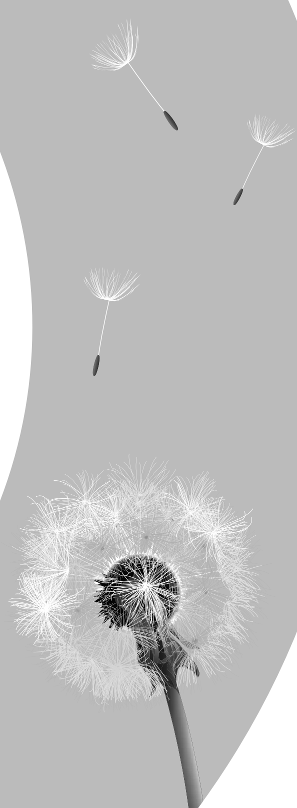
라이트 쎈

정답 및 풀이

미적분 Ⅱ



● 정답을 확인하려고 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

01 지수함수

0001 $f(0)=5^0=1$ 답 1

0002 $f(2)=5^2=25$ 답 25

0003 $f(-1)=5^{-1}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

0004 $\frac{f(1)}{f(-2)}=\frac{5^1}{5^{-2}}=5^{1-(-2)}=5^3=125$ 답 125

0005 $f(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$ 답 1

0006 $f(4)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$ 답 $\frac{1}{81}$

0007 $f(-2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=(3^{-1})^{-2}=3^2=9$ 답 9

0008 $f(-1)f(3)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1+3}$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ 답 $\frac{1}{9}$

0009 답 ○

0010 치역은 $\{y\,|\,y$는 양의 실수$\}$이다. 답 ×

0011 답 ○

0012 답 ○

0013 그래프는 x축을 점근선으로 갖는다. 답 ×

0014 $-2<-1$이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 답 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

0015 $\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$이고, $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$이다.
이때 함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$3^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{2}{3}}$ $\quad\therefore \sqrt{3}<\sqrt[3]{3^2}$ 답 $\sqrt{3}<\sqrt[3]{3^2}$

0016 $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$이고, $0.3<\frac{1}{3}$이다.
이때 함수 $y=5^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$5^{0.3}<5^{\frac{1}{3}}$ $\quad\therefore 5^{0.3}<\sqrt[3]{5}$ 답 $5^{0.3}<\sqrt[3]{5}$

0017 $\sqrt{\frac{1}{7}}=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$이고, $-1<\frac{1}{2}$이다.
이때 함수 $y=\left(\frac{1}{7}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$ $\quad\therefore \sqrt{\frac{1}{7}}<\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$

답 $\sqrt{\frac{1}{7}}<\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$

0018 답 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}-1$

0019 $-y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$에서 $\quad y=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 답 $y=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$

0020 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$에서 $\quad y=(5^{-1})^{-x}$ $\quad\therefore y=5^x$

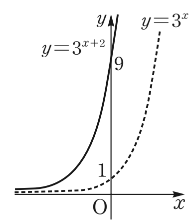
답 $y=5^x$

0021 $-y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$에서 $\quad y=-(5^{-1})^{-x}$ $\quad\therefore y=-5^x$

답 $y=-5^x$

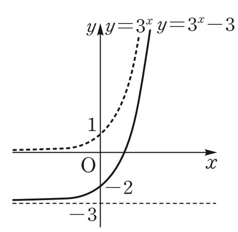
0022 $y=3^{x+2}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 $\{y\,|\,y$는 양의 실수$\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

답 풀이 참조



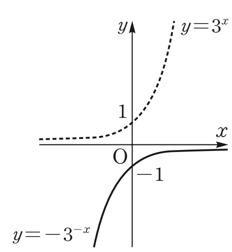
0023 $y=3^x-3$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 $\{y\,|\,y>-3\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.

답 풀이 참조



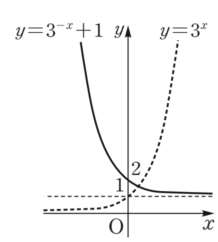
0024 $y=-3^{-x}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 $\{y\,|\,y<0\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

답 풀이 참조

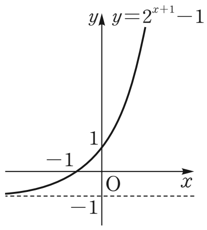


0025 $y=3^{-x}+1$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 $\{y\,|\,y>1\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=1$이다.

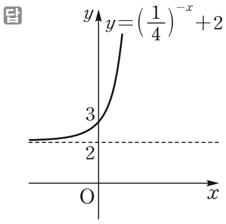
답 풀이 참조



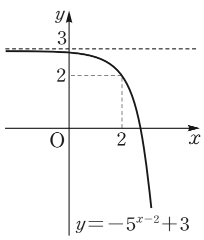
0026 답



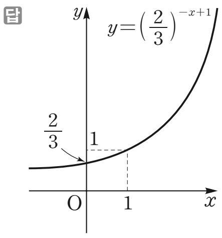
0027 답



0028 답



0029 답



0030 함수 $y=10^x$에서

$x=-2$일 때, $y=10^{-2}=\frac{1}{100}$

$x=1$일 때, $y=10^1=10$

따라서 최댓값은 10, 최솟값은 $\frac{1}{100}$이다.

답 최댓값: 10, 최솟값: $\frac{1}{100}$

0031 함수 $y=5^{-x}$에서

$x=-4$일 때, $y=5^4=625$

$x=-1$일 때, $y=5^1=5$

따라서 최댓값은 625, 최솟값은 5이다.

답 최댓값: 625, 최솟값: 5

0032 함수 $y=6^{x+2}-2$에서

$x=-3$일 때, $y=6^{-3+2}-2=-\frac{11}{6}$

$x=0$일 때, $y=6^{0+2}-2=34$

따라서 최댓값은 34, 최솟값은 $-\frac{11}{6}$이다.

답 최댓값: 34, 최솟값: $-\frac{11}{6}$

0033 $3^x=27$에서 $3^x=3^3$이므로

$x=3$ 답 $x=3$

0034 $\left(\frac{1}{10}\right)^x=100$에서 $10^{-x}=10^2$이므로

$-x=2$ $\therefore x=-2$ 답 $x=-2$

0035 $25^x=5\cdot5^{3x}$에서 $5^{2x}=5^{3x+1}$이므로

$2x=3x+1$ $\therefore x=-1$ 답 $x=-1$

0036 $\sqrt{3^x}=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$에서 $3^{\frac{1}{2}x}=3^{1-x}$이므로

$\frac{1}{2}x=1-x$, $\frac{3}{2}x=1$ $\therefore x=\frac{2}{3}$ 답 $x=\frac{2}{3}$

0037 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^{\boxed{2}}-2t+1=0$, $(t-1)^2=0$

$\therefore t=\boxed{1}$

즉 $3^x=1$이므로 $x=\boxed{0}$

$\therefore$ (가) 2 (나) 1 (다) 0 답 풀이 참조

0038 $5^{2x}-6\cdot5^x+5=0$에서

$(5^x)^2-6\cdot5^x+5=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-6t+5=0$, $(t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

즉 $5^x=1$ 또는 $5^x=5$이므로

$x=0$ 또는 $x=1$ 답 $x=0$ 또는 $x=1$

0039 $4^x-3\cdot2^x-4=0$에서

$2^{2x}-3\cdot2^x-4=0$, $(2^x)^2-3\cdot2^x-4=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=4\ (\because t>0)$

즉 $2^x=4$이므로 $x=2$ 답 $x=2$

0040 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-8=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-8=0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-2t-8=0$, $(t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=4\ (\because t>0)$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$\therefore x=-2$ 답 $x=-2$

0041 $\frac{1}{25^x}-5^{-x}-20=0$에서 $\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2-\left(\frac{1}{5}\right)^x-20=0$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-t-20=0$, $(t+4)(t-5)=0$

$\therefore t=5\ (\because t>0)$

즉 $\left(\frac{1}{5}\right)^x=5$이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

$\therefore x=-1$ 답 $x=-1$

0042 $4^{2x+1}=5^{2x+1}$에서 $2x+1=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 답 $x=-\frac{1}{2}$

0043 $\left(\frac{1}{7}\right)^{x-3}=3^{-x+3}$에서 $7^{-x+3}=3^{-x+3}$

$-x+3=0$ $\therefore x=3$ 답 $x=3$

0044 $3^{x-1}<81$에서 $\quad 3^{x-1}<3^4$
밑이 1보다 크므로 $\quad x-1<4 \quad \therefore x<5$

답 $x<5$

0045 $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}\ge 64$에서 $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{2x}\ge\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$
밑이 1보다 작으므로 $\quad 2x\le -3 \quad \therefore x\le -\frac{3}{2}$

답 $x\le -\frac{3}{2}$

0046 $5\sqrt{5}\le \frac{1}{25}\cdot 5^{x-1}$에서 $\quad 5^{\frac{3}{2}}\le 5^{x-3}$
밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{3}{2}\le x-3 \quad \therefore x\ge \frac{9}{2}$

답 $x\ge \frac{9}{2}$

0047 $2^{1-3x}>8\cdot(\sqrt{2})^x$에서 $\quad 2^{1-3x}>2^{\frac{1}{2}x+3}$
밑이 1보다 크므로 $\quad 1-3x>\frac{1}{2}x+3$
$-\frac{7}{2}x>2 \quad \therefore x<-\frac{4}{7}$

답 $x<-\frac{4}{7}$

0048 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은
$t^{\boxed{2}}-3t+2<0, \quad (t-1)(t-2)<0$
$\therefore \boxed{1}<t<\boxed{2}$
즉 $1<\left(\frac{1}{2}\right)^x<2$이므로 $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^0<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$
밑이 1보다 작으므로 $\quad \boxed{-1}<x<\boxed{0}$
$\therefore$ (가) 2 (나) 1 (다) 2 (라) -1 (마) 0

답 풀이 참조

0049 $3^{2x+3}-12\cdot 3^x+1\le 0$에서 $\quad 27\cdot(3^x)^2-12\cdot 3^x+1\le 0$
$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$27t^2-12t+1\le 0, \quad (9t-1)(3t-1)\le 0$
$\therefore \frac{1}{9}\le t\le \frac{1}{3}$
즉 $3^{-2}\le 3^x\le 3^{-1}$에서 밑이 1보다 크므로
$-2\le x\le -1$

답 $-2\le x\le -1$

0050 $25^x-20\cdot 5^x-125>0$에서 $\quad (5^x)^2-20\cdot 5^x-125>0$
$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^2-20t-125>0, \quad (t+5)(t-25)>0$
$\therefore t<-5$ 또는 $t>25$
그런데 $t>0$이므로 $\quad t>25$
즉 $5^x>5^2$에서 밑이 1보다 크므로
$x>2$

답 $x>2$

0051 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-30\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+81<0$에서
$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-30\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+81<0$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^2-30t+81<0, \quad (t-3)(t-27)<0$
$\therefore 3<t<27$
즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$에서 밑이 1보다 작으므로
$-3<x<-1$

답 $-3<x<-1$

0052 $\left(\frac{1}{4}\right)^x-14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-32\le 0$에서
$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-32\le 0$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^2-14t-32\le 0, \quad (t+2)(t-16)\le 0$
$\therefore -2\le t\le 6$
그런데 $t>0$이므로 $\quad 0<t\le 16$
즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$에서 밑이 1보다 작으므로
$x\ge -4$

답 $x\ge -4$

0053 $\frac{1}{2}<2^{2x}<4\sqrt{2}$에서 $\quad 2^{-1}<2^{2x}<2^{\frac{5}{2}}$
밑이 1보다 크므로
$-1<2x<\frac{5}{2}$
$\therefore -\frac{1}{2}<x<\frac{5}{4}$

답 $-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{4}$

0054 $\frac{1}{81}\le\left(\frac{1}{9}\right)^x\le 81$에서 $\quad \left(\frac{1}{9}\right)^2\le\left(\frac{1}{9}\right)^x\le\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}$
밑이 1보다 작으므로 $\quad -2\le x\le 2$

답 $-2\le x\le 2$

0055 ④ $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{-x}$이므로 $y=3^x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

답 ④

0056 주어진 조건을 만족시키는 함수는 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하는 함수이다. 이때
$f(x)=4^{-x}=\left(\frac{1}{4}\right)^x,\ f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$
이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ②이다.

답 ②

0057 $y=(2a+1)^x$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하려면
$0<2a+1<1$ ⇨ ❶
$-1<2a<0$ $\therefore -\frac{1}{2}<a<0$ ⇨ ❷

답 $-\frac{1}{2}<a<0$

채점 기준	비율
❶ $2a+1$의 값의 범위를 구할 수 있다.	80%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

0058 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=3^{x+2}$
이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=3^{-x+2}$
이때 $3^{-3+2}=\frac{1}{3}$이므로 $y=3^{-x+2}$의 그래프는 점 $\left(3, \frac{1}{3}\right)$을 지난다.
$\therefore k=\frac{1}{3}$

답 ②

0059 $y=\frac{1}{4}\cdot 2^x-8=2^{x-2}-8$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $m=2$, $n=-8$이므로 $m+n=-6$

답 -6

0060 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-n=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-m}$ $\therefore y=3^{-x+m}+n$
위의 그래프가 점 $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$를 지나므로
$3^{m+1}+n=\frac{2}{3}$ …… ㉠
또 점 $(0, 0)$을 지나므로 $3^m+n=0$ …… ㉡
㉠$-$㉡을 하면 $3^{m+1}-3^m=\frac{2}{3}$, $2\cdot 3^m=\frac{2}{3}$
$3^m=3^{-1}$ $\therefore m=-1$
$m=-1$을 ㉡에 대입하면 $3^{-1}+n=0$ $\therefore n=-\frac{1}{3}$
$\therefore mn=\frac{1}{3}$

답 ④

0061 ㄱ. $y=\frac{2^x}{2}=2^{x-1}$이므로 $y=\frac{2^x}{2}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
ㄴ. $y=\sqrt{2}\cdot 2^x=2^{x+\frac{1}{2}}$이므로 $y=\sqrt{2}\cdot 2^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.
ㄷ. $y=\frac{1}{4^x}=2^{-2x}$
ㄹ. $y=\sqrt{2^x}=2^{\frac{x}{2}}$
ㅁ. $y=3\cdot 2^x=2^{\log_2 3}\cdot 2^x=2^{x+\log_2 3}$이므로 $y=3\cdot 2^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\log_2 3$만큼 평행이동한 것이다.
ㅂ. $y=-8\cdot 2^x=-2^{x+3}$이므로 $y=-8\cdot 2^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
이상에서 $y=2^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ

0062 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $y=-2$이므로
$b=-2$ ⇨ ❶
그래프가 점 $(1, 1)$을 지나므로
$1=3^{a-1}-2$, $3^{a-1}=3$
$a-1=1$ $\therefore a=2$ ⇨ ❷
$\therefore a+b=0$ ⇨ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0063 $f(2)=m$에서 $a^2=m$ …… ㉠
$f(5)=n$에서 $a^5=n$ …… ㉡
㉡÷㉠을 하면 $\frac{n}{m}=a^{5-2}=a^3$
$\therefore f(6)=a^6=(a^3)^2=\left(\frac{n}{m}\right)^2$

답 ⑤

0064 $f(p)=3$이므로 $\frac{1}{2}(a^p+a^{-p})=3$
$\therefore a^p+a^{-p}=6$
$\therefore f(2p)=\frac{1}{2}(a^{2p}+a^{-2p})=\frac{1}{2}\{(a^p+a^{-p})^2-2\}$
$=\frac{1}{2}(6^2-2)=17$

답 17

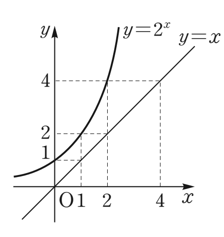
0065 $f(0)=3^n=4$, $f(2)=3^{2m+n}=16$이므로
$4\cdot 3^{2m}=16$, $3^{2m}=4$ $\therefore 3^m=2$ $(\because 3^m>0)$
$\therefore f(-1)=3^{-m+n}=\frac{3^n}{3^m}=\frac{4}{2}=2$

답 2

0066 $f(m)=p$이므로 $a^m=p$
$g(\sqrt{p})=k$라 하면 $f(k)=\sqrt{p}$
$a^k=\sqrt{p}=p^{\frac{1}{2}}=(a^m)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{m}{2}}$ $\therefore k=\frac{m}{2}$

답 ④

0067 오른쪽 그림에서 $y=2^x$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로 $a=1$
$2^a=b$이므로 $b=2$
$2^b=c$이므로 $c=2^2=4$
$\therefore a-b+c=1-2+4=3$



답 3

0068 그래프가 점 $(-1,\ a)$를 지나므로 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

또 점 $(b,\ 32)$를 지나므로 $32=\left(\frac{1}{2}\right)^{b}$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{b}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ $\quad\therefore b=-5$

$\therefore a+b=-3$

답 -3

0069 그래프가 두 점 $(m,\ 2)$, $(n,\ 3)$을 지나므로

$a^{m}=2,\ a^{n}=3$

$f(k)=12$에서 $\quad 12=2^{2}\cdot 3=(a^{m})^{2}\cdot a^{n}=a^{2m+n}$

따라서 $a^{k}=a^{2m+n}$이므로

$k=2m+n$

답 ④

참고 ① $a^{2m-n}=\frac{(a^{m})^{2}}{a^{n}}=\frac{4}{3}$에서 $\quad f(2m-n)=\frac{4}{3}$

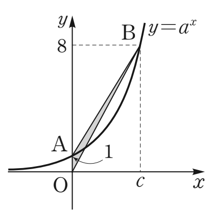
② $a^{m+n}=a^{m}\cdot a^{n}=6$에서 $\quad f(m+n)=6$

③ $a^{m+2n}=a^{m}\cdot a^{2n}=a^{m}\cdot (a^{n})^{2}=18$에서 $\quad f(m+2n)=18$

⑤ $a^{2m+2n}=(a^{m})^{2}\cdot (a^{n})^{2}=36$에서 $\quad f(2m+2n)=36$

0070 함수 $y=a^{x}\ (a>1)$의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $\quad b=1$

오른쪽 그림에서



$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot c=\frac{3}{2}$

$\therefore c=3$

점 B의 좌표는 $(3,\ 8)$이고, $y=a^{x}$의 그래프 위에 있으므로

$8=a^{3}$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore a+b+c=2+1+3=6$

답 6

0071 $A=27^{\frac{1}{4}}=(3^{3})^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$

$B=\left(\frac{1}{243}\right)^{-3}=(3^{-5})^{-3}=3^{15}$

$C=\sqrt[5]{81}=\sqrt[5]{3^{4}}=3^{\frac{4}{5}}$

이때 $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<15$이고 밑이 1보다 크므로

$3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{4}{5}}<3^{15}$ $\quad\therefore A<C<B$

답 ②

0072 $\sqrt[5]{0.5}=\sqrt[5]{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$

$\sqrt[4]{\frac{1}{32}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}$

$\sqrt[3]{0.25}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

이때 $\frac{1}{5}<\frac{2}{3}<\frac{5}{4}$이고 밑이 1보다 작으므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$

$\therefore \sqrt[4]{\frac{1}{32}}<\sqrt[3]{0.25}<\sqrt[5]{0.5}$

답 $\sqrt[4]{\frac{1}{32}}<\sqrt[3]{0.25}<\sqrt[5]{0.5}$

0073 $x=\frac{1}{2}$일 때, $\quad x^{3}=\frac{1}{8},\ x^{2}=\frac{1}{4},\ x=\frac{1}{2}$

이때 $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$이고 밑이 1보다 크므로

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{8}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{x^{3}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{x^{2}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$

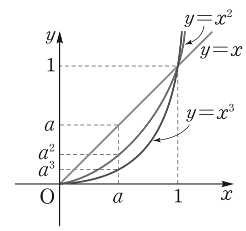
따라서 가장 큰 수는 $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$, 가장 작은 수는 $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^{3}}$이다.

답 $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^{3}}$

참고 $x>0$에서 세 함수 $y=x^{3}$, $y=x^{2}$, $y=x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$0<a<1$이면

$a^{3}<a^{2}<a$



0074 $y=4^{x+1}-1$에서

$x=-2$일 때, $\quad y=4^{-2+1}-1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$

$x=1$일 때, $\quad y=4^{1+1}-1=16-1=15$

따라서 $M=15,\ m=-\frac{3}{4}$이므로

$M+m=15+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{57}{4}$

답 ③

0075 $y=3^{-x}\cdot 2^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$에서

$x=-1$일 때, $\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$

$x=3$일 때, $\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\frac{8}{27}$

따라서 최댓값은 $\frac{3}{2}$이고, 최솟값은 $\frac{8}{27}$이다.

답 최댓값: $\frac{3}{2}$, 최솟값: $\frac{8}{27}$

0076 $f(x)=5^{-a-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+a}$에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값을 갖는다. ⇨ ❶

즉 $f(2)=\frac{1}{125}$이므로 $\quad \left(\frac{1}{5}\right)^{2+a}=\left(\frac{1}{5}\right)^{3}$

$2+a=3$ $\quad\therefore a=1$ ⇨ ❷

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$이므로 구하는 최댓값은

$f(-2)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2+1}=5$ ⇨ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 $x=2$에서 최솟값을 가짐을 알 수 있다.	20%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	40%

0077 $f(x)=x^2-2x$로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2-1$

$y=\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x}$에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최댓값을 갖는다.

따라서 y는 $f(x)=-1$, 즉 $x=1$일 때 최댓값 7을 가지므로

$a=1,\ b=7$

$\therefore\ a+b=8$

답 ①

0078 $f(x)=x^2-6x+5$로 놓으면

$f(x)=(x-3)^2-4$

$0\le x\le 4$에서 $f(0)=5,\ f(3)=-4,\ f(4)=-3$이므로

$-4\le f(x)\le 5$

$y=3^{x^2-6x+5}$에서

$f(x)=5$, 즉 $x=0$일 때, $\quad y=3^5$

$f(x)=-4$, 즉 $x=3$일 때, $\quad y=3^{-4}$

이므로 y의 최댓값은 3^5, 최솟값은 3^{-4}이다.

따라서 구하는 곱은

$3^5\cdot 3^{-4}=3$

답 ④

0079 $f(x)=x^2-x+\frac{9}{4}$로 놓으면

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2$$

$f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 2를 갖는다. ⇨ ❶

그런데 함수 $y=a^{f(x)}$도 최솟값을 가지므로

$a>1$ ⇨ ❷

$y=a^{f(x)}$의 최솟값이 16이므로

$a^2=16 \qquad \therefore\ a=4\ (\because\ a>1)$ ⇨ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40%

0080 $f(x)=-x^2+2x+1$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+2$

$-1\le x\le 2$에서 $f(-1)=-2,\ f(1)=2,\ f(2)=1$이므로

$-2\le f(x)\le 2$

$y=a^{-x^2+2x+1}$에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$가 최소일 때, y는 최댓값을 갖는다.

따라서 y는 $f(x)=-2$, 즉 $x=-1$일 때 최댓값 9를 가지므로

$a^{-2}=9, \qquad a^2=\frac{1}{9}$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}\ (\because\ 0<a<1)$

따라서 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2+2x+1}$이고 $f(x)=2$, 즉 $x=1$일 때 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

답 $\frac{1}{9}$

0081 $y=9^x-6\cdot 3^x+10=(3^x)^2-6\cdot(3^x)+10$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^2-6t+10=(t-3)^2+1$

따라서 y는 $t=3$, 즉 $x=1$일 때 최솟값 1을 가지므로

$a=1,\ b=1$

$\therefore\ b-a=0$

답 ③

0082 $y=2^{x+2}-4^x+1=-(2^x)^2+4\cdot(2^x)+1$

$2^x=t$로 놓으면 $0\le x\le 2$에서 $1\le t\le 4$이고

$y=-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$

따라서 y는 $t=2$, 즉 $x=1$일 때 최댓값 5, $t=4$, 즉 $x=2$일 때 최솟값 1을 가지므로

$M=5,\ m=1 \qquad \therefore\ M+m=6$

답 6

0083 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-k\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+3=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2k\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^2-2kt+3=(t-k)^2-k^2+3$

(i) $k\le 0$이면 $t>0$에서 최솟값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k>0$이면 $t=k$일 때, 최솟값 $-k^2+3$을 가지므로

$-k^2+3=-1, \qquad k^2=4 \qquad \therefore\ k=2\ (\because\ k>0)$

(i), (ii)에서 $\quad k=2$

답 ④

0084 $f(x)=4\cdot 3^x+3^{-x+2}=4\cdot 3^x+\frac{9}{3^x}$

이때 $3^x>0,\ \frac{1}{3^x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$f(x)=4\cdot 3^x+\frac{9}{3^x}\ge 2\sqrt{4\cdot 3^x\cdot\frac{9}{3^x}}=12$$

$\left(\text{단, 등호는 } 3^x=\frac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$

답 12

타쎈 특강 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0,\ b>0$일 때, $\quad \frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

0085 $\left(\frac{1}{2}\right)^x>0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+4}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+4}\ge 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+4}}$$

$$=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\ (\text{단, 등호는 } x=2\text{일 때 성립})$$

따라서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$을 가지므로

$a=2,\ b=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ ab=1$

답 ②

0086 $x+y+2=0$에서 $y=-x-2$이므로

$5^x+5^y=5^x+5^{-x-2}$

이때 $5^x>0$, $5^{-x-2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5^x+5^{-x-2}\geq 2\sqrt{5^x\cdot 5^{-x-2}}=2\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2}{5}$$

(단, 등호는 $x=-1$일 때 성립)

따라서 5^x+5^y의 최솟값은 $\frac{2}{5}$이다. 답 $\frac{2}{5}$

0087 $2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

또 $(2^x+2^{-x})^2=t^2$에서

$4^x+4^{-x}+2=t^2$ $\quad\therefore 4^x+4^{-x}=t^2-2$

따라서 주어진 함수는

$y=-(t^2-2)+4t=-(t-2)^2+6$ $(t\geq 2)$

이므로 $t=2$일 때 y의 최댓값은 6이다. 답 ②

라쎈 특강 a^x+a^{-x}을 포함한 함수의 최대·최소

a^x+a^{-x} $(a>0, a\neq 1)$을 포함한 함수의 최대·최소는 $a^x+a^{-x}=t$ $(t\geq 2)$로 치환하여 t에 대한 함수의 최대·최소를 구한다.

0088 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}\cdot(\sqrt{3})^x=\frac{1}{27}$에서

$3^{-x^2}\cdot 3^{\frac{1}{2}x}=3^{-3}$, $\quad 3^{-x^2+\frac{1}{2}x}=3^{-3}$

$-x^2+\frac{1}{2}x=-3$, $\quad 2x^2-x-6=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 방정식의 두 근의 합은 $\frac{1}{2}$이다. 답 $\frac{1}{2}$

0089 $4^{x^2}-2^{3x+a}=0$에서 $\quad 2^{2x^2}=2^{3x+a}$

$2x^2=3x+a$, $\quad 2x^2-3x-a=0$ …… ㉠

이때 주어진 방정식의 한 근이 3이므로 ㉠에 $x=3$을 대입하면

$18-9-a=0$ $\quad\therefore a=9$ 답 ⑤

0090 $\frac{3^{-x^2+2}}{3^{x-1}}=\frac{1}{81}$에서 $\quad 3^{-x^2+2-(x-1)}=3^{-4}$

$3^{-x^2-x+3}=3^{-4}$ ⇨ ❶

$-x^2-x+3=-4$, $\quad x^2+x-7=0$ ⇨ ❷

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-7$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-1)^2-2\cdot(-7)=15$ ⇨ ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 $3^{f(x)}=3^k$(k는 상수) 꼴로 정리할 수 있다.	40%
❷ x에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	30%
❸ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	30%

0091 $3^{x+1}+3^{-x}=4$의 양변에 3^x을 곱하면

$3\cdot(3^x)^2+1=4\cdot 3^x$

$\therefore 3\cdot(3^x)^2-4\cdot 3^x+1=0$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$3t^2-4t+1=0$, $\quad (3t-1)(t-1)=0$

$\therefore t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=1$

즉 $3^x=\frac{1}{3}$ 또는 $3^x=1$이므로 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$

$\therefore \alpha=-1, \beta=0$ 또는 $\alpha=0, \beta=-1$

$\therefore \alpha+\beta=-1$

답 -1

0092 $64^x+16^x=3\cdot 4^{x+1}$에서 $\quad (4^x)^3+(4^x)^2=12\cdot 4^x$

$4^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^3+t^2-12t=0$, $\quad t(t^2+t-12)=0$

$t(t+4)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=3$ $(\because t>0)$

즉 $4^a=3$이므로 $\quad 2^a=\sqrt{3}$ $(\because 2^a>0)$ 답 ③

참고 $4^x=3$에서 $x=\log_4 3$이므로 $\quad a=\log_4 3$

0093 $\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=3$에서 $\quad 2^x+2^{-x}=3(2^x-2^{-x})$

$2\cdot 2^x-4\cdot 2^{-x}=0$

양변에 2^x을 곱하면 $\quad 2\cdot(2^x)^2-4=0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$2t^2-4=0$, $\quad t^2=2$ $\quad\therefore t=\sqrt{2}$ $(\because t>0)$

즉 $2^x=\sqrt{2}$이므로 방정식의 해는 $\quad x=\frac{1}{2}$ 답 $x=\frac{1}{2}$

0094 $a^{2x}+a^x=20$에서 $\quad (a^x)^2+a^x-20=0$

$a^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2+t-20=0$, $\quad (t+5)(t-4)=0$

$\therefore t=4$ $(\because t>0)$

즉 $a^x=4$에서 $x=\frac{1}{2}$이므로 $\quad a^{\frac{1}{2}}=4$

$\therefore a=4^2=16$ 답 ⑤

0095 $3^x+3^{-x}=t$ $(t\geq 2)$로 놓으면

$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$

이므로 주어진 방정식은

$(t^2-2)+t-4=0$, $\quad t^2+t-6=0$ ⇨ ❶

$(t+3)(t-2)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=2$

그런데 $t\geq 2$이므로 $\quad t=2$ ⇨ ❷

따라서 $3^x+3^{-x}=2$이므로 $\quad x=0$ ⇨ ❸

답 $x=0$

채점 기준	비율
❶ t에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40%
❷ t의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 방정식을 풀 수 있다.	30%

0096 (i) $x+3=0$, 즉 $x=-3$일 때, $2^0=7^0=1$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x+3\neq0$일 때, $x+5=7$에서 $\quad x=2$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $\quad -3+2=-1$

답 ③

0097 (i) $5x=0$, 즉 $x=0$일 때, $2^0=4^0=1$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $5x\neq0$일 때, $3x+2=x+4$에서 $\quad x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

답 $x=0$ 또는 $x=1$

0098 (i) $x=1$일 때, $1^5=1^1$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\neq1$일 때, $2x+3=x^2$에서 $\quad x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=3\ (\because x>0)$

(i), (ii)에서 모든 근의 곱은 $\quad 1\cdot3=3$

답 ①

0099 (i) $x+1=1$, 즉 $x=0$일 때, $1^0=1^3$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x+1\neq1$일 때, $4x=x+3$에서 $\quad x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

답 $x=0$ 또는 $x=1$

0100 $\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^y=12\\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}=27\end{cases}$에서 $\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^y=12\\ \left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^y=27\end{cases}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=X$, $\left(\frac{1}{3}\right)^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}X+Y=12\\ XY=27\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면

$X=3,\ Y=9$ 또는 $X=9,\ Y=3$

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^y=9$ 또는 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9$, $\left(\frac{1}{3}\right)^y=3$이므로

$x=-1,\ y=-2$ 또는 $x=-2,\ y=-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=5$

답 ⑤

0101 $\begin{cases}3^x+2\cdot2^y=25\\ 3\cdot3^x-2^y=19\end{cases}$에서 $3^x=X$, $2^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}X+2Y=25\\ 3X-Y=19\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $\quad X=9,\ Y=8$

즉 $3^x=9$, $2^y=8$이므로 $\quad x=2,\ y=3$

$\therefore \alpha\beta=6$

답 ③

0102 $\begin{cases}2^x+2^y=7\\ 4^x+4^y=29\end{cases}$에서 $\begin{cases}2^x+2^y=7\\ (2^x)^2+(2^y)^2=29\end{cases}$

$2^x=X$, $2^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}X+Y=7\\ X^2+Y^2=29\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면

$X=2,\ Y=5$ 또는 $X=5,\ Y=2$

$\therefore 2^x=2,\ 2^y=5$ 또는 $2^x=5,\ 2^y=2$

그런데 $\alpha>\beta$이므로 $\quad 2^\alpha=5,\ 2^\beta=2$

$\therefore 2^\alpha-2^\beta=3$

답 3

0103 $25^x-2\cdot5^{x+1}+5=0$에서

$(5^x)^2-10\cdot5^x+5=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-10t+5=0$

이 방정식의 두 근은 5^α, 5^β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$5^\alpha\cdot5^\beta=5, \quad 5^{\alpha+\beta}=5$

$\therefore \alpha+\beta=1$

답 ①

0104 $9^x-7\cdot3^x+9=0$에서

$(3^x)^2-7\cdot3^x+9=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-7t+9=0$ ⇨ ❶

이 방정식의 두 근은 3^α, 3^β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha+3^\beta=7,\ 3^\alpha\cdot3^\beta=9$ ⇨ ❷

$\therefore 9^\alpha+9^\beta=(3^\alpha)^2+(3^\beta)^2=(3^\alpha+3^\beta)^2-2\cdot3^\alpha\cdot3^\beta$

$=7^2-2\cdot9=31$ ⇨ ❸

답 31

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40%
❷ $3^\alpha+3^\beta$, $3^\alpha\cdot3^\beta$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $9^\alpha+9^\beta$의 값을 구할 수 있다.	30%

0105 $4^x-4\cdot2^x+k=0$에서

$(2^x)^2-4\cdot2^x+k=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-4t+k=0 \quad$ …… ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-k>0 \quad \therefore k<4$

(ii) (두 근의 합)$=4>0$

(iii) (두 근의 곱)$=k>0$

이상에서 $\quad 0<k<4$

답 $0<k<4$

라세 특강 이차방정식의 실근의 부호

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D, 두 실근을 α, β라 하면

① 두 근이 모두 양 $\Longleftrightarrow D\geq0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음 $\Longleftrightarrow D\geq0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 $\Longleftrightarrow \alpha\beta<0$

0106 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x+2}<\left(\frac{1}{16}\right)^{2-3x}$에서 $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-x+2}<\left(\frac{1}{4}\right)^{4-6x}$

밑이 1보다 작으므로

$-x+2>4-6x,\qquad 5x>2$

$\therefore\ x>\dfrac{2}{5}$ 답 ②

0107 $\left(\dfrac{1}{36}\right)^{x^2+x-4}\ge\left(\dfrac{1}{6}\right)^{x^2}$에서 $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{2x^2+2x-8}\ge\left(\dfrac{1}{6}\right)^{x^2}$

밑이 1보다 작으므로

$2x^2+2x-8\le x^2,\qquad x^2+2x-8\le 0$

$(x+4)(x-2)\le 0\qquad \therefore\ -4\le x\le 2$

따라서 $\alpha=-4,\ \beta=2$이므로 $\alpha+\beta=-2$ 답 -2

0108 $3^{2x}<\dfrac{\sqrt{3}}{9}<27\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x}$에서

$3^{2x}<3^{-\frac{3}{2}}<3^{x+3}$

밑이 1보다 크므로 $2x<-\dfrac{3}{2}<x+3$

(i) $2x<-\dfrac{3}{2}$에서 $x<-\dfrac{3}{4}$

(ii) $-\dfrac{3}{2}<x+3$에서 $x>-\dfrac{9}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\dfrac{9}{2}<x<-\dfrac{3}{4}$이므로 정수 x는 $-4,\ -3,\ -2,\ -1$의 4개이다. 답 ③

0109 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}\ge\left(\dfrac{1}{2}\right)^{g(x)}$에서 밑이 1보다 작으므로

$f(x)\le g(x)$

따라서 주어진 부등식의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있거나 만날 때의 x의 값의 범위이므로

$x\le b$ 또는 $x\ge c$ 답 ⑤

0110 (i) $x=1$일 때, $1\ge1$이므로 부등식이 성립한다.

(ii) $0<x<1$일 때, $-x+6\le 2x$에서 $x\ge 2$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, $-x+6\ge 2x$에서 $x\le 2$

그런데 $x>1$이므로 $1<x\le 2$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $1\le x\le 2$ 답 $1\le x\le 2$

0111 $x>1$일 때, $4x+4>x^2-1$에서 $x^2-4x-5<0$

$(x+1)(x-5)<0\qquad \therefore\ -1<x<5$

그런데 $x>1$이므로 $1<x<5$ 답 ②

0112 (i) $x=1$일 때, $1<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(ii) $0<x<1$일 때, $x^2-18>3x$에서 $x^2-3x-18>0$

$(x+3)(x-6)>0\qquad \therefore\ x<-3$ 또는 $x>6$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, $x^2-18<3x$에서 $x^2-3x-18<0$

$(x+3)(x-6)<0\qquad \therefore\ -3<x<6$

그런데 $x>1$이므로 $1<x<6$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $1<x<6$이므로 정수 x는 2, 3, 4, 5의 4개이다. 답 ③

0113 $3^{2x}-5\cdot3^{x+1}+14<0$에서 $(3^x)^2-15\cdot3^x+14<0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-15t+14<0$

$(t-1)(t-14)<0\qquad \therefore\ 1<t<14$

즉 $1<3^x<14$이고 밑이 1보다 크므로

$3^\alpha=1,\ 3^\beta=14\qquad \therefore\ 3^\alpha+3^\beta=15$ 답 15

0114 $2^x-2^{1-x}\ge1$의 양변에 2^x을 곱하면

$(2^x)^2-2\ge2^x,\qquad (2^x)^2-2^x-2\ge0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-t-2\ge0$

$(t+1)(t-2)\ge0\qquad \therefore\ t\le-1$ 또는 $t\ge2$

그런데 $t>0$이므로 $t\ge2$

즉 $2^x\ge2$이므로 $x\ge1$ 답 $x\ge1$

0115 $5^x>5^{-2x+1}$에서 밑이 1보다 크므로

$x>-2x+1,\qquad 3x>1$

$\therefore\ x>\dfrac{1}{3}$ …… ㉠ ⇨ ❶

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-6\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-16<0$에서 $\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right\}^2-6\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-16<0$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-6t-16<0$

$(t+2)(t-8)<0\qquad \therefore\ -2<t<8$

그런데 $t>0$이므로 $0<t<8$

즉 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$에서 밑이 1보다 작으므로

$x>-3$ …… ㉡ ⇨ ❷

㉠, ㉡에서 주어진 연립부등식의 해는 $x>\dfrac{1}{3}$ ⇨ ❸

답 $x>\dfrac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ 부등식 $5^x>5^{-2x+1}$의 해를 구할 수 있다.	30%
❷ 부등식 $\left(\frac{1}{4}\right)^x-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-16<0$의 해를 구할 수 있다.	50%
❸ 주어진 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	20%

0116 $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x-p\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+q<0$에서 $\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2-p\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+q<0$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-pt+q<0$ …… ㉠

이때 $-1<x<2$에서

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2<\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\qquad \therefore\ \dfrac{1}{9}<t<3$

해가 $\dfrac{1}{9}<t<3$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(t-\dfrac{1}{9}\right)(t-3)<0\qquad \therefore\ t^2-\dfrac{28}{9}t+\dfrac{1}{3}<0$

이것이 ㉠과 일치하므로

$p=\dfrac{28}{9},\ q=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ 9(p+q)=28+3=31$ 답 ②

0117 $16^x-4^{x+1}+2k\geq0$에서 $\quad (4^x)^2-4\cdot4^x+2k\geq0$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-4t+2k\geq0$

$\therefore\ (t-2)^2+2k-4\geq0$

위의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$2k-4\geq0 \qquad \therefore\ k\geq2$

답 $k\geq2$

0118 $49^x-2\cdot7^{x+1}-k>0$에서 $\quad (7^x)^2-14\cdot7^x-k>0$

$7^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-14t-k>0$ ⇨ ❶

$\therefore\ (t-7)^2-k-49>0$

위의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$-k-49>0 \qquad \therefore\ k<-49$ ⇨ ❷

따라서 정수 k의 최댓값은 -50이다. ⇨ ❸

답 -50

채점 기준	비율
❶ t에 대한 부등식을 세울 수 있다.	40%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

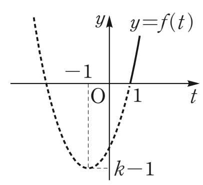
0119 $4^x+2^{x+1}+k\geq0$에서 $\quad (2^x)^2+2\cdot2^x+k\geq0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2+2t+k\geq0$

$x\geq0$일 때 $t\geq1$이고 위의 부등식이 $t\geq1$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 하므로

$f(t)=t^2+2t+k=(t+1)^2+k-1$

로 놓으면 오른쪽 그림에서 $f(1)\geq0$이어야 한다. 즉



$f(1)=k+3\geq0$

$\therefore\ k\geq-3$

따라서 실수 k의 최솟값은 -3이다.

답 ②

0120 박테리아가 4시간 후 160마리가 되므로

$10a^4=160, \qquad a^4=16$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

따라서 10마리의 박테리아가 x시간 후 $10\cdot2^x$마리가 되므로

$10\cdot2^x=1280, \qquad 2^x=128=2^7$

$\therefore\ x=7$

즉 7시간 후에 1280마리가 된다.

답 7시간

0121 15년 후에 방사성 물질의 양이 처음의 양의 $\frac{1}{2}$이 되므로 $15n$년 후의 방사성 물질의 양은 처음의 양의 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$이 된다.

이때 $\frac{1}{64}=\frac{1}{2^6}$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^6} \qquad \therefore\ n=6$

따라서 방사성 물질의 양이 처음의 양의 $\frac{1}{64}$로 줄어드는 데 걸리는 시간은

$15\cdot6=90$(년)

답 ④

0122 x시간 후 두 세균배양기에 있는 세균 A, B의 수는 각각 2^x, $2\cdot4^x$

이때 세균의 수의 합이 136 이상이 되려면

$2^x+2\cdot4^x\geq136, \qquad 2^x+2\cdot(2^x)^2\geq136$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad 2t^2+t-136\geq0$

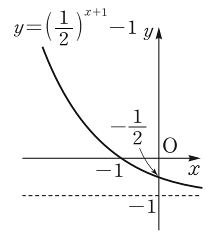
$(2t+17)(t-8)\geq0 \qquad \therefore\ t\geq8\ (\because\ t>0)$

즉 $2^x\geq8$에서 $x\geq3$이므로 최소 3시간이 지나야 한다.

답 3시간

0123 전략 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-b=f(x-a)$이고, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(-x)$임을 이용한다.

풀이 ㄱ, ㄴ, ㄹ. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-1$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-1$의 그래프는 제 2, 3, 4사분면을 지나고, 점근선의 방정식은 $y=-1$이다.

ㄷ. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-1$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면

$-y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1}-1 \qquad \therefore\ y=-2^{x-1}+1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0124 전략 함수 $y=a^x$에서 $a>1$이면 x가 최대일 때 y도 최대, x가 최소일 때 y도 최소이고, $0<a<1$이면 x가 최소일 때 y는 최대, x가 최대일 때 y는 최소가 됨을 이용한다.

풀이 $y=3^x\cdot2^{-x}-1=\left(\frac{3}{2}\right)^x-1$

이때 $\frac{3}{2}>1$이므로 주어진 함수는 $x=-1$일 때 최소이고, $x=2$일 때 최대이다.

$x=-1$일 때, $\qquad y=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}-1=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$

$x=2$일 때, $\qquad y=\left(\frac{3}{2}\right)^2-1=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$

즉 $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{5}{4}$이므로

$12ab=-5$

답 ①

0125 전략 지수법칙을 이용하여 밑을 2로 같게 한 후 지수에 대한 방정식을 세운다.

풀이 $4^{x+3}=2^{x^2-2}$에서

$2^{2(x+3)}=2^{x^2-2}, \qquad 2^{2x+6}=2^{x^2-2}$

$2x+6=x^2-2, \qquad x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 모든 근의 곱은 $\quad -8$

답 -8

0126 전략• 지수법칙을 이용하여 각 방정식을 간단히 한 후 지수에 대한 방정식을 세운다.

풀이 $32^x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^y=16$에서

$2^{5x}\cdot2^{-y}=2^4,\quad 2^{5x-y}=2^4$

$\therefore 5x-y=4$ …… ㉠ ⇨ ❶

$4^{x-2}\cdot8^y=2$에서

$2^{2(x-2)}\cdot2^{3y}=2,\quad 2^{2x-4}\cdot2^{3y}=2$

$2^{2x+3y-4}=2,\quad 2x+3y-4=1$

$\therefore 2x+3y=5$ …… ㉡ ⇨ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=1$ ⇨ ❸

답 $x=1,\ y=1$

채점 기준	비율
❶ $32^x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^y=16$에서 지수에 대한 방정식을 세울 수 있다.	30%
❷ $4^{x-2}\cdot8^y=2$에서 지수에 대한 방정식을 세울 수 있다.	30%
❸ 연립방정식의 해를 구할 수 있다.	40%

0127 전략• 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이면 $g(a)=b$일 때, $f(b)=a$이다.

풀이 $g(x)$가 $f(x)=5^x$의 역함수이므로

$g\left(\frac{1}{25}\right)=a$라 하면

$f(a)=\frac{1}{25},\quad 5^a=5^{-2}$

$\therefore a=-2$

$g(25)=b$라 하면

$f(b)=25,\quad 5^b=5^2$

$\therefore b=2$

$\therefore g\left(\frac{1}{25}\right)g(25)=(-2)\cdot2=-4$

답 ②

0128 전략• 지수법칙을 이용하여 좌변과 우변의 식이 같아지는지 확인한다.

풀이 ㄱ. $f(4x)=7^{4x}=(7^x)^4=\{f(x)\}^4\neq4f(x)$

ㄴ. $f(-x)=7^{-x}=(7^x)^{-1}=\frac{1}{7^x}=\frac{1}{f(x)}$

ㄷ. $f(x+y)=7^{x+y}=7^x\cdot7^y=f(x)f(y)\neq f(x)+f(y)$

ㄹ. $f(xy)=7^{xy}=(7^x)^y=\{f(x)\}^y$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

타셈 특강 지수함수의 특별한 성질

지수함수 $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$과 임의의 실수 $p,\ q$에 대하여

① $f(p)f(q)=a^pa^q=a^{p+q}=f(p+q)$

② $\frac{f(p)}{f(q)}=\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}=f(p-q)$

③ $f(kp)=a^{kp}=(a^p)^k=\{f(p)\}^k$ (단, k는 실수)

④ $f(-p)=a^{-p}=\frac{1}{a^p}=\frac{1}{f(p)}$

0129 전략• 두 점 P, Q의 y좌표가 9임을 이용하여 $a,\ b$의 값을 구한다.

풀이 점 $P(a,\ 9)$가 $y=3^x$의 그래프 위의 점이므로

$3^a=9,\quad 3^a=3^2$

$\therefore a=2$

점 $Q(b,\ 9)$가 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{1}{9}\right)^b=9,\quad 9^{-b}=9$

$\therefore b=-1$

$\therefore a-b=3$

답 3

0130 전략• 밑을 2로 같게 하여 지수함수의 성질을 이용한다.

풀이 $A=\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{3}{4}}$

$B=0.5^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}$

$C=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}}$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<\frac{4}{3}$이고 밑이 1보다 크므로

$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{3}{4}}<2^{\frac{4}{3}}$

$\therefore B<A<C$

답 ③

0131 전략• $g(x)=t$로 치환하여 함수 $(f\circ g)(x)$를 t에 대한 함수로 나타낸다. 이때 t의 값의 범위에 주의한다.

풀이 $g(x)=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$

이므로 $g(x)=t$라 하면 $\quad t\le1$ ⇨ ❶

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=5^t$에서 밑이 1보다 크므로

$(f\circ g)(x)$는 $t=1$, 즉 $x=2$일 때 최댓값 5를 갖는다.

따라서 $a=2,\ M=5$이므로 ⇨ ❷

$aM=10$ ⇨ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ $g(x)=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ $a,\ M$의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ aM의 값을 구할 수 있다.	10%

0132 전략• 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $f(x)=5^{x+a}+\frac{1}{5^{x-a}}+3=5^a\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)+3$

이때 $5^x>0,\ \frac{1}{5^x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$f(x)=5^a\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)+3$

$\ge5^a\cdot2\sqrt{5^x\cdot\frac{1}{5^x}}+3=2\cdot5^a+3$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

따라서 $2\cdot5^a+3=53$이므로

$2\cdot5^a=50,\quad 5^a=25=5^2\quad \therefore a=2$

답 2

0133 전략 $\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$임을 이용하여 주어진 방정식을 변형한다.

풀이 $2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})^{-1}$이므로 주어진 방정식은

$(2+\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^{-x}=2$

$(2+\sqrt{3})^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t+1=0,\quad (t-1)^2=0$

$\therefore t=1$

즉 $(2+\sqrt{3})^x=1$이므로 $\quad x=0$

답 $x=0$

다른풀이 주어진 방정식의 양변에 $(2+\sqrt{3})^x$을 곱하면

$(2+\sqrt{3})^x(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x(2+\sqrt{3})^x=2(2+\sqrt{3})^x$

$(2+\sqrt{3})^{2x}+\{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\}^x=2(2+\sqrt{3})^x$

$(2+\sqrt{3})^{2x}-2(2+\sqrt{3})^x+1=0$

$(2+\sqrt{3})^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t+1=0,\quad (t-1)^2=0$

$\therefore t=1$

즉 $(2+\sqrt{3})^x=1$이므로

$x=0$

0134 전략 $2^x=t$로 치환하여 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낸 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $2^{2x}-5\cdot2^x+2k=0$에서

$(2^x)^2-5\cdot2^x+2k=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-5t+2k=0$

이 방정식의 두 근이 2^α, 2^β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha\cdot2^\beta=2k,\quad 2^{\alpha+\beta}=2k$

이때 $\alpha+\beta=2$이므로

$2^2=2k,\quad 2k=4$

$\therefore k=2$

답 ⑤

0135 전략 밑을 5로 통일한 후 지수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 $25^{-x-2}<5^{4-x^2}<\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}$에서

$5^{2(-x-2)}<5^{4-x^2}<5^{-(x+2)}$

$5^{-2x-4}<5^{4-x^2}<5^{-x-2}$

밑이 1보다 크므로

$-2x-4<4-x^2<-x-2$

(i) $-2x-4<4-x^2$에서

$x^2-2x-8<0,\quad (x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$

(ii) $4-x^2<-x-2$에서

$x^2-x-6>0,\quad (x+2)(x-3)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$3<x<4$

따라서 $a=3$, $b=4$이므로

$ab=12$

답 ④

0136 전략 해가 $a\le x\le b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-a)(x-b)\le0$임을 이용한다.

풀이 $49^x+a\cdot7^{x+1}+b\le0$에서 $\quad (7^x)^2+7a\cdot7^x+b\le0$

$7^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2+7at+b\le0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $1\le x\le2$에서

$7^1\le7^x\le7^2 \quad \therefore 7\le t\le49$

해가 $7\le t\le49$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(t-7)(t-49)\le0 \quad \therefore t^2-56t+343\le0$

이것이 ㉠과 일치하므로

$7a=-56,\ b=343 \quad \therefore a=-8,\ b=343$

$\therefore a+b=335$

답 335

0137 전략 a^x 꼴이 반복되는 지수방정식 또는 지수부등식을 풀 때에는 $a^x=t$로 치환하여 t에 대한 방정식 또는 부등식을 푼다. 이때 $t>0$임에 주의한다.

풀이 $4^x-10\cdot2^x+16=0$에서

$(2^x)^2-10\cdot2^x+16=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-10t+16=0$

$(t-2)(t-8)=0 \quad \therefore t=2$ 또는 $t=8$

즉 $2^x=2$ 또는 $2^x=8$이므로

$x=1$ 또는 $x=3 \quad \therefore A=\{1,\ 3\}$ ⇨ ❶

$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-1}<2-17\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$에서

$9\left(\frac{1}{9}\right)^x+17\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-2<0$

$9\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+17\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-2<0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=s\ (s>0)$로 놓으면

$9s^2+17s-2<0,\quad (s+2)(9s-1)<0$

$\therefore -2<s<\frac{1}{9}$

그런데 $s>0$이므로 $\quad 0<s<\frac{1}{9}$

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^x<\frac{1}{9}$에서 $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^2$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x>2 \quad \therefore B=\{x\,|\,x>2\}$ ⇨ ❷

$\therefore A\cap B=\{3\}$ ⇨ ❸

답 $\{3\}$

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 구할 수 있다.	40%
❷ 집합 B를 구할 수 있다.	50%
❸ $A\cap B$를 구할 수 있다.	10%

0138 전략 수심이 $20n$ m 깊어지면 투과된 빛의 양은 $\left(\frac{1}{3}\right)^n$으로 줄어듦을 이용한다.

풀이 수심이 20 m 깊어질 때마다 투과된 빛의 양이 $\frac{1}{3}$로 줄어들므로 수심이 $20n$ m 깊어지면 투과된 빛의 양은 $\left(\frac{1}{3}\right)^n$으로 줄어든다.

이때 $\frac{1}{729}=\frac{1}{3^6}=\left(\frac{1}{3}\right)^6$이므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^6 \quad \therefore n=6$

따라서 빛의 양이 바다 표면에서의 빛의 양의 $\frac{1}{729}$이 되는 곳은 수심 $20\cdot 6=120(\mathrm{m})$이다.

답 ④

0139 전략 (a, b)가 집합 A의 원소이므로 $b=3^a$임을 이용하여 보기의 순서쌍들이 집합 A의 원소인지 확인한다.

풀이 (a, b)가 집합 A의 원소이므로

$b=3^a$ …… ㉠

ㄱ. $y=3^x$의 x에 $-a$를 대입하면

$y=3^{-a}=\frac{1}{3^a}=\frac{1}{b}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \left(-a, \frac{1}{b}\right)\in A$

ㄴ. $y=3^x$의 x에 $3a$를 대입하면

$y=3^{3a}=(3^a)^3=b^3$ ($\because$ ㉠)

$\therefore (3a, b^3)\in A$

ㄷ. $y=3^x$의 x에 $\frac{a}{3}$를 대입하면

$y=3^{\frac{a}{3}}=(3^a)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3^a}=\sqrt[3]{b}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{27}\right)\notin A$

ㄹ. $y=3^x$의 x에 $a-1$을 대입하면

$y=3^{a-1}=3^a\cdot\frac{1}{3}=\frac{b}{3}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \left(a-1, \frac{b}{3}\right)\in A$

이상에서 집합 A의 원소인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

참고 (a, b)가 집합 A의 원소라는 것은 좌표평면에서 점 (a, b)가 함수 $y=3^x$의 그래프 위의 점임을 나타낸다.

0140 전략 평행이동을 이용하여 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 구한다.

풀이 $\mathrm{D}(a, b)$로 놓으면 $y=3^{x-1}$의 그래프는 $y=3^{x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}=3 \quad \therefore b=3$

점 $\mathrm{D}(a, 3)$이 $y=3^{x-1}$의 그래프 위의 점이므로

$3^{a-1}=3, \quad a-1=1 \quad \therefore a=2$

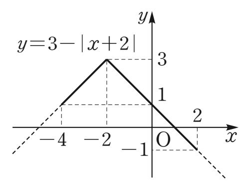
$\therefore \mathrm{D}(2, 3)$

답 $\mathrm{D}(2, 3)$

0141 전략 $a>1$일 때, 함수 $y=a^x$은 지수가 최대일 때 최댓값을, 지수가 최소일 때 최솟값을 가짐을 이용한다.

풀이 함수 $y=5^{3-|x+2|}$의 밑이 1보다 크므로 y는 $3-|x+2|$가 최대일 때 최대이고, $3-|x+2|$가 최소일 때 최소가 된다. ⇨ ❶

$y=3-|x+2|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $-4\le x\le 2$에서



$-1\le 3-|x+2|\le 3$ ⇨ ❷

따라서 함수 $y=5^{3-|x+2|}$은

$3-|x+2|=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$M=5^3=125$

$3-|x+2|=-1$일 때 최소이고, 최솟값은

$m=5^{-1}=\frac{1}{5}$ ⇨ ❸

$\therefore Mm=25$ ⇨ ❹

답 25

채점 기준	비율
❶ $y=5^{3-\lvert x+2\rvert}$이 최대, 최소가 되는 경우를 알 수 있다.	30%
❷ $3-\lvert x+2\rvert$의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ M, m의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ Mm의 값을 구할 수 있다.	10%

0142 전략 $3^x+3^{-x}=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 나타낸다. 이때 t의 값의 범위에 주의한다.

풀이 $3^x+3^{-x}=t$로 놓으면 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 t의 값의 범위는

$t=3^x+3^{-x}\ge 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

또 $(3^x+3^{-x})^2=t^2$에서

$9^x+9^{-x}+2=t^2$

$\therefore 9^x+9^{-x}=t^2-2$

따라서 주어진 함수는

$y=t^2-2-6t+k=(t-3)^2-11+k \ (t\ge 2)$

이므로 $t=3$일 때 y는 최솟값 $-11+k$를 갖는다.

즉 $-11+k=1$에서 $\quad k=12$

답 12

0143 전략 $3^x=t \ (t>0)$로 놓고 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낸 후 이 방정식이 서로 다른 두 양의 근을 가짐을 이용한다.

풀이 $3^x=t \ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-2(k-2)t+k^2-3k-4=0$ …… ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-k^2+3k+4>0$

$-k+8>0 \quad \therefore k<8$

(ii) (두 근의 합)>0에서

$2(k-2)>0 \quad \therefore k>2$

(iii) (두 근의 곱)>0에서

$k^2-3k-4>0, \quad (k+1)(k-4)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>4$

이상에서 $\quad 4<k<8$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$5+6+7=18$

답 ⑤

I. 지수함수와 로그함수

02 로그함수

0144 주어진 함수는 $\{x|x$는 실수$\}$에서 $\{y|y>0\}$으로의 일대일 대응이다.
$y=7^x$에서 $\quad x=\log_7 y$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$\quad y=\log_7 x$

답 $y=\log_7 x$

참고 $y=\log_7 x$에서 정의역 $\{x|x>0\}$은 생략할 수 있다.

0145 주어진 함수는 $\{x|x$는 실수$\}$에서 $\{y|y>0\}$으로의 일대일 대응이다.
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$에서 $\quad x=\log_{\frac{1}{3}} y$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$\quad y=\log_{\frac{1}{3}} x$

답 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

0146 주어진 함수는 $\{x|x>0\}$에서 $\{y|y$는 실수$\}$로의 일대일 대응이다.
$y=\log_3 x$에서 $\quad x=3^y$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$\quad y=3^x$

답 $y=3^x$

0147 주어진 함수는 $\{x|x>0\}$에서 $\{y|y$는 실수$\}$로의 일대일 대응이다.
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$에서 $\quad x=\left(\frac{1}{2}\right)^y$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

답 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

0148 $f(1)=\log_3 1=0$

답 0

0149 $f(3)=\log_3 3=1$

답 1

0150 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_3 \frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-1$

답 -1

0151 $f(\sqrt{3})=\log_3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$,
$f(9)=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2$
$\quad \therefore f(\sqrt{3})f(9)=1$

답 1

0152 $f(1)=\log_{\frac{1}{2}} 1=0$

답 0

0153 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$

답 1

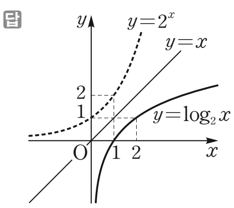
0154 $f(2)=\log_{\frac{1}{2}} 2=\log_{2^{-1}} 2=-1$

답 -1

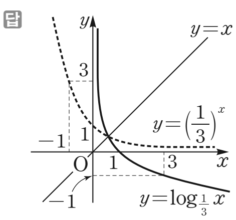
0155 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2=2$,
$f(8)=\log_{\frac{1}{2}} 8=\log_{2^{-1}} 2^3=-3$
$\quad \therefore f\left(\frac{1}{4}\right)f(8)=-6$

답 -6

0156 답



0157 답



0158 답 ○

0159 답 ○

0160 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 답 ×

0161 그래프가 점 $(1, 0)$을 지난다. 답 ×

0162 답 ○

0163 $2\log_3 2=\log_3 2^2=\log_3 4$이고 $4<5$이다.
이때 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$\quad \log_3 4<\log_3 5 \qquad \therefore 2\log_3 2<\log_3 5$

답 $2\log_3 2<\log_3 5$

0164 $6<8$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
$\quad \log_{\frac{1}{4}} 8<\log_{\frac{1}{4}} 6$

답 $\log_{\frac{1}{4}} 8<\log_{\frac{1}{4}} 6$

0165 $\frac{1}{2}<\sqrt{3}$이고 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$\quad \log_2\frac{1}{2}<\log_2\sqrt{3}$

답 $\log_2\frac{1}{2}<\log_2\sqrt{3}$

0166 $2<\sqrt{5}$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
$\quad \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{5}<\log_{\frac{1}{3}} 2$

답 $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{5}<\log_{\frac{1}{3}} 2$

0167 답 $y=\log_{\frac{1}{5}}(x+2)+1$

0168 $-y=\log_{\frac{1}{5}}x$에서 $y=-\log_{\frac{1}{5}}x$

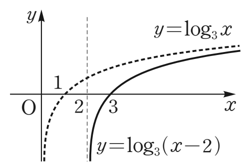
답 $y=-\log_{\frac{1}{5}}x$

0169 답 $y=\log_{\frac{1}{5}}(-x)$

0170 $-y=\log_{\frac{1}{5}}(-x)$에서 $y=-\log_{\frac{1}{5}}(-x)$

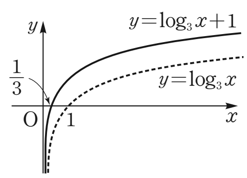
답 $y=-\log_{\frac{1}{5}}(-x)$

0171 $y=\log_3(x-2)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x>2\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=2$이다.



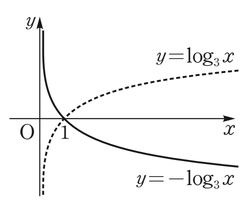
답 풀이 참조

0172 $y=\log_3 x+1$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.



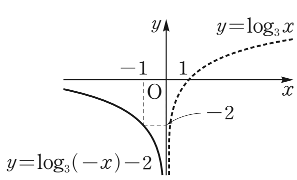
답 풀이 참조

0173 $y=-\log_3 x$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.



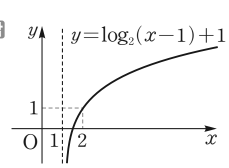
답 풀이 참조

0174 $y=\log_3(-x)-2$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x<0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

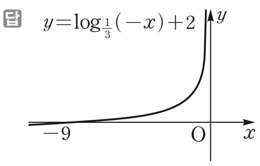


답 풀이 참조

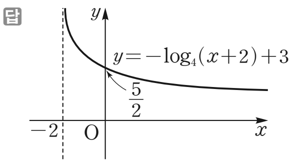
0175 답



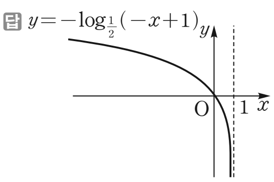
0176 답



0177 답



0178 답



0179 함수 $y=\log_4 x$에서

$x=\frac{1}{4}$일 때, $y=\log_4\frac{1}{4}=\log_4 4^{-1}=-1$

$x=64$일 때, $y=\log_4 64=\log_4 4^3=3$

따라서 최댓값은 3, 최솟값은 -1이다.

답 최댓값: 3, 최솟값: -1

0180 함수 $y=\log_{\frac{1}{8}}x$에서

$x=\frac{1}{64}$일 때, $y=\log_{\frac{1}{8}}\frac{1}{64}=\log_{\frac{1}{8}}\left(\frac{1}{8}\right)^2=2$

$x=8$일 때, $y=\log_{\frac{1}{8}}8=\log_{\frac{1}{8}}\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}=-1$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -1이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -1

0181 함수 $y=\log_3(x+1)-3$에서

$x=2$일 때, $y=\log_3 3-3=1-3=-2$

$x=8$일 때, $y=\log_3 9-3=\log_3 3^2-3=-1$

따라서 최댓값은 -1, 최솟값은 -2이다.

답 최댓값: -1, 최솟값: -2

0182 진수의 조건에서 $2x+1>0$이므로

$x>-\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_2(2x+1)=1$에서

$2x+1=2$

$2x=1$ $\therefore x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

답 $x=\frac{1}{2}$

0183 밑의 조건에서

$x>0,\ x\neq1$ …… ㉠

$\log_x 7=-2$에서 $x^{-2}=7,\quad x^2=\frac{1}{7}$

$\therefore x=\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=\frac{\sqrt{7}}{7}$이다.

답 $x=\frac{\sqrt{7}}{7}$

0184 진수의 조건에서 $2x-7>0$, $x>0$이므로

$x>\frac{7}{2}$, $x>0 \quad \therefore x>\frac{7}{2}$ …… ㉠

$\log_3(2x-7)=\log_3 x$에서 $2x-7=x \quad \therefore x=7$

$x=7$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

답 $x=7$

0185 진수의 조건에서 $5x+6>0$, $x>0$이므로

$x>-\frac{6}{5}$, $x>0 \quad \therefore x>0$ …… ㉠

$\log_4(5x+6)=\log_2 x$에서 $\log_4(5x+6)=\log_4 x^2$이므로

$5x+6=x^2,\quad x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=6$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=6$이다.

답 $x=6$

0186 진수의 조건에서 $x+2>0$, $5x+24>0$이므로

$x>-2$, $x>-\frac{24}{5} \quad \therefore x>-2$ …… ㉠

$\log_{\sqrt{7}}(x+2)=\log_7(5x+24)$에서 $\log_7(x+2)^2=\log_7(5x+24)$이므로

$(x+2)^2=5x+24,\quad x^2-x-20=0$

$(x+4)(x-5)=0 \quad \therefore x=-4$ 또는 $x=5$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=5$이다.

답 $x=5$

0187 진수의 조건에서 $x+1>0$, $x-1>0$이므로

$x>-1$, $x>1 \quad \therefore x>1$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}(x+1)=\log_5(x-1)$에서 $\log_{\frac{1}{5}}(x+1)=-\log_{\frac{1}{5}}(x-1)$이므로

$x+1=\frac{1}{x-1}$

$(x+1)(x-1)=1,\quad x^2=2 \quad \therefore x=\pm\sqrt{2}$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=\sqrt{2}$이다.

답 $x=\sqrt{2}$

0188 $\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 놓으면 $t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=2$

즉 $\log_{\frac{1}{3}} x=-1$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}} x=2$이므로

$x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$ 또는 $x=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

답 $x=\frac{1}{9}$ 또는 $x=3$

참고 $\log_{\frac{1}{3}} x=t$에서 $x=\left(\frac{1}{3}\right)^t$이므로 $x>0$이다. 즉 진수의 조건을 항상 만족시킨다.

0189 $(\log_5 x)^2-\log_5 x^3=0$에서 $(\log_5 x)^2-3\log_5 x=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면

$t^2-3t=0,\quad t(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=3$

즉 $\log_5 x=0$ 또는 $\log_5 x=3$이므로

$x=1$ 또는 $x=5^3=125$

답 $x=1$ 또는 $x=125$

0190 $x^{\log x}=10$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log 10,\quad \log x\cdot\log x=1$

$(\boxed{\log x})^2=1$

$\therefore \log x=-1$ 또는 $\log x=\boxed{1}$

즉 $\log x=\log 10^{-1}$ 또는 $\log x=\log 10^1$이므로

$x=\boxed{\frac{1}{10}}$ 또는 $x=10$

$\therefore$ (가) $\log x$ (나) 1 (다) $\frac{1}{10}$

답 풀이 참조

0191 진수의 조건에서 $5x+2>0$이므로

$x>-\frac{2}{5}$ …… ㉠

$\log_7(5x+2)\geq1$에서 $\log_7(5x+2)\geq\log_7 7$

밑이 1보다 크므로

$5x+2\geq7,\quad 5x\geq5$

$\therefore x\geq1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\geq1$

답 $x\geq1$

0192 진수의 조건에서 $x^2>0$이므로 x는 $x\neq0$인 실수이다. …… ㉠

$\log_3 x^2<2$에서 $\log_3 x^2<\log_3 9$

밑이 1보다 크므로

$x^2<9,\quad (x+3)(x-3)<0$

$\therefore -3<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3<x<0$ 또는 $0<x<3$

답 $-3<x<0$ 또는 $0<x<3$

0193 진수의 조건에서 $7x+5>0$이므로

$x>-\frac{5}{7}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(7x+5)\leq1$에서 $\log_{\frac{1}{3}}(7x+5)\leq\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

밑이 1보다 작으므로

$7x+5\geq\frac{1}{3},\quad 7x\geq-\frac{14}{3} \quad \therefore x\geq-\frac{2}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\geq-\frac{2}{3}$

답 $x\geq-\frac{2}{3}$

0194 진수의 조건에서 $x-5>0$이므로

$x>5$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{4}}(x-5)>\frac{1}{2}$에서 $\log_{\frac{1}{4}}(x-5)>\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}$

밑이 1보다 작으므로

$x-5<\frac{1}{2}$ $\therefore x<\frac{11}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $5<x<\frac{11}{2}$

답 $5<x<\frac{11}{2}$

0195 진수의 조건에서 $x+1>0$, $2x-1>0$이므로

$x>-1$, $x>\frac{1}{2}$ $\therefore x>\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_2(x+1)\geq\log_2(2x-1)$에서 밑이 1보다 크므로

$x+1\geq 2x-1$, $-x\geq -2$ $\therefore x\leq 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{2}<x\leq 2$

답 $\frac{1}{2}<x\leq 2$

0196 진수의 조건에서 $9-x>0$, $x-8>0$이므로

$x<9$, $x>8$ $\therefore 8<x<9$ …… ㉠

$\log_3(9-x)<\log_3(x-8)$에서 밑이 1보다 크므로

$9-x<x-8$, $-2x<-17$ $\therefore x>\frac{17}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{17}{2}<x<9$

답 $\frac{17}{2}<x<9$

0197 진수의 조건에서 $3x+1>0$, $3-2x>0$이므로

$x>-\frac{1}{3}$, $x<\frac{3}{2}$ $\therefore -\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{7}}(3x+1)>-\log_7(3-2x)$에서 $\log_{\frac{1}{7}}(3x+1)>\log_{\frac{1}{7}}(3-2x)$

밑이 1보다 작으므로

$3x+1<3-2x$, $5x<2$ $\therefore x<\frac{2}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-\frac{1}{3}<x<\frac{2}{5}$

답 $-\frac{1}{3}<x<\frac{2}{5}$

0198 진수의 조건에서 $x+2>0$, $x+14>0$이므로

$x>-2$, $x>-14$ $\therefore x>-2$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\leq\log_{\frac{1}{25}}(x+14)$에서

$\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\leq\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{5}}(x+14)$

$2\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\leq\log_{\frac{1}{5}}(x+14)$, $\log_{\frac{1}{5}}(x+2)^2\leq\log_{\frac{1}{5}}(x+14)$

밑이 1보다 작으므로 $(x+2)^2\geq x+14$

$x^2+3x-10\geq 0$, $(x+5)(x-2)\geq 0$

$\therefore x\leq -5$ 또는 $x\geq 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\geq 2$ 답 $x\geq 2$

0199 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-4t+3\leq 0$, $(t-1)(t-3)\leq 0$

$\therefore 1\leq t\leq 3$

즉 $1\leq\log_3 x\leq 3$이므로

$\log_3 3\leq\log_3 x\leq\log_3 27$

밑이 1보다 크므로 $3\leq x\leq 27$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3\leq x\leq 27$ 답 $3\leq x\leq 27$

0200 진수의 조건에서

$x>0$, $x^2>0$ $\therefore x>0$ …… ㉠

$(\log_2 x)^2-\log_2 x^2>0$에서 $(\log_2 x)^2-2\log_2 x>0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-2t>0$, $t(t-2)>0$

$\therefore t<0$ 또는 $t>2$

즉 $\log_2 x<0$ 또는 $\log_2 x>2$이므로

$\log_2 x<\log_2 1$ 또는 $\log_2 x>\log_2 4$

밑이 1보다 크므로 $x<1$ 또는 $x>4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<1$ 또는 $x>4$ 답 $0<x<1$ 또는 $x>4$

0201 진수의 조건에서 $x>\boxed{0}$ …… ㉠

$x^{\log_2 x}\geq 2$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}\geq\log_2 2$, $(\boxed{\log_2 x})^2\geq 1$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2\geq 1$

$t\leq -1$ 또는 $t\geq\boxed{1}$

즉 $\log_2 x\leq -1$ 또는 $\log_2 x\geq 1$이므로

$\log_2 x\leq\log_2\boxed{\frac{1}{2}}$ 또는 $\log_2 x\geq\log_2\boxed{2}$

밑이 1보다 크므로 $x\leq\frac{1}{2}$ 또는 $x\geq 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x\leq\frac{1}{2}$ 또는 $x\geq 2$

$\therefore$ (가) 0 (나) $\log_2 x$ (다) 1 (라) $\frac{1}{2}$ (마) 2 답 풀이 참조

0202 $a>1$이면 $0<\frac{1}{a}<1$이다.

