정답 및 풀이

Ⅰ. 지수와 로그

01 지수

유제

본책 13~27쪽

001-❶ ① 1의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=1$이므로

$$x^3-1=0,\quad (x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 1의 세제곱근은 1, $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

이다.

② -16의 제곱근을 x라 하면 $x^2=-16$이므로

$$x=\pm 4i$$

따라서 -16의 제곱근은 $-4i$, $4i$이다.

③ 8의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $-\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{8}$이다.

④ 자연수 n이 홀수일 때, 5의 n제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[n]{5}$의 한 개이다.

⑤ 자연수 n이 짝수일 때, -6의 n제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

답 ④

002-❶

$$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}}\times\sqrt[6]{\frac{\sqrt{x}}{x}}\div\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{\sqrt[4]{x}}}\times\frac{\sqrt[6]{\sqrt{x}}}{\sqrt[6]{x}}\times\frac{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}$$

$$=\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[8]{x}}\times\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[6]{x}}\times\frac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[12]{x}}=1$$

답 1

003-❶ (1)

$$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}\times\sqrt[4]{x^3}}}=\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=(x^{\frac{2}{3}-\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}}=(x^{-\frac{7}{12}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=x^{-\frac{7}{24}}$$

(2) $\sqrt[4]{xy^3}\times\sqrt{\sqrt[3]{x^2y}\div\sqrt{xy}}$

$$=(xy^3)^{\frac{1}{4}}\times\{(x^2y)^{\frac{1}{3}}\div(xy)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}\times(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}\div x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}\times(x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}\times(x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{6}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}\times x^{\frac{1}{12}}y^{-\frac{1}{12}}$$

$$=x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}y^{\frac{3}{4}-\frac{1}{12}}$$

$$=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

답 (1) $x^{-\frac{7}{24}}$ (2) $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

003-❷ 주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$$\sqrt{\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{8}}}\times\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2}}}=\left\{\frac{2^{\frac{1}{4}}}{(2^3)^{\frac{1}{2}}}\right\}^{\frac{1}{2}}\times\left\{\frac{(2^4)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}}\right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$=\left(\frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$=(2^{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\times(2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}$$

$$=(2^{-\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}}\times(2^{\frac{5}{6}})^{\frac{1}{4}}$$

$$=2^{-\frac{5}{8}}\times2^{\frac{5}{24}}$$

$$=2^{-\frac{5}{8}+\frac{5}{24}}$$

$$=2^{-\frac{5}{12}}$$

$$\therefore r=-\frac{5}{12}$$

답 $-\frac{5}{12}$

004-❶ (1) $x^{\frac{1}{3}}=X$, $y^{-\frac{1}{3}}=Y$로 놓으면 $x=X^3$, $y^{-1}=Y^3$이므로

$$(x+y^{-1})\div(x^{\frac{1}{3}}+y^{-\frac{1}{3}})$$

$$=(X^3+Y^3)\div(X+Y)$$

$$=(X+Y)(X^2-XY+Y^2)\div(X+Y)$$

$$=X^2-XY+Y^2$$

$$=(x^{\frac{1}{3}})^2-x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+(y^{-\frac{1}{3}})^2$$

$$=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$$

(2) $x^{\frac{1}{3}}=X$, $x^{-\frac{1}{3}}=Y$로 놓으면 $x^{\frac{2}{3}}=X^2$, $x^{-\frac{2}{3}}=Y^2$, $x=X^3$, $x^{-1}=Y^3$, $XY=x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}=1$이므로

(주어진 식)

$$=(X^2+Y^2+1)(X^2-Y^2)(X^3-Y^3)^{-1}$$

$$=\frac{(X^2+Y^2+XY)(X-Y)(X+Y)}{X^3-Y^3}$$

$$=\frac{(X^3-Y^3)(X+Y)}{X^3-Y^3}$$

$$=X+Y$$

$$=x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$$

답 (1) $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$ (2) $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$

004-❷ $x^{\frac{1}{4}}=X$, $y^{\frac{1}{4}}=Y$로 놓으면 $x^{\frac{1}{2}}=X^2$, $y^{\frac{1}{2}}=Y^2$이므로

$$(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}})$$

$$=(X^2-XY+Y^2)(X^2+XY+Y^2)$$

$$=X^4+X^2Y^2+Y^4$$

$$=(x^{\frac{1}{4}})^4+(x^{\frac{1}{4}})^2(y^{\frac{1}{4}})^2+(y^{\frac{1}{4}})^4$$

$$=x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$$

답 $x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$

005-① (1) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=5$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=5^2$, $\quad x+2+x^{-1}=25$

$\therefore x+x^{-1}=23$

(2) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=5$의 양변을 세제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3=5^3$

$x^{\frac{3}{2}}+3xx^{-\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}x^{-1}+x^{-\frac{3}{2}}=125$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})=125$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3\cdot5=125$

$\therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=110$

답 (1) 23 (2) 110

다른 풀이 (1) $x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$

$=5^2-2=23$

(2) $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=5^3-3\cdot5=110$

005-② $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 세제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3=3^3$

$x^{\frac{3}{2}}+3xx^{-\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}x^{-1}+x^{-\frac{3}{2}}=27$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})=27$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3\cdot3=27$

$\therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=18$

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=3^2$, $\quad x+2+x^{-1}=9$

$\therefore x+x^{-1}=7$

$x+x^{-1}=7$의 양변을 제곱하면

$(x+x^{-1})^2=7^2$, $\quad x^2+2+x^{-2}=49$

$\therefore x^2+x^{-2}=47$

$\therefore \dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}=\dfrac{18+2}{47+3}=\dfrac{2}{5}$

답 $\dfrac{2}{5}$

다른 풀이 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$

$=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=3^3-3\cdot3=18$

이고

$x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$

$=3^2-2=7$

이므로

$x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2xx^{-1}$

$=7^2-2=47$

$\therefore \dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}=\dfrac{18+2}{47+3}=\dfrac{2}{5}$

006-① 세 수 $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[8]{5}$, $\sqrt[12]{11}$을 유리수 지수로 나타내면

$\sqrt[6]{3}=3^{\frac{1}{6}}$, $\sqrt[8]{5}=5^{\frac{1}{8}}$, $\sqrt[12]{11}=11^{\frac{1}{12}}$

6, 8, 12의 최소공배수가 24이므로

$3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{4}{24}}=(3^4)^{\frac{1}{24}}=81^{\frac{1}{24}}$

$5^{\frac{1}{8}}=5^{\frac{3}{24}}=(5^3)^{\frac{1}{24}}=125^{\frac{1}{24}}$

$11^{\frac{1}{12}}=11^{\frac{2}{24}}=(11^2)^{\frac{1}{24}}=121^{\frac{1}{24}}$

이때 $81<121<125$이므로

$81^{\frac{1}{24}}<121^{\frac{1}{24}}<125^{\frac{1}{24}}$

$\therefore \sqrt[6]{3}<\sqrt[12]{11}<\sqrt[8]{5}$

답 $\sqrt[6]{3}<\sqrt[12]{11}<\sqrt[8]{5}$

다른 풀이 1 $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[8]{5}$, $\sqrt[12]{11}$에서 6, 8, 12의 최소공배수가 24이므로 주어진 세 수를 $\sqrt[24]{■}$ 꼴로 변형하면

$\sqrt[6]{3}=\sqrt[24]{3^4}=\sqrt[24]{81}$

$\sqrt[8]{5}=\sqrt[24]{5^3}=\sqrt[24]{125}$

$\sqrt[12]{11}=\sqrt[24]{11^2}=\sqrt[24]{121}$

이때 $81<121<125$이므로

$\sqrt[24]{81}<\sqrt[24]{121}<\sqrt[24]{125}$

$\therefore \sqrt[6]{3}<\sqrt[12]{11}<\sqrt[8]{5}$

다른 풀이 2 세 수 $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[8]{5}$, $\sqrt[12]{11}$을 각각 24제곱하면

$(\sqrt[6]{3})^{24}=\sqrt[6]{3^{24}}=3^4=81$

$(\sqrt[8]{5})^{24}=\sqrt[8]{5^{24}}=5^3=125$

$(\sqrt[12]{11})^{24}=\sqrt[12]{11^{24}}=11^2=121$

이때 $81<121<125$이므로

$\sqrt[6]{3}<\sqrt[12]{11}<\sqrt[8]{5}$

006-② $A=\sqrt[3]{3\sqrt{2}}=3^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{6}}$

$B=\sqrt[3]{2\sqrt{7}}=2^{\frac{1}{3}}\times7^{\frac{1}{6}}$

$C=\sqrt[4]{3\sqrt[3]{5}}=3^{\frac{1}{4}}\times5^{\frac{1}{12}}$

3, 4, 6, 12의 최소공배수가 12이므로

$A=3^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{4}{12}}\times2^{\frac{2}{12}}$

$=(3^4\times2^2)^{\frac{1}{12}}=324^{\frac{1}{12}}$

$B=2^{\frac{1}{3}}\times7^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{4}{12}}\times7^{\frac{2}{12}}$

$=(2^4\times7^2)^{\frac{1}{12}}=784^{\frac{1}{12}}$

$C=3^{\frac{1}{4}}\times5^{\frac{1}{12}}=3^{\frac{3}{12}}\times5^{\frac{1}{12}}$

$=(3^3\times5)^{\frac{1}{12}}=135^{\frac{1}{12}}$

이때 $135<324<784$이므로

$135^{\frac{1}{12}}<324^{\frac{1}{12}}<784^{\frac{1}{12}}$

$\therefore C<A<B$

답 $C<A<B$

다른 풀이 $A=\sqrt[3]{3\sqrt{2}}=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}}$

$=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{3^2}\times\sqrt[6]{2}$

$=\sqrt[6]{18}$

$B=\sqrt[3]{2\sqrt{7}}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{\sqrt{7}}$

$=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{7}=\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[6]{7}$

$=\sqrt[6]{28}$

$C=\sqrt[4]{3\sqrt[3]{5}}=\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}$

$=\sqrt[4]{3}\times\sqrt[12]{5}=\sqrt[12]{3^3}\times\sqrt[12]{5}$

$=\sqrt[12]{135}$

6, 12의 최소공배수가 12이므로 $\sqrt[6]{18}$, $\sqrt[6]{28}$을 $\sqrt[12]{\blacksquare}$ 꼴로 변형하면

$\sqrt[6]{18}=\sqrt[12]{18^2}=\sqrt[12]{324}$

$\sqrt[6]{28}=\sqrt[12]{28^2}=\sqrt[12]{784}$

이때 $135<324<784$이므로

$\sqrt[12]{135}<\sqrt[12]{324}<\sqrt[12]{784}$

$\therefore C<A<B$

007-❶ (1) $(2^x+2^{-x})^2=(2^x-2^{-x})^2+4\cdot2^x\cdot2^{-x}$

$=3^2+4\cdot1=13$

그런데 $2^x+2^{-x}>0$이므로 $\quad 2^x+2^{-x}=\sqrt{13}$

(2) $2^{3x}+2^{-3x}=(2^x)^3+(2^{-x})^3$

$=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot2^x\cdot2^{-x}(2^x+2^{-x})$

$=(\sqrt{13})^3-3\cdot1\cdot\sqrt{13}$

$=10\sqrt{13}$

답 (1) $\sqrt{13}$ (2) $10\sqrt{13}$

007-❷ $(a^{3x}-a^{-3x})(a^x-a^{-x})^{-1}$

$=\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{(a^x)^3-(a^{-x})^3}{a^x-a^{-x}}$

$=\dfrac{(a^x-a^{-x})(a^{2x}+a^xa^{-x}+a^{-2x})}{a^x-a^{-x}}$

$=a^{2x}+1+a^{-2x}$

$=(\sqrt{2}+1)+1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

$=\sqrt{2}+1+1+\sqrt{2}-1$

$=2\sqrt{2}+1$

답 $2\sqrt{2}+1$

다른 풀이 $(a^{3x}-a^{-3x})(a^x-a^{-x})^{-1}=\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$에서

우변의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{(a^{3x}-a^{-3x})a^x}{(a^x-a^{-x})a^x}=\dfrac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}-1}$

$=\dfrac{(a^{2x})^2-\dfrac{1}{a^{2x}}}{a^{2x}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}{(\sqrt{2}+1)-1}$

$=\dfrac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+1$

008-❶ $67^x=27$에서

$67=27^{\frac{1}{x}}=(3^3)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$603^y=81$에서

$603=81^{\frac{1}{y}}=(3^4)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\quad \dfrac{67}{603}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$

$\dfrac{1}{9}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}, \quad 3^{-2}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$

$\therefore \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=-2$

답 -2

008-❷ $8^x=9^y=6^z=k$로 놓으면 $k>0$이고, $xyz\neq0$에서 $k\neq1$이다. 한편

$8^x=k$에서 $\quad 2^{3x}=k$

$\therefore 2=k^{\frac{1}{3x}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$9^y=k$에서 $\quad 3^{2y}=k$

$\therefore 3=k^{\frac{1}{2y}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$6^z=k$에서 $\quad 6=k^{\frac{1}{z}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉠×㉡을 하면 $6=k^{\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}}$이므로 ㉢에 의하여

$k^{\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}}=k^{\frac{1}{z}}$

그런데 $k>0$이고 $k\neq1$이므로

$\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{z}$

위의 식의 양변에 6을 곱하면

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{6}{z}$

답 풀이 참조

중단원 연습 문제

본책 28~31쪽

01 ⑤ **02** 5 **03** 125 **04** ②

05 $a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}$ **06** $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$ **07** ① **08** $\sqrt{5}$

09 $\sqrt{3}<\sqrt[6]{30}<\sqrt[3]{7}$ **10** 31 **11** -1 **12** -5

13 5 **14** $4\cdot9^x$ **15** $B<A<C$ **16** $\dfrac{10}{3}$

17 ③ **18** $\dfrac{1}{2}$ **19** 16 **20** 216 **21** ②

22 ② **23** ①

01 **전략** a의 n제곱근은 $x^n=a$를 만족시키는 x이고, n제곱근 a는 $\sqrt[n]{a}$임을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ① 27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=27$이므로

$x^3-27=0, \quad (x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 27의 세제곱근은 3, $\dfrac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{-3+3\sqrt{3}i}{2}$이다.

② 16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$이므로

$x^4-16=0$, $(x+2)(x-2)(x^2+4)=0$

$\therefore\ x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

따라서 16의 네제곱근은 -2, 2, $-2i$, $2i$이다.

③ 세제곱근 -64는 $\sqrt[3]{-64}$이고, 이것은 -64의 세제곱근 중에서 실수인 것이므로

$\sqrt[3]{-64}=-4$

④ 네제곱근 81은 $\sqrt[4]{81}$이고, 이것은 81의 네제곱근 중에서 양수인 것이므로

$\sqrt[4]{81}=3$

⑤ -0.008의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-0.008$이므로

$x^3+0.008=0$

$(x+0.2)(x^2-0.2x+0.04)=0$

$\therefore\ x=-0.2$ 또는 $x=0.1\pm\sqrt{0.03}i$

따라서 -0.008의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -0.2뿐이다.

답 ⑤

02

전략 $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$임을 이용하여 거듭제곱근을 a^r (r는 유리수) 꼴로 나타낸다.

풀이 $\sqrt[3]{8\sqrt{2\sqrt[4]{4}}}=\sqrt[3]{8\sqrt{2\times2^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[3]{8\sqrt{2^{\frac{3}{2}}}}$

$=\sqrt[3]{2^3\times2^{\frac{3}{4}}}=\sqrt[3]{2^{\frac{15}{4}}}$

$=2^{\frac{15}{12}}=2^{\frac{5}{4}}$

이므로 $k=\dfrac{5}{4}$

$\therefore\ 4k=4\cdot\dfrac{5}{4}=5$

답 5

03

전략 지수법칙을 이용하여 값을 구한다.

풀이 $5^{a+1}=10$에서 $5^a=\dfrac{10}{5}=2$

$2^{3b}=9$에서 $9=2^{3b}=(5^a)^{3b}=5^{3ab}$

$\therefore\ 9^{\frac{1}{ab}}=(5^{3ab})^{\frac{1}{ab}}=5^3=125$

답 125

04

전략 밑을 3으로 같게 한 후 지수법칙을 이용한다.

풀이 $3^{\frac{2}{3}}\times9^{\frac{3}{2}}\div27^{\frac{8}{9}}=3^{\frac{2}{3}}\times(3^2)^{\frac{3}{2}}\div(3^3)^{\frac{8}{9}}$

$=3^{\frac{2}{3}}\times3^3\div3^{\frac{8}{3}}$

$=3^{\frac{2}{3}+3-\frac{8}{3}}=3$

답 ②

05

전략 거듭제곱근을 유리수 지수로 변형하고 지수법칙을 이용한다.

풀이 $\sqrt[3]{a^5b^4}\div\sqrt{ab^3}\times\sqrt[6]{a^2b^5}$

$=(a^5b^4)^{\frac{1}{3}}\div(ab^3)^{\frac{1}{2}}\times(a^2b^5)^{\frac{1}{6}}$

$=a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{4}{3}}\div a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{6}}$

$=a^{\frac{5}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}-\frac{3}{2}+\frac{5}{6}}$

$=a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}$

답 $a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}$

다른 풀이 $\sqrt[3]{a^5b^4}\div\sqrt{ab^3}\times\sqrt[6]{a^2b^5}$

$=\sqrt[6]{(a^5b^4)^2}\div\sqrt[6]{(ab^3)^3}\times\sqrt[6]{a^2b^5}$

$=\sqrt[6]{a^{10}b^8\div a^3b^9\times a^2b^5}$

$=\sqrt[6]{a^{10-3+2}b^{8-9+5}}$

$=\sqrt[6]{a^9b^4}=a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}$

06

전략 $a^{\frac{1}{3}}=X$, $b^{\frac{1}{3}}=Y$로 놓고 $X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$임을 이용한다.

풀이 $a^{\frac{1}{3}}=X$, $b^{\frac{1}{3}}=Y$로 놓으면 $a^{\frac{2}{3}}=X^2$, $b^{\frac{2}{3}}=Y^2$이므로

$(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})\div(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})$

$=(X^2-Y^2)\div(X+Y)$

$=(X+Y)(X-Y)\div(X+Y)$

$=X-Y=a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$

답 $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$

07

전략 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하여 $x+x^{-1}=k$ 꼴로 변형한 후, $x+x^{-1}=k$의 양변을 제곱하여 x^2+x^{-2}의 값을 구한다.

풀이 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=3^2$, $x-2+x^{-1}=9$

$\therefore\ x+x^{-1}=11$

$x+x^{-1}=11$의 양변을 제곱하면

$(x+x^{-1})^2=11^2$, $x^2+2+x^{-2}=121$

$\therefore\ x^2+x^{-2}=119$

답 ①

08

전략 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$임을 이용하여 먼저 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2$의 값을 구한다.

풀이 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2$

$=3+2=5$

이때 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0$이므로

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

09
(전략) 유리수 지수로 나타낸 후 지수법칙을 이용하여 대소를 비교한다.

(풀이) 세 수 $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{30}$을 유리수 지수로 나타내면

$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{7}=7^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[6]{30}=30^{\frac{1}{6}}$ ⋯ ❶

2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로

$3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{6}}=(3^3)^{\frac{1}{6}}=27^{\frac{1}{6}}$

$7^{\frac{1}{3}}=7^{\frac{2}{6}}=(7^2)^{\frac{1}{6}}=49^{\frac{1}{6}}$ ⋯ ❷

이때 $27<30<49$이므로

$27^{\frac{1}{6}}<30^{\frac{1}{6}}<49^{\frac{1}{6}}$

$\therefore \sqrt{3}<\sqrt[6]{30}<\sqrt[3]{7}$ ⋯ ❸

답 $\sqrt{3}<\sqrt[6]{30}<\sqrt[3]{7}$

채점 기준	비율
❶ 세 수를 유리수 지수로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 지수법칙을 이용하여 지수를 통일할 수 있다.	40 %
❸ 세 수의 대소를 비교할 수 있다.	40 %

10
(전략) 주어진 식을 a^{2x}에 대한 식으로 변형한다.

(풀이) $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{(a^{3x}-a^{-3x})a^x}{(a^x-a^{-x})a^x}=\frac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}-1}$$

$$=\frac{(a^{2x})^2-(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}-1} \quad ⋯ ❶$$

$$=\frac{5^2-\frac{1}{5}}{5-1}=\frac{31}{5} \quad ⋯ ❷$$

따라서 $\dfrac{n}{5}=\dfrac{31}{5}$이므로

$n=31$ ⋯ ❸

답 31

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 a^{2x}에 대한 식으로 변형할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20 %

11
(전략) $a^x=k$ $(a>0,\ x\neq0)$일 때, $a=k^{\frac{1}{x}}$임을 이용하여 밑을 통일한다.

(풀이) $14^x=3$에서 $3^{\frac{1}{x}}=14$ ⋯⋯ ㉠

$42^y=27$, 즉 $42^y=3^3$에서 $3^{\frac{3}{y}}=42$ ⋯⋯ ㉡

㉠÷㉡을 하면

$3^{\frac{1}{x}}\div3^{\frac{3}{y}}=\dfrac{1}{3}$, $3^{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}=3^{-1}$

$\therefore \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}=-1$

답 -1

Remark ▶ 지수법칙의 응용

$a>0$, $b>0$, $xy\neq0$일 때,

① $a^x=b^y$ ➡ $a=b^{\frac{y}{x}}$, $b=a^{\frac{x}{y}}$, $a^{\frac{1}{y}}=b^{\frac{1}{x}}$

② $a^x=b^y=k$ ➡ $a=k^{\frac{1}{x}}$, $b=k^{\frac{1}{y}}$

12
(전략) 거듭제곱근의 성질을 이용한다.

(풀이) -5^6의 세제곱근 중에서 실수인 것은

$\sqrt[3]{-5^6}=\sqrt[3]{(-5^2)^3}=-5^2=-25$

$\therefore a=-25$ ⋯ ❶

$-a$, 즉 25의 네제곱근 중에서 양수인 것은

$\sqrt[4]{25}=\sqrt[4]{5^2}=\sqrt{5}$

$\therefore b=\sqrt{5}$ ⋯ ❷

$\therefore \dfrac{a}{b^2}=\dfrac{-25}{(\sqrt{5})^2}=-5$ ⋯ ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\dfrac{a}{b^2}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

13
(전략) 지수법칙을 이용하여 밑이 3인 거듭제곱으로 나타낸 후 자연수가 되도록 하는 정수 n의 개수를 구한다.

(풀이) $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{\frac{4}{n}}=(3^{-4})^{\frac{4}{n}}=3^{-\frac{16}{n}}$이므로 주어진 수가 자연수가 되려면 $-\dfrac{16}{n}$이 0 또는 양의 정수가 되어야 한다. 따라서 구하는 정수 n은 -1, -2, -4, -8, -16의 5개이다.

답 5

14
(전략) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

(풀이) $(3^{x+y}+3^{x-y})^2-(3^{x+y}-3^{x-y})^2$

$=\{(3^{x+y}+3^{x-y})+(3^{x+y}-3^{x-y})\}$

$\quad\times\{(3^{x+y}+3^{x-y})-(3^{x+y}-3^{x-y})\}$

$=(2\cdot3^{x+y})(2\cdot3^{x-y})$

$=4\cdot3^{2x}=4\cdot9^x$

답 $4\cdot9^x$

(다른 풀이) $3^{x+y}=A$, $3^{x-y}=B$로 놓으면

$(3^{x+y}+3^{x-y})^2-(3^{x+y}-3^{x-y})^2$

$=(A+B)^2-(A-B)^2$

$=(A^2+2AB+B^2)-(A^2-2AB+B^2)$

$=4AB=4\cdot3^{x+y}\cdot3^{x-y}$

$=4\cdot3^{2x}=4\cdot9^x$

15 전략 3, 4의 최소공배수가 12이므로 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$임을 이용하여 세 수를 $\sqrt[12]{\blacksquare}$ 꼴로 변형한다.

풀이 3, 4의 최소공배수가 12이므로 주어진 세 수를 $\sqrt[12]{\blacksquare}$ 꼴로 변형하면

$$A=\sqrt[3]{\frac{16}{81}}=\sqrt[12]{\left(\frac{16}{81}\right)^4}=\sqrt[12]{\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^4\right\}^4}$$
$$=\sqrt[12]{\left(\frac{2}{3}\right)^{16}}$$
$$B=\sqrt[4]{\frac{64}{729}}=\sqrt[12]{\left(\frac{64}{729}\right)^3}=\sqrt[12]{\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^6\right\}^3}$$
$$=\sqrt[12]{\left(\frac{2}{3}\right)^{18}}$$
$$C=\sqrt[3]{\frac{81}{256}}=\sqrt[12]{\left(\frac{81}{256}\right)^4}=\sqrt[12]{\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^4\right\}^4}$$
$$=\sqrt[12]{\left(\frac{3}{4}\right)^{16}}$$

$\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{16}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{18}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}=\dfrac{9}{4}>1$이므로 $\quad\left(\dfrac{2}{3}\right)^{18}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16}$

$\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{16}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{16}}=\left(\dfrac{8}{9}\right)^{16}<1$이므로 $\quad\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16}<\left(\dfrac{3}{4}\right)^{16}$

따라서 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{18}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16}<\left(\dfrac{3}{4}\right)^{16}$이므로

$$\sqrt[12]{\left(\frac{2}{3}\right)^{18}}<\sqrt[12]{\left(\frac{2}{3}\right)^{16}}<\sqrt[12]{\left(\frac{3}{4}\right)^{16}}$$

$\therefore B<A<C$

답 $B<A<C$

16 전략 분모, 분자에 2^a을 곱하여 먼저 4^a의 값을 구한다.

풀이 $\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}$의 분모, 분자에 2^a을 곱하면

$\dfrac{(2^a+2^{-a})2^a}{(2^a-2^{-a})2^a}=-2,\quad \dfrac{4^a+1}{4^a-1}=-2$

$4^a+1=-2\cdot 4^a+2$

$3\cdot 4^a=1 \qquad \therefore 4^a=\dfrac{1}{3}$ ···➊

$\therefore 4^a+4^{-a}=\dfrac{1}{3}+3=\dfrac{10}{3}$ ···➋

답 $\dfrac{10}{3}$

채점 기준	비율
➊ 4^a의 값을 구할 수 있다.	70 %
➋ 4^a+4^{-a}의 값을 구할 수 있다.	30 %

17 전략 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$임을 이용한다.

풀이 $4^a+4^b+4^c$

$=(2^a)^2+(2^b)^2+(2^c)^2$

$=(2^a+2^b+2^c)^2-2(2^a\cdot 2^b+2^b\cdot 2^c+2^c\cdot 2^a)$

$=(2^a+2^b+2^c)^2-(2^{a+b+1}+2^{b+c+1}+2^{c+a+1})$

이때 $a+b+c=-1$에서

$a+b+1=-c,\ b+c+1=-a,\ c+a+1=-b$

이므로

$4^a+4^b+4^c$

$=(2^a+2^b+2^c)^2-(2^{-c}+2^{-a}+2^{-b})$

$=13^2-11$

$=169-11$

$=158$

답 ③

18 전략 a, b, c를 밑이 16인 거듭제곱으로 변형한 후 지수법칙을 이용한다.

풀이 $a^x=16$에서 $\quad a=16^{\frac{1}{x}}$ ······ ㉠

$b^y=16$에서 $\quad b=16^{\frac{1}{y}}$ ······ ㉡

$c^z=16$에서 $\quad c=16^{\frac{1}{z}}$ ······ ㉢ ···➊

㉠×㉡×㉢을 하면

$16^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=abc$

$abc=4$이므로

$16^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=4,\quad 4^{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=4$

따라서 $2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=1$이므로

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ ···➋

답 $\dfrac{1}{2}$

채점 기준	비율
➊ a, b, c를 밑이 16인 거듭제곱으로 변형할 수 있다.	40 %
➋ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

19 전략 a가 자연수 x의 n제곱근이면 $a^n=x$임을 이용한다.

풀이 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$이 자연수 x의 n제곱근이라 하면

$x=\{(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}\}^n=\{(3^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}\}^n=3^{\frac{5}{6}n}$

이때 x는 자연수이므로 n은 6의 배수이어야 한다.

$2 \le n \le 100$이므로 n은 6, 12, 18, …, 96의 16개이다.

답 16

20

전략 먼저 $2^a=3^b$의 양변에 2^b을 곱한다.

풀이 $2^a=3^b$의 양변에 2^b을 곱하면

$$2^a \times 2^b = 3^b \times 2^b \qquad \therefore\ 2^{a+b}=6^b$$

이때 $a+b=\frac{4}{3}ab$이므로

$$2^{\frac{4}{3}ab}=6^b, \qquad 2^{\frac{4}{3}a}=6 \qquad \therefore\ 2^a=6^{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore\ 8^a \times 3^b=(2^a)^3 \times 2^a=2^{4a}=(2^a)^4$$
$$=(6^{\frac{3}{4}})^4=6^3=216$$

답 216

21

전략 Q_A, Q_B에 각각 $t=20$, $w=8$을 대입한 후, 지수법칙을 이용하여 $\frac{Q_A}{Q_B}$의 값을 구한다.

풀이 수온이 20 °C이고 A 조개와 B 조개의 개체중량이 각각 8 g이므로

$$\frac{Q_A}{Q_B}=\frac{0.01 \times 20^{1.25} \times 8^{0.25}}{0.05 \times 20^{0.75} \times 8^{0.30}}$$
$$=\frac{20^{0.50}}{5 \times 8^{0.05}}=\frac{(2^2 \times 5)^{0.50}}{5 \times (2^3)^{0.05}}$$
$$=\frac{2 \times 5^{0.50}}{2^{0.15} \times 5}$$
$$=2^{0.85} \times 5^{-0.50}$$

따라서 $a=0.85$, $b=-0.50$이므로

$$a+b=0.85+(-0.50)=0.35$$

답 ②

22

전략 $a^x=k\ (a>0,\ x \ne 0)$일 때, $a=k^{\frac{1}{x}}$임을 이용하여 밑을 통일한다.

풀이 $80^x=2$에서 $\qquad 80=2^{\frac{1}{x}}$

$\left(\frac{1}{10}\right)^y=4$에서 $\qquad \frac{1}{10}=4^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{2}{y}}$

$a^z=8$에서 $\qquad a=8^{\frac{1}{z}}=2^{\frac{3}{z}}$

즉 $2^{\frac{1}{x}}2^{\frac{2}{y}} \div (2^{\frac{3}{z}})^{\frac{1}{3}}=80 \cdot \frac{1}{10} \div a^{\frac{1}{3}}$에서

$$2^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}}=8 \div a^{\frac{1}{3}}$$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=1$이므로

$$2=8 \cdot a^{-\frac{1}{3}}, \qquad a^{\frac{1}{3}}=4$$
$$\therefore\ a=4^3=64$$

답 ②

23

전략 두 양수 P, Q에 대하여 $\frac{P}{Q}>1$이면 $P>Q$, $\frac{P}{Q}<1$이면 $P<Q$임을 이용한다.

풀이 m, n이 자연수이므로

$1<m^{n-5}$에서 $\qquad n-5>0$

$1<n^{m-8}$에서 $\qquad m-8>0$

$1<m^{n-5}<n^{m-8}$에서

$1<(m^{n-5})^{\frac{1}{(n-5)(m-8)}}<(n^{m-8})^{\frac{1}{(n-5)(m-8)}}$이므로

$$1<m^{\frac{1}{m-8}}<n^{\frac{1}{n-5}}$$

또 $m^{n-5}<n^{m-8}$에서 $\qquad \frac{n^{m-8}}{m^{n-5}}>1$

(i) $\frac{A}{B}=\frac{m^{\frac{1}{m-8}} \cdot n^{\frac{1}{n-5}}}{m^{-\frac{1}{m-8}} \cdot n^{\frac{1}{n-5}}}$

$=m^{\frac{2}{m-8}}$

$=(m^{\frac{1}{m-8}})^2>1\ (\because\ m^{\frac{1}{m-8}}>1)$

$\therefore\ A>B$

(ii) $\frac{A}{C}=\frac{m^{\frac{1}{m-8}} \cdot n^{\frac{1}{n-5}}}{m^{\frac{1}{m-8}} \cdot n^{-\frac{1}{n-5}}}$

$=n^{\frac{2}{n-5}}$

$=(n^{\frac{1}{n-5}})^2>1\ (\because\ n^{\frac{1}{n-5}}>1)$

$\therefore\ A>C$

(iii) $\frac{B}{C}=\frac{m^{-\frac{1}{m-8}} \cdot n^{\frac{1}{n-5}}}{m^{\frac{1}{m-8}} \cdot n^{-\frac{1}{n-5}}}$

$=m^{-\frac{2}{m-8}} \cdot n^{\frac{2}{n-5}}$

$=\{m^{-(n-5)} \cdot n^{m-8}\}^{\frac{2}{(m-8)(n-5)}}$

$=\left(\frac{n^{m-8}}{m^{n-5}}\right)^{\frac{2}{(m-8)(n-5)}}>1\left(\because\ \frac{n^{m-8}}{m^{n-5}}>1\right)$

$\therefore\ B>C$

이상에서 $\qquad A>B>C$

답 ①

다른 풀이 m, n이 자연수이므로 부등식

$1<m^{n-5}<n^{m-8}$에서

$$n-5>0,\ m-8>0$$

또 $m^{n-5}<n^{m-8}$에서 $\qquad \frac{n^{m-8}}{m^{n-5}}>1$

$(n-5)(m-8)=k$로 놓으면 $k>0$이므로

$$A^k=m^{n-5} \cdot n^{m-8}$$
$$B^k=m^{-(n-5)} \cdot n^{m-8}$$
$$C^k=m^{n-5} \cdot n^{-(m-8)}$$

(i) $\frac{A^k}{B^k}=\frac{m^{n-5} \cdot n^{m-8}}{m^{-(n-5)} \cdot n^{m-8}}$

$=m^{2(n-5)}$

$=(m^{n-5})^2>1\ (\because\ m^{n-5}>1)$

따라서 $A^k>B^k$이므로 $\qquad A>B$

(ii) $\dfrac{B^k}{C^k}=\dfrac{m^{-(n-5)}\cdot n^{m-8}}{m^{n-5}\cdot n^{-(m-8)}}$

$=\dfrac{n^{2(m-8)}}{m^{2(n-5)}}=\left(\dfrac{n^{m-8}}{m^{n-5}}\right)^2>1\left(\because \dfrac{n^{m-8}}{m^{n-5}}>1\right)$

따라서 $B^k>C^k$이므로 $B>C$

(i), (ii)에서 $A>B>C$

Remark▶ 두 실수 또는 두 식의 대소 비교

두 실수 또는 두 식 A, B의 대소를 비교할 때에는 다음과 같은 방법을 이용한다.

(1) 차 $A-B$를 조사한다.

① $A-B>0 \Longleftrightarrow A>B$

② $A-B=0 \Longleftrightarrow A=B$

③ $A-B<0 \Longleftrightarrow A<B$

(2) $A>0$, $B>0$일 때, 제곱의 차 A^2-B^2을 조사한다.

① $A^2-B^2>0 \Longleftrightarrow A^2>B^2 \Longleftrightarrow A>B$

② $A^2-B^2=0 \Longleftrightarrow A^2=B^2 \Longleftrightarrow A=B$

③ $A^2-B^2<0 \Longleftrightarrow A^2<B^2 \Longleftrightarrow A<B$

(3) $A>0$, $B>0$일 때, 비 $\dfrac{A}{B}$를 조사한다.

① $\dfrac{A}{B}>1 \Longleftrightarrow A>B$

② $\dfrac{A}{B}=1 \Longleftrightarrow A=B$

③ $\dfrac{A}{B}<1 \Longleftrightarrow A<B$

I. 지수와 로그

02 로그

유제

본책 35~59쪽

009-① (1) $\log_2 \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}=x$에서 $2^x=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}$

$2^x=\dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{3}{2}}}$, $2^x=2^{\frac{1}{3}-\frac{3}{2}}$

$2^x=2^{-\frac{7}{6}}$ $\therefore x=-\dfrac{7}{6}$

(2) $\log_x 27=-\dfrac{3}{2}$에서 $x^{-\frac{3}{2}}=27$

$\therefore x=(27)^{-\frac{2}{3}}=(3^3)^{-\frac{2}{3}}=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$

(3) $\log_8(\log_{81}x)=-1$에서 $8^{-1}=\log_{81}x$

즉 $\log_{81}x=\dfrac{1}{8}$이므로 $81^{\frac{1}{8}}=x$

$\therefore x=(3^4)^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

답 (1) $-\dfrac{7}{6}$ (2) $\dfrac{1}{9}$ (3) $\sqrt{3}$

009-② $x=\log_5 27$에서 $5^x=27$

$\therefore 5^{\frac{x}{3}}=27^{\frac{1}{3}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}=3$

답 3

010-① $x=\log_9(\sqrt{5}-2)$에서 $9^x=\sqrt{5}-2$

$\therefore (3^x+3^{-x})(3^x-3^{-x})=9^x-9^{-x}$

$=(\sqrt{5}-2)-\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

$=(\sqrt{5}-2)-(\sqrt{5}+2)$

$=-4$

답 -4

010-② $x=\log_4(\sqrt{2}-1)$에서 $4^x=\sqrt{2}-1$

$\therefore 2^{2x}=\sqrt{2}-1$

주어진 식의 분모, 분자에 각각 2^x을 곱하면

$\dfrac{2^{4x}-2^{-2x}}{2^{2x}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}}{(\sqrt{2}-1)-1}$

$=\dfrac{(3-2\sqrt{2})-(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}-2}$

$=\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}=1+2\sqrt{2}$

답 $1+2\sqrt{2}$

011-❶ (1) 밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq1$이므로

$3<x<4$ 또는 $x>4$ ...... ㉠

진수의 조건에서 $5-x>0$이므로

$x<5$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<5$

(2) 밑의 조건에서 $x+1>0$, $x+1\neq1$이므로

$-1<x<0$ 또는 $x>0$ ...... ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+3x>0$이므로

$x^2-3x<0$, $\quad x(x-3)<0$

$\therefore 0<x<3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad 0<x<3$

답 (1) $3<x<4$ 또는 $4<x<5$ (2) $0<x<3$

011-❷ $\log_x x^2$이 정의되려면 밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$이므로

$0<x<1$ 또는 $x>1$ ...... ㉠

진수의 조건에서 $x^2>0$이므로

$x\neq0$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad 0<x<1$ 또는 $x>1$

$\log_{4-x}|4-x|$가 정의되려면 밑의 조건에서

$4-x>0$, $4-x\neq1$이므로 $\quad x<4$, $x\neq3$

$\therefore x<3$ 또는 $3<x<4$ ...... ㉢

진수의 조건에서 $|4-x|>0$이므로

$x\neq4$ ...... ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면

$x<3$ 또는 $3<x<4$

따라서 $\log_x x^2$과 $\log_{4-x}|4-x|$가 모두 정의되도록 하는 실수 x의 값의 범위는

$0<x<1$ 또는 $1<x<3$ 또는 $3<x<4$ 답 ④

011-❸ 밑의 조건에서 $a-3>0$, $a-3\neq1$이므로

$a>3$, $a\neq4$

$\therefore 3<a<4$ 또는 $a>4$ ...... ㉠

진수의 조건에서 $\quad x^2+ax+2a>0$

임의의 실수 x에 대하여 위의 부등식이 성립하므로 방정식 $x^2+ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot2a<0$, $\quad a(a-8)<0$

$\therefore 0<a<8$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<a<4$ 또는 $4<a<8$

따라서 $\log_{a-3}(x^2+ax+2a)$가 정의되도록 하는 정수 a는 5, 6, 7의 3개이다. 답 3

Remark▶ 이차부등식이 항상 성립할 조건

실수 a, b, c에 대하여 $a\neq0$, $D=b^2-4ac$일 때, 임의의 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건은

$a>0$, $D<0$

012-❶ $\log_2 6=\log_2(2\cdot3)=\log_2 2+\log_2 3$

$=1+\log_2 3$

즉 $1+\log_2 3=a$이므로 $\quad \log_2 3=a-1$

$\therefore \log_2 108=\log_2(2^2\cdot3^3)$

$=2\log_2 2+3\log_2 3$

$=2+3(a-1)$

$=3a-1$ 답 $3a-1$

012-❷ $\log_{10}0.63-\log_{10}1.4$

$=\log_{10}\dfrac{0.63}{1.4}=\log_{10}\dfrac{63}{140}$

$=\log_{10}\dfrac{9}{20}=\log_{10}\dfrac{3^2}{2\cdot10}$

$=2\log_{10}3-(\log_{10}2+\log_{10}10)$

$=2\log_{10}3-\log_{10}2-1$

$=2q-p-1$ 답 $2q-p-1$

013-❶ (1) $\log_{10}13+\dfrac{1}{2}\log_{10}11+\log_{10}\dfrac{4}{7}$

$-\log_{10}\dfrac{13}{35}+\dfrac{1}{2}\log_{10}\dfrac{25}{11}$

$=\log_{10}13+\log_{10}11^{\frac{1}{2}}+\log_{10}\dfrac{4}{7}$

$-\log_{10}\dfrac{13}{35}+\log_{10}\left(\dfrac{25}{11}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\log_{10}13+\log_{10}\sqrt{11}+\log_{10}\dfrac{4}{7}$

$-\log_{10}\dfrac{13}{35}+\log_{10}\sqrt{\dfrac{25}{11}}$

$=\log_{10}\left(13\cdot\sqrt{11}\cdot\dfrac{4}{7}\div\dfrac{13}{35}\cdot\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{11}}\right)$

$=\log_{10}\left(13\cdot\sqrt{11}\cdot\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{35}{13}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{11}}\right)$

$=\log_{10}100=\log_{10}10^2$

$=2$

(2) $\dfrac{\log_5\sqrt{2}+\log_5 3-\log_5\sqrt{10}}{\log_5 1.8}$

$=\dfrac{\log_5\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}}}{\log_5\dfrac{18}{10}}=\dfrac{\log_5\dfrac{3}{\sqrt{5}}}{\log_5\dfrac{9}{5}}=\dfrac{\log_5\dfrac{3}{\sqrt{5}}}{\log_5\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}$

$=\dfrac{\log_5\dfrac{3}{\sqrt{5}}}{2\log_5\dfrac{3}{\sqrt{5}}}=\dfrac{1}{2}$

(3) $(2\log_{12}2)^2+(\log_{12}3)^2+\log_{12}4\cdot\log_{12}9$
$=(2\log_{12}2)^2+(\log_{12}3)^2+\log_{12}2^2\cdot\log_{12}3^2$
$=(2\log_{12}2)^2+(\log_{12}3)^2+2\cdot2\log_{12}2\cdot\log_{12}3$
$=(2\log_{12}2+\log_{12}3)^2$
$=\{\log_{12}(2^2\cdot3)\}^2$
$=(\log_{12}12)^2=1^2=1$

답 (1) 2 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1

014-❶ (1) $\dfrac{\log_2 3\cdot\log_3 6\cdot\log_5 8}{\log_5 3+\log_5 2}$

$$=\frac{\frac{\log_5 3}{\log_5 2}\cdot\frac{\log_5 6}{\log_5 3}\cdot\log_5 2^3}{\log_5 6}$$

$$=\frac{\frac{\log_5 3}{\log_5 2}\cdot\frac{\log_5 6}{\log_5 3}\cdot3\log_5 2}{\log_5 6}$$

$$=\frac{3\log_5 6}{\log_5 6}=3$$

(2) $\log_2 10\cdot\log_5 10-(\log_2 5+\log_5 2)$
$=\log_2(5\cdot2)\cdot\log_5(5\cdot2)-(\log_2 5+\log_5 2)$
$=(\log_2 5+\log_2 2)(\log_5 5+\log_5 2)-(\log_2 5+\log_5 2)$
$=(\log_2 5+1)(1+\log_5 2)-(\log_2 5+\log_5 2)$
$=\log_2 5+\log_2 5\cdot\log_5 2+1+\log_5 2-\log_2 5-\log_5 2$
$=\log_2 5+\log_2 5\cdot\dfrac{1}{\log_2 5}+1+\log_5 2-\log_2 5-\log_5 2$
$=1+1=2$

