짧지만 개념에 강한 **짤강 고등수학 I**

정답과 해설

01 지수

기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 009쪽

1-1 (1) $\mathbf{-6}$ (2) $\mathbf{5,\ 7}$

1-2 (1) $9^2=81$, $(-9)^2=81$이므로
81의 제곱근은 $\mathbf{9,\ -9}$이다.
(2) $12^2=144$, $(-12)^2=144$이므로
144의 제곱근은 $\mathbf{12,\ -12}$이다.
(3) $\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{9}{100}$, $\left(-\frac{3}{10}\right)^2=\frac{9}{100}$이므로
$\frac{9}{100}$의 제곱근은 $\mathbf{\frac{3}{10},\ -\frac{3}{10}}$이다.
(4) $(0.8)^2=0.64$, $(-0.8)^2=0.64$이므로
0.64의 제곱근은 $\mathbf{0.8,\ -0.8}$이다.

2-1 (1) $\mathbf{2,\ 3}$ (2) $\mathbf{50}$

2-2 (1) $\sqrt{2}\times\sqrt{10}\div\sqrt{5}=\sqrt{2\times10}\div\sqrt{5}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$
$=\sqrt{4}=\mathbf{2}$
(2) $\sqrt{24}\div\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}\times\sqrt{6}=\sqrt{12}\times\sqrt{6}$
$=\sqrt{72}=\mathbf{6\sqrt{2}}$
(3) $\frac{12}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{15}}\div\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\frac{12}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{15}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$
$=\frac{12}{\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=\mathbf{4\sqrt{3}}$
(4) $\sqrt{\frac{5}{2}}\div\sqrt{\frac{10}{3}}\times\sqrt{\frac{14}{3}}=\sqrt{\frac{5}{2}}\times\sqrt{\frac{3}{10}}\times\sqrt{\frac{14}{3}}$
$=\sqrt{\frac{5}{2}\times\frac{3}{10}\times\frac{14}{3}}$
$=\sqrt{\frac{7}{2}}=\mathbf{\frac{\sqrt{14}}{2}}$

3-1 (1) $\mathbf{1,\ 3}$ (2) $\mathbf{9,\ b}$

3-2 (1) $a^2b^5\times3ab^3=3a^{2+1}b^{5+3}=\mathbf{3a^3b^8}$
(2) $(ab)^5\times\left(\frac{a}{b}\right)^3=a^5b^5\times\frac{a^3}{b^3}=a^{5+3}b^{5-3}=\mathbf{a^8b^2}$
(3) $4a^4b^3\div2a^2b^2=2a^{4-2}b^{3-2}=\mathbf{2a^2b}$
(4) $(a^2b)^5\div(a^3b^3)^3=a^{10}b^5\div a^9b^9$
$=\frac{a^{10-9}}{b^{9-5}}=\mathbf{\frac{a}{b^4}}$

본문 | 010~014쪽

1-1 (1) $\mathbf{2,\ -1,\ 2,\ -1}$ (2) $\mathbf{-2,\ 1,\ -2,\ 1}$

1-2 (1) 1의 세제곱근을 x라 하면
$x^3=1$, $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$
$\therefore\ x=1$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
따라서 1의 세제곱근은
$\mathbf{1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$
(2) -1의 세제곱근을 x라 하면
$x^3=-1$, $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
따라서 -1의 세제곱근은
$\mathbf{-1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$
(3) 27의 세제곱근을 x라 하면
$x^3=27$, $x^3-27=0$, $(x-3)(x^2+3x+9)=0$
$\therefore\ x=3$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$
따라서 27의 세제곱근은
$\mathbf{3,\ \frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}}$
(4) -27의 세제곱근을 x라 하면
$x^3=-27$, $x^3+27=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$
$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$
따라서 -27의 세제곱근은
$\mathbf{-3,\ \frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}}$

2-1 $\mathbf{2i,\ 2i}$

2-2 (1) 1의 네제곱근을 x라 하면
$x^4=1$, $x^4-1=0$
$(x^2-1)(x^2+1)=0$
$\therefore\ x=\pm1$ 또는 $x=\pm i$
따라서 1의 네제곱근은 $\mathbf{\pm1,\ \pm i}$
(2) 4의 네제곱근을 x라 하면
$x^4=4$, $x^4-4=0$
$(x^2-2)(x^2+2)=0$
$\therefore\ x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$
따라서 4의 네제곱근은 $\mathbf{\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2}i}$
(3) 81의 네제곱근을 x라 하면
$x^4=81$, $x^4-81=0$
$(x^2-9)(x^2+9)=0$
$\therefore\ x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$
따라서 81의 네제곱근은 $\mathbf{\pm3,\ \pm3i}$

3-1 (1) $\mathbf{2}$ (2) $\mathbf{-2}$ (3) $\mathbf{2,\ -2}$ (4) **없다**

3-2 (1) 64의 세제곱근 중에서 실수인 것은 4이므로
$\sqrt[3]{64}=\mathbf{4}$
(2) -64의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -4이므로
$\sqrt[3]{-64}=\mathbf{-4}$

(3) 81의 네제곱근 중에서 실수인 것은 3, -3이므로
$\sqrt[4]{81}=\mathbf{3},\ -\sqrt[4]{81}=\mathbf{-3}$
(4) -81의 네제곱근 중에서 실수인 것은 **없다.**

4-1 (1) $\mathbf{5}$ (2) $\mathbf{-4}$
4-2 (1) -125의 세제곱근 중에서 실수인 것은
$\sqrt[3]{-125}=\mathbf{-5}$
(2) 256의 네제곱근 중에서 양의 실수인 것은
$\sqrt[4]{256}=\mathbf{4}$
(3) 32의 다섯제곱근 중에서 실수인 것은
$\sqrt[5]{32}=\mathbf{2}$
(4) 64의 여섯제곱근 중에서 음의 실수인 것은
$-\sqrt[6]{64}=\mathbf{-2}$

5-1 (1) $\mathbf{3}$ (2) $\mathbf{2, 9}$ (3) $\mathbf{6, 2}$ (4) $\mathbf{4, 2}$
5-2 (1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=\mathbf{2}$
(2) $(\sqrt[4]{4})^6=\sqrt[4]{4^6}=\sqrt[4]{(2^2)^6}=\sqrt[4]{2^{12}}=\sqrt[4]{2^{3\times4}}=2^3=\mathbf{8}$
(3) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{7^{24}}}=\sqrt[4\times3]{7^{24}}=\sqrt[12]{7^{2\times12}}=7^2=\mathbf{49}$
(4) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{16}{2}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=\mathbf{2}$

6-1 (1) $\mathbf{2, 4}$ (2) $\mathbf{4, 0}$
6-2 (1) $2\sqrt[4]{48}+3\sqrt[4]{3}=2\sqrt[4]{16\times3}+3\sqrt[4]{3}$
$=2\sqrt[4]{2^4\times3}+3\sqrt[4]{3}$
$=2\sqrt[4]{2^4}\times\sqrt[4]{3}+3\sqrt[4]{3}$
$=4\sqrt[4]{3}+3\sqrt[4]{3}=\mathbf{7\sqrt[4]{3}}$
(2) $3\sqrt[4]{243}-2\sqrt[4]{48}=3\sqrt[4]{81\times3}-2\sqrt[4]{16\times3}$
$=3\sqrt[4]{81}\times\sqrt[4]{3}-2\sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{3}$
$=3\sqrt[4]{3^4}\times\sqrt[4]{3}-2\sqrt[4]{2^4}\times\sqrt[4]{3}$
$=9\sqrt[4]{3}-4\sqrt[4]{3}=\mathbf{5\sqrt[4]{3}}$

7-1 (1) $\mathbf{1}$ (2) $\mathbf{1}$ (3) $\mathbf{4, 16}$ (4) $\mathbf{3}$
7-2 (1) $3^0=\mathbf{1}$
(2) $(\sqrt{7})^0=\mathbf{1}$
(3) $8^{-2}=\dfrac{1}{8^2}=\mathbf{\dfrac{1}{64}}$
(4) $(-3)^{-3}=\dfrac{1}{(-3)^3}=\mathbf{-\dfrac{1}{27}}$

8-1 (1) $\mathbf{-1, 3}$ (2) $\mathbf{2, 25}$ (3) $\mathbf{6}$ (4) $\mathbf{8, 12}$
8-2 (1) $7^6\times7^{-4}=7^{6+(-4)}=7^2=\mathbf{49}$
(2) $(3^2)^{-3}\div3^{-3}=3^{-6}\div3^{-3}=3^{-6-(-3)}=3^{-3}=\mathbf{\dfrac{1}{27}}$
(3) $(a^5\div a^8)^{-5}=(a^{5-8})^{-5}=(a^{-3})^{-5}=\boldsymbol{a^{15}}$
(4) $(a^2b^{-4})^{-3}=a^{2\times(-3)}b^{-4\times(-3)}=a^{-6}b^{12}=\boldsymbol{\dfrac{b^{12}}{a^6}}$

9-1 (1) $\mathbf{2}$ (2) $\mathbf{6}$ (3) $\boldsymbol{a}$ (4) $\mathbf{-4}$
9-2 (1) $\sqrt[5]{a^9}=\boldsymbol{a^{\frac{9}{5}}}$
(2) $\sqrt[4]{a^{-5}}=\boldsymbol{a^{-\frac{5}{4}}}$
(3) $a^{\frac{2}{3}}=\boldsymbol{\sqrt[3]{a^2}}$
(4) $a^{-\frac{3}{4}}=\boldsymbol{\sqrt[4]{a^{-3}}}$

10-1 (1) $\mathbf{4}$ (2) $\mathbf{\sqrt{3}, 2\sqrt{3}}$ (3) $\mathbf{3, 8}$ (4) $\mathbf{3, 2, 4}$
10-2 (1) $2^{3\sqrt{2}}\times2^{\sqrt{50}}=2^{3\sqrt{2}}\times2^{5\sqrt{2}}$
$=2^{3\sqrt{2}+5\sqrt{2}}=\mathbf{2^{8\sqrt{2}}}$
(2) $\sqrt[6]{25}\div\sqrt[3]{625}=\sqrt[6]{5^2}\div\sqrt[3]{5^4}=5^{\frac{2}{6}}\div5^{\frac{4}{3}}$
$=5^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}=5^{-1}=\mathbf{\dfrac{1}{5}}$
(3) $(4^{\sqrt{6}})^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=4^{\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{3}}}=\mathbf{4^{\sqrt{2}}}$
(4) $(16\times25)^{\frac{3}{4}}=(2^4\times5^2)^{\frac{3}{4}}=2^{4\times\frac{3}{4}}\times5^{2\times\frac{3}{4}}$
$=2^3\times5^{\frac{3}{2}}=\mathbf{8\times5^{\frac{3}{2}}}$

집중 연습

본문 | 015~017쪽

1 (1) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4\times16}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=\mathbf{4}$
(2) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt{\sqrt[3]{81}}=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3^4}=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{3^3}=\mathbf{3}$
(3) $\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=\mathbf{-2}$
(4) $\sqrt[4]{(-9)^2}=\sqrt[4]{3^4}=\mathbf{3}$
(5) $(\sqrt[6]{8})^2=\sqrt[6]{8^2}=\sqrt[6]{2^6}=\mathbf{2}$
(6) $\sqrt[3]{\sqrt{5^{12}}}=\sqrt[6]{5^{12}}=5^2=\mathbf{25}$
(7) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8^{30}}}=\sqrt[15]{8^{30}}=8^2=\mathbf{64}$
(8) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{32}{2}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=\mathbf{2}$
(9) $\sqrt[6]{9}\div\sqrt[3]{81}=\sqrt[6]{3^2}\div\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3}\div\sqrt[3]{81}$
$=\sqrt[3]{\dfrac{3}{81}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^3}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$
(10) $\sqrt[4]{16^2}\times(\sqrt[3]{3})^6\div\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[4]{4^4}\times\sqrt[3]{3^6}\div\sqrt[6]{2^6}$
$=4\times3^2\div2=\mathbf{18}$
(11) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{8\times2}+\sqrt[3]{27\times2}$
$=\sqrt[3]{2^3\times2}+\sqrt[3]{3^3\times2}$
$=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{2}$
$=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}=\mathbf{5\sqrt[3]{2}}$
(12) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{27\times2}-\sqrt[3]{125\times2}$
$=\sqrt[3]{3^3\times2}-\sqrt[3]{5^3\times2}$
$=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5^3}\times\sqrt[3]{2}$
$=3\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}=\mathbf{-2\sqrt[3]{2}}$

2 (1) $a^6\times a^{-4}=a^{6-4}=\boldsymbol{a^2}$
(2) $a^6\div a^{-3}=a^{6+3}=\boldsymbol{a^9}$
(3) $(a^{-4})^{-3}=a^{(-4)\times(-3)}=\boldsymbol{a^{12}}$
(4) $(2^{-3}\times3^2)^{-2}=2^{(-3)\times(-2)}\times3^{2\times(-2)}=2^6\times3^{-4}=\mathbf{\dfrac{64}{81}}$

(5) $(a^{-2}\times b)^{-3}=a^{(-2)\times(-3)}\times b^{-3}=a^{6}\times b^{-3}=\boldsymbol{\frac{a^{6}}{b^{3}}}$

(6) $(a^{-1})^{-2}\times a^{-3}=a^{2}\times a^{-3}=a^{-1}=\boldsymbol{\frac{1}{a}}$

3 (1) $6^{3}\times 2^{2}\div 3^{3}=(2\times 3)^{3}\times 2^{2}\div 3^{3}=2^{3}\times 3^{3}\times 2^{2}\div 3^{3}$

$=2^{3+2}\times 3^{3-3}=2^{5}\times 3^{0}=\mathbf{32}$

(2) $a^{3}\times a^{-4}\div a^{-5}=a^{3-4-(-5)}=\boldsymbol{a^{4}}$

(3) $(a^{2}b^{-3})^{2}\div\left(\frac{a^{5}}{b^{2}}\right)^{3}=a^{4}b^{-6}\div\frac{a^{15}}{b^{6}}=a^{4}b^{-6}\times\frac{b^{6}}{a^{15}}$

$=a^{4-15}b^{-6+6}=a^{-11}=\boldsymbol{\frac{1}{a^{11}}}$

(4) $(-2a^{2}b^{4})^{3}\div 6a^{5}b^{2}=-8a^{6}b^{12}\div 6a^{5}b^{2}$

$=-\frac{4}{3}a^{6-5}b^{12-2}$

$=\boldsymbol{-\frac{4}{3}ab^{10}}$

(5) $(a^{2}b^{3})^{4}\div(a^{4}b^{3})^{2}\times\left(\frac{a}{b^{3}}\right)^{3}=a^{8}b^{12}\div a^{8}b^{6}\times\frac{a^{3}}{b^{9}}$

$=a^{8-8+3}b^{12-6-9}$

$=a^{3}b^{-3}=\boldsymbol{\frac{a^{3}}{b^{3}}}$

(6) $9^{2}\div 4^{3}\times(2^{-5}\times 3^{2})^{-2}=3^{4}\div 2^{6}\times 2^{10}\times 3^{-4}$

$=3^{4-4}\times 2^{10-6}=3^{0}\times 2^{4}=\mathbf{16}$

4 (1) $\sqrt[4]{a^{3}}=\boldsymbol{a^{\frac{3}{4}}}$

(2) $\sqrt[5]{\frac{1}{a^{2}}}=\sqrt[5]{a^{-2}}=\boldsymbol{a^{-\frac{2}{5}}}$

(3) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}}=\frac{1}{a^{-\frac{2}{3}}}=\boldsymbol{a^{\frac{2}{3}}}$

(4) $\frac{\sqrt[8]{a^{3}}}{\sqrt[6]{a^{5}}}=\frac{a^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{5}{6}}}=a^{\frac{3}{8}-\frac{5}{6}}=\boldsymbol{a^{-\frac{11}{24}}}$

(5) $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{5}}}=\sqrt[3]{a\times a^{\frac{5}{2}}}=\sqrt[3]{a^{\frac{7}{2}}}=(a^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{a^{\frac{7}{6}}}$

(6) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}=\sqrt[3]{a\times a^{\frac{1}{4}}}=\sqrt[3]{a^{\frac{5}{4}}}=(a^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{a^{\frac{5}{12}}}$

5 (1) $2^{-\frac{1}{3}}\times 4^{\frac{2}{3}}=2^{-\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{4}{3}}=2^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}=\mathbf{2}$

(2) $3^{\sqrt{2}+2}\div 3^{\sqrt{2}-1}=3^{\sqrt{2}+2-(\sqrt{2}-1)}=3^{3}=\mathbf{27}$

(3) $(\sqrt{8})^{-\frac{4}{3}}=(\sqrt{2^{3}})^{-\frac{4}{3}}=(2^{\frac{3}{2}})^{-\frac{4}{3}}$

$=2^{\frac{3}{2}\times\left(-\frac{4}{3}\right)}=2^{-2}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

(4) $(2^{\frac{3}{2}}\times 3^{-0.5})^{4}=2^{6}\times 3^{-2}=\boldsymbol{\frac{64}{9}}$

(5) $\left\{\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^{\frac{5}{2}}\right\}^{-\frac{3}{5}}=\left\{\left(\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}\right)^{\frac{5}{2}}\right\}^{-\frac{3}{5}}$

$=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}}\right\}^{-\frac{3}{5}}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{3}}\right\}^{-\frac{3}{5}}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

(6) $\sqrt[4]{a^{8}b^{3}}\div\sqrt{\sqrt{a^{4}b^{3}}}=a^{2}b^{\frac{3}{4}}\div(a^{2}b^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{2}b^{\frac{3}{4}}\div ab^{\frac{3}{4}}=\boldsymbol{a}$

기초 개념 평가

본문 | 018, 019쪽

01 제곱근, 세제곱근
02 $\boldsymbol{n}$제곱근
03 거듭제곱근
04 실근
05 $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$
06 $\boldsymbol{a>0}$
07 $\boldsymbol{a=0}$
08 $\boldsymbol{a<0}$
09 $\boldsymbol{a}$
10 $\boldsymbol{ab}$
11 $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$
12 $\boldsymbol{m}$
13 $\boldsymbol{mn}$
14 $\boldsymbol{n}$
15 **2**
16 **7**
17 **6**
18 **12, 6**
19 **2**
20 **2**
21 **4**
22 **3**

기초 문제 평가

본문 | 020, 021쪽

1 ⑤ 81의 음수인 네제곱근은 $-\sqrt[4]{81}$로 나타낸다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

2 $\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^{5}}=-2$
-2의 세제곱근은 3개이고, 그 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-2}$의 1개이다.
∴ $\boldsymbol{m=3,\ n=1}$

3 ① $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^{3}}=3$

② $(\sqrt[3]{5})^{6}=\sqrt[3]{5^{6}}=5^{2}=25$

③ $\sqrt[3]{25}\times\sqrt[6]{625^{-4}}=\sqrt[3]{25}\times\sqrt[6]{(25^{2})^{-4}}=\sqrt[3]{25}\times\sqrt[3]{25^{-4}}$

$=\sqrt[3]{25^{-3}}=25^{-1}=\frac{1}{25}$

④ $\sqrt{\sqrt[3]{81}}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^{4}}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3^{2}}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3^{3}}=3$

⑤ $\sqrt[3]{\sqrt{64}}\div\sqrt[5]{32^{2}}=\sqrt[6]{2^{6}}\div\sqrt[5]{2^{10}}=2\div 2^{2}=\frac{1}{2}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

4 (1) $\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}+\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[3]{(-2)^{3}}+\sqrt[3]{2^{3}}+\sqrt[6]{2^{6}}$

$=-2+2+2=\mathbf{2}$

(2) $\sqrt[3]{21}\div\sqrt[3]{3^{4}}\times\sqrt[3]{7^{2}}=\sqrt[3]{\frac{21\times 7^{2}}{3^{4}}}=\sqrt[3]{\frac{7^{3}}{3^{3}}}=\sqrt[3]{\left(\frac{7}{3}\right)^{3}}=\boldsymbol{\frac{7}{3}}$

5 ① $a^{5}a^{-5}=a^{0}=1$

② $(a^{-2})^{-4}=a^{(-2)\times(-4)}=a^{8}$

③ $(a^{-1}b^{2})^{-3}=a^{3}b^{-6}=\frac{a^{3}}{b^{6}}$

④ $(-a)^{-2}\div b^{-2}=a^{-2}\div b^{-2}=a^{-2}\times\frac{1}{b^{-2}}$

$=a^{-2}\times b^2=\left(\frac{b}{a}\right)^2$

⑤ $a^{-6}b^9\div(ab^2)^2=a^{-6}b^9\div a^2b^4=a^{-8}b^5=\frac{b^5}{a^8}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

6 $3^{\alpha}\times3^{\beta}=\frac{1}{81}$에서 $3^{\alpha+\beta}=3^{-4}$

$\therefore\ \boldsymbol{\alpha+\beta=-4}$

7 $a=\sqrt[4]{27}=3^{\frac{3}{4}}$

$\therefore\ 9^{\frac{3}{4}}=(3^2)^{\frac{3}{4}}=(3^{\frac{3}{4}})^2=a^2$

따라서 $9^{\frac{3}{4}}$과 같은 것은 ④이다.

8 $\sqrt[3]{a}=\sqrt{a\sqrt{a^k}}$에서

$a^{\frac{1}{3}}=\sqrt{a\times a^{\frac{k}{2}}}$, $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt{a^{\frac{k+2}{2}}}$, $a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{k+2}{4}}$

$\frac{1}{3}=\frac{k+2}{4}$이므로 $3k+6=4$, $3k=-2$

$\therefore\ \boldsymbol{k=-\frac{2}{3}}$

9 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=9$에서 $x+x^{-1}+2=9$, $x+x^{-1}=7$

$\therefore\ \boldsymbol{x+\frac{1}{x}=7}$

10 $3^{\frac{1}{2}}\times3^m\div3^{\frac{1}{6}}=1$에서 $3^{\frac{1}{2}+m-\frac{1}{6}}=1$

즉, $3^{m+\frac{1}{3}}=1$이므로 $m+\frac{1}{3}=0$

$\therefore\ \boldsymbol{m=-\frac{1}{3}}$

11 (1) $a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{3}{4}}\div a^{-\frac{7}{12}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\left(-\frac{7}{12}\right)}=a^{\frac{24}{12}}=\boldsymbol{a^2}$

(2) $(a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}})^6\div(a^{\frac{3}{4}})^{12}=a^{10}b^3\div a^9=a^{10-9}b^3=\boldsymbol{ab^3}$

12 (1) $2^{\sqrt{2}+2}\times2^{\sqrt{2}-1}\div4^{\sqrt{2}+1}=2^{\sqrt{2}+2}\times2^{\sqrt{2}-1}\div2^{2(\sqrt{2}+1)}$

$=2^{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}-1-(2\sqrt{2}+2)}$

$=2^{-1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) $(2^{\sqrt{2}})^{2-\sqrt{2}}\div(2^{2+\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2^{2\sqrt{2}-2}\div2^{2\sqrt{2}+2}$

$=2^{2\sqrt{2}-2-(2\sqrt{2}+2)}$

$=2^{-4}=\boldsymbol{\frac{1}{16}}$

13 $2^a=5$, $3^b=25$이므로

$2^{5a}\div3^{3b}=(2^a)^5\div(3^b)^3=5^5\div25^3$

$=5^5\div5^6=5^{-1}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$

02 로그

본문 | 022~025쪽

1-1 (1) **81** (2) **16**

1-2 (1) $2^{-3}=\frac{1}{8}\iff\boldsymbol{-3=\log_2\frac{1}{8}}$

(2) $\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}\iff\boldsymbol{3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}}$

2-1 (1) **3, 3** (2) **−3, −3**

2-2 (1) $\log_2 16=x$로 놓으면 $2^x=16$

$2^x=2^4$에서 $x=4$

따라서 $\log_2 16=\boldsymbol{4}$이다.

(2) $\log_4\frac{1}{64}=x$로 놓으면 $4^x=\frac{1}{64}$

$2^{2x}=2^{-6}$에서 $2x=-6$ $\quad\therefore\ x=-3$

따라서 $\log_4\frac{1}{64}=\boldsymbol{-3}$이다.

(3) $\log_{\frac{1}{3}}9=x$로 놓으면 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9$

$3^{-x}=3^2$에서 $-x=2$ $\quad\therefore\ x=-2$

따라서 $\log_{\frac{1}{3}}9=\boldsymbol{-2}$이다.

(4) $\log_{0.1}100=x$로 놓으면 $(0.1)^x=100$

$10^{-x}=10^2$에서 $-x=2$ $\quad\therefore\ x=-2$

따라서 $\log_{0.1}100=\boldsymbol{-2}$이다.