⑤ $y=\log_a x=-\log_{\frac{1}{a}}x$이므로 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$의 그래프와 $y=\log_a x$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다. 답 ⑤

0203 $y=\log_5(-x^2-3x+10)$에서

$-x^2-3x+10>0$, $x^2+3x-10<0$

$(x+5)(x-2)<0$ $\therefore -5<x<2$

따라서 구하는 정의역은

$\{x\,|\,-5<x<2\}$ 답 $\{x\,|\,-5<x<2\}$

0204 ㄱ. $y=-\log_3\frac{1}{x}=-\log_3 x^{-1}=\log_3 x$

ㄴ. $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)=-\log_3(-x)$

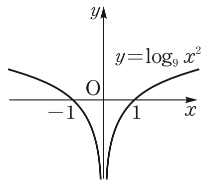
ㄷ. $y=\frac{1}{3}\log_3 x^3=\frac{1}{3}\cdot 3\log_3 x=\log_3 x$

ㄹ. $y=\log_9 x^2=\log_{3^2}x^2=\log_3|x|$

이상에서 함수 $y=\log_3 x$와 같은 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

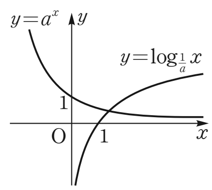
답 ②

참고 ㄹ. 함수 $y=\log_9 x^2$의 정의역은 $x^2>0$에서 $\{x|x\neq 0$인 실수$\}$이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0205 $0<a<1$이므로 $\frac{1}{a}>1$

즉 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① $x=a$일 때,

$y=\log_{\frac{1}{a}} a=\log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}=-1$이므로

$y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 점 $(a,\ -1)$을 지난다.

② 점근선은 y축이다.

③ x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

④ 제1, 4사분면을 지난다.

⑤ $y=a^x$의 그래프와 만난다.

답 ⑤

0206 주어진 그래프의 함수식을 $y=\log_3(x-m)+n$이라 하자.

점근선의 방정식이 $x=2$이므로 $m=2$

또 그래프가 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$-1=\log_3(3-2)+n \qquad \therefore n=-1$

따라서 그래프의 식은

$y=\log_3(x-2)-1$

답 ②

0207 함수 $y=\log_4 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-\log_4(-x)$ …… ㉠ ⇨ ❶

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\log_4\{-(x-k)\}=-\log_4(-x+k)$ …… ㉡ ⇨ ❷

㉡의 그래프가 점 $(4,\ -1)$을 지나므로

$-1=-\log_4(-4+k)$

$\log_4(-4+k)=1$

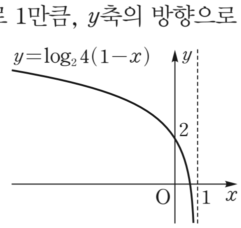
$-4+k=4 \qquad \therefore k=8$ ⇨ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40%
❷ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

0208 $y=\log_2 4(1-x)=\log_2\{-(x-1)\}+2$의 그래프는 $y=\log_2(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=\log_2(-x)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $y=\log_2 4(1-x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지난다.

② 정의역은 $\{x|x<1\}$이다.

③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$이다.

④ x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

⑤ 그래프가 제3사분면을 지나지 않는다.

답 ⑤

0209 ㄱ. $y=\log_5 \frac{1}{x}=\log_5 x^{-1}=-\log_5 x$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y=\log_{25} x=\log_{5^2} x=\frac{1}{2}\log_5 x$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여도 겹쳐지지 않는다.

ㄷ. $y=\log_5(-5x)=\log_5 5(-x)=\log_5(-x)+1$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

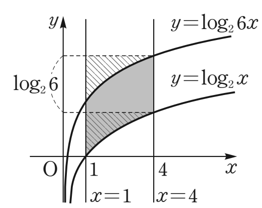
ㄹ. $y=\log_{\frac{1}{5}}(x+1)=-\log_5(x+1)$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이상에서 $y=\log_5 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

0210 $y=\log_2 6x=\log_2 x+\log_2 6$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\log_2 6$만큼 평행이동한 것이다.

즉 오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는



$(4-1)\cdot\log_2 6=3\log_2 6$

답 $3\log_2 6$

0211 $f(1)=\log_a 3+5=4$이므로 $\log_a 3=-1$

$a^{-1}=3 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+5$이므로

$f(7)=\log_{\frac{1}{3}} 9+5=\log_{3^{-1}} 3^2+5=-2+5=3$

답 3

0212 $f(2)=\log_{\frac{1}{2}} 2=-1$이므로 $f(2)+f(a)=f(6)$에서

$-1+\log_{\frac{1}{2}} a=\log_{\frac{1}{2}} 6$

$\log_{\frac{1}{2}} a=\log_{\frac{1}{2}} 6+1=\log_{\frac{1}{2}}\left(6\cdot\frac{1}{2}\right)=\log_{\frac{1}{2}} 3$

$\therefore a=3$

답 3

0213 $f\left(\frac{1}{25}\right)=2\log_5 \frac{1}{25}=2\log_5 5^{-2}=2\cdot(-2)=-4$ ⇨ ❶

$\therefore (f\circ f)\left(\frac{1}{25}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{25}\right)\right)=f(-4)=3^{-4}=\frac{1}{81}$ ⇨ ❷

답 $\frac{1}{81}$

02 로그함수

채점 기준	비율
❶ $f\left(\frac{1}{25}\right)$의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ $(f\circ f)\left(\frac{1}{25}\right)$의 값을 구할 수 있다.	50%

0214 $f(x)=\log_{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\log_{\sqrt{2}}\frac{x-1}{x}$

$\therefore f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(16)$

$=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}+\log_{\sqrt{2}}\frac{2}{3}+\log_{\sqrt{2}}\frac{3}{4}+\cdots+\log_{\sqrt{2}}\frac{15}{16}$

$=\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{15}{16}\right)=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{16}$

$=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^{-4}=(-4)\cdot 2=-8$

답 ①

0215 $\log_2 M=0.2$, $\log_2 N=0.4$에서

$\log_2 M+\log_2 N=0.2+0.4=0.6$

즉 $\log_2 MN=0.6$이고 주어진 그래프에서 $\log_2 a=0.6$이므로

$MN=a$

답 ①

0216 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로 $b=2$

즉 $2=\log_4 a$에서 $a=4^2=16$

따라서 $A(16, 2)$이므로 $B(14, 2)$

답 $B(14, 2)$

0217 함수 $y=2^x$의 그래프에서

$2^a=e$, $2^b=f$ $\therefore \log_2 e=a$, $\log_2 f=b$

함수 $y=\log_2 x$의 그래프에서

$\log_2 c=e$, $\log_2 d=f$

$\therefore \log_2 cdef=\log_2 c+\log_2 d+\log_2 e+\log_2 f$

$=e+f+a+b$

$=a+b+e+f$

답 ③

0218 $y=\log_4(x+a)-3$에서 $\log_4(x+a)=y+3$

$x+a=4^{y+3}$ $\therefore x=4^{y+3}-a$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=4^{x+3}-a$

따라서 함수 $y=\log_4(x+a)-3$의 역함수는 $y=4^{x+3}-a$이고, 이것이 $y=4^{x+b}-1$과 일치해야 하므로

$a=1$, $b=3$ $\therefore a+b=4$

답 ④

0219 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+1$에서 $\log_{\frac{1}{3}}(x-3)=y-1$

$x-3=\left(\frac{1}{3}\right)^{y-1}$ $\therefore x=\left(\frac{1}{3}\right)^{y-1}+3$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+3$

답 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+3$

0220 함수 $y=\log_5(x+m)+1$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점을 직선 $y=x$가 지나므로 함수 $y=\log_5(x+m)+1$의 그래프는 점 $(2, 2)$를 지난다. ⇨ ❶

즉 $2=\log_5(2+m)+1$에서

$\log_5(2+m)=1$

$2+m=5$ $\therefore m=3$ ⇨ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $y=\log_5(x+m)+1$의 그래프가 점 $(2, 2)$를 지남을 알 수 있다.	50%
❷ m의 값을 구할 수 있다.	50%

0221 $f(a)=p$에서

$\log_{\sqrt{3}}a=p$

$\therefore a=(\sqrt{3})^p=3^{\frac{p}{2}}$

$g(3p)=q$라 하면 $f(q)=3p$이므로

$\log_{\sqrt{3}}q=3p$

$\therefore q=(\sqrt{3})^{3p}=3^{\frac{3}{2}p}=(3^{\frac{p}{2}})^3=a^3$

답 ⑤

0222 $(f\circ g)(x)=x$이므로 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$y=3^x+1$로 놓으면 $3^x=y-1$

$\therefore x=\log_3(y-1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_3(x-1)$

$\therefore g(x)=\log_3(x-1)$

$\therefore (g\circ g)(82)=g(g(82))=g(\log_3 81)=g(4)$

$=\log_3 3=1$

답 ④

다른풀이 $g(82)=a$라 하면 $f(a)=82$이므로

$3^a+1=82$, $3^a=81=3^4$

$\therefore a=4$

$g(4)=b$라 하면 $f(b)=4$이므로

$3^b+1=4$, $3^b=3$ $\therefore b=1$

$\therefore (g\circ g)(82)=g(g(82))=g(4)=1$

0223 $A=4\log_5 2=\log_5 2^4=\log_5 16$

$B=2=\log_5 5^2=\log_5 25$

$C=\frac{3}{\log_3 5}=3\log_5 3=\log_5 3^3=\log_5 27$

이때 $16<25<27$이고 밑이 1보다 크므로

$\log_5 16<\log_5 25<\log_5 27$

$\therefore A<B<C$

답 ①

0224 $-2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{2}}4$

이때 $4<\sqrt{20}<5$이고 밑이 1보다 작으므로

$\log_{\frac{1}{2}}5<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{20}<\log_{\frac{1}{2}}4$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}5<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{20}<-2$

답 $\log_{\frac{1}{2}}5<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{20}<-2$

0225 $1<a<3$의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면

$0<\log_3 a<1$ $\therefore 0<A<1$

$B=\log_3 \dfrac{1}{a}=\log_3 a^{-1}=-\log_3 a$이므로

$-1<-\log_3 a<0 \qquad \therefore -1<B<0$

$C=\log_a 3=\dfrac{1}{\log_3 a}$이므로 $\qquad \dfrac{1}{\log_3 a}>1 \qquad \therefore C>1$

따라서 가장 큰 수는 C이다.

답 C

0226 함수 $y=\log_2(x-a)+2$에서 밑이 1보다 크므로 이 함수는 $x=3$일 때 최솟값 4를 갖는다.

$\log_2(3-a)+2=4, \qquad \log_2(3-a)=2$

$3-a=4 \qquad \therefore a=-1$

답 ④

0227 $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)-1$에서 밑이 1보다 작으므로 y는 $2x+1$이 최대이면 최소, 최소이면 최대가 된다. ⇨ ❶

$x=1$일 때, $\qquad y=\log_{\frac{1}{3}} 3-1=-2$

$x=4$일 때, $\qquad y=\log_{\frac{1}{3}} 9-1=-3$

따라서 $M=-2$, $m=-3$이므로 ⇨ ❷

$2M+m=2\cdot(-2)-3=-7$ ⇨ ❸

답 -7

채점 기준	비율
❶ $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)-1$이 최대, 최소가 되는 경우를 알 수 있다.	40%
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $2M+m$의 값을 구할 수 있다.	20%

0228 $f(x)=x^2-4x+6$으로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2+2$

$-3\le x\le 3$에서 $f(-3)=27$, $f(2)=2$, $f(3)=3$이므로

$2\le f(x)\le 27$

$y=\log_3 f(x)$에서

$f(x)=2$일 때, $\qquad y=\log_3 2$

$f(x)=27$일 때, $\qquad y=\log_3 27=\log_3 3^3=3$

따라서 y의 최댓값은 3, 최솟값은 $\log_3 2$이므로 구하는 곱은

$3\log_3 2$

답 $3\log_3 2$

0229 $f(x)=-x^2+2x+3$으로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+4$

$-1<x<2$에서 진수의 최댓값은 4이고 최솟값은 없다.

그런데 주어진 함수가 최솟값을 가지므로 $0<a<1$이다. ⇨ ❶

즉 $\log_a 4=-2$이므로 $\qquad a^{-2}=4, \qquad \dfrac{1}{a^2}=4$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$ ($\because 0<a<1$) ⇨ ❷

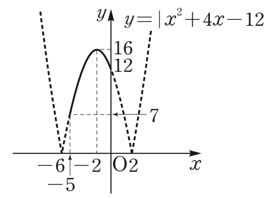
답 $\dfrac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%

0230 $y=\log_2|x^2+4x-12|$에서 밑이 1보다 크므로 $|x^2+4x-12|$의 값이 최대일 때 y는 최댓값을 갖는다.

$f(x)=|x^2+4x-12|$로 놓으면

$f(x)=|x^2+4x-12|=|(x+6)(x-2)|$



$y=f(x)$의 그래프는 $y=(x+6)(x-2)$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $-5\le x\le 0$에서 $y=f(x)$의 최댓값은 $f(-2)=16$이므로 $y=\log_2|x^2+4x-12|$의 최댓값은

$\log_2 16=4$

답 ③

0231 $\log_3 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 27$에서

$\log_3 1\le \log_3 x\le \log_3 27 \qquad \therefore 0\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

따라서 y는 $t=3$일 때 최댓값 5, $t=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

답 최댓값: 5, 최솟값: 1

0232 $y=(\log_2 x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x^4+3=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3$

$\log_2 x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

y는 $t=2$일 때 최솟값 -1을 가지므로 $\log_2 x=2$에서

$x=2^2=4$

따라서 $a=4$, $b=-1$이므로 $\qquad a+b=3$

답 ③

0233 $y=\log_5 \dfrac{x}{25}\cdot\log_5 5x$

$=(\log_5 x-\log_5 25)(\log_5 x+\log_5 5)$

$=(\log_5 x-2)(\log_5 x+1)$

$=(\log_5 x)^2-\log_5 x-2$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{25}\le x\le 5$에서

$\log_5 \dfrac{1}{25}\le \log_5 x\le \log_5 5 \qquad \therefore -2\le t\le 1$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-t-2=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$

따라서 y는 $t=-2$일 때 최댓값 4, $t=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\dfrac{9}{4}$를 가지므로 최댓값과 최솟값의 곱은 $\qquad 4\cdot\left(-\dfrac{9}{4}\right)=-9$

답 -9

0234 $4^{\log x}=x^{\log 4}$이므로

$y=-4^{\log x}\cdot x^{\log 4}+2(4^{\log x}+x^{\log 4})$

$=-4^{\log x}\cdot 4^{\log x}+2(4^{\log x}+4^{\log x})$

$=-(4^{\log x})^2+4\cdot 4^{\log x}$

$4^{\log x}=t$로 놓으면 $x>1$에서 $\qquad t>1$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$

y는 $t=2$일 때 최댓값 4를 가지므로 $4^{\log x}=2$에서

$4^{\log x}=4^{\frac{1}{2}}, \qquad \log x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\sqrt{10}$

따라서 $a=\sqrt{10}$, $b=4$이므로

$a^2+b^2=(\sqrt{10})^2+4^2=26$

답 26

0235 $y=x^{2+\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 y=\log_3 x^{2+\log_3 x}=(2+\log_3 x)\log_3 x$$
$$=(\log_3 x)^2+2\log_3 x$$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\quad \log_3 y=t^2+2t=(t+1)^2-1$

$\log_3 y$는 $t=-1$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$\log_3 x=-1$에서

$$x=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

$\log_3 y=-1$에서

$$y=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

따라서 y는 $x=\frac{1}{3}$일 때 최솟값 $\frac{1}{3}$을 갖는다.

답 $\frac{1}{3}$

0236 $y=10x^{2-\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log y=\log 10+\log x^{2-\log x}$$
$$=1+(2-\log x)\log x$$
$$=-(\log x)^2+2\log x+1$$

$\log x=t$로 놓으면

$$\log y=-t^2+2t+1=-(t-1)^2+2$$

$\log y$는 $t=1$일 때 최댓값 2를 가지므로

$\log x=1$에서 $\quad x=10$

$\therefore a=10$

$\log y=2$에서 $\quad y=10^2=100$

$\therefore b=100$

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{100}{10}=10$$

답 ④

0237 $y=\log_x 100+\log x=\frac{2}{\log x}+\log x$

이때 $x>1$에서 $\log x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2}{\log x}+\log x\ge 2\sqrt{\frac{2}{\log x}\cdot\log x}=2\sqrt{2}$$

(단, 등호는 $\log x=\sqrt{2}$일 때 성립)

따라서 $\log_x 100+\log x\ge 2\sqrt{2}$이므로 구하는 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다.

답 ②

0238 $\log_2\left(x+\frac{1}{y}\right)+\log_2\left(\frac{1}{x}+y\right)=\log_2\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+y\right)$

$$=\log_2\left(xy+\frac{1}{xy}+2\right)$$

이때 $x>0$, $y>0$에서 $xy>0$, $\frac{1}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$xy+\frac{1}{xy}+2\ge 2\sqrt{xy\cdot\frac{1}{xy}}+2=2\cdot1+2=4$$

(단, 등호는 $xy=1$일 때 성립)

따라서 $\log_2\left(x+\frac{1}{y}\right)+\log_2\left(\frac{1}{x}+y\right)\ge\log_2 4=2$이므로 구하는 최솟값은 2이다.

답 2

0239 $\log_x y^2+\log_{\sqrt{y}} x=2\log_x y+2\log_y x$

이때 $x>1$, $y>1$에서 $\log_x y>0$, $\log_y x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2\log_x y+2\log_y x\ge 2\sqrt{2\log_x y\cdot 2\log_y x}$$
$$=2\sqrt{4}=4 \text{ (단, 등호는 } x=y\text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

답 ①

0240 $1<x<25$에서 $\log_5 x>0$, $\log_5\frac{25}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log_5 x+\log_5\frac{25}{x}\ge 2\sqrt{\log_5 x\cdot\log_5\frac{25}{x}}$$

이때 $\log_5 x+\log_5\frac{25}{x}=\log_5\left(x\cdot\frac{25}{x}\right)=\log_5 25=2$이므로

$$2\ge 2\sqrt{\log_5 x\cdot\log_5\frac{25}{x}},\quad \sqrt{\log_5 x\cdot\log_5\frac{25}{x}}\le 1$$

$\therefore 0<\log_5 x\cdot\log_5\frac{25}{x}\le 1$ ⇨ ❶

즉 $y=\log_5 x\cdot\log_5\frac{25}{x}$의 최댓값은 1이므로 $\quad b=1$ ⇨ ❷

한편 등호는 $\log_5 x=\log_5\frac{25}{x}$, 즉 $x=\frac{25}{x}$일 때 성립하므로

$x^2=25 \quad \therefore x=5\ (\because 1<x<25)$

따라서 $a=5$이므로 ⇨ ❸

$a+b=6$ ⇨ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ $\log_5 x\cdot\log_5\frac{25}{x}$의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0241 진수의 조건에서 $x-1>0$, $x>0$이므로

$x>1$, $x>0 \quad \therefore x>1$ …… ㉠

$\log_{\sqrt{2}}(x-1)+\log_2 x=1$에서

$$2\log_2(x-1)+\log_2 x=1$$
$$\log_2(x-1)^2+\log_2 x=1$$
$$\log_2 x(x-1)^2=\log_2 2$$
$$x(x-1)^2=2,\quad x^3-2x^2+x-2=0$$
$$(x^2+1)(x-2)=0\quad \therefore x=2\ (\because ㉠)$$

따라서 $a=2$이므로 $\quad 10^a=10^2=100$

답 100

0242 진수의 조건에서 $x>0$, $(x+1)^2>0$이므로

$x>0$, $x\ne-1 \quad \therefore x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{4}}(x+1)^2=-1$에서

$$\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=-1$$
$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+x)=\log_{\frac{1}{2}} 2$$
$$x^2+x-2=0,\quad (x+2)(x-1)=0$$
$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

이때 ㉠에 의하여 $\quad x=1$

답 ③

0243 $(\log_2 2x)^2-2\log_2 8x^2=0$에서

$(\log_2 2+\log_2 x)^2-2(\log_2 8+\log_2 x^2)=0$

$(1+\log_2 x)^2-2(3+2\log_2 x)=0$

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-5=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-5=0$ …… ㉠

이때 주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=2$, $\log_2\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha\beta=2^2=4$

답 ③

0244 $\log_5 x\cdot\log_5 25x=3$에서

$\log_5 x(\log_5 25+\log_5 x)=3$, $\log_5 x(2+\log_5 x)=3$

$(\log_5 x)^2+2\log_5 x-3=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

즉 $\log_5 x=-3$ 또는 $\log_5 x=1$이므로

$x=5^{-3}=\dfrac{1}{125}$ 또는 $x=5$

따라서 모든 근의 합은 $\dfrac{1}{125}+5=\dfrac{626}{125}$

답 $\dfrac{626}{125}$

0245 밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$

$\log_3 x+\log_x 27=4$에서

$\log_3 x+3\log_x 3=4$, $\log_3 x+\dfrac{3}{\log_3 x}=4$

$\log_3 x=t\ (t\neq0)$로 놓으면 $t+\dfrac{3}{t}=4$

$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=3$이므로

$x=3$ 또는 $x=3^3=27$

따라서 $\alpha=27$, $\beta=3$이므로

$\alpha-\beta=24$

답 ②

0246 $2^{\log x}=x^{\log 2}$이므로 $2^{\log x}\cdot x^{\log 2}-3(2^{\log x}+x^{\log 2})-16=0$에서

$2^{\log x}\cdot 2^{\log x}-3(2^{\log x}+2^{\log x})-16=0$

$(2^{\log x})^2-6\cdot 2^{\log x}-16=0$

$2^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-6t-16=0$, $(t+2)(t-8)=0$

$\therefore t=8\ (\because t>0)$

즉 $2^{\log x}=8$이므로 $\log x=3$

$\therefore x=10^3=1000$

답 $x=1000$

0247 밑과 진수의 조건에서

$x^2>0$, $x^2\neq1$, $x+12>0$, $x+12\neq1$, $x-2>0$

$\therefore x>2$ …… ㉠

(i) $x^2=x+12$일 때

$x^2-x-12=0$, $(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

이때 ㉠에 의하여 $x=4$

(ii) $x-2=1$일 때 $x=3$

$x=3$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=4$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=4$이므로 $\beta-\alpha=1$

답 1

0248 밑과 진수의 조건에서

$2x>0$, $2x\neq1$, $x^2+1>0$, $x^2+1\neq1$, $3x+1>0$

$\therefore 0<x<\dfrac{1}{2}$ 또는 $x>\dfrac{1}{2}$ …… ㉠ ⇨ ❶

(i) $2x=x^2+1$일 때

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

$x=1$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다. ⇨ ❷

(ii) $3x+1=1$일 때 $3x=0$ $\therefore x=0$

$x=0$은 ㉠을 만족시키지 않으므로 주어진 방정식의 해가 아니다. ⇨ ❸

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x=1$ ⇨ ❹

답 $x=1$

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ $x=1$이 주어진 방정식의 해임을 알 수 있다.	30%
❸ $x=0$이 주어진 방정식의 해가 아님을 알 수 있다.	30%
❹ 주어진 방정식의 해를 구할 수 있다.	10%

0249 $1000x^{\log x}=x^4$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 1000x^{\log x}=\log x^4$

$\log 1000+\log x^{\log x}=4\log x$

$3+(\log x)^2=4\log x$, $(\log x)^2-4\log x+3=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

즉 $\log x=1$ 또는 $\log x=3$이므로

$x=10$ 또는 $x=10^3$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$10\cdot10^3=10^4$

답 ④

0250 $x^{\log_3 x}-27x^2=0$, 즉 $x^{\log_3 x}=27x^2$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 27x^2$, $(\log_3 x)^2=\log_3 27+\log_3 x^2$

$(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=3$이므로

$x=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=3^3=27$

주어진 방정식의 모든 근의 합은

$\frac{1}{3}+27=\frac{82}{3}$

따라서 $p=3$, $q=82$이므로 $p+q=85$

답 85

0251 진수의 조건에서 $x>0$, $y>0$ …… ㉠

$\begin{cases} \log_4 x-\log_3 y=1 \\ \log_{16} x+\log_{27} y=\frac{4}{3} \end{cases}$ 에서

$\begin{cases} \log_4 x-\log_3 y=1 \\ \frac{1}{2}\log_4 x+\frac{1}{3}\log_3 y=\frac{4}{3} \end{cases}$

$\log_4 x=X$, $\log_3 y=Y$로 놓으면

$\begin{cases} X-Y=1 \\ \frac{1}{2}X+\frac{1}{3}Y=\frac{4}{3} \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $X=2$, $Y=1$

즉 $\log_4 x=2$, $\log_3 y=1$이므로

$x=4^2=16$, $y=3$

이때 $x=16$, $y=3$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 연립방정식의 해이다.

$\therefore xy=16\cdot 3=48$

답 ②

0252 진수의 조건에서 $x>0$, $y>0$ …… ㉠

$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} y=-4 \\ \log_{\sqrt{2}}(x+y)=6 \end{cases}$ 에서

$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} xy=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \\ \log_{\sqrt{2}}(x+y)=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^6 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} xy=16 \\ x+y=8 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면

$x=4$, $y=4$

이때 $x=4$, $y=4$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 연립방정식의 해이다.

답 $x=4$, $y=4$

0253 진수의 조건에서 $x>0$, $y>0$ …… ㉠

$\begin{cases} \log x+2\log y=7 \\ \frac{x^3}{y}=1 \end{cases}$ 에서 $\frac{x^3}{y}=1$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log\frac{x^3}{y}=\log 1$, $3\log x-\log y=0$

즉 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} \log x+2\log y=7 \\ 3\log x-\log y=0 \end{cases}$

이므로 $\log x=X$, $\log y=Y$로 놓으면

$\begin{cases} X+2Y=7 \\ 3X-Y=0 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $X=1$, $Y=3$

즉 $\log x=1$, $\log y=3$이므로

$x=10$, $y=10^3=1000$

이때 $x=10$, $y=1000$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 연립방정식의 해이다.

따라서 $\alpha=10$, $\beta=1000$이므로

$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{10^4}=10^2=100$

답 100

0254 $\log_{\sqrt{3}} x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+kt-5=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta=9$이고 방정식 ㉠의 근은 $\log_{\sqrt{3}}\alpha$, $\log_{\sqrt{3}}\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_{\sqrt{3}}\alpha+\log_{\sqrt{3}}\beta=-k$

$\log_{\sqrt{3}}\alpha\beta=-k$, $\log_{\sqrt{3}}9=4=-k$

$\therefore k=-4$

답 ③

0255 $\log_2 x-\log_4 x=2\log_2 x\cdot\log_4 x-2$에서

$\log_2 x-\frac{1}{2}\log_2 x=2\log_2 x\cdot\frac{1}{2}\log_2 x-2$

$\frac{1}{2}\log_2 x=(\log_2 x)^2-2$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-\frac{1}{2}t-2=0$

$2t^2-t-4=0$ ⇨ ❶

이 방정식의 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=\frac{1}{2}$ ⇨ ❷

$\log_2\alpha\beta=\frac{1}{2}$ $\therefore \alpha\beta=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ ⇨ ❸

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	50%
❷ 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	30%
❸ $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	20%

0256 주어진 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\log_5 a+1)^2-(\log_5 a+3)=0$

$(\log_5 a)^2+\log_5 a-2=0$

$\log_5 a=t$로 놓으면 $t^2+t-2=0$

$(t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

즉 $\log_5 a=-2$ 또는 $\log_5 a=1$이므로

$a=5^{-2}=\frac{1}{25}$ 또는 $a=5$

따라서 상수 a의 값은 $\frac{1}{25}$, 5이다.

답 $\frac{1}{25}$, 5

0257 진수의 조건에서 $x-3>0$, $x-1>0$이므로

$x>3$, $x>1$ $\therefore x>3$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)<\log_{\frac{1}{4}}(x-1)$에서

$\log_{\frac{1}{4}}(x-3)^2<\log_{\frac{1}{4}}(x-1)$

밑이 1보다 작으므로 $(x-3)^2>x-1$

$x^2-7x+10>0$, $(x-2)(x-5)>0$
$\therefore x<2$ 또는 $x>5$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>5$
따라서 자연수 x의 최솟값은 6이다.

답 6

0258 진수의 조건에서 $x^2+x-2>0$이므로
$(x+2)(x-1)>0$
$\therefore x<-2$ 또는 $x>1$ ······ ㉠
$\log_2(x^2+x-2)\le 2$에서 $\log_2(x^2+x-2)\le\log_2 4$
밑이 1보다 크므로 $x^2+x-2\le 4$
$x^2+x-6\le 0$, $(x+3)(x-2)\le 0$
$\therefore -3\le x\le 2$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$-3\le x<-2$ 또는 $1<x\le 2$
따라서 정수 x는 -3, 2의 2개이다.

답 ②

0259 진수의 조건에서 $x-1>0$, $2x-3>0$이므로
$x>1$, $x>\frac{3}{2}$ $\therefore x>\frac{3}{2}$ ······ ㉠
$\log_3(x-1)+\log_3(2x-3)<1$에서
$\log_3(x-1)(2x-3)<\log_3 3$
밑이 1보다 크므로 $(x-1)(2x-3)<3$
$2x^2-5x<0$, $x(2x-5)<0$
$\therefore 0<x<\frac{5}{2}$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$
해가 $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)<0$
$\therefore x^2-4x+\frac{15}{4}<0$
양변에 양수 a를 곱하면 $ax^2-4ax+\frac{15}{4}a<0$
이 부등식이 $ax^2+bx+15<0$과 같으므로
$-4a=b$, $\frac{15}{4}a=15$ $\therefore a=4$, $b=-16$
$\therefore a+b=-12$

답 ①

0260 진수의 조건에서 $\log_{\frac{1}{2}}x>0$이므로
$0<x<1$ ······ ㉠
$\log_3(\log_{\frac{1}{2}}x)\le 1$에서 $\log_3(\log_{\frac{1}{2}}x)\le\log_3 3$
밑이 1보다 크므로 $\log_{\frac{1}{2}}x\le 3$
$\log_{\frac{1}{2}}x\le\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$
밑이 1보다 작으므로 $x\ge\frac{1}{8}$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{8}\le x<1$

답 $\frac{1}{8}\le x<1$

0261 진수의 조건에서 $\log_2(\log_5 x)>0$ ······ ㉠
$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_2(\log_5 x)\}>0$에서
$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_2(\log_5 x)\}>\log_{\frac{1}{3}}1$
밑이 1보다 작으므로 $\log_2(\log_5 x)<1$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $0<\log_2(\log_5 x)<1$
즉 $\log_2 1<\log_2(\log_5 x)<\log_2 2$에서 밑이 1보다 크므로
$1<\log_5 x<2$, $\log_5 5<\log_5 x<\log_5 5^2$
밑이 1보다 크므로 $5<x<25$
따라서 $a=5$, $b=25$이므로 $a+b=30$

답 ⑤

0262 부등식 $\log_3(\log_2 x)<1$을 풀면 진수의 조건에서
$\log_2 x>0$ $\therefore x>1$ ······ ㉠
$\log_3(\log_2 x)<1$에서 $\log_3(\log_2 x)<\log_3 3$
밑이 1보다 크므로 $\log_2 x<3$ $\therefore x<8$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<8$
$\therefore A=\{x\mid 1<x<8\}$
부등식 $\log_2(\log_4 x)<1$을 풀면 진수의 조건에서
$\log_4 x>0$ $\therefore x>1$ ······ ㉢
$\log_2(\log_4 x)<1$에서 $\log_2(\log_4 x)<\log_2 2$
밑이 1보다 크므로 $\log_4 x<2$ $\therefore x<16$ ······ ㉣
㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면 $1<x<16$
$\therefore B=\{x\mid 1<x<16\}$
따라서 $A\cap B=\{x\mid 1<x<8\}$이므로 집합 $A\cap B$의 원소가 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0263 진수의 조건에서 $x>0$ ······ ㉠
$(\log_5 x)^2-\log_5 125x^2\le 0$에서
$(\log_5 x)^2-(\log_5 125+\log_5 x^2)\le 0$
$(\log_5 x)^2-2\log_5 x-3\le 0$
$\log_5 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3\le 0$
$(t+1)(t-3)\le 0$ $\therefore -1\le t\le 3$
즉 $-1\le\log_5 x\le 3$이므로 $\log_5 5^{-1}\le\log_5 x\le\log_5 5^3$
$\therefore \frac{1}{5}\le x\le 125$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{5}\le x\le 125$
따라서 $\alpha=\frac{1}{5}$, $\beta=125$이므로 $\alpha\beta=\frac{1}{5}\cdot 125=25$

답 ③

0264 진수의 조건에서 $x>0$ ······ ㉠
$(2+\log_{\frac{1}{2}}x)\log_2 x<-3$에서
$(2-\log_2 x)\log_2 x<-3$
$-(\log_2 x)^2+2\log_2 x+3<0$
$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3>0$
$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3>0$ ➡ ❶
$(t+1)(t-3)>0$ $\therefore t<-1$ 또는 $t>3$
즉 $\log_2 x<-1$ 또는 $\log_2 x>3$이므로
$x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>8$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>8$ ➡ ❷
따라서 정수 x의 최솟값은 9이다. ➡ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	40%
❷ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 x의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

0265 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}} 27x \cdot \log_3 \frac{x}{9} \ge 0$에서

$(\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_{\frac{1}{3}} x)(\log_3 x - \log_3 9) \ge 0$

$(-3-\log_3 x)(\log_3 x - 2) \ge 0$

$(\log_3 x + 3)(\log_3 x - 2) \le 0$

$\log_3 x = t$로 놓으면 $(t+3)(t-2) \le 0$ $\therefore -3 \le t \le 2$

즉 $-3 \le \log_3 x \le 2$이므로 $\log_3 3^{-3} \le \log_3 x \le \log_3 3^2$

$\therefore \frac{1}{27} \le x \le 9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{27} \le x \le 9$

따라서 $\alpha = \frac{1}{27}$, $\beta = 9$이므로 $\frac{1}{\alpha\beta} = 3$

답 3

0266 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_2 x} < 4x$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x} < \log_2 4x$, $(\log_2 x)^2 < 2 + \log_2 x$

$\log_2 x = t$로 놓으면 $t^2 < 2+t$

$t^2 - t - 2 < 0$, $(t+1)(t-2) < 0$

$\therefore -1 < t < 2$

즉 $-1 < \log_2 x < 2$이므로 $\log_2 2^{-1} < \log_2 x < \log_2 2^2$

$\therefore \frac{1}{2} < x < 4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{2} < x < 4$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 1, 2, 3이므로 구하는 합은 $1+2+3=6$

답 ②

0267 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log x - 2} < 1000$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x - 2} < \log 1000$, $(\log x - 2)\log x < 3$

$(\log x)^2 - 2\log x - 3 < 0$

$\log x = t$로 놓으면 $t^2 - 2t - 3 < 0$

$(t+1)(t-3) < 0$ $\therefore -1 < t < 3$

즉 $-1 < \log x < 3$이므로 $\log 10^{-1} < \log x < \log 10^3$

$\therefore \frac{1}{10} < x < 1000$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, …, 999의 999개이다.

답 ④

0268 $2^{3x} \le 5^{2x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 2^{3x} \le \log 5^{2x}$, $3x \log 2 \le 2x \log 5$

$x(3\log 2 - 2\log 5) \le 0$, $x \log \frac{8}{25} \le 0$

$\therefore x \ge 0 \left(\because \log \frac{8}{25} < 0\right)$

답 $x \ge 0$

0269 $3^x < 10^{x-1}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 3^x < \log 10^{x-1}$, $x \log 3 < x-1$

$x(\log 3 - 1) < -1$

$\log 3 - 1 < 0$이므로 $x > -\frac{1}{\log 3 - 1}$

$\therefore x > \frac{1}{1-\log 3}$

$\therefore a = \frac{1}{1-\log 3}$

답 ①

0270 $(\log_9 x)^2 - \log_9 ax^2 \ge 0$에서

$(\log_9 x)^2 - 2\log_9 x - \log_9 a \ge 0$

$\log_9 x = t$로 놓으면 $t^2 - 2t - \log_9 a \ge 0$

모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2 - 2t - \log_9 a = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (-1)^2 + \log_9 a \le 0$, $\log_9 a \le -1$

$\therefore a \le \frac{1}{9}$

이때 $a>0$이므로 $0 < a \le \frac{1}{9}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{1}{9}$이다.

답 $\frac{1}{9}$

0271 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D = (\log a)^2 - 4(3 + \log a) < 0$

$(\log a)^2 - 4\log a - 12 < 0$ ⇨ ❶

$\log a = t$로 놓으면 $t^2 - 4t - 12 < 0$

$(t+2)(t-6) < 0$ $\therefore -2 < t < 6$

즉 $-2 < \log a < 6$이므로 $\log 10^{-2} < \log a < \log 10^6$

밑이 1보다 크므로 $10^{-2} < a < 10^6$ ⇨ ❷

따라서 $\alpha = 10^{-2}$, $\beta = 10^6$이므로

$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{10^6}{10^{-2}} = 10^8$ ⇨ ❸

답 10^8

채점 기준	비율
❶ $D<0$임을 이용하여 부등식을 세울 수 있다.	40%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ $\frac{\beta}{\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	20%

0272 $x^{\log_{\sqrt{2}} x} \ge (4\sqrt{2}x)^{2k}$의 양변에 밑이 $\sqrt{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\sqrt{2}} x^{\log_{\sqrt{2}} x} \ge \log_{\sqrt{2}} (4\sqrt{2}x)^{2k}$

$(\log_{\sqrt{2}} x)^2 \ge 2k \log_{\sqrt{2}} 4\sqrt{2}x$

$(\log_{\sqrt{2}} x)^2 \ge 2k(5 + \log_{\sqrt{2}} x)$

$(\log_{\sqrt{2}} x)^2 - 2k \log_{\sqrt{2}} x - 10k \ge 0$

$\log_{\sqrt{2}} x = t$로 놓으면 $t^2 - 2kt - 10k \ge 0$

모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2 - 2kt - 10k = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (-k)^2 - (-10k) \le 0$, $k^2 + 10k \le 0$

$k(k+10) \le 0$ $\therefore -10 \le k \le 0$

따라서 정수 k의 값의 합은

$$-10-9-8-\cdots-1+0=-55$$

답 ①

0273 수면 위의 빛의 밝기를 a라 하고 수면 위의 빛의 밝기의 $\frac{1}{4}$이 되는 지점의 물의 깊이를 x m라 하면

$$\left(\frac{9}{10}\right)^x a=\frac{1}{4}a, \qquad \left(\frac{9}{10}\right)^x=\frac{1}{4}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$x\log\frac{9}{10}=\log\frac{1}{4}$$
$$x(\log 9-\log 10)=-\log 4$$
$$x(2\log 3-1)=-2\log 2$$
$$\therefore x=-\frac{2\log 2}{2\log 3-1}=-\frac{2\times 0.30}{2\times 0.48-1}=\frac{0.6}{0.04}=15$$

따라서 수면 위의 빛의 밝기의 $\frac{1}{4}$이 되는 지점의 물의 깊이는 15 m이다.

답 ③

0274 A자동차와 B자동차의 소음의 세기를 각각 N_{A}, N_{B}라 하면

$10\log\frac{N_{\mathrm{A}}}{10^{-12}}=50$에서 $\quad \log\frac{N_{\mathrm{A}}}{10^{-12}}=5$

$$\frac{N_{\mathrm{A}}}{10^{-12}}=10^5 \qquad \therefore N_{\mathrm{A}}=10^{-7}$$

$10\log\frac{N_{\mathrm{B}}}{10^{-12}}=90$에서 $\quad \log\frac{N_{\mathrm{B}}}{10^{-12}}=9$

$$\frac{N_{\mathrm{B}}}{10^{-12}}=10^9 \qquad \therefore N_{\mathrm{B}}=10^{-3}$$

$$\therefore \frac{N_{\mathrm{B}}}{N_{\mathrm{A}}}=\frac{10^{-3}}{10^{-7}}=10^4=10000$$

따라서 B자동차의 소음의 세기는 A자동차의 소음의 세기의 10000배이다.

답 10000배

0275 전략 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$임을 이용하여 함숫값을 구한다.

풀이 $f(-2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$이므로

$$(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g(9)=\log_9 9=1$$

답 1

0276 전략 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-b=f(x-a)$이고, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(-x)$임을 이용한다.

풀이 ③ $y=\log_2(x+1)-3$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=\log_2(-x+1)-3$$
$$\therefore y=-\log_2(-x+1)+3=\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)+3$$

따라서 두 함수 $y=\log_2(x+1)-3$, $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)+3$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

④ $y=\log_2(x+1)-3$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

답 ④

0277 전략 로그의 성질을 이용하여 등식이 성립하는지 확인한다.

풀이 ㄱ. $f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_a\frac{1}{3}=\log_a 3^{-1}=-\log_a 3=-f(3)$

ㄴ. $f(2^3)=\log_a 2^3=3\log_a 2=3f(2)\neq\{f(2)\}^3$

ㄷ. $f(\sqrt{2})=\log_a\sqrt{2}=\log_a 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a 2=\frac{1}{2}f(2)$

ㄹ. $f(8)=\log_a 8=\log_a 2^3=3\log_a 2$,

$f(4)=\log_a 4=\log_a 2^2=2\log_a 2$이므로

$$\frac{f(8)}{f(4)}=\frac{3\log_a 2}{2\log_a 2}=\frac{3}{2}\neq f(2)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

0278 전략 함수 $y=\log_a x$에서 $0<a<1$이면 y는 x가 최대일 때 최소가 됨을 이용한다.

풀이 진수의 조건에서 $x+2>0$, $4-x>0$이므로

$x>-2$, $x<4 \qquad \therefore -2<x<4$ ⇨ ❶

주어진 함수의 식을 정리하면

$$y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+\log_{\frac{1}{3}}(4-x)$$
$$=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)(4-x)$$
$$=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+2x+8)$$

밑이 1보다 작으므로 $-x^2+2x+8$의 값이 최대일 때 y는 최솟값을 갖는다.

$f(x)=-x^2+2x+8$로 놓으면

$$f(x)=-(x-1)^2+9$$

$x=1$일 때 최댓값 9를 가지므로 주어진 함수의 최솟값은

$$y=\log_{\frac{1}{3}}9=-2$$

즉 $a=1$, $m=-2$이므로 ⇨ ❷

$a+m=-1$ ⇨ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ a, m의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $a+m$의 값을 구할 수 있다.	10%

0279 전략 함수 $y=f(x)$의 역함수는 $y=f(x)$를 x에 대하여 푼 후 x와 y를 서로 바꾸어 구한다.

풀이 $y=\log_3(x-1)-2$에서

$$\log_3(x-1)=y+2$$
$$x-1=3^{y+2}$$
$$\therefore x=3^{y+2}+1$$

x와 y를 서로 바꾸면 함수 $y=\log_3(x-1)-2$의 역함수는

$$y=3^{x+2}+1$$

따라서 $a=3$, $b=2$, $c=1$이므로

$$a^2+b^2+c^2=14$$

답 ③

참고 함수 $y=\log_3(x-1)-2$는 집합 $\{x|x>1\}$에서 실수 전체의 집합으로의 일대일 대응이다.

타쎈 특강 역함수 구하기

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 주어진 함수 $y=f(x)$가 일대일 대응인지 확인한다.
(ii) $y=f(x)$를 x에 대하여 푼다. 즉 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 고친다.
(iii) $x=f^{-1}(y)$에서 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

0280 전략 점 $M(x, y)$가 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$를 이은 선분 PQ의 중점이면 $x=\frac{a+c}{2}$, $y=\frac{b+d}{2}$임을 이용한다.

풀이 세 점 P, M, Q의 y좌표는 각각 $\log_3 5$, $\log_3 a$, $\log_3 20$이고 점 M이 선분 PQ의 중점이므로

$$\log_3 a=\frac{\log_3 5+\log_3 20}{2}=\frac{\log_3 100}{2}$$
$$=\frac{\log_3 10^2}{2}=\frac{2\log_3 10}{2}=\log_3 10$$

$\therefore a=10$

답 ②

0281 전략 점 A의 y좌표가 3임을 이용한다.

풀이 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 3이므로 점 A의 y좌표는 3이다.
점 A가 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 점이므로 점 D의 x좌표를 a라 하면 $\log_3 a=3$에서

$a=3^3=27$

$\therefore A(27, 3)$

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 3이므로 점 C의 x좌표는

$27-3=24$ $\therefore C(24, 0)$

$\therefore G(24, \log_3 24)$

따라서 정사각형 EFCG의 한 변의 길이는

$\overline{CG}=\log_3 24=\log_3(2^3\cdot 3)$
$=\log_3 2^3+\log_3 3=3\log_3 2+1$

답 ⑤

0282 전략 주어진 방정식의 각 항의 밑을 5로 통일한 후 $\log_5 x=t$로 치환한다.

풀이 $\log_5 x-2\log_{\frac{1}{5}} x=3\log_5 x\cdot\log_{\frac{1}{5}} x$에서

$\log_5 x+2\log_5 x=-3\log_5 x\cdot\log_5 x$

$(\log_5 x)^2+\log_5 x=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $t^2+t=0$ ⇨ ❶

$t(t+1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=0$

즉 $\log_5 x=-1$ 또는 $\log_5 x=0$이므로

$x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=1$ ⇨ ❷

이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=\frac{1}{5}$, $\beta=1$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\beta=6$ ⇨ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40%
❷ 주어진 방정식의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ $\frac{1}{\alpha}+\beta$의 값을 구할 수 있다.	20%

0283 전략 주어진 방정식의 양변에 상용로그를 취한다.

풀이 $5^{x+2}=2^{5-x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(x+2)\log 5=(5-x)\log 2$

$x\log 5+2\log 5=5\log 2-x\log 2$

$x(\log 5+\log 2)=5\log 2-2\log 5$

$x\log 10=\log 2^5-\log 5^2=\log\frac{32}{25}$

$\therefore x=\log\frac{32}{25}$

따라서 $a=\frac{32}{25}$이므로 $25a=32$

답 32

0284 전략 $\log_2 x=X$, $\log_3 y=Y$로 치환하여 $\begin{cases}X+Y=a\\XY=b\end{cases}$ 꼴의 연립방정식을 푼다.

풀이 $\log_2 x=X$, $\log_3 y=Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases}X+Y=6\\XY=8\end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $X=2$, $Y=4$ 또는 $X=4$, $Y=2$

(i) $X=2$, $Y=4$일 때
$\log_2 x=2$, $\log_3 y=4$이므로 $x=4$, $y=81$
그런데 이것은 $x>y$를 만족시키지 않는다.

(ii) $X=4$, $Y=2$일 때
$\log_2 x=4$, $\log_3 y=2$이므로 $x=16$, $y=9$

(i), (ii)에서 $\alpha=16$, $\beta=9$

$\therefore \alpha-\beta=7$

답 ③

0285 전략 $\log_2 x=t$로 치환하여 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낸 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $(\log_2 x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x^2-8=0$에서

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-8=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-8=0$

이 방정식의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=2$, $\log_2\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha\beta=2^2=4$

답 4

0286 전략 밑을 3으로 통일한 후 진수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 진수의 조건에서 $3-x>0$, $9+x>0$이므로

$x<3$, $x>-9$ $\therefore -9<x<3$ …… ㉠

$\log_3(3-x)+\log_3(9+x)>2$에서

$\log_3(3-x)(9+x)>\log_3 3^2$

밑이 1보다 크므로

$(3-x)(9+x)>9$, $x^2+6x-18<0$

$\therefore -3-3\sqrt{3}<x<-3+3\sqrt{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3-3\sqrt{3}<x<-3+3\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=-3-3\sqrt{3}$, $\beta=-3+3\sqrt{3}$이므로

$\alpha+\beta=(-3-3\sqrt{3})+(-3+3\sqrt{3})=-6$

답 ③

0287 전략 $\log_a x$ 꼴이 반복되는 로그부등식을 풀 때에는 $\log_a x=t$로 치환하여 t에 대한 부등식을 푼다.

풀이 진수의 조건에서 $\quad x>0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{x}{25}\cdot\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{5}{x}\geq-2$에서

$(\log_{\frac{1}{5}}x-\log_{\frac{1}{5}}25)(\log_{\frac{1}{5}}5-\log_{\frac{1}{5}}x)\geq-2$

$(\log_{\frac{1}{5}}x+2)(-1-\log_{\frac{1}{5}}x)\geq-2$

$\log_{\frac{1}{5}}x=t$로 놓으면

$(t+2)(-1-t)\geq-2, \quad t^2+3t\leq0$

$t(t+3)\leq0 \quad \therefore -3\leq t\leq0$

즉 $-3\leq\log_{\frac{1}{5}}x\leq0$이므로

$\log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3}\leq\log_{\frac{1}{5}}x\leq\log_{\frac{1}{5}}1, \quad 1\leq x\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3}$

$\therefore 1\leq x\leq125 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad 1\leq x\leq125$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 125개이다.

답 125

0288 전략 밑이 같은 로그부등식에서 (밑)>1이면 부등호의 방향이 바뀌지 않고, $0<$(밑)<1이면 부등호의 방향이 바뀜을 이용한다.

풀이 진수의 조건에서 $\quad f(x)>0,\ g(x)>0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_2 f(x)\leq\log_2 g(x)$에서 밑이 1보다 크므로

$f(x)\leq g(x) \quad \cdots\cdots$ ㉡

즉 주어진 부등식의 해는 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 x축의 위쪽에 있으면서 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프와 만나거나 그 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$2\leq x<3$ 또는 $7<x\leq10$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 8, 9, 10의 4개이다.

답 ④

0289 전략 조건에 맞는 부등식을 세운 후 양변에 상용로그를 취하여 해를 구한다.

풀이 n년 후 물질 A가 처음으로 10 kg 이하가 된다고 하면

$100\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{60}}\leq10, \quad \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{60}}\leq\dfrac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면 $\quad \dfrac{n}{60}\log\dfrac{1}{2}\leq\log\dfrac{1}{10}$

$-\dfrac{n}{60}\log2\leq-1 \quad \therefore n\geq\dfrac{60}{\log2}=\dfrac{60}{0.3}=200$

따라서 대기 중에 남아 있는 물질 A의 양이 처음으로 10 kg 이하가 되는 것은 현재로부터 200년 후이다.

답 200년

0290 전략 양변에 밑이 3인 로그를 취하여 $\log_3 y$의 최댓값, 최솟값을 구한다.

풀이 $y=x^{4-\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 y=\log_3 x^{4-\log_3 x}$

$=(4-\log_3 x)\log_3 x$

$=-(\log_3 x)^2+4\log_3 x \quad$ ⇨ ❶

$\log_3 x=t$로 놓으면 $1\leq x\leq27$에서

$\log_3 1\leq\log_3 x\leq\log_3 27 \quad \therefore 0\leq t\leq3$

이때 주어진 함수는

$\log_3 y=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$

따라서 $\log_3 y$는 $t=2$일 때 최댓값 4, $t=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.

즉 $0\leq\log_3 y\leq4$이므로

$\log_3 1\leq\log_3 y\leq\log_3 3^4 \quad \therefore 1\leq y\leq81$

따라서 $M=81$, $m=1$이므로 ⇨ ❷

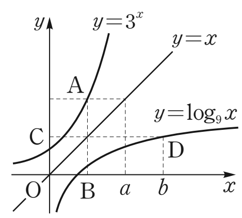
$M-m=80$ ⇨ ❸

답 80

채점 기준	비율
❶ $y=x^{4-\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하여 정리할 수 있다.	30%
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	10%

0291 전략 점 $(a,\ b)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이면 $b=f(a)$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A, B, C, D를 잡자.



점 A는 $y=3^x$의 그래프 위에 있고 y좌표가 a이므로 x좌표를 구하면

$3^x=a \quad \therefore x=\log_3 a$

따라서 $\mathrm{B}(\log_3 a,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ \log_3 a)$이므로 점 D의 y좌표는 $\log_3 a$이다.

점 D는 $y=\log_9 x$의 그래프 위에 있고 x좌표가 b이므로

$\log_9 b=\log_3 a, \quad \dfrac{1}{2}\log_3 b=\log_3 a$

$\log_3 b=2\log_3 a, \quad \log_3 b=\log_3 a^2$

$\therefore b=a^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

한편 $ab=64$이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$a^3=64 \quad \therefore a=4$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad b=16$

답 ④

0292 전략 $\log_2 x=t$로 놓고 t에 대한 삼차방정식을 푼다.

풀이 $\log_2 x^3+(\log_2 x)^3=6(\log_2 x)^2-\log_2 x^4+2$에서

$3\log_2 x+(\log_2 x)^3=6(\log_2 x)^2-4\log_2 x+2$

$(\log_2 x)^3-6(\log_2 x)^2+7\log_2 x-2=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^3-6t^2+7t-2=0, \quad (t-1)(t^2-5t+2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t^2-5t+2=0$

$t=1$에서 $\quad \log_2 x=1 \quad \therefore x=2$

이때 주어진 방정식의 세 실근을 2, α, β라 하면 방정식 $t^2-5t+2=0$의 두 실근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=5, \quad \log_2\alpha\beta=5$

$\therefore \alpha\beta=2^5=32$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은

$2\alpha\beta=64$

답 ⑤

참고 이차방정식 $t^2-5t+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\cdot1\cdot2=17>0$

이므로 방정식 $t^2-5t+2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0293 전략 진수의 조건과 주어진 부등식을 만족시키는 x, y의 값의 범위를 좌표평면 위에 나타낸다.

풀이 진수의 조건에서

$x>0,\ y>0,\ x^2+y^2-1>0$

$\therefore x>0,\ y>0,\ x^2+y^2>1$ …… ㉠

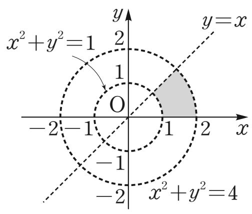
$\log_{\frac{1}{2}} y>\log_{\frac{1}{2}} x$에서 $y<x$ …… ㉡

$\log_3(x^2+y^2-1)<1$에서 $\log_3(x^2+y^2-1)<\log_3 3$

$x^2+y^2-1<3$ $\quad\therefore x^2+y^2<4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 제외)과 같으므로 구하는 영역의 넓이는

$\frac{1}{8}\cdot\pi(2^2-1^2)=\frac{3}{8}\pi$



답 $\frac{3}{8}\pi$

0294 전략 처음 투자액이 a원이고 매년 상승률이 $b\,\%$일 때, n년 후의 투자액은 $a\left(1+\frac{b}{100}\right)^n$원이다.

풀이 n년 후 제품 A의 투자액이 제품 B의 투자액을 초과한다고 하면

$1000\times1.25^n>2000\times1.2^n,\quad 1.25^n>2\times1.2^n$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 1.25^n>\log(2\times1.2^n)$

$n\log 1.25>\log 2+n\log 1.2$

$n(\log 1.25-\log 1.2)>\log 2,\quad n\log\frac{1.25}{1.2}>\log 2$

$n\log\frac{25}{24}>\log 2,\quad n\{\log 5^2-\log(2^3\times3)\}>\log 2$

$n\{2(1-\log 2)-(3\log 2+\log 3)\}>\log 2$

$n(2-5\log 2-\log 3)>\log 2$

이때 $2-5\log 2-\log 3>0$이므로

$n>\frac{\log 2}{2-5\log 2-\log 3}=\frac{0.3010}{0.0179}=16.8\cdots$

따라서 지금으로부터 17년 후에 제품 A의 투자액이 제품 B의 투자액을 처음으로 초과한다.

답 ③

I. 지수함수와 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 미분

0295 답 ∞

0296 답 0

0297 답 0

0298 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^x}{2^{2x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=\infty$ 답 ∞

0299 $\lim\limits_{x\to0}2^x=2^0=1$ 답 1

0300 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0301 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x}{1+2^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x+1}$

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x+1}=1$ 답 1

0302 $\lim\limits_{x\to\infty}(2^x-3^x)=\lim\limits_{x\to\infty}3^x\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right\}$

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right\}=-1$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}3^x\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right\}=-\infty$

답 $-\infty$

0303 답 $-\infty$

0304 답 ∞

0305 답 ∞

0306 답 $-\infty$

0307 $\lim\limits_{x\to1}\log_3 x=\log_3 1=0$ 답 0

0308 $\lim\limits_{x\to2}\log_{\frac{1}{2}}x=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$ 답 -1

0309 $\lim\limits_{x\to\infty}\log\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(-\log x)=-\infty$ 답 $-\infty$

0310 $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow0+$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}\log(x-1)=\lim\limits_{t\to0+}\log t=-\infty$ 답 $-\infty$

0311 $\lim\limits_{x\to\infty}\{\log_2(4x+1)-\log_2 x\}=\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\frac{4x+1}{x}$

$=\log_2\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+1}{x}\right)$

$=\log_2 4=2$

답 2

0312 답 e

0313 답 e

0314 $\lim_{x\to0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$ 답 $\frac{1}{e}$

0315 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^3=e^3$ 답 e^3

0316 $\ln x=1$에서 $x=e$ 답 e

0317 $\ln x=-\frac{1}{2}$에서 $x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 답 $\frac{1}{\sqrt{e}}$

0318 $e^x=5$에서 $x=\ln 5$ 답 $\ln 5$

0319 $e^{2x}=\frac{1}{3}$에서

$2x=\ln\frac{1}{3}$, $2x=-\ln 3$

$\therefore x=-\frac{1}{2}\ln 3=-\ln\sqrt{3}$ 답 $-\ln\sqrt{3}$

0320 $\ln e^{-2}=-2\ln e=-2$ 답 -2

0321 $\ln\sqrt{e}=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0322 $\ln\frac{1}{e}=\ln e^{-1}=-\ln e=-1$ 답 -1

0323 $\frac{1}{\log_3 e}+\frac{1}{\log_2 e}=\ln 3+\ln 2=\ln 6$ 답 $\ln 6$

0324 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot 2$

$=1\cdot 2=2$ 답 2

0325 $\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3=1\cdot 3=3$ 답 3

0326 답 $\frac{1}{\ln 5}$

0327 답 $\ln 2$

0328 $y'=5\cdot(e^x)'=5e^x$

답 $y'=5e^x$

0329 $y=e^2\cdot e^x$이므로 $y'=e^2\cdot(e^x)'=e^2\cdot e^x=e^{x+2}$

답 $y'=e^{x+2}$

0330 $y=\frac{1}{e}\cdot e^x$이므로 $y'=\frac{1}{e}\cdot(e^x)'=\frac{1}{e}\cdot e^x=e^{x-1}$

답 $y'=e^{x-1}$

0331 $y=e^x\cdot e^x$이므로

$y'=(e^x)'\cdot e^x+e^x\cdot(e^x)'=e^x\cdot e^x+e^x\cdot e^x=2e^{2x}$

답 $y'=2e^{2x}$

0332 $y'=(x^2)'\cdot e^x+x^2\cdot(e^x)'$

$=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=x(x+2)e^x$ 답 $y'=x(x+2)e^x$

0333 답 $y'=\ln 6\cdot 6^x$

0334 $y'=2\cdot(4^x)'=2\cdot 4^x\ln 4=2\ln 4\cdot 4^x$ 답 $y'=2\ln 4\cdot 4^x$

0335 $y'=3\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}'=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln\frac{1}{2}=-3\ln 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$

답 $y'=-3\ln 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$

0336 $y=5^x\cdot 5^x$이므로

$y'=(5^x)'\cdot 5^x+5^x\cdot(5^x)'$

$=5^x\ln 5\cdot 5^x+5^x\cdot 5^x\ln 5=2\ln 5\cdot 5^{2x}$

답 $y'=2\ln 5\cdot 5^{2x}$

다른풀이 $y=25^x$이므로

$y'=25^x\ln 25=2\ln 5\cdot 5^{2x}$

0337 $y'=(3x+1)'\cdot 3^x+(3x+1)\cdot(3^x)'$

$=3\cdot 3^x+(3x+1)\cdot 3^x\ln 3$

$=3^x\{(3x+1)\ln 3+3\}$

답 $y'=3^x\{(3x+1)\ln 3+3\}$

0338 $y'=\frac{3}{5}\cdot(\ln x)'=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x}=\frac{3}{5x}$ 답 $y'=\frac{3}{5x}$

0339 $y=\ln 3+\ln x$이므로 $y'=\frac{1}{x}$ 답 $y'=\frac{1}{x}$

0340 $y=2\ln x$이므로 $y'=\frac{2}{x}$ 답 $y'=\frac{2}{x}$

0341 $y'=(x)'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$

$=\ln x+1$ 답 $y'=\ln x+1$

0342 $y=\log 2+\log x$이므로 $y'=\frac{1}{x\ln 10}$

답 $y'=\frac{1}{x\ln 10}$

0343 $y=\log_2 3+\log_2 x$이므로 $y'=\frac{1}{x\ln 2}$

답 $y'=\frac{1}{x\ln 2}$

0344 $y'=(x)'\cdot\log_5 x+x\cdot(\log_5 x)'=1\cdot\log_5 x+x\cdot\frac{1}{x\ln 5}$

$=\log_5 x+\frac{1}{\ln 5}$

답 $y'=\log_5 x+\frac{1}{\ln 5}$

0345 $y'=(e^x)'\cdot\log_3 x+e^x\cdot(\log_3 x)'$

$=e^x\cdot\log_3 x+e^x\cdot\frac{1}{x\ln 3}=e^x\left(\log_3 x+\frac{1}{x\ln 3}\right)$

답 $y'=e^x\left(\log_3 x+\frac{1}{x\ln 3}\right)$

0346 $\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}-3^x}{2^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}=-1$ 답 -1

0347 $\lim_{x\to\infty}(4^x-3^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left\{4^x\left(1-\frac{3^x}{4^x}\right)\right\}^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}(4^x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}$

$=4\cdot 1=4$ 답 ④

0348 $\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot 4^x+3}{4^{x-1}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4a+\frac{3}{4^{x-1}}}{1-\frac{1}{4^{x-1}}}=4a$ ⇨ ❶

이므로 $4a=16$ $\quad\therefore a=4$ ⇨ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot 4^x+3}{4^{x-1}-1}$의 값을 간단히 할 수 있다.	70%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%

0349 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 0-$일 때 $t\longrightarrow -\infty$이므로

$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{1+2^t}=\frac{1}{1+0}=1$ 답 ⑤

0350 $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow -\infty$일 때 $t\longrightarrow \infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{7^x+7^{-x}}{7^x-7^{-x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{7^{-t}+7^t}{7^{-t}-7^t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{49}\right)^t+1}{\left(\frac{1}{49}\right)^t-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$

답 -1

0351 $\lim_{x\to 2}(\log_2|x^2-4|-\log_2|x-2|)$

$=\lim_{x\to 2}\log_2\left|\frac{x^2-4}{x-2}\right|$

$=\lim_{x\to 2}\log_2\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right|$

$=\lim_{x\to 2}\log_2|x+2|$

$=\log_2 4=2$ 답 ②

0352 $\lim_{x\to\infty}(\log_3\sqrt{3x^2+x}-\log_3 x)$

$=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{\sqrt{3x^2+x}}{x}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_3\sqrt{3+\frac{1}{x}}=\log_3\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt{3+\frac{1}{x}}\right)$

$=\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$ 답 ②

0353 $\lim_{x\to\infty}\{\log(ax-1)-\log(x+1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{ax-1}{x+1}=\log\left(\lim_{x\to\infty}\frac{ax-1}{x+1}\right)=\log a$

$\log a=3$에서 $\quad a=1000$ 답 1000

0354 $4^x+5^x=5^x\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^x+1\right\}$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_2(4^x+5^x)=\lim_{x\to\infty}\log_2\left[5^x\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\left[(5^x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}\right]$

$=\log_2(5\cdot 1)=\log_2 5$ 답 ⑤

0355 $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}+\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^6+\lim_{x\to 0}\{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\}^{-2}$

$=e^6+\frac{1}{e^2}$ 답 $e^6+\frac{1}{e^2}$

0356 $\lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\right\}^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left[\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}\right\}^{\frac{1}{3}}\right]$

$=e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{5}{6}}$ 답 ②

0357 $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}$

$=e^{-1}=\frac{1}{e}$ 답 $\frac{1}{e}$

0358 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-5}$

$=e^{-5}=\frac{1}{e^5}$ 답 $\frac{1}{e^5}$

0359 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^{6a}=e^{6a}$

$e^{6a}=e^{12}$에서 $\quad 6a=12$ $\quad\therefore a=2$ 답 ③

0360 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$

$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-1}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$

$=\frac{\frac{1}{e}}{e}=\frac{1}{e^2}$ 답 $\frac{1}{e^2}$

0361 $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{ab}=e^{ab}$

ㄱ. $\lim_{x\to0}(1+bx)^{\frac{a}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+bx)^{\frac{1}{bx}}\}^{ab}=e^{ab}$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^{ab}=e^{ab}$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{b}}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right\}^{\frac{a}{b}}=e^{\frac{a}{b}}$

이상에서 $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}$과 값이 같은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0362 $\lim_{x\to0}\frac{4x}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\ln(1+2x)}\cdot2$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}\cdot2$

$=\frac{1}{1}\cdot2=2$ 답 ⑤

0363 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+6x)}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+6x)}{6x}\cdot\frac{3x}{\ln(1+3x)}\cdot\frac{6}{3}$

$=1\cdot1\cdot2=2$ 답 2

0364 $\lim_{x\to\infty}x\{\ln(2x+1)-\ln2x\}$

$=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{2x+1}{2x}=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}2x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\cdot\frac{1}{2}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 답 ②

0365 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{x^3+2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{ax}\cdot\frac{a}{x^2+2}$

$=1\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$ ⇨ ❶

$\frac{a}{2}=5$에서 $a=10$ ⇨ ❷

$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(4x+1)}{ax}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(4x+1)}{10x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(4x+1)}{4x}\cdot\frac{2}{5}$

$=1\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$ ⇨ ❸

답 $\frac{2}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{x^3+2x}$의 값을 간단히 할 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(4x+1)}{ax}$의 값을 구할 수 있다.	40%

0366 $\lim_{x\to0}\frac{\log_2(3+x)-\log_2 3}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log_2\frac{3+x}{3}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\log_2\left(1+\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{\ln2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3\ln2}$ 답 $\frac{1}{3\ln2}$

0367 $\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1-3x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1-3x)}{-3x}\cdot(-3)$

$=\frac{1}{\ln3}\cdot(-3)=-\frac{3}{\ln3}$ 답 $-\frac{3}{\ln3}$

0368 $\lim_{x\to0}\frac{\log_5(1+2x)}{\log_2(1-x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\log_5(1+2x)}{2x}\cdot\frac{-x}{\log_2(1-x)}\cdot(-2)$

$=\frac{1}{\ln5}\cdot\ln2\cdot(-2)=-\frac{2\ln2}{\ln5}$

답 ①

0369 $x-2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{\log(x-1)}{x-2}=\lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t}=\frac{1}{\ln10}$ 답 $\frac{1}{\ln10}$

0370 $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x^2-x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{x-1}=1\cdot(-2)=-2$

답 ①

0371 $\lim_{x\to0}\frac{e^{-3x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-3x}-1}{-3x}\cdot\frac{-3}{2}$

$=1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$ 답 $-\frac{3}{2}$

0372 $\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-e^{-4x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{3x}-1)-(e^{-4x}-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{3x}-1}{x}-\frac{e^{-4x}-1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot3-\frac{e^{-4x}-1}{-4x}\cdot(-4)\right\}$

$=1\cdot3-1\cdot(-4)=7$ 답 ②

0373 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\ln(1+ax)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{ax}{\ln(1+ax)}\cdot\frac{1}{a}$

$=1\cdot1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$ ⇨ ❶

$\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$에서 $a=3$ ⇨ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\ln(1+ax)}$의 값을 간단히 할 수 있다.	70%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%

0374 $\lim_{x\to0}\frac{3^x-2^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1-(2^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{3^x-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}\right)$

$=\ln3-\ln2=\ln\frac{3}{2}$ 답 ③

0375 $\lim_{x\to0}\frac{\{\log_3(1+x)\}(3^x-1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+x)}{x}\cdot\frac{3^x-1}{x}$

$=\frac{1}{\ln3}\cdot\ln3=1$ 답 1

0376 $\lim_{x\to0}\frac{2^x+4^x+8^x-3}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(2^x-1)+(4^x-1)+(8^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{8^x-1}{x}$

$=\ln2+\ln4+\ln8=\ln64$

$\therefore a=64$ 답 ⑤

0377 $\lim_{x\to1}\frac{5^{x-1}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{5^{x-1}-1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{t\to0}\frac{5^t-1}{t}\cdot\frac{1}{t+2}=\ln5\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln5=\ln\sqrt{5}$ 답 $\ln\sqrt{5}$

0378 $x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(ax+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{ax}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{a}{2}=1\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$

$\frac{a}{2}=\frac{1}{3}$에서 $a=\frac{2}{3}$ 답 $a=\frac{2}{3}$, $b=0$

0379 $x\longrightarrow0$일 때 (분자) $\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\{\log_3(1+x)+a\}=0$이므로 $a=0$

$a=0$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{x^2+2x}{\log_3(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+2)}{\log_3(1+x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\log_3(1+x)}\cdot(x+2)$

$=\ln3\cdot2=2\ln3$

$\therefore b=2\ln3$

답 $a=0$, $b=2\ln3$

0380 $x\longrightarrow0$일 때 (분자) $\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(2^{x+1}-a)=0$이므로 $2-a=0$ $\therefore a=2$ ⇨ ❶

$a=2$를 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+bx)}{2^{x+1}-2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+bx)}{2(2^x-1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x}{2^x-1}\cdot\frac{\ln(1+bx)}{bx}\cdot\frac{b}{2}$

$=\frac{1}{\ln2}\cdot1\cdot\frac{b}{2}=\frac{b}{2\ln2}$

$\frac{b}{2\ln2}=\frac{2}{\ln2}$에서 $b=4$ ⇨ ❷

$\therefore ab=2\cdot4=8$ ⇨ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

0381 $x\longrightarrow-1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}\{a\ln(x+2)+b\}=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to-1}\frac{a\ln(x+2)+b}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{a\ln(x+2)}{(x+1)(x-1)}$

이때 $x+1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{a\ln(x+2)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{t\to0}\frac{a\ln(t+1)}{t(t-2)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{t}\cdot\frac{a}{t-2}$

$=1\cdot\frac{a}{-2}=-\frac{a}{2}$

$-\frac{a}{2}=4$에서 $a=-8$

$\therefore a+b=-8$ 답 ①

0382 점 P의 좌표를 $(t, \log_2(t+1))$이라 하면

$\overline{OQ}=t$, $\overline{PQ}=\log_2(t+1)$

이때 점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\longrightarrow0+$이므로 구하는 극한값은

$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}=\lim_{t\to0+}\frac{\log_2(t+1)}{t}=\frac{1}{\ln2}$ 답 $\frac{1}{\ln2}$

0383 점 P의 x좌표가 t이므로 $P(t, \ln t)$

따라서 $S(t)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\ln t=\ln t$이므로

$\lim_{t\to1+}\frac{S(t)}{t-1}=\lim_{t\to1+}\frac{\ln t}{t-1}$

이때 $t-1=s$로 놓으면 $t\longrightarrow1+$일 때 $s\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{t\to1+}\frac{\ln t}{t-1}=\lim_{s\to0+}\frac{\ln(s+1)}{s}=1$ 답 ④

0384 점 P의 좌표를 (t, e^t-1)이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\cdot1\cdot(e^t-1)=\frac{e^t-1}{2}$

$S_2=\frac{1}{2}\cdot2\cdot t=t$

$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{e^t-1}{2t}$

이때 점 P가 점 O에 한없이 가까워지면 $t\longrightarrow0+$이므로 구하는 극한값은

$\lim_{t\to0+}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1}{2t}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1}{t}\cdot\frac{1}{2}$

$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0385 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$$\therefore a=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+x-1}{4x}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+1\right)$$

$$=\frac{1}{4}(1+1)=\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{2}$$

답 ④

0386 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0+}\frac{x\cdot 2^x}{4^x-1}=k$$

이때

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x\cdot 2^x}{4^x-1}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{4^x-1}\cdot 2^x$$

$$=\frac{1}{\ln 4}\cdot 1=\frac{1}{\ln 4}$$

이므로 $k=\dfrac{1}{\ln 4}$

답 $\dfrac{1}{\ln 4}$

0387 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=f(0)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(a+5x)}{x}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x \longrightarrow 0+$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 0+}\ln(a+5x)=0$이므로 $\ln a=0$ $\quad\therefore a=1$ ⇨ ❶

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+5x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+5x)}{5x}\cdot 5=1\cdot 5=5$$ ⇨ ❷

$\therefore a+b=6$ ⇨ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0388 $x\neq 0$일 때, $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x}$이고 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$$

이때

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2=1\cdot 2=2$$

이므로 $f(0)=2$

답 2

0389 $x\neq 1$일 때, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$이고 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

$x-1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$$

$\therefore f(1)=1$

답 1

0390 $f(x)=(x+2)e^{x+1}=e(x+2)e^x$이므로

$$f'(x)=e\{(x+2)'\cdot e^x+(x+2)\cdot(e^x)'\}$$

$$=e\{1\cdot e^x+(x+2)\cdot e^x\}=e(x+3)e^x$$

$$=(x+3)e^{x+1}$$

$\therefore f'(0)=3e$

답 ③

타쎈 특강 $y=e^{x+p}$, $y=a^{x+p}$(p는 상수)의 도함수

상수 p에 대하여

$y=e^{x+p}$ ➡ $y=e^p\cdot e^x$, $\quad y=a^{x+p}$ ➡ $y=a^p\cdot a^x$

으로 생각하여 미분한다.