답 (1) 3 (2) 2

015-❶ $a=\log_3 6=\log_3(2\cdot3)$
$=\log_3 2+\log_3 3=\log_3 2+1$
이므로 $\log_3 2=a-1$

$$\therefore \log_2 36=\frac{\log_3 36}{\log_3 2}=\frac{\log_3(2^2\cdot3^2)}{\log_3 2}$$
$$=\frac{2\log_3 2+2}{\log_3 2}=\frac{2(a-1)+2}{a-1}$$
$$=\frac{2a}{a-1}$$

답 $\dfrac{2a}{a-1}$

다른 풀이 $\log_2 36=\dfrac{\log_3 36}{\log_3 2}=\dfrac{\log_3 6^2}{\log_3\frac{6}{3}}$
$$=\frac{2\log_3 6}{\log_3 6-\log_3 3}$$
$$=\frac{2a}{a-1}$$

015-❷ $a^x=2$, $a^y=3$, $a^z=10$에서 $a\neq1$이므로
$x=\log_a 2$, $y=\log_a 3$, $z=\log_a 10$

$$\therefore \log_{0.18}\sqrt{45}=\frac{\log_a\sqrt{45}}{\log_a 0.18}=\frac{\frac{1}{2}\log_a 45}{\log_a\frac{18}{100}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\log_a(3^2\cdot5)}{\log_a 18-\log_a 100}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\log_a\left(3^2\cdot\frac{10}{2}\right)}{\log_a(2\cdot3^2)-\log_a 10^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(\log_a 3^2+\log_a 10-\log_a 2)}{\log_a 2+\log_a 3^2-\log_a 10^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(2\log_a 3+\log_a 10-\log_a 2)}{\log_a 2+2\log_a 3-2\log_a 10}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(2y+z-x)}{x+2y-2z}$$
$$=\frac{-x+2y+z}{2(x+2y-2z)}$$

답 $\dfrac{-x+2y+z}{2(x+2y-2z)}$

016-❶ $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$이므로 주어진 등식에서
$$\frac{1}{\log_b a}+\log_b a=\frac{10}{3}$$
위의 등식의 양변에 $3\log_b a$를 곱하여 정리하면
$3(\log_b a)^2-10\log_b a+3=0$
$(3\log_b a-1)(\log_b a-3)=0$
$\therefore \log_b a=\dfrac{1}{3}$ 또는 $\log_b a=3$
그런데 $\log_b a>1$이므로 $\log_b a=3$
로그의 정의에 의하여 $a=b^3$
$$\therefore \frac{a+b^6}{a^2+b^3}=\frac{b^3+b^6}{b^6+b^3}=1$$

답 1

016-❷ $\log_a c:\log_b c=2:1$에서
$\log_a c=2\log_b c$, $\dfrac{1}{\log_c a}=\dfrac{2}{\log_c b}$
$2\log_c a=\log_c b$, $\log_c a^2=\log_c b$
$\therefore a^2=b$
$$\therefore \log_a b+\log_b a=\log_a b+\frac{1}{\log_a b}$$
$$=\log_a a^2+\frac{1}{\log_a a^2}$$
$$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

답 $\dfrac{5}{2}$

016-③ $\log_a x=6$, $\log_b x=3$, $\log_c x=4$에서 $x\neq1$이므로

$$\begin{aligned}\log_{abc}x&=\frac{1}{\log_x abc}\\&=\frac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c}\\&=\frac{1}{\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_b x}+\frac{1}{\log_c x}}\\&=\frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{4}{3}$

017-① $42^x=243$에서

$x=\log_{42}243=\log_{42}3^5=5\log_{42}3$

$\therefore \frac{5}{x}=\frac{1}{\log_{42}3}=\log_3 42$

$14^y=9$에서

$y=\log_{14}9=\log_{14}3^2=2\log_{14}3$

$\therefore \frac{2}{y}=\frac{1}{\log_{14}3}=\log_3 14$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{5}{x}-\frac{2}{y}&=\log_3 42-\log_3 14\\&=\log_3\frac{42}{14}\\&=\log_3 3=1\end{aligned}$$

답 1

다른 풀이 $42^x=243$, 즉 $42^x=3^5$에서

$3^{\frac{5}{x}}=42$ …… ㉠

$14^y=9$, 즉 $14^y=3^2$에서

$3^{\frac{2}{y}}=14$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $3^{\frac{5}{x}}\div3^{\frac{2}{y}}=3$

$3^{\frac{5}{x}-\frac{2}{y}}=3^1$ $\therefore \frac{5}{x}-\frac{2}{y}=1$

017-② $4^x=9^y=12$의 각 변에 밑이 12인 로그를 취하면

$\log_{12}4^x=\log_{12}9^y=\log_{12}12$

$x\log_{12}4=y\log_{12}9=1$

$\therefore \frac{1}{x}=\log_{12}4$, $\frac{1}{y}=\log_{12}9$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{2}{x}+\frac{1}{y}&=2\log_{12}4+\log_{12}9\\&=\log_{12}(4^2\cdot9)=\log_{12}(4^2\cdot3^2)\\&=\log_{12}(4\cdot3)^2=\log_{12}12^2\\&=2\log_{12}12=2\end{aligned}$$

답 2

다른 풀이 $4^x=12$에서 $12^{\frac{1}{x}}=4$

$12^{\frac{2}{x}}=4^2$ $\therefore 12^{\frac{2}{x}}=16$ …… ㉠

$9^y=12$에서 $12^{\frac{1}{y}}=9$ …… ㉡

㉠×㉡을 하면 $12^{\frac{2}{x}}\cdot12^{\frac{1}{y}}=144$

$12^{\frac{2}{x}+\frac{1}{y}}=12^2$ $\therefore \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=2$

018-① (1) $\left(\log_{25}\frac{1}{3}+\log_5 9\right)\left(\log_{\sqrt{3}}5+\log_{27}\frac{1}{5}\right)$

$$\begin{aligned}&=(\log_{5^2}3^{-1}+\log_5 3^2)(\log_{3^{\frac{1}{2}}}5+\log_{3^3}5^{-1})\\&=\left(-\frac{1}{2}\log_5 3+2\log_5 3\right)\\&\quad\times\left(2\log_3 5-\frac{1}{3}\log_3 5\right)\\&=\frac{3}{2}\log_5 3\cdot\frac{5}{3}\log_3 5\\&=\frac{5}{2}\log_5 3\cdot\log_3 5=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

(2) $\frac{3}{2}\log_8 9=\frac{3}{2}\log_{2^3}3^2=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\log_2 3$

$=\log_2 3$

이므로

$2^{\frac{3}{2}\log_8 9}=2^{\log_2 3}=3^{\log_2 2}=3$

답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) 3

018-② $\log_5 2+\log_5 3=\log_5(2\cdot3)=\log_5 6$,

$\log_4 2+\log_4 7=\log_4(2\cdot7)=\log_4 14$

$=\log_{2^2}14=\frac{1}{2}\log_2 14$

이므로

$$\begin{aligned}&(5^{\log_5 2+\log_5 3})^{\log_6 25}-(2^{\log_4 2+\log_4 7})^2\\&=(5^{\log_5 6})^{\log_6 25}-(2^{\frac{1}{2}\log_2 14})^2\\&=(6^{\log_5 5})^{\log_6 25}-(2^{\frac{1}{2}\log_2 14})^2\\&=6^{\log_6 25}-2^{\frac{1}{2}\cdot2\log_2 14}\\&=6^{\log_6 25}-2^{\log_2 14}\\&=25^{\log_6 6}-14^{\log_2 2}\\&=25-14=11\end{aligned}$$

답 11

019-① 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=8$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$(\alpha-\beta)^2=8^2-4\cdot8=32$

$\therefore \alpha-\beta=4\sqrt{2}$ ($\because \alpha>\beta$)

$$\begin{aligned}\therefore \log_{\alpha-\beta}\alpha+\log_{\alpha-\beta}\beta&=\log_{\alpha-\beta}\alpha\beta=\log_{4\sqrt{2}}8\\&=\log_{2^{\frac{5}{2}}}2^3=3\cdot\frac{2}{5}\log_2 2\\&=\frac{6}{5}\end{aligned}$$

답 $\frac{6}{5}$

019-❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=4$, $\log_2 a\cdot\log_2 b=k$

$\log_2 a+\log_2 b=4$에서 $\quad \log_2 ab=4$

$\therefore ab=2^4=16$

이때 $a+b=10$이므로

$a(10-a)=16$, $\quad a^2-10a+16=0$

$(a-2)(a-8)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=8$

즉 $a=2$, $b=8$ 또는 $a=8$, $b=2$이므로

$k=\log_2 2\cdot\log_2 8=1\cdot3=3$ 답 3

020-❶ (1) $\log 802000=\log(8.02\times10^5)$

$=\log 8.02+\log 10^5$

$=0.9042+5$

$=5.9042$

(2) $\log 0.0802=\log(8.02\times10^{-2})$

$=\log 8.02+\log 10^{-2}$

$=0.9042-2$

$=-1.0958$

답 (1) 5.9042 (2) -1.0958

020-❷ $\log 4.55=0.6580$이므로

$$\log\sqrt[4]{45.5}=\log 45.5^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\log 45.5$$

$$=\frac{1}{4}\log(4.55\times10)$$

$$=\frac{1}{4}(\log 4.55+\log 10)$$

$$=\frac{1}{4}(0.6580+1)$$

$=0.4145$ 답 0.4145

021-❶ 지하철 소음의 크기를 I_{A} W/m^2, 일상적인 대화 소리의 크기를 I_{B} W/m^{2}라 하면

$$80=10\log\frac{I_{\mathrm{A}}}{I_0}=10(\log I_{\mathrm{A}}-\log I_0)$$

$$60=10\log\frac{I_{\mathrm{B}}}{I_0}=10(\log I_{\mathrm{B}}-\log I_0)$$

위의 식을 정리하면

$8=\log I_{\mathrm{A}}-\log I_0$ ······ ㉠

$6=\log I_{\mathrm{B}}-\log I_0$ ······ ㉡

㉠−㉡을 하면

$2=\log I_{\mathrm{A}}-\log I_{\mathrm{B}}$, $\quad \log\dfrac{I_{\mathrm{A}}}{I_{\mathrm{B}}}=2$

$\therefore \dfrac{I_{\mathrm{A}}}{I_{\mathrm{B}}}=10^2=100$

따라서 지하철 소음의 크기는 일상적인 대화 소리의 크기의 100배이다. 답 100배

022-❶ $\log A$의 정수 부분을 n이라 하면

$n\le\log A<n+1$

$\therefore 10^n\le A<10^{n+1}$

따라서 자연수 A의 개수는

$10^{n+1}-10^n=10^n(10-1)=9\cdot10^n$

답 $9\cdot10^n$

022-❷ (1) $\log 3^n$의 정수 부분이 9이므로

$9\le\log 3^n<10$, $\quad 9\le n\log 3<10$

$\therefore \dfrac{9}{\log 3}\le n<\dfrac{10}{\log 3}$

$\log 3=0.4771$이므로

$\dfrac{9}{0.4771}\le n<\dfrac{10}{0.4771}$

$18.\times\times\times\le n<20.\times\times\times$

따라서 자연수 n의 값은 19, 20이다.

(2) $\log 5^n$의 정수 부분이 50이므로

$50\le\log 5^n<51$, $\quad 50\le n\log 5<51$

$\therefore \dfrac{50}{\log 5}\le n<\dfrac{51}{\log 5}$

$\log 2=0.3010$이므로

$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2$$

$=1-\log 2=1-0.3010$

$=0.6990$

즉 $\dfrac{50}{0.6990}\le n<\dfrac{51}{0.6990}$이므로

$71.\times\times\times\le n<72.\times\times\times$

따라서 자연수 n의 값은 72이다.

답 (1) 19, 20 (2) 72

023-❶ (1) $\log 5^{30}=30\log\dfrac{10}{2}=30(1-\log 2)$

$=30(1-0.3010)$

$=20.97$

따라서 $\log 5^{30}$의 정수 부분이 20이므로 5^{30}은 21자리 정수이다.

(2) $\log(2^{40}\times3^{20})=\log 2^{40}+\log 3^{20}$

$=40\log 2+20\log 3$

$=40\times0.3010+20\times0.4771$

$=12.04+9.542$

$=21.582$

따라서 $\log(2^{40}\times3^{20})$의 정수 부분이 21이므로 $2^{40}\times3^{20}$은 22자리 정수이다.

(3) $\log\frac{1}{3^{50}}=\log 3^{-50}$

$=-50\log 3$

$=-50\times 0.4771$

$=-23.855$

$=-24+0.145$

따라서 $\log\frac{1}{3^{50}}$의 정수 부분이 -24이므로 $\frac{1}{3^{50}}$은 소수점 아래 24째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

답 (1) 21자리 (2) 22자리 (3) 소수점 아래 24째 자리

023-❷ 23^{100}이 137자리 정수이므로 $\log 23^{100}$의 정수 부분은 136이다. 즉 $136\le\log 23^{100}<137$이므로

$136\le 100\log 23<137$

$\therefore 1.36\le\log 23<1.37$ ······ ㉠

이때 $\log 23^{20}=20\log 23$이므로 ㉠에서

$20\times 1.36\le 20\log 23<20\times 1.37$

$\therefore 27.2\le\log 23^{20}<27.4$

따라서 $\log 23^{20}$의 정수 부분이 27이므로 23^{20}은 28자리 정수이다.

답 28자리

024-❶ $\log(27^{40}\div 5^{80})$

$=40\log 3^3-80\log\frac{10}{2}$

$=120\log 3-80(1-\log 2)$

$=120\times 0.4771-80(1-0.3010)$

$=57.252-55.92$

$=1.332$

$\log(27^{40}\div 5^{80})$의 정수 부분이 1이므로 $27^{40}\div 5^{80}$은 두 자리 정수이다.

$\therefore n=2$

또 $\log(27^{40}\div 5^{80})$의 소수 부분이 0.332이고 $0.3010<0.332<0.4771$이므로

$\log 2<0.332<\log 3$

$1+\log 2<1+0.332<1+\log 3$

$\log 20<1.332<\log 30$

$\therefore \log 20<\log(27^{40}\div 5^{80})<\log 30$

따라서 $20<27^{40}\div 5^{80}<30$이므로 $27^{40}\div 5^{80}$의 최고 자리의 숫자는 2이다.

$\therefore a=2$

$\therefore n+a=4$

답 4

중단원 연습 문제

본책 60~64쪽

01 ②	02 $-12<k<0$	03 ⑤	04 ⑤
05 $2a+b$	06 2	07 20	08 ⑤
09 $\frac{1}{2}$	10 $C<B<A$	11 ③	12 9
13 5	14 1	15 $\frac{11}{9}$	16 25.9 %
17 1	18 100	19 2	20 7
21 $1000\sqrt[3]{10}$	22 15	23 ③	24 ④
25 25	26 ⑤		

01 전략 로그의 정의를 이용하여 주어진 등식을 $a^x=N$ 꼴로 변형한다.

풀이 $\log_{\sqrt{3}}a=4$에서 $(\sqrt{3})^4=a$ $\therefore a=9$

$\log_{\frac{1}{8}}2=b$에서 $\left(\frac{1}{8}\right)^b=2$, $2^{-3b}=2$

$-3b=1$ $\therefore b=-\frac{1}{3}$

$\therefore ab=9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-3$

답 ②

다른 풀이 로그의 성질을 이용하여 b의 값을 구하면

$b=\log_{\frac{1}{8}}2=\log_{2^{-3}}2=-\frac{1}{3}$

02 전략 $\log_a N$이 정의되려면 $a>0$, $a\ne 1$, $N>0$이어야 함을 이용한다.

풀이 진수의 조건에서 $x^2-kx-3k>0$

임의의 실수 x에 대하여 위의 부등식이 성립하므로 방정식 $x^2-kx-3k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot(-3k)<0$

$k^2+12k<0$, $k(k+12)<0$

$\therefore -12<k<0$

답 $-12<k<0$

03 전략 로그의 성질을 이용하여 주어진 합을 진수의 곱으로 변형한다.

풀이 $\log_3\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log_3\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_3\left(1+\frac{1}{3}\right)$

$+\cdots+\log_3\left(1+\frac{1}{80}\right)$

$=\log_3\frac{2}{1}+\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{4}{3}+\cdots+\log_3\frac{81}{80}$

$=\log_3\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{81}{80}\right)$

$=\log_3 81=\log_3 3^4$

$=4$

답 ⑤

04 (전략) 주어진 조건에서 로그의 성질을 이용하여 xy의 값을 구한다.

(풀이) $\log_3 x+\log_3 y=1$에서

$\log_3 xy=1 \quad \therefore xy=3$

$$\therefore \frac{2^{(x+y)^2}}{2^{(x-y)^2}}=2^{(x+y)^2-(x-y)^2}$$
$$=2^{4xy}=2^{4\cdot 3}$$
$$=2^{12}=4096$$

답 ⑤

05 (전략) 먼저 주어진 식의 진수를 변형하여 $\log_6 2$와 $\log_6 5$를 a, b로 나타낸다.

(풀이) $\log_6 10=\log_6(2\cdot 5)=a$에서

$\log_6 2+\log_6 5=a$ …… ㉠

$\log_6 \frac{2}{5}=b$에서

$\log_6 2-\log_6 5=b$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\log_6 2=a+b$

$\therefore \log_6 2=\frac{a+b}{2}$

㉠−㉡을 하면 $2\log_6 5=a-b$

$\therefore \log_6 5=\frac{a-b}{2}$

$$\therefore \log_6 40=\log_6(2^3\cdot 5)$$
$$=3\log_6 2+\log_6 5$$
$$=3\cdot\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$$
$$=2a+b$$

답 $2a+b$

06 (전략) 로그의 정의를 이용하여 x, y를 각각 로그를 사용하여 나타낸다.

(풀이) $2^x=3$, $3^y=4$에서

$x=\log_2 3$, $y=\log_3 4$

$$\therefore xy=\log_2 3\cdot\log_3 4$$
$$=\log_2 3\cdot\frac{\log_2 2^2}{\log_2 3}$$
$$=2\log_2 2=2$$

답 2

07 (전략) 진수가 모두 d로 같으므로 밑을 d로 통일한다.

(풀이) $\log_a d=12$에서

$\log_d a=\frac{1}{12}$ …… ㉠

$\log_b d=30$에서 $\quad \log_d b=\frac{1}{30}$ …… ㉡ ⋯➊

$\log_{abc} d=6$에서 $\quad \log_d abc=\frac{1}{6}$

$\therefore \log_d a+\log_d b+\log_d c=\frac{1}{6}$ …… ㉢ ⋯➋

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\log_d c=\frac{1}{6}$

$\therefore \log_d c=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{30}=\frac{1}{20}$ ⋯➌

$\therefore \log_c d=20$ ⋯➍

답 20

채점 기준	비율
➊ $\log_d a$, $\log_d b$의 값을 구할 수 있다.	30 %
➋ $\log_d a+\log_d b+\log_d c$의 값을 구할 수 있다.	20 %
➌ $\log_d c$의 값을 구할 수 있다.	30 %
➍ $\log_c d$의 값을 구할 수 있다.	20 %

08 (전략) 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 보기의 식을 변형해 본다.

(풀이) ㄱ. $\log_3 3\sqrt{3}=\log_3(\sqrt{3})^3=3\log_3\sqrt{3}$

ㄴ. $\sqrt{2}\log_2\sqrt{2}=\sqrt{2}\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}} 2=\frac{1}{\sqrt{2}}\log_{2^{\frac{1}{2}}} 2=\frac{2}{\sqrt{2}}\log_2 2=\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{2}\log_2\sqrt{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}} 2$

ㄷ. $\left(\frac{4}{3}\right)^3\log\left(\frac{4}{3}\right)^4=\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot 4\log\frac{4}{3}$

$=\frac{4^4}{3^3}\log\frac{4}{3}$

$\left(\frac{4}{3}\right)^4\log\left(\frac{4}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^4\cdot 3\log\frac{4}{3}$

$=\frac{4^4}{3^3}\log\frac{4}{3}$

$\therefore \left(\frac{4}{3}\right)^3\log\left(\frac{4}{3}\right)^4=\left(\frac{4}{3}\right)^4\log\left(\frac{4}{3}\right)^3$

ㄹ. $125^{\log_5(\log_5 3)}=5^{3\log_5(\log_5 3)}=5^{\log_5(\log_5 3)^3}$

$=\{(\log_5 3)^3\}^{\log_5 5}=(\log_5 3)^3$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

09 (전략) 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 먼저 구한다.

(풀이) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=3$ ⋯➊

02 로그

$$\therefore \log_{81}\left(\alpha+\frac{\alpha}{\beta}\right)+\log_{81}\left(\beta+\frac{\beta}{\alpha}\right)$$
$$=\log_{81}\left(\alpha+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{\beta}{\alpha}\right)$$
$$=\log_{81}(\alpha\beta+\beta+\alpha+1)$$
$$=\log_{81}(3+5+1)$$
$$=\log_{81}9$$
$$=\log_{9^2}9=\frac{1}{2} \quad \cdots❷$$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\log_{81}\left(\alpha+\frac{\alpha}{\beta}\right)+\log_{81}\left(\beta+\frac{\beta}{\alpha}\right)$의 값을 구할 수 있다.	70 %

10 전략 주어진 로그의 밑을 통일한 후 진수의 대소를 비교한다.

풀이 주어진 식의 밑을 3으로 통일하면

$$A=\log_{\sqrt{3}}8=\log_{3^{\frac{1}{2}}}8=2\log_3 8$$
$$=\log_3 8^2=\log_3 64$$
$$B=3+\log_3 2=\log_3 3^3+\log_3 2$$
$$=\log_3(3^3\cdot 2)=\log_3 54$$
$$C=\log_5 13^{\log_3 5}=\log_3 5\cdot\log_5 13$$
$$=\log_3 5\cdot\frac{\log_3 13}{\log_3 5}=\log_3 13$$

이때 $13<54<64$이므로

$$\log_3 13<\log_3 54<\log_3 64$$
$$\therefore C<B<A$$

답 $C<B<A$

11 전략 $0<\log 5<1$임을 이용하여 n과 α의 값을 구한다.

풀이 $\log 50=\log(10\cdot 5)=\log 10+\log 5$
$$=1+\log 5$$

$1<5<10$에서 $\log 1<\log 5<\log 10$, 즉

$0<\log 5<1$이므로

$$n=1,\ \alpha=\log 5$$
$$\therefore \frac{10^n+10^\alpha}{10^n-10^\alpha}=\frac{10^1+10^{\log 5}}{10^1-10^{\log 5}}=\frac{10+5}{10-5}=\frac{15}{5}=3$$

답 ③

Remark ▶

50은 두 자리 정수이므로 $n=1$

따라서 $\log 50=1+\alpha\ (0\le\alpha<1)$이므로

$$\alpha=\log 50-1=\log 50-\log 10=\log\frac{50}{10}=\log 5$$

12 전략 $\log\left(\frac{7}{9}\right)^{20}$의 정수 부분과 소수 부분 α를 구한 후 $\log N<\alpha<\log(N+1)$을 만족시키는 N을 찾는다.

풀이 $\log\left(\frac{7}{9}\right)^{20}$

$$=20\log\frac{7}{9}=20\log\frac{7}{3^2}$$
$$=20(\log 7-\log 3^2)$$
$$=20(\log 7-2\log 3)$$
$$=20(0.8451-2\times 0.4771)$$
$$=-2.182=-2-0.182$$
$$=-2-1+(1-0.182)$$
$$=-3+0.818$$

따라서 $\log\left(\frac{7}{9}\right)^{20}$의 정수 부분이 -3이므로 $\left(\frac{7}{9}\right)^{20}$은 소수점 아래 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$$\therefore a=3$$

한편 $\log\left(\frac{7}{9}\right)^{20}$의 소수 부분이 0.818이고

$$\log 6=\log(2\cdot 3)=\log 2+\log 3$$
$$=0.3010+0.4771=0.7781$$
$$\log 7=0.8451$$

이므로

$$\log 6<0.818<\log 7$$
$$-3+\log 6<-3+0.818<-3+\log 7$$
$$\log(6\times 10^{-3})<\log\left(\frac{7}{9}\right)^{20}<\log(7\times 10^{-3})$$
$$\therefore 6\times 10^{-3}<\left(\frac{7}{9}\right)^{20}<7\times 10^{-3}$$

따라서 $\left(\frac{7}{9}\right)^{20}$은 소수점 아래 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자 6이 나타난다.

$$\therefore b=6$$
$$\therefore a+b=9$$

답 9

13 전략 (밑)>0, (밑)$\neq 1$, (진수)>0임을 이용한다.

풀이 밑의 조건에서 $a>0$, $a\neq 1$이므로

$0<a<1$ 또는 $a>1$ ······ ㉠ $\cdots$❶

진수의 조건에서 $ax^2-ax+1>0$

㉠에서 $a>0$이므로 임의의 실수 x에 대하여 위의 부등식이 성립하려면 방정식 $ax^2-ax+1=0$의 판별식을 D라 할 때

$$D=(-a)^2-4a<0$$
$$a^2-4a<0,\quad a(a-4)<0$$
$$\therefore 0<a<4 \quad ······ ㉡ \quad \cdots❷$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<a<1$ 또는 $1<a<4$ ⋯ ❸

따라서 $\log_a(ax^2-ax+1)$이 정의되도록 하는 정수 a는 2, 3이므로 구하는 합은

$2+3=5$ ⋯ ❹

답 5

채점 기준	비율
❶ 밑의 조건을 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❷ 진수의 조건을 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\log_a(ax^2-ax+1)$이 정의되도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❹ 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

14 전략 밑의 변환 공식을 이용하여 밑을 통일한다.

풀이 $\log_b a^4=4\log_b a=\dfrac{4}{\log_a b}$

$\log_a b=\log_b a^4$에서

$\log_a b=\dfrac{4}{\log_a b}$, $\quad(\log_a b)^2=4$

$\therefore \log_a b=-2$ 또는 $\log_a b=2$

이때 $\log_a b=-2$이면 $b=a^{-2}=\dfrac{1}{a^2}$이므로 $a>1$, $b>1$에 모순이다.

따라서 $\log_a b=2$이므로 $\quad b=a^2$

$\therefore \dfrac{b}{a^2}=\dfrac{a^2}{a^2}=1$

답 1

15 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $n+\alpha$의 값을 먼저 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2-x\log_3 11+k=0$의 두 근이 n, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=\log_3 11$ ⋯ ❶

$3^2=9$, $3^3=27$이므로

$\log_3 3^2<\log_3 11<\log_3 3^3$

$2<\log_3 11<3$ ⋯ ❷

이때 n은 정수이고 $0\le\alpha<1$이므로

$n=2$, $\alpha=\log_3 11-2=\log_3\dfrac{11}{9}$ ⋯ ❸

$\therefore 3^\alpha=3^{\log_3\frac{11}{9}}=\left(\dfrac{11}{9}\right)^{\log_3 3}$

$=\dfrac{11}{9}$ ⋯ ❹

답 $\dfrac{11}{9}$

채점 기준	비율
❶ $n+\alpha$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\log_3 11$의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ n, α의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ 3^α의 값을 구할 수 있다.	30 %

16 전략 A가 매달 a %씩 증가하면 k달 후에는 $A\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^k$이 된다.

풀이 첫 달의 매출액을 A, 매출액의 증가율을 a %라 하면

$A\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^3=2A$ ⋯ ❶

$\therefore \left(1+\dfrac{a}{100}\right)^3=2$

양변에 상용로그를 취하면

$3\log\left(1+\dfrac{a}{100}\right)=\log 2$

$\log\left(1+\dfrac{a}{100}\right)=\dfrac{1}{3}\log 2=\dfrac{1}{3}\times 0.3=0.1$ ⋯ ❷

이때 $\log 1.259=0.1$이므로

$1+\dfrac{a}{100}=1.259 \qquad \therefore a=25.9$ ⋯ ❸

따라서 매출액이 매달 25.9 %씩 증가하였다. ⋯ ❹

답 25.9 %

채점 기준	비율
❶ 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ $\log\left(1+\dfrac{a}{100}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 3개월 동안 이 카페의 매출액이 매달 몇 %씩 증가하였는지 구할 수 있다.	10 %

17 전략 주어진 x의 값의 범위를 이용하여 $\log x$의 값의 범위를 구한 후 α의 값을 구한다.

풀이 $1<x<10$이므로

$\log 1<\log x<\log 10$

$\therefore 0<\log x<1$

따라서 $n=0$이므로 $\quad \alpha=\log x$ ⋯ ❶

$\log x+2\alpha^2=1$에서

$\alpha+2\alpha^2=1$, $\quad 2\alpha^2+\alpha-1=0$

$(\alpha+1)(2\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=\dfrac{1}{2}$ ($\because 0\le\alpha<1$) ⋯ ❷

$\therefore \log x^2=2\log x=2\alpha=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $a=\log x$임을 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\log x^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %

18 전략 A가 n자리 수이면 $\log A$의 정수 부분은 $n-1$임을 이용한다.

풀이 2, 3, ⋯, 9는 한 자리 정수이므로

$f(2)=f(3)=\cdots=f(9)=0$

10, 11, ⋯, 99는 두 자리 정수이므로

$f(10)=f(11)=\cdots=f(99)=1$

100, 101, 102, 103, 104는 세 자리 정수이므로

$f(100)=f(101)=f(102)=f(103)=f(104)=2$

$$\begin{aligned}\therefore\ & f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(104)\\ &=\underbrace{0+\cdots+0}_{8\text{개}}+\underbrace{1+\cdots+1}_{90\text{개}}+\underbrace{2+\cdots+2}_{5\text{개}}\\ &=0\times8+1\times90+2\times5\\ &=100\end{aligned}$$

답 100

다른 풀이 (i) $1\le x<10$일 때,

$\log 1\le\log x<\log 10$에서

$0\le\log x<1 \quad \therefore f(x)=0$

(ii) $10\le x<100$일 때,

$\log 10\le\log x<\log 100$에서

$1\le\log x<2 \quad \therefore f(x)=1$

(iii) $100\le x<1000$일 때,

$\log 100\le\log x<\log 1000$에서

$2\le\log x<3 \quad \therefore f(x)=2$

이상에서

$$\begin{aligned}& f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(104)\\ &=\underbrace{0+\cdots+0}_{8\text{개}}+\underbrace{1+\cdots+1}_{90\text{개}}+\underbrace{2+\cdots+2}_{5\text{개}}\\ &=0\times8+1\times90+2\times5=100\end{aligned}$$

19 전략 $\log x^{100}$의 정수 부분을 이용하여 $\log\frac{1}{x}$의 정수 부분을 구한다.

풀이 x^{100}이 170자리 정수이면 $\log x^{100}$의 정수 부분은 169이므로

$169\le\log x^{100}<170, \quad 169\le100\log x<170$

$1.69\le\log x<1.7$

$-1.7<-\log x\le-1.69$

$\therefore -2+0.3<\log\frac{1}{x}\le-2+0.31$

따라서 $\log\frac{1}{x}$의 정수 부분이 -2이므로 $\frac{1}{x}$은 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore n=2$

답 2

20 전략 주어진 조건으로부터 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 의미를 알아낸다.

풀이 조건 (다)에서 $10^{f(x)+g(x)}=10x$의 양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=\log 10x\\ &=1+\log x\end{aligned}$$

$\therefore \log x=\{f(x)-1\}+g(x)$

이때 조건 (가), (나)에서 $f(x)$는 정수이고 $0\le g(x)<1$이므로 $f(x)-1$은 $\log x$의 정수 부분이고 $g(x)$는 $\log x$의 소수 부분이다.

(i) 2019는 네 자리 정수이므로 $\log 2019$의 정수 부분은 3이다. 즉

$f(2019)-1=3$

$\therefore f(2019)=4$

$\log\frac{1}{2019}=-\log 2019=-3.\times\times\times$이므로

$\log\frac{1}{2019}$의 정수 부분은 -4이다. 즉

$f\left(\frac{1}{2019}\right)-1=-4$

$\therefore f\left(\frac{1}{2019}\right)=-3$

(ii) 2030과 203은 숫자의 배열이 같으므로 $\log 2030$의 소수 부분과 $\log 203$의 소수 부분이 같다.

$\therefore g(2030)-g(203)=0$

따라서 구하는 값은

$f(2019)+g(2030)-f\left(\frac{1}{2019}\right)-g(203)$

$=4-(-3)=7$

답 7

21 전략 $\log A$의 소수 부분과 $\log B$의 소수 부분의 합이 1이면 $\log A+\log B=$(정수)임을 이용한다.

풀이 $\alpha+\beta=1$이므로

$$\begin{aligned}\log x+\log\sqrt{x}&=\log x+\frac{1}{2}\log x\\ &=\frac{3}{2}\log x=(\text{정수})\end{aligned}$$

$\log x$의 정수 부분이 3이므로

$3\le\log x<4 \quad \therefore \frac{9}{2}\le\frac{3}{2}\log x<6$

$\frac{3}{2}\log x$가 정수이므로

$\frac{3}{2}\log x=5, \quad \log x=\frac{10}{3}$

$\therefore x=10^{\frac{10}{3}}=1000\sqrt[3]{10}$

답 $1000\sqrt[3]{10}$

다른 풀이 $\log x=3+\alpha$이므로

$\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x=\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}$

이때 $0\le\alpha<1$에서 $\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}<1$이므로 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분은 $\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}$이다.

$\therefore \beta=\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}$

$\alpha+\beta=1$이므로 $\alpha+\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=1$

$\frac{3}{2}\alpha=\frac{1}{2} \qquad \therefore \alpha=\frac{1}{3}$

따라서 $\log x=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$이므로

$x=10^{\frac{10}{3}}=1000\sqrt[3]{10}$

22 **전략** 주어진 등식을 $a^x=N$ 꼴로 나타낸다.

풀이 $a=\log_2(2+\sqrt{3})$에서 $2^a=2+\sqrt{3}$

$\therefore 4^a+\frac{4}{2^a}=(2^a)^2+\frac{4}{2^a}=(2+\sqrt{3})^2+\frac{4}{2+\sqrt{3}}$
$=7+4\sqrt{3}+4(2-\sqrt{3})$
$=7+4\sqrt{3}+8-4\sqrt{3}$
$=15$

답 15

23 **전략** 로그의 성질을 이용하여 밑을 통일한다.

풀이 $\log_{\sqrt{3}}a=\log_9 ab$에서 $\log_{3^{\frac{1}{2}}}a=\log_{3^2}ab$

$2\log_3 a=\frac{1}{2}\log_3 ab$

$2\log_3 a=\frac{1}{2}(\log_3 a+\log_3 b)$

$3\log_3 a=\log_3 b, \quad \log_3 a^3=\log_3 b$

$\therefore a^3=b$

$\therefore \log_a b=\log_a a^3=3$

답 ③

24 **전략** 밑의 변환 공식을 이용하여 식을 간단히 정리한 후 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\frac{\log_c b}{\log_a b}=\log_c b\cdot\frac{1}{\log_a b}=\frac{1}{2}$에서

$\frac{\log_a b}{\log_a c}\cdot\frac{1}{\log_a b}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{\log_a c}=\frac{1}{2}$

$\log_a c=2 \qquad \therefore c=a^2$

$\frac{\log_b c}{\log_a c}=\log_b c\cdot\frac{1}{\log_a c}=\frac{1}{3}$에서

$\frac{\log_a c}{\log_a b}\cdot\frac{1}{\log_a c}=\frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{\log_a b}=\frac{1}{3}$

$\log_a b=3 \qquad \therefore b=a^3$

이때 a, b, c는 1보다 크고 10보다 작은 자연수이므로

$a=2$, $b=8$, $c=4$

$\therefore a+2b+3c=30$

답 ④

다른 풀이 $\frac{\log_c b}{\log_a b}=\frac{\log_b a}{\log_b c}=\log_c a=\frac{1}{2}$이므로

$a=c^{\frac{1}{2}} \qquad \therefore c=a^2$

$\frac{\log_b c}{\log_a c}=\frac{\log_c a}{\log_c b}=\log_b a=\frac{1}{3}$이므로

$a=b^{\frac{1}{3}} \qquad \therefore b=a^3$

이때 a, b, c는 1보다 크고 10보다 작은 자연수이므로

$a=2$, $b=8$, $c=4$

$\therefore a+2b+3c=30$

25 **전략** $\log_2 n-\log_2 k=\log_2\frac{n}{k}$이 정수임을 이용한다.

풀이 주어진 집합을 A라 하면

$\log_2 n-\log_2 k=\log_2\frac{n}{k}=$(정수)

이므로 $\frac{n}{k}=2^m$ (m은 정수) 꼴이어야 한다.

(i) $1\le n\le 50$일 때,

$k=n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{n}=1=2^0$이므로

$n\in A$

$k=2n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=2^{-1}$이므로

$2n\in A$

따라서 집합 A의 원소의 개수는 2 이상, 즉 $f(n)\ge 2$이다.

(ii) $50<n\le 100$, n이 짝수일 때,

$k=n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{n}=1=2^0$이므로

$n\in A$

$k=\frac{n}{2}$이면 $\frac{n}{\frac{n}{2}}=\frac{2n}{n}=2$이므로

$\frac{n}{2}\in A$

따라서 집합 A의 원소의 개수는 2 이상, 즉 $f(n)\ge 2$이다.

(iii) $50<n\le 100$, n이 홀수일 때,

$\frac{n}{k}=2^m$에서 $k=\frac{n}{2^m}\in S$를 만족시키는 정수 m은 0뿐이므로 집합 A의 원소의 개수는 1, 즉 $f(n)=1$이다.

이상에서 구하는 자연수 n은 51, 53, 55, ⋯, 99의 25개이다.

답 25

26 전략 A가 매일 r %씩 감소하면 n일 후에는 $A\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$이 된다.

풀이 다이어트 시작일로부터 n일 후에 갑과 을의 체중이 같아진다고 하면

$$75(1-0.003)^n=80(1-0.005)^n$$
$$15\times 0.997^n=16\times 0.995^n$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 15+n\log 0.997=\log 16+n\log 0.995$$
$$n(\log 0.997-\log 0.995)=\log 16-\log 15$$
$$n(-1+\log 9.97+1-\log 9.95)$$
$$=5\log 2-\log 3-1$$
$$n(0.999-0.998)=5\times 0.301-0.477-1$$
$$0.001n=0.028$$
$$\therefore n=28$$

따라서 다이어트 시작일로부터 28일 후에 갑과 을의 체중이 같아진다.

답 ⑤

Ⅱ. 지수함수와 로그함수

03 지수함수

유제 본책 72~91쪽

025-❶ (1) $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{27}$, $\sqrt[5]{81}$을 밑이 3인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$$
$$\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$$
$$\sqrt[5]{81}=\sqrt[5]{3^4}=3^{\frac{4}{5}}$$

이때 $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$이고, 지수함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$$3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{4}{5}}$$
$$\therefore \sqrt[3]{9}<\sqrt[4]{27}<\sqrt[5]{81}$$

(2) $\sqrt{0.2}$, $\sqrt[4]{0.008}$, $\sqrt[5]{0.0016}$을 밑이 0.2인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$\sqrt{0.2}=0.2^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt[4]{0.008}=\sqrt[4]{0.2^3}=0.2^{\frac{3}{4}}$$
$$\sqrt[5]{0.0016}=\sqrt[5]{0.2^4}=0.2^{\frac{4}{5}}$$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$이고, 지수함수 $y=0.2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$$0.2^{\frac{4}{5}}<0.2^{\frac{3}{4}}<0.2^{\frac{1}{2}}$$
$$\therefore \sqrt[5]{0.0016}<\sqrt[4]{0.008}<\sqrt{0.2}$$

답 (1) $\sqrt[3]{9}<\sqrt[4]{27}<\sqrt[5]{81}$
(2) $\sqrt[5]{0.0016}<\sqrt[4]{0.008}<\sqrt{0.2}$

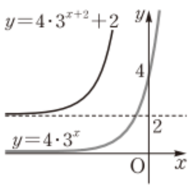
025-❷ $0<x<1$에서 $x^2-2x=x(x-2)<0$이므로

$$x^2<2x$$

그런데 $0<x<1$이므로 $x^{x^2}>x^{2x}$

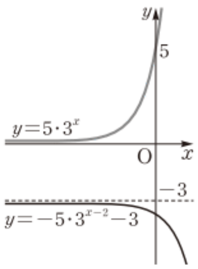
답 $x^{x^2}>x^{2x}$

026-❶ (1) $y=4\cdot 3^{x+2}+2$의 그래프는 $y=4\cdot 3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y\,|\,y>2\}$이고 점근선의 방정식은 $y=2$이다.

(2) $y=-5\cdot3^{x-2}-3$의 그래프는 $y=5\cdot3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y\,|\,y<-3\}$이고 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.

답 풀이 참조

027-❶ $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=3^{x-2}$$

$y=3^{x-2}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=3^{-x-2}$$

답 $y=3^{-x-2}$

027-❷ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-n=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$$

$$\therefore\ y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}+n \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$y=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$에서 $\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-1$

이것이 ㉠과 일치해야 하므로

$$m=3,\ n=-1$$

답 $m=3,\ n=-1$

028-❶ (1) 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+1$에서 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $x-1$이 최대일 때 y는 최소가 되고, $x-1$이 최소일 때 y는 최대가 된다.

따라서 $1\le x\le3$에서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+1$은

$x=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}+1=2$$

$x=3$일 때 최소이고, 최솟값은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}+1=\frac{5}{4}$$

(2) $y=(3^x)^2\cdot4^{-x}$에서 $\quad y=9^x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left(\frac{9}{4}\right)^x$

함수 $y=\left(\frac{9}{4}\right)^x$에서 밑이 $\frac{9}{4}$이고 $\frac{9}{4}>1$이므로 x가 최대일 때 y도 최대가 되고, x가 최소일 때 y도 최소가 된다.

따라서 $-2\le x\le1$에서 함수 $y=(3^x)^2\cdot4^{-x}$은

$x=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$$\left(\frac{9}{4}\right)^1=\frac{9}{4}$$

$x=-2$일 때 최소이고, 최솟값은

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{-2}=\frac{16}{81}$$

답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: $\frac{5}{4}$

(2) 최댓값: $\frac{9}{4}$, 최솟값: $\frac{16}{81}$

028-❷ 함수 $y=2^{x^2-2x+3}$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로 x^2-2x+3이 최대일 때 y도 최대가 되고, x^2-2x+3이 최소일 때 y도 최소가 된다.

