정답 및 풀이

고등 수학(상)

● 정답을 확인하려고 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

01 다항식의 연산

0001 답 $-5x^3+2x^2-x+4$

0002 답 $4-x+2x^2-5x^3$

0003 x에 대하여 차수가 높은 항부터 정리하면
$x^3+2yx^2-x-3y^2+4y-1$
답 $x^3+2yx^2-x-3y^2+4y-1$

0004 y에 대하여 차수가 낮은 항부터 정리하면
$x^3-x-1+(2x^2+4)y-3y^2$
답 $x^3-x-1+(2x^2+4)y-3y^2$

0005 $A+B=(x^3+6x^2+x-7)+(5x^3-2x+1)$
$=x^3+6x^2+x-7+5x^3-2x+1$
$=6x^3+6x^2-x-6$ 답 $6x^3+6x^2-x-6$

0006 $B-A=(5x^3-2x+1)-(x^3+6x^2+x-7)$
$=5x^3-2x+1-x^3-6x^2-x+7$
$=4x^3-6x^2-3x+8$ 답 $4x^3-6x^2-3x+8$

0007 $2A-B-3C$
$=2(x^2+4x-5)-(2x^2-3x+1)-3(-x^2-2x+7)$
$=2x^2+8x-10-2x^2+3x-1+3x^2+6x-21$
$=3x^2+17x-32$ 답 $3x^2+17x-32$

0008 $(A+2B)-(4A-C)$
$=A+2B-4A+C$
$=-3A+2B+C$
$=-3(x^2+4x-5)+2(2x^2-3x+1)+(-x^2-2x+7)$
$=-3x^2-12x+15+4x^2-6x+2-x^2-2x+7$
$=-20x+24$ 답 $-20x+24$

0009 답 $3x^3-x^2+2x$

0010 답 $2a^3b+5a^2b-2ab^2$

0011 $(x+y)(3x+4y)=3x^2+4xy+3xy+4y^2$
$=3x^2+7xy+4y^2$ 답 $3x^2+7xy+4y^2$

0012 $(x-1)(x^2-x-3)$
$=x^3-x^2-3x-x^2+x+3$
$=x^3-2x^2-2x+3$ 답 x^3-2x^2-2x+3

0013 $(2a^2+2a-1)(a+3)$
$=2a^3+6a^2+2a^2+6a-a-3$
$=2a^3+8a^2+5a-3$ 답 $2a^3+8a^2+5a-3$

0014 $(5a^2-b)(a^2-a+2b)$
$=5a^4-5a^3+10a^2b-a^2b+ab-2b^2$
$=5a^4-5a^3+9a^2b+ab-2b^2$
답 $5a^4-5a^3+9a^2b+ab-2b^2$

0015 $(3x^2-xy+1)(x-y^2)$
$=3x^3-3x^2y^2-x^2y+xy^3+x-y^2$
답 $3x^3-3x^2y^2-x^2y+xy^3+x-y^2$

0016 $(a-1)(a+2)(a+3)$
$=\{(a-1)(a+2)\}(a+3)$
$=(a^2+2a-a-2)(a+3)$
$=(a^2+a-2)(a+3)$
$=a^3+3a^2+a^2+3a-2a-6$
$=a^3+4a^2+a-6$ 답 a^3+4a^2+a-6

0017 $(x+y)(x+2y)(2x+y)$
$=\{(x+y)(x+2y)\}(2x+y)$
$=(x^2+2xy+xy+2y^2)(2x+y)$
$=(x^2+3xy+2y^2)(2x+y)$
$=2x^3+x^2y+6x^2y+3xy^2+4xy^2+2y^3$
$=2x^3+7x^2y+7xy^2+2y^3$
답 $2x^3+7x^2y+7xy^2+2y^3$

0018 답 (가) 분배법칙 (나) 결합법칙 (다) 교환법칙 (라) 분배법칙

0019 $(2x+1)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2$
$=4x^2+4x+1$ 답 $4x^2+4x+1$

0020 $(3x-5)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 5+5^2$
$=9x^2-30x+25$ 답 $9x^2-30x+25$

0021 $(4x+y)(4x-y)=(4x)^2-y^2=16x^2-y^2$ 답 $16x^2-y^2$

0022 $(x+2)(x-7)=x^2+(2-7)x+2\cdot(-7)$
$=x^2-5x-14$ 답 $x^2-5x-14$

0023 $(3x+4)(2x-1)=3\cdot 2x^2+(-3+8)x+4\cdot(-1)$
$=6x^2+5x-4$ 답 $6x^2+5x-4$

0024 $(a-b+2c)^2$
$=a^2+(-b)^2+(2c)^2+2\cdot a\cdot(-b)+2\cdot(-b)\cdot 2c+2\cdot 2c\cdot a$
$=a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$
답 $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$

0025 $(x+4)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2+4^3$
$=x^3+12x^2+48x+64$
답 $x^3+12x^2+48x+64$

0026 $(x-2y)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3$
$=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$
답 $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

0027 $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+3^3=x^3+27$ 답 x^3+27

0028 $(2x-1)(4x^2+2x+1)=(2x)^3-1^3=8x^3-1$

답 $8x^3-1$

0029 $(a+2b-c)(a^2+4b^2+c^2-2ab+2bc+ac)$

$=a^3+(2b)^3+(-c)^3-3a\cdot 2b\cdot(-c)$

$=a^3+8b^3-c^3+6abc$ 답 $a^3+8b^3-c^3+6abc$

0030 $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

$=x^4+x^2(2y)^2+(2y)^4$

$=x^4+4x^2y^2+16y^4$ 답 $x^4+4x^2y^2+16y^4$

0031 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4^2-2\cdot 3=10$ 답 10

0032 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=5^2-4\cdot(-1)=29$ 답 29

0033 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=3^3-3\cdot(-6)\cdot 3=81$ 답 81

0034 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=2^3+3\cdot 8\cdot 2=56$ 답 56

0035 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=6^2-2\cdot 11=14$ 답 14

0036 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$ 답 14

0037 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=4^3-3\cdot 4=52$ 답 52

0038 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=3^2+2=11$ 답 11

0039 $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=3^3+3\cdot 3=36$ 답 36

0040 $x+y=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}$,
$xy=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=(2\sqrt{2})^2-2\cdot 1=6$ 답 6

0041 $x+y=2\sqrt{2}$, $xy=1$이므로

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(2\sqrt{2})^3-3\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}$

$=10\sqrt{2}$ 답 $10\sqrt{2}$

0042 답 몫: x^2-3x, 나머지: 2

3, $-3x^2-6x$

0043 답 몫: $2x+3$, 나머지: $x-8$

3, $2x^3-2x^2+2x$, $3x^2-3x+3$, $x-8$

0044

$$\begin{array}{rl} & x-2 \\ x^2+3\,\big) & \overline{x^3-2x^2+4x+1} \\ & \underline{x^3 \qquad\quad +3x \qquad} \\ & -2x^2+x+1 \\ & \underline{-2x^2 \qquad -6} \\ & x+7 \end{array}$$

답 몫: $x-2$, 나머지: $x+7$

0045

$$\begin{array}{rl} & 2x-5 \\ x^2-x-2\,\big) & \overline{2x^3-7x^2 \qquad +3} \\ & \underline{2x^3-2x^2-4x \qquad} \\ & -5x^2+4x+3 \\ & \underline{-5x^2+5x+10} \\ & -x-7 \end{array}$$

답 몫: $2x-5$, 나머지: $-x-7$

0046

$$\begin{array}{rl} & -2x^2+x-3 \\ 2x^2+x-3\,\big) & \overline{-4x^4 \qquad +x^2+x-1} \\ & \underline{-4x^4-2x^3+6x^2 \qquad\qquad} \\ & 2x^3-5x^2+x \\ & \underline{2x^3+x^2-3x} \\ & -6x^2+4x-1 \\ & \underline{-6x^2-3x+9} \\ & 7x-10 \end{array}$$

답 몫: $-2x^2+x-3$, 나머지: $7x-10$

0047

$$\begin{array}{rl} & -5x-2 \\ x-1\,\big) & \overline{-5x^2+3x+8} \\ & \underline{-5x^2+5x \qquad} \\ & -2x+8 \\ & \underline{-2x+2} \\ & 6 \end{array}$$

따라서 $Q=-5x-2$, $R=6$이므로

$-5x^2+3x+8=(x-1)(-5x-2)+6$

답 $-5x^2+3x+8=(x-1)(-5x-2)+6$

0048

$$\begin{array}{rl} & 2x^2-x+3 \\ 2x+3\,\big) & \overline{4x^3+4x^2+3x-2} \\ & \underline{4x^3+6x^2 \qquad\qquad} \\ & -2x^2+3x \\ & \underline{-2x^2-3x} \\ & 6x-2 \\ & \underline{6x+9} \\ & -11 \end{array}$$

따라서 $Q=2x^2-x+3$, $R=-11$이므로

$4x^3+4x^2+3x-2=(2x+3)(2x^2-x+3)-11$

답 $4x^3+4x^2+3x-2=(2x+3)(2x^2-x+3)-11$

0049 $(2A+B)-(3A-B)$
$=2A+B-3A+B$
$=-A+2B$
$=-(x^3-2x^2+5x-4)+2(x^3+x-3)$
$=-x^3+2x^2-5x+4+2x^3+2x-6$
$=x^3+2x^2-3x-2$ 답 ④

0050 $2A-B+C$
$=2(x^3-2x^2+1)-(-x^3+4x+2)+(2x^2-x+5)$
$=2x^3-4x^2+2+x^3-4x-2+2x^2-x+5$
$=3x^3-2x^2-5x+5$
따라서 $a=3$, $b=-2$, $c=-5$, $d=5$이므로
$a+b+c+d=1$ 답 ①

0051 $2X+B=2A-3B$에서 $2X=2A-4B$
$\therefore X=A-2B$
$=(2x^2+xy+3y^2)-2\left(-\frac{1}{2}x^2+4xy+y^2\right)$
$=2x^2+xy+3y^2+x^2-8xy-2y^2$
$=3x^2-7xy+y^2$ 답 $3x^2-7xy+y^2$

0052 $A+2B=7x^2+xy-3y^2$ ...... ㉠
$A-B=-5x^2+4xy+3y^2$ ...... ㉡
㉠$+2\times$㉡을 하면 $3A=-3x^2+9xy+3y^2$
$\therefore A=-x^2+3xy+y^2$ ··· ❶
㉠$-$㉡을 하면 $3B=12x^2-3xy-6y^2$
$\therefore B=4x^2-xy-2y^2$ ··· ❷
$\therefore A+B=3x^2+2xy-y^2$ ··· ❸
답 $3x^2+2xy-y^2$

채점 기준	비율
❶ 다항식 A를 구할 수 있다.	40 %
❷ 다항식 B를 구할 수 있다.	40 %
❸ $A+B$를 계산할 수 있다.	20 %

0053 $A+BC=(3x^3+2x^2+x-1)+(x^2-2)(x+1)$
$=3x^3+2x^2+x-1+x^3+x^2-2x-2$
$=4x^3+3x^2-x-3$ 답 ④

0054 $(x+3y)(2x+y)-(2x^2-xy+3y^2)$
$=(2x^2+7xy+3y^2)-(2x^2-xy+3y^2)$
$=2x^2+7xy+3y^2-2x^2+xy-3y^2$
$=8xy$ 답 ③

0055 $AC-BA$
$=(x-2)(x^2-3x+1)-(x^3+x-1)(x-2)$
$=(x^3-5x^2+7x-2)-(x^4-2x^3+x^2-3x+2)$
$=x^3-5x^2+7x-2-x^4+2x^3-x^2+3x-2$
$=-x^4+3x^3-6x^2+10x-4$
답 $-x^4+3x^3-6x^2+10x-4$

0056 $[2x+1,\ x^2+x+1]=(2x+1)(x^2+x+1)-1$
$=2x^3+3x^2+3x+1-1$
$=2x^3+3x^2+3x$
답 $2x^3+3x^2+3x$

0057 $(3x^2+2x+1)(x^2+2x+3)$의 전개식에서 x^3항은
$3x^2\cdot 2x+2x\cdot x^2=8x^3$
따라서 x^3의 계수는 8이다. 답 ④

0058 $(2x-y+3)(4x+5y-1)$의 전개식에서 xy항은
$2x\cdot 5y+(-y)\cdot 4x=6xy$ ··· ❶
따라서 xy의 계수는 6이다. ··· ❷
답 6

채점 기준	비율
❶ xy항을 구할 수 있다.	70 %
❷ xy의 계수를 구할 수 있다.	30 %

0059 $(2x^2+3x-1)(x^2+x+k)$의 전개식에서 x항은
$3x\cdot k+(-1)\cdot x=(3k-1)x$
이때 x의 계수가 8이므로
$3k-1=8$, $3k=9$
$\therefore k=3$ 답 ④

0060 $(3x^2-x+1)(x^2+ax+2)$의 전개식에서 x^2항은
$3x^2\cdot 2-x\cdot ax+1\cdot x^2=(7-a)x^2$
이므로 $7-a=5$ $\therefore a=2$
따라서 $(3x^2-x+1)(x^2+2x+2)$의 전개식에서 x항은
$-x\cdot 2+1\cdot 2x=0$
이므로 x의 계수는 0이다. 답 ③

0061 $(1+x+x^2+x^3)^2=(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)$의 전개식에서 x^2항은
$1\cdot x^2+x\cdot x+x^2\cdot 1=3x^2$
따라서 x^2의 계수는 3이다. 답 3

라쎈 특강
$(1+x+x^2+x^3)^2$을 전개할 때, x^3항은 x^2의 계수에 영향을 주지 않으므로 $(1+x+x^2)^2$의 전개식에서 x^2의 계수를 구해도 된다.

0062 $(a+b)^2(a-b)^2=\{(a+b)(a-b)\}^2$
$=(a^2-b^2)^2=a^4-2a^2b^2+b^4$
답 $a^4-2a^2b^2+b^4$

다른 풀이 $(a+b)^2(a-b)^2$
$=(a^2+2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)$
$=a^4-2a^3b+a^2b^2+2a^3b-4a^2b^2+2ab^3+a^2b^2-2ab^3+b^4$
$=a^4-2a^2b^2+b^4$

0063 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$
$=(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2$
$=18-5=13$ 답 ⑤

0064 $(a+2b+c)^2=a^2+4b^2+c^2+2\cdot a\cdot 2b+2\cdot 2b\cdot c+2\cdot c\cdot a$
$=a^2+4b^2+c^2+2(2ab+2bc+ca)$
$=26+2\cdot 19=64$ 답 ②

0065 $(x+ay-z)^2$
$=x^2+a^2y^2+z^2+2\cdot x\cdot ay+2\cdot ay\cdot(-z)+2\cdot(-z)\cdot x$
$=x^2+a^2y^2+z^2+2axy-2ayz-2zx$ ➊
이때 xy의 계수가 -8이므로
$2a=-8$ $\quad\therefore a=-4$ ➋
따라서 yz의 계수는 $-2a=-2\cdot(-4)=8$이므로
$b=8$ ➌
답 $a=-4,\ b=8$

채점 기준	비율
➊ $(x+ay-z)^2$을 전개할 수 있다.	50 %
➋ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ b의 값을 구할 수 있다.	20 %

0066 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$에서 $\quad \frac{xy+yz+zx}{xyz}=0$
$\therefore xy+yz+zx=0$
이때 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=2+2\cdot 0=2$
이므로
$(x+y+z)^4=\{(x+y+z)^2\}^2=2^2=4$ 답 ①

0067 $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$=\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}$
$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)=x^6-y^6$ 답 ②

0068 $(x-1)^3-(x-2)(x^2+2x+4)$
$=(x^3-3x^2+3x-1)-(x^3-8)$
$=-3x^2+3x+7$
따라서 x^2의 계수는 -3이다. 답 ②

0069 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$=a^3-b^3-3ab(a-b)$
$=8-3\cdot(-5)=23$ 답 ③

0070 $A=(x-1)^3,\ B=(x+1)^3$이므로 ➊
$A+B=(x-1)^3+(x+1)^3$
$=(x^3-3x^2+3x-1)+(x^3+3x^2+3x+1)$
$=2x^3+6x$ ➋
답 $2x^3+6x$

채점 기준	비율
➊ A, B를 각각 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
➋ $A+B$를 계산할 수 있다.	60 %

0071 $x^2+3x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t+1)(t-3)$
$=t^2-2t-3$
$=(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-3$
$=x^4+6x^3+9x^2-2x^2-6x-3$
$=x^4+6x^3+7x^2-6x-3$
답 $x^4+6x^3+7x^2-6x-3$

0072 $y-z=t$로 놓으면
(주어진 식)$=\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}$
$=(x-t)(x+t)$
$=x^2-t^2$
$=x^2-(y-z)^2$
$=x^2-(y^2-2yz+z^2)$
$=x^2-y^2-z^2+2yz$
답 $x^2-y^2-z^2+2yz$

0073 $(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)$
$=\{(x+3)(x-4)\}\{(x+1)(x-2)\}$
$=(x^2-x-12)(x^2-x-2)$ 상수항끼리 더한 값이 같아지도록 다항식을 2개씩 짝 지어 전개한다.
$x^2-x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t-12)(t-2)$
$=t^2-14t+24$
$=(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24$
$=x^4-2x^3+x^2-14x^2+14x+24$
$=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$
따라서 $a=-13,\ b=14$이므로
$a+2b=-13+2\cdot 14=15$ 답 ⑤

0074 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서
$7=3^2-2xy,\quad 2xy=2$
$\therefore xy=1$
$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=3^3-3\cdot 1\cdot 3=18$ 답 ④

0075 $x^3y+xy^3=xy(x^2+y^2)$
$=xy\{(x+y)^2-2xy\}$
$=4\cdot(4^2-2\cdot 4)=32$ 답 32

0076 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}$ ...... ㉠
이때
$x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$,
$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$
이므로
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=4^2-2\cdot 1=14$
따라서 ㉠에서 구하는 값은
$\frac{14}{1}=14$ 답 ②

다른 풀이 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(4+4\sqrt{3}+3)+(4-4\sqrt{3}+3)}{4-3}=14$$

0077 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$에서

$-19=-1-3ab,\qquad 3ab=18$

$\therefore\ ab=6$

답 6

0078 $x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2$

$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2(xy)^2$ …… ㉠ ⋯ ❶

이때 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$10=1^3-3xy,\qquad 3xy=-9$

$\therefore\ xy=-3$ ⋯ ❷

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$\{1^2-2\cdot(-3)\}^2-2\cdot(-3)^2=31$ ⋯ ❸

답 31

채점 기준	비율
❶ x^4+y^4을 $x+y$와 xy에 대한 식으로 변형할 수 있다.	40 %
❷ xy의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ x^4+y^4의 값을 구할 수 있다.	20 %

0079 $x\neq0$이므로 $x^2-5x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x^2-5x-1=0$에 $x=0$을 대입하면 $-1\neq0$이므로 $x\neq0$

$x-5-\dfrac{1}{x}=0\qquad \therefore\ x-\dfrac{1}{x}=5$

$\therefore\ x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=5^2+2=27$

답 ④

라쎈 특강

$x^2-px\pm1=0$ (p는 상수)의 양변을 x로 나누면

$x-p\pm\dfrac{1}{x}=0\qquad \therefore\ x\pm\dfrac{1}{x}=p$

0080 $x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ …… ㉠

이때 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4$에서

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3^2+4=13$

그런데 $x>0$이면 $x+\dfrac{1}{x}>0$이므로

$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{13}$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$\sqrt{13}\cdot3=3\sqrt{13}$

답 $3\sqrt{13}$

0081 (1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$에서

$6=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\qquad \therefore\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=8$

그런데 $x>1$이면 $x+\dfrac{1}{x}>0$이므로

$x+\dfrac{1}{x}=2\sqrt{2}$ ⋯ ❶

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ ⋯ ❷

$=(2\sqrt{2})^3-3\cdot2\sqrt{2}$

$=10\sqrt{2}$ ⋯ ❸

답 (1) $2\sqrt{2}$ (2) $10\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $x+\dfrac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $x^3+\dfrac{1}{x^3}$을 $x+\dfrac{1}{x}$에 대한 식으로 변형할 수 있다.	30 %
❸ $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0082 $x^3+2x^2+3x+4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

$=x^3+\dfrac{1}{x^3}+2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4$ …… ㉠

이때 $x\neq0$이므로 $x^2-4x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4+\dfrac{1}{x}=0\qquad \therefore\ x+\dfrac{1}{x}=4$

따라서

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14,$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4^3-3\cdot4=52$

이므로 ㉠에서 구하는 값은

$52+2\cdot14+3\cdot4+4=96$

답 96

0083 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$13=5^2-2(xy+yz+zx),\qquad 2(xy+yz+zx)=12$

$\therefore\ xy+yz+zx=6$

답 ②

0084 $a^2+b^2+4c^2=a^2+b^2+(2c)^2$

$=(a+b+2c)^2-2(ab+2bc+2ca)$

$=11^2-2\cdot32=57$

답 ④

0085 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$

$=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$ …… ㉠ ⋯ ❶

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$46=8^2-2(ab+bc+ca),\qquad 2(ab+bc+ca)=18$

$\therefore\ ab+bc+ca=9$ ⋯ ❷

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$2\cdot46-2\cdot9=74$ ⋯ ❸

답 74

채점 기준	비율
❶ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$을 변형할 수 있다.	40 %
❷ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0086 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ca+c^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\}$ …… ㉠

이때 $a-b=7$, $b-c=-3$을 변끼리 더하면

$a-c=4$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$\frac{1}{2}\{7^2+(-3)^2+4^2\}=\frac{1}{2}\cdot74=37$ 답 37

0087 $(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)$

$=(3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)$

$=(3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)$

$=(3^4-2^4)(3^4+2^4)$

$=3^8-2^8$ 답 ③

0088 $98^2+102^2=(100-2)^2+(100+2)^2$

$=100^2-2\cdot100\cdot2+2^2+100^2+2\cdot100\cdot2+2^2$

$=20008$ 답 ⑤

0089 $\frac{108^3}{107\times109+1}=\frac{108^3}{(108-1)(108+1)+1}$

$=\frac{108^3}{(108^2-1)+1}$

$=108$ 답 108

0090 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 넓이는 ab이다.

직사각형의 대각선의 길이가 15이므로

$a^2+b^2=15^2=225$

또 직사각형의 둘레의 길이가 42이므로

$2(a+b)=42$ $\therefore a+b=21$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$225=21^2-2ab$ $\therefore ab=108$

따라서 직사각형의 넓이는 108이다. 답 ①

0091 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 넓이는 ab이다.

직사각형의 대각선의 길이는 사분원의 반지름의 길이와 같으므로

$a^2+b^2=8^2=64$

또 직사각형의 가로와 세로의 길이의 합이 10이므로

$a+b=10$

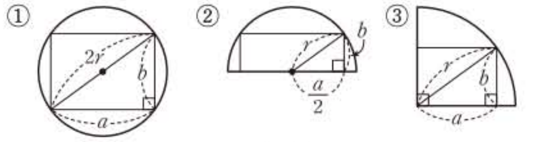
이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$64=10^2-2ab$ $\therefore ab=18$

따라서 직사각형의 넓이는 18이다. 답 18

라쎈 특강

가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b인 직사각형이 아래와 같이 내접할 때, 다음이 성립한다.



① $\Rightarrow a^2+b^2=(2r)^2$ ② $\Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2=r^2$ ③ $\Rightarrow a^2+b^2=r^2$

0092 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b, 높이를 c라 하면 직육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$이다.

직육면체의 겉넓이가 10이므로

$2(ab+bc+ca)=10$

또 모든 모서리의 길이의 합이 16이므로

$4(a+b+c)=16$ $\therefore a+b+c=4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=4^2-10=6$

따라서 직육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{6}$이다. 답 $\sqrt{6}$

0093 두 구의 반지름의 길이를 각각 a, b라 하면 두 구의 부피의 합은 $\frac{4}{3}\pi(a^3+b^3)$이다.

두 구의 지름의 길이의 합이 8이므로

$2(a+b)=8$ $\therefore a+b=4$

또 두 구의 겉넓이의 합이 40π이므로

$4\pi(a^2+b^2)=40\pi$ $\therefore a^2+b^2=10$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$10=4^2-2ab$ $\therefore ab=3$

따라서

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=4^3-3\cdot3\cdot4=28$

이므로 두 구의 부피의 합은

$\frac{4}{3}\pi\cdot28=\frac{112}{3}\pi$ 답 ⑤

0094

$$
\begin{array}{r}
3x-5 \\
x^2+x-1\,\overline{)\,3x^3-2x^2+4x-1} \\
\underline{3x^3+3x^2-3x} \\
-5x^2+7x-1 \\
\underline{-5x^2-5x+5} \\
12x-6
\end{array}
$$

따라서 몫은 $3x-5$, 나머지는 $12x-6$이다. 답 ③

0095 $a=5$, $b=5$, $c=4$, $d=16$이므로

$a+b+c+d=30$ 답 30

0096

$$
\begin{array}{r}
3x+3 \\
x^2-x+2\,\overline{)\,3x^3+5x+11} \\
\underline{3x^3-3x^2+6x} \\
3x^2-x+11 \\
\underline{3x^2-3x+6} \\
2x+5
\end{array}
$$

즉 $2x+5=2x+k$이므로 $k=5$ 답 ①

0097

$$\begin{array}{r}
x-3 \\
x^2+1\overline{)\,x^3-3x^2+4x-1} \\
\underline{x^3\qquad\;+x\quad} \\
-3x^2+3x-1 \\
\underline{-3x^2\qquad\;-3} \\
3x+2
\end{array}$$

따라서 몫은 $x-3$, 나머지는 $3x+2$이므로 ⋯ ❶

$a=1,\ b=-3,\ c=3,\ d=2$ ⋯ ❷

$\therefore\ ad+bc=1\cdot 2+(-3)\cdot 3=-7$ ⋯ ❸

답 -7

채점 기준	비율
❶ 몫과 나머지를 구할 수 있다.	60 %
❷ a, b, c, d의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $ad+bc$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0098 $2x^3+x^2-7x-1=A(2x+3)+5$이므로

$A(2x+3)=2x^3+x^2-7x-6$

$\therefore\ A=(2x^3+x^2-7x-6)\div(2x+3)$

$$\begin{array}{r}
x^2-\ x-2 \\
2x+3\overline{)\,2x^3+\ x^2-7x-6} \\
\underline{2x^3+3x^2\qquad\qquad} \\
-2x^2-7x\quad \\
\underline{-2x^2-3x\quad} \\
-4x-6 \\
\underline{-4x-6} \\
0
\end{array}$$

$\therefore\ A=x^2-x-2$

답 ①

0099 $4x^3-13x^2-36x+5=A(x-5)$이므로

$A=(4x^3-13x^2-36x+5)\div(x-5)$

$$\begin{array}{r}
4x^2+\ 7x\ -1 \\
x-5\overline{)\,4x^3-13x^2-36x+5} \\
\underline{4x^3-20x^2\qquad\qquad} \\
7x^2-36x\quad \\
\underline{7x^2-35x\quad} \\
-\ \ x+5 \\
\underline{-\ \ x+5} \\
0
\end{array}$$

$\therefore\ A=4x^2+7x-1$

답 $4x^2+7x-1$

0100 $P(x)=(x+3)(3x-4)-2=3x^2+5x-14$ ⋯ ❶

$$\begin{array}{r}
3x\ +14 \\
x-3\overline{)\,3x^2+\ 5x-14} \\
\underline{3x^2-\ 9x\qquad} \\
14x-14 \\
\underline{14x-42} \\
28
\end{array}$$

따라서 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫은 $3x+14$, 나머지는 28이다. ⋯ ❷

답 몫: $3x+14$, 나머지: 28

채점 기준	비율
❶ $P(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	50 %

0101 $P(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$\begin{aligned}
P(x)&=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R \\
&=\frac{1}{2}(2x-1)Q(x)+R \\
&=(2x-1)\cdot\frac{1}{2}Q(x)+R
\end{aligned}$$

따라서 $P(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R이다.

답 ①

0102 $P(x)$를 $2x+3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$\begin{aligned}
P(x)&=(2x+3)Q(x)+R \\
&=2\left(x+\frac{3}{2}\right)Q(x)+R \\
&=\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot 2Q(x)+R
\end{aligned}$$

따라서 $P(x)$를 $x+\frac{3}{2}$으로 나누었을 때의 몫은 $2Q(x)$, 나머지는 R이므로

$a=2,\ b=1$

답 $a=2,\ b=1$

0103 $P(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이므로

$P(x)=(2x-1)Q(x)+1$

$$\begin{aligned}
\therefore\ xP(x)&=x(2x-1)Q(x)+x \\
&=2x\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} \\
&=\left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)+1\}+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

따라서 $xP(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2xQ(x)+1$, 나머지는 $\frac{1}{2}$이다.

답 몫: $2xQ(x)+1$, 나머지: $\frac{1}{2}$

0104 전략 다항식을 y에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 나타내었는지 확인한다.

풀이 ⑤ $(x-1)y^3+6y^2+y-2x-4$

답 ⑤

0105 전략 X를 A, B에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $X-A=B$이므로

$$\begin{aligned}
X&=A+B \\
&=(2x^2-4x-2)+(3x+3) \\
&=2x^2-x+1
\end{aligned}$$

답 ①

0106 전략 주어진 표에서 첫 번째 줄 왼쪽의 위치에 알맞은 다항식을 A라 하고 먼저 A를 구한다.

풀이

A		
$2x-2$	$2x^2+4x$	
$f(x)$		$-x^2+x-3$

위의 표에서 $A+(2x^2+4x)+(-x^2+x-3)=6x^2+12x$이므로

$A=(6x^2+12x)-(2x^2+4x)-(-x^2+x-3)$
$=6x^2+12x-2x^2-4x+x^2-x+3$
$=5x^2+7x+3$

이때 $(5x^2+7x+3)+(2x-2)+f(x)=6x^2+12x$이므로

$f(x)=(6x^2+12x)-(2x-2)-(5x^2+7x+3)$
$=6x^2+12x-2x+2-5x^2-7x-3$
$=x^2+3x-1$

$\therefore f(10)=10^2+3\cdot10-1=129$ 답 129

0107 전략 x^4항은 $(x^2$항$)\times(x^2$항$)$, $(x$항$)\times(x^3$항$)$에서 나올 수 있으므로 각 다항식에서 이 항들만 선택하여 곱한다.

풀이 $(2x^2-x+3)(x^3+2x^2-4)$의 전개식에서 x^4항은

$2x^2\cdot2x^2+(-x)\cdot x^3=3x^4$

따라서 x^4의 계수는 3이다. 답 3

0108 전략 x^3항은 (상수항)$\times(x^3$항$)$, $(x$항$)\times(x^2$항$)$, $(x^2$항$)\times(x$항$)$, $(x^3$항$)\times$(상수항)에서 나올 수 있으므로 각 다항식에서 이 항들만 선택하여 곱한다.

풀이 $(1+x+2x^2+\cdots+10x^{10})^2$

$=\underline{(1+x+2x^2+\cdots+10x^{10})(1+x+2x^2+\cdots+10x^{10})}$

$(1+x+2x^2+3x^3)(1+x+2x^2+3x^3)$의 전개식에서 생각해도 된다.

이 식의 전개식에서 x^3항은

$1\cdot3x^3+x\cdot2x^2+2x^2\cdot x+3x^3\cdot1=10x^3$

따라서 x^3의 계수는 10이다. 답 10

0109 전략 계수의 부호에 주의하여 곱셈 공식에 대입한다.

풀이 ㄱ. $(2x-y-z)^2=4x^2+y^2+z^2-4xy+2yz-4zx$

ㄴ. $(x-3y)^3=x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$

이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

0110 전략 $a+b$를 t로 치환하여 주어진 식을 정리한다.

풀이 $a+b=t$로 놓으면

$(a+b-1)\{(a+b)^2+a+b+1\}=(t-1)(t^2+t+1)$
$=t^3-1$

즉 $t^3-1=8$이므로 $t^3=9$

$\therefore (a+b)^3=9$ 답 ⑤

0111 전략 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{x^3-y^3}{xy}$ …… ㉠

이때

$x-y=(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)=2$,
$xy=(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=2$

이므로

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=2^3+3\cdot2\cdot2=20$

따라서 ㉠에서 구하는 값은 $\dfrac{20}{2}=10$ 답 ④

0112 전략 먼저 a^4+b^4을 주어진 조건을 이용할 수 있도록 변형한다.

풀이 $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2$ …… ㉠

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$7=3-2ab$, $2ab=2$

$\therefore ab=1$

따라서 ㉠에서 구하는 값은 $7^2-2\cdot1^2=47$ 답 ⑤

0113 전략 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4$임을 이용한다.

풀이 $x\neq0$이므로 $x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3+\dfrac{1}{x}=0$ $\therefore x+\dfrac{1}{x}=3$

$\therefore \left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=3^2-4=5$

그런데 $x>1$이면 $x-\dfrac{1}{x}>0$이므로

$x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

0114 전략 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$을 통분하여 구해야 하는 값을 찾는다.

풀이 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$ …… ㉠

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$25=7^2-2(ab+bc+ca)$, $2(ab+bc+ca)=24$

$\therefore ab+bc+ca=12$

따라서 ㉠에서 구하는 값은 $\dfrac{12}{4}=3$ 답 ⑤

0115 전략 먼저 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$을 주어진 조건을 이용할 수 있도록 변형한다.

풀이 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2(ab^2c+bc^2a+a^2bc)$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc(\underbrace{a+b+c}_{0})$
$=(ab+bc+ca)^2$ …… ㉠

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$0=3+2(ab+bc+ca)$ $\therefore ab+bc+ca=-\dfrac{3}{2}$

따라서 ㉠에서 구하는 값은 $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$ 답 $\dfrac{9}{4}$

0116 전략 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

풀이 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$
$=(x^4-1)(x^4+1)$
$=x^8-1$
$=32-1=31$ 답 31

0117 전략 공통부분이 생기도록 적당히 항을 묶은 후 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $(a+b+c)(a-b+c)+(a+b-c)(a-b-c)$

$=\{(a+c)+b\}\{(a+c)-b\}+\{(a-c)+b\}\{(a-c)-b\}$
$=(a+c)^2-b^2+(a-c)^2-b^2$
$=a^2+2ac+c^2-b^2+a^2-2ac+c^2-b^2$
$=2(a^2-b^2+c^2)=0$

따라서 $a^2-b^2+c^2=0$, 즉 $b^2=a^2+c^2$이므로 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다. 답 ④

0118 전략• 두 정육면체의 한 모서리의 길이의 합과 부피의 합을 식으로 나타낸 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

풀이 $\overline{AC}=x$, $\overline{BC}=y$라 하면 두 정육면체의 겉넓이의 합은 $6(x^2+y^2)$이다.

$\overline{AB}=8$이므로 $\quad x+y=8$

또 두 정육면체의 부피의 합이 224이므로

$x^3+y^3=224$

이때 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$224=8^3-3xy\cdot 8,\quad 24xy=288\quad \therefore xy=12$

따라서 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=8^2-2\cdot 12=40$이므로 두 정육면체의 겉넓이의 합은

$6\cdot 40=240$ 답 240

다른 풀이 $\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{BC}=8-x$이므로

$x^3+(8-x)^3=224,\quad 24x^2-192x+288=0$

$x^2-8x+12=0,\quad (x-2)(x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=6$

따라서 두 정육면체의 한 모서리의 길이는 각각 2, 6이므로 두 정육면체의 겉넓이의 합은 $\quad 6\cdot 2^2+6\cdot 6^2=240$

0119 전략• 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 다항식의 나눗셈을 하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $a=3$, $b=5$이므로 $\quad a+b=8$ 답 ④

0120 전략• 다항식 $3x^3-2x^2-x+6$을 x^2-2x+3으로 나누어 몫과 나머지를 구한다.

풀이

$$\begin{array}{r@{}l} & 3x+4 \\ x^2-2x+3\,\big) & 3x^3-2x^2-\ \ x+\ 6 \\ & 3x^3-6x^2+\ 9x \\ \hline & \quad\ \ 4x^2-10x+\ 6 \\ & \quad\ \ 4x^2-\ 8x+12 \\ \hline & \qquad\quad -2x-\ 6 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=3x+4$, $R(x)=-2x-6$이므로

$Q(1)+R(-2)=7+(-2)=5$ 답 5

0121 전략• 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$이다.

풀이 $A=(x^2-3x)(3x+1)+x-6$

$=3x^3+x^2-9x^2-3x+x-6$

$=3x^3-8x^2-2x-6$ 답 ③

0122 전략• $(x-2)(x+3)$을 전개한 후 공통부분을 치환한다.

풀이 $(x-2)(x+3)(x^2+x+1)=(x^2+x-6)(x^2+x+1)$

$x^2+x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-6)(t+1)=t^2-5t-6$

$=(x^2+x)^2-5(x^2+x)-6$

$=x^4+2x^3+x^2-5x^2-5x-6$

$=x^4+2x^3-4x^2-5x-6$ ⋯ ❶

따라서 $a=2$, $b=-4$, $c=-5$이므로

$a+b-c=3$ ⋯ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 전개할 수 있다.	80 %
❷ $a+b-c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0123 전략• 100을 기준으로 하여 주어진 수들을 나타낸다.

풀이 $99(100^2+101)=(100-1)(100^2+100+1)$

$=100^3-1$ ⋯ ❶

$\therefore k=3$ ⋯ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $99(100^2+101)$을 100^k-1 꼴로 나타낼 수 있다.	80 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0124 전략• 주어진 조건을 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이와 높이에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=b$, $\overline{BF}=c$라 하면

$\overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{DB}^2=(a^2+c^2)+(b^2+c^2)+(a^2+b^2)$

$=2(a^2+b^2+c^2)$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

직육면체의 겉넓이가 64이므로

$2(ab+bc+ca)=64\quad \therefore ab+bc+ca=32$

또 모든 모서리의 길이의 합이 40이므로

$4(a+b+c)=40\quad \therefore a+b+c=10$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=10^2-2\cdot 32=36$ ⋯ ❷

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$2\cdot 36=72$ ⋯ ❸

답 72

채점 기준	비율
❶ 삼각형 BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합을 a, b, c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 삼각형 BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합을 구할 수 있다.	20 %

0125 전략• 다항식 A를 x^2-x-1로 나누어 몫과 나머지를 구한다.

풀이 (1)

$$\begin{array}{r@{}l} & 2x^2-\ x\ -1 \\ x^2-x-1\,\big) & 2x^4-3x^3-2x^2+2x+3 \\ & 2x^4-2x^3-2x^2 \\ \hline & \quad\ -\ x^3\qquad\ +2x \\ & \quad\ -\ x^3+\ x^2+\ x \\ \hline & \qquad\quad -\ x^2+\ x+3 \\ & \qquad\quad -\ x^2+\ x+1 \\ \hline & \qquad\qquad\qquad\quad 2 \end{array}$$

따라서 몫은 $2x^2-x-1$, 나머지는 2이다. ⋯ ❶

(2) $A=(x^2-x-1)(2x^2-x-1)+2$

$=0\cdot(2x^2-x-1)+2=2$ ⋯ ❷

답 (1) 몫: $2x^2-x-1$, 나머지: 2 (2) 2

채점 기준	비율
❶ 다항식 A를 x^2-x-1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	50 %
❷ 다항식 A의 값을 구할 수 있다.	50 %

02 나머지정리와 인수분해

0126 답 ×

0127 답 ○

0128 답 ×

0129 답 ×

0130 답 ㄴ, ㄷ

0131 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-2=0$, $b=0$ $\quad\therefore a=2, b=0$ 답 $a=2$, $b=0$

0132 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=0$, $b+2=0$ $\quad\therefore a=0, b=-2$ 답 $a=0$, $b=-2$

0133 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=1$, $b=0$, $c=3$ 답 $a=1$, $b=0$, $c=3$

0134 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$2a=2$, $1=-c$, $4b=8$
$\therefore a=1, b=2, c=-1$ 답 $a=1$, $b=2$, $c=-1$

0135 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-1=3$, $b+4=-1$, $7=c$
$\therefore a=4, b=-5, c=7$ 답 $a=4$, $b=-5$, $c=7$

0136 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$-3=b$, $a-2=5$, $-5=c$
$\therefore a=7, b=-3, c=-5$ 답 $a=7$, $b=-3$, $c=-5$

0137 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$a=0$, $b=0$, $c+4=0$
$\therefore a=0, b=0, c=-4$ 답 $a=0$, $b=0$, $c=-4$

0138 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$a=-3$, $b=4$, $c=-1$ 답 $a=-3$, $b=4$, $c=-1$

0139 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$a+2=1$, $b-8=1$, $3=c$
$\therefore a=-1, b=9, c=3$ 답 $a=-1$, $b=9$, $c=3$

0140 답 $a=2$, $b=-1$ ⊕ $a+b$, $a+b$, $-2a+b$, 2, -1

0141 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면
$(a-b)x-3a+2b=-x$
양변의 동류항의 계수를 비교하면
$a-b=-1$, $-3a+2b=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=2$, $b=3$ 답 $a=2$, $b=3$

0142 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면
$x^3-3x^2+3x-1=x^3+ax^2+bx+c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=-3$, $b=3$, $c=-1$ 답 $a=-3$, $b=3$, $c=-1$

0143 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면
$ax^2+bx+c=x^2+3$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=1$, $b=0$, $c=3$ 답 $a=1$, $b=0$, $c=3$

0144 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면
$x^2-2x+3=ax^2+(a+b)x+c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$1=a$, $-2=a+b$, $3=c$
$\therefore a=1, b=-3, c=3$ 답 $a=1$, $b=-3$, $c=3$

0145 답 $a=3$, $b=4$ ⊕ -3, -12, 3, 1, 16, 4

0146 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$-a=-3$ $\quad\therefore a=3$
주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$b=-1$ 답 $a=3$, $b=-1$

0147 주어진 등식의 양변에 $x=5$를 대입하면
$30a=30$ $\quad\therefore a=1$
주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$-5b=5$ $\quad\therefore b=-1$
주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$6c=12$ $\quad\therefore c=2$ 답 $a=1$, $b=-1$, $c=2$

0148 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$-12b=12$ $\quad\therefore b=-1$
주어진 등식의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$15a=15$ $\quad\therefore a=1$
주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$-10b+10c=30$ $\quad\therefore c=b+3$
이때 $b=-1$이므로
$c=-1+3=2$
답 $a=1$, $b=-1$, $c=2$

0149 $P(2)=4-10+2=-4$ 답 -4

0150 $P(-3)=9+15+2=26$ 답 26

0151 $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-1=-2$ 답 -2

0152 $P\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{4}+\frac{9}{4}+\frac{9}{2}-1=-1$ 답 -1

0153 $P(1)=-2$이므로

$2+a-1=-2 \qquad \therefore a=-3$ 답 -3

0154 $P(-2)=1$이므로

$-8-16-2a+9=1, \qquad 2a=-16 \qquad \therefore a=-8$

답 -8

0155 $P(1)=0$이므로

$1-2-1+a=0 \qquad \therefore a=2$ 답 2

0156 $P(-1)=0$이므로

$4-a+5=0 \qquad \therefore a=9$ 답 9

0157 $P(2)=0$이므로

$8+4a-6+6=0, \qquad 4a=-8 \qquad \therefore a=-2$ 답 -2

0158 $P(1)=0$이므로

$1+a+b+6=0 \qquad \therefore a+b=-7$ …… ㉠

$P(3)=0$이므로

$27+9a+3b+6=0 \qquad \therefore 3a+b=-11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=-5$

답 $a=-2,\ b=-5$

0159 답 몫: x^2+x+4, 나머지: 17 $\quad 3,\ -2,\ 4,\ 17$

0160
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & -4 & -8 \\ & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{-4} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2-4, 나머지: -4

답 몫: x^2-4, 나머지: -4

0161
$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 3 & 1 & -3 & -1 & 5 \\ & & 6 & 14 & 22 & 42 \\ \hline & 3 & 7 & 11 & 21 & \boxed{47} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $3x^3+7x^2+11x+21$, 나머지: 47

답 몫: $3x^3+7x^2+11x+21$, 나머지: 47

0162
$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & -3 & 9 & -18 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & \boxed{-16} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2-3x+6, 나머지: -16

답 몫: x^2-3x+6, 나머지: -16

0163
$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 5 & -3 & 1 \\ & & 1 & 3 & 0 \\ \hline & 2 & 6 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x^2+6x$, 나머지: 1

답 몫: $2x^2+6x$, 나머지: 1

0164 답 몫: x^2-x, 나머지: -1

$1,\ 1,\ -1,\ 0,\ -2,\ 0,\ 2x^2-2x,\ x^2-x$

0165
$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & -4 & 6 & 0 & 5 \\ & & 2 & -4 & 2 \\ \hline & -4 & 8 & -4 & \boxed{7} \end{array}$$

$\therefore -4x^3+6x^2+5=\left(x+\frac{1}{2}\right)(-4x^2+8x-4)+7$

$\qquad =(2x+1)(-2x^2+4x-2)+7$

따라서 구하는 몫은 $-2x^2+4x-2$, 나머지는 7이다.

답 몫: $-2x^2+4x-2$, 나머지: 7

0166
$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{3} & 3 & 5 & 1 & -2 \\ & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 3 & 6 & 3 & \boxed{-1} \end{array}$$

$\therefore 3x^3+5x^2+x-2=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2+6x+3)-1$

$\qquad =(3x-1)(x^2+2x+1)-1$

따라서 구하는 몫은 x^2+2x+1, 나머지는 -1이다.

답 몫: x^2+2x+1, 나머지: -1

0167
$$\begin{array}{r|rrrrr} -\frac{3}{4} & 4 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ & & -3 & 3 & -6 & 6 \\ \hline & 4 & -4 & 8 & -8 & \boxed{6} \end{array}$$

$\therefore 4x^4-x^3+5x^2-2x=\left(x+\frac{3}{4}\right)(4x^3-4x^2+8x-8)+6$

$\qquad =(4x+3)(x^3-x^2+2x-2)+6$

따라서 구하는 몫은 x^3-x^2+2x-2, 나머지는 6이다.

답 몫: x^3-x^2+2x-2, 나머지: 6

0168 답 $(a+b)(x-y)$

0169 답 $ax^2(x+y)$

0170 $x^2y-6xy+9y=y(x^2-6x+9)$

$\qquad =y(x-3)^2$ 답 $y(x-3)^2$

0171 $16a^2-9b^2=(4a)^2-(3b)^2$

$\qquad =(4a+3b)(4a-3b)$

답 $(4a+3b)(4a-3b)$

0172 답 $(2x+1)(2x+3)$

0173 $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

$=a^2+(-b)^2+c^2+2a\cdot(-b)+2\cdot(-b)\cdot c+2ca$

$=(a-b+c)^2$ 답 $(a-b+c)^2$

0174 $x^3+9x^2+27x+27$

$=x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3$

$=(x+3)^3$ 답 $(x+3)^3$

0175 $x^3-12x^2+48x-64$
$=x^3-3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2-4^3$
$=(x-4)^3$
답 $(x-4)^3$

0176 $x^3+125=x^3+5^3=(x+5)(x^2-5x+25)$
답 $(x+5)(x^2-5x+25)$

0177 $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$
답 $(x-2)(x^2+2x+4)$

0178 $a^3-b^3+c^3+3abc$
$=a^3+(-b)^3+c^3-3a\cdot(-b)\cdot c$
$=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$
답 $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$

0179 $x^4+4x^2y^2+16y^4$
$=x^4+x^2\cdot(2y)^2+(2y)^4$
$=(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$
답 $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

0180 $x+y=t$로 놓으면
$(x+y)(x+y+3)+2=t(t+3)+2$
$=t^2+3t+2$
$=(t+1)(t+2)$
$=(x+y+1)(x+y+2)$
답 $(x+y+1)(x+y+2)$

0181 $a-2=t$로 놓으면
$(a-2)^2-7(a-2)+12=t^2-7t+12$
$=(t-3)(t-4)$
$=(a-2-3)(a-2-4)$
$=(a-5)(a-6)$
답 $(a-5)(a-6)$

0182 $x^2=X$로 놓으면
$x^4-10x^2+9=X^2-10X+9$
$=(X-1)(X-9)$
$=(x^2-1)(x^2-9)$
$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$
답 $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

0183 $x^4+4x^2+16=(x^4+8x^2+16)-4x^2$
$=(x^2+4)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
답 $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

0184 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+xy+2x+3y-3=(x+3)y+x^2+2x-3$
$=(x+3)y+(x+3)(x-1)$
$=(x+3)(x+y-1)$
답 $(x+3)(x+y-1)$

다른 풀이 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+xy+2x+3y-3=x^2+(y+2)x+3(y-1)$
$=(x+3)(x+y-1)$

0185 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면
$a^2+3ab+2b^2-2a-5b-3$
$=a^2+(3b-2)a+2b^2-5b-3$
$=a^2+(3b-2)a+(2b+1)(b-3)$
$=(a+2b+1)(a+b-3)$
답 $(a+2b+1)(a+b-3)$

0186 답 (가) 0 (나) $x-1$ (다) x^2-x-6
(라) $(x-1)(x+2)(x-3)$

0187 $P(x)=x^3-x^2-5x-3$으로 놓으면
$P(-1)=-1-1+5-3=0$
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & -5 & -3 \\ & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-2x-3)$
$=(x+1)^2(x-3)$
답 $(x+1)^2(x-3)$

0188 $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$으로 놓으면
$P(-1)=1+5+5-5-6=0$,
$P(1)=1-5+5+5-6=0$
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ & & -1 & 6 & -11 & 6 \\ \hline 1 & 1 & -6 & 11 & -6 & 0 \\ & & 1 & -5 & 6 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-1)(x^2-5x+6)$
$=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$
답 $(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$

0189 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면
$x^3+ax-6=x^3+(b+c)x^2+(3+bc)x+3b$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$0=b+c$, $a=3+bc$, $-6=3b$
$\therefore a=-1$, $b=-2$, $c=2$
$\therefore a+b+c=-1$
답 ⑤

0190 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면
$(a+1)x^2+(3-b)x=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a+1=0$, $3-b=0$ $\therefore a=-1$, $b=3$
답 $a=-1$, $b=3$

0191 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면

$x^3+ax^2+3x-4=x^3+(b+1)x^2+(b-4)x-4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=b+1,\ 3=b-4 \qquad \therefore a=8,\ b=7$

$\therefore ab=56$

답 56

0192 주어진 등식의 좌변을 x, y에 대하여 정리하면

$(a+2b)x+(2a-b)y+c=4x+3y-2$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+2b=4,\ 2a-b=3,\ c=-2$

$a+2b=4,\ 2a-b=3$을 연립하면 풀면 $\quad a=2,\ b=1$

$\therefore a-b+c=-1$

답 ②

0193 주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(x+y-3)k+xy-2=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x+y-3=0,\ xy-2=0$

$\therefore x+y=3,\ xy=2$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\cdot 2=5$

답 ③

0194 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-4=2c \qquad \therefore c=-2$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a-3=0 \qquad \therefore a=3$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2a=2b,\quad a=b \qquad \therefore b=3$

$\therefore abc=-18$

답 ②

0195 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$c=2$ ⋯❶

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$b+c=-1,\quad b+2=-1 \qquad \therefore b=-3$ ⋯❷

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2a+2b+c=-2,\quad 2a-6+2=-2$

$2a=2 \qquad \therefore a=1$ ⋯❸

$\therefore a+b+c=0$ ⋯❹

답 0

채점 기준	비율
❶ c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0196 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $\quad 6=c$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a-b+c,\qquad 1=a-b+6$

$\therefore a-b=-5$ ⋯⋯ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$17=a+b+c,\qquad 17=a+b+6$

$\therefore a+b=11$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=8$

$\therefore 2a+b-c=8$

답 ③

0197 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+b \qquad \therefore a+b=-1$ ⋯⋯ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x^2=2$를 대입하면

$0=4+2a+b \qquad \therefore 2a+b=-4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-3,\ b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-3)^2+2^2=13$

답 ③

0198 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\quad 1=a_0$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^5=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)-a_0$

$=2^5-1=31$

답 31

0199 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$3^5=a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}=243$

답 ④

0200 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=5^3=125$

답 ⑤

0201 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1^4=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$ ⋯⋯ ㉠ ⋯❶

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$3^4=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$ ⋯⋯ ㉡ ⋯❷

㉠+㉡을 하면 $\quad 82=2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=41$ ⋯❸

답 41

채점 기준	비율
❶ $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0202 x^3+ax^2+b를 x^2+x+2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+b=(x^2+x+2)(x+c)+2x+3$

$=x^3+(c+1)x^2+(c+4)x+2c+3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c+1,\ 0=c+4,\ b=2c+3$

$\therefore a=-3,\ b=-5,\ c=-4$

$\therefore ab=15$

답 ④

참고 x^3+ax^2+b의 최고차항의 계수가 1, x^2+x+2의 최고차항의 계수가 1이므로 몫은 $x+c$ (c는 상수) 꼴이다.

