1<2$이므로

> (점 E의 y좌표) $<$ (점 A의 y좌표)

$$f(t)=m+1=\frac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$$

(4th) 극한값을 구한다.

$$\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}\frac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$$
$$=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$$

답 ②

참고 $t>0$이므로

$\sqrt{t^2+4t+8}>\sqrt{t^2+4t+4}=\sqrt{(t+2)^2}=t+2$

따라서 $m=\frac{t+2+\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$일 때,

$m>\frac{t+2+t+2}{2}=t+2>2$

이므로 $0<m+1<2$를 만족시키지 않는다.

02 함수의 연속

Ⓦ 10쪽

01 ㄱ. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 한다.

$f(-1)=2$이고

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$$

이므로 $\lim_{x\to-1} f(x)\neq f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

$f(2)=3$이고

$$\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2+}(\sqrt{x-2}+3)=3,$$
$$\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2-}(-x+5)=3$$

에서 $\lim_{x\to2} f(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x+1\neq0$이어야 한다.

이때 $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$x^2-x+1=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

이상에서 모든 실수 x에서 연속인 함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

02 $f(x)=\dfrac{1}{x-\dfrac{3}{x-2}}=\dfrac{1}{\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}}$

$$=\frac{x-2}{x^2-2x-3}$$

이므로 $x-2=0$, $x^2-2x-3=0$인 x의 값에서 함수 $f(x)$가 정의되어 있지 않다.

$x-2=0$에서 $x=2$

$x^2-2x-3=0$에서

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 -1, 2, 3의 3개이다. 답 ③

03 (i) $\lim_{x\to1+} f(x)=2$, $\lim_{x\to1-} f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to1+} f(x)\neq\lim_{x\to1-} f(x)$$

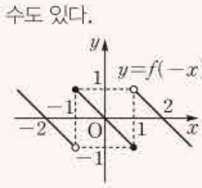
따라서 $\lim_{x\to1} f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

Q BOX

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=1$, $x=2$, $x=4$에서 끊어져 있으므로 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$, $x=4$에서 불연속임을 직관적으로 알 수 있다.

$x\geq2$에서 함수 $y=\sqrt{x-2}+3$은 연속이고 $x<2$에서 함수 $y=-x+5$는 연속이므로 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이면 모든 실수 x에서 연속이다.

다음 그림과 같이 함수 $y=f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것임을 이용하여 $f(-x)$의 극한값을 구할 수도 있다.



함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있지 않으면 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x\to2+} f(x)=3$, $\lim_{x\to2-} f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to2+} f(x)\neq\lim_{x\to2-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x\to2} f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iii) $f(4)=0$, $\lim_{x\to4} f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to4} f(x)\neq f(4)$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 불연속이다.

이상에서 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 1, 2의 2개이고, 불연속인 x의 값은 1, 2, 4의 3개이므로

$a=2$, $b=3$ $\therefore a+b=5$ 답 5

04 ㄱ, ㄴ. $-x=t$로 놓으면

$x\to1+$일 때 $t\to-1-$이므로

$$\lim_{x\to1+} f(x)f(-x)=\lim_{x\to1+} f(x)\cdot\lim_{x\to1+} f(-x)$$
$$=\lim_{x\to1+} f(x)\cdot\lim_{t\to-1-} f(t)$$
$$=-1\cdot1=-1$$

$x\to1-$일 때 $t\to-1+$이므로

$$\lim_{x\to1-} f(x)f(-x)=\lim_{x\to1-} f(x)\cdot\lim_{x\to1-} f(-x)$$
$$=\lim_{x\to1-} f(x)\cdot\lim_{t\to-1+} f(t)$$
$$=1\cdot(-1)=-1$$

$$\therefore \lim_{x\to1} f(x)f(-x)=-1$$

이때 $f(1)f(-1)=1\cdot(-1)=-1$이므로

$$\lim_{x\to1} f(x)f(-x)=f(1)f(-1)$$

따라서 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $-x=t$로 놓으면

$x\to-1+$일 때 $t\to1-$이므로

$$\lim_{x\to-1+}\{f(x)+f(-x)\}$$
$$=\lim_{x\to-1+} f(x)+\lim_{x\to-1+} f(-x)$$
$$=\lim_{x\to-1+} f(x)+\lim_{t\to1-} f(t)$$
$$=-1+1=0$$

$x\to-1-$일 때 $t\to1+$이므로

$$\lim_{x\to-1-}\{f(x)+f(-x)\}$$
$$=\lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{x\to-1-} f(-x)$$
$$=\lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{t\to1+} f(t)$$
$$=1+(-1)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to-1}\{f(x)+f(-x)\}=0$$

이때 $f(-1)+f(1)=-1+1=0$이므로

$$\lim_{x\to-1}\{f(x)+f(-x)\}=f(-1)+f(1)$$

따라서 함수 $f(x)+f(-x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

05 ㄱ. 구간 $(-1, 2)$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 0, 1의 2개이다.

ㄴ. $x-1=t$로 놓으면

$x\to0+$일 때 $t\to-1+$이므로

$$\lim_{x\to0+} f(x-1)=\lim_{t\to-1+} f(t)=0$$

$x \to 0-$일 때 $t \to -1-$이므로

$\lim_{x\to0-} f(x-1) = \lim_{t\to-1-} f(t) = 0$

$\therefore \lim_{x\to0} f(x-1) = 0$

이때 $f(0-1) = f(-1) = 0$이므로

$\lim_{x\to0} f(x-1) = f(0-1)$

따라서 함수 $f(x-1)$은 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $x+1=t$로 놓으면

$x \to 1+$일 때 $t \to 2+$이므로

$$\lim_{x\to1+} f(x)f(x+1) = \lim_{x\to1+} f(x) \cdot \lim_{x\to1+} f(x+1) = \lim_{x\to1+} f(x) \cdot \lim_{t\to2+} f(t) = 0 \cdot 1 = 0$$

$x \to 1-$일 때 $t \to 2-$이므로

$$\lim_{x\to1-} f(x)f(x+1) = \lim_{x\to1-} f(x) \cdot \lim_{x\to1-} f(x+1) = \lim_{x\to1-} f(x) \cdot \lim_{t\to2-} f(t) = 1 \cdot 1 = 1$$

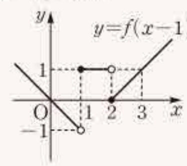
$\therefore \lim_{x\to1+} f(x)f(x+1) \neq \lim_{x\to1-} f(x)f(x+1)$

따라서 $\lim_{x\to1} f(x)f(x+1)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

Q BOX

다음 그림과 같이 함수 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것임을 이용하여 $x=0$에서 연속임을 알 수도 있다.



06 ㄱ. $\lim_{x\to1+} f(x)g(x) = \lim_{x\to1+} f(x) \cdot \lim_{x\to1+} g(x) = 1 \cdot (-1) = -1$

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x) = \lim_{x\to1-} f(x) \cdot \lim_{x\to1-} g(x) = -1 \cdot 1 = -1$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)g(x) = -1$

이때 $f(1)g(1) = -1 \cdot (-1) = 1$이므로

$\lim_{x\to1} f(x)g(x) \neq f(1)g(1)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면

$x \to -1+$일 때 $t \to 1-$이므로

$\lim_{x\to-1+} f(g(x)) = \lim_{t\to1-} f(t) = -1$

$x \to -1-$일 때 $t \to -1-$이므로

$\lim_{x\to-1-} f(g(x)) = \lim_{t\to-1-} f(t) = -1$

$\therefore \lim_{x\to-1} f(g(x)) = -1$

이때 $f(g(-1)) = f(1) = -1$이므로

$\lim_{x\to-1} f(g(x)) = f(g(-1))$

따라서 함수 $f(g(x))$는 $x=-1$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면

$x \to 1+$일 때 $t \to 1+$이므로

$\lim_{x\to1+} g(f(x)) = \lim_{t\to1+} g(t) = -1$

$x \to 1-$일 때 $t \to -1+$이므로

$\lim_{x\to1-} g(f(x)) = \lim_{t\to-1+} g(t) = 1$

$\therefore \lim_{x\to1+} g(f(x)) \neq \lim_{x\to1-} g(f(x))$

따라서 $\lim_{x\to1} g(f(x))$가 존재하지 않으므로 함수 $g(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

07 구간 $(-2, 2)$에서 함수 $g(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 불연속이므로 함수 $g(f(x))$에 대하여 $f(x)=0$, $f(x)=1$인 x의 값, 즉 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서의 연속성을 조사한다.

(i) $x=-1$일 때,

$g(f(-1)) = g(0) = 1$

$f(x)=t$로 놓으면 $x \to -1$일 때 $t \to 0$이므로

$\lim_{x\to-1} g(f(x)) = \lim_{t\to0} g(t) = 2$

$\therefore \lim_{x\to-1} g(f(x)) \neq g(f(-1))$

따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $x=0$일 때,

$g(f(0)) = g(1) = 0$

$f(x)=t$로 놓으면 $x \to 0$일 때 $t \to 1-$이므로

$\lim_{x\to0} g(f(x)) = \lim_{t\to1-} g(t) = 0$

$\therefore \lim_{x\to0} g(f(x)) = g(f(0))$

따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

(iii) $x=1$일 때,

$g(f(1)) = g(0) = 1$

$f(x)=t$로 놓으면 $x \to 1$일 때 $t \to 0$이므로

$\lim_{x\to1} g(f(x)) = \lim_{t\to0} g(t) = 2$

$\therefore \lim_{x\to1} g(f(x)) \neq g(f(1))$

따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 함수 $g(f(x))$가 불연속인 x의 값은 -1, 1의 2개이다. 답 2

08 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1-} f(x) = f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1+} \dfrac{x+b}{\sqrt{x+8}-3} = 2+a$ ······ ㉠

$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-} (2x+a) = 2+a$, $f(1) = 2+a$

$x \to 1+$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1+} (x+b) = 0$이므로 $1+b=0$

$\therefore b=-1$

$b=-1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1+} \frac{x-1}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x\to1+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to1+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{x-1} = \lim_{x\to1+} (\sqrt{x+8}+3) = 6$$

따라서 $2+a=6$이므로 $a=4$

$\therefore a-b=5$ 답 ①

09 함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=f(2)g(2)$$

이때

$$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2+}(-3x+a)(x-1)$$
$$=-6+a,$$
$$\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}(x+1)(x+b)$$
$$=3(2+b)=6+3b,$$
$$f(2)g(2)=3\cdot1=3$$

이므로 $\quad -6+a=6+3b=3$

> $-6+a=3$에서
> $a=9$
> $6+3b=3$에서
> $b=-1$

따라서 $a=9$, $b=-1$이므로

$a+b=8$ 답 8

10 $f(x)=f(x+3)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=f(3)\qquad \therefore\ b=6-5=1$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$$

이때

$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(2x-5)=-1,$$
$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x^2+ax+1)=2a+5,$$
$$f(2)=-1$$

이므로 $\quad 2a+5=-1\qquad \therefore\ a=-3$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+1 & (0\le x<2)\\ 2x-5 & (2\le x\le3)\end{cases}$이므로

$f(7)=f(4)=f(1)=1-3+1=-1$ 답 ②

> $f(x)=f(x+3)$이므로
> $f(7)=f(4+3)=f(4)$
> $=f(1+3)=f(1)$

11 함수 $f(x)$가 $x=n$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to n+}f(x)=\lim_{x\to n-}f(x)=f(n)$$

이때

$$\lim_{x\to n+}f(x)=\lim_{x\to n+}([x]^2-5[x]+8)$$
$$=n^2-5n+8,$$

> $\lim_{x\to n+}[x]=n$

$$\lim_{x\to n-}f(x)=\lim_{x\to n-}([x]^2-5[x]+8)$$
$$=(n-1)^2-5(n-1)+8$$
$$=n^2-7n+14,$$

> $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$

$$f(n)=[n]^2-5[n]+8=n^2-5n+8$$

이므로 $\quad n^2-5n+8=n^2-7n+14$

$2n=6\qquad\therefore\ n=3$ 답 ③

12 $-\sqrt7\le x\le\sqrt7$에서 $\qquad 0\le x^2\le7$

> $\sqrt{7-x^2}$이 자연수, 즉 $7-x^2$이 어떤 수의 제곱인 수가 되는 x^2의 값을 기준으로 생각한다.

(i) $0\le x^2\le3$, 즉 $-\sqrt3\le x\le\sqrt3$일 때,

$2\le\sqrt{7-x^2}\le\sqrt7$이므로 $\qquad [\sqrt{7-x^2}]=2$

$\therefore\ f(x)=2$

(ii) $3<x^2\le6$, 즉 $-\sqrt6\le x<-\sqrt3$ 또는 $\sqrt3<x\le\sqrt6$일 때,

$1\le\sqrt{7-x^2}<2$이므로 $\qquad [\sqrt{7-x^2}]=1$

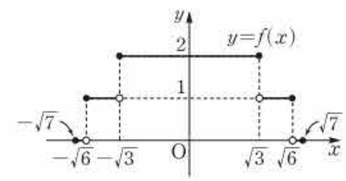
$\therefore\ f(x)=1$

(iii) $6<x^2\le7$, 즉 $-\sqrt7\le x<-\sqrt6$ 또는 $\sqrt6<x\le\sqrt7$일 때,

$0\le\sqrt{7-x^2}<1$이므로 $\qquad [\sqrt{7-x^2}]=0$

$\therefore\ f(x)=0$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 $-\sqrt6$, $-\sqrt3$, $\sqrt3$, $\sqrt6$이다.



따라서 구하는 곱은

$-\sqrt6\cdot(-\sqrt3)\cdot\sqrt3\cdot\sqrt6=18$ 답 18

쌤 한마디

$[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수라 할 때, 함수 $f(x)=[g(x)]$의 연속성은 $g(x)=n$ (n은 정수)을 만족시키는 x의 값에서 조사한다.

13 $x\ne-1$, $x\ne1$일 때,

> $x^2-1=0$에서
> $(x+1)(x-1)=0$
> $\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$
> 따라서 $x\ne-1$, $x\ne1$일 때 $x^2-1\ne0$이다.

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}$$
$$=\frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=x+2$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$, $x=1$에서 각각 연속이므로

$$f(-1)+f(1)=\lim_{x\to-1}f(x)+\lim_{x\to1}f(x)$$
$$=\lim_{x\to-1}(x+2)+\lim_{x\to1}(x+2)$$
$$=1+3=4$$ 답 4

14 $x\ne5$일 때, $\qquad f(x)=\dfrac{a\sqrt{x-4}+b}{x-5}$

함수 $f(x)$가 $x\ge4$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=5$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to5}f(x)=f(5)$$
$$\therefore\ \lim_{x\to5}\frac{a\sqrt{x-4}+b}{x-5}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to5$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to5}(a\sqrt{x-4}+b)=0$이므로

$a+b=0\qquad\therefore\ b=-a \qquad\cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to5}\frac{a\sqrt{x-4}-a}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{a(\sqrt{x-4}-1)(\sqrt{x-4}+1)}{(x-5)(\sqrt{x-4}+1)}$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{a(x-5)}{(x-5)(\sqrt{x-4}+1)}$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{a}{\sqrt{x-4}+1}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\dfrac{a}{2}=1$이므로 $\qquad a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면 $\quad b=-2$

$\therefore a-b=4$ 답 ④

15 $x\neq 0$일 때, $\quad f(x)=\dfrac{x^2-4x+k}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-4,\ 4)$에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x+k}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$$

$x\longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-4x+k)=0$이므로 $\quad k=0$

$\therefore f(0)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-4x)(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-4)(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-4)(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{2}$$

$$=\frac{-4\cdot(2+2)}{2}$$

$$=-8$$

답 ①

16 ① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $f(x)+g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

② 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $2g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.
따라서 두 함수 $f(x)$, $2g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $f(x)-2g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

③ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $3f(x)$도 $x=a$에서 연속이다.
따라서 함수 $\{3f(x)\}^2=\{3f(x)\}\cdot\{3f(x)\}$도 $x=a$에서 연속이다.

④ 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $g(x)+1$도 $x=a$에서 연속이다.
따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)+1$이 $x=a$에서 연속이고 $f(a)\neq 0$이므로 함수 $\dfrac{g(x)+1}{f(x)}$도 $x=a$에서 연속이다.

⑤ [반례] $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=x-2$이면

$$f(g(x))=\frac{1}{(x-2)+1}=\frac{1}{x-1}$$

따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

답 ⑤

17 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 두 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $g(x)\neq 0$, $f(x)\neq 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+2ax+7a=0$의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-7a<0,\quad a(a-7)<0$

$\therefore 0<a<7$ …… ㉠

이차방정식 $-x^2+ax-9=0$의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-4\cdot(-1)\cdot(-9)<0$

$(a+6)(a-6)<0$

$\therefore -6<a<6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<a<6$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다. 답 5

18 조건 (가)에서

$f(1)=0,\ f(3)=0$

즉 $f(x)$가 $x-1$, $x-3$을 인수로 가지므로

$f(x)=a(x-1)(x-3)\ (a\neq 0)$

이라 하고 조건 (나)의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)(x-3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}a(x-3)$$
$$=-2a$$

즉 $-2a=8$이므로 $\quad a=-4$

따라서 $f(x)=-4(x-1)(x-3)$이므로

$f(4)=-4\cdot 3\cdot 1=-12$ 답 -12

19 $x\geq 1$일 때,

$f(x)=x+5\geq 6$

$x<1$일 때,

$f(x)=x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$

즉 실수 전체의 집합에서 $f(x)\neq 0$이다.

한편 함수 $f(x)$는 $x>1$, $x<1$인 모든 실수 x에서 각각 연속이고 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다. 즉

$$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(1)}{f(1)}$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 1+}\frac{ax-6}{x+5}=\frac{a-6}{6},$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 1-}\frac{ax-6}{x^2+2x+2}=\frac{a-6}{5},$$

$$\frac{g(1)}{f(1)}=\frac{a-6}{6}$$

이므로 $\quad \dfrac{a-6}{6}=\dfrac{a-6}{5}$

$5a-30=6a-36$

$\therefore a=6$ 답 ④

Q BOX

$\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}=0$에서
$\sqrt{4+x}=\sqrt{4-x}$
$4+x=4-x$
$\therefore x=0$
따라서 $x\neq 0$일 때
$\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\neq 0$이다.

함수 $\dfrac{1}{f(x)}$은 $f(x)=0$인 x에서 불연속이다.

$f(x)$가 이차함수이므로 $a\neq 0$

$x\geq 1$에서 $\quad x+5\geq 6$

함수 $f(x)$가 $x=-1=g(1)$에서 불연속이므로 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

두 방정식 $g(x)=0$, $f(x)=0$의 실근이 존재하지 않아야 한다.

20 $f(x+3)=\begin{cases} -2x-6+a & (x \ge -1) \\ (x+3)^2-1 & (x<-1) \end{cases}$

함수 $f(x)$는 $x>2$, $x<2$인 모든 실수 x에서 각각 연속이고 함수 $f(x+3)$은 $x>-1$, $x<-1$인 모든 실수 x에서 각각 연속이므로 함수 $g(x)=f(x)f(x+3)$이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1$, $x=2$에서 연속이어야 한다. 즉

$$\lim_{x\to -1+} g(x) = \lim_{x\to -1-} g(x) = g(-1),$$
$$\lim_{x\to 2+} g(x) = \lim_{x\to 2-} g(x) = g(2)$$

이어야 한다.

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1+} g(x) &= \lim_{x\to -1+} f(x)f(x+3) \\ &= \lim_{x\to -1+} (x^2-1)(-2x-6+a) \\ &= 0\cdot(-4+a) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1-} g(x) &= \lim_{x\to -1-} f(x)f(x+3) \\ &= \lim_{x\to -1-} (x^2-1)\{(x+3)^2-1\} \\ &= 0\cdot 3 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$g(-1)=f(-1)f(2)=0\cdot(-4+a)=0$$

이므로 a의 값에 관계없이 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

또

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2+} g(x) &= \lim_{x\to 2+} f(x)f(x+3) \\ &= \lim_{x\to 2+} (-2x+a)(-2x-6+a) \\ &= (-4+a)(-10+a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2-} g(x) &= \lim_{x\to 2-} f(x)f(x+3) \\ &= \lim_{x\to 2-} (x^2-1)(-2x-6+a) \\ &= 3(-10+a), \end{aligned}$$

$$g(2)=f(2)f(5)=(-4+a)(-10+a)$$

이므로 $\quad (-4+a)(-10+a)=3(-10+a)$

$(a-4-3)(a-10)=0$

$(a-7)(a-10)=0$

$\therefore a=7$ 또는 $a=10$

따라서 구하는 합은

$7+10=17$ 답 17

21 함수 $f(x)$는 $x>0$, $x<0$인 모든 실수 x에서 각각 연속이고 함수 $g(x)$는 $x>a$, $x<a$인 모든 실수 x에서 각각 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$, $x=a$에서 연속이어야 한다.

(i) $a>0$일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} f(x)g(x) &= \lim_{x\to 0+} (3x-6)\cdot(-2x) \\ &= -6\cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} f(x)g(x) &= \lim_{x\to 0-} (3x+1)\cdot(-2x) \\ &= 1\cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

$$f(0)g(0)=-6\cdot 0=0$$

이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0-} f(x)g(x) = f(0)g(0)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $a=0$일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} f(x)g(x) &= \lim_{x\to 0+} (3x-6)\cdot(-x+3) \\ &= -6\cdot 3 = -18, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} f(x)g(x) &= \lim_{x\to 0-} (3x+1)\cdot(-2x) \\ &= 1\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

이므로 $\quad \lim_{x\to 0+} f(x)g(x) \ne \lim_{x\to 0-} f(x)g(x)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $a<0$일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} f(x)g(x) &= \lim_{x\to 0+} (3x-6)\cdot(-x+3) \\ &= -6\cdot 3 = -18, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} f(x)g(x) &= \lim_{x\to 0-} (3x+1)\cdot(-x+3) \\ &= 1\cdot 3 = 3 \end{aligned}$$

이므로 $\quad \lim_{x\to 0+} f(x)g(x) \ne \lim_{x\to 0-} f(x)g(x)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 $\quad a>0$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to a+} f(x)g(x) = \lim_{x\to a-} f(x)g(x) = f(a)g(a)$$

이어야 한다.

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a+} f(x)g(x) &= \lim_{x\to a+} (3x-6)\cdot(-x+3) \\ &= (3a-6)(-a+3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a-} f(x)g(x) &= \lim_{x\to a-} (3x-6)\cdot(-2x) \\ &= (3a-6)\cdot(-2a), \end{aligned}$$

$$f(a)g(a)=(3a-6)(-a+3)$$

이므로

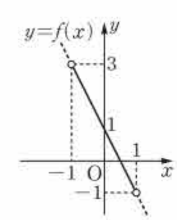
$(3a-6)(-a+3)=(3a-6)\cdot(-2a)$

$3(a-2)(-a+3+2a)=0$

$(a+3)(a-2)=0$

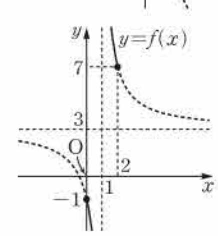
$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 2

22 ① 구간 $(-1,\ 1)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.



② 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.

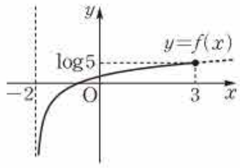
$f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$
$=\dfrac{4}{x-1}+3$



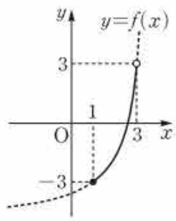
③ 함수 $f(x)$는 구간 $[-4,\ 0]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$f(x)=\sqrt{x+4}$는 $x\ge -4$인 모든 실수 x에서 연속이다.

④ 구간 $(-2,\ 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 이 구간에서 $x=3$일 때 최댓값 $\log 5$를 갖고, 최솟값을 갖지 않는다.



⑤ 구간 $[1,\ 3)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 이 구간에서 $x=1$일 때 최솟값 -3을 갖고, 최댓값을 갖지 않는다.



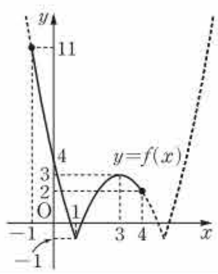
답 ③

23 $f(x)=|x^2-6x+5|-1$

$\quad\ \ =|(x-3)^2-4|-1$

이므로 구간 $[-1,\ 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$y=|x^2-6x+5|$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.



따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1,\ 4]$에서 $x=-1$일 때 최댓값 11, $x=1$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$M=11,\ m=-1$

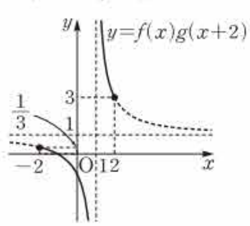
$\therefore M+m=10$

답 10

24 ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이므로 함수 $f(x)-g(x)$도 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이다. 따라서 $f(x)-g(x)$는 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

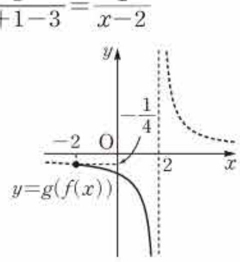
ㄴ. $f(x)g(x+2)=(x+1)\left(\dfrac{1}{x+2-3}\right)=\dfrac{2}{x-1}+1$

구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $y=f(x)g(x+2)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)g(x+2)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.



ㄷ. $g(f(x))=g(x+1)=\dfrac{1}{x+1-3}=\dfrac{1}{x-2}$

구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $y=g(f(x))$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $g(f(x))$는 이 구간에서 $x=-2$일 때 최댓값 $-\dfrac{1}{4}$을 갖고 최솟값을 갖지 않는다.



이상에서 구간 $[-2,\ 2]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 함수는 ㄱ뿐이다.

답 ①

QBOX

25 ㄱ. $f(x)=\dfrac{3}{3x-1}-1$이라 하면 $f(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$x\neq\dfrac{1}{3}$인 모든 실수 x에서 연속이다.

$f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f(2)=-\dfrac{2}{5}$

이므로 $\quad f(1)f(2)<0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $g(x)=\sqrt{4x+2}-3$이라 하면 $g(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$x\geq-\dfrac{1}{2}$인 모든 실수 x에서 연속이다.

$g(1)=\sqrt{6}-3$, $g(2)=\sqrt{10}-3$

이므로 $\quad g(1)g(2)<0$

$\sqrt{6}<\sqrt{9}$이므로 $\sqrt{6}-3<0$
$\sqrt{10}>\sqrt{9}$이므로 $\sqrt{10}-3>0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $h(x)=|2x+1|-4$라 하면 $h(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$h(1)=-1$, $h(2)=1$

이므로 $\quad h(1)h(2)<0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 ⑤

26 $f(1)f(2)<0$, $f(3)f(4)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$f(-1)f(-2)=\{-f(1)\}\{-f(2)\}$

$\qquad\qquad\quad =f(1)f(2)<0$,

$f(-3)f(-4)=\{-f(3)\}\{-f(4)\}$

$\qquad\qquad\quad =f(3)f(4)<0$

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2,\ -1)$, $(-4,\ -3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또 $f(-x)=-f(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=-f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

즉 $x=0$은 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 5개의 실근을 갖는다.

답 5개

27 $f(x)=x^2(x-a)+x^2(x-b)-(x-a)(x-b)$라 하자.

ㄱ. $f(0)=-ab<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 $x=0$을 근으로 갖지 않는다.

ㄴ. $f(0)<0$, $f(a)=a^2(a-b)<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ a)$에서 실근을 갖지 않을 수도 있다.

$a<b$에서 $\quad a-b<0$

ㄷ. $f(a)<0$, $f(b)=b^2(b-a)>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$a<b$에서 $\quad b-a>0$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ②

도전! 수능 기출 (W 15쪽)

01 (1st) $\lim_{x\to 0-} g(x)$와 $\lim_{x\to 0+} g(x)$를 $f(0)$에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$$

$x<0$일 때, $\quad g(x)=-f(x)+x^2+4$

$x>0$일 때, $\quad g(x)=f(x)-x^2-2x-8$

$$\therefore \lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-}\{-f(x)+x^2+4\}=-f(0)+4,$$

$$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+}\{f(x)-x^2-2x-8\}=f(0)-8$$

(2nd) $f(0)$의 값을 구한다.

$\lim_{x\to 0-} g(x)-\lim_{x\to 0+} g(x)=6$이므로

$$\{-f(0)+4\}-\{f(0)-8\}=6$$

$$-2f(0)=-6 \qquad \therefore f(0)=3$$

답 ⑤

02 (1st) 주어진 식을 변형하여 $f(x)$를 구한다.

$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$에서

$$\{f(x)\}^2\{f(x)-1\}-x^2\{f(x)-1\}=0$$

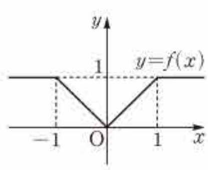
$$[\{f(x)\}^2-x^2]\{f(x)-1\}=0$$

$$\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}\{f(x)-1\}=0$$

$$\therefore f(x)=-x \text{ 또는 } f(x)=x \text{ 또는 } f(x)=1$$

(2nd) 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1, 최솟값이 0이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(3rd) $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구한다.

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ③

03 (1st) 함수 $f(a)$를 구하고 그 그래프를 그린다.

주어진 집합의 원소의 개수 $f(a)$는 주어진 방정식의 실근의 개수와 같으므로 a의 값에 따른 방정식의 실근의 개수를 구한다.

(i) $a=0$일 때,

주어진 방정식은 $-4x+2=0$이므로 $\quad x=\frac{1}{2}$

$\therefore f(0)=1$

(ii) $a\neq 0$일 때,

이차방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-a\{-(a-2)\}=2a^2-6a+4=2(a-1)(a-2)$$

$\frac{D}{4}>0$, 즉 $a<0$ 또는 $0<a<1$ 또는 $a>2$이면

$f(a)=2$

$2(a-1)(a-2)>0$에서 $a<1$ 또는 $a>2$
이때 $a\neq 0$이므로 $a<0$ 또는 $0<a<1$ 또는 $a>2$

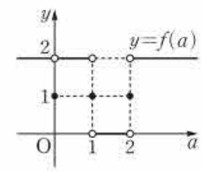
$\frac{D}{4}=0$, 즉 $a=1$ 또는 $a=2$이면 $\quad f(a)=1$

$\frac{D}{4}<0$, 즉 $1<a<2$이면

$f(a)=0$

(i), (ii)에서 함수 $f(a)$와 그 그래프는 다음과 같다.

$$f(a)=\begin{cases} 2 & (a<0 \text{ 또는 } 0<a<1 \text{ 또는 } a>2) \\ 1 & (a=0 \text{ 또는 } a=1 \text{ 또는 } a=2) \\ 0 & (1<a<2) \end{cases}$$



(2nd) ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\lim_{a\to 0} f(a)=2$, $f(0)=1$이므로

$$\lim_{a\to 0} f(a)\neq f(0)$$

(3rd) ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $\lim_{a\to c+} f(a)\neq \lim_{a\to c-} f(a)$인 실수 c는 1, 2의 2개이다.

$\lim_{a\to 1+} f(a)=0$, $\lim_{a\to 1-} f(a)=2$이므로 $\lim_{a\to 1+} f(a)\neq \lim_{a\to 1-} f(a)$
$\lim_{a\to 2+} f(a)=2$, $\lim_{a\to 2-} f(a)=0$이므로 $\lim_{a\to 2+} f(a)\neq \lim_{a\to 2-} f(a)$

(4th) ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 $a=0$, 1, 2일 때의 3개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

04 (1st) a의 값의 범위를 구한다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이므로 조건 (가)를 만족시키려면 $f(0)f(2)<0$이어야 한다.

즉 $a(a-12)<0$이므로

$$0<a<12$$

(2nd) a에 대한 방정식을 세운다.

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=f(a)g(a)$$

이때

$$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=f(a)\cdot\lim_{x\to a+}(2x+5a)=(a^2-7a)\cdot 7a=7a^2(a-7),$$

$$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=f(a)\cdot\lim_{x\to a-} f(x+4)=(a^2-7a)\{(a+4)^2-8(a+4)+a\}=a(a-7)(a^2+a-16),$$

$$f(a)g(a)=(a^2-7a)\cdot 7a=7a^2(a-7)$$

이므로

$$7a^2(a-7)=a(a-7)(a^2+a-16)$$

(3rd) a의 값의 곱을 구한다.

$a(a-7)(a^2-6a-16)=0$이므로

$$a(a+2)(a-7)(a-8)=0$$

$$\therefore a=7 \text{ 또는 } a=8 \ (\because 0<a<12)$$

따라서 구하는 곱은 $\quad 7\cdot 8=56$

답 56

03 미분계수와 도함수 Ⓦ 16쪽

01 함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\frac{\{2(1+h)^2+(1+h)\}-3}{h}$$
$$=\frac{2h^2+5h}{h}=2h+5$$

따라서 $2h+5=13$이므로

$2h=8 \qquad \therefore h=4$ 답 ④

02 직선 AB의 기울기는 함수 $f(x)$에서 x의 값이 3에서 6까지 변할 때의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{f(6)-f(3)}{6-3}=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$f(0)=f(6)$

따라서 함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{f(3)-f(6)}{3}$$
$$=-\frac{f(6)-f(3)}{6-3}$$
$$=-3\ (\because ㉠)$$ 답 -3

03 함수 $f(x)$에서 x의 값이 k에서 $k+2$까지 변할 때의 평균변화율이 $2k$이므로

$$\frac{f(k+2)-f(k)}{(k+2)-k}=2k$$

$\therefore f(k+2)-f(k)=4k \qquad \cdots\cdots ㉠$

따라서 함수 $f(x)$에서 x의 값이 2에서 32까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(32)-f(2)}{32-2}$$
$$=\frac{1}{30}[\{f(32)-f(30)\}+\{f(30)-f(28)\}+\{f(28)-f(26)\}+\cdots+\{f(6)-f(4)\}+\{f(4)-f(2)\}]$$
$$=\frac{1}{30}(4\cdot30+4\cdot28+4\cdot26+\cdots+4\cdot4+4\cdot2)\ (\because ㉠)$$
$$=\frac{4}{30}\sum_{k=1}^{15}2k=\frac{8}{30}\sum_{k=1}^{15}k$$
$$=\frac{8}{30}\cdot\frac{15\cdot16}{2}=32$$ 답 ③

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

04 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -2에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(-2)}{a-(-2)}=\frac{(2a^3-1)-(-17)}{a+2}$$
$$=\frac{2(a+2)(a^2-2a+4)}{a+2}$$
$$=2(a^2-2a+4)$$

함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 순간변화율은

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{2(2+h)^3-1\}-15}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2h^3+12h^2+24h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(2h^2+12h+24)=24$$

따라서 $2(a^2-2a+4)=24$이므로

$a^2-2a-8=0, \qquad (a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$ 답 4

05 함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 t까지 변할 때의 평균변화율이 t^2-1이므로

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=t^2-1$$

이때 $f(0)=3$이므로

$$\frac{f(t)-3}{t}=t^2-1 \qquad \therefore f(t)=t^3-t+3$$

따라서 $f(x)=x^3-x+3$이므로 $x=-1$에서의 미분계수는

$$f'(-1)=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(-1+h)^3-(-1+h)+3\}-3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^3-3h^2+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(h^2-3h+2)=2$$ 답 ⑤

06 $$\lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)-f(1)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)-f(1)}{4h}\cdot\frac{4}{3}$$
$$=\frac{4}{3}f'(1)$$

분자가 $f(1+4h)-f(1)$이므로 분모가 $4h$가 되도록 변형한다.