0391 $y=2^{x+3}=2^3\cdot 2^x$이므로 $f(x)=2^{x+3}$으로 놓으면

$$f'(x)=2^3\cdot(2^x)'=2^3\cdot 2^x\ln 2=8\ln 2\cdot 2^x$$

따라서 $f'(-1)=8\ln 2\cdot\dfrac{1}{2}=4\ln 2$이므로 구하는 접선의 기울기는 $4\ln 2$이다.

답 $4\ln 2$

0392 $f'(x)=a\{(x^2)'\cdot e^x+x^2\cdot(e^x)'\}=a(2xe^x+x^2e^x)$

$$=ax(x+2)e^x$$

이므로 $f'(1)=3ae$

$3ae=\dfrac{1}{2}e$에서 $a=\dfrac{1}{6}$

답 ①

0393 $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x$

이므로 $f'(e)=2e+e=3e$

답 $3e$

0394 $f(x)=(\log_2 x)^2+\dfrac{1}{2}\ln x=\log_2 x\cdot\log_2 x+\dfrac{1}{2}\ln x$

이므로

$$f'(x)=(\log_2 x)'\cdot\log_2 x+\log_2 x\cdot(\log_2 x)'+\left(\frac{1}{2}\ln x\right)'$$

$$=\frac{1}{x\ln 2}\cdot\log_2 x+\log_2 x\cdot\frac{1}{x\ln 2}+\frac{1}{2x}$$

$$=\frac{2\log_2 x}{x\ln 2}+\frac{1}{2x}=\frac{4\log_2 x+\ln 2}{2x\ln 2}$$

$$\therefore f'(1)=\frac{\ln 2}{2\ln 2}=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

0395 $f(x)=x\log_3 2x=x(\log_3 2+\log_3 x)$이므로

$$f'(x)=\log_3 2+\log_3 x+x\cdot\frac{1}{x\ln 3}$$

$$=\log_3 2+\log_3 x+\frac{1}{\ln 3}$$

$$=\log_3 2+\log_3 x+\log_3 e=\log_3 2ex$$

$\log_3 2ex=\log_3 ax$에서 $a=2e$

답 ②

타쎈 특강 $y=\ln px$, $y=\log_a px$(p는 상수)의 도함수

상수 p에 대하여

$y=\ln px$ ➡ $y=\ln p+\ln x$

$y=\log_a px$ ➡ $y=\log_a p+\log_a x$

로 생각하여 미분한다.

0396 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to1+}\ln ax=\lim_{x\to1-}(bx+2)=f(1)$

$\therefore \ln a=b+2$ …… ㉠

또 $f'(1)$이 존재해야 하므로 $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>1)\\ b & (x<1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=\lim_{x\to1-}b \quad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $\ln a=3 \quad \therefore a=e^3$ 답 $a=e^3$, $b=1$

0397 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to1+}(ax^2+1)=\lim_{x\to1-}(e^{x-1}+b)=f(1)$

$a+1=1+b \quad \therefore b=a$ …… ㉠ ⇨ ❶

또 $f'(1)$이 존재해야 하므로 $f'(x)=\begin{cases}2ax & (x>1)\\ e^{x-1} & (x<1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to1+}2ax=\lim_{x\to1-}e^{x-1}$

즉 $2a=1$에서 $a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{1}{2}$ ⇨ ❷

$\therefore a+b=1$ ⇨ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0398 $f(1)=0$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=3^x\ln3\cdot(x^2-1)+3^x\cdot2x=3^x\{\ln3\cdot(x^2-1)+2x\}$이므로

$f'(1)=3\cdot2=6$ 답 6

0399 $$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{f(x)-f(1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{f(x)-f(1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}\cdot(x+1)$$
$$=\frac{1}{f'(1)}\cdot2=\frac{2}{f'(1)}$$

이때 $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+3x^2=\ln x+3x^2+1$이므로

$f'(1)=4$

$\therefore \frac{2}{f'(1)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ 답 ②

0400 전략 로그의 성질을 이용하여 $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}$ 꼴로 변형한 후 $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}=\log_a\left\{\lim_{x\to\infty}f(x)\right\}$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(x^2+1)+\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\{\log_2(x^2+1)-\log_2(2x^2-1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{x^2+1}{2x^2-1}=\log_2\frac{1}{2}=-1$ 답 ①

0401 전략 $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{2x}}=e^5$에서

$$\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to0}\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{\frac{a}{2}}=e^{\frac{a}{2}}$$

이므로 $e^{\frac{a}{2}}=e^5$, $\frac{a}{2}=5 \quad \therefore a=10$ 답 10

0402 전략 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)^{ax}=8$에서

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)^{ax}=\lim_{x\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right\}^{4a}=\ln e^{4a}=4a$$

이므로 $4a=8 \quad \therefore a=2$ 답 ③

0403 전략 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-2^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1+1-2^x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2-\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$$
$$=2-\ln2$$ 답 ③

0404 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이다.

풀이 $f(x)=(x-3)e^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x+(x-3)e^x=(x-2)e^x$

따라서 $x=0$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=-2$ 답 -2

0405 전략 지수함수와 로그함수의 극한을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to0}\frac{2^x}{2^x+2^{-x}}=\frac{2^0}{2^0+2^0}=\frac{1}{2}$

ㄴ. $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0+$일 때 $t\longrightarrow\infty$, $x\longrightarrow0-$일 때 $t\longrightarrow-\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1-2^t}{1+2^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{2^t}-1}{\frac{1}{2^t}+1}=-1,$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1-2^t}{1+2^t}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}\neq\lim_{x\to0-}\frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$$

즉 $\lim_{x\to0}\frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $$\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{3x^2-2}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{3-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=\log_3 3=1$$

ㄹ. $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow0-$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-3^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to0-}\frac{1}{1-3^t}=\infty$$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0406 전략 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 지수함수를 포함한 함수의 극한값은 분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 나누어서 구한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot 5^x+b\cdot 3^{x-1}}{5^x-3^{x+1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+b\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^x}{1-3\left(\frac{3}{5}\right)^x}=a$$

이므로 $a=4$ ⇨ ❶

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot 5^x+b\cdot 3^{x-1}}{5^x-3^{x+1}}=\frac{a+\frac{1}{3}b}{1-3}=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}b$$

이므로 $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}b=-2$, $3a+b=12$

이 식에 $a=4$를 대입하면 $b=0$ ⇨ ❷

$\therefore a+b=4$ ⇨ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0407 전략 $x-3=t$로 놓고 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $x-3=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 3$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(3+t)-\ln 3}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{3+t}{3}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{3}\right)}{\frac{t}{3}}\cdot\frac{1}{3}=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

답 ②

다른풀이 $f(x)=\ln x$라 하면

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$$

$f'(x)=\frac{1}{x}$이므로 $f'(3)=\frac{1}{3}$

0408 전략 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{e^{2x}-1}=4$에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}\cdot\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{a}{2}$$

$$=1\cdot 1\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$

이므로 $\frac{a}{2}=4$ $\therefore a=8$

답 8

0409 전략 $\lim_{x\to 0}xf(x)=3$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to 0}(e^{3x}-1)f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3\cdot xf(x)$

$$=1\cdot 3\cdot 3=9$$

답 9

0410 전략 $x-2=t$로 놓고 $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to 2}\frac{3^{x-2}-1}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{3^{x-2}-1}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$

$x-2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 2$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{3^{x-2}-1}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}=\lim_{t\to 0}\frac{3^t-1}{t}\cdot\frac{1}{t+4}$$

$$=\ln 3\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\ln 3$$

따라서 $a=\frac{1}{4}\ln 3$이므로

$$e^{4a}=e^{4\cdot\frac{1}{4}\ln 3}=e^{\ln 3}=3$$

답 ③

0411 전략 $x\longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow 0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{ax+9}{\ln 3x}=b$에서 $x\longrightarrow\frac{1}{3}$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to\frac{1}{3}}(ax+9)=0$이므로

$\frac{1}{3}a+9=0$ $\therefore a=-27$ ⇨ ❶

$a=-27$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{-27x+9}{\ln 3x}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{-9(3x-1)}{\ln 3x}$$

$3x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\frac{1}{3}$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{-9(3x-1)}{\ln 3x}=\lim_{t\to 0}\frac{-9t}{\ln(1+t)}$$

$$=-9\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=-9$$

$\therefore b=-9$ ⇨ ❷

$\therefore b-a=-9-(-27)=18$ ⇨ ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	10%

0412 전략 $\overline{PQ}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타내고 $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $P(t,\ 4^t)$, $Q(t,\ 2^t)$이므로 $\overline{PQ}=4^t-2^t$

$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{\overline{PQ}}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{4^t-2^t}{t}=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{4^t-1}{t}-\frac{2^t-1}{t}\right)$$

$$=\ln 4-\ln 2=\ln\frac{4}{2}=\ln 2$$

답 ⑤

0413 전략 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)$이다.

풀이 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)$$

이때

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{a}{x+2}=\frac{a}{2},$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{2^{x+2}-4}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{4(2^x-1)}{x}=4\ln2$$

이므로 $\frac{a}{2}=4\ln2$ $\quad\therefore a=8\ln2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{8\ln2}{x+2} & (x\ge0)\\ \frac{2^{x+2}-4}{x} & (x<0)\end{cases}$이므로

$$f(2)=\frac{8\ln2}{4}=2\ln2$$

답 ③

0414 전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 $f'(a)=0$을 만족시키는 a의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=(x^3-5x^2+9x-7)e^x$이므로

$f'(x)=(3x^2-10x+9)e^x+(x^3-5x^2+9x-7)e^x$

$\quad=(x^3-2x^2-x+2)e^x$ ⇨ ❶

$f'(a)=0$에서 $(a^3-2a^2-a+2)e^a=0$

$a^3-2a^2-a+2=0$ ($\because e^a>0$)

$(a+1)(a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$ ⇨ ❷

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+1+2=2$ ⇨ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	50%
❷ $f'(a)=0$을 만족시키는 a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 모든 실수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

다른풀이 $a^3-2a^2-a+2=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하면 모든 실수 a의 값의 합은 2

타센 특강 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

0415 전략 미분계수의 정의를 이용하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-3h)}{h}$를 변형한다.

풀이 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h}\cdot3$

$=f'(2)+3f'(2)=4f'(2)$

이때 $f(x)=\frac{1}{4}\cdot3^{x+1}=\frac{3}{4}\cdot3^x$이므로

$$f'(x)=\frac{3}{4}\cdot3^x\ln3=\frac{3^{x+1}\ln3}{4}$$

$$\therefore 4f'(2)=4\cdot\frac{3^{2+1}\ln3}{4}=27\ln3$$

답 ⑤

0416 전략 $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

ㄱ. $-\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow0-$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{t\to0-}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

ㄴ. $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

ㄷ. $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^{-1}=\frac{1}{e}$$

이상에서 $\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$과 값이 같은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0417 전략 $f(n)$을 간단히 정리한 후 $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$를 이용한다.

풀이 $f(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

$=1-\frac{1}{n}$ ⇨ ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\{f(n)\}^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$$

이때 $-\frac{1}{n}=t$로 놓으면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow0-$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim_{t\to0-}(1+t)^{-\frac{2}{t}}=\lim_{t\to0-}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-2}$

$=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$ ⇨ ❷

답 $\frac{1}{e^2}$

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 간단히 정리할 수 있다.	50%
❷ $\lim_{n\to\infty}\{f(n)\}^{2n}$의 값을 구할 수 있다.	50%

0418 전략 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$ $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to-2}\frac{5^{x+2}-1}{\ln(x+3)}$에서 $x+2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{5^{x+2}-1}{\ln(x+3)}+\lim_{x\to0}\frac{x}{\log_3(1+2x)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{5^t-1}{\ln(1+t)}+\lim_{x\to0}\frac{2x}{\log_3(1+2x)}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\frac{5^t-1}{t}+\lim_{x\to0}\frac{2x}{\log_3(1+2x)}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=1\cdot\ln5+\ln3\cdot\frac{1}{2}=\ln5+\ln\sqrt{3}=\ln5\sqrt{3}$$

답 ④

0419 전략 로그의 성질과 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$을 이용하여 $f(n)$을 간단히 정리한 후 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{f(n)}$의 값을 구한다.

풀이 $f(n)=\lim_{x\to0}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(1+kx)}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{x}+\cdots+\frac{\ln(1+2nx)}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot2+\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot3+\cdots+\frac{\ln(1+2nx)}{2nx}\cdot2n\right\}$$
$$=1+2+3+\cdots+2n$$
$$=\frac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{n(2n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{4}{2}=2$$

답 ②

0420 전략 $f(x)$가 $x>0$인 모든 실수에서 연속이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=5$ ($\because$ (가))

(나)에서 $(x-1)f(x)=a\ln x+b-2$이므로 $x\neq1$일 때

$$f(x)=\frac{a\ln x+b-2}{x-1}$$

$$\therefore\lim_{x\to1}\frac{a\ln x+b-2}{x-1}=5 \quad\cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(a\ln x+b-2)=0$이므로

$b-2=0 \quad \therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{a\ln x}{x-1}=5$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{a\ln x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{a\ln(1+t)}{t}=a\cdot1=a$$

$\therefore a=5$

따라서 $x>0$에서 $f(x)=\begin{cases}\frac{5\ln x}{x-1} & (x\neq1)\\ 5 & (x=1)\end{cases}$이므로

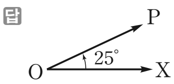
$$f(2)=\frac{5\ln2}{2-1}=5\ln2$$

답 $5\ln2$

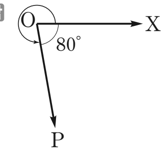
Ⅱ. 삼각함수

04 삼각함수

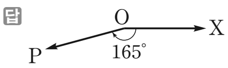
0421 답



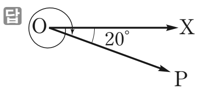
0422 답



0423 답



0424 답



0425 답 $\theta=360°\times n+115°$ (n은 정수)

0426 답 $\theta=360°\times n+(-30°)$ (n은 정수)

0427 $780°=360°\times2+60°$이므로
$360°\times n+60°$ (n은 정수) 답 풀이 참조

0428 $1190°=360°\times3+110°$이므로
$360°\times n+110°$ (n은 정수) 답 풀이 참조

0429 $-415°=360°\times(-2)+305°$이므로
$360°\times n+305°$ (n은 정수) 답 풀이 참조

0430 $-820°=360°\times(-3)+260°$이므로
$360°\times n+260°$ (n은 정수) 답 풀이 참조

0431 답 제4사분면

0432 $850°=360°\times2+130°$
따라서 $850°$는 제2사분면의 각이다. 답 제2사분면

0433 $-170°=360°\times(-1)+190°$
따라서 $-170°$는 제3사분면의 각이다. 답 제3사분면

0434 $-1070°=360°\times(-3)+10°$
따라서 $-1070°$는 제1사분면의 각이다. 답 제1사분면

0435 $120°=120\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{2}{3}\pi$ 답 $\frac{2}{3}\pi$

0436 $330°=330\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{11}{6}\pi$ 답 $\frac{11}{6}\pi$

0437 $-144°=(-144)\cdot\frac{\pi}{180}=-\frac{4}{5}\pi$ 답 $-\frac{4}{5}\pi$

0438 $-225°=(-225)\cdot\frac{\pi}{180}=-\frac{5}{4}\pi$ 답 $-\frac{5}{4}\pi$

0439 $\frac{2}{5}\pi=\frac{2}{5}\pi\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=72^\circ$ 답 72°

0440 $\frac{7}{3}\pi=\frac{7}{3}\pi\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=420^\circ$ 답 420°

0441 $-\frac{5}{6}\pi=\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=-150^\circ$ 답 -150°

0442 $-\frac{7}{4}\pi=\left(-\frac{7}{4}\pi\right)\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=-315^\circ$ 답 -315°

0443

도(°)	0°	30°	45°	240°	270°	360°
라디안	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π

답 풀이 참조

0444 답 $2n\pi+\frac{1}{4}$ (n은 정수)

0445 답 $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

0446 답 $2n\pi+\frac{4}{3}\pi$ (n은 정수)

0447 $\frac{9}{4}\pi=2\pi+\frac{\pi}{4}$이므로 $2n\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)

답 $2n\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)

0448 $45^\circ=45\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{4}$이므로

$l=5\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$, $S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{5}{4}\pi=\frac{25}{8}\pi$

답 $l=\frac{5}{4}\pi$, $S=\frac{25}{8}\pi$

0449 $r\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi$이므로 $r=4$

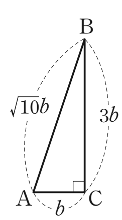
$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\pi=4\pi$ 답 $r=4$, $S=4\pi$

0450 △ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=a^2+b^2=(3b)^2+b^2$

$=10b^2$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{10}b$



따라서 △ABC의 각 변의 길이는 오른쪽 그림과 같으므로

(1) $\sin A=\frac{3b}{\sqrt{10}b}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(2) $\cos A=\frac{b}{\sqrt{10}b}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

(3) $\tan A=\frac{3b}{b}=3$

답 (1) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (3) 3

0451 $\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$이므로

(1) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

(3) $\tan\theta=\sqrt{3}$ (4) $\csc\theta=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(5) $\sec\theta=-2$ (6) $\cot\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 풀이 참조

0452 $\overline{OP}=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$이므로

(1) $\sin\theta=-\frac{5}{13}$ (2) $\cos\theta=\frac{12}{13}$

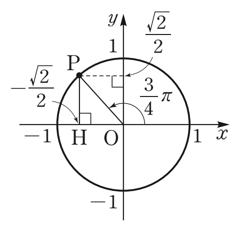
(3) $\tan\theta=-\frac{5}{12}$ (4) $\csc\theta=-\frac{13}{5}$

(5) $\sec\theta=\frac{13}{12}$ (6) $\cot\theta=-\frac{12}{5}$

답 풀이 참조

0453 답 (가) 1 (나) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (다) $-\frac{1}{2}$ (라) $\sqrt{3}$

0454 오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{3}{4}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

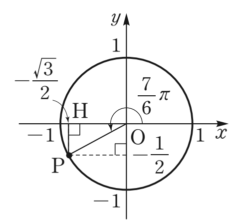


$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=\frac{\pi}{4}$이므로

$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$ 답 풀이 참조

0455 오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{7}{6}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

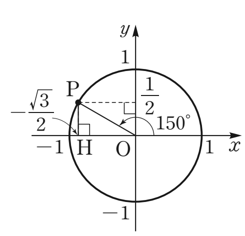


$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=\frac{\pi}{6}$이므로

$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=-\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 풀이 참조

0456 오른쪽 그림과 같이 각 150°를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

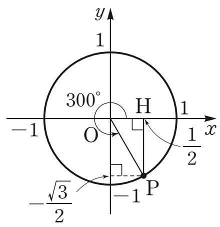


$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=30^\circ$이므로

$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 풀이 참조

0457 오른쪽 그림과 같이 각 300°를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=60°$이므로

$$P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\therefore\ \sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\theta=\dfrac{1}{2},\ \tan\theta=-\sqrt{3}$ 답 풀이 참조

0458 $\theta=\dfrac{13}{6}\pi=2\pi\times1+\dfrac{\pi}{6}$에서 θ는 제1사분면의 각이므로

$\sin\theta>0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta>0$

답 $\sin\theta>0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta>0$

0459 $\theta=670°=360°\times1+310°$에서 θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta<0$

답 $\sin\theta<0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta<0$

0460 $\theta=-\dfrac{10}{3}\pi=2\pi\times(-2)+\dfrac{2}{3}\pi$에서 θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta<0$

답 $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta<0$

0461 $\theta=-460°=360°\times(-2)+260°$에서 θ는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

답 $\sin\theta<0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

0462 $\sin\theta>0$인 것은 제1사분면과 제2사분면이고, $\cos\theta<0$인 것은 제2사분면과 제3사분면이므로 θ는 제2사분면의 각이다.

답 제2사분면

0463 $\sin\theta<0$인 것은 제3사분면과 제4사분면이고, $\tan\theta<0$인 것은 제2사분면과 제4사분면이므로 θ는 제4사분면의 각이다.

답 제4사분면

0464 $\sin\theta\cos\theta>0$에서

$\sin\theta>0,\ \cos\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0,\ \cos\theta<0$

이므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

답 제1사분면 또는 제3사분면

0465 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+\left(\dfrac{5}{13}\right)^2=1\qquad\therefore\ \sin^2\theta=\dfrac{144}{169}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore\ \sin\theta=-\dfrac{12}{13}$ 답 $-\dfrac{12}{13}$

0466 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\sec^2\theta\qquad\therefore\ \sec^2\theta=\dfrac{5}{4}$

이때 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sec\theta<0$

$\therefore\ \sec\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ \cos\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 답 $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

0467 $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$이므로

$1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=1+\dfrac{1}{9}=\csc^2\theta\qquad\therefore\ \csc^2\theta=\dfrac{10}{9}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\csc\theta>0$

$\therefore\ \csc\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ 답 $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

0468 $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$ 답 2

0469 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$

$=2\csc\theta$ 답 $2\csc\theta$

0470 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$이고 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)=\cos^2\theta\sec^2\theta=1$ 답 1

0471 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$ 답 $-\dfrac{3}{8}$

0472 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$ 답 $\dfrac{4}{9}$

0473 ① $-670°=360°\times(-2)+50°$
② $-330°=360°\times(-1)+30°$
③ $-310°=360°\times(-1)+50°$
④ $410°=360°\times1+50°$
⑤ $770°=360°\times2+50°$ 답 ②

0474 ① $-550°=360°\times(-2)+170°$
② $-280°=360°\times(-1)+80°$
③ $450°=360°\times1+90°$
④ $660°=360°\times1+300°$
⑤ $810°=360°\times2+90°$ 답 ②

0475 ㄱ. $-1050°=360°\times(-3)+30°$
ㄴ. $-650°=360°\times(-2)+70°$
ㄷ. $500°=360°\times1+140°$
ㄹ. $790°=360°\times2+70°$
ㅁ. $1010°=360°\times2+290°$
이상에서 $70°$를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄴ, ㄹ이다.
답 ㄴ, ㄹ

0476 ① $-620°=360°\times(-2)+100°$ $\therefore$ 제2사분면
② $-335°=360°\times(-1)+25°$ $\therefore$ 제1사분면
③ $490°=360°\times1+130°$ $\therefore$ 제2사분면
④ $510°=360°\times1+150°$ $\therefore$ 제2사분면
⑤ $860°=360°\times2+140°$ $\therefore$ 제2사분면
답 ②

0477 동경 OP가 원점을 중심으로 시초선에서 음의 방향으로 $230°$만큼 회전하면 그 각의 크기는 $-230°$이고, 양의 방향으로 $110°$만큼 회전하면 그 각의 크기는 $110°$이므로 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 하면
$\theta=-230°+110°=-120°$ ⇨ ❶
$-120°=360°\times(-1)+240°$이므로 동경 OP는 제3사분면에 있다. ⇨ ❷
답 제3사분면

채점 기준	비율
❶ 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 구할 수 있다.	50%
❷ 동경 OP가 어느 사분면에 있는지 구할 수 있다.	50%

0478 θ가 제1사분면의 각이므로
$360°\times n<\theta<360°\times n+90°$ (n은 정수)
$\therefore 180°\times n<\dfrac{\theta}{2}<180°\times n+45°$
(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,
$180°\times2k<\dfrac{\theta}{2}<180°\times2k+45°$
$\therefore 360°\times k<\dfrac{\theta}{2}<360°\times k+45°$
따라서 $\dfrac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.
(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,
$180°\times(2k+1)<\dfrac{\theta}{2}<180°\times(2k+1)+45°$
$\therefore 360°\times k+180°<\dfrac{\theta}{2}<360°\times k+225°$
따라서 $\dfrac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.
(i), (ii)에서 $\dfrac{\theta}{2}$는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.
답 제1사분면 또는 제3사분면

0479 2θ가 제3사분면의 각이므로
$360°\times n+180°<2\theta<360°\times n+270°$ (n은 정수)
$\therefore 180°\times n+90°<\theta<180°\times n+135°$
(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,
$180°\times2k+90°<\theta<180°\times2k+135°$
$\therefore 360°\times k+90°<\theta<360°\times k+135°$
따라서 θ는 제2사분면의 각이다.
(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,
$180°\times(2k+1)+90°<\theta<180°\times(2k+1)+135°$
$\therefore 360°\times k+270°<\theta<360°\times k+315°$
따라서 θ는 제4사분면의 각이다.
(i), (ii)에서 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다. 답 ⑤

0480 ③ $\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{5}{12}\pi\cdot\dfrac{180°}{\pi}=75°$ 답 ③

0481 ㄱ. $20°=20\cdot\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{9}$
ㄴ. $72°=72\cdot\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{2}{5}\pi$
ㄷ. $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{180°}{\pi}=\dfrac{90°}{\pi}$
ㄹ. $2=2\cdot\dfrac{180°}{\pi}=\dfrac{360°}{\pi}$
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0482 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 일치하므로 $4\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)
$3\theta=2n\pi$
$\therefore \theta=\dfrac{2n\pi}{3}$ ······ ㉠
$0<\theta<\pi$에서 $0<\dfrac{2n\pi}{3}<\pi$이므로 $0<n<\dfrac{3}{2}$
$\therefore n=1$
이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ 답 $\dfrac{2}{3}\pi$

0483 각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로
$3\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)
$2\theta=(2n+1)\pi$
$\therefore \theta=\dfrac{2n+1}{2}\pi$ ······ ㉠
$\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\dfrac{2n+1}{2}\pi<2\pi$이므로

$2<2n+1<4, \quad \frac{1}{2}<n<\frac{3}{2}$

$\therefore n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{3}{2}\pi$ 답 ③

0484 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$5\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$4\theta=(2n+1)\pi$

$\therefore \theta=\frac{2n+1}{4}\pi$ …… ㉠ ⇨ ❶

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\pi<\frac{2n+1}{4}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로

$4<2n+1<6, \quad \frac{3}{2}<n<\frac{5}{2}$

$\therefore n=2$ ⇨ ❷

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{5}{4}\pi$ ⇨ ❸

답 $\frac{5}{4}\pi$

채점 기준	비율
❶ θ를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ θ의 값을 구할 수 있다.	20%

0485 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일치하므로 $6\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$5\theta=2n\pi$

$\therefore \theta=\frac{2n}{5}\pi$ …… ㉠

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\frac{2n}{5}\pi<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<n<\frac{5}{4} \quad \therefore n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{2}{5}\pi$이므로

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{15}\right)=\sin\left(\frac{2}{5}\pi-\frac{\pi}{15}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 ④

0486 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$7\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n+1}{6}\pi$ …… ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n+1}{6}\pi<\pi$이므로

$0<2n+1<6, \quad -\frac{1}{2}<n<\frac{5}{2}$

$\therefore n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi$ 답 $\frac{3}{2}\pi$

0487 각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+3\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$4\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{n\pi}{2}$ …… ㉠

$\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\frac{n\pi}{2}<2\pi$이므로 $2<n<4$

$\therefore n=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{3}{2}\pi$ 답 ④

0488 ① $405^\circ=360^\circ\times1+45^\circ$

② $420^\circ=360^\circ\times1+60^\circ$

③ $450^\circ=360^\circ\times1+90^\circ$

④ $750^\circ=360^\circ\times2+30^\circ$

⑤ $765^\circ=360^\circ\times2+45^\circ$ 답 ③

0489 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi$

$\therefore \theta=\frac{2n+1}{6}\pi$ …… ㉠ ⇨ ❶

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{6}\pi<\pi$이므로

$3<2n+1<6, \quad 1<n<\frac{5}{2}$

$\therefore n=2$ ⇨ ❷

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{5}{6}\pi$ ⇨ ❸

답 $\frac{5}{6}\pi$

채점 기준	비율
❶ θ를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ θ의 값을 구할 수 있다.	20%

0490 각 θ를 나타내는 동경과 각 2θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+2\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$3\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$ …… ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}<\pi$이므로

$-\frac{1}{6}<\frac{2n}{3}<\frac{5}{6}, \quad -\frac{1}{4}<n<\frac{5}{4}$

$\therefore n=0$ 또는 $n=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$ 답 π

0491 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면

$\frac{1}{2}\cdot r\cdot 2\pi=8\pi \quad \therefore r=8$

따라서 $8\theta=2\pi$이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 답 ②

0492 반지름의 길이가 a, 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴의 호의 길이가 4π이므로

$a\cdot\frac{2}{3}\pi=4\pi \quad \therefore a=6$

따라서 구하는 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\pi=12\pi \quad \therefore b=12$

$\therefore b-a=6$ 답 ⑤

0493 반지름의 길이가 r인 원의 넓이는 πr^2 ⇨ ❶

반지름의 길이가 $4r$이고 호의 길이가 6π인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 4r\cdot 6\pi=12\pi r$ ⇨ ❷

두 넓이가 서로 같으므로

$\pi r^2=12\pi r$

$r^2-12r=0, \quad r(r-12)=0$

$\therefore r=12\ (\because r>0)$ ⇨ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 원의 넓이를 구할 수 있다.	30%
❷ 부채꼴의 넓이를 구할 수 있다.	30%
❸ r의 값을 구할 수 있다.	40%

0494 원의 둘레의 길이는

$2\pi\cdot 4=8\pi$

호의 길이를 l이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이는

$2\cdot 4+l=8+l$

즉 $8\pi=2(8+l)$이므로

$l=4\pi-8$

부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 $l=4\theta$이므로

$4\pi-8=4\theta \quad \therefore \theta=\pi-2$ 답 $\pi-2$

0495 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 12이므로

$2r+l=12 \quad \therefore l=12-2r$

이때 $12-2r>0$, $r>0$이므로

$0<r<6$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(12-2r)$

$=-r^2+6r=-(r-3)^2+9\ (0<r<6)$

따라서 $r=3$일 때 S는 최대이므로 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는 3이다. 답 ①

타쎈 특강 정의역이 실수 전체의 집합인 이차함수의 최대·최소

이차함수 $y=a(x-m)^2+n$에서

① $a>0$이면 최솟값은 $x=m$일 때 n이고, 최댓값은 없다.

② $a<0$이면 최댓값은 $x=m$일 때 n이고, 최솟값은 없다.

0496 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 8이므로

$2r+l=8$

$\therefore l=8-2r$

이때 $8-2r>0$, $r>0$이므로

$0<r<4$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(8-2r)$

$=-r^2+4r=-(r-2)^2+4\ (0<r<4)$

따라서 $r=2$일 때 S는 최댓값 4를 갖는다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$이므로

$4=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\theta \quad \therefore \theta=2$

답 반지름의 길이: 2, 중심각의 크기: 2

0497 부채꼴의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m라 하면 둘레의 길이가 100 m이므로

$2r+l=100$

$\therefore l=100-2r$ ⇨ ❶

이때 $100-2r>0$, $r>0$이므로

$0<r<50$

부채꼴의 넓이를 S m^{2}라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(100-2r)$

$=-r^2+50r=-(r-25)^2+625\ (0<r<50)$ ⇨ ❷

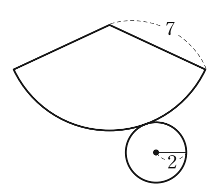
즉 $r=25$일 때 S는 최댓값 625를 갖는다.

따라서 화단의 넓이의 최댓값은 625 m^{2}이다. ⇨ ❸

답 625 m^2

채점 기준	비율
❶ 부채꼴의 호의 길이를 반지름의 길이에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ 부채꼴의 넓이를 완전제곱식의 꼴로 나타낼 수 있다.	70%
❸ 화단의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	10%

0498 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는



$2\pi\cdot 2=4\pi$

이므로 옆면인 부채꼴의 넓이는

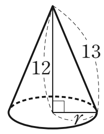
$\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 4\pi=14\pi$

$\therefore$ (원뿔의 겉넓이)$=14\pi+\pi\cdot 2^2=18\pi$

답 ②

0499 [그림1]과 같이 모선의 길이가 13이고 높이가 12인 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r라 하면 피타고라스 정리에 의하여

$r=\sqrt{13^2-12^2}=5$



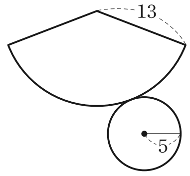
[그림1]

원뿔의 전개도는 [그림2]와 같이 옆면은 부채꼴이고 밑면은 원이다. 부채꼴의 호의 길이는 원의 둘레의 길이와 같으므로

$2\pi\cdot 5=10\pi$

따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

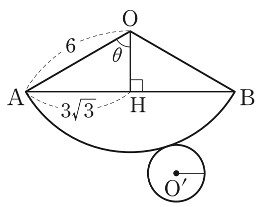
$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 10\pi=65\pi$



[그림2]

답 65π

0500 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=3\sqrt{3}$ ⇨ ❶

$\angle AOH=\theta$라 하면

$\sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이므로

$\theta=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \angle AOB=\frac{2}{3}\pi$ ⇨ ❷

원뿔의 밑면인 원 O'의 둘레의 길이는 부채꼴의 호의 길이와 같으므로

$6\cdot\frac{2}{3}\pi=4\pi$ ⇨ ❸

답 4π

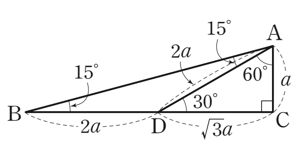
채점 기준	비율
❶ $\overline{AH}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❷ $\angle AOB$의 크기를 구할 수 있다.	40%
❸ 원 O'의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	30%

0501 $\angle ABD+\angle BAD=\angle ADC$이므로

$15^\circ+\angle BAD=30^\circ$

$\therefore \angle BAD=15^\circ$

즉 $\triangle ABD$는 이등변삼각형이므로 오른쪽 그림에서



$\overline{AD}=\overline{BD}=2a$라 하면

$\triangle ADC$에서

$\overline{AC}=a$, $\overline{CD}=\sqrt{3}a$

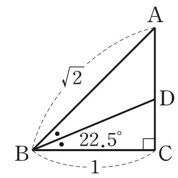
$\therefore \tan 15^\circ=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{a}{(2+\sqrt{3})a}$

$=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$=2-\sqrt{3}$

답 ④

0502 $\angle B=45^\circ$이므로



$\angle ABD=\angle DBC=22.5^\circ$

또 $\overline{BC}:\overline{BA}=\overline{CD}:\overline{AD}$이므로

$1:\sqrt{2}=\overline{CD}:\overline{AD}$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{2}\,\overline{CD}$

$\overline{AD}+\overline{CD}=1$이므로

$(\sqrt{2}+1)\overline{CD}=1$

$\therefore \overline{CD}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$=\sqrt{2}-1$

$\triangle BCD$에서

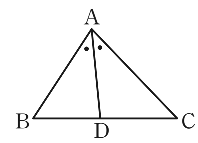
$\tan 22.5^\circ=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$

답 ①

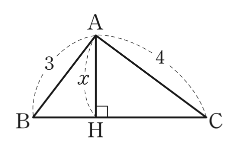
타쎈 특강 삼각형의 내각의 이등분선

$\triangle ABC$에서 $\overline{AD}$가 $\angle A$의 이등분선일 때

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



0503 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AH}=x$라 하면



$\sin B=\frac{x}{3}$, $\sin C=\frac{x}{4}$

$\therefore \frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\frac{x}{4}}{\frac{x}{3}}=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

0504 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$이므로

$\sin\theta=-\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{5}$

답 ③

0505 점 $P\left(-\frac{1}{2},\, a\right)$에서 $\tan\theta=\frac{a}{-\frac{1}{2}}=-2a$이므로

$-2a=-3$ $\quad\therefore a=\frac{3}{2}$

$\therefore r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

답 ④

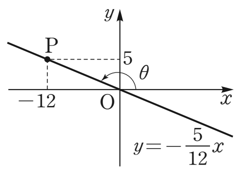
0506 $5x+12y=0$에서 $y=-\frac{5}{12}x$이므로

$\tan\theta=-\frac{5}{12}$ ⇨ ❶

오른쪽 그림에서 직선 $y=-\frac{5}{12}x$ 위의 점 $P(-12,\ 5)$에 대하여

$$\overline{OP}=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13$$

이므로



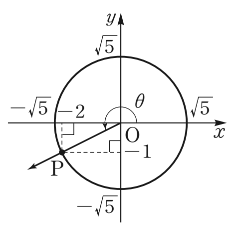
$$\sin\theta=\frac{5}{13},\ \cos\theta=-\frac{12}{13} \quad ⇨ ❷$$

$$\therefore\ 13(\sin\theta+\cos\theta)=13\left\{\frac{5}{13}+\left(-\frac{12}{13}\right)\right\}$$
$$=-7 \quad ⇨ ❸$$

답 -7

채점 기준	비율
❶ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $13(\sin\theta+\cos\theta)$의 값을 구할 수 있다.	10%

0507 θ가 제3사분면의 각이고 $\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원을 그리면 각 θ의 동경과 만나는 점 P는



$$P(-2,\ -1)$$

따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \tan\theta=\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ \csc\theta=-\sqrt{5},\ \cot\theta=2$$
$$\therefore\ \csc^2\theta+\cot^2\theta=5+4=9$$

답 9

0508 점 D의 좌표는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$

점 A는 점 D와 y축에 대하여 대칭이므로 점 A의 좌표는

$$(-\cos\theta,\ \sin\theta)$$

따라서 점 A의 x좌표는 $-\cos\theta$

답 ⑤

0509 (i) $\sin\theta\tan\theta>0$일 때,

$\sin\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$일 때,

$\cos\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제4사분면의 각이다.

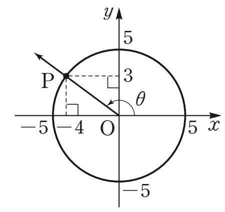
답 ④

0510 θ가 제3사분면의 각이므로

$$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0$$
$$\therefore\ \sqrt{\cos^2\theta}-|\sin\theta|+\cos\theta=-\cos\theta-(-\sin\theta)+\cos\theta$$
$$=\sin\theta$$

답 $\sin\theta$

0511 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$에서 θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta=\frac{3}{5}$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원을 그리면 각 θ의 동경과 만나는 점 P는



$$P(-4,\ 3)$$

따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$$\cos\theta=-\frac{4}{5},\ \tan\theta=-\frac{3}{4}$$
$$\therefore\ \cos\theta-\tan\theta=-\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{20}$$

답 $-\frac{1}{20}$

0512 $\sin\theta>0$, $\sec\theta<0$에서 θ는 제2사분면의 각이므로

$$2n\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2n\pi+\pi\ (n\text{은 정수})$$
$$\therefore\ n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<n\pi+\frac{\pi}{2}$$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$$2k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$$(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\therefore\ 2k\pi+\frac{5}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$$

(i), (ii)에서

$$2k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\text{또는 } 2k\pi+\frac{5}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$$

이때 $\frac{5}{4}\pi<\frac{4}{3}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로 각 $\frac{\theta}{2}$가 될 수 있는 것은 ③이다.

답 ③

0513 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$
$$=\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

답 $\sec\theta$

0514 ① $\cos\theta\sec\theta+\tan\theta\cot\theta=1+1=2$

② $\frac{1}{1-\tan\theta}+\frac{1}{1-\cot\theta}=\frac{1}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}+\frac{1}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

$$=\frac{1}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}+\frac{1}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$=\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}+\dfrac{-\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=1$

③ $\sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=1-\cos^2\theta-\cos^2\theta$

$=1-2\cos^2\theta$

④ $\left(\dfrac{1}{\sin\theta}+1\right)\left(\dfrac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\dfrac{1}{\sin\theta}-1\right)\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-1\right)$

$=\left(\dfrac{1}{\sin\theta}+1\right)\left(\dfrac{1}{\sin\theta}-1\right)\left(\dfrac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-1\right)$

$=\left(\dfrac{1}{\sin^2\theta}-1\right)\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1\right)$

$=(\csc^2\theta-1)(\sec^2\theta-1)$

$=\cot^2\theta\tan^2\theta=1$

⑤ $\dfrac{2\tan\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\tan^2\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta}}{\sec^2\theta}$

$=\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\sec^2\theta}=\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos^2\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta$

답 ④

0515 $\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}+\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$+\sqrt{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}$

$=|\sin\theta+\cos\theta|+|\sin\theta-\cos\theta|$

$=\sin\theta+\cos\theta-(\sin\theta-\cos\theta)$

$=2\cos\theta$

답 ⑤

0516 $\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\dfrac{9}{16}=\dfrac{25}{16}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\csc\theta=\dfrac{5}{4}$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{1}{\csc\theta}=\dfrac{4}{5}$

답 ④

0517 $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\dfrac{\cos^2\theta+1+2\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\dfrac{2(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\dfrac{2}{\cos\theta}$ ⇨ ❶

$\dfrac{2}{\cos\theta}=4$이므로 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$이므로

$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\because \dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi\right)$ ⇨ ❷

답 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	50%
❷ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	50%

0518 $\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}=\dfrac{(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2}{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\sin^2\theta}=2\csc^2\theta$

$2\csc^2\theta=3$이므로 $\csc^2\theta=\dfrac{3}{2}$

$\csc^2\theta=1+\cot^2\theta$에서

$\dfrac{3}{2}=1+\cot^2\theta$, $\cot^2\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \cot\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\because \pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi\right)$

답 ②

0519 $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=2-\sqrt{3}$에서

$1+\tan\theta=(2-\sqrt{3})(1-\tan\theta)$

$(3-\sqrt{3})\tan\theta=1-\sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$이므로

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{\sec^2\theta}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\because \dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi\right)$

답 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0520 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{2}$

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

답 ③

0521 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$, $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$

$\therefore \csc\theta\sec\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\dfrac{9}{4}$

답 $-\dfrac{9}{4}$

0522 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$

$1-2\sin\theta\cos\theta=2$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \sec\theta-\csc\theta=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$$

답 ②

0523 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=2$에서

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=2,\quad \dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$

$\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=2 \quad \therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ ⇨ ❶

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$에서

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\cdot\dfrac{1}{2}=2$

이때 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ ⇨ ❷

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\sqrt{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⇨ ❸

답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\sin^3\theta+\cos^3\theta$의 값을 구할 수 있다.	20%

0524 이차방정식 $2x^2+x+k=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2},\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{2}$ ...... ㉠

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4} \quad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{k}{2}=-\dfrac{3}{8}$

$\therefore k=-\dfrac{3}{4}$

답 ①

0525 계수가 유리수이므로 이차방정식의 한 근이 $3+2\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $3-2\sqrt{2}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=\tan\theta+\cot\theta$

$\therefore \tan\theta+\cot\theta=6$

이때

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

에서 $\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=6$이므로 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{6}$

$\therefore 6\sin\theta\cos\theta=1$

답 1

0526 $2x^2-\sqrt{6}x+k=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{2}$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{3}{2}$

$1+k=\dfrac{3}{2} \quad \therefore k=\dfrac{1}{2}$

이때

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=4$$

$\tan\theta\cdot\cot\theta=1$

이므로 x^2의 계수가 1이고 $\tan\theta$, $\cot\theta$를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-4x+1=0$

답 $x^2-4x+1=0$

0527 전략 어떤 각의 동경의 위치를 구할 때에는 그 각을 일반각으로 나타낸다.

풀이 ㄱ. $105°=105\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{7}{12}\pi$

ㄴ. $1560°=360°\times4+120°$이므로 $1560°$는 제2사분면의 각이다.

ㄷ. $-\dfrac{\pi}{6}=2\pi\times(-1)+\dfrac{11}{6}\pi$

$330°=330\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{11}{6}\pi$

$-750°=-750\times\dfrac{\pi}{180}=-\dfrac{25}{6}\pi$

$=2\pi\times(-3)+\dfrac{11}{6}\pi$

이므로 $-\dfrac{\pi}{6}$, $330°$, $-750°$를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

ㄹ. $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{11}{3}\pi=4\pi$이므로 $\dfrac{\pi}{3}$와 $\dfrac{11}{3}\pi$를 나타내는 동경은 x축에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

0528 전략 중심각의 크기가 θ(라디안)이고, 반지름의 길이가 r인 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 각각 $r\theta$, $\dfrac{1}{2}r^2\theta$이다.

풀이 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}$이고 둘레의 길이가 11이므로

$2r+\frac{3}{4}r=11$, $\quad \frac{11}{4}r=11 \quad \therefore r=4$

따라서 주어진 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{3}{4}=6$

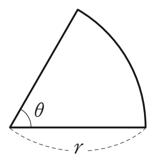
답 6

타쎈 특강 부채꼴의 둘레의 길이

중심각의 크기가 θ(라디안)이고 반지름의 길이가 r인 부채꼴의 둘레의 길이를 l이라 하면

$l=2\times$(반지름의 길이)$+$(호의 길이)

$=2r+r\theta$



0529 전략 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}+\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}$

$=\frac{(\sec\theta+\tan\theta)+(\sec\theta-\tan\theta)}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$

$=\frac{2\sec\theta}{1}=2\sec\theta$

답 ④

0530 전략 θ가 제3사분면의 각이면 $2n\pi+\pi<\theta<2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (n은 정수)임을 이용한다.

풀이 θ가 제3사분면의 각이므로

$2n\pi+\pi<\theta<2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (n은 정수)

$\therefore \frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{2}$ ⇨ ❶

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때,

$\frac{2\cdot 3k}{3}\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2\cdot 3k}{3}\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore 2k\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때,

$\frac{2(3k+1)}{3}\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2(3k+1)}{3}\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore 2k\pi+\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{7}{6}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때,

$\frac{2(3k+2)}{3}\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2(3k+2)}{3}\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore 2k\pi+\frac{5}{3}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{11}{6}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

이상에서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면 또는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다. ⇨ ❷

따라서 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다. ⇨ ❸

답 제2사분면

채점 기준	비율
❶ $\frac{\theta}{3}$의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❷ $\frac{\theta}{3}$가 어느 사분면의 각인지 구할 수 있다.	60%
❸ $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면을 구할 수 있다.	20%

0531 전략 두 각 α, β를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이면 $\alpha+\beta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)임을 이용한다.

풀이 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$6\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12}$ …… ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12}<\pi$이므로

$-\frac{\pi}{12}<\frac{n}{3}\pi<\frac{11}{12}\pi$

$-\frac{1}{4}<n<\frac{11}{4}$

$\therefore n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

각 θ 중에서 크기가 가장 큰 것은 $n=2$를 ㉠에 대입하면

$\alpha=\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{12}=\frac{3}{4}\pi$

각 θ 중에서 크기가 가장 작은 것은 $n=0$을 ㉠에 대입하면

$\beta=0+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$

$\therefore \alpha-\beta=\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{2}{3}\pi$

답 ④

0532 전략 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 각 삼각함수의 값의 부호를 조사한다.

풀이 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$,

$\csc\theta>0$, $\sec\theta<0$, $\cot\theta<0$

이므로

$\sin\theta-\cos\theta>0$, $\sin\theta\cos\theta<0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0533 전략 중심각의 크기가 θ(라디안), 반지름의 길이가 r인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면 $l=r\theta$, $S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r^2\theta$이다.

풀이 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 20이므로

$2r+l=20 \quad \therefore l=20-2r$ ⇨ ❶

이때 $20-2r>0$, $r>0$이므로

$0<r<10$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(20-2r)$$
$$=-r^2+10r=-(r-5)^2+25\ (0<r<10)$$

즉 $r=5$일 때 S는 최댓값 25를 갖는다.
이때 중심각의 크기를 θ라 하면

$$\frac{1}{2}\cdot 5^2\cdot\theta=25 \qquad \therefore\ \theta=2$$

따라서 $a=5$, $b=2$이므로 ⇨ ❷

$a+b=7$ ⇨ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 부채꼴의 호의 길이를 반지름의 길이에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	70%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

다른풀이 넓이가 최대가 될 때의 반지름의 길이가 5이므로 이때의 부채꼴의 호의 길이는 $20-2\cdot 5=10$
이때 중심각의 크기를 θ라 하면

$$5\theta=10 \qquad \therefore\ \theta=2$$

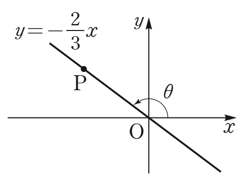
0534 전략 직선 $y=-\frac{2}{3}x$ 위에 있고 제2사분면에 있는 점 P를 잡고 삼각함수의 정의를 이용하여 각 삼각함수의 값을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-\frac{2}{3}x$ 위에 있고 제 2사분면에 있는 점 P를 잡고 그 좌표를

$(-3a,\ 2a)\ (a>0)$

라 하면

$$\overline{OP}=\sqrt{(-3a)^2+(2a)^2}=\sqrt{13}a$$



이므로

$$\csc\theta=\frac{\sqrt{13}a}{2a}=\frac{\sqrt{13}}{2},\ \sec\theta=\frac{\sqrt{13}a}{-3a}=-\frac{\sqrt{13}}{3},$$
$$\tan\theta=\frac{2a}{-3a}=-\frac{2}{3}$$
$$\therefore\ \csc\theta\sec\theta-\tan\theta=\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{13}}{3}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$=-\frac{13}{6}+\frac{2}{3}=-\frac{3}{2}$$

답 $-\frac{3}{2}$

0535 전략 먼저 $\cos\theta$의 값을 구한 후 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$를 이용한다.

풀이 $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{3}{4}$에서 $\quad 4-4\cos\theta=3+3\cos\theta$

$$7\cos\theta=1 \qquad \therefore\ \cos\theta=\frac{1}{7}$$

따라서 $\sec\theta=7$이고 $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$이므로

$$\tan^2\theta=7^2-1=48$$

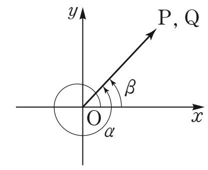
$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로 $\quad \tan\theta<0$

$$\therefore\ \tan\theta=-\sqrt{48}=-4\sqrt{3}$$

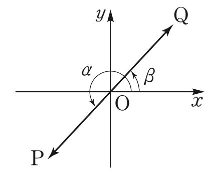
답 $-4\sqrt{3}$

0536 전략 조건에 맞도록 두 동경 OP, OQ의 위치를 좌표평면 위에 나타내어 본다.

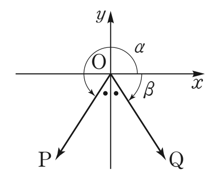
풀이 ㄱ. $\alpha-\beta=2n\pi$ (n은 정수)이므로
$\alpha=\beta+2n\pi$
두 동경 OP, OQ를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
따라서 두 동경 OP, OQ는 일치한다.



ㄴ. 두 동경 OP, OQ가 원점에 대하여 대칭이므로 두 동경을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
$\therefore\ \alpha-\beta=(2n+1)\pi=2n\pi+\pi$



ㄷ. $\alpha=\frac{4}{3}\pi$, $\beta=-\frac{\pi}{3}$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 두 동경 OP, OQ는 y축에 대하여 대칭이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.



답 ①

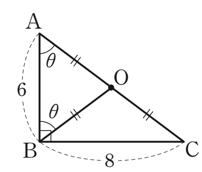
0537 전략 직각삼각형의 외심의 성질과 이등변삼각형의 성질을 이용하여 θ와 크기가 같은 각을 찾는다.

풀이 점 O가 삼각형 ABC의 외심이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$

$\therefore\ \angle OAB=\angle OBA=\theta$

$\overline{AC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$이므로



$$\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},$$
$$\cos\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},$$
$$\tan\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$
$$\therefore\ 15(\sin\theta+\cos\theta)\tan\theta=15\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{4}{3}=28$$

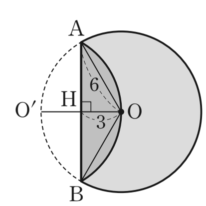
답 ⑤

라셰 특강 삼각형의 외심

(1) 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.
(2) 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.
(3) 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점에 있다.

0538 전략 접힌 부분에서 직각삼각형을 찾고 삼각비를 이용하여 호에 대한 중심각의 크기를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 접힌 선분의 양 끝을 A, B라 하고 원의 중심 O를 지나는 접기 전의 원주 위의 점을 O′이라 하자.
또 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OA}=6,\ \overline{OH}=\overline{O'H}=3$$

이므로 직각삼각형 OAH에서

$$\cos(\angle \mathrm{AOH}) = \frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle \mathrm{AOH} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \angle \mathrm{AOB} = 2\angle \mathrm{AOH} = \frac{2}{3}\pi$$ ⇨ ❶

따라서 접힌 활꼴 부분의 넓이는

(부채꼴 OAB의 넓이) $-\triangle$OAB

$$=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\sin\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=12\pi-9\sqrt{3}$$ ⇨ ❷

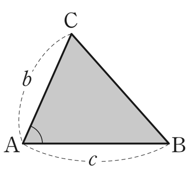
답 $12\pi-9\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ ∠AOB의 크기를 구할 수 있다.	50%
❷ 접힌 활꼴 부분의 넓이를 구할 수 있다.	50%

라센 특강 삼각형의 넓이

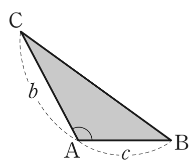
삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

(1) ∠A가 예각인 경우



$S=\frac{1}{2}bc\sin A$

(2) ∠A가 둔각인 경우



$S=\frac{1}{2}bc\sin(\pi-A)$

0539 전략 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구한다.

풀이 $4\sin\theta=3\cos\theta$에서 $\sin\theta=\frac{3}{4}\cos\theta$ …… ㉠

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$$\left(\frac{3}{4}\cos\theta\right)^2+\cos^2\theta=1,\quad \frac{25}{16}\cos^2\theta=1$$

$$\cos^2\theta=\frac{16}{25}\qquad \therefore \cos\theta=\frac{4}{5}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

이것을 ㉠에 대입하면 $\sin\theta=\frac{3}{5}$

$$\therefore \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{5}{4},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}$$

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 $\sec\theta$, $\tan\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=\sec\theta+\tan\theta=2,\ b=\sec\theta\cdot\tan\theta=\frac{15}{16}$$

$$\therefore 8ab=15$$

답 ③

Ⅱ. 삼각함수

05 삼각함수의 그래프

0540 함수 $f(x)$의 주기가 4이므로

$f(x+4)=f(x)$

$\therefore f(14)=f(10)=f(6)=f(2)=1$

답 1

0541 함수 $f(x)$의 주기가 3이므로

$f(x+3)=f(x)$

$\therefore f(8)=f(5)=f(2)$

$0\le x<3$에서 $f(x)=2x$이므로

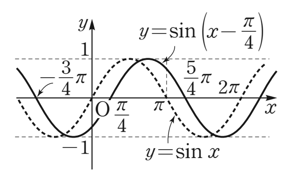
$f(8)=f(2)=4$

답 4

0542 답 (가) -2 (나) 2 (다) 2π

0543 답 (가) -1 (나) 1 (다) π

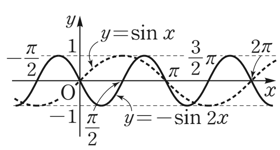
0544 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것과 같다.



따라서 그래프는 위의 그림과 같고, 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$, 주기는 2π이다.

답 풀이 참조

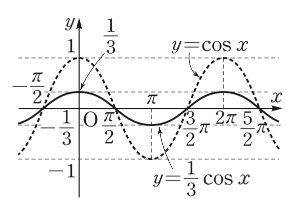
0545 $y=-\sin 2x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.



따라서 그래프는 위의 그림과 같고, 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$, 주기는 π이다.

답 풀이 참조

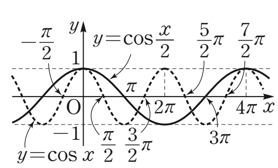
0546 $y=\frac{1}{3}\cos x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배 한 것과 같다.



따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 $\left\{y\,\middle|\, -\frac{1}{3}\le y\le\frac{1}{3}\right\}$, 주기는 2π이다.

답 풀이 참조

0547 $y=\cos\frac{x}{2}$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배 한 것과 같다.

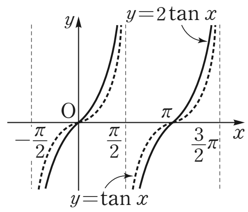


따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$, 주기는 4π이다.

답 풀이 참조

0548 답 (가) π (나) $\frac{\pi}{2}$ (다) $\frac{\pi}{4}$

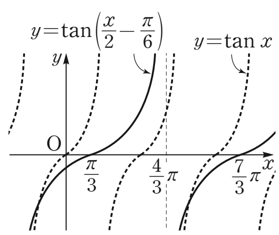
0549 $y=2\tan x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 것과 같다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 실수 전체의 집합, 주기는 π, 점근선의 방정식은



$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

답 풀이 참조

0550 $y=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것과 같다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 실수 전체의 집합, 주기는 2π, 점근선의 방정식은



$x=2n\pi+\frac{4}{3}\pi$ (n은 정수)이다.

답 풀이 참조

0551 $y=\frac{1}{3}\sin 2x$에서 최댓값은 $\frac{1}{3}$, 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이고 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

답 최댓값: $\frac{1}{3}$, 최솟값: $-\frac{1}{3}$, 주기: π

0552 $y=2\cos 3x$에서 최댓값은 2, 최솟값은 -2이고 주기는 $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

0553 $y=-\tan 2x$에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

답 최댓값, 최솟값은 없다, 주기: $\frac{\pi}{2}$

0554 $y=-\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$에서 $y=-\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -1이고 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 4π

0555 $y=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$에서 $y=3\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -4이고 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -4, 주기: π

0556 $y=\tan 2\pi x+4$에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$이다.

답 최댓값, 최솟값은 없다, 주기: $\frac{1}{2}$

0557 $\sin\frac{13}{6}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0558 $\cos\frac{17}{4}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0559 $\tan\frac{13}{3}\pi=\tan\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

0560 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0561 $\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right)=\cos\frac{7}{3}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0562 $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$ 답 -1

0563 $\sin\frac{3}{4}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0564 $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

0565 $\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\cot\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$ 답 $-\sqrt{3}$

0566 $\sin\frac{4}{3}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

0567 $\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

0568 $\tan\frac{7}{6}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

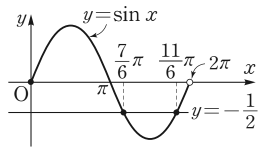
0569 $\sin 105°=\sin(90°+15°)$
$=\cos 15°$
삼각함수표에서 $\cos 15°=0.9659$이므로
$\sin 105°=0.9659$ 답 0.9659

0570 $\cos 343°=\cos(360°-17°)$
$=\cos 17°$
삼각함수표에서 $\cos 17°=0.9563$이므로
$\cos 343°=0.9563$ 답 0.9563

0571 $\tan 164° = \tan(180° - 16°)$
$= -\tan 16°$
삼각함수표에서 $\tan 16° = 0.2867$이므로
$\tan 164° = -0.2867$ 답 -0.2867

0572 답 (가) $\frac{1}{2}$ (나) $\frac{\pi}{6}$ (다) $\frac{5}{6}\pi$

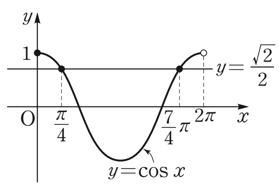
0573 오른쪽 그림과 같이 $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이므로



$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

답 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

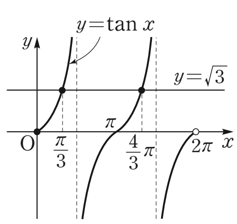
0574 $\sqrt{2}\cos x = 1$에서 $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
오른쪽 그림과 같이 $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi$이므로



$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

답 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

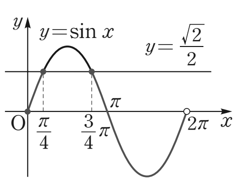
0575 $\tan x - \sqrt{3} = 0$에서 $\tan x = \sqrt{3}$
오른쪽 그림과 같이 $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$이므로



$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

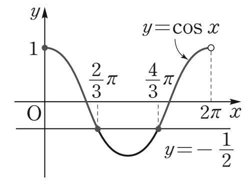
0576 부등식 $\sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$와 만나는 부분 또는 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서



$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi \le x < 2\pi$

답 $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi \le x < 2\pi$

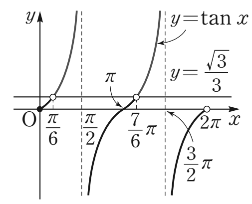
0577 $2\cos x + 1 \ge 0$에서 $\cos x \ge -\frac{1}{2}$
부등식 $\cos x \ge -\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서



$0 \le x \le \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi \le x < 2\pi$

답 $0 \le x \le \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi \le x < 2\pi$

0578 $\sqrt{3}\tan x > 1$에서 $\tan x > \frac{\sqrt{3}}{3}$
부등식 $\tan x > \frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서



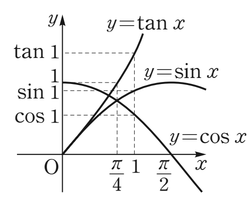
$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

답 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

0579 ④ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 답 ④

0580 ㄱ. 치역은 실수 전체의 집합이다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

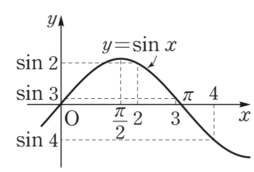
0581 $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$이므로 오른쪽 그림에서



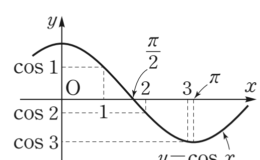
$\cos 1 < \sin 1 < \tan 1$
$\therefore B < A < C$

답 ③

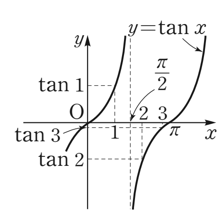
0582 ㄱ. $\frac{\pi}{2} < 2 < 3 < \pi < 4$이므로 오른쪽 그림에서
$\sin 4 < \sin 3 < \sin 2$



ㄴ. $1 < \frac{\pi}{2} < 2 < 3 < \pi$이므로 오른쪽 그림에서
$\cos 3 < \cos 2 < \cos 1$



ㄷ. $1 < \frac{\pi}{2} < 2 < 3 < \pi$이므로 오른쪽 그림에서
$\tan 2 < \tan 3 < \tan 1$
이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.



답 ②

0583 $y=\sin x$의 그래프에서

$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore x_1+x_2=\pi$

$\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{5}{2}\pi$ $\therefore x_3+x_4=5\pi$

$\frac{x_5+x_6}{2}=\frac{9}{2}\pi$ $\therefore x_5+x_6=9\pi$

$\frac{x_7+x_8}{2}=\frac{13}{2}\pi$ $\therefore x_7+x_8=13\pi$ 답 13π

0584 두 점 A, B는 직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$ $\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ …… ㉠

두 점 C, D는 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{4}\pi$ $\therefore \gamma+\delta=\frac{3}{2}\pi$ …… ㉡

두 점 B, C는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \beta+\gamma=\pi$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\alpha+2\beta+2\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\delta)$

$=\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3}{2}\pi=3\pi$ 답 ③

다른풀이 두 점 A, D는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\delta}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \alpha+\delta=\pi$ …… ㉣

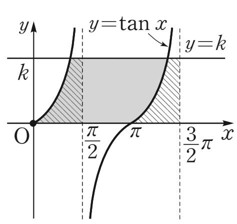
두 점 B, C는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \beta+\gamma=\pi$ …… ㉤

㉣, ㉤에서

$\alpha+2\beta+2\gamma+\delta=(\alpha+\delta)+2(\beta+\gamma)=\pi+2\pi=3\pi$

0585 오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 $y=\tan x$의 그래프와 x축 및 직선 $y=k$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$k\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=k\pi$

즉 $k\pi=5\pi$이므로 $k=5$ 답 5

0586 $y=\sin x$의 그래프가 $0\le x\le\pi$에서 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 $\frac{p+r}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore p+r=\pi$ ⇨ ❶

또 $y=\cos x$의 그래프가 $0\le x<2\pi$에서 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 $\frac{q+s}{2}=\pi$ $\therefore q+s=2\pi$ ⇨ ❷

$\therefore p+q+r+s=(p+r)+(q+s)=3\pi$ ⇨ ❸

답 3π

채점 기준	비율
❶ $p+r$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $q+s$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $p+q+r+s$의 값을 구할 수 있다.	20%

0587 $y=2\sin(\pi x-\pi)+1=2\sin\pi(x-1)+1$의 그래프는 $y=2\sin\pi x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=1$, $n=1$이므로 $m+n=2$ 답 ⑤

0588 ㄱ. $y=\cos(2x-\pi)+\frac{1}{2}=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄴ. $y=2\cos 2x-1$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄷ. $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. $y=\cos(2x+3\pi)=\cos 2\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{3}{2}\pi$만큼 평행이동한 것과 같다.

이상에서 $y=\cos 2x$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ②

0589 $y=\sin 3x-1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sin 3x-1$ $\therefore y=-\sin 3x+1$

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로

$a+b=0$ 답 0

0590 $y=\sin\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sin\frac{1}{2}(x-\pi)$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sin\frac{1}{2}(-x-\pi)$

$-y=-\sin\frac{1}{2}(x+\pi)$, $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)$

$\therefore y=\cos\frac{x}{2}$ 답 ③

0591 ① 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

② 최댓값은 $2-1=1$이다.

③ 최솟값은 $-2-1=-3$이다.

④ $x=0$을 대입하면

$y=2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-1=-2\sin\frac{\pi}{3}-1=-\sqrt{3}-1$

따라서 그래프는 원점을 지나지 않는다.

⑤ $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1=2\sin2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1$의 그래프는 $y=2\sin2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같다.

답 ④

0592 $y=3\sin(2x-\pi)+1$에서

$a=3+1=4$, $b=-3+1=-2$, $c=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$\therefore abc=-8\pi$

답 -8π

0593 ① $y=\sin\pi x-2$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

② $y=\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

③ $y=\tan\frac{\pi}{2}x+2$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

④ $y=2\tan\frac{x}{2}-1$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

⑤ $y=3\sin\pi(x-1)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

따라서 주기가 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

답 ④

0594 $y=3\cos\frac{1}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=3\cos\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-3$ ⇨ ❶

이때 최댓값은 $3-3=0$, 최솟값은 $-3-3=-6$이므로

$M=0$, $m=-6$ ⇨ ❷

$\therefore M+m=-6$ ⇨ ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ $y=3\cos\frac{1}{2}x$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40%
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	10%

0595 ㄱ. $f(x)=\tan\frac{x}{2}+1$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$이다.

ㄴ. $f(-x)=\tan\left(\frac{-x}{2}\right)+1=-\tan\frac{x}{2}+1\neq-f(x)$

ㄷ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 없다.

ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2n\pi+\pi$ (n은 정수)이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

0596 $f(x)=a\cos\pi x+b$의 최댓값이 3이고 $a>0$이므로

$a+b=3$ ...... ㉠

$f\left(\frac{1}{3}\right)=2$이므로 $a\cos\frac{\pi}{3}+b=2$

$\frac{1}{2}a+b=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore a-b=1$

답 ④

0597 $f(x)=a\tan bx+2$의 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=2\pi$ $\therefore b=\frac{1}{2}$

또 함수 $f(x)=a\tan\frac{1}{2}x+2$에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로

$a\tan\frac{\pi}{4}+2=0$ $\therefore a=-2$

$\therefore ab=-1$

답 ③

0598 $f(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{2}-bx\right)+c$에서 최댓값이 5이고 $a>0$이므로

$a+c=5$ ...... ㉠

주기가 2π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=2\pi$

$\therefore b=1$

또 함수 $f(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+c$에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3$이므로

$a\sin\frac{\pi}{6}+c=3$ $\therefore \frac{1}{2}a+c=3$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $c=1$

$\therefore a+b-c=4$

답 4

0599 주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로

$a=2$

또 주기가 $\frac{2}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\therefore b=2$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\sin(2x-c)$이고, 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$을 지나므로

$0=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-c\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}-c\right)=0$

$0<c<\pi$이므로 $c=\frac{\pi}{3}$

$\therefore abc=\frac{4}{3}\pi$

답 $\frac{4}{3}\pi$

0600 주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$a+c=3$, $-a+c=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=1$ ⇨ ❶

또 주기가 $3\pi-(-\pi)=4\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi$ $\therefore b=\frac{1}{2}$ ⇨ ❷

$\therefore abc=1$ ⇨ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a, c의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	20%

0601 주어진 함수의 주기가 2π이고 $a>0$이므로

$$\frac{\pi}{a}=2\pi \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\tan\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이므로

$$y=\tan\frac{1}{2}(x-\pi)=\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{2}\right) \qquad \therefore b=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore ab=\frac{\pi}{4}$$

답 ②

0602 주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -5이고 $a>0$이므로

$a+b=3,\ -a+b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=-1$

$$\therefore y=4\cos\frac{\pi}{4}(2x-1)-1=4\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)-1$$

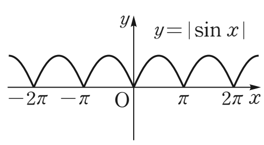
따라서 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이고, 그래프에서 주기는 $2\left(c-\frac{1}{2}\right)$이므로

$$2\left(c-\frac{1}{2}\right)=4 \qquad \therefore c=\frac{5}{2}$$

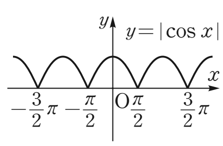
$$\therefore a+2b+2c=7$$

답 ①

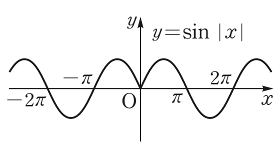
0603 $y=|\sin x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



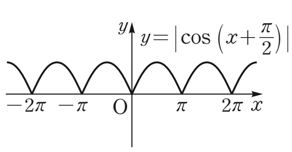
ㄱ. $y=|\cos x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. $y=\sin|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄷ. $y=\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이상에서 $y=|\sin x|$의 그래프와 일치하는 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

0604 $y=4\cos 3x$의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이고, $y=|\tan ax|$의 주기는 $\dfrac{\pi}{|a|}$이므로 ➡ ❶

$$\frac{\pi}{|a|}=\frac{2}{3}\pi, \qquad |a|=\frac{3}{2}$$

$$\therefore a=\frac{3}{2}\ (\because a>0)$$ ➡ ❷

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ 두 함수의 주기를 구할 수 있다.	60%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%

0605 $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{13}{6}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\tan\frac{5}{6}\pi=-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore (\text{주어진 식})=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0606 $\sin 260^\circ=\sin(90^\circ\times3-10^\circ)=-\cos 10^\circ=-0.9848$

$\cos 110^\circ=\cos(90^\circ\times1+20^\circ)=-\sin 20^\circ=-0.3420$

$$\therefore \sin 260^\circ-\cos 110^\circ=-0.9848-(-0.3420)=-0.6428$$

답 ②

0607 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$

ㄱ. $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

ㄴ. $\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$

ㄷ. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$

ㄹ. $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

이상에서 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$의 값과 같은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

0608 $\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\theta\right)=\cos\theta,\ \cos(2\pi+\theta)=\cos\theta,$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta,\ \sin(\pi+\theta)=-\sin\theta,$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\frac{\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{-\sin\theta\cdot(-\tan\theta)^2}{-\sin\theta}=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

답 $\sec^2\theta$

0609 $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta,$

$\cos(3\pi+\theta)=-\cos\theta,\ \sin(\pi-\theta)=\sin\theta,$

$\sin(3\pi-\theta)=\sin\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\left\{\frac{\cos\theta\cdot(-\cos\theta)}{\cos\theta}\right\}^2+\left\{\frac{\sin\theta\cdot(-\sin\theta)}{\sin\theta}\right\}^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

답 ③

0610 $\tan 100° = \tan(90° \times 1 + 10°) = -\cot 10°$,
$\cos 130° = \cos(90° \times 1 + 40°) = -\sin 40°$,
$\tan 260° = \tan(90° \times 3 - 10°) = \cot 10°$
$\therefore$ (주어진 식) $= \sin 40° - \cot 10° - \sin 40° + \cot 10° = 0$

답 0

0611 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \cos\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\right\} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$이므로

$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

$= \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = 1$

답 1

0612 $\cos(90° - \alpha°) = \sin\alpha°$이므로
$\cos^2(90° - \alpha°) + \cos^2\alpha° = \sin^2\alpha° + \cos^2\alpha° = \boxed{1}$
$\therefore \cos^2 5° + \cos^2 10° + \cos^2 15° + \cdots + \cos^2 85°$
$= (\cos^2 5° + \cos^2 85°) + (\cos^2 10° + \cos^2 80°)$
$\quad + (\cos^2 15° + \cos^2 75°) + \cdots + (\cos^2 40° + \cos^2 50°) + \cos^2 45°$
$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{8\text{개}} + \frac{1}{2} = 8 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{17}{2}}$
따라서 $a = 1$, $b = \frac{17}{2}$이므로
$a + b = \frac{19}{2}$

답 ⑤

0613 $\tan 89° = \tan(90° - 1°) = \cot 1°$
$\tan 88° = \tan(90° - 2°) = \cot 2°$
$\vdots$
$\tan 46° = \tan(90° - 44°) = \cot 44°$ ⇨ ❶
$\therefore \tan 1° \times \tan 2° \times \cdots \times \tan 88° \times \tan 89°$
$= \tan 1° \times \tan 2° \times \cdots \times \tan 44° \times \tan 45°$
$\quad \times \cot 44° \times \cdots \times \cot 2° \times \cot 1°$
$= \tan 45° = 1$ ⇨ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 삼각함수의 각을 변환할 수 있다.	70%
❷ 식의 값을 구할 수 있다.	30%

0614 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle C = 90°$
$\therefore \alpha + \beta = 90°$
또 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$
$\therefore \sin(\alpha + 2\beta) = \sin(90° + \beta) = \cos\beta$
$= \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

0615 삼각형의 세 내각의 크기 A, B, C에 대하여
$A + B + C = \pi \qquad \therefore B + C = \pi - A$
$\therefore \cos\left(\frac{B + C - 2\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi - A - 2\pi}{2}\right)$
$= \cos\left(-\frac{\pi + A}{2}\right)$
$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right)$
$= -\sin\frac{A}{2}$
$= -\frac{1}{3}$

답 ②

0616 $5\theta = \pi$이므로
$\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 9\theta$
$= \cos 2\theta + \cos(5\theta - \theta) + \cos 5\theta + \cos(5\theta + 2\theta) + \cos(10\theta - \theta)$
$= \cos 2\theta + \cos(\pi - \theta) + \cos\pi + \cos(\pi + 2\theta) + \cos(2\pi - \theta)$
$= \cos 2\theta - \cos\theta - 1 - \cos 2\theta + \cos\theta$
$= -1$

답 ②

0617 $-1 \le \cos 3x \le 1$이므로
$-4 \le \cos 3x - 3 \le -2, \qquad 2 \le |\cos 3x - 3| \le 4$
$4 \le 2|\cos 3x - 3| \le 8$
$\therefore 5 \le 2|\cos 3x - 3| + 1 \le 9$
따라서 주어진 함수의 최댓값은 9, 최솟값은 5이므로
$M = 9$, $m = 5$
$\therefore M + m = 14$

답 ④

0618 $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$이므로
$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3\cos x - 1$
$= -\cos x + 3\cos x - 1 = 2\cos x - 1$
$-1 \le \cos x \le 1$이므로 $\qquad -3 \le 2\cos x - 1 \le 1$
따라서 주어진 함수의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이므로
$M = 1$, $m = -3 \qquad \therefore M - m = 4$

답 4

0619 $-1 \le \sin 3x \le 1$이므로
$-3 \le \sin 3x - 2 \le -1, \qquad 1 \le |\sin 3x - 2| \le 3$
$\therefore a + b \le a|\sin 3x - 2| + b \le 3a + b$ ($\because a > 0$) ⇨ ❶
따라서 주어진 함수의 최댓값이 $3a + b$, 최솟값이 $a + b$이므로
$3a + b = 5$, $a + b = 1$ ⇨ ❷
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\qquad a = 2$, $b = -1$ ⇨ ❸
$\therefore a - b = 3$ ⇨ ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 함숫값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❷ 최댓값과 최솟값을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $a - b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0620 $y=-|3\sin x-a|+4$에서 $-1\le\sin x\le 1$이고 $a>0$이므로 $\sin x=-1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

즉 $-|-3-a|+4=-1$이므로

$-(3+a)+4=-1$, $\quad -3-a=-5$

$\therefore a=2$

$\therefore y=-|3\sin x-2|+4$

따라서 주어진 함수는 $\sin x=\frac{2}{3}$일 때 최댓값 4를 가지므로

$b=4$

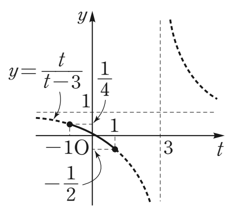
$\therefore a+b=6$

답 6

0621 $y=\frac{\cos x}{\cos x-3}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=\frac{t}{t-3}=\frac{t-3+3}{t-3}=\frac{3}{t-3}+1$$

따라서 오른쪽 그림에서



$t=-1$일 때 최댓값은 $\frac{1}{4}$,

$t=1$일 때 최솟값은 $-\frac{1}{2}$

이므로 $M=\frac{1}{4}$, $m=-\frac{1}{2}$

$\therefore M-m=\frac{3}{4}$

답 ①

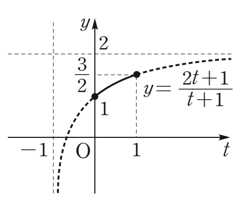
타쎈 특강 함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프

함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\,(k\neq 0)$의 그래프는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

0622 $y=\frac{2\tan x+1}{\tan x+1}$에서 $\tan x=t$로 놓으면 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $0\le t\le 1$이고

$$y=\frac{2t+1}{t+1}=\frac{2(t+1)-1}{t+1}=-\frac{1}{t+1}+2$$ ⇨ ❶

오른쪽 그림에서



$t=1$일 때 최댓값은 $\frac{3}{2}$,

$t=0$일 때 최솟값은 1

이므로 주어진 함수의 치역은

$\left\{y\,\middle|\,1\le y\le\frac{3}{2}\right\}$ ⇨ ❷

따라서 $a=1$, $b=\frac{3}{2}$이므로 $a+b=\frac{5}{2}$ ⇨ ❸

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ t에 대한 유리함수를 구할 수 있다.	30%
❷ 주어진 함수의 치역을 구할 수 있다.	50%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

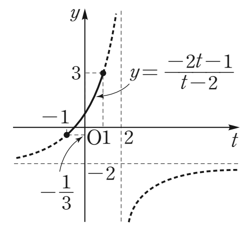
0623 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로 주어진 함수의 식은

$$y=\frac{-2\sin x-1}{\sin x-2}$$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=\frac{-2t-1}{t-2}=\frac{-2(t-2)-5}{t-2}=-\frac{5}{t-2}-2$$

오른쪽 그림에서



$t=1$일 때 최댓값은 3,

$t=-1$일 때 최솟값은 $-\frac{1}{3}$

이므로 $M=3$, $m=-\frac{1}{3}$

$\therefore Mm=-1$

답 -1

0624 $y=\sin^2 x-2\cos x+1$

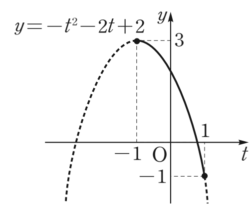
$=(1-\cos^2 x)-2\cos x+1$

$=-\cos^2 x-2\cos x+2$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2-2t+2=-(t+1)^2+3$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 3이므로



$b=3$

또 $t=-1$, 즉 $\cos x=-1$에서

$x=\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

$\therefore a=\pi$

$\therefore ab=3\pi$

답 ⑤

0625 $y=\cos^2 x+4\sin x+a$

$=(1-\sin^2 x)+4\sin x+a$

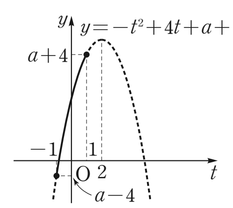
$=-\sin^2 x+4\sin x+a+1$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2+4t+a+1$

$=-(t-2)^2+a+5$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최솟값은 $a-4$이므로



$a-4=-1$

$\therefore a=3$

답 3

0626 $\sin\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)=\cos x$, $\cos(2\pi-x)=\cos x$이므로 주어진 함수의 식은

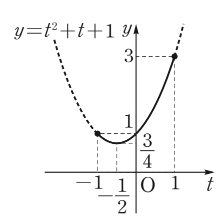
$$y=\sin^2\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)+\cos(2\pi-x)+1$$

$=\cos^2 x+\cos x+1$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

오른쪽 그림에서



$t=1$일 때 최댓값은 3,

$t=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{3}{4}$

이므로 $M=3$, $m=\frac{3}{4}$

$\therefore Mm=\frac{9}{4}$

답 ⑤

0627 이차방정식 $2x^2-4x\sin\theta-\cos^2\theta=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{4\sin\theta}{2}=2\sin\theta$$

$$\alpha\beta=-\frac{\cos^2\theta}{2}$$

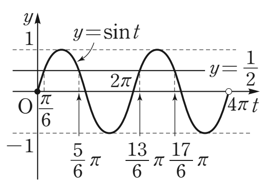
$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(2\sin\theta)^2-2\cdot\left(-\frac{\cos^2\theta}{2}\right)\\&=4\sin^2\theta+\cos^2\theta\\&=4\sin^2\theta+(1-\sin^2\theta)\\&=3\sin^2\theta+1\end{aligned}$$

$\alpha^2+\beta^2=y$라 하고 $\sin\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=3t^2+1$$

따라서 $t=0$일 때 최솟값 1을 갖는다. 답 1

0628 $2x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $0\le t<4\pi$이고 주어진 방정식은 $\sin t=\frac{1}{2}$



오른쪽 그림과 같이 $0\le t<4\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표가

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{17}{6}\pi$$

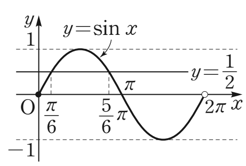
이므로

$$x=\frac{\pi}{12}\text{ 또는 }x=\frac{5}{12}\pi\text{ 또는 }x=\frac{13}{12}\pi\text{ 또는 }x=\frac{17}{12}\pi$$

따라서 방정식 $\sin 2x=\frac{1}{2}$의 근이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0629 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=-\sin x$이므로 주어진 방정식은

$$3\sin x-\sin x=1\qquad\therefore\ \sin x=\frac{1}{2}$$



오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이므로

$$x=\frac{\pi}{6}\text{ 또는 }x=\frac{5}{6}\pi$$

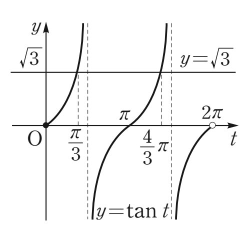
따라서 모든 실근의 합은

$$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$$

답 π

0630 $\tan\frac{x}{2}-\sqrt{3}=0$에서 $\tan\frac{x}{2}=\sqrt{3}$

$\frac{x}{2}=t$로 놓으면 $0\le x<4\pi$에서 $0\le t<2\pi$



오른쪽 그림과 같이 $0\le t<2\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$이므로

$$x=\frac{2}{3}\pi\text{ 또는 }x=\frac{8}{3}\pi$$

$$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi+\frac{8}{3}\pi=\frac{10}{3}\pi$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\frac{10}{3}\pi\\&=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)\\&=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ②

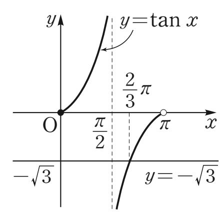
0631 $\sin x=-\sqrt{3}\cos x$에서 $\cos x=0$인 경우 $\sin x\neq0$이므로

$\sin x+\sqrt{3}\cos x\neq0$

$\therefore\ \cos x\neq0$

$\sin x=-\sqrt{3}\cos x$에서 양변을 $\cos x$로 나누어 정리하면

$$\frac{\sin x}{\cos x}=-\sqrt{3}\qquad\therefore\ \tan x=-\sqrt{3}$$

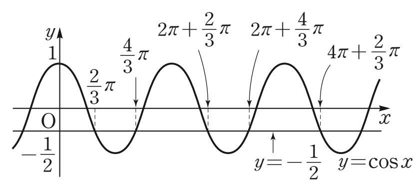


오른쪽 그림과 같이 $0\le x<\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-\sqrt{3}$의 교점의 x좌표가 $\frac{2}{3}\pi$이므로

$$x=\frac{2}{3}\pi$$

답 $x=\frac{2}{3}\pi$

0632 방정식 $\cos x=-\frac{1}{2}$을 만족시키는 수는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표와 같다.



즉 $\cos x=-\frac{1}{2}$을 만족시키는 양수 x를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ 2\pi+\frac{2}{3}\pi,\ 2\pi+\frac{4}{3}\pi,\ 4\pi+\frac{2}{3}\pi,\ \cdots$$

이므로 5번째 수는

$$4\pi+\frac{2}{3}\pi=\frac{14}{3}\pi$$

답 $\frac{14}{3}\pi$

0633 $6\cos^2x+\sin x-1=0$에서

$6(1-\sin^2x)+\sin x-1=0\qquad\therefore\ 6\sin^2x-\sin x-5=0$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $0\le t\le1$이고

$6t^2-t-5=0,\qquad(6t+5)(t-1)=0$

$\therefore\ t=1\ (\because\ 0\le t\le1)$

$t=1$, 즉 $\sin x=1$에서

$x=\frac{\pi}{2}\ (\because\ 0\le x<\pi)$

답 $x=\frac{\pi}{2}$

0634 $2\cos^2x-\sin(\pi-x)-1=0$에서

$2(1-\sin^2x)-\sin x-1=0$

05 삼각함수의 그래프

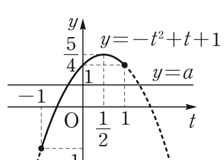
$2\sin^2 x+\sin x-1=0$
$(\sin x+1)(2\sin x-1)=0$
$\therefore\ \sin x=-1$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$
$0\le x<2\pi$이므로
$\sin x=-1$에서 $\quad x=\frac{3}{2}\pi$
$\sin x=\frac{1}{2}$에서 $\quad x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$
따라서 $M=\frac{3}{2}\pi$, $m=\frac{\pi}{6}$이므로
$M+m=\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{3}\pi$

답 $\frac{5}{3}\pi$

0635 $\tan x+\cot x=2$, 즉 $\tan x+\frac{1}{\tan x}=2$의 양변에 $\tan x$를 곱하면
$\tan^2 x+1=2\tan x$, $\quad \tan^2 x-2\tan x+1=0$
$(\tan x-1)^2=0 \quad \therefore\ \tan x=1$
$\therefore\ x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ ($\because\ 0\le x<2\pi$)
따라서 모든 실근의 합은
$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

답 ⑤

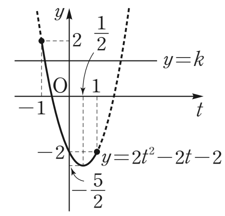
0636 방정식 $\cos^2 x+\sin x-a=0$, 즉 $\cos^2 x+\sin x=a$가 실근을 가지려면 함수 $y=\cos^2 x+\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$가 교점을 가져야 한다.
$y=\cos^2 x+\sin x$에서
$y=(1-\sin^2 x)+\sin x$
$=-\sin^2 x+\sin x+1$
이때 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고
$y=-t^2+t+1$
$=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$
따라서 오른쪽 그림에서 함수 $y=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는



$-1\le a\le\frac{5}{4}$

답 ③

0637 방정식 $2\sin^2(\pi+x)+2\cos x+k=0$, 즉 $-2\sin^2(\pi+x)-2\cos x=k$가 실근을 가지려면 함수 $y=-2\sin^2(\pi+x)-2\cos x$의 그래프와 직선 $y=k$가 교점을 가져야 한다.
$y=-2\sin^2(\pi+x)-2\cos x$에서
$y=-2\sin^2 x-2\cos x$
$=-2(1-\cos^2 x)-2\cos x$
$=2\cos^2 x-2\cos x-2$
이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고
$y=2t^2-2t-2=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$ ⇨ ❶
따라서 오른쪽 그림에서 함수 $y=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는
$-\frac{5}{2}\le k\le 2$ ⇨ ❷

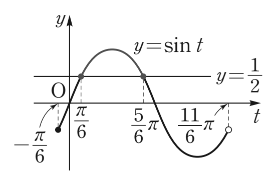


따라서 $M=2$, $m=-\frac{5}{2}$이므로
$Mm=-5$ ⇨ ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차함수를 구할 수 있다.	50%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ Mm의 값을 구할 수 있다.	20%

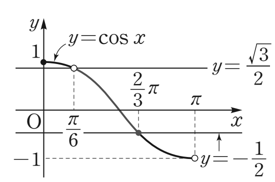
0638 $x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}\le t<\frac{11}{6}\pi$이고,
주어진 부등식은 $\quad \sin t\ge\frac{1}{2}$
오른쪽 그림에서 부등식 $\sin t\ge\frac{1}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{5}{6}\pi$이므로



$\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5}{6}\pi$
$\therefore\ \frac{\pi}{3}\le x\le\pi$
따라서 $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\pi$이므로
$a+b=\frac{4}{3}\pi$

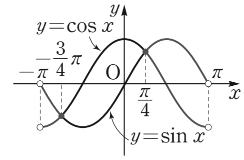
답 $\frac{4}{3}\pi$

0639 오른쪽 그림에서 부등식 $-\frac{1}{2}\le\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는
$\frac{\pi}{6}<x\le\frac{2}{3}\pi$



답 ①

0640 부등식 $\sin x\ge\cos x$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프와 만나는 부분 또는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서 부등식 $\sin x\ge\cos x$의 해는



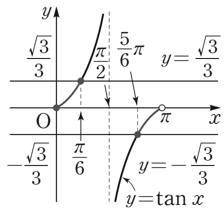
$-\pi<x\le-\frac{3}{4}\pi$ 또는
$\frac{\pi}{4}\le x<\pi$
따라서 주어진 부등식의 해가 될 수 없는 것은 ②이다.

답 ②

0641 $|3\tan x|\le\sqrt{3}$에서 $\quad -\sqrt{3}\le 3\tan x\le\sqrt{3}$
$\therefore\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\le\tan x\le\frac{\sqrt{3}}{3}$

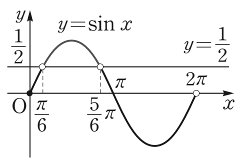
오른쪽 그림에서 부등식
$-\frac{\sqrt{3}}{3}\le\tan x\le\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는
$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<\pi$

답 ④



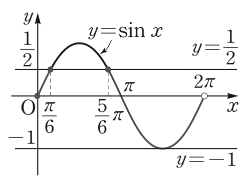
0642 $2\cos^2 x<3\sin x$에서 $\quad 2\cos^2 x-3\sin x<0$
$2(1-\sin^2 x)-3\sin x<0,\quad 2\sin^2 x+3\sin x-2>0$
$(2\sin x-1)(\sin x+2)>0$
$0\le x<2\pi$에서 $\sin x+2>0$이므로
$2\sin x-1>0\qquad\therefore \sin x>\frac{1}{2}$
오른쪽 그림에서 부등식 $\sin x>\frac{1}{2}$의 해는
$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$

답 ②



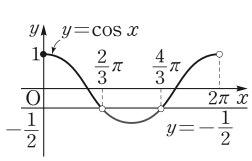
0643 $2\cos^2 x-\sin x-1\ge0$에서
$2(1-\sin^2 x)-\sin x-1\ge0$
$2\sin^2 x+\sin x-1\le0$
$(2\sin x-1)(\sin x+1)\le0$
$\therefore -1\le\sin x\le\frac{1}{2}$
오른쪽 그림에서 부등식
$-1\le\sin x\le\frac{1}{2}$의 해는
$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

답 $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

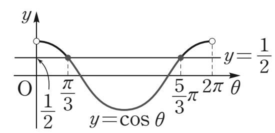


0644 $2\sin^2 x-5\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)>4$에서
$2(1-\cos^2 x)-5\cos x-4>0$
$2\cos^2 x+5\cos x+2<0$
$(2\cos x+1)(\cos x+2)<0$
$0\le x<2\pi$에서 $\cos x+2>0$이므로
$2\cos x+1<0$
$\therefore \cos x<-\frac{1}{2}$
오른쪽 그림에서 부등식 $\cos x<-\frac{1}{2}$의 해는
$\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$
따라서 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{4}{3}\pi$이므로
$\beta-\alpha=\frac{2}{3}\pi$

답 ③



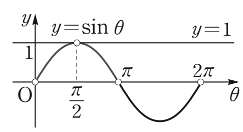
0645 이차방정식 $x^2+2\sqrt{2}x\sin\theta+3\cos\theta=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(\sqrt{2}\sin\theta)^2-3\cos\theta\ge0$
$2\sin^2\theta-3\cos\theta\ge0$
$2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta\ge0$
$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2\le0$
$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)\le0$
$0<\theta<2\pi$에서 $\cos\theta+2>0$이므로
$2\cos\theta-1\le0$
$\therefore \cos\theta\le\frac{1}{2}$
따라서 오른쪽 그림에서 구하는 θ의 값의 범위는
$\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi$



답 $\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi$

0646 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+4x\sin\theta+4\sin\theta=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=4\sin^2\theta-4\sin\theta<0$
$4\sin\theta(\sin\theta-1)<0$
$\therefore 0<\sin\theta<1$
오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$
따라서 조건을 만족시키지 않는 θ의 값은 ②이다.

답 ②



0647 $y=x^2-2x\sin\theta-\cos^2\theta$
$=(x-\sin\theta)^2-\sin^2\theta-\cos^2\theta$
$=(x-\sin\theta)^2-1$
이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(\sin\theta,\ -1)$ ⇨ ❶
이 꼭짓점이 직선 $y=\sqrt{2}x$ 위에 있으므로
$-1=\sqrt{2}\sin\theta\qquad\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⇨ ❷
$0\le\theta<2\pi$이므로 $\quad\theta=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\theta=\frac{7}{4}\pi$
따라서 θ의 최댓값은 $\frac{7}{4}\pi$이다. ⇨ ❸

답 $\frac{7}{4}\pi$

채점 기준	비율
❶ 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ θ의 최댓값을 구할 수 있다.	30%

0648 전략 세 함수 $y=a\sin bx$, $y=a\cos bx$, $y=a\tan bx$의 주기는 각각 $\frac{2\pi}{|b|}$, $\frac{2\pi}{|b|}$, $\frac{\pi}{|b|}$이다.

풀이 $y=\frac{1}{2}\sin 3x$, $y=2\cos\frac{1}{2}x$, $y=\tan 2x$의 주기는 각각

$a=\frac{2}{3}\pi$, $b=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$, $c=\frac{\pi}{2}$

이므로 $\quad c<a<b$ 답 ⑤

0649 전략 각 관계식을 직접 대입하여 주어진 등식이 성립하는지 확인한다.

풀이 ① $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$에서 $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$이므로

$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha\neq\tan\alpha$

② $\beta-\alpha=\pi$에서 $\beta=\pi+\alpha$이므로

$\tan\beta=\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$

③ $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$에서 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$이므로

$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha\neq\tan\alpha$

④ $\alpha+\beta=\pi$에서 $\beta=\pi-\alpha$이므로

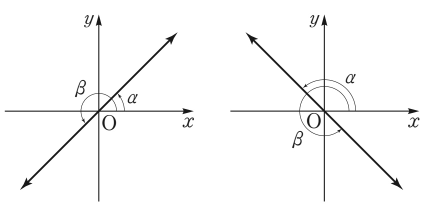
$\tan\beta=\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha\neq\tan\alpha$

⑤ $\alpha+\beta=2\pi$에서 $\beta=2\pi-\alpha$이므로

$\tan\beta=\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha\neq\tan\alpha$

답 ②

다른풀이 $\tan\alpha=\tan\beta$이고 $0<\alpha<\beta<2\pi$이므로 두 각을 좌표평면 위에 나타내면 다음의 두 가지 경우가 있다.



두 경우 모두 각 α, β의 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$\beta=\alpha+\pi \qquad \therefore \beta-\alpha=\pi$

0650 전략 $y=a\sin bx$에서 b는 주기를 결정함을 이용한다.

풀이 주어진 그래프에서 최댓값은 5, 최솟값은 -5이고 $a>0$이므로 $\quad a=5$

주어진 그래프에서 주기가 π이고 $b>0$이므로

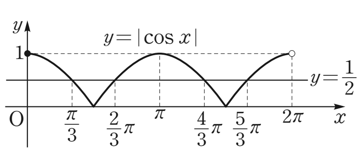
$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$

$\therefore a-b=3$ 답 3

0651 전략 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 방정식의 근을 구한다.

풀이 방정식 $|\cos x|=\frac{1}{2}$의 근은 함수 $y=|\cos x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표이다. ⇨ ❶

오른쪽 그림에서 구하는 근은



$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ⇨ ❷

따라서 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi=4\pi$ ⇨ ❸

답 4π

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 근의 의미를 이해할 수 있다.	20%
❷ 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	60%
❸ 모든 실근의 합을 구할 수 있다.	20%

다른풀이 $|\cos x|=\frac{1}{2}$에서

$\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$\cos x=\frac{1}{2}$에서 $\quad x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0\le x<2\pi$)

$\cos x=-\frac{1}{2}$에서 $\quad x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ ($\because 0\le x<2\pi$)

따라서 모든 실근의 합은

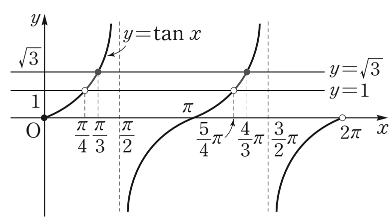
$\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi=4\pi$

라센특강 $y=|f(x)|$의 그래프

$y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.
(i) $y=f(x)$의 그래프를 그린다.
(ii) $y\ge0$인 부분은 그대로 둔다.
(iii) $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한다.

0652 전략 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 부등식의 해를 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 부등식 $1<\tan x\le\sqrt{3}$의 해는



$\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi<x\le\frac{4}{3}\pi$

답 $\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi<x\le\frac{4}{3}\pi$

0653 전략 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x-p)=f(x+p)$이면 $f(x)=f(x+2p)$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x-2)=f(x+2)$이므로 x 대신 $x+2$를 대입하면 $\quad f(x)=f(x+4)$

$\therefore f\left(\frac{61}{4}\right)=f\left(\frac{45}{4}\right)=f\left(\frac{29}{4}\right)=f\left(\frac{13}{4}\right)=f\left(-\frac{3}{4}\right)$

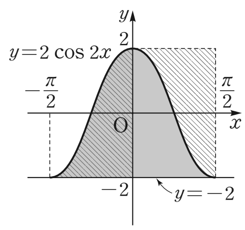
$-2\le x\le2$에서 $f(x)=\sin\pi x$이므로

$f\left(\frac{61}{4}\right)=f\left(-\frac{3}{4}\right)=\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ③

0654 전략 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 넓이가 같은 부분을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는

$\frac{\pi}{2}\cdot 4=2\pi$



답 ③

0655 전략 $y=a\cos(bx+c)+d$에서 a, d는 최댓값, 최솟값을 결정하고, b는 주기를 결정함을 이용한다.

풀이 ㄱ. 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이므로 모든 실수 x에 대하여

$$f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=f(x)$$

$$\therefore f(x+2\pi)=f\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)=f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=f(x)$$

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $4-1=3$, 최솟값은 $-4-1=-5$이다.

ㄷ. $f(x)=4\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)-1=4\cos 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=4\cos 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

참고 $f(x)=4\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)-1=4\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-1$
$=4\sin 3x-1$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=4\sin 3x-1$의 그래프와 일치한다.

0656 전략 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 양수 p의 최솟값은 함수 $f(x)$의 주기임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 주기가 3π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=3\pi \qquad \therefore b=\frac{2}{3}$ ⇨ ❶

조건 (나)에서 최댓값이 4, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로

$a+c=4,\ -a+c=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ c=1$ ⇨ ❷

$\therefore \frac{a-c}{b}=\frac{3}{2}(3-1)=3$ ⇨ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ a, c의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $\frac{a-c}{b}$의 값을 구할 수 있다.	20%

0657 전략 함수 $y=a|\sin bx|+c$의 주기는 $y=|\sin bx|$의 주기와 같음을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=a|\sin bx|+c$의 주기는 $y=|\sin bx|$의 주기와 같으므로

$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore b=2$

함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 $a>0$이므로

$a+c=1$ …… ㉠

$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2}$이므로 $\quad a\left|\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)\right|+c=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}a+c=-\frac{1}{2} \qquad \therefore a+2c=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ c=-2$

따라서 $f(x)=3|\sin 2x|-2$이므로 구하는 최솟값은 -2이다.

답 -2

참고 $-1\le\sin 2x\le 1$이므로 $\quad 0\le|\sin 2x|\le 1$
$\therefore -2\le 3|\sin 2x|-2\le 1$

0658 전략 각이 $\frac{\pi}{2}\times n\pm\theta$ (n은 정수) 꼴일 때, 각 삼각함수는 n이 짝수이면 그대로, n이 홀수이면 $\sin\longrightarrow\cos$, $\cos\longrightarrow\sin$으로 바뀜을 이용한다.

풀이 $\sin^2\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\frac{\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$,

$\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2\frac{\pi}{4}$, $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식})&=\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{4}-\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)\\&=\sin^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2\end{aligned}$$

답 2

0659 전략 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$임을 이용하여 $\cos\alpha$와 같은 것을 찾는다.

풀이 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$이므로 $\quad \alpha=\beta-\frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos\alpha=\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta$ 답 ②

0660 전략 $|\cos x|=t$로 놓고 $y=\frac{t-3}{t+2}$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

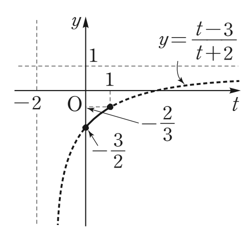
풀이 $y=\frac{|\cos x|-3}{|\cos x|+2}$에서 $|\cos x|=t$로 놓으면 $-1\le\cos x\le 1$에서 $0\le t\le 1$이고

$$y=\frac{t-3}{t+2}=\frac{(t+2)-5}{t+2}=-\frac{5}{t+2}+1$$

오른쪽 그림에서

$t=1$일 때 $\quad$ 최댓값은 $-\frac{2}{3}$,

$t=0$일 때 $\quad$ 최솟값은 $-\frac{3}{2}$



이므로 주어진 함수의 치역은

$\left\{y\,\middle|\,-\frac{3}{2}\le y\le-\frac{2}{3}\right\}$

따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=-\frac{2}{3}$이므로

$ab=\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=1$ 답 ④

0661 전략 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 주어진 방정식을 한 종류의 삼각함수에 대한 방정식으로 고친다.

풀이 $\sin\theta+1=2\cos\theta$에서 $\quad \sin\theta=2\cos\theta-1$

이것을 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$(2\cos\theta-1)^2+\cos^2\theta=1, \qquad 5\cos^2\theta-4\cos\theta=0$

$\cos\theta(5\cos\theta-4)=0$

05 삼각함수의 그래프

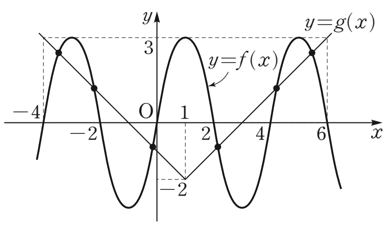
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\cos\theta<1$이므로

$$5\cos\theta-4=0 \qquad \therefore \cos\theta=\frac{4}{5}$$

답 ⑤

0662 전략 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같음을 이용한다.

풀이 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.
이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 구하는 실근의 개수는 6이다.



답 ③

0663 전략 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $a>0$, $b^2-4ac<0$이어야 함을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2x\sin\theta-\cos\theta+1>0$이 성립하므로 이차방정식 $x^2-2x\sin\theta-\cos\theta+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\sin^2\theta+\cos\theta-1<0$$

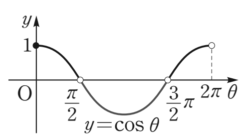
$$(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-1<0, \qquad \cos^2\theta-\cos\theta>0$$

$$\cos\theta(\cos\theta-1)>0 \qquad \therefore \cos\theta<0 \text{ 또는 } \cos\theta>1$$

이때 $-1\le\cos\theta\le1$이므로 $\quad\cos\theta<0$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 θ의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$$



답 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$

타센 특강 이차부등식이 항상 성립할 조건

이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다. (단, $D=b^2-4ac$)
(1) $ax^2+bx+c>0 \Longleftrightarrow a>0,\ D<0$
(2) $ax^2+bx+c<0 \Longleftrightarrow a<0,\ D<0$

0664 전략 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x-p)=f(x+p)$이면 $f(x)=f(x+2p)$임을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $f(x-p)=f(x+p)$를 만족시키는 최소의 양수 p가 2이므로

$$f(x-2)=f(x+2) \qquad \therefore f(x)=f(x+4)$$

따라서 함수 $f(x)$의 주기는 4이다.
주어진 각 함수의 주기를 구하면

① $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ ② $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi}=3$ ③ $\frac{2\pi}{\pi}=2$
④ $\frac{2\pi}{\pi}=2$ ⑤ $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

답 ①

0665 전략 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π임을 이용한다.

풀이 $A+B+C=\pi$이므로

ㄱ. $\sin A=\sin\{\pi-(B+C)\}=\sin(B+C)$
ㄴ. $\cos(A+B+C)=\cos\pi=-1$
ㄷ. $\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{\pi-C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$
ㄹ. $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{A+C}{2}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{\pi-B}{2}$

$$=\tan\frac{B}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)$$

$$=\tan\frac{B}{2}\cot\frac{B}{2}=1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

0666 전략 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$이면 $\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$의 관계가 성립함을 이용하여 주어진 식을 정리한다.

풀이 $\frac{1}{\sin^2 89°}=\frac{1}{\sin^2(90°-1°)}=\frac{1}{\cos^2 1°}=\sec^2 1°$,

$\frac{1}{\sin^2 88°}=\frac{1}{\sin^2(90°-2°)}=\frac{1}{\cos^2 2°}=\sec^2 2°$,

$\frac{1}{\sin^2 87°}=\frac{1}{\sin^2(90°-3°)}=\frac{1}{\cos^2 3°}=\sec^2 3°$,

$\vdots$

$\frac{1}{\sin^2 1°}=\frac{1}{\sin^2(90°-89°)}=\frac{1}{\cos^2 89°}=\sec^2 89°$

이고 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$$\begin{aligned}A-B&=\sec^2 1°+\sec^2 2°+\sec^2 3°+\cdots+\sec^2 89°\\&\quad-(\tan^2 1°+\tan^2 2°+\tan^2 3°+\cdots+\tan^2 89°)\\&=(\sec^2 1°-\tan^2 1°)+(\sec^2 2°-\tan^2 2°)\\&\quad+(\sec^2 3°-\tan^2 3°)+\cdots+(\sec^2 89°-\tan^2 89°)\\&=1+1+1+\cdots+1=89\end{aligned}$$

답 89

0667 전략 주어진 방정식의 좌변을 공통부분으로 묶은 후 인수분해한다.

풀이 $4\cos^3 x+2\sqrt{3}\cos^2 x-6\sin x\cos x-3\sqrt{3}\sin x=0$에서

$$2\cos^2 x(2\cos x+\sqrt{3})-3\sin x(2\cos x+\sqrt{3})=0$$

$$(2\cos x+\sqrt{3})(2\cos^2 x-3\sin x)=0$$

$$\therefore \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } 2\cos^2 x-3\sin x=0$$

(i) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때,

$$x=-\frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x=\frac{5}{6}\pi \ (\because -\pi<x<\pi)$$

(ii) $2\cos^2 x-3\sin x=0$일 때,

$$2(1-\sin^2 x)-3\sin x=0, \qquad 2\sin^2 x+3\sin x-2=0$$

$$(\sin x+2)(2\sin x-1)=0$$

$$\therefore \sin x=\frac{1}{2} \ (\because \sin x+2\neq0)$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x=\frac{5}{6}\pi \ (\because -\pi<x<\pi)$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근은 $-\frac{5}{6}\pi$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$의 3개이다.

답 ③

0668 전략 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 할 때, 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 $D>0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이어야 함을 이용한다.

풀이 주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 이 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지므로

(i) $\frac{D}{4}>0$에서

$$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-2\{(\sqrt{3}-2)\sin\theta-\sqrt{3}+2\}>0$$
$$2\cos^2\theta-\{(\sqrt{3}-2)\sin\theta-\sqrt{3}+2\}>0$$
$$2(1-\sin^2\theta)-(\sqrt{3}-2)\sin\theta+\sqrt{3}-2>0$$
$$2\sin^2\theta+(\sqrt{3}-2)\sin\theta-\sqrt{3}<0$$
$$(2\sin\theta+\sqrt{3})(\sin\theta-1)<0$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta<1$$

$0\le\theta<2\pi$이므로

$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$ ⇨ ❶

(ii) $\alpha+\beta>0$에서

$$\alpha+\beta=-\frac{4\cos\theta}{2}>0, \qquad \cos\theta<0$$

$0\le\theta<2\pi$이므로 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$ ⇨ ❷

(iii) $\alpha\beta>0$에서

$$\alpha\beta=\frac{(\sqrt{3}-2)\sin\theta-\sqrt{3}+2}{2}>0$$
$$(\sqrt{3}-2)\sin\theta-\sqrt{3}+2>0$$
$$(2-\sqrt{3})\sin\theta<2-\sqrt{3}, \qquad \sin\theta<1$$

$0\le\theta<2\pi$이므로 $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<\theta<2\pi$ ⇨ ❸

이상에서 구하는 θ의 값의 범위는 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{4}{3}\pi$

따라서 $A=\frac{\pi}{2}$, $B=\frac{4}{3}\pi$이므로 ⇨ ❹

$$\sin A+\cos B=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{4}{3}\pi=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$ ⇨ ❺

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 θ의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❷ 두 근의 합이 양수임을 이용하여 θ의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❸ 두 근의 곱이 양수임을 이용하여 θ의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❹ A, B의 값을 구할 수 있다.	20%
❺ $\sin A+\cos B$의 값을 구할 수 있다.	20%

Ⅱ. 삼각함수

06 삼각함수의 미분

0669 $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$
$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
답 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

참고 $15^\circ=60^\circ-45^\circ$임을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수도 있다.

0670 $\cos 105^\circ=\cos(45^\circ+60^\circ)$
$$=\cos 45^\circ\cos 60^\circ-\sin 45^\circ\sin 60^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$
답 $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

0671 $\tan 75^\circ=\tan(30^\circ+45^\circ)$
$$=\frac{\tan 30^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 45^\circ}$$
$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$$
답 $2+\sqrt{3}$

0672 $\sin\frac{7}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$
답 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

0673 $\cos\frac{5}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
답 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

0674 $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$
$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$$
답 $2-\sqrt{3}$

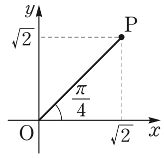
0675 $\sin 10^\circ\cos 35^\circ+\cos 10^\circ\sin 35^\circ$
$$=\sin(10^\circ+35^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0676 $\cos 40^\circ\cos 20^\circ-\sin 40^\circ\sin 20^\circ$
$$=\cos(40^\circ+20^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$
답 $\frac{1}{2}$

0677 $\frac{\tan 80^\circ-\tan 20^\circ}{1+\tan 80^\circ\tan 20^\circ}=\tan(80^\circ-20^\circ)$
$$=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$
답 $\sqrt{3}$

06 삼각함수의 미분

0678 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $P(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$를 잡으면



$\overline{OP}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$

(1) $\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta$

$=2\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

(2) $\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta=2\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=2\left(\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}+\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}\right)$

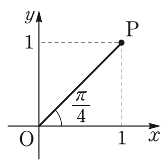
$=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

답 (1) $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ (2) $2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

참고 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\cos\left(-\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

따라서 (1)과 (2)는 그 형태는 다르지만 같은 값을 나타낸다.

0679 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $P(1,\ 1)$을 잡으면



$\overline{OP}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

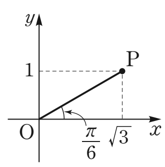
$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 답 $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

0680 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $P(\sqrt{3},\ 1)$을 잡으면



$\overline{OP}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

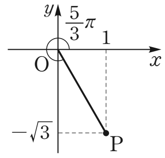
$\therefore\ \sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

$=2\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ 답 $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

0681 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $P(1,\ -\sqrt{3})$을 잡으면



$\overline{OP}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

$\therefore\ \sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$

$=2\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}-\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left\{\sin\theta\cos\frac{5}{3}\pi-\cos\theta\left(-\sin\frac{5}{3}\pi\right)\right\}$

$=2\left(\sin\theta\cos\frac{5}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{5}{3}\pi\right)$

$=2\sin\left(\theta+\frac{5}{3}\pi\right)$ 답 $2\sin\left(\theta+\frac{5}{3}\pi\right)$

0682 $y=-\sin x+\cos x$

$=\sqrt{2}\left\{\sin x\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{3}{4}\pi+\cos x\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$

이므로 주어진 함수의 최댓값은 $\sqrt{2}$, 최솟값은 $-\sqrt{2}$, 주기는 2π이다.

답 최댓값: $\sqrt{2}$, 최솟값: $-\sqrt{2}$, 주기: 2π

타쎈 특강 삼각함수의 최대·최소와 주기

삼각함수	최댓값	최솟값	주기
$y=a\sin(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\cos(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\tan(bx+c)+d$	없다.	없다.	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$

0683 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$=2\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

이므로 주어진 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 -2, 주기는 2π이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 2π

0684 답 (가) $<$ (나) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (다) $-\frac{1}{3}$ (라) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

0685 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$ 답 $\frac{24}{25}$

0686 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$ 답 $\frac{7}{25}$

0687 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$이므로

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$=\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{24}{7}$ 답 $\frac{24}{7}$

0688 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$이므로

$\sin\alpha=\frac{3}{5}\left(\because \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$

$\therefore \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$ 답 $-\frac{24}{25}$

0689 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$ 답 $\frac{7}{25}$

0690 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$이므로

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=-\frac{24}{7}$ 답 $-\frac{24}{7}$

0691 $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\frac{1}{4}}{2}=\frac{3}{8}$

$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$에서 $\sin\frac{\alpha}{2}>0$이므로

$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ 답 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

0692 $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1+\frac{1}{4}}{2}=\frac{5}{8}$

$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$에서 $\cos\frac{\alpha}{2}>0$이므로

$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$ 답 $\frac{\sqrt{10}}{4}$

0693 $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$

$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$에서 $\tan\frac{\alpha}{2}>0$이므로

$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$ 답 $\frac{\sqrt{15}}{5}$

0694 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

$\therefore \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}=\frac{4}{5}$

$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\frac{\alpha}{2}>0$이므로

$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 답 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

0695 $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}=\frac{1}{5}$

$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\frac{\alpha}{2}>0$이므로

$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 답 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

0696 $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}=4$

$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$에서 $\tan\frac{\alpha}{2}>0$이므로

$\tan\frac{\alpha}{2}=2$ 답 2

0697 $\sin^2 22.5°=\sin^2\frac{45°}{2}=\frac{1-\cos 45°}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

답 $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

0698 $\cos^2 15°=\cos^2\frac{30°}{2}=\frac{1+\cos 30°}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

답 $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

0699 $\tan^2\frac{\pi}{12}=\tan^2\frac{\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}$ 답 $7-4\sqrt{3}$

0700 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0701 $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos 2x=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0702 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\tan x}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0703 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=2$ 답 2

0704 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}$

$=\lim_{x\to 0}2\cos x=2\cdot 1=2$ 답 2

0705 $\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\cos x}=-1$ 답 -1

0706 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0707 $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot3=1\cdot3=3$ 답 3

0708 $\lim_{x\to0}\frac{5\tan x}{x}=5\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=5\cdot1=5$ 답 5

0709 $\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0710 답 $y'=\cos x$

0711 답 $y'=1-3\sin x$

0712 답 $y'=-\cos x+2\sin x$

0713 답 $y'=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{x}$

0714 $y=\sin^2 x=\sin x\sin x$이므로

$y'=\cos x\sin x+\sin x\cos x$

$=2\sin x\cos x$ 답 $y'=2\sin x\cos x$

0715 $y'=\cos x+x(-\sin x)$

$=\cos x-x\sin x$ 답 $y'=\cos x-x\sin x$

0716 $y'=e^x\sin x+e^x\cos x$

$=e^x(\sin x+\cos x)$ 답 $y'=e^x(\sin x+\cos x)$

0717 $y'=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)$

$=\cos^2 x-\sin^2 x$ 답 $y'=\cos^2 x-\sin^2 x$

0718 $\sin 70^\circ\sin 100^\circ-\sin 20^\circ\sin 10^\circ$

$=\sin(90^\circ-20^\circ)\sin(90^\circ+10^\circ)-\sin 20^\circ\sin 10^\circ$

$=\cos 20^\circ\cos 10^\circ-\sin 20^\circ\sin 10^\circ$

$=\cos(20^\circ+10^\circ)$

$=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0719 $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\frac{\sin(2\alpha-\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha$ 답 ④

다른풀이 $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{2\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha}$

$=2\cos\alpha-2\cos\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}$

$=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha$

0720 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$이므로

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}\left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ ⇨ ❶

$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$이므로

$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\because \frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ ⇨ ❷

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$=\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$ ⇨ ❸

답 $\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$

채점 기준	비율
❶ $\cos\alpha$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $\sin\beta$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $\cos(\alpha-\beta)$의 값을 구할 수 있다.	40%

0721 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}=1$에서

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$

$\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$이므로

$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta$

$=1+(1-\tan\alpha\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta$

$=2$

답 2

0722 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4}$ …… ㉠

$\cos\alpha+\cos\beta=1$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=1$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=\frac{5}{4}$

$\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=-\frac{3}{8}$

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=-\frac{3}{8}$ 답 ②

0723 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{1}{3}$, $\tan\alpha\tan\beta=-\frac{2}{3}$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{1}{5}$ 답 ①

0724 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{3}{2}$, $\tan\alpha\tan\beta=\frac{a}{2}$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{-\frac{3}{2}}{1-\frac{a}{2}}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{2-a}{2}}$

$=-\dfrac{3}{2-a}=-3$

$\therefore a=1$ 답 1

0725 두 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$, $y=3x$가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=3$

이므로

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\dfrac{\frac{1}{2}-3}{1+\frac{1}{2}\cdot 3}\right|=1$ 답 ①

0726 $x-y-1=0$에서 $y=x-1$

$(2-\sqrt{3})x-y+3=0$에서 $y=(2-\sqrt{3})x+3$

두 직선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=1$, $\tan\beta=2-\sqrt{3}$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\dfrac{1-(2-\sqrt{3})}{1+2-\sqrt{3}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다. 답 $\frac{\pi}{6}$

0727 $ax-y-3=0$에서 $y=ax-3$

$x-2y+2=0$에서 $y=\frac{1}{2}x+1$

두 직선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=a$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}$ ⇨ ❶

$\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1$, $\dfrac{a-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}a}=\pm1$

$a-\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}a$ 또는 $a-\frac{1}{2}=-1-\frac{1}{2}a$

$\therefore a=3$ 또는 $a=-\frac{1}{3}$ ⇨ ❷

따라서 모든 a의 값의 곱은 $3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$ ⇨ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ $\tan\alpha$, $\tan\beta$에 대한 식을 세울 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 모든 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	10%

0728 $\angle ABC=\theta$라 하면

$\tan\alpha=\frac{2}{1}=2$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$, $\theta=\alpha-\beta$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=1$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}$ 답 $\frac{\pi}{4}$

0729 $\angle BAD=\angle CAD=\alpha$, $\overline{BD}=x$라 하면

$\tan\alpha=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \tan(\angle CAB)=\tan(\alpha+\alpha)$

$=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$

$=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{3}$

이때 $\tan(\angle CAB)=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{x+3}{6}$이므로

$\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore x=5$ 답 ④

0730 $\overline{PQ}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=\sqrt{3}$이므로

$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=3$

$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=3$

$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$ 답 ③

0731 $y=\sqrt{3}\cos x-\sin x$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)$

$=2\left(\sin\frac{2}{3}\pi\cos x+\cos\frac{2}{3}\pi\sin x\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$

따라서 $y=\sqrt{3}\cos x-\sin x$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{2}{3}\pi$만큼 평행이동한 것이므로

$a=2$, $b=-\frac{2}{3}\pi$

$\therefore ab=-\frac{4}{3}\pi$ 답 ①

0732 $12\sin\theta+5\cos\theta$

$=13\left(\sin\theta\cdot\frac{12}{13}+\cos\theta\cdot\frac{5}{13}\right)$

$=13(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$

$=13\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{5}{13},\ \cos\alpha=\frac{12}{13}\right)$

$\therefore r=13$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}=\frac{5}{12}$이므로

$r\tan\alpha=13\cdot\frac{5}{12}=\frac{65}{12}$ 답 $\frac{65}{12}$

0733 $y=-\sin x+\cos x+3$

$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)+3$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi\sin x+\sin\frac{3}{4}\pi\cos x\right)+3$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)+3$

이때 $-1\le\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)\le1$이므로

$-\sqrt{2}+3\le\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)+3\le\sqrt{2}+3$

따라서 $M=\sqrt{2}+3$, $m=-\sqrt{2}+3$이므로

$Mm=(\sqrt{2}+3)(-\sqrt{2}+3)=7$

답 7

0734 $y=4\sin x+3\cos x-1$

$=5\left(\sin x\cdot\frac{4}{5}+\cos x\cdot\frac{3}{5}\right)-1$

$=5\sin(x+\alpha)-1$ $\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\right)$

ㄱ. 주기는 2π이다.

ㄴ. 최댓값은 $5-1=4$이다.

ㄷ. 최솟값은 $-5-1=-6$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0735 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos x+1$

$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)-\cos x+1$

$=\sqrt{3}\sin x-\cos x-\cos x+1=\sqrt{3}\sin x-2\cos x+1$

$=\sqrt{7}\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}-\cos x\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\right)+1$

$=\sqrt{7}\sin(x-\alpha)+1$ $\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$

이때 $-1\le\sin(x-\alpha)\le1$이므로

$-\sqrt{7}+1\le\sqrt{7}\sin(x-\alpha)+1\le\sqrt{7}+1$

따라서 $M=\sqrt{7}+1$, $m=-\sqrt{7}+1$이므로

$M-m=2\sqrt{7}$ 답 $2\sqrt{7}$

0736 $y=\sqrt{3}a\sin x+a\cos x$

$=2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$

$=2a\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)$

$=2a\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

이때 $a>0$이고 $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le1$이므로

$-2a\le2a\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le2a$

주어진 함수의 최댓값이 $4\sqrt{3}$이므로

$2a=4\sqrt{3}$ $\therefore a=2\sqrt{3}$ 답 ③

0737 $\angle APB=90^\circ$이므로 $\angle PAB=\theta$라 하면

$\overline{AP}=2\cos\theta$, $\overline{PB}=2\sin\theta$ ⇨ ❶

$\therefore 3\overline{AP}+4\overline{PB}=6\cos\theta+8\sin\theta$

$=10\left(\frac{3}{5}\cos\theta+\frac{4}{5}\sin\theta\right)$

$=10\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\right)$

⇨ ❷

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\alpha<\theta+\alpha<\frac{\pi}{2}+\alpha$이므로 $3\overline{AP}+4\overline{PB}$는

$\sin(\theta+\alpha)=1$일 때 최대이며 최댓값은 10이다. ⇨ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}$, $\overline{PB}$의 길이를 θ에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $3\overline{AP}+4\overline{PB}$의 식을 삼각함수의 합성을 이용하여 변형할 수 있다.	40%
❸ $3\overline{AP}+4\overline{PB}$의 최댓값을 구할 수 있다.	30%

0738 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\therefore 2\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$ 답 ③

0739 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \sin2\theta-\cos2\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta-(1-2\sin^2\theta)$

$=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\left\{1-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}$

$=-\frac{4\sqrt{2}+7}{9}$ 답 $-\frac{4\sqrt{2}+7}{9}$

0740 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+2^2=5$이므로 $\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

$\therefore \cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\because \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot2=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin2\theta+\cos2\theta=2\sin\theta\cos\theta+(2\cos^2\theta-1)$

$=2\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\left(2\cdot\frac{1}{5}-1\right)$

$=\frac{1}{5}$ 답 ①

0741 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

이므로 $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{5}{2}$에서

$\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{5}$ ⇨ ❶

$\therefore \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{5}$ ⇨ ❷

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $0<2\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos2\theta>0$

$\therefore \cos2\theta=\sqrt{1-\sin^2 2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$ ⇨ ❸

답 $\frac{3}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $\sin2\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $\cos2\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%

0742 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\frac{1}{3}$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3}{4}\pi$이므로

$\sin\frac{\theta}{2}>0,\ \cos\frac{\theta}{2}<0$

$\therefore \sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}}$

$=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}}$

$=-\sqrt{\frac{1}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$

0743 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+(2\sqrt{6})^2=25$이므로

$\cos^2\theta=\frac{1}{25}$ $\therefore \cos\theta=\frac{1}{5}\left(\because 0\le\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1-\frac{1}{5}}{2}=\frac{2}{5}$

$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0\le\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}$이므로 $\sin\frac{\theta}{2}>0$

$\therefore \sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$ 답 ⑤

0744 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{3}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$, $2\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{3}$

$\therefore \sin2\theta=\frac{2}{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $0<2\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos2\theta>0$

$\therefore \cos2\theta=\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore \tan^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}$

$=\frac{1-\frac{\sqrt{5}}{3}}{1+\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ 답 $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$

0745 $\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}=\frac{1-\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{3}$

$\therefore 1+\sin^2x+\sin^4x+\sin^6x+\cdots$

$=\frac{1}{1-\sin^2x}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

참고 주어진 등비급수의 공비는 $\frac{1}{3}$이고, $-1<\frac{1}{3}<1$이므로 이 등비급수는 수렴한다.

0746 $f(x)=\cos2x-4\cos x+2$

$=(2\cos^2x-1)-4\cos x+2$

$=2\cos^2x-4\cos x+1$

$=2(\cos x-1)^2-1$

이때 $-1\le\cos x\le1$이므로 $f(x)$는 $\cos x=1$일 때 최솟값 -1을 갖는다. 답 ①

0747 $y=\cos2x+4\sin x-1$

$=(1-2\sin^2x)+4\sin x-1$

$=-2\sin^2x+4\sin x$

$=-2(\sin x-1)^2+2$

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로 주어진 함수는 $\sin x=1$일 때 최댓값 2, $\sin x=-1$일 때 최솟값 -6을 갖는다.

따라서 $M=2$, $m=-6$이므로

$M+m=2+(-6)=-4$ 답 -4

0748 $f(x)=-2\sin^2 x+2a\sin x\cos x+1$

$=1-2\sin^2 x+a\sin 2x$

$=\cos 2x+a\sin 2x$

$=\sqrt{a^2+1}\sin(2x+\alpha)$

$\left(단,\ \sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+1}$이므로

$\sqrt{a^2+1}=\sqrt{2},\qquad a^2+1=2$

$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

답 ①

0749 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos 2\theta=-\dfrac{5}{9}$ …… ㉠

$\sin\theta\cos 2\theta=-\dfrac{a}{9}$ …… ㉡

㉠에서 $\sin\theta+(1-2\sin^2\theta)=-\dfrac{5}{9}$이므로

$18\sin^2\theta-9\sin\theta-14=0,\qquad (3\sin\theta+2)(6\sin\theta-7)=0$

$\therefore\ \sin\theta=-\dfrac{2}{3}\ (\because\ -1\le\sin\theta\le 1)$

㉡에서

$-\dfrac{a}{9}=\sin\theta(1-2\sin^2\theta)=-\dfrac{2}{3}\left(1-2\cdot\dfrac{4}{9}\right)=-\dfrac{2}{27}$

이므로 $\quad a=\dfrac{2}{3}$

답 ④

0750 직선 $y=2x$가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\quad\tan\theta=2$

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+2^2=5$이므로

$\sec\theta=\sqrt{5}\ \left(\because\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)\qquad \therefore\ \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$m^2=\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}}=\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}$

$\therefore\ m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\ (\because\ m>0)$

답 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

0751 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2 x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3(1-\sin^2 x)}{1-\sin x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x}$

$\displaystyle=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)=3\cdot 2=6$

답 ⑤

0752 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x-\cos x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}{\cos^2 x(\sin x-\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$

답 ④

0753 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\{f(x)\}^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

0754 $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x+\sin 2x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x+2\sin x\cos x}{1-\cos^2 x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x}{1-\cos x}=0$

답 ③

0755 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2 x-1}{2\sin x\cos x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=0$

답 0

0756 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{\sec 2x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos x}-1}{\dfrac{1}{\cos 2x}-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos x}{\cos x}}{\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 2x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x(1-\cos x)}{\cos x(1-\cos 2x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{(2\cos^2 x-1)(1-\cos x)}{\cos x\{1-(2\cos^2 x-1)\}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{(2\cos^2 x-1)(1-\cos x)}{2\cos x(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x-1}{2\cos x(1+\cos x)}$

$=\dfrac{2-1}{2\cdot 1\cdot 2}=\dfrac{1}{4}$

답 $\dfrac{1}{4}$

0757 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x+\sin x}{3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{3x}+\frac{\sin x}{3x}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{4}{3}+\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{3}\right)$

$=1\cdot\dfrac{4}{3}+1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$

답 ⑤

0758 $x^\circ=\frac{\pi}{180}x$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x^\circ}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{\pi}{180}$$
$$=1\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{180}$$

답 $\frac{\pi}{180}$

0759 $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin5x)}{\sin2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin5x)}{\sin5x}\cdot\frac{2x}{\sin2x}\cdot\frac{\sin5x}{5x}\cdot\frac{5}{2}$$
$$=1\cdot1\cdot1\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$

답 ⑤

0760 $f(g(x))=f(\sin x)=3\sin x$

$g(f(x))=g(3x)=\sin3x$ ➡ ❶

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{g(f(x))}{f(g(x))}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{x}{\sin x}$$
$$=1\cdot1=1$$

➡ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ $f(g(x))$와 $g(f(x))$를 구할 수 있다.	40%
❷ $\lim_{x\to0}\frac{g(f(x))}{f(g(x))}$의 값을 구할 수 있다.	60%

0761 $\lim_{x\to0}\frac{\tan4x-\tan3x}{2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan4x}{2x}-\frac{\tan3x}{2x}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan4x}{4x}\cdot\frac{4}{2}-\frac{\tan3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}\right)$$
$$=1\cdot2-1\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0762 $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{4}$

$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

답 ②

0763 $x^\circ=\frac{\pi}{180}x$이므로 ➡ ❶

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{x^\circ}=\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{\frac{\pi}{180}x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{2x}\cdot\frac{2}{\frac{\pi}{180}}$$
$$=1\cdot\frac{2}{\frac{\pi}{180}}=\frac{360}{\pi}$$

➡ ❷

$\therefore\ a=360$ ➡ ❸

답 360

채점 기준	비율
❶ x°를 호도법으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ $\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{x^\circ}$의 값을 구할 수 있다.	70%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	10%

0764 $\lim_{x\to0}\frac{\cos3x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos3x-1)(\cos3x+1)}{x(\cos3x+1)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 3x-1}{x(\cos3x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 3x}{x(\cos3x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}(-1)\cdot\left(\frac{\sin3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{9x}{\cos3x+1}$$
$$=-1\cdot1^2\cdot0=0$$

답 ③

0765 $\lim_{x\to0}\frac{3\cos^2x-2\cos x-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(3\cos x+1)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}\cdot(3\cos x+1)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{x^2(\cos x+1)}\cdot(3\cos x+1)$$
$$=\lim_{x\to0}(-1)\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{3\cos x+1}{\cos x+1}$$
$$=-1\cdot1^2\cdot2=-2$$

답 -2

0766 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos kx}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos kx)(1+\cos kx)}{3x^2(1+\cos kx)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2kx}{3x^2(1+\cos kx)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2kx}{3x^2(1+\cos kx)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin kx}{kx}\right)^2\cdot\frac{k^2}{3}\cdot\frac{1}{1+\cos kx}$$
$$=1^2\cdot\frac{k^2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{k^2}{6}$$

$\frac{k^2}{6}=\frac{4}{3}$이므로 $\quad k^2=8$

$\therefore\ k=2\sqrt{2}\ (\because\ k>0)$

답 ②

0767 $x+\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\frac{\pi}{2}$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{t\to0}t\tan\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\lim_{t\to0}t\left\{-\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right\}$$
$$=\lim_{t\to0}(-t)\cot t$$
$$=\lim_{t\to0}(-1)\cdot\frac{t}{\tan t}=-1$$

답 ②

0768 $\frac{\pi}{2}-x=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x}=\lim_{t\to0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{-t\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{-t\sin t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{-t\sin t(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos^2 t}{-t\sin t(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 t}{-t\sin t(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{-1}{1+\cos t}$$
$$=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0769 $x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\frac{\pi}{3}$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(3t-\pi)}{2\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)-1}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin 3t}{2\left(\cos t\cos\frac{\pi}{3}+\sin t\sin\frac{\pi}{3}\right)-1}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin 3t}{\cos t+\sqrt{3}\sin t-1}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin 3t}{-2\sin^2\frac{t}{2}+\sqrt{3}\sin t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{-\sin 3t}{3t}\cdot 3}{-\sin\frac{t}{2}\cdot\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sin t}{t}}$$
$$=\frac{-3}{0\cdot1+\sqrt{3}\cdot1}=-\sqrt{3}$$

답 ②

0770 $x-2=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 2$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin\left(\cos\frac{\pi}{4}x\right)}{x-2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\frac{\pi}{4}(t+2)\right\}}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(-\sin\frac{\pi}{4}t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(-\sin\frac{\pi}{4}t\right)}{-\sin\frac{\pi}{4}t}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}t}{\frac{\pi}{4}t}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=1\cdot1\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

답 $-\frac{\pi}{4}$

0771 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$이므로 ⇨ ❶

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{3x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \frac{\pi}{3}$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로 ㉠은 ⇨ ❷

$$\lim_{t\to0}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{2}{3}\cdot1=\frac{2}{3}$$ ⇨ ❸

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 분자를 $r\sin(x-\alpha)$ 꼴로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $x-\frac{\pi}{3}=t$로 치환할 수 있다.	30%
❸ $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{3x-\pi}$의 값을 구할 수 있다.	40%

0772 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}2x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}2\cdot\frac{\sin t}{t}=2\cdot1=2$$

답 ③

0773 $x°=\frac{\pi}{180}x$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x°\tan\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{180}x\tan\frac{1}{x} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로 ㉠은

$$\lim_{t\to0}\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\tan t}{t}=\frac{\pi}{180}\cdot1=\frac{\pi}{180}$$

답 ②

0774 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{2}{x}\cot\frac{4}{x}=\lim_{t\to0}\sin 2t\cot 4t$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{4t}{\tan 4t}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0775 $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+a)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot(x+a)$$
$$=1\cdot a=a$$

$\therefore a=5$

$\therefore a+b=5$

답 ⑤

0776 $$\lim_{x\to-1}\frac{a\sin(x+1)}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{a\sin(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sin(x+1)}{x+1}\cdot\frac{a}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{a}{3}\lim_{x\to-1}\frac{\sin(x+1)}{x+1}$$

$x+1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -1$일 때 $t \longrightarrow 0$이고 주어진 극한값이 1이므로

$$\frac{a}{3}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{a}{3}\cdot 1=1 \qquad \therefore\ a=3$$

답 ④

0777 $x \longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(\sqrt{ax+b}-2)=0$이므로

$$\sqrt{b}-2=0 \qquad \therefore\ b=4$$ ⇨ ❶

$b=4$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+b}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+4}-2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x(\sqrt{ax+4}+2)}{ax}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{a}\cdot(\sqrt{ax+4}+2)$$
$$=1\cdot\frac{2}{a}\cdot 4=\frac{8}{a}$$

$\frac{8}{a}=2$에서 $\quad a=4$ ⇨ ❷

$\therefore\ a-b=0$ ⇨ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10%

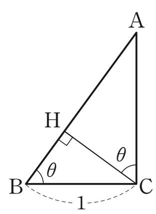
0778 $\triangle$CBA$\backsim\triangle$HCA이므로

$\angle$ACH$=\angle$ABC$=\theta$

$\triangle$CBH에서 $\quad\overline{\mathrm{CH}}=\sin\theta$

$\triangle$ACH에서

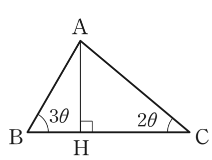
$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{CH}}\tan\theta=\sin\theta\tan\theta$



$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta\tan\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}=1\cdot 1=1$$

답 1

0779 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

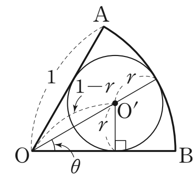


$$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\sin 3\theta},\ \overline{\mathrm{AC}}=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\sin 2\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\sin 3\theta}}{\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\sin 2\theta}}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\cdot\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\cdot\frac{2}{3}$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0780 오른쪽 그림에서 $\sin\theta=\frac{r}{1-r}$이므로



$(1-r)\sin\theta=r$

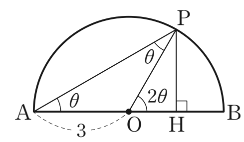
$(1+\sin\theta)r=\sin\theta$

$$\therefore\ r=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{r}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta(1+\sin\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{1+\sin\theta}$$
$$=1\cdot 1=1$$

답 ②

0781 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OP}}=3$이므로



$\angle$OPA$=\angle$OAP$=\theta$

또 삼각형의 외각의 크기는 이웃하지 않은 두 내각의 크기의 합과 같으므로

$\triangle$OAP에서

$\angle$POH$=2\theta$ ⇨ ❶

$\triangle$OPH에서 $\quad\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OP}}\cos 2\theta=3\cos 2\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OH}}=3-3\cos 2\theta=3(1-\cos 2\theta)$ ⇨ ❷

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3(1-\cos 2\theta)}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3(1-\cos^2 2\theta)}{\theta^2(1+\cos 2\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3\sin^2 2\theta}{\theta^2(1+\cos 2\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\cdot\frac{4\cdot 3}{1+\cos 2\theta}$$
$$=1^2\cdot\frac{12}{2}=6$$ ⇨ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $\angle$OPA, $\angle$POH의 크기를 θ로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $\overline{\mathrm{BH}}$의 길이를 θ로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\theta^2}$의 값을 구할 수 있다.	40%

0782 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to -1}f(x)=f(-1) \qquad \therefore\ \lim_{x\to -1}\frac{\sin 2(x+1)}{x+1}=k$$

$x+1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$k=\lim_{x\to -1}\frac{\sin 2(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot 2$$
$$=1\cdot 2=2$$

답 ②

0783 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0) \qquad \therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-a}{x}=b \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

$x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(\cos x-a)=0$이므로 $\quad 1-a=0$

$\therefore\ a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}(-1)\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{\cos x+1}$$
$$=(-1)\cdot1^2\cdot0=0$$

$\therefore b=0$

$\therefore a+b=1$ 답 1

0784 함수 $f(x)$가 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{e^{ax}+b}{\sin x}=2$ ...... ㉠

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(e^{ax}+b)=0$이므로 $1+b=0$

$\therefore b=-1$

$b=-1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a$$
$$=1\cdot1\cdot a=a$$

$\therefore a=2$

$\therefore ab=-2$ 답 -2

0785 $f(x)=x^2\sin x$에서

$f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{\pi}{2}$$
$$=\pi$$

답 ④

0786 $f(x)=\sin x-\cos x-2x$에서

$$f'(x)=\cos x+\sin x-2$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2$$

$f'(\alpha)=-1$에서 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-2=-1$

$$\therefore \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}\le\frac{3}{4}\pi$이므로

$\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$ $\therefore \alpha=\frac{\pi}{2}$ 답 $\frac{\pi}{2}$

0787 $f(x)=\cos^2 x=\cos x\cos x$에서

$f'(x)=-\sin x\cos x+\cos x(-\sin x)=-2\sin x\cos x$

$$\therefore \lim_{x\to\pi}\frac{f'(x)}{\pi-x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-2\sin x\cos x}{\pi-x}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x\cos x}{x-\pi}$$

$x-\pi=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\pi$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x\cos x}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{2\sin(\pi+t)\cos(\pi+t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{2(-\sin t)(-\cos t)}{t}$$
$$=2\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\cos t$$
$$=2\cdot1\cdot1=2$$

답 ④

0788 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to0+}(ax+b)=\lim_{x\to0-}\sin x=f(0)$

$\therefore b=0$

또 $f'(0)$이 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases} a & (0<x<1) \\ \cos x & (-1<x<0)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to0+}a=\lim_{x\to0-}\cos x$

$\therefore a=1$

$\therefore a-b=1$ 답 ④

0789 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to0+}(2x^2+ax+b)=\lim_{x\to0-}(\cos x-x)=f(0)$

$\therefore b=1$

또 $f'(0)$이 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases} 4x+a & (x>0) \\ -\sin x-1 & (x<0)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to0+}(4x+a)=\lim_{x\to0-}(-\sin x-1)$

$\therefore a=-1$

$\therefore ab=-1$ 답 -1

0790 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

이때 $f(x)=\sin x-\cos x$에서 $f'(x)=\cos x+\sin x$이므로

$f'(0)=1+0=1$ 답 1

0791
$$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi-2h)-f(\pi)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi-2h)-f(\pi)}{-2h}\cdot(-2)$$
$$=-2f'(\pi)$$

이때 $f(x)=\sin x\cos x$에서 $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$이므로

$-2f'(\pi)=-2(\cos^2\pi-\sin^2\pi)=-2$ 답 -2

0792 $f(x)=\cos x$에서 $f'(x)=-\sin x$

ㄱ. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

ㄴ. $f(0)=1$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=f'(0)$$
$$=-\sin 0=0$$

ㄷ. $f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x=-f(x)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

0793 $\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(\pi+h)-f(\pi)\}-\{f(\pi-h)-f(\pi)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$

$=f'(\pi)+f'(\pi)=2f'(\pi)$

$f(x)=x\cos x$에서

$f'(x)=\cos x-x\sin x$

따라서 구하는 값은

$2f'(\pi)=2(\cos\pi-\pi\sin\pi)$

$=-2$

답 ①

0794 전략 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

풀이 $\sin15°\sin30°-\cos15°\cos30°$

$=-(\cos15°\cos30°-\sin15°\sin30°)$

$=-\cos(15°+30°)$

$=-\cos45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ②

0795 전략 직선 $y=ax$가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta=a$임을 이용한다.