이때 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$이므로 $0\le x\le3$에서

$$2\le x^2-2x+3\le6$$

따라서 함수 $y=2^{x^2-2x+3}$은

$x^2-2x+3=6$일 때 최대이고, 최댓값은 $\quad 2^6=64$

$x^2-2x+3=2$일 때 최소이고, 최솟값은 $\quad 2^2=4$

답 최댓값: 64, 최솟값: 4

Remark▶ **정의역이 제한된 범위일 때, 이차함수의 최대·최소**

이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q\ (m\le x\le n)$에서

① $x=p$가 정의역에 포함되는 경우

➡ $f(p)$, $f(m)$, $f(n)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② $x=p$가 정의역에 포함되지 않는 경우

➡ $f(m)$, $f(n)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

029-❶ (1) $y=9^x-3^x+3=(3^x)^2-3^x+3$

$3^x=t$로 놓으면 $0\le x\le1$에서

$$3^0\le3^x\le3^1 \qquad \therefore\ 1\le t\le3$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-t+3=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$$

따라서 $1\le t\le3$에서 함수 $y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$은

$t=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$$3^2-3+3=9$$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$$1^2-1+3=3$$

(2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$

$$=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$로 놓으면 $-1\le x\le 3$에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \qquad \therefore \frac{1}{8}\le t\le 2$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$$

따라서 $\frac{1}{8}\le t\le 2$에서 함수 $y=(t-1)^2+1$은

$t=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$$(2-1)^2+1=2$$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$$(1-1)^2+1=1$$

답 (1) 최댓값: 9, 최솟값: 3 (2) 최댓값: 2, 최솟값: 1

Remark▶ a^x의 값의 범위

① $a>1$이면

$x_1\le x\le x_2 \Longleftrightarrow a^{x_1}\le a^x\le a^{x_2}$

② $0<a<1$이면

$x_1\le x\le x_2 \Longleftrightarrow a^{x_2}\le a^x\le a^{x_1}$

029-② 임의의 실수 x에 대하여

$$2^{1+x}>0,\ 2^{1-x}>0$$

이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^{1+x}+2^{1-x}\ge 2\sqrt{2^{1+x}\cdot 2^{1-x}}=2\sqrt{2^2}=4$$

(단, 등호는 $2^{1+x}=2^{1-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 4이다. 답 4

Remark▶ 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

030-① (1) 주어진 방정식을 변형하면

$$(3^3)^{x-1}=3^2\cdot 3^{2x+1}, \qquad 3^{3x-3}=3^{2x+3}$$

이므로

$$3x-3=2x+3 \qquad \therefore x=6$$

(2) 주어진 방정식을 변형하면

$$5^{x^2-2}=(5^{-1})^{x-4}, \qquad 5^{x^2-2}=5^{-x+4}$$

이므로

$$x^2-2=-x+4, \qquad x^2+x-6=0$$

$$(x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

(3) 주어진 방정식을 변형하면

$$(2^{\frac{1}{2}})^{x^2}=2^2, \qquad 2^{\frac{1}{2}x^2}=2^2$$

이므로

$$\frac{1}{2}x^2=2, \qquad x^2=4$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

(4) 주어진 방정식을 변형하면

$$(2^2)^{x^2}=2^{9x+5}, \qquad 2^{2x^2}=2^{9x+5}$$

이므로

$$2x^2=9x+5, \qquad 2x^2-9x-5=0$$

$$(2x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=5$$

답 (1) $x=6$ (2) $x=-3$ 또는 $x=2$

(3) $x=-2$ 또는 $x=2$ (4) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=5$

031-① (1) 주어진 방정식을 변형하면

$$(3^x)^2-6\cdot 3^x-27=0$$

이때 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$t^2-6t-27=0, \qquad (t+3)(t-9)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=9$$

그런데 $t>0$이므로 $t=9$

따라서 $3^x=9$이므로

$$3^x=3^2 \qquad \therefore x=2$$

(2) 주어진 방정식을 변형하면

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-3=0$$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$t^2+2t-3=0, \qquad (t+3)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=1$$

그런데 $t>0$이므로 $t=1$

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=1$이므로

$$x=0$$

(3) 주어진 방정식을 변형하면

$$3^x-\frac{9}{3^x}=8$$

이때 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t-\frac{9}{t}=8$

양변에 t를 곱하여 정리하면

$$t^2-8t-9=0, \qquad (t+1)(t-9)=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=9$$

그런데 $t>0$이므로 $t=9$

따라서 $3^x=9$이므로

$$3^x=3^2 \qquad \therefore x=2$$

(4) $2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$이므로 주어진 방정식을 변형하면

$$(2+\sqrt{3})^x+\frac{1}{(2+\sqrt{3})^x}=4$$

이때 $(2+\sqrt{3})^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t+\frac{1}{t}=4$

양변에 t를 곱하여 정리하면

$t^2-4t+1=0$

$\therefore t=2\pm\sqrt{3}$

따라서 $(2+\sqrt{3})^x=2+\sqrt{3}$ 또는

$(2+\sqrt{3})^x=2-\sqrt{3}$이므로

$x=1$ 또는 $x=-1$

답 (1) $x=2$ (2) $x=0$
(3) $x=2$ (4) $x=1$ 또는 $x=-1$

031-② $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2$이므로 주어진 방정식을 변형하면

$(2^x+2^{-x})^2+(2^x+2^{-x})-6=0$

이때 $2^x+2^{-x}=t$ $(t\geq2)$로 놓으면

$t^2+t-6=0,\quad (t+3)(t-2)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=2$

그런데 $t\geq2$이므로 $\quad t=2$

따라서 $2^x+2^{-x}=2$이므로 $\quad x=0$

답 $x=0$

Remark ▶

$2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^x+2^{-x}\geq2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

032-① (1) $x^{2x+1}=x^{-x+10}$에서

$2x+1=-x+10,\quad 3x=9$

$\therefore x=3$

또 밑이 1, 즉 $x=1$이면 주어진 방정식은 $1^3=1^9$이므로 등식이 성립한다.

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=1$ 또는 $x=3$

(2) $(x+1)^{x^2}=(x+1)^{2x}$에서

$x^2=2x,\quad x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

또 밑이 1, 즉 $x=0$이면 주어진 방정식은 $1^0=1^0$이므로 등식이 성립한다.

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=0$ 또는 $x=2$

(3) $3^x=(x+2)^x$에서

$3=x+2\quad \therefore x=1$

또 지수가 0, 즉 $x=0$이면 주어진 방정식은 $3^0=2^0$이므로 등식이 성립한다.

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=0$ 또는 $x=1$

(4) $x^{2x-1}=7^{2x-1}$에서

$x=7$

또 지수가 0, 즉 $x=\frac{1}{2}$이면 주어진 방정식은

$\left(\frac{1}{2}\right)^0=7^0$이므로 등식이 성립한다.

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=7$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=3$ (2) $x=0$ 또는 $x=2$
(3) $x=0$ 또는 $x=1$ (4) $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=7$

033-① 주어진 방정식을 변형하면

$(2^x)^2-40\cdot2^x+k=0$

이때 $2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-40t+k=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 ㉠의 두 근은 2^α, 2^β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$k=2^\alpha\cdot2^\beta=2^{\alpha+\beta}=2^3=8$

답 8

033-② 주어진 방정식을 변형하면

$(5^x)^2-2(a-3)5^x+3a+1=0$

이때 $5^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-2(a-3)t+3a+1=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 ㉠은 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-3)^2-(3a+1)>0$

$a^2-9a+8>0,\quad (a-1)(a-8)>0$

$\therefore a<1$ 또는 $a>8 \quad \cdots\cdots ㉡$

(ii) (두 근의 합)$=2(a-3)>0$에서

$a-3>0\quad \therefore a>3 \quad \cdots\cdots ㉢$

(iii) (두 근의 곱)$=3a+1>0$에서

$3a>-1\quad \therefore a>-\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ㉣$

㉡, ㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면

$a>8$

답 $a>8$

034-① (1) 주어진 부등식을 변형하면

$5^{x-2}\leq(5^{-1})^{-2x+1},\quad 5^{x-2}\leq5^{2x-1}$

밑이 5이고 $5>1$이므로

$x-2\leq2x-1\quad \therefore x\geq-1$

(2) 주어진 부등식을 변형하면

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{x+2}>\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-2}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+4}>\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-2}$

밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$$2x+4<5x-2, \qquad -3x<-6$$

$$\therefore x>2$$

(3) 주어진 부등식을 변형하면

$$\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right\}^{-x^2-2x}<\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+2x}<\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}$$

밑이 $\frac{3}{2}$이고 $\frac{3}{2}>1$이므로

$$x^2+2x<x+2, \qquad x^2+x-2<0$$

$$(x+2)(x-1)<0 \qquad \therefore -2<x<1$$

(4) 주어진 부등식을 변형하면

$$0.2^{x^2-1}\ge(0.2^2)^{x+1}, \qquad 0.2^{x^2-1}\ge0.2^{2x+2}$$

밑이 0.2이고 $0<0.2<1$이므로

$$x^2-1\le2x+2, \qquad x^2-2x-3\le0$$

$$(x+1)(x-3)\le0 \qquad \therefore -1\le x\le3$$

답 (1) $x\ge-1$　(2) $x>2$
(3) $-2<x<1$　(4) $-1\le x\le3$

035-❶ (1) 주어진 부등식을 변형하면

$$(2^x)^2+2\cdot2^x-3\ge0$$

이때 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$t^2+2t-3\ge0, \qquad (t+3)(t-1)\ge0$$

$$\therefore t\le-3 \text{ 또는 } t\ge1$$

그런데 $t>0$이므로　$t\ge1$

따라서 $2^x\ge1$이므로　$2^x\ge2^0$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$$x\ge0$$

(2) 주어진 부등식을 변형하면

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}^{2x-1}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-1>0$$

$$3\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-1>0$$

이때 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$3t^2+2t-1>0, \qquad (t+1)(3t-1)>0$$

$$\therefore t<-1 \text{ 또는 } t>\frac{1}{3}$$

그런데 $t>0$이므로　$t>\frac{1}{3}$

따라서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x>\frac{1}{3}$이므로　$\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^1$

밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$$x<1$$

(3) 주어진 부등식을 변형하면

$$\frac{5}{5^x}-5^x+4<0$$

이때 $5^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$\frac{5}{t}-t+4<0$$

양변에 t를 곱하여 정리하면

$$t^2-4t-5>0, \qquad (t+1)(t-5)>0$$

$$\therefore t<-1 \text{ 또는 } t>5$$

그런데 $t>0$이므로　$t>5$

따라서 $5^x>5$이므로　$5^x>5^1$

밑이 5이고 $5>1$이므로

$$x>1$$

(4) 주어진 부등식을 변형하면

$$\left\{\left(\frac{1}{10}\right)^x\right\}^2-10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^x-\left(\frac{1}{10}\right)^x+10\le0$$

$$\left\{\left(\frac{1}{10}\right)^x\right\}^2-11\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^x+10\le0$$

이때 $\left(\frac{1}{10}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$t^2-11t+10\le0, \qquad (t-1)(t-10)\le0$$

$$\therefore 1\le t\le10$$

따라서 $1\le\left(\frac{1}{10}\right)^x\le10$이므로

$$\left(\frac{1}{10}\right)^0\le\left(\frac{1}{10}\right)^x\le\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$$

밑이 $\frac{1}{10}$이고 $0<\frac{1}{10}<1$이므로

$$-1\le x\le0$$

답 (1) $x\ge0$　(2) $x<1$
(3) $x>1$　(4) $-1\le x\le0$

036-❶ (1) (i) $x>1$일 때,

$$3x-2\ge7, \qquad 3x\ge9$$

$$\therefore x\ge3$$

그런데 $x>1$이므로　$x\ge3$

(ii) $0<x<1$일 때,

$$3x-2\le7, \qquad 3x\le9$$

$$\therefore x\le3$$

그런데 $0<x<1$이므로　$0<x<1$

(iii) $x=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로

(좌변)$=$(우변)

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

이상에서 주어진 부등식의 해는

$$0<x\le1 \text{ 또는 } x\ge3$$

(2) (i) $x>1$일 때,

$x^2-6<3x+4$, $\quad x^2-3x-10<0$

$(x+2)(x-5)<0$

$\therefore\ -2<x<5$

그런데 $x>1$이므로 $\quad 1<x<5$

(ii) $0<x<1$일 때,

$x^2-6>3x+4$, $\quad x^2-3x-10>0$

$(x+2)(x-5)>0$

$\therefore\ x<-2$ 또는 $x>5$

그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.

(iii) $x=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로

(좌변)$=$(우변)

따라서 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

이상에서 주어진 부등식의 해는

$1<x<5$

답 (1) $0<x\le 1$ 또는 $x\ge 3$ (2) $1<x<5$

037-① 최초 구매 가격이 1024만 원인 기계를 구매한 후 x년이 지났을 때의 가격은

$$1024\times(1-0.25)^x=1024\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x\text{(만 원)}$$

이 기계의 가격이 243만 원 이하이려면

$$1024\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x\le 243,\quad \left(\frac{3}{4}\right)^x\le\left(\frac{3}{4}\right)^5$$

밑이 $\frac{3}{4}$이고 $0<\frac{3}{4}<1$이므로 $\quad x\ge 5$

따라서 이 기계를 구매한 지 최소 5년이 되었다.

답 5년

중단원 연습 문제

본책 92~95쪽

01 (1) $\sqrt{2}<\sqrt[7]{32}<\sqrt[3]{16}$
(2) $\sqrt[3]{0.25}<\sqrt[5]{0.125}<\sqrt{0.5}$

02 0	**03** ④	**04** -5	**05** -3	**06** ①
07 ①	**08** $x=-4$ 또는 $x=1$			**09** ⑤
10 -2	**11** 8	**12** 90년	**13** -5	**14** 12
15 34	**16** $4\sqrt{2}$	**17** ②	**18** $-5<x<2$	
19 ⑤	**20** 71	**21** ④	**22** 15	

01 전략 (1)은 밑이 2인 거듭제곱 꼴로, (2)는 밑이 0.5인 거듭제곱 꼴로 나타낸 후 지수함수의 성질을 이용한다.

풀이 (1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[7]{32}$를 밑이 2인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}},\ \sqrt[7]{32}=\sqrt[7]{2^5}=2^{\frac{5}{7}}$$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{5}{7}<\frac{4}{3}$이고, 지수함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{5}{7}}<2^{\frac{4}{3}}$$

$$\therefore\ \sqrt{2}<\sqrt[7]{32}<\sqrt[3]{16}$$

(2) $\sqrt{0.5}$, $\sqrt[3]{0.25}$, $\sqrt[5]{0.125}$를 밑이 0.5인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$\sqrt{0.5}=0.5^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{0.25}=\sqrt[3]{0.5^2}=0.5^{\frac{2}{3}},$$

$$\sqrt[5]{0.125}=\sqrt[5]{0.5^3}=0.5^{\frac{3}{5}}$$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$이고, 지수함수 $y=0.5^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$$0.5^{\frac{2}{3}}<0.5^{\frac{3}{5}}<0.5^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ \sqrt[3]{0.25}<\sqrt[5]{0.125}<\sqrt{0.5}$$

답 (1) $\sqrt{2}<\sqrt[7]{32}<\sqrt[3]{16}$ (2) $\sqrt[3]{0.25}<\sqrt[5]{0.125}<\sqrt{0.5}$

02 전략 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=f(-x)$이고, 이 그래프를 다시 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-b=f(-x+a)$임을 이용한다.

풀이 $y=-3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-3^{-x}$ ⋯ ❶

$y=-3^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-(-3)=-3^{-(x-1)}$

$\therefore\ y=-3^{-x+1}-3$ ⋯ ❷

따라서 $y=-3^{-x+1}-3$, 즉 $y=-3\cdot3^{-x}-3$이 $y=a\cdot3^{-x}+b$와 일치해야 하므로

$a=-3$, $b=-3$

$\therefore\ a-b=0$ ⋯ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ $y=-3^x$의 그래프를 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30 %
❷ ❶에서 구한 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	40 %

03 전략 $y=2^x$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구한 후 점근선의 방정식과 y절편을 구한다.

풀이 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-b=2^{x-a}$ $\quad \therefore y=2^{x-a}+b$

$y=2^{x-a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=b$, y절편이 $2^{-a}+b$이므로

$b=4$, $2^{-a}+b=8$

$b=4$를 $2^{-a}+b=8$에 대입하면

$2^{-a}+4=8$, $\quad 2^{-a}=4$

$\therefore a=-2$

$\therefore a^2+b^2=4+16=20$

답 ④

04 전략 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 지수가 최대일 때 $f(x)$가 최솟값을 가짐을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x+a}$의 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $-x^2+4x+a$가 최대일 때 $f(x)$는 최소가 된다.

이때 $-x^2+4x+a=-(x-2)^2+a+4$이므로

$-x^2+4x+a$는 $x=2$일 때 최댓값 $a+4$를 갖는다.

따라서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x+a}$은 $x=2$일 때 최소이고, 최솟값은 $\quad f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{a+4}$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+4}=2$이므로 $\quad a+4=-1$

$\therefore a=-5$

답 -5

05 전략 주어진 함수식의 밑을 $\frac{1}{3}$로 통일한 후 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$로 바꾼 식에서 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $y=9^{-x}-2\cdot 3^{-x}$

$=\left(\frac{1}{9}\right)^x-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ⋯ ❶

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$로 놓으면 $-1\le x\le 1$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^1\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$\therefore \frac{1}{3}\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t=(t-1)^2-1$

따라서 $\frac{1}{3}\le t\le 3$에서 함수 $y=(t-1)^2-1$은

$t=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$(3-1)^2-1=3$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$(1-1)^2-1=-1$ ⋯ ❷

따라서 $M=3$, $m=-1$이므로

$\frac{M}{m}=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수식의 밑을 $\frac{1}{3}$로 통일할 수 있다.	20 %
❷ $y=9^{-x}-2\cdot 3^{-x}$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $\frac{M}{m}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

06 전략 지수법칙을 이용하여 좌변과 우변의 식이 서로 같은지 확인한다.

풀이 ㄱ. $f(x+y)=3^{x+y}=3^x\cdot 3^y=f(x)f(y)$

ㄴ. $f(2x)=3^{2x}=9^x$, $2f(x)=2\cdot 3^x$

$\therefore f(2x)\ne 2f(x)$

ㄷ. $f(x^2)=3^{x^2}$, $\{f(x)\}^2=(3^x)^2=3^{2x}$

$\therefore f(x^2)\ne\{f(x)\}^2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

07 전략 지수법칙을 이용하여 밑을 5로 같게 한 후 지수에 대한 방정식을 세운다.

풀이 주어진 방정식을 변형하면

$5^{x^2-x}=5^{-3(x-1)}$, $\quad 5^{x^2-x}=5^{-3x+3}$

이므로

$x^2-x=-3x+3$, $\quad x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 주어진 방정식의 두 근은 -3, 1이므로

$\alpha^2+\beta^2=9+1=10$

답 ①

08 전략 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1일 때 등식이 성립한다.

풀이 $(x+5)^{x^2+2x}=(x+5)^{-x+4}$에서

$x^2+2x=-x+4$, $\quad x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

또 밑이 1, 즉 $x=-4$이면 주어진 방정식은 $1^8=1^8$이므로 등식이 성립한다.

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=-4$ 또는 $x=1$

답 $x=-4$ 또는 $x=1$

09 전략 지수법칙을 이용하여 밑을 $\frac{1}{5}$로 같게 한 후 지수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 주어진 부등식을 변형하면

$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1} \le \left(\frac{1}{5}\right)^3$

밑이 $\frac{1}{5}$이고 $0<\frac{1}{5}<1$이므로 $\quad 2x-1\ge 3$

$2x\ge 4 \qquad \therefore x\ge 2$

따라서 주어진 부등식의 해의 집합은

$\{x\,|\,x\ge 2\}$

답 ⑤

10 전략 (밑)>1, $0<$(밑)<1, (밑)$=1$의 세 가지 경우로 나누어 주어진 부등식을 푼다.

풀이 (i) $x>1$일 때,

$-x+1>3x-11, \qquad -4x>-12$

$\therefore x<3$

그런데 $x>1$이므로 $\quad 1<x<3$

(ii) $0<x<1$일 때,

$-x+1<3x-11, \qquad -4x<-12$

$\therefore x>3$

그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.

(iii) $x=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로

(좌변)$=$(우변)

따라서 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\quad 1<x<3$

따라서 $m=1$, $n=3$이므로

$m-n=-2$

답 -2

11 전략 $a>1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)}$이면 $f(x)<g(x)$임을 이용한다.

풀이 집합 A의 부등식을 변형하면

$2^{x^2}\cdot 2^5\le 2^{-2x+8}, \qquad 2^{x^2+5}\le 2^{-2x+8}$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$x^2+5\le -2x+8, \qquad x^2+2x-3\le 0$

$(x+3)(x-1)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 1$

$\therefore A=\{-3, -2, -1, 0, 1\}$ ⋯ ❶

집합 B의 부등식을 변형하면

$2^{2x}-2^x<0, \qquad 2^{2x}<2^x$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$2x<x \qquad \therefore x<0$

$\therefore B=\{-1, -2, -3, \cdots\}$ ⋯ ❷

따라서 $A\cap B=\{-3, -2, -1\}$이므로 $A\cap B$의 부분집합의 개수는

$2^3=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $A\cap B$의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	20 %

Remark▶ 부분집합의 개수

원소의 개수가 n인 집합 A의 부분집합의 개수 ➡ 2^n

12 전략 $30x$년 후의 방사성 물질의 양은 최초의 양의 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 되므로 x년 후의 방사성 물질의 양은 최초의 양의 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{30}}$이 됨을 이용하여 부등식을 세운다.

풀이 30년마다 방사성 물질의 양이 반으로 줄어들므로 최초의 방사성 물질의 양을 a라 하면 x년 후의 방사성 물질의 양은 $a\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{30}}$이 된다.

x년 후의 방사성 물질의 양이 최초의 양의 $\frac{1}{8}$ 이하가 된다고 하면

$a\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{30}}\le \frac{1}{8}a, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{30}}\le\left(\frac{1}{2}\right)^3$

밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

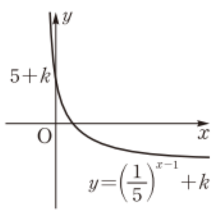
$\frac{x}{30}\ge 3 \qquad \therefore x\ge 90$

따라서 방사성 물질의 양이 처음으로 최초의 양의 $\frac{1}{8}$ 이하가 되는 것은 90년 후이다.

답 90년

13 전략 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+k$의 그래프를 그린 후 제1사분면을 지나지 않을 조건을 생각한다.

풀이 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면



$5+k\le 0$

$\therefore k\le -5$

따라서 상수 k의 최댓값은 -5이다.

답 -5

14 전략 평행이동을 이용하여 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 구한다.

풀이 곡선 $y=2^{x-1}$은 곡선 $y=2^{x+3}$을 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이고 사각형 ABCD에서 $\overline{AB}$가 x축에 평행하므로

$\overline{AB}=4$ ⋯ ❶

사각형 ABCD가 정사각형이므로

$n=\overline{AD}=4$ ⋯ ❷

점 A$(m, 4)$는 곡선 $y=2^{x-1}$ 위의 점이므로

$4=2^{m-1}$, $\quad 2^{m-1}=2^2$

$m-1=2 \quad \therefore m=3$ ⋯ ❸

$\therefore mn=12$ ⋯ ❹

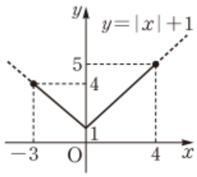
답 12

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ mn의 값을 구할 수 있다.	10 %

15 전략 밑이 2이고 2>1이므로 주어진 함수는 지수가 최대일 때 최대, 지수가 최소일 때 최소가 됨을 이용한다.

풀이 함수 $y=2^{|x|+1}$의 밑이 2이고 $2>1$이므로 $|x|+1$이 최대일 때 y도 최대가 되고, $|x|+1$이 최소일 때 y도 최소가 된다.

함수 $y=|x|+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$-3\le x\le 4$에서

$1\le |x|+1\le 5$

따라서 함수 $y=2^{|x|+1}$은

$|x|+1=5$일 때 최대이고, 최댓값은

$2^5=32$

$|x|+1=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$2^1=2$

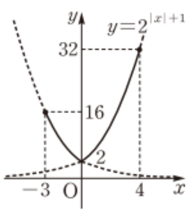
따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$32+2=34$

답 34

다른 풀이 $y=2^{|x|+1}=\begin{cases} 2^{x+1} & (0\le x\le 4) \\ 2^{-x+1} & (-3\le x<0) \end{cases}$이므로

$y=2^{|x|+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$-3\le x\le 4$에서 함수 $y=2^{|x|+1}$은 $x=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$2^{|4|+1}=32$

$x=0$일 때 최소이고, 최솟값은

$2^{|0|+1}=2$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$32+2=34$

16 전략 $2^x=t$ $(t>0)$로 놓고 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낸 후 이 방정식이 양수인 중근을 가짐을 이용한다.

풀이 주어진 방정식을 변형하면

$(2^x)^2-a\cdot 2^x+8=0$

이때 $2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-at+8=0$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지면 ㉠은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다.

㉠이 양의 실근 1개와 음의 실근 1개를 갖는다고 하면

(두 근의 곱)<0

그런데 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 곱)$=8$

이므로 ㉠은 양수인 중근을 갖는다. ⋯ ❷

㉠의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-32=0 \quad \therefore a=\pm 4\sqrt{2}$

따라서 방정식 ㉠은

$t^2\mp 4\sqrt{2}t+8=0$, $\quad (t\mp 2\sqrt{2})^2=0$

$\therefore t=\pm 2\sqrt{2}$ (복호동순)

이때 ㉠의 근이 양수이어야 하므로

$a=4\sqrt{2}$ ⋯ ❸

답 $4\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $2^x=t$ $(t>0)$로 놓고 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 주어진 조건을 만족하려면 ❶의 이차방정식이 양수인 중근을 가져야 함을 알 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

17 전략 $k=3\times 10^7$, $t=6$일 때 $ka^t=1.5\times 10^8$임을 이용하여 먼저 a의 값을 구한다.

풀이 처음에 3×10^7마리인 박테리아가 6시간 후에 1.5×10^8마리가 되므로

$3\times 10^7\times a^6=1.5\times 10^8$, $\quad a^6=5$

$\therefore a=5^{\frac{1}{6}}$

처음에 3×10^7마리인 박테리아가 t시간 후에 7.5×10^8마리가 된다고 하면

$3\times 10^7\times a^t=7.5\times 10^8$

$\therefore a^t=25$

이때 $a=5^{\frac{1}{6}}$이므로

$5^{\frac{t}{6}}=25,\quad 5^{\frac{t}{6}}=5^2$

$\frac{t}{6}=2\quad \therefore t=12$

즉 12시간 후에 7.5×10^8마리가 된다. 답 ②

18 전략 부등식을 정리한 후 주어진 그래프를 이용하여 해를 구한다.

풀이 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$f(x)>g(x)$

부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 구하는 해는

$-5<x<2$ 답 $-5<x<2$

19 전략 $P(a,\ 4^a)$이라 하고 선분 OP를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표를 구한 후 이 점이 $g(x)=2^x$의 그래프 위의 점임을 이용한다.

풀이 점 P가 $f(x)=4^x$의 그래프 위의 점이므로 $P(a,\ 4^a)$이라 하자.

선분 OP를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot a+3\cdot 0}{1+3},\ \frac{1\cdot 4^a+3\cdot 0}{1+3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{4},\ 4^{a-1}\right)$

점 $\left(\frac{a}{4},\ 4^{a-1}\right)$이 $g(x)=2^x$의 그래프 위의 점이므로

$4^{a-1}=2^{\frac{a}{4}},\quad 2^{2(a-1)}=2^{\frac{a}{4}},\quad 2^{2a-2}=2^{\frac{a}{4}}$

$2a-2=\frac{a}{4},\quad \frac{7}{4}a=2$

$\therefore a=\frac{8}{7}$ 답 ⑤

Remark▶ 좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 잇는 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 하면

$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$,

$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m\neq n$)

20 전략 점 A가 두 곡선 $y=2^x-1$과 $y=2^{-x}+\frac{a}{9}$ 위의 점임을 이용한다.

풀이 $A(m,\ n)$이라 하면 삼각형 AOB의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot n=16\quad \therefore n=8$

점 $A(m,\ 8)$이 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점이므로

$8=2^m-1\quad \therefore 2^m=9$

또 점 $A(m,\ 8)$이 곡선 $y=2^{-x}+\frac{a}{9}$ 위의 점이므로

$8=2^{-m}+\frac{a}{9}$

이때 $2^m=9$이므로 $\quad 8=\frac{1}{9}+\frac{a}{9}$

$a+1=72\quad \therefore a=71$ 답 71

21 전략 지수법칙을 이용하여 밑을 2로 같게 한 후 $2^{f(x)}=t\ (t>0)$로 놓고 t에 대한 부등식을 세운다.

풀이 $4^{f(x)}-2^{1+f(x)}<8$에서

$2^{2f(x)}-2\cdot2^{f(x)}-8<0$

이때 $2^{f(x)}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-8<0,\quad (t+2)(t-4)<0$

$\therefore -2<t<4$

그런데 $t>0$이므로 $\quad 0<t<4$

따라서 $0<2^{f(x)}<4$이므로 $\quad 0<2^{f(x)}<2^2$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$f(x)<2,\quad x^2-x-4<2$

$x^2-x-6<0,\quad (x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$

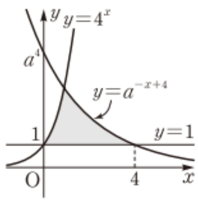
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$의 4개이다. 답 ④

22 전략 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역을 좌표평면 위에 나타내어 본다.

풀이 곡선 $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는

$a^{-x+4}=1$에서 $\quad -x+4=0\quad \therefore x=4$

두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분(경계선 포함)과 같고, 어두운 부분에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 x좌표가 0, 1, 2, 3, 4인 각 경우에 y좌표가 정수인 점의 개수를 모두 합한 것이다.



$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$일 때, $y=4^x$에서 y의 값은 각각 $1,\ 4,\ 4^2,\ 4^3,\ 4^4$이고 $y=a^{-x+4}$에서 y의 값은 각각 $a^4,\ a^3,\ a^2,\ a,\ 1$이다.

따라서 구하는 점의 개수는 1과 a^4, 4와 a^3, 4^2과 a^2, 4^3과 a, 4^4과 1에서 각각 작은 값을 모두 더한 것과 같다.

(i) $a=2$일 때,

$1<2^4,\ 4<2^3,\ 4^2>2^2,\ 4^3>2,\ 4^4>1$이므로

$1+4+4+2+1=12<20$

(ii) $a=3$일 때,

$1<3^4,\ 4<3^3,\ 4^2>3^2,\ 4^3>3,\ 4^4>1$이므로

$1+4+9+3+1=18<20$

(iii) $4\le a\le 63$일 때,

$1<a^4,\ 4<a^3,\ 4^2\le a^2,\ 4^3>a,\ 4^4>1$이므로

$1+4+16+a+1=22+a$

$20\le 22+a\le 40$에서 $\quad -2\le a\le 18$

그런데 $4\le a\le 63$이므로

$4\le a\le 18$

(iv) $a\ge 64$일 때,

$1<a^4,\ 4<a^3,\ 4^2<a^2,\ 4^3\le a,\ 4^4>1$이므로

$1+4+16+64+1=86>40$

이상에서 $4\le a\le 18$이므로 자연수 a는

$4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ 18$

의 15개이다. 답 15

04 로그함수

유제

본책 99~124쪽

038-① (1) $y=10^{\frac{x}{2}-1}$에서 로그의 정의에 의하여

$\frac{x}{2}-1=\log y,\qquad \frac{x}{2}=\log y+1$

$\therefore\ x=2\log y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=2\log x+2$

(2) $y=\log_3 2x$에서 로그의 정의에 의하여

$2x=3^y\qquad \therefore\ x=\frac{3^y}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{3^x}{2}$

답 (1) $y=2\log x+2$ (2) $y=\frac{3^x}{2}$

Remark▶

(1) 주어진 함수는 정의역 $\{x\,|\,x$는 실수$\}$에서 치역 $\{y\,|\,y>0\}$으로의 일대일대응이다.

(2) 주어진 함수는 정의역 $\{x\,|\,x>0\}$에서 치역 $\{y\,|\,y$는 실수$\}$로의 일대일대응이다.

038-② $y=\frac{1}{2}(3^x-3^{-x})$에서

$2y=3^x-3^{-x}$

위의 식의 양변에 3^x을 곱하면

$2y\cdot 3^x=(3^x)^2-1$

$\therefore\ (3^x)^2-2y\cdot 3^x-1=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\qquad t^2-2yt-1=0$

$\therefore\ t=y\pm\sqrt{y^2+1}$

그런데 $t>0$이므로

$t=y+\sqrt{y^2+1}$, 즉 $3^x=y+\sqrt{y^2+1}$

로그의 정의에 의하여

$x=\log_3(y+\sqrt{y^2+1})$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\log_3(x+\sqrt{x^2+1})$

답 $y=\log_3(x+\sqrt{x^2+1})$

Remark▶

주어진 함수는 정의역 $\{x\,|\,x$는 실수$\}$에서 치역 $\{y\,|\,y$는 실수$\}$로의 일대일대응이다.

039-❶ (1) $-2\log_{\frac{1}{3}}2$와 $-\log_9\frac{1}{27}$을 밑이 3인 로그로 나타내면

$$-2\log_{\frac{1}{3}}2=2\log_3 2=\log_3 2^2=\log_3 4$$

$$-\log_9\frac{1}{27}=-\log_{3^2}\frac{1}{27}=-\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{27}$$

$$=\log_3\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}=\log_3\sqrt{27}$$

이때 $\sqrt{10}<4<\sqrt{27}$이고, 로그함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$$\log_3\sqrt{10}<\log_3 4<\log_3\sqrt{27}$$

$$\therefore \log_3\sqrt{10}<-2\log_{\frac{1}{3}}2<-\log_9\frac{1}{27}$$

(2) $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}$과 -1을 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그로 나타내면

$$\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}=\log_{(\frac{1}{2})^2}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$$

$$=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$-1=-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{2}}2$$

이때 $\frac{1}{4}<\sqrt{\frac{1}{2}}<2$이고, 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$$\log_{\frac{1}{2}}2<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ -1<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$$

답 (1) $\log_3\sqrt{10}<-2\log_{\frac{1}{3}}2<-\log_9\frac{1}{27}$

(2) $-1<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

다른 풀이 (2) $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}=\log_{(\frac{1}{2})^2}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2=2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=2$$

$$\therefore\ -1<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$$

039-❷ $0<a<b<1$이므로

$\log_a a>\log_a b>\log_a 1$, 즉 $1>\log_a b>0$

$\log_b a>\log_b b$, 즉 $\log_b a>1$

$\therefore\ 0<\log_a b<\log_b a$ …… ㉠

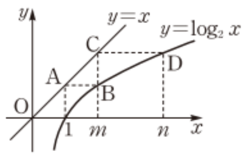
$\log_b\frac{b}{a}=\log_b b-\log_b a=1-\log_b a$에서 $\log_b a>1$이므로 $1-\log_b a<0$

$\therefore\ \log_b\frac{b}{a}<0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\log_b\frac{b}{a}<\log_a b<\log_b a$

답 $\log_b\frac{b}{a}<\log_a b<\log_b a$

040-❶ 오른쪽 그림에서 A(1, 1)이므로



B(m, 1)

점 B는 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점이므로

$1=\log_2 m$ $\quad\therefore m=2$

따라서 C(2, 2)이므로

D(n, 2)

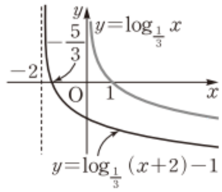
점 D는 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점이므로

$2=\log_2 n$ $\quad\therefore n=4$

$\therefore mn=8$

답 8

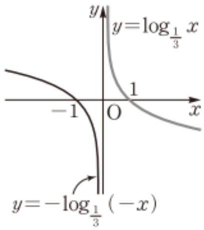
041-❶ (1) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)-1$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은

$\{x\mid x>-2\}$이고 점근선의 방정식은 $x=-2$이다.

(2) $y=-\log_{\frac{1}{3}}(-x)$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은

$\{x\mid x<0\}$이고 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

답 풀이 참조

042-❶ $y=\log_5 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_5 x$

$\therefore y=-\log_5 x$

$y=-\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+3=-\log_5(x-2)$

$\therefore y=-\log_5(x-2)-3$

답 $y=-\log_5(x-2)-3$

042-❷ $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=\log_3(x-m)$

$\therefore y=\log_3(x-m)+n$

이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_3(x-m)+n$

$\therefore y=-\log_3(x-m)-n$

$=\log_{\frac{1}{3}}(x-m)-n$ …… ㉠

$y=\log_{\frac{1}{3}}(3x-18)-1$에서

$y=\log_{\frac{1}{3}}3(x-6)-1$

$=\log_{\frac{1}{3}}3+\log_{\frac{1}{3}}(x-6)-1$

$=\log_{\frac{1}{3}}(x-6)-2$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$m=6,\ n=2$

$\therefore m+n=8$

답 8

043-❶ (1) 함수 $y=\log_5(x^2-6x+13)$에서 밑이 5이고 $5>1$이므로 $x^2-6x+13$이 최대일 때 y도 최대가 되고, $x^2-6x+13$이 최소일 때 y도 최소가 된다.

이때 $x^2-6x+13=(x-3)^2+4$이므로 $3\le x\le 7$에서 $4\le x^2-6x+13\le 20$

따라서 함수 $y=\log_5(x^2-6x+13)$은

$x^2-6x+13=20$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_5 20$

$x^2-6x+13=4$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_5 4$

(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(|x-1|+2)$에서 밑이 $\frac{1}{2}$이고

$0<\frac{1}{2}<1$이므로 $|x-1|+2$가 최대일 때 y는 최소가 되고, $|x-1|+2$가 최소일 때 y는 최대가 된다.

$0\le x\le 3$에서 $2\le|x-1|+2\le 4$

따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(|x-1|+2)$는

$|x-1|+2=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{2}}2=\log_{2^{-1}}2=-1$

$|x-1|+2=4$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{2}}4=\log_{2^{-1}}2^2=-2$

답 (1) 최댓값: $\log_5 20$, 최솟값: $\log_5 4$

(2) 최댓값: -1, 최솟값: -2

043-❷ $y=\log_3(x^2-4x+31)$에서 밑이 3이고 $3>1$이므로 $x^2-4x+31$이 최소일 때 y도 최소가 된다.

이때 $x^2-4x+31=(x-2)^2+27$이므로 함수 $y=\log_3(x^2-4x+31)$은 $x=2$일 때 최소이고, 최솟값은 $\log_3 27=\log_3 3^3=3$

답 3

044-❶ (1) $\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면 $\frac{1}{27}\le x\le 3$에서

$\log_{\frac{1}{3}}3\le\log_{\frac{1}{3}}x\le\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$

$\therefore -1\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

따라서 $-1\le t\le 3$에서 함수 $y=(t-2)^2-3$은

$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$(-1-2)^2-3=6$

$t=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$(2-2)^2-3=-3$

(2) $y=\log_3 x\cdot\log_{\frac{1}{3}}x+2\log_3 x+10$

$=\log_3 x\cdot(-\log_3 x)+2\log_3 x+10$

$=-(\log_3 x)^2+2\log_3 x+10$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 81$에서

$\log_3 1\le\log_3 x\le\log_3 81$

$\therefore 0\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+2t+10=-(t-1)^2+11$

따라서 $0\le t\le 4$에서 함수 $y=-(t-1)^2+11$은

$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$-(1-1)^2+11=11$

$t=4$일 때 최소이고, 최솟값은

$-(4-1)^2+11=2$

답 (1) 최댓값: 6, 최솟값: -3

(2) 최댓값: 11, 최솟값: 2

045-❶ (1) 진수의 조건에서 $x+3>0$이므로

$x>-3$ …… ㉠

주어진 방정식을 변형하면

$\log_5(x+3)=\log_{5^2}2^2$

$\log_5(x+3)=\log_5 2$

따라서 $x+3=2$이므로

$x=-1$

$x=-1$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(2) 밑의 조건에서 $x+1>0$, $x+1\ne 1$이므로

$x>-1$, $x\ne 0$

$\therefore -1<x<0$ 또는 $x>0$ …… ㉠

$\log_{x+1}4=2$에서 $4=(x+1)^2$

따라서 $x+1=\pm 2$이므로

$x=-3$ 또는 $x=1$

㉠에 의하여 구하는 해는

$x=1$

(3) 진수의 조건에서 $x+1>0$, $19x-11>0$이므로

$x>-1$, $x>\frac{11}{19}$

$\therefore x>\frac{11}{19}$ …… ㉠

주어진 방정식을 변형하면

$\log_2(x+1)=\log_{2^3}(19x-11)$

$\log_2(x+1)=\frac{1}{3}\log_2(19x-11)$

$3\log_2(x+1)=\log_2(19x-11)$

$\log_2(x+1)^3=\log_2(19x-11)$

따라서 $(x+1)^3=19x-11$이므로

$x^3+3x^2-16x+12=0$

$(x+6)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

㉠에 의하여 구하는 해는

$x=1$ 또는 $x=2$

(4) 진수의 조건에서 $x>0$, $x-2>0$, $2x+3>0$이므로 $x>0$, $x>2$, $x>-\frac{3}{2}$

$\therefore x>2$ …… ㉠

주어진 방정식을 변형하면

$2\log_3 x=\log_3(x-2)+\log_3(2x+3)$

$\log_3 x^2=\log_3(x-2)(2x+3)$

따라서 $x^2=(x-2)(2x+3)$이므로

$x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

㉠에 의하여 구하는 해는

$x=3$

답 (1) $x=-1$ (2) $x=1$ (3) $x=1$ 또는 $x=2$ (4) $x=3$

046-❶ (1) $\log x=t$로 놓으면

$t^2-4t=0$, $t(t-4)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=4$

따라서 $\log x=0$ 또는 $\log x=4$이므로

$x=1$ 또는 $x=10000$

(2) 주어진 방정식을 변형하면

$\frac{1}{3}\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}=\frac{4}{3}$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\frac{t}{3}+\frac{1}{t}=\frac{4}{3}$

양변에 $3t$를 곱하여 정리하면

$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 $\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=2$ 또는 $x=8$

(3) 주어진 방정식을 변형하면

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x-4=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

따라서 $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=4$이므로

$x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=81$

(4) 주어진 방정식을 변형하면

$(\log_2 4+\log_2 x)(\log_2 2+\log_2 x)=6$

$(2+\log_2 x)(1+\log_2 x)=6$

$(\log_2 x)^2+3\log_2 x-4=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+3t-4=0$, $(t+4)(t-1)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

따라서 $\log_2 x=-4$ 또는 $\log_2 x=1$이므로

$x=\frac{1}{16}$ 또는 $x=2$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=10000$ (2) $x=2$ 또는 $x=8$ (3) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=81$ (4) $x=\frac{1}{16}$ 또는 $x=2$

047-❶ (1) $x^{\log_3 x}=\frac{81}{x^3}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3\frac{81}{x^3}$

$\log_3 x\cdot\log_3 x=\log_3 81-\log_3 x^3$

$\therefore (\log_3 x)^2+3\log_3 x-4=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2+3t-4=0$, $(t+4)(t-1)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

따라서 $\log_3 x=-4$ 또는 $\log_3 x=1$이므로

$x=\frac{1}{81}$ 또는 $x=3$

(2) $x^{\log 5}=5^{\log x}$이므로 주어진 방정식은

$(5^{\log x})^2-6\cdot 5^{\log x}+5=0$

$5^{\log x}=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+5=0$, $(t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

따라서 $5^{\log x}=1$ 또는 $5^{\log x}=5$이므로

$\log x=0$ 또는 $\log x=1$

$\therefore x=1$ 또는 $x=10$

답 (1) $x=\frac{1}{81}$ 또는 $x=3$ (2) $x=1$ 또는 $x=10$

047-❷ $5^{3-x}=2^x$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 5^{3-x}=\log 2^x$, $\quad (3-x)\log 5=x\log 2$

$3\log 5-x\log 5=x\log 2$

$x(\log 2+\log 5)=3\log 5$

$x\log 10=3\log 5$

$\therefore x=3\log 5=\log 5^3=\log 125$

$\therefore k=125$

답 125

048-❶ $(\log_3 x)^2-4\log_3 x+2=0$에서 $\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-4t+2=0$ …… ㉠

이때 주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 ㉠의 두 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=4$, $\log_3\alpha\cdot\log_3\beta=2$

$$\therefore \log_\alpha 3+\log_\beta 3=\frac{1}{\log_3\alpha}+\frac{1}{\log_3\beta}=\frac{\log_3\alpha+\log_3\beta}{\log_3\alpha\cdot\log_3\beta}=\frac{4}{2}=2$$

답 2

048-❷ 주어진 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\log a+2)^2-(\log a+8)=0$

$(\log a)^2+3\log a-4=0$

$\log a=t$로 놓으면

$t^2+3t-4=0$, $\quad (t+4)(t-1)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

즉 $\log a=-4$ 또는 $\log a=1$이므로

$a=\frac{1}{10000}$ 또는 $a=10$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$\frac{1}{10000}\cdot 10=\frac{1}{1000}$

답 $\frac{1}{1000}$

049-❶ (1) 진수의 조건에서 $x-2>0$, $x+10>0$이므로 $\quad x>2$, $x>-10$

$\therefore x>2$ …… ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$\log(x-2)^2\le\log(x+10)$

밑이 10이고 $10>1$이므로

$(x-2)^2\le x+10$, $\quad x^2-5x-6\le 0$

$(x+1)(x-6)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$2<x\le 6$

(2) 진수의 조건에서 $x-4>0$, $x-2>0$이므로

$x>4$, $x>2$

$\therefore x>4$ …… ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$\log_{0.5}(x-4)^2>\log_{0.5}(x-2)$

밑이 0.5이고 $0<0.5<1$이므로

$(x-4)^2<x-2$, $\quad x^2-9x+18<0$

$(x-3)(x-6)<0$

$\therefore 3<x<6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$4<x<6$

답 (1) $2<x\le 6$ (2) $4<x<6$

049-❷ 진수의 조건에서

$4x-3>0$ $\quad\therefore x>\frac{3}{4}$ …… ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$\log_x(4x-3)>\log_x x^2$

(i) $x>1$일 때,

밑이 x이고 $x>1$이므로

$4x-3>x^2$, $\quad x^2-4x+3<0$

$(x-1)(x-3)<0$

$\therefore 1<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<3$

(ii) $0<x<1$일 때,

밑이 x이고 $0<x<1$이므로

$4x-3<x^2$, $\quad x^2-4x+3>0$

$(x-1)(x-3)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>3$

그런데 $0<x<1$이므로

$0<x<1$ …… ㉢

㉠, ㉢의 공통 범위를 구하면

$\frac{3}{4}<x<1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$\frac{3}{4}<x<1$ 또는 $1<x<3$

답 $\frac{3}{4}<x<1$ 또는 $1<x<3$

050-❶ (1) 진수의 조건에서

$x>0$, $x^3>0$

$\therefore x>0$ …… ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$(\log x)^2-3\log x<0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-3t<0,\quad t(t-3)<0$

$\therefore\ 0<t<3$

따라서 $0<\log x<3$이므로

$\log 10^0<\log x<\log 10^3$

밑이 10이고 $10>1$이므로

$1<x<1000$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<1000$

(2) 진수의 조건에서

$4x>0,\ 8x>0$

$\therefore\ x>0$ $\cdots\cdots$ ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$(\log_{\frac{1}{2}}4+\log_{\frac{1}{2}}x)(\log_{\frac{1}{2}}8+\log_{\frac{1}{2}}x)\le 2$

$(-2+\log_{\frac{1}{2}}x)(-3+\log_{\frac{1}{2}}x)\le 2$

$(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-5\log_{\frac{1}{2}}x+6\le 2$

$\therefore\ (\log_{\frac{1}{2}}x)^2-5\log_{\frac{1}{2}}x+4\le 0$

$\log_{\frac{1}{2}}x=t$로 놓으면

$t^2-5t+4\le 0,\quad (t-1)(t-4)\le 0$

$\therefore\ 1\le t\le 4$

따라서 $1\le\log_{\frac{1}{2}}x\le 4$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\le\log_{\frac{1}{2}}x\le\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$\frac{1}{16}\le x\le\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{16}\le x\le\frac{1}{2}$

답 (1) $1<x<1000$ (2) $\frac{1}{16}\le x\le\frac{1}{2}$

051-❶ (1) 진수의 조건에서 $x>0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x^{\log_{0.1}x}<\sqrt{\frac{x}{10}}$의 양변에 밑이 0.1인 로그를 취하면

$\log_{0.1}x^{\log_{0.1}x}>\log_{0.1}\sqrt{\frac{x}{10}}$

$\log_{0.1}x\times\log_{0.1}x>\log_{0.1}\left(\frac{x}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$

$(\log_{0.1}x)^2>\frac{1}{2}\log_{0.1}(0.1\times x)$

$(\log_{0.1}x)^2-\frac{1}{2}(\log_{0.1}0.1+\log_{0.1}x)>0$

$\therefore\ (\log_{0.1}x)^2-\frac{1}{2}\log_{0.1}x-\frac{1}{2}>0$

$\log_{0.1}x=t$로 놓으면

$t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}>0,\quad 2t^2-t-1>0$

$(2t+1)(t-1)>0$

$\therefore\ t<-\frac{1}{2}$ 또는 $t>1$

따라서 $\log_{0.1}x<-\frac{1}{2}$ 또는 $\log_{0.1}x>1$이므로

$\log_{0.1}x<\log_{0.1}0.1^{-\frac{1}{2}}$ 또는 $\log_{0.1}x>\log_{0.1}0.1$

밑이 0.1이고 $0<0.1<1$이므로

$x>0.1^{-\frac{1}{2}}$ 또는 $x<0.1$

$\therefore\ x<0.1$ 또는 $x>\sqrt{10}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<0.1$ 또는 $x>\sqrt{10}$

(2) $2^{x+2}<3^{x-1}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 2^{x+2}<\log 3^{x-1}$

$(x+2)\log 2<(x-1)\log 3$

$x(\log 3-\log 2)>2\log 2+\log 3$

$\log 3-\log 2>0$이므로

$x>\frac{2\log 2+\log 3}{\log 3-\log 2}$

답 (1) $0<x<0.1$ 또는 $x>\sqrt{10}$ (2) $x>\frac{2\log 2+\log 3}{\log 3-\log 2}$

Remark▶

양변에 밑이 a인 로그를 취할 때, $0<a<1$이면 부등호의 방향이 바뀜에 주의한다.