따라서 $\frac{4}{3}f'(1)=20$이므로

$f'(1)=15$ 답 ④

07 $$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot2=2f'(a)$$

즉 $2f'(a)=4$이므로 $\qquad f'(a)=2$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a+h^3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)+f(a)-f(a+h^3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(a+3h)-f(a)\}-\{f(a+h^3)-f(a)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot3-\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}\cdot h^2$$
$$=3f'(a)-f'(a)\cdot0$$
$$=3f'(a)=3\cdot2=6$$ 답 ②

$h\longrightarrow0$일 때, $\quad h^3\longrightarrow0$

08 $\lim_{h\to0}\frac{f(2-5h)-f(2+3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2-5h)-f(2)+f(2)-f(2+3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2-5h)-f(2)\}-\{f(2+3h)-f(2)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2-5h)-f(2)}{-5h}\cdot(-5)$

$-\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\cdot3$

$=-5f'(2)-3f'(2)=-8f'(2)$

즉 $-8f'(2)=-24$이므로 $\quad f'(2)=3$

$\therefore f'(-2)=\lim_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{-f(2-h)+f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=f'(2)=3$ 답 3

$f(-x)=-f(x)$이므로
$f(-2+h)$
$=f(-(2-h))$
$=-f(2-h)$,
$f(-2)=-f(2)$

09 $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(3)}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

$=\lim_{x\to3}\left[\frac{\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(3)}\}\{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(3)}\}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(3)}}\right]$

$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(3)}}$

$=f'(3)\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{f(3)}}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\sqrt{3}$ 답 ②

10 $\lim_{x\to5}\frac{f(x)-1}{x^2-6x+5}=2$에서 $x\longrightarrow5$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to5}\{f(x)-1\}=0$이므로 $\quad f(5)=1$

$\therefore \lim_{x\to5}\frac{f(x)-1}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to5}\frac{f(x)-f(5)}{(x-1)(x-5)}$

$=\lim_{x\to5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}\cdot\frac{1}{x-1}$

$=f'(5)\cdot\frac{1}{4}$

따라서 $\frac{1}{4}f'(5)=2$이므로 $\quad f'(5)=8$

$\therefore f(5)+f'(5)=9$ 답 ③

11 $x^2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-2$일 때 $t\longrightarrow4$이므로

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{(x+2)(x-2)}\cdot(x-2)$

$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot(x-2)$

$=\lim_{t\to4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}\cdot\lim_{x\to-2}(x-2)$

$=f'(4)\cdot(-4)=6\cdot(-4)=-24$ 답 -24

12 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0-1 \quad \therefore f(0)=1$

$\therefore f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(3)+f(h)+6h-1-f(3)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}+6$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+6$

$=f'(0)+6=-1+6=5$ 답 ④

13 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0-2 \quad \therefore f(0)=2$

이때

$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+3h-2-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2}{h}+3$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+3=f'(0)+3$

이므로 $\quad f'(0)+3=1 \quad \therefore f'(0)=-2$

따라서

$f'(k)=\lim_{h\to0}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(k)+f(h)+3kh-2-f(k)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2}{h}+3k$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+3k$

$=f'(0)+3k=3k-2$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}f'(k)=\sum_{k=1}^{10}(3k-2)=3\sum_{k=1}^{10}k-2\cdot10$

$=3\cdot\frac{10\cdot11}{2}-20=145$ 답 ②

Σ의 성질

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)$
$=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$ (복호동순)

② $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

③ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$

(단, c는 상수)

14 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=3f(0)f(0)$

$\therefore f(0)=\frac{1}{3}$ ($\because f(0)>0$)

이때

$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{3f(2)f(h)-f(2)}{h}$

$=3f(2)\cdot\lim_{h\to0}\frac{f(h)-\frac{1}{3}}{h}$

$=3f(2)\cdot\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$=3f(2)f'(0)=3f(2)\cdot4=12f(2)$

이므로 $\quad \frac{f'(2)}{f(2)}=12$ ($\because f(2)>0$) 답 12

$3f(2)f(h)-f(2)$
$=3f(2)\left\{f(h)-\frac{1}{3}\right\}$

15 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x-1$이므로

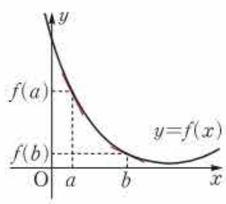
$f(-1)=-3$, $f'(-1)=2$

접선의 기울기가 2이다.

$$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{x^2f(-1)-f(x)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2f(-1)-f(-1)+f(-1)-f(x)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2-1)f(-1)-\{f(x)-f(-1)\}}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)f(-1)-\{f(x)-f(-1)\}}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x-1)f(-1)-\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=-2f(-1)-f'(-1)$$
$$=-2\cdot(-3)-2=4$$

답 ④

16 ㄱ. 오른쪽 그림에서 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 $x=b$인 점에서의 접선의 기울기보다 작으므로



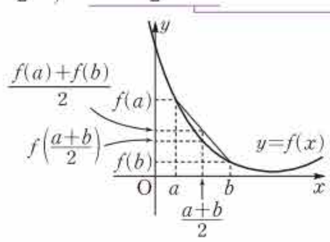
$f'(a)<f'(b)$

$f'(a)<0$, $f'(b)<0$이고 $|f'(a)|>|f'(b)|$이므로 $f'(a)<f'(b)$

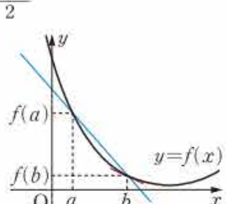
ㄴ. $a\le x\le b$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 다음 그림에서

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 잇는 선분의 중점의 y좌표이다.



ㄷ. 오른쪽 그림에서 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 $x=b$인 점에서의 접선의 기울기보다 작으므로



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$$

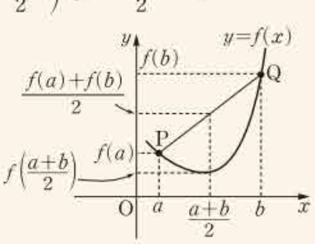
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

쌤한마디

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$, $\mathrm{Q}(b, f(b))$에 대하여 다음 그림과 같이 곡선이 아래로 볼록하면 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점은 곡선의 위쪽에 있으므로

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+(b)}{2}$$



17 ① $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{x-1}=1,$$
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

따라서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

② 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 정의되어 있지 않으므로 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

③ $$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x-1)=0,$$
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)\{-(x-1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\{-(x-1)\}=0$$

이므로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$

미분계수 $f'(1)$이 존재한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

④ $f(x)=|x^2-x|=|x(x-1)|$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}x=1,$$
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-x(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(-x)=-1$$

따라서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

⑤ $$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^3-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x^2+x+1)=3,$$
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(x+1)=2$$

이므로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

답 ③

18 ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=1$, $x=3$에서 불연속이므로 불연속인 x의 값은 3개이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x의 값은 5개이다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 경우
① $x=a$에서 불연속인 경우
② $x=a$에서 그래프가 꺾인 경우

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

19 ① (i) $f(2)=0$, $\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x}-2\right)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{4}{x}-2}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)}{x(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}\left(-\frac{2}{x}\right)=-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

② 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 정의되어 있지 않으므로 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

③ $\lim_{x\to 2+}[x]=2$, $\lim_{x\to 2-}[x]=1$이므로

$\lim_{x\to 2+}f(x)\neq\lim_{x\to 2-}f(x)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

④ (i) $f(2)=0$, $\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\{(x-2)[x]\}=0$이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)[x]}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}[x]=2$,

$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(x-2)[x]}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}[x]=1$

이므로 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

⑤ (i) $\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2+x-6)=0$,

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(-x^2+9x-14)=0$

이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)=0$

이때 $f(2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+x-6}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}(x+3)=5$,

$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{-x^2+9x-14}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}\frac{-(x-2)(x-7)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}\{-(x-7)\}=5$

이므로 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=5$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

답 ④

Q BOX

$[x]$가 x보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n에 대하여
$\lim_{x\to n+}[x]=n$,
$\lim_{x\to n-}[x]=n-1$

$\sum_{k=1}^{10}(k+2)$
$=\frac{10\cdot 11}{2}+2\cdot 10=75$
와 같이 구할 수도 있다.

20 $f'(x)=3x^2+2(a-1)x+2a$이므로

$f'(3)=-3$에서

$27+6(a-1)+2a=-3$, $8a+21=-3$

$\therefore a=-3$

답 -3

21 $f'(x)=12x^{11}+11x^{10}+10x^9+\cdots+4x^3+3x^2$이므로

$f'(1)=12+11+10+\cdots+4+3$

$=\sum_{k=1}^{12}k-(1+2)$

$=\frac{12\cdot 13}{2}-3=75$

답 ②

22 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(-1)=-1$에서

$a-b+c=-1$ …… ㉠

$f'(-1)=-4$에서

$-2a+b=-4$ …… ㉡

$f'(1)=8$에서 $2a+b=8$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$3-2+c=-1$ $\therefore c=-2$

따라서 $f(x)=3x^2+2x-2$이므로

$f(2)=12+4-2=14$

답 ④

23 $f'(x)=(3x+1)'(x-2)(x-a)$
$+(3x+1)(x-2)'(x-a)$
$+(3x+1)(x-2)(x-a)'$
$=3(x-2)(x-a)+(3x+1)(x-a)$
$+(3x+1)(x-2)$

$f'(0)=3$에서

$6a-a-2=3$, $5a-2=3$

$\therefore a=1$

답 ③

24 $f(x)=(x^4-a)(3x-2)^2$이라 하면

$f'(x)=(x^4-a)'(3x-2)^2+(x^4-a)\{(3x-2)^2\}'$
$=4x^3(3x-2)^2$
$+(x^4-a)\cdot 2(3x-2)(3x-2)'$
$=4x^3(3x-2)^2+6(x^4-a)(3x-2)$

$x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(1)=-2$에서

$4+6(1-a)=-2$, $10-6a=-2$

$\therefore a=2$

답 ②

25 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-5}{x-3}=4$에서 $x\longrightarrow 3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 3}\{f(x)-5\}=0$이므로 $f(3)=5$

$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-5}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$

$\therefore f'(3)=4$

$\lim_{x \to 3} \frac{g(x)-2}{x-3}=5$에서 $x \to 3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x \to 3}\{g(x)-2\}=0$이므로 $g(3)=2$

$\therefore \lim_{x \to 3} \frac{g(x)-2}{x-3}=\lim_{x \to 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3)$

$\therefore g'(3)=5$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(3)=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)$

$=4\cdot 2+5\cdot 5=33$ 답 ④

26 $f(-2)=0\cdot 14=0$이므로

$\lim_{h \to 0} \frac{f(-2+3h)}{2h}$

$=\lim_{h \to 0} \frac{f(-2+3h)-f(-2)}{3h}\cdot\frac{3}{2}$

$=\frac{3}{2}f'(-2)$

이때

$f'(x)$

$=(x^2-4)'(x^2-3x+4)+(x^2-4)(x^2-3x+4)'$

$=2x(x^2-3x+4)+(x^2-4)(2x-3)$

이므로

$\frac{3}{2}f'(-2)=\frac{3}{2}\cdot\{-4\cdot 14+0\cdot(-7)\}$

$=\frac{3}{2}\cdot(-56)=-84$ 답 -84

쌤한마디

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음과 같은 꼴의 극한이 주어진 경우에는 $f(a)$의 값을 확인한 후 미분계수의 정의를 이용하여 식을 변형한다.

① $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{h}$ 꼴

$f(a)=0$이면

$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{h}=\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$=f'(a)$

② $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-k}{x-a}$ 꼴

$f(a)=k$이면

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-k}{x-a}=\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=f'(a)$

27 $\lim_{x \to 2} \frac{\{f(x)\}^2-\{f(2)\}^2}{x-2}$

$=\lim_{x \to 2} \frac{\{f(x)+f(2)\}\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$

$=\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\{f(x)+f(2)\}$

$=f'(2)\cdot 2f(2)$

이때 $f'(x)=3x^2-2x$이므로

$f'(2)=12-4=8$

또 $f(2)=8-4=4$이므로

$f'(2)\cdot 2f(2)=8\cdot 2\cdot 4=64$ 답 64

Q BOX

$f(1)=1-1-2=-2$,
$g(1)=1+1-4=-2$

$\frac{f(-2+3h)}{2h}$
$=\frac{f(-2+3h)-0}{2h}$

$x+1=t$로 놓으면
$x \to 3$일 때 $t \to 4$이므로

$\lim_{x \to 3} \frac{f(x+1)-f(4)}{(x+1)-4}$
$=\lim_{t \to 4} \frac{f(t)-f(4)}{t-4}$
$=f'(4)$

28 $f(1)=g(1)=-2$이므로

$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+5h)-g(1-h)}{3h}$

$=\lim_{h \to 0} \frac{f(1+5h)-f(1)+g(1)-g(1-h)}{3h}$

$=\lim_{h \to 0} \frac{\{f(1+5h)-f(1)\}-\{g(1-h)-g(1)\}}{3h}$

$=\lim_{h \to 0} \frac{f(1+5h)-f(1)}{5h}\cdot\frac{5}{3}$

$-\lim_{h \to 0} \frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{5}{3}f'(1)+\frac{1}{3}g'(1)$

이때

$f'(x)=6x^5-4x^3-4x$, $g'(x)=5x^4+3x^2-4$

이므로

$\frac{5}{3}f'(1)+\frac{1}{3}g'(1)$

$=\frac{5}{3}\cdot(6-4-4)+\frac{1}{3}\cdot(5+3-4)$

$=-2$ 답 ②

29 $\lim_{x \to 3} \frac{f(x+1)-1}{x^2-9}=1$에서 $x \to 3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x \to 3}\{f(x+1)-1\}=0$이므로

$f(4)=1$

$\therefore \lim_{x \to 3} \frac{f(x+1)-1}{x^2-9}$

$=\lim_{x \to 3} \frac{f(x+1)-f(4)}{(x+3)(x-3)}$

$=\lim_{x \to 3} \frac{f(x+1)-f(4)}{(x+1)-4}\cdot\frac{1}{x+3}$

$=f'(4)\cdot\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}f'(4)=1$이므로 $f'(4)=6$

$f(4)=1$에서 $16+4a+b=1$

$\therefore 4a+b=-15$ …… ㉠

$f'(x)=2x+a$이므로 $f'(4)=6$에서

$8+a=6$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-8+b=-15$ $\therefore b=-7$

$\therefore ab=14$ 답 ④

30 $\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)$이므로

$f'(-1)=10$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(3-2h)-f(3)}{h}$

$=\lim_{h \to 0} \frac{f(3-2h)-f(3)}{-2h}\cdot(-2)=-2f'(3)$

이므로 $-2f'(3)=-36$

$\therefore f'(3)=18$

$f'(x)=6x^2+2ax+b$이므로

$f'(-1)=10$에서 $\quad 6-2a+b=10$

$\therefore 2a-b=-4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(3)=18$에서 $\quad 54+6a+b=18$

$\therefore 6a+b=-36 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5,\ b=-6$

따라서 $f(x)=2x^3-5x^2-6x-3$이므로

$f(2)=16-20-12-3=-19$ 답 ①

31 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-3$에서 $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $\quad f(0)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

$\therefore f'(0)=-3$

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-4}{x+1}=-1$에서 $x\longrightarrow-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}\{f(x)-4\}=0$이므로 $\quad f(-1)=4$

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{f(x)-4}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=f'(-1)$

$\therefore f'(-1)=-1$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면 $\quad f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(0)=0,\ f'(0)=-3$에서

$d=0,\ c=-3$

$f(-1)=4$에서 $\quad -a+b+3=4$

$\therefore a-b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(-1)=-1$에서 $\quad 3a-2b-3=-1$

$\therefore 3a-2b=2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=5$

$\therefore f(x)=4x^3+5x^2-3x,$

$f'(x)=12x^2+10x-3$

따라서 방정식 $f'(x)=0$, 즉 $12x^2+10x-3=0$의 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{-3}{12}=-\frac{1}{4}$ 답 $-\frac{1}{4}$

32 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로 $\quad \lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

즉 $\lim_{x\to0-}(x^3+3x+b)=f(0)$이므로

$b=-1$

$f'(x)=\begin{cases} a & (x>0) \\ 3x^2+3 & (x<0)\end{cases}$이고 $f'(0)$이 존재하므로

$\lim_{x\to0+}a=\lim_{x\to0-}(3x^2+3) \quad \therefore a=3$

$\therefore a-b=4$ 답 ④

QBOX

$x=0$에서의 미분계수가 존재

➡ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재

$d=0$, $c=-3$이므로

$f(x)=ax^3+bx^2-3x,$

$f'(x)=3ax^2+2bx-3$

$-1\leq x<0$일 때,

$1\leq x+2<2$이므로

$[x+2]=1$

$-2\leq x<-1$일 때,

$0\leq x+2<1$이므로

$[x+2]=0$

$x=0$일 때 $f(x)=ax-1$이므로

$f(0)=-1$

모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

다른 풀이 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로 $\quad \lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

즉 $\lim_{x\to0-}(x^3+3x+b)=f(0)$이므로

$b=-1$

$f'(0)$이 존재하므로

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(ax-1)-(-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0+}\frac{ax}{x}$

$=\lim_{x\to0+}a=a,$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{(x^3+3x-1)-(-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0-}\frac{x^3+3x}{x}$

$=\lim_{x\to0-}(x^2+3)=3$

에서 $\quad a=3$

$\therefore a-b=4$

33 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이므로 $\quad \lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

즉 $\lim_{x\to2-}(bx^2-4x)=f(2)$이므로

$4b-8=12+2a+2$

$\therefore a-2b=-11 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=\begin{cases} 6x+a & (x>2) \\ 2bx-4 & (x<2)\end{cases}$이고 $f'(2)$가 존재하므로

$\lim_{x\to2+}(6x+a)=\lim_{x\to2-}(2bx-4)$

$12+a=4b-4$

$\therefore a-4b=-16 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-6,\ b=\frac{5}{2}$

$\therefore ab=-15$ 답 -15

34 $f(x)=\begin{cases} x^2+2ax-a+b & (-1\leq x<0) \\ 0 & (-2\leq x<-1)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

즉 $\lim_{x\to-1-}0=f(-1)$이므로

$0=1-2a-a+b$

$\therefore 3a-b=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=\begin{cases} 2x+2a & (-1<x<0) \\ 0 & (-2<x<-1)\end{cases}$이고 $f'(-1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to-1+}(2x+2a)=\lim_{x\to-1-}0$

$-2+2a=0 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$3-b=1 \quad \therefore b=2$

$\therefore a+b=3$ 답 ④

35 $f(x)=x^{13}-3x^{10}+5x$라 하면 $f(1)=3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{13}-3x^{10}+5x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=13x^{12}-30x^9+5$이므로

$f'(1)=13-30+5=-12$ 답 ⑤

36 $\lim_{x\to2}\frac{x^n-3x^4+16}{x-2}=a$에서 $x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(x^n-3x^4+16)=0$이므로

$2^n-48+16=0,\quad 2^n=32$

$\therefore n=5$

$f(x)=x^5-3x^4$이라 하면 $f(2)=-16$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^5-3x^4+16}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

이때 $f'(x)=5x^4-12x^3$이므로

$a=f'(2)=80-96=-16$

$\therefore n+a=-11$ 답 -11

37 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$x(2ax+b)=2(ax^2+bx+c)-3x+8$

$\therefore 2ax^2+bx=2ax^2+(2b-3)x+2c+8$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$b=2b-3,\ 0=2c+8$

$\therefore b=3,\ c=-4$

$f(x)=ax^2+3x-4$이므로 $f(-1)=2$에서

$a-3-4=2$

$\therefore a=9$

따라서 $f'(x)=18x+3$이므로

$f'(1)=18+3=21$ 답 21

38 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=2x+a$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$f(2x+a)=2f'(x^2+ax+b)-6$

$(2x+a)^2+a(2x+a)+b$

$=2\{2(x^2+ax+b)+a\}-6$

$\therefore 4x^2+6ax+2a^2+b=4x^2+4ax+2a+4b-6$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$6a=4a,\ 2a^2+b=2a+4b-6$

$6a=4a$에서 $\quad a=0$

$b=4b-6$에서 $\quad b=2$

따라서 $f(x)=x^2+2$이므로

$f(6)=36+2=38$ 답 ③

Q BOX

모든 실수 x에 대하여 등식이 성립하므로 양변의 최고차항의 차수가 같다.

$f(2)=32-48=-16$

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a',\ b=b',\ c=c'$

39 다항함수 $f(x)$의 최고차항이 n차이면 조건 (가)에서 좌변의 최고차항은 $2(n-1)$차이고, 우변의 최고차항은 n차이므로

$2(n-1)=n\qquad\therefore n=2$

즉 $f(x)$는 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)

라 하면 $\quad f'(x)=2ax+b$

이때

$\{f'(2x)\}^2=(4ax+b)^2=16a^2x^2+8abx+b^2$,

$-4f(2x)+1=-4(4ax^2+2bx+c)+1$

$=-16ax^2-8bx-4c+1$

이고 모든 실수 x에 대하여

$\{f'(2x)\}^2=-4f(2x)+1$

이 성립하므로

$16a^2=-16a$ …… ㉠

$8ab=-8b$

$b^2=-4c+1$ …… ㉡

㉠에서 $\quad 16a^2+16a=0,\quad a(a+1)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a\neq0$)

조건 (나)에서 $f'(-1)=5$이므로

$2\cdot(-1)\cdot(-1)+b=5$

$\therefore b=3$

$b=3$을 ㉡에 대입하면

$9=-4c+1\qquad\therefore c=-2$

따라서 $f(x)=-x^2+3x-2$이므로

$f(-2)=-4-6-2=-12$ 답 -12

쌤 한마디

다항함수 $f(x)$의 최고차항이 n차이므로

$f(x)=ax^n+\cdots\ (a\neq0)$

이라 하면 $\quad f'(x)=anx^{n-1}+\cdots$

이때

$f(2x)=a(2x)^n+\cdots=a\cdot2^nx^n+\cdots$,

$f'(2x)=an(2x)^{n-1}+\cdots=an\cdot2^{n-1}x^{n-1}+\cdots$

이므로

$\{f'(2x)\}^2=a^2n^2\cdot2^{2(n-1)}x^{2(n-1)}+\cdots$

따라서 $\{f'(2x)\}^2$, $f(2x)$의 최고차항은 각각 $2(n-1)$차, n차이다.

40 $f(x)=x^8+ax^4-bx^2-8$이라 하면

$f'(x)=8x^7+4ax^3-2bx$

$f(x)$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0,\ f'(-1)=0$

$f(-1)=0$에서 $\quad 1+a-b-8=0$

$\therefore a-b=7$ …… ㉠

$f'(-1)=0$에서 $\quad -8-4a+2b=0$

$\therefore 2a-b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-11,\ b=-18$

$\therefore a+b=-29$ 답 ②

41 $x^{12}-3x+5$를 $(x-1)^2(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$x^{12}-3x+5$$
$$=(x-1)^2(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$1-3+5=a+b+c$$
$$\therefore a+b+c=3 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$1+3+5=a-b+c$$
$$\therefore a-b+c=9 \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

㉡$-$㉢을 하면 $\quad 2b=-6 \quad \therefore b=-3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$12x^{11}-3=2(x-1)(x+1)Q(x)+(x-1)^2Q(x)$$
$$+(x-1)^2(x+1)Q'(x)+2ax-3$$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$12-3=2a-3 \quad \therefore a=6$$

$a=6$, $b=-3$을 ㉡에 대입하면

$$6-3+c=3 \quad \therefore c=0$$

따라서 $R(x)=6x^2-3x$이므로

$$R(3)=54-9=45$$

답 ③

42 $\lim_{x \to 9} \frac{f(x)-f(9)}{x-9}=f'(9)$이므로 $\quad f'(9)=3$

$f(x)=(x-5)(x-9)Q(x)$이므로

$$f'(x)=(x-9)Q(x)+(x-5)Q(x)$$
$$+(x-5)(x-9)Q'(x)$$

위의 식의 양변에 $x=9$를 대입하면

$$f'(9)=4Q(9)$$
$$\therefore Q(9)=\frac{1}{4}f'(9)=\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

다른 풀이 $f(x)=(x-5)(x-9)Q(x)$이므로

$$f(9)=0$$
$$\therefore \lim_{x \to 9}\frac{f(x)-f(9)}{x-9}=\lim_{x \to 9}\frac{(x-5)(x-9)Q(x)}{x-9}$$
$$=\lim_{x \to 9}(x-5)Q(x)$$
$$=4Q(9)$$

즉 $4Q(9)=3$이므로 $\quad Q(9)=\frac{3}{4}$

도전! 수능 기출

W 23쪽

01 1st $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구한다.

조건 (나)의 부등식의 각 변의 값이 같아지도록 하는 양수 x의 값은 $6x-6=2x^3-2$에서

$$x^3-3x+2=0, \quad (x+2)(x-1)^2=0$$
$$\therefore x=1 \ (\because x>0)$$

따라서 부등식의 각 변에 $x=1$을 대입하면

$$0 \le f(1) \le 0$$
$$\therefore f(1)=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$x>1$일 때, 조건 (나)의 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{6x-6}{x-1} \le \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \le \frac{2x^3-2}{x-1}$$

이때

$$\lim_{x \to 1+}\frac{6x-6}{x-1}=\lim_{x \to 1+}\frac{6(x-1)}{x-1}=\lim_{x \to 1+}6=6,$$
$$\lim_{x \to 1+}\frac{2x^3-2}{x-1}=\lim_{x \to 1+}\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1+}2(x^2+x+1)=2\cdot 3=6$$

이므로

$$\lim_{x \to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$$

$0<x<1$일 때, 조건 (나)의 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{2x^3-2}{x-1} \le \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \le \frac{6x-6}{x-1}$$

이때 $\lim_{x \to 1-}\frac{6x-6}{x-1}=6$, $\lim_{x \to 1-}\frac{2x^3-2}{x-1}=6$이므로

$$\lim_{x \to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$$
$$\therefore f'(1)=\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

2nd $f(x)$가 일차함수, 이차함수가 아님을 확인한다.

조건 (가)에서 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$의 상수항은 -3이고, 조건 (나)에서 $f(x)$는 삼차 이하의 다항함수이다.

(i) $f(x)$가 일차함수일 때,

$f(x)=x-3$이므로

$$f(1)=-2$$

따라서 ㉠이 성립하지 않으므로 $f(x)$는 일차함수가 아니다.

(ii) $f(x)$가 이차함수일 때,

$f(x)=x^2+ax-3$ (a는 상수)이라 하면 ㉠에서

$$1+a-3=0 \quad \therefore a=2$$

즉 $f(x)=x^2+2x-3$에서 $f'(x)=2x+2$이므로

$$f'(1)=4$$

따라서 ㉡이 성립하지 않으므로 $f(x)$는 이차함수가 아니다.

3rd $f(3)$의 값을 구한다.

(iii) $f(x)$가 삼차함수일 때,

$f(x)=x^3+bx^2+cx-3$ (b, c는 상수)이라 하면 ㉠에서 $\quad 1+b+c-3=0$

$$\therefore b+c=2 \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

$f'(x)=3x^2+2bx+c$이므로 ㉡에서

$$3+2b+c=6$$
$$\therefore 2b+c=3 \quad \cdots\cdots \text{㉣}$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$$b=1, \ c=1$$
$$\therefore f(x)=x^3+x^2+x-3$$

이상에서 $f(x)=x^3+x^2+x-3$이므로

$$f(3)=27+9+3-3=36$$

답 ①

Q BOX

$x-1>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

다항식을 삼차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수이거나 이차 이하의 다항식이다.

$x-1<0$이므로 부등호의 방향이 바뀐다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3-3x+2$
$=(x-1)(x^2+x-2)$
$=(x+2)(x-1)^2$

쌤한마디

조건 (나)에서 $f(x)$가 삼차 이하의 다항함수인 것은 다음과 같이 알 수 있다.

$f(x)\le 2x^3-2$에서 $\quad f(x)-(2x^3-2)\le 0$

$f(x)$가 사차함수일 때,

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)

라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(2x^3-2)\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\{x^4+(a-2)x^3+bx^2+cx+d+2\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}x^4\left(1+\frac{a-2}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}+\frac{d+2}{x^4}\right)$$
$$=\infty$$

따라서 $f(x)-(2x^3-2)\le 0$이 성립할 수 없다.

마찬가지로 $f(x)$의 차수가 5 이상일 때에도 $f(x)-(2x^3-2)\le 0$이 성립할 수 없으므로 $f(x)$는 삼차 이하의 다항함수이다.

02 (1st) $f(2)$의 값을 구한다.

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$에서 $x\to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이므로

$f(2)=0$

(2nd) $f(x)$를 미정계수를 사용하여 나타내고 $f'(x)$를 구한다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고

$f(1)=0$, $f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ (a는 상수)

라 하면

$$f'(x)$$
$$=(x-1)'(x-2)(x-a)+(x-1)(x-2)'(x-a)+(x-1)(x-2)(x-a)'$$
$$=(x-2)(x-a)+(x-1)(x-a)+(x-1)(x-2)$$

(3rd) a의 값을 구한다.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-a)}{\{f'(x)\}^2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-a)}{\{(x-2)(x-a)+(x-1)(x-a)+(x-1)(x-2)\}^2}$$
$$=\frac{1\cdot(2-a)}{\{0\cdot(2-a)+1\cdot(2-a)+1\cdot 0\}^2}$$
$$=\frac{2-a}{(2-a)^2}=\frac{1}{2-a}\ (\because a\ne 2)$$

이므로

$\frac{1}{2-a}=\frac{1}{4}$, $\quad 2-a=4 \quad \therefore a=-2$

(4th) $f(3)$의 값을 구한다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$이므로

$f(3)=2\cdot 1\cdot 5=10$ 답 ④

BOX

첫째항부터 차례대로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 등비수열이라 하고, 곱하는 일정한 수를 공비라 한다.
➡ 첫째항이 a, 공비가 r ($r\ne 0$)인 등비수열은 a, ar, ar^2, ar^3, $\cdots$

방정식 $x^n=k$ ($k\ne 0$)의 실근은 다음과 같다.
① n이 짝수일 때, $k>0$이면 $x=\pm\sqrt[n]{k}$, $k<0$이면 실근은 없다.
② n이 홀수일 때, $x=\sqrt[n]{k}$

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$,
$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

$a=2$이면 극한값이 존재하지 않으므로 $a\ne 2$

03 (1st) 방정식 $f(x)=9$의 세 실근을 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타낸 후 이를 이용하여 $f(x)$를 나타낸다.

방정식 $f(x)=9$의 세 실근이 크기 순서대로 등비수열을 이루므로 첫째항을 a, 공비를 r ($r\ne 0$)라 하면 세 실근은

a, ar, ar^2

즉 $f(x)-9=(x-a)(x-ar)(x-ar^2)$이므로

$$f(x)=(x-a)(x-ar)(x-ar^2)+9$$
$$=x^3-a(1+r+r^2)x^2+a^2r(1+r+r^2)x-(ar)^3+9$$

(2nd) $f(0)=1$임을 이용하여 a, r에 대한 식을 구한다.

$f(0)=1$에서 $\quad -(ar)^3+9=1$

$(ar)^3=8 \quad \therefore ar=2$ ...... ㉠

(3rd) $f'(2)=-2$임을 이용하여 a, r에 대한 식을 구한다.

$f'(x)=3x^2-2a(1+r+r^2)x+a^2r(1+r+r^2)$이므로

$f'(2)=-2$에서

$12-4a(1+r+r^2)+a^2r(1+r+r^2)=-2$

$a(ar-4)(1+r+r^2)=-14$

$-2a(1+r+r^2)=-14$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a(1+r+r^2)=7$

(4th) $f(3)$의 값을 구한다.

따라서

$$f(x)=x^3-7x^2+(2\cdot 7)x-8+9$$
$$=x^3-7x^2+14x+1$$

이므로

$f(3)=27-63+42+1=7$ 답 ②

다른 풀이 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x^3+px^2+qx+1$ (p, q는 상수)

이라 하고 방정식 $f(x)=9$, 즉 $x^3+px^2+qx-8=0$의 세 실근을 $\frac{a}{r}$, a, ar ($r\ne 0$)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{a}{r}+a+ar=-p$에서

$p=-a\left(\frac{1}{r}+1+r\right)$

$\frac{a}{r}\cdot a+a\cdot ar+ar\cdot\frac{a}{r}=q$에서

$q=a^2\left(\frac{1}{r}+1+r\right)$

$\frac{a}{r}\cdot a\cdot ar=8$에서 $\quad a^3=8 \quad \therefore a=2$

$f'(x)=3x^2+2px+q$이므로 $f'(2)=-2$에서

$12+4p+q=-2$

$12-4\cdot 2\left(\frac{1}{r}+1+r\right)+2^2\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=-2$

$2\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=7$, $\quad 2(1+r+r^2)=7r$

$2r^2-5r+2=0$, $\quad (2r-1)(r-2)=0$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=2$

따라서 $p=-7$, $q=14$이므로

$$f(x)=x^3-7x^2+14x+1$$

$$\therefore f(3)=27-63+42+1=7$$

쌤한마디

등비수열을 이루는 세 수는

$a,\ ar,\ ar^2$ 또는 $\frac{a}{r},\ a,\ ar\ (r\neq0)$

와 같이 놓을 수 있다.

이때 삼차방정식의 세 근이 등비수열을 이루고, 근과 계수의 관계를 이용할 때에는 세 근을 $\frac{a}{r}$, a, ar로 놓으면 세 근의 곱이 $\frac{a}{r}\cdot a\cdot ar=a^3$이므로 미지수의 개수를 줄일 수 있어 계산을 쉽게 할 수 있다.

04 (1st) ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}p(x)f(x)=\lim_{x\to0-}p(x)f(x)=p(0)f(0)$$

이때

$$\lim_{x\to0+}p(x)f(x)=\lim_{x\to0+}p(x)\cdot(x-1)=-p(0),$$

$$\lim_{x\to0-}p(x)f(x)=\lim_{x\to0-}p(x)\cdot(-x)=0,$$

$$p(0)f(0)=p(0)\cdot0=0$$

이므로 $\quad -p(0)=0 \qquad \therefore p(0)=0$

(2nd) ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to2}\frac{p(x)f(x)-p(2)f(2)}{x-2}$가 존재한다.

이때

$$\lim_{x\to2+}\frac{p(x)f(x)-p(2)f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(2x-3)p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{2(x-2)p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}2p(x)+\lim_{x\to2+}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=2p(2)+p'(2),$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{p(x)f(x)-p(2)f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-1)p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}p(x)+\lim_{x\to2-}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=p(2)+p'(2)$$

이므로

$$2p(2)+p'(2)=p(2)+p'(2)$$

$$\therefore p(2)=0$$

Q BOX

$r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=2$일 때,

$\frac{1}{r}+1+r=\frac{7}{2}$

이므로

$p=-2\cdot\frac{7}{2}=-7,$

$q=2^2\cdot\frac{7}{2}=14$

다항함수 $p(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}p(x)$

$=\lim_{x\to0-}p(x)$

$=p(0)$

$f(2)=2-1=1$

$h(0)=0^4\cdot(-2)=0$

$h(2)=2^2\cdot1^2\cdot0=0$

(3rd) ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. [반례] $h(x)=p(x)\{f(x)\}^2$이라 하자.

$p(x)=x^2(x-2)$이면

$$h(x)=\begin{cases} x^4(x-2) & (x\le0)\\ x^2(x-1)^2(x-2) & (0<x\le2)\\ x^2(2x-3)^2(x-2) & (x>2)\end{cases}$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x\neq0$, $x\neq2$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이때

$$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{x^2(x-1)^2(x-2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}x(x-1)^2(x-2)=0,$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x^4(x-2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}x^3(x-2)$$
$$=0$$

이므로 $\quad \lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=0$

즉 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

또

$$\lim_{x\to2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{x^2(2x-3)^2(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}x^2(2x-3)^2=4,$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{x^2(x-1)^2(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}x^2(x-1)^2=4$$

이므로 $\quad \lim_{x\to2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=4$

즉 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하지만 $p(x)=x^2(x-2)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어지지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

04 도함수의 활용 (1) W 24쪽

01 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, -1)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(2)=-2$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{f(2-3h)-f(2)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$-\lim_{h\to 0}\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h}\cdot(-3)$

$=f'(2)+3f'(2)=4f'(2)$

$=4\cdot(-2)=-8$ 답 ①

02 $f(x)=x^3-7x+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-7$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-3, -2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-3)=27-7=20$

$g(x)=6x^3+ax^2-b$라 하면

$g'(x)=18x^2+2ax$

이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-1, 6)$에서의 접선의 기울기는

$g'(-1)=18-2a$

즉 $20=18-2a$이므로 $a=-1$

따라서 점 $(-1, 6)$이 곡선 $y=6x^3-x^2-b$ 위의 점이므로

$6=-6-1-b$ $\therefore b=-13$

$\therefore ab=13$ 답 ②

03 점 $(1, 5)$가 곡선 $y=-2x^3+ax^2+bx+c$ 위의 점이므로

$5=-2+a+b+c$

$\therefore a+b+c=7$ ······ ㉠

$f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=-6x^2+2ax+b$

점 $(1, 5)$에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(1)=4,$ $-6+2a+b=4$

$\therefore 2a+b=10$ ······ ㉡

$x=-3$인 점에서의 접선의 기울기가 12이므로

$f'(-3)=12,$ $-54-6a+b=12$

$\therefore 6a-b=-66$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-7, b=24$

$a=-7, b=24$를 ㉠에 대입하면

$-7+24+c=7$ $\therefore c=-10$

$\therefore a-b-c=-21$ 답 -21

Q BOX

곡선 $y=f(x)$ 위의 점에서의 접선의 기울기의 최솟값은 $f'(x)$의 최솟값과 같다.