풀이 두 직선 $y=2x$, $y=\frac{1}{3}x$가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$

두 직선 $y=2x$, $y=\frac{1}{3}x$가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}\right|=1$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$

답 $\frac{\pi}{4}$

0796 전략 삼각함수 사이의 관계와 반각의 공식을 이용한다.

풀이 θ가 제1사분면의 각이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$

$\therefore\ \tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\frac{5}{13}}{1+\frac{5}{13}}=\frac{4}{9}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}$이므로 $\tan\frac{\theta}{2}>0$

$\therefore\ \tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

답 ③

0797 전략 $x-2=t$로 놓고 $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{\tan\pi x}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{\tan\pi x}$에서

$x-2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{\tan\pi x}=\lim_{t\to0}\frac{t(t+4)}{\tan(\pi t+2\pi)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t(t+4)}{\tan\pi t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\pi t}{\tan\pi t}\cdot\frac{t+4}{\pi}$

$=\frac{4}{\pi}$

답 $\frac{4}{\pi}$

0798 전략 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}$에서 $f(\pi)=0$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$ ⇨ ❶

$f(x)=\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$이므로

$f'(x)=-\frac{1}{2}\sin x$ ⇨ ❷

$\therefore\ f'(\pi)=0$ ⇨ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 변형할 수 있다.	50%
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $f'(\pi)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0799 전략 삼각함수의 덧셈정리와 $\sin^2x+\cos^2x=1$임을 이용한다.

풀이 $\sin\alpha+\cos\beta=\frac{3}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{9}{4}$ …… ㉠

$\cos\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\frac{5}{2}$

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}$

답 ①

0800 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 x에 대한 이차방정식 $x^2-3ax+a^2+1=0$의 두 실근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이므로

$\tan\alpha+\tan\beta=3a$, $\tan\alpha\tan\beta=a^2+1$

이때 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}=1$에서

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$, $\frac{3a}{1-(a^2+1)}=1$

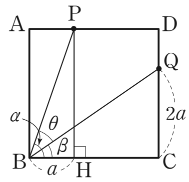
$3a=-a^2$, $a(a+3)=0$

$\therefore\ a=-3\ (\because\ a\neq0)$

답 ③

0801 전략 $\angle\mathrm{PBC}=\alpha$, $\angle\mathrm{QBC}=\beta$로 놓고 θ를 α, β로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $3a$라 하면



$\overline{\mathrm{BH}}=a$, $\overline{\mathrm{CQ}}=2a$

이때 $\angle\mathrm{PBC}=\alpha$, $\angle\mathrm{QBC}=\beta$라 하면

$$\tan\alpha=\frac{3a}{a}=3,\ \tan\beta=\frac{2a}{3a}=\frac{2}{3}$$ ⇨ ❶

$\theta=\alpha-\beta$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$ ⇨ ❷

$$=\frac{3-\frac{2}{3}}{1+3\cdot\frac{2}{3}}=\frac{7}{9}$$ ⇨ ❸

답 $\frac{7}{9}$

채점 기준	비율
❶ $\tan\alpha$, $\tan\beta$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $\tan\theta$를 $\tan\alpha$, $\tan\beta$로 나타낼 수 있다.	40%
❸ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%

0802 전략 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 주어진 식을 정리한 후 삼각함수의 합성을 이용하여 식을 변형한다.

풀이 $y=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+4\cos x+5$

$$=2\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)+4\cos x+5$$

$$=2\sin x+6\cos x+5$$

$$=2\sqrt{10}\sin(x+\theta)+5\ \left(단,\ \sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

이때 $-1\le\sin(x+\theta)\le1$이므로

$$-2\sqrt{10}+5\le2\sqrt{10}\sin(x+\theta)+5\le2\sqrt{10}+5$$

따라서 $M=2\sqrt{10}+5$, $m=-2\sqrt{10}+5$이므로

$$Mm=(2\sqrt{10}+5)(-2\sqrt{10}+5)=-15$$

답 ②

0803 전략 배각의 공식을 이용하여 주어진 등식을 변형한다.

풀이 $2\cos\theta\cos2\theta=\sin2\theta$에서

$$2\cos\theta(1-2\sin^2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin\theta\cos\theta-\cos\theta(1-2\sin^2\theta)=0$$

$$\cos\theta(2\sin^2\theta+\sin\theta-1)=0$$

$$\cos\theta(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{2}\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta>0$이므로

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

참고 $\sin\theta=\frac{1}{2}$이고 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$

0804 전략 배각·반각의 공식을 이용하여 주어진 식을 변형한 후 삼각함수의 합성을 이용하여 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=3\sin^2x+k\sin x\cos x+5\cos^2x$

$$=3\cdot\frac{1-\cos2x}{2}+\frac{k}{2}\cdot\sin2x+5\cdot\frac{1+\cos2x}{2}$$

$$=\frac{k}{2}\sin2x+\cos2x+4$$

$$=\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}\sin(2x+\theta)+4$$

$$\left(단,\ \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{k^2+4}},\ \cos\theta=\frac{k}{\sqrt{k^2+4}}\right)$$

이때 $-1\le\sin(2x+\theta)\le1$이므로

$$-\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}+4\le\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}\sin(2x+\theta)+4\le\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}+4$$

따라서 최솟값은 $-\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}+4$이므로

$$-\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}+4=4-\sqrt{5},\qquad \frac{\sqrt{k^2+4}}{2}=\sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $k^2=16$

$\therefore\ k=4\ (\because\ k>0)$

답 ④

0805 전략 $\overline{\mathrm{AC}}=x$ m로 놓고 $\tan\theta$, $\tan2\theta$를 구한 후 배각의 공식을 이용하여 x의 값을 구한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AC}}=x$ m라 하면

$$\tan\theta=\frac{15}{60}=\frac{1}{4},\ \tan2\theta=\frac{x}{60}$$ ⇨ ❶

이때 $\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$이므로

$$\frac{x}{60}=\frac{2\cdot\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\frac{x}{60}=\frac{8}{15}\qquad\therefore\ x=32$$ ⇨ ❷

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}=32+15=47\,(\mathrm{m})$

따라서 철탑의 높이는 47 m이다. ⇨ ❸

답 47 m

채점 기준	비율
❶ $\tan\theta$, $\tan2\theta$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ 배각의 공식을 이용하여 x의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ 철탑의 높이를 구할 수 있다.	20%

0806 전략 배각의 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한 후 극한값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos2x-1}{1-2\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2(1-2\sin^2x)-1}{1-2\sin x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{4\sin^2x-1}{2\sin x-1}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(2\sin x+1)(2\sin x-1)}{2\sin x-1}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(2\sin x+1)$$

$$=2$$

답 ②

0807 전략 주어진 식을 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$을 이용할 수 있도록 변형한다.

풀이 $f(x)=2x^3+3x$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)}{k\sin f(x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^3x+3\sin x}{k\sin(2x^3+3x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(2\sin^2x+3)}{k\sin(2x^3+3x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x^3+3x}{\sin(2x^3+3x)}\cdot\frac{x}{2x^3+3x}\cdot\frac{2\sin^2x+3}{k}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x^3+3x}{\sin(2x^3+3x)}\cdot\frac{1}{2x^2+3}\cdot\frac{2\sin^2x+3}{k}\\&=1\cdot1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{k}=\frac{1}{k}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{k}=\frac{1}{3}$이므로 $k=3$

답 ③

0808 전략 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sec x-\cos x}{3x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{3x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{3x^2\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{3x^2\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x}\\&=\frac{1}{3}\cdot1^2\cdot1=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$

0809 전략 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{3\sin x+a-1}{x\cos x}=b$ …… ㉠ ⇨ ❶

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(3\sin x+a-1)=0$이므로

$a-1=0$ $\therefore a=1$ ⇨ ❷

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x}{x\cos x}&=\lim_{x\to0}3\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\\&=3\cdot1\cdot1=3\end{aligned}$$

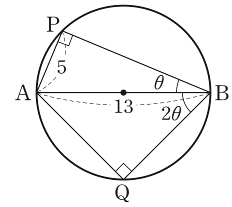
$\therefore b=3$ ⇨ ❸

$\therefore a+b=4$ ⇨ ❹

답 4

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 $x=0$에서 연속일 조건을 구할 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0810 전략 $\overline{BQ}$의 길이를 $\angle PBA$에 대한 삼각함수로 나타낸다.



풀이 $\angle PBA=\theta$라 하면

$\angle QBA=2\theta$

$\triangle ABP$에서 $\angle APB=90°$이므로

$\sin\theta=\frac{5}{13}$

$\triangle ABQ$에서 $\angle AQB=90°$이므로

$$\begin{aligned}\overline{BQ}=\overline{AB}\cos2\theta&=13(1-2\sin^2\theta)\\&=13\left\{1-2\cdot\left(\frac{5}{13}\right)^2\right\}\\&=\frac{119}{13}\end{aligned}$$

답 ③

0811 전략 $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$임을 이용하여 $f(n)$을 간단히 한다.

풀이
$$\begin{aligned}f(n)&=\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x+\tan2x+\cdots+\tan nx}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\tan x}{x}+\frac{\tan 2x}{2x}\cdot2+\cdots+\frac{\tan nx}{nx}\cdot n}\\&=\frac{1}{1+2+\cdots+n}\\&=\frac{2}{n(n+1)}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(k)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}\\&=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2\end{aligned}$$

답 2

0812 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=b$일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to0}\frac{a+\cos x}{x\sin x}=b$에서 $x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(a+\cos x)=0$이므로

$a+1=0$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{a+\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-1+\cos x}{x\sin x}&=-\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}\\&=-\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x\sin x(1+\cos x)}\\&=-\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x\sin x(1+\cos x)}\\&=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x(1+\cos x)}\\&=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\\&=(-1)\cdot1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

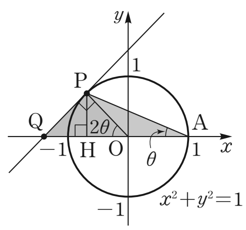
$\therefore b=-\frac{1}{2}$

$\therefore 2ab=1$

답 ①

0813 전략 $\angle POQ=2\theta$임을 이용하여 $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$를 θ로 나타낸다.

풀이 직각삼각형 OPQ에서



$\tan 2\theta=\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}=\overline{PQ}$이므로

$$S_1(\theta)=\frac{1}{2}\overline{OP}\cdot\overline{PQ}=\frac{1}{2}\tan 2\theta$$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PH}=\sin 2\theta$이므로

$$S_2(\theta)=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{PH}=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S_1(\theta)}{S_2(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\tan 2\theta}{\frac{1}{2}\sin 2\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan 2\theta}{2\theta}\cdot\frac{2\theta}{\sin 2\theta}=1\cdot1=1$$

답 1

0814 전략 $x\longrightarrow0$일 때 $\tan x\longrightarrow0$임을 이용하여 주어진 식을 변형하고 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

풀이 $x\longrightarrow0$일 때 $\tan x\longrightarrow0$이고 $f(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\tan x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(\tan x)}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(\tan x)-f(0)}{\tan x-0}\cdot\frac{\tan x}{x}=f'(0)\cdot1=f'(0)$$

$f'(x)=2\cos x-\sin x$이므로

$f'(0)=2$

답 ③

Ⅲ. 미분법

07 여러 가지 미분법

0815 $y'=-\frac{(3x+2)'}{(3x+2)^2}=-\frac{3}{(3x+2)^2}$

답 $y'=-\frac{3}{(3x+2)^2}$

0816 $y'=-\frac{(x^2-5)'}{(x^2-5)^2}=-\frac{2x}{(x^2-5)^2}$

답 $y'=-\frac{2x}{(x^2-5)^2}$

0817 $y'=-\frac{(x^2+2x+3)'}{(x^2+2x+3)^2}=-\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}$

답 $y'=-\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}$

0818 $y'=-\frac{(x^3+x)'}{(x^3+x)^2}=-\frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}$

답 $y'=-\frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}$

0819 $y'=\frac{(x-2)'(4x+3)-(x-2)(4x+3)'}{(4x+3)^2}$

$=\frac{1\cdot(4x+3)-(x-2)\cdot4}{(4x+3)^2}=\frac{11}{(4x+3)^2}$

답 $y'=\frac{11}{(4x+3)^2}$

0820 $y'=\frac{x'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

답 $y'=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

0821 $y'=\frac{(x^2-1)'(3x-2)-(x^2-1)(3x-2)'}{(3x-2)^2}$

$=\frac{2x(3x-2)-(x^2-1)\cdot3}{(3x-2)^2}$

$=\frac{3x^2-4x+3}{(3x-2)^2}$

답 $y'=\frac{3x^2-4x+3}{(3x-2)^2}$

0822 $y'=\frac{(3x)'(x^2-x+1)-3x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}$

$=\frac{3(x^2-x+1)-3x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$=\frac{-3x^2+3}{(x^2-x+1)^2}$

답 $y'=\frac{-3x^2+3}{(x^2-x+1)^2}$

0823 $y'=-\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

답 $y'=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

0824 $y'=\dfrac{(2^x)'(x+3)-2^x(x+3)'}{(x+3)^2}$

$=\dfrac{2^x\ln 2\cdot(x+3)-2^x\cdot 1}{(x+3)^2}$

$=\dfrac{2^x(x\ln 2+3\ln 2-1)}{(x+3)^2}$

답 $y'=\dfrac{2^x(x\ln 2+3\ln 2-1)}{(x+3)^2}$

0825 $y'=\dfrac{x'\ln x-x(\ln x)'}{(\ln x)^2}$

$=\dfrac{1\cdot\ln x-x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

$=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ 답 $y'=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$

0826 $y'=\dfrac{(\log_3 x)'\cdot x-\log_3 x\cdot x'}{x^2}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{x\ln 3}\cdot x-\log_3 x\cdot 1}{x^2}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{\ln 3}-\dfrac{\ln x}{\ln 3}}{x^2}$

$=\dfrac{1-\ln x}{x^2\ln 3}$ 답 $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2\ln 3}$

0827 답 $y'=2\cos x+\sec^2 x$

0828 답 $y'=\sec x\tan x-\csc x\cot x$

0829 $y'=(x^2)'\cot x+x^2(\cot x)'$

$=2x\cot x+x^2(-\csc^2 x)$

$=2x\cot x-x^2\csc^2 x$

답 $y'=2x\cot x-x^2\csc^2 x$

0830 $y'=\dfrac{(\sin x)'(1+\cos x)-\sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{1}{1+\cos x}$ 답 $y'=\dfrac{1}{1+\cos x}$

0831 $y'=4(5x-2)^3\cdot(5x-2)'$

$=4(5x-2)^3\cdot 5$

$=20(5x-2)^3$ 답 $y'=20(5x-2)^3$

0832 $y'=2(3x+1)\cdot(3x+1)'+2\cdot(3x+1)'$

$=2(3x+1)\cdot 3+2\cdot 3$

$=18x+12$ 답 $y'=18x+12$

0833 $y'=e^{4x}\cdot(4x)'=4e^{4x}$

답 $y'=4e^{4x}$

0834 $y'=3^{3x+1}\cdot\ln 3\cdot(3x+1)'$

$=3^{3x+2}\ln 3$

답 $y'=3^{3x+2}\ln 3$

0835 $y'=\cos 5x\cdot(5x)'=5\cos 5x$

답 $y'=5\cos 5x$

0836 $y'=-\sin(3x+2)\cdot(3x+2)'$

$=-3\sin(3x+2)$

답 $y'=-3\sin(3x+2)$

0837 $y'=4\tan^3 x\cdot(\tan x)'$

$=4\tan^3 x\sec^2 x$

답 $y'=4\tan^3 x\sec^2 x$

0838 $y'=\dfrac{(x^3+2x+1)'}{x^3+2x+1}=\dfrac{3x^2+2}{x^3+2x+1}$

답 $y'=\dfrac{3x^2+2}{x^3+2x+1}$

0839 $y'=\dfrac{(5x+2)'}{(5x+2)\ln 2}=\dfrac{5}{(5x+2)\ln 2}$

답 $y'=\dfrac{5}{(5x+2)\ln 2}$

0840 $y'=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$

답 $y'=-\tan x$

0841 $y'=\dfrac{(e^x+2)'}{e^x+2}=\dfrac{e^x}{e^x+2}$ 답 $y'=\dfrac{e^x}{e^x+2}$

0842 $y=\dfrac{x+1}{x^3}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}=x^{-2}+x^{-3}$이므로

$y'=-2x^{-3}-3x^{-4}$

$=-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}$ 답 $y'=-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}$

다른풀이 $y'=\dfrac{(x+1)'x^3-(x+1)(x^3)'}{x^6}$

$=\dfrac{1\cdot x^3-(x+1)\cdot 3x^2}{x^6}=\dfrac{-2x^3-3x^2}{x^6}$

$=-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}$

라센 특강 0 또는 음의 정수인 지수

$a\neq 0$이고 n이 양의 정수일 때

$a^0=1,\ a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

0843 $y=\dfrac{1}{(2x+3)^4}=(2x+3)^{-4}$이므로

$$\begin{aligned}y'&=-4(2x+3)^{-5}\cdot(2x+3)'\\&=-4(2x+3)^{-5}\cdot 2\\&=-\frac{8}{(2x+3)^5}\end{aligned}$$

답 $y'=-\dfrac{8}{(2x+3)^5}$

다른풀이
$$\begin{aligned}y'&=-\frac{\{(2x+3)^4\}'}{(2x+3)^8}\\&=-\frac{4(2x+3)^3\cdot(2x+3)'}{(2x+3)^8}\\&=-\frac{4(2x+3)^3\cdot 2}{(2x+3)^8}\\&=-\frac{8}{(2x+3)^5}\end{aligned}$$

0844 $y=\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^3=(x+2x^{-1})^3$이므로

$$\begin{aligned}y'&=3(x+2x^{-1})^2\cdot(x+2x^{-1})'\\&=3(x+2x^{-1})^2\cdot(1-2x^{-2})\\&=3\left(x+\frac{2}{x}\right)^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)\end{aligned}$$

답 $y'=3\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)$

0845 $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 답 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

0846 $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=x^{-\frac{3}{2}}$이므로

$y'=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$ 답 $y'=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

0847 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}=(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$$\begin{aligned}y'&=-\frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^2+3)'\\&=-\frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x\\&=-\frac{x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}\end{aligned}$$

답 $y'=-\dfrac{x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

0848 $y=\sqrt[5]{x}$에서 $y^5=x$

즉 $x=y^5$이므로 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=5y^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{5y^4}=\frac{1}{5(\sqrt[5]{x})^4}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

0849 $y=\sqrt[4]{4x}$에서 $y^4=4x$

즉 $x=\dfrac{y^4}{4}$이므로 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=y^3$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx}&=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{y^3}\\&=\frac{1}{(\sqrt[4]{4x})^3}=\frac{1}{\sqrt[4]{64x^3}}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{64x^3}}$

0850 $y=\sqrt[3]{3x-1}$에서 $y^3=3x-1$

$y^3+1=3x$

즉 $x=\dfrac{1}{3}y^3+\dfrac{1}{3}$이므로 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=y^2$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx}&=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{y^2}\\&=\frac{1}{(\sqrt[3]{3x-1})^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}$

0851 $y=\sqrt{x+2}-1$에서 $y+1=\sqrt{x+2}$

$(y+1)^2=x+2$

$y^2+2y+1=x+2$

즉 $x=y^2+2y-1$이므로 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=2y+2$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx}&=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y+2}\\&=\frac{1}{2(\sqrt{x+2}-1)+2}\\&=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

0852 $y'=4x^3+6x$이므로

$y''=12x^2+6$ 답 $y''=12x^2+6$

0853 $y'=3(5x-1)^2\cdot(5x-1)'=3(5x-1)^2\cdot 5$
$=15(5x-1)^2$

이므로

$$\begin{aligned}y''&=15\cdot 2(5x-1)\cdot(5x-1)'\\&=30(5x-1)\cdot 5\\&=150(5x-1)\end{aligned}$$

답 $y''=150(5x-1)$

0854 $y'=-\dfrac{(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$이므로

$$y''=\frac{(-2x)'(x^2+3)^2-(-2x)\cdot 2(x^2+3)\cdot(x^2+3)'}{(x^2+3)^4}$$
$$=\frac{-2(x^2+3)^2+4x(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$
$$=\frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}$$

답 $y''=\dfrac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}$

0855 $y'=\dfrac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$$y''=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$=-\frac{1}{4(x-2)\sqrt{x-2}}$$

답 $y''=-\dfrac{1}{4(x-2)\sqrt{x-2}}$

0856 $y'=e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}$이므로

$y''=2e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}\cdot 2=4e^{2x}$

답 $y''=4e^{2x}$

0857 $y'=\dfrac{1}{x+1}$이므로

$$y''=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

답 $y''=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

0858 $y'=-\sin 2x\cdot(2x)'=-2\sin 2x$이므로

$y''=-2\cos 2x\cdot(2x)'=-2\cos 2x\cdot 2=-4\cos 2x$

답 $y''=-4\cos 2x$

0859 $y'=1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)=\cos x-x\sin x$이므로

$y''=-\sin x-(1\cdot\sin x+x\cdot\cos x)$

$=-2\sin x-x\cos x$

답 $y''=-2\sin x-x\cos x$

0860 $y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$이므로

$y''=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$=2e^x\cos x$

답 $y''=2e^x\cos x$

0861 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+ax}$이므로

$$f'(x)=-\frac{(x^2+ax)'}{(x^2+ax)^2}=-\frac{2x+a}{(x^2+ax)^2}$$

$f'(1)=\dfrac{1}{4}$에서 $\quad -\dfrac{2+a}{(1+a)^2}=\dfrac{1}{4}$

$-4(2+a)=(1+a)^2,\quad a^2+6a+9=0$

$(a+3)^2=0\quad \therefore a=-3$

답 ①

0862 $f(x)=\dfrac{1}{x^3-3x+1}$이므로

$$f'(x)=-\frac{(x^3-3x+1)'}{(x^3-3x+1)^2}=-\frac{3x^2-3}{(x^3-3x+1)^2}$$

$$\therefore f'(2)=-\frac{12-3}{(8-6+1)^2}=-1$$

답 -1

0863 $f(x)=\dfrac{1}{ke^x+2x}$이므로

$$f'(x)=-\frac{(ke^x+2x)'}{(ke^x+2x)^2}=-\frac{ke^x+2}{(ke^x+2x)^2}$$

$f'(0)=-1$에서 $\quad -\dfrac{k\cdot e^0+2}{(k\cdot e^0+0)^2}=-1$

$-\dfrac{k+2}{k^2}=-1,\quad k^2=k+2$

$k^2-k-2=0,\quad (k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$

답 ②

0864 $f(-1)=-1$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$$ ⇨ ❶

$f(x)=-\dfrac{4}{x^2+3}$이므로

$$f'(x)=\frac{4(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$$ ⇨ ❷

$$\therefore f'(-1)=\frac{8\cdot(-1)}{(1+3)^2}=-\frac{1}{2}$$ ⇨ ❸

답 $-\dfrac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)+1}{x+1}=f'(-1)$임을 알 수 있다.	40%
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0865 $f(x)=\dfrac{ax}{x^2-2x+b}$이므로

$$f'(x)=\frac{a(x^2-2x+b)-ax(2x-2)}{(x^2-2x+b)^2}$$
$$=\frac{-ax^2+ab}{(x^2-2x+b)^2}$$

$f'(0)=1$에서 $\quad \dfrac{a}{b}=1\quad \therefore a=b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=2$에서 $\quad \dfrac{-a+ab}{(b-1)^2}=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{-b+b^2}{(b-1)^2}=2,\quad \dfrac{b}{b-1}=2$

$b=2b-2\quad \therefore b=2$

따라서 $a=b=2$이므로 $\quad a+b=4$

답 ③

0866 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$이므로

$$f'(x)=\frac{\sin x(1+\cos x)-(1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)^2}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

답 ④

0867 $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x+1}$이므로

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-(x^2+4)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{(x^2+2x+1)-5}{(x+1)^2}=1-\frac{5}{(x+1)^2}$$

따라서 $a=1$, $b=5$이므로 $a+b=6$ 답 6

0868 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+8}$이므로

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+8)-(x+a)\cdot 2x}{(x^2+8)^2}$$
$$=\frac{-x^2-2ax+8}{(x^2+8)^2}$$ ⇨ ❶

$f'(-2)=0$에서

$\dfrac{-4+4a+8}{(4+8)^2}=0$ $\therefore a=-1$ ⇨ ❷

따라서 $f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+8}{(x^2+8)^2}$이므로 $f'(x)=0$에서

$\dfrac{-x^2+2x+8}{(x^2+8)^2}=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 다른 한 근은 4이다. ⇨ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 다른 한 근을 구할 수 있다.	30%

0869 $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)$$

$f(x)=\dfrac{e^x-1}{x+1}$이므로

$$f'(x)=\frac{e^x(x+1)-(e^x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{xe^x+1}{(x+1)^2}$$
$$\therefore \frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{e+1}{(1+1)^2}=\frac{e+1}{8}$$

답 $\dfrac{e+1}{8}$

0870 $f(x)=\dfrac{x^2}{\cos x}$이므로

$$f'(x)=\frac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$$
$$\therefore f'(\pi)=\frac{2\cdot\pi\cdot\cos\pi+\pi^2\cdot\sin\pi}{\cos^2\pi}$$
$$=\frac{2\pi\cdot(-1)+\pi^2\cdot 0}{(-1)^2}=-2\pi$$

답 ①

0871 $f(x)=\sec x-\csc x$이므로

$f'(x)=\sec x\tan x+\csc x\cot x$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sec\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4}+\csc\frac{\pi}{4}\cot\frac{\pi}{4}$$
$$=\sqrt{2}\cdot 1+\sqrt{2}\cdot 1=2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

0872 $f(x)=\dfrac{\sin x+3}{\sin x+1}$으로 놓으면

$$f'(x)=\frac{\cos x(\sin x+1)-(\sin x+3)\cos x}{(\sin x+1)^2}$$
$$=\frac{-2\cos x}{(\sin x+1)^2}$$ ⇨ ❶
$$\therefore f'(0)=\frac{-2\cos 0}{(\sin 0+1)^2}=\frac{-2\cdot 1}{(0+1)^2}=-2$$

따라서 구하는 접선의 기울기는 -2이다. ⇨ ❷

답 -2

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	60%
❷ 접선의 기울기를 구할 수 있다.	40%

0873 $f(0)=\dfrac{\sin 0}{1+\tan 0}=0$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)$$

$f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\tan x}$이므로

$$f'(x)=\frac{\cos x(1+\tan x)-\sin x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$
$$\therefore f'(0)=\frac{\cos 0(1+\tan 0)-\sin 0\cdot\sec^2 0}{(1+\tan 0)^2}$$
$$=\frac{1\cdot 1-0\cdot 1^2}{(1+0)^2}=1$$

답 ⑤

0874 $f(x)=(3x^2+4x-1)^4$이므로

$f'(x)=4(3x^2+4x-1)^3\cdot(3x^2+4x-1)'$
$=4(3x^2+4x-1)^3\cdot(6x+4)$
$=8(3x^2+4x-1)^3(3x+2)$

$\therefore f'(-1)=8\cdot(3-4-1)^3\cdot(-3+2)=64$ 답 ⑤

0875 $f(x)=e^{2x}+e^{x^2}$이므로

$f'(x)=e^{2x}\cdot 2+e^{x^2}\cdot 2x=2(e^{2x}+xe^{x^2})$

$\therefore f'(0)+f'(1)=2(1+0\cdot 1)+2(e^2+1\cdot e)$
$=2(e^2+e+1)$ 답 $2(e^2+e+1)$

0876 $h(x)=f(g(x))=e^{\cos x}$이므로

$h'(x)=e^{\cos x}(\cos x)'=-e^{\cos x}\sin x$

$$\therefore h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{\cos\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}=-1$$ 답 -1

0877 $y=\{xf(x)\}^3$이므로

$y'=3\{xf(x)\}^2\{xf(x)\}'$
$=3\{xf(x)\}^2\{f(x)+xf'(x)\}$

$f(x)=\ln x$이므로 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$\therefore f(e)=1$, $f'(e)=\dfrac{1}{e}$

따라서 $x=e$에서의 미분계수는

$$3(e\cdot 1)^2\left(1+e\cdot\frac{1}{e}\right)=6e^2$$ 답 $6e^2$

0878 (1) 모서리의 길이가 길어지기 시작한 지 t초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(2+3t)$ cm이므로 정육면체의 부피를 V cm^3라 하면 $\quad V=(2+3t)^3$ ⇨ ❶

(2) $V=(2+3t)^3$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt}=3(2+3t)^2\cdot(2+3t)'=9(2+3t)^2$$ ⇨ ❷

따라서 $t=2$일 때의 $\frac{dV}{dt}$의 값은

$9(2+3\cdot2)^2=576$

이므로 모서리의 길이가 길어지기 시작한 지 2초 후의 정육면체의 부피의 변화율은 576 cm^3/s이다. ⇨ ❸

답 (1) $(2+3t)^3$ cm^3 (2) 576 cm^3/s

채점 기준	비율
❶ V를 구할 수 있다.	50%
❷ $\frac{dV}{dt}$를 구할 수 있다.	30%
❸ $t=2$일 때의 $\frac{dV}{dt}$의 값을 구할 수 있다.	20%

0879 $f(x)=x^4+5x-3$이므로 $\quad f'(x)=4x^3+5$

$\therefore f(1)=3,\ f'(1)=9$

$h(x)=g(f(x))$에서 $\quad h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$h'(1)=27$이므로

$h'(1)=g'(f(1))f'(1)=g'(3)\cdot9=27$

$\therefore g'(3)=3$ 답 ③

0880 $y=2^{f(x)}$이므로 $\quad y'=2^{f(x)}\ln2\cdot f'(x)$

따라서 $x=2$에서의 미분계수는

$2^{f(2)}\ln2\cdot f'(2)=2^{-1}\ln2\cdot4=2\ln2$ 답 $2\ln2$

0881 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$이므로

$y'=f'(g(x))g'(x)$

따라서 $x=-1$에서의 미분계수는

$f'(g(-1))g'(-1)=f'(-1)g'(-1)$

$=2\cdot3=6$ 답 ③

0882 $F(x)=f(f(x))$로 놓으면

$F(0)=f(f(0))=f(0)=0$ ⇨ ❶

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(f(x))}{x}=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)$ ⇨ ❷

$F'(x)=\{f(f(x))\}'=f'(f(x))f'(x)$이므로

$F'(0)=f'(f(0))f'(0)=f'(0)f'(0)=2\cdot2=4$ ⇨ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $F(0)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $\lim_{x\to0}\frac{f(f(x))}{x}=F'(0)$임을 알 수 있다.	40%
❸ $F'(0)$의 값을 구할 수 있다.	30%

0883 $f(2x+1)=x^3-2x^2+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(2x+1)\cdot2=3x^2-4x$

$\therefore f'(2x+1)=\frac{3x^2-4x}{2}$

$2x+1=3$에서 $x=1$이므로 위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(3)=\frac{3-4}{2}=-\frac{1}{2}$ 답 ④

0884 $3x-2=1$에서 $x=1$이므로

$f(3x-2)=\sin\pi x+\cos\pi x$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=\sin\pi+\cos\pi=-1$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)$

$f(3x-2)=\sin\pi x+\cos\pi x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(3x-2)\cdot3=\pi\cos\pi x-\pi\sin\pi x$

$=\pi(\cos\pi x-\sin\pi x)$

$\therefore f'(3x-2)=\frac{\pi(\cos\pi x-\sin\pi x)}{3}$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=\frac{\pi(\cos\pi-\sin\pi)}{3}=-\frac{\pi}{3}$ 답 $-\frac{\pi}{3}$

0885 $27x^3+ax+b$를 $(3x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$27x^3+ax+b=(3x+1)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$81x^2+a=2(3x+1)\cdot3\cdot Q(x)+(3x+1)^2Q'(x)$

$=6(3x+1)Q(x)+(3x+1)^2Q'(x)$ …… ㉡

㉠, ㉡의 양변에 $x=-\frac{1}{3}$을 각각 대입하면

$-1-\frac{1}{3}a+b=0,\ 9+a=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-9,\ b=-2$

$\therefore 2a+b=2\cdot(-9)-2=-20$ 답 -20

0886 $f(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$32x^6+ax^2+b=(2x-1)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$192x^5+2ax=2(2x-1)\cdot2\cdot Q(x)+(2x-1)^2Q'(x)$

$=4(2x-1)Q(x)+(2x-1)^2Q'(x)$

…… ㉡

㉠, ㉡의 양변에 $x=\frac{1}{2}$을 각각 대입하면

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}a+b=0,\ 6+a=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-6,\ b=1$

따라서 $f(x)=32x^6-6x^2+1$이므로 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=32-6+1=27$ 답 27

다쎈 특강 나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=f(a)$

0887 $f(x)=\ln(x^4-3x^3+10)$이므로

$$f'(x)=\frac{4x^3-9x^2}{x^4-3x^3+10}$$

$$\therefore f'(1)=\frac{4\cdot1-9\cdot1}{1-3\cdot1+10}=-\frac{5}{8}$$

답 $-\frac{5}{8}$

0888 $y=\ln|\ln x|$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}$$

답 ①

0889 $\frac{d}{dx}(\ln|\sin 5x|)=\frac{5\cos 5x}{\sin 5x}=5\cot 5x$

$\therefore a=5$

답 5

0890 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$ ⇨ ❶

$f(x)=\log_2\sqrt{x^2+2}$이므로

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{\sqrt{x^2+2}\ln 2}=\frac{x}{(x^2+2)\ln 2}$$ ⇨ ❷

따라서 구하는 값은

$$2f'(1)=2\cdot\frac{1}{(1+2)\ln 2}$$

$$=\frac{2}{3\ln 2}$$ ⇨ ❸

답 $\frac{2}{3\ln 2}$

채점 기준	비율
❶ $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=2f'(1)$임을 알 수 있다.	40%
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $2f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0891 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=2\ln|x|+\ln|x-1|-3\ln|x-3|$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x-3}$$

$$=\frac{-8x+6}{x(x-1)(x-3)}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\frac{-8x+6}{x(x-1)(x-3)}$$

$$\therefore f'(2)=f(2)\cdot\frac{-10}{2\cdot1\cdot(-1)}$$

$$=(-4)\cdot5=-20$$

답 -20

0892 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln|x+1|+3\ln|x+3|-2\ln|x+2|-4\ln|x+4|$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x+2}-\frac{4}{x+4}$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{f(x)}=1+1-1-1=0$$

답 ③

0893 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y=\sin x\ln x$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=y\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

따라서 $x=\frac{\pi}{2}$에서의 미분계수는

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sin\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}\cdot\ln\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}=1$$

답 1

0894 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln x\cdot\ln x=(\ln x)^2$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\ln x$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\frac{2}{x}\ln x$$

$$=x^{\ln x}\cdot\frac{2}{x}\ln x$$

$$=2x^{\ln x-1}\ln x$$

$$\therefore f'(e)=2e^{\ln e-1}\ln e=2$$

답 2

0895 $f(x)=\frac{x^3+4x^2-6}{x^2}=x+4-6x^{-2}$이므로

$$f'(x)=1+12x^{-3}$$

$$\therefore f'(1)+f'(2)=13+\frac{5}{2}=\frac{31}{2}$$

답 $\frac{31}{2}$

0896 $y=\frac{2}{3x}=\frac{2}{3}x^{-1}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}x^{-2}$$

따라서 $x=2$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{6}$$

이므로 구하는 순간변화율은 $-\frac{1}{6}$ L/Pa이다.

답 ⑤

0897 $f(x)=x^{-1}+x^{-3}+x^{-5}+x^{-7}+x^{-9}$이므로

$$f'(x)=-x^{-2}-3x^{-4}-5x^{-6}-7x^{-8}-9x^{-10}$$

$$\therefore f'(1)=-1-3-5-7-9=-25$$

답 -25

0898 $f(x)=3x^{\sqrt{3}}$이므로

$f'(x)=3\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$

$\therefore f'(3)=3\sqrt{3}\cdot 3^{\sqrt{3}-1}=3^{1+\frac{1}{2}+\sqrt{3}-1}=3^{\frac{1}{2}+\sqrt{3}}$

$\therefore k=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=1$이므로 $a+b=\frac{3}{2}$ 답 ③

0899 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x^3+1}}=(2x^3+1)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$f'(x)=-\frac{1}{2}(2x^3+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 6x^2$

$=-\frac{3x^2}{(2x^3+1)\sqrt{2x^3+1}}$

$=f(x)\cdot\left(-\frac{3x^2}{2x^3+1}\right)$

따라서 $g(x)=-\frac{3x^2}{2x^3+1}$이므로

$g(1)=-\frac{3}{2+1}=-1$ 답 -1

다른풀이 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x^3+1}}$, $f'(x)=-\frac{3x^2}{(2x^3+1)\sqrt{2x^3+1}}$이므로

$f(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(1)=-\frac{3}{3\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f'(x)=f(x)g(x)$에서 $f'(1)=f(1)g(1)$이므로

$-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}g(1)$ $\therefore g(1)=-1$

0900 $f(1)=2$이므로 $g(2)=1$

$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}$ 답 ①

0901 $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$a^3+2a+1=1$, $a(a^2+2)=0$

$\therefore a=0$

$g(4)=b$라 하면 $f(b)=4$이므로

$b^3+2b+1=4$, $(b-1)(b^2+b+3)=0$

$\therefore b=1$

즉 $g(1)=0$, $g(4)=1$이고 $f'(x)=3x^2+2$이므로

$g'(1)+g'(4)=\frac{1}{f'(g(1))}+\frac{1}{f'(g(4))}$

$=\frac{1}{f'(0)}+\frac{1}{f'(1)}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$ 답 $\frac{7}{10}$

0902 $f(e)=e+\ln e=e+1$이므로

$g(e+1)=e$ ⇨ ❶

$f(x)=x+\ln x$이므로 $f'(x)=1+\frac{1}{x}$ ⇨ ❷

$\therefore g'(e+1)=\frac{1}{f'(g(e+1))}=\frac{1}{f'(e)}$

$=\frac{1}{1+\frac{1}{e}}=\frac{e}{e+1}$ ⇨ ❸

답 $\frac{e}{e+1}$

채점 기준	비율
❶ $g(e+1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $g'(e+1)$의 값을 구할 수 있다.	40%

0903 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\frac{1}{2}$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x)-3\}=0$이므로 $f(1)=3$

$\therefore g(3)=1$

또 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=\frac{1}{2}$

$\therefore g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ 답 ⑤

0904 $x=\sqrt{y^2+2}$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{2\sqrt{y^2+2}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{\sqrt{y^2+2}}{y}$ 답 ①

0905 $x=e^y+2y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=e^y+2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y+2}$

$x=e^y+2y$에서 $x=1$일 때,

$y=0$

따라서 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는

$\frac{1}{e^0+2}=\frac{1}{3}$ 답 ①

0906 $x=\tan y+\sec y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\sec^2 y+\sec y\tan y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sec^2 y+\sec y\tan y}$

따라서 $y=\frac{\pi}{4}$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{1}{(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}\cdot 1}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

0907 $f(x)=\ln(x^2+2)$이므로

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+2}$

$f''(x)=\frac{2(x^2+2)-2x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}$

$\therefore f'(1)+f''(1)=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$ 답 ③

0908 $f(x)=e^x\cos x$이므로

$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$

$f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)$

$=-2e^x\sin x$

$\therefore \dfrac{f''(x)}{f(x)}=\dfrac{-2e^x\sin x}{e^x\cos x}=-2\tan x$ 답 ②

0909 $f(x)=xe^{ax+b}$이므로

$f'(x)=e^{ax+b}+xe^{ax+b}\cdot a=e^{ax+b}(ax+1)$

$f''(x)=e^{ax+b}\cdot a(ax+1)+e^{ax+b}\cdot a=ae^{ax+b}(ax+2)$ ⇨ ❶

$f'(0)=e$에서 $e^b=e$ $\therefore b=1$

$f''(0)=4e$에서 $2ae=4e$ $\therefore a=2$ ⇨ ❷

$\therefore ab=2$ ⇨ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

0910 $y=e^{ax}\sin x$이므로

$y'=ae^{ax}\sin x+e^{ax}\cos x=e^{ax}(a\sin x+\cos x)$

$y''=ae^{ax}(a\sin x+\cos x)+e^{ax}(a\cos x-\sin x)$

$=e^{ax}(a^2\sin x+2a\cos x-\sin x)$

$y''-4y'+5y=0$에서

$e^{ax}(a^2\sin x+2a\cos x-\sin x)-4e^{ax}(a\sin x+\cos x)+5e^{ax}\sin x=0$

$e^{ax}\{(a^2-4a+4)\sin x+(2a-4)\cos x\}=0$

$e^{ax}(a-2)\{(a-2)\sin x+2\cos x\}=0$

위의 등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a=2$ 답 2

0911 전략 몫의 미분법을 이용하여 도함수를 구한 후 $x=0$을 대입한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+x+1}$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{3(x^2+x+1)-3x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$=\dfrac{-3x^2+3}{(x^2+x+1)^2}$

$\therefore f'(0)=3$

따라서 구하는 접선의 기울기는 3이다. 답 3

0912 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 $x=0$을 대입한다.

풀이 $f(x)=\left(\dfrac{2x+a}{x+1}\right)^2$이므로

$f'(x)=2\left(\dfrac{2x+a}{x+1}\right)\left(\dfrac{2x+a}{x+1}\right)'$

$=2\left(\dfrac{2x+a}{x+1}\right)\cdot\dfrac{2(x+1)-(2x+a)}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{2(2x+a)(2-a)}{(x+1)^3}$

$f'(0)=2$에서

$\dfrac{2a\cdot(2-a)}{1}=2,\quad a(2-a)=1$

$a^2-2a+1=0,\quad (a-1)^2=0$

$\therefore a=1$ 답 ①

0913 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 $x=\pi$를 대입한다.

풀이 $f(x)=(1-\sin x)^3$이므로

$f'(x)=3(1-\sin x)^2\cdot(-\cos x)$

$=-3(1-\sin x)^2\cos x$

$\therefore f'(\pi)=-3\cdot1\cdot(-1)=3$ 답 3

0914 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f(3x-1)=x^3-3x+1$의 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $f(3x-1)=x^3-3x+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3f'(3x-1)=3x^2-3$

$\therefore f'(3x-1)=x^2-1$

$3x-1=2$에서 $x=1$이므로 위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(2)=0$ 답 ③

0915 전략 곱의 미분법과 합성함수의 미분법을 이용하여 $f''(x)$를 구한 후 $x=\dfrac{\pi}{3}$를 대입한다.

풀이 $f(x)=(\cos x+1)\sin x$이므로

$f'(x)=(-\sin x)\sin x+(\cos x+1)\cos x$

$=-\sin^2x+\cos^2x+\cos x$ ⇨ ❶

$f''(x)=-2\sin x\cos x+2\cos x\cdot(-\sin x)-\sin x$

$=-4\sin x\cos x-\sin x$ ⇨ ❷

$\therefore f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ⇨ ❸

답 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $f''(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0916 전략 몫의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+2}$이므로

$f'(x)=\dfrac{2(x^2+2)-(2x-1)\cdot2x}{(x^2+2)^2}$

$=\dfrac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)>0$에서 $\dfrac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2)^2}>0$

이때 $(x^2+2)^2>0$이므로

$-2x^2+2x+4>0,\quad x^2-x-2<0$

$(x+1)(x-2)<0\quad \therefore -1<x<2$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=5$ 답 ④

0917 전략 몫의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$이므로

$$f'(x)=\frac{-\sin x(1-\cos x)-(1+\cos x)\sin x}{(1-\cos x)^2}=\frac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

$\therefore k=-2$ 답 -2

0918 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 $x=1$을 대입하여 a의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=(2x^2+a)^4$이므로

$$f'(x)=4(2x^2+a)^3\cdot 4x=16x(2x^2+a)^3$$

이때 $f'(1)=16$이므로

$16(2+a)^3=16,\quad (a+2)^3=1\quad \therefore a=-1$

따라서 $f'(x)=16x(2x^2-1)^3$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=-16$$

답 ②

0919 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $h'(x)$를 구한 후 $x=0$을 대입한다.

풀이 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$이므로

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ ⇨ ❶

이때 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$, $g(x)=2x^2-3x+2$이므로

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-(x^2-1)}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

$g'(x)=4x-3$ ⇨ ❷

따라서 $g(0)=2$, $f'(2)=\dfrac{13}{16}$, $g'(0)=-3$이므로

$$h'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(2)g'(0)=\frac{13}{16}\cdot(-3)=-\frac{39}{16}$$ ⇨ ❸

답 $-\dfrac{39}{16}$

채점 기준	비율
❶ $h'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ $f'(x)$, $g'(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $h'(0)$의 값을 구할 수 있다.	30%

0920 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $h'(x)$를 구하고, $x=a$에서의 미분계수는 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기임을 이용한다.

풀이 주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}x+3 & (x<2)\\ x-2 & (x\ge2)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}2x & (x<2)\\ -x+6 & (x\ge2)\end{cases}$$

$h(x)=f(g(x))$에서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$$h'(3)=f'(g(3))g'(3)=f'(3)g'(3)=1\cdot(-1)=-1$$

답 -1

0921 전략 $f(x)=\ln(e^x+1)$로 놓고 로그의 성질과 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\ln(e^x+1)$로 놓으면

$f(0)=\ln(e^0+1)=\ln 2$

이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+1}{2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+1)-\ln 2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

이때 $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$이므로

$$f'(0)=\frac{e^0}{e^0+1}=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

0922 전략 로그함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구한다.

풀이 $f(x)=\log_2|3x^2+x|$에서

$$f'(x)=\frac{6x+1}{(3x^2+x)\ln 2}$$

따라서 $(n-1)f'(n)=\dfrac{(n-1)(6n+1)}{(3n^2+n)\ln 2}=\dfrac{6n^2-5n-1}{(3n^2+n)\ln 2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(n-1)f'(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-5n-1}{(3n^2+n)\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-5n-1}{3n^2+n}=\frac{2}{\ln 2}$$

답 $\dfrac{2}{\ln 2}$

0923 전략 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취한 후 로그함수의 미분법을 이용한다.

풀이 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=2\ln|x+1|+\ln|2x+1|-2\ln|x-1|$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x+1}+\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{x-1}$$

$$\therefore \frac{f'(2)}{f(2)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2=-\frac{14}{15}$$

답 ①

0924 전략 역함수의 미분법을 이용한다.

풀이 $y=f(x)$라 하면 $y=\sin x$의 역함수는

$x=\sin y$

양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}$$

$x=\sin y$에서 $x=\dfrac{1}{2}$일 때,

$$y=\frac{\pi}{6}\left(\because 0<y<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ④

다른풀이 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$이므로 $\quad g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$

$f'(x)=\cos x$이므로

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

0925 전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$, $f''(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=axe^{bx}$이므로

$f'(x)=ae^{bx}+abxe^{bx}=a(bx+1)e^{bx}$

$f''(x)=abe^{bx}+ab(bx+1)e^{bx}=ab(bx+2)e^{bx}$ ⇨ ❶

$f'(0)=2$에서 $\quad a=2$

$f''(0)=4$에서 $\quad 2ab=4 \quad \therefore b=1$ ⇨ ❷

$\therefore a+b=3$ ⇨ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0926 전략 $f'(x)$, $f''(x)$를 구하고 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f'(x)}{x-\pi}$를 변형한다.

풀이 $f(x)=\cos 2x$이므로 $\quad f'(x)=-2\sin 2x$

$\therefore f'(\pi)=0$

$$\therefore \lim_{x\to\pi}\frac{f'(x)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f'(x)-f'(\pi)}{x-\pi}=f''(\pi)$$

이때 $f''(x)=-4\cos 2x$이므로

$f''(\pi)=-4$

답 ③

0927 전략 몫의 미분법을 이용하여 $g'(x)$를 구한 후 $x=1$을 대입한다.

풀이 $g(x)=\frac{1}{f(x)+2x}$이므로

$$g'(x)=-\frac{f'(x)+2}{\{f(x)+2x\}^2}$$

$$\therefore g'(1)=-\frac{f'(1)+2}{\{f(1)+2\}^2}=-\frac{4}{4}=-1$$

답 ②

0928 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{10}(3x+4)^n$

$=(3x+4)+(3x+4)^2+(3x+4)^3+\cdots+(3x+4)^{10}$

이므로

$f'(x)=3+2(3x+4)\cdot 3+3(3x+4)^2\cdot 3+\cdots+10(3x+4)^9\cdot 3$

$=3\{1+2(3x+4)+3(3x+4)^2+\cdots+10(3x+4)^9\}$ ⇨ ❶

$\therefore f'(-1)=3(1+2+3+\cdots+10)$

$=3\sum\limits_{k=1}^{10}k=3\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=165$ ⇨ ❷

답 165

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	60%
❷ $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	40%

다른풀이 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{10}(3x+4)^n$이므로

$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{10}n(3x+4)^{n-1}\cdot 3$

$=3\sum\limits_{n=1}^{10}n(3x+4)^{n-1}$

$\therefore f'(-1)=3\sum\limits_{n=1}^{10}n=3\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=165$

0929 전략 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$임을 이용한다.

풀이 $(x-2)f(x)=e^{x-2}-1$이므로 $x\neq 2$이면

$$f(x)=\frac{e^{x-2}-1}{x-2}$$

또 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

$$\therefore f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{x-2}$$

$g(x)=e^{x-2}$으로 놓으면 $g(2)=1$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$
$$=g'(2)$$

이때 $g'(x)=e^{x-2}$이므로

$f(2)=g'(2)=1$

답 ①

0930 전략 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 실수)이고 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=4$에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 2}\{f(x)-2\}=0$이므로 $\quad f(2)=2$

따라서 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=4$ ⇨ ❶

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{g(x)-2}{x+1}=3$에서 $x\longrightarrow -1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to -1}\{g(x)-2\}=0$이므로

$g(-1)=2$

따라서 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{g(x)-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=g'(-1)$이므로

$g'(-1)=3$ ⇨ ❷

$\therefore h'(-1)=f'(g(-1))g'(-1)$

$=f'(2)g'(-1)=4\cdot 3=12$ ⇨ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ $f(2)$, $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $g(-1)$, $g'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $h'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

타셋 특강 함수의 극한의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

① $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면
$\lim_{x\to a}f(x)=0$

② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면
$\lim_{x\to a}g(x)=0$

0931 전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$, $f''(x)$를 구한 후 $x=\theta$를 대입한다.

풀이 $f(x)=e^x\sin x$이므로

$$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$$
$$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$$

$f'(\theta)-f''(\theta)=0$에서

$$e^\theta(\sin\theta+\cos\theta)-2e^\theta\cos\theta=0$$
$$e^\theta\sin\theta-e^\theta\cos\theta=0$$
$$e^\theta\sin\theta=e^\theta\cos\theta \quad \cdots\cdots ㉠$$

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $e^\theta\cos\theta\neq0$이므로 ㉠의 양변을 $e^\theta\cos\theta$로 나누면

$\tan\theta=1 \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{4}$

답 ⑤

0932 전략 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$임을 이용한다. (단, $f'(g(x))\neq0$)

풀이 $f(x)=\ln\left|\frac{2x-1}{x+2}\right|=\ln|2x-1|-\ln|x+2|$이므로

$$f'(x)=\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x+2}=\frac{5}{(2x-1)(x+2)}$$
$$\therefore f'(0)=\frac{5}{(-1)\cdot2}=-\frac{5}{2}$$

$f(x)=\ln\left|\frac{2x-1}{x+2}\right|$에서 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=0$이므로

$$g(0)=-\frac{1}{3}$$
$$\therefore g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

이때 $f'\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{5}{3}}=-\frac{9}{5}$이므로

$$g'(0)=\frac{1}{f'\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{5}{9}$$
$$\therefore f'(0)g'(0)=\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)=\frac{25}{18}$$

답 ①

Ⅲ. 미분법

08 도함수의 활용 (1)

0933 $f(x)=\frac{1}{x-4}$로 놓으면

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-4)^2}$$

이므로

$$f'(5)=-\frac{1}{1^2}=-1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-(x-5) \qquad \therefore y=-x+6$

답 $y=-x+6$

0934 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

이므로

$$f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) \qquad \therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$

0935 $f(x)=e^{x+1}$으로 놓으면

$$f'(x)=e^{x+1}$$

이므로

$$f'(1)=e^{1+1}=e^2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-e^2=e^2(x-1) \qquad \therefore y=e^2x$

답 $y=e^2x$

0936 $f(x)=\ln 3x$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{3}{3x}=\frac{1}{x}$$

이므로

$$f'(1)=1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-\ln3=x-1 \qquad \therefore y=x+\ln3-1$

답 $y=x+\ln3-1$

0937 $f(x)=\cos2x$로 놓으면

$$f'(x)=-2\sin2x$$

이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=-\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\therefore y=-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{1}{2}$$

답 $y=-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{1}{2}$

0938 $f(x)=\ln x+2$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

이므로 $f'(1)=1$

따라서 점 $(1,\ 2)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-2=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+3$

답 $y=-x+3$

0939 $f(x)=\sqrt{2x+1}$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

접점의 좌표를 $(t,\ \sqrt{2t+1})$이라 하면 $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2t+1}}$이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{2t+1}}=1,\quad \sqrt{2t+1}=1$

$2t+1=1$ $\quad\therefore t=0$

따라서 접점의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=x-0$ $\quad\therefore y=x+1$

답 $y=x+1$

0940 $f(x)=e^{-x}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=-e^{-x}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{-t})$이라 하면 $f'(t)=-e^{-t}$이므로

$-e^{-t}=-1$ $\quad\therefore t=0$

따라서 접점의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-(x-0)$ $\quad\therefore y=-x+1$

답 $y=-x+1$

0941 $f(x)=\ln x$로 놓으면 $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t,\ \ln t)$라 하면 $f'(t)=\dfrac{1}{t}$이므로

$\dfrac{1}{t}=e$ $\quad\therefore t=\dfrac{1}{e}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\dfrac{1}{e},\ -1\right)$이므로

$y+1=e\left(x-\dfrac{1}{e}\right)$ $\quad\therefore y=ex-2$

답 $y=ex-2$

0942 $f(x)=\sin x$로 놓으면 $\quad f'(x)=\cos x$

접점의 좌표를 $(t,\ \sin t)$라 하면 $f'(t)=\cos t$이므로

$\cos t=1$ $\quad\therefore t=0\ (\because -\pi<t<\pi)$

따라서 접점의 좌표가 $(0,\ 0)$이므로

$y-0=x-0$ $\quad\therefore y=x$

답 $y=x$

0943 $f(x)=e^{2x}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=2e^{2x}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{2t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2e^{2t}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{2t}=2e^{2t}(x-t)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$-e^{2t}=2e^{2t}\cdot(-t),\quad -1=-2t$

$\therefore t=\dfrac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면

$y-e=2e\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad\therefore y=2ex$

답 $y=2ex$

0944 $f(x)=\sqrt{x+3}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

접점의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t+3})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+3}}$이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{t+3}=\dfrac{1}{2\sqrt{t+3}}(x-t)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(-7,\ 0)$을 지나므로

$-\sqrt{t+3}=\dfrac{1}{2\sqrt{t+3}}(-7-t)$

$-2(t+3)=-7-t$ $\quad\therefore t=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$y-2=\dfrac{1}{4}(x-1)$ $\quad\therefore y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{4}$

답 $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{4}$

0945 $f(x)=x\ln x$로 놓으면 $\quad f'(x)=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t\ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\ln t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-t\ln t=(\ln t+1)\cdot(x-t)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1-t\ln t=(\ln t+1)\cdot(-t)$

$-1=-t$ $\quad\therefore t=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$y-0=x-1$ $\quad\therefore y=x-1$

답 $y=x-1$

0946 (1) $f(x)=e^x-x$에서 $\quad f'(x)=e^x-1$

(2) $f'(x)=0$에서 $\quad e^x-1=0,\quad e^x=1$

$\therefore x=0$

(3)

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

(4) 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 감소하고, 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

0947 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$에서 $\quad f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 증가하고, 구간 $(0,\ \infty)$에서 감소한다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

답 풀이 참조

0948 $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$에서 $x\neq1$이고

$f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad \dfrac{1}{(x-1)^2}=1, \quad (x-1)^2=1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0)$ 또는 $(2,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $(0,\ 1)$ 또는 $(1,\ 2)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0949 $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$에서

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 감소하고, 구간 $(-1,\ \infty)$에서 증가한다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

답 풀이 참조

0950 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$에서

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}=-\dfrac{x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 증가하고, 구간 $(0,\ \infty)$에서 감소한다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

답 풀이 참조

0951 $f(x)=2x+e^{-x}$에서 $\quad f'(x)=2-e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad e^{-x}=2, \quad -x=\ln 2$

$\therefore x=-\ln 2$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -\ln 2)$에서 감소하고, 구간 $(-\ln 2,\ \infty)$에서 증가한다.

x	$\cdots$	$-\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

답 풀이 참조

0952 $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x}$에서 $x\neq 0$이고

$f'(x)=\dfrac{2e^{2x}\cdot x-e^{2x}}{x^2}=\dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2x-1=0 \quad \therefore x=\dfrac{1}{2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0)$ 또는 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서 감소하고, 구간 $\left(\dfrac{1}{2},\ \infty\right)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

0953 $f(x)=\ln x-x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 증가하고, 구간 $(1,\ \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0954 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1$

$\therefore x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ e)$에서 증가하고, 구간 $(e,\ \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0955 $f(x)=x-2\sin x$에서

$f'(x)=1-2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{3}\ (\because 0<x<\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$에서 감소하고, 구간 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \pi\right)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

0956 $f(x)=\sin x-\cos x$에서

$f'(x)=\cos x+\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-\sin x$

$\therefore x=\dfrac{3}{4}\pi\ (\because 0<x<\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$에서 증가하고, 구간 $\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ \pi\right)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0957 $f(x)=\tan x-4x$에서

$f'(x)=\sec^2 x-4$

$f'(x)=0$에서 $\sec^2 x=4$, $\sec x=\pm 2$

$\therefore x=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$ 또는 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가하고, 구간 $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0958 (1) $f(x)=x^2e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=xe^x(x+2)$

(2) $f'(x)=0$에서 $xe^x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

(3)

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗

(4) 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $\frac{4}{e^2}$, $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다.

답 풀이 참조

0959 $f(x)=x^3-6x^2-36x$에서

$f'(x)=3x^2-12x-36$

$f'(x)=0$에서 $3x^2-12x-36=0$

$3(x+2)(x-6)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	40	↘	-216	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 40, $x=6$에서 극솟값 -216을 갖는다.

답 극댓값: 40, 극솟값: -216

0960 $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$에서

$f'(x)=\frac{(x^2+4)-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$

$=\frac{-(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 $-\frac{1}{4}$, $x=2$에서 극댓값 $\frac{1}{4}$을 갖는다.

답 극댓값: $\frac{1}{4}$, 극솟값: $-\frac{1}{4}$

0961 $f(x)=e^{-x^2}$에서

$f'(x)=e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2xe^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1을 갖는다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↘

답 극댓값: 1

0962 $f(x)=x-2\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=1-\frac{2}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$2-2\ln 2$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 $2-2\ln 2$를 갖는다.

답 극솟값: $2-2\ln 2$

0963 $f(x)=x+2\cos x$에서

$f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ $(\because 0<x<\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	↘	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극솟값 $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$을 갖는다.

답 극댓값: $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, 극솟값: $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

0964 (1) $f(x)=x^3+3x^2-2$에서

$f'(x)=3x^2+6x$, $f''(x)=6x+6$

(2) $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

$\therefore f''(-2)=-6<0$, $f''(0)=6>0$

(3) 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 극댓값은 $f(-2)=2$, $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=-2$이다.

답 풀이 참조

0965 $f(x)=-x^4+2x^2+1$에서

$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f''(x)=-12x^2+4$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

이때 $f''(-1)=-8<0$, $f''(0)=4>0$, $f''(1)=-8<0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=f(1)=2$, $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=1$이다.

답 극댓값: 2, 극솟값: 1

0966 $f(x)=\frac{1-x}{x^2}$에서 $x\neq0$이고

$$f'(x)=\frac{-x^2-(1-x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{x-2}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{x^3-(x-2)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{-2x^3+6x^2}{x^6}=\frac{-2(x-3)}{x^4}$$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

이때 $f''(2)=\frac{1}{8}>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(2)=-\frac{1}{4}$이다.

답 극솟값: $-\frac{1}{4}$

0967 $f(x)=xe^{-2x}$에서

$$f'(x)=e^{-2x}+x\cdot(-2e^{-2x})=-e^{-2x}(2x-1)$$

$$f''(x)=2e^{-2x}(2x-1)-e^{-2x}\cdot2=4e^{-2x}(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$

이때 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{e}<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2e}$이다.

답 극댓값: $\frac{1}{2e}$

0968 $f(x)=\ln(x^2+3)$에서

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+3}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+3)-2x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

이때 $f''(0)=\frac{2}{3}>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=\ln 3$이다.

답 극솟값: $\ln 3$

0969 $f(x)=2\sin x+\cos 2x$에서

$$f'(x)=2\cos x-2\sin 2x$$

$$f''(x)=-2\sin x-4\cos 2x$$

$f'(x)=0$에서 $2\cos x-2\sin 2x=0$

$2\cos x-4\sin x\cos x=0$

$2\cos x(1-2\sin x)=0$

$\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}\ \left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

이때 $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-3<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$이다.

답 극댓값: $\frac{3}{2}$

0970 $f(x)=x\sqrt{x}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=\frac{3}{2}$이므로 접선의 방정식은

$y-1=\frac{3}{2}(x-1)\qquad \therefore y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로 $a-b=2$

답 ④

0971 $f(x)=(2x-3)^5$으로 놓으면

$$f'(x)=5(2x-3)^4\cdot 2=10(2x-3)^4$$

점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(2)=10$이므로 접선의 방정식은 $y-1=10(x-2)$

$\therefore y=10x-19$

따라서 직선 $y=10x-19$ 위의 점의 좌표는 ①이다.

답 ①

0972 $f(x)=x-2x\ln x$로 놓으면

$$f'(x)=1-2(\ln x+1)=-2\ln x-1$$

x좌표가 1인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-2\ln 1-1=-1$

이때 $f(1)=1$이므로 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=-(x-1)$

$\therefore y=-x+2$

이 직선이 점 $(5,\ k)$를 지나므로

$k=-5+2=-3$

답 -3

0973 $f(x)=e^{\sin x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{\sin x}\cos x$ ⇨ ❶

점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(0)=1$이므로 접선의 방정식은

$y-1=x-0\qquad \therefore y=x+1$ ⇨ ❷

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$0=x+1\qquad \therefore x=-1$

즉 구하는 x절편은 -1이다. ⇨ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ x절편을 구할 수 있다.	20%

0974 $f(x)=\frac{6}{x^2+2}$으로 놓으면

$$f'(x)=-\frac{6\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=-\frac{12x}{(x^2+2)^2}$$

점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(2)=-\frac{2}{3}$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이고, 직선의 방정식은

$y-1=\frac{3}{2}(x-2)$

$\therefore y=\frac{3}{2}x-2$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=-2$이므로 $ab=-3$

답 -3

0975 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

점 $(\pi,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 $f'(\pi)=-\frac{1}{\pi}$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 π이다.

답 ④

0976 $f(x)=xe^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$

점 $(1,\ e)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=2e$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2e}$이고, 직선의 방정식은

$y-e=-\frac{1}{2e}(x-1)$

$\therefore y=-\frac{1}{2e}x+e+\frac{1}{2e}$

따라서 구하는 y절편은 $e+\frac{1}{2e}$이다.

답 ③

0977 $f(x)=\ln 4x$로 놓으면

$f(1)=\ln 4=2\ln 2$

$\therefore a=2\ln 2$ ⇨ ❶

$f'(x)=\frac{1}{x}$이므로 $f'(1)=1$

점 $(1,\ 2\ln 2)$에서의 접선의 기울기가 1이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1이고, 직선의 방정식은

$y-2\ln 2=-(x-1)$

$\therefore y=-x+1+2\ln 2$

이 직선이 점 $(3,\ b)$를 지나므로

$b=-3+1+2\ln 2=-2+2\ln 2$ ⇨ ❷

$\therefore a-b=2\ln 2-(-2+2\ln 2)=2$ ⇨ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0978 $f(x)=e^{3x}$으로 놓으면

$f'(x)=3e^{3x}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{3t})$이라 하면 직선 $y=3x$에 평행한 직선의 기울기는 3이므로

$f'(t)=3e^{3t}=3$

$\therefore t=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 직선의 방정식은

$y-1=3(x-0)$ $\therefore y=3x+1$

따라서 구하는 y절편은 1이다. 답 1

0979 $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{t}{2}+\frac{2}{t}\right)$라 하면 접선의 기울기가 0이므로

$f'(t)=\frac{1}{2}-\frac{2}{t^2}=0,\quad t^2=4$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 2)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=2$

답 ④

0980 평행이동한 직선의 방정식은 $y=-2x+a$

$f(x)=\cos 2x$로 놓으면

$f'(x)=-2\sin 2x$ ⇨ ❶

접점의 좌표를 $(t,\ \cos 2t)$라 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(t)=-2\sin 2t=-2,\quad \sin 2t=1$

$2t=\frac{\pi}{2}\ (\because 0<2t<\pi)$ $\therefore t=\frac{\pi}{4}$ ⇨ ❷

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-0=-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $\therefore y=-2x+\frac{\pi}{2}$

$\therefore a=\frac{\pi}{2}$ ⇨ ❸

답 $\frac{\pi}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

0981 $f(x)=\frac{4}{x-2}$로 놓으면 $f'(x)=-\frac{4}{(x-2)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{4}{t-2}\right)$라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(t)=-\frac{4}{(t-2)^2}=-1$

$(t-2)^2=4,\quad t-2=\pm 2$

$\therefore t=0$ 또는 $t=4$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ -2)$, $(4,\ 2)$이므로 접선의 방정식은

$y+2=-(x-0)$, $y-2=-(x-4)$

$\therefore y=-x-2,\ y=-x+6$

$\therefore a+b=4$ 답 ④

0982 $f(x)=e^{2x-1}$으로 놓으면 $f'(x)=2e^{2x-1}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{2t-1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2e^{2t-1}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{2t-1}=2e^{2t-1}(x-t)$

$\therefore y=2e^{2t-1}x-2te^{2t-1}+e^{2t-1}$ …… ㉠

이 직선이 점 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지나므로

$0=e^{2t-1}-2te^{2t-1}+e^{2t-1},\quad 2e^{2t-1}-2te^{2t-1}=0$

$2e^{2t-1}(1-t)=0$ $\therefore t=1\ (\because e^{2t-1}>0)$

이것을 ㉠에 대입하면

$y=2ex-e$

이 직선이 점 $(-1,\ a)$를 지나므로

$a=-2e-e=-3e$ 답 ①

0983 $f(x)=\sqrt{x}+4$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

접점의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t}+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$이므로 접선의 방정식은

$y-(\sqrt{t}+4)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$

이 직선이 점 $(-4,\ 4)$를 지나므로

$$4-(\sqrt{t}+4)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(-4-t)$$

$$\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(t+4), \qquad 2t=t+4 \qquad \therefore t=4$$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$$f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

답 ①

0984 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{x^2+1-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{t+1}{t^2+1}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\dfrac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{t+1}{t^2+1}=\frac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2}x+\frac{2t^3+3t^2+1}{(t^2+1)^2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 직선이 점 $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$을 지나므로

$$\frac{3}{2}=\frac{2t^3+3t^2+1}{(t^2+1)^2}, \qquad 3(t^4+2t^2+1)=4t^3+6t^2+2$$

$$3t^4-4t^3+1=0, \qquad (t-1)^2(3t^2+2t+1)=0$$

$$\therefore t=1\ (\because 3t^2+2t+1>0)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2},\ \text{즉}\ x+2y-3=0$$

따라서 직선 $x+2y-3=0$과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

답 $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

0985 $f(x)=\ln x^2+1$로 놓으면 $\quad f'(x)=\dfrac{2}{x}$ ➡ ❶

접점의 좌표를 $(t,\ \ln t^2+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\dfrac{2}{t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-(\ln t^2+1)=\frac{2}{t}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{2}{t}x+\ln t^2-1$$

이 직선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$$1=\ln t^2-1, \qquad \ln t^2=2$$

$$t^2=e^2 \qquad \therefore t=\pm e$$ ➡ ❷

따라서 접선의 기울기는 $f'(e)=\dfrac{2}{e}$, $f'(-e)=-\dfrac{2}{e}$이므로 두 접선의 기울기의 곱은 $\quad \dfrac{2}{e}\cdot\left(-\dfrac{2}{e}\right)=-\dfrac{4}{e^2}$ ➡ ❸

답 $-\dfrac{4}{e^2}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ 두 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	50%
❸ 두 접선의 기울기의 곱을 구할 수 있다.	20%

0986 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$로 놓으면 $\qquad f'(x)=1-\dfrac{2}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ t+\dfrac{2}{t}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=1-\dfrac{2}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\left(t+\frac{2}{t}\right)=\left(1-\frac{2}{t^2}\right)(x-t)$$

$$\therefore y=\left(1-\frac{2}{t^2}\right)x+\frac{4}{t} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 직선이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$$-1=2\left(1-\frac{2}{t^2}\right)+\frac{4}{t}$$

$$3t^2+4t-4=0, \qquad (t+2)(3t-2)=0$$

$$\therefore t=-2\ \text{또는}\ t=\frac{2}{3}$$

이때 $t=-2$, $t=\dfrac{2}{3}$는 모두 ㉠의 분모를 0으로 하지 않으므로 점 $(2,\ -1)$에서 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다.