0203 x^3+2x^2+3을 x^2+ax+b로 나누었을 때의 몫이 $x+1$이고 나머지가 $-3x+1$이므로

$x^3+2x^2+3=(x^2+ax+b)(x+1)-3x+1$
$=x^3+(a+1)x^2+(a+b-3)x+b+1$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$2=a+1,\ 0=a+b-3,\ 3=b+1$
$\therefore\ a=1,\ b=2$ 답 $a=1,\ b=2$

0204 x^3+ax+b를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면
$x^3+ax+b=(x^2-x+1)(x+c)$
$=x^3+(c-1)x^2+(1-c)x+c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$0=c-1,\ a=1-c,\ b=c$ $\quad\therefore\ a=0,\ b=1,\ c=1$
$\therefore\ a^2+b^2=1$ 답 ①

0205 $P(x)=x^3+ax^2+bx+1$이라 하면 나머지정리에 의하여 $P(1)=1,\ P(3)=13$이므로
$1+a+b+1=1,\ 27+9a+3b+1=13$
$\therefore\ a+b=-1,\ 3a+b=-5$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-2,\ b=1$ 답 $a=-2,\ b=1$

0206 나머지정리에 의하여 $\quad P(2)=-4$
따라서 구하는 나머지는
$3P(2)=3\cdot(-4)=-12$ 답 ③

0207 나머지정리에 의하여 $P(-1)=2$이므로
$-1+3-a-5=2 \quad\therefore\ a=-5$ ··· ❶
$\therefore\ P(x)=x^3+3x^2-5x-5$
따라서 구하는 나머지는
$P(1)=-6$ ··· ❷
답 -6

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50 %

0208 나머지정리에 의하여
$P(-2)=3,\ Q(-2)=-1$
따라서 구하는 나머지는
$4P(-2)+3Q(-2)=4\cdot3+3\cdot(-1)=9$ 답 ⑤

0209 나머지정리에 의하여
$P(-3)=-7,\ P(2)=3$
$P(x)$를 x^2+x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$P(x)=(x^2+x-6)Q(x)+ax+b$
$=(x+3)(x-2)Q(x)+ax+b$
양변에 $x=-3,\ x=2$를 각각 대입하면
$P(-3)=-3a+b,\ P(2)=2a+b$
$\therefore\ -3a+b=-7,\ 2a+b=3$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=-1$
따라서 구하는 나머지는 $2x-1$이다. 답 $2x-1$

0210 나머지정리에 의하여
$P(-1)=8,\ P(1)=-2$
$(x+2)P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$(x+2)P(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ ··· ❶
양변에 $x=-1,\ x=1$을 각각 대입하면
$P(-1)=-a+b,\ 3P(1)=a+b$
$\therefore\ -a+b=8,\ a+b=-6$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-7,\ b=1$ ··· ❷
따라서 $R(x)=-7x+1$이므로
$R(-2)=15$ ··· ❸
답 15

채점 기준	비율
❶ $(x+2)P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 항등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $R(-2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0211 $P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$P(x)=(x^2-3x+2)Q_1(x)+4x-1$
$=(x-1)(x-2)Q_1(x)+4x-1$ ······ ㉠
$P(x)$를 x^2+4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면
$P(x)=(x^2+4x+3)Q_2(x)-x+3$
$=(x+1)(x+3)Q_2(x)-x+3$ ······ ㉡
$P(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$P(x)=(x^2-x-2)Q(x)+ax+b$
$=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$ ······ ㉢
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $\quad P(2)=7$
㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $\quad P(-1)=4$
㉢의 양변에 $x=2,\ x=-1$을 각각 대입하면
$P(2)=2a+b,\ P(-1)=-a+b$
$\therefore\ 2a+b=7,\ -a+b=4$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=5$
따라서 구하는 나머지는 $x+5$이다. 답 ②

0212 $x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5$
$=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$
$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ ······ ㉠
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\quad 0=c$
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$0=a-b+c \quad\therefore\ a-b=0$ ······ ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4=a+b+c \qquad \therefore a+b=4$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=2$

따라서 $R(x)=2x^2+2x$이므로

$R(2)=12$

답 ④

0213 $P(x)$를 $x(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$P(x)=x(x-2)Q_1(x)$ ...... ㉠

$P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$P(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+x-2$ ...... ㉡

$P(x)$를 $x(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=x(x-1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ ...... ㉢

㉠의 양변에 $x=0$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(0)=0,\ P(2)=0$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)=-1$

㉢의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(0)=c,\ P(1)=a+b+c,\ P(2)=4a+2b+c$

$c=0,\ a+b+c=-1,\ 4a+2b+c=0$

$a+b+c=-1$, $4a+2b+c=0$에서 $c=0$이므로

$a+b=-1,\ 2a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-2$

따라서 구하는 나머지는 x^2-2x이다.

답 ④

0214 $P(x)$를 $(x-1)(x^2+x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$ ...... ㉠

$P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $3x+4$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $3x+4$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=a(x^2+x+1)+3x+4$

이것을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+a(x^2+x+1)+3x+4$

한편 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$P(1)=3a+7=4 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $R(x)=-(x^2+x+1)+3x+4=-x^2+2x+3$이므로

$R(3)=0$

답 0

0215 $P(3x+5)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$P(3\cdot(-3)+5)=P(-4)$

이므로 나머지정리에 의하여 구하는 나머지는

$P(-4)=5$

답 5

0216 $xP(x-1)$을 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$4P(4-1)=4P(3)$

이므로 나머지정리에 의하여 구하는 나머지는

$4P(3)=4\cdot 2=8$

답 8

0217 $P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+2x-4$ ...... ㉠

이때 $P(2x+3)$을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(2\cdot(-2)+3)=P(-1)$

이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 구하는 나머지는

$P(-1)=-6$

답 ①

0218 $P(x)$를 $2x^2-5x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(2x^2-5x-3)Q(x)+x+5$

$\quad=(2x+1)(x-3)Q(x)+x+5$ ...... ㉠

이때 $P(3x+4)$를 $3x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P\left(3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+4\right)=P(3)$

$P(3x+4)$에 $x=-\frac{1}{3}$을 대입한다.

이므로 ㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 구하는 나머지는

$P(3)=8$

답 8

0219 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$P(x)=(x-1)Q(x)+2$

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$Q(2)=4$

따라서 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(2)=(2-1)Q(2)+2=4+2=6$

답 ③

0220 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$P(x)=(x-3)Q(x)+2$

이때 나머지정리에 의하여 $P(-2)=-8$이므로

$P(-2)=-5Q(-2)+2=-8$

$\therefore Q(-2)=2$

따라서 $Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

답 ①

0221 x^3-2x^2+ax+6을 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 5이므로

$x^3-2x^2+ax+6=(x+1)Q(x)+5$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-2-a+6=5 \qquad \therefore a=-2$ ··· ❶

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-2-2+6=2Q(1)+5 \qquad \therefore Q(1)=-1$

따라서 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 -1이다. ··· ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50 %

0222 x^{10}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$x^{10}=(x-1)Q(x)+R$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=1$

㉠의 양변에 $x=99$를 대입하면

$99^{10}=98Q(99)+1$

따라서 99^{10}을 98로 나누었을 때의 나머지는 1이다. 답 ①

0223 (1) x^{2021}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$x^{2021}=(x-1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=1$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

(2) ㉠의 양변에 $x=2021$을 대입하면

$2021^{2021}=2020Q(2021)+1$

따라서 2021^{2021}을 2020으로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 (1) 1 (2) 1

0224 $2x^{10}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$2x^{10}=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=2$

㉠의 양변에 $x=5$를 대입하면

$2\cdot5^{10}=6Q(5)+2$

따라서 $2\cdot5^{10}$을 6으로 나누었을 때의 나머지는 2이다. 답 ②

0225 $x^{10}+x^5+1$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$x^{10}+x^5+1=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=1$

㉠의 양변에 $x=49$를 대입하면

$49^{10}+49^5+1=50Q(49)+1$

따라서 $49^{10}+49^5+1$을 50으로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 1

0226 $P(x)=x^4+kx^3-2x^2-7x-8$이라 하면 $P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 $P(-1)=0$

$1-k-2+7-8=0$ $\therefore k=-2$ 답 ④

0227 $P(x)=ax^3+bx^2+2x+3$이라 하면 $P(x)$가 $x-1$, $x-3$으로 각각 나누어떨어지므로

$P(1)=0$, $P(3)=0$

$a+b+2+3=0$, $27a+9b+6+3=0$

$\therefore a+b=-5$, $3a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-7$

$\therefore ab=-14$ 답 -14

0228 $P(x)=x^3-4x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로

$P(1)=0$, $P(2)=0$

$1-4+a+b=0$, $8-16+2a+b=0$

$\therefore a+b=3$, $2a+b=8$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-2$

따라서 $Q(x)=x^2+5x+2$라 하면 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)=1+5+2=8$ 답 8

0229 $P(x)=(ax^2-4)(ax+3)-ax$라 하면 $P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$P(-1)=0$ … ❶

$(a-4)(-a+3)+a=0$, $a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0$ $\therefore a=2$ 또는 $a=6$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 8이다. … ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ 인수정리를 이용할 수 있다.	50 %
❷ 모든 상수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	50 %

0230 $P(x)=x^3-2x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 x^2+3x+2, 즉 $(x+1)(x+2)$로 나누어떨어지므로

$P(-1)=0$, $P(-2)=0$

$-1-2-a+b=0$, $-8-8-2a+b=0$

$\therefore a-b=-3$, $2a-b=-16$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-13$, $b=-10$

$\therefore a+b=-23$ 답 ①

0231 $P(x)=2x^3+ax^2-3x+b$라 하면 $P(x)$가 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$P(-1)=0$, $P(2)=0$

$-2+a+3+b=0$, $16+4a-6+b=0$

$\therefore a+b=-1$, $4a+b=-10$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

$\therefore P(x)=2x^3-3x^2-3x+2$

따라서 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$P(3)=54-27-9+2=20$ 답 20

0232 $P(x)$가 x^2+2x-3, 즉 $(x+3)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$P(-3)=0$, $P(1)=0$

$-54+81-3a+b=0$, $2+9+a+b=0$

$\therefore 3a-b=27$, $a+b=-11$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-15$

$\therefore P(x)=2x^3+9x^2+4x-15$

따라서 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-1)=-2+9-4-15=-12$ 답 ③

0233 $P(x)-4$가 x^2-4x+3, 즉 $(x-1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

$P(1)-4=0$, $P(3)-4=0$

$\therefore P(1)=4$, $P(3)=4$

$P(x+3)$을 x^2+2x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x+3)=(x^2+2x)Q(x)+ax+b$
$=x(x+2)Q(x)+ax+b$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$P(3)=b \quad \therefore b=4$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$P(1)=-2a+b, \quad 4=-2a+4 \quad \therefore a=0$

따라서 구하는 나머지는 4이다. 답 4

0234 x^3+ax^2+2x+b를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

-2	1	a	2	b
		-2	$-2a+4$	$4a-12$
	1	$a-2$	$-2a+6$	$4a+b-12$

따라서 $k=-2$, $c=-2$, $a-2=2$, $-2a+4=d$,
$-2a+6=-2$, $4a-12=4$, $4a+b-12=1$이므로
$k=-2$, $a=4$, $b=-3$, $c=-2$, $d=-4$ 답 ②

0235 주어진 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로 다항식 x^3-2x^2+4x-7을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$는

3	1	-2	4	-7
		3	3	21
-2	1	1	7	14
		-2	2	
	1	-1	9	

$Q(x)=x^2+x+7$

또 $Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫 $Q'(x)$는
$Q'(x)=x-1$ 답 $x-1$

0236 (1) $P(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 오른쪽과 같다.

$-\frac{1}{2}$	2	-7	2	1
		-1	4	-3
	2	-8	6	-2

$\therefore a=-\frac{1}{2}$, $b=-8$, $c=4$, $d=-2$

(2) $P(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-8x+6$, 나머지는 -2이므로

$P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-8x+6)-2$
$=(2x+1)(x^2-4x+3)-2$

따라서 $P(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫은 x^2-4x+3, 나머지는 -2이다.

답 (1) $a=-\frac{1}{2}$, $b=-8$, $c=4$, $d=-2$
(2) 몫: x^2-4x+3, 나머지: -2

0237 주어진 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로

1	1	2	-4
		1	3
1	1	3	-1
		1	
	1	4	

x^2+2x-4
$=(x-1)(x+3)-1$
$=(x-1)\{(x-1)+4\}-1$
$=(x-1)^2+4(x-1)-1$
$\therefore a=1$, $b=4$, $c=-1$ 답 $a=1$, $b=4$, $c=-1$

라쎈 특강
$x^2+2x-4=1\cdot(x-1)^2+4(x-1)-1$과 같이 다항식을 $x-1$에 대하여 내림차순으로 정리한 식에서 계수 1, 4, -1은 조립제법을 연속으로 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

0238 오른쪽 조립제법에서

-1	1	0	-1
		-1	1
-1	1	-1	0
		-1	
	1	-2	

$x^2-1=(x+1)(x-1)$
$=(x+1)\{(x+1)-2\}$
$=(x+1)^2-2(x+1)$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=0$이므로
$a-2b+c=5$ 답 ⑤

다른 풀이 $a(x+1)^2+b(x+1)+c=x^2-1$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $\quad c=0$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$a+b+c=-1 \quad \therefore a+b=-1$ ...... ㉡

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$a-b+c=3 \quad \therefore a-b=3$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=1$, $b=-2$
$\therefore a-2b+c=5$

0239

2	1	2	-6	-3
		2	8	4
2	1	4	2	1
		2	12	
2	1	6	14	
		2		
	1	8		

위의 조립제법에서
x^3+2x^2-6x-3
$=(x-2)(x^2+4x+2)+1$
$=(x-2)\{(x-2)(x+6)+14\}+1$
$=(x-2)[(x-2)\{(x-2)+8\}+14]+1$
$=(x-2)\{(x-2)^2+8(x-2)+14\}+1$
$=(x-2)^3+8(x-2)^2+14(x-2)+1$

따라서 $a=8$, $b=14$, $c=1$이므로
$2a+b+c=31$ 답 31

0240 $4x^4-x^2=x^2(4x^2-1)=x^2(2x+1)(2x-1)$
답 $x^2(2x+1)(2x-1)$

0241 $xy(z+1)-(z+1)=(xy-1)(z+1)$
답 $(xy-1)(z+1)$

0242 $xy-y+x-y^2=xy-y^2+x-y$
$=y(x-y)+(x-y)$
$=(x-y)(y+1)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0243 $xy^2-xz^2+y^3-yz^2$
$=x(y^2-z^2)+y(y^2-z^2)$
$=(y^2-z^2)(x+y)$
$=(x+y)(y+z)(y-z)$ 답 $(x+y)(y+z)(y-z)$

0244 ① $4x^2+12xy+9y^2=(2x+3y)^2$
② $x^2-(y+z)^2=(x+y+z)(x-y-z)$
③ $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3=(2a-b)^3$
⑤ $2a^3-54=2(a^3-27)=2(a-3)(a^2+3a+9)$
답 ④

0245 ⑤ $x^4+8x=x(x^3+8)=x(x+2)(x^2-2x+4)$
답 ⑤

0246 $a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2$
$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$
따라서 인수가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0247 $x^2+2x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t-2)(t-6)+3$
$=t^2-8t+15$
$=(t-3)(t-5)$
$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-5)$
$=(x+3)(x-1)(x^2+2x-5)$
따라서 인수가 아닌 것은 ②이다. 답 ②

0248 $x+3=t$로 놓으면
(주어진 식)$=t^2+3t+2$
$=(t+1)(t+2)$
$=(x+4)(x+5)$
$\therefore a+b=4+5=9$ 답 ⑤

0249 $(x+1)(x-2)(x+3)(x+6)+54$
$=\{(x+1)(x+3)\}\{(x-2)(x+6)\}+54$
$=(x^2+4x+3)(x^2+4x-12)+54$ ⋯ ❶
$x^2+4x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t+3)(t-12)+54$
$=t^2-9t+18$
$=(t-3)(t-6)$
$=(x^2+4x-3)(x^2+4x-6)$ ⋯ ❷
따라서 $a=-3$, $b=4$이므로
$ab=-12$ ⋯ ❸
답 -12

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개할 수 있다.	40 %
❷ 공통부분을 치환하여 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0250 $(x^2+4x+3)(x^2+12x+35)+15$
$=(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$
$=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15$
$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$
$x^2+8x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t+7)(t+15)+15$
$=t^2+22t+120$
$=(t+12)(t+10)$
$=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)$
$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$
$\therefore a+b+c=2+6+8=16$ 답 ②

0251 $x^2=X$로 놓으면
$x^4-5x^2+4=X^2-5X+4$
$=(X-1)(X-4)$
$=(x^2-1)(x^2-4)$
$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
$a<b<c<d$이므로 $a=-2$, $b=-1$, $c=1$, $d=2$
$\therefore ad+bc=-5$ 답 -5

0252 $x^2=X$, $y^2=Y$로 놓으면
$x^4-x^2y^2-12y^4=X^2-XY-12Y^2$
$=(X+3Y)(X-4Y)$
$=(x^2+3y^2)(x^2-4y^2)$
$=(x^2+3y^2)(x+2y)(x-2y)$
따라서 인수가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0253 $x^4-x^2+16=(x^4+8x^2+16)-9x^2$
$=(x^2+4)^2-(3x)^2$
$=(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)$ ⋯ ❶
따라서 $a=3$, $b=4$, $c=4$이므로 $a-b+c=3$ ⋯ ❷
답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	70 %
❷ $a-b+c$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0254 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+2xy-3y^2+3x+5y+2$
$=x^2+(2y+3)x-(3y^2-5y-2)$
$=x^2+(2y+3)x-(3y+1)(y-2)$
$=\{x+(3y+1)\}\{x-(y-2)\}$
$=(x+3y+1)(x-y+2)$
따라서 $a=3$, $b=1$, $c=-1$이므로 $a+b-c=5$ 답 5

다른 풀이 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+2xy-3y^2+3x+5y+2$
$=-3y^2+(2x+5)y+(x^2+3x+2)$
$=-3y^2+(2x+5)y+(x+1)(x+2)$
$=\{3y+(x+1)\}\{-y+(x+2)\}$
$=(x+3y+1)(x-y+2)$

0255 주어진 식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}a^2b-ac-ab^2+bc&=(-a+b)c+(a^2b-ab^2)\\&=-(a-b)c+ab(a-b)\\&=(a-b)(ab-c)\end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ①이다. 답 ①

0256 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2-3xy+2y^2+4x-5y+3\\&=x^2+(-3y+4)x+(2y^2-5y+3)\\&=x^2+(-3y+4)x+(y-1)(2y-3)\\&=\{x-(y-1)\}\{x-(2y-3)\}\\&=(x-y+1)(x-2y+3)\end{aligned}$$

따라서 두 일차식의 합은

$(x-y+1)+(x-2y+3)=2x-3y+4$

답 $2x-3y+4$

0257 주어진 식을 전개한 다음 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc\\&=a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc\\&=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)\\&=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\\&=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\&=(b+c)(a+b)(a+c)\\&=(a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

답 ⑤

참고 b 또는 c에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해해도 결과는 같다.

0258 $P(x)=x^4-2x^3+2x^2-x-6$으로 놓으면

$P(2)=16-16+8-2-6=0$,

$P(-1)=1+2+2+1-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}2&1&-2&2&-1&-6\\&&2&0&4&6\\\hline-1&1&0&2&3&\boxed{0}\\&&-1&1&-3&\\\hline&1&-1&3&\boxed{0}&\end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x+1)(x^2-x+3)$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=3$이므로

$a-b+c=5$ 답 5

0259 $P(x)=2x^4-5x^3-8x^2+17x-6$으로 놓으면

$P(1)=2-5-8+17-6=0$,

$P(-2)=32+40-32-34-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}1&2&-5&-8&17&-6\\&&2&-3&-11&6\\\hline-2&2&-3&-11&6&\boxed{0}\\&&-4&14&-6&\\\hline&2&-7&3&\boxed{0}&\end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(x)&=(x-1)(x+2)(2x^2-7x+3)\\&=(x-1)(x+2)(2x-1)(x-3)\end{aligned}$$

따라서 인수가 아닌 것은 ②이다. 답 ②

0260 $P(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로

$P(2)=8a-16+2a+6=0$ $\quad\therefore a=1$

따라서 $P(x)=x^3-4x^2+x+6$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}2&1&-4&1&6\\&&2&-4&-6\\\hline&1&-2&-3&\boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-2)(x^2-2x-3)\\&=(x-2)(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

따라서 $P(x)$의 인수인 것은 ③이다. 답 ③

0261 $P(x)=x^3+ax-2$로 놓으면 $P(x)$가 $x+1$을 인수로 가지므로

$P(-1)=-1-a-2=0$

$\therefore a=-3$ ···➊

따라서 $P(x)=x^3-3x-2$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}-1&1&0&-3&-2\\&&-1&1&2\\\hline&1&-1&-2&\boxed{0}\end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-x-2)=(x+1)^2(x-2)$

$\therefore b=-2$ ···➋

$\therefore ab=6$ ···➌

답 6

채점 기준	비율
➊ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0262 주어진 등식의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}a^2-ac-b^2+bc&=(-a+b)c+a^2-b^2\\&=-(a-b)c+(a+b)(a-b)\\&=(a-b)(a+b-c)\end{aligned}$$

즉 $(a-b)(a+b-c)=0$에서 $a+b-c\neq0$이므로

$a-b=0$ $\quad\therefore a=b$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ④

참고 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 항상 크므로 $a+b>c$, 즉 $a+b-c\neq0$이다.

0263 주어진 등식의 좌변을 b에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}a^2+c^2-2ac+ab-bc&=(a-c)b+a^2-2ac+c^2\\&=(a-c)b+(a-c)^2\\&=(a-c)(a+b-c)\end{aligned}$$

즉 $(a-c)(a+b-c)=0$에서 $a+b-c\neq0$이므로

$a-c=0$ $\quad\therefore a=c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다. 답 ⑤

0264 주어진 등식의 좌변을 인수분해하면

$$a^4-b^4+c^4+2a^2c^2=(a^2+c^2)^2-(b^2)^2$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)$$

즉 $(a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)=0$에서 $\underline{a^2+b^2+c^2\neq 0}$이므로

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $a^2+b^2+c^2\neq 0$

$$a^2-b^2+c^2=0 \qquad \therefore\ a^2+c^2=b^2$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2}ac$$

답 ③

0265 $x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$
$$=\{(x+y)^2-2xy\}^2-(xy)^2$$
$$=(4^2-2\cdot2)^2-2^2=140$$

답 ②

0266 $a^3-a^2b+ab^2-b^3$
$$=a^2(a-b)+b^2(a-b)$$
$$=(a-b)\underline{(a^2+b^2)}$$

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$임을 이용해도 된다.

$$=(a-b)\{(a+b)^2-2ab\} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때

$a+b=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2,$

$a-b=(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2},$

$ab=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$

이므로 ㉠에서 구하는 값은

$$2\sqrt{2}\cdot\{2^2-2\cdot(-1)\}=12\sqrt{2}$$

답 $12\sqrt{2}$

0267 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$ab^2-a^2b+bc^2-b^2c-ac^2+a^2c$$
$$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$$
$$=(c-b)a^2-(c+b)(c-b)a+bc(c-b)$$
$$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$$
$$=(c-b)(a-b)(a-c)$$
$$=-(c-b)(a-b)(c-a) \qquad \cdots\cdots \text{㉠} \qquad \cdots ❶$$

이때 $a-b=3+\sqrt{3}$, $c-a=3-\sqrt{3}$을 변끼리 더하면

$$c-b=6 \qquad \cdots ❷$$

이므로 ㉠에서 구하는 값은

$$-6\cdot(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})=-36 \qquad \cdots ❸$$

답 -36

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	60 %
❷ $c-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0268 $x=77$, $y=33$으로 놓으면

$$\frac{77^3-33^3}{77^2+33\cdot110}=\frac{x^3-y^3}{x^2+y(x+y)}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}$$
$$=x-y=77-33=44$$

답 ②

0269 $x=2021$로 놓으면

$$\frac{2021^3+1}{2021^2-2021+1}=\frac{x^3+1}{x^2-x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=x+1=2022$$

답 ③

0270 $x=11$로 놓으면

$$11\cdot12\cdot13\cdot14+1=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$$
$$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$$
$$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$$

$x^2+3x=t$로 놓으면

$$t(t+2)+1=t^2+2t+1=(t+1)^2$$
$$=(x^2+3x+1)^2=(11^2+3\cdot11+1)^2$$
$$=155^2$$
$$\therefore\ \sqrt{11\cdot12\cdot13\cdot14+1}=\sqrt{155^2}=155$$

답 155

0271 $x=19$로 놓으면

$$19^3-7\cdot19^2-17\cdot19-9=x^3-7x^2-17x-9 \qquad \cdots ❶$$

이때 $P(x)=x^3-7x^2-17x-9$로 놓으면

$$P(-1)=-1-7+17-9=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -7 & -17 & -9 \\ & & -1 & 8 & 9 \\ \hline & 1 & -8 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$$P(x)=(x+1)(x^2-8x-9)$$
$$=(x+1)^2(x-9) \qquad \cdots ❷$$
$$\therefore\ 19^3-7\cdot19^2-17\cdot19-9=P(19)$$
$$=20^2\cdot10$$
$$=4000 \qquad \cdots ❸$$

답 4000

채점 기준	비율
❶ $x=19$로 놓고 주어진 식을 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ ❶의 식을 인수분해할 수 있다.	60 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0272 전략 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 우변과 비교한다.

풀이 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면

$$x^2+(a-1)x-a=bx^2-3x+2$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$$1=b,\ a-1=-3,\ -a=2$$
$$\therefore\ a=-2,\ b=1$$
$$\therefore\ a+b=-1$$

답 ①

다른 풀이 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$-a=2 \qquad \therefore\ a=-2$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$0=b-1 \qquad \therefore\ b=1$$
$$\therefore\ a+b=-1$$

0273 전략 주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리한 후 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$$(x^2-x-2)k+(2y-16)=0$$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x^2-x-2=0$, $2y-16=0$

(i) $x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $2y-16=0$에서 $y=8$

x, y는 자연수이므로 (i), (ii)에서

$x=2$, $y=8$ 답 $x=2$, $y=8$

0274 전략 주어진 등식의 양변에 적당한 값을 대입한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$8=c$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$17=b+c$, $17=b+8$ $\therefore b=9$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1=2a-b+c$, $1=2a-9+8$

$2a=2$ $\therefore a=1$

$\therefore a+b+c=18$ 답 ⑤

0275 전략 주어진 등식의 우변이 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$이 되도록 양변에 적당한 값을 대입한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8=4^4=256$ 답 256

0276 전략 다항식 $A(x)$를 다항식 $B(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 $A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$임을 이용하여 항등식을 세운다.

풀이 $2x^3+3x^2+ax+1$

$=(x-b)(2x^2+4x+2)+c$

$=2x^3+(4-2b)x^2+(2-4b)x-2b+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3=4-2b$, $a=2-4b$, $1=-2b+c$

$\therefore a=0$, $b=\frac{1}{2}$, $c=2$

$\therefore a+2b+c=3$ 답 ③

0277 전략 다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$임을 이용한다.

풀이 나머지정리에 의하여 $P(k)+P(-k)=8$이므로

$k^3+k^2+k+1-k^3+k^2-k+1=8$

$2k^2+2=8$ $\therefore k^2=3$

따라서 구하는 나머지는

$P(k^2)=P(3)=3^3+3^2+3+1=40$ 답 40

0278 전략 다항식 $f(x)$를 $(x-2)(x+1)$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

풀이 $f(x)$를 $(x-2)(x+1)$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)(x+1)(ax+b)+ax+b$

이때 조건 (가), (나)에서 나머지정리에 의하여 $f(2)=7$, $f(-1)=1$이므로 $2a+b=7$, $-a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

따라서 $f(x)=(x-2)(x+1)(2x+3)+2x+3$이므로

$f(0)=-3$ 답 ①

0279 전략 $P(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 이용하여 $P(x)$를 $(x-2)^2(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 나타낸다.

풀이 $P(x)$를 $(x-2)^2(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=(x-2)^2(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

$P(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=a(x-2)^2+x-1$

$\therefore P(x)=(x-2)^2(x+1)Q(x)+a(x-2)^2+x-1$

한편 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 7이므로

$P(-1)=9a-2=7$ $\therefore a=1$

$\therefore R(x)=(x-2)^2+x-1=x^2-3x+3$ 답 ②

0280 전략 다항식 $P(x+a)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a+a)$임을 이용한다.

풀이 $P(x)$를 $x^2-7x+10$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x^2-7x+10)Q(x)+3x+1$

$=(x-2)(x-5)Q(x)+3x+1$ …… ㉠

이때 $P(x+4)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(1+4)=P(5)$

이므로 ㉠의 양변에 $x=5$를 대입하면 구하는 나머지는

$P(5)=3\cdot5+1=16$ 답 ④

0281 전략 다항식 $f(x+1)$을 x로 나누었을 때의 나머지는 $f(1)$의 값과 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)$를 x^2-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-x)Q(x)+ax+a$

$=x(x-1)Q(x)+ax+a$ …… ㉠

이때 $f(x+1)$을 x로 나누었을 때의 나머지는 6이므로

$f(0+1)=f(1)=6$

따라서 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2a=6$ $\therefore a=3$ 답 ③

0282 전략 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이면 $f(x)=(x-a)Q(x)+R$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 5이므로 $f(x)=(x-1)Q(x)+5$

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 10이므로 $Q(x)=(x-2)Q'(x)+10$

이때

$f(x)=(x-1)\{(x-2)Q'(x)+10\}+5$

$=(x-1)(x-2)Q'(x)+10x-5$

이므로 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는 $10x-5$이다.

따라서 $a=10$, $b=-5$이므로

$3a+b=25$ 　답 25

0283 전략 다항식 $P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어지면 $P(a)=0$이다.

풀이 $P(x)=(kx^3+3)(kx^2-4)-kx$로 놓으면 $P(-1)=0$이므로 　$(-k+3)(k-4)+k=0$

$-k^2+8k-12=0$, 　$k^2-8k+12=0$

$(k-2)(k-6)=0$ 　$\therefore k=2$ 또는 $k=6$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 8이다. 　답 ④

0284 전략 삼차식을 이차식으로 나누었을 때의 몫은 일차식임을 이용한다.

풀이 $P(x)+8$을 $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$P(x)+8=(x+2)^2(ax+b)$ 　…… ㉠

한편 $P(x)-1$이 x^2-1, 즉 $(x+1)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$P(-1)-1=0$, $P(1)-1=0$

$\therefore P(-1)=1$, $P(1)=1$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)+8=-a+b$

$9=-a+b$ 　$\therefore a-b=-9$ 　…… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)+8=9a+9b$

$9=9a+9b$ 　$\therefore a+b=1$ 　…… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 　$a=-4$, $b=5$

따라서 $P(x)+8=(x+2)^2(-4x+5)$이므로 이 등식의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$P(-3)+8=(-3+2)^2\{-4\cdot(-3)+5\}=17$

$\therefore P(-3)=9$ 　답 9

0285 전략 먼저 주어진 조립제법을 이용하여 다항식 $P(x)$를 구한다.

풀이 주어진 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로

2	a	b	c	d
		2	8	12
	1	4	6	10

$a=1$, $b+2=4$, $c+8=6$, $d+12=10$

$\therefore a=1$, $b=2$, $c=-2$, $d=-2$

$\therefore P(x)=x^3+2x^2-2x-2$

따라서 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-1)=-1+2+2-2=1$ 　답 ①

0286 전략 주어진 등식의 우변을 조립제법을 이용하여 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지로 나타낸다.

풀이

1	1	2	-3	1
		1	3	0
1	1	3	0	1
		1	4	
1	1	4	4	
		1		
	1	5		

앞의 조립제법에서

x^3+2x^2-3x+1

$=(x-1)(x^2+3x)+1$

$=(x-1)\{(x-1)(x+4)+4\}+1$

$=(x-1)[(x-1)\{(x-1)+5\}+4]+1$

$=(x-1)\{(x-1)^2+5(x-1)+4\}+1$

$=(x-1)^3+5(x-1)^2+4(x-1)+1$

따라서 $a=5$, $b=4$, $c=1$이므로

$2a+b-c=13$ 　답 ③

0287 전략 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $x^2+x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+3)(t-4)+10$

$=t^2-t-2$

$=(t+1)(t-2)$

$=(x^2+x+1)(x^2+x-2)$

$=(x^2+x+1)(x+2)(x-1)$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로

$a+b=3$ 　답 ②

0288 전략 주어진 식을 A^2-B^2 꼴로 변형한다.

풀이 $x^4+2x^2+9=x^4+6x^2+9-4x^2$

$=(x^2+3)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

답 $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

0289 전략 주어진 식을 전개한 다음 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 $[a, b, c]+[b, c, a]+[c, a, b]$

$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(a-c)$ 　답 ⑤

0290 전략 주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해한다.

풀이 주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b+2ab+a^2+2a+b+1=(a^2+2a+1)b+(a^2+2a+1)$

$=(a+1)^2b+(a+1)^2$

$=(a+1)^2(b+1)$

위의 식의 값이 $245=7^2\cdot5$이므로

$(a+1)^2(b+1)=7^2\cdot5$

이때 a, b는 자연수이므로

$a+1=7$, $b+1=5$

따라서 $a=6$, $b=4$이므로

$a+b=10$ 　답 ②

0291 전략 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=2x^3-3x^2-12x-7$로 놓으면

$P(-1)=-2-3+12-7=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & -12 & -7 \\ & & -2 & 5 & 7 \\ \hline & 2 & -5 & -7 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(2x^2-5x-7)$

$=(x+1)^2(2x-7)$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-7$이므로

$a+b+c=-4$ 답 ③

0292 전략 주어진 식을 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$a^3+b^3+a^2b+ab^2-ac^2-bc^2$

$=-(a+b)c^2+a^3+b^3+a^2b+ab^2$

$=-(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2+b^2-c^2)$

즉 $(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$에서 $a+b\neq0$이므로

$a^2+b^2-c^2=0$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다. 답 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

0293 전략 인수분해 공식과 곱셈 공식을 이용하여 주어진 값을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $(a^3-b^3)(a^3+b^3)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$

$=(a^2-b^2)\{(a^2)^2+a^2b^2+(b^2)^2\}$

$=(a^2-b^2)\{(a^2-b^2)^2+3a^2b^2\}$

$=2\{2^2+3\cdot(2\sqrt{2})^2\}=56$ 답 ②

0294 전략 68을 문자로 치환한 다음 인수분해 공식을 이용한다.

풀이 $x=68$로 놓으면

$a=\dfrac{68^3+2^3}{68\cdot66+4}=\dfrac{x^3+2^3}{x(x-2)+4}$

$=\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}$

$=x+2=70$

$\therefore \dfrac{a-2}{a+2}=\dfrac{70-2}{70+2}=\dfrac{68}{72}=\dfrac{17}{18}$ 답 $\dfrac{17}{18}$

0295 전략 삼차식을 이차식으로 나누었을 때의 몫은 일차식임을 이용한다.

풀이 x^3+ax^2+7x+b를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+7x+b=(x-1)^2(x+c)$

$=(x^2-2x+1)(x+c)$

$=x^3+(c-2)x^2+(1-2c)x+c$ ··· ❶

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c-2$, $7=1-2c$, $b=c$

$\therefore a=-5$, $b=-3$, $c=-3$ ··· ❷

$\therefore ab=15$ ··· ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ x에 대한 항등식을 세울 수 있다.	70 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0296 전략 다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$임을 이용한다.

풀이 나머지정리에 의하여

$P(3)+Q(3)=8$, $P(3)Q(3)=6$ ··· ❶

이때 $\{P(x)\}^2+\{Q(x)\}^2$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$\{P(3)\}^2+\{Q(3)\}^2=\{P(3)+Q(3)\}^2-2P(3)Q(3)$

$=8^2-2\cdot6=52$ ··· ❷

답 52

채점 기준	비율
❶ 나머지정리를 이용할 수 있다.	50 %
❷ $\{P(x)\}^2+\{Q(x)\}^2$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50 %

0297 전략 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

풀이 $P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ ··· ❶

양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$P(-1)=-a+b$, $P(1)=a+b$

$-1-3-4-6=-a+b$, $1-3+4-6=a+b$

$\therefore -a+b=-14$, $a+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-9$ ··· ❷

따라서 $R(x)=5x-9$이므로

$R(3)=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓고 항등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $R(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0298 전략 자연수 a를 자연수 b로 나누었을 때의 몫을 q, 나머지를 r라 하면 $a=bq+r\,(0\le r<b)$임을 이용한다.

풀이 (1) x^8을 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$x^8=(x+2)Q(x)+R$ ······ ㉠ ···➊

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면 $R=(-2)^8=256$

따라서 구하는 나머지는 256이다. ···➋

(2) ㉠의 양변에 $x=99$를 대입하면

$99^8=101Q(99)+\underbrace{256}_{2\cdot101+54}$

$=101\{Q(99)+2\}+54$

따라서 구하는 나머지는 54이다. ···➌

답 (1) 256 (2) 54

채점 기준	비율
➊ x^8을 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
➋ x^8을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	30 %
➌ 99^8을 101로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

0299 전략 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 인수분해하여 가로 방향과 세로 방향에 필요한 정사각형의 개수를 구한다.

풀이 $P(n)=n^3+4n^2+5n+2$라 하면

$P(-1)=-1+4-5+2=0$

조립제법을 이용하여 $P(n)$을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ & & -1 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(n)=n^3+4n^2+5n+2$

$=(n+1)(n^2+3n+2)$

$=(n+1)^2(n+2)$

즉 한 변의 길이가 $n+1$인 정사각형은 가로 방향으로 $(n+1)(n+2)$개 필요하다. ···➊

또 $4n+4=4(n+1)$이므로 한 변의 길이가 $n+1$인 정사각형은 세로 방향으로 4개 필요하다. ···➋

따라서 필요한 정사각형의 개수는

$4(n+1)(n+2)$ ···➌

답 $4(n+1)(n+2)$

채점 기준	비율
➊ 가로 방향으로 필요한 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	50 %
➋ 세로 방향으로 필요한 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
➌ 필요한 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

Ⅱ. 방정식

03 복소수

0300 답 실수부분: 2, 허수부분: 3

0301 답 실수부분: -3, 허수부분: $\sqrt{5}$

0302 답 실수부분: $\frac{4}{3}$, 허수부분: $-\frac{2}{3}$

0303 답 실수부분: 0, 허수부분: -2

0304 답 실수부분: 4, 허수부분: 0

0305 답 ㄱ, ㄷ

0306 답 ㄷ, ㄹ

0307 $\underbrace{\text{순허수}}_{\text{실수부분이 0인 허수}}$는 $-i$, $\frac{i}{2}$의 2개이다. 답 2

0308 답 $a=-1$, $b=3$

0309 답 $a=0$, $b=-4$

0310 답 $a=7$, $b=0$

0311 답 $a=-3$, $b=2$

0312 $2a=4$, $a-5b=7$이므로

$a=2$, $b=-1$ 답 $a=2$, $b=-1$

0313 $a+9=0$, $a+b=0$이므로

$a=-9$, $b=9$ 답 $a=-9$, $b=9$

0314 답 $4-3i$

0315 답 $\underbrace{-5i-6}_{5i-6\text{의 허수부분은 5이므로 5의 부호를 바꾼다.}}$

0316 답 $-7+2i$

0317 답 $-2i$

0318 답 $6i$

0319 답 8

0320 $(2+3i)+(1+2i)=(2+1)+(3+2)i$

$=3+5i$ 답 $3+5i$

0321 $(5-2i)+(3+i)=(5+3)+(-2+1)i$

$=8-i$ 답 $8-i$

0322 $(-1+4i)+(7-6i)=(-1+7)+(4-6)i$

$=6-2i$ 답 $6-2i$

0323 $5i+(-5-4i)=-5+(5-4)i$

$=-5+i$ 답 $-5+i$

0324 $(3+5i)-(2+6i)=(3-2)+(5-6)i$

$=1-i$ 답 $1-i$

0325 $(-4-2i)-(1+i)=(-4-1)+(-2-1)i$
$=-5-3i$ 답 $-5-3i$

0326 $(2+5i)-(-8+i)=(2+8)+(5-1)i$
$=10+4i$ 답 $10+4i$

0327 $(-3+i)-(9-2i)+6i=(-3-9)+(1+2+6)i$
$=-12+9i$ 답 $-12+9i$

0328 $(4+i)(2+5i)=8+20i+2i+5i^2$
$=8+22i-5$
$=3+22i$ 답 $3+22i$

0329 $(6-i)(-1-4i)=-6-24i+i+4i^2$
$=-6-23i-4$
$=-10-23i$ 답 $-10-23i$

0330 $(3-i)^2=9-6i+i^2$
$=9-6i-1$
$=8-6i$ 답 $8-6i$

0331 $(5+2i)(5-2i)=25-4i^2$
$=25+4=29$ 답 29

0332 $\dfrac{3}{1+i}=\dfrac{3(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{3(1-i)}{1-i^2}$
$=\dfrac{3(1-i)}{1+1}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}i$ 답 $\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}i$

0333 $\dfrac{5i}{1-2i}=\dfrac{5i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{5i+10i^2}{1-4i^2}$
$=\dfrac{5i-10}{1+4}=-2+i$ 답 $-2+i$

0334 $\dfrac{1+3i}{3-i}=\dfrac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{3+i+9i+3i^2}{9-i^2}$
$=\dfrac{3+10i-3}{9+1}=\dfrac{10i}{10}=i$ 답 i

0335 $\dfrac{4-i}{2i}=\dfrac{(4-i)i}{2i\cdot i}=\dfrac{4i-i^2}{2i^2}$
분자, 분모에 i를 곱하여 분모가 실수가 되게 한다.
$=\dfrac{4i+1}{-2}=-\dfrac{1}{2}-2i$ 답 $-\dfrac{1}{2}-2i$

0336 $\overline{z}=\overline{4-3i}=4+3i$ 답 $4+3i$

0337 $\overline{(\overline{z})}=z=4-3i$ 답 $4-3i$

0338 $z+\overline{z}=(4-3i)+(4+3i)=8$ 답 8

0339 $z\overline{z}=(4-3i)(4+3i)=16-9i^2$
$=16+9=25$ 답 25

0340 $z_1+z_2=(3+i)+(5-4i)=8-3i$이므로
$\overline{z_1+z_2}=8+3i$ 답 $8+3i$

0341 $\overline{z_1}+\overline{z_2}=(3-i)+(5+4i)=8+3i$ 답 $8+3i$

0342 $z_1z_2=(3+i)(5-4i)=15-12i+5i-4i^2$
$=15-7i+4=19-7i$
이므로 $\overline{z_1z_2}=19+7i$ 답 $19+7i$

0343 $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(3-i)(5+4i)=15+12i-5i-4i^2$
$=15+7i+4=19+7i$ 답 $19+7i$

0344 $i^6=i^4\cdot i^2=-1$ 답 -1

0345 $(-i)^{15}=-i^{15}=-(i^4)^3\cdot i^3=i$ 답 i

0346 $i^{21}=(i^4)^5\cdot i=i$이므로
$\dfrac{1}{i^{21}}=\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$ 답 $-i$

0347 $i^{10}+i^{100}=(i^4)^2\cdot i^2+(i^4)^{25}=-1+1=0$ 답 0

0348 $i+i^2+i^3+i^4+i^5=i-1-i+1+i=i$ 답 i

0349 $(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$이므로
$(1+i)^8=\{(1+i)^2\}^4=(2i)^4=16i^4=16$ 답 16

0350 $(1-i)^2=1-2i+i^2=1-2i-1=-2i$이므로
$(1-i)^{10}=\{(1-i)^2\}^5=(-2i)^5=-32i^5=-32i$ 답 $-32i$

0351 $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$이므로
$\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^4=(-i)^4=i^4=1$ 답 1

0352 $\sqrt{-6}=\sqrt{6}i$ 답 $\sqrt{6}i$

0353 $\sqrt{-25}=\sqrt{25}i=5i$ 답 $5i$

0354 $-\sqrt{-9}=-\sqrt{9}i=-3i$ 답 $-3i$

0355 $-\sqrt{-12}=-\sqrt{12}i=-2\sqrt{3}i$ 답 $-2\sqrt{3}i$

0356 $-\sqrt{-\dfrac{4}{9}}=-\sqrt{\dfrac{4}{9}}i=-\dfrac{2}{3}i$ 답 $-\dfrac{2}{3}i$

0357 $\pm\sqrt{-5}=\pm\sqrt{5}i$ 답 $\pm\sqrt{5}i$

0358 $\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}i=\pm2\sqrt{2}i$ 답 $\pm2\sqrt{2}i$

0359 $\pm\sqrt{-16}=\pm\sqrt{16}i=\pm4i$ 답 $\pm4i$

0360 $\pm\sqrt{-20}=\pm\sqrt{20}i=\pm2\sqrt{5}i$ 답 $\pm2\sqrt{5}i$

0361 $\pm\sqrt{-\dfrac{1}{4}}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}}i=\pm\dfrac{1}{2}i$ 답 $\pm\dfrac{1}{2}i$

0362 $\sqrt{-2}\sqrt{-6}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{6}i=\sqrt{12}i^2=-2\sqrt{3}$ 답 $-2\sqrt{3}$

0363 $\sqrt{-4}\sqrt{-9}=\sqrt{4}i\cdot\sqrt{9}i=\sqrt{36}i^2=-6$ 답 -6

0364 $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}=\dfrac{3i}{i^2}=-3i$ 답 $-3i$

0365 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-12}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}i}=\dfrac{\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i^2}=-\dfrac{1}{2}i$ 답 $-\dfrac{1}{2}i$

0366 ④ $1-5i$의 실수부분은 1, 허수부분은 -5이다. 답 ④

0367 $a=\sqrt{2}$, $b=\dfrac{4}{2}=2$이므로

$a^2+b^2=(\sqrt{2})^2+2^2=6$ 답 6

0368 허수는 $-3i$, $-1-i$, $3+\sqrt{-1}=3+i$의 3개이다. 답 3

참고 $2+i^2=2-1=1$이므로 실수이다.

0369 $2(1+7i)+(5-i)-(2i-6)=2+14i+5-i-2i+6$
$=13+11i$ 답 ⑤

0370 $z_1z_2=(2-3i)(2+3i)=4+9=13$ 답 ④

0371 $(3-i)(4+2i)+\dfrac{4+3i}{2-i}$

$=12+6i-4i+2+\dfrac{(4+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$=14+2i+\dfrac{8+4i+6i-3}{4+1}$

$=14+2i+1+2i=15+4i$ 답 $15+4i$

0372 $(1-2i)z=8-i$에서

$z=\dfrac{8-i}{1-2i}=\dfrac{(8-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$=\dfrac{8+16i-i+2}{1+4}=\dfrac{10+15i}{5}$

$=2+3i$ ··· ❶

따라서 복소수 $z=2+3i$의 실수부분은 2, 허수부분은 3이므로

$a=2$, $b=3$ ··· ❷

$\therefore a+b=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 복소수 z를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0373 $z=1+\sqrt{3}i$에서 $z-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $z^2-2z+1=-3$ $\therefore z^2-2z=-4$

$\therefore z^2-2z+2=-4+2=-2$ 답 ①

다른 풀이 $z^2-2z+2=(1+\sqrt{3}i)^2-2(1+\sqrt{3}i)+2$
$=1+2\sqrt{3}i-3-2-2\sqrt{3}i+2$
$=-2$

0374 $x=\dfrac{1-3i}{2}$에서 $2x-1=-3i$

양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=-9$

$4x^2-4x=-10$ $\therefore x^2-x=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore 3x^2-3x+5=3(x^2-x)+5$
$=3\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)+5=-\dfrac{5}{2}$ 답 $-\dfrac{5}{2}$

다른 풀이 $3x^2-3x+5=3\cdot\left(\dfrac{1-3i}{2}\right)^2-3\cdot\dfrac{1-3i}{2}+5$
$=3\cdot\dfrac{1-6i-9}{4}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}i+5$
$=-6-\dfrac{9}{2}i-\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}i+5=-\dfrac{5}{2}$

0375 $z=\dfrac{2+i}{1+i}=\dfrac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2-2i+i+1}{1+1}=\dfrac{3-i}{2}$에서

$2z-3=-i$

양변을 제곱하면 $4z^2-12z+9=-1$

$4z^2-12z+10=0$ $\therefore 2z^2-6z+5=0$

$\therefore 2z^3-6z^2+5z+2=z(2z^2-6z+5)+2$
$=2$ 답 2

0376 $x=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}$에서 $2x+1=\sqrt{7}i$

양변을 제곱하면 $4x^2+4x+1=-7$

$4x^2+4x+8=0$, $x^2+x+2=0$

$\therefore x^2=-x-2$

$\therefore x^3-3x^2+4x-5=x(-x-2)-3(-x-2)+4x-5$
$=-x^2+5x+1$
$=-(-x-2)+5x+1$
$=6x+3$
$=6\cdot\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}+3$
$=3\sqrt{7}i$ 답 ④

0377 $z=x(2-i)+2(i-3)=2x-xi+2i-6$
$=(2x-6)+(-x+2)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$2x-6=0$, $\underbrace{-x+2\neq0}_{x\neq2}$

$\therefore x=3$ 답 3

0378 $x(x+1+i)-(2+i)=x^2+x+xi-2-i$
$=(x^2+x-2)+(x-1)i$ ······ ㉠

㉠이 실수가 되려면 ㉠의 허수부분이 0이어야 하므로

$x-1=0$ $\therefore x=1$ 답 ①

0379 z^2이 실수가 되려면 z의 실수부분이 0 또는 허수부분이 0이어야 하므로

$\underbrace{a^2-4a+3=0}_{(a-1)(a-3)=0}$ 또는 $a-1=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$1+3=4$ 답 ②

03 복소수

0380 $(1+5i)(a-i)=a-i+5ai+5$

$=(a+5)+(5a-1)i$ ······ ㉠

㉠을 제곱하여 양의 실수가 되려면 ㉠의 실수부분은 0이 아니고, 허수부분은 0이어야 하므로

$\underbrace{a+5\neq0}_{a\neq-5}$, $5a-1=0$

$\therefore a=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

0381 $z=(1+i)x^2-(3+6i)x+2+5i$

$=(x^2-3x+2)+(x^2-6x+5)i$ ······ ㉠ ··· ❶

z가 순허수이려면 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$x^2-3x+2=0$, $x^2-6x+5\neq0$

$(x-1)(x-2)=0$, $(x-1)(x-5)\neq0$

$\therefore x=2$ ··· ❷

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $z=-3i$ ··· ❸

답 $x=2$, $z=-3i$

채점 기준	비율
❶ 복소수 z를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ z의 값을 구할 수 있다.	20 %

0382 $x(2-i)-y(3+2i)=3-5i$에서

$2x-xi-3y-2yi=3-5i$

$(2x-3y)+(-x-2y)i=3-5i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x-3y=3$, $-x-2y=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=1$

$\therefore x^2+y^2=10$ 답 ③

0383 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-6=0$, $2x-13y+1=0$

$\therefore x=6$, $y=1$

$\therefore x-y=5$ 답 5

0384 $\frac{x}{2+i}+\frac{y}{2-i}=\frac{8}{1+3i}$에서

$\frac{x(2-i)+y(2+i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{8(1-3i)}{\underbrace{(1+3i)(1-3i)}_{1-9i^2=1+9=10}}$

$\frac{2(x+y)-(x-y)i}{5}=\frac{4-12i}{5}$

$2(x+y)-(x-y)i=4-12i$ ··· ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=2$, $x-y=12$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=7$, $y=-5$ ··· ❷

$\therefore x+2y=-3$ ··· ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 양변을 각각 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $x+2y$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0385 $x^2+y^2i+x+yi-2-6i=0$에서

$(x^2+x-2)+(y^2+y-6)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+x-2=0$, $y^2+y-6=0$

$x^2+x-2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$y^2+y-6=0$에서 $(y+3)(y-2)=0$

$\therefore y=-3$ 또는 $y=2$

$\therefore xy=-4$ 또는 $xy=-3$ 또는 $xy=2$ 또는 $xy=6$

따라서 xy의 값이 될 수 없는 것은 ④이다. 답 ④

0386 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$|x-y|=5$, $x-3=-1$

$x-3=-1$에서 $x=2$

한편 $x<y$에서 $x-y<0$이므로

$|x-y|=-x+y=-2+y=5$ $\therefore y=7$

$\therefore x+y=9$ 답 ⑤

0387 $(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=\{(1+2i)-(2-5i)\}\{(1-2i)-(2+5i)\}$

$=(-1+7i)(-1-7i)$

$=1+49=50$ 답 50

0388 $\frac{1-z}{\overline{z}}=\frac{1-(3-2i)}{3+2i}=\frac{(-2+2i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$=\frac{-6+4i+6i+4}{9+4}=-\frac{2}{13}+\frac{10}{13}i$ 답 ②

0389 $z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2(1-i)}{1+1}=1-i$ ··· ❶

$\therefore 1+\overline{z}+z\overline{z}=1+(1+i)+(1-i)(1+i)$

$=1+1+i+1+1$

$=4+i$ ··· ❷

답 $4+i$

채점 기준	비율
❶ z를 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ $1+\overline{z}+z\overline{z}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0390 $x+y=(3+i)+(3-i)=6$, $xy=(3+i)(3-i)=10$이므로

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\frac{6^2-2\cdot10}{10}=\frac{8}{5}$ 답 ②

다른 풀이 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{3-i}{3+i}+\frac{3+i}{3-i}=\frac{(3-i)^2+(3+i)^2}{(3+i)(3-i)}$

$=\frac{9-6i-1+9+6i-1}{9+1}=\frac{8}{5}$

0391 $x+y=(2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=4$,

$xy=(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=7$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=4^2-2\cdot7=2$ 답 2

다른 풀이 $x^2+y^2=(2+\sqrt{3}i)^2+(2-\sqrt{3}i)^2$
$=4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3=2$

0392 $x+y=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$,

$xy=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+3}{4}=1$

① $x+y=1$

② $x^2y^2=(xy)^2=1^2=1$

③ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{1}=1$

④ $x^2y+xy^2=xy(x+y)=1\cdot1=1$

⑤ $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=1^3-3\cdot1\cdot1=-2$

답 ⑤

0393 $\alpha+\beta=\dfrac{1+i}{2i}+\dfrac{1-i}{2i}=\dfrac{2}{2i}=\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$,

$\alpha\beta=\dfrac{1+i}{2i}\cdot\dfrac{1-i}{2i}=\dfrac{1+1}{-4}=-\dfrac{1}{2}$ ⋯ ❶

이므로

$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$
$=(-i)^2-3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
$=-1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$ ⋯ ❷

답 $\dfrac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

0394 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$

ㄱ. $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$
따라서 $z+\overline{z}$는 실수이다.