직선 $y=-2x+3$의 기울기는 -2이다.

$f(-2)=-1\cdot(-1)^2$
$=-1$

$f'(-3)=g'(-1)$

일반적으로 두 방정식 $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$의 그래프가 만날 때, 방정식 $f(x, y)+k\cdot g(x, y)=0$의 그래프는 실수 k의 값에 관계없이 두 방정식 $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$의 그래프의 교점을 지난다.

04 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-4x^2+3kx-1$이라 하면

$f'(x)=2x^2-8x+3k=2(x-2)^2+3k-8$

이므로 이차함수 $f'(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $3k-8$을 갖는다.

따라서 $3k-8=7$이므로

$k=5$ 답 ⑤

05 $f(x)=(x^2-5)(x+1)^2$이라 하면

$f'(x)=2x(x+1)^2+2(x^2-5)(x+1)$

점 $(-2, -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=2\cdot(-2)\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)\cdot(-1)$
$=-2$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-1)=-2\{x-(-2)\}$

$\therefore y=-2x-5$

이 직선이 점 $(a, 3)$을 지나므로

$3=-2a-5$ $\therefore a=-4$ 답 -4

06 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+3}{x-1}=7$에서 $x \to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x)+3\}=0$이므로

$f(1)=-3$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)+3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$\therefore f'(1)=7$

즉 점 $(1, -3)$에서의 접선의 기울기는 7이므로 접선의 방정식은

$y-(-3)=7(x-1)$ $\therefore y=7x-10$

따라서 $a=7, b=-10$이므로

$a-b=17$ 답 ④

07 $y=x^3+kx^2-4kx+4k-5$에서

$x^3-y-5+k(x^2-4x+4)=0$

$\therefore x^3-y-5+k(x-2)^2=0$

위의 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x^3-y-5=0,\ (x-2)^2=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=2, y=3$

즉 주어진 곡선은 k의 값에 관계없이 항상 점 P$(2, 3)$을 지난다.

$f(x)=x^3+kx^2-4kx+4k-5$라 하면

$f'(x)=3x^2+2kx-4k$

점 P$(2, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=12+4k-4k=12$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-3=12(x-2)$

$\therefore y=12x-21$ 답 $y=12x-21$

08 $f(x)=2x^3-x$에서

$f'(x)=6x^2-1$

점 $(t,\ 2t^3-t)$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=6t^2-1$

이므로 접선의 방정식은

$y-(2t^3-t)=(6t^2-1)(x-t)$

$\therefore\ y=(6t^2-1)x-4t^3$

따라서 $g(t)=-4t^3$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)-g(t-1)}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-4t^3-\{-4(t-1)^3\}}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-12t^2+12t-4}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(-12+\frac{12}{t}-\frac{4}{t^2}\right)$$
$$=-12$$

답 ①

09 $f(x)=x^3-4x^2-7x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-8x-7$

두 점 P, Q에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{3}$이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 이차방정식 $f'(x)=-\frac{1}{3}$의 두 실근이다.

$3x^2-8x-7=-\frac{1}{3}$에서

$9x^2-24x-20=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 점 P, Q의 x좌표의 합은

$-\frac{-24}{9}=\frac{8}{3}$

답 ③

10 삼차방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 0, 1, 2이므로

$f(x)=kx(x-1)(x-2)\ (k\neq0)$

라 하면 $f(-1)=6$에서

$6=k\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)$

$\therefore\ k=-1$

$f(x)=-x(x-1)(x-2)$이므로

$f'(x)=-(x-1)(x-2)-x(x-2)-x(x-1)$

점 $(3,\ -6)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=-2\cdot1-3\cdot1-3\cdot2=-11$

이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{11}$이다.

즉 점 $(3,\ -6)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{11}$인 직선의 방정식은

$y-(-6)=\frac{1}{11}(x-3)\qquad\therefore\ x-11y-69=0$

따라서 $a=-11,\ b=-69$이므로

$a-b=58$

답 ③

Q BOX

두 접선이 서로 수직이다.

직선 $y=3x-2$와 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

이차방정식 $9x^2-24x-20=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-12)^2-9\cdot(-20)>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(3)=-3\cdot2\cdot1=-6$

$h'(t)=f'(t)g(t)+f(t)g'(t)$

11 $f(x)=2x^2+1,\ g(x)=-4x^2+ax+\frac{3}{4}$이라 하면

$f'(x)=4x,\ g'(x)=-8x+a$

두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad 2t^2+1=-4t^2+at+\frac{3}{4}$

$\therefore\ at=6t^2+\frac{1}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)g'(t)=-1$에서 $\quad 4t(-8t+a)=-1$

$\therefore\ 32t^2-4at=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$32t^2-4\left(6t^2+\frac{1}{4}\right)=1,\qquad t^2=\frac{1}{4}$

$\therefore\ t=-\frac{1}{2}$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

(i) $t=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\quad -\frac{1}{2}a=\frac{7}{4}$

$\therefore\ a=-\frac{7}{2}$

(ii) $t=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\quad \frac{1}{2}a=\frac{7}{4}$

$\therefore\ a=\frac{7}{2}$

(i), (ii)에서

$a=\frac{7}{2}\ (\because\ a>0)$

답 $\frac{7}{2}$

12 $p(x)=-2x^2+3$이라 하면

$p'(x)=-4x$

점 $\mathrm{P}(t,\ -2t^2+3)$에서의 접선의 기울기는

$p'(t)=-4t$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-2t^2+3)=-4t(x-t)$

$\therefore\ y=-4tx+2t^2+3$

$\therefore\ f(t)=2t^2+3$

점 P에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{4t}$이므로

점 P를 지나고 기울기가 $\frac{1}{4t}$인 직선의 방정식은

$y-(-2t^2+3)=\frac{1}{4t}(x-t)$

$\therefore\ y=\frac{1}{4t}x-2t^2+\frac{11}{4}$

$\therefore\ g(t)=-2t^2+\frac{11}{4}$

따라서 $f'(t)=4t,\ g'(t)=-4t$이므로

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=4\cdot\left(-2+\frac{11}{4}\right)+(2+3)\cdot(-4)$

$=-17$

답 -17

13 $f(x)=2x^3-1$이라 하면

$f'(x)=6x^2$

점 $\mathrm{A}(-1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=6$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-3)=6\{x-(-1)\}$

$\therefore\ y=6x+3$

직선 $y=6x+3$과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표는 $2x^3-1=6x+3$에서

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 점 B의 좌표는 $(2, 15)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+\{15-(-3)\}^2}$
$=3\sqrt{37}$ 답 ③

14 $f(x)=2x^4-x^3+kx^2-x+4$라 하면

$f'(x)=8x^3-3x^2+2kx-1$

점 A$(0, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-1$이므로 접선 l의 방정식은

$y-4=-x$ $\therefore y=-x+4$

직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표는 $2x^4-x^3+kx^2-x+4=-x+4$에서

$2x^4-x^3+kx^2=0$ $\therefore x^2(2x^2-x+k)=0$

이때 직선 l은 두 점 A, B에서 모두 곡선 $y=f(x)$에 접해야 하므로 이차방정식 $2x^2-x+k=0$이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2-x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot 2k=0$

$\therefore k=\frac{1}{8}$ 답 $\frac{1}{8}$

15 $f(x)=x(x+2)(kx-2)$에서

$f'(x)=(x+2)(kx-2)+x(kx-2)+kx(x+2)$

점 $(-2, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=-2(-2k-2)=4(k+1)$

이므로 접선의 방정식은

$y=4(k+1)\{x-(-2)\}$

$\therefore y=4(k+1)(x+2)$

이 직선이 곡선 $y=f(x)$와 다시 만나는 점의 x좌표는

$x(x+2)(kx-2)=4(k+1)(x+2)$, 즉

$(x+2)(kx^2-2x-4k-4)=0$

의 $x\neq-2$인 실근이다.

따라서 $x=4$가 이차방정식 $kx^2-2x-4k-4=0$의 한 근이므로

$16k-8-4k-4=0$

$\therefore k=1$ 답 ④

16 $f(x)=x^2-5x+1$이라 하면

$f'(x)=2x-5$

곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 접점의 좌표를 (t, t^2-5t+1)이라 하면 접선의 기울기가 9이므로

$f'(t)=9$, $2t-5=9$ $\therefore t=7$

즉 접점의 좌표는 $(7, 15)$이므로 직선 l의 방정식은

$y-15=9(x-7)$

$\therefore y=9x-48$

따라서 직선 l 위의 점이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

17 $f(x)=4x^3-8x+7$이라 하면

$f'(x)=12x^2-8$

접점의 좌표를 $(t, 4t^3-8t+7)$이라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=4$, $12t^2-8=4$

$t^2=1$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

즉 접점의 좌표는 $(-1, 11)$, $(1, 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-11=4\{x-(-1)\}$, $y-3=4(x-1)$

$\therefore y=4x+15$, $y=4x-1$

따라서 두 접선의 y절편의 합은

$15+(-1)=14$ 답 ②

18 $f(x)=x^3-3x^2-6x-2$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-6$

점 $(-1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3+6-6=3$

기울기가 3인 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-6t-2)라 하면

$f'(t)=3$, $3t^2-6t-6=3$

$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t\neq-1$)

즉 접점의 좌표는 $(3, -20)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-20)=3(x-3)$ $\therefore y=3x-29$

이 직선이 점 $(a, 4)$를 지나므로

$4=3a-29$, $3a=33$

$\therefore a=11$ 답 11

19 $f(x)=-x^3+2x^2+5x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+4x+5$

접점의 좌표를 $(t, -t^3+2t^2+5t)$ $(t>0)$라 하면 접선의 기울기가 $\tan 45°=1$이므로

$f'(t)=1$, $-3t^2+4t+5=1$

$3t^2-4t-4=0$, $(3t+2)(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

즉 접점의 좌표는 $(2, 10)$이므로 접선의 방정식은

$y-10=x-2$ $\therefore y=x+8$

따라서 $a=1$, $b=8$이므로

$b-a=7$ 답 7

20 $f(x)=-x^3+7x+3$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+7$

접점의 좌표를 $(t, -t^3+7t+3)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=-3t^2+7$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3+7t+3)=(-3t^2+7)(x-t)$

$\therefore y=(-3t^2+7)x+2t^3+3$

이 직선이 직선 $y=mx+19$와 일치해야 하므로

$-3t^2+7=m$ …… ㉠

$2t^3+3=19$ …… ㉡

Q BOX

$y=6\cdot 2+3=15$

좌표평면 위의 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는
$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

곡선 위의 점 A에서의 접선 l이 점 B에서도 곡선에 접하므로 두 점 A, B에서 모두 접한다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 점 $(a, f(a))$에서 접하면 방정식 $f(x)=g(x)$는 중근 $x=a$를 갖는다.

직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ $(0°\le\theta<90°)$라 하면
(직선의 기울기)$=\tan\theta$

직선을 평행이동해도 직선의 기울기는 변하지 않는다.

W 04 도함수의 활용 (1)

ⓒ에서

$t^3=8 \qquad \therefore t=2$

$t=2$를 ㉠에 대입하면

$m=-12+7=-5$ 답 ①

21 $f(x)=x^2-4$라 하면

$f'(x)=2x$

점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-3)=2(x-1)$

$\therefore y=2x-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$g(x)=-x^3+4x^2+ax+1$이라 하면

$g'(x)=-3x^2+8x+a$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+4t^2+at+1)$이라 하면 접선의 기울기는 $g'(t)=-3t^2+8t+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3+4t^2+at+1)=(-3t^2+8t+a)(x-t)$

$\therefore y=(-3t^2+8t+a)x+2t^3-4t^2+1$

이 직선이 직선 ㉠과 일치해야 하므로

$-3t^2+8t+a=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$2t^3-4t^2+1=-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉢에서

$t^3-2t^2+3=0, \qquad (t+1)(t^2-3t+3)=0$

$\therefore t=-1 \ (\because t^2-3t+3>0)$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면

$-3-8+a=2 \qquad \therefore a=13$ 답 ④

22 $f(x)=-2x^2+3x+1$이라 하면

$f'(x)=-4x+3$

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-4+3=-1$

이므로 접선의 방정식은

$y-2=-(x-1)$

$\therefore y=-x+3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=3x^3-3x^2+1$을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=3x^3-3x^2+1+k$

$g(x)=3x^3-3x^2+1+k$라 하면

$g'(x)=9x^2-6x$

접점의 좌표를 $(t,\ 3t^3-3t^2+1+k)$라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$g'(t)=-1, \qquad 9t^2-6t=-1$

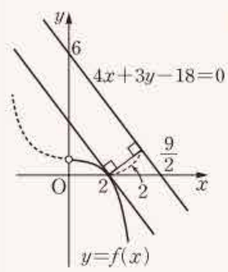
$(3t-1)^2=0 \qquad \therefore t=\frac{1}{3}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3},\ k+\frac{7}{9}\right)$이고 이 점은 직선 ㉠ 위의 점이므로

$k+\frac{7}{9}=-\frac{1}{3}+3$

$\therefore k=\frac{17}{9}$ 답 $\frac{17}{9}$

Q BOX



점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

t^2-3t+3
$=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

곡선 $y=g(x)$와 직선 ㉠이 접하므로 접선의 기울기는 -1이다.

$\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+1+k=k+\frac{7}{9}$

23 $f(x)=-\frac{1}{9}x^3+\frac{8}{9}\ (x>0)$이라 하면

$f'(x)=-\frac{1}{3}x^2$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $4x+3y-18=0$, 즉 $y=-\frac{4}{3}x+6$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $\left(t,\ -\frac{1}{9}t^3+\frac{8}{9}\right)\ (t>0)$이라 하면 접선의 기울기가 $-\frac{4}{3}$이므로

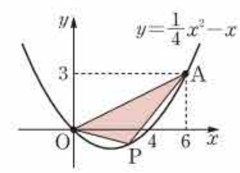
$f'(t)=-\frac{4}{3}, \qquad -\frac{1}{3}t^2=-\frac{4}{3}$

$t^2=4 \qquad \therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 0)$이고, 점 $(2,\ 0)$과 직선 $4x+3y-18=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$\frac{|8+0-18|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$ 답 2

24 오른쪽 그림에서 두 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(6,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은



$y=\frac{1}{2}x$

$f(x)=\frac{1}{4}x^2-x$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{2}x-1$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 평행한 접선의 접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{4}t^2-t\right)\ (0<t<6)$라 하면 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$f'(t)=\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2}t-1=\frac{1}{2} \qquad \therefore t=3$

따라서 접점의 좌표는 $\left(3,\ -\frac{3}{4}\right)$이고, 점 P의 좌표가 $\left(3,\ -\frac{3}{4}\right)$일 때 $\triangle\mathrm{OPA}$의 넓이가 최대이다.

점 $\mathrm{P}\left(3,\ -\frac{3}{4}\right)$과 직선 $y=\frac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$ 사이의 거리는

$\frac{\left|3+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{9}{2\sqrt{5}}$

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$이므로 $\triangle\mathrm{OPA}$의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot\frac{9}{2\sqrt{5}}=\frac{27}{4}$ 답 ④

25 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+24$라 하면 $\qquad f'(x)=2x^3$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^4+24\right)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t^3$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{2}t^4+24\right)=2t^3(x-t)$

$\therefore y=2t^3x-\frac{3}{2}t^4+24$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-\frac{3}{2}t^4+24, \quad t^4=16$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

따라서 두 접점의 좌표는 $(-2, 32)$, $(2, 32)$이므로

$\overline{PQ}=|2-(-2)|=4$ 답 ④

Q BOX

두 점 P, Q의 y좌표가 같으므로 $\overline{PQ}$의 길이는 x좌표의 차와 같다.

26 $f(x)=3x^3-x^2-7$이라 하면

$f'(x)=9x^2-2x$

접점의 좌표를 $(t, 3t^3-t^2-7)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=9t^2-2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(3t^3-t^2-7)=(9t^2-2t)(x-t)$

$\therefore y=(9t^2-2t)x-6t^3+t^2-7 \quad \cdots\cdots ㉠$

직선 ㉠이 점 $(0, -12)$를 지나므로

$-12=-6t^3+t^2-7, \quad 6t^3-t^2-5=0$

$(t-1)(6t^2+5t+5)=0$

$\therefore t=1$ ($\because 6t^2+5t+5>0$)

$6t^2+5t+5$
$=6\left(t+\frac{5}{12}\right)^2+\frac{95}{24}>0$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 직선 l의 방정식은

$y=7x-12$

따라서 직선 l 위의 점인 것은 ②이다. 답 ②

각 점의 좌표를 직선 l의 방정식에 대입하여 성립하는 것을 찾는다.

27 $f(x)=x^2+x$라 하면

$f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 (t, t^2+t)라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$

$\therefore y=(2t+1)x-t^2$

이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1=2t+1-t^2, \quad t^2-2t=0$

$t(t-2)=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=2$

점 (t, t^2+t)에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2t+1}$이므로 점 (t, t^2+t)를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2t+1}$인 직선의 방정식은

$y-(t^2+t)=-\frac{1}{2t+1}(x-t) \quad \cdots\cdots ㉠$

$t=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=-x$

$t=2$를 ㉠에 대입하면

$y-6=-\frac{1}{5}(x-2) \quad \therefore y=-\frac{1}{5}x+\frac{32}{5}$

따라서 두 직선의 y절편은 각각 0, $\frac{32}{5}$이므로

$a+b=\frac{32}{5}$ 답 $\frac{32}{5}$

28 $f(x)=-x^2+x+2$라 하면

이차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점에서의 접선은 한 개뿐이다. 따라서 점 A에서 주어진 곡선에 그은 접선이 두 개이므로 점 A는 곡선 $y=f(x)$ 밖의 점이다.

$f'(x)=-2x+1$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+t+2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+t+2)=(-2t+1)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+1)x+t^2+2$

이 직선이 점 $A(a, -1)$을 지나므로

$-1=(-2t+1)a+t^2+2$

$\therefore t^2-2at+a+3=0$

두 점 B, C의 x좌표를 각각 t_1, t_2라 하면 t_1, t_2는 위의 이차방정식의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1+t_2=2a$

이때 삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표가 4이므로

세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

$\frac{a+t_1+t_2}{3}=4, \quad \frac{a+2a}{3}=4$

$\therefore a=4$ 답 4

쌤 한마디

$a=4$이면 이차방정식 $t^2-2at+a+3=0$에서

$t^2-8t+7=0, \quad (t-1)(t-7)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=7$

따라서 두 점 B, C의 좌표는 $(1, 2)$, $(7, -40)$이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가

$\left(\frac{4+1+7}{3}, \frac{-1+2+(-40)}{3}\right)$, 즉 $(4, -13)$

임을 확인할 수 있다.

29 점 $(2, 0)$이 곡선 $y=2x^3+ax$ 위의 점이므로

$0=16+2a \quad \therefore a=-8$

점 $(2, 0)$이 곡선 $y=bx^3+x^2+c$ 위의 점이므로

$0=8b+4+c \quad \therefore 8b+c=-4 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f(x)=2x^3-8x$, $g(x)=bx^3+x^2+c$라 하면

$f'(x)=6x^2-8$, $g'(x)=3bx^2+2x$

두 곡선이 점 $(2, 0)$에서 공통인 접선을 가지므로

$f'(2)=g'(2)$에서

$24-8=12b+4 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$8+c=-4 \quad \therefore c=-12$

$\therefore a-b-c=3$ 답 ①

30 $f(x)=-2x^3+4$, $g(x)=-x^3-3x+2$라 하면

$f'(x)=-6x^2$, $g'(x)=-3x^2-3$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가진다고 하면

$f(t)=g(t)$에서

$-2t^3+4=-t^3-3t+2$

$t^3-3t-2=0, \quad (t+1)^2(t-2)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=2 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f'(t)=g'(t)$에서

$-6t^2=-3t^2-3, \quad t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $\quad t=-1$

즉 점 $(-1, 6)$에서 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기가 $f'(-1)=g'(-1)=-6$이므로 공통인 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{6}$이다.

$f(-1)=g(-1)=6$

W 04 도함수의 활용 (1)

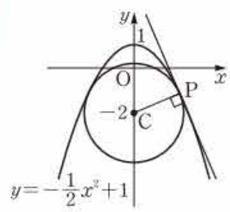
따라서 점 $(-1,\ 6)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{6}$인 직선의 방정식은

$$y-6=\frac{1}{6}\{x-(-1)\} \qquad \therefore\ x-6y+37=0$$

즉 $a=-6$, $b=37$이므로 $\quad a+b=31$ 　　　　답 31

31 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+1$이라 하면 $\quad f'(x)=-x$

오른쪽 그림과 같이 원과 곡선의 접점을 $\mathrm{P}\left(t,\ -\frac{1}{2}t^2+1\right)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-t$이고, 직선 CP의 기울기는



$$\frac{-\frac{1}{2}t^2+1-(-2)}{t-0}=-\frac{1}{2}t+\frac{3}{t}$$

점 P에서의 접선과 직선 CP가 서로 수직이므로

$$-t\cdot\left(-\frac{1}{2}t+\frac{3}{t}\right)=-1, \qquad \frac{1}{2}t^2-3=-1$$

$$t^2=4 \qquad \therefore\ t=-2 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 두 점 $(-2,\ -1)$, $(2,\ -1)$에서 원과 곡선이 공통인 접선을 갖고 각각의 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(-2)=2,\ f'(2)=-2$$

이므로 공통인 접선의 방정식은

$$y-(-1)=2\{x-(-2)\},$$
$$y-(-1)=-2(x-2)$$
$$\therefore\ y=2x+3,\ y=-2x+3$$

답 ③

32 $f(x)=x^3-3x^2+11$이라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3(x-1)^2-3$$

이므로 이차함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -3을 갖는다.

즉 접점의 좌표가 $(1,\ 9)$일 때 접선의 기울기가 최소이고 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-3$이므로 접선의 방정식은

$$y-9=-3(x-1) \qquad \therefore\ y=-3x+12$$

따라서 접선의 x절편이 4, y절편이 12이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot4\cdot12=24$$

답 24

33 $f(x)=2x^2+6x+k$라 하면 $\quad f'(x)=4x+6$

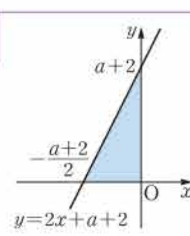
점 $(-1,\ a)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=-4+6=2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-a=2\{x-(-1)\} \qquad \therefore\ y=2x+a+2$$

따라서 접선의 x절편이 $-\frac{a+2}{2}$, y절편이 $a+2$이고 오른쪽 그림에서 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 4이므로



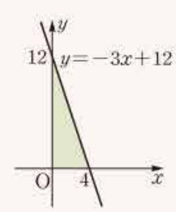
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a+2}{2}\cdot(a+2)=4$$

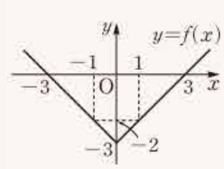
Q BOX

원 C와 곡선 $y=f(x)$가 접하는 두 점에서 공통인 접선을 갖는다.

점 P는 제1사분면 위의 점이다.

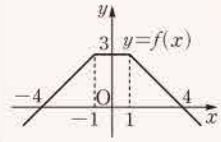
$f(2)=g(2)=1$





$a>-2$이므로

$-\frac{a+2}{2}<0,\ a+2>0$



$$(a+2)^2=16, \qquad a+2=4\ (\because\ a+2>0)$$
$$\therefore\ a=2$$

점 $(-1,\ 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$2=2-6+k \qquad \therefore\ k=6$$
$$\therefore\ a+k=8$$

답 ③

34 $f(x)=x^2-3x+3$, $g(x)=-x^2+5$라 하면

$$f'(x)=2x-3,\ g'(x)=-2x$$

점 P의 x좌표를 $t\ (t>0)$라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$$t^2-3t+3=-t^2+5, \qquad 2t^2-3t-2=0$$
$$(2t+1)(t-2)=0 \qquad \therefore\ t=2\ (\because\ t>0)$$
$$\therefore\ \mathrm{P}(2,\ 1)$$

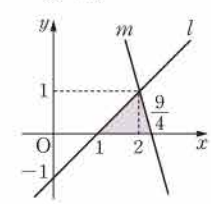
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4-3=1$이므로 직선 l의 방정식은

$$y-1=x-2 \qquad \therefore\ y=x-1$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $g'(2)=-4$이므로 직선 m의 방정식은

$$y-1=-4(x-2) \qquad \therefore\ y=-4x+9$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{9}{4}-1\right)\cdot1=\frac{5}{8}$$

답 $\frac{5}{8}$

35 함수 $f(x)=2(x-a)(x-b)+5$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $f(a)=f(b)=5$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다. 이때

$$f'(x)=2(x-b)+2(x-a)=4x-2a-2b$$

이므로

$$4c-2a-2b=0$$
$$\therefore\ c=\frac{a+b}{2}$$

답 ④

36 ㄱ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)=0$이므로 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 롤의 정리를 적용할 수 있다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다. 즉 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하지 않은 점이 존재하므로 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 롤의 정리를 적용할 수 없다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)=3$이므로 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 롤의 정리를 적용할 수 있다.

이상에서 롤의 정리를 적용할 수 있는 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

37 함수 $f(x)=x^3-5x^2+3x+10$은 닫힌구간 $[-1,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ a)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-1)=f(a)$이어야 하므로

$$-1-5-3+10=a^3-5a^2+3a+10$$

$$a^3-5a^2+3a+9=0,\qquad (a+1)(a-3)^2=0$$

$$\therefore a=3\ (\because a>-1)$$

Q BOX

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & 3 & 9 \\ & & -1 & 6 & -9 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore a^3-5a^2+3a+9$
$=(a+1)(a^2-6a+9)$
$=(a+1)(a-3)^2$

한편 $f'(b)=0$인 b가 열린구간 $(-1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-10x+3$이므로

$$3b^2-10b+3=0,\qquad (3b-1)(b-3)=0$$

$$\therefore b=\frac{1}{3}\ (\because -1<b<3)$$

$$\therefore ab=1$$

답 ②

38 (가) 0 (나) 상수

답 ①

39 함수 $g(x)=f(x)+x$는 닫힌구간 $[1,\ 6]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 6)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$f(x)$가 미분가능한 함수이므로 $g(x)=f(x)+x$도 미분가능한 함수이다. 즉 $g(x)=f(x)+x$는 연속함수이다.

$$\frac{g(6)-g(1)}{6-1}=g'(c)$$

인 c가 열린구간 $(1,\ 6)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $g'(x)=f'(x)+1$이므로

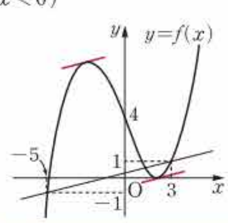
$$\frac{\{f(6)+6\}-\{f(1)+1\}}{6-1}=f'(c)+1$$

$$\frac{16-(-4)}{5}=f'(c)+1$$

$$\therefore f'(c)=3$$

답 ⑤

40 $f(x)=\begin{cases} (x-2)^2 & (x\ge 0) \\ -(x+2)^2+8 & (x<0) \end{cases}$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 닫힌구간 $[-5,\ 3]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-5,\ -1)$, $(3,\ 1)$을 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.



$f(-5)=-25+20+4$
$=-1,$
$f(3)=9-12+4=1$

위의 그림과 같이 두 점 $(-5,\ -1)$, $(3,\ 1)$을 지나는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있으므로 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 개수는 2이다.

답 2

참고 $f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & (x>0) \\ -2x-4 & (x<0) \end{cases}$이므로

$$\lim_{x\to 0+}f'(x)=\lim_{x\to 0+}(2x-4)=-4,$$

$$\lim_{x\to 0-}f'(x)=\lim_{x\to 0-}(-2x-4)=-4$$

에서 $\lim_{x\to 0}f'(x)=-4$

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-5,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-5,\ 3)$에서 미분가능하다.

다른 풀이 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-5,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-5,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(-5)}{3-(-5)}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(-5,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

즉 $\dfrac{1-(-1)}{3-(-5)}=f'(c)$에서

$$f'(c)=\frac{1}{4}$$

이때 $f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & (x>0) \\ -2x-4 & (x<0) \end{cases}$이므로

$2c-4=\dfrac{1}{4}$에서 $\quad c=\dfrac{17}{8}$

$-2c-4=\dfrac{1}{4}$에서 $\quad c=-\dfrac{17}{8}$

따라서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 $-\dfrac{17}{8}$, $\dfrac{17}{8}$의 2개이다.

41 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-5,\ x+5]$에서 연속이고 열린구간 $(x-5,\ x+5)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+5)-f(x-5)}{(x+5)-(x-5)}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(x-5,\ x+5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x\longrightarrow\infty$이면 $c\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x+5)-f(x-5)\}$$

$$=10\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+5)-f(x-5)}{(x+5)-(x-5)}$$

$$=10\lim_{c\to\infty}f'(c)$$

$$=10\cdot 7=70$$

답 ④

도전! 수능 기출

W 31쪽

01 1st 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 구한다.

점 $(0,\ 0)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(0)=0$$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=c$이므로 접선의 방정식은

$$y=cx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

2nd 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식을 구한다.

점 $(1,\ 2)$가 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점이므로

$$f(1)=2$$

$y'=f(x)+xf'(x)$이므로 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$$f(1)+f'(1)=2+(3a+2b+c)$$
$$=3a+2b+c+2$$

즉 접선의 방정식은

$$y-2=(3a+2b+c+2)(x-1)$$
$$\therefore\ y=(3a+2b+c+2)x-3a-2b-c\ \cdots\ ㉡$$

3rd $a,\ b,\ c$의 값을 구한다.

㉠, ㉡이 일치해야 하므로

$$3a+2b+c+2=c,\ -3a-2b-c=0$$
$$\therefore\ 3a+2b=-2,\ c=2$$

$3a+2b=-2$, $3a+2b=-c$ 이므로 $c=2$

이때 $f(x)=ax^3+bx^2+2x$이므로 $f(1)=2$에서

$$a+b+2=2\qquad \therefore\ a+b=0$$
$$\therefore\ a=-2,\ b=2$$

$3a+2b=-2$, $a+b=0$을 연립하여 푼다.

4th $f'(2)$의 값을 구한다.

따라서 $f'(x)=-6x^2+4x+2$이므로

$$f'(2)=-24+8+2=-14$$

답 ⑤

다른 풀이 점 $(0,\ 0)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(0)=0$$

점 $(1,\ 2)$가 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점이므로

$$f(1)=2$$

$g(x)=xf(x)$라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 일치하므로 이 접선의 기울기는

두 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기

$$\frac{2-0}{1-0}=2$$
$$\therefore\ f'(0)=2,\ g'(1)=2$$

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로 $g'(1)=2$에서

$$f(1)+f'(1)=2$$
$$\therefore\ f'(1)=2-f(1)=0$$

이때 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 상수, $a\neq0$)라 하면

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$f(0)=0,\ f(1)=2$에서

$$d=0,\ a+b+c=2\qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

또 $f'(0)=2,\ f'(1)=0$에서

$$c=2,\ 3a+2b+2=0\qquad \cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$a=-2,\ b=2$$

따라서 $f'(x)=-6x^2+4x+2$이므로

$$f'(2)=-24+8+2=-14$$

02 1st b의 값을 구한다.

$f(x)=x^3+ax$에서

$$f'(x)=3x^2+a$$

점 $\mathrm{A}(-1,\ -1-a)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=3+a$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(-1-a)=(3+a)\{x-(-1)\}$$
$$\therefore\ y=(3+a)x+2$$

이 접선과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3+ax=(3+a)x+2$에서

$$x^3-3x-2=0,\qquad (x+1)^2(x-2)=0$$
$$\therefore\ x=-1\ 또는\ x=2$$
$$\therefore\ b=2$$

2nd c의 값을 구한다.

점 $\mathrm{B}(2,\ 8+2a)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=12+a$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(8+2a)=(12+a)(x-2)$$
$$\therefore\ y=(12+a)x-16$$

이 접선과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3+ax=(12+a)x-16$에서

$$x^3-12x+16=0,\qquad (x+4)(x-2)^2=0$$
$$\therefore\ x=-4\ 또는\ x=2$$
$$\therefore\ c=-4$$

3rd a의 값을 구한다.

$f(2)+f(-4)=-80$이므로

$$(8+2a)+(-64-4a)=-80$$
$$-2a-56=-80\qquad \therefore\ a=12$$

답 ③

03 1st 직선 AB의 기울기를 구한다.

정사각형 ABCD에서 두 대각선의 교점이 원점 O이므로 $\triangle\mathrm{ABO}$는 $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{BO}}$인 직각이등변삼각형이다.

즉 직선 AB의 기울기는 1이다.

(직선 AB의 기울기) $=\dfrac{\overline{\mathrm{AO}}}{\overline{\mathrm{BO}}}=1$

2nd 직선 AB와 곡선 $y=x^3-5x$의 접점의 좌표를 구한다.

$f(x)=x^3-5x$라 하면 $\qquad f'(x)=3x^2-5$

직선 AB와 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를

$(t,\ t^3-5t)$ $(t<0)$라 하면 직선 AB의 기울기가 1이므로

제2사분면 위의 점

$$f'(t)=1,\qquad 3t^2-5=1,\qquad t^2=2$$
$$t=-\sqrt{2}\ (\because\ t<0)$$

따라서 접점의 좌표는 $(-\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})$이다.

$-2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

3rd $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 구한다.

직선 AB의 방정식은

$$y-3\sqrt{2}=x-(-\sqrt{2})\qquad \therefore\ y=x+4\sqrt{2}$$

두 점 A, B의 좌표는 각각

$$(0,\ 4\sqrt{2}),\ (-4\sqrt{2},\ 0)$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-4\sqrt{2}-0)^2+(0-4\sqrt{2})^2}=8$$

4th 정사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구한다.

정사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$4\overline{\mathrm{AB}}=4\cdot8=32$$

답 32

04 1st 두 접선 $l,\ m$의 방정식을 구한다.

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-kx^2+1$에서 $\qquad f'(x)=x^2-2kx$

두 점 A, B의 x좌표는 $x^2-2kx=3k^2$에서

접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다.

$$x^2-2kx-3k^2=0,\qquad (x+k)(x-3k)=0$$
$$\therefore\ x=-k\ 또는\ x=3k$$

$A\left(-k,\ 1-\frac{4}{3}k^3\right)$, $B(3k,\ 1)$이라 하면 접선 l의 방정식은

$$y-\left(1-\frac{4}{3}k^3\right)=3k^2\{x-(-k)\}$$

$$\therefore\ y=3k^2x+\frac{5}{3}k^3+1$$

접선 m의 방정식은

$$y-1=3k^2(x-3k)$$

$$\therefore\ y=3k^2x-9k^3+1$$

2nd 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선의 방정식을 구한다.

곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선의 기울기는 모두 0이므로 두 접점의 x좌표는 $x^2-2kx=0$에서

$$x(x-2k)=0$$

$$\therefore\ x=0 \text{ 또는 } x=2k$$

점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

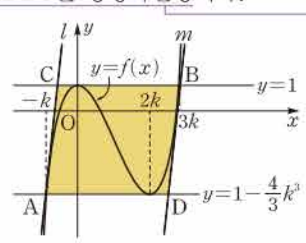
$$y=1$$

점 $\left(2k,\ 1-\frac{4}{3}k^3\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y=1-\frac{4}{3}k^3$$

3rd k의 값을 구한다.