답 2

0987 $f(x)=(x+k)e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=e^x+(x+k)e^x=(1+x+k)e^x$$

접점의 좌표를 $(t,\ (t+k)e^t)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(1+t+k)e^t$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t+k)e^t=(1+t+k)e^t(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-(t+k)e^t=(1+t+k)e^t\cdot(-t)$$

$$e^t(t^2+kt-k)=0$$

$$\therefore t^2+kt-k=0\ (\because e^t>0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

원점에서 곡선 $y=(x+k)e^x$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$D=k^2+4k=0, \qquad k(k+4)=0$$

$$\therefore k=-4\ (\because k\neq 0)$$

답 ②

0988 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$로 놓으면 $\qquad f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{1}{t^2+2}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-\dfrac{2t}{(t^2+2)^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{t^2+2}=-\frac{2t}{(t^2+2)^2}(x-t)$$

$$\therefore y=-\frac{2t}{(t^2+2)^2}x+\frac{3t^2+2}{(t^2+2)^2}$$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$$0=\frac{3t^2-2at+2}{(t^2+2)^2}$$

$$\therefore 3t^2-2at+2=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 $(a,\ 0)$에서 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-6>0, \qquad (a+\sqrt{6})(a-\sqrt{6})>0$$

$$\therefore a<-\sqrt{6}\ \text{또는}\ a>\sqrt{6}$$

답 $a<-\sqrt{6}$ 또는 $a>\sqrt{6}$

0989 $f(x)=ax^2+e^{x-1}$, $g(x)=\dfrac{b}{x}$로 놓으면

$f'(x)=2ax+e^{x-1}$, $g'(x)=-\dfrac{b}{x^2}$

두 곡선이 $x=1$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(1)=g(1)$에서 $\quad a+1=b$

$\therefore a-b=-1$ ...... ㉠

$f'(1)=g'(1)$에서 $\quad 2a+1=-b$

$\therefore 2a+b=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$

$\therefore a+b=-\dfrac{1}{3}$

답 ②

0990 $f(x)=ax^2$, $g(x)=\ln x$로 놓으면

$f'(x)=2ax$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}$

두 곡선이 $x=b$인 점에서 접하므로

$f(b)=g(b)$에서 $\quad ab^2=\ln b$ ...... ㉠

$f'(b)=g'(b)$에서 $\quad 2ab=\dfrac{1}{b}$

$\therefore ab^2=\dfrac{1}{2}$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad \dfrac{1}{2}=\ln b \qquad \therefore b=\sqrt{e}$

이것을 ㉡에 대입하면 $\quad ae=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2e}$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\sqrt{e}\cdot 2e=2e\sqrt{e}$

답 ⑤

0991 $f(x)=-\sin x$, $g(x)=\cos^2 x+a$로 놓으면

$f'(x)=-\cos x$, $g'(x)=-2\cos x\sin x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad -\sin t=\cos^2 t+a$

$-\sin t=1-\sin^2 t+a$ ...... ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad -\cos t=-2\cos t\sin t$

$\cos t(1-2\sin t)=0$

$\therefore \sin t=\dfrac{1}{2}$ ($\because \cos t\neq 0$)

이것을 ㉠에 대입하면

$-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{4}+a \qquad \therefore a=-\dfrac{5}{4}$

답 $-\dfrac{5}{4}$

0992 $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4x}{\sqrt{2x^2+1}}=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

점 (2, 3)에서의 접선의 기울기가 $f'(2)=\dfrac{2\cdot 2}{\sqrt{8+1}}=\dfrac{4}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y-3=\dfrac{4}{3}(x-2) \qquad \therefore y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$

접선의 x절편과 y절편이 각각 $-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{3}$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{24}$

답 ②

0993 $f(x)=\ln(x+3)$으로 놓으면 $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x+3}$

접점의 좌표를 $(t, \ln(t+3))$이라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=\dfrac{1}{t+3}=1 \qquad \therefore t=-2$

즉 접점의 좌표는 $(-2, 0)$이므로 접선의 방정식은

$y=x+2$

접선의 x절편과 y절편이 각각 -2, 2이므로

$\mathrm{P}(-2, 0)$, $\mathrm{Q}(0, 2)$

$\therefore \triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$

답 2

0994 $f(x)=e^{-x}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=-e^{-x}$

접점의 좌표를 (t, e^{-t})이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{-t}=-e^{-t}(x-t)$

$\therefore y=-e^{-t}x+te^{-t}+e^{-t}$ ...... ㉠

이 직선이 점 $(2, -1)$을 지나므로

$-1=-2e^{-t}+te^{-t}+e^{-t}$

$e^{-t}(1-t)=1 \qquad \therefore t=0$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad y=-x+1$

접선의 x절편과 y절편이 각각 1, 1이므로 구하는 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{1}{2}$

답 ②

0995 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$(x^2+1)^2>0$이므로 $f'(x)>0$에서

$-(x+1)(x-1)>0, \qquad (x+1)(x-1)<0$

$\therefore -1<x<1$

답 ③

0996 $f(x)=x-2\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=1-\dfrac{2}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad 1-\dfrac{2}{x}=0 \qquad \therefore x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(2, \infty)$에서 증가하므로 실수 a의 최솟값은 2이다.

답 2

0997 $f(x)=(x^2-4)e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+(x^2-4)e^x=(x^2+2x-4)e^x$ ⇨ ❶

$f'(x)=0$에서 $\quad x^2+2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$ ⇨ ❷

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{5}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

함수 $f(x)$가 감소하는 구간은

$(-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5})$ ⇨ ❸

따라서 이 구간에 속하는 모든 정수 x의 값의 합은

$-3+(-2)+(-1)+0+1=-5$ ⇨ ❹

답 -5

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20%
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $f(x)$가 감소하는 구간을 구할 수 있다.	40%
❹ 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

0998 $f(x)=x-2\sin x$에서 $f'(x)=1-2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ ($\because -\pi<x<\pi$)

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

ㄱ. $-\pi<x_1<x_2<-\frac{\pi}{3}$이면 $f(x_1)<f(x_2)$

ㄴ. $-\frac{\pi}{3}<x_1<x_2<\frac{\pi}{3}$이면 $f(x_1)>f(x_2)$

ㄷ. $\frac{\pi}{3}<x_1<x_2<\pi$이면 $f(x_1)<f(x_2)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0999 $f(x)=(-x^2+ax-5)e^{-x}$에서

$f'(x)=(-2x+a)e^{-x}-(-x^2+ax-5)e^{-x}$

$=e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a+5\}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이때 $e^{-x}>0$이므로 $x^2-(a+2)x+a+5\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2-(a+2)x+a+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+2)\}^2-4(a+5)\le 0$, $a^2-16\le 0$

$(a+4)(a-4)\le 0$ $\therefore -4\le a\le 4$ 답 ③

1000 $f(x)=ax-\cos x$에서 $f'(x)=a+\sin x$ ⇨ ❶

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다. ⇨ ❷

즉 $a+\sin x\ge 0$이어야 하므로 $-1\le \sin x\le 1$에서

$a-1\le a+\sin x\le a+1$

$a-1\ge 0$이어야 하므로 $a\ge 1$

따라서 a의 최솟값은 1이다. ⇨ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $f(x)$가 주어진 구간에서 증가하기 위한 조건을 알 수 있다.	30%
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

1001 $f(x)=\ln(x^2+1)-ax$에서

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-a=\frac{-ax^2+2x-a}{x^2+1}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이때 $x^2+1>0$이므로 $-ax^2+2x-a\le 0$, 즉 $ax^2-2x+a\ge 0$이어야 한다.

$a>0$이고 이차방정식 $ax^2-2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-a^2\le 0$, $(a+1)(a-1)\ge 0$

$a\le -1$ 또는 $a\ge 1$

$\therefore a\ge 1$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다. 답 ①

1002 $f(x)=ax+\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=a+\frac{1}{x}$

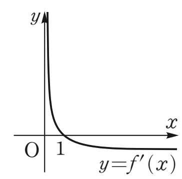
함수 $f(x)$가 구간 $(1, \infty)$에서 감소하려면 $x>1$일 때 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서

$f'(1)=a+1\le 0$

$\therefore a\le -1$

따라서 실수 a의 최댓값은 -1이다.



답 ③

1003 $f(x)=x+\frac{a}{x}$에서 $f'(x)=1-\frac{a}{x^2}$

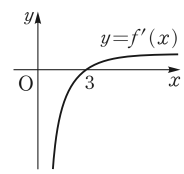
함수 $f(x)$가 구간 $(3, \infty)$에서 증가하려면 $x>3$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서

$f'(3)=1-\frac{a}{9}\ge 0$

$\therefore a\le 9$

따라서 실수 a의 최댓값은 9이다.



답 9

1004 $f(x)=e^x(x+a)$에서

$f'(x)=e^x(x+a)+e^x=e^x(x+a+1)$

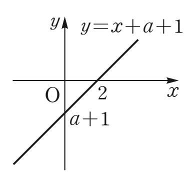
함수 $f(x)$가 구간 $(2, \infty)$에서 증가하려면 $x>2$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이때 $e^x>0$이므로 $x+a+1\ge 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서

$2+a+1\ge 0$

$\therefore a\ge -3$



답 $a\ge -3$

1005 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	1	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 1, $x=-1$에서 극솟값 -1을 가지므로

$M=1,\ m=-1 \qquad \therefore\ M+m=0$ 답 ③

1006 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$에서

$$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because\ x>0)$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 4를 갖는다.

답 4

1007 $f(x)=\dfrac{x^2+7x+8}{x-1}$에서 $x\neq1$이고

$$f'(x)=\frac{(2x+7)(x-1)-(x^2+7x+8)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x^2-2x-15}{(x-1)^2}=\frac{(x+3)(x-5)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이고, $x=5$에서 극소이므로

$a=-3,\ b=5 \qquad \therefore\ 2a+b=-1$ 답 ③

1008 $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}$ 에서

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 2를 갖는다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

답 ②

1009 $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{9-x}$ 에서 $-1\le x\le9$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{9-x}}=\frac{\sqrt{9-x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x}}$$ ⇨ ❶

$f'(x)=0$에서 $\quad \sqrt{9-x}=\sqrt{x+1}$

양변을 제곱하면 $\quad 9-x=x+1 \qquad \therefore\ x=4$ ⇨ ❷

x	-1	$\cdots$	4	$\cdots$	9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{10}$	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$	$\searrow$	$\sqrt{10}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값 $2\sqrt{5}$를 가지므로

$a=4,\ b=2\sqrt{5}$ ⇨ ❸

$\therefore\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ⇨ ❹

답 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $\dfrac{b}{a}$의 값을 구할 수 있다.	10%

1010 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$x\sqrt{x}-2\sqrt{x}=0,\qquad \sqrt{x}(x-2)=0$

$\therefore\ x=2\ (\because\ x>0)$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$

ㄱ. 정의역은 $\{x|x>0\}$이다.
ㄴ. $x=2$에서 극솟값 $2\sqrt{2}$를 갖는다.
ㄷ. 구간 $(2,\ \infty)$에서 증가한다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

1011 $f(x)=(x^2+3x+3)e^x$에서

$$f'(x)=(2x+3)e^x+(x^2+3x+3)e^x$$
$$=(x^2+5x+6)e^x$$
$$=(x+3)(x+2)e^x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=-2$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{e^3}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{e^2}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 $\dfrac{3}{e^3}$, $x=-2$에서 극솟값 $\dfrac{1}{e^2}$을 가지므로

$M=\dfrac{3}{e^3},\ m=\dfrac{1}{e^2} \qquad \therefore\ \dfrac{m}{M}=\dfrac{e}{3}$ 답 $\dfrac{e}{3}$

1012 $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{x^2}$에서 $x\neq0$이고

$$f'(x)=\frac{2xe^{x^2}\cdot x^2-e^{x^2}\cdot 2x}{x^4}=\frac{2xe^{x^2}(x^2-1)}{x^4}$$
$$=\frac{2e^{x^2}(x+1)(x-1)}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극소이므로 극값을 갖는 x의 값의 개수는 2이다. 답 2

1013 $f(x)=e^{2x}-4e^{x}+5$에서

$f'(x)=2e^{2x}-4e^{x}=2e^{x}(e^{x}-2)$

$f'(x)=0$에서　$e^{x}=2$　$\therefore x=\ln 2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\ln 2$에서 극솟값 1을 갖는다.

x	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

답 ②

1014 $f(x)=-\dfrac{\ln x}{x}$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{\ln x-1}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서　$\ln x=1$　$\therefore x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{e}$을 가지므로

$a=e,\ b=-\dfrac{1}{e}$　$\therefore ab=-1$

답 -1

1015 $f(x)=3x-x\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=3-(\ln x+1)=2-\ln x$ ⇨ ❶

$f'(x)=0$에서　$\ln x=2$　$\therefore x=e^2$ ⇨ ❷

함수 $f(x)$는 $x=e^2$에서 극댓값 e^2을 가지므로 점 A의 좌표는

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	e^2	↘

$\mathrm{A}(e^2,\ e^2)$ ⇨ ❸

따라서 직선 OA의 방정식은

$y-e^2=\dfrac{e^2}{e^2}(x-e^2)$　$\therefore y=x$ ⇨ ❹

답 $y=x$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❹ 직선 OA의 방정식을 구할 수 있다.	20%

1016 $f(x)=x^2-3x+\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$$

$f'(x)=0$에서　$x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$-\frac{5}{4}-\ln 2$	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{2}$에서 극댓값 $-\dfrac{5}{4}-\ln 2$, $x=1$에서 극솟값 -2를 갖는다.

답 ③

1017 $f(x)=x-\sin 2x$에서　$f'(x)=1-2\cos 2x$

$f'(x)=0$에서　$\cos 2x=\dfrac{1}{2}$

$2x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $2x=\dfrac{5}{3}\pi$ ($\because 0<2x<2\pi$)

$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$에서 극댓값 $\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{6}$에서 극솟값 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$을 가지므로

$M=\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ m=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore M+m=\pi$

답 ③

1018 $f(x)=2\cos x+\cos 2x$에서

$f'(x)=-2\sin x-2\sin 2x=-2\sin x(2\cos x+1)$

$f'(x)=0$에서　$\sin x=0$ 또는 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\pi$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 극대이고 $x=\dfrac{2}{3}\pi,\ x=\dfrac{4}{3}\pi$에서 극소이므로 $y=f(x)$ $(0<x<2\pi)$의 그래프에서 극대 또는 극소가 되는 점의 개수는 3이다.

답 3

1019 $f(x)=\pi\sin^2 x$에서

$f'(x)=2\pi\sin x\cos x=\pi\sin 2x$ ⇨ ❶

$f'(x)=0$에서　$\pi\sin 2x=0$,　$2x=\pi$ ($\because 0<2x<2\pi$)

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ ⇨ ❷

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	π	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 극댓값 π를 가지므로

$a=\dfrac{\pi}{2},\ b=\pi$ ⇨ ❸

$\therefore a+b=\dfrac{3}{2}\pi$ ⇨ ❹

답 $\dfrac{3}{2}\pi$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

1020 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+4}$에서

$$f'(x)=\frac{a(x^2+4)-(ax+b)\cdot 2x}{(x^2+4)^2}$$
$$=\frac{-ax^2-2bx+4a}{(x^2+4)^2}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 1을 가지므로

$f(1)=1$에서 $\quad \dfrac{a+b}{5}=1$

$\therefore a+b=5$ …… ㉠

$f'(1)=0$에서 $\quad \dfrac{3a-2b}{25}=0$

$\therefore 3a-2b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2, b=3$

$\therefore b-a=1$

답 ③

1021 $f(x)=ax+b\ln x$에서

$$f'(x)=a+\frac{b}{x}$$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값을 가지므로

$f'(3)=0$에서 $\quad a+\dfrac{b}{3}=0, \quad b=-3a$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{-3a}{a}=-3$

답 -3

1022 $f(x)=(x+a)e^x$에서

$f'(x)=e^x+(x+a)e^x=(x+a+1)e^x$ ⇨ ❶

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 m을 가지므로

$f'(1)=0$에서 $\quad (1+a+1)e=0$

$\therefore a=-2$ ⇨ ❷

$\therefore f(x)=(x-2)e^x$

$f(1)=m$에서 $\quad m=(1-2)e=-e$ ⇨ ❸

$\therefore am=2e$ ⇨ ❹

답 $2e$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ m의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ am의 값을 구할 수 있다.	10%

1023 $f(x)=kx+4\sin x$에서

$$f'(x)=k+4\cos x$$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$ 또는 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$k+4\cos x\le 0$ 또는 $k+4\cos x\ge 0$

$\therefore \cos x\le -\dfrac{k}{4}$ 또는 $\cos x\ge -\dfrac{k}{4}$

그런데 $-1\le\cos x\le 1$이므로

$-\dfrac{k}{4}\ge 1$ 또는 $-\dfrac{k}{4}\le -1$

$\therefore k\le -4$ 또는 $k\ge 4$

따라서 자연수 k의 최솟값은 4이다.

답 ④

1024 $f(x)=ax+\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=a+\frac{1}{x}$$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $x>0$인 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$a+\dfrac{1}{x}\ge 0 \quad \therefore a\ge -\dfrac{1}{x}$

그런데 $x>0$일 때 $\dfrac{1}{x}>0$이므로 $\quad -\dfrac{1}{x}<0$

$a\ge 0$

답 $a\ge 0$

1025 $f(x)=(x^3-9x+k)e^x$에서

$$f'(x)=(3x^2-9)e^x+(x^3-9x+k)e^x$$
$$=(x^3+3x^2-9x-9+k)e^x$$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $x^3+3x^2-9x-9+k=0$이 2개 이상의 실근을 갖고, 실근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

즉 $g(x)=x^3+3x^2-9x-9+k$로 놓으면 삼차함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 부호가 달라야 한다.

$g'(x)=3x^2+6x-9$이므로 $g'(x)=0$에서

$3x^2+6x-9=0, \quad 3(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$g(-3)g(1)<0$이어야 하므로

$(k+18)(k-14)<0 \quad \therefore -18<k<14$

따라서 정수 k는 $-17, -16, -15, \cdots, 12, 13$의 31개이다.

답 ①

1026 $f(x)=\dfrac{2x+k}{x^2-1}$에서

$$f'(x)=\frac{2(x^2-1)-(2x+k)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2(x^2+kx+1)}{(x^2-1)^2}$$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2+kx+1=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+kx+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\le 0, \quad (k+2)(k-2)\le 0 \quad \therefore -2\le k\le 2$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로 $\quad \beta-\alpha=4$

답 ②

1027 $f(x)=(x^2+3x+a)e^{-x}$에서

$$f'(x)=(2x+3)e^{-x}-(x^2+3x+a)e^{-x}$$
$$=-(x^2+x+a-3)e^{-x}$$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2+x+a-3=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+x+a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4(a-3)\le 0, \quad -4a+13\le 0 \quad \therefore a\ge\dfrac{13}{4}$

따라서 정수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

1028 $f(x)=2\ln x-x+\frac{a}{x}$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{a}{x^2}=\frac{-x^2+2x-a}{x^2}$$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-x^2+2x-a=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $-x^2+2x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-a>0 \qquad \therefore a<1$$

(ii) (두 근의 합)$=2>0$

(iii) (두 근의 곱)$=a>0$

이상에서 $0<a<1$

답 $0<a<1$

1029 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sqrt{3x^2-2}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6x}{\sqrt{3x^2-2}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2-2}}$$

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=3$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=3(x-1) \qquad \therefore y=3x-2$$

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로

$$a-b=5$$

답 ①

1030 전략 접점의 좌표를 (t, e^{2t+1})으로 놓고 접선의 기울기가 2임을 이용한다.

풀이 $f(x)=e^{2x+1}$으로 놓으면 $f'(x)=2e^{2x+1}$

접점의 좌표를 (t, e^{2t+1})이라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(t)=2e^{2t+1}=2, \qquad e^{2t+1}=1$$

$$2t+1=0 \qquad \therefore t=-\frac{1}{2}$$

따라서 접점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=2\left(x+\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore y=2x+2$$

$$\therefore a=2$$

답 2

1031 전략 접점의 좌표를 $(t, \ln t)$로 놓고 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=\ln x$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t, \ln t)$라 하면 접선의 기울기가 $f'(t)=\frac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{1}{t}x-1+\ln t \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0=-1+\ln t, \qquad \ln t=1 \qquad \therefore t=e$$

이것을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{1}{e}x$

이 직선이 점 $(2e, k)$를 지나므로

$$k=\frac{1}{e}\cdot 2e=2$$

답 ②

1032 전략 $f'(x)=0$인 x의 값을 구하여 $f(x)$의 증감표를 만든다.

풀이 $f(x)=\frac{3x}{x^2+4}$에서

$$f'(x)=\frac{3(x^2+4)-3x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-3x^2+12}{(x^2+4)^2}$$

$$=\frac{-3(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$$ ➡ ❶

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$ ➡ ❷

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$\frac{3}{4}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $\frac{3}{4}$, $x=-2$에서 극솟값 $-\frac{3}{4}$을 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은

$$\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)=0$$ ➡ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 극댓값과 극솟값의 합을 구할 수 있다.	40%

1033 전략 $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구하여 $f(x)$의 증감표를 만든다.

풀이 $f(x)=(x+k)e^x$에서

$$f'(x)=e^x+(x+k)e^x=(x+k+1)e^x$$

$f'(x)=0$에서 $x=-k-1$

x	$\cdots$	$-k-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-k-1$에서 극솟값 $-e$를 가지므로

$f(-k-1)=-e$에서

$$-e^{-k-1}=-e$$

$$-k-1=1 \qquad \therefore k=-2$$

답 -2

1034 전략 직선 $y=mx+b$가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ일 때, $\tan\theta=m$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2\sin x+1$로 놓으면 $f'(x)=2\cos x$

$x=\frac{\pi}{6}$인 점에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

이므로 $x=\frac{\pi}{6}$인 점에서의 접선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\tan\theta=\sqrt{3} \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{3}$$

답 $\frac{\pi}{3}$

1035 전략 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

풀이 $f(x)=e^x+1$로 놓으면 $f'(x)=e^x$ ➡ ❶

점 $(1, e+1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{e}$이다.

점 $(1,\ e+1)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{e}$인 직선의 방정식은

$$y-(e+1)=-\frac{1}{e}(x-1)$$

$$\therefore\ y=-\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}+e+1$$ ⇨ ❷

이 식에 $y=0$을 대입하면

$$0=-\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}+e+1,\qquad \frac{1}{e}x=\frac{1}{e}+e+1$$

$$\therefore\ x=e^2+e+1$$

따라서 구하는 직선의 x절편은 e^2+e+1이다. ⇨ ❸

답 e^2+e+1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ 접선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❸ 직선의 x절편을 구할 수 있다.	20%

1036 전략 평행한 두 직선의 기울기는 서로 같음을 이용한다.

풀이 두 점 $(0,\ 1)$, $(4,\ 3)$을 이은 선분과 평행한 직선의 기울기는

$$\frac{3-1}{4-0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$f(x)=\sqrt{x}+1$에서 $\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$x=a$인 점에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$$f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2},\qquad \sqrt{a}=1\qquad \therefore\ a=1$$

답 ①

1037 전략 접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{t-1}{t+1}\right)$로 놓고 접선의 방정식을 구한 후 점 $(2,\ 3)$의 좌표를 대입하여 t의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$ ⇨ ❶

접선의 접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{t-1}{t+1}\right)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{2}{(t+1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{t-1}{t+1}=\frac{2}{(t+1)^2}(x-t)$$

$$\therefore\ y=\frac{2}{(t+1)^2}x+\frac{t^2-2t-1}{(t+1)^2}$$

이 직선이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$$3=\frac{4}{(t+1)^2}+\frac{t^2-2t-1}{(t+1)^2}$$

$$2t^2+8t=0,\qquad 2t(t+4)=0$$

$$\therefore\ t=-4 \text{ 또는 } t=0$$ ⇨ ❷

따라서 접선의 기울기는 $f'(-4)=\frac{2}{9}$, $f'(0)=2$이므로 두 접선의 기울기의 합은

$$\frac{2}{9}+2=\frac{20}{9}$$ ⇨ ❸

답 $\frac{20}{9}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	50%
❸ 두 접선의 기울기의 합을 구할 수 있다.	20%

1038 전략 접점의 좌표를 $(t,\ (t-1)e^t)$으로 놓고 t에 대한 방정식을 세워 오직 한 근을 가질 조건을 구한다.

풀이 $f(x)=(x-1)e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$$

접점의 좌표를 $(t,\ (t-1)e^t)$이라 하면 접선의 기울기가 $f'(t)=te^t$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t-1)e^t=te^t(x-t)$$

$$\therefore\ y=te^tx-t^2e^t+te^t-e^t$$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$$0=te^ta-t^2e^t+te^t-e^t$$

$$-e^t\{t^2-(a+1)t+1\}=0$$

$$\therefore\ t^2-(a+1)t+1=0\ (\because\ e^t>0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-1)e^x$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+1)^2-4=0,\qquad a^2+2a-3=0$$

$$(a+3)(a-1)=0\qquad \therefore\ a=-3\ (\because\ a<0)$$

답 ③

참고 $a=1$이면 점 $(a,\ 0)$은 곡선 $y=(x-1)e^x$ 위의 점이 된다.

1039 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$에서 공통인 접선을 가지면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^2+a$, $g(x)=\ln 2x$로 놓으면 $x>0$이고

$$f'(x)=4x,\ g'(x)=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$$

두 곡선이 $x=b$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(b)=g(b)$에서 $\quad 2b^2+a=\ln 2b \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f'(b)=g'(b)$에서 $\quad 4b=\frac{1}{b},\qquad b^2=\frac{1}{4}$

$$\therefore\ b=\frac{1}{2}\ (\because\ b>0)$$

$b=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$$2\cdot\frac{1}{4}+a=\ln\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)\qquad \therefore\ a=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 4ab=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=-1$$

답 ②

1040 전략 접선의 방정식을 구하여 x축, y축과의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=(x+1)e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$$

점 $(1,\ 2e)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=3e$이므로 접선의 방정식은

$$y-2e=3e(x-1)\qquad \therefore\ y=3ex-e$$

접선의 x절편과 y절편이 각각 $\frac{1}{3}$, $-e$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot e=\frac{e}{6}$$

답 ②

1041 전략 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면 $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ 임을 이용한다.

풀이 $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$\ln(a+1)=1,\quad a+1=e\quad \therefore a=e-1$

$\therefore g'(1)=\dfrac{1}{f'(e-1)}$

이때 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$이므로

$f'(e-1)=\dfrac{1}{e}\quad \therefore g'(1)=e$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ e-1)$에서의 접선의 방정식은

$y-(e-1)=e(x-1)\quad \therefore y=ex-1$ 답 $y=ex-1$

1042 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

풀이 $f(x)=(x^2+ax+1)e^{-2x}$에서

$f'(x)=(2x+a)e^{-2x}+(x^2+ax+1)e^{-2x}\cdot(-2)$

$=(2x+a-2x^2-2ax-2)e^{-2x}$

$=\{-2x^2-2(a-1)x+a-2\}e^{-2x}$ ⇨ ❶

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다. ⇨ ❷

이때 $e^{-2x}>0$이므로 $-2x^2-2(a-1)x+a-2\le 0$, 즉 $2x^2+2(a-1)x-a+2\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $2x^2+2(a-1)x-a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2+2a-4\le 0,\quad a^2-3\le 0$

$\therefore -\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}$ ⇨ ❸

답 $-\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소할 조건을 구할 수 있다.	30%
❸ 실수 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%

1043 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 가지면 $f(a)=b$, $f'(a)=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=ax^2-\ln x$에서 $\quad f'(x)=2ax-\dfrac{1}{x}$

함수 $f(x)$가 $x=\dfrac{1}{2}$에서 극솟값 b를 가지므로

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=b$에서 $\quad \dfrac{1}{4}a-\ln\dfrac{1}{2}=b$ ...... ㉠

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$에서 $\quad 2a\cdot\dfrac{1}{2}-2=0\quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\ln 2$

$\therefore ab=1+2\ln 2$ 답 ⑤

1044 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=(ax^2-9)e^x$에서

$f'(x)=2axe^x+(ax^2-9)e^x$

$=(ax^2+2ax-9)e^x$

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극댓값을 가지므로 $f'(-3)=0$에서

$(9a-6a-9)e^{-3}=0,\quad 3(a-3)e^{-3}=0$

$\therefore a=3$

$\therefore f(x)=(3x^2-9)e^x,\ f'(x)=(3x^2+6x-9)e^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad (3x^2+6x-9)e^x=0$

$3(x+3)(x-1)e^x=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 가지므로 구하는 극솟값은

$f(1)=-6e$ 답 ④

1045 전략 $f'(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$에서 $h(x)$가 이차식이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$일 때, $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $h(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{x^2+ax+3}{x+2}$에서

$f'(x)=\dfrac{(2x+a)(x+2)-(x^2+ax+3)}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{x^2+4x+2a-3}{(x+2)^2}$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2+4x+2a-3=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+4x+2a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4-2a+3\le 0\quad \therefore a\ge\dfrac{7}{2}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\dfrac{7}{2}$이다. 답 $\dfrac{7}{2}$

1046 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sqrt{x+1}$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

점 $\mathrm{P}(a,\ \sqrt{a+1})$에서의 접선의 기울기가 $f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a+1}}$이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{a+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{a+1}}(x-a)$

$\therefore y=\dfrac{1}{2\sqrt{a+1}}x+\dfrac{a+2}{2\sqrt{a+1}}$ ⇨ ❶

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{1}{2\sqrt{a+1}}x+\dfrac{a+2}{2\sqrt{a+1}}\quad \therefore x=-a-2$

$\therefore \mathrm{Q}(-a-2,\ 0)$ ⇨ ❷

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-a-2-a)^2+(0-\sqrt{a+1})^2}$

$=\sqrt{(2a+2)^2+a+1}$

$=\sqrt{4a^2+9a+5}$ ⇨ ❸

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{\overline{PQ}}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{4a^2+9a+5}}{a}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{9}{a}+\frac{5}{a^2}}}{1}=\sqrt{4}=2$$ ⇨ ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❸ $\overline{PQ}$의 길이를 구할 수 있다.	20%
❹ $\lim_{a\to\infty}\frac{\overline{PQ}}{a}$의 값을 구할 수 있다.	30%

1047 전략 접점의 좌표를 $(t,\ e^{t+a}+b)$로 놓고 접선의 방정식을 구한 후 이것이 직선 $y=x+1$과 일치함을 이용한다.

풀이 $f(x)=e^{x+a}+b$로 놓으면

$f'(x)=e^{x+a}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{t+a}+b)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=e^{t+a}$이므로 접선의 방정식은

$y-(e^{t+a}+b)=e^{t+a}(x-t)$

$\therefore y=e^{t+a}x-te^{t+a}+e^{t+a}+b$

이 직선이 $y=x+1$과 일치하므로

$e^{t+a}=1,\ -te^{t+a}+e^{t+a}+b=1$

$e^{t+a}=1$에서 $t+a=0$

$\therefore t=-a$

$t=-a$를 $-te^{t+a}+e^{t+a}+b=1$에 대입하면

$a+1+b=1 \qquad \therefore a+b=0$

답 ③

1048 전략 구하는 최솟값은 곡선 $y=\ln x+1$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{e}$인 직선과 직선 $y=\frac{1}{e}x+2$ 사이의 거리와 같다.

풀이 직선 $y=\frac{1}{e}x+2$와의 거리가 최소가 되는 곡선 $y=\ln x+1$ 위의 점은 기울기가 $\frac{1}{e}$인 접선의 접점이 되는 경우이다.

$f(x)=\ln x+1$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t,\ \ln t+1)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{t}$이므로

$\frac{1}{t}=\frac{1}{e} \qquad \therefore t=e$

즉 접점의 좌표는 $(e,\ 2)$

따라서 구하는 최솟값은 점 $(e,\ 2)$와 직선 $y=\frac{1}{e}x+2$, 즉 $x-ey+2e=0$ 사이의 거리이므로

$$\frac{|1\cdot e-e\cdot 2+2e|}{\sqrt{1^2+(-e)^2}}=\frac{e}{\sqrt{1+e^2}}$$

답 ③

1049 전략 접선의 방정식을 구하여 x축, y축과의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{2}{x-1}$로 놓으면 $f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}$

점 $\left(k,\ \frac{2}{k-1}\right)$에서의 접선의 기울기가 $f'(k)=-\frac{2}{(k-1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{2}{k-1}=-\frac{2}{(k-1)^2}(x-k)$$

$$\therefore y=-\frac{2}{(k-1)^2}x+\frac{4k-2}{(k-1)^2}$$

따라서 $P(2k-1,\ 0)$, $Q\left(0,\ \frac{4k-2}{(k-1)^2}\right)$이므로 삼각형 OPQ의 넓이 $S(k)$는

$$S(k)=\frac{1}{2}\cdot(2k-1)\cdot\frac{4k-2}{(k-1)^2}=\frac{4k^2-4k+1}{k^2-2k+1}$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty}S(k)=\lim_{k\to\infty}\frac{4k^2-4k+1}{k^2-2k+1}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{4-\frac{4}{k}+\frac{1}{k^2}}{1-\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}}=4$$

답 ②

참고 $k\to\infty$이므로 두 점 P, Q는 각각 x축, y축의 양의 부분에 있는 점으로 생각한다.

1050 전략 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프가 접하면 그 접점은 직선 $y=x$ 위에 있음을 이용한다.

풀이 $f(x)=e^{x+a}$에서 $f'(x)=e^{x+a}$

함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 접점은 직선 $y=x$ 위에 있다. 따라서 두 그래프의 접점의 좌표를 $(t,\ t)$로 놓으면

$f(t)=g(t)=t$에서 $e^{t+a}=t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $e^{t+a}=\frac{1}{e^{t+a}}\left(\because g'(t)=\frac{1}{f'(t)}\right)$

$(e^{t+a})^2=1,\quad e^{t+a}=1\ (\because e^{t+a}>0)$

$t+a=0 \qquad \therefore t=-a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $t=1,\ a=-1$

답 ②

1051 전략 $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구하여 $f(x)$의 증감표를 만들고 극대, 극소가 되는 x의 값을 확인한다.

풀이 $f(x)=\cos 2x$에서 $f'(x)=-2\sin 2x$

$f'(x)=0$에서 $-2\sin 2x=0,\quad \sin 2x=0$

$2x=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,\ 6\pi,\ 7\pi,\ \cdots$

$\therefore x=\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ 3\pi,\ \frac{7}{2}\pi,\ \cdots$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

즉 함수 $f(x)$는 $x=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$에서 극댓값을 갖고, $x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \cdots$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore \alpha_1=\pi,\ \alpha_2=2\pi,\ \alpha_3=3\pi,\ \cdots,$

$\beta_1=\frac{\pi}{2},\ \beta_2=\frac{3}{2}\pi,\ \beta_3=\frac{5}{2}\pi,\ \cdots$

따라서 $\alpha_5=5\pi$, $\beta_6=\frac{11}{2}\pi$이므로

$$\cos\alpha_5+\sin\beta_6=\cos 5\pi+\sin\frac{11}{2}\pi$$

$$=-1-1=-2$$

답 -2

Ⅲ. 미분법

09 도함수의 활용 (2)

1052 $f(x)=x^3-6x^2-2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x$,

$f''(x)=6x-12=6(x-2)$

$f''(x)=0$에서 $x=2$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 2)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(2,\ \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

답 풀이 참조

1053 $f(x)=x^4+2x^3$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3+6x^2$,

$f''(x)=12x^2+12x=12x(x+1)$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$ 또는 $(0,\ \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $(-1,\ 0)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

답 풀이 참조

1054 $f(x)=x^2-e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2x-e^x$, $f''(x)=2-e^x$

$f''(x)=0$에서 $2-e^x=0$

$\therefore x=\ln 2$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \ln 2)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $(\ln 2,\ \infty)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

답 풀이 참조

1055 $f(x)=x\ln x$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=\ln x+1$, $f''(x)=\dfrac{1}{x}$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

답 풀이 참조

1056 $f(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

답 풀이 참조

1057 $f(x)=x^3-8x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-8$, $f''(x)=6x$

$f''(x)=0$에서 $x=0$

$x<0$일 때 $f''(x)<0$, $x>0$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

답 $(0,\ 1)$

1058 $f(x)=-x^4+6x^3$으로 놓으면

$f'(x)=-4x^3+18x^2$,

$f''(x)=-12x^2+36x=-12x(x-3)$

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

$x<0$ 또는 $x>3$일 때 $f''(x)<0$,

$0<x<3$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=0$, $x=3$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0,\ 0)$, $(3,\ 81)$이다.

답 $(0,\ 0)$, $(3,\ 81)$

1059 $f(x)=xe^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$,

$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

$f''(x)=0$에서 $x=2$

$x<2$일 때 $f''(x)<0$, $x>2$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$이다.

답 $\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$

1060 $f(x)=\ln(x^2+2)$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$,

$f''(x)=\dfrac{2(x^2+2)-2x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}$

$=\dfrac{-2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2+2)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$x<-\sqrt{2}$ 또는 $x>\sqrt{2}$일 때 $f''(x)<0$,

$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-\sqrt{2},\ \ln 4)$, $(\sqrt{2},\ \ln 4)$이다.

답 $(-\sqrt{2},\ \ln 4)$, $(\sqrt{2},\ \ln 4)$

1061 $f(x)=x+\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$

$f''(x)=0$에서 $x=\dfrac{\pi}{2}$ $(\because 0<x<\pi)$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$일 때 $f''(x)<0$, $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=\dfrac{\pi}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$이다.

답 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

1062 답 (가) 1 (나) $\sqrt{3}$ (다) 원점 (라) $\dfrac{1}{2}$ (마) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (바) $y=0$

1063 $f(x)=x^4-2x^3$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$,

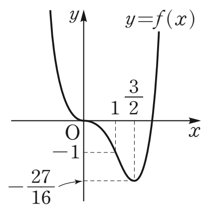
$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	-1	↘	$-\frac{27}{16}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

1064 $f(x)=\dfrac{12x}{(x-1)^2}$로 놓으면 $x\neq1$이고

$$f'(x)=\frac{12(x-1)^2-12x\cdot2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{-12(x+1)}{(x-1)^3},$$

$$f''(x)=\frac{-12(x-1)^3-\{-12(x+1)\}\cdot3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{24(x+2)}{(x-1)^4}$$

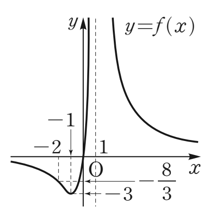
$f'(x)=0$에서 $x=-1$

$f''(x)=0$에서 $x=-2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$		$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{8}{3}$	↘	-3	↗		↘

이때 $\lim_{x\to1+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to1-}f(x)=\infty$이고 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=0$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

타쎈 특강 곡선 $y=f(x)$의 점근선

a, b가 실수일 때, 곡선 $y=f(x)$의 점근선은 다음과 같이 함수의 극한값을 이용하여 구한다.

① $\lim_{x\to\infty}f(x)=b$ 또는 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=b$ ➡ 점근선은 직선 $y=b$

② $\lim_{x\to a+}f(x)=\pm\infty$ 또는 $\lim_{x\to a-}f(x)=\pm\infty$

➡ 점근선은 직선 $x=a$

③ $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(mx+n)\}=0$ 또는 $\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(mx+n)\}=0$

➡ 점근선은 직선 $y=mx+n$

1065 $f(x)=\sqrt{x}-2x$로 놓으면 $x\geq0$이고

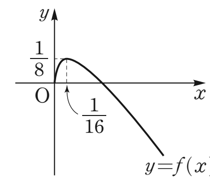
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-2,\ f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{16}$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{8}$	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

1066 $f(x)=xe^{2x}$으로 놓으면

$$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=(2x+1)e^{2x},$$

$$f''(x)=2e^{2x}+2(2x+1)e^{2x}=4(x+1)e^{2x}$$

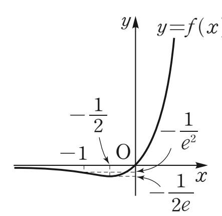
$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{e^2}$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

1067 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$로 놓으면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

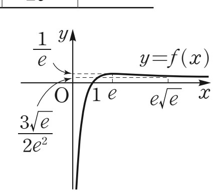
$f'(x)=0$에서 $x=e$

$f''(x)=0$에서 $x=e\sqrt{e}$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3\sqrt{e}}{2e^2}$	↘

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$이므로 점근선은 x축, y축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

1068 $f(x)=x-\sin x$로 놓으면

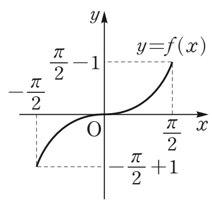
$f'(x)=1-\cos x$, $f''(x)=\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0\left(\because -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=0\left(\because -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}+1$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}-1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

1069 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{4}{5}$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{4}{5}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 1, $x=-1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -1

1070 $f(x)=x\sqrt{x+6}$에서

$f'(x)=\sqrt{x+6}+\frac{x}{2\sqrt{x+6}}=\frac{3(x+4)}{2\sqrt{x+6}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-4$

x	-6	$\cdots$	-4	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-4\sqrt{2}$	↗	$4\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $4\sqrt{2}$, $x=-4$일 때 최솟값 $-4\sqrt{2}$를 갖는다.

답 최댓값: $4\sqrt{2}$, 최솟값: $-4\sqrt{2}$

1071 $f(x)=x^2e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$

x	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{16}{e^4}$	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗	$9e^3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $9e^3$, $x=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.

답 최댓값: $9e^3$, 최솟값: 0

1072 $f(x)=x-\ln x$에서 $\quad f'(x)=1-\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e^2}+2$	↘	1	↗	$e-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e^2}$일 때 최댓값 $\frac{1}{e^2}+2$, $x=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

답 최댓값: $\frac{1}{e^2}+2$, 최솟값: 1

1073 $f(x)=x+2\cos x$에서 $\quad f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ $(\because 0\le x\le\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↗	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	↘	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	↗	$\pi-2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$일 때 최댓값 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, $x=\frac{5}{6}\pi$일 때 최솟값 $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$을 갖는다.

답 최댓값: $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, 최솟값: $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

1074 (1) $f(x)=x-3\ln x$에서 $x>0$이고

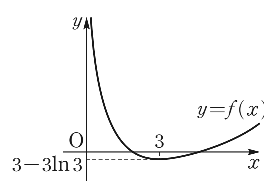
$f'(x)=1-\frac{3}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=3$

(2)

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$3-3\ln 3$	↗

이때 $\lim_{x\to 0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

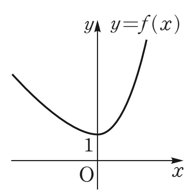
1075 $f(x)=e^x-x$로 놓으면

$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않으므로 주어진 방정식은 실근을 갖지 않는다.

답 0

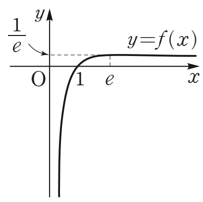
1076 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$로 놓으면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서

$1-\ln x=0 \qquad \therefore\ x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘



이때 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

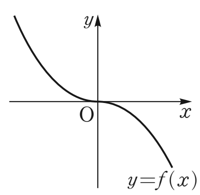
답 1

1077 $f(x)=\sin x-x$로 놓으면

$f'(x)=\cos x-1$

$f'(x)\le0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 감소한다.

이때 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

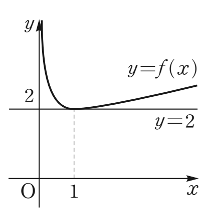
답 1

1078 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$로 놓으면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	2	↗



이때 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=2$와 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

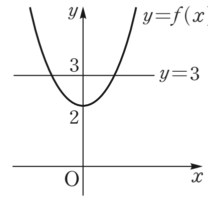
답 1

1079 $f(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^x-e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗



이때 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=3$과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

답 2

1080 답 (가) $1-\dfrac{1}{x+1}$ (나) 0 (다) 0

1081 $f(x)=x-\cos x+1$로 놓으면

$f'(x)=1+\sin x$

$x>0$일 때 $f'(x)\ge0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

$f(0)=0$이므로 $x>0$일 때

$f(x)>0$, 즉 $x-\cos x+1>0$

따라서 $x>0$일 때 부등식 $x>\cos x-1$이 성립한다.

답 풀이 참조

1082 $f(x)=e^x-x-1$로 놓으면 $\qquad f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$f(x)\ge0$, 즉 $e^x-x-1\ge0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $e^x\ge x+1$이 성립한다.

답 풀이 참조

1083 $f(x)=2x^2+\ln x$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=4x+\dfrac{1}{x}$, $f''(x)=4-\dfrac{1}{x^2}$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$4-\dfrac{1}{x^2}<0, \qquad 4x^2-1<0$

$(2x+1)(2x-1)<0, \qquad -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 0<x<\dfrac{1}{2}\ (\because\ x>0)$

따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$이다. 답 ①

1084 $f(x)=x^3+3x^2-9x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+6x-9$, $f''(x)=6x+6=6(x+1)$

곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로

$6(x+1)>0 \qquad \therefore\ x>-1$ 답 ①

1085 $f(x)=e^{-x^2}$으로 놓으면

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$,

$f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2(2x^2-1)e^{-x^2}$ ⇨ ❶

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$2(2x^2-1)e^{-x^2}<0, \qquad (\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)<0$

$\therefore\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 ⇨ ❷

$\beta-\alpha=\sqrt{2}$ ⇨ ❸

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $f''(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ α, β의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\beta-\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20%

1086 ㄱ. $f(x)=x^4+x^2$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3+2x$, $f''(x)=12x^2+2$

실수 전체의 집합에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.

ㄴ. $f(x)=1+e^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$

실수 전체의 집합에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.

ㄷ. $f(x)=\ln(x^2+1)$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, $f''(x)=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$ 또는 $(1, \infty)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(-1, 1)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

ㄹ. $f(x)=x^2+\cos x$로 놓으면

$f'(x)=2x-\sin x$, $f''(x)=2-\cos x$

실수 전체의 집합에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.

이상에서 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록한 곡선은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

1087 $f(x)=(x^2+x)e^x$으로 놓으면

$f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x)e^x=(x^2+3x+1)e^x$,

$f''(x)=(2x+3)e^x+(x^2+3x+1)e^x$

$=(x^2+5x+4)e^x$

$=(x+4)(x+1)e^x$

$f''(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=-1$

$x<-4$ 또는 $x>-1$일 때 $f''(x)>0$,

$-4<x<-1$일 때 $f''(x)<0$

따라서 $x=-4$, $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 모든 변곡점의 x좌표의 합은

$-4-1=-5$

답 ①

1088 $f(x)=x^4-2x^3-3x$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-6x^2-3$,

$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

$x<0$ 또는 $x>1$일 때 $f''(x)>0$,

$0<x<1$일 때 $f''(x)<0$

즉 $x=0$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는 $(0, 0)$, $(1, -4)$이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$\sqrt{1^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$

답 ④

1089 $f(x)=\frac{x^2+7}{x^2+6}=1+\frac{1}{x^2+6}$로 놓으면

$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+6)^2}$,

$f''(x)=-\frac{2(x^2+6)^2-2x\cdot2(x^2+6)\cdot2x}{(x^2+6)^4}$

$=\frac{6x^2-12}{(x^2+6)^3}$

$f''(x)=0$에서 $6x^2-12=0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$x<-\sqrt{2}$ 또는 $x>\sqrt{2}$일 때 $f''(x)>0$,

$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$일 때 $f''(x)<0$

따라서 $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 2이다.

답 2

1090 $f(x)=2\sin x-x$로 놓으면

$f'(x)=2\cos x-1$, $f''(x)=-2\sin x$ ⇨ ❶

$f''(x)=0$에서 $x=\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

$0<x<\pi$일 때 $f''(x)<0$,

$\pi<x<2\pi$일 때 $f''(x)>0$

즉 $x=\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x좌표는 $x=\pi$이다. ⇨ ❷

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는

$f'(\pi)=2\cos\pi-1=-3$ ⇨ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ 변곡점의 x좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ 변곡점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	30%

1091 $f(x)=ax^3+bx^2+cx-10$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$,

$f''(x)=6ax+2b$

$x=-3$에서 극대이므로 $f'(-3)=0$

$\therefore 27a-6b+c=0$ …… ㉠

변곡점의 좌표가 $(-1, 12)$이므로

$f(-1)=12$에서 $-a+b-c-10=12$

$\therefore a-b+c=-22$ …… ㉡

$f''(-1)=0$에서 $-6a+2b=0$

$\therefore 3a-b=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=6$, $c=-18$

$\therefore a+2b+3c=-40$

답 ②

1092 $f(x)=xe^{ax}$에서

$f'(x)=e^{ax}+axe^{ax}=(ax+1)e^{ax}$,

$f''(x)=ae^{ax}+a(ax+1)e^{ax}=a(ax+2)e^{ax}$ ⇨ ❶

$x=-\frac{1}{2}$에서 극솟값을 가지므로

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0, \quad \left(-\frac{1}{2}a+1\right)e^{-\frac{1}{2}a}=0$

$\therefore a=2$ ⇨ ❷

따라서 $f''(x)=(4x+4)e^{2x}$이므로 $f''(x)=0$에서

$(4x+4)e^{2x}=0 \quad \therefore x=-1$

$x<-1$일 때 $f''(x)<0$, $x>-1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x좌표는 -1이다. ⇨ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 변곡점의 x좌표를 구할 수 있다.	40%

1093 $f(x)=(\ln ax)^2$으로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=2\ln ax \cdot \frac{1}{x}=\frac{2\ln ax}{x}$,

$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2-2\ln ax}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $\ln ax=1$

$ax=e \quad \therefore x=\frac{e}{a}$

$0<x<\frac{e}{a}$일 때 $f''(x)>0$, $x>\frac{e}{a}$일 때 $f''(x)<0$

즉 $x=\frac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$\left(\frac{e}{a}, 1\right)$

이때 변곡점이 직선 $2x+y=2$ 위에 있으므로

$\frac{2e}{a}+1=2, \quad \frac{2e}{a}=1$

$\therefore a=2e$

답 ⑤

1094 $f(x)=ax^2-5x+b\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2ax-5+\frac{b}{x}$, $f''(x)=2a-\frac{b}{x^2}$

$x=1$에서 극소이므로 $f'(1)=0$

$2a-5+b=0$

$\therefore 2a+b=5$ …… ㉠

변곡점의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이므로 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$2a-4b=0 \quad \therefore a-2b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

$\therefore f(x)=2x^2-5x+\ln x$

$f'(x)=4x-5+\frac{1}{x}$

$=\frac{4x^2-5x+1}{x}$

$=\frac{(4x-1)(x-1)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		↗	$-\frac{9}{8}-\ln 4$	↘	-3	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{4}$에서 극댓값 $-\frac{9}{8}-\ln 4$를 갖는다.

답 ⑤

1095 $f(x)=(x-1)e^x$에서

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$,

$f''(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

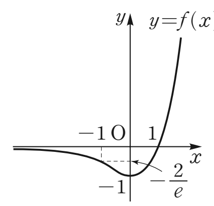
$f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	0	+	+	+
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{e}$	↘	-1	↗

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 극솟값 $f(0)=-1$을 갖는다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

1096 $f(x)=x-\sin x$로 놓으면

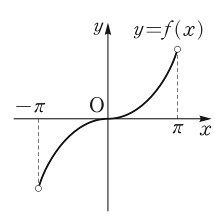
$f'(x)=1-\cos x$, $f''(x)=\sin x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -\pi<x<\pi$)

$f''(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -\pi<x<\pi$)

x	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	0	+	
$f''(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↗	0	↗	

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-x-\sin(-x)$

$=-x+\sin x$

$=-f(x)$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프는 구간 $(0, \pi)$에서 아래로 볼록하다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프의 변곡점의 좌표는 $(0, 0)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

1097 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$에서 $x\neq2$이고

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2},$$

$$f''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x)\cdot2(x-2)}{(x-2)^4}$$

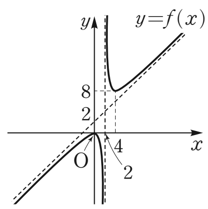
$$=\frac{8}{(x-2)^3}$$

$f'(x)=0$에서　　$x=0$ 또는 $x=4$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	0	↘		↘	8	↗

또 $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to2-}f(x)=-\infty$이고



$$f(x)=\frac{(x+2)(x-2)+4}{x-2}$$

$$=x+2+\frac{4}{x-2}$$

에서 $\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)-(x+2)\}=0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\{f(x)-(x+2)\}=0$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

ㄱ. $x=0$에서 극대이다.

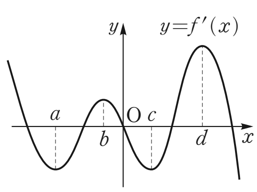
ㄴ. 함수 $f(x)$는 구간 $(2, 4)$에서 감소한다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=x+2$이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

1098 아래 그림과 같이 a, b, c, d를 정하고 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.



x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 4이다.

답 4

1099 구간 (a, e)에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로 구하는 구간은 (a, b) 또는 (d, e)이다.

답 ①

1100 $f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$

$f''(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=-\dfrac{2}{3}$

따라서 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	변곡점	↘	변곡점	↘	극소	↗

ㄱ. 극댓값을 갖지 않는다.

ㄴ. $x=0$에서 극소이다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 $x=-2$, $x=-\dfrac{2}{3}$에서 변곡점을 가지므로 변곡점은 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

1101 $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-x+2}$에서

$$f'(x)=\frac{(x^2-x+2)-(x-2)(2x-1)}{(x^2-x+2)^2}$$

$$=\frac{-x(x-4)}{(x^2-x+2)^2}$$

$f'(x)=0$에서　　$x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	$\frac{1}{7}$	↘

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{7}$을 갖는다.

$\therefore a=4,\ b=\dfrac{1}{7}$

$\therefore \dfrac{a}{b}=28$

답 28

1102 $f(x)=x-5+\dfrac{4}{x+6}$에서

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x+6)^2}=\frac{(x+8)(x+4)}{(x+6)^2}$$

$f'(x)=0$에서

$x=-4$ ($\because -5\leq x\leq0$)

x	-5	$\cdots$	-4	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	↘	-7	↗	$-\frac{13}{3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 $-\dfrac{13}{3}$, $x=-4$일 때 최솟값 -7을 가지므로 구하는 합은

$$-\frac{13}{3}+(-7)=-\frac{34}{3}$$

답 ②

09 도함수의 활용 (2)

1103 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$에서 $0\le x\le 8$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{8-x}}=\frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8-x}}$$ ➩ ❶

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{8-x}=\sqrt{x}$

$8-x=x$ $\therefore x=4$

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2\sqrt{2}$	↗	4	↘	$2\sqrt{2}$

즉 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 4, $x=0$, $x=8$일 때 최솟값 $2\sqrt{2}$를 가지므로

$M=4$, $m=2\sqrt{2}$ ➩ ❷

$\therefore Mm=8\sqrt{2}$ ➩ ❸

답 $8\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ Mm의 값을 구할 수 있다.	20%

1104 $f(x)=\ln(x^2+2x+3)$에서

$$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+3}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\ln 6$	↘	$\ln 2$	↗	$\ln 3$

즉 함수 $f(x)$는 $x=-3$일 때 최댓값 $\ln 6$, $x=-1$일 때 최솟값 $\ln 2$를 가지므로

$M=\ln 6$, $m=\ln 2$

$\therefore M-m=\ln\frac{6}{2}=\ln 3$

답 ③

1105 $f(x)=(x^2-3)e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+(x^2-3)e^x=(x^2+2x-3)e^x$ ➩ ❶

$f'(x)=0$에서 $x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

x	-4	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{13}{e^4}$	↗	$\frac{6}{e^3}$	↘	$-2e$	↗	e^2

즉 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최대이고, $x=1$일 때 최소이므로

$a=2$, $b=1$ ➩ ❷

$\therefore a+b=3$ ➩ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

1106 $f(x)=x^2\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{2e}$을 갖는다.

답 ⑤

1107 $f(x)=\sin x+\cos x$에서

$f'(x)=\cos x-\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\sin x$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 최댓값 $\sqrt{2}$를 갖는다. 답 $\sqrt{2}$

1108 $f(x)=(1-\cos x)\cos x$에서

$f'(x)=\sin x\cos x-(1-\cos x)\sin x$

$=\sin x(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	-2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값 $\frac{1}{4}$, $x=\pi$일 때 최솟값 -2를 가지므로 구하는 합은

$\frac{1}{4}+(-2)=-\frac{7}{4}$

답 ②

1109 $f(x)=\cos^3x-6\sin^2x+1$

$=\cos^3x-6(1-\cos^2x)+1$

$=\cos^3x+6\cos^2x-5$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고, 주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+6t^2-5$

$\therefore g'(t)=3t^2+12t=3t(t+4)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ ($\because -1\le t\le 1$)

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	↘	-5	↗	2

따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$일 때 최댓값 2, $t=0$일 때 최솟값 -5를 가지므로 구하는 합은

$2+(-5)=-3$ 답 -3

1110 $3^x=t$로 놓으면 $t>0$이고, 주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3-t^2-t$

$\therefore g'(t)=3t^2-2t-1=(3t+1)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ $(\because t>0)$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$

따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

답 ③

1111 $\log_2 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{2}\le x\le 16$에서

$-1\le t\le 4$ ⇨ ❶

주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^4-4t^3$

$\therefore g'(t)=4t^3-12t^2=4t^2(t-3)$ ⇨ ❷

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=3$

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(t)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	0

즉 함수 $g(t)$는 $t=-1$일 때 최댓값 5, $t=3$일 때 최솟값 -27을 가지므로

$M=5$, $m=-27$ ⇨ ❸

$\therefore M-m=32$ ⇨ ❹

답 32

채점 기준	비율
❶ $\log_2 x=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ $g(t)$, $g'(t)$를 구할 수 있다.	20%
❸ M, m의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	10%

1112 $f(x)=x\ln x-x+a$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\ln x$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$a-1$	$\nearrow$

이때 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $a-1$을 가지므로

$a-1=2$ $\therefore a=3$ 답 ③

1113 $f(x)=xe^{kx}$에서

$f'(x)=e^{kx}+kxe^{kx}=(kx+1)e^{kx}$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{k}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{k}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{1}{ke}$	$\searrow$

이때 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{k}$일 때 최댓값 $-\frac{1}{ke}$을 가지므로

$-\frac{1}{ke}=1$ $\therefore k=-\frac{1}{e}$

답 $-\frac{1}{e}$

1114 $f(x)=a(x+2\cos x)$에서 $f'(x)=a(1-2\sin x)$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ $\left(\because 0\le x\le \frac{\pi}{2}\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2a$	$\nearrow$	$\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)a$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}a$

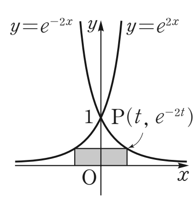
이때 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$일 때 최댓값 $\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)a$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 최솟값 $\frac{\pi}{2}a$를 가지므로

$\frac{\pi}{2}a=\pi$ $\therefore a=2$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)\cdot 2=\frac{\pi}{3}+2\sqrt{3}$ 답 ⑤

1115 두 곡선 $y=e^{2x}$과 $y=e^{-2x}$은 y축에 대하여 대칭이므로 제1사분면에 있는 직사각형의 꼭짓점을 $\mathrm{P}(t,\ e^{-2t})$ $(t>0)$, 직사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면



$S(t)=2te^{-2t}$

$\therefore S'(t)=2e^{-2t}-4te^{-2t}$

$=2(1-2t)e^{-2t}$

$S'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{2}$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{1}{e}$을 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{e}$이다. 답 ①

1116 $\mathrm{P}(a,\ a)$, $\mathrm{Q}(a,\ \sqrt{a-1})$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=a-\sqrt{a-1}$

이때 $f(a)=a-\sqrt{a-1}$로 놓으면 ⇨ ❶

$f'(a)=1-\frac{1}{2\sqrt{a-1}}=\frac{2\sqrt{a-1}-1}{2\sqrt{a-1}}$ ⇨ ❷

$f'(a)=0$에서 $2\sqrt{a-1}-1=0$

$\sqrt{a-1}=\frac{1}{2}$, $a-1=\frac{1}{4}$ $\therefore a=\frac{5}{4}$ ⇨ ❸

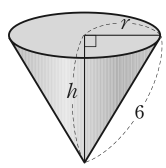
a	1	$\cdots$	$\frac{5}{4}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗

따라서 $f(a)$는 $a=\frac{5}{4}$일 때 최솟값 $\frac{3}{4}$을 가지므로 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다. ⇨ ❹

답 $\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{PQ}$의 길이를 a에 대한 함수 $f(a)$로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $f'(a)$를 구할 수 있다.	20%
❸ $f'(a)=0$인 a의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

1117 잘라 낸 부채꼴 모양의 종이로 오른쪽 그림과 같은 원뿔을 만들었을 때, 밑면의 반지름의 길이를 r $(0<r<6)$라 하면



$6(2\pi-\theta)=2\pi r$, $\quad 2\pi-\theta=\frac{r}{3}\pi$

$\therefore\ \theta=2\pi-\frac{r}{3}\pi$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

원뿔의 높이를 h라 하면 $h=\sqrt{36-r^2}$이므로 원뿔의 부피를 $V(r)$라 하면

$$V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{36-r^2}$$

$$\therefore\ V'(r)=\frac{1}{3}\pi\left(2r\sqrt{36-r^2}+r^2\cdot\frac{-2r}{2\sqrt{36-r^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{2r(36-r^2)-r^3}{\sqrt{36-r^2}}$$

$$=\frac{\pi r(24-r^2)}{\sqrt{36-r^2}}$$

$V'(r)=0$에서

$r=2\sqrt{6}$ $(\because\ 0<r<6)$

r	0	$\cdots$	$2\sqrt{6}$	$\cdots$	6
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(r)$는 $r=2\sqrt{6}$일 때 극대이며 최대이므로 이것을 ㉠에 대입하면 구하는 θ의 값은

$\theta=2\pi-\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

답 $2\pi-\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

1118 방정식 $(x+1)e^{-x}=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=(x+1)e^{-x}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

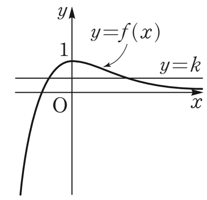
$f(x)=(x+1)e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{-x}-(x+1)e^{-x}=-xe^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↘

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$0<k<1$

즉 $a=0$, $b=1$이므로

$a+b=1$

답 1

1119 방정식 $\frac{10}{x^2-4x+5}=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{10}{x^2-4x+5}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\frac{10}{x^2-4x+5}$으로 놓으면

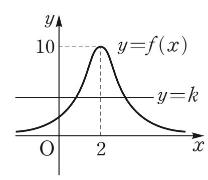
$$f'(x)=-\frac{10(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$=-\frac{20(x-2)}{(x^2-4x+5)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	10	↘

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $0<k<10$이므로 정수 k는 1, 2, $\cdots$, 9의 9개이다.

답 9

1120 $\ln x-x+k=0$에서 $\quad \ln x-x=-k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

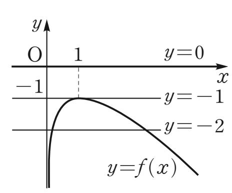
$f(x)=\ln x-x$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{1}{x}-1$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	-1	↘

이때 $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=0$은 만나지 않으므로 $k=0$일 때, 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않는다.

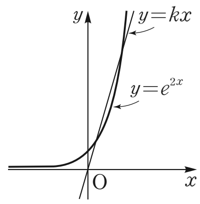
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$은 한 점에서 만나므로 $k=1$일 때, 방정식 ㉠은 오직 한 개의 실근을 갖는다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-2$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 $k=2$일 때, 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

1121 방정식 $e^{2x}=kx$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^{2x}$과 직선 $y=kx$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



$f(x)=e^{2x}$, $g(x)=kx$로 놓으면

$f'(x)=2e^{2x}$, $g'(x)=k$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때, 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad e^{2t}=kt$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 2e^{2t}=k$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$e^{2t}=2e^{2t}\cdot t$, $\quad e^{2t}(2t-1)=0$

$\therefore t=\dfrac{1}{2}$

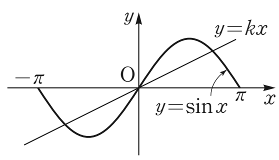
이것을 ㉡에 대입하면 $\quad k=2e$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$k>2e$

답 ⑤

1122 구간 $[-\pi, \pi]$에서 방정식 $\sin x-kx=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 $-\pi\le x\le\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. ⇨ ❶



$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$이므로 곡선 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0=\cos 0\cdot(x-0)$ $\quad\therefore y=x$ ⇨ ❷

따라서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=kx$가 세 점에서 만나려면

$0\le k<1$ ⇨ ❸

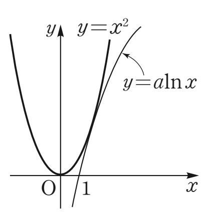
답 $0\le k<1$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	20%
❷ 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%

1123 $a\ln x-x^2=0$에서

$a\ln x=x^2$

방정식 $a\ln x=x^2$이 오직 하나의 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=a\ln x$, $y=x^2$이 접해야 한다.



$f(x)=a\ln x$, $g(x)=x^2$으로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{a}{x}$, $g'(x)=2x$

접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad a\ln t=t^2$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad \dfrac{a}{t}=2t$ $\quad\therefore a=2t^2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad 2t^2\ln t=t^2$

$\ln t=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore t=\sqrt{e}$

이것을 ㉡에 대입하면 $\quad a=2e$

답 ④

1124 $f(x)=ax^2+4\sin x$에서

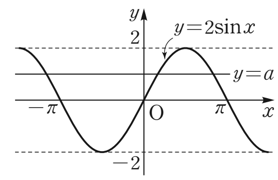
$f'(x)=2ax+4\cos x$, $f''(x)=2a-4\sin x$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고 그 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $\quad 2a-4\sin x=0$

$\therefore 2\sin x=a$

이 방정식이 실근을 가지려면 곡선 $y=2\sin x$와 직선 $y=a$가 만나야 하므로 오른쪽 그림에서



$-2\le a\le 2$

이때 $a=-2$ 또는 $a=2$이면

$f''(x)=-4(1+\sin x)$ 또는 $f''(x)=4(1-\sin x)$

$\therefore f''(x)\le 0$ 또는 $f''(x)\ge 0$

즉 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

$\therefore -2<a<2$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다. 답 ③

참고 (i) $a=-2$일 때

$f''(x)=-4(1+\sin x)$이고 $-1\le\sin x\le 1$에서

$0\le 1+\sin x\le 2$ $\quad\therefore -8\le -4(1+\sin x)\le 0$

$\therefore f''(x)\le 0$

(ii) $a=2$일 때

$f''(x)=4(1-\sin x)$이고 $-1\le\sin x\le 1$에서

$0\le 1-\sin x\le 2$ $\quad\therefore 0\le 4(1-\sin x)\le 8$

$\therefore f''(x)\ge 0$

1125 $f(x)=x^4-4x^3+kx^2$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3-12x^2+2kx$,

$f''(x)=12x^2-24x+2k$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

$f''(x)=0$에서 $\quad 12x^2-24x+2k=0$, 즉 $6x^2-12x+k=0$

이차방정식 $6x^2-12x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=36-6k\le 0$ $\quad\therefore k\ge 6$

따라서 실수 k의 최솟값은 6이다. 답 ⑤

1126 $f(x)=a\cos x+x^2$으로 놓으면

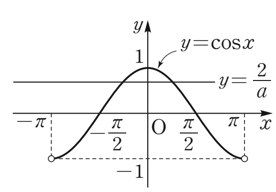
$f'(x)=-a\sin x+2x$, $f''(x)=-a\cos x+2$

곡선 $y=f(x)$가 $-\pi<x<\pi$에서 두 개의 변곡점을 가지므로 방정식 $f''(x)=0$이 $-\pi<x<\pi$에서 서로 다른 두 실근을 갖고, 그 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $\quad -a\cos x+2=0$

$\therefore \cos x=\dfrac{2}{a}$

이 방정식이 $-\pi<x<\pi$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=\dfrac{2}{a}$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 $\quad -1<\dfrac{2}{a}<1$



$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$ 답 $a<-2$ 또는 $a>2$

1127 $f(x)=xe^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 $-\frac{1}{e}$을 가지므로 $f(x)\geq k$가 항상 성립하려면

$k\leq -\frac{1}{e}$

따라서 k의 최댓값은 $-\frac{1}{e}$이다. 답 ③

1128 $x+\frac{1}{2x^2}+k\geq 0$에서 $x+\frac{1}{2x^2}\geq -k$

$f(x)=x+\frac{1}{2x^2}$로 놓으면 $f'(x)=1-\frac{1}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$\frac{3}{2}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$을 가지므로 $f(x)\geq -k$가 항상 성립하려면 $-k\leq \frac{3}{2}$

$\therefore k\geq -\frac{3}{2}$ 답 $k\geq -\frac{3}{2}$

1129 $f(x)=x\ln x-4x$로 놓으면 $f'(x)=\ln x-3$

$f'(x)=0$에서 $x=e^3$

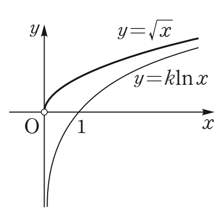
x	0	$\cdots$	e^3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-e^3$	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=e^3$일 때 최솟값 $-e^3$을 가지므로 $f(x)\geq k$가 항상 성립하려면

$k\leq -e^3$

따라서 k의 최댓값은 $-e^3$이다. 답 $-e^3$

1130 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x}\geq k\ln x$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$가 곡선 $y=k\ln x$보다 위쪽에 있거나 두 곡선이 접해야 한다.



$f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=k\ln x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(x)=\frac{k}{x}$

접점의 x좌표를 t $(t>0)$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\sqrt{t}=k\ln t$ ······ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{k}{t}$

$\therefore k=\frac{\sqrt{t}}{2}$ ······ ㉡

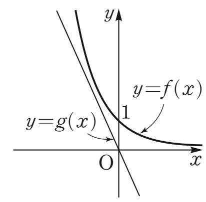
㉡을 ㉠에 대입하면 $\sqrt{t}=\frac{\sqrt{t}}{2}\ln t$

$\ln t=2$ $\therefore t=e^2$

이것을 ㉡에 대입하면 $k=\frac{e}{2}$

따라서 $0<k\leq\frac{e}{2}$이므로 k의 최댓값은 $\frac{e}{2}$이다. 답 ③

1131 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있으려면 오른쪽 그림과 같아야 한다. ⇨ ❶



$f(x)=e^{-x}$, $g(x)=mx$에서

$f'(x)=-e^{-x}$, $g(x)=m$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때, 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $e^{-t}=mt$ ······ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-e^{-t}=m$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $e^{-t}=-te^{-t}$

$\therefore t=-1$ ⇨ ❷

이것을 ㉡에 대입하면 $m=-e$

따라서 구하는 m의 값의 범위는

$-e<m\leq 0$ ⇨ ❸

답 $-e<m\leq 0$

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 그림으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ 곡선과 직선의 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	60%
❸ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	10%

1132 $ax\leq\ln x\leq bx$에서 $a\leq\frac{\ln x}{x}\leq b$

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{\ln 2}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$일 때 최댓값 $\frac{1}{e}$, $x=1$일 때 최솟값 0을 가지므로 $1\leq x\leq 4$인 모든 실수 x에 대하여

$0\leq\frac{\ln x}{x}\leq\frac{1}{e}$

즉 $a\leq 0$, $b\geq\frac{1}{e}$이므로 $b-a$의 최솟값은

$\frac{1}{e}-0=\frac{1}{e}$ 답 ①

1133 전략 함수 $f(x)$에 대하여 어떤 구간에서 $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하고, $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

풀이 $f(x)=3x-2\cos x$로 놓으면

$f'(x)=3+2\sin x$, $f''(x)=2\cos x$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$2\cos x<0$, $\cos x<0$

$\therefore \frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$이다.

답 ③

1134 전략 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 때에는 $f'(x)=0$, $f''(x)=0$이 되는 x의 값을 구하여 그 값을 경계로 나눈 구간에서 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 조사한다.

풀이 $f(x)=(3-x)e^x$에서

$f'(x)=-e^x+(3-x)e^x=(2-x)e^x$,

$f''(x)=-e^x+(2-x)e^x=(1-x)e^x$

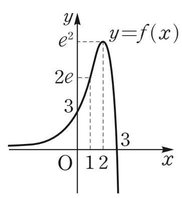
$f'(x)=0$에서 $x=2$

$f''(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↗	$2e$	↗	e^2	↘

$\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 ②

1135 전략 닫힌 구간에서의 함수의 최대, 최소는 극값과 구간의 양 끝 값에서의 함숫값을 구하여 비교한다.

풀이 $f(x)=2x\sqrt{x+1}$에서

$$f'(x)=2\sqrt{x+1}+\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{2(x+1)+x}{\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{3}$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↗	$2\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{2}{3}$일 때 최솟값 $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$을 갖는다.

답 $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$

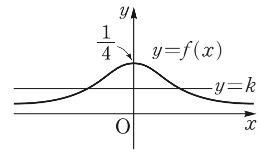
1136 전략 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 방정식 $\frac{1}{x^2+4}=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{1}{x^2+4}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. ⇨ ❶

$f(x)=\frac{1}{x^2+4}$로 놓으면 $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{4}$	↘



이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다. ⇨ ❷

따라서 곡선 $y=\frac{1}{x^2+4}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$0<k<\frac{1}{4}$ ⇨ ❸

답 $0<k<\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	30%
❷ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%

1137 전략 곡선 $y=f(x)$가 실수 전체의 집합에서 위로 볼록하려면 실수 전체에서 $f''(x)\le 0$이어야 한다.

풀이 $f(x)=-x^4+ax^3+3ax^2+5$로 놓으면

$f'(x)=-4x^3+3ax^2+6ax$,

$f''(x)=-12x^2+6ax+6a$

곡선 $y=f(x)$가 실수 전체의 집합에서 위로 볼록하려면 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\le 0$이어야 하므로 부등식 $-12x^2+6ax+6a\le 0$, 즉 $2x^2-ax-a\ge 0$이 항상 성립해야 한다.

방정식 $2x^2-ax-a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2+8a\le 0$, $a(a+8)\le 0$

$\therefore -8\le a\le 0$

따라서 a의 최솟값은 -8이다.

답 ③

1138 전략 곡선 $y=f(x)$가 주어진 구간에서 위로 볼록하려면 주어진 구간에서 $f''(x)\le 0$이어야 한다.

풀이 ㄱ. $f(x)=\ln(x^2+4)$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+4}$,

$$f''(x)=\frac{2(x^2+4)-2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-2(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$$

구간 $(2, \infty)$에서 $f''(x)<0$이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

ㄴ. $f(x)=e^x\cos x$로 놓으면

$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$,

$f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)$

$=-2e^x\sin x$

구간 $(0, \pi)$에서 $f''(x)<0$이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

ㄷ. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2+1)^2-(-x^2+1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

구간 $(-1,\ 0)$에서 $f''(x)>0$이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다.

이상에서 주어진 구간에서 위로 볼록한 곡선은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

1139 전략 함수 $f(x)$의 변곡점을 구할 때에는 $f''(x)=0$인 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사한다.

풀이 $f(x)=2xe^x$으로 놓으면

$f'(x)=2e^x+2xe^x=2(x+1)e^x$,

$f''(x)=2e^x+2(x+1)e^x=2(x+2)e^x$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-2$

$x<-2$일 때 $f''(x)<0$, $x>-2$일 때 $f''(x)>0$

즉 $x=-2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-2,\ -\frac{4}{e^2}\right)$이다.

점 $\left(-2,\ -\frac{4}{e^2}\right)$에서의 접선의 기울기가 $f'(-2)=-\frac{2}{e^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y+\frac{4}{e^2}=-\frac{2}{e^2}(x+2)$$

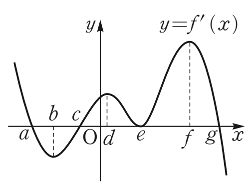
$$\therefore\ y=-\frac{2}{e^2}x-\frac{8}{e^2}$$

따라서 구하는 y절편은 $-\frac{8}{e^2}$이다.

답 ①

1140 전략 $f'(x)=0$, $f''(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값을 경계로 나눈 구간에서의 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 조사하여 극대, 극소가 되는 점과 변곡점을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 a, b, c, d, e, f, g를 정하고 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.



x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
$f(x)$		극대		변곡점		극소		변곡점

x	$\cdots$	e	$\cdots$	f	$\cdots$	g	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$		변곡점		변곡점		극대	

즉 극대가 되는 점의 개수는 2, 극소가 되는 점의 개수는 1, 변곡점의 개수는 4이므로

$p=2,\ q=1,\ r=4$

$\therefore\ p+q+r=7$

답 ④

1141 전략 함수의 정의역 안에서 극값을 구해 본다.

풀이 $f(x)=x^2\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{1}{\sqrt{e}}\ (\because\ x>0)$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$에서 최솟값 $-\frac{1}{2e}$을 가지므로

$a=\frac{1}{\sqrt{e}}$, $b=-\frac{1}{2e}$

$\therefore\ \frac{a}{b}=-2\sqrt{e}$

답 $-2\sqrt{e}$

1142 전략 주어진 함수를 한 종류의 삼각함수로 나타낸 후 $\cos x=t$로 놓고 주어진 구간에서의 극값과 구간의 양 끝 값에서의 함숫값을 구하여 비교한다.

풀이 $f(x)=2\cos^3 x-3\sin^2 x+2$

$=2\cos^3 x-3(1-\cos^2 x)+2$

$=2\cos^3 x+3\cos^2 x-1$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=2t^3+3t^2-1$

$\therefore\ g'(t)=6t^2+6t=6t(t+1)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=-1$ 또는 $t=0$

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4

즉 $g(t)$는 $t=1$일 때 최대이고, $t=0$일 때 최소이다.

$\cos x=t$이므로 $\cos a=1$, $\cos b=0$에서

$a=0,\ b=\frac{\pi}{2}\ (\because\ 0\le a\le\pi,\ 0\le b\le\pi)$

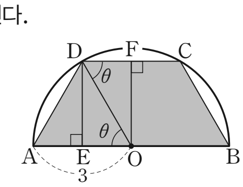
$\therefore\ a+b=\frac{\pi}{2}$

답 ③

주의 a, b는 함수 $f(x)$가 각각 최대, 최소일 때의 x의 값이다. $a=1$, $b=0$으로 착각하지 않도록 주의한다.

1143 전략 윗변의 길이와 높이를 반지름의 길이와 θ를 이용하여 나타낸 후 사다리꼴의 넓이를 θ의 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하고, 점 O에서 변 CD에 내린 수선의 발을 F라 하면 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로



$\angle ODF=\angle AOD=\theta$ (엇각)

△ODF에서 $\quad\overline{DF}=\overline{OD}\cos\theta=3\cos\theta$

$\therefore\ \overline{CD}=2\overline{DF}=6\cos\theta$

△ODE에서 $\quad\overline{DE}=\overline{OD}\sin\theta=3\sin\theta$ ⇨ ❶

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}(6\cos\theta+6)\cdot 3\sin\theta=9(\cos\theta+1)\sin\theta$$

$S'(\theta)=9\{(-\sin\theta)\sin\theta+(\cos\theta+1)\cos\theta\}$
$=9(-\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos\theta)$
$=9\{-(1-\cos^2\theta)+\cos^2\theta+\cos\theta\}$
$=9(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$
$=9(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$ ⇨ ❷

$S'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=-1$ 또는 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}\left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		+	0	−	
$S(\theta)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$에서 극대이며 최대이므로 구하는 최댓값은

$S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{27\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{3},\ M=\frac{27\sqrt{3}}{4}$ ⇨ ❸

답 $\alpha=\frac{\pi}{3},\ M=\frac{27\sqrt{3}}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{CD}$, $\overline{DE}$의 길이를 θ로 나타낼 수 있다.	20%
❷ $S(\theta)$, $S'(\theta)$를 구할 수 있다.	40%
❸ α, M의 값을 구할 수 있다.	40%

1144 전략 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $x^2\ln x-2x^2+\frac{k}{2}x=0$에서 $x^2\ln x-2x^2=-\frac{k}{2}x$

$x>0$이므로 양변을 x로 나누면 $x\ln x-2x=-\frac{k}{2}$

따라서 방정식 $x^2\ln x-2x^2+\frac{k}{2}x=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=x\ln x-2x$와 직선 $y=-\frac{k}{2}$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

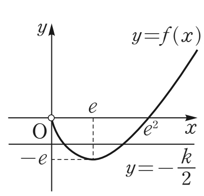
$f(x)=x\ln x-2x$로 놓으면

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-2=\ln x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$-e$	↗

$\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=x\ln x-2x$와 직선 $y=-\frac{k}{2}$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

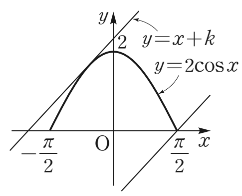
$-e<-\frac{k}{2}<0$ $\therefore\ 0<k<2e$

$e=2.7$에서 $0<k<5.4$이므로 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 ②

1145 전략 곡선 $y=2\cos x$와 직선 $y=x+k$가 만나도록 그래프를 그려 본다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=2\cos x$와 직선 $y=x+k$가 $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 교점을 가지려면 직선 $y=x+k$는 곡선 $y=2\cos x$에 접하거나 그 아래쪽에 있어야 하고 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$을 지나거나 그보다 위쪽에 있어야 한다.



(i) 곡선 $y=2\cos x$와 직선 $y=x+k$가 접할 때

직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편은 k이다.

$y'=-2\sin x$에서 $-2\sin x=1$, $\sin x=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=-\frac{\pi}{6}\left(\because\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

즉 접점의 좌표가 $\left(-\frac{\pi}{6},\ \sqrt{3}\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{3}=x-\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ $\therefore\ y=x+\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

$\therefore\ k=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$을 지날 때

$0=\frac{\pi}{2}+k$ $\therefore\ k=-\frac{\pi}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$-\frac{\pi}{2}\le k\le\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

답 ③

1146 전략 $x>a$에서 $f'(x)>0$일 때, 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(a)\ge0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $x>0$에서 $f(x)>g(x)$가 성립하려면

$2\cos x>k-2x^2$, 즉 $2\cos x+2x^2-k>0$

이어야 한다.

$h(x)=2\cos x+2x^2-k$로 놓으면

$h'(x)=-2\sin x+4x$, $h''(x)=-2\cos x+4$

$x>0$에서 $h''(x)>0$이므로 $x>0$에서 $h'(x)$는 증가하고 $h'(0)=0$이므로

$h'(x)>0$

$x>0$에서 $h(x)$는 증가하고 $h(0)=2-k$이므로 $h(x)>0$이려면

$2-k\ge0$ $\therefore\ k\le2$

따라서 k의 최댓값은 2이다.

답 2

1147 전략 $y=\log_a f(x)$에서 $a>1$이면 $f(x)$가 최대일 때 y의 값도 최대가 됨을 이용한다.

풀이 $x+y=3$에서 $y=3-x$

진수의 조건에서 $x+9>0$, $y>0$이므로

$x+9>0$, $3-x>0$ $\therefore\ -9<x<3$

$f(x)=\log_2(x+9)+\log_4 y$로 놓으면

$f(x)=\log_2(x+9)+\log_4(3-x)$
$=\log_4(x+9)^2+\log_4(3-x)$
$=\log_4(x+9)^2(3-x)$

$g(x)=(x+9)^2(3-x)$로 놓으면 밑이 1보다 크므로 $g(x)$가 최대일 때 $f(x)$도 최대가 된다.

$$g'(x)=2(x+9)(3-x)-(x+9)^2$$
$$=-3(x+9)(x+1)$$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ ($\because -9<x<3$)

x	-9	$\cdots$	-1	$\cdots$	3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	256	$\searrow$	

따라서 $g(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 256을 가지므로 $f(x)$의 최댓값은 $\quad \log_4 256=\log_{2^2}2^8=\frac{8}{2}=4$

답 ④

1148 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.

풀이 $f(x)=\frac{x^3+kx}{x^2+2}$이므로

$$f'(x)=\frac{(3x^2+k)(x^2+2)-(x^3+kx)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{x^4+(6-k)x^2+2k}{(x^2+2)^2}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로 $\quad f'(1)=0$

$$\frac{1+(6-k)+2k}{9}=0 \qquad \therefore k=-7$$ ⇨ ❶

$$\therefore f(x)=\frac{x^3-7x}{x^2+2},$$
$$f'(x)=\frac{x^4+13x^2-14}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{(x^2+14)(x+1)(x-1)}{(x^2+2)^2}$$ ⇨ ❷

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

즉 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 2, $x=1$일 때 최솟값 -2를 가지므로

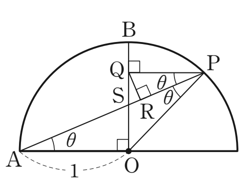
$M=2,\ m=-2$ ⇨ ❸

$\therefore M^2+m^2=8$ ⇨ ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $f(x)$, $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❸ M, m의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ M^2+m^2의 값을 구할 수 있다.	10%

1149 전략 평행선과 엇각의 성질을 이용하여 크기가 같은 각을 찾고 $\overline{QR}$의 길이를 θ로 나타낸다.



풀이 $\overline{AO}\,/\!/\,\overline{PQ}$이므로

$\angle QPS=\theta$ (엇각)

$\overline{OA}=\overline{OP}$이므로

$\angle OPA=\theta$

$\therefore \angle OPQ=2\theta$

$\triangle OPQ$에서 $\quad \overline{PQ}=\overline{OP}\cos 2\theta=\cos 2\theta$

$\triangle PQR$에서

$$\overline{QR}=\overline{PQ}\sin\theta=\cos 2\theta\sin\theta=(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$$
$$=-2\sin^3\theta+\sin\theta$$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$이고,

$f(t)=\overline{QR}=-2t^3+t$라 하면

$$f'(t)=-6t^2+1$$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\because 0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	$\searrow$	

따라서 $f(t)$는 $t=\frac{\sqrt{6}}{6}$일 때 최댓값 $\frac{\sqrt{6}}{9}$을 가지므로 $\overline{QR}$의 길이의 최댓값은 $\frac{\sqrt{6}}{9}$이다.

답 $\frac{\sqrt{6}}{9}$

1150 전략 방정식 $f(x)=g(x)$가 a보다 큰 서로 다른 두 실근을 가지려면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x>a$인 부분에서 서로 다른 두 교점을 가져야 한다.

풀이 방정식 $\frac{kx}{x^2+2}=2$가 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 곡선 $y=\frac{kx}{x^2+2}$와 직선 $y=2$가 $x>1$에서 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

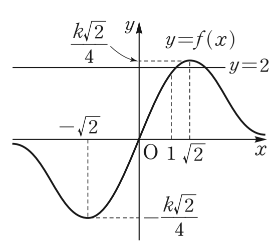
$f(x)=\frac{kx}{x^2+2}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{k(x^2+2)-kx\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-kx^2+2k}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{-k(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2+2)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{k\sqrt{2}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{k\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$가 $x>1$에서 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$f(1)<2,\ \frac{k\sqrt{2}}{4}>2$$

이어야 한다.

$f(1)<2$에서 $\quad \frac{k}{3}<2 \qquad \therefore k<6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{k\sqrt{2}}{4}>2$에서 $\quad k>4\sqrt{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 4\sqrt{2}<k<6$

답 ③

다른풀이 $\frac{kx}{x^2+2}=2$에서 $x^2+2\neq0$이므로 $kx=2x^2+4$

곡선 $y=2x^2+4$와 직선 $y=kx$가 $x>1$에서 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=kx$는 곡선 $y=2x^2+4$ 위의 점 $(1,\ 6)$을 지날 때보다 아래에 있고, 접할 때보다 위에 있어야 함을 이용하여 풀 수도 있다.

1151 전략 함수 $f(x)$의 변곡점을 구할 때에는 $f''(x)=0$인 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사한다.

풀이 $f(x)=3x^3+(2a+1)x^2+bx+c$에서

$f'(x)=9x^2+2(2a+1)x+b,$

$f''(x)=18x+2(2a+1)$

$f''(x)=0$에서 $18x+2(2a+1)=0$

$18x=-2(2a+1)$

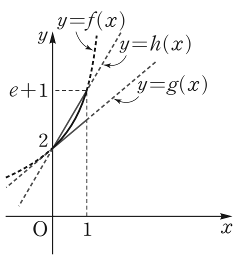
$\therefore\ x=-\frac{2a+1}{9}$

즉 $x=-\frac{2a+1}{9}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 주어진 곡선의 변곡점은 1개이다.

답 1

1152 전략 $kx\le f(x)\le lx$이면 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=kx$에 접하거나 그 위에 있어야 하고, 직선 $y=lx$에 접하거나 그 아래에 있어야 한다.

풀이 $f(x)=e^x+1$, $g(x)=ax+2$, $h(x)=bx+2$로 놓자.



주어진 부등식을 만족시키려면 오른쪽 그림과 같이 $0\le x\le1$에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있거나 접해야 하고, 직선 $y=h(x)$보다 아래쪽에 있거나 $x=1$인 점에서 만나야 한다.

$f'(x)=e^x$에서 $f'(0)=1$

이때 $f(0)=2$이므로 $g(x)\le f(x)$이려면 직선 $y=g(x)$의 기울기 a가 $a\le1$이어야 한다.

또 두 점 $(0,\ f(0))$, $(1,\ f(1))$, 즉 $(0,\ 2)$, $(1,\ e+1)$을 지나는 직선의 기울기가

$\frac{(e+1)-2}{1-0}=e-1$

이므로 $f(x)\le h(x)$이려면 직선 $y=h(x)$의 기울기 b가 $b\ge e-1$이어야 한다.

따라서 $M=1$, $m=e-1$이므로

$M+m=e$

답 ⑤

Ⅳ. 적분법

10 여러 가지 적분법

1153 $\int x^{\frac{5}{3}}dx=\frac{1}{\frac{5}{3}+1}x^{\frac{5}{3}+1}+C=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+C=\frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2}+C$

답 $\frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2}+C$

1154 $\int x^{-5}dx=\frac{1}{-5+1}x^{-5+1}+C=-\frac{1}{4}x^{-4}+C=-\frac{1}{4x^4}+C$

답 $-\frac{1}{4x^4}+C$

1155 $\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

답 $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

1156 $\int\sqrt[4]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{4}}dx$

$=\frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1}+C$

$=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+C=\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+C$

답 $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+C$

1157 $\int\sqrt[5]{x^2}\,dx=\int x^{\frac{2}{5}}dx$

$=\frac{1}{\frac{2}{5}+1}x^{\frac{2}{5}+1}+C$

$=\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}+C=\frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2}+C$

답 $\frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2}+C$

1158 $\int\frac{1}{x^2}\,dx=\int x^{-2}dx$

$=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$

$=-x^{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$

답 $-\frac{1}{x}+C$

1159 $\int\frac{4}{x}\,dx=4\int\frac{1}{x}\,dx=4\ln|x|+C$

답 $4\ln|x|+C$

1160 $\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx$

$=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C$

$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

답 $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

1161 $\int\left(x+\frac{1}{x^3}\right)dx=\int(x+x^{-3})dx$

$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}+C$ 답 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}+C$

1162 $\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x}-x^{-2}+x^{-4}\right)dx$

$=\ln|x|+x^{-1}-\frac{1}{3}x^{-3}+C$

$=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$

답 $\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$

1163 $\int\frac{5x-2}{x^2}dx=\int\left(\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\int\left(\frac{5}{x}-2x^{-2}\right)dx$

$=5\ln|x|+2x^{-1}+C$

$=5\ln|x|+\frac{2}{x}+C$

답 $5\ln|x|+\frac{2}{x}+C$

1164 $\int\frac{x^2+x-4}{x^2}dx=\int\left(1+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx$

$=\int\left(1+\frac{1}{x}-4x^{-2}\right)dx$

$=x+\ln|x|+4x^{-1}+C$

$=x+\ln|x|+\frac{4}{x}+C$

답 $x+\ln|x|+\frac{4}{x}+C$

1165 $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

답 $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

1166 $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx=\int(3x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}})dx$

$=6x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}+C$

$=6\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

답 $6\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

1167 $\int\frac{2x^2-1}{\sqrt{x}}dx=\int(2x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})dx$

$=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$

답 $\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$

1168 $\int\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx=\int\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}dx$

$=\int(\sqrt{x}+1)dx=\int(x^{\frac{1}{2}}+1)dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$

답 $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$

1169 $\int\sqrt{x}(x+1)^2dx=\int\sqrt{x}(x^2+2x+1)dx$

$=\int(x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}})dx$

$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

답 $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

1170 $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx=\int\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx$

$=\int\left(1-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$=x-4x^{\frac{1}{2}}+\ln|x|+C$

$=x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

답 $x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

1171 $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\int(x^2-x^{-2})dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^{-1}+C=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+C$

답 $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+C$

1172 $\int 2e^xdx=2\int e^xdx=2e^x+C$ 답 $2e^x+C$

1173 $\int e^{x+3}dx=\int e^x\cdot e^3dx=e^3\int e^xdx$

$=e^3\cdot e^x+C=e^{x+3}+C$

답 $e^{x+3}+C$

1174 $\int 4\cdot 3^xdx=4\int 3^xdx=4\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$

답 $4\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$

1175 $\int 4^{x+2}dx=\int 4^x\cdot 4^2dx=4^2\int 4^xdx$

$=4^2\cdot\frac{4^x}{\ln 4}+C=\frac{4^{x+2}}{\ln 4}+C$

답 $\frac{4^{x+2}}{\ln 4}+C$

1176 $\int 5^{2x}dx=\int 25^x dx=\frac{25^x}{\ln 25}+C$ 답 $\frac{25^x}{\ln 25}+C$

1177 $\int \frac{27^x}{3^x}dx=\int\left(\frac{27}{3}\right)^x dx=\int 9^x dx=\frac{9^x}{\ln 9}+C$

답 $\frac{9^x}{\ln 9}+C$

1178 $\int(e^{x-2}+5^{x+1})dx=\int(e^x\cdot e^{-2}+5^x\cdot 5)dx$

$=e^{-2}\int e^x dx+5\int 5^x dx$

$=e^{-2}\cdot e^x+5\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+C$

$=e^{x-2}+\frac{5^{x+1}}{\ln 5}+C$

답 $e^{x-2}+\frac{5^{x+1}}{\ln 5}+C$

1179 $\int(2^x-1)^2 dx=\int(4^x-2\cdot 2^x+1)dx$

$=\int 4^x dx-2\int 2^x dx+\int 1 dx$

$=\frac{4^x}{\ln 4}-2\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

$=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$

답 $\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$

1180 $\int(1-2\cos x)dx=\int 1dx-2\int\cos x dx$

$=x-2\sin x+C$ 답 $x-2\sin x+C$

1181 $\int 5\sec^2 x dx=5\int\sec^2 x dx$

$=5\tan x+C$ 답 $5\tan x+C$

1182 $\int(2\sin x-\cos x)dx=2\int\sin x dx-\int\cos x dx$

$=-2\cos x-\sin x+C$

답 $-2\cos x-\sin x+C$

1183 $\int(\csc^2 x+3x)dx=-\cot x+\frac{3}{2}x^2+C$

답 $-\cot x+\frac{3}{2}x^2+C$

1184 $\int\sec x(\sec x+\tan x)dx=\int(\sec^2 x+\sec x\tan x)dx$

$=\tan x+\sec x+C$

답 $\tan x+\sec x+C$

1185 $\int\frac{\sin^3 x+4}{\sin^2 x}dx=\int\left(\sin x+\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx$

$=\int(\sin x+4\csc^2 x)dx$

$=-\cos x-4\cot x+C$

답 $-\cos x-4\cot x+C$

1186 $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$이므로

$\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\boxed{\cos x}}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx=\frac{1}{2}(\boxed{x-\sin x})+C$

∴ (가) $\cos x$ (나) $x-\sin x$

답 풀이 참조

1187 $\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx$

$=\int\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}dx$

$=\int(1+\cos x)dx$

$=x+\sin x+C$ 답 $x+\sin x+C$

1188 $\int\cos x\tan x dx=\int\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$=\int\sin x dx$

$=-\cos x+C$ 답 $-\cos x+C$

1189 $\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\int\frac{1}{2}\sin x dx$

$=-\frac{1}{2}\cos x+C$

답 $-\frac{1}{2}\cos x+C$

1190 $3x+1=t$로 놓으면 $x=\boxed{\frac{t-1}{3}}$에서 $\frac{dx}{dt}=\boxed{\frac{1}{3}}$이므로

$\int(3x+1)^5 dx=\int t^5\cdot\frac{1}{3}dt$

$=\frac{1}{3}\int t^5 dt=\boxed{\frac{1}{18}}\cdot t^6+C$

$=\frac{1}{18}(3x+1)^6+C$

∴ (가) $\frac{t-1}{3}$ (나) $\frac{1}{3}$ (다) $\frac{1}{18}$

답 풀이 참조

1191 $x+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이므로

$\int(x+5)^4 dx=\int t^4 dt$

$=\frac{1}{5}t^5+C$

$=\frac{1}{5}(x+5)^5+C$ 답 $\frac{1}{5}(x+5)^5+C$

1192 $2x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2$이므로

$$\int(2x-1)^8dx=\int t^8\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^8dt$$
$$=\frac{1}{18}t^9+C=\frac{1}{18}(2x-1)^9+C$$

답 $\dfrac{1}{18}(2x-1)^9+C$

1193 $2-4x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-4$이므로

$$\int\cos(2-4x)dx=\int\cos t\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{4}\sin t+C=-\frac{1}{4}\sin(2-4x)+C$$

답 $-\dfrac{1}{4}\sin(2-4x)+C$

1194 $3x+4=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=3$이므로

$$\int\frac{1}{(3x+4)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int t^{-2}dt$$
$$=-\frac{1}{3t}+C=-\frac{1}{3(3x+4)}+C$$

답 $-\dfrac{1}{3(3x+4)}+C$

1195 $1+x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=1$이므로

$$\int\sqrt{1+x}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}+C$$

답 $\dfrac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}+C$

1196 $5x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=5$이므로

$$\int e^{5x-1}dx=\int e^t\cdot\frac{1}{5}dt=\frac{1}{5}e^t+C$$
$$=\frac{1}{5}e^{5x-1}+C$$

답 $\dfrac{1}{5}e^{5x-1}+C$

1197 $\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\boxed{\cos x}$이므로

$$\int\sin^2x\cos x\,dx=\int\sin^2x(\sin x)'dx=\int\boxed{t^2}dt$$
$$=\boxed{\frac{1}{3}}\cdot t^3+C=\frac{1}{3}\sin^3x+C$$

$\therefore$ (가) $\cos x$ (나) t^2 (다) $\dfrac{1}{3}$

답 풀이 참조

1198 $x^2-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int 2x(x^2-1)^3dx=\int t^3dt$$
$$=\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{4}(x^2-1)^4+C$$

답 $\dfrac{1}{4}(x^2-1)^4+C$

1199 $x^2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int xe^{x^2}dx=\int e^t\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

답 $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$

1200 $\cos x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int\sin x\cos^2x\,dx=\int t^2\cdot(-1)dt$$
$$=-\frac{1}{3}t^3+C=-\frac{1}{3}\cos^3x+C$$

답 $-\dfrac{1}{3}\cos^3x+C$

1201 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int\frac{\ln x}{x}dx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$

답 $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C$

1202 $(x^2+5x-1)'=2x+5$이므로

$$\int\frac{2x+5}{x^2+5x-1}dx=\int\frac{(x^2+5x-1)'}{x^2+5x-1}dx$$
$$=\ln|x^2+5x-1|+C$$

답 $\ln|x^2+5x-1|+C$

1203 $(e^x-3)'=e^x$이므로

$$\int\frac{e^x}{e^x-3}dx=\int\frac{(e^x-3)'}{e^x-3}dx$$
$$=\ln|e^x-3|+C$$

답 $\ln|e^x-3|+C$

1204 $\dfrac{x+4}{x+3}=1+\dfrac{1}{x+3}$이므로

$$\int\frac{x+4}{x+3}dx=\int\left(1+\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=x+\ln|x+3|+C$$

답 $x+\ln|x+3|+C$

1205 $\frac{x^2-3}{x+2}=x-2+\frac{1}{x+2}$이므로

$$\int\frac{x^2-3}{x+2}\,dx=\int\left(x-2+\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x+2|+C$$

답 $\frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x+2|+C$

1206 $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$이므로

$$\int\frac{1}{x(x+1)}\,dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\ln|x|-\ln|x+1|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$$

답 $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$

1207 $\frac{6}{x^2-9}=\frac{6}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}$이므로

$$\int\frac{6}{x^2-9}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=\ln|x-3|-\ln|x+3|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$$

답 $\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

1208 (1) $\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}=\frac{(a+b)x-a+b}{x^2-1}$이므로

$$\frac{3x+1}{x^2-1}=\frac{(a+b)x-a+b}{x^2-1}$$

따라서 $a+b=3$, $-a+b=1$이므로 두 식을 연립하면

$a=1$, $b=2$

(2) $\int\frac{3x+1}{x^2-1}\,dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}\right)dx$
$$=\ln|x+1|+2\ln|x-1|+C$$
$$=\ln|(x+1)(x-1)^2|+C$$

답 (1) $a=1$, $b=2$ (2) $\ln|(x+1)(x-1)^2|+C$

1209 $f(x)=x$, $g'(x)=\boxed{\cos x}$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\boxed{\sin x}$

이므로

$$\int x\cos x\,dx=x\cdot\sin x-\int\boxed{\sin x}\,dx$$
$$=\boxed{x\sin x+\cos x}+C$$

$\therefore$ (가) $\cos x$ (나) $\sin x$ (다) $\sin x$ (라) $x\sin x+\cos x$

답 풀이 참조

1210 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int xe^x dx=xe^x-\int 1\cdot e^x dx=xe^x-\int e^x dx$$
$$=xe^x-e^x+C$$

답 xe^x-e^x+C

1211 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$$\therefore \int \ln x\,dx=(\ln x)\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx=x\ln x-\int 1\,dx$$
$$=x\ln x-x+C$$

답 $x\ln x-x+C$

1212 $f(x)=x+2$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$

$$\therefore \int(x+2)\sin x\,dx=(x+2)(-\cos x)-\int 1\cdot(-\cos x)\,dx$$
$$=-(x+2)\cos x+\int\cos x\,dx$$
$$=-(x+2)\cos x+\sin x+C$$

답 $-(x+2)\cos x+\sin x+C$

1213 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\therefore \int x\ln x\,dx=(\ln x)\cdot\frac{1}{2}x^2-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2 dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

답 $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

1214 $f(x)=\int\left(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)dx=\int\left(2+\frac{1}{x}-3x^{-2}\right)dx$
$$=2x+\ln|x|+3x^{-1}+C$$
$$=2x+\ln|x|+\frac{3}{x}+C$$

$f(1)=5$이므로 $2+3+C=5$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=2x+\ln|x|+\frac{3}{x}$이므로

$f(e)=2e+\frac{3}{e}+1$

답 ⑤

1215 $\int\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}\,dx=\int\frac{x^3-1}{x}\,dx$
$$=\int\left(x^2-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\ln|x|+C$$

답 $\frac{1}{3}x^3-\ln|x|+C$

1216 $f(x)$를 미분하면 $x\sqrt{x}-1$이므로

$f'(x)=x\sqrt{x}-1$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(x\sqrt{x}-1)dx$

$=\int(x^{\frac{3}{2}}-1)dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-x+C$

$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x+C$ ⇨ ❶

$f(0)=2$이므로 $C=2$

$\therefore f(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x+2$ ⇨ ❷

답 $f(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x+2$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	70%
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30%

1217 $f_n(x)=\int x^{\frac{1}{n}}dx=\frac{1}{\frac{1}{n}+1}x^{\frac{1}{n}+1}+C$

$=\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}+C$

$f_n(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f_n(x)=\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}$

$\therefore f_1(1)\times f_2(1)\times f_3(1)\times\cdots\times f_8(1)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$ 답 ⑤

1218 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x^2-e^{2x}}{x+e^x}dx$

$=\int\frac{(x+e^x)(x-e^x)}{x+e^x}dx=\int(x-e^x)dx$

$=\frac{1}{2}x^2-e^x+C$

$f(0)=3$이므로 $-1+C=3$ $\therefore C=4$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2-e^x+4$

$\therefore f(2)=2-e^2+4=6-e^2$ 답 $6-e^2$

1219 $\int(2^x+3^x)^2dx=\int(2^{2x}+2\cdot2^x\cdot3^x+3^{2x})dx$

$=\int(4^x+2\cdot6^x+9^x)dx$

$=\frac{4^x}{\ln4}+\frac{2\cdot6^x}{\ln6}+\frac{9^x}{\ln9}+C$ 답 ④

1220 $\int3^{2x-1}dx=\int3^{2x}\cdot3^{-1}dx=\frac{1}{3}\int9^xdx$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{9^x}{\ln9}+C=\frac{3^{2x-1}}{\ln9}+C$

$\therefore a=\ln9$ 답 ⑤

1221 조건 ㈎에서 $f'(x)=(e^x+e^{-x})^2=e^{2x}+2+e^{-2x}$이므로

$f(x)=\int(e^{2x}+e^{-2x}+2)dx=\frac{e^{2x}}{\ln e^2}+\frac{e^{-2x}}{\ln e^{-2}}+2x+C$

$=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x+C$

조건 ㈏에서 $f(0)=0$이므로 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+C=0$

$\therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x$ 답 ③

1222 $\int\frac{8^x-1}{2^x-1}dx=\int\frac{2^{3x}-1}{2^x-1}dx$

$=\int\frac{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}{2^x-1}dx$

$=\int(4^x+2^x+1)dx$

$=\frac{4^x}{\ln4}+\frac{2^x}{\ln2}+x+C$

$\therefore a=\frac{1}{\ln4},\ b=\frac{1}{\ln2},\ c=1$

$\therefore \frac{bc}{a}=\frac{\ln4}{\ln2}=2$ 답 2

1223 $f(x)=\int(3-2\tan^2x)dx=\int\{3-2(\sec^2x-1)\}dx$

$=\int(5-2\sec^2x)dx=5x-2\tan x+C$

$f(0)=-\frac{5}{4}\pi$이므로 $C=-\frac{5}{4}\pi$

$\therefore f(x)=5x-2\tan x-\frac{5}{4}\pi$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{4}\pi-2-\frac{5}{4}\pi=-2$ 답 ①

1224 $f'(x)=\cos x-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x-\frac{1-\cos x}{2}$

$=\frac{3}{2}\cos x-\frac{1}{2}$

이므로

$f(x)=\int\left(\frac{3}{2}\cos x-\frac{1}{2}\right)dx$

$=\frac{3}{2}\sin x-\frac{1}{2}x+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}\sin x-\frac{1}{2}x$

답 $f(x)=\frac{3}{2}\sin x-\frac{1}{2}x$

라쎈 특강 반각의 공식

① $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ ② $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

③ $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

1225 $f(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$

$=\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$

$=1+\sin x$

$\therefore F(x)=\int(1+\sin x)dx=x-\cos x+C$

$F(0)=3$이므로 $\quad -1+C=3 \quad \therefore C=4$

$\therefore F(x)=x-\cos x+4$ 답 ③

타쎈 특강 배각의 공식

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

1226 $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$

$$=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=\int(\sec^2 x-\sec x\tan x)dx$$

$$=\tan x-\sec x+C$$ 답 $\tan x-\sec x+C$

1227 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=\cos x$에서

$\displaystyle\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int\cos x\,dx$

$\therefore f(x)+g(x)=\sin x+C_1$ …… ㉠ ⇨ ❶

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=2-\sin x$에서

$\displaystyle\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\right]dx=\int(2-\sin x)dx$

$\therefore f(x)-g(x)=2x+\cos x+C_2$ …… ㉡ ⇨ ❷

㉠, ㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=C_1$

$f(0)-g(0)=1+C_2$

이때 $f(0)=1$, $g(0)=0$이므로 $\quad C_1=1$, $C_2=0$

$C_1=1$, $C_2=0$을 각각 ㉠, ㉡에 대입하면

$f(x)+g(x)=\sin x+1$ …… ㉢

$f(x)-g(x)=2x+\cos x$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x+2x+1}{2}$

$g(x)=\dfrac{\sin x-\cos x-2x+1}{2}$ ⇨ ❸

$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi+2}{2}$, $g(\pi)=1-\pi$

$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-g(\pi)=\dfrac{3}{2}\pi$ ⇨ ❹

답 $\dfrac{3}{2}\pi$

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}$의 부정적분을 구할 수 있다.	20%
❷ $\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}$의 부정적분을 구할 수 있다.	20%
❸ $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	40%
❹ $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-g(\pi)$의 값을 구할 수 있다.	20%

1228 $x^2+x+4=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x+1$이므로

$$\int(2x+1)(x^2+x+4)^3dx=\int t^3dt$$

$$=\frac{1}{4}t^4+C$$

$$=\frac{1}{4}(x^2+x+4)^4+C$$

따라서 $a=\dfrac{1}{4}$, $b=4$이므로 $\quad ab=1$ 답 ①

1229 $x^2-x+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x-1$이므로

$$f(x)=\int(6x-3)(x^2-x+1)^4dx$$

$$=3\int(2x-1)(x^2-x+1)^4dx$$

$$=3\int t^4dt$$

$$=3\cdot\frac{1}{5}t^5+C$$

$$=\frac{3}{5}(x^2-x+1)^5+C$$

$f(1)=1$이므로 $\quad \dfrac{3}{5}+C=1 \quad \therefore C=\dfrac{2}{5}$

따라서 $f(x)=\dfrac{3}{5}(x^2-x+1)^5+\dfrac{2}{5}$이므로 $\quad f(0)=1$

답 1

1230 $f'(x)=(2x-7)^4$이므로 $\quad f(x)=\displaystyle\int(2x-7)^4dx$

$2x-7=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2$이므로

$$f(x)=\int(2x-7)^4dx=\int t^4\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{10}(2x-7)^5+C$$

$f(3)=0$이므로 $\quad -\dfrac{1}{10}+C=0 \quad \therefore C=\dfrac{1}{10}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{10}(2x-7)^5+\dfrac{1}{10}$

따라서 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$f(4)=\dfrac{1}{5}$ 답 ④

1231 $ax+5=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=a$이므로

$$F(x)=\int(ax+5)^7dx=\int t^7\cdot\frac{1}{a}dt$$

$=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{8}t^8+C=\dfrac{1}{8a}(ax+5)^8+C$ ⇨ ❶

$F(x)$의 최고차항의 계수가 16이므로

$\dfrac{1}{8a}a^8=16$, $\quad a^7=2^7$

$\therefore a=2$ ⇨ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	50%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%

1232 $3x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{\sqrt{3x-1}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{3}dt$$
$$=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{t}+C=\frac{2}{3}\sqrt{3x-1}+C$$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}$이므로 $\frac{2}{3}+C=\frac{5}{3}$ $\therefore C=1$

$\therefore f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x-1}+1$ 답 $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x-1}+1$

1233 $x^2-2x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-2$이므로

$$\int(x-1)\sqrt{x^2-2x}\,dx=\int\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}+C$$

$\therefore a=\frac{1}{3}$ 답 ①

1234 $x^2+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\sqrt{t}+C=\sqrt{x^2+3}+C$$

$f(1)=-1$이므로 $2+C=-1$ $\therefore C=-3$

$\therefore f(x)=\sqrt{x^2+3}-3$

방정식 $f(x)=0$, 즉 $\sqrt{x^2+3}-3=0$에서

$\sqrt{x^2+3}=3$

위의 등식의 양변을 제곱하면

$x^2+3=9,\quad x^2=6$

$\therefore x=\pm\sqrt{6}$

따라서 모든 근의 곱은 -6 답 -6

1235 $\sqrt{x+2}=t$로 놓으면 $x+2=t^2$

$x=t^2-2$ $\therefore \frac{dx}{dt}=2t$

$$\therefore \int\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx=\int\frac{t^2-2}{t}\cdot 2t\,dt$$
$$=2\int(t^2-2)dt$$
$$=2\left(\frac{1}{3}t^3-2t\right)+C=\frac{2}{3}t^3-4t+C$$
$$=\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-4\sqrt{x+2}+C$$
$$=\frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x+2}+C$$

답 $\frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x+2}+C$

1236 $f'(x)=e^x(e^x+1)^3$이고 $e^x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int e^x(e^x+1)^3dx=\int t^3dt$$
$$=\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{4}(e^x+1)^4+C$$

$f(0)=4$이므로 $\frac{1}{4}\cdot 2^4+C=4$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(e^x+1)^4$이므로

$f(\ln 3)=\frac{1}{4}(3+1)^4=64$ 답 ⑤

1237 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$f(x)=\int e^{\cos x}\sin x\,dx=\int e^t\cdot(-1)dt$$
$$=-e^t+C=-e^{\cos x}+C$$

$f(0)=-e$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=-e^{\cos x}$ ⇨ ❶

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ ⇨ ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	70%
❷ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30%

1238 ㄱ. $2x-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이므로

$$\int e^{2x-2}dx=\int e^t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}e^t+C$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x-2}+C$$

ㄴ. $e^x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$\int e^x\sqrt{e^x+3}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}(e^x+3)\sqrt{e^x+3}+C$$

ㄷ. $x^2+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int x\cdot 5^{x^2+3}dx=\int 5^t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{5^t}{\ln 5}+C$$
$$=\frac{5^{x^2+3}}{2\ln 5}+C$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

1239 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt$$
$$=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\ln x}+C$$

$f\left(\frac{1}{e}\right)=5$이므로 $1+C=5$ $\therefore C=4$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{\ln x}+4$이므로

$f(e)=3$ 답 ③

1240 $\ln x+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x+5}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{\ln x+5}+C$$

$\therefore a=2$ 답 2

1241 $xf'(x)=\ln 3x$에서

$f'(x)=\frac{\ln 3x}{x}$ $\therefore f(x)=\int\frac{\ln 3x}{x}dx$

$\ln 3x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{\ln 3x}{x}dx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\ln 3x)^2+C$$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(\ln 3x)^2$ 답 ②

1242 $\int\sin^3 x\,dx=\int\sin^2 x\cdot\sin x\,dx$

$$=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=\int(1-t^2)\cdot(-1)dt$$
$$=\int(t^2-1)dt=\frac{1}{3}t^3-t+C$$
$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=-1$이므로

$a+b=-\frac{2}{3}$ 답 ②

1243 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\tan x\sec^2 x\,dx$

$\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$이므로

$$f(x)=\int\tan x\sec^2 x\,dx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\tan^2 x+C$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$이므로

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+C=1$ $\therefore C=\frac{5}{6}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+\frac{5}{6}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{4}{3}$ $\therefore a=\frac{4}{3}$ 답 ④

1244 $x^2-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int 4x\cos(x^2-2)dx=\int\cos t\cdot 2dt$$
$$=2\sin t+C=2\sin(x^2-2)+C$$

$f(\sqrt{2})=1$이므로 $C=1$

$\therefore f(x)=2\sin(x^2-2)+1$ ⇨ ❶

한편 $-1\le\sin(x^2-2)\le 1$이므로

$-1\le 2\sin(x^2-2)+1\le 3$

$\therefore M=3,\ m=-1$ ⇨ ❷

$\therefore M+m=2$ ⇨ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	70%
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	10%

1245 $F(x)=\int f(x)dx=\int(1+\cos x)^2dx$

$$=\int(\cos^2 x+2\cos x+1)dx$$
$$=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}+2\cos x+1\right)dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{2}\cos 2x+2\cos x+\frac{3}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\sin 2x+2\sin x+\frac{3}{2}x+C$$

$F(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore F(x)=\frac{1}{4}\sin 2x+2\sin x+\frac{3}{2}x$

$\therefore F(\pi)=\frac{3}{2}\pi$ 답 ③

타쎈 특강 $\sin ax$, $\cos ax$ 꼴의 치환적분법

$a\ne 0$인 상수 a에 대하여

① $\int\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$

② $\int\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+C$

1246 $(x^3+4x+1)'=3x^2+4$이므로

$$f(x)=\int\frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}dx=\int\frac{(x^3+4x+1)'}{x^3+4x+1}dx$$
$$=\ln|x^3+4x+1|+C$$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\ln|x^3+4x+1|+1$이므로

$f(1)=\ln 6+1$ 답 ①

1247 $f(x)=\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx-\int\frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$

$$=\int\frac{e^{2x}-e^x}{e^{2x}-1}dx=\int\frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)(e^x-1)}dx$$
$$=\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

이때 $(e^x+1)'=e^x$이므로

$$f(x)=\int \frac{e^x}{e^x+1}dx=\int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx$$
$$=\ln(e^x+1)+C\ (\because e^x+1>0)$$

$f(0)=\ln 2$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\ln(e^x+1)$이므로

$f(\ln 4)=\ln 5$ 답 $\ln 5$

1248 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 5dx$

$\ln f(x)=5x+C\ (\because f(x)>0)$

$\therefore f(x)=e^{5x+C}$ ⇨ ❶

$f(0)=e^2$이므로 $C=2$

$\therefore f(x)=e^{5x+2}$ ⇨ ❷

답 $f(x)=e^{5x+2}$

채점 기준	비율
❶ $\frac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분을 구할 수 있다.	60%
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40%

1249 $\frac{x+2}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$이므로

$$f(x)=\int \frac{x+2}{x+1}dx=\int\left(1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=x+\ln|x+1|+C$$

$f(0)=3$이므로 $C=3$

$\therefore f(x)=x+\ln|x+1|+3$ 답 ③

1250 $\frac{2x^2-x+5}{x-1}=\frac{(x-1)(2x+1)+6}{x-1}=2x+1+\frac{6}{x-1}$

이므로

$$\int \frac{2x^2-x+5}{x-1}dx=\int\left(2x+1+\frac{6}{x-1}\right)dx$$
$$=x^2+x+6\ln|x-1|+C$$

답 $x^2+x+6\ln|x-1|+C$

1251 $y=\frac{3-x}{1+x}$로 놓으면

$y(1+x)=3-x,\quad x(y+1)=3-y$

$\therefore x=\frac{3-y}{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{3-x}{x+1}$

$\therefore g(x)=\frac{3-x}{x+1}$

$$\therefore \int g(x)dx=\int\frac{3-x}{x+1}dx=\int\left(-1+\frac{4}{x+1}\right)dx$$
$$=-x+4\ln|x+1|+C$$

답 $-x+4\ln|x+1|+C$

1252 $\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

이므로

$$f(x)=\int\frac{4}{x^2-4}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\ln|x-2|-\ln|x+2|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$이므로

$f(4)=\ln\frac{1}{3}=-\ln 3$ 답 ①

1253 $\frac{4x}{x^2-3x+2}=\frac{4x}{(x-1)(x-2)}=\frac{p}{x-1}+\frac{q}{x-2}$로 놓으면

$$\frac{4x}{(x-1)(x-2)}=\frac{(p+q)x-(2p+q)}{(x-1)(x-2)}$$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$p+q=4,\ 2p+q=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$p=-4,\ q=8$ ⇨ ❶

$$\therefore \int\frac{4x}{x^2-3x+2}dx=\int\left(\frac{-4}{x-1}+\frac{8}{x-2}\right)dx$$
$$=-4\ln|x-1|+8\ln|x-2|+C$$

따라서 $a=-4,\ b=8$이므로

$a+b=4$ ⇨ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ $\frac{4x}{x^2-3x+2}$를 부분분수로 변형할 수 있다.	70%
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30%

1254 $u(x)=x,\ v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=-e^{-x}$

$$\therefore f(x)=\int xe^{-x}dx$$
$$=x\cdot(-e^{-x})-\int 1\cdot(-e^{-x})dx$$
$$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$$
$$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$$
$$=-(x+1)e^{-x}+C$$

$f(0)=1$이므로 $-1+C=1\quad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=-(x+1)e^{-x}+2$이므로

$f(-1)=2$ 답 ③

1255 $u(x)=x,\ v'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$\therefore \int x\sin 2x\,dx=x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$=-\frac{x}{2}\cos 2x+\int\frac{1}{2}\cos 2x\,dx$$
$$=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

따라서 $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}$이므로 $ab=-\frac{1}{8}$ 답 ②

1256 조건 (가)에서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot2=2f'(x)$$

이므로 $2f'(x)=4\ln x$ $\quad\therefore f'(x)=2\ln x$

$f(x)=\int 2\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=x$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=\int 2\ln x\,dx=2\left\{(\ln x)\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx\right\}\\&=2x\ln x-2x+C\end{aligned}$$

조건 (나)에서 $f(1)=2$이므로 $\quad -2+C=2 \quad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=2x\ln x-2x+4$이므로 구하는 상수항은 4이다.

답 4

1257 $f(x)=\cos x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=-\sin x,\ g(x)=e^x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int e^x\cos x\,dx&=\cos x\cdot e^x-\int(-\sin x)\cdot e^x\,dx\\&=\cos x\cdot e^x+\int\sin x\cdot e^x\,dx \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$\int\sin x\cdot e^x dx$에서 $u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$$u'(x)=\cos x,\ v(x)=e^x$$

$$\therefore \int\sin x\cdot e^x\,dx=\sin x\cdot e^x-\int\cos x\cdot e^x dx \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^x\cos x\,dx=\cos x\cdot e^x+\left(\sin x\cdot e^x-\int\cos x\cdot e^x dx\right)$$

$$2\int e^x\cos x\,dx=\cos x\cdot e^x+\sin x\cdot e^x$$

$$\therefore \int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$$

답 $\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$

1258 $h(x)=(\ln x)^2$, $k'(x)=1$로 놓으면

$$h'(x)=\frac{2}{x}\ln x,\ k(x)=x$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=\int(\ln x)^2dx=(\ln x)^2\cdot x-\int\left(\frac{2}{x}\ln x\right)\cdot x\,dx\\&=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$\int\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int\ln x\,dx&=(\ln x)\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx\\&=x\ln x-x+C_1 \quad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x)&=x(\ln x)^2-2(x\ln x-x+C_1)\\&=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C\end{aligned}$$

$f(1)=2$이므로 $\quad 2+C=2 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$이므로

$$f(e)=e$$

답 ②

1259 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=3e^x-4$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)dx=\int(3e^x-4)dx\\&=3e^x-4x+C\end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$f(0)=3+C=0 \quad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=3e^x-4x-3$이므로

$f(1)=3e-4-3=3e-7$

답 $3e-7$

1260 전략 $x^2-2x+3=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $x^2-2x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-2$이므로

$$\begin{aligned}\int(x-1)(x^2-2x+3)^4dx&=\int t^4\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}t^5+C\\&=\frac{1}{10}(x^2-2x+3)^5+C\end{aligned}$$

따라서 $a=10$, $b=5$이므로 $\quad a+b=15$

답 15

1261 전략 $\ln(x^3+1)=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $\ln(x^3+1)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{3x^2}{x^3+1}$이므로

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^2}{x^3+1}\ln(x^3+1)dx&=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C\\&=\frac{1}{2}\{\ln(x^3+1)\}^2+C\end{aligned}$$

답 ②

1262 전략 $\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\ln|g(x)|+C$임을 이용한다.

풀이 $(1+\cos x)'=-\sin x$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\frac{-\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}dx\\&=\ln|1+\cos x|+C\end{aligned} \quad ⇨ ❶$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$이므로 $\quad C=2$

따라서 $f(x)=\ln|1+\cos x|+2$이므로

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\ln\left|1+\cos\frac{2}{3}\pi\right|+2=\ln\frac{1}{2}+2=2-\ln2 \quad ⇨ ❷$$

답 $2-\ln2$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	70%
❷ $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)$의 값을 구할 수 있다.	30%

1263 전략 $\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$임을 이용하여 피적분함수를 간단한 유리함수의 차로 나타내어 적분한다.

풀이 $\frac{1}{x^2-x-6}=\frac{1}{(x-3)(x+2)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{x^2-x-6}dx$$
$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{5}(\ln|x-3|-\ln|x+2|)+C$$
$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|$이므로

$f(-1)=\frac{1}{5}\ln 4=\frac{2}{5}\ln 2$ 답 ②

1264 전략 $\frac{1}{x^p}$ (p는 실수)은 x^{-p}으로, $\sqrt[q]{x}$ (q는 2 이상의 자연수)는 $x^{\frac{1}{q}}$으로 변형하여 부정적분을 구한다.

풀이 $f(x)=\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx=\int(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+1)dx$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+x+C$$

$f(1)=\frac{2}{3}$이므로 $\frac{2}{3}+2+1+C=\frac{2}{3}$ $\therefore C=-3$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+x-3$이므로

$f(3)=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3-3=4\sqrt{3}$ 답 ④

1265 전략 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$$f'(x)=\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1}=\frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^{2x}+e^x+1}=e^x-1$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(e^x-1)dx=e^x-x+C$$

$f(0)=1$이므로 $1+C=1$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=e^x-x$이므로 $f(2)=e^2-2$ 답 ⑤

1266 전략 $\int e^x dx=e^x+C$, $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ ($a>0$, $a\neq 1$)임을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $f(x)=\int(e^x-2^x)dx=e^x-\frac{2^x}{\ln 2}+C$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(0, -\frac{1}{\ln 2}\right)$을 지나므로

$f(0)=1-\frac{1}{\ln 2}+C=-\frac{1}{\ln 2}$ $\therefore C=-1$

$\therefore f(x)=e^x-\frac{2^x}{\ln 2}-1$

답 $f(x)=e^x-\frac{2^x}{\ln 2}-1$

1267 전략 먼저 반각의 공식을 이용하여 피적분함수를 적분하기 쉬운 형태로 변형한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx$이므로

$$f(x)=\int 4\cos^2\frac{x}{2}dx=4\int\frac{1+\cos x}{2}dx$$
$$=2x+2\sin x+C$$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=2x+2\sin x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}+2\sin\frac{\pi}{2}=\pi+2$ 답 ⑤

1268 전략 $\ln x+2=t$로 놓고 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $\ln x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{5^{\ln x+2}}{x}dx=\int 5^t dt$$
$$=\frac{5^t}{\ln 5}+C=\frac{5^{\ln x+2}}{\ln 5}+C$$

$f(1)=\frac{25}{\ln 5}$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{5^{\ln x+2}}{\ln 5}$

방정식 $f(x)=\frac{1}{\ln 5}$에서 $\frac{5^{\ln x+2}}{\ln 5}=\frac{1}{\ln 5}$, $5^{\ln x+2}=1$

$\ln x+2=0$, $\ln x=-2$

$x=e^{-2}$ $\therefore x=\frac{1}{e^2}$ 답 ①

1269 전략 $x^2+x=t$로 놓고 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $x^2+x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$이므로

$$f(x)=\int(4x+2)\sin(x^2+x)dx=\int 2\sin t\,dt$$
$$=-2\cos t+C=-2\cos(x^2+x)+C$$

$f(0)=1$이므로 $-2+C=1$ $\therefore C=3$

$\therefore f(x)=-2\cos(x^2+x)+3$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $|-2|+3=5$ 답 5

1270 전략 $1+\tan^2 x=\sec^2 x$임을 이용하여 피적분함수를 변형한 후 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $\int\sec^4 x\,dx=\int\sec^2 x\cdot\sec^2 x\,dx$

$$=\int\sec^2 x(1+\tan^2 x)dx$$

$\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$이므로

$$\int\sec^4 x\,dx=\int\sec^2 x(1+\tan^2 x)dx=\int(1+t^2)dt$$
$$=t+\frac{1}{3}t^3+C=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로 $b-a=2$ 답 ④

1271 전략 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 피적분함수를 변형한 후 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $f(x)=\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx=\int \frac{\sin x\cdot\sin^2 x}{1-\cos x}dx$

$$=\int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{1-\cos x}dx$$

$$=\int \frac{\sin x(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}dx$$

$$=\int \sin x(1+\cos x)dx$$

$1+\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$f(x)=\int \sin x(1+\cos x)dx$$

$$=\int(-t)dt=-\frac{1}{2}t^2+C$$

$$=-\frac{1}{2}(1+\cos x)^2+C$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$이므로 $\quad -\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2} \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}(1+\cos x)^2+1$이므로 ⇨ ❶

$$f(\pi)=-\frac{1}{2}(1-1)^2+1=1$$ ⇨ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	70%
❷ $f(\pi)$의 값을 구할 수 있다.	30%

1272 전략 $f(x)=\int f'(x)dx$에서 $x+2=t$로 놓고 피적분함수를 적분하기 쉬운 형태로 변형하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx$이므로 $\quad f(x)=\int \frac{x-4}{(x+2)^3}dx$

$x+2=t$로 놓으면 $x=t-2$, $\frac{dt}{dx}=1$이므로

$$f(x)=\int \frac{x-4}{(x+2)^3}dx=\int \frac{t-6}{t^3}dt=\int(t^{-2}-6t^{-3})dt$$

$$=-t^{-1}-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-2}+C$$

$$=-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{(x+2)^2}+C$$

$f(0)=\frac{3}{4}$이므로 $\quad -\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+C=\frac{3}{4} \qquad \therefore C=\frac{1}{2}$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{(x+2)^2}+\frac{1}{2}$$

이때 $f(1)=\frac{1}{2}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점은 ③이다. 답 ③

1273 전략 먼저 부분적분법을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f'(x)=(x+3)e^x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x+3)e^x dx$$

$u(x)=x+3$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$$\therefore f(x)=\int(x+3)e^x dx$$

$$=(x+3)e^x-\int 1\cdot e^x dx$$

$$=(x+3)e^x-e^x+C_1$$

$f(0)=2$이므로 $\quad 2+C_1=2 \qquad \therefore C_1=0$

따라서 $f(x)=(x+3)e^x-e^x=(x+2)e^x$이므로

$$\int f(x)dx=\int(x+2)e^x dx$$

$h(x)=x+2$, $k'(x)=e^x$으로 놓으면

$h'(x)=1$, $k(x)=e^x$

이므로

$$\int f(x)dx=\int(x+2)e^x dx$$

$$=(x+2)e^x-\int 1\cdot e^x dx$$

$$=(x+2)e^x-e^x+C$$

$$=(x+1)e^x+C$$

답 ②

1274 전략 $y=f(x)$의 그래프가 $x=1$인 점에서 직선 $y=1$에 접하므로 $f'(1)=0$, $f(1)=1$이다.

풀이 조건 (가)에서 $y=f(x)$의 그래프가 $x=1$인 점에서 직선 $y=1$에 접하므로

$f'(1)=0$, $f(1)=1$

한편 조건 (나)에서 $\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=f''(x)$이므로

$$f''(x)=\frac{x+1}{x^3}$$

$$\therefore f'(x)=\int f''(x)dx=\int \frac{x+1}{x^3}dx$$

$$=\int(x^{-2}+x^{-3})dx=-x^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2}+C_1$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C_1$$

$f'(1)=0$이므로 $\quad -1-\frac{1}{2}+C_1=0 \qquad \therefore C_1=\frac{3}{2}$

따라서 $f'(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}\right)dx$$

$$=\int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x^{-2}+\frac{3}{2}\right)dx$$

$$=-\ln|x|+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2}x+C$$

이때 $f(1)=1$이므로

$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+C=1 \qquad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=-\ln|x|+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2}x-1$이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\ln 2+\frac{3}{4}$$

답 $\ln 2+\frac{3}{4}$

1275 전략 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로
$f(0)=\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases} e^x & (x>0) \\ x^2+1 & (x<0) \end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} e^x+C_1 & (x>0) \\ \frac{1}{3}x^3+x+C_2 & (x<0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to0+}(e^x+C_1)=\lim_{x\to0-}\left(\frac{1}{3}x^3+x+C_2\right)$$

$$1+C_1=C_2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $f(-1)=\frac{2}{3}$이므로

$$-\frac{1}{3}-1+C_2=\frac{2}{3} \qquad \therefore C_2=2$$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad C_1=1$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} e^x+1 & (x\ge0) \\ \frac{1}{3}x^3+x+2 & (x\le0) \end{cases}$$

따라서 $f'(1)=e$, $f(1)=e+1$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식은

$$y-(e+1)=e(x-1) \qquad \therefore y=ex+1$$

답 ⑤

1276 전략 $f'(x)=0$에서 극댓값, 극솟값을 갖는 x의 값을 구하고, 반각의 공식을 이용하여 피적분함수를 변형한 후 부정적분을 구한다.

풀이 $f'(x)=\cos2x-\sin^2 2x+1$
$=\cos2x-(1-\cos^2 2x)+1$
$=\cos^2 2x+\cos2x$
$=\cos2x(\cos2x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos2x=0$ 또는 $\cos2x=-1$
$0\le x\le\pi$이므로

$\cos2x=0$에서 $\quad x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

$\cos2x=-1$에서 $\quad x=\frac{\pi}{2}$

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘		↘	극소	↗	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값을 갖고, $x=\frac{3}{4}\pi$에서 극솟값을 갖는다. ⇨ ❶

한편 $f(x)=\int f'(x)dx$이므로

$$f(x)=\int(\cos2x-\sin^2 2x+1)dx$$
$$=\int\left(\cos2x-\frac{1-\cos4x}{2}+1\right)dx$$
$$=\int\left(\cos2x+\frac{1}{2}\cos4x+\frac{1}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\sin2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin4x+\frac{1}{2}x+C$$
$$=\frac{1}{2}\sin2x+\frac{1}{8}\sin4x+\frac{1}{2}x+C$$

$f(x)$가 $x=\frac{3}{4}\pi$에서 극솟값 $\frac{3}{8}\pi$를 가지므로 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{3}{8}\pi$에서

$$\frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{1}{8}\sin\left(4\cdot\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi+C=\frac{3}{8}\pi$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\pi+C=\frac{3}{8}\pi \qquad \therefore C=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\sin2x+\frac{1}{8}\sin4x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$ ⇨ ❷

따라서 구하는 극댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{8}\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\pi}{8}+1$$ ⇨ ❸

답 $\frac{\pi}{8}+1$

채점 기준	비율
❶ 극댓값과 극솟값을 갖는 x의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ 극댓값을 구할 수 있다.	20%

1277 전략 도함수의 정의를 이용하여
$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{h}$를 정리한 후 $f'(x)$를 구한다.

풀이 조건 (나)에서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)+f(x)-f(x-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot2+\lim_{h\to0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}\cdot2$$
$$=2f'(x)+2f'(x)=4f'(x)$$

이므로 $\quad 4f'(x)=\frac{4(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}$

$$\therefore f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\ln|\sin x+\cos x|+C$$

조건 (가)에서 $f(0)=2$이므로 $\quad C=2$

$$\therefore f(x)=\ln|\sin x+\cos x|+2$$

답 $f(x)=\ln|\sin x+\cos x|+2$

1278 전략 $y=e^x+1$을 x에 대하여 정리한 후 x와 y를 서로 바꾸어 역함수 $f(x)$를 구한 다음 $f(x)$를 적분한다.

풀이 $y=e^x+1$에서 $y>1$이고

$e^x=y-1, \quad x=\ln(y-1)\ (\because y-1>0)$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\ln(x-1)$

$$\therefore f(x)=\ln(x-1)$$

$\int f(x)dx=\int \ln(x-1)dx$에서 $u(x)=\ln(x-1)$, $v'(x)=1$로 놓으면

$$u'(x)=\frac{1}{x-1},\ v(x)=x$$

이므로

$$\begin{aligned}\int \ln(x-1)dx&=x\ln(x-1)-\int \frac{x}{x-1}\,dx\\&=x\ln(x-1)-\int\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx\\&=x\ln(x-1)-\{x+\ln(x-1)\}+C\\&=(x-1)\ln(x-1)-x+C\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$a^2+b^2=2$ 답 ③

1279 전략 부분적분법과 삼각부등식을 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.