052-❶ 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 실근이 존재하지 않으므로

$\frac{D}{4}=(1+\log a)^2-(3+\log a)<0$

$(\log a)^2+\log a-2<0$

$(\log a+2)(\log a-1)<0$

$\therefore\ -2<\log a<1$

즉 $\log 10^{-2}<\log a<\log 10$이므로

$\frac{1}{100}<a<10$

답 $\frac{1}{100}<a<10$

053-❶ 노트북의 가격이 1개월마다 3 %씩 하락하므로 x개월 후의 노트북의 가격은

$50(1-0.03)^x=50\times 0.97^x$ (만 원)

x개월 후의 노트북의 가격이 현재 가격의 절반 이하가 되려면

$50\times 0.97^x\le 50\times\frac{1}{2}\qquad\therefore\ 0.97^x\le\frac{1}{2}$

$0.97^x \le \frac{1}{2}$의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 0.97^x \le \log \frac{1}{2}, \qquad x\log 0.97 \le \log 2^{-1}$$

$$\therefore\ x\log 0.97 \le -\log 2$$

$\log 2 = 0.30$, $\log 0.97 = -0.01$이므로

$$-0.01x \le -0.30$$

$$\therefore\ x \ge 30$$

따라서 노트북의 가격이 처음으로 현재 가격의 절반 이하가 되는 것은 30개월 후이다. **답** 30개월

중단원 연습 문제

본책 125~128쪽

01 ③	**02** 3	**03** 3	**04** ④	**05** 9
06 ①	**07** -3	**08** ④	**09** 243	**10** ④
11 18년	**12** 15	**13** 5	**14** ④	**15** 30
16 ③	**17** 50	**18** $0<k\le 4$		**19** ①
20 ③	**21** 4	**22** ①		

01 **전략** 먼저 $g(x)$를 구한 다음 $f(x-1)$의 역함수를 구하여 $g(x)$로 나타낸다.

풀이 $y=\log_3 x-2$로 놓으면 $y+2=\log_3 x$이므로 로그의 정의에 의하여

$$x=3^{y+2}$$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$$y=3^{x+2}$$

$$\therefore\ g(x)=3^{x+2} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$f(x-1)=\log_3(x-1)-2$에서 $y=\log_3(x-1)-2$로 놓으면

$$y+2=\log_3(x-1)$$

이므로 로그의 정의에 의하여

$$x-1=3^{y+2} \qquad \therefore\ x=3^{y+2}+1$$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$$y=3^{x+2}+1$$

따라서 ㉠에 의하여 함수 $f(x-1)$의 역함수는 $g(x)+1$이다. **답** ③

다른 풀이 함수 $f(x)$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 하면

$$f^{-1}(x)=g(x)$$

$y=f(x-1)$에서 $x-1=f^{-1}(y)$이므로

$$x-1=g(y) \qquad \therefore\ x=g(y)+1$$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=g(x)+1$

따라서 함수 $f(x-1)$의 역함수는 $g(x)+1$이다.

02 **전략** 함수 $y=\log_a x+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\log_a x+b$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

풀이 방정식 $\log_a x+b=x$의 두 근이 1, 2이므로

$$\log_a 1+b=1 \qquad \therefore\ b=1$$

또 $\log_a 2+b=2$이므로 $\quad \log_a 2=1 \qquad \therefore\ a=2$

$$\therefore\ a+b=3$$

답 3

03 **전략** $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-b=f(x-a)$이고, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(-x)$임을 이용한다.

풀이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-2=\log_2(x-1)$$

$$\therefore\ f(x)=\log_2(x-1)+2 \qquad \cdots ❶$$

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=\log_2(-x)$$

$$\therefore\ g(x)=-\log_2(-x) \qquad \cdots ❷$$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(5)+g(-2)&=\{\log_2(5-1)+2\}+(-\log_2 2)\\&=\log_2 4+2-\log_2 2\\&=2+2-1=3\end{aligned} \qquad \cdots ❸$$

답 3

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(5)+g(-2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

04 **전략** 주어진 로그함수의 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

풀이 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-a)$에서 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $x-a$가 최대일 때 y는 최소가 된다.

따라서 $5\le x\le 25$에서 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-a)$는 $x=25$일 때 최소이므로

$$-2=\log_{\frac{1}{3}}(25-a), \qquad 25-a=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$25-a=9 \qquad \therefore\ a=16$$

답 ④

05 **전략** 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 $\log_2 x=t$로 바꾼다.

풀이 $y=\log_2 \frac{x}{2}\cdot\log_2 \frac{x}{8}$

$=(\log_2 x-\log_2 2)(\log_2 x-\log_2 8)$

$=(\log_2 x-1)(\log_2 x-3)$

$=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3$ ⋯ ❶

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{2}\le x\le 8$에서

$\log_2 \frac{1}{2}\le\log_2 x\le\log_2 8$

$\therefore\ -1\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

따라서 $-1\le t\le 3$에서 함수 $y=(t-2)^2-1$은

$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$M=(-1-2)^2-1=8$

$t=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$m=(2-2)^2-1=-1$ ⋯ ❷

$\therefore\ M-m=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 로그의 성질을 이용하여 주어진 함수식을 정리할 수 있다.	30 %
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	10 %

06

전략 지수에 밑이 10인 로그가 있으므로 양변에 상용로그를 취하여 푼다.

풀이 $3^{\log 3x}=5^{\log 5x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 3^{\log 3x}=\log 5^{\log 5x}$

$\log 3x\cdot\log 3=\log 5x\cdot\log 5$

$(\log 3+\log x)\log 3=(\log 5+\log x)\log 5$

$(\log 3)^2+\log 3\cdot\log x=(\log 5)^2+\log 5\cdot\log x$

$(\log 3-\log 5)\log x=(\log 5)^2-(\log 3)^2$

$\therefore\ \log x=\frac{(\log 5+\log 3)(\log 5-\log 3)}{\log 3-\log 5}$

$=-(\log 5+\log 3)$

$=-\log 15=\log 15^{-1}$

$=\log\frac{1}{15}$

즉 $\log x=\log\frac{1}{15}$이므로 $x=\frac{1}{15}$ 답 ①

07

전략 주어진 방정식의 두 근이 α, β이면 $\log_2 x=t$로 바꾸어 만든 t에 대한 이차방정식의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$임을 이용한다.

풀이 주어진 방정식을 변형하면

$\log_2 x-\frac{2}{3}\log_x 2+k=0$

$\therefore\ \log_2 x-\frac{2}{3\log_2 x}+k=0$ ⋯ ❶

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t-\frac{2}{3t}+k=0$

양변에 $3t$를 곱하여 정리하면

$3t^2+3kt-2=0$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❷

이때 주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 ㉠의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=-k$

$\therefore\ \log_2\alpha\beta=-k$

주어진 조건에서 $\alpha\beta=8$이므로

$\log_2 8=-k$

$\therefore\ k=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 밑을 2로 같게 변형할 수 있다.	20 %
❷ t에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	50 %

08

전략 $a>1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2}\iff x_1<x_2$, $\log_a x_1<\log_a x_2\iff x_1<x_2$임을 이용한다.

풀이 (i) $2^{x+3}>4$에서 $2^{x+3}>2^2$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $x+3>2$

$\therefore\ x>-1$ ⋯⋯ ㉠

(ii) 진수의 조건에서 $x+3>0$, $5x+15>0$이므로

$x>-3$ ⋯⋯ ㉡

$2\log(x+3)<\log(5x+15)$에서

$\log(x+3)^2<\log(5x+15)$

밑이 10이고 $10>1$이므로

$(x+3)^2<5x+15$

$x^2+x-6<0$

$(x+3)(x-2)<0$

$\therefore\ -3<x<2$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$-3<x<2$ ⋯⋯ ㉣

주어진 연립부등식의 해는 ㉠, ㉣의 공통 범위이므로

$-1<x<2$

따라서 정수 x는 0, 1이므로 구하는 합은 1이다.

답 ④

09 (전략) 로그의 성질을 이용하여 주어진 부등식을 변형한 후 $\log_3 x=t$로 바꾼다.

(풀이) 진수의 조건에서 $\frac{9}{x}>0$, $\frac{27}{x}>0$이므로

$x>0$ …… ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$(\log_3 9-\log_3 x)(\log_3 27-\log_3 x)\le 12$

$(2-\log_3 x)(3-\log_3 x)\le 12$

$(\log_3 x)^2-5\log_3 x+6\le 12$

$\therefore\ (\log_3 x)^2-5\log_3 x-6\le 0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-5t-6\le 0$

$(t+1)(t-6)\le 0$

$\therefore\ -1\le t\le 6$

따라서 $-1\le\log_3 x\le 6$이므로

$\log_3 3^{-1}\le\log_3 x\le\log_3 3^6$

밑이 3이고 $3>1$이므로

$\frac{1}{3}\le x\le 729$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{3}\le x\le 729$

따라서 $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=729$이므로

$\alpha\beta=243$

답 243

10 (전략) 지수에 밑이 $\frac{1}{3}$인 로그가 있으므로 양변에 밑이 $\frac{1}{3}$인 로그를 취한 후, $\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 바꾼다.

(풀이) 진수의 조건에서

$x>0$ …… ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{3}} x}<\frac{x^3}{81}$의 양변에 밑이 $\frac{1}{3}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{3}} x^{\log_{\frac{1}{3}} x}>\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^3}{81}$

$\log_{\frac{1}{3}} x\cdot\log_{\frac{1}{3}} x>\log_{\frac{1}{3}} x^3-\log_{\frac{1}{3}} 81$

$\therefore\ (\log_{\frac{1}{3}} x)^2-3\log_{\frac{1}{3}} x-4>0$

$\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 놓으면

$t^2-3t-4>0$

$(t+1)(t-4)>0$

$\therefore\ t<-1$ 또는 $t>4$

따라서 $\log_{\frac{1}{3}} x<-1$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}} x>4$이므로

$\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}} x>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^4$

밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x>\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ 또는 $x<\left(\frac{1}{3}\right)^4$

$\therefore\ x<\frac{1}{81}$ 또는 $x>3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<\frac{1}{81}$ 또는 $x>3$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 가장 작은 정수는 4이다.

답 ④

11 (전략) 현재 개구리의 개체 수를 a라 하면 x년 후의 개체 수는 $1.04^x a$임을 이용하여 부등식을 세운다.

(풀이) 현재 개구리의 개체 수를 a라 하면 x년 후의 개체 수는

$a(1+0.04)^x=1.04^x a$

x년 후의 개체 수가 현재 개체 수의 2배 이상이 되려면

$1.04^x a\ge 2a$ ··· ❶

이때 $a>0$이므로 양변을 a로 나누면

$1.04^x\ge 2$

$1.04^x\ge 2$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 1.04^x\ge\log 2$ $\quad\therefore\ x\log 1.04\ge\log 2$

$\log 1.04=0.0170$, $\log 2=0.3010$이므로

$0.0170x\ge 0.3010$

$\therefore\ x\ge\frac{0.3010}{0.0170}=17.\cdots$ ··· ❷

따라서 개구리의 개체 수가 처음으로 현재 개체 수의 2배 이상이 되는 것은 18년 후이다. ··· ❸

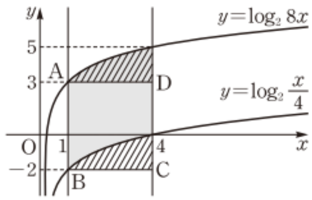
답 18년

채점 기준	비율
❶ 부등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 부등식의 해를 구할 수 있다.	60 %
❸ 개구리의 개체 수가 처음으로 현재 개체 수의 2배 이상이 되는 것은 몇 년 후인지 구할 수 있다.	10 %

12 (전략) 주어진 함수는 $y=\log_2 x$를 평행이동한 것임을 이용하여 넓이를 구한다.

(풀이) $y=\log_2 8x=\log_2 x+3$이므로 $y=\log_2 8x$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, $y=\log_2\frac{x}{4}=\log_2 x-2$이므로 $y=\log_2\frac{x}{4}$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

다음 그림과 같이 빗금친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



따라서 구하는 넓이는

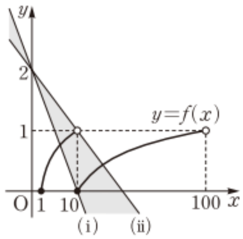
$3\times5=15$ 답 15

13 전략 문제의 정의에 따라 함수 $f(x)$의 식을 구하고 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $1\le x<10$일 때 $0\le\log x<1$이고,
$10\le x<100$일 때 $1\le\log x<2$이므로

$$f(x)=\begin{cases}\log x & (1\le x<10)\\ \log x-1 & (10\le x<100)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



직선 $y=2-\frac{x}{n}$는 n의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2-\frac{x}{n}$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

(i) 직선 $y=2-\frac{x}{n}$가 점 $(10,\ 0)$을 지날 때,

$0=2-\frac{10}{n}$에서 $n=5$

(ii) 직선 $y=2-\frac{x}{n}$가 점 $(10,\ 1)$을 지날 때,

$1=2-\frac{10}{n}$에서 $n=10$

(i), (ii)에서 $5\le n<10$이므로 자연수 n은 5, 6, 7, 8, 9의 5개이다. 답 5

Remark▶
직선 $y=2-\frac{x}{n}$는 항상 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 이 직선이 어두운 부분에 있을 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2-\frac{x}{n}$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

14 전략 $f(x)=\log_a x\ (a>0,\ a\ne1)$에서
$a>1$일 때 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$
$0<a<1$일 때 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$

풀이 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+5)$
$=\log_{\frac{1}{2}}\{(x-1)^2+4\}$

ㄱ. $g(x)=(x-1)^2+4$라 하면 $x>1$에서 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값도 증가한다.
이때 $f(x)$의 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $g(x)$가 증가하면 $f(x)$는 감소한다.
따라서 $1<x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

ㄴ. $f(2)=f(0)=\log_{\frac{1}{2}}5$이므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.
따라서 함수 $f(x)$의 역함수는 존재하지 않는다.

ㄷ. $g(x)=(x-1)^2+4$가 최소일 때 $f(x)$는 최대가 된다.
$g(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 4를 가지므로 $f(x)$의 최댓값은

$$f(1)=\log_{\frac{1}{2}}4=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=-2$$

따라서 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)\le-2$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

Remark▶ 일대일대응
함수 $f(x)$가 일대일대응이면
① 정의역의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$이다.
② 치역과 공역이 같다.

15 전략 지수에 밑이 2인 로그가 있으므로 양변에 밑이 2인 로그를 취한 후 최댓값, 최솟값을 구한다.

풀이 $y=4x^{\log_2 x-2}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log_2 y&=\log_2 4x^{\log_2 x-2}\\&=\log_2 4+\log_2 x^{\log_2 x-2}\\&=2+(\log_2 x-2)\log_2 x\\&=(\log_2 x)^2-2\log_2 x+2\end{aligned}\quad \cdots\cdots ❶$$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{2}\le x\le2$에서

$\log_2\frac{1}{2}\le\log_2 x\le\log_2 2$

$\therefore\ -1\le t\le1$

이때 주어진 함수는

$\log_2 y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

따라서 $-1\le t\le 1$에서 함수 $\log_2 y=(t-1)^2+1$은 $t=1$일 때 최솟값 1, $t=-1$일 때 최댓값 5를 가지므로

$$1\le \log_2 y\le 5$$
$$\log_2 2\le \log_2 y\le \log_2 2^5$$
$$\therefore\ 2\le y\le 32$$

따라서 $M=32$, $m=2$이므로 ⋯ ❷

$$M-m=30$$ ⋯ ❸

답 30

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	10 %

16 전략 $f(x)$에 $x=1, 2, 3, \cdots, 93$을 대입한 후 로그의 성질을 이용한다.

풀이 $f(x)=\log_a\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)=\log_a\dfrac{x+3}{x+2}$이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(93)$$
$$=\log_a\frac{4}{3}+\log_a\frac{5}{4}+\log_a\frac{6}{5}+\cdots+\log_a\frac{96}{95}$$
$$=\log_a\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{96}{95}\right)$$
$$=\log_a 32$$

따라서 $\log_a 32=-5$이므로 로그의 정의에 의하여

$$a^{-5}=32,\qquad a^{-5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$$
$$\therefore\ a=\frac{1}{2}$$

답 ③

17 전략 $|\log_a x|<k\ (k>0)$이면 $-k<\log_a x<k$임을 이용하여 부등식을 푼다.

풀이 진수의 조건에서 $x-1>0$이므로

$$x>1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$|\log_4(x-1)|<1$에서

$$-1<\log_4(x-1)<1$$
$$\log_4 4^{-1}<\log_4(x-1)<\log_4 4$$

밑이 4이고 $4>1$이므로 $\dfrac{1}{4}<x-1<4$

$$\therefore\ \frac{5}{4}<x<5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$\frac{5}{4}<x<5$$ ⋯ ❶

따라서 이차방정식 $4x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\dfrac{5}{4}$, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{5}{4}+5=-\frac{a}{4},\ \frac{5}{4}\cdot 5=\frac{b}{4}$$
$$\therefore\ a=-25,\ b=25$$ ⋯ ❷
$$\therefore\ b-a=50$$ ⋯ ❸

답 50

채점 기준	비율
❶ 부등식 $\lvert\log_4(x-1)\rvert<1$을 풀 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	10 %

18 전략 주어진 부등식을 변형하여 $\log_2 x=t$로 바꾼 후 t에 대한 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용한다.

풀이 진수의 조건에서

$$k>0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 부등식을 변형하면

$$(\log_2 x)^2+2(\log_2 2+\log_2 x)-\log_4 k\ge 0$$
$$(\log_2 x)^2+2(1+\log_2 x)-\log_4 k\ge 0$$
$$\therefore\ (\log_2 x)^2+2\log_2 x+2-\log_4 k\ge 0$$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$$t^2+2t+2-\log_4 k\ge 0$$

주어진 부등식이 모든 양의 실수 x에 대하여 성립하므로 이 부등식은 모든 실수 t에 대하여 성립해야 한다.

이차방정식 $t^2+2t+2-\log_4 k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-(2-\log_4 k)\le 0,\qquad \log_4 k\le 1$$
$$\therefore\ k\le 4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$0<k\le 4$$

답 $0<k\le 4$

Remark ▶ 이차부등식이 항상 성립할 조건

a, b, c가 실수이고 $a\ne 0$, $D=b^2-4ac$일 때, 모든 실수 x에 대하여

① $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건 ➡ $a>0$, $D<0$
② $ax^2+bx+c\ge 0$이 성립할 조건 ➡ $a>0$, $D\le 0$
③ $ax^2+bx+c<0$이 성립할 조건 ➡ $a<0$, $D<0$
④ $ax^2+bx+c\le 0$이 성립할 조건 ➡ $a<0$, $D\le 0$

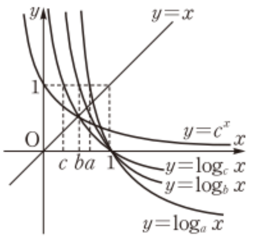
19 전략 함수 $y=c^x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프는 함수 $y=\log_c x$의 그래프임을 이용한다.

풀이 주어진 세 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=c^x$은 모두 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$0<a<1$, $0<b<1$, $0<c<1$

함수 $y=c^x$의 역함수는 $y=\log_c x$이므로 $y=\log_c x$의 그래프는 $y=c^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 세 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 세 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표가 각각 a, b, c이므로

$a>b>c$

답 ①

20

전략 세 점 P, Q, R가 각각 어떤 두 곡선의 교점인지 파악한다.

풀이 $y=|\log_2 x|=\begin{cases}\log_2 x & (x\ge 1)\\ -\log_2 x & (0<x<1)\end{cases}$

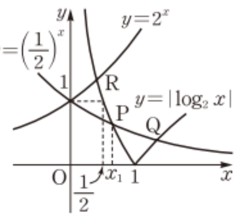
$=\begin{cases}\log_2 x & (x\ge 1)\\ \log_{\frac{1}{2}} x & (0<x<1)\end{cases}$

ㄱ. $\log_{\frac{1}{2}} x=1$에서

$x=\frac{1}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서

$\frac{1}{2}<x_1<1$



ㄴ. 점 $Q(x_2, y_2)$는 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\log_2 x$의 교점이고, 점 $R(x_3, y_3)$은 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=2^x$의 교점이다.

이때 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, 두 곡선 $y=\log_2 x$와 $y=2^x$은 각각 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 Q, R도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 $x_2=y_3$, $x_3=y_2$이므로

$x_2y_2-x_3y_3=y_3y_2-y_2y_3=0$

ㄷ. 점 $P(x_1, y_1)$은 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 교점이고, 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

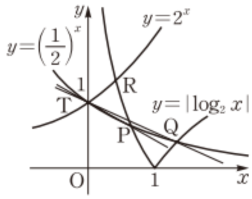
따라서 $x_1=y_1$이므로

$x_2(x_1-1)>y_1(y_2-1)$

$\Longleftrightarrow x_2(y_1-1)>x_1(y_2-1)$

$x_1>0$, $x_2>0$이므로 부등식의 양변을 x_1x_2로 나누면 $\frac{y_1-1}{x_1}>\frac{y_2-1}{x_2}$ ······ ㉠

$T(0, 1)$이라 하면 $\frac{y_1-1}{x_1}$은 직선 PT의 기울기이고 $\frac{y_2-1}{x_2}$은 직선 QT의 기울기이므로 다음 그림에서 $\frac{y_1-1}{x_1}<\frac{y_2-1}{x_2}$



따라서 ㉠은 성립하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

21

전략 양변에 밑이 2인 로그를 취한 후 $\log_2 x=t$로 바꾼다.

풀이 $x^{\log_2 x}=8x^2$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 8x^2$

$(\log_2 x)^2=3+2\log_2 x$

$\therefore (\log_2 x)^2-2\log_2 x-3=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=8$

$\therefore \alpha\beta=\frac{1}{2}\cdot 8=4$ 답 4

다른 풀이 t에 대한 이차방정식 $t^2-2t-3=0$의 두 실근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=2$

$\log_2\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha\beta=2^2=4$

22 전략 부등식을 푼 후 조건을 만족시키는 k의 값을 구한다.

풀이 진수의 조건에서 $x-1>0$, $\frac{1}{2}x+k>0$이므로

$x>1$, $x>-2k$

$\therefore x>1$ …… ㉠

$\log_5(x-1)\le\log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$에서 밑이 5이고 $5>1$이므로

$x-1\le\frac{1}{2}x+k$, $\quad \frac{1}{2}x\le k+1$

$\therefore x\le 2k+2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x\le 2k+2$

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이므로

$2k+2-1=3 \qquad \therefore k=1$

답 ①

Ⅲ. 삼각함수

05 삼각함수

유제

본책 135~153쪽

054-❶ θ가 제4사분면의 각이므로

$360°\times n+270°<\theta<360°\times n+360°$

(n은 정수)

$\therefore 180°\times n+135°<\frac{\theta}{2}<180°\times n+180°$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$360°\times k+135°<\frac{\theta}{2}<360°\times k+180°$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$360°\times k+315°<\frac{\theta}{2}<360°\times k+360°$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 제2사분면 또는 제4사분면

055-❶ 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$6\theta-\theta=360°\times n$ (n은 정수)

$5\theta=360°\times n$

$\therefore \theta=72°\times n$

그런데 $0°<\theta<90°$이므로

$0°<72°\times n<90°$

$\therefore 0<n<\frac{5}{4}$

n은 정수이므로 $\quad n=1$

$\therefore \theta=72°\times 1=72°$

답 72°

055-❷ 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$4\theta+\theta=360°\times n+180°$ (n은 정수)

$5\theta=360°\times n+180°$

$\therefore \theta=72°\times n+36°$

그런데 $90°<\theta<180°$이므로

$90°<72°\times n+36°<180°$

$54°<72°\times n<144°$

$\therefore \frac{3}{4}<n<2$

n은 정수이므로 $\quad n=1$

$\therefore \theta=72°\times1+36°=108°$ 답 $108°$

056-❶ 주어진 원뿔의 옆면은 반지름의 길이가 8인 부채꼴이다.
옆면인 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$2\pi\cdot5=10\pi$

따라서 부채꼴인 옆넓이는

$\frac{1}{2}\cdot8\cdot10\pi=40\pi$ 답 40π

056-❷ 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 부채꼴의 넓이가 9이므로

$9=\frac{1}{2}rl \qquad \therefore l=\frac{18}{r}$

즉 부채꼴의 둘레의 길이는

$l+2r=\frac{18}{r}+2r$

이때 $\frac{18}{r}>0$, $2r>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{18}{r}+2r\geq2\sqrt{\frac{18}{r}\cdot2r}$

$=2\cdot6=12$ (단, 등호는 $r=3$일 때 성립)

따라서 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 12이다.

답 12

057-❶ $\triangle$ACD에서 $\quad \overline{AC}=\sqrt{a^2+1}$

$\angle ABC+\angle BAC=\angle ACD$이므로

$\frac{\theta}{2}+\angle BAC=\theta \qquad \therefore \angle BAC=\frac{\theta}{2}$

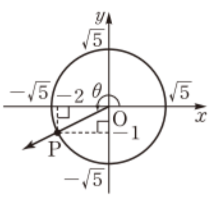
$\triangle$ABC는 $\overline{BC}=\overline{AC}=\sqrt{a^2+1}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{BD}=\overline{BC}+\overline{CD}=\sqrt{a^2+1}+a$

$\therefore \tan\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}+a}=\sqrt{a^2+1}-a$

답 $\sqrt{a^2+1}-a$

058-❶ θ가 제3사분면의 각이고 $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$이므로 오른쪽 그림과 같이 중심을 원점으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원을 그리면 각 θ의 동경과 만나는 점 P는



$P(-2,\ -1)$

따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan\theta=\frac{1}{2}$

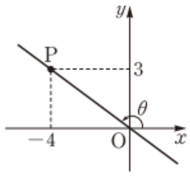
$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{5}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

답 $-\frac{3}{2}$

058-❷ $3x+4y=0$에서 $y=-\frac{3}{4}x$이므로

$\tan\theta=-\frac{3}{4}$

θ가 제2사분면의 각이고 $\tan\theta=-\frac{3}{4}$이므로 점 P의 좌표를 $(-4,\ 3)$으로 놓고 동경 OP를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{5\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-2}{\frac{3}{5}\left\{8\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+1\right\}}$

$=\frac{-6}{-3}=2$ 답 2

Remark ▶
직선 $3x+4y=0$이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ이므로 $\tan\theta$의 값은 이 직선의 기울기와 같다.

059-❶ $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\sin\theta<0$, $1-\sin\theta>0$

$\therefore |\sin\theta|-\sqrt{(1-\sin\theta)^2}=|\sin\theta|-|1-\sin\theta|$

$=-\sin\theta-(1-\sin\theta)$

$=-1$

답 -1

059-❷ (i) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}<0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

이므로 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$에서

$\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

이므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

$\therefore \sin\theta+\tan\theta<0$, $\sin\theta-\cos\theta<0$

$\therefore$ (주어진 식)

$=|\sin\theta+\tan\theta|-|\tan\theta|-|\sin\theta-\cos\theta|$

$=-(\sin\theta+\tan\theta)+\tan\theta+(\sin\theta-\cos\theta)$

$=-\cos\theta$ 답 $-\cos\theta$

060-❶ (1) $\dfrac{\sin^3\theta}{\cos\theta-\cos^3\theta}=\dfrac{\sin^3\theta}{\cos\theta(1-\cos^2\theta)}$

$=\dfrac{\sin\theta\sin^2\theta}{\cos\theta\sin^2\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\tan\theta$

(2) $\sin^4\theta-\cos^4\theta+2\cos^2\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+2\cos^2\theta$

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta+2\cos^2\theta$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

답 (1) $\tan\theta$ (2) 1

061-❶ $\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2$

$=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$

그런데 θ가 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

즉 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt{10}}}{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}}=\dfrac{1}{3}$이므로

(주어진 식)$=\sqrt{10}\cdot\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)+\dfrac{1}{3}$

$=-3+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{8}{3}$ 답 $-\dfrac{8}{3}$

061-❷ $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=2+\sqrt{3}$에서

$1-\tan\theta=2+\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})\tan\theta$

$(3+\sqrt{3})\tan\theta=-1-\sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{-(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

즉 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{3}\sin\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta+(-\sqrt{3}\sin\theta)^2=1$, $4\sin^2\theta=1$

$\therefore \sin^2\theta=\dfrac{1}{4}$

그런데 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

062-❶ (1) $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

(3) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=4$

답 (1) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (2) $\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$ (3) 4

063-❶ 이차방정식 $(1+\sqrt{2})x^2+x+p=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$ ⋯⋯ ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{p}{1+\sqrt{2}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=3-2\sqrt{2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=3-2\sqrt{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=1-\sqrt{2}$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢에서 $\dfrac{p}{1+\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$이므로

$p=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$ 답 -1

중단원 연습 문제 본책 154~157쪽

01 제1사분면 또는 제3사분면				**02** ⑤
03 $\pi-2$	**04** 4π	**05** ④	**06** ④	**07** 2
08 $\sin\theta-1$		**09** 0	**10** 14	
11 $a=-\frac{1}{4}$, $\sin^3\theta+\cos^3\theta=-\frac{11}{16}$				**12** ④
13 $\frac{8}{3}\pi$	**14** 342	**15** ⑤	**16** $24\sqrt{2}$	
17 $3x^2+8x+3=0$	**18** ②		**19** 16	**20** ⑤

01 전략 θ의 범위를 일반각으로 나타낸다.

풀이 θ가 제1사분면의 각이므로

$360°\times n<\theta<360°\times n+90°$ (n은 정수)

$\therefore 180°\times n<\frac{\theta}{2}<180°\times n+45°$

(ⅰ) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$360°\times k<\frac{\theta}{2}<360°\times k+45°$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

(ⅱ) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$360°\times k+180°<\frac{\theta}{2}<360°\times k+225°$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

답 제1사분면 또는 제3사분면

02 전략 두 동경 OP, OQ가 나타내는 각을 각각 α, β라 할 때, 두 동경 OP, OQ가 x축에 대하여 대칭이면 $\alpha+\beta=360°\times n$ (n은 정수)이다.

풀이 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=360°\times n$ (n은 정수)

$6\theta=360°\times n$ $\quad\therefore \theta=60°\times n$ ⋯⋯ ㉠

그런데 $0°<\theta<360°$이므로

$0°<60°\times n<360°$ $\quad\therefore 0<n<6$

n은 정수이므로 $\quad n=1, 2, 3, 4, 5$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=60°, 120°, 180°, 240°, 300°$

따라서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$60°+120°+180°+240°+300°=900°$

답 ⑤

03 전략 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이는 $r\theta$임을 이용한다.

풀이 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이는

$2r+l$

원의 반지름의 길이도 r이므로 원의 둘레의 길이는

$2\pi r$

즉 $2\pi r=2(2r+l)$이므로

$\pi r=2r+l$ $\quad\therefore l=(\pi-2)r$

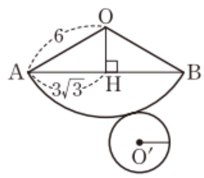
부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 $l=r\theta$에서

$\theta=\frac{l}{r}=\frac{(\pi-2)r}{r}=\pi-2$

따라서 부채꼴의 중심각의 크기는 $\pi-2$이다.

답 $\pi-2$

04 전략 부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 먼저 구한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\overline{BH}=3\sqrt{3}$이고

△OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{3})^2}=3$

이므로 $\quad\angle AOH=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \angle AOB=2\angle AOH=2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ ⋯ ❶

원 O'의 둘레의 길이는 부채꼴 OAB의 호의 길이와 같으므로 원 O'의 반지름의 길이를 r라 하면

$2\pi r=6\cdot\frac{2}{3}\pi$ $\quad\therefore r=2$ ⋯ ❷

따라서 원 O'의 넓이는 $\quad\pi\cdot 2^2=4\pi$ ⋯ ❸

답 4π

채점 기준	비율
❶ ∠AOB의 크기를 구할 수 있다.	50 %
❷ 원 O'의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 원 O'의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

05 전략 직각삼각형의 외심의 성질을 이용하여 θ와 크기가 같은 각을 찾는다.

풀이 $\angle BAC=90°$이고, 점 M이 직각삼각형 ABC의 빗변의 중점이므로 점 M은 삼각형 ABC의 외심이다.

$\therefore \overline{AM}=\overline{BM}$

$\angle ABM = \angle BAM = \theta$, $\overline{BC} = \sqrt{8^2+15^2} = 17$이므로

$$\sin\theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{15}{17},\ \cos\theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{8}{17}$$

$$\therefore \sin\theta - \cos\theta = \frac{15}{17} - \frac{8}{17} = \frac{7}{17}$$

답 ④

Remark ▶ 삼각형의 외심의 성질

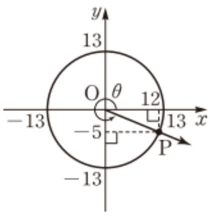
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.
➡ 오른쪽 그림에서 점 O가 △ABC의 외심일 때,
$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$
=(외접원의 반지름의 길이)

06

전략 좌표평면 위에 각 θ의 동경을 나타낸 후 조건에 맞는 점 P를 잡는다.

풀이 $a<0$이므로 점 P는 제4사분면 위의 점이다.

즉 θ가 제4사분면의 각이고 $\cos\theta = \frac{12}{13}$이므로 오른쪽 그림과 같이 중심을 원점으로 하고 반지름의 길이가 13인 원을 그리면 각 θ의 동경과 만나는 점 P는 $P(12,\ -5)$



따라서 $a=-5$, $r=13$이므로

$$a+r=8$$

답 ④

07

전략 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$에서 삼각함수의 값의 부호를 살펴본다.

풀이 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$이므로 θ는 제4사분면의 각이다.

즉 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$이므로

$$\frac{1}{\cos\theta}>0,\ \frac{1}{\sin\theta}<0,\ \cos\theta-\sin\theta>0,$$
$$\tan\theta-\cos\theta<0$$

따라서 그 값이 양수인 것은 $\frac{1}{\cos\theta}$, $\cos\theta-\sin\theta$의 2개이다.

답 2

08

전략 각 조건을 만족시키는 θ가 제몇 사분면의 각인지 조사한 후 모든 조건을 동시에 만족시키는 경우를 찾는다.

풀이 (ⅰ) $\sin\theta\tan\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$

이므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다. ⋯ ❶

(ⅱ) $\cos\theta\tan\theta>0$에서

$\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

이므로 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다. ⋯ ❷

(ⅰ), (ⅱ)에서 θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$ ⋯ ❸

따라서 $\cos\theta+\tan\theta<0$, $1-\cos\theta>0$이므로

(주어진 식)

$= |\sin\theta| + |\cos\theta+\tan\theta| - |1-\cos\theta| - |\tan\theta|$

$= \sin\theta - (\cos\theta+\tan\theta) - (1-\cos\theta) + \tan\theta$

$= \sin\theta - 1$ ⋯ ❹

답 $\sin\theta-1$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\tan\theta<0$을 만족시키는 θ가 제몇 사분면의 각인지 알 수 있다.	20 %
❷ $\cos\theta\tan\theta>0$을 만족시키는 θ가 제몇 사분면의 각인지 알 수 있다.	20 %
❸ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호를 알 수 있다.	20 %
❹ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	40 %

09

전략 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 식을 간단히 한다.

풀이 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$\frac{1-2\cos^2\theta}{1-2\sin\theta\cos\theta} + \frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{1-2\sin^2\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}$$
$$+ \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin^2\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{(\sin\theta-\cos\theta)^2} + \frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$
$$= \frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{(\sin\theta-\cos\theta)^2}$$
$$+ \frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}$$
$$= \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta} + \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta} - \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$
$$=0$$

답 0

10

전략 주어진 식의 양변을 제곱하여 $\sin\theta\cos\theta$의 값을 먼저 구한다.

풀이 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}&=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\\&=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta\cos\theta)^2}\\&=\frac{1-2\cdot\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}}=14\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 14

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

11

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a의 값을 먼저 구한다.

풀이 이차방정식 $2x^2+x+3a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2},\ \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{2}a$$

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$1+3a=\frac{1}{4}\qquad\therefore a=-\frac{1}{4}$$

따라서 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$이므로

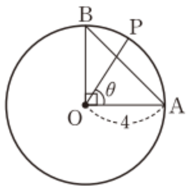
$$\begin{aligned}&\sin^3\theta+\cos^3\theta\\&=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{16}\end{aligned}$$

답 $a=-\frac{1}{4}$, $\sin^3\theta+\cos^3\theta=-\frac{11}{16}$

12

전략 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$이다. 이때 θ의 단위는 라디안임에 유의한다.

풀이 △OAB에서 선분 OA를 밑변으로 생각하면 △OAB의 넓이는 오른쪽 그림과 같이 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$일 때 최대이고, 이때 △OAB의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8$$

부채꼴 OAP의 넓이가 △OAB의 넓이와 같아질 때의 부채꼴 OAP의 중심각의 크기를 θ라 하면

$$\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\theta=8\qquad\therefore \theta=1$$

따라서 $\angle BOP=\frac{\pi}{2}-1$이므로 부채꼴 OPB의 넓이는

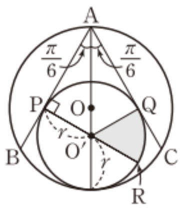
$$\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=4\pi-8$$

답 ④

13

전략 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, O′을 잇는 직선을 그으면



$$\angle PAO'=\frac{1}{2}\angle PAQ=\frac{\pi}{6}$$

원 O'의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{AO'}=12-r$이므로 직각삼각형 APO′에서

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{O'P}}{\overline{AO'}}=\frac{r}{12-r},\ 즉\ \frac{1}{2}=\frac{r}{12-r}$$

$$12-r=2r\qquad\therefore r=4$$

한편 $\angle PO'Q=2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이므로

$$\angle QO'R=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$$

따라서 부채꼴 O′RQ의 넓이는

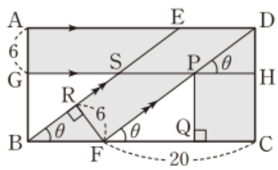
$$\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi$$

답 $\frac{8}{3}\pi$

14

전략 삼각비를 이용하여 $\overline{BF}$, $\overline{PQ}$, $\overline{PH}$의 길이를 구한다.

풀이



위의 그림과 같이 점 F에서 $\overline{BE}$에 내린 수선의 발을 R, $\overline{BE}$와 $\overline{GH}$가 만나는 점을 S라 하자.

△FRB에서 $\overline{FR}=6$이므로

$$\tan\theta=\frac{6}{\overline{BR}}$$

$$\therefore \overline{BR}=\frac{6}{\tan\theta}=6\cdot\frac{4}{3}=8$$

$$\therefore \overline{BF}=\sqrt{\overline{FR}^2+\overline{BR}^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$$ ⋯ ❶

△DFC에서 $\tan\theta=\frac{\overline{CD}}{20}$이므로

$\overline{CD}=20\tan\theta=20\cdot\frac{3}{4}=15$

$\overline{PQ}=\overline{CH}=\overline{CD}-\overline{DH}=15-6=9$ ⋯ ❷

또 △DPH에서 $\tan\theta=\frac{6}{\overline{PH}}$

$\therefore \overline{PH}=\frac{6}{\tan\theta}=6\cdot\frac{4}{3}=8$ ⋯ ❸

따라서 구하는 넓이는 세 사각형 AGHD, BFPS, PQCH의 넓이의 합과 같으므로

$(10+20)\cdot 6+10\cdot 9+8\cdot 9=180+90+72=342$ ⋯ ❹

답 342

채점 기준	비율
❶ $\overline{BF}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\overline{PQ}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{PH}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❹ 어두운 부분의 넓이를 구할 수 있다.	10 %

15 전략 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$의 양변을 제곱한 후 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

풀이 $\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$이고,

$\tan^2\theta=3^2=9$이므로

$\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=9,\quad 9\cos^2\theta=1-\cos^2\theta$

$\cos^2\theta=\frac{1}{10}$

$\therefore \cos\theta=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$ …… ㉠

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

$\therefore \sin\theta=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$ …… ㉡

$\tan\theta>0$에서 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이고, $\sin\theta+\cos\theta<0$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

즉 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로 ㉠, ㉡에서

$\sin\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \cos\theta-\sin\theta=-\frac{\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

$=\frac{2\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

답 ⑤

16 전략 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

풀이 $\tan^2\theta-\frac{1}{\tan^2\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^4\theta-\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$ …… ㉠

한편 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{6}$이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ …… ㉡

또 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

이고 $\sin\theta<\cos\theta$에서 $\sin\theta-\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ …… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\tan^2\theta-\frac{1}{\tan^2\theta}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}$

$=24\sqrt{2}$

답 $24\sqrt{2}$

17 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계와 삼각함수 사이의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식 $8x^2-4x+a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2},\ \sin\theta\cos\theta=\frac{a}{8}$ ⋯ ❶

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+\frac{a}{4}=\frac{1}{4}\quad \therefore a=-3$ ⋯ ❷

이때 $\tan\theta$와 $\dfrac{1}{\tan\theta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식을 $3x^2+bx+c=0$ (b, c는 상수)으로 놓으면

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{8}{a}=-\frac{8}{3}$$

$$\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}=1$$

이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{b}{3}=-\frac{8}{3},\ \frac{c}{3}=1$$

$\therefore$ $b=8$, $c=3$ ··· ❸

따라서 구하는 이차방정식은

$3x^2+8x+3=0$ ··· ❹

답 $3x^2+8x+3=0$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 이차방정식의 x의 계수와 상수항을 구할 수 있다.	40 %
❹ 이차방정식을 구할 수 있다.	10 %

18

전략 먼저 원의 넓이를 이용하여 원의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 원의 반지름의 길이를 r라 하면

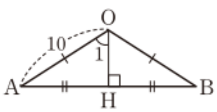
$\pi r^2=100\pi$, $r^2=100$

$\therefore$ $r=10$ ($\because$ $r>0$)

호 AB의 길이가 반지름의 길이의 2배이므로

$10\theta=2\cdot10$ $\therefore$ $\theta=2$

$\triangle$OAB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$OAH에서



$\angle$AOH$=1$이고

$\overline{AH}=10\sin1$

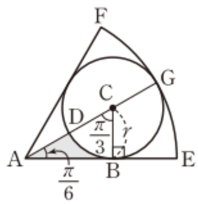
$\therefore$ $\overline{AB}=2\overline{AH}=20\sin1$

답 ②

19

전략 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{2}r^2\theta$이다. 이때 θ의 단위는 라디안임에 유의한다.

풀이 오른쪽 그림의 부채꼴 AEF의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면



$$\angle CAB=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$$

이므로 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=2r$, $\overline{AB}=\sqrt{3}r$

$\overline{AG}=6$이므로 $2r+r=6$ $\therefore$ $r=2$

이때 위의 그림에서 어두운 부분의 넓이는

$\triangle$ABC$-$(부채꼴 CDB의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{3}$$
$$=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

따라서 $S=12\left(2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi\right)=24\sqrt{3}-8\pi$이므로

$p=24$, $q=-8$

$\therefore$ $p+q=16$

답 16

20

전략 주어진 식의 양변을 제곱하여 $\sin\theta\cos\theta$의 값을 먼저 구한다.

풀이 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9},\quad 2\sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{9}$$

$$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{18}$$

$\therefore$ $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{5}{18}\right)\cdot\frac{2}{3}$$
$$=\frac{8}{27}+\frac{5}{9}=\frac{23}{27}$$

답 ⑤

Ⅲ. 삼각함수

06 삼각함수의 그래프

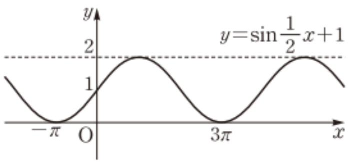
유제

본책 166~185쪽

064-❶ (1) 함수 $y=\sin\frac{1}{2}x+1$의 그래프는

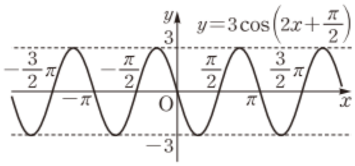
$y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배 한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 2, 최솟값은 0, 주기는 4π이다.



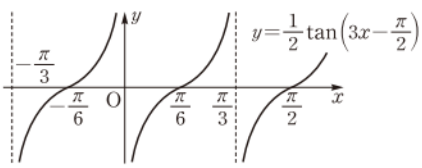
(2) 함수 $y=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배 하고, x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 3, 최솟값은 -3, 주기는 π이다.



(3) 함수 $y=\frac{1}{2}\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\tan3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 하고, x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값과 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{3}$이다.



답 풀이 참조

065-❶ $f(x)$의 최솟값이 -5이고 $a>0$이므로

$-a+c=-5$ ······ ㉠

또 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi$ $\quad\therefore b=3$

따라서 $f(x)=a\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+c$이고 $f\left(\frac{\pi}{9}\right)=1$이므로

$a\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{9}-\frac{\pi}{6}\right)+c=1,\quad a\sin\frac{\pi}{6}+c=1$

$\therefore \frac{1}{2}a+c=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ c=-1$

$\therefore a+b+c=6$

답 6

065-❷ $f(x)$의 최댓값이 3이고 $a>0$이므로

$a+c=3$ ······ ㉠

또 주기가 π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore b=2$

따라서 $f(x)=a\cos2x+c$이고 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$이므로

$a\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+c=-1,\quad a\cos\pi+c=-1$

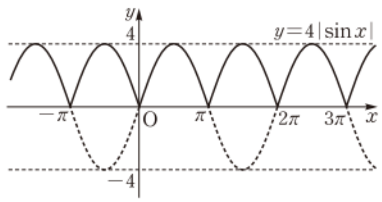
$\therefore -a+c=-1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ c=1$

$\therefore a^2+b^2+c^2=2^2+2^2+1^2=9$

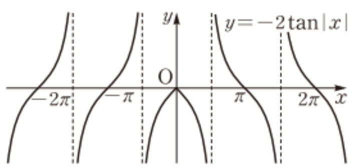
답 9

066-❶ (1) $y=4|\sin x|$의 그래프는 $y=4\sin x$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값은 4, 최솟값은 0이다.

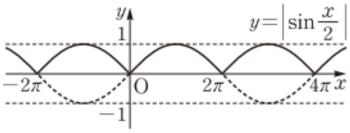
(2) $y=-2\tan|x|$의 그래프는 $y=-2\tan x$의 그래프에서 $x\geq0$인 부분만 남기고, $x\geq0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값, 최솟값은 없다.

답 (1) 최댓값: 4, 최솟값: 0
(2) 최댓값, 최솟값: 없다.

066-❷ $y=\left|\sin\frac{x}{2}\right|$의 그래프는 $y=\sin\frac{x}{2}$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값은 1, 최솟값은 0이므로
$M=1,\ m=0 \qquad \therefore M+m=1$

답 1

067-❶ $\sin(-780°)=-\sin780°$
$=-\sin(90°\times8+60°)$
$=-\sin60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos510°=\cos(90°\times5+60°)$
$=-\sin60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan585°=\tan(90°\times6+45°)$
$=\tan45°=1$

$\therefore$ (주어진 식)$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1$
$=1$

답 1

067-❷ $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$,
$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta,\ \sin(\pi-\theta)=\sin\theta$
이므로
(주어진 식)$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$
$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$
$=2$

답 2

068-❶ (1) $\sin170°=\sin(90°\times2-10°)=\sin10°$
$\cos100°=\cos(90°+10°)=-\sin10°$
$\tan390°=\tan(90°\times4+30°)=\tan30°$
$\therefore$ (주어진 식)$=\sin10°-\sin10°+\tan30°$
$=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\tan50°=\tan(90°-40°)=\frac{1}{\tan40°}$
$\tan130°=\tan(90°+40°)=-\frac{1}{\tan40°}$

$\therefore$ (주어진 식)
$=\left(\tan40°+\frac{1}{\tan40°}\right)^2-\left(\tan40°-\frac{1}{\tan40°}\right)^2$
$=\tan^2 40°+2+\frac{1}{\tan^2 40°}$
$\quad-\left(\tan^2 40°-2+\frac{1}{\tan^2 40°}\right)$
$=4$

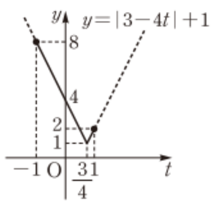
(3) $\cos1°=\cos(90°-89°)=\sin89°$
$\cos2°=\cos(90°-88°)=\sin88°$
$\vdots$
$\cos44°=\cos(90°-46°)=\sin46°$
$\therefore$ (주어진 식)
$=(\cos^2 1°+\cos^2 89°)+(\cos^2 2°+\cos^2 88°)$
$\quad+\cdots+(\cos^2 44°+\cos^2 46°)+\cos^2 45°$
$=(\sin^2 89°+\cos^2 89°)+(\sin^2 88°+\cos^2 88°)$
$\quad+\cdots+(\sin^2 46°+\cos^2 46°)+\cos^2 45°$
$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{44\text{개}}+\cos^2 45°$
$=44+\frac{1}{2}=\frac{89}{2}$

답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2) 4 (3) $\frac{89}{2}$

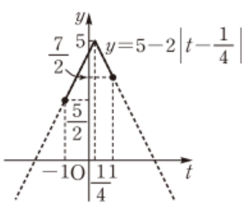
068-❷ $\sin70°=\sin(90°-20°)=\cos20°$
그런데 $\sin^2 20°+\cos^2 20°=1$이고 $\cos20°>0$이므로
$\cos20°=\sqrt{1-\sin^2 20°}=\sqrt{1-a^2}$
$\therefore \sin70°=\sqrt{1-a^2}$

답 $\sqrt{1-a^2}$

069-❶ (1) $\sin x=t$로 놓으면 $-1\leq t\leq1$이고 주어진 함수는 $\quad y=|3-4t|+1$
따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=-1$일 때 최댓값은 8, $t=\frac{3}{4}$일 때 최솟값은 1이다.



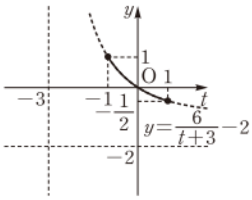
(2) $\cos x=t$로 놓으면 $-1\leq t\leq1$이고 주어진 함수는
$y=5-2\left|t-\frac{1}{4}\right|$
따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=\frac{1}{4}$일 때 최댓값은 5, $t=-1$일 때 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.



(3) $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$$y=-\frac{2t}{t+3}=\frac{-2(t+3)+6}{t+3}$$
$$=\frac{6}{t+3}-2$$

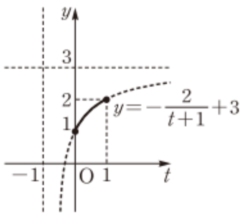
따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=-1$일 때 최댓값은 1, $t=1$일 때 최솟값은 $-\frac{1}{2}$이다.



(4) $\tan x=t$로 놓으면 $0\le x\le \frac{\pi}{4}$에서 $0\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$$y=\frac{3t+1}{t+1}=\frac{3(t+1)-2}{t+1}$$
$$=-\frac{2}{t+1}+3$$

따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=1$일 때 최댓값은 2, $t=0$일 때 최솟값은 1이다.



답 풀이 참조

Remark▶ 함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프

① 함수 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
② 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.
③ 점근선은 두 직선 $x=p$, $y=q$이다.

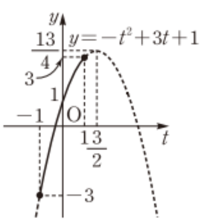
070-❶ (1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=-\cos x$이므로 주어진 함수는

$$y=3\cos x+\sin^2 x$$
$$=3\cos x+(1-\cos^2 x)$$
$$=-\cos^2 x+3\cos x+1$$

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=-t^2+3t+1=-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$$

따라서 오른쪽 그래프에서 $t=1$일 때 최댓값은 3, $t=-1$일 때 최솟값은 -3이다.



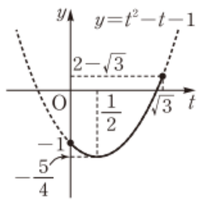
(2) $\tan(4\pi-x)=-\tan x$, $\tan\left(\frac{5}{2}\pi-x\right)=\frac{1}{\tan x}$이므로 주어진 함수는

$$y=(-\tan x)^2-\tan x-1$$
$$=\tan^2 x-\tan x-1$$

이때 $\tan x=t$로 놓으면 $0\le x\le \frac{\pi}{3}$에서

$0\le t\le \sqrt{3}$이고 $\quad y=t^2-t-1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

따라서 오른쪽 그래프에서 $t=\sqrt{3}$일 때 최댓값은 $2-\sqrt{3}$, $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $-\frac{5}{4}$이다.



답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -3
(2) 최댓값: $2-\sqrt{3}$, 최솟값: $-\frac{5}{4}$

071-❶ (1) $x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $-\pi<x<\pi$에서 $-\frac{7}{6}\pi<t<\frac{5}{6}\pi$이고, 주어진 방정식은

$$\sqrt{2}\sin t=1,\qquad \sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ t=\frac{\pi}{4}\ \text{또는}\ t=\frac{3}{4}\pi$$

즉 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}\pi$이므로

$$x=\frac{5}{12}\pi\ \text{또는}\ x=\frac{11}{12}\pi$$

(2) $\frac{x}{2}=t$로 놓으면 $-\pi<x<\pi$에서 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$이고, 주어진 방정식은

$$\sqrt{3}\sin t+\cos t=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos t\neq 0$이므로 ㉠의 양변을 $\cos t$로 나누어 정리하면

$$\frac{\sin t}{\cos t}=-\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad \tan t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore\ t=-\frac{\pi}{6}$$

즉 $\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{6}$이므로 $\quad x=-\frac{\pi}{3}$

답 (1) $x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$ (2) $x=-\frac{\pi}{3}$

072-❶ $2\sin^2 x-5\cos x=4$에서

$$2(1-\cos^2 x)-5\cos x=4$$
$$2\cos^2 x+5\cos x+2=0$$
$$(2\cos x+1)(\cos x+2)=0$$

그런데 $-1\le\cos x\le1$이므로

$$\cos x=-\frac{1}{2}$$

$0\le x<2\pi$이므로

$$x=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}\pi$$

답 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

072-❷ $\tan x+\frac{1}{\tan x}=2$의 양변에 $\tan x$를 곱하면

$$\tan^2 x+1=2\tan x$$
$$\tan^2 x-2\tan x+1=0$$
$$\therefore\ (\tan x-1)^2=0$$

즉 $\tan x=1$이고 $0<x<2\pi$이므로

$$x=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x=\frac{5}{4}\pi$$

따라서 구하는 모든 해의 합은

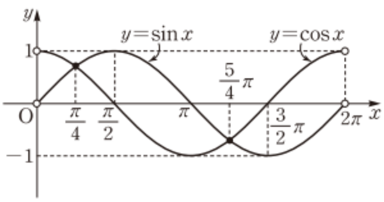
$$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$$

답 $\frac{3}{2}\pi$

다른 풀이 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\frac{1}{\tan x}=\frac{\cos x}{\sin x}$를 $\tan x+\frac{1}{\tan x}=2$에 대입하면

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=2,\qquad \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\sin x}=2$$
$$\sin^2 x+\cos^2 x=2\cos x\sin x$$
$$\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x\sin x=0$$
$$(\sin x-\cos x)^2=0\qquad \therefore\ \sin x=\cos x$$

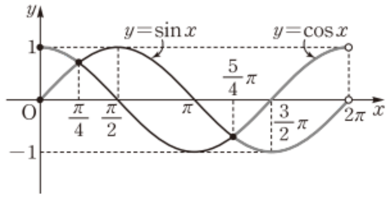
$0<x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$이므로 구하는 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$$

073-❶ 부등식 $\sin x\le\cos x$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프와 만나는 부분 또는 $y=\cos x$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다.



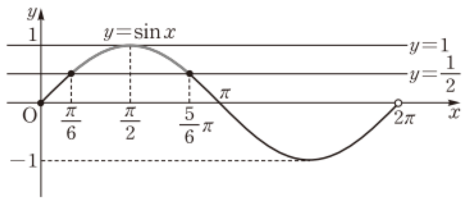
위의 그래프에서 구하는 부등식의 해는

$$0\le x\le\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi\le x<2\pi$$

답 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi\le x<2\pi$

073-❷ $2\cos^2 x+3\sin x-3\ge0$에서

$$2(1-\sin^2 x)+3\sin x-3\ge0$$
$$2\sin^2 x-3\sin x+1\le0$$
$$(2\sin x-1)(\sin x-1)\le0$$
$$\therefore\ \frac{1}{2}\le\sin x\le1$$



위의 그래프에서 구하는 부등식의 해는

$$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$$

따라서 $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{5}{6}\pi$이므로

$$b-a=\frac{2}{3}\pi$$

답 $\frac{2}{3}\pi$

074-❶ 이차방정식 $x^2-4x\sin\theta+3=0$이 중근을 가지므로 주어진 방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2\sin\theta)^2-3=0$$

즉 $4\sin^2\theta-3=0$에서 $\quad\sin^2\theta=\frac{3}{4}$

$$\therefore\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0\le\theta<\pi$이므로 $\quad\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

답 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

074-❷ 이차함수 $y=x^2-2\sqrt{2}x\sin\theta-3\cos\theta$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나면 이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}x\sin\theta-3\cos\theta=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-\sqrt{2}\sin\theta)^2-(-3\cos\theta)>0$$

$$\therefore\ 2\sin^2\theta+3\cos\theta>0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$를 ㉠에 대입하면

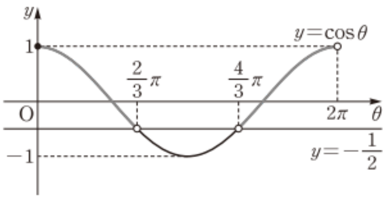
$$2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta>0$$

$$2\cos^2\theta-3\cos\theta-2<0$$

$$\therefore\ (2\cos\theta+1)(\cos\theta-2)<0$$

그런데 $\cos\theta-2<0$이므로

$$2\cos\theta+1>0 \qquad \therefore\ \cos\theta>-\frac{1}{2}$$



위의 그래프에서 구하는 θ의 값의 범위는

$$0\le\theta<\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi<\theta<2\pi$$

답 $0\le\theta<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<\theta<2\pi$

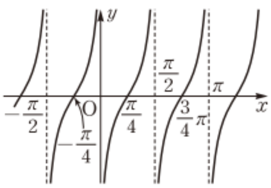
중단원 연습 문제

본책 187~191쪽

01 ⑤	**02** ㄱ, ㅁ	**03** 8	**04** ②	**05** 1
06 $\frac{8}{3}$	**07** $-\frac{1}{2}$	**08** $\frac{\pi}{2}$	**09** ④	**10** ③
11 8	**12** 11	**13** 5	**14** ⑤	
15 ㄱ, ㄷ	**16** $\frac{\pi}{6}$	**17** $a\le7$	**18** ④	**19** ⑤
20 ③				

01 전략 $y=a\tan(bx-c)$의 그래프는 $y=a\tan bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{c}{b}$만큼 평행이동한 것과 같다.

풀이 함수 $y=3\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=3\tan2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=3\tan2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 $y=3\tan2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고, 최댓값과 최솟값은 없으며 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

또 직선 $x=\frac{\pi}{2}$는 점근선이므로 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$을 지나지 않는다.

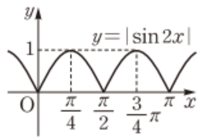
답 ⑤

02 전략 주어진 함수의 주기를 각각 구한다.

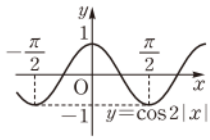
풀이 각 함수의 주기를 구하면 다음과 같다.

ㄱ. $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ㄴ. 2π ㄷ. $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

ㄹ. $y=|\sin2x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.



ㅁ. $y=\cos2|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기는 π이다.



이상에서 주기가 π인 것은 ㄱ, ㅁ이다. 답 ㄱ, ㅁ

03 전략 함수 $y=a\cos bx+c$의 최댓값은 $|a|+c$, 최솟값은 $-|a|+c$이고 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이다.

풀이 주어진 함수의 그래프에서 최댓값은 $\frac{5}{2}$, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$이고 $a>0$이므로

$$a+c=\frac{5}{2},\ -a+c=-\frac{1}{2}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{3}{2},\ c=1 \qquad \cdots ❶$$

주기가 $\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}=\pi$이고 $b>0$이므로

$$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore\ b=2 \qquad \cdots ❷$$

$$\therefore\ 2a+b+3c=2\cdot\frac{3}{2}+2+3=8 \qquad \cdots ❸$$

답 8

채점 기준	비율
❶ a, c의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $2a+b+3c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

04 전략 주어진 각을 $\frac{\pi}{2}\times n\pm\theta$ (n은 정수) 꼴로 고친 후 각을 θ로 통일한다.

풀이 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta$,

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$,

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$

$\therefore$ (주어진 식)

$$=\frac{-\sin\theta\tan^2\theta}{-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta(-\cos\theta)}$$

$$=\tan^2\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta-1}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=-1$$

답 ②

05

전략 각을 통일하여 두 항끼리의 곱이 1이 되도록 한다.

풀이 $\tan 89°=\tan(90°-1°)=\frac{1}{\tan 1°}$

$\tan 88°=\tan(90°-2°)=\frac{1}{\tan 2°}$

$\vdots$

$\tan 46°=\tan(90°-44°)=\frac{1}{\tan 44°}$

$\therefore$ (주어진 식)

$$=\left(\tan 1°\times\frac{1}{\tan 1°}\right)\times\left(\tan 2°\times\frac{1}{\tan 2°}\right)$$

$$\times\cdots\times\left(\tan 44°\times\frac{1}{\tan 44°}\right)\times\tan 45°$$

$$=\tan 45°=1$$

답 1

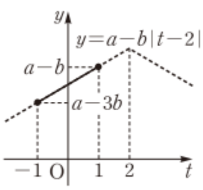
06

전략 $\sin x=t$로 놓은 후 최대·최소를 가질 때의 t의 값을 구한다.

풀이 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$$y=a-b|t-2|$$

이므로 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 함수는 $t=1$일 때 최댓값 $\frac{10}{3}$, $t=-1$일 때 최솟값 2를 가지므로

$$a-b=\frac{10}{3},\ a-3b=2$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=\frac{2}{3}$

$$\therefore ab=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

다른 풀이 $-1\le\sin x\le 1$이므로

$-3\le\sin x-2\le -1$

$1\le|\sin x-2|\le 3$

$-3b\le -b|\sin x-2|\le -b$

$\therefore a-3b\le a-b|\sin x-2|\le a-b$

따라서 주어진 함수의 최댓값이 $a-b$, 최솟값이 $a-3b$이므로

$a-b=\frac{10}{3}$, $a-3b=2$

$\therefore a=4$, $b=\frac{2}{3}$

$\therefore ab=\frac{8}{3}$

07

전략 주어진 함수를 $\cos x$에 대한 이차식의 꼴로 변형한다.

풀이 $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$, $\cos(x+\pi)=-\cos x$이므로

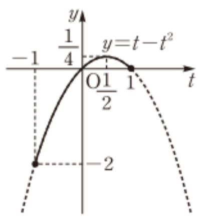
$$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2(x+\pi)$$

$$=\cos x-\cos^2 x \quad \cdots ❶$$

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=t-t^2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

따라서 오른쪽 그래프에서



$t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{1}{4}$이고,

$t=-1$일 때 최솟값은 -2이므로

$$M=\frac{1}{4},\ m=-2 \quad \cdots ❷$$

$$\therefore Mm=-\frac{1}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $\cos x$에 대한 이차식의 꼴로 변형할 수 있다.	30 %
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ Mm의 값을 구할 수 있다.	10 %

08

전략 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 주어진 방정식을 한 종류의 삼각함수로 나타낸다.

풀이 $2\sin^2 x+\cos x=2$에 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$를 대입하면

$$2(1-\cos^2 x)+\cos x=2$$
$$2\cos^2 x-\cos x=0$$
$$\cos x(2\cos x-1)=0$$
$$\therefore \cos x=0 \text{ 또는 } \cos x=\frac{1}{2}$$ ··· ❶

(i) $\cos x=0$일 때, $0\le x<3\pi$이므로

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } x=\frac{5}{2}\pi$$

(ii) $\cos x=\frac{1}{2}$일 때, $0\le x<3\pi$이므로

$$x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x=\frac{5}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{7}{3}\pi$$ ··· ❷

(i), (ii)에서 방정식의 해를 작은 것부터 차례로 나열할 때, 두 번째에 오는 해는 $\frac{\pi}{2}$이다. ··· ❸

답 $\frac{\pi}{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 만족시키는 $\cos x$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 방정식의 해를 모두 구할 수 있다.	50 %
❸ 작은 것부터 차례로 나열할 때, 두 번째에 오는 해를 구할 수 있다.	20 %

09 **전략** $\sin x=t$로 놓은 후 주어진 그래프를 이용하여 $f(t)=0$을 만족시키는 t의 값을 구한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표가 $(0, 0)$, $(2, 0)$이므로 방정식 $f(x)=0$의 해는

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$f(\sin x)=0$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이므로 방정식 $f(t)=0$의 해는

$$t=0, \text{ 즉 } \sin x=0$$

따라서 $0\le x\le 2\pi$에서 $\sin x=0$을 만족시키는 x의 값은

$$x=0 \text{ 또는 } x=\pi \text{ 또는 } x=2\pi$$

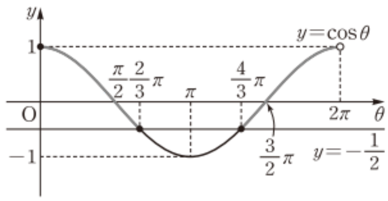
이므로 방정식 $f(\sin x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

답 ④

10 **전략** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면 $D\ge 0$이어야 한다.

풀이 이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}x+1-2\cos\theta=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-\sqrt{2})^2-(1-2\cos\theta)\ge 0$$
$$2-1+2\cos\theta\ge 0 \qquad \therefore \cos\theta\ge -\frac{1}{2}$$



위의 그림에서 θ의 값의 범위는

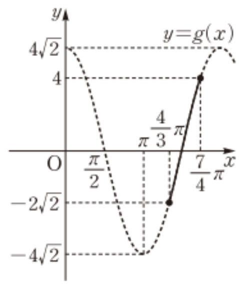
$$0\le\theta\le\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi\le\theta<2\pi$$

따라서 조건을 만족시키지 않는 θ의 값은 ③이다.

답 ③

11 **전략** 합성함수의 정의를 이용하여 $(f\circ g)(x)$를 구한다.

풀이 $\frac{4}{3}\pi\le x\le\frac{7}{4}\pi$에서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$-2\sqrt{2}\le g(x)\le 4$$

이때

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=[g(x)]$$

이므로

$-2\sqrt{2}\le g(x)<-2$일 때, $y=(f\circ g)(x)=-3$
$-2\le g(x)<-1$일 때, $y=(f\circ g)(x)=-2$
$-1\le g(x)<0$일 때, $y=(f\circ g)(x)=-1$
$\vdots$
$3\le g(x)<4$일 때, $y=(f\circ g)(x)=3$
$g(x)=4$일 때, $y=(f\circ g)(x)=4$

따라서 $A=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$이므로 구하는 원소의 개수는 8이다.

답 8

12 **전략** $f(13)=-3$임을 이용하여 $\sin\alpha$의 값을 구한다.

풀이
$$\begin{aligned} f(13)&=3\sin(13\pi+\alpha)+7\cos\left(\frac{13}{2}\pi+\alpha\right)\\ &=3\sin(\pi+\alpha)+7\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\\ &=-3\sin\alpha-7\sin\alpha\\ &=-10\sin\alpha \end{aligned}$$

$f(13)=-3$이므로 $-10\sin\alpha=-3$에서

$\sin\alpha=\frac{3}{10}$ ⋯ ❶

$\therefore f(15)=3\sin(15\pi+\alpha)+7\cos\left(\frac{15}{2}\pi+\alpha\right)$

$=3\sin(\pi+\alpha)+7\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$

$=-3\sin\alpha+7\sin\alpha=4\sin\alpha$

$=4\cdot\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$ ⋯ ❷

따라서 $m=5$, $n=6$이므로

$m+n=11$ ⋯ ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ $\sin\alpha$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(15)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

13 전략 주어진 함수를 $\sin x$에 대한 이차식의 꼴로 변형한다.

풀이 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

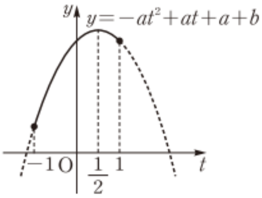
$f(x)=a(1-\sin^2 x)+a\sin x+b$

$=-a\sin^2 x+a\sin x+a+b$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-at^2+at+a+b=-a\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a+b$

$a>0$이므로 오른쪽 그래프에서 $t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{5}{4}a+b$이므로



$\frac{5}{4}a+b=\frac{11}{2}$

$\therefore 5a+4b=22$ ⋯⋯ ㉠

$t=-1$일 때 최솟값은 $-a+b$이므로

$-a+b=1$ ⋯⋯ ㉡

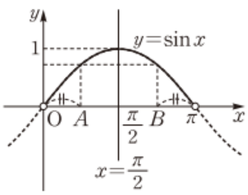
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=5$

답 5

14 전략 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭임을 이용하여 A, B 사이의 관계식을 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 $y=\sin x\ (0<x<\pi)$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 $0<A<B<\pi$이고



$\sin A=\sin B$이면 $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore A+B=\pi$

ㄱ. $A+B=\pi$이므로 함수

$y=\sin(A+B)x=\sin\pi x$

의 주기는

$\frac{2\pi}{\pi}=2$

ㄴ. $A+B=\pi$에서 $B=\pi-A$

따라서 $\frac{B}{2}=\frac{\pi-A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$이므로

$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}=\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$

$=\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}$

$=1$

ㄷ. $0\le x<2\pi$이고, $0<A<\pi$이므로

$-\pi<x-A<2\pi$

따라서 방정식 $\sin(x-A)=1$의 근은

$x-A=\frac{\pi}{2}$에서 $x=A+\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha=A+\frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos\alpha+\sin B=\cos\left(A+\frac{\pi}{2}\right)+\sin B$

$=-\sin A+\sin B$

$=0$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

15 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려서 $f(x)$의 주기를 찾는다.

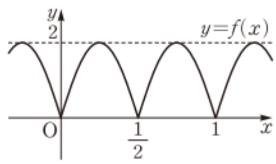
풀이 ㄱ. $f(-x)=|2\sin(-2\pi x)|$

$=|-2\sin 2\pi x|$

$=|2\sin 2\pi x|$

$=f(x)$

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{1}{2}$이다.



즉 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 p는 $\frac{1}{2}n$ (n은 정수) 꼴이다.

$0<p<10$이므로 $\quad 0<\frac{1}{2}n<10$

$\therefore 0<n<20$

따라서 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 19$이므로 p의 개수는 19이다.

ㄷ. $|2\sin 2\pi x|>1$에서 $\quad |\sin 2\pi x|>\frac{1}{2}$

$\therefore \sin 2\pi x<-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin 2\pi x>\frac{1}{2}$

$2\pi x=t$로 놓으면 $0\le x\le 1$에서 $0\le t\le 2\pi$이고 주어진 부등식은

$\sin t<-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin t>\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\pi}{6}<t<\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<t<\frac{11}{6}\pi$

즉 $\frac{\pi}{6}<2\pi x<\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<2\pi x<\frac{11}{6}\pi$이므로 $\quad \frac{1}{12}<x<\frac{5}{12}$ 또는 $\frac{7}{12}<x<\frac{11}{12}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ㄱ, ㄷ

16 전략 $\overline{OC}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 길이를 삼각함수로 나타낸다.

풀이 직각삼각형 AOC에서

$\overline{OC}=\overline{AO}\cos\theta=\cos\theta$,

$\overline{AC}=\overline{AO}\sin\theta=\sin\theta$

또 직각삼각형 DOB에서

$\overline{BD}=\overline{OB}\tan\theta=\tan\theta$ ··· ❶

$\overline{OC}=3\overline{AC}\cdot\overline{BD}$에서

$\cos\theta=3\sin\theta\tan\theta$

$\cos\theta=3\sin\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\quad \cos^2\theta=3\sin^2\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$1-\sin^2\theta=3\sin^2\theta$, $\quad \sin^2\theta=\frac{1}{4}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ ··· ❷

$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$ ··· ❸

답 $\frac{\pi}{6}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{OC}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 길이를 삼각함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ θ의 값을 구할 수 있다.	10 %

17 전략 $\cos\theta=t$로 놓은 후 t에 대한 이차부등식을 푼다.

풀이 부등식 $\cos^2\theta-3\cos\theta-a+9\ge 0$에서

$\cos\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$t^2-3t-a+9\ge 0$

$f(t)=t^2-3t-a+9$로 놓으면

$f(t)=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-a+\frac{27}{4}$

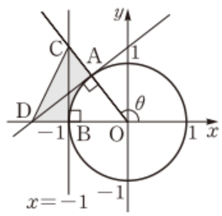
$-1\le t\le 1$에서 $f(t)$는 $t=1$일 때 최솟값을 가지므로 $-1\le t\le 1$인 모든 실수 t에 대하여 $f(t)\ge 0$이려면 $f(1)\ge 0$이어야 한다.

$f(1)=1-3-a+9=7-a\ge 0$

$\therefore a\le 7$ **답** $a\le 7$

18 전략 $\pi-\theta$에 대한 삼각함수의 값을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림의



$\triangle$CBO에서 $\angle COB=\pi-\theta$이므로

$\overline{BC}=\tan(\pi-\theta)$

$=-\tan\theta$

또 $\triangle$OAD에서

$\angle DOA=\pi-\theta$이므로

$\cos(\pi-\theta)=\frac{1}{\overline{OD}}$

$\therefore \overline{OD}=\frac{1}{\cos(\pi-\theta)}=-\frac{1}{\cos\theta}$

따라서 어두운 부분의 넓이는

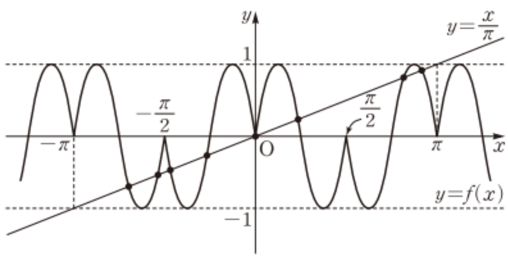
$\triangle$OCD$-$(부채꼴 OAB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right)\cdot(-\tan\theta)-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot(\pi-\theta)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\pi+\theta\right)$ **답** ④

19 전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

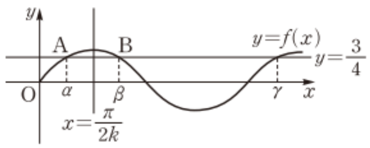
풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$는 다음 그림과 같다.



앞의 그림과 같이 직선 $y=\frac{x}{\pi}$가 두 점 $(\pi,\ 1)$, $(-\pi,\ -1)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$가 만나는 점의 개수는 8이다. 답 ⑤

20 전략 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=\sin kx$의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$이다.



위의 그림과 같이 두 점 A, B는 직선 $x=\frac{\pi}{2k}$에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2k} \qquad \therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{k}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(\alpha+\beta+\gamma)&=f\left(\frac{\pi}{k}+\gamma\right)\\&=\sin k\left(\frac{\pi}{k}+\gamma\right)\\&=\sin(\pi+k\gamma)\\&=-\sin k\gamma\\&=-f(\gamma)=-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

답 ③

Remark ▶ 삼각함수의 그래프의 대칭성

① 함수 $f(x)=\sin x\ (0\le x<\pi)$에서

$f(a)=f(b)=k(a\ne b) \Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow a+b=\pi$

② 함수 $f(x)=\cos x\ (0\le x<2\pi)$에서

$f(a)=f(b)=k(a\ne b) \Rightarrow \frac{a+b}{2}=\pi \Rightarrow a+b=2\pi$

Ⅲ. 삼각함수

07 삼각함수의 활용

유제

본책 196~213쪽

075-❶ (1) 사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{1}{\sin 30°}$이므로

$$\sin A=\sqrt{3}\sin 30°=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0°<A<180°$이므로

$A=60°$ 또는 $A=120°$

또 △ABC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{1}{\sin 30°}=2R$이므로

$$R=\frac{1}{2\sin 30°}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}=1$$

(2) 호 AB에 대한 원주각의 크기가 C이므로

$$C=\frac{1}{2}\cdot 120°=60°$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{c}{\sin 60°}=2\cdot 4$$

$$\therefore c=8\sin 60°=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$

답 (1) $A=60°$ 또는 $A=120°$, $R=1$ (2) $4\sqrt{3}$

076-❶ △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}a:b:c&=2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C\\&=\sin A:\sin B:\sin C\\&=5:6:4\end{aligned}$$

이므로 $a=5k$, $b=6k$, $c=4k\ (k>0)$라 하면

$$\frac{b^2+c^2}{ac}=\frac{36k^2+16k^2}{20k^2}=\frac{52}{20}=\frac{13}{5}$$

답 $\frac{13}{5}$

077-❶ (1) △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

이므로 이를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}=\frac{c^2}{4R^2}$$

$$\therefore a^2+b^2=c^2$$

따라서 △ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다.

(2) △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R}$$

이므로 이를 주어진 식에 대입하면

$$a^2\cdot\frac{a}{2R}=b^2\cdot\frac{b}{2R}$$

$$a^3=b^3,\qquad a^3-b^3=0$$

$$\therefore\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=0$$

그런데 a, b는 모두 양수이므로

$$a^2+ab+b^2>0$$

$$\therefore\ a-b=0,\ 즉\ a=b$$

따라서 △ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 (1) $C=90°$인 직각삼각형
(2) $a=b$인 이등변삼각형

078-❶ $\angle\mathrm{CAB}+\angle\mathrm{ACB}=75°$이므로

$$30°+\angle\mathrm{ACB}=75°\qquad\therefore\ \angle\mathrm{ACB}=45°$$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{30}{\sin 45°}=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 30°}$이므로

$$\overline{\mathrm{BC}}\sin 45°=30\sin 30°,\qquad \overline{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=30\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=15\sqrt{2}\,(\mathrm{m})$$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $15\sqrt{2}$ m이다.

답 $15\sqrt{2}$ m

078-❷ $A+B+C=180°$이므로

$$C=180°-(45°+105°)=30°$$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R m라 하면 사인법칙에 의하여 $\dfrac{25}{\sin 30°}=2R$이므로

$$2R=50\qquad\therefore\ R=25$$

따라서 호수의 넓이는 $\quad\pi\cdot 25^2=625\pi\,(\mathrm{m}^2)$

답 625π m^2

079-❶ 코사인법칙에 의하여

$$a^2=(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}\cos 45°$$

$$=4+2\sqrt{3}+2-2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4$$

$a>0$이므로 $\qquad a=2$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{2}{\sin 45°}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin C}$이므로

$$2\sin C=\sqrt{2}\sin 45°$$

$$2\sin C=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad\therefore\ \sin C=\frac{1}{2}$$

$0°<C<180°$이므로

$$C=30°\ 또는\ C=150°$$

그런데 $C=150°$이면 $A+C>180°$이므로

$$C=30°$$

$$\therefore\ B=180°-(45°+30°)=105°$$

답 $a=2$, $B=105°$, $C=30°$

080-❶ 삼각형에서 길이가 가장 긴 변의 대각의 크기가 세 내각 중 가장 크므로 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 $a=5$, $b=6$, $c=7$이라 하면 가장 큰 각의 크기는 C이고 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos\theta=\cos C=\frac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6}=\frac{1}{5}$$

$0°<\theta<180°$이므로 $\qquad \sin\theta>0$

$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

답 $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

080-❷ $A+B+C=180°$이므로

$$A+B=180°-C,\ B+C=180°-A,$$
$$C+A=180°-B$$

위의 식을 주어진 등식에 대입하면

$$\sin(180°-C):\sin(180°-A):\sin(180°-B)$$
$$=\sin C:\sin A:\sin B$$
$$=2:2:3$$

$$\therefore\ c:a:b=2:2:3$$

따라서 $a=2k$, $b=3k$, $c=2k\,(k>0)$라 하면 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos B=\frac{(2k)^2+(2k)^2-(3k)^2}{2\cdot 2k\cdot 2k}$$

$$=\frac{-k^2}{8k^2}=-\frac{1}{8}$$

답 $-\dfrac{1}{8}$

081-❶ (1) $\cos A:\cos B=a:b$에서

$$b\cos A=a\cos B\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$b^2+c^2-a^2=c^2+a^2-b^2,\qquad a^2-b^2=0$$

$$\therefore\ (a+b)(a-b)=0$$

$a+b>0$이므로 $\quad a-b=0$

$\therefore a=b$

따라서 △ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

(2) $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$이므로 주어진 식은

$$\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\cos C=\sin C$$

$$\therefore \sin A\cos C=\sin C\cos A \qquad \cdots\cdots ㉠$$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙과 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R},$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{a}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{c}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$a^2+b^2-c^2=b^2+c^2-a^2, \qquad a^2-c^2=0$$

$$\therefore (a+c)(a-c)=0$$

$a+c>0$이므로 $\quad a-c=0$

$\therefore a=c$

따라서 △ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

(3) 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

이므로 이를 주어진 식에 대입하면

$$2\left(ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c^2\right)=ab+bc+ca$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

$$\therefore \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

$a,\ b,\ c$는 실수이므로

$$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$$

$$\therefore a=b=c$$

따라서 △ABC는 정삼각형이다.

답 (1) $a=b$인 이등변삼각형
(2) $a=c$인 이등변삼각형
(3) 정삼각형

082-❶ $\overline{AB}=x$ m라 하면 코사인법칙에 의하여

$$x^2=80^2+60^2-2\cdot80\cdot60\cos120°$$

$$=6400+3600-2\cdot80\cdot60\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=14800$$

$x>0$이므로 $\quad x=20\sqrt{37}$

따라서 두 오리배 A, B 사이의 거리는 $20\sqrt{37}$ m이다.

답 $20\sqrt{37}$ m

082-❷ $\overline{PQ}=x$ m라 하면 △PAQ는 $\overline{PQ}=\overline{AQ}$인 직각이등변삼각형이므로 $\quad \overline{AQ}=\overline{PQ}=x$ (m)

△PBQ에서 $\quad \overline{BQ}=\sqrt{3}x$ (m)

△ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$$160^2=x^2+(\sqrt{3}x)^2-2\cdot x\cdot\sqrt{3}x\cos30°$$

$$=x^2+3x^2-2\cdot x\cdot\sqrt{3}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=x^2$$

$x>0$이므로 $\quad x=160$

따라서 타워의 높이 PQ의 길이는 160 m이다.

답 160 m

083-❶ 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$이므로

$$9\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot12\cdot3\sin A \qquad \therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0°<A<90°$이므로

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

083-❷ 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$이므로

$$5\sqrt{15}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\sin C \qquad \therefore \sin C=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$90°<C<180°$이므로

$$\cos C=-\sqrt{1-\sin^2 C}$$

$$=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=-\frac{1}{4}$$

코사인법칙에 의하여

$$c^2=5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=109$$

$$\therefore c=\sqrt{109}\ (\because c>0)$$

답 $\sqrt{109}$

084-❶ 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos C=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot3\cdot2}=\frac{2}{3}$$

$0°<C<180°$이므로

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\triangle ABC=\dfrac{abc}{4R}$에서

$$\sqrt{5}=\frac{3\cdot2\cdot\sqrt{5}}{4R} \qquad \therefore R=\frac{3}{2}$$

△ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

△ABC$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$에서

$$\sqrt{5}=\frac{1}{2}r(3+2+\sqrt{5})$$

$$\therefore\ r=\frac{2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}(5-\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

085-1 □ABCD에서

$$\overline{AB}=\overline{DC}=4,\ \overline{AD}=\overline{BC}=2\sqrt{3}$$

이므로 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.

따라서 □ABCD는 평행사변형이므로 구하는 넓이는

$$4\cdot 2\sqrt{3}\sin 30°=4\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=4\sqrt{3}$$

답 $4\sqrt{3}$

중단원 연습 문제

본책 214~218쪽

01 75°	**02** 24	**03** $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$		
04 ④	**05** $\sqrt{6}$ km		**06** ①	
07 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $C=90°$인 직각삼각형				
08 ①	**09** 64	**10** 32	**11** ②	**12** $\frac{2}{3}$
13 $A=90°$인 직각삼각형			**14** 120°	**15** ②
16 3 km	**17** $\frac{24}{7}$	**18** ④	**19** ⑤	**20** 50
21 ⑤	**22** ③			

01 전략 먼저 사인법칙을 이용하여 $\sin B$의 값을 구한다.

풀이 사인법칙에 의하여

$$\frac{6\sqrt{3}}{\sin B}=2\cdot 6,\qquad 12\sin B=6\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

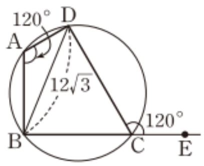
$0°<B<90°$이므로 $\quad B=60°$

$A+B+C=180°$이므로

$$C=180°-(45°+60°)=75°$$

답 75°

02 전략 주어진 원은 △ABD의 외접원임을 이용한다.



풀이 원에 내접하는 사각형의 한 외각과 그 내대각의 크기는 서로 같으므로

$$\angle BAD=\angle DCE=120°$$

주어진 원의 반지름의 길이를 R라 하면 이 원은 △ABD의 외접원이므로 △ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{12\sqrt{3}}{\sin 120°}=2R$$

$$\therefore\ 2R=\frac{12\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=24$$

따라서 구하는 원의 지름의 길이는 24이다.

답 24

다른 풀이 $\angle BCD=60°$이고 주어진 원은 △BCD의 외접원이므로 주어진 원의 반지름의 길이를 R라 하면 △BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{12\sqrt{3}}{\sin 60°}=2R\qquad \therefore\ 2R=24$$

03 전략 △ABC가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리와 사인법칙을 이용한다.

풀이 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$\therefore\ a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$$

…… ㉠

△ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$a^2+b^2=c^2$$

㉠을 위의 식에 대입하면

$$(2R\sin A)^2+(2R\sin B)^2=(2R\sin C)^2$$

$$4R^2\sin^2 A+4R^2\sin^2 B=4R^2\sin^2 C$$

$$\therefore\ \sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$$

답 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$

04 전략 사인법칙을 이용하여 주어진 등식을 삼각형의 변의 길이에 대한 식으로 변형한다.

풀이 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

이므로 이를 주어진 식에 대입하면

$$a\cdot\frac{a}{2R}=b\cdot\frac{b}{2R}+c\cdot\frac{c}{2R}$$

$$\therefore\ a^2=b^2+c^2$$

따라서 △ABC는 $A=90°$인 직각삼각형이다.

답 ④

05

전략 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180°임을 이용하여 C를 구한 후 사인법칙을 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구한다.

풀이 $A+B+C=180°$이므로

$$C=180°-(45°+75°)=60° \quad \cdots ❶$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 45°}=\frac{3}{\sin 60°},\quad \overline{BC}\sin 60°=3\sin 45°$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC}=3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{6}\,(\text{km})$$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $\sqrt{6}$ km이다. ⋯ ❷

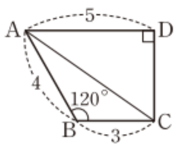
답 $\sqrt{6}$ km

채점 기준	비율
❶ C를 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 지점 B, C 사이의 거리를 구할 수 있다.	70 %

06

전략 먼저 코사인법칙을 이용하여 대각선 AC의 길이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 □ABCD의 대각선 AC를 그으면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여



$$\overline{AC}^2=4^2+3^2-2\cdot4\cdot3\cos 120°$$

$$=16+9-2\cdot4\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=37$$

따라서 △ACD에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{CD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{37-25}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

답 ①

07

전략 사인법칙과 코사인법칙의 변형을 이용하여 각의 크기 사이의 관계를 변의 길이 사이의 관계로 나타낸다.

풀이 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙과 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \quad \cdots ❶$$

이므로 이를 주어진 식에 대입하면

$$a^2\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{b}{2R}=b^2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$$

$$a^2b^2+a^2c^2-a^4=b^2c^2+a^2b^2-b^4$$

$$a^4-b^4-a^2c^2+b^2c^2=0$$

$$(a^2+b^2)(a^2-b^2)-c^2(a^2-b^2)=0$$

$$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$$

$$(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$$

$a+b>0$이므로

$$a=b \text{ 또는 } a^2+b^2=c^2 \quad \cdots ❷$$

따라서 △ABC는 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $C=90°$인 직각삼각형이다. ⋯ ❸

답 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $C=90°$인 직각삼각형

채점 기준	비율
❶ $\sin A$, $\sin B$, $\cos A$, $\cos B$를 변의 길이에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ ❶에서 구한 식을 주어진 식에 대입하여 정리할 수 있다.	40 %
❸ △ABC가 어떤 삼각형인지 말할 수 있다.	20 %

08

전략 출발한 지 30분 후 두 자동차 A, B가 이동한 거리를 구하여 △OAB에서 코사인법칙을 이용한다.

풀이 출발한 지 30분 후, 즉 $\frac{1}{2}$시간 후 두 자동차 A, B가 이동한 거리는 각각

$$20\cdot\frac{1}{2}=10\,(\text{km}),\ 50\cdot\frac{1}{2}=25\,(\text{km})$$

이때 두 자동차 사이의 거리는 $\overline{AB}$의 길이와 같으므로 △OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\,\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos 60°$$

$$=10^2+25^2-2\cdot10\cdot25\cdot\frac{1}{2}=475$$

$$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{475}=5\sqrt{19}\ (\because\ \overline{AB}>0)$$

따라서 구하는 거리는 $5\sqrt{19}$ km이다.

답 ①

09

전략 먼저 삼각형의 넓이를 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $\triangle$ABC의 넓이가 $3\sqrt{3}$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot a\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a=3\sqrt{3} \qquad \therefore a=6 \qquad \cdots ❶$$

코사인법칙에 의하여

$$b^2=2^2+a^2-2\cdot 2\cdot a\cos 60^\circ$$
$$=4+36-2\cdot 2\cdot 6\cdot \frac{1}{2}=28 \qquad \cdots ❷$$
$$\therefore a^2+b^2=36+28=64 \qquad \cdots ❸$$

답 64

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b^2의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

10 **전략** 삼각형의 세 변의 길이를 각각 $4k$, $5k$, $7k\,(k>0)$로 놓고 삼각형의 넓이 공식을 이용한다.

풀이 삼각형의 세 변의 길이를 각각 $4k$, $5k$, $7k\,(k>0)$라 하고, 길이가 $7k$인 변의 대각의 크기를 θ라 하면 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(4k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot 4k\cdot 5k}$$
$$=\frac{-8k^2}{40k^2}=-\frac{1}{5}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

삼각형의 넓이가 $16\sqrt{6}$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 4k\cdot 5k\cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}=16\sqrt{6}, \qquad k^2=4$$
$$\therefore k=2\ (\because k>0)$$

따라서 삼각형의 세 변의 길이는 각각 8, 10, 14이므로 구하는 둘레의 길이는

$$8+10+14=32$$

답 32

11 **전략** 두 대각선의 길이가 a, b이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ인 사각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$임을 이용한다.

풀이 $\cos\theta=\frac{1}{4}$이고 $\cos\theta>0$에서 $0^\circ<\theta<90^\circ$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

따라서 □ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot \frac{\sqrt{15}}{4}=5\sqrt{15}$$

답 ②

12 **전략** $A+B+C=180^\circ$임을 이용하여 $B+C$를 A에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $A+B+C=180^\circ$이므로

$$B+C=180^\circ-A \qquad \cdots ❶$$

이때

$$9\sin A\sin(B+C)=9\sin A\sin(180^\circ-A)$$
$$=9\sin A\sin A$$
$$=9\sin^2 A$$

이므로 $\quad 9\sin^2 A=1, \quad \sin^2 A=\frac{1}{9}$

$0^\circ<A<180^\circ$에서 $\sin A>0$이므로

$$\sin A=\frac{1}{3} \qquad \cdots ❷$$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $R=1$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R=2$$
$$\therefore \overline{BC}=2\sin A=\frac{2}{3} \qquad \cdots ❸$$

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ $B+C$를 A에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\sin A$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{BC}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %

13 **전략** 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 중근을 가지면 $D=0$임을 이용한다.

풀이 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(\sin B)^2-(\sin A-\sin C)(\sin A+\sin C)$$
$$=\sin^2 B-\sin^2 A+\sin^2 C=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{b^2}{4R^2}-\frac{a^2}{4R^2}+\frac{c^2}{4R^2}=0$$
$$b^2-a^2+c^2=0 \qquad \therefore b^2+c^2=a^2$$

따라서 $\triangle$ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

답 $A=90^\circ$인 직각삼각형

14 (전략) 먼저 사인법칙을 이용하여 △ABC의 세 변의 길이의 비를 구한다.

(풀이) △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} = a : b : c$$

이므로 $\quad a : b : c = 3 : 5 : 7$

△ABC의 세 변의 길이를 각각

$\quad a=3k,\ b=5k,\ c=7k\ (k>0)$

라 하면 ∠C의 크기가 가장 크므로 코사인법칙에 의하여

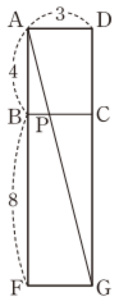
$$\cos C = \frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot 3k\cdot 5k} = -\frac{1}{2}$$

$0° < C < 180°$이므로 $\quad C = 120°$

따라서 가장 큰 내각의 크기는 $120°$이다. (답) $120°$

15 (전략) $\overline{AP}$, $\overline{PG}$, $\overline{AG}$의 길이를 구한 후 코사인법칙을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구한다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같은 전개도에서



$\quad \overline{BP} : \overline{FG} = \overline{AB} : \overline{AF}$

이므로

$\quad \overline{BP} : 3 = 4 : 12$

$\quad 12\overline{BP} = 12 \qquad \therefore\ \overline{BP} = 1$

$\quad \therefore\ \overline{PC} = \overline{BC} - \overline{BP} = 3 - 1 = 2$

두 직각삼각형 ABP, GCP에서

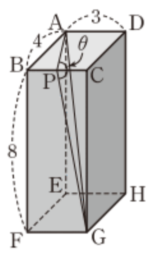
$\quad \overline{AP} = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$,

$\quad \overline{PG} = \sqrt{2^2+8^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

한편 직육면체 ABCD−EFGH에서

$\quad \overline{AG} = \sqrt{3^2+4^2+8^2} = \sqrt{89}$

따라서 △APG에서 코사인법칙의 변형에 의하여



$$\cos\theta = \frac{(\sqrt{17})^2+(2\sqrt{17})^2-(\sqrt{89})^2}{2\cdot\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{17}} = -\frac{4}{68} = -\frac{1}{17}$$

(답) ②

16 (전략) 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AC}$의 길이를 구한다.

(풀이) $\overline{AC} = x$ km라 하면 코사인법칙에 의하여

$\quad (3\sqrt{7})^2 = 9^2 + x^2 - 2\cdot 9\cdot x\cos 60°$

$\quad 63 = 81 + x^2 - 9x, \qquad x^2 - 9x + 18 = 0$

$\quad (x-3)(x-6) = 0 \qquad \therefore\ x = 3\ (\because\ x < 6)$

따라서 건설하려고 하는 다리의 길이는 3 km이다.

(답) 3 km

17 (전략) △ABC=△ABD+△ADC임을 이용한다.

(풀이) $\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\sin 120°$

$\quad = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ ⋯ ❶

$\overline{AD} = k\ (k>0)$라 하면

$\quad \triangle ABD = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot k\sin 60°$

$\quad = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot k\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}k$

$\quad \triangle ADC = \frac{1}{2}\cdot k\cdot 8\sin 60°$

$\quad = \frac{1}{2}\cdot k\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}k$ ⋯ ❷

△ABC=△ABD+△ADC이므로

$\quad 12\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}k + 2\sqrt{3}k, \qquad \frac{7\sqrt{3}}{2}k = 12\sqrt{3}$

$\quad \therefore\ k = \frac{24}{7}$

따라서 $\overline{AD}$의 길이는 $\frac{24}{7}$이다. ⋯ ❸

(답) $\frac{24}{7}$

채점 기준	비율
❶ △ABC의 넓이를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{AD}=k\ (k>0)$로 놓고 △ABD, △ADC의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ △ABC=△ABD+△ADC임을 이용하여 k의 값, 즉 $\overline{AD}$의 길이를 구할 수 있다.	50 %

18 (전략) ∠ABC=θ로 놓고 $\angle ABD = \frac{\pi}{2}+\theta$임을 이용하여 △ABD의 넓이를 구한다.

(풀이) ∠ABC=θ라 하면 △ABC에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos\theta = \frac{10^2+12^2-8^2}{2\cdot 10\cdot 12} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \triangle ABD = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12\cos\theta = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12\cdot\frac{3}{4} = 45$$

(답) ④

19 전략 먼저 코사인법칙을 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구한다.

풀이 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos 60^\circ$$
$$=80^2+100^2-2\cdot 80\cdot 100\cdot \frac{1}{2}$$
$$=8400$$
$$\therefore \overline{BC}=\sqrt{8400}\,(\mathrm{m})$$

호수의 반지름의 길이를 R m라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{8400}}{\sin 60^\circ}=2R$$
$$\therefore R=\frac{\sqrt{8400}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{8400}{3}}=\sqrt{2800}\,(\mathrm{m})$$

따라서 호수의 넓이는

$$\pi R^2=2800\pi\,(\mathrm{m}^2)$$

답 ⑤

20 전략 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 원의 넓이를 구한다.

풀이 □ABCD가 원에 내접하므로

$$\angle BCD=\theta\,(0<\theta<\pi)$$

라 하면 $\angle BAD=\pi-\theta$

△ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=2^2+10^2-2\cdot 2\cdot 10\cdot\cos(\pi-\theta)$$
$$=4+100+2\cdot 2\cdot 10\cdot\cos\theta$$
$$=104+40\cdot\frac{3}{5}=128$$
$$\therefore \overline{BD}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}\ (\because \overline{BD}>0)$$

한편 $0<\theta<\pi$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

△BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

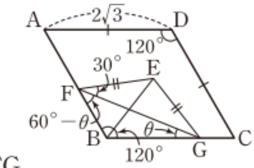
$$\frac{8\sqrt{2}}{\sin\theta}=2R \qquad \therefore R=\frac{8\sqrt{2}}{2\cdot\frac{4}{5}}=5\sqrt{2}$$

따라서 외접원의 넓이는

$$\pi R^2=\pi(5\sqrt{2})^2=50\pi$$
$$\therefore a=50$$

답 50

21 전략 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 보기의 명제가 맞는지 확인한다.



풀이 ㄱ. $\angle BGF=\theta$이므로

$$\angle BFG=60^\circ-\theta$$
$$\therefore \angle BFE$$
$$=\angle BFG+\angle EFG$$
$$=(60^\circ-\theta)+30^\circ$$
$$=90^\circ-\theta$$

ㄴ. △EFG에서

$$\overline{FG}=2\overline{EF}\cos 30^\circ=2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

△BGF에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\frac{\overline{BF}}{\sin\theta}$$
$$\overline{BF}\sin 120^\circ=2\sqrt{3}\sin\theta$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BF}=2\sqrt{3}\sin\theta$$
$$\therefore \overline{BF}=4\sin\theta$$

ㄷ. △EFB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BE}^2$$
$$=\overline{BF}^2+\overline{EF}^2-2\overline{BF}\cdot\overline{EF}\cdot\cos(90^\circ-\theta)$$
$$=(4\sin\theta)^2+2^2-2\cdot 4\sin\theta\cdot 2\cdot\sin\theta=4$$

따라서 $\overline{BE}=2$로 일정하다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

22 전략 삼각형의 넓이 공식을 이용하여 △PAU, △QRB, △CST의 넓이를 구한다.

풀이 $\angle BAC=\theta$라 하면 $\angle PAU=180^\circ-\theta$이므로

$$\triangle PAU=\frac{1}{2}\overline{AU}\cdot\overline{AP}\sin(180^\circ-\theta)$$
$$=\frac{1}{2}bc\sin\theta$$

이때 $\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin\theta$이므로

$$\triangle PAU=\triangle ABC$$

같은 방법으로

$$\triangle QRB=\triangle ABC,\ \triangle CST=\triangle ABC$$

한편 □APQB, □BRSC, □CTUA의 넓이는 각각 c^2, a^2, b^2이고, △ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이므로 육각형 PQRSTU의 넓이는

$$c^2+a^2+b^2+4\cdot\frac{1}{2}ab=2(c^2+ab)$$
$$(\because a^2+b^2=c^2)$$

답 ③

Ⅳ. 수열

08 등차수열

유제

본책 224~241쪽

086-❶ (1) $a_1=1=1^2$, $a_2=4=2^2$, $a_3=9=3^2$, $a_4=16=4^2$, $a_5=25=5^2$, $\cdots$

따라서 주어진 수열의 일반항은 $a_n=n^2$

(2) $a_1=\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{1\cdot(1+1)}$

$a_2=\dfrac{1}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{2\cdot(2+1)}$

$a_3=\dfrac{1}{3\cdot 4}=\dfrac{1}{3\cdot(3+1)}$

$a_4=\dfrac{1}{4\cdot 5}=\dfrac{1}{4\cdot(4+1)}$

$a_5=\dfrac{1}{5\cdot 6}=\dfrac{1}{5\cdot(5+1)}$

$\vdots$

따라서 주어진 수열의 일반항은

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$$

(3) $a_1=1=\dfrac{1}{9}\cdot 9=\dfrac{1}{9}(10-1)$

$a_2=11=\dfrac{1}{9}\cdot 99=\dfrac{1}{9}(10^2-1)$

$a_3=111=\dfrac{1}{9}\cdot 999=\dfrac{1}{9}(10^3-1)$

$a_4=1111=\dfrac{1}{9}\cdot 9999=\dfrac{1}{9}(10^4-1)$

$a_5=11111=\dfrac{1}{9}\cdot 99999=\dfrac{1}{9}(10^5-1)$

$\vdots$

따라서 주어진 수열의 일반항은

$$a_n=\frac{1}{9}(10^n-1)$$

답 예 (1) $a_n=n^2$ (2) $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ (3) $a_n=\dfrac{1}{9}(10^n-1)$

087-❶ (1) 공차를 d라 하면 제10항이 2이므로

$20+(10-1)d=2,\qquad 9d=-18$

$\therefore\ d=-2$

(2) 주어진 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면 첫째항이 5, 공차가 $8-5=3$이므로

$a_n=5+(n-1)\cdot 3=3n+2$

제n항이 29라 하면

$3n+2=29,\qquad 3n=27$

$\therefore\ n=9$

따라서 29는 제9항이다.

(3) 주어진 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면 첫째항이 70, 공차가 $66-70=-4$이므로

$a_n=70+(n-1)\cdot(-4)=-4n+74$

처음으로 0보다 작아지는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $-4n+74<0$에서

$4n>74\qquad \therefore\ n>18.5$

따라서 $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 19이므로 처음으로 0보다 작아지는 항은 제19항이다.

답 (1) -2 (2) 제9항 (3) 제19항

088-❶ 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 제3항과 제9항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$(a+2d)+(a+8d)=0$

$\therefore\ a+5d=0$ …… ㉠

또 제5항이 2이므로

$a+4d=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=10,\ d=-2$

따라서 일반항 a_n은

$a_n=10+(n-1)\cdot(-2)=-2n+12$

답 $a_n=-2n+12$

088-❷ 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라 하면

$a_{10}=a+9d=23$ …… ㉠

$a_{20}=a+19d=53$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ d=3$

따라서 일반항 a_n은

$a_n=-4+(n-1)\cdot 3=3n-7$

제n항이 세 자리 정수라 하면

$100\le 3n-7\le 999$

$\dfrac{107}{3}\le n\le\dfrac{1006}{3}$

$\therefore\ 35.6\times\times\times\le n\le 335.3\times\times\times$

따라서 세 자리 정수가 되는 항은 제36항부터 제335항까지이다.

답 제36항부터 제335항까지

089-❶ 등차수열 32, x_1, x_2, $\cdots$, x_{10}, -34의 공차를 d, 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=32+(n-1)d$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 제12항이 -34이므로

$32+(12-1)d=-34$

$11d=-66$ $\quad\therefore d=-6$

답 -6

089-❷ 수열 5, x_1, x_2, $\cdots$, x_n, 45의 첫째항은 5, 공차는 4이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=5+(n-1)\cdot 4=4n+1$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 제$(n+2)$항이 45이므로

$4(n+2)+1=45$, $\quad 4(n+2)=44$

$n+2=11$ $\quad\therefore n=9$

답 9

090-❶ 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라 하자.

세 수의 합이 18이므로

$(a-d)+a+(a+d)=18$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

세 수의 곱이 120이므로

$(a-d)a(a+d)=120$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $\quad 3a=18$ $\quad\therefore a=6$

$a=6$을 ㉡에 대입하면

$(6-d)\cdot 6\cdot(6+d)=120$

$36-d^2=20$, $\quad d^2=16$

$\therefore d=\pm 4$

따라서 구하는 세 수는 2, 6, 10이므로 구하는 합은

$2^2+6^2+10^2=4+36+100=140$

답 140

090-❷ 삼차방정식 $x^3-6x^2-4x+k=0$의 세 근을 $a-d$, a, $a+d$라 하자.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=6$

$3a=6$ $\quad\therefore a=2$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$를 방정식에 대입하면

$2^3-6\cdot 2^2-4\cdot 2+k=0$

$\therefore k=24$

답 24

090-❸ 등차수열을 이루는 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$라 하자.

네 수의 합이 24이므로

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=24$

$\cdots\cdots$ ㉠

가운데 두 수의 곱이 처음 수와 마지막 수의 곱보다 32가 크므로

$(a-d)(a+d)=(a-3d)(a+3d)+32$

$\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $\quad 4a=24$

$\therefore a=6$

$a=6$을 ㉡에 대입하면

$(6-d)(6+d)=(6-3d)(6+3d)+32$

$36-d^2=36-9d^2+32$, $\quad 8d^2=32$

$d^2=4$ $\quad\therefore d=\pm 2$

따라서 구하는 네 수는 $\quad 0, 4, 8, 12$

답 0, 4, 8, 12

091-❶ 세 수 $4a-3$, a^2+1, 3이 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$a^2+1=\frac{(4a-3)+3}{2}$$

$a^2+1=2a$, $\quad a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$ $\quad\therefore a=1$

따라서 세 수는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$

답 6

091-❷ $f(x)=2x^2+ax$라 하면 $f(x)$를 $x+1$, $x-2$, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 각각

$f(-1)=2-a$, $f(2)=8+2a$, $f(3)=18+3a$

이때 $f(-1)$, $f(2)$, $f(3)$이 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$8+2a=\frac{(2-a)+(18+3a)}{2}$$

$8+2a=10+a$ $\quad\therefore a=2$

답 2

092-❶ $\frac{1}{4}$, a, b, c, d, e, 1이 이 순서로 조화수열을 이루므로 각 항의 역수로 이루어진 수열

$$4, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}, 1$$

은 이 순서로 등차수열을 이룬다.

이 등차수열의 공차를 x라 하면 첫째항이 4, 제7항이 1이므로

$4+(7-1)x=1$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{1}{a}=\frac{7}{2}$, $\frac{1}{b}=3$, $\frac{1}{c}=\frac{5}{2}$, $\frac{1}{d}=2$, $\frac{1}{e}=\frac{3}{2}$이므로

$$a=\frac{2}{7},\ b=\frac{1}{3},\ c=\frac{2}{5},\ d=\frac{1}{2},\ e=\frac{2}{3}$$

답 $a=\frac{2}{7}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{2}{5}$, $d=\frac{1}{2}$, $e=\frac{2}{3}$

092-❷ a, b, c가 이 순서로 조화수열을 이루므로

$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$에서 $\quad b=\frac{2ac}{a+c}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{b}{a-b}+\frac{b}{c-b} &= \frac{\frac{2ac}{a+c}}{a-\frac{2ac}{a+c}}+\frac{\frac{2ac}{a+c}}{c-\frac{2ac}{a+c}}\\ &=\frac{2ac}{a(a+c)-2ac}+\frac{2ac}{c(a+c)-2ac}\\ &=\frac{2ac}{a(a-c)}+\frac{2ac}{c(c-a)}\\ &=\frac{2c}{a-c}+\frac{2a}{c-a}\\ &=\frac{2c-2a}{a-c}\\ &=\frac{-2(a-c)}{a-c}\\ &=-2\end{aligned}$$

답 -2

093-❶ 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_5=\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=130$에서

$a+2d=26$ …… ㉠

$S_8=\frac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=172$에서

$2a+7d=43$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=32$, $d=-3$

$\therefore S_{10}=\frac{10\{2\cdot32+(10-1)\cdot(-3)\}}{2}=185$

답 185

093-❷ 등차수열

$5,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ 41$

의 첫째항이 5, 마지막 항이 41, 항의 개수가 $n+2$, 수열의 합이 230이므로

$\frac{(n+2)(5+41)}{2}=230$

$23(n+2)=230$, $\quad n+2=10$

$\therefore n=8$

따라서 등차수열

$5,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_8,\ 41$

의 공차를 d라 하면 제10항이 41이므로

$5+(10-1)d=41$

$9d=36 \quad \therefore d=4$

답 4

094-❶ 이 수열의 공차를 d라 하면 첫째항부터 제8항까지의 합이 -80이므로

$\frac{8\{2\cdot(-17)+(8-1)d\}}{2}=-80$

$-34+7d=-20 \quad \therefore d=2$

(1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 첫째항이 -17, 공차가 2이므로

$a_n=-17+(n-1)\cdot2=2n-19$

처음으로 양수가 나오는 항은 $a_n>0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $2n-19>0$에서

$2n>19 \quad \therefore n>\frac{19}{2}=9.5$

따라서 처음으로 양수가 나오는 항은 제10항이다.

(2) 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{n\{2\cdot(-17)+(n-1)\cdot2\}}{2}\\&=n(n-18)\\&=n^2-18n\\&=(n-9)^2-81\end{aligned}$$

이므로 $n=9$일 때 S_n이 최소가 된다.

따라서 제9항까지의 합이 최소가 된다.

(3) 제n항까지의 합이 40이 된다고 하면

$S_n=n^2-18n=40$, $\quad n^2-18n-40=0$

$(n+2)(n-20)=0$

$\therefore n=20\ (\because n>0)$

따라서 제20항까지의 합이 40이 된다.

답 (1) 제10항 (2) 제9항 (3) 제20항

095-❶ $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\cdot1^2-3\cdot1=-1$ …… ㉠

$n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=2n^2-3n-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}\\&=4n-5\end{aligned}$$ …… ㉡

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=4n-5$

$a_n>35$에서

$4n-5>35, \quad 4n>40$

$\therefore n>10$

따라서 $a_n>35$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 11이다.

답 11

095-❷ $S_n=3n^2-2n$이므로 $n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=3n^2-2n-\{3(n-1)^2-2(n-1)\}$$
$$=6n-5$$

$a_n=6n-5$에 n 대신 $2n$을 대입하면

$a_{2n}=12n-5=7+(n-1)\cdot12$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 7이고 공차가 12인 등차수열이므로

$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\frac{n\{2\cdot7+(n-1)\cdot12\}}{2}$$
$$=6n^2+n$$

답 $6n^2+n$

중단원 연습 문제

본책 242~245쪽

01 9	**02** 22	**03** 3	**04** $-2,\ 2,\ 6$	
05 26	**06** ⑤	**07** 24		
08 제7항, 최댓값: 196			**09** 1635	**10** ②
11 2	**12** ②	**13** 1 : 2 : 3		**14** ⑤
15 13	**16** 145	**17** 66	**18** 73	**19** 10
20 ②	**21** 18	**22** ①	**23** 37	**24** 16

01 전략 일반항 a_n을 구하여 $|a_n|$의 값이 최소가 되는 자연수 n의 값을 구한다.

풀이 첫째항을 a라 하면

$a_{16}=a+(16-1)\cdot3=20$

$\therefore a=-25$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -25이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=-25+(n-1)\cdot3=3n-28$

이때 $3n-28=0$에서 $n=9.3\times\times\times$이므로

$a_9=3\cdot9-28=-1$

$a_{10}=3\cdot10-28=2$

따라서 $|a_9|=1$, $|a_{10}|=2$이므로 $|a_n|$의 값이 최소가 되는 자연수 n의 값은 9이다.

답 9

02 전략 첫째항을 a, 공차를 d라 하고 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.

풀이 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=10$에서 $\quad a+2d=10$ ······ ㉠

$a_7 : a_9=7 : 8$에서

$(a+6d) : (a+8d)=7 : 8$

$7(a+8d)=8(a+6d)$

$\therefore a=8d$ ······ ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=8,\ d=1$ ··· ❷

$\therefore a_{15}=8+(15-1)\cdot1=22$ ··· ❸

답 22

채점 기준	비율
❶ a, d에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, d의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a_{15}의 값을 구할 수 있다.	30 %

03 전략 제5항이 -7임을 이용하여 공차를 구한다.

풀이 등차수열 $9,\ a,\ b,\ c,\ -7$의 공차를 d, 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=9+(n-1)d$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 제5항이 -7이므로

$9+(5-1)d=-7, \quad 9+4d=-7$

$4d=-16 \quad \therefore d=-4$

$\therefore a=9-4=5,\ b=5-4=1,\ c=1-4=-3$

$\therefore a+b+c=5+1+(-3)=3$

답 3

다른 풀이 b는 9와 -7의 등차중항이므로

$$b=\frac{9+(-7)}{2}=1$$

등차수열 $9,\ a,\ b,\ c,\ -7$의 공차를 d라 하면

$a=b-d,\ c=b+d$

$$\therefore a+b+c=(b-d)+b+(b+d)$$
$$=3b=3\cdot1=3$$

04 전략 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓고, 주어진 조건에 맞는 식을 세운다.

풀이 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라 하자.
세 수의 합이 6이므로
$(a-d)+a+(a+d)=6$ …… ㉠
세 수의 곱이 -24이므로
$(a-d)a(a+d)=-24$ …… ㉡
㉠에서 $3a=6$ $\therefore a=2$
$a=2$를 ㉡에 대입하면
$(2-d)\cdot2\cdot(2+d)=-24$
$4-d^2=-12$
$d^2=16$ $\therefore d=\pm4$
따라서 구하는 세 수는 -2, 2, 6

답 -2, 2, 6

05 전략 $\log 5$는 $\log x$와 $\log y$의 등차중항임을 이용하여 x, y의 값을 구한다.

풀이 $\log 5$는 $\log x$와 $\log y$의 등차중항이므로
$$\log 5=\frac{\log x+\log y}{2}$$
$2\log 5=\log x+\log y$
$\log 5^2=\log xy$ $\therefore xy=25$
x, y는 서로 다른 자연수이므로
$x=1$, $y=25$ 또는 $x=25$, $y=1$
$\therefore x+y=26$

답 26

06 전략 등차수열의 합의 공식을 이용하여 첫째항과 공차를 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$S_4=28$에서
$$\frac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=28$$
$\therefore 2a+3d=14$ …… ㉠
$S_9=153$에서
$$\frac{9\{2a+(9-1)d\}}{2}=153$$
$\therefore a+4d=17$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=1$, $d=4$
$$\therefore S_{15}=\frac{15\{2\cdot1+(15-1)\cdot4\}}{2}=435$$

답 ⑤

07 전략 등차수열의 합의 공식을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)$
$+(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6)$
$=\dfrac{6(a_1+a_6)}{2}+\dfrac{6(b_1+b_6)}{2}$
$=3(a_1+b_1+a_6+b_6)$
$=3(-4+a_6+b_6)$
즉 $3(-4+a_6+b_6)=60$이므로
$a_6+b_6=24$

답 24

08 전략 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 n에 대한 이차식으로 나타낸 후, 이차식의 최대·최소를 이용한다.

풀이 첫째항이 52, 공차가 -8이므로 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면
$$S_n=\frac{n\{2\cdot52+(n-1)\cdot(-8)\}}{2}$$
$=-4n^2+56n$
$=-4(n-7)^2+196$
따라서 $n=7$, 즉 제7항까지의 합이 최대가 되고, 그때의 최댓값은 196이다.

답 제7항, 최댓값: 196

다른 풀이 첫째항이 52, 공차가 -8이므로 주어진 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면
$a_n=52+(n-1)\cdot(-8)=-8n+60$
처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $-8n+60<0$에서
$-8n<-60$ $\therefore n>\dfrac{60}{8}=7.5$
따라서 $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8이므로 처음으로 음수가 되는 항은 제8항이다. 즉 주어진 등차수열은 첫째항부터 제7항까지가 양수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대가 된다.
첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 S_n의 최댓값은
$$S_7=\frac{7\{2\cdot52+(7-1)\cdot(-8)\}}{2}=196$$

09 전략 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 두 자리 자연수를 작은 것부터 순서대로 나열하면 공차가 3인 등차수열임을 이용한다.

풀이 두 자리 자연수 중에서 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 수를 작은 것부터 순서대로 나열하면
11, 14, 17, …, 98

이므로 이 수열은 첫째항이 11, 공차가 3인 등차수열이다.
이 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=11+(n-1)\cdot 3=3n+8$$

$3n+8=98$에서 $n=30$이므로 98은 제30항이다.
따라서 위의 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 구하는 합은

$$S_{30}=\frac{30(11+98)}{2}=1635$$

답 1635

10 전략 구하는 값을 S_n을 이용하여 나타내어 본다.

풀이 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20})$
$\quad-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$
$=S_{20}-S_{10}$
$=(20^2-20)-(10^2-10)$
$=380-90=290$

답 ②

11 전략 $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한 후 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n을 구한다.

풀이 $n=1$일 때,

$a_1=S_1=4\cdot 1^2-24\cdot 1=-20$ ...... ㉠

$n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=4n^2-24n-\{4(n-1)^2-24(n-1)\}$
$=8n-28$ ...... ㉡

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=8n-28$ ··· ❶

$5\leq a_n\leq 20$에서

$5\leq 8n-28\leq 20$

$\therefore \frac{33}{8}\leq n\leq 6$ ··· ❷

따라서 $5\leq a_n\leq 20$을 만족시키는 자연수 n은 5, 6의 2개이다. ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ $5\leq a_n\leq 20$을 만족시키는 자연수 n의 개수를 구할 수 있다.	20 %

12 전략 일반항에 n 대신 $2n$ 또는 $n-1$을 대입하거나 반례를 찾아 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. $a_n=5n$에 n 대신 $2n$을 대입하면

$a_{2n}=5\cdot 2n=10n$

ㄴ. $n+1=k$로 놓으면 $n=k-1$이므로

$a_{n+1}=2n+1$에서

$a_k=2(k-1)+1=2k-1$

$\therefore a_n=2n-1\ (n\geq 2)$

ㄷ. [반례] 수열 $\{a_n\}$이 0, 2, 0, 8, 0, 18, …이면 $a_{2n}=2n^2$이지만 $a_n\neq n^2$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

13 전략 y는 x와 z의 등차중항, y^2은 $-x^2$과 z^2의 등차중항임을 이용하여 x, y, z 사이의 관계식을 세운다.

풀이 y는 x와 z의 등차중항이므로

$y=\frac{x+z}{2}$ ...... ㉠

y^2은 $-x^2$과 z^2의 등차중항이므로

$y^2=\frac{-x^2+z^2}{2}$

$=\frac{(x+z)(-x+z)}{2}$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면

$y=-x+z$ ...... ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$-x+z=\frac{x+z}{2}$

$-2x+2z=x+z$

$\therefore z=3x$

$z=3x$를 ㉢에 대입하면

$y=-x+3x=2x$

$\therefore x:y:z=x:2x:3x=1:2:3$

답 1 : 2 : 3

14 전략 공차를 d로 놓고 6개의 내각의 크기의 합을 d에 대한 식으로 나타낸 후, 육각형의 내각의 크기의 합을 이용한다.

풀이 첫째항은 $90°$이고 공차를 d라 하면 6개의 내각의 크기의 합은

$$\frac{6\{2\cdot 90°+(6-1)d\}}{2}=540°+15d$$

육각형의 내각의 크기의 합은

$180° \times (6-2) = 720°$

이므로

$540° + 15d = 720°$, $\quad 15d = 180°$

$\therefore d = 12°$

따라서 가장 큰 내각의 크기는

$90° + 5 \times 12° = 150°$

답 ⑤

Remark▶ 다각형의 내각의 크기의 합

n각형의 내각의 크기의 합은 $\quad 180° \times (n-2)$

15 전략 먼저 $a_7 a_8 < 0$임을 이용하여 공차 d를 구한다.

풀이 $a_7 a_8 < 0$에서

$(19+6d)(19+7d) < 0$

$\therefore -\frac{19}{6} < d < -\frac{19}{7}$

그런데 d는 정수이므로 $\quad d = -3$ ⋯ ❶

$\therefore S_n = \frac{n\{2\cdot 19 + (n-1)\cdot(-3)\}}{2}$

$= \frac{n(-3n+41)}{2}$ ⋯ ❷

$S_n > 0$에서

$\frac{n(-3n+41)}{2} > 0$, $\quad n(3n-41) < 0$

$\therefore 0 < n < \frac{41}{3}$ ⋯ ❸

따라서 S_n이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 최댓값은 13이다. ⋯ ❹

답 13

채점 기준	비율
❶ d의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ S_n을 구할 수 있다.	20 %
❸ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ 자연수 n의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

16 전략 등차수열의 합의 공식을 이용하여 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공차가 3이므로

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$= \frac{n\{2\cdot 1 + (n-1)\cdot 3\}}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$

$\therefore \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} = \frac{3n-1}{2}$

$b_n = \frac{3n-1}{2}$이라 하면 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 $\frac{3}{2}$인 등차수열이므로 수열 b_1, b_3, b_5, ⋯는 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이다.

$\therefore$ (주어진 식) $= b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{19}$

$= \frac{10(b_1 + b_{19})}{2}$

$= \frac{10(1+28)}{2}$

$= 145$

답 145

다른 풀이 $a_n = 1 + (n-1)\cdot 3 = 3n-2$이고

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = \frac{(2n-1)(a_1 + a_{2n-1})}{2}$

이때 a_n은 a_1과 a_{2n-1}의 등차중항이므로

$a_n = \frac{a_1 + a_{2n-1}}{2}$

$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = (2n-1)a_n$

$\therefore$ (주어진 식)

$= a_1 + \frac{3a_2}{3} + \frac{5a_3}{5} + \cdots + \frac{19a_{10}}{19}$

$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$

$= \frac{10(a_1 + a_{10})}{2}$

$= \frac{10(1+28)}{2} = 145$

17 전략 $a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 $n=1$일 때,

$a_1 = S_1 = -2\cdot 1^2 + 23\cdot 1 = 21$ ⋯⋯ ㉠

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= -2n^2 + 23n - \{-2(n-1)^2 + 23(n-1)\}$

$= -4n + 25$ ⋯⋯ ㉡

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n = -4n + 25$ ⋯ ❶

$a_n > 0$에서 $\quad -4n + 25 > 0$

$\therefore n < \frac{25}{4} = 6.25$

따라서 $a_n > 0$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값이 6이므로 첫째항부터 제6항까지는 양수이다. ⋯ ❷

따라서 구하는 합은 첫째항부터 제6항까지의 합이므로

$S_6 = -2\cdot 6^2 + 23\cdot 6 = 66$ ⋯ ❸

답 66

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ 양수인 항은 제몇 항부터 제몇 항까지인지 구할 수 있다.	40 %
❸ 수열 $\{a_n\}$의 모든 양수인 항의 합을 구할 수 있다.	20 %

18 전략 일반항 a_n을 구하여 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는

$a_2-a_1=3-1=2$

$\therefore a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=S_n$이라 하면

$S_n=a_n^2=(2n-1)^2$

이므로

$b_1=S_1=(2\cdot 1-1)^2=1$

$b_{10}=S_{10}-S_9$

$=(2\cdot 10-1)^2-(2\cdot 9-1)^2$

$=19^2-17^2=72$

$\therefore b_1+b_{10}=1+72=73$

답 73

다른 풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는

$a_2-a_1=3-1=2$

$\therefore a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=S_n$이라 하면

$S_n=a_n^2=(2n-1)^2$

$n=1$일 때,

$b_1=S_1=(2\cdot 1-1)^2=1$ …… ㉠

$n\geq 2$일 때,

$b_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n-1)^2-\{2(n-1)-1\}^2$

$=8n-8$ …… ㉡

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 다르므로

$b_1=1,\ b_n=8n-8\ (n\geq 2)$

$\therefore b_1+b_{10}=1+(8\cdot 10-8)=73$

19 전략 첫째항을 a, 공차를 d로 놓고 주어진 조건을 이용하여 a, d에 대한 식을 세운다.

풀이 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=16$에서 $a+d=16$ …… ㉠

$a_5=10$에서 $a+4d=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=18,\ d=-2$

따라서 $a_k=0$에서

$18+(k-1)\cdot(-2)=0$

$-2k=-20 \quad \therefore k=10$

답 10

20 전략 첫째항을 a로 놓고 주어진 조건을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 공차가 6이므로 첫째항을 a라 하면

$a_2=a+6,\ a_3=a+2\cdot 6=a+12$

$|a_2-3|=|a_3-3|$이므로

$|a+6-3|=|a+12-3|$

$|a+3|=|a+9|$

이때 $a+3\neq a+9$이므로

$a+3=-(a+9)$

즉 $2a=-12$이므로

$a=-6$

$\therefore a_5=-6+(5-1)\cdot 6=18$

답 ②

다른 풀이 $|a_2-3|=|a_3-3|$이므로 절댓값의 정의에 의하여 a_2, a_3을 좌표로 하는 점에서 3을 좌표로 하는 점까지의 거리가 같다.

즉 $\dfrac{a_2+a_3}{2}=3$이므로 $\quad a_2+a_3=6$

수열 $\{a_n\}$의 공차가 6이므로 첫째항을 a라 하면

$(a+6)+(a+2\cdot 6)=6 \quad \therefore a=-6$

$\therefore a_5=-6+(5-1)\cdot 6=18$

21 전략 세 선분 AD, CD, AB의 길이를 각각 $a-d$, a, $a+d$로 놓고 닮은 두 삼각형의 대응하는 변의 길이의 비가 같음을 이용한다.

풀이 $\overline{AD}=a-d$, $\overline{CD}=a$, $\overline{AB}=a+d\ (a>d>0)$라 하자.

$\triangle ABD \backsim \triangle ACB$이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AD}:\overline{AB}$

$\overline{AB}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AD}$

$(a+d)^2=\{(a-d)+a\}(a-d)$

$=(2a-d)(a-d)$

$a^2+2ad+d^2=2a^2-3ad+d^2$

$a^2=5ad \quad \therefore a=5d\ (\because a\neq 0)$

$\therefore \overline{AD}=5d-d=4d,\ \overline{CD}=5d,$

$\overline{AB}=5d+d=6d$

$\triangle ABC$에서 $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2$이므로

$(6\sqrt{5})^2=(9d)^2-(6d)^2$

$180=45d^2, \quad d^2=4$

$\therefore d=2\ (\because d>0)$

$\therefore \overline{AC}=9d=9\cdot 2=18$

답 18

Remark▶

$\triangle ABD$와 $\triangle ACB$에서

$\angle A$는 공통, $\angle ADB=\angle ABC=90°$

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle ACB$ (AA 닮음)

22 전략 a_6과 a_8의 등차중항이 a_7임을 이용하여 공차를 구한다.