다음 그림과 같이 직선 l과 직선 $y=1$의 교점을 C, 직선 m과 직선 $y=1-\frac{4}{3}k^3$의 교점을 D라 하면 두 직선 $y=1$, $y=1-\frac{4}{3}k^3$과 두 직선 l, m으로 둘러싸인 도형, 즉 □ADBC는 평행사변형이다.



이때 점 D의 x좌표는 $3k^2x-9k^3+1=1-\frac{4}{3}k^3$에서

$$3k^2x=\frac{23}{3}k^3$$

$$\therefore\ x=\frac{23}{9}k\ (\because\ k\neq0)$$

즉 $D\left(\frac{23}{9}k,\ 1-\frac{4}{3}k^3\right)$이므로

$$\overline{AD}=\frac{23}{9}k-(-k)=\frac{32}{9}k$$

따라서 평행사변형 ADBC의 넓이는

$$\frac{32}{9}k\cdot\frac{4}{3}k^3=\frac{128}{27}k^4$$

즉 $\frac{128}{27}k^4=24$이므로

$$k^4=\frac{81}{16}\qquad \therefore\ k=\frac{3}{2}\ (\because\ k>0)$$

답 ③

Q BOX

$f(-k)$
$=-\frac{1}{3}k^3-k^3+1$
$=1-\frac{4}{3}k^3$,
$f(3k)=9k^3-9k^3+1$
$=1$

점 B는 직선 $y=1$ 위의 점이다.

$f(2k)=\frac{8}{3}k^3-4k^3+1$
$=1-\frac{4}{3}k^3$

점 A는 직선 $y=1-\frac{4}{3}k^3$ 위의 점이다.

$\overline{CA}\,/\!/\,\overline{BD}$, $\overline{CB}\,/\!/\,\overline{AD}$

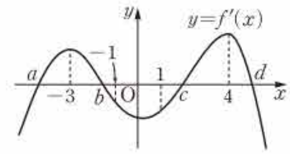
평행사변형의 높이는
$1-\left(1-\frac{4}{3}k^3\right)=\frac{4}{3}k^3$

두 함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프의 위치 관계를 이용하여 $h'(x)$의 부호를 파악한다.

05 도함수의 활용 (2)

Ⓦ 32쪽

01 다음 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 $a,\ b,\ c,\ d\ (a<b<c<d)$라 하자.



① 구간 $(a,\ -3)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
② 구간 $(b,\ -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
③ 구간 $(-1,\ 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
④ 구간 $(1,\ c)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
⑤ 구간 $(4,\ d)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

답 ③

02 $f'(x)=3x^2+2ax+5b$

함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 $[-5,\ 3]$이므로 이차부등식 $f'(x)\le0$의 해가 $-5\le x\le3$이다.
따라서 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 -5, 3이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-5+3=-\frac{2a}{3},\ -5\cdot3=\frac{5b}{3}$$

$$\therefore\ a=3,\ b=-9$$

$$\therefore\ a+b=-6$$

답 -6

03 $f'(x)=12x^2-6x-a$

함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위가 $x\le-2$ 또는 $x\ge b$이므로 이차부등식 $f'(x)\ge0$의 해가 $x\le-2$ 또는 $x\ge b$이다.
따라서 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 -2, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+b=-\frac{-6}{12},\ -2\cdot b=\frac{-a}{12}$$

$$\therefore\ a=60,\ b=\frac{5}{2}$$

$$\therefore\ ab=150$$

답 ⑤

04 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

① 구간 $(b,\ c)$에서 $f'(x)<g'(x)$이므로
$f'(x)-g'(x)<0$, 즉 $h'(x)<0$
따라서 구간 $(b,\ c)$에서 $h(x)$는 감소한다.
② 구간 $(b,\ d)$에서 $f'(x)<g'(x)$이므로
$f'(x)-g'(x)<0$, 즉 $h'(x)<0$
따라서 구간 $(b,\ d)$에서 $h(x)$는 감소한다.

③ 구간 (c, e)에서 $f'(x)<g'(x)$이므로

$f'(x)-g'(x)<0$, 즉 $h'(x)<0$

따라서 구간 (c, e)에서 $h(x)$는 감소한다.

④ 구간 (d, e)에서 $f'(x)<g'(x)$이므로

$f'(x)-g'(x)<0$, 즉 $h'(x)<0$

따라서 구간 (d, e)에서 $h(x)$는 감소한다.

⑤ 구간 (e, ∞)에서 $f'(x)>g'(x)$이므로

$f'(x)-g'(x)>0$, 즉 $h'(x)>0$

따라서 구간 (e, ∞)에서 $h(x)$는 증가한다.

답 ⑤

05 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

$f'(x)=x^2+2ax+3a$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a\le0$

$a(a-3)\le0$ $\quad\therefore 0\le a\le3$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$0+1+2+3=6$

답 6

모든 실수 x에 대하여 이 차부등식 $ax^2+bx+c\ge0\ (a>0)$ 이 성립하려면 $b^2-4ac\le0$

06 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

$f'(x)=15x^2+6kx+k$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(3k)^2-15\cdot k\le0$

$9k^2-15k\le0,\quad k(3k-5)\le0$

$\therefore 0\le k\le\frac{5}{3}$ ...... ㉠

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le0$이어야 한다.

$g'(x)=-3x^2+2(k-1)x-(k-1)$이므로 이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(k-1)^2-(-3)\cdot\{-(k-1)\}\le0$

$k^2-5k+4\le0,\quad (k-1)(k-4)\le0$

$\therefore 1\le k\le4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1\le k\le\frac{5}{3}$

답 ③

모든 실수 x에 대하여 이 차부등식 $ax^2+bx+c\le0\ (a<0)$ 이 성립하려면 $b^2-4ac\le0$

07 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$는 일대일함수이어야 한다.

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 한다.

다항함수 $g(x)$가 일대일함수일 때, $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, 음수이면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

$f'(x)=-3x^2-4(a+2)x+6a$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(a+2)\}^2-(-3)\cdot6a\le0$

$4a^2+34a+16\le0,\quad (2a+1)(a+8)\le0$

$\therefore -8\le a\le-\frac{1}{2}$

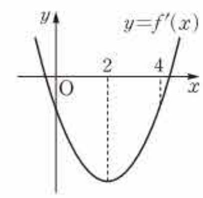
따라서 정수 a는 $-8, -7, -6, \cdots, -1$의 8개이다.

답 ③

08 함수 $f(x)$가 $2<x<4$에서 감소하려면 $2<x<4$에서 $f'(x)\le0$이어야 한다.

$y=x^2-4x+2a$
$=(x-2)^2+2a-4$
의 그래프는 아래로 볼록하고 축의 방정식이 $x=2$인 포물선이다.

$f'(x)=x^2-4x+2a$이고, 오른쪽 그림에서



$f'(2)\le0$이어야 하므로

$4-8+2a\le0$

$\therefore a\le2$ ...... ㉠

$f'(4)\le0$이어야 하므로

$16-16+2a\le0$

$\therefore a\le0$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

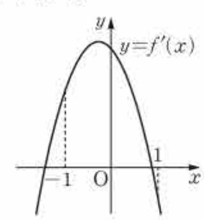
$a\le0$

답 ①

참고 함수 $f'(x)$는 $x=2$에서 최솟값을 가지므로 $f'(4)\le0$이면 $f'(2)\le0$도 성립함을 알 수 있다. 즉 $f'(4)\le0$을 만족시키는 a의 값의 범위만 생각해도 된다.

09 함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 0)$에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x)\ge0$이어야 하고, 구간 $(1, \infty)$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\le0$이어야 한다.

$f'(x)=-6x^2+2kx-4k$이고, 오른쪽 그림에서



$f'(-1)\ge0$이어야 하므로

$-6-2k-4k\ge0$

$\therefore k\le-1$ ...... ㉠

$f'(0)\ge0$이어야 하므로

$-4k\ge0$

$\therefore k\le0$ ...... ㉡

$f'(1)\le0$이어야 하므로

$-6+2k-4k\le0$

$\therefore k\ge-3$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$-3\le k\le-1$

따라서 정수 k는 $-3, -2, -1$의 3개이다.

답 3

10 $f'(x)=3x^2-2(a+3)x+a$

점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-2(a+3)t+a$

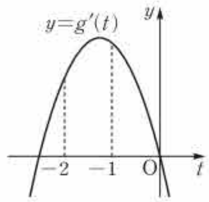
이므로 접선의 방정식은

$y-\{t^3-(a+3)t^2+at\}$
$=\{3t^2-2(a+3)t+a\}(x-t)$

$\therefore y=\{3t^2-2(a+3)t+a\}x-2t^3+(a+3)t^2$

즉 $g(t)=-2t^3+(a+3)t^2$이므로 함수 $g(t)$가 구간 $(-2,\ -1)$에서 증가하려면 이 구간에서 $g'(t)\ge 0$이어야 한다.

$g'(t)=-6t^2+2(a+3)t$이고, 오른쪽 그림에서



$g'(-2)\ge 0$이어야 하므로

$-24-4(a+3)\ge 0$

$\therefore a\le -9$ …… ㉠

$g'(-1)\ge 0$이어야 하므로

$-6-2(a+3)\ge 0$

$\therefore a\le -6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a\le -9$

따라서 a의 최댓값은 -9이다. 답 ②

11 $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	…	-2	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	21	↘	-6	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -6을 가지므로

$a=1,\ b=-6$

$\therefore a-b=7$ 답 7

12 $f'(x)=-4x^3-16x^2-12x$

$=-4x(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

x	…	-3	…	-1	…	0	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	12	↘	$\frac{4}{3}$	↗	3	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 12, $x=0$에서 극댓값 3을 가지므로 모든 극댓값의 합은

$12+3=15$ 답 ④

13 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f'(1)=0$에서

$3+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=-3$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 기울기가 -8이므로 $f'(-1)=-8$에서

$3-2a+b=-8$

$\therefore 2a-b=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-7$

$\therefore a+b=-5$ 답 -5

절댓값이 같고 그 부호가 서로 다른 두 수의 합은 0이다.

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 p를 갖는다.
➡ $f(a)=p,\ f'(a)=0$

14 $f'(x)=-3x^2+6x+24$

$=-3(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

x	…	-2	…	4	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$k-28$	↗	$k+80$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값 $k+80$, $x=-2$에서 극솟값 $k-28$을 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로

$(k+80)+(k-28)=0,\quad 2k+52=0$

$\therefore k=-26$ 답 ③

15 함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극댓값을 갖고, $x=0$에서 극솟값을 가지므로

$f'(-3)=0,\ f'(0)=0$

$f'(x)=6x^2+2ax+b$이므로 $f'(-3)=0$에서

$54-6a+b=0$

$\therefore 6a-b=54$ …… ㉠

$f'(0)=0$에서 $b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면

$6a=54 \quad \therefore a=9$

따라서 $f(x)=2x^3+9x^2+c$이고 극댓값이 극솟값의 10배이므로

$f(-3)=10f(0),\quad -54+81+c=10c$

$9c=27 \quad \therefore c=3$

$\therefore a-b+c=12$ 답 ⑤

16 조건 ㈎에서 $x\longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\longrightarrow 0$이므로 (분자)$\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ ($a,\ b,\ c$는 상수, $a\ne 0$)라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^3+bx^2+cx}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(ax^2+bx+c)=c$$

$\therefore c=12$

$f(x)=ax^3+bx^2+12x$이고, 조건 ㈏에서

$f(2)=20,\ f'(2)=0$

$f(2)=20$에서 $8a+4b+24=20$

$\therefore 2a+b=-1$ …… ㉠

$f'(x)=3ax^2+2bx+12$이므로 $f'(2)=0$에서

$12a+4b+12=0$

$\therefore 3a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=3$

즉 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x$이므로

$f'(x)=-6x^2+6x+12$

$=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-7	↗	20	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -7을 갖는다.

답 -7

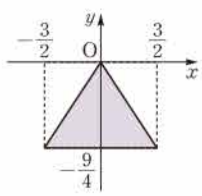
17 $f'(x)=\frac{16}{9}x^3-4x=\frac{4}{9}x(2x+3)(2x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{9}{4}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0, $x=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{3}{2}$에서 극솟값 $-\frac{9}{4}$를 갖는다.

즉 구하는 △ABC의 넓이는 세 점 $(0, 0)$, $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이이므로 오른쪽 그림에서



$$\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\cdot\frac{9}{4}=\frac{27}{8}$$

답 ④

18 $f'(x)=3x^2+2(2a-3)x-3$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소라 하면 α, β는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이다.

이때 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$가 원점에 대하여 대칭이므로

$\beta=-\alpha \qquad \therefore \alpha+\beta=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2(2a-3)}{3}=0 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$

$f(x)=x^3-3x$이므로

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 2를 갖는다.

답 ④

19 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -4를 가지므로

$f(1)=-4$, $f'(1)=0$

$g(x)=(2x-3)f(x)$에서

$g'(x)=2f(x)+(2x-3)f'(x)$

Q BOX

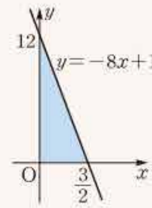
$g(1)=-f(1)=4$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는

$g'(1)=2f(1)-f'(1)=2\cdot(-4)=-8$

이므로 접선의 방정식은

$y-4=-8(x-1) \qquad \therefore y=-8x+12$



이 직선의 x절편이 $\frac{3}{2}$, y절편이 12이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 12=9$

답 9

20 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서 $x\longrightarrow\infty$일 때 $f(x)\longrightarrow\infty$이므로

$a>0$

또 그래프가 y축과 음의 부분에서 만나므로

$d<0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 α, β이고, $\alpha<0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta<0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2b}{3a}<0$, $\frac{c}{3a}<0$

$\alpha<0$, $\beta>0$이므로 $\alpha\beta<0$

이때 $a>0$이므로 $\qquad b>0$, $c<0$

$\therefore ab>0$, $ac<0$, $ad<0$,

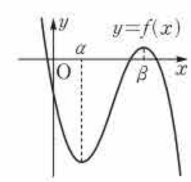
$bc<0$, $bd<0$, $cd>0$

따라서 음수인 것은 ac, ad, bc, bd의 4개이다. 답 ③

21 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$의 그래프가 y축과 음의 부분에서 만나므로

$c<0$

오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대라 하면 $f'(x)=-3x^2+2ax+b$에서 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 α, β이고, α, β는 서로 다른 두 양수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여



$-\frac{2a}{-3}>0$, $\frac{b}{-3}>0$

$\alpha>0$, $\beta>0$이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

$\therefore a>0$, $b<0$

$\therefore \frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=\frac{a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}$

$=1-1-1$

$=-1$

답 -1

22 ① 구간 $(-3, -2)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

② 구간 $(0, 1)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

③ $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖지 않는다.

④, ⑤ $f'(-2)=0$, $f'(4)=0$이고 $x=-2$, $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-2$, $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

$f'(1)=0$이고 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다.
따라서 구간 $(-3, 5)$에서 극댓값을 갖는 x의 값은 1개, 극솟값을 갖는 x의 값은 2개로 같지 않다.

답 ④

23 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$
$y=f'(x)$의 그래프와 $y=g'(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표가 a, c, e이므로 $h'(x)=0$에서

$x=a$ 또는 $x=c$ 또는 $x=e$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	c	$\cdots$	e	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

$y=f'(x)$의 그래프가 $y=g'(x)$의 그래프보다 위쪽에 있을 때
➡ $h'(x)>0$
아래쪽에 있을 때
➡ $h'(x)<0$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=c$에서 극솟값을 갖는다.

답 ③

24 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -4, 0이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-4$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로 $f'(0)=0$에서

$c=0$

$f'(-4)=0$에서

$48a-8b+c=0$

$\therefore 6a-b=0$ …… ㉠

$f(0)=3$에서 $d=3$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 3을 갖는다.

즉 $f(x)=ax^3+bx^2+3$이므로 $f(-4)=-5$에서

함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극솟값 -5를 갖는다.

$-64a+16b+3=-5$

$\therefore 8a-2b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{4}$, $b=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3$이므로

$f(4)=-16-24+3=-37$

답 ②

25 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 a, b, c이므로 $f'(x)=0$에서

$x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소, $x=c$에서 극대이고, $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=b$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다.

답 ③

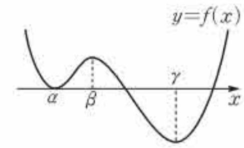
삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

26 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 α, β, γ이므로 $f'(x)=0$에서

$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$f(\gamma)<0=f(\alpha)<f(\beta)$이므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



① $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.
② $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$에서 극값을 가지므로 극값을 갖는 x의 값은 3개이다.
③ $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\beta$에 대하여 대칭이 아니다.
④ $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이고 $f(\alpha)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $x=\alpha$에서 x축에 접한다.
⑤ $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만난다.

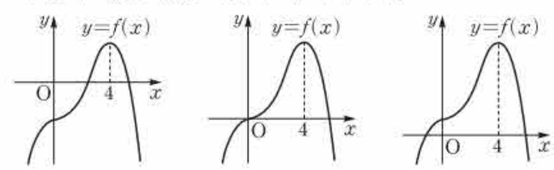
답 ④

27 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 4이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘

이때 $f(4)>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 다음의 세 가지이다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.

답 2

28 $f'(x)=-3x^2+2ax+a$
삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(-3)\cdot a\le 0$

$a^2+3a\le 0$, $a(a+3)\le 0$

$\therefore -3\le a\le 0$

답 $-3\le a\le 0$

29 $f'(x)=3kx^2+12x+2k$
삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=6^2-3k\cdot 2k>0,\quad 36-6k^2>0$

$k^2-6<0,\quad (k+\sqrt{6})(k-\sqrt{6})<0$

$\therefore\ -\sqrt{6}<k<0$ 또는 $0<k<\sqrt{6}$

$f(x)$가 삼차함수이므로 $k\neq 0$

따라서 정수 k는 $-2,\ -1,\ 1,\ 2$이므로 구하는 곱은

$-2\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2=4$ 답 ④

30 $f'(x)=3x^2+2ax+3$이고, 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3\cdot 3\le 0$

$a^2-9\le 0,\quad (a+3)(a-3)\le 0$

$\therefore\ -3\le a\le 3$ …… ㉠

$g'(x)=-6x^2+6ax+3a$이고, 삼차함수 $g(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $g'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(3a)^2-(-6)\cdot 3a>0$

$9a^2+18a>0,\quad a(a+2)>0$

$\therefore\ a<-2$ 또는 $a>0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3\le a<-2$ 또는 $0<a\le 3$

따라서 정수 a는 $-3,\ 1,\ 2,\ 3$의 4개이다. 답 ①

31 함수 $y=f(x)$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 x축과 오직 한 점에서만 만나려면 $f(x)$가 극값을 갖지 않아야 한다.

$f'(x)=x^2+4ax+9$이고, 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-1\cdot 9\le 0$

$4a^2-9\le 0,\quad (2a+3)(2a-3)\le 0$

$\therefore\ -\frac{3}{2}\le a\le\frac{3}{2}$

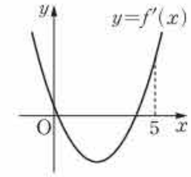
따라서 a의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이다. 답 $\frac{3}{2}$

참고 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는 경우에는 (극댓값)<0 또는 (극솟값)>0일 때에만 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만난다. 따라서 이 경우에는 k의 값에 따라 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 달라진다.

32 $f'(x)=2x^2-8x+a$

삼차함수 $f(x)$가 $x<5$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x<5$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면



$\frac{D}{4}=(-4)^2-2a>0$

$16-2a>0$

$\therefore\ a<8$

(ii) $f'(5)>0$에서

$50-40+a>0$

$\therefore\ a>-10$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이고 $2<5$이다.

$2x^2-8x+a$
$=2(x-2)^2+a-8$

이상에서 a의 값의 범위는

$-10<a<8$

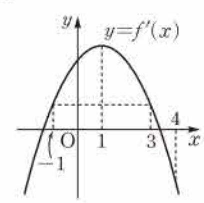
따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

33 $f'(x)=-6x^2+12x+a$

삼차함수 $f(x)$가 구간 $(-1,\ 4)$에서 오직 하나의 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 구간 $(-1,\ 4)$에서 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

이때 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이므로

$-6x^2+12x+a$
$=-6(x-1)^2+a+6$



$f'(-1)=f'(3)$

$f'(3)\ge 0$에서

$-54+36+a\ge 0$

$\therefore\ a\ge 18$ …… ㉠

$f'(4)<0$에서

$-96+48+a<0$

$\therefore\ a<48$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$18\le a<48$

따라서 정수 a는 $18,\ 19,\ 20,\ \cdots,\ 47$의 30개이다.

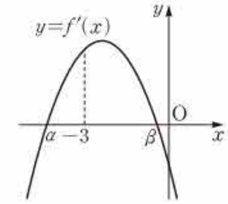
답 ③

34 $f'(x)=3ax^2+12ax-6$

삼차함수 $f(x)$가 $x>-3$에서 극댓값, $x<-3$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$라 할 때, $\alpha<-3$, $\beta>-3$이고 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$에서 $f'(x)<0$, $\alpha<x<\beta$에서 $f'(x)>0$이어야 한다.

$3a<0$에서

이차함수 $y=f'(x)$의 그래프는 위로 볼록해야 한다.



$a<0$ …… ㉠

$f'(-3)>0$에서

$27a-36a-6>0$

$\therefore\ a<-\frac{2}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a<-\frac{2}{3}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. 답 ③

35 $f'(x)=12x^3+12x^2+2ax=2x(6x^2+6x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $6x^2+6x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $6x^2+6x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$a\neq0,\ \frac{D}{4}=3^2-6a>0$$

에서 $\quad a\neq0,\ a<\frac{3}{2}$

$$\therefore a<0 \text{ 또는 } 0<a<\frac{3}{2}$$

답 ④

Q BOX

$x=0$이 이차방정식 $6x^2+6x+a=0$의 근이 아니어야 하므로
$0+0+a\neq0$
$\therefore a\neq0$

36 $f'(x)=-12x^3+6x^2-6(a-1)x+6a$

$=-6\{2x^3-x^2+(a-1)x-a\}$

$=-6(x-1)(2x^2+x+a)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -1 & a-1 & -a \\ & & 2 & 1 & a \\ \hline & 2 & 1 & a & 0 \end{array}$$

$\therefore 2x^3-x^2+(a-1)x-a$
$=(x-1)(2x^2+x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우
$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=1$이므로 이차방정식 $2x^2+x+a=0$이 두 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $2x^2+x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=1^2-4\cdot2\cdot a<0 \qquad \therefore a>\frac{1}{8}$$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우
$f'(0)=0$의 한 실근이 $x=1$이므로 이차방정식 $2x^2+x+a=0$이 $x=1$을 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.
이차방정식 $2x^2+x+a=0$이 $x=1$을 근으로 가지면

$$2+1+a=0 \qquad \therefore a=-3$$

이차방정식 $2x^2+x+a=0$이 중근을 가지면 판별식을 D라 할 때,

$$D=1^2-4\cdot2\cdot a=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{8}$$

(i), (ii)에서

$$a=-3 \text{ 또는 } a\geq\frac{1}{8}$$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. 답 1

참고 $2x^2+x+a=0$이 중근을 갖는 경우 $a=\frac{1}{8}$이므로
$2x^2+x+\frac{1}{8}=0$에서 $\quad 2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=0 \qquad \therefore x=-\frac{1}{4}$
따라서 $2x^2+x+a=0$이 $x=1$을 중근으로 가질 수 없으므로 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

37 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 α, b, β이므로 $f'(x)=0$에서

$x=\alpha$ 또는 $x=b$ 또는 $x=\beta$

x	α	$\cdots$	b	$\cdots$	β
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 구간 $[\alpha, \beta]$에서 함수 $f(x)$는 $x=b$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(b)$이다.

답 ②

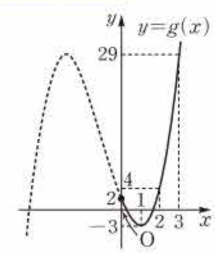
구간 $[a, b]$에서 연속함수 $f(x)$의 극값이 오직 하나 존재할 때 극값이 극솟값이면
(극솟값)=(최솟값)

38 $g(x)=x^3+3x^2-9x+2$라 하면

$g'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=1$ ($\because x\geq0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	2	↘	-3	↗



$a=1$일 때, 구간 $[0, 1]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(0)=2$이므로

$f(1)=2$

$a=2$일 때, 구간 $[0, 2]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(2)=4$이므로

$f(2)=4$

$a=3$일 때, 구간 $[0, 3]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(3)=29$이므로

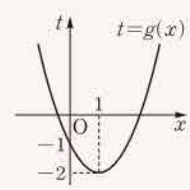
$f(3)=29$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)=35$ 답 ③

39 $g(x)=t$로 놓으면

$t=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$

이므로 $\quad t\geq-2$



이때

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-12t+5$

이므로

$f'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=-2$ 또는 $t=2$

t	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	21	↘	-11	↗

따라서 $t\geq-2$에서 함수 $f(t)$는 $t=2$일 때 최솟값 -11을 갖는다. 답 -11

40 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-5$	↗	k	↘	$k-1$	↗	$k+4$

따라서 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $k+4$, $x=-1$일 때 최솟값 $k-5$를 가지므로

$k-5<k-1<k<k+4$

$k-5=-7$

$\therefore k=-2$

즉 함수 $f(x)$의 최댓값은 2이다.

$k+4=-2+4=2$

답 2

41 $f'(x)=6x^2-2ax$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=-1$인 점에서의 접선의 기울기가 10이므로 $f'(-1)=10$에서

$6+2a=10$

$\therefore a=2$

$f'(x)=6x^2-4x=2x(3x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	↘	$b-\frac{8}{27}$	↗	b

따라서 구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$일 때 최댓값 b, $x=\frac{2}{3}$일 때 최솟값 $b-\frac{8}{27}$을 가지므로

$b=9\left(b-\frac{8}{27}\right)$, $\quad 8b=\frac{8}{3}$

$\therefore b=\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=\frac{7}{3}$ 답 $\frac{7}{3}$

42 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=-3$, $x=1$에서 극값을 가지므로 $\quad f'(-3)=0$, $f'(1)=0$

$f'(-3)=0$에서 $\quad 27-6a+b=0$

$\therefore 6a-b=27$ ⋯⋯ ㉠

$f'(1)=0$에서 $\quad 3+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=-3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-9$

$\therefore f(x)=x^3+3x^2-9x+c$

x	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$c+27$	↘	$c-5$	↗	$c+2$

따라서 구간 $[-3, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-3$일 때 최댓값 $c+27$, $x=1$일 때 최솟값 $c-5$를 가지므로 조건 (나)에서

$c+27=30 \quad \therefore c=3$

즉 함수 $f(x)$의 최솟값은 -2이다. 답 ②

$c-5=3-5=-2$

43 곡선 $y=x(x-3)^2$이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $x(x-3)^2=0$에서

$x=0$ 또는 $x=3$

$\therefore A(3, 0)$

점 P의 좌표를 $(t, t(t-3)^2)$ $(0<t<3)$이라 하면

$Q(t, 0)$, $R(0, t(t-3)^2)$

□OQPR의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=t\cdot t(t-3)^2=t^4-6t^3+9t^2$

$\therefore S'(t)=4t^3-18t^2+18t$

$=2t(2t-3)(t-3)$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=\frac{3}{2}$ $(\because 0<t<3)$

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$\frac{81}{16}$	↘	

따라서 $0<t<3$에서 $S(t)$는 $t=\frac{3}{2}$일 때 최댓값 $\frac{81}{16}$을 가지므로 □OQPR의 넓이의 최댓값은 $\frac{81}{16}$이다.

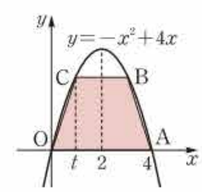
답 $\frac{81}{16}$

44 곡선 $y=-x^2+4x$가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $-x^2+4x=0$에서

$x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

$\therefore A(4, 0)$



오른쪽 그림과 같이 사다리꼴의 두 꼭짓점을 각각 B, C라 하고 점 C의 좌표를 $(t, -t^2+4t)$ $(0<t<2)$라 하면

$B(4-t, -t^2+4t)$

$y=-x^2+4x$
$=-(x-2)^2+4$
의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이므로 두 점 B, C는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

사다리꼴 OABC의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\{(4-2t)+4\}(-t^2+4t)$

$\overline{BC}=(4-t)-t$
$=4-2t$

$=t^3-8t^2+16t$

$\therefore S'(t)=3t^2-16t+16$

$=(3t-4)(t-4)$

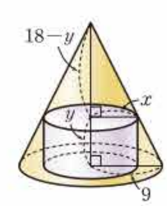
$S'(t)=0$에서 $\quad t=\frac{4}{3}$ $(\because 0<t<2)$

t	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$\frac{256}{27}$	↘	

따라서 $0<t<2$에서 $S(t)$는 $t=\frac{4}{3}$일 때 최대이므로 구하는 높이는

$-\left(\frac{4}{3}\right)^2+4\cdot\frac{4}{3}=\frac{32}{9}$ 답 ③

45 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x $(0<x<9)$, 높이를 y라 하면



$9 : x=18 : (18-y)$

원뿔을 밑면에 평행한 평면으로 자를 때 생기는 원뿔은 처음 원뿔과 닮은 도형이다.

$18-y=2x$

$\therefore y=18-2x$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2(18-2x)$

$=-2\pi x^3+18\pi x^2$

$\therefore V'(x)=-6\pi x^2+36\pi x$

$=-6\pi x(x-6)$

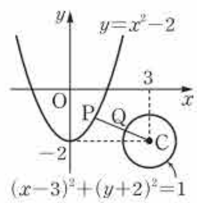
$V'(x)=0$에서 $\quad x=6$ ($\because 0<x<9$)

x	0	$\cdots$	6	$\cdots$	9
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	216π	↘	

따라서 $0<x<9$에서 $V(x)$는 $x=6$일 때 최댓값 216π를 가지므로 원기둥의 부피의 최댓값은 216π이다.

답 ④

46 오른쪽 그림과 같이 원 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$의 중심을 C$(3,\ -2)$라 하고, 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2-2)$라 하면 원의 반지름의 길이가 1이므로



$$\overline{PQ}\ge\overline{PC}-1$$
$$=\sqrt{(3-t)^2+\{-2-(t^2-2)\}^2}-1$$
$$=\sqrt{t^4+t^2-6t+9}-1$$

$f(t)=t^4+t^2-6t+9$라 하면

$$f'(t)=4t^3+2t-6=2(2t^3+t-3)$$
$$=2(t-1)(2t^2+2t+3)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ & & 2 & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$\therefore 2t^3+t-3$
$=(t-1)(2t^2+2t+3)$

$f'(t)=0$에서

$t=1$ ($\because 2t^2+2t+3>0$)

$2t^2+2t+3$
$=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$

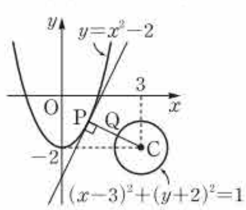
t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	5	↗

따라서 $f(t)$는 $t=1$에서 최솟값 5를 가지므로

$$\overline{PQ}\ge\overline{PC}-1\ge\sqrt{5}-1$$

즉 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}-1$이다. 답 $\sqrt{5}-1$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 원 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$의 중심을 C$(3,\ -2)$라 하고, 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2-2)$라 하자.



$\overline{PC}$의 길이가 최소이려면 곡선 $y=x^2-2$ 위의 점 P에서의 접선과 직선 PC가 서로 수직이어야 한다.

$f(x)=x^2-2$라 하면

$$f'(x)=2x$$

점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이고 직선 PC의 기울기는

$$\frac{-2-(t^2-2)}{3-t}=\frac{t^2}{t-3}$$

이므로 $2t\cdot\frac{t^2}{t-3}=-1$에서

$$2t^3+t-3=0$$
$$(t-1)(2t^2+2t+3)=0$$
$$\therefore t=1\ (\because 2t^2+2t+3>0)$$

점 P의 좌표가 $(1,\ -1)$일 때

$1^2-2=-1$

$$\overline{PC}=\sqrt{(3-1)^2+\{-2-(-1)\}^2}=\sqrt{5}$$

이므로 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은

($\overline{PC}$의 길이의 최솟값)
$-$(원의 반지름의 길이)

$$\sqrt{5}-1$$

도전! 수능 기출

40쪽

01 1st $g(x)$를 구한다.

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지므로

$$g'(2)=0$$

이때 $f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$이므로 $g(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다.

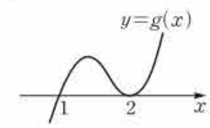
또 $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로

$g(x)=3(x-1)(x-2)^2$ 또는

$g(x)=3(x-2)^2(x-3)$

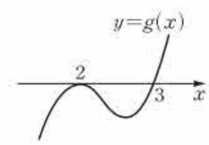
(i) $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$인 경우

$y=g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 $g(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖지 않는다.



(ii) $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$인 경우

$y=g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 $g(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.



(i), (ii)에서 $\quad g(x)=3(x-2)^2(x-3)$

2nd $p+q$의 값을 구한다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot2(x-1)(x-3)+\frac{1}{3}(x-1)^2$$
$$\therefore f'(0)=\frac{1}{3}\cdot2\cdot(-1)\cdot(-3)+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

즉 $p=3,\ q=7$이므로

$$p+q=10$$

답 10

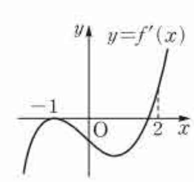
02 1st 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.

$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$에서

$$f'(-1)=0$$

이때 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 감소하려면 $f'(x)\le0$이어야 하므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 $x=-1$일 때 x축에 접해야 한다.

또 $f(x)$가 구간 $(2,\ \infty)$에서 증가하려면 $f'(x)\ge0$이어야 하므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



2nd $f'(x)=0$의 중근이 아닌 나머지 한 근을 α라 할 때, a^2+b^2을 α에 대한 식으로 나타낸다.

삼차방정식 $f'(x)=0$이 $x=-1$을 중근으로 가지므로 나머지 한 근을 α $(0\le\alpha\le2)$라 하면

$$f'(x)=(x+1)^2(x-\alpha)$$

즉 $x^2+ax+b=(x+1)(x-\alpha)$이므로

$(x+1)(x-\alpha)$
$=x^2+(1-\alpha)x-\alpha$

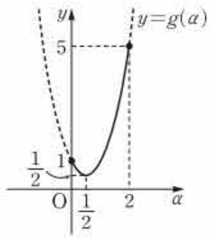
$$a=1-\alpha,\ b=-\alpha$$
$$\therefore a^2+b^2=(1-\alpha)^2+(-\alpha)^2$$
$$=2\alpha^2-2\alpha+1$$

3rd $M+m$의 값을 구한다.

$g(a)=2a^2-2a+1$

$=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

$(0\le a\le 2)$



이라 하면 $y=g(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $g(a)$는 $a=2$에서 최댓값 5, $a=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

따라서 $M=5$, $m=\frac{1}{2}$이므로

$M+m=\frac{11}{2}$ 답 ③

다른 풀이 삼차방정식 $f'(x)=0$이 $x=-1$을 중근으로 가지므로 방정식 $x^2+ax+b=0$은 $x=-1$을 근으로 갖는다.

즉 $1-a+b=0$에서 $b=a-1$

이때 $f'(0)\le 0$에서 $b\le 0$

$a-1\le 0$ $\therefore a\le 1$

또 $f'(2)\ge 0$에서 $3(4+2a+b)\ge 0$

$3(4+2a+a-1)\ge 0$

$a+1\ge 0$ $\therefore a\ge -1$

따라서 $-1\le a\le 1$이고

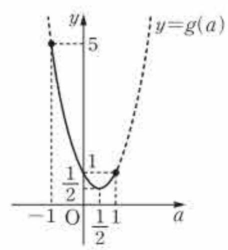
$a^2+b^2=a^2+(a-1)^2$

$=2a^2-2a+1$

$g(a)=2a^2-2a+1$

$=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

$(-1\le a\le 1)$



이라 하면 $y=g(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $g(a)$는 $a=-1$에서 최댓값 5, $a=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

따라서 $M=5$, $m=\frac{1}{2}$이므로

$M+m=\frac{11}{2}$

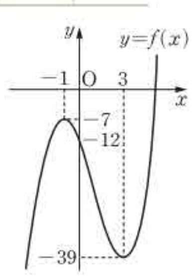
03 1st $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-7	↘	-39	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



Q BOX

2nd 주어진 조건을 만족시키는 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.