3-1 (1) **16, 4, 4** (2) **36, −1**

3-2 (1) $\log_5\sqrt{125}=\log_5\sqrt{5^3}=\log_5 5^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

(2) $\log_2 3\sqrt{2}-\log_2 3=\log_2\frac{3\sqrt{2}}{3}=\log_2\sqrt{2}$

$=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3) $\log_2\frac{4}{3}+2\log_2\sqrt{12}=\log_2\frac{4}{3}+\log_2(\sqrt{12})^2$

$=\log_2\frac{4}{3}+\log_2 12$

$=\log_2\left(\frac{4}{3}\times12\right)$

$=\log_2 16=\log_2 2^4=\boldsymbol{4}$

(4) $4\log_5\sqrt{15}-\frac{2}{3}\log_5 27=4\log_5 15^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\log_5 3^3$

$=2\log_5 15-2\log_5 3$

$=2(\log_5 15-\log_5 3)$

$=2\log_5\frac{15}{3}=2\log_5 5=\boldsymbol{2}$

4-1 (1) **3, 2** (2) **2, 3, 2**

4-2 (1) $\log_{10} 30 = \log_{10}(3\times10) = \log_{10} 3 + \log_{10} 10$
$= \boldsymbol{b+1}$

(2) $\log_{10}\frac{6}{5} = \log_{10}\frac{12}{10} = \log_{10}(2^2\times3) - \log_{10} 10$
$= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3 - 1 = \boldsymbol{2a+b-1}$

(3) $\log_{10}\frac{27}{50} = \log_{10}\frac{54}{100} = \log_{10}(2\times3^3) - \log_{10} 10^2$
$= \log_{10} 2 + \log_{10} 3^3 - 2 = \boldsymbol{a+3b-2}$

(4) $\log_{10} 0.036 = \log_{10}\frac{36}{1000} = \log_{10} 6^2 - \log_{10} 10^3$
$= 2\log_{10}(2\times3) - 3$
$= 2(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) - 3$
$= \boldsymbol{2a+2b-3}$

5-1 (1) **5** (2) **2, 2**

5-2 (1) $\log_{27}\frac{1}{81} = \frac{\log_3\frac{1}{81}}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^{-4}}{\log_3 3^3} = \boldsymbol{-\frac{4}{3}}$

(2) $\log_3 4 \times \log_4 3 = \log_3 4 \times \frac{1}{\log_3 4} = \boldsymbol{1}$

(3) $\log_3 5 \times \log_5\sqrt{3} = \frac{1}{\log_5 3} \times \log_5 3^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(4) $\log_{27} 4 \times \log_8 5 \times \log_5 3 = \frac{\log_3 4}{\log_3 27} \times \frac{\log_3 5}{\log_3 8} \times \frac{1}{\log_3 5}$
$= \frac{\log_3 2^2}{\log_3 3^3 \times \log_3 2^3}$
$= \frac{2\log_3 2}{3\times3\log_3 2} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$

6-1 (1) **2, 2*b*** (2) **2, 10, *a***

6-2 (1) $\log_3 16 = \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 3} = \frac{\log_{10} 2^4}{\log_{10} 3} = \frac{4\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \boldsymbol{\frac{4a}{b}}$

(2) $\log_5 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10}\frac{10}{2}}$
$= \frac{\log_{10} 3}{1-\log_{10} 2} = \boldsymbol{\frac{b}{1-a}}$

(3) $\log_3\sqrt{8} = \log_3 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_3 2$
$= \frac{3}{2}\times\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \boldsymbol{\frac{3a}{2b}}$

(4) $\log_2\sqrt{12} = \log_2 12^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_2 12$
$= \frac{1}{2}\times\frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10}(2^2\times3)}{2\log_{10} 2}$
$= \frac{\log_{10} 2^2 + \log_{10} 3}{2\log_{10} 2} = \boldsymbol{\frac{2a+b}{2a}}$

7-1 (1) $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ (2) **−1, −1**

7-2 (1) $\log 1000 = \log 10^3 = \boldsymbol{3}$

(2) $\log\sqrt[3]{10^4} = \log 10^{\frac{4}{3}} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$

(3) $\log 10\sqrt{10} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$

(4) $\log 0.01 = \log 10^{-2} = \boldsymbol{-2}$

8-1 (1) **2, 2.5092** (2) **−1, −0.4908**

8-2 (1) $\log 236 = \log(10^2\times2.36) = \log 10^2 + \log 2.36$
$= 2 + 0.3729 = \boldsymbol{2.3729}$

(2) $\log 23600 = \log(10^4\times2.36) = \log 10^4 + \log 2.36$
$= 4 + 0.3729 = \boldsymbol{4.3729}$

(3) $\log 23.6 = \log(10\times2.36) = \log 10 + \log 2.36$
$= 1 + 0.3729 = \boldsymbol{1.3729}$

(4) $\log 0.236 = \log(10^{-1}\times2.36) = \log 10^{-1} + \log 2.36$
$= -1 + 0.3729 = \boldsymbol{-0.6271}$

집중 연습

본문 | 026, 027쪽

1 (1) $\log_{10}\frac{1}{\sqrt[3]{0.001}} = \log_{10}\frac{1}{\sqrt[3]{10^{-3}}} = \log_{10}\frac{1}{10^{-1}}$
$= \log_{10} 10 = \boldsymbol{1}$

(2) $\log_{10}\frac{1}{10} + \log_{10} 100 = \log_{10}\left(\frac{1}{10}\times100\right) = \log_{10} 10 = \boldsymbol{1}$

(3) $\log_3 12 + 2\log_3\frac{9}{2} = \log_3 12 + \log_3\left(\frac{9}{2}\right)^2$
$= \log_3\left(12\times\frac{81}{4}\right) = \log_3 3^5 = \boldsymbol{5}$

(4) $\log_3\sqrt{27} - \log_3\frac{1}{\sqrt{3}} = \log_3\sqrt{27} + \log_3\sqrt{3}$
$= \log_3(\sqrt{27}\times\sqrt{3}) = \log_3\sqrt{81}$
$= \log_3 9 = \log_3 3^2 = \boldsymbol{2}$

(5) $2\log_2 12 - \log_2 18 = \log_2 12^2 - \log_2 18 = \log_2\frac{12^2}{18}$
$= \log_2 8 = \log_2 2^3 = \boldsymbol{3}$

(6) $2\log_5\sqrt{5} + 3\log_5 2 - 6\log_5\sqrt{2}$
$= \log_5(\sqrt{5})^2 + \log_5 2^3 - \log_5(\sqrt{2})^6$
$= \log_5 5 + \log_5 8 - \log_5 8 = \boldsymbol{1}$

2 (1) $\log_5 6 = \log_5(2\times3) = \log_5 2 + \log_5 3 = \boldsymbol{a+b}$
(2) $\log_5 12 = \log_5(2^2\times3) = \log_5 2^2 + \log_5 3 = \boldsymbol{2a+b}$
(3) $\log_5 30 = \log_5(2\times3\times5) = \log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 5$
$= \boldsymbol{a+b+1}$

(4) $\log_5 \frac{18}{5} = \log_5 18 - \log_5 5 = \log_5 (2 \times 3^2) - 1$

$= \log_5 2 + \log_5 3^2 - 1 = \boldsymbol{a + 2b - 1}$

(5) $\log_5 \frac{27}{2} = \log_5 27 - \log_5 2 = \log_5 3^3 - \log_5 2 = \boldsymbol{-a + 3b}$

(6) $\log_5 \frac{100}{9} = \log_5 100 - \log_5 9 = \log_5 10^2 - \log_5 3^2$

$= 2(\log_5 2 + \log_5 5) - 2\log_5 3 = \boldsymbol{2a - 2b + 2}$

3 (1) $\log_{100} \sqrt{10} = \log_{10^2} 10^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} \log_{10} 10 = \frac{1}{4} \log_{10} 10 = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$

(2) $\log_3 5 \times \log_5 9 = \frac{1}{\log_5 3} \times \log_5 3^2 = \boldsymbol{2}$

(3) $\log_9 2 \times \log_8 9 = \log_9 2 \times \frac{1}{\log_9 8}$

$= \log_9 2 \times \frac{1}{\log_9 2^3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$

(4) $\log_2 5 \times \log_5 7 \times \log_7 8 = \log_2 5 \times \frac{\log_2 7}{\log_2 5} \times \frac{\log_2 8}{\log_2 7}$

$= \log_2 8 = \log_2 2^3 = \boldsymbol{3}$

(5) $\log_3 2 \times \log_8 0.2 \times \log_5 9 = \frac{1}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 0.2}{\log_2 8} \times \frac{\log_2 9}{\log_2 5}$

$= \frac{1}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 \frac{1}{5}}{\log_2 2^3} \times \frac{\log_2 3^2}{\log_2 5}$

$= \frac{1}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 5^{-1}}{3} \times \frac{2\log_2 3}{\log_2 5}$

$= \boldsymbol{-\frac{2}{3}}$

(6) $\log_4 48 + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3} = \log_{2^2} (2^4 \times 3) + \log_{2^{-1}} 3^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \log_2 (2^4 \times 3) - \frac{1}{2} \log_2 3$

$= \frac{1}{2}(4 + \log_2 3) - \frac{1}{2} \log_2 3 = \boldsymbol{2}$

4 (1) $\log_2 6 = \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \boldsymbol{\frac{a+b}{a}}$

(2) $\log_2 24 = \frac{\log_{10} 24}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 2^3 + \log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \boldsymbol{\frac{3a+b}{a}}$

(3) $\log_6 9 = \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 6} = \frac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} 2 + \log_{10} 3} = \boldsymbol{\frac{2b}{a+b}}$

(4) $\log_4 \sqrt{3} = \frac{\log_{10} \sqrt{3}}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 3^{\frac{1}{2}}}{\log_{10} 2^2} = \frac{\frac{1}{2}b}{2a} = \boldsymbol{\frac{b}{4a}}$

(5) $\log_9 18 = \frac{\log_{10} 18}{\log_{10} 9} = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3^2}{\log_{10} 3^2} = \boldsymbol{\frac{a+2b}{2b}}$

(6) $\log_5 50 = \frac{\log_{10} 50}{\log_{10} 5} = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 5^2}{\log_{10} 5}$

$= \frac{\log_{10} 2 + 2(1 - \log_{10} 2)}{1 - \log_{10} 2} = \boldsymbol{\frac{2-a}{1-a}}$

기초 개념 평가

본문 | 028, 029쪽

01 $\boldsymbol{a > 0}$
02 **밑, 로그, 진수**
03 **3**
04 **−5**
05 **4**
06 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$
07 **0,** $\boldsymbol{a}$
08 **+**
09 **−**
10 $\boldsymbol{k}$
11 **1, 1, 5**
12 **8, 3, 3, 3**
13 **−3, 3**
14 **10, 10**
15 **밑**
16 **0.01, 넷째**
17 **가로줄, 세로줄**

기초 문제 평가

본문 | 030, 031쪽

1 ① $3^5 = 243 \Longleftrightarrow 5 = \log_3 243$

② $5^0 = 1 \Longleftrightarrow 0 = \log_5 1$

③ $(\sqrt{3})^2 = 3 \Longleftrightarrow 2 = \log_{\sqrt{3}} 3$

④ $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} = \log_5 \sqrt{5}$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

2 $\log_a 16 = 2$에서 $a^2 = 16$

이때 $a > 0$, $a \neq 1$이므로 $a = 4$

$\log_5 b = 2$에서 $5^2 = b$이므로 $b = 25$

$\therefore$ $\boldsymbol{a = 4}$, $\boldsymbol{b = 25}$

3 $\log_{a-1}(5-a)$에서

(i) (밑) > 0, (밑) $\neq 1$이므로

$a - 1 > 0$, $a - 1 \neq 1$

$\therefore a > 1$, $a \neq 2$

(ii) (진수) > 0이므로

$5 - a > 0 \qquad \therefore a < 5$

(i), (ii)에서 $1 < a < 5$, $a \neq 2$이므로 정수 a의 값을 모두 구하면 **3, 4**이다.

4 $\log_2(x+y) = 3$에서 $2^3 = x + y$

$\log_2 x + \log_2 y = 3$에서 $\log_2 xy = 3$이므로 $2^3 = xy$

$x + y = 8$, $xy = 8$이므로

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 8^2 - 2 \times 8 = \boldsymbol{48}$

5 $\frac{3}{2}\log_3 2-\log_3\sqrt{6}+\log_3\sqrt{3}$

$=\log_3 2^{\frac{3}{2}}-\log_3\sqrt{6}+\log_3\sqrt{3}$

$=\log_3 2\sqrt{2}-\log_3\sqrt{6}+\log_3\sqrt{3}$

$=\log_3\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\log_3 2$

따라서 간단히 한 것은 ⑤이다.

6 ③ $\log_{\sqrt{2}}8=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^3=2\times3=6$

④ $\log_3 42=\log_3(3\times2\times7)=1+\log_3 2+\log_3 7$

⑤ $\log_5\sqrt{10}=\log_5 10^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_5 10=\frac{1}{2}(1+\log_5 2)$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

7 $3\log_2 5+4\log_4 5+\log_{\sqrt{2}}5+\log_{\frac{1}{2}}5=a\log_2 5$에서

$3\log_2 5+4\log_4 5+\log_{\sqrt{2}}5+\log_{\frac{1}{2}}5$

$=3\log_2 5+4\log_{2^2}5+\log_{2^{\frac{1}{2}}}5+\log_{2^{-1}}5$

$=3\log_2 5+2\log_2 5+2\log_2 5-\log_2 5=6\log_2 5$

$6\log_2 5=a\log_2 5$이므로 $\boldsymbol{a=6}$

8 (1) $\log_4 27\times\log_9 25\times\log_5 16$

$=\log_{2^2}3^3\times\log_{3^2}5^2\times\log_5 2^4$

$=\frac{3}{2}\log_2 3\times\log_3 5\times4\log_5 2$

$=\frac{3}{2}\log_2 3\times\frac{\log_2 5}{\log_2 3}\times\frac{4}{\log_2 5}$

$=\frac{3}{2}\times4=\mathbf{6}$

(2) $(\log_4 9+\log_2 27)(\log_3 2+\log_9 8)$

$=(\log_{2^2}3^2+\log_2 3^3)(\log_3 2+\log_{3^2}2^3)$

$=(\log_2 3+3\log_2 3)\left(\log_3 2+\frac{3}{2}\log_3 2\right)$

$=4\log_2 3\times\frac{5}{2}\log_3 2=4\times\frac{5}{2}=\mathbf{10}$

9 $\log_{12}60=\frac{\log_2 60}{\log_2 12}=\frac{\log_2(2^2\times3\times5)}{\log_2(2^2\times3)}$

$=\frac{2+\log_2 3+\log_2 5}{2+\log_2 3}$

$\log_2 3=a$, $\log_3 5=b$이므로

$\log_2 5=\frac{\log_3 5}{\log_3 2}=\log_2 3\times\log_3 5=ab$

$\therefore \log_{12}60=\frac{2+\log_2 3+\log_2 5}{2+\log_2 3}=\frac{2+a+ab}{2+a}$

$=\frac{ab+a+2}{a+2}$

따라서 a, b로 나타낸 것은 ②이다.

다른 풀이

$\log_2 3=a$, $\log_3 5=b$에서

$\log_3 2=\frac{1}{a}$, $\log_3 5=b$

$\therefore \log_{12}60=\frac{\log_3 60}{\log_3 12}=\frac{\log_3(2^2\times3\times5)}{\log_3(2^2\times3)}$

$=\frac{2\log_3 2+1+\log_3 5}{2\log_3 2+1}=\frac{\frac{2}{a}+1+b}{\frac{2}{a}+1}$

$=\frac{2+a+ab}{2+a}=\frac{ab+a+2}{a+2}$

10 $\log_4 3\times\log_8 x=\log_8 3$에서

$\log_{2^2}3\times\log_{2^3}x=\log_{2^3}3$이므로

$\frac{1}{2}\log_2 3\times\frac{1}{3}\log_2 x=\frac{1}{3}\log_2 3$

$\log_2 x=2$ $\quad\therefore \boldsymbol{x=4}$

11 (1) $\log 2120+\log 0.0212$

$=\log(10^3\times2.12)+\log(10^{-2}\times2.12)$

$=3+\log 2.12-2+\log 2.12$

$=1+2\log 2.12$

$=1+2\times0.3263=\mathbf{1.6526}$

(2) $\log 212-\log 0.212$

$=\log(10^2\times2.12)-\log(10^{-1}\times2.12)$

$=2+\log 2.12-(-1+\log 2.12)=\mathbf{3}$

12 $\log(0.362\times341)$

$=\log 0.362+\log 341$

$=\log(10^{-1}\times3.62)+\log(10^2\times3.41)$

$=-1+\log 3.62+2+\log 3.41$

$=1+0.5587+0.5328=\mathbf{2.0915}$

03 지수함수와 로그함수

본문 | 032~037쪽

1-1 (1) ○　(2) ×

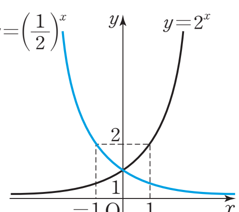
1-2 (1) $y=5^{-x}=(5^{-1})^x=\left(\frac{1}{5}\right)^x$에서 $y=a^x$ 꼴이므로 지수함수이다. (○)

(2) $y=a^x$ 꼴이 아니므로 지수함수가 아니다. (×)

2-1

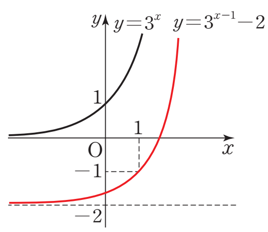
x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$\mathbf{\frac{1}{8}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	1	$\mathbf{2}$	$\mathbf{4}$	8	$\cdots$

2-2 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$이므로 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.
따라서 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

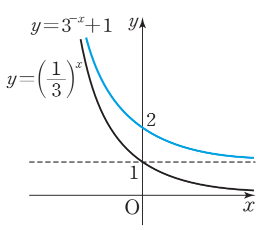


3-1 $\mathbf{2^x, 1, -2}$

3-2 (1) 함수 $y=3^{x-1}-2$의 그래프는 지수함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 **직선 $\boldsymbol{y=-2}$**이다.



(2) 함수 $y=3^{-x}+1$의 그래프는 지수함수 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 다음 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 **직선 $\boldsymbol{y=1}$**이다.



참고 함수 $y=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

4-1 (1) <　(2) >

4-2 (1) $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[7]{8}=\sqrt[7]{2^3}=2^{\frac{3}{7}}$
함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
이때 $\frac{1}{2}>\frac{3}{7}$이므로 $2^{\frac{1}{2}}>2^{\frac{3}{7}}$　　$\therefore \boldsymbol{\sqrt{2}>\sqrt[7]{8}}$

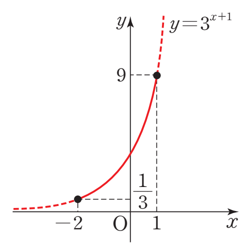
(2) $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{2^6}=2^2$, $\sqrt[4]{128}=\sqrt[4]{2^7}=2^{\frac{7}{4}}$
함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
이때 $2>\frac{7}{4}$이므로 $2^2>2^{\frac{7}{4}}$　　$\therefore \boldsymbol{\sqrt[3]{64}>\sqrt[4]{128}}$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$, $\left(\frac{1}{27}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^6$
함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
이때 $4<6$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^4>\left(\frac{1}{3}\right)^6$　　$\therefore \boldsymbol{\left(\frac{1}{3}\right)^4>\left(\frac{1}{27}\right)^2}$

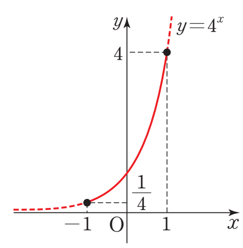
(4) $\sqrt[3]{0.25}=\sqrt[3]{(0.5)^2}=(0.5)^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[5]{0.5}=(0.5)^{\frac{1}{5}}$
함수 $y=(0.5)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
이때 $\frac{2}{3}>\frac{1}{5}$이므로 $(0.5)^{\frac{2}{3}}<(0.5)^{\frac{1}{5}}$
$\therefore \boldsymbol{\sqrt[3]{0.25}<\sqrt[5]{0.5}}$

5-1 **2, 1, $\boldsymbol{-1}$, 27**

5-2 (1) 함수 $y=3^{x+1}$은 (밑)>1이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
최댓값은
$x=1$일 때 $3^2=\mathbf{9}$
최솟값은
$x=-2$일 때 $3^{-1}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$



(2) 함수 $y=2^{3x}\times2^{-x}=2^{2x}=4^x$은 (밑)>1이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
최댓값은
$x=1$일 때 $4^1=\mathbf{4}$
최솟값은
$x=-1$일 때 $4^{-1}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

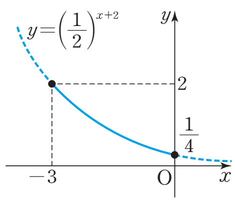


(3) $f(x)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$라 하면
$y=2^{f(x)}$에서 (밑)>1이므로
$f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$f(x)$의 최댓값은 $f(2)=4$,
$f(x)$의 최솟값은 $f(0)=0$이므로
함수 $y=2^{-x^2+4x}$에서
최댓값은
$f(x)$가 최대, 즉 $f(2)=4$일 때 $2^4=\mathbf{16}$
최솟값은
$f(x)$가 최소, 즉 $f(0)=0$일 때 $2^0=\mathbf{1}$

6-1 **3, 2, 4**

6-2 (1) 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$은

$0<$(밑)<1이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.



최댓값은

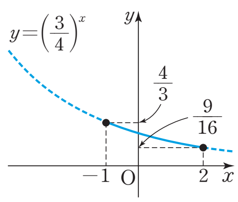
$x=-3$일 때 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\mathbf{2}$

최솟값은

$x=0$일 때 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\mathbf{\frac{1}{4}}$

(2) 함수 $y=3^x\times2^{-2x}=\left(\frac{3}{4}\right)^x$은

$0<$(밑)<1이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.



최댓값은

$x=-1$일 때 $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\mathbf{\frac{4}{3}}$

최솟값은

$x=2$일 때 $\left(\frac{3}{4}\right)^{2}=\mathbf{\frac{9}{16}}$

(3) $f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$라 하면

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$에서 $0<$(밑)<1이므로

$f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

$f(x)$의 최댓값은 $f(-3)=2$,

$f(x)$의 최솟값은 $f(-1)=-2$이므로

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x-1}$에서

최댓값은

$f(x)$가 최소, 즉 $f(-1)=-2$일 때 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=\mathbf{9}$

최솟값은

$f(x)$가 최대, 즉 $f(-3)=2$일 때 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=\mathbf{\frac{1}{9}}$

7-1 (1) **2, ○** (2) **0.5, ○** (3) **×**

7-2 (1) $y=\log_5 x$는 5를 밑으로 하는 로그함수이다. (○)

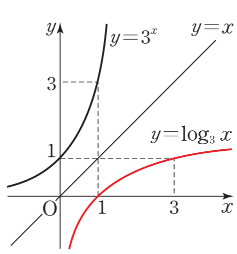
(2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 $\frac{1}{3}$을 밑으로 하는 로그함수이다. (○)

(3) $y=\log_3 2^x=x\log_3 2$는 $y=kx$(k는 상수) 꼴이므로 로그함수가 아니다. (×)

8-1 **역함수, $y=x$**

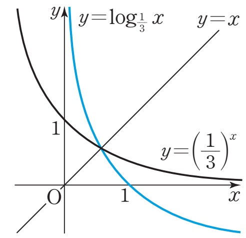
8-2 (1) 로그함수 $y=\log_3 x$는 지수함수 $y=3^x$의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 로그함수 $y=\log_3 x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



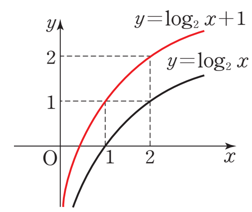
(2) 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 지수함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

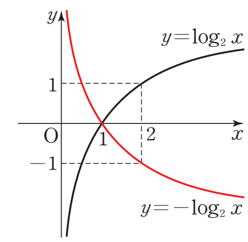


9-1 **-1, -1**

9-2 (1) 함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프는 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 **y축**이다.



(2) 함수 $y=-\log_2 x$의 그래프는 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 **y축**이다.



10-1 (1) $<$ (2) $>$

10-2 (1) $\log_2 5$, $2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9$

함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

이때 $5<9$이므로 $\log_2 5<\log_2 9$

$\therefore$ $\mathbf{\log_2 5<2\log_2 3}$

(2) $\log_3 25$, $\log_9 16=\log_{3^2} 4^2=\log_3 4$

함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

이때 $25>4$이므로 $\log_3 25>\log_3 4$

$\therefore$ $\mathbf{\log_3 25>\log_9 16}$

(3) $\log_{\frac{1}{3}} 4$, $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 5=\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5}$

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

이때 $4>\sqrt{5}$이므로 $\log_{\frac{1}{3}} 4<\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5}$

$\therefore$ $\mathbf{\log_{\frac{1}{3}} 4<\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 5}$

(4) $\log_{0.2} 10$, $\log_{0.04} 16=\log_{(0.2)^2} 4^2=\log_{0.2} 4$

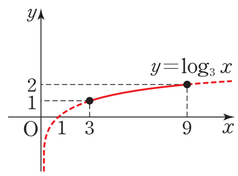
함수 $y=\log_{0.2} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

이때 $10>4$이므로 $\log_{0.2} 10<\log_{0.2} 4$

$\therefore$ $\mathbf{\log_{0.2} 10<\log_{0.04} 16}$

11-1 $\mathbf{3, 5, 0}$

11-2 (1) 함수 $y=\log_3 x$는 (밑)>1이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.



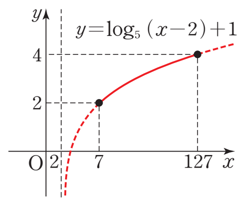
최댓값은

$x=9$일 때 $\log_3 9=\mathbf{2}$

최솟값은

$x=3$일 때 $\log_3 3=\mathbf{1}$

(2) 함수 $y=\log_5 (x-2)+1$은 (밑)>1이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.



최댓값은

$x=127$일 때

$\log_5 125+1=\mathbf{4}$

최솟값은

$x=7$일 때 $\log_5 5+1=\mathbf{2}$

(3) $f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$이라 하면

$y=\log_2 f(x)$에서 (밑)>1이므로

$f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$f(x)$의 최댓값은 $f(1)=f(3)=2$,

$f(x)$의 최솟값은 $f(2)=1$이므로

함수 $y=\log_2 (x^2-4x+5)$에서

최댓값은

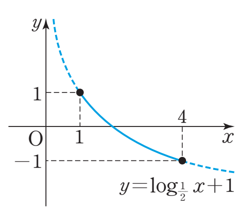
$f(x)$가 최대, 즉 $f(1)=f(3)=2$일 때 $\log_2 2=\mathbf{1}$

최솟값은

$f(x)$가 최소, 즉 $f(2)=1$일 때 $\log_2 1=\mathbf{0}$

12-1 $\mathbf{1, 7, -3}$

12-2 (1) 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x+1$은 $0<$(밑)<1이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.



최댓값은

$x=1$일 때 $\log_{\frac{1}{2}} 1+1=\mathbf{1}$

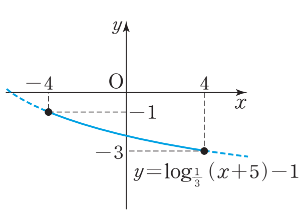
최솟값은

$x=4$일 때 $\log_{\frac{1}{2}} 4+1=-2+1=\mathbf{-1}$

(2) 함수

$y=\log_{\frac{1}{3}} (x+5)-1$

은 $0<$(밑)<1이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.



최댓값은

$x=-4$일 때 $\log_{\frac{1}{3}} 1-1=\mathbf{-1}$

최솟값은

$x=4$일 때 $\log_{\frac{1}{3}} 9-1=-2-1=\mathbf{-3}$

(3) $f(x)=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$라 하면

$y=\log_{\frac{1}{2}} f(x)$에서 $0<$(밑)<1이므로

$f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

$f(x)$의 최댓값은 $f(3)=8$,

$f(x)$의 최솟값은 $f(1)=4$이므로

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} (x^2-2x+5)$에서

최댓값은

$f(x)$가 최소, 즉 $f(1)=4$일 때 $\log_{\frac{1}{2}} 4=\mathbf{-2}$

최솟값은

$f(x)$가 최대, 즉 $f(3)=8$일 때 $\log_{\frac{1}{2}} 8=\mathbf{-3}$

기초 개념 평가

본문 | 038, 039쪽

01 $\boldsymbol{a>0}$	02 $\boldsymbol{a}$**, 지수함수**
03 **실수, 양**	04 **증가**
05 **감소**	06 $\boldsymbol{x}$**축**
07 **최댓값, 최솟값**	08 **최솟값, 최댓값**
09 **일대일대응**	10 $\boldsymbol{x=\log_a y,\ y=\log_a x}$
11 **양, 실수**	12 **증가**
13 **감소**	14 $\boldsymbol{y}$**축**
15 **최댓값, 최솟값**	16 **최솟값, 최댓값**

기초 문제 평가

본문 | 040, 041쪽

1 ③ $f(x)=a^x$에서 $0<a<1$이므로 x의 값이 증가하면 함수 $f(x)$의 값은 감소한다.

즉, $x<y$이면 $f(x)>f(y)$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

2 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+5$의 그래프는 지수함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프의 점근선은 x축, 즉 $y=0$이므로

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+5$의 그래프의 점근선은 **직선** $\boldsymbol{y=5}$이다.

3 함수 $f(x)=a^{x+1}-2$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로
$f(0)=a-2=1$ $\therefore a=3$
$\therefore f(x)=3^{x+1}-2$
① $f(1)=3^2-2=7$이므로 점 $(1, 6)$은 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점이 아니다.
② $f(1)=3^2-2=7$이므로 점 $(1, 7)$은 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점이다.
③ $f(2)=3^3-2=25$이므로 점 $(2, 1)$은 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점이 아니다.
④ $f(3)=3^4-2=79$이므로 점 $(3, 9)$는 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점이 아니다.
⑤ $f(3)=3^4-2=79$이므로 점 $(3, 11)$은 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점이 아니다.
따라서 그래프 위의 점인 것은 ②이다.

4 함수 $f(x)=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=2^{x-a}$ ……㉠
또 함수 $g(x)=2^{x-2}+3$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=2^{x-2}+3+b$ ……㉡
㉠과 ㉡의 그래프가 겹쳐지므로
$2^{x-a}=2^{x-2}+3+b$ $\therefore a=2, b=-3$
$\therefore ab=2\times(-3)=\mathbf{-6}$

5 A, B, C를 밑이 2인 거듭제곱의 꼴로 나타내면
$A=2^{\frac{3}{2}}, B=2^{\frac{5}{3}}, C=(2^{-1})^{-\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$
지수함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
이때 $\frac{5}{3}>\frac{3}{2}>\frac{3}{4}$이므로 $2^{\frac{5}{3}}>2^{\frac{3}{2}}>2^{\frac{3}{4}}$
$\therefore B>A>C$
따라서 대소 관계를 바르게 나타낸 것은 ③이다.

6 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+8x+a}$에서 $f(x)=-x^2+8x+a$라 하면
$0<(\text{밑})<1$이므로 $f(x)$가 최대일 때, y는 최소이다.
$f(x)=-x^2+8x+a=-(x-4)^2+a+16$
$f(x)$의 최댓값은 $f(4)=a+16$이고, y의 최솟값이 2이므로
$\left(\frac{1}{2}\right)^{a+16}=2$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+16}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$
즉, $a+16=-1$이므로 $\mathbf{a=-17}$

7 ② $a>1$일 때, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.
$0<a<1$일 때, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.
따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

8 함수 $y=2^{x+a}+3$을 x에 대하여 나타내면
$2^{x+a}=y-3$에서 $x+a=\log_2(y-3)$
$\therefore x=\log_2(y-3)-a$
x와 y를 서로 바꾸면 역함수는
$y=\log_2(x-3)-a$ ……㉠
㉠이 $y=\log_2(x-b)+2$와 같아야 하므로
$a=-2, b=3$ $\therefore \mathbf{a+b=1}$

9 함수 $y=\log_2(x-a)+b$의 그래프에서 점근선이 직선 $x=-1$이므로 $a=-1$
$\therefore y=\log_2(x+1)+b$ ……㉠
㉠의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로
$2=\log_2 1+b$ $\therefore b=2$
$\therefore \mathbf{a+b=1}$

10 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=\log_2 x$ $\therefore y=-\log_2 x$
따라서 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 ③이다.

11 $y=\log_2(2x-4)=\log_2 2(x-2)=\log_2(x-2)+1$이므로 함수 $y=\log_2(2x-4)$의 그래프는 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $m=2, n=1$이므로
$m+n=2+1=\mathbf{3}$

12 $f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$라 하면
$y=\log_3 f(x)$에서 $(\text{밑})>1$이므로
$f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$f(x)$의 최댓값은 $f(3)=6$,
$f(x)$의 최솟값은 $f(1)=2$이므로
함수 $y=\log_3(x^2-2x+3)$에서
최댓값은
$f(x)$가 최대, 즉 $f(3)=6$일 때, $M=\log_3 6$
최솟값은
$f(x)$가 최소, 즉 $f(1)=2$일 때, $m=\log_3 2$
$\therefore M-m=\log_3 6-\log_3 2=\log_3 3=\mathbf{1}$

04 지수함수와 로그함수의 활용

기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 043쪽

1-1 $\mathbf{9, 3}$

1-2 (1) $-x+3=3x-9$에서 $-x-3x=-9-3$이므로
$-4x=-12$ $\quad\therefore \boldsymbol{x=3}$

(2) $6=9x-(2x+1)$에서 $6=7x-1$이므로
$-7x=-7$ $\quad\therefore \boldsymbol{x=1}$

2-1 $\mathbf{2, 2}$

2-2 (1) $x^2=4x-4$에서 $x^2-4x+4=0$이므로
$(x-2)^2=0$ $\quad\therefore \boldsymbol{x=2}$

(2) $9x^2=4$에서 $9x^2-4=0$이므로
$(3x+2)(3x-2)=0$
$\therefore \boldsymbol{x=-\frac{2}{3}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{2}{3}}$

3-1 $\mathbf{-2, 1}$

3-2 (1) $-x-3<x+5$에서 $-x-x<5+3$이므로
$-2x<8$ $\quad\therefore \boldsymbol{x>-4}$

(2) $2x+7\le-4x-5$에서 $2x+4x\le-5-7$이므로
$6x\le-12$ $\quad\therefore \boldsymbol{x\le-2}$

4-1 $2, -2$

4-2 (1) $x^2-20<x$에서 $x^2-x-20<0$이므로
$(x+4)(x-5)<0$ $\quad\therefore \boldsymbol{-4<x<5}$

(2) $x^2\ge x+6$에서 $x^2-x-6\ge0$이므로
$(x+2)(x-3)\ge0$ $\quad\therefore \boldsymbol{x\le-2}$ **또는** $\boldsymbol{x\ge3}$

본문 | 044~047쪽

1-1 (1) $\boldsymbol{x, -2}$ (2) $\mathbf{1, 1}$

1-2 (1) $2^{-3x+2}=2$에서 $-3x+2=1$이므로
$-3x=-1$ $\quad\therefore \boldsymbol{x=\frac{1}{3}}$

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x+10}$에서 $x=-x+10$이므로
$2x=10$ $\quad\therefore \boldsymbol{x=5}$

(3) $3^{2x-3}=3^{-x^2+5}$에서 $2x-3=-x^2+5$이므로
$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$
$\therefore \boldsymbol{x=-4}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}$에서 $x^2-x=4-x$이므로
$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$
$\therefore \boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$

2-1 (1) $\mathbf{2, 5}$ (2) $\boldsymbol{\frac{1}{5}, -5}$

2-2 (1) $2^x=\frac{1}{8}$에서 $\frac{1}{8}=2^{-3}$이므로
주어진 방정식은 $2^x=2^{-3}$
양변의 밑이 2로 같으므로 $\boldsymbol{x=-3}$

(2) $2^x=2\sqrt{2}$에서 $2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$이므로
주어진 방정식은 $2^x=2^{\frac{3}{2}}$
양변의 밑이 2로 같으므로 $\boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$

(3) $0.3^{x+2}=0.09$에서 $0.09=0.3^2$이므로
주어진 방정식은 $0.3^{x+2}=0.3^2$
양변의 밑이 0.3으로 같으므로 $x+2=2$
$\therefore \boldsymbol{x=0}$

(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+1}=27$에서 $27=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$이므로
주어진 방정식은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$
양변의 밑이 $\frac{1}{3}$로 같으므로 $-x+1=-3$
$\therefore \boldsymbol{x=4}$

3-1 (1) $\mathbf{10, 2}$ (2) $\mathbf{3, -2}$

3-2 (1) $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$이므로 주어진 부등식은 $3^x\ge3^{\frac{1}{2}}$
양변의 밑이 3으로 같고 1보다 크므로
$\boldsymbol{x\ge\frac{1}{2}}$

(2) $243=3^5$이므로 주어진 부등식은 $3^{2x-1}>3^5$
양변의 밑이 3으로 같고 1보다 크므로
$2x-1>5$ $\quad\therefore \boldsymbol{x>3}$

(3) $4^{2x-3}=(2^2)^{2x-3}=2^{4x-6}$이므로
주어진 부등식은 $2^{3x}<2^{4x-6}$
양변의 밑이 2로 같고 1보다 크므로
$3x<4x-6$ $\quad\therefore \boldsymbol{x>6}$

(4) $9^{x^2+x}=(3^2)^{x^2+x}=3^{2x^2+2x}$이므로
주어진 부등식은 $3^{x+3}\le3^{2x^2+2x}$
양변의 밑이 3으로 같고 1보다 크므로
$x+3\le2x^2+2x$, $2x^2+x-3\ge0$
$(2x+3)(x-1)\ge0$
$\therefore \boldsymbol{x\le-\frac{3}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x\ge1}$

4-1 (1) $\mathbf{0.1, 3}$ (2) $\boldsymbol{\frac{1}{7}, -1}$

4-2 (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}<\frac{1}{64}$에서 $\frac{1}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^6$이므로
주어진 부등식은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{2}\right)^6$
양변의 밑이 $\frac{1}{2}$로 같고 1보다 작으므로
$x+2>6$ $\quad\therefore \boldsymbol{x>4}$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0.25$에서 $0.25=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$이므로

주어진 부등식은 $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^2$

양변의 밑이 $\frac{1}{2}$로 같고 1보다 작으므로

$\boldsymbol{x<2}$

(3) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-1} \le \left(\frac{1}{27}\right)^{x+1}$에서

$\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-2}$, $\left(\frac{1}{27}\right)^{x+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3}$이므로

주어진 부등식은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-2} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3}$

양변의 밑이 $\frac{1}{3}$로 같고 1보다 작으므로

$4x-2 \ge 3x+3 \qquad \therefore \boldsymbol{x \ge 5}$

(4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} \ge \left(\frac{1}{49}\right)^{x^2-2}$에서

$\left(\frac{1}{49}\right)^{x^2-2}=\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2-4}$이므로

주어진 부등식은 $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} \ge \left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2-4}$

양변의 밑이 $\frac{1}{7}$로 같고 1보다 작으므로

$2x \le 2x^2-4$, $x^2-x-2 \ge 0$

$(x+1)(x-2) \ge 0 \qquad \therefore$ $\boldsymbol{x \le -1}$ **또는** $\boldsymbol{x \ge 2}$

5-1 **2, 5, 5, 5**

5-2 (1) (진수)>0에서 $x>0$

로그의 정의에 따라 $x=4^{-2}$, $x=\frac{1}{16}$

이때 $x=\frac{1}{16}$은 진수 조건 $x>0$을 만족시키므로

주어진 방정식의 해이다.

$\therefore \boldsymbol{x=\frac{1}{16}}$

(2) (진수)>0에서 $2x+1>0$, 즉 $x>-\frac{1}{2}$

로그의 정의에 따라 $2x+1=3^{-1}$, $x=-\frac{1}{3}$

이때 $x=-\frac{1}{3}$은 진수 조건 $x>-\frac{1}{2}$을 만족시키므로

주어진 방정식의 해이다.

$\therefore \boldsymbol{x=-\frac{1}{3}}$

(3) (진수)>0에서 $-2x+1>0$, 즉 $x<\frac{1}{2}$

로그의 정의에 따라 $-2x+1=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

$-2x+1=27$, $x=-13$

이때 $x=-13$은 진수 조건 $x<\frac{1}{2}$을 만족시키므로

주어진 방정식의 해이다.

$\therefore \boldsymbol{x=-13}$

6-1 $\boldsymbol{3x}$**, 2, 2**

6-2 (1) (진수)>0에서 $2x-3>0$, 즉 $x>\frac{3}{2}$

$\log_{10}(2x-3)=\log_{10}7$에서

로그함수의 성질에 따라 $2x-3=7$, $x=5$

이때 진수 조건 $x>\frac{3}{2}$에서 $\boldsymbol{x=5}$

(2) (진수)>0에서 $x+2>0$, $x>0$, 즉 $x>0$

$\log_2(x+2)+\log_2 x=\log_2 x(x+2)$이므로

$\log_2 x(x+2)=3$

로그의 정의에 따라 $x(x+2)=2^3$, $x^2+2x-8=0$

$(x+4)(x-2)=0$, $x=-4$ 또는 $x=2$

이때 진수 조건 $x>0$에서 $\boldsymbol{x=2}$

(3) (진수)>0에서 $x-1>0$, $3-x>0$, 즉 $1<x<3$

$\log_2(x-1)=2\log_4(x-1)=\log_4(x-1)^2$이므로

$\log_4(x-1)^2=\log_4(3-x)$

로그함수의 성질에 따라

$(x-1)^2=3-x$, $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$, $x=-1$ 또는 $x=2$

이때 진수 조건 $1<x<3$에서 $\boldsymbol{x=2}$

7-1 **3, 4, 13**

7-2 (1) (진수)>0에서 $2x-1>0$, $x+4>0$, 즉

$x>\frac{1}{2}$ ······㉠

$\log_3(2x-1)>\log_3(x+4)$에서

양변의 밑이 3으로 같고 1보다 크므로

$2x-1>x+4$, $x>5$ ······㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는 $\boldsymbol{x>5}$

(2) (진수)>0에서 $4-x>0$, 즉 $x<4$ ······㉠

$\log_2(4-x)<1$에서 $1=\log_2 2$이므로

$\log_2(4-x)<\log_2 2$

양변의 밑이 2로 같고 1보다 크므로

$4-x<2$, $x>2$ ······㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$\boldsymbol{2<x<4}$

(3) (진수)>0에서 $x>0$, $x-2>0$, 즉

$x>2$ ······㉠

$\log_2 x+\log_2(x-2) \le \log_2 3$에서

$\log_2 x+\log_2(x-2)=\log_2 x(x-2)$이므로

$\log_2 x(x-2) \le \log_2 3$

양변의 밑이 2로 같고 1보다 크므로

$x(x-2) \le 3$, $x^2-2x-3 \le 0$

$(x+1)(x-3) \le 0$, $-1 \le x \le 3$ ······㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$\boldsymbol{2<x \le 3}$

8-1 $\frac{1}{3}$, 2, 11

8-2 (1) (진수)>0에서 $3x-1>0$, $2x+1>0$, 즉

$x>\frac{1}{3}$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(3x-1)\ge\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)$에서

양변의 밑이 $\frac{1}{3}$로 같고 1보다 작으므로

$3x-1\le 2x+1$, $x\le 2$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$\boldsymbol{\frac{1}{3}<x\le 2}$

(2) (진수)>0에서 $x-1>0$, 즉 $x>1$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<1$에서 $1=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

양변의 밑이 $\frac{1}{2}$로 같고 1보다 작으므로

$x-1>\frac{1}{2}$, $x>\frac{3}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$\boldsymbol{x>\frac{3}{2}}$

(3) (진수)>0에서 $x>0$, $x-8>0$, 즉

$x>8$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}(x-8)\le -2$에서

$\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}(x-8)=\log_{\frac{1}{3}}x(x-8)$,

$-2=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{3}}9$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}x(x-8)\le\log_{\frac{1}{3}}9$

양변의 밑이 $\frac{1}{3}$로 같고 1보다 작으므로

$x(x-8)\ge 9$, $x^2-8x-9\ge 0$

$(x+1)(x-9)\ge 0$, $x\le -1$ 또는 $x\ge 9$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$\boldsymbol{x\ge 9}$

집중 연습

본문 | 048, 049쪽

1 (1) $3^x=243$에서 $243=3^5$이므로

주어진 방정식은 $3^x=3^5$

양변의 밑이 3으로 같으므로 $\boldsymbol{x=5}$

(2) $5^{2x+1}=125$에서 $125=5^3$이므로

주어진 방정식은 $5^{2x+1}=5^3$

양변의 밑이 5로 같으므로

$2x+1=3$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x=1}$

(3) $5^{-x+1}=\frac{1}{25}$에서 $\frac{1}{25}=5^{-2}$이므로

주어진 방정식은 $5^{-x+1}=5^{-2}$

양변의 밑이 5로 같으므로

$-x+1=-2$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x=3}$

(4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x=81$에서 $\left(\frac{1}{9}\right)^x=(3^{-2})^x=3^{-2x}$, $81=3^4$이므로

주어진 방정식은 $3^{-2x}=3^4$

양변의 밑이 3으로 같으므로

$-2x=4$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x=-2}$

(5) $3^{2x}=9\sqrt{3}$에서 $9\sqrt{3}=3^2\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{2}}$이므로

주어진 방정식은 $3^{2x}=3^{\frac{5}{2}}$

양변의 밑이 3으로 같으므로

$2x=\frac{5}{2}$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x=\frac{5}{4}}$

(6) $9^{-2x+1}=\sqrt{27}$에서

$9^{-2x+1}=3^{-4x+2}$, $\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=3^{\frac{3}{2}}$이므로

주어진 방정식은 $3^{-4x+2}=3^{\frac{3}{2}}$

양변의 밑이 3으로 같으므로

$-4x+2=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x=\frac{1}{8}}$

2 (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$에서

양변의 밑이 $\frac{1}{2}$로 같고 1보다 작으므로

$x+1<2x-1$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x>2}$

(2) $2^{x+1}>4$에서 $4=2^2$이므로

주어진 부등식은 $2^{x+1}>2^2$

양변의 밑이 2로 같고 1보다 크므로

$x+1>2$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x>1}$

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x\le\frac{1}{8}$에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$, $\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$이므로

주어진 부등식은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\le\left(\frac{1}{2}\right)^3$

양변의 밑이 $\frac{1}{2}$로 같고 1보다 작으므로

$2x\ge 3$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x\ge\frac{3}{2}}$

(4) $5^{2x}\le 625$에서 $625=5^4$이므로

주어진 부등식은 $5^{2x}\le 5^4$

양변의 밑이 5로 같고 1보다 크므로

$2x\le 4$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x\le 2}$

(5) $0.2^x>0.04$에서 $0.04=0.2^2$이므로

주어진 부등식은 $0.2^x>0.2^2$

양변의 밑이 0.2로 같고 1보다 작으므로

$\boldsymbol{x<2}$

(6) $2^{2x-1}<4^{-x+1}$에서 $4^{-x+1}=2^{-2x+2}$이므로

주어진 부등식은 $2^{2x-1}<2^{-2x+2}$

양변의 밑이 2로 같고 1보다 크므로

$2x-1<-2x+2$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x<\frac{3}{4}}$

3 (1) (진수)>0에서 $2x>0$, 즉 $x>0$

로그의 정의에 따라 $2x=3$, $x=\frac{3}{2}$

이때 $x=\frac{3}{2}$은 진수 조건 $x>0$을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

$\therefore$ $\boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$

(2) (진수)>0에서 $2+x>0$, 즉 $x>-2$

로그의 정의에 따라 $2+x=3^4$, 즉 $x=79$

이때 $x=79$는 진수 조건 $x>-2$를 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

$\therefore$ $\boldsymbol{x=79}$

(3) (진수)>0에서 $2-x>0$, 즉 $x<2$

로그의 정의에 따라 $2-x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$, 즉 $x=-25$

이때 $x=-25$는 진수 조건 $x<2$를 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-25}$

(4) (진수)>0에서 $x-1>0$, $x+1>0$, $x+5>0$, 즉 $x>1$

$\log_3(x-1)+\log_3(x+1)=\log_3(x-1)(x+1)$이므로

$\log_3(x-1)(x+1)=\log_3(x+5)$

로그함수의 성질에 따라 $(x-1)(x+1)=x+5$

$x^2-1=x+5$, $x^2-x-6=0$,

$(x+2)(x-3)=0$, $x=-2$ 또는 $x=3$

이때 진수 조건 $x>1$에서 $\boldsymbol{x=3}$

(5) (진수)>0에서 $x>0$, $x-4>0$, 즉 $x>4$

$\log_5 x+\log_5(x-4)=\log_5 x(x-4)$이므로

$\log_5 x(x-4)=1$

로그의 정의에 따라 $x(x-4)=5$, $x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$, $x=-1$ 또는 $x=5$

이때 진수 조건 $x>4$에서 $\boldsymbol{x=5}$

(6) (진수)>0에서 $x-2>0$, $4-x>0$, 즉 $2<x<4$

$\log_3(x-2)=2\log_9(x-2)=\log_9(x-2)^2$이므로

$\log_9(x-2)^2=\log_9(4-x)$

로그함수의 성질에 따라 $(x-2)^2=4-x$, $x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$, $x=0$ 또는 $x=3$

이때 진수 조건 $2<x<4$에서 $\boldsymbol{x=3}$

4 (1) (진수)>0에서 $x>0$ ……㉠

$\log_{10}x>3$에서 $3=\log_{10}10^3=\log_{10}1000$이므로

$\log_{10}x>\log_{10}1000$

양변의 밑이 10으로 같고 1보다 크므로

$x>1000$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$\boldsymbol{x>1000}$

(2) (진수)>0에서 $x-1>0$, 즉 $x>1$ ……㉠

$\log_{0.1}(x-1)>-1$에서

$-1=\log_{0.1}0.1^{-1}=\log_{0.1}10$이므로

$\log_{0.1}(x-1)>\log_{0.1}10$

양변의 밑이 0.1로 같고 1보다 작으므로

$x-1<10$, $x<11$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$\boldsymbol{1<x<11}$

(3) (진수)>0에서 $x-5>0$, 즉 $x>5$ ……㉠

$\log_3(x-5)<2$에서 $2=\log_3 3^2=\log_3 9$이므로

$\log_3(x-5)<\log_3 9$

양변의 밑이 3으로 같고 1보다 크므로

$x-5<9$, $x<14$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$\boldsymbol{5<x<14}$

(4) (진수)>0에서 $x^2+3x>0$, $x(x+3)>0$, 즉

$x<-3$ 또는 $x>0$ ……㉠

양변의 밑이 3으로 같고 1보다 크므로

$x^2+3x<4$, $x^2+3x-4<0$

$(x+4)(x-1)<0$, $-4<x<1$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$\boldsymbol{-4<x<-3}$ **또는** $\boldsymbol{0<x<1}$

(5) (진수)>0에서 $x-1>0$, $x-3>0$, 즉 $x>3$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x-3)<-1$에서

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x-3)=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)(x-3)$,

$-1=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{3}}3$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)(x-3)<\log_{\frac{1}{3}}3$

양변의 밑이 $\frac{1}{3}$로 같고 1보다 작으므로

$(x-1)(x-3)>3$, $x^2-4x>0$

$x(x-4)>0$, $x<0$ 또는 $x>4$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$\boldsymbol{x>4}$

(6) (진수)>0에서 $x-1>0$, $2x+1>0$, 즉 $x>1$ ……㉠

$\log_2(x-1)\le\log_4(2x+1)$에서

$\log_2(x-1)=2\log_4(x-1)=\log_4(x-1)^2$이므로

$\log_4(x-1)^2\le\log_4(2x+1)$

양변의 밑이 4로 같고 1보다 크므로

$(x-1)^2\le 2x+1$, $x^2-4x\le 0$

$x(x-4)\le 0$, $0\le x\le 4$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$\boldsymbol{1<x\le 4}$

기초 개념 평가

본문 | 050, 051쪽

01 x_1	02 **2, 3**
03 밑	04 $<$
05 $>$	06 $<$
07 $>$	08 a^b
09 x_2	10 밑
11 $<$	12 $>$
13 $<$	14 $>$

기초 문제 평가

본문 | 052, 053쪽

1 (1) $4^{x+2}=8^x$에서 $4^{x+2}=2^{2x+4}$, $8^x=2^{3x}$이므로

주어진 방정식은 $2^{2x+4}=2^{3x}$

양변의 밑이 2로 같으므로

$2x+4=3x \quad \therefore \boldsymbol{x=4}$

(2) $0.75^x=\dfrac{256}{81}$에서

$0.75^x=\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$, $\dfrac{256}{81}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^4=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-4}$이므로

주어진 방정식은 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-4}$

양변의 밑이 $\dfrac{3}{4}$으로 같으므로 $\boldsymbol{x=-4}$

2 (1) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^x=5^{1-x^2}$에서 $\left(\dfrac{1}{25}\right)^x=5^{-2x}$이므로

주어진 방정식은 $5^{-2x}=5^{1-x^2}$

양변의 밑이 5로 같으므로

$-2x=1-x^2 \quad \therefore x^2-2x-1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이 방정식의 모든 근의 합은 **2**이다.

(2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x(x-1)}=\left(\dfrac{1}{8}\right)^{2-x}$에서

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x(x-1)}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x^2-2x}$, $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{2-x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6-3x}$이므로

주어진 방정식은 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x^2-2x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6-3x}$

양변의 밑이 $\dfrac{1}{2}$로 같으므로

$2x^2-2x=6-3x \quad \therefore 2x^2+x-6=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이 방정식의 모든 근의 합은 $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$이다.

3 $4^x=2^{x^2+a}$에서 $2^{2x}=2^{x^2+a}$이므로 $2x=x^2+a$

즉, $x^2-2x+a=0$의 한 근이 -1이므로

$x=-1$을 대입하면 $1+2+a=0 \quad \therefore a=-3$

$a=-3$을 이차방정식 $x^2-2x+a=0$에 대입하면

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 다른 한 근은 **3**이다.

4 (1) $2^{3x}\geq 4^{2x-3}$에서 $4^{2x-3}=2^{4x-6}$이므로

주어진 부등식은 $2^{3x}\geq 2^{4x-6}$

양변의 밑이 2로 같고 1보다 크므로

$3x\geq 4x-6 \quad \therefore \boldsymbol{x\leq 6}$

(2) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x}<\left(\dfrac{4}{9}\right)^{3x-1}$에서 $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{3x-1}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{6x-2}$이므로

주어진 부등식은 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{6x-2}$

양변의 밑이 $\dfrac{2}{3}$로 같고 1보다 작으므로

$2x>6x-2 \quad \therefore \boldsymbol{x<\frac{1}{2}}$

(3) $5^{-4+x^2}\leq 125^x$에서 $125^x=5^{3x}$이므로

주어진 부등식은 $5^{-4+x^2}\leq 5^{3x}$

양변의 밑이 5로 같고 1보다 크므로

$-4+x^2\leq 3x$, $x^2-3x-4\leq 0$

$(x+1)(x-4)\leq 0 \quad \therefore \boldsymbol{-1\leq x\leq 4}$

(4) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{2x}>\left(\dfrac{1}{49}\right)^{x^2-2}$에서

$\left(\dfrac{1}{49}\right)^{x^2-2}=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{2x^2-4}$이므로

주어진 부등식은 $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{2x}>\left(\dfrac{1}{7}\right)^{2x^2-4}$

양변의 밑이 $\dfrac{1}{7}$로 같고 1보다 작으므로

$2x<2x^2-4$, $x^2-x-2>0$

$(x+1)(x-2)>0 \quad \therefore \boldsymbol{x<-1}$ **또는** $\boldsymbol{x>2}$

5 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{f(x)}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{g(x)}$에서

양변의 밑이 $\dfrac{1}{3}$로 같고 1보다 작으므로 $f(x)<g(x)$

주어진 그래프에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=g(x)$보다 아랫쪽에 있는 x의 값의 범위는 $-2<x<1$

따라서 구하는 해는 ③이다.

6 (1) (진수)>0에서 $x-2>0$, $x>0$, 즉 $x>2$

$\log_{\frac{1}{5}} x+1=\log_{\frac{1}{5}} x+\log_{\frac{1}{5}} \dfrac{1}{5}=\log_{\frac{1}{5}} \dfrac{x}{5}$이므로

$\log_{\frac{1}{5}} (x-2)=\log_{\frac{1}{5}} \dfrac{x}{5}$

로그함수의 성질에 따라 $x-2=\dfrac{x}{5}$, $x=\dfrac{5}{2}$

이때 $x=\dfrac{5}{2}$는 진수 조건 $x>2$를 만족시키므로

주어진 방정식의 해이다. $\quad \therefore \boldsymbol{x=\frac{5}{2}}$

(2) (진수)>0에서 $x>0$, $x+3>0$, $x+8>0$, 즉 $x>0$
$\log x+\log(x+3)=\log x(x+3)$이므로
$\log x(x+3)=\log(x+8)$
로그함수의 성질에 따라 $x(x+3)=x+8$
$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$
$x=-4$ 또는 $x=2$
이때 진수 조건 $x>0$에서 $\boldsymbol{x=2}$

(3) (진수)>0에서 $x-5>0$, $x-2>0$, 즉 $x>5$
$\log_2(x-5)=2\log_4(x-5)=\log_4(x-5)^2$,
$\log_4(x-2)+1=\log_4(x-2)+\log_4 4$
$=\log_4 4(x-2)$
이므로 $\log_4(x-5)^2=\log_4 4(x-2)$
로그함수의 성질에 따라 $(x-5)^2=4(x-2)$
$x^2-14x+33=0$, $(x-3)(x-11)=0$
$x=3$ 또는 $x=11$
이때 진수 조건 $x>5$에서 $\boldsymbol{x=11}$

7 $\log x+\log(x+a)=1+\log(a+1)$의 근이 4이므로
$x=4$를 대입하면
$\log 4+\log(4+a)=1+\log(a+1)$
$\log 4(4+a)=\log 10(a+1)$
로그함수의 성질에 따라 $4(4+a)=10(a+1)$
$16+4a=10a+10$ $\quad\therefore \boldsymbol{a=1}$

8 $g(9)=f^{-1}(9)=k$라 하면 $f(k)=9$
$f(k)=5\log_3(k+3)-1$이므로
$5\log_3(k+3)-1=9$, $5\log_3(k+3)=10$
$\log_3(k+3)=2$, $k+3=3^2$, $k=6$ $\quad\therefore \boldsymbol{g(9)=6}$

9 (1) (진수)>0에서 $x+4>0$, 즉 $x>-4$ ……㉠
$\log_{\frac{1}{2}}(x+4)>-2$에서
$-2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{2}}4$이므로
$\log_{\frac{1}{2}}(x+4)>\log_{\frac{1}{2}}4$
양변의 밑이 $\frac{1}{2}$로 같고 1보다 작으므로
$x+4<4$, $x<0$ ……㉡
㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는
$\boldsymbol{-4<x<0}$

(2) (진수)>0에서 $x+1>0$, 즉 $x>-1$ ……㉠
$2\log(x+1)\le\log(x+1)+1$에서
$2\log(x+1)=\log(x+1)^2$,
$\log(x+1)+1=\log 10(x+1)$이므로
$\log(x+1)^2\le\log 10(x+1)$
양변의 밑이 10으로 같고 1보다 크므로
$(x+1)^2\le 10(x+1)$, $x^2-8x-9\le 0$
$(x+1)(x-9)\le 0$, $-1\le x\le 9$ ……㉡
㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는
$\boldsymbol{-1<x\le 9}$

(3) (진수)>0에서 $x-1>0$, $3-x>0$, 즉
$1<x<3$ ……㉠
$\log_2(x-1)>\log_4(3-x)$에서
$\log_2(x-1)=2\log_4(x-1)=\log_4(x-1)^2$이므로
$\log_4(x-1)^2>\log_4(3-x)$
양변의 밑이 4로 같고 1보다 크므로
$(x-1)^2>3-x$, $x^2-x-2>0$
$(x+1)(x-2)>0$, $x<-1$ 또는 $x>2$ ……㉡
㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는
$\boldsymbol{2<x<3}$

10 (진수)>0에서 $x-3>0$, $x+1>0$, 즉
$x>3$ ……㉠
$\log_3(x-3)+\log_3(x+1)<\log_3 4+1$에서
$\log_3(x-3)(x+1)<\log_3 12$
양변의 밑이 3으로 같고 1보다 크므로
$(x-3)(x+1)<12$, $x^2-2x-15<0$
$(x+3)(x-5)<0$, $-3<x<5$ ……㉡
㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는 $3<x<5$
주어진 부등식의 해가 $a<x<b$이므로
$a=3$, $b=5$ $\quad\therefore \boldsymbol{a+b=8}$

11 (진수)>0에서 $x+3>0$, $1-x>0$, 즉
$-3<x<1$ ……㉠
$\log_a(x+3)>\log_a(1-x)+1$에서
$\log_a(x+3)>\log_a a(1-x)$
양변의 밑이 a로 같고 1보다 크므로
$x+3>a(1-x)$, $(a+1)x>a-3$
이때 $a>1$이므로 $x>\frac{a-3}{a+1}$ ……㉡
주어진 부등식의 해가 $-\frac{1}{3}<x<1$이므로
㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는
$\frac{a-3}{a+1}<x<1$
$\frac{a-3}{a+1}=-\frac{1}{3}$, $3(a-3)=-(a+1)$
$4a=8$ $\quad\therefore \boldsymbol{a=2}$

05 삼각함수

기초 개념 피드백 & TEST

본문 | 057쪽

1-1 (1) $\overline{\mathbf{AC}}$, **5** (2) $\overline{\mathbf{BC}}$, **12** (3) $\overline{\mathbf{BC}}$, **12**

1-2 (1) $\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\mathbf{\frac{3}{4}}$

(2) $\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\mathbf{\frac{\sqrt{7}}{4}}$

(3) $\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\mathbf{\frac{3\sqrt{7}}{7}}$

(4) $\sin B=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\mathbf{\frac{\sqrt{7}}{4}}$

(5) $\cos B=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\mathbf{\frac{3}{4}}$

(6) $\tan B=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\mathbf{\frac{\sqrt{7}}{3}}$

2-1 (1) $\mathbf{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1}$ (2) $\mathbf{\sqrt{3}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}}$

2-2 (1) $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\sin 60^\circ+\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{\sqrt{3}}$

(2) $\tan 45^\circ=1$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$이므로

$\tan 45^\circ-\sin 30^\circ=1-\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(3) $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\sin 45^\circ\times\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(4) $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\sin 60^\circ\div\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\div\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

3-1 (1) $\boldsymbol{\pi, 4\pi}$ (2) $\boldsymbol{12\pi, 3\pi}$

3-2 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 중심각의 크기에 정비례하므로 호 AB의 길이를 l, 부채꼴 AOB의 넓이를 S라 하면

(1) $2\pi : l=60^\circ : 90^\circ=2 : 3$

$2l=6\pi \quad \therefore l=\mathbf{3\pi}$

(2) $6\pi : S=60^\circ : 90^\circ=2 : 3$

$2S=18\pi \quad \therefore S=\mathbf{9\pi}$

본문 | 058~063쪽

1-1 (1) **0** (2) **1** (3) **−1** (4) **30°**

1-2 (1) $45^\circ=360^\circ\times 0+45^\circ$이므로

$\mathbf{360^\circ\times n+45^\circ}$

(2) $135^\circ=360^\circ\times 0+135^\circ$이므로

$\mathbf{360^\circ\times n+135^\circ}$

(3) $-30^\circ=360^\circ\times(-1)+330^\circ$이므로

$\mathbf{360^\circ\times n+330^\circ}$

(4) $-160^\circ=360^\circ\times(-1)+200^\circ$이므로

$\mathbf{360^\circ\times n+200^\circ}$

2-1 (1) **1** (2) **3** (3) **3** (4) **4**

2-2 (1) $400^\circ=360^\circ\times 1+40^\circ$이므로

400°는 **제1사분면**의 각이다.

(2) $1000^\circ=360^\circ\times 2+280^\circ$이므로

1000°는 **제4사분면**의 각이다.

(3) $-210^\circ=360^\circ\times(-1)+150^\circ$이므로

-210°는 **제2사분면**의 각이다.

(4) $-1000^\circ=360^\circ\times(-3)+80^\circ$이므로

-1000°는 **제1사분면**의 각이다.

3-1 (1) **1°** (2) **150** (3) **−135** (4) **11**

3-2 (1) $30^\circ=30\times 1^\circ=30\times\frac{\pi}{180}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

(2) $180^\circ=180\times 1^\circ=180\times\frac{\pi}{180}=\boldsymbol{\pi}$

(3) $-90^\circ=-90\times 1^\circ=-90\times\frac{\pi}{180}=\boldsymbol{-\frac{\pi}{2}}$

(4) $-240^\circ=-240\times 1^\circ=-240\times\frac{\pi}{180}=\boldsymbol{-\frac{4}{3}\pi}$

4-1 (1) **90°** (2) **135°** (3) **180°** (4) **−120°**

4-2 (1) $\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\times 1=\frac{\pi}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}=\mathbf{60^\circ}$

(2) $\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi\times 1=\frac{2}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=\mathbf{120^\circ}$

(3) $\frac{3}{5}\pi=\frac{3}{5}\pi\times 1=\frac{3}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=\mathbf{108^\circ}$

(4) $-\frac{5}{6}\pi=-\frac{5}{6}\pi\times 1=-\frac{5}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=\mathbf{-150^\circ}$

5-1 (1) **3, 2** (2) **3, 3**

5-2 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

(1) $l=10\times\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{5}{2}\pi}$

(2) $S=\frac{1}{2}\times 10^2\times\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{25}{2}\pi}$

6-1 (1) $\mathbf{2\pi}$ (2) $\mathbf{3\theta}$

6-2 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면

호의 길이는 π이므로 $r\theta=\pi$ ……㉠

넓이가 $\frac{3}{4}\pi$이므로 $\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{3}{4}\pi$ ……㉡

(1) ㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{2}r\times\pi=\frac{3}{4}\pi$ $\therefore\ r=\mathbf{\frac{3}{2}}$

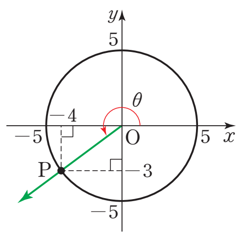
(2) $r=\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{3}{2}\theta=\pi$ $\therefore\ \theta=\mathbf{\frac{2}{3}\pi}$

7-1 **5, 4, 3**

7-2 (1) 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$

이므로 삼각함수의 정의에 의하여



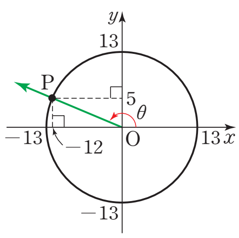
$\mathbf{\sin\theta=-\frac{3}{5},\ \cos\theta=-\frac{4}{5},}$

$\mathbf{\tan\theta=\frac{3}{4}}$

(2) 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13$

이므로 삼각함수의 정의에 의하여



$\mathbf{\sin\theta=\frac{5}{13},\ \cos\theta=-\frac{12}{13},}$

$\mathbf{\tan\theta=-\frac{5}{12}}$

8-1 $\mathbf{\sqrt{3},\ -\sqrt{3}}$

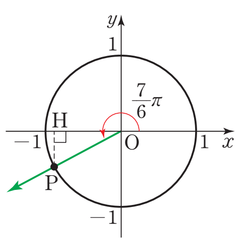
8-2 (1) 오른쪽 그림과 같이 각

$\theta=\frac{7}{6}\pi$를 나타내는 동경과

단위원의 교점을 P라 하고,

점 P에서 x축에 내린 수선의

발을 H라 하면



$\overline{OP}=1$, $\angle POH=\frac{\pi}{6}$이므로

점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이다.

$\therefore\ \mathbf{\sin\frac{7}{6}\pi=-\frac{1}{2},\ \cos\frac{7}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan\frac{7}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{3}}$

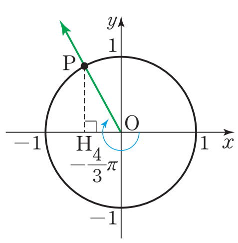
(2) 오른쪽 그림과 같이 각

$\theta=-\frac{4}{3}\pi$를 나타내는 동경과

단위원의 교점을 P라 하고,

점 P에서 x축에 내린 수선의

발을 H라 하면



$\overline{OP}=1$, $\angle POH=\frac{\pi}{3}$이므로

점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

$\therefore\ \mathbf{\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2},}$

$\mathbf{\tan\left(-\frac{4}{3}\pi\right)=-\sqrt{3}}$

(3) 오른쪽 그림과 같이 각

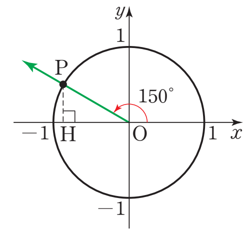
$\theta=150^\circ$를 나타내는 동경과

단위원의 교점을 P라 하고,

점 P에서 x축에 내린 수선의

발을 H라 하면 $\overline{OP}=1$,

$\angle POH=30^\circ$이므로



점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이다.

$\therefore\ \mathbf{\sin 150^\circ=\frac{1}{2},\ \cos 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

(4) 오른쪽 그림과 같이 각

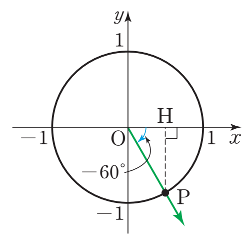
$\theta=-60^\circ$를 나타내는 동경과

단위원의 교점을 P라 하고,

점 P에서 x축에 내린 수선의

발을 H라 하면

$\overline{OP}=1$, $\angle POH=60^\circ$이므로



점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

$\therefore\ \mathbf{\sin(-60^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos(-60^\circ)=\frac{1}{2},}$

$\mathbf{\tan(-60^\circ)=-\sqrt{3}}$

9-1 (1) **4, >** (2) **2, <**

9-2 (1) $\frac{13}{6}\pi=2\pi\times1+\frac{\pi}{6}$는 제1사분면의 각이다.

$\therefore\ \mathbf{\sin\frac{13}{6}\pi>0,\ \cos\frac{13}{6}\pi>0,\ \tan\frac{13}{6}\pi>0}$

(2) $-\frac{2}{3}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{4}{3}\pi$는 제3사분면의 각이다.

$\therefore\ \mathbf{\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)<0,\ \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)<0,}$

$\mathbf{\tan\left(-\frac{2}{3}\pi\right)>0}$

(3) $-300^\circ=360^\circ\times(-1)+60^\circ$는 제1사분면의 각이다.

$\therefore\ \mathbf{\sin(-300^\circ)>0,\ \cos(-300^\circ)>0,}$

$\mathbf{\tan(-300^\circ)>0}$

(4) $700^\circ=360^\circ\times1+340^\circ$는 제4사분면의 각이다.

$\therefore\ \mathbf{\sin 700^\circ<0,\ \cos 700^\circ>0,\ \tan 700^\circ<0}$

10-1 **1, 2, 2**

10-2 (1) (ⅰ) $\cos\theta<0$ ⇨ 제2사분면의 각 또는 제3사분면의 각

(ⅱ) $\tan\theta>0$ ⇨ 제1사분면의 각 또는 제3사분면의 각

(ⅰ), (ⅱ)에서 각 θ는 **제3사분면**의 각이다.

(2) (ⅰ) $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$일 때

$\sin\theta>0$ ⇨ 제1사분면의 각 또는 제2사분면의 각

$\cos\theta>0$ ⇨ 제1사분면의 각 또는 제4사분면의 각

따라서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$을 만족시키는 각 θ는

제1사분면의 각이다.

(ii) $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$일 때

$\sin\theta<0$ ⇨ 제3사분면의 각 또는 제4사분면의 각

$\cos\theta<0$ ⇨ 제2사분면의 각 또는 제3사분면의 각

따라서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$을 만족시키는 각 θ는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 θ는 **제1사분면 또는 제3사분면**의 각이다.

11-1 $<$, **4**

11-2 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$

이때 각 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$이다.

따라서 $\sin^2\theta=\frac{7}{16}$에서 $\boldsymbol{\sin\theta=-\frac{\sqrt{7}}{4}}$

또 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$\boldsymbol{\tan\theta}=-\frac{\sqrt{7}}{4}\div\left(-\frac{3}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{3}}$

12-1 **4, 1, 3**

12-2 (1) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ $\qquad\therefore\ \boldsymbol{\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}}$

(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{4}{9}\right)=\boldsymbol{\frac{13}{27}}$

기초 개념 평가

본문 | 064, 065쪽

01 **시초선, 동경**
02 **360°, 일반각**
03 **2, 3**
04 **라디안, 호도법**
05 **180°**
06 **180**
07 **6, 2**
08 **6, 6**
09 $\boldsymbol{y}$
10 $\boldsymbol{x}$
11 **tan**
12 **양수**
13 $\boldsymbol{\sin\theta}$
14 $\boldsymbol{\tan\theta}$
15 $\boldsymbol{\cos\theta}$
16 **1,** $\boldsymbol{y, x, x}$
17 $\boldsymbol{y}$**,** $\boldsymbol{\sin\theta}$
18 $\boldsymbol{\cos\theta, \sin\theta, 1}$

기초 문제 평가

본문 | 066, 067쪽

1 ① $120°$는 제2사분면의 각이다.

② $\frac{7}{6}\pi$는 제3사분면의 각이다.

③ $510°=360°\times1+150°$는 제2사분면의 각이다.

④ $-\frac{4}{3}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{2}{3}\pi$는 제2사분면의 각이다.

⑤ $-585°=360°\times(-2)+135°$는 제2사분면의 각이다.

따라서 나머지 넷과 다른 사분면에 속하는 것은 ②이다.

2 ① $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{12}\times1=\frac{\pi}{12}\times\frac{180°}{\pi}=15°$

② $\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{4}\pi\times1=\frac{3}{4}\pi\times\frac{180°}{\pi}=135°$

③ $\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi\times1=\frac{2}{3}\pi\times\frac{180°}{\pi}=120°$

④ $\frac{5}{4}\pi=\frac{5}{4}\pi\times1=\frac{5}{4}\pi\times\frac{180°}{\pi}=225°$

⑤ $\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\times1=\frac{\pi}{6}\times\frac{180°}{\pi}=30°$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

3 $4\theta-\theta=2\pi\times n$($n$은 정수)이므로 $3\theta=2n\pi$

즉, $\theta=\frac{2n}{3}\pi$이고 $0<\theta<\pi$이므로

$n=1$일 때, $\boldsymbol{\theta=\frac{2}{3}\pi}$

4 각 θ가 제1사분면의 각이므로

$2n\pi<\theta<2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

$\therefore\ n\pi<\frac{\theta}{2}<n\pi+\frac{\pi}{4}$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때

$2k\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{\pi}{4}$

따라서 각 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때

$(2k+1)\pi<\frac{\theta}{2}<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}$

$2k\pi+\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{5}{4}\pi$

따라서 각 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$는 **제1사분면 또는 제3사분면**의 각이다.

5 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}r^2\theta$에서 $6\pi=\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore r=6$

따라서 부채꼴의 반지름의 길이는 **6**이다.

6 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$l=r\theta$에서 $\frac{\pi}{2}=r\times\frac{\pi}{6}$ $\quad\therefore r=3$

$\therefore S=\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}\pi$

따라서 부채꼴의 넓이는 $\mathbf{\frac{3}{4}\pi}$이다.

7 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이는 $2r+l$이다.

$8+l=16$이므로 $l=8$

$l=r\theta$에서 $8=4\theta$ $\quad\therefore \theta=2$

따라서 부채꼴의 중심각의 크기는 **2**이다.

8 $\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=-\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\mathbf{-\frac{1}{5}}$

9 (i) $\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$일 때

$\sin\theta>0$ ⇨ 제1사분면의 각 또는 제2사분면의 각

$\tan\theta<0$ ⇨ 제2사분면의 각 또는 제4사분면의 각

따라서 $\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$을 만족시키는 각 θ는 제2사분면의 각이다.

(ii) $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$일 때

$\sin\theta<0$ ⇨ 제3사분면의 각 또는 제4사분면의 각

$\tan\theta>0$ ⇨ 제1사분면의 각 또는 제3사분면의 각

따라서 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$을 만족시키는 각 θ는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 θ는 **제2사분면 또는 제3사분면**의 각이다.

10 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta<0$

$\therefore |\sin\theta-\cos\theta|-\sqrt{\sin^2\theta}$

$=|\sin\theta-\cos\theta|-|\sin\theta|$

$=-(\sin\theta-\cos\theta)-(-\sin\theta)=\cos\theta$

따라서 간단히 한 것은 ②이다.

11 $\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}=\frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\frac{2}{1-\sin^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}$

따라서 간단히 한 것은 ④이다.

12 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

이때 각 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$이다.

따라서 $\sin^2\theta=\frac{9}{25}$에서 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$

또 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$\tan\theta=-\frac{3}{5}\div\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta+\tan\theta=-\frac{3}{5}+\frac{3}{4}=\mathbf{\frac{3}{20}}$

13 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=-\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{11}{8}=\mathbf{-\frac{11}{16}}$

06 삼각함수의 그래프

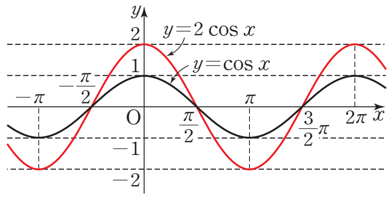
본문 | 068~073쪽

1-1 2π, -2, -2

1-2 (1) $2\cos x=2\cos(x+2\pi)$이므로 주기는 2π이다.

$-2\le 2\cos x\le 2$이므로 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$

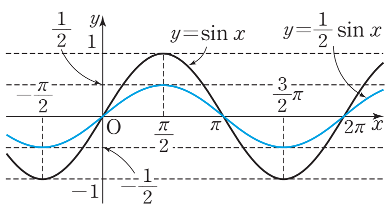
따라서 함수 $y=2\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $\dfrac{1}{2}\sin x=\dfrac{1}{2}\sin(x+2\pi)$이므로 주기는 2π이다.

$-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{2}\sin x\le\dfrac{1}{2}$이므로 치역은 $\left\{y\,\middle|\,-\dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{1}{2}\right\}$

따라서 함수 $y=\dfrac{1}{2}\sin x$의 그래프는 다음 그림과 같다.

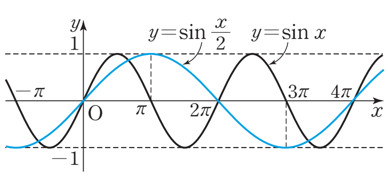


2-1 4π, -1, -1

2-2 (1) $\sin\dfrac{x}{2}=\sin\left(\dfrac{1}{2}x+2\pi\right)=\sin\dfrac{1}{2}(x+4\pi)$이므로 주기는 4π이다.

$-1\le\sin\dfrac{x}{2}\le 1$이므로 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$

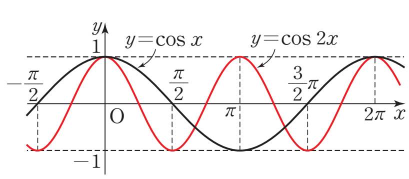
따라서 함수 $y=\sin\dfrac{x}{2}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $\cos 2x=\cos(2x+2\pi)=\cos 2(x+\pi)$이므로 주기는 π이다.

$-1\le\cos 2x\le 1$이므로 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$

따라서 함수 $y=\cos 2x$의 그래프는 다음 그림과 같다.

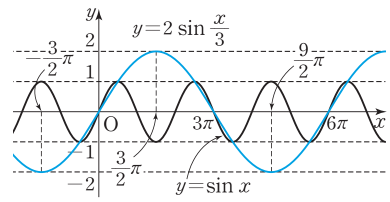


3-1 4π, 3, 3

3-2 (1) $2\sin\dfrac{x}{3}=2\sin\left(\dfrac{1}{3}x+2\pi\right)=2\sin\dfrac{1}{3}(x+6\pi)$이므로 주기는 6π이다.

$-2\le 2\sin\dfrac{x}{3}\le 2$이므로 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$

따라서 함수 $y=2\sin\dfrac{x}{3}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



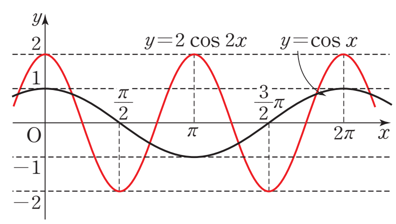
참고 $y=a\sin bx$ 꼴의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{|b|}$배, y축의 방향으로 $|a|$배한 그래프이다.

❶ 최댓값: $|a|$, 최솟값: $-|a|$ ❷ 주기: $\dfrac{2\pi}{|b|}$

(2) $2\cos 2x=2\cos(2x+2\pi)=2\cos 2(x+\pi)$이므로 주기는 π이다.

$-2\le 2\cos 2x\le 2$이므로 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$

따라서 함수 $y=2\cos 2x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



참고 $y=a\cos bx$ 꼴의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{|b|}$배, y축의 방향으로 $|a|$배한 그래프이다.

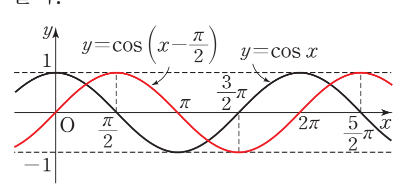
❶ 최댓값: $|a|$, 최솟값: $-|a|$ ❷ 주기: $\dfrac{2\pi}{|b|}$

4-1 $-\dfrac{\pi}{2}$, 2π, -1, -1

4-2 (1) $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 주기는 2π이다.

$-1\le\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\le 1$이므로 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$

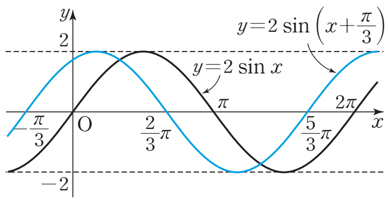
따라서 함수 $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이므로 **주기는 2π이다.**

$-2\le 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\le 2$이므로 **치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$**

따라서 함수 $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

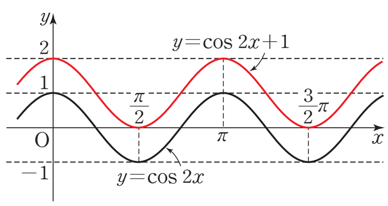


(3) $y=\cos 2x+1$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 **주기는 π이다.**

$-1+1\le\cos 2x+1\le 1+1$이므로

치역은 $\{y\,|\,0\le y\le 2\}$

따라서 함수 $y=\cos 2x+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



참고 $y=a\sin(bx+c)+d$ 꼴의 그래프는

$y=a\sin bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이다.

❶ 최댓값: $|a|+d$, 최솟값: $-|a|+d$

❷ 주기: $\dfrac{2\pi}{|b|}$

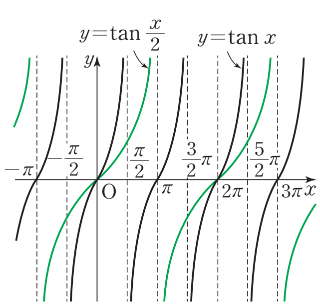
5-1 $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}$

5-2 (1) $\tan\dfrac{x}{2}=\tan\left(\dfrac{x}{2}+\pi\right)=\tan\dfrac{1}{2}(x+2\pi)$이므로 **주기는 2π이다.**

점근선은 직선 $x=2\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$

즉, **$x=2n\pi+\pi$ (n은 정수)**

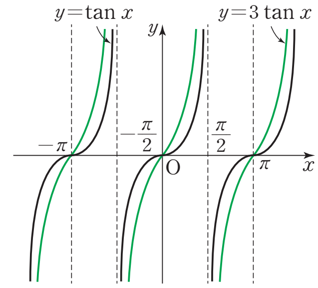
따라서 함수 $y=\tan\dfrac{x}{2}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $3\tan x=3\tan(x+\pi)$이므로 **주기는 π이다.**

점근선은 직선 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)

따라서 함수 $y=3\tan x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



참고 $y=a\tan bx$ 꼴의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{|b|}$배, y축의 방향으로 $|a|$배한 그래프이다.

❶ 최댓값, 최솟값은 없다.

❷ 주기: $\dfrac{\pi}{|b|}$

❸ 점근선: 직선 $x=\dfrac{1}{|b|}\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ (n은 정수)

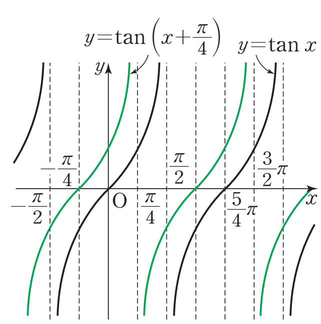
6-1 $\dfrac{\pi}{2}$, π

6-2 (1) $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 **주기는 π이다.**

점근선은 직선 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}$

즉, **$x=n\pi+\dfrac{\pi}{4}$ (n은 정수)**

따라서 함수 $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\tan 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는

$y=\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행

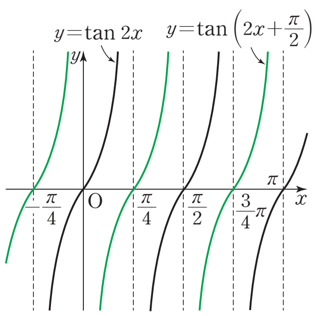
이동한 것이므로 **주기는 $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$**이다.

점근선은 직선 $x=\frac{1}{2}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{4}$

즉, $\boldsymbol{x=\frac{n}{2}\pi}$ **(n은 정수)**

따라서 함수 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 다음 그림과

같다.



7-1 (1) **6, 6, $-\frac{1}{2}$** (2) **3, 3, $-\frac{1}{2}$** (3) **4, 4, 1**

7-2 (1) $\sin\frac{5}{4}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(2) $\cos\frac{7}{6}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) $\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

8-1 (1) **6, 6, $\frac{1}{2}$** (2) **4, 4, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$** (3) **3, 3, $-\sqrt{3}$**

8-2 (1) $\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) $\tan\frac{3}{4}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{-1}$

9-1 (1) **6, 6, $\frac{\sqrt{3}}{2}$** (2) **3, 3, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$** (3) **4, $\frac{\pi}{4}$, -1**

9-2 (1) $\sin\frac{3}{4}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(2) $\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

(3) $\tan\frac{5}{6}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

10-1 **$\cos x$, $-\sin x$, $\cos x$, $2\cos x$**

10-2 (1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$,

$\sin(x-\pi)=-\sin(\pi-x)=-\sin x$이므로

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(x-\pi)$

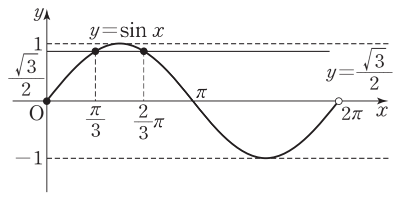
$=\cos x+\sin x-\sin x=\boldsymbol{\cos x}$

(2) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos^2 x$, $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin^2 x$이므로

$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos^2 x+\sin^2 x=\boldsymbol{1}$

11-1 **$\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{6}$**

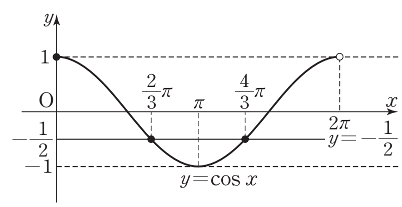
11-2 (1) $2\sin x-\sqrt{3}=0$에서 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$



구하는 방정식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표와 같으므로

$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{2}{3}\pi}$

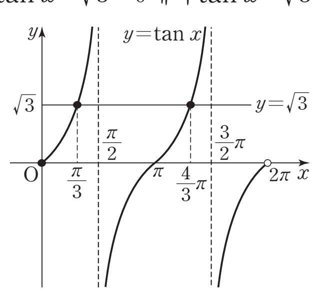
(2) $2\cos x+1=0$에서 $\cos x=-\frac{1}{2}$



구하는 방정식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표와 같으므로

$\boldsymbol{x=\frac{2}{3}\pi}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{4}{3}\pi}$

(3) $\tan x-\sqrt{3}=0$에서 $\tan x=\sqrt{3}$

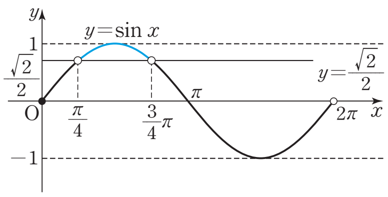


구하는 방정식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 x좌표와 같으므로

$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{4}{3}\pi}$

12-1 아래쪽, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{5}{3}\pi$

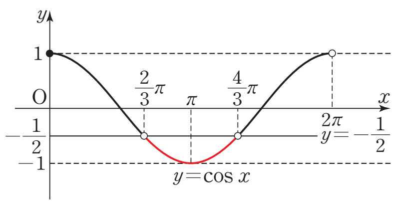
12-2 (1) $2\sin x>\sqrt{2}$에서 $\sin x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



구하는 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로

$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi$

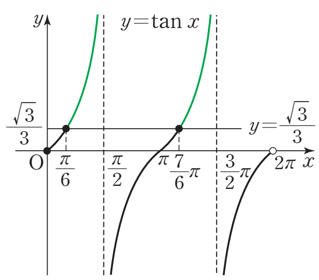
(2) $2\cos x+1<0$에서 $\cos x<-\dfrac{1}{2}$



구하는 부등식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\dfrac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로

$\dfrac{2}{3}\pi<x<\dfrac{4}{3}\pi$

(3) $3\tan x\geq\sqrt{3}$에서 $\tan x\geq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



구하는 부등식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$과 만나거나 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로

$\dfrac{\pi}{6}\leq x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{7}{6}\pi\leq x<\dfrac{3}{2}\pi$

집중 연습

본문 | 074, 075쪽

1 (1) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin\dfrac{13}{3}\pi=\sin\left(4\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\sin\dfrac{4}{3}\pi=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)=-\sin\dfrac{3}{4}\pi=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(5) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(6) $\cos\dfrac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(7) $\cos 300^\circ=\cos(360^\circ-60^\circ)=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

(8) $\cos\left(-\dfrac{11}{6}\pi\right)=\cos\dfrac{11}{6}\pi=\cos\left(2\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(9) $\tan\dfrac{7}{3}\pi=\tan\left(2\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

(10) $\tan\dfrac{15}{4}\pi=\tan\left(3\pi+\dfrac{3}{4}\pi\right)=\tan\dfrac{3}{4}\pi$

$=\tan\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{4}=-1$

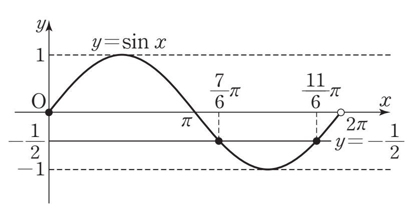
(11) $\tan\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)=-\tan\dfrac{5}{6}\pi=-\tan\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(12) $\tan(-210^\circ)=-\tan 210^\circ=-\tan(180^\circ+30^\circ)$

$=-\tan 30^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

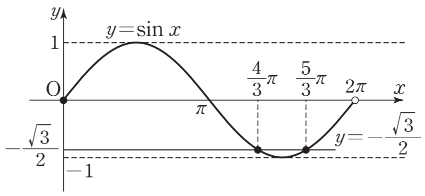
2 (1) $2\sin x+1=0$에서 $\sin x=-\dfrac{1}{2}$



구하는 방정식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{1}{2}$의 교점의 x좌표와 같으므로

$x=\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{11}{6}\pi$

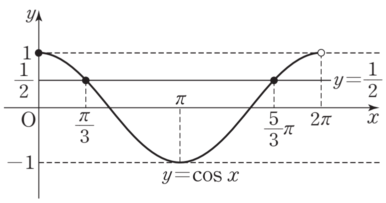
(2) $2\sin x+\sqrt{3}=0$에서 $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$



구하는 방정식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표와 같으므로

$\boldsymbol{x=\frac{4}{3}\pi}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{5}{3}\pi}$

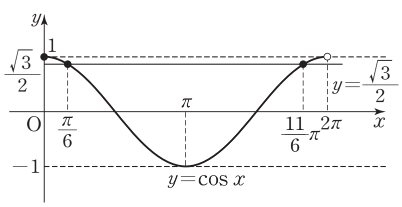
(3) $2\cos x-1=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$



구하는 방정식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표와 같으므로

$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{5}{3}\pi}$

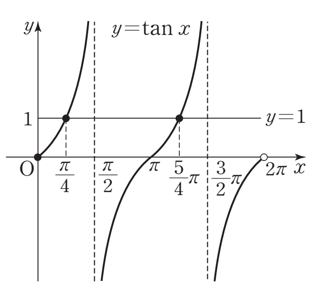
(4) $2\cos x-\sqrt{3}=0$에서 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$



구하는 방정식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표와 같으므로

$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{6}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{11}{6}\pi}$

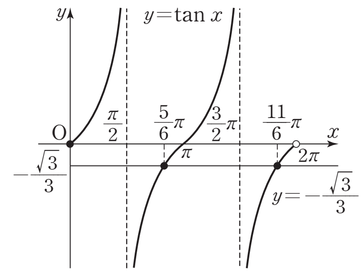
(5) $\tan x-1=0$에서 $\tan x=1$



구하는 방정식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표와 같으므로

$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{4}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{5}{4}\pi}$

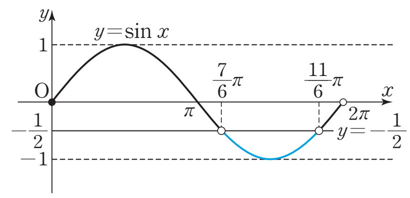
(6) $\sqrt{3}\tan x+1=0$에서 $\tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$



구하는 방정식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표와 같으므로

$\boldsymbol{x=\frac{5}{6}\pi}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{11}{6}\pi}$

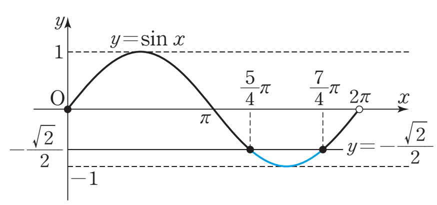
3 (1) $2\sin x+1<0$에서 $\sin x<-\frac{1}{2}$



구하는 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로

$\boldsymbol{\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi}$

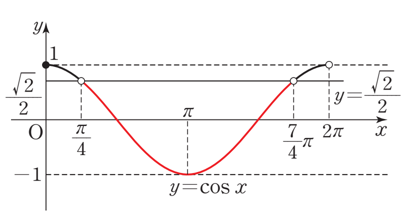
(2) $\sqrt{2}\sin x+1\le 0$에서 $\sin x\le -\frac{\sqrt{2}}{2}$



구하는 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$와 만나거나 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로

$\boldsymbol{\frac{5}{4}\pi\le x\le\frac{7}{4}\pi}$

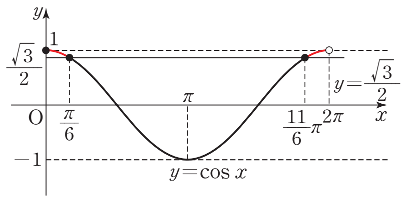
(3) $\sqrt{2}\cos x-1<0$에서 $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$



구하는 부등식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로

$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}<x<\frac{7}{4}\pi}$

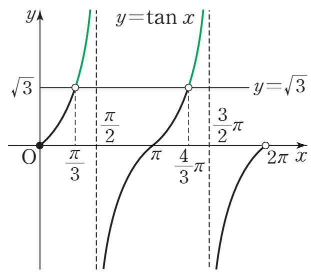
(4) $2\cos x-\sqrt{3}\geq 0$에서 $\cos x\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$



구하는 부등식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$과 만나거나 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로

$\mathbf{0\leq x\leq\frac{\pi}{6}}$ **또는** $\mathbf{\frac{11}{6}\pi\leq x<2\pi}$

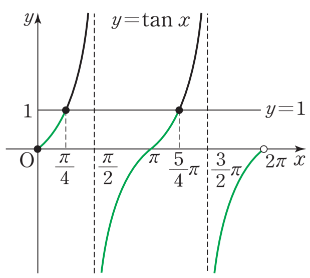
(5) $\tan x-\sqrt{3}>0$에서 $\tan x>\sqrt{3}$



구하는 부등식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\sqrt{3}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로

$\mathbf{\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}}$ **또는** $\mathbf{\frac{4}{3}\pi<x<\frac{3}{2}\pi}$

(6) $\tan x-1\leq 0$에서 $\tan x\leq 1$



구하는 부등식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나거나 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로

$\mathbf{0\leq x\leq\frac{\pi}{4}}$ **또는** $\mathbf{\frac{\pi}{2}<x\leq\frac{5}{4}\pi}$ **또는** $\mathbf{\frac{3}{2}\pi<x<2\pi}$

기초 개념 평가

본문 | 076, 077쪽

01 실수
02 원점, $-\sin x$
03 y축, $\cos x$
04 2π
05 $n\pi+\frac{\pi}{2}$, 실수
06 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$
07 원점, $-\tan x$
08 π
09 $-\sin x$
10 $-\cos x$
11 $\tan x$
12 $\sin x$
13 $-\cos x$
14 $-\tan x$
15 $\cos x$
16 $-\sin x$
17 $-\frac{1}{\tan x}$
18 $\cos x$
19 $\sin x$
20 $\frac{1}{\tan x}$
21 $\sin x=k$
22 $y=k$
23 x좌표
24 위쪽
25 아래쪽

기초 문제 평가

본문 | 078, 079쪽

1 ① $y=\cos(x-30^\circ)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 30°만큼 평행이동한 것이므로 주기는 2π이다.

② $y=\sin(2x-\pi)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

③ $y=\cos\frac{x}{2}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.

④ $y=2\tan\frac{x}{2}$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$이다.

⑤ $y=\frac{1}{2}\cos 4x$의 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이다.

따라서 주기가 가장 큰 것은 ③이다.

2 함수 $y=\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1$에서

최댓값은 $a=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

최솟값은 $b=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

주기는 $c\pi=\frac{2\pi}{2}=\pi$ $\qquad\therefore c=1$

$\therefore a-b+c=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1=\mathbf{2}$

3 ④ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

⑤ $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면 $y=\cos x$의 그래프와 일치한다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

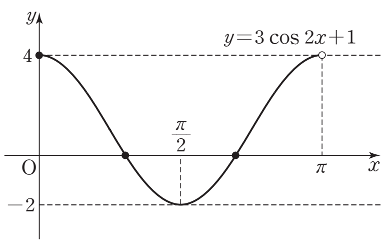
4 함수 $y=3\cos 2x+1$에서

① 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

② 최댓값은 $3+1=4$이다.

③ 최솟값은 $-3+1=-2$이다.

④ $0\le x<\pi$에서 $y=3\cos 2x+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$0\le x<\pi$에서 x축과 2번 만난다.

⑤ 그래프는 $y=3\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

5 함수 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$에서

① 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

② 치역은 실수 전체의 집합이므로 최댓값은 없다.

③ 점근선은 직선 $x=\frac{1}{2}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4}=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}$이므로 $x=\frac{n\pi}{2}$(n은 정수)이다.

④ 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$에 대하여 대칭이다.

⑤ 그래프는 함수 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

6 $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$이므로

$\sin(\pi+\theta)-\cos(\pi-\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=-\sin\theta-(-\cos\theta)+\cos\theta+\sin\theta$

$=\mathbf{2\cos\theta}$

7 $\tan(180^\circ+\theta)\sin(90^\circ+\theta)+\frac{\cos(180^\circ-\theta)}{\tan(-\theta)}$

$=\tan\theta\cos\theta+\frac{-\cos\theta}{-\tan\theta}$

$=\tan\theta\cos\theta+\frac{\cos\theta}{\tan\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\cos\theta+\cos\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\sin\theta+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta}$

따라서 간단히 한 것은 ④이다.

8 직선 $x-3y+3=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이므로 $\tan\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore \cos(\pi+\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\tan(-\theta)$

$=-\cos\theta+\cos\theta-\tan\theta$

$=-\tan\theta=\mathbf{-\frac{1}{3}}$

9 (1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{23}{6}\pi-\tan\frac{3}{4}\pi$

$=-\sin\frac{\pi}{3}+\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{3}+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\left(-\tan\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\mathbf{1}$

(2) $\sin\frac{7}{6}\pi\cos(-390^\circ)+\cos\frac{8}{3}\pi\tan 225^\circ$

$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cos(360^\circ+30^\circ)$
$\quad+\cos\left(2\pi+\frac{2}{3}\pi\right)\tan(180^\circ+45^\circ)$

$=-\sin\frac{\pi}{6}\cos 30^\circ+\cos\frac{2}{3}\pi\tan 45^\circ$

$=-\sin\frac{\pi}{6}\cos 30^\circ+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\tan 45^\circ$

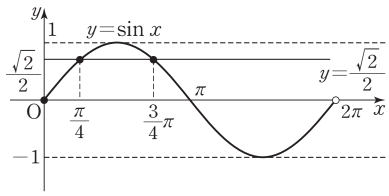
$=-\sin\frac{\pi}{6}\cos 30^\circ-\cos\frac{\pi}{3}\tan 45^\circ$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times 1=\mathbf{\frac{-\sqrt{3}-2}{4}}$

10 (1) $\sqrt{2}\sin x-\sin^2 x=\cos^2 x$에서

$\sqrt{2}\sin x-\sin^2 x=1-\sin^2 x$

$\sqrt{2}\sin x=1 \qquad \therefore \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



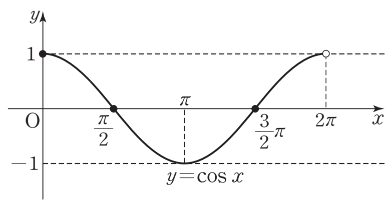
구하는 방정식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표와 같으므로

$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{4}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{3}{4}\pi}$

(2) $2\cos^2 x-\cos x=0$에서 $\cos x(2\cos x-1)=0$

$\therefore \cos x=0$ 또는 $\cos x=\dfrac{1}{2}$

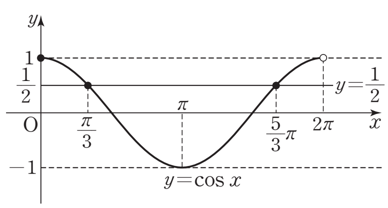
(i) $\cos x=0$일 때



구하는 방정식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=0$의 교점의 x좌표와 같으므로

$x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$

(ii) $\cos x=\dfrac{1}{2}$일 때



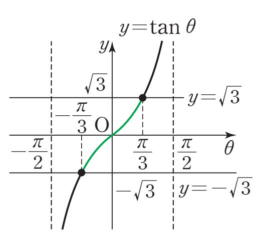
구하는 방정식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2}$의 교점의 x좌표와 같으므로

$x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$

(i), (ii)에서

$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{3}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2}\pi}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{5}{3}\pi}$

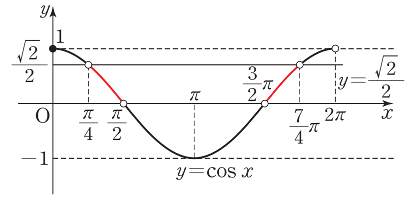
11 구하는 부등식의 해는 함수 $y=\tan\theta$의 그래프가 직선 $y=-\sqrt{3}$과 직선 $y=\sqrt{3}$ 사이에 있거나 만나는 θ의 값의 범위와 같으므로



$-\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}$

따라서 $a=-\dfrac{\pi}{3}$, $b=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\boldsymbol{b-a=\dfrac{2}{3}\pi}$

12 (1) $0<2\cos x<\sqrt{2}$에서 $0<\cos x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



구하는 부등식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=0$과 직선 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 사이에 있는 x의 값의 범위와 같으므로

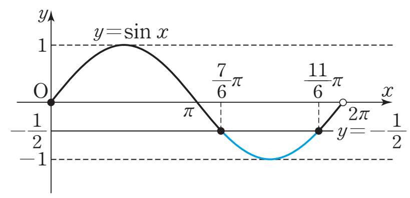
$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\pi<x<\dfrac{7}{4}\pi}$

(2) $2\sin^2 x-3\sin x-2\ge 0$에서

$(2\sin x+1)(\sin x-2)\ge 0$

$-1\le\sin x\le 1$이므로 $\sin x-2<0$

따라서 $2\sin x+1\le 0$에서 $\sin x\le -\dfrac{1}{2}$



구하는 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\dfrac{1}{2}$과 만나거나 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로

$\boldsymbol{\dfrac{7}{6}\pi\le x\le\dfrac{11}{6}\pi}$

07 사인법칙과 코사인법칙

본문 | 080~083쪽

1-1 $\mathbf{2\sqrt{6}, 4}$

1-2 $A=180^\circ-(105^\circ+30^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의해 $\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{5}{\sin 30^\circ}$

$\therefore a=\sin 45^\circ\times\dfrac{5}{\sin 30^\circ}=\mathbf{5\sqrt{2}}$

2-1 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a=b}$

2-2 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의해

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

세 식을 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$에 대입하면

$\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2=\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2$

$\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\boldsymbol{A=90^\circ}$**인 직각삼각형**이다.

3-1 **1, 1**

3-2 코사인법칙에 의해

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$이므로

$2^2=(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{2})^2-2\times(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{2}\times\cos B$

$2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\cos B=2(1-\sqrt{3})$

$\therefore \cos B=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $\boldsymbol{B=135^\circ}$

4-1 $\boldsymbol{2c^2}$, $\boldsymbol{A}$

4-2 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의해 $\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

코사인법칙에 의해 $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

이 식을 $2\cos B\sin C=\sin A$에 대입하면

$2\times\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\times\dfrac{c}{2R}=\dfrac{a}{2R}$

양변에 $2aR$를 곱하면

$c^2+a^2-b^2=a^2$, $b^2=c^2$

이때 $b>0$, $c>0$이므로 $b=c$이다.

따라서 삼각형 ABC는 $\boldsymbol{b=c}$**인 이등변삼각형**이다.

5-1 $\mathbf{\dfrac{1}{2}, 5}$

5-2 (1) 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times4\times6\times\sin 60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{6\sqrt{3}}$

(2) 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\times5\times4\times\sin 45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times5\times4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\mathbf{5\sqrt{2}}$

6-1 **11, 10, 10**

6-2 (1) 코사인법칙에 의해

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{6^2+10^2-14^2}{2\times6\times10}=-\dfrac{1}{2}$

$\sin A>0$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times6\times10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{15\sqrt{3}}$

다른 풀이 $s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{14+6+10}{2}=15$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\sqrt{15\times(15-14)\times(15-6)\times(15-10)}=15\sqrt{3}$

(2) 코사인법칙에 의해

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{4^2+6^2-8^2}{2\times4\times6}=-\dfrac{1}{4}$

$\sin A>0$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times4\times6\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\mathbf{3\sqrt{15}}$

다른 풀이 $s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{8+4+6}{2}=9$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\sqrt{9\times(9-8)\times(9-4)\times(9-6)}=3\sqrt{15}$

7-1 **16**

7-2 평행사변형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 45^\circ$

$=4\times3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\mathbf{6\sqrt{2}}$

8-1 $\mathbf{\sqrt{3}, \dfrac{35\sqrt{3}}{4}}$

8-2 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin 60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times5\times8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{10\sqrt{3}}$

집중 연습

본문 | 084, 085쪽

1 (1) 사인법칙에 의해 $\dfrac{10}{\sin 45^\circ}=\dfrac{b}{\sin 30^\circ}$

$\therefore b=\sin 30^\circ\times\dfrac{10}{\sin 45^\circ}=\mathbf{5\sqrt{2}}$

(2) 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이므로

$B=180^\circ-(30^\circ+15^\circ)=135^\circ$

사인법칙에 의해 $\dfrac{6}{\sin 30^\circ}=\dfrac{b}{\sin 135^\circ}$

$\therefore b=\sin 135^\circ\times\dfrac{6}{\sin 30^\circ}=\mathbf{6\sqrt{2}}$

(3) 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이므로

$C=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의해 $\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=\dfrac{6}{\sin 45^\circ}$

$\therefore a=\sin 60^\circ\times\dfrac{6}{\sin 45^\circ}=\mathbf{3\sqrt{6}}$

(4) 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이므로

$C=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$

사인법칙에 의해 $\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=\dfrac{c}{\sin 60^\circ}$

$\therefore c=\sin 60^\circ\times\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=\mathbf{2\sqrt{6}}$

2 (1) 사인법칙에 의해 $\dfrac{10}{\sin A}=\dfrac{10\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$

$\sin A=\dfrac{10\sin 135^\circ}{10\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$A=30^\circ$ 또는 $A=150^\circ$

그런데 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이고

$B=135^\circ$이므로 $\mathbf{A=30^\circ}$

(2) 사인법칙에 의해 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin C}$

$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로

$\mathbf{C=60^\circ}$ **또는** $\mathbf{C=120^\circ}$

3 (1) 사인법칙에 의해 $\dfrac{10}{\sin 30^\circ}=2R$

$2R\times\dfrac{1}{2}=10$ $\quad\therefore \mathbf{R=10}$

(2) 사인법칙에 의해 $\dfrac{6}{\sin 45^\circ}=2R$

$2R\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6$ $\quad\therefore \mathbf{R=3\sqrt{2}}$

(3) 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이므로

$A=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의해 $\dfrac{12}{\sin 45^\circ}=2R$

$2R\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=12$ $\quad\therefore \mathbf{R=6\sqrt{2}}$

(4) 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이므로

$A=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

사인법칙에 의해 $\dfrac{10\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=2R$

$2R\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{6}$ $\quad\therefore \mathbf{R=10\sqrt{2}}$

4 (1) $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$에서

$a:b:c=2:3:4$

$a=2k,\ b=3k,\ c=4k\ (k>0)$로 놓으면

$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}=\dfrac{(2k)^2+(3k)^2+(4k)^2}{(2k+3k+4k)^2}$

$=\dfrac{29k^2}{81k^2}=\mathbf{\dfrac{29}{81}}$

(2) $A:B:C=1:2:9$에서

$C=180^\circ\times\dfrac{9}{1+2+9}=135^\circ$

사인법칙에 의해 $\dfrac{c}{\sin 135^\circ}=2\times1$

$\therefore c=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\mathbf{\sqrt{2}}$

5 (1) 코사인법칙에 의해

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=5^2+6^2-2\times5\times6\times\cos 60^\circ$

$=25+36-60\times\dfrac{1}{2}=31$

$\therefore \mathbf{a=\sqrt{31}}$ $(\because a>0)$

(2) 코사인법칙에 의해

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=3^2+(\sqrt{2})^2-2\times3\times\sqrt{2}\times\cos 45^\circ$

$=9+2-6\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5$

$\therefore \mathbf{c=\sqrt{5}}$ $(\because c>0)$

(3) 코사인법칙에 의해

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=10^2+6^2-2\times10\times6\times\cos 120^\circ$

$=100+36-120\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=196$

$\therefore \mathbf{b=14}$ $(\because b>0)$

(4) 코사인법칙에 의해

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos 120^\circ$

$=4+9-12\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=19$

$\therefore \mathbf{a=\sqrt{19}}$ $(\because a>0)$

6 (1) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{7^2+5^2-8^2}{2\times7\times5}=\mathbf{\dfrac{1}{7}}$

(2) $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{13^2+8^2-7^2}{2\times13\times8}=\mathbf{\dfrac{23}{26}}$

7 (1) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}=-\dfrac{1}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$\boldsymbol{A=120^\circ}$

(2) $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{7^2+8^2-13^2}{2\times7\times8}=-\dfrac{1}{2}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로

$\boldsymbol{C=120^\circ}$

(3) $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{2^2+(2\sqrt{3})^2-2^2}{2\times2\times2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로

$\boldsymbol{B=30^\circ}$

(4) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3^2+8^2-7^2}{2\times3\times8}=\dfrac{1}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$\boldsymbol{A=60^\circ}$

8 (1) $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=3:5:7$이므로 크기가 최대인 각은 C이다.

$a=3k,\ b=5k,\ c=7k\ (k>0)$로 놓으면

$$\begin{aligned}\cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\&=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\times3k\times5k}\\&=\frac{-15k^2}{30k^2}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=120^\circ$

따라서 크기가 최대인 각의 크기는 **120°**이다.

(2) $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=5:7:8$이므로

$a=5k,\ b=7k,\ c=8k\ (k>0)$로 놓으면

$$\begin{aligned}\cos B&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(8k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\times8k\times5k}\\&=\frac{40k^2}{80k^2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로

$\boldsymbol{B=60^\circ}$

기초 개념 평가

본문 | 086, 087쪽

01 $\boldsymbol{a}$, **sin** $\boldsymbol{C}$	02 **sin** $\boldsymbol{B}$
03 **sin** $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{c}$	04 **cos** $\boldsymbol{A}$
05 $\boldsymbol{b}$	06 $\boldsymbol{a}$
07 $\boldsymbol{ca}$	08 $\boldsymbol{c}$
09 $\boldsymbol{abc}$	10 $\boldsymbol{b}$
11 $\boldsymbol{ab\sin\theta}$	12 $\boldsymbol{\frac{1}{2}pq\sin\theta}$

기초 문제 평가

본문 | 088, 089쪽

1 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{a}{\sin 30^\circ}=2\times10\qquad\therefore a=20\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{10}$

2 $A=180^\circ\times\dfrac{1}{1+1+4}=30^\circ$,

$B=180^\circ\times\dfrac{1}{1+1+4}=30^\circ$,

$C=180^\circ\times\dfrac{4}{1+1+4}=120^\circ$

이므로

$$\begin{aligned}a:b:c&=\sin A:\sin B:\sin C\\&=\sin 30^\circ:\sin 30^\circ:\sin 120^\circ\\&=\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{1:1:\sqrt{3}}\end{aligned}$$

3 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{5\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{10}{\sin B}$

$\sin B=\dfrac{10\sin 30^\circ}{5\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로

$\boldsymbol{B=45^\circ}$ **또는** $\boldsymbol{B=135^\circ}$

4 $$\begin{aligned}\sin^2 B&=1-\cos^2 B\\&=1-\left(-\frac{8}{17}\right)^2=\frac{225}{289}\end{aligned}$$

$\sin B>0$이므로 $\sin B=\dfrac{15}{17}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{b}{\sin B}=2R$이므로

$R=\dfrac{b}{2\sin B}=25\times\dfrac{17}{30}=\mathbf{\dfrac{85}{6}}$

5 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
사인법칙에 의해

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이 식을 주어진 식에 대입하면

$a\times\frac{a}{2R}+b\times\frac{b}{2R}=c\times\frac{c}{2R}$

양변에 $2R$를 곱하면 $a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 **$C=90°$인 직각삼각형**이다.

6 사인법칙에 의해

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=3:5:7$

이므로 $a=3k$, $b=5k$, $c=7k\ (k>0)$로 놓으면
코사인법칙에 의해

$$\cos A=\frac{(5k)^2+(7k)^2-(3k)^2}{2\times5k\times7k}=\frac{65k^2}{70k^2}=\frac{13}{14}$$

$$\cos B=\frac{(7k)^2+(3k)^2-(5k)^2}{2\times7k\times3k}=\frac{33k^2}{42k^2}=\frac{11}{14}$$

$$\cos C=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\times3k\times5k}=\frac{-15k^2}{30k^2}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos A:\cos B:\cos C=\frac{13}{14}:\frac{11}{14}:\left(-\frac{1}{2}\right)=13:11:(-7)$$

따라서 구하는 답은 ④이다.

7 $\frac{a}{13}=\frac{b}{8}=\frac{c}{7}=k\ (k>0)$로 놓으면

$a=13k$, $b=8k$, $c=7k$

크기가 최대인 각은 A이므로

$$\cos A=\frac{(8k)^2+(7k)^2-(13k)^2}{2\times8k\times7k}=\frac{-56k^2}{112k^2}=-\frac{1}{2}$$

이때 $0°<A<180°$이므로 $A=120°$

따라서 크기가 최대인 각의 크기는 **120°**이다.

8 $(a+c)(a-c)=b(b+c)$를 전개하면

$a^2-c^2=b^2+bc$에서

$a^2=b^2+c^2+bc$ ……㉠

한편 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

이므로 ㉠을 대입하면

$b^2+c^2+bc=b^2+c^2-2bc\cos A$

$\therefore \cos A=-\frac{1}{2}$

이때 $0°<A<180°$이므로 **$A=120°$**

9 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$에서

$b+c=4k$ ……㉠

$c+a=5k$ ……㉡

$a+b=6k$ ……㉢

로 놓고 세 식을 변끼리 더하면

$2(a+b+c)=15k$

$\therefore a+b+c=\frac{15}{2}k$ ……㉣

㉣－㉠에서 $a=\frac{7}{2}k$

㉣－㉡에서 $b=\frac{5}{2}k$

㉣－㉢에서 $c=\frac{3}{2}k$

$\therefore a:b:c=\frac{7}{2}k:\frac{5}{2}k:\frac{3}{2}k=7:5:3$

$a=7t$, $b=5t$, $c=3t\ (t>0)$로 놓으면 크기가 최대인 각은 A이므로

$$\cos A=\frac{(5t)^2+(3t)^2-(7t)^2}{2\times5t\times3t}=\frac{-15t^2}{30t^2}=-\frac{1}{2}$$

이때 $0°<A<180°$이므로 $A=120°$

따라서 크기가 최대인 각의 크기는 **120°**이다.

10 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
사인법칙에 의해

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$ ……㉠

코사인법칙에 의해

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ ……㉡

㉠, ㉡을 주어진 식에 대입하면

$2\times\frac{c}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{a}{2R}-\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}$

$\frac{c^2+a^2-b^2}{2aR}=\frac{a-b+c}{2R}$

양변에 $2aR$를 곱하면

$c^2+a^2-b^2=a(a-b+c)$

$c^2+a^2-b^2=a^2-ab+ac$

$c^2-b^2+ab-ac=0$

$(c-b)(c+b)-a(c-b)=0$

$(c-b)(c+b-a)=0$

$c+b>a$이므로 $c+b-a>0$

$c-b=0$ $\therefore b=c$

따라서 삼각형 ABC는 **$b=c$인 이등변삼각형**이다.

11 선분 AM의 길이를 x라 하고 $\angle AMB=\theta$라 하면

$\angle AMC=180^\circ-\theta$

$\overline{BC}=6$에서 $\overline{BM}=\overline{CM}=3$

삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의해

$7^2=x^2+3^2-2\times x\times 3\times \cos\theta$

$49=x^2+9-6x\cos\theta$ ……㉠

삼각형 ACM에서 코사인법칙에 의해

$5^2=x^2+3^2-2\times x\times 3\times \cos(180^\circ-\theta)$

$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$이므로

$25=x^2+9+6x\cos\theta$ ……㉡

㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$74=2(x^2+9)$, $x^2=28$

$\therefore x=2\sqrt{7}\ (\because x>0)$

따라서 구하는 선분 AM의 길이는 $\mathbf{2\sqrt{7}}$이다.

다른 풀이 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos B=\frac{7^2+6^2-5^2}{2\times7\times6}=\frac{5}{7}$$

$$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3$$

삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{AM}^2=\overline{AB}^2+\overline{BM}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BM}\times\cos B$$

$$=7^2+3^2-2\times7\times3\times\frac{5}{7}=28$$

$\overline{AM}>0$이므로 $\overline{AM}=2\sqrt{7}$

12 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$15\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times6\times10\times\sin C,\ 30\sin C=15\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로

$\mathbf{C=60^\circ}$ **또는** $\mathbf{C=120^\circ}$

13 사인법칙에 의해

$$\frac{a}{\sin 120^\circ}=2\times4 \qquad \therefore a=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$

$$\frac{b}{\sin 30^\circ}=2\times4 \qquad \therefore b=8\times\frac{1}{2}=4$$

삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이므로

$C=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times4\times\sin30^\circ$$

$$=8\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\mathbf{4\sqrt{3}}$$

14 코사인법칙에 의해

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$=10^2+16^2-2\times10\times16\times\cos60^\circ$$

$$=100+256-320\times\frac{1}{2}=196$$

$\therefore a=14\ (\because a>0)$

한편 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\times10\times16\times\sin60^\circ$$

$$=80\times\frac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$S=\dfrac{a+b+c}{2}r$에서

$$\frac{14+10+16}{2}r=40\sqrt{3},\ 20r=40\sqrt{3}$$

$\therefore r=2\sqrt{3}$

따라서 내접원의 반지름의 길이는 $\mathbf{2\sqrt{3}}$이다.

15 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos60^\circ=\frac{\overline{AB}^2+10^2-(2\sqrt{19})^2}{2\times\overline{AB}\times10}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\overline{AB}^2+24}{20\overline{AB}}$$

$\overline{AB}^2-10\overline{AB}+24=0$

$(\overline{AB}-4)(\overline{AB}-6)=0$

이때 $\overline{AB}>5$이므로 $\overline{AB}=6$

따라서 구하는 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$6\times10\times\sin60^\circ=60\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{30\sqrt{3}}$$

16 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BD}^2=4^2+6^2-2\times4\times6\times\cos60^\circ$$

$$=16+36-48\times\frac{1}{2}=28$$

$\overline{BD}>0$이므로 $\overline{BD}=2\sqrt{7}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle ABD+\triangle BCD$

$$=\frac{1}{2}\times5\times2\sqrt{7}\times\sin30^\circ+\frac{1}{2}\times4\times6\times\sin60^\circ$$

$$=5\sqrt{7}\times\frac{1}{2}+12\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\mathbf{\frac{5\sqrt{7}}{2}+6\sqrt{3}}$$

08 등차수열

본문 | 092~097쪽

1-1 (1) **2, 5, 1** (2) **3, 242**

1-2 (1) $\boldsymbol{a_1=3\times1+2=5,\ a_2=3\times2+2=8,}$
$\boldsymbol{a_3=3\times3+2=11,\ a_4=3\times4+2=14,}$
$\boldsymbol{a_5=3\times5+2=17}$
(2) $\boldsymbol{a_1=1^2+2=3,\ a_2=2^2+2=6,\ a_3=3^2+2=11,}$
$\boldsymbol{a_4=4^2+2=18,\ a_5=5^2+2=27}$

2-1 (1) $\boldsymbol{3n}$ (2) **2**

2-2 (1) $a_1=2\times1=2,\ a_2=2\times2=4,\ a_3=2\times3=6,$
$a_4=2\times4=8,\ \cdots$
따라서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $\boldsymbol{a_n=2n}$
(2) $a_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1},\ a_2=\frac{2}{3}=\frac{2}{2+1},$
$a_3=\frac{3}{4}=\frac{3}{3+1},\ a_4=\frac{4}{5}=\frac{4}{4+1},\ \cdots$
따라서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $\boldsymbol{a_n=\frac{n}{n+1}}$

3-1 **2, −3**

3-2 (1) 공차가 $21-16=5$인 등차수열이므로
$\square$ 안에 알맞은 수는 $6+5=\mathbf{11}$
(2) 공차가 $5-2=3$인 등차수열이므로
$\square$ 안에 알맞은 수는 $8+3=\mathbf{11}$

4-1 **−4, 5, 9**

4-2 (1) $\boldsymbol{a_n}=3+(n-1)\times(-2)=\boldsymbol{-2n+5}$
(2) 첫째항이 -1, 공차가 $1-(-1)=2$이므로
$\boldsymbol{a_n}=-1+(n-1)\times2=\boldsymbol{2n-3}$

5-1 **9, 1, 1**

5-2 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=a+2d=23$ ……㉠
$a_{12}=a+11d=-4$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=29,\ d=-3$
$\therefore\ \boldsymbol{a_n}=29+(n-1)\times(-3)=\boldsymbol{-3n+32}$

6-1 **3, 11**

6-2 첫째항이 -45, 공차가 6인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$a_n=-45+(n-1)\times6=6n-51$
(1) $a_n>0$에서 $a_n=6n-51>0,\ n>\frac{51}{6}=8.5$
따라서 처음으로 양수가 되는 항은 **제9항**이다.
(2) $a_n>50$에서 $a_n=6n-51>50,\ n>\frac{101}{6}=16.\times\times\times$
따라서 처음으로 50보다 커지는 항은 **제17항**이다.

7-1 **17, 18**

7-2 첫째항이 50, 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$a_n=50+(n-1)\times(-4)=-4n+54$
(1) $a_n<0$에서 $a_n=-4n+54<0,\ n>\frac{54}{4}=13.5$
따라서 처음으로 음수가 되는 항은 **제14항**이다.
(2) $a_n<-50$에서 $a_n=-4n+54<-50,\ n>\frac{104}{4}=26$
따라서 처음으로 -50보다 작아지는 항은 **제27항**이다.

8-1 (1) **2** (2) **12, 12**

8-2 (1) $x=\frac{-1+9}{2}=4$
(2) $x,\ 10,\ y$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$10=\frac{x+y}{2}\qquad\therefore\ x+y=20$ ……㉠
$10,\ y,\ -2$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$y=\frac{10-2}{2}=4$
$y=4$를 ㉠에 대입하면 $x=16$
$\therefore\ \boldsymbol{x=16,\ y=4}$

9-1 **5, 8, 5**

9-2 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓으면
세 수의 합이 21이므로
$(a-d)+a+(a+d)=21,\ 3a=21\qquad\therefore\ a=7$
세 수의 곱이 91이므로
$(a-d)\times a\times(a+d)=91,\ a(a^2-d^2)=91$
이 식에 $a=7$을 대입하면 $7\times(49-d^2)=91,\ d^2=36$
$\therefore\ d=-6$ 또는 $d=6$
(i) $a=7,\ d=-6$일 때, 세 수는 13, 7, 1
(ii) $a=7,\ d=6$일 때, 세 수는 1, 7, 13
(i), (ii)에서 구하는 세 수는 **1, 7, 13**

10-1 (1) **20** (2) **19, −530**

10-2 (1) 구하는 합은 $\frac{10\times(2+74)}{2}=\mathbf{380}$
(2) 구하는 합은 $\frac{10\times\{2\times(-1)+9\times4\}}{2}=\mathbf{170}$

11-1 **6, 816**

11-2 (1) 100 이하의 자연수 중에서 3의 배수는
3, 6, 9, 12, …, 99
이 수열은 첫째항이 3, 공차가 3인 등차수열이므로 99를 제n항이라 하면
$3+(n-1)\times3=99,\ 3n=99\qquad\therefore\ n=33$
따라서 구하는 합은 첫째항이 3, 제33항이 99, 항수가 33인 등차수열의 합이므로
$\frac{33\times(3+99)}{2}=\mathbf{1683}$

(2) 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나눈 나머지가 1인 수는

1, 4, 7, 10, ⋯, 100

이 수열은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로 100을 제n항이라 하면

$1+(n-1)\times 3=100$, $3n=102$ $\quad\therefore n=34$

따라서 구하는 합은 첫째항이 1, 제34항이 100, 항수가 34인 등차수열의 합이므로

$\dfrac{34\times(1+100)}{2}=\mathbf{1717}$

12-1 **1, 1**

12-2 (1) (i) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=2n^2-n-\{2(n-1)^2-(n-1)\}$
$=2n^2-n-(2n^2-5n+3)$
$=4n-3$ ⋯⋯㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\times 1^2-1=1$

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같다.

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{a_n=4n-3}$

(2) (i) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=4n^2+3n-\{4(n-1)^2+3(n-1)\}$
$=4n^2+3n-(4n^2-5n+1)$
$=8n-1$ ⋯⋯㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=4\times 1^2+3\times 1=7$

이때 $a_1=7$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같다.

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{a_n=8n-1}$

13-1 **1, 2**

13-2 (1) (i) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2-n-1-\{(n-1)^2-(n-1)-1\}$
$=n^2-n-1-(n^2-3n+1)$
$=2n-2$ ⋯⋯㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2-1-1=-1$

이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값 0과 같지 않다.

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{a_1=-1,\ a_n=2n-2\ (n\geq 2)}$

(2) (i) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=4n^2+3n+1-\{4(n-1)^2+3(n-1)+1\}$
$=4n^2+3n+1-(4n^2-5n+2)$
$=8n-1$ ⋯⋯㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=4\times 1^2+3\times 1+1=8$

이때 $a_1=8$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값 7과 같지 않다.

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{a_1=8,\ a_n=8n-1\ (n\geq 2)}$

집중 연습

본문 | 098, 099쪽

1 (1) $2,\ 4,\ 7,\ 11,\ 16,\ 22,\ \cdots$ (차: $+2,\ +3,\ +4,\ +5,\ +6$)

$\therefore a_7=22+7=\mathbf{29}$

(2) $10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ \cdots$ (차: $-2,\ -2,\ -2,\ -2,\ -2$)

$\therefore a_7=0-2=\mathbf{-2}$

(3) $1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ \cdots$ (비: $\times 3,\ \times 3,\ \times 3,\ \times 3,\ \times 3$)

$\therefore a_7=243\times 3=\mathbf{729}$

(4) $a_1=1$, $a_2=-2^2=-4$, $a_3=3^2=9$, $a_4=-4^2=-16$, $a_5=5^2=25$, $a_6=-6^2=-36$

$\therefore a_7=7^2=\mathbf{49}$

2 (1) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 3, 공차가 4이므로

$\boldsymbol{a_n}=3+(n-1)\times 4=\boldsymbol{4n-1}$

(2) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공차가 5이므로

$\boldsymbol{a_n}=2+(n-1)\times 5=\boldsymbol{5n-3}$

(3) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 100, 공차가 -5이므로

$\boldsymbol{a_n}=100+(n-1)\times(-5)=\boldsymbol{-5n+105}$

(4) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -3, 공차가 2이므로

$\boldsymbol{a_n}=-3+(n-1)\times 2=\boldsymbol{2n-5}$

3 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

(1) $a_5=a+4d=3$ ⋯⋯㉠

$a_{10}=a+9d=18$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9$, $d=3$

$\therefore \boldsymbol{a_n}=-9+(n-1)\times 3=\boldsymbol{3n-12}$

(2) $a_{15}=a+14d=33$ ⋯⋯㉠

$a_{45}=a+44d=153$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-23$, $d=4$

$\therefore \boldsymbol{a_n}=-23+(n-1)\times 4=\boldsymbol{4n-27}$

(3) $a_5=a+4d=21$ ⋯⋯㉠

$a_{12}=a+11d=49$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=4$

$\therefore \boldsymbol{a_n}=5+(n-1)\times4=\mathbf{4n+1}$

(4) $a_3=a+2d=2$ ⋯⋯㉠

$a_9=a+8d=-16$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $d=-3$

$\therefore \boldsymbol{a_n}=8+(n-1)\times(-3)=\mathbf{-3n+11}$

4 (1) $x=\dfrac{2+20}{2}=\mathbf{11}$

(2) $x=\dfrac{10-4}{2}=\mathbf{3}$

(3) 1, x, y가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$x=\dfrac{1+y}{2}$ $\therefore 2x-y=1$ ⋯⋯㉠

x, y, -11이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$y=\dfrac{x-11}{2}$ $\therefore x-2y=11$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\boldsymbol{x=-3,\ y=-7}$

(4) x, 14, y가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$14=\dfrac{x+y}{2}$ $\therefore x+y=28$ ⋯⋯㉠

14, y, -2가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$y=\dfrac{14-2}{2}=6$

$y=6$을 ㉠에 대입하면 $x=22$

$\therefore \boldsymbol{x=22,\ y=6}$

5 (1) 구하는 합은 $\dfrac{12\times(-2+53)}{2}=\mathbf{306}$

(2) 구하는 합은 $\dfrac{15\times(10+52)}{2}=\mathbf{465}$

(3) 구하는 합은 $\dfrac{27\times(9+113)}{2}=\mathbf{1647}$

6 (1) 구하는 합은 $\dfrac{17\times\{2\times5+16\times(-2)\}}{2}=\mathbf{-187}$

(2) 구하는 합은 $\dfrac{20\times\{2\times3+19\times(-5)\}}{2}=\mathbf{-890}$

(3) 구하는 합은 $\dfrac{16\times(2\times3+15\times6)}{2}=\mathbf{768}$

7 (1) 첫째항이 2, 공차가 5인 등차수열이므로 72를 제n항이라 하면

$2+(n-1)\times5=72$, $5n=75$ $\therefore n=15$

따라서 구하는 합은 첫째항이 2, 제15항이 72, 항수가 15인 등차수열의 합이므로

$\dfrac{15\times(2+72)}{2}=\mathbf{555}$

(2) 첫째항이 -2, 공차가 -3인 등차수열이므로 -53을 제n항이라 하면

$-2+(n-1)\times(-3)=-53$, $-3n=-54$

$\therefore n=18$

따라서 구하는 합은 첫째항이 -2, 제18항이 -53, 항수가 18인 등차수열의 합이므로

$\dfrac{18\times(-2-53)}{2}=\mathbf{-495}$

(3) 첫째항이 1, 공차가 6인 등차수열이므로 91을 제n항이라 하면

$1+(n-1)\times6=91$, $6n=96$ $\therefore n=16$

따라서 구하는 합은 첫째항이 1, 제16항이 91, 항수가 16인 등차수열의 합이므로

$\dfrac{16\times(1+91)}{2}=\mathbf{736}$

8 (1) 첫째항이 8, 공차가 -2인 등차수열이므로 구하는 합은

$\dfrac{n\{2\times8+(n-1)\times(-2)\}}{2}=\boldsymbol{-n^2+9n}$

(2) 첫째항이 8, 공차가 -6인 등차수열이므로 구하는 합은

$\dfrac{n\{2\times8+(n-1)\times(-6)\}}{2}=\boldsymbol{-3n^2+11n}$

(3) 첫째항이 -2, 공차가 5인 등차수열이므로 구하는 합은

$\dfrac{n\{2\times(-2)+(n-1)\times5\}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{5n^2-9n}{2}}$

기초 개념 평가

본문 | 100, 101쪽

01 수열
02 항
03 일반항
04 $\{a_n\}$
05 등차수열
06 $+d$
07 $a_{10}=a+9d$
08 $a_n=a+(n-1)d$
09 등차중항
10 $2b=a+c$
11 a
12 $2a$
13 S_1
14 S_2
15 S_n

기초 문제 평가

본문 | 102, 103쪽

1 (1) 1, 4, $\boxed{\mathbf{7}}$, 10, 13, $\boxed{\mathbf{16}}$, 19

(2) 12, 9, $\boxed{\mathbf{6}}$, 3, 0, $\boxed{\mathbf{-3}}$

(3) 4, 8, 16, 32, $\boxed{\mathbf{64}}$, $\boxed{\mathbf{128}}$

(4) 1, -3, 9, -27, $\boxed{\mathbf{81}}$, $\boxed{\mathbf{-243}}$

2 a_1은 1을 5로 나눈 나머지이므로 $a_1=1$

a_2는 2를 5로 나눈 나머지이므로 $a_2=2$

a_3은 3을 5로 나눈 나머지이므로 $a_3=3$

a_4는 4를 5로 나눈 나머지이므로 $a_4=4$

a_5는 5를 5로 나눈 나머지이므로 $a_5=0$

a_6은 6을 5로 나눈 나머지이므로 $a_6=1$

$\vdots$

따라서

$\boldsymbol{a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=4,\ a_5=0,}$

$\boldsymbol{a_6=1,\ a_7=2,\ a_8=3,\ a_9=4,\ a_{10}=0}$

3 a는 3과 7의 등차중항이므로

3	a	7
b	c	d
e	11	f

$a=\dfrac{3+7}{2}=5$

c는 a와 11, 3과 f, 7과 e의 등차중항이므로

$c=\dfrac{a+11}{2}=\dfrac{5+11}{2}=8$

$c=\dfrac{3+f}{2}$에서 $3+f=2c=16$ $\quad\therefore f=13$

$c=\dfrac{7+e}{2}$에서 $7+e=2c=16$ $\quad\therefore e=9$

b는 3과 e의 등차중항이므로

$b=\dfrac{3+e}{2}=\dfrac{3+9}{2}=6$

d는 7과 f의 등차중항이므로

$d=\dfrac{7+f}{2}=\dfrac{7+13}{2}=10$

$\therefore a=5,\ b=6,\ c=8,\ d=10,\ e=9,\ f=13$

$\therefore a+b+c+d+e+f=\mathbf{51}$

4 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

제8항이 20이므로 $a+7d=20$

이때 $d=5$이므로 $a=-15$

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=-15+(n-1)\times5=5n-20$

$\therefore a_{10}=5\times10-20=\mathbf{30}$

다른 풀이 $a=-15$, $d=5$이므로

$a_{10}=a+9d=-15+9\times5=30$

5 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{10}+a_6=6$에서 $(a+9d)+(a+5d)=6$

$\therefore a+7d=3$ ……㉠

$a_{10}-a_6=-12$에서 $(a+9d)-(a+5d)=-12$

$4d=-12$ $\quad\therefore d=-3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=24$, $d=-3$

$\therefore a_2=a+d=\mathbf{21}$

6 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=32$ ……㉠

$a_8=a+7d=92$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $d=12$

$\therefore a_n=8+(n-1)\times12=12n-4$

$a_n\le400$에서 $12n-4\le400$, $n\le\dfrac{101}{3}=33.\times\times\times$

따라서 400을 넘지 않는 최대의 항은 **제33항**이다.

참고 $a_{33}=12\times33-4=392$, $a_{34}=12\times34-4=404$이므로 400을 넘지 않는 최대의 항은 제33항이다.

7 $1-a$, 10, $2+2a$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$10=\dfrac{(1-a)+(2+2a)}{2}$, $a+3=20$ $\quad\therefore \boldsymbol{a=17}$

8 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면

세 수의 합이 6이므로

$(a-d)+a+(a+d)=6$, $3a=6$ $\quad\therefore a=2$

세 수의 곱이 -24이므로

$(a-d)\times a\times(a+d)=-24$, $a(a^2-d^2)=-24$

이 식에 $a=2$를 대입하면

$2(4-d^2)=-24$, $d^2=16$

$\therefore d=-4$ 또는 $d=4$

(i) $a=2$, $d=-4$일 때, 세 수는 6, 2, -2

(ii) $a=2$, $d=4$일 때, 세 수는 -2, 2, 6

(i), (ii)에서 세 수는 -2, 2, 6

따라서 세 수의 제곱의 합은

$(-2)^2+2^2+6^2=\mathbf{44}$

9 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{10}=a+9d=-1$ ……㉠

$a_{16}=a+15d=5$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-10$, $d=1$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제22항까지의 합은

$\frac{22\times\{2\times(-10)+21\times1\}}{2}=\mathbf{11}$

10 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

첫째항부터 제5항까지의 합이 20이므로

$\frac{5(2a+4d)}{2}=20 \quad \therefore a+2d=4$ ……㉠

제3항부터 제7항까지의 합이 -10이므로

$\frac{5\{2(a+2d)+4d\}}{2}=-10 \quad \therefore a+4d=-2$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10$, $d=-3$

따라서 **첫째항은 10, 공차는 -3**이다.

참고 제3항부터 제7항까지의 합은 첫째항이 $a_3=a+2d$, 항수가 5인 등차수열의 합이다.

11 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

첫째항부터 제5항까지의 합이 125이므로

$\frac{5(2a+4d)}{2}=125 \quad \therefore a+2d=25$ ……㉠

첫째항부터 제10항까지의 합이 500이므로

$\frac{10(2a+9d)}{2}=500 \quad \therefore 2a+9d=100$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=10$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$\boldsymbol{a_n}=5+(n-1)\times10=\mathbf{10n-5}$

12 수열 $1, a_1, a_2, \cdots, a_n, 2$는 첫째항이 1, 제$(n+2)$항이 2, 항수가 $(n+2)$이므로

$\frac{(n+2)(1+2)}{2}=24,\ n+2=16 \quad \therefore \boldsymbol{n=14}$

13 (1) 100 이하의 자연수 중에서 8의 배수는

8, 16, 24, 32, ⋯, 96

이 수열은 첫째항이 8, 공차가 8인 등차수열이므로 96을 제n항이라 하면

$8+(n-1)\times8=96,\ 8n=96 \quad \therefore n=12$

따라서 구하는 합은 첫째항이 8, 제12항이 96, 항수가 12인 등차수열의 합이므로

$\frac{12\times(8+96)}{2}=\mathbf{624}$

(2) 1부터 100까지의 자연수의 합은

$\frac{100\times(1+100)}{2}=5050$

따라서 100 이하의 자연수 중에서 8의 배수가 아닌 수의 합은

$5050-624=\mathbf{4426}$

14 (ⅰ) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3n^2-2n-\{3(n-1)^2-2(n-1)\}$

$=3n^2-2n-(3n^2-8n+5)$

$=6n-5$ ……㉠

(ⅱ) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3\times1^2-2\times1=1$

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_n=6n-5$

$a_1=1$, $a_2=6\times2-5=7$이므로 $d=a_2-a_1=7-1=6$

$a=1$, $d=6$이므로 $\boldsymbol{a+d=7}$

다른 풀이 $a+d=a_2$이므로

$a_2=S_2-S_1$

$=(3\times2^2-2\times2)-(3\times1^2-2\times1)$

$=8-1=7$

09 등비수열

본문 | 104~109쪽

1-1 (1) **4** (2) **27**

1-2 (1) 공비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$인 등비수열이므로

$\square$ 안에 알맞은 수는 $3\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\mathbf{3}$

(2) 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$\square$ 안에 알맞은 수는 $64\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{-32}$

2-1 (1) **2, 2** (2) **2, 2**

2-2 (1) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -2, 공비가 -2이므로

$\boldsymbol{a_n}=(-2)\times(-2)^{n-1}=\boldsymbol{(-2)^n}$

(2) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

제3항이 12이므로 $ar^2=12$

$r=3$이므로 $9a=12$ $\quad\therefore a=\frac{4}{3}$

$\therefore \boldsymbol{a_n}=\frac{4}{3}\times 3^{n-1}=\boldsymbol{4\times 3^{n-2}}$

3-1 **2, 3**

3-2 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

제3항이 12이므로

$a_3=ar^2=12$ ……㉠

제6항이 -96이므로

$a_6=ar^5=-96$ ……㉡

㉡을 ㉠으로 나누면 $r^3=-8$

이때 r는 실수이므로 $r=-2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=3$

$\therefore \boldsymbol{a_n=3\times(-2)^{n-1}}$

4-1 **7, 8**

4-2 첫째항이 5, 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=5\times 3^{n-1}$

$a_n>1000$에서 $a_n=5\times 3^{n-1}>1000$

$3^{n-1}>200$

이때 $3^4=81$, $3^5=243$이므로 $n-1\geq 5$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 **제6항**이다.

5-1 **4, 4**

5-2 3과 27의 등비중항을 x라 하면

$x^2=3\times 27=81$ $\quad\therefore x=-9$ 또는 $x=9$

따라서 구하는 등비중항은 **-9 또는 9**이다.

6-1 **4, 4**

6-2 (1) 등비수열을 이루는 세 수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

세 수의 합이 21이므로

$a+ar+ar^2=21$ $\quad\therefore a(1+r+r^2)=21$ ……㉠

세 수의 곱이 64이므로

$a\times ar\times ar^2=64$, $a^3r^3=(ar)^3=64$

이때 ar는 실수이므로 $ar=4$ ……㉡

㉡에서 $a=\frac{4}{r}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{4}{r}(1+r+r^2)=21$, $4r^2-17r+4=0$

$(4r-1)(r-4)=0$ $\quad\therefore r=\frac{1}{4}$ 또는 $r=4$

따라서 공비는 **$\frac{1}{4}$ 또는 4**이다.

(2) (i) $r=\frac{1}{4}$일 때, $a=16$이므로 세 수는 16, 4, 1

(ii) $r=4$일 때, $a=1$이므로 세 수는 1, 4, 16

(i), (ii)에서 구하는 세 수는 **1, 4, 16**

다른 풀이

등비수열을 이루는 세 수를 a, b, c $(a<b<c)$라 하면

$a+b+c=21$ ……㉠

$abc=64$ ……㉡

a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $b^3=64$ $\quad\therefore b=4$

$b=4$를 ㉠, ㉡에 대입하면

$a+c=17$, $ac=16$

$a(17-a)=16$, $a^2-17a+16=0$

$(a-1)(a-16)=0$ $\quad\therefore a=1$ 또는 $a=16$

$a<c$이므로 $a=1$, $c=16$

따라서 구하는 세 수는 1, 4, 16

7-1 (1) **2, 21** (2) **-3**

7-2 (1) 구하는 합은 $\frac{2\times(3^{10}-1)}{3-1}=\mathbf{3^{10}-1}$

(2) 구하는 합은

$$\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=1-\frac{1}{1024}=\mathbf{\frac{1023}{1024}}$$

8-1 **-3, 1**

8-2 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

제2항이 -6이므로 $ar=-6$ ……㉠

제5항이 -162이므로 $ar^4=-162$ ……㉡

㉡을 ㉠으로 나누면 $r^3=27$

이때 r는 실수이므로 $r=3$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=-2$

따라서 구하는 합은

$$\frac{(-2)\times(3^{15}-1)}{3-1}=-(3^{15}-1)=\mathbf{1-3^{15}}$$

9-1 (1) **8, 3, 3** (2) **1533**

9-2 (1) 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

첫째항부터 제4항까지의 합이 -15이므로

$$\frac{a(r^4-1)}{r-1}=-15 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

첫째항부터 제8항까지의 합이 -255이므로

$$\frac{a(r^8-1)}{r-1}=\frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=-255 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$-15(r^4+1)=-255$, $r^4=16$

$r^4-16=0$, $(r^2+4)(r^2-4)=0$

이때 r는 양수이므로 $r=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=-1$

따라서 구하는 등비수열의 **첫째항은 -1, 공비는 2**이다.

(2) 첫째항이 -1, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\frac{(-1)\times(2^{12}-1)}{2-1}=\mathbf{-4095}$$

다른 풀이

첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\frac{a(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1}$$

$$=-15(r^8+r^4+1)\ (\because ㉠)$$

이때 $r^4=16$이므로 구하는 합은

$(-15)\times(16^2+16+1)=-4095$

10-1 **1, 1**

10-2 (i) $n\geq2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=2\times3^n-2-(2\times3^{n-1}-2)\\&=(3-1)\times2\times3^{n-1}\\&=4\times3^{n-1}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\times3-2=4$

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같다.

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{a_n=4\times3^{n-1}}$

11-1 **1, 3**

11-2 (i) $n\geq2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=2\times3^n+2-(2\times3^{n-1}+2)\\&=(3-1)\times2\times3^{n-1}\\&=4\times3^{n-1}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\times3+2=8$

이때 $a_1=8$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값 4와 같지 않다.

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{a_1=8,\ a_n=4\times3^{n-1}\ (n\geq2)}$

집중 연습

본문 | 110, 111쪽

1 (1) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 18, 공비가 $\frac{1}{3}$이므로

$$a_n=18\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\mathbf{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}}$$

(2) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -1, 공비가 3이므로

$a_n=(-1)\times3^{n-1}=\mathbf{-3^{n-1}}$

(3) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 4, 공비가 $\sqrt{3}$이므로

$\boldsymbol{a_n=4\times(\sqrt{3})^{n-1}}$

2 (1) $a_n=(-1)\times5^{n-1}=\mathbf{-5^{n-1}}$

(2) $a_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\mathbf{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(3) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

제4항이 250이므로 $ar^3=250$

$a=2$를 대입하면 $2r^3=250$, $r^3=125$

이때 r는 실수이므로 $r=5$

$\therefore \boldsymbol{a_n=2\times5^{n-1}}$

3 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

(1) 제3항이 18이므로 $ar^2=18$ $\cdots\cdots$㉠

제5항이 162이므로 $ar^4=162$ $\cdots\cdots$㉡

㉡을 ㉠으로 나누면 $r^2=9$

$\therefore r=-3$ 또는 $r=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$r=-3$일 때 $a=2$, $r=3$일 때 $a=2$

$\therefore \boldsymbol{a_n=2\times(-3)^{n-1}}$ **또는** $\boldsymbol{a_n=2\times3^{n-1}}$

(2) 제2항이 4이므로 $ar=4$ $\cdots\cdots$㉠

제5항이 32이므로 $ar^4=32$ $\cdots\cdots$㉡

㉡을 ㉠으로 나누면 $r^3=8$

이때 r는 실수이므로 $r=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=2$

$\therefore a_n=2\times2^{n-1}=\mathbf{2^n}$

(3) 제2항이 $\frac{3}{2}$이므로 $ar=\frac{3}{2}$ $\cdots\cdots$㉠

제4항이 $\frac{3}{8}$이므로 $ar^3=\frac{3}{8}$ $\cdots\cdots$㉡

㉡을 ㉠으로 나누면 $r^2=\frac{1}{4}$

$\therefore r=-\frac{1}{2}$ 또는 $r=\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면

$r=-\frac{1}{2}$일 때 $a=-3$, $r=\frac{1}{2}$일 때 $a=3$

$\therefore \boldsymbol{a_n=(-3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ **또는** $\boldsymbol{a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

4 (1) 8, x, 18이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$x^2=8\times18=144$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-12}$ **또는** $\boldsymbol{x=12}$

(2) 3, x, $\frac{1}{12}$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$x^2=3\times\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$

(3) 4, x, 16이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$x^2=4\times16=64$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-8}$ **또는** $\boldsymbol{x=8}$

5 (1) 구하는 합은

$\frac{5\times(2^{20}-1)}{2-1}=\boldsymbol{5\times(2^{20}-1)}$

(2) 구하는 합은

$\frac{4\times\{1-(-3)^{20}\}}{1-(-3)}=\boldsymbol{1-3^{20}}$

(3) 구하는 합은

$\frac{1\times(5^{20}-1)}{5-1}=\boldsymbol{\frac{1}{4}\times(5^{20}-1)}$

6 (1) 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열이므로 구하는 합은

$\frac{3\times(3^n-1)}{3-1}=\boldsymbol{\frac{3}{2}(3^n-1)}$

(2) 첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 구하는 합은

$\frac{8\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$

(3) 첫째항이 $\sqrt{2}$, 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로 구하는 합은

$\frac{\sqrt{2}\times\{(\sqrt{2})^n-1\}}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\{(\sqrt{2})^n-1\}$

$=\boldsymbol{(2+\sqrt{2})\{(\sqrt{2})^n-1\}}$

7 (1) 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로 1024를 제n항이라 하면

$2\times2^{n-1}=1024$, $2^n=1024=2^{10}$ $\quad\therefore n=10$

따라서 구하는 합은

$\frac{2\times(2^{10}-1)}{2-1}=2^{11}-2=\boldsymbol{2046}$

(2) 첫째항이 $\frac{3}{2}$, 공비가 2인 등비수열이므로 192를 제n항이라 하면

$\frac{3}{2}\times2^{n-1}=192$, $2^{n-2}=64=2^6$

$n-2=6$ $\quad\therefore n=8$

따라서 구하는 합은

$\frac{\frac{3}{2}\times(2^8-1)}{2-1}=\frac{3}{2}\times255=\boldsymbol{\frac{765}{2}}$

(3) 첫째항이 2, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 $\frac{1}{32}$을 제n항이라 하면

$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{32}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{64}=\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

$n-1=6$ $\quad\therefore n=7$

따라서 구하는 합은

$\frac{2\times\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}\times\frac{129}{128}=\boldsymbol{\frac{43}{32}}$

8 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

(1) 제3항이 6이므로 $ar^2=6$ ……㉠

제6항이 48이므로 $ar^5=48$ ……㉡

㉡을 ㉠으로 나누면 $r^3=8$

이때 r는 실수이므로 $r=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 합은

$\frac{\frac{3}{2}\times(2^n-1)}{2-1}=\boldsymbol{\frac{3}{2}(2^n-1)}$

(2) 제2항이 3이므로 $ar=3$ ……㉠

제5항이 -24이므로 $ar^4=-24$ ……㉡

㉡을 ㉠으로 나누면 $r^3=-8$

이때 r는 실수이므로 $r=-2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=-\frac{3}{2}$

따라서 구하는 합은

$\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\times\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\{1-(-2)^n\}}$

(3) 제4항이 6이므로 $ar^3=6$ ……㉠

제7항이 $\frac{3}{4}$이므로 $ar^6=\frac{3}{4}$ ……㉡

㉡을 ㉠으로 나누면 $r^3=\frac{1}{8}$

이때 r는 실수이므로 $r=\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=48$

따라서 구하는 합은

$\frac{48\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{96\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$

기초 개념 평가

본문 | 112, 113쪽

01 등비수열
02 공비
03 $\times r$
04 ar, ar^4
05 ar^3, ar^5
06 등비중항
07 $b^2=ac$
08 r
09 r^n
10 na
11 r^{2n}
12 S_1
13 S_n
14 3^{n-1}

기초 문제 평가

본문 | 114, 115쪽

1 공비를 r라 하면

(1) $r=\dfrac{-10}{5}=\dfrac{20}{-10}=\cdots=\mathbf{-2}$

(2) $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{1}=\cdots=\boldsymbol{\sqrt{2}+1}$

2 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{20}$

$=a\times ar\times ar^2\times\cdots\times ar^{19}$

$=a^{20}\times r^{1+2+3+\cdots+19}$

이때 $1+2+3+\cdots+19=\dfrac{19\times(1+19)}{2}=190$이므로

(주어진 식) $=a^{20}\times r^{190}=2^{20}\times(\sqrt{2})^{190}$

$=2^{20}\times 2^{95}=2^{115}$

$\therefore$ $\boldsymbol{m=115}$

3 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1000, 공비가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$a_n=1000\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$1000\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}<1$에서

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}<\dfrac{1}{1000}$, 즉 $2^{n-1}>1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n-1\geq 10$ $\quad\therefore n\geq 11$

따라서 처음으로 1보다 작은 수가 나타나는 항은 **제11항**이다.

4 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

제3항이 12이므로 $ar^2=12$ ……㉠

제6항이 -96이므로 $ar^5=-96$ ……㉡

㉡을 ㉠으로 나누면 $r^3=-8$

이때 r는 실수이므로 $r=-2$

따라서 구하는 공비는 **-2**이다.

5 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2=60$이므로

$a+ar=60$, $a(1+r)=60$ ……㉠

$a_3+a_4=240$이므로

$ar^2+ar^3=240$, $ar^2(1+r)=240$ ……㉡

㉡을 ㉠으로 나누면 $r^2=4$

$\therefore$ $r=-2$ 또는 $r=2$

이때 $r>0$이므로 $r=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=20$

$a_n=20\times 2^{n-1}$이므로

$a_{10}=20\times 2^9=\mathbf{10240}$

6 등비수열의 공비를 r라 하면 첫째항이 2, 제5항이 162이므로

$162=2r^4$에서 $r^4=81$

$(r^2+9)(r^2-9)=0$

공비는 실수이므로 $r^2-9=0$

$\therefore$ $r=-3$ 또는 $r=3$

(i) $r=-3$일 때

$a=2\times(-3)=-6$, $b=-6\times(-3)=18$,

$c=18\times(-3)=-54$

(ii) $r=3$일 때

$a=2\times 3=6$, $b=6\times 3=18$, $c=18\times 3=54$

(i), (ii)에서

$\boldsymbol{a=-6, b=18, c=-54}$ **또는** $\boldsymbol{a=6, b=18, c=54}$

7 x, 12, y가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$12^2=xy$ $\quad\therefore xy=144$ ……㉠

68, y, x가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2y=68+x$ ……㉡

㉡에서 $x=2y-68$을 ㉠에 대입하면

$(2y-68)y=144$, $y^2-34y-72=0$

$(y+2)(y-36)=0$

$\therefore$ $y=-2$ 또는 $y=36$

이때 $y>0$이므로 $y=36$

$y=36$을 ㉡에 대입하면

$72=68+x$ $\quad\therefore x=4$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=4, y=36}$

8 등비수열을 이루는 가로, 세로, 높이를 각각 a, ar, ar^2으로 놓으면 부피가 8이므로

$a\times ar\times ar^2=a^3r^3=(ar)^3=8$

이때 ar는 실수이므로 $ar=2$ ······㉠

겉넓이가 28이므로

$2(a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a)=28$

$a^2r+a^2r^3+a^2r^2=14$

$\therefore a^2r(1+r+r^2)=14$ ······㉡

㉠에서 $a=\frac{2}{r}$를 ㉡에 대입하면

$\frac{4}{r^2}\times r(1+r+r^2)=14$, $\frac{2(1+r+r^2)}{r}=7$

$2(1+r+r^2)=7r$, $2r^2-5r+2=0$

$(2r-1)(r-2)=0$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=2$

이때 공비는 1보다 크므로 $r=2$

$r=2$일 때, $a=1$이므로 세 수는 1, 2, 4

따라서 직육면체의 가로, 세로, 높이는 1, 2, 4이므로 제곱의 합은

$1^2+2^2+4^2=\mathbf{21}$

9 첫째항이 2, 공비가 4인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\frac{2\times(4^n-1)}{4-1}=\frac{2}{3}(4^n-1)$

$S_n>1000$에서 $\frac{2}{3}(4^n-1)>1000$

$4^n-1>1500$, $4^n>1501$

이때 $4^5=1024$, $4^6=4096$이므로

첫째항부터 제6항까지의 합이 처음으로 1000보다 커진다.

$\therefore \boldsymbol{n=6}$

10 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

삼차방정식 $x^3-1=0$의 두 허근이 α, β이므로

$\alpha^3=1$, $\beta^3=1$

또한 α, β는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$

이때 $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{100}$은 첫째항이 1, 공비가 α인 등비수열의 첫째항부터 제101항까지의 합이고

$1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{100}$은 첫째항이 1, 공비가 β인 등비수열의 첫째항부터 제101항까지의 합이다.

$\therefore (1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{100})(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{100})$

$=\frac{1-\alpha^{101}}{1-\alpha}\times\frac{1-\beta^{101}}{1-\beta}$

$=\frac{1-(\alpha^3)^{33}\alpha^2}{1-\alpha}\times\frac{1-(\beta^3)^{33}\beta^2}{1-\beta}$

$=\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha}\times\frac{1-\beta^2}{1-\beta}$

$=(1+\alpha)(1+\beta)$

$=1+\beta+\alpha+\alpha\beta$

$=\alpha+\beta+\alpha\beta+1$

$=-1+1+1=\mathbf{1}$

11 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

제2항이 6이므로 $ar=6$ ······㉠

첫째항부터 제3항까지의 합이 26이므로

$\frac{a(r^3-1)}{r-1}=26$

$\frac{a(r-1)(r^2+r+1)}{r-1}=26$

$a(r^2+r+1)=26$ ······㉡

㉠에서 $a=\frac{6}{r}$을 ㉡에 대입하면

$\frac{6}{r}(r^2+r+1)=26$, $\frac{3(r^2+r+1)}{r}=13$

$3(r^2+r+1)=13r$, $3r^2-10r+3=0$

$(3r-1)(r-3)=0$

$\therefore r=\frac{1}{3}$ 또는 $r=3$

(ⅰ) $r=\frac{1}{3}$일 때, $a=18$

(ⅱ) $r=3$일 때, $a=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$\boldsymbol{a_n=18\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$ **또는** $\boldsymbol{a_n=2\times 3^{n-1}}$

12 수열 1, 3, 9, 27, ⋯ 은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이다.

제6항부터 제9항까지의 합은 제6항이 $1\times3^5=3^5$, 항수가 4, 공비가 3이므로

$\frac{3^5\times(3^4-1)}{3-1}=\frac{243\times80}{2}=\mathbf{9720}$

다른 풀이 등비수열 1, 3, 9, 27, ⋯ 의

첫째항부터 제9항까지의 합은

$\frac{1\times(3^9-1)}{3-1}=\frac{1}{2}\times(3^9-1)$

첫째항부터 제5항까지의 합은

$\frac{1\times(3^5-1)}{3-1}=\frac{1}{2}\times(3^5-1)$

따라서 제6항부터 제9항까지의 합은

$\frac{1}{2}\times(3^9-1)-\frac{1}{2}\times(3^5-1)$

$=\frac{1}{2}\times(3^9-3^5)=\frac{3^5}{2}\times(3^4-1)$

$=\frac{243}{2}\times80=9720$

13 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

첫째항부터 제3항까지의 합이 6이므로

$\frac{a(1-r^3)}{1-r}=6$ ······㉠

제2항부터 제4항까지의 합이 -12이므로

$\frac{ar(1-r^3)}{1-r}=-12$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6r=-12$ $\therefore r=-2$

$r=-2$를 ㉠에 대입하면 $\frac{9a}{3}=6$ $\therefore a=2$

따라서 **첫째항**은 **2**, **공비**는 **-2**이다.

참고 제2항부터 제4항까지의 합은 첫째항이 ar, 공비가 r, 항수가 3인 등비수열의 합이다.

다른 풀이 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

첫째항부터 제3항까지의 합이 6이므로

$a+ar+ar^2=6$, $a(1+r+r^2)=6$ ······㉠

제2항부터 제4항까지의 합이 -12이므로

$ar+ar^2+ar^3=-12$, $ar(1+r+r^2)=-12$ ······㉡

㉡을 ㉠으로 나누면 $r=-2$

$r=-2$를 ㉠에 대입하면 $a=2$

14 첫째항부터 제4항까지의 합이 30이므로

$\frac{a(r^4-1)}{r-1}=30$ ······㉠

첫째항부터 제8항까지의 합이 510이므로

$\frac{a(r^8-1)}{r-1}=510$

$\frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=510$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$30(r^4+1)=510$, $r^4=16$

$(r^2+4)(r^2-4)=0$

이때 r는 실수이므로 $r^2=4$

$\therefore r=-2$ 또는 $r=2$

(i) $r=-2$일 때, ㉠에 대입하면

$\frac{15a}{-3}=30$ $\therefore a=-6$

(ii) $r=2$일 때, ㉠에 대입하면

$15a=30$ $\therefore a=2$

(i), (ii)에서 a는 음수이므로

$a=-6$, $r=-2$

$\therefore \boldsymbol{a+r=-8}$

15 (i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3^{n+1}+k)-(3^n+k)$

$=3^{n+1}-3^n$

$=2\times3^n$ ······㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3^2+k=9+k$

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루므로

$a_1=9+k$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같아야 한다.

$9+k=2\times3$ $\therefore \boldsymbol{k=-3}$

10 수열의 합

본문 | 116~119쪽

1-1 **1, $\boldsymbol{k}$**

1-2 (1) 수열 2, 4, 6, ⋯, $2n$은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로 일반항 a_n을 구하면

$a_n=2+(n-1)\times2=2n$

$\therefore 2+4+6+\cdots+2n=\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}2k}$

(2) 수열 1, 3, 3^2, ⋯, 3^{n-1}은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이므로 일반항 a_n을 구하면

$a_n=1\times3^{n-1}=3^{n-1}$

$\therefore 1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}}$

2-1 **10, 20, 21**

2-2 (1) 일반항 $3k-1$의 k에 1, 2, 3, ⋯, 15를 차례로 대입하면

$$\sum_{k=1}^{15}(3k-1)=(3-1)+(6-1)+(9-1)+\cdots+(45-1)$$
$$=\mathbf{2+5+8+\cdots+44}$$

(2) 일반항 2^k의 k에 1, 2, 3, ⋯, 20을 차례로 대입하면

$$\sum_{k=1}^{20}2^k=\mathbf{2+2^2+2^3+\cdots+2^{20}}$$

3-1 **3, 10, 25**

3-2 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(a_k+2b_k)=\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=1}^{20}2b_k$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{20}a_k+2\sum_{k=1}^{20}b_k$

$=3+2\times8=\mathbf{19}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(2a_k-3b_k+2)=\sum_{k=1}^{20}2a_k-\sum_{k=1}^{20}3b_k+\sum_{k=1}^{20}2$

$\displaystyle=2\sum_{k=1}^{20}a_k-3\sum_{k=1}^{20}b_k+\sum_{k=1}^{20}2$

$=2\times3-3\times8+2\times20=\mathbf{22}$

4-1 **20, 4**

4-2 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)^2=\sum_{k=1}^{10}(4a_k^{\ 2}+12a_k+9)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{10}4a_k^{\ 2}+\sum_{k=1}^{10}12a_k+\sum_{k=1}^{10}9$

$\displaystyle=4\sum_{k=1}^{10}a_k^{\ 2}+12\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}9$

$=4\times10+12\times5+9\times10=\mathbf{190}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)(a_k+1)=\sum_{k=1}^{10}(a_k^{\ 2}-1)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{10}a_k^{\ 2}-\sum_{k=1}^{10}1$

$=10-1\times10=\mathbf{0}$

5-1 (2) **21** (3) **2**

5-2 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}k=\frac{8\times9}{2}=\mathbf{36}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}k^2=\frac{8\times9\times17}{6}=\mathbf{204}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}k^3=\left(\frac{8\times9}{2}\right)^2=\mathbf{1296}$

6-1 **6, 6**

참고 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$

$\displaystyle=\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$

$\displaystyle=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)=\frac{5\times6\times7}{3}=70$

6-2 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k+1)(k-1)=\sum_{k=1}^{10}(k^2-1)=\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}1$

$\displaystyle=\frac{10\times11\times21}{6}-1\times10=\mathbf{375}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k+1)(2k-1)=\sum_{k=1}^{10}(2k^2+k-1)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{10}2k^2+\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1$

$\displaystyle=2\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1$

$\displaystyle=2\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}-1\times10$

$=\mathbf{815}$

7-1 **6, 2**

7-2 $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\left\{\sum_{k=1}^{5}(i+2k)\right\}=\sum_{i=1}^{5}\left(5i+2\times\frac{5\times6}{2}\right)=\sum_{i=1}^{5}(5i+30)$

$\displaystyle=5\times\frac{5\times6}{2}+30\times5=\mathbf{225}$

8-1 **21, 20**

8-2 (1) $\displaystyle\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}$이 성립하므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$

$\displaystyle=\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{11}}-\frac{1}{12}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

(2) $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\dfrac{1}{(2k+1)-(2k-1)}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

이 성립하므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\dfrac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{3}}-\cancel{\dfrac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{5}}-\cancel{\dfrac{1}{7}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\dfrac{1}{19}}-\dfrac{1}{21}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{21}\right)=\mathbf{\dfrac{10}{21}}$

9-1 $\boldsymbol{k+1}$**, 11, 11**

9-2 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}$

$=\dfrac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(k+2)-(k+1)}$

$=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$

이 성립하므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{14}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{14}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$

$=(\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{2})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(\sqrt{16}-\cancel{\sqrt{15}})$

$=\sqrt{16}-\sqrt{2}$

$=\mathbf{4-\sqrt{2}}$

(2) $\dfrac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$

$=\dfrac{2(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}{(2k+1)-(2k-1)}$

$=\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}$

이 성립하므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\frac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=(\cancel{\sqrt{3}}-1)+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(\sqrt{25}-\cancel{\sqrt{23}})$

$=\sqrt{25}-1=\mathbf{4}$

집중 연습

본문 | 120, 121쪽

1 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=2\times\dfrac{10\times11}{2}+1\times10=\mathbf{120}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(1-3k)=\sum_{k=1}^{8}1-3\sum_{k=1}^{8}k$

$=1\times8-3\times\dfrac{8\times9}{2}=\mathbf{-100}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}(4k-2)=4\sum_{k=1}^{7}k-\sum_{k=1}^{7}2$

$=4\times\dfrac{7\times8}{2}-2\times7=\mathbf{98}$

2 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k^2-k)=\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k$

$=\dfrac{10\times11\times21}{6}-\dfrac{10\times11}{2}=\mathbf{330}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(k^2+1)=\sum_{k=1}^{6}k^2+\sum_{k=1}^{6}1$

$=\dfrac{6\times7\times13}{6}+1\times6=\mathbf{97}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{9}(6k^2+5)=6\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}5$

$=6\times\dfrac{9\times10\times19}{6}+5\times9=\mathbf{1755}$

3 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(k^3-2k)=\sum_{k=1}^{8}k^3-2\sum_{k=1}^{8}k$

$=\left(\dfrac{8\times9}{2}\right)^2-2\times\dfrac{8\times9}{2}=\mathbf{1224}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k^3+4)=\sum_{k=1}^{10}k^3+\sum_{k=1}^{10}4$

$=\left(\dfrac{10\times11}{2}\right)^2+4\times10=\mathbf{3065}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(k^3-k^2)=\sum_{k=1}^{5}k^3-\sum_{k=1}^{5}k^2$

$=\left(\dfrac{5\times6}{2}\right)^2-\dfrac{5\times6\times11}{6}=\mathbf{170}$

4 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}(k+5)^2=\sum_{k=1}^{12}(k^2+10k+25)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{12}k^2+10\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}25$

$=\dfrac{12\times13\times25}{6}+10\times\dfrac{12\times13}{2}+25\times12$

$=\mathbf{1730}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k+2)(k-2)=\sum_{k=1}^{10}(k^2-4)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}4$

$=\dfrac{10\times11\times21}{6}-4\times10=\mathbf{345}$

(3) $\sum_{k=1}^{6}k(k-1)^2=\sum_{k=1}^{6}k(k^2-2k+1)$

$=\sum_{k=1}^{6}(k^3-2k^2+k)$

$=\sum_{k=1}^{6}k^3-2\sum_{k=1}^{6}k^2+\sum_{k=1}^{6}k$

$=\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2-2\times\frac{6\times7\times13}{6}+\frac{6\times7}{2}=\mathbf{280}$

5 (1) 수열 1, 2, 3, …의 일반항은 $1+(n-1)\times1=n$,
수열 2, 3, 4, …의 일반항은 $2+(n-1)\times1=n+1$
이므로
$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+10\times11$
$=\sum_{k=1}^{10}k(k+1)=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k$
$=\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}=\mathbf{440}$

(2) 수열 1, 2, 3, …의 일반항은 $1+(n-1)\times1=n$,
수열 3, 4, 5, …의 일반항은 $3+(n-1)\times1=n+2$
이므로
$1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+12\times14$
$=\sum_{k=1}^{12}k(k+2)=\sum_{k=1}^{12}k^2+2\sum_{k=1}^{12}k$
$=\frac{12\times13\times25}{6}+2\times\frac{12\times13}{2}=\mathbf{806}$

(3) 수열 1, 3, 5, …의 일반항은 $1+(n-1)\times2=2n-1$,
수열 2, 4, 6, …의 일반항은 $2+(n-1)\times2=2n$
$2n-1=15$에서 $n=8$이므로
$1\times2+3\times4+5\times6+\cdots+15\times16$
$=\sum_{k=1}^{8}(2k-1)2k=4\sum_{k=1}^{8}k^2-2\sum_{k=1}^{8}k$
$=4\times\frac{8\times9\times17}{6}-2\times\frac{8\times9}{2}=\mathbf{744}$

6 (1) 수열 1, 4, 7, …의 일반항은 $1+(n-1)\times3=3n-2$
$3n-2=28$에서 $n=10$이므로
$1^2+4^2+7^2+\cdots+28^2$
$=\sum_{k=1}^{10}(3k-2)^2=\sum_{k=1}^{10}(9k^2-12k+4)$
$=9\sum_{k=1}^{10}k^2-12\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}4$
$=9\times\frac{10\times11\times21}{6}-12\times\frac{10\times11}{2}+4\times10=\mathbf{2845}$

(2) 수열 1, 3, 5, …의 일반항은 $1+(n-1)\times2=2n-1$
$2n-1=25$에서 $n=13$이므로
$1^2+3^2+5^2+\cdots+25^2$
$=\sum_{k=1}^{13}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{13}(4k^2-4k+1)$
$=4\sum_{k=1}^{13}k^2-4\sum_{k=1}^{13}k+\sum_{k=1}^{13}1$
$=4\times\frac{13\times14\times27}{6}-4\times\frac{13\times14}{2}+1\times13=\mathbf{2925}$

7 (1) $\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\sum_{k=1}^{n}n+\sum_{k=1}^{n}k$

$=n^2+\frac{n(n+1)}{2}=\mathbf{\frac{3n^2+n}{2}}$

(2) $\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i}k\right)=\sum_{i=1}^{10}\left\{\frac{1}{i+1}\times\frac{i(i+1)}{2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10}i$

$=\frac{1}{2}\times\frac{10\times11}{2}=\mathbf{\frac{55}{2}}$

(3) $\sum_{j=1}^{5}\left\{\sum_{i=1}^{5}(i+j)\right\}=\sum_{j=1}^{5}\left(\frac{5\times6}{2}+5j\right)$

$=15\times5+5\times\frac{5\times6}{2}=\mathbf{150}$

8 (1) $\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$
이 성립하므로
$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$
$=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$
$=\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{21}}-\frac{1}{22}\right)$
$=\frac{1}{2}-\frac{1}{22}=\mathbf{\frac{5}{11}}$

(2) $\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$
이 성립하므로
$\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$
$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$
$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{8}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{11}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{35}}-\frac{1}{38}\right)\right\}$
$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{38}\right)=\mathbf{\frac{3}{19}}$

기초 개념 평가

본문 | 122, 123쪽

01 n	02 m
03 합	04 $+$
05 $-$	06 c
07 cn	08 2
09 6	10 $n(n+1)$
11 d	12 $b-a$
13 k	

기초 문제 평가

본문 | 124, 125쪽

1 수열 3, 5, 7, $\cdots$의 일반항은 $3+(n-1)\times2=2n+1$

$2n+1=15$에서 $n=7$이므로

$3^3+5^3+7^3+9^3+11^3+13^3+15^3=\sum_{k=1}^{7}(2k+1)^3$

따라서 옳은 답은 ④이다.

2 $\sum_{k=1}^{8}(a_k+1)(a_k-2)=\sum_{k=1}^{8}(a_k{}^2-a_k-2)$

$=\sum_{k=1}^{8}a_k{}^2-\sum_{k=1}^{8}a_k-\sum_{k=1}^{8}2$

$=40-10-2\times8=\mathbf{14}$

3 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=200$에서

$\sum_{k=1}^{10}(a_k{}^2+2a_k+1)=\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+1\times10=200$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k{}^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k=190$ ……㉠

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^2=100$에서

$\sum_{k=1}^{10}(a_k{}^2-2a_k+1)=\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k+1\times10=100$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k=90$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$4\sum_{k=1}^{10}a_k=100$ $\quad\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\mathbf{25}$

4 (1) $\sum_{k=0}^{10}(k+2)=2+\sum_{k=1}^{10}(k+2)$

$=2+\dfrac{10\times11}{2}+2\times10=\mathbf{77}$

다른 풀이 $\sum_{k=0}^{10}(k+2)=\sum_{k=0}^{10}k+\sum_{k=0}^{10}2=\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=0}^{10}2$

$=\dfrac{10\times11}{2}+2\times11=77$

(2) $\sum_{i=1}^{n-1}(2i-5)=2\times\dfrac{(n-1)\times n}{2}-5(n-1)$

$=\boldsymbol{n^2-6n+5}$

5 (1) $\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(k+1)^2-(k-1)^2\}$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2+2k+1)-(k^2-2k+1)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}4k=4\sum_{k=1}^{10}k$

$=4\times\dfrac{10\times11}{2}=\mathbf{220}$

(2) $\sum_{k=1}^{12}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{9}(k^2-1)$

$=\left(\sum_{k=1}^{12}k^2+12\right)-\left(\sum_{k=1}^{9}k^2-9\right)$

$=\left(\sum_{k=1}^{12}k^2-\sum_{k=1}^{9}k^2\right)+21$

$=\sum_{k=10}^{12}k^2+21$

$=10^2+11^2+12^2+21=\mathbf{386}$

6 $\sum_{k=1}^{m}(k^2-1)=\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}-m$

$=\dfrac{m\{(m+1)(2m+1)-6\}}{6}$

$=\dfrac{m(2m^2+3m-5)}{6}$

$=\dfrac{2m^3+3m^2-5m}{6}$

$\therefore \sum_{m=1}^{9}\left\{\sum_{k=1}^{m}(k^2-1)\right\}$

$=\dfrac{1}{6}\sum_{m=1}^{9}(2m^3+3m^2-5m)$

$=\dfrac{1}{6}\left\{2\times\left(\dfrac{9\times10}{2}\right)^2+3\times\dfrac{9\times10\times19}{6}-5\times\dfrac{9\times10}{2}\right\}$

$=780$

따라서 구하는 식의 값은 ②이다.

7 $\sum_{k=1}^{m}\left\{\sum_{l=1}^{n}(k+l)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{m}\left\{kn+\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\{2kn+n(n+1)\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{2n\times\dfrac{m(m+1)}{2}+mn(n+1)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\{mn(m+1)+mn(n+1)\}$

$=\dfrac{1}{2}mn(m+n+2)$

$=\dfrac{1}{2}\times20\times(12+2)=\mathbf{140}$

8 (1) 수열 2, 4, 6, $\cdots$의 일반항은 $2+(n-1)\times2=2n$,

수열 5, 7, 9, $\cdots$의 일반항은 $5+(n-1)\times2=2n+3$

이므로 구하는 합은

$\sum_{k=1}^{n}2k(2k+3)=\sum_{k=1}^{n}(4k^2+6k)$

$=4\sum_{k=1}^{n}k^2+6\sum_{k=1}^{n}k$

$=4\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+6\times\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{n(n+1)\{(4n+2)+9\}}{3}$

$=\boldsymbol{\dfrac{n(n+1)(4n+11)}{3}}$

(2) 수열 $1^2,\ 1^2+2^2,\ 1^2+2^2+3^2,\ \cdots$의 일반항은

$$a_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이므로 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)$$
$$=\frac{1}{6}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}}{12}$$
$$=\frac{n(n+1)(n^2+3n+2)}{12}$$
$$=\boldsymbol{\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}}$$

9 $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=120$에서

$n(n+1)(n+2)=6\times120=720$

이때 $720=8\times9\times10$이므로

$n(n+1)(n+2)=8\times9\times10$

$\therefore n=8$

따라서 자연수 n의 값은 ⑤이다.

10 $\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{1}{4n(n+1)}$

이 성립하므로

$$\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k(k+1)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\boldsymbol{\frac{n}{4(n+1)}}$$

11 이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=2$

$$\sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\{k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-3k+2)$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}-3\times\frac{10\times11}{2}+2\times10=\mathbf{240}$$

12 $\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$

이 성립하므로 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^{48}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=(\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{2})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{4}})+\cdots+(\sqrt{50}-\cancel{\sqrt{49}})$$
$$=\sqrt{50}-\sqrt{2}=5\sqrt{2}-\sqrt{2}=\mathbf{4\sqrt{2}}$$

13 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{10}}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=2\times\left(1-\frac{1}{11}\right)=\boldsymbol{\frac{20}{11}}$$

14 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+2n$

(i) $n\ge2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$$
$$=n^2+2n-(n^2-1)=2n+1 \quad\cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2+2\times1=3$

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같다.

(i), (ii)에서 $a_n=2n+1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n+1}}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\boldsymbol{\frac{n}{3(2n+3)}}$$

11 수학적 귀납법

본문 | 126~129쪽

1-1 (1) **7, 9**　(2) **27, 81**

1-2 (1) $a_1=3$이므로

$a_{n+1}=2a_n+1$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례로 대입하면

$a_2=2a_1+1=2\times3+1=7,$

$a_3=2a_2+1=2\times7+1=15,$

$a_4=2a_3+1=2\times15+1=31,$

$a_5=2a_4+1=2\times31+1=\mathbf{63}$

(2) $a_1=3$이므로

$a_{n+1}=-a_n+2$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례로 대입하면

$a_2=-a_1+2=-3+2=-1,$

$a_3=-a_2+2=-(-1)+2=3,$

$a_4=-a_3+2=-3+2=-1,$

$a_5=-a_4+2=-(-1)+2=\mathbf{3}$

(3) $a_1=2$이므로

$a_{n+1}=a_n+3$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+3=2+3=5,$

$a_3=a_2+3=5+3=8,$

$a_4=a_3+3=8+3=11,$

$a_5=a_4+3=11+3=\mathbf{14}$

(4) $a_1=1$이므로

$a_{n+1}=2a_n$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례로 대입하면

$a_2=2\times a_1=2\times1=2,$

$a_3=2\times a_2=2\times2=4,$

$a_4=2\times a_3=2\times4=8,$

$a_5=2\times a_4=2\times8=\mathbf{16}$

다른 풀이 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로 일반항은

$a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$

$\therefore\ a_5=2^{5-1}=16$

2-1 (1) **1, 1, 91**　(2) **2, 1023**

2-2 (1) $a_{n+1}=a_n+3n-1$에 $n=1, 2, 3, \cdots, 9$를 차례로 대입한 다음 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl}
 & \cancel{a_2}=a_1+3\times1-1\\
 & \cancel{a_3}=\cancel{a_2}+3\times2-1\\
 & \cancel{a_4}=\cancel{a_3}+3\times3-1\\
 & \quad\vdots\\
+) & a_{10}=\cancel{a_9}+3\times9-1\\ \hline
 & a_{10}=a_1+3(1+2+3+\cdots+9)-9
\end{array}$$

$$=1+3\sum_{k=1}^{9}k-9$$

$$=1+3\times\frac{9\times10}{2}-9=\mathbf{127}$$

(2) $a_{n+1}=a_n+3^n$에 $n=1, 2, 3, \cdots, 9$를 차례로 대입한 다음 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl}
 & \cancel{a_2}=a_1+3\\
 & \cancel{a_3}=\cancel{a_2}+3^2\\
 & \cancel{a_4}=\cancel{a_3}+3^3\\
 & \quad\vdots\\
+) & a_{10}=\cancel{a_9}+3^9\\ \hline
 & a_{10}=a_1+(3+3^2+3^3+\cdots+3^9)
\end{array}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{9}3^k$$

$$=1+\frac{3\times(3^9-1)}{3-1}=\mathbf{\frac{1}{2}\times(3^{10}-1)}$$

(3) $a_{n+1}=a_n+n^2-n$에 $n=1, 2, 3, \cdots, 9$를 차례로 대입한 다음 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl}
 & \cancel{a_2}=a_1+1^2-1\\
 & \cancel{a_3}=\cancel{a_2}+2^2-2\\
 & \cancel{a_4}=\cancel{a_3}+3^2-3\\
 & \quad\vdots\\
+) & a_{10}=\cancel{a_9}+9^2-9\\ \hline
 & a_{10}=a_1+(1^2+2^2+\cdots+9^2)-(1+2+\cdots+9)
\end{array}$$

$$=3+\sum_{k=1}^{9}k^2-\sum_{k=1}^{9}k$$

$$=3+\frac{9\times10\times19}{6}-\frac{9\times10}{2}=\mathbf{243}$$

(4) $a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$에 $n=1, 2, 3, \cdots, 9$를 차례로 대입한 다음 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl}
 & \cancel{a_2}=a_1+1\\
 & \cancel{a_3}=\cancel{a_2}+2\\
 & \cancel{a_4}=\cancel{a_3}+2^2\\
 & \quad\vdots\\
+) & a_{10}=\cancel{a_9}+2^8\\ \hline
 & a_{10}=a_1+(1+2+2^2+\cdots+2^8)
\end{array}$$

$$=2+\sum_{k=1}^{9}2^{k-1}$$

$$=2+\frac{1\times(2^9-1)}{2-1}=\mathbf{513}$$

3-1 (1) **20, 20**　(2) **1, 190**

3-2 (1) $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}a_n$에 $n=1, 2, 3, \cdots, 19$를 차례로 대입한 다음 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl}
 & \cancel{a_2}=\dfrac{2}{3}a_1\\
 & \cancel{a_3}=\dfrac{3}{4}\cancel{a_2}\\
 & \cancel{a_4}=\dfrac{4}{5}\cancel{a_3}\\
 & \quad\vdots\\
\times) & a_{20}=\dfrac{20}{21}\cancel{a_{19}}\\ \hline
 & a_{20}=a_1\times\left(\dfrac{2}{\cancel{3}}\times\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\dfrac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\times\cdots\times\dfrac{\cancel{20}}{21}\right)
\end{array}$$

$$=1\times\frac{2}{21}=\mathbf{\frac{2}{21}}$$

(2) $a_{n+1}=3^{n-1}a_n$에 $n=1, 2, 3, \cdots, 19$를 차례로 대입한 다음 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=a_1 \\ & \cancel{a_3}=3\cancel{a_2} \\ & \cancel{a_4}=3^2\cancel{a_3} \\ & \vdots \\ \times) & a_{20}=3^{18}\cancel{a_{19}} \\ \hline & a_{20}=a_1\times(1\times3\times3^2\times\cdots\times3^{18}) \\ & =1\times3^{1+2+3+\cdots+18} \\ & =3^{\frac{18\times19}{2}}=\mathbf{3^{171}} \end{array}$$

(3) $a_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n-1}a_n$에 $n=1, 2, 3, \cdots, 19$를 차례로 대입한 다음 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=\frac{3}{1}a_1 \\ & \cancel{a_3}=\frac{5}{3}\cancel{a_2} \\ & \cancel{a_4}=\frac{7}{5}\cancel{a_3} \\ & \vdots \\ \times) & a_{20}=\frac{39}{37}\cancel{a_{19}} \\ \hline & a_{20}=a_1\times\left(\frac{\cancel{3}}{1}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{7}}{\cancel{5}}\times\cdots\times\frac{39}{\cancel{37}}\right) \\ & =2\times39=\mathbf{78} \end{array}$$

(4) $2^na_{n+1}=a_n$, 즉 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2^n}a_n$에 $n=1, 2, 3, \cdots, 19$를 차례로 대입한 다음 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=\frac{1}{2}a_1 \\ & \cancel{a_3}=\frac{1}{2^2}\cancel{a_2} \\ & \cancel{a_4}=\frac{1}{2^3}\cancel{a_3} \\ & \vdots \\ \times) & a_{20}=\frac{1}{2^{19}}\cancel{a_{19}} \\ \hline & a_{20}=a_1\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^2}\times\frac{1}{2^3}\times\cdots\times\frac{1}{2^{19}}\right) \\ & =1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+3+\cdots+19} \\ & =\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{19\times20}{2}}=\mathbf{\left(\frac{1}{2}\right)^{190}} \end{array}$$

4-1 (가) $\mathbf{\dfrac{k(k+1)}{2}}$ (나) $\mathbf{\dfrac{k}{2}}$ (다) $\mathbf{\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}}$

4-2 (가) $\mathbf{2k^2+7k+6}$ (나) $\mathbf{2k+3}$ (다) $\mathbf{k+1}$

기초 개념 평가

본문 | 130, 131쪽

01 귀납적	02 a, d
03 a, r	04 더한다
05 k	06 곱한다
07 $f(n-1)$	08 $n=1$
09 $n=2$	10 $n=k+1$

기초 문제 평가

본문 | 132, 133쪽

1 (1) $\mathbf{a_1=2}$이므로

$a_{n+1}=-a_n+3$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례로 대입하면

$\mathbf{a_2}=-a_1+3=-2+3=\mathbf{1}$,

$\mathbf{a_3}=-a_2+3=-1+3=\mathbf{2}$,

$\mathbf{a_4}=-a_3+3=-2+3=\mathbf{1}$,

$\mathbf{a_5}=-a_4+3=-1+3=\mathbf{2}$

(2) $\mathbf{a_1=4}$이므로

$a_{n+1}=-2^{n-1}a_n+n$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례로 대입하면

$\mathbf{a_2}=-2^{1-1}a_1+1=-1\times4+1=\mathbf{-3}$,

$\mathbf{a_3}=-2^{2-1}a_2+2=-2\times(-3)+2=\mathbf{8}$,

$\mathbf{a_4}=-2^{3-1}a_3+3=-4\times8+3=\mathbf{-29}$,

$\mathbf{a_5}=-2^{4-1}a_4+4=-8\times(-29)+4=\mathbf{236}$

2 $a_1=1$이므로

$a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n}+n^2$에 $n=1, 2, 3$을 차례로 대입하면

$a_2=\dfrac{1}{a_1}+1^2=1+1=2$,

$a_3=\dfrac{1}{a_2}+2^2=\dfrac{1}{2}+4=\dfrac{9}{2}$,

$a_4=\dfrac{1}{a_3}+3^2=\dfrac{2}{9}+9=\mathbf{\dfrac{83}{9}}$

3 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=4+(n-1)\times3=3n+1$

$\therefore a_{20}=3\times20+1=\mathbf{61}$

4 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 $a_2-a_1=4$인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(4k-3)$

$=4\times\dfrac{10\times11}{2}-3\times10=\mathbf{190}$

5 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

따라서 이 수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\mathbf{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$$

6 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=3$인 등비수열이므로

$a_n=1\times3^{n-1}=3^{n-1}$

$\therefore$ $a_2+a_4+a_6=3+3^3+3^5=\mathbf{273}$

7 $a_{n+1}=a_n+2n+1$에 $n=1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입한 다음 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=a_1+2\times1+1 \\ & \cancel{a_3}=\cancel{a_2}+2\times2+1 \\ & \cancel{a_4}=\cancel{a_3}+2\times3+1 \\ & \vdots \\ +) & a_n=\cancel{a_{n-1}}+2\times(n-1)+1 \\ \hline & a_n=a_1+2\times\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}+(n-1) \end{array}$$

$$=2+2\sum_{k=1}^{n-1}k+(n-1)$$

$$=2+2\times\frac{(n-1)n}{2}+(n-1)$$

$$=n^2+1$$

$n^2+1=145$에서 $n^2=144$ $\therefore$ $\boldsymbol{n=12}$

8 $a_{n+1}=\frac{3n+2}{3n-1}a_n$에 $n=1, 2, 3, \cdots, 8$을 차례로 대입한 다음 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=\frac{5}{2}a_1 \\ & \cancel{a_3}=\frac{8}{5}\cancel{a_2} \\ & \cancel{a_4}=\frac{11}{8}\cancel{a_3} \\ & \vdots \\ \times) & a_9=\frac{26}{23}\cancel{a_8} \\ \hline & a_9=a_1\times\left(\frac{\cancel{5}}{2}\times\frac{\cancel{8}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{11}}{\cancel{8}}\times\cdots\times\frac{26}{\cancel{23}}\right) \end{array}$$

$$=4\times\frac{26}{2}=\mathbf{52}$$

9 ❶ $n=1$일 때

(좌변)$=1^3=\boxed{1}$, (우변)$=\left(\frac{1\times2}{2}\right)^2=\boxed{1}$

따라서 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다.

❷ $n=k$일 때

등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$$

위의 등식의 좌변에 $\boxed{(k+1)^3}$을 더하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+\boxed{(k+1)^3}$$

$$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+\boxed{(k+1)^3}$$

$$=(k+1)^2\times\left\{\frac{k^2}{4}+(k+1)\right\}$$

$$=(k+1)^2\times\frac{(\boxed{k+2})^2}{4}$$

$$=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$$

위 등식은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

❶, ❷에서 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

$\therefore$ ㈎ **1** ㈏ $\boldsymbol{(k+1)^3}$ ㈐ $\boldsymbol{k+2}$

10 ❶ $n=2$일 때

(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$,

(우변)$=\boxed{1+2h}$

이때 $1+2h+h^2>1+2h$이므로 부등식 ㉠이 성립한다.

❷ $n=k\,(k\ge2)$일 때

부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$ ……㉡

위의 부등식의 양변에 $1+h$를 곱하면

$$(1+h)^{k+1}=(1+h)^k(\boxed{1+h})$$

$$>(1+kh)(1+h)$$

$$=1+(k+1)h+kh^2$$

$$>\boxed{1+(k+1)h}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

❶, ❷에서 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

$\therefore$ ㈎ $\boldsymbol{1+2h}$ ㈏ $\boldsymbol{1+h}$ ㈐ $\boldsymbol{1+(k+1)h}$

memo

짧지만 개념에 강한 짤강!

memo

짧지만 개념에 강한 짤강!