풀이 $h(x)=\sin x$, $k'(x)=e^x$으로 놓으면

$h'(x)=\cos x$, $k(x)=e^x$

$\therefore \int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$ ...... ㉠

$\int e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$

$\therefore \int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\left(e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx\right)$$

$$2\int e^x\sin x\,dx=e^x(\sin x-\cos x)$$

$$\therefore f(x)=\int e^x\sin x\,dx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$$

이때 $f(0)=-\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{1}{2}(0-1)+C=-\frac{1}{2}\qquad \therefore C=0$$

$$\therefore f(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)$$

따라서 부등식 $f(x)<0$에서

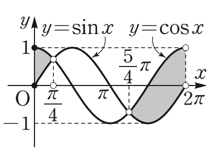
$\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)<0$

$\sin x-\cos x<0$

$\therefore \sin x<\cos x$ ($\because e^x>0$)

오른쪽 그림에서 위의 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는

$0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi<x<2\pi$



답 ①

Ⅳ. 적분법

11 정적분

1280 $\int_0^9 \sqrt{x}\,dx=\int_0^9 x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9=18$ 답 18

1281 $\int_1^7 \frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^7=\ln 7$ 답 $\ln 7$

1282 $\int_{-1}^3 e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_{-1}^3=e^3-\frac{1}{e}$ 답 $e^3-\frac{1}{e}$

1283 $\int_4^5 2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_4^5=\frac{32}{\ln 2}-\frac{16}{\ln 2}=\frac{16}{\ln 2}$ 답 $\frac{16}{\ln 2}$

1284 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

1285 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$ 답 $-\sqrt{2}$

1286 $\int_1^8 4\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=4\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})dx$

$=4\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_1^8$

$=4\left\{(12+6)-\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)\right\}$

$=63$ 답 63

1287 $\int_1^2 (3^x-2^x)dx=\left[\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{2^x}{\ln 2}\right]_1^2$

$=\left(\frac{9}{\ln 3}-\frac{4}{\ln 2}\right)-\left(\frac{3}{\ln 3}-\frac{2}{\ln 2}\right)$

$=\frac{6}{\ln 3}-\frac{2}{\ln 2}$ 답 $\frac{6}{\ln 3}-\frac{2}{\ln 2}$

1288 $\int_{-2}^4 (e^x+1)dx+\int_{-2}^4 (e^x-1)dx$

$=\int_{-2}^4 2e^x\,dx=2\int_{-2}^4 e^x\,dx=2\Big[e^x\Big]_{-2}^4$

$=2(e^4-e^{-2})=2\left(e^4-\frac{1}{e^2}\right)$ 답 $2\left(e^4-\frac{1}{e^2}\right)$

1289 $\int_0^{\pi}(\sin x+x)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x+x)dx$

$=\int_0^{2\pi}(\sin x+x)dx=\left[-\cos x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{2\pi}$

$=(-1+2\pi^2)-(-1)=2\pi^2$ 답 $2\pi^2$

1290 $\sin x$는 기함수이므로

$\int_{-3\pi}^{3\pi}\sin x\,dx=0$ 답 0

1291 $\cos x$는 우함수이므로

$$\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos x\,dx$$
$$=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}=2(-1-0)=-2$$

답 -2

1292 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_3^5 f(x)dx=\int_5^7 f(x)dx$$
$$=\int_7^9 f(x)dx=\int_9^{11} f(x)dx=5$$
$$\therefore \int_1^{11} f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx+\int_5^7 f(x)dx$$
$$+\int_7^9 f(x)dx+\int_9^{11} f(x)dx$$
$$=5\cdot5=25$$

답 25

1293 $3x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=3$

또한 $x=0$일 때 $t=-1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1 (3x-1)^5dx=\int_{-1}^2 t^5\cdot\frac{1}{3}\,dt=\left[\frac{1}{18}t^6\right]_{-1}^2$$
$$=\frac{1}{18}(64-1)=\frac{7}{2}$$

답 $\dfrac{7}{2}$

1294 $5-x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-1$

또한 $x=2$일 때 $t=3$, $x=4$일 때 $t=1$이므로

$$\int_2^4 \sqrt{5-x}\,dx=\int_3^1 \sqrt{t}\cdot(-1)dt=\int_1^3 t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^3=\frac{2}{3}\cdot3\sqrt{3}-\frac{2}{3}$$
$$=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}$$

답 $2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}$

1295 $2x+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2$

또한 $x=1$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=5$이므로

$$\int_1^2 e^{2x+1}dx=\int_3^5 e^t\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\Big[e^t\Big]_3^5$$
$$=\frac{1}{2}(e^5-e^3)=\frac{e^3}{2}(e^2-1)$$

답 $\dfrac{e^3}{2}(e^2-1)$

1296 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

또한 $x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_1^2\frac{1}{t}\,dt=\Big[\ln|t|\Big]_1^2=\ln2$$

답 $\ln 2$

1297 $\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$

또한 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\cos x\,dx=\int_0^1 t^3\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

답 $\dfrac{1}{4}$

1298 $x^2+x+4=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x+1$

또한 $x=-2$일 때 $t=6$, $x=0$일 때 $t=4$이므로

$$\int_{-2}^0\frac{2x+1}{x^2+x+4}dx=\int_6^4\frac{1}{t}\,dt=\Big[\ln|t|\Big]_6^4$$
$$=\ln4-\ln6=\ln\frac{2}{3}$$

답 $\ln\dfrac{2}{3}$

다른풀이 $(x^2+x+4)'=2x+1$이므로

$$\int_{-2}^0\frac{2x+1}{x^2+x+4}dx=\int_{-2}^0\frac{(x^2+x+4)'}{x^2+x+4}dx$$
$$=\Big[\ln|x^2+x+4|\Big]_{-2}^0$$
$$=\ln4-\ln6=\ln\frac{2}{3}$$

1299 $x=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=\boxed{\cos\theta}$

또한 $x=0$일 때 $\theta=\boxed{0}$, $x=1$일 때 $\theta=\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$이므로

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\boxed{\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$\therefore$ (가) $\cos\theta$ (나) 0 (다) $\dfrac{\pi}{2}$ (라) $\theta+\dfrac{1}{2}\sin2\theta$ (마) $\dfrac{\pi}{4}$

답 풀이 참조

1300 $x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sec^2\theta}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

답 $\dfrac{\pi}{4}$

1301 $f(x)=x-1$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^2(x-1)e^x\,dx=\Big[(x-1)e^x\Big]_0^2-\int_0^2 1\cdot e^x\,dx$$
$$=e^2-(-1)-\Big[e^x\Big]_0^2$$
$$=e^2+1-(e^2-1)$$
$$=2$$

답 2

1302 $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=\Big[x\cdot(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\cdot(-\cos x)dx$$

$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

답 1

1303 답 $x\sin x$

1304 $$\frac{d}{dx}\int_x^{x+1}\ln t\,dt=\ln(x+1)-\ln x$$

$$=\ln\frac{x+1}{x}$$

답 $\ln\frac{x+1}{x}$

1305 $$\frac{d}{dx}\int_{x-2}^{x}e^t\,dt=e^x-e^{x-2}=e^x\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$$

답 $e^x\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$

1306 답 $\frac{2x+5}{x^2+2x-3}$

1307 $F'(t)=\cos t$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{\pi}^{x+\pi}\cos t\,dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{\pi}^{x+\pi}F'(t)dt$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x+\pi)-F(\pi)}{x}$$

$$=F'(\pi)=-1$$

답 -1

1308 $F'(t)=e^t$이라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x e^t\,dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x F'(t)dt$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$

$$=F'(1)=e$$

답 e

1309 $F'(t)=t^2\sin t$라 하면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}t^2\sin t\,dt=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}F'(t)dt$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{F(x)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$=F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

답 $\frac{\pi^2}{4}$

1310 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$에서 $\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=\boxed{0}$

$k=n$이면 $x=\boxed{1}$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\Big[\ln|1+x|\Big]_0^1$$

$$=\boxed{\ln 2}$$

$\therefore$ (가) 0 (나) 1 (다) $\ln 2$

답 풀이 참조

1311 $$\int_1^e\frac{3x^3-4x^2+1}{x}dx=\int_1^e\left(3x^2-4x+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\Big[x^3-2x^2+\ln|x|\Big]_1^e$$

$$=(e^3-2e^2+1)-(1-2)$$

$$=e^3-2e^2+2$$

답 ②

1312 $$\int_1^2\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^2=\ln 2$$

① $\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_{\frac{1}{4}}^{1}=-\ln\frac{1}{4}=2\ln 2$

② $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^{\sqrt{2}}=\ln\sqrt{2}=\frac{\ln 2}{2}$

③ $\int_2^3\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_2^3=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$

④ $\int_2^4\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_2^4=\ln 4-\ln 2=\ln 2$

⑤ $\int_1^4\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^4=\ln 4=2\ln 2$

답 ④

1313 $$\int_2^4\frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx=\int_2^4\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\int_2^4\left(\sqrt{x}-2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=\int_2^4\left(x^{\frac{1}{2}}-2+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x+2x^{\frac{1}{2}}\right]_2^4$$

$$=\left(\frac{2}{3}\cdot8-8+4\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot2\sqrt{2}-4+2\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{4}{3}-\left(\frac{10}{3}\sqrt{2}-4\right)=\frac{16}{3}-\frac{10}{3}\sqrt{2}$$ ⇨ ❶

따라서 $\frac{16}{3}-\frac{10}{3}\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$이므로

$a=\frac{16}{3}$, $b=-\frac{10}{3}$ ⇨ ❷

$\therefore a+b=2$ ⇨ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 정적분의 값을 구할 수 있다.	70%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

1314 $$\int_0^2 f(x)dx-\int_4^2 f(y)dy-\int_1^4 f(z)dz$$

$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx-\int_1^4 f(x)dx$$

$$=\int_0^4 f(x)dx-\int_1^4 f(x)dx$$

$=\int_0^4 f(x)dx+\int_4^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}dx$

$=\int_0^1 x^{\frac{2}{3}}dx=\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^1=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

1315 $\int_0^3 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx-\int_0^3 \frac{1}{e^x+1}dx=\int_0^3 \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$

$=\int_0^3 \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx$

$=\int_0^3 (e^x-1)dx=\left[e^x-x\right]_0^3$

$=(e^3-3)-(1-0)=e^3-4$

답 ②

1316 $\int_{-1}^0 \sqrt{e^{2x}+6e^x+9}\,dx=\int_{-1}^0 \sqrt{(e^x+3)^2}\,dx$

$=\int_{-1}^0 (e^x+3)dx=\left[e^x+3x\right]_{-1}^0$

$=1-(e^{-1}-3)=4-\frac{1}{e}$

답 $4-\frac{1}{e}$

1317 $\int_0^1 (2^x-1)(4^x+2^x+1)dx=\int_0^1 \{(2^x)^3-1\}dx$

$=\int_0^1 (8^x-1)dx=\left[\frac{8^x}{\ln 8}-x\right]_0^1$

$=\left(\frac{8}{\ln 8}-1\right)-\frac{1}{\ln 8}$

$=\frac{7}{\ln 8}-1=\frac{7}{3\ln 2}-1$

따라서 $\frac{7}{3\ln 2}-1=\frac{a}{3\ln 2}-b$이므로 $a=7,\ b=1$

$\therefore a+b=8$ 답 8

1318 $\int_0^\pi (2\cos x-\sin x)dx=\left[2\sin x+\cos x\right]_0^\pi$

$=-1-1=-2$ 답 ①

1319 $\int_0^k \left(\frac{1}{1+\tan^2 x}+\frac{1}{1+\cot^2 x}\right)dx$

$=\int_0^k \left(\frac{1}{\sec^2 x}+\frac{1}{\csc^2 x}\right)dx$

$=\int_0^k (\cos^2 x+\sin^2 x)dx$

$=\int_0^k dx=\left[x\right]_0^k=k$ ⇨ ❶

$\therefore k=5$ ⇨ ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ $\int_0^k\left(\frac{1}{1+\tan^2 x}+\frac{1}{1+\cot^2 x}\right)dx$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	80%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	20%

1320 $\int_0^a \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx-\int_0^a \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

$=\int_0^a \left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$-\int_0^a \left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$=\int_0^a \left\{\left(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)-\left(1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\right\}dx$

$=\int_0^a 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$

$=\int_0^a 2\sin x\,dx=\left[-2\cos x\right]_0^a$

$=-2\cos a-(-2)=-2\cos a+2$

따라서 $-2\cos a+2=1$이므로

$\cos a=\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{\pi}{3}\ \left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$ 답 ⑤

1321 $\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_{-1}^0 (e^x-1)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

$=\left[e^x-x\right]_{-1}^0+\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=1-(e^{-1}+1)+1$

$=1-\frac{1}{e}$ 답 $1-\frac{1}{e}$

1322 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=\frac{\pi}{2}$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x)$에서 $\sin\frac{\pi}{2}+a=\cos\frac{\pi}{2}$

$1+a=0$ $\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & \left(x\ge\frac{\pi}{2}\right)\\ \cos x & \left(x\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$이므로

$\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\sin x-1)dx$

$=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\cos x-x\right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi$

$=1+(1-\pi)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$=2-\frac{\pi}{2}$ 답 ①

1323 $e^x-1=0$에서 $e^x=1$ $\therefore x=0$

따라서 $|e^x-1|=\begin{cases}e^x-1 & (x\ge 0)\\ 1-e^x & (x\le 0)\end{cases}$이므로

$\int_{-1}^1 |e^x-1|dx=\int_{-1}^0 (1-e^x)dx+\int_0^1 (e^x-1)dx$

$=\left[x-e^x\right]_{-1}^0+\left[e^x-x\right]_0^1$

$=-1-(-1-e^{-1})+(e-1)-1$

$=\frac{1}{e}+e-2$ 답 $\frac{1}{e}+e-2$

1324 적분 구간이 $[0,\ 2\pi]$이므로 $\sin x=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

$f(x)=|\sin x|+k$라 하면

$$f(x)=\begin{cases}-\sin x+k & (\pi\le x\le 2\pi)\\ \sin x+k & (0\le x\le \pi)\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}(\sin x+k)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x+k)dx$$
$$=\Big[-\cos x+kx\Big]_0^{\pi}+\Big[\cos x+kx\Big]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=(1+k\pi)-(-1)+(1+2k\pi)-(-1+k\pi)$$
$$=2k\pi+4$$

따라서 $2k\pi+4=10$이므로

$2k\pi=6 \qquad \therefore k=\dfrac{3}{\pi}$ 답 ③

1325 $(f\circ g)(x)=|\sin x-\cos x|$이고 적분 구간이 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$이므로 $\sin x-\cos x=0$에서 $\qquad x=\dfrac{\pi}{4}$

따라서 $(f\circ g)(x)=\begin{cases}\sin x-\cos x & \left(\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \cos x-\sin x & \left(0\le x\le\dfrac{\pi}{4}\right)\end{cases}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f\circ g)(x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1-1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=2(\sqrt{2}-1)$$

답 ③

1326 x^2은 우함수, $\sin 3x$는 기함수이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+\sin 3x)dx=2\int_0^{\pi}x^2dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^3$$

답 ②

1327 x는 기함수, $\cos 2x$는 우함수이므로 $x\cos 2x$는 기함수이다.
또 $\sin x$는 기함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x\cos 2x+\sin x)dx=0$$

답 0

라쎈 특강 우함수, 기함수의 곱

① (우함수)×(우함수)=(우함수)
② (우함수)×(기함수)=(기함수)
③ (기함수)×(기함수)=(우함수)

1328 $f(x)=e^x+e^{-x}$에서

$f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수이다. ⇨ ❶

$$\therefore \int_{-\ln 2}^{5}f(x)dx+\int_5^{\ln 2}f(x)dx=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}f(x)dx$$
$$=2\int_0^{\ln 2}(e^x+e^{-x})dx=2\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^{\ln 2}$$
$$=2\left(2-\frac{1}{2}\right)=3$$

⇨ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 우함수임을 알 수 있다.	30%
❷ $\int_{-\ln 2}^{5}f(x)dx+\int_5^{\ln 2}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	70%

1329 $f(x)=|\cos x|$로 놓으면 $f(x)=f(x+\pi)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_0^{4\pi}|\cos x|dx=4\int_0^{\pi}|\cos x|dx$$
$$=4\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx\right\}$$
$$=4\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-4\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=4+4=8$$

답 8

1330 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$로 놓으면 $f(x)=f(x+4\pi)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_a^{a+4\pi}\sin\frac{x}{2}dx=\int_0^{4\pi}\sin\frac{x}{2}dx=\left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{4\pi}$$
$$=-2-(-2)=0$$

답 ①

1331 $$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(e^x+e^{-x})dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_{-1}^{1}$$
$$=\frac{1}{2}\{(e-e^{-1})-(e^{-1}-e)\}$$
$$=e-\frac{1}{e}$$

⇨ ❶

한편 $f(x)=f(x+2)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_1^3f(x)dx=\int_3^5f(x)dx=\int_5^7f(x)dx$$
$$\therefore \int_{-1}^{7}f(x)dx=4\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=4\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

⇨ ❷

답 $4\left(e-\dfrac{1}{e}\right)$

채점 기준	비율
❶ $\int_{-1}^{1}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $\int_{-1}^{7}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	60%

1332 $x^2+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx=\int_1^2 \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}dt=\int_1^2 \frac{1}{2}t^{-2}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}t^{-1}\right]_1^2=-\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$

답 ④

1333 $x^2+x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x+1$

또한 $x=1$일 때 $t=1$, $x=3$일 때 $t=11$이므로

$$\int_1^3 \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx=\int_1^{11}\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_1^{11}=\ln 11$$

$\therefore k=11$

답 ④

1334 $2x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2$

또한 $x=1$일 때 $t=1$, $x=k$일 때 $t=2k-1$이므로

$$\int_1^k \sqrt{2x-1}\,dx=\int_1^{2k-1}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\int_1^{2k-1}\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{2k-1}=\frac{1}{3}(2k-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}$$

즉 $\dfrac{1}{3}(2k-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{26}{3}$이므로

$(2k-1)^{\frac{3}{2}}=27$, $\quad 2k-1=(3^3)^{\frac{2}{3}}=9$

$\therefore k=5$

답 5

1335 $1+\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

또한 $x=1$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=3$이므로

$$\int_1^{e^2}\frac{(1+\ln x)^2}{x}dx=\int_1^3 t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^3$$
$$=\frac{26}{3}$$

답 $\dfrac{26}{3}$

1336 $e^x+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=e^x$

또한 $x=-a$일 때 $t=e^{-a}+1$, $x=a$일 때 $t=e^a+1$이므로

$$\int_{-a}^a \frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_{e^{-a}+1}^{e^a+1}\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_{e^{-a}+1}^{e^a+1}$$
$$=\ln(e^a+1)-\ln(e^{-a}+1)$$
$$=\ln\frac{e^a+1}{e^{-a}+1}=\ln\frac{e^a(e^a+1)}{1+e^a}$$
$$=\ln e^a=a$$

$\therefore a=7$

답 ④

다른풀이 $(e^x+1)'=e^x$이므로

$$\int_{-a}^a \frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_{-a}^a\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx=\Big[\ln|e^x+1|\Big]_{-a}^a$$
$$=\ln(e^a+1)-\ln(e^{-a}+1)$$
$$=\ln\frac{e^a+1}{e^{-a}+1}=\ln\frac{e^a(e^a+1)}{1+e^a}$$
$$=\ln e^a=a$$

1337 $f(n)=\displaystyle\int_1^n \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$에서 $1-\sqrt{x}=t$로 놓으면

$\dfrac{dt}{dx}=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ⇨ ❶

또한 $x=1$일 때 $t=0$, $x=n$일 때 $t=1-\sqrt{n}$이므로

$$f(n)=\int_1^n\frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$
$$=\int_0^{1-\sqrt{n}}e^t\cdot(-2)dt$$
$$=\int_{1-\sqrt{n}}^0 2e^t dt$$
$$=\Big[2e^t\Big]_{1-\sqrt{n}}^0$$
$$=2-2e^{1-\sqrt{n}}$$ ⇨ ❷

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}(2-2e^{1-\sqrt{n}})=2$ ⇨ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $1-\sqrt{x}=t$로 치환하여 $\dfrac{dt}{dx}$를 구할 수 있다.	30%
❷ $f(n)$을 구할 수 있다.	50%
❸ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(n)$의 값을 구할 수 있다.	20%

타쎈 특강 지수함수의 극한

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$에서

(1) $a>1$일 때,

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}a^x=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}a^x=0$

(2) $0<a<1$일 때,

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}a^x=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}a^x=\infty$

1338 $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cot^2x)\cos x\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\csc^2x\cos x\,dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin^2x}dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$

또한 $x=\dfrac{\pi}{6}$일 때 $t=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin^2x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{t^2}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}t^{-2}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}-(-2)$$
$$=-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2$$

답 ⑤

1339 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$$

$1+\cos x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$

또한 $x=0$일 때 $t=2$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\begin{aligned}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx&=2\int_2^1\frac{1}{t}\cdot(-1)dt\\&=2\int_1^2\frac{1}{t}\,dt\\&=2\Big[\ln|t|\Big]_1^2\\&=2\ln 2\end{aligned}$$

$\therefore\ k=2$ 답 2

1340 $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\\&=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

답 ③

1341 $x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4\cos^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\cos^2\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\&=\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

1342 $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta)^2d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta\\&=\frac{1}{8}\Big[\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

따라서 $p=16$, $q=1$이므로 $p+q=17$

답 ③

1343 $x=3\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=3\sec^2\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+9}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{9(\tan^2\theta+1)}\cdot 3\sec^2\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{3\sec^2\theta}{9\sec^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3}\,d\theta\\&=\Big[\frac{1}{3}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{18}\end{aligned}$$

답 ⑤

1344 $x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=a\sec^2\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=a$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^a\frac{1}{a^2+x^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2+a^2\tan^2\theta}\cdot a\sec^2\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2(1+\tan^2\theta)}\cdot a\sec^2\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}\,d\theta\\&=\Big[\frac{1}{a}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\pi}{4a}\end{aligned}$$

⇨ ❶

따라서 $\frac{\pi}{4a}=\frac{\pi}{2}$이므로 $a=\frac{1}{2}$ ⇨ ❷

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\int_0^a\frac{1}{a^2+x^2}dx$의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	80%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	20%

1345 $f(x)=x+1$, $g'(x)=\sin\frac{x}{2}$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-2\cos\frac{x}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_0^{\pi}(x+1)\sin\frac{x}{2}\,dx&=\Big[(x+1)\cdot\left(-2\cos\frac{x}{2}\right)\Big]_0^{\pi}\\&\quad-\int_0^{\pi}\left(-2\cos\frac{x}{2}\right)dx\\&=-(-2)-\Big[-4\sin\frac{x}{2}\Big]_0^{\pi}\\&=2-(-4)\\&=6\end{aligned}$$

답 ⑤

1346 $f(x)=\cos x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=-\sin x$, $g(x)=e^x$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx&=\Big[e^x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin x)\cdot e^x\,dx\\&=-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx\qquad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$에서 $u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x$, $v(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx=\Big[e^x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx=-1+\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx\right)$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-1-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx=e^{\frac{\pi}{2}}-1$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$a+b=0$ 답 0

1347 $f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x\ge 0)\\ e^x & (x\le 0)\end{cases}$에서

$f(x-1)=\begin{cases}-(x-1)+1 & (x-1\ge 0)\\ e^{x-1} & (x-1\le 0)\end{cases}$, 즉

$f(x-1)=\begin{cases}-x+2 & (x\ge 1)\\ e^{x-1} & (x\le 1)\end{cases}$

$$\therefore \int_0^2 xf(x-1)dx=\int_0^1 xe^{x-1}dx+\int_1^2 x(-x+2)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^1 xe^{x-1}dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^{x-1}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^{x-1}$

$$\therefore \int_0^1 xe^{x-1}dx=\Big[xe^{x-1}\Big]_0^1-\int_0^1 e^{x-1}dx$$

$$=1-\Big[e^{x-1}\Big]_0^1=1-\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

$$=\frac{1}{e} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

또 $\int_1^2 x(-x+2)dx$에서

$$\int_1^2 x(-x+2)dx=\int_1^2 (-x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)$$

$$=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2 xf(x-1)dx=\frac{1}{e}+\frac{2}{3}$ 답 ③

다른풀이 $\int_0^2 xf(x-1)dx$에서 $x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$

또한 $x=0$일 때 $t=-1$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^2 xf(x-1)dx=\int_{-1}^1 (t+1)f(t)dt$$

$$=\int_{-1}^0 (t+1)e^t dt+\int_0^1 (t+1)(-t+1)dt$$

$$=\Big[(t+1)e^t\Big]_{-1}^0-\int_{-1}^0 e^t dt+\int_0^1 (-t^2+1)dt$$

$$=1-\Big[e^t\Big]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1$$

$$=1-\left(1-\frac{1}{e}\right)+\left(-\frac{1}{3}+1\right)$$

$$=\frac{1}{e}+\frac{2}{3}$$

1348 $\int_1^e f(t)dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=\frac{1}{x}+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_1^e \left(\frac{1}{t}+k\right)dt=k$, $\Big[\ln|t|+kt\Big]_1^e=k$

$1+ek-k=k$, $k(e-2)=-1$

$\therefore k=-\frac{1}{e-2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e-2}$ 답 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e-2}$

1349 $\int_0^1 e^{-t}f(t)dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=e^x+k$ ➩ ❶

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 e^{-t}(e^t+k)dt=k$, $\int_0^1 (1+ke^{-t})dt=k$

$\Big[t-ke^{-t}\Big]_0^1=k$, $1-\frac{k}{e}-(-k)=k$

$\therefore k=e$ ➩ ❷

따라서 $f(x)=e^x+e$이므로

$f(2)=e^2+e$ ➩ ❸

답 e^2+e

채점 기준	비율
❶ 정적분을 k로 치환하고 $f(x)$를 k를 이용하여 나타낼 수 있다.	30%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20%

1350 $\int_e^x f(t)dt=x\ln x-x+k$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1$$

$$=\ln x$$

㉠의 양변에 $x=e$를 대입하면

$0=e-e+k$ $\quad\therefore k=0$

따라서 $f(e^2)=2$이므로 $k+f(e^2)=2$ 답 ②

1351 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(\sin x+\cos x)+x(\cos x-\sin x)$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

1352 $\int_{\ln 4}^{x} e^t f(t)dt=e^{2x}-ae^x+8$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x f(x)=2e^{2x}-ae^x$

$\therefore f(x)=2e^x-a$

㉠의 양변에 $x=\ln 4$를 대입하면

$0=e^{2\ln 4}-ae^{\ln 4}+8$

$16-4a+8=0$ $\therefore a=6$

따라서 $f(x)=2e^x-6$이므로

$f(0)=-4$ 답 ①

1353 $\int_0^x (x-t)f(t)dt=e^{3x}+ax-1$에서

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=e^{3x}+ax-1$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3e^{3x}+a$

$\therefore \int_0^x f(t)dt=3e^{3x}+a$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=3+a$ $\therefore a=-3$

또 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=9e^{3x}$

따라서 $f(\ln 2)=72$이므로 $a+f(\ln 2)=69$ 답 69

1354 $\int_0^x (x-t)f'(t)dt=\sin x\cos x-x$에서

$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=\frac{1}{2}\sin 2x-x$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=\cos 2x-1$

$\int_0^x f'(t)dt=\cos 2x-1,$ $\Big[f(t)\Big]_0^x=\cos 2x-1$

$f(x)-f(0)=\cos 2x-1$

$f(0)=1$이므로 $f(x)=\cos 2x$ 답 ④

1355 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(2\sin x-1)\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

x	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극소이므로 극솟값은

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\sin t-1)\cos t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\sin t\cos t-\cos t)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin 2t-\cos t)dt$

$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t-\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$ 답 $-\frac{1}{4}$

1356 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{5-x}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=5$

x	0	…	5	…
$f'(x)$		+	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=5$에서 극대이고 극댓값은

$f(5)=\int_1^5 \frac{5-t}{t}dt=\int_1^5\left(\frac{5}{t}-1\right)dt$

$=\Big[5\ln|t|-t\Big]_1^5=(5\ln 5-5)-(-1)$

$=5\ln 5-4$

즉 $a=5$, $b=5\ln 5-4$이므로

$a+b=5\ln 5+1$ 답 ⑤

1357 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sqrt{x}(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	0	…	1	…	4
$f'(x)$	0	$-$	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

$f(1)=\int_0^1 \sqrt{t}(t-1)dt=\int_0^1 (t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}})dt$

$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{5}-\frac{2}{3}=-\frac{4}{15}$

$f(0)=\int_0^0 \sqrt{t}(t-1)dt=0$

$f(4)=\int_0^4 \sqrt{t}(t-1)dt=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

$=\frac{64}{5}-\frac{16}{3}=\frac{112}{15}$

따라서 $0\le x\le 4$에서 $f(x)$의 최댓값 $M=\frac{112}{15}$, 최솟값 $m=-\frac{4}{15}$ 이므로

$M+m=\frac{36}{5}$ 답 $\frac{36}{5}$

1358 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(e^x-2)(e^x+2)$ ⇨ ❶

$f'(x)=0$에서 $x=\ln 2$ ($\because e^x+2>0$) ⇨ ❷

따라서 $f(x)$는 $x=\ln 2$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

x	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

$$f(\ln 2)=\int_0^{\ln 2}(e^t-2)(e^t+2)dt$$
$$=\int_0^{\ln 2}(e^{2t}-4)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2t}-4t\right]_0^{\ln 2}$$
$$=(2-4\ln 2)-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}-4\ln 2$$ ⇨ ❸

답 $\frac{3}{2}-4\ln 2$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20%
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 최솟값을 구할 수 있다.	50%

1359 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}f(t)dt=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$$
$$=F'(1)=f(1)$$
$$=\sin\pi+\cos\pi$$
$$=-1$$

답 ②

1360 $f(x)=\ln x+xe^x$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+2h}(\ln x+xe^x)dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+2h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}\cdot 2$$
$$=2F'(1)=2f(1)$$
$$=2e$$

답 ③

1361 $f(x)=x\sin x$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}x\sin x\,dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)+F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$$
$$=F'\left(\frac{\pi}{2}\right)+F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=2F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$ ⇨ ❶
$$=\pi$$ ⇨ ❷

답 π

채점 기준	비율
❶ $f(x)=x\sin x$, $F'(x)=f(x)$로 놓고 식을 변형할 수 있다.	80%
❷ 주어진 식의 극한값을 구할 수 있다.	20%

1362 $f(t)=t(3^t+\ln t)$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}t(3^t+\ln t)dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

1363 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{x}f(t)dt=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{F(x)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$
$$=F'\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ③

1364 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(1+\frac{3k}{n}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(1+\frac{3k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}$$
$$=\frac{1}{3}\int_1^4\sin x\,dx$$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=1$, $c=4$이므로 $abc=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

1365 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{n^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\boxed{\frac{k}{n}}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$1-x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2x$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_1^0\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{3}}$$

$\therefore$ (가) $\frac{k}{n}$ (나) $\frac{1}{3}$

답 풀이 참조

1366 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{3}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 e^x dx=\left[e^x\right]_0^1$$
$$=e-1$$

답 ②

1367 전략 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$임을 이용한다.

풀이 $\int_1^2\frac{3x+1}{x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{3}{x}+x^{-2}\right)dx$

$$=\left[3\ln|x|-x^{-1}\right]_1^2=3\ln 2-\frac{1}{2}-(-1)$$
$$=3\ln 2+\frac{1}{2}$$

답 $3\ln 2+\frac{1}{2}$

1368 전략 지수함수의 부정적분을 이용하여 정적분을 계산한다.

풀이 $\int_0^1 3^{2x}dx=\int_0^1 9^x dx=\left[\frac{9^x}{\ln 9}\right]_0^1$

$$=\frac{9}{\ln 9}-\frac{1}{\ln 9}=\frac{8}{\ln 9}$$

이므로 $k=8$

답 ④

1369 전략 n이 자연수일 때, $2n-1=1,\ 3,\ 5,\ \cdots$이고, $2n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots$임을 이용한다.

풀이 $\int_{2n\pi}^{(2n-1)\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_{2n\pi}^{(2n-1)\pi}$

$$=-\cos(2n-1)\pi+\cos 2n\pi$$ ➡ ❶

이때 자연수 n에 대하여

$(2n-1)\pi=\pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ \cdots$

$2n\pi=2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ \cdots$

이고

$\cos\pi=\cos 3\pi=\cos 5\pi=\cdots=-1$

$\cos 2\pi=\cos 4\pi=\cos 6\pi=\cdots=1$ ➡ ❷

이므로

$$\int_{2n\pi}^{(2n-1)\pi}\sin x\,dx=-(-1)+1$$
$$=2$$ ➡ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 정적분을 구할 수 있다.	30%
❷ $\cos(2n-1)\pi$, $\cos 2n\pi$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 주어진 정적분의 값을 구할 수 있다.	20%

1370 전략 $3-x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $3-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

또한 $x=0$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^2 f(3-x)dx=\int_3^1 f(t)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_1^3 f(t)dt$$
$$=\int_1^3 f(x)dx$$

답 ②

1371 전략 $f(t)=(t-1)e^t$, $F'(t)=f(t)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 정리한다.

풀이 $f(t)=(t-1)e^t$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(t-1)e^t dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[F(t)\right]_0^x$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)=-1$$

답 ②

1372 전략 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_a^{a+p}f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{4n}{n+k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{1+\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_1^2\frac{2}{\sqrt{x}}dx$$
$$=\left[4\sqrt{x}\right]_1^2$$
$$=4(\sqrt{2}-1)$$

답 $4(\sqrt{2}-1)$

1373 전략 구간에 따라 다르게 정의된 함수는 구간을 나누어 각각 정적분의 값을 구한다.

풀이 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sqrt{2}(\sin x+\cos x)dx$

$$=\left[\tan x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+\sqrt{2}\left[-\cos x+\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$
$$=1-(-1)+\sqrt{2}(1-0)=2+\sqrt{2}$$

답 ⑤

1374 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나누어 구한다.

풀이 적분 구간이 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$이므로 $2\cos 2x-1=0$에서

$$\cos 2x=\frac{1}{2},\quad 2x=\frac{\pi}{3}\quad \therefore x=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore |2\cos 2x-1|=\begin{cases}-2\cos 2x+1 & \left(\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ 2\cos 2x-1 & \left(0\le x\le\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|2\cos 2x-1|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos 2x-1)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(-2\cos 2x+1)dx$$
$$=\Big[\sin 2x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+\Big[-\sin 2x+x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$$

답 $\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$

1375 전략 $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$이고, $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\cos\pi x$는 우함수, $\sin\pi x$는 기함수이므로

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\cos\pi x+\sin\pi x)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\pi x\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

답 ⑤

1376 전략 $f(x+p)=f(x)$이면 $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p}f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=|\sin 2x|$로 놓으면 $f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}|\sin 2x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2x|dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\sin 2x|dx$$
$$=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin 2x|dx$$
$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin 2x|dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2x|dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx$$
$$=4\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=4$$

답 ④

1377 전략 $x^2+3x+5=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $x^2+3x+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+3$

또한 $x=-1$일 때 $t=3$, $x=1$일 때 $t=9$이므로 ⇨ ❶

$$\int_{-1}^{1}\frac{4x+6}{x^2+3x+5}dx=\int_3^9\frac{1}{t}\cdot 2dt=\Big[2\ln|t|\Big]_3^9$$
$$=2\ln 9-2\ln 3=2\ln 9-\ln 9$$
$$=\ln 9 \quad ⇨ ❷$$
$$\therefore k=9 \quad ⇨ ❸$$

답 9

채점 기준	비율
❶ $x^2+3x+5=t$로 치환하고 적분 구간을 구할 수 있다.	30%
❷ 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	10%

1378 전략 $e^{3x}+1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $e^{3x}+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3e^{3x}$

또한 $x=0$일 때 $t=2$, $x=\ln 3$일 때 $t=28$이므로

$$\int_0^{\ln 3}\frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx=\int_2^{28}\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{3}dt=\left[\frac{1}{3}\ln|t|\right]_2^{28}$$
$$=\frac{1}{3}\ln 28-\frac{1}{3}\ln 2$$
$$=\frac{1}{3}\ln 14$$

답 ⑤

1379 전략 먼저 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 피적분함수를 변형한다.

풀이 $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^3x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2x\cdot\cos x\,dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\sin^2x)\cos x\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$

또한 $x=-\frac{\pi}{2}$일 때 $t=-1$, $x=\pi$일 때 $t=0$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\sin^2x)\cos x\,dx=\int_{-1}^{0}(1-t^2)dt$$
$$=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{0}$$
$$=-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p+q=5$

답 ②

1380 전략 $x=\sqrt{3}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓고 삼각치환법을 이용한다.

풀이 $x=\sqrt{3}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\sec^2\theta$

또한 $x=-3$일 때 $\theta=-\frac{\pi}{3}$, $x=3$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\int_{-3}^{3}\frac{1}{3+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3(1+\tan^2\theta)}\cdot\sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3\sec^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta$$
$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

따라서 $k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$이므로

$$27k^2=27\cdot\frac{4}{27}=4$$

답 4

1381 전략 부분적분법을 이용한다.

풀이 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x-1$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2-x$$

$$\therefore \int_1^2 (x-1)\ln x\,dx = \left[(\ln x)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)dx$$
$$= -\int_1^2 \left(\frac{1}{2}x-1\right)dx$$
$$= -\left[\frac{1}{4}x^2-x\right]_1^2 = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

1382 전략 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt = k$ (k는 상수)로 놓고 k의 값을 구한다.

풀이 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt = k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면 $f(x)=\cos x+2k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t+2k)\sin t\,dt = k$$

이때

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t+2k)\sin t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t\cos t+2k\sin t)dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2t+2k\sin t\right)dt$$
$$= \left[-\frac{1}{4}\cos 2t-2k\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}-2k\right)$$
$$= \frac{1}{2}+2k$$

이므로 $\frac{1}{2}+2k=k$ $\therefore k=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\cos x-1$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

답 ②

1383 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{2-x}{e^x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because e^x>0$)

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

$$f(2)=\int_0^2 \frac{2-t}{e^t}dt$$
$$=\int_0^2 (2-t)e^{-t}dt$$

$u(t)=2-t$, $v'(t)=e^{-t}$으로 놓으면

$u'(t)=-1$, $v(t)=-e^{-t}$

$$\therefore f(2)=\int_0^2 (2-t)e^{-t}dt$$
$$=\left[(2-t)\cdot(-e^{-t})\right]_0^2-\int_0^2(-1)\cdot(-e^{-t})dt$$
$$=-(-2)-\left[-e^{-t}\right]_0^2$$
$$=2-(-e^{-2}+1)=1+\frac{1}{e^2}$$

답 $1+\frac{1}{e^2}$

1384 전략 구간에 따라 다르게 정의된 함수는 구간을 나누어 각각 정적분의 값을 구한다.

풀이 $x\circ 1=\begin{cases} e^x+e & (x>1) \\ 2e^x & (x\le 1)\end{cases}$이므로

$$\int_0^3 (x\circ 1)dx=\int_0^1 2e^x dx+\int_1^3 (e^x+e)dx$$
$$=\left[2e^x\right]_0^1+\left[e^x+ex\right]_1^3$$
$$=(2e-2)+\{e^3+3e-(e+e)\}$$
$$=e^3+3e-2$$

답 ⑤

1385 전략 $\log_2 x=t$로 놓고 치환적분법을 이용하여 a_n을 구한다.

풀이 $a_n=\int_1^2 \frac{(\log_2 x)^n}{x\ln 2}dx$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x\ln 2}$$

또한 $x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$a_n=\int_1^2 \frac{(\log_2 x)^n}{x\ln 2}dx=\int_0^1 t^n dt$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{n+1} \quad ⇨ ❶$$
$$\therefore b_n=\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}$$
$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} \quad ⇨ ❷$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{48} b_k=\sum_{k=1}^{48}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})+(\sqrt{50}-\sqrt{49})$$
$$=\sqrt{50}-\sqrt{2}=4\sqrt{2} \quad ⇨ ❸$$

답 $4\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50%
❷ b_n을 구할 수 있다.	20%
❸ $\sum_{k=1}^{48} b_k$의 값을 구할 수 있다.	30%

1386 전략 부분적분법과 치환적분법을 이용하여 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)dx$의 값을 구한다.

풀이 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)dx$

$$=\left[f(x)g(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)g(x)dx$$
$$=f\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)g(0)-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)^3}dx$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)^3}dx$$

$1+\sin^2 x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2\sin x\cos x$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)^3}dx$$
$$=-\int_1^2 \frac{1}{t^3}dt=-\int_1^2 t^{-3}dt$$
$$=-\left[-\frac{1}{2}t^{-2}\right]_1^2$$
$$=-\frac{3}{8}$$

답 ③

1387 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $e^x f(x)=e^x \ln x+\int_1^x e^t f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x \ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}+e^x f(x)$$
$$\therefore f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$ef(1)=0 \qquad \therefore f(1)=0$

$f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=x\ln x-x+\ln|x|+C$$

$f(1)=0$이므로

$-1+C=0 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=x\ln x-x+\ln|x|+1$이므로

$f(e^2)=2e^2-e^2+2+1=e^2+3$

답 ⑤

1388 전략 $f(x)=ax(x-3)\,(a<0)$이라 하고 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=ax(x-3)\,(a<0)$이라 하면

$$g(x)=\int_0^x \{e^{at(t-3)}-1\}dt$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=e^{ax(x-3)}-1$

$g'(x)=0$에서 $\quad e^{ax(x-3)}-1=0, \quad e^{ax(x-3)}=1$

$ax(x-3)=0 \qquad \therefore x=3\ (\because a<0,\ x>0)$

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↗	극대	↘

따라서 $g(x)$는 $x=3$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $g(3)$이다.

답 ⑤

Ⅳ. 적분법

12 정적분의 활용

1389 주어진 곡선은 구간 $[-1,\ 0]$에서 $y\boxed{\le}0$이고, 구간 $[0,\ 1]$에서 $y\boxed{\ge}0$이다.

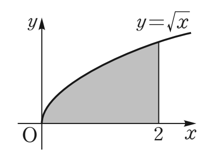
따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^1|e^x-1|dx=\int_{-1}^0(\boxed{-e^x+1})dx+\int_0^1(\boxed{e^x-1})dx$$
$$=\Big[-e^x+x\Big]_{-1}^0+\Big[e^x-x\Big]_0^1$$
$$=\{-1-(-e^{-1}-1)\}+(e-1-1)$$
$$=\boxed{e+\frac{1}{e}-2}$$

$\therefore$ (가) $\le$ (나) $\ge$ (다) $-e^x+1$ (라) e^x-1 (마) $e+\dfrac{1}{e}-2$

답 풀이 참조

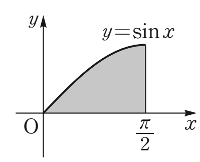
1390 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^2\sqrt{x}\,dx=\int_0^2 x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$
$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

답 $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

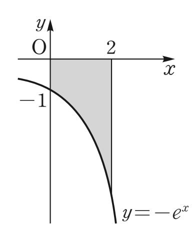
1391 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=1$$

답 1

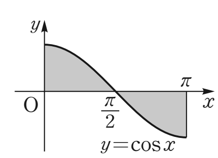
1392 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^2|-e^x|dx=\int_0^2 e^x\,dx$$
$$=\Big[e^x\Big]_0^2$$
$$=e^2-1$$

답 e^2-1

1393 곡선 $y=\cos x$와 x축의 교점의 x좌표는 $\cos x=0$에서



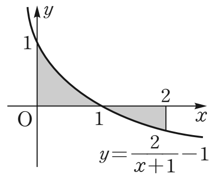
$x=\dfrac{\pi}{2}\ (\because 0\le x\le\pi)$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=1-(-1)=2$$

답 2

1394 곡선 $y=\dfrac{2}{x+1}-1$과 x축의 교점의 x좌표는 $\dfrac{2}{x+1}-1=0$에서



$\dfrac{2}{x+1}=1,\quad x+1=2$

$\therefore x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\displaystyle\int_0^2\left|\frac{2}{x+1}-1\right|dx$

$\displaystyle=\int_0^1\left(\frac{2}{x+1}-1\right)dx+\int_1^2\left(-\frac{2}{x+1}+1\right)dx$

$=\Big[2\ln|x+1|-x\Big]_0^1+\Big[-2\ln|x+1|+x\Big]_1^2$

$=2\ln 2-1+\{-2\ln 3+2-(-2\ln 2+1)\}$

$=4\ln 2-2\ln 3=2\ln\dfrac{4}{3}$

답 $2\ln\dfrac{4}{3}$

1395 주어진 곡선은 구간 $[-1,\ 0]$에서 $x\boxed{\le}0$이고, 구간 $[0,\ 1]$에서 $x\boxed{\ge}0$이다.

따라서 구하는 넓이 S는

$\displaystyle S=\int_{-1}^1|e^y-1|dy=\int_{-1}^0(\boxed{-e^y+1})dy+\int_0^1(\boxed{e^y-1})dy$

$=\Big[-e^y+y\Big]_{-1}^0+\Big[e^y-y\Big]_0^1$

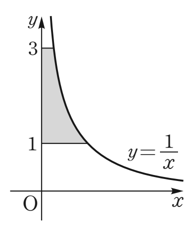
$=\{-1-(-e^{-1}-1)\}+(e-1-1)$

$=\boxed{e+\dfrac{1}{e}-2}$

$\therefore$ (가) $\le$ (나) $\ge$ (다) $-e^y+1$ (라) e^y-1 (마) $e+\dfrac{1}{e}-2$

답 풀이 참조

1396 $y=\dfrac{1}{x}$에서 $\quad x=\dfrac{1}{y}$

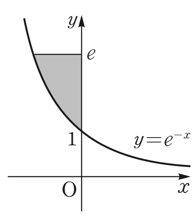


따라서 구하는 넓이는

$\displaystyle\int_1^3\frac{1}{y}\,dy=\Big[\ln|y|\Big]_1^3=\ln 3$

답 $\ln 3$

1397 $y=e^{-x}$에서 $\quad -x=\ln y$



$\therefore x=-\ln y$

따라서 구하는 넓이는

$\displaystyle\int_1^e|-\ln y|dy=\int_1^e\ln y\,dy$

$\displaystyle=\Big[y\ln y\Big]_1^e-\int_1^e dy$

$=e-\Big[y\Big]_1^e$

$=e-(e-1)=1$

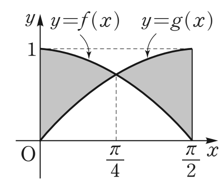
답 1

1398 (1) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 $\cos x=\sin x$에서

$x=\dfrac{\pi}{4}\left(\because 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore a=\dfrac{\pi}{4}$

(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 오른쪽 그림과 같으므로



구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$에서 $\quad f(x)\ge g(x)$,

구간 $\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 $\quad f(x)\le g(x)$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx$

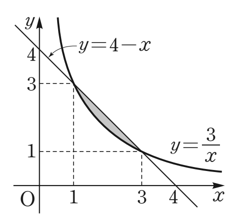
$\displaystyle+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$

$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=2\sqrt{2}-2$

답 풀이 참조

1399 곡선 $y=\dfrac{3}{x}$과 직선 $y=4-x$의 교점의 x좌표는 $\dfrac{3}{x}=4-x$에서



$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

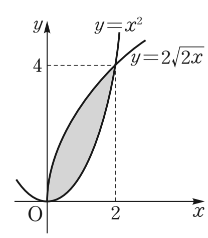
따라서 구하는 넓이는

$\displaystyle\int_1^3\left(4-x-\frac{3}{x}\right)dx=\left[4x-\frac{1}{2}x^2-3\ln|x|\right]_1^3$

$=4-3\ln 3$

답 $4-3\ln 3$

1400 두 곡선 $y=x^2$, $y=2\sqrt{2x}$의 교점의 x좌표는 $x^2=2\sqrt{2x}$에서



$x^4=8x,\quad x(x^3-8)=0$

$x(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$(\because x^2+2x+4>0)$

따라서 구하는 넓이는

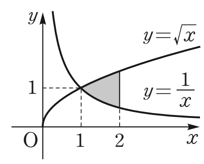
$\displaystyle\int_0^2(2\sqrt{2x}-x^2)dx=\int_0^2(2\sqrt{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}-x^2)dx$

$=\left[\dfrac{4}{3}\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^2$

$=\dfrac{16}{3}-\dfrac{8}{3}=\dfrac{8}{3}$

답 $\dfrac{8}{3}$

1401 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$의 교점의 x좌표는 $\sqrt{x}=\frac{1}{x}$에서



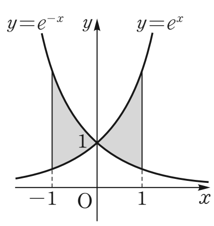
$$x=\frac{1}{x^2}, \qquad x^3=1$$
$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$
$$\therefore\ x=1\ (\because\ x^2+x+1>0)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\ln|x|\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\ln 2\right)-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}-\ln 2$$

답 $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}-\ln 2$

1402 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$의 교점의 x좌표는 $e^x=e^{-x}$에서



$$x=-x \qquad \therefore\ x=0$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^1|e^x-e^{-x}|dx$$
$$=\int_{-1}^0(e^{-x}-e^x)dx+\int_0^1(e^x-e^{-x})dx$$
$$=\left[-e^{-x}-e^x\right]_{-1}^0+\left[e^x+e^{-x}\right]_0^1$$
$$=(-1-1)-(-e-e^{-1})+(e+e^{-1})-(1+1)$$
$$=2e+\frac{2}{e}-4$$

답 $2e+\frac{2}{e}-4$

1403 단면의 넓이가 $3x^2+5$이므로 구하는 부피는

$$\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3(3x^2+5)dx$$
$$=\left[x^3+5x\right]_0^3$$
$$=42$$

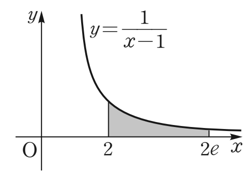
답 42

1404 단면의 넓이가 $2\sqrt{x}$이므로 구하는 부피는

$$\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3 2\sqrt{x}\,dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$
$$=4\sqrt{3}$$

답 $4\sqrt{3}$

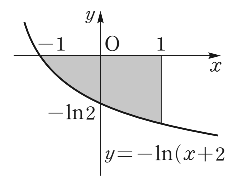
1405 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_2^{2e}\frac{1}{x-1}dx=\left[\ln|x-1|\right]_2^{2e}$$
$$=\ln(2e-1)$$

답 ③

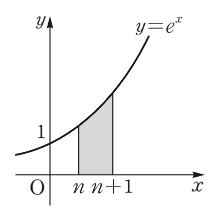
1406 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$-\int_{-1}^1\{-\ln(x+2)\}dx$$
$$=\int_{-1}^1\ln(x+2)dx$$
$$=\left[x\ln(x+2)\right]_{-1}^1-\int_{-1}^1\frac{x}{x+2}dx$$
$$=\ln 3-\int_{-1}^1\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx$$
$$=\ln 3-\left[x-2\ln|x+2|\right]_{-1}^1$$
$$=\ln 3-\{(1-2\ln 3)-(-1)\}$$
$$=3\ln 3-2$$

답 $3\ln 3-2$

1407 오른쪽 그림에서 $S(n)$은

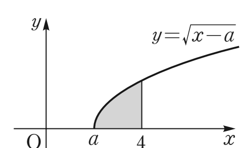


$$S(n)=\int_n^{n+1}e^x dx=\left[e^x\right]_n^{n+1}$$
$$=e^{n+1}-e^n$$
$$=e^n(e-1) \qquad ⇨ ❶$$
$$\therefore\ S(5)=e^5(e-1),$$
$$S(2)=e^2(e-1) \qquad ⇨ ❷$$
$$\therefore\ \frac{S(5)}{S(2)}=e^3 \qquad ⇨ ❸$$

답 e^3

채점 기준	비율
❶ $S(n)$을 구할 수 있다.	60%
❷ $S(5)$, $S(2)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $\frac{S(5)}{S(2)}$의 값을 구할 수 있다.	20%

1408 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_a^4\sqrt{x-a}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}}\right]_a^4$$
$$=\frac{2}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $\frac{2}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 이므로

$$(4-a)^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}, \qquad (4-a)^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$$
$$4-a=2$$
$$\therefore\ a=2$$

답 ④

1409 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\sin x\,dx+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(-\sin x)dx$

$=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}+\Big[\cos x\Big]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$

$=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

답 ③

1410 $\int_{-1}^{0}\left(-\dfrac{2x}{x^2+3}\right)dx+\int_{0}^{1}\dfrac{2x}{x^2+3}dx$

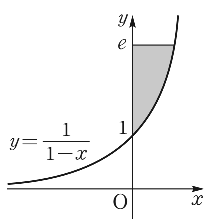
$=\Big[-\ln|x^2+3|\Big]_{-1}^{0}+\Big[\ln|x^2+3|\Big]_{0}^{1}$

$=2\ln 4-2\ln 3$

$=2\ln\dfrac{4}{3}$

답 $2\ln\dfrac{4}{3}$

1411 $y=\dfrac{1}{1-x}$에서



$1-x=\dfrac{1}{y}$

$\therefore\ x=1-\dfrac{1}{y}$

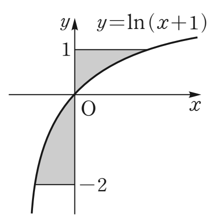
따라서 구하는 넓이는

$\int_{1}^{e}\left(1-\dfrac{1}{y}\right)dy=\Big[y-\ln|y|\Big]_{1}^{e}$

$=e-2$

답 ①

1412 $y=\ln(x+1)$에서



$x+1=e^y$

$\therefore\ x=e^y-1$

따라서 구하는 넓이는

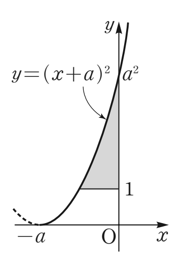
$\int_{-2}^{0}\{-(e^y-1)\}dy+\int_{0}^{1}(e^y-1)dy$

$=\Big[-e^y+y\Big]_{-2}^{0}+\Big[e^y-y\Big]_{0}^{1}$

$=e+\dfrac{1}{e^2}-1$

답 $e+\dfrac{1}{e^2}-1$

1413 $y=(x+a)^2$에서



$\sqrt{y}=x+a\ (\because\ x\geq -a)$

$\therefore\ x=\sqrt{y}-a$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$-\int_{1}^{a^2}(\sqrt{y}-a)dy$

$=-\Big[\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-ay\Big]_{1}^{a^2}$

$=-\left\{\left(\dfrac{2}{3}a^3-a^3\right)-\left(\dfrac{2}{3}-a\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{3}a^3-a+\dfrac{2}{3}$

따라서 $\dfrac{1}{3}a^3-a+\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$이므로

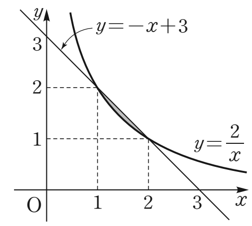
$a^3-3a-2=0$

$(a-2)(a+1)^2=0$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>1)$

답 ③

1414 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$와 직선



$y=-x+3$의 교점의 x좌표는

$\dfrac{2}{x}=-x+3$에서

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{1}^{2}\left(-x+3-\dfrac{2}{x}\right)dx=\Big[-\dfrac{1}{2}x^2+3x-2\ln|x|\Big]_{1}^{2}$

$=(-2+6-2\ln 2)-\left(-\dfrac{1}{2}+3\right)$

$=\dfrac{3}{2}-2\ln 2$

답 ①

1415 곡선 $y=xe^{2-x}$과 직선 $y=\dfrac{1}{e}x$의 교점의 x좌표는

$xe^{2-x}=\dfrac{1}{e}x$에서

$x\left(e^{2-x}-\dfrac{1}{e}\right)=0,\qquad x(e^{2-x}-e^{-1})=0$

$x=0$ 또는 $e^{2-x}=e^{-1}$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3$ ⇨ ❶

따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{3}\left(xe^{2-x}-\dfrac{1}{e}x\right)dx$

$=\int_{0}^{3}xe^{2-x}dx-\int_{0}^{3}\dfrac{1}{e}x\,dx$

$=\Big[x\cdot(-e^{2-x})\Big]_{0}^{3}-\int_{0}^{3}(-e^{2-x})dx-\Big[\dfrac{1}{2e}x^2\Big]_{0}^{3}$

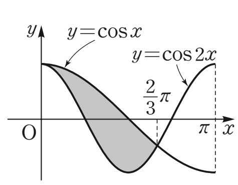
$=-3e^{-1}+\Big[-e^{2-x}\Big]_{0}^{3}-\dfrac{9}{2e}$

$=e^2-\dfrac{17}{2e}$ ⇨ ❷

답 $e^2-\dfrac{17}{2e}$

채점 기준	비율
❶ 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	70%

1416 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\cos 2x$의



교점의 x좌표는 $\cos x=\cos 2x$에서

$\cos x=2\cos^2 x-1$

$2\cos^2 x-\cos x-1=0$

$(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$

12 정적분의 활용

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ ($\because\ 0\le x\le\pi$)

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\cos x-\cos 2x)dx$$
$$=\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

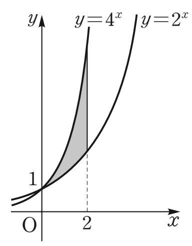
답 ④

1417 두 곡선 $y=4^x$, $y=2^x$의 교점의 x좌표는 $4^x=2^x$에서

$2^{2x}=2^x$, $\quad 2x=x$

$\therefore\ x=0$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_0^2(4^x-2^x)dx$$
$$=\left[\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^2$$
$$=\left(\frac{4^2}{\ln 4}-\frac{2^2}{\ln 2}\right)-\left(\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 2}\right)$$
$$=\frac{9}{2\ln 2}$$

이므로 $\quad k=9$

답 ④

1418 두 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$의 교점의 x좌표는 $\dfrac{1}{x}=\sqrt{x}$에서

$\dfrac{1}{x^2}=x$, $\quad x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ x=1$ ($\because\ x^2+x+1>0$)

따라서 두 도형의 넓이는

$$S_1=\int_{\frac{1}{4}}^1\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)dx=\left[\ln|x|-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{4}}^1$$
$$=-\frac{2}{3}-\left(-\ln 4-\frac{1}{12}\right)$$
$$=\ln 4-\frac{7}{12}$$

⇨ ❶

$$S_2=\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\ln|x|\right]_1^4$$
$$=\left(\frac{16}{3}-\ln 4\right)-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}-\ln 4$$

⇨ ❷

$$\therefore\ S_2-S_1=\left(\frac{14}{3}-\ln 4\right)-\left(\ln 4-\frac{7}{12}\right)$$
$$=\frac{21}{4}-4\ln 2$$

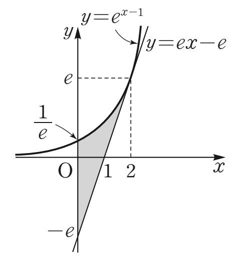
⇨ ❸

답 $\dfrac{21}{4}-4\ln 2$

채점 기준	비율
❶ S_1의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ S_2의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ S_2-S_1의 값을 구할 수 있다.	20%

1419 $y=e^{x-1}$에서 $y'=e^{x-1}$이므로 곡선 위의 점 $(2,\ e)$에서의 접선의 기울기는 e이고 접선의 방정식은

$y-e=e(x-2)$ $\qquad\therefore\ y=ex-e$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2\{e^{x-1}-(ex-e)\}dx$$
$$=\left[e^{x-1}-\frac{e}{2}x^2+ex\right]_0^2$$
$$=(e-2e+2e)-\frac{1}{e}$$
$$=e-\frac{1}{e}$$

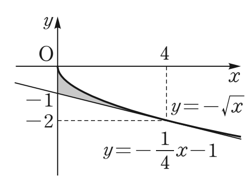
답 ②

1420 $y=-\sqrt{x}$에서 $y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이므로 곡선 위의 점 $(4,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{1}{4}$이고 접선의 방정식은

$y-(-2)=-\dfrac{1}{4}(x-4)$

$\therefore\ y=-\dfrac{1}{4}x-1$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_0^4\left\{-\sqrt{x}-\left(-\frac{1}{4}x-1\right)\right\}dx$$
$$=\int_0^4\left(-\sqrt{x}+\frac{1}{4}x+1\right)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{8}x^2+x\right]_0^4$$
$$=\frac{2}{3}$$

즉 $p=3$, $q=2$이므로

$p+q=5$

답 5

1421 (1) $y=\ln x$에서 $y'=\dfrac{1}{x}$이므로 곡선 위의 점 $(t,\ \ln t)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{t}$이고 접선의 방정식은

$y-\ln t=\dfrac{1}{t}(x-t)$

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

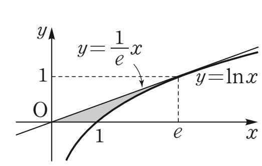
$-\ln t=\dfrac{1}{t}(0-t)$, $\qquad \ln t=1$

$\therefore\ t=e$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $\qquad y-1=\dfrac{1}{e}(x-e)$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{e}x$

(2) $\displaystyle\int_0^e\frac{1}{e}x\,dx-\int_1^e\ln x\,dx$



$$=\left[\frac{1}{2e}x^2\right]_0^e-\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e dx\right)$$
$$=\frac{e}{2}-e+\left[x\right]_1^e$$
$$=\frac{e}{2}-e+e-1=\frac{e}{2}-1$$

답 (1) $y=\dfrac{1}{e}x$ (2) $\dfrac{e}{2}-1$

1422 $\int_0^k(-x+2\sqrt{x})dx=0$이므로

$\left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^k=0,\qquad -\frac{1}{2}k^2+\frac{4}{3}k\sqrt{k}=0$

$k\sqrt{k}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}+\frac{4}{3}\right)=0,\qquad -\frac{1}{2}\sqrt{k}+\frac{4}{3}=0\ (\because k>4)$

$\sqrt{k}=\frac{8}{3}\qquad \therefore k=\frac{64}{9}$

답 ②

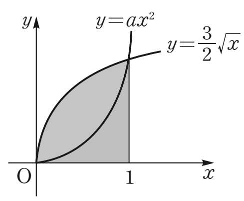
1423 $\int_0^2\left(\sin\frac{\pi}{4}x-k\right)dx=0$이므로

$\left[-\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}x-kx\right]_0^2=0,\qquad -2k-\left(-\frac{4}{\pi}\right)=0$

$2k=\frac{4}{\pi}\qquad \therefore k=\frac{2}{\pi}$

답 $\frac{2}{\pi}$

1424 곡선 $y=\frac{3}{2}\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$S_1=\int_0^1\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx=\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=1$

곡선 $y=ax^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

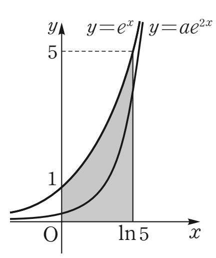
$S_2=\int_0^1ax^2\,dx=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{a}{3}$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$\frac{a}{3}=\frac{1}{2}\qquad \therefore a=\frac{3}{2}$

답 ⑤

1425 곡선 $y=e^x$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=\ln 5$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$S_1=\int_0^{\ln 5}e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^{\ln 5}$

$=5-1=4$ ⇨ ❶

곡선 $y=ae^{2x}$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=\ln 5$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\int_0^{\ln 5}ae^{2x}\,dx=\left[\frac{a}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 5}$

$=\frac{25a}{2}-\frac{a}{2}=12a$ ⇨ ❷

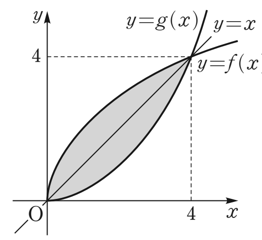
이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$12a=2\qquad \therefore a=\frac{1}{6}$ ⇨ ❸

답 $\frac{1}{6}$

채점 기준	비율
❶ S_1의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ S_2의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

1426 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



즉 $2\sqrt{x}=x$에서 $\qquad 4x=x^2$

$x^2-4x=0,\qquad x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$2\int_0^4(2\sqrt{x}-x)dx=2\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$

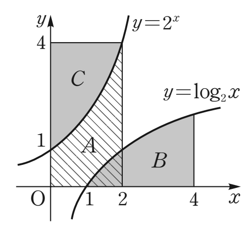
$=2\left(\frac{32}{3}-8\right)=\frac{16}{3}$

답 ②

1427 두 함수 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

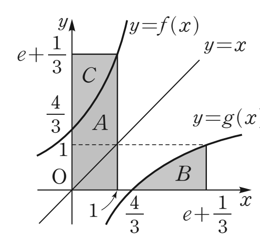
따라서 오른쪽 그림에서 $B=C$이므로

$A+B=A+C=2\cdot4=8$



답 ①

1428 함수 $f(x)=e^x+\frac{1}{3}$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 오른쪽 그림에서



(B의 넓이)$=$(C의 넓이)

이므로

$\int_0^1f(x)dx+\int_{\frac{4}{3}}^{e+\frac{1}{3}}g(x)dx$

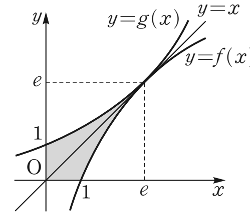
$=$(A의 넓이)$+$(B의 넓이)

$=$(A의 넓이)$+$(C의 넓이)

$=1\cdot\left(e+\frac{1}{3}\right)=e+\frac{1}{3}$

답 $e+\frac{1}{3}$

1429 (1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=e$인 점에서 접하므로 직선 $y=x$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=e$인 점에서의 접선이다.



$\therefore f(e)=e,\ f'(e)=1$

$f'(x)=\frac{1}{ax}$이므로

$\frac{1}{a}=e,\ \frac{1}{ae}=1$

$\therefore a=\frac{1}{e}$

(2) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.
이때 $f(x)=e\ln x$이고 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로 구하는 넓이는

$$2\left(\int_0^e x\,dx-\int_1^e e\ln x\,dx\right)$$
$$=2\left(\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^e-\left[ex\ln x-ex\right]_1^e\right)$$
$$=2\left\{\frac{1}{2}e^2-(e^2-e^2+e)\right\}$$
$$=e^2-2e$$

답 (1) $\frac{1}{e}$ (2) e^2-2e

다른풀이 (1) $f(x)=\frac{1}{a}\ln x$의 역함수를 구하면 $y=\frac{1}{a}\ln x$에서

$ay=\ln x,\qquad x=e^{ay}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=e^{ax}\qquad \therefore\ g(x)=e^{ax}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=e$인 점에서 접하므로

$f(e)=g(e)$, $f'(e)=g'(e)$에서 $\qquad a=\frac{1}{e}$

(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^e \left(e^{\frac{1}{e}x}-x\right)dx=2\left[e\cdot e^{\frac{1}{e}x}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^e$$
$$=2\left\{\left(e^2-\frac{1}{2}e^2\right)-e\right\}$$
$$=e^2-2e$$

1430 단면의 넓이를 $S(x)\text{cm}^2$라 하면 $S(x)=3(x+1)^2$이므로 구하는 부피는

$$\int_0^5 3(x+1)^2dx=3\int_0^5(x^2+2x+1)dx$$
$$=3\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^5$$
$$=3\left(\frac{125}{3}+25+5\right)$$
$$=215(\text{cm}^3)$$

답 215cm^3

1431 물의 깊이가 x일 때, 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$\int_0^x S(x)dx=\ln(x+1)+x^2$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

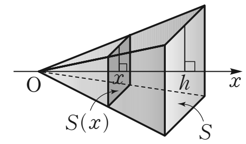
$$S(x)=\frac{1}{x+1}+2x$$

따라서 물의 깊이가 8일 때, 수면의 넓이는

$$S(8)=\frac{1}{9}+16=\frac{145}{9}$$

답 ②

1432 오른쪽 그림과 같이 사각뿔의 꼭짓점을 원점, 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선을 x축으로 정하고, x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 사각뿔을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하자. ⇨ ❶



이때 잘린 단면과 밑면은 닮은 도형이고 닮음비가 $x : h$이므로 넓이의 비는 $x^2 : h^2$이다. 즉

$$S(x):S=x^2:h^2\qquad \therefore\ S(x)=\frac{S}{h^2}x^2$$ ⇨ ❷

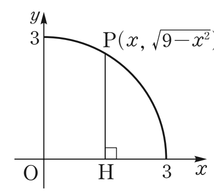
따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx$$
$$=\frac{S}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h=\frac{1}{3}Sh$$ ⇨ ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 사각뿔의 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선을 x축으로 정할 수 있다.	30%
❷ $S(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ 부피를 구할 수 있다.	30%

1433 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{9-x^2}$ 위의 점 $\text{P}(x,\ \sqrt{9-x^2})$ $(0\le x\le 3)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\text{PH}}=\sqrt{9-x^2}$

이때 점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\overline{\text{PH}}^2=9-x^2$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3(9-x^2)dx$$
$$=\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3$$
$$=27-9=18$$

답 ⑤

1434 점 P의 x좌표를 x라 하면 $\overline{\text{PH}}=3^x$이므로 $\overline{\text{PH}}$를 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{\text{PH}}=\frac{1}{2}\cdot 3^x$$

이때 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{1}{2}\overline{\text{PH}}\right)^2=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 3^x\right)^2=\frac{\pi}{8}\cdot 9^x$$

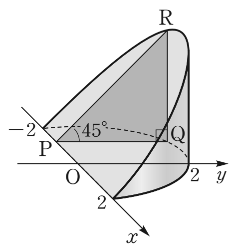
따라서 주어진 입체도형의 부피는

$$\int_0^2\left(\frac{\pi}{8}\cdot 9^x\right)dx=\frac{\pi}{8}\left[\frac{9^x}{\ln 9}\right]_0^2=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{80}{\ln 9}$$
$$=\frac{10}{2\ln 3}\pi=\frac{5}{\ln 3}\pi$$

$\therefore\ k=5$

답 5

1435 오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점, 밑면의 지름을 x축으로 정하자. x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)(-2\le x\le 2)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 삼각형이다. 이 삼각형을 $\triangle\mathrm{PQR}$라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{4-x^2}$

$\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}\tan 45^\circ=\sqrt{4-x^2}$

이므로 $\triangle\mathrm{PQR}$의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{RQ}}=\frac{1}{2}(4-x^2)$$

따라서 구하는 부피는

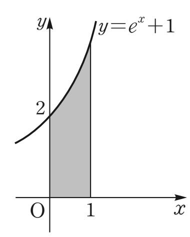
$$\int_{-2}^{2}S(x)dx=\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}(4-x^2)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}\frac{1}{2}(4-x^2)dx$$
$$=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{16}{3}$$

답 $\frac{16}{3}$

참고 원기둥에서 밑면과 옆면은 수직이므로 $\triangle\mathrm{PQR}$는 $\angle\mathrm{PQR}=90^\circ$인 직각삼각형이다.

1436 **전략** 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b|f(x)|dx$이다.

풀이 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^1(e^x+1)dx=\left[e^x+x\right]_0^1$$
$$=(e+1)-1$$
$$=e$$

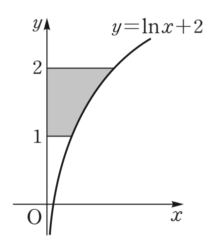
답 e

1437 **전략** 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_c^d|g(y)|dy$이다.

풀이 $y=\ln x+2$에서

$\ln x=y-2$ $\quad\therefore x=e^{y-2}$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_1^2 e^{y-2}dy=\left[e^{y-2}\right]_1^2$$
$$=1-\frac{1}{e}$$

답 ①

1438 **전략** 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으면 $\int_a^b f(x)dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\int_0^k(\sqrt{x}-4)dx=0$이므로

$$\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x\right]_0^k=0,\qquad \frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}-4k=0$$

$$\frac{2}{3}k(\sqrt{k}-6)=0$$

이때 $k>16$이므로 $\quad\sqrt{k}-6=0$

$\therefore k=36$

답 36

1439 **전략** 물의 깊이가 x일 때 수면의 넓이를 $S(x)$, 물의 부피를 $V(x)$라 하면 $V(x)=\int_0^x S(x)dx$임을 이용한다.

풀이 물의 깊이가 x일 때 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$\int_0^x S(x)dx=x\ln(x+1)$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$S(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$$

따라서 물의 깊이가 e^2-1일 때 수면의 넓이는

$$S(e^2-1)=2+\frac{e^2-1}{e^2}=3-\frac{1}{e^2}$$

답 $3-\frac{1}{e^2}$

1440 **전략** 곡선과 y축 사이의 넓이는 $x\ge 0$인 구간과 $x\le 0$인 구간으로 나누어 구한다.

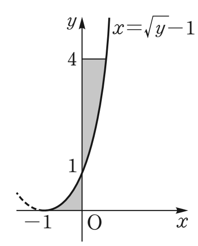
풀이 $y=(x+1)^2$에서

$\sqrt{y}=x+1\ (\because x\ge -1)\qquad\therefore x=\sqrt{y}-1$

곡선 $x=\sqrt{y}-1$과 y축의 교점의 y좌표는 $\sqrt{y}-1=0$에서

$\sqrt{y}=1\qquad\therefore y=1$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_0^1\{-(\sqrt{y}-1)\}dy+\int_1^4(\sqrt{y}-1)dy$$
$$=\int_0^1(1-y^{\frac{1}{2}})dy+\int_1^4(y^{\frac{1}{2}}-1)dy$$
$$=\left[y-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-y\right]_1^4$$
$$=\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left\{\left(\frac{16}{3}-4\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)\right\}$$
$$=2$$

답 ⑤

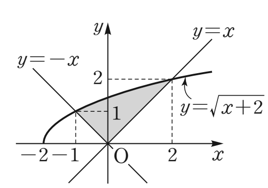
1441 **전략** 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정하고, 그 구간 안에서 곡선과 직선의 위치 관계를 파악하여 정적분의 값을 구한다.

풀이 곡선 $y=\sqrt{x+2}$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는 $\sqrt{x+2}=-x$에서

$x+2=x^2,\qquad (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1\ (\because x<0)$

곡선 $y=\sqrt{x+2}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $\sqrt{x+2}=x$에서



$x+2=x^2$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=2\ (\because x>0)$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{\sqrt{x+2}-(-x)\}dx+\int_{0}^{2}(\sqrt{x+2}-x)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\left\{\frac{4\sqrt{2}}{3}-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{16}{3}-2\right)-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right\}$$

$$=\frac{13}{6}$$

즉 $p=6$, $q=13$이므로

$p+q=19$ 답 ④

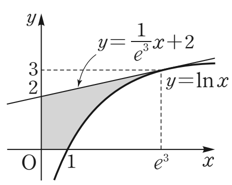
1442 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용하여 접선의 방정식을 구한 후 접선과 곡선의 위치 관계를 파악한다.

풀이 $y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 위의 점 $(e^3, 3)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{e^3}$이고 접선의 방정식은

$$y-3=\frac{1}{e^3}(x-e^3)$$

$$\therefore y=\frac{1}{e^3}x+2$$ ➩ ❶

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{0}^{e^3}\left(\frac{1}{e^3}x+2\right)dx-\int_{1}^{e^3}\ln x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2e^3}x^2+2x\right]_{0}^{e^3}-\left[x\ln x-x\right]_{1}^{e^3}$$

$$=\left(\frac{e^3}{2}+2e^3\right)-(3e^3-e^3+1)$$

$$=\frac{e^3}{2}-1$$ ➩ ❷

답 $\frac{e^3}{2}-1$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	60%

1443 전략 구간 $[a, b]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으면 $\int_{a}^{b}\{f(x)-g(x)\}dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi}(\sin x-ax)dx=0$이므로

$$\left[-\cos x-\frac{1}{2}ax^2\right]_{0}^{\frac{3}{2}\pi}=0,\qquad -\frac{1}{2}a\cdot\frac{9}{4}\pi^2+1=0$$

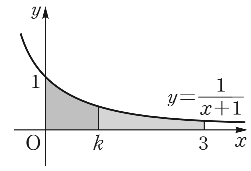
$$-\frac{9}{8}a\pi^2+1=0,\qquad \frac{9}{8}a\pi^2=1$$

$$\therefore a=\frac{8}{9\pi^2}$$

답 $\frac{8}{9\pi^2}$

1444 전략 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\ge 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분하면 $\int_{a}^{k}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}f(x)dx$이다.

풀이 곡선 $y=\frac{1}{x+1}$과 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_{0}^{3}\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\Big[\ln|x+1|\Big]_{0}^{3}=\ln 4$$

곡선 $y=\frac{1}{x+1}$과 x축, y축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_{0}^{k}\frac{1}{x+1}dx=\Big[\ln|x+1|\Big]_{0}^{k}=\ln(k+1)\ (\because k+1>0)$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$$\ln(k+1)=\frac{1}{2}\ln 4,\qquad \ln(k+1)=\ln 2$$

$$k+1=2\qquad \therefore k=1$$ 답 ④

1445 전략 물의 깊이가 x일 때 수면의 넓이가 $S(x)$이면 물의 부피는 $\int_{0}^{x}S(x)dx$임을 이용한다.

풀이 물의 깊이가 x일 때, 수면은 반지름의 길이가 $\sqrt{x+5}$인 원이므로 이때의 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\pi(\sqrt{x+5})^2=\pi(x+5)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{0}^{10}S(x)dx=\pi\int_{0}^{10}(x+5)dx=\pi\left[\frac{1}{2}x^2+5x\right]_{0}^{10}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}\cdot 100+5\cdot 10\right)=100\pi$$ 답 ⑤

1446 전략 구간 $[a, b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피는 $\int_{a}^{b}S(x)dx$이다.

풀이 $\overline{\mathrm{PH}}=-x^2+2x$이므로 $\triangle\mathrm{PHR}$의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{PH}}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2+2x)^2$$ ➩ ❶

따라서 구하는 부피는

$$\int_{0}^{2}\frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2+2x)^2dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{0}^{2}(x^4-4x^3+4x^2)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_{0}^{2}$$

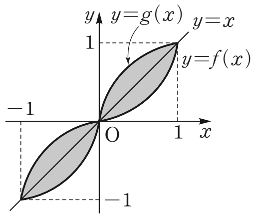
$$=\frac{4\sqrt{3}}{15}$$ ➩ ❷

답 $\frac{4\sqrt{3}}{15}$

채점 기준	비율
❶ $S(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ 부피를 구할 수 있다.	60%

1447 전략 함수와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.



이때 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$$4\int_0^1\left(x-\tan\frac{\pi}{4}x\right)dx=4\int_0^1\left(x-\frac{\sin\frac{\pi}{4}x}{\cos\frac{\pi}{4}x}\right)dx$$
$$=4\int_0^1\left\{x+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4}x\right)'}{\cos\frac{\pi}{4}x}\right\}dx$$
$$=4\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{\pi}\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}x\right|\right]_0^1$$
$$=4\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=2-\frac{8}{\pi}\ln 2$$

답 ③

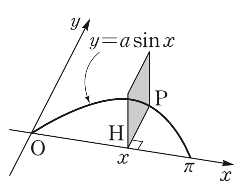
1448 전략 구간 $[a,\ b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피는 $\int_a^b S(x)dx$이다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P의 x좌표를 $x\,(0\le x\le\pi)$라 하면

$\overline{\text{PH}}=a\sin x$

이때 $\overline{\text{PH}}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\overline{\text{PH}}^2=a^2\sin^2 x$



따라서 주어진 입체도형의 부피는

$$\int_0^\pi S(x)dx=\int_0^\pi a^2\sin^2 x\,dx$$
$$=a^2\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$=a^2\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi=\frac{a^2}{2}\pi$$

즉 $\frac{a^2}{2}\pi=2\pi$이므로

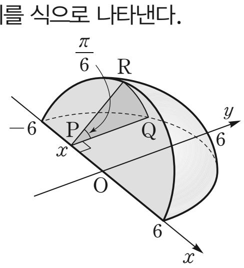
$a^2=4\qquad\therefore a=2\ (\because a>0)$

답 ④

1449 전략 입체도형의 밑면을 좌표평면 위에 나타내고, 입체도형을 좌표평면에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점, 밑면의 지름을 x축으로 정하고, x축 위의 점 $\text{P}(x,\ 0)\,(-6\le x\le 6)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 부채꼴 PQR라 하면

$\overline{\text{PQ}}=\sqrt{\overline{\text{OQ}}^2-\overline{\text{OP}}^2}=\sqrt{36-x^2}$



이때 부채꼴 PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\text{PQ}}^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}(36-x^2)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-6}^6 S(x)dx=\int_{-6}^6\frac{\pi}{12}(36-x^2)dx$$
$$=2\cdot\frac{\pi}{12}\int_0^6(36-x^2)dx$$
$$=\frac{\pi}{6}\left[36x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^6=24\pi$$

답 24π

memo