조건 (가)에서 $x\neq 0$이면

$$g(x)=\frac{|xf(x-p)+qx|}{x}$$

$$=\frac{|x|}{x}\cdot|f(x-p)+q|$$

$$\therefore g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$$

이때 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$$

즉

$$\lim_{x\to 0+}|f(x-p)+q|=\lim_{x\to 0-}\{-|f(x-p)+q|\}$$

이므로

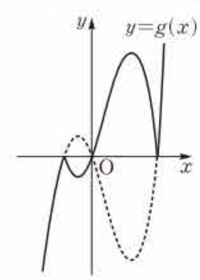
$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

$\therefore f(-p)+q=0$

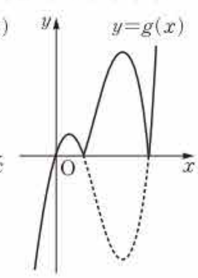
$g(0)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점을 지난다.

즉 함수 $y=f(x-p)+q$의 그래프는 원점을 지나고 $y=f(x-p)+q$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

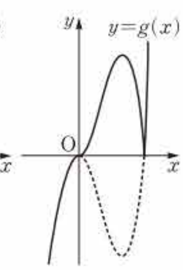
이때 $p>0$, $q>0$이므로 $y=g(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 다음의 5가지이다.



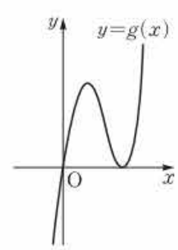
[그림 1]



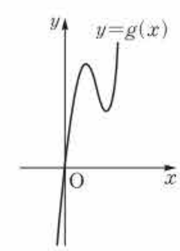
[그림 2]



[그림 3]



[그림 4]



[그림 5]

조건 (나)에서 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점이 1개이어야 하므로 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 3]이다.

[그림 1]과 [그림 2]에서 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점은 2개이고 [그림 4]와 [그림 5]에서 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

3rd $p+q$의 값을 구한다.

[그림 3]에서 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(-1, -7)$을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(0, 0)$이어야 하므로

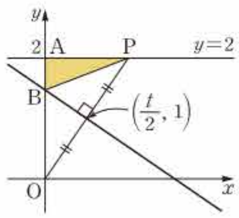
$-1+p=0$, $-7+q=0$

$\therefore p=1$, $q=7$

$\therefore p+q=8$ 답 ③

04 1st 선분 OP의 수직이등분선의 방정식을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 선분 OP의 중점의 좌표는 $\left(\frac{t}{2},\ 1\right)$이고 직선 OP의 기울기가 $\frac{2}{t}$이므로 선분 OP의 수직이등분선의 기울기는 $-\frac{t}{2}$이다.



즉 선분 OP의 수직이등분선의 방정식은

$$y-1=-\frac{t}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right)$$

$$\therefore\ y=-\frac{t}{2}x+\frac{t^2}{4}+1$$

2nd $f(t)$를 구한다.

$\mathrm{B}\left(0,\ \frac{t^2}{4}+1\right)$이므로

$$f(t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\left(1-\frac{t^2}{4}\right)=-\frac{t^3}{8}+\frac{t}{2}$$

3rd $a+b$의 값을 구한다.

$$f'(t)=-\frac{3}{8}t^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}(\sqrt{3}t+2)(\sqrt{3}t-2)$$

$f'(t)=0$에서

$$t=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ (\because\ 0<t<2)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	

따라서 $0<t<2$에서 $f(t)$는 $t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$일 때 최댓값 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$을 가지므로

$a=9,\ b=2$

$\therefore\ a+b=11$ 답 11

Q BOX

점 $\left(\frac{t}{2},\ 1\right)$을 지나고 기울기가 $-\frac{t}{2}$인 직선

$0<t<2$일 때
$1<\frac{t^2}{4}+1<2$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=2-\left(\frac{t^2}{4}+1\right)$
$=1-\frac{t^2}{4}$

이항하여 $f(x)=k$ 꼴로 만든다.

$\frac{1}{4}x^4-x^3+4x+k=0$에서 $-\frac{1}{4}x^4+x^3-4x=k$이므로 $y=-\frac{1}{4}x^4+x^3-4x$의 그래프와 직선 $y=k$를 이용할 수도 있다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ x^3-3x^2+4$
$=(x+1)(x^2-4x+4)$
$=(x+1)(x-2)^2$

06 도함수의 활용 (3) W 41쪽

01 $x^3+6x^2-k=0$에서

$$x^3+6x^2=k$$

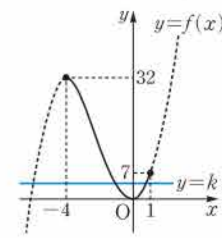
$f(x)=x^3+6x^2$이라 하면

$$f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-4$ 또는 $x=0$

x	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	32	↘	0	↗	7

따라서 $-4\le x\le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 $-4\le x\le 1$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$0<k\le 7$$

즉 정수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 7의 7개이다. 답 ③

02 $\frac{1}{4}x^4-x^3+4x+k=0$에서

$$\frac{1}{4}x^4-x^3+4x=-k$$

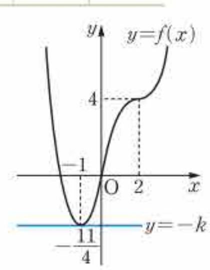
$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+4x$라 하면

$$f'(x)=x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{11}{4}$	↗	4	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 한 중근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 한 점에서만 만나고 그 점에서 접해야 하므로

$$-k=-\frac{11}{4}$$

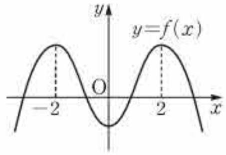
$$\therefore\ k=\frac{11}{4}$$ 답 $\frac{11}{4}$

03 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 0, 2이므로 $f'(x)=0$에서

$$x=-2\ \text{또는}\ x=0\ \text{또는}\ x=2$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로



$f(-2)>0$, $f(0)<0$, $f(2)>0$ 답 ③

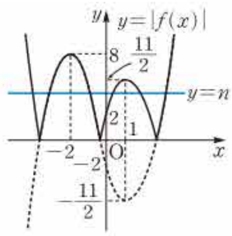
04 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2$에서

$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	8	↘	$-\frac{11}{2}$	↗

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $|f(x)|=n$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=n$의 교점의 개수와 같으므로

$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=6$,

$a_6=a_7=4$, $a_8=3$, $a_9=a_{10}=\cdots=a_{15}=2$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}a_k=5\cdot6+2\cdot4+3+7\cdot2=55$ 답 55

$\underbrace{a_9,\ a_{10},\ \cdots,\ a_{15}}_{15-9+1=7(\text{개})}$

05 $2x^3-9x^2+20-k=0$에서

$2x^3-9x^2+20=k$

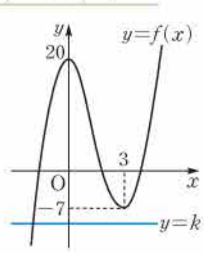
$f(x)=2x^3-9x^2+20$이라 하면

$f'(x)=6x^2-18x=6x(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 한 개의 음근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서만 만나고, 교점의 x좌표가 음수이어야 하므로

$k<-7$

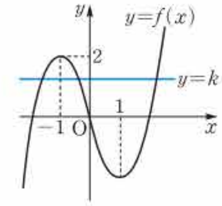
즉 정수 k의 최댓값은 -8이다. 답 ⑤

06 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $f(-1)=2$, $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$가 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고 두 개는 음수이어야 하므로

$0<k<2$ 답 $0<k<2$

07 $x^4+\frac{8}{3}x^3-2x^2-8x-a=0$에서

$x^4+\frac{8}{3}x^3-2x^2-8x=a$

$f(x)=x^4+\frac{8}{3}x^3-2x^2-8x$라 하면

$f'(x)=4x^3+8x^2-4x-8$

$=4(x^3+2x^2-x-2)$

$=4(x+2)(x+1)(x-1)$

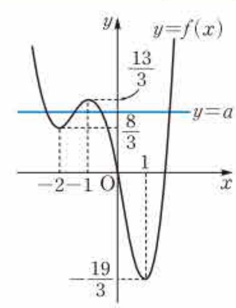
x^3+2x^2-x-2
$=x^2(x+2)-(x+2)$
$=(x^2-1)(x+2)$
$=(x+2)(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{8}{3}$	↗	$\frac{13}{3}$	↘	$-\frac{19}{3}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 한 개의 양근과 서로 다른 세 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 네 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고 세 개는 음수이어야 하므로

$\frac{8}{3}<a<\frac{13}{3}$

즉 모든 정수 a의 값의 합은

$3+4=7$ 답 ②

08 $f(x)=2x^3-3x^2-36x-a+20$이라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-36$

$=6(x+2)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-2)f(3)<0$이어야 하므로

$(-a+64)(-a-61)<0$

$(a+61)(a-64)<0$

$\therefore -61<a<64$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다. 답 ①

09 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 함수 $y=g(x)$의 그래프의 식은

$$g(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+1+k$$

$$\therefore g'(x)=2x^2-2x-4$$
$$=2(x+1)(x-2)$$

$g'(x)=0$에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

삼차방정식 $g(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면 $g(-1)g(2)=0$이어야 하므로

$$\left(k+\frac{10}{3}\right)\left(k-\frac{17}{3}\right)=0$$

$$\therefore k=-\frac{10}{3} \text{ 또는 } k=\frac{17}{3}$$

따라서 모든 k의 값의 합은

$$-\frac{10}{3}+\frac{17}{3}=\frac{7}{3}$$

답 $\frac{7}{3}$

10 $f(x)=x^3-12ax+24a$에서

$$f'(x)=3x^2-12a$$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$a>0$$

Q BOX: $3x^2-12a=0$에서
$x^2=4a$
$a<0$이면 위의 방정식의 해는 없다.
$a=0$이면 위의 방정식은 $x=0$을 중근으로 갖는다.

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2\sqrt{a}$ 또는 $x=2\sqrt{a}$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근, 즉 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(-2\sqrt{a})f(2\sqrt{a})>0$이어야 하므로

$$(16a\sqrt{a}+24a)(-16a\sqrt{a}+24a)>0$$

$$(2\sqrt{a}+3)(-2\sqrt{a}+3)>0\ (\because a>0)$$

$$-2\sqrt{a}+3>0\ (\because 2\sqrt{a}+3>0)$$

$$\therefore a<\frac{9}{4}$$

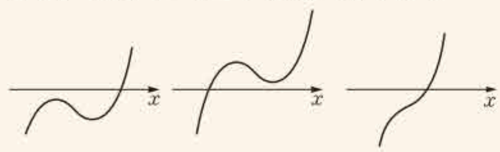
이때 $a>0$이므로 $\quad 0<a<\frac{9}{4}$

따라서 정수 a는 1, 2의 2개이다. 답 ②

쌤한마디

삼차방정식이 오직 하나의 실근을 갖는 경우

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가질 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



[극값을 갖는 경우] [극값을 갖지 않는 경우]

11 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식

$$x^3-4x^2-6x=-x^2+3x+a, \text{ 즉}$$
$$x^3-3x^2-9x-a=0$$

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2-9x-a$라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(3)=0$이어야 하므로

$$(-a+5)(-a-27)=0$$

$$\therefore a=5\ (\because a>0)$$

답 ③

12 주어진 곡선과 직선이 한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접하려면 방정식

$$2x^3+5=6x+k, \text{ 즉 } 2x^3-6x+5-k=0$$

이 한 실근과 중근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3-6x+5-k$라 하면

$$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(1)=0$이어야 하므로

$$(-k+9)(-k+1)=0$$

$$\therefore k=1 \text{ 또는 } k=9$$

따라서 모든 k의 값의 합은 $\quad 1+9=10$ 답 10

다른 풀이 곡선 $y=2x^3+5$와 직선 $y=6x+k$가 한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접하려면 직선 $y=6x+k$가 곡선 $y=2x^3+5$의 접선이어야 한다.

$f(x)=2x^3+5$라 하면 $\quad f'(x)=6x^2$

접점의 좌표를 $(t, 2t^3+5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 6이므로 $f'(t)=6$에서

$$6t^2=6 \qquad \therefore t=\pm 1$$

접점의 좌표는

$$(-1, 3) \text{ 또는 } (1, 7)$$

Q BOX: $t=-1$일 때 접점의 좌표는 $(-1, -2+5)$
$\therefore (-1, 3)$
$t=1$일 때 접점의 좌표는 $(1, 2+5)$
$\therefore (1, 7)$

이고 접점은 직선 $y=6x+k$ 위의 점이므로

$$3=-6+k \text{ 또는 } 7=6+k$$

$$\therefore k=9 \text{ 또는 } k=1$$

따라서 모든 k의 값의 합은 $\quad 9+1=10$

13 $y=2x^3-3x^2+1$에서

$$y'=6x^2-6x$$

점 $(0, a)$에서 곡선 $y=2x^3-3x^2+1$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, 2t^3-3t^2+1)$이라 하면 접선의 기울기는 $6t^2-6t$이므로 접선의 방정식은

$$y-(2t^3-3t^2+1)=(6t^2-6t)(x-t)$$

이 직선이 점 $(0, a)$를 지나므로

$$a-(2t^3-3t^2+1)=(6t^2-6t)\cdot(-t)$$

$$\therefore 4t^3-3t^2-1+a=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 $(0, a)$에서 주어진 곡선에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$f(t)=4t^3-3t^2-1+a$라 하면

$$f'(t)=12t^2-6t=6t(2t-1)$$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

삼차방정식 $f(t)=0$이 오직 하나의 실근, 즉 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(0)f\left(\frac{1}{2}\right)>0$이어야 하므로

$(a-1)\left(a-\frac{5}{4}\right)>0$

$\therefore a<1$ 또는 $a>\frac{5}{4}$ 　　답 $a<1$ 또는 $a>\frac{5}{4}$

14 $y=x^3+3x^2-x+k$에서

$y'=3x^2+6x-1$

원점에서 곡선 $y=x^3+3x^2-x+k$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+3t^2-t+k)$라 하면 접선의 기울기는 $3t^2+6t-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+3t^2-t+k)=(3t^2+6t-1)(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-(t^3+3t^2-t+k)=(3t^2+6t-1)\cdot(-t)$

$\therefore 2t^3+3t^2-k=0$ 　　…… ㉠

원점에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=2t^3+3t^2-k$라 하면

$f'(t)=6t^2+6t=6t(t+1)$

$f'(t)=0$에서 　$t=-1$ 또는 $t=0$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(0)=0$이어야 하므로

$(-k+1)\cdot(-k)=0$

$\therefore k=1\ (\because k\neq 0)$ 　　답 ②

15 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-16x+a^2-2a$라 하면

$f'(x)=2x^3-16=2(x-2)(x^2+2x+4)$

$f'(x)=0$에서 　$x=2\ (\because x^2+2x+4>0)$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a^2-2a-24$	↗

$f(2)=8-32+a^2-2a$
$=a^2-2a-24$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $a^2-2a-24$를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$a^2-2a-24>0$, 　$(a+4)(a-6)>0$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>6$ 　　답 ④

16 $x^4-8x^2\geq k$에서 　$x^4-8x^2-k\geq 0$

$f(x)=x^4-8x^2-k$라 하면

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-k-16$	↗	$-k$	↘	$-k-16$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 최솟값 $-k-16$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-k-16\geq 0$ 　　$\therefore k\leq -16$

즉 k의 최댓값은 -16이다. 　　답 -16

17 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립해야 한다.

$f(x)>g(x)$에서

$x^4-2x^2+4x-a>4x^3-2x^2-12x$

$\therefore x^4-4x^3+16x-a>0$

$h(x)=x^4-4x^3+16x-a$라 하면

$h'(x)=4x^3-12x^2+16$

$=4(x^3-3x^2+4)$

$=4(x+1)(x-2)^2$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3-3x^2+4$
$=(x+1)(x^2-4x+4)$
$=(x+1)(x-2)^2$

$h'(x)=0$에서 　$x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-a-11$	↗	$-a+16$	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $-a-11$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)>0$이 성립하려면

$h(x)=f(x)-g(x)>0$
이면
$f(x)>g(x)$

$-a-11>0$ 　　$\therefore a<-11$

즉 정수 a의 최댓값은 -12이다. 　　답 ④

18 $f(x)=x^3-6x^2-15x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x-15=3(x+1)(x-5)$

$0<x<4$일 때 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 4)$에서 감소한다.

따라서 $0<x<4$일 때, 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$f(4)\geq 0$, 　$64-96-60+k\geq 0$

$\therefore k\geq 92$ 　　답 ⑤

쌤한마디

구간 $(a,\ b)$에서 부등식 $f(x)+k>0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구할 때에는 먼저 $g(x)=f(x)+k$라 하고 구간 $(a,\ b)$에서 $g(x)$의 극값이 존재하는지 확인한다. 이때

① 극값이 존재하면

(함수 $g(x)$의 최솟값)>0

이어야 함을 이용한다.

② 극값이 존재하지 않고 구간 $(a,\ b)$에서 함수 $g(x)$가

증가하면 ◎ $g(a)\geq 0$

감소하면 ◎ $g(b)\geq 0$

이어야 함을 이용한다.

19 $x<0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 접하거나 아래쪽에 있으려면 $x<0$일 때, 부등식 $f(x)\leq g(x)$가 성립해야 한다.

$f(x)\le g(x)$에서

$x^3-5x^2+6x+k\le -2x^2+30x$

$\therefore\ x^3-3x^2-24x+k\le 0$

$h(x)=x^3-3x^2-24x+k$라 하면

$h'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=-2\ (\because\ x<0)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$h'(x)$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$\nearrow$	$k+28$	$\searrow$	

따라서 $x<0$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $k+28$을 가지므로 $x<0$일 때, 부등식 $h(x)\le 0$이 성립하려면

$k+28\le 0 \qquad \therefore\ k\le -28$ 답 $k\le -28$

20 $f(x)>g(x)$에서

$3x^3+6x^2-k>4x^3+9x$

$\therefore\ x^3-6x^2+9x+k<0$

$h(x)=x^3-6x^2+9x+k$라 하면

$h'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$x<1$일 때 $h'(x)>0$이므로 함수 $h(x)$는 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 증가한다.

따라서 $x<1$일 때, 부등식 $h(x)<0$이 성립하려면

$h(1)\le 0,\qquad 1-6+9+k\le 0$

$\therefore\ k\le -4$

즉 k의 최댓값은 -4이다. 답 ②

21 $f(x)=x^3-3x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k+2$	$\searrow$	$k-2$	$\nearrow$	$k+18$

따라서 $-1\le x\le 3$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $k+18$, $x=1$에서 최솟값 $k-2$를 가지므로

$k-2<k+2<k+18$

$-1\le x\le 3$일 때, 부등식 $-1\le f(x)\le 25$가 성립하려면

$k-2\ge -1,\ k+18\le 25$

$\therefore\ 1\le k\le 7$

즉 정수 k는 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$의 7개이다. 답 7

22 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=12t^2-30t-12$

속도가 6일 때

$12t^2-30t-12=6,\qquad 2t^2-5t-3=0$

$(2t+1)(t-3)=0 \qquad \therefore\ t=3\ (\because\ t\ge 0)$

이때 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=24t-30$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$24\cdot 3-30=42$ 답 ③

QBOX

23 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\dfrac{dx_P}{dt}=3t^2,\ v_Q=\dfrac{dx_Q}{dt}=10t+8$

이때 $v_P=v_Q$에서

두 점 P, Q의 속도가 같으면 $v_P=v_Q$

$3t^2=10t+8,\qquad 3t^2-10t-8=0$

$(3t+2)(t-4)=0$

$\therefore\ t=4\ (\because\ t\ge 0)$

$t=4$에서의 점 P의 위치는

$4^3+2=66$

$t=4$에서의 점 Q의 위치는

$5\cdot 4^2+8\cdot 4-5=107$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

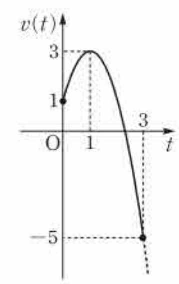
$107-66=41$ 답 41

24 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=x'(t)=-2t^2+4t+1$

$=-2(t-1)^2+3$

$0\le t\le 3$에서 $v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$-5\le v(t)\le 3$

$\therefore\ 0\le |v(t)|\le 5$

속도 v의 절댓값 $|v|$를 시각 t에서의 점 P의 속력이라 한다.

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 5이고 이때의 시각은 $t=3$이므로

$M=5,\ a=3$

$\therefore\ M+a=8$ 답 8

25 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\dfrac{dx_P}{dt}=4t^3-30t^2+48t,\ v_Q=\dfrac{dx_Q}{dt}=a$

$v_P=v_Q$에서 $\qquad 4t^3-30t^2+48t=a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

출발 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 세 번 있으려면 $t>0$에서 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

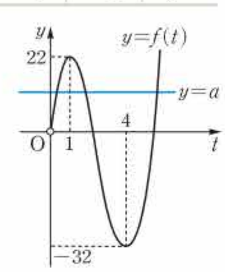
$f(t)=4t^3-30t^2+48t\ (t>0)$라 하면

$f'(t)=12t^2-60t+48=12(t-1)(t-4)$

$f'(t)=0$에서 $\qquad t=1$ 또는 $t=4$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$		$\nearrow$	22	$\searrow$	-32	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$t>0$에서 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$0<a<22$

즉 정수 a는 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 21$의 21개이다. 답 ④

W 06 도함수의 활용 (3)

26 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-3,\ v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=-6t$$

두 점 P, Q가 서로 같은 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q>0$이므로

두 점의 속도의 부호가 같다.

$(2t-3)\cdot(-6t)>0$

$t(2t-3)<0$

$\therefore 0<t<\frac{3}{2}$ 답 ①

27 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-16t+a-2$$

출발 후 점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 실수 $t\ (t>0)$에 대하여 항상 $v\geq0$이어야 한다.

v의 최고차항의 계수가 양수이므로 실수 $t\ (t>0)$에 대하여 항상 $v\geq0$이어야 한다.

이때

$$v=3t^2-16t+a-2$$
$$=3\left(t-\frac{8}{3}\right)^2+a-\frac{70}{3}$$

$t>0$일 때, v의 최솟값은 $a-\frac{70}{3}$이다.

따라서 실수 $t\ (t>0)$에 대하여 항상 $v\geq0$이려면 (v의 최솟값)≥0, 즉 $a-\frac{70}{3}\geq0$ 이어야 한다.

이므로

$a-\frac{70}{3}\geq0$

$\therefore a\geq\frac{70}{3}$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{70}{3}$이다. 답 $\frac{70}{3}$

28 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=9t^2+2pt+q$$

점 P가 $t=2$에서 운동 방향을 바꾸므로

$t=2$에서 $v=0$이다.

$9\cdot2^2+2p\cdot2+q=0$

$\therefore 4p+q=-36$ ······ ㉠

$t=2$에서의 점 P의 위치가 5이므로

$3\cdot2^3+p\cdot2^2+q\cdot2+5=5$

$\therefore 2p+q=-12$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=-12,\ q=12$

$\therefore v=9t^2-24t+12$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$9t^2-24t+12=0,\quad (3t-2)(t-2)=0$

$\therefore t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=2$

즉 점 P가 $t=2$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각은

$t=\frac{2}{3}$

이때 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=18t-24$$

따라서 $t=\frac{2}{3}$에서의 점 P의 가속도는

$18\cdot\frac{2}{3}-24=-12$ 답 ①

29 제동을 건 지 t초 후의 기차의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=24-0.96t$$

기차가 정지할 때 $v=0$이므로

$24-0.96t=0\qquad \therefore t=25$

제동을 건 후 기차가 25초 동안 움직인 거리는

$24\times25-0.48\times25^2=300$ (m)

$0.48\times25^2=\frac{12}{25}\times25^2$
$=12\times25$

따라서 목적지로부터 300 m 떨어진 지점에서 제동을 걸어야 하므로

$p=300$ 답 ②

30 제동을 건 지 t초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=40-2at$$

열차가 정지할 때 $v=0$이므로

$40-2at=0\qquad \therefore t=\frac{20}{a}$

제동을 건 후 열차가 $\frac{20}{a}$초 동안 움직인 거리는

$$40\cdot\frac{20}{a}-a\cdot\left(\frac{20}{a}\right)^2=\frac{800}{a}-\frac{400}{a}$$
$$=\frac{400}{a}\ (\text{m})$$

이때 열차가 정지선을 넘지 않고 정지하려면 움직인 거리가 200 m 이하이어야 하므로

$\frac{400}{a}\leq200\qquad \therefore a\geq2$

따라서 a의 최솟값은 2이다. 답 2

31 물체가 지면에 떨어지는 순간 $h=0$이므로

$25+20t-5t^2=0,\quad t^2-4t-5=0$

$(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=5\ (\because t>0)$

t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=20-10t$$

이므로 5초 후의 물체의 속도는

$20-10\cdot5=-30$ (m/s) 답 ②

32 t초 후의 물체의 속도를 v m/s, 가속도를 a m/s^{2}이라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=30-10t,\ a=\frac{dv}{dt}=-10$$

ㄱ. 2초 후의 물체의 속도는

$30-10\cdot2=10$ (m/s)

ㄴ. 물체의 가속도는 -10 m/s^{2}으로 일정하다.

ㄷ. 물체가 최고 높이에 도달할 때 $v=0$이므로

$30-10t=0$

$\therefore t=3$

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸리는 시간은 3초이다.

ㄹ. 물체의 최고 높이, 즉 3초 후의 지면으로부터의 높이는

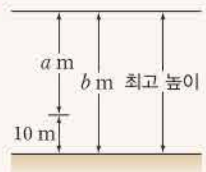
$$10+30\cdot3-5\cdot3^2=55\ (\mathrm{m})$$

이므로 물체를 던진 후 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는

$$2\cdot55-10=100\ (\mathrm{m})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ③

Q BOX



물체가 움직인 거리
➡ $a+b=2b-10$

33 $x(t)$는 t에 대한 삼차식이고, $x(t)$의 그래프가 t축과 만나는 점의 t좌표가 각각 0, 3, 5이므로

$$x(t)=kt(t-3)(t-5)$$
$$=kt^3-8kt^2+15kt\ (k>0)$$

라 하자.

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=x'(t)=3kt^2-16kt+15k,$$
$$a=\frac{dv}{dt}=6kt-16k$$

따라서 가속도가 0이 되는 시각은 $a=0$에서

$$6kt-16k=0 \qquad \therefore\ t=\frac{8}{3}\ (\because\ k>0)$$ 답 $\frac{8}{3}$

34 ㄱ. $v(b)=0$이고 $t=b$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=b$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

ㄴ. $v'(a)=0$, $v'(c)=0$이므로 $t=a$, $t=c$에서의 점 P의 가속도가 0이 된다.
따라서 $0<t<d$에서 점 P의 가속도가 0이 되는 순간은 두 번 있다.

ㄷ. $0<t<b$에서 $v(t)<0$이므로 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다. 즉 한 방향으로만 움직인다.

ㄹ. $v(d)=0$이고 $t=d$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=d$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다. 즉 점 P가 출발 후 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 순간은 $t=d$이고, $v'(d)<0$이므로 이 순간의 가속도는 음의 값이다.

첫 번째로 운동 방향을 바꾸는 순간은 ㄱ에서 $t=b$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

35 ㄱ. 두 점 P, Q는 $t=c$, $t=e$, $t=h$에서 만나므로 적어도 3번 만난다.

두 점 P, Q가 만날 때는 두 점의 위치가 같으므로 $p(t)=q(t)$일 때이다.

ㄴ. $p'(d)=0$, $q'(d)=0$이므로 $t=d$에서의 두 점 P, Q의 속도는 모두 0이다.
따라서 $t=d$에서의 두 점 P, Q의 속도는 서로 같다.

ㄷ. $p'(h)>0$, $q'(h)<0$이므로 두 점 P, Q는 서로 반대 방향으로 움직인다.

ㄹ. $c\le t\le d$에서 점 P가 움직인 거리는 $p(d)-p(c)$이고 점 Q가 움직인 거리는 $q(d)-q(c)$이다.
주어진 그래프에서 $p(c)=q(c)$이고 $p(d)>q(d)$이므로

$$p(d)-p(c)>q(d)-q(c)$$

따라서 점 P가 움직인 거리는 점 Q가 움직인 거리보다 길다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

36 t초 후의 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이는 $7t$ cm이므로 원의 넓이를 $S\ \mathrm{cm}^2$라 하면

$$S=\pi\cdot(7t)^2=49\pi t^2$$

따라서 가장 바깥쪽 원의 넓이의 변화율은

$$\frac{dS}{dt}=98\pi t$$

이므로 3초 후의 가장 바깥쪽 원의 넓이의 변화율은

$$98\pi\cdot3=294\pi\ (\mathrm{cm^2/s})$$ 답 ③

37 t초 후의 $\overline{\mathrm{PB}}$, $\overline{\mathrm{BQ}}$의 길이는 각각 $8-\frac{3}{2}t$, t이므로 △PBQ의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PB}}\cdot\overline{\mathrm{BQ}}\cdot\sin60°$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(8-\frac{3}{2}t\right)\cdot t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=-\frac{3\sqrt{3}}{8}t^2+2\sqrt{3}t\ \left(0<t<\frac{16}{3}\right)$$

$t>0$, $8-\frac{3}{2}t>0$이므로
$0<t<\frac{16}{3}$

따라서 △PBQ의 넓이의 변화율은

$$\frac{dS}{dt}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}t+2\sqrt{3}$$

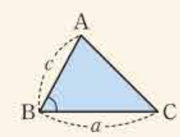
이므로 2초 후의 △PBQ의 넓이의 변화율은

$$-\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot2+2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

쌤 한마디

△ABC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B$$



38 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각

$$\left(\frac{5}{2}t,\ 0\right),\ \left(0,\ \frac{5}{4}t\right)$$

이므로 직선 PQ의 방정식은

$$y-\frac{5}{4}t=\frac{\frac{5}{4}t}{-\frac{5}{2}t}x$$
$$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}t$$

직선 PQ와 직선 $y=2x$의 교점 R의 x좌표는

$$-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}t=2x\text{에서}$$
$$\frac{5}{2}x=\frac{5}{4}t \qquad \therefore\ x=\frac{t}{2}$$
$$\therefore\ \mathrm{R}\left(\frac{t}{2},\ t\right)$$

점 R는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로
$y=2\cdot\frac{t}{2}=t$

선분 OR의 길이를 l이라 하면

$$l=\sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2+t^2}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{2}t\ (\because\ t>0)$$

따라서 선분 OR의 길이의 변화율은

$$\frac{dl}{dt}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$ 답 ①

39 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이는 각각

$(5+t)\,\text{cm}$, $(10-t)\,\text{cm}$

이므로 원기둥의 부피를 $V\,\text{cm}^3$라 하면

$V=\pi(5+t)^2(10-t)\ (0<t<10)$

밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원기둥의 부피는 $\pi r^2 h$

$t>0$, $5+t>0$, $10-t>0$ 이므로 $0<t<10$

따라서 원기둥의 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt}=\pi\{2(5+t)(10-t)+(5+t)^2\cdot(-1)\}$$
$$=\pi(5+t)(15-3t)$$
$$=3\pi(5+t)(5-t)$$

이므로 원기둥의 부피의 변화율이 $0\,\text{cm}^3/\text{s}$일 때

$3\pi(5+t)(5-t)=0$

$\therefore t=5\ (\because 0<t<10)$

즉 구하는 부피는

$\pi(5+5)^2\cdot(10-5)=500\pi\,(\text{cm}^3)$ 답 $500\pi\,\text{cm}^3$

도전! 수능 기출

W 48쪽

01 (1st) **함수의 증가와 감소를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.**

ㄱ. $0<x<2$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 2)$에서 감소한다.

$\therefore f(0)>f(2)$

이때 $f(0)<0$이면 $f(2)<f(0)<0$이므로

$|f(0)|<|f(2)|$

음수끼리는 절댓값이 클수록 작다.

(2nd) **경우를 나누어 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 그려 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.**

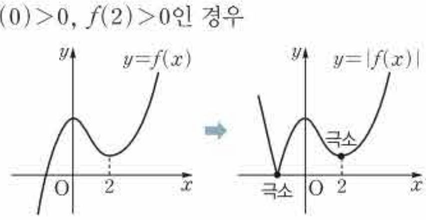
ㄴ. $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 0, 2이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

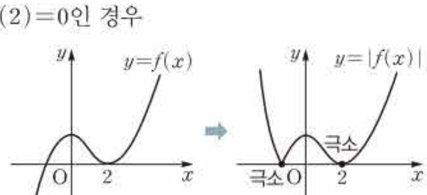
$f(0)f(2)\ge 0$일 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

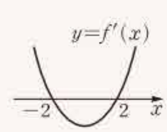
$y=f(x)$의 그래프를 그린 후 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.

(i) $f(0)>0$, $f(2)>0$인 경우

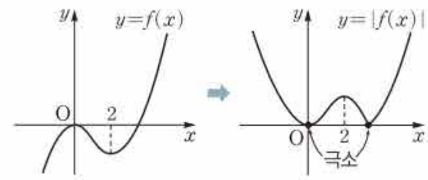


(ii) $f(2)=0$인 경우

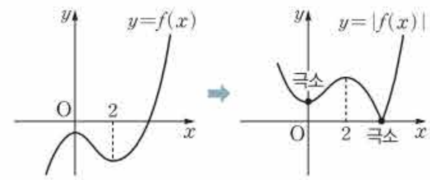




(iii) $f(0)=0$인 경우



(iv) $f(0)<0$, $f(2)<0$인 경우



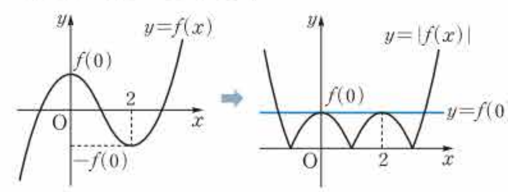
따라서 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다.

(3rd) **함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$을 그려 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.**

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면

$f(2)=-f(0)$

이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$의 서로 다른 교점의 개수가 4이므로 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

02 (1st) **조건 (가), (나)를 이용하여 함수 $f(x)$의 식을 세운다.**

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)

라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

조건 (가)에서 $f'(-2)=0$이므로

$12a-4b+c=0$ …… ㉠

조건 (나)에서 $f'(-3)=f'(3)$이므로

$27a-6b+c=27a+6b+c$

$12b=0 \quad \therefore b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면

$12a+c=0 \quad \therefore c=-12a$

$\therefore f(x)=ax^3-12ax+d$

(2nd) **조건 (가)를 이용하여 a의 값의 부호를 구한다.**

$f'(x)=3ax^2-12a=3a(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

이때 $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값을 가지려면 $x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌어야 하므로

$a>0$

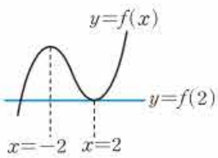
(3rd) ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프는 아래로 볼록한 포물선이므로 꼭짓점의 x좌표에서 최솟값을 갖는다. 따라서 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.

Q BOX: $f'(-2)=0$, $f'(2)=0$이므로 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{-2+2}{2}=0$

(4th) ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(2)$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(5th) ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(-1)=f'(-1)\{x-(-1)\}$$

이때

$$f(-1)=-a+12a+d=11a+d,$$
$$f'(-1)=3a-12a=-9a$$

이므로

$$y-(11a+d)=-9a(x+1)$$
$$\therefore y=-9ax+2a+d \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$f(2)=8a-24a+d=-16a+d$이므로 점 $(2, -16a+d)$의 좌표를 ㉡에 대입하면

$$-16a+d=-18a+2a+d$$

따라서 등식이 성립하므로 직선 ㉡은 점 $(2, f(2))$를 지난다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

03 (1st) 함수 $f(x)-f'(x)$의 식을 세운다.

조건 (가)에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

조건 (나)에서 $f(0)=f'(0)$이므로 $\quad c=b$

$$\therefore f(x)=x^3+ax^2+bx+b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (다)에서 $x\geq-1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f'(x)$이므로

$$f(x)-f'(x)\geq0$$

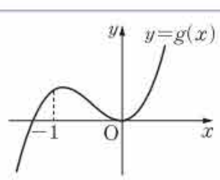
$g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면

$$g(x)=(x^3+ax^2+bx+b)-(3x^2+2ax+b)$$
$$=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$$

(2nd) 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그려 함숫값의 조건을 구한다.

$g(0)=0$이므로 $x\geq-1$일 때 부등식 $g(x)\geq0$을 만족시키려면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 x축에 접해야 한다.

Q BOX: $g(0)=f(0)-f'(0)$
$=0$



즉 $g'(0)=0$, $g(-1)\geq0$이어야 한다.

(3rd) a의 값의 범위를 구한다.

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$이므로

$g'(0)=0$에서

$$b-2a=0 \qquad \therefore b=2a \qquad \cdots\cdots ㉡$$
$$\therefore g(x)=x^3+(a-3)x^2$$

$g(-1)\geq0$에서

$$-1+a-3\geq0 \qquad \therefore a\geq4$$

(4th) $f(2)$의 최솟값을 구한다.

㉡을 ㉠에 대입하면 $f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$이므로

$$f(2)=8+4a+4a+2a=10a+8$$

이때 $a\geq4$이므로

$$f(2)=10a+8\geq10\cdot4+8=48$$

따라서 $f(2)$의 최솟값은 48이다. 답 ⑤

04 (1st) 점 M의 좌표를 구한다.

t분 후의 점 M의 좌표를 x_3이라 하면

$$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{(2t^3-9t^2)+(t^2+8t)}{2}$$
$$=t^3-4t^2+4t$$

Q BOX: 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

(2nd) 세 점 P, Q, M의 속도를 구한다.

t분 후의 세 점 P, Q, M의 속도를 각각 v_P, v_Q, v_M이라 하면

$$v_\mathrm{P}=\frac{dx_1}{dt}=6t^2-18t=6t(t-3),$$
$$v_\mathrm{Q}=\frac{dx_2}{dt}=2t+8=2(t+4),$$
$$v_\mathrm{M}=\frac{dx_3}{dt}=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$$

(3rd) $a+b+c$의 값을 구한다.

세 점 P, Q, M이 운동 방향을 바꿀 때

$$v_\mathrm{P}=0,\ v_\mathrm{Q}=0,\ v_\mathrm{M}=0$$

이므로 $0<t\leq4$일 때

(i) $v_\mathrm{P}=0$에서 $\quad t=3 \qquad \therefore a=1$

(ii) $v_\mathrm{Q}=0$을 만족시키는 t의 값은 존재하지 않으므로 $b=0$

(iii) $v_\mathrm{M}=0$에서 $\quad t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=2 \qquad \therefore c=2$

이상에서 $\quad a+b+c=3$ 답 ③

07 부정적분

49쪽

01 $F'(x)=G'(x)$이므로

$\int F'(x)\,dx=\int G'(x)\,dx$

$\therefore G(x)=F(x)+C$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$G(0)=F(0)+C,\quad -1=-6+C$

$\therefore C=5$

따라서

$G(x)=F(x)+5=x^3-3x^2+4x-6+5$

$=x^3-3x^2+4x-1$

이므로 $\quad G(1)=1-3+4-1=1$ 답 ①

02 $h(x)=\{f(x)g(x)\}'$

$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=2x(2x^3-5)+(x^2+1)\cdot 6x^2$

$=10x^4+6x^2-10x$

이므로

$h(-1)=10+6+10=26$ 답 26

03 ㄱ. $\{F(x)+x+C\}'=f(x)+1$이고

$f(x)+x\neq f(x)+1$이므로

$\int\{f(x)+x\}\,dx\neq F(x)+x+C$

ㄴ. $\{xF(x)+C\}'=F(x)+xf(x)$이고

$xf(x)\neq F(x)+xf(x)$이므로

$\int xf(x)\,dx\neq xF(x)+C$

ㄷ. $[\{F(x)\}^2+C]'=2F(x)f(x)$이므로

$\int 2F(x)f(x)\,dx=\{F(x)\}^2+C$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로
$F'(x)=f(x)$

$[\{F(x)\}^2+C]'$
$=\{F(x)F(x)+C\}'$
$=f(x)F(x)$
$\quad+F(x)f(x)$
$=2F(x)f(x)$

04 $F(x)=\dfrac{d}{dx}\int xf(x)\,dx=xf(x)$

$=x(4x^2-10x+1)$

$=4x^3-10x^2+x$

이므로

$F(2)=32-40+2=-6$ 답 ①

05 $\dfrac{d}{dx}\int(x^3+5x)\,dx-\dfrac{d}{dx}\int(9x^2+13x-2)\,dx$

$=x^3+5x-(9x^2+13x-2)$

$=x^3-9x^2-8x+2$

따라서 주어진 방정식은

$x^3-9x^2-8x+2=0$

이므로 모든 근의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{-9}{1}=9$ 답 9

삼차방정식
$ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$,
$\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

06 $f(x)=\int\left\{\dfrac{d}{dx}(x^3+ax^2)\right\}dx=x^3+ax^2+C$

$f(1)=2$이므로 $\quad 1+a+C=2$

$\therefore C=-a+1$ ⋯⋯ ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax$이고 $f'(-1)=-5$이므로

$3-2a=-5\quad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad C=-3$

따라서 $f(x)=x^3+4x^2-3$이므로

$f(-2)=-8+16-3=5$ 답 ④

07 $F(x)=\int\left[\dfrac{d}{dx}\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx$

$=\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$

$=f(x)+C$

$=100x^{100}+99x^{99}+98x^{98}+\cdots+x+C$

두 개의 적분상수를 묶어서 하나의 적분상수로 나타낼 수 있다.

$F(0)=10$이므로 $\quad C=10$

따라서 $F(x)=100x^{100}+99x^{99}+98x^{98}+\cdots+x+10$이므로

$F(1)=100+99+98+\cdots+1+10$

$=\sum_{k=1}^{100}k+10$

$=\dfrac{100\cdot 101}{2}+10=5060$ 답 5060

자연수의 거듭제곱의 합
① $\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$
② $\sum_{k=1}^{n}k^2$
$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

08 $\int\{f(x)-4x\}\,dx=x^3+px^2-qx+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-4x=3x^2+2px-q$

$\therefore f(x)=3x^2+2(p+2)x-q$

$f(0)=3$이므로

$-q=3\quad \therefore q=-3$

$f'(x)=6x+2(p+2)$이고 $f'(2)=3$이므로

$12+2(p+2)=3\quad \therefore p=-\dfrac{13}{2}$

따라서 $f(x)=3x^2-9x+3=3\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{15}{4}$이므로

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{3}{2}$에서 최솟값 $-\dfrac{15}{4}$를 갖는다.

답 ②

09 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2$에서

$\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 3x^2\,dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^3+C$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면 $\quad f(0)g(0)=C$

이때 $f(0)=3,\ g(0)=9$이므로 $\quad C=27$

$\therefore f(x)g(x)=x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$

따라서

$\begin{cases}f(x)=x+3\\ g(x)=x^2-3x+9\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=x^2-3x+9\\ g(x)=x+3\end{cases}$

이고 $f(0)=3,\ g(0)=9$이므로

$f(x)=x+3,\ g(x)=x^2-3x+9$

$\therefore f(2)+g(-1)=5+13=18$ 답 18

10 $f(x)=\int(x+1)^3dx-\int(x-1)^3dx$

$=\int(x^3+3x^2+3x+1)dx$

$-\int(x^3-3x^2+3x-1)dx$

$=\int\{x^3+3x^2+3x+1$

$-(x^3-3x^2+3x-1)\}dx$

$=\int(6x^2+2)dx=2x^3+2x+C$

$f(1)=14$이므로 $\quad 2+2+C=14 \quad \therefore C=10$

따라서 $f(x)=2x^3+2x+10$이므로

$f(-2)=-16-4+10=-10$ 답 ①

11 $f(x)=\int\frac{x^4+1}{x+1}dx-\int\frac{2}{x+1}dx$

$=\int\frac{x^4-1}{x+1}dx$

$=\int\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x+1}dx$

$=\int(x^3-x^2+x-1)dx$

$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C$

$f(2)=\frac{2}{3}$이므로

$4-\frac{8}{3}+2-2+C=\frac{2}{3} \quad \therefore C=-\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x-\frac{2}{3}$이므로

$f(4)=64-\frac{64}{3}+8-4-\frac{2}{3}=46$ 답 ④

12 $f(x)=\int(4x-2)dx=2x^2-2x+C$

$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+C-\frac{1}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $C-\frac{1}{2}$을 갖고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq0$이므로

$C-\frac{1}{2}\geq0 \quad \therefore C\geq\frac{1}{2}$

이때 $f(0)=C$이므로 $f(0)$의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다. 답 $\frac{1}{2}$

13 $f(x)+g(x)=\int(2x^2-3x)dx$ …… ㉠

$f(x)-g(x)=\int(4x^2+x)dx$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2f(x)=\int(2x^2-3x)dx+\int(4x^2+x)dx$

$=\int(2x^2-3x+4x^2+x)dx$

$=\int(6x^2-2x)dx$

$=2x^3-x^2+C_1$

$\therefore f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{C_1}{2}$

Q BOX

$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{C_1}{2}$ 에서 상수항이 $\frac{C_1}{2}$이므로 C_1의 값을 구할 필요가 없다.

$f(1)=1-\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$, $g(-6)=72-36=36$

$(x^2+1)(x-1)$
$=x^3-x^2+x-1$

$\{xf(x)\}'$
$=f(x)+xf'(x)$
이므로
$\int\{f(x)+xf'(x)\}dx$
$=xf(x)+C$

$f(0)=-1$이므로 $\quad \frac{C_1}{2}=-1$

$\therefore f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-1$

㉠−㉡을 하면

$2g(x)=\int(2x^2-3x)dx-\int(4x^2+x)dx$

$=\int\{2x^2-3x-(4x^2+x)\}dx$

$=\int(-2x^2-4x)dx$

$=-\frac{2}{3}x^3-2x^2+C_2$

$\therefore g(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{C_2}{2}$

$g(0)=0$이므로 $\quad C_2=0$

$\therefore g(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2$

$\therefore f(1)g(-6)=-\frac{1}{2}\cdot36=-18$ 답 -18

14 $g(x)=\int f(x)dx+\int xf'(x)dx$

$=\int\{f(x)+xf'(x)\}dx$

$=xf(x)+C=x\cdot\frac{2x-1}{x}+C$

$=2x-1+C$

$g(-1)=5$이므로

$-2-1+C=5 \quad \therefore C=8$

따라서 $g(x)=2x+7$이므로

$g(3)=6+7=13$ 답 13

15 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x^8-1}{x^4+1}dx$

$=\int\frac{(x^4+1)(x^4-1)}{x^4+1}dx=\int(x^4-1)dx$

$=\frac{1}{5}x^5-x+C$

$f(1)=\frac{1}{5}$이므로

$\frac{1}{5}-1+C=\frac{1}{5} \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x+1$이므로

$f(-1)=-\frac{1}{5}+1+1=\frac{9}{5}$ 답 ②

16 $f(x)=\int f'(x)dx=\int6(x+1)(x-2)dx$

$=\int(6x^2-6x-12)dx$

$=2x^3-3x^2-12x+C_1$

$f(0)=-4$이므로 $\quad C_1=-4$

$\therefore f(x)=2x^3-3x^2-12x-4$

$F(x)=\int f(x)dx=\int(2x^3-3x^2-12x-4)dx$

$=\frac{1}{2}x^4-x^3-6x^2-4x+C_2$

W 07 부정적분

$F(-1)=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{1}{2}+1-6+4+C_2=\frac{1}{2} \qquad \therefore C_2=1$$

$$\therefore F(x)=\frac{1}{2}x^4-x^3-6x^2-4x+1$$

따라서 $F(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는

$$F(-4)=128+64-96+16+1=113$$

답 113

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
$R=P(a)$

17 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (6x+k)\,dx$

$$=3x^2+kx+C$$

$f(1)=10$이므로 $\quad 3+k+C=10$

$$\therefore C=-k+7 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

즉 방정식 $3x^2+kx+C=0$의 두 근의 합이 -3이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{k}{3}=-3 \qquad \therefore k=9$$

$k=9$를 ㉠에 대입하면 $\quad C=-9+7=-2$

따라서 $f(x)=3x^2+9x-2$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\quad -\frac{2}{3}$

답 ④

18 $f'(x)=ax(x-2)\ (a>0)$라 하면 $y=f'(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로

$$3=a\cdot(-1)\cdot(-3) \qquad \therefore a=1$$

이차함수 $f'(x)$에 대하여 $f'(0)=0,\ f'(2)=0$이므로
$f'(x)=ax(x-2)$
라 할 수 있다.
이때 주어진 $y=f'(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 $a>0$이다.

즉 $f'(x)=x(x-2)=x^2-2x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (x^2-2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-x^2+C$$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$$-1=\frac{1}{3}-1+C \qquad \therefore C=-\frac{1}{3}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{1}{3}$이고 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ a)$를 지나므로

$$a=9-9-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$$

답 $-\frac{1}{3}$

19 조건 (나)에서 $x \to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1} f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

$$\therefore f'(1)=-a+7$$

이때 조건 (가)에서 $f'(1)=a-1$이므로

$$a-1=-a+7 \qquad \therefore a=4$$

$f'(x)=4x-1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (4x-1)\,dx$$

$$=2x^2-x+C$$

$f(1)=0$이므로 $\quad 2-1+C=0 \qquad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=2x^2-x-1$이므로

$$f(2)=8-2-1=5$$

답 5

20 $F(x)-xf(x)=-3x^4-4x^2+2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)-\{f(x)+xf'(x)\}=-12x^3-8x$$

$$-xf'(x)=-12x^3-8x$$

$$\therefore f'(x)=12x^2+8$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (12x^2+8)\,dx$$

$$=4x^3+8x+C$$

$f(1)=9$이므로 $\quad 4+8+C=9 \qquad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=4x^3+8x-3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 y절편은 -3이다.

답 ③

21 $F'(x)=f(x)$이므로

$F(x)=\int (x-1)f(x)\,dx-x^3+2x^2+4x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=(x-1)f(x)-3x^2+4x+4$$

$$(x-2)f(x)=3x^2-4x-4$$

$3x^2-4x-4$
$=(3x+2)(x-2)$

$$\therefore f(x)=3x+2$$

$$\therefore F(x)=\int f(x)\,dx=\int (3x+2)\,dx$$

$$=\frac{3}{2}x^2+2x+C$$

$F(2)=0$이므로 $\quad 6+4+C=0 \qquad \therefore C=-10$

따라서 $F(x)=\frac{3}{2}x^2+2x-10$이므로

$$F(4)=24+8-10=22$$

답 22

22 $f(x)+\int xf(x)\,dx=\frac{1}{4}x^4-x^3+4x^2-3x+5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)+xf(x)=x^3-3x^2+8x-3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 다항함수 $f(x)$의 최고차항이 n차이면 $xf(x)$의 최고차항은 $(n+1)$차이므로

$$n+1=3 \qquad \therefore n=2$$

㉠의 좌변과 우변의 최고차항의 차수를 비교한다.

즉 $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수, $a\neq0$)라 하면

$$f'(x)=2ax+b$$

$f(x)$와 $f'(x)$를 ㉠에 대입하면

$$2ax+b+x(ax^2+bx+c)=x^3-3x^2+8x-3$$

$$\therefore ax^3+bx^2+(2a+c)x+b=x^3-3x^2+8x-3$$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$$a=1,\ b=-3,\ 2a+c=8$$

$$\therefore a=1,\ b=-3,\ c=6$$

따라서 $f(x)=x^2-3x+6$이므로

$$f(1)=1-3+6=4$$

답 ①

23 $f(x)=\begin{cases} 2x^3-x+C_1 & (x\ge-1) \\ -x^2+3x+C_2 & (x<-1) \end{cases}$

$f(0)=1$이므로 $\quad C_1=1$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)=f(-1)$$

즉 $\lim_{x\to-1+}(2x^3-x+1)=\lim_{x\to-1-}(-x^2+3x+C_2)$에서

$-2+1+1=-1-3+C_2 \quad \therefore C_2=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}2x^3-x+1 & (x\geq-1)\\ -x^2+3x+4 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(-3)=-9-9+4=-14$ 답 -14

24 $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} & (x\geq1)\\ -2x+1 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+C_1 & (x\geq1)\\ -x^2+x+C_2 & (x<1)\end{cases}$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$-1-1+C_2=0 \quad \therefore C_2=2$

$f(x)$가 연속함수이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

즉 $\lim_{x\to1+}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+C_1\right)=\lim_{x\to1-}(-x^2+x+2)$에서

$\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+C_1=-1+1+2 \quad \therefore C_1=\frac{13}{4}$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{13}{4} & (x\geq1)\\ -x^2+x+2 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(2)=1-3+\frac{13}{4}=\frac{5}{4}$ 답 ⑤

25 함수 $f'(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}f'(x)=\lim_{x\to2-}f'(x)=f'(2)$

즉 $\lim_{x\to2+}(x^2-1)=\lim_{x\to2-}a$에서

$a=4-1=3$

또 함수 $f'(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2+}f'(x)=\lim_{x\to-2-}f'(x)=f'(-2)$

즉 $\lim_{x\to-2+}3=\lim_{x\to-2-}(bx+1)$에서

$3=-2b+1 \quad \therefore b=-1$

따라서 $f'(x)=\begin{cases}x^2-1 & (x\geq2)\\ 3 & (-2\leq x<2)\\ -x+1 & (x<-2)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x+C_1 & (x\geq2)\\ 3x+C_2 & (-2\leq x<2)\\ -\frac{1}{2}x^2+x+C_3 & (x<-2)\end{cases}$

$f(0)=-4$이므로 $\quad C_2=-4$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$

즉 $\lim_{x\to2+}\left(\frac{1}{3}x^3-x+C_1\right)=\lim_{x\to2-}(3x-4)$에서

$\frac{8}{3}-2+C_1=2 \quad \therefore C_1=\frac{4}{3}$

또 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2-}f(x)=f(-2)$

Q BOX

두 점 $(1, -1)$, $(3, 0)$을 지나는 직선의 방정식

두 점 $(0, 1)$, $(1, -1)$을 지나는 직선의 방정식

$f'(a)$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

미분가능한 함수 $f(x)$
➡ 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to-2+}(3x-4)=\lim_{x\to-2-}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+C_3\right)$에서

$-6-4=-2-2+C_3 \quad \therefore C_3=-6$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x+\frac{4}{3} & (x\geq2)\\ 3x-4 & (-2\leq x<2)\\ -\frac{1}{2}x^2+x-6 & (x<-2)\end{cases}$이므로

$f(-4)+f(5)=(-8-4-6)+\left(\frac{125}{3}-5+\frac{4}{3}\right)$

$=20$ 답 20

26 $\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)+f(-1)-f(-1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(-1+h)-f(-1)\}-\{f(-1-h)-f(-1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

$-\lim_{h\to0}\frac{f(-1-h)-f(-1)}{-h}\cdot(-1)$

$=f'(-1)+f'(-1)=2f'(-1)$

$f(x)=\int(3x^3-2x^2+4x-1)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^3-2x^2+4x-1$

$\therefore f'(-1)=-3-2-4-1=-10$

따라서 구하는 값은

$2f'(-1)=2\cdot(-10)=-20$ 답 ②

27 $\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-f(-3)}{x^2-9}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-f(-3)}{(x+3)(x-3)}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}\cdot\frac{1}{x-3}$

$=-\frac{1}{6}f'(-3)$

$\int f(x)\,dx=xf(x)-4x^3+12x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^2+24x$

$xf'(x)=12x^2-24x$

$\therefore f'(x)=12x-24$

$\therefore f'(-3)=-36-24=-60$

따라서 구하는 값은

$-\frac{1}{6}f'(-3)=-\frac{1}{6}\cdot(-60)=10$ 답 10

28 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x-2}=0$에서 $x \longrightarrow 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)-4\}=0$이므로 $\quad f(2)=4$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$\therefore f'(2)=0$

07 부정적분

$f'(2)=0$, $f'(-2)=0$이고 $f'(x)$의 최고차항이 $3x^2$이므로

$$f'(x)=3(x+2)(x-2)=3x^2-12$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (3x^2-12)\,dx$$

$$=x^3-12x+C$$

$f(2)=4$이므로 $\quad 8-24+C=4 \quad \therefore C=20$

따라서 $f(x)=x^3-12x+20$이므로

$f(1)=1-12+20=9$ 답 ⑤

Q BOX

$f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이다.

29 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기 $f'(x)$가 $2x-1$에 정비례하므로

$$f'(x)=a(2x-1)\ (a\neq0)$$

이라 하면

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int a(2x-1)\,dx$$

$$=\int (2ax-a)\,dx=ax^2-ax+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 3)$을 지나므로 $\quad C=3$

또 점 $(4, -9)$를 지나므로

$-9=16a-4a+3$, $\quad 12a=-12$

$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-x^2+x+3$이므로

$f(2)=-4+2+3=1$ 답 ④

30 $f'(x)=-6x+k$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (-6x+k)\,dx$$

$$=-3x^2+kx+C$$

$$=-3\left(x-\frac{k}{6}\right)^2+\frac{k^2}{12}+C$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 최댓값 -5를 가지므로

$\frac{k}{6}=1$, $\frac{k^2}{12}+C=-5 \quad \therefore k=6$, $C=-8$

따라서 $f(x)=-3x^2+6x-8$이므로

$f(-1)=-3-6-8=-17$

$\therefore k+f(-1)=-11$ 답 -11

이차함수 $f(x)$는 $x=\frac{k}{6}$에서 최댓값 $\frac{k^2}{12}+C$를 갖는다.

31 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=7x-8$의 접점의 x좌표를 $t\ (t<0)$라 하면 $f'(t)=7$이므로

$6t^2-6t-5=7$, $\quad t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-1\ (\because t<0)$

즉 접점의 좌표는 $\quad (-1, -15)$

$f'(x)=6x^2-6x-5$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (6x^2-6x-5)\,dx$$

$$=2x^3-3x^2-5x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, -15)$를 지나므로

$-15=-2-3+5+C \quad \therefore C=-15$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2-5x-15$이므로

$f(1)=2-3-5-15=-21$ 답 -21

제3사분면에서 접하므로 $t<0$

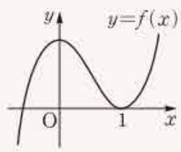
$y=7x-8$에 $x=-1$을 대입하면 $y=-7-8=-15$

32 $f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값이 양수이고 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접하므로 다음 그림과 같다.
따라서 $f(x)$의 극솟값은 0이다.



이때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (12x^2-12x)\,dx$$

$$=4x^3-6x^2+C$$

이고 $f(1)=0$이므로

$4-6+C=0 \quad \therefore C=2$

즉 $f(x)=4x^3-6x^2+2$이므로

$f(2)=32-24+2=10$ 답 ⑤

33 조건 (나)에서 $\quad f(-3)=60$, $f'(-3)=0$

조건 (가)에서 $\quad f'(3)=f'(-3)=0$

$f'(x)$의 최고차항이 $3x^2$이므로

$$f'(x)=3(x+3)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

이때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 3(x+3)(x-3)\,dx$$

$$=\int (3x^2-27)\,dx=x^3-27x+C$$

이고 $f(-3)=60$이므로

$-27+81+C=60 \quad \therefore C=6$

즉 $f(x)=x^3-27x+6$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(3)=27-81+6=-48$ 답 ③

34 $f'(x)=-3x^2+ax=-x(3x-a)$이므로

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

$8<a<12$이므로 $\frac{8}{3}<\frac{a}{3}<4$

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{a}{3}$일 때 최댓값을 갖고, $f(0)$, $f(4)$ 중 작은 값이 최솟값이다.

이때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (-3x^2+ax)\,dx$$

$$=-x^3+\frac{a}{2}x^2+C$$

이므로

$f(0)=C$, $f(4)=8a-64+C$

8<a<12에서

$0<8a-64<32$

이므로 $C<8a-64+C$

$\therefore f(0)<f(4)$

즉 함수 $f(x)$의 최솟값은 C이고 최댓값은

$$f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{18}+C=\frac{a^3}{54}+C$$

이므로

$$\left(\frac{a^3}{54}+C\right)-C=\frac{27}{2},\quad a^3=\frac{27}{2}\cdot 54$$

$\therefore a=9$ 답 9

$a^3=27\cdot 27=3^3\cdot 3^3$
$=9^3$
이므로 $a=9$

35 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0+1$

$\therefore f(0)=-1$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2)+f(h)-2h+1-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+1}{h}-2=f'(0)-2$$

이므로

$f'(0)-2=4$ $\therefore f'(0)=6$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-xh+1-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+1}{h}-x$$
$$=f'(0)-x$$
$$=6-x$$

이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6-x)\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+6x+C$$

$f(0)=-1$이므로 $C=-1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+6x-1$이므로

$f(-2)=-2-12-1=-15$ 답 -15

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=f'(0)$$

36 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$ $\therefore f(0)=0$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+3xh(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}+3x(x+h)\right\}$$
$$=f'(0)+3x^2$$

이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\{f'(0)+3x^2\}\,dx$$
$$=x^3+f'(0)x+C$$

$f'(0)$은 상수이다.

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=x^3+f'(0)x$

ㄱ. $f(x)=x^3+f'(0)x$에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1+f'(0)$

$\therefore f(1)\neq f'(0)$

ㄴ. $f'(x)=3x^2+f'(0)$에 $x=-1$을 대입하면

$f'(-1)=3+f'(0)$

$3=3+f'(0)$

$\therefore f'(0)=0$

따라서 $f'(x)=3x^2$이므로 삼차함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

$f'(x)=0$에서 $x=0$
$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

ㄷ. $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지면

$f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2+f'(0)$에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=3+f'(0)$

$0=3+f'(0)$

$\therefore f'(0)=-3$

$\therefore f(x)=x^3-3x,$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 2, $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로 모든 극값의 합은

$2+(-2)=0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

도전! 수능 기출

55쪽

01 1st $g(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구한다.

$f(x)=\int xg(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=xg(x)$

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$에서

$f'(x)-g'(x)=4x^3+2x$

이므로

$xg(x)-g'(x)=4x^3+2x$ …… ㉠

$g(x)$의 최고차항을 ax^n $(a\neq 0)$이라 하면 ㉠의 좌변의 최고차항이 ax^{n+1}이므로 $ax^{n+1}=4x^3$에서

$a=4$, $n+1=3$

$\therefore a=4$, $n=2$

$xg(x)$의 최고차항은 ax^{n+1}이고 $g'(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}이므로 ㉠의 좌변의 최고차항은 ax^{n+1}이다.

2nd $g(1)$의 값을 구한다.

$g(x)=4x^2+px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$g'(x)=8x+p$

$g(x)$와 $g'(x)$를 ㉠에 대입하면

$x(4x^2+px+q)-(8x+p)=4x^3+2x$

$\therefore 4x^3+px^2+(q-8)x-p=4x^3+2x$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$p=0,\ q-8=2$

$\therefore p=0,\ q=10$

따라서 $g(x)=4x^2+10$이므로

$g(1)=4+10=14$ 답 ⑤

02 (1st) $f(x)$를 구한다.

$f'(-\sqrt{2})=f'(0)=f'(\sqrt{2})=0$이므로

$f'(x)=ax(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$=ax^3-2ax\ (a>0)$

주어진 삼차함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $x\longrightarrow\infty$일 때 $f'(x)\longrightarrow\infty$이므로 $a>0$이다.

라 하면

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(ax^3-2ax)\,dx$

$=\frac{a}{4}x^4-ax^2+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

$f(\sqrt{2})=-3$이므로

$a-2a+1=-3$

$\therefore a=4$

$\therefore f(x)=x^4-4x^2+1$

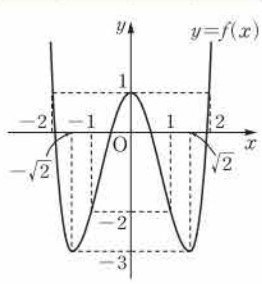
(2nd) $f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 정수 m의 값의 합을 구한다.

$f'(x)=0$에서

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



정수 n에 대하여

$n\le-2$ 또는 $n\ge2$이면

$f(n)>0$

$n=-1$ 또는 $n=1$이면

$f(n)<0$

$n=0$이면 $f(0)>0$

따라서 $f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 정수 m은

$f(m)>0,\ f(m+1)<0$ 또는 $f(m)<0,\ f(m+1)>0$

$-2,\ -1,\ 0,\ 1$이므로 구하는 합은

$-2+(-1)+0+1=-2$ 답 ①

03 (1st) ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $g'(x)=\begin{cases}0 & (x<-1)\\ f'(x) & (-1<x<1)\\ 0 & (x>1)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능하면 $g'(-1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to-1+}g'(x)=\lim_{x\to-1-}g'(x)=g'(-1)$

즉 $\lim_{x\to-1+}f'(x)=\lim_{x\to-1-}0$에서

$f'(-1)=0$

또 $g'(1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to1+}g'(x)=\lim_{x\to1-}g'(x)=g'(1)$

즉 $\lim_{x\to1+}0=\lim_{x\to1-}f'(x)$에서

$f'(1)=0$

따라서 $f'(-1)=f'(1)$이므로

$g'(-1)=g'(1)$

(2nd) ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능하면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}g(x)=\lim_{x\to-1-}g(x)=g(-1)$

즉 $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}3$에서

$f(-1)=3$

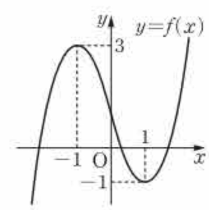
또 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1-}g(x)=g(1)$

즉 $\lim_{x\to1+}(-1)=\lim_{x\to1-}f(x)$에서

$f(1)=-1$

이때 $f'(-1)=0$, $f'(1)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 3, $x=1$에서 극솟값 -1을 갖는다.



따라서 $-1<x<1$에서 $f'(x)<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le0$이다.

$x\le-1$ 또는 $x\ge1$일 때 $g'(x)=0$이고, $-1<x<1$일 때 $g'(x)=f'(x)<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le0$

(3rd) ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $f'(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a\ (a>0)$라 하면

$f(x)=\int(ax^2-a)\,dx$

$=\frac{a}{3}x^3-ax+C$

$f(-1)=3$이므로 $-\frac{a}{3}+a+C=3$

$\therefore \frac{2}{3}a+C=3$ …… ㉠

$f(1)=-1$이므로 $\frac{a}{3}-a+C=-1$

$\therefore \frac{2}{3}a-C=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ C=1$

$\therefore f'(x)=3x^2-3$

따라서 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값 -3을 가지므로 $g'(x)$의 최솟값은 -3이다.

$g'(x)$의 최솟값은 $-1<x<1$에서 $f'(x)$의 최솟값과 같다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

08 정적분

Ⓦ 56쪽

01 $\int_0^2 5(x-2)(x+2)(x^2+4)\,dx$

$=\int_0^2 5(x^2-4)(x^2+4)\,dx$

$=\int_0^2 5(x^4-16)\,dx$

$=\int_0^2 (5x^4-80)\,dx$

$=\Big[x^5-80x\Big]_0^2$

$=32-160=-128$ 답 ①

02 $\int_1^3 \{4x-5f'(x)\}\,dx$

$=\Big[2x^2-5f(x)\Big]_1^3$

$=\{18-5f(3)\}-\{2-5f(1)\}$

$=18-5f(3)-(2-5\cdot 2)$

$=26-5f(3)$

따라서 $26-5f(3)=11$이므로 $5f(3)=15$

$\therefore f(3)=3$ 답 ③

03 $\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^4 (3x^2+ax)\,dx$

$=\Big[x^3+\frac{a}{2}x^2\Big]_0^4$

$=64+8a$

이때 $f(4)=48+4a$이므로

$64+8a=48+4a$, $4a=-16$

$\therefore a=-4$ 답 -4

04 $\int_{-1}^k (2x-8)\,dx=\Big[x^2-8x\Big]_{-1}^k$

$=(k^2-8k)-(1+8)$

$=k^2-8k-9=(k-4)^2-25$

따라서 $\int_{-1}^k (2x-8)\,dx$는 $k=4$일 때 최솟값 -25를 가지므로

$m=4$, $n=-25$

$\therefore m-n=29$ 답 29

05 $\int_0^3 (x^2+4x+k)\,dx+2\int_0^3 (x^2-3x)\,dx$

$=\int_0^3 \{x^2+4x+k+2(x^2-3x)\}\,dx$

$=\int_0^3 (3x^2-2x+k)\,dx$

$=\Big[x^3-x^2+kx\Big]_0^3$

$=27-9+3k$

$=18+3k$

따라서 $18+3k=12$이므로 $3k=-6$

$\therefore k=-2$ 답 ②

Q BOX

$\int_k^2 (5x-6)\,dx$
$=-\int_2^k (5x-6)\,dx$

양변을 -2, 즉 음수로 나누므로 부등호의 방향이 바뀐다.

피적분함수가 같고, 한 정적분의 위끝과 다른 정적분의 아래끝이 같다.

$2\int_0^3 (x^2-3x)\,dx$
$=\int_0^3 2(x^2-3x)\,dx$

적분 구간이 같다.

06 $\int_2^k (x+4)\,dx+\int_k^2 (5x-6)\,dx$

$=\int_2^k (x+4)\,dx-\int_2^k (5x-6)\,dx$

$=\int_2^k \{x+4-(5x-6)\}\,dx$

$=\int_2^k (-4x+10)\,dx$

$=\Big[-2x^2+10x\Big]_2^k$

$=(-2k^2+10k)-(-8+20)$

$=-2k^2+10k-12$

즉 $-2k^2+10k-12\ge 0$이므로

$k^2-5k+6\le 0$

$(k-2)(k-3)\le 0$

$\therefore 2\le k\le 3$

따라서 정수 k는 2, 3의 2개이다. 답 2

07 $\int_3^5 \{f(x)+2g(x)\}\,dx=4$ ······ ㉠

$\int_3^5 \{3f(x)-g(x)\}\,dx=-9$ ······ ㉡

㉠+㉡×2를 하면

$\int_3^5 7f(x)\,dx=-14$, $7\int_3^5 f(x)\,dx=-14$

$\therefore \int_3^5 f(x)\,dx=-2$

㉠×3−㉡을 하면

$\int_3^5 7g(x)\,dx=21$, $7\int_3^5 g(x)\,dx=21$

$\therefore \int_3^5 g(x)\,dx=3$

$\therefore \int_3^5 \{5g(x)-2f(x)\}\,dx$

$=5\int_3^5 g(x)\,dx-2\int_3^5 f(x)\,dx$

$=5\cdot 3-2\cdot(-2)=19$ 답 19

08 $\int_{-3}^0 \frac{x^3}{x-2}\,dx-\int_1^0 \frac{y^3}{y-2}\,dy-\int_{-3}^1 \frac{8}{z-2}\,dz$

$=\int_{-3}^0 \frac{x^3}{x-2}\,dx-\int_1^0 \frac{x^3}{x-2}\,dx-\int_{-3}^1 \frac{8}{x-2}\,dx$

$=\int_{-3}^0 \frac{x^3}{x-2}\,dx+\int_0^1 \frac{x^3}{x-2}\,dx-\int_{-3}^1 \frac{8}{x-2}\,dx$

$=\int_{-3}^1 \frac{x^3}{x-2}\,dx-\int_{-3}^1 \frac{8}{x-2}\,dx$

$=\int_{-3}^1 \frac{x^3-8}{x-2}\,dx$

$=\int_{-3}^1 \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}\,dx$

$=\int_{-3}^1 (x^2+2x+4)\,dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3+x^2+4x\Big]_{-3}^1$

$=\left(\frac{1}{3}+1+4\right)-(-9+9-12)=\frac{52}{3}$ 답 $\frac{52}{3}$

Ⓦ 08 정적분

09 $\int_0^{10} f(x)\,dx$

$=\int_0^5 f(x)\,dx+\int_5^{10} f(x)\,dx$

$=\int_0^5 f(x)\,dx+\left\{\int_5^3 f(x)\,dx+\int_3^{10} f(x)\,dx\right\}$

$=\int_0^5 f(x)\,dx+\left\{-\int_3^5 f(x)\,dx+\int_3^{10} f(x)\,dx\right\}$

$=A+(-C+B)$

$=A+B-C$ 답 ②

10 $\int_k^{k+1} f(x)\,dx=k+1$이므로

$\int_0^{20} f(x)\,dx$

$=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx+\cdots+\int_{19}^{20} f(x)\,dx$

$=1+2+\cdots+20=\sum_{k=1}^{20} k$

$=\dfrac{20\cdot 21}{2}=210$ 답 ④

$\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

11 $f(x)=\begin{cases} -x+2 & (x\ge 1) \\ x & (x\le 1)\end{cases}$이므로

두 점 (1, 1), (2, 0)을 지나는 직선의 방정식은 $y=-x+2$

$(x+1)f(x)=\begin{cases} -x^2+x+2 & (x\ge 1) \\ x^2+x & (x\le 1)\end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^2 (x+1)f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^1 (x+1)f(x)\,dx+\int_1^2 (x+1)f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^1 (x^2+x)\,dx+\int_1^2 (-x^2+x+2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2$

$=\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\right\}$

$+\left\{\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2\right)\right\}$

$=\dfrac{11}{6}$ 답 ①

12 $f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x+C_1 & (x\ge 0) \\ 3x^2+x+C_2 & (x\le 0)\end{cases}$

이때 $f(2)=4$이므로

$2+2+C_1=4 \qquad \therefore C_1=0$

한편 미분가능한 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

미분가능한 함수는 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$

즉 $\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)=\lim_{x\to 0-}(3x^2+x+C_2)$에서

$C_2=0$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x & (x\ge 0) \\ 3x^2+x & (x\le 0)\end{cases}$이므로

$\int_{-2}^6 f(x)\,dx=\int_{-2}^0 f(x)\,dx+\int_0^6 f(x)\,dx$

$=\int_{-2}^0 (3x^2+x)\,dx+\int_0^6 \left(\frac{1}{2}x^2+x\right)dx$

$=\left[x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^0+\left[\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^6$

$=-(-8+2)+(36+18)$

$=60$ 답 60

13 (i) $a\le 3$일 때,

$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a (3x-9)\,dx$

$=\left[\frac{3}{2}x^2-9x\right]_0^a=\frac{3}{2}a^2-9a$

즉 $\frac{3}{2}a^2-9a=0$이므로

$a^2-6a=0, \qquad a(a-6)=0$

$\therefore a=6\ (\because a\ne 0)$

그런데 $a\le 3$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a>3$일 때,

$\int_0^a f(x)\,dx$

$=\int_0^3 (3x-9)\,dx+\int_3^a \left(\frac{1}{3}x-1\right)dx$

$=\left[\frac{3}{2}x^2-9x\right]_0^3+\left[\frac{1}{6}x^2-x\right]_3^a$

$=\left(\frac{27}{2}-27\right)+\left\{\left(\frac{1}{6}a^2-a\right)-\left(\frac{3}{2}-3\right)\right\}$

$=\frac{1}{6}a^2-a-12$

즉 $\frac{1}{6}a^2-a-12=0$이므로

$a^2-6a-72=0, \qquad (a+6)(a-12)=0$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=12$

그런데 $a>3$이므로 $\qquad a=12$

(i), (ii)에서 $\qquad a=12$ 답 12

14 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4x^3-12x)$

$=|4x^3-12x-8|$

$=|4(x^3-3x-2)|$

$=|4(x+1)^2(x-2)|$

$(x+1)^2\ge 0$이므로 $|4(x+1)^2(x-2)|=4(x+1)^2|x-2|$ 따라서 $x-2=0$, 즉 $x=2$를 경계로 구간을 나누어 함수식을 절댓값 기호 없이 나타낸다.

$=\begin{cases} 4x^3-12x-8 & (x\ge 2) \\ -4x^3+12x+8 & (x\le 2)\end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^3 (g\circ f)(x)\,dx$

$=\int_{-1}^2 (g\circ f)(x)\,dx+\int_2^3 (g\circ f)(x)\,dx$

$=\int_{-1}^2 (-4x^3+12x+8)\,dx$

$+\int_2^3 (4x^3-12x-8)\,dx$

$=\left[-x^4+6x^2+8x\right]_{-1}^2+\left[x^4-6x^2-8x\right]_2^3$

$=\{(-16+24+16)-(-1+6-8)\}$

$+\{(81-54-24)-(16-24-16)\}$

$=54$ 답 54

15 $|2x-6|=\begin{cases} 2x-6 & (x\geq 3) \\ -2x+6 & (x\leq 3) \end{cases}$이고, $a>3$이므로

$$\int_0^a |2x-6|\,dx$$
$$=\int_0^3 (-2x+6)\,dx+\int_3^a (2x-6)\,dx$$
$$=\Big[-x^2+6x\Big]_0^3+\Big[x^2-6x\Big]_3^a$$
$$=(-9+18)+\{(a^2-6a)-(9-18)\}$$
$$=a^2-6a+18$$

따라서 $a^2-6a+18=5a$이므로

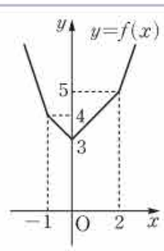
$$a^2-11a+18=0$$
$$(a-2)(a-9)=0$$
$$\therefore a=9\ (\because a>3)$$

답 ⑤

16 $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & (x\geq 2) \\ x+3 & (0\leq x\leq 2) \\ -x+3 & (-1\leq x\leq 0) \\ -3x+1 & (x\leq -1) \end{cases}$

세 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 함수식을 절댓값 기호 없이 나타낸다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 3을 갖는다.



$$\therefore a=3$$
$$\therefore \int_0^a f(x)\,dx$$
$$=\int_0^3 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^2 (x+3)\,dx+\int_2^3 (3x-1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^2+\left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_2^3$$
$$=(2+6)+\left\{\left(\frac{27}{2}-3\right)-(6-2)\right\}$$
$$=\frac{29}{2}$$

답 ②

17 $|x-n|=\begin{cases} x-n & (x\geq n) \\ -x+n & (x\leq n) \end{cases}$이므로

$$f(n)=\int_0^{2n} |x-n|\,dx$$
$$=\int_0^n (-x+n)\,dx+\int_n^{2n} (x-n)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+nx\right]_0^n+\left[\frac{1}{2}x^2-nx\right]_n^{2n}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}n^2+n^2\right)+\left\{(2n^2-2n^2)-\left(\frac{1}{2}n^2-n^2\right)\right\}$$
$$=n^2$$
$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(12)$$
$$=1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2$$
$$=\sum_{k=1}^{12} k^2$$
$$=\frac{12\cdot 13\cdot 25}{6}$$
$$=650$$

답 650

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 =\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

18 $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,dx+\int_0^2 f(x)\,dx$

$$=\int_{-2}^2 f(x)\,dx$$
$$=\int_{-2}^2 (6x^2+8x^3+10x^4+12x^5)\,dx$$
$$=\int_{-2}^2 (6x^2+10x^4)\,dx+\int_{-2}^2 (8x^3+12x^5)\,dx$$
$$=2\int_0^2 (6x^2+10x^4)\,dx$$
$$=2\Big[2x^3+2x^5\Big]_0^2$$
$$=2\cdot(16+64)=160$$

답 160

19 $\displaystyle\int_{-3}^3 |x|(x-|x|+1)\,dx$

$$=\int_{-3}^3 (|x|x-|x|^2+|x|)\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $f(x)=|x|x$, $g(x)=|x|^2$, $h(x)=|x|$라 하면

$f(-x)=|-x|(-x)=-|x|x=-f(x)$,

$g(-x)=|-x|^2=|x|^2=g(x)$,

$h(-x)=|-x|=|x|=h(x)$

이므로 $f(x)$는 기함수이고 $g(x)$, $h(x)$는 우함수이다.

따라서 ㉠에서

$$\int_{-3}^3 (|x|x-|x|^2+|x|)\,dx$$
$$=2\int_0^3 (-|x|^2+|x|)\,dx$$
$$=2\int_0^3 (-x^2+x)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^3$$
$$=2\cdot\left(-9+\frac{9}{2}\right)=-9$$

답 ①

다른 풀이 $\displaystyle\int_{-3}^3 |x|(x-|x|+1)\,dx$

$$=\int_{-3}^0 (-x)\cdot(2x+1)\,dx+\int_0^3 x\,dx$$
$$=\int_{-3}^0 (-2x^2-x)\,dx+\int_0^3 x\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^0+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3$$
$$=-\left(18-\frac{9}{2}\right)+\frac{9}{2}=-9$$

$|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x\leq 0) \end{cases}$

20 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 (ax+b)\,dx$$
$$=\int_{-1}^1 ax\,dx+\int_{-1}^1 b\,dx$$
$$=2\int_0^1 b\,dx$$
$$=2\Big[bx\Big]_0^1$$
$$=2b$$

즉 $2b=-6$이므로 $\quad b=-3$

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx=\int_{-1}^{1} x(ax-3)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1} (ax^2-3x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1} ax^2\,dx+\int_{-1}^{1} (-3x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1} ax^2\,dx$$
$$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}a$$

즉 $\frac{2}{3}a=4$이므로 $\quad a=6$

따라서 $f(x)=6x-3$이므로

$f(3)=18-3=15$ 답 15

21 $f(x)+f(-x)=0$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로

$f(x)$는 기함수이다.

따라서 $x^2f(x)$는 기함수, $xf(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-2}^{2} (x^2+7x-5)f(x)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2} x^2f(x)\,dx+7\int_{-2}^{2} xf(x)\,dx-5\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$
$$=2\cdot 7\int_{0}^{2} xf(x)\,dx$$
$$=14\cdot 3=42$$ 답 42

22 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_{-6}^{6} f(x)\,dx=18$에서 $\quad 2\int_{0}^{6} f(x)\,dx=18$

$$\therefore \int_{0}^{6} f(x)\,dx=9$$
$$\therefore \int_{3}^{6} f(x)\,dx=\int_{3}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{6} f(x)\,dx$$
$$=-\int_{0}^{3} f(x)\,dx+\int_{0}^{6} f(x)\,dx$$
$$=-6+9=3$$ 답 ①

23 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이고

$g(-x)=-g(x)$에서 $g(x)$는 기함수이므로

$f(x)g(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-4}^{4} \{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_{-4}^{4} f(x)g(x)\,dx$$
$$=\int_{-4}^{4} f(x)\,dx$$
$$=2\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$$
$$=2\cdot 2=4$$ 답 ④

24 $\int_{1}^{2} tf'(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면

$f(x)=-4x^3+6x+k$

$\therefore f'(x)=-12x^2+6$

Q BOX

(우함수)×(기함수)
=(기함수)

(기함수)×(기함수)
=(우함수)

정적분에서 변수가 t이므로 t 이외의 문자는 상수로 생각한다.

$f(x)$가 우함수이므로

$\int_{0}^{4} f(x)\,dx$
$=\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$
$\therefore \int_{-4}^{4} f(x)\,dx$
$=2\int_{0}^{4} f(x)\,dx$
$=2\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$

정적분의 아래끝과 위끝이 모두 상수이면 정적분의 결과도 상수이다.

$f'(t)=-12t^2+6$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_{1}^{2} t(-12t^2+6)\,dt=\int_{1}^{2} (-12t^3+6t)\,dt$$
$$=\left[-3t^4+3t^2\right]_1^2$$
$$=(-48+12)-(-3+3)$$
$$=-36$$

즉 ㉠에서 $\quad k=-36$

따라서 $f(x)=-4x^3+6x-36$이므로

$f(-2)=32-12-36=-16$ 답 -16

25 $$f(x)=2x+\int_{0}^{5} f(t)\,dt-\int_{0}^{1} f(t)\,dt$$
$$=2x+\int_{1}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{5} f(t)\,dt$$
$$=2x+\int_{1}^{5} f(t)\,dt$$

$\int_{1}^{5} f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면

$f(x)=2x+k$

$f(t)=2t+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_{1}^{5} (2t+k)\,dt=\left[t^2+kt\right]_1^5$$
$$=(25+5k)-(1+k)$$
$$=24+4k$$

즉 ㉠에서 $24+4k=k$이므로

$3k=-24 \quad \therefore k=-8$

따라서 $f(x)=2x-8$이므로

$f(8)=16-8=8$ 답 8

26 $$f(x)=-3x^2+\int_{0}^{2} xf(t)\,dt-\int_{1}^{2} f(t)\,dt$$
$$=-3x^2+x\int_{0}^{2} f(t)\,dt-\int_{1}^{2} f(t)\,dt$$

$\int_{0}^{2} f(t)\,dt=a$ (a는 상수) ...... ㉠

$\int_{1}^{2} f(t)\,dt=b$ (b는 상수) ...... ㉡

로 놓으면

$f(x)=-3x^2+ax-b$

$f(t)=-3t^2+at-b$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_{0}^{2} (-3t^2+at-b)\,dt=\left[-t^3+\frac{a}{2}t^2-bt\right]_0^2$$
$$=-8+2a-2b$$

즉 ㉠에서 $-8+2a-2b=a$이므로

$a-2b=8$ ...... ㉢

$f(t)=-3t^2+at-b$를 ㉡의 좌변에 대입하면

$$\int_{1}^{2} (-3t^2+at-b)\,dt$$
$$=\left[-t^3+\frac{a}{2}t^2-bt\right]_1^2$$
$$=(-8+2a-2b)-\left(-1+\frac{a}{2}-b\right)$$
$$=\frac{3}{2}a-b-7$$

즉 ㉡에서 $\frac{3}{2}a-b-7=b$이므로

$3a-4b=14$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-5$

따라서 $f(x)=-3x^2-2x+5$이므로

$f(-1)=-3+2+5=4$ 답 ⑤

27 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-9$

또 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^3-9a,\quad a(a+3)(a-3)=0$

$\int_a^a f(t)\,dt=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

$\therefore f(a)=f(3)=27-9=18$ 답 18

28 $f(x)=\int_x^{x+1} t^2\,dt$에서

$f'(x)=(x+1)^2-x^2=2x+1$

$\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)\,dt$
$=f(x+a)-f(x)$

$\therefore \int_0^4 f'(x)\,dx=\int_0^4 (2x+1)\,dx$

$=\Big[x^2+x\Big]_0^4$

$=16+4=20$ 답 ③

29 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=30x^4+4x^3+2xf(x)$

$\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)$
$+f(x)g'(x)$

$x^2f'(x)=30x^4+4x^3$

$\therefore f'(x)=30x^2+4x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (30x^2+4x)\,dx$

$=10x^3+2x^2+C$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=6+1=7$

즉 ㉠에서 $10+2+C=7$이므로 $C=-5$

따라서 $f(x)=10x^3+2x^2-5$이므로

$f(2)=80+8-5=83$ 답 83

30 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$x\int_{-1}^x f(t)\,dt-\int_{-1}^x tf(t)\,dt=-2x^3-x^2+ax+3$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-1}^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=-6x^2-2x+a$

$\therefore \int_{-1}^x f(t)\,dt=-6x^2-2x+a$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-12x-2$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=2-1-a+3\quad \therefore a=4$

$\int_{-1}^x f(t)\,dt$
$=-6x^2-2x+a$
의 양변에 $x=-1$을 대입하여 a의 값을 구할 수도 있다.

$\therefore \int_{-a}^a f(x)\,dx=\int_{-4}^4 (-12x-2)\,dx$

$=2\int_0^4 (-2)\,dx$

$=2\Big[-2x\Big]_0^4$

$=2\cdot(-8)=-16$ 답 ④

31 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$x\int_2^x f(t)\,dt-\int_2^x tf(t)\,dt=x^3+ax^2+b$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_2^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+2ax$

$\therefore \int_2^x f(t)\,dt=3x^2+2ax$ $\cdots\cdots$ ㉠

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+2a$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=8+4a+b\quad \therefore 4a+b=-8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=12+4a\quad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면

$-12+b=-8\quad \therefore b=4$

따라서 $f(x)=6x-6$이므로

$f(b-a)=f(7)=42-6=36$ 답 ⑤

32 $G(x)=\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$

$=x\int_0^x f'(t)\,dt-\int_0^x tf'(t)\,dt$

이므로

$G'(x)=\int_0^x f'(t)\,dt+xf'(x)-xf'(x)$

$=\int_0^x f'(t)\,dt=\Big[f(t)\Big]_0^x$

$=f(x)-f(0)$

$\therefore G'(1)=f(1)-f(0)=5-3=2$ 답 2

33 $f(x)=\int_1^x (6t^2-6t-12)\,dt$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 a, $x=2$에서 극솟값 b를 가지므로

$a=f(-1)=\int_1^{-1} (6t^2-6t-12)\,dt$

$=-\int_{-1}^1 (6t^2-6t-12)\,dt=-2\int_0^1 (6t^2-12)\,dt$

$=-2\Big[2t^3-12t\Big]_0^1$

$=-2\cdot(2-12)=20,$

$b=f(2)=\int_1^2 (6t^2-6t-12)dt$

$=\Big[2t^3-3t^2-12t\Big]_1^2$

$=(16-12-24)-(2-3-12)=-7$

$\therefore a+b=13$ 답 ③

34 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$에서

$$F'(x)=f(x)=x^2-8x+k$$

삼차함수 $F(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $F'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4)^2-k\le 0$$

$$\therefore k\ge 16$$

따라서 실수 k의 최솟값은 16이다. 답 16

쌤한마디

삼차함수가 극값을 갖거나 갖지 않을 조건

① 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이다.

② 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이다.

35 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$을 지나므로

$$f(x)=a(x-1)(x-3)$$
$$=a(x-2)^2-a\ (a<0)$$

라 하면 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $-a$를 갖는다.

즉 $-a=1$이므로

$$a=-1$$
$$\therefore f(x)=-(x-1)(x-3)$$
$$=-x^2+4x-3$$

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$에서

$$F'(x)=f(x)$$

$F'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$에서

$$x=1 \text{ 또는 } x=3$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $F(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$$F(1)=\int_0^1 f(t)\,dt$$
$$=\int_0^1(-t^2+4t-3)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{3}+2-3$$
$$=-\frac{4}{3}$$

답 $-\frac{4}{3}$

Q BOX

$f(x)$가 이차함수이므로 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$는 삼차함수이다.

$|-t|=|t|$이므로 $|t|$는 우함수이다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 도함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수도 음수이다.

36 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=\frac{1}{4}x^4-x^3+ax^2$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=x^3-3x^2+2ax$$

$$\therefore \int_0^x f(t)\,dt=x^3-3x^2+2ax$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=3x^2-6x+2a=3(x-1)^2+2a-3$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $2a-3$을 가지므로

$$2a-3=5,\qquad 2a=8$$
$$\therefore a=4$$

답 ②

37 $f(x)=\int_{-2}^x(|t|-2)\,dt$에서

$$f'(x)=|x|-2$$

$f'(x)=0$에서 $\quad |x|=2$

$$\therefore x=2\ (\because 0\le x\le 4)$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 $0\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$f(2)=\int_{-2}^2(|t|-2)\,dt$$
$$=2\int_0^2(|t|-2)\,dt$$
$$=2\int_0^2(t-2)\,dt$$
$$=2\left[\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^2$$
$$=2\cdot(2-4)=-4$$

답 -4

38 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$에서 $\qquad F'(x)=f(x)$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소, $x=1$에서 극대이므로

$$f'(-1)=0,\ f'(1)=0$$

$f'(x)=a(x+1)(x-1)\ (a<0)$이라 하면

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int a(x+1)(x-1)\,dx$$
$$=a\int(x^2-1)\,dx$$
$$=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+C$$

$y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$$f(0)=0 \qquad \therefore C=0$$

$$\therefore f(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)=\frac{1}{3}ax(x^2-3)$$
$$=\frac{1}{3}ax(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

$F'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$ ($\because$ $0\le x\le 2$)

x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	2
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		↗	극대	↘	

따라서 구간 $[0, 2]$에서 함수 $F(x)$는 $x=\sqrt{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $F(\sqrt{3})$이다. 답 ④

39 $f(x)=\int_0^x (3t^2-4t+5)\,dt$에서

$f'(x)=3x^2-4x+5$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f'(t)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=5$$

답 ②

40 $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$$
$$=\frac{1+a}{2}$$

Q BOX

$f(1)=2-1+a$
$=1+a$

따라서 $\frac{1+a}{2}=4$이므로 $1+a=8$

$\therefore a=7$ 답 7

41 $f(t)=|t-a|$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x |t-a|\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)$$
$$=|-a|=|a|$$

따라서 $|a|=a^2-a-8$이므로

(i) $a\ge 0$일 때,

$a=a^2-a-8$, $a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because$ $a\ge 0$)

(ii) $a<0$일 때,

$-a=a^2-a-8$, $a^2=8$

$\therefore a=-2\sqrt{2}$ ($\because$ $a<0$)

(i), (ii)에서 $a=4$ 또는 $a=-2\sqrt{2}$이므로 구하는 곱은

$4\cdot(-2\sqrt{2})=-8\sqrt{2}$ 답 ①

42 $\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^{x^3} f(t)\,dt-f(x)}{x^3-1}=3$에서 $x\to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

즉 $\lim_{x\to 1}\left\{\int_1^{x^3} f(t)\,dt-f(x)\right\}=0$이므로

$0-f(1)=0$ $\therefore f(1)=0$ …… ㉠

$F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^{x^3} f(t)\,dt-f(x)}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^3)-F(1)-f(x)}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^3)-F(1)-\{f(x)-f(1)\}}{x^3-1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x^3-1}-\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$=F'(1)-f'(1)\cdot\frac{1}{3}=f(1)-\frac{1}{3}f'(1)$$
$$=-\frac{1}{3}f'(1)\ (\because ㉠)$$

따라서 $-\frac{1}{3}f'(1)=3$이므로

$f'(1)=-9$ 답 ⑤

도전! 수능 기출

W 63쪽

01 1st 곱의 미분법을 이용하여 $h'(x)$를 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $h(x)=(x-1)f(x)$에서

$h'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$

$\therefore h'(x)=g(x)$

2nd ㄱ을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에서

$f'(x)=3x^2+2x+a$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면

$f'(-1)=0$, $f(-1)=0$

$f'(-1)=0$에서 $3-2+a=0$

$\therefore a=-1$

$f(-1)=0$에서 $-1+1-a+b=0$

$\therefore b=a=-1$

$\therefore f(x)=x^3+x^2-x-1$

$h(x)=(x-1)f(x)$이면

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 h'(x)\,dx$$
$$=\Big[h(x)\Big]_0^1=h(1)-h(0)$$
$$=f(0)$$
$$=-1$$

ㄱ에서 $h'(x)=g(x)$임을 이용한다.

$h(x)=(x-1)f(x)$에서
$h(1)=0$,
$h(0)=-f(0)$

3rd 롤의 정리를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h(x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하다.

이때 $f(0)=0$이면

$h(0)=-f(0)=0$, $h(1)=0$

이므로 롤의 정리에 의하여 $h'(c)=0$, 즉 $g(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

W 08 정적분

따라서 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

02 (1st) $f(x)$의 차수를 구한다.

조건 (가)의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(1)\}+\frac{x-1}{2}f'(x)$$

$$\therefore f(x)=(x-1)f'(x)+f(1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\neq0$, n은 자연수)이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}이므로 ㉠의 우변의 최고차항은

$$x\cdot anx^{n-1}=anx^n$$

㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$$a=an \qquad \therefore n=1\ (\because a\neq0)$$

따라서 $f(x)$는 일차함수이다.

(2nd) $f(4)$의 값을 구한다.

$f(0)=1$이므로 $\quad f(x)=ax+1$

조건 (나)에서

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2(ax+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^2=2a+2,$$

$$\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=\int_{-1}^1(ax^2+x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 ax^2\,dx+\int_{-1}^1 x\,dx$$

$$=2\int_0^1 ax^2\,dx$$

$$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2a}{3}$$

즉 $2a+2=5\cdot\frac{2a}{3}$이므로 $\quad \frac{4}{3}a=2 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x+1$이므로

$$f(4)=6+1=7$$

답 7

03 (1st) $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구한다.

$$g(x)=\int_a^x\{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4\,dt$$

$$=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^4\,dt-\int_a^x\{f(t)\}^5\,dt$$

에서

$$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4\,dt+\{f(x)\}^5-\{f(x)\}^5$$

$$=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4\,dt$$

$g'(x)=0$에서 $\quad f'(x)=0$ 또는 $x=a$

한편 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에서

$$f'(x)=3x^2-24x+45=3(x-3)(x-5)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=3$ 또는 $x=5$

따라서 $g'(x)=0$에서

$$x=3 \text{ 또는 } x=5 \text{ 또는 } x=a$$

Q BOX

㉠은 x에 대한 항등식이므로 동류항의 계수를 비교한다.

$\int_a^x\{f(t)\}^4 dt=0$에서 $x=a$

(2nd) 함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구한다.

(i) $a\neq3$, $a\neq5$일 때,

함수 $g(x)$는 $x=3$, $x=5$, $x=a$의 좌우에서 각각 $g'(x)$의 부호가 바뀌므로 $x=3$, $x=5$, $x=a$에서 모두 극값을 갖는다.

(ii) $a=3$일 때,

$$g'(x)=3(x-3)(x-5)\int_3^x\{f(t)\}^4\,dt\text{이므로}$$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=3$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=5$에서만 극값을 갖는다.

(iii) $a=5$일 때,

$$g'(x)=3(x-3)(x-5)\int_5^x\{f(t)\}^4\,dt\text{이므로}$$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=3$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서만 극값을 갖는다.

이상에서 함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 값은 3, 5이므로 구하는 합은

$$3+5=8$$

답 8

쌤 한마디

$h(x)=\int_a^x\{f(t)\}^4\,dt$라 하면

$$h'(x)=\{f(x)\}^4\geq0$$

따라서 모든 실수 x에 대하여 x의 값이 증가할 때 함수 $h(x)$는 감소하지 않으므로

$x>a$일 때, $\quad h(x)=\int_a^x\{f(t)\}^4\,dt>0$

$x=a$일 때, $\quad h(a)=\int_a^a\{f(t)\}^4\,dt=0$

$x<a$일 때, $\quad h(x)=\int_a^x\{f(t)\}^4\,dt<0$

04 (1st) 조건 (나)의 식을 이용하여 $x\leq b$일 때의 함수 $f(x)$를 구한다.

조건 (나)의 $f(x)=\int_0^x\sqrt{4-2f(t)}\,dt$에서

$$f'(x)=\sqrt{4-2f(x)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (가)의 $x\leq b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$에서

$$f'(x)=2a(x-b)$$

이 식을 ㉠에 대입하면

$$2a(x-b)=\sqrt{4-2f(x)}$$

위의 식의 양변을 각각 제곱하면

$$4a^2(x-b)^2=4-2f(x)$$

$$\therefore f(x)=-2a^2(x-b)^2+2\ (x\leq b)$$

(2nd) a, c의 값을 구한다.

$x\le b$일 때,

$$a(x-b)^2+c=-2a^2(x-b)^2+2$$

이므로

$$a=-2a^2,\ c=2$$

$2a^2+a=0$에서 $\quad a(2a+1)=0$

$$\therefore\ a=-\frac{1}{2}\ \text{또는}\ a=0$$

(3rd) $x\ge b$일 때의 함수 $f(x)$를 구한다.

㉠에서 $f'(x)=\sqrt{4-2f(x)}\ge 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 x의 값이 증가할 때 함수 $f(x)$는 감소하지 않는다.

이때 $f(b)=2$이므로 $x\ge b$일 때

$$f(x)\ge 2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

조건 ㈎에서 $x\le b$일 때 $f(x)=a(x-b)^2+2$ 이므로 $f(b)=2$

또 $4-2f(x)\ge 0$이므로

$$f(x)\le 2 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서 $x\ge b$일 때 $\quad f(x)=2$

㉡, ㉢을 만족시키는 함수는 $f(x)=2$, 즉 상수함수이다.

(4th) $p+q$의 값을 구한다.

$b\le 0$이면 $\quad f(0)=2$

그런데 조건 ㈏의 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로 모순이다.

$$\therefore\ b>0$$

즉 $f(x)=a(x-b)^2+2$에서

$$f(0)=ab^2+2=0$$

(i) $a=0$일 때, $2=0$이므로 모순이다.

(ii) $a=-\frac{1}{2}$일 때, $\quad -\frac{1}{2}b^2+2=0$

$$b^2=4 \qquad \therefore\ b=2\ (\because\ b>0)$$

(i), (ii)에서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=2$이므로

$$f(x)=\begin{cases} 2 & (x\ge 2) \\ -\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x\le 2)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\int_0^6 f(x)dx \\ &=\int_0^2\left\{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2\right\}dx+\int_2^6 2\,dx \\ &=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right)dx+\int_2^6 2\,dx \\ &=\left[-\frac{1}{6}x^3+x^2\right]_0^2+\Big[2x\Big]_2^6 \\ &=\left(-\frac{4}{3}+4\right)+(12-4)=\frac{32}{3}\end{aligned}$$

따라서 $p=3$, $q=32$이므로

$$p+q=35$$

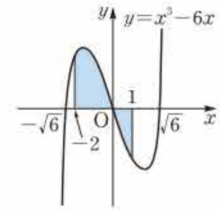
답 35

09 정적분의 활용

Ⓦ 64쪽

정적분을 이용하여 넓이를 구할 때에는 먼저 곡선의 개형을 그려 넓이를 구하는 부분을 나타낸다.

01 곡선 $y=x^3-6x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-6x=0$에서



$$x(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})=0$$

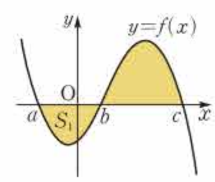
$$\therefore\ x=-\sqrt{6}\ \text{또는}\ x=0\ \text{또는}\ x=\sqrt{6}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^1|x^3-6x|dx \\ &=\int_{-2}^0(x^3-6x)\,dx+\int_0^1(-x^3+6x)\,dx \\ &=\left[\frac{1}{4}x^4-3x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+3x^2\right]_0^1 \\ &=8+\frac{11}{4}=\frac{43}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{43}{4}$

02 오른쪽 그림과 같이 구간 $[a,\ b]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_a^b\{-f(x)\}dx$$

$$\begin{aligned}&\int_a^c f(x)\,dx \\ &=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx \\ &=-S_1+16\end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_a^b\{-f(x)\}dx=-S_1$$

즉 $-S_1+16=10$이므로 $\quad S_1=6$

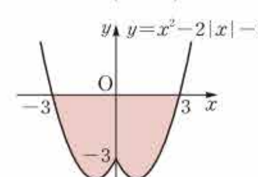
따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_a^c|f(x)|\,dx&=\int_a^b\{-f(x)\}\,dx+\int_b^c f(x)\,dx \\ &=6+16=22\end{aligned}$$

답 ⑤

03 $y=x^2-2|x|-3=\begin{cases}x^2-2x-3 & (x\ge 0)\\ x^2+2x-3 & (x\le 0)\end{cases}$

곡선 $y=x^2-2|x|-3$과 x축의 교점의 x좌표는



(i) $x\ge 0$일 때,

$x^2-2x-3=0$에서

$$(x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore\ x=3\ (\because\ x\ge 0)$$

(ii) $x\le 0$일 때,

$x^2+2x-3=0$에서

$$(x+3)(x-1)=0$$

$$\therefore\ x=-3\ (\because\ x\le 0)$$

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_{-3}^0\{-(x^2+2x-3)\}\,dx+\int_0^3\{-(x^2-2x-3)\}\,dx \\ &=\int_{-3}^0(-x^2-2x+3)\,dx+\int_0^3(-x^2+2x+3)\,dx \\ &=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^0+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_0^3 \\ &=9+9=18\end{aligned}$$

곡선 $y=x^2-2|x|-3$이 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-3}^0(-x^2-2x+3)\,dx=\int_0^3(-x^2+2x+3)\,dx$$

임을 이용하여 간단히 계산할 수도 있다.

답 ③

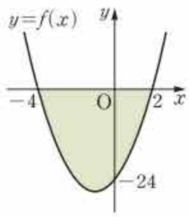
Ⓦ 09 정적분의 활용

04 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+6x-24$

> $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $3x^2+6x-24=0$에서



$(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-4}^{2}\{-(3x^2+6x-24)\}\,dx$$

$$=\int_{-4}^{2}(-3x^2-6x+24)\,dx$$

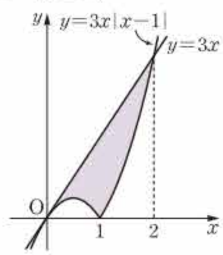
$$=\Big[-x^3-3x^2+24x\Big]_{-4}^{2}$$

$=108$

답 108

05 $y=3x|x-1|=\begin{cases}3x^2-3x & (x\ge1)\\ -3x^2+3x & (x\le1)\end{cases}$

곡선 $y=3x|x-1|$과 직선 $y=3x$의 교점의 x좌표는



(i) $x\ge1$일 때,

$3x^2-3x=3x$에서

$3x^2-6x=0$

$x(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x\ge1$)

(ii) $x\le1$일 때,

$-3x^2+3x=3x$에서 $\quad x^2=0$

$\therefore x=0$

> $x=0$에서 직선 $y=3x$는 곡선 $y=3x|x-1|$에 접한다.

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

$$\int_0^1\{3x-(-3x^2+3x)\}\,dx$$

$$+\int_1^2\{3x-(3x^2-3x)\}\,dx$$

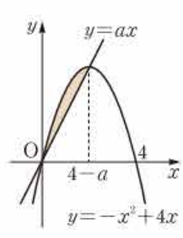
$$=\int_0^1 3x^2\,dx+\int_1^2(-3x^2+6x)\,dx$$

$$=\Big[x^3\Big]_0^1+\Big[-x^3+3x^2\Big]_1^2$$

$=1+2=3$

답 ②

06 곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는



$-x^2+4x=ax$에서

$x^2+(a-4)x=0$

$x\{x+(a-4)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4-a$

> $a>0$이므로 $\quad -a<0$
> $\therefore 4-a<4$

곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{4-a}(-x^2+4x-ax)\,dx$$

$$=\int_0^{4-a}\{-x^2+(4-a)x\}\,dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{4-a}{2}x^2\Big]_0^{4-a}$$

$$=-\frac{(4-a)^3}{3}+\frac{(4-a)^3}{2}=\frac{(4-a)^3}{6}$$

따라서 $\frac{(4-a)^3}{6}=\frac{4}{3}$이므로

$a^3-12a^2+48a-56=0$

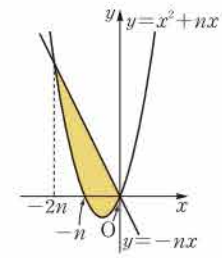
$(a-2)(a^2-10a+28)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a^2-10a+28>0$)

> 다음과 같이 a의 값을 구할 수도 있다.
> $(4-a)^3=8$에서
> $4-a=2$
> $\therefore a=2$

답 ④

07 곡선 $y=x^2+nx$와 직선 $y=-nx$의 교점의 x좌표는



$x^2+nx=-nx$에서

$x^2+2nx=0$

$x(x+2n)=0$

$\therefore x=-2n$ 또는 $x=0$

> n은 자연수이므로 $\quad -2n<0$

$\therefore S_n$

$$=\int_{-2n}^{0}\{-nx-(x^2+nx)\}\,dx$$

$$=\int_{-2n}^{0}(-x^2-2nx)\,dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3-nx^2\Big]_{-2n}^{0}$$

$$=\frac{4}{3}n^3$$

$\frac{4}{3}n^3<40$에서 $\qquad n^3<30$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

08 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 0, 3, 6이므로 삼차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 세 근이 0, 3, 6이다.

$f(x)-g(x)=ax(x-3)(x-6)$

$=a(x^3-9x^2+18x)$ $(a>0)$

> $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)-g(x)$의 최고차항의 계수도 양수이다.

라 하면 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^3\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_0^3 a(x^3-9x^2+18x)\,dx$$

$$=a\int_0^3(x^3-9x^2+18x)\,dx$$

$$=a\Big[\frac{1}{4}x^4-3x^3+9x^2\Big]_0^3$$

$$=\frac{81}{4}a$$

즉 $\frac{81}{4}a=\frac{9}{2}$이므로 $\qquad a=\frac{2}{9}$

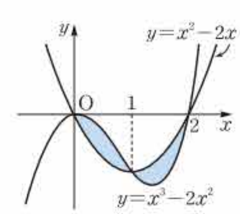
따라서 $f(x)-g(x)=\frac{2}{9}x(x-3)(x-6)$이므로

$f(9)-g(9)=\frac{2}{9}\cdot9\cdot6\cdot3$

$=36$

답 36

09 두 곡선 $y=x^3-2x^2$, $y=x^2-2x$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x^2=x^2-2x$에서



$x^3-3x^2+2x=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

또는 $x=2$

Q BOX

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{x^3-2x^2-(x^2-2x)\}\,dx$$
$$+\int_1^2 \{x^2-2x-(x^3-2x^2)\}\,dx$$
$$=\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\,dx+\int_1^2 (-x^3+3x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

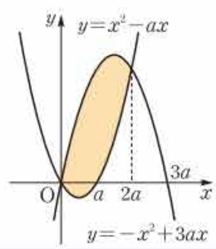
답 $\frac{1}{2}$

참고 $f(x)=x^3-2x^2$, $g(x)=x^2-2x$라 하면
$f(x)-g(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$
이므로
$0\le x\le 1$에서 $f(x)-g(x)\ge 0$
$1\le x\le 2$에서 $f(x)-g(x)\le 0$

10 두 곡선 $y=x^2-ax$, $y=-x^2+3ax$의 교점의 x좌표는 $x^2-ax=-x^2+3ax$에서

$2x^2-4ax=0$
$x(x-2a)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=2a$

$a>0$이므로 $2a>0$



두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{2a} \{-x^2+3ax-(x^2-ax)\}\,dx$$
$$=\int_0^{2a} (-2x^2+4ax)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2ax^2\right]_0^{2a}$$
$$=\frac{8}{3}a^3$$

따라서 $\frac{8}{3}a^3=9$이므로

$a^3=\frac{27}{8}$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

답 ⑤

11 곡선 $y=x^2$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 그래프의 식은

도형 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 도형의 방정식
➡ $f(x-p, y-q)=0$

$y-(-8)=(x-1)^2$
$\therefore y=x^2-2x-7$

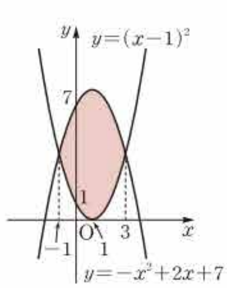
이 곡선을 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

도형 $f(x, y)=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식
➡ $f(x, -y)=0$

$-y=x^2-2x-7$
$\therefore y=-x^2+2x+7$

두 곡선 $y=-x^2+2x+7$, $y=(x-1)^2$의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x+7=(x-1)^2$에서

$2x^2-4x-6=0$
$(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^3 \{-x^2+2x+7-(x-1)^2\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^3 (-2x^2+4x+6)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^3$$
$$=\frac{64}{3}$$

답 $\frac{64}{3}$

12 점 $(1, -2)$가 곡선 $y=x^3+ax+b$ 위의 점이므로

$-2=1+a+b$ $\therefore a+b=-3$ ······ ㉠

점 $(1, -2)$가 직선 $y=-x+c$ 위의 점이므로

$-2=-1+c$ $\therefore c=-1$

$y=x^3+ax+b$에서 $y'=3x^2+a$

곡선 위의 점 $(1, -2)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

곡선 위의 점 $(1, -2)$에서의 접선의 방정식이 $y=-x+c$이다.

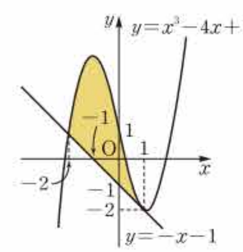
$3+a=-1$ $\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $-4+b=-3$

$\therefore b=1$

즉 곡선 $y=x^3-4x+1$과 직선 $y=-x-1$의 교점의 x좌표는

$x^3-4x+1=-x-1$에서
$x^3-3x+2=0$
$(x+2)(x-1)^2=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^1 \{x^3-4x+1-(-x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^1 (x^3-3x+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1$$
$$=\frac{27}{4}$$

답 ④

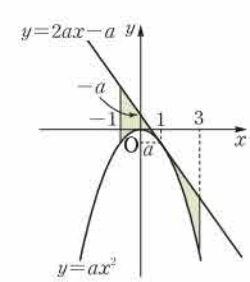
13 $y=ax^2$에서 $y'=2ax$

점 $(1, a)$에서의 접선의 기울기는 $2a$이므로 접선의 방정식은

$y-a=2a(x-1)$
$\therefore y=2ax-a$

$a<0$이므로 $-a>0$
따라서 직선 $y=2ax-a$는 오른쪽 아래로 향하는 직선이고 y절편은 양수이다.

곡선과 접선 및 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{-1}^3 (2ax-a-ax^2)\,dx$$
$$=a\int_{-1}^3 (-x^2+2x-1)\,dx$$
$$=a\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2-x\right]_{-1}^3$$
$$=-\frac{16}{3}a$$

따라서 $-\frac{16}{3}a=8$이므로 $a=-\frac{3}{2}$

답 $-\frac{3}{2}$

14 $y=x^2-2x+3$에서

$y'=2x-2$

점 $(-2,\ 11)$에서의 접선의 기울기는

$2\cdot(-2)-2=-6$

이므로 접선의 방정식은

$y-11=-6\{x-(-2)\}$

$\therefore\ y=-6x-1$

곡선 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$2\cdot 2-2=2$

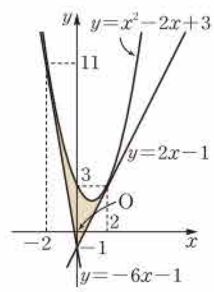
이므로 접선의 방정식은

$y-3=2(x-2)$

$\therefore\ y=2x-1$

두 직선 $y=-6x-1$, $y=2x-1$의 교점의 x좌표는 $-6x-1=2x-1$에서

$x=0$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\{x^2-2x+3-(-6x-1)\}dx+\int_{0}^{2}\{x^2-2x+3-(2x-1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^2+4x+4)dx+\int_{0}^{2}(x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

답 ⑤

15 $y=x^2+2x-1$에서

$y'=2x+2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2t-1)$이라 하면 접선의 기울기는 $2t+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+2t-1)=(2t+2)(x-t)$

$\therefore\ y=(2t+2)x-t^2-1$ ······ ㉠

이 직선이 점 $(-1,\ -3)$을 지나므로

$-3=-2t-2-t^2-1$

$t^2+2t=0,\quad t(t+2)=0$

$\therefore\ t=-2$ 또는 $t=0$

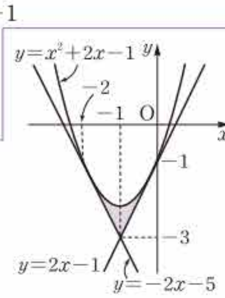
즉 접선의 방정식은

$t=-2$일 때, ㉠에서 $\quad y=-2x-5$

$t=0$일 때, ㉠에서 $\quad y=2x-1$

따라서 구하는 넓이는

$$2\int_{-1}^{0}\{x^2+2x-1-(2x-1)\}dx$$



$$=2\int_{-1}^{0}x^2dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

Q BOX

$y=2x^2-4x+k$
$=2(x-1)^2+k-2$

곡선 $y=x^2+2x-1$은 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이고, 두 직선 $y=-2x-5$, $y=2x-1$도 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 곡선 $y=x^2+2x-1$과 두 직선 $y=2x-1$, $x=-1$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

16 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$\int_{k}^{4}(x^2-4x)dx=0,\quad \left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{k}^{4}=0$

$-\frac{1}{3}k^3+2k^2-\frac{32}{3}=0,\quad k^3-6k^2+32=0$

$(k+2)(k-4)^2=0$

$\therefore\ k=-2\ (\because\ k<0)$

답 ③

17 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$\int_{0}^{2}(-3x^2+6x-mx)dx=0$

$\int_{0}^{2}\{-3x^2+(6-m)x\}dx=0$

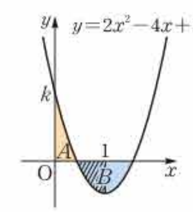
$\left[-x^3+\frac{6-m}{2}x^2\right]_{0}^{2}=0$

$-2m+4=0\quad \therefore\ m=2$

답 2

18 $A:B=1:2$에서

$A=\frac{1}{2}B$



곡선 $y=2x^2-4x+k$가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 A와 같다.

따라서 곡선 $y=2x^2-4x+k$와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$\int_{0}^{1}(2x^2-4x+k)dx=0$

$\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2+kx\right]_{0}^{1}=0$

$\frac{2}{3}-2+k=0\quad \therefore\ k=\frac{4}{3}$

답 ④

19 곡선 $y=ax^2\ (x\geq0)$과 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는 $ax^2=2$에서

$x^2=\frac{2}{a}\quad \therefore\ x=\sqrt{\frac{2}{a}}\ (\because\ x\geq0)$

곡선 $y=ax^2\ (x\geq0)$과 y축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{\sqrt{\frac{2}{a}}}(2-ax^2)dx=\left[2x-\frac{a}{3}x^3\right]_{0}^{\sqrt{\frac{2}{a}}}$$

$$=2\sqrt{\frac{2}{a}}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{a}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{a}}$$

곡선 $y=2x^2\ (x\geq0)$과 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는 $2x^2=2$에서

$x^2=1\quad \therefore\ x=1\ (\because\ x\geq0)$

곡선 $y=2x^2\ (x\geq0)$과 y축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{0}^{1}(2-2x^2)dx=\left[2x-\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}$

따라서 $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{a}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}$이므로

$\sqrt{\frac{2}{a}}=\frac{1}{2},\quad \frac{2}{a}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ a=8$

답 ⑤

20 두 곡선 $y=-x^2+2x$, $y=kx(x-2)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

Q BOX

두 곡선 $y=2x^2-4x$, $y=kx(x-2)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 이용할 수도 있다.

$$\int_0^2 \{-x^2+2x-kx(x-2)\}\,dx$$
$$=\int_0^2 \{-(1+k)x^2+2(1+k)x\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1+k}{3}x^3+(1+k)x^2\right]_0^2$$
$$=-\frac{8(1+k)}{3}+4(1+k)=\frac{4(1+k)}{3}$$

두 곡선 $y=2x^2-4x$, $y=-x^2+2x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \{-x^2+2x-(2x^2-4x)\}\,dx$$
$$=\int_0^2 (-3x^2+6x)\,dx$$
$$=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2=4$$

따라서 $\dfrac{4(1+k)}{3}=\dfrac{1}{2}\cdot 4$이므로

$1+k=\dfrac{3}{2}$ $\qquad \therefore k=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

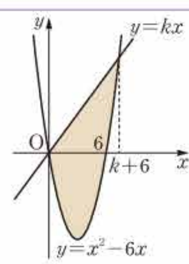
21 곡선 $y=x^2-6x$와 직선 $y=kx$의 교점의 x좌표는 $x^2-6x=kx$에서

$x^2-(k+6)x=0$, $\quad x\{x-(k+6)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=k+6$

$k>0$이므로 $\quad k+6>6$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_0^{k+6} \{kx-(x^2-6x)\}\,dx$$
$$=\int_0^{k+6} \{-x^2+(k+6)x\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k+6}{2}x^2\right]_0^{k+6}$$
$$=-\frac{(k+6)^3}{3}+\frac{(k+6)^3}{2}=\frac{(k+6)^3}{6}$$

곡선 $y=x^2-6x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

곡선 $y=x^2-6x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-6x=0$에서 $x(x-6)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=6$

$$\int_0^6 (-x^2+6x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6=36$$

따라서 $36=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(k+6)^3}{6}$이므로

$(k+6)^3=432$ 답 ②

22 곡선 $y=x^2-kx$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(k)$라 하면

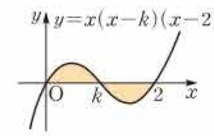
$$S(k)=\int_0^k (-x^2+kx)\,dx+\int_k^4 (x^2-kx)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2\right]_k^4$$
$$=\frac{1}{6}k^3+\left(\frac{1}{6}k^3-8k+\frac{64}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}k^3-8k+\frac{64}{3}$$
$$\therefore S'(k)=k^2-8=(k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})$$

$S'(k)=0$에서 $\qquad k=2\sqrt{2}$ ($\because 0<k<4$)

k	0	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$	4
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		↘	극소	↗	

따라서 $0<k<4$에서 $S(k)$는 $k=2\sqrt{2}$일 때 극소이면서 최소이다. 답 $2\sqrt{2}$

23 곡선 $y=x(x-k)(x-2)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(k)$라 하면



$$S(k)$$
$$=\int_0^k x(x-k)(x-2)\,dx$$
$$+\int_k^2 \{-x(x-k)(x-2)\}\,dx$$
$$=\int_0^k \{x^3-(k+2)x^2+2kx\}\,dx$$
$$+\int_k^2 \{-x^3+(k+2)x^2-2kx\}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+2}{3}x^3+kx^2\right]_0^k$$
$$+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{k+2}{3}x^3-kx^2\right]_k^2$$
$$=\left(-\frac{1}{12}k^4+\frac{1}{3}k^3\right)+\left(-\frac{1}{12}k^4+\frac{1}{3}k^3-\frac{4}{3}k+\frac{4}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{6}k^4+\frac{2}{3}k^3-\frac{4}{3}k+\frac{4}{3}$$
$$\therefore S'(k)=-\frac{2}{3}k^3+2k^2-\frac{4}{3}$$
$$=-\frac{2}{3}(k^3-3k^2+2)$$
$$=-\frac{2}{3}(k-1)(k^2-2k-2)$$

$k^2-2k-2=0$에서 $k=1\pm\sqrt{3}$ 이때 $1-\sqrt{3}<0$, $1+\sqrt{3}>2$ 이다.

$S'(k)=0$에서 $\qquad k=1$ ($\because 0<k<2$)

k	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		↘	극소	↗	

따라서 $0<k<2$에서 $S(k)$는 $k=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$S(1)=-\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

24 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(x+3)=f(x)$

이므로

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_3^6 f(x)\,dx=\int_6^9 f(x)\,dx=4$$
$$\therefore \int_0^9 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x)\,dx+\int_6^9 f(x)\,dx$$
$$=3\cdot 4=12$$

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

① $f(x)$가 우함수이면 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$

② $f(x)$가 기함수이면 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

$$\int_{-9}^9 f(x)\,dx=2\int_0^9 f(x)\,dx=2\cdot 12=24$$ 답 24

09 정적분의 활용

25 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(x+2)=f(x)$

이므로

ㄱ. $\int_1^2 f(x)\,dx=\int_3^4 f(x)\,dx=2$

ㄴ. $\underline{\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx=\int_6^7 f(x)\,dx}$

$$=\int_6^5 f(x)\,dx+\int_5^7 f(x)\,dx$$
$$=-\int_5^6 f(x)\,dx+\int_5^7 f(x)\,dx$$
$$=-\int_3^4 f(x)\,dx+\int_5^7 f(x)\,dx$$
$$=-2+6=4$$

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_2^3 f(x)\,dx=\int_4^5 f(x)\,dx=\int_6^7 f(x)\,dx$$

ㄷ. $\int_7^{10} f(x)\,dx=\int_7^9 f(x)\,dx+\int_9^{10} f(x)\,dx$

$$=\int_5^7 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx$$
$$=6+2=8$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

26 $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$,

$\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3 1\,dx=\left[x\right]_1^3=2$,

$\int_3^4 f(x)\,dx=\int_3^4 (-x+4)\,dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_3^4$

$=\frac{1}{2}$

이므로

$$\int_0^4 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}=3$$

$\int_0^k f(x)\,dx=\frac{19}{2}=3\cdot3+\frac{1}{2}$ ...... ㉠

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(x+4)=f(x)$

이므로

$$\int_0^4 f(x)\,dx=\int_4^8 f(x)\,dx=\int_8^{12} f(x)\,dx,$$
$$\underline{\int_0^1 f(x)\,dx=\int_{12}^{13} f(x)\,dx}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_4^5 f(x)\,dx=\int_8^9 f(x)\,dx=\int_{12}^{13} f(x)\,dx$$

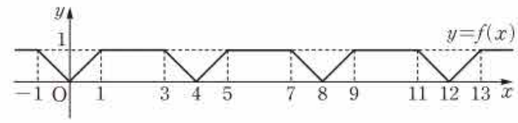
따라서 ㉠에서

$$\int_0^k f(x)\,dx$$
$$=\int_0^4 f(x)\,dx+\int_4^8 f(x)\,dx+\int_8^{12} f(x)\,dx+\int_{12}^{13} f(x)\,dx$$
$$=\int_0^{13} f(x)\,dx$$

이므로 $k=13$ 답 13

다른 풀이 함수 $f(x)$는 주기가 4인 주기함수이므로 $0\le x\le4$에서의 그래프의 모양이 반복된다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $\int_0^k f(x)\,dx=\frac{19}{2}=3\cdot3+\frac{1}{2}$이고

$$\int_0^4 f(x)\,dx=\int_4^8 f(x)\,dx=\int_8^{12} f(x)\,dx=3,$$
$$\int_{12}^{13} f(x)\,dx=\frac{1}{2}$$

이므로 $k=13$

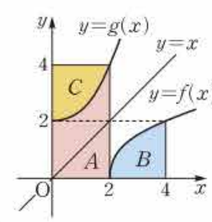
쌤한마디

함수의 그래프가 직선일 때, 정적분의 값을 도형의 넓이를 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}$$
$$\int_1^3 f(x)\,dx=2\cdot1=2$$
$$\int_0^4 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot1=3$$

27 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



(B의 넓이)$=$(C의 넓이)

$\therefore \int_0^2 g(x)\,dx+\int_2^4 f(x)\,dx$

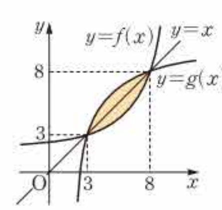
$=$(A의 넓이)$+$(B의 넓이)

$=\underline{(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})}$

가로, 세로의 길이가 각각 2, 4인 직사각형의 넓이

$=2\cdot4=8$ 답 8

28 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

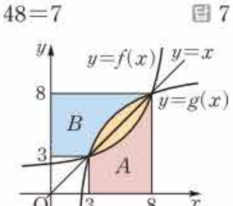


따라서 구하는 넓이는

$$2\int_3^8 \{x-f(x)\}\,dx=\int_3^8 2x\,dx-2\int_3^8 f(x)\,dx$$
$$=\left[x^2\right]_3^8-2\cdot24$$
$$=55-48=7$$

답 7

다른 풀이 오른쪽 그림에서



(A의 넓이)

$=$(B의 넓이)

따라서 구하는 넓이는

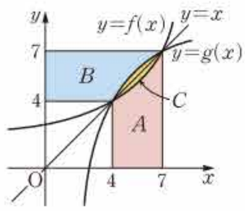
$8^2-3^2-2\times\underline{(A\text{의 넓이})}$

$\int_3^8 f(x)\,dx$

$=55-2\cdot24$

$=7$

29 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서



$(A$의 넓이$)$

$=(B$의 넓이$)$

$\therefore \int_4^7 g(x)dx=(A$의 넓이$)+(C$의 넓이$)$

$=7^2-4^2-(B$의 넓이$)$

$=33-(A$의 넓이$)$

$=33-S$

$\therefore k=33$ 답 33

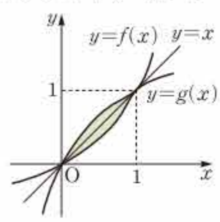
30 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고

$f'(x)=3x^2-4x+2$

$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로



$x^3-2x^2+2x=x$에서

$x^3-2x^2+x=0$

$x(x-1)^2=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$2\int_0^1 \{f(x)-x\}dx$

$=2\int_0^1 (x^3-2x^2+2x-x)dx$

$=2\int_0^1 (x^3-2x^2+x)dx$

$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=2\cdot\frac{1}{12}$

$=\frac{1}{6}$ 답 ①

31 $t=1$에서의 점 P의 위치는

$0+\int_0^1 v(t)dt=\int_0^1 (3t^2-6t+k)dt$

$=\left[t^3-3t^2+kt\right]_0^1$

$=k-2$

즉 $k-2=8$이므로 $k=10$

따라서 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_1^3 (3t^2-6t+10)dt=\left[t^3-3t^2+10t\right]_1^3$

$=22$ 답 22

Q BOX

$\int_4^7 f(x)dx$

$v(t)=t(t-3)$이므로 $0\le t\le 3$에서 $v(t)\le 0$, $t\ge 3$에서 $v(t)\ge 0$

곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$와 원점에서 만나고 $x=1$에서 접한다.

5	2	-9	0	-25
		10	5	25
	2	1	5	0

$\therefore 2a^3-9a^2-25$
$=(a-5)(2a^2+a+5)$

$t>0$에서
$v(t)=\frac{3}{2}t^2+3t>0$

$t=0$에서의 점 P의 위치

32 출발 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간의 시각은 $v_P=v_Q$에서

$-3t^2+2t=6t^2-16t$

$9t^2-18t=0$, $\quad t(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

$t=2$에서의 점 P의 위치는

$0+\int_0^2 v_P\,dt=\int_0^2 (-3t^2+2t)dt$

$=\left[-t^3+t^2\right]_0^2=-4$

$t=2$에서의 점 Q의 위치는

$0+\int_0^2 v_Q\,dt=\int_0^2 (6t^2-16t)dt$

$=\left[2t^3-8t^2\right]_0^2=-16$

따라서 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$-4-(-16)=12$ 답 12

33 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^3 |v(t)|dt=\int_0^3 (-t^2+3t)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^3$

$=\frac{9}{2}$

이때 $\frac{9}{2}<\frac{79}{6}$이므로 $\quad a>3$

$t=3$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_3^a |v(t)|dt=\int_3^a (t^2-3t)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_3^a$

$=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{9}{2}$

따라서 $\frac{9}{2}+\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{9}{2}\right)=\frac{79}{6}$이므로

$2a^3-9a^2-25=0$

$(a-5)(2a^2+a+5)=0$

$\therefore a=5\ (\because 2a^2+a+5>0)$ 답 ②

34 열차가 출발 후 움직인 거리가 2 km인 순간의 시각을 $t=a\ (a>0)$라 하면 $\int_0^a |v(t)|dt=2$이므로

$\int_0^a \left(\frac{3}{2}t^2+3t\right)dt=2$

$\left[\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^a=2$

$\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{2}a^2=2$, $\quad a^3+3a^2-4=0$

$(a-1)(a+2)^2=0$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

열차가 출발한 지 1분 후의 속도는

$v(1)=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$ (km/min)

따라서 열차가 출발 후 3분 동안 움직인 거리는

$$2+\int_1^3 \frac{9}{2}\,dt=2+\left[\frac{9}{2}t\right]_1^3$$
$$=2+9=11\,(\mathrm{km})$$ 답 ③

35 자동차가 정지할 때 $v(t)=0$이므로

$a-8t=0 \qquad \therefore t=\frac{a}{8}$

따라서 자동차가 브레이크를 밟은 지 $\frac{a}{8}$초 후에 정지하므로 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{a}{8}}|v(t)|\,dt=\int_0^{\frac{a}{8}}(a-8t)\,dt$$
$$=\left[at-4t^2\right]_0^{\frac{a}{8}}$$
$$=\frac{a^2}{16}\,(\mathrm{m})$$

$0\le t\le \frac{a}{8}$에서 $v(t)\ge 0$

즉 $\frac{a^2}{16}=100$이므로 $\qquad a^2=1600$

$\therefore a=40\ (\because a>0)$ 답 40

36 점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

$t^2-7t+10=0, \qquad (t-2)(t-5)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=5$

$0\le t\le 2$, $t\ge 5$에서 $v(t)\ge 0$, $2\le t\le 5$에서 $v(t)\le 0$

따라서 출발할 때의 운동 방향과 반대 방향으로 움직인 거리는

$$\int_2^5|v(t)|\,dt=\int_2^5(-t^2+7t-10)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{7}{2}t^2-10t\right]_2^5$$
$$=\frac{9}{2}$$ 답 $\frac{9}{2}$

37 물이 다 빠져나갈 때 $v(t)=0$이므로

$12t-3t^2=0, \qquad t(4-t)=0$

$\therefore t=4\ (\because t>0)$

배수구의 넓이가 $\pi\cdot 2^2=4\pi$이므로 빠져나간 물의 양은

$$4\pi\cdot\int_0^4|v(t)|\,dt=4\pi\cdot\int_0^4(12t-3t^2)\,dt$$
$$=4\pi\left[6t^2-t^3\right]_0^4$$
$$=4\pi\cdot 32=128\pi$$ 답 ⑤

물이 빠져나간 거리

38 물체가 최고 높이에 도달할 때 $v(t)=0$이므로

$30-10t=0 \qquad \therefore t=3$

$t=3$에서의 물체의 지면으로부터의 높이는

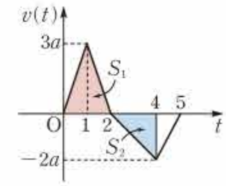
$$35+\int_0^3 v(t)\,dt=35+\int_0^3(30-10t)\,dt$$
$$=35+\left[30t-5t^2\right]_0^3$$
$$=35+45=80\,(\mathrm{m})$$

따라서 물체를 던진 후 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는

$45+80=125\,(\mathrm{m})$ 답 ④

(최고 높이에 도달할 때까지 움직인 거리)+(최고 높이에서 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리)

39 $t=4$에서의 점 P의 위치는 오른쪽 그림에서



$$0+\int_0^4 v(t)\,dt$$
$$=S_1-S_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3a-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2a$$
$$=a$$

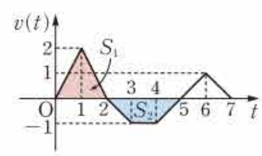
$\therefore a=4$ 답 4

40 물체가 원점을 출발하여 $t=a$에서 다시 원점을 지나므로

$$\int_0^a v(t)\,dt=0$$

물체가 원점을 출발하여 원점을 다시 지날 때 위치의 변화량은 0이다.

오른쪽 그림에서



$S_1=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2,$

$S_2=\frac{1}{2}\cdot(3+1)\cdot 1$

$=2$

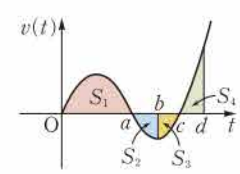
이므로

$$\int_0^5 v(t)\,dt=S_1-S_2=0$$

따라서 $t=5$에서 다시 원점을 지나므로

$a=5$ 답 5

41 $\int_0^a v(t)\,dt=\int_a^d |v(t)|\,dt$



이므로 오른쪽 그림에서

$S_1=S_2+S_3+S_4$ ······ ㉠

ㄱ. $\int_0^b v(t)\,dt=S_1-S_2,$

$\int_b^d v(t)\,dt=-S_3+S_4$

이고 ㉠에서 $S_1-S_2=S_3+S_4$이므로

$$\int_0^b v(t)\,dt>\int_b^d v(t)\,dt$$

$S_1-S_2=S_3+S_4$
$>-S_3+S_4$

ㄴ. $\int_0^c v(t)\,dt=S_1-S_2-S_3,$

$\int_c^d v(t)\,dt=S_4$

이고 ㉠에서 $S_1-S_2-S_3=S_4$이므로

$$\int_0^c v(t)\,dt=\int_c^d v(t)\,dt$$

ㄷ. $t=0$에서의 점 P의 위치를 x_0이라 하면 $t=d$에서의 점 P의 위치는

$$x_0+\int_0^d v(t)\,dt=x_0+S_1-S_2-S_3+S_4$$
$$=x_0+S_4+S_4$$
$$=x_0+2S_4$$

따라서 $t=0$에서의 위치와 $t=d$에서의 위치는 같지 않다.

$x_0\ne x_0+2S_4$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

도전! 수능 기출
W 71쪽

01 (1st) $f(x)$를 구한다.

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(3)=0$이므로

$$f(x)=(x-3)(x-a)$$
$$=x^2-(a+3)x+3a\ (a\text{는 상수})\ \cdots ㉠$$

라 하자.

$\int_0^{2013} f(x)\,dx=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^{2013} f(x)\,dx$이고

$\int_0^{2013} f(x)\,dx=\int_3^{2013} f(x)\,dx$이므로

$$\int_0^3 f(x)\,dx=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

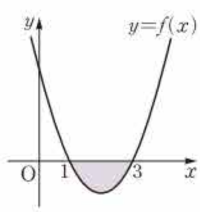
㉠을 ㉡에 대입하면

$$\int_0^3 \{x^2-(a+3)x+3a\}\,dx=0$$
$$\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a+3}{2}x^2+3ax\right]_0^3=0$$
$$\frac{9}{2}a-\frac{9}{2}=0$$
$$\therefore a=1$$
$$\therefore f(x)=x^2-4x+3$$

(2nd) 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구한다.

곡선 $y=x^2-4x+3$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4x+3=0$에서

$$(x-1)(x-3)=0$$
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$



(3rd) $30S$의 값을 구한다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S=\int_1^3 (-x^2+4x-3)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3$$
$$=\frac{4}{3}$$
$$\therefore 30S=30\cdot\frac{4}{3}=40$$

답 40

02 (1st) S_1의 값을 구한다.

$\overline{OA}=2$, $\overline{OB}=3$이므로

$$S_1+S_2=\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$$

$S_1 : S_2=13 : 3$이므로

$$S_1=3\cdot\frac{13}{13+3}=\frac{39}{16}$$

(2nd) 직선 AB의 방정식을 구한다.

두 점 A$(2, 0)$, B$(0, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{3}{-2}(x-2)$$
$$\therefore y=-\frac{3}{2}x+3$$

(3rd) 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구한다.

곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=-\frac{3}{2}x+3$의 교점의 x좌표를 $p\,(0<p<2)$라 하면

$$ap^2=-\frac{3}{2}p+3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이고

$$S_1=\int_0^p\left(-\frac{3}{2}x+3-ax^2\right)dx$$
$$=\left[-\frac{3}{4}x^2+3x-\frac{1}{3}ax^3\right]_0^p$$
$$=-\frac{3}{4}p^2+3p-\frac{1}{3}ap^3$$

즉 $-\frac{3}{4}p^2+3p-\frac{1}{3}ap^3=\frac{39}{16}$이므로

$$-\frac{3}{4}p^2+3p-\frac{1}{3}p\left(-\frac{3}{2}p+3\right)=\frac{39}{16}\ (\because ㉠)$$
$$-\frac{1}{4}p^2+2p=\frac{39}{16}$$
$$4p^2-32p+39=0$$
$$(2p-3)(2p-13)=0$$
$$\therefore p=\frac{3}{2}\ (\because 0<p<2)$$

(4th) a의 값을 구한다.

$p=\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{9}{4}a=-\frac{9}{4}+3 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$$

답 ②

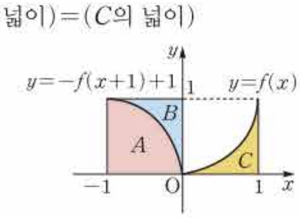
참고 $S_2=3\cdot\frac{3}{13+3}=\frac{9}{16}$임을 이용하여 a의 값을 구하려면 구간 $[0, p]$와 구간 $[p, 2]$로 적분 구간을 나누어 정적분의 값을 구해야 하므로 S_1을 이용하는 것이 편리하다.

03 (1st) $\int_{-1}^0 g(x)\,dx$, $\int_{-1}^1 g(x)\,dx$의 값을 각각 구한다.

조건 (가)에서 함수 $y=-f(x+1)+1$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림에서

$f(0)=0$, $f(1)=1$이므로 두 점 $(0, 0)$, $(1, 1)$을 지나고 구간 $[0, 1]$에서 연속인 함수의 그래프를 임의로 그려 본다.

$$(B\text{의 넓이})=(C\text{의 넓이})$$



$$\therefore \int_{-1}^0 g(x)\,dx=(A\text{의 넓이})$$
$$=1^2-(B\text{의 넓이})$$
$$=1-(C\text{의 넓이})$$

$\int_0^1 f(x)\,dx$

$$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6},$$

$$\int_{-1}^1 g(x)\,dx=\int_{-1}^0 g(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx$$
$$=(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})$$
$$=(A\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})$$
$$=1$$

(2nd) $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값을 구한다.

조건 (나)에서 $g(x+2)=g(x)$이므로

$$\int_{-3}^{-1} g(x)\,dx=\int_{-1}^{1} g(x)\,dx,$$

$$\int_{1}^{2} g(x)\,dx=\int_{-1}^{0} g(x)\,dx$$

$$\therefore \int_{-3}^{2} g(x)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{-1} g(x)\,dx+\int_{-1}^{1} g(x)\,dx+\int_{1}^{2} g(x)\,dx$$

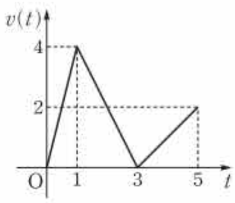
$$=2\int_{-1}^{1} g(x)\,dx+\int_{-1}^{0} g(x)\,dx$$

$$=2\cdot 1+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$$

답 ②

04 (1st) 속도의 그래프를 그린다.

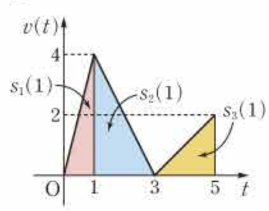
속도 $v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리를 $s_1(x)$, 시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리를 $s_2(x)$, 시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리를 $s_3(x)$라 하자.

(2nd) ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 오른쪽 그림에서



$$s_1(1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4=2,$$

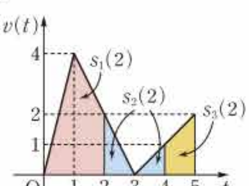
$$s_2(1)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4,$$

$$s_3(1)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$$

이므로 $f(1)=2$

(3rd) ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 오른쪽 그림에서



$$s_1(2)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot(4+2)\cdot 1=5,$$

$$s_2(2)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{2},$$

$$s_3(2)=\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot 1=\frac{3}{2}$$

이므로

$$f(2)=\frac{3}{2}$$

$$\therefore f(2)-f(1)=-\frac{1}{2}$$

이때 $\int_{1}^{2} v(t)\,dt=\frac{1}{2}\cdot(4+2)\cdot 1=3$이므로

$$f(2)-f(1)\neq\int_{1}^{2} v(t)\,dt$$

Q BOX

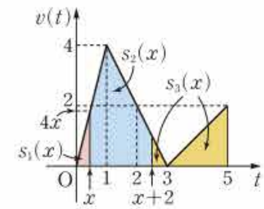
그래프를 이용하여 $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$의 대소를 비교한다.

$2<x+2<3$

(4th) ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. (i) $0<x<1$일 때,

오른쪽 그림에서 넓이가 가장 작은 부분은 $s_1(x)$이므로



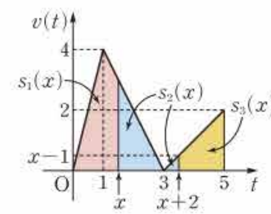
$$f(x)=s_1(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 4x=2x^2$$

$$\therefore f'(x)=4x$$

$3<x+2<5$

(ii) $1<x<3$일 때,

오른쪽 그림에서 넓이가 가장 작은 부분은 $s_3(x)$이므로



$$f(x)=s_3(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\frac{1}{2}(x-1)^2=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$$

$$\therefore f'(x)=-x+1$$

(i), (ii)에서

$$\lim_{x\to 1+} f'(x)=\lim_{x\to 1+}(-x+1)=0,$$

$$\lim_{x\to 1-} f'(x)=\lim_{x\to 1-} 4x=4$$

이므로 $\lim_{x\to 1+} f'(x)\neq\lim_{x\to 1-} f'(x)$

$\lim_{x\to 1} f'(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

참고 $1<x<3$일 때 $s_1(x)>2$, $s_3(x)<2$이므로 $s_1(x)>s_3(x)$이고

$$s_2(x)=\frac{1}{2}(3-x)(-2x+6)+\frac{1}{2}(x-1)^2=\frac{3}{2}x^2-7x+\frac{19}{2}$$

이므로

$$s_2(x)-s_3(x)=\frac{3}{2}x^2-7x+\frac{19}{2}-\left(-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}\right)=2(x-2)^2\geq 0$$

$$\therefore s_2(x)\geq s_3(x)$$

따라서 $1<x<3$일 때 $f(x)=s_3(x)$