풀이 a_7은 a_6과 a_8의 등차중항이므로 조건 (가)에서

$$a_6+a_8=2a_7=0$$

$$\therefore a_7=0$$

$a_7=0$을 조건 (나)의 식에 대입하면

$$|a_6|=|a_7|+3=0+3=3$$

$$a_6=-3 \ (\because a_6<a_7)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $d=a_7-a_6=3$이므로 $\quad a_2=a_6-4d=-15$

답 ①

23 전략 S_n을 n에 대한 식으로 나타낸 후, n이 자연수임을 이용하여 자연수 a의 최댓값을 구한다.

풀이 $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}$

$$=-2n^2+(a+2)n$$

모든 자연수 n에 대하여 $S_n<200$이므로

$$-2n^2+(a+2)n<200$$

$$2n^2-(a+2)n+200>0$$

양변을 n으로 나누면

$$2n-(a+2)+\frac{200}{n}>0$$

$$2n+\frac{200}{n}>a+2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $n>0$이므로

$$2n+\frac{200}{n}\ge 2\sqrt{2n\cdot\frac{200}{n}}=40$$

(단, 등호는 $n=10$일 때 성립)

따라서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립하려면

$$40>a+2 \qquad \therefore a<38$$

따라서 자연수 a의 최댓값은 37이다.

답 37

다른 풀이 $S_n=-2n^2+(a+2)n$이므로

$$-2n^2+(a+2)n<200$$

모든 자연수 n에 대하여 $2n^2-(a+2)n+200>0$이어야 하므로 이차방정식 $2n^2-(a+2)n+200=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+2)^2-4\cdot2\cdot200<0$$

$$(a+2)^2<1600, \qquad -40<a+2<40$$

$$\therefore -42<a<38$$

따라서 자연수 a의 최댓값은 37이다.

24 전략 S_{2n-1}, S_{2n}을 n에 대한 식으로 나타내고, 이것을 이용하여 a_8의 값을 구한다.

풀이 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 공차가 -3인 등차수열이므로

$$S_{2n-1}=S_1+(n-1)\cdot(-3)=S_1-3n+3$$

수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 2인 등차수열이므로

$$S_{2n}=S_2+(n-1)\cdot2=S_2+2n-2$$

$$\begin{aligned}\therefore a_8&=S_8-S_7\\&=(S_2+2\cdot4-2)-(S_1-3\cdot4+3)\\&=S_2-S_1+15\\&=a_2+15 \ (\because a_2=S_2-S_1)\\&=1+15 \ (\because a_2=1)\\&=16\end{aligned}$$

답 16

Ⅳ. 수열

09 등비수열

유제

본책 251~263쪽

096-❶ 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_n=ar^{n-1}$

$a_1+a_2=12$에서 $a+ar=12$

$\therefore a(1+r)=12$ …… ㉠

$a_4+a_5=324$에서 $ar^3+ar^4=324$

$\therefore ar^3(1+r)=324$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=27$ $\therefore r=3$ ($\because$ r는 실수)

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$4a=12$ $\therefore a=3$

$\therefore a_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

답 $a_n=3^n$

096-❷ 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하자.

$a_4=54$이므로 $ar^3=54$ …… ㉠

$a_6=486$이므로 $ar^5=486$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=9$ $\therefore r=3$ ($\because r>0$)

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$27a=54$ $\therefore a=2$

$\therefore a_n=2\cdot 3^{n-1}$

$2\cdot 3^{n-1}>600000$에서

$3^{n-1}>300000$

위의 식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 3^{n-1}>\log 300000$

$(n-1)\log 3>\log 3+5$

$0.48(n-1)>0.48+5$

$0.48n>5.96$

$\therefore n>12.4\times\times\times$

따라서 처음으로 600000보다 커지는 항은 제13항이다.

답 제13항

097-❶ 등비수열 400, a, b, c, $\frac{25}{16}$의 공비를 r $(r>0)$, 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=400\cdot r^{n-1}$

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 제5항이 $\frac{25}{16}$이므로

$400r^4=\frac{25}{16}$, $r^4=\frac{1}{256}$

$\therefore r=\frac{1}{4}$ ($\because r>0$)

답 $\frac{1}{4}$

097-❷ 등비수열 4, x_1, x_2, x_3, x_4, $\frac{243}{256}$의 공비를 r, 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=4\cdot r^{n-1}$

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 제6항이 $\frac{243}{256}$이므로

$4r^5=\frac{243}{256}$, $r^5=\frac{243}{1024}=\left(\frac{3}{4}\right)^5$

$\therefore r=\frac{3}{4}$ ($\because$ r는 실수)

$\therefore a_n=4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

x_3은 제4항이므로

$x_3=a_4=4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{16}$

답 $\frac{27}{16}$

098-❶ 등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2이라 하자.

세 실수의 합이 42이므로 $a+ar+ar^2=42$

$\therefore a(1+r+r^2)=42$ …… ㉠

세 실수의 곱이 512이므로 $a\cdot ar\cdot ar^2=512$

$(ar)^3=512$ $\therefore ar=8$ ($\because$ ar는 실수)

즉 $a=\frac{8}{r}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{8}{r}(1+r+r^2)=42$

양변에 r를 곱하여 정리하면

$8r^2-34r+8=0$, $4r^2-17r+4=0$

$(4r-1)(r-4)=0$ $\therefore r=\frac{1}{4}$ 또는 $r=4$

$r=\frac{1}{4}$일 때 $a=32$, $r=4$일 때 $a=2$이므로 구하는 세 수는 2, 8, 32

답 2, 8, 32

098-❷ 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 방정식

$x^3-2x^2+2x=x+k$, 즉 $x^3-2x^2+x-k=0$

의 세 근이다. 세 근이 등비수열을 이루므로 세 근을 a, ar, ar^2이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=2$ …… ㉠

$a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot a=1$ …… ㉡

$a\cdot ar\cdot ar^2=k$ …… ㉢

㉡에서 $ar(a+ar+ar^2)=1$이므로 여기에 ㉠을 대입하면

$ar\cdot 2=1$ $\therefore ar=\frac{1}{2}$

㉢에서 $(ar)^3=k$이므로

$k=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

답 $\frac{1}{8}$

Remark▶ 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

099-❶ 50 %를 1번 적용하면 사진의 넓이는

$$1024\cdot\frac{1}{2}\ \text{cm}^2$$

50 %를 2번 적용하면 사진의 넓이는

$$1024\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1024\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2(\text{cm}^2)$$

50 %를 3번 적용하면 사진의 넓이는

$$1024\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=1024\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3(\text{cm}^2)$$

50 %를 n번 적용하면 사진의 넓이는

$$1024\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\ \text{cm}^2$$

$1024\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=8$에서

$$2^{10}\cdot2^{-n}=2^3,\qquad 2^{10-n}=2^3$$

$$10-n=3\qquad \therefore n=7$$

따라서 넓이가 8 cm^2가 되려면 50 %를 적용하는 과정을 7번 반복해야 한다. **답** 7번

099-❷ 한 변의 길이가 10인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot10^2=25\sqrt{3}$$

1회 시행 후에 남아 있는 종이의 넓이는

$$25\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}$$

2회 시행 후에 남아 있는 종이의 넓이는

$$25\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=25\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

3회 시행 후에 남아 있는 종이의 넓이는

$$25\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}=25\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$\vdots$$

n회 시행 후에 남아 있는 종이의 넓이는

$$25\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

따라서 10회 반복했을 때, 남아 있는 종이의 넓이는

$$25\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$ **답** $25\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

100-❶ 세 수 $x-2$, $x+2$, $x+7$이 이 순서로 등비수열을 이루므로 $x+2$는 $x-2$와 $x+7$의 등비중항이다. 즉

$$(x+2)^2=(x-2)(x+7)$$

$$x^2+4x+4=x^2+5x-14$$

$$\therefore x=18$$ **답** 18

100-❷ a는 4와 b의 등비중항이므로

$$a^2=4b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

c는 b와 36의 등비중항이므로

$$c^2=36b \qquad \cdots\cdots ㉡$$

b는 a와 c의 등차중항이므로

$$2b=a+c \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$c^2=9\cdot4b=9a^2$$

$$\therefore c=3a\ (\because a,\ c\text{는 양수})$$

$c=3a$를 ㉢에 대입하면

$$2b=4a\qquad \therefore b=2a$$

$b=2a$를 ㉠에 대입하면

$$a^2=8a,\qquad a(a-8)=0$$

$$\therefore a=0\ \text{또는}\ a=8$$

그런데 a는 양수이므로 $a=8$

$b=2a$, $c=3a$이므로

$$b=16,\ c=24$$ **답** $a=8$, $b=16$, $c=24$

101-❶ (1) 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{3}$인 등비수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=(\sqrt{3})^{n-1}$$

이때 27을 제n항이라 하면

$$(\sqrt{3})^{n-1}=27,\qquad (\sqrt{3})^{n-1}=(\sqrt{3})^6$$

$$n-1=6\qquad \therefore n=7$$

따라서 주어진 수열의 합은 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$$\frac{1\cdot\{(\sqrt{3})^7-1\}}{\sqrt{3}-1}=\frac{27\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$
$$=\frac{(27\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{80+26\sqrt{3}}{2}$$
$$=40+13\sqrt{3}$$

(2) $\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^3}+\cdots+2$

$$=\frac{1}{2^5}(1+2+2^2+\cdots+2^6)$$
$$=\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1\cdot(2^7-1)}{2-1}$$
$$=\frac{127}{32}$$

(3) 첫째항이 1, 공비가 i인 등비수열이고 i^{60}은 제61항이므로 주어진 수열의 합은

$$\frac{1\cdot(1-i^{61})}{1-i}=\frac{1-(i^4)^{15}\cdot i}{1-i}$$
$$=\frac{1-i}{1-i}$$
$$=1$$

(4) $\log_3 9=\log_3 3^2=2$이므로

$$\log_3 9+\log_3 9^2+\log_3 9^4+\cdots+\log_3 9^{1024}$$
$$=\log_3 9+2\log_3 9+4\log_3 9+\cdots+1024\log_3 9$$
$$=2+2\cdot2+4\cdot2+\cdots+1024\cdot2$$
$$=2(1+2+4+\cdots+1024)$$
$$=2(1+2+2^2+\cdots+2^{10})$$
$$=2\cdot\frac{1\cdot(2^{11}-1)}{2-1}=2(2048-1)$$
$$=4094$$

답 (1) $40+13\sqrt{3}$ (2) $\frac{127}{32}$ (3) 1 (4) 4094

다른 풀이 (3) $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$이므로

$$i+i^2+i^3+i^4=0$$
$$\therefore 1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{60}$$
$$=1+(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)+\cdots+(i^{57}+i^{58}+i^{59}+i^{60})$$
$$=1+(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+i^{56}(i+i^2+i^3+i^4)$$
$$=1$$

102-❶ 주어진 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$S_3=2$에서

$$\frac{a(r^3-1)}{r-1}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$S_6=18$에서

$$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=18 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2(r^3+1)=18, \quad r^3+1=9$$
$$r^3=8 \quad \therefore r=2 \ (\because r\text{는 실수})$$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$$7a=2 \quad \therefore a=\frac{2}{7}$$
$$\therefore S_n=\frac{\frac{2}{7}(2^n-1)}{2-1}=\frac{2}{7}(2^n-1)$$

답 $S_n=\frac{2}{7}(2^n-1)$

102-❷ 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=36 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$S_{2n}=\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}$$
$$=\frac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1}=54 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$36(r^n+1)=54$$
$$r^n+1=\frac{3}{2} \quad \therefore r^n=\frac{1}{2}$$
$$\therefore S_{3n}=\frac{a(r^{3n}-1)}{r-1}$$
$$=\frac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}$$
$$=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\cdot(r^{2n}+r^n+1)$$
$$=36\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1\right\}=63$$

답 63

102-❸ 주어진 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{5(2^n-1)}{2-1}=5(2^n-1)$$

합이 처음으로 500보다 커지는 항은 $S_n>500$을 만족시키는 최초의 항이므로 $5(2^n-1)>500$에서

$$2^n-1>100 \quad \therefore 2^n>101$$

이때 $2^6=64$, $2^7=128$이므로 $n\ge7$

따라서 $S_n>500$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 7이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 처음으로 500보다 커진다.

답 7

103-❶ $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=3^1-1=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)$$
$$=2\cdot3^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n=2\cdot3^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이다.

답 풀이 참조

103-❷ $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=5\cdot4-5=15 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$n\ge2$일 때,

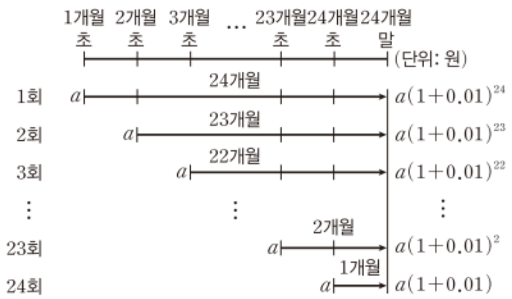
$$a_n=S_n-S_{n-1}=(5\cdot4^n-5)-(5\cdot4^{n-1}-5)$$
$$=15\cdot4^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n=15\cdot4^{n-1}$$

답 $a_n=15\cdot4^{n-1}$

104-❶ 매월 초에 적립해야 하는 금액을 a원이라 하고, 매월 적립해야 하는 a원의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 2년째 말의 적립금의 원리합계는

$$a(1+0.01)+a(1+0.01)^2+\cdots+a(1+0.01)^{24}\text{(원)}$$

이고, 이 값이 300만 원이 되어야 하므로

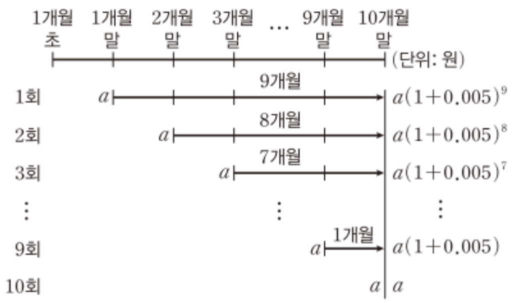
$$\frac{a\times1.01(1.01^{24}-1)}{1.01-1}=3000000$$

$$\therefore a=\frac{3000000\times0.01}{1.01(1.01^{24}-1)}$$
$$=\frac{30000}{1.01(1.27-1)}$$
$$=110011.\times\times\times\text{(원)}$$

이때 천의 자리에서 반올림하므로 매월 초에 적립해야 하는 금액은 11만 원이다.

답 11만 원

104-❷ 매월 말에 적립해야 하는 금액을 a원이라 하고, 매월 적립해야 하는 a원의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 10개월째 말의 적립금의 원리합계는

$$a+a(1+0.005)+a(1+0.005)^2$$
$$+\cdots+a(1+0.005)^9$$
$$=\frac{a(1.005^{10}-1)}{1.005-1}$$
$$=\frac{a(1.051-1)}{0.005}$$
$$=10.2a\text{ (원)}$$

이고, 이 값이 30만 원이 되어야 하므로

$$10.2a=300000$$
$$\therefore a=29411.\times\times\times\text{(원)}$$

이때 백 원 미만은 버리므로 영은이가 매월 말에 적립해야 하는 금액은 29400원이다.

답 29400원

중단원 연습 문제

본책 264~267쪽

01 $\frac{4}{3}$	**02** 20	**03** ③	**04** 5	
05 $6\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{12}$ m	**06** 28	**07** ④	**08** ④	
09 7	**10** ④	**11** 31	**12** $2\sqrt{3}$	**13** ②
14 ④	**15** 16	**16** 12	**17** ②	**18** 108
19 ③	**20** ④			

01 전략 첫째항을 a, 공비를 r로 놓고 주어진 조건을 이용하여 a, r의 값을 구한다.

풀이 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$a_n=ar^{n-1}$$

$a_2+a_5=24$에서

$$ar+ar^4=24$$
$$\therefore ar(1+r^3)=24 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$a_4+a_7=96$에서

$$ar^3+ar^6=96$$
$$\therefore ar^3(1+r^3)=96 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면

$$r^2=4 \qquad \therefore r=2\ (\because r>0)$$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$$2a(1+2^3)=24 \qquad \therefore a=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

02 전략 먼저 a_n을 구한 후 이를 이용하여 $5a_{n+1}-a_n$을 구한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비가 모두 2이므로

$a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$ ⋯ ❶

$5a_{n+1}-a_n=5\cdot2^{n+1}-2^n$
$=10\cdot2^n-2^n$
$=9\cdot2^n=18\cdot2^{n-1}$ ⋯ ❷

따라서 수열 $\{5a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 18, 공비가 2인 등비수열이므로

$a=18$, $r=2$ ⋯ ❸

$\therefore a+r=20$ ⋯ ❹

답 20

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	30 %
❷ $5a_{n+1}-a_n$을 구할 수 있다.	40 %
❸ a, r의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $a+r$의 값을 구할 수 있다.	10 %

03 전략 등비수열 1, a, b, 64에서 첫째항은 1이고, 64는 제4항임을 이용하여 공비를 구한다.

풀이 등비수열 1, a, b, 64의 공비를 r, 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=r^{n-1}$

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 제4항이 64이므로

$r^3=64$ $\therefore r=4$ ($\because r$는 실수)

$\therefore a_n=4^{n-1}$

a, b는 각각 제2항, 제3항이므로

$a=4^{2-1}=4$, $b=4^{3-1}=16$

$\therefore |a-b|=12$

답 ③

04 전략 등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓고, 주어진 조건에 맞는 식을 세운다.

풀이 등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2이라 하자.

세 실수의 합이 35이므로 $a+ar+ar^2=35$

$\therefore a(1+r+r^2)=35$ ⋯⋯ ㉠

세 실수의 곱이 1000이므로

$a\cdot ar\cdot ar^2=1000$

$(ar)^3=1000$ $\therefore ar=10$ ($\because ar$는 실수)

즉 $a=\frac{10}{r}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{10}{r}(1+r+r^2)=35$

양변에 r를 곱하여 정리하면

$10r^2-25r+10=0$

$2r^2-5r+2=0$

$(2r-1)(r-2)=0$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=2$

$r=\frac{1}{2}$일 때 $a=20$, $r=2$일 때 $a=5$이므로 세 수는 5, 10, 20이다.

따라서 가장 작은 수는 5이다.

답 5

05 전략 처음 몇 번의 튀어 오른 공의 높이를 직접 구하여 첫째항과 공비를 찾는다.

풀이 첫 번째 튀어 오른 공의 높이는 $6\cdot\frac{4}{5}$ m

두 번째 튀어 오른 공의 높이는

$6\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=6\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2$(m)

세 번째 튀어 오른 공의 높이는

$6\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{4}{5}=6\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3$(m)

⋮

n번째 튀어 오른 공의 높이는 $6\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n$ m

따라서 12번째 튀어 오른 공의 높이는 $6\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{12}$ m이다.

답 $6\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{12}$ m

06 전략 3은 x와 y의 등차중항이고 2는 x와 y의 등비중항임을 이용하여 x, y에 대한 식을 세운다.

풀이 3은 x와 y의 등차중항이므로

$3=\frac{x+y}{2}$ $\therefore x+y=6$

2는 x와 y의 등비중항이므로

$2^2=xy$ $\therefore xy=4$ ⋯ ❶

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=6^2-2\cdot4=28$ ⋯ ❷

답 28

채점 기준	비율
❶ x, y에 대한 식을 세울 수 있다.	60 %
❷ x^2+y^2의 값을 구할 수 있다.	40 %

07 전략 $\{a_n\}$이 등차수열임을 이용하여 a_2, a_6, a_8을 a_1에 대한 식으로 나타낸 후 a_6이 a_2와 a_8의 등비중항임을 이용한다.

풀이 $a_2=a_1+3$, $a_6=a_1+5\cdot3=a_1+15$, $a_8=a_1+7\cdot3=a_1+21$이고 a_1+3, a_1+15, a_1+21이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$(a_1+15)^2=(a_1+3)(a_1+21)$$
$$a_1^2+30a_1+225=a_1^2+24a_1+63$$
$$6a_1=-162 \qquad \therefore a_1=-27$$
$$\therefore a_{20}=-27+19\cdot3=30$$

답 ④

08

전략 $\log_a x^b=b\log_a x$임을 이용하여 주어진 합을 등비수열의 합을 포함한 꼴로 변형한다.

풀이 $\log_2 4=\log_2 2^2=2$이므로

$$\log_2 4+\log_2 4^3+\log_2 4^9+\cdots+\log_2 4^{3^{10}}$$
$$=\log_2 4+3\log_2 4+3^2\log_2 4+\cdots+3^{10}\log_2 4$$
$$=2+3\cdot2+3^2\cdot2+\cdots+3^{10}\cdot2$$
$$=2(1+3+3^2+\cdots+3^{10})$$
$$=2\cdot\frac{1\cdot(3^{11}-1)}{3-1}$$
$$=3^{11}-1$$

답 ④

09

전략 첫째항을 a, 공비를 r로 놓고 등비수열의 합의 공식을 이용하여 a, r에 대한 세 개의 식을 세운다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$S_5=1$에서

$$\frac{a(1-r^5)}{1-r}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠ \qquad \cdots ❶$$

$S_{10}=3$에서

$$\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=\frac{a(1-r^5)(1+r^5)}{1-r}=3 \qquad \cdots\cdots ㉡ \qquad \cdots ❷$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$1+r^5=3 \qquad \therefore r^5=2 \qquad \cdots ❸$$
$$\therefore S_{15}=\frac{a(1-r^{15})}{1-r}$$
$$=\frac{a(1-r^5)(1+r^5+r^{10})}{1-r}$$
$$=\frac{a(1-r^5)}{1-r}\cdot(1+r^5+r^{10})$$
$$=1\cdot(1+2+2^2)=7 \qquad \cdots ❹$$

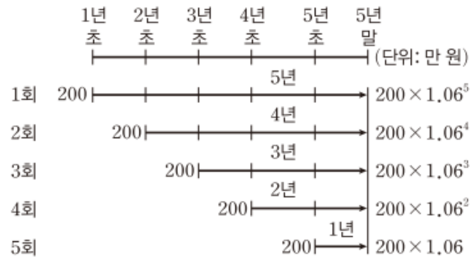
답 7

채점 기준	비율
❶ S_5를 a, r로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ S_{10}을 a, r로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ r^5의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ S_{15}의 값을 구할 수 있다.	30 %

10

전략 조건을 그림으로 나타낸 후 적립금의 원리합계를 구한다.

풀이 매년 초에 적립하는 200만 원의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 5년째 말의 적립금의 원리합계는

$$200\times1.06+200\times1.06^2+\cdots+200\times1.06^5$$
$$=\frac{200\times1.06(1.06^5-1)}{1.06-1}$$
$$=\frac{212(1.34-1)}{0.06}$$
$$=1201.\times\times\times(\text{만 원})$$

이때 만 원 미만은 버리므로 5년째 말의 적립금의 원리합계는 1201만 원이다.

답 ④

11

전략 주어진 등비수열에서 첫째항은 2이고 128은 제8항임을 이용하여 공비에 대한 식을 구한다.

풀이 등비수열 2, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, 128의 공비를 r, 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=2\cdot r^{n-1}$$

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 제8항이 128이므로

$$2\cdot r^7=128 \qquad \therefore r^7=64$$

위의 식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$7\log_2 r=\log_2 64, \qquad 7\log_2 r=6$$
$$\therefore \log_2 r=\frac{6}{7}$$

x_4는 등비수열 $\{a_n\}$의 제5항이므로

$$7\log_2 x_4=7\log_2(2\cdot r^4)=7(1+4\log_2 r)$$
$$=7\left(1+4\cdot\frac{6}{7}\right)=7+24=31$$

답 31

12

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계와 a는 α와 β의 등차중항, b는 α와 β의 등비중항임을 이용하여 식을 세운다.

풀이 이차방정식 $x^2+(a+6)x+2b-1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-a-6, \ \alpha\beta=2b-1 \qquad \cdots\cdots ㉠ \qquad \cdots ❶$$

09 등비수열

a는 α와 β의 등차중항이고, b는 α와 β의 등비중항이므로

$2a=\alpha+\beta,\ b^2=\alpha\beta$ …… ㉢ ⋯ ❷

㉠을 ㉡에 대입하면

$2a=-a-6,\ b^2=2b-1$

즉 $3a=-6,\ (b-1)^2=0$이므로

$a=-2,\ b=1$ …… ㉣ ⋯ ❸

㉣을 ㉢에 대입하면

$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=1$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-4)^2-4\cdot1=12$ ⋯ ❹

$\therefore \alpha-\beta=2\sqrt{3}\ (\because \alpha>\beta)$ ⋯ ❺

답 $2\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세울 수 있다.	20 %
❷ 등차중항과 등비중항을 이용하여 식을 세울 수 있다.	20 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❺ $\alpha-\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

13

전략 주어진 합을 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_n=ar^{n-1}$

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=12$에서

$a+ar+\cdots+ar^9=12$

$\therefore a(1+r+\cdots+r^9)=12$ …… ㉠

$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}=48$에서

$ar^{10}+ar^{11}+\cdots+ar^{19}=48$

$\therefore ar^{10}(1+r+\cdots+r^9)=48$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$12r^{10}=48 \quad \therefore r^{10}=4$

$\therefore a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30}=ar^{20}+ar^{21}+\cdots+ar^{29}$

$=ar^{20}(1+r+\cdots+r^9)$

$=12(r^{10})^2$

$=12\cdot4^2=192$

답 ②

14

전략 a_n과 S_n을 구하여 주어진 식에 대입하거나 주어진 수열의 일반항을 구하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 $a_n=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

ㄱ. $2S_n=2\cdot\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$=3-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ …… ㉠

$-3a_{n+1}+3=-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+3=3-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore 2S_n=-3a_{n+1}+3$

ㄴ. $S_n+a_n=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{S_n+a_n\}$은 등비수열이 아니다.

ㄷ. ㉠에서 $2S_n-3=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{2S_n-3\}$은 첫째항이 -1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

15

전략 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\geq2)$임을 이용하여 먼저 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 $n=1$일 때,

$a_1=S_1=4^1-3=1$ …… ㉠

$n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(4^n-3)-(4^{n-1}-3)$

$=4^n-4^{n-1}$

$=4\cdot4^{n-1}-4^{n-1}$

$=3\cdot4^{n-1}$ …… ㉡

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 다르므로

$a_1=1,\ a_n=3\cdot4^{n-1}\ (n\geq2)$

이때 $a_{2n}=3\cdot4^{2n-1}$이므로

$a_{2n}=3\cdot4^{2(n-1)+1}=12\cdot16^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$의 공비는 16이다. 답 16

다른 풀이 수열 $\{a_{2n}\}$은 a_2, a_4, a_6, $\cdots$이므로 공비는 $\frac{a_4}{a_2}$로 구할 수 있다. 이때

$a_2=S_2-S_1,\ a_4=S_4-S_3$

이므로

$$\frac{a_4}{a_2}=\frac{S_4-S_3}{S_2-S_1}$$

$$=\frac{(4^4-3)-(4^3-3)}{(4^2-3)-(4-3)}$$

$$=\frac{192}{12}=16$$

16 전략 처음 몇 번의 시행 결과를 직접 구하고 등비수열의 합의 공식을 이용하여 주어진 조건을 식으로 나타낸다.

풀이 1초 후의 점 P의 좌표는 1
2초 후의 점 P의 좌표는 $1-2^1$
3초 후의 점 P의 좌표는 $1-2^1+2^2$
4초 후의 점 P의 좌표는 $1-2^1+2^2-2^3$
⋮
n초 후의 점 P의 좌표는

$$\begin{aligned}&1-2^1+2^2-2^3+\cdots+(-2)^{n-1}\\&=1+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^{n-1}\\&=\frac{1\cdot\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}\\&=\frac{1-(-2)^n}{3}\end{aligned}$$ ··· ❶

$\frac{1-(-2)^n}{3}\geq 1000$에서

$(-2)^n\leq -2999$

이때 $(-2)^{11}=-2048$, $(-2)^{12}=4096$, $(-2)^{13}=-8192$이므로

$n=13,\ 15,\ 17,\ \cdots$

따라서 12초와 13초 사이에 좌표가 1000인 점을 처음으로 지나므로

$p=12$ ··· ❷

답 12

채점 기준	비율
❶ n초 후의 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ p의 값을 구할 수 있다.	60 %

17 전략 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 a, r에 대한 식을 세운다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{31}{2}$에서

$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4=\frac{31}{2}$

$\therefore a(1+r+r^2+r^3+r^4)=\frac{31}{2}$

$a_1a_2a_3a_4a_5=32$에서

$a\cdot ar\cdot ar^2\cdot ar^3\cdot ar^4=32$

$(ar^2)^5=32$

$\therefore ar^2=2$ ($\because ar^2$은 실수)

$$\begin{aligned}&\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}\\&=\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\frac{1}{ar^3}+\frac{1}{ar^4}\\&=\frac{r^4+r^3+r^2+r+1}{ar^4}\\&=\frac{a(1+r+r^2+r^3+r^4)}{(ar^2)^2}\\&=\frac{\frac{31}{2}}{2^2}=\frac{31}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{31}{8}\end{aligned}$$

답 ②

18 전략 $2^4\cdot 3^6$이 a^n과 b^n의 등비중항임을 이용하여 ab에 대한 식을 세운다.

풀이 $2^4\cdot 3^6$은 a^n과 b^n의 등비중항이므로

$(2^4\cdot 3^6)^2=a^nb^n$

즉 $(ab)^n=2^8\cdot 3^{12}$이므로 a, b, n이 모두 자연수이려면 n은 8과 12의 공약수이어야 한다.
이때 ab의 값이 최소가 되려면 n이 최대이어야 하므로 n의 값은 8과 12의 최대공약수인 4이다.
$n=4$일 때

$(ab)^4=2^8\cdot 3^{12}=(2^2\cdot 3^3)^4$

이므로 ab의 최솟값은 $2^2\cdot 3^3=4\cdot 27=108$

답 108

19 전략 주어진 규칙에 따라 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$의 좌표를 구한 후, 점 P_n의 좌표가 $(10,\ 2^{10})$이 되는 n의 값을 구한다.

풀이 점 P_1의 좌표가 $(1,\ 1)$이므로
$1<2^1$에서 점 P_2의 좌표는 $(1,\ 2)$
$2=2^1$에서 점 P_3의 좌표는 $(2,\ 1)$
$1<2^2$에서 점 P_4의 좌표는 $(2,\ 2)$
$2<2^2$에서 점 P_5의 좌표는 $(2,\ 3)$
$3<2^2$에서 점 P_6의 좌표는 $(2,\ 4)$
$4=2^2$에서 점 P_7의 좌표는 $(3,\ 1)$
$1<2^3$에서 점 P_8의 좌표는 $(3,\ 2)$
⋮
따라서 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_n의 좌표를 다음과 같이 분류할 수 있다.

$(1,\ 1),\ (1,\ 2)$ ➡ 2^1개
$(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 2^2)$ ➡ 2^2개
$(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ \cdots,\ (3,\ 2^3)$ ➡ 2^3개
⋮ ⋮
$(10,\ 1),\ (10,\ 2),\ (10,\ 3),\ \cdots,\ (10,\ 2^{10})$ ➡ 2^{10}개

즉 구하는 n의 값은

$$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{10}=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2^{11}-2$$

답 ③

20 전략 첫째 해부터 19년째 해까지의 연봉의 합과 20년째 해부터 28년째 해까지의 연봉의 합을 각각 구해서 더한다.

풀이 입사 첫째 해의 연봉은 a원

입사 2년째 해의 연봉은

$$a+a\times0.08=a\times1.08\,(\text{원})$$

입사 3년째 해의 연봉은

$$a\times1.08+(a\times1.08)\times0.08=a\times1.08^2\,(\text{원})$$

$$\vdots$$

입사 19년째 해의 연봉은 $a\times1.08^{18}$ (원)

따라서 입사 후 19년째 해까지의 연봉의 합은

$$a+a\times1.08+a\times1.08^2+\cdots+a\times1.08^{18}$$

$$=\frac{a(1.08^{19}-1)}{1.08-1}=\frac{a(4\times1.08-1)}{0.08}$$

$$=\frac{332}{8}a=\frac{83}{2}a\,(\text{원}) \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

입사 20년째 해부터의 연봉은 입사 19년째 해의 연봉의 $\frac{2}{3}$이므로

$$a\times1.08^{18}\times\frac{2}{3}\,(\text{원})$$

입사 20년째 해부터 입사 28년째 해까지의 연봉의 합은

$$a\times1.08^{18}\times\frac{2}{3}\times9=a\times4\times6=24a\,(\text{원}) \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 입사 후 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은

$$\frac{83}{2}a+24a=\frac{131}{2}a\,(\text{원})$$

답 ④

Ⅳ. 수열

10 수열의 합

유제 본책 273~288쪽

105-❶ (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\frac{2k}{k+3}+\sum_{k=1}^{12}\frac{6}{k+3}$

$$=\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{2k}{k+3}+\frac{6}{k+3}\right)=\sum_{k=1}^{12}\frac{2(k+3)}{k+3}$$

$$=\sum_{k=1}^{12}2=2\cdot12=24$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{2^{k+1}-1}{2^k}=\sum_{k=1}^{20}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}=\sum_{k=1}^{20}2-\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$=2\cdot20-\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=40-\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}=39+\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

답 (1) 24 (2) $39+\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

105-❷ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(k^2-1)=\{(n+1)^2-1\}+\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n+1}(k^2-1)-\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)$$

$$=\{(n+1)^2-1\}+\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)-\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)$$

$$=n^2+2n+\sum_{k=1}^{n}\{(k^2-1)-(k^2+1)\}$$

$$=n^2+2n+\sum_{k=1}^{n}(-2)$$

$$=n^2+2n-2n=n^2$$

답 n^2

106-❶ (1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=(2n-1)^2$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}}{3}$$

$$=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}=\sum_{k=1}^{n}2-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=2n-\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2n-\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=2n-2+\frac{1}{2^{n-1}}$$

답 (1) $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ (2) $2n-2+\frac{1}{2^{n-1}}$

Remark ▶ **등차수열이나 등비수열이 아닌 수열의 합**

(i) 일반항을 구하여 그 합을 $\sum$를 사용하여 나타낸다.
(ii) $\sum$의 성질과 자연수의 거듭제곱의 합의 공식을 이용하여 그 합을 구한다.

107-❶ (1) $\sum_{m=1}^{k}km=k\sum_{m=1}^{k}m=k\cdot\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k^2(k+1)}{2}=\frac{1}{2}(k^3+k^2)$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{2}(k^3+k^2)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{5}k^3+\sum_{k=1}^{5}k^2\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5\cdot6}{2}\right)^2+\frac{5\cdot6\cdot11}{6}\right\}=140$$

(2) $$\sum_{k=1}^{10}\left\{\sum_{j=1}^{k}(6j-2)\right\}=\sum_{k=1}^{10}\left(6\sum_{j=1}^{k}j-\sum_{j=1}^{k}2\right)=\sum_{k=1}^{10}\left\{6\cdot\frac{k(k+1)}{2}-2k\right\}=\sum_{k=1}^{10}(3k^2+k)=3\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k=3\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+\frac{10\cdot11}{2}=1210$$

답 (1) 140 (2) 1210

107-❷ $$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{개}}\right)$$

$$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}=n$$

답 n

108-❶ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=3^{n+1}-3$$

$n=1$일 때,

$$a_1=S_1=3^2-3=6 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=3^{n+1}-3-(3^n-3)=3^{n+1}-3^n=3\cdot3^n-3^n=2\cdot3^n \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠은 $n=1$을 ㉡에 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n=2\cdot3^n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{100}\frac{a_{2k}}{3}=\sum_{k=1}^{100}\frac{2\cdot3^{2k}}{3}=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{100}3^{2k}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9(9^{100}-1)}{9-1}=\frac{3}{4}(9^{100}-1)$$

답 $\frac{3}{4}(9^{100}-1)$

Remark ▶

$\sum_{k=1}^{100}3^{2k}=\sum_{k=1}^{100}9^k$이므로 $\sum_{k=1}^{100}3^{2k}$은 첫째항이 9, 공비가 9인 등비수열의 첫째항부터 제100항까지의 합이다.

108-② $b_n=na_n$이라 하면

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$n=1$일 때, $b_1=S_1=1$ ...... ㉠

$n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}b_n&=S_n-S_{n-1}\\&=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-\frac{n(n-1)(n+1)}{6}\\&=\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$ ...... ㉡

㉠은 $n=1$을 ㉡에 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$b_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

이때 $b_n=na_n$이므로

$$na_n=\frac{n(n+1)}{2}\qquad\therefore a_n=\frac{n+1}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k&=\sum_{k=1}^{20}\frac{k+1}{2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}1\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{20\cdot21}{2}+\frac{1}{2}\cdot20\\&=115\end{aligned}$$

답 115

109-① (1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{(2n+1)^2-1}\\&=\frac{1}{4n(n+1)}\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore &\sum_{k=1}^{n}a_k\\&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{n}{4(n+1)}\end{aligned}$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore &\sum_{k=1}^{n}a_k\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\\&=\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{n}{4(n+1)}$ (2) $\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$

109-② 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+3n$$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=4$ ...... ㉠

$n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}\\&=n^2+3n-(n^2+n-2)\\&=2n+2\end{aligned}$$ ...... ㉡

㉠은 $n=1$을 ㉡에 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n=2n+2$$

$$\begin{aligned}\therefore &\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4(k+1)(k+2)}\\&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{n}{8(n+2)}\end{aligned}$$

답 $\frac{n}{8(n+2)}$

110-❶ (1) $\dfrac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{60}\dfrac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{60}\dfrac{1}{2}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

$\quad+\cdots+(\sqrt{121}-\sqrt{119})\}$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{121}-1)$

$=\dfrac{1}{2}(11-1)=5$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{50}\log\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$

$=\displaystyle\sum_{k=2}^{50}\log\dfrac{k^2-1}{k^2}=\sum_{k=2}^{50}\log\left(\dfrac{k-1}{k}\cdot\dfrac{k+1}{k}\right)$

$=\log\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\right)+\log\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\right)+\log\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{4}\right)$

$\quad+\cdots+\log\left(\dfrac{49}{50}\cdot\dfrac{51}{50}\right)$

$=\log\left\{\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\right)\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{4}\right)\cdots\left(\dfrac{49}{50}\cdot\dfrac{51}{50}\right)\right\}$

$=\log\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{51}{50}\right)=\log\dfrac{51}{100}$

$=\log 51-2$

답 (1) 5 (2) $\log 51-2$

111-❶ (1) 주어진 합을 S로 놓으면

$S=4\cdot1+8\cdot3+12\cdot3^2+\cdots+4n\cdot3^{n-1}$ ...... ㉠

㉠의 양변에 3을 곱하면

$3S=4\cdot3+8\cdot3^2+12\cdot3^3+\cdots+4n\cdot3^n$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면

$-2S=4(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})-4n\cdot3^n$

$=4\cdot\dfrac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-4n\cdot3^n$

$=2(1-2n)3^n-2$

$\therefore S=(2n-1)3^n+1$

(2) 주어진 합을 S로 놓으면

$S=\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $\dfrac{1}{2}$을 곱하면

$\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면

$\dfrac{1}{2}S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}$

$=\dfrac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^n}$

$=2\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}-\dfrac{n}{2^n}$

$=2-\dfrac{n+2}{2^n}$

$\therefore S=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$

답 (1) $(2n-1)3^n+1$ (2) $4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$

112-❶ 주어진 수열을 분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

$\underbrace{\left(\dfrac{1}{1}\right)}_{\text{제1군}},\ \underbrace{\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)}_{\text{제2군}},\ \underbrace{\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\right)}_{\text{제3군}},$

$\underbrace{\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{2}{7},\dfrac{4}{7},\dfrac{8}{7}\right)}_{\text{제4군}},\ \cdots$

제n군의 항의 개수는 n이므로 제1군부터 제n군까지의 항의 개수는

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

제1군부터 제13군까지의 항의 개수는 $\dfrac{13\cdot14}{2}=91$,

제1군부터 제14군까지의 항의 개수는 $\dfrac{14\cdot15}{2}=105$

이므로 제100항은 제14군의 9번째 항이다.

이때 제n군의 분모는 $2n-1$이고 분자는 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열을 이루므로 제100항은

$\dfrac{1\cdot2^{9-1}}{2\cdot14-1}=\dfrac{256}{27}$

답 $\dfrac{256}{27}$

113-❶ $i\geq j$인 i줄의 수끼리 군으로 묶으면

1	4	9	16	25	⋯
2	3	8	15	24	
5	6	7	14	23	
10	11	12	13	22	
17	18	19	20	21	
⋮					⋱

$\underbrace{(1)}_{\text{제1군}},\ \underbrace{(2,3)}_{\text{제2군}},\ \underbrace{(5,6,7)}_{\text{제3군}},$

$\underbrace{(10,11,12,13)}_{\text{제4군}},\ \cdots$

각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하면

$$a_1=1$$
$$a_2=1+1$$
$$a_3=1+1+3$$
$$a_4=1+1+3+5$$
$$\vdots$$
$$\begin{aligned}a_n&=1+1+3+5+\cdots+(2n-3)\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)\\&=1+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)\\&=n^2-2n+2\end{aligned}$$

위에서 i번째 줄의 왼쪽에서 j번째에 있는 수는 제 i 군의 j번째 항이고, 각 군은 공차가 1인 등차수열로 이루어져 있으므로 구하는 수는

$$\begin{aligned}a_i+(j-1)\cdot1&=i^2-2i+2+j-1\\&=i^2-2i+j+1\end{aligned}$$

답 ①

중단원 연습 문제

본책 289~292쪽

01 100	**02** 20	**03** ④	**04** $2^{n+1}-n-2$	
05 ②	**06** 210	**07** 190	**08** $\frac{29}{45}$	**09** 31
10 ③	**11** 495	**12** ②	**13** 4	**14** 5
15 $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5n+1}-1)}{10}$			**16** 20	**17** 40
18 14	**19** ③	**20** ①	**21** 100	**22** ①

01 전략 주어진 수열의 합을 Σ를 사용하지 않고 각 항의 합으로 나타낸다.

풀이 $\sum_{k=1}^{50}ka_k=400$, $\sum_{k=1}^{49}ka_{k+1}=300$에서

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+50a_{50}=400 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$a_2+2a_3+3a_4+\cdots+49a_{50}=300 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$-$㉡을 하면 $\quad a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{50}=100$

$$\therefore \sum_{k=1}^{50}a_k=100$$

답 100

02 전략 $\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$임을 이용한다.

풀이
$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{20}(2k-k^2)+\sum_{k=1}^{20}(k-1)^2\\&=\sum_{k=1}^{20}(2k-k^2)+\sum_{k=1}^{20}(k^2-2k+1)\\&=\sum_{k=1}^{20}\{(2k-k^2)+(k^2-2k+1)\}\\&=\sum_{k=1}^{20}1=20\end{aligned}$$

답 20

03 전략 먼저 $(2a_k-3)^2$을 전개한 후 Σ의 성질을 이용한다.

풀이
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(2a_k-3)^2&=\sum_{k=1}^{5}(4a_k{}^2-12a_k+9)\\&=4\sum_{k=1}^{5}a_k{}^2-12\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}9\\&=4\cdot55-12\cdot15+9\cdot5\\&=85\end{aligned}$$

답 ④

Remark ▶

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-3)=2\sum_{k=1}^{5}a_k-\sum_{k=1}^{5}3=2\cdot15-3\cdot5=15$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-3)^2\neq\left\{\sum_{k=1}^{5}(2a_k-3)\right\}^2$$

즉 $\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2\neq\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)^2$임에 주의한다.

04 전략 수열의 일반항을 구한 후 합을 Σ를 사용하여 나타낸다.

풀이 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$\begin{aligned}a_n&=1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}\\&=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}\\&=2^n-1\end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)\\&=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1\\&=\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}-n\\&=2^{n+1}-n-2\end{aligned}$$

답 $2^{n+1}-n-2$

05 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\{k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^2-2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-2\cdot\frac{10\cdot11}{2}-10$$
$$=385-110-10$$
$$=265$$

답 ②

06

전략 괄호 안부터 차례로 계산한다.

풀이 $\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}ij\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(i\sum_{j=1}^{n}j\right)$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{i\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{m}i$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{m(m+1)}{2}$$
$$=\frac{mn(mn+m+n+1)}{4}$$
$$=\frac{24(24+10+1)}{4}$$
$$=210$$

답 210

07

전략 $\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-2n$$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=-1$ …… ㉠

$n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(n^2-2n)-\{(n-1)^2-2(n-1)\}$$
$$=2n-3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠은 $n=1$을 ㉡에 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=2n-3$ ⋯ ❶

따라서 $a_{2k}=2\cdot2k-3=4k-3$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=\sum_{k=1}^{10}(4k-3)=4\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=4\cdot\frac{10\cdot11}{2}-3\cdot10$$
$$=220-30=190$$ ⋯ ❷

답 190

채점 기준	비율
❶ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\sum_{k=1}^{10}a_{2k}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

08

전략 일반항을 구하여 부분분수로 변형한 후 합의 꼴로 나타낸다.

풀이 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{8}a_k$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{29}{45}$$

답 $\frac{29}{45}$

09

전략 로그의 합을 진수의 곱으로 변형한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k}{k+1}$$
$$=\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\cdots+\log_2\frac{n}{n+1}$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\log_2\frac{1}{n+1}$$ ⋯ ❶

따라서 $\log_2\frac{1}{n+1}=-5$이므로

$\frac{1}{n+1}=2^{-5}$ $\quad\therefore n=31$ ⋯ ❷

답 31

채점 기준	비율
❶ $\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %

10 **전략** 주어진 수열의 규칙을 찾아 군으로 묶고, 제1군부터 제n군까지의 항의 개수를 구한다.

풀이 주어진 수열을 각 군의 마지막 항이 1이 되도록 군으로 묶으면

$$\underbrace{(1)}_{\text{제1군}},\ \underbrace{(2,\ 1)}_{\text{제2군}},\ \underbrace{(3,\ 2,\ 1)}_{\text{제3군}},\ \underbrace{(4,\ 3,\ 2,\ 1)}_{\text{제4군}},\ \cdots$$

제n군의 항의 개수가 n이므로 제1군부터 제n군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

ㄱ. 제1군부터 제5군까지의 항의 개수는 $\frac{5\cdot 6}{2}=15$, 제1군부터 제6군까지의 항의 개수는 $\frac{6\cdot 7}{2}=21$이므로 이 수열의 제20항은 제6군의 5번째 항이다.
제n군은 첫째항이 n, 공차가 -1인 등차수열로 이루어져 있으므로 제n군의 k번째 항은

$$n+(k-1)\cdot(-1)=n-k+1$$

따라서 제20항은 $6-5+1=2$

ㄴ. 10은 제10군의 첫째항에서 처음으로 나타난다.
제1군부터 제9군까지의 항의 개수는 $\frac{9\cdot 10}{2}=45$이므로 10은 제46항에서 처음으로 나타난다.

ㄷ. 10은 제10군에서 처음으로 나타나서 이후 각 군에서 한 번씩 나타나므로 10번째 나타나는 10은 제19군에서 나타난다.
제19군의 k번째 항을 10이라 하면

$$19-k+1=10 \qquad \therefore\ k=10$$

따라서 10번째 나타나는 10은 제19군의 10번째 항이므로

$$\frac{18\cdot 19}{2}+10=171+10=181$$

즉 10번째 나타나는 10은 제181항이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

11 **전략** $\sum_{n=1}^{20} a_n=\sum_{n=1}^{10} a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$임을 이용한다.

풀이
$$a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$$
$$=n^2$$

$$a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}2=2n \qquad \cdots ❶$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{20} a_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{20}$$
$$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})$$
$$=\sum_{n=1}^{10} a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{10} n^2+\sum_{n=1}^{10} 2n$$
$$=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}$$
$$=385+110=495 \qquad \cdots ❷$$

답 495

채점 기준	비율
❶ a_{2n-1}과 a_n을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값을 구할 수 있다.	60 %

12 **전략** $j=k,\ k+1,\ k+2,\ \cdots,\ n$을 대입하여 합의 꼴로 나타낸 후 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$을 대입한다.

풀이
$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=k}^{n}\frac{(-1)^j}{j}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(-1)^k}{k}+\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$$
$$=\left\{\frac{(-1)^1}{1}+\frac{(-1)^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$$
$$+\left\{\frac{(-1)^2}{2}+\frac{(-1)^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$$
$$+\cdots+\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}+\frac{(-1)^n}{n}\right\}+\frac{(-1)^n}{n}$$

분모가 같은 것끼리 모아서 정리하면

(구하는 합)
$$=\frac{(-1)^1}{1}+\frac{(-1)^2}{2}\times 2+\frac{(-1)^3}{3}\times 3$$
$$+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}\times n$$
$$=(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n$$
$$=\frac{(-1)\cdot\{1-(-1)^n\}}{1-(-1)}$$
$$=\frac{-1+(-1)^n}{2}$$

답 ②

Remark▶
$(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n$은 첫째항이 -1, 공비가 -1인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로 등비수열의 합의 공식을 이용하여 구한다.

13 **전략** a_n은 점 P가 출발하여 n초 동안 이동한 거리를 6으로 나누었을 때의 나머지임을 이용한다.

풀이 점 P가 출발하여 n초 동안 이동한 거리는

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

이때 a_n은 점 P가 이동한 거리를 6으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$n=100$일 때, 점 P가 이동한 거리는

$\frac{100\cdot101}{2}=5050$이고 $5050=6\cdot841+4$이므로 5050을 6으로 나누었을 때의 나머지는 4이다.

$\therefore a_{100}=4$

$n=200$일 때, 점 P가 이동한 거리는

$\frac{200\cdot201}{2}=20100$이고 $20100=6\cdot3350$이므로 20100을 6으로 나누었을 때의 나머지는 0이다.

$\therefore a_{200}=0$

$\therefore a_{100}+a_{200}=4+0=4$

답 4

14

전략 $f(x)$를 구하고 부분분수로의 변형을 이용하여 $\sum_{k=1}^{n}f(k)$를 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $(x^2-1)f(x)-2=0$에서

$(x^2-1)f(x)=2$

$x\neq\pm1$이므로

$$f(x)=\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$ …❶

$$\begin{aligned}\therefore &\sum_{k=1}^{n}f(k)\\ &=f(1)+\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{(k-1)(k+1)}\\ &=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &=1+\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.\\ &\qquad\left.+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\ &=1+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\ &=\frac{5}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}\end{aligned}$$ …❷

이때 $\frac{5}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}=\frac{32}{15}$이므로

$\frac{2n+1}{n(n+1)}=\frac{11}{30}$, $\quad 30(2n+1)=11n(n+1)$

$11n^2-49n-30=0$, $\quad (n-5)(11n+6)=0$

$\therefore n=5$ 또는 $n=-\frac{6}{11}$

그런데 n은 자연수이므로 $\quad n=5$ …❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $x\neq\pm1$일 때 $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\sum_{k=1}^{n}f(k)$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{32}{15}$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	40 %

15

전략 분모를 유리화한 후 더하여 0이 되는 항을 소거한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=5n^2-3n$$

$n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=2$ …… ㉠

$n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(5n^2-3n)-\{5(n-1)^2-3(n-1)\}\\&=10n-8\end{aligned}$$ …… ㉡

㉠은 $n=1$을 ㉡에 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=10n-8$

한편

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}&=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}}{(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}})(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}})}\\&=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n+1}-a_n}\\&=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{10(n+1)-8-(10n-8)}\\&=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{10}\end{aligned}$$

이므로 구하는 합은

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}\\&=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})\\&=\frac{1}{10}\{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})\\&\qquad+(\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3})+\cdots+(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})\}\\&=\frac{1}{10}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1})\\&=\frac{1}{10}(\sqrt{10n+2}-\sqrt{2})\\&=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5n+1}-1)}{10}\end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5n+1}-1)}{10}$

10 수열의 합

16 전략 (등차수열)×(등비수열) 꼴의 수열의 합 S는 등비수열의 공비 r에 대하여 $S-rS$를 계산한다.

풀이 $S_n=1+\frac{3}{3}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{3^{n-1}}$에서

$$S_{50}=1+\frac{3}{3}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{99}{3^{49}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\frac{1}{3}$을 곱하면

$$\frac{1}{3}S_{50}=\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots+\frac{99}{3^{50}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}S_{50}&=1+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{49}}\right)-\frac{99}{3^{50}}\\&=1+2\cdot\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^{49}}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{99}{3^{50}}\\&=2-\frac{1}{3^{49}}-\frac{99}{3^{50}}=2-\frac{1}{3^{49}}-\frac{33}{3^{49}}\\&=2-\frac{34}{3^{49}}\end{aligned}$$

$$\therefore S_{50}=\frac{3}{2}\left(2-\frac{34}{3^{49}}\right)=3-\frac{17}{3^{48}}$$

따라서 $a=3$, $b=17$이므로

$a+b=20$ 답 20

17 전략 각 군의 마지막 항이 1이 되도록 군으로 묶은 후 각 군의 규칙과 항의 개수를 파악한다.

풀이 주어진 수열을 각 군의 마지막 항이 1이 되도록 군으로 묶으면

$$\underbrace{(1)}_{\text{제1군}},\ \underbrace{(3,\ 1)}_{\text{제2군}},\ \underbrace{(3^2,\ 3,\ 1)}_{\text{제3군}},\ \underbrace{(3^3,\ 3^2,\ 3,\ 1)}_{\text{제4군}},\ \underbrace{(3^4,\ 3^3,\ 3^2,\ 3,\ 1)}_{\text{제5군}},\ \cdots$$

제n군의 항의 개수는 n이므로 제1군부터 제n군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

따라서 제1군부터 제9군까지의 항의 개수가 $\frac{9\cdot 10}{2}=45$이므로 제45항은 제9군의 마지막 항이다. 즉 첫째항부터 제45항까지의 합은 제1군부터 제9군까지의 모든 항의 합이다.

제n군은 첫째항이 3^{n-1}, 공비가 $\frac{1}{3}$, 항의 개수가 n인 등비수열로 이루어져 있으므로 제n군의 모든 항의 합은

$$\frac{3^{n-1}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3^n-1}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{9}\frac{3^k-1}{2}&=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{9}3^k-\sum_{k=1}^{9}1\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^9-1)}{3-1}-9\right\}\\&=\frac{3^{10}-21}{4}\end{aligned}$$

따라서 $a=10$, $b=4$이므로

$ab=40$ 답 40

18 전략 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=28$에서

$$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+2a_k+1\}=28$$

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=28$$

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+10=28$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k=18 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=16$에서

$$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+a_k\}=16$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{10}a_k=16 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡×2−㉠을 하면

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=14$$ 답 14

19 전략 $\sum_{k=0}^{n}a_k=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=0}^{n}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$에서

$$x^2+\sum_{k=1}^{n}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$$

$$x^2+\sum_{k=1}^{n}\{(x-k)^2-(x+k)^2\}=0$$

$$x^2+\sum_{k=1}^{n}(-4kx)=0, \qquad x^2-4x\sum_{k=1}^{n}k=0$$

$$x^2-4x\cdot\frac{n(n+1)}{2}=0$$

$$x^2-2n(n+1)x=0$$

$$x\{x-2n(n+1)\}=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2n(n+1)$$

$\therefore a_n=2n(n+1)$ ($\because a_n\neq 0$)

따라서 구하는 값은

$a_{10}=2\cdot 10\cdot 11=220$ 답 ③

20 전략 $a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$ $(k\geq 1)$임을 이용한다.

풀이 $a_1=S_1=2$이고, $a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$ $(k\geq 1)$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_kS_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)$$
$$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{S_{11}}$$

따라서 $\frac{1}{2}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{6}$ $\quad\therefore S_{11}=6$ 답 ①

21 전략 $n=2, 3, 4, \cdots, k$일 때 집합 S를 직접 구해서 $f(k)$를 구한다.

풀이 $n=2$일 때, 주어진 집합은 $\{3, 3^3\}$이므로

$S=\{3^4\}$ $\quad\therefore f(2)=1$

$n=3$일 때, 주어진 집합은 $\{3, 3^3, 3^5\}$이므로

$S=\{3^4, 3^6, 3^8\}$ $\quad\therefore f(3)=3$

$n=4$일 때, 주어진 집합은 $\{3, 3^3, 3^5, 3^7\}$이므로

$S=\{3^4, 3^6, 3^8, 3^{10}, 3^{12}\}$ $\quad\therefore f(4)=5$

⋮

$n=k$일 때, 주어진 집합은 $\{3, 3^3, 3^5, \cdots, 3^{2k-1}\}$이므로 $S=\{3^4, 3^6, 3^8, \cdots, 3^{4(k-1)}\}$

$\therefore f(k)=2k-3$

$$\therefore \sum_{n=2}^{11}f(n)=\sum_{n=2}^{11}(2n-3)$$
$$=\sum_{n=1}^{11}(2n-3)-(2\cdot 1-3)$$
$$=2\cdot\frac{11\cdot 12}{2}-3\cdot 11-(-1)$$
$$=100$$ 답 100

22 전략 두 점 B, C를 지나는 직선의 방정식을 이용하여 점 D의 좌표를 구한다.

풀이 두 점 $\mathrm{B}(1, 0)$, $\mathrm{C}(2^m, m)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{m}{2^m-1}(x-1)$이므로 점 D의 좌표는

$$\mathrm{D}\left(2^n, \frac{m}{2^m-1}(2^n-1)\right)$$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=2^n-1$, $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{m}{2^m-1}(2^n-1)$이고,

△ABD의 넓이가 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같으므로

$$\frac{1}{2}(2^n-1)\cdot\frac{m}{2^m-1}(2^n-1)\leq\frac{m}{2}$$
$$\therefore (2^n-1)^2\leq 2^m-1$$

(i) $n=1$일 때,

$(2^1-1)^2\leq 2^m-1$, $\quad 2^m\geq 2$

즉 $m\geq 1$이므로 $\quad a_1=1$

(ii) $n=2$일 때,

$(2^2-1)^2\leq 2^m-1$, $\quad 2^m\geq 10$

즉 $m\geq 4$이므로 $\quad a_2=4$

(iii) $n=3$일 때,

$(2^3-1)^2\leq 2^m-1$, $\quad 2^m\geq 50$

즉 $m\geq 6$이므로 $\quad a_3=6$

(iv) $n=4$일 때,

$(2^4-1)^2\leq 2^m-1$, $\quad 2^m\geq 226$

즉 $m\geq 8$이므로 $\quad a_4=8$

이상에서 $\quad a_1=1$, $a_n=2n$ $(n\geq 2)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=1+\sum_{n=2}^{10}2n=1+\sum_{n=1}^{10}2n-2$$
$$=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-1=109$$ 답 ①

다른 풀이 △ABD의 넓이가 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같으므로

$$\frac{1}{2}(2^n-1)\cdot\frac{m}{2^m-1}(2^n-1)\leq\frac{m}{2}$$
$$(2^n-1)^2\leq 2^m-1$$
$$\therefore 2^n(2^{n-1}-1)\leq 2^{m-1}-1 \quad\cdots\cdots ㉠$$

(i) $n=1$일 때,

$m=1$일 때 ㉠이 성립하므로 $a_1=1$이다.

(ii) $n\neq 1$일 때,

$m\geq 2n$이면

$2^{m-1}-1\geq 2^{2n-1}-1>2^{2n-1}-2^n=2^n(2^{n-1}-1)$

이므로 이 경우는 항상 ㉠이 성립한다.

$m<2n$, 즉 $m\leq 2n-1$이면

$$2^{m-1}-1\leq 2^{(2n-1)-1}-1=2^{2n-2}-1$$
$$\leq 2^{2n-2}-1+2^{2n-2}-2^n$$
$$(\because n\geq 2일\ 때\ 2^{2n-2}\geq 2^n)$$
$$<2\times 2^{2n-2}-2^n=2^n(2^{n-1}-1)$$

이므로 이 경우는 항상 ㉠이 성립하지 않는다.

$\therefore a_n=2n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=a_1+\sum_{n=2}^{10}a_n=1+\sum_{n=1}^{10}2n-2$$
$$=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-1=109$$

Ⅳ. 수열

11 수학적 귀납법

유제 본책 299~313쪽

114-❶ $a_{n+1}+3=a_n$, 즉 $a_{n+1}=a_n-3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -3인 등차수열이다.
이때 첫째항이 1이므로

$$a_n=1+(n-1)\cdot(-3)=-3n+4$$

$a_k=-3k+4=-101$이므로

$$-3k=-105$$
$$\therefore k=35$$

답 35

114-❷ $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
이때 첫째항이 5, 공차가 $a_2-a_1=-1-5=-6$이므로

$$a_n=5+(n-1)\cdot(-6)=-6n+11$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k&=\sum_{k=1}^{10}(-6k+11)\\&=-6\cdot\frac{10\cdot11}{2}+11\cdot10\\&=-330+110\\&=-220\end{aligned}$$

답 -220

Remark▶ 자연수의 거듭제곱의 합

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

115-❶ $a_{n+1}=3a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.
이때 첫째항이 3이므로

$$a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}&=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{3^k}\\&=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}}\\&=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$

115-❷ $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.
이때 첫째항이 1, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{4}{1}=4$이므로

$$S_n=\frac{1\cdot(4^n-1)}{4-1}=\frac{1}{3}(4^n-1)$$

$S_k\ge500$에서

$$\frac{1}{3}(4^k-1)\ge500,\quad 4^k\ge1501$$

$4^5=1024$, $4^6=4096$이므로

$$k\ge6$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

답 6

116-❶ $a_{n+1}=a_n+2^n+1$의 n에 1, 2, 3, …, 7을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}a_2&=a_1+2^1+1\\a_3&=a_2+2^2+1\\a_4&=a_3+2^3+1\\&\vdots\\+)\ a_8&=a_7+2^7+1\\\hline a_8&=a_1+(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^7)+7\\&=1+\sum_{k=1}^{7}2^k+7\\&=1+\frac{2(2^7-1)}{2-1}+7\\&=1+254+7=262\end{aligned}$$

답 262

116-❷ $a_n=a_{n-1}-\frac{2}{n^2-1}$에서

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-1}&=-\frac{2}{n^2-1}=-\frac{2}{(n-1)(n+1)}\\&=-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

이므로 n에 2, 3, 4, …, $n-1$, n을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}a_2-a_1&=-1+\frac{1}{3}\\a_3-a_2&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\\a_4-a_3&=-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\\&\vdots\\a_{n-1}-a_{n-2}&=-\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n}\\+)\ a_n-a_{n-1}&=-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\\\hline a_n-a_1&=-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$\therefore a_n=a_1-1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}$

$=1-1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}$

$=\dfrac{-n(n+1)+2(n+1)+2n}{2n(n+1)}$

$=\dfrac{-n^2+3n+2}{2n(n+1)}$

답 $a_n=\dfrac{-n^2+3n+2}{2n(n+1)}$

117-❶ $a_{n+1}=2^n a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2&=2^1a_1\\ a_3&=2^2a_2\\ a_4&=2^3a_3\\ &\vdots\\ \times)\ a_n&=2^{n-1}a_{n-1}\\ \hline a_n&=(2^1\cdot2^2\cdot2^3\cdot\cdots\cdot2^{n-1})a_1\\ &=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\cdot1\\ &=2^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{aligned}$$

답 $a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

117-❷ $a_n=\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)a_{n-1}$에서

$a_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_{n-1}$

$=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n+1}{n}a_{n-1}$ …… ㉠

㉠의 n에 2, 3, 4, …, n을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a_1\\ a_3&=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}a_2\\ a_4&=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}a_3\\ &\vdots\\ \times)\ a_n&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}a_{n-1}\\ \hline a_n&=\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\right.\\ &\quad\left.\cdot\cdots\cdot\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)\right\}a_1\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot2\\ &=\frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

$\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{16}{15}$에서 $\quad n=15$

따라서 $\dfrac{16}{15}$은 제15항이다.

답 제15항

118-❶ $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+2$를 $a_{n+1}-\alpha=\dfrac{1}{3}(a_n-\alpha)$로 놓으면 $\quad a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{3}\alpha$

$\dfrac{2}{3}\alpha=2$이므로 $\quad \alpha=3$

$\therefore a_{n+1}-3=\dfrac{1}{3}(a_n-3)$

따라서 수열 $\{a_n-3\}$은 첫째항이 $a_1-3=1-3=-2$, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n-3=-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

답 $a_n=-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

다른 풀이 $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+2$의 n에 $n+1$을 대입한 식에서 원래의 식을 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} a_{n+2}&=\frac{1}{3}a_{n+1}+2\\ -)\ a_{n+1}&=\frac{1}{3}a_n+2\\ \hline a_{n+2}-a_{n+1}&=\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n) \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 a_2-a_1, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이다.

이때 $a_2=\dfrac{1}{3}a_1+2=\dfrac{1}{3}\cdot1+2=\dfrac{7}{3}$이므로

$a_{n+1}-a_n=\left(\dfrac{7}{3}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=\dfrac{4}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ …… ㉠

㉠의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2-a_1&=\frac{4}{3}\\ a_3-a_2&=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\\ a_4-a_3&=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\\ &\vdots\\ +)\ a_n-a_{n-1}&=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\\ \hline a_n-a_1&=\frac{4}{3}\left\{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right.\\ &\quad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n=1+\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$
$$=1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$$

118-❷ $2a_{n+1}-a_n-6=0$, 즉 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3$을

$a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}\alpha$$

$\frac{1}{2}\alpha=3$이므로 $\quad\alpha=6$

$$\therefore a_{n+1}-6=\frac{1}{2}(a_n-6)$$

따라서 수열 $\{a_n-6\}$은 첫째항이 $a_1-6=2-6=-4$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n-6=-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore a_n=-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+6$$

답 $a_n=-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+6$

119-❶ $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$에서

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$$

따라서 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이
$a_2-a_1=4-1=3$, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_{n+1}-a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2-a_1&=3\\
a_3-a_2&=3^2\\
a_4-a_3&=3^3\\
&\ \vdots\\
+\big)\ a_n-a_{n-1}&=3^{n-1}\\
\hline
a_n-a_1&=3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\therefore a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k$$
$$=1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$
$$=\frac{1}{2}(3^n-1)$$

답 $a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$

119-❷ $a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=1$에서

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+1$$

$a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면

$$b_{n+1}=2b_n+1$$

위의 등식을 $b_{n+1}-\alpha=2(b_n-\alpha)$로 놓으면

$$b_{n+1}=2b_n-\alpha$$

$-\alpha=1$이므로 $\quad\alpha=-1$

$$\therefore b_{n+1}+1=2(b_n+1)$$

따라서 수열 $\{b_n+1\}$은 첫째항이 b_1+1, 공비가 2인 등비수열이다.

$b_1=a_2-a_1=2-1=1$이므로

$$b_1+1=1+1=2$$
$$\therefore b_n+1=2\cdot2^{n-1}=2^n,\ 즉\ b_n=2^n-1$$
$$\therefore a_{n+1}-a_n=2^n-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_n-a_1=(2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})-(n-1)$$
$$\therefore a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k-(n-1)$$
$$=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)$$
$$=2^n-n$$

답 $a_n=2^n-n$

120-❶ $a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$의 양변의 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n}$$
$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+3$$

$\frac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면

$$b_{n+1}=b_n+3$$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$, 공차가 3인 등차수열이므로

$$b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot3=3n-\frac{5}{2}$$

이때 $b_n=\frac{1}{a_n}$이므로

$$\frac{1}{a_n}=3n-\frac{5}{2}=\frac{6n-5}{2}$$
$$\therefore a_n=\frac{2}{6n-5}$$
$$\therefore a_{50}=\frac{2}{6\cdot50-5}=\frac{2}{295}$$

답 $\frac{2}{295}$

120-② $3a_na_{n+1}=a_n-2a_{n+1}$의 양변을 a_na_{n+1}로 나누면

$$3=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+3$$

$\frac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면

$$b_{n+1}=2b_n+3$$

위의 등식을 $b_{n+1}-\alpha=2(b_n-\alpha)$로 놓으면

$$b_{n+1}=2b_n-\alpha$$

$-\alpha=3$이므로 $\quad \alpha=-3$

$$\therefore b_{n+1}+3=2(b_n+3)$$

따라서 수열 $\{b_n+3\}$은 첫째항이

$b_1+3=\frac{1}{a_1}+3=1+3=4$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$b_n+3=4\cdot 2^{n-1} \qquad \therefore b_n=2^{n+1}-3$$

이때 $b_n=\frac{1}{a_n}$이므로 $\quad \frac{1}{a_n}=2^{n+1}-3$

$$\therefore a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$$

답 $a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$

121-① $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$=\frac{n}{n+1}$ ⋯⋯ ㉠

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

이므로 등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}$

$=\frac{k}{k+1}$ ⋯⋯ ㉡

㉡의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하면

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

⋯ 증명 끝

답 풀이 참조

122-① $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$ ⋯⋯ ㉠

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, (우변)$=\frac{4}{2+1}=\frac{4}{3}$

이므로 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge 2)$일 때 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$ ⋯⋯ ㉡

㉡의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$$

$$>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}$$

$$=\frac{2k+1}{k+1}$$

이때 $\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$

이므로 $\quad \frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$

$$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

⋯ 증명 끝

답 풀이 참조

중단원 연습 문제

본책 314~318쪽

01 $S_n=3(2^n-1)$ **02** ④ **03** 100 **04** 26

05 ③ **06** 10 **07** $\frac{3^{19}}{2^{17}}-3$

08 2036

09 $a_1=320$, $a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+20\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

10 ① **11** 3 **12** ③ **13** $\frac{281}{2}$ **14** 32

15 2 **16** 194 **17** 22 **18** 1 **19** ②

20 235 **21** 513 **22** ③

01 전략 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

풀이 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 첫째항이 3, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{3}=2$이므로

$$S_n=\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$$

답 $S_n=3(2^n-1)$

Remark▶ 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

02 전략 주어진 관계식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례로 대입한 후 변끼리 더한다.

풀이 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n(n+1)}$, 즉

$a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$a_3=a_2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$
$$a_4=a_3+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$
$$\vdots$$
$$+\Big)\ a_{10}=a_9+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$a_{10}=a_1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=1+1-\frac{1}{10}$$
$$=\frac{19}{10}$$

답 ④

03 전략 주어진 관계식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 99를 차례로 대입한 후 변끼리 곱한다.

풀이 $\sqrt{n+1}\,a_{n+1}=\sqrt{n}\,a_n$, 즉 $a_{n+1}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 99를 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{1}{\sqrt{2}}a_1$$
$$a_3=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a_2$$
$$a_4=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times\Big)\ a_{100}=\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{100}}a_{99}$$
$$a_{100}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\cdot\cdots\cdot\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{100}}\right)a_1$$
$$=\frac{1}{\sqrt{100}}\cdot1000=100$$

답 100

04 전략 $\sum_{k=1}^{11}a_k$를 합의 꼴로 나타내어 연속하는 세 항씩 묶어서 계산한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{11}a_k=a_1+a_2+(a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_8)+(a_9+a_{10}+a_{11})$

$$=2+3+(3+1)+(6+1)+(9+1)$$
$$=5+4+7+10=26$$

답 26

05 전략 주어진 관계식을 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ 꼴로 변형한다.

풀이 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(1-a_n)$을 $a_{n+1}-\alpha=-\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}\alpha$$

$\frac{3}{2}\alpha=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha=\frac{1}{3}$

$$\therefore a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$$

따라서 수열 $\left\{a_n-\frac{1}{3}\right\}$은 첫째항이

$a_1-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n-\frac{1}{3}=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

이때 $a_{50}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{49}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{49}}$이므로

$k=49$

답 ③

06 전략 주어진 관계식을 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ 꼴로 변형한다.

풀이 $a_{n+1}=2a_n+7$을 $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$로 놓으면

$$a_{n+1}=2a_n-\alpha$$

$-\alpha=7$이므로 $\alpha=-7$

$$\therefore a_{n+1}+7=2(a_n+7) \quad \cdots ❶$$

따라서 수열 $\{a_n+7\}$은 첫째항이 $a_1+7=-1+7=6$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n+7=6\cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n=3\cdot 2^n-7 \quad \cdots ❷$$

$a_n>2000$에서

$$3\cdot 2^n-7>2000, \quad 3\cdot 2^n>2007$$

$$2^n>\frac{2007}{3}=669$$

$2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 $a_n>2000$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 10이다. $\cdots$ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 주어진 관계식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a_n>2000$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

07 전략 주어진 관계식을 $a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)$ 꼴로 변형한다.

풀이 $2a_{n+2}-5a_{n+1}+3a_n=0$에서

$$2(a_{n+2}-a_{n+1})=3(a_{n+1}-a_n)$$

$$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{3}{2}(a_{n+1}-a_n) \quad \cdots ❶$$

따라서 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이

$a_2-a_1=3-1=2$, 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이므로

$$a_{n+1}-a_n=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots ❷$$

위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$,19를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2-a_1 &=2 \\ a_3-a_2 &=2\cdot\frac{3}{2} \\ a_4-a_3 &=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &\vdots \\ +\big)\ a_{20}-a_{19} &=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{18} \\ \hline a_{20}-a_1 &=2\left\{1+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^{18}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{20}&=a_1+2\sum_{k=1}^{19}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ &=1+2\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{19}-1}{\frac{3}{2}-1} \\ &=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{19}-3 \\ &=\frac{3^{19}}{2^{17}}-3 \quad \cdots ❸ \end{aligned}$$

답 $\frac{3^{19}}{2^{17}}-3$

채점 기준	비율
❶ 주어진 관계식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	30 %
❸ a_{20}의 값을 구할 수 있다.	40 %

08 전략 주어진 관계식의 양변의 역수를 취하여 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항을 구한다.

풀이 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}$의 양변의 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{a_n}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1 \quad \cdots ❶$$

$\frac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면

$$b_{n+1}=2b_n+1$$

위의 등식을 $b_{n+1}-\alpha=2(b_n-\alpha)$로 놓으면

$$b_{n+1}=2b_n-\alpha$$

$-\alpha=1$이므로 $\alpha=-1$

$$\therefore b_{n+1}+1=2(b_n+1)$$

따라서 수열 $\{b_n+1\}$은 첫째항이

$b_1+1=\frac{1}{a_1}+1=1+1=2$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$b_n+1=2\cdot 2^{n-1} \quad \therefore b_n=2^n-1$$

이때 $b_n=\frac{1}{a_n}$이므로 $\frac{1}{a_n}=2^n-1$ $\cdots$ ❷

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}&=\sum_{k=1}^{10}(2^k-1) \\ &=\sum_{k=1}^{10}2^k-\sum_{k=1}^{10}1 \\ &=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}-1\cdot 10 \\ &=2046-10 \\ &=2036 \quad \cdots ❸ \end{aligned}$$

답 2036

채점 기준	비율
❶ 주어진 관계식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

09 **전략** 문제의 조건에 맞게 식을 세워 관계식을 구한다.

풀이 400 L의 물의 $\frac{1}{4}$을 버리고 20 L의 물을 넣으면 수족관에 남아 있는 물의 양은

$400\cdot\frac{3}{4}+20=320 \qquad \therefore a_1=320$

$(n+1)$회 시행 후 수족관에 남아 있는 물의 양은 a_{n+1}이므로

$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+20\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 $a_1=320$, $a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+20\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

10 **전략** $n=2$일 때 주어진 부등식이 성립함을 보인 다음, $n=k\ (k\ge2)$일 때 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 성립함을 보인다.

풀이 (i) $n=2$일 때,

$(1+h)^2=1+2h+h^2>\boxed{1+2h}\ (\because h^2>0)$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$

위의 부등식의 양변에 $1+h$를 곱하면

$(1+h)^k(1+h)>(\boxed{1+kh})(1+h)$

$=1+(k+1)h+kh^2$

$>1+(k+1)h\ (\because kh^2>0)$

$\therefore (1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) $1+2h$ (나) $1+kh$

답 ①

11 **전략** $\log_3 a_n=b_n$으로 놓고 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 먼저 구한다.

풀이 $\log_3 a_{n+1}=\log_3 a_n-3$에서 $\log_3 a_n=b_n$으로 놓으면 $\quad b_{n+1}=b_n-3$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=\log_3 a_1=\log_3 9=2$, 공차가 -3인 등차수열이므로

$b_n=2+(n-1)\cdot(-3)=-3n+5$

이때 $b_n=\log_3 a_n$이므로 $\quad \log_3 a_n=-3n+5$

$\therefore a_n=3^{-3n+5}$

$a_k=\frac{1}{81}$에서 $\quad 3^{-3k+5}=\frac{1}{81}=3^{-4}$

$-3k+5=-4, \qquad -3k=-9$

$\therefore k=3$

답 3

다른 풀이 $\log_3 a_{n+1}=\log_3 a_n-3$에서

$\log_3 a_{n+1}-\log_3 a_n=-3$

$\log_3\frac{a_{n+1}}{a_n}=-3, \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}=3^{-3}=\frac{1}{27}$

$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{27}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 9, 공비가 $\frac{1}{27}$인 등비수열이므로

$a_n=9\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{n-1}=3^{-3n+5}$

12 **전략** 주어진 등식의 n에 $n+1$을 대입한 식에서 원래의 식을 변끼리 빼서 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{n+1}{2}a_n \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 n에 $n+1$을 대입하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}=\frac{n+2}{2}a_{n+1} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$a_{n+1}=\frac{n+2}{2}a_{n+1}-\frac{n+1}{2}a_n$

$\frac{n}{2}a_{n+1}=\frac{n+1}{2}a_n \qquad \therefore a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$

$a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$a_2=\frac{2}{1}a_1$

$a_3=\frac{3}{2}a_2$

$a_4=\frac{4}{3}a_3$

$\vdots$

$\times)\ a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1}$

$a_n=\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}\right)a_1$

$=n\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$

$a_k=17$에서 $\dfrac{k}{2}=17$

$\therefore k=34$

답 ③

13 전략 a_1, a_2, a_3, …을 차례로 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 $a_{n+2}a_n=a_{n+1}$에서

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$$a_3=\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{2},\ a_4=\frac{a_3}{a_2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2},$$

$$a_5=\frac{a_4}{a_3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3},\ a_6=\frac{a_5}{a_4}=\frac{1}{3}\cdot2=\frac{2}{3},$$

$$a_7=\frac{a_6}{a_5}=\frac{2}{3}\cdot3=2,\ a_8=\frac{a_7}{a_6}=2\cdot\frac{3}{2}=3,\ \cdots$$

즉 수열 $\{a_n\}$은 2, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$가 반복되어 나타난다.

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{100} a_{2n}&=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{200}\\&=(a_2+a_4+a_6)+(a_8+a_{10}+a_{12})\\&\quad+\cdots+(a_{194}+a_{196}+a_{198})+a_{200}\\&=(a_2+a_4+a_6)+(a_2+a_4+a_6)\\&\quad+\cdots+(a_2+a_4+a_6)+a_2\\&=33\left(3+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+3\\&=\frac{281}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{281}{2}$

14 전략 조건 (나), (다)를 이용하여 주어진 관계식을 변형한다.

풀이 조건 (나)의 $a_{n+1}+b_{n+1}=a_n-b_n$의 n에 $n+1$을 대입하면

$$a_{n+2}+b_{n+2}=a_{n+1}-b_{n+1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (다)에서 $a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n+b_n)$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$a_{n+2}+b_{n+2}=2(a_n+b_n) \qquad \cdots ❶$$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}+b_{2n-1}\}$은 첫째항이 $a_1+b_1=2-1=1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_{2n-1}+b_{2n-1}=1\cdot2^{n-1}=2^{n-1} \qquad \cdots ❷$$

$$\therefore a_{11}+b_{11}=2^{6-1}=2^5=32 \qquad \cdots ❸$$

답 32

채점 기준	비율
❶ 주어진 관계식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 수열 $\{a_{2n-1}+b_{2n-1}\}$의 일반항을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a_{11}+b_{11}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

15 전략 주어진 관계식을 $S_{n+1}-\alpha=p(S_n-\alpha)$ 꼴로 변형한다.

풀이 $2S_{n+1}=S_n+2$, 즉 $S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n+1$을

$S_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(S_n-\alpha)$로 놓으면

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n+\frac{1}{2}\alpha$$

$\frac{1}{2}\alpha=1$이므로 $\alpha=2$

$$\therefore S_{n+1}-2=\frac{1}{2}(S_n-2) \qquad \cdots ❶$$

따라서 수열 $\{S_n-2\}$는 첫째항이

$S_1-2=a_1-2=1-2=-1$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$S_n-2=(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore S_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \cdots ❷$$

$$\begin{aligned}\therefore a_{10}&=S_{10}-S_9\\&=2-\left(\frac{1}{2}\right)^9-\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^9 \qquad \cdots ❸\end{aligned}$$

$$\therefore 2^{10}a_{10}=2^{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9=2 \qquad \cdots ❹$$

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 관계식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 수열 $\{S_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	30 %
❸ a_{10}의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $2^{10}a_{10}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

Remark▶ 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,
$a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge2)$

16 전략 $a_1=a$, $a_2=b$로 놓고 a_7을 a, b로 나타낸 후 $a_7=120$임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $a_1=a$, $a_2=b$ (a, b는 $a<b$인 자연수)라 하면

$$a_3=a_1+a_2=a+b$$
$$a_4=a_2+a_3=b+(a+b)=a+2b$$
$$a_5=a_3+a_4=(a+b)+(a+2b)=2a+3b$$
$$a_6=a_4+a_5=(a+2b)+(2a+3b)=3a+5b$$
$$a_7=a_5+a_6=(2a+3b)+(3a+5b)=5a+8b$$
$$a_8=a_6+a_7=(3a+5b)+(5a+8b)=8a+13b$$

$a_7=120$이므로

$$5a+8b=120 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore 5a=8(15-b),\ 8b=5(24-a)$$

이때 5와 8은 서로소이므로 a는 8의 배수, b는 5의 배수이어야 한다.

따라서 $a=8m$, $b=5n$ (m, n은 자연수)으로 놓으면 ㉠에서

$$40m+40n=120 \qquad \therefore m+n=3$$

m, n이 자연수이므로

$$m=1,\ n=2 \text{ 또는 } m=2,\ n=1$$

$m=1$, $n=2$이면 $\quad a=8$, $b=10$

$m=2$, $n=1$이면 $\quad a=16$, $b=5$

그런데 $a<b$이므로 $\quad a=8$, $b=10$

$$\therefore a_8=8a+13b=8\cdot 8+13\cdot 10=194$$

답 194

17 전략 n개의 직선에 1개의 직선을 추가했을 때 증가하는 영역의 개수를 이용하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 n개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$개의 새로운 영역이 생긴다.

즉 $(n+1)$개의 직선으로 나누어지는 영역은 n개의 직선으로 나누어지는 영역보다 $(n+1)$개가 많으므로

$$a_{n+1}=a_n+n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

위의 등식의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$$a_2=a_1+1+1=2+1+1=4$$
$$a_3=a_2+2+1=4+2+1=7$$
$$a_4=a_3+3+1=7+3+1=11$$
$$a_5=a_4+4+1=11+4+1=16$$
$$a_6=a_5+5+1=16+5+1=22$$

답 22

18 전략 Σ의 정의와 성질을 이용하여 식을 변형하고, 수학적 귀납법을 이용하여 부등식을 증명한다.

풀이 (i) $n=1$일 때,

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{1+i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{13}{12}}>1$$

이므로 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{1}{k+i}>1$$

$n=k+1$일 때,

$$\sum_{i=1}^{2k+3}\frac{1}{k+1+i}$$
$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}$$
$$=\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{1}{k+i}+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\right)-\boxed{\frac{1}{k+1}}$$
$$=\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{1}{k+i}+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}-\frac{2}{3k+3}\right)$$

이때

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}-\frac{2}{3k+3}$$
$$=\frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>0$$

이므로

$$\sum_{i=1}^{2k+3}\frac{1}{k+1+i}>\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{1}{k+i}>1$$

따라서 $p=\frac{13}{12}$, $f(k)=\frac{1}{k+1}$이므로

$$\frac{1}{p}+f(12)=\frac{12}{13}+\frac{1}{13}=1$$

답 1

19 전략 주어진 관계식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례로 대입한 후 변끼리 더한다.

풀이 $a_{n+1}-a_n=2n$, 즉 $a_{n+1}=a_n+2n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+2\cdot 1$$
$$a_3=a_2+2\cdot 2$$
$$a_4=a_3+2\cdot 3$$
$$\vdots$$
$$+\underline{)\ a_{10}=a_9+2\cdot 9\qquad\qquad}$$
$$a_{10}=a_1+2(1+2+3+\cdots+9)$$
$$=a_1+2\sum_{k=1}^{9}k$$
$$=a_1+2\cdot\frac{9\cdot 10}{2}$$
$$=a_1+90$$

$a_{10}=94$이므로 $\quad a_1+90=94$

$$\therefore a_1=4$$

답 ②

20 전략 a_1, a_2, a_3, $\cdots$을 차례로 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 $a_1=3$

$$a_2=\frac{a_1+93}{2}=\frac{3+93}{2}=48$$

$$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{48}{2}=24$$

$$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{24}{2}=12$$

$$a_5=\frac{a_4}{2}=\frac{12}{2}=6$$

$$a_6=\frac{a_5}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$\vdots$$

이므로　　$a_{n+5}=a_n\ (n\ge 1)$

따라서 $a_k=3$을 만족시키는 50 이하의 모든 자연수 k는

$1,\ 6,\ 11,\ 16,\ \cdots,\ 46$

이므로 이들의 합은

$$\sum_{m=1}^{10}(5m-4)=5\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-4\cdot 10=235$$

답 235

21 전략 주어진 부등식을 변형하여 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 주어진 부등식의 각 변의 역수를 취하면

$$n<\frac{k}{a_n}<n+2$$

$$\therefore\ na_n<k<(n+2)a_n$$

이때 $na_n,\ (n+2)a_n$은 자연수이므로 위의 부등식을 만족시키는 자연수 k의 개수는

$$(n+2)a_n-na_n-1=2a_n-1$$

$$\therefore\ a_{n+1}=2a_n-1$$

$a_{n+1}=2a_n-1$을 $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$로 놓으면

$$a_{n+1}=2a_n-\alpha$$

$-\alpha=-1$이므로　　$\alpha=1$

$$\therefore\ a_{n+1}-1=2(a_n-1)$$

따라서 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=2-1=1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n-1=2^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=2^{n-1}+1$$

$$\therefore\ a_{10}=2^9+1=513$$

답 513

22 전략 $n=1$일 때 주어진 등식이 성립함을 보인 다음, $n=m$일 때 성립한다고 가정하면 $n=m+1$일 때에도 성립함을 보인다.

풀이 (ii) $n=m$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{m+1}\cdot\frac{m(m+1)}{2}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+\boxed{(-1)^{m+2}(m+1)^2}$$

$$=\boxed{(-1)^{m+1}\cdot\frac{m(m+1)}{2}}+\boxed{(-1)^{m+2}(m+1)^2}$$

$$=(-1)^{m+1}\cdot\left\{\frac{m(m+1)}{2}-(m+1)^2\right\}$$

$$=(-1)^{m+2}\cdot\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

따라서 $f(m)=(-1)^{m+2}(m+1)^2$,

$g(m)=(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{m(m+1)}{2}$

이므로

$$f(5)=(-1)^{5+2}(5+1)^2=-36,$$

$$g(2)=(-1)^{2+1}\cdot\frac{2\cdot 3}{2}=-3$$

$$\therefore\ \frac{f(5)}{g(2)}=12$$

답 ③

11 수학적 귀납법

MEMO