ㄴ. $z=1+i$이면 $-\overline{z}=-(1-i)=-1+i$
$\therefore z\neq-\overline{z}$

ㄷ. $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$이면
$a=0$, $b=0$ $\therefore z=0$
따라서 $z\overline{z}=0$이면 $z=0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0395 $z=\overline{z}$를 만족시키는 z는 실수이다.
따라서 z가 될 수 있는 것은 0, $\sqrt{2}+1$의 2개이다. 답 2

0396 $z=-\overline{z}$이고 $z\neq0$이므로 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니다.
따라서 $z=(x^2-x-6)+(x^2-4)i$에서
$x^2-x-6=0$, $x^2-4\neq0$ ⋯ ❶
$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❷
$x^2-4\neq0$에서 $x^2\neq4$
$\therefore x\neq\pm2$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❸
㉠, ㉡에서 $x=3$ ⋯ ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ 0이 아닌 복소수 z가 $z=-\overline{z}$일 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ $x^2-x-6=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $x^2-4\neq0$을 만족시키는 x의 조건을 구할 수 있다.	20 %
❹ x의 값을 구할 수 있다.	20 %

0397 z^2이 실수이므로 $z^2=\overline{z}^2$
$z^2-\overline{z}^2=0$, $(z-\overline{z})(z+\overline{z})=0$
이때 z는 허수이므로 $z\neq\overline{z}$이다.
$\therefore z+\overline{z}=0$, 즉 $z=-\overline{z}$ 답 ②

참고 z^2이 실수이므로 $z=bi$(b는 0이 아닌 실수)라 하면
③ $z\overline{z}=bi\cdot(-bi)=-b^2i^2=b^2\neq0$
④ $z\overline{z}=-1$, 즉 $b^2=-1$을 만족시키는 실수 b는 존재하지 않으므로
$z\overline{z}\neq-1$
⑤ $z\overline{z}\neq0$, $z+\overline{z}=0$이므로 $z\overline{z}\neq z+\overline{z}$

0398 $\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha+\beta)+\overline{\beta}(\alpha+\beta)$
$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$
$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$
이때 $\alpha=4+3i$, $\beta=-1-2i$이므로
$\alpha+\beta=3+i$, $\overline{\alpha+\beta}=3-i$
$\therefore$ (주어진 식)$=(3+i)(3-i)=10$ 답 10

0399 $\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}-\overline{\beta})-\beta(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$
$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$
$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$
$=(5-3i)(5+3i)$
$=34$ 답 ⑤

0400 $\dfrac{1}{\overline{\alpha}}+\dfrac{1}{\overline{\beta}}=\dfrac{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}}=\dfrac{\overline{\alpha+\beta}}{\overline{\alpha\beta}}$
$=\dfrac{3-i}{4-3i}=\dfrac{(3-i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}$
$=\dfrac{12+9i-4i+3}{16+9}=\dfrac{15+5i}{25}$
$=\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}i$ 답 ③

0401 $\alpha\overline{\beta}=1$에서 $\alpha=\dfrac{1}{\overline{\beta}}$
$\overline{(\alpha\overline{\beta})}=1$에서 $\overline{\alpha}\beta=1$이므로 $\beta=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$
$\overline{(\alpha\overline{\beta})}=\overline{\alpha}\cdot\overline{(\overline{\beta})}=\overline{\alpha}\beta$
$\therefore \beta+\dfrac{1}{\overline{\beta}}=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}+\alpha=5i$ 답 $5i$

0402 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 주어진 식은
$(3-i)(a+bi)+2i(a-bi)=3+7i$
$3a+3bi-ai+b+2ai+2b=3+7i$
$(3a+3b)+(a+3b)i=3+7i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$3a+3b=3$, $a+3b=7$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-2$, $b=3$
$\therefore z=-2+3i$ 답 ②

0403 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$z+\bar{z}=6$에서 $\quad (a+bi)+(a-bi)=6$

$2a=6 \qquad \therefore a=3$ ⋯ ❶

$z\bar{z}=25$에서 $\quad (a+bi)(a-bi)=25$

$a^2+b^2=25, \qquad 9+b^2=25$

$b^2=16 \qquad \therefore b=\pm 4$ ⋯ ❷

$\therefore z=3\pm 4i$ ⋯ ❸

답 $3\pm 4i$

채점 기준	비율
❶ z의 실수부분을 구할 수 있다.	40 %
❷ z의 허수부분을 구할 수 있다.	40 %
❸ 복소수 z를 구할 수 있다.	20 %

0404 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$$\begin{aligned} z+zi &= (a+bi)+(a+bi)i \\ &= a+bi+ai-b \\ &= (a-b)+(a+b)i \end{aligned}$$

이므로 주어진 식은

$(a-b)-(a+b)i=4-2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=4$, $a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-1$

따라서 $z=3-i$이므로 z의 허수부분은 -1이다. 답 ⑤

0405 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 조건 (가)에서

$(1+i)+z=(1+i)+(a+bi)=(a+1)+(b+1)i$

가 양의 실수이므로

$a+1>0$, $b+1=0$

$\therefore a>-1$, $b=-1$

조건 (나)에서

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=4, \qquad a^2+b^2=4$

$a^2=3 \qquad \therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>-1$)

따라서 $z=\sqrt{3}-i$이므로

$z+\bar{z}=(\sqrt{3}-i)+(\sqrt{3}+i)=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

0406 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{197}$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{198}=-1$, $i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{199}=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{200}=1$이므로

$$\begin{aligned} &1-i+i^2-i^3+\cdots+i^{200} \\ &=(1-i-1+i)+(1-i-1+i)+\cdots+(1-i-1+i)+1 \\ &=1 \end{aligned}$$

답 ④

0407 $i^{10}+i^{11}+\dfrac{1}{i^{12}}+\dfrac{1}{i^{13}}$

$$\begin{aligned} &=(i^4)^2\cdot i^2+(i^4)^2\cdot i^3+\frac{1}{(i^4)^3}+\frac{1}{(i^4)^3\cdot i} \\ &=i^2+i^3+1+\frac{1}{i} \\ &=-1-i+1-i \quad \frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i \\ &=-2i \end{aligned}$$

답 $-2i$

0408 $i=i^5=i^9$, $i^2=i^6=i^{10}=-1$, $i^3=i^7=-i$, $i^4=i^8=1$이므로

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{10}} \\ &=\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\frac{1}{i}-1 \\ &=\frac{1}{i}-1=\frac{i}{i^2}-1 \\ &=-1-i \end{aligned}$$

따라서 $-1-i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-1$, $b=-1$

$\therefore a+b=-2$ 답 -2

0409 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{29}$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{30}=-1$, $i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{27}=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{28}=1$이므로

$$\begin{aligned} &i+2i^2+3i^3+\cdots+30i^{30} \\ &=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8) \\ &\quad +\cdots+(25i-26-27i+28)+(29i-30) \\ &=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)+(29i-30) \\ &=7(2-2i)+(29i-30) \\ &=-16+15i \end{aligned}$$

따라서 $-16+15i=x+yi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x=-16$, $y=15$

$\therefore x-y=-31$ 답 ①

0410 $f(k)=0$이 되려면

$$\begin{aligned} f(k)&=1+i+i^2+\cdots+i^k \\ &=(1+i-1-i)+(1+i-1-i)+\cdots+(1+i-1-i) \end{aligned}$$

이때 $k=3, 7, 11, \cdots$, 즉 $k+1$이 4의 배수이어야 한다. ⋯ ❶

따라서 100 이하의 자연수 k는 3, 7, 11, ⋯, 99의 25개이다. ⋯ ❷

답 25

채점 기준	비율
❶ $f(k)=0$을 만족시키는 k의 조건을 구할 수 있다.	70 %
❷ k의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0411 $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$이므로

$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{100}=i^{100}=(i^4)^{25}=1$ 답 1

0412 $(1+i)^{50}=\{(1+i)^2\}^{25}=(2i)^{25}=2^{25}\cdot(i^4)^6\cdot i=2^{25}i$,
$(1-i)^{50}=\{(1-i)^2\}^{25}=(-2i)^{25}=(-2)^{25}\cdot(i^4)^6\cdot i=-2^{25}i$
이므로

$(1+i)^{50}+(1-i)^{50}=2^{25}i+(-2^{25}i)=0$ 답 ③

0413 $z^2=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{2i}{2}=i$이므로

$$\begin{aligned} z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}&=i+i^2+i^3+i^4+i^5 \\ &=i-1-i+1+i=i \end{aligned}$$

답 ⑤

0414 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$,

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$f(n)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=(-i)^n+i^n$ ⋯ ❶

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$

$=\{(-i)+i\}+\{(-i)^2+i^2\}+\{(-i)^3+i^3\}+\{(-i)^4+i^4\}$

$=0-2+0+2=0$ ⋯ ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0415 $\sqrt{-2}\sqrt{-4}+\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}+\sqrt{-4}=-\sqrt{8}-\sqrt{\frac{12}{-3}}+\sqrt{4}i$

$=-2\sqrt{2}-2i+2i$

$=-2\sqrt{2}$ 답 $-2\sqrt{2}$

0416 ① $\sqrt{-2}\sqrt{7}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{7}=\sqrt{14}i=\sqrt{-14}$

② $\sqrt{-2}\sqrt{-7}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{7}i=\sqrt{14}i^2=-\sqrt{14}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-7}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}i}=\frac{\sqrt{2}i}{-\sqrt{7}}=-\sqrt{-\frac{2}{7}}$

④ $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-7}}=\frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{7}i}=\sqrt{\frac{2}{7}}$

⑤ $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{2}{7}}i=\sqrt{-\frac{2}{7}}$ 답 ③

0417 $z=\frac{2-\sqrt{-4}}{2+\sqrt{-4}}=\frac{2-\sqrt{4}i}{2+\sqrt{4}i}=\frac{2-2i}{2+2i}=\frac{1-i}{1+i}$

$=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$ ⋯ ❶

$\therefore z+\overline{z}=-i+i=0$ ⋯ ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ z를 간단히 할 수 있다.	70 %
❷ $z+\overline{z}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0418 $\sqrt{-3}\sqrt{-27}+\sqrt{-4}\sqrt{4}+\frac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-5}}+\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{-3}}$

$=-\sqrt{81}+\sqrt{-16}+\sqrt{\frac{20}{5}}-\sqrt{\frac{48}{-3}}$

$=-9+4i+2-4i$

$=-7$

따라서 $-7=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-7,\ b=0$

$\therefore b-a=7$ 답 7

0419 $0<a<1$일 때,

$a-1<0,\ a>0,\ 1-a>0,\ -a<0$

이므로

$\sqrt{a-1}\times\sqrt{a}\times\sqrt{1-a}\times\sqrt{-a}$

$=\sqrt{1-a}i\times\sqrt{a}\times\sqrt{1-a}\times\sqrt{a}i$

$=(\sqrt{1-a})^2\times(\sqrt{a})^2\times i^2$

$=(1-a)\cdot a\cdot(-1)=a^2-a$ 답 ②

0420 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0,\ b<0$

$\therefore \sqrt{(a+b)^2}-|b|=-(a+b)+b=-a$ 답 $-a$

라쎈 특강

$\sqrt{x^2}$의 성질

$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x\ (x\ge0) & \sqrt{(\text{양수})^2}=(\text{양수}),\ \sqrt{0^2}=0 \\ -x\ (x<0) & \sqrt{(\text{음수})^2}=-(\text{음수}) \end{cases}$

0421 $\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-8}}=-\sqrt{\frac{x-5}{x-8}}$에서 $x-5>0,\ x-8<0$

$\therefore |x-5|+|x-8|=(x-5)-(x-8)=3$ 답 ②

0422 $\sqrt{x-y}\sqrt{y-z}=-\sqrt{(x-y)(y-z)}$에서

$x-y<0,\ y-z<0$

즉 $x<y,\ y<z$이므로 $x<y<z$ ⋯ ❶

$\therefore |x-y|+|y-z|+|z-x|$

$=-(x-y)-(y-z)+\underbrace{(z-x)}_{z-x>0}=-2x+2z$ ⋯ ❷

답 $-2x+2z$

채점 기준	비율
❶ $x,\ y,\ z$의 대소를 비교할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	50 %

0423 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$에서 $a>0,\ b<0$

① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}$

② $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}=-b\sqrt{a}$

④ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 답 ④

0424 전략 순허수는 실수부분이 0인 허수임을 이용한다.

풀이 순허수는 $-5i,\ \sqrt{2}i,\ -\sqrt{-1}=-i$의 3개이다. 답 3

0425 전략 복소수 $a+bi$ ($a,\ b$는 실수)가 실수이면 $b=0$이다.

풀이 $x(1+xi)-2(2i-3)=x+x^2i-4i+6$

$=(x+6)+(x^2-4)i$ ⋯⋯ ㉠

㉠이 실수가 되려면 ㉠의 허수부분이 0이어야 하므로

$x^2-4=0,\quad (x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은 0이다. 답 ③

0426 전략 복소수의 곱셈은 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 전개한 후 $i^2=-1$임을 이용하여 계산한다.

풀이 $(5-6i)(6+i)=30+5i-36i+6=36-31i$

따라서 $36-31i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=36,\ b=-31$ $\therefore a+b=5$ 답 5

0427 전략• α^2, β^2을 구하여 식에 대입한다.

풀이 $\alpha=\frac{1+i}{2i}$에서 $\alpha^2=\frac{2i}{-4}=-\frac{i}{2}$

$\beta=\frac{1-i}{2i}$에서 $\beta^2=\frac{-2i}{-4}=\frac{i}{2}$

$\therefore (2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)=(-i+3)(i+3)$
$=1+9=10$

답 ②

0428 전략• $a+bi=c+di$ (a, b, c, d는 실수)이면 $a=c$, $b=d$임을 이용한다.

풀이 $(a-bi)^2=8i$에서 $a^2-b^2-2abi=8i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0$, $-2ab=8$

$a^2-b^2=0$에서 $(a+b)(a-b)=0$

$\therefore a=b$ 또는 $a=-b$

(i) $a=b$일 때, $-2ab=8$에서 $a^2=-4$이므로 이를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $a=-b$일 때, $-2ab=8$에서 $a^2=4$이므로
$a=2$, $b=-2$ ($\because a>0$)

(i), (ii)에서 $20a+b=20\cdot2-2=38$

답 38

0429 전략• 새로운 규칙을 적용한 후 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하여 식을 간단히 한다.

풀이 $f(1, 2)+f(2, 4)+f(3, 6)+\cdots+f(20, 40)$

$=\frac{1+2i}{1-2i}+\frac{2+4i}{2-4i}+\frac{3+6i}{3-6i}+\cdots+\frac{20+40i}{20-40i}$

$=\frac{1+2i}{1-2i}+\frac{1+2i}{1-2i}+\frac{1+2i}{1-2i}+\cdots+\frac{1+2i}{1-2i}$

$=20\cdot\frac{1+2i}{1-2i}$

$=20\cdot\frac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)}$

$=20\cdot\frac{-3+4i}{5}$

$=-12+16i$

답 $-12+16i$

0430 전략• 주어진 등식을 우변에 순허수만 남도록 변형한 후 양변을 제곱하여 z에 대한 이차방정식을 만든다.

풀이 $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2z-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $4z^2-4z+1=-3$

$4z^2-4z+4=0$, $z^2-z+1=0$

$\therefore z^2=z-1$

이때 $z^3=z^2-z=z-1-z=-1$이므로

$z^4=-z$, $z^5=-z^2$, $z^6=1$

$\therefore z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$
$=z+z^2-1-z-z^2+1=0$

답 ③

0431 전략• x, y가 서로 켤레복소수이므로 $x+y$, xy의 값을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

풀이 $x+y=(2+i)+(2-i)=4$, $xy=(2+i)(2-i)=5$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{4}{5}$

답 ②

다른 풀이 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2+i}+\frac{1}{2-i}=\frac{(2-i)+(2+i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4}{5}$

0432 전략• $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)로 놓고 복소수의 연산과 켤레복소수의 성질을 이용한다.

풀이 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)로 놓으면

$\overline{z_1}=a-bi$, $\overline{z_2}=c-di$

① $z_1\overline{z_1}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$에서

$a=0$, $b=0$

따라서 z_1은 실수이다.

② $z_1=\overline{z_2}$이면 $a+bi=c-di$에서 $a=c$, $b=-d$이므로

$z_2=c+di=a-bi=\overline{z_1}$

③ $z_1=\overline{z_2}$이면 $a+bi=c-di$에서 $a=c$, $b=-d$이므로

$z_1z_2=(c-di)(c+di)=c^2+d^2$

따라서 z_1z_2는 실수이다.

④ $z_1+z_2=0$이면

$\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}=\overline{0}=0$

⑤ $z_1\overline{z_2}=1$이면 $z_1=\frac{1}{\overline{z_2}}$, $\overline{z_2}=\frac{1}{z_1}$

$z_1=\frac{1}{\overline{z_2}}$에서 $\overline{z_1}=\frac{1}{z_2}$

$\therefore \overline{z_1}+\frac{1}{z_1}=\frac{1}{z_2}+\overline{z_2}=\overline{z_2}+\frac{1}{z_2}$

답 ③

0433 전략• 켤레복소수의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. z^2-z가 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다.

ㄴ. $z^2-z=(a+bi)^2-(a+bi)$
$=a^2+2abi-b^2-a-bi$
$=(a^2-a-b^2)+(2ab-b)i$

이때 z^2-z가 실수이므로

$2ab-b=0$, $b(2a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because b\neq0$)

따라서 $z=\frac{1}{2}+bi$, $\overline{z}=\frac{1}{2}-bi$이므로

$z+\overline{z}=1$

ㄷ. $z\overline{z}=\left(\frac{1}{2}+bi\right)\left(\frac{1}{2}-bi\right)=\frac{1}{4}+b^2$이므로

$z\overline{z}>\frac{1}{4}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0434 전략• 주어진 식을 간단히 정리한 후 켤레복소수의 성질을 이용한다.

풀이 $\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha-\beta)-\overline{\beta}(\alpha-\beta)$
$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$
$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

이때 $\alpha=1+4i$, $\beta=3+2i$이므로

$\alpha-\beta=1+4i-(3+2i)=-2+2i$, $\overline{\alpha-\beta}=-2-2i$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-2+2i)(-2-2i)=8$

답 8

0435 전략• $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 주어진 식을 간단히 정리한 후 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$$\frac{z}{1+i}+\frac{\overline{z}}{1-i}=\frac{a+bi}{1+i}+\frac{a-bi}{1-i}$$
$$=\frac{(a+bi)(1-i)+(a-bi)(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{(a-ai+bi+b)+(a+ai-bi+b)}{2}$$
$$=a+b=1$$

즉 z의 실수부분과 허수부분의 합은 1이다.

③ $1+i$는 (실수부분)+(허수부분)$=1+1=2$이므로 $a+b=1$을 만족시키지 않는다.

답 ③

0436 **전략** $(1+i)^{10}=\{(1+i)^2\}^5$임을 이용한다.

풀이 $(1+i)^{10}=\{(1+i)^2\}^5=(2i)^5=2^5i^5=2^5\cdot i^4\cdot i=32i$

따라서 $32i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=0$, $b=32$

$\therefore a-b=-32$

답 ①

0437 **전략** i^n(n은 자연수)의 값은 i, -1, $-i$, 1이 이 순서대로 반복되어 나타남을 이용한다.

풀이 $(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})$

$=(i+i^2+i^3+\cdots+i^{18})+(i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{19})$

$=(i^{17}+i^{18})+(i^{18}+i^{19})$

$=(i+i^2)+(i^2+i^3)$

$=(i-1)+(-1-i)$

$=-2$

따라서 $-2=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-2$, $b=0$

$\therefore 4(a+b)^2=16$

답 16

다른 풀이 $i+i^{19}=i+(-i)=0$이므로

$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})$

$=i+\{(i^2+i^2)+(i^3+i^3)+(i^4+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{18})\}+i^{19}$

$=(i^2+i^2)+(i^3+i^3)+(i^4+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{18})$

$=2(i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{18})$

$=2\cdot i^{18}=2\cdot i^2$

$=2\cdot(-1)=-2$

0438 **전략** z^2, z^3, z^4, $\cdots$을 차례대로 구한다.

풀이 $z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^2=\frac{2i}{2i^2}=-i$

$z^3=z^2z=-i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}i}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$

$z^5=z^4z=-1\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}i}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}i}$

$z^6=z^4z^2=-1\cdot(-i)=i$

$z^7=z^6z=i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

따라서 $z^n=1$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

답 ④

0439 **전략** $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$임을 이용한다.

풀이 $2=\sqrt{4}=\sqrt{(-2)(-2)}=-\sqrt{-2}\sqrt{-2}$

$=-(\sqrt{-2})^2=-(-2)=2$

답 ③

0440 **전략** $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$, $a>0$, $b<0$이면 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$임을 이용하여 계산한다.

풀이 $\sqrt{6}\sqrt{-24}+\frac{\sqrt{196}}{\sqrt{-49}}-\sqrt{-4}\sqrt{-9}$

$=\sqrt{-144}-\sqrt{\frac{196}{-49}}+\sqrt{36}$

$=12i-2i+6=6+10i$

따라서 $6+10i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=6$, $b=10$

$\therefore a-b=-4$

답 -4

0441 **전략** 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$에서

$x<0$, $y<0$ 또는 $x=0$ 또는 $y=0$ …… ㉠

$x^2+2x-(y+3)i=15+4i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+2x=15$, $-(y+3)=4$

$x^2+2x=15$에서 $x^2+2x-15=0$

$(x+5)(x-3)=0$ $\therefore x=-5$ ($\because$ ㉠)

$-(y+3)=4$에서 $y=-7$

따라서 $x=-5$, $y=-7$이므로

$xy=35$

답 ④

0442 **전략** 복소수 z에 대하여 $z^2<0$이면 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니어야 함을 이용한다.

풀이 $z=i(x+2i)^2=i(x^2+4xi-4)$

$=ix^2-4x-4i$

$=-4x+(x^2-4)i$ ··· ❶

$z^2<0$이면 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$-4x=0$, $\underbrace{x^2-4\neq0}_{x\neq\pm2}$

$\therefore x=0$ ··· ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ z를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	60 %

0443 **전략** $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 주어진 등식을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $z^2=2+6i$에서

$(a+bi)^2=2+6i$

$a^2-b^2+2abi=2+6i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=2$, $ab=3$ ··· ❶

한편 $\bar{z}=a-bi$이므로

$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)$$
$$=a^2+b^2=\sqrt{(a^2+b^2)^2}$$
$$=\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}$$
$$=\sqrt{2^2+4\cdot 3^2}=2\sqrt{10}$$ ··· ❷

답 $2\sqrt{10}$

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$로 놓고 주어진 등식을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ ❶을 이용하여 $z\bar{z}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0444 전략 $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$임을 이용한다.

풀이 $f(i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98}=\left\{\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right\}^{98}$
$$=i^{98}=(i^4)^{24}\cdot i^2=-1$$ ··· ❶

$f(-i)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}=\left\{\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right\}^{98}$
$$=(-i)^{98}=i^{98}=-1$$ ··· ❷

$\therefore f(i)+f(-i)=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $f(i)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(-i)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(i)+f(-i)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0445 전략 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0$, $b<0$ ··· ❶

$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{c}{b}}$에서 $b<0$, $c>0$ ··· ❷

$\therefore \sqrt{a^2}-|b|+\sqrt{c^2}=-a+b+c$ ··· ❸

답 $-a+b+c$

채점 기준	비율
❶ $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$임을 이용하여 a, b의 부호를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{c}{b}}$임을 이용하여 c의 부호를 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	40 %

04 이차방정식

0446 $x^2+8x+12=0$에서 $(x+2)(x+6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-6$

답 $x=-2$ 또는 $x=-6$

0447 $4x^2-1=0$에서 $(2x+1)(2x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

0448 $2x^2+5x-3=0$에서 $(x+3)(2x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

답 $x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

0449 $x^2-2x+1=0$에서 $(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

답 $x=1$

0450 $x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

답 $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

0451 $x^2+2\cdot1\cdot x-4=0$이므로

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-4)}}{1}=-1\pm\sqrt{5}$

답 $x=-1\pm\sqrt{5}$

0452 $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{4}$

답 $x=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{4}$

0453 $4x^2+2\cdot(-4)x-7=0$이므로

$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot(-7)}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{11}}{2}$

답 $x=\frac{2\pm\sqrt{11}}{2}$

0454 $4x^2+4x-3=0$에서 $(2x+3)(2x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

답 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$, 실근

0455 $x^2-10x+25=0$에서 $(x-5)^2=0$

$\therefore x=5$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

답 $x=5$, 실근

0456 $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

답 $x=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$, 허근

0457 $3x^2+2\cdot2x+6=0$이므로

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot6}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{14}i}{3}$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

답 $x=\frac{-2\pm\sqrt{14}i}{3}$, 허근

0458 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-7)^2-4\cdot2\cdot(-3)=73>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

참고 이차방정식 $2x^2-7x-3=0$에서 이차항의 계수는 2, 상수항은 -3이다. 즉 이차항의 계수와 상수항의 부호가 다르므로 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0459 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{4}=0$

따라서 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

답 중근(서로 같은 두 실근)

0460 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot3\cdot8=-87<0$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

0461 $x^2+2\cdot2x-1=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot(-1)=5>0$ $D=4^2-4\cdot1\cdot(-1)=20>0$ 임을 이용해도 된다.

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

0462 $5x^2+2\cdot(-\sqrt{2})x+3=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-\sqrt{2})^2-5\cdot3=-13<0$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

0463 $9x^2+2\cdot12x+16=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=12^2-9\cdot16=0$

따라서 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

답 중근(서로 같은 두 실근)

0464 주어진 각 방정식의 판별식을 D라 하면

ㄱ. $D=3^2-4\cdot1\cdot5=-11<0$

ㄴ. $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=1>0$

ㄷ. $\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-7)=8>0$

ㄹ. $\frac{D}{4}=(-3)^2-9\cdot1=0$

ㅁ. $D=5^2-4\cdot2\cdot4=-7<0$

ㅂ. $\frac{D}{4}=1^2-3\cdot(-1)=4>0$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이므로 ㄴ, ㄷ, ㅂ

(2) 중근(서로 같은 두 실근)을 가지면 $D=0$이므로 ㄹ

(3) 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이므로 ㄱ, ㅁ

답 (1) ㄴ, ㄷ, ㅂ (2) ㄹ (3) ㄱ, ㅁ

0465 이차방정식 $x^2+5x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\cdot1\cdot k=25-4k$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$D=25-4k>0$ $\therefore k<\frac{25}{4}$

(2) 중근(서로 같은 두 실근)을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$D=25-4k=0$ $\therefore k=\frac{25}{4}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$D=25-4k<0$ $\therefore k>\frac{25}{4}$

답 (1) $k<\frac{25}{4}$ (2) $k=\frac{25}{4}$ (3) $k>\frac{25}{4}$

0466 $\alpha+\beta=-\frac{-4}{1}=4$, $\alpha\beta=\frac{2}{1}=2$ 답 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

0467 $\alpha+\beta=-\frac{-5}{2}=\frac{5}{2}$, $\alpha\beta=\frac{-4}{2}=-2$

답 $\alpha+\beta=\frac{5}{2}$, $\alpha\beta=-2$

0468 $\alpha+\beta=-\frac{5}{3}$, $\alpha\beta=\frac{6}{3}=2$ 답 $\alpha+\beta=-\frac{5}{3}$, $\alpha\beta=2$

0469 $\alpha+\beta=-\frac{3}{1}=-3$, $\alpha\beta=\frac{-2}{1}=-2$이므로

$\alpha+\beta+\alpha\beta=-3-2=-5$ 답 -5

0470 $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-2\cdot(-3)=6$ 답 6

0471 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0472 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-3)^2-2\cdot(-2)=13$ 답 13

0473 $x^2-(-2+5)x+(-2)\cdot5=0$

$\therefore x^2-3x-10=0$ 답 $x^2-3x-10=0$

0474 $x^2-\{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\}x+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=0$

$\therefore x^2-4x+1=0$ 답 $x^2-4x+1=0$

0475 $x^2-\{(1+i)+(1-i)\}x+(1+i)(1-i)=0$

$\therefore x^2-2x+2=0$ 답 $x^2-2x+2=0$

0476 $2\left\{x^2-\left(1+\frac{1}{2}\right)x+1\cdot\frac{1}{2}\right\}=0$

$2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=0$ $\therefore 2x^2-3x+1=0$

답 $2x^2-3x+1=0$

0477 $6\left\{x^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)x+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right\}=0$

$6\left(x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}\right)=0$ $\therefore 6x^2-7x+2=0$

답 $6x^2-7x+2=0$

0478 $x^2-4x-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-1)}=2\pm\sqrt{5}$

$\therefore x^2-4x-1=\{x-(2+\sqrt{5})\}\{x-(2-\sqrt{5})\}$
$=(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})$

답 $(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})$

0479 $x^2+8=0$에서 $x^2=-8$ $\therefore x=\pm2\sqrt{2}i$

$\therefore x^2+8=(x+2\sqrt{2}i)(x-2\sqrt{2}i)$

답 $(x+2\sqrt{2}i)(x-2\sqrt{2}i)$

0480 $x^2-2x+3=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot3}=1\pm\sqrt{2}i$

$\therefore x^2-2x+3=\{x-(1+\sqrt{2}i)\}\{x-(1-\sqrt{2}i)\}$
$=(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

답 $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

0481 $x^2+x+1=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore x^2+x+1=\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$
$=\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

답 $\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

0482 답 $1-\sqrt{5}$, $a=-2$, $b=-4$

$1-\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$, -2, -4

0483 계수가 유리수이고 한 근이 $-1-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $-1+\sqrt{3}$

계수가 유리수가 아니면 무리수의 켤레근을 이용할 수 없다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1-\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})=-a$, $(-1-\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})=b$

$\therefore a=2$, $b=-2$ 답 $-1+\sqrt{3}$, $a=2$, $b=-2$

0484 계수가 유리수이고 한 근이 $5-3\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $5+3\sqrt{2}$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(5-3\sqrt{2})+(5+3\sqrt{2})=-a$, $(5-3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})=b$

$\therefore a=-10$, $b=7$ 답 $5+3\sqrt{2}$, $a=-10$, $b=7$

0485 답 $1-i$, $a=-2$, $b=2$

$1-i$, $1-i$, $1-i$, -2, 2

0486 계수가 실수이고 한 근이 $2-i$이므로 다른 한 근은 $2+i$

계수가 실수가 아니면 허수의 켤레근을 이용할 수 없다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-i)+(2+i)=-a$, $(2-i)(2+i)=b$

$\therefore a=-4$, $b=5$ 답 $2+i$, $a=-4$, $b=5$

0487 계수가 실수이고 한 근이 $3+2i$이므로 다른 한 근은 $3-2i$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+2i)+(3-2i)=-a$, $(3+2i)(3-2i)=b$

$\therefore a=-6$, $b=13$ 답 $3-2i$, $a=-6$, $b=13$

0488 $3(x-2)^2-4=12-x$에서

$3(x^2-4x+4)-4=12-x$, $3x^2-12x+8=12-x$

$3x^2-11x-4=0$, $(3x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=4$ 답 ④

0489 $6x^2-7x-3=0$에서 $(3x+1)(2x-3)=0$

$\therefore x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

따라서 $\alpha=\dfrac{3}{2}$, $\beta=-\dfrac{1}{3}$이므로

$\alpha-\beta=\dfrac{11}{6}$ 답 ④

0490 $x^2-5x+4=0$에서 $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$ $\therefore M=4$ ··· ❶

$2x^2+3x-2=0$에서 $(x+2)(2x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$ $\therefore m=-2$ ··· ❷

$\therefore M+m=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ M의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0491 $x^2+2x+3=0$에서

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot3}=-1\pm\sqrt{2}i$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$a+b=1$ 답 ④

0492 $3x^2-1=2\sqrt{6}x$에서 $3x^2-2\sqrt{6}x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{-(-\sqrt{6})\pm\sqrt{(-\sqrt{6})^2-3\cdot(-1)}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}\pm3}{3}$

답 $x=\dfrac{\sqrt{6}\pm3}{3}$

0493 $2x(x-2)=4x-3$에서

$2x^2-4x=4x-3$, $2x^2-8x+3=0$

$\therefore x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-2\cdot3}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{10}}{2}$

따라서 $\alpha=\dfrac{4-\sqrt{10}}{2}$이므로 $2\alpha=4-\sqrt{10}$

$\therefore 2\alpha+\sqrt{10}=4$ 답 ③

0494 주어진 방정식의 양변에 3을 곱하면

$(5x-4)(x+1)-11-6x(x-1)=0$

$5x^2+x-4-11-6x^2+6x=0$

$x^2-7x+15=0$

$\therefore x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot15}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{11}i}{2}$

답 $x=\frac{7\pm\sqrt{11}i}{2}$

0495 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{3}+2$를 곱하면

$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)x^2+(\sqrt{3}+2)x+(\sqrt{3}+2)(3-\sqrt{3})=0$

$-x^2+(\sqrt{3}+2)x+(\sqrt{3}+3)=0$

$x^2-(\sqrt{3}+2)x-(\sqrt{3}+3)=0$

$(x+1)(x-\sqrt{3}-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+3$ 답 $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+3$

0496 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{5}$를 곱하면

$5x^2-\sqrt{5}(5-2\sqrt{5})x-10\sqrt{5}=0$

$5x^2-(5\sqrt{5}-10)x-10\sqrt{5}=0$

$x^2-(\sqrt{5}-2)x-2\sqrt{5}=0$

$(x+2)(x-\sqrt{5})=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\sqrt{5}$ 답 $x=-2$ 또는 $x=\sqrt{5}$

0497 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-1)(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$

$x^2+(2\sqrt{2}-1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$

$(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2}-1)=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=-\sqrt{2}+1$

따라서 $\alpha=-\sqrt{2}$, $\beta=-\sqrt{2}+1$이므로

$\alpha-2\beta=-\sqrt{2}-2(-\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}-2$ 답 ③

0498 (i) $x<3$일 때, 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나눈다.

$x^2-(x-3)=9$에서 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

그런데 $x<3$이므로 $x=-2$

(ii) $x\geq3$일 때,

$x^2+(x-3)=9$에서 $x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=3$

그런데 $x\geq3$이므로 $x=3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 모든 근의 합은 1이다. 답 ①

0499 (i) $x<0$일 때,

$x^2-x-20=0$에서 $(x+4)(x-5)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=5$

그런데 $x<0$이므로 $x=-4$

(ii) $x\geq0$일 때,

$x^2+x-20=0$에서 $(x+5)(x-4)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=4$

그런데 $x\geq0$이므로 $x=4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-4$ 또는 $x=4$ 답 $x=-4$ 또는 $x=4$

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$|x|^2+|x|-20=0$

$(|x|+5)(|x|-4)=0$

이때 $|x|\geq0$이므로 $|x|=4$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=4$

0500 $\sqrt{(x-1)^2}=x^2-3$에서

$|x-1|=x^2-3$

(i) $x<1$일 때,

$-(x-1)=x^2-3$에서 $x^2+x-4=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

그런데 $x<1$이므로 $x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

(ii) $x\geq1$일 때,

$x-1=x^2-3$에서 $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq1$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ 또는 $x=2$ 답 ④

0501 이차방정식 $x^2+kx-2k+1=0$의 한 근이 1이므로

$1^2+k\cdot1-2k+1=0$ $\therefore k=2$

$k=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 다른 한 근은 -3이다. 답 ①

0502 이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 한 근이 $-\sqrt{2}$이므로

$(-\sqrt{2})^2-\sqrt{2}a+4=0$, $-\sqrt{2}a=-6$

$\therefore a=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

0503 이차방정식 $x^2-(2m-3)x+m=0$의 한 근이 4이므로

$4^2-(2m-3)\cdot4+m=0$

$16-8m+12+m=0$

$7m=28$ $\therefore m=4$ ··· ❶

$m=4$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$ $\therefore n=1$ ··· ❷

$\therefore m-n=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $m-n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0504 이차방정식 $2x^2-(k+1)x-k+3=0$의 한 근이 $k-1$이므로

$2(k-1)^2-(k+1)(k-1)-k+3=0$

$k^2-5k+6=0$, $(k-2)(k-3)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 5이다. 답 ⑤

0505 이차방정식 $(k-3)x^2-ax+(k+2)b=0$의 한 근이 -1이므로

$$(k-3)\cdot(-1)^2-a\cdot(-1)+(k+2)b=0$$
$$(1+b)k-3+a+2b=0$$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 (k에 대한 항등식)

$$1+b=0,\ -3+a+2b=0$$

따라서 $a=5$, $b=-1$이므로

$ab=-5$ 답 -5

0506 처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 새로 만들어진 직사각형의 가로의 길이는 $(x+2)$ cm, 세로의 길이는 $(x-3)$ cm이므로

$$(x+2)(x-3)=36, \quad x^2-x-42=0$$
$$(x+6)(x-7)=0$$
$$\therefore x=-6 \text{ 또는 } x=7$$

그런데 $x>3$이므로 $x=7$ (길이는 항상 양수이므로 $x-3>0$ $\therefore x>3$)

따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 7 cm이므로 처음 정사각형의 넓이는 49 cm^2이다. 답 49 cm^2

0507 사다리꼴의 윗변의 길이를 x cm라 하면 높이는 x cm, 아랫변의 길이는 $(x+3)$ cm이므로

$$\underbrace{\frac{1}{2}\{x+(x+3)\}\cdot x}_{(\text{사다리꼴의 넓이})}=45, \quad 2x^2+3x-90=0$$

(사다리꼴의 넓이) $=\frac{1}{2}\times\{(\text{윗변의 길이})+(\text{아랫변의 길이})\}\times(\text{높이})$

$$(2x+15)(x-6)=0$$
$$\therefore x=-\frac{15}{2} \text{ 또는 } x=6$$

그런데 $x>0$이므로 $x=6$

따라서 윗변의 길이는 6 cm이다. 답 ②

0508 처음 종이의 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는 $2x$ cm이다. ⋯ ❶

직육면체 모양의 상자의 밑면의 가로의 길이는 $(2x-2)$ cm, 세로의 길이는 $(x-2)$ cm, 높이는 1 cm이므로

$$(2x-2)(x-2)\cdot 1=40 \quad \cdots ❷$$
$$2x^2-6x-36=0, \quad x^2-3x-18=0$$
$$(x+3)(x-6)=0$$
$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=6$$

그런데 $x>2$이므로 $x=6$

따라서 처음 종이의 가로의 길이는 12 cm이다. ⋯ ❸

답 12 cm

채점 기준	비율
❶ 세로의 길이를 x cm로 놓고 가로의 길이를 x로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❸ 처음 종이의 가로의 길이를 구할 수 있다.	40 %

0509 처음 물건의 가격을 a라 하면 x % 인상한 물건의 가격은

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$$

다시 x % 인하한 물건의 가격은

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠은 처음 가격보다 9 % 낮아진 가격이므로

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)=a\left(1-\frac{9}{100}\right)$$
$$1-\frac{x^2}{10000}=1-\frac{9}{100}$$
$$\frac{x^2}{10000}=\frac{9}{100}, \quad x^2=900$$
$$\therefore x=\pm 30$$

그런데 $x>0$이므로 $x=30$ 답 ③

다른 풀이 x % 인상한 후 다시 x % 인하한 가격이 9 % 인하한 가격과 같으므로

$$\frac{x}{100}\cdot\left(-\frac{x}{100}\right)=-\frac{9}{100}, \quad x^2=900$$
$$\therefore x=\pm 30$$

그런데 $x>0$이므로 $x=30$

라쎈 특강

a원인 물건의 가격을

① x % 인상한 가격 ➡ $a+a\times\frac{x}{100}$, 즉 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

② x % 인하한 가격 ➡ $a-a\times\frac{x}{100}$, 즉 $a\left(1-\frac{x}{100}\right)$원

0510 이차방정식 $x^2+(2k+1)x+k^2+3=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(2k+1)^2-4(k^2+3)>0$$
$$4k^2+4k+1-4k^2-12>0$$
$$4k-11>0 \quad \therefore k>\frac{11}{4}$$

따라서 가장 작은 정수 k의 값은 3이다. 답 ③

0511 이차방정식 $x^2-5x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-5)^2-4(k+1)\ge 0 \quad \cdots ❶$$
$$21-4k\ge 0 \quad \therefore k\le\frac{21}{4} \quad \cdots ❷$$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다. ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 k에 대한 부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 자연수 k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0512 주어진 방정식이 이차방정식이므로

$$m+2\ne 0 \quad \therefore m\ne -2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 $(m+2)x^2+2mx+m-5=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=m^2-(m+2)(m-5)\ge 0$$
$$m^2-(m^2-3m-10)\ge 0$$
$$3m+10\ge 0 \quad \therefore m\ge -\frac{10}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $-\frac{10}{3}\le m<-2$ 또는 $m>-2$

따라서 m의 값이 될 수 없는 것은 ①이다. ($-4<-\frac{10}{3}$) 답 ①

0513 이차방정식 $x^2+2ax+2a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(2a-1)=0$

$a^2-2a+1=0,\quad (a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

$a=1$을 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+2x+1=0,\quad (x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

따라서 $m=-1$이므로 $\quad a+m=0$ 답 0

0514 이차방정식 $x^2+kx+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4k=0,\quad k(k-4)=0$

$\therefore k=4\ (\because k\neq0)$ 답 ②

0515 주어진 방정식이 이차방정식이므로

$k^2-1\neq0,\quad (k+1)(k-1)\neq0$

$\therefore k\neq-1,\ k\neq1$ …… ㉠ ⋯→ ❶

이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-3(k^2-1)=0$ ⋯→ ❷

$k^2-2k+1-3k^2+3=0,\quad k^2+k-2=0$

$(k+2)(k-1)=0$

$\therefore k=-2\ (\because ㉠)$ ⋯→ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식이 이차방정식이기 위한 k의 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ 이차방정식이 중근을 가질 조건을 이용하여 k에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0516 이차방정식 $x^2+2(a+k)x+k^2+4k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+k)^2-(k^2+4k+b)=0$

$a^2+2ak+k^2-k^2-4k-b=0$

$(2a-4)k+a^2-b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a-4=0,\ a^2-b=0$

$\therefore a=2,\ b=4$

$\therefore a+b=6$ 답 ⑤

0517 이차방정식 $x^2-(3-2k)x+k^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(3-2k)\}^2-4k^2<0$

$9-12k+4k^2-4k^2<0$

$9-12k<0\quad \therefore k>\frac{3}{4}$

따라서 가장 작은 정수 k의 값은 1이다. 답 ④

0518 이차방정식 $x^2+4x-k+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-k+9)<0$

계수가 실수인 이차방정식이 실근을 갖지 않으면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$k-5<0\quad \therefore k<5$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다. 답 ①

0519 이차방정식 $x^2+2(1-k)x-k+3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(1-k)^2-(-k+3)=0$

$k^2-k-2=0,\quad (k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$ …… ㉠ ⋯→ ❶

이차방정식 $2x^2-x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\cdot2\cdot k<0$

$1-8k<0\quad \therefore k>\frac{1}{8}$ …… ㉡ ⋯→ ❷

㉠, ㉡에서 $\quad k=2$ ⋯→ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $x^2+2(1-k)x-k+3=0$이 중근을 가질 때, k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차방정식 $2x^2-x+k=0$이 허근을 가질 때, k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0520 이차방정식 $x^2-2kx+k^2+2k-4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-(k^2+2k-4)<0$

$-2k+4<0\quad \therefore k>2$

이때 가장 작은 정수 k의 값은 3이므로 $\quad m=3$

$m=3$을 이차방정식 $x^2-(2m-1)x+m+4=0$에 대입하면

$x^2-5x+7=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-5)^2-4\cdot1\cdot7=-3<0$

따라서 이차방정식 $x^2-(2m-1)x+m+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

0521 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+3a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a^2+3a-3)=-3a+3$

$a>1$일 때 $-3a+3<0$이므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$a>1$에서 $\ -3a<-3$
$\therefore -3a+3<0$

답 ③

0522 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-b\geq0$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2(a-1)x-2a+b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(a-1)^2-(-2a+b)=a^2-2a+1+2a-b$

$=a^2-b+1>0\ (\because ㉠)$

따라서 이차방정식 $x^2+2(a-1)x-2a+b=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

0523 이차방정식 $x^2-ax+b-1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4(b-1)=0$

$\therefore a^2=4b-4$ …… ㉠

04 이차방정식

이차방정식 $x^2+2ax+b^2+2b-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D_2}{4}&=a^2-(b^2+2b-1)\\&=(4b-4)-(b^2+2b-1)\ (\because ㉠)\\&=-b^2+2b-3\\&=-(b-1)^2-2<0\end{aligned}$$

따라서 이차방정식 $x^2+2ax+b^2+2b-1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

0524 이차방정식 $x^2+2cx+a^2-b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=c^2-(a^2-b^2)<0 \qquad \therefore b^2+c^2<a^2$$

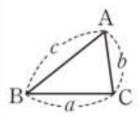
따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 둔각삼각형이다.

답 ③

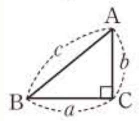
라쎈 특강

변의 길이에 따른 삼각형의 모양

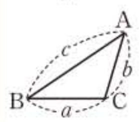
$\triangle$ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$이고 c가 가장 긴 변의 길이일 때,



$a^2+b^2>c^2$ ➡ $\triangle$ABC는 예각삼각형



$a^2+b^2=c^2$ ➡ $\triangle$ABC는 직각삼각형



$a^2+b^2<c^2$ ➡ $\triangle$ABC는 둔각삼각형

0525 이차방정식 $3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(a+b+c)\}^2-3(ab+bc+ca)=0$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

이때 a, b, c가 실수이므로

$$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$$

$$\therefore a=b=c$$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

답 정삼각형

0526 이차방정식 $2x^2-(2a+b)x+ab=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(2a+b)\}^2-4\cdot2\cdot ab=0$$

$$4a^2+4ab+b^2-8ab=0$$

$$4a^2-4ab+b^2=0, \qquad (2a-b)^2=0 \qquad \therefore b=2a$$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2}&=\sqrt{a^2+(2a)^2}\\&=\sqrt{5a^2}=\sqrt{5}a\ (\because a>0)\end{aligned}$$

답 ③

0527 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+2k^2-4k+3=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-(2k^2-4k+3)=0$$

$$k^2-2k^2+4k-3=0, \qquad k^2-4k+3=0$$

$$(k-1)(k-3)=0 \qquad \therefore k=1 \text{ 또는 } k=3$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4이다. 답 ④

0528 주어진 식이 이차식이므로 $k\neq0$ ······ ㉠

또 주어진 이차식이 완전제곱식이면 이차방정식 $kx^2-2kx-4=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-k\cdot(-4)=0$$

$$k^2+4k=0, \qquad k(k+4)=0$$

$$\therefore k=-4\ (\because ㉠)$$

답 -4

0529 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식 $x^2-(2k+a)x+(k+1)^2+a^2-b=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(2k+a)\}^2-4\{(k+1)^2+a^2-b\}=0 \quad \cdots ❶$$

$$4k^2+4ak+a^2-4k^2-8k-4-4a^2+4b=0$$

$$(4a-8)k-3a^2+4b-4=0$$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$4a-8=0,\ -3a^2+4b-4=0$$

$$\therefore a=2,\ b=4 \quad \cdots ❷$$

$$\therefore ab=8 \quad \cdots ❸$$

답 8

채점 기준	비율
❶ 이차식이 완전제곱식이 되는 조건을 이용하여 k에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0530 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(a+1)x+a^2-b+12=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-(a^2-b+12)=0$$

$$a^2+2a+1-a^2+b-12=0$$

$$2a+b-11=0$$

$$\therefore b=11-2a \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 a, b는 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 9)$, $(2, 7)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 1)$

의 5개이다. 답 ③

0531 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=3^3-3\cdot\frac{1}{3}\cdot3=24\end{aligned}$$

답 ①

0532 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=7,\ \alpha\beta=3$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=3-7+1=-3$

답 -3

0533 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=\dfrac{3}{2}$ ⋯ ❶

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-3)^2-4\cdot\dfrac{3}{2}=3$ ⋯ ❷

$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{3}$ ⋯ ❸

답 $\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\lvert\alpha-\beta\rvert$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0534 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}$

$=4(\alpha-\beta)\cdot2=8(\alpha-\beta)$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4^2-4\cdot\dfrac{1}{2}=14$이므로

$\alpha-\beta=\sqrt{14}\ (\because \alpha>\beta)$

따라서 구하는 식의 값은

$8(\alpha-\beta)=8\sqrt{14}$

답 ④

0535 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=1$

이때 $\alpha>0,\ \beta>0$이므로

(판별식)>0, (두 근의 합)>0, (두 근의 곱)>0이므로 $\alpha>0,\ \beta>0$

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\beta$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

$=6+2\cdot1=8$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\sqrt{2}$

답 ③

0536 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-\alpha-3=0,\ \beta^2-\beta-3=0$

$\therefore \alpha^2-2\alpha-1=-\alpha+2,\ \beta^2-2\beta-1=-\beta+2$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-3$

이므로

$(\alpha^2-2\alpha-1)(\beta^2-2\beta-1)=(-\alpha+2)(-\beta+2)$

$=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$

$=-3-2\cdot1+4=-1$

답 ⑤

0537 α가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-3\alpha+5=0 \qquad \therefore \alpha^2=3\alpha-5$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$이므로

$\alpha^2+3\beta=3\alpha-5+3\beta=3(\alpha+\beta)-5$

$=3\cdot3-5=4$

답 4

0538 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-4\alpha+1=0,\ \beta^2-4\beta+1=0$

$\therefore \alpha^2-3\alpha+1=\alpha,\ \beta^2-3\beta+1=\beta$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$

이므로

$\dfrac{\beta}{\alpha^2-3\alpha+1}+\dfrac{\alpha}{\beta^2-3\beta+1}=\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{4^2-2\cdot1}{1}=14$

답 14

0539 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2+\alpha-4=0,\ \beta^2+\beta-4=0$

$\therefore \alpha^2+\alpha=4,\ \beta^2+\beta=4$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-4$

이므로

$\alpha^5+\beta^5+\alpha^4+\beta^4=\alpha^3(\alpha^2+\alpha)+\beta^3(\beta^2+\beta)=4\alpha^3+4\beta^3$

$=4(\alpha^3+\beta^3)=4\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}$

$=4\{(-1)^3-3\cdot(-4)\cdot(-1)\}$

$=-52$

답 ②

0540 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $3\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha=-4(m+1) \qquad \therefore \alpha=-m-1$ ⋯⋯ ㉠

$\alpha\cdot3\alpha=-4m \qquad \therefore 3\alpha^2=-4m$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3(-m-1)^2=-4m, \qquad 3m^2+10m+3=0$

$(m+3)(3m+1)=0 \qquad \therefore m=-3$ 또는 $m=-\dfrac{1}{3}$

따라서 정수 m의 값은 -3이다.

답 ①

0541 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

두 근을 $\alpha-1$, α로 놓을 수도 있다.

$\alpha+(\alpha+1)=2k-3 \qquad \therefore \alpha=k-2$ ⋯⋯ ㉠

$\alpha(\alpha+1)=k-1$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(k-2)(k-1)=k-1, \qquad k^2-3k+2=k-1$

$k^2-4k+3=0, \qquad (k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4이다.

답 ④

다른 풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\beta\,(\alpha>\beta)$라 하면 $\alpha-\beta=1$이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k-3,\ \alpha\beta=k-1$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$1^2=(2k-3)^2-4(k-1)$

$k^2-4k+3=0, \qquad (k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4이다.

0542 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $4\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+4\alpha=5m \quad \therefore\ \alpha=m$ ...... ㉠

$\alpha\cdot4\alpha=4m-1 \quad \therefore\ 4\alpha^2=4m-1$ ...... ㉡ ··· ❶

㉠을 ㉡에 대입하면 $4m^2=4m-1,\quad 4m^2-4m+1=0$

$(2m-1)^2=0 \quad \therefore\ m=\frac{1}{2}$ ··· ❷

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $4\alpha(\alpha\neq0)$로 놓고 α, m에 대한 식을 세울 수 있다.	60 %
❷ m의 값을 구할 수 있다.	40 %

0543 주어진 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로 두 실근을 α, $-\alpha(\alpha\neq0)$라 하면

$\alpha+(-\alpha)=-(m^2+m-12)=0$ ...... ㉠

$\alpha\cdot(-\alpha)=m+2$ ...... ㉡

㉠에서 $m^2+m-12=0,\quad (m+4)(m-3)=0$

$\therefore\ m=-4$ 또는 $m=3$ ...... ㉢

㉡에서 $m+2<0$이므로 $m<-2$ ...... ㉣

㉢, ㉣에서 $m=-4$

답 -4

라쎈 특강

절댓값이 같고 부호가 서로 다른 두 실근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르면 두 근을 α, $-\alpha(\alpha\neq0)$로 놓는다.

$\alpha+(-\alpha)=0$이므로 $-\frac{b}{a}=0$

$\alpha\cdot(-\alpha)=-\alpha^2<0$이므로 $\frac{c}{a}<0$

0544 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2k,\ \alpha\beta=2k-1$

이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2k)^2-2(2k-1)$

$=4k^2-4k+2$

이때 $\alpha^2+\beta^2=10$이므로

$4k^2-4k+2=10,\quad k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0 \quad \therefore\ k=2\ (\because k>0)$

답 2

0545 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3k-1,\ \alpha\beta=k$

이므로

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha+\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)$

$=(\alpha\beta+1)(\alpha+\beta)$

$=(k+1)(3k-1)=3k^2+2k-1$

이때 $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha+\beta=7$이므로

$3k^2+2k-1=7,\quad 3k^2+2k-8=0$

$(k+2)(3k-4)=0 \quad \therefore\ k=-2$ 또는 $k=\frac{4}{3}$

따라서 정수 k의 값은 -2이다.

답 ①

0546 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$ ··· ❶

$(\alpha+1)(\beta+1)=5$에서

$\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=5,\quad b-a+1=5$

$\therefore\ a-b=-4$ ...... ㉠

$(2\alpha+1)(2\beta+1)=-1$에서

$4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1=-1,\quad 4b-2a+1=-1$

$\therefore\ a-2b=1$ ...... ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9,\ b=-5$ ··· ❸

$\therefore\ ab=45$ ··· ❹

답 45

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ ❶을 이용하여 주어진 관계식을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0547 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=\frac{a}{2}$

$|\alpha|+|\beta|=5$의 양변을 제곱하면

$|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=25,\quad \underbrace{\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=25}_{|\alpha|^2=\alpha^2,\ |\alpha||\beta|=|\alpha\beta|}$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=25$

$1^2-2\cdot\frac{a}{2}+2\cdot\left|\frac{a}{2}\right|=25$

$\therefore\ a-|a|=-24$

이때 $a\geq0$이면 $a-|a|=0$이므로 $a<0$

따라서 $a-(-a)=-24$이므로 $2a=-24$

$\therefore\ a=-12$

답 ②

0548 이차방정식 $x^2+ax-3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=-3$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2+7x+b=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-7,\ (\alpha+\beta)\alpha\beta=b$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a-3=-7,\ 3a=b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=12$

$\therefore\ a+b=16$

답 16

0549 이차방정식 $2x^2+ax+6=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{a}{2},\ \alpha\beta=3$ ...... ㉠

이차방정식 $6x^2-3x+b=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{b}{6}$

$\therefore\ \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{\alpha\beta}=\frac{b}{6}$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-\frac{a}{6}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}=\frac{b}{6}$　　$\therefore a=-3,\ b=2$

$\therefore b-a=5$

답 5

0550 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$　　…… ㉠

이차방정식 $x^2-(b-3)x-4a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=b-3,\ (\alpha+1)(\beta+1)=-4a$

$\therefore \alpha+\beta=b-5,\ \alpha\beta+\alpha+\beta+1=-4a$　　…… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a=b-5,\ b-a+1=-4a$

$\therefore a+b=5,\ 3a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면　$a=-3,\ b=8$

$\therefore ab=-24$

답 ①

0551 이차방정식 $x^2+4x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=-2$

$\therefore (\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=-4-2=-6,$

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-2+4+1=3$

따라서 $\alpha-1$, $\beta-1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+6x+3=0$

답 ⑤

다른 풀이 $P(x)=x^2+4x-2$라 하면 방정식 $P(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$P(\alpha)=0,\ P(\beta)=0$

$\alpha-1=\alpha'$, $\beta-1=\beta'$이라 하면 $\alpha=\alpha'+1$, $\beta=\beta'+1$이므로

$P(\alpha'+1)=0,\ P(\beta'+1)=0$

즉 α', β'은 이차방정식 $P(x+1)=0$의 두 근이고

$$P(x+1)=(x+1)^2+4(x+1)-2$$
$$=x^2+6x+3$$

이므로 구하는 이차방정식은

$x^2+6x+3=0$

0552 이차방정식 $x^2-6x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=3$

따라서 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, 즉 6, 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(6+3)x+6\cdot3=0$　　$\therefore x^2-9x+18=0$

답 $x^2-9x+18=0$

0553 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{c},\ \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{a}{c}$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 c인 이차방정식은

$c\left(x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}\right)=0$

$\therefore cx^2+bx+a=0$

답 ⑤

0554 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 -1이므로

$1-a+b=0$　　$\therefore a-b=1$　　…… ㉠

이차방정식 $x^2+(b+5)x+3a-2=0$의 한 근이 2이므로

$4+2b+10+3a-2=0$

$\therefore 3a+2b=-12$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　$a=-2,\ b=-3$　　⋯ ❶

$x^2+ax+b=0$, 즉 $x^2-2x-3=0$에서

$(x+1)(x-3)=0$　　$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore \alpha=3$

$x^2+(b+5)x+3a-2=0$, 즉 $x^2+2x-8=0$에서

$(x+4)(x-2)=0$　　$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

$\therefore \beta=-4$　　⋯ ❷

따라서 3, -4를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-\{3+(-4)\}x+3\cdot(-4)=0$

$\therefore x^2+x-12=0$　　⋯ ❸

답 $x^2+x-12=0$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ α, β의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구할 수 있다.	40 %

0555 유리와 준호가 푼 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라 하자.

유리는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$b=-5\cdot3=-15$

준호는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-a=(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=2$　　$\therefore a=-2$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-2x-15=0$

답 ①

0556 나은이는 a, c를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\frac{c}{a}=-6\cdot2=-12$　　$\therefore c=-12a$　　…… ㉠　　⋯ ❶

민주는 a, b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\frac{b}{a}=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$

$\therefore b=-4a$　　…… ㉡　　⋯ ❷

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-4ax-12a=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$ax^2+bx+c=0$이 이차방정식이므로 $a\neq0$

$x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$　　$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

따라서 음수인 근은 -2이다.　　⋯ ❸

답 -2

04 이차방정식

채점 기준	비율
❶ c를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 이차방정식의 음수인 근을 구할 수 있다.	40 %

0557 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식을

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 1, 2이므로

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=1+2$$

$$\frac{-2b}{2a}=3 \qquad \therefore b=-3a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=1\cdot2$$

$$\frac{b^2-(b^2-ac)}{4a^2}=\frac{c}{4a}=2\ (\because a\neq0)$$

$$\therefore c=8a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$$ax^2-3ax+8a=0$$

따라서 주어진 방정식의 두 근의 합은 $-\frac{-3a}{a}=3$이고, 두 근의 곱은 $\frac{8a}{a}=8$이다.

답 합: 3, 곱: 8

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이므로 주어진 근의 공식은 c의 값을 $\frac{1}{4}c$로 잘못 대입한 것과 같다. 이때 1, 2를 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$$a\{x^2-(1+2)x+1\cdot2\}=0$$

$$\therefore ax^2-3ax+2a=0$$

따라서 주어진 방정식의 상수항은

$$2a\cdot4=8a$$

즉 주어진 방정식은 $\quad ax^2-3ax+8a=0$

0558 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2x+1)=0$이려면

$$2x+1=\alpha \text{ 또는 } 2x+1=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha-1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta-1}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{4-2}{2}=1$$

답 ④

0559 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha\beta=27$$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x)=0$이려면

$$3x=\alpha \text{ 또는 } 3x=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha}{3} \text{ 또는 } x=\frac{\beta}{3}$$

따라서 이차방정식 $f(3x)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{\beta}{3}=\frac{\alpha\beta}{9}=\frac{27}{9}=3$$

답 ③

0560 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x-1)=0$이려면

$$3x-1=\alpha \text{ 또는 } 3x-1=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha+1}{3} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+1}{3} \quad \cdots ❶$$

따라서 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha+1}{3}\cdot\frac{\beta+1}{3}=\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}{9}$$

$$=\frac{3+5+1}{9}=1 \quad \cdots ❷$$

답 1

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근을 α, β에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱을 구할 수 있다.	50 %

0561 $f(\alpha+1)=0$, $f(\beta+1)=0$이므로 $f(x-2)=0$이려면

$$x-2=\alpha+1 \text{ 또는 } x-2=\beta+1$$

$$\therefore x=\alpha+3 \text{ 또는 } x=\beta+3$$

따라서 이차방정식 $f(x-2)=0$의 두 근의 합과 곱은 각각

$$(\alpha+3)+(\beta+3)=\alpha+\beta+6=3+6=9,$$

$$(\alpha+3)(\beta+3)=\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9$$

$$=4+3\cdot3+9=22$$

답 합: 9, 곱: 22

0562 $x^2-4x+6=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot6}=2\pm\sqrt{2}i$$

$$\therefore x^2-4x+6=\{x-(2+\sqrt{2}i)\}\{x-(2-\sqrt{2}i)\}$$

$$=(x-2-\sqrt{2}i)(x-2+\sqrt{2}i)$$

답 ①

0563 $x^2+2x+5=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot5}=-1\pm2i$$

$$\therefore x^2+2x+5=\{x-(-1+2i)\}\{x-(-1-2i)\}$$

$$=(x+1-2i)(x+1+2i)$$

따라서 인수인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0564 $\frac{1}{2}x^2-3x+5=0$, 즉 $x^2-6x+10=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot10}=3\pm i \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \frac{1}{2}x^2-3x+5=\frac{1}{2}\{x-(3+i)\}\{x-(3-i)\}$$

$$=\frac{1}{2}(x-3-i)(x-3+i) \quad \cdots ❷$$

따라서 $a=-1$, $b=-3$이므로

$$ab=3 \quad \cdots ❸$$

답 3

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-3x+5=0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차식 $\frac{1}{2}x^2-3x+5$를 인수분해할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0565 $f(\alpha)=f(\beta)=4$이므로

$f(\alpha)-4=0,\ f(\beta)-4=0$

따라서 이차방정식 $f(x)-4=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이고, $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)-4=(x-\alpha)(x-\beta)$ 이차방정식 $x^2-4x-3=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 $x^2-4x-3=(x-\alpha)(x-\beta)$

$=x^2-4x-3$

$\therefore f(x)=x^2-4x+1$

$\therefore f(2)=4-8+1=-3$ 답 ③

0566 $f(\alpha)=f(\beta)=-2$이므로

$f(\alpha)+2=0,\ f(\beta)+2=0$

따라서 이차방정식 $f(x)+2=0$, 즉 $x^2+5x+3=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=3$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-5)^3-3\cdot3\cdot(-5)=-80$ 답 -80

0567 이차방정식 $x^2+2x-5=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-5$

$f(\alpha)=f(\beta)=-5$이므로

$f(\alpha)+5=0,\ f(\beta)+5=0$

즉 이차방정식 $f(x)+5=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$f(x)+5=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 이차방정식 $x^2+2x-5=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 $x^2+2x-5=(x-\alpha)(x-\beta)$

$=a(x^2+2x-5)$

$\therefore f(x)=a(x^2+2x-5)-5$

이때 $f(0)=5$이므로 $-5a-5=5$

$-5a=10 \quad \therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2(x^2+2x-5)-5=-2x^2-4x+5$이므로

$f(-1)=-2+4+5=7$ 답 ②

0568 $a,\ b$가 실수이면 $ab,\ a-b$도 실수이므로 이차방정식 $x^2+abx+a-b=0$의 한 근이 $2+3i$이면 다른 한 근은 $2-3i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+3i)+(2-3i)=-ab,\ (2+3i)(2-3i)=a-b$

이므로 $ab=-4,\ a-b=13$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=13^2+2\cdot(-4)=161$ 답 ①

0569 $a,\ b$가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $3-i$이면 다른 한 근은 $3+i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3-i)+(3+i)=-a,\ (3-i)(3+i)=b$

이므로 $a=-6,\ b=10 \quad \therefore ab=-60$ 답 -60

0570 $a,\ b$가 유리수이므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 한 근이 $b-\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $b+\sqrt{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(b-\sqrt{3})+(b+\sqrt{3})=4,\ (b-\sqrt{3})(b+\sqrt{3})=a$

이므로 $a=1,\ b=2 \quad \therefore a+b=3$ 답 3

0571 $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$ ⋯ ❶

$a,\ b$가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $-i$이면 다른 한 근은 i이다. ⋯ ❷

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-i+i=-a,\ -i\cdot i=b$

이므로 $a=0,\ b=1$ ⋯ ❸

따라서 이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2+x=0$에서

$x(x+1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-1$ ⋯ ❹

답 $x=0$ 또는 $x=-1$

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{1-i}{1+i}$를 간단히 할 수 있다.	20 %
❷ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 다른 한 근을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 근을 구할 수 있다.	20 %

0572 전략 주어진 이차방정식을 (x에 대한 이차식)$=0$ 꼴로 변형한 후 인수분해를 이용하여 근을 구한다.

풀이 $(2x+1)(x-1)=9$에서 $2x^2-x-1=9$

$2x^2-x-10=0,\quad (x+2)(2x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\dfrac{5}{2}$

따라서 $\alpha=\dfrac{5}{2},\ \beta=-2$이므로

$2\alpha-\beta=7$ 답 7

0573 전략 근의 공식을 이용하여 주어진 이차방정식의 해를 구한다.

풀이 $x^2-3x+5=0$에서

$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot5}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$

따라서 $a=3,\ b=11$이므로

$a+b=14$ 답 ③

0574 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 하여 범위를 나누어 푼다.

풀이 (i) $x<0$일 때,

$x^2-3x+2x-6=0$에서 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

그런데 $x<0$이므로 $x=-2$

(ii) $x\ge0$일 때,

$x^2+3x+2x-6=0$에서 $x^2+5x-6=0$

$(x+6)(x-1)=0 \quad \therefore x=-6$ 또는 $x=1$

그런데 $x\ge0$이므로 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 모든 근의 곱은 -2이다. 답 ④

0575 전략 주어진 이차방정식에 $x=2$를 대입하여 얻은 식이 k에 대한 항등식임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $kx^2+ax-(k+1)a^2+8=0$의 한 근이 2이므로

$4k+2a-(k+1)a^2+8=0$

$(4-a^2)k+(-a^2+2a+8)=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4-a^2=0,\ -a^2+2a+8=0$

$4-a^2=0$에서 $a^2=4$ $\therefore a=\pm 2$ …… ㉠

$-a^2+2a+8=0$에서 $a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-2$

답 -2

0576 **전략** 주어진 근을 방정식에 대입하여 무리수가 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로

$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$

$7a+3b+c+(4a+2b)\sqrt{3}=0$

이때 a, b, c가 유리수이므로

$7a+3b+c=0,\ 4a+2b=0$

$4a+2b=0$에서 $b=-2a$

$b=-2a$를 $7a+3b+c=0$에 대입하면

$a+c=0$ $\therefore c=-a$

따라서 주어진 방정식은 $ax^2-2\sqrt{3}ax-a=0$, 즉

$a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$이고 $\underbrace{a\neq 0}_{ax^2+\sqrt{3}bx+c=0\text{이 이차방정식이므로 } a\neq 0}$이므로

$x^2-2\sqrt{3}x-1=0$

$\therefore x=-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-1\cdot(-1)}=\sqrt{3}\pm 2$

즉 $\beta=\sqrt{3}-2$이므로

$\alpha+\dfrac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$

$=2+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+2)=0$

답 ③

라쎈 특강

$\sqrt{3}b$가 무리수이므로 주어진 방정식의 계수가 모두 유리수인 것은 아니다. 따라서 이차방정식의 켤레근을 이용하여 $\beta=2-\sqrt{3}$으로 생각하지 않도록 주의한다.

0577 **전략** 길의 폭을 x m라 하고 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 방정식을 세운다.

풀이 길의 폭을 x m라 하면 길을 제외한 땅의 가로, 세로의 길이는 각각 $(24-x)$ m, $\underbrace{(16-2x)}_{16-2x>0\text{이므로 } x<8}$ m이므로

$(24-x)(16-2x)=210$

$x^2-32x+87=0,$ $(x-3)(x-29)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=29$

그런데 $0<x<8$이므로 $x=3$

따라서 구하는 길의 폭은 3 m이다.

답 3 m

0578 **전략** 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이면 허근을 가짐을 이용한다.

풀이 주어진 각 방정식의 판별식을 D라 하면

ㄱ. $\dfrac{D}{4}=2^2-1\cdot 1=3>0$

ㄴ. $D=(-5)^2-4\cdot 3\cdot 6=-47<0$

ㄷ. $\dfrac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\cdot 5=-2<0$

ㄹ. $x^2=4(x-1)$, 즉 $x^2-4x+4=0$에서

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot 4=0$

이상에서 허근을 갖는 이차방정식은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0579 **전략** 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 중근을 가질 조건은 $D=0$이다.

풀이 이차방정식 $x^2-2(a-1)x+2a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-(2a-3)=0$

$a^2-2a+1-2a+3=0,$ $a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0$ $\therefore a=2$

답 2

0580 **전략** 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 실근을 가질 조건은 $D\geq 0$이다.

풀이 $(x+2)^2+(2x+a)^2=0$에서

$x^2+4x+4+4x^2+4ax+a^2=0$

$\therefore 5x^2+4(1+a)x+4+a^2=0$

이 이차방정식이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{2(1+a)\}^2-5(4+a^2)\geq 0$

$4+8a+4a^2-20-5a^2\geq 0,$ $a^2-8a+16\leq 0$

$(a-4)^2\leq 0$ $\therefore a=4$

답 ④

다른 풀이 주어진 방정식의 실근을 $x=\alpha$라 하면

$(\alpha+2)^2+(2\alpha+a)^2=0$

이므로 $\alpha+2=0,\ 2\alpha+a=0$

$\therefore \alpha=-2,\ a=4$

라쎈 특강

A, B가 실수일 때,

① $A^2\leq 0$이면 $A=0$

② $A^2+B^2=0$이면 $A=0, B=0$

0581 **전략** 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는다.

풀이 주어진 이차식이 완전제곱식이면 이차방정식 $(a+b)x^2-2cx+a-b=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-c)^2-(a+b)(a-b)=0$

$c^2-a^2+b^2=0$ $\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이므로 그 넓이는

$\dfrac{1}{2}bc$

답 ②

0582 **전략** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때, $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$임을 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=4$

이므로

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$
$=6^2-4=32$ 답 32

0583 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하고 이를 이용하여 α, β의 부호를 정한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=2$
이때 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$이므로
$\alpha<0$, $\beta<0$
$\therefore \dfrac{1}{|\alpha|}+\dfrac{1}{|\beta|}=-\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$
$=\dfrac{-(-4)}{2}=2$ 답 ④

0584 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 α이면 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 α가 주어진 이차방정식의 근이므로
$\alpha^2-3\alpha-2=0$ $\therefore \alpha^2-3\alpha=2$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$
이므로
$\alpha^3-3\alpha^2+\alpha\beta+2\beta=\alpha(\alpha^2-3\alpha)+\alpha\beta+2\beta$
$=2\alpha+\alpha\beta+2\beta$
$=2(\alpha+\beta)+\alpha\beta$
$=2\cdot3-2=4$ 답 ③

0585 전략 조건 (가)를 만족시키는 α, β의 값을 모두 구하고 근과 계수의 관계를 이용하여 조건 (나)를 만족시키는 p, q의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 α, β가 될 수 있는 수는
$2, 3, 5, 7$ 소수는 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수이다.
한편 이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$p=\alpha+\beta$, $q=\alpha\beta$
이때 조건 (나)에서 p, q는 10보다 작은 서로 다른 자연수이므로
$p=2+3=5$, $q=2\cdot3=6$
$\therefore p+q=11$ 답 11

0586 전략 $\alpha^3+\beta^3$을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한 후 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\dfrac{k}{2}$
이므로
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=2^3-3\cdot\dfrac{k}{2}\cdot2=8-3k$
이때 $\alpha^3+\beta^3=7$이므로 $8-3k=7$ $\therefore k=\dfrac{1}{3}$
$\therefore 30k=10$ 답 10

0587 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 p, q, r를 α, β에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$ ⋯⋯ ㉠
이차방정식 $x^2+rx+p=0$의 두 근이 2α, 2β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=-r$, $2\alpha\cdot2\beta=4\alpha\beta=p$
$\therefore \alpha+\beta=-\dfrac{r}{2}$, $\alpha\beta=\dfrac{p}{4}$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $-p=-\dfrac{r}{2}$, $q=\dfrac{p}{4}$
$\therefore r=2p$, $q=\dfrac{p}{4}$
$\therefore \dfrac{r}{q}=\dfrac{2p}{\frac{p}{4}}=8$ 답 ⑤

0588 전략 승우는 b를 바르게 보고 풀었고, 서연이는 a를 바르게 보고 풀었음을 이용한다.

풀이 승우는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은
$b=-2\cdot4=-8$
서연이는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은
$-a=(-1+\sqrt{7}i)+(-1-\sqrt{7}i)=-2$ $\therefore a=2$
$\therefore ab=-16$ 답 -16

0589 전략 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이다.

풀이 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$
$\therefore \dfrac{1+\alpha}{1+\beta}+\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}=\dfrac{(1+\alpha)^2+(1+\beta)^2}{(1+\beta)(1+\alpha)}$
$=\dfrac{1+2\alpha+\alpha^2+1+2\beta+\beta^2}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}$
$=\dfrac{2+2(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$
$=\dfrac{2+2\cdot1+1^2-2\cdot(-1)}{1+1-1}=7$,
$\dfrac{1+\alpha}{1+\beta}\cdot\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}=1$
따라서 $\dfrac{1+\alpha}{1+\beta}$, $\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-7x+1=0$ 답 ④

0590 전략 $\overline{AE}=\alpha$, $\overline{AH}=\beta$라 하고 직사각형 PFCG의 둘레의 길이와 넓이를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

풀이 $\overline{AE}=\alpha$, $\overline{AH}=\beta$라 하면
$\overline{PF}=10-\alpha$, $\overline{PG}=10-\beta$
직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 28이므로
$2\{(10-\alpha)+(10-\beta)\}=28$
$20-(\alpha+\beta)=14$ $\therefore \alpha+\beta=6$
또 직사각형 PFCG의 넓이가 46이므로
$(10-\alpha)(10-\beta)=46$

$100-10(\alpha+\beta)+\alpha\beta=46$

$100-10\cdot6+\alpha\beta=46 \qquad \therefore \alpha\beta=6$

따라서 $\overline{\mathrm{AE}}$, $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이 α, β를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6x+6=0$ 답 ②

0591 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β를 두 근으로 하는 이차방정식을 $f(x)$로 나타낸다.

풀이 이차방정식 $x^2-x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=4 \qquad \therefore \alpha=1-\beta,\ \beta=1-\alpha$

$f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$에서 $f(\alpha)=1-\alpha$, $f(\beta)=1-\beta$이므로

$f(\alpha)+\alpha-1=0,\ f(\beta)+\beta-1=0$

따라서 이차방정식 $f(x)+x-1=0$의 두 근이 α, β이고, $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)+x-1=(x-\alpha)(x-\beta)$ 이차방정식 $x^2-x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 $x^2-x+4=(x-\alpha)(x-\beta)$

$=x^2-x+4$

$\therefore f(x)=x^2-2x+5$

$\therefore f(1)=1-2+5=4$ 답 ④

0592 전략 먼저 주어진 근의 분모를 유리화한 후 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용한다.

풀이 $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}=\dfrac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}=-2-\sqrt{5}$

a, b가 유리수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $-2-\sqrt{5}$이면 다른 한 근은 $-2+\sqrt{5}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-2-\sqrt{5})+(-2+\sqrt{5})=-a,\ (-2-\sqrt{5})(-2+\sqrt{5})=b$

이므로 $a=4,\ b=-1$

$\therefore ab=-4$ 답 -4

0593 전략 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=P(\alpha)$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(1)=1$이므로

$1+p+q=1 \qquad \therefore p+q=0$ …… ㉠

한편 $x^2+px+q=0$에서 p, q가 실수이고 조건 (나)에서 한 근이 $a+i$이므로 다른 한 근은 $a-i$이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+i)+(a-i)=-p,\ (a+i)(a-i)=q$

이므로

$p=-2a,\ q=a^2+1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면

$p=-2,\ q=2 \qquad \therefore p+2q=2$ 답 ①

0594 전략 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용한다.

풀이 $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 p가 실수이므로 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 다른 한 근은 $\overline{\alpha}=a-bi$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=2a=p \qquad \therefore a=\dfrac{p}{2}$ …… ㉠

$\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2=p+3$ …… ㉡

한편

$\alpha^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i$

$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$

이고 α^3이 실수이려면 $3a^2b-b^3=0$이어야 한다.

이때 $b\neq0$이므로 $3a^2-b^2=0$

$\therefore b^2=3a^2=\dfrac{3p^2}{4}$ ($\because$ ㉠)

$a^2=\dfrac{p^2}{4}$, $b^2=\dfrac{3p^2}{4}$을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{p^2}{4}+\dfrac{3p^2}{4}=p+3 \qquad \therefore p^2-p-3=0$

따라서 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다. 답 ②

다른 풀이 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-p\alpha+p+3=0$, 즉 $\alpha^2=p\alpha-p-3$

$\therefore \alpha^3=p\alpha^2-p\alpha-3\alpha$

$=p(p\alpha-p-3)-p\alpha-3\alpha$

$=p^2\alpha-p^2-3p-p\alpha-3\alpha$

$=(p^2-p-3)\alpha-p^2-3p$

이때 p는 실수, α는 허수이므로 α^3이 실수이려면

$p^2-p-3=0$

0595 전략 주어진 방정식에 $x=\alpha$를 대입한 후 양변을 α로 나눈다.

풀이 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-3\alpha+1=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면 $x=0$을 $x^2-3x+1=0$에 대입하면 $0^2-3\cdot0+1\neq0$ 즉 $x=0$은 $x^2-3x+1=0$의 근이 아니므로 $\alpha\neq0$

$\alpha-3+\dfrac{1}{\alpha}=0 \qquad \therefore \alpha+\dfrac{1}{\alpha}=3$ … ❶

$\therefore \alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-2=3^2-2=7$ … ❷

답 7

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0596 전략 0이 아닌 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$임을 이용한다.

풀이 0이 아닌 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면

$a<0,\ b<0$ … ❶

이때 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4b=a^2-4b>0$

따라서 이차방정식 $x^2-ax+b=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. … ❷

답 서로 다른 두 실근

채점 기준	비율
❶ $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$임을 이용하여 a, b의 부호를 정할 수 있다.	40 %
❷ 판별식을 이용하여 주어진 이차방정식의 근을 판별할 수 있다.	60 %

0597 전략 주어진 이차방정식의 두 근이 연속인 정수이므로 두 근을 α, $\alpha+1$로 놓는다.

풀이 주어진 방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$(α는 정수)이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=2k+1 \quad \therefore \alpha=k$ ⋯⋯ ㉠

$\alpha(\alpha+1)=3k-1$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❶

㉠을 ㉡에 대입하면

$k(k+1)=3k-1, \quad k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0 \quad \therefore k=1$ ⋯ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ 두 근을 α, $\alpha+1$로 놓고 근과 계수의 관계를 이용하여 α, k에 대한 식을 구할 수 있다.	60 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

0598 전략 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(2\alpha-1)=0$, $f(2\beta-1)=0$이므로 $f(x)=0$이려면

$x=2\alpha-1$ 또는 $x=2\beta-1$ ⋯ ❶

따라서 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned}(2\alpha-1)(2\beta-1)&=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1\\&=4\cdot3-2\cdot(-2)+1\\&=17\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 17

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱을 구할 수 있다.	50 %

0599 전략 이차방정식의 켤레근의 성질과 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 먼저 구한다.

풀이 a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1-2i$이면 다른 한 근은 $1+2i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-2i)+(1+2i)=-a$, $(1-2i)(1+2i)=b$

이므로 $a=-2$, $b=5$ ⋯ ❶

이때 $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)x+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{5}=0$$

$$\therefore x^2+\frac{3}{10}x-\frac{1}{10}=0$$

따라서 $m=\frac{3}{10}$, $n=\frac{1}{10}$이므로

$m+n=\frac{2}{5}$ ⋯ ❷

답 $\frac{2}{5}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	50 %

Ⅱ. 방정식

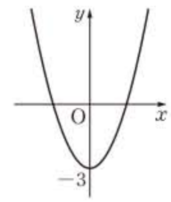
05 이차방정식과 이차함수

0600 꼭짓점의 좌표: $(0, -3)$

축의 방정식: $x=0$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

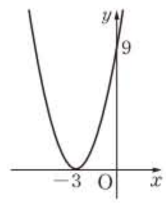


0601 꼭짓점의 좌표: $(-3, 0)$

축의 방정식: $x=-3$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

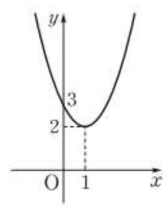


0602 꼭짓점의 좌표: $(1, 2)$

축의 방정식: $x=1$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

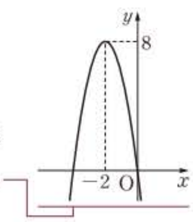


0603 꼭짓점의 좌표: $(-2, 8)$

축의 방정식: $x=-2$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



$y=-2(x+2)^2+8$에서 $-2<0$이므로 그래프는 위로 볼록한 포물선이다.

0604 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$이므로

꼭짓점의 좌표: $(1, -1)$

축의 방정식: $x=1$ 답 풀이 참조

0605 $y=-x^2-4x-4=-(x+2)^2$이므로

꼭짓점의 좌표: $(-2, 0)$

축의 방정식: $x=-2$ 답 풀이 참조

0606 $y=2x^2-12x+5=2(x-3)^2-13$이므로

꼭짓점의 좌표: $(3, -13)$

축의 방정식: $x=3$ 답 풀이 참조

0607 $y=-3x^2-6x+1=-3(x+1)^2+4$이므로

꼭짓점의 좌표: $(-1, 4)$

축의 방정식: $x=-1$ 답 풀이 참조

0608 $2x^2-6x=0$에서 $2x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$ 답 0, 3

0609 $-3x^2+x+2=0$에서 $3x^2-x-2=0$

$(3x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$

답 $-\frac{2}{3}$, 1

0610 $4x^2-20x+25=0$에서 $(2x-5)^2=0$

$\therefore x=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

0611 이차방정식 $x^2-5x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot3=13>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 2이다.

답 2

0612 이차방정식 $-2x^2+x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot(-2)\cdot(-3)=-23<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 0이다.

답 0

0613 이차방정식 $9x^2+6x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-9\cdot1=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 1이다.

답 1

0614 이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot k=1-k>0$ $\therefore k<1$ 답 $k<1$

0615 $\frac{D}{4}=1-k=0$ $\therefore k=1$ 답 $k=1$

0616 $\frac{D}{4}=1-k<0$ $\therefore k>1$ 답 $k>1$

0617 $x^2-x-4=-2x+2$에서 $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ 답 -3, 2

0618 $2x^2+5x+3=x+1$에서 $x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$ 답 -1

0619 $-3x^2-2x+4=x-2$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 답 -2, 1

0620 $x^2+4x+3=2x-1$, 즉 $x^2+2x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot4=-3<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

0621 $-x^2-2x+1=-x-4$, 즉 $x^2+x-5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-5)=21>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0622 $-x^2-3x+6=x+10$, 즉 $x^2+4x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot4=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.) 답 한 점에서 만난다.(접한다.)

0623 $2x^2-5x+1=-3x-2$, 즉 $2x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot3=-5<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

0624 $x^2+x+2=3x+k$, 즉 $x^2-2x+2-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(2-k)=k-1>0$ $\therefore k>1$ 답 $k>1$

0625 $\frac{D}{4}=k-1=0$ $\therefore k=1$ 답 $k=1$

0626 $\frac{D}{4}=k-1<0$ $\therefore k<1$ 답 $k<1$

0627 답 최솟값: 5, $x=2$

0628 답 최댓값: -8, $x=-3$

0629 답 최댓값: 3, $x=0$

0630 (1) $y=3x^2-6x+5=3(x-1)^2+2$

(2) $x=1$에서 최솟값 2를 갖는다.

답 (1) $y=3(x-1)^2+2$ (2) 최솟값: 2, $x=1$

0631 (1) $y=-2x^2-4x+7=-2(x+1)^2+9$

(2) $x=-1$에서 최댓값 9를 갖는다.

답 (1) $y=-2(x+1)^2+9$ (2) 최댓값: 9, $x=-1$

0632 $y=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$

따라서 $x=2$에서 최솟값 -2를 갖는다. 답 최솟값: -2

0633 $y=-x^2+12x-6=-(x-6)^2+30$

따라서 $x=6$에서 최댓값 30을 갖는다. 답 최댓값: 30

0634 $y=2x^2+8x-1=2(x+2)^2-9$

따라서 $x=-2$에서 최솟값 -9를 갖는다. 답 최솟값: -9

0635 $y=3x^2+6x-2=3(x+1)^2-5$

따라서 $x=-1$에서 최솟값 -5를 갖는다. 답 최솟값: -5

0636 $y=-2x^2-12x+3=-2(x+3)^2+21$

따라서 $x=-3$에서 최댓값 21을 갖는다. 답 최댓값: 21

0637 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+5=-\frac{1}{2}(x+2)^2+7$

따라서 $x=-2$에서 최댓값 7을 갖는다. 답 최댓값: 7

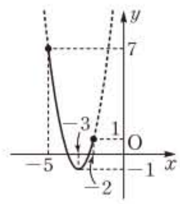
0638 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1=-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{5}{4}$

따라서 $x=1$에서 최댓값 $\frac{5}{4}$를 갖는다. 답 최댓값: $\frac{5}{4}$

0639 답 1, 1, 5, 1, 2, 5, 1

0640 답 2, 5, 4, -4, 4, -4

0641 $-5\le x\le -2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때
꼭짓점의 x좌표가 -3이므로 이 범위에 속한다.



$f(-5)=7$, $f(-3)=-1$,

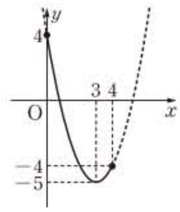
$f(-2)=1$

이므로 $f(x)$의 최댓값은 7, 최솟값은 -1이다.

답 최댓값: 7, 최솟값: -1

0642 $f(x)=x^2-6x+4=(x-3)^2-5$

$0\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때
꼭짓점의 x좌표가 3이므로 이 범위에 속한다.



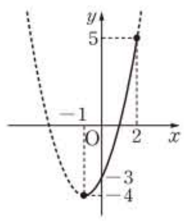
$f(0)=4$, $f(3)=-5$, $f(4)=-4$

이므로 $f(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -5이다.

답 최댓값: 4, 최솟값: -5

0643 $f(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

$-1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때
꼭짓점의 x좌표가 -1이므로 이 범위에 속한다.



$f(-1)=-4$, $f(2)=5$

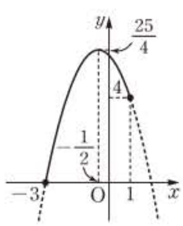
이므로 $f(x)$의 최댓값은 5, 최솟값은 -4이다.

답 최댓값: 5, 최솟값: -4

0644 $f(x)=-x^2-x+6$

$$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$

$-3\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때
꼭짓점의 x좌표가 $-\frac{1}{2}$이므로 이 범위에 속한다.



$f(-3)=0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{4}$,

$f(1)=4$

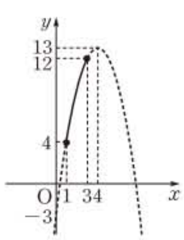
이므로 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{25}{4}$, 최솟값은 0이다.

답 최댓값: $\frac{25}{4}$, 최솟값: 0

0645 $f(x)=-x^2+8x-3$

$$=-(x-4)^2+13$$

$1\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때
꼭짓점의 x좌표가 4이므로 이 범위에 속하지 않는다.



$f(1)=4$, $f(3)=12$

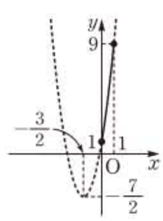
이므로 $f(x)$의 최댓값은 12, 최솟값은 4이다.

답 최댓값: 12, 최솟값: 4

0646 $f(x)=2x^2+6x+1$

$$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$$

$0\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때
꼭짓점의 x좌표가 $-\frac{3}{2}$이므로 이 범위에 속하지 않는다.



$f(0)=1$, $f(1)=9$

이므로 $f(x)$의 최댓값은 9, 최솟값은 1이다.

답 최댓값: 9, 최솟값: 1

0647 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=-\frac{a}{2}$, $1\cdot 3=\frac{b}{2}$ $\therefore a=-8, b=6$

$\therefore b-a=14$

답 14

0648 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근의 합이 3, 곱이 -4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$3=-a$, $-4=b$ $\therefore a=-3, b=-4$

$\therefore ab=12$

답 ④

0649 이차방정식 $3x^2-9x-4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-9}{3}=3$, $\alpha\beta=-\frac{4}{3}$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=3^3-3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot 3=39$

답 ⑤

0650 이차방정식 $x^2-ax+4a=0$의 두 근이 2, b이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2+b=a$, $2\cdot b=4a$ $\therefore a-b=2$, $2a-b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-4$ ··· ❶

이차함수 $y=x^2-bx+6a$, 즉 $y=x^2+4x-12$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+4x-12=0$의 근이므로

$(x+6)(x-2)=0$ $\therefore x=-6$ 또는 $x=2$ ··· ❷

따라서 두 점 사이의 거리는 $2-(-6)=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 이차함수 $y=x^2-bx+6a$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ x축과 만나는 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	10 %

0651 이차함수 $y=x^2+kx-2$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표를 α, β라 하면 이차방정식 $x^2+kx-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=-2$ ······ ㉠

이때 두 교점 사이의 거리가 3이므로 $|\alpha-\beta|=3$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=9$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $k^2+8=9$, $k^2=1$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$

답 1

다른 풀이 이차함수 $y=x^2+kx-2$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 α, $\alpha+3$이라 하면 이차방정식 $x^2+kx-2=0$의 두 근이 α, $\alpha+3$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+3)=-k$ ······ ㉠

$\alpha(\alpha+3)=-2$ ······ ㉡

㉡에서 $\alpha^2+3\alpha+2=0$, $(\alpha+1)(\alpha+2)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=-2$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 풀면 $\quad k=-1$ 또는 $k=1$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$

0652 이차방정식 $x^2+2kx+k^2-3k+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k^2-3k+9)>0$

$3k-9>0 \qquad \therefore k>3$

따라서 정수 k의 최솟값은 4이다. 답 ④

0653 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-k\ge0$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만난다.
⇔ 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D\ge0$

$\therefore k\le4$

따라서 실수 k의 최댓값은 4이다. 답 4

0654 이차방정식 $x^2+kx+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(k-1)=0, \qquad k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0 \qquad \therefore k=2$

따라서 $x^2+2x+1=0$에서 $\qquad (x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

즉 접점의 x좌표는 -1이다. 답 ②

0655 이차방정식 $x^2-2kx+k+6=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-(k+6)=0$

$k^2-k-6=0, \qquad (k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$ ······ ㉠ ··· ❶

또 이차방정식 $-2x^2+x+k-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot(-2)\cdot(k-1)<0$

$-7+8k<0 \qquad \therefore k<\frac{7}{8}$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 $\qquad k=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 이차함수 $y=x^2-2kx+k+6$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나도록 하는 k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차함수 $y=-2x^2+x+k-1$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0656 이차방정식 $x^2+2(a-k)x+k^2+4k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-k)^2-(k^2+4k+b)=0$

$a^2-2ak+k^2-k^2-4k-b=0$

$\therefore (-2a-4)k+a^2-b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-2a-4=0,\ a^2-b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\qquad a=-2,\ b=4$

$\therefore ab=-8$ 답 ①

0657 이차방정식 $2x^2+ax+3=2x+b$, 즉 $2x^2+(a-2)x+3-b=0$의 두 근이 -1, 2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=-\frac{a-2}{2},\ -1\cdot2=\frac{3-b}{2}$

$a-2=-2,\ 3-b=-4 \qquad \therefore a=0,\ b=7$

$\therefore b-a=7$ 답 ①

0658 이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=x+2$의 두 교점의 x좌표가 -2, 2이므로 이차방정식 $-x^2+ax+b=x+2$, 즉 $x^2+(1-a)x+2-b=0$의 두 근이 -2, 2이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+2=-(1-a),\ -2\cdot2=2-b$

$\therefore a=1,\ b=6$

$\therefore ab=6$ 답 6

0659 이차방정식 $2x^2-x-1=3x+k$, 즉 $2x^2-4x-1-k=0$의 한 근이 3이므로

$18-12-1-k=0 \qquad \therefore k=5$ ··· ❶

$2x^2-4x-6=0$에서 $\qquad x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$ ··· ❷

$x=-1$을 $y=3x+5$에 대입하면 $\qquad y=2$

따라서 점 B의 좌표는 $\qquad (-1,\ 2)$ ··· ❸

답 $(-1,\ 2)$

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %

0660 이차방정식 $x^2-4x+5=ax+b$, 즉 $x^2-(4+a)x+5-b=0$의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $3+2\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $3-2\sqrt{2}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=4+a,$

$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=5-b$

이므로

$6=4+a,\ 1=5-b \qquad \therefore a=2,\ b=4$

$\therefore a+b=6$ 답 ③

0661 이차방정식 $x^2-ax+3=2x-4$, 즉 $x^2-(a+2)x+7=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+2,\ \alpha\beta=7$ ······ ㉠

한편 $|\alpha-\beta|=6$이므로 양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=36$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\qquad (a+2)^2-4\cdot7=36$

$a^2+4a-60=0, \qquad (a+10)(a-6)=0$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$ 답 6

0662 이차방정식 $x^2+kx+3=-x+2$, 즉 $x^2+(k+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4=0$

$k^2+2k-3=0,\quad (k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$

답 1

0663 이차방정식 $2x^2+(m-3)x+m-1=mx$, 즉 $2x^2-3x+m-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot(m-1)>0$

$17-8m>0\quad \therefore m<\frac{17}{8}$

따라서 정수 m의 최댓값은 2이다.

답 ②

0664 이차방정식 $x^2-2kx+k^2=2x+1$, 즉 $x^2-2(k+1)x+k^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2-1)\geq0$ ··· ❶

$2k+2\geq0\quad \therefore k\geq-1$ ··· ❷

따라서 실수 k의 최솟값은 -1이다. ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 이차함수의 그래프와 직선이 적어도 한 점에서 만나기 위한 조건을 구할 수 있다.	60 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0665 이차방정식 $kx^2+2kx+1=x-k$, 즉 $kx^2+(2k-1)x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4k(k+1)<0$

$-8k+1<0\quad \therefore k>\frac{1}{8}$

$\therefore a=\frac{1}{8}$

답 $\frac{1}{8}$

0666 이차방정식 $x^2+kx+k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=k^2-4k=0,\quad k(k-4)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=4$ ······ ㉠

또 이차방정식 $x^2+kx+k=(k+1)x$, 즉 $x^2-x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4k>0,\quad 1-4k>0$

$\therefore k<\frac{1}{4}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $k=0$

답 ③

0667 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+b$라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-4x+3=2x+b$, 즉 $x^2-6x+3-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(3-b)=0$

$6+b=0\quad \therefore b=-6$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2x-6$

답 $y=2x-6$

0668 직선 $y=ax+b$가 직선 $y=-3x+5$에 평행하므로

$a=-3$ ← 서로 평행한 두 직선의 기울기는 같다.

직선 $y=-3x+b$가 이차함수 $y=x^2-7x+2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-7x+2=-3x+b$, 즉 $x^2-4x+2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(2-b)=0$

$2+b=0\quad \therefore b=-2$

$\therefore ab=6$

답 ④

참고 두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$이 평행하면 $a=a'$, $b\neq b'$이다.

0669 점 $(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x-1)+2$라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=2x^2-x+1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $2x^2-x+1=a(x-1)+2$, 즉 $2x^2-(1+a)x+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(1+a)\}^2-4\cdot2\cdot(a-1)=0$

$a^2-6a+9=0,\quad (a-3)^2=0$

$\therefore a=3$

따라서 직선의 방정식은 $y=3(x-1)+2=3x-1$이므로 구하는 y절편은 -1이다.

답 -1

0670 점 $(2, 4)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x-2)+4$라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=-2x^2+7x-4$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-2x^2+7x-4=a(x-2)+4$, 즉 $2x^2+(a-7)x-2a+8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-7)^2-4\cdot2\cdot(-2a+8)=0$

$a^2+2a-15=0,\quad (a+5)(a-3)=0$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=3$

따라서 두 직선의 기울기는 -5, 3이므로 그 곱은 -15이다.

답 ②

0671 $y=-2x^2+4x+7=-2(x-1)^2+9$이므로

$M=9$

$y=3x^2+6x-5=3(x+1)^2-8$이므로

$m=-8$

$\therefore M+m=1$

답 1

0672 $y=3x^2-6x-2=3(x-1)^2-5$이므로 $x=1$에서 최솟값 -5를 갖는다.

따라서 $a=1$, $b=-5$이므로 $ab=-5$

답 ②

0673 $y=-2x^2+ax+3$의 그래프가 점 $(1, -3)$을 지나므로

$-3=-2+a+3\quad \therefore a=-4$ ··· ❶

따라서 $y=-2x^2-4x+3=-2(x+1)^2+5$이므로 최댓값은 5이다. ··· ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 함수의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %

0674 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, 2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+2=-a$, $-3\cdot2=b$

$\therefore a=1$, $b=-6$

$\therefore y=x^2+x-6=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

따라서 이 이차함수의 최솟값은 $-\frac{25}{4}$이다. 답 $-\frac{25}{4}$

다른 풀이 x^2의 계수가 1이고 x축과 두 점 $(-3, 0)$, $(2, 0)$에서 만나는 이차함수의 그래프의 식은

$y=(x+3)(x-2)=x^2+x-6$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

따라서 구하는 최솟값은 $-\frac{25}{4}$이다.

0675 $y=-x^2-2ax+6a-3=-(x+a)^2+a^2+6a-3$이므로 $x=-a$에서 최댓값 a^2+6a-3을 갖는다.
따라서 $m=a^2+6a-3=(a+3)^2-12$이므로 m은 $a=-3$에서 최솟값 -12를 갖는다. 답 ②

0676 $y=-2x^2+12x+k-3=-2(x-3)^2+k+15$이므로 $x=3$에서 최댓값 $k+15$를 갖는다.
즉 $k+15=3$이므로

$k=-12$ 답 ①

0677 $y=mx^2-4mx+1=m(x-2)^2+1-4m$이므로 $m>0$ 이고, $x=2$에서 최솟값 $1-4m$을 갖는다.

$m<0$이면 최솟값이 존재하지 않는다.

즉 $1-4m=-3$이므로

$m=1$ 답 ④

0678 $y=2x^2+4x+2a+1=2(x+1)^2+2a-1$ ··· ❶
이므로 $x=-1$에서 최솟값 $2a-1$을 갖는다.
즉 $2a-1=-3$이므로 $a=-1$ ··· ❷
따라서 $y=2x^2+4x-1$이므로 이 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 -1이다.

$y=2x^2+4x-1$에 $x=0$을 대입하면 $y=-1$

$\therefore b=-1$ ··· ❸

$\therefore a+b=-2$ ··· ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차함수의 식을 $y=2(x-p)^2+q$ 꼴로 변형할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0679 $y=-2x^2+8x+6+2k=-2(x-2)^2+14+2k$이므로 $x=2$에서 최댓값 $14+2k$를 갖는다.
또 $y=(x+3)(x-5)-k=x^2-2x-15-k=(x-1)^2-16-k$ 이므로 $x=1$에서 최솟값 $-16-k$를 갖는다.
따라서 $14+2k=-16-k$이므로

$k=-10$ 답 -10

0680 $f(x)=ax^2+4ax+b=a(x+2)^2-4a+b$에서 최솟값이 -7이므로 $a>0$이고 $-4a+b=-7$

$a<0$이면 최솟값이 존재하지 않는다.

$\therefore 4a-b=7$ ······ ㉠

$g(x)=-x^2+4x+2a+b=-(x-2)^2+2a+b+4$에서 최댓값이 3이므로 $2a+b+4=3$

$\therefore 2a+b=-1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

$\therefore a-b=4$ 답 ③

0681 이차함수 $y=x^2+ax+b$가 $x=1$에서 최솟값 -7을 가지므로

$x^2+ax+b=(x-1)^2-7$

$=x^2-2x-6$

따라서 $a=-2$, $b=-6$이므로 $ab=12$ 답 12

0682 이차함수 $y=-2x^2-ax+3$이 $x=-1$에서 최댓값 b를 가지므로

$-2x^2-ax+3=-2(x+1)^2+b$

$=-2x^2-4x-2+b$

따라서 $-a=-4$, $3=-2+b$이므로 $a=4$, $b=5$

$\therefore a+b=9$ 답 ⑤

0683 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $x=2$에서 최댓값 2를 가지므로

$f(x)=a(x-2)^2+2$ $(a<0)$

$f(1)=1$에서 $1=a+2$ $\therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-(x-2)^2+2=-x^2+4x-2$

따라서 $a=-1$, $b=4$, $c=-2$이므로

$a-b+c=-7$ 답 -7

0684 조건 (나), (다)에 의하여

$f(x)=a(x-1)^2-3$ $(a>0)$

조건 (가)에서 $f(-1)=1$이므로

$4a-3=1$ $\therefore a=1$

따라서 $f(x)=(x-1)^2-3$이므로

$f(2)=1^2-3=-2$ 답 ①

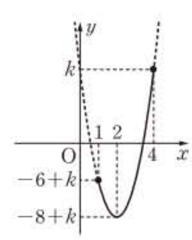
라쎈 특강

이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=p$이면 이 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 p이다. 즉 $x=p$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.
따라서 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=p$이고, 최댓값 또는 최솟값이 q인 이차함수의 식은 $y=a(x-p)^2+q$이다.

0685 $f(x)=2x^2-8x+k$

$=2(x-2)^2-8+k$

이므로 $1\le x\le4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

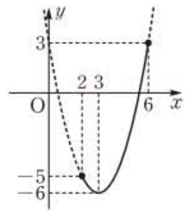


따라서 $x=4$에서 최댓값 k를 가지므로

$k=4$ 답 ②

0686 $f(x)=x^2-6x+3$

$\quad\;=(x-3)^2-6$



이므로 $2\le x\le 6$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

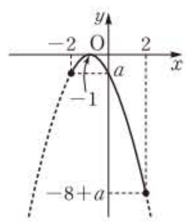
따라서 $x=6$에서 최댓값 3을 갖고, $x=3$에서 최솟값 -6을 가지므로

$M=3,\ m=-6$

$\therefore Mm=-18$ 답 ①

0687 $f(x)=-x^2-2x+a$

$\quad\;=-(x+1)^2+1+a$



이므로 $-2\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=2$에서 최솟값 $-8+a$를 가지므로

$-8+a=-9$

$\therefore a=-1$ ⋯ ❶

즉 $f(x)=-(x+1)^2$이므로 $x=-1$에서 최댓값 0을 갖는다.

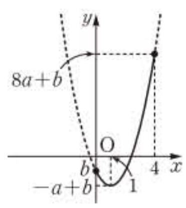
⋯ ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0688 $y=ax^2-2ax+b$

$\quad=a(x-1)^2-a+b$



이므로 $0\le x\le 4$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

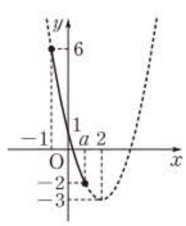
따라서 $x=4$에서 최댓값 $8a+b$를 갖고, $x=1$에서 최솟값 $-a+b$를 가지므로

$8a+b=7,\ -a+b=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-1$

$\therefore a+b=0$ 답 ③

0689 $f(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$이라 하면 $f(2)=-3$이므로



$-1<\underbrace{a<2}_{a\ge 2\text{이면 최솟값이 }-3\text{이다.}}$

따라서 $x=a$에서 최솟값 -2를 가지므로

$a^2-4a+1=-2,\quad a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1\ (\because\ -1<a<2)$ 답 1

0690 $x^2-2x=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2-1\ge -1$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+4t-3=(t+2)^2-7\ (t\ge -1)$

따라서 $t=-1$에서 최솟값 -6을 갖는다. 답 -6

0691 $2x-1=t$로 놓으면 $x=1$일 때 $t=1$, $x=4$일 때 $t=7$이므로 $\quad 1\le t\le 7$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+5=(t-2)^2+1\ (1\le t\le 7)$

따라서 $t=2$에서 최솟값 1, $t=7$에서 최댓값 26을 가지므로 구하는 합은

$26+1=27$ 답 ④

0692 $x^2+2x-1=t$로 놓으면

$t=(x+1)^2-2\ge -2$ ⋯ ❶

이때 주어진 함수는

$y=-2t^2+6\underbrace{(t+1)}_{x^2+2x-1=t\text{이므로 }x^2+2x=t+1}+k$

$=-2t^2+6t+6+k$

$=-2\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{21}{2}+k\ (t\ge -2)$ ⋯ ❷

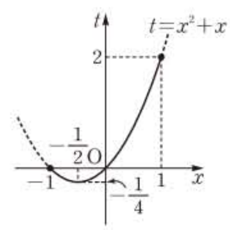
따라서 $t=\dfrac{3}{2}$에서 최댓값 $\dfrac{21}{2}+k$를 가지므로

$\dfrac{21}{2}+k=10\quad \therefore k=-\dfrac{1}{2}$ ⋯ ❸

답 $-\dfrac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $x^2+2x-1=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ y를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0693 $x^2+x=t$로 놓으면



$t=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

$-1\le x\le 1$이므로 오른쪽 그림에서

$-\dfrac{1}{4}\le t\le 2$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-t+1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{4}\le t\le 2\right)$

따라서 $t=2$에서 최댓값 3, $t=\dfrac{1}{2}$에서 최솟값 $\dfrac{3}{4}$을 가지므로

$M=3,\ m=\dfrac{3}{4}$

$\therefore Mm=\dfrac{9}{4}$ 답 ④

0694 $2x-y=8$에서 $\quad y=2x-8$

$\therefore xy=x(2x-8)$

$=2x^2-8x$

$=2(x-2)^2-8$

이때 $0\le x\le 5$이므로 $x=5$일 때 최댓값은 10, $x=2$일 때 최솟값은 -8이다.

따라서 구하는 합은 2이다. 답 ①

0695 $x+y=2$에서 $\quad y=2-x$

$\therefore \underbrace{2x+y^2}_{x=2-y\text{를 대입하여 }2(2-y)+y^2\text{에서 최솟값을 구해도 된다.}}=2x+(2-x)^2$

$=x^2-2x+4$

$=(x-1)^2+3$

따라서 $x=1$일 때 최솟값은 3이다. 답 3

0696 점 $\mathrm{P}(a, b)$가 직선 $x+y=4$ 위의 점이므로

$a+b=4 \quad \therefore b=4-a$

$\therefore a^2+b^2=a^2+(4-a)^2$

$=2a^2-8a+16$

$=2(a-2)^2+8$

따라서 $a=2$일 때 최솟값은 8이다. 답 ⑤

0697 $x+y^2=1$에서 $\quad y^2=1-x \quad$ ······ ㉠

y가 실수이므로 $\quad y^2=1-x\ge 0 \quad \therefore x\le 1$

㉠을 $-x^2+4y^2$에 대입하면

$-x^2+4(1-x)=-x^2-4x+4$

$=-(x+2)^2+8$

이때 $x\le 1$이므로 $x=-2$일 때 최댓값은 8이다. 답 8

0698 점 A의 좌표를 $(a, 0)$ $(0<\underline{a<4})$이라 하면

$y=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$에서 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 4이므로 $a<4$

$\mathrm{D}(a, -a^2+8a)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=8-2a,\ \overline{\mathrm{AD}}=-a^2+8a$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(8-2a-a^2+8a)=-2a^2+12a+16$

$=-2(a-3)^2+34$

이때 $0<a<4$이므로 $a=3$일 때 최댓값은 34이다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 34이다.

답 ③

다른 풀이 점 B의 좌표를 $(b, 0)$ $(4<b<8)$이라 하면

$\mathrm{C}(b, -b^2+8b)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2b-8,\ \overline{\mathrm{BC}}=-b^2+8b$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(2b-8-b^2+8b)=-2b^2+20b-16$

$=-2(b-5)^2+34$

이때 $4<b<8$이므로 $b=5$일 때 최댓값은 34이다.

0699 $y=-5t^2+40t=-5(t-4)^2+80$

따라서 $t=4$일 때 최댓값은 80이므로 구하는 높이는 80 m이다.

답 80 m

0700 부채꼴의 반지름의 길이를 x cm라 하면 호의 길이는

$(28-2x)$ cm

이때 반지름의 길이와 호의 길이는 양수이므로

$x>0,\ 28-2x>0$이므로 $0<x<14$

$0<x<14$

부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}x(28-2x)=-x^2+14x$

$=-(x-7)^2+49$

이때 $0<x<14$이므로 $x=7$일 때 최댓값은 49이다.

따라서 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는 7 cm이다.

답 ②

참고 반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}rl$

0701 새로운 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각

$(12-x)$ cm, $(8+x)$ cm ··· ❶

이때 변의 길이는 양수이므로 $\quad 0<x<12$ ··· ❷

새로운 직사각형의 넓이는

$(12-x)(8+x)=-x^2+4x+96$ ··· ❸

$=-(x-2)^2+100$

이때 $0<x<12$이므로 $x=2$일 때 최댓값은 100이다.

따라서 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값은 100 cm^2이다. ··· ❹

답 100 cm^2

채점 기준	비율
❶ 새로운 직사각형의 가로, 세로의 길이를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	10 %
❸ 새로운 직사각형의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❹ 최대 넓이를 구할 수 있다.	30 %

0702 쿠키 한 개의 가격이 $(1000-x)$원일 때 하루 판매량은 $(200+x)$개이므로 하루 판매액은

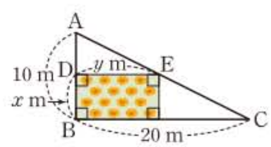
$(1000-x)(200+x)=-x^2+800x+200000$

$=-(x-400)^2+360000$

따라서 $x=400$일 때 하루 판매액이 최대이므로 이때의 쿠키 한 개의 가격은

$1000-400=600$(원) 답 600원

0703 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BD}}=x$ m, $\overline{\mathrm{DE}}=y$ m라 하면



$\triangle\mathrm{ADE}\backsim\triangle\mathrm{ABC}$ (AA 닮음)이므로

∠A는 공통, $\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{ABC}=90°$

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{BC}}$

즉 $(10-x):10=y:20$이므로

$y=20-2x$

이때 변의 길이는 양수이므로 $\quad 0<x<10$

꽃밭의 넓이는

$xy=x(20-2x)$

$=-2x^2+20x$

$=-2(x-5)^2+50$

이때 $0<x<10$이므로 $x=5$일 때 최댓값은 50이다.

따라서 꽃밭의 최대 넓이는 50 m^2이다. 답 ③

0704 **전략** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다.

풀이 이차방정식 $3x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, 1이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+1=-\frac{a}{3},\ -3\cdot 1=\frac{b}{3}$

$\therefore a=6,\ b=-9$

$\therefore ab=-54$ 답 ②

다른 풀이 $y=3x^2+ax+b=3(x+3)(x-1)=3x^2+6x-9$

이므로 $\quad a=6,\ b=-9$

0705 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2(a-4)x+a^2+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-4)^2-(a^2+a-1)<0$$

$$a^2-8a+16-a^2-a+1<0$$

$$-9a+17<0 \qquad \therefore a>\frac{17}{9}$$

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다.

답 2

0706 전략 이차방정식 $f(x+2)=0$의 두 근을 α, β에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.

즉 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(x+2)=0$이려면

$x+2=\alpha$ 또는 $x+2=\beta$

$\therefore x=\alpha-2$ 또는 $x=\beta-2$

따라서 이차방정식 $f(x+2)=0$의 두 근의 합은

$$(\alpha-2)+(\beta-2)=\alpha+\beta-4=5-4=1$$

답 1

0707 전략 꼭짓점의 좌표를 이용하여 이차함수의 식을 나타낸 후 이차함수의 그래프는 축에 대하여 대칭임을 이용하여 x축과의 교점의 x좌표를 구한다.

풀이 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -1)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2-1$이라 하면

$$y=ax^2+bx+c=a(x-1)^2-1$$
$$=ax^2-2ax+a-1$$

이때 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=6$이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 -2, 4이다.

즉 이차방정식 $ax^2-2ax+a-1=0$의 두 근이 -2, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2\cdot4=\frac{a-1}{a}, \qquad 9a-1=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{9}$$

따라서 $y=\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{8}{9}$이므로

$$b=-\frac{2}{9},\ c=-\frac{8}{9}$$

$$\therefore a-b-3c=3$$

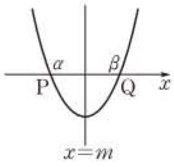
답 ⑤

라쎈 특강

이차함수 $y=a(x-m)^2+n$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 이 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 좌표가 $\mathrm{P}(\alpha,\ 0)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ 0)$ $(\alpha<\beta)$이면

$$\alpha=m-\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{2},\ \beta=m+\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{2}$$

이다.



0708 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=x-a$, 즉 $x^2+(a-1)x+a+b=0$의 두 근이 x_1, x_2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1+x_2=-(a-1)=4,\ x_1x_2=a+b=-2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-3,\ b=1$

$\therefore a-b=-4$

답 -4

0709 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있거나 항상 아래쪽에 있으려면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 한다.

풀이 이차함수 $y=2x^2+2x+a$의 그래프가 직선 $y=-2x+1$보다 항상 위쪽에 있으면 교점이 존재하지 않으므로 이차방정식 $2x^2+2x+a=-2x+1$, 즉 $2x^2+4x+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-2(a-1)<0 \qquad \therefore a>3$$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

0710 전략 직선의 방정식을 $y=-x+b$로 놓고 이차함수의 식과 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식이 0임을 이용한다.

풀이 기울기가 -1인 직선의 방정식을 $y=-x+b$라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=-2x^2+x+1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-2x^2+x+1=-x+b$, 즉 $2x^2-2x+b-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-2(b-1)=0$$

$$3-2b=0 \qquad \therefore b=\frac{3}{2}$$

따라서 직선의 방정식은 $y=-x+\frac{3}{2}$이므로 y절편은 $\frac{3}{2}$이다.

답 $\frac{3}{2}$

0711 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하려면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 한다.

풀이 이차방정식 $x^2-4kx+4k^2+k=2ax+b$,

즉 $x^2-2(2k+a)x+4k^2+k-b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(2k+a)\}^2-(4k^2+k-b)=0$$

$$4k^2+4ak+a^2-4k^2-k+b=0$$

$$\therefore (4a-1)k+a^2+b=0$$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$4a-1=0,\ a^2+b=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{16}$

$$\therefore a+b=\frac{3}{16}$$

답 ②

0712 전략 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근으로부터 두 점 A, B의 x좌표를 구하고, 직선 $y=g(x)$의 x절편과 y절편으로부터 두 점 C, D의 좌표를 구하여 두 넓이 S_1, S_2를 구한다.

풀이 직선 $y=g(x)$가 x축과 만나는 점이 C이므로 $g(x)=0$에서

$$ax+2a^2=0, \qquad a(x+2a)=0$$

$$\therefore x=-2a\ (\because a>0) \qquad \therefore \mathrm{C}(-2a,\ 0)$$

또 직선 $y=g(x)$가 y축과 만나는 점이 D이므로

$$\mathrm{D}(0,\ 2a^2)$$

한편 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=ax+2a^2$의 그래프가 만나는 두 점 A, B의 x좌표는 이차방정식 $x^2=ax+2a^2$, 즉 $x^2-ax-2a^2=0$의 두 근이다.

$x^2-ax-2a^2=0$에서 $\quad (x+a)(x-2a)=0$

$\therefore x=-a$ 또는 $x=2a$

이때 점 A는 제1사분면 위에 있으므로 $\quad A(2a,\ 4a^2)$

또 점 A에서 x축에 내린 수선의 발이 E이므로

$E(2a,\ 0)$

따라서

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{OC}\cdot\overline{OD}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a^2=2a^3,$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot(\overline{OD}+\overline{AE})\cdot\overline{OE}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(2a^2+4a^2)\cdot 2a=6a^3$$

이므로 $\quad S_2=3S_1 \quad \therefore k=3$ 답 ③

다른 풀이 $\triangle COD \backsim \triangle CEA$ (AA 닮음)이므로 닮음비는 $C(-2a,\ 0)$, $E(2a,\ 0)$에서

∠DCO는 공통, ∠COD=∠CEA=90°

$\overline{CO}:\overline{CE}=1:2$

따라서 넓이의 비는 $1^2:2^2=1:4$이므로

$S_1:S_2=1:3, \quad S_2=3S_1 \quad \therefore k=3$

0713 전략 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 최솟값을 구한다.

풀이 ① 최솟값은 4이다.

② 최솟값은 1이다.

③ $y=\frac{2}{5}x^2+4x+1=\frac{2}{5}(x+5)^2-9$이므로 최솟값은 -9이다.

④ $y=x^2+4x+6=(x+2)^2+2$이므로 최솟값은 2이다.

⑤ $y=2x^2-8x+2=2(x-2)^2-6$이므로 최솟값은 -6이다.

따라서 최솟값이 가장 작은 것은 ③이다. 답 ③

0714 전략 이차함수 $y=a(x-p)^2+q\ (a<0)$는 $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다.

풀이 $y=-x^2-2kx+k=-(x+k)^2+k^2+k$이므로 $x=-k$에서 최댓값 k^2+k를 갖는다.

즉 $k^2+k=6$이므로 $\quad k^2+k-6=0$

$(k+3)(k-2)=0 \quad \therefore k=-3$ 또는 $k=2$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 -1이다. 답 ③

0715 전략 이차함수 $f(x)$가 $x=p$에서 최솟값 q를 가지면 $f(x)=a(x-p)^2+q\ (a>0)$로 놓는다.

풀이 이차함수 $y=3x^2-2ax-1$이 $x=1$에서 최솟값 b를 가지므로

$$3x^2-2ax-1=3(x-1)^2+b$$
$$=3x^2-6x+3+b$$

따라서 $-2a=-6$, $-1=3+b$이므로 $\quad a=3,\ b=-4$

$\therefore a-b=7$ 답 7

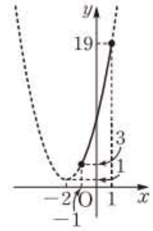
0716 전략 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 $|x|\le 1$에 속하는지 확인한다.

풀이 $|x|\le 1$에서 $\quad -1\le x\le 1$

$y=2x^2+8x+9=2(x+2)^2+1$이므로

$-1\le x\le 1$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=1$에서 최댓값 19를 갖는다.

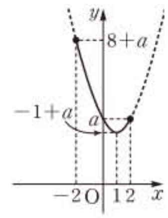


답 ④

0717 전략 주어진 이차함수의 식을 $f(x)=(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한 후 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다.

풀이 $f(x)=x^2-2x+a$
$$=(x-1)^2-1+a$$

이므로 $-2\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=-2$에서 최댓값 $8+a$를 갖고, $x=1$에서 최솟값 $-1+a$를 가지므로

$(8+a)+(-1+a)=21$

$2a=14 \quad \therefore a=7$ 답 ②

0718 전략 두 수 α, β를 근으로 하는 이차방정식은 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0\ (a\ne 0)$임을 이용한다.

풀이 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -2, 4이므로

$$f(x)=a(x+2)(x-4)$$
$$=a(x^2-2x-8)$$
$$=a(x-1)^2-9a\ (a\ne 0)$$

(i) $a<0$일 때,

함수 $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값 $7a$를 가지므로

$7a=80 \quad \therefore a=\frac{80}{7}$

이때 $a<0$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a>0$일 때,

함수 $f(x)$는 $x=8$에서 최댓값 $40a$를 가지므로

$40a=80 \quad \therefore a=2$

(i), (ii)에서 $a=2$이므로

$f(x)=2(x+2)(x-4)$

$\therefore f(-5)=2\cdot(-3)\cdot(-9)=54$ 답 54

0719 전략 $x+y=1$에서 $y=1-x$이므로 이 식을 x^2+2y^2에 대입한다.

풀이 $x+y=1$에서 $\quad y=1-x$

$$\therefore x^2+2y^2=x^2+2(1-x)^2$$
$$=3x^2-4x+2$$
$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

따라서 $x=\frac{2}{3}$일 때 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다. 답 ②

0720 전략 $2\le x\le 5$일 때 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $y=-30x^2+240x=-30(x-4)^2+480$

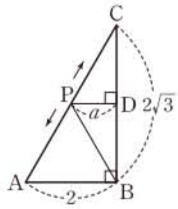
이때 $2\le x\le 5$이므로 $x=4$일 때 최댓값은 480, $x=2$일 때 최솟값은 360이다.

따라서 판매 수익의 최댓값은 480만 원, 최솟값은 360만 원이므로 그 합은

$480+360=840$(만 원) 답 840만 원

0721 전략 점 P에서 변 BC에 수선을 그어 삼각형의 닮음을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고



$\overline{PD}=a$ $(0\le a\le 2)$라 하면

$\triangle CPD \backsim \triangle CAB$ (AA 닮음)이므로

∠C는 공통, ∠PDC=∠ABC=90°

$\overline{PD}:\overline{AB}=\overline{CD}:\overline{CB}$

$a:2=\overline{CD}:2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{CD}=\sqrt{3}a$

따라서 $\overline{BD}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}a$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=\{a^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3}a)^2\}+\{a^2+(\sqrt{3}a)^2\}\\&=a^2+12-12a+3a^2+a^2+3a^2\\&=8a^2-12a+12\\&=8\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{2}\end{aligned}$$

이때 $0\le a\le 2$이므로 구하는 최솟값은 $\frac{15}{2}$이다. 답 ④

0722 전략 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D의 부호를 조사하여 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구한다.

풀이 이차방정식 $-x^2+6x-9=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=3^2-(-1)\cdot(-9)=0$$

이므로 이 이차방정식은 중근을 갖는다.

즉 함수 $y=-x^2+6x-9$의 그래프와 x축의 교점은 1개이므로

$m=1$ ··· ❶

이차방정식 $2x^2-7x+4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-7)^2-4\cdot2\cdot4=17>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉 함수 $y=2x^2-7x+4$의 그래프와 x축의 교점은 2개이므로

$n=2$ ··· ❷

$\therefore m+n=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0723 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이다.

풀이 이차방정식 $2x^2-x=-5x+k$, 즉 $2x^2+4x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2\cdot(-k)=0$ $\quad\therefore k=-2$ ··· ❶

따라서 $2x^2+4x+2=0$에서

$2(x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-1$

$x=-1$을 $y=-5x-2$에 대입하면 $\quad y=3$

즉 접점의 좌표는 $(-1, 3)$이므로 $\quad a=-1, b=3$

$\therefore b-a=4$ ··· ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 접점의 좌표를 구하여 $b-a$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0724 전략 $x^2+2x+2=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 나타낸다. 이때 t의 값의 범위에 주의한다.

풀이 $x^2+2x+2=t$로 놓으면

$t=(x+1)^2+1\ge1$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+2t+3=-(t-1)^2+4\ (t\ge1)$

따라서 $t=1$에서 최댓값 4를 갖는다. ··· ❶

$t=1$에서 $\quad x^2+2x+2=1,\quad x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-1$ ··· ❷

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로 $\quad ab=-4$ ··· ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 함수가 최댓값을 가질 때의 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0725 전략 가축우리의 세로의 길이를 x m라 하고 가축우리의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 가축우리의 세로의 길이를 x m라 하면 가로의 길이는

$(32-2x)$ m ··· ❶

이때 변의 길이는 양수이므로

$0<x<16$ ··· ❷

$x>0$, $32-2x>0$이므로 $0<x<16$

가축우리의 넓이는

$$\begin{aligned}x(32-2x)&=-2x^2+32x\\&=-2(x-8)^2+128\end{aligned}$$ ··· ❸

이때 $0<x<16$이므로 $x=8$일 때 최댓값은 128이다.

따라서 가축우리의 최대 넓이는 128 m^2이다. ··· ❹

답 128 m^2

채점 기준	비율
❶ 가축우리의 가로, 세로의 길이를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	10 %
❸ 가축우리의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❹ 최대 넓이를 구할 수 있다.	30 %

06 여러 가지 방정식

0726 $x^3-1=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

0727 $x^3-2x^2-3x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^2-2x-3)=0,\quad x(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

답 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

0728 $x^4-8x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^3-8)=0,\quad x(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

답 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

0729 $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$으로 놓으면

$P(1)=1-2-5+6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2-x-6)$

$=(x-1)(x+2)(x-3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

답 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

라쎈 특강

다항식 $P(x)$의 계수와 상수항이 모두 정수일 때, $P(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은

$\pm\dfrac{(P(x)\text{의 상수항의 약수})}{(P(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수})}$

중에서 찾을 수 있다.

0730 $P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$으로 놓으면

$P(1)=1-1-7+1+6=0,$

$P(-1)=1+1-7-1+6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -7 & -6 & \boxed{0} \\ & & -1 & 1 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x-6)$

$=(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

답 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

0731 $P(x)=x^4+3x^3-6x^2-14x+12$로 놓으면

$P(2)=16+24-24-28+12=0,$

$P(-3)=81-81-54+42+12=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 3 & -6 & -14 & 12 \\ & & 2 & 10 & 8 & -12 \\ \hline -3 & 1 & 5 & 4 & -6 & \boxed{0} \\ & & -3 & -6 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x+3)(x^2+2x-2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x+3)(x^2+2x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}$

답 $x=-3$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}$

0732 답 (가) X^2-X-2 (나) $X-2$ (다) 2 (라) 1 (마) ±1

0733 $x^2-1=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+X-6=0,\quad (X+3)(X-2)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=2$

(i) $X=-3$일 때, $x^2-1=-3$, 즉 $x^2=-2$에서

$x=\pm\sqrt{2}i$

(ii) $X=2$일 때, $x^2-1=2$, 즉 $x^2=3$에서

$x=\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

답 $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

0734 $x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$6X^2+X-1=0,\quad (2X+1)(3X-1)=0$

$\therefore X=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $X=\dfrac{1}{3}$

(i) $X=-\dfrac{1}{2}$일 때, $x^2+x=-\dfrac{1}{2}$, 즉 $2x^2+2x+1=0$에서

$x=\dfrac{-1\pm i}{2}$

(ii) $X=\dfrac{1}{3}$일 때, $x^2+x=\dfrac{1}{3}$, 즉 $3x^2+3x-1=0$에서

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$

(i), (ii)에서 $x=\dfrac{-1\pm i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$

답 $x=\dfrac{-1\pm i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$

0735 답 (가) $X-4$ (나) 4 (다) ±2

0736 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-8X-9=0,\quad (X+1)(X-9)=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=9$

따라서 $x^2=-1$ 또는 $x^2=9$이므로

$x=\pm i$ 또는 $x=\pm3$ 　　답 $x=\pm i$ 또는 $x=\pm3$

0737 답 (가) 1 (나) 2 (다) x^2-2x-1 (라) $1\pm\sqrt{2}$

0738 $x^4+5x^2+9=0$에서 $(x^4+6x^2+9)-x^2=0$

$(x^2+3)^2-x^2=0,\quad (x^2+x+3)(x^2-x+3)=0$

$\therefore x^2+x+3=0$ 또는 $x^2-x+3=0$

따라서 구하는 해는

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$

답 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$

0739 답 (가) 3 (나) 3 (다) 1 (라) $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

0740 $x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

주어진 방정식에 $x=0$을 대입하면 (좌변)$=1$이므로 $x\neq0$

$x^2+5x-4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-6=0$

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X-6=0,\quad (X+6)(X-1)=0$

$\therefore X=-6$ 또는 $X=1$

(i) $X=-6$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-6$에서

$x^2+6x+1=0\quad \therefore x=-3\pm2\sqrt{2}$

(ii) $X=1$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=1$에서

$x^2-x+1=0\quad \therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 $x=-3\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=-3\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

0741 답 $\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=7$

0742 답 $\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=\dfrac{1}{2}$

0743 답 $\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{5}{3}$, $\alpha\beta\gamma=0$

0744 답 $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5$, $\alpha\beta\gamma=\dfrac{9}{2}$

0745 (1) $\alpha+\beta+\gamma=5$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$

(3) $\alpha\beta\gamma=-9$

(4) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{-3}{-9}=\dfrac{1}{3}$

답 (1) 5 (2) -3 (3) -9 (4) $\dfrac{1}{3}$

0746 x^3의 계수가 1이고 근이 1, 2, 4인 삼차방정식은

$x^3-(1+2+4)x^2+(1\cdot2+2\cdot4+4\cdot1)x-1\cdot2\cdot4=0$

$\therefore x^3-7x^2+14x-8=0$ 　　답 $x^3-7x^2+14x-8=0$

0747 x^3의 계수가 1이고 근이 -2, 3, 5인 삼차방정식은

$x^3-(-2+3+5)x^2+\{(-2)\cdot3+3\cdot5+5\cdot(-2)\}x$

$-(-2)\cdot3\cdot5=0$

$\therefore x^3-6x^2-x+30=0$ 　　답 $x^3-6x^2-x+30=0$

0748 x^3의 계수가 1이고 근이 -1, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$인 삼차방정식은

$x^3-\{-1+(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\}x^2$

$+\{(-1)\cdot(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\cdot(-1)\}x$

$-(-1)\cdot(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=0$

$\therefore x^3-3x^2-3x+1=0$ 　　답 $x^3-3x^2-3x+1=0$

0749 x^3의 계수가 1이고 근이 3, $2i$, $-2i$인 삼차방정식은

$x^3-\{3+2i+(-2i)\}x^2+\{3\cdot2i+2i\cdot(-2i)+(-2i)\cdot3\}x$

$-3\cdot2i\cdot(-2i)=0$

$\therefore x^3-3x^2+4x-12=0$ 　　답 $x^3-3x^2+4x-12=0$

0750 x^3의 계수가 1이고 근이 2, $1+i$, $1-i$인 삼차방정식은

$x^3-\{2+(1+i)+(1-i)\}x^2$

$+\{2(1+i)+(1+i)(1-i)+(1-i)\cdot2\}x$

$-2(1+i)(1-i)=0$

$\therefore x^3-4x^2+6x-4=0$ 　　답 $x^3-4x^2+6x-4=0$

0751 계수가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1+\sqrt{3}$이므로 $1-\sqrt{3}$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 -2, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\cdot(-2)=a,$

$-2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-b$

$\therefore a=-6,\ b=-4$ 　　답 $a=-6$, $b=-4$

0752 계수가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1-i$이므로 $1+i$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 1, $1-i$, $1+i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+(1-i)+(1+i)=a,$

$1\cdot(1-i)(1+i)=-b$

$\therefore a=3,\ b=-2$ 　　답 $a=3$, $b=-2$

0753 (1) 계수가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $2-\sqrt{5}$이므로 $2+\sqrt{5}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(2-\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})=-1\quad \therefore \alpha=-5$

따라서 나머지 두 근은 -5, $2+\sqrt{5}$이다.

(2) 주어진 방정식의 세 근이 -5, $2-\sqrt{5}$, $2+\sqrt{5}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-5(2-\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})\cdot(-5)=a$,

$-5(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=-b$

$\therefore a=-21,\ b=-5$

답 (1) -5, $2+\sqrt{5}$ (2) $a=-21$, $b=-5$

0754 (1) 계수가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $3+i$이므로 $3-i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha(3+i)(3-i)=-10 \qquad \therefore \alpha=-1$

따라서 나머지 두 근은 -1, $3-i$이다.

(2) 주어진 방정식의 세 근이 -1, $3+i$, $3-i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+(3+i)+(3-i)=-a$,

$-1\cdot(3+i)+(3+i)(3-i)+(3-i)\cdot(-1)=b$

$\therefore a=-5,\ b=4$

답 (1) -1, $3-i$ (2) $a=-5$, $b=4$

0755 $x^3=1$에서 $\quad x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 $\quad \omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^2+\omega=-1$

답 -1

0756 $\omega^5+\omega^4+\omega^3=\omega^3(\omega^2+\omega+1)=1\cdot 0=0$

답 0

0757 $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$

답 -1

0758 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega+\overline{\omega}+\omega\overline{\omega}=0$

답 0

0759 $x^3=-1$에서 $\quad x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\quad \omega^2-\omega+1=0$

$\therefore \omega^2-\omega=-1$

답 -1

0760 $\omega^5-\omega^4+\omega^3=\omega^3(\omega^2-\omega+1)=-1\cdot 0=0$

답 0

0761 $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{\omega}{\omega}=1$

답 1

0762 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega+\overline{\omega}-\omega\overline{\omega}=0$

답 0

0763 $x+y=1$에서 $\quad y=1-x \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(1-x)^2=5, \quad 2x^2-2x-4=0$

$x^2-x-2=0, \quad (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-1$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

0764 $2x+y=3$에서 $\quad y=3-2x \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 $y^2-x^2=24$에 대입하면

$(3-2x)^2-x^2=24, \quad 3x^2-12x-15=0$

$x^2-4x-5=0, \quad (x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=5$

$x=5$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-7$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-7 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-7 \end{cases}$

0765 $x-y=6$에서 $\quad y=x-6 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 $x^2+xy+y^2=12$에 대입하면

$x^2+x(x-6)+(x-6)^2=12, \quad 3x^2-18x+24=0$

$x^2-6x+8=0, \quad (x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-4$

$x=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-2$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

0766 $x^2+xy-2y^2=0$에서 $\quad (x+2y)(x-y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-2y$를 $2x^2+y^2=9$에 대입하면

$8y^2+y^2=9, \quad 9y^2=9, \quad y^2=1$

$\therefore y=\pm 1,\ x=\mp 2$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 $2x^2+y^2=9$에 대입하면

$2y^2+y^2=9, \quad 3y^2=9, \quad y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3},\ x=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

답 풀이 참조

0767 $x^2-2xy-3y^2=0$에서 $\quad (x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$를 $x^2-xy=18$에 대입하면

$y^2+y^2=18, \quad 2y^2=18, \quad y^2=9$

$\therefore y=\pm 3,\ x=\mp 3$ (복호동순)

(ii) $x=3y$를 $x^2-xy=18$에 대입하면

$9y^2-3y^2=18, \quad 6y^2=18, \quad y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3},\ x=\pm3\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

답 풀이 참조

0768 $x^2-y^2=0$에서 $\quad (x+y)(x-y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-y$를 $x^2+5xy-2y^2=24$에 대입하면

$y^2-5y^2-2y^2=24, \quad -6y^2=24, \quad y^2=-4$

$\therefore y=\pm2i,\ x=\mp2i$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 $x^2+5xy-2y^2=24$에 대입하면

$y^2+5y^2-2y^2=24, \quad 4y^2=24, \quad y^2=6$

$\therefore y=\pm\sqrt{6},\ x=\pm\sqrt{6}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2i \\ y=2i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2i \\ y=-2i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$

답 풀이 참조

0769 x, y는 이차방정식 $t^2-4t-12=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-6)=0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=6$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases}$

0770 $x-xy+y=1$에서 $x+y=-2$이므로

$xy=-3$

즉 x, y는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-1)=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

0771 $x^3-x^2-4x+4=0$에서

$x^2(x-1)-4(x-1)=0, \quad (x-1)(x^2-4)=0$

$(x-1)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 가장 큰 근은 2, 가장 작은 근은 -2이므로

$\alpha=2,\ \beta=-2 \quad \therefore \alpha-\beta=4$

답 4

0772 $P(x)=x^3+x^2+2x-4$로 놓으면

$P(1)=1+1+2-4=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+2x+4)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

따라서 주어진 방정식의 허근인 것은 ①이다.

답 ①

0773 $P(x)=x^4-3x^3-x^2+5x+2$로 놓으면

$P(-1)=1+3-1-5+2=0$,

$P(2)=16-24-4+10+2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & -1 & 5 & 2 \\ & & -1 & 4 & -3 & -2 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 3 & 2 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)$

즉 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)=0$ ··· ❶

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$ ··· ❷

따라서 모든 실근의 합은

$-1+2+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	30 %
❸ 모든 실근의 합을 구할 수 있다.	20 %

0774 $P(x)=x^4-4x+3$으로 놓으면

$P(1)=1-4+3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ & & 1 & 1 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ & & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

— $Q(x)=x^3+x^2+x-3$으로 놓으면 $Q(1)=0$

$\therefore P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)^2(x^2+2x+3)=0$

이때 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+2x+3=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=3$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-2)^3-3\cdot3\cdot(-2)=10$

답 ⑤

0775 $x^2+3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+1)(X-3)=5, \quad X^2-2X-8=0$

$(X+2)(X-4)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

(i) $X=-2$일 때, $x^2+3x+2=0$에서

$(x+2)(x+1)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

(ii) $X=4$일 때, $x^2+3x-4=0$에서

$(x+4)(x-1)=0 \quad \therefore x=-4$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 $\quad x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|$

$=|-4|+|-2|+|-1|+|1|=8$

답 ④

0776 $x^2-2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+X-12=0$, $(X+4)(X-3)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=3$

(i) $X=-4$일 때, $x^2-2x+4=0$에서

$x=1\pm\sqrt{3}i$

(ii) $X=3$일 때, $x^2-2x-3=0$에서

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 $x=1\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 주어진 방정식의 근인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0777 $x^2+4x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+2)^2-2X-19=0$, $X^2+2X-15=0$

$(X+5)(X-3)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=3$

(i) $X=-5$일 때,

$x^2+4x+5=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=2^2-1\cdot5=-1<0$

즉 방정식 $x^2+4x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=3$일 때,

$x^2+4x-3=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=2^2-1\cdot(-3)=7>0$

즉 방정식 $x^2+4x-3=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2+4x-3=0$의 근이고, 두 허근은 방정식 $x^2+4x+5=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-4$, $b=5$

$\therefore a-b=-9$ 답 -9

0778 $\underline{x(x+2)(x+4)(x+6)}+15=0$에서

$\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+15=0$ 상수항의 합이 같아지도록 짝을 짓는다.

$(x^2+6x)(x^2+6x+8)+15=0$

$x^2+6x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X(X+8)+15=0$ ··· ❶

$X^2+8X+15=0$, $(X+5)(X+3)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=-3$

(i) $X=-5$일 때, $x^2+6x+5=0$에서

$(x+5)(x+1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=-1$

(ii) $X=-3$일 때, $x^2+6x+3=0$에서

$x=-3\pm\sqrt{6}$ ··· ❷

(i), (ii)에서 α, β의 값은 -5, -1이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-5)^2+(-1)^2=26$ ··· ❸

답 26

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 한 문자에 대한 이차방정식으로 변형할 수 있다.	40 %
❷ 방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0779 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+3X-4=0$, $(X+4)(X-1)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=1$

즉 $x^2=-4$ 또는 $x^2=1$이므로

$x=\pm2i$ 또는 $x=\pm1$

따라서 주어진 방정식의 실근은 1, -1이므로 두 실근의 곱은 -1이다. 답 -1

0780 $x^4-14x^2+25=0$에서

$(x^4-10x^2+25)-4x^2=0$, $(x^2-5)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)=0$

$\therefore x^2+2x-5=0$ 또는 $x^2-2x-5=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$

따라서 주어진 방정식의 양수인 근은 $-1+\sqrt{6}$, $1+\sqrt{6}$이므로 구하는 합은 $(-1+\sqrt{6})+(1+\sqrt{6})=2\sqrt{6}$ 답 ⑤

0781 $x^4-x^2+16=0$에서

$(x^4+8x^2+16)-9x^2=0$, $(x^2+4)^2-(3x)^2=0$

$\therefore (x^2+3x+4)(x^2-3x+4)=0$ ··· ❶

방정식 $x^2+3x+4=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=4$, $\gamma+\delta=3$, $\gamma\delta=4$ ··· ❷

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta$

$=(-3)^2-2\cdot4+3^2-2\cdot4=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ $x^2+3x+4=0$, $x^2-3x+4=0$에서 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0782 방정식 $x^4+5x^3+6x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x+6+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, $x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X+4=0$, $(X+4)(X+1)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=-1$

(i) $X=-4$일 때, $x+\frac{1}{x}=-4$에서

$\underline{x^2+4x+1=0}$ $\therefore x=-2\pm\sqrt{3}$

판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=2^2-1=3>0$이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=-1$일 때, $x+\frac{1}{x}=-1$에서

$x^2+x+1=0$ $\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$(-2+\sqrt{3})+(-2-\sqrt{3})=-4$ 답 ③

0783 방정식 $x^4-4x^3+2x^2-4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-4x+2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, $x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-4X=0, \quad X(X-4)=0$

$\therefore X=0$ 또는 $X=4$

(i) $X=0$일 때, $x+\frac{1}{x}=0$에서

$x^2+1=0, \quad x^2=-1 \quad \therefore x=\pm i$

(ii) $X=4$일 때, $x+\frac{1}{x}=4$에서

$x^2-4x+1=0 \quad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근의 합은

$a=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

두 허근의 곱은 $\quad b=i\cdot(-i)=1$

$\therefore a+b=5$

답 5

0784 방정식 $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0, \quad x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+2X-3=0, \quad (X+3)(X-1)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=1$ ··· ❶

(i) $X=-3$일 때, $x+\frac{1}{x}=-3$에서

$x^2+3x+1=0$

이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=3^2-4\cdot1\cdot1=5>0$

즉 방정식 $x^2+3x+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ··· ❷

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$에서

$x^2-x+1=0$

이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

즉 방정식 $x^2-x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. ··· ❸

(i), (ii)에서 α는 방정식 $x^2+3x+1=0$의 한 실근이므로

$\alpha^2+3\alpha+1=0$

$\therefore \alpha^2+3\alpha=-1$ ··· ❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ $x+\frac{1}{x}=X$로 놓고 X에 대한 이차방정식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❷ $X=-3$일 때 근을 판별할 수 있다.	20 %
❸ $X=1$일 때 근을 판별할 수 있다.	20 %
❹ $\alpha^2+3\alpha$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0785 $2x^3+kx^2+(k-2)x+2=0$의 한 근이 1이므로

$2+k+(k-2)+2=0$

$2+2k=0 \quad \therefore k=-1$

즉 주어진 방정식은

$2x^3-x^2-3x+2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ & & 2 & 1 & -2 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-1)(2x^2+x-2)=0$

이때 α, β는 방정식 $2x^2+x-2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{1}{2}$

답 ④

0786 $x^3+ax^2+bx+10=0$의 한 근이 $\sqrt{2}$이므로

$(\sqrt{2})^3+a(\sqrt{2})^2+b\sqrt{2}+10=0$

$2\sqrt{2}+2a+b\sqrt{2}+10=0$

$(2a+10)+(2+b)\sqrt{2}=0$

a, b가 유리수이므로 $\quad 2a+10=0$, $2+b=0$

따라서 $a=-5$, $b=-2$이므로

$a+b=-7$

답 -7

라쎈 특강

a, b가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때,

$a+b\sqrt{m}=0 \Leftrightarrow a=0, b=0$

0787 방정식 $3x^3-ax^2+x+b=0$의 두 근이 -1, 2이므로

$-3-a-1+b=0$에서 $\quad a-b=-4$ ······ ㉠

$24-4a+2+b=0$에서 $\quad 4a-b=26$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=10$, $b=14$

즉 주어진 방정식은 $3x^3-10x^2+x+14=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & -10 & 1 & 14 \\ & & -3 & 13 & -14 \\ \hline 2 & 3 & -13 & 14 & \boxed{0} \\ & & 6 & -14 & \\ \hline & 3 & -7 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore (x+1)(x-2)(3x-7)=0$

따라서 나머지 한 근은 $\frac{7}{3}$이므로 $\quad \alpha=\frac{7}{3}$

$\therefore \frac{ab}{\alpha}=10\cdot14\cdot\frac{3}{7}=60$

답 ③

0788 방정식 $x^4+ax^3+5x^2-ax+b=0$의 두 근이 2, 3이므로

$16+8a+20-2a+b=0$에서 $\quad 6a+b=-36$ ······ ㉠

$81+27a+45-3a+b=0$에서 $\quad 24a+b=-126$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-5$, $b=-6$ ··· ❶

즉 주어진 방정식은 $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ & & 2 & -6 & -2 & 6 \\ \hline 3 & 1 & -3 & -1 & 3 & \boxed{0} \\ & & 3 & 0 & -3 & \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore (x-2)(x-3)(x^2-1)=0$ ··· ❷

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 방정식 $x^2-1=0$의 근이므로 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$ ⋯ ❸

답 $-1,\ 1$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40 %
❸ 나머지 두 근을 구할 수 있다.	20 %

0789 $P(x)=x^3-3x^2+(k-4)x+k$로 놓으면

$P(-1)=-1-3-(k-4)+k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & k-4 & k \\ & & -1 & 4 & -k \\ \hline & 1 & -4 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2-4x+k)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2-4x+k)=0$

이 방정식의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-4x+k=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-k\geq 0$

$\therefore k\leq 4$

답 ④

0790 $x^3+x^2+kx+k=0$에서 $\quad x^2(x+1)+k(x+1)=0$

$\therefore (x^2+k)(x+1)=0$ ⋯ ❶

이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+k=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=0^2-4\cdot 1\cdot k<0 \qquad \therefore k>0$ ⋯ ❷

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	30 %
❷ 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0791 $P(x)=x^3-(1+3k)x+3k$로 놓으면

$P(1)=1-(1+3k)+3k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -(1+3k) & 3k \\ & & 1 & 1 & -3k \\ \hline & 1 & 1 & -3k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+x-3k)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+x-3k)=0$

이 방정식이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+x-3k=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때,

$1+1-3k=0 \qquad \therefore k=\dfrac{2}{3}$

(ii) 방정식 $x^2+x-3k=0$이 중근을 가질 때,

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot 1\cdot(-3k)=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{1}{12}$

(i), (ii)에서 모든 k의 값의 합은

$\dfrac{2}{3}+\left(-\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{7}{12}$

답 ④

0792 방정식 $(x-2)(x^2-4kx+3k+1)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$이 $x=2$를 근으로 가질 때,

$4-8k+3k+1=0 \qquad \therefore k=1$

그런데 $k=1$이면 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-4x+4)=0$, 즉 $(x-2)^3=0$이므로 서로 같은 세 실근을 갖는다.

$\therefore k\neq 1$

(ii) 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$이 중근을 가질 때,

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-(3k+1)=0$

$4k^2-3k-1=0, \qquad (4k+1)(k-1)=0$

$\therefore k=-\dfrac{1}{4}$ 또는 $k=1$

(i), (ii)에서 $\qquad k=-\dfrac{1}{4}$

답 ②

라쎈 특강

삼차방정식 $(x-2)(x^2-4kx+3k+1)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$이 2와 2가 아닌 실근을 갖는 경우와 2가 아닌 중근을 갖는 경우이다. (i)에서 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$이 $x=2$를 근으로 가지면 다른 한 근도 2이므로 주어진 삼차방정식은 서로 같은 세 실근을 갖는다. 따라서 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$은 2가 아닌 중근을 가져야 한다.

0793 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$(x+1)(x+2)\cdot\dfrac{1}{2}x=\dfrac{3}{2}x^3$

$2x^3-3x^2-2x=0, \qquad x(2x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

그런데 $\underline{x>0}$이므로 $\qquad x=2$ 길이는 양수이어야 한다.

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 2 cm이다.

답 ①

0794 $\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 6^2\cdot 9=\pi\cdot r^2\cdot(r-3)$이므로

$r^3-3r^2-108=0$ ⋯ ❶

$P(r)=r^3-3r^2-108$로 놓으면

$P(6)=216-108-108=0$

조립제법을 이용하여 $P(r)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & 1 & -3 & 0 & -108 \\ & & 6 & 18 & 108 \\ \hline & 1 & 3 & 18 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(r)=(r-6)(r^2+3r+18)$

따라서 방정식은

$(r-6)(r^2+3r+18)=0$

$\therefore r=6$ ($\because \underline{r^2+3r+18>0}$) ⋯ ❷

$r^2+3r+18=\left(r+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{63}{4}>0$

답 6

채점 기준	비율
❶ 삼차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ r의 값을 구할 수 있다.	60 %

0795 처음 3개의 구의 반지름의 길이를 각각 $(x-1)$ cm, x cm, $(x+1)$ cm라 하면 새로 만든 구의 반지름의 길이는 $(x+2)$ cm이므로

$\frac{4}{3}\pi(x-1)^3+\frac{4}{3}\pi x^3+\frac{4}{3}\pi(x+1)^3=\frac{4}{3}\pi(x+2)^3$

$(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=(x+2)^3$

$\therefore x^3-3x^2-3x-4=0$

$P(x)=x^3-3x^2-3x-4$로 놓으면

$P(4)=64-48-12-4=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -3 & -3 & -4 \\ & & 4 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x-4)(x^2+x+1)$

즉 방정식은

$(x-4)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=4$ $(\because \underline{x^2+x+1>0})$ $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

따라서 새로 만든 구의 반지름의 길이는 $4+2=6$ (cm)이다.

답 ③

0796 $S=18x^2$, $V=4x^3$이므로 $S=V-50$에서

$18x^2=4x^3-50$, $\quad 2x^3-9x^2-25=0$

$P(x)=2x^3-9x^2-25$로 놓으면

$P(5)=250-225-25=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 2 & -9 & 0 & -25 \\ & & 10 & 5 & 25 \\ \hline & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x-5)(2x^2+x+5)$

따라서 방정식은

$(x-5)(2x^2+x+5)=0$

$\therefore x=5$ $(\because \underline{2x^2+x+5>0})$ $2x^2+x+5=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{8}>0$

답 ④

0797 삼차방정식 $x^3+2x^2-5x+3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5$, $\alpha\beta\gamma=-3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-2)^2-2\cdot(-5)=14$

답 ④

0798 삼차방정식 $x^3+3x-5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=5$ ··· ❶

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-0+3-5=-1$ ··· ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

0799 삼차방정식 $x^3-x^2+4x-6=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=6$

$\therefore \frac{3}{\alpha}+\frac{3}{\beta}+\frac{3}{\gamma}=\frac{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3\cdot4}{6}=2$

답 2

0800 $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=2$에서

$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2$ ······ ㉠

이때 삼차방정식 $x^3-ax^2+8x+5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=a$, $\alpha\beta\gamma=-5$

따라서 ㉠에서 $\frac{a}{-5}=2$이므로

$a=-10$

답 ①

0801 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근을 α, β, 삼차방정식 $x^3-3x^2+bx-4=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면 이차방정식과 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha+\beta+\gamma=3$

이므로 $\quad \gamma=1$

또 $\alpha\beta=a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=4$이므로

$\underline{a+2=b}$, $a=4$ $\quad \therefore a=4$, $b=6$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$에서 $\alpha+\beta+a=b$ $\therefore a+2=b$

$\therefore a+b=10$

답 10

0802 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, $3\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+3\alpha=12$, $\quad 6\alpha=12$ $\quad \therefore \alpha=2$

따라서 세 근이 2, 4, 6이므로

$2\cdot4+4\cdot6+6\cdot2=a$, $2\cdot4\cdot6=-b$ $\quad \therefore a=44$, $b=-48$

$\therefore a+b=-4$

답 ④

0803 주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha-1$, α, $\alpha+1$(α는 정수)이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+\alpha+(\alpha+1)=3$, $\quad 3\alpha=3$ $\quad \therefore \alpha=1$

따라서 세 근이 0, 1, 2이므로 ··· ❶

$0\cdot1+1\cdot2+2\cdot0=a$, $0\cdot1\cdot2=-b$ $\quad \therefore a=2$, $b=0$ ··· ❷

$\therefore a-b=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 삼차방정식의 세 근을 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0804 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, $-\alpha$, $\beta(\alpha>0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)+\beta=1$, $\alpha\cdot(-\alpha)\cdot\beta=-16$

$\therefore \alpha=4$, $\beta=1$

따라서 세 근이 -4, 1, 4이므로

$k=-4\cdot1+1\cdot4+4\cdot(-4)=-16$

답 ③

0805 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=-1$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{-1}=-2,$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{-1}=-3,$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $\quad x^3+2x^2-3x+1=0$

답 ④

0806 삼차방정식 $x^3-2x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=-1$$

$$\therefore (\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\gamma+3=3,$$

$$\begin{aligned}&(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)\\&=\alpha\beta+\alpha+\beta+1+\beta\gamma+\beta+\gamma+1+\gamma\alpha+\gamma+\alpha+1\\&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3\\&=-2+2\cdot0+3=1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\\&=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1\\&=-1+(-2)+0+1=-2\end{aligned}$$

따라서 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-3x^2+x+2=0$$

답 $x^3-3x^2+x+2=0$

0807 삼차방정식 $2x^3-5x^2+4x+4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{2},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=-2$$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta&=\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma\\&=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\\&=-2\cdot\frac{5}{2}=-5,\end{aligned}$$

$$\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=(-2)^2=4$$

따라서 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-2x^2-5x-4=0$$

답 $x^3-2x^2-5x-4=0$

0808 $P(1)=P(2)=P(3)=1$이므로

$$P(1)-1=0,\ P(2)-1=0,\ P(3)-1=0$$

즉 삼차방정식 $P(x)-1=0$의 세 근이 1, 2, 3이다. ⋯ ❶

1, 2, 3을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-(1+2+3)x^2+(1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1)x-1\cdot2\cdot3=0$$

$$\therefore x^3-6x^2+11x-6=0 \quad ⋯ ❷$$

즉 $P(x)-1=x^3-6x^2+11x-6$이므로

$$P(x)=x^3-6x^2+11x-5 \quad ⋯ ❸$$

$$\therefore P(-1)=-1-6-11-5=-23 \quad ⋯ ❹$$

답 -23

채점 기준	비율
❶ 방정식 $P(x)-1=0$의 세 근을 구할 수 있다.	30 %
❷ 1, 2, 3을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $P(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❹ $P(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0809 a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 $1+\sqrt{2}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a \quad ⋯⋯ ㉠$$

$$\alpha(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+\alpha(1-\sqrt{2})=b \quad ⋯⋯ ㉡$$

$$\alpha(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-2 \quad ⋯⋯ ㉢$$

㉢에서 $\quad \alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉠, ㉡에 대입하면 $\quad a=-4,\ b=3$

$$\therefore ab=-12$$

답 -12

참고 주어진 방정식에 $x=1-\sqrt{2}$를 대입한 후 무리수가 서로 같을 조건을 이용하여 유리수 a, b의 값을 구할 수도 있다.

0810 a가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $3+2\sqrt{2}$이므로 $3-2\sqrt{2}$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 α, $3+2\sqrt{2}$, $3-2\sqrt{2}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=a,$$

$$\alpha(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=-2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=4,\ \alpha=-2$$

$$\therefore a\alpha=-8$$

답 -8

0811 $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수)라 하면 방정식 $P(x)=0$의 한 근이 $2+i$이므로 $2-i$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 -1, $2+i$, $2-i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+(2+i)+(2-i)=-a,$$

$$-1\cdot(2+i)+(2+i)(2-i)+(2-i)\cdot(-1)=b,$$

$$-1\cdot(2+i)(2-i)=-c$$

$$\therefore a=-3,\ b=1,\ c=5$$

따라서 $P(x)=x^3-3x^2+x+5$이므로

$$P(1)=1-3+1+5=4$$

답 ①

0812 조건 (가)에서 $P(x)$는 $x-4$를 인수로 가지므로 4는 방정식 $P(x)=0$의 한 근이다.

조건 (나)에서 방정식 $P(x)=0$의 한 근이 $6i$이고 계수가 모두 실수이므로 $-6i$도 근이다.

즉 방정식 $P(x)=0$의 세 근이 4, $6i$, $-6i$이므로

$$P(x)=(x-4)(x-6i)(x+6i) \quad ⋯ ❶$$

$$\begin{aligned}\therefore P(2x)&=(2x-4)(2x-6i)(2x+6i)\\&=8(x-2)(x-3i)(x+3i)\end{aligned}$$

방정식 $P(2x)=0$에서

$$8(x-2)(x-3i)(x+3i)=0$$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3i$ 또는 $x=-3i$ ⋯ ❷

따라서 모든 근의 곱은

$2\cdot 3i\cdot(-3i)=18$ ⋯ ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ 삼차식 $P(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 방정식 $P(2x)=0$의 근을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 근의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0813 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

따라서 $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$이므로

$$\frac{\omega^{10}+1}{\omega^2}=\frac{(\omega^3)^3\cdot\omega+1}{\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$$

답 -1

0814 ㄱ. $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다. $\therefore \omega^2+\omega+1=0$

ㄴ, ㄷ. ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄹ. $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2=-\omega-1$이고, $\omega+\overline{\omega}=-1$에서 $\overline{\omega}=-\omega-1$이므로 $\omega^2=\overline{\omega}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

0815 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.

따라서 $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$$\frac{\omega^2}{1-\omega}+\frac{\omega}{1+\omega^2}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}+\frac{\omega}{\omega}=0$$

답 ③

0816 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.

따라서 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$이므로 ⋯ ❶

$$\begin{aligned}&\omega^6-\omega^5+\omega^4-\omega^3+\omega^2-\omega+1\\&=(\omega^3)^2-\omega^3\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega-\omega^3+\omega^2-\omega+1\\&=1+\omega^2-\omega+1+\omega^2-\omega+1\\&=2(\omega^2-\omega+1)+1=1\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$임을 알 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

0817 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\omega}{\omega+1}+\frac{\overline{\omega}}{\overline{\omega}+1}&=\frac{\omega(\overline{\omega}+1)+\overline{\omega}(\omega+1)}{(\omega+1)(\overline{\omega}+1)}\\&=\frac{2\omega\overline{\omega}+\omega+\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}\\&=\frac{2\cdot1-1}{1-1+1}=1\end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$이므로

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{\omega+1}+\frac{\overline{\omega}}{\overline{\omega}+1}&=\frac{\omega}{-\overline{\omega}}+\frac{\overline{\omega}}{-\omega}=-\frac{\omega^2+\overline{\omega}^2}{\omega\overline{\omega}}\\&=-\frac{(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}}\\&=-\frac{(-1)^2-2\cdot1}{1}=1\end{aligned}$$

0818 $\begin{cases}x-y=1 & \cdots\cdots ㉠\\(x-1)^2+y^2=8 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=x-1$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2(x-1)^2=8$, $(x-1)^2=4$

$x-1=\pm2$ $\therefore x=3$ 또는 $x=-1$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=3$, $y=2$ 또는 $x=-1$, $y=-2$

따라서 $\underbrace{\alpha=3,\ \beta=2}_{\alpha>0,\ \beta>0}$이므로 $\alpha+\beta=5$

답 ③

0819 $\begin{cases}y=x+1 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=13$, $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

이것을 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-3$, $y=-2$ 또는 $x=2$, $y=3$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=-2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=3$이므로

$\alpha\beta=6$

답 ②

0820 $x=-1$, $y=1$을 $\begin{cases}x-y=a\\x^2-xy+2y^2=b\end{cases}$에 대입하면

$a=-2$, $b=4$

$\therefore \begin{cases}x-y=-2 & \cdots\cdots ㉠\\x^2-xy+2y^2=4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=x+2$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(x+2)+2(x+2)^2=4$, $x^2+3x+2=0$

$(x+2)(x+1)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

$x=-2$를 ㉢에 대입하면 $y=0$

따라서 나머지 한 근은 $\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$

답 $\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$

0821 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases}x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠\\x^2-3y^2=-2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $x=1-2y$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(1-2y)^2-3y^2=-2$, $y^2-4y+3=0$

$(y-1)(y-3)=0$ $\therefore y=1$ 또는 $y=3$

이것을 ㉢에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$x=-1$, $y=1$ 또는 $x=-5$, $y=3$ ⋯ ❶

06 여러 가지 방정식

(i) $x=-1$, $y=1$을 $x^2+ay^2=7$, $-4x+by=8$에 대입하면

$a=6$, $b=4$

(ii) $x=-5$, $y=3$을 $x^2+ay^2=7$, $-4x+by=8$에 대입하면

$a=-2$, $b=-4$

(i), (ii)에서 a, b는 자연수이므로 $a=6$, $b=4$ ⋯ ❷

$\therefore ab=24$ ⋯ ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ 두 연립방정식의 공통인 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 자연수 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0822 $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+2y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=x$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+2x^2=4$, $x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$, $y=\mp\sqrt{2}$ (복호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+2x^2=4$, $x^2=1$

$\therefore x=\pm1$, $y=\pm1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$의 값은 $\alpha=-1$, $\beta=-1$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은 $-1+(-1)=-2$

답 -2

0823 $\begin{cases} 4x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-xy+y^2=16 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(2x+y)(2x-y)=0$

$\therefore y=-2x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2+2x^2+4x^2=16$, $x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$, $y=\mp2\sqrt{2}$ (복호동순)

(ii) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2-2x^2+4x^2=16$, $x^2=4$

$\therefore x=\pm2$, $y=\pm4$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)는

$(\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(2, 4)$, $(-2, -4)$

답 $(\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(2, 4)$, $(-2, -4)$

0824 $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+2y)(x-y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2-2y^2+y^2=3$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm1$, $x=\mp2$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2+y^2=3$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm1$, $x=\pm1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha\beta$의 값은 -2, 1이다.

답 -2, 1

0825 $\begin{cases} x^2-y^2+x+y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)+(x+y)=0$

$(x+y)(x-y+1)=0$ $\therefore y=-x$ 또는 $y=x+1$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+2x^2=1$, $x^2=\frac{1}{4}$

$\therefore x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\mp\frac{1}{2}$ (복호동순)

(ii) $y=x+1$을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(x+1)+2(x+1)^2=1$, $2x^2+3x+1=0$

$(x+1)(2x+1)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

(i), (ii)에서 x, y는 정수이므로 $x=-1$, $y=0$

$\therefore x^2+y^2=1$

답 ①

0826 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} \underline{u^2-2v}=34 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2-30=34$, $u^2=64$ $\therefore u=\pm8$

(i) $u=8$, $v=15$, 즉 $x+y=8$, $xy=15$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-8t+15=0$의 두 근이므로

$(t-3)(t-5)=0$ $\therefore t=3$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

(ii) $u=-8$, $v=15$, 즉 $x+y=-8$, $xy=15$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2+8t+15=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t+5)=0$ $\therefore t=-3$ 또는 $t=-5$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)는

$(-5, -3)$, $(-3, -5)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$

답 $(-5, -3)$, $(-3, -5)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$

0827 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u-v=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ \underline{u^2-4v}=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x^2-2xy+y^2=(x+y)^2-4xy$

㉠에서 $v=u+1$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$u^2-4u-5=0$, $(u+1)(u-5)=0$

$\therefore u=-1$ 또는 $u=5$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=-1$, $v=0$ 또는 $u=5$, $v=6$

(i) $u=-1$, $v=0$, 즉 $x+y=-1$, $xy=0$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2+t=0$의 두 근이므로

$t(t+1)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=-1$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

(ii) $u=5$, $v=6$, 즉 $x+y=5$, $xy=6$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로

$$(t-2)(t-3)=0 \qquad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=3$$

$$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{또는} \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

(i), (ii)에서 x^2-y^2의 값은 $x=3$, $y=2$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은 $3^2-2^2=5$ 답 ⑤

0828 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2+u-2v=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $v=u^2-1$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$u^2-u=0, \qquad u(u-1)=0$$

$$\therefore u=0 \text{ 또는 } u=1$$

이것을 ㉢에 대입하면

$$u=0,\ v=-1 \text{ 또는 } u=1,\ v=0$$

(i) $u=0$, $v=-1$, 즉 $x+y=0$, $xy=-1$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이므로

$$(t+1)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1$$

$$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \text{또는} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

(ii) $u=1$, $v=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이므로

$$t(t-1)=0 \qquad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=1$$

$$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{또는} \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

(i), (ii)에서 $2x+y$의 값은 $x=-1$, $y=1$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은 $2\cdot(-1)+1=-1$ 답 ③

0829 $\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=-x+k$

이것을 ㉠에 대입하면 $x^2+(-x+k)^2=10$

$$\therefore 2x^2-2kx+k^2-10=0$$

이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-10)=0$$

$$k^2-2k^2+20=0, \qquad k^2=20 \qquad \therefore k=\pm2\sqrt{5}$$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$$2\sqrt{5}\cdot(-2\sqrt{5})=-20$$ 답 ②

0830 $\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=5-x$

이것을 ㉡에 대입하면

$$x^2-x(5-x)+k=0 \qquad \therefore 2x^2-5x+k=0$$ ··· ❶

이를 만족시키는 실수 x의 값이 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(-5)^2-4\cdot2\cdot k\ge0 \qquad \therefore k\le\frac{25}{8}$$ ··· ❷

따라서 자연수 k는 1, 2, 3이므로 그 합은

$$1+2+3=6$$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ x에 대한 이차방정식으로 변형할 수 있다.	30 %
❷ 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0831 주어진 연립방정식을 만족시키는 x, y는 이차방정식 $t^2-(2a-1)t+a^2+a+4=0$의 두 근이다. 따라서 이 이차방정식이 실근을 갖지 않아야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(2a-1)\}^2-4(a^2+a+4)<0$$

$$-8a-15<0 \qquad \therefore a>-\frac{15}{8}$$

따라서 정수 a의 최솟값은 -1이다. 답 ③

0832 처음 땅의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=13^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-2)(y+2)=xy-18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $xy+2x-2y-4=xy-18$

$$\therefore y=x+7 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$x^2+(x+7)^2=169, \qquad x^2+7x-60=0$$

$$(x+12)(x-5)=0 \qquad \therefore x=-12 \text{ 또는 } x=5$$

그런데 $x>2$이므로 $x=5$

$x=5$를 ㉢에 대입하면 $y=12$

따라서 처음 땅의 넓이는 $xy=5\cdot12=60\ (\text{m}^2)$ 답 $60\ \text{m}^2$

0833 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=58 & \cdots\cdots ㉠ \\ (10y+x)+(10x+y)=110 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $y=10-x$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$$x^2+(10-x)^2=58, \qquad x^2-10x+21=0$$

$$(x-3)(x-7)=0 \qquad \therefore x=3 \text{ 또는 } x=7$$

$x=3$을 ㉢에 대입하면 $y=7$

$x=7$을 ㉢에 대입하면 $y=3$

그런데 $x>y$이므로 $x=7$, $y=3$

따라서 처음 수는 73이다. 답 73

0834 $\overline{PA}=x$, $\overline{PB}=y$라 하면 $\angle APB=90°$이므로

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

$$\begin{cases} x+y=14 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=14-x$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$$x^2+(14-x)^2=100, \qquad x^2-14x+48=0$$

$$(x-6)(x-8)=0 \qquad \therefore x=6 \text{ 또는 } x=8$$

$x=6$을 ㉢에 대입하면 $y=8$

$x=8$을 ㉢에 대입하면 $y=6$

$$\therefore \triangle PAB=\frac{1}{2}\cdot6\cdot8=24$$ 답 ⑤

0835 마름모의 넓이가 96 cm^2이므로

$$\frac{1}{2}ab=96 \qquad \therefore ab=192 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 마름모의 한 변의 길이가 10 cm이고 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}b\right)^2=10^2 \qquad \therefore a^2+b^2=400 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 $(a+b)^2-2ab=400$이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$$(a+b)^2-2\cdot192=400, \qquad (a+b)^2=784$$

$$\therefore a+b=28\ (\because a>0,\ b>0) \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢에서 $b=28-a$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$a(28-a)=192, \qquad a^2-28a+192=0$$

$$(a-12)(a-16)=0 \qquad \therefore a=12 \text{ 또는 } a=16$$

$a=12$를 ㉢에 대입하면 $\quad b=16$

$a=16$을 ㉢에 대입하면 $\quad b=12$

그런데 $a>b$이므로 $\quad a=16,\ b=12$

$$\therefore 2a-b=20$$

답 ④

0836 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=15^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 10(x+1)(y+1)=10xy+220 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases} \quad \cdots ❶$$

㉡에서 $\quad xy+x+y+1=xy+22$

$$\therefore y=21-x \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$x^2+(21-x)^2=225, \qquad x^2-21x+108=0$$

$$(x-9)(x-12)=0 \qquad \therefore x=9 \text{ 또는 } x=12$$

$x=9$를 ㉢에 대입하면 $\quad y=12$

$x=12$를 ㉢에 대입하면 $\quad y=9$

그런데 $x>y$이므로 $\quad x=12,\ y=9$ $\cdots$ ❷

따라서 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이는 12 cm이다. $\cdots$ ❸

답 12 cm

채점 기준	비율
❶ 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하고 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 구할 수 있다.	10 %

0837 **전략** 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$이라 하면

$$P(1)=1-5+5+5-6=0,$$

$$P(-1)=1+5+5-5-6=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ & & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline -1 & 1 & -4 & 1 & 6 & \boxed{0} \\ & & -1 & 5 & -6 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(x)&=(x-1)(x+1)(x^2-5x+6) \\ &=(x-1)(x+1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

즉 주어진 방정식은

$$(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=3$이므로 $\quad \beta-\alpha=4$

답 ④

0838 **전략** 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^3+x^2+x-3$이라 하면

$$P(1)=1+1+1-3=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$P(x)=(x-1)(x^2+2x+3)$$

즉 주어진 방정식은

$$(x-1)(x^2+2x+3)=0$$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=1^2-3=-2<0$ 이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=3$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha-1)(\beta-1)&=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1 \\ &=3-(-2)+1=6 \end{aligned}$$

답 ①

0839 **전략** $A^2-B^2=0$ 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

풀이 $x^4+6x^2+25=0$에서

$$(x^4+10x^2+25)-4x^2=0, \qquad (x^2+5)^2-(2x)^2=0$$

$$\therefore (x^2+2x+5)(x^2-2x+5)=0$$

방정식 $x^2+2x+5=0$의 두 근을 α, $\overline{\alpha}$, 방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 β, $\overline{\beta}$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\overline{\alpha}=5,\ \beta\overline{\beta}=5 \qquad \therefore \alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=10$$

답 10

0840 **전략** 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나눈 후 $x+\frac{1}{x}=X$로 치환하여 인수분해한다.

풀이 방정식 $2x^4-x^3-6x^2-x+2=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$2x^2-x-6-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$$2X^2-X-10=0, \qquad (X+2)(2X-5)=0$$

$$\therefore X=-2 \text{ 또는 } X=\frac{5}{2}$$

(i) $X=-2$일 때, $x+\frac{1}{x}=-2$에서

$$x^2+2x+1=0, \qquad (x+1)^2=0 \qquad \therefore x=-1$$

(ii) $X=\frac{5}{2}$일 때, $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$에서

$$2x^2-5x+2=0, \qquad (2x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=2$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 양수인 근은 $\frac{1}{2}$, 2이므로 그 합은

$$\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

0841 전략 공통부분이 나오도록 묶어서 전개한 후 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $(x^2-4x+3)(x^2-6x+8)=120$에서

$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)=120$

$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}=120$

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$

$x^2-5x=X$로 놓으면 $\quad (X+4)(X+6)=120$

$X^2+10X-96=0, \quad (X-6)(X+16)=0$

$(x^2-5x-6)(x^2-5x+16)=0$

$(x+1)(x-6)(x^2-5x+16)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2-5x+16=0$의 한 허근이므로

$\omega^2-5\omega+16=0$

판별식을 D라 하면 $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot16=-39<0$이므로 이 이차방정식은 허근을 갖는다.

$\therefore \omega^2-5\omega=-16$

답 ①

0842 전략 사차방정식 $P(x)=0$의 두 근이 α, β이면 $P(\alpha)=0$, $P(\beta)=0$임을 이용한다.

풀이 주어진 방정식의 두 근이 -1, 2이므로

$1+2+a+1+b=0$에서 $\quad a+b=-4 \quad \cdots\cdots ㉠$

$16-16+4a-2+b=0$에서 $\quad 4a+b=2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=-6$

$\therefore a-b=8$

답 ⑤

0843 전략 삼차방정식 $P(x)=0$이 중근 α를 가지면 $P(\alpha)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^3+ax^2-3x+b$로 놓으면 $P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	a	-3	b
		1	$a+1$	$a-2$
	1	$a+1$	$a-2$	$a+b-2$

$\therefore P(x)=(x-1)\{x^2+(a+1)x+a-2\}$

이때 방정식 $P(x)=0$이 중근 1을 가지므로 방정식 $x^2+(a+1)x+a-2=0$의 한 근이 1이다.

즉 $1+a+1+a-2=0$이므로 $\quad a=0$

또 $a+b-2=0$이므로 $\quad b=2$

따라서 $P(x)=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)$이므로 방정식 $P(x)=0$의 나머지 한 근은 $\alpha=-2$이다.

$\therefore \alpha+a-b=-4$

답 -4

다른 풀이 삼차방정식 $x^3+ax^2-3x+b=0$의 세 근이 1, 1, α이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+1+\alpha=-a,\ 1\cdot1+1\cdot\alpha+\alpha\cdot1=-3,\ 1\cdot1\cdot\alpha=-b$

$\therefore \alpha=-2,\ a=0,\ b=2$

$\therefore \alpha+a-b=-4$

0844 전략 $f(a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해한다.

풀이 $f(a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

a	1	$-(a+4)$	$4a-5$	$5a$
		a	$-4a$	$-5a$
	1	-4	-5	0

$\therefore f(x)=(x-a)(x^2-4x-5)$

$=(x-a)(x+1)(x-5)$

$f(x)=0$에서

$x=a$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=5$

한편 $f(a+3)=0$에서 $a+3$은 방정식 $f(x)=0$의 근이므로

$a+3=-1$ 또는 $a+3=5$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

따라서 실수 a의 값의 합은

$-4+2=-2$

답 ②

0845 전략 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^3-(4+a)x^2+5ax-a^2$으로 놓으면

$P(a)=a^3-4a^2-a^3+5a^2-a^2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

a	1	$-4-a$	$5a$	$-a^2$
		a	$-4a$	a^2
	1	-4	a	0

$\therefore P(x)=(x-a)(x^2-4x+a)$

즉 주어진 방정식은

$(x-a)(x^2-4x+a)=0$

이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a>0 \quad \therefore a<4 \quad \cdots\cdots ㉠$

한편 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 $x=a$를 근으로 갖지 않아야 하므로

$a^2-4a+a\neq0, \quad a^2-3a\neq0$

$a(a-3)\neq0 \quad \therefore a\neq0,\ a\neq3 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 자연수 a는 1, 2의 2개이다.

답 ②

0846 전략 상자의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 x에 대한 식으로 나타내어 방정식을 세운다.

풀이 상자의 밑면의 가로의 길이는 $(40-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(30-2x)$ cm이므로

$(40-2x)(30-2x)x=3000$

$x(x-20)(x-15)=750$

$\therefore x^3-35x^2+300x-750=0$

$P(x)=x^3-35x^2+300x-750$으로 놓으면

$P(5)=125-875+1500-750=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

5	1	-35	300	-750
		5	-150	750
	1	-30	150	0

$\therefore P(x)=(x-5)(x^2-30x+150)$

따라서 방정식은

$(x-5)(x^2-30x+150)=0$

그런데 x는 자연수이므로 $\quad x=5$

답 5

06 여러 가지 방정식

0847 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 삼차방정식 $x^3-x^2+4x-3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=3$

$$\therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$$

$$=\frac{1-\alpha}{\alpha}+\frac{1-\beta}{\beta}+\frac{1-\gamma}{\gamma}$$

$$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-3$$

$$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}-3$$

$$=\frac{4}{3}-3=-\frac{5}{3}$$

답 ③

0848 전략 세 수 a, b, c를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$이다.

풀이 삼차방정식 $x^3+3x^2-x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=2$

$\therefore (-\alpha)+(-\beta)+(-\gamma)=-(\alpha+\beta+\gamma)=3$,

$(-\alpha)\cdot(-\beta)+(-\beta)\cdot(-\gamma)+(-\gamma)\cdot(-\alpha)$

$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$,

$(-\alpha)\cdot(-\beta)\cdot(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-2$

따라서 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-3x^2-x+2=0$

답 ②

0849 전략 주어진 방정식의 한 근이 1임을 이용하여 좌변을 인수분해한다.

풀이 주어진 방정식의 한 근이 1이므로 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

1	1	-3	$k+2$	$-k$
		1	-2	k
	1	-2	k	0

$(x-1)(x^2-2x+k)=0$

이 방정식의 서로 다른 세 실근이 1, α, β이므로 α, β는 이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 서로 다른 두 실근이다.

즉 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$ …… ㉠

$\alpha\beta=k$ …… ㉡

한편 1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이이고 $\alpha<1<\beta$이므로

$\alpha^2+1=\beta^2$, $\alpha^2-\beta^2=-1$

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-1$, $2(\alpha-\beta)=-1$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \alpha-\beta=-\frac{1}{2}$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=\frac{3}{4}$, $\beta=\frac{5}{4}$

따라서 ㉡에서 $k=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{16}$

$\therefore 16k=15$

답 15

0850 전략 계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1+\sqrt{3}i$이면 $1-\sqrt{3}i$도 근임을 이용한다.

풀이 방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $1+\sqrt{3}i$이므로 $1-\sqrt{3}i$도 근이다.

이때 $(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)\neq2$이므로 $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$는 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 두 근이 될 수 없다.

이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 두 근을 m, n이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$m+n=-a$, $mn=2$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)+m=2+m$

따라서 $m+n=2+m$이므로 $n=2$

$mn=2$에서 $m=1$

답 ②

0851 전략 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 ω이면 $\overline{\omega}$도 이 방정식의 허근임을 이용한다.

풀이 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 허근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$$\therefore \omega+\frac{1}{\omega}+\overline{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}=(\omega+\overline{\omega})+\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}\right)$$

$$=(\omega+\overline{\omega})+\frac{\omega+\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}}$$

$$=1+\frac{1}{1}=2$$

답 2

0852 전략 방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이면 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 이용한다.

풀이 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이다. 즉 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$

ㄴ. $\omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}=(-1)^2-2\cdot1=-1$

한편 ω, $\overline{\omega}$가 $x^3=1$의 근이므로

$\omega^3=\overline{\omega}^3=1$ $\therefore \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

$\therefore \omega^2+\overline{\omega}^2\neq\omega^3+\overline{\omega}^3$

ㄷ. $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{40}$

$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{36}(1+\omega+\omega^2)$

$+(\omega^3)^{13}+(\omega^3)^{13}\cdot\omega$

$=1+\omega$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ②

0853 전략 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입한다.

풀이 $\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3y^2=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+2$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(y+2)^2+3y^2=12$, $y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$ $\therefore y=-2$ 또는 $y=1$

이것을 ㉢에 대입하면 연립방정식의 해는

$x=0,\ y=-2$ 또는 $x=3,\ y=1$

따라서 $\underbrace{\alpha=3,\ \beta=1}_{\alpha>0,\ \beta>0}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=10$ 답 10

0854 전략 인수분해가 되는 이차방정식에서 이차식을 두 일차식의 곱으로 인수분해한다.

풀이 $\begin{cases} x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2+y^2=4xy & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $4x^2-4xy+y^2=0,\quad (2x-y)^2=0$

$\therefore y=2x$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+4x^2=40,\quad x^2=8 \quad \therefore x=\pm2\sqrt{2}$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=\pm2\sqrt{2},\ y=\pm4\sqrt{2}$ (복호동순)

$\therefore \alpha\beta=16$ 답 ①

0855 전략 인수분해가 되는 이차방정식에서 이차식을 두 일차식의 곱으로 인수분해한다.

풀이 $\begin{cases} 3x^2-5xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2xy+4y^2=21 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(3x-2y)(x-y)=0$

$\therefore 3x=2y$ 또는 $x=y$

(i) $3x=2y$를 ㉡에 대입하면

$x^2-3x^2+9x^2=21,\quad x^2=3$

$\therefore x=\pm\sqrt{3},\ y=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$x^2-2x^2+4x^2=21,\quad x^2=7$

$\therefore x=\pm\sqrt{7},\ y=\pm\sqrt{7}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 xy는 $x=\pm\sqrt{7},\ y=\pm\sqrt{7}$ (복호동순)일 때 최대이므로 구하는 최댓값은 7이다. 답 7

0856 전략 두 연립방정식의 서로 같은 해는 네 방정식의 공통인 해임을 이용한다.

풀이 주어진 두 연립방정식의 서로 같은 해는 연립방정식

$\begin{cases} x+3y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 한 해이다.

㉠에서 $x=5-3y$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(5-3y)^2+y^2=5,\quad y^2-3y+2=0$

$(y-1)(y-2)=0 \quad \therefore y=1$ 또는 $y=2$

이것을 ㉢에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$x=2,\ y=1$ 또는 $x=-1,\ y=2$

(i) $x=2,\ y=1$을 $ax-y=3,\ 5x+2y=b$에 대입하여 풀면

$a=2,\ b=12$

(ii) $x=-1,\ y=2$를 $ax-y=3,\ 5x+2y=b$에 대입하여 풀면

$a=-5,\ b=-1$

(i), (ii)에서 $a,\ b$는 양수이므로 $a=2,\ b=12$

$\therefore ab=24$ 답 ⑤

0857 전략 $x+y=u,\ xy=v$로 놓고 $x,\ y$가 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용한다.

풀이 $x+y=u,\ xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u+v=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ \underline{uv}=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ $x^2y+xy^2=xy(x+y)=uv$

㉠에서 $v=7-u$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$u^2-7u+12=0,\quad (u-3)(u-4)=0$

$\therefore u=3$ 또는 $u=4$

이것을 ㉢에 대입하면 $u=3,\ v=4$ 또는 $u=4,\ v=3$

(i) $u=3,\ v=4$, 즉 $x+y=3,\ xy=4$일 때, $x,\ y$는 이차방정식 $t^2-3t+4=0$의 두 근이므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot4=-7<0$

즉 방정식 $t^2-3t+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $u=4,\ v=3$, 즉 $x+y=4,\ xy=3$일 때, $x,\ y$는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 $x>y$이므로 $x=3,\ y=1$

$\therefore x-y=2$ 답 ②

0858 전략 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입한다.

풀이 $\begin{cases} 2x-y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-5$

이것을 ㉡에 대입하면

$x^2-2(2x-5)=k$

$\therefore x^2-4x+10-k=0$ ⋯⋯ ㉢

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-(10-k)=0$

$-6+k=0 \quad \therefore k=6$

$k=6$을 ㉢에 대입하면

$x^2-4x+4=0,\quad (x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$4-y=5 \quad \therefore y=-1$

따라서 $\alpha=2,\ \beta=-1$이므로

$\alpha+\beta+k=2+(-1)+6=7$ 답 7

0859 전략 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^3-5x^2+2x+8$로 놓으면

$P(-1)=-1-5-2+8=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & 2 & 8 \\ & & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-6x+8)$

$=(x+1)(x-2)(x-4)$

즉 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x-4)=0$ ⋯ ❶

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$ ⋯ ❷

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=4$이므로

$\alpha-\beta+\gamma=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha-\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0860 전략 $x^2=X$로 치환한 후 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$4X^2-17X+4=0,\quad (4X-1)(X-4)=0$

$\therefore X=\frac{1}{4}$ 또는 $X=4$ ⋯ ❶

즉 $x^2=\frac{1}{4}$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm\frac{1}{2}$ 또는 $x=\pm2$ ⋯ ❷

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|=\left|\frac{1}{2}\right|+\left|-\frac{1}{2}\right|+|2|+|-2|$

$=5$ ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $x^2=X$로 놓고 X의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\|\alpha\|+\|\beta\|+\|\gamma\|+\|\delta\|$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0861 전략 주어진 방정식의 좌변을 $(x-\alpha)(x^2+px+q)=0$ (α는 실수) 꼴로 인수분해한 후 이차방정식 $x^2+px+q=0$이 두 개의 허근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $P(x)=x^3+(2a+1)x^2+(a^2-2a-2)x-a^2$으로 놓으면

$P(1)=1+2a+1+a^2-2a-2-a^2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2a+1 & a^2-2a-2 & -a^2 \\ & & 1 & 2a+2 & a^2 \\ \hline & 1 & 2a+2 & a^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)\{x^2+2(a+1)x+a^2\}$

즉 주어진 방정식은

$(x-1)\{x^2+2(a+1)x+a^2\}=0$ ⋯ ❶

이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2(a+1)x+a^2=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-a^2<0$

$2a+1<0 \qquad \therefore a<-\frac{1}{2}$ ⋯ ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ 판별식을 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0862 전략 x, y를 근으로 하는 이차방정식의 판별식을 이용한다.

풀이 $\begin{cases} x+y=2a & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y+xy=a^2-a+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$2a+xy=a^2-a+6$

$\therefore xy=a^2-3a+6$ ⋯⋯ ㉢ ⋯ ❶

㉠, ㉢을 만족시키는 실수 x, y는 이차방정식 $t^2-2at+a^2-3a+6=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a^2-3a+6)\geq0$

$3a-6\geq0 \qquad \therefore a\geq2$ ⋯ ❷

따라서 실수 a의 최솟값은 2이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ xy를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ x, y를 근으로 하는 이차방정식의 판별식을 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0863 전략 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 x, $y\,(x<y)$로 놓고 연립방정식을 세운다.

풀이 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 x, $y\,(x<y)$라 하면

$\begin{cases} 4x+4y=24 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ ⋯ ❶

㉠에서 $y=6-x$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(6-x)^2=20,\quad x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=4$

$x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=4$

$x=4$를 ㉢에 대입하면 $y=2$

그런데 $x<y$이므로 $x=2$, $y=4$ ⋯ ❷

따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 2이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 x, y로 놓고 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	10 %

Ⅲ. 부등식

07 일차부등식

0864 $a>b$의 양변에 2를 더하면

$a+2>b+2$ 답 $>$

0865 $a>b$의 양변에서 1을 빼면

$a-1>b-1$ 답 $>$

0866 $a>b$의 양변에 3을 곱하면

$3a>3b$ 답 $>$

0867 $a>b$의 양변에 -1을 곱하면

$-a<-b$ 답 $<$

0868 $a>b$의 양변을 3으로 나누면

$\frac{a}{3}>\frac{b}{3}$ 답 $>$

0869 $a>b$의 양변을 -2로 나누면

$-\frac{a}{2}<-\frac{b}{2}$ 답 $<$

0870 $x+1>4x-5$에서 $-3x>-6$

$\therefore x<2$ 답 $x<2$

0871 $3(x+2)<x-4$에서 $3x+6<x-4$

$2x<-10$ $\therefore x<-5$ 답 $x<-5$

0872 $-2(x+1)\leq 3(x+4)+2x$에서

$-2x-2\leq 5x+12$

$-7x\leq 14$ $\therefore x\geq -2$ 답 $x\geq -2$

0873 $0.1x-3<-0.2x-1.5$의 양변에 10을 곱하면

$x-30<-2x-15$

$3x<15$ $\therefore x<5$ 답 $x<5$

0874 $\frac{1}{2}x+7\geq 2(x-1)$의 양변에 2를 곱하면

$x+14\geq 4(x-1)$, $x+14\geq 4x-4$

$-3x\geq -18$ $\therefore x\leq 6$ 답 $x\leq 6$

0875 $\frac{x-2}{3}-\frac{x+3}{4}\geq -2$의 양변에 12를 곱하면

$4(x-2)-3(x+3)\geq -24$

$x-17\geq -24$ $\therefore x\geq -7$ 답 $x\geq -7$

0876 답 $\begin{cases} a>0\text{일 때,} & x>\frac{a+1}{a} \\ a<0\text{일 때,} & x<\frac{a+1}{a} \\ a=0\text{일 때,} & \text{해는 없다.} \end{cases}$

$>$, $<$, 없다

0877 $(a-1)x<a$에서

(i) $a>1$일 때, $x<\frac{a}{a-1}$

(ii) $a<1$일 때, $x>\frac{a}{a-1}$ 부등식의 양변을 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

(iii) $a=1$일 때, $0\cdot x<1$이므로 해는 모든 실수이다. 답 풀이 참조

0878 답 $x>4$

0879 답 $-2\leq x\leq 0$

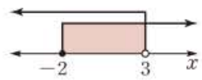
0880 답 $x\leq -5$

0881 ㉠에서 $x\geq -2$

㉡에서 $x<3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-2\leq x<3$



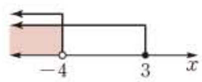
답 $-2\leq x<3$

0882 ㉠에서 $3x\leq 9$ $\therefore x\leq 3$

㉡에서 $x<-4$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x<-4$



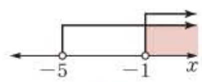
답 $x<-4$

0883 ㉠에서 $-x<1$ $\therefore x>-1$

㉡에서 $6x+2>4x-8$, $2x>-10$ $\therefore x>-5$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x>-1$



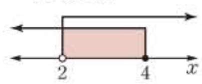
답 $x>-1$

0884 ㉠에서 $2x+2-1\leq 9$, $2x\leq 8$ $\therefore x\leq 4$

㉡에서 $6-3x<x-2$, $-4x<-8$ $\therefore x>2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$2<x\leq 4$



답 $2<x\leq 4$

0885 ㉠의 양변에 6을 곱하면

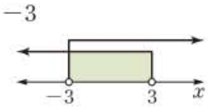
$x-21<-6x$, $7x<21$ $\therefore x<3$

㉡의 양변에 10을 곱하면

$2x-1>-7$, $2x>-6$ $\therefore x>-3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-3<x<3$



답 $-3<x<3$

0886 ㉠의 양변에 10을 곱하면

$3x-50\leq 7(x-2)$, $3x-50\leq 7x-14$

$-4x\leq 36$ $\therefore x\geq -9$

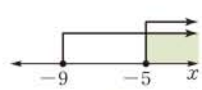
㉡의 양변에 10을 곱하면

$5(x-3)\geq 2x-30$, $5x-15\geq 2x-30$

$3x\geq -15$ $\therefore x\geq -5$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x\geq -5$



답 $x\geq -5$

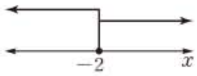
07 일차부등식

0887 ㉠에서 $3x \geq -6$ $\therefore x \geq -2$

㉡에서 $x \leq -2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=-2$

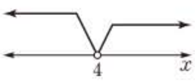


답 $x=-2$

0888 ㉠에서 $-x<-4$ $\therefore x>4$

㉡에서 $5x<20$ $\therefore x<4$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

0889 ㉠에서 $2x<-6$ $\therefore x<-3$

㉡에서 $x>-2$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.

답 해는 없다.

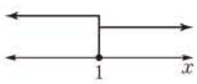
0890 ㉠에서 $7x \geq 7$ $\therefore x \geq 1$

㉡에서 $2x-2-1 \leq -x$

$3x \leq 3$ $\therefore x \leq 1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x=1$



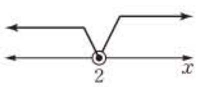
답 $x=1$

0891 ㉠에서 $5x-5+6 \leq 4x+3$ $\therefore x \leq 2$

㉡에서 $21-7x<-5x+17$

$-2x<-4$ $\therefore x>2$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

0892 답 (가) $2x+1$ (나) -2 (다) -1

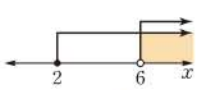
0893 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 2 \leq 3x-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-4<4x-10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-3x \leq -6$ $\therefore x \geq 2$

㉡에서 $-x<-6$ $\therefore x>6$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x>6$



답 $x>6$

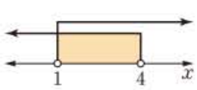
0894 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 3x-1<2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3<7x-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x<4$

㉡에서 $-5x<-5$ $\therefore x>1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$1<x<4$



답 $1<x<4$

0895 답 $-4<x<4$

0896 답 $x \leq -5$ 또는 $x \geq 5$

0897 $|x-2|<3$에서 $-3<x-2<3$

$\therefore -1<x<5$ 답 $-1<x<5$

0898 $|x+1|>6$에서 $x+1<-6$ 또는 $x+1>6$

$\therefore x<-7$ 또는 $x>5$ 답 $x<-7$ 또는 $x>5$

0899 $|6-5x| \leq 4$에서 $-4 \leq 6-5x \leq 4$

$-10 \leq -5x \leq -2$

$\therefore \frac{2}{5} \leq x \leq 2$ 답 $\frac{2}{5} \leq x \leq 2$

0900 $|3x+2| \geq 5$에서 $3x+2 \leq -5$ 또는 $3x+2 \geq 5$

$3x \leq -7$ 또는 $3x \geq 3$

$\therefore x \leq -\frac{7}{3}$ 또는 $x \geq 1$ 답 $x \leq -\frac{7}{3}$ 또는 $x \geq 1$

0901 답 $-\frac{1}{2}$, 0, 0, 1, 1, $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

0902 ① $a>b$에서 $a+6>b+6$

② $a>b$에서 $-a<-b$ $\therefore 5-a<5-b$

③ $a>b$에서 $3a>3b$ $\therefore 3a-1>3b-1$

④ $a>b$에서 $-\frac{a}{4}<-\frac{b}{4}$ $\therefore -\frac{a}{4}+1<-\frac{b}{4}+1$

⑤ $a=1$, $b=-1$이면 $a>b$이지만 $\frac{3}{a}>\frac{3}{b}$이다.

답 ②

0903 ㄱ. $a<b$, $c>0$이므로 $ac<bc$

$c<d$, $b>0$이므로 $bc<bd$

$\therefore ac<bd$

ㄴ. $b<c$에서 $b-a<c-a$

ㄷ. $a=1$, $b=-2$이면 $a>b$이지만 $a^2<b^2$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0904 ㄱ. $b<0$이므로 $a<b$의 양변을 b로 나누면 $\frac{a}{b}>1$

ㄴ. $a<b$이므로 $a-b<0$

$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$이므로

$(a-b)(a^2+ab+b^2)<0$

$a^3-b^3<0$ $\therefore a^3<b^3$

ㄷ. $|a|>|b|$이므로 $a^2>b^2$

$ab>0$이므로 $a^2>b^2$의 양변을 ab로 나누면 $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

다른 풀이 ㄷ. $a<0$이므로 $a<b$의 양변을 a로 나누면 $1>\frac{b}{a}$

ㄱ에서 $\frac{a}{b}>1$이므로 $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$

0905 부등식 $ax \leq b$의 해가 $x \leq 1$이므로

$a>0$, $\frac{b}{a}=1$ $\therefore b=a$

이것을 $ax \leq a-2b$에 대입하면

$ax \leq a-2a$, $ax \leq -a$

$a>0$이므로 $x \leq -1$ 답 ②

0906 $ax+2b>bx+2a$에서 $(a-b)x>2(a-b)$

이때 $a<b$, 즉 $a-b<0$이므로 양변을 $a-b$로 나누면

$x<2$ 답 $x<2$

0907 부등식 $(a+1)x-(a-b)\geq 0$, 즉 $(a+1)x\geq a-b$의 해가 $x\leq -3$이므로

$a+1<0$, $\dfrac{a-b}{a+1}=-3$

부등식 $(a+1)x\geq a-b$의 부등호의 방향과 해 $x\leq -3$의 부등호의 방향이 반대이므로 x의 계수는 음수이다.

$\therefore 4a-b=-3$ ··· ❶

이것을 $(4a-b)x\geq 9$에 대입하면

$-3x\geq 9$ $\therefore x\leq -3$ ··· ❷

답 $x\leq -3$

채점 기준	비율
❶ $4a-b=-3$임을 알 수 있다.	70 %
❷ $(4a-b)x\geq 9$의 해를 구할 수 있다.	30 %

참고 $(a+1)x\geq a-b$에서

(i) $a+1>0$이면 $x\geq \dfrac{a-b}{a+1}$

(ii) $a+1=0$이면 $0\cdot x\geq -1-b$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해가 $x\leq -3$이 될 수 없다.

0908 $a^2x-a\leq x$에서 $(a^2-1)x\leq a$

이 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$a^2-1=0$, $a<0$

$\therefore a=-1$ 답 ②

0909 $ax-2>b+x$에서 $(a-1)x>b+2$

이 부등식의 해가 모든 실수이려면

$a-1=0$, $b+2<0$

$\therefore a=1$, $b<-2$ ··· ❶

이때 정수 b의 최댓값은 -3이므로 $a+b$의 최댓값은

$1+(-3)=-2$ ··· ❷

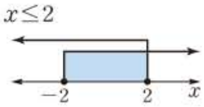
답 -2

채점 기준	비율
❶ a의 값과 b의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %
❷ $a+b$의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0910 $2x-3\leq 4x+1$에서 $-2x\leq 4$ $\therefore x\geq -2$

$-x+6\geq 3x-2$에서 $-4x\geq -8$ $\therefore x\leq 2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



$-2\leq x\leq 2$

이므로 $a=-2$, $b=2$

$\therefore b-a=4$ 답 ④

0911 $5(x+1)\geq 1+2(x-4)$에서 $5x+5\geq 2x-7$

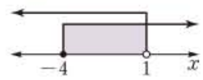
$3x\geq -12$ $\therefore x\geq -4$

$\dfrac{x+1}{2}<\dfrac{4-x}{3}$에서 $3(x+1)<2(4-x)$

양변에 분모의 최소공배수인 6을 곱한다.

$3x+3<8-2x$, $5x<5$ $\therefore x<1$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



$-4\leq x<1$

이므로 x의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

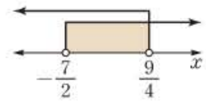
0912 $0.3x-0.5<\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{5}$에서 $3x-5<5x+2$

$-2x<7$ $\therefore x>-\dfrac{7}{2}$

$\dfrac{1}{3}x-\dfrac{7}{4}<-1$에서 $4x-21<-12$

$4x<9$ $\therefore x<\dfrac{9}{4}$ ··· ❶

따라서 주어진 연립부등식의 해는



$-\dfrac{7}{2}<x<\dfrac{9}{4}$ ··· ❷

이므로 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2의 6개이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

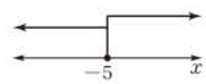
0913 $2x+6\leq -x-9$에서 $3x\leq -15$

$\therefore x\leq -5$

$3(2x+3)\geq 4(x-2)+7$에서 $6x+9\geq 4x-8+7$

$2x\geq -10$ $\therefore x\geq -5$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

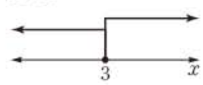


$x=-5$

답 ②

0914 ① $4x-7\leq 5$에서 $4x\leq 12$ $\therefore x\leq 3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



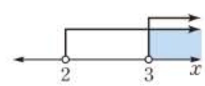
$x=3$

② $3(x-1)>-x+9$에서 $3x-3>-x+9$

$4x>12$ $\therefore x>3$

$5x-8>2$에서 $5x>10$ $\therefore x>2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



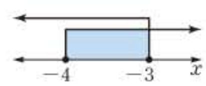
$x>3$

③ $2x-6\leq 2(2x+1)$에서 $2x-6\leq 4x+2$

$-2x\leq 8$ $\therefore x\geq -4$

$4x+1\leq 3x-2$에서 $x\leq -3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

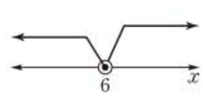


$-4\leq x\leq -3$

④ $0.2(x-1)\leq 1$에서 $x-1\leq 5$

$\therefore x\leq 6$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



⑤ $5x+1<-9$에서 $5x<-10$ $\therefore x<-2$

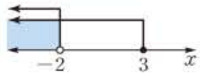
$\dfrac{x-1}{2}\leq \dfrac{8-x}{5}$에서 $5(x-1)\leq 2(8-x)$

$5x-5\leq 16-2x$, $7x\leq 21$ $\therefore x\leq 3$

07 일차부등식

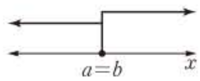
따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x<-2$



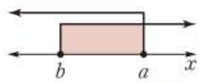
이상에서 해가 없는 것은 ④이다. 답 ④

0915 ㄱ. $a=b$이면 오른쪽 그림과 같으므로 해는 $x=a$이다.



ㄴ. $a<b$이면 오른쪽 그림과 같으므로 해는 없다.

ㄷ. $a>b$이면 오른쪽 그림과 같으므로 해는 $b\le x\le a$



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

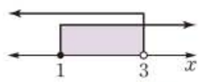
0916 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 15x-24<5x+6 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+6\le 10x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $10x<30$ $\therefore x<3$

㉡에서 $-5x\le -5$ $\therefore x\ge 1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$1\le x<3$



이므로 정수 x는 1, 2의 2개이다. 답 ②

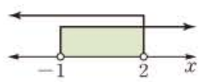
0917 주어진 부등식에서 $\begin{cases} -2<-3x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ -3x+4<7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3x<6$ $\therefore x<2$

㉡에서 $-3x<3$ $\therefore x>-1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-1<x<2$ ··· ❶



이므로 모든 정수 x의 값의 합은

$0+1=1$ ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	70 %
❷ 모든 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	30 %

다른 풀이 $-2<-3x+4<7$의 각 변에서 4를 빼면

$-6<-3x<3$

$-6<-3x<3$의 각 변을 -3으로 나누면

$-1<x<2$

라쎈 특강
$A<B<C$ 꼴의 부등식에서 A와 C가 상수인 경우에는 부등식의 성질을 이용하여 해를 구할 수도 있다.

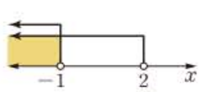
0918 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 5x-8<\dfrac{x}{2}+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{x}{2}+1<\dfrac{x+3}{4} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $10x-16<x+2,$ $9x<18$ $\therefore x<2$

㉡에서 $2x+4<x+3$ $\therefore x<-1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x<-1$



이므로 정수 x의 최댓값은 -2이다. 답 -2

0919 $3x-1\le x+a$에서 $2x\le a+1$

$\therefore x\le \dfrac{a+1}{2}$

$2x+3\le 3x+1$에서 $-x\le -2$

$\therefore x\ge 2$

주어진 연립부등식의 해가 $2\le x\le 4$이므로

$\dfrac{a+1}{2}=4,$ $a+1=8$ $\therefore a=7$ 답 ③

0920 $x-3a\ge 0$에서 $x\ge 3a$

$2x+b>0$에서 $x>-\dfrac{b}{2}$

주어진 그림에서 각 부등식의 해가 $x>-1$, $x\ge 3$이므로

$3a=3,$ $-\dfrac{b}{2}=-1$ $\therefore a=1, b=2$

$\therefore ab=2$ 답 2

0921 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 3x-a\le 2x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x<5x+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le a$

㉡에서 $-3x<b$ $\therefore x>-\dfrac{b}{3}$

주어진 부등식의 해가 $-2<x\le 1$이므로

$a=1,$ $-\dfrac{b}{3}=-2$ $\therefore a=1, b=6$

$\therefore a+b=7$ 답 ③

0922 $\dfrac{5x+1}{8}+\dfrac{3}{4}x\le x-1$에서 $5x+1+6x\le 8x-8$

$3x\le -9$ $\therefore x\le -3$

$3(x+2)+1\ge a-x$에서 $3x+7\ge a-x$

$4x\ge a-7$ $\therefore x\ge \dfrac{a-7}{4}$ ··· ❶

주어진 연립부등식의 해가 $x=-3$이므로

$\dfrac{a-7}{4}=-3,$ $a-7=-12$ $\therefore a=-5$ ··· ❷

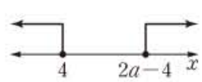
답 -5

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	60 %
❷ 상수 a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0923 $3x-7\le 5$에서 $3x\le 12$ $\therefore x\le 4$

$x+4\ge 2a$에서 $x\ge 2a-4$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



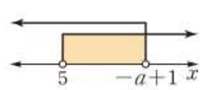
$2a-4>4,$ $2a>8$

$\therefore a>4$ 답 ⑤

0924 $3(x-2)>2x-1$에서 $3x-6>2x-1$ $\therefore x>5$

$4x-1<3x-a$에서 $x<-a+1$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



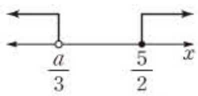
$-a+1>5$ $\therefore a<-4$ 답 ②

0925 $3x+a<2a$에서　$3x<a$　$\therefore x<\frac{a}{3}$

$-(x-5)\le x$에서　$-x+5\le x$,　$-2x\le -5$

$\therefore x\ge\frac{5}{2}$ ⋯ ❶

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$\frac{a}{3}\le\frac{5}{2}$　$\therefore a\le\frac{15}{2}$ ⋯ ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 7이다. ⋯ ❸

답 7

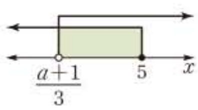
채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0926 주어진 부등식에서 $\begin{cases}3x-4\le 2x+1 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x+1<5x-a & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서　$x\le 5$

㉡에서　$-3x<-a-1$　$\therefore x>\frac{a+1}{3}$

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



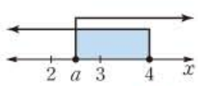
$\frac{a+1}{3}<5$,　$a+1<15$

$\therefore a<14$

답 $a<14$

0927 $x+4\ge 2x$에서　$x\le 4$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이므로 오른쪽 그림에서



$2<a\le 3$

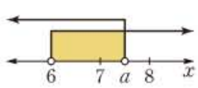
답 ③

라쎈 특강

$a=2$이면 주어진 연립부등식의 해가 $2\le x\le 4$이므로 정수인 해가 2, 3, 4의 3개이다. 즉 주어진 조건을 만족시키지 않는다. 이와 같이 정수인 해의 개수가 주어진 연립부등식에서 미지수의 값의 범위를 구할 때에는 양 끝 값의 포함 여부를 반드시 확인하도록 한다.

0928 $x-1>5$에서　$x>6$

주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x가 1개뿐이므로 오른쪽 그림에서



$7<a\le 8$

이때 a는 자연수이므로　$a=8$

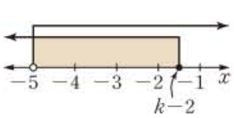
답 8

0929 주어진 부등식에서 $\begin{cases}x-8<3x+2 & \cdots\cdots ㉠\\ 3x+2\le 2x+k & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서　$-2x<10$　$\therefore x>-5$

㉡에서　$x\le k-2$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$-2\le k-2<-1$

$\therefore 0\le k<1$

답 ④

0930 형광펜을 x자루 산다고 하면 색연필은 $(12-x)$자루 살 수 있으므로

$7200\le 500(12-x)+800x\le 8400$

$7200\le 300x+6000\le 8400$,　$1200\le 300x\le 2400$

$\therefore 4\le x\le 8$

따라서 형광펜은 4자루 이상 8자루 이하 살 수 있다.

답 ③

참고 $7200\le 500(12-x)+800x\le 8400$의 각 변을 100으로 나눈 후 부등식을 풀면 계산이 간단하다.

0931 연속하는 세 짝수를 $x-2$, x, $x+2$라 하면

$63<(x-2)+x+(x+2)<72$

$63<3x<72$　$\therefore 21<x<24$

x는 짝수이므로　$x=22$

따라서 연속하는 세 짝수는 20, 22, 24이므로 가장 큰 수는 24이다.

답 ④

라쎈 특강

(1) 연속하는 세 정수에 대한 문제

- 세 수를 $x-1$, x, $x+1$로 놓고 식을 세운다.

(2) 연속하는 세 짝수(또는 홀수)에 대한 문제

- 세 수를 $x-2$, x, $x+2$로 놓고 식을 세운다.

0932 세 변의 길이는 각각 x cm, x cm, $(60-2x)$ cm이다.

(i) 세 변의 길이가 같을 때,

$x=60-2x$에서　$3x=60$　$\therefore x=20$

(ii) 가장 긴 변의 길이가 x cm일 때,

$60-2x<x$에서　$-3x<-60$

$\therefore x>20$ ⋯⋯ ㉠

또 $x<x+(60-2x)$이어야 하므로　$2x<60$

$\therefore x<30$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서　$20<x<30$

(iii) 가장 긴 변의 길이가 $(60-2x)$ cm일 때,

$x<60-2x$에서　$3x<60$

$\therefore x<20$ ⋯⋯ ㉢

또 $60-2x<x+x$이어야 하므로　$-4x<-60$

$\therefore x>15$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣에서　$15<x<20$

이상에서 삼각형을 만들 수 있는 x의 값의 범위는

$15<x<30$

답 $15<x<30$

라쎈 특강

삼각형의 변의 길이

삼각형의 세 변의 길이가 주어질 때

① (가장 긴 변의 길이)<(나머지 두 변의 길이의 합)

② (가장 짧은 변의 길이)>0

0933 학생 수를 x라 하면 볼펜은 $(3x+18)$자루이므로

$5(x-1)+1\le 3x+18<5(x-1)+4$

즉 $\begin{cases}5(x-1)+1\le 3x+18 & \cdots\cdots ㉠\\ 3x+18<5(x-1)+4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $5x-4\le 3x+18,\quad 2x\le 22\quad \therefore x\le 11$

㉡에서 $3x+18<5x-1,\quad -2x<-19\quad \therefore x>\frac{19}{2}$

$\therefore \frac{19}{2}<x\le 11$

따라서 최대 학생 수는 11이다. 답 11

0934 상자의 개수를 x라 하면

$45x+20\le 500\le 60x-100$

즉 $\begin{cases}45x+20\le 500 & \cdots\cdots ㉠\\ 500\le 60x-100 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$ ··· ❶

㉠에서 $45x\le 480\quad \therefore x\le \frac{32}{3}$

㉡에서 $-60x\le -600\quad \therefore x\ge 10$

$\therefore 10\le x\le \frac{32}{3}$ ··· ❷

따라서 상자의 개수는 10이다. ··· ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 상자의 개수를 x로 놓고 연립부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ 상자의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0935 의자의 개수를 x라 하면 학생은 $(5x+8)$명이므로

$6(x-4)+1\le 5x+8\le 6(x-4)+6$

즉 $\begin{cases}6(x-4)+1\le 5x+8 & \cdots\cdots ㉠\\ 5x+8\le 6(x-4)+6 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $6x-23\le 5x+8\quad \therefore x\le 31$

㉡에서 $5x+8\le 6x-18,\quad -x\le -26\quad \therefore x\ge 26$

$\therefore 26\le x\le 31$

따라서 의자의 개수가 될 수 있는 것은 ②이다. 답 ②

참고 6명씩 앉으면 의자가 3개 남으므로 6명씩 앉은 의자의 개수는 $x-4$이다. 또 마지막 1개의 의자에는 최소 1명에서 최대 6명까지 앉을 수 있다.

0936 $|4x-3|<9$에서 $-9<4x-3<9$

$-6<4x<12\quad \therefore -\frac{3}{2}<x<3$

따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=3$이므로

$ab=-\frac{9}{2}$ 답 $-\frac{9}{2}$

0937 $|x-2a|<b$에서 $-b<x-2a<b$

$2a-b<x<2a+b$

주어진 부등식의 해가 $-4<x<6$이므로

$2a-b=-4,\ 2a+b=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2},\ b=5$

$\therefore 2ab=5$ 답 ③

0938 $|x-1|\ge a$에서 $x-1\le -a$ 또는 $x-1\ge a$

$\therefore x\le 1-a$ 또는 $x\ge 1+a$ ··· ❶

주어진 부등식의 해가 $x\le -1$ 또는 $x\ge b$이므로

$1-a=-1,\ 1+a=b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=3$ ··· ❷

$\therefore a+b=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $\|x-1\|\ge a$의 해를 a에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0939 $|3x-2|\le x+6$에서

(i) $x\ge \frac{2}{3}$일 때, $3x-2\ge 0$이므로 — 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나눈다.

$3x-2\le x+6,\quad 2x\le 8\quad \therefore x\le 4$

그런데 $x\ge \frac{2}{3}$이므로 $\frac{2}{3}\le x\le 4$

(ii) $x<\frac{2}{3}$일 때, $3x-2<0$이므로

$-(3x-2)\le x+6,\quad -4x\le 4\quad \therefore x\ge -1$

그런데 $x<\frac{2}{3}$이므로 $-1\le x<\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-1\le x\le 4$

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로 $a-b=-5$ 답 -5

0940 $|1-x|<4x-1$에서

(i) $x\le 1$일 때, $1-x\ge 0$이므로

$1-x<4x-1,\quad -5x<-2\quad \therefore x>\frac{2}{5}$

그런데 $x\le 1$이므로 $\frac{2}{5}<x\le 1$

(ii) $x>1$일 때, $1-x<0$이므로

$-(1-x)<4x-1,\quad -3x<0\quad \therefore x>0$

그런데 $x>1$이므로 $x>1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x>\frac{2}{5}$

$\therefore k=\frac{2}{5}$ 답 ②

0941 $2|x-3|+x\ge 9$에서

(i) $x\ge 3$일 때, $x-3\ge 0$이므로

$2(x-3)+x\ge 9,\quad 3x\ge 15\quad \therefore x\ge 5$

그런데 $x\ge 3$이므로 $x\ge 5$

(ii) $x<3$일 때, $x-3<0$이므로

$-2(x-3)+x\ge 9,\quad -x\ge 3\quad \therefore x\le -3$

그런데 $x<3$이므로 $x\le -3$ ··· ❶

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\le -3$ 또는 $x\ge 5$ ··· ❷

따라서 자연수 x의 최솟값은 5이다. ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $x\ge 3$, $x<3$으로 범위를 나누어 부등식을 각각 풀 수 있다.	40 %
❷ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 x의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0942 $|x-2|+|x|<4$에서

(i) $x<0$일 때,

$-(x-2)-x<4,\quad -2x<2\quad \therefore x>-1$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -1<x<0$

(ii) $0\le x<2$일 때,

$-(x-2)+x<4,\quad 0\cdot x<2$

따라서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

그런데 $0\le x<2$이므로 $\quad 0\le x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때,

$x-2+x<4,\quad 2x<6\quad \therefore x<3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $\quad 2\le x<3$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\quad -1<x<3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로

$b-a=4$

답 4

0943 $|x-1|+3|x+1|<8$에서

(i) $x<-1$일 때,

$-(x-1)-3(x+1)<8$

$-4x<10\quad \therefore x>-\frac{5}{2}$

그런데 $x<-1$이므로 $\quad -\frac{5}{2}<x<-1$

(ii) $-1\le x<1$일 때,

$-(x-1)+3(x+1)<8$

$2x<4\quad \therefore x<2$

그런데 $-1\le x<1$이므로 $\quad -1\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때,

$x-1+3(x+1)<8$

$4x<6\quad \therefore x<\frac{3}{2}$

그런데 $x\ge 1$이므로 $\quad 1\le x<\frac{3}{2}$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\quad -\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -2, -1, 0, 1이므로 구하는 합은 -2이다.

답 ①

0944 $\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$이므로 주어진 부등식은

$|x-2|+|x+1|<x+3$ ⋯ ❶

(i) $x<-1$일 때,

$-(x-2)-(x+1)<x+3$

$-3x<2\quad \therefore x>-\frac{2}{3}$

그런데 $x<-1$이므로 해는 없다.

(ii) $-1\le x<2$일 때,

$-(x-2)+x+1<x+3$

$-x<0\quad \therefore x>0$

그런데 $-1\le x<2$이므로 $\quad 0<x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때,

$x-2+x+1<x+3\quad \therefore x<4$

그런데 $x\ge 2$이므로 $\quad 2\le x<4$ ⋯ ❷

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\quad 0<x<4$ ⋯ ❸

답 $0<x<4$

채점 기준	비율
❶ $\sqrt{A^2}=\|A\|$임을 이용하여 주어진 부등식을 변형할 수 있다.	20 %
❷ $x<-1$, $-1\le x<2$, $x\ge 2$로 범위를 나누어 부등식을 각각 풀 수 있다.	60 %
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

0945 전략 부등식의 기본 성질을 이용한다.

풀이 ① $a=-2$, $b=-1$이면 $a<b$이지만 $|a|>|b|$이다.

② $a=-2$, $b=2$이면 $a<b$이지만 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이다.

③ $a<b$, $c<0$이면 $ac>bc$이다.

⑤ $a=-2$, $b=-1$, $c=1$이면 $a<b<c$이지만 $ab>c^2$이다.

답 ④

0946 전략 부등식 $Ax\ge B$의 해가 $x\ge C$이면 $A>0$, $\frac{B}{A}=C$이다.

풀이 $a(x-1)\ge-(x-a)$에서 $\quad (a+1)x\ge 2a$

이 부등식의 해가 $x\ge 1$이므로

$a+1>0,\ \frac{2a}{a+1}=1$

$2a=a+1\quad \therefore a=1$

답 1

0947 전략 부등식 $Ax<B$의 해가 존재하지 않을 조건은 $A=0$, $B\le 0$이다.

풀이 $x-a<bx+2$에서 $\quad (1-b)x<a+2$

이 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$1-b=0,\ a+2\le 0$

$\therefore a\le -2,\ b=1$

이때 a의 최댓값은 -2이므로 $a+b$의 최댓값은

$-2+1=-1$

답 ②

0948 전략 부등식 $Ax\le B$의 해가 모든 실수일 조건은 $A=0$, $B\ge 0$이고, 해가 존재하지 않을 조건은 $A=0$, $B<0$이다.

풀이 $a^2x-a\le 4x-1$에서 $\quad (a^2-4)x\le a-1$

$\therefore (a+2)(a-2)x\le a-1$ ⋯⋯ ㉠

부등식 ㉠의 해가 모든 실수이려면

$(a+2)(a-2)=0,\ a-1\ge 0$

$\therefore a=2$

부등식 ㉠의 해가 없으려면

$(a+2)(a-2)=0,\ a-1<0$

$\therefore a=-2$

따라서 $m=2$, $n=-2$이므로

$m-n=4$

답 4

0949 전략 각 부등식을 풀어 공통부분을 수직선 위에 나타낸다.

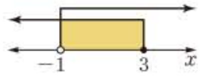
풀이 $3x-8\le 4-x$에서

$4x\le 12\quad \therefore x\le 3$

$5x+2>2x-1$에서

$3x>-3\quad \therefore x>-1$

따라서 주어진 연립부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



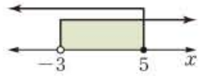
답 ③

0950 전략 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 구한다.

풀이 $4x>x-9$에서 $\quad 3x>-9 \quad \therefore x>-3$

$x+2\geq 2x-3$에서 $\quad -x\geq -5 \quad \therefore x\leq 5$

따라서 주어진 부등식의 해는



$\quad -3<x\leq 5$

이므로 정수 x는 $-2, -1, 0, 1, \cdots, 5$의 8개이다. 답 ①

라쎈 특강

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수

$a<b$인 정수 a, b에 대하여 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 다음과 같다.

① $a<x<b$일 때, $\quad b-a-1$

② $a\leq x<b$ 또는 $a<x\leq b$일 때, $\quad b-a$

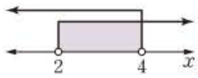
③ $a\leq x\leq b$일 때, $\quad b-a+1$

0951 전략 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값을 구한 후 일차방정식에 대입한다.

풀이 $3x-1<x+7$에서 $\quad 2x<8 \quad \therefore x<4$

$4x-1>-(x-9)$에서 $\quad 5x>10 \quad \therefore x>2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



$\quad 2<x<4$

이므로 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 3이다.

$x=3$을 $ax+10=7$에 대입하면

$\quad 3a+10=7 \quad \therefore a=-1$ 답 -1

0952 전략 부등식을 푼 후 주어진 해와 비교한다.

풀이 주어진 부등식에서 $\begin{cases} -8<6x-a & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x-a<5x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad -6x<-a+8 \quad \therefore x>\dfrac{a-8}{6}$

㉡에서 $\quad x<a$

주어진 부등식의 해가 $b<x<2$이므로

$\quad \dfrac{a-8}{6}=b,\ a=2 \quad \therefore a=2,\ b=-1$

$\quad \therefore a-b=3$ 답 ④

0953 전략 y를 x에 대한 식으로 나타내고 주어진 부등식에 대입하여 x에 대한 연립부등식으로 바꾼 후 해를 구한다.

풀이 $2x+y=5$에서 $\quad y=5-2x$

이것을 주어진 부등식에 대입하면

$\quad 3x-9\leq 5-2x-4<2x+5$

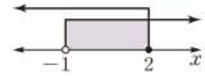
$\quad \therefore 3x-9\leq 1-2x<2x+5$

즉 $\begin{cases} 3x-9\leq 1-2x & \cdots\cdots ㉠ \\ 1-2x<2x+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad 5x\leq 10 \quad \therefore x\leq 2$

㉡에서 $\quad -4x<4 \quad \therefore x>-1$

따라서 주어진 부등식의 해는



$\quad -1<x\leq 2$

이므로 정수 x는 0, 1, 2의 3개이고 구하는 해의 개수는 3이다. 답 3

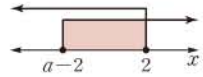
$x=0,\ y=5$ 또는 $x=1,\ y=3$ 또는 $x=2,\ y=1$

0954 전략 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 있도록 해를 수직선 위에 나타낸다.

풀이 $x-2\leq 2x-a$에서 $\quad -x\leq -a+2 \quad \therefore x\geq a-2$

$3x-4\leq 12-5x$에서 $\quad 8x\leq 16 \quad \therefore x\leq 2$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$\quad a-2\leq 2 \quad \therefore a\leq 4$

따라서 a의 최댓값은 4이다. 답 ④

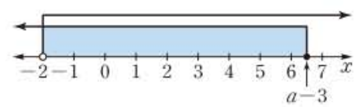
0955 전략 주어진 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 정수 8개가 포함되도록 하는 a의 값을 구한다.

풀이 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 3x-1<5x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+3\leq 4x+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad -2x<4 \quad \therefore x>-2$

㉡에서 $\quad x\leq a-3$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 8개이므로 오른쪽 그림에서



$\quad 6\leq a-3<7 \quad \therefore 9\leq a<10$

따라서 구하는 자연수 a의 값은 9이다. 답 9

0956 전략 세로의 길이를 x cm라 하고 둘레의 길이가 150 cm임을 이용하여 가로의 길이를 x로 나타낸 후 부등식을 세운다.

풀이 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는

$\quad \dfrac{1}{2}(150-2x)=75-x\,(\text{cm})$

이므로 $\quad x+15\leq 75-x<2x$

즉 $\begin{cases} x+15\leq 75-x & \cdots\cdots ㉠ \\ 75-x<2x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad 2x\leq 60 \quad \therefore x\leq 30$

㉡에서 $\quad -3x<-75 \quad \therefore x>25$

$\quad \therefore 25<x\leq 30$

따라서 세로의 길이는 25 cm 초과 30 cm 이하이다.

답 25 cm 초과 30 cm 이하

0957 전략 빵 A의 개수를 x라 하고 빵 B의 개수를 x로 나타낸다.

풀이 빵 A의 개수를 x라 하면 빵 B의 개수는 $12-x$이므로

$\begin{cases} 50x+100(12-x)\leq 1000 & \cdots\cdots ㉠ \\ 20x+15(12-x)\leq 220 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad -50x+1200\leq 1000, \quad -50x\leq -200$

$\quad \therefore x\geq 4$

㉡에서 $\quad 5x+180\leq 220, \quad 5x\leq 40 \quad \therefore x\leq 8$

$\quad \therefore 4\leq x\leq 8$

따라서 빵 A는 최대 8개까지 만들 수 있다. 답 ⑤

0958 전략 부등식 $|x-a|<b\,(b>0)$의 해는 $a-b<x<a+b$임을 이용한다.

풀이 $|x-a|<5$에서 $\quad -5<x-a<5$

$\therefore a-5<x<a+5$

이때 a가 정수이므로 이 부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값은

$a+4$

따라서 $a+4=12$이므로

$a=8$ 답 ③

다른 풀이 $|x-a|<5$에서 $\quad a-5<x<a+5$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값이 12이므로

$12<a+5\le 13 \quad \therefore 7<a\le 8$

따라서 정수 a의 값은 8이다.

0959 전략 부등식 $|x-a|\le b\,(b>0)$의 해는 $a-b\le x\le a+b$임을 이용한다.

풀이 $|3x-2|\le a$에서 $\quad -a\le 3x-2\le a$

$-a+2\le 3x\le a+2$

$\therefore \dfrac{-a+2}{3}\le x\le \dfrac{a+2}{3}$

주어진 부등식의 해가 $b\le x\le 2$이므로

$\dfrac{-a+2}{3}=b,\ \dfrac{a+2}{3}=2 \qquad \therefore a=4,\ b=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore a+b=\dfrac{10}{3}$ 답 ③

0960 전략 $x\ge 3$, $x<3$으로 범위를 나누어 푼다.

풀이 $|x-3|\le 2x$에서

(i) $x\ge 3$일 때, $x-3\ge 0$이므로

$x-3\le 2x, \quad -x\le 3 \quad \therefore x\ge -3$

그런데 $x\ge 3$이므로 $\quad x\ge 3$

(ii) $x<3$일 때, $x-3<0$이므로

$-(x-3)\le 2x, \quad -3x\le -3 \quad \therefore x\ge 1$

그런데 $x<3$이므로 $\quad 1\le x<3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\quad x\ge 1$

$\therefore k=1$ 답 ②

0961 전략 $|x-a|\ge|x-b|\ (a<b)$ 꼴의 부등식은 x의 값의 범위를 $x<a$, $a\le x<b$, $x\ge b$로 나누어 푼다.

풀이 $|3x-2|\ge|2x-7|$에서

(i) $x<\dfrac{2}{3}$일 때,

$-(3x-2)\ge-(2x-7)$

$-x\ge 5 \quad \therefore x\le -5$

그런데 $x<\dfrac{2}{3}$이므로 $\quad x\le -5$

(ii) $\dfrac{2}{3}\le x<\dfrac{7}{2}$일 때,

$3x-2\ge-(2x-7)$

$5x\ge 9 \quad \therefore x\ge\dfrac{9}{5}$

그런데 $\dfrac{2}{3}\le x<\dfrac{7}{2}$이므로 $\quad \dfrac{9}{5}\le x<\dfrac{7}{2}$

(iii) $x\ge\dfrac{7}{2}$일 때,

$3x-2\ge 2x-7 \quad \therefore x\ge -5$

그런데 $x\ge\dfrac{7}{2}$이므로 $\quad x\ge\dfrac{7}{2}$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\quad x\le -5$ 또는 $x\ge\dfrac{9}{5}$

따라서 $a=-5$, $b=\dfrac{9}{5}$이므로

$ab=-9$ 답 -9

0962 전략 부등식 $Ax<B$의 해가 $x<C$이면 $A>0$, $\dfrac{B}{A}=C$이다.

풀이 $a+b=0$에서 $\quad b=-a$ ...... ㉠

㉠을 주어진 부등식에 대입하면

$ax-2a<4ax+3a-12$

$-3ax<5a-12$ ⋯ ❶

이 부등식의 해가 $x<-3$이므로

$a<0,\ \dfrac{5a-12}{-3a}=-3$

$-3a>0$이므로 $a<0$

$5a-12=9a, \quad -4a=12$

$\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=3$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=-6$ ⋯ ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ 조건을 이용하여 주어진 부등식을 변형할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0963 전략 연립부등식 $\begin{cases} x\ge a \\ x\le b\end{cases}$의 해가 한 개이면 $a=b$임을 이용한다.

풀이 $2-7x\le x+a$에서 $\quad -8x\le a-2 \quad \therefore x\ge\dfrac{2-a}{8}$

$4x+1\ge 5x+2$에서 $\quad -x\ge 1 \quad \therefore x\le -1$ ⋯ ❶

주어진 연립부등식의 해가 한 개이므로

$\dfrac{2-a}{8}=-1, \quad 2-a=-8$

$\therefore a=10$ ⋯ ❷

이때 그 해는 $x=-1$이므로

$b=-1$ ⋯ ❸

답 $a=10$, $b=-1$

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %

0964 전략 염소 우리의 개수를 x라 하고 염소의 수를 x로 나타낸다.

풀이 염소 우리의 개수를 x라 하면 염소는 $(6x+5)$마리이므로

$8(x-2)+1\le 6x+5\le 8(x-2)+8$

즉 $\begin{cases} 8(x-2)+1\le 6x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x+5\le 8(x-2)+8 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$ ⋯ ❶

㉠에서 $8x-15\le 6x+5$

$2x\le 20$ $\therefore x\le 10$

㉡에서 $6x+5\le 8x-8$

$-2x\le -13$ $\therefore x\ge \frac{13}{2}$

$\therefore \frac{13}{2}\le x\le 10$ ··· ❷

따라서 염소 우리는 최대 10개이다. ··· ❸

답 10개

채점 기준	비율
❶ 염소 우리의 개수를 x라 하고 연립부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ 염소 우리는 최대 몇 개인지 구할 수 있다.	20 %

0965 전략 x의 값의 범위를 $x<1$, $1\le x<4$, $x\ge 4$로 나누어 푼다.

풀이 $2|x-4|+|x-1|\ge 9$에서

(i) $x<1$일 때,

$-2(x-4)-(x-1)\ge 9$

$-3x\ge 0$ $\therefore x\le 0$

그런데 $x<1$이므로 $x\le 0$

(ii) $1\le x<4$일 때,

$-2(x-4)+(x-1)\ge 9$

$-x\ge 2$ $\therefore x\le -2$

그런데 $1\le x<4$이므로 해는 없다.

(iii) $x\ge 4$일 때,

$2(x-4)+(x-1)\ge 9$

$3x\ge 18$ $\therefore x\ge 6$

그런데 $x\ge 4$이므로 $x\ge 6$ ··· ❶

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x\le 0$ 또는 $x\ge 6$ ··· ❷

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x의 최솟값은 6이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $x<1$, $1\le x<4$, $x\ge 4$로 범위를 나누어 부등식을 각각 풀 수 있다.	60 %
❷ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ 자연수 x의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

08 이차부등식

0966 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하면 다음과 같다.

ㄱ. $-x-3<0$ ㄴ. $x^2-3x-1>0$

ㄷ. $6\ge 0$ ㄹ. $x^2-1\le 0$

이상에서 이차부등식은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

0967 답 $x<-3$ 또는 $x>-1$

0968 답 $-3<x<-1$

0969 답 $x\le -3$ 또는 $x\ge -1$

0970 답 $-3\le x\le -1$

0971 답 $-2\le x\le 2$

0972 답 $x<-2$ 또는 $x>2$

0973 답 $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$

0974 답 $-3<x<1$

0975 답 $x<3$ 또는 $x>5$

0976 답 $3\le x\le 5$

0977 답 $x\ne 2$인 모든 실수

0978 답 $x=2$

0979 답 해는 없다.

0980 답 모든 실수

0981 답 $x\le 2$ 또는 $x\ge 7$

0982 답 $-5<x<1$

0983 답 모든 실수

0984 답 해는 없다.

0985 답 모든 실수

0986 답 해는 없다.

0987 $x^2-5x+6<0$에서 $(x-2)(x-3)<0$

$\therefore 2<x<3$ 답 $2<x<3$

0988 $-3x^2+10x-3\le 0$에서 $3x^2-10x+3\ge 0$

$(3x-1)(x-3)\ge 0$ $\therefore x\le \frac{1}{3}$ 또는 $x\ge 3$

답 $x\le \frac{1}{3}$ 또는 $x\ge 3$

0989 $x^2-6x+9=(x-3)^2\ge 0$

따라서 $x^2-6x+9>0$의 해는 $x\ne 3$인 모든 실수이다.

답 $x\ne 3$인 모든 실수

0990 $-x^2+2x-1\ge 0$에서 $x^2-2x+1\le 0$

그런데 $x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x=1$이다. 답 $x=1$

0991 $x^2+6x+11=(x+3)^2+2\ge 2$

따라서 $x^2+6x+11>0$의 해는 모든 실수이다. 답 모든 실수

0992 $-x^2-x-1\ge 0$에서 $x^2+x+1\le 0$

그런데 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge \frac{3}{4}$이므로 주어진 부등식의 해는 없다. 답 해는 없다.

0993 $(x-1)(x-3)<0$에서 $x^2-4x+3<0$

답 $x^2-4x+3<0$

0994 $(x+7)(x-1)>0$에서 $x^2+6x-7>0$

답 $x^2+6x-7>0$

0995 $(x+5)(x-2)\le 0$에서 $x^2+3x-10\le 0$

답 $x^2+3x-10\le 0$

0996 $(x+2)(x-9)\ge 0$에서 $x^2-7x-18\ge 0$

답 $x^2-7x-18\ge 0$

0997 $(x+1)^2\le 0$에서 $x^2+2x+1\le 0$

답 $x^2+2x+1\le 0$

0998 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2-kx+k+3$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot 1\cdot(k+3)<0$

$k^2-4k-12<0$, $(k+2)(k-6)<0$

$\therefore -2<k<6$

답 $-2<k<6$

0999 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2+2kx-k$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2+2kx-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-1\cdot(-k)\le 0$

$k^2+k\le 0$, $k(k+1)\le 0$

$\therefore -1\le k\le 0$

답 $-1\le k\le 0$

1000 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2+kx-4$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2+kx-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)\le 0$

$k^2-16\le 0$, $(k+4)(k-4)\le 0$

$\therefore -4\le k\le 4$

답 $-4\le k\le 4$

1001 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면

$k>0$ ······ ㉠

이차함수 $y=kx^2+3kx+2$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $kx^2+3kx+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(3k)^2-4\cdot k\cdot 2\le 0$

$9k^2-8k\le 0$, $k(9k-8)\le 0$

$\therefore 0\le k\le \dfrac{8}{9}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<k\le \dfrac{8}{9}$

답 $0<k\le \dfrac{8}{9}$

1002 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면

$k<0$ ······ ㉠

이차함수 $y=kx^2-kx-4$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $kx^2-kx-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot k\cdot(-4)<0$

$k^2+16k<0$, $k(k+16)<0$

$\therefore -16<k<0$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $-16<k<0$

답 $-16<k<0$

1003 답 $-1<x<1$

풀이 -3, 1, -3, 1, 1

1004 $3x-1\ge -7$에서 $3x\ge -6$

$\therefore x\ge -2$ ······ ㉠

$x^2-8x+15\le 0$에서 $(x-3)(x-5)\le 0$

$\therefore 3\le x\le 5$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3\le x\le 5$

답 $3\le x\le 5$

1005 $-x+6<2x-9$에서 $-3x<-15$

$\therefore x>5$ ······ ㉠

$x^2-5x-6\ge 0$에서 $(x+1)(x-6)\ge 0$

$\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 6$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x\ge 6$

답 $x\ge 6$

1006 $5x+2\le 3x-10$에서 $2x\le -12$

$\therefore x\le -6$ ······ ㉠

$x^2-3x<54$에서 $x^2-3x-54<0$

$(x+6)(x-9)<0$ $\therefore -6<x<9$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.

답 해는 없다.

1007 답 $-3<x\le 0$ 또는 $2\le x<4$

풀이 0, 2, 0, 2, 0, 2

1008 $x^2+10x+16<0$에서 $(x+2)(x+8)<0$

$\therefore -8<x<-2$ ······ ㉠

$x^2+5x\le 0$에서 $x(x+5)\le 0$

$\therefore -5\le x\le 0$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5\le x<-2$

답 $-5\le x<-2$

1009 $x^2-8>-7x$에서 $x^2+7x-8>0$

$(x+8)(x-1)>0$ $\therefore x<-8$ 또는 $x>1$ ······ ㉠

$x^2-5x<x-8$에서 $x^2-6x+8<0$

$(x-2)(x-4)<0$ $\therefore 2<x<4$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<x<4$

답 $2<x<4$

1010 $2\le x^2+x$에서 $x^2+x-2\ge 0$

$(x+2)(x-1)\ge 0$ $\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 1$ ······ ㉠

$x^2+x\le 6$에서 $x^2+x-6\le 0$

$(x+3)(x-2)\le 0$ $\therefore -3\le x\le 2$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\le x\le -2$ 또는 $1\le x\le 2$

답 $-3\le x\le -2$ 또는 $1\le x\le 2$

1011 $-2x-6<x^2-14$에서 $\quad x^2+2x-8>0$

$(x+4)(x-2)>0 \quad \therefore x<-4$ 또는 $x>2$ ······㉠

$x^2-14\le 5x$에서 $\quad x^2-5x-14\le 0$

$(x+2)(x-7)\le 0 \quad \therefore -2\le x\le 7$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<x\le 7$ 답 $2<x\le 7$

1012 답 $\frac{3}{4}\le k<1$

$\ge, \ge, >, <, \le, <$

1013 주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $D=(k-2)^2-4\cdot 1\cdot 1\ge 0$

$k^2-4k\ge 0, \quad k(k-4)\ge 0$

$\therefore k\le 0$ 또는 $k\ge 4$

(ii) $\alpha+\beta=-k+2<0 \quad \therefore k>2$

(iii) $\alpha\beta=1>0$

이상에서 공통부분을 구하면

$k\ge 4$ 답 $k\ge 4$

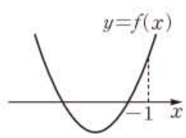
1014 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta<0$이어야 하므로

$k+2<0 \quad \therefore k<-2$ 답 $k<-2$

1015 답 $2<k\le 3$

$\ge, \le, >, >, <, \le$

1016 $f(x)=x^2+6x-2k-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-1\cdot(-2k-1)\ge 0$

$10+2k\ge 0 \quad \therefore k\ge -5$

(ii) $f(-1)=1-6-2k-1>0$에서

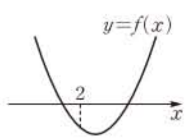
$-2k>6 \quad \therefore k<-3$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-3$이고 $-3<-1$이다.

이상에서 공통부분을 구하면

$-5\le k<-3$ 답 $-5\le k<-3$

1017 $f(x)=x^2+(3-k)x+k-8$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 2가 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(2)<0$이어야 하므로

$4+2(3-k)+k-8<0, \quad -k+2<0$

$\therefore k>2$ 답 $k>2$

1018 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<2$ 또는 $x>3$ 답 ③

1019 $px^2+(q-m)x+r-n\le 0$에서

$px^2+qx+r-(mx+n)\le 0$

$\therefore px^2+qx+r\le mx+n$

부등식 $px^2+qx+r\le mx+n$의 해는 이차함수 $y=px^2+qx+r$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$b\le x\le d$ 답 $b\le x\le d$

1020 $f(x)g(x)>0$에서

$f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$ ··· ❶

(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)>0$일 때, $\quad x<-1$ 또는 $x>2$ ······㉠

$g(x)>0$일 때, $\quad -3<x<1$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3<x<-1$ ··· ❷

(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)<0$일 때, $\quad -1<x<2$ ······㉢

$g(x)<0$일 때, $\quad x<-3$ 또는 $x>1$ ······㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$1<x<2$ ··· ❸

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-3<x<-1$ 또는 $1<x<2$ ··· ❹

답 $-3<x<-1$ 또는 $1<x<2$

채점 기준	비율
❶ $f(x)g(x)>0$이면 $f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$임을 알 수 있다.	10 %
❷ $f(x)>0$, $g(x)>0$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)<0$, $g(x)<0$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ $f(x)g(x)>0$의 해를 구할 수 있다.	10 %

1021 $x^2+2x-15>0$에서 $\quad (x+5)(x-3)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>3$

따라서 $\alpha=-5$, $\beta=3$이므로

$\alpha-\beta=-8$ 답 -8

다른 풀이 α, β가 이차방정식 $x^2+2x-15=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-15$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-2)^2-4\cdot(-15)=64$

$\therefore \alpha-\beta=\pm 8$

이때 $\alpha<\beta$에서 $\alpha-\beta<0$이므로

$\alpha-\beta=-8$

1022 $x^2-x-20\le0$에서 $(x+4)(x-5)\le0$

$\therefore\ -4\le x\le5$

답 ②

1023 $(3x+2)(x-2)<11$에서

$3x^2-4x-4<11,\quad 3x^2-4x-15<0$

$(3x+5)(x-3)<0\quad \therefore\ -\frac{5}{3}<x<3$ ··· ❶

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, 2$의 4개이다. ··· ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 이차부등식의 해를 구할 수 있다.	70 %
❷ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	30 %

1024 ① $x^2-10x+25=(x-5)^2\ge0$

따라서 $x^2-10x+25\le0$의 해는 $x=5$이다.

② $x^2-2x+3=(x-1)^2+2\ge2$

따라서 $x^2-2x+3\le0$의 해는 없다.

③ $-4x^2+4x-\frac{7}{4}<0$에서 $4x^2-4x+\frac{7}{4}>0$

그런데 $4x^2-4x+\frac{7}{4}=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

④ $9x^2\le6x-1$에서 $9x^2-6x+1\le0$

그런데 $9x^2-6x+1=(3x-1)^2\ge0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x=\frac{1}{3}$이다.

⑤ $2(x^2+5)>x^2-8x-6$에서 $x^2+8x+16>0$

그런데 $x^2+8x+16=(x+4)^2\ge0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x\ne-4$인 모든 실수이다.

답 ②

1025 해가 $-4\le x\le2$이고 x^2의 계수가 2인 이차부등식은

$2(x+4)(x-2)\le0\quad \therefore\ 2x^2+4x-16\le0$

이 부등식이 $2x^2+ax+b\le0$과 같으므로

$a=4,\ b=-16$

$\therefore\ a-b=20$

답 ③

다른 풀이 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이 -4, 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{a}{2}=-4+2,\ \frac{b}{2}=-4\cdot2\quad \therefore\ a=4,\ b=-16$

$\therefore\ a-b=20$

1026 해가 $x<1$ 또는 $x>b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-b)>0\quad \therefore\ x^2-(b+1)x+b>0$

이 부등식이 $x^2+ax+3>0$과 같으므로

$a=-(b+1),\ 3=b\quad \therefore\ a=-4,\ b=3$

$\therefore\ ab=-12$

답 ①

다른 풀이 이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 두 근이 1, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=1+b,\ 3=1\cdot b\quad \therefore\ a=-4,\ b=3$

$\therefore\ ab=-12$

1027 $ax^2+bx+2<0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<1$이므로

$a>0$

해가 $\frac{1}{3}<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)<0\quad \therefore\ x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}<0$

양변에 a를 곱하면 $ax^2-\frac{4}{3}ax+\frac{1}{3}a<0$

이 부등식이 $ax^2+bx+2\le0$과 같으므로

$-\frac{4}{3}a=b,\ \frac{1}{3}a=2\quad \therefore\ a=6,\ b=-8$

이것을 $bx+a>0$에 대입하면

$-8x+6>0,\quad -8x>-6$

$\therefore\ x<\frac{3}{4}$

답 $x<\frac{3}{4}$

1028 부등식 $f(x)\le0$의 해가 $-2\le x\le0$이므로

$f(x)=ax(x+2)\ (a>0)$

로 놓을 수 있다. ··· ❶

이때 $f(1)=6$에서 $f(1)=a\cdot1\cdot(1+2)=6$

$\therefore\ a=2$ ··· ❷

따라서 $f(x)=2x(x+2)$이므로

$f(3)=2\cdot3\cdot5=30$ ··· ❸

답 30

채점 기준	비율
❶ $f(x)=ax(x+2)(a>0)$로 놓을 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1029 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>5$이므로 $a<0$

해가 $x<-3$ 또는 $x>5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-5)>0\quad \therefore\ x^2-2x-15>0$

양변에 a를 곱하면 $ax^2-2ax-15a<0$ $a<0$이므로 부등호의 방향이 바뀐다.

이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$과 같으므로

$b=-2a,\ c=-15a$

이것을 $cx^2+bx+a>0$에 대입하면

$-15ax^2-2ax+a>0$

$15x^2+2x-1>0\ (\because\ -a>0)$

$(3x+1)(5x-1)>0$

$\therefore\ x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>\frac{1}{5}$

답 ⑤

1030 $f(x)<0$의 해가 $-1<x<4$이므로

$f(x)=a(x+1)(x-4)\ (a>0)$

라 하면

$f(2x)=a(2x+1)(2x-4)$

$=2a(2x+1)(x-2)$

따라서 부등식 $f(2x)<0$의 해는 $2a(2x+1)(x-2)<0$에서

$(2x+1)(x-2)<0\ (\because\ a>0)$

$\therefore\ -\frac{1}{2}<x<2$

답 $-\frac{1}{2}<x<2$

1031 $f(x) \le 0$의 해가 $2 \le x \le 5$이므로

$f(x)=a(x-2)(x-5)\ (a>0)$

라 하면

$f(3x-1)=a(3x-1-2)(3x-1-5)$

$=9a(x-1)(x-2)$

즉 부등식 $f(3x-1) \ge 0$의 해는 $9a(x-1)(x-2) \ge 0$에서

$(x-1)(x-2) \ge 0\ (\because a>0) \qquad \therefore x \le 1$ 또는 $x \ge 2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=2$

답 ④

1032 $f(x)<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>6$이므로

$f(x)=a(x+2)(x-6)\ (a<0)$

이라 하면

$f(-x)=a(-x+2)(-x-6)$

$=a(x-2)(x+6)$

즉 부등식 $f(-x)>0$의 해는 $a(x-2)(x+6)>0$에서

$(x+6)(x-2)<0\ (\because a<0) \qquad \therefore -6<x<2$

따라서 정수 x는 $-5, -4, -3, \cdots, 1$의 7개이다.

답 ④

1033 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(x) \ge 0$의 해가 $x \le 3$ 또는 $x \ge 4$이므로

$f(x)=a(x-3)(x-4)(a>0)$

부등식 $a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$, 즉 $f(x-5)<0$의 해는 $a(x-5-3)(x-5-4)<0$에서

$(x-8)(x-9)<0\ (\because a>0) \qquad \therefore 8<x<9$

답 $8<x<9$

다른 풀이 1 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(x) \ge 0$의 해가

$x \le 3$ 또는 $x \ge 4$

이므로 $f(x)<0$의 해는 $3<x<4$이다.

따라서 $a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$, 즉 $f(x-5)<0$의 해는

$3<x-5<4 \qquad \therefore 8<x<9$

다른 풀이 2 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$f(x)=a(x-3)(x-4)(a>0)$

$=ax^2-7ax+12a$

따라서 $b=-7a$, $c=12a$이므로 이것을 $a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$에 대입하면

$a(x-5)^2-7a(x-5)+12a<0$

$x^2-17x+72<0\ (\because a>0), \qquad (x-8)(x-9)<0$

$\therefore 8<x<9$

1034 $x^2-|x|-2<0$에서

(i) $x \ge 0$일 때,

$x^2-x-2<0, \qquad (x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$

그런데 $x \ge 0$이므로 $\quad 0 \le x<2$

(ii) $x<0$일 때,

$x^2+x-2<0, \qquad (x+2)(x-1)<0$

$\therefore -2<x<1$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -2<x<0$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\quad -2<x<2$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로 $\quad \dfrac{\beta}{\alpha}=-1$

답 ②

1035 $x^2-5x \le |x-5|$에서

(i) $x \ge 5$일 때,

$x^2-5x \le x-5, \qquad x^2-6x+5 \le 0$

$(x-1)(x-5) \le 0 \qquad \therefore 1 \le x \le 5$

그런데 $x \ge 5$이므로 $\quad x=5$

(ii) $x<5$일 때,

$x^2-5x \le -(x-5), \qquad x^2-4x-5 \le 0$

$(x+1)(x-5) \le 0 \qquad \therefore -1 \le x \le 5$

그런데 $x<5$이므로 $\quad -1 \le x<5$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\quad -1 \le x \le 5$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, \cdots, 5$의 7개이다.

답 7

1036 $|x^2-1|>3$에서

$x^2-1<-3$ 또는 $x^2-1>3$ ··· ❶

(i) $x^2-1<-3$에서 $\quad x^2+2<0$

그런데 $x^2+2 \ge 2$이므로 해는 없다.

(ii) $x^2-1>3$에서 $\quad x^2-4>0$

$(x+2)(x-2)>0 \qquad \therefore x<-2$ 또는 $x>2$ ··· ❷

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\quad x<-2$ 또는 $x>2$ ··· ❸

답 $x<-2$ 또는 $x>2$

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

1037 이차부등식 $x^2-4x+a \le 0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot a=0, \qquad 4-a=0$

$\therefore a=4$

답 ④

1038 이차부등식 $-x^2+kx-5 \ge 0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $-x^2+kx-5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)=0, \qquad k^2-20=0$

$\therefore k=-2\sqrt{5}$ 또는 $k=2\sqrt{5}$ ··· ❶

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 -20이다. ··· ❷

답 -20

채점 기준	비율
❶ k의 값을 모두 구할 수 있다.	70 %
❷ 모든 실수 k의 값의 곱을 구할 수 있다.	30 %

1039 주어진 이차부등식의 해가 오직 한 개 존재하므로

$a+1>0 \qquad \therefore a>-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이차방정식 $(a+1)x^2+2(a+1)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-(a+1)\cdot 2=0$

$a^2-1=0 \quad \therefore a=-1$ 또는 $a=1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$ 답 1

1040 이차부등식 $x^2-x+a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot a>0, \quad 1-4a>0$

$\therefore a<\frac{1}{4}$ 답 $a<\frac{1}{4}$

1041 이차부등식 $-2x^2+4x-a>0$이 해를 가지려면 이차방정식 $-2x^2+4x-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-2)\cdot(-a)>0, \quad 4-2a>0$

$\therefore a<2$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다. 답 ④

1042 (i) $a>0$일 때,

이차함수 $y=ax^2+4x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$일 때,

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot a>0, \quad 4-a^2>0$

$(a+2)(a-2)<0 \quad \therefore -2<a<2$

그런데 $a<0$이므로 $-2<a<0$

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는 $-2<a<0$ 또는 $a>0$ 답 ②

참고 $a=0$이면 주어진 부등식이 이차부등식이 아니므로 $a\neq0$이다.

1043 모든 실수 x에 대하여 $kx^2+4kx+8>0$이 성립해야 하므로 $k>0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $kx^2+4kx+8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-k\cdot8<0, \quad 4k^2-8k<0$

$k(k-2)<0 \quad \therefore 0<k<2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는 $0<k<2$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=2$이므로 $\alpha+\beta=2$ 답 ②

1044 모든 실수 x에 대하여 $x^2+(a+3)x+2a+3\geq0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+(a+3)x+2a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+3)^2-4\cdot1\cdot(2a+3)\leq0$

$a^2-2a-3\leq0, \quad (a+1)(a-3)\leq0$

$\therefore -1\leq a\leq3$ 답 $-1\leq a\leq3$

1045 실수 x의 값에 관계없이 $(k-1)x^2+2(k-1)x-1\leq0$이 항상 성립해야 하므로

$k-1<0 \quad \therefore k<1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k-1)\cdot(-1)\leq0$

$k^2-k\leq0, \quad k(k-1)\leq0$

$\therefore 0\leq k\leq1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는 $0\leq k<1$

따라서 정수 k는 0의 1개이다. 답 ①

1046 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2-(m-8)x+m\geq0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(m-8)x+m=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(m-8)\}^2-4\cdot1\cdot m\leq0$

$m^2-20m+64\leq0, \quad (m-4)(m-16)\leq0$

$\therefore 4\leq m\leq16$

따라서 m의 최댓값은 16, 최솟값은 4이므로 구하는 합은 20이다. 답 ⑤

1047 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$-x^2+4(a+2)x+a+2\leq0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $-x^2+4(a+2)x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{2(a+2)\}^2-(-1)\cdot(a+2)\leq0$

$4a^2+17a+18\leq0, \quad (4a+9)(a+2)\leq0$

$\therefore -\frac{9}{4}\leq a\leq-2$

따라서 정수 a의 값은 -2이다. 답 ①

1048 주어진 이차부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$(k-4)x^2-2(k-4)x-1\leq0$

이 성립해야 하므로

$k-4<0 \quad \therefore k<4 \quad \cdots\cdots$ ㉠ ··· ❶

이차방정식 $(k-4)x^2-2(k-4)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-4)\}^2-(k-4)\cdot(-1)\leq0$

$k^2-7k+12\leq0, \quad (k-3)(k-4)\leq0$

$\therefore 3\leq k\leq4 \quad \cdots\cdots$ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는 $3\leq k<4$ ··· ❸

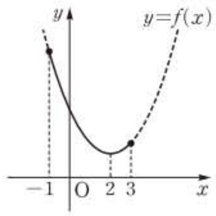
답 $3\leq k<4$

채점 기준	비율
❶ x^2의 계수를 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차방정식의 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

1049 $f(x)=x^2-4x+2a^2-a+1$이라 하면

$f(x)=(x-2)^2+2a^2-a-3$

$-1 \leq x \leq 3$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-1 \leq x \leq 3$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최소이므로 $f(2)>0$에서

$2a^2-a-3>0$

$(a+1)(2a-3)>0$

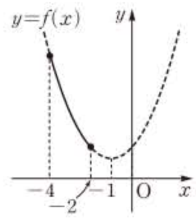
$\therefore a<-1$ 또는 $a>\frac{3}{2}$ 답 $a<-1$ 또는 $a>\frac{3}{2}$

1050 $x^2+3x-1>x-4a^2$에서 $x^2+2x+4a^2-1>0$

$f(x)=x^2+2x+4a^2-1$이라 하면

$f(x)=(x+1)^2+4a^2-2$

$-4 \leq x \leq -2$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-4 \leq x \leq -2$에서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최소이므로 $f(-2)>0$에서

$4a^2-1>0$

$(2a+1)(2a-1)>0$

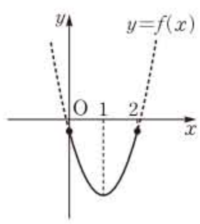
$\therefore a<-\frac{1}{2}$ 또는 $a>\frac{1}{2}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. 답 ①

1051 $f(x)=2x^2-4x+a^2-3a+2$라 하면

$f(x)=2(x-1)^2+a^2-3a$

$0 \leq x \leq 2$에서 $f(x)<0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$0 \leq x \leq 2$에서 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=2$일 때 최대이므로 $f(0)<0$에서

$a^2-3a+2<0$

$(a-1)(a-2)<0$

$\therefore 1<a<2$ 답 $1<a<2$

1052 $y=x^2-x+5$의 그래프가 직선 $y=2x+15$보다 위쪽에 있으면

$x^2-x+5>2x+15, \quad x^2-3x-10>0$

$(x+2)(x-5)>0 \quad \therefore x<-2$ 또는 $x>5$

답 $x<-2$ 또는 $x>5$

1053 $y=3x^2+2x-8$의 그래프가 직선 $y=-x+10$보다 아래쪽에 있으면

$3x^2+2x-8<-x+10, \quad 3x^2+3x-18<0$

$x^2+x-6<0, \quad (x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2$

따라서 이 범위에 속하는 x의 값이 아닌 것은 ①이다. 답 ①

1054 $y=-x^2+ax-b$의 그래프가 직선 $y=-x+5$보다 위쪽에 있으면

$-x^2+ax-b>-x+5$

$\therefore x^2-(a+1)x+b+5<0$ …… ㉠

해가 $5<x<6$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-5)(x-6)<0 \quad \therefore x^2-11x+30<0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$a+1=11, \ b+5=30$

따라서 $a=10, \ b=25$이므로

$b-a=15$ 답 ③

1055 $y=2x^2-3x-3$의 그래프가 $y=x^2+mx+n$의 그래프보다 아래쪽에 있으면

$2x^2-3x-3<x^2+mx+n$

$\therefore x^2-(3+m)x-(3+n)<0$ …… ㉠ ··· ❶

해가 $-1<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-2)<0 \quad \therefore x^2-x-2<0$ …… ㉡ ··· ❷

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$3+m=1, \ 3+n=2$

따라서 $m=-2, \ n=-1$이므로

$m+n=-3$ ··· ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 만족시키는 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 해가 $-1<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1056 $y=-2x^2-4x+1$의 그래프가 직선 $y=ax+3$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $-2x^2-4x+1<ax+3$, 즉 $2x^2+(4+a)x+2>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $2x^2+(4+a)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(4+a)^2-4 \cdot 2 \cdot 2<0$

$a^2+8a<0, \quad a(a+8)<0$

$\therefore -8<a<0$ 답 $-8<a<0$

라쎈 특강

'항상 아래쪽에 있도록'이라는 말에서 '부등식이 항상 성립하도록'이라는 말을 떠올릴 수 있어야 한다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있다는 것은 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<g(x)$가 성립함을 뜻한다. 따라서 부등식 $f(x)-g(x)<0$이 항상 성립할 조건을 이용한다.

1057 $y=x^2-3x+1$의 그래프가 직선 $y=kx-3$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-3x+1>kx-3$, 즉 $x^2-(3+k)x+4>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(3+k)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(3+k)\}^2-4 \cdot 1 \cdot 4<0$

$k^2+6k-7<0, \quad (k+7)(k-1)<0$

$\therefore -7<k<1$

따라서 정수 k의 최댓값은 0, 최솟값은 -6이므로

$M=0, m=-6 \quad \therefore Mm=0$ 답 ③

1058 $y=x^2-mx$의 그래프는 아래로 볼록하므로 이 그래프가 직선 $y=-3$과 만나지 않으려면 $y=x^2-mx$의 그래프가 직선 $y=-3$보다 항상 위쪽에 있어야 한다. ⋯ ❶

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2-mx>-3$, 즉 $x^2-mx+3>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-mx+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot3<0$

$m^2-12<0$, $\quad(m+2\sqrt{3})(m-2\sqrt{3})<0$

$\therefore -2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$ ⋯ ❷

그러므로 정수 m은 $-3, -2, -1, \cdots, 3$의 7개이다. ⋯ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ $y=x^2-mx$의 그래프와 직선 $y=-3$의 위치 관계를 알 수 있다.	30 %
❷ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 m의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1059 가격을 x만 원 인상한다고 하면 구두의 가격은 $(10+x)$만 원이고 하루 판매량은 $\underbrace{(30-2x)}_{30-2x>0\text{이어야 하므로 } 0<x<15}$켤레이므로 하루 판매액이 308만 원 이상이 되려면

$(10+x)(30-2x)\geq308$, $\quad -2x^2+10x+300\geq308$

$x^2-5x+4\leq0$, $\quad(x-1)(x-4)\leq0$

$\therefore 1\leq x\leq4$ 답 $1\leq x\leq4$

1060 야구공의 높이가 3.2 m 이상이려면

$-5t^2+8t+0.8\geq3.2$, $\quad 5t^2-8t+2.4\leq0$

$25t^2-40t+12\leq0$, $\quad(5t-2)(5t-6)\leq0$

$\therefore \frac{2}{5}\leq t\leq\frac{6}{5}$

따라서 야구공의 높이가 3.2 m 이상인 시간은 $\frac{6}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$(초) 동안이다. 답 ②

1061 도로의 폭을 x m라 하면 도로를 제외한 땅을 직사각형 모양으로 이어 붙였을 때 가로, 세로의 길이는 각각

$\underbrace{(40-x)\text{ m}, (30-x)\text{ m}}_{40-x>0,\ 30-x>0\text{이어야 하므로 } 0<x<30}$

이므로 도로를 제외한 땅의 넓이가 600 m² 이상이 되려면

$(40-x)(30-x)\geq600$ ⋯ ❶

$x^2-70x+600\geq0$, $\quad(x-10)(x-60)\geq0$

$\therefore x\leq10$ 또는 $x\geq60$

그런데 $0<x<30$이어야 하므로 $\quad 0<x\leq10$ ⋯ ❷

따라서 도로의 최대 폭은 10 m이다. ⋯ ❸

답 10 m

채점 기준	비율
❶ 도로의 폭을 x m라 하고 x에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 도로의 최대 폭을 구할 수 있다.	20 %

1062 $x^2+3x-10>0$에서 $\quad(x+5)(x-2)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>2$ ⋯⋯ ㉠

$x^2-x-12\leq0$에서 $\quad(x+3)(x-4)\leq0$

$\therefore -3\leq x\leq4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<x\leq4$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로 $\quad ab=8$ 답 ④

1063 $2x+6<0$에서 $\quad x<-3$ ⋯⋯ ㉠

$x^2+6x-7<0$에서 $\quad(x+7)(x-1)<0$

$\therefore -7<x<1$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❶

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-7<x<-3$ ⋯ ❷

따라서 정수 x는 $-6, -5, -4$이므로 구하는 합은 -15이다. ⋯ ❸

답 -15

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ 모든 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

1064 $|x-2|<6$에서 $\quad -6<x-2<6$

$\therefore -4<x<8$ ⋯⋯ ㉠

$x^2-10x+9>0$에서 $\quad(x-1)(x-9)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>9$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<x<1$

따라서 정수 x는 $-3, -2, -1, 0$의 4개이다. 답 ③

1065 $x^2+5x-3\leq3x^2$에서 $\quad 2x^2-5x+3\geq0$

$(x-1)(2x-3)\geq0$ $\quad\therefore x\leq1$ 또는 $x\geq\frac{3}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$3x^2\leq-x+2$에서 $\quad 3x^2+x-2\leq0$

$(x+1)(3x-2)\leq0$ $\quad\therefore -1\leq x\leq\frac{2}{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

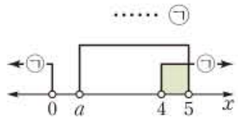
$-1\leq x\leq\frac{2}{3}$

따라서 실수 x의 최댓값은 $\frac{2}{3}$이다. 답 $\frac{2}{3}$

1066 $x^2-4x>0$에서 $\quad x(x-4)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>4$ ⋯⋯ ㉠

㉠과 $(x-a)(x-5)<0$의 해의 공통부분이 $4<x<5$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$0\leq a\leq4$ 답 $0\leq a\leq4$

라쎈 특강

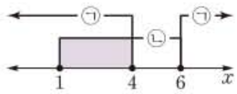
부등식 문제에서 어떤 범위의 경계가 되는 값의 포함 여부는 그 값을 부등식에 대입하여 주어진 조건을 만족시키는지 확인하여 정한다.

이 문제에서 $a=0$이면 $(x-a)(x-5)<0$의 해가 $0<x<5$이므로 ㉠과의 공통부분이 $4<x<5$가 된다. 또 $a=4$이면 $(x-a)(x-5)<0$의 해가 $4<x<5$이므로 ㉠과의 공통부분이 $4<x<5$가 된다. 즉 $a=0$, $a=4$는 모두 주어진 조건을 만족시키므로 a의 값의 범위에 포함된다.

1067 연립부등식

$\begin{cases} x^2+ax+b\geq0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+cx+d\leq0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x^2+ax+b\geq0$의 해는 $x\leq4$ 또는 $x\geq6$이므로

$(x-4)(x-6)\geq0,\quad x^2-10x+24\geq0$

$\therefore a=-10,\ b=24$

또 $x^2+cx+d\leq0$의 해는 $1\leq x\leq6$이므로

$(x-1)(x-6)\leq0,\quad x^2-7x+6\leq0$

$\therefore c=-7,\ d=6$

$\therefore a+b+c+d=13$

답 ③

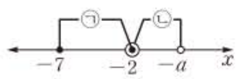
1068 $x^2+9x+14\leq0$에서 $\quad(x+7)(x+2)\leq0$

$\therefore -7\leq x\leq-2 \quad\cdots\cdots ㉠$

$x^2+(a+2)x+2a<0$에서

$(x+2)(x+a)<0 \quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분이 없으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-a\geq-2 \qquad \therefore a\leq2$

답 ③

1069 $x^2+2x-15>0$에서 $\quad(x+5)(x-3)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>3 \quad\cdots\cdots ㉠$

$|x-a|\leq1$에서 $\quad -1\leq x-a\leq1$

$\therefore a-1\leq x\leq a+1 \quad\cdots\cdots ㉡ \quad\cdots$ ❶

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하려면

$a-1<-5$ 또는 $a+1>3$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>2 \quad\cdots$ ❷

따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다. $\cdots$ ❸

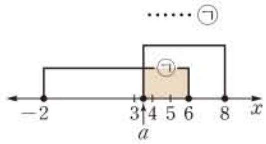
답 3

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

1070 $x^2-4x-12\leq0$에서 $\quad(x+2)(x-6)\leq0$

$\therefore -2\leq x\leq6 \quad\cdots\cdots ㉠$

㉠과 $(x-8)(x-a)\leq0$을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 3이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$3<a\leq4$

답 $3<a\leq4$

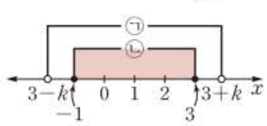
1071 $|x-3|<k$에서 $\quad -k<x-3<k$

$\therefore 3-k<x<3+k \quad\cdots\cdots ㉠$

$x^2-2x-3\leq0$에서 $\quad(x+1)(x-3)\leq0$

$\therefore -1\leq x\leq3 \quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 5이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) $3-k<-1$에서 $\quad k>4$

(ii) $3+k>3$에서 $\quad k>0$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는 $\quad k>4$

따라서 자연수 k의 최솟값은 5이다.

답 5

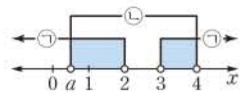
1072 $x^2-5x+6>0$에서 $\quad(x-2)(x-3)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>3 \quad\cdots\cdots ㉠$

$x^2-(a+4)x+4a<0$에서

$(x-a)(x-4)<0 \quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 1뿐이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$0\leq a<1$

답 ②

참고 $a=1$이면 $(x-a)(x-4)<0$의 해가 $1<x<4$이므로 ㉠과의 공통부분이 $1<x<2$ 또는 $3<x<4$가 된다. 즉 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 존재하지 않는다.

1073 $x-1,\ x,\ x+1$은 변의 길이이므로

$x-1>0 \qquad \therefore x>1 \quad\cdots\cdots ㉠$

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+1$이므로 삼각형이 만들어질 조건에 의하여

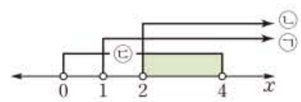
$x+1<(x-1)+x \qquad \therefore x>2 \quad\cdots\cdots ㉡$

둔각삼각형이 되려면

$(x+1)^2>(x-1)^2+x^2$

$x^2-4x<0,\quad x(x-4)<0$

$\therefore 0<x<4 \quad\cdots\cdots ㉢$



㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$2<x<4$

따라서 정수 x의 값은 3이다.

답 3

라쎈 특강

삼각형의 변의 길이와 모양

삼각형의 세 변의 길이가 $a,\ b,\ c\ (a\leq b\leq c)$일 때

① $c^2<a^2+b^2$ ➡ 예각삼각형

② $c^2=a^2+b^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

③ $c^2>a^2+b^2$ ➡ 둔각삼각형

1074 테두리 장식의 넓이는

$(2x+20)(2x+15)-20\cdot15=4x^2+70x\ (\text{cm}^2)$

테두리 장식의 넓이가 114 cm² 이상 200 cm² 이하이어야 하므로 $\quad 114\leq4x^2+70x\leq200$

$\therefore 57\leq2x^2+35x\leq100$

$57\leq2x^2+35x$에서

$2x^2+35x-57\geq0,\quad(x+19)(2x-3)\geq0$

$\therefore x\leq-19$ 또는 $x\geq\dfrac{3}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x\geq\dfrac{3}{2} \quad\cdots\cdots ㉠$

$2x^2+35x\le100$에서

$2x^2+35x-100\le0$, $\quad(x+20)(2x-5)\le0$

$\therefore -20\le x\le\dfrac{5}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $\quad 0<x\le\dfrac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}$ 답 $\dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}$

1075 새로 만든 직육면체의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이, 높이는 각각 $a+5$, a, $a-3$이므로

$a-3>0 \quad \therefore a>3$ …… ㉠ ⋯➊

이 직육면체의 부피는 $a(a+5)(a-3)$이고 처음 정육면체의 부피는 a^3이므로

$a(a+5)(a-3)<a^3$ ⋯➋

$2a^2-15a<0$, $\quad a(2a-15)<0$

$\therefore 0<a<\dfrac{15}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3<a<\dfrac{15}{2}$ ⋯➌

따라서 자연수 a는 4, 5, 6, 7의 4개이다. ⋯➍

답 4

채점 기준	비율
➊ 길이를 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
➋ 부피를 이용하여 a에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	30 %
➌ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➍ 자연수 a의 개수를 구할 수 있다.	10 %

1076 직사각형의 가로의 길이가 x이므로 세로의 길이는

$12-x$

이때 x, $12-x$는 변의 길이이고, 가로의 길이가 세로의 길이보다 길어야 하므로

$x>0$, $12-x>0$, $x>12-x$

$\therefore 6<x<12$ …… ㉠

또 직사각형의 넓이는 $x(12-x)$이므로

$20\le x(12-x)\le32$

$20\le x(12-x)$에서 $\quad x^2-12x+20\le0$

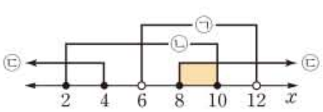
$(x-2)(x-10)\le0$

$\therefore 2\le x\le10$ …… ㉡

$x(12-x)\le32$에서 $\quad x^2-12x+32\ge0$

$(x-4)(x-8)\ge0$

$\therefore x\le4$ 또는 $x\ge8$ …… ㉢



㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$8\le x\le10$

따라서 x의 최댓값은 10, 최솟값은 8이므로 구하는 합은 18이다. 답 ⑤

1077 이차방정식 $x^2+2kx+3k=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-3k>0$

$k(k-3)>0 \quad \therefore k<0$ 또는 $k>3$

따라서 실수 k의 값이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

1078 이차방정식 $x^2-4kx+k^2+1=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-(k^2+1)<0$

$3k^2-1<0$, $\quad(\sqrt{3}k+1)(\sqrt{3}k-1)<0$

$\therefore -\dfrac{1}{\sqrt{3}}<k<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 $\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$\alpha\beta=-\dfrac{1}{3}$ 답 $-\dfrac{1}{3}$

1079 이차방정식 $x^2-2kx+9=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(-k)^2-9<0$

$k^2-9<0$, $\quad(k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2kx+k+2=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=k^2-(k+2)\ge0$

$k^2-k-2\ge0$, $\quad(k+1)(k-2)\ge0$

$\therefore k\le-1$ 또는 $k\ge2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3<k\le-1$ 또는 $2\le k<3$

따라서 정수 k는 -2, -1, 2의 3개이다. 답 ③

1080 이차방정식 $x^2+2(1-k)x-k^2-ak-1=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(1-k)^2-(-k^2-ak-1)\ge0$

$\therefore 2k^2+(a-2)k+2\ge0$

이 이차부등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 k에 대한 이차방정식 $2k^2+(a-2)k+2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(a-2)^2-4\cdot2\cdot2\le0$

$a^2-4a-12\le0$, $\quad(a+2)(a-6)\le0$

$\therefore -2\le a\le6$ 답 $-2\le a\le6$

1081 이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}kx+k+1=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 양수이므로

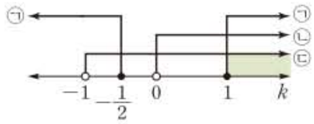
(i) $\dfrac{D}{4}=(-\sqrt{2}k)^2-(k+1)\ge0$

$2k^2-k-1\ge0$, $\quad(2k+1)(k-1)\ge0$

$\therefore k\le-\dfrac{1}{2}$ 또는 $k\ge1$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=2\sqrt{2}k>0$ $\quad\therefore k>0$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=k+1>0$ $\quad\therefore k>-1$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad k\ge1$

답 $k\ge1$

1082 이차방정식 $x^2-2(m+1)x+5-m=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 음수이므로

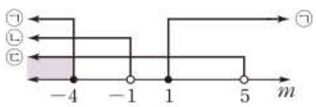
(i) $\frac{D}{4}=\{-(m+1)\}^2-(5-m)\ge0$

$m^2+3m-4\ge0$, $\quad(m+4)(m-1)\ge0$

$\therefore m\le-4$ 또는 $m\ge1$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=2(m+1)<0$ $\quad\therefore m<-1$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=5-m>0$ $\quad\therefore m<5$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad m\le-4$

따라서 실수 m의 최댓값은 -4이다.

답 ②

1083 이차방정식 $x^2-(k-1)(k-2)x-k+2=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=-k+2<0$ $\quad\therefore k>2$ …… ㉠ ··· ❶

또 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 작으므로

$\alpha+\beta=(k-1)(k-2)>0$

$\therefore k<1$ 또는 $k>2$ …… ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad k>2$ ··· ❸

답 $k>2$

채점 기준	비율
❶ 두 근의 부호가 다름을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 작음을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

라쎈 특강

근의 절댓값에 대한 조건

이차방정식의 두 근이 서로 다른 부호일 때

① |양수인 근|=|음수인 근|

(두 근의 합)$=0$, (두 근의 곱)<0

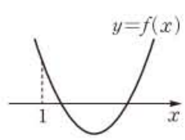
② |양수인 근|>|음수인 근|

(두 근의 합)>0, (두 근의 곱)<0

③ |양수인 근|<|음수인 근|

(두 근의 합)<0, (두 근의 곱)<0

1084 $f(x)=x^2+ax+9$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot1\cdot9\ge0$

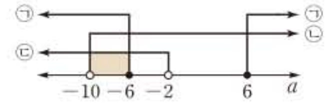
$a^2-36\ge0$, $\quad(a+6)(a-6)\ge0$

$\therefore a\le-6$ 또는 $a\ge6$ …… ㉠

(ii) $f(1)=1+a+9>0$에서 $\quad a>-10$ …… ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{a}{2}$이므로

$-\frac{a}{2}>1$ $\quad\therefore a<-2$ …… ㉢

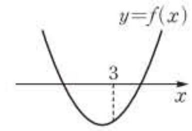


이상에서 공통부분을 구하면 $\quad -10<a\le-6$

따라서 정수 a는 -9, -8, -7, -6의 4개이다.

답 ④

1085 $f(x)=x^2+(k-1)x+k^2-10$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 3이 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(3)<0$이어야 하므로

$9+3(k-1)+k^2-10<0$

$k^2+3k-4<0$, $\quad(k+4)(k-1)<0$

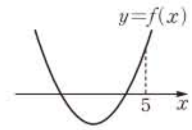
$\therefore -4<k<1$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=1$이므로

$\alpha+\beta=-3$

답 ②

1086 $f(x)=x^2-2kx+k+20$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 5보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+20)\ge0$

$k^2-k-20\ge0$, $\quad(k+4)(k-5)\ge0$

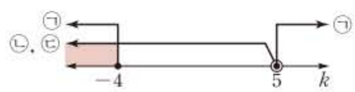
$\therefore k\le-4$ 또는 $k\ge5$ …… ㉠ ··· ❶

(ii) $f(5)=25-10k+k+20>0$에서

$-9k>-45$ $\quad\therefore k<5$ …… ㉡ ··· ❷

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k<5$ …… ㉢ ··· ❸



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad k\le-4$ ··· ❹

답 $k\le-4$

채점 기준	비율
❶ 이차방정식의 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 함숫값을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 축의 방정식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	10 %

1087 전략 부등식 $f(x)\le g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이다.

풀이 ㄱ. $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac>0$

ㄴ. $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 직선 $y=px+q$의 y절편 q가 양수이므로

$f(q)=aq^2+bq+c>0$

ㄷ. $ax^2+(b-p)x+c-q\le0$에서

$ax^2+bx+c-(px+q)\le0$

$\therefore ax^2+bx+c\le px+q$

부등식 $ax^2+bx+c\le px+q$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=px+q$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로 $\alpha\le x\le\beta$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 ㄷ. $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=px+q$의 교점의 x좌표가 α, β이므로 $ax^2+bx+c=px+q$, 즉 $ax^2+(b-p)x+c-q=0$의 해는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이다.

$\therefore ax^2+(b-p)x+c-q=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$ax^2+(b-q)x+c-q\le0$에서 $a(x-\alpha)(x-\beta)\le0$

이때 $a>0$이므로 부등식의 해는 $\alpha\le x\le\beta$

1088 **전략** 각 부등식의 좌변을 $a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다. 이때 x^2의 계수가 음수이면 부등식의 양변에 -1을 곱한다.

풀이 ㄱ. $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\ge0$

따라서 $4x^2-4x+1\ge0$의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$

따라서 $x^2+x+1\le0$의 해는 없다.

ㄷ. $-x^2+8x-16>0$에서 $x^2-8x+16<0$

그런데 $x^2-8x+16=(x-4)^2\ge0$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

ㄹ. $-3x^2+x-1\le0$에서 $3x^2-x+1\ge0$

그런데 $3x^2-x+1=3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{12}\ge\frac{11}{12}$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

이상에서 해가 모든 실수인 부등식은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

1089 **전략** 해가 $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta\ (\alpha<\beta)$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)\ge0$이다.

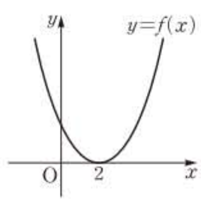
풀이 해가 $x\le-2$ 또는 $x\ge4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x+2)(x-4)\ge0$ $\therefore x^2-2x-8\ge0$

이 부등식이 $-x^2+ax+b\le0$, 즉 $x^2-ax-b\ge0$과 같으므로

$a=2$, $b=8$ $\therefore ab=16$ 답 16

1090 **전략** 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\ne k$인 모든 실수이면 $f(x)=a(x-k)^2\ (a>0)$임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\ne2$인 모든 실수이므로 이차함수 $f(x)$에서 x^2의 계수는 양수이고 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 점 $(2,\ 0)$에서 접한다.



즉 $f(x)=a(x-2)^2\ (a>0)$이라 하면 조건 (가)에서 $f(0)=8$이므로

$4a=8$ $\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2(x-2)^2$이므로

$f(5)=2\cdot(5-2)^2=18$ 답 ④

1091 **전략** 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$의 해가 오직 한 개이면 $a<0$임을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

풀이 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$의 해가 3뿐이므로 $a<0$이고

$ax^2+bx+c=a(x-3)^2$

즉 $ax^2+bx+c=ax^2-6ax+9a$이므로

$b=-6a$, $c=9a$

이것을 $bx^2+cx+6a<0$에 대입하면

$-6ax^2+9ax+6a<0$, $-3a(2x^2-3x-2)<0$

$2x^2-3x-2<0\ (\because -3a>0)$

$(2x+1)(x-2)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<2$ 답 $-\frac{1}{2}<x<2$

1092 **전략** 이차함수 $f(x)=p(x-\alpha)(x-\beta)$에 대하여 $f(x-a)=p(x-a-\alpha)(x-a-\beta)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2-x-12=(x+3)(x-4)$이므로

$f(x-1)=(x-1+3)(x-1-4)$

$=(x+2)(x-5)$

즉 부등식 $f(x-1)<0$의 해는 $(x+2)(x-5)<0$에서

$-2<x<5$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, $\cdots$, 4이므로 구하는 합은 9이다. 답 ③

1093 **전략** 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나눈다.

풀이 $x^2-2x-5<|x-1|$에서

(i) $x\ge1$일 때,

$x^2-2x-5<x-1$, $x^2-3x-4<0$

$(x+1)(x-4)<0$ $\therefore -1<x<4$

그런데 $x\ge1$이므로 $1\le x<4$

(ii) $x<1$일 때,

$x^2-2x-5<-(x-1)$, $x^2-x-6<0$

$(x+2)(x-3)<0$ $\therefore -2<x<3$

그런데 $x<1$이므로 $-2<x<1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-2<x<4$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다. 답 5

1094 **전략** 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$의 해가 오직 한 개 존재하려면 $a<0$, $b^2-4ac=0$이어야 한다.

풀이 이차부등식 $(1-k)x^2+2(k-1)x-1\ge0$의 해가 오직 한 개 존재하므로

$1-k<0$ $\therefore k>1$ …… ㉠

이차방정식 $(1-k)x^2+2(k-1)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(1-k)\cdot(-1)=0$

$k^2-3k+2=0,\qquad (k-1)(k-2)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad k=2$

답 ③

1095 **전략** 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$이 항상 성립하려면 $a<0$, $b^2-4ac\le 0$이어야 한다.

풀이 실수 x의 값에 관계없이 $ax^2-4\sqrt{2}x+a+2\le 0$이 항상 성립해야 하므로

$a<0$ …… ㉠

이차방정식 $ax^2-4\sqrt{2}x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2\sqrt{2})^2-a(a+2)\le 0$

$a^2+2a-8\ge 0,\qquad (a+4)(a-2)\ge 0$

$\therefore a\le -4$ 또는 $a\ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a\le -4$

따라서 실수 a의 최댓값은 -4이다.

답 ②

1096 **전략** 이차부등식 $x^2+bx+c<0$의 해가 존재하지 않으려면 $b^2-4c\le 0$이어야 한다.

풀이 이차부등식 $x^2-2ax+7a<0$을 만족시키는 해가 없으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2-2ax+7a\ge 0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2ax+7a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-7a\le 0$

$a^2-7a\le 0,\qquad a(a-7)\le 0$

$\therefore 0\le a\le 7$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, …, 7의 8개이다.

답 ②

1097 **전략** $\alpha\le x\le\beta$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $\alpha\le x\le\beta$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0이어야 한다.

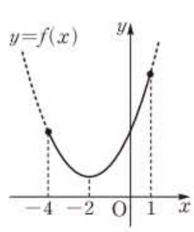
풀이 $x^2-4x<2x^2+a^2-3a$에서

$x^2+4x+a^2-3a>0$

$f(x)=x^2+4x+a^2-3a$라 하면

$f(x)=(x+2)^2+a^2-3a-4$

$-4\le x\le 1$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-4\le x\le 1$에서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최소이므로 $f(-2)>0$에서

$a^2-3a-4>0$

$(a+1)(a-4)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>4$

답 $a<-1$ 또는 $a>4$

1098 **전략** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 이차부등식 $f(x)<g(x)$의 해와 같다.

풀이 $y=x^2-4x$의 그래프가 직선 $y=a$보다 아래쪽에 있으면

$x^2-4x<a$

$\therefore x^2-4x-a<0$ …… ㉠

해가 $b<x<5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-b)(x-5)<0$

$\therefore x^2-(b+5)x+5b<0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $\quad 4=b+5,\ -a=5b$

따라서 $a=5$, $b=-1$이므로

$ab=-5$

답 ①

1099 **전략** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있으면 이차부등식 $f(x)>g(x)$가 항상 성립한다.

풀이 $y=x^2-x+2$의 그래프가 직선 $y=x+m-1$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x+2>x+m-1$, 즉 $x^2-2x-m+3>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2x-m+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-m+3)<0$

$1+m-3<0\qquad \therefore m<2$

따라서 정수 m의 최댓값은 1이다.

답 ④

1100 **전략** 새로 만든 직사각형의 가로, 세로의 길이를 이용하여 부등식을 세운다.

풀이 새로 만든 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각

$(20-x)$ cm, $(16+x)$ cm

이므로 넓이가 288 cm^2 이상이 되려면

$(20-x)(16+x)\ge 288,\qquad 320+4x-x^2\ge 288$

$x^2-4x-32\le 0,\qquad (x+4)(x-8)\le 0$

$\therefore -4\le x\le 8$

그런데 $0<\underline{x<20}$이어야 하므로 $\quad 0<x\le 8$

$20-x>0$이어야 하므로 $x<20$

따라서 x의 최댓값은 8이다.

답 ①

1101 **전략** 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 구한다.

풀이 $|x-1|\le 6$에서 $\quad -6\le x-1\le 6$

$\therefore -5\le x\le 7$ …… ㉠

$(x-2)(x-8)\le 0$에서 $\quad 2\le x\le 8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 2\le x\le 7$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=7$이므로

$\alpha+\beta=9$

답 9

1102 **전략** $A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 바꾸어 푼다.

풀이 $-x^2-3x+4\le x^2-x-8$에서 $\quad -2x^2-2x+12\le 0$

$x^2+x-6\ge 0,\qquad (x+3)(x-2)\ge 0$

$\therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 2$ …… ㉠

$x^2-x-8<2x^2-5x-4$에서 $\quad -x^2+4x-4<0$

$x^2-4x+4>0,\qquad (x-2)^2>0$

$\therefore x\ne 2$인 모든 실수 …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x\le -3$ 또는 $x>2$

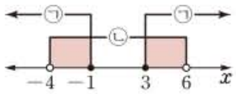
답 $x\le -3$ 또는 $x>2$

1103 전략 주어진 연립부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 각 부등식의 해를 구한다.

풀이 연립부등식

$$\begin{cases} x^2-2x+a\ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2x+b<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x^2-2x+a\ge0$의 해는 $x\le-1$ 또는 $x\ge3$이므로

$(x+1)(x-3)\ge0,\quad x^2-2x-3\ge0$

$\therefore a=-3$

또 $x^2-2x+b<0$의 해는 $-4<x<6$이므로

$(x+4)(x-6)<0,\quad x^2-2x-24<0$

$\therefore b=-24$

$\therefore a-b=21$

답 21

1104 전략 각 부등식의 해를 구하여 공통부분이 존재하도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x^2+4x-21\le0$에서 $\quad(x+7)(x-3)\le0$

$\therefore -7\le x\le3 \quad\cdots\cdots ㉠$

$x^2-5kx-6k^2>0$에서 $\quad(x+k)(x-6k)>0$

$\therefore x<-k$ 또는 $x>6k$ ($\because k>0$) $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하려면

$-k>-7$ 또는 $6k<3$

$k<7$ 또는 $k<\frac{1}{2}\quad \therefore k<7$

따라서 양의 정수 k는 $1, 2, 3, \cdots, 6$의 6개이다.

답 ③

1105 전략 부등식 $ax\ge b$가 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건은 $a=0,\ b\le0$이다.

풀이 부등식 $x-2\le g(x)\le f(x)$에서

$x-2\le(a-1)x+b\le2x^2+5x+2$

(i) $x-2\le(a-1)x+b$에서 $\quad(a-2)x\ge-b-2$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$a-2=0,\ -b-2\le0$

$\therefore a=2,\ b\ge-2$

(ii) $(a-1)x+b\le2x^2+5x+2$에서 $a=2$이므로

$x+b\le2x^2+5x+2$

$2x^2+4x+2-b\ge0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2+4x+2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2(2-b)\le0$

$2b\le0\quad \therefore b\le0$

(i), (ii)에서 $\quad-2\le b\le0$

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=0$이므로 $\quad\beta-\alpha=2$

답 ③

참고 $\beta-\alpha$가 최대이려면 β가 최대이고 α가 최소이어야 한다.

1106 전략 □PQCR, △APR, △PBQ의 넓이를 각각 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 △APR, △PBQ는 모두 직각이등변삼각형이므로

$\overline{PR}=\overline{AR}=a,\ \overline{BQ}=\overline{PQ}=12-a$

따라서 □PQCR의 넓이는 $\quad a(12-a)$

△APR의 넓이는 $\quad\frac{1}{2}a^2$

△PBQ의 넓이는 $\quad\frac{1}{2}(12-a)^2$

□PQCR의 넓이가 △APR의 넓이보다 크므로

$a(12-a)>\frac{1}{2}a^2,\quad 3a^2-24a<0$

$3a(a-8)<0\quad \therefore 0<a<8\quad\cdots\cdots ㉠$

또 □PQCR의 넓이가 △PBQ의 넓이보다 크므로

$a(12-a)>\frac{1}{2}(12-a)^2,\quad a^2-16a+48<0$

$(a-4)(a-12)<0\quad \therefore 4<a<12\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 4<a<8$

따라서 자연수 a는 5, 6, 7이므로 구하는 합은 18이다.

답 18

1107 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$, 허근을 가지면 $D<0$이다.

풀이 이차방정식 $2x^2-ax+3a=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4\cdot2\cdot3a<0$

$a^2-24a<0,\quad a(a-24)<0$

$\therefore 0<a<24\quad\cdots\cdots ㉠$

이차방정식 $x^2-2ax+2-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-a)^2-(2-a)>0$

$a^2+a-2>0,\quad(a+2)(a-1)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>1\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<a<24$

답 $1<a<24$

1108 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 부호가 서로 다르면 $\frac{c}{a}<0$이다.

풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha\beta=m^2-4m-12<0$

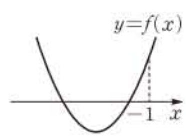
$(m+2)(m-6)<0\quad \therefore -2<m<6$

따라서 정수 m의 최댓값은 5이다.

답 ①

1109 전략 $f(x)=x^2-4ax+8$이라 하고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 조건에 맞게 그려 본다.

풀이 $f(x)=x^2-4ax+8$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-8\ge0$

$4a^2-8\ge0,\quad a^2-2\ge0,\quad(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})\ge0$

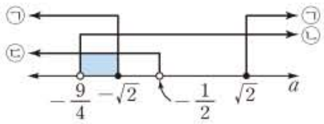
$\therefore a\le-\sqrt{2}$ 또는 $a\ge\sqrt{2}\quad\cdots\cdots ㉠$

(ii) $f(-1)=1+4a+8>0$에서 $\quad4a>-9$

$\therefore a>-\frac{9}{4}\quad\cdots\cdots ㉡$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2a$이므로

$2a<-1 \qquad \therefore a<-\frac{1}{2}$ ...... ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$-\frac{9}{4}<a\le-\sqrt{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\sqrt{2}$이다. 답 $-\sqrt{2}$

1110 전략 주어진 그래프를 이용하여 먼저 이차함수의 식을 구한다.

풀이 $f(x)=a(x+1)(x-4)(a>0)$라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=a\cdot1\cdot(-4) \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$ ··· ❶

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-4)$이므로 $f(x)<3$에서

$\frac{1}{2}(x+1)(x-4)<3, \qquad x^2-3x-10<0$

$(x+2)(x-5)<0 \qquad \therefore -2<x<5$ ··· ❷

답 $-2<x<5$

채점 기준	비율
❶ $f(x)=a(x+1)(x-4)$라 하고 a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 부등식 $f(x)<3$의 해를 구할 수 있다.	60 %

1111 전략 $\sqrt{A}$가 실수가 되려면 $A\ge0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $\sqrt{x^2-2(k+2)x-k}$가 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2(k+2)x-k\ge0$이 성립해야 한다. ··· ❶

이차방정식 $x^2-2(k+2)x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-(-k)\le0$ ··· ❷

$k^2+5k+4\le0, \qquad (k+4)(k+1)\le0$

$\therefore -4\le k\le-1$ ··· ❸

답 $-4\le k\le-1$

채점 기준	비율
❶ $x^2-2(k+2)x-k\ge0$임을 알 수 있다.	30 %
❷ 이차방정식 $x^2-2(k+2)x-k=0$의 판별식을 D라 할 때, $\frac{D}{4}\le0$임을 알 수 있다.	40 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

1112 전략 물체의 높이 y m가 지면으로부터 5 m 이상이면 $y\ge5$임을 이용하여 t에 대한 이차부등식을 세운다.

풀이 물체의 높이 y m가 5 m 이상이면

$10-5t^2\ge5$ ··· ❶

$t^2-1\le0, \qquad (t+1)(t-1)\le0$

$\therefore -1\le t\le1$

그런데 $t\ge0$이므로 $\qquad 0\le t\le1$ ··· ❷

따라서 높이가 5 m 이상인 시간은 1초 동안이다. ··· ❸

답 1초

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 높이가 5 m 이상인 시간을 구할 수 있다.	20 %

1113 전략 각 부등식을 풀어 해의 공통부분을 생각한다.

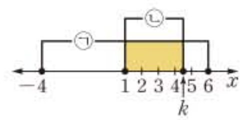
풀이 $x^2-2x-24\le0$에서 $\qquad (x+4)(x-6)\le0$

$\therefore -4\le x\le6$ ...... ㉠

$x^2-(k+1)x+k\le0$에서

$(x-1)(x-k)\le0$ ...... ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 x의 개수가 4이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$4\le k<5$ ··· ❷

답 $4\le k<5$

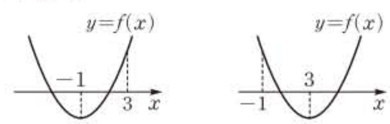
채점 기준	비율
❶ ㉠, ㉡을 구할 수 있다.	50 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

1114 전략 이차방정식 $x^2-2x-3=0$의 해를 이용하여 이차함수 $y=x^2+2ax+9$의 그래프의 개형을 생각한다.

풀이 $x^2-2x-3=0$에서 $\qquad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$ ··· ❶

즉 $x^2+2ax+9=0$의 한 근이 -1과 3 사이에 있어야 하므로 $f(x)=x^2+2ax+9$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $f(-1)f(3)<0$이므로

$(1-2a+9)(9+6a+9)<0$

$(10-2a)(6a+18)<0, \qquad (a+3)(a-5)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>5$ ··· ❷

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $x^2-2x-3=0$의 두 근을 구할 수 있다.	20 %
❷ a에 대한 이차부등식을 세우고, 그 해를 구할 수 있다.	60 %
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

09 평면좌표

1115 $\overline{AB}=|9-3|=6$ 답 6

1116 $\overline{AB}=|5-(-2)|=7$ 답 7

1117 $\overline{AB}=|-1-(-7)|=6$ 답 6

1118 $\overline{AB}=|-6-4|=10$ 답 10

1119 $\overline{OA}=|-4|=4$ 답 4

1120 $\overline{AB}=\sqrt{(5-3)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

1121 $\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+\{3-(-1)\}^2}=2\sqrt{5}$ 답 $2\sqrt{5}$

1122 $\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+\{6-(-3)\}^2}=3\sqrt{10}$ 답 $3\sqrt{10}$

1123 $\overline{AB}=\sqrt{(-5-2)^2+(1-1)^2}=7$ 답 7

1124 $\overline{OA}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$ 답 13

1125 답 D

1126 답 C

1127 답 1

1128 답 3

1129 $\dfrac{1\cdot 4+3\cdot(-8)}{1+3}=-5$ $\therefore$ P(-5) 답 -5

1130 $\dfrac{-8+4}{2}=-2$ $\therefore$ M(-2) 답 -2

1131 $\dfrac{5\cdot 4-2\cdot(-8)}{5-2}=12$ $\therefore$ Q(12) 답 12

1132 $\dfrac{a+(-2)}{2}=3$이므로 $a=8$ 답 8

1133 $\dfrac{3\cdot(-2)+2\cdot 6}{3+2}=\dfrac{6}{5}$, $\dfrac{3\cdot(-4)+2\cdot 2}{3+2}=-\dfrac{8}{5}$

$\therefore$ P$\left(\dfrac{6}{5}, -\dfrac{8}{5}\right)$ 답 $\left(\dfrac{6}{5}, -\dfrac{8}{5}\right)$

1134 $\dfrac{6-2}{2}=2$, $\dfrac{2-4}{2}=-1$

$\therefore$ M$(2, -1)$ 답 $(2, -1)$

1135 $\dfrac{2\cdot(-2)-1\cdot 6}{2-1}=-10$, $\dfrac{2\cdot(-4)-1\cdot 2}{2-1}=-10$

$\therefore$ Q$(-10, -10)$ 답 $(-10, -10)$

1136 $\dfrac{-7+b}{2}=-2$, $\dfrac{a+4}{2}=3$이므로

$a=2$, $b=3$ 답 $a=2$, $b=3$

1137 $\dfrac{0+2+4}{3}=2$, $\dfrac{0+3+3}{3}=2$

$\therefore$ G$(2, 2)$ 답 $(2, 2)$

1138 $\dfrac{2-1-4}{3}=-1$, $\dfrac{5-3+1}{3}=1$

$\therefore$ G$(-1, 1)$ 답 $(-1, 1)$

1139 $\dfrac{6+8-2}{3}=4$, $\dfrac{-7+1+9}{3}=1$

$\therefore$ G$(4, 1)$ 답 $(4, 1)$

1140 $\dfrac{a+1-5}{3}=-1$, $\dfrac{-5+3+b}{3}=0$이므로

$a=1$, $b=2$ 답 $a=1$, $b=2$

1141 $\overline{AB}=5$이므로 $\sqrt{(a-3)^2+(0-3)^2}=5$

양변을 제곱하면 $(a-3)^2+9=25$

$a^2-6a-7=0$, $(a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=7$ ($\because a>0$) 답 ⑤

1142 ① $\overline{OA}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

② $\overline{OB}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

③ $\overline{OC}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

④ $\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{17}$

⑤ $\overline{BC}=\sqrt{(4-3)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$

따라서 길이가 가장 긴 것은 ③이다. 답 ③

1143 $\overline{AB}=3\sqrt{10}$에서 $\overline{AB}^2=90$이므로

$(3b-3a)^2+(a-b)^2=90$ ··· ❶

$9(a-b)^2+(a-b)^2=90$, $(a-b)^2=9$

$\therefore a-b=3$ ($\because a>b$) ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	60 %
❷ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1144 $\overline{AB}=\sqrt{(a-6)^2+(4-a)^2}$

$=\sqrt{2a^2-20a+52}$

$=\sqrt{2(a-5)^2+2}$

따라서 $a=5$일 때 $\overline{AB}$의 길이가 최소이다. 답 5

라쎈 특강

이차함수의 최댓값과 최솟값

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값은 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 구한다.

① $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 갖고, 최댓값은 없다.

② $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 갖고, 최솟값은 없다.

1145 구하는 점을 $\mathrm{P}(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(a-2)^2+4^2=(a-6)^2+(-8)^2$

$-4a+20=-12a+100 \qquad \therefore a=10$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(10,\ 0)$이다. 답 $(10,\ 0)$

1146 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(-1)^2+(a+2)^2=(-4)^2+(a-1)^2$

$4a+5=-2a+17 \qquad \therefore a=2$

답 2

1147 $\mathrm{P}(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(a+1)^2+(-5)^2=(a-2)^2+(-2)^2$

$2a+26=-4a+8 \qquad \therefore a=-3$

$\therefore \mathrm{P}(-3,\ 0)$

또 $\mathrm{Q}(0,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$에서 $\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{BQ}}^2$이므로

$1^2+(b-5)^2=(-2)^2+(b-2)^2$

$-10b+26=-4b+8 \qquad \therefore b=3$

$\therefore \mathrm{Q}(0,\ 3)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

답 ②

1148 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로

$b=a-1$ …… ㉠ ⋯ ❶

또 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-3)^2=(a-3)^2+(b+1)^2$

$-2a-6b=-6a+2b$

$\therefore a-2b=0$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=1$

$\therefore a+b=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 점 P가 직선 $y=x-1$ 위의 점임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1149 삼각형 ABC의 외심 P에서 세 꼭짓점까지의 거리가 같으므로
└ 외접원의 반지름의 길이

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}} \qquad \therefore \overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$에서 $\quad (a+2)^2+b^2=(a-4)^2+b^2$

$4a+4=-8a+16$

$\therefore a=1$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$에서 $\quad (a-2)^2+(b-4)^2=(a-4)^2+b^2$

$-4a-8b+20=-8a+16$

$\therefore a-2b=-1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $\quad b=1$

$\therefore b-a=0$

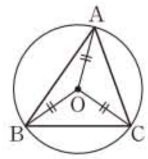
답 ③

라쎈 특강

삼각형의 외심의 성질

삼각형 ABC의 외심 O에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같다.

➡ $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}$



1150 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3+2)^2+(-3-2)^2}=5\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(2-3)^2+(4+3)^2}=5\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(-2-2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이다. 답 ②

1151 (1) $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-4-4)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{17}$,

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(-1+4)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{34}$,

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(4+1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{34}$

$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CA}},\ \overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$는 $\angle\mathrm{C}=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

(2) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\overline{\mathrm{CA}}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\cdot\sqrt{34}=17$

답 (1) $\angle\mathrm{C}=90^\circ$인 직각이등변삼각형 (2) 17

1152 $\overline{\mathrm{OB}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2$이므로

$6^2+(-2)^2=a^2+2^2+(6-a)^2+(-2-2)^2$

$a^2-6a+8=0, \qquad (a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

따라서 모든 a의 값의 합은 6이다. 답 ③

1153 $\mathrm{C}(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CA}}$에서

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$에서

$(1+1)^2+(3+3)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$

$\therefore a^2+b^2-2a-6b-30=0$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2$에서

$(1+1)^2+(3+3)^2=(-1-a)^2+(-3-b)^2$

$\therefore a^2+b^2+2a+6b-30=0$ …… ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$4a+12b=0 \qquad \therefore a=-3b$ ⋯ ❶

이것을 ㉠에 대입하면

$(-3b)^2+b^2-2\cdot(-3b)-6b-30=0, \qquad 10b^2=30$

$b^2=3 \qquad \therefore b=\pm\sqrt{3}$

$\therefore a=\pm3\sqrt{3},\ b=\mp\sqrt{3}$ (복호동순) ⋯ ❷

그런데 점 C가 제2사분면 위의 점이므로

$a<0,\ b>0$

$\therefore \mathrm{C}(-3\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ ⋯ ❸

답 $(-3\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

채점 기준	비율
❶ 점 C의 좌표를 (a, b)라 하고, a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

1154 $\overline{OP}+\overline{PA}\ge\overline{OA}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

따라서 $\overline{OP}+\overline{PA}$의 최솟값은 10이다. 답 ⑤

참고 $\overline{OP}+\overline{PA}$의 값이 최소일 때, 점 P는 $\overline{OA}$ 위의 점이다.

1155 $\overline{AP}+\overline{PB}\ge\overline{AB}$

$=\sqrt{(a+2-1)^2+(-2-1+a)^2}$

$=\sqrt{2a^2-4a+10}=\sqrt{2(a-1)^2+8}$

따라서 $a=1$일 때 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이다.

답 $2\sqrt{2}$

1156 $\sqrt{(a+1)^2+(b-5)^2}=\overline{AB}$, $\sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(a+1)^2+(b-5)^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2}$

$=\overline{AB}+\overline{BC}$

$\ge\overline{AC}$

$=\sqrt{(3+1)^2+(2-5)^2}=5$

따라서 주어진 식의 최솟값은 5이다. 답 ③

라쎈 특강

실수 a, b, x, y에 대하여 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$의 값은 두 점 (x, y), (a, b) 사이의 거리와 같다.

1157 $P(a, 0)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-2)^2+(-5)^2+(a-6)^2+(-2)^2$

$=2a^2-16a+69$

$=2(a-4)^2+37$

따라서 $a=4$일 때 주어진 식의 최솟값은 37이다. 답 ④

1158 점 P가 직선 $y=x+4$ 위에 있으므로 $P(a, a+4)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=(a+1)^2+(a+4-7)^2+(a-3)^2+(a+4+5)^2$

$=4a^2+8a+100$

$=4(a+1)^2+96$

따라서 $a=-1$일 때 주어진 식의 최솟값은 96이므로 점 P의 x좌표는 -1이다. 답 ②

1159 $P(0, a)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(-3)^2+a^2+(-k)^2+(a+2)^2$

$=2a^2+4a+13+k^2$

$=2(a+1)^2+11+k^2$

따라서 $a=-1$일 때 주어진 식의 최솟값은 $11+k^2$이므로

$11+k^2=12$, $\quad k^2=1$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$ 답 ①

1160 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(a+1)^2+b^2+(a-2)^2+(b-6)^2+(a-5)^2+(b-3)^2$

$=3a^2-12a+3b^2-18b+75$

$=3(a-2)^2+3(b-3)^2+36$ ··· ❶

이때 a, b가 실수이므로 $(a-2)^2\ge0$, $(b-3)^2\ge0$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\ge36$

따라서 $a=2$, $b=3$일 때 주어진 식의 최솟값은 36이므로

$P(2, 3)$ ··· ❷

답 $(2, 3)$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 (a, b)라 하고, 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 이차식을 세울 수 있다.	60 %
❷ ❶의 식의 값이 최소일 때의 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

1161 직선 BC를 x축, 선분 BC의 수직이등분선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 $\boxed{M}$이 원점이다.

이때 삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 (a, b), $(c, 0)$이라 하면 꼭짓점 B의 좌표는 $\boxed{(-c, 0)}$이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{(-c-a)^2+(-b)^2\}+\{(c-a)^2+(-b)^2\}$

$=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)$

$=\boxed{2(a^2+b^2+c^2)}$,

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=(a^2+b^2)+c^2=\boxed{a^2+b^2+c^2}$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

답 (가) M (나) $(-c, 0)$ (다) $2(a^2+b^2+c^2)$ (라) $a^2+b^2+c^2$

참고 위와 같은 삼각형의 성질을 파푸스(Pappus) 정리 또는 중선 정리라 한다.

1162 직선 BC를 x축, 점 D를 지나고 선분 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 $\boxed{D}$가 원점이다.

이때 삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 (a, b), $(c, 0)$이라 하면 꼭짓점 B의 좌표는 $\boxed{(-2c, 0)}$이므로

$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2$

$=\{(-2c-a)^2+(-b)^2\}+2\{(c-a)^2+(-b)^2\}$

$=\boxed{3(a^2+b^2+2c^2)}$,

$\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2=\{(-a)^2+(-b)^2\}+2\cdot(-c)^2$

$=\boxed{a^2+b^2+2c^2}$

$\therefore \overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2)$

답 (가) D (나) $(-2c, 0)$ (다) $3(a^2+b^2+2c^2)$ (라) $a^2+b^2+2c^2$

1163 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 $\boxed{B}$가 원점이다.

이때 직사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 $(0, b)$, $(a, 0)$이라 하면 꼭짓점 D의 좌표는 $\boxed{(a,\ b)}$이므로 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

09 평면좌표

$$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=x^2+(y-b)^2+(x-a)^2+y^2$$
$$=\boxed{x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2},$$
$$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\boxed{x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$$
$$\therefore\ \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$$

답 (가) B (나) $(a,\ b)$ (다) $x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$
(라) $x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$

1164 $a=\dfrac{2\cdot(-2)+3\cdot8}{2+3}=4$

$b=\dfrac{3\cdot(-2)-2\cdot8}{3-2}=-22$

$\therefore\ a-b=26$ 답 ②

라쎈 특강

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표는 다음 그림과 같이 기억하면 편리하다.

① $m:n$, $A(x_1)$ $B(x_2)$ ➡ $P\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$ ← 엇갈리게 곱하여 더한다.

② $m:n$, $A(x_1)$ $B(x_2)$ ➡ $Q\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$ ← 엇갈리게 곱하여 뺀다.

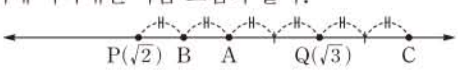
1165 $\dfrac{1\cdot(-9)+5\cdot3}{1+5}=1$ $\therefore\ P(1)$

$\dfrac{1\cdot(-9)-5\cdot3}{1-5}=6$ $\therefore\ Q(6)$

따라서 $\overline{PQ}$의 중점이 $M(a)$이므로

$a=\dfrac{1+6}{2}=\dfrac{7}{2}$ 답 ③

1166 점 A는 $\overline{PQ}$의 중점, 점 B는 $\overline{PQ}$를 $1:3$으로 내분하는 점, 점 C는 $\overline{PQ}$를 $3:1$로 외분하는 점이므로 세 점 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 왼쪽에 있는 점부터 순서대로 나열하면 B, A, C이다.

답 ③

1167 $\dfrac{1\cdot b+4\cdot8}{1+4}=7$, $\dfrac{1\cdot9+4\cdot a}{1+4}=1$이므로

$b+32=35$, $9+4a=5$

$\therefore\ a=-1,\ b=3$

따라서 $A(8,\ -1)$, $B(3,\ 9)$이고, $\overline{AB}$를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표는

$\dfrac{1\cdot3-2\cdot8}{1-2}=13$, $\dfrac{1\cdot9-2\cdot(-1)}{1-2}=-11$

이므로 $x=13,\ y=-11$

$\therefore\ x-y=24$ 답 24

1168 $\dfrac{3\cdot(-4)-2\cdot1}{3-2}=-14$, $\dfrac{3\cdot6-2\cdot(-3)}{3-2}=24$이므로

$a=-14,\ b=24$ $\therefore\ a+b=10$ 답 10

1169 $\dfrac{4\cdot7+5\cdot(-2)}{4+5}=2$, $\dfrac{4\cdot a+5\cdot(-1)}{4+5}=\dfrac{4a-5}{9}$이므로

$2=b$, $\dfrac{4a-5}{9}=-5$

따라서 $a=-10,\ b=2$이므로 $ab=-20$ 답 ①

1170 $\dfrac{2\cdot(-4)+1\cdot2}{2+1}=-2$, $\dfrac{2\cdot(-2)+1\cdot7}{2+1}=1$이므로

$P(-2,\ 1)$ ··· ❶

$\dfrac{2\cdot(-4)-1\cdot2}{2-1}=-10$, $\dfrac{2\cdot(-2)-1\cdot7}{2-1}=-11$이므로

$Q(-10,\ -11)$ ··· ❷

따라서 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2-10}{2},\ \dfrac{1-11}{2}\right)$, 즉 $(-6,\ -5)$ ··· ❸

답 $(-6,\ -5)$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{PQ}$의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

1171 $\overline{AB}$를 $k:7$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{k\cdot0-7\cdot2}{k-7},\ \dfrac{k\cdot7-7\cdot0}{k-7}\right)$

$\therefore\ \left(\dfrac{-14}{k-7},\ \dfrac{7k}{k-7}\right)$

이 점이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

$\dfrac{7k}{k-7}=\dfrac{14}{k-7}$, $7k=14$

$\therefore\ k=2$ 답 2

1172 $\overline{AB}$를 $3:2$로 내분하는 점의 y좌표가 0이어야 하므로

$\dfrac{3\cdot(-8)+2\cdot a}{3+2}=0$

$-24+2a=0$ $\therefore\ a=12$ 답 ④

1173 $\overline{AB}$를 $(1-a):a$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{(1-a)\cdot4+a\cdot(-5)}{1-a+a},\ \dfrac{(1-a)\cdot(-3)+a\cdot2}{1-a+a}\right)$

$\therefore\ (4-9a,\ -3+5a)$ ··· ❶

이 점이 제3사분면 위에 있으므로

$4-9a<0$, $-3+5a<0$

$\therefore\ \dfrac{4}{9}<a<\dfrac{3}{5}$ ··· ❷

답 $\dfrac{4}{9}<a<\dfrac{3}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 $(1-a):a$로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

1174 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 x좌표가 0이어야 하므로

$$\frac{4m-7n}{m+n}=0, \quad 4m-7n=0$$

$\therefore 4m=7n$

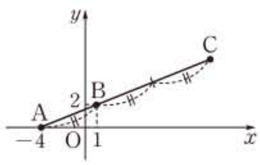
이때 m, n은 서로소인 자연수이므로 $m=7$, $n=4$

$\therefore m+n=11$

답 11

1175 $2\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$

점 C의 x좌표가 양수이므로 오른쪽 그림과 같이 점 C는 $\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점이다.



따라서

$$\frac{3\cdot1-2\cdot(-4)}{3-2}=11,$$

$$\frac{3\cdot2-2\cdot0}{3-2}=6$$

이므로 점 C의 좌표는 $(11, 6)$이다.

답 $(11, 6)$

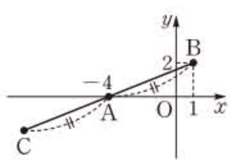
다른 풀이 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$에서 점 B는 $\overline{AC}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표를 (a, b)라 하면

$$\frac{1\cdot a+2\cdot(-4)}{1+2}=1, \quad \frac{1\cdot b+2\cdot0}{1+2}=2$$

$\therefore a=11$, $b=6$

따라서 점 C의 좌표는 $(11, 6)$이다.

참고 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$일 때, 오른쪽 그림과 같이 점 C가 $\overline{AB}$를 $1:2$로 외분하는 점인 경우도 있다. 이때 점 C의 x좌표는 음수이다.



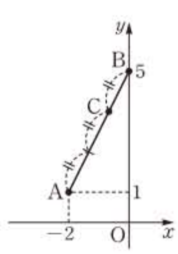
1176 $2\overline{CF}=3\overline{FP}$에서 $\overline{CF}:\overline{FP}=3:2$

따라서 점 P의 위치로 알맞은 것은 $\overline{CF}$를 $1:2$로 내분하는 점 D 또는 $5:2$로 외분하는 점 H이다.

답 점 D, 점 H

1177 $\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$

$a<0$, 즉 점 C의 x좌표가 음수이므로 오른쪽 그림과 같이 점 C는 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점이다.



따라서

$$a=\frac{2\cdot0+1\cdot(-2)}{2+1}=-\frac{2}{3},$$

$$b=\frac{2\cdot5+1\cdot1}{2+1}=\frac{11}{3}$$

이므로 $a+b=3$

답 ⑤

1178 $\dfrac{a+(a-1)+b}{3}=0$, $\dfrac{(b+1)-4+a}{3}=0$이므로

$2a+b=1$, $a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=5$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+5^2=29$

답 ④

1179 $\dfrac{0+x_1+x_2}{3}=8$, $\dfrac{0+y_1+y_2}{3}=10$이므로

$x_1+x_2=24$, $y_1+y_2=30$ ⋯ ❶

$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}=12$, $\dfrac{y_1+y_2}{2}=15$

따라서 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $(12, 15)$이다. ⋯ ❷

답 $(12, 15)$

채점 기준	비율
❶ x_1+x_2, y_1+y_2의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\overline{AB}$의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	60 %

1180 $\overline{AB}$의 중점인 점 D의 좌표는

$\left(\dfrac{5-1}{2}, \dfrac{9+5}{2}\right)$, 즉 $(2, 7)$

$\overline{BC}$의 중점인 점 E의 좌표는

$\left(\dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{5+1}{2}\right)$, 즉 $(1, 3)$

$\overline{CA}$의 중점인 점 F의 좌표는

$\left(\dfrac{3+5}{2}, \dfrac{1+9}{2}\right)$, 즉 $(4, 5)$

따라서 △DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{2+1+4}{3}, \dfrac{7+3+5}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{7}{3}, 5\right)$

답 $\left(\dfrac{7}{3}, 5\right)$

다른 풀이 △DEF의 무게중심은 △ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{5-1+3}{3}, \dfrac{9+5+1}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{7}{3}, 5\right)$

1181 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 △ABC의 무게중심은 $\overline{AM}$을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$\frac{2\cdot3+1\cdot6}{2+1}=4, \quad \frac{2\cdot(-4)+1\cdot(-1)}{2+1}=-3$$

따라서 △ABC의 무게중심의 좌표는 $(4, -3)$이다.

답 ②

1182 점 D의 좌표를 (a, b)라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{-9+7}{2}=\frac{-4+a}{2}, \quad \frac{-2+1}{2}=\frac{-4+b}{2}$$

$\therefore a=2$, $b=3$

따라서 점 D의 좌표는 $(2, 3)$이다.

답 $(2, 3)$

1183 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{-1+2}{2}=\frac{a+5}{2}, \quad \frac{6+b}{2}=\frac{1-2}{2}$$

$\therefore a=-4$, $b=-7$ $\quad\therefore a-b=3$

답 ③

1184 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$라 하면 두 대각선 AC, BD의 교점은 각각 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점과 일치한다. ⋯ ❶

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{-2+x_1}{2}, \dfrac{3+y_1}{2}\right)$이므로

09 평면좌표

$\dfrac{-2+x_1}{2}=\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3+y_1}{2}=\dfrac{7}{2}\qquad \therefore x_1=7,\ y_1=4$

$\therefore$ C(7, 4) ⋯ ❷

또 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{3+x_2}{2},\ \dfrac{-1+y_2}{2}\right)$이므로

$\dfrac{3+x_2}{2}=\dfrac{5}{2},\ \dfrac{-1+y_2}{2}=\dfrac{7}{2}\qquad \therefore x_2=2,\ y_2=8$

$\therefore$ D(2, 8) ⋯ ❸

답 C(7, 4), D(2, 8)

채점 기준	비율
❶ 두 대각선 AC, BD의 교점은 각각 $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점과 일치함을 알 수 있다.	20 %
❷ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

1185 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 y좌표에서

$\dfrac{a+4}{2}=\dfrac{b+7}{2}\qquad \therefore b=a-3$ ⋯⋯ ㉠

또 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$에서 $\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2$이므로

$(1-5)^2+(7-a)^2=(1+3)^2+(7-4)^2$

$a^2-14a+40=0,\qquad (a-4)(a-10)=0$

$\therefore a=4$ 또는 $a=10$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=1$

$a=10$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=7$

이때 $b=7$이면 점 B와 점 D가 일치하므로 □ABCD가 만들어지지 않는다.

따라서 $a=4$, $b=1$이므로 $\quad ab=4$ 답 4

다른 풀이 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로

$\dfrac{a+4}{2}=\dfrac{