쎈 정답 및 풀이

Ⅰ 함수의 극한과 연속

Ⅱ 다항함수의 미분법

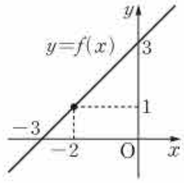
Ⅲ 다항함수의 적분법

⋯› 정답을 확인하려 할 때에는 「**빠른 정답 찾기**」를 이용하면 편리합니다.

01 함수의 극한

0001 $f(x)=x+3$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
x의 값이 -2가 아니면서 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

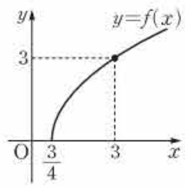
$$\lim_{x\to-2}(x+3)=1$$



답 1

0002 $f(x)=\sqrt{4x-3}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
x의 값이 3이 아니면서 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to3}\sqrt{4x-3}=3$$

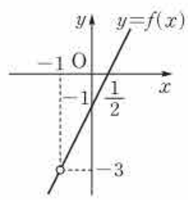


답 3

0003 $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x+1}$이라 하면
$x\neq-1$일 때,

$$f(x)=\frac{(x+1)(2x-1)}{x+1}=2x-1$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



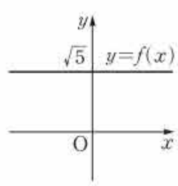
x의 값이 -1이 아니면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+x-1}{x+1}=-3$$

답 -3

0004 $f(x)=\sqrt{5}$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 상수함수는 모든 x의 값에 대하여 함숫값이 $\sqrt{5}$이므로

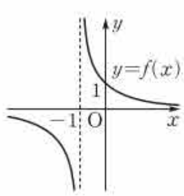
$$\lim_{x\to2}\sqrt{5}=\sqrt{5}$$



답 $\sqrt{5}$

0005 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0$$



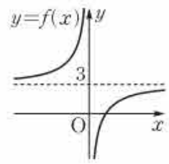
답 0

SSEN 특강 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프

① $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
② 정의역: $\{x\mid x\neq p$인 실수$\}$, 치역: $\{y\mid y\neq q$인 실수$\}$
③ 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.
④ 점근선의 방정식: $x=p,\ y=q$

0006 $f(x)=3-\dfrac{1}{x}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프에서

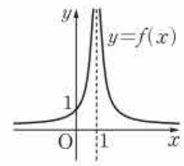
$$\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$$



답 3

0007 $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프에서

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{|x-1|}=\infty$$



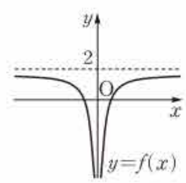
답 ∞

SSEN 특강 $y=\dfrac{1}{|x-1|}$의 그래프 그리기

(i) $y=\dfrac{1}{|x|}$의 그래프를 그린다.
ⓘ $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 그려 $x>0$인 부분만 남긴다.
ⓘⓘ ⓘ의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 그린다.
(ii) (i)의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.

0008 $f(x)=-\dfrac{1}{|x|}+2$라 하면 $y=f(x)$의 그래프에서

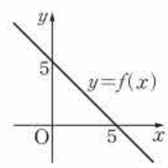
$$\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{|x|}+2\right)=-\infty$$



답 $-\infty$

0009 $f(x)=-x+5$라 하면 $y=f(x)$의 그래프에서

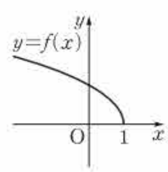
$$\lim_{x\to\infty}(-x+5)=-\infty$$



답 $-\infty$

0010 $f(x)=\sqrt{2-2x}$라 하면 $y=f(x)$의 그래프에서

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2-2x}=\infty$$

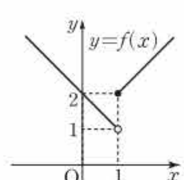


답 ∞

0011 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)=2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)=1$



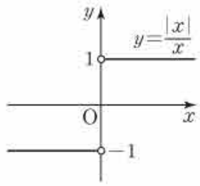
답 (1) 2 (2) 1

0012 (3) $\displaystyle\lim_{x\to-2+}f(x)\neq\lim_{x\to-2-}f(x)$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to-2}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

(6) $\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=1$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=1$

답 (1) 0 (2) 2 (3) 존재하지 않는다.
(4) 1 (5) 1 (6) 1

0013 $y=\dfrac{|x|}{x}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

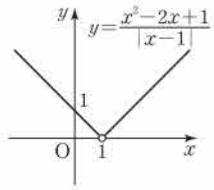


$$\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=1,\ \lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=-1$$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}\neq\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$의 값은 존재하지 않는다. 답 존재하지 않는다.

0014 $x\neq1$일 때,



$$\frac{x^2-2x+1}{|x-1|}=\frac{(x-1)^2}{|x-1|}=|x-1|$$

따라서 $y=\dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{x^2-2x+1}{|x-1|}=0,\ \lim_{x\to1-}\frac{x^2-2x+1}{|x-1|}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{|x-1|}=0$$ 답 0

0015 $\displaystyle\lim_{x\to0}\{-3f(x)\}=-3\lim_{x\to0}f(x)=-3\cdot(-3)=9$ 답 9

0016 $\displaystyle\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to0}g(x)$
$=-3+4=1$ 답 1

0017 $\displaystyle\lim_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to0}f(x)-\lim_{x\to0}g(x)$
$=-3-4=-7$ 답 -7

0018 $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)g(x)=\lim_{x\to0}f(x)\lim_{x\to0}g(x)$
$=-3\cdot4=-12$ 답 -12

0019 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to0}g(x)}{\lim_{x\to0}f(x)}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$ 답 $-\dfrac{4}{3}$

0020 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2f(x)}{g(x)+1}=\frac{2\lim_{x\to0}f(x)}{\lim_{x\to0}g(x)+1}=\frac{2\cdot(-3)}{4+1}=-\frac{6}{5}$ 답 $-\dfrac{6}{5}$

0021 $\displaystyle\lim_{x\to1}(2x+5)=2\cdot1+5=7$ 답 7

0022 $\displaystyle\lim_{x\to3}(x-1)(2x^2-3x-1)=(3-1)\cdot(2\cdot3^2-3\cdot3-1)$
$=2\cdot8=16$ 답 16

0023 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2\cdot2-1}{2+1}=\frac{3}{3}=1$ 답 1

0024 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2-x}}{x}=\frac{\sqrt2-1}{1}=\sqrt2-1$ 답 $\sqrt2-1$

0025 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+2)}{x}=\lim_{x\to0}(x^2+2)=2$ 답 2

0026 $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x-3)}{x+1}$
$\displaystyle=\lim_{x\to-1}(2x-3)=-5$ 답 -5

0027 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x+1)(x-1)}$
$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+2}{x+1}$
$=2$ 답 2

0028 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$
$\displaystyle=\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)=12$ 답 12

0029 $\displaystyle\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$
$\displaystyle=\lim_{x\to9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$
$\displaystyle=\lim_{x\to9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}$ 답 $\dfrac{1}{6}$

0030 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$
$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$
$\displaystyle=\lim_{x\to3}2(\sqrt{x+1}+2)=8$ 답 8

0031 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^3+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=0$ 답 0

0032 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-1}{3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}}=\frac{4}{3}$ 답 $\dfrac{4}{3}$

0033 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\frac{3}{x}}{4+\frac{3}{x}}=\infty$ 답 ∞

0034 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(2x-1)}{3x^2+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x^2+x-1}$
$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$
$=\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{2}{3}$

0035 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\frac{4}{x}}=2$ 답 2

0036 $\lim_{x\to-\infty}(x^3+3x^2+2x-1)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$
$=-\infty$ 답 $-\infty$

0037 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$ 답 0

0038 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+3x})$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x-x^2-3x}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+3x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+3x}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=-3$ 답 -3

0039 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}$
$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}$
$=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0040 $\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(2x-\frac{5x+2}{x+1}\right)$
$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{2x^2-3x-2}{x+1}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{(2x+1)(x-2)}{x+1}$
$=\lim_{x\to2}\frac{2x+1}{x+1}=\frac{5}{3}$ 답 $\frac{5}{3}$

0041 $x\longrightarrow1$일 때 (분자) $\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.
즉 $\lim_{x\to1}(ax+b)=0$이므로 $a+b=0$
$\therefore b=-a$ …… ㉠
㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면
$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{ax-a}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{a(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$
이므로 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$ $\therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-2$ 답 $a=2,\ b=-2$

0042 $x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.
즉 $\lim_{x\to0}(\sqrt{x+a}-b)=0$이므로 $\sqrt{a}-b=0$
$\therefore b=\sqrt{a}$ …… ㉠
㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면
$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+a-a}{x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}$
$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}$
$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$
이므로 $\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{4}$ $\therefore a=4$
$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=2$ 답 $a=4,\ b=2$

0043 $x^2+2x-4\le f(x)\le 2x^2-3$이고
$\lim_{x\to1}(x^2+2x-4)=-1,\ \lim_{x\to1}(2x^2-3)=-1$
이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여
$\lim_{x\to1}f(x)=-1$ 답 -1

유형 01 함수의 극한값의 존재 본책 12쪽

우극한과 좌극한을 각각 구하여 비교하였을 때
두 값이 같으면 ➡ 극한값이 존재한다.
두 값이 다르거나 수렴하지 않으면 ➡ 극한값이 존재하지 않는다.

0044 ㄱ. $\lim_{x\to3}(x-3)=0$
ㄴ. $\lim_{x\to-2+}|x+2|=\lim_{x\to-2+}(x+2)=0$
$\lim_{x\to-2-}|x+2|=\lim_{x\to-2-}\{-(x+2)\}=0$
$\therefore \lim_{x\to-2}|x+2|=0$
ㄷ. $\lim_{x\to1+}\frac{|x-1|}{x^2-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$
$=\lim_{x\to1+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$
$\lim_{x\to1-}\frac{|x-1|}{x^2-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$
$=\lim_{x\to1-}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}$
따라서 $\lim_{x\to1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$의 값은 존재하지 않는다.
ㄹ. $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{(x+5)(x-5)}{x-5}=\lim_{x\to5}(x+5)=10$
이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ⑤

0045 ① $\lim_{x\to0+}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to0-}f(x)=-\infty$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.
② $\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.
③ $\lim_{x\to0}f(x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.
④ $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재한다.
⑤ $\lim_{x\to0+}f(x)=0,\ \lim_{x\to0-}f(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.
답 ④

참고 ③ $\lim_{x\to0}f(x)=\infty$에서 ∞는 일정한 값이 아닌 한없이 커지는 상태를 나타내므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.
⑤ 정수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}f(x)\neq\lim_{x\to a-}f(x)$이다.

0046 ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)=0,\ \lim_{x\to1-}f(x)=-2$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to 2+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 2-} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)=1$

ㄷ. $-1<a<1$인 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 항상 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0047 $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(kx-5)=2k-5$ ⋯ ❶

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(x-k)^2=(2-k)^2$ ⋯ ❷

$\lim_{x\to 2} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)$이어야 하므로

$2k-5=(2-k)^2$ ⋯ ❸

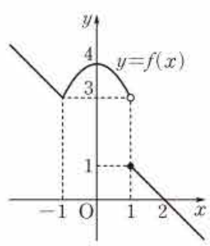
$2k-5=k^2-4k+4$, $k^2-6k+9=0$

$(k-3)^2=0$ $\therefore k=3$ ⋯ ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to 2+} f(x)$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\lim_{x\to 2-} f(x)$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ k에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0048 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때



$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(2-x)=1$,

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(4-x^2)=3$

이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore a=1$ 답 1

유형 02 함수의 극한값 구하기 본책 13쪽

① 함수 $f(x)$가 다항함수이면 ➡ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

② 절댓값 기호를 포함한 함수

➡ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 함수의 식을 구한다.

0049 $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x+2)=2$

$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+} 1=1$

$\therefore \lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 3+} f(x)=2+1=3$ 답 3

0050 $\lim_{x\to 0} f(x)+\lim_{x\to 1} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)$

$=1+0+(-1)=0$ 답 ③

0051 $\lim_{x\to -1+}\dfrac{x^2-3x-4}{|x+1|}=\lim_{x\to -1+}\dfrac{(x+1)(x-4)}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1+}(x-4)=-5$

$\therefore a=-5$ ⋯ ❶

$\lim_{x\to 3-}\dfrac{x^2-x-6}{|x-3|}=\lim_{x\to 3-}\dfrac{(x+2)(x-3)}{-(x-3)}$

$=\lim_{x\to 3-}(-x-2)=-5$

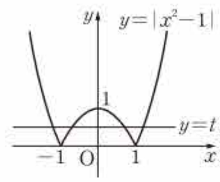
$\therefore b=-5$ ⋯ ❷

$\therefore ab=25$ ⋯ ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0052 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=t$는 오른쪽 그림과 같으므로

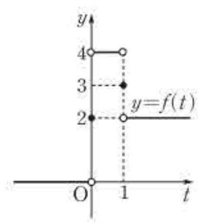


$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 2 & (t=0 \text{ 또는 } t>1) \\ 4 & (0<t<1) \\ 3 & (t=1) \end{cases}$$

따라서 $\lim_{t\to 0+} f(t)=4$, $\lim_{t\to 1+} f(t)=2$이므로

$\alpha=4$, $\beta=2$ $\therefore \dfrac{\alpha}{\beta}=2$ 답 ④

참고 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



유형 03 $[x]$ 꼴을 포함한 함수의 극한 본책 13쪽

$[x]$가 x보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n에 대하여

① $n\le x<n+1$이면 $[x]=n$ ➡ $\lim_{x\to n+}[x]=n$

② $n-1\le x<n$이면 $[x]=n-1$ ➡ $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$

0053 $\lim_{x\to 3+}[x]=3$, $\lim_{x\to 3-}[x]=2$이므로

$\lim_{x\to 3+}\dfrac{[x]^2+x}{[x]}+\lim_{x\to 3-}\dfrac{[x]^2-x}{[x]}=\dfrac{3^2+3}{3}+\dfrac{2^2-3}{2}$

$=4+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$ 답 $\dfrac{9}{2}$

0054 ① $\lim_{x\to 0-}\dfrac{[x-2]}{x-2}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$

② $\lim_{x\to 0+}\dfrac{x}{[x-1]}=\dfrac{0}{-1}=0$

③ $x\longrightarrow -1+$일 때 x^2-1은 0보다 작은 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to -1+}[x^2-1]=-1$

$\therefore \lim_{x\to -1+}\dfrac{[x]^2-1}{[x^2-1]}=\dfrac{(-1)^2-1}{-1}=0$

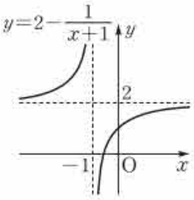
④ $\lim_{x\to 1-}\dfrac{[x-2]}{[x+1]}=\dfrac{-2}{1}=-2$

⑤ $\lim_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x+1}{x+1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[2-\dfrac{1}{x+1}\right]=1$

답 ①

참고 $y=2-\dfrac{1}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $x\to\infty$일 때, y의 값은 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to\infty}\left[2-\frac{1}{x+1}\right]=1$$



0055 $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(a[x]^3-2b[x]^2+3)$

$=a\cdot0-2b\cdot0+3=3$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(a[x]^3-2b[x]^2+3)$

$=a\cdot(-1)^3-2b\cdot(-1)^2+3=-a-2b+3$

$\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)$이어야 하므로 $3=-a-2b+3$ $\therefore a=-2b$

$\therefore \dfrac{2b}{a}=\dfrac{2b}{-2b}=-1$

답 -1

0056 $\lim_{x\to k+}\dfrac{[2x]}{[x]^2+x}=\dfrac{2k}{k^2+k}=\dfrac{2}{k+1}$ ($\because k\neq0$)

$\lim_{x\to k-}\dfrac{[2x]}{[x]^2+x}=\dfrac{2k-1}{(k-1)^2+k}=\dfrac{2k-1}{k^2-k+1}$ ⋯ ❶

이때 $\lim_{x\to k}\dfrac{[2x]}{[x]^2+x}$의 값이 존재하므로

$\dfrac{2}{k+1}=\dfrac{2k-1}{k^2-k+1}$, $2k^2-2k+2=2k^2+k-1$

$3k=3$ $\therefore k=1$ ⋯ ❷

따라서 $\alpha=\dfrac{2}{k+1}=\dfrac{2}{1+1}=1$이므로 ⋯ ❸

$k+\alpha=2$ ⋯ ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ 좌극한과 우극한을 각각 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ α의 값을 구할 수 있다.	10 %
❹ $k+\alpha$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 04 합성함수의 극한

본책 14쪽

$\lim_{x\to a+}g(f(x))$의 값은 $f(x)=t$로 놓고 다음을 이용한다.

① $x\to a+$일 때 $t\to b+$이면 $\lim_{x\to a+}g(f(x))=\lim_{t\to b+}g(t)$

② $x\to a+$일 때 $t\to b-$이면 $\lim_{x\to a+}g(f(x))=\lim_{t\to b-}g(t)$

③ $x\to a+$일 때 $t=b$이면 $\lim_{x\to a+}g(f(x))=g(b)$

0057 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to0+}g(t)=\lim_{t\to0+}(t-2)^2=4$

또 $x\to1+$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{t\to-1+}g(t)=\lim_{t\to-1+}(t-2)^2=9$

$\therefore \lim_{x\to0+}g(f(x))+\lim_{x\to1+}g(f(x))=4+9=13$

답 ②

0058 $x+1=t$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x+1)=\lim_{t\to1-}f(t)=0$

$f(x)=s$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $s\to-1+$이므로

$\lim_{x\to0+}f(f(x))=\lim_{s\to-1+}f(s)=1$

$\therefore \lim_{x\to0-}f(x+1)+\lim_{x\to0+}f(f(x))=0+1=1$

답 ④

0059 ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x-2)=-2$, $\lim_{x\to0-}f(x)=-1$

즉 $\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $t=-1$이므로

$\lim_{x\to0-}f(f(x))=f(-1)=-1$

ㄷ. $x\to2+$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to2+}f(f(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}(t-2)=-2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0060 ㄱ. $\lim_{x\to-1+}g(x)=1$, $\lim_{x\to-1-}g(x)=2$

즉 $\lim_{x\to-1+}g(x)\neq\lim_{x\to-1-}g(x)$이므로 $\lim_{x\to-1}g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(g(x))=f(1)=1$

$x\to-1-$일 때 $t=2$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(g(x))=f(2)=1$

$\therefore \lim_{x\to-1}f(g(x))=1$

ㄷ. $f(x)=s$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $s\to0+$이므로

$\lim_{x\to-1+}g(f(x))=\lim_{s\to0+}g(s)=0$

$x\to-1-$일 때 $s\to0-$이므로

$\lim_{x\to-1-}g(f(x))=\lim_{s\to0-}g(s)=1$

즉 $\lim_{x\to-1+}g(f(x))\neq\lim_{x\to-1-}g(f(x))$이므로 $\lim_{x\to-1}g(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

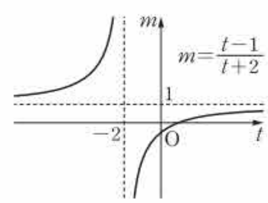
이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0061 $\dfrac{t-1}{t+2}=m$으로 놓으면

$\dfrac{t-1}{t+2}=1-\dfrac{3}{t+2}$

이므로 $m=\dfrac{t-1}{t+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $t\to\infty$일 때 $m\to1-$이므로

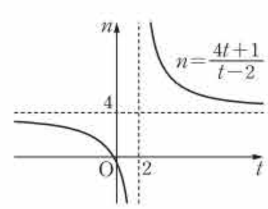


$\lim_{t\to\infty}f\left(\dfrac{t-1}{t+2}\right)=\lim_{m\to1-}f(m)=2$ ⋯ ❶

$\dfrac{4t+1}{t-2}=n$으로 놓으면

$\dfrac{4t+1}{t-2}=4+\dfrac{9}{t-2}$

이므로 $n=\dfrac{4t+1}{t-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $t\to\infty$일 때



$n \to 4+$이므로

$$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{4t+1}{t-2}\right)=\lim_{n\to 4+} f(n)=1 \quad \cdots ❷$$

$$\therefore 2\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+2}\right)-\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{4t+1}{t-2}\right)=2\cdot 2-1=3 \quad \cdots ❸$$

답 3

채점 기준	비율
❶ $\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{4t+1}{t-2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $2\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+2}\right)-\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{4t+1}{t-2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 05 함수의 극한에 대한 성질

본책 14쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$,
$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)일 때
➡ $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 두 함수 $f(x)$, $h(x)$는 수렴하므로 극한값을 구하려는 함수식을 $f(x)$와 $h(x)$로 나타낸 후 함수의 극한에 대한 성질을 이용한다.

0062 $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=f(x)-h(x)$이고
$\lim_{x\to\infty} h(x)=2$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{2f(x)-3g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+\{f(x)-h(x)\}}{2f(x)-3\{f(x)-h(x)\}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-h(x)}{-f(x)+3h(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{h(x)}{f(x)}}{-1+3\cdot\frac{h(x)}{f(x)}}$$
$$=-2\left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0\right)$$

답 ②

다른 풀이 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}=2$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}=0$$

즉 $\lim_{x\to\infty}\left\{1-\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=0$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=1$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{2f(x)-3g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{g(x)}{f(x)}}{2-3\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}$$
$$=\frac{1+1}{2-3\cdot 1}=-2$$

0063 $\lim_{x\to -2}(x^2-x-6)f(x)=\lim_{x\to -2}(x+2)(x-3)f(x)$
$$=\lim_{x\to -2}(x-3)\{(x+2)f(x)\}$$
$$=-5\cdot 3$$
$$=-15$$

답 -15

0064 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\{f(x)-2x^2\}=0$에서

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x^2}-2\right\}=0,\ 즉\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{5f(x)+x}{2f(x)-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot\frac{f(x)}{x^2}+\frac{1}{x}}{2\cdot\frac{f(x)}{x^2}-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}$$
$$=\frac{5\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{5}{2}$$

답 ⑤

0065 $f(x)-2g(x)=h(x)$라 하면 $\lim_{x\to a} h(x)=-9$이고

$$g(x)=\frac{f(x)-h(x)}{2} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-h(x)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\{\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} h(x)\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\{3-(-9)\}=6 \quad \cdots ❷$$

답 6

채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 $f(x)$, $h(x)$로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{x\to a} g(x)$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0066 $\lim_{x\to 2} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to 2} g(x)=\beta$이므로

$$\lim_{x\to 2}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 2} f(x)+\lim_{x\to 2} g(x)=\alpha+\beta=1$$
$$\lim_{x\to 2} f(x)g(x)=\lim_{x\to 2} f(x)\cdot\lim_{x\to 2} g(x)=\alpha\beta=-6$$

즉 α, β를 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-x-6=(x+2)(x-3)=0$이므로
$\alpha=3$, $\beta=-2$ ($\because \alpha>\beta$)

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{3g(x)+2}=\frac{\lim_{x\to 2} f(x)-2}{3\lim_{x\to 2} g(x)+2}$$
$$=\frac{\alpha-2}{3\beta+2}=\frac{3-2}{3\cdot(-2)+2}$$
$$=-\frac{1}{4}$$

답 ③

SSEN 특강 두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$$x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{두\ 근의\ 합}x+\underbrace{\alpha\beta}_{두\ 근의\ 곱}=0$$

0067 $x-1=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

유형 06 함수의 극한에 대한 성질; 합답형

본책 15쪽

$x \to a$일 때의 극한값이 존재하지 않는 함수의 예를 들 때
➡ $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 다른 함수를 찾아본다.

0068 $[x]$를 x보다 크지 않은 최대의 정수라 하자.

ㄱ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=[x]$이면

$$\lim_{x\to1} f(x)=0,\ \lim_{x\to1} f(x)g(x)=0$$

이지만 $\lim_{x\to1} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=[x^2+1]$이면

$$\lim_{x\to1} f(x)=0,\ \lim_{x\to1} \frac{f(x)}{g(x)}=0$$

이지만 $\lim_{x\to1} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하고

$\frac{f(x)}{g(x)}=h(x)$라 하면 $f(x)=g(x)h(x)$이고 $\lim_{x\to a} h(x)=\beta$

이므로

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)h(x)=\alpha\beta$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

0069 ㄱ. [반례] $f(x)=\begin{cases} 2 & (x\ge a) \\ 1 & (x<a) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 1 & (x\ge a) \\ 2 & (x<a) \end{cases}$이

면 $\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} g(x)$의 값은 모두 존재하지 않지만

$f(x)+g(x)=3$이므로 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=3$이다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)

라 하고 $f(x)+g(x)=h(x)$, $f(x)-g(x)=k(x)$라 하면

$$\lim_{x\to a} h(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a} k(x)=\beta$$

이때 $f(x)=\frac{h(x)+k(x)}{2}$이므로

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} \frac{h(x)+k(x)}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ㄷ. $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\beta$ (α, β는 실수)라 하고

$f(x)g(x)=h(x)$라 하면 $\lim_{x\to a} h(x)=\beta$이다.

$f(x)\ne0$일 때, $g(x)=\frac{h(x)}{f(x)}$이므로 $\lim_{x\to a} f(x)\ne0$이면

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{f(x)}=\frac{\beta}{\alpha}$$

ㄹ. [반례] $f(x)=\begin{cases} -x+6 & (x>2) \\ x+2 & (x\le2) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 4 & (x\ne2) \\ 6 & (x=2) \end{cases}$이면

모든 양수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이지만

$$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2} g(x)=4$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

유형 07 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한; 유리식

본책 16쪽

분자, 분모가 모두 다항식이면
➡ 분자, 분모를 각각 인수분해하여 공통인수를 약분한다.

0070 $$\lim_{x\to-1} \frac{x^3+x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(x^2-x+2)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to-1} \frac{x^2-x+2}{x-1}=-2$$

답 -2

0071 $$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0} \frac{x^3+2kx}{x}=\lim_{x\to0} (x^2+2k)=2k$$

즉 $2k=8$이므로 $k=4$ 답 ④

0072 $$\lim_{x\to1} \frac{4(x^4-1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to1} \frac{4(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to1} \frac{4(x^2+1)}{f(x)}=\frac{8}{f(1)}$$

즉 $\frac{8}{f(1)}=1$이므로 $f(1)=8$ 답 8

0073 $$\lim_{x\to-2} \frac{\{f(x)\}^2-f(x)}{x^2f(x)-4f(x)}=\lim_{x\to-2} \frac{f(x)\{f(x)-1\}}{(x^2-4)f(x)}=\lim_{x\to-2} \frac{f(x)-1}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to-2} \frac{f(x)-1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-2}=4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$$

답 ②

0074 $-1<x<1$일 때, $x^2-1<0$이므로

$$\lim_{x\to-1+} \frac{x^2+x}{|x^2-1|}=\lim_{x\to-1+} \frac{x^2+x}{1-x^2}=\lim_{x\to-1+} \frac{x(1+x)}{(1+x)(1-x)}=\lim_{x\to-1+} \frac{x}{1-x}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ ⋯ ❶

또 $\lim_{x\to0+} \frac{x+|x|}{x}=\lim_{x\to0+} \frac{2x}{x}=2$이므로

$b=2$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=\frac{3}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 08 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한; 무리식

본책 16쪽

분자, 분모 중 무리식이 있으면
➡ 근호를 포함한 쪽을 유리화하고 공통인수를 약분한다.

0075 $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x^2-5}-2}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{(\sqrt{x^2-5}-2)(\sqrt{x^2-5}+2)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{x^2-9}$

$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{(x+3)(x-3)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2-5}+2}{x+3}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0076 $\lim_{x\to4}\frac{(x-4)f(x)}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)f(x)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)f(x)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$

$=\lim_{x\to4}f(x)(\sqrt{x}+2)$

$=3\cdot(2+2)=12$ 답 ⑤

0077 $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+xf(x)}-\sqrt{1-xf(x)}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{1+xf(x)}+\sqrt{1-xf(x)})}{(\sqrt{1+xf(x)}-\sqrt{1-xf(x)})(\sqrt{1+xf(x)}+\sqrt{1-xf(x)})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{1+xf(x)}+\sqrt{1-xf(x)})}{2xf(x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+xf(x)}+\sqrt{1-xf(x)}}{2f(x)}$

$=\frac{\sqrt{1+0\cdot4}+\sqrt{1-0\cdot4}}{2\cdot4}=\frac{1}{4}$ 답 ③

0078 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(-x^2+x)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}{(x^2-x)(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}\right)=-\frac{1+1}{1+1}=-1$ 답 -1

유형 09 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 본책 17쪽

(i) 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

(ii) $\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^n}=0$ (n은 자연수, c는 상수)임을 이용한다.

0079 $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{\sqrt{4x^2+x+1}-x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+1}-2t}{\sqrt{4t^2-t+1}+t}$ ← 분자, 분모를 각각 t로 나눈다.

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}-2}{\sqrt{4-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}$

$=\frac{1-2}{2+1}=-\frac{1}{3}$ 답 ③

0080 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{9x^2-x}+\sqrt{4x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{9-\frac{1}{x}}+\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}$

$=\frac{3}{3+2}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

0081 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+3}=0$이므로 $a=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x}{2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{5}{x}}{2-\frac{1}{x^2}}=\frac{6}{2}=3$이므로 $b=3$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+5}-3}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{5}{x^2}}-\frac{3}{x}}{1}=3$이므로 $c=3$

① $a<b$ ② $a\neq c$ ③ $b=c$

④ $a-b=-3$이므로 $a-b\neq c$

⑤ $a+c=3$이므로 $a+c=b$

답 ⑤

0082 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+\{f(x)\}^2}{3x^2-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{3-\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}}$

분자, 분모를 각각 x^2으로 나눈다.

$=\frac{2+2^2}{3-2\cdot0}=2$ 답 ③

0083 $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{-t}=a$

$\therefore\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{t}=-a$ ······ ㉠ ··· ❶

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3f(x)}{\sqrt{f(x)+x^2}+f(x)}=\lim_{t\to\infty}\frac{3f(-t)}{\sqrt{f(-t)+t^2}+f(-t)}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{3\cdot\frac{f(-t)}{t}}{\sqrt{\frac{f(-t)}{t}\cdot\frac{1}{t}+1}+\frac{f(-t)}{t}}$

$=\frac{-3a}{1-a}$ ($\because$ ㉠) ··· ❷

즉 $\frac{-3a}{1-a}=4$이므로 $-3a=4-4a$ $\therefore a=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{t}=-a$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{x\to-\infty}\frac{3f(x)}{\sqrt{f(x)+x^2}+f(x)}$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 $x\to-\infty$일 때 $x<0$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3f(x)}{\sqrt{f(x)+x^2}+f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3\cdot\frac{f(x)}{x}}{-\sqrt{\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}+1}+\frac{f(x)}{x}}$

$=\frac{3a}{-1+a}=\frac{-3a}{1-a}$

유형 10 $\infty-\infty$ 꼴의 극한
본책 17쪽

① 다항식은 최고차항으로 묶는다.

② 무리식은 근호를 포함한 쪽을 유리화하여 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

0084 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{1-2t+t^2}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{1-2t+t^2}-t)(\sqrt{1-2t+t^2}+t)}{\sqrt{1-2t+t^2}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1-2t}{\sqrt{1-2t+t^2}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}-2}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1}+1}$$
$$=\frac{0-2}{1+1}=-1$$

답 ②

0085 (주어진 식)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-2x+4}}{(x-\sqrt{x^2-2x+4})(x+\sqrt{x^2-2x+4})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-2x+4}}{2x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{2-\frac{4}{x}}$$
$$=\frac{1+1}{2-0}=1$$

답 1

0086 $$\lim_{x\to2}\frac{1-\sqrt{x-1}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}$$
$$=\lim_{x\to2}\left(-\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\right)=-\frac{1}{2}$$

$\therefore p=-\frac{1}{2}$ ··· ❶

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+3x+1})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+3x+1})(\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+3x+1})}{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+3x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+3x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\frac{-6}{1+1}=-3$$

$\therefore q=-3$ ··· ❷

$\therefore 2p-q=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-(-3)=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $2p-q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0087 $x=[x]+\alpha\ (0\le\alpha<1)$라 하면 $[x]=x-\alpha$이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-\alpha}-x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x-\alpha}-x)(\sqrt{x^2+x-\alpha}+x)}{\sqrt{x^2+x-\alpha}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\alpha}{\sqrt{x^2+x-\alpha}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\alpha}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{\alpha}{x^2}}+1}$$
$$=\frac{1-0}{1+1}=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

다른 풀이 $$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+[x]}-x)(\sqrt{x^2+[x]}+x)}{\sqrt{x^2+[x]}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{\sqrt{x^2+[x]}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{[x]}{x}}{\sqrt{1+\frac{[x]}{x^2}}+1}$$
$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$x>0$일 때, $\frac{x-1}{x}<\frac{[x]}{x}\le\frac{x}{x}$이고 $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$

유형 11 $\infty\times0$ 꼴의 극한
본책 18쪽

$\infty\times c$, $\dfrac{c}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ (c는 0이 아닌 상수) 꼴로 변형하여 계산한다.

0088 $$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2x^2+x-1}{2(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{(x+1)(2x-1)}{2(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{2x-1}{2(x-1)}=\frac{3}{4}$$

답 ③

0089 $$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}-2)\cdot\frac{x-6}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}-2)\cdot\frac{x-6}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{x-6}{\sqrt{x}+2}=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0090 $\frac{1}{n}=x$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $x\to0+$이고

$f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$

$$\therefore(\text{주어진 식})=\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^2}\{f(3x+1)-f(1)\}^2$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\{(3x+2)^2-2^2\}^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\{3x(3x+4)\}^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{9x^2(3x+4)^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0+}9(3x+4)^2=144$$

답 144

0091 $x=3k+\alpha$ (k는 정수, $0\le\alpha<3$)라 하면

$$\left[\frac{x}{3}\right]=\left[\frac{3k+\alpha}{3}\right]=\left[k+\frac{\alpha}{3}\right]=k\ \left(\because 0\le\frac{\alpha}{3}<1\right)$$

$x \to \infty$일 때 $k \to \infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x}\left[\frac{x}{3}\right]=\lim_{k\to\infty}\frac{6}{3k+a}\cdot k$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{6}{3+\underbrace{\frac{a}{k}}_{}}=2$$

$\lim_{k\to\infty}\frac{a}{k}=0$임을 이용한다.

답 ④

유형 12 미정계수의 결정 (1)

본책 18쪽

미정계수가 포함된 분수 꼴의 함수에서 $x \to a$일 때
① (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하면 ⇒ (분자) $\to 0$
② (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 ⇒ (분모) $\to 0$

0092 $x \to -1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $\quad 1-a+b=0$

$\therefore b=a-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+a-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x+a-1)=a-2$$

$a-2=3$에서 $a=5$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $\quad b=4$

$\therefore a+b=9$

답 ③

0093 $x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^3+ax^2+bx)=0$이므로 $\quad 1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠ $\quad\cdots$ ❶

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2-(a+1)x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(x+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}x(x+a+1)=2+a$$

$2+a=6$에서 $a=4$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$b=-5 \quad\cdots$ ❷

따라서 $f(x)=x^3+4x^2-5x$이므로

$f(2)=14 \quad\cdots$ ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0094 $x \to 4$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to4}(ax+b)=0$이므로 $\quad 4a+b=0$

$\therefore b=-4a \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to4}\frac{4\sqrt{9+x^2}-5x}{ax-4a}=\lim_{x\to4}\frac{(4\sqrt{9+x^2}-5x)(4\sqrt{9+x^2}+5x)}{(ax-4a)(4\sqrt{9+x^2}+5x)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{-9(x+4)(x-4)}{a(x-4)(4\sqrt{9+x^2}+5x)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{-9(x+4)}{a(4\sqrt{9+x^2}+5x)}=-\frac{9}{5a}$$

$-\frac{9}{5a}=-2$에서 $a=\frac{9}{10}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$b=-\frac{18}{5}$

$\therefore a+b=-\frac{27}{10}$

답 ②

0095 $\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{b}\right)$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{-x-a+b}{b(x+a)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{-x-a+b}{b(x-2)(x+a)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(-x-a+b)=0$이므로 $\quad -2-a+b=0$

$\therefore b=a+2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)}{(a+2)(x-2)(x+a)}=\lim_{x\to2}\frac{-1}{(a+2)(x+a)}$$
$$=-\frac{1}{(a+2)^2}$$

$-\frac{1}{(a+2)^2}=-\frac{1}{9}$에서 $\quad a=1$ ($\because a$는 자연수)

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $\quad b=3$

$\therefore ab=3$

답 3

0096 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=a$이므로

$a=2$

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+bx+c}{x^2-x-2}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

에서 $x \to -1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(2x^2+bx+c)=0$이므로 $\quad 2-b+c=0$

$\therefore c=b-2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+bx+b-2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x+b-2)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{2x+b-2}{x-2}$$
$$=\frac{b-4}{-3}$$

$\frac{b-4}{-3}=\frac{1}{2}$에서 $b=\frac{5}{2}$이므로 이것을 ㉡에 대입하면 $\quad c=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b+c=5$

답 ⑤

유형 13 미정계수의 결정 (2)

본책 19쪽

미정계수가 포함된 $\infty-\infty$ 꼴의 함수에서 $x\to\infty$일 때 극한값이 존재하면 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 분자와 분모의 최고차항의 차수와 계수를 비교한다. 이때 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한값이 존재하면 (분자의 차수)$\le$(분모의 차수)임을 이용하여 미정계수를 구한다.

0097 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2-bx}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{at^2+bt}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{at^2+bt}-t)(\sqrt{at^2+bt}+t)}{\sqrt{at^2+bt}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-1)t^2+bt}{\sqrt{at^2+bt}+t}\quad\cdots\cdots ㉠$$

㉠의 극한값이 존재하려면 $a-1=0$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{bt}{\sqrt{t^2+bt}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b}{t}}+1}=\frac{b}{2}$$

따라서 $\frac{b}{2}=1$이므로 $b=2$

$\therefore ab=2$

답 2

0098 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2ax+1}-\sqrt{x^2-2ax+1})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2ax+1-(x^2-2ax+1)}{\sqrt{x^2+2ax+1}+\sqrt{x^2-2ax+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4ax}{\sqrt{x^2+2ax+1}+\sqrt{x^2-2ax+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4a}{\sqrt{1+\frac{2a}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2a}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\frac{4a}{2}=2a$$

따라서 $2a=6$이므로 $a=3$

답 ④

0099 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x-a}-\sqrt{ax^2+2})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x-a}-\sqrt{ax^2+2})(\sqrt{x^2+3x-a}+\sqrt{ax^2+2})}{\sqrt{x^2+3x-a}+\sqrt{ax^2+2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2+3x-a-2}{\sqrt{x^2+3x-a}+\sqrt{ax^2+2}}\quad\cdots\cdots ㉠$$

㉠의 극한값이 존재하려면 $1-a=0$ $\therefore a=1$ ⋯ ❶

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-3}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2+2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=\frac{3}{2}$$

$\therefore b=\frac{3}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore 2ab=2\cdot1\cdot\frac{3}{2}=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $2ab$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 14 다항식의 결정

본책 19쪽

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이면
⇒ $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같다.

② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (β는 실수)일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면
⇒ $\lim_{x\to a}f(x)=0$

0100 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=2$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=2(x-1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x+a)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2(x+a)}{x+1}=1+a$$

따라서 $1+a=-1$이므로 $a=-2$

$f(x)=2(x-1)(x-2)$이므로

$f(-1)=2\cdot(-2)\cdot(-3)=12$

답 12

0101 $\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{x-4}=9$에서 $x\to4$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to4}f(x)=0$이므로 $f(4)=0$ ⋯ ❶

$f(x)=(x-4)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+a)}{x-4}=\lim_{x\to4}(x+a)=4+a$$

따라서 $4+a=9$이므로 $a=5$

$f(x)=(x-4)(x+5)$이므로 ⋯ ❷

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2-4)(x+2+5)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+7)=9$$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $f(4)=0$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\lim_{x\to2}\frac{f(x+2)}{x-2}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0102 조건 ㈎에서 $f(x)$는 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 3인 삼차식임을 알 수 있다.

또 조건 (나)에서 $x \to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$이므로 $\quad f(0)=0$

$f(x)=x^3+3x^2+ax$ (a는 상수)라 하면 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+3x+a)}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2+3x+a)=a$$

$\therefore a=4$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2+4x$이므로 구하는 나머지는

$f(-1)=-1+3-4=-2$ 답 -2

SSEN 특강 나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
⇒ $R=f(\alpha)$

0103 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^2}{2x-3}=a$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 4인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-2$에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1} f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$f(x)=4(x-1)(x+k)$ (k는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)(x+k)}{x-1}=\lim_{x\to 1}4(x+k)=4(1+k)$$

따라서 $4(1+k)=-2$이므로

$1+k=-\frac{1}{2} \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$

$f(x)=4(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)=4x^2-10x+6$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^2}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-10x+6-4x^2}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-10x+6}{2x-3}=-5$$

$\therefore a=-5$ 답 ③

0104 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1} f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

또 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=5$에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2} f(x)=0$이므로 $\quad f(2)=0$

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식) ⋯⋯ ㉠

라 하고, ㉠을 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)Q(x)=-Q(1)$$

즉 $-Q(1)=-1$이므로 $\quad Q(1)=1$ ⋯⋯ ㉡

또 ㉠을 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=5$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)Q(x)=Q(2)$$

$\therefore Q(2)=5$ ⋯⋯ ㉢

㉠에서 $Q(x)$의 차수가 낮아지면 $f(x)$의 차수도 낮아진다.

이때 ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 다항식 $Q(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차식이므로

$Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)

라 하면 ㉡, ㉢에서

$a+b=1$, $2a+b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=4$, $b=-3$

따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(4x-3)$이므로

$g(3)=2\cdot 1\cdot 9=18$ 답 ③

0105 $\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-x^2}{x+3}=4$에서 $x\to -3$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to -3}\{f(x)-x^2\}=0$이므로 $\quad f(-3)-9=0$

$\therefore f(-3)=9$

$g(x)=f(x)-f(-3)=f(x)-9$이므로

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -3}\frac{f(x)g(x)}{x^2-9}\\
&=\lim_{x\to -3}\frac{f(x)\{f(x)-9\}}{x^2-9}=\lim_{x\to -3}\frac{\{f(x)\}^2-9f(x)}{x^2-9}\\
&=\lim_{x\to -3}\frac{\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2f(x)-9f(x)}{x^2-9}\\
&=\lim_{x\to -3}\left[\frac{f(x)\{f(x)-x^2\}}{(x+3)(x-3)}+\frac{f(x)(x^2-9)}{x^2-9}\right]\\
&=\lim_{x\to -3}\left\{\frac{f(x)}{x-3}\cdot\frac{f(x)-x^2}{x+3}+f(x)\right\}\\
&=\frac{f(-3)}{-6}\cdot 4+f(-3)\\
&=-6+9=3
\end{aligned}$$

답 3

유형 15 함수의 극한의 대소 관계 본책 20쪽

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$ (α는 실수)이면
⇒ $\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$

0106 $2x+3<f(x)<2x+7$의 각 변을 세제곱하면

$(2x+3)^3<\{f(x)\}^3<(2x+7)^3$

$x^3+1>0$, 즉 $x>-1$일 때 각 변을 x^3+1로 나누면

$$\frac{(2x+3)^3}{x^3+1}<\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}<\frac{(2x+7)^3}{x^3+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+7)^3}{x^3+1}=8$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}=8$$

답 ③

0107 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{2x^2-1}{x^2+1} \le f(x) \le \frac{2x^2+5}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{x^2+1}=2$이므로

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=2$$

답 2

0108 $\lim_{x\to-1}\frac{\{f(x)\}^2+2\{g(x)\}^2}{f(x)g(x)}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x)g(x)}+\lim_{x\to-1}\frac{2\{g(x)\}^2}{f(x)g(x)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{g(x)}+2\lim_{x\to-1}\frac{g(x)}{f(x)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\lim_{x\to-1}(-x^2-x-2)=\lim_{x\to-1}(x^2+3x)=-2$이므로 주어진 부등식에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{g(x)}=-2$$

따라서 ㉠에서 구하는 극한값은

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{g(x)}+2\lim_{x\to-1}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{2}{\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{g(x)}}$$

$$=-2+\frac{2}{-2}=-3$$

답 ②

0109 $|f(x)-4x|<1$에서 $\quad -1<f(x)-4x<1$

$\therefore 4x-1<f(x)<4x+1$

$4x-1>0$, 즉 $x>\frac{1}{4}$일 때 각 변을 제곱하면

$$(4x-1)^2<\{f(x)\}^2<(4x+1)^2 \quad \cdots ❶$$

모든 실수 x에 대하여 $2x^2-x+5>0$이므로 각 변을 $2x^2-x+5$로 나누면

$2x^2-x+5=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{8}>0$

$$\frac{(4x-1)^2}{2x^2-x+5}<\frac{\{f(x)\}^2}{2x^2-x+5}<\frac{(4x+1)^2}{2x^2-x+5} \quad \cdots ❷$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(4x-1)^2}{2x^2-x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x+1)^2}{2x^2-x+5}=8$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{2x^2-x+5}=8 \quad \cdots ❸$$

답 8

채점 기준	비율
❶ $\{f(x)\}^2$의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\frac{\{f(x)\}^2}{2x^2-x+5}$의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{2x^2-x+5}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 16 함수의 극한의 활용

본책 21쪽

(i) 구하는 선분의 길이 또는 점의 좌표를 식으로 나타낸다.
(ii) 함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

0110 $P(x, \sqrt{2x-2})$, $Q(x, 2)$이고 $x>3$이므로

$\overline{AQ}=x-3$, $\overline{PQ}=\sqrt{2x-2}-2$

$$\therefore \lim_{x\to3+}\frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}}=\lim_{x\to3+}\frac{x-3}{\sqrt{2x-2}-2}$$

$$=\lim_{x\to3+}\frac{(x-3)(\sqrt{2x-2}+2)}{(\sqrt{2x-2}-2)(\sqrt{2x-2}+2)}$$

$$=\lim_{x\to3+}\frac{(x-3)(\sqrt{2x-2}+2)}{2(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to3+}\frac{\sqrt{2x-2}+2}{2}=2$$

답 ④

0111 직선 OP의 기울기가 $\frac{2t^2}{t}=2t$이므로 점 $P(t, 2t^2)$을 지나고 직선 OP와 수직인 직선의 방정식은

$$y-2t^2=-\frac{1}{2t}(x-t) \quad \cdots ❶$$

$x=0$을 위의 식에 대입하면 $y=2t^2+\frac{1}{2}$이므로

$$f(t)=2t^2+\frac{1}{2} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}\left(2t^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 P를 지나고 직선 OP와 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(t)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{t\to0}f(t)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

SSEN 특강 한 직선에 수직인 직선의 방정식

점 (a, b)를 지나고 기울기가 $m(m\neq0)$인 직선과 수직인 직선의 방정식은

$$y-b=-\frac{1}{m}(x-a)$$

0112 $A(k, \sqrt{4k})$, $B(k, \sqrt{k})$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{k^2+4k}$, $\overline{OB}=\sqrt{k^2+k}$

$$\therefore 2\lim_{k\to\infty}(\overline{OA}-\overline{OB})$$

$$=2\lim_{k\to\infty}(\sqrt{k^2+4k}-\sqrt{k^2+k})$$

$$=2\lim_{k\to\infty}\frac{(\sqrt{k^2+4k}-\sqrt{k^2+k})(\sqrt{k^2+4k}+\sqrt{k^2+k})}{\sqrt{k^2+4k}+\sqrt{k^2+k}}$$

$$=2\lim_{k\to\infty}\frac{3k}{\sqrt{k^2+4k}+\sqrt{k^2+k}}=2\lim_{k\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{4}{k}}+\sqrt{1+\frac{1}{k}}}$$

$$=2\cdot\frac{3}{1+1}=3$$

답 ②

0113 점 C의 좌표를 $(0, y)$, 점 P의 좌표를 $\left(x, \frac{1}{2}x^2\right)$이라 하면 $\overline{CO}=\overline{CP}$, 즉 $\overline{CO}^2=\overline{CP}^2$이므로

$$y^2=x^2+\left(\frac{1}{2}x^2-y\right)^2, \qquad y^2=x^2+\frac{1}{4}x^4-x^2y+y^2$$

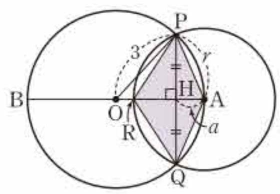
$$x^2y=\frac{1}{4}x^4+x^2 \qquad \therefore y=\frac{1}{4}x^2+1 \ (\because x\neq0)$$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $x \longrightarrow 0$이므로 점 C가 한없이 가까워지는 점의 y좌표는

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)=1$$ 답 1

0114 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{AH}=a$라 하면

$\overline{OH}=|3-a|$



이때 $\overline{PA}=r$, $\overline{OP}=3$이므로

$\triangle$POH와 $\triangle$PAH에서

$$3^2-(3-a)^2=r^2-a^2, \quad 6a=r^2 \quad \therefore a=\frac{r^2}{6}$$

즉 $\overline{PH}=\sqrt{r^2-\left(\frac{r^2}{6}\right)^2}=\frac{r}{6}\sqrt{36-r^2}$이므로

$$S(r)=2\triangle PRA=2\cdot\frac{1}{2}r\cdot\frac{r}{6}\sqrt{36-r^2}=\frac{r^2}{6}\sqrt{36-r^2}$$

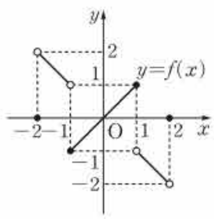
$$\therefore \lim_{r\to 6-}\frac{S(r)}{\sqrt{6-r}}=\lim_{r\to 6-}\frac{r^2\sqrt{36-r^2}}{6\sqrt{6-r}}=\lim_{r\to 6-}\frac{r^2\sqrt{(6+r)(6-r)}}{6\sqrt{6-r}}$$

$$=\lim_{r\to 6-}\frac{r^2\sqrt{6+r}}{6}=12\sqrt{3}$$ 답 $12\sqrt{3}$

0115 1st $f(-x)=-f(x)$임을 이용하여 $-2\le x<0$에서의 그래프를 그려 본다.

정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2nd $\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 2-}f(x)$의 값을 구한다.

$\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 2-}f(x)=-1+(-2)=-3$

답 ①

다른 풀이 $f(-x)=-f(x)$, 즉 $f(x)=-f(-x)$이므로

$$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}\{-f(-x)\}$$

$-x=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -1+$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}\{-f(-x)\}=\lim_{t\to 1-}\{-f(t)\}$$

$$=-\lim_{t\to 1-}f(t)=-1$$

$$\therefore \lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 2-}f(x)=-1+(-2)=-3$$

SSEN 특강

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

① $f(-x)=f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

② $f(-x)=-f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

0116 1st $7<x<9$일 때 $f(x)$를 구한다.

$7<x<9$일 때, x보다 작은 자연수 중에서 소수는

$2, 3, 5, 7$의 4개 $\quad \therefore f(x)=4$

2nd α의 값을 구한다.

$8<x<9$일 때, $x>2f(x)=2\cdot 4=8$이므로

$g(x)=f(x)=4$

$\therefore \alpha=\lim_{x\to 8+}g(x)=4$

3rd β의 값을 구한다.

$7<x\le 8$일 때, $x\le 2f(x)=2\cdot 4=8$이므로

$g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{4}$

$\therefore \beta=\lim_{x\to 8-}g(x)=\frac{1}{4}$

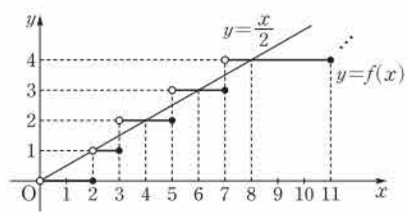
4th $\frac{\alpha}{\beta}$의 값을 구한다.

따라서 구하는 값은 $\quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{\frac{1}{4}}=16$ 답 16

다른 풀이 함수 $f(x)$는 양수 x보다 작은 자연수 중에서 소수의 개수이므로

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (0<x\le 2) \\ 1 & (2<x\le 3) \\ 2 & (3<x\le 5) \\ 3 & (5<x\le 7) \\ 4 & (7<x\le 11) \\ \vdots & \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$g(x)=\begin{cases} f(x) & \left(\frac{x}{2}>f(x)\right) \\ \frac{1}{f(x)} & \left(\frac{x}{2}\le f(x)\right) \end{cases}$이고, 위의 그래프에서 $x \longrightarrow 8+$일 때 $\frac{x}{2}>f(x)$이므로

$$\alpha=\lim_{x\to 8+}g(x)=\lim_{x\to 8+}f(x)=4$$

$x \longrightarrow 8-$일 때 $\frac{x}{2}<f(x)$이므로

$$\beta=\lim_{x\to 8-}g(x)=\lim_{x\to 8-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{\frac{1}{4}}=16$$

0117 1st x가 정수인 경우와 정수가 아닌 경우로 나누어 $f(x)$를 구하고 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. (i) $x=n$ (n은 정수)일 때,

$f(x)=[x]+[-x]=n-n=0$

(ii) $x=n+\alpha$ (n은 정수, $0<\alpha<1$)일 때,

$-x=-n-\alpha=-n-1+(1-\alpha)$

이므로

$f(x)=[x]+[-x]=n+(-n-1)=-1$

(i), (ii)에서 치역은 $\{-1, 0\}$이다.

2nd a가 정수인 경우와 정수가 아닌 경우로 나누어 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값을 구하고 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. (i) $a=n$ (n은 정수)일 때,

$x \to a+$이면 $n<x<n+1$, $-n-1<-x<-n$이므로

$\lim\limits_{x\to a+}([x]+[-x])=n+(-n-1)=-1$

$x \to a-$이면 $n-1<x<n$, $-n<-x<-n+1$이므로

$\lim\limits_{x\to a-}([x]+[-x])=(n-1)+(-n)=-1$

따라서 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-1$이다.

(ii) $a\neq n$ (n은 정수)일 때, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)=-1$

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값은 항상 존재하며 그 값은 -1이다.

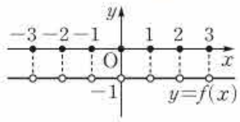
(i), (ii)에서 모든 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값이 존재한다.

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. [반례] $f(0)=0$이지만 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

다른 풀이 ㄴ. ㄱ에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값이 존재한다.



0118

1st $y=f(a)$의 그래프를 그려 본다.

$x^2-3x+2=0$에서

$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore A=\{1,\ 2\}$

$(x-a)(x-a-3)\le 0$에서

$a\le x\le a+3$

$\therefore B=\{x|a\le x\le a+3\}$

$f(a)=n(A\cap B)$에서

(i) $a<-2$일 때, $a+3<1$이므로

$A\cap B=\varnothing \qquad \therefore f(a)=0$

(ii) $-2\le a<-1$일 때, $1\le a+3<2$이므로

$A\cap B=\{1\} \qquad \therefore f(a)=1$

(iii) $-1\le a\le 1$일 때, $2\le a+3\le 4$이므로

$A\cap B=\{1,\ 2\} \qquad \therefore f(a)=2$

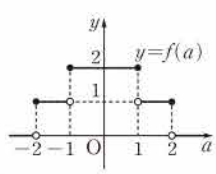
(iv) $1<a\le 2$일 때, $4<a+3\le 5$이므로

$A\cap B=\{2\} \qquad \therefore f(a)=1$

(v) $a>2$일 때, $\quad A\cap B=\varnothing$

$\therefore f(a)=0$

이상에서 $y=f(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2nd 그래프를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\lim\limits_{a\to 1+}f(a)=1$, $\lim\limits_{a\to 1-}f(a)=2$이므로 $\lim\limits_{a\to 1}f(a)$의 값은 존재하지 않는다.

3rd $\lim\limits_{a\to 2+}f(a)$와 $f(2)$의 값의 대소를 비교하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $\lim\limits_{a\to 2+}f(a)=0$, $f(2)=1$이므로

$\lim\limits_{a\to 2+}f(a)<f(2)$

4th $\lim\limits_{a\to -2}f(f(a))$의 값을 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $a\to -2+$일 때 $f(a)=1$이므로

$\lim\limits_{a\to -2+}f(f(a))=f(1)=2$

$a\to -2-$일 때 $f(a)=0$이므로

$\lim\limits_{a\to -2-}f(f(a))=f(0)=2$

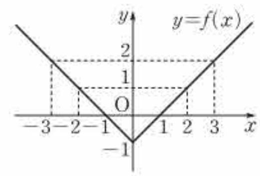
$\therefore \lim\limits_{a\to -2}f(f(a))=2$

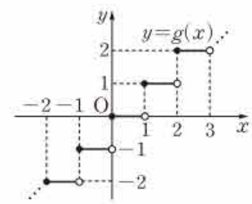
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0119

1st 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그려 본다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.





2nd $\lim\limits_{x\to 1-}g\left(\dfrac{1}{x}\right)$의 값을 구한다.

$\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to 1-$일 때 $t\to 1+$이므로

$\lim\limits_{x\to 1-}g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to 1+}g(t)=1$

3rd 모든 정수 k의 값의 합을 구한다.

즉 $\lim\limits_{x\to k+}g(f(x))=1$이어야 하므로 $x\to k+$일 때

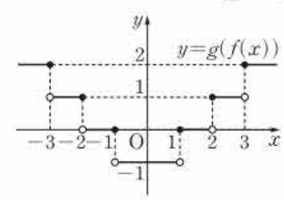
$f(x)\to 1+$ 또는 $f(x)\to 2-$

$\therefore k=2$ 또는 $k=-3$

따라서 구하는 모든 정수 k의 값의 합은

$2+(-3)=-1$ 답 -1

참고 함수 $y=g(f(x))$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0120

1st 주어진 조건을 이용하여 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$의 값을 구한다.

$x\neq 0$, $g(x)\neq -2$일 때, 조건 (가)의 식의 양변을 $x\{g(x)+2\}$로 나누면

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{g(x)-2}{g(x)+2}$$

이므로 조건 (나)에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-2}{g(x)+2}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$$

2nd $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+f(x)g(x)}{x^2-f(x)}$의 값을 구한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+f(x)g(x)}{x^2-f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{f(x)}{x}\cdot g(x)}{x-\frac{f(x)}{x}}=\frac{1-\frac{1}{3}\cdot 1}{0+\frac{1}{3}}=2$$

답 2

0121 (1st) 인수정리와 근의 공식을 이용하여 α를 구한다.

$f(x)=x^3-(3a+1)x^2+2(a-1)x+a+2$라 하면 $f(1)=0$이므로

$$\underline{f(x)=(x-1)(x^2-3ax-a-2)}$$ 조립제법을 이용한다.

이때 방정식 $x^2-3ax-a-2=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2+4a+8}}{2}$$

따라서 주어진 삼차방정식의 세 근 중 가장 작은 근은

$\dfrac{3a-\sqrt{9a^2+4a+8}}{2}$이므로 ($3a<\sqrt{9a^2+4a+8}$이므로 $\dfrac{3a-\sqrt{9a^2+4a+8}}{2}<0$)

$$\alpha=\frac{3a-\sqrt{9a^2+4a+8}}{2}$$

(2nd) $\lim\limits_{a\to\infty}\alpha$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\alpha&=\lim_{a\to\infty}\frac{3a-\sqrt{9a^2+4a+8}}{2}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{(3a-\sqrt{9a^2+4a+8})(3a+\sqrt{9a^2+4a+8})}{2(3a+\sqrt{9a^2+4a+8})}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{-2a-4}{3a+\sqrt{9a^2+4a+8}}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{-2-\frac{4}{a}}{3+\sqrt{9+\frac{4}{a}+\frac{8}{a^2}}}\\&=\frac{-2}{3+3}\\&=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 ②

SSEN 특강 인수정리

다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지기 위한 필요충분조건은 $f(\alpha)=0$이다.

➡ 다항식 $f(x)$가 x에 대한 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
$\Longleftrightarrow$ $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ $f(\alpha)=0$

0122 (1st) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(f(x))}{f(x)}$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(f(x))}{(2x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\cdot\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{1}{2x+1}\quad\cdots\cdots\ \text{㉠}\end{aligned}$$

이때 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{f(x)}=2$에서 $x\longrightarrow1$일 때, (분자)$\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

또 $f(x)$는 다항함수이므로 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(f(x))}{f(x)}$에서 $f(x)=t$라 하면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이다.

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(f(x))}{f(x)}&=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{1}{\underline{\frac{t}{f(t)}}}=1\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(x)}=1$

(2nd) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(f(x))}{2x^2-x-1}$의 값을 구한다.

따라서 구하는 극한값은 ㉠에서

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\cdot\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{1}{2x+1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\lim_{x\to1}\frac{f(f(x))}{f(x)}\lim_{x\to1}\frac{1}{2x+1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{\underline{\frac{x-1}{f(x)}}}\cdot1\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{f(x)}=2$

답 ①

0123 (1st) $f(x)$를 미정계수를 이용하여 나타낸다.

$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq0$이면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=1\neq\frac{3}{5}$$

이므로 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

따라서 $f(a)=0$이므로

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ (b\text{는 상수})\quad\cdots\cdots\ \text{㉠}$$

로 놓을 수 있다.

(2nd) a와 b 사이의 관계식을 구한다.

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)+(x-a)}&=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-b-1)}{(x-a)(x-b+1)}\\&=\frac{a-b-1}{a-b+1}\end{aligned}$$

즉 $\dfrac{a-b-1}{a-b+1}=\dfrac{3}{5}$이므로 $5a-5b-5=3a-3b+3$

$2a-2b=8 \quad \therefore a-b=4$

(3rd) $|\alpha-\beta|$의 값을 구한다.

이때 a, b는 방정식 $f(x)=0$의 두 근이므로

$|\alpha-\beta|=4$

답 ④

0124 (1st) $n=1$일 때 $f(1)$의 값을 구한다.

(i) $n=1$일 때,

주어진 조건은 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=4$

따라서 $f(x)-4x^3+3x^2$은 최고차항의 계수가 6인 이차함수이고, $\underline{f(x)\text{는 }x\text{를 인수로 가지므로}}$ $f(x)$의 상수항이 0이다.

$f(x)-4x^3+3x^2=6x^2+ax$,

즉 $f(x)=4x^3+3x^2+ax$ (a는 상수)

라 하면 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=4$에서

$\lim\limits_{x\to0}(4x^2+3x+a)=4 \quad \therefore a=4$

즉 $f(x)=4x^3+3x^2+4x$이므로

$f(1)=4+3+4=11$

(2nd) $n=2$일 때 $f(1)$의 값을 구한다.

(ii) $n=2$일 때,

주어진 조건은 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=4$

따라서 $f(x)-4x^3+3x^2$은 최고차항의 계수가 6인 삼차함수이고, $f(x)$는 x^2을 인수로 가지므로 $f(x)$의 일차항의 계수와 상수항은 0이다.

$f(x)-4x^3+3x^2=6x^3+bx^2$,

즉 $f(x)=10x^3+(b-3)x^2$ (b는 상수)

이라 하면 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=4$에서

$\lim_{x\to 0}\{10x+(b-3)\}=4$, $\quad b-3=4$

$\therefore b=7$

즉 $f(x)=10x^3+4x^2$이므로

$f(1)=10+4=14$

3rd $n\geq 3$일 때 $f(1)$의 값을 구한다.

(iii) $n\geq 3$일 때,

분모의 차수가 4 이상이고, $f(x)-4x^3+3x^2$에서 $-4x^3+3x^2$은 분자의 최고차항에 영향을 주지 않는다.

즉 $f(x)$는 최고차항의 계수가 6인 $(n+1)$차함수이고, x^n을 인수로 가지므로

$f(x)=6x^{n+1}+cx^n$ (c는 상수)

이라 하면 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$에서

$\lim_{x\to 0}(6x+c)=4 \quad \therefore c=4$

즉 $f(x)=6x^{n+1}+4x^n$이므로

$f(1)=6+4=10$

4th $f(1)$의 최댓값을 구한다.

이상에서 $f(1)$의 최댓값은 14이다. 답 ③

0125 1st $\lim_{x\to\infty}g\left(2-\frac{x}{1+x}\right)$, $\lim_{x\to\infty}g\left(1-\frac{1}{1+x}\right)$의 값을 구한다.

$2-\frac{x}{1+x}=s$로 놓으면

$$2-\frac{x}{1+x}=2-\left(1-\frac{1}{1+x}\right)=1+\frac{1}{1+x}$$

$x\to\infty$일 때 $s\to 1+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}g\left(2-\frac{x}{1+x}\right)=\lim_{s\to 1+}g(s)=1$$

$1-\frac{1}{1+x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 1-$이므로

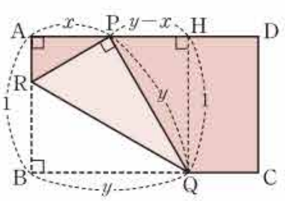
$$\lim_{x\to\infty}g\left(1-\frac{1}{1+x}\right)=\lim_{t\to 1-}g(t)=1$$

2nd 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{x\to\infty}f(x)$의 값을 구한다.

즉 $\lim_{x\to\infty}g\left(2-\frac{x}{1+x}\right)=\lim_{x\to\infty}g\left(1-\frac{1}{1+x}\right)=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ 답 1

0126 1st $\overline{BQ}=y$라 하고 x와 y 사이의 관계식을 구한다.



오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{BQ}=y$라 하면

$\overline{PH}=y-x$, $\overline{PQ}=\overline{BQ}=y$이므로 직각삼각형 PQH에서

$y^2=(y-x)^2+1^2$

$y^2=y^2-2xy+x^2+1 \quad \therefore y=\frac{x^2+1}{2x}$

2nd $S(x)$를 x에 대한 식으로 나타낸다.

$\triangle$RPA와 $\triangle$PQH에서

$\angle A=\angle H=90°$, $\angle APR=\angle HQP$

이므로 $\triangle RPA \backsim \triangle PQH$ (AA 닮음)

이때 $\overline{AP}:\overline{HQ}=\overline{PR}:\overline{QP}$에서

$x:1=\overline{PR}:y \quad \therefore \overline{PR}=xy$

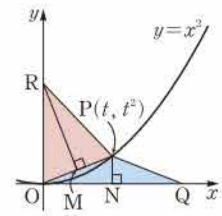
$$\therefore S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{PR}\cdot\overline{PQ}=\frac{1}{2}\cdot xy\cdot y$$

$$=\frac{1}{2}x\cdot\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2=\frac{x^4+2x^2+1}{8x}$$

3rd $\lim_{x\to 0+}xS(x)$의 값을 구한다.

$$\lim_{x\to 0+}xS(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x^4+2x^2+1}{8}=\frac{1}{8}$$ 답 ⑤

0127 1st $S(t)$를 구한다.



점 P(t, t^2)에서 x축에 내린 수선의 발을 N이라 하면 $\quad$ N$(t, 0)$

$\triangle$POQ가 이등변삼각형이므로

$\overline{ON}=\overline{QN}$

$\therefore$ Q$(2t, 0)$

$\triangle$POQ의 밑변을 $\overline{OQ}$라 하면 높이는 점 P의 y좌표와 같으므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\overline{OQ}\cdot\overline{PN}=\frac{1}{2}\cdot 2t\cdot t^2=t^3$$

2nd $T(t)$를 구한다.

$\triangle$PRO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선이 y축과 만나는 점이 R이다.

선분 OP의 중점을 M이라 하면 $\quad$ M$\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{2}\right)$

직선 OP의 기울기가 $\frac{t^2}{t}=t$이므로 직선 MR의 기울기는 $-\frac{1}{t}$ 두 직선 OP와 MR는 서로 수직이다.

따라서 직선 MR의 방정식은

$y-\frac{t^2}{2}=-\frac{1}{t}\left(x-\frac{t}{2}\right) \quad \therefore y=-\frac{1}{t}x+\frac{t^2+1}{2}$

$\therefore$ R$\left(0, \frac{t^2+1}{2}\right)$

$\triangle$PRO의 밑변을 $\overline{OR}$라 하면 높이는 점 P의 x좌표와 같으므로

$$T(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2+1}{2}\cdot t=\frac{1}{4}(t^3+t)$$

3rd $\lim_{t\to 0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}$의 값을 구한다.

$$\lim_{t\to 0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{4}(t^3+t)-t^3}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\left(-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}$$ 답 ②

다른 풀이 점 R의 좌표를 $(0, y)(y>0)$라 하면 $\overline{RO}=\overline{RP}$이므로

$y=\sqrt{t^2+(t^2-y)^2}$, $\quad y^2=t^2+(t^2-y)^2$

$y^2=t^2+t^4-2t^2y+y^2$, $\quad 2t^2y=t^4+t^2$

$\therefore y=\frac{t^2+1}{2}$ ($\because t\neq 0$) $\quad \therefore$ R$\left(0, \frac{t^2+1}{2}\right)$

0128 1st p와 q 사이의 관계식을 구한다.

직선 AB의 방정식은 $y=-2x+2$ …… ㉠

직선 PQ의 방정식은 $y=-\dfrac{q}{p}x+q$ …… ㉡

$\overline{AP}=p-1$, $\overline{BQ}=2-q$이므로 $\overline{AP}=\overline{BQ}$에서

$p-1=2-q$

$\therefore q=3-p$ …… ㉢

2nd 교점의 좌표를 p에 대한 식으로 나타낸다.

㉢을 ㉡에 대입하면 $y=\dfrac{p-3}{p}x+3-p$이므로 두 직선 PQ와 AB의 교점의 x좌표는 $-2x+2=\dfrac{p-3}{p}x+3-p$에서

$\dfrac{3p-3}{p}x=p-1 \qquad \therefore x=\dfrac{p(p-1)}{3(p-1)}=\dfrac{p}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$y=-\dfrac{2}{3}p+2$

3rd 교점이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 구한다.

두 점 P, Q가 각각 점 A, 점 B에 한없이 가까워질 때 $p \longrightarrow 1+$이므로

$$\lim_{p\to1+} x=\lim_{p\to1+}\frac{p}{3}=\frac{1}{3},\ \lim_{p\to1+} y=\lim_{p\to1+}\left(-\frac{2}{3}p+2\right)=\frac{4}{3}$$

따라서 구하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

답 ③

0129 1st 두 점 P, Q의 좌표를 r에 대한 식으로 나타낸다.

P$(0,\ r)$이고 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$x^2+y^2=r^2$

이때 점 Q는 두 원 $x^2+y^2=r^2$, $(x-3)^2+y^2=9$의 교점이므로 점 Q의 x좌표는 $r^2-x^2=9-(x-3)^2$에서

$r^2-x^2=9-x^2+6x-9$

$r^2=6x \qquad \therefore x=\dfrac{1}{6}r^2$

따라서 $y^2=r^2-x^2=r^2-\dfrac{1}{36}r^4$이므로

$y=\sqrt{r^2-\dfrac{1}{36}r^4}=\dfrac{r\sqrt{36-r^2}}{6}$

$\therefore \mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{6}r^2,\ \dfrac{r\sqrt{36-r^2}}{6}\right)$

2nd 점 R의 좌표를 r에 대한 식으로 나타낸다.

이때 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{\dfrac{r\sqrt{36-r^2}}{6}-r}{\dfrac{1}{6}r^2-0}=\frac{r\sqrt{36-r^2}-6r}{r^2}=\frac{\sqrt{36-r^2}-6}{r}$$

이므로 직선 PQ의 방정식은

$y=\dfrac{\sqrt{36-r^2}-6}{r}x+r$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{\sqrt{36-r^2}-6}{r}x+r \qquad \therefore x=\dfrac{r^2}{6-\sqrt{36-r^2}}$

$\therefore \mathrm{R}\left(\dfrac{r^2}{6-\sqrt{36-r^2}},\ 0\right)$

3rd 점 R가 한없이 가까워지는 점의 x좌표를 구한다.

따라서 $r \longrightarrow 0+$일 때 점 R가 한없이 가까워지는 점의 x좌표는

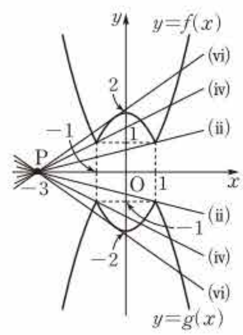
$$\lim_{r\to0+}\frac{r^2}{6-\sqrt{36-r^2}}=\lim_{r\to0+}\frac{r^2(6+\sqrt{36-r^2})}{36-(36-r^2)}$$
$$=\lim_{r\to0+}(6+\sqrt{36-r^2})=12$$

답 ⑤

0130 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그린 후 점 P$(-3,\ 0)$을 지나는 직선을 그려 a의 값의 범위에 따른 $h(a)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2 & (-1\le x\le 1)\\ x^2 & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\end{cases}$ 이고

$g(x)=-f(x)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축에 대하여 대칭이다. … ❶



점 P$(-3,\ 0)$을 지나고 기울기가 a인 직선을 l이라 하면 직선 l의 방정식은 $y=a(x+3)$

직선 l이 점 $(1,\ 1)$을 지날 때 기울기 a는 $a=\dfrac{1-0}{1-(-3)}=\dfrac{1}{4}$

직선 l이 점 $(-1,\ 1)$을 지날 때 기울기 a는

$a=\dfrac{1-0}{-1-(-3)}=\dfrac{1}{2}$

따라서 직선 l이 곡선 $y=-x^2+2$와 접할 때 a의 값을 m이라 하면 a의 값의 범위에 따른 $h(a)$의 값은 다음과 같다.

(i) $|a|<\dfrac{1}{4}$일 때, $h(a)=0$

(ii) $|a|=\dfrac{1}{4}$일 때, $h(a)=1$

(iii) $\dfrac{1}{4}<|a|<\dfrac{1}{2}$일 때, $h(a)=2$

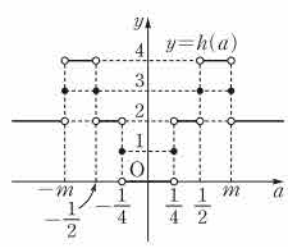
(iv) $|a|=\dfrac{1}{2}$일 때, $h(a)=3$

(v) $\dfrac{1}{2}<|a|<m$일 때, $h(a)=4$

(vi) $|a|=m$일 때, $h(a)=3$

(vii) $|a|>m$일 때, $h(a)=2$

이상에서 함수 $y=h(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. … ❷



따라서

$\lim\limits_{a\to k+}h(a)+\lim\limits_{a\to k-}h(a)=6$을 만족시키는 k의 값은 $\pm m$, $\pm\dfrac{1}{2}$이므로 그 개수는 4이다. … ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	20 %
❷ a의 값의 범위에 따라 $h(a)$의 값을 구하고 함수 $y=h(a)$의 그래프를 그릴 수 있다.	50 %
❸ $\lim\limits_{a\to k+}h(a)+\lim\limits_{a\to k-}h(a)=6$을 만족시키는 k의 개수를 구할 수 있다.	30 %

참고 직선 $y=a(x+3)$이 곡선 $y=-x^2+2$와 접할 때의 a의 값은

$a(x+3)=-x^2+2$에서

$x^2+ax+3a-2=0$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 판별식을 D라 하면 $D=a^2-4(3a-2)=0$

$a^2-12a+8=0$ $\therefore a=6\pm2\sqrt{7}$

이때 $a=6+2\sqrt{7}$이면 $x<-3$에서 접하므로 $m=6-2\sqrt{7}$이다.

0131

전략 모든 실수 x에 대하여 $f(x-5)=f(x)-1$이 성립함을 이용하여 주어진 그래프 이외의 부분을 더 그려 본다.

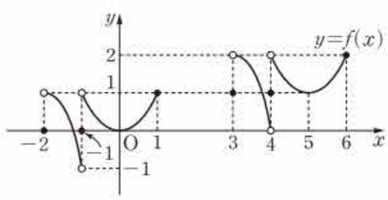
풀이 $x+2=s$, $-\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to1-$일 때 $s\to3-$이고, $t\to-1-$이므로

$$\lim_{x\to1-}f(x+2)f\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{s\to3-}f(s)\lim_{t\to-1-}f(t)=2 \quad\cdots ㉠$$

또 $x-1=u$, $x^2=v$로 놓으면 $x\to2+$일 때 $u\to1+$이고, $v\to4+$이므로

$$\lim_{x\to2+}f(x-1)f(x^2)=\lim_{u\to1+}f(u)\lim_{v\to4+}f(v)=-2 \quad\cdots ㉡$$

한편 모든 실수 x에 대하여 $f(x-5)=f(x)-1$이 성립하므로 $-2\le x\le6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 다음 그림과 같이 그릴 수 있다.



⋯ ❶

위의 그래프에서 $\lim_{t\to-1-}f(t)=-1$이므로 ㉠에서

$\lim_{s\to3-}f(s)=-2$ $\therefore \lim_{x\to3-}f(x)=-2$ ⋯ ❷

또 $\lim_{v\to4+}f(v)=2$이므로 ㉡에서

$\lim_{u\to1+}f(u)=-1$ $\therefore \lim_{x\to1+}f(x)=-1$ ⋯ ❸

$\therefore \lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to3-}f(x)=-1-2=-3$ ⋯ ❹

답 -3

채점 기준	비율
❶ $-2\le x\le6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{x\to3-}f(x)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{x\to1+}f(x)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to3-}f(x)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0132

전략 $\lim_{x\to a}\left|\dfrac{h(x)}{g(x)}\right|=\infty$일 때, $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{1}{3}$이므로

$a=3$ ⋯ ❶

$\lim_{x\to-1}|f(x)|=\infty$, $\lim_{x\to5}|f(x)|=\infty$이고, $\lim_{x\to-1}(x^2-3x+2)=6$, $\lim_{x\to5}(x^2-3x+2)=12$이므로

$\lim_{x\to-1}(ax^2+bx+c)=0$, $\lim_{x\to5}(ax^2+bx+c)=0$

$\therefore ax^2+bx+c=3(x+1)(x-5)=3x^2-12x-15$

따라서 $b=-12$, $c=-15$이므로 ⋯ ❷

$a+b+c=-24$ ⋯ ❸

답 -24

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b, c의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0133

전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $f(x)$, $g(x)$의 인수를 찾는다.

풀이 조건 (가)에서 $g(3)=0$이므로

$g(x)=2(x-3)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

라 하면 조건 (나)에서 $n=3$일 때, $\lim_{x\to3}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$이 성립하므로

$f(x)$는 $(x-3)^2$을 인수로 갖는다.

또 조건 (나)에서 $n=2$일 때, $\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$이 성립하므로

$f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

$\therefore f(x)=2(x-2)(x-3)^2$ ⋯ ❶

따라서 $x\ne3$일 때,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2(x-2)(x-3)^2}{2(x-3)(x^2+ax+b)}=\frac{(x-2)(x-3)}{x^2+ax+b}$$

조건 (나)에서 $n=1$, 4일 때

$$\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to n}\frac{(x-2)(x-3)}{x^2+ax+b}=(n-2)(n-3)$$

이 성립하려면 $h(x)=x^2+ax+b$에 대하여

$h(1)=h(4)=1$

이어야 하므로

$1+a+b=1$, $16+4a+b=1$

$\therefore a+b=0$, $4a+b=-15$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=5$

따라서 $g(x)=2(x-3)(x^2-5x+5)$이므로 ⋯ ❷

$g(4)=2\cdot1\cdot1=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $g(4)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

다른 풀이 $f(x)=2(x-2)(x-3)^2$에서

$f(4)=2\cdot2\cdot1^2=4$

조건 (나)에서 $n=4$일 때 $\lim_{x\to4}\dfrac{f(x)}{g(x)}=2\cdot1=2$이므로

$\dfrac{4}{\lim_{x\to4}g(x)}=2$ $\therefore g(4)=\lim_{x\to4}g(x)=2$

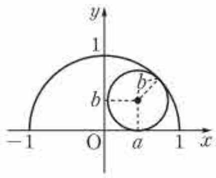
0134

전략 원이 x축에 접하면 (반지름의 길이)$=|$(중심의 y좌표)$|$임을 이용하여 a, b에 대한 식을 구한다.

풀이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 반원의 방정식은

$x^2+y^2=1$ ($y\ge0$)

이 반원에 내접하고 x축에 접하는 원의 중심의 좌표가 $(a,\ b)$이므로 이 원의 반지름의 길이는 b이다.



$\therefore\ \sqrt{a^2+b^2}=1-b$ ⋯ ❶

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2+b^2=(1-b)^2,\qquad a^2+b^2=1-2b+b^2$

$\therefore\ b=\dfrac{1}{2}(1-a^2)$ ⋯ ❷

$$\therefore\ \lim_{a\to-1+}\frac{b}{a+1}=\lim_{a\to-1+}\frac{1-a^2}{2(a+1)}=\lim_{a\to-1+}\frac{-(a+1)(a-1)}{2(a+1)}$$

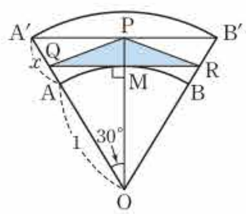
$$=\lim_{a\to-1+}\frac{-(a-1)}{2}=1$$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ $\lim\limits_{a\to-1+}\dfrac{b}{a+1}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0135 전략 원의 접선은 접점을 지나는 원의 반지름과 수직임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 QR와 호 AB가 접하는 점을 M이라 하면 $\angle\text{QOM}=\dfrac{1}{2}\cdot60°=30°$이므로



직각삼각형 QOM에서

$\overline{\text{MQ}}=\overline{\text{OM}}\tan30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 A′OP에서

$\overline{\text{OP}}=\overline{\text{A}'\text{O}}\cos30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x+1)$

$\therefore\ \overline{\text{PM}}=\overline{\text{OP}}-\overline{\text{OM}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x+1)-1$

$=\dfrac{\sqrt{3}x+\sqrt{3}-2}{2}$ ⋯ ❶

따라서

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot2\overline{\text{MQ}}\cdot\overline{\text{PM}}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{3}-2}{2}$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{3-2\sqrt{3}}{6}$$ ⋯ ❷

이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{2}+\frac{3-2\sqrt{3}}{6}}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{3-2\sqrt{3}}{6x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{2}$$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{\text{MQ}}$, $\overline{\text{PM}}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x+1}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

Ⅰ. 함수의 극한과 연속

02 함수의 연속

0136 (1) $f(3)$이 정의되어 있지 않으므로 불연속이다.

(2) $\lim\limits_{x\to3+}f(x)=4,\ \lim\limits_{x\to3-}f(x)=3$이므로

$\lim\limits_{x\to3+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to3-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

(3) $f(3)=4$이고, $\lim\limits_{x\to3}f(x)=3$이므로

$\lim\limits_{x\to3}f(x)\neq f(3)$

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

답 (1) ㄱ (2) ㄴ (3) ㄷ

0137 $f(1)=1,\ \lim\limits_{x\to1}f(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0138 $f(1)=0,\ \lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0139 $f(1)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

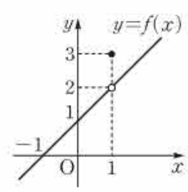
답 불연속

0140 $f(1)=3,$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$

이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$



따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

답 불연속

0141 답 $[-1,\ 2]$

0142 답 $(-3,\ 2)$

0143 답 $[1,\ 5)$

0144 답 $(-5,\ -1]$

0145 답 $[0,\ \infty)$

0146 답 $(-\infty,\ 4)$

0147 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이므로

$(-\infty,\ \infty)$ 답 $(-\infty,\ \infty)$

0148 주어진 함수의 정의역은 $9-x^2\geq0$, 즉 $-3\leq x\leq3$인 x의 값들의 집합이므로

$[-3,\ 3]$ 답 $[-3,\ 3]$

참고 무리함수에서 정의역이 주어지지 않을 때에는 근호 안의 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

0149 함수 $f(x)=x^2-4$는 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty,\ \infty)$

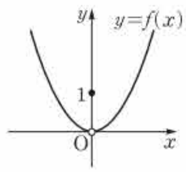
0150 함수 $f(x)=\sqrt{5-x}$는 $5-x\geq 0$일 때, 즉 구간 $(-\infty,\ 5]$에서 연속이다. 답 $(-\infty,\ 5]$

0151 함수 $f(x)=3$은 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty,\ \infty)$

0152 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+1}$은 $x\neq-\dfrac{1}{2}$일 때, 즉 구간 $\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\ \infty\right)$에서 연속이다.

답 $\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\ \infty\right)$

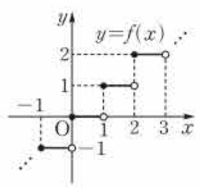
0153 $f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$



따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 그 이외의 x의 값에서는 연속이다.

답 풀이 참조

0154 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정수 n에 대하여



$$\lim_{x\to n+}f(x)=n,\ \lim_{x\to n-}f(x)=n-1$$

$$\therefore \lim_{x\to n+}f(x)\neq\lim_{x\to n-}f(x)$$

따라서 정수 n에 대하여 $\lim\limits_{x\to n}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=n$ (n은 정수)에서 불연속이고 그 이외의 x의 값에서는 연속이다. 답 풀이 참조

0155 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$$

이때 $f(2)=7$이고,

$$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2+3)=7,$$

$$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(4x+a)=8+a$$

이므로 $7=8+a$ $\therefore a=-1$ 답 -1

0156 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)=f(-1)$$

이때 $f(-1)=-a-2$이고,

$$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}(ax-2)=-a-2,$$

$$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1-}(\sqrt{-5x+4})=3$$

이므로 $-a-2=3$ $\therefore a=-5$ 답 -5

0157 ㄹ. 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$일 때 불연속이므로 실수 전체의 집합에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

이상에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0158 함수 $f(x)=-x^3-3x^2+5x+7$은 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty,\ \infty)$

0159 함수 $f(x)=(x-2)(x^2+2x+4)$는 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty,\ \infty)$

0160 함수 $f(x)=\dfrac{2x+3}{3x-1}$은 유리함수이므로 $x\neq\dfrac{1}{3}$인 모든 실수, 즉 구간 $\left(-\infty,\ \dfrac{1}{3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{3},\ \infty\right)$에서 연속이다.

답 $\left(-\infty,\ \dfrac{1}{3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{3},\ \infty\right)$

0161 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3x-10}=\dfrac{x-1}{(x+5)(x-2)}$은 유리함수이므로 $x\neq-5$, $x\neq 2$인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ -5)$, $(-5,\ 2)$, $(2,\ \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty,\ -5)$, $(-5,\ 2)$, $(2,\ \infty)$

0162 (1) $f(x)-g(x)=2x-(x^2+2x-8)=-x^2+8$

따라서 $f(x)-g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

(2) $f(x)g(x)=2x(x^2+2x-8)=2x^3+4x^2-16x$

따라서 $f(x)g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

(3) $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2+2x-8}{2x}$

따라서 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 유리함수이므로 $x\neq 0$인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 연속이다.

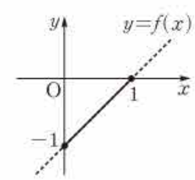
(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{2x}{x^2+2x-8}=\dfrac{2x}{(x+4)(x-2)}$

따라서 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 유리함수이므로 $x\neq-4$, $x\neq 2$인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ -4)$, $(-4,\ 2)$, $(2,\ \infty)$에서 연속이다.

답 풀이 참조

0163 답 (1) 최솟값: 0, 최댓값: 없다.
(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1

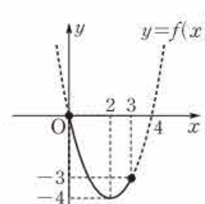
0164 함수 $f(x)=x-1$은 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 0, $x=0$에서 최솟값 -1을 갖는다.

답 최댓값: 0, 최솟값: -1

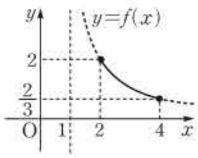
0165 함수 $f(x)=x^2-4x$는 구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 0, $x=2$에서 최솟값 -4를 갖는다.

답 최댓값: 0, 최솟값: -4

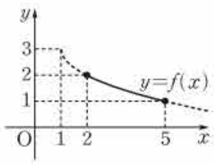
0166 함수 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$는 구간 $[2,\ 4]$에서 연속이고 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 2, $x=4$에서 최솟값 $\dfrac{2}{3}$를 갖는다.

답 최댓값: 2, 최솟값: $\dfrac{2}{3}$

0167 함수 $f(x)=3-\sqrt{x-1}$은 구간 $[2,\ 5]$에서 연속이고 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 2, $x=5$에서 최솟값 1을 갖는다.

답 최댓값: 2, 최솟값: 1

0168 답 (가) 연속 (나) 사잇값의 정리

0169 (1) $f(1)=-1$, $f(3)=19$이므로 $f(1)<10<f(3)$

(2) $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 $f(1)<10<f(3)$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=10$인 c가 열린구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

답 풀이 참조

0170 $f(x)=x^3-5x^2+4x+2$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$f(1)=2>0,\ f(2)=-2<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3-5x^2+4x+2=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 답 풀이 참조

0171 $f(x)=x^4-x^3-4$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고

$f(-1)=-2<0,\ f(2)=4>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^4-x^3-4=0$은 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 답 풀이 참조

유형 01 함수의 연속 본책 30쪽

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속인지 알아보려면
(i) 함숫값 $f(a)$가 존재하는지
(ii) $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하는지 ➡ $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)$인지
(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$인지
를 모두 확인한다.

0172 ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-2}(x-2)=-4$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to-2}f(x)\neq f(-2)$

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

ㄴ. $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

이때 $g(1)=-1$이고,

$\displaystyle\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}(\sqrt{x-1}-1)=-1,\ \lim_{x\to1-}g(x)=-1$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to1}g(x)=-1$

즉 $\displaystyle\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-x}{|x-1|}=\lim_{x\to1+}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}x=1$

$\displaystyle\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-x}{|x-1|}=\lim_{x\to1-}\frac{x(x-1)}{-(x-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1-}(-x)=-1$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to1+}h(x)\neq\lim_{x\to1-}h(x)$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to1}h(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ㄴ뿐이다. 답 ②

SSEN 특강 여러 가지 함수의 연속성

① 다항함수 ➡ 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속
② 유리함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ➡ $g(x)\neq0$인 x에서 연속
③ 무리함수 $y=\sqrt{f(x)}$ ➡ $f(x)\geq0$인 x에서 연속
④ 함수 $y=[x]$ (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)
➡ $x\neq n$ (n은 정수)에서 연속

0173 ① $f(-1)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

② $\displaystyle\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}[x]^2=(-1)^2=1$

$\displaystyle\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}[x]^2=(-2)^2=4$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

③ $f(-1)=-1$이고,

$\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(x+1)^2=0$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)\neq f(-1)$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

④ $\displaystyle\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{3|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1+}\frac{3(x+1)}{x+1}=3$

$\displaystyle\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}\frac{3|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1-}\frac{-3(x+1)}{x+1}=-3$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

⑤ $f(-1)=-2$이고,

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$$

이므로 $\quad \lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

답 ⑤

0174 $f(a)=a$이고,

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}x=a$$
$$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(x^2-2)=a^2-2 \quad \cdots ❶$$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이어야 하므로

$a=a^2-2,\quad a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0\quad \therefore a=-1$ 또는 $a=2 \quad \cdots ❷$

따라서 모든 a의 값의 합은 $\quad -1+2=1 \quad \cdots ❸$

답 1

채점 기준	비율
❶ $f(a)$, $\lim_{x\to a+}f(x)$, $\lim_{x\to a-}f(x)$의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0175 $f(x)=\dfrac{1}{x-\dfrac{4}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{x^2-4}{x}}=\dfrac{x}{x^2-4}$

따라서 $x=0$, $x^2-4=0$인 x의 값에서 함수 $f(x)$가 정의되지 않으므로 불연속이 되는 x의 값은 -2, 0, 2의 3개이다.

답 ③

유형 02 함수의 그래프와 연속

본책 30쪽

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$인 점에서 끊어져 있으면
➡ $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

0176 ④, ⑤ $\lim_{x\to0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=0$이므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

또 $f(1)=1$, $\lim_{x\to1}f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

즉 구간 $(-1, 3)$에서 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 0, 1의 2개이다.

답 ⑤

0177 $\lim_{x\to-1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to-1-}f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$$

따라서 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

또 $f(1)=0$, $\lim_{x\to1}f(x)=1$이므로 $\quad \lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

즉 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 -1의 1개이고, 불연속이 되는 x의 값은 -1, 1의 2개이므로

$a=1$, $b=2 \quad \therefore ab=2$

답 2

0178 주어진 함수의 그래프에서 $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=2$이지만 $f(0)$이 정의되어 있지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

$\therefore a=0 \quad \cdots ❶$

이때 $f(a+3)=f(3)=1$이므로 $\quad b=1 \quad \cdots ❷$

$\therefore a+b=1 \quad \cdots ❸$

답 1

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0179 ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=0\cdot2=0$

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\cdot\lim_{x\to1+}g(x)$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=0\cdot(-2)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)g(x)=0$

ㄴ. $\lim_{x\to1}f(x)=0$, $f(1)=3$이므로 $\quad \lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. ㄱ에서 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=0$이고, $f(1)g(1)=3\cdot2=6$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)g(x)\neq f(1)g(1)$$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

0180 ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to1+}f(-x)=1$이므로

$-x=t$라 하면 $x\to1+$일 때 $t\to-1-$이므로 $\lim_{x\to1+}f(-x)=\lim_{t\to-1-}f(t)=1$

$\lim_{x\to1+}\{f(x)+f(-x)\}=0$

ㄴ. $\lim_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}f(-x)=-1$이므로

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+f(-x)\}=0$

이때 $f(1)+f(-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)+f(-x)\}=f(1)+f(-1)$

따라서 $f(x)+f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)=\begin{cases}1 & (x\le-1)\\ x & (-1<x<1)\\ -1 & (x\ge1)\end{cases}$이므로

$$f(-x)=\begin{cases}-1 & (x\le-1)\\ -x & (-1<x<1)\\ 1 & (x\ge1)\end{cases}$$

$\therefore f(x)+f(-x)=0$

따라서 $f(x)+f(-x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0181 ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $x-1=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to0+$이고, $x\to1-$일 때 $t\to0-$이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x-1)=\lim_{t\to0+}f(t)=-1$$

$$\lim_{x\to1-}f(x-1)=\lim_{t\to0-}f(t)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to1+}f(x-1)\neq\lim_{x\to1-}f(x-1)$$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x-1)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x-1)$은 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $x+1=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1+$이고, $x\to0-$일 때 $t\to1-$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}f(x)f(x+1)&=\lim_{x\to0+}f(x)\cdot\lim_{x\to0+}f(x+1)\\&=\lim_{x\to0+}f(x)\cdot\lim_{t\to1+}f(t)\\&=-1\cdot0=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}f(x)f(x+1)&=\lim_{x\to0-}f(x)\cdot\lim_{x\to0-}f(x+1)\\&=\lim_{x\to0-}f(x)\cdot\lim_{t\to1-}f(t)\\&=1\cdot0=0\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x\to0}f(x)f(x+1)=0$$

이때 $f(0)f(0+1)=f(0)f(1)=0\cdot0=0$이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)f(x+1)=f(0)f(0+1)$$

따라서 $f(x)f(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.
이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

유형 03 함수의 그래프와 연속; 합성함수 본책 32쪽

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 합성함수 $f(g(x))$가 $x=a$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to a+}f(g(x))=\lim_{x\to a-}f(g(x))=f(g(a))$$

0182 ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=-1$이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to-1+$이므로

$$\lim_{x\to-1}f(f(x))=\lim_{t\to-1+}f(t)=-1$$

ㄷ. ㄴ에서 $\lim_{x\to-1}f(f(x))=-1$이고, $f(f(-1))=f(0)=1$이므로

$$\lim_{x\to-1}f(f(x))\neq f(f(-1))$$

따라서 $f(f(x))$는 $x=-1$에서 불연속이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0183 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 함수 $g(f(x))$의 연속성을 조사해 보자.
$f(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1-$이고, $x\to0-$일 때 $t\to-1+$이므로

$$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to1-}g(t),\ \lim_{x\to0-}g(f(x))=\lim_{t\to-1+}g(t)$$

이고 $g(f(0))=g(0)$이다.

ㄱ. $\lim_{x\to-1+}g(x)=\lim_{x\to1-}g(x)=0$, $g(0)=0$이므로 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to-1+}g(x)=\lim_{x\to1-}g(x)=0$, $g(0)=0$이므로 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to-1+}g(x)=1$, $\lim_{x\to1-}g(x)=-1$에서

$$\lim_{x\to-1+}g(x)\neq\lim_{x\to1-}g(x)$$

따라서 $\lim_{x\to0}g(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.
이상에서 $g(f(x))$가 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

SSEN 특강 합성함수의 극한

$\lim_{x\to a+}g(f(x))$의 값은 $f(x)=t$로 놓고 다음을 이용한다.
① $x\to a+$일 때 $t\to b+$이면
$\lim_{x\to a+}g(f(x))=\lim_{t\to b+}g(t)$
② $x\to a+$일 때 $t\to b-$이면
$\lim_{x\to a+}g(f(x))=\lim_{t\to b-}g(t)$
③ $x\to a+$일 때 $t=b$이면
$\lim_{x\to a+}g(f(x))=g(b)$

0184 ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=1\cdot0=0$

$$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=-1\cdot0=0$$

$$\therefore \lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$$

이때 $f(0)g(0)=0\cdot0=0$이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to0}f(g(x))=f(0)=0$이고 $f(g(0))=f(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}f(g(x))=f(g(0))$$

따라서 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1-$이고, $x\to0-$일 때 $t\to-1+$이므로

$$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to1-}g(t)=0$$

$$\lim_{x\to0-}g(f(x))=\lim_{t\to-1+}g(t)=0$$

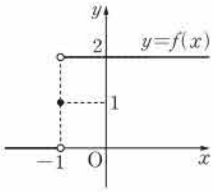
$$\therefore \lim_{x\to0}g(f(x))=0$$

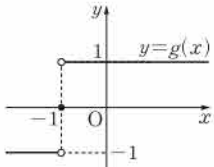
이때 $g(f(0))=g(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}g(f(x))=g(f(0))$$

따라서 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 $x=0$에서 연속이다. 답 ⑤

0185 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.





ㄱ. $x>-1$일 때, $f(f(x))=f(2)=2$

$x=-1$일 때, $f(f(x))=f(1)=2$

$x<-1$일 때, $f(f(x))=f(0)=2$

모든 실수 x에 대하여 $f(f(x))=2$

따라서 $f(f(x))$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to-1+}f(g(x))=f(1)=2$, $\lim\limits_{x\to-1-}f(g(x))=f(-1)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1+}f(g(x))\neq\lim\limits_{x\to-1-}f(g(x))$

따라서 $\lim\limits_{x\to-1}f(g(x))$의 값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to-1+}g(f(x))=g(2)=1$, $\lim\limits_{x\to-1-}g(f(x))=g(0)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1}g(f(x))=1$

이때 $g(f(-1))=g(1)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}g(f(x))=g(f(-1))$

따라서 $g(f(x))$는 $x=-1$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

참고 $x>-1$일 때, $\dfrac{|x+1|}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+1}=1$

$x<-1$일 때, $\dfrac{|x+1|}{x+1}=\dfrac{-(x+1)}{x+1}=-1$

$$\therefore g(x)=\begin{cases}1 & (x>-1)\\ 0 & (x=-1)\\ -1 & (x<-1)\end{cases}$$

유형 04 함수가 연속일 조건 (1)

본책 33쪽

$x\neq a$에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\neq a)\\ k & (x=a)\end{cases}\ (k\text{는 상수})$$

가 모든 실수 x에서 연속이면 ⇒ $\lim\limits_{x\to a}g(x)=k$

0186 $f(0)=-2$이므로 $-b=-2$ $\therefore b=2$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)=f(2)$

$4+a=4-b$ $\therefore a=-2$

또 $x=-2$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to-2+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=f(-2)$

$4-b=-6-c$ $\therefore c=-8$

$\therefore abc=-2\cdot2\cdot(-8)=32$ 답 32

0187 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to a+}|f(x)|=\lim\limits_{x\to a-}|f(x)|=|f(a)|$

이때 $|f(a)|=|a+2|$이고,

$\lim\limits_{x\to a+}|f(x)|=|f(a)|=|a+2|$,

$\lim\limits_{x\to a-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to a-}|x-3|=|a-3|$

이므로 $|a+2|=|a-3|$ $\therefore a+2=\pm(a-3)$

(i) $a+2=a-3$일 때,

주어진 등식을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a+2=-(a-3)$일 때,

$2a=1$ $\therefore a=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $a=\dfrac{1}{2}$ 답 ④

0188 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이어야 한다.

이때 $f(1)g(1)=(1+3)(1+k)=4+4k$이고,

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1+}(-x+2)(x+k)=1+k$,

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}(x+3)(x+k)=4+4k$

이므로 $1+k=4+4k$, $3k=-3$

$\therefore k=-1$ 답 -1

0189 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$이어야 한다.

이때 $g(0)=f(0)\{f(0)+k\}=3(3+k)=3k+9$이고,

$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)\{f(x)+k\}$

$=\lim\limits_{x\to0+}\left\{-\dfrac{1}{3}x\left(-\dfrac{1}{3}x+k\right)\right\}=0$,

$\lim\limits_{x\to0-}g(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)\{f(x)+k\}$

$=\lim\limits_{x\to0-}(x+3)(x+3+k)=3k+9$

이므로 $0=3k+9$ $\therefore k=-3$ 답 -3

0190 함수 $\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to0}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$이어야 한다.

이때 $\{g(0)\}^2=\{f(1)\}^2=k^2$이고, ⋯ ❶

$x+1=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1+$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to0+}\{f(x+1)\}^2=\lim\limits_{t\to1+}\{f(t)\}^2$

$=\lim\limits_{t\to1+}(t^2-t+k)^2=k^2$ ⋯ ❷

또 $x-1=s$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $s\to-1-$이므로

$\lim\limits_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to0-}\{f(x-1)\}^2=\lim\limits_{s\to-1-}\{f(s)\}^2$

$=\lim\limits_{s\to-1-}(s^2-s+k)^2=(2+k)^2$ ⋯ ❸

따라서 $k^2=(2+k)^2$이므로

$4k+4=0$ $\therefore k=-1$ ⋯ ❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ $\{g(0)\}^2$을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\lim\limits_{x\to0+}\{g(x)\}^2$을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $\lim\limits_{x\to0-}\{g(x)\}^2$을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)+k=x^2+x+k$,
$f(x-1)=(x-1)^2-(x-1)+k=x^2-3x+2+k$

이므로 $\quad g(x)=\begin{cases} x^2+x+k & (x\ge 0) \\ x^2-3x+2+k & (x<0) \end{cases}$

이때 $\{g(0)\}^2=k^2$이고,

$$\lim_{x\to 0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0+}(x^2+x+k)^2=k^2,$$

$$\lim_{x\to 0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0-}(x^2-3x+2+k)^2=(2+k)^2$$

이므로 $\quad k^2=(2+k)^2 \qquad \therefore k=-1$

0191 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=3$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3-}f(x)=f(3)$$

$0=-9+3a+b \qquad \therefore 3a+b=9 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $f(x)=f(x+4)$이므로 $\quad f(0)=f(4)$

$\therefore b=3\cdot(4-3)=3$

$b=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x+3 & (0\le x<3) \\ 3(x-3) & (3\le x\le 4) \end{cases}$이므로

$f(10)=f(6)=f(2)=-4+4+3=3$ 답 ④

SSEN 특강 주기함수

함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여
$f(x+p)=f(x)$
를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 $f(x)$를 주기함수라 하고 이러한 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라 한다.

유형 05 함수가 연속일 조건 (2)

본책 34쪽

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 ➡ $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$
(ii) 분수 꼴의 함수에서 $x \longrightarrow a$일 때
① (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.
② (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

0192 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\quad \lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-ax-2}{x-1}=b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}(x^2-ax-2)=0$이므로

$1-a-2=0 \qquad \therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3=b$$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+3^2=10$ 답 ③

0193 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로 $\quad \lim_{x\to -1}f(x)=f(-1)$

$\therefore \lim_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+a}+b}{x+1}=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x \longrightarrow -1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to -1}(\sqrt{x^2+a}+b)=0$이므로

$\sqrt{1+a}+b=0 \qquad \therefore b=-\sqrt{1+a} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a}}{x+1}\\&=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}{(x+1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}\\&=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{(x+1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}\\&=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}\\&=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a}}\\&=\frac{-2}{2\sqrt{1+a}}=-\frac{1}{\sqrt{1+a}}\end{aligned}$$

따라서 $-\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}=-1$이므로 $\quad 1+a=1$

$\therefore a=0$

$a=0$을 ㉡에 대입하면 $\quad b=-1$

$\therefore a+b=-1$ 답 ②

0194 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$$

$\therefore \lim_{x\to 2+}\dfrac{x+b}{\sqrt{x+2}-2}=-8+a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x \longrightarrow 2+$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2+}(x+b)=0$이므로

$2+b=0 \qquad \therefore b=-2$ ⋯ ❶

$b=-2$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2+}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}&=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2+}(\sqrt{x+2}+2)=4\end{aligned}$$

따라서 $-8+a=4$이므로 $\quad a=12$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=10$ ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0195 $g(x)$가 다항함수이므로 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)=a$$

ㄴ. $\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=a$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

$$\therefore \lim_{x\to1} g(x)=0$$

ㄷ. $$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x+1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}$$
$$=\frac{a}{2}\cdot a=\frac{a^2}{2}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

유형 06 $[x]$ 꼴을 포함한 함수의 연속 본책 34쪽

$[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수라 하면
(1) 정수 n에 대하여 $x\longrightarrow a$일 때
① $f(x)\longrightarrow n+$이면 ➡ $\lim_{x\to a}[f(x)]=n$
② $f(x)\longrightarrow n-$이면 ➡ $\lim_{x\to a}[f(x)]=n-1$
(2) 함수 $g(x)=[f(x)]$의 연속 또는 불연속을 판단할 때
➡ $f(x)=n$ (n은 정수)을 만족시키는 x의 값에서 연속성을 조사한다.

0196 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이려면 $\lim_{x\to2} g(x)=g(2)$이어야 한다.

이때

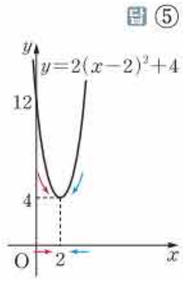
$$\lim_{x\to2} g(x)=\lim_{x\to2}[f(x)]=\lim_{x\to2}[2(x-2)^2+4]$$

이고 $x\longrightarrow2$일 때 $2(x-2)^2+4\longrightarrow4+$이므로

$$\lim_{x\to2}[2(x-2)^2+4]=4$$
$$\therefore k=g(2)=\lim_{x\to2} g(x)=4$$

답 ⑤

참고 $y=2(x-2)^2+4$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, $x\longrightarrow2-$, $x\longrightarrow2+$일 때 모두 y의 값이 4보다 큰 값에서 4에 한없이 가까워지고 있으므로 $x\longrightarrow2$일 때 $2(x-2)^2+4\longrightarrow4+$임을 알 수 있다.



0197 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이려면 $\lim_{x\to-2} f(x)=f(-2)$이어야 한다.

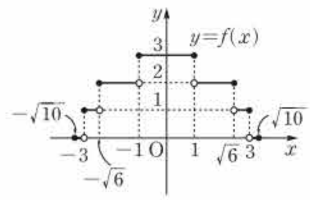
이때 $f(-2)=(-2)^2+(-2a+3)\cdot(-2)=4a-2$이고,

$$\lim_{x\to-2+} f(x)=\lim_{x\to-2+}\{[x]^2+(ax+3)[x]\}$$
$$=(-2)^2+(-2a+3)\cdot(-2)=4a-2,$$
$$\lim_{x\to-2-} f(x)=\lim_{x\to-2-}\{[x]^2+(ax+3)[x]\}$$
$$=(-3)^2+(-2a+3)\cdot(-3)=6a$$

이므로 $\quad 4a-2=6a \quad \therefore a=-1$ 답 -1

0198 (i) $0\le x^2\le1$일 때,
$3\le\sqrt{10-x^2}\le\sqrt{10}$이므로 $\quad f(x)=3$
(ii) $1<x^2\le6$일 때,
$2\le\sqrt{10-x^2}<3$이므로 $\quad f(x)=2$
(iii) $6<x^2\le9$일 때
$1\le\sqrt{10-x^2}<2$이므로 $\quad f(x)=1$
(iv) $9<x^2\le10$일 때,
$0\le\sqrt{10-x^2}<1$이므로 $\quad f(x)=0$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 불연속이 되는 x의 값은
-3, $-\sqrt{6}$, -1, 1, $\sqrt{6}$, 3
의 6개이다. 답 ④



0199 $f(1)$의 값이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고 그 외의 구간에서는 연속이다.

$\therefore A=\{x\mid-5<x<1\}\cup\{x\mid1<x<5\}$ ··· ❶

또 정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n} g(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=n$ (n은 정수)에서 불연속이고 그 외의 구간에서는 연속이다.

$\therefore B=\{x\mid-5<x<-4\}\cup\{x\mid-4<x<-3\}$
$\cup\cdots\cup\{x\mid4<x<5\}$ ··· ❷

따라서 $A-B=\{-4, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4\}$이므로
$n(A-B)=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 구할 수 있다.	30 %
❷ 집합 B를 구할 수 있다.	40 %
❸ $n(A-B)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 07 $(x-a)f(x)$ 꼴의 함수의 연속 본책 35쪽

연속함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)$가 $(x-a)f(x)=g(x)$를 만족시킬 때, $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면
➡ $f(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}$

0200 $x\ne-2$일 때, $\quad f(x)=\frac{ax^3-bx}{x+2}$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$$f(-2)=\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{ax^3-bx}{x+2}$$

이어야 한다.

$x\longrightarrow-2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(ax^3-bx)=0$이므로

$-8a+2b=0 \quad \therefore b=4a$ ······ ㉠

이때 $f(1)=5$이므로 $(x+2)f(x)=ax^3-bx$에서

$3f(1)=a-b \quad \therefore a-b=15$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5,\ b=-20$

따라서 $x \neq -2$일 때, $f(x)=\dfrac{-5x^3+20x}{x+2}$이므로

$$f(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{-5x^3+20x}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{-5x(x+2)(x-2)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\{-5x(x-2)\}$$
$$=-5\cdot(-2)\cdot(-4)=-40$$

답 ①

0201 $x\neq-1$일 때,

$$f(x)=\frac{x^5+1}{x+1}$$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^5+1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x^4-x^3+x^2-x+1)=5$$

조립제법을 이용하여 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

x^5+1
$=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

답 5

0202 $x\neq2$일 때, $f(x)=\dfrac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$ ··· ❶

$x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to2}(a\sqrt{x-1}+b)=0$이므로

$a+b=0 \quad \therefore b=-a \quad \cdots\cdots ㉡$ ··· ❷

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}-a}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\dfrac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면 $b=-2$ ··· ❸

$\therefore a^2+b^2=2^2+(-2)^2=8$ ··· ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=1$임을 알 수 있다.	30 %
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	10 %

0203 $x\neq0$일 때, $x=0$이면 $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=0$이다.

$$f(x)=\frac{x^2-2x+k}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2x+k}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

이어야 한다.

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to0}(x^2-2x+k)=0$이므로 $k=0$

$$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x^2-2x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(x-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2}$$
$$=\frac{-2\cdot(1+1)}{2}$$
$$=-2$$

$\therefore k+f(0)=-2$

답 ①

유형 08 연속함수의 성질 본책 35쪽

① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면
⇒ $f(x)g(x)$, $f(x)\pm g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.
② $y=f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 $y=g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이면 $y=g(f(x))$는 $x=a$에서 연속이다.

0204 ㄱ. $f(x)+g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=h(x)-f(x)$
이때 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

ㄴ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases} 1 & (x\ge0) \\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면 $f(x)$와 $f(x)g(x)$는 연속함수이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. 임의의 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$라 하면 $g(x)$가 연속함수이므로 $b=g(a)$
또 $f(x)$가 연속함수이므로
$$\lim_{x\to a}f(g(x))=f(g(a))=f(b)$$
따라서 $f(g(x))$도 연속함수이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0205 ① $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x}+x^2+2$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

② $f(x)g(x)=\dfrac{1}{x}(x^2+2)=x+\dfrac{2}{x}$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

③ $g(f(x))=g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2}+2$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

④ $f(g(x))=f(x^2+2)=\dfrac{1}{x^2+2}$이므로 $f(g(x))$는 모든 실수 x에서 연속이다.

⑤ $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{x(x^2+2)}$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

답 ④

0206 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$

ㄱ. $\lim_{x\to a}\{f(x)-4g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)-4\lim_{x\to a}g(x)=f(a)-4g(a)$

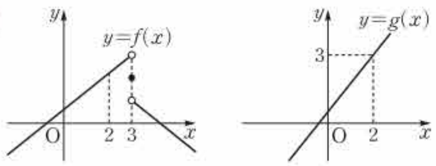
이므로 $f(x)-4g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to a}g(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=\{g(a)\}^2$

이므로 $\{g(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. $f(a)=0$이면 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=a$에서 정의되지 않으므로 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=a$에서 불연속이다.

ㄹ. [반례]



위의 그림에서 $f(x)$, $g(x)$는 $x=2$에서 모두 연속이지만 $f(g(x))$는 $x=2$에서 불연속이다.

이상에서 $x=a$에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ의 2개이다.

답 2

참고 ㄹ. 함수 $f(g(x))$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim_{x\to a}f(g(x))=f(g(a))$가 성립해야 하므로 $f(x)$가 $x=g(a)$에서 연속이어야 한다.

0207 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $g(x)\neq0$, $f(x)\neq0$이어야 한다.

즉 두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 실근이 모두 존재하지 않아야 하므로 두 방정식의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=a^2-12a<0$, $D_2=a^2-32<0$

$a^2-12a<0$에서 $a(a-12)<0$

$\therefore 0<a<12$ …… ㉠

$a^2-32<0$에서 $(a+4\sqrt{2})(a-4\sqrt{2})<0$

$\therefore -4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<a<4\sqrt{2}$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 5

0208 $x<2$일 때, $f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$

$x\geq2$일 때, $f(x)=3>0$

즉 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이다.

한편

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}3=3$, $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x^2-4x+6)=2$

에서 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

$g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 한다. … ❶

이때 $\dfrac{g(2)}{f(2)}=\dfrac{2a+1}{3}$이고,

$\lim_{x\to2+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2+}\dfrac{ax+1}{3}=\dfrac{2a+1}{3}$,

$\lim_{x\to2-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2-}\dfrac{ax+1}{x^2-4x+6}=\dfrac{2a+1}{2}$

이므로 $\dfrac{2a+1}{3}=\dfrac{2a+1}{2}$

$4a+2=6a+3$, $2a=-1$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$ … ❷

답 $-\dfrac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 알 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

0209 조건 (가)에서 $f(-1)=0$, $f(2)=0$

즉 $f(x)$가 $x+1$, $x-2$를 인수로 가지므로

$f(x)=a(x+1)(x-2)$ ($a\neq0$, a는 상수) … ❶

로 놓고 조건 (나)의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\dfrac{a(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim_{x\to-1}a(x-2)=-3a$

따라서 $-3a=9$이므로 $a=-3$

즉 $f(x)=-3(x+1)(x-2)$이므로 … ❷

$f(3)=-3\cdot4\cdot1=-12$ … ❸

답 -12

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 인수를 찾고 $f(x)$를 미정계수를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 09 최대 · 최소 정리

본책 36쪽

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이 아닌 경우

➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 최댓값, 최솟값의 존재를 확인한다.

0210 ① $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 3, 5의 2개이다.

② $\lim_{x\to5+}f(x)\neq\lim_{x\to5-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to5}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=4$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=4$

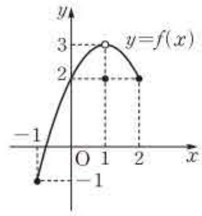
④ $f(x)$가 구간 $[1, 2]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최솟값을 갖는다.

답 ⑤

0211 $x \neq 1$일 때,

$$f(x)=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$$

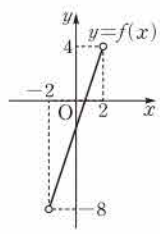
함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $[-1,\ 2]$에서 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$에서 불연속이다.



따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1,\ 2]$에서 $x=-1$일 때 최솟값 -1을 갖고, 최댓값은 없다.

답 최솟값: -1, 최댓값: 없다.

0212 ① 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $(-2,\ 2)$에서 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-2,\ 2)$에서 최댓값, 최솟값을 모두 갖지 않는다.



② $f(x)=\dfrac{-2x}{x+4}$는 $x \neq -4$인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값, 최솟값을 모두 갖는다.

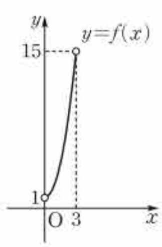
③ $f(x)=\log(x-3)$은 $x=3$에서 정의되지 않는다.

또 $\lim\limits_{x \to 3+} f(x)=-\infty$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[3,\ 5]$에서 최솟값을 갖지 않는다.

④ $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-5$는 $x=-1$에서 불연속이다.

또 $\lim\limits_{x \to -1+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x \to -1-} f(x)=-\infty$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[-5,\ 1]$에서 최댓값, 최솟값을 모두 갖지 않는다.

⑤ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $(0,\ 3)$에서 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 3)$에서 최댓값, 최솟값을 모두 갖지 않는다.



답 ②

참고 ③ 함수 $f(x)$는 구간 $[3,\ 5]$에서 $x=5$일 때 최댓값 $\log 2$를 갖는다.

0213 ㄱ. $f(x)+g(x)=x-3+\dfrac{1}{x+2}$은 $x \neq -2$인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 $f(x)+g(x)$는 구간 $[0,\ 4]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값, 최솟값을 모두 갖는다.

ㄴ. $f(g(x))=f\left(\dfrac{1}{x+2}\right)=\dfrac{1}{x+2}-3$은 $x \neq -2$인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 $f(g(x))$는 구간 $[0,\ 4]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값, 최솟값을 모두 갖는다.

ㄷ. $g(f(x))=g(x-3)=\dfrac{1}{x-1}$은 $x=1$에서 불연속이다.

또 $\lim\limits_{x \to 1+} g(f(x))=\infty$, $\lim\limits_{x \to 1-} g(f(x))=-\infty$이므로 $g(f(x))$는 구간 $[0,\ 4]$에서 최댓값, 최솟값을 모두 갖지 않는다.

이상에서 구간 $[0,\ 4]$에서 최댓값, 최솟값을 모두 갖는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

유형 10~11 사잇값의 정리

본책 37쪽

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$일 때

➡ $f(c)=0$인 c가 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

➡ 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

0214 $f(x)=2x^3-x^2-x-3$이라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$$f(-1)=-5<0,\ f(0)=-3<0,\ f(1)=-3<0,$$
$$f(2)=7>0,\ f(3)=39>0,\ f(4)=105>0$$

따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1,\ 2)$이다.

답 ③

0215 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(-2,\ 3)$에서 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(-2)f(3)<0$이어야 하므로 ⋯ ❶

$(a-2)(a+4)<0 \qquad \therefore -4<a<2$ ⋯ ❷

따라서 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$의 5개이다. ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(-2,\ 3)$에서 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	60 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0216 $f(x)=-x^4+6x^3+5x^2-1$, $g(x)=x^3+2x+4$라 하고 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$$h(x)=-x^4+5x^3+5x^2-2x-5$$

함수 $h(x)$는 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고

$$h(0)=-5<0,\ h(1)=2>0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 $f(c)-g(c)=0$, 즉 $f(c)=g(c)$인 c가 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재하므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 $0<x<1$에서 적어도 하나의 교점을 갖는다.

답 풀이 참조

SSEN 특강 두 곡선의 교점

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 실근과 같다.

0217 ㄱ. $f(x)=|2x-1|-2$라 하면 $f(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$$f(1)=-1<0,\ f(2)=1>0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

02 함수의 연속

ㄴ. $g(x)=\sqrt{4x-1}-2$라 하면 $g(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 연속이고

$$g(1)=\sqrt{3}-2<0,\ g(2)=\sqrt{7}-2>0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $h(x)=\dfrac{4}{3x-1}-1$이라 하면 $h(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 연속이고

$$h(1)=1>0,\ h(2)=-\frac{1}{5}<0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0218 $f(-2)=-1<0$, $f(-1)=1>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2, -1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또 $f(0)=2>0$, $f(1)=-1<0$, $f(2)=2>0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 3개의 실근을 갖는다.

$\therefore n=3$

답 ②

0219 $f(1)f(2)<0$, $f(3)f(4)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1, 2)$, $(3, 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. ··· ❶

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로

$f(-1)f(-2)<0$, $f(1)=f(-1)$, $f(2)=f(-2)$

$f(-3)f(-4)<0$ $f(3)=f(-3)$, $f(4)=f(-4)$

즉 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2, -1)$, $(-4, -3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. ··· ❷

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 4개의 실근을 갖는다. ··· ❸

답 4개

채점 기준	비율
❶ 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(1, 2)$, $(3, 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가짐을 알 수 있다.	40 %
❷ 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(-2, -1)$, $(-4, -3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가짐을 알 수 있다.	40 %
❸ 방정식 $f(x)=0$이 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구할 수 있다.	20 %

0220 조건 (가), (나)에서 $f(-1)=0$, $f(3)=0$이므로

$f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항함수) ··· ㉠

라 할 수 있다.

㉠을 (가)의 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-3)Q(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-3)Q(x)=-4Q(-1)$$

즉 $-4Q(-1)=\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad Q(-1)=-\dfrac{1}{8}$ ······ ㉡

㉠을 (나)의 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)(x-3)Q(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+1)Q(x)=4Q(3)$$

즉 $4Q(3)=\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad Q(3)=\dfrac{1}{8}$ ······ ㉢

이때 $Q(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이고 ㉡, ㉢에서 $Q(-1)Q(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $Q(x)=0$은 구간 $(-1, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-1, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 ①

0221 $g(x)=f(x)-x^2$이라 하면 함수 $g(x)$는 연속함수이고

$g(1)=f(1)-1=2-1=1>0$,

$g(2)=f(2)-4=3-4=-1<0$,

$g(3)=f(3)-9=10-9=1>0$,

$g(4)=f(4)-16=20-16=4>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 구간 $(1, 2)$, $(2, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 $f(c)-c^2=0$, 즉 $f(c)=c^2$인 c가 구간 $(1, 2)$, $(2, 3)$에 각각 적어도 하나씩 존재하므로 두 함수의 그래프의 교점이 반드시 존재하는 구간은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0222 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$라 하면 함수 $f(x)$는 연속함수이고 $a<b<c$이므로

$f(a)=(a-b)(a-c)>0$,

$f(b)=(b-c)(b-a)<0$,

$f(c)=(c-a)(c-b)>0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 (a, b), (b, c)에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

즉 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

유형 12 사잇값의 정리의 실생활에의 활용

본책 38쪽

열차가 두 지점 A, B를 지날 때의 속력이 각각 시속 a km, b km $(a<b)$일 때, $a<c<b$인 실수 c에 대하여 열차가 지날 때의 속력이 시속 c km인 지점이 두 지점 A, B 사이에 적어도 한 곳 존재한다.

0223 버스가 A 정류장을 출발한 지 x시간 후의 버스의 속력을 $f(x)$ km/h라 하고 A 정류장을 출발한 지 각각 b시간, c시간 후에 B 정류장, C 정류장에 도착하였다고 하면

$f(0)=0$, $f(b)=0$, $f(c)=0$

이때 $0<\alpha<b$, $b<\beta<c$이고 $f(\alpha)=60$, $f(\beta)=60$인 α, β가 존재하므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(k)=20$인 k가 구간 $(0, \alpha)$, (α, b), (b, β), (β, c)에 각각 적어도 하나씩 존재한다.

따라서 버스의 속력이 20 km/h인 순간은 적어도 4번 존재한다.

$\therefore n=4$

답 ④

0224 기차의 속력은 연속이므로 사잇값의 정리에 의하여
① 구간 AB에서 시속 110 km인 지점은 적어도 한 곳 존재한다.
② 구간 AB에서 시속 130 km인 지점은 존재하지 않을 수도 있다.
③ 구간 BC에서 시속 90 km인 지점은 적어도 한 곳 존재한다.
④ 구간 BC에서 시속 110 km인 지점은 적어도 한 곳 존재한다.
⑤ 구간 AC에서 시속 110 km인 지점은 구간 AB에서 한 곳, 구간 BC에서 한 곳으로 적어도 두 곳 존재한다.

답 ⑤

0225 (1st) $\lim_{x\to0} g(x)$의 값을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $g(x)=f(x)+|f(x)|$에서

$$\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0-}\{f(x)+|f(x)|\}$$
$$=\lim_{x\to0-} f(x)+\lim_{x\to0-}|f(x)|$$
$$=-1+|-1|=0,$$
$$\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+}\{f(x)+|f(x)|\}$$
$$=\lim_{x\to0+} f(x)+\lim_{x\to0+}|f(x)|$$
$$=0+0=0$$
$$\therefore \lim_{x\to0} g(x)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(2nd) $x=0$에서 함수 $|h(x)|$의 연속성을 확인하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $h(x)=f(x)+f(-x)$에서

$$h(0)=2f(0)=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

이므로

$$|h(0)|=1$$

이때

$$\lim_{x\to0-} h(x)=\lim_{x\to0-}\{f(x)+f(-x)\}$$
$$=\lim_{x\to0-} f(x)+\lim_{x\to0-} f(-x)$$
$$=\lim_{x\to0-} f(x)+\lim_{t\to0+} f(t)$$
$$=-1+0=-1,$$

$-x=t$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $t\to0+$

$$\lim_{x\to0+} h(x)=\lim_{x\to0+}\{f(x)+f(-x)\}$$
$$=\lim_{x\to0+} f(x)+\lim_{x\to0+} f(-x)$$
$$=\lim_{x\to0+} f(x)+\lim_{t\to0-} f(t)$$
$$=0+(-1)=-1$$

$-x=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to0-$

이므로

$$\lim_{x\to0}|h(x)|=|h(0)|=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

(3rd) $x=0$에서 함수 $g(x)|h(x)|$의 연속성을 확인하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $g(0)=f(0)+|f(0)|=\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{2}\right|=1$이므로

$$g(0)|h(0)|=1\cdot1=1$$

㉠, ㉡에서

$$\lim_{x\to0} g(x)|h(x)|=\lim_{x\to0} g(x)\cdot\lim_{x\to0}|h(x)|=0\cdot1=0$$

따라서 $g(0)|h(0)|\neq\lim_{x\to0} g(x)|h(x)|$이므로 함수 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

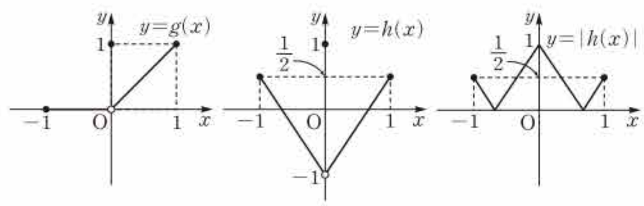
답 ③

다른 풀이 $f(x)=\begin{cases}-x-1 & (-1\le x<0)\\ \frac{1}{2} & (x=0)\\ \frac{1}{2}x & (0<x\le1)\end{cases}$ 이므로

$$g(x)=\begin{cases}0 & (-1\le x<0)\\ 1 & (x=0)\\ x & (0<x\le1)\end{cases},$$

$$h(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}x-1 & (-1\le x<0)\\ 1 & (x=0)\\ \frac{3}{2}x-1 & (0<x\le1)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$, $y=|h(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $\lim_{x\to0} g(x)=0$

ㄴ. 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $g(0)|h(0)|=1\cdot1=1$이고,

$$\lim_{x\to0} g(x)=0,\ \lim_{x\to0}|h(x)|=1$$

이므로

$$\lim_{x\to0} g(x)|h(x)|=0\cdot1=0$$
$$\therefore g(0)|h(0)|\neq\lim_{x\to0} g(x)|h(x)|$$

따라서 함수 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 불연속이다.

0226 (1st) $y=f(a)$의 그래프를 그려 본다.

$x^2+x-6<0$에서 $(x+3)(x-2)<0$

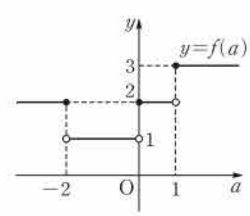
$\therefore -3<x<2$

$x^2-(a-1)x-a\le0$에서

$(x+1)(x-a)\le0$

(i) $a\le-2$일 때, $f(a)=2$
(ii) $-2<a<0$일 때, $f(a)=1$
(iii) $0\le a<1$일 때, $f(a)=2$
(iv) $a\ge1$일 때, $f(a)=3$

이상에서 함수 $y=f(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2nd) $a=0$에서 함수 $f(a)$의 연속성을 확인하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\lim_{a\to0+} f(a)=2$, $\lim_{a\to0-} f(a)=1$

따라서 $\lim_{a\to0} f(a)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(a)$는 $a=0$에서 불연속이다.

(3rd) $y=f(a)$의 그래프의 대칭성을 확인하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $y=f(a)$의 그래프가 직선 $a=m$에 대하여 대칭이 되도록 하는 실수 m은 존재하지 않는다.

(4th) 함숫값과 우극한이 다른 점의 개수를 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 함수 $f(a)$는 $\underline{a=-2,\ a=0,\ a=1}$에서 불연속이고

$\displaystyle\lim_{a\to -2+} f(a) \neq f(-2)$, └ $\displaystyle\lim_{a\to k+} f(a)\neq f(k)$이면 $x=a$에서 불연속이므로 불연속인 점에서 확인한다.

$\displaystyle\lim_{a\to 0+} f(a) = f(0)$,

$\displaystyle\lim_{a\to 1+} f(a) = f(1)$

이므로 집합 $\{k \mid \displaystyle\lim_{a\to k+} f(a)\neq f(k)\}$의 원소의 개수는 1이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0227 (1st) a가 양수일 때, 조건을 만족시키는 a의 값을 구한다.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le 0) \\ -\dfrac{1}{3}x+6 & (x>0)\end{cases}$$ 에서

$$f(x-a)=\begin{cases} x-a+1 & (x\le a) \\ -\dfrac{1}{3}(x-a)+6 & (x>a)\end{cases}$$

이때 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a) = \lim_{x\to a-} f(x)f(x-a) = f(a)f(0)$$

이어야 한다.

(i) $a>0$일 때,

$f(a)f(0)=\left(-\dfrac{1}{3}a+6\right)\cdot 1 = -\dfrac{1}{3}a+6$이고,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)\\ &=\lim_{x\to a+}\left(-\frac{1}{3}x+6\right)\cdot\lim_{x\to a+}\left\{-\frac{1}{3}(x-a)+6\right\}\\ &=\left(-\frac{1}{3}a+6\right)\cdot 6 = -2a+36,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)\\ &=\lim_{x\to a-}\left(-\frac{1}{3}x+6\right)\cdot\lim_{x\to a-}(x-a+1)\\ &=\left(-\frac{1}{3}a+6\right)\cdot 1 = -\frac{1}{3}a+6\end{aligned}$$

이므로 $\quad -\dfrac{1}{3}a+6=-2a+36 \qquad \therefore a=18$

(2nd) a가 음수일 때, 조건을 만족시키는 a의 값을 구한다.

(ii) $a<0$일 때,

$f(a)f(0)=(a+1)\cdot 1 = a+1$이고,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a) &= \lim_{x\to a+}(x+1)\lim_{x\to a+}\left\{-\frac{1}{3}(x-a)+6\right\}\\ &=(a+1)\cdot 6 = 6a+6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a) &= \lim_{x\to a-}(x+1)\lim_{x\to a-}(x-a+1)\\ &=(a+1)\cdot 1 = a+1\end{aligned}$$

이므로 $\quad a+1=6a+6 \qquad \therefore a=-1$

(3rd) $a=0$일 때, 함수 $f(x)f(x-a)$의 연속성을 조사한다.

(iii) $a=0$일 때,

$f(x)f(x-a)=\{f(x)\}^2$이고

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}\{f(x)\}^2=6^2=36,\ \lim_{x\to 0-}\{f(x)\}^2=1^2=1$

이므로 $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0+}\{f(x)\}^2 \neq \lim_{x\to 0-}\{f(x)\}^2$

즉 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(4th) a의 값의 합을 구한다.

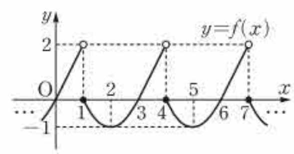
이상에서 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 a의 값은 -1, 18이므로 구하는 합은

$-1+18=17$

답 17

0228 (1st) a_1의 값을 구한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$g(x)=f(x)f(x-k)$라 하면

(i) $k=1$일 때,

$$g(x)=f(x)f(x-1)$$

$f(x)$는 $x=1,\ 4,\ 7,\ \cdots$에서 불연속이고, $f(x-1)$은 $x=2,\ 5,\ 8,\ \cdots$에서 불연속이다.

ⓐ $g(1)=f(1)f(0)=0\cdot 0=0$이고,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+} g(x) &= \lim_{x\to 1+} f(x)f(x-1)\\ &=\lim_{x\to 1+} f(x)\cdot \underline{\lim_{x\to 1+} f(x-1)}\\ &=0\cdot 0=0\end{aligned}$$

└ $x-1=t$라 하면 $x\to 1+$일 때 $t\to 0+$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 1+} f(x-1)=\lim_{t\to 0+} f(t)=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-} g(x) &= \lim_{x\to 1-} f(x)f(x-1)\\ &=\lim_{x\to 1-} f(x)\cdot \lim_{x\to 1-} f(x-1)\\ &=2\cdot 0=0\end{aligned}$$

즉 $\displaystyle\lim_{x\to 1+} g(x)=\lim_{x\to 1-} g(x)=g(1)$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ⓑ $\displaystyle\lim_{x\to 2+} g(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)f(x-1)=\lim_{x\to 2+} f(x)\cdot\lim_{x\to 2+} f(x-1)$
$=(-1)\cdot 0=0$

$\displaystyle\lim_{x\to 2-} g(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)f(x-1)=\lim_{x\to 2-} f(x)\cdot\lim_{x\to 2-} f(x-1)$
$=(-1)\cdot 2=-2$

즉 $\displaystyle\lim_{x\to 2+} g(x)\neq\lim_{x\to 2-} g(x)$이므로 $g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

이때 $\underline{g(x)=g(x+3)}$이므로 함수 $g(x)$는 $x=2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 98$에서 불연속이다. └ $f(x)=f(x+3)$이므로 $g(x)=g(x+3)$이 성립한다.

$\therefore a_1=33$

(2nd) a_2의 값을 구한다.

(ii) $k=2$일 때, $\quad g(x)=f(x)f(x-2)$

$f(x)$는 $x=1,\ 4,\ 7,\ \cdots$에서 불연속이고, $f(x-2)$는 $x=3,\ 6,\ 9,\ \cdots$에서 불연속이다.

ⓒ $\displaystyle\lim_{x\to 1+} g(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)f(x-2)=\lim_{x\to 1+} f(x)\cdot\lim_{x\to 1+} f(x-2)$
$=0\cdot(-1)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)f(x-2)=\lim_{x\to 1-} f(x)\cdot\lim_{x\to 1-} f(x-2)$
$=2\cdot(-1)=-2$

즉 $\displaystyle\lim_{x\to 1+} g(x)\neq\lim_{x\to 1-} g(x)$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ⓓ $g(3)=f(3)f(1)=0\cdot 0=0$이고,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3+} g(x) &= \lim_{x\to 3+} f(x)f(x-2)\\ &=\lim_{x\to 3+} f(x)\cdot \lim_{x\to 3+} f(x-2)\\ &=0\cdot 0=0\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 3-} g(x) = \lim_{x\to 3-} f(x)f(x-2)$$
$$= \lim_{x\to 3-} f(x) \cdot \lim_{x\to 3-} f(x-2)$$
$$= 0 \cdot 2 = 0$$

즉 $\lim_{x\to 3+} g(x) = \lim_{x\to 3-} g(x) = g(3)$이므로 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

이때 $g(x)=g(x+3)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1, 4, 7, \cdots, 100$에서 불연속이다.

$\therefore a_2 = 34$

3rd a_3의 값을 구한다.

(iii) $k=3$일 때,

$f(x)=f(x-3)$이므로 $\quad g(x)=\{f(x)\}^2$

$f(x)$는 $x=1, 4, 7, \cdots$에서 불연속이고

$$\lim_{x\to 1+} g(x) = \lim_{x\to 1+} \{f(x)\}^2 = 0^2 = 0$$
$$\lim_{x\to 1-} g(x) = \lim_{x\to 1-} \{f(x)\}^2 = 2^2 = 4$$

즉 $\lim_{x\to 1+} g(x) \neq \lim_{x\to 1-} g(x)$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

이때 $g(x)=g(x+3)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1, 4, 7, \cdots, 100$에서 불연속이다.

$\therefore a_3 = 34$

4th $a_1+a_2+a_3$의 값을 구한다.

이상에서 $\quad a_1+a_2+a_3 = 33+34+34 = 101$

답 101

0229

1st $a<0$, $c<0$임을 알아낸다.

함수 $f(x)$는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.

즉 $a>0$, $c>0$ 또는 $a<0$, $c<0$이어야 한다.

$a>0$, $c>0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 존재하므로

$f(-2)=-2$, $f(1)=1$, $f(2)=2$

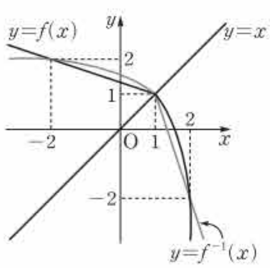
따라서 $f(1)=c+3=1$이므로 $\quad c=-2$

이때 $c>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a<0$, $c<0$이어야 한다.

2nd $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 구한다.

$a<0$, $c<0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 세 교점의 좌표를



$(-2, \alpha)$, $(1, 1)$, $(2, \beta)$

라 하면 두 점 $(-2, \alpha)$, $(2, \beta)$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\alpha=2$, $\beta=-2$

즉 세 교점의 좌표는 $\quad (-2, 2)$, $(1, 1)$, $(2, -2)$

3rd $9ab-c$의 값을 구한다.

$f(-2)=-2a+b=2$이므로 $\quad 2a-b=-2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (ax+b) = a+b,$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = f(1) = 1$$

에서 $\quad a+b=1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{4}{3}$

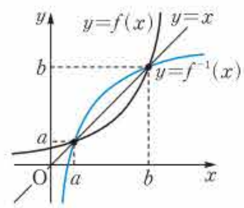
$f(1)=1$에서 $c+3=1$이므로 $\quad c=-2$

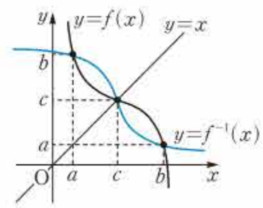
$\therefore 9ab-c = 9\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\dfrac{4}{3}-(-2)=-2$

답 -2

SSEN 특강

실수 전체의 집합에서 연속이고, 역함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 다음과 같이 모두 직선 $y=x$ 위에 존재하거나 교점 중 1개만 직선 $y=x$ 위에 존재하고 나머지 점들은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

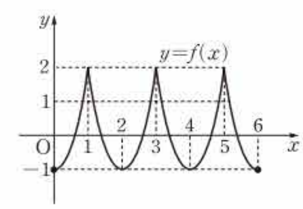




0230

1st $0\le x\le 6$에서 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 조건 (나)에 의하여 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고, 조건 (다)에 의하여 y축에 대하여 대칭이므로 $0\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

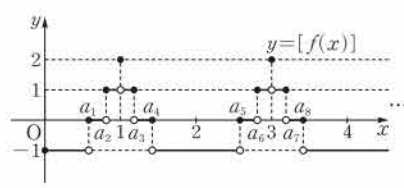


2nd $y=[f(x)]$가 불연속이 되는 x의 값의 개수를 구한다.

이때 $y=[f(x)]$는 $f(x)=0, 1, 2$를 만족시키는 x에서 불연속이고 $f(x)=0$, $f(x)=1$을 만족시키는 x의 값은 각각 6개, $f(x)=2$를 만족시키는 x의 값은 3개이므로 구하는 x의 값의 개수는 15이다.

답 15

참고 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 $y=0$, $y=1$과 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 $a_1, a_2, a_3, \cdots$이라 하면 $x\ge 0$에서 $y=[f(x)]$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=[f(x)]$는 $f(x)=0, 1, 2$를 만족시키는 x에서 불연속이다.

0231

1st $f(x)$를 미정계수를 이용하여 나타낸다.

조건 (가)에서 $f(x)g(x)=x(x+3)$에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=0$

이때 조건 (나)에서 $g(0)=1$이므로 $\quad f(0)=0$

따라서 $f(x)$는 x를 인수로 갖고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

2nd b의 값을 구한다.

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$$x(x^2+ax+b)g(x)=x(x+3)$$

이므로

$$(x^2+ax+b)g(x)=x+3$$

$$\therefore g(x)=\frac{x+3}{x^2+ax+b}\ (x^2+ax+b\neq 0)$$

이때 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)=1$$

따라서 $\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x^2+ax+b}=1$이므로

$$\frac{3}{b}=1 \qquad \therefore b=3$$

3rd a의 값을 구한다.

이때 $x^2+ax+3\neq 0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=a^2-12<0$$

$$\therefore -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$$

$f(1)$이 자연수이므로 $f(1)=a+4$에서 a는 -3 이상인 정수이다.

따라서 a의 값은

$$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

4th $g(2)$의 최솟값을 구한다.

따라서 $g(x)=\frac{x+3}{x^2+ax+3}$에서

$$g(2)=\frac{5}{2a+7}$$

이고 분모가 클수록 $g(2)$의 값이 작아지므로 $g(2)$의 최솟값은 $a=3$일 때 $\frac{5}{13}$이다.

답 ①

0232 1st $\lim_{x\to 0-} g(x)$와 $\lim_{x\to 0+} g(x)$를 $f(0)$에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$$

$x<0$일 때, $\quad g(x)=-f(x)+x^2+4$

$x>0$일 때, $\quad g(x)=f(x)-x^2-2x-8$

$$\therefore \lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-}\{-f(x)+x^2+4\}=-f(0)+4,$$

$$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+}\{f(x)-x^2-2x-8\}=f(0)-8$$

2nd $f(0)$의 값을 구한다.

이때 $\lim_{x\to 0-} g(x)-\lim_{x\to 0+} g(x)=6$이므로

$$\{-f(0)+4\}-\{f(0)-8\}=6$$

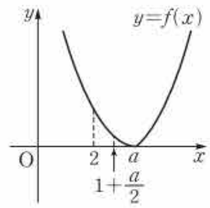
$$-2f(0)=-6 \qquad \therefore f(0)=3$$

답 ⑤

0233 1st 조건 (가)를 만족시키는 a의 값의 범위를 구한다.

(i) $a>2$일 때,

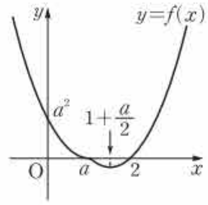
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $0<x<1+\frac{a}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a<2$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 구간 $\left[0,\ 1+\frac{a}{2}\right]$에서 연속이고 $f(0)=a^2>0$, $f\left(1+\frac{a}{2}\right)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여

$f(c)=0$인 c가 0과 $1+\frac{a}{2}$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

따라서 조건 (가)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\quad 0<a<2$

2nd 조건 (나)를 만족시키는 a의 값을 구한다.

따라서 $f(2)=0$, $f(a)=0$이므로 세 점 $(2,\ 0)$, $(a,\ 0)$, $\left(1+\frac{a}{2},\ f\left(1+\frac{a}{2}\right)\right)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(2-a)\cdot\left\{-f\left(1+\frac{a}{2}\right)\right\}=-\frac{1}{2}(2-a)\cdot\frac{a-2}{2}\cdot\frac{2-a}{2}=\frac{1}{8}(2-a)^3$$

즉 $\frac{1}{8}(2-a)^3=\frac{1}{8}$이므로 $\quad (2-a)^3=1$

$$2-a=1 \qquad \therefore a=1$$

3rd $f(3a)$의 값을 구한다.

따라서 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & (x\le 1)\\ (x-2)(x-1) & (x>1)\end{cases}$이므로

$$f(3a)=f(3)=(3-2)\cdot(3-1)=2$$

답 ①

0234 1st 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속임을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \qquad \therefore \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-2}{2x}=-1$$

$x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}\{g(x)-2\}=0$이므로 $\quad g(0)=2$

2nd 최대·최소 정리를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 구간 $[-3,\ 3]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 갖는다.

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. [반례] $g(x)=-2x+2$일 때, $g(-2)>0$, $g(2)<0$이지만 $f(x)=-1$이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2,\ 2)$에서 실근을 갖지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0235 (1st) $f(0)$, $f(1)$의 부호를 파악한다.

$f(0)<f(1)$이고, 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(0,\ 1)$에서 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가지므로

$f(0)<0<f(1)$

이 성립한다.

(2nd) 방정식 $f(2x)=0$의 실근의 존재를 파악하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $g(x)=f(2x)$라 하면

$g(0)=f(0)<0$,

$g(1)=f(2)>f(1)>0$

이므로 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(2x)=0$은 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(3rd) 방정식 $f(-x+1)=0$의 실근의 존재를 파악하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $h(x)=f(-x+1)$이라 하면

$h(0)=f(1)>0$, $h(1)=f(0)<0$

이므로 방정식 $h(x)=0$, 즉 $f(-x+1)=0$은 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(4th) 방정식 $f(|4x|-4x^2)=0$의 실근의 존재를 파악하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $f(|4x|-4x^2)=\begin{cases} f(4x-4x^2) & (x\ge 0) \\ f(-4x-4x^2) & (x\le 0) \end{cases}$

(i) $p(x)=f(4x-4x^2)(x\ge 0)$이라 하면

$4x-4x^2=0$에서 $\quad -4x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

$\therefore p(0)=f(0)<0,\ p(1)=f(0)<0$ …… ㉠

$4x-4x^2=1$에서 $\quad 4x^2-4x+1=0$

$(2x-1)^2=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$

$\therefore p\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 방정식 $p(x)=0$, 즉 $f(4x-4x^2)=0\ (x\ge 0)$은 구간 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(ii) $q(x)=f(-4x-4x^2)(x\le 0)$이라 하면

$-4x-4x^2=0$에서 $\quad -4x(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

$\therefore q(-1)=f(0)<0,\ q(0)=f(0)<0$ …… ㉢

$-4x-4x^2=1$에서 $\quad 4x^2+4x+1=0$

$(2x+1)^2=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$

$\therefore q\left(-\frac{1}{2}\right)=f(1)>0$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 방정식 $q(x)=0$, 즉 $f(-4x-4x^2)=0\ (x\le 0)$은 구간 $\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

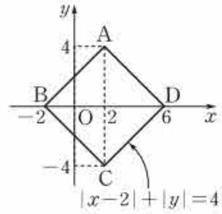
(i), (ii)에서 방정식 $f(|4x|-4x^2)=0$은 구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 네 개의 실근을 갖는다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0236 전략 r의 값의 범위를 나누어 방정식 $|x-2|+|y|=4$의 그래프와 원의 교점의 개수를 구한다.

풀이 방정식 $|x-2|+|y|=4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 마름모 모양이다.



이 마름모의 네 꼭짓점을 각각 A, B, C, D라 하면 원점 O와 직선 AB, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

원점 O와 직선 AD, 즉 $x+y-6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$

이고 $\overline{OB}=2$, $\overline{OC}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$, $\overline{OD}=6$ ··· ❶

따라서 r의 값의 범위에 따른 원과 마름모의 교점의 개수 $f(r)$는

$0<r<\sqrt{2}$일 때, $f(r)=0$

$r=\sqrt{2}$일 때, $f(r)=2$

$\sqrt{2}<r<2$일 때, $f(r)=4$

$r=2$일 때, $f(r)=3$

$2<r<3\sqrt{2}$일 때, $f(r)=2$

$r=3\sqrt{2}$일 때, $f(r)=4$

$3\sqrt{2}<r<2\sqrt{5}$일 때, $f(r)=6$

$r=2\sqrt{5}$일 때, $f(r)=4$

$2\sqrt{5}<r<6$일 때, $f(r)=2$

$r=6$일 때, $f(r)=1$

$r>6$일 때, $f(r)=0$ ··· ❷

즉 구간 $(0,\ 10)$에서 $f(r)$는 $r=\sqrt{2}$, 2, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, 6에서 불연속이므로 $\quad a_3=3\sqrt{2},\ n=5$ ··· ❸

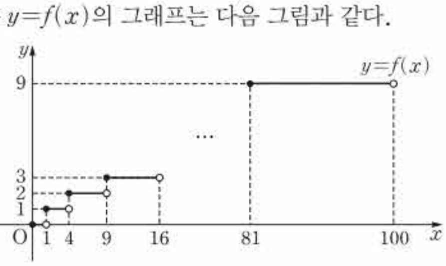
$\therefore a_3^2+n^2=(3\sqrt{2})^2+5^2=43$ ··· ❹

답 43

채점 기준	비율
❶ 원점 O와 직선 AB, AD 사이의 거리와 $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$의 길이를 각각 구할 수 있다.	20 %
❷ r의 값의 범위에 따른 $f(r)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a_3, n의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a_3^2+n^2$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0237 전략 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값을 기준으로 경우를 나누어 구한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=k$라 하면 $0\le x<100$에서 $0\le k<10$이므로 함수 $f(k)$는 $k=1$, $k=4$, $k=9$에서 불연속이다. ··· ❶

(i) $f(x)=1$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$1\le x<4$

$x=1$일 때,

$\lim_{x\to1+}f(f(x))=f(1)=1$

$\lim_{x\to1-}f(f(x))=f(0)=0$

즉 $\lim_{x\to1}f(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

이때 $1<\alpha<4$인 α에 대하여

$\lim_{x\to\alpha+}f(f(x))=\lim_{x\to\alpha-}f(f(x))=f(1)=1$

이므로 함수 $f(f(x))$는 $1<x<4$에서 연속이다.

따라서 $1\le x<4$에서 함수 $f(f(x))$가 불연속이 되는 x의 값은 1이다.

(ii) $f(x)=4$를 만족시키는 x의 값의 범위는

$16\le x<25$

(i)과 같은 방법으로 하면 $16\le x<25$에서 함수 $f(f(x))$가 불연속이 되는 x의 값은 16이다.

(iii) $f(x)=9$를 만족시키는 x의 값의 범위는

$81\le x<100$

(i)과 같은 방법으로 하면 $81\le x<100$에서 함수 $f(f(x))$가 불연속이 되는 x의 값은 81이다.

이상에서 $0\le x<100$에서 함수 $f(f(x))$가 불연속이 되는 x의 값은 1, 16, 81이므로

$a=1,\ 16,\ 81$ ⋯ ❷

따라서 모든 a의 값의 합은 $1+16+81=98$ ⋯ ❸

답 98

채점 기준	비율
❶ $f(x)=k$라 하고 함수 $f(k)$가 불연속이 되는 k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ 모든 a의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

참고 $0\le x<1$일 때, $f(x)=0$이므로 $f(f(x))=0$

$1\le x<4$일 때, $f(x)=1$이므로 $f(f(x))=1$

$4\le x<9$일 때, $f(x)=2$이므로 $f(f(x))=1$

$9\le x<16$일 때, $f(x)=3$이므로 $f(f(x))=1$

$16\le x<25$일 때, $f(x)=4$이므로 $f(f(x))=2$

$25\le x<36$일 때, $f(x)=5$이므로 $f(f(x))=2$

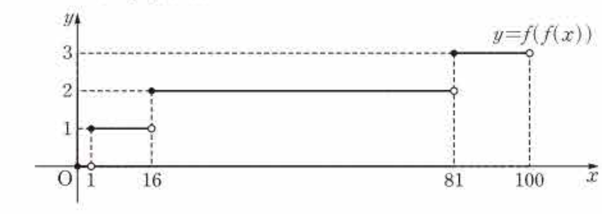
$36\le x<49$일 때, $f(x)=6$이므로 $f(f(x))=2$

$49\le x<64$일 때, $f(x)=7$이므로 $f(f(x))=2$

$64\le x<81$일 때, $f(x)=8$이므로 $f(f(x))=2$

$81\le x<100$일 때, $f(x)=9$이므로 $f(f(x))=3$

따라서 함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 다음 그림과 같다.

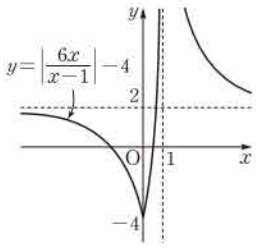


0238 전략 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $f(x)$가 불연속인 점에서 함수 $f(x)g(x)$가 연속이 되도록 a, b의 값을 정한다.

풀이 $y=\left|\dfrac{6x}{x-1}\right|-4$

$=\left|\dfrac{6}{x-1}+6\right|-4$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



(i) $t<-4$일 때, $f(t)=0$

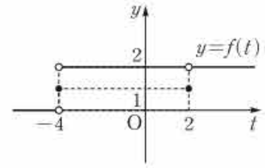
(ii) $t=-4$일 때, $f(t)=1$

(iii) $-4<t<2$일 때, $f(t)=2$

(iv) $t=2$일 때, $f(t)=1$

(v) $t>2$일 때, $f(t)=2$

이상에서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❷



이때 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고, 함수 $f(x)$는 $x=-4$, $x=2$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-4$, $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{x\to-4+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-4-}f(x)g(x)=f(-4)g(-4)$에서

$2\cdot g(-4)=0\cdot g(-4)=1\cdot g(-4)$

$\therefore g(-4)=0$

$\therefore |-4-a|+b=0$ ⋯⋯ ㉠

$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=f(2)g(2)$에서

$2\cdot g(2)=2\cdot g(2)=1\cdot g(2)$

$\therefore g(2)=0$

$\therefore |2-a|+b=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $|-4-a|+b=|2-a|+b$

$\therefore |a+4|=|a-2|$

이때 $a+4=a-2$를 만족시키는 a는 존재하지 않으므로

$a+4=-(a-2),\quad 2a=-2$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉡에 대입하면 $b=-3$

따라서 $g(x)=|x+1|-3$이므로 ⋯ ❸

$g(ab)=g(3)=1$ ⋯ ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ $y=\left\|\dfrac{6x}{x-1}\right\|-4$의 그래프를 그릴 수 있다.	20 %
❷ $y=f(t)$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❸ $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❹ $g(ab)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0239 전략 함수 $g(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구하고, 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 연속임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. ⋯ ❶

다항함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고, 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$

이다. 이때

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=-1\cdot g(-1)=-g(-1)$,

$$\lim_{x\to -1-} f(x)g(x)=1\cdot g(-1)=g(-1)$$

이므로 $\quad -g(-1)=g(-1)$

$\therefore g(-1)=0$ …… ㉠ ⋯ ❷

또 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=f(1)g(1)$$

이다. 이때

$$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=0\cdot g(1)=0,$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=-1\cdot g(1)=-g(1)$$

이므로 $\quad 0=-g(1) \quad \therefore g(1)=0$ …… ㉡ ⋯ ❸

㉠, ㉡에서 $\underline{g(x)=2(x+1)(x-1)}$이므로

$g(-1)=0$, $g(1)=0$이므로 $g(x)$는 $x+1$, $x-1$을 인수로 갖는다.

$g(4)=2\cdot 5\cdot 3=30$ ⋯ ❹

답 30

채점 기준	비율
❶ $g(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구할 수 있다.	20 %
❷ $g(-1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $g(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $g(4)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0240 전략 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $f(x)$가 불연속인 점에서 함수 $f(x)g(x)$가 연속이 되도록 a, b의 값을 정한다.

풀이 (i) $1\le x<4$일 때, $-1\le\sqrt{x}-2<0$이므로

$[\sqrt{x}-2]=-1$

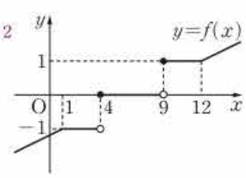
(ii) $4\le x<9$일 때, $0\le\sqrt{x}-2<1$이므로

$[\sqrt{x}-2]=0$

(iii) $9\le x\le 12$일 때, $1\le\sqrt{x}-2<2$이므로

$\sqrt{x}-2\le 2\sqrt{3}-2<2$

$[\sqrt{x}-2]=1$



이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶

이때 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고, 함수 $f(x)$는 $x=4$, $x=9$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=4$, $x=9$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 4+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 4-} f(x)g(x)=f(4)g(4)$에서

$0\cdot g(4)=-1\cdot g(4)=0\cdot g(4) \quad \therefore g(4)=0$ …… ㉠

$\lim_{x\to 9+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 9-} f(x)g(x)=f(9)g(9)$에서

$1\cdot g(9)=0\cdot g(9)=1\cdot g(9) \quad \therefore g(9)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 이차방정식 $g(x)=0$, 즉 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 4, 9이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=4+9$, $b=4\cdot 9$

$\therefore a=-13$, $b=36$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=23$ ⋯ ❸

답 23

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

Ⅱ. 다항함수의 미분법

03 미분계수와 도함수

0241 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{1-3}{2}=-1$

답 -1

0242 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{-1-(-1)}{2}=0$

답 0

0243 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{2-(-4)}{2}=3$

답 3

0244 (1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)}=\dfrac{2-12}{5}=-2$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{(1+\Delta x)-1}=\dfrac{\{(1+\Delta x)^2-(1+\Delta x)\}-0}{\Delta x}$

$$=\frac{\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=1+\Delta x$$

답 (1) -2 (2) $1+\Delta x$

0245 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)+2\}-3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

답 1

0246 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)\}-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-\Delta x)=0$$

답 0

0247 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-3(1+\Delta x)^3+6(1+\Delta x)+1\}-4}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3\Delta x-9(\Delta x)^2-3(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\{-3-9\Delta x-3(\Delta x)^2\}=-3$$

답 -3

0248 $f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\dfrac{(x^2+2)-(a^2+2)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(x+a)=2a$$

따라서 $2a=4$이므로 $\quad a=2$

답 2

0249 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{(x^3+x+1)-(a^3+a+1)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2+1)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2+1)=3a^2+1$

따라서 $3a^2+1=4$이므로 $a^2=1$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$ 답 1

0250 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$과 같으므로

$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{3(-1+\Delta x)^2+1\}-4}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-6\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-6+3\Delta x)=-6$ 답 -6

0251 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 12)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같으므로

$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(2+\Delta x)^3+4\}-12}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{12\Delta x+6(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{12+6\Delta x+(\Delta x)^2\}=12$ 답 12

0252 답 (가) 연속 (나) 미분가능

0253 (i) $f(1)=1$이고,

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}x^2=1$,

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x^2+2)=1$

이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+}(x+1)=2$,

$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(-x^2+2)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}\{-(x+1)\}=-2$

이므로 $f'(1)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

답 연속이고 미분가능하지 않다.

0254 (1) 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 불연속이므로 불연속인 점의 개수는 2이다.

(2) 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 점의 개수는 3이다.

답 (1) 2 (2) 3

0255 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4-4}{\Delta x}=0$ 답 $f'(x)=0$

0256 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(x+\Delta x)+3\}-(x+3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$ 답 $f'(x)=1$

0257 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(x+\Delta x)^2-4\}-(x^2-4)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$ 답 $f'(x)=2x$

0258 $y'=(-x^8)'=-8x^7$ 답 $y'=-8x^7$

0259 $y'=(6)'=0$ 답 $y'=0$

0260 $y'=(3x^6)'=18x^5$ 답 $y'=18x^5$

0261 $y'=(-5x+2)'=(-5x)'+(2)'=-5$ 답 $y'=-5$

0262 $y'=(-x^2+2x-4)'=(-x^2)'+(2x)'-(4)'$

$=-2x+2$ 답 $y'=-2x+2$

0263 $y'=\left(\frac{1}{2}x^2-x+3\right)'=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'-(x)'+(3)'$

$=x-1$ 답 $y'=x-1$

0264 (1) 함수 $f(x)+g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는

$f'(0)+g'(0)=-2+6=4$

(2) 함수 $f(x)-2g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는

$f'(0)-2g'(0)=-2-2\cdot 6=-14$

답 (1) 4 (2) -14

0265 $y'=(x-3)'(2x-1)+(x-3)(2x-1)'$

$=(2x-1)+2(x-3)=4x-7$ 답 $y'=4x-7$

0266 $y'=(-5x)'(x^2+1)-5x(x^2+1)'$

$=-5(x^2+1)-5x\cdot 2x$

$=-15x^2-5$ 답 $y'=-15x^2-5$

0267 $y'=(x^2-4x+5)'(3x+7)+(x^2-4x+5)(3x+7)'$

$=(2x-4)(3x+7)+3(x^2-4x+5)$

$=9x^2-10x-13$ 답 $y'=9x^2-10x-13$

0268 $y'=(x)'(x+1)(x+2)+x(x+1)'(x+2)$
$+x(x+1)(x+2)'$
$=(x+1)(x+2)+x(x+2)+x(x+1)$
$=3x^2+6x+2$

답 $y'=3x^2+6x+2$

0269 $y'=(x-5)'(2x+1)(-x+7)$
$+(x-5)(2x+1)'(-x+7)$
$+(x-5)(2x+1)(-x+7)'$
$=(2x+1)(-x+7)+2(x-5)(-x+7)$
$-(x-5)(2x+1)$
$=-6x^2+46x-58$

답 $y'=-6x^2+46x-58$

0270 $y'=\{(3x-2)^4\}'=4(3x-2)^{4-1}(3x-2)'$
$=12(3x-2)^3$

답 $y'=12(3x-2)^3$

0271 $y'=\{(2x^2-x+5)^3\}'$
$=3(2x^2-x+5)^{3-1}(2x^2-x+5)'$
$=3(2x^2-x+5)^2(4x-1)$

답 $y'=3(2x^2-x+5)^2(4x-1)$

0272 $y'=\{(x+2)^2\}'(3x^2-1)+(x+2)^2(3x^2-1)'$
$=2(x+2)(x+2)'(3x^2-1)+(x+2)^2\cdot 6x$
$=2(x+2)(3x^2-1)+6x(x+2)^2$
$=2(x+2)(6x^2+6x-1)$

답 $y'=2(x+2)(6x^2+6x-1)$

0273 $y'=\{(x-5)^2\}'(x^2+1)^3+(x-5)^2\{(x^2+1)^3\}'$
$=2(x-5)(x-5)'(x^2+1)^3$
$+(x-5)^2\cdot 3(x^2+1)^2(x^2+1)'$
$=2(x-5)(x^2+1)^3+6x(x-5)^2(x^2+1)^2$
$=2(x-5)(x^2+1)^2(4x^2-15x+1)$

답 $y'=2(x-5)(x^2+1)^2(4x^2-15x+1)$

유형 01 평균변화율

본책 48쪽

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율
➡ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

0274 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a^3-2a+1)-0}{a-1}$$
$$=\frac{(a-1)(a^2+a-1)}{a-1}=a^2+a-1$$

따라서 $a^2+a-1=11$이므로 $a^2+a-12=0$
$(a+4)(a-3)=0$ $\therefore a=3$ $(\because a>1)$

답 3

0275 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{(16+4a+1)-(4+2a+1)}{2}$$
$$=\frac{2a+12}{2}=a+6$$

따라서 $a+6=3$이므로 $a=-3$

답 ③

0276 x의 값이 -2에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}=\frac{32-(-4)}{6}=6 \quad \cdots ❶$$

또 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a^2+4a}{a}=a+4 \quad \cdots ❷$$

따라서 $a+4=6$이므로 $a=2$ $\cdots$ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ x의 값이 -2에서 4까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
❷ x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0277 x의 값이 k에서 $k+1$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 k이므로

$$\frac{f(k+1)-f(k)}{(k+1)-k}=k$$
$$\therefore f(k+1)-f(k)=k \quad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 x의 값이 1에서 50까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(50)-f(1)}{50-1}$$
$$=\frac{1}{49}[\{f(50)-f(49)\}+\{f(49)-f(48)\}+\{f(48)-f(47)\}+\cdots+\{f(3)-f(2)\}+\{f(2)-f(1)\}]$$
$$=\frac{1}{49}\cdot(49+48+47+\cdots+2+1)\ (\because ㉠)$$
$$=\frac{1}{49}\sum_{k=1}^{49}k=\frac{1}{49}\cdot\frac{49\cdot 50}{2}$$
$$=25$$

답 25

SSEN 특강 자연수의 거듭제곱의 합

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ ② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

유형 02 평균변화율의 기하적 의미

본책 48쪽

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$를 지나는 직선 AB의 기울기와 같다.

0278 직선 AB의 기울기는 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=2$$

한편 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$$f(0)=f(4)$$

따라서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

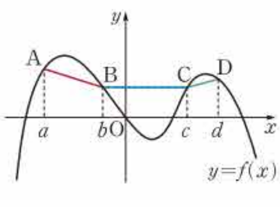
$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{f(2)-f(4)}{2}$$
$$=-\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=-2$$

답 -2

0279 x의 값이 1에서 5까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은 두 점 $\mathrm{A}(1, f(1))$, $\mathrm{B}(5, f(5))$를 지나는 직선 AB의 기울기와 같다.
따라서 직선 AB의 기울기는 -4이다.

답 -4

0280 오른쪽 그림의 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 α, β, γ의 값은 각각 직선 AB, 직선 BC, 직선 CD의 기울기와 같으므로



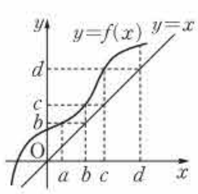
$$\alpha<0,\ \beta=0,\ \gamma>0$$
$$\therefore\ \alpha<\beta<\gamma$$

답 ①

0281 x의 값이 c에서 d까지 변할 때의 함수 $g(x)$의 평균변화율은

$$\frac{g(d)-g(c)}{d-c}=\frac{f^{-1}(d)-f^{-1}(c)}{d-c}$$

오른쪽 그림에서 $f(c)=d$이므로



$$f^{-1}(d)=c$$

또 $f(b)=c$이므로

$$f^{-1}(c)=b$$

따라서 구하는 평균변화율은

$$\frac{f^{-1}(d)-f^{-1}(c)}{d-c}=\frac{c-b}{d-c}$$

답 ④

유형 03 평균변화율과 미분계수

본책 49쪽

① 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

② 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

0282 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3-(-1)}{2}=2$$

또 함수 $f(x)$의 $x=c$에서의 미분계수는

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(c+h)^2-2(c+h)\}-(c^2-2c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2ch+h^2-2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2c+h-2)$$
$$=2c-2$$

따라서 $2c-2=2$이므로

$$c=2$$

답 2

0283 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^2+2b+3)-(a^2+2a+3)}{b-a}$$
$$=\frac{(b^2-a^2)+2(b-a)}{b-a}$$
$$=\frac{(b-a)(b+a+2)}{b-a}$$
$$=b+a+2$$ ··· ❶

또 함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 순간변화율은

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(-1+h)^2+2(-1+h)+3\}-2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0}h$$
$$=0$$ ··· ❷

따라서 $b+a+2=0$이므로

$$a+b=-2$$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
❷ $x=-1$에서의 순간변화율을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0284 x의 값이 0에서 t까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 t^2이므로

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}=t^2$$

이때 $f(0)=1$이므로

$$\frac{f(t)-1}{t}=t^2 \qquad \therefore\ f(t)=t^3+1$$

즉 $f(x)=x^3+1$이므로 $x=1$에서의 순간변화율은

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{(1+h)^3+1\}-2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h+3h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)$$
$$=3$$

답 ③

유형 04 미분계수를 이용한 극한값의 계산 ; $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 본책 49쪽

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

➡ 주어진 식을 $\lim_{\blacksquare\to 0}\frac{f(a+\blacksquare)-f(a)}{\blacksquare}$ 꼴을 포함한 식으로 변형한다.

0285 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1+3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1-2h)-f(1)\}-\{f(1+3h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)$

$-\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot 3$

$=-2f'(1)-3f'(1)=-5f'(1)$

$=-5\cdot(-2)=10$

답 ⑤

0286 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a)}{4h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a)}{5h}\cdot\frac{5}{4}$

$=\frac{5}{4}f'(a)$

답 ④

0287 $f(6)=2$, $f'(6)=1$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{2-f(6-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(6)-f(6-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(6-h)-f(6)}{-h}$

$=f'(6)=1$

답 1

0288 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{f(a)-f(a+h)}{f(a+h)f(a)}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right\}\cdot\frac{1}{f(a+h)f(a)}$

$=-\frac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}$

답 ①

0289 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a+h^2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(a+4h)-f(a)\}-\{f(a+h^2)-f(a)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\cdot 4-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot h$

$=4f'(a)-f'(a)\cdot 0$

$=4f'(a)$

$=4\cdot 3=12$

답 12

유형 05 미분계수를 이용한 극한값의 계산 ; $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 본책 50쪽

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

➡ 주어진 식을 $\lim_{\blacktriangle\to\bullet}\frac{f(\blacktriangle)-f(\bullet)}{\blacktriangle-\bullet}$ 꼴을 포함한 식으로 변형한다.

0290 $\lim_{x\to 2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{2f(x)-2f(2)+2f(2)-xf(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{2\{f(x)-f(2)\}-f(2)(x-2)}{x-2}$

$=2\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-f(2)$

$=2f'(2)-f(2)$

$=2\cdot 5-2=8$

답 ③

0291 $f(3)=0$이므로

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{(x-3)(x+1)}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+1}$

$=\frac{1}{4}f'(3)=\frac{1}{4}\cdot 8$

$=2$

답 ②

0292 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(1)}}{\sqrt{x}-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(1)}\}\{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}\}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}}$

$=f'(1)\cdot\frac{2}{2\sqrt{f(1)}}=\frac{f'(1)}{\sqrt{f(1)}}$

$=\frac{3}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

0293 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x+2)-6}{x^3-1}=4$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x+2)-6\}=0$이므로

$f(3)=6$ ······ ①

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x+2)-6}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x+2)-f(3)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x+2)-f(3)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x+2)-f(3)}{(x+2)-3}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$

$=\frac{1}{3}f'(3)$

따라서 $\frac{1}{3}f'(3)=4$이므로 $\quad f'(3)=12$ ⋯ ❷

$\therefore f(3)+f'(3)=6+12=18$ ⋯ ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $f(3)+f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 06 항등식이 주어질 때 미분계수 구하기

본책 50쪽

(i) 주어진 식의 x, y에 적당한 수를 대입하여 $f(0)$의 값을 구한다.

(ii) $f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$에서 $f(a+h)$에 주어진 항등식을 대입하여 $f'(a)$의 값을 구한다.

0294 $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=2\end{aligned}$$

답 ②

0295 $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$ ⋯ ❶

이때

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+h-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+1=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+1\\&=f'(0)+1\end{aligned}$$

이므로

$f'(0)+1=2 \quad \therefore f'(0)=1$ ⋯ ❷

$$\begin{aligned}\therefore f'(2)&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+2h-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2\\&=f'(0)+2\\&=1+2=3\end{aligned}$$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0296 $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1 \quad \therefore f(0)=1$

이때

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+4h-1-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}+4\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+4\\&=f'(0)+4\end{aligned}$$

이므로

$f'(0)+4=7 \quad \therefore f'(0)=3$

자연수 k에 대하여

$$\begin{aligned}f'(k)&=\lim_{h\to0}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(k)+f(h)+2kh-1-f(k)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}+2k\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2k\\&=f'(0)+2k\\&=2k+3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}f'(k)&=\sum_{k=1}^{10}(2k+3)\\&=2\cdot\frac{10\cdot11}{2}+30\\&=140\end{aligned}$$

답 ③

0297 $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=3f(0)f(0)$

$\therefore f(0)=\frac{1}{3}$ ($\because f(0)>0$) ⋯ ❶

$$\begin{aligned}f'(2022)&=\lim_{h\to0}\frac{f(2022+h)-f(2022)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{3f(2022)f(h)-f(2022)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{3f(2022)\left\{f(h)-\frac{1}{3}\right\}}{h}\\&=3f(2022)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\\&=3f(2022)f'(0)\end{aligned}$$ ⋯ ❷

이므로

$$\begin{aligned}\frac{f'(2022)}{f(2022)}&=\frac{3f(2022)f'(0)}{f(2022)}\\&=3f'(0)\\&=3\cdot2=6\end{aligned}$$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(2022)$를 $f(2022)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $\frac{f'(2022)}{f(2022)}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 07 미분계수의 기하적 의미

본책 51쪽

① 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.
② 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ $(0° \le \theta < 90°)$라 하면 $\tan\theta = f'(a)$이다.

0298 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같고, 이 접선은 두 점 $(0, 6)$, $(1, 5)$를 지나므로

$$f'(1)=\frac{5-6}{1-0}=-1$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot\frac{3}{2}\\&=\frac{3}{2}f'(1)=\frac{3}{2}\cdot(-1)\\&=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 ⑤

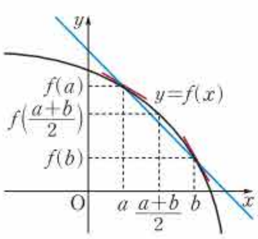
0299 답 $f'(d)<f'(c)<f'(a)<f'(b)$

0300 $f(1)=4$, $f'(1)=3$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x)}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{-f(x)+f(1)-f(1)+x^2f(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{-\{f(x)-f(1)\}+(x^2-1)f(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\left\{-\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+(x+1)f(1)\right\}\\&=-f'(1)+2f(1)\\&=-3+2\cdot4=5\end{aligned}$$

답 5

0301 ㄱ. $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 $x=b$인 점에서의 접선의 기울기보다 크므로
$f'(a)>f'(b)$



ㄴ. $a\le x\le b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ㄷ. $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기보다 크므로

$$f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

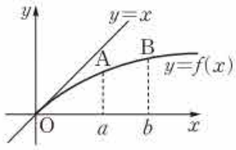
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

SSEN 특강

$a<b$일 때
① 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하면
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2},\ f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
② 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하면
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2},\ f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

0302 오른쪽 그림과 같이
$A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$
라 하자.



ㄱ. 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$$
이때 $b-a>0$이므로
$$f(b)-f(a)<b-a$$

ㄴ. $\frac{f(a)}{a}$는 원점과 점 A를 지나는 직선의 기울기이고, $\frac{f(b)}{b}$는 원점과 점 B를 지나는 직선의 기울기이므로
$$\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$$

ㄷ. $f'(a)$는 점 A에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이므로
$$f'(a)>f'(b)$$

ㄹ. $0<a<b$에 대하여 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$이고, x의 값이 클수록 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는 작아진다.
$$\therefore f'(\sqrt{ab})>f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

SSEN 특강 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,
$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ (\text{단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립})$$

유형 08 미분가능성과 연속성

본책 52쪽

(1) 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여
① $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ ➡ $x=a$에서 연속
② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재 ➡ $x=a$에서 미분가능
(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프에서
① 불연속인 점 ➡ 연속되지 않고 끊어져 있는 점
② 미분가능하지 않은 점 ➡ 불연속인 점, 뾰족한 점

0303 ① $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=3$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3-3}{h}=0$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

② $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|^3-0}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^2|h|}{h}=\lim_{h\to0}h|h|=0\end{aligned}$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

③ $f(0)$이 정의되어 있지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

④ $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h+|h|-0}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h+h}{h}=2,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h+|h|-0}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h-h}{h}=0$$

이므로 $f'(0)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

⑤ $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=1$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(h+1)^2-1}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to0+}(h+2)=2,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{(2h+1)-1}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{2h}{h}=2$$

이므로 $f'(0)=2$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

답 ④

0304 ㄱ. $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1$$

이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄴ. $\lim_{x\to1}g(x)=g(1)=0$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h}{h}=-1$$

이므로 $g'(1)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x\to1}k(x)=k(1)=0$이므로 $k(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h^2+2h|-0}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to0+}(h+2)=2,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h^2+2h|-0}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h^2-2h}{h}=\lim_{h\to0-}(-h-2)=-2$$

이므로 $k'(1)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $k(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0305 ①, ⑤ $x=a$에서 미분가능하지 않다.

②, ③ $x=a$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

답 ④

참고 ① $x<a$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기는 음수이므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<0$$

$x>a$일 때, 직선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점에서의 미분계수는 양수이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$$

따라서 $f'(a)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

⑤ $x<a$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기는 양수이므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$$

$x>a$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기는 음수이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<0$$

따라서 $f'(a)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

0306 ① $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재한다.

② $x=0$에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $f'(0)>0$이다.

③ 함수 $f(x)$는 $x=3$, $x=4$에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개이다.

④ 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=3$, $x=4$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 점은 3개이다.

⑤ $f'(x)=0$인 점은 구간 $(0,\ 2)$에서 2개 존재하고, 구간 $(2,\ 3)$에서 1개 존재하므로 모두 3개이다.

답 ⑤

유형 09 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 미분가능성 본책 52쪽

두 다항함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 함수

$f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\ge a)\\ h(x) & (x<a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

➡ ① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다. 즉

$$\lim_{x\to a-}h(x)=g(a)$$

② $x=a$에서 함수 $f(x)$의 미분계수가 존재한다. 즉

$$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}$$

0307 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$에서 $2a+b=4$ …… ㉠

또 $f'(2)$가 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(2+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to0+}(4+h)=4,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{a(2+h)+b-(2a+b)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{ah}{h}=a$$

에서 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $8+b=4$ $\therefore b=-4$

$\therefore a+b=0$

답 0

다른 풀이 $g(x)=x^2$, $h(x)=ax+b$라 하면

$g'(x)=2x$, $h'(x)=a$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $g(2)=h(2)$

$\therefore 4=2a+b$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $g'(2)=h'(2)$

$\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $4=8+b$ $\therefore b=-4$

$\therefore a+b=0$

SSEN 특강

두 다항함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\ge a) \\ h(x) & (x<a) \end{cases}$$

가 $x=a$에서 미분가능하면

① 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속 ➡ $g(a)=h(a)$

② $x=a$에서 함수 $f(x)$의 미분계수가 존재 ➡ $g'(a)=h'(a)$

0308 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서

$\frac{1}{2}+1+b=-1+a$ $\therefore a-b=\frac{5}{2}$ …… ㉠ ··· ❶

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(-x^2+ax)-(-1+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{-x^2+ax+1-a}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{-(x-1)(x+1-a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(-x-1+a)$$
$$=a-2,$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2+x+b\right)-\left(\frac{1}{2}+1+b\right)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{2}(x+3)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{1}{2}(x+3)=2$$

에서 $a-2=2$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$4-b=\frac{5}{2}$ $\therefore b=\frac{3}{2}$ ··· ❷

$\therefore ab=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0309 $f'(-1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{|x+1|(x+a)-0}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)(x+a)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}(x+a)=-1+a,$$

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\frac{|x+1|(x+a)-0}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\frac{-(x+1)(x+a)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\{-(x+a)\}=1-a$$

에서 $-1+a=1-a$ $\therefore a=1$

따라서 $f'(-1)=-1+1=0$이므로

$a+f'(-1)=1$

답 ④

0310 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (1\le x<2) \\ 0 & (0\le x<1) \end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서

$1+a+b=0$ $\therefore a+b=-1$ …… ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)^2+a(1+h)+b-(1+a+b)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+(a+2)h}{h}=\lim_{h\to0+}(h+a+2)=a+2,$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{0-0}{h}=0$$

에서 $a+2=0$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $-2+b=-1$ $\therefore b=1$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+1^2=5$

답 5

참고 $[x]=\begin{cases} 1 & (1\le x<2) \\ 0 & (0\le x<1) \end{cases}$이므로 $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (1\le x<2) \\ 0 & (0\le x<1) \end{cases}$

유형 10 도함수의 정의를 이용하여 도함수 구하기

본책 53쪽

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

0311 $xf(x)=g(x)$라 하면 $y=g(x)$에서

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)f(x+h)-xf(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)\{f(x+h)-f(x)\}+(x+h)f(x)-xf(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)\{f(x+h)-f(x)\}+\boxed{hf(x)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(x+h)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)$$
$$=xf'(x)+\boxed{f(x)}$$

답 (가) $hf(x)$ (나) $f(x)$

0312 $f'(x)$

$$=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$
$$=\lim_{t\to x}\frac{\boxed{(t^n+t)-(x^n+x)}}{t-x}$$
$$=\lim_{t\to x}\frac{(t^n-x^n)+(t-x)}{t-x}$$
$$=\lim_{t\to x}\frac{(\boxed{t-x})(t^{n-1}+xt^{n-2}+x^2t^{n-3}+\cdots+x^{n-1}+1)}{t-x}$$
$$=\lim_{t\to x}(t^{n-1}+xt^{n-2}+x^2t^{n-3}+\cdots+x^{n-1}+1)$$
$$=\boxed{nx^{n-1}+1}$$

답 ①

유형 11 항등식이 주어질 때 도함수 구하기 본책 53쪽

(i) 주어진 식의 x, y에 적당한 수를 대입하여 $f(0)$의 값을 구한다.

(ii) $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

0313 $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0 \quad \therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-3xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-3xh}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-3x$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-3x$$
$$=f'(0)-3x$$
$$=-3x-2$$

답 ②

0314 $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1 \quad \therefore f(0)=1$ ⋯ ❶

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh-1-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+xh-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}+x$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+x$$
$$=f'(0)+x$$ ⋯ ❷

이때 $f'(0)$은 상수이므로 $f'(x)$는 일차함수이다.

따라서 $f(x)$는 이차함수이므로 $f(x)$의 차수는 2이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$의 차수를 구할 수 있다.	30 %

0315 ㄱ. $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$

$y=-x$를 주어진 식에 대입하면

$f(x-x)=f(x)+f(-x)-2x^2$

$\therefore f(x)+f(-x)=2x^2+f(0)$

$=2x^2$

ㄴ. $$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2xh}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2x$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2x$$
$$=f'(0)+2x=2x+4$$

ㄷ. 함수 $f(x)$가 미분가능하므로 모든 실수 a에서 연속이다.

$\therefore f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

유형 12 미분법의 공식 본책 54쪽

① $y=x^n$ (n은 양의 정수) ➡ $y'=nx^{n-1}$

② $y=c$ (c는 상수) ➡ $y'=0$

③ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$y=af(x)\pm bg(x)$ (a, b는 상수)이면

$y'=af'(x)\pm bg'(x)$ (복호동순)

0316 $f'(x)=10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1$

$\therefore f'(1)=10+9+8+\cdots+2+1$

$=\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\cdot11}{2}=55$

답 ③

0317 $f'(x)=x^3-x^2+ax+2$

$f'(2)=2a+6=4$이므로

$a=-1$

답 -1

0318 $f(1)=0$에서

$a+b+c=0$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

$f'(x)=2ax+b$이므로 $f'(-1)=-7$에서

$-2a+b=-7$ ⋯⋯ ㉡

$f'(2)=5$에서 $\quad 4a+b=5$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-3$, $c=1$ ⋯ ❷

$\therefore abc=-6$ ⋯ ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ $f(1)=0$임을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	20 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 13 곱의 미분법; $y=f(x)g(x)$ 꼴

본책 54쪽

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때
① $y=f(x)g(x)$
➡ $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
② $y=f(x)g(x)h(x)$
➡ $y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

0319 $f'(x)=(x^2+x+1)'(x^3+x^2+x+1)$
$\quad+(x^2+x+1)(x^3+x^2+x+1)'$
$=(2x+1)(x^3+x^2+x+1)$
$\quad+(x^2+x+1)(3x^2+2x+1)$
$\therefore f'(1)=3\cdot4+3\cdot6=30$

답 30

0320 $f'(x)=(2x^2+1)'(3x-1)(-2x+a)$
$\quad+(2x^2+1)(3x-1)'(-2x+a)$
$\quad+(2x^2+1)(3x-1)(-2x+a)'$
$=4x(3x-1)(-2x+a)$
$\quad+(2x^2+1)\cdot3\cdot(-2x+a)$
$\quad+(2x^2+1)(3x-1)\cdot(-2)$
$f'(1)=-46+17a=39$이므로
$17a=85 \qquad \therefore a=5$

답 ④

0321 $g'(x)=(x^2+2x)'f(x)+(x^2+2x)f'(x)$
$=(2x+2)f(x)+(x^2+2x)f'(x)$
$\therefore g'(1)=4f(1)+3f'(1)$
$=4\cdot(-4)+3\cdot3=-7$

답 −7

0322 $f'(x)=(x-1)'(x-2)(x-3)\cdots(x-9)(x-10)$
$\quad+(x-1)(x-2)'(x-3)\cdots(x-9)(x-10)$
$\quad+(x-1)(x-2)(x-3)'\cdots(x-9)(x-10)$
$\quad+\cdots+(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-9)'(x-10)$
$\quad+(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-9)(x-10)'$
$=(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-9)(x-10)$
$\quad+(x-1)(x-3)(x-4)\cdots(x-9)(x-10)$
$\quad+(x-1)(x-2)(x-4)\cdots(x-9)(x-10)$
$\quad+\cdots+(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-8)(x-10)$
$\quad+(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-8)(x-9)$
이므로

$$\frac{f'(2)}{f'(5)}$$
$$=\frac{1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot(-6)\cdot(-7)\cdot(-8)}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)}$$
$$=-14$$

답 ③

0323 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=2$에서 $x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.
즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$이므로 $\quad f(2)=3$
$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=2$ ⋯ ❶

또 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=4$에서 $x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.
즉 $\lim_{x\to2}\{g(x)-1\}=0$이므로 $\quad g(2)=1$
$\therefore \lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=4$ ⋯ ❷
$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로
$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$
$=2\cdot1+3\cdot4=14$ ⋯ ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ $f(2)$, $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(2)$, $g'(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $h'(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 14 곱의 미분법; $y=\{f(x)\}^n$ 꼴

본책 55쪽

$y=\{f(x)\}^n$ (n은 양의 정수) ➡ $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

0324 $f'(x)=5(x^2+1)^4(x^2+1)'=10x(x^2+1)^4$
$\therefore f'(1)=10\cdot1\cdot2^4=160$

답 ⑤

0325 $f(x)=(4x-3)^2(x^2+2)$라 하면
$f'(x)=\{(4x-3)^2\}'(x^2+2)+(4x-3)^2(x^2+2)'$
$=8(4x-3)(x^2+2)+2x(4x-3)^2$
따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=0$인 점에서의 접선의 기울기는
$f'(0)=8\cdot(-3)\cdot2+2\cdot0\cdot(-3)^2=-48$

답 −48

0326 $f'(x)=3(2x-a)^2(2x-a)'=6(2x-a)^2$
$f'(-1)=6(-2-a)^2=24$이므로
$a^2+4a=0, \quad a(a+4)=0$
$\therefore a=-4\ (\because a\neq0)$ ⋯ ❶
따라서 $f'(x)=6(2x+4)^2$이므로
$f'(1)=6\cdot6^2=216$ ⋯ ❷
$\therefore a+f'(1)=212$ ⋯ ❸

답 212

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 15 미분계수를 이용한 극한값의 계산

본책 55쪽

(i) 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 $f'(a)$가 포함된 식으로 변형한다.
(ii) 도함수 $f'(x)$를 구한다.
(iii) $f'(a)$의 값을 구하여 (i)의 식에 대입한다.

0327 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)-\{f(3-h)-f(3)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}$$

$$=f'(3)+f'(3)=2f'(3)$$

$f'(x)=3x^2+2x-5$이므로 $\quad f'(3)=28$

따라서 구하는 값은

$2f'(3)=2\cdot28=56$ 답 ⑤

0328 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(2)\}^2}{x-2}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)-f(2)\}\{f(x)+f(2)\}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\{f(x)+f(2)\}$$

$$=f'(2)\cdot2f(2)$$

$f(x)=x^3-4x^2$에서 $\quad f(2)=-8$

또 $f'(x)=3x^2-8x$이므로 $\quad f'(2)=-4$

따라서 구하는 값은

$f'(2)\cdot2f(2)=-4\cdot2\cdot(-8)=64$ 답 64

0329 $\dfrac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $h\to0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(-1+\frac{1}{n}\right)-f\left(-1-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)-\{f(-1-h)-f(-1)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(-1-h)-f(-1)}{-h}$$

$=f'(-1)+f'(-1)=2f'(-1)$ ⋯ ❶

$f'(x)=(x^2+3x)'(-x^2+x+2)+(x^2+3x)(-x^2+x+2)'$

$\quad=(2x+3)(-x^2+x+2)+(x^2+3x)(-2x+1)$

이므로

$f'(-1)=1\cdot0+(-2)\cdot3=-6$ ⋯ ❷

따라서 구하는 값은

$2f'(-1)=2\cdot(-6)=-12$ ⋯ ❸

답 -12

채점 기준	비율
❶ $\lim\limits_{n\to\infty}n\left\{f\left(-1+\frac{1}{n}\right)-f\left(-1-\frac{1}{n}\right)\right\}$을 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim\limits_{n\to\infty}n\left\{f\left(-1+\frac{1}{n}\right)-f\left(-1-\frac{1}{n}\right)\right\}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 16 미분계수를 이용한 미정계수의 결정

본책 55쪽

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=c$ (c는 실수)이면

➡ $f(a)=b$, $f'(a)=c$

0330 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=4$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$$

$f(x)=x^3+ax+b$에서 $\quad f'(x)=3x^2+a$

$f(1)=0$에서 $\quad 1+a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

$f'(1)=4$에서 $\quad 3+a=4 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad 2+b=0 \quad \therefore b=-2$

$\therefore ab=-2$ 답 ④

0331 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=4$ ⋯ ❶

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{-h}\cdot(-1)$$

$$=-f'(-2)=-1$$

$\therefore f'(-2)=1$ ⋯ ❷

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(1)=4$에서

$3+2a+b=4 \quad \therefore 2a+b=1$ ⋯⋯ ㉠

$f'(-2)=1$에서

$12-4a+b=1 \quad \therefore 4a-b=11$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-3$ ⋯ ❸

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-3x+1$이므로

$f(1)=1$ ⋯ ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ $f'(1)=4$임을 알 수 있다.	20 %
❷ $f'(-2)=1$임을 알 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0332 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x-1)-5}{x^2-4}=3$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to2}\{f(x-1)-5\}=0$이므로 $\quad f(1)=5$

따라서

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x-1)-5}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x-1)-f(1)}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x-1)-f(1)}{(x-1)-1}\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$=\frac{1}{4}f'(1)$$

이므로 $\quad \dfrac{1}{4}f'(1)=3 \quad \therefore f'(1)=12$

이때 $f(x)=x^2+2ax+b$이므로

$f'(x)=2x+2a$

$f(1)=5$에서

$1+2a+b=5 \quad \therefore 2a+b=4$ ⋯⋯ ㉠

$f'(1)=12$에서

$2+2a=12 \quad \therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $\quad 10+b=4 \quad \therefore b=-6$

즉 $f(x)=x^2+10x-6$이므로

$f(2)=18$

답 ①

0333 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+2x+3}=3$이므로

$a=0,\ b=3$

또 조건 (나)에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-22\}=0$이므로 $\quad f(2)=22$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-22}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=16$

이때 $f(x)=3x^2+cx+d$이므로 $\quad f'(x)=6x+c$

$f(2)=22$에서

$12+2c+d=22 \quad \therefore 2c+d=10$ ...... ㉠

$f'(2)=16$에서 $\quad 12+c=16 \quad \therefore c=4$

$c=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad 8+d=10 \quad \therefore d=2$

$\therefore a+b+c+d=9$

답 9

유형 17 치환을 이용한 극한값의 계산

본책 56쪽

(i) 주어진 식의 일부를 $f(x)$라 한다.
(ii) 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

0334 $f(x)=x^n-2x$라 하면 $f(1)=-1$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$f'(x)=nx^{n-1}-2$이므로 $\quad f'(1)=n-2$

따라서 $n-2=15$이므로

$n=17$

답 ④

0335 $f(x)=x^{10}+3x$라 하면 $f(-1)=-2$이므로

$\lim_{x\to -1}\frac{x^{10}+3x+2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$

$f'(x)=10x^9+3$이므로 $\quad f'(-1)=-7$

답 -7

0336 $f(x)=x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6$이라 하면 $f(1)=1$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$f'(x)=10x^9-9x^8+8x^7-7x^6+6x^5$이므로

$f'(1)=10-9+8-7+6=8$

답 ⑤

0337 $\lim_{x\to 3}\frac{x^n-x^3-9x-27}{x-3}=a$에서 $x\to 3$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 3}(x^n-x^3-9x-27)=0$이므로

$3^n-3^3-9\cdot 3-27=0, \quad 3^n=81$

$\therefore n=4$ ··· ❶

$f(x)=x^4-x^3-9x$라 하면 $f(3)=27$이므로

$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-x^3-9x-27}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$

$f'(x)=4x^3-3x^2-9$이므로

$f'(3)=72 \quad \therefore a=72$ ··· ❷

$\therefore n+a=76$ ··· ❸

답 76

채점 기준	비율
❶ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $n+a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0338 조건 (가)에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 6인 이차식이다.
따라서 $f(x)=6x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 조건 (나)에서

$\lim_{x\to 0}\frac{6x^2+ax+b+3}{x}=2$ ...... ㉠

이고 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(6x^2+ax+b+3)=0$이므로 $\quad b+3=0$

$\therefore b=-3$

따라서 ㉠에서

$\lim_{x\to 0}\frac{6x^2+ax}{x}=\lim_{x\to 0}(6x+a)=a=2$

$\therefore f(x)=6x^2+2x-3$

즉

$\lim_{x\to -1}\frac{x^{15}+f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^{15}+6x^2+2x-3}{x+1}$

이고 $g(x)=x^{15}+6x^2+2x$라 하면 $g(-1)=3$이므로

$\lim_{x\to -1}\frac{x^{15}+f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=g'(-1)$

$g'(x)=15x^{14}+12x+2$이므로 구하는 값은

$g'(-1)=5$

답 ②

유형 18 접선의 기울기를 이용한 미정계수의 결정

본책 57쪽

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 m이면
➡ $f(a)=b,\ f'(a)=m$

0339 $f(1)=4$에서 $\quad 1+a+2=4$

$\therefore a=1$

따라서 $f(x)=x^2+x+2$이므로 $\quad f'(x)=2x+1$

이때 $f'(1)=m$이므로 $\quad m=2\cdot 1+1=3$

$\therefore a+m=4$

답 ④

0340 $f(x)=ax^2+bx+10$이라 하면 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$4a+2b+10=0$

$\therefore 2a+b=-5$ ...... ㉠ ··· ❶

$f'(x)=2ax+b$이고 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(2)=1$

$\therefore\ 4a+b=1$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-11$

$\therefore\ a-b=14$ ⋯ ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ 곡선이 점 $(2,\ 0)$을 지남을 이용하여 $a,\ b$에 대한 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 곡선 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기를 이용하여 $a,\ b$에 대한 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0341 $f(x)=(x-k)^3$에서 $f'(x)=3(x-k)^2$

$y=f(x)g(x)$에서

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이고 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=2$

$3(2-k)^2\cdot1+(2-k)^3\cdot1=2$

$k^3-9k^2+24k-18=0,\quad (k-3)(k^2-6k+6)=0$

$\therefore\ k=3$ 또는 $k=3\pm\sqrt{3}$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$3\cdot(3-\sqrt{3})\cdot(3+\sqrt{3})=18$

답 18

0342 조건 ㈎에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$ ⋯ ❶

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$$ ⋯ ❷

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$f(1)=0$에서 $-1+a+b+c=0$

$\therefore\ a+b+c=1$ …… ㉠

$f'(1)=3$에서 $-3+2a+b=3$

$\therefore\ 2a+b=6$ …… ㉡

또 조건 ㈏에서 $f'(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 가지므로

$$f'(x)=-3\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\frac{a^2}{3}+b$$

에서 $\frac{a}{3}=3\quad\therefore\ a=9$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=9,\ b=-12,\ c=4$ ⋯ ❸

따라서 $f(x)=-x^3+9x^2-12x+4$이므로

$f(3)=-27+81-36+4=22$ ⋯ ❹

답 22

채점 기준	비율
❶ $f(1)=0$임을 알 수 있다.	20 %
❷ $f'(1)=3$임을 알 수 있다.	20 %
❸ $a,\ b,\ c$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 19 미분의 항등식에의 활용

본책 57쪽

주어진 조건을 이용하여 $f(x)$, $f'(x)$를 구하여 주어진 항등식에 대입한 후 다음과 같은 항등식의 성질을 이용한다.

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow a=0,\ b=0,\ c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$

0343 $f(x)$가 이차함수이고, $f(0)=3$이므로

$f(x)=ax^2+bx+3$ ($a,\ b$는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$(x+1)(2ax+b)-2(ax^2+bx+3)+2=0$

$\therefore\ (2a-b)x+(b-4)=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a-b=0,\ b-4=0$

$\therefore\ a=2,\ b=4$

따라서 $f'(x)=4x+4$이므로

$f'(1)=8$

답 ④

0344 $f(x)=2x^2+3xf'(1)$에서 $f'(1)$은 상수이므로

$f'(1)=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=2x^2+3ax$

$\therefore\ f'(x)=4x+3a$

$f'(1)=4+3a$이므로 $f(x)$와 $f'(1)$을 주어진 식에 대입하면

$2x^2+3ax=2x^2+3x(4+3a)$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$3a=3(4+3a),\quad a=4+3a$

$2a=-4\quad\therefore\ a=-2$

따라서 $f'(x)=4x-6$이므로

$f'(2)=2$

답 ④

다른 풀이 $f(x)=2x^2+3xf'(1)$에서 $f'(x)=4x+3f'(1)$

$x=1$을 위의 식의 양변에 대입하면

$f'(1)=4+3f'(1),\quad 2f'(1)=-4$

$\therefore\ f'(1)=-2$

따라서 $f'(x)=4x-6$이므로

$f'(2)=2$

0345 $f'(x)=2ax$이므로 $f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$2(ax^2+b)=(2ax)^2+8$

$\therefore\ 2ax^2+2b=4a^2x^2+8$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a=4a^2,\ 2b=8$

$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=4\ (\because\ a\neq0)$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+4$이므로

$f(6)=22$

답 ②

0346 $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$\therefore f(f'(x))=a(2ax+b)^2+b(2ax+b)+c$
$=4a^3x^2+4a^2bx+ab^2+2abx+b^2+c$
$=4a^3x^2+(4a^2b+2ab)x+ab^2+b^2+c$,

$f'(f(x))=2a(ax^2+bx+c)+b$
$=2a^2x^2+2abx+2ac+b$

이때 $f(f'(x))=f'(f(x))$, 즉 $f(f'(x))-f'(f(x))=0$이므로

$(4a^3-2a^2)x^2+4a^2bx+ab^2+b^2-2ac-b+c=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$4a^3-2a^2=0$, $4a^2b=0$, $ab^2+b^2-2ac-b+c=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$, $b=0$ ($\because a\neq 0$)

또 $f(2)=4a+2b+c=2+c=3$이므로 $c=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$이므로

$f(4)=9$

답 9

0347 (1) $f(x)$가 상수함수이면 $f'(x)=0$이므로 주어진 등식에서 좌변은 0이고 우변은 이차식이 되어 모순이다.

$f(x)$를 n(n은 자연수)차 함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 함수이다.

이때 주어진 등식에서 $n=1$이면 좌변은 상수이고 우변은 이차식이 되어 모순이므로 $n\geq 2$

따라서 좌변의 차수는 $(n-1)+(n-1)$, 우변의 차수는 n이므로

$2n-2=n$ $\therefore n=2$ ⋯ ❶

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 정수, $a\neq 0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f'(x)\{f'(x)+2\}=8f(x)+12x^2+11$에서

$(2ax+b)(2ax+b+2)=8(ax^2+bx+c)+12x^2+11$

$\therefore 4a^2x^2+4(ab+a)x+b^2+2b$
$=4(2a+3)x^2+8bx+8c+11$ ⋯ ❷

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$4a^2=4(2a+3)$, $4(ab+a)=8b$, $b^2+2b=8c+11$

$4a^2=4(2a+3)$에서 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

(i) $a=-1$일 때, $4(ab+a)=8b$에서

$4(-b-1)=8b$ $\therefore b=-\frac{1}{3}$

이것은 b가 정수라는 조건에 모순이다.

(ii) $a=3$일 때, $4(ab+a)=8b$에서

$4(3b+3)=8b$ $\therefore b=-3$

$b=-3$을 $b^2+2b=8c+11$에 대입하면

$3=8c+11$ $\therefore c=-1$

(i), (ii)에서 $a=3$, $b=-3$, $c=-1$

$\therefore f(x)=3x^2-3x-1$ ⋯ ❸

답 (1) 2 (2) $f(x)=3x^2-3x-1$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 차수를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$의 계수로 x에 대한 항등식을 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %

유형 20 다항식의 나눗셈에서 미분법의 활용 ; 나누어떨어지는 경우 (본책 58쪽)

다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어질 조건
➡ $f(a)=0$, $f'(a)=0$

0348 $f(x)=x^3-3x+k$라 하면 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(a)=0$, $f'(a)=0$

$f(a)=0$에서 $a^3-3a+k=0$ ⋯⋯ ㉠

$f'(x)=3x^2-3$이므로 $f'(a)=0$에서

$3a^2-3=0$, $a^2=1$ $\therefore a=1$ ($\because a>0$)

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $1-3+k=0$ $\therefore k=2$

$\therefore a+k=3$

답 ①

참고 다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(x)=(x-a)^2Q(x)$ ⋯⋯ ㉠

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(a)=0$, $f'(a)=0$

0349 $f(x)=x^{10}+2ax+3b$라 하면 $f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(1)=0$, $f'(1)=0$ ⋯ ❶

$f(1)=0$에서 $1+2a+3b=0$ ⋯⋯ ㉠

$f'(x)=10x^9+2a$이므로 $f'(1)=0$에서

$10+2a=0$ $\therefore a=-5$ ⋯ ❷

$a=-5$를 ㉠에 대입하면

$-9+3b=0$ $\therefore b=3$ ⋯ ❸

$\therefore a+b=-2$ ⋯ ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ $f(1)=0$, $f'(1)=0$임을 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0350 조건 (가)에서 $f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(1)=0$, $f'(1)=0$

조건 (나)에서 $f(x)-4$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(-1)-4=0$, $f'(-1)=0$

따라서 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f(1)=0$에서 $a+b+c+d=0$ ⋯⋯ ㉠

$f(-1)-4=0$에서 $\quad -a+b-c+d-4=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡
또 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로
$f'(1)=0$에서 $\quad 3a+2b+c=0 \quad \cdots\cdots$ ㉢
$f'(-1)=0$에서 $\quad 3a-2b+c=0 \quad \cdots\cdots$ ㉣
㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 연립하여 풀면 — ㉢−㉣을 하면 $\quad 4b=0 \quad \therefore b=0$
㉠+㉡에서 $2b+2d-4=0$이므로 $d=2$
㉠에서 $a+c=-2$, ㉢에서 $3a+c=0$을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ c=-3$

$a=1,\ b=0,\ c=-3,\ d=2$
즉 $f(x)=x^3-3x+2$이므로
$f(3)=20$

답 20

다른 풀이 $f(x)$가 삼차함수이므로 조건 ㈎에서
$f(x)=(x-1)^2(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)
라 하면
$f(x)-4=(x-1)^2(ax+b)-4 \quad \cdots\cdots$ ㉠
이때 조건 ㈏에서 $f(-1)-4=0$이므로
$4(-a+b)-4=0$
$\therefore a-b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡
또 조건 ㈏에서 $f'(-1)=0$이고 ㉠에서
$f'(x)=2(x-1)(ax+b)+a(x-1)^2$
이므로
$-4(-a+b)+4a=0$
$\therefore 2a-b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=2$
따라서 $f(x)=(x-1)^2(x+2)$이므로
$f(3)=20$

0351 $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}\cdot(\sqrt{x}+2)$

$=4f'(4)$

즉 $4f'(4)=12$이므로 $\quad f'(4)=3$
$f(x)=(x-3)(x-4)Q(x)$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=(x-4)Q(x)+(x-3)Q(x)+(x-3)(x-4)Q'(x)$
위의 식의 양변에 $x=4$를 대입하면 $f'(4)=Q(4)$이므로
$Q(4)=3$

답 ③

다른 풀이 $f(x)=(x-3)(x-4)Q(x)$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(x-3)(x-4)Q(x)}{\sqrt{x}-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to4}\frac{(x-3)(x-4)Q(x)}{x-4}\cdot(\sqrt{x}+2)$

$\displaystyle=\lim_{x\to4}(x-3)Q(x)\cdot(\sqrt{x}+2)$

$=4Q(4)$

즉 $4Q(4)=12$이므로 $\quad Q(4)=3$

유형 21 다항식의 나눗셈에서 미분법의 활용 ; 나누어떨어지지 않는 경우

본책 58쪽

(i) 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 한다. ➡ $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$
(ii) (i)의 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.
➡ $f'(x)=g'(x)Q(x)+g(x)Q'(x)+R'(x)$

0352 다항식 $x^{20}+1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$x^{20}+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots$ ㉠
$x=1$을 ㉠의 양변에 대입하면
$2=a+b \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$20x^{19}=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$
$x=1$을 위의 식의 양변에 대입하면 $\quad a=20$
$a=20$을 ㉡에 대입하면
$2=20+b \quad \therefore b=-18$
따라서 $R(x)=20x-18$이므로
$R(2)=22$

답 22

0353 다항식 x^4+ax^2+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$x^4+ax^2+b=(x+1)^2Q(x)+2x+3 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$x=-1$을 ㉠의 양변에 대입하면
$1+a+b=1 \quad \therefore a+b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$4x^3+2ax=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+2$
$x=-1$을 위의 식의 양변에 대입하면
$-4-2a=2 \quad \therefore a=-3$
$a=-3$을 ㉡에 대입하면 $\quad b=3$
$\therefore ab=-9$

답 ②

0354 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x-2)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots$ ㉠
점 $(2,\ 4)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로
$f(2)=4 \quad \therefore 2a+b=4 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+a$
점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 3이므로 $\quad f'(2)=3$
$\therefore a=3$
$a=3$을 ㉡에 대입하면 $\quad 6+b=4$
$\therefore b=-2$
따라서 $R(x)=3x-2$이므로
$R(3)=7$

답 7

0355 (1st) m, $f'(a)$, $f'(b)$를 각각 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

$\displaystyle m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^2-2b+1)-(a^2-2a+1)}{b-a}$

$\displaystyle=\frac{b^2-a^2-2b+2a}{b-a}=\frac{(b-a)(b+a-2)}{b-a}$

$=a+b-2$

$f'(x)=2x-2$이므로
$f'(a)=2a-2,\ f'(b)=2b-2$

2nd ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $a=-2$, $b=4$이면 $\quad m=-2+4-2=0$

3rd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $a+b>2$이면 $\quad m=a+b-2>0$

4th ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $a+b=2$이면

$$f'(a)+f'(b)=2(a+b)-4$$
$$=2\cdot2-4=0$$

5th ㄹ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄹ. $f'(c)=2c-2$이므로 $a+b=2c$이면

$$f'(c)=2c-2=a+b-2=m$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

참고 ㄹ. 이차함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$가 항상 성립한다.

0356 1st $f'(-2)$의 값을 구한다.

$y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$$f(x)=f(-x) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-a-h)-f(-a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-a-h)-f(-a)}{-h}\cdot(-1)$$
$$=-f'(-a)$$

즉 $f'(2)=2$에서 $-f'(-2)=2$이므로

$$f'(-2)=-2$$

2nd $\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(2)}$의 값을 구한다.

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(2)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot\frac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)}\cdot(x-2)$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot\frac{1}{\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}}\cdot(x-2)$$
$$=f'(4)\cdot\frac{1}{f'(-2)}\cdot(-4)$$
$$=-6\cdot\frac{1}{-2}\cdot(-4)=-12$$

답 -12

0357 1st ㄱ의 함수가 $x=0$에서 미분가능한지 확인한다.

ㄱ. $g(x)=xf(x)$라 하면

$$g'(0)=\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{hf(h)-0}{h}=\lim_{h\to0}f(h)$$
$$=f(0)\ (\because f(x)\text{는 } x=0\text{에서 연속})$$

따라서 $y=xf(x)$는 $x=0$에서의 미분계수가 존재하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

2nd ㄴ의 함수가 $x=0$에서 미분가능한지 확인한다.

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases} x & (x\ge0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$이면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않고

$$\lim_{h\to0+}\frac{(h^2+1)f(h)-(0+1)f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{(h^2+1)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}(h^2+1)=1,$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{(h^2+1)f(h)-(0+1)f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{(h^2+1)(-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}(-h^2-1)=-1$$

이므로 $y=(x^2+1)f(x)$는 $x=0$에서의 미분계수가 존재하지 않는다.

즉 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

3rd ㄷ의 함수가 $x=0$에서 미분가능한지 확인한다.

ㄷ. $g(x)=\frac{1}{1-x^3f(x)}$이라 하면

$$g'(0)=\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{1-h^3f(h)}-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^3f(h)}{h\{1-h^3f(h)\}}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2f(h)}{1-h^3f(h)}=0$$

따라서 $y=\frac{1}{1-x^3f(x)}$은 $x=0$에서의 미분계수가 존재하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

이상에서 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0358 1st c의 값을 구한다.

$$g(t)=f'(t)=\begin{cases} 3t^2+2t-4 & (t<1) \\ -2t+a & (1<t<3) \\ b & (t>3)\end{cases}$$

이고 $g(t)$는 $t\ne1$, $t\ne3$인 t에서 연속이므로 1, 3이 아닌 실수 c에 대하여

$$\lim_{t\to c+}g(t)=\lim_{t\to c-}g(t)$$

즉 $1+\lim_{t\to c-}g(t)=\lim_{t\to c+}g(t)$를 만족시키는 실수 c의 값은 1 또는 3이어야 한다.

2nd $c=1$일 때 ab의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(i) $c=1$일 때,

$$\lim_{t\to1+}g(t)=\lim_{t\to1+}(-2t+a)=-2+a,$$
$$\lim_{t\to1-}g(t)=\lim_{t\to1-}(3t^2+2t-4)=1$$

이므로

$$1+1=-2+a \qquad \therefore a=4$$

이때 $-1\le b\le3$에서

$$-4\le ab\le12$$

따라서 ab의 최댓값은 12, 최솟값은 -4이다.

3rd $c=3$일 때 ab의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(ii) $c=3$일 때,

$$\lim_{t\to3+} g(t)=\lim_{t\to3+} b=b,$$
$$\lim_{t\to3-} g(t)=\lim_{t\to3-} (-2t+a)=-6+a$$

이므로

$$1+(-6+a)=b \qquad \therefore a=b+5$$
$$\therefore ab=(b+5)b=b^2+5b$$

이때 $-1\le b\le3$이므로 ab는 $b=-1$일 때 최솟값 -4, $b=3$일 때 최댓값 24를 갖는다.

4th ab의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

(i), (ii)에서 ab의 최솟값은 -4이고, 최댓값은 24이므로 구하는 합은

$$24+(-4)=20$$

답 20

0359 **1st** ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

다항함수 $p(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+} p(x)=\lim_{x\to0-} p(x)=p(0)$$

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서도 연속이므로

$$\lim_{x\to0+} p(x)f(x)=\lim_{x\to0-} p(x)f(x)=p(0)f(0)$$

이 성립해야 한다.

이때

$$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+} (x-1)=-1,$$
$$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-} (-x)=0,$$
$$f(0)=0$$

이므로

$$\lim_{x\to0+} p(x)f(x)=\lim_{x\to0+} p(x)\cdot\lim_{x\to0+} f(x)=-p(0),$$
$$\lim_{x\to0-} p(x)f(x)=\lim_{x\to0-} p(x)\cdot\lim_{x\to0-} f(x)=0,$$
$$p(0)f(0)=0$$

따라서 함수 $p(x)f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$$-p(0)=0 \qquad \therefore p(0)=0$$

2nd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=2$에서도 미분가능하므로

$$\lim_{x\to2}\frac{p(x)f(x)-p(2)f(2)}{x-2}$$

의 값이 존재해야 한다.

이때

$$\lim_{x\to2+}\frac{p(x)f(x)-p(2)\overbrace{f(2)}^{f(2)=1}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(2x-3)p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{2(x-2)p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+} 2p(x)+\lim_{x\to2+}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=2p(2)+p'(2),$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{p(x)f(x)-p(2)\overbrace{f(2)}^{f(2)=1}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-1)p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-} p(x)+\lim_{x\to2-}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=p(2)+p'(2)$$

이므로 $p(x)f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하려면

$$2p(2)+p'(2)=p(2)+p'(2)$$
$$\therefore p(2)=0$$

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. [반례] $h(x)=p(x)\{f(x)\}^2$이라 하면 $p(x)=x^2(x-2)$일 때

$$h(x)=\begin{cases} x^4(x-2) & (x\le0) \\ x^2(x-1)^2(x-2) & (0<x\le2) \\ x^2(2x-3)^2(x-2) & (x>2)\end{cases}$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x\ne0$, $x\ne2$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-\overbrace{h(0)}^{h(0)=0}}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2(x-1)^2(x-2)}{x}=0,$$
$$\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{x^4(x-2)}{x}=0$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

또

$$\lim_{x\to2+}\frac{h(x)-\overbrace{h(2)}^{h(2)=0}}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{x^2(2x-3)^2(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+} x^2(2x-3)^2$$
$$=4,$$
$$\lim_{x\to2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{x^2(x-1)^2(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-} x^2(x-1)^2$$
$$=4$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

즉 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하지만 $p(x)=x^2(x-2)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어지지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0360 **1st** $g(4)$, $g(2)$의 값을 구한다.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (0<x<2) \\ 1 & (2\le x<4) \\ 2 & (4\le x<6) \\ 3 & (6\le x<8) \\ \vdots & \end{cases}$$ 이므로 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$h(x)=\begin{cases} 0 & (0<x<2) \\ g(x) & (2\le x<4) \\ 2g(x) & (4\le x<6) \\ 3g(x) & (6\le x<8) \\ \vdots & \end{cases}$$

이때 조건 ㈎에서 $x \to 4+$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x \to 4+} h(x) = \lim_{x \to 4+} 2g(x) = 0$이므로

$2g(4) = 0 \qquad \therefore g(4) = 0$

또 조건 ㈏에서 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2} h(x) = h(2) \qquad \therefore g(2) = 0$

2nd $h(3)$의 값을 구한다.

따라서 $g(x) = (x-4)(x-2)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a \neq 0$)라 하면 조건 ㈎에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4+} \frac{h(x)}{x-4} &= \lim_{x \to 4+} \frac{2g(x)}{x-4} \\ &= \lim_{x \to 4+} \frac{2(x-4)(x-2)(ax+b)}{x-4} \\ &= \lim_{x \to 4+} 2(x-2)(ax+b) \\ &= 4(4a+b) \end{aligned}$$

이므로

$4(4a+b) = 8 \qquad \therefore 4a+b=2$ …… ㉠

또 조건 ㈏에서

$$\lim_{x \to 2+} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2-} \frac{h(x)-h(2)}{x-2}$$

이므로

$$\lim_{x \to 2+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2-} \frac{0-g(2)}{x-2} = 0$$

$$\lim_{x \to 2+} \frac{(x-4)(x-2)(ax+b)}{x-2} = 0$$

$$\lim_{x \to 2+} (x-4)(ax+b) = 0$$

$-2(2a+b) = 0 \qquad \therefore 2a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

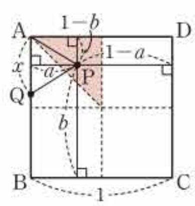
$a=1$, $b=-2$

따라서 $g(x) = (x-4)(x-2)^2$이므로

$h(3) = g(3) = -1$

답 ①

0361 **1st** 점 P에서 두 변 AB, BC까지의 거리를 각각 a, b라 하고 a, $1-a$, b, $1-b$의 대소 관계를 파악한다.



오른쪽 그림과 같이 점 P에서 두 변 AB, BC까지의 거리를 각각 a, b라 하면 점 P에서 두 변 CD, DA까지의 거리는 각각 $1-a$, $1-b$이므로

$a < 1-a$, $1-b < b$,

$1-a < b$, $1-b < a$

$\therefore 1-b < a < 1-a < b$ …… ㉠

2nd $f'(x)$를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

한편 함수 $f(x)$를 구하면

$$f(x) = \begin{cases} \underbrace{\frac{a}{2}x}_{\triangle PQA} & (0 \le x < 1) \\ \underbrace{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}(x-1)}_{\triangle PAB + \triangle PQB} & (1 \le x < 2) \\ \underbrace{\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{1-a}{2}(x-2)}_{\triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PQC} & (2 \le x < 3) \\ \underbrace{\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{1-a}{2} + \frac{1-b}{2}(x-3)}_{\triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PCD + \triangle PQD} & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{2} & (0 < x < 1) \\ \frac{b}{2} & (1 < x < 2) \\ \frac{1-a}{2} & (2 < x < 3) \\ \frac{1-b}{2} & (3 < x < 4) \end{cases}$$

3rd $y=f'(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것을 구한다.

이때 ㉠에서 $\frac{1-b}{2} < \frac{a}{2} < \frac{1-a}{2} < \frac{b}{2}$이므로 도함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ②이다.

답 ②

0362 **1st** 조건 ㈎의 등식을 정리한다.

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)g(x)+4}{x-1} = 8$에서 $x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x \to 1} \{f(x)g(x)+4\} = 0$이고 $f(x)$, $g(x)$가 다항함수이므로

$f(1)g(1)+4=0 \qquad \therefore f(1)g(1) = -4$ …… ㉠

㉠을 조건 ㈎의 등식에 대입하면

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1} = 8$$

$h(x) = f(x)g(x)$라 하면 $\lim_{x \to 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = h'(1) = 8$이고

$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$이므로

$f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 8$ …… ㉡

2nd $g(1)$, $g'(1)$의 값을 구한다.

$f(1) = -2$이므로 ㉠에서 $\qquad g(1) = 2$ …… ㉢

한편 $g(x)$는 일차함수이므로 $g(x) = ax+b$ (a, b는 상수, $a \neq 0$)로 놓으면

$g'(x) = a$

조건 ㈏에서 $g(0) = g'(0)$이므로 $\qquad b=a$

이때 $g(x) = ax+a$에서 $g(1) = 2$이므로

$a+a=2 \qquad \therefore a=1$

따라서 $g'(x) = 1$이므로 $\qquad g'(1) = 1$ …… ㉣

3rd $f'(1)$의 값을 구한다.

㉢, ㉣을 ㉡에 대입하면

$f'(1) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 8 \qquad \therefore f'(1) = 5$

답 ①

0363 **1st** $f(2)$의 값을 구한다.

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} = \frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ㉠$$

에서 $x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$이므로 $\qquad f(2) = 0$

2nd $f(x)$를 미정계수를 이용하여 나타내고 $f'(x)$를 구한다.

이때 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ (a는 상수) …… ㉡

라 하면

$$f'(x)=(x-2)(x-a)+(x-1)(x-a)+(x-1)(x-2)$$
$$=3x^2-(2a+6)x+3a+2 \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

3rd a의 값을 구한다.

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-2)\{3x^2-(2a+6)x+3a+2\}^2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-a)}{\{3x^2-(2a+6)x+3a+2\}^2}$$
$$=\frac{2-a}{(2-a)^2}=\frac{1}{2-a}$$

즉 $\frac{1}{2-a}=\frac{1}{4}$이므로

$2-a=4 \qquad \therefore a=-2$

4th $f(3)$의 값을 구한다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$이므로

$f(3)=10$ 답 ④

0364 1st $f'(x)$를 구한다.

이차함수 $y=f(x)$의 최고차항의 계수가 a이고, $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$이므로

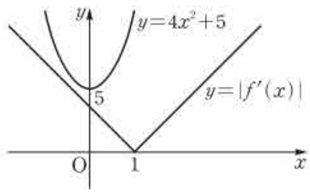
$f(x)=a(x-1)^2+b$ (b는 상수)

라 하면

$f'(x)=2a(x-1)$

2nd a의 값이 최대일 때를 생각한다.

즉 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 점 $(1, 0)$을 지나는 직선이므로 $|f'(x)|\le 4x^2+5$를 만족시키려면 두 함수 $y=4x^2+5$, $y=|f'(x)|$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



이때 a는 $a>0$이고 $y=|f'(x)|$의 그래프에서 $x<1$인 부분이 함수 $y=4x^2+5$의 그래프와 접할 때 최댓값을 갖는다.

3rd a의 최댓값을 구한다.

$|f'(x)|=4x^2+5$에서

$|2a(x-1)|=4x^2+5$

$-2a(x-1)=4x^2+5$ ($\because a>0,\ x<1$)

$4x^2+2ax+5-2a=0$

위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-4(5-2a)=0$

$a^2+8a-20=0, \qquad (a+10)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

따라서 a의 최댓값은 2이다. 답 ②

0365 1st $f(x)$가 상수함수일 때 주어진 조건을 만족시키는지 확인한다.

$(x^2-1)f'(x)=2xf(x)+kx^2+5 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$

(i) $f(x)$가 상수함수일 때,

㉠에서 좌변은 0, 우변은 이차식이 되어 모순이다.

2nd $f(x)$가 일차함수일 때 주어진 조건을 만족시키는지 확인한다.

(ii) $f(x)$가 일차함수일 때,

조건 (나)에서 $f(0)=-3$이므로 $f(x)=ax-3$ (a는 상수, $a\ne0$)이라 하면

$f'(x)=a$

조건 (다)에서 $f'(1)+f'(-1)=-10$이므로

$a+a=-10 \qquad \therefore a=-5$

따라서 $f(x)=-5x-3$, $f'(x)=-5$이므로 ㉠에 대입하면

(좌변)$=-5x^2+5$,

(우변)$=2x(-5x-3)+kx^2+5=(k-10)x^2-6x+5$

이므로 모순이다.

3rd $f(x)$가 $n(n\ge2)$차 함수일 때 주어진 조건을 만족시키는지 확인하고, $f(k)$의 값을 구한다.

(iii) $f(x)$가 n $(n\ge2)$차 함수일 때,

$f(x)$의 최고차항을 ax^n (a는 상수, $a\ne0$)이라 하자.

$f'(x)$는 최고차항이 anx^{n-1}인 $(n-1)$차 함수이므로 ㉠의 양변의 최고차항의 계수를 비교하면

$an=2a \qquad \therefore n=2$ ($\because a\ne0$)

조건 (나)에서 $f(0)=-3$이므로 $f(x)=ax^2+bx-3$ (a, b는 상수, $a\ne0$)이라 하면

$f'(x)=2ax+b$

조건 (다)에서 $f'(1)+f'(-1)=-10$이므로

$(2a+b)+(-2a+b)=-10$

$2b=-10 \qquad \therefore b=-5$

$f(x)=ax^2-5x-3$, $f'(x)=2ax-5$를 ㉠에 대입하면

$(x^2-1)(2ax-5)=2x(ax^2-5x-3)+kx^2+5$

$\therefore 2ax^3-5x^2-2ax+5=2ax^3+(k-10)x^2-6x+5$

즉 $-5=k-10$, $-2a=-6$이므로 $\qquad a=3,\ k=5$

따라서 $f(x)=3x^2-5x-3$이므로

$f(k)=f(5)=47$ 답 ④

0366 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+4}{x-1}=a$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)+4\}=0$에서

$f(1)+4=0 \qquad \therefore f(1)=-4$ ⋯ ❶

따라서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=a$ ⋯ ❷

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{40+\sum_{k=1}^{10}f(1+kh)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sum_{k=1}^{10}\{f(1+kh)+4\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\sum_{k=1}^{10}\frac{f(1+kh)-f(1)}{kh}\cdot k$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(1+kh)-f(1)}{kh}\right\}\cdot k$$
$$=\sum_{k=1}^{10}f'(1)\cdot k$$
$$=f'(1)\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=a\cdot\frac{10\cdot11}{2}=55a \quad \cdots ❸$$

따라서 $55a=110$이므로 $\quad a=2$ ⋯ ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(1)=-4$임을 알 수 있다.	20 %
❷ $f'(1)=a$임을 알 수 있다.	20 %
❸ $\lim_{h\to 0}\frac{40+\sum_{k=1}^{10}f(1+kh)}{h}$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❹ a의 값을 구할 수 있다.	10 %

0367 전략 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속임을 이용한다.

풀이 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to 2+}g(x)=\lim_{x\to 2-}g(x)=g(2)$이므로

$$\lim_{x\to 2+}g(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2-2x)(6-2x)=0,$$

$$\lim_{x\to 2-}g(x)=\lim_{x\to 2-}(ax+b)(x+a)=(2a+b)(2+a)$$

에서 $\quad (2a+b)(2+a)=0$

$\therefore b=-2a$ 또는 $a=-2$ ⋯ ❶

(i) $b=-2a$일 때,

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x^2-2x)(6-2x)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}x(6-2x)=4,$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(ax-2a)(x+a)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}a(x+a)=a(2+a)$$

에서 $\quad a(2+a)=4,\quad a^2+2a-4=0$

$\therefore a=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 a는 정수이므로 모순이다.

(ii) $a=-2$일 때,

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x^2-2x)(6-2x)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}x(6-2x)=4,$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(-2x+b)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}(-2x+b)=-4+b$$

에서 $\quad -4+b=4\quad \therefore b=8$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 $a=-2$, $b=8$이므로

$a+b=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $g(x)$가 연속이기 위한 조건을 이용할 수 있다.	30 %
❷ $g(x)$가 미분가능하기 위한 조건을 이용할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0368 전략 구간에 따라 다르게 정의된 함수가 모든 실수 x에서 미분가능하면 각 구간의 경계점에서 연속이고 미분계수가 존재함을 이용한다.

풀이
$$|f(x)|=|x^2-4x+3|=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x\le 1 \text{ 또는 } x\ge 3) \\ -x^2+4x-3 & (1<x<3)\end{cases}$$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}(ax^2+bx+6)(x^2-4x+3) & (x\le 1 \text{ 또는 } x\ge 3)\\ (ax^2+bx+6)(-x^2+4x-3) & (1<x<3)\end{cases}$$

따라서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=1$, $x=3$에서 미분가능해야 한다. ⋯ ❶

$$g'(x)=\begin{cases}(2ax+b)(x^2-4x+3)+(ax^2+bx+6)(2x-4) \\ \qquad (x<1 \text{ 또는 } x>3)\\ (2ax+b)(-x^2+4x-3)+(ax^2+bx+6)(-2x+4) \\ \qquad (1<x<3)\end{cases}$$

이고, $g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재해야 하므로

$\lim_{x\to 1+}g'(x)=\lim_{x\to 1-}g'(x)$에서

$2(a+b+6)=-2(a+b+6)$

$\therefore a+b=-6$ ⋯⋯ ㉠

또 $g(x)$의 $x=3$에서의 미분계수가 존재해야 하므로

$\lim_{x\to 3+}g'(x)=\lim_{x\to 3-}g'(x)$에서

$2(9a+3b+6)=-2(9a+3b+6)$

$\therefore 3a+b=-2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $b=-8$ ⋯ ❷

$\therefore g'(-1)=(-2a+b)\cdot 8+(a-b+6)\cdot(-6)$

$=-12\cdot 8+16\cdot(-6)=-192$ ⋯ ❸

답 -192

채점 기준	비율
❶ $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 조건을 알 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $g'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0369 전략 $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x)-xg(x)\}=0$이므로 $\quad f(1)-g(1)=0$

조건 (가)에 의하여 $\quad f(1)=g(1)=2$ ⋯ ❶

$h(x)=f(x)-xg(x)$라 하면 $h(1)=0$이므로 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-xg(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$$

$h'(x)=f'(x)-g(x)-xg'(x)$이므로

$h'(1)=f'(1)-g(1)-g'(1)=4$

조건 (가)에 의하여 $f'(1)-2-1=4$이므로 $\quad f'(1)=7$ ⋯ ❷

$y=f(x)g(x)$에서 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=7\cdot 2+2\cdot 1=16$ ⋯ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구할 수 있다.	30 %

0370 전략 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$라 하고 $f(4)=2$, $f'(4)=3$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$라 하면 $f(4)=2$이므로

$(4-a)(4-b)(4-c)=2$ …… ㉠ ⋯ ❶

$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$

이므로

$$f'(4)=(4-b)(4-c)+(4-a)(4-c)+(4-a)(4-b)$$

$$=\frac{2}{4-a}+\frac{2}{4-b}+\frac{2}{4-c}\ (\because ㉠)$$ ⋯ ❷

이때 $f'(4)=3$이므로

$$\frac{2}{4-a}+\frac{2}{4-b}+\frac{2}{4-c}=3$$

$$\therefore \frac{1}{a-4}+\frac{1}{b-4}+\frac{1}{c-4}=-\frac{3}{2}$$ ⋯ ❸

답 $-\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ a, b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(4)$를 a, b, c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $\frac{1}{a-4}+\frac{1}{b-4}+\frac{1}{c-4}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

04 도함수의 활용 (1)

0371 $f(x)=2x^2-6x+7$이라 하면 $f'(x)=4x-6$

따라서 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=4-6=-2$

답 -2

0372 $f(x)=x^3-5x^2-1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-10x$

따라서 점 $(2, -13)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=3\cdot2^2-10\cdot2=-8$

답 -8

0373 $f(x)=x^2-3x$라 하면 $f'(x)=2x-3$

점 $(2, -2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=2\cdot2-3=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-(-2)=1\cdot(x-2)$

$\therefore y=x-4$

답 $y=x-4$

0374 $f(x)=-x^2+3x-5$라 하면 $f'(x)=-2x+3$

점 $(-1, -9)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-2\cdot(-1)+3=5$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-(-9)=5(x+1)$

$\therefore y=5x-4$

답 $y=5x-4$

0375 $f(x)=3x^2+2x-1$이라 하면 $f'(x)=6x+2$

점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=6+2=8$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-4=8(x-1)$

$\therefore y=8x-4$

답 $y=8x-4$

0376 $f(x)=-x^3-2x^2+1$이라 하면 $f'(x)=-3x^2-4x$

점 $(-2, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=-3\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)=-4$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=-4(x+2)$

$\therefore y=-4x-7$

답 $y=-4x-7$

0377 $f(x)=-x^3+1$이라 하면 $f'(x)=-3x^2$

점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-3$

따라서 점 $(1, 0)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{1}{3}(x-1)$ $\therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

답 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

참고 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

0378 $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$라 하면
$$f'(x)=3x^2-4x+3$$
점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는
$$f'(1)=3-4+3=2$$
따라서 점 $(1,\ -2)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 방정식은
$$y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$
답 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

0379 $f(x)=-x^3+x+2$라 하면 $\quad f'(x)=-3x^2+1$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+t+2)$라 하면 접선의 기울기가 -2이므로
$$f'(t)=-3t^2+1=-2, \qquad t^2=1$$
$$\therefore\ t=-1 \text{ 또는 } t=1$$
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$$y-2=-2(x+1),\ y-2=-2(x-1)$$
$$\therefore\ y=-2x,\ y=-2x+4$$
답 $y=-2x,\ y=-2x+4$

0380 $f(x)=x^3+1$이라 하면 $\quad f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+1)$이라 하면 직선 $y=3x+5$에 평행한 직선의 기울기는 3이므로
$$f'(t)=3t^2=3, \qquad t^2=1$$
$$\therefore\ t=-1 \text{ 또는 } t=1$$
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$$y-0=3(x+1),\ y-2=3(x-1)$$
$$\therefore\ y=3x+3,\ y=3x-1$$
답 $y=3x+3,\ y=3x-1$

0381 $f(x)=x^2-4x+3$이라 하면 $\quad f'(x)=2x-4$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2-4t+3)$이라 하면 직선 $y=-\frac{1}{2}x-7$과 수직인 직선의 기울기는 2이므로
$$f'(t)=2t-4=2 \qquad \therefore\ t=3$$
따라서 점 $(3,\ 0)$을 지나고 기울기가 2인 접선의 방정식은
$$y-0=2(x-3) \qquad \therefore\ y=2x-6$$
답 $y=2x-6$

0382 $f(x)=x^2+2x-1$이라 하면
$$f'(x)=2x+2$$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2t-1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+2$이므로 접선의 방정식은
$$y-(t^2+2t-1)=(2t+2)(x-t) \qquad \cdots\cdots ㉠$$
이 직선이 점 $(-1,\ -3)$을 지나므로
$$-3-(t^2+2t-1)=(2t+2)(-1-t)$$
$$t^2+2t=0, \qquad t(t+2)=0$$
$$\therefore\ t=0 \text{ 또는 } t=-2$$
이것을 ㉠에 대입하면
$t=0$일 때, $\quad y+1=2x \quad \therefore\ y=2x-1$
$t=-2$일 때, $\quad y+1=-2(x+2) \quad \therefore\ y=-2x-5$
답 $y=2x-1,\ y=-2x-5$

0383 $f(x)=x^3+2$라 하면 $\quad f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은
$$y-(t^3+2)=3t^2(x-t) \qquad \cdots\cdots ㉠$$
이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로
$$-(t^3+2)=3t^2\cdot(-t), \qquad t^3-1=0$$
$$(t-1)(t^2+t+1)=0 \qquad \therefore\ t=1\ (\because t\text{는 실수})$$
이것을 ㉠에 대입하면
$$y-3=3(x-1) \qquad \therefore\ y=3x$$
답 $y=3x$

0384 (1) $f(x)=ax^3-4x$, $g(x)=-2x^2+bx$라 하면
$$f'(x)=3ax^2-4,\ g'(x)=-4x+b$$
두 곡선이 $x=-1$인 점에서 공통인 접선을 가지므로
$$f(-1)=g(-1),\ f'(-1)=g'(-1)$$
$f(-1)=g(-1)$에서 $\quad -a+4=-2-b$
$$\therefore\ a-b=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$f'(-1)=g'(-1)$에서 $\quad 3a-4=4+b$
$$\therefore\ 3a-b=8 \qquad \cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-5$

(2) 두 곡선 $y=x^3-4x$, $y=-2x^2-5x$의 접점의 좌표가 $(-1,\ 3)$이고 접선의 기울기가 $f'(-1)=g'(-1)=-1$이므로 구하는 접선의 방정식은
$$y-3=-(x+1) \qquad \therefore\ y=-x+2$$
답 (1) $a=1,\ b=-5$ (2) $y=-x+2$

0385 (1) $f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^2-1$이라 하면
$$f'(x)=3x^2-1,\ g'(x)=2x$$
두 곡선의 접점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$이어야 한다.
$f(t)=g(t)$에서
$$t^3-t=t^2-1, \qquad (t+1)(t-1)^2=0$$
$$\therefore\ t=-1 \text{ 또는 } t=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$f'(t)=g'(t)$에서
$$3t^2-1=2t, \qquad (3t+1)(t-1)=0$$
$$\therefore\ t=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } t=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡에서 $t=1$이므로 접점의 x좌표는 1이다.

(2) 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 접선의 기울기는 $f'(1)=g'(1)=2$이므로 구하는 접선의 방정식은
$$y-0=2(x-1) \qquad \therefore\ y=2x-2$$
답 (1) 1 (2) $y=2x-2$

0386 함수 $f(x)=x^2-3x+4$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(3)=4$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=2x-3$이므로 $\quad f'(c)=2c-3=0$
$\therefore c=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0387 함수 $f(x)=-x^2+5x$는 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(4)=4$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(1, 4)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=-2x+5$이므로 $\quad f'(c)=-2c+5=0$
$\therefore c=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

0388 함수 $f(x)=(x+2)(x-6)=x^2-4x-12$는 닫힌구간 $[-2, 6]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 6)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(6)=0$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-2, 6)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=2x-4$이므로 $\quad f'(c)=2c-4=0$
$\therefore c=2$ 답 2

0389 함수 $f(x)=x^3-x^2-5x-3$은 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(3)=0$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=3x^2-2x-5$이므로 $\quad f'(c)=3c^2-2c-5=0$
$(c+1)(3c-5)=0$
$\therefore c=\frac{5}{3}$ ($\because -1<c<3$) 답 $\frac{5}{3}$

0390 함수 $f(x)=x^4-2x^2+1$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)=0$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=4x^3-4x$이므로 $\quad f'(c)=4c^3-4c=0$
$4c(c+1)(c-1)=0$
$\therefore c=0$ ($\because -1<c<1$) 답 0

0391 함수 $f(x)=-x^2+x$는 닫힌구간 $[-3, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-3, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=-2x+1$이므로 $\quad \frac{-2-(-12)}{2-(-3)}=-2c+1$
$\therefore c=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0392 함수 $f(x)=(2x+1)(x-1)=2x^2-x-1$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=4x-1$이므로 $\quad \frac{0-2}{1-(-1)}=4c-1$
$\therefore c=0$ 답 0

0393 함수 $f(x)=x^3$은 닫힌구간 $[-3, 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 0)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-3, 0)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=3x^2$이므로 $\quad \frac{0-(-27)}{0-(-3)}=3c^2$
$c^2=3 \quad \therefore c=-\sqrt{3}$ ($\because -3<c<0$) 답 $-\sqrt{3}$

0394 함수 $f(x)=x^3-2x+1$은 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=3x^2-2$이므로 $\quad \frac{5-2}{2-(-1)}=3c^2-2$
$c^2=1 \quad \therefore c=1$ ($\because -1<c<2$) 답 1

0395 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$인 c가 구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=3x^2-6x+2$이므로 $\quad \frac{6-0}{3-0}=3c^2-6c+2$
$3c^2-6c=0, \quad 3c(c-2)=0$
$\therefore c=2$ ($\because 0<c<3$) 답 2

0396 답 (가) (a, x) (나) $f(x)=f(a)$

0397 답 (가) $f'(x)-g'(x)$ (나) 상수

유형 01 접선의 기울기

본책 66쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기 ➡ $f'(a)$

0398 $f(x)=x^3-ax^2+bx-1$이라 하면
$f'(x)=3x^2-2ax+b$
점 $(1, 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $\quad f(1)=2$
즉 $1-a+b-1=2$에서 $\quad -a+b=2$ ...... ㉠
또 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $\quad f'(1)=2$
즉 $3-2a+b=2$에서 $\quad -2a+b=-1$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3, b=5$
$\therefore a+b=8$ 답 ③

0399 $f(x)=x^4-8x^2+11$이라 하면

$f'(x)=4x^3-16x$

이때 점 P의 x좌표를 a라 하면 점 P에서의 접선이 x축과 평행하므로

$f'(a)=4a^3-16a=0$, $\quad 4a(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$

따라서 모든 점 P의 x좌표의 합은

$(-2)+0+2=0$ 답 ③

참고 x축과 평행한 직선의 기울기는 0이다.

0400 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 7)$에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(2)=4$ ⋯ ❶

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$$=2f'(2)=2\cdot 4$$
$$=8$$ ⋯ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

0401 $f(x)=-x^3+2ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=-3x^2+4ax+b$

점 $(-1, -7)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $\quad f(-1)=-7$

즉 $1+2a-b+c=-7$에서

$2a-b+c=-8$ ⋯⋯ ㉠

점 $(-1, -7)$에서의 접선의 기울기가 13이므로

$f'(-1)=13$

즉 $-3-4a+b=13$에서

$4a-b=-16$ ⋯⋯ ㉡

또 x좌표가 -2인 점에서의 접선의 기울기가 16이므로

$f'(-2)=16$

즉 $-12-8a+b=16$에서

$8a-b=-28$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=-3$, $b=4$

이것을 ㉠에 대입하여 풀면 $\quad c=2$

$\therefore a-2b+c=-9$ 답 -9

0402 $f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=9x^2+2ax+b$

두 점 $(-2, -5)$, $(2, 7)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-2)=-5$, $f(2)=7$

즉 $-24+4a-2b+c=-5$에서

$4a-2b+c=19$ ⋯⋯ ㉠

$24+4a+2b+c=7$에서 $\quad 4a+2b+c=-17$ ⋯⋯ ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $\quad 4b=-36 \quad \therefore b=-9$

또 두 점 $(-2, -5)$, $(2, 7)$에서의 접선이 서로 평행하므로

$f'(-2)=f'(2)$

즉 $36-4a+b=36+4a+b$에서 $\quad a=0$

$a=0$, $b=-9$를 ㉠에 대입하면 $\quad c=1$

$\therefore a-bc=0-(-9)\cdot 1=9$ 답 ⑤

유형 02 접선의 기울기의 최댓값 또는 최솟값 본책 66쪽

곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선의 기울기의 최댓값 또는 최솟값은 $f'(x)$의 최대·최소를 이용하여 구한다.

0403 $f(x)=-x^3+9x^2-12x-14$라 하면

$f'(x)=-3x^2+18x-12=-3(x-3)^2+15$

이므로 $f'(x)$는 $x=3$에서 최댓값 15를 갖는다.

$\therefore a=3$, $k=15$

점 (a, b)가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$b=f(3)=-27+81-36-14=4$

$\therefore a+b+k=22$ 답 ③

0404 $f(x)=x^3-6x^2+x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+1=3(x-2)^2-11$

이므로 $f'(x)$는 $x=2$에서 최솟값 -11을 갖는다.

따라서 구하는 기울기 m의 최솟값은 -11이다. 답 ①

0405 $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2+kx-1$이라 하면

$f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+k=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}+k$

이므로 $f'(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $\frac{9}{2}+k$를 갖는다.

즉 $\frac{9}{2}+k=6$이므로 $\quad k=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

유형 03 접선의 방정식 ; 접점의 좌표가 주어진 경우 본책 67쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)가 주어졌을 때

(i) 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.

(ii) $f'(a)$를 $y-b=f'(a)(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

0406 $f(x)=-2x^3+ax-3$이라 하면 $\quad f'(x)=-6x^2+a$

점 $(1, -1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $\quad f(1)=-1$

즉 $-2+a-3=-1$에서 $\quad a=4$

또 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-2$이므로 접선의 방정식은

$f'(x)=-6x^2+4$에 $x=1$을 대입

$y-(-1)=-2(x-1) \quad \therefore y=-2x+1$

따라서 $b=-2$, $c=1$이므로

$\frac{a+b}{c}=\frac{4-2}{1}=2$ 답 ②

0407 $f(x)=(x+1)(x^2-2)$라 하면

$$f'(x)=(x^2-2)+(x+1)\cdot 2x=3x^2+2x-2$$

$f(-1)=0$이고 점 $(-1, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-1$이므로 접선의 방정식은

$$y-0=-(x+1) \qquad \therefore y=-x-1$$

이 직선이 점 $(2, a)$를 지나므로

$$a=-2-1=-3$$

답 -3

0408 $f(x)=x^3-2x^2+5$라 하면 $\quad f'(x)=3x^2-4x$

점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이므로 직선 l의 방정식은

$$y-4=-(x-1)$$

$\therefore x+y-5=0$ ...... ㉠ ⋯ ❶

점 $(2, 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 직선 m의 방정식은

$$y-5=4(x-2)$$

$\therefore 4x-y-3=0$ ...... ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=\frac{8}{5}, y=\frac{17}{5}$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $\left(\frac{8}{5}, \frac{17}{5}\right)$이다. ⋯ ❸

답 $\left(\frac{8}{5}, \frac{17}{5}\right)$

채점 기준	비율
❶ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선 m의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 직선 l, m의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

0409 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x-1}=4$에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x)+1\}=0$이므로 $\quad f(1)=-1$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$$

따라서 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기가 4이므로 접선의 방정식은

$$y-(-1)=4(x-1) \qquad \therefore y=4x-5$$

즉 $a=4$, $b=-5$이므로

$$ab=-20$$

답 ①

0410 $f(x)=x^3+2x$라 하면 $\quad f'(x)=3x^2+2$

따라서 점 (t, t^3+2t)에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=3t^2+2$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+2t)=(3t^2+2)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2+2)x-2t^3$$

즉 $g(t)=-2t^3$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t+1)-g(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2(t+1)^3+2t^3}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-6t^2-6t-2}{t^2}$$

$$=-6$$

답 ②

0411 점 $(9, 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(9)=2$$

점 $(9, 2)$에서의 접선의 기울기가 $f'(9)$이므로 접선의 방정식은

$$y-2=f'(9)(x-9)$$

이 직선이 점 $(3, 1)$을 지나므로

$$-1=-6f'(9) \qquad \therefore f'(9)=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{x^2f(9)-9f(x^2)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2f(9)-9f(9)-\{9f(x^2)-9f(9)\}}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2f(9)-9f(9)}{x-3}-\lim_{x\to 3}\frac{9f(x^2)-9f(9)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)f(9)}{x-3}$$

$$-\lim_{x\to 3}\frac{f(x^2)-f(9)}{(x-3)(x+3)}\cdot 9(x+3)$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)f(9)-\lim_{x\to 3}\frac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}\cdot 9(x+3)$$

$$=6\cdot f(9)-f'(9)\cdot 54$$

$$=6\cdot 2-\frac{1}{6}\cdot 54=3$$

답 ③

0412 주어진 그래프에서 $\quad f(1)=2,\ f'(1)=0$

$g(x)=-xf(x)$에서 $\quad g(1)=-f(1)=-2$ ⋯ ❶

$g'(x)=-f(x)-xf'(x)$에서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, -2)$에서의 접선의 기울기는

$g'(1)=-f(1)-f'(1)=-2$ ⋯ ❷

따라서 접선의 방정식은

$y-(-2)=-2(x-1) \qquad \therefore y=-2x$ ⋯ ❸

답 $y=-2x$

채점 기준	비율
❶ $g(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $y=g(x)$의 그래프 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	40 %
❸ $y=g(x)$의 그래프 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

유형 04 접선과 수직인 직선의 방정식

본책 68쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식

⇒ $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ (단, $f'(a)\neq 0$)

0413 $f(x)=x^3$, $g(x)=2ax^2-bx$라 하면

$$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=4ax-b$$

곡선 $y=g(x)$가 점 $(1, 1)$을 지나므로 $g(1)=1$에서

$2a-b=1$ ...... ㉠

또 점 $(1, 1)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(1)g'(1)=-1$에서

$3(4a-b)=-1 \qquad \therefore 4a-b=-\frac{1}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{2}{3},\ b=-\frac{7}{3}$

$\therefore a+b=-3$

답 -3

0414 $f(x)=-x^3-2x^2+3$이라 하면

$f'(x)=-3x^2-4x$

점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=1$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

따라서 직선의 방정식은

$y-2=-(x+1)$ $\therefore x+y-1=0$

위의 식이 $ax+by+2=0$과 일치해야 하므로

$\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{2}{-1}$ $\therefore a=-2,\ b=-2$

$\therefore ab=4$

답 ⑤

SSEN 특강

두 직선 $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0\ (abc\neq0,\ a'b'c'\neq0)$이

① 일치한다. $\Longleftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

② 평행하다. $\Longleftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

③ 수직이다. $\Longleftrightarrow aa'+bb'=0$

0415 $y=x^3-ax^2+2ax+2$에서

$x^3-y+2-ax(x-2)=0$

위의 등식이 a에 대한 항등식이므로

$x^3-y+2=0,\ x(x-2)=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=0,\ y=2$ 또는 $x=2,\ y=10$

즉 곡선 $y=x^3-ax^2+2ax+2$는 a의 값에 관계없이 항상 두 점 $(0,\ 2),\ (2,\ 10)$을 지난다. ··· ❶

이때 $y'=3x^2-2ax+2a$이므로 두 점 $(0,\ 2),\ (2,\ 10)$에서의 접선의 기울기는 각각

$2a,\ 12-2a$

이고 두 점에서의 접선이 서로 수직이므로

$2a(12-2a)=-1$ $\therefore 4a^2-24a-1=0$ ··· ❷

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은 $-\frac{1}{4}$이다. ··· ❸

답 $-\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ 곡선이 항상 지나는 두 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ a에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❸ 모든 실수 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

참고 이차방정식 $4a^2-24a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-12)^2-4\cdot(-1)=148>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

SSEN 특강 항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식
$\Longleftrightarrow a=0,\ b=0,\ c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식
$\Longleftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$

0416 $g(x)=x^2$이라 하면 $g'(x)=2x$

점 $P(t,\ t^2)$에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=2t$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2t}$이다.

따라서 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)$ $\therefore y=-\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2}+t^2$

즉 $f(t)=\frac{1}{2}+t^2$이므로

$\lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{2}+t^2\right)=\frac{1}{2}$

답 ①

유형 05 접선이 곡선과 다시 만나는 점 본책 68쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선 $y=g(x)$가 이 곡선과 다시 만나는 점의 x좌표
➡ 방정식 $f(x)=g(x)$의 $x\neq a$인 실근

0417 $f(x)=-x^3+6x^2-9x-12$라 하면

$f'(x)=-3x^2+12x-9$

점 $(0,\ -12)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-9$이므로 접선의 방정식은

$y-(-12)=-9(x-0)$ $\therefore y=-9x-12$

직선 $y=-9x-12$가 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$-x^3+6x^2-9x-12=-9x-12$에서

$x^2(x-6)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=6$

따라서 다시 만나는 점의 좌표가 $(6,\ -66)$이므로

$a=6,\ b=-66$ $\therefore \frac{b}{a}=-11$

답 -11

0418 $f(x)=x^3+2$라 하면 $f'(x)=3x^2$

점 $A(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이므로 접선의 방정식은

$y-3=3(x-1)$ $\therefore y=3x$

직선 $y=3x$가 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는 $x^3+2=3x$에서

$(x+2)(x-1)^2=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 $B(-2,\ -6)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(-6-3)^2}=3\sqrt{10}$

답 ⑤

SSEN 특강 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

0419 $f(x)=x^3-3x^2+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x$

점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=0$이므로 접선의 방정식은

$y=0$ ··· ❶

직선 $y=0$이 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$x^3-3x^2+4=0$에서

$(x+1)(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 점 P의 좌표는 $(-1,\ 0)$이다. ··· ❷

이때 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=9$이므로 접선의 방정식은

$y-0=9(x+1) \qquad \therefore y=9x+9$ ··· ❸

답 $y=9x+9$

채점 기준	비율
❶ 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 P에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

0420 $f(x)=x^3-2x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-2$

점 $P(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 접선의 방정식은

$y-0=1\cdot(x-1) \qquad \therefore y=x-1$

$\therefore Q(0,\ -1)$

또 직선 $y=x-1$이 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$x^3-2x+1=x-1$에서

$x^3-3x+2=0, \qquad (x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 점 R의 좌표는 $(-2,\ -3)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\overline{QR}=\sqrt{(-2)^2+(-3+1)^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{PQ}:\overline{QR}=\sqrt{2}:2\sqrt{2}=1:2$

답 ①

0421 $f'(x)=(x-1)(kx+1)+x(kx+1)+kx(x-1)$

점 $A(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=k+1$이므로 직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{k+1}$이다.

따라서 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{k+1}(x-1)\ (k\neq-1)$ ··· ❶

이때 이 직선이 곡선 $y=f(x)$와 한 점에서 만나려면 방정식

점 A에서만 만난다.

$x(x-1)(kx+1)=-\dfrac{1}{k+1}(x-1)$

이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.

즉 $(x-1)\left(kx^2+x+\dfrac{1}{k+1}\right)=0$에서 이차방정식

$kx^2+x+\dfrac{1}{k+1}=0$

은 서로 다른 두 허근을 가져야 한다. ··· ❷

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1-4k\cdot\dfrac{1}{k+1}<0, \qquad \dfrac{-3k+1}{k+1}<0$ $\dfrac{B}{A}<0$이면 $AB<0$

$(k+1)(3k-1)>0 \qquad \therefore k<-1$ 또는 $k>\dfrac{1}{3}$ ··· ❸

답 $k<-1$ 또는 $k>\dfrac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 곡선 $y=f(x)$와 한 점에서 만나는 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

유형 06 접선의 방정식; 기울기가 주어진 경우

본책 69쪽

곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선의 기울기 m이 주어졌을 때

(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 한다.

(ii) $f'(t)=m$임을 이용하여 t의 값을 구한다.

(iii) $y-f(t)=m(x-t)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

0422 $f(x)=x^3-6x^2+10x-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+10$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-6t^2+10t-1)$이라 하면 직선 $y=-2x-1$에 평행한 직선의 기울기는 -2이므로

$f'(t)=3t^2-12t+10=-2$

$t^2-4t+4=0, \qquad (t-2)^2=0$

$\therefore t=2$

즉 접점의 좌표는 $(2,\ 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=-2(x-2) \qquad \therefore y=-2x+7$

따라서 구하는 y절편은 7이다.

답 7

0423 $f(x)=3x^2-4x+1$이라 하면 $\qquad f'(x)=6x-4$

접점의 좌표를 $(t,\ 3t^2-4t+1)$이라 하면 직선 $y=2x+5$에 평행한 접선의 기울기는 2이므로

직선을 평행이동하여도 기울기는 변하지 않는다.

$f'(t)=6t-4=2 \qquad \therefore t=1$

즉 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로

$m=1,\ n=0 \qquad \therefore m+n=1$

답 ③

0424 $f(x)=x^3-4x+3$이라 하면 $\qquad f'(x)=3x^2-4$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-4t+3)$이라 하면 접선의 기울기가 8이므로

$f'(t)=3t^2-4=8, \qquad t^2=4$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$ ··· ❶

즉 접점의 좌표는 $(-2,\ 3)$, $(2,\ 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=8(x+2)$, $y-3=8(x-2)$

$\therefore y=8x+19$, $y=8x-13$

이때 $a>b$이므로 $\qquad a=19,\ b=-13$ ··· ❷

$\therefore a-b=32$ ··· ❸

답 32

채점 기준	비율
❶ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0425 $f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$f'(0)=-12$이므로 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 -12이다.

이때 기울기가 -12인 다른 접선의 접점의 좌표를

$(t,\ 2t^3-3t^2-12t)$라 하면

$f'(t)=6t^2-6t-12=-12$

$6t^2-6t=0, \quad 6t(t-1)=0$

$\therefore t=1\ (\because t\neq 0)$

즉 접점의 좌표는 $(1,\ -13)$이므로 접선의 방정식은

$y+13=-12(x-1)$

$\therefore y=-12x-1$

이 직선이 점 $(k,\ 11)$을 지나므로

$11=-12k-1$

$\therefore k=-1$ 답 ⑤

0426 $f(x)=2x^3-17x$라 하면

$f'(x)=6x^2-17$

접점의 좌표를 $(t,\ 2t^3-17t)\ (t>0)$라 하면 접선의 기울기는

$\tan 45^\circ=1$이므로

$f'(t)=6t^2-17=1, \quad t^2=3$

$\therefore t=\sqrt{3}\ (\because t>0)$

즉 접점의 좌표는 $(\sqrt{3},\ -11\sqrt{3})$이므로 접선의 방정식은

$y-(-11\sqrt{3})=1\cdot(x-\sqrt{3})$

$\therefore y=x-12\sqrt{3}$

따라서 $a=1$, $b=-12\sqrt{3}$이므로

$ab=-12\sqrt{3}$ 답 ①

SSEN 특강 직선의 기울기

직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0^\circ\le\theta<90^\circ)$라 하면

➡ (직선의 기울기)$=\tan\theta$

0427 $f(x)=-x^2+3x+5$라 하면

$f'(x)=-2x+3$

점 $(1,\ 7)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 직선 l과 수직인 직선을 m이라 하면 직선 m의 기울기는 -1이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 m의 접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+3t+5)$라 하면

$f'(t)=-2t+3=-1 \quad \therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 7)$이므로 구하는 직선 m의 방정식은

$y-7=-(x-2)$

$\therefore x+y-9=0$ 답 ③

유형 07 곡선과 직선이 접할 때 본책 70쪽

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx+n$이 접할 때

(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하고 접선의 방정식을 세운다.

(ii) (i)에서 구한 접선의 방정식과 직선 $y=mx+n$이 일치함을 이용하여 t의 값을 구한다.

(iii) 접점의 좌표를 $y=f(x)$ 또는 $y=mx+n$에 대입하여 미정계수를 구한다.

0428 $f(x)=x^3+2x^2+ax$라 하면

$f'(x)=3x^2+4x+a$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2t^2+at)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+4t+a$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t^2+at)=(3t^2+4t+a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+4t+a)x-2t^3-2t^2$

이 직선이 직선 $y=3x+8$과 일치해야 하므로

$3t^2+4t+a=3$ …… ㉠

$-2t^3-2t^2=8$ …… ㉡

㉡에서

$t^3+t^2+4=0, \quad (t+2)(t^2-t+2)=0$

$\therefore t=-2\ (\because t^2-t+2>0)$

$t^2-t+2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

$t=-2$를 ㉠에 대입하면

$12-8+a=3$

$\therefore a=-1$ 답 ②

0429 곡선 $y=x^2-3x+a$와 직선 $y=-x+3$의 접점의 x좌표가 t이므로 $x=t$일 때 접선의 기울기는 -1이다.

$f(x)=x^2-3x+a$라 하면 $f'(x)=2x-3$이므로

$f'(t)=2t-3=-1 \quad \therefore t=1$

따라서 접점의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로 $x=1$, $y=2$를

$y=x^2-3x+a$에 대입하면

$2=1-3+a \quad \therefore a=4$

$\therefore a+t=5$ 답 5

0430 $f(x)=x^3-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-1)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-1)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3-1$

이 직선이 직선 $y=mx-17$과 일치해야 하므로

$3t^2=m$ …… ㉠

$-2t^3-1=-17$ …… ㉡

㉡에서

$t^3-8=0, \quad (t-2)(t^2+2t+4)=0$

$\therefore t=2\ (\because t^2+2t+4>0)$

$t=2$를 ㉠에 대입하면

$m=12$ 답 ③

0431 $f(x)=3x^2+9x+9$라 하면 $\quad f'(x)=6x+9$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, 3)$에서의 접선의 기울기가 $f'(-2)=-3$이므로 접선의 방정식은

$y-3=-3(x+2) \qquad \therefore y=-3x-3$ ··· ❶

곡선 $y=x^3-3x^2+8$을 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 곡선은

$y-a=x^3-3x^2+8 \qquad \therefore y=x^3-3x^2+8+a$ ··· ❷

$g(x)=x^3-3x^2+8+a$라 하면 $\quad g'(x)=3x^2-6x$

따라서 곡선 $y=g(x)$의 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+8+a)라 하면

$g'(t)=3t^2-6t=-3$

$t^2-2t+1=0, \qquad (t-1)^2=0$

$\therefore t=1$ ··· ❸

따라서 접점의 좌표가 $(1, a+6)$이므로 $x=1$, $y=a+6$을 $y=-3x-3$에 대입하면

$a+6=-6 \qquad \therefore a=-12$ ··· ❹

답 -12

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=3x^2+9x+9$ 위의 점 $(-2, 3)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❷ 곡선 $y=x^3-3x^2+8$을 평행이동한 곡선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❸ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❹ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0432 $f(x)=x^3+ax^2+ax+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+a$

접점의 좌표를 (t, t^3+at^2+at+3)이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+2at+a$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2+at+3)=(3t^2+2at+a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2at+a)x-2t^3-at^2+3$

이 직선이 직선 $y=x+3$과 일치해야 하므로

$3t^2+2at+a=1$ ······ ㉠

$-2t^3-at^2+3=3$ ······ ㉡

㉡에서 $\quad t^2(2t+a)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=-\dfrac{a}{2}$

(i) $t=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=1$

(ii) $t=-\dfrac{a}{2}$를 ㉠에 대입하면

$\dfrac{3}{4}a^2-a^2+a=1, \qquad a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0 \qquad \therefore a=2$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은

$1+2=3$

답 3

유형 08 기울기가 주어진 접선의 방정식의 활용 본책 71쪽

곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선의 기울기 m이 주어졌을 때
➡ 접점의 좌표를 $(t, f(t))$라 하고 $f'(t)=m$임을 이용하여 t의 값을 구한 후 접점의 좌표를 구한다.

0433 $f(x)=x^3-3x^2-6x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-6$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-6t+1)이라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=3t^2-6t-6=3, \qquad t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉 접점의 좌표는 $(-1, 3)$, $(3, -17)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=3(x+1)$, $y-(-17)=3(x-3)$

$\therefore 3x-y+6=0$, $3x-y-26=0$

위의 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-y+6=0$ 위의 점 $(0, 6)$과 직선 $3x-y-26=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$\dfrac{|0-6-26|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{16\sqrt{10}}{5}$

답 ③

SSEN 특강 점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

0434 $f(x)=x^3-10x+5$라 하면 $\quad f'(x)=3x^2-10$

접점의 좌표를 $(t, t^3-10t+5)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=3t^2-10=2, \qquad t^2=4$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$ ··· ❶

즉 접점의 좌표는 $(-2, 17)$, $(2, -7)$이다. ··· ❷

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+2}{2}, \dfrac{17-7}{2}\right)$, 즉 $(0, 5)$ ··· ❸

답 $(0, 5)$

채점 기준	비율
❶ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ 선분 AB의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %

0435 $f(x)=x^3-3x^2+5x$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x+5$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+5t)라 하면 접선의 기울기가 8이므로

$f'(t)=3t^2-6t+5=8$

$t^2-2t-1=0 \qquad \therefore t=1\pm\sqrt{2}$

$\therefore |a-b|=|1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})|=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

다른 풀이 두 접점의 x좌표가 a, b이므로 이차방정식 $t^2-2t-1=0$의 두 근은 a, b이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=2, \ ab=-1$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=2^2-4\cdot(-1)=8$이므로

$|a-b|=2\sqrt{2}$

유형 09 곡선 위의 점과 직선 사이의 거리 본책 71쪽

(i) 곡선의 접선 중 주어진 직선과 평행한 접선의 접점의 좌표를 구한다.
(ii) 이 접점과 직선 사이의 거리를 구한다.

0436 $f(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=2x$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=2x-6$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이어야 하므로

$f'(t)=2t=2 \qquad \therefore t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$이고, 점 $(1,\ 1)$과 직선 $y=2x-6$, 즉 $2x-y-6=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$\dfrac{|2-1-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$ 답 ③

0437 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{11}{3}\ (x>0)$이라 하면

$f'(x)=x^2$

곡선 $y=f(x)\,(x>0)$의 접선 중에서 직선 $x-y-10=0$, 즉 $y=x-10$과 평행한 접선의 접점이 점 P이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=a^2=1$

이때 $x>0$이므로 $\quad a>0$

$\therefore a=1$

즉 점 P의 좌표는 $(1,\ 4)$이므로

$a=1,\ b=4$

$\therefore a+b=5$ 답 ④

0438 $f(x)=x^2+3x+4$라 하면

$f'(x)=2x+3$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=x$와 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+3t+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이어야 하므로

$f'(t)=2t+3=1 \qquad \therefore t=-1$ ⋯ ❶

따라서 점 P의 좌표가 $(-1,\ 2)$일 때 △ABP의 넓이가 최소이다.

점 $(-1,\ 2)$와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ⋯ ❷

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$이므로 △ABP의 넓이의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{2}}=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 기울기가 1인 접선의 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 P와 직선 $y=x$ 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ △ABP의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

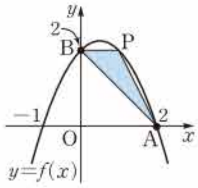
0439 $f(x)=-x^2+x+2$라 하면 $f(x)=0$에서

$(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore \mathrm{A}(2,\ 0)$

또 $f(0)=2$이므로 $\quad \mathrm{B}(0,\ 2)$

따라서 오른쪽 그림에서 △ABP의 넓이는 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때 최댓값을 갖는다.



직선 AB의 기울기는 $\quad \dfrac{0-2}{2-0}=-1$

$f'(x)=-2x+1$이므로 곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 기울기가 -1인 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+t+2)$라 하면

$f'(t)=-2t+1=-1 \qquad \therefore t=1$

따라서 점 P의 좌표가 $(1,\ 2)$일 때 △ABP의 넓이가 최대이다.

직선 AB의 방정식은

$y=-(x-2)$, 즉 $x+y-2=0$

이므로 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$와 직선 AB 사이의 거리는

$\dfrac{|1+2-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$이므로 △ABP의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1$ 답 ②

유형 10 접선의 방정식; 곡선 밖의 한 점이 주어진 경우 본책 72쪽

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$가 주어졌을 때
(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 한다.
(ii) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 점 $(a,\ b)$의 좌표를 대입하여 t의 값을 구한다.
(iii) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

0440 $f(x)=x^3+2x$라 하면 $\qquad f'(x)=3x^2+2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t)=(3t^2+2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2)x-2t^3$ ⋯⋯ ㉠

이 직선이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 $\qquad 2=-2t^3$

$2(t+1)(t^2-t+1)=0 \qquad \therefore t=-1\ (\because t^2-t+1>0)$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면 $\qquad y=5x+2$

$5x+2=0$에서 $\qquad x=-\dfrac{2}{5}$

따라서 구하는 접선의 x절편은 $-\dfrac{2}{5}$이다. 답 ④

0441 $f(x)=x^2-3$이라 하면 $\qquad f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-3)=2t(x-t) \qquad \therefore y=2tx-t^2-3$

이 직선이 점 $(0,\ -4)$를 지나므로 $\qquad -4=-t^2-3$

$t^2=1 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(-1)f'(1)=-2\cdot 2=-4$ 답 -4

0442 $f(x)=x^2+x$라 하면 $\quad f'(x)=2x+1$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2+t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$

$\therefore\ y=(2t+1)x-t^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=2t+1-t^2,\quad t(t-2)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=2$

$t=0,\ t=2$를 ㉠에 각각 대입하면

$y=x,\ y=5x-4$

이상에서 접선의 방정식은 ㄷ, ㅁ이다. 답 ⑤

0443 $f(x)=-x^3+2$라 하면 $\quad f'(x)=-3x^2$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3+2)=-3t^2(x-t)$

$\therefore\ y=-3t^2x+2t^3+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 원점을 지나므로 $\quad 0=2t^3+2$

$2(t+1)(t^2-t+1)=0 \quad \therefore\ t=-1\ (\because\ t^2-t+1>0)$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=-3x$

따라서 직선 $y=-3x$ 위의 점의 좌표는 ③이다. 답 ③

0444 $f(x)=x^3-5x^2+8x-4$라 하면

$f'(x)=3x^2-10x+8$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t^2+8t-4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-10t+8$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-5t^2+8t-4)=(3t^2-10t+8)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-10t+8)x-2t^3+5t^2-4$

이 직선이 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$0=-2t^3+14t^2-30t+20$

$\therefore\ t^3-7t^2+15t-10=0$

위의 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근이 세 접점의 x좌표이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 x좌표의 합은 $\quad 7$

답 ④

참고 $t^3-7t^2+15t-10=0$에서 $\quad (t-2)(t^2-5t+5)=0$
이차방정식 $t^2-5t+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-5)^2-4\cdot5=5>0$
이므로 삼차방정식 $t^3-7t^2+15t-10=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

SSEN 특강 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

0445 $f(x)=x^2-2x$라 하면 $\quad f'(x)=2x-2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2-2t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-2t)=(2t-2)(x-t)$

$\therefore\ y=(2t-2)x-t^2$

이 직선이 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$-2=2t-2-t^2,\quad t^2-2t=0$

$t(t-2)=0 \quad \therefore\ t=0$ 또는 $t=2$ $\quad\cdots$ ❶

한편 점 $(t,\ t^2-2t)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2t-2}$이므로 직선의 방정식은

$y-(t^2-2t)=-\dfrac{1}{2t-2}(x-t)$

위의 식에 $t=0,\ t=2$를 각각 대입하면

$y=\dfrac{1}{2}x,\ y=-\dfrac{1}{2}x+1$ $\quad\cdots$ ❷

따라서 두 직선의 y절편은 각각 0, 1이므로

$a+b=1$ $\quad\cdots$ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 접선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 11 곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식의 활용

본책 72쪽

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$가 주어졌을 때
➡ 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하고 세운 접선의 방정식에 점 $(a,\ b)$의 좌표를 대입하여 t의 값을 구한 후 접점의 좌표를 구한다.

0446 $f(x)=-x^2+x$라 하면

$f'(x)=-2x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+t)=(-2t+1)(x-t)$

$\therefore\ y=(-2t+1)x+t^2$

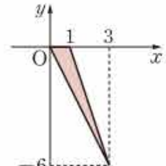
이 직선이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$-1=-4t+2+t^2,\quad t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore\ t=1$ 또는 $t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 0),\ (3,\ -6)$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot6=3$



답 ②

0447 $f(x)=x^4+3$이라 하면

$f'(x)=4x^3$

접점의 좌표를 $(t,\ t^4+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4+3)=4t^3(x-t) \quad \therefore\ y=4t^3x-3t^4+3$ $\quad\cdots$ ❶

이 직선이 원점을 지나므로 $\quad 0=-3t^4+3$

$t^4-1=0,\quad (t+1)(t-1)(t^2+1)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1\ (\because\ t^2+1>0)$ $\quad\cdots$ ❷

따라서 접점 P, Q의 좌표는 $(-1,\ 4)$, $(1,\ 4)$이므로

$\overline{PQ}=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하고 접선의 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ t의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 선분 PQ의 길이를 구할 수 있다.	30 %

0448 $f(x)=-x^2+9x$라 하면 $\quad f'(x)=-2x+9$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+9t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+9$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+9t)=(-2t+9)(x-t)$

$\therefore\ y=(-2t+9)x+t^2$

이 직선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로 $\quad k=t^2$

$\therefore\ t=-\sqrt{k}$ 또는 $t=\sqrt{k}$ $(\because\ k>0)$

따라서 두 접선의 기울기는 각각 $2\sqrt{k}+9$, $-2\sqrt{k}+9$이고 두 접선이 서로 수직이므로

$(2\sqrt{k}+9)(-2\sqrt{k}+9)=-1$

$-4k+81=-1, \qquad 4k=82$

$\therefore\ k=\dfrac{41}{2}$ 답 ②

0449 $f(x)=x^2+5x-2$라 하면 $\quad f'(x)=2x+5$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+5t-2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+5$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+5t-2)=(2t+5)(x-t)$

$\therefore\ y=(2t+5)x-t^2-2$

이 직선이 점 $A(a,\ 3)$을 지나므로

$3=(2t+5)a-t^2-2$

$\therefore\ t^2-2at-5a+5=0$

위의 이차방정식의 두 실근을 t_1, t_2라 하면 t_1, t_2는 각각 두 점 B, C의 x좌표이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1+t_2=2a$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표는

$\dfrac{a+t_1+t_2}{3}=\dfrac{a+2a}{3}=2$

$\therefore\ a=2$ 답 2

참고 $a=2$이면 이차방정식 $t^2-2at-5a+5=0$에서

$t^2-4t-5=0, \qquad (t+1)(t-5)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=5$

따라서 두 점 B, C의 좌표는 $(-1,\ -6)$, $(5,\ 48)$이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 y좌표가 $\dfrac{3+(-6)+48}{3}=15$임을 확인할 수 있다.

0450 $f(x)=x^3+6x^2+4$라 하면

$f'(x)=3x^2+12x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+6t^2+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+12t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+6t^2+4)=(3t^2+12t)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2+12t)x-2t^3-6t^2+4$

이 직선이 점 $(a,\ 4)$를 지나므로

$4=(3t^2+12t)a-2t^3-6t^2+4$

$t\{2t^2+(6-3a)t-12a\}=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $2t^2+(6-3a)t-12a=0$

이때 접선이 오직 한 개 존재하려면 이차방정식

$2t^2+(6-3a)t-12a=0$ ······ ㉠

이 $t=0$을 중근으로 갖거나 실근을 갖지 않아야 한다. ··· ❶

(i) ㉠이 $t=0$을 중근으로 갖는 경우

$6-3a=0, \ -12a=0$

그런데 이를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠이 실근을 갖지 않는 경우

㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(6-3a)^2-4\cdot2\cdot(-12a)<0$

$3a^2+20a+12<0, \qquad (3a+2)(a+6)<0$

$\therefore\ -6<a<-\dfrac{2}{3}$

(i), (ii)에서 $\quad -6<a<-\dfrac{2}{3}$ ··· ❷

즉 $m=-6$, $n=-\dfrac{2}{3}$이므로

$mn=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 접선이 오직 한 개 존재하도록 하는 조건을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ mn의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 12 공통인 접선

본책 73쪽

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지면

① $x=t$인 점에서 두 곡선이 만난다. ➡ $f(t)=g(t)$

② $x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같다.

➡ $f'(t)=g'(t)$

0451 $f(x)=x^3$, $g(x)=3x^2-4$라 하면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=6x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서

$t^3=3t^2-4, \qquad (t+1)(t-2)^2=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=2$

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2=6t, \qquad 3t(t-2)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=2$

따라서 $t=2$일 때, 즉 점 $(2,\ 8)$에서 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(2)=g'(2)=12$이므로 공통인 접선의 방정식은

$y-8=12(x-2) \qquad \therefore\ y=12x-16$ 답 ④

0452 $f(x)=x^3+ax$, $g(x)=2x^2+4$라 하면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=4x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad t^3+at=2t^2+4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 3t^2+a=4t$

$\therefore a=4t-3t^2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$t^3-t^2+2=0, \quad (t+1)(t^2-2t+2)=0$

$\therefore t=-1 \ (\because t^2-2t+2>0)$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면 $\quad a=-7$

답 ①

0453 $f(x)=x^3+ax$, $g(x)=bx^3+3x^2+c$라 하면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=3bx^2+6x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1, -2)$를 지나므로

$f(1)=-2$에서 $\quad 1+a=-2 \quad \therefore a=-3$

$g(1)=-2$에서 $\quad b+3+c=-2$

$\therefore b+c=-5 \quad \cdots\cdots$ ㉠ $\quad \cdots$ ❶

점 $(1, -2)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서 $\quad 3+a=3b+6$

$3b=-6 \quad \therefore b=-2 \quad \cdots$ ❷

$b=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad c=-3 \quad \cdots$ ❸

$\therefore a+b-c=-2 \quad \cdots$ ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ a의 값과 b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ c의 값을 구할 수 있다.	10 %
❹ $a+b-c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 13 두 곡선의 교점에서의 접선

본책 73쪽

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 대하여

(i) 두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면 ➡ $f(t)=g(t)$

(ii) 두 곡선의 교점에서의 접선의 방정식은 각각

➡ $y-f(t)=f'(t)(x-t)$, $y-g(t)=g'(t)(x-t)$

0454 $f(x)=x^2+4$, $g(x)=-3x^2+ax$라 하면

$f'(x)=2x$, $g'(x)=-6x+a$

두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$t^2+4=-3t^2+at \quad \therefore at=4t^2+4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

두 접선이 서로 수직이므로 $f'(t)g'(t)=-1$에서

$2t(-6t+a)=-1 \quad \therefore 12t^2-2at=1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad 12t^2-2(4t^2+4)=1$

$4t^2=9 \quad \therefore t=-\frac{3}{2}$ 또는 $t=\frac{3}{2}$

(i) $t=-\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\quad -\frac{3}{2}a=13 \quad \therefore a=-\frac{26}{3}$

(ii) $t=\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\quad \frac{3}{2}a=13 \quad \therefore a=\frac{26}{3}$

그런데 $a>0$이므로 (i), (ii)에서 $\quad a=\frac{26}{3}$

답 $\frac{26}{3}$

0455 $f(x)=x^3$, $g(x)=ax^2+bx$라 하면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=2ax+b$

두 곡선이 점 $(1, 1)$에서 만나므로 $g(1)=1$에서

$a+b=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

점 $(1, 1)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(1)g'(1)=-1$에서 $\quad 3(2a+b)=-1$

$\therefore 2a+b=-\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{7}{3}$

$\therefore b-a=\frac{11}{3}$

답 $\frac{11}{3}$

0456 $f(x)=-x^2+2$, $g(x)=ax^2+3x$라 하면

$f'(x)=-2x$, $g'(x)=2ax+3$

두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$-t^2+2=at^2+3t \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 $m_1=f'(t)=-2t$, $m_2=g'(t)=2at+3$이므로 $m_1-m_2=1$에서

$-2t-2at-3=1 \quad \therefore at=-t-2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $\quad t=2$

$t=2$를 ㉡에 대입하면 $\quad a=-2$

답 -2

0457 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1, k)$에서 만나므로

$f(1)=k$, $g(1)=k$

또 점 $(1, k)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(1)g'(1)=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이고 점 $(1, k^2)$에서의 접선의 기울기는 0이므로 (직선 $y=k^2$의 기울기)$=0$

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=0, \quad k\{f'(1)+g'(1)\}=0$

$\therefore f'(1)+g'(1)=0 \ (\because k\neq 0)$

즉 $g'(1)=-f'(1)$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$\{f'(1)\}^2=1 \quad \therefore f'(1)=-1$ 또는 $f'(1)=1$

그런데 $f'(1)<g'(1)$이므로 $\quad f'(1)=-1$, $g'(1)=1$

$\therefore f'(1)-g'(1)=-2$

답 ④

유형 14 접선과 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이

본책 74쪽

(i) 접선의 방정식을 구한다.

(ii) 접선의 x절편과 y절편을 찾아 도형의 넓이를 구한다.

0458 $f(x)=2x^3-3x^2+4x-1$이라 하면

$f'(x)=6x^2-6x+4$

점 P(1, 2)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$이므로 접선 l의 방정식은

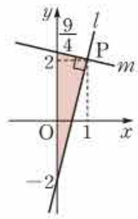
$y-2=4(x-1) \quad \therefore y=4x-2$

한편 직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이므로 점 P(1, 2)를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{4}$인 직선 m의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{4}(x-1) \quad \therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$

따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{9}{4}-(-2)\right\}\cdot 1=\frac{17}{8}$$



답 ②

0459 $f(x)=x^2-4x+5$라 하면

$f'(x)=2x-4$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-4t+5)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=2t-4=2\qquad \therefore t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3,\ 2)$이므로 접선의 방정식은

$y-2=2(x-3)\qquad \therefore y=2x-4$

이 접선의 x절편은 2, y절편은 -4이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4$

답 ②

0460 점 $(1,\ k)$는 곡선 $y=x^2+a$ 위의 점이므로

$k=1+a$ ······ ㉠

$f(x)=x^2+a$라 하면 $\quad f'(x)=2x$

점 $(1,\ k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 접선의 방정식은

$y-k=2(x-1)\qquad \therefore y=2x+k-2$ ⋯➊

따라서 접선의 x절편과 y절편은 각각 $\frac{2-k}{2}$, $k-2$이다.

이때 $k>2$이고 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{4}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot\frac{k-2}{2}\cdot(k-2)=\frac{1}{4},\qquad (k-2)^2=1$

$\therefore k=3\ (\because k>2)$ ⋯➋

$k=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=2$ ⋯➌

$\therefore a+k=5$ ⋯➍

답 5

채점 기준	비율
➊ 점 $(1,\ k)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
➋ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
➍ $a+k$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0461 $f(x)=x^2$이라 하면 $\quad f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t)\qquad \therefore y=2tx-t^2$ ······ ㉠

직선 ㉠이 점 A(2, 3)을 지나므로

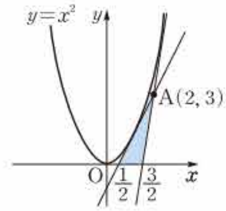
$3=4t-t^2,\qquad t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0\qquad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

$t=1$, $t=3$을 ㉠에 각각 대입하면

$y=2x-1$, $y=6x-9$

두 접선의 x축과의 교점의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이므로 오른쪽 그림에서 △ABC의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot 3=\frac{3}{2}$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=3^2+2^2=13$

답 ②

0462 정사각형 ABCD에서 두 대각선의 교점이 원점 O이므로 △ABO는 직각이등변삼각형이다.

따라서 ∠ABO=45°이므로 직선 AB의 기울기는

$\tan 45°=1$

$f(x)=-x^2+2$라 하면 $\qquad f'(x)=-2x$

직선 AB와 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+2)$라 하면 직선 AB의 기울기가 1이므로

$f'(t)=-2t=1\qquad \therefore t=-\frac{1}{2}$

즉 접점의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{7}{4}\right)$이므로 직선 AB의 방정식은

$y-\frac{7}{4}=x+\frac{1}{2}\qquad \therefore y=x+\frac{9}{4}$

따라서 $A\left(0,\ \frac{9}{4}\right)$, $B\left(-\frac{9}{4},\ 0\right)$이므로 △ABO의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{4}=\frac{81}{32}$

$\therefore$ □ABCD$=4$△ABO$=4\cdot\frac{81}{32}=\frac{81}{8}$

답 $\frac{81}{8}$

0463 $f(x)=x^2-2x+2$, $g(x)=-x^2+6$이라 하면

$f'(x)=2x-2$, $g'(x)=-2x$

두 곡선이 제1사분면 위에서 만나는 점의 x좌표를 $t\ (t>0)$라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$t^2-2t+2=-t^2+6,\qquad t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0\qquad \therefore t=2\ (\because t>0)$

$\therefore$ P(2, 2)

점 P(2, 2)에서 두 곡선에 그은 접선 l, m의 기울기는 각각 $f'(2)=2$, $g'(2)=-4$이므로 직선 l의 방정식은

$y-2=2(x-2)\qquad \therefore y=2x-2$

직선 m의 방정식은

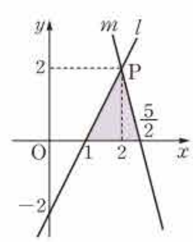
$y-2=-4(x-2)$

$\therefore y=-4x+10$

따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}-1\right)\cdot 2=\frac{3}{2}$

답 ④



유형 15 곡선과 원의 접선 본책 75쪽

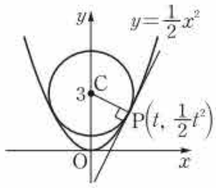
곡선 $y=f(x)$와 원 C가 접할 때

① (원 C의 반지름의 길이)=(원 C의 중심과 접점 사이의 거리)

② 원 C의 중심과 접점을 지나는 직선은 접점에서의 접선과 수직이다.

0464 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$이라 하면 $\quad f'(x)=x$

오른쪽 그림과 같이 접점을 $P\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=t$이고, 직선 CP의 기울기는



$$\frac{\frac{1}{2}t^2-3}{t-0}=\frac{t^2-6}{2t}$$

이때 점 P에서의 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로

$$t\cdot\frac{t^2-6}{2t}=-1, \qquad t^2=4$$

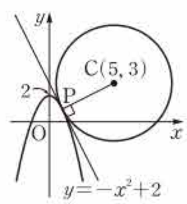
$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 두 접점의 좌표는 $(-2,\ 2)$, $(2,\ 2)$이므로 원 C의 반지름의 길이는

$\overline{CP}=\sqrt{2^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}$ 답 ④

0465 $f(x)=-x^2+2$라 하면 $\quad f'(x)=-2x$

오른쪽 그림과 같이 접점을 $P(t,\ -t^2+2)$라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$이고, 직선 CP의 기울기는



$$\frac{-t^2-1}{t-5}$$

이때 점 P에서의 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로

$$-2t\cdot\frac{-t^2-1}{t-5}=-1$$

$$2t^3+3t-5=0, \qquad (t-1)(2t^2+2t+5)=0$$

$$\therefore t=1\ (\because 2t^2+2t+5>0)$$

따라서 구하는 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$이다. 답 ④

0466 $f(x)=x^3+1$이라 하면 $\quad f'(x)=3x^2$

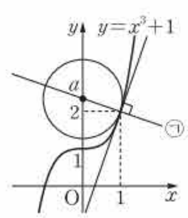
점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=3$이므로 이 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 점 $(1,\ 2)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-1)$$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ ······ ㉠ ··· ❶

y축 위에 있는 원의 중심의 좌표를 $(0,\ a)$라 하면 직선 ㉠이 점 $(0,\ a)$를 지나야 하므로 $\quad a=\frac{7}{3}$ ··· ❷



이때 원의 반지름의 길이는 두 점 $(1,\ 2)$, $\left(0,\ \frac{7}{3}\right)$ 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(1-0)^2+\left(2-\frac{7}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}$ ··· ❸

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2=\frac{10}{9}\pi$ ··· ❹

답 $\frac{10}{9}\pi$

채점 기준	비율
❶ 점 (1, 2)를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	20 %
❹ 원의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

유형 16 롤의 정리

본책 75쪽

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

➡ $f'(c)=0$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

0467 함수 $f(x)=(x+1)^2(x-2)=x^3-3x-2$는 닫힌구간 $[-\sqrt{3},\ \sqrt{3}]$에서 연속이고 열린구간 $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$에서 미분가능하며 $f(-\sqrt{3})=f(\sqrt{3})=-2$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-3$이므로 $\qquad f'(c)=3c^2-3=0$

$$3(c+1)(c-1)=0 \qquad \therefore c=-1 \text{ 또는 } c=1$$

따라서 모든 상수 c의 값의 합은

$-1+1=0$ 답 ③

0468 함수 $f(x)=kx-x^2$은 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(1)=f(3)$이어야 하므로

$$k-1=3k-9 \qquad \therefore k=4$$

한편 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=4x-x^2$에서 $f'(x)=4-2x$이므로

$f'(c)=4-2c=0 \qquad \therefore c=2$ 답 ③

0469 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+5$는 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(-a,\ a)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$이어야 하므로

$$-\frac{1}{3}a^3+a^2+3a+5=\frac{1}{3}a^3+a^2-3a+5$$

$$a^3-9a=0, \qquad a(a+3)(a-3)=0$$

$\therefore a=3\ (\because a$는 자연수$)$ ··· ❶

한편 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-3,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=x^2+2x-3$이므로

$$f'(c)=c^2+2c-3=0, \qquad (c+3)(c-1)=0$$

$\therefore c=1\ (\because -3<c<3)$ ··· ❷

$\therefore a+c=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ c의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0470 함수 $f(x)=(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하며 $f(a)=f(b)=0$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=2x-(a+b)$이므로

$$f'(c)=2c-(a+b)=0 \qquad \therefore c=\frac{a+b}{2}$$

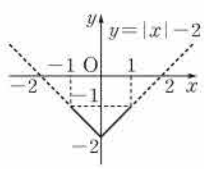
답 ③

0471 $f(1)-f(-1)=2f'(c)$에서

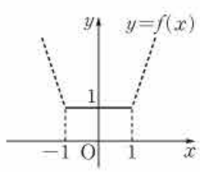
$$\frac{f(1)-f(-1)}{2}=f'(c)$$

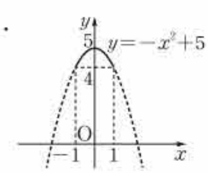
이때 보기의 세 함수는 모두 $f(1)=f(-1)$을 만족시키므로 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 구간 $(-1, 1)$에 존재하는지 알아보아야 한다.

ㄱ. 함수 $y=|x|-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 구간 $(-1, 1)$에 존재하지 않는다.



ㄴ, ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄴ.


ㄷ.


이상에서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

유형 17 평균값 정리; 정의를 이용하는 경우 본책 76쪽

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면
➡ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

0472 함수 $f(x)=x^3-2x$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=3x^2-2$이므로

$$\frac{4-(-4)}{2-(-2)}=3c^2-2, \qquad 3c^2=4$$

$$\therefore c=-\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ 또는 } c=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

따라서 모든 상수 c의 값의 곱은 $-\frac{4}{3}$이다.

답 $-\frac{4}{3}$

0473 함수 $g(x)=f'(x)=6x^2-2x+1$은 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{g(2)-g(0)}{2-0}=g'(c)$$

인 c가 구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
$g'(x)=12x-2$이므로

$$\frac{21-1}{2-0}=12c-2, \qquad 12c=12$$

$$\therefore c=1$$

답 ②

0474 함수 $f(x)=-x^2+5x+1$에 대하여 닫힌구간 $[1, k]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 4이므로

$$\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'(4)$$

$f'(x)=-2x+5$이므로

$$\frac{-k^2+5k+1-5}{k-1}=-3 \quad \cdots ❶$$

$$k^2-8k+7=0, \qquad (k-1)(k-7)=0$$

$$\therefore k=7\ (\because k>4) \quad \cdots ❷$$

답 7

채점 기준	비율
❶ $\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'(4)$임을 이용하여 k에 대한 방정식을 세울 수 있다.	70 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0475 ㄱ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(5)=4$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c_1)=0$인 c_1이 열린구간 $(1, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(2, 5)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{4-(-2)}{3}=2=f'(c_2)$$

인 c_2가 열린구간 $(2, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 2)$에서 미분가능하며 $g(1)=g(2)=10$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $g'(c_3)=0$인 c_3이 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

다른 풀이 ㄷ. $g(x)=f(x)+6x$에서 $g'(x)=f'(x)+6$이므로 $g'(c_3)=0$인 c_3이 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재하려면 $f'(c_3)+6=0$, 즉 $f'(c_3)=-6$인 c_3이 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재해야 한다.
이때 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=-2-4=-6=f'(c_3)$$

인 c_3이 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

0476 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[x-4,\ x+4]$에서 연속이고 열린구간 $(x-4,\ x+4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+4)-f(x-4)}{(x+4)-(x-4)}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(x-4,\ x+4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x\longrightarrow\infty$이면 $c\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x+4)-f(x-4)\}=8\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+4)-f(x-4)}{(x+4)-(x-4)}$$
$$=8\lim_{c\to\infty}f'(c)$$
$$=8\cdot3=24$$

답 24

0477 $f(x)=x^3$에서 $\quad f'(x)=3x^2$

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$에서

$(a+h)^3=a^3+h\{3(a+\theta h)^2\}$

$3ah^2+h^3=6a\theta h^2+3\theta^2h^3$

$3h\theta^2+6a\theta-3a-h=0\ (\because h>0)$ ← θ에 대한 이차방정식으로 생각하고 근의 공식을 이용하여 θ를 구한다.

$$\therefore \theta=\frac{-3a+\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}}{3h}\ (\because \theta>0)$$

$$\therefore \lim_{h\to0}\theta=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}-3a}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{9a^2+9ah+3h^2-9a^2}{3h(\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a)}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{3a+h}{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a}$$
$$=\frac{3a}{3a+3a}=\frac{1}{2}$$

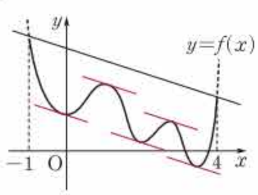
답 ④

유형 18 평균값 정리; 그래프를 이용하는 경우 본책 77쪽

평균값 정리는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 갖는 점이 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재함을 의미한다.

0478 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(4,\ f(4))$를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

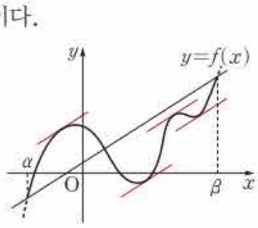
이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(4,\ f(4))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 5개 그을 수 있으므로 구하는 상수 c의 개수는 5이다.



답 ⑤

0479 $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$를 잇는 직선의 기울기이고, $f'(c)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=c$인 점에서의 접선의 기울기이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 4개 그을 수 있으므로 주어진 조건을 만족시키는 상수 c의 개수는 4이다.



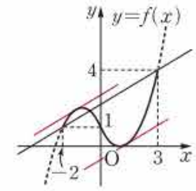
답 4

0480 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-2,\ 1)$, $(3,\ 4)$를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & (x\ge0)\\ -(x+1)^2+2 & (x<0)\end{cases}$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이때 두 점 $(-2,\ 1)$, $(3,\ 4)$를 잇는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있다.

따라서 상수 c의 개수는 2이다.



답 ②

다른 풀이 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{4-1}{5}=\frac{3}{5}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(-2,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=\begin{cases}2x-2 & (x\ge0)\\ -2x-2 & (x<0)\end{cases}$이므로

$2c-2=\dfrac{3}{5}$에서 $\quad c=\dfrac{13}{10}$

$-2c-2=\dfrac{3}{5}$에서 $\quad c=-\dfrac{13}{10}$

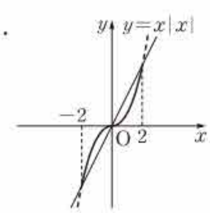
따라서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 $\dfrac{13}{10}$, $-\dfrac{13}{10}$의 2개이다.

0481 $\dfrac{f(2)-f(-2)}{4}=f'(c)$에서

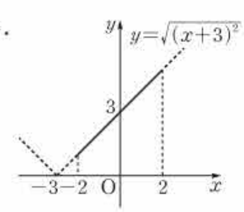
$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=f'(c) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

ㄱ, ㄴ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 ㉠을 만족시키는 c가 구간 $(-2,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

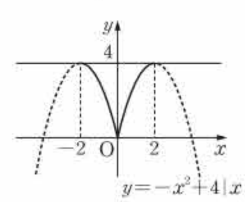
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ. 함수 $y=-x^2+4|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ㉠을 만족시키는 c가 구간 $(-2,\ 2)$에 존재하지 않는다.



이상에서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

0482 1st $g(2)$의 값을 구한다.

조건 (나)에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로

$$f(2)=g(2) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$
$$=f'(2)-g'(2)$$

이므로

$$f'(2)-g'(2)=2$$
$$\therefore\ f'(2)=g'(2)+2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$x=2$를 $g(x)=x^3f(x)-7$에 대입하면

$$g(2)=8f(2)-7, \qquad g(2)=8g(2)-7\ (\because ㉠)$$
$$\therefore\ g(2)=1$$

(2nd) $g'(2)$의 값을 구한다.

$g(x)=x^3f(x)-7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$$

$x=2$를 위의 식에 대입하면

$$g'(2)=12f(2)+8f'(2)$$
$$g'(2)=12\cdot1+8\{g'(2)+2\}\ (\because ㉡)$$
$$7g'(2)=-28 \qquad \therefore\ g'(2)=-4$$

(3rd) a^2+b^2의 값을 구한다.

따라서 점 $(2,\ g(2))$, 즉 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-1=-4(x-2),\ 즉\ y=-4x+9$$

이므로 $\quad a=-4,\ b=9$

$$\therefore\ a^2+b^2=(-4)^2+9^2=97$$

답 97

0483 (1st) 두 점 A, B의 x좌표 사이의 관계식을 구한다.

$f(x)=x^3+6x^2-2x$라 하면 $\quad f'(x)=3x^2+12x-2$

$\mathrm{A}(a,\ a^3+6a^2-2a)$, $\mathrm{B}(b,\ b^3+6b^2-2b)$라 하면 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하므로

$$f'(a)=f'(b)$$
$$3a^2+12a-2=3b^2+12b-2$$
$$a^2-b^2+4a-4b=0, \qquad (a-b)(a+b+4)=0$$
$$\therefore\ a+b+4=0\ (\because\ a\neq b) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(2nd) 선분 AB의 중점 M의 좌표를 구한다.

이때 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 M의 좌표가

$$\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{a^3+6a^2-2a+b^3+6b^2-2b}{2}\right)$$

이고 ㉠에서 $a+b=-4$이므로

$$\frac{a+b}{2}=\frac{-4}{2}=-2,$$
$$\frac{a^3+6a^2-2a+b^3+6b^2-2b}{2}$$
$$=\frac{a^3+b^3+6(a^2+b^2)-2(a+b)}{2}$$
$$=\frac{(a+b)^3-3ab(a+b)+6\{(a+b)^2-2ab\}-2(a+b)}{2}$$
$$=\frac{-64+12ab+6(16-2ab)+8}{2}$$
$$=\frac{40}{2}=20$$

$$\therefore\ \mathrm{M}(-2,\ 20)$$

(3rd) 접선의 방정식을 구한다.

$f(-2)=20$이므로 점 M은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이다.

따라서 점 M에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=-14$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-20=-14(x+2) \qquad \therefore\ y=-14x-8$$

답 ②

0484 (1st) $f(x)$를 미정계수를 이용한 식으로 나타낸다.

네 개의 수 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$가 이 순서대로 등차수열을 이루고 네 개의 수 $f(-1),\ f(0),\ f(1),\ f(2)$도 이 순서대로 등차수열을 이루므로 네 점 $(-1,\ f(-1))$, $(0,\ f(0))$, $(1,\ f(1))$, $(2,\ f(2))$는 한 직선 위에 있다.

이 직선의 방정식을 $y=px+q$ (p, q는 상수)라 하면 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=px+q$의 교점의 x좌표가 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$이므로

$$f(x)-(px+q)=x(x+1)(x-1)(x-2)$$
$$\therefore\ f(x)=x(x+1)(x-1)(x-2)+px+q$$

(2nd) k의 값을 구한다.

점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 점 $(k,\ 0)$에서 만나므로 두 접선은 각각 점 $(k,\ 0)$을 지난다.

$f(x)=x(x+1)(x-1)(x-2)+px+q$에서

$$f'(x)=(x+1)(x-1)(x-2)+x(x-1)(x-2)$$
$$+x(x+1)(x-2)+x(x+1)(x-1)+p$$

$f(-1)=-p+q$, $f'(-1)=p-6$이므로 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 방정식은

$$y-(-p+q)=(p-6)(x+1)$$

이 직선이 점 $(k,\ 0)$을 지나므로

$$p-q=k(p-6)+p-6$$
$$\therefore\ kp-6k+q-6=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $f(2)=2p+q$, $f'(2)=p+6$이므로 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 방정식은

$$y-(2p+q)=(p+6)(x-2)$$

이 직선이 점 $(k,\ 0)$을 지나므로

$$-2p-q=k(p+6)-2p-12$$
$$\therefore\ kp+6k+q-12=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$-12k+6=0 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{2}$$

(3rd) p, q의 값을 구한다.

㉠+㉡을 하면

$$p+2q-18=0\left(\because\ k=\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore\ p+2q=18 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

한편 $f(2k)=20$, 즉 $f(1)=20$이므로

$$p+q=20 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $\quad p=22,\ q=-2$

(4th) $f(4k)$의 값을 구한다.

따라서 $f(x)=x(x+1)(x-1)(x-2)+22x-2$이므로

$$f(4k)=f(2)=42$$

답 42

0485 1st $f_i{}'(0)$에 대한 이차방정식을 세운다.

조건 (나)에서

$$f_i{}'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f_i(x)+2kx}{f_i(x)+kx}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f_i(x)}{x}+2k}{\frac{f_i(x)}{x}+k}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f_i(x)}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{f_i(x)-0}{x-0}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f_i(x)-\overset{f_1(0)=f_2(0)=0}{f_i(0)}}{x-0}\\&=f_i{}'(0)\end{aligned}$$

이므로

$$f_i{}'(0)=\frac{f_i{}'(0)+2k}{f_i{}'(0)+k}$$

$f_i{}'(0)=a$ (a는 실수)라 하면

$$a=\frac{a+2k}{a+k},\qquad a(a+k)=a+2k$$

$$\therefore\ a^2+(k-1)a-2k=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

2nd k의 값을 구한다.

한편 조건 (다)에서 곡선 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 원점에서의 접선이 서로 직교하므로

$$f_1{}'(0)f_2{}'(0)=-1$$

$f_1{}'(0)$, $f_2{}'(0)$은 a에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2k=-1\qquad\therefore\ k=\frac{1}{2}$$

답 ①

0486 1st 원 C의 중심을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

$f(x)=x^3-3x$에서 $\quad f'(x)=3x^2-3$

점 O에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-3$이므로 점 O에서의 접선과 수직이고 점 O를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x$이다.

이때 조건 (다)에 의하여 직선 $y=\frac{1}{3}x$가 원 C의 넓이를 이등분하므로 직선 $y=\frac{1}{3}x$는 원 C의 중심을 지난다.

2nd 원 C의 중심의 좌표를 구한다.

원 C의 중심의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{3}a\right)$ $(a>0)$라 하면 조건 (나)에 의하여 $f(a)=\frac{1}{3}a$이므로

$$a^3-3a=\frac{1}{3}a,\qquad a^3-\frac{10}{3}a=0$$

$$a\left(a+\frac{\sqrt{30}}{3}\right)\left(a-\frac{\sqrt{30}}{3}\right)=0$$

$$\therefore\ a=\frac{\sqrt{30}}{3}\ (\because\ a>0)$$

즉 원 C의 중심의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{30}}{3},\ \frac{\sqrt{30}}{9}\right)$이다.

3rd 원 C의 넓이를 구한다.

조건 (가)에 의하여 원 C의 반지름의 길이는

원의 중심에서 원 위의 한 점까지의 거리와 같다.

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{30}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{30}}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{100}{27}}$$

이므로 구하는 넓이는

$$\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{100}{27}}\right)^2=\frac{100}{27}\pi$$

답 $\frac{100}{27}\pi$

0487 1st $f(x)$를 구한다.

조건 (가)에서 삼차방정식 $f(x)-x^2=0$의 세 근이 $x=1,\ 2,\ 3$이므로

$$f(x)-x^2=k(x-1)(x-2)(x-3)\ (k\neq0,\ k\text{는 상수})$$

이때 조건 (나)에서 $f(4)=10$이므로 위의 식에 $x=4$를 대입하면

$$-6=6k\qquad\therefore\ k=-1$$

$$\therefore\ f(x)=-(x-1)(x-2)(x-3)+x^2$$

2nd 접선과 수직인 직선의 방정식을 구한다.

따라서 $f(5)=1$이고

$$\begin{aligned}f'(x)=&-(x-2)(x-3)-(x-1)(x-3)\\&-(x-1)(x-2)+2x\end{aligned}$$

에서

$$f'(5)=-16$$

즉 점 $(5,\ 1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{16}$이므로 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{16}(x-5)\qquad\therefore\ y=\frac{1}{16}x+\frac{11}{16}$$

3rd $a+b$의 값을 구한다.

따라서 $a=\frac{1}{16}$, $b=\frac{11}{16}$이므로

$$a+b=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0488 1st 두 점 B, C의 x좌표를 근으로 하는 이차방정식을 구한다.

$f(x)=x^4-4x^3$이라 하면

$$f'(x)=4x^3-12x^2$$

점 A의 좌표를 $(a,\ a^4-4a^3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=4a^3-12a^2$이므로 접선의 방정식은

$$y-(a^4-4a^3)=(4a^3-12a^2)(x-a)$$

$$\therefore\ y=(4a^3-12a^2)x-3a^4+8a^3$$

이 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표는 방정식 $x^4-4x^3=(4a^3-12a^2)x-3a^4+8a^3$의 실근과 같다.

즉 $x^4-4x^3-(4a^3-12a^2)x+3a^4-8a^3=0$에서

$$(x-a)^2\{x^2+(2a-4)x+3a^2-8a\}=0$$

x에 대한 이차방정식 $x^2+(2a-4)x+3a^2-8a=0$의 두 실근을 b, c라 하면 b, c는 두 점 B, C의 x좌표이다.

2nd 점 A의 x좌표와 두 점 B, C의 x좌표의 관계식을 구한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$b+c=-2a+4,\ bc=3a^2-8a \qquad\cdots\cdots ㉠$$

그런데 점 A가 선분 BC의 중점이므로

$$\frac{b+c}{2}=a$$

에서

$$2a=-2a+4 \qquad \therefore a=1$$

$a=1$을 ㉠에 각각 대입하면

$$b+c=2,\ bc=-5$$

(3rd) m_1+m_2의 값을 구한다.

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 B, C에서의 접선의 기울기는 각각

$$m_1=f'(b)=4b^3-12b^2,$$
$$m_2=f'(c)=4c^3-12c^2$$

이므로

$$\begin{aligned} m_1+m_2&=(4b^3-12b^2)+(4c^3-12c^2)\\ &=4(b^3+c^3)-12(b^2+c^2)\\ &=4\{(b+c)^3-3bc(b+c)\}-12\{(b+c)^2-2bc\}\\ &=4\cdot\{2^3-3\cdot(-5)\cdot 2\}-12\cdot\{2^2-2\cdot(-5)\}\\ &=-16 \end{aligned}$$

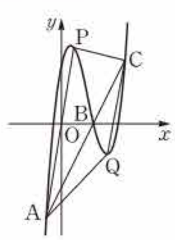
답 -16

참고 점 $A(a,\ a^4-4a^3)$이 접점이므로 방정식

$x^4-4x^3-(4a^3-12a^2)x+3a^4-8a^3=0$이 $x=a$를 중근으로 가짐을 알 수 있다. 따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

a	1	-4	0	$-4a^3+12a^2$	$3a^4-8a^3$
		a	a^2-4a	a^3-4a^2	$-3a^4+8a^3$
a	1	$a-4$	a^2-4a	$-3a^3+8a^2$	0
		a	$2a^2-4a$	$3a^3-8a^2$	
	1	$2a-4$	$3a^2-8a$	0	

0489 (1st) □AQCP의 넓이가 최대가 되는 경우를 생각한다.



세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 오른쪽 그림에서 □AQCP의 넓이는 △PAC의 넓이와 △QAC의 넓이의 합이고, 두 삼각형의 밑변을 $\overline{AC}$라 하면 두 삼각형의 높이는 각각 두 점 P, Q에서 $\overline{AC}$까지의 거리이다.

따라서 □AQCP의 넓이가 최대이려면 두 점 P, Q에서 $\overline{AC}$까지의 거리가 각각 최대이어야 한다.

이때 두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{4-(-6)}{4-(-1)}=2$$

이므로 두 점 P, Q에서의 접선의 기울기가 2이어야 한다.

(2nd) 두 점 P, Q의 x좌표의 곱을 구한다.

$f(x)=x^3-5x^2+4x+4$라 하면

$$f'(x)=3x^2-10x+4$$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t^2+4t+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2-10t+4$$

이므로 $3t^2-10t+4=2$에서

$$3t^2-10t+2=0$$

이 이차방정식의 두 실근이 □AQCP의 넓이가 최대일 때의 두 점 P, Q의 x좌표이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 곱은

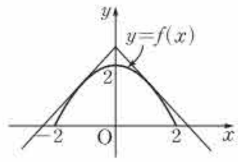
$$\frac{2}{3}$$

답 ④

참고 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{0-(-6)}{2-(-1)}=2$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

0490 (1st) 구조물의 단면을 좌표평면 위에 나타내어 이차함수의 그래프의 식을 구한다.

주어진 구조물의 단면을 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 나타내고 이차함수의 그래프의 식을 $y=f(x)$라 하면



$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$$
$$\therefore f'(x)=-x$$

(2nd) 좌표평면에서 조명의 빛과 구조물이 접하는 접점의 x좌표를 구한다.

$y=f(x)$의 그래프와 제1사분면에서 접하는 접선의 접점의 좌표를 $\left(t,\ -\frac{1}{2}t^2+2\right)(0<t<2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=-t$이므로 접선의 방정식은

$$y-\left(-\frac{1}{2}t^2+2\right)=-t(x-t)$$
$$\therefore y=-tx+\frac{1}{2}t^2+2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 조명에 의하여 생기는 그림자와 구조물의 밑면의 넓이의 합이 $\frac{25}{4}\pi\ \mathrm{m}^2$이므로 접선 ㉠의 x절편은 $\frac{5}{2}$이다.

즉 직선 ㉠이 점 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$을 지나므로

$$0=-\frac{5}{2}t+\frac{1}{2}t^2+2$$
$$t^2-5t+4=0, \qquad (t-1)(t-4)=0$$
$$\therefore t=1\ (\because 0<t<2)$$

(3rd) 구조물의 밑면인 원의 중심에서 조명까지의 높이를 구한다.

따라서 접선 ㉠의 y절편은 └ $x=0$을 대입

$$y=0+\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

이므로 구하는 높이는 $\frac{5}{2}$ m이다.

답 ④

0491 (1st) 원점을 지나는 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=x^3-2$라 하면

$$f'(x)=3x^2$$

직선 $y=kx$는 k의 값에 관계없이 원점을 지나므로 원점에서 함수 $y=x^3-2$의 그래프에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-(t^3-2)=3t^2(x-t)$$
$$\therefore y=3t^2x-2t^3-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 직선이 원점을 지나므로

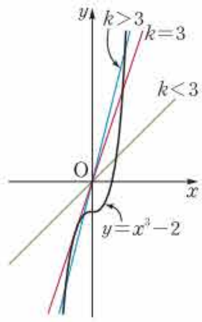
$$0=-2t^3-2, \qquad 2(t+1)(t^2-t+1)=0$$
$$\therefore t=-1\ (\because t^2-t+1>0)$$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면

$$y=3x$$

2nd $\sum_{k=1}^{10} n(k)$의 값을 구한다.

$y=x^3-2$의 그래프와 직선 $y=3x$의 교점의 개수는 2이고 오른쪽 그림에서 k는 자연수일 때



$$n(k)=\begin{cases} 1 & (k<3) \\ 2 & (k=3) \\ 3 & (k>3) \end{cases}$$

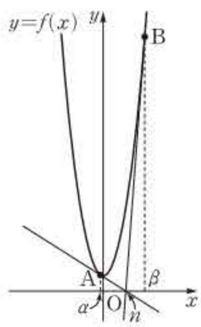
$$\therefore \sum_{k=1}^{10} n(k)=1\cdot 2+2+3\cdot 7$$
$$=25$$

답 ④

0492

1st ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $f'(\alpha)$, $f'(\beta)$는 점 $(n, 0)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 그은 두 접선의 기울기이므로 오른쪽 그림에서



$$f'(\alpha)<0, f'(\beta)>0$$

2nd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 직선 AB의 기울기가 m이므로

$$m=\frac{(\beta^2+2)-(\alpha^2+2)}{\beta-\alpha}$$
$$=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha}$$
$$=\alpha+\beta$$

이때 $f'(x)=2x$에서

$$f'(\alpha)+f'(\beta)=2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=2m$$

이므로 $\quad f'(\alpha)+f'(\beta)\neq m$

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 점 $(n, 0)$에서 $f(x)=x^2+2$의 그래프에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^2+2)라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^2+2)=2t(x-t) \qquad \therefore y=2tx-t^2+2$$

이 직선이 점 $(n, 0)$을 지나므로

$$0=2tn-t^2+2$$
$$\therefore t^2-2nt-2=0$$

위의 이차방정식의 두 실근이 두 접점의 x좌표이므로 두 실근은 α, β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2n, \alpha\beta=-2$$

$\therefore \overline{AB}$
$$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{(\beta^2+2)-(\alpha^2+2)\}^2}$$
$$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2}$$
$$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)\}^2}$$
$$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2\{1+(\beta+\alpha)^2\}}$$
$$=\sqrt{\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\{1+(\alpha+\beta)^2\}}$$
$$=\sqrt{\{(2n)^2-4\cdot(-2)\}\{1+(2n)^2\}}$$
$$=\sqrt{(4n^2+8)(1+4n^2)}$$
$$=\sqrt{16n^4+36n^2+8}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{AB}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^4+36n^2+8}}{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16+\frac{36}{n^2}+\frac{8}{n^4}}}{1}$$
$$=4$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0493

1st 접점의 x좌표를 n에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)=-(x-n)(x-n-1)$이라 하면

$$f'(x)=-(x-n-1)-(x-n)=-2x+2n+1$$

접점의 좌표를 $(t, -(t-n)(t-n-1))$ $(t>0)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=-2t+2n+1$$

이므로 접선의 방정식은

$$y+(t-n)(t-n-1)=(-2t+2n+1)(x-t)$$
$$\therefore y=(-2t+2n+1)x+t^2-n^2-n$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0=t^2-n^2-n, \qquad t^2=n^2+n$$
$$\therefore t=\sqrt{n^2+n} \ (\because t>0)$$

2nd $\lim_{n\to\infty} ab$의 값을 구한다.

따라서 $a=\sqrt{n^2+n}$, $b=-2\sqrt{n^2+n}+2n+1$이므로

$$\lim_{n\to\infty} ab$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}(-2\sqrt{n^2+n}+2n+1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}\cdot\frac{(-2\sqrt{n^2+n}+2n+1)(2\sqrt{n^2+n}+2n+1)}{2\sqrt{n^2+n}+2n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}\cdot\frac{-4(n^2+n)+(2n+1)^2}{2\sqrt{n^2+n}+2n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{2\sqrt{n^2+n}+2n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2+\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

0494

1st 접선의 방정식과 접선에 수직인 직선의 방정식을 t를 이용하여 나타낸다.

$f(x)=x^3+1$이라 하면 $\quad f'(x)=3x^2$

점 $A(t, t^3+1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+1)=3t^2(x-t)$$
$$\therefore y=3t^2x-2t^3+1$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3t^2}$이므로 점 A를 지나고 점 A에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y-(t^3+1)=-\frac{1}{3t^2}(x-t)$$

$\therefore y=-\frac{1}{3t^2}x+\frac{1}{3t}+t^3+1$

2nd $\lim_{t\to 0}S(t)$의 값을 구한다.

따라서 $B(0,\ -2t^3+1)$, $C\left(0,\ \frac{1}{3t}+t^3+1\right)$이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot|t|\cdot\left|\left(\frac{1}{3t}+t^3+1\right)-(-2t^3+1)\right|$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{3}{2}t^4$$

$$\therefore \lim_{t\to 0}S(t)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{2}t^4\right)=\frac{1}{6}$$

답 ⑤

0495 1st 집합 A의 원소를 파악할 수 있다.

$0<x_1<x_2<3$일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x_1,\ x_2]$에서 연속이고 열린구간 $(x_1,\ x_2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(x_1,\ x_2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 집합 A의 원소는 $0<x<3$일 때의 모든 $f'(x)$의 값이다.

2nd 집합 A의 자연수인 원소의 개수를 구할 수 있다.

이때 $f'(x)=6x^2-4$이고 $0<x<3$에서

$-4<f'(x)<50$

이므로 집합 A의 자연수인 원소는

$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 49$

의 49개이다.

답 ②

0496 1st ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $(x-1)g(x)=f(x)-f(1)$에서

$$g(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\ (\text{단, } x\neq 1)$$

이때 $f(x)$는 이차함수이므로 모든 실수 x에서 미분가능하다.

$$\therefore \lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

2nd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $(x-1)g(x)=f(x)-f(1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)+(x-1)g'(x)=f'(x)$

$\therefore (x-1)g'(x)=f'(x)-g(x)$

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $x<1$일 때 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(x,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(x,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $g(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이므로

$g(x)=f'(c)$ ······ ㉠

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$a>0$이면 x의 값이 증가할 때, $f'(x)$의 값도 증가하므로 $x<c<1$에서

$f'(x)<f'(c)$

$\therefore f'(x)<g(x)$ ($\because$ ㉠)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0497 전략 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이면 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선은 x축과 평행하다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-(b^2-4)x+2$라 하면

$f'(x)=x^2+2ax-b^2+4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 모든 점에서의 접선이 x축과 평행하지 않으려면 $f'(x)=0$을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않아야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax-b^2+4=0$이 실근을 갖지 않아야 한다. ··· ❶

즉 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(-b^2+4)<0\qquad \therefore a^2+b^2<4$ ··· ❷

따라서 정수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(-1,\ -1)$, $(-1,\ 0)$, $(-1,\ 1)$, $(0,\ -1)$, $(0,\ 0)$,
$(0,\ 1)$, $(1,\ -1)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$

의 9개이다. ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $f'(x)=0$이 실근을 갖지 않아야 함을 알 수 있다.	50 %
❷ $a,\ b$에 대한 부등식을 세울 수 있다.	30 %
❸ 정수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0498 전략 곡선 위의 점 $(a_n,\ a_n^2)$에서의 접선의 방정식을 구하여 a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $f(x)=x^2$이라 하면 $\quad f'(x)=2x$

점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 접선의 방정식은

$y-4=4(x-2)\qquad \therefore y=4x-4$

이 접선과 x축의 교점의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로 $\quad a_1=1$

또 곡선 위의 점 $(a_n,\ a_n^2)$에서의 접선의 기울기는 $2a_n$이므로 접선의 방정식은

$y-a_n^2=2a_n(x-a_n)\qquad \therefore y=2a_nx-a_n^2$ ··· ❶

이 접선과 x축의 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}a_n,\ 0\right)$이므로

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ ··· ❷

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\therefore a_6=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{32}$

채점 기준	비율
❶ 점 (a_n, a_n^2)에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ a_6의 값을 구할 수 있다.	30 %

0499 전략 기울기가 각각 m, n인 두 직선이 서로 수직이면 $mn=-1$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^2$이라 하면 $\quad f'(x)=\frac{2}{3}x$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{3}t^2\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{2}{3}t$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{3}t^2=\frac{2}{3}t(x-t) \qquad \therefore y=\frac{2}{3}tx-\frac{1}{3}t^2$ ⋯ ❶

점 P의 좌표를 $(a, a-1)$이라 하면 점 P가 직선 $y=\frac{2}{3}tx-\frac{1}{3}t^2$ 위의 점이므로

$a-1=\frac{2}{3}ta-\frac{1}{3}t^2$

$\therefore t^2-2at+3(a-1)=0$ ⋯⋯ ㉠

이 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 α, β는 두 접점의 x좌표이므로 접선의 기울기는 각각 $\frac{2}{3}\alpha$, $\frac{2}{3}\beta$이다.

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$\frac{2}{3}\alpha\cdot\frac{2}{3}\beta=-1$

$\therefore \alpha\beta=-\frac{9}{4}$ ⋯ ❷

㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=3(a-1)$이므로

$-\frac{9}{4}=3(a-1) \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$이다. ⋯ ❸

답 $\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

채점 기준	비율
❶ 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 접점의 x좌표에 대한 식을 세울 수 있다.	50 %
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

0500 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 공통인 접선의 접점의 x좌표를 t라 하고 $f(t)=g(t)$임을 이용하여 t의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=-x^2+4x-1$이라 하면

$f'(x)=2x$, $g'(x)=-2x+4$

두 곡선의 접점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$t^2+1=-t^2+4t-1, \qquad t^2-2t+1=0$

$(t-1)^2=0 \qquad \therefore t=1$ ⋯ ❶

따라서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 공통인 접선 l의 기울기는 $f'(1)=g'(1)=2$이므로 두 직선 m, n의 기울기는 모두 $-\frac{1}{2}$이다.

점 A의 x좌표를 a라 하면 $f'(a)=-\frac{1}{2}$이므로

$2a=-\frac{1}{2} \qquad \therefore a=-\frac{1}{4}$

$\therefore A\left(-\frac{1}{4}, \frac{17}{16}\right)$ ⋯ ❷

점 B의 x좌표를 b라 하면 $g'(b)=-\frac{1}{2}$이므로

$-2b+4=-\frac{1}{2} \qquad \therefore b=\frac{9}{4}$

$\therefore B\left(\frac{9}{4}, \frac{47}{16}\right)$ ⋯ ❸

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{47}{16}-\frac{17}{16}\right)^2}$

$=\frac{25}{8}$ ⋯ ❹

답 $\frac{25}{8}$

채점 기준	비율
❶ 두 곡선의 공통인 접선의 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❹ 선분 AB의 길이를 구할 수 있다.	20 %

0501 전략 먼저 곡선 위의 $x=t$인 점에서의 접선의 방정식을 구하여 $g(t)$를 구한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2-4x$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax-4$

점 (t, t^3+at^2-4t)에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2at-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2-4t)=(3t^2+2at-4)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2at-4)x-2t^3-at^2$

$x=0$일 때 $y=-2t^3-at^2$이므로

$g(t)=-2t^3-at^2$

$\therefore |g(t)|=|-2t^3-at^2|=t^2|2t+a|$ ⋯ ❶

이때 함수 $|g(t)|$는 $t=-1$에서 미분가능하지 않으므로

$-\frac{a}{2}=-1 \qquad \therefore a=2$ ⋯ ❷

즉 $g(x)=-2x^3-2x^2$이므로 $\qquad g'(x)=-6x^2-4x$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-1, g(-1))$, 즉 $(-1, 0)$에서의 접선의 기울기가 $g'(-1)=-2$이므로 접선의 방정식은

$y-0=-2(x+1) \qquad \therefore y=-2x-2$ ⋯ ❸

이 직선의 x절편은 -1, y절편은 -2이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$ ⋯ ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ $\lvert g(t)\rvert$를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-1, g(-1))$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❹ 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

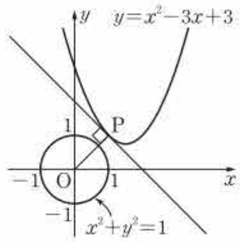
참고 $a=0$이면 $|g(t)|=\begin{cases} 2t^3 & (t\ge 0) \\ -2t^3 & (t<0) \end{cases}$에서 함수 $|g(t)|$는 $t=-1$에서 미분가능하므로

$a\ne 0$

따라서 함수 $|g(t)|$가 미분가능하지 않은 점은 $2t+a=0$, 즉 $t=-\frac{a}{2}$일 때이다.

0502 전략 곡선 위의 점 P와 원점 O가 중심인 원 사이의 거리가 최소일 때는 점 P에서의 접선과 직선 OP가 서로 수직일 때이다.

풀이 곡선 $y=x^2-3x+3$ 위의 임의의 점을 $P(t,\ t^2-3t+3)$이라 하면 원 $x^2+y^2=1$의 중심이 원점 O이므로 곡선 위의 점과 원 위의 점 사이의 거리는 점 P에서의 접선과 직선 OP가 서로 수직일 때 최소이다. ⋯ ❶



$f(x)=x^2-3x+3$이라 하면

$$f'(x)=2x-3$$

점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-3$이고, 직선 OP의 기울기는 $\frac{t^2-3t+3}{t}$이므로

$$(2t-3)\cdot\frac{t^2-3t+3}{t}=-1$$

$$2t^3-9t^2+16t-9=0, \qquad (t-1)(2t^2-7t+9)=0$$

$$\therefore t=1\ (\because 2t^2-7t+9>0)$$ ⋯ ❷

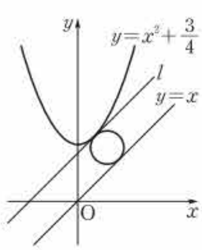
따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ 1)$이고 $\overline{OP}=\sqrt{2}$이므로 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{2}-1$이다. ⋯ ❸

답 $\sqrt{2}-1$

채점 기준	비율
❶ 곡선 위의 점과 원 위의 점 사이의 거리가 최소일 때를 알 수 있다.	40 %
❷ t의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0503 전략 직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2+\frac{3}{4}$에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 최소인 원은 곡선 $y=x^2+\frac{3}{4}$의 접선 중 기울기가 1인 접선과 직선 $y=x$에 동시에 접하는 원이다.

풀이 직선 $y=x$에 평행하고 곡선 $y=x^2+\frac{3}{4}$에 접하는 직선을 l이라 하면 직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2+\frac{3}{4}$에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 최소인 원은 오른쪽 그림과 같이 직선 l과 직선 $y=x$에 동시에 접하는 원이다. ⋯ ❶



$f(x)=x^2+\frac{3}{4}$이라 하면 $\qquad f'(x)=2x$

곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 접점의 좌표를 $\left(t,\ t^2+\frac{3}{4}\right)$이라 하면 직선 l의 기울기가 1이므로

$$f'(t)=2t=1 \qquad \therefore t=\frac{1}{2}$$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$이고, 점 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|\frac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

이므로 원의 반지름의 길이 r의 최솟값은

$$r=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$ ⋯ ❷

한편 점 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$을 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은

$$y-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore y=-x+\frac{3}{2}$$

두 직선 $y=-x+\frac{3}{2}$, $y=x$의 교점의 x좌표는 $-x+\frac{3}{2}=x$에서 $x=\frac{3}{4}$이므로 교점의 좌표는 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)$이다.

따라서 직선 l과 직선 $y=x$에 동시에 접하는 원은 두 점 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, $\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이므로 이 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2},\ \frac{1+\frac{3}{4}}{2}\right),\ 즉 \left(\frac{5}{8},\ \frac{7}{8}\right)$$

$$\therefore a=\frac{5}{8},\ b=\frac{7}{8}$$ ⋯ ❸

$$\therefore (a+b)r=\left(\frac{5}{8}+\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{3\sqrt{2}}{16}$$ ⋯ ❹

답 $\frac{3\sqrt{2}}{16}$

채점 기준	비율
❶ 원의 반지름의 길이가 최소인 경우를 알 수 있다.	30 %
❷ r의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $(a+b)r$의 값을 구할 수 있다.	10 %

05 도함수의 활용 (2)

0504 답 (가) < (나) 증가

0505 $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$f(x_1)-f(x_2)=-x_1^2-(-x_2^2)=-(x_1^2-x_2^2)$$
$$=-(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0$$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0, \infty)$에서 감소한다.

답 감소

0506 $1 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1^2-2x_1)-(x_2^2-2x_2)$$
$$=x_1^2-x_2^2-2(x_1-x_2)$$
$$=(x_1-x_2)\underbrace{(x_1+x_2-2)}_{x_1 \ge 1,\ x_2>1\text{이므로 } x_1+x_2-2>0}<0$$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 증가한다.

답 증가

0507 $x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$f(x_1)-f(x_2)=-x_1^3-(-x_2^3)=-(x_1^3-x_2^3)$$
$$=-(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

이때 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\dfrac{x_2}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x_2^2>0$이므로

$f(x_1)-f(x_2)>0 \qquad \therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

답 감소

0508 $f(x)=x^2-4x+2$에서 $\quad f'(x)=2x-4$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 2]$에서 감소하고, 구간 $[2, \infty)$에서 증가한다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

답 풀이 참조

0509 $f(x)=x^3-x^2+1$에서

$$f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$, $\left[\dfrac{2}{3}, \infty\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[0, \dfrac{2}{3}\right]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0510 $f(x)=x^4-2x^2+5$에서

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$에서 감소하고, 구간 $[-1, 0]$, $[1, \infty)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

0511 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 2이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1, 2]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0512 함수 $f(x)$는 $x=0$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이며 극댓값은 $\quad f(0)=2$

또 $x=2$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이며 극솟값은 $\quad f(2)=8-12+2=-2$

답 극댓값: 2, 극솟값: -2

0513 (1) $x=a$, $x=d$의 좌우에서 함수 $f(x)$가 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=a$, $x=d$에서 극댓값을 갖는다.

(2) $x=b$, $x=e$의 좌우에서 함수 $f(x)$가 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=b$, $x=e$에서 극솟값을 갖는다.

답 (1) a, d (2) b, e

0514 $f(x)$가 $x=1$에서 극값 8을 가지므로

$f(1)=8$, $f'(1)=0$

$\therefore f(1)+f'(1)=8$

답 8

0515 $f(x)=x^2+ax+3$, $g(x)=-2x^2+bx+4$에서

$f'(x)=2x+a$, $g'(x)=-4x+b$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=0$, $g'(2)=0$

$4+a=0$, $-8+b=0$

$\therefore a=-4$, $b=8$

답 $a=-4$, $b=8$

0516 $f(x)=x^3-3x$에서

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=2$, 극솟값은 $f(1)=-2$이다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

답 극댓값: 2, 극솟값: -2

0517 $f(x)=-2x^3+6x+1$에서

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 　 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=5$, 극솟값은 $f(-1)=-3$이다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-3	↗	5	↘

답 극댓값: 5, 극솟값: -3

0518 $f(x)=x^3+3x^2-24$에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 　 $x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(-2)=-20$, 극솟값은 $f(0)=-24$이다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-20	↘	-24	↗

답 극댓값: -20, 극솟값: -24

0519 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+3$에서

$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 　 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(2)=23$, 극솟값은 $f(-1)=-4$이다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	23	↘

답 극댓값: 23, 극솟값: -4

0520 $f(x)=x^4-2x^2$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 　 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=0$, 극솟값은 $f(-1)=f(1)=-1$이다.

답 극댓값: 0, 극솟값: -1

0521 $f(x)=-x^4+4x^3-4x^2+2$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2-8x=-4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 　 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗	2	↘

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=f(2)=2$, 극솟값은 $f(1)=1$이다.

답 극댓값: 2, 극솟값: 1

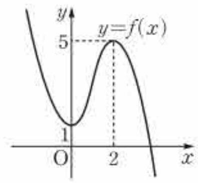
0522 $f(x)=-x^3+3x^2+1$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 　 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	1	↗	5	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

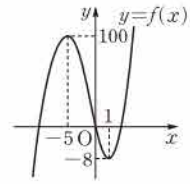
0523 $f(x)=x^3+6x^2-15x$에서

$f'(x)=3x^2+12x-15=3(x+5)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 　 $x=-5$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	100	↘	-8	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0524 $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^3(x+1)$에서

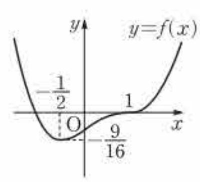
$f'(x)=(x-1)^2(x+1)+\frac{1}{3}(x-1)^3$

$=\frac{2}{3}(x-1)^2(2x+1)$

$f'(x)=0$에서 　 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{9}{16}$	↗	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0525 $f(x)=x^2-2x+3$에서

$f'(x)=2x-2$

$f'(x)=0$에서 　 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 6, $x=1$일 때 최솟값 2를 갖는다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	2	↗	6

답 최댓값: 6, 최솟값: 2

0526 $f(x)=-x^3+3x^2$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0\ (\because -1\le x\le 1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 4, $x=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	0	↗	2

답 최댓값: 4, 최솟값: 0

0527 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-6$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 3, $x=2$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	3

답 최댓값: 3, 최솟값: -2

0528 $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x-3$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	13	↘	-12	↗	4	↘	-12	↗	13

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$ 또는 $x=4$일 때 최댓값 13, $x=-1$ 또는 $x=3$일 때 최솟값 -12를 갖는다.

답 최댓값: 13, 최솟값: -12

0529 $f(x)=-3x^4+8x^3-6x^2-1$에서

$f'(x)=-12x^3+24x^2-12x=-12x(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 -1, $x=2$일 때 최솟값 -9를 갖는다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	-2	↘	-9

답 최댓값: -1, 최솟값: -9

0530 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$에서

$f'(x)=x^3+2x^2-x-2=(x+2)(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=-1\ (\because -2\le x\le 0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $\frac{13}{12}$, $x=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	↗	$\frac{13}{12}$	↘	0

답 최댓값: $\frac{13}{12}$, 최솟값: 0

0531 (1) 잘라 내고 남은 부분을 접어서 만든 상자의 밑면은 가로의 길이가 $16-2x$, 세로의 길이가 $10-2x$인 직사각형이므로

$16-2x>0,\ 10-2x>0 \qquad \therefore x<5$

그런데 $x>0$이므로 $\quad 0<x<5$

(2) 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(16-2x)(10-2x)$

$\quad =4x^3-52x^2+160x$

(3) $V(x)=4x^3-52x^2+160x$에서

$V'(x)=12x^2-104x+160=4(x-2)(3x-20)$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because 0<x<5)$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	5
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	144	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=2$일 때 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은

$V(2)=2\cdot 12\cdot 6=144$

답 (1) $0<x<5$
(2) $4x^3-52x^2+160x$
(3) 144

유형 01 함수의 증가와 감소

본책 86쪽

어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 알아보려면 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

① $f'(x)>0$ ➡ $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$ ➡ $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

0532 $f(x)=-x^3-3x^2+24x-2$에서

$f'(x)=-3x^2-6x+24=-3(x+4)(x-2)$

이때 $f'(x)\ge 0$인 구간에서 함수 $f(x)$는 증가하므로

$-3(x+4)(x-2)\ge 0, \qquad (x+4)(x-2)\le 0$

$\therefore -4\le x\le 2$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=-2$

답 ①

0533 $f(x)=x^3-3x+2$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

이때 $f'(x)\le 0$인 구간에서 함수 $f(x)$는 감소하므로

$3(x+1)(x-1)\le 0 \qquad \therefore -1\le x\le 1$

따라서 양수 a의 최댓값은 1이다.

답 1

0534 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+2$에서

$f'(x)=x^2+2ax+b$

주어진 조건에 의하여 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 1, 3이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=-2a,\ 1\cdot 3=b \qquad \therefore a=-2,\ b=3$

$\therefore a-b=-5$

답 -5

0535 $f(x)=2x^3-6x^2+ax+7$에서

$f'(x)=6x^2-12x+a$

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $-1\le x\le b$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -1, b이다. ⋯ ❶

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+b=2,\ -1\cdot b=\frac{a}{6}\qquad \therefore a=-18,\ b=3$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=-15$ ⋯ ❸

답 -15

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 02 실수 전체의 집합에서 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

본책 86쪽

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서
① 증가하면 ➡ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$
② 감소하면 ➡ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$

0536 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(3a+4)x-1$에서

$f'(x)=x^2+2ax+3a+4$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a-4\le 0,\qquad (a+1)(a-4)\le 0$

$\therefore -1\le a\le 4$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2, 3, 4의 6개이다.

답 ④

SSEN 특강 이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$이 성립하려면
$a>0,\ D\le 0$
② 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$이 성립하려면
$a<0,\ D\le 0$

0537 $f(x)=ax^3+x^2-x$에서

$f'(x)=3ax^2+2x-1$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$a<0$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1+3a\le 0\qquad \therefore a\le -\frac{1}{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a\le -\frac{1}{3}$

답 ①

0538 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$f(x)=-x^3+2ax^2-ax$에서

$f'(x)=-3x^2+4ax-a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-3a\le 0,\qquad a(4a-3)\le 0\qquad \therefore 0\le a\le \frac{3}{4}$

따라서 정수 a는 0의 1개이다.

답 ②

0539 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다.

그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 증가해야 한다. ⋯ ❶

$f(x)=x^3+x^2+kx-4$에서 $\quad f'(x)=3x^2+2x+k$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-3k\le 0\qquad \therefore k\ge \frac{1}{3}$ ⋯ ❷

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 함을 알 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0540 $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$를 만족시키는 함수는 일대일함수이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x)=x^3-3(a+1)x^2-4ax+2$에서

$f'(x)=3x^2-6(a+1)x-4a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9(a+1)^2+12a\le 0,\qquad 3a^2+10a+3\le 0$

$(a+3)(3a+1)\le 0\qquad \therefore -3\le a\le -\frac{1}{3}$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1이므로 구하는 합은 -6이다.

답 ②

0541 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty,\ t]$에서의 최솟값이 $f(t)$가 되려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$f(x)=-2x^3+(a-3)x^2+(a-2)x+2a$에서

$f'(x)=-6x^2+2(a-3)x+a-2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-3)^2+6(a-2) \le 0, \qquad a^2-3 \le 0$$

$$(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3}) \le 0 \qquad \therefore -\sqrt{3} \le a \le \sqrt{3}$$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다. 답 ①

유형 03 주어진 구간에서 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

본책 87쪽

삼차함수 $f(x)$가 증가 또는 감소하기 위한 조건은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $f'(x)$를 구한다.

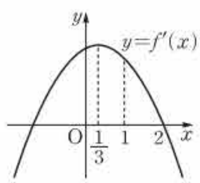
(ii) $y=f'(x)$의 그래프를 그려 주어진 구간에서 $f'(x) \ge 0$ 또는 $f'(x) \le 0$일 조건을 찾는다.

⇒ $f(x)$가 $\begin{cases} \text{증가하려면} & f'(x) \ge 0 \\ \text{감소하려면} & f'(x) \le 0 \end{cases}$

0542 $f(x)=-x^3+x^2+ax-4$에서

$$f'(x)=-3x^2+2x+a=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+a+\frac{1}{3}$$

함수 $f(x)$가 $1<x<2$에서 증가하려면 $1<x<2$에서 $f'(x) \ge 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$$f'(2)=-8+a \ge 0 \qquad \therefore a \ge 8$$

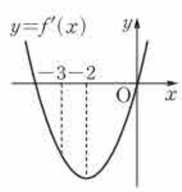
따라서 실수 a의 최솟값은 8이다.

답 ④

0543 $f(x)=x^3+6x^2+(2a+1)x$에서

$$f'(x)=3x^2+12x+2a+1=3(x+2)^2+2a-11$$

함수 $f(x)$가 구간 $(-3, 0)$에서 감소하려면 $-3<x<0$에서 $f'(x) \le 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$$f'(0)=2a+1 \le 0$$

$$\therefore a \le -\frac{1}{2}$$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. 답 -1

0544 $f(x)=x^3+ax^2-9x+1$에서 $\qquad f'(x)=3x^2+2ax-9$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 2)$에서 감소하려면 $-1<x<2$에서 $f'(x) \le 0$이어야 한다.

$f'(-1)=3-2a-9 \le 0$에서 $\qquad a \ge -3$

$f'(2)=12+4a-9 \le 0$에서 $\qquad a \le -\frac{3}{4}$

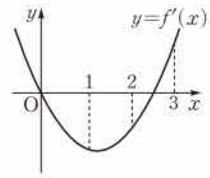
따라서 a의 값의 범위는 $-3 \le a \le -\frac{3}{4}$이므로

$$M=-\frac{3}{4},\ m=-3 \qquad \therefore Mm=\frac{9}{4}$$

답 ④

0545 $f(x)=x^3+ax^2+1$에서 $\qquad f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 구간 $(1, 2)$에서 감소하고, 구간 $(3, \infty)$에서 증가하려면 $1<x<2$에서 $f'(x) \le 0$, $x>3$에서 $f'(x) \ge 0$이어야 한다. ⋯ ❶



$f'(1)=3+2a \le 0$에서 $\qquad a \le -\frac{3}{2}$

$f'(2)=12+4a \le 0$에서 $\qquad a \le -3$

$f'(3)=27+6a \ge 0$에서 $\qquad a \ge -\frac{9}{2}$

따라서 a의 값의 범위는

$$-\frac{9}{2} \le a \le -3$$ ⋯ ❷

이므로 정수 a는 -4, -3의 2개이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위에 따른 $f'(x)$의 부호를 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$이므로 위의 그림에서

$$2 \le -\frac{2}{3}a \le 3 \qquad \therefore -\frac{9}{2} \le a \le -3$$

0546 $f(x)=x^3-(a+1)x^2+2ax$에서

$$f'(x)=3x^2-2(a+1)x+2a$$

따라서 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2-2(a+1)t+2a$$

이므로 접선의 방정식은

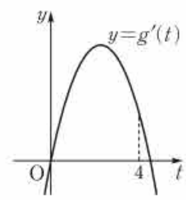
$$y-\{t^3-(a+1)t^2+2at\}=\{3t^2-2(a+1)t+2a\}(x-t)$$

$$\therefore y=\{3t^2-2(a+1)t+2a\}x-2t^3+(a+1)t^2$$

즉 $g(t)=-2t^3+(a+1)t^2$이므로

$$g'(t)=-6t^2+2(a+1)t$$

함수 $g(t)$가 구간 $(0, 4)$에서 증가하려면 $0<t<4$에서 $g'(t) \ge 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$$g'(4)=8a-88 \ge 0$$

$$\therefore a \ge 11$$

따라서 실수 a의 최솟값은 11이다.

답 11

다른 풀이 $g'(t)=-6t^2+2(a+1)t=-2t(3t-a-1)$이므로 위의 그림에서

$$\frac{a+1}{3} \ge 4 \qquad \therefore a \ge 11$$

유형 04 함수의 그래프와 증가 · 감소

본책 88쪽

$y=f'(x)$의 그래프에서

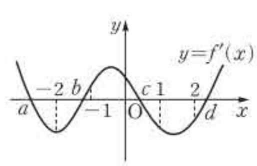
① x축의 위쪽 부분 ⇒ $f'(x)>0$

⇒ 이 구간에서 $f(x)$가 증가한다.

② x축의 아래쪽 부분 ⇒ $f'(x)<0$

⇒ 이 구간에서 $f(x)$가 감소한다.

0547 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 작은 순서대로 a, b, c, d라 하면



① 구간 $(-\infty,\ a)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
② 구간 $(-2,\ b)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
③ 구간 $(-1,\ 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
④ 구간 $(c,\ 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
⑤ 구간 $(1,\ 2)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

답 ⑤

0548 $h(x)=f(x)-g(x)$에서 $\quad h'(x)=f'(x)-g'(x)$

① 구간 $(b,\ c)$에서 $f'(x)<g'(x)$이므로
$f'(x)-g'(x)<0$, 즉 $h'(x)<0$
따라서 구간 $(b,\ c)$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.
② 구간 $(b,\ d)$에서 $f'(x)<g'(x)$이므로
$f'(x)-g'(x)<0$, 즉 $h'(x)<0$
따라서 구간 $(b,\ d)$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.
③ 구간 $(b,\ e)$에서 $f'(x)<g'(x)$이므로
$f'(x)-g'(x)<0$, 즉 $h'(x)<0$
따라서 구간 $(b,\ e)$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.
④ 구간 $(c,\ d)$에서 $f'(x)<g'(x)$이므로
$f'(x)-g'(x)<0$, 즉 $h'(x)<0$
따라서 구간 $(c,\ d)$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.
⑤ 구간 $(e,\ \infty)$에서 $f'(x)>g'(x)$이므로
$f'(x)-g'(x)>0$, 즉 $h'(x)>0$
따라서 구간 $(e,\ \infty)$에서 함수 $h(x)$는 증가한다.

답 ⑤

0549 $y=\{f(x)\}^2$에서 $\quad y'=2f(x)f'(x)$

① 구간 $(a,\ b)$에서 $f(x)>0,\ f'(x)>0$이므로
$2f(x)f'(x)>0$
따라서 구간 $(a,\ b)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.
② 구간 $(c,\ d)$에서 $f(x)<0,\ f'(x)<0$이므로
$2f(x)f'(x)>0$
따라서 구간 $(c,\ d)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.
③ 구간 $(d,\ e)$에서 $f(x)<0,\ f'(x)>0$이므로
$2f(x)f'(x)<0$
따라서 구간 $(d,\ e)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.
④ 구간 $(e,\ f)$에서 $f(x)>0,\ f'(x)>0$이므로
$2f(x)f'(x)>0$
따라서 구간 $(e,\ f)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.
⑤ 구간 $(g,\ \infty)$에서 $f(x)<0,\ f'(x)<0$이므로
$2f(x)f'(x)>0$
따라서 구간 $(g,\ \infty)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.

답 ③

유형 05 함수의 극대·극소

본책 88쪽

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여
(i) $f'(x)$를 구한다.
(ii) $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 a를 구한다.
(iii) $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.
⇒ $f'(x)$의 부호가 $\begin{cases} \text{양} \rightarrow \text{음} \Rightarrow f(x)\text{는 } x=a\text{에서 극대} \\ \text{음} \rightarrow \text{양} \Rightarrow f(x)\text{는 } x=a\text{에서 극소} \end{cases}$

0550 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$에서
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극댓값 5, $x=3$일 때 극솟값 1을 가지므로 극댓값과 극솟값의 차는
$5-1=4$

답 4

0551 $f(x)=-x^4+6x^2+8x-10$에서
$f'(x)=-4x^3+12x+8=-4(x+1)^2(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗	14	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극댓값 14를 갖고, $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=-1$에서는 극값을 갖지 않는다.
따라서 $a=1,\ b=0$이므로
$a+2b=1$

답 ①

0552 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+3$에서
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	3	↘	-29	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극솟값 -2, $x=0$일 때 극댓값 3, $x=2$일 때 극솟값 -29를 가지므로 구하는 극값의 합은
$-2+3+(-29)=-28$

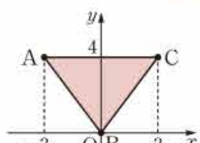
답 ②

0553 $f(x)=-\frac{4}{81}x^4+\frac{8}{9}x^2$에서
$f'(x)=-\frac{16}{81}x^3+\frac{16}{9}x=-\frac{16}{81}x(x+3)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗	4	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$ 또는 $x=3$일 때 극댓값 4, $x=0$일 때 극솟값 0을 갖는다. ⋯ ❶

$\mathrm{A}(-3,\ 4)$, $\mathrm{B}(0,\ 0)$, $\mathrm{C}(3,\ 4)$라 하면 오른쪽 그림에서 △ABC의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot\{3-(-3)\}\cdot 4=12$ ⋯ ❷

답 12

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있다.	60 %
❷ 삼각형 ABC의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

0554 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy(x+y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$

이때 $f'(0)=4$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=4$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}-x^2-xh\right\}$$
$$=4-x^2$$

$f'(x)=0$에서 $(2+x)(2-x)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소, $x=2$에서 극대이므로

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$\alpha=-2$, $\beta=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(-2)^2+2^2=8$

답 8

유형 06 함수의 극대 · 극소를 이용한 미정계수의 결정 본책 89쪽

미분가능한 함수 $f(x)$가
① $x=\alpha$에서 극값을 갖는다. ➡ $f'(\alpha)=0$
② $x=\alpha$에서 극값 β를 갖는다. ➡ $f(\alpha)=\beta$, $f'(\alpha)=0$

0555 $f(x)=-x^3+ax+b$에서

$f'(x)=-3x^2+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 6을 가지므로

$f(1)=6$, $f'(1)=0$

$-1+a+b=6$, $-3+a=0$

$\therefore a=3$, $b=4$

즉 $f(x)=-x^3+3x+4$이므로

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 2를 갖는다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	2	↗	6	↘

답 ④

0556 $f(x)=x^3-6x^2+ax+b$에서

$f'(x)=3x^2-12x+a$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 2를 가지므로

$f(3)=2$, $f'(3)=0$

$27-54+3a+b=2$, $27-36+a=0$

$\therefore a=9$, $b=2$

$\therefore a+b=11$

답 11

0557 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=0$ $\therefore -3-2a+b=0$ ······ ㉠

또 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기가 -15이므로

$f'(2)=-15$ $\therefore -12+4a+b=-15$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=1$

$\therefore a+b=0$

답 ②

0558 $f(x)=-x^3-\frac{3}{2}ax^2+6a^2x$에서

$f'(x)=-3x^2-3ax+6a^2=-3(x+2a)(x-a)$ ··· ❶

$f'(x)=0$에서 $x=-2a$ 또는 $x=a$

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-10a^3$	↗	$\frac{7}{2}a^3$	↘

$a>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2a$에서 극솟값 $-10a^3$을 갖고, $x=a$에서 극댓값 $\frac{7}{2}a^3$을 갖는다. ··· ❷

이때 극댓값과 극솟값의 차가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{7}{2}a^3-(-10a^3)=\frac{1}{2}$, $a^3=\frac{1}{27}$

$\therefore a=\frac{1}{3}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ 극댓값과 극솟값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0559 $f(x)=2x^3-3(2a+1)x^2+6(a^2+a)x$에서

$f'(x)=6x^2-6(2a+1)x+6(a^2+a)$
$=6(x-a)(x-a-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=a+1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값 1을 가지므로

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(a)=1$

$2a^3-3(2a+1)a^2+6(a^2+a)a=1$

$2a^3+3a^2-1=0$, $(a+1)^2(2a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

이때 $f(1)<5$이므로

$2-3(2a+1)+6(a^2+a)<5$, $a^2-1<0$

$(a+1)(a-1)<0$ $\therefore -1<a<1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

즉 $f(x)=2x^3-6x^2+\frac{9}{2}x$이므로

$f(2)=16-24+9=1$

답 ④

0560 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극값을 가지므로

$f'(3)=0 \qquad \therefore 27+6a+b=0$ …… ㉠ ⋯ ❶

한편 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-12$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$\therefore 1+a+b+c=0$ …… ㉡

또 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=-12 \qquad \therefore 3+2a+b=-12$ …… ㉢ ⋯ ❷

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=-9$

이것을 ㉡에 대입하면 $\quad c=11$ ⋯ ❸

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$이므로

$f(-1)=-1-3+9+11=16$ ⋯ ❹

답 16

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극값을 가짐을 이용하여 a, b에 대한 관계식을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-12$임을 이용하여 a, b, c에 대한 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❸ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 07 함수의 극대·극소의 활용

본책 90쪽

함수의 도함수와 증감표를 이용하여 극댓값 또는 극솟값을 구하고, 주어진 조건을 이용하여 문제를 해결한다.

0561 $f(x)=x^3-3x+1$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값 3, $x=1$일 때 극솟값 -1을 가지므로

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

$\mathrm{A}(-1,\ 3),\ \mathrm{B}(1,\ -1)$

따라서 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot1+2\cdot(-1)}{1+2},\ \dfrac{1\cdot(-1)+2\cdot3}{1+2}\right)$, 즉 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$

답 ⑤

SSEN 특강 선분의 내분점

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 잇는 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

0562 $f(x)=x^3+(a+1)x^2-2x$에서

$f'(x)=3x^2+2(a+1)x-2$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소라 하면 α, β는 이차방정식 $3x^2+2(a+1)x-2=0$의 두 근이다.

이때 극대가 되는 점과 극소가 되는 점이 원점에 대하여 대칭이므로

$\alpha=-\beta$, 즉 $\alpha+\beta=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2(a+1)}{3}=0 \qquad \therefore a=-1$

답 ②

0563 $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+ax^2-a$에서

$f'(x)=-2x^2+2ax=-2x(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=a$에서 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로 극댓값 또는 극솟값이 0이다.

$f(0)=0$ 또는 $f(a)=0$

그런데 $f(0)=-a\neq0$이므로 $\quad f(a)=0$

$\dfrac{1}{3}a^3-a=0, \qquad a(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=0$

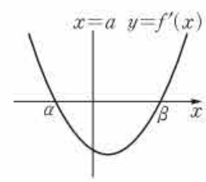
$\therefore a=-\sqrt{3}$ 또는 $a=\sqrt{3}\ (\because a\neq0)$

답 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$

0564 $f(x)=x^3+ax^2-125x+9$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax-125$

방정식 $f'(x)=0$의 두 근을 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대이고, $x=\beta$에서 극소이다.



이때 직선 $x=a$가 곡선 $y=x^3+ax^2-125x+9$의 극대가 되는 점과 극소가 되는 점 사이를 지나야 하므로

$\alpha<a<\beta$

즉 $f'(a)<0$이어야 하므로

$3a^2+2a^2-125<0, \qquad a^2-25<0$

$(a+5)(a-5)<0 \qquad \therefore -5<a<5$

따라서 정수 a는

$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

의 9개이다.

답 ③

0565 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 5를 가지므로

$f(-1)=5,\ f'(-1)=0$

이때 $g(x)=(3x+1)f(x)$에서

$g'(x)=3f(x)+(3x+1)f'(x)$

$g(-1)=-2f(-1)=-10$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-1,\ -10)$에서의 접선의 기울기는

$g'(-1)=3f(-1)-2f'(-1)=15$

따라서 접선의 방정식은

$y-(-10)=15(x+1) \qquad \therefore y=15x+5$

이 직선의 x절편이 $-\frac{1}{3}$, y절편이 5이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot5=\frac{5}{6}$ 답 ④

0566 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-8x+\frac{1}{3}$에서

$f'(x)=x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	27	↘	-9	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 -9를 가지므로

$a=2$, $b=-9$ ··· ❶

한편 점 $(-1, f(-1))$, 즉 점 $(-1, 9)$에서의 접선 l의 기울기는

$f'(-1)=3\cdot(-3)=-9$

이므로 접선 l의 방정식은

$y-9=-9(x+1)$ $\therefore 9x+y=0$ ··· ❷

따라서 점 $(2, -9)$에서 직선 $9x+y=0$까지의 거리 d는

$$d=\frac{|9\cdot2+1\cdot(-9)|}{\sqrt{9^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{82}}$$

$\therefore 82d^2=82\cdot\frac{81}{82}=81$ ··· ❸

답 81

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 접선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $82d^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 08 함수의 극대·극소를 이용한 삼차함수의 계수의 부호 결정

본책 91쪽

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에 대하여

① $x \longrightarrow \infty$일 때 $f(x) \longrightarrow \infty$이면 ➡ $a>0$

$x \longrightarrow \infty$일 때 $f(x) \longrightarrow -\infty$이면 ➡ $a<0$

② $y=f(x)$의 그래프가 y축과 양의 부분에서 만나면 ➡ $d>0$

$y=f(x)$의 그래프가 y축과 음의 부분에서 만나면 ➡ $d<0$

③ 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지면

➡ 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 α, β이다.

0567 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서 $x \longrightarrow \infty$일 때 $f(x) \longrightarrow \infty$이므로 $a>0$

또 그래프가 y축과 음의 부분에서 만나므로 $d<0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고, α, β는 서로 다른 두 양수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0$, $\alpha\beta=\frac{c}{3a}>0$

$a>0$이므로 $b<0$, $c>0$

$\therefore ab<0$, $ac>0$, $ad<0$, $bc<0$, $bd>0$ 답 ⑤

0568 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$의 그래프에서 $x \longrightarrow \infty$일 때 $f(x) \longrightarrow -\infty$이므로 $a<0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고, $\alpha<0$, $\beta>0$, $|\beta|>|\alpha|$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0$, $\alpha\beta=\frac{c}{3a}<0$

$a<0$이므로 $b>0$, $c>0$

$\therefore ab<0$, $abc<0$, $a-c<0$

또 $bc>0$이므로 $bc-a>0$ 답 ⑤

0569 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 양의 부분에서 만나므로

$c>0$ ··· ❶

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$이고 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 갖는다고 하면 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고 α, β는 서로 다른 두 음수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=\frac{2a}{3}<0$, $\alpha\beta=-\frac{b}{3}>0$

$\therefore a<0$, $b<0$ ··· ❷

$$\therefore \frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{c}{c}$$

$$=-1-1+1=-1$$ ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ c의 부호를 구할 수 있다.	20 %
❷ a, b의 부호를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

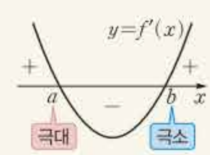
유형 09 도함수의 그래프를 이용한 함수의 극대·극소

본책 91쪽

함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, x축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양 ⟶ 음 ➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극대

② 음 ⟶ 양 ➡ $f(x)$는 $x=b$에서 극소



0570 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 2이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

$f'(-1)=0$, $f'(2)=0$이므로

$6-2a+b=0$, $24+4a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-12$

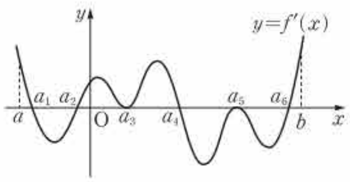
즉 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+c$이고, 함수 $f(x)$의 극댓값이 10이므로

$f(-1)=-2-3+12+c=10$ $\therefore c=3$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$이므로 구하는 극솟값은

$f(2)=16-12-24+3=-17$ 답 -17

0571 다음 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 작은 순서대로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6이라 하자.



(i) $x=a_1$, $x=a_4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_1$, $x=a_4$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore m=2$

(ii) $x=a_2$, $x=a_6$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_2$, $x=a_6$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore n=2$

(i), (ii)에서 $m-n=0$ 답 0

참고 $x=a_3$, $x=a_5$의 좌우에서는 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.

0572 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로 $h'(x)=0$에서

$x=b$ 또는 $x=d$ 또는 $x=e$

x	$\cdots$	b	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $h(x)$는 $x=d$에서 극소이다. 답 ④

0573 ㄱ, ㄴ. $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌고, $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고, $x=4$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 극솟값은 $f(0)=1$, 극댓값은 $f(4)$이다.

ㄷ. $0<x<4$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 구간 $[0, 4]$에서 증가한다.

$\therefore f(0)<f(2)<f(4)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

0574 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 2이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=0$, $f'(2)=0$이므로

$c=0$, $12a+4b+c=0$ …… ㉠ ⋯➊

$f(x)$의 극솟값이 -2, 극댓값이 2이므로

$f(0)=-2$, $f(2)=2$

$\therefore d=-2$, $8a+4b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$ ⋯➋

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2-2$이므로

$f(-1)=1+3-2=2$ ⋯➌

답 2

채점 기준	비율
➊ $f'(0)=0$, $f'(2)=0$임을 이용할 수 있다.	40 %
➋ $f(0)=-2$, $f(2)=2$임을 이용할 수 있다.	40 %
➌ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0575 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 3이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=-3$이므로 $c=-3$

$f'(-1)=0$, $f'(3)=0$이므로

$3a-2b-3=0$, $27a+6b-3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{3}$, $b=-1$

즉 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+d$이므로 $f(x)$의 극댓값과 극솟값은 각각

$f(-1)=\frac{5}{3}+d$, $f(3)=-9+d$

따라서 극댓값과 극솟값의 차는

$\left|\frac{5}{3}+d-(-9+d)\right|=\frac{32}{3}$ 답 $\frac{32}{3}$

유형 10 도함수의 그래프의 해석 (1)

본책 92쪽

함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프에서

① x축의 위쪽 부분, 즉 $f'(x)>0$인 구간에서 $f(x)$는 증가한다.

② x축의 아래쪽 부분, 즉 $f'(x)<0$인 구간에서 $f(x)$는 감소한다.

③ $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다.

0576 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 2, 4이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. 구간 $(-2, -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

ㄷ. 구간 $(4, 5)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

ㅁ. $f'(3)\neq0$이므로 $f(x)$는 $x=3$에서 극값을 갖지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ③

0577 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 2, 4이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

ㄴ. $f'(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.
ㄷ. 구간 $(0,\ 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
ㄹ. $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖고 $f(-2)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $x=-2$에서 x축에 접한다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0578 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 7, 9이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=7$ 또는 $x=9$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	7	$\cdots$	9	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘	극소	↗

① $-1<x<8$에서 $f(x)$는 $x=7$에서 극값을 가지므로 극값은 1개이다.
② $f'(8)\neq0$이므로 $f(x)$는 $x=8$에서 극값을 갖지 않는다.
③ $2<x<4$에서 $f'(x)=k\ (k>0)$이므로 $f(x)$는 일차함수이다.
④ $f'(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
⑤ $0<x<7$일 때, $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

답 ⑤

유형 11 도함수의 그래프의 해석 (2) 본책 93쪽

주어진 도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만든 후, 함수 $f(x)$가 증가 또는 감소하는 구간, 극값을 갖는 x의 값 등을 찾아 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 유추한다.

0579 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 3이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이고, $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ②이다. 답 ②

0580 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1, 3이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소, $x=3$에서 극대이다.
또 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

답 ④

0581 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 1, 3이므로 $f'(x)=0$에서

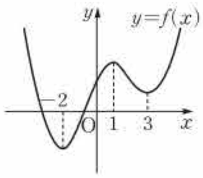
$x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때

$f(-2)<0<f(3)<f(1)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(x)$는 구간 $(1,\ 3)$에서 감소하고 $f(3)>0$이므로 $f(2)>0$이다.
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

유형 12~13 삼차함수가 극값을 갖거나 갖지 않을 조건 본책 94쪽

삼차함수 $f(x)$에 대하여
① $f(x)$가 극댓값, 극솟값을 모두 갖는다.
⇒ 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
② $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
⇒ 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

0582 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+ax$에서

$f'(x)=x^2-ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4a>0,\qquad a(a-4)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>4$

따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다. 답 ②

0583 $f(x)=x^3-ax^2-ax+2$에서

$f'(x)=3x^2-2ax-a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ⋯ ❶

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+3a>0,\quad a(a+3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>0$ ⋯ ❷

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=0$이므로

$\alpha-\beta=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\alpha-\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

0584 $f(x)=ax^3+3x^2+ax+5$에서

$f'(x)=3ax^2+6x+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3a^2>0,\quad a^2<3$

$\therefore -\sqrt{3}<a<0$ 또는 $0<a<\sqrt{3}$ ($\because a\neq0$)

따라서 정수 a는 -1, 1의 2개이다. 답 ②

0585 $f(x)=-2x^3+ax^2+ax$에서

$f'(x)=-6x^2+2ax+a$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+6a\le0,\quad a(a+6)\le0$

$\therefore -6\le a\le0$

답 $-6\le a\le0$

0586 $f(x)=x^3+x^2+2kx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2x+2k$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-6k\le0\quad \therefore k\ge\frac{1}{6}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{1}{6}$이다. 답 $\frac{1}{6}$

0587 $f(x)=\frac{4}{3}x^3+(a+3)x^2-ax+1$에서

$f'(x)=4x^2+2(a+3)x-a$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+3)^2+4a\le0$

$a^2+10a+9\le0,\quad (a+9)(a+1)\le0$

$\therefore -9\le a\le-1$

따라서 $\alpha=-9$, $\beta=-1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-9)^2+(-1)^2=82$

답 ⑤

0588 $f(x)=x^3+ax^2+3x-7$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$은 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-9\le0,\quad (a+3)(a-3)\le0$

$\therefore -3\le a\le3$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

$g(x)=-x^3+2ax^2-ax+1$에서

$g'(x)=-3x^2+4ax-a$

함수 $g(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $g'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=4a^2-3a>0,\quad a(4a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>\frac{3}{4}$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서

$-3\le a<0$ 또는 $\frac{3}{4}<a\le3$

따라서 정수 a는

$-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3$

의 6개이다. ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않을 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 함수 $g(x)$가 극값을 가질 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

유형 14 삼차함수가 주어진 구간에서 극값을 가질 조건 본책 95쪽

삼차함수 $f(x)$가 구간 (a, b)에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.
➡ 이차방정식 $f'(x)=0$이 $a<x<b$에서 서로 다른 두 실근을 가지므로 다음 세 가지를 조사한다.
① 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 D의 부호
② $f'(a)$, $f'(b)$의 값의 부호
③ $y=f'(x)$의 그래프의 축의 위치

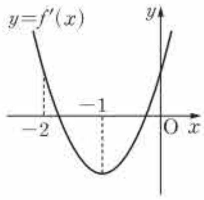
0589 $f(x)=x^3+3x^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-2, 0)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-2<x<0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3a>0 \qquad \therefore a<3$



(ii) $f'(-2)=a>0$, $f'(0)=a>0$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $\quad x=-1$

이상에서 a의 값의 범위는 $\quad 0<a<3$

따라서 정수 a는 1, 2이므로 구하는 합은 3이다. 답 3

0590 $f(x)=x^3+ax^2-ax$에서

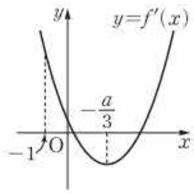
$f'(x)=3x^2+2ax-a$

함수 $f(x)$가 $x>-1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>-1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+3a>0, \quad a(a+3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>0$



(ii) $f'(-1)=3-3a>0$에서 $\quad a<1$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{a}{3}$이므로

$-\frac{a}{3}>-1 \qquad \therefore a<3$

이상에서 실수 a의 값의 범위는

$a<-3$ 또는 $0<a<1$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

0591 $f(x)=x^3+(a+1)x^2+ax+3$에서

$f'(x)=3x^2+2(a+1)x+a$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면

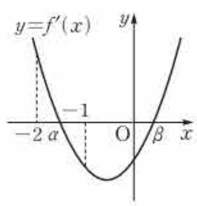
$-2<\alpha<-1$, $\beta>-1$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$f'(-2)=8-3a>0 \qquad \therefore a<\frac{8}{3}$

$f'(-1)=1-a<0 \qquad \therefore a>1$

$\therefore 1<a<\frac{8}{3}$ 답 ③

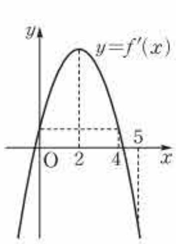


0592 $f(x)=-x^3+6x^2+kx+3$에서

$f'(x)=-3x^2+12x+k$

이때 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이므로 $\quad f'(0)=f'(4)$

따라서 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 5)$에서 하나의 극값만을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 이차방정식 $f'(x)=0$이 $4\le x<5$에서 하나의 실근을 가져야 한다. ⋯ ❶



$f'(4)=k\ge 0$에서 $\quad k\ge 0$

$f'(5)=-15+k<0$에서 $\quad k<15$

$\therefore 0\le k<15$ ⋯ ❷

따라서 정수 k는

0, 1, 2, ⋯, 14

의 15개이다. ⋯ ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 5)$에서 하나의 극값만을 가질 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

유형 15 ~ 16 사차함수가 극댓값 또는 극솟값을 갖거나 갖지 않을 조건

본책 95쪽

사차함수 $f(x)$에 대하여

(1) 최고차항의 계수가 양수일 때 – 항상 극솟값을 갖는다.

① $f(x)$가 극댓값을 갖는다.

➡ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

② $f(x)$가 극댓값을 갖지 않는다.

➡ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는다.

(2) 최고차항의 계수가 음수일 때 – 항상 극댓값을 갖는다.

① $f(x)$가 극솟값을 갖는다.

➡ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

② $f(x)$가 극솟값을 갖지 않는다.

➡ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는다.

0593 $f(x)=-x^4+4x^3+2ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2+4ax$

$=-4x(x^2-3x-a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

그런데 방정식 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $x^2-3x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-3x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9+4a>0 \qquad \therefore a>-\frac{9}{4}$

이때 $x=0$이 방정식 $x^2-3x-a=0$의 근이 아니므로

$a\ne 0$

$\therefore -\frac{9}{4}<a<0$ 또는 $a>0$

따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0594 $f(x)=x^4+2x^3+ax^2$에서

$f'(x)=4x^3+6x^2+2ax$

$=2x(2x^2+3x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

그런데 방정식 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $2x^2+3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ⋯ ❶

이차방정식 $2x^2+3x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=9-8a>0 \qquad \therefore a<\frac{9}{8}$$

이때 $x=0$이 방정식 $2x^2+3x+a=0$의 근이 아니므로

$a\neq0$

$\therefore a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$ ··· ❷

따라서 $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=\frac{9}{8}$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{9}{8}$ ··· ❸

답 $\frac{9}{8}$

채점 기준	비율
❶ 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가질 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\alpha+\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0595 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+(a-1)x^2-2ax$에서

$$f'(x)=2x^3+2(a-1)x-2a$$
$$=2(x-1)(x^2+x+a)$$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+x+a=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$D=1-4a<0 \qquad \therefore a>\frac{1}{4}$$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x=1$을 근으로 갖거나 1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

ⓘ 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때,

$$2+a=0 \qquad \therefore a=-2$$

ⓘⓘ 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 1이 아닌 실수를 중근으로 가질 때, 판별식을 D라 하면

$$D=1-4a=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는

$a=-2$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$

따라서 a의 최솟값은 -2이다.

답 ①

참고 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x=1$을 중근으로 가질 수 없으므로 삼차방정식 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

0596 $f(x)=-x^4+\frac{4}{3}x^3-2(a-2)x^2-4ax$에서

$$f'(x)=-4x^3+4x^2-4(a-2)x-4a$$
$$=-4(x+1)(x^2-2x+a)$$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-a<0 \qquad \therefore a>1$$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 $x=-1$을 근으로 갖거나 -1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

ⓘ 이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 $x=-1$을 근으로 가질 때,

$$3+a=0 \qquad \therefore a=-3$$

ⓘⓘ 이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 -1이 아닌 실수를 중근으로 가질 때, 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-a=0 \qquad \therefore a=1$$

(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는

$a=-3$ 또는 $a\geq1$

답 $a=-3$ 또는 $a\geq1$

0597 $f(x)=x^4+2ax^3+2x^2+1$에서

$$f'(x)=4x^3+6ax^2+4x=2x(2x^2+3ax+2)$$

사차함수 $f(x)$가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $2x^2+3ax+2=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$D=9a^2-16<0, \qquad (3a+4)(3a-4)<0$$
$$\therefore -\frac{4}{3}<a<\frac{4}{3}$$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $2x^2+3ax+2=0$이 $x=0$을 근으로 가질 수 없으므로 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

즉 판별식을 D라 하면

$$D=9a^2-16=0 \qquad \therefore a=-\frac{4}{3} \text{ 또는 } a=\frac{4}{3}$$

(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는 $\quad -\frac{4}{3}\leq a\leq\frac{4}{3}$

따라서 $M=\frac{4}{3}$, $m=-\frac{4}{3}$이므로

$Mm=-\frac{16}{9}$

답 $-\frac{16}{9}$

유형 **17** **함수의 최대·최소** 본책 96쪽

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

(i) 구간 (a, b)에서의 $f(x)$의 극값을 구한다.

(ii) $f(a)$, $f(b)$의 값을 구한다.

(iii) (i), (ii)에서 구한 극값, $f(a)$, $f(b)$의 값 중 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

0598 $f(x)=3x^4-16x^3+18x^2-2$에서

$$f'(x)=12x^3-48x^2+36x=12x(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	35	↘	-2	↗	3	↘	-29	↗	30

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 35, $x=3$일 때 최솟값 -29를 가지므로

$M=35$, $m=-29$

$\therefore M+m=6$ 답 ④

0599 $f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=x_4$ 또는 $x=b$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=x_4$에서 최소이다.

x	a	$\cdots$	x_4	$\cdots$	b
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$		↘	극소	↗	

답 ④

0600 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↗	10	↘	-22	↗	-15

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 10, $x=3$일 때 최솟값 -22를 가지므로

$M=10$, $m=-22$

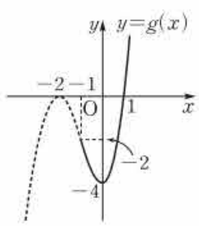
$\therefore Mm=-220$ 답 ①

0601 $g(x)=x^3+3x^2-4$라 하면

$g'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -1\le x\le a$)

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	-2	↘	-4	↗



$a=0$일 때, 구간 $[-1,\ 0]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(-1)=-2$이므로

$f(0)=-2$ ⋯ ❶

$a=1$일 때, 구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(1)=0$이므로

$f(1)=0$ ⋯ ❷

$a=2$일 때, 구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(2)=16$이므로

$f(2)=16$ ⋯ ❸

$\therefore f(0)+f(1)+f(2)=14$ ⋯ ❹

답 14

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(0)+f(1)+f(2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0602 $x^2-6x+8=t$로 놓으면

$t=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$

$2\le x\le 5$에서 t의 값의 범위는

$-1\le t\le 3$

$g(t)=t^3-12t+1$이라 하면

$g'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because -1\le t\le 3$)

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-1$일 때 최댓값 12, $t=2$일 때 최솟값 -15를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은 -3이다.

t	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	12	↘	-15	↗	-8

답 ②

0603 $g(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로 $g(x)=t$로 놓으면 $t\ge -1$ ⋯ ❶

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-3t+4$ ⋯ ❷

$\therefore f'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 2를 갖는다. ⋯ ❸

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	6	↘	2	↗

답 2

채점 기준	비율
❶ $g(x)=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❷ $(f\circ g)(x)$를 t에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

유형 18 함수의 최대 · 최소를 이용한 미정계수의 결정 본책 97쪽

구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값이 주어졌을 때
➡ $f(a)$, $f(b)$의 값, 구간 $(a,\ b)$에서의 $f(x)$의 극값을 비교한다.

0604 $f(x)=-x^3+27x+k$에서

$f'(x)=-3x^2+27=-3(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because 0\le x\le 4$)

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	k	↗	$k+54$	↘	$k+44$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $k+54$, $x=0$일 때 최솟값 k를 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 50이므로

$(k+54)+k=50$ $\therefore k=-2$ 답 -2

0605 $f(x)=x^3+ax^2+b$에서

$f'(x)=3x^2+2ax$

$f'(1)=9$에서

$3+2a=9$ $\therefore a=3$

즉 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ ($\because 0\le x\le 2$)

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $b+20$을 가지므로

$b+20=24 \quad \therefore b=4$

$\therefore ab=12$

x	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	b	↗	$b+20$

답 ④

0606 $f(x)=2x^3-6x^2+k$에서

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-40$	↗	k	↘	$k-8$	↗	k

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=3$일 때 최댓값 k, $x=-2$일 때 최솟값 $k-40$을 갖는다. ··· ❶

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 -8이므로

$k-40=-8 \quad \therefore k=32$ ··· ❷

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 32이다. ··· ❸

답 32

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0607 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because 1\le x\le 3)$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-2a+b$	↘	$-4a+b$	↗	b

이때 a, b가 양수이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 b, $x=2$일 때 최솟값 $-4a+b$를 갖는다.

따라서 $b=10$, $-4a+b=2$이므로

$a=2,\ b=10$

$\therefore a+b=12$

답 ④

0608 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=-2$, $x=0$에서 극값을 가지므로

$f'(-2)=0,\ f'(0)=0$

$12-4a+b=0,\ b=0 \quad \therefore a=3,\ b=0$

$\therefore f(x)=x^3+3x^2+c$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	c	↗	$c+4$	↘	c	↗	$c+20$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $c+20$, $x=-3$ 또는 $x=0$일 때 최솟값 c를 갖는다.

이때 조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 19이므로

$c+20=19 \quad \therefore c=-1$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -1이다.

답 ③

유형 19~21 최대 · 최소의 활용

본책 97, 98쪽

두 점 사이의 거리를 구하는 공식, 평면도형의 넓이를 구하는 공식, 입체도형의 부피를 구하는 공식, 피타고라스 정리 등을 이용하여 도형의 길이, 넓이, 부피를 한 문자에 대한 함수로 나타낸 후 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0609 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 점 P와 점 $(3,\ 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(t-3)^2+t^4}=\sqrt{t^4+t^2-6t+9}$

$f(t)=t^4+t^2-6t+9$라 하면

$f'(t)=4t^3+2t-6=2(t-1)(2t^2+2t+3)$

$f'(t)=0$에서

$t=1\ (\because \underbrace{2t^2+2t+3>0}_{2t^2+2t+3=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0})$

따라서 $f(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 5를 가지므로 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	5	↗

답 ②

0610 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2-2)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=t^2+(t^2+1)^2+(t-10)^2+(t^2+1)^2$

$=2t^4+6t^2-20t+102$ ··· ❶

$f(t)=2t^4+6t^2-20t+102$라 하면

$f'(t)=8t^3+12t-20=4(t-1)(2t^2+2t+5)$

$f'(t)=0$에서

$t=1\ (\because \underbrace{2t^2+2t+5>0}_{2t^2+2t+5=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}>0})$

따라서 $f(t)$는 $t=1$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

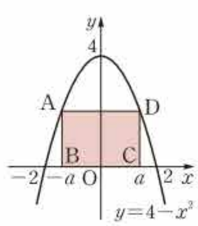
$f(1)=90$ ··· ❷

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	90	↗

답 90

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 점 P의 x좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

0611 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 꼭짓점 C의 좌표를 $(a,\ 0)$ $(0<a<2)$이라 하면



$D(a,\ 4-a^2)$,

$A(-a,\ 4-a^2)$,

$B(-a,\ 0)$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(4-a^2)=-2a^3+8a$

$\therefore S'(a)=-6a^2+8=-2(3a^2-4)$

$S'(a)=0$에서 $\quad a^2=\frac{4}{3} \qquad \therefore a=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ (\because 0<a<2)$

a	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	$\frac{32\sqrt{3}}{9}$	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$일 때 최대이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{32\sqrt{3}}{9}$$

답 ④

0612 점 P의 좌표를 $(a,\ -a^2+3a)\ (0<a<3)$라 하면 $H(a,\ 0)$이므로 $\triangle OPH$의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}a(-a^2+3a)=-\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{2}a^2$$

$$\therefore S'(a)=-\frac{3}{2}a^2+3a=-\frac{3}{2}a(a-2)$$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=2\ (\because 0<a<3)$

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	2	↘	

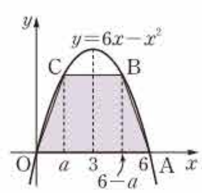
따라서 $S(a)$는 $a=2$일 때 최대이므로 $\triangle OPH$의 넓이의 최댓값은

$$S(2)=2$$

답 ②

0613 $6x-x^2=0$에서 $x(x-6)=0$이므로 $\quad x=0$ 또는 $x=6$

$\therefore A(6,\ 0)$



오른쪽 그림과 같이 점 C의 좌표를 $(a,\ 6a-a^2)\ (0<a<3)$이라 하면

$B(6-a,\ 6a-a^2)$ ⋯ ❶

사다리꼴 OABC의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}\{6+(6-2a)\}(6a-a^2)=a^3-12a^2+36a \quad \cdots ❷$$

$$\therefore S'(a)=3a^2-24a+36=3(a-2)(a-6)$$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=2\ (\because 0<a<3)$

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	32	↘	

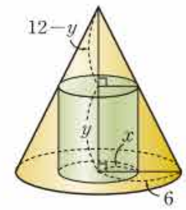
따라서 $S(a)$는 $a=2$일 때 최대이므로 넓이가 최대인 사다리꼴의 높이는

$$6a-a^2=6\cdot 2-2^2=8 \quad \cdots ❸$$

답 8

채점 기준	비율
❶ 점 A의 좌표를 구하고 두 점 B, C의 좌표를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $S(a)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ 넓이가 최대인 사다리꼴의 높이를 구할 수 있다.	50 %

0614 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면



$6:12=x:(12-y)$

$\therefore y=12-2x\ (0<x<6)$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2(12-2x)$$
$$=2\pi(6x^2-x^3)$$

$$\therefore V'(x)=2\pi(12x-3x^2)=-6\pi x(x-4)$$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=4\ (\because 0<x<6)$

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	64π	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=4$일 때 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은 $\quad V(4)=64\pi$

답 ③

0615 주어진 입체도형에서 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면 겉넓이가 20π로 일정하므로

$$\pi r^2+2\pi rh+\frac{1}{2}\cdot 4\pi r^2=20\pi$$

$$3r^2+2rh=20, \qquad 2rh=20-3r^2$$

$$\therefore h=\frac{20-3r^2}{2r}\ (\because r>0)$$

따라서 입체도형의 부피를 $V(r)$라 하면

$$V(r)=\pi r^2\cdot\frac{20-3r^2}{2r}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=-\frac{5}{6}\pi r^3+10\pi r$$

$$\therefore V'(r)=-\frac{5}{2}\pi r^2+10\pi=-\frac{5}{2}\pi(r+2)(r-2)$$

$V'(r)=0$에서 $\quad r=2\left(\because 0<r<\frac{2\sqrt{15}}{3}\right)$

r	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{15}}{3}$
$V'(r)$		+	0	−	
$V(r)$		↗	$\frac{40}{3}\pi$	↘	

따라서 $V(r)$는 $r=2$일 때 최대이므로 구하는 부피의 최댓값은

$$V(2)=\frac{40}{3}\pi$$

답 ①

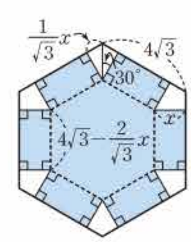
참고 $h>0$에서

$$\frac{20-3r^2}{2r}>0, \qquad 3r^2-20<0, \qquad r^2-\frac{20}{3}<0$$

$$\therefore -\frac{2\sqrt{15}}{3}<r<\frac{2\sqrt{15}}{3}$$

이때 $r>0$이므로 $\quad 0<r<\frac{2\sqrt{15}}{3}$

0616 상자의 높이가 x이므로 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 각 꼭짓점으로부터 거리가 $x\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}x$인 부분까지 자르게 된다.



이때 $0<\frac{2}{\sqrt{3}}x<4\sqrt{3}$이므로

$$0<x<6$$

육각기둥의 밑면은 한 변의 길이가 $4\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}x$인 정육각형이므로 그 넓이는

$$6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(4\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2=2\sqrt{3}(6-x)^2$$

따라서 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=2\sqrt{3}(6-x)^2\cdot x=2\sqrt{3}(x^3-12x^2+36x)$$

$$\therefore V'(x)=2\sqrt{3}(3x^2-24x+36)$$
$$=6\sqrt{3}(x-2)(x-6)$$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=2$ ($\because 0<x<6$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	$64\sqrt{3}$	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=2$일 때 최대이다. 답 2

0617 (1st) 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

$f'(x)=(x+2)(x^2+ax+b)$에서

$$f'(-2)=0$$

이때 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, 1)$에서 감소하므로 $x<1$에서

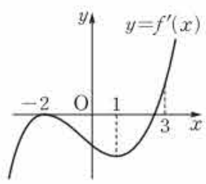
$$f'(x)\le 0$$

즉 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 $x=-2$일 때 x축에 접해야 한다.

또 함수 $f(x)$가 구간 $(3, \infty)$에서 증가하므로 $x>3$에서

$$f'(x)\ge 0$$

따라서 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



(2nd) $f'(x)=0$의 중근이 아닌 다른 한 근을 α라 하고 a^2+b^2을 α에 대한 식으로 나타낸다.

즉 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근 $x=-2$를 가지므로 나머지 한 근을 α $(1\le\alpha\le3)$라 하면

$$f'(x)=(x+2)^2(x-\alpha)$$
$$=(x+2)\{x^2+(2-\alpha)x-2\alpha\}$$

$a=2-\alpha$, $b=-2\alpha$이므로

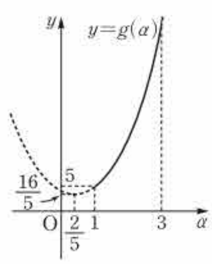
$$a^2+b^2=(2-\alpha)^2+(-2\alpha)^2$$
$$=5\alpha^2-4\alpha+4 \text{ (단, } 1\le\alpha\le3)$$

(3rd) a^2+b^2의 최솟값을 구한다.

$g(\alpha)=5\alpha^2-4\alpha+4$ $(1\le\alpha\le3)$라 하면

$$g(\alpha)=5\left(\alpha-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}$$

따라서 $y=g(\alpha)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $g(\alpha)$는 $\alpha=1$일 때 최솟값 $g(1)=5$를 갖는다.



답 ①

다른 풀이 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근 $x=-2$를 가지므로 방정식 $x^2+ax+b=0$은 $x=-2$를 근으로 갖는다.

즉 $4-2a+b=0$이므로 $\quad b=2a-4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $f'(x)=0$의 다른 한 근을 α라 하면 $1\le\alpha\le3$이므로

$f'(1)\le0$에서

$$3(1+a+b)\le0, \quad 3(1+a+2a-4)\le0 \ (\because ㉠)$$
$$3(3a-3)\le0 \quad \therefore a\le1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 $f'(3)\ge0$에서

$$5(9+3a+b)\ge0, \quad 5(9+3a+2a-4)\ge0 \ (\because ㉠)$$
$$5(5a+5)\ge0 \quad \therefore a\ge-1 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서 a의 값의 범위는 $\quad -1\le a\le1$

이때

$$a^2+b^2=a^2+(2a-4)^2$$
$$=5a^2-16a+16 \ (-1\le a\le1)$$

이므로 $g(a)=5a^2-16a+16$ $(-1\le a\le1)$이라 하면

$$g(a)=5\left(a-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5}$$

즉 $g(a)$는 $a=1$일 때 최솟값 $g(1)=5$를 갖는다.

0618 (1st) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

$f(x)$는 삼차함수이므로 모든 실수 x에 대하여 미분가능하고 연속이다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=0$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)+3\}=0$이므로 $\quad f(1)=-3$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$$

또 $\lim_{x\to5}\frac{f(x)-4}{x-5}=0$에서 $x\to5$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

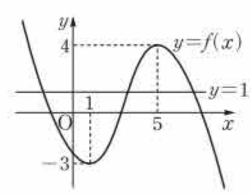
즉 $\lim_{x\to5}\{f(x)-4\}=0$이므로 $\quad f(5)=4$

$$\therefore \lim_{x\to5}\frac{f(x)-4}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=f'(5)=0$$

$f'(1)=0$, $f'(5)=0$이고 $f(x)$는 삼차함수이므로 $f(x)$는 $x=1$, $x=5$에서 극값을 갖는다.

이때 $f(1)<f(5)$이므로 극솟값은 $f(1)$, 극댓값은 $f(5)$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2nd) ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=3$의 좌우에서 증가한다.

(3rd) ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극댓값 4를 갖는다.

(4th) ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 위의 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$은 서로 다른 세 점에서 만난다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0619 (1st) 함수 $y=g(t)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

점 (t, t^3)과 직선 $y=x+6$, 즉 $x-y+6=0$ 사이의 거리 $g(t)$는

$$g(t)=\frac{|t-t^3+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-t^3+t+6|}{\sqrt{2}}$$

이때 $h(t)=-t^3+t+6$이라 하면

$$h'(t)=-3t^2+1$$

$h'(t)=0$에서 $\quad t^2=\frac{1}{3} \quad \therefore t=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

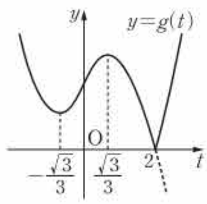
또 $h(t)=0$에서 $\quad -t^3+t+6=0$

$(t-2)(t^2+2t+3)=0 \qquad \therefore t=2 \ (\because t^2+2t+3>0)$

즉 함수 $y=h(t)$의 그래프는 $t=2$일 때 t축과 한 점에서 만난다.

t	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$h(t)$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}+6$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}+6$	↘	0	↘

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



2nd ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 오른쪽 그림에서 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

3rd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 함수 $g(t)$는 $t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 0이 아닌 극솟값을 갖는다.

4th ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $t<2$일 때 $g(t)=\frac{-t^3+t+6}{\sqrt{2}}$, $t>2$일 때 $g(t)=\frac{t^3-t-6}{\sqrt{2}}$

이므로

$$\lim_{t\to 2-} g'(t)=\lim_{t\to 2-}\frac{1}{\sqrt{2}}(-3t^2+1)=-\frac{11}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{t\to 2+} g'(t)=\lim_{t\to 2+}\frac{1}{\sqrt{2}}(3t^2-1)=\frac{11}{\sqrt{2}}$$

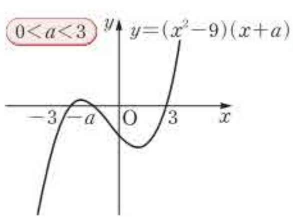
즉 $\lim_{t\to 2-} g'(t)\neq\lim_{t\to 2+} g'(t)$이므로 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하지 않다.

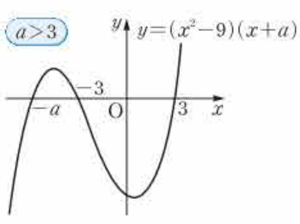
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0620 1st $0<a<3$ 또는 $a>3$일 때 $f(x)$가 조건을 만족시키는지 확인한다.

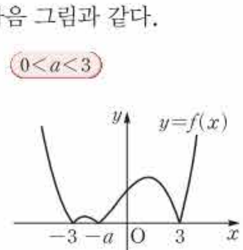
(i) $0<a<3$ 또는 $a>3$일 때,

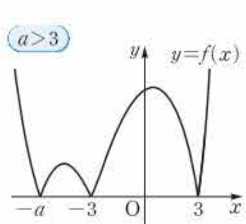
함수 $y=(x^2-9)(x+a)=(x+3)(x-3)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-3, 0)$, $(-a, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 함수 $y=(x^2-9)(x+a)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.





따라서 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.





이때 함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=-a$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

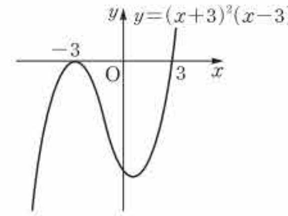
2nd $a=3$일 때 $f(x)$가 조건을 만족시키는지 확인한다.

(ii) $a=3$일 때,

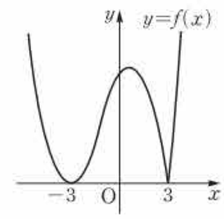
함수

$$y=(x^2-9)(x+a)$$
$$=(x+3)^2(x-3)$$

의 그래프는 x축과 점 $(-3, 0)$에서 접하고 점 $(3, 0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)=|(x+3)^2(x-3)|$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



이때 $f(x)$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시킨다.

3rd $f(x)$의 극댓값을 구한다.

(i), (ii)에서 $a=3$이고, 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+3)|$의 극댓값은 함수 $y=(x^2-9)(x+3)$의 극솟값의 절댓값과 같다.

$g(x)=(x^2-9)(x+3)$이라 하면

$$g'(x)=2x(x+3)+(x^2-9)=3x^2+6x-9$$
$$=3(x+3)(x-1)$$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	0	↘	-32	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -32를 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $|-32|=32$를 갖는다.

답 ①

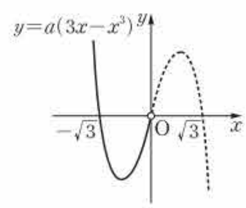
0621 1st $a>0$일 때 $f(x)$가 조건을 만족시키는지 확인한다.

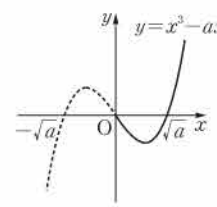
(i) $a>0$인 경우

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0)\end{cases}$$에서

$$f(x)=\begin{cases} -ax(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) & (x<0) \\ x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) & (x\geq 0)\end{cases}$$

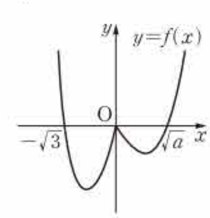
이므로 두 삼차함수 $y=a(3x-x^3)$, $y=x^3-ax$의 그래프의 개형은 각각 다음 그림과 같다.





따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.

즉 함수 $f(x)$는 극댓값 5를 갖지 않는다.



(2nd) $a=0$일 때 $f(x)$가 조건을 만족시키는지 확인한다.

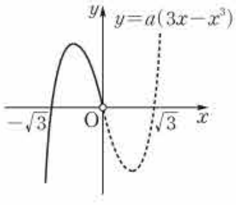
(ii) $a=0$인 경우

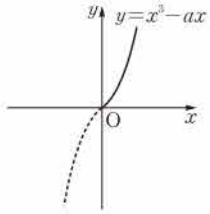
$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ x^3 & (x\ge0) \end{cases}$이므로 함수 $f(x)$는 극댓값 5를 갖지 않는다.

(3rd) $a<0$일 때 $f(x)$가 조건을 만족시키는지 확인한다.

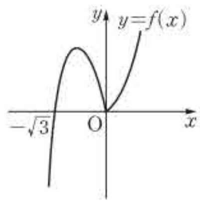
(iii) $a<0$인 경우

$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\ge0) \end{cases}$에서 두 삼차함수 $y=a(3x-x^3)$, $y=x^3-ax$의 그래프의 개형은 각각 다음 그림과 같다.





따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x<0$에서 극댓값을 갖는다.



$f(x)=a(3x-x^3)$ $(x<0)$에서

$f'(x)=a(3-3x^2)$
$=-3a(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ $(\because x<0)$

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 5를 가지므로

$f(-1)=-2a=5 \qquad \therefore a=-\frac{5}{2}$

(4th) $f(2)$의 값을 구한다.

이상에서 $a=-\frac{5}{2}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{5}{2}(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3+\frac{5}{2}x & (x\ge0) \end{cases}$$

$\therefore f(2)=2^3+\frac{5}{2}\cdot2=13$ 　답 ⑤

0622 (1st) 조건 (가)를 이용하여 $f(x)$를 미정계수를 이용하여 나타낸다.

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의하여 $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 -1, 3이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+3=\frac{2a}{3}$, $-1\cdot3=-\frac{b}{3}$

$\therefore a=3$, $b=9$

$\therefore f(x)=-x^3+3x^2+9x+c$, $f'(x)=-3x^2+6x+9$

(2nd) 조건 (나)를 이용하여 $g(x)$를 미정계수를 이용하여 나타낸다.

한편 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수이다.

또 조건 (나)에 의하여 $x<k$이면 $h(x)>0$, $x>k$이면 $h(x)<0$이고, $h(k)=0$, $h'(k)=0$이므로

$h(x)=-(x-k)^3=-x^3+3kx^2-3k^2x+k^3$

함수 $h(x)$의 x^2의 계수는 함수 $f(x)$의 x^2의 계수인 3과 같으므로

$3k=3 \qquad \therefore k=1$

$f(1)=11+c$, $f'(1)=12$이므로 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ 11+c)$에서의 접선의 방정식은

$y-(11+c)=12(x-1) \qquad \therefore y=12x-1+c$

$\therefore g(x)=12x-1+c$

(3rd) 조건 (다)를 이용하여 $f(x)$를 구한다.

이때 조건 (다)에서 $f(2)+g(2)=33$이므로

$(22+c)+(23+c)=33 \qquad \therefore c=-6$

$\therefore f(x)=-x^3+3x^2+9x-6$

(4th) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합을 구한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -11, $x=3$에서 극댓값 21을 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-11	↗	21	↘

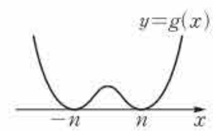
$21+(-11)=10$ 　답 10

0623 (1st) $(x+n)f(x)=g(x)$로 놓고 $g(x)$를 구한다.

$(x+n)f(x)=g(x)$로 놓으면 삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.

조건 (가)에서 $f(n)=0$이므로 $f(x)$는 $x-n$을 인수로 갖는다.

따라서 $g(n)=0$, $g(-n)=0$이고 조건 (나)에서 $g(x)\ge0$이므로 $g(x)$는 오른쪽 그림과 같이 $x=\pm n$에서 극소이어야 한다.



$\therefore g(x)=(x+n)^2(x-n)^2$

(2nd) $f(x)$의 극댓값을 구한다.

이때 $(x+n)f(x)=g(x)$이므로 $\qquad f(x)=(x+n)(x-n)^2$

$\therefore f'(x)=(x-n)^2+2(x+n)(x-n)$
$=(3x+n)(x-n)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-\frac{n}{3}$ 또는 $x=n$

x	$\cdots$	$-\frac{n}{3}$	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

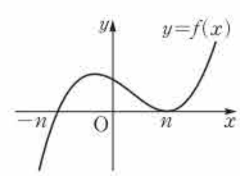
$\therefore a_n=f\left(-\frac{n}{3}\right)=\left(-\frac{n}{3}+n\right)\left(-\frac{n}{3}-n\right)^2=\frac{32}{27}n^3$

(3rd) 자연수 n의 최솟값을 구한다.

따라서 a_n이 자연수가 되려면 n^3은 27의 배수이어야 하므로 자연수 n의 최솟값은 3이다. 　답 ③

다른 풀이 조건 (가)에서 $f(n)=0$이고 조건 (나)에 의하여 $x<-n$일 때 $f(x)\le0$, $x>-n$일 때 $f(x)\ge0$이므로 연속함수 $f(x)$는 $f(-n)=0$을 만족시킨다.

한편 $x>-n$일 때 $f(x)\ge0$이려면 함수 $f(x)$는 오른쪽 그림과 같이 $x=n$에서 극솟값을 가져야 한다.



$\therefore f(x)=(x+n)(x-n)^2$

0624 (1st) $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f(x)$의 증감표를 구한다.

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 α, β, γ이므로 $f'(x)=0$에서

$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

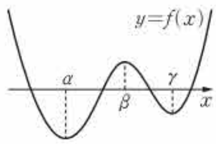
(2nd) ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

(3rd) ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $f(\beta-x)=f(\beta+x)$이려면 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=\beta$에 대하여 대칭이어야 한다.

이때 $f(\alpha)<f(\gamma)<0<f(\beta)$에서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



즉 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\beta$에 대하여 대칭이 아니므로

$f(\beta-x)\neq f(\beta+x)$

(4th) ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

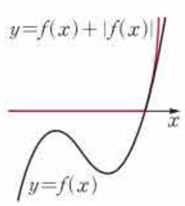
ㄷ. 위의 그림에서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 네 점에서 만난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

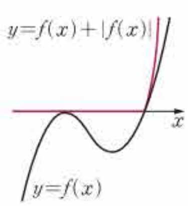
0625 (1st) $y=f(x)$의 그래프에 따른 $y=f(x)+|f(x)|$의 그래프를 그려 본다.

$f(x)+|f(x)|=\begin{cases} 2f(x) & (f(x)\geq 0) \\ 0 & (f(x)<0) \end{cases}$에서 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 조건 (가), (나)를 동시에 만족시킬 수 없으므로 함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 갖는다.

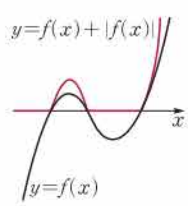
함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $y=f(x)$의 그래프와 그에 따른 함수 $y=f(x)+|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같이 5가지 경우가 있다.



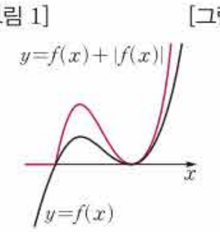
[그림 1]



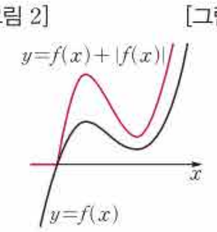
[그림 2]



[그림 3]



[그림 4]



[그림 5]

(2nd) $f(x)$의 극댓값을 구한다.

이때 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 4]이므로

$f(0)=0$, $f(3)=0$

또 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 0을 가지므로

$f(x)=x(x-3)^2=x^3-6x^2+9x$

$\therefore f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(1)=1-6+9=4$ 답 4

0626 (1st) 두 접선의 기울기를 각각 구한다.

$f(x)=x(x-4)(x-2k)$라 하면

$f'(x)=(x-4)(x-2k)+x(x-2k)+x(x-4)$

이때 $f(0)=0$이므로 원점은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이고 원점에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=8k$

또 원점이 아닌 접점의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이므로 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$0-f(t)=f'(t)(0-t)$, $tf'(t)-f(t)=0$

$t\{(t-4)(t-2k)+t(t-2k)+t(t-4)\}-t(t-4)(t-2k)=0$

$2t^2(t-2-k)=0$ $\therefore t=2+k$ ($\because t\neq 0$)

$\therefore f'(t)=f'(2+k)$

$=(2+k-4)(2+k-2k)+(2+k)(2+k-2k)+(2+k)(2+k-4)$

$=(k-2)(2-k)+(2+k)(2-k)+(2+k)(k-2)$

$=-k^2+4k-4$

(2nd) 두 접선의 기울기의 곱의 최솟값을 구한다.

따라서 $0<k<2$인 실수 k에 대하여 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 $g(k)$라 하면

$g(k)=8k\cdot(-k^2+4k-4)=-8k^3+32k^2-32k$

$\therefore g'(k)=-24k^2+64k-32=-8(3k-2)(k-2)$

$g'(k)=0$에서 $k=\frac{2}{3}$ ($\because 0<k<2$)

k	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$g'(k)$		$-$	0	$+$	
$g(k)$		↘	$-\frac{256}{27}$	↗	

즉 함수 $g(k)$는 $k=\frac{2}{3}$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$-\frac{256}{27}$이다. 답 ⑤

0627 (1st) $f(x)$를 미정계수를 이용하여 나타낸다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$g(x)=\begin{cases} 1 & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0) \end{cases}$에서

$g'(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ f'(x) & (x>0) \end{cases}$

이때 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

즉 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0-}g(x)=g(0) \qquad \therefore f(0)=1$$
$$\therefore c=1$$

또 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to0+}g'(x)=\lim_{x\to0-}g'(x)=g'(0) \qquad \therefore f'(0)=0$$
$$\therefore b=0$$
$$\therefore f(x)=x^3+ax^2+1$$

2nd ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $g(0)+g'(0)=f(0)+f'(0)=1+0=1$

3rd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$이므로 $f'(x)=0$에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=-\frac{2a}{3}$$

(i) $-\frac{2a}{3}\le0$, 즉 $a\ge0$인 경우

$f(0)=1$이고, $x>0$일 때 $f'(x)>0$이므로

$$g(x)\ge1$$

따라서 $g(x)$의 최솟값이 1보다 작다는 조건에 모순이다.

(ii) $-\frac{2a}{3}>0$, 즉 $a<0$인 경우

$g(1)=f(1)=a+2$이고 $a+2<2$ ($\because a<0$)이므로

$$g(1)<2$$

(i), (ii)에서 $\quad g(1)<2$

4th ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{2a}{3}$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$g\left(-\frac{2a}{3}\right)=f\left(-\frac{2a}{3}\right)=-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+1=\frac{4}{27}a^3+1$$

즉 $\frac{4}{27}a^3+1=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{4}{27}a^3=-\frac{1}{2}, \qquad a^3=-\frac{27}{8} \qquad \therefore a=-\frac{3}{2}$$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+1$이므로

$$g(4)=f(4)=64-24+1=41$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0628 1st $y=|f(x)|$의 그래프의 개형과 주어진 조건을 이용하여 p, q에 대한 부등식을 세운다.

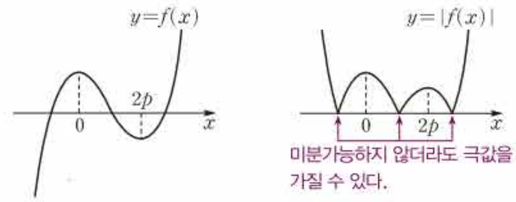
$f(x)=x^3-3px^2+q$에서

$$f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=2p$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2p$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

한편 조건 (가)에서 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 실수 a의 개수가 5이려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $f(0)>0$, $f(2p)<0$이므로

$$f(0)=q>0,\ f(2p)=-4p^3+q<0$$
$$\therefore 0<q<4p^3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)를 만족시키는 경우는 두 구간 $[-1, 1]$, $[-2, 2]$에서의 최댓값이 모두 $f(0)=q$일 때이다.

이때 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 $f(0)=q$이고, $f(-p)=f(2p)$에서 $f(-2p)<f(2p)$이므로 구간 $[-2, 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값이 $f(0)=q$이려면

$f(-p)=f(2p)=-4p^3+q$

$$|f(-2)|\le f(0), \qquad |-8-12p+q|\le q$$
$$\therefore -q\le-8-12p+q\le q$$

$-q\le-8-12p+q$에서 $\qquad 2q\ge12p+8 \qquad \therefore q\ge6p+4$

$-8-12p+q\le q$에서 $\qquad -8-12p\le0$

이때 p는 25 이하의 자연수이므로 위의 부등식은 항상 성립한다.

$$\therefore q\ge6p+4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\qquad 6p+4\le q<4p^3$

2nd 순서쌍 (p, q)의 개수를 구한다.

(i) $p=1$일 때, $10\le q<4$를 만족시키는 q는 없다.

(ii) $p=2$일 때, $16\le q<32$를 만족시키는 q는

16, 17, 18, $\cdots$, 25 (25 이하의 자연수)

의 10개이다.

(iii) $p=3$일 때, $22\le q<108$을 만족시키는 q는

22, 23, 24, 25

의 4개이다.

(iv) $p=4$일 때, $28\le q<256$을 만족시키는 q는 없다.

이상에서 구하는 순서쌍 (p, q)의 개수는

$$10+4=14$$

답 14

0629 전략 삼차함수의 그래프와 x축에 평행한 임의의 직선이 오직 한 점에서 만나려면 삼차함수는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

풀이 곡선 $y=x^3+3ax^2+3(10-3a)x$는 삼차함수의 그래프이고 직선 $y=t$는 x축 또는 x축에 평행한 직선이므로 임의의 실수 t에 대하여 곡선과 직선이 오직 한 점에서 만나려면 삼차함수 $y=x^3+3ax^2+3(10-3a)x$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다. ··· ❶

$f(x)=x^3+3ax^2+3(10-3a)x$라 하면

$$f'(x)=3x^2+6ax+3(10-3a)$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=9a^2-9(10-3a)\le0, \qquad a^2+3a-10\le0$$
$$(a+5)(a-2)\le0 \qquad \therefore -5\le a\le2 \qquad \cdots ❷$$

따라서 정수 a는 $-5,\ -4,\ -3,\ \cdots,\ 2$이므로 구하는 합은

$$-5+(-4)+(-3)+\cdots+2=-12 \quad \cdots ❸$$

답 -12

채점 기준	비율
❶ 주어진 곡선과 직선이 오직 한 점에서 만날 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0630 전략 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=\alpha$에서 x축과 접하면 $x=\alpha$에서 극값을 갖고 그 극값은 0임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖고 그 극값은 0이므로

$$f(1)=0,\ f'(1)=0$$

조건 (나)에 의하여 $g(x)$는 $x=3$에서 극값을 갖고 그 극값은 0이므로

$$g(3)=0,\ g'(3)=0 \quad \cdots ❶$$

이때 $f(0)=10$이므로 $f(x)=(x-1)^2(ax+10)$ (a는 상수, $a\neq0$), $g(x)=(x-3)^2(bx+c)$ (b, c는 상수, $b\neq0$)라 하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=2(x-1)(ax+10)+a(x-1)^2\\&=3ax^2+(-4a+20)x+a-20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'(x)&=2(x-3)(bx+c)+b(x-3)^2\\&=3bx^2+(-12b+2c)x+9b-6c\end{aligned}$$

조건 (다)에서 $g'(x)=-f'(-x)$이고

$$-f'(-x)=-3ax^2+(-4a+20)x-a+20$$

이므로

$$3b=-3a,\ -12b+2c=-4a+20,\ 9b-6c=-a+20$$

$b=-a$이므로 $\quad 8a+c=10,\ 4a+3c=-10$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=-2,\ c=-6$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(2x+10)$, $g(x)=(x-3)^2(-2x-6)$이므로 $\quad \cdots ❷$

$$f(2)+g(2)=14+(-10)=4 \quad \cdots ❸$$

답 4

채점 기준	비율
❶ $f(1)=0,\ f'(1)=0,\ g(3)=0,\ g'(3)=0$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❸ $f(2)+g(2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0631 전략 x와 a의 값의 범위에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $x\geq0$일 때, $\quad g(x)=x^4-x^3+(2-a)x^3=x^4+(1-a)x^3$

$x<0$일 때, $\quad g(x)=x^4+x^3$

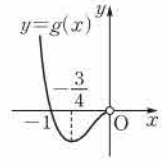
$$\therefore g(x)=\begin{cases}x^4+(1-a)x^3 & (x\geq0)\\ x^4+x^3 & (x<0)\end{cases} \quad \cdots ❶$$

(i) $x<0$일 때,

$$g'(x)=4x^3+3x^2=x^2(4x+3)$$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=-\dfrac{3}{4}\ (\because x<0)$

x	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	0
$g'(x)$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	↘	극소	↗	



따라서 함수 $g(x)$는 $x=-\dfrac{3}{4}$에서 극솟값을 갖는다.

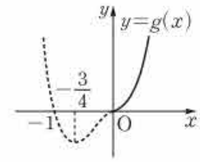
(ii) $x\geq0$일 때,

$$g'(x)=4x^3+3(1-a)x^2=x^2\{4x+3(1-a)\}$$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=\dfrac{3(a-1)}{4}$

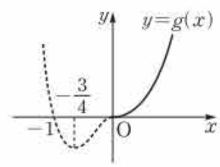
ⓘ $a-1<0$일 때,

$g'(x)\geq0$이므로 함수 $g(x)$는 $x\geq0$에서 증가한다.



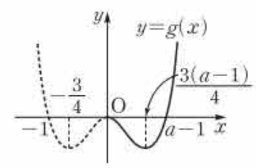
ⓘⓘ $a-1=0$일 때,

$g'(x)\geq0$이므로 함수 $g(x)$는 $x\geq0$에서 증가한다.



ⓘⓘⓘ $a-1>0$일 때,

x	0	$\cdots$	$\frac{3(a-1)}{4}$	$\cdots$
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	0	↘	극소	↗



따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=\dfrac{3(a-1)}{4}$에서 극솟값을 갖는다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$가 극댓값을 가지려면 $a-1>0$, 즉 $a>1$이어야 하고 $a\neq2$이므로 정수 a의 최솟값은 3이다.

$$\therefore a_1=3 \quad \cdots ❷$$

한편 $a=3$일 때 $g(x)$가 극솟값을 갖는 x의 값은

$$x=-\frac{3}{4}\ \text{또는}\ x=\frac{3\cdot(3-1)}{4}=\frac{3}{2}$$

이므로 모든 x의 값의 합 m은 $\quad m=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4} \quad \cdots ❸$

$$\therefore a_1+m=\frac{15}{4} \quad \cdots ❹$$

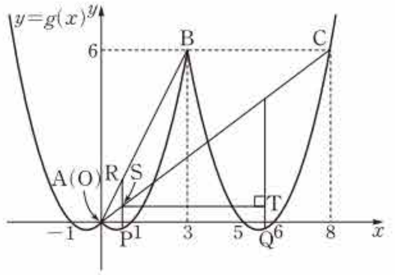
답 $\dfrac{15}{4}$

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위에 따라 $g(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ a_1의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ m의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ a_1+m의 값을 구할 수 있다.	10 %

0632 전략 점 P의 x좌표를 $t\left(0<t<\dfrac{7}{4}\right)$라 하고 각 점의 좌표를 구하여 두 삼각형 APR, AQT의 넓이의 합을 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $g(x)=\begin{cases}x(x+1) & (x<0)\\ x(x-1) & (0\leq x<3)\\ (x-5)(x-6) & (x\geq3)\end{cases}$이므로 함수

$y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$g(3)=6$이므로 $(x-5)(x-6)=6$에서

$x^2-11x+24=0,\quad (x-3)(x-8)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=8$

즉 $\mathrm{B}(3,\ 6)$, $\mathrm{C}(8,\ 6)$이고 $\mathrm{A}(0,\ 0)$이므로 직선 AB의 방정식은 $y=2x$, 직선 AC의 방정식은 $y=\frac{3}{4}x$이다.

점 P의 x좌표를 $t\left(0<t<\frac{7}{4}\right)$라 하면

$\mathrm{P}(t,\ t^2-t)$, $\mathrm{R}(t,\ 2t)$, $\mathrm{S}\left(t,\ \frac{3}{4}t\right)$

또 두 점 P, Q에서의 접선이 평행하므로 점 Q는 점 P를 x축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore \mathrm{Q}(t+5,\ t^2-t)$, $\mathrm{T}\left(t+5,\ \frac{3}{4}t\right)$ ··· ❶

이때 두 삼각형 APR, AQT의 넓이의 합을 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\{2t-(t^2-t)\}\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{3}{4}t-(t^2-t)\right\}\cdot(t+5)$$
$$=-t^3-\frac{1}{8}t^2+\frac{35}{8}t \quad \cdots ❷$$

$$\therefore S'(t)=-3t^2-\frac{1}{4}t+\frac{35}{8}=-\frac{1}{8}(4t+5)(6t-7)$$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=\frac{7}{6}\left(\because 0<t<\frac{7}{4}\right)$

t	0	$\cdots$	$\frac{7}{6}$	$\cdots$	$\frac{7}{4}$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{7}{6}$일 때 최대이므로 구하는 점 P의 x좌표는 $\frac{7}{6}$이다. ··· ❸

답 $\frac{7}{6}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 x좌표를 $t\left(0<t<\frac{7}{4}\right)$라 하고 점 P, R, S, Q, T의 좌표를 t로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $S(t)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $S(t)$가 최대일 때의 점 P의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %

Ⅱ. 다항함수의 미분법

06 도함수의 활용 (3)

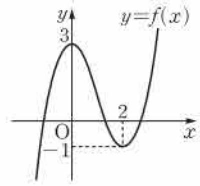
0633 $f(x)=x^3-3x^2+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



답 3

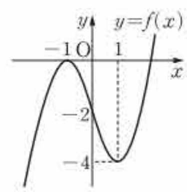
0634 $f(x)=x^3-3x-2$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



답 2

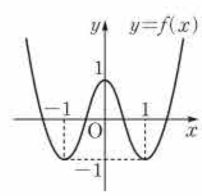
0635 $f(x)=2x^4-4x^2+1$이라 하면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 갖는다.



답 4

0636 $x^4+2x^3=-2x^4+3x^2+1$에서

$3x^4+2x^3-3x^2-1=0$

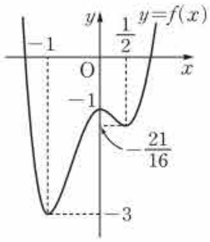
$f(x)=3x^4+2x^3-3x^2-1$이라 하면

$$f'(x)=12x^3+6x^2-6x$$
$$=6x(x+1)(2x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	-1	↘	$-\frac{21}{16}$	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



답 2

0637 $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

(1) 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-1)f(3)<0$

이어야 하므로

$(k+5)(k-27)<0 \quad \therefore -5<k<27$

(2) 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

$f(-1)f(3)=0$

이어야 하므로

$(k+5)(k-27)=0 \quad \therefore k=-5$ 또는 $k=27$

(3) 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(-1)f(3)>0$

이어야 하므로

$(k+5)(k-27)>0 \quad \therefore k<-5$ 또는 $k>27$

답 풀이 참조

0638 $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↗	6	↘	2	↗

$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\boxed{2}$이므로

$f(x) \boxed{>} 0$

따라서 $x\geq 0$일 때, 부등식 $x^3-6x^2+9x+2>0$이 성립한다.

답 (가) 2 (나) >

0639 $f(x)=x^3-3x^2+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	0	↗

$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$f(x)\geq 0$

따라서 $x\geq 0$일 때, 부등식 $x^3-3x^2+4\geq 0$이 성립한다.

답 풀이 참조

0640 $f(x)=x^4-4x+k$라 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$k-3$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $k-3$이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$k-3>0 \quad \therefore k>3$

답 $k>3$

SSEN 특강 모든 실수에 대하여 부등식이 성립할 조건

① 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면
➡ ($f(x)$의 최솟값)≥ 0

② 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\leq 0$이 성립하려면
➡ ($f(x)$의 최댓값)≤ 0

0641 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+6t$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$v=-3+6=3$

답 3

0642 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=-6t+6$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$a=-18+6=-12$

답 -12

0643 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도가 0이므로 $v=0$에서

$-3t^2+6t=0, \quad -3t(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

답 2

0644 $\frac{dl}{dt}=3t^2+2t$이므로 $t=2$일 때 고무줄의 길이의 변화율은

$3\cdot 2^2+2\cdot 2=16$

답 16

0645 (1) 구의 겉넓이를 S라 하면

$S=4\pi\times(0.1t)^2=0.04\pi t^2$

$\therefore \frac{dS}{dt}=0.08\pi t$

따라서 $t=10$일 때 구의 겉넓이의 변화율은

$0.08\pi\times 10=0.8\pi$

(2) 구의 부피를 V라 하면

$V=\frac{4}{3}\pi\times(0.1t)^3=\frac{0.004}{3}\pi t^3$

$\therefore \frac{dV}{dt}=0.004\pi t^2$

따라서 $t=10$일 때 구의 부피의 변화율은

$0.004\pi\times 10^2=0.4\pi$

답 (1) 0.8π (2) 0.4π

유형 01 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수 본책 104쪽

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수
➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

0646 $3x^4-8x^3-6x^2+24x-k=0$에서

$3x^4-8x^3-6x^2+24x=k$ …… ㉠

방정식 ㉠이 한 중근과 서로 다른 두 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=3x^4-8x^3-6x^2+24x$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 접점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

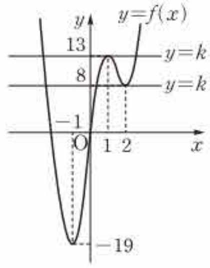
$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$라 하면

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24=12(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-19	↗	13	↘	8	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 접점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나려면



$k=8$ 또는 $k=13$

즉 모든 실수 k의 값의 합은

$8+13=21$ 답 ④

0647 $2x^3+9x^2+k=0$에서

$2x^3+9x^2=-k$ …… ㉠

방정식 ㉠이 $-3\le x\le 1$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=2x^3+9x^2$과 직선 $y=-k$가 $-3\le x\le 1$일 때 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

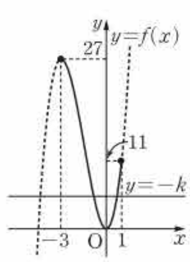
$f(x)=2x^3+9x^2$이라 하면

$f'(x)=6x^2+18x=6x(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$

x	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	27	↘	0	↗	11

따라서 $-3\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 $-3\le x\le 1$일 때 서로 다른 두 점에서 만나려면



$0<-k\le 11$ $\therefore -11\le k<0$

즉 정수 k는

$-11, -10, -9, \cdots, -1$

의 11개이다. 답 11

0648 $\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+k=0$에서

$\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x=-k$ …… ㉠

방정식 ㉠이 한 중근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x$와 직선 $y=-k$가 한 점에서 만나고 그 점에서 접해야 한다.

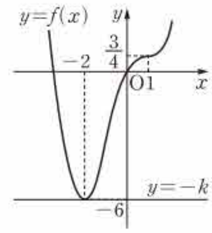
$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x$라 하면

$f'(x)=x^3-3x+2=(x+2)(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	-6	↗	$\frac{3}{4}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 한 점에서 만나고 그 점에서 접하려면



$-k=-6$ $\therefore k=6$

답 ⑤

0649 $3x^4-8x^3-18x^2-k=0$에서

$3x^4-8x^3-18x^2=k$ …… ㉠ ⋯ ❶

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=3x^4-8x^3-18x^2$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

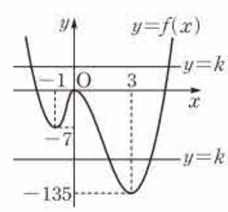
$f(x)=3x^4-8x^3-18x^2$이라 하면

$f'(x)=12x^3-24x^2-36x=12x(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$ ⋯ ❷

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-7	↗	0	↘	-135	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면



$k>0$ 또는 $-135<k<-7$ ⋯ ❸

즉 음의 정수 k는

$-134, -133, -132, \cdots, -8$

의 127개이다. ⋯ ❹

답 127

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 정리할 수 있다.	10 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❹ 음의 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0650 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 α, β, γ이므로 $f'(x)=0$에서

$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지려면

$f(\alpha)<0,\ f(\beta)>0,\ f(\gamma)<0$

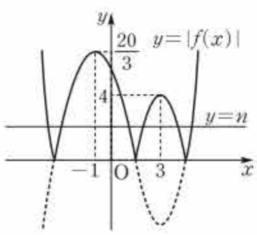
이어야 한다. 답 ④

0651 $f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{20}{3}$	↘	-4	↗

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $|f(x)|=n$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=n$의 교점의 개수와 같으므로

$a_1=a_2=a_3=6,$

$a_4=5,$

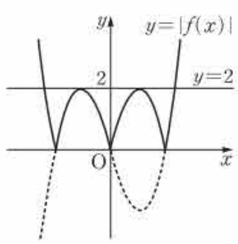
$a_5=a_6=4,$

$a_7=a_8=a_9=a_{10}=2$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k=3\cdot6+5+2\cdot4+4\cdot2=39$ 답 ③

0652 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때 조건 (나)에 의하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로 함수 $f(x)$는 극댓값 2, 극솟값 -2를 갖는다. ··· ❶



$f(x)=x^3-ax\ (a>0)$라 하면

$f'(x)=3x^2-a$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3a}}{3}$

즉 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\sqrt{3a}}{3}$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)^3-a\cdot\frac{\sqrt{3a}}{3}=-2$

$\frac{2a\sqrt{3a}}{9}=2,\quad a\sqrt{3a}=9,\quad a^3=27$

$\therefore a=3$ ··· ❷

따라서 $f(x)=x^3-3x$이므로

$f(2)=8-6=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $y=\|f(x)\|$의 그래프의 개형을 파악할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)=x^3-ax$라 하고 a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

SSEN 특강

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

① $f(-x)=f(x)$를 만족시키면 $f(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어져 있다.

② $f(-x)=-f(x)$를 만족시키면 $f(x)$는 홀수 차수의 항으로만 이루어져 있다.

유형 02 방정식 $f(x)=k$의 실근의 부호

본책 105쪽

방정식 $f(x)=k$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같으므로 방정식 $f(x)=k$가

① 양근을 갖는다.

⇒ $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 양수이다.

② 음근을 갖는다.

⇒ $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 음수이다.

0653 $2x^3+3x^2-12x+p=0$에서

$2x^3+3x^2-12x=-p$ ······ ㉠

방정식 ㉠이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=2x^3+3x^2-12x$와 직선 $y=-p$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이어야 한다.

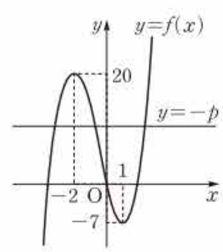
$f(x)=2x^3+3x^2-12x$라 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-p$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이려면



$0<-p<20$

$\therefore -20<p<0$

답 ①

0654 $2x^2+9x=x^3-x^2+a$에서

$-x^3+3x^2+9x=a$ ······ ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=-x^3+3x^2+9x$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수이어야 한다.

$f(x)=-x^3+3x^2+9x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

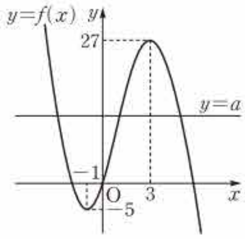
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-5	↗	27	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수이려면

$0<a<27$

즉 정수 a는 1, 2, 3, ⋯, 26의 26개이다.



답 ④

0655 $x^3-12x^2+36x-k=0$에서

$x^3-12x^2+36x=k$ ⋯⋯ ㉠ ⋯➊

방정식 ㉠이 한 개의 양근과 두 개의 허근을 가지려면 곡선 $y=x^3-12x^2+36x$와 직선 $y=k$의 교점이 1개이고 그 교점의 x좌표가 양수이어야 한다.

$f(x)=x^3-12x^2+36x$라 하면

$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$

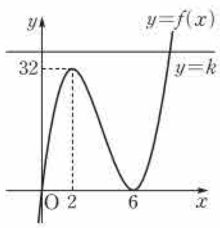
$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=6$ ⋯➋

x	⋯	2	⋯	6	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점이 1개이고 그 교점의 x좌표가 양수이려면

$k>32$ ⋯➌

즉 정수 k의 최솟값은 33이다. ⋯➍



답 33

채점 기준	비율
➊ 주어진 방정식을 정리할 수 있다.	10 %
➋ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
➍ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0656 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수이어야 한다.

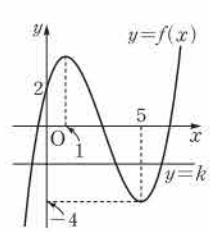
이때 주어진 도함수 $y=f'(x)$의 그래프에서

$f'(1)=f'(5)=0$

x	⋯	1	⋯	5	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	−4	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수이려면

$-4<k<2$



답 $-4<k<2$

0657 $3x^3-4x+3-k=0$에서

$3x^3-4x+3=k$ ⋯⋯ ㉠

방정식 ㉠의 양근의 개수 $f(k)$는 곡선 $y=3x^3-4x+3$과 직선 $y=k$의 x좌표가 양수인 교점의 개수와 같다.

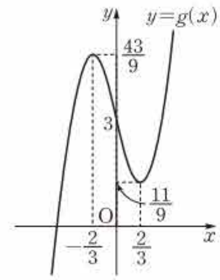
$g(x)=3x^3-4x+3$이라 하면

$g'(x)=9x^2-4=(3x+2)(3x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

x	⋯	$-\frac{2}{3}$	⋯	$\frac{2}{3}$	⋯
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	$\frac{43}{9}$	↘	$\frac{11}{9}$	↗

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯➊



(i) $k=1$일 때,

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$는 x좌표가 양수인 점에서 만나지 않으므로

$f(1)=0$

(ii) $k=2$일 때,

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 x좌표가 양수인 교점이 2개이므로

$f(2)=2$

(iii) $k\geq 3$일 때,

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 x좌표가 양수인 교점이 1개이므로

$f(3)=f(4)=\cdots=f(10)=1$ ⋯➋

이상에서

$f(1)+f(2)+\cdots+f(10)=0+2+1\cdot 8$

$=10$ ⋯➌

답 10

채점 기준	비율
➊ $y=3x^3-4x+3$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
➋ $f(1)$, $f(2)$, ⋯, $f(10)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
➌ $f(1)+f(2)+\cdots+f(10)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0658 $x^4-4x^3-x^2=x^2-12x+k$에서

$x^4-4x^3-2x^2+12x=k$ ⋯⋯ ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=x^4-4x^3-2x^2+12x$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이어야 한다.

$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$

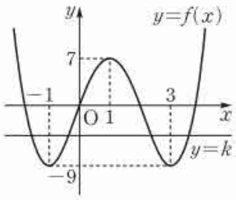
$=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	⋯	−1	⋯	1	⋯	3	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−9	↗	7	↘	−9	↗

06 도함수의 활용 (3)

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이려면



$-9<k<0$

즉 $a=-9$, $b=0$이므로

$b-a=9$

답 ⑤

유형 03 삼차방정식의 근의 판별

본책 105쪽

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 근은
① (극댓값)×(극솟값)$<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 세 실근
② (극댓값)×(극솟값)$=0 \Longleftrightarrow$ 한 실근과 중근(서로 다른 두 실근)
③ (극댓값)×(극솟값)$>0 \Longleftrightarrow$ 한 실근과 두 허근

0659 $f(x)=x^3-3x^2-24x+n$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=4$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-2)f(4)<0$이어야 하므로

$(n+28)(n-80)<0 \qquad \therefore -28<n<80$

따라서 정수 n의 최댓값은 79, 최솟값은 -27이므로 구하는 합은

$79+(-27)=52$

답 ②

다른 풀이 $x^3-3x^2-24x+n=0$에서

$x^3-3x^2-24x=-n \qquad \cdots\cdots$ ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=x^3-3x^2-24x$와 직선 $y=-n$이 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

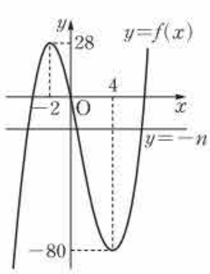
$f(x)=x^3-3x^2-24x$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	28	↘	-80	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-n$이 서로 다른 세 점에서 만나려면



$-80<-n<28$

$\therefore -28<n<80$

0660 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+k$라 하면

$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(1)f(3)=0$이어야 하므로

$\left(\frac{4}{3}+k\right)k=0 \qquad \therefore k=0$ ($\because$ k는 정수)

답 0

0661 $f(x)=2x^3-6x^2-18x-a+2$라 하면

$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(-1)f(3)>0$이어야 하므로

$(12-a)(-52-a)>0, \qquad (a-12)(a+52)>0$

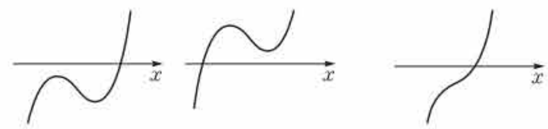
$\therefore a<-52$ 또는 $a>12$

따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

SSEN 특강

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a>0)$에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가질 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



0662 $f(x)=2x^3-3nx^2+n$이라 하면

$f'(x)=6x^2-6nx=6x(x-n)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=n$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(0)f(n)<0$이어야 하므로

$n(-n^3+n)<0, \qquad n^2(n+1)(n-1)>0$

$\therefore n<-1$ 또는 $n>1$

이때 n은 자연수이므로 $\quad n>1$

따라서 가장 작은 n의 값은 2이므로 $\quad a=2$ ⋯ ❶

$n=2$일 때 $f(x)=2x^3-6x^2+2$이므로

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-6	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극댓값 2를 가지므로

$b=2$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0663 함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치하므로

$$g(x)=x^3+3x^2-9x-10+a$$

$$\therefore\ g'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $g(-3)g(1)=0$이어야 하므로

$$(a+17)(a-15)=0 \qquad \therefore\ a=-17 \text{ 또는 } a=15$$

따라서 모든 a의 값의 합은

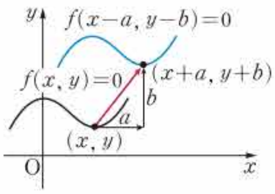
$$-17+15=-2$$

답 ②

SSEN 특강 도형의 평행이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a, y-b)=0$$



0664 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2ax+2a$에서

$$f'(x)=2x^2-2a=2(x^2-a)$$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$a>0$ ...... ㉠

따라서 $f'(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면 $f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})>0$이어야 하므로

$$\left(\frac{4}{3}a\sqrt{a}+2a\right)\left(-\frac{4}{3}a\sqrt{a}+2a\right)>0$$

이때 $a>0$이므로 $\quad \left(\frac{4}{3}\sqrt{a}+2\right)\left(-\frac{4}{3}\sqrt{a}+2\right)>0$

$-\frac{16}{9}a+4>0 \qquad \therefore\ a<\frac{9}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 0<a<\frac{9}{4}$

답 $0<a<\frac{9}{4}$

유형 04 두 그래프의 교점의 개수

본책 106쪽

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수
➡ 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

0665 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3+6x^2=-9x+k$, 즉 $x^3+6x^2+9x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+6x^2+9x-k$라 하면

$$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=-1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-3)f(-1)<0$이어야 하므로

$$-k(-4-k)<0, \qquad k(k+4)<0$$

$$\therefore\ -4<k<0$$

답 ②

다른 풀이 $x^3+6x^2=-9x+k$에서 $\quad x^3+6x^2+9x=k$

곡선 $y=x^3+6x^2$과 직선 $y=-9x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 곡선 $y=x^3+6x^2+9x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x^3+6x^2+9x$라 하면

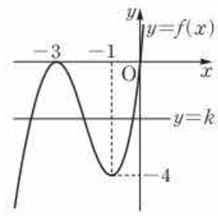
$$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$$-4<k<0$$



0666 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $-x^3+4x^2-4x=x^2-4x+k$, 즉 $x^3-3x^2+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ··· ❶

$f(x)=x^3-3x^2+k$라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$ ··· ❷

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(0)f(2)=0$이어야 하므로

$k(k-4)=0 \qquad \therefore\ k=4\ (\because\ k>0)$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	20 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	50 %

0667 주어진 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $-x^3+2x^2=x^2-x+k$, 즉 $x^3-x^2-x+k=0$이 한 실근만을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-x^2-x+k$라 하면

$$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근만을 가지려면 $f\left(-\frac{1}{3}\right)f(1)>0$이어야 하므로

$$\left(k+\frac{5}{27}\right)(k-1)>0 \qquad \therefore\ k<-\frac{5}{27} \text{ 또는 } k>1$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

답 2

0668 주어진 곡선과 직선이 한 점에서 만나고 다른 한 점에서는 접하려면 방정식 $x^3+7=3x+k$, 즉 $x^3-3x+7-k=0$이 한 실근과 중근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x+7-k$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

$f(-1)f(1)=0$이어야 하므로

$(9-k)(5-k)=0 \quad \therefore k=5$ 또는 $k=9$ 답 5, 9

유형 05 접선의 개수

본책 107쪽

곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 접점의 개수와 같다.

0669 $y=x^3-kx$에서 $\quad y'=3x^2-k$

점 $(1,\ 1)$에서 곡선 $y=x^3-kx$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-kt)$라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3-kt)=(3t^2-k)(x-t)$

이 직선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1-(t^3-kt)=(3t^2-k)(1-t)$

$\therefore 2t^3-3t^2+1+k=0$ ...... ㉠

점 $(1,\ 1)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=2t^3-3t^2+1+k$라 하면 $\quad f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=1$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f(0)f(1)=0$이어야 하므로

$(k+1)k=0 \quad \therefore k=-1\ (\because k\neq 0)$ 답 ②

0670 $y=x^3+2$에서 $\quad y'=3x^2$

점 $(1,\ a)$에서 곡선 $y=x^3+2$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2)$라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3+2)=3t^2(x-t)$ ⋯ ❶

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로 $\quad a-(t^3+2)=3t^2(1-t)$

$\therefore 2t^3-3t^2-2+a=0$ ...... ㉠

점 $(1,\ a)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. ⋯ ❷

$f(t)=2t^3-3t^2-2+a$라 하면

$f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=1$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(0)f(1)<0$이어야 하므로

$(a-2)(a-3)<0 \quad \therefore 2<a<3$ ⋯ ❸

답 $2<a<3$

채점 기준	비율
❶ 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2)$라 하고 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ t에 대한 삼차방정식을 구하고 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	30 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

0671 $y=x^3-6x^2+5x$에서 $\quad y'=3x^2-12x+5$

점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=x^3-6x^2+5x$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-6t^2+5t)$라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3-6t^2+5t)=(3t^2-12t+5)(x-t)$

이 직선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로

$k-(t^3-6t^2+5t)=(3t^2-12t+5)(-t)$

$\therefore 2t^3-6t^2+k=0$ ...... ㉠

점 $(0,\ k)$에서 주어진 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 t에 대한 삼차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$f(t)=2t^3-6t^2+k$라 하면

$f'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=2$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(0)f(2)<0$이어야 하므로

$k(-8+k)<0 \quad \therefore 0<k<8$

$f(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(0)f(2)=0$이어야 하므로

$k(-8+k)=0 \quad \therefore k=0$ 또는 $k=8$

$f(t)=0$이 한 실근만을 가지려면 $f(0)f(2)>0$이어야 하므로

$k(-8+k)>0 \quad \therefore k<0$ 또는 $k>8$

즉 $n(1)=n(2)=\cdots=n(7)=3,\ n(8)=2,\ n(9)=n(10)=1$ 이므로

$\sum_{k=1}^{10} n(k)=7\cdot 3+2+2\cdot 1=25$

답 ③

다른 풀이 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=x^3-6x^2+5x$에 그을 수 있는 접선의 개수는 t에 대한 삼차방정식 $2t^3-6t^2+k=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같고 $2t^3-6t^2+k=0$에서

$2t^3-6t^2=-k$ ...... ㉠

이때 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=2t^3-6t^2$과 직선 $y=-k$의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

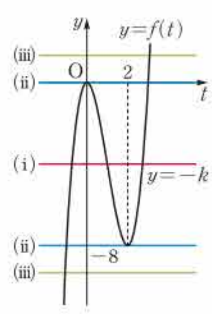
$f(t)=2t^3-6t^2$이라 하면

$f'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=2$

t	⋯	0	⋯	2	⋯
$f'(t)$	+	0	−	0	+
$f(t)$	↗	0	↘	−8	↗

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $-8<-k<0$, 즉 $0<k<8$일 때

$n(k)=3$

(ii) $-k=-8$ 또는 $-k=0$, 즉 $k=8$ 또는 $k=0$일 때

$n(k)=2$

(iii) $-k<-8$ 또는 $-k>0$, 즉 $k>8$ 또는 $k<0$일 때

$n(k)=1$

이상에서 $\quad \sum_{k=1}^{10} n(k)=7\cdot 3+2+2\cdot 1=25$

유형 06 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건 ; 증가 · 감소의 활용 본책 107쪽

① 구간 (a, b)에서 감소하는 함수 $f(x)$에 대하여 이 구간에서 부등식 $f(x)>k$가 항상 성립하려면 ➡ $f(b)\ge k$
② 구간 (a, b)에서 증가하는 함수 $f(x)$에 대하여 이 구간에서 부등식 $f(x)<k$가 항상 성립하려면 ➡ $f(b)\le k$

0672 $f(x)=x^3-6x^2+k$라 하면
$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$
$1<x<3$일 때 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(1, 3)$에서 감소한다.
따라서 $1<x<3$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $f(3)\ge 0$이어야 하므로
$27-54+k\ge 0$ $\therefore k\ge 27$
답 ⑤

0673 $f(x)=2x^3+3x^2+k$라 하면
$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$
$x<-1$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 증가한다. ··· ❶
따라서 $x<-1$에서 $f(x)<0$이 항상 성립하려면 $f(-1)\le 0$이어야 하므로
$-2+3+k\le 0$ $\therefore k\le -1$ ··· ❷
즉 실수 k의 최댓값은 -1이다. ··· ❸
답 -1

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)=2x^3+3x^2+k$가 구간 $(-\infty, -1)$에서 증가함을 알 수 있다.	50 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0674 $x^3+3x^2+k<x^2+4x$에서
$x^3+2x^2-4x+k<0$
$f(x)=x^3+2x^2-4x+k$라 하면
$f'(x)=3x^2+4x-4=(x+2)(3x-2)$
$2<x<4$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(2, 4)$에서 증가한다.
따라서 $2<x<4$에서 $f(x)<0$이 항상 성립하려면 $f(4)\le 0$이어야 하므로
$64+32-16+k\le 0$ $\therefore k\le -80$
즉 실수 k의 최댓값은 -80이다. 답 ②

유형 07 주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건 ; 최대 · 최소의 활용 본책 107쪽

① 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\le a$가 항상 성립하려면 그 구간에서 ➡ $(f(x)$의 최댓값$)\le a$
② 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\ge a$가 항상 성립하려면 그 구간에서 ➡ $(f(x)$의 최솟값$)\ge a$

0675 $f(x)=4x^3-3x^2-6x$라 하면
$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	-1	↗	$\frac{7}{4}$	↘	-5	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -5이므로 $x\ge -1$에서 $f(x)\ge k$가 항상 성립하려면 $k\le -5$
즉 실수 k의 최댓값은 -5이다. 답 ⑤

0676 $2x^3+2x^2-35x+k\le -x^2+x$에서
$2x^3+3x^2-36x+k\le 0$
$f(x)=2x^3+3x^2-36x+k$라 하면
$f'(x)=6x^2+6x-36=6(x+3)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ $(\because x<0)$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	$k+81$	↘	

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $k+81$이므로 $x<0$에서 $f(x)\le 0$이 항상 성립하려면
$k+81\le 0$ $\therefore k\le -81$ 답 ①

0677 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+k$라 하면
$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ ··· ❶

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k+5$	↘	$k+4$	↗	$k+9$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $k+9$, 최솟값은 $k+4$이므로 $1\le x\le 3$에서 $0\le f(x)\le 10$이 항상 성립하려면
$k+4\ge 0$, $k+9\le 10$
이어야 한다.
$\therefore -4\le k\le 1$ ··· ❷
즉 정수 k는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1$의 6개이다. ··· ❸
답 6

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0678 운송 회사가 손해를 보지 않으려면 (배달 요금)$\ge$(비용)이어야 하므로 $x>0$에서 부등식 $2x^3+3x^2+a\ge 180x+4500$, 즉 $2x^3+3x^2-180x-4500+a\ge 0$이 항상 성립해야 한다.
$f(x)=2x^3+3x^2-180x-4500+a$라 하면
$f'(x)=6x^2+6x-180=6(x+6)(x-5)$
$f'(x)=0$에서 $x=5$ $(\because x>0)$

06 도함수의 활용 (3)

x	0	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$a-5075$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $a-5075$이므로 $x>0$에서 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하려면

$a-5075\geq 0$ $\quad\therefore a\geq 5075$

즉 a의 최솟값은 5075이다. 답 5075

유형 08 모든 실수에서 부등식이 항상 성립할 조건 본책 108쪽

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면
➡ ($f(x)$의 최솟값)≥ 0

0679 (i) $k=0$일 때, $x^4+3\geq 0$이므로 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k\neq 0$일 때, $f(x)=x^4+4k^3x+3$이라 하면

$f'(x)=4x^3+4k^3=4(x+k)(x^2-kx+k^2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-k$ ($\because x^2-kx+k^2>0$) $\quad x^2-kx+k^2=\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2>0$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-3k^4+3$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-3k^4+3$	↗

$-3k^4+3\geq 0,\quad k^4-1\leq 0$

$(k+1)(k-1)(k^2+1)\leq 0$

$\therefore -1\leq k<0$ 또는 $0<k\leq 1$ ($\because k\neq 0$)

(i), (ii)에서 $\quad -1\leq k\leq 1$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1의 3개이다. 답 3

0680 $2x^4-4x^2\geq k$에서 $\quad 2x^4-4x^2-k\geq 0$

$f(x)=2x^4-4x^2-k$라 하면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-k-2$	↗	$-k$	↘	$-k-2$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-k-2$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-k-2\geq 0$ $\quad\therefore k\leq -2$

즉 실수 k의 최댓값은 -2이다. 답 ④

0681 $f(x)=x^4+4ax^2-4(2a+1)x+a^2-2$라 하면

$f'(x)=4x^3+8ax-4(2a+1)$

$=4(x-1)(x^2+x+2a+1)$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ ($\because x^2+x+2a+1>0$) $\quad x^2+x+2a+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2a+\frac{3}{4}>0$ ⋯ ❶

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 a^2-4a-5이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	a^2-4a-5	↗

$a^2-4a-5\geq 0,\quad (a+1)(a-5)\geq 0$

$\therefore a\geq 5$ ($\because a>0$) ⋯ ❷

즉 양수 a의 최솟값은 5이다. ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 양수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

유형 09 부등식 $f(x)>g(x)$ 본책 108쪽

어떤 구간에서 부등식 $f(x)>g(x)$가 항상 성립하려면
➡ $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, 그 구간에서
($h(x)$의 최솟값)>0

0682 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$가 성립해야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^4+2x^3-x^2-9x-(2x^3+5x^2-x-a)$

$=x^4-6x^2-8x+a$

$\therefore h'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$a+3$	↘	$a-24$	↗

따라서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $a-24$이므로 모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이 성립하려면

$a-24>0$ $\quad\therefore a>24$ 답 ⑤

0683 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=4x^3-6x-(-3x^2-a)=4x^3+3x^2-6x+a$

$\therefore h'(x)=12x^2+6x-6=6(x+1)(2x-1)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$a+5$	↘	$a-\frac{7}{4}$	↗	$a+32$

따라서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $a+32$이므로 $-1\leq x\leq 2$에서 $h(x)\leq 0$이 항상 성립하려면

$a+32\leq 0$ $\quad\therefore a\leq -32$

즉 실수 a의 최댓값은 -32이다. 답 -32

0684 $x>3$에서 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$이 직선 $y=-\frac{5}{4}x+k$보다 항상 위쪽에 있으려면 $x>3$에서 부등식 $\frac{1}{3}x^3-x^2>-\frac{5}{4}x+k$, 즉 $\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{5}{4}x-k>0$이 항상 성립해야 한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{5}{4}x-k$라 하면

$$f'(x)=x^2-2x+\frac{5}{4}=(x-1)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{4}$$

$x>3$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(3, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x>3$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $f(3)\geq0$이어야 하므로

$$-k+\frac{15}{4}\geq0 \qquad \therefore k\leq\frac{15}{4}$$

즉 정수 k의 최댓값은 3이다.

답 ③

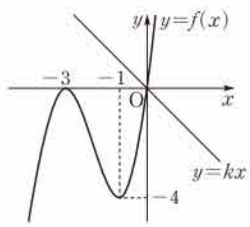
0685 $f(x)=x^3+6x^2+9x$라 하면

$$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=-1$ ··· ❶

x	···	-3	···	-1	···	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗	0

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❷



이때 $y=kx$의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 $x\leq0$에서 $f(x)\leq kx$가 항상 성립하려면

$k\leq0$ ··· ❸

답 $k\leq0$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

참고 $f(x)=x^3+6x^2+(9-k)x$라 하면

$f'(x)=3x^2+12x+9-k$

이므로 $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 없다.

0686 $f(x)\leq12x+k$에서 $\qquad -x^4+2x^3-x^2\leq12x+k$

$$\therefore x^4-2x^3+x^2+12x+k\geq0$$

$h(x)=x^4-2x^3+x^2+12x+k$라 하면

$$h'(x)=4x^3-6x^2+2x+12$$
$$=2(x+1)(2x^2-5x+6)$$

$h'(x)=0$에서

$2x^2-5x+6=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{23}{8}>0$

$x=-1$ ($\because$ $2x^2-5x+6>0$)

따라서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $-8+k$이므로 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\geq0$이 성립하려면

x	···	-1	···
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-8+k$	↗

$-8+k\geq0$

$\therefore k\geq8$ ······ ㉠

또 $12x+k\leq g(x)$에서 $\qquad 12x+k\leq2x^2+n$

$$\therefore 2x^2-12x+n-k\geq0$$

이차방정식 $2x^2-12x+n-k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-6)^2-2(n-k)\leq0, \qquad 36-2n+2k\leq0$$

$\therefore k\leq n-18$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 8\leq k\leq n-18$

위의 부등식을 만족시키는 정수 k의 개수가 5이므로

$n-18=12 \qquad \therefore n=30$

답 30

참고 $n=30$이면 $8\leq k\leq n-18$에서 $\quad 8\leq k\leq12$

즉 정수 k는 8, 9, 10, 11, 12의 5개이다.

유형 10~11 속도와 가속도

본책 109, 110쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t), \quad a=\frac{dv}{dt}$$

이때 점 P의 속력은 $|v|$이다.

0687 점 P가 원점을 지날 때 $x=0$이므로

$$t^3-4t^2+4t=0, \qquad t(t-2)^2=0$$
$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 점 P가 출발 후 다시 원점을 지날 때는 $t=2$일 때이고, 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-8t+4$$

이므로 $t=2$일 때 점 P의 속도는

$12-16+4=0$

답 0

0688 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2at-2$$

$t=3$일 때 $v=13$이므로

$$27+6a-2=13, \qquad 6a=-12$$
$$\therefore a=-2$$

답 ①

0689 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=2t^2$, $v_Q=-3t+5$ ··· ❶

두 점 P, Q의 속도가 같을 때 $v_P=v_Q$이므로

$$2t^2=-3t+5, \qquad 2t^2+3t-5=0$$

$(2t+5)(t-1)=0 \qquad \therefore t=1$ ($\because$ $t\geq0$) ··· ❷

$x_P(1)=1$, $x_Q(1)=4$이므로 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$4-1=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 속도를 구할 수 있다.	40 %
❷ 속도가 같아지는 순간의 시각을 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 점 P, Q 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

0690 점 P의 속도를 v라 하면

$v=f'(t)=-t^2+2t+4=-(t-1)^2+5$

즉 $0\le t\le 4$에서 $-4\le f'(t)\le 5$이므로

$0\le |f'(t)|\le 5$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 5이고 그때의 시각은 $t=1$이므로

$M=5,\ a=1$

$\therefore M+a=6$

답 ③

0691 $h(t)=f(t)-g(t)$라 하면

$h'(t)=f'(t)-g'(t)=6t^2-18t+a$

$t=1$에서 두 점 P, Q가 만나므로 $h(1)=0$

$2-9+a+b=0 \quad \therefore a+b=7$ …… ㉠

또 $t=1$에서 두 점 P, Q의 속도가 같으므로 $h'(1)=0$

$6-18+a=0 \quad \therefore a=12$

$a=12$를 ㉠에 대입하면 $b=-5$ ⋯ ❶

즉 $h(t)=2t^3-9t^2+12t-5$이므로

$h'(t)=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$

$h'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=2$

따라서 두 점 P, Q의 속도가 다시 같아지는 시각은 $t=2$이다. ⋯ ❷

이때 $h(2)=-1$이므로 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|-1|=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 속도가 다시 같아지는 시각을 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 점 P, Q 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

0692 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2-6t-8$

$6t^2-6t-8=4$에서 $6t^2-6t-12=0$

$6(t+1)(t-2)=0 \quad \therefore t=2\ (\because t\ge 0)$

점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=12t-6$

이므로 $t=2$일 때 점 P의 가속도는

$24-6=18$

답 18

0693 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=t^2-6t-1$

$a=\dfrac{dv}{dt}=2t-6$

따라서 점 P의 가속도가 0이면 $2t-6=0$이므로

$t=3$

즉 $t=3$일 때 점 P의 위치가 35이므로

$9-27-3+k=35, \quad -21+k=35$

$\therefore k=56$

답 56

0694 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-4t^3+3kt^2+12t+2$

$t=1$에서 점 P의 속도가 19이므로

$-4+3k+12+2=19$

$3k=9 \quad \therefore k=3$

$\therefore v=-4t^3+9t^2+12t+2$

이때 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=-12t^2+18t+12$

따라서 $t=1$에서 점 P의 가속도는

$-12+18+12=18$

답 ④

유형 12 속도 · 가속도와 운동 방향

본책 110쪽

① 수직선 위를 움직이는 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이다.

② 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면
➡ (두 점의 속도의 곱)<0

0695 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=3$

$t=1$일 때 점 P의 위치는 4이고, $t=3$일 때 점 P의 위치는 0이므로 두 점 A, B 사이의 거리는 4이다.

답 4

0696 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=5$

즉 점 P는 $t=1$일 때 첫 번째로 운동 방향을 바꾸고, $t=5$일 때 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

이때 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-18$

따라서 $t=5$일 때 점 P의 가속도는

$30-18=12$

답 ⑤

0697 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-20t+a+1$

점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 실수 $t(t\ge 0)$에 대하여 항상 $v\ge 0$이거나 $v\le 0$이어야 한다.

이때

$v=3t^2-20t+a+1=3\left(t-\dfrac{10}{3}\right)^2+a-\dfrac{97}{3}$

이므로

$a-\dfrac{97}{3}\ge 0 \quad \therefore a\ge\dfrac{97}{3}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 33이다.

답 ④

0698 점 M의 시각 t에서의 위치를 $m(t)$라 하면

$m(t)=\frac{1}{2}\{f(t)+g(t)\}=t^2-4t+3$ ⋯ ❶

점 M의 속도를 v라 하면

$v=m'(t)=2t-4$ ⋯ ❷

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=2$

따라서 점 M은 $t=2$에서 운동 방향을 1번 바꾼다. ⋯ ❸

답 1번

채점 기준	비율
❶ 점 M의 위치를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 M의 속도를 구할 수 있다.	20 %
❸ 점 M이 운동 방향을 몇 번 바꾸는지 구할 수 있다.	50 %

0699 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=2t-4$, $v_Q=2t-8$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

$(2t-4)(2t-8)<0$, $(t-2)(t-4)<0$

$\therefore 2<t<4$

답 ②

0700 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2+2mt+n$

$t=1$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸므로

$\underline{6+2m+n=0}$ 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이다. ⋯⋯ ㉠

$t=1$일 때 점 P의 위치는 3이므로

$2+m+n+3=3$ $\therefore m+n=-2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=-4$, $n=2$ ⋯ ❶

$\therefore v=6t^2-8t+2=2(3t-1)(t-1)$

즉 점 P가 $t=1$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=\frac{1}{3}$이다. ⋯ ❷

이때 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=12t-8$

따라서 $t=\frac{1}{3}$일 때 점 P의 가속도는

$4-8=-4$ ⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ m, n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 P가 $t=1$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각을 구할 수 있다.	30 %
❸ 가속도를 구할 수 있다.	30 %

유형 13 정지하는 물체의 속도와 움직인 거리 본책 111쪽

움직이는 물체가 제동을 건 후 t초 동안 움직인 거리를 x m라 할 때

① 제동을 건 지 t초 후의 속도 ➡ $\frac{dx}{dt}$ m/s

② 물체가 정지할 때의 속도 ➡ 0

0701 열차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=12-0.8t$

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$12-0.8t=0$ $\therefore t=15$

따라서 15초 동안 열차가 움직인 거리는

$12\times15-0.4\times15^2=90$ (m)

답 90 m

0702 자동차가 브레이크를 밟은 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면 $v=\frac{dx}{dt}=36-9t$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$36-9t=0$ $\therefore t=4$

따라서 브레이크를 밟은 후 자동차가 정지할 때까지 걸린 시간은 4초이다.

답 ③

0703 기차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=27-0.9t$

기차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$27-0.9t=0$ $\therefore t=30$ ⋯ ❶

이때 30초 동안 기차가 움직인 거리는

$27\times30-0.45\times30^2=405$ (m)

따라서 목적지로부터 전방 405 m의 지점에서 제동을 걸어야 하므로 $a=405$ ⋯ ❷

답 405

채점 기준	비율
❶ 기차가 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 14 위로 던진 물체의 위치와 속도 본책 111쪽

지면에서 지면과 수직하게 위로 던진 물체의 t초 후의 높이를 h m라 할 때

① t초 후의 물체의 속도 ➡ $\frac{dh}{dt}$ m/s

② 최고 지점에 도달했을 때의 속도 ➡ 0

0704 로켓의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dh}{dt}=20-10t$

최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$20-10t=0$ $\therefore t=2$

따라서 2초 후 로켓의 지면으로부터의 높이는

$20\cdot2-5\cdot2^2=20$ (m)

답 ②

0705 물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $h=0$에서

$30+25t-5t^2=0$, $t^2-5t-6=0$

$(t+1)(t-6)=0$ $\therefore t=6$ ($\because t\geq0$) ⋯ ❶

물체의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dh}{dt}=25-10t$ ⋯ ❷

$t=6$일 때 물체의 속도는 $25-60=-35\ (\text{m/s})$ ⋯ ❸

따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속력은 $35\ \text{m/s}$이다. ⋯ ❹

답 $35\ \text{m/s}$

채점 기준	비율
❶ 물체가 지면에 떨어질 때의 시각을 구할 수 있다.	40 %
❷ t초 후의 속도를 구할 수 있다.	30 %
❸ 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도를 구할 수 있다.	20 %
❹ 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속력을 구할 수 있다.	10 %

0706 물체의 t초 후의 속도를 $v\ \text{m/s}$라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=a-10t$$

최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$$a-10t=0 \qquad \therefore t=\frac{a}{10}$$

즉 $t=\frac{a}{10}$일 때 물체의 지면으로부터의 높이가 최대가 되므로

$$a\cdot\frac{a}{10}-5\cdot\left(\frac{a}{10}\right)^2\geq 80, \qquad \frac{a^2}{20}\geq 80$$

$$a^2\geq 1600 \qquad \therefore a\geq 40\ (\because a>0)$$

따라서 양수 a의 최솟값은 40이다. 답 40

참고 물체가 지면으로부터의 높이가 최소 80 m인 지점까지 도달하려면
(물체가 최고 지점에 도달했을 때의 높이) ≥ 80

유형 15 속도의 그래프의 해석

본책 112쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프에서
① $v(t)$의 그래프가 t축과 $t=a$에서 만나고 $t=a$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌면
➡ 점 P는 $t=a$에서 운동 방향을 바꾼다.
② $v(t)$가 증가하는 구간
➡ 점 P의 가속도는 양의 값이다.
③ $v(t)$가 감소하는 구간
➡ 점 P의 가속도는 음의 값이다.

0707 ① 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $v'(t)$이고, $v'(a)<0$이므로 $t=a$일 때 가속도는 음의 값이다.

④ $t=f$에서 $v(t)>0$이므로 점 P는 움직이고 있다.

⑤ $t=d$와 $t=h$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
따라서 $0<t<i$에서 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다.

답 ④

0708 ㄱ. $v(a)>0$, $v(c)<0$이므로 $t=a$일 때와 $t=c$일 때 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

ㄴ. $t=c$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $t=c$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.

ㄷ. 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $v'(t)$이고, $v'(d)>0$이므로 $t=d$일 때 점 P의 가속도는 양의 값이다.

ㄹ. $v'(t)=0$이면 가속도가 0이고, $v'(a)=0$, $v'(c)=0$이므로 점 P의 가속도가 0이 되는 순간이 2번 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

유형 16 위치의 그래프의 해석

본책 112쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$의 그래프에서
① $x'(t)>0$인 구간 ➡ 점 P는 양의 방향으로 움직인다.
② $x'(t)=0$일 때 ➡ 점 P는 정지하거나 운동 방향을 바꾼다.
③ $x'(t)<0$인 구간 ➡ 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

0709 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하자.

ㄱ. $0<k<a$일 때, $v(k)=x'(k)>0$이고 $v(a)=x'(a)=0$이므로

$$v(k)>v(a)$$

따라서 $0<t<b$에서 점 P의 속도는 $t=a$일 때 최대가 아니다.

ㄴ. $a<t<c$에서 $\underbrace{v(t)=x'(t)<0}_{\text{점 P는 음의 방향으로 움직인다.}}$이므로 $t=b$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.

ㄷ. $v(c)=x'(c)=0$이므로 $t=c$일 때 점 P의 속도는 0이다.

ㄹ. $0<t<d$에서 $t=c$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

0710 주어진 그래프에서 점 P가 원점을 지나는 시각은 $t=c$ 또는 $t=e$이고, 이 중 처음으로 원점을 지나는 시각은 $t=c$이므로 구하는 속도는 $x'(c)$의 값과 같다.

답 ⑤

0711 $x(t)$는 t에 대한 삼차식이고, $x(t)$의 그래프가 t축과 만나는 점의 t좌표가 각각 0, 2, 5이므로

$$x(t)=kt(t-2)(t-5)=kt^3-7kt^2+10kt\ (k>0)$$

라 할 수 있다.

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=x'(t)=3kt^2-14kt+10k,$$

$$a=\frac{dv}{dt}=6kt-14k$$

따라서 가속도가 0이 되는 시각은 $a=0$에서

$$6kt-14k=0 \qquad \therefore t=\frac{7}{3}$$

답 $\frac{7}{3}$

0712 ㄱ. 두 점 P, Q는 $t=1$, $t=8$일 때 만나므로 적어도 2번 만난다.

ㄴ. $f(t)$의 그래프는 t의 값이 커질수록 접선의 기울기가 점점 작아지므로 $f'(4)>f'(8)$이다.
따라서 점 P의 $t=4$일 때의 속력은 $t=8$일 때의 속력보다 빠르다.

ㄷ. $4\leq t\leq 8$일 때, 두 점 P, Q가 움직인 거리는 각각

$$f(8)-f(4),\ g(8)-g(4)$$

주어진 그래프에서

$$g(8)-g(4)>f(8)-f(4)$$

이므로 점 Q가 움직인 거리가 점 P가 움직인 거리보다 길다.

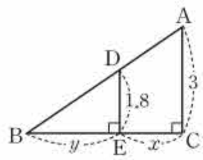
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

유형 **17~19** **시각에 대한 변화율** 본책 113, 114쪽

어떤 물체의 시각 t에서의 길이가 l, 넓이가 S, 부피가 V일 때, 시각 t에서의 변화율 구하기
(i) t초 후의 길이, 넓이, 부피 등의 관계식을 세운다.
(ii) t에 대하여 미분한다.
① 길이의 변화율 ➡ $\frac{dl}{dt}$ ② 넓이의 변화율 ➡ $\frac{dS}{dt}$
③ 부피의 변화율 ➡ $\frac{dV}{dt}$
(iii) (ii)에서 구한 식에 주어진 조건을 만족시키는 t의 값을 대입한다.

0713 t초 동안 사람이 움직인 거리를 x m, 사람의 그림자의 길이를 y m라 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC \backsim \triangle DBE$ (AA 닮음)이므로

$3 : 1.8 = (x+y) : y$

$3y = 1.8x + 1.8y$, $\quad 1.2y = 1.8x$

$\therefore y = \frac{3}{2}x$

그런데 $x = 2t$이므로

$y = 3t \qquad \therefore \frac{dy}{dt} = 3$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 3 m/s이다.

답 ④

0714 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2t, 0)$, $(0, t)$이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{2t} + \frac{y}{t} = 1$ ······ ㉠ ··· ❶

이때 직선 ㉠과 직선 $y = x$의 교점 R의 x좌표는 $\frac{x}{2t} + \frac{x}{t} = 1$에서

$\frac{3x}{2t} = 1 \qquad \therefore x = \frac{2}{3}t$

$\therefore R\left(\frac{2}{3}t, \frac{2}{3}t\right)$ ··· ❷

$\overline{OR}$의 길이를 l이라 하면

$l = \sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^2 + \left(\frac{2}{3}t\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}t \ (\because t > 0)$

$\therefore \frac{dl}{dt} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 $\overline{OR}$의 길이의 변화율은 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다. ··· ❸

답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ $\overline{OR}$의 길이의 변화율을 구할 수 있다.	50 %

SSEN 특강 **x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식**

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

0715 t초 후의 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이는 $10t$ cm이므로 원의 넓이를 $S\ \mathrm{cm}^2$라 하면

$S = \pi \cdot (10t)^2 = 100\pi t^2$

$\therefore \frac{dS}{dt} = 200\pi t$

따라서 $t = 2$일 때 원의 넓이의 변화율은

$200\pi \cdot 2 = 400\pi\ (\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

$\therefore a = 400$

답 400

0716 t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(10+2t)$ cm이므로 정사각형의 넓이를 $S\ \mathrm{cm}^2$라 하면

$S = (10+2t)^2 = 4t^2 + 40t + 100$

$\therefore \frac{dS}{dt} = 8t + 40$

정사각형의 넓이가 400 cm^2가 될 때, 한 변의 길이는 20 cm이므로

$10 + 2t = 20 \qquad \therefore t = 5$

따라서 $t = 5$일 때 정사각형의 넓이의 변화율은

$8 \cdot 5 + 40 = 80\ (\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

답 ④

0717 t초 후의 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 길이는 각각 $2t$, $10-2t$이므로 두 정사각형의 넓이의 합을 S라 하면

$S = (2t)^2 + (10-2t)^2$

$= 8t^2 - 40t + 100\ (0 < t < 5)$ ··· ❶

$\therefore \frac{dS}{dt} = 16t - 40$ ··· ❷

따라서 $t = 3$일 때 두 정사각형의 넓이의 합의 변화율은

$16 \cdot 3 - 40 = 8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 넓이의 합 S를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 넓이의 합의 변화율을 구할 수 있다.	30 %
❸ $t=3$일 때 넓이의 합의 변화율을 구할 수 있다.	30 %

0718 t초 후의 $\overline{PB}$, $\overline{BQ}$의 길이는 각각 $6-t$, $2t$이므로 $\triangle PBQ$의 넓이를 S라 하면

$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{BQ} \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot (6-t) \cdot 2t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 3\sqrt{3}t\ (0 < t < 3)$

$\therefore \frac{dS}{dt} = -\sqrt{3}t + 3\sqrt{3}$

따라서 $t = \frac{3}{2}$일 때 $\triangle PBQ$의 넓이의 변화율은

$-\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} + 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

SSEN 특강 **삼각형의 넓이**

삼각형 ABC의 두 변의 길이가 각각 a, b이고 그 끼인각의 크기가 $\theta\,(0° < \theta < 90°)$일 때 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ab\sin\theta$

0719 t초 후의 고무풍선의 반지름의 길이는 $\left(2+\underbrace{\frac{1}{2}}_{5\text{ mm}=\frac{5}{10}\text{ cm}}t\right)$ cm이므로 고무풍선의 부피를 V cm³라 하면

$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot\left(2+\frac{1}{2}t\right)^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{8}t^3+\frac{3}{2}t^2+6t+8\right)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{8}t^2+3t+6\right)$$

따라서 $t=4$일 때 고무풍선의 부피의 변화율은

$$\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{3}{8}\cdot4^2+3\cdot4+6\right)=32\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$$

답 ④

0720 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면

$$r=3+t,\ h=6-t$$

원기둥의 부피를 V cm³라 하면

$$V=\pi r^2h=\pi(3+t)^2(6-t)\ (0\le t<6)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=2\pi(3+t)(6-t)+\pi(3+t)^2\cdot(-1)$$

$$=3\pi(3+t)(3-t) \quad \cdots ❶$$

$\frac{dV}{dt}=0$에서 $\quad t=3\ (\because\ 0\le t<6)$ $\cdots$ ❷

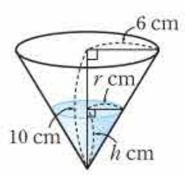
따라서 구하는 부피는

$$\pi\cdot(3+3)^2\cdot(6-3)=108\pi\ (\text{cm}^3) \quad \cdots ❸$$

답 108π cm³

채점 기준	비율
❶ 원기둥의 부피의 변화율을 구할 수 있다.	50 %
❷ 원기둥의 부피의 변화율이 0이 될 때의 시각을 구할 수 있다.	20 %
❸ 원기둥의 부피를 구할 수 있다.	30 %

0721 오른쪽 그림과 같이 그릇에 담긴 물의 깊이를 h cm, 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$$r:h=6:10 \qquad \therefore r=\frac{3}{5}h$$

이때 t초 동안 수면의 높이는 $\frac{20}{9}t$ cm만큼 상승하므로

$$h=\frac{20}{9}t$$

물의 부피를 V cm³라 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{3}{5}h\right)^2\cdot h=\frac{3}{25}\pi h^3$$

$$=\frac{3}{25}\pi\cdot\left(\frac{20}{9}t\right)^3=\frac{320}{243}\pi t^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{320}{81}\pi t^2$$

$h=5$일 때 $5=\frac{20}{9}t$에서 $t=\frac{9}{4}$이므로 구하는 물의 부피의 변화율은

$$\frac{320}{81}\pi\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^2=20\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$$

답 ②

0722 1st $f(x)$, $f'(x)$를 미정계수를 이용하여 나타낸다.

$g(x)=f(x)+|f'(x)|$에 $x=0$을 대입하면

$$g(0)=f(0)+|f'(0)|$$

이므로 조건 (가)에서 $\quad |f'(0)|=0 \qquad \therefore f'(0)=0$

즉 $f(0)=0$, $f'(0)=0$이므로 $f(x)$는 x^2을 인수로 갖는다.

이때 조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$의 양의 실근을 a라 하면

$$f(x)=x^2(x-a)\ (a>0)$$

로 놓을 수 있으므로

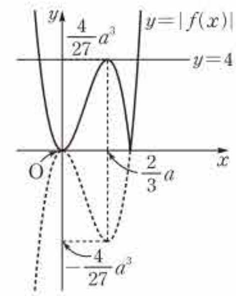
$$f'(x)=2x(x-a)+x^2=x(3x-2a)$$

2nd 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형을 그린다.

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}a$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{4}{27}a^3$	↗

즉 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



3rd a의 값을 구한다.

이때 조건 (다)에서 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=4$의 교점의 개수가 3이므로

$$\frac{4}{27}a^3=4, \qquad a^3=27 \qquad \therefore a=3$$

4th $g(3)$의 값을 구한다.

따라서 $f(x)=x^2(x-3)$, $f'(x)=3x(x-2)$이므로

$$g(3)=f(3)+|f'(3)|=0+|9|=9$$

답 ①

SSEN 특강 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프

① $y=|f(x)|$의 그래프
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 그린다.

② $y=f(|x|)$의 그래프
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $x<0$인 부분은 $x\ge0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동하여 그린다.

③ $|y|=f(x)$의 그래프
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분은 $y\ge0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 그린다.

④ $|y|=f(|x|)$의 그래프
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $x\ge0$, $y\ge0$인 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동하여 그린다.

0723 1st ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $a=b=c$이면 $\quad f'(x)=(x-a)^3$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(a)$이다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

이때 $f(a)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.

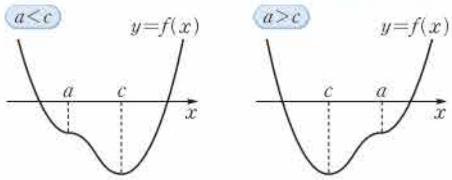
(2nd) ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $a=b\neq c$이면 $\quad f'(x)=(x-a)^2(x-c)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=a$ 또는 $x=c$

함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극소이고, $f(a)<0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

$x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.



따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

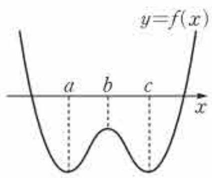
(3rd) ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $a<b<c$이면 $f'(x)=0$에서

$x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $f(b)<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

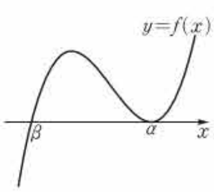
답 ⑤

0724 (1st) 조건 ㈎를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.

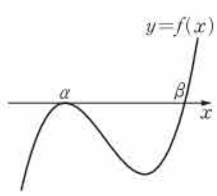
함수 $f(x)$의 삼차항의 계수를 a라 하고 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β (α는 중근)라 하면 조건 ㈎에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

(i) $a>0$일 때

ⓐ 극솟값이 0인 경우

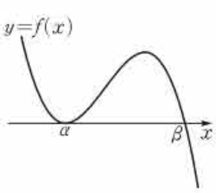


ⓑ 극댓값이 0인 경우

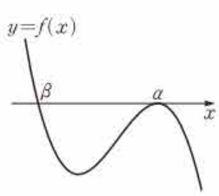


(ii) $a<0$일 때

ⓒ 극솟값이 0인 경우



ⓓ 극댓값이 0인 경우



(2nd) 조건 ㈏를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.

한편 조건 ㈏에서 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 두 방정식

$x-f(x)=\alpha$, $x-f(x)=\beta$

의 서로 다른 실근의 개수의 합이 3이어야 한다.

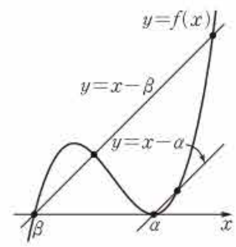
이때 $x-f(x)=\alpha$, $x-f(x)=\beta$에서

$f(x)=x-\alpha$, $f(x)=x-\beta$

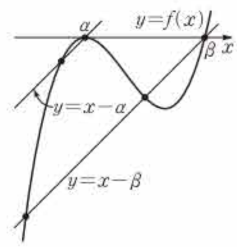
이므로 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$의 교점의 개수가 각각 1, 2 또는 2, 1이어야 한다.

(i) $a>0$일 때

ⓐ 극솟값이 0인 경우



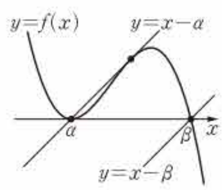
ⓑ 극댓값이 0인 경우



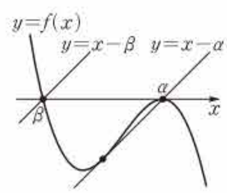
$y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$의 교점의 개수가 각각 1, 2 또는 2, 1인 경우가 존재하지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

ⓒ 극솟값이 0인 경우



ⓓ 극댓값이 0인 경우

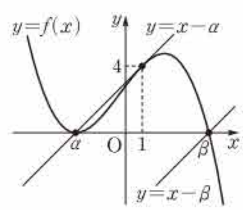


위의 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$의 교점의 개수가 각각 2, 1이면 교점의 개수의 합이 3이다.

(i), (ii)에서 $\quad a<0$

(3rd) $f(0)$의 값을 구한다.

이때 $f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 직선 $y=x-\alpha$와 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 4)$에서 접하므로

$4=1-\alpha \qquad \therefore \alpha=-3$

$f(x)=a(x+3)^2(x-\beta)\,(a<0)$라 하면 $f(1)=4$이므로

$16a(1-\beta)=4 \qquad \therefore 4a(1-\beta)=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $f'(x)=2a(x+3)(x-\beta)+a(x+3)^2$이므로 $f'(1)=1$에서

$8a(1-\beta)+16a=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2+16a=1, \qquad 16a=-1 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{16}$

$a=-\dfrac{1}{16}$을 ㉠에 대입하면

$-\dfrac{1}{4}(1-\beta)=1, \qquad 1-\beta=-4 \qquad \therefore \beta=5$

즉 $f(x)=-\dfrac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$이므로

$f(0)=-\dfrac{1}{16}\cdot 9\cdot(-5)=\dfrac{45}{16}$

(4th) $p+q$의 값을 구한다.

따라서 $p=16$, $q=45$이므로

$p+q=61$

답 61

0725 (1st) 직선 l_p의 방정식을 구한다.

$y=x^2$에서 $\quad y'=2x$

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P(p,\ p^2)(p\neq0)$에서의 접선의 기울기는 $2p$이므로 점 P를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2p}$인 직선 l_p의 방정식은

$$y-p^2=-\frac{1}{2p}(x-p) \qquad \therefore y=-\frac{1}{2p}x+\frac{1}{2}+p^2$$

(2nd) 함수 $y=2p^3-p$의 극댓값, 극솟값을 구한다.

이 직선이 점 $(a,\ 1)$을 지나므로

$$1=-\frac{a}{2p}+\frac{1}{2}+p^2 \qquad \therefore a=2p^3-p$$

$f(p)=2p^3-p$라 하면

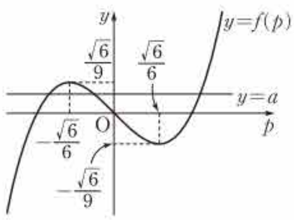
$$f'(p)=6p^2-1=6\left(p+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(p-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$f'(p)=0$에서 $\quad p=-\frac{\sqrt{6}}{6}$ 또는 $p=\frac{\sqrt{6}}{6}$

p	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\cdots$
$f'(p)$	+	0	−	0	+
$f(p)$	↗	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	↘	$-\frac{\sqrt{6}}{9}$	↗

(3rd) 실수 a의 값의 범위를 구한다.

따라서 함수 $y=f(p)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른 직선 l_p가 세 개 존재하기 위한 실수 a의 값의 범위는



$$-\frac{\sqrt{6}}{9}<a<\frac{\sqrt{6}}{9}$$

답 $-\frac{\sqrt{6}}{9}<a<\frac{\sqrt{6}}{9}$

참고 $p=0$일 때, 직선 l_p의 방정식은 $x=0$이고 이 직선은 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $a=0$, 즉 $a=2p^3-p$를 만족시킨다.

0726 (1st) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하고 a, b, c의 관계식을 구한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

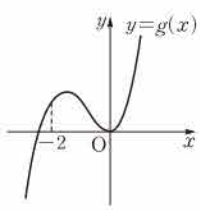
조건 (가)에서 $f(0)+f'(0)=0$이므로

$$c+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$g(x)=f(x)+f'(x)$라 하면

$$g(x)=x^3+(a+3)x^2+(2a+b)x$$

$g(0)=0$이고, 조건 (나)에 의하여 $x\geq-2$에서 $g(x)\geq0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이므로

$g'(x)=3x^2+2(a+3)x+2a+b$에서

$$g'(0)=2a+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

(2nd) a의 값을 구한다.

따라서 $g(x)=x^3+(a+3)x^2=x^2(x+a+3)$이므로 $g(x)=0$에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=-a-3$$

$x\geq-2$에서 $g(x)\geq0$이 성립하려면

$$-a-3\leq-2 \qquad \therefore a\geq-1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

한편 ㉠, ㉡에서 $b=-2a$, $c=2a$이므로

$$f(x)=x^3+ax^2-2ax+2a$$

조건 (다)에서 $f(2)\leq6$이므로

$$f(2)=8+4a-4a+2a\leq6 \qquad \therefore a\leq-1 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣에서 $\quad a=-1$

(3rd) $f(3)$의 값을 구한다.

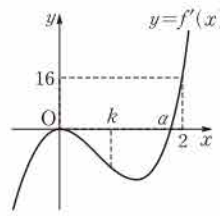
따라서 $f(x)=x^3-x^2+2x-2$이므로

$$f(3)=27-9+6-2=22$$

답 ②

0727 (1st) ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

조건 (가), (나)에 의하여 삼차함수 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 x축과 열린구간 $(0,\ 2)$에서 한 점에서 만나므로 방정식 $f'(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다.

(2nd) ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 구간 $(0,\ 2)$에서 만나는 점의 x좌표를 α라 하면 $f'(x)=0$에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=\alpha$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	−	0	+
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고, 극댓값은 갖지 않는다.

(3rd) ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 $f(x)=x^3(x-a)\ (a>0)$라 할 수 있다.

$f(x)=x^4-ax^3$에서 $f'(x)=4x^3-3ax^2$이고 조건 (가)에서 $f'(2)=16$이므로

$$32-12a=16 \qquad \therefore a=\frac{4}{3}$$

즉 $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3$이므로

$$f'(x)=4x^3-4x^2=4x^2(x-1)$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-\frac{1}{3}$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq-\frac{1}{3}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0728 (1st) a의 값을 구한다.

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=a$에서 미분가능하다.

즉 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$$

$$0=(a-1)^2(2a+1)$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=-\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & (x<a) \\ 6x(x-1) & (x>a) \end{cases}\text{에서}$$

$$\lim_{x\to a-} f'(x)=\lim_{x\to a+} f'(x)$$

$\{(x-1)^2(2x+1)\}'$
$=2(x-1)(2x+1)+2(x-1)^2$
$=6x(x-1)$

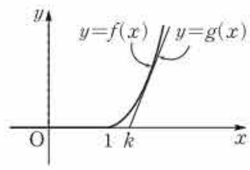
$0=6a(a-1)$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$

2nd k의 값의 범위를 구한다.

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$이려면 오른쪽 그림과 같이 $x\geq1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 $y=g(x)$의 그래프와 접해야 한다.



즉 $x\geq1$에서 부등식 $(x-1)^2(2x+1)\geq12(x-k)$가 항상 성립해야 하고

$2x^3-3x^2-12x+12k+1\geq0$

이므로 $h(x)=2x^3-3x^2-12x+12k+1\ (x\geq1)$이라 하면

$h'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=2\ (\because x\geq1)$

따라서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $12k-19$이므로 $x\geq1$에서 $h(x)\geq0$이려면

x	1	⋯	2	⋯
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	$12k-19$	↗

$12k-19\geq0$

$\therefore k\geq\dfrac{19}{12}$

3rd $a+p+q$의 값을 구한다.

즉 k의 최솟값이 $\dfrac{19}{12}$이므로 $p=12,\ q=19$

$\therefore a+p+q=32$

답 32

다른 풀이 조건 (나)를 만족시키면서 k가 최솟값을 가지려면 $x\geq1$에서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 접해야 한다.

즉 $x\geq1$에서 $y=(x-1)^2(2x+1)$의 그래프와 직선 $y=12(x-k)$가 접해야 한다.

이때 $h(x)=(x-1)^2(2x+1)$이라 하면

$h'(x)=6x(x-1)$

이므로 접점의 좌표를 $(t,\ (t-1)^2(2t+1))$이라 하면 접선의 기울기는

$h'(t)=6t(t-1)$

직선 $y=12(x-k)$의 기울기가 12이므로 $6t(t-1)=12$에서

$t(t-1)=2,\quad t^2-t-2=0,\quad (t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t\geq1)$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 5)$이고 직선 $y=12(x-k)$가 이 점을 지나므로

$5=12(2-k),\quad 12k=19$

$\therefore k=\dfrac{19}{12}$

즉 k의 최솟값은 $\dfrac{19}{12}$이다.

0729 **1st** $h(x)=f(x)-g(x)$라 하고 $h(x)$, $h'(x)$를 구한다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 y축에서 만나므로

$f(0)=g(0)$

또 x좌표가 3인 점에서의 접선이 서로 일치하므로

$f(3)=g(3),\ f'(3)=g'(3)$

즉 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로

$h(0)=0,\ h(3)=0,\ h'(3)=0$

이때 $h(x)$는 삼차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$h(x)=x(x-3)^2=x^3-6x^2+9x$

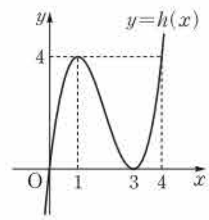
$\therefore h'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

2nd $x\geq a$일 때 $f(x)\geq g(x)+4$가 항상 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구한다.

$h'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	⋯	1	⋯	3	⋯
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $h(x)=4$를 만족시키는 x의 값은 $x^3-6x^2+9x=4$에서

$x^3-6x^2+9x-4=0$

$(x-1)^2(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 $x\geq4$일 때, 부등식 $h(x)\geq4$, 즉 $f(x)\geq g(x)+4$가 항상 성립하므로 구하는 실수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

0730 **1st** 점 R의 x좌표를 t에 대한 식으로 나타낸다.

$y=x^2$에서 $y'=2x$

접점 Q의 좌표를 $(a,\ a^2)\ (a\neq0)$이라 하면 점 R의 좌표는 $(a,\ 0)$이고 점 Q에서의 접선의 방정식은 $a=0$이면 접선은 직선 $y=0$이다.

$y-a^2=2a(x-a)\quad \therefore y=2ax-a^2$

이 직선이 점 $P(3t^3+kt^2,\ 0)$을 지나므로

$0=2a(3t^3+kt^2)-a^2,\quad a(a-6t^3-2kt^2)=0$

$\therefore a=6t^3+2kt^2\ (\because a\neq0)$

2nd 상수 k의 값을 구한다.

점 R가 시각 t에서 x축 위를 움직이는 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{da}{dt}=18t^2+4kt$

$t=1$일 때 $v=38$이므로 $18+4k=38$

$4k=20\quad \therefore k=5$

답 ⑤

0731 **1st** b의 값을 구한다.

$f(t)=at^3+bt^2+ct$에서

$g(t)=f'(t)=3at^2+2bt+c$

모든 실수 t에 대하여 $3f(t)=tg(t)+2ct$가 성립하므로

$3(at^3+bt^2+ct)=t(3at^2+2bt+c)+2ct$

$\therefore 3at^3+3bt^2+3ct=3at^3+2bt^2+3ct$

항등식의 성질에 의하여 $3b=2b$이므로 $\quad b=0$

$\therefore\ g(t)=3at^2+c$

2nd a, c의 값을 구한다.

한편 점 P가 시각 $t=1$에서 운동 방향을 바꾸므로 $g(1)=0$에서

$3a+c=0 \qquad \therefore\ c=-3a \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $g'(t)=6at$이므로 $g'(1)=12$에서

$6a=12 \qquad \therefore\ a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$c=-6$

3rd 점 P의 시각 $t=2$에서의 속도를 구한다.

따라서 $g(t)=6t^2-6$이므로 점 P의 시각 $t=2$에서의 속도는

$g(2)=24-6=18$

답 ④

0732 1st 태풍의 영향권에서 벗어나는 순간의 시각을 구한다.

t시간 후 태풍의 영향권은 반지름의 길이가 $(60+5t)$ km인 원이고, 태풍의 중심이 움직인 거리는 $40t$ km이므로 A 지점이 태풍의 영향권에서 벗어나는 순간의 시각은

$\underline{40t-(60+5t)}=500, \qquad 35t=560$

└(태풍의 중심이 이동한 거리)
−(태풍의 영향권의 반지름의 길이)

$\therefore\ t=16$

2nd 상수 a의 값을 구한다.

이때 태풍의 영향권의 넓이를 $S(t)$ km^{2}라 하면

$S(t)=\pi(60+5t)^2=\pi(25t^2+600t+3600)$

$\therefore\ S'(t)=\pi(50t+600)$

따라서 $t=16$일 때 태풍의 영향권의 넓이의 변화율은

$\pi\cdot(50\cdot16+600)=1400\pi$ (km^2/h)

$\therefore\ a=1400$

답 1400

0733 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 t의 값의 범위에 따라 구간 $[0,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

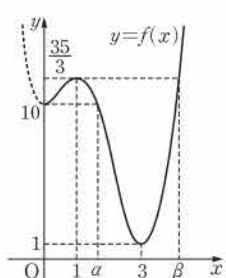
풀이 $f(x)=x^4-\dfrac{16}{3}x^3+6x^2+10$에서

$f'(x)=4x^3-16x^2+12x=4x(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	10	↗	$\frac{35}{3}$	↘	1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $\cdots$ ❶



이때 $f(x)=10$을 만족시키는 x의 값을 $\alpha\,(1<\alpha<3)$, $f(x)=\dfrac{35}{3}$를 만족시키는 x의 값을 $\beta\ (\beta>3)$라 하자.

(i) $1\le t<\alpha$일 때, 구간 $[0,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\dfrac{35}{3}$, 최솟값은 10이므로

$g(t)=\dfrac{35}{3}-10=\dfrac{5}{3}$

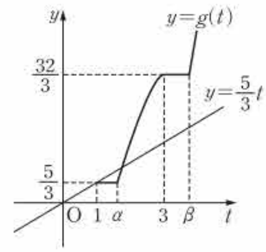
(ii) $\alpha\le t<3$일 때, 구간 $[0,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\dfrac{35}{3}$, 최솟값은 $f(t)$이므로

$g(t)=\dfrac{35}{3}-f(t)=-t^4+\dfrac{16}{3}t^3-6t^2+\dfrac{5}{3}$

(iii) $3\le t<\beta$일 때, 구간 $[0,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\dfrac{35}{3}$, 최솟값은 1이므로 $\quad g(t)=\dfrac{35}{3}-1=\dfrac{32}{3}$

(iv) $t\ge\beta$일 때, 구간 $[0,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(t)$, 최솟값은 1이므로 $\quad g(t)=f(t)-1=t^4-\dfrac{16}{3}t^3+6t^2+9$

이상에서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $\cdots$ ❷



한편 $3g(t)-5t=0$에서

$g(t)=\dfrac{5}{3}t$이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{5}{3}t$의 교점의 개수와 같다.

위의 그림에서 그 교점은 2개이므로 구하는 서로 다른 실근의 개수는 2이다. $\cdots$ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ $y=g(t)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❸ 방정식 $3g(t)-5t=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구할 수 있다.	30 %

참고 $f(6)=370>\dfrac{35}{3}=f(\beta)$이므로 $\quad 3<\beta<6<\dfrac{32}{5}$

따라서 직선 $y=\dfrac{5}{3}t$에서 $t=\beta$일 때 $\quad \dfrac{5}{3}\cdot\beta<\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{32}{5}=\dfrac{32}{3}$

0734 전략 사차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 생각해 본다.

풀이 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. $\cdots$ ❶

$f'(x)=4x^3-12x+2a$이므로 $g(x)=4x^3-12x+2a$라 하면

$g'(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$g(-1)g(1)<0$이어야 하므로 $\cdots$ ❷

$(2a+8)(2a-8)<0, \qquad (a+4)(a-4)<0$

$\therefore\ -4<a<4$ $\cdots$ ❸

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 a의 최댓값은 3이다. $\cdots$ ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	30 %
❷ 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❹ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0735 전략 ($f(x)$의 최솟값)$\geq$($g(x)$의 최댓값)이어야 한다.

풀이 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) \geq g(x_2)$가 성립하려면 ($f(x)$의 최솟값)$\geq$($g(x)$의 최댓값)이어야 한다. ··· ❶

$f(x)=x^4+x^2-6x$에서

$$f'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$$

$f'(x)=0$에서

$$x=1\ (\because 2x^2+2x+3>0)$$

즉 함수 $f(x)$의 최솟값은 -4이다. ··· ❷

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗

한편

$$g(x)=-2x^2-8x+a$$
$$=-2(x+2)^2+8+a$$

이므로 함수 $g(x)$의 최댓값은 $8+a$이다. ··· ❸

따라서 $-4 \geq 8+a$이므로 $a \leq -12$

즉 실수 a의 최댓값은 -12이다. ··· ❹

답 -12

채점 기준	비율
❶ $f(x_1) \geq g(x_2)$가 성립하기 위한 조건을 알 수 있다.	20 %
❷ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $g(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %
❹ 실수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0736 전략 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 구한다.

풀이 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$$v_P=f'(t)=4t^3-18t^2+24t,\ v_Q=g'(t)=m \quad \cdots ❶$$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 세 번 있으려면 $v_P=v_Q$를 만족시키는 t의 값이 3개 존재해야 하므로 방정식 $4t^3-18t^2+24t=m$이 음이 아닌 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. ··· ❷

$h(t)=4t^3-18t^2+24t\ (t \geq 0)$라 하면

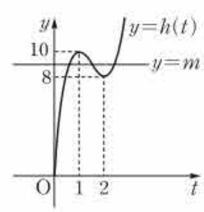
$$h'(t)=12t^2-36t+24=12(t-1)(t-2)$$

$h'(t)=0$에서

$$t=1 \text{ 또는 } t=2$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(t)$	0	↗	10	↘	8	↗

따라서 함수 $y=h(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❸



곡선 $y=h(t)$와 직선 $y=m$이 서로 다른 세 점에서 만나려면

$$8<m<10 \quad \cdots ❹$$

답 $8<m<10$

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 속도를 구할 수 있다.	20 %
❷ 방정식 $v_P=v_Q$가 음이 아닌 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	20 %
❸ $y=h(t)$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❹ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

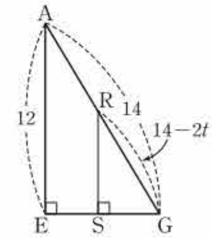
0737 전략 t초 후의 여러 선분의 길이를 구하여 두 사면체의 부피의 합을 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 t초 후 $\overline{FP}=\overline{HQ}=t$, $\overline{AR}=2t$이고

$\overline{AG}=\sqrt{4^2+6^2+12^2}=14$이므로

$$\overline{PG}=6-t,\ \overline{GQ}=4-t,\ \overline{RG}=14-2t\ (0<t<4)$$

오른쪽 그림과 같이 점 R에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 S라 하면



$\triangle AEG \backsim \triangle RSG$(AA 닮음)이므로

$$\overline{AE}:\overline{RS}=\overline{AG}:\overline{RG}$$
$$12:\overline{RS}=14:(14-2t)$$
$$14\overline{RS}=12(14-2t)$$
$$\therefore \overline{RS}=12-\frac{12}{7}t$$

이때 점 R에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 T라 하면

$$\overline{RT}=12-\left(12-\frac{12}{7}t\right)=\frac{12}{7}t \quad \cdots ❶$$

두 사면체 RBCD, RPGQ의 부피의 합을 V라 하면

$$V=\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\right)\cdot\frac{12}{7}t}_{\frac{1}{3}\cdot\triangle BCD\cdot\overline{RT}}$$
$$+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot(6-t)\cdot(4-t)\right\}\cdot\left(12-\frac{12}{7}t\right)}_{\frac{1}{3}\cdot\triangle PGQ\cdot\overline{RS}}$$
$$=\frac{48}{7}t+\left(-\frac{2}{7}t^3+\frac{34}{7}t^2-\frac{188}{7}t+48\right)$$
$$=-\frac{2}{7}t^3+\frac{34}{7}t^2-20t+48 \quad \cdots ❷$$
$$\therefore \frac{dV}{dt}=-\frac{6}{7}t^2+\frac{68}{7}t-20 \quad \cdots ❸$$

따라서 $t=3$일 때 두 사면체의 부피의 합의 변화율은

$$-\frac{54}{7}+\frac{204}{7}-20=\frac{10}{7} \quad \cdots ❹$$

답 $\frac{10}{7}$

채점 기준	비율
❶ 여러 선분의 길이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 부피의 합 V를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ 부피의 합의 변화율을 구할 수 있다.	20 %
❹ $t=3$일 때 부피의 합의 변화율을 구할 수 있다.	20 %

07 부정적분

0738 $(6x)'=6$이므로 $\int 6\,dx=6x+C$

답 $6x+C$

0739 $(x^3)'=3x^2$이므로 $\int 3x^2\,dx=x^3+C$

답 x^3+C

0740 $(-x^2)'=-2x$이므로 $\int(-2x)dx=-x^2+C$

답 $-x^2+C$

0741 $(x^4)'=4x^3$이므로 $\int 4x^3\,dx=x^4+C$ 답 x^4+C

0742 $f(x)=(2x^2+5x+C)'=4x+5$

답 $f(x)=4x+5$

SSEN 특강 미분법의 공식

① $y=x^n$ (n은 양의 정수) ➡ $y'=nx^{n-1}$
② $y=c$ (c는 상수) ➡ $y'=0$

0743 $f(x)=\left(-\frac{2}{3}x^3+4x+C\right)'$
$=-2x^2+4$ 답 $f(x)=-2x^2+4$

0744 $f(x)=(x^4+3x^3+x+C)'$
$=4x^3+9x^2+1$

답 $f(x)=4x^3+9x^2+1$

0745 $xf(x)=(x^3+x^2+C)'$
$=3x^2+2x$
$\therefore f(x)=3x+2$ 답 $f(x)=3x+2$

0746 $(x-1)f(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x+C\right)'$
$=x^2-1=(x+1)(x-1)$
$\therefore f(x)=x+1$ 답 $f(x)=x+1$

0747 답 x^3

0748 답 x^3+C

0749 $\int x^3\,dx=\frac{1}{4}x^4+C$ 답 $\frac{1}{4}x^4+C$

0750 $\int x^5\,dx=\frac{1}{6}x^6+C$ 답 $\frac{1}{6}x^6+C$

0751 $\int x^{10}\,dx=\frac{1}{11}x^{11}+C$ 답 $\frac{1}{11}x^{11}+C$

0752 $\int x^{100}\,dx=\frac{1}{101}x^{101}+C$ 답 $\frac{1}{101}x^{101}+C$

0753 $\int(3x+2)dx=\int 3x\,dx+\int 2\,dx$
$=3\int x\,dx+\int 2\,dx$
$=\frac{3}{2}x^2+2x+C$ 답 $\frac{3}{2}x^2+2x+C$

0754 $\int(2x^3-x+1)dx=\int 2x^3\,dx-\int x\,dx+\int 1\,dx$
$=2\int x^3\,dx-\int x\,dx+\int 1\,dx$
$=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+x+C$

답 $\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+x+C$

0755 $\int(x+1)^2\,dx=\int(x^2+2x+1)dx$
$=\int x^2\,dx+\int 2x\,dx+\int 1\,dx$
$=\int x^2\,dx+2\int x\,dx+\int 1\,dx$
$=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$

답 $\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$

0756 $\int(x+1)(x^2-x+1)dx=\int(x^3+1)dx$
$=\int x^3\,dx+\int 1\,dx$
$=\frac{1}{4}x^4+x+C$

답 $\frac{1}{4}x^4+x+C$

0757 $\int(x+1)^3\,dx+\int(x-1)^3\,dx$
$=\int(x^3+3x^2+3x+1)dx+\int(x^3-3x^2+3x-1)dx$
$=\int(2x^3+6x)dx=\int 2x^3\,dx+\int 6x\,dx$
$=2\int x^3\,dx+6\int x\,dx$
$=\frac{1}{2}x^4+3x^2+C$

답 $\frac{1}{2}x^4+3x^2+C$

0758 $\int \frac{x^2}{x+1}dx - \int \frac{1}{x+1}dx$

$= \int \frac{x^2-1}{x+1}dx = \int (x-1)dx$

$= \int x\,dx - \int 1\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2 - x + C$ 답 $\frac{1}{2}x^2-x+C$

0759 $f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x-1)dx$

$= \int 2x\,dx - \int 1\,dx = 2\int x\,dx - \int 1\,dx$

$= x^2 - x + C$

$f(0)=3$이므로 $C=3$

$\therefore f(x) = x^2 - x + 3$ 답 $f(x)=x^2-x+3$

0760 $f(x) = \int f'(x)dx = \int (-6x^2+8x-3)dx$

$= -\int 6x^2\,dx + \int 8x\,dx - \int 3\,dx$

$= -6\int x^2\,dx + 8\int x\,dx - \int 3\,dx$

$= -2x^3+4x^2-3x+C$

$f(1)=1$이므로

$-2+4-3+C=1$ $\therefore C=2$

$\therefore f(x) = -2x^3+4x^2-3x+2$

답 $f(x)=-2x^3+4x^2-3x+2$

유형 01 부정적분의 정의 본책 122쪽

$F(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이다.

$\Longleftrightarrow \int f(x)dx = F(x)+C$ (단, C는 적분상수)

$\Longleftrightarrow$ 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$이다.

$\Longleftrightarrow F'(x)=f(x)$

0761 $\int (x-2)f(x)dx = 2x^3-24x+C$에서

$(x-2)f(x) = (2x^3-24x+C)'$

$= 6x^2-24 = 6(x+2)(x-2)$

따라서 $f(x)=6(x+2)$이므로

$f(2)=6\cdot 4=24$ 답 24

0762 $F(x)=3x^2+x-1$이라 하면

$f(x)=F'(x)=(3x^2+x-1)'=6x+1$

$\therefore f(1)=6+1=7$ 답 ⑤

0763 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$F(x)-G(x)=k$ (k는 상수)

라 하면

$k=F(3)-G(3)=9-5=4$

$\therefore F(1)-G(1)=4$ 답 ②

0764 $f(x)=F'(x)=(x^3+ax^2+bx)'=3x^2+2ax+b$이므로

$f(0)=3$에서

$b=3$ ···· ❶

$f'(x)=6x+2a$이므로 $f'(0)=1$에서

$2a=1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ ···· ❷

$\therefore ab=\frac{3}{2}$ ···· ❸

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0765 $F(x)-G(x)=k$ (k는 상수)라 하면

$k=F(0)-G(0)=-2-1=-3$ ···· ❶

이므로

$G(x)=F(x)-k=x^3-x^2+3x-2-(-3)$

$=x^3-x^2+3x+1$ ···· ❷

$\therefore G(1)=1-1+3+1=4$ ···· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $F(x)-G(x)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $G(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $G(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0766 $\int h(x)dx = f(x)g(x)$에서

$h(x)=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=2x(2x^2-4x+1)+(x^2-1)(4x-4)$

$=8x^3-12x^2-2x+4$

따라서 함수 $h(x)$의 일차항의 계수는 -2이다. 답 ③

SSEN 특강 곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$y=f(x)g(x) \Rightarrow y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

유형 02~03 부정적분과 미분의 관계 본책 122, 123쪽

① $\frac{d}{dx}\int \overset{\text{그대로}}{f(x)}dx = f(x)$

② $\int \left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx = \overset{(\text{그대로})+(\text{적분상수})}{f(x)+C}$ (단, C는 적분상수)

0767 $F(x)=\frac{d}{dx}\int xf(x)dx = xf(x) = 5x^3-8x^2$

$\therefore F(2)=40-32=8$ 답 ②

0768 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int(ax^2+x+3)dx=ax^2+x+3$이므로

$ax^2+x+3=x^2+bx+c$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=1,\ b=1,\ c=3$

$\therefore a+b+c=5$

답 ③

0769 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int(4x^2-5x)dx=4x^2-5x$,

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int(3x^3-2)dx=3x^3-2$이므로 주어진 방정식은

$3x^3+4x^2-5x-2=0$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{4}{3}$

답 ①

참고 $3x^3+4x^2-5x-2=0$에서

$(x+2)(3x+1)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=1$

따라서 방정식의 모든 근의 합을

$-2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)+1=-\dfrac{4}{3}$

와 같이 구할 수도 있다.

0770 $\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}(x^3-x)\right\}dx=x^3-x+C$이므로

$F(x)=x^3-x+C$

$F(0)=1$이므로 $\quad C=1$

따라서 $F(x)=x^3-x+1$이므로

$F(3)=27-3+1=25$

답 ⑤

0771 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)dx=f(x)$이므로

$g(x)=x^2+2x$ ··· ❶

$\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$h(x)=x^2+2x+C$

$h(-2)=1$이므로

$4-4+C=1 \quad \therefore C=1$

따라서 $h(x)=x^2+2x+1$이므로 ··· ❷

$g(2)+h(-1)=8+0=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $h(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $g(2)+h(-1)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0772 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int\{f(x)-x^3+2x\}dx=f(x)-x^3+2x$,

$\displaystyle\int\left[\dfrac{d}{dx}\{2f(x)+4x^2\}\right]dx=2f(x)+4x^2+C$

이므로

$f(x)-x^3+2x=2f(x)+4x^2+C$

$\therefore f(x)=-x^3-4x^2+2x-C$

$f(2)=-15$이므로

$-8-16+4-C=-15 \quad \therefore C=-5$

따라서 $f(x)=-x^3-4x^2+2x+5$이므로

$f(0)=5$

답 ④

0773 $\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}(6x-x^2)\right\}dx=6x-x^2+C$이므로

$f(x)=-x^2+6x+C=-(x-3)^2+C+9$

이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 10이므로

$C+9=10 \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=-x^2+6x+1$이므로

$f(2)=-4+12+1=9$

답 9

0774 $\displaystyle\int\left[\dfrac{d}{dx}\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx=\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$

$=f(x)+C_2$

이므로 $\quad F(x)=50x^{50}+49x^{49}+\cdots+2x^2+x+C_2$

$F(0)=5$이므로 $\quad C_2=5$

따라서 $F(x)=50x^{50}+49x^{49}+\cdots+2x^2+x+5$이므로 ··· ❶

$F(1)=50+49+\cdots+2+1+5$

$=\dfrac{50\cdot51}{2}+5$

$=1280$ ··· ❷

답 1280

채점 기준	비율
❶ $F(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $F(1)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 04 부정적분과 미분의 관계를 이용하여 함수 구하기

본책 124쪽

함수 $f(x)$에 대하여

① $\displaystyle\int f(x)dx=g(x)$ 꼴 ➡ 양변을 미분한다.

② $\dfrac{d}{dx}f(x)=g(x)$ 꼴 ➡ 양변을 적분한다.

0775 $\displaystyle\int(x+1)f'(x)dx=x^3-x^2-5x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x+1)f'(x)=3x^2-2x-5$

$=(x+1)(3x-5)$

$\therefore f'(x)=3x-5$

$\therefore f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=\int(3x-5)dx$

$=\dfrac{3}{2}x^2-5x+C$

$f(2)=-1$이므로

$6-10+C=-1 \quad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-5x+3$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{3}{\frac{3}{2}}=2$

답 ④

0776 $\int \{f(x)+2x\}dx=x^3+ax^2+bx+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+2x=3x^2+2ax+b$

$\therefore f(x)=3x^2+2(a-1)x+b$

$f(0)=4$이므로 $\quad b=4$

또 $f'(x)=6x+2(a-1)$이고 $f'(-2)=-4$이므로

$-12+2(a-1)=-4, \quad 2a=10$

$\therefore a=5$

즉 $f(x)=3x^2+8x+4$이므로

$f(3)=27+24+4=55$

답 55

0777 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=4$에서

$\int \left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 4\,dx$

$\therefore f(x)+g(x)=4x+C_1$

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=8x$에서

$\int \left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 8x\,dx$

$\therefore f(x)g(x)=4x^2+C_2$ ··· ❶

이때 $f(0)=3$, $g(0)=-3$이므로

$f(0)+g(0)=C_1=0$, $f(0)g(0)=C_2=-9$

$\therefore f(x)+g(x)=4x$,

$f(x)g(x)=4x^2-9$

$=\underline{(2x+3)(2x-3)}$ $\begin{cases} f(x)=2x+3 \\ g(x)=2x-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=2x-3 \\ g(x)=2x+3 \end{cases}$

그런데 $f(0)=3$, $g(0)=-3$이므로

$f(x)=2x+3$, $g(x)=2x-3$ ··· ❷

$\therefore f(5)-g(5)=13-7=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$를 적분상수를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(5)-g(5)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 05 부정적분의 계산

본책 124쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 0이 아닌 두 실수 k, l에 대하여

$$\int\{kf(x)\pm lg(x)\}dx=k\int f(x)dx\pm l\int g(x)dx$$

(복호동순)

0778 $f(x)=\int(2+\sqrt{x})^2dx+\int(2-\sqrt{x})^2dx$

$=\int\{\underbrace{(2+\sqrt{x})^2+(2-\sqrt{x})^2}_{(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2}\}dx$

$=\int(2x+8)dx$

$=x^2+8x+C$

$f(1)=5$이므로 $\quad 1+8+C=5 \quad \therefore C=-4$

따라서 $f(x)=x^2+8x-4$이므로

$f(2)=4+16-4=16$

답 16

0779 $f(x)=\int\dfrac{x^3}{x+1}dx+\int\dfrac{1}{x+1}dx$

$=\int\dfrac{x^3+1}{x+1}dx$

$=\int\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$

$=\int(x^2-x+1)dx$

$=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x+C$

$f(0)=1$이므로 $\quad C=1$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x+1$이므로

$f(6)=72-18+6+1=61$

답 61

0780 $f(x)$

$=\int(x-2)(x^2+2x+4)dx-\int(x+2)(x^2-2x+4)dx$

$=\int\{(x-2)(x^2+2x+4)-(x+2)(x^2-2x+4)\}dx$

$=\int\{x^3-8-(x^3+8)\}dx$

$=\int(-16)dx$

$=-16x+C$

$f(-1)=20$이므로

$16+C=20 \quad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=-16x+4$이므로

$f(1)=-16+4=-12$

답 ③

0781 $f(x)=\int\left(x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\cdots+\dfrac{1}{10}x^{10}\right)dx$

$=\dfrac{1}{1\cdot2}x^2+\dfrac{1}{2\cdot3}x^3+\dfrac{1}{3\cdot4}x^4+\cdots+\dfrac{1}{10\cdot11}x^{11}+C$

$f(1)=1$이므로

$\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{10\cdot11}+C$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}\right)+C$

$=1-\dfrac{1}{11}+C$

$=\dfrac{10}{11}+C=1$

$\therefore C=\dfrac{1}{11}$

따라서

$f(x)=\dfrac{1}{1\cdot2}x^2+\dfrac{1}{2\cdot3}x^3+\dfrac{1}{3\cdot4}x^4+\cdots+\dfrac{1}{10\cdot11}x^{11}+\dfrac{1}{11}$

이므로 $\quad f(0)=\dfrac{1}{11}$

답 $\dfrac{1}{11}$

유형 06 도함수가 주어질 때 함수 구하기

본책 124쪽

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 주어지면 $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용하여 $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타낸다.

0782 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+6x-2a)dx$

$=x^3+3x^2-2ax+C$

$f(0)=-2$, $f(-1)=4$이므로

$C=-2$, $-1+3+2a+C=4$

$\therefore a=2$, $C=-2$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-4x-2$이므로

$f(2)=8+12-8-2=10$ 답 10

0783 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x^8-1}{x^4+1}dx$

$=\int\frac{(x^4+1)(x^4-1)}{x^4+1}dx=\int(x^4-1)dx$

$=\frac{1}{5}x^5-x+C$

$f(1)=\frac{6}{5}$이므로

$\frac{1}{5}-1+C=\frac{6}{5}$ $\quad\therefore C=2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x+2$이므로

$f(-1)=-\frac{1}{5}+1+2=\frac{14}{5}$ 답 ④

0784 $f'(x)=12x(x-1)=12x^2-12x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x^2-12x)dx$

$=4x^3-6x^2+C_1$

$f(0)=1$이므로 $\quad C_1=1$

$\therefore f(x)=4x^3-6x^2+1$ ··· ❶

$\therefore F(x)=\int f(x)dx=\int(4x^3-6x^2+1)dx$

$=x^4-2x^3+x+C_2$

$F(1)=-1$이므로

$1-2+1+C_2=-1$ $\quad\therefore C_2=-1$

$\therefore F(x)=x^4-2x^3+x-1$ ··· ❷

따라서 $F(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$F(2)=16-16+2-1=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $F(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $F(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	20 %

SSEN 특강 나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
⇒ $R=f(a)$

0785 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(9x^2+12x+k)dx$

$=3x^3+6x^2+kx+C$

다항식 $f(x)$가 $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$f(-2)=0$, $f(1)=0$

$f(-2)=0$에서

$-24+24-2k+C=0$ $\quad\therefore 2k-C=0$ ······ ㉠

$f(1)=0$에서

$3+6+k+C=0$ $\quad\therefore k+C=-9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$k=-3$, $C=-6$

따라서 $f(x)=3x^3+6x^2-3x-6$이므로

$f(2)=24+24-6-6=36$ 답 36

0786 $f(x)-g(x)=\int\{f'(x)-g'(x)\}dx$

$=\int(2x-4)dx=x^2-4x+C_1$

$f(x)g(x)=\int\{\underbrace{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}_{\{f(x)g(x)\}'}\}dx$

$=\int(3x^2-2x-2)dx=x^3-x^2-2x+C_2$

이때 $f(0)=4$, $g(0)=2$이므로

$f(0)-g(0)=C_1=2$, $f(0)g(0)=C_2=8$

$\therefore f(x)-g(x)=x^2-4x+2$,

$f(x)g(x)=x^3-x^2-2x+8=(x+2)(x^2-3x+4)$

$f(x)=x^2-3x+4$, $g(x)=x+2$이므로

$f(1)+g(2)=2+4=6$ 답 ③

유형 07 함수와 부정적분 사이의 관계식이 주어질 때 함수 구하기

본책 125쪽

함수 $f(x)$와 그 부정적분 사이의 관계식이 주어졌을 때
(i) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.
(ii) $f'(x)$를 적분하여 $f(x)$를 구한다.

0787 $F(x)=xf(x)-6x^4+6x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-24x^3+18x^2$

이므로 $\quad xf'(x)=24x^3-18x^2$

$\therefore f'(x)=24x^2-18x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(24x^2-18x)dx$

$=8x^3-9x^2+C$

$f(1)=0$이므로

$8-9+C=0$ $\quad\therefore C=1$

$\therefore f(x)=8x^3-9x^2+1$ 답 $f(x)=8x^3-9x^2+1$

0788 $\int g(x)dx=x^3f(x)+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

$\therefore g(1)=3f(1)+f'(1)=6+1=7$ 답 ⑤

0789 $2\int f(x)dx=f(x)+xf(x)-x-1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=f'(x)+f(x)+xf'(x)-1$

$\therefore f(x)=(1+x)f'(x)-1$ …… ㉠ ⋯➊

$f(x)$가 일차함수이므로

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

라 하면 $f'(x)=a$

$f(x)=ax+b$, $f'(x)=a$를 ㉠에 대입하면

$ax+b=a(1+x)-1$

$ax+b=ax+a-1$

$\therefore b=a-1$ …… ㉡

또 $f(1)=3$이므로

$a+b=3$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

$\therefore f(x)=2x+1$ ⋯➋

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 x절편은

$0=2x+1 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$ ⋯➌

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
➊ 주어진 등식의 양변을 미분할 수 있다.	30 %
➋ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
➌ x절편을 구할 수 있다.	20 %

0790 $f(x)+\int xf(x)dx=\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+xf(x)=3x^3-x^2+7x-1$ …… ㉠

$f(x)$를 n차 함수라 하면 $xf(x)$는 $(n+1)$차 함수이므로 ㉠에서

$n+1=3 \quad \therefore n=2$

즉 $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)

라 하면 $f'(x)=2ax+b$

$f(x)=ax^2+bx+c$, $f'(x)=2ax+b$를 ㉠에 대입하면

$2ax+b+x(ax^2+bx+c)=3x^3-x^2+7x-1$

$\therefore ax^3+bx^2+(2a+c)x+b=3x^3-x^2+7x-1$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=3$, $b=-1$, $2a+c=7$

$\therefore a=3$, $b=-1$, $c=1$

따라서 $f(x)=3x^2-x+1$이므로

$f(2)=12-2+1=11$

답 ③

SSEN 특강 항등식의 성질

① $ax^3+bx^2+cx+d=0$이 x에 대한 항등식
⇒ $a=0$, $b=0$, $c=0$, $d=0$

② $ax^3+bx^2+cx+d=a'x^3+b'x^2+c'x+d'$이 x에 대한 항등식 ⇒ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$, $d=d'$

유형 08 부정적분과 함수의 연속성

본책 126쪽

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$가 $f'(x)=\begin{cases} g_1(x) & (x>a) \\ g_2(x) & (x<a) \end{cases}$이고, $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면

① $f(x)=\begin{cases} \int g_1(x)dx & (x>a) \\ \int g_2(x)dx & (x<a) \end{cases}$

② $f(a)=\lim_{x\to a+}\int g_1(x)dx=\lim_{x\to a-}\int g_2(x)dx$

0791 $f'(x)=\begin{cases} x-3 & (x>-1) \\ k & (x<-1) \end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-3x+C_1 & (x>-1) \\ kx+C_2 & (x<-1) \end{cases}$$

$f(0)=-3$이므로 $C_1=-3$

$f(-2)=6$이므로 $-2k+C_2=6$ …… ㉠

$f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}\left(\frac{1}{2}x^2-3x-3\right)=\lim_{x\to-1-}(kx+C_2)$

$\therefore -k+C_2=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$C_2=-5$, $k=-\frac{11}{2}$

답 ①

SSEN 특강 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

(i) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

0792 $f'(x)=\begin{cases} 4x^3-1 & (x\geq1) \\ -2x+5 & (x<1) \end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} x^4-x+C_1 & (x\geq1) \\ -x^2+5x+C_2 & (x<1) \end{cases}$$

$f(0)=3$이므로 $C_2=3$

$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to1-}(-x^2+5x+3)=f(1)$이므로

$C_1=7$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^4-x+7 & (x\geq1) \\ -x^2+5x+3 & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(2)=16-2+7=21$

답 21

0793 $f'(x)=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ 3x & (x<0) \end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+C_1 & (x\geq0) \\ \frac{3}{2}x^2+C_2 & (x<0) \end{cases}$$

$f(0)=-1$이므로 　 $C_1=-1$

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{3}{2}x^2+C_2\right)=f(0) \qquad \therefore C_2=-1$$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-1 & (x\ge 0)\\ \frac{3}{2}x^2-1 & (x<0)\end{cases}$ 이므로

$$f(-4)f(2)=23\cdot 1=23$$

답 ④

0794 주어진 그래프에서

$$f'(x)=\begin{cases}-x+4 & (x\ge 2)\\ 2 & (x<2)\end{cases} \qquad \cdots ❶$$

이므로 　 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+4x+C_1 & (x\ge 2)\\ 2x+C_2 & (x<2)\end{cases}$ 　 $\cdots$ ❷

$y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=0 \qquad \therefore C_2=0$

$f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 2-}2x=f(2)$$

$6+C_1=4 \qquad \therefore C_1=-2$ 　 $\cdots$ ❸

따라서 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+4x-2 & (x\ge 2)\\ 2x & (x<2)\end{cases}$ 이므로

$$f(3)=-\frac{9}{2}+12-2=\frac{11}{2} \qquad \cdots ❹$$

답 $\frac{11}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	20 %
❸ C_1, C_2의 값을 구할 수 있다.	50 %
❹ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 09 부정적분과 접선의 기울기 　 본책 126쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로

➡ $f(x)=\int f'(x)dx$

0795 $f'(x)=x^2-1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-1)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$f(0)=C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+1$이므로

$$f(3)=9-3+1=7$$

답 7

0796 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^2에 정비례하므로

$f'(x)=ax^2$ (a는 상수, $a\ne 0$)

이라 하면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax^2\,dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3+C$$

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-1,\ 0)$, $(0,\ -1)$을 지나므로

$f(-1)=-\frac{a}{3}+C=0$ 　 …… ㉠

$f(0)=C=-1$ 　 …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 　 $a=-3$

따라서 $f(x)=-x^3-1$이므로

$$f(-2)=8-1=7$$

답 ④

0797 $f'(x)=-6x+k$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-6x+k)dx$$
$$=-3x^2+kx+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$f(0)=C=2$

$\therefore f(x)=-3x^2+kx+2$

따라서 방정식 $-3x^2+kx+2=0$의 두 근의 합이 $\frac{2}{9}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{k}{-3}=\frac{2}{9} \qquad \therefore k=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0798 $f'(x)=2x-6$이므로 　 $\cdots$ ❶

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-6)dx$$
$$=x^2-6x+C=(x-3)^2-9+C$$

함수 $f(x)$의 최솟값이 -5이므로

$-9+C=-5 \qquad \therefore C=4$

$\therefore f(x)=x^2-6x+4$ 　 $\cdots$ ❷

따라서 구간 $[-1,\ 2]$에서 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

$f(-1)=1+6+4=11$ 　 $\cdots$ ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

유형 10 부정적분과 미분계수를 이용한 극한값의 계산 　 본책 127쪽

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

➡ $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

0799 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

$f(x)=\int(x-2)(x^2+2x+4)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8$

$\therefore f'(1)=-7$

따라서 구하는 값은

$2f'(1)=2\cdot(-7)=-14$ 　　답 ①

0800 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{F(x)-F(2)}{3x-6}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{F(x)-F(2)}{x-2}$

$=\dfrac{1}{3}F'(2)=\dfrac{1}{3}\underbrace{f(2)}_{4\cdot2^3-3\cdot2^2+1=21}$

$=\dfrac{1}{3}\cdot21=7$ 　　답 7

0801 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x-h)-f(x-3h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{f(x-h)-f(x)\}-\{f(x-3h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x-h)-f(x)}{-h}\cdot(-1)+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x-3h)-f(x)}{-3h}\cdot3$

$=-f'(x)+3f'(x)=2f'(x)$

즉 $2f'(x)=8x^3-4x+6$이므로 　$f'(x)=4x^3-2x+3$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3-2x+3)dx$

$=x^4-x^2+3x+C$

$f(1)=2$이므로 　$1-1+3+C=2$ 　$\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=x^4-x^2+3x-1$이므로

$f(-1)=1-1-3-1=-4$ 　　답 ①

0802 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=0$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이므로 　$f(1)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$ 　… ❶

따라서 $f'(1)=f'(5)=0$이고 $f(x)$의 최고차항이 x^3이므로

$f'(x)=3(x-1)(x-5)=3x^2-18x+15$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-18x+15)dx$

$=x^3-9x^2+15x+C$ 　… ❷

$f(1)=2$이므로

$1-9+15+C=2$ 　$\therefore C=-5$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+15x-5$이므로 　… ❸

$f(2)=8-36+30-5=-3$ 　… ❹

답 -3

채점 기준	비율
❶ $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0803 조건 (가)에서 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{x-1}=4$이므로 $f'(x)$는 일차항의 계수가 4인 일차함수이다. 즉

$f'(x)=4x+k$ (k는 상수)

라 할 수 있다.

조건 (나)에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$이므로 　$f(2)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=1$

$f'(2)=8+k=1$에서 　$k=-7$

$\therefore f'(x)=4x-7$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x-7)dx=2x^2-7x+C$이므로

$f(2)=8-14+C=0$ 　$\therefore C=6$

$\therefore f(x)=2x^2-7x+6$

따라서 방정식 $2x^2-7x+6=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{6}{2}=3$ 　　답 ④

유형 11 부정적분과 도함수의 정의를 이용하여 함수 구하기 　본책 127쪽

미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수는

➡ $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

0804 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0$ 　$\therefore f(0)=0$

$f'(1)=3$이므로

$f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1)+f(h)-h-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}-1$

$=3$

즉 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}=4$이므로

$f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}-x$

$=4-x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(4-x)dx$

$=-\frac{1}{2}x^2+4x+C$

그런데 $f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$이므로

$f(-2)=-2-8=-10$ 답 -10

0805 $\Delta y=(ax+3)\Delta x-3(\Delta x)^2$의 양변을 Δx로 나누면

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=ax+3-3\Delta x$

이므로 $\quad f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=ax+3$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax+3)dx$

$=\frac{1}{2}ax^2+3x+C$

$f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

$f(1)=0$이므로 $\quad \frac{1}{2}a+3=0 \quad \therefore a=-6$

따라서 $f(x)=-3x^2+3x$이므로

$f(-1)=-3-3=-6$ 답 ①

0806 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{mxh+2h^2}{h}=mx$ ⋯ ❶

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int mx\,dx=\frac{m}{2}x^2+C$ ⋯ ❷

$f(1)=5$이므로 $\quad \frac{m}{2}+C=5$ ⋯⋯ ㉠

$f(3)=21$이므로 $\quad \frac{9}{2}m+C=21$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad m=4,\ C=3$

$\therefore f(x)=2x^2+3$ ⋯ ❸

답 $f(x)=2x^2+3$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %

유형 12 부정적분과 극대·극소

본책 128쪽

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서
① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면
➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고 극댓값 $f(a)$를 갖는다.
② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면
➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

0807 $f'(x)=ax(x-2)\ (a<0)$라 하면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax(x-2)dx$

$=\int(ax^2-2ax)dx=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고, $x=2$에서 극댓값을 가지므로

$f(0)=4,\ f(2)=8$

$C=4,\ -\frac{4}{3}a+C=8 \quad \therefore a=-3,\ C=4$

$\therefore f(x)=-x^3+3x^2+4$

답 $f(x)=-x^3+3x^2+4$

0808 $f(x)=\int(x^2-2x-3)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로

$f(-1)=\frac{2}{3}$

이때

$f(x)=\int(x^2-2x-3)dx=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$

이므로

$f(-1)=-\frac{1}{3}-1+3+C=\frac{2}{3}$

$\therefore C=-1$

즉 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x-1$이므로 극솟값은

$f(3)=9-9-9-1=-10$ 답 ①

0809 $f'(x)=6x(x-3)=6x^2-18x$에서

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-18x)dx$

$=2x^3-9x^2+C$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

이때 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접하고 함수 $f(x)$의 극솟값이 음수이므로 극댓값이 0이다.

즉 $f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=2x^3-9x^2$이므로

$f(1)=2-9=-7$

답 ②

0810 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1-f(x)=-x^3+9x+1 \qquad \therefore f(x)=x^3-9x$

$f'(x)=3x^2-9=3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$에서 극댓값을 갖고, $x=\sqrt{3}$에서 극솟값을 가지므로

$\alpha=-\sqrt{3}$, $\beta=f(\sqrt{3})=3\sqrt{3}-9\sqrt{3}=-6\sqrt{3}$

$\therefore \alpha+\beta=-7\sqrt{3}$

답 ①

0811 $f'(x)=a(x+1)^2-1\ (a>0)$이라 하면 $f'(0)=0$이므로

$a-1=0 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f'(x)=x^2+2x=x(x+2)$ ··· ❶

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로

$f(-2)=1$ ··· ❷

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2+2x)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+x^2+C$$

이므로

$$f(-2)=-\frac{8}{3}+4+C=1 \qquad \therefore C=-\frac{1}{3}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3}$이므로 ··· ❸

$$f(2)=\frac{8}{3}+4-\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$$ ··· ❹

답 $\frac{19}{3}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(-2)=1$임을 알 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0812 $f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이다.

이때 $f'(2)=f'(10)=0$이므로

$f'(x)=3(x-2)(x-10)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=2$ 또는 $x=10$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	10	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 가지므로

$f(2)=56$

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 3(x-2)(x-10)dx$$
$$=\int(3x^2-36x+60)dx$$
$$=x^3-18x^2+60x+C$$

이므로

$f(2)=8-72+120+C=56$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=x^3-18x^2+60x$이므로 극솟값은

$f(10)=1000-1800+600=-200$

답 ④

다른 풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\therefore f'(2)=12+4a+b=0$, $f'(10)=300+20a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-18$, $b=60$

$\therefore f(x)=x^3-18x^2+60x+c$

이때 $f(2)=56$에서 $\qquad c=0$

따라서 $f(x)=x^3-18x^2+60x$이므로 극솟값은

$f(10)=-200$

0813 $f'(x)=x^2-kx=x(x-k)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=k$

x	0	$\cdots$	k	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 $f(x)$는 $\underline{x=k\text{에서 극소}}$이다.

$x=k$에서 최소이다.

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-kx)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2+C$$

이므로

$$f(0)=C,\ f(k)=-\frac{1}{6}k^3+C,\ f(3)=9-\frac{9}{2}k+C$$

$f(3)-f(0)=9-\frac{9}{2}k$이고 $0<k<2$이므로

$$0<9-\frac{9}{2}k<9$$

즉 $f(3)-f(0)>0$이므로 $\qquad f(0)<f(3)$

따라서 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $9-\frac{9}{2}k+C$, $x=k$일 때 최솟값 $-\frac{1}{6}k^3+C$를 가지므로

$$9-\frac{9}{2}k+C-\left(-\frac{1}{6}k^3+C\right)=\frac{14}{3}$$

$\frac{1}{6}k^3-\frac{9}{2}k+9=\frac{14}{3}, \qquad k^3-27k+26=0$

$(k-1)(k^2+k-26)=0$

$\therefore k=1\ (\because 0<k<2)$

답 1

0814 1st ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\int f'(x)dx+\int 2x\,dx=\int\{f'(x)+2x\}dx$$

주어진 식의 우변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+x^2+C\}=f'(x)+2x$$

$$\therefore \int f'(x)dx+\int 2x\,dx=f(x)+x^2+C$$

2nd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $\frac{d}{dx}[\{f(x)\}^2+C]=2f(x)f'(x)$이므로

$\frac{d}{dx}\{f(x)f(x)\}=f'(x)f(x)+f(x)f'(x)$ $=2f(x)f'(x)$

$$\int f'(x)f(x)dx\neq\{f(x)\}^2+C$$

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\int f(x)dx+\int xf'(x)dx=\int\{f(x)+xf'(x)\}dx$$

주어진 식의 우변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\{xf(x)+C\}=f(x)+xf'(x)$$

$$\therefore \int f(x)dx+\int xf'(x)dx=xf(x)+C$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0815 1st $F_n(x)$를 구한다.

$$F_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)\int x^k\,dx\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{x^{k+1}+(k+1)C\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x^{k+1}+\sum_{k=1}^{n}(k+1)C$$

$$=x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{n+1}+\frac{n(n+3)}{2}C$$

2nd $F_n(1)$의 값을 구한다.

$F_n(0)=0$에서 $\quad C=0$ ($\because n>0$)

따라서 $F_n(x)=x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{n+1}$이므로

$$F_n(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}=n$$

답 ④

0816 1st $g(x)$와 $x^2+f(x)$의 차수를 구한다.

함수 $f(x)$가 이차함수이고 $f(x)g(x)$가 사차함수이므로 $g(x)$는 이차함수이다.

이때 $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$이므로 $x^2+f(x)$는 일차함수이다.

2nd $g(x)$를 a, b와 적분상수 C를 이용하여 나타낸다.

즉 $f(x)=-x^2+ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$$g(x)=\int(x^2-x^2+ax+b)dx=\int(ax+b)dx$$

$$=\frac{a}{2}x^2+bx+C$$

이므로

$$f(x)g(x)=(-x^2+ax+b)\left(\frac{a}{2}x^2+bx+C\right)$$

$$=-\frac{a}{2}x^4+\left(\frac{a^2}{2}-b\right)x^3+\left(\frac{3}{2}ab-C\right)x^2+(aC+b^2)x+bC$$

$$\therefore -\frac{a}{2}x^4+\left(\frac{a^2}{2}-b\right)x^3+\left(\frac{3}{2}ab-C\right)x^2+(aC+b^2)x+bC$$

$$=-2x^4+8x^3$$

3rd a, b, C의 값을 구한다.

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$$-\frac{a}{2}=-2,\ \frac{a^2}{2}-b=8,\ \frac{3}{2}ab-C=0,\ aC+b^2=0,\ bC=0$$

$$\therefore a=4,\ b=0,\ C=0$$

4th $g(1)$의 값을 구한다.

따라서 $g(x)=2x^2$이므로

$$g(1)=2$$

답 ②

다른 풀이 함수 $f(x)$가 이차함수이고 $f(x)g(x)$가 사차함수이므로 $g(x)$는 이차함수이다.

또 $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=x^2+f(x) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이고, $g'(x)$는 일차함수이므로 $f(x)$의 이차항의 계수는 -1이어야 한다.

이때 $f(x)g(x)=-2x^4+8x^3=-2x^3(x-4)$에서

$f(x)=-x^2$, $g(x)=2x(x-4)$ 또는

$f(x)=-x(x-4)$, $g(x)=2x^2$

(i) $f(x)=-x^2$일 때, ㉠에서

$$g'(x)=x^2+(-x^2)=0$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다. $g'(x)$가 일차함수가 아니다.

(ii) $f(x)=-x(x-4)$일 때, ㉠에서

$$g'(x)=x^2+\{-x(x-4)\}=4x$$

이고 주어진 조건을 만족시킨다. $g'(x)$가 일차함수이다.

(i), (ii)에서 $f(x)=-x(x-4)$, $g(x)=2x^2$이므로

$$g(1)=2$$

0817 1st $f_i(x)$를 구한다.

$f_{i+1}(x)=\int(n+i)f_i(x)dx$ ($i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)이므로

$$f_2(x)=\int(n+1)f_1(x)dx=\int x^{n+1}dx$$

$$=\frac{1}{n+2}x^{n+2}+C_1$$

$f_2(0)=0$이므로 $\quad C_1=0 \quad \therefore f_2(x)=\frac{1}{n+2}x^{n+2}$

$$f_3(x)=\int(n+2)f_2(x)dx=\int x^{n+2}dx$$

$$=\frac{1}{n+3}x^{n+3}+C_2$$

$f_3(0)=0$이므로 $\quad C_2=0 \quad \therefore f_3(x)=\frac{1}{n+3}x^{n+3}$

$$\vdots$$

$$\therefore f_i(x)=\frac{1}{n+i}x^{n+i}$$

(2nd) n의 값을 구한다.

즉 $f_i(1)=\dfrac{1}{n+i}$이므로

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f_i(1)}=\sum_{i=1}^{n}(n+i)=\sum_{i=1}^{n}n+\sum_{i=1}^{n}i$$
$$=n^2+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{3n^2+n}{2}$$

따라서 $\dfrac{3n^2+n}{2}=100$에서

$3n^2+n=200,\qquad 3n^2+n-200=0$

$(3n+25)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because$ n은 자연수) 답 ①

0818 (1st) $f(x)$를 a와 적분상수 C를 이용하여 나타낸다.

사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 삼차함수이고

$f'(-\sqrt{2})=f'(0)=f'(\sqrt{2})=0$이므로

$$f'(x)=ax(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$
$$=ax^3-2ax\ (a>0)$$

로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax^3-2ax)dx$$
$$=\frac{a}{4}x^4-ax^2+C$$

(2nd) a, C의 값을 구한다.

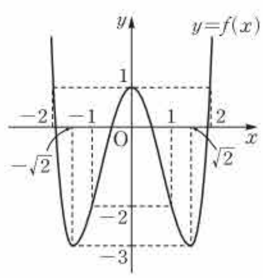
이때 $f(0)=1$이므로 $\quad C=1$

또 $f(\sqrt{2})=-3$이므로

$a-2a+1=-3\qquad\therefore a=4$

(3rd) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

따라서 $f(x)=x^4-4x^2+1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(4th) $f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 정수 m의 값의 합을 구한다.

$f(-2)>0$, $f(-1)<0$, $f(0)>0$, $f(1)<0$, $f(2)>0$이므로

$f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 정수 m은 -2, -1, 0, 1이다.

따라서 구하는 합은

$-2+(-1)+0+1=-2$ 답 ①

0819 (1st) $f(x)$를 구한다.

곡선 $y=x^2-3x+1$과 직선 $y=x+6$의 교점의 x좌표는

$x^2-3x+1=x+6$에서

$x^2-4x-5=0,\qquad (x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1,\ 0)$, $(5,\ 0)$을 지나므로

$f(x)=3(x+1)(x-5)=3x^2-12x-15$

(2nd) $F(x)$를 적분상수 C를 이용하여 나타낸다.

조건 (가)에서

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(3x^2-12x-15)dx$$
$$=x^3-6x^2-15x+C$$

(3rd) C의 값의 범위를 구한다.

$F(0)=C$이므로 조건 (나)에 의하여 C는 정수이다.

이때 함수 $F(x)$는 $x=-1$, $x=5$에서 극값을 가지므로 조건 (다)에서 방정식 $F(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$F(-1)F(5)<0$이어야 한다. 즉

$(C+8)(C-100)<0\qquad\therefore -8<C<100$

(4th) 함수 $F(x)$의 개수를 구한다.

따라서 정수 C는 -7, -6, -5, $\cdots$, 98, 99의 107개이므로 구하는 함수 $F(x)$의 개수는 107이다.

답 107

SSEN 특강 삼차방정식의 근의 판별

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 근은

① (극댓값)$\times$(극솟값)$<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 세 실근

② (극댓값)$\times$(극솟값)$=0 \Longleftrightarrow$ 한 실근과 중근 (서로 다른 두 실근)

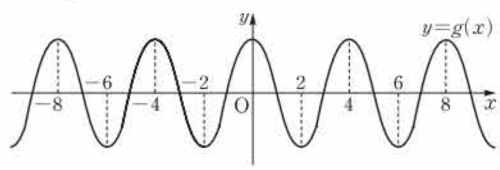
③ (극댓값)$\times$(극솟값)$>0 \Longleftrightarrow$ 한 실근과 두 허근

0820 (1st) 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.

조건 (가)에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $-2<x\le2$에서 y축에 대하여 대칭이다.

또 조건 (나)에서 $g(x)$는 주기가 4인 주기함수이다.

이때 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능해야 하므로 다음 그림과 같이 정수 n에 대하여 $y=g(x)$의 그래프가 $x=2n$에서 꺾이지 않고 $g'(2n)=0$이어야 한다.



(2nd) $f(x)$를 적분상수를 이용하여 나타낸다.

즉 $g'(0)=0$, $g'(2)=0$이어야 하므로

$f'(0)=0$, $f'(2)=0$

한편 사차함수 $f(x)$는 오직 하나의 극값을 가지므로 삼차함수 $f'(x)$는 중근과 다른 하나의 실근을 가져야 한다.

따라서

$f'(x)=\underline{4x^2(x-2)}$ 또는 $f'(x)=\underline{4x(x-2)^2}$

이므로 $f(x)$의 최고차항이 x^4이므로 $f'(x)$의 최고차항이 $4x^3$이다.

$$f(x)=\int 4x^2(x-2)dx=\int(4x^3-8x^2)dx$$
$$=x^4-\frac{8}{3}x^3+C_1$$

또는

$$f(x)=\int 4x(x-2)^2dx=\int(4x^3-16x^2+16x)dx$$

$$=x^4-\frac{16}{3}x^3+8x^2+C_2$$

3rd $|g(10)-g(4)|$의 값을 구한다.

이때 $g(10)=g(6)=g(2)=f(2)$, $g(4)=g(0)=f(0)$이고

$f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3+C_1$에서

$$f(2)=-\frac{16}{3}+C_1,\ f(0)=C_1$$

$f(x)=x^4-\frac{16}{3}x^3+8x^2+C_2$에서

$$f(2)=\frac{16}{3}+C_2,\ f(0)=C_2$$

$$\therefore |g(10)-g(4)|=|f(2)-f(0)|=\frac{16}{3}$$

답 $\frac{16}{3}$

참고 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

즉

$$g'(0)=\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}\quad\cdots ㉠$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{g(h)-g(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=k\ (k\text{는 상수})$$

라 하면

$$\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{g(h)-g(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{f(-h)-f(0)}{h}\ (\because g(x)=f(-x))$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot(-1)$$

$$=-k$$

이므로 ㉠에서 $k=-k$ $\therefore k=0$

즉 $g'(0)=0$임을 알 수 있다. 같은 방법으로 하면 $g'(2)=0$임도 알 수 있다.

0821

1st 주어진 등식의 양변을 미분하여 간단히 정리한다.

$x\{f(x)-2x\}=4F(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)-2x+x\{f'(x)-2\}=4f(x)$$

$$\therefore xf'(x)-4x=3f(x)\quad\cdots\cdots ㉠$$

2nd $f(x)$의 차수를 구한다.

(i) $f(x)$가 상수함수인 경우

$f(x)=1$, $f'(x)=0$이므로 ㉠에서 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이다.

$$x\cdot0-4x=3$$

이때 $-4x\neq3$이므로 등식이 성립하지 않는다.

(ii) $f(x)$의 차수가 1인 경우

$f(x)=x+k$ (k는 상수)라 하면 $f'(x)=1$이므로 ㉠에서

$$x\cdot1-4x=3(x+k)$$

이때 $-3x\neq3x+3k$이므로 등식이 성립하지 않는다.

(iii) $f(x)$의 차수가 2 이상인 경우

$f(x)$의 차수를 n ($n\geq2$인 자연수)이라 하면 $f(x)$의 최고차항은 x^n이므로 ㉠의 좌변의 최고차항은

$$x\cdot nx^{n-1}=nx^n$$

또 ㉠의 우변의 최고차항은 $3x^n$

따라서 $nx^n=3x^n$이어야 하므로 $n=3$

3rd $f(x)$를 구한다.

이상에서 $f(x)$는 삼차함수이므로

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\ (a,\ b,\ c\text{는 상수})$$

라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 ㉠에서

$$x(3x^2+2ax+b)-4x=3(x^3+ax^2+bx+c)$$

$$\therefore 3x^3+2ax^2+(b-4)x=3x^3+3ax^2+3bx+3c$$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$$2a=3a,\ b-4=3b,\ 0=3c$$

$$\therefore a=0,\ b=-2,\ c=0\qquad \therefore f(x)=x^3-2x$$

4th $F(1)$의 값을 구한다.

따라서 $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$에서

$$F(x)=\int(x^3-2x)dx=\frac{1}{4}x^4-x^2+C$$

$x\{f(x)-2x\}=4F(x)$에 $x=0$을 대입하면

$$0=4F(0),\qquad F(0)=0\qquad \therefore C=0$$

즉 $F(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$이므로

$$F(1)=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$$

답 $-\frac{3}{4}$

0822

1st 접선의 방정식을 구한다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$\therefore y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$$

2nd $f(t)$, $g(t)$를 적분상수를 이용하여 나타낸다.

따라서 $f'(t)=3t^2-2t+1$이므로

$$f(t)=\int(3t^2-2t+1)dt=t^3-t^2+t+C$$

또 $g(t)=-tf'(t)+f(t)$이므로

$$g(t)=-t(3t^2-2t+1)+t^3-t^2+t+C$$

$$=-2t^3+t^2+C$$

3rd $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)+g(t)}{t^3}$의 값을 구한다.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)+g(t)}{t^3}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t^3+t+2C}{t^3}=-1$$

답 ⑤

0823

1st ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y)+3$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0)+3$

$$\therefore f(0)=-3<0$$

2nd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh(x+h)+3-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3}{h}+\lim_{h\to0}2x(x+h)$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}2x(x+h)$$

$$=f'(0)+2x^2$$

따라서 $f'(x)$의 차수가 2이므로 $f(x)$의 차수는 3이다.

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로 ㄴ에서

$$f'(1)=f'(0)+2=0 \qquad \therefore f'(0)=-2$$

즉 $f'(x)=2x^2-2$이므로

$$f(x)=\int(2x^2-2)dx=\frac{2}{3}x^3-2x+C$$

ㄱ에서 $f(0)=-3$이므로 $\quad C=-3$

$$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x-3$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $-\frac{5}{3}$, $x=1$에서 극솟값 $-\frac{13}{3}$을 가지므로 모든 극값의 합은

$$\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{13}{3}\right)=-6$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0824 1st $f(x)$를 적분상수 C를 이용하여 나타낸다.

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로

$$f'(2)=0$$

따라서 조건 (가)에서 $\quad f'(-2)=f'(2)=0$

이때 $f'(x)$는 이차함수이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

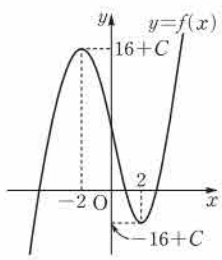
$$f'(x)=3(x+2)(x-2)$$

$$\therefore f(x)=\int 3(x+2)(x-2)dx=\int(3x^2-12)dx$$

$$=x^3-12x+C$$

2nd C의 값을 구한다.

즉 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $f(-2)=16+C$를 갖고, $x=2$에서 극솟값 $f(2)=-16+C$를 가지므로 그 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 조건 (다)에서

$k<-16+C$ 또는 $k>16+C$이면

$$g(k)=1$$

$k=-16+C$ 또는 $k=16+C$이면

$$g(k)=2$$

$-16+C<k<16+C$이면

$$g(k)=3$$

즉 $\lim_{k\to 26-} g(k) - \lim_{k\to 26+} g(k)=2$에서

$$\lim_{k\to 26-} g(k)=3,\ \lim_{k\to 26+} g(k)=1$$

이므로 $\quad 16+C=26 \qquad \therefore C=10$

3rd $f(x)$의 극솟값을 구한다.

따라서 구하는 극솟값은

$$f(2)=-16+C=-16+10=-6$$

답 -6

0825 1st $f(x)$를 a를 이용하여 나타낸다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(a)=0$, $f'(a)=0$이므로

$$f(x)=x(x-a)^2$$

2nd $g(x)$를 적분상수 C를 이용하여 나타낸다.

조건 (가)에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)=\{xf(x)\}'$이므로

$$\int g'(x)dx=\int\{xf(x)\}'dx$$

$$\therefore g(x)=xf(x)+C=x^2(x-a)^2+C$$

3rd a, C의 값을 구한다.

$g'(x)=2x(x-a)^2+2x^2(x-a)=2x(2x-a)(x-a)$이므로

$g'(x)=0$에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=\frac{a}{2} \text{ 또는 } x=a$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

즉 $g(x)$는 $x=\frac{a}{2}$에서 극대이고, $x=0$, $x=a$에서 극소이므로

조건 (나)에서

$$g\left(\frac{a}{2}\right)=81,\ g(0)=g(a)=0$$

$g\left(\frac{a}{2}\right)=81$에서 $\quad \left(\frac{a}{2}\right)^4+C=81 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$g(0)=g(a)=0$에서 $\quad C=0$

$C=0$을 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2}\right)^4=81, \qquad \frac{a}{2}=3\ (\because a>0)$$

$$\therefore a=6$$

4th $g\left(\frac{a}{3}\right)$의 값을 구한다.

따라서 $g(x)=x^2(x-6)^2$이므로

$$g\left(\frac{a}{3}\right)=g(2)=64$$

답 ⑤

0826 전략 조건 (나)의 등식의 양변을 x에 대하여 미분한 후 $f(x)$의 차수를 구한다.

풀이 조건 (나)의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+f(x)f'(x)=27x^5+15x^3+2ax \quad \cdots\cdots ㉠ \qquad ❶$$

$f(x)$의 차수를 n이라 하면 좌변의 차수가 $n+(n-1)=2n-1$ 이므로

└ 항 $f(x)f'(x)$의 차수

$$2n-1=5 \qquad \therefore n=3 \qquad ❷$$

즉 $f(x)$는 삼차함수이므로 조건 (가)에 의하여

$$f(x)=px^3+qx\ (p,\ q\text{는 상수},\ p>0)$$

라 하면

$$f'(x)=3px^2+q$$

㉠에서

$$px^3+qx+(px^3+qx)(3px^2+q)$$
$$=px^3+qx+(3p^2x^5+4pqx^3+q^2x)$$
$$=3p^2x^5+(4pq+p)x^3+(q^2+q)x$$
$$=27x^5+15x^3+2ax$$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$$3p^2=27,\ 4pq+p=15,\ q^2+q=2a$$

$$\therefore p=3,\ q=1,\ a=1\ (\because p>0)$$

따라서 $f(x)=3x^3+x$이므로 ⋯ ❸

$f(a)=f(1)=3+1=4$ ⋯ ❹

답 4

채점 기준	비율
❶ 조건 (나)의 등식의 양변을 x에 대하여 미분할 수 있다.	20 %
❷ $f(x)$의 차수를 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❹ $f(a)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0827 전략 $F_{n+1}(x)=\int F_n(x)dx$에 $n=1, 2, \cdots$를 대입하여 $F_n(x)$를 구한다.

풀이 $F_1(x)=\int(x-1)dx=\frac{1}{2}x^2-x+C_1$

$F_1(0)=1$이므로 $C_1=1$ $\therefore F_1(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$

$F_2(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^2-x+1\right)dx=\frac{1}{2\cdot3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C_2$

$F_2(0)=-1$이므로 $C_2=-1$

$\therefore F_2(x)=\frac{1}{2\cdot3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-1$

$F_3(x)=\int\left(\frac{1}{2\cdot3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-1\right)dx$

$=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}x^4-\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C_3$

$F_3(0)=1$이므로 $C_3=1$

$\therefore F_3(x)=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}x^4-\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+1$

$\vdots$

$\therefore F_n(x)=\frac{1}{2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n+1)}x^{n+1}-\frac{1}{2\cdot3\cdot\cdots\cdot n}x^n$

$+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2}x^2+(-1)^n x+(-1)^{n+1}$ ⋯ ❶

따라서

$G_1(x)=F_1(x)+F_2(x)=\frac{1}{2\cdot3}x^3$

$G_2(x)=F_2(x)+F_3(x)=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}x^4$

$\vdots$

$G_n(x)=F_n(x)+F_{n+1}(x)=\frac{1}{2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n+2)}x^{n+2}$ ⋯ ❷

이므로 $G_n'(x)=\frac{1}{2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n+1)}x^{n+1}$ ⋯ ❸

$\therefore \frac{G_{100}'(1)}{G_{100}(1)}=\frac{\frac{1}{2\cdot3\cdot\cdots\cdot101}}{\frac{1}{2\cdot3\cdot\cdots\cdot102}}=102$ ⋯ ❹

답 102

채점 기준	비율
❶ $F_n(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $G_n(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $G_n'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❹ $\frac{G_{100}'(1)}{G_{100}(1)}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0828 전략 $f(x)$가 $k(x-a)(x-b)(k, a, b$는 상수, $k\neq0)$로 나누어떨어지면 $f(a)=0, f(b)=0$이다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int g(x)dx$

$=\int\left(x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+a\right)dx$

$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-3x^2+ax+C$

$f(0)=b$에서 $C=b$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-3x^2+ax+b$ ⋯ ❶

이때

$h(x)=g'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$ ⋯ ❷

이고 $f(x)$가 $h(x)$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0, f(2)=0$

$-\frac{9}{4}-a+b=0, -12+2a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{13}{4}, b=\frac{11}{2}$

$\therefore 8a+2b=8\cdot\frac{13}{4}+2\cdot\frac{11}{2}=37$ ⋯ ❸

답 37

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $h(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ $8a+2b$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0829 전략 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$임을 이용하여 조건 (가)의 식을 변형한다.

풀이 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$이므로 조건 (가)에서

$\{f(x)+xf'(x)\}g(x)+xf(x)g'(x)$

$=\{xf(x)\}'g(x)+\{xf(x)\}g'(x)$

$=[\{xf(x)\}g(x)]'=\{xf(x)g(x)\}'$

$\therefore xf(x)g(x)=\int(8x^3+9x^2-4x)dx$

$=2x^4+3x^3-2x^2+C_1$

그런데 $f(x), g(x)$는 다항함수이므로

$C_1=0$

즉 $xf(x)g(x)=2x^4+3x^3-2x^2$이므로

$f(x)g(x)=2x^3+3x^2-2x=x(x+2)(2x-1)$ ⋯ ❶

한편 조건 (나)에 의하여

$f(x)+g(x)=\int(2x+4)dx=x^2+4x+C_2$ ⋯ ❷

$\therefore \begin{cases}f(x)=x(x+2)\\g(x)=2x-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=2x-1\\g(x)=x(x+2)\end{cases}$ ⋯ ❸

$\therefore f(2)+g(2)=11$ ⋯ ❹

답 11

채점 기준	비율
❶ $f(x)g(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)+g(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(x), g(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(2)+g(2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0830 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면
$f(a)=\lim_{x\to a+}\int f'(x)dx=\lim_{x\to a-}\int f'(x)dx$이다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases} 1 & (|x|>1) \\ -x^2 & (|x|<1)\end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} x+C_1 & (x>1) \\ -\frac{1}{3}x^3+C_2 & (-1<x<1) \\ x+C_3 & (x<-1)\end{cases} \quad \cdots ❶$$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1+}(x+C_1)=\lim_{x\to 1-}\left(-\frac{1}{3}x^3+C_2\right)$$

$$1+C_1=-\frac{1}{3}+C_2 \qquad \therefore C_1-C_2=-\frac{4}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to -1+}\left(-\frac{1}{3}x^3+C_2\right)=\lim_{x\to -1-}(x+C_3)$$

$$\frac{1}{3}+C_2=-1+C_3 \qquad \therefore C_2-C_3=-\frac{4}{3} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이고 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.
즉 $\underline{f(1)=0}$이므로 ┌ 함수 $f(x)$의 극솟값이 0이다.

$$1+C_1=0 \qquad \therefore C_1=-1$$

$C_1=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad C_2=\frac{1}{3}$

$C_2=\frac{1}{3}$을 ㉡에 대입하면 $\quad C_3=\frac{5}{3}$

$$\text{즉 } f(x)=\begin{cases} x-1 & (x\ge 1) \\ -\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3} & (-1\le x<1) \\ x+\frac{5}{3} & (x<-1)\end{cases} \text{ 이므로} \quad \cdots ❷$$

$$f(2)-9f(-3)=1-9\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=13 \quad \cdots ❸$$

답 13

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 부정적분으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❸ $f(2)-9f(-3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

Ⅲ. 다항함수의 적분법

08 정적분

0831 $\int_0^1 3x^4dx=\left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

0832 $\int_0^4 (5x+4)dx=\left[\frac{5}{2}x^2+4x\right]_0^4=40+16=56$ 답 56

0833 $\int_{-2}^1 (3y^2-1)dy=\left[y^3-y\right]_{-2}^1=(1-1)-(-8+2)$
$=6$ 답 6

0834 $\int_1^2 (2t^2+3t-1)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-t\right]_1^2$
$=\left(\frac{16}{3}+6-2\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-1\right)$
$=\frac{49}{6}$ 답 $\frac{49}{6}$

0835 $\int_{-1}^0 x(x-4)dx=\int_{-1}^0 (x^2-4x)dx$
$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^0$
$=0-\left(-\frac{1}{3}-2\right)=\frac{7}{3}$ 답 $\frac{7}{3}$

0836 $\int_0^2 (x+1)(x-1)dx=\int_0^2 (x^2-1)dx$
$=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^2$
$=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0837 $\int_0^1 (x-1)(x^2+x+1)dx=\int_0^1 (x^3-1)dx$
$=\left[\frac{1}{4}x^4-x\right]_0^1$
$=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$ 답 $-\frac{3}{4}$

0838 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면
$\int_a^a f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^a=F(a)-F(a)=0$
답 풀이 참조

0839 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면
$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$,
$\int_b^a f(x)dx=\left[F(x)\right]_b^a=F(a)-F(b)$
$=-\{F(b)-F(a)\}$
이므로 $\quad \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ 답 풀이 참조

0840 $\int_{2}^{2}(x^2+2x+3)dx=0$ 답 0

0841 $\int_{0}^{-1}(x^3-4x)dx=-\int_{-1}^{0}(x^3-4x)dx$

$=-\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-1}^{0}$

$=-\left\{0-\left(\frac{1}{4}-2\right)\right\}$

$=-\frac{7}{4}$ 답 $-\frac{7}{4}$

0842 $\int_{1}^{-2}(6x^2+2x-5)dx$

$=-\int_{-2}^{1}(6x^2+2x-5)dx$

$=-\left[2x^3+x^2-5x\right]_{-2}^{1}$

$=-\{(2+1-5)-(-16+4+10)\}$

$=0$ 답 0

0843 $\int_{3}^{1}(4x^3-3x^2-2x)dx=-\int_{1}^{3}(4x^3-3x^2-2x)dx$

$=-\left[x^4-x^3-x^2\right]_{1}^{3}$

$=-\{(81-27-9)-(1-1-1)\}$

$=-46$

답 -46

0844 $\frac{d}{dx}\int_{1}^{x}(t^2-2t)dt=x^2-2x$ 답 x^2-2x

0845 $\frac{d}{dx}\int_{2}^{x}(-t^3+4t+2)dt=-x^3+4x+2$

답 $-x^3+4x+2$

0846 $\frac{d}{dx}\int_{-5}^{x}(t+1)(t^2-5t+5)dt=(x+1)(x^2-5x+5)$

답 $(x+1)(x^2-5x+5)$

0847 $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}(2t^2+3t-1)dt=2x^2+3x-1$

답 $2x^2+3x-1$

0848 $\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(t^3-5t^2+6)dt=x^3-5x^2+6$

답 x^3-5x^2+6

0849 $\int_{-1}^{3}(3x^2+x-2)dx-\int_{-1}^{3}(x+3)dx$

$=\int_{-1}^{3}(3x^2+x-2-x-3)dx$

$=\int_{-1}^{3}(3x^2-5)dx=\left[x^3-5x\right]_{-1}^{3}$

$=12-4=8$ 답 8

0850 $\int_{0}^{1}(x+1)^2dx+\int_{1}^{0}(x-1)^2dx$

$=\int_{0}^{1}(x^2+2x+1)dx-\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx$

$=\int_{0}^{1}(x^2+2x+1-x^2+2x-1)dx$

$=\int_{0}^{1}4x\,dx=\left[2x^2\right]_{0}^{1}$

$=2$ 답 2

0851 $\int_{-2}^{1}(2x^2+6)dx-2\int_{-2}^{1}(x^2-x+3)dx$

$=\int_{-2}^{1}(2x^2+6)dx-\int_{-2}^{1}(2x^2-2x+6)dx$

$=\int_{-2}^{1}(2x^2+6-2x^2+2x-6)dx$

$=\int_{-2}^{1}2x\,dx=\left[x^2\right]_{-2}^{1}$

$=1-4=-3$ 답 -3

0852 $\int_{0}^{3}x(x-2)dx+\int_{0}^{3}(y^2+2y)dy$

$=\int_{0}^{3}(x^2-2x)dx+\int_{0}^{3}(x^2+2x)dx$

$=\int_{0}^{3}(x^2-2x+x^2+2x)dx$

$=\int_{0}^{3}2x^2dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{3}$

$=18$ 답 18

0853 $\int_{-1}^{0}(3x+2)dx+\int_{0}^{2}(3x+2)dx$

$=\int_{-1}^{2}(3x+2)dx=\left[\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$

$=10-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{2}$ 답 $\frac{21}{2}$

0854 $\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2+2x)dx+\int_{0}^{-1}(x^3-3x^2+2x)dx$

$=\int_{-1}^{-1}(x^3-3x^2+2x)dx=0$ 답 0

다른 풀이 $\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2+2x)dx+\int_{0}^{-1}(x^3-3x^2+2x)dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2+2x)dx-\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2+2x)dx=0$

0855 $\int_{-2}^{-1}(x^2-4x+5)dx-\int_{1}^{-1}(y^2-4y+5)dy$

$=\int_{-2}^{-1}(x^2-4x+5)dx+\int_{-1}^{1}(y^2-4y+5)dy$

$=\int_{-2}^{-1}(x^2-4x+5)dx+\int_{-1}^{1}(x^2-4x+5)dx$

$=\int_{-2}^{1}(x^2-4x+5)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x\right]_{-2}^{1}$

$=\frac{10}{3}-\left(-\frac{62}{3}\right)=24$ 답 24

0856 $\int_{-1}^{2}(5x^4-6x-1)dx-\int_{3}^{2}(5x^4-6x-1)dx$

$=\int_{-1}^{2}(5x^4-6x-1)dx+\int_{2}^{3}(5x^4-6x-1)dx$

$=\int_{-1}^{3}(5x^4-6x-1)dx=\left[x^5-3x^2-x\right]_{-1}^{3}$

$=213-(-3)=216$ 답 216

0857 $\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}x\,dx+\int_{1}^{2}(2x-1)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[x^2-x\right]_1^2$

$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

0858 $|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\ge1) \\ -x+1 & (x\le1)\end{cases}$ 이므로

$\int_{0}^{2}|x-1|dx=\int_{0}^{1}(-x+1)dx+\int_{1}^{2}(x-1)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ 답 1

0859 $|x(x-2)|=\begin{cases} x^2-2x & (x\le0 \text{ 또는 } x\ge2) \\ -x^2+2x & (0\le x\le2)\end{cases}$ 이므로

$\int_{1}^{3}|x(x-2)|dx=\int_{1}^{2}(-x^2+2x)dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$

$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$ 답 2

0860 $\int_{-2}^{2}(5x^4+3x^3-7x-1)dx$

$=\int_{-2}^{2}(5x^4-1)dx+\int_{-2}^{2}(3x^3-7x)dx$

$=2\int_{0}^{2}(5x^4-1)dx=2\left[x^5-x\right]_0^2$

$=2\cdot30=60$ 답 60

0861 $\int_{-3}^{3}(-x^3+3x^2+4x-2)dx$

$=\int_{-3}^{3}(3x^2-2)dx+\int_{-3}^{3}(-x^3+4x)dx$

$=2\int_{0}^{3}(3x^2-2)dx=2\left[x^3-2x\right]_0^3$

$=2\cdot21=42$ 답 42

0862 $\int_{-1}^{1}(x+1)(3x+2)dx$

$=\int_{-1}^{1}(3x^2+5x+2)dx=\int_{-1}^{1}(3x^2+2)dx+\int_{-1}^{1}5x\,dx$

$=2\int_{0}^{1}(3x^2+2)dx=2\left[x^3+2x\right]_0^1$

$=2\cdot3=6$ 답 6

0863 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x-3$ 답 $f(x)=4x-3$

0864 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+10x-4$ 답 $f(x)=3x^2+10x-4$

0865 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=2x$

또 $x=1$을 주어진 식의 양변에 대입하면

$\int_{1}^{1}f(t)dt=1+a,\quad 0=1+a$

$\therefore a=-1$ 답 $f(x)=2x,\ a=-1$

0866 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x^2+2x-5$

또 $x=-2$를 주어진 식의 양변에 대입하면

$\int_{-2}^{-2}f(t)dt=-16+4+10+a,\quad 0=-2+a$

$\therefore a=2$ 답 $f(x)=6x^2+2x-5,\ a=2$

0867 $f'(x)=x^2+2x+3$이라 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}(x^2+2x+3)dx=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$=f'(0)=3$ 답 3

0868 $f'(x)=(x+2)(x+3)$이라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}(x+2)(x+3)dx=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=12$ 답 12

유형 01 정적분의 정의 본책 136쪽

① 정적분 $\int_{a}^{b}f(x)dx$의 값을 구할 때

(i) 적분상수를 생략한 $f(x)$의 부정적분 $F(x)$를 구한다.

(ii) $\int_{a}^{b}f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$의 값을 구한다.

② $\int_{a}^{a}f(x)dx=0,\ \int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{b}^{a}f(x)dx$

0869 $\int_{3}^{3}(x-1)(2x+3)dx-\int_{-1}^{-3}(x-1)(3x+1)dx$

$=0+\int_{-3}^{-1}(x-1)(3x+1)dx=\int_{-3}^{-1}(3x^2-2x-1)dx$

$=\left[x^3-x^2-x\right]_{-3}^{-1}=-1-(-33)=32$ 답 32

0870 $\int_{0}^{1}9(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)dx$

$=\int_{0}^{1}9(x^4-1)(x^4+1)dx=\int_{0}^{1}9(x^8-1)dx$

$=\int_{0}^{1}(9x^8-9)dx=\left[x^9-9x\right]_0^1=-8$ 답 ③

0871 $\int_{0}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$

$=\left[x+x^2+x^3+\cdots+x^n\right]_0^1$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}=n$

이므로 $n=100$ 답 ③

0872 $\int_1^4 \{3f'(x)-2x\}dx=\Big[3f(x)-x^2\Big]_1^4$

$=\{3f(4)-16\}-\{3f(1)-1\}$

$=3f(4)-24$ ($\because f(1)=3$) ···➊

즉 $3f(4)-24=3$이므로 $f(4)=9$ ···➋

답 9

채점 기준	비율
➊ 주어진 정적분을 $f(4)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
➋ $f(4)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0873 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (2x^3-2kx)dx$

$=\Big[\frac{1}{2}x^4-kx^2\Big]_0^1=\frac{1}{2}-k$

이때 $f(1)=2-2k$이므로 $\frac{1}{2}-k=2-2k$

$\therefore k=\frac{3}{2}$

답 ⑤

0874 $\int_0^2 \{f(x)\}^2dx=\int_0^2 (2x-1)^2dx$

$=\int_0^2 (4x^2-4x+1)dx$

$=\Big[\frac{4}{3}x^3-2x^2+x\Big]_0^2=\frac{14}{3}$ ···➊

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (2x-1)dx=\Big[x^2-x\Big]_0^2=2$ ···➋

따라서 주어진 등식에서

$\frac{14}{3}=4a \qquad \therefore a=\frac{7}{6}$ ···➌

답 $\frac{7}{6}$

채점 기준	비율
➊ $\int_0^2 \{f(x)\}^2dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ $\int_0^2 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 02 정적분의 정의의 활용

본책 136쪽

정적분을 이용한 식이 주어지면 정적분의 정의를 이용하여 미정계수를 포함하는 식으로 나타낸 후, 조건에 맞게 등식이나 부등식을 세워 푼다.

0875 $\int_{-2}^k (4x+6)dx=\Big[2x^2+6x\Big]_{-2}^k=(2k^2+6k)-(-4)$

$=2k^2+6k+4=2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

이므로 $\int_{-2}^k (4x+6)dx$는 $k=-\frac{3}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{2}$을 갖는다.

따라서 $m=-\frac{3}{2}$, $n=-\frac{1}{2}$이므로

$m+n=-2$

답 -2

0876 $\int_1^2 (3x^2-2kx+2)dx=\Big[x^3-kx^2+2x\Big]_1^2$

$=(12-4k)-(3-k)$

$=-3k+9$

즉 $-3k+9>3$에서 $k<2$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

답 ①

0877 $f(x)=x(x+4)(x-1)$이므로

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 x(x+4)(x-1)dx$

$=\int_0^2 (x^3+3x^2-4x)dx$

$=\Big[\frac{1}{4}x^4+x^3-2x^2\Big]_0^2=4$

답 ②

SSEN 특강

최고차항의 계수가 $k\,(k\neq 0)$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

① $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$, $f(\gamma)=0$이 성립하면
➡ $f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 놓는다.

② $f(\alpha)=m$, $f(\beta)=m$, $f(\gamma)=m$이 성립하면
➡ $f(x)-m=k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 놓는다.

0878 $f'(x)=3x^2-2x+5$이므로

$f(x)=\int (3x^2-2x+5)dx=x^3-x^2+5x+C$

따라서

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x^3-x^2+5x+C)dx$

$=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+Cx\Big]_0^1$

$=\frac{29}{12}+C$

이므로 $\frac{29}{12}+C=\frac{5}{12} \qquad \therefore C=-2$

$\therefore f(x)=x^3-x^2+5x-2$

답 $f(x)=x^3-x^2+5x-2$

0879 조건 ㈎에서

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$=\frac{1}{2}f'(1)=-3$

$\therefore f'(1)=-6$

$f'(x)=2ax+b$이므로 $2a+b=-6$ ······ ㉠ ···➊

조건 ㈏에서

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (ax^2+bx)dx$

$=\Big[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\Big]_0^1$

$=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=-\frac{7}{3}$

$\therefore 2a+3b=-14$ ······ ㉡ ···➋

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=-4$ ⋯➌
따라서 $f(x)=-x^2-4x$이므로
$f(-1)=-1+4=3$ ⋯➍

답 3

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건 (나)를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 정적분의 계산; 적분 구간이 같은 경우

본책 137쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때
⇒ $\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx$ (복호동순)
임을 이용하여 주어진 식을 하나의 정적분으로 나타낸다.

0880 $\int_0^2 (2x^2+1)dx+2\int_0^2 (x-x^2)dx$

$=\int_0^2 (2x^2+1)dx+\int_0^2 (2x-2x^2)dx$

$=\int_0^2 (2x^2+1+2x-2x^2)dx$

$=\int_0^2 (2x+1)dx=\Big[x^2+x\Big]_0^2=6$

답 ⑤

0881 $\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx-\int_1^0 \frac{1}{t+1}dt$

$=\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx-\int_1^0 \frac{1}{x+1}dx$

$=\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$

$=\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}dx=\int_0^1 \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$

$=\int_0^1 (x^2-x+1)dx=\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\Big]_0^1$

$=\frac{5}{6}$

답 ④

0882 $\int_{-1}^1 \{f(x)+g(x)\}dx+\int_{-1}^1 \{f(x)-g(x)\}dx=10+4=14$
이므로

$\int_{-1}^1 \{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)\}dx=14$

$\int_{-1}^1 2f(x)dx=14,\quad 2\int_{-1}^1 f(x)dx=14$

$\therefore \int_{-1}^1 f(x)dx=7$ ⋯➊

$\int_{-1}^1 \{f(x)+g(x)\}dx-\int_{-1}^1 \{f(x)-g(x)\}dx=10-4=6$이므로

$\int_{-1}^1 \{f(x)+g(x)-f(x)+g(x)\}dx=6$

$\int_{-1}^1 2g(x)dx=6,\quad 2\int_{-1}^1 g(x)dx=6$

$\therefore \int_{-1}^1 g(x)dx=3$ ⋯➋

$\therefore \int_{-1}^1 \{2f(x)-g(x)\}dx=2\int_{-1}^1 f(x)dx-\int_{-1}^1 g(x)dx$
$=2\cdot7-3=11$ ⋯➌

답 11

채점 기준	비율
❶ $\int_{-1}^1 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_{-1}^1 g(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\int_{-1}^1 \{2f(x)-g(x)\}dx$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0883 $\int_2^1 f(x)dx=3$에서 $\int_1^2 f(x)dx=-3$

$\therefore \int_1^2 \{f(x)+2\}^2 dx$

$=\int_1^2 [\{f(x)\}^2+4f(x)+4]dx$

$=\int_1^2 \{f(x)\}^2 dx+4\int_1^2 f(x)dx+\int_1^2 4\,dx$

$=10+4\cdot(-3)+\Big[4x\Big]_1^2$

$=-2+4=2$

답 2

0884 $\int_1^3 (x+k)^2dx+\int_3^1 (1-2x^2)dx$

$=\int_1^3 (x^2+2kx+k^2)dx-\int_1^3 (1-2x^2)dx$

$=\int_1^3 (x^2+2kx+k^2-1+2x^2)dx$

$=\int_1^3 (3x^2+2kx+k^2-1)dx$

$=\Big[x^3+kx^2+(k^2-1)x\Big]_1^3$

$=(3k^2+9k+24)-(k^2+k)$

$=2k^2+8k+24=2(k+2)^2+16$

따라서 주어진 정적분의 최솟값은 16이다.

답 16

유형 04 정적분의 계산; 피적분함수가 같은 경우

본책 138쪽

함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때
⇒ $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$임을 이용하여 주어진 식을 하나의 정적분으로 나타낸다.

0885 $\int_0^4 f(x)dx-\int_2^8 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx$

$=\int_0^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx-\int_2^8 f(x)dx$

$=\int_0^8 f(x)dx+\int_8^2 f(x)dx$

$=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (2x^3-3x^2+1)dx$

$=\Big[\frac{1}{2}x^4-x^3+x\Big]_0^2=2$

답 ⑤

0886 $\int_1^2 (x^3+2x-1)dx+\int_2^3 (x^3+2x-1)dx$

$=\int_1^3 (x^3+2x-1)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^2-x\right]_1^3$

$=\frac{105}{4}-\frac{1}{4}=26$ 답 ④

0887 $\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$

$=\left\{\int_0^2 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx\right\}+\int_1^3 f(x)dx$

$=(A-C)+B$

$=A+B-C$ 답 $A+B-C$

0888 $\int_0^3 (2x+1)^2dx-\int_{-2}^3 (2x-1)^2dx+\int_{-2}^0 (2x-1)^2dx$

$=\int_0^3 (2x+1)^2dx-\left\{\int_{-2}^3 (2x-1)^2dx-\int_{-2}^0 (2x-1)^2dx\right\}$

$=\int_0^3 (2x+1)^2dx-\left\{\int_{-2}^3 (2x-1)^2dx+\int_0^{-2} (2x-1)^2dx\right\}$

$=\int_0^3 (2x+1)^2dx-\int_0^3 (2x-1)^2dx$

$=\int_0^3 (4x^2+4x+1)dx-\int_0^3 (4x^2-4x+1)dx$

$=\int_0^3 (4x^2+4x+1-4x^2+4x-1)dx$

$=\int_0^3 8x\,dx=\left[4x^2\right]_0^3=36$ 답 36

0889 $\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$

이때 $\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx$이므로

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$

$\therefore \int_0^2 f(x)dx=0$

즉 $\int_{-2}^2 f(x)dx=0$, $\int_0^2 f(x)dx=0$, $\int_{-2}^0 f(x)dx=0$이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x^2+ax+b)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}+2a+2b=0$ …… ㉠

$\int_{-2}^0 f(x)dx=\int_{-2}^0 (x^2+ax+b)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{-2}^0$

$=\frac{8}{3}-2a+2b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{4}{3}$이므로 $f(2)=\frac{8}{3}$ 답 ④

0890 조건 (나)에서

$\int_n^{n+3} f(x)dx=\int_n^{n+1} x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_n^{n+1}=\frac{2n+1}{2}$ … ❶

$\therefore \int_0^9 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx+\int_6^9 f(x)dx$

$=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}+\frac{13}{2}=\frac{21}{2}$ … ❷

또 조건 (가)에서 $\int_0^1 f(x)dx=0$이므로

$\int_0^{10} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx$

$+\int_7^{10} f(x)dx$

$=0+\frac{3}{2}+\frac{9}{2}+\frac{15}{2}=\frac{27}{2}$ … ❸

$\therefore \int_9^{10} f(x)dx=\int_0^{10} f(x)dx-\int_0^9 f(x)dx$

$=\frac{27}{2}-\frac{21}{2}=3$ … ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ $\int_n^{n+3} f(x)dx$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\int_0^9 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\int_0^{10} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $\int_9^{10} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 05 정적분의 계산; 구간에 따라 다르게 정의된 함수 본책 139쪽

함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\geq c) \\ h(x) & (x\leq c)\end{cases}$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $a<c<b$일 때

➡ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c h(x)dx+\int_c^b g(x)dx$

0891 $\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^2 xf(x)dx$

$=\int_0^1 x(x^2-1)dx+\int_1^2 x(x-1)dx$

$=\int_0^1 (x^3-x)dx+\int_1^2 (x^2-x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$

$=-\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{7}{12}$

따라서 $k=\frac{7}{12}$이므로

$12k=7$ 답 ⑤

0892 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)=f(2)$

$2=-2+a$ $\therefore a=4$

$$\therefore \int_0^3 f(x)dx=\int_0^2(-x+4)dx+\int_2^3(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_2^3$$
$$=6+\frac{7}{6}=\frac{43}{6}$$

답 ⑤

0893 $f(x)=\begin{cases}-3x+6 & (x\ge 0)\\ 6 & (x\le 0)\end{cases}$이므로 ··· ❶

$$\int_{-2}^3 f(x)dx=\int_{-2}^0 6\,dx+\int_0^3(-3x+6)dx$$ ··· ❷
$$=\left[6x\right]_{-2}^0+\left[-\frac{3}{2}x^2+6x\right]_0^3$$
$$=12+\frac{9}{2}=\frac{33}{2}$$ ··· ❸

답 $\frac{33}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\int_{-2}^3 f(x)dx$를 구간에 따라 나누어 두 정적분의 합으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 정적분의 값을 구할 수 있다.	30 %

0894 $\int_{-1}^a f(x)dx=\int_{-1}^1(3x^2+1)dx+\int_1^a 4x\,dx$
$$=\left[x^3+x\right]_{-1}^1+\left[2x^2\right]_1^a$$
$$=4+(2a^2-2)=2a^2+2$$

따라서 $2a^2+2=10$이므로

$a^2=4\qquad \therefore a=2\ (\because a>1)$

답 2

유형 06 정적분의 계산; 절댓값 기호를 포함한 함수 본책 139쪽

절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분의 값을 구할 때
(i) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 구간을 나눈다.
(ii) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용한다.

0895 $|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1 & (x\le -1\text{ 또는 }x\ge 1)\\ -x^2+1 & (-1\le x\le 1)\end{cases}$이므로

$$\int_0^3\frac{|x^2-1|}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1\frac{-x^2+1}{x+1}dx+\int_1^3\frac{x^2-1}{x+1}dx$$
$$=-\int_0^1\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx+\int_1^3\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx$$
$$=-\int_0^1(x-1)dx+\int_1^3(x-1)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

답 ②

0896 $x+|x-2|=\begin{cases}2x-2 & (x\ge 2)\\ 2 & (x\le 2)\end{cases}$이므로

$$\int_1^5(x+|x-2|)dx=\int_1^2 2\,dx+\int_2^5(2x-2)dx$$
$$=\left[2x\right]_1^2+\left[x^2-2x\right]_2^5$$
$$=2+15$$
$$=17$$

답 17

0897 $|3x^2-6x|=\begin{cases}3x^2-6x & (x\le 0\text{ 또는 }x\ge 2)\\ -3x^2+6x & (0\le x\le 2)\end{cases}$이고 $a>2$이므로

$$\int_0^a|3x^2-6x|dx=\int_0^2(-3x^2+6x)dx+\int_2^a(3x^2-6x)dx$$
$$=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2+\left[x^3-3x^2\right]_2^a$$
$$=a^3-3a^2+8$$

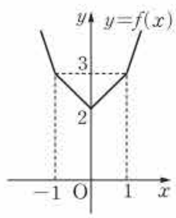
따라서 $a^3-3a^2+8=24$이므로

$a^3-3a^2-16=0,\qquad (a-4)(a^2+a+4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a$는 실수)

답 ②

0898 $f(x)=\begin{cases}3x & (x\ge 1)\\ x+2 & (0\le x\le 1)\\ -x+2 & (-1\le x\le 0)\\ -3x & (x\le -1)\end{cases}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값 2를 가지므로

$a=2$ ··· ❶

$$\therefore \int_0^a f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^1(x+2)dx+\int_1^2 3x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1+\left[\frac{3}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=\frac{5}{2}+\frac{9}{2}$$
$$=7$$ ··· ❷

답 7

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\int_0^a f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0899 $|x-n|=\begin{cases}x-n & (x\ge n)\\ -x+n & (x\le n)\end{cases}$이므로

$$f(n)=\int_0^{2n}|x-n|dx$$
$$=\int_0^n(-x+n)dx+\int_n^{2n}(x-n)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+nx\right]_0^n+\left[\frac{1}{2}x^2-nx\right]_n^{2n}$$
$$=\frac{n^2}{2}+\frac{n^2}{2}=n^2$$ ··· ❶

$\therefore \dfrac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)}{11}$

$=\dfrac{1}{11}\sum_{k=1}^{11}f(k)=\dfrac{1}{11}\sum_{k=1}^{11}k^2$

$=\dfrac{1}{11}\cdot\dfrac{11\cdot12\cdot23}{6}=46$ ⋯ ❷

답 46

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\dfrac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)}{11}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

SSEN 특강 자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

유형 07 우함수·기함수의 정적분 ; 피적분함수가 주어진 경우

본책 140쪽

구간 $[-a, a]$에서 정적분의 계산은 피적분함수가 우함수인지 기함수인지를 파악한 후 다음을 이용한다.

① 피적분함수가 우함수이면 ➡ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

② 피적분함수가 기함수이면 ➡ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

0900 $\int_{-a}^{a}(3x^2-2x)dx=2\int_{0}^{a}3x^2dx=2\Big[x^3\Big]_{0}^{a}=2a^3$

즉 $2a^3=\dfrac{2}{27}$이므로 $a^3=\dfrac{1}{27}$ $\therefore a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore 60a=20$

답 ②

0901 $\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+30x^{29})dx$

$=\int_{-1}^{1}(1+3x^2+\cdots+29x^{28})dx$

$+\int_{-1}^{1}(2x+4x^3+\cdots+30x^{29})dx$

$=2\int_{0}^{1}(1+3x^2+\cdots+29x^{28})dx$

$=2\Big[x+x^3+\cdots+x^{29}\Big]_{0}^{1}$

$=2\cdot15=30$

답 ③

0902 $\int_{-a}^{a}(x^3+3x^2+x+a)dx=2\int_{0}^{a}(3x^2+a)dx$

$=2\Big[x^3+ax\Big]_{0}^{a}$

$=2a^3+2a^2$

이므로 $2a^3+2a^2=(a+1)^2$

$2a^3+a^2-2a-1=0,\quad (a+1)(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1=-\dfrac{1}{2}$

답 ②

0903 $\int_{-2}^{2}|x|(x^3+x-1)dx$

$=\int_{-2}^{2}(|x|x^3+|x|x-|x|)dx$

$=2\int_{0}^{2}(-|x|)dx=2\int_{0}^{2}(-x)dx$

$=\Big[-x^2\Big]_{0}^{2}=-4$

답 ②

참고 $|-x|(-x)^3=-|x|x^3$, $|-x|(-x)=-|x|x$, $|-x|=|x|$이므로 $|x|x^3$, $|x|x$는 기함수, $|x|$는 우함수이다.

0904 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=3$에서

$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)dx=2a\int_{0}^{1}x^2dx$

$=2a\Big[\dfrac{1}{3}x^3\Big]_{0}^{1}=2a\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}a$

즉 $\dfrac{2}{3}a=3$이므로 $a=\dfrac{9}{2}$ ⋯ ❶

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=-2$에서

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2)dx=2b\int_{0}^{1}x^2dx$

$=2b\Big[\dfrac{1}{3}x^3\Big]_{0}^{1}=2b\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}b$

즉 $\dfrac{2}{3}b=-2$이므로 $b=-3$ ⋯ ❷

따라서 $f(x)=\dfrac{9}{2}x-3$이므로

$f(2)=9-3=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0905 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다.

따라서 $f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+a$

조건 (나)에서

$\int_{-3}^{3}(3x^2+a)dx=2\int_{0}^{3}(3x^2+a)dx=2\Big[x^3+ax\Big]_{0}^{3}$

$=2(27+3a)=54+6a$

즉 $54+6a=0$이므로 $a=-9$

따라서 $f(x)=x^3-9x=x(x+3)(x-3)$이므로

$$|f(x)|=\begin{cases} x^3-9x & (-3\le x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 3) \\ -x^3+9x & (x\le -3 \text{ 또는 } 0\le x\le 3)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^{3}|f(x)|dx&=\int_{-3}^{0}(x^3-9x)dx+\int_{0}^{3}(-x^3+9x)dx \\ &=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{3} \\ &=\frac{81}{4}+\frac{81}{4}=\frac{81}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{81}{2}$

다른 풀이 조건 (가), (나)에서 $f(x)=x^3-9x$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$$|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$$

즉 $|f(x)|$는 우함수이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3}|f(x)|dx&=2\int_{0}^{3}|f(x)|dx \\ &=2\int_{0}^{3}(-x^3+9x)dx \\ &=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{3} \\ &=2\cdot\frac{81}{4}=\frac{81}{2}\end{aligned}$$

유형 08 우함수·기함수의 정적분 ; 피적분함수가 주어지지 않은 경우

본책 141쪽

① $f(-x)=f(x)$이면 ➡ $f(x)$는 우함수
② $f(-x)=-f(x)$이면 ➡ $f(x)$는 기함수

0906 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로 $x^3f(x)$, $xf(x)$는 모두 기함수이다.

$$\begin{aligned}&\therefore \int_{-1}^{1}(2x^3-x-1)f(x)dx \\ &=2\underbrace{\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx}_{0}-\underbrace{\int_{-1}^{1}xf(x)dx}_{0}-\int_{-1}^{1}f(x)dx \\ &=-2\int_{0}^{1}f(x)dx \\ &=-2\cdot 5=-10\end{aligned}$$

답 -10

SSEN 특강 우함수, 기함수의 곱

① (우함수)×(우함수) ➡ (우함수)
② (우함수)×(기함수) ➡ (기함수)
③ (기함수)×(기함수) ➡ (우함수)

0907 $f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이고, $g(x)=-g(-x)$에서 $g(-x)=-g(x)$이므로 $g(x)$는 기함수이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^{3}\{f(x)+g(x)\}dx&=\int_{-3}^{3}f(x)dx+\underbrace{\int_{-3}^{3}g(x)dx}_{0} \\ &=2\int_{0}^{3}f(x)dx \\ &=2\cdot 4=8\end{aligned}$$

답 ③

0908 $f(x)+f(-x)=0$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다.

따라서 $x^2f(x)$는 기함수이고, $xf(x)$는 우함수이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-4}^{4}(3x^2-2x+5)f(x)dx \\ &=3\underbrace{\int_{-4}^{4}x^2f(x)dx}_{0}-2\int_{-4}^{4}xf(x)dx+5\underbrace{\int_{-4}^{4}f(x)dx}_{0} \\ &=-4\int_{0}^{4}xf(x)dx \\ &=-4\cdot(-5)=20\end{aligned}$$

답 ④

0909 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-5}^{5}f(x)dx=2\int_{0}^{5}f(x)dx=12 \qquad \therefore \int_{0}^{5}f(x)dx=6$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{2}^{5}f(x)dx&=\int_{0}^{5}f(x)dx-\int_{0}^{2}f(x)dx \\ &=6-3=3\end{aligned}$$

답 ③

0910 $f(x)=-f(-x)$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다. ··· ❶

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-2}^{3}f(x)dx&=\underbrace{\int_{-2}^{2}f(x)dx}_{0}+\int_{2}^{3}f(x)dx \\ &=\int_{2}^{3}f(x)dx \\ &=\int_{0}^{3}f(x)dx-\int_{0}^{2}f(x)dx \quad \cdots ❷ \\ &=k-(-5)=k+5\end{aligned}$$

이때 $\int_{-2}^{3}f(x)dx=3k-1$이므로

$k+5=3k-1,\quad 2k=6\quad \therefore k=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 기함수임을 알 수 있다.	20 %
❷ $\int_{-2}^{3}f(x)dx$를 $\int_{0}^{2}f(x)dx$, $\int_{0}^{3}f(x)dx$로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 09 정적분을 포함한 등식 ; 아래끝과 위끝이 상수인 경우

본책 142쪽

$f(x)=g(x)+\int_{a}^{b}f(t)dt$ (a, b는 상수) 꼴의 등식이 주어질 때

➡ $\int_{a}^{b}f(t)dt=k$ (k는 상수)라 하면 $f(x)=g(x)+k$이므로 이것을 $\int_{a}^{b}f(t)dt=k$에 대입하여 k의 값을 구한다.

0911 $\int_{0}^{4}f(t)dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

라 하면 $f(x)=x^3-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_{0}^{4}(t^3-2t+k)dt=k,\qquad \left[\frac{1}{4}t^4-t^2+kt\right]_{0}^{4}=k$$

$48+4k=k\qquad \therefore k=-16$

따라서 $f(x)=x^3-2x-16$이므로

$f(2)=8-4-16=-12$

답 ②

0912 $f(x)=3x^2+\int_0^1(2x+1)f(t)dt$

$=3x^2+2x\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt$

이때

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

라 하면 $f(x)=3x^2+2kx+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1(3t^2+2kt+k)dt=k$, $\left[t^3+kt^2+kt\right]_0^1=k$

$1+2k=k$ $\therefore k=-1$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-1$이므로

$f(-2)=12+4-1=15$

답 ④

0913 $\int_0^3 tf'(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

라 하면 $f(x)=-x^2+6x+k$

$\therefore f'(x)=-2x+6$ ⋯ ❶

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^3(-2t^2+6t)dt=k$, $\left[-\frac{2}{3}t^3+3t^2\right]_0^3=k$

$\therefore k=9$ ⋯ ❷

따라서 $f(x)=-x^2+6x+9$이므로

$f(-1)=-1-6+9=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_0^3 tf'(t)dt$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0914 $f(x)=3x^2-2x+\int_0^2 f(t)dt$에서

$\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

라 하면 $f(x)=3x^2-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2(3t^2-2t+k)dt=k$, $\left[t^3-t^2+kt\right]_0^2=k$

$4+2k=k$ $\therefore k=-4$

즉 $f(x)=3x^2-2x-4$이므로 부등식 $f(x)<g(x)$에서

$3x^2-2x-4<2x^2+3x+2$

$x^2-5x-6<0$, $(x+1)(x-6)<0$

$\therefore -1<x<6$

따라서 부등식 $f(x)<g(x)$를 만족시키는 자연수 x는

1, 2, 3, 4, 5

이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$

답 15

0915 $f(x)=x^2-\int_0^2 xf(t)dt+\int_0^1 f(t)dt$

$=x^2-x\int_0^2 f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt$

에서 상수 a, b에 대하여

$-\int_0^2 f(t)dt=a$, $\int_0^1 f(t)dt=b$

라 하면 $f(x)=x^2+ax+b$

$-\int_0^2 f(t)dt=-\int_0^2(t^2+at+b)dt$

$=-\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^2=-\frac{8}{3}-2a-2b$

이므로 $-\frac{8}{3}-2a-2b=a$

$\therefore 3a+2b+\frac{8}{3}=0$ ...... ㉠

$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(t^2+at+b)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b$

이므로 $\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b=b$, $\frac{a}{2}=-\frac{1}{3}$

$\therefore a=-\frac{2}{3}$

$a=-\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면 $b=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$이므로

$f(1)=1-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=0$

답 ③

0916 상수 a, b에 대하여

$\int_0^1\{f(y)+g(y)\}dy=a$, $\int_0^1\{f(y)-g(y)\}dy=b$

라 하면

$f(x)=3x^2+a$, $g(x)=4x^3+b$

이므로

$\int_0^1\{f(y)+g(y)\}dy=\int_0^1\{4y^3+3y^2+(a+b)\}dy$

$=\left[y^4+y^3+(a+b)y\right]_0^1$

$=2+a+b$

즉 $2+a+b=a$이므로 $b=-2$ ⋯ ❶

$\int_0^1\{f(y)-g(y)\}dy=\int_0^1\{-4y^3+3y^2+(a-b)\}dy$

$=\left[-y^4+y^3+(a-b)y\right]_0^1$

$=a-b$

즉 $a-b=b$이므로 $a=2b=-4$ ⋯ ❷

따라서 $f(x)=3x^2-4$, $g(x)=4x^3-2$이므로

$f(1)g(1)=-1\cdot 2=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(1)g(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 10 정적분을 포함한 등식 ; 아래끝 또는 위끝에 변수가 있는 경우 본책 143쪽

$\int_a^x f(t)dt=g(x)$ (a는 상수) 꼴의 등식이 주어질 때
① 양변에 $x=a$를 대입한다. ➡ $\int_a^a f(t)dt=g(a)=0$
② 양변을 x에 대하여 미분한다. ➡ $f(x)=g'(x)$

0917 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면
$a^2-4a=0$, $a(a-4)=0$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=2x-4$
$\therefore f(a)=f(4)=4$

답 ⑤

0918 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)=0$
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=x^2+x$
따라서 $f'(-1)=0$이므로 $f(-1)+f'(-1)=0$

답 0

0919 $\int_2^x \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=2x^3+kx^2-4$에서
$\int_2^x f'(t)dt=2x^3+kx^2-4$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$12+4k=0$ $\therefore k=-3$
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=6x^2+2kx=6x^2-6x$
$\therefore f'(k)=f'(-3)=72$

답 ③

0920 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$
$\therefore \int_0^2 f'(x)dx=\int_0^2 (3x^2+3x+1)dx$
$=\left[x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right]_0^2=16$

답 ②

0921 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면
$2a^2+a^2-12=0$, $a^2=4$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$) ⋯ ❶
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=4x+a=4x+2$
따라서 $f(2)=10$이므로 ⋯ ❷
$\frac{a}{f(2)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{5}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\frac{a}{f(2)}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0922 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)=-3$ …… ㉠
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)+xf'(x)=3x^2-8x+f(x)$
$xf'(x)=3x^2-8x$ $\therefore f'(x)=3x-8$
이때
$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-8)dx=\frac{3}{2}x^2-8x+C$
이므로 ㉠에서 $\frac{3}{2}-8+C=-3$ $\therefore C=\frac{7}{2}$
따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+\frac{7}{2}$이므로 $f(k)=41$에서
$\frac{3}{2}k^2-8k+\frac{7}{2}=41$, $3k^2-16k-75=0$
$(k+3)(3k-25)=0$ $\therefore k=-3$ ($\because k$는 정수)

답 -3

유형 11 정적분을 포함한 등식; 아래끝 또는 위끝과 피적분함수에 변수가 있는 경우 본책 143쪽

$\int_a^x (x\pm t)f(t)dt$ (a는 상수) 꼴을 포함한 등식이 주어질 때
(i) $x\int_a^x f(t)dt\pm\int_a^x tf(t)dt$ (복호동순)와 같이 피적분함수에 x가 포함되지 않도록 변형한다.
(ii) (i)에서 얻은 등식의 양변을 x에 대하여 미분한다.
➡ $\frac{d}{dx}\left\{x\int_a^x f(t)dt\pm\int_a^x tf(t)dt\right\}$
$=\int_a^x f(t)dt+xf(x)\pm xf(x)$ (복호동순)

0923 $\int_2^x (x-t)f(t)dt=x^3+ax^2+4$의 양변에 $x=2$를 대입하면
$8+4a+4=0$ $\therefore a=-3$
$\int_2^x (x-t)f(t)dt=x^3-3x^2+4$에서
$x\int_2^x f(t)dt-\int_2^x tf(t)dt=x^3-3x^2+4$
위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$\int_2^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-6x$
$\therefore \int_2^x f(t)dt=3x^2-6x$
위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면
$f(x)=6x-6$ $\therefore b=f(2)=6$
$\therefore a+b=3$

답 3

0924 $\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^3-x^2-x+1$에서
$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3-x^2-x+1$
위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-2x-1$
$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2-2x-1$

앞의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-2 \quad \therefore f(0)=-2$ 답 ①

0925 $\int_0^x (x-t)f'(t)dt=x^4$에서

$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=x^4$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=4x^3$

$\int_0^x f'(t)dt=4x^3, \quad \Big[f(t)\Big]_0^x=4x^3$

$\therefore f(x)-f(0)=4x^3$

이때 $f(0)=-2$이므로

$f(x)=4x^3-2$ 답 $f(x)=4x^3-2$

0926 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2-a+b=0 \quad \therefore a-b+2=0$ …… ㉠

$\int_{-1}^x (x-t)f(t)dt=2x^3+ax+b$에서

$x\int_{-1}^x f(t)dt-\int_{-1}^x tf(t)dt=2x^3+ax+b$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-1}^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=6x^2+a$

$\therefore \int_{-1}^x f(t)dt=6x^2+a$

$x=-1$을 위의 등식의 양변에 대입하면

$6+a=0 \quad \therefore a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면

$-6-b+2=0 \quad \therefore b=-4$ ⋯ ❶

따라서 $\int_{-1}^x f(t)dt=6x^2-6$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x$

이므로 $f(2)=24$ ⋯ ❷

$\therefore ab-f(2)=-6\cdot(-4)-24=0$ ⋯ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $ab-f(2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 12 정적분으로 정의된 함수의 극대·극소

본책 144쪽

$f(x)=\int_a^x g(t)dt$ (a는 상수)와 같이 정의된 다항함수 $f(x)$의 극값을 찾을 때

(i) 양변을 x에 대하여 미분한다. ⇒ $f'(x)=g(x)$

(ii) $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 b를 구한다.

(iii) $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.

⇒ $f'(x)$의 부호가 [양 → 음 ⇒ $f(x)$는 $x=b$에서 극대
음 → 양 ⇒ $f(x)$는 $x=b$에서 극소

0927 $f(x)=\int_0^x (-3t^2+at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-3x^2+ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극솟값 -18을 가지므로

$f(-3)=-18, \ f'(-3)=0$

이때

$f(-3)=\int_0^{-3}(-3t^2+at+b)dt=\Big[-t^3+\frac{1}{2}at^2+bt\Big]_0^{-3}$

$=27+\frac{9}{2}a-3b$

이므로 $27+\frac{9}{2}a-3b=-18$

$\therefore 3a-2b=-30$ …… ㉠

$f'(-3)=0$에서 $-27-3a+b=0$

$\therefore 3a-b=-27$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8, \ b=3$

$\therefore ab=-24$ 답 ①

0928 $f(x)=\int_0^x (t^2+kt-8)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+kx-8$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $f'(2)=0$

$4+2k-8=0, \quad 2k=4$

$\therefore k=2$ 답 2

0929 $f(x)=\int_0^x (t^2-2t-3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	⋯	-1	⋯	3	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극대이므로 극댓값 a는

$a=f(-1)=\int_0^{-1}(t^2-2t-3)dt$

$=\Big[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\Big]_0^{-1}=\frac{5}{3}$

또 $x=3$일 때 극소이므로 극솟값 b는

$b=f(3)=\int_0^3 (t^2-2t-3)dt$

$=\Big[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\Big]_0^3=-9$

$\therefore 3a+b=3\cdot\frac{5}{3}+(-9)=-4$ 답 ①

0930 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=a$

즉 $f(x)$는 $x=1$일 때 극대, $x=a$일 때 극소이다. ⋯ ❶

이때 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{11}{6}$이므로

$$f(1)=\int_0^1 (t-1)(t-a)dt$$
$$=\int_0^1 \{t^2-(a+1)t+a\}dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a+1}{2}t^2+at\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{a+1}{2}+a$$
$$=\frac{3a-1}{6}=\frac{11}{6}$$

$3a-1=11$ $\therefore a=4$ ··· ❷

따라서 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 가지므로 구하는 극솟값은

$$f(4)=\int_0^4 (t-1)(t-4)dt$$
$$=\int_0^4 (t^2-5t+4)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_0^4=-\frac{8}{3}$$ ··· ❸

답 $-\frac{8}{3}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 극소일 때의 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$의 극솟값을 구할 수 있다.	40 %

0931 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)=x^3-3x+2a$

이므로 사차함수 $F(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $F'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

즉 $f(-1)f(1)<0$이어야 하므로

$(2a+2)(2a-2)<0$, $(a+1)(a-1)<0$

$\therefore -1<a<1$

따라서 정수 a의 값은 0이다. 답 0

SSEN 특강

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $F(x)$의 도함수를 $f(x)$라 할 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 근과 사차함수 $F(x)$의 관계는 다음과 같다.

① $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근 $\Longleftrightarrow$ $F(x)$는 극솟값만 갖는다.
② $f(x)=0$이 한 실근과 중근 $\Longleftrightarrow$ $F(x)$는 극솟값만 갖는다.
③ $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근
$\Longleftrightarrow$ $F(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

유형 13 정적분으로 정의된 함수의 최대·최소 본책 145쪽

주어진 등식을 미분하여 $f(x)$ 또는 $f'(x)$를 구한 후 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

0932 $f(x)=\int_x^{x+1} (t^3-t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\{(x+1)^3-(x+1)\}-(x^3-x)$$
$$=3x^2+3x=3x(x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

이때

$$f(-1)=\int_{-1}^0 (t^3-t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0=\frac{1}{4},$$
$$f(0)=\int_0^1 (t^3-t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=-\frac{1}{4},$$
$$f(1)=\int_1^2 (t^3-t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_1^2=\frac{9}{4}$$

이므로 $-1\le x\le 1$에서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{9}{4}$, 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다.

즉 $M=\frac{9}{4}$, $m=-\frac{1}{4}$이므로 $M+m=2$ 답 ④

0933 $\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$

$$=\int_{-a}^0 (4x+1)dx+\int_0^a (-x^2+4x+1)dx$$
$$=\left[2x^2+x\right]_{-a}^0+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+x\right]_0^a$$
$$=-2a^2+a-\frac{1}{3}a^3+2a^2+a$$
$$=-\frac{1}{3}a^3+2a$$ ··· ❶

이때 $g(a)=-\frac{1}{3}a^3+2a$라 하면

$g'(a)=-a^2+2=-(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$

$g'(a)=0$에서 $a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

따라서 $g(a)$는 $a=\sqrt{2}$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$g(\sqrt{2})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ··· ❷

a	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$		↗	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$	↘

답 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\int_{-a}^a f(x)dx$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $\int_{-a}^a f(x)dx$의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %

0934 $\int_0^x (x-t)f(t)dt=\frac{1}{4}x^4+x^3+3x^2$에서

$$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\frac{1}{4}x^4+x^3+3x^2$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=x^3+3x^2+6x$$
$$\therefore \int_0^x f(t)dt=x^3+3x^2+6x$$ ··· ❶

앞의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+6x+6$ ⋯ ❷

따라서 $f(x)=3(x+1)^2+3$이므로 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 3을 갖는다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\int_0^x f(t)dt$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0935 $f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-|x|$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\le x\le 3$)

x	0	⋯	1	⋯	3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(1)=\int_{-1}^{1}(1-|t|)dt=\underline{2\int_0^1(1-|t|)dt}$$

$y=1-|x|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 우함수이다.

$$=2\int_0^1(1-t)dt$$

$$=2\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

답 ②

유형 14 그래프와 정적분으로 정의된 함수 본책 145쪽

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$에 대하여 $y=F(x)$ 또는 $y=f(x)$의 그래프가 주어질 때

(i) 그래프로부터 $F(x)$ 또는 $f(x)$의 식을 구한다.

(ii) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $F'(x)=f(x)$임을 이용한다.

0936 주어진 그래프에 의하여

$F(x)=a(x-1)(x-2)=a(x^2-3x+2)$ $(a<0)$

라 하면 $\int_2^x f(t)dt=a(x^2-3x+2)$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=a(2x-3)$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 $f(1)=3$

$-a=3$ $\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-3(2x-3)$이므로 $f(0)=9$

답 ⑤

0937 주어진 그래프에 의하여

$f(x)=ax(x-2)$ $(a>0)$

라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이고, $f(x)$의 최솟값이 -1이므로 $f(1)=-1$에서

$-a=-1$ $\therefore a=1$

$\therefore f(x)=x(x-2)=x^2-2x$ ⋯ ❶

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

따라서 $F(x)$는 $\underline{x=2\text{에서 극소이}}$므로 극솟값은

$F'(2)=0$이고, $F'(x)$의 부호가 음 → 양이다.

$$F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2(t^2-2t)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^2=-\frac{4}{3}$$ ⋯ ❷

답 $-\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $F(x)$의 극솟값을 구할 수 있다.	60 %

0938 주어진 그래프에 의하여

$f(x)=a(x+2)(x+1)(x-1)$ $(a>0)$

이라 하면 $f(0)=-2$이므로

$-2=-2a$ $\therefore a=1$

$\therefore f(x)=(x+2)(x+1)(x-1)$

$g(x)=\int_1^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

따라서 $g(x)$는 $\underline{x=-1\text{에서 극대이}}$므로

$g'(-1)=0$이고, $g'(x)$의 부호가 양 → 음이다.

$\alpha=-1$

$$\therefore g(\alpha)=g(-1)$$

$$=\int_1^{-1}f(t)dt=-\int_{-1}^{1}f(t)dt$$

$$=-\int_{-1}^{1}(t+2)(t+1)(t-1)dt$$

$$=-\int_{-1}^{1}(t^3+2t^2-t-2)dt$$

$$=-2\int_0^1(2t^2-2)dt=-2\left[\frac{2}{3}t^3-2t\right]_0^1$$

$$=-2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

$\therefore \alpha+g(\alpha)=\frac{5}{3}$

답 ④

0939 주어진 그래프에 의하여

$f(x)=a(x-2)(x-5)$ $(a>0)$

라 하고, $g(x)=\int_x^{x+2}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=f(x+2)-f(x)$$

$$=ax(x-3)-a(x-2)(x-5)$$

$$=a(x^2-3x-x^2+7x-10)$$

$$=2a(2x-5)$$

$g'(x)=0$에서

$x=\frac{5}{2}$

x	⋯	$\frac{5}{2}$	⋯
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 $g(x)$는 $x=\frac{5}{2}$에서 극소이면서 최소이므로

$k=\frac{5}{2}$

답 ③

0940 $S(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$S'(x)=f(x)$

$S'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=4$ ($\because 0\le x\le 4$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$S'(x)$		$+$	0	$-$	0
$S(x)$		↗	극대	↘	

이때

$S(0)=0$,

$S(1)=\int_0^1 f(t)dt=2$,

$S(4)=\int_0^4 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^4 f(t)dt$

$=2+(-6)=-4$

이므로 $S(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -4이다.

따라서 구하는 합은

$2+(-4)=-2$ 답 -2

0941 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

이므로 $f(x)$는 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 도함수이다.

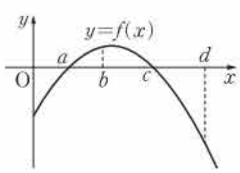
그런데 주어진 그래프에서 $y=F(x)$가

$0\le x\le a$에서 감소하므로 $f(x)\le 0$

$a\le x\le c$에서 증가하므로 $f(x)\ge 0$

$x\ge c$에서 감소하므로 $f(x)\le 0$

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로



$f(a)=0$, $f(b)>0$,

$f(c)=0$, $f(d)<0$

ㄴ. $f(b)f(d)<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

유형 15 정적분으로 정의된 함수의 극한
; $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt$ 꼴 본책 146쪽

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt$의 값을 구할 때

(i) $F'(t)=f(t)$라 한다.

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+a)-F(a)}{x}=F'(a)=f(a)$

임을 이용한다.

0942 $f(x)=\int_0^x (9t^2-2t+2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=9x^2-2x+2$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f'(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=f'(0)=2$ 답 2

0943 $f(x)=x^3-x^2$, $F'(x)=f(x)$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_3^{3+3h}(x^3-x^2)dx=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_3^{3+3h}f(x)dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(3+3h)-F(3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(3+3h)-F(3)}{3h}\cdot 3$

$=3F'(3)=3f(3)$

$=3\cdot 18=54$ 답 ③

0944 $f(x)=x^2-x+a$, $F'(x)=f(x)$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-2h}^{1+h}(x^2-x+a)dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-2h}^{1+h}f(x)dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1-2h)}{h}$ ··· ❶

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{F(1+h)-F(1)\}-\{F(1-2h)-F(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{F(1-2h)-F(1)}{-2h}\cdot 2$

$=F'(1)+2F'(1)=3F'(1)$ ··· ❷

$=3f(1)=3a$

따라서 $3a=1$이므로 $a=\frac{1}{3}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 $F(x)$를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 주어진 등식의 좌변을 $F'(1)$을 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0945 $f(t)=|t-5a|$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x |t-5a|dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$=F'(0)=f(0)$

$=|-5a|=-5a$ ($\because a<0$)

따라서 $-5a=2a^2-3$이므로

$2a^2+5a-3=0$, $(a+3)(2a-1)=0$

$\therefore a=-3$ ($\because a<0$) 답 -3

0946 $F'(x)=f(x)$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{-1}^{-1+h}f(x)dx=\lim_{h\to 0}\frac{F(-1+h)-F(-1)}{h}$

$=F'(-1)=f(-1)$

따라서 $f(-1)=-1$이므로

$1-a+b=-1$ $\therefore a-b=2$ ······ ㉠

또 $f(1)=5$에서

$1+a+b=5$ $\therefore a+b=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

$\therefore ab=3$ 답 3

유형 16 정적분으로 정의된 함수의 극한 ; $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$ 꼴 본책 147쪽

$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$의 값을 구할 때

(i) $F'(t)=f(t)$라 한다.

(ii) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$

임을 이용한다.

0947 $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_x^1 f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$=-\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=-F'(1)=-f(1)$$
$$=-4$$

답 ①

0948 $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x^3}f(t)dt=\lim_{x\to -1}\frac{F(x^3)-F(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{F(x^3)-F(-1)}{x^3-(-1)}\cdot(x^2-x+1)$$
$$=3F'(-1)=3f(-1)$$
$$=3\cdot(-3)$$
$$=-9$$

답 ③

0949 $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$$
$$=\frac{4+a}{4}$$

따라서 $\frac{4+a}{4}=3$이므로 $a=8$

답 ⑤

0950 $f(t)=t(k-t)$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x t(k-t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=f(1)$$
$$=k-1 \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\left\{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x t(k-t)dt\right\}=\sum_{k=1}^{10}(k-1)$$
$$=\frac{10\cdot 11}{2}-10$$
$$=45 \quad \cdots ❷$$

답 45

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x t(k-t)dt$를 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

0951 $\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)dt-f(x)}{x^2-1}=4$에서 $x\to 1$일 때

(분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\left\{\int_1^x f(t)dt-f(x)\right\}=0$이므로

$f(1)=0$ ...... ㉠

$F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)dt-f(x)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)-\{f(x)-f(1)\}}{(x-1)(x+1)} \quad (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}-\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)-\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}f'(1)$$
$$=-\frac{1}{2}f'(1) \quad (\because ㉠)$$

따라서 $-\frac{1}{2}f'(1)=4$이므로

$f'(1)=-8$

답 ④

0952 (1st) $g(x)=f(x)-x^2$이라 하고 $\int_b^{b+1}g(x)dx$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

조건 (가)에서 $f(b)-b^2=0$, $f(b+1)-(b+1)^2=0$이므로 b, $b+1$은 이차방정식 $f(x)-x^2=0$의 근이다.

$g(x)=f(x)-x^2$이라 하면 $g(x)$의 최고차항의 계수는 $a-1$이므로

$$g(x)=(a-1)(x-b)(x-b-1)$$
$$\therefore \int_b^{b+1}g(x)dx$$
$$=\int_b^{b+1}(a-1)(x-b)(x-b-1)dx$$
$$=(a-1)\int_b^{b+1}\{x^2-(2b+1)x+b(b+1)\}dx$$
$$=(a-1)\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{2b+1}{2}x^2+b(b+1)x\right]_b^{b+1}$$
$$=(a-1)\left[\left\{\frac{1}{3}(b+1)^3-\frac{1}{2}(2b+1)(b+1)^2+b(b+1)^2\right\}-\left\{\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{2}b^2(2b+1)+b^2(b+1)\right\}\right]$$
$$=(a-1)\left\{\frac{(b+1)^2(2b-1)}{6}-\frac{b^2(2b+3)}{6}\right\}$$
$$=(a-1)\left(\frac{2b^3+3b^2-1}{6}-\frac{2b^3+3b^2}{6}\right)$$
$$=-\frac{a-1}{6}$$

(2nd) $\int_b^{b+1}g(x)dx$를 b에 대한 식으로 나타낸다.

또 $g(x)=f(x)-x^2$이므로 조건 (나)에 의하여

$$\int_b^{b+1}g(x)dx=\int_b^{b+1}\{f(x)-x^2\}dx$$
$$=\underbrace{\int_b^{b+1}f(x)dx}_{0}-\int_b^{b+1}x^2dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_b^{b+1}=-\frac{1}{3}(3b^2+3b+1)$$

(3rd) a의 최솟값을 구한다.

따라서 $-\frac{a-1}{6}=-\frac{1}{3}(3b^2+3b+1)$이므로

$$a=6b^2+6b+3=6\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

즉 a는 $b=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$을 갖는다. 답 $\frac{3}{2}$

0953 (1st) 주어진 등식을 간단히 정리한다.

$k\int_a^c x\,dx-\int_a^c x^2\,dx=\int_c^b x^2\,dx-k\int_c^b x\,dx$에서

$$k\left(\int_a^c x\,dx+\int_c^b x\,dx\right)=\int_a^c x^2\,dx+\int_c^b x^2\,dx$$

$$k\int_a^b x\,dx=\int_a^b x^2\,dx,\qquad k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b$$

$$\therefore \frac{k}{2}(b^2-a^2)=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

(2nd) k의 값을 구한다.

$a\neq b$이고, $a+b=4$, $ab=1$이므로

$$k=\frac{2}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{(a+b)^2-ab}{a+b}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{4^2-1}{4}=\frac{5}{2}$$

답 ②

다른 풀이 $k\int_a^c x\,dx-\int_a^c x^2\,dx=\int_c^b x^2\,dx-k\int_c^b x\,dx$에서

$$\int_a^c (kx-x^2)dx=\int_c^b (x^2-kx)dx$$

$$\int_a^c (kx-x^2)dx-\int_c^b (x^2-kx)dx=0$$

$$\int_a^c (kx-x^2)dx+\int_c^b (kx-x^2)dx=0$$

$$\int_a^b (kx-x^2)dx=0,\qquad \left[\frac{k}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_a^b=0$$

$$\frac{k}{2}b^2-\frac{1}{3}b^3-\left(\frac{k}{2}a^2-\frac{1}{3}a^3\right)=0$$

$$\therefore \frac{k}{2}(b^2-a^2)=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

0954 (1st) $f(x)$를 적분상수를 이용하여 나타낸다.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & (x\le -1)\\ 2 & (-1\le x\le 1)\\ 2x & (x\ge 1)\end{cases}$$ 이므로

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x\le -1)\\ 2x+C_2 & (-1\le x\le 1)\\ x^2+C_3 & (x\ge 1)\end{cases}$$

(2nd) $f(x)$를 구한다.

$f(0)=1$이므로 $\quad C_2=1$

이때 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-1$, $x=1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)=f(-1)$에서

$$-1+C_1=-1\qquad \therefore C_1=0$$

또 $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$에서

$$3=1+C_3\qquad \therefore C_3=2$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-x^2 & (x\le -1)\\ 2x+1 & (-1\le x\le 1)\\ x^2+2 & (x\ge 1)\end{cases}$$

(3rd) $\int_{-2}^{2}f(x)\,dx$의 값을 구한다.

$$\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(-x^2)dx+\int_{-1}^{1}(2x+1)dx+\int_{1}^{2}(x^2+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{-1}+\left[x^2+x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_1^2$$

$$=-\frac{7}{3}+2+\frac{13}{3}=4$$

답 ⑤

0955 (1st) x의 값의 범위에 따라 $f(x)$를 구한다.

$$|t-x|=\begin{cases}t-x & (t\ge x)\\ -t+x & (t\le x)\end{cases}$$

(i) $x\le 0$일 때,

$$f(x)=\int_0^2 (t-x)dt=\left[\frac{1}{2}t^2-xt\right]_0^2=-2x+2$$

(ii) $0<x<2$일 때,

$$f(x)=\int_0^x (-t+x)dt+\int_x^2 (t-x)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}t^2+xt\right]_0^x+\left[\frac{1}{2}t^2-xt\right]_x^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2+2-2x+\frac{1}{2}x^2$$

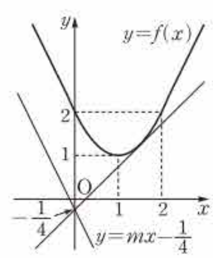
$$=x^2-2x+2$$

(iii) $x\ge 2$일 때,

$$f(x)=\int_0^2 (-t+x)dt=\left[-\frac{1}{2}t^2+xt\right]_0^2=2x-2$$

(2nd) 직선 $y=mx-\frac{1}{4}$과 $y=f(x)$의 그래프가 만나지 않도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구한다.

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x\le 0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 기울기가 -2인 직선이므로 $m<-2$이면 직선 $y=mx-\frac{1}{4}$과 함수 $y=f(x)$의 그래프는 만난다.

$0<x<2$에서 직선 $y=mx-\frac{1}{4}$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 접할 때, 그 접점의 좌표를 $(a,\ a^2-2a+2)$라 하면 접선의 기울기는

$$f'(a)=2a-2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(a^2-2a+2)=(2a-2)(x-a)$$

이 직선이 점 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$을 지나므로

$$-\frac{1}{4}-(a^2-2a+2)=(2a-2)(-a)$$

$$a^2=\frac{9}{4}\qquad \therefore a=\frac{3}{2}\ (\because 0<a<2)$$

$$\therefore m=f'(a)=2\cdot\frac{3}{2}-2=1$$

따라서 직선 $y=mx-\frac{1}{4}$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나지 않도록 하는 실수 m의 값의 범위는

$$-2\le m<1$$

3rd $\beta-\alpha$의 값을 구한다.

즉 $\alpha=-2$, $\beta=1$이므로

$$\beta-\alpha=3$$

답 3

0956 1st $f(0)$의 값을 구한다.

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ …… ㉠

$x=0$, $y=0$을 ㉠에 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$$

2nd $f(x)$가 우함수인지 기함수인지 판단한다.

또 ㉠에 y 대신 $-x$를 대입하면

$$f(0)=f(x)+f(-x)$$

$$\therefore f(-x)=-f(x)$$

따라서 함수 $f(x)$는 기함수이다.

3rd $\int_{-2}^{1} f(x)dx+\int_{-1}^{2} f(x)dx$의 값을 구한다.

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx+\int_{-1}^{2} f(x)dx$$

$$=\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$$

$$=\int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$=0+0=0$$

답 ③

0957 1st $h(x)$, $h'(x)$가 우함수인지 기함수인지 판단한다.

$f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$이므로

$$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$$

따라서 다항함수 $h(x)$는 기함수이므로 $h'(x)$는 우함수이다.

2nd $h(3)$의 값을 구한다.

즉

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=\int_{-3}^{3} \underbrace{xh'(x)}_{\text{(기함수)}\times\text{(우함수)} \Rightarrow \text{(기함수)}}dx+\int_{-3}^{3} 5h'(x)dx$$

$$=2\int_{0}^{3} 5h'(x)dx$$

$$=10\int_{0}^{3} h'(x)dx$$

$$=10\Big[h(x)\Big]_{0}^{3}$$

$$=10\{h(3)-h(0)\}=10$$

$$\therefore h(3)-h(0)=1$$

이때 $h(-x)=-h(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$h(0)=-h(0) \qquad \therefore h(0)=0$$

$$\therefore h(3)=h(0)+1=1$$

답 ①

참고 다항함수 $h(x)$가 기함수이므로

$h(x)=a_1x+a_2x^3+a_3x^5+\cdots$ (a_1, a_2, a_3, …은 상수)

이라 하면

$$h'(x)=a_1+3a_2x^2+5a_3x^4+\cdots$$

$$=a_1+3a_2\cdot(-x)^2+5a_3\cdot(-x)^4+\cdots$$

$$=h'(-x)$$

이므로 $h'(x)$는 우함수이다.

0958 1st $f(x)$의 차수를 구한다.

조건 ㈎의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(1)\}+\frac{x-1}{2}f'(x)$$

$\therefore f(x)=(x-1)f'(x)+f(1)$ …… ㉠

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\ne0$, n은 자연수)이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}이다.

㉠에서 양변의 최고차항을 비교하면 $\quad ax^n=x\cdot anx^{n-1}$

즉 $a=an$이므로 $\quad n=1$ ($\because a\ne0$)

따라서 $f(x)$는 일차함수이다.

2nd $f(4)$의 값을 구한다.

이때 $f(0)=1$이므로 $\quad f(x)=ax+1$ ($a\ne0$)

조건 ㈏에서

$$\int_{0}^{2} f(x)dx=\int_{0}^{2}(ax+1)dx$$

$$=\left[\frac{a}{2}x^2+x\right]_{0}^{2}=2a+2,$$

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+x)dx=2\int_{0}^{1} ax^2\,dx$$

$$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{0}^{1}=\frac{2a}{3}$$

즉 $2a+2=5\cdot\frac{2a}{3}$이므로 $\quad \frac{4}{3}a=2 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x+1$이므로

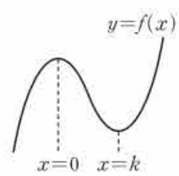
$$f(4)=\frac{3}{2}\cdot4+1=7$$

답 7

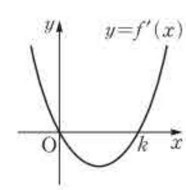
0959 1st $y=f'(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고 조건 ㈎에 의하여 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같다.

또 $f'(0)=0$, $f'(k)=0$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

2nd ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\int_{0}^{k} f'(x)\,dx=\Big[f(x)\Big]_{0}^{k}=f(k)-f(0)$

이때 함수 $f(x)$는 극댓값 $f(0)$, 극솟값 $f(k)$를 갖고, 삼차함수에서 (극솟값)<(극댓값)이므로

$$f(k)<f(0) \qquad \therefore f(k)-f(0)<0$$

$$\therefore \int_{0}^{k} f'(x)dx<0$$

3rd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 조건 ㈏의 $\int_{0}^{t}|f'(x)|\,dx=f(t)+f(0)$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$|f'(t)|=f'(t) \qquad \therefore f'(t)\ge0$$

따라서 $t>1$에서 $f'(t)\ge 0$이고, 구간 $[0,\ k]$에서 $f'(t)\le 0$이므로

$$0<k\le 1$$

4th ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 조건 ㈎에서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(k)$이고, $0<k\le 1$, $t>1$이므로 $\quad k<t$

조건 ㈏의 등식에서

$$\begin{aligned}\int_0^t|f'(x)|dx&=\int_0^k|f'(x)|dx+\int_k^t|f'(x)|dx\\&=\int_0^k\{-f'(x)\}dx+\int_k^t f'(x)dx\\&=-\Big[f(x)\Big]_0^k+\Big[f(x)\Big]_k^t\\&=-f(k)+f(0)+f(t)-f(k)\\&=-2f(k)+f(0)+f(t)\end{aligned}$$

즉 $-2f(k)+f(0)+f(t)=f(t)+f(0)$이므로

$$f(k)=0$$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 ㄱ. 조건 ㈎에서 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가지므로 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 $f'(x)=3ax(x-k)$ $(a>0,\ k>0)$로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^k f'(x)dx&=\int_0^k 3ax(x-k)dx\\&=3a\int_0^k(x^2-kx)dx\\&=3a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2\right]_0^k\\&=-\frac{1}{2}ak^3<0\end{aligned}$$

ㄴ. $k>1$이면 $1<t<k$인 실수 t에 대하여 구간 $(0,\ t)$에서

$$f'(x)<0$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^t|f'(x)|dx&=-\int_0^t f'(x)dx\\&=-\Big[f(x)\Big]_0^t\\&=-f(t)+f(0)\end{aligned}$$

즉 조건 ㈏에 의하여 $-f(t)+f(0)=f(t)+f(0)$이므로

$$f(t)=0$$

그런데 $f(x)$는 삼차함수이므로 모순이다.

$$\therefore 0<k\le 1$$

0960

1st $f(0)$, $f'(0)$의 값을 구한다.

조건 ㈎에서 $g(0)=0$, $g'(0)=0$이므로

$g(x)=2f(x)+\int_0^x f(t)dt$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$g(0)=2f(0) \qquad \therefore f(0)=0$$

또 $g(x)=2f(x)+\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=2f'(x)+f(x)$$

위의 식에 $x=0$을 대입하면

$$g'(0)=2f'(0)+f(0) \qquad \therefore f'(0)=0$$

2nd $f(3)$의 값을 구한다.

따라서 $f(x)$는 x^2을 인수로 가지므로

$$f(x)=x^2(x-k)\ (k\text{는 상수})$$

로 놓으면 $\quad f'(x)=2x(x-k)+x^2$

$$\begin{aligned}\therefore g'(x)&=2\{2x(x-k)+x^2\}+x^2(x-k)\\&=x^3+(6-k)x^2-4kx\end{aligned}$$

조건 ㈏에서 $y=g'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 모든 실수 x에 대하여

$$g'(-x)=-g'(x)$$

$$-x^3+(6-k)x^2+4kx=-x^3-(6-k)x^2+4kx$$

$$2(6-k)x^2=0, \qquad 6-k=0 \qquad \therefore k=6$$

즉 $f(x)=x^2(x-6)$이므로

$$f(3)=3^2\cdot(-3)=-27$$

답 -27

0961

1st $f(x)$를 구하고 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

$$f'(x)=\begin{cases}10x-5(a+1) & (x>1)\\ -4x-1 & (x<1)\end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 1+}\{10x-5(a+1)\}=\lim_{x\to 1-}(-4x-1)$$

$$10-5(a+1)=-5 \qquad \therefore a=2$$

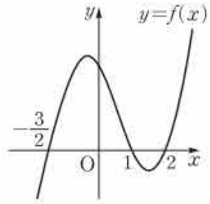
즉

$$f(x)=\begin{cases}5x^2-15x+10 & (x\ge 1)\\ -2x^2-x+3 & (x<1)\end{cases}$$

이므로

$$f(x)=\begin{cases}5(x-1)(x-2) & (x\ge 1)\\ -(2x+3)(x-1) & (x<1)\end{cases}$$

에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2nd $g(x)$의 극솟값 중 0이 아닌 것을 구한다.

$g(x)=\int_{-\frac{3}{2}}^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=f(x)$$

$g'(x)=0$에서 $\qquad x=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-\dfrac{3}{2}$, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

그런데 $g\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0$이므로 구하는 극솟값은

$$\begin{aligned}g(2)&=\int_{-\frac{3}{2}}^2 f(t)dt\\&=\int_{-\frac{3}{2}}^1(-2t^2-t+3)dt+\int_1^2(5t^2-15t+10)dt\\&=\left[-\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+3t\right]_{-\frac{3}{2}}^1+\left[\frac{5}{3}t^3-\frac{15}{2}t^2+10t\right]_1^2\\&=\frac{125}{24}-\frac{5}{6}=\frac{35}{8}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{35}{8}$

0962 (1st) 정적분의 성질을 이용하여 $\int_{a}^{a+4} f(x)\,dx$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

$g(a)=\int_{a}^{a+4} f(x)dx$라 하면

$$g(a)=\int_{a}^{4}(-x^2+4x)dx+\int_{4}^{a+4}(x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_a^4+\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^{a+4}$$
$$=\frac{32}{3}+\frac{1}{3}a^3-2a^2+\frac{1}{2}(a+4)^2-4(a+4)+8$$
$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$$

(2nd) $p+q$의 값을 구한다.

$g'(a)=a^2-3a=a(a-3)$이므로 $g'(a)=0$에서

$a=0$ 또는 $a=3$

a	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(a)$	0	$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $g(a)$는 $a=3$일 때 최소이므로 최솟값은

$$g(3)=9-\frac{27}{2}+\frac{32}{3}=\frac{37}{6}$$

즉 $p=6$, $q=37$이므로 $p+q=43$

답 43

0963 (1st) $S(x)$를 구한다.

△APQ∽△ABC (AA 닮음)이므로

$\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{PQ}:\overline{BC}$

$x:6=\overline{PQ}:8$ $\therefore \overline{PQ}=\frac{4}{3}x$

따라서 사각형 PBCQ의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(8+\frac{4}{3}x\right)(6-x)$$
$$=-\frac{2}{3}x^2+24\ (0<x<6)$$

(2nd) $\lim_{x\to4}\frac{5x+4}{x^2-16}\int_{4}^{x} S(x)dx$의 값을 구한다.

$$\lim_{x\to4}\frac{5x+4}{x^2-16}\int_{4}^{x}S(x)dx=\lim_{x\to4}\frac{5x+4}{(x+4)(x-4)}\int_{4}^{x}S(x)dx$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{5x+4}{x+4}\cdot\lim_{x\to4}\frac{1}{x-4}\int_{4}^{x}S(x)dx$$
$$=3S(4)$$
$$=3\cdot\frac{40}{3}=40$$

답 ③

0964 전략 먼저 주어진 등식에서 다항함수 $f(x)$의 차수를 구한다.

풀이 $f(x)$의 차수를 n ($n\geq2$인 자연수)이라 하면 주어진 등식의 좌변의 차수는 n^2, 우변의 차수는 $n+1$이므로

$n^2=n+1$ $\therefore n^2-n-1=0$

그런데 위의 식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않으므로 $f(x)$는 일차 이하의 다항식이다. ··· ❶

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(f(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b,$$
$$\int_{0}^{x}f(t)dt=\int_{0}^{x}(at+b)dt=\left[\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^x=\frac{1}{2}ax^2+bx$$

이므로 주어진 등식은

$$a^2x+ab+b=\frac{1}{2}ax^2+bx-2x^2+15x+5$$
$$\therefore a^2x+ab+b=\left(\frac{1}{2}a-2\right)x^2+(b+15)x+5$$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$0=\frac{1}{2}a-2,\ a^2=b+15,\ ab+b=5$$

$\therefore a=4,\ b=1$ ··· ❷

즉 $f(x)=4x+1$이므로

$f(1)=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 차수를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$의 일차항의 계수와 상수항을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0965 전략 함수 $y=x^3-3x+1$의 그래프를 그려 α, β의 값의 범위를 찾은 후 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

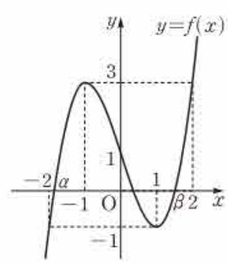
풀이 $f(x)=x^3-3x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❶



이때 $f(-2)=-1$, $f(0)=1$, $f(2)=3$이므로

$-2<\alpha<-1,\ 1<\beta<2$ ··· ❷

$\alpha^3-3\alpha+1=0,\ \beta^3-3\beta+1=0$이므로

$$\int_{\alpha}^{\beta}|x^2-1|dx$$
$$=\int_{\alpha}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{1}^{\beta}(x^2-1)dx$$
$$=\int_{\alpha}^{-1}(x^2-1)dx+2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{1}^{\beta}(x^2-1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{\alpha}^{-1}+2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^{\beta}$$
$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\alpha^3+\alpha\right)+\frac{4}{3}+\left(\frac{1}{3}\beta^3-\beta+\frac{2}{3}\right)$$
$$=-\frac{\alpha^3-3\alpha}{3}+\frac{\beta^3-3\beta}{3}+\frac{8}{3}$$
$$=-\frac{-1}{3}+\frac{-1}{3}+\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$$ ··· ❸

답 $\frac{8}{3}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ $-2<\alpha<-1$, $1<\beta<2$임을 알 수 있다.	20 %
❸ $\int_{\alpha}^{\beta}\lvert x^2-1\rvert dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0966 전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$의 짝수 차수의 항을 구한다.

풀이 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

(n은 자연수, a_0, a_1, $\cdots$, a_n은 상수)라 하면

$$\begin{aligned}&f(-x)\\&=a_n(-x)^n+a_{n-1}(-x)^{n-1}\\&\quad+\cdots+a_3(-x)^3+a_2(-x)^2+a_1(-x)+a_0\\&=a_n(-x)^n+a_{n-1}(-x)^{n-1}+\cdots-a_3x^3+a_2x^2-a_1x+a_0\end{aligned}$$

$f(x)$와 $f(-x)$의 계수를 비교하면 짝수 차수의 항의 계수는 서로 같고, 홀수 차수의 항의 계수는 0이 아닐 때 부호가 서로 반대임을 알 수 있다.

즉 조건 ㈎에서 $f(x)+f(-x)$의 짝수 차수의 항의 계수는 $f(x)$의 짝수 차수의 항의 계수의 2배이고, $f(x)+f(-x)$는 홀수 차수의 항을 갖지 않는다.

이때 $f(x)+f(-x)$의 차수가 2이고 최고차항의 계수가 2이므로

$$f(x)+f(-x)=2x^2+a \ (a\text{는 상수})$$

라 하면 조건 ㈏에서 $f(0)=-3$이므로

$$f(0)+f(0)=a \qquad \therefore a=-6$$

$$\therefore f(x)+f(-x)=2x^2-6 \qquad \cdots ❶$$

이때 $\int_{-4}^{4}f(x)dx=\int_{-4}^{4}f(-x)dx$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{4}f(x)dx&=\frac{1}{2}\int_{-4}^{4}\{f(x)+f(-x)\}dx\\&=\frac{1}{2}\int_{-4}^{4}(2x^2-6)dx\\&=\int_{0}^{4}(2x^2-6)dx\\&=\left[\frac{2}{3}x^3-6x\right]_0^4\\&=\frac{56}{3}\end{aligned} \qquad \cdots ❷$$

답 $\frac{56}{3}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)+f(-x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\int_{-4}^{4}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0967 전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $y=F(x)$의 그래프의 개형을 찾는다.

풀이 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,
$f(-x)=-f(x)$에서 기함수이므로 $f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-1}^{x}(t^3+at)dt=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{a}{2}t^2\right]_{-1}^{x}\\&=\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{4}-\frac{a}{2}\\&=\frac{1}{4}(-x)^4+\frac{a}{2}(-x)^2-\frac{1}{4}-\frac{a}{2}\\&=F(-x)\end{aligned}$$

즉 $F(x)$는 우함수이다. $\cdots ❶$

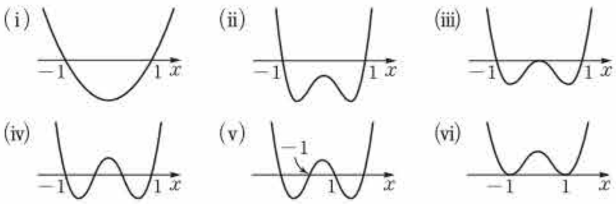
또 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$F(-1)=0$$

이때 $F(x)$는 우함수이므로

$$F(1)=F(-1)=0 \qquad \cdots ❷$$

따라서 $y=F(x)$의 그래프의 개형은 다음 중 하나이다.



이때 $F(x)$는 $-1<x<1$에서 극솟값을 갖고, 함수 $g(m)$은 $m=0$에서 불연속이므로 함수 $y=F(x)$의 그래프의 개형은 (iii)과 같다.

즉 $F(0)=0$이므로

$$F(x)=\frac{1}{4}x^2(x+1)(x-1) \qquad \cdots ❸$$

한편 곡선 $y=F(x)$와 직선 $y=2$의 교점의 개수는 2이므로

$$g(2)=2$$

$$\therefore F(2)+g(2)=3+2=5 \qquad \cdots ❹$$

답 5

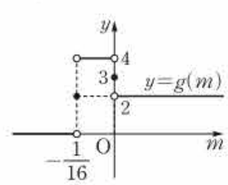
채점 기준	비율
❶ $F(x)$가 우함수임을 알 수 있다.	20 %
❷ $F(-1)$, $F(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $F(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❹ $F(2)+g(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 $F(x)=\frac{1}{4}x^2(x+1)(x-1)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}x^2$에서

$$F'(x)=x^3-\frac{1}{2}x=x\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$F'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

따라서 $F(x)$는 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 극솟값 $-\frac{1}{16}$을 가지므로 $y=g(m)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

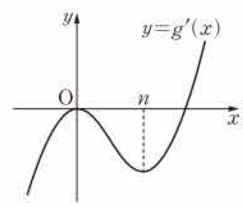


0968 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 함수 $y=g'(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 $g(x)=\int_{0}^{x}(x-t)f(t)dt=x\int_{0}^{x}f(t)dt-\int_{0}^{x}tf(t)dt$에서

$$g'(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$$

$x=0$을 위의 등식의 양변에 대입하면 $g'(0)=0$이고, $g'(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로 함수 $y=g'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $\cdots ❶$



$g'(x)=ax^2(x-b)$ (a, b는 상수, $a>0$, $b>n$)라 하면

$$ax^2(x-b)=\int_{0}^{x}f(t)dt$$

앞의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2ax(x-b)+ax^2=f(x)$$

$f(x)=0$에서

$$2ax(x-b)+ax^2=0, \qquad ax(3x-2b)=0$$

$$\therefore\ x=0 \text{ 또는 } x=\frac{2b}{3}$$

즉 $n=\frac{2b}{3}$이므로 $\quad b=\frac{3}{2}n$

$g'(x)=ax^2\left(x-\frac{3}{2}n\right)=a\left(x^3-\frac{3}{2}nx^2\right)$이므로

$$g(x)=\int g'(x)dx$$
$$=\int a\left(x^3-\frac{3}{2}nx^2\right)dx$$
$$=a\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{n}{2}x^3\right)+C$$

이때 $g(0)=C=0$이므로 ($x=0$을 주어진 등식에 대입하면 $g(0)=0$)

$$g(x)=a\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{n}{2}x^3\right)$$ ⋯ ❷

$g(k)>0$에서

$$g(k)=a\left(\frac{1}{4}k^4-\frac{n}{2}k^3\right)=\frac{1}{4}ak^3(k-2n)>0$$

이고 $a>0$, $k>0$이므로

$$k-2n>0 \qquad \therefore\ k>2n$$

따라서 $a_n=2n+1$이므로 ⋯ ❸

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(2n+1)$$
$$=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+10=120$$ ⋯ ❹

답 120

채점 기준	비율
❶ $y=g'(x)$의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	30 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ a_n을 구할 수 있다.	20 %
❹ $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

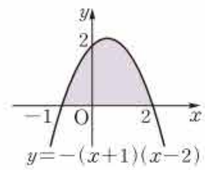
09 정적분의 활용

0969 $\int_{-2}^{0}x^2(x+2)dx=\int_{-2}^{0}(x^3+2x^2)dx$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

0970 곡선 $y=-(x+1)(x-2)$와 x축의 교점의 x좌표는 $-(x+1)(x-2)=0$에서



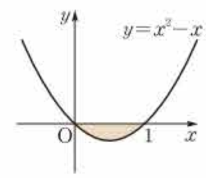
$$x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

$y=-(x+1)(x-2)=-x^2+x+2$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

0971 곡선 $y=x^2-x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-x=0$에서



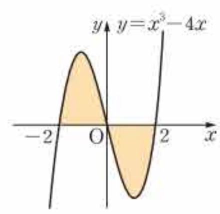
$$x(x-1)=0$$
$$\therefore\ x=0 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}\{-(x^2-x)\}dx=-\int_{0}^{1}(x^2-x)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

0972 곡선 $y=x^3-4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-4x=0$에서



$$x(x+2)(x-2)=0$$
$$\therefore\ x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=4+4=8$$

답 8

0973 $\int_{-1}^{2}x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}=\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=3$

답 3

0974 $\int_{-2}^{1}\{-(-x^2-2)\}dx=\int_{-2}^{1}(x^2+2)dx$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\frac{7}{3}-\left(-\frac{20}{3}\right)=9$$

답 9

0975 $\int_{-1}^{1}(x^2-4x+3)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+4x-3)dx$

$$=2\int_{0}^{1}(x^2+3)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+4x-3)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^2$$

$$=2\cdot\frac{10}{3}+\frac{2}{3}=\frac{22}{3}$$

답 $\frac{22}{3}$

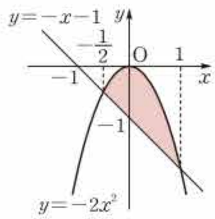
SSEN 특강 우함수 · 기함수의 정적분

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 연속일 때

① $f(x)$가 우함수이면 ➡ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

② $f(x)$가 기함수이면 ➡ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

0976 곡선 $y=-2x^2$과 직선 $y=-x-1$의 교점의 x좌표는 $-2x^2=-x-1$에서



$2x^2-x-1=0$

$(2x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\{-2x^2-(-x-1)\}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(-2x^2+x+1)dx$$

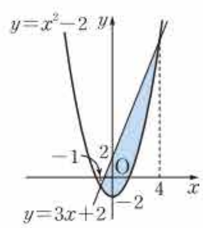
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{5}{6}-\left(-\frac{7}{24}\right)$$

$$=\frac{9}{8}$$

답 $\frac{9}{8}$

0977 곡선 $y=x^2-2$와 직선 $y=3x+2$의 교점의 x좌표는 $x^2-2=3x+2$에서



$x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이는

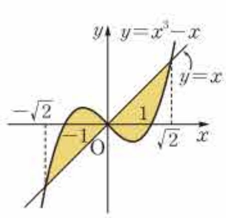
$$\int_{-1}^{4}\{(3x+2)-(x^2-2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{4}$$

$$=\frac{56}{3}-\left(-\frac{13}{6}\right)=\frac{125}{6}$$

답 $\frac{125}{6}$

0978 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3-x=x$에서



$x^3-2x=0$

$x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-\sqrt{2}}^{0}\{(x^3-x)-x\}dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}\{x-(x^3-x)\}dx$$

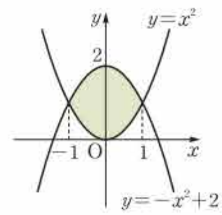
$$=\int_{-\sqrt{2}}^{0}(x^3-2x)dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}(-x^3+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2\right]_{-\sqrt{2}}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{0}^{\sqrt{2}}$$

$$=1+1=2$$

답 2

0979 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+2$의 교점의 x좌표는 $x^2=-x^2+2$에서



$2x^2-2=0$

$2(x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{(-x^2+2)-x^2\}dx$$

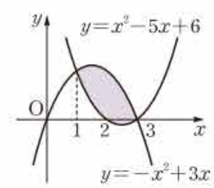
$$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx=4\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$$

$$=4\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=4\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

0980 두 곡선 $y=x^2-5x+6$, $y=-x^2+3x$의 교점의 x좌표는 $x^2-5x+6=-x^2+3x$에서



$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{1}^{3}\{(-x^2+3x)-(x^2-5x+6)\}dx$$

$$=\int_{1}^{3}(-2x^2+8x-6)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_1^3$$

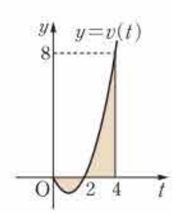
$$=0-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

0981 (1) $0+\int_{0}^{4}(t^2-2t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^4=\frac{16}{3}$

(2) $\int_{1}^{2}(t^2-2t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_1^2=-\frac{4}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

(3) $\int_{0}^{4}|t^2-2t|dt$



$$=\int_{0}^{2}(-t^2+2t)dt+\int_{2}^{4}(t^2-2t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^4$$

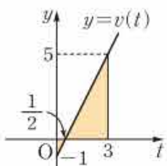
$$=\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=8$$

답 (1) $\frac{16}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (3) 8

0982 (1) $5+\int_0^2 (2t-1)dt=5+\left[t^2-t\right]_0^2=5+2=7$

(2) $\int_0^3 (2t-1)dt=\left[t^2-t\right]_0^3=6$

(3) $\int_0^3 |2t-1|dt$



$=\int_0^{\frac{1}{2}} (-2t+1)dt+\int_{\frac{1}{2}}^3 (2t-1)dt$

$=\left[-t^2+t\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[t^2-t\right]_{\frac{1}{2}}^3$

$=\frac{1}{4}+\frac{25}{4}=\frac{13}{2}$

답 (1) 7 (2) 6 (3) $\frac{13}{2}$

유형 01 곡선과 x축 사이의 넓이 ; $f(x)\geq 0$ 또는 $f(x)\leq 0$인 경우

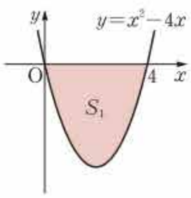
본책 154쪽

연속함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는

① 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\geq 0$일 때, $\int_a^b f(x)dx$

② 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때, $\int_a^b \{-f(x)\}dx$

0983 곡선 $y=x^2-4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4x=0$에서



$x(x-4)=0$

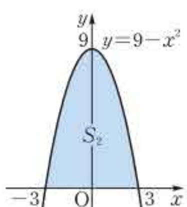
$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

$\therefore S_1=\int_0^4 \{-(x^2-4x)\}dx$

$=-\int_0^4 (x^2-4x)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$

곡선 $y=9-x^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $9-x^2=0$에서



$x^2-9=0,\quad (x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

$\therefore S_2=\int_{-3}^3 (9-x^2)dx$

$=2\int_0^3 (9-x^2)dx$

$=2\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3$

$=2\cdot 18=36$

$\therefore 3S_1+S_2=3\cdot\frac{32}{3}+36=68$

답 68

다른 풀이 포물선 $y=x(x-4)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

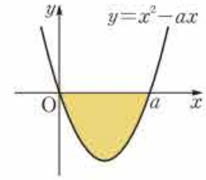
$S_1=\frac{(4-0)^3}{6}=\frac{32}{3}$

포물선 $y=-(x+3)(x-3)$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$S_2=\frac{\{3-(-3)\}^3}{6}=36$

$\therefore 3S_1+S_2=68$

0984 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$\int_0^a \{-(x^2-ax)\}dx$

$=-\int_0^a (x^2-ax)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$

따라서 $\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}$이므로 $\quad a^3=27$

$\therefore a=3$

답 ③

0985 $y=x^2-|x|-6=\begin{cases} x^2-x-6 & (x\geq 0) \\ x^2+x-6 & (x\leq 0)\end{cases}$

$y=x^2-|x|-6$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

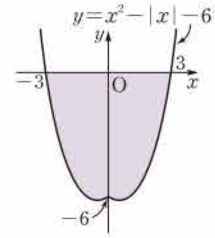
(i) $x\geq 0$일 때, $x^2-x-6=0$에서

$(x+2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=3\ (\because x\geq 0)$

(ii) $x\leq 0$일 때, $x^2+x-6=0$에서

$(x+3)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-3\ (\because x\leq 0)$

(i), (ii)에서 구하는 넓이는



$\int_{-3}^0 \{-(x^2+x-6)\}dx$

$+\int_0^3 \{-(x^2-x-6)\}dx$

$=-\int_{-3}^0 (x^2+x-6)dx$

$-\int_0^3 (x^2-x-6)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x\right]_{-3}^0-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x\right]_0^3$

$=\frac{27}{2}-\left(-\frac{27}{2}\right)=27$

답 ④

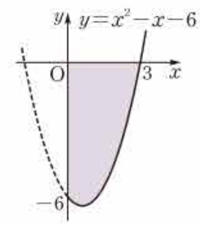
다른 풀이 $f(x)=x^2-|x|-6$이라 하면

$f(-x)=(-x)^2-|-x|-6$

$=x^2-|x|-6=f(x)$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

오른쪽 그림에서 $x\geq 0$일 때 $y=x^2-|x|-6$, 즉 $y=x^2-x-6$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\int_0^3 \{-(x^2-x-6)\}dx$

$=-\int_0^3 (x^2-x-6)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x\right]_0^3$

$=\frac{27}{2}$

따라서 구하는 넓이는

$2\cdot\frac{27}{2}=27$

0986 $f(x)=ax(x-2)^2\ (a<0)$이라 하면 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \{-ax(x-2)^2\}dx = -a\int_0^2 (x^3-4x^2+4x)dx$$
$$= -a\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2$$
$$= -\frac{4}{3}a \quad \cdots ❶$$

따라서 $-\frac{4}{3}a=2$이므로 $\quad a=-\frac{3}{2} \quad \cdots ❷$

$\therefore f(x)=-\frac{3}{2}x(x-2)^2 \quad \cdots ❸$

답 $f(x)=-\frac{3}{2}x(x-2)^2$

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	10 %

0987 $xf(x)=\int_0^x tf'(t)dt+\frac{1}{3}x^3-x^2-8x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

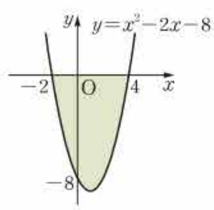
$f(x)+xf'(x)=xf'(x)+x^2-2x-8$

$\therefore f(x)=x^2-2x-8$

곡선 $y=x^2-2x-8$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-2x-8=0$에서

$(x+2)(x-4)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^4 \{-(x^2-2x-8)\}dx$$
$$=-\int_{-2}^4 (x^2-2x-8)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-8x\right]_{-2}^4$$
$$=-\left(-\frac{80}{3}-\frac{28}{3}\right)=36$$

답 36

0988 $S_1+S_2+S_3=\int_{-2}^1 (-x^2-x+2)dx$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1$$
$$=\frac{7}{6}-\left(-\frac{10}{3}\right)=\frac{9}{2}$$

이때 S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S_2=S_1+S_3$

따라서 $\underbrace{3S_2}_{S_1+S_2+S_3=S_2+2S_2=3S_2}=\frac{9}{2}$이므로

$S_2=\frac{3}{2}$

답 ③

SSEN 특강 등차중항과 등비중항

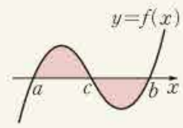
① 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라 하고 $b=\frac{a+c}{2}$가 성립한다.

② 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라 하고 $b^2=ac$가 성립한다.

유형 02 곡선과 x축 사이의 넓이; 꼴 본책 154쪽

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

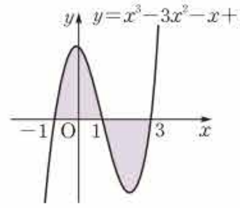
⇒ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx$



0989 $y=(x+1)(x-1)(x-3)$에서

$y=x^3-3x^2-x+3$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^1 (x^3-3x^2-x+3)dx$$
$$+\int_1^3 (-x^3+3x^2+x-3)dx$$
$$=2\int_0^1 (-3x^2+3)dx+\int_1^3 (-x^3+3x^2+x-3)dx$$
$$=2\left[-x^3+3x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2-3x\right]_1^3$$
$$=2\cdot2+4=8$$

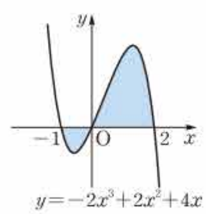
답 ③

0990 곡선 $y=-2x^3+2x^2+4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-2x^3+2x^2+4x=0$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^0 (2x^3-2x^2-4x)dx+\int_0^2 (-2x^3+2x^2+4x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{16}{3}=\frac{37}{6}$$

답 $\frac{37}{6}$

0991 $f(x)=\int f'(x)dx=\int (x^2-3)dx=\frac{1}{3}x^3-3x+C$

이때 $f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

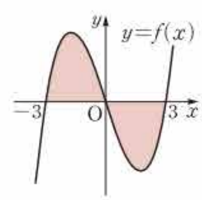
$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{3}x^3-3x=0$에서

$\frac{1}{3}x(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-3}^0 \left(\frac{1}{3}x^3-3x\right)dx+\int_0^3 \left(-\frac{1}{3}x^3+3x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^0+\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$
$$=\frac{27}{4}+\frac{27}{4}=\frac{27}{2}$$

답 ②

참고 곡선 $y=f(x)$가 원점에 대하여 대칭이므로

$\int_{-3}^0 f(x)dx=\int_0^3 \{-f(x)\}dx$

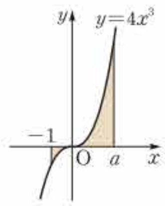
09 정적분의 활용

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를

$$\int_{-3}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{3}\{-f(x)\}\,dx=2\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$$
$$=2\cdot\frac{27}{4}=\frac{27}{2}$$

과 같이 구할 수도 있다.

0992 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{-1}^{0}(-4x^3)dx+\int_{0}^{a}4x^3\,dx \quad \cdots ❶$$
$$=\Big[-x^4\Big]_{-1}^{0}+\Big[x^4\Big]_{0}^{a}=1+a^4 \quad \cdots ❷$$

따라서 $1+a^4=17$이므로 $\quad a^4=16$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 색칠한 부분의 넓이를 적분 기호를 사용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 색칠한 부분의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0993 $S_1=\int_{a}^{0}(-x^3)dx=\Big[-\frac{1}{4}x^4\Big]_{a}^{0}=\frac{1}{4}a^4$

$S_2=\int_{0}^{b}x^3\,dx=\Big[\frac{1}{4}x^4\Big]_{0}^{b}=\frac{1}{4}b^4$

이때 $|a|=3b$이므로 $\quad a^4=81b^4$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{4}a^4}{\frac{1}{4}b^4}=\frac{a^4}{b^4}=\frac{81b^4}{b^4}=81$$

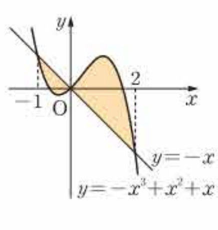
답 ⑤

유형 03 곡선과 직선 사이의 넓이

본책 155쪽

(i) 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.
(ii) 곡선과 직선을 그려 위치 관계를 파악한다.
(iii) (i)의 적분 구간에서
{(위쪽 그래프의 식)−(아래쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

0994 곡선 $y=-x^3+x^2+x$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는



$-x^3+x^2+x=-x$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{-x-(-x^3+x^2+x)\}dx+\int_{0}^{2}\{-x^3+x^2+x-(-x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\Big]_{-1}^{0}+\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_{0}^{2}$$
$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

답 ②

0995 곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $-x^2+4x=x$에서

$x^2-3x=0, \qquad x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

$$\therefore S_1=\int_{0}^{3}\{(-x^2+4x)-x\}dx$$
$$=\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_{0}^{3}$$
$$=\frac{9}{2}$$

곡선 $y=-x^2+4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 └ S_1+S_2

$$\int_{0}^{4}(-x^2+4x)dx=\Big[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\Big]_{0}^{4}=\frac{32}{3}$$

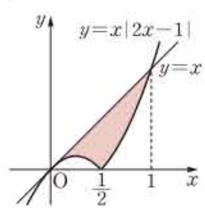
$$\therefore S_2=\frac{32}{3}-\frac{9}{2}=\frac{37}{6}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{37}{6}}=\frac{27}{37}$$

답 $\frac{27}{37}$

0996 $y=x|2x-1|=\begin{cases}2x^2-x & \left(x\ge\frac{1}{2}\right)\\ -2x^2+x & \left(x\le\frac{1}{2}\right)\end{cases}$

$y=x|2x-1|$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



(i) $x\ge\frac{1}{2}$일 때,

$2x^2-x=x$에서 $\qquad 2x^2-2x=0$

$x(x-1)=0$

$\therefore x=1\left(\because x\ge\frac{1}{2}\right)$

(ii) $x\le\frac{1}{2}$일 때,

$-2x^2+x=x$에서 $\qquad -2x^2=0$

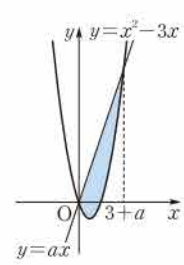
$\therefore x=0$

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\{x-(-2x^2+x)\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{x-(2x^2-x)\}dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{1}{2}}2x^2\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-2x^2+2x)dx$$
$$=\Big[\frac{2}{3}x^3\Big]_{0}^{\frac{1}{2}}+\Big[-\frac{2}{3}x^3+x^2\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$$

답 ①

0997 곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=ax$에서



$x^2-(3+a)x=0$

$x\{x-(3+a)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3+a$ ⋯ ❶

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^{3+a}\{ax-(x^2-3x)\}dx$$
$$=\int_0^{3+a}\{-x^2+(a+3)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+3}{2}x^2\right]_0^{3+a}$$
$$=\frac{1}{6}(a+3)^3 \quad \cdots❷$$

즉 $\frac{1}{6}(a+3)^3=36$이므로 $\quad a+3=6$

$\therefore a=3 \quad \cdots❸$

답 3

채점 기준	비율
❶ 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0998 $S_1=\int_0^1 x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$

곡선 $y=x^3$과 직선 $y=k^3$의 교점의 x좌표는 $x^3=k^3$에서

$x^3-k^3=0, \quad (x-k)(x^2+kx+k^2)=0$

$\therefore x=k$ ($\because x^2+kx+k^2>0$)

$$\therefore S_2=\int_1^k(k^3-x^3)dx=\left[k^3x-\frac{1}{4}x^4\right]_1^k$$
$$=\frac{3}{4}k^4-k^3+\frac{1}{4}$$

이때 $S_1=S_2$이므로

$\frac{1}{4}=\frac{3}{4}k^4-k^3+\frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}k^4-k^3=0$

$\frac{3}{4}k^3\left(k-\frac{4}{3}\right)=0 \quad \therefore k=\frac{4}{3}$ ($\because k>1$) 답 ②

0999 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 0, 2, 4이므로 삼차방정식 $g(x)-f(x)=0$의 세 근은 0, 2, 4이다.

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $g(x)-f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다. 즉

$$g(x)-f(x)=ax(x-2)(x-4)$$
$$=a(x^3-6x^2+8x)\ (a<0) \quad \cdots❶$$

라 하면 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_2^4\{g(x)-f(x)\}dx=\int_2^4 a(x^3-6x^2+8x)dx$$
$$=a\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_2^4$$
$$=-4a$$

즉 $-4a=2$이므로

$a=-\frac{1}{2} \quad \cdots❷$

따라서 $g(x)-f(x)=-\frac{1}{2}x(x-2)(x-4)$이므로

$g(1)-f(1)=-\frac{1}{2}\cdot1\cdot(-1)\cdot(-3)=-\frac{3}{2} \quad \cdots❸$

답 $-\frac{3}{2}$

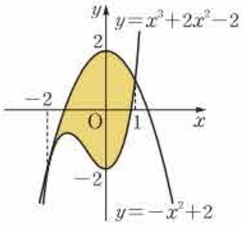
채점 기준	비율
❶ $g(x)-f(x)$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $g(1)-f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 04 두 곡선 사이의 넓이

본책 156쪽

(i) 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.
(ii) 두 곡선을 그려 위치 관계를 파악한다.
(iii) (i)의 적분 구간에서
{(위쪽 그래프의 식)−(아래쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

1000 두 곡선 $y=x^3+2x^2-2$, $y=-x^2+2$의 교점의 x좌표는



$x^3+2x^2-2=-x^2+2$에서

$x^3+3x^2-4=0$

$(x+2)^2(x-1)=0$

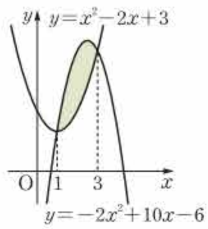
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^1\{(-x^2+2)-(x^3+2x^2-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^1(-x^3-3x^2+4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-2}^1$$
$$=\frac{11}{4}-(-4)=\frac{27}{4}$$

답 ③

1001 두 곡선 $y=x^2-2x+3$, $y=-2x^2+10x-6$의 교점의 x좌표는



$x^2-2x+3=-2x^2+10x-6$에서

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3\{(-2x^2+10x-6)-(x^2-2x+3)\}dx$$
$$=\int_1^3(-3x^2+12x-9)dx$$
$$=\left[-x^3+6x^2-9x\right]_1^3=0-(-4)=4$$

답 ②

1002 $\int_{-5}^6\{f(x)-g(x)\}dx$

$$=\int_{-5}^0\{f(x)-g(x)\}dx+\int_0^4\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$+\int_4^6\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=-\int_{-5}^0\{g(x)-f(x)\}dx+\int_0^4\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$-\int_4^6\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=-10+7-5=-8$$

답 -8

1003 $y=-f(x-1)+2$

$=-\{-(x-1)^2+3(x-1)\}+2$

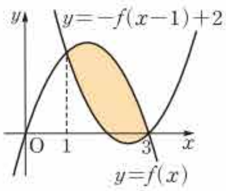
$=x^2-5x+6$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)+2$의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x=x^2-5x+6$에서

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3 \{(-x^2+3x)-(x^2-5x+6)\}dx$$

$$=\int_1^3 (-2x^2+8x-6)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_1^3$$

$$=0-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

답 ②

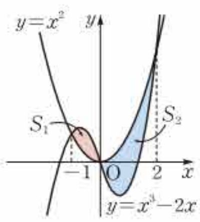
1004 두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=x^2$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

… ❶



$\therefore S_2-S_1$

$$=\int_0^2 \{x^2-(x^3-2x)\}dx-\int_{-1}^0 \{(x^3-2x)-x^2\}dx$$

$$=\int_0^2 (-x^3+x^2+2x)dx-\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{5}{12}=\frac{9}{4}$$

… ❷

답 $\frac{9}{4}$

채점 기준	비율
❶ 두 곡선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ S_2-S_1의 값을 구할 수 있다.	70 %

1005 곡선 $y=x^2$을 x축에 대하여 대칭이동한 곡선의 방정식은

$y=-x^2$

이 곡선을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

$y=-(x+1)^2+5$

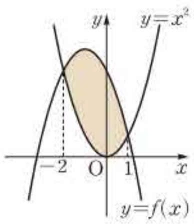
$\therefore f(x)=-(x+1)^2+5$

$=-x^2-2x+4$

두 곡선 $y=x^2$, $y=f(x)$의 교점의 x좌표는 $x^2=-x^2-2x+4$에서

$x^2+x-2=0,\quad (x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^1 \{(-x^2-2x+4)-x^2\}dx$$

$$=\int_{-2}^1 (-2x^2-2x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^1$$

$$=\frac{7}{3}-\left(-\frac{20}{3}\right)=9$$

답 ②

유형 05 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 본책 157쪽

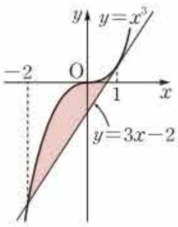
(i) 접선의 방정식을 구한다.
(ii) 곡선과 접선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.
(iii) 곡선과 접선을 그려 위치 관계를 파악한다.
(iv) (ii)의 적분 구간에서
{(위쪽 그래프의 식)−(아래쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

1006 $y=x^3$에서 $\quad y'=3x^2$

즉 곡선 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $3\cdot1^2=3$이므로 접선의 방정식은

$y-1=3(x-1)$

$\therefore y=3x-2$



곡선 $y=x^3$과 직선 $y=3x-2$의 교점의 x좌표는 $x^3=3x-2$에서

$x^3-3x+2=0,\quad (x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^1 \{x^3-(3x-2)\}dx=\int_{-2}^1 (x^3-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1$$

$$=\frac{3}{4}-(-6)=\frac{27}{4}$$

답 ⑤

SSEN 특강 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

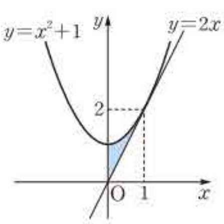
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

1007 $y=x^2+1$에서 $\quad y'=2x$

즉 곡선 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $2\cdot1=2$이므로 접선의 방정식은

$y-2=2(x-1)$

$\therefore y=2x$



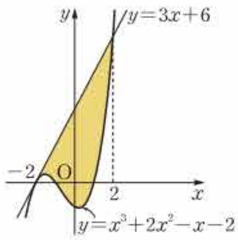
따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{(x^2+1)-2x\}dx=\int_0^1 (x^2-2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

1008 $y=x^3+2x^2-x-2$에서



$y'=3x^2+4x-1$

즉 곡선 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$3\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)-1=3$

이므로 접선의 방정식은

$y-0=3(x+2)$

$\therefore\ y=3x+6$ ⋯ ❶

곡선 $y=x^3+2x^2-x-2$와 직선 $y=3x+6$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x^2-x-2=3x+6$에서

$x^3+2x^2-4x-8=0,\qquad (x+2)^2(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$ ⋯ ❷

따라서 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{2}\{(3x+6)-(x^3+2x^2-x-2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(-x^3-2x^2+4x+8)dx=2\int_{0}^{2}(-2x^2+8)dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2$$

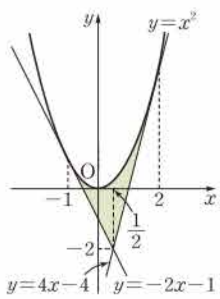
$$=2\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$$

$\therefore\ 3S=3\cdot\frac{64}{3}=64$ ⋯ ❸

답 64

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 곡선과 접선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ $3S$의 값을 구할 수 있다.	50 %

1009 $y=x^2$에서 $\quad y'=2x$



접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $2t$이므로 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t)$

$\therefore\ y=2tx-t^2$ ⋯⋯ ㉠

이 직선이 점 $\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$를 지나므로

$-2=t-t^2,\qquad t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=2$

(i) $t=-1$일 때, ㉠에서 $\quad y=-2x-1$

(ii) $t=2$일 때, ㉠에서 $\quad y=4x-4$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{x^2-(-2x-1)\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\{x^2-(4x-4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(x^2+2x+1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\frac{9}{8}+\frac{9}{8}=\frac{9}{4}$$

답 ④

SSEN 특강 곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(x_1,\ y_1)$에서 곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 한다.

(ii) 접선의 기울기 $f'(t)$를 구한다.

(iii) 직선 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$가 점 $(x_1,\ y_1)$을 지남을 이용하여 t의 값을 구한다.

(iv) t의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 대입한다.

1010 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선이고, 직선 $y=g(x)$와 곡선 $y=f(x)$가 원점에서 만나므로 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$은 중근 $x=1$과 다른 한 근 $x=0$을 갖는다.

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

$f(x)-g(x)=2x(x-1)^2=2x^3-4x^2+2x$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^1(2x^3-4x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{4}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$

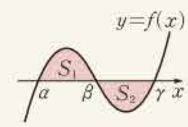
$$=\frac{1}{6}$$

답 ①

유형 06 두 도형의 넓이가 같을 조건 본책 157쪽

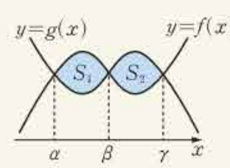
(1) 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면

➡ $\int_\alpha^\gamma f(x)dx=0$



(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면

➡ $\int_\alpha^\gamma\{f(x)-g(x)\}dx=0$



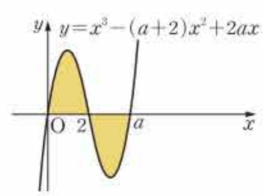
1011 곡선 $y=x^3-(a+2)x^2+2ax$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-(a+2)x^2+2ax=0$에서

$x(x-2)(x-a)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=a$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_0^a\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_0^a=0$$

$$\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}(a+2)a^3+a^3=0$$

$$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3=0$$

$a^4-4a^3=0,\qquad a^3(a-4)=0$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a>2)$

답 ③

1012 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 \{(4-x^2)-k\}dx=0$$

즉 $\int_0^2 (-x^2+4-k)dx=0$이므로

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+4x-kx\right]_0^2=0$$

$$\frac{16}{3}-2k=0 \qquad \therefore k=\frac{8}{3}$$

답 ①

1013 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^4 \{-x^2(x-4)-ax(x-4)\}dx=0$$

즉 $\int_0^4 \{-x^3+(4-a)x^2+4ax\}dx=0$이므로

$$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4-a}{3}x^3+2ax^2\right]_0^4=0$$

$$-64+\frac{64(4-a)}{3}+32a=0$$

$$32a=-64 \qquad \therefore a=-2$$

답 ⑤

1014 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 [x(x-a)(x-2)-\{-x(x-b)(x-2)\}]dx=0$$

즉 $\int_0^2 \{2x^3-(a+b+4)x^2+2(a+b)x\}dx=0$이므로

$$\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}(a+b+4)x^3+(a+b)x^2\right]_0^2=0$$

$$8-\frac{8}{3}(a+b+4)+4(a+b)=0$$

$$\frac{4}{3}(a+b)=\frac{8}{3} \qquad \therefore a+b=2$$

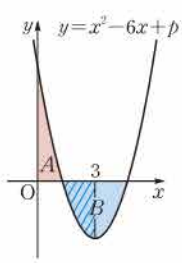
답 2

1015 $A:B=1:2$에서 $\qquad B=2A$

이때 곡선

$$y=x^2-6x+p=(x-3)^2+p-9$$

가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}B=A$이다. ⋯ ❶



즉 곡선 $y=x^2-6x+p$와 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^3 (x^2-6x+p)dx=0$$ ⋯ ❷

$$\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+px\right]_0^3=0$$

$$-18+3p=0 \qquad \therefore p=6$$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ A와 빗금 친 부분의 넓이가 서로 같음을 알 수 있다.	30 %
❷ $\int_0^3 (x^2-6x+p)dx=0$임을 알 수 있다.	40 %
❸ p의 값을 구할 수 있다.	30 %

1016 삼차방정식 $x^3-2x+k=0$의 근 중 가장 큰 값을 $\alpha\ (\alpha>0)$라 하면

$$\alpha^3-2\alpha+k=0$$

$$\therefore k=2\alpha-\alpha^3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$S_1=S_2$이므로

$$\int_0^\alpha (x^3-2x+k)dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-x^2+kx\right]_0^\alpha=0$$

$$\frac{1}{4}\alpha^4-\alpha^2+k\alpha=0, \qquad \alpha^4-4\alpha^2+4k\alpha=0$$

$$\therefore \alpha^3-4\alpha+4k=0\ (\because \alpha>0) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\alpha^3-4\alpha+4(2\alpha-\alpha^3)=0$$

$$-3\alpha^3+4\alpha=0, \qquad \alpha(3\alpha^2-4)=0$$

그런데 $\alpha>0$이므로 $\qquad \alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore k=2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

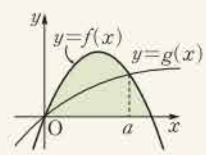
답 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

유형 07 두 곡선 사이의 넓이의 활용; 이등분

본책 158쪽

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S가 곡선 $y=g(x)$에 의하여 이등분되면

➡ $\int_0^a |f(x)-g(x)|dx=\frac{1}{2}S$

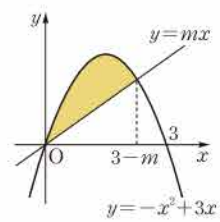


1017 곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x=mx$에서

$$x^2+(m-3)x=0, \qquad x(x+m-3)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3-m$$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_0^{3-m} \{(-x^2+3x)-mx\}dx$$

$$=\int_0^{3-m} \{-x^2+(3-m)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3-m}{2}x^2\right]_0^{3-m}$$

$$=\frac{1}{6}(3-m)^3$$

이때 곡선 $y=-x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^3 (-x^2+3x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

이므로

$$\frac{1}{6}(3-m)^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}$$

$$\therefore (3-m)^3=\frac{27}{2}$$

답 ③

1018 두 곡선 $y=-x^4+x^2$, $y=kx(x-1)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 \{(-x^4+x^2)-kx(x-1)\}dx$$
$$=\int_0^1 \{-x^4+(1-k)x^2+kx\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}(1-k)x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^1=\frac{k}{6}+\frac{2}{15}$$

이때 두 곡선 $y=x^4-x$, $y=-x^4+x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 \{(-x^4+x^2)-(x^4-x)\}dx$$
$$=\int_0^1 (-2x^4+x^2+x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{13}{30}$$

이므로 $\quad \frac{k}{6}+\frac{2}{15}=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{30}$

$\frac{k}{6}=\frac{1}{12} \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

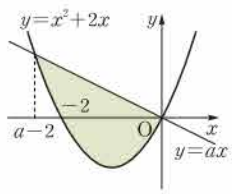
답 $\frac{1}{2}$

1019 곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $x^2+2x=ax$에서

$x^2+(2-a)x=0, \qquad x(x+2-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a-2$ ⋯ ❶

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{a-2}^0 \{ax-(x^2+2x)\}dx$$
$$=\int_{a-2}^0 \{-x^2+(a-2)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a-2}{2}x^2\right]_{a-2}^0$$
$$=\frac{1}{6}(2-a)^3 \quad \cdots ❷$$

이때 곡선 $y=x^2+2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$-\int_{-2}^0 (x^2+2x)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-2}^0=\frac{4}{3} \quad \cdots ❸$$

이므로

$\frac{1}{6}(2-a)^3=2\cdot\frac{4}{3}, \qquad (2-a)^3=16$

$8-12a+6a^2-a^3=16$

$\therefore a^3-6a^2+12a=-8$ ⋯ ❹

답 -8

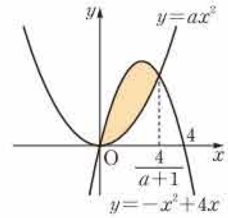
채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ 색칠한 부분의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 곡선 $y=x^2+2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❹ a^3-6a^2+12a의 값을 구할 수 있다.	20 %

1020 두 곡선 $y=-x^2+4x$, $y=ax^2$의 교점의 x좌표는 $-x^2+4x=ax^2$에서

$(a+1)x^2-4x=0, \qquad x\{(a+1)x-4\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{4}{a+1}$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_0^{\frac{4}{a+1}} \{(-x^2+4x)-ax^2\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{4}{a+1}} \{-(a+1)x^2+4x\}dx$$
$$=\left[-\frac{a+1}{3}x^3+2x^2\right]_0^{\frac{4}{a+1}}$$
$$=\frac{32}{3(a+1)^2}$$

이때 곡선 $y=-x^2+4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^4 (-x^2+4x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

이므로

$\frac{32}{3(a+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}, \qquad (a+1)^2=2$

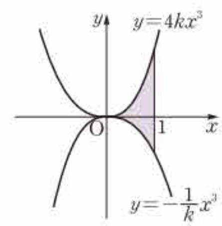
$\therefore a=\sqrt{2}-1\ (\because a>0)$

답 $\sqrt{2}-1$

유형 08 두 곡선 사이의 넓이의 활용; 넓이의 최솟값 본책 159쪽

(i) 두 곡선 사이의 넓이를 정적분을 이용하여 나타낸다.
(ii) 산술평균과 기하평균의 관계, 증감표 등을 이용하여 넓이의 최솟값을 구한다.

1021 오른쪽 그림에서 두 곡선 $y=4kx^3$, $y=-\frac{1}{k}x^3$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_0^1 \left\{4kx^3-\left(-\frac{1}{k}x^3\right)\right\}dx$$
$$=\left(4k+\frac{1}{k}\right)\int_0^1 x^3\,dx$$
$$=\left(4k+\frac{1}{k}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=k+\frac{1}{4k}$$

이때 $k>0$, $\frac{1}{4k}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$k+\frac{1}{4k}\ge 2\sqrt{k\cdot\frac{1}{4k}}=1\left(\text{단, 등호는 } k=\frac{1}{4k}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 1이다.

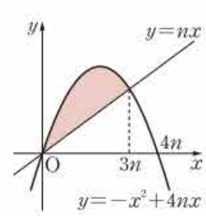
답 ④

SSEN 특강 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

1022 곡선 $y=-x^2+4nx$와 직선 $y=nx$의 교점의 x좌표는 $-x^2+4nx=nx$에서



$x^2-3nx=0, \qquad x(x-3n)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3n$

따라서 앞의 그림에서 색칠한 부분의 넓이 S_n은

$$S_n=\int_0^{3n}\{(-x^2+4nx)-nx\}dx$$
$$=\int_0^{3n}(-x^2+3nx)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3n}{2}x^2\right]_0^{3n}$$
$$=\frac{9}{2}n^3$$

즉 $\frac{9}{2}n^3>90$에서 $\quad n^3>20$

따라서 자연수 n의 최솟값은 3이다. 답 ③

1023 곡선 $y=x^2-kx$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(k)$라 하면

$$S(k)=\int_0^k(-x^2+kx)dx+\int_k^2(x^2-kx)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2\right]_k^2$$
$$=\frac{1}{6}k^3+\frac{8}{3}-2k+\frac{1}{6}k^3$$
$$=\frac{1}{3}k^3-2k+\frac{8}{3}$$

$\therefore S'(k)=k^2-2=(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})$

$S'(k)=0$에서 $\quad k=\sqrt{2}$ ($\because 0<k<2$)

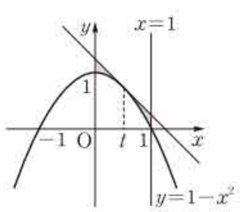
k	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		↘	극소	↗	

따라서 $S(k)$는 $k=\sqrt{2}$일 때 최소이다. 답 $\sqrt{2}$

1024 $y=1-x^2$에서

$y'=-2x$

즉 곡선 위의 점 $(t,\ 1-t^2)$에서의 접선의 기울기는 $-2t$이므로 접선의 방정식은



$y-(1-t^2)=-2t(x-t)$

$\therefore y=-2tx+t^2+1$ ⋯ ❶

위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

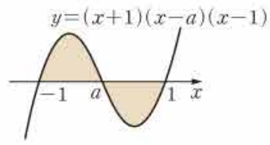
$$\int_0^1\{(-2tx+t^2+1)-(1-x^2)\}dx=\int_0^1(x^2-2tx+t^2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-t+t^2$$
$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}$$

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{1}{12}$이다. ⋯ ❷

답 $\frac{1}{12}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 도형의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	70 %

1025 곡선



$y=(x+1)(x-a)(x-1)$ $(-1<a<1)$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면 오른쪽 그림에서

$$S(a)=\int_{-1}^a(x+1)(x-a)(x-1)dx$$
$$+\int_a^1\{-(x+1)(x-a)(x-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^a(x^3-ax^2-x+a)dx-\int_a^1(x^3-ax^2-x+a)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{-1}^a$$
$$-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_a^1$$
$$=-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}$$
$$-\left(\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a-\frac{1}{4}\right)$$
$$=-\frac{1}{6}a^4+a^2+\frac{1}{2}$$

$\therefore S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a=-\frac{2}{3}a(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=0$ ($\because -1<a<1$)

a	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $S(a)$는 $a=0$일 때 최소이다. 답 0

유형 09 주기함수의 정적분

본책 160쪽

함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여

$f(x+k)=f(x)$ (k는 상수)

이면 $y=f(x)$의 그래프는 일정한 모양이 반복되므로 다음이 성립한다.

① $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+k}^{b+k}f(x)dx$

② $\int_a^{a+k}f(x)dx=\int_b^{b+k}f(x)dx$

1026 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_1^4 f(x)dx=\int_4^7 f(x)dx=\int_7^{10}f(x)dx=\int_{10}^{13}f(x)dx=2$$
$$\therefore \int_1^{13}f(x)dx=\int_1^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx+\int_7^{10}f(x)dx$$
$$+\int_{10}^{13}f(x)dx$$
$$=4\cdot 2=8$$

답 ②

1027 조건 (가)에 의하여

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 x^2\,dx=2\int_0^1 x^2\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$ ⋯ ❶

이때 조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로

$$\int_{-6}^{6} f(x)dx=6\int_{-1}^{1} f(x)dx=6\cdot\frac{2}{3}=4 \quad \cdots ❷$$

답 4

채점 기준	비율
❶ $\int_{-1}^{1} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_{-6}^{6} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	60 %

1028 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$이므로

$$\int_{1}^{2} f(x)dx=\int_{5}^{6} f(x)dx=\int_{9}^{10} f(x)dx$$
$$=\cdots=\int_{2021}^{2022} f(x)dx=\int_{2025}^{2026} f(x)dx=\cdots$$

답 ①

1029 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_{0}^{2} f(x)dx=\int_{2}^{4} f(x)dx=\int_{4}^{6} f(x)dx$$
$$=\int_{6}^{8} f(x)dx=\int_{8}^{10} f(x)dx=8$$
$$\therefore \int_{0}^{10} f(x)dx=\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{6} f(x)dx$$
$$+\int_{6}^{8} f(x)dx+\int_{8}^{10} f(x)dx$$
$$=5\cdot 8=40$$

또 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-10}^{10} f(x)dx=2\int_{0}^{10} f(x)dx=2\cdot 40=80$$

답 80

1030 $f(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<1) \\ 2 & (1\le x<2) \\ -2x+6 & (2\le x<3) \end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{3} f(x)dx=\int_{0}^{1} 2x\,dx+\int_{1}^{2} 2\,dx+\int_{2}^{3} (-2x+6)\,dx$$
$$=\Big[x^2\Big]_0^1+\Big[2x\Big]_1^2+\Big[-x^2+6x\Big]_2^3$$
$$=1+2+1=4$$

이때 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_{0}^{9} f(x)dx=\int_{0}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{6} f(x)dx+\int_{6}^{9} f(x)dx$$
$$=3\cdot 4=12$$
$$\int_{0}^{12} f(x)dx=\int_{0}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{6} f(x)dx+\int_{6}^{9} f(x)dx$$
$$+\int_{9}^{12} f(x)dx$$
$$=4\cdot 4=16$$

따라서 $9<k<12$이므로

$$\int_{0}^{k} f(x)dx=\int_{0}^{9} f(x)dx+\int_{9}^{k} f(x)dx$$
$$13=12+\int_{9}^{k} f(x)dx \qquad \therefore \int_{9}^{k} f(x)dx=1$$

$$\int_{9}^{10} f(x)dx=\int_{6}^{7} f(x)dx=\int_{3}^{4} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx=1$$이므로

$k=10$

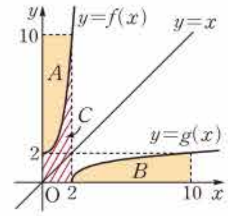
답 ③

유형 10 함수와 그 역함수의 정적분

본책 160쪽

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
➡ 넓이가 같은 도형을 이용한다.

1031 함수 $f(x)=x^3+2\,(x\ge 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



오른쪽 그림에서

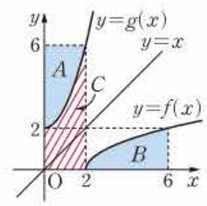
$(A$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$

이므로

$$\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{10} g(x)dx=(C\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})$$
$$=(C\text{의 넓이})+(A\text{의 넓이})$$
$$=2\cdot 10$$
$$=20$$

답 ⑤

1032 함수 $f(x)=\sqrt{x-2}$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. $\cdots$ ❶



오른쪽 그림에서

$(A$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$ $\cdots$ ❷

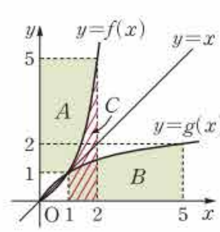
이므로

$$\int_{0}^{2} g(x)dx+\int_{2}^{6} f(x)dx=(C\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})$$
$$=(C\text{의 넓이})+(A\text{의 넓이})$$
$$=2\cdot 6$$
$$=12 \quad \cdots ❸$$

답 12

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.	40 %
❷ $(A$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$임을 알 수 있다.	40 %
❸ 주어진 정적분의 값을 구할 수 있다.	20 %

1033 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x(x^2+1)\,(x\ge 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

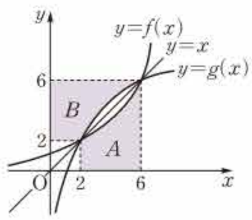


오른쪽 그림에서

$$(B\text{의 넓이})=(A\text{의 넓이})$$
$$=2\cdot5-1\cdot1-(C\text{의 넓이})$$
$$=9-\int_1^2 f(x)dx$$
$$=9-\int_1^2 \frac{1}{2}x(x^2+1)dx$$
$$=9-\frac{1}{2}\int_1^2 (x^3+x)dx$$
$$=9-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=9-\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{4}=\frac{51}{8}$$
$$\therefore \int_1^5 g(x)dx=(B\text{의 넓이})=\frac{51}{8}$$

답 $\frac{51}{8}$

1034 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



오른쪽 그림에서

$(A\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})=S$

이므로

$$\int_2^6 g(x)dx=6^2-2^2-(B\text{의 넓이})=32-S$$

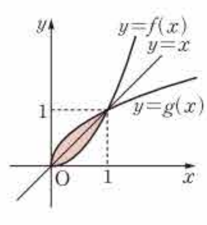
$\therefore k=32$

답 ⑤

유형 11 함수와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이 본책 161쪽

두 곡선 $y=f(x)$와 $x=f(y)$로 둘러싸인 도형의 넓이는
➡ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

1035 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



$x^2=x$에서 $\quad x(x-1)=0$

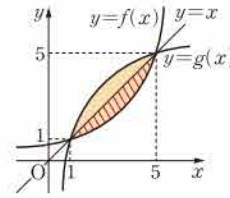
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^1 \{x-f(x)\}dx=2\int_0^1 (x-x^2)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

답 ②

1036 오른쪽 그림과 같이 구하는 넓이는 직선 $y=x$에 의하여 이등분되고, 빗금 친 부분의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot(5^2-1^2)-\int_1^5 f(x)dx$$
$$=12-9$$
$$=3$$

따라서 구하는 넓이는 빗금 친 부분의 넓이의 2배이므로

$2\cdot3=6$

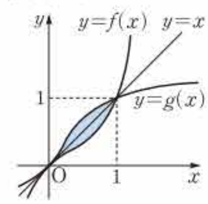
답 6

1037 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고

$$f'(x)=3x^2-2x+1$$
$$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로 $x^3-x^2+x=x$에서



$x^3-x^2=0, \qquad x^2(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ ··· ❶

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^1 \{x-f(x)\}dx=2\int_0^1 \{x-(x^3-x^2+x)\}dx$$
$$=2\int_0^1 (-x^3+x^2)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=2\cdot\frac{1}{12}$$
$$=\frac{1}{6}$$ ··· ❷

답 $\frac{1}{6}$

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	60 %

유형 12 위치와 위치의 변화량 본책 161쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때

① 시각 t에서의 점 P의 위치 x는
➡ $x=x_0+\int_a^t v(t)dt$

② 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은
➡ $\int_a^b v(t)dt$

1038 $t=0$에서의 점 P의 위치가 2이므로 $t=3$에서 점 P의 위치는

$$2+\int_0^3(6-2t)dt=2+\left[6t-t^2\right]_0^3=2+9=11$$

답 ⑤

1039 $t=1$에서의 점 P의 위치가 5이므로

$$0+\int_0^1(3t^2-2t+k)dt=5$$

$$\left[t^3-t^2+kt\right]_0^1=5 \qquad \therefore k=5$$ ··· ❶

따라서 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^4(3t^2-2t+5)dt=\left[t^3-t^2+5t\right]_1^4=63$$ ··· ❷

답 63

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $t=1$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량을 구할 수 있다.	50 %

1040 $v(t)=0$일 때 물이 멈추므로

$4t-t^2=0, \quad t(4-t)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=4$

따라서 $t=4$일 때까지 흘러나온 물의 양은

$$1^2\cdot\int_0^4(4t-t^2)dt=\left[2t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

답 ③

SSEN 특강 물체의 운동과 속도의 관계

① 움직이던 물체가 정지할 때 ➡ (속도)$=0$
② 움직이던 물체가 운동 방향을 바꿀 때 ➡ (속도)$=0$

1041 $\int_0^{10}2t\,dt+\int_{10}^{20}(60-4t)dt$

$$=\left[t^2\right]_0^{10}+\left[60t-2t^2\right]_{10}^{20}$$
$$=100+0=100\,(\mathrm{m})$$

따라서 20분 후의 지면으로부터 열기구의 높이는 100 m이다.

답 100 m

1042 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각을 $t=k$라 하면

$2k^2-4k=-3k^2+6k$

$5k^2-10k=0, \quad 5k(k-2)=0$

$\therefore k=2 \ (\because k>0)$ ··· ❶

$t=2$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2(2t^2-4t)dt=\left[\frac{2}{3}t^3-2t^2\right]_0^2=-\frac{8}{3}$$

$t=2$에서 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^2(-3t^2+6t)dt=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2=4$$ ··· ❷

따라서 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$4-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{20}{3}$$ ··· ❸

답 $\frac{20}{3}$

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각을 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점의 위치를 각각 구할 수 있다.	50 %
❸ 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

1043 자동차 B가 P 지점을 지나 t초 동안 달린 거리를 x_B m라 하면

$$x_B=\int_0^t(2t+2)dt=t^2+2t$$

자동차 A가 P 지점을 지나 $(t+2)$초 동안 달린 거리를 x_A m라 하면

$x_A=16(t+2)$ (거리)=(속력)×(시간)

A와 B가 만날 때 $x_A=x_B$이므로

$16(t+2)=t^2+2t, \qquad t^2-14t-32=0$

$(t+2)(t-16)=0 \qquad \therefore t=16 \ (\because t>0)$

따라서 자동차 B가 P 지점을 지난 지 16초 후에 두 자동차 A, B가 만난다.

답 ③

유형 13 움직인 거리 본책 162쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는

➡ $\int_a^b|v(t)|dt$

1044 $v(t)=30-2t=0$에서

$t=15$

따라서 전동차는 제동을 건 후 15초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^{15}|30-2t|dt=\int_0^{15}(30-2t)dt=\left[30t-t^2\right]_0^{15}=225\,(\mathrm{m})$$

답 ④

1045 $v(t)=20-10t=0$에서

$t=2$

따라서 물체는 위로 쏘아 올린 지 2초 후에 최고 높이에 도달하므로 구하는 거리는

$$\int_2^4|20-10t|dt=\int_2^4(10t-20)dt=\left[5t^2-20t\right]_2^4=0-(-20)=20\,(\mathrm{m})$$

답 20 m

1046 (1) 원점에서 출발하였으므로 위치의 변화량이 0이면 점 P의 위치가 원점이다.

$t=a\,(a>0)$일 때 점 P의 위치의 변화량이 0이라 하면

$$\int_0^a (6-2t)dt=0, \qquad \Big[6t-t^2\Big]_0^a=0$$

$$6a-a^2=0, \qquad a(6-a)=0$$

$$\therefore a=6\ (\because a>0)$$

따라서 점 P가 원점으로 돌아오는 데 걸리는 시간은 6초이다. ⋯ ❶

(2) $\displaystyle\int_0^6 |6-2t|dt=\int_0^3 (6-2t)dt+\int_3^6 (2t-6)dt$

$$=\Big[6t-t^2\Big]_0^3+\Big[t^2-6t\Big]_3^6$$

$$=9+9=18$$ ⋯ ❷

답 (1) 6초 (2) 18

채점 기준	비율
❶ 점 P가 원점으로 돌아오는 데 걸리는 시간을 구할 수 있다.	60 %
❷ 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 움직인 거리를 구할 수 있다.	40 %

1047 $v(t)=0$에서 $\quad t^2-kt=0$

$t(t-k)=0 \qquad \therefore t=k\ (\because t>0)$

따라서 $t=k$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

이때 점 P가 $t=0$에서 $t=k$까지 움직인 거리는

$$\int_0^k |t^2-kt|dt=\int_0^k (-t^2+kt)dt$$

$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\Big]_0^k$$

$$=\frac{k^3}{6}$$

즉 $\dfrac{k^3}{6}=\dfrac{32}{3}$이므로

$k^3=64 \qquad \therefore k=4$

답 ③

1048 $t=a\,(a>0)$일 때까지 열차가 달린 거리가 3 km라 하면

$$\int_0^a \left|\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t\right|dt=3, \qquad \int_0^a \left(\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t\right)dt=3$$

$$\Big[\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{4}t^2\Big]_0^a=3, \qquad \frac{1}{4}a^3+\frac{1}{4}a^2=3$$

$$a^3+a^2-12=0, \qquad (a-2)(a^2+3a+6)=0$$

$$\therefore a=2\ (\because a^2+3a+6>0)$$

열차가 출발한 후 2분이 지났을 때의 속도는

$$v(2)=\frac{3}{4}\cdot 2^2+\frac{1}{2}\cdot 2=4\ (\mathrm{km/min})$$

따라서 열차가 출발한 후 5분 동안 달린 거리는

$$3+\int_2^5 4\,dt=3+\Big[4t\Big]_2^5=3+12=15\ (\mathrm{km})$$

답 ⑤

1049 $v(t)=at(t-20)\ (a<0)$이라 하면 속도 $v(t)$의 그래프가 점 $(10,\ 10)$을 지나므로

$$10=a\cdot 10\cdot(-10) \qquad \therefore a=-\frac{1}{10}$$

$$\therefore v(t)=-\frac{1}{10}t(t-20)=-\frac{1}{10}t^2+2t$$

이때 두 항구 A, B 사이의 거리는 $t=0$에서 $t=20$까지 배가 이동한 거리이므로

$$\int_0^{20}\left|-\frac{1}{10}t^2+2t\right|dt=\int_0^{20}\left(-\frac{1}{10}t^2+2t\right)dt$$

$$=\Big[-\frac{1}{30}t^3+t^2\Big]_0^{20}$$

$$=\frac{400}{3}\ (\mathrm{km})$$

답 ②

유형 14 그래프에서의 위치와 움직인 거리

본책 163쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 할 때

① $\displaystyle\int_a^b v(t)dt$ ➡ $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량

② $\displaystyle\int_a^b |v(t)|dt$ ➡ $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리

➡ $y=v(t)$의 그래프와 t축 및 두 직선 $t=a$, $t=b$로 둘러싸인 도형의 넓이

1050 ㄱ. 점 P의 운동 방향은

$v(t)=0$, 즉 $t=\dfrac{7}{3}$, $t=5$

두 점 $(2,\ 1)$, $(3,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식이 $v(t)=-3t+7$이므로 $v(t)=0$일 때, $t=\dfrac{7}{3}$

일 때 바뀌므로 $t=7$일 때까지 두 번 바뀐다.

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 속력 $|v(t)|$의 값이 가장 큰 것은 $t=3$일 때이다.

ㄷ. $t=7$일 때 점 P의 위치는

$$\int_0^7 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{7}{3}\right)\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\left(5-\frac{7}{3}\right)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1$$

$$=\frac{5}{3}-\frac{8}{3}+1=0$$

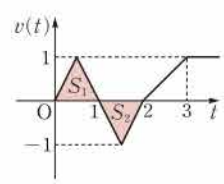
이므로 $t=7$일 때 점 P는 원점에 놓여 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

참고 ㄷ. $t=\dfrac{7}{3}$일 때 점 P의 위치는 $\dfrac{5}{3}$, $t=5$일 때 점 P의 위치는 $\dfrac{5}{3}-\dfrac{8}{3}=-1$이므로 $t=\dfrac{7}{3}$일 때 점 P는 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있다.

1051 $t=a$일 때, 다시 원점을 통과하므로 $\displaystyle\int_0^a v(t)dt=0$이어야 한다.



오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이므로 $t=2$일 때 다시 원점을 통과한다.

$\therefore a=2$

답 ④

1052 $t=3$에서의 점 P의 위치는 $\displaystyle\int_0^3 v(t)dt$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4a+\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot(-a)=3$$

$$\therefore a=3$$ ⋯ ❶

따라서 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5 |v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 12+\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot(5-3)\cdot 12$$

$$=6+3+12=21$$ ⋯ ❷

답 21

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리를 구할 수 있다.	50 %

1053 $t=3$에서의 점 P의 위치는 $\int_0^3 v(t)dt$이므로

$$\int_0^3 v(t)dt=2$$

이때 $\int_0^3 v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^3 v(t)dt$이므로

$$3+\int_2^3 v(t)dt=2 \qquad \therefore \int_2^3 v(t)dt=-1$$

따라서 $t=3$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_3^5 |v(t)|dt=\int_2^5 |v(t)|dt-\int_2^3 |v(t)|dt$$
$$=3-1=2$$

답 2

1054 $t=0$에서의 점 P의 위치를 x_0이라 하면 $t=2$에서의 점 P의 위치는 $x_0+\int_0^2 v(t)dt$이므로

$$x_0+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot a=5$$

$\therefore x_0+a=5$ …… ㉠

$t=2$에서 $t=4$까지의 위치의 변화량과 $t=6$에서 $t=7$까지의 위치의 변화량은 각각 0이고, $t=7$에서의 점 P의 위치는 $x_0+\int_0^7 v(t)dt$이므로

$$x_0+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot a+(6-4)\cdot(-a)=-1$$

$\therefore x_0-a=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x_0=2,\ a=3$

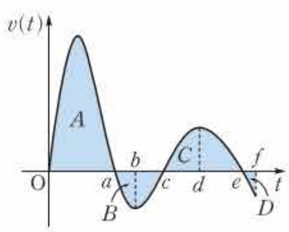
따라서 $t=10$에서의 점 P의 위치는

$$-1+\frac{1}{2}\cdot(10-7)\cdot 3=\frac{7}{2}$$

($t=7$에서의 위치) + ($t=7$에서 $t=10$까지의 위치의 변화량)

답 ③

1055 오른쪽 그림에서 속도 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 차례대로 A, B, C, D라 하면 주어진 조건에서



$$A=B+C+D$$
$$B=C-D$$

ㄱ. $\int_0^c v(t)dt=A-B=C+D$

$$\int_c^f |v(t)|dt=C+D$$
$$\therefore \int_0^c v(t)dt=\int_c^f |v(t)|dt$$

ㄴ. 점 P는 $t=a$, $t=c$, $t=e$에서 운동 방향을 바꾸므로 3번 바꾼다.

ㄷ. $\int_a^c |v(t)|dt=B$, $\int_c^f |v(t)|dt=C+D$이므로

$$\int_a^c |v(t)|dt+\int_c^f |v(t)|dt=B+C+D=A$$

$\int_0^c v(t)dt=A-B$이고, $B\neq 0$이므로

$$\int_0^c v(t)dt\neq\int_a^c |v(t)|dt+\int_c^f |v(t)|dt$$

ㄹ. $\int_0^a v(t)dt=A>0$, $\int_0^c v(t)dt=A-B=C+D>0$,

$$\int_0^e v(t)dt=A-B+C=2C+D>0,$$
$$\int_0^f v(t)dt=A-B+C-D=2C>0$$

따라서 점 P의 위치의 변화량이 0이 되는 때는 없으므로 점 P는 출발 후 원점을 다시 지나지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

1056 1st 주어진 등식을 간단히 정리한다.

$\int_0^{2022} f(x)dx=\int_6^{2022} f(x)dx$이므로

$$\int_0^{2022} f(x)dx-\int_6^{2022} f(x)dx=0$$
$$\int_0^{2022} f(x)dx+\int_{2022}^6 f(x)dx=0$$
$$\therefore \int_0^6 f(x)dx=0$$

2nd $f(x)$를 구한다.

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\int_0^6 (x^2+ax+b)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^6$$
$$=72+18a+6b$$

즉 $72+18a+6b=0$이므로

$3a+b=-12$ …… ㉠

또 $f(6)=0$이므로

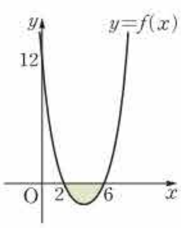
$36+6a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8,\ b=12$

$$\therefore f(x)=x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$$

3rd 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_2^6 \{-(x^2-8x+12)\}dx$$
$$=-\int_2^6 (x^2-8x+12)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+12x\right]_2^6$$
$$=-\left(0-\frac{32}{3}\right)=\frac{32}{3}$$

답 $\frac{32}{3}$

1057 1st $f(x)$를 구한다.

조건 (나)의 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$에서 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$$

따라서 $f(x)$는 x^2을 인수로 갖고 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $f(x)=x^2$

(2nd) $g(x)$를 구한다.

또 조건 (나)의 $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{x-a}=0$에서 $x \longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x \to a} g(x)=0$이므로 $\quad g(a)=0$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{x-a}=\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)=0$$

따라서 $g(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.

이때 조건 (가)에서 $g(0)=f(0)=0$이므로 $g(x)$는 x를 인수로 갖고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$$\therefore g(x)=x(x-a)^2$$

한편 조건 (다)에서 $\int_0^a \{f(x)-g(x)\}dx=0$이고

$$\begin{aligned}\int_0^a \{f(x)-g(x)\}dx&=\int_0^a \{x^2-x(x-a)^2\}dx\\&=\int_0^a \{-x^3+(2a+1)x^2-a^2x\}dx\\&=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(2a+1)x^3-\frac{a^2}{2}x^2\right]_0^a\\&=-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3\end{aligned}$$

이므로

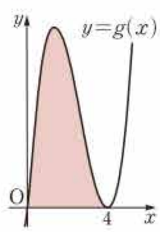
$$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3=0, \qquad a^4-4a^3=0$$

$$a^3(a-4)=0 \qquad \therefore a=4 \ (\because a>0)$$

$$\therefore g(x)=x(x-4)^2$$

(3rd) 곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\begin{aligned}&\int_0^4 x(x-4)^2dx\\&=\int_0^4 (x^3-8x^2+16x)dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{8}{3}x^3+8x^2\right]_0^4\\&=\frac{64}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{64}{3}$

1058 (1st) 구하는 넓이를 정적분으로 나타낸다.

조건 (나)에서 $\int_0^6 f(x)dx=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $[0, 6]$에서 x축과 만난다.

이때 $f(x)$는 증가하는 함수이므로 조건 (나)에 의하여 구간 $[6, 9]$에서

$$f(x)>0$$

따라서 구하는 넓이는 $\int_6^9 f(x)dx$와 같으므로

$$\begin{aligned}\int_6^9 f(x)dx&=\int_6^9 \{f(x-3)+4\}dx \ (\because \text{(가)})\\&=\int_6^9 f(x-3)dx+\int_6^9 4dx\\&=\int_3^6 f(x)dx+\Big[4x\Big]_6^9\\&=\int_3^6 f(x)dx+12 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}\end{aligned}$$

$y=f(x)$의 그래프는 $y=f(x-3)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

(2nd) $\int_3^6 f(x)dx$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x)dx&=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx\\&=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 \{f(x-3)+4\}dx \ (\because \text{(가)})\\&=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x-3)dx+\int_3^6 4dx\\&=\int_0^3 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx+\Big[4x\Big]_3^6\\&=2\int_0^3 f(x)dx+12\end{aligned}$$

조건 (나)에서 $\int_0^6 f(x)dx=0$이므로

$$2\int_0^3 f(x)dx+12=0 \qquad \therefore \int_0^3 f(x)dx=-6$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_3^6 f(x)dx&=\int_0^6 f(x)dx-\int_0^3 f(x)dx\\&=0-(-6)=6\end{aligned}$$

(3rd) 넓이를 구한다.

따라서 구하는 넓이는 ㉠에서

$$\int_3^6 f(x)dx+12=6+12=18$$

답 ④

1059 (1st) 직선 l의 방정식을 구한다.

직선 l이 점 $(-1, 0)$을 지나므로 직선 l의 방정식을

$$y=m(x+1) \ (m>0)$$

이라 하고, 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2=m(x+1)$, 즉 $x^2-mx-m=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=m, \ \alpha\beta=-m \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 $\overline{AP}:\overline{AQ}=1:4$이므로

두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면 $\overline{AP}:\overline{AQ}=\overline{AP'}:\overline{AQ'}=(\alpha+1):(\beta+1)$

$$(\alpha+1):(\beta+1)=1:4$$

$$\beta+1=4\alpha+4 \qquad \therefore \beta=4\alpha+3$$

이것을 ㉠에 각각 대입하면

$$5\alpha+3=m, \ \alpha(4\alpha+3)=-m$$

즉 $\alpha(4\alpha+3)=-(5\alpha+3)$이므로 $\quad 4\alpha^2+8\alpha+3=0$

$$(2\alpha+3)(2\alpha+1)=0 \qquad \therefore \alpha=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } \alpha=-\frac{1}{2}$$

그런데 $\alpha=-\frac{3}{2}$이면 $m=-\frac{9}{2}<0$이므로 $\quad \alpha=-\frac{1}{2}$

$$\therefore \beta=1, \ m=\frac{1}{2}$$

즉 직선 l의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이다.

(2nd) 직선 l과 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^1 \left\{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-x^2\right\}dx&=\int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx\\&=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\right]_{-\frac{1}{2}}^1\\&=\frac{5}{12}-\left(-\frac{7}{48}\right)\\&=\frac{9}{16}\end{aligned}$$

답 ④

1060 1st x의 값의 범위를 나누어 $h(x)$를 구한다.

$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ x & (x>0)\end{cases}$ 에서

$$f(x-a)=\begin{cases}0 & (x\le a)\\ x-a & (x>a)\end{cases},$$

$$f(x-b)=\begin{cases}0 & (x\le b)\\ x-b & (x>b)\end{cases},$$

$$f(x-2)=\begin{cases}0 & (x\le 2)\\ x-2 & (x>2)\end{cases}$$

이고, $0<a<b<2$이므로

(i) $x\le 0$일 때

$f(x)=0$, $f(x-a)=0$, $f(x-b)=0$, $f(x-2)=0$이므로

$$h(x)=k(0-0-0+0)=0$$

(ii) $0<x\le a$일 때

$f(x)=x$, $f(x-a)=0$, $f(x-b)=0$, $f(x-2)=0$이므로

$$h(x)=k(x-0-0+0)=kx$$

(iii) $a<x\le b$일 때

$f(x)=x$, $f(x-a)=x-a$, $f(x-b)=0$, $f(x-2)=0$이므로

$$h(x)=k\{x-(x-a)-0+0\}=ka$$

(iv) $b<x\le 2$일 때

$f(x)=x$, $f(x-a)=x-a$, $f(x-b)=x-b$, $f(x-2)=0$ 이므로

$$h(x)=k\{x-(x-a)-(x-b)+0\}$$
$$=k(-x+a+b)$$

(v) $x>2$일 때

$f(x)=x$, $f(x-a)=x-a$, $f(x-b)=x-b$, $f(x-2)=x-2$이므로

$$h(x)=k\{x-(x-a)-(x-b)+(x-2)\}$$
$$=k(a+b-2)$$

한편 $x>2$일 때 $g(x)=0$이므로 $0\le h(x)\le g(x)$에서

$$h(x)=0$$

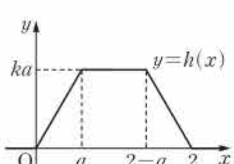
따라서 $k(a+b-2)=0$이고 $k\ne 0$이므로

$$a+b-2=0$$

$$\therefore b=2-a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이상에서 함수 $h(x)$와 그 그래프는 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ kx & (0<x\le a)\\ ka & (a<x\le 2-a)\\ k(2-x) & (2-a<x\le 2)\\ 0 & (x>2)\end{cases}$$

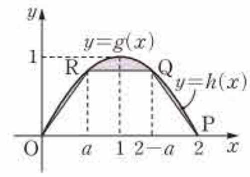


2nd 조건을 만족시키는 $y=h(x)$의 그래프를 그린다.

모든 실수 x에 대하여 $h(x)\le g(x)$, 즉 $g(x)-h(x)\ge 0$이므로 $\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$의 값은 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프와 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

이때 $\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소이려면 $\int_0^2 h(x)dx$의 값이 최대이어야 한다.

따라서 $y=h(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때 $\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소이다.



두 점 Q, R가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이다.

3rd 사다리꼴의 넓이가 최대일 때 a의 값을 구한다.

위의 그림과 같이

$\mathrm{P}(2,\ 0)$, $\mathrm{Q}(2-a,\ a(2-a))$, $\mathrm{R}(a,\ a(2-a))$ $(0<a<1)$

라 하고 사다리꼴 OPQR의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}\{(2-2a)+2\}\cdot a(2-a)$$
$$=a(a-2)^2$$

$$\therefore S'(a)=(a-2)^2+2a(a-2)$$
$$=(3a-2)(a-2)$$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=\frac{2}{3}$ ($\because 0<a<1$)

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	극대	↘	

즉 $S(a)$는 $a=\frac{2}{3}$일 때 극대이면서 최대이다.

4th $60(k+a+b)$의 값을 구한다.

$a=\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면

$$b=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

점 R는 $y=h(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프의 교점이므로

$\left(\frac{2}{3},\ \frac{8}{9}\right)$

$$\frac{2}{3}\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}k$$

$$\therefore k=\frac{4}{3}$$

$$\therefore 60(k+a+b)=60\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)=200$$

답 200

1061 1st a의 값을 구한다.

$f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$에서 $f'(x)$는 $x=2$일 때 최대이므로 점 P의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

즉 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$$g(2)=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+a=0$$

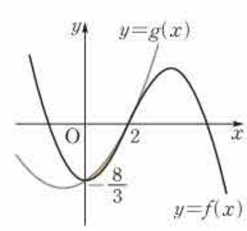
$$\therefore a=-\frac{8}{3}$$

2nd b의 값을 구한다.

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는

$$-\frac{1}{6}x^3+x^2-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$$

에서



$$x^3-4x^2+4x=0$$
$$x(x-2)^2=0$$
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} b&=\int_0^2\left\{\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{1}{6}x^3+x^2-\frac{8}{3}\right)\right\}dx \\ &=\int_0^2\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x\right)dx \\ &=\left[\frac{1}{24}x^4-\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{3}x^2\right]_0^2 \\ &=\frac{2}{9} \end{aligned}$$

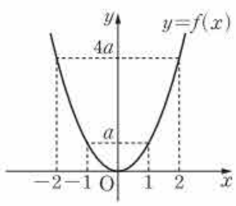
3rd $9(b-a)$의 값을 구한다.

$9(b-a)=9\left\{\frac{2}{9}-\left(-\frac{8}{3}\right)\right\}=26$

답 26

1062 **1st** $g(t)$, $h(t)$를 $f(t)$를 이용하여 나타낸다.

$y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

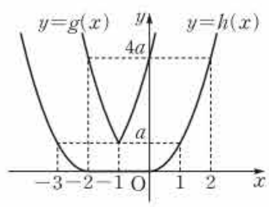


$$g(t)=\begin{cases} f(t+2) & (t\geq-1) \\ f(t) & (t\leq-1) \end{cases},$$

$$h(t)=\begin{cases} f(t) & (t\geq0) \\ 0 & (-2\leq t\leq0) \\ f(t+2) & (t\leq-2) \end{cases}$$

2nd 두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

즉 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\begin{aligned} &\int_{-2}^2\{g(x)-h(x)\}dx \\ &=\underbrace{\int_{-2}^0 g(x)dx+\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx}_{-2\leq x\leq0\text{에서 } h(x)=0} \\ &=2\int_{-2}^{-1} g(x)dx+\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx \\ &=2\int_{-2}^{-1} ax^2\,dx+\int_0^2\{a(x+2)^2-ax^2\}dx \\ &=2a\int_{-2}^{-1} x^2\,dx+a\int_0^2(4x+4)dx \\ &=2a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{-1}+a\left[2x^2+4x\right]_0^2 \\ &=\frac{14}{3}a+16a=\frac{62}{3}a \end{aligned}$$

3rd $10a$의 값을 구한다.

따라서 $\frac{62}{3}a=31$이므로

$a=\frac{3}{2}$

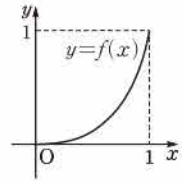
$\therefore 10a=10\cdot\frac{3}{2}=15$

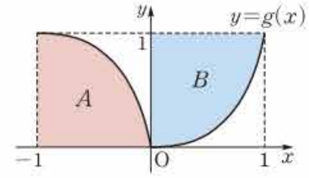
답 15

1063 **1st** $-1<x\leq1$에서 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.

조건 (가)에서 $y=-f(x+1)+1$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.

이때 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$이므로 $0\leq x\leq1$에서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다고 하면 $-1<x\leq1$에서 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.





2nd $\int_{-1}^1 g(x)dx$의 값을 구한다.

$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$이고 위의 그림에서

(A의 넓이)$=$(B의 넓이)

이므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 g(x)dx&=(B\text{의 넓이}) \\ &=1\cdot1-\int_0^1 g(x)dx \\ &=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^1 g(x)dx&=\int_{-1}^0 g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx \\ &=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1 \end{aligned}$$

3rd $\int_{-3}^2 g(x)dx$의 값을 구한다.

한편 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이므로

$\int_{-3}^{-1} g(x)dx=\int_{-1}^1 g(x)dx=1$,

$\int_1^2 g(x)dx=\int_{-1}^0 g(x)dx=\frac{5}{6}$

$$\begin{aligned} \therefore &\int_{-3}^2 g(x)dx \\ &=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx \\ &=1+1+\frac{5}{6} \\ &=\frac{17}{6} \end{aligned}$$

답 ②

1064 **1st** 열차가 제동을 건 후 정지할 때까지 달린 거리를 구한다.

$28-4t=0$에서 $t=7$

따라서 열차는 제동을 건 지 7초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^7|28-4t|dt&=\int_0^7(28-4t)dt \\ &=\left[28t-2t^2\right]_0^7 \\ &=98\,(\text{m}) \end{aligned}$$

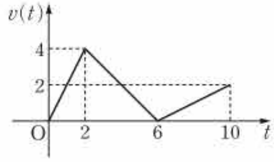
2nd x의 값의 범위를 구한다.

즉 열차가 장애물과 부딪히지 않고 정지하기 위한 x의 값의 범위는 $x>98$이다.

답 ⑤

1065 (1st) x의 값의 범위를 나누어 $f(x)$를 구한다.

속도 $v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

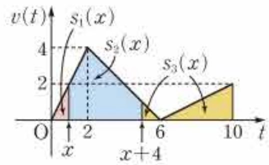


이때 시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리를 $s_1(x)$, 시각 $t=x$에서 $t=x+4$까지 움직인 거리를 $s_2(x)$, 시각 $t=x+4$에서 $t=10$까지 움직인 거리를 $s_3(x)$라 하자.

(i) $0<x<2$인 경우

오른쪽 그림에서 넓이가 가장 작은 부분은 $s_1(x)$이므로

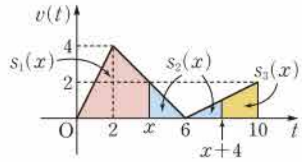
$$f(x)=s_1(x)$$
$$=\int_0^x 2t\,dt=\Big[t^2\Big]_0^x$$
$$=x^2$$



(ii) $2<x<6$인 경우

오른쪽 그림에서 넓이가 가장 작은 부분은 $s_3(x)$이므로

$$f(x)=s_3(x)$$
$$=\int_{x+4}^{10}\left(\frac{1}{2}t-3\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^2-3t\right]_{x+4}^{10}$$
$$=-\frac{1}{4}x^2+x+3$$



(2nd) $\int_0^6 f(x)dx$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서 $f(0)=f(6)=0$이므로

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (0\le x\le 2) \\ -\frac{1}{4}x^2+x+3 & (2\le x\le 6)\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^6 f(x)dx=\int_0^2 x^2dx+\int_2^6\left(-\frac{1}{4}x^2+x+3\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2+\left[-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x\right]_2^6$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{32}{3}=\frac{40}{3}$$

답 ②

참고 $0<x<2$일 때 $s_1(x)<4$, $s_3(x)>4$이고

$$s_2(x)=\int_x^2 2t\,dt+\int_2^{x+4}(-t+6)\,dt$$
$$=-\frac{3}{2}x^2+2x+10$$

에서 $s_2(x)>8$이다.

따라서 $0<x<2$에서 $f(x)=s_1(x)$이다.

또 $2<x<6$일 때 $s_1(x)>4$, $s_3(x)<4$이고

$$s_2(x)=\int_x^6(-t+6)\,dt+\int_6^{x+4}\left(\frac{1}{2}t-3\right)dt$$
$$=\frac{3}{4}x^2-7x+19$$

이므로

$$s_2(x)-s_3(x)=\frac{3}{4}x^2-7x+19-\left(-\frac{1}{4}x^2+x+3\right)$$
$$=x^2-8x+16=(x-4)^2\ge 0$$

$\therefore s_2(x)\ge s_3(x)$

따라서 $2<x<6$에서 $f(x)=s_3(x)$이다.

1066 (1st) P, Q가 다시 만나는 횟수를 구한다.

2분, 즉 120초 동안 자동차 P가 움직인 거리는

$$s_1(120)=\int_0^5 8t\,dt+\int_5^{120}40\,dt$$
$$=\Big[4t^2\Big]_0^5+\Big[40t\Big]_5^{120}$$
$$=100+4600=4700\,(\text{m})$$

120초 동안 자동차 Q가 움직인 거리는

$$s_2(120)=\int_0^{10}6t\,dt+\int_{10}^{120}60\,dt$$
$$=\Big[3t^2\Big]_0^{10}+\Big[60t\Big]_{10}^{120}$$
$$=300+6600=6900\,(\text{m})$$

두 자동차 P, Q가 움직인 거리의 합이 400의 배수일 때 P, Q는 서로 만나고, $400n\le 4700+6900=11600$에서 $n\le 29$이므로 P, Q는 29회 만난다.

(2nd) P, R가 다시 만나는 횟수를 구한다.

한편 $7.5k\,(k=1, 2, 3, \cdots, 16)$초 동안 자동차 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5 8t\,dt+\int_5^{7.5k}40\,dt=\Big[4t^2\Big]_0^5+\Big[40t\Big]_5^{7.5k}$$
$$=100+(300k-200)$$
$$=300k-100\,(\text{m})$$

$k=1, 2, 3, \cdots, 16$일 때, P가 이동한 거리는 200 m, 500 m, 800 m, $\cdots$, 4700 m이고, P, R가 만날 수 있는 위치는 M 또는 N이므로 $k=2, 4, 6, \cdots, 16$일 때에는 P, R가 만날 수 없다.

$k=1, 3, 5, \cdots, 15$일 때, P가 움직인 거리와 P, R의 위치는 다음 표와 같다.

k	1	3	5	7	9	11	13	15
P가 움직인 거리(m)	200	800	1400	2000	2600	3200	3800	4400
P의 위치	N	M	N	M	N	M	N	M
R의 위치	N	N	N	N	N	N	N	N

즉 P, R는 $k=1, 5, 9, 13$일 때 만나므로 4회 만난다.

(3rd) P, Q가 다시 만나는 횟수와 P, R가 다시 만나는 횟수의 합을 구한다.

따라서 구하는 합은

$29+4=33$

답 33

1067 전략 곡선 $y=2x^2+3x-2$와 두 직선 $y=x+2$, $y=x-2$의 교점의 x좌표를 각각 구하고 곡선과 두 직선을 좌표평면에 나타낸다.

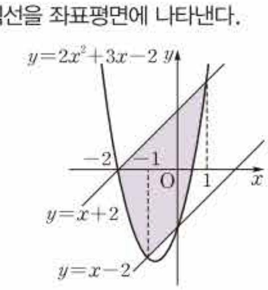
풀이 곡선 $y=2x^2+3x-2$와 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는

$2x^2+3x-2=x+2$에서

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$



또 곡선 $y=2x^2+3x-2$와 직선 $y=x-2$의 교점의 x좌표는 $2x^2+3x-2=x-2$에서

$x^2+x=0$, $x(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ ⋯ ❶

따라서 구하는 넓이는

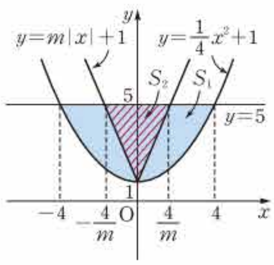
$$\int_{-2}^{1}\{(x+2)-(2x^2+3x-2)\}dx$$
$$-\int_{-1}^{0}\{(x-2)-(2x^2+3x-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)dx-\int_{-1}^{0}(-2x^2-2x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}-\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$ ··· ❷

답 $\frac{26}{3}$

채점 기준	비율
❶ 곡선과 두 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	60 %

1068 전략 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2+1$과 직선 $y=5$의 교점의 x좌표와 $y=m|x|+1$의 그래프와 직선 $y=5$의 교점의 x좌표를 구하여 S_1, S_2의 값을 구한다.

풀이 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2+1$과 직선 $y=5$의 교점의 x좌표는



$\frac{1}{4}x^2+1=5$에서

$x^2=16$ $\quad\therefore x=\pm4$

$\therefore S_1$

$$=\int_{-4}^{4}\left\{5-\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)\right\}dx$$
$$=2\int_{0}^{4}\left(-\frac{1}{4}x^2+4\right)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{12}x^3+4x\right]_{0}^{4}$$
$$=2\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$$ ··· ❶

$y=m|x|+1$의 그래프와 직선 $y=5$의 교점의 x좌표는 $m|x|+1=5$에서

$|x|=\frac{4}{m}$ $\quad\therefore x=\pm\frac{4}{m}$

$\therefore S_2=\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{4}{m}-\left(-\frac{4}{m}\right)\right\}\cdot(5-1)=\frac{16}{m}$ ··· ❷

이때 $S_1=3S_2$이므로

$\frac{64}{3}=3\cdot\frac{16}{m}$ $\quad\therefore m=\frac{9}{4}$ ··· ❸

답 $\frac{9}{4}$

채점 기준	비율
❶ S_1의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ S_2를 m에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ m의 값을 구할 수 있다.	20 %

1069 전략 $f(x)=f(-x)$이므로 $f(x)$는 우함수이고, 그 그래프가 y축에 대하여 대칭이다.

풀이 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $f(x)=0$에서

$(x^2-4)(x^2-k)=0$

$(x+2)(x-2)(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})=0$

$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm\sqrt{k}$ ··· ❶

한편 $A+C=B$이므로 $\quad\int_{-2}^{2}f(x)dx=0$

$f(-x)=\{(-x)^2-4\}\{(-x)^2-k\}$
$\qquad=(x^2-4)(x^2-k)=f(x)$

에서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-2}^{2}f(x)dx=2\int_{0}^{2}f(x)dx=0$$

$\therefore \int_{0}^{2}f(x)dx=0$ ··· ❷

즉 $\int_{0}^{2}\{x^4-(4+k)x^2+4k\}dx=0$이므로

$$\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4+k}{3}x^3+4kx\right]_{0}^{2}=0$$
$$\frac{32}{5}-\frac{8}{3}(4+k)+8k=0$$

$80k=64$ $\quad\therefore k=\frac{4}{5}$ ··· ❸

답 $\frac{4}{5}$

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\int_{0}^{2}f(x)dx=0$임을 알 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	50 %

1070 전략 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 구하여 두 점의 위치가 같아지는 t의 값이 $t>0$에서 오직 하나임을 이용한다.

풀이 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$라 하면

$$x_P(t)=\int_{0}^{t}(3t^2+2t-1)dt=\left[t^3+t^2-t\right]_{0}^{t}=t^3+t^2-t$$
$$x_Q(t)=\int_{0}^{t}\left(2t+\frac{a}{4}\right)dt=\left[t^2+\frac{a}{4}t\right]_{0}^{t}=t^2+\frac{a}{4}t$$ ··· ❶

두 점 P, Q가 만날 때 $x_P(t)=x_Q(t)$이므로

$t^3+t^2-t=t^2+\frac{a}{4}t,\quad t^3-\left(\frac{a}{4}+1\right)t=0$

$\therefore t\left\{t^2-\left(\frac{a}{4}+1\right)\right\}=0$ ··· ❷

두 점 P, Q가 원점을 동시에 출발한 후 한 번만 만나려면 이 방정식이 오직 하나의 양근을 가져야 하므로

$\frac{a}{4}+1>0$ $\quad\therefore a>-4$

따라서 정수 a의 최솟값은 -3이다. ··· ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 구할 수 있다.	40 %
❷ t에 대한 방정식을 세울 수 있다.	20 %
❸ 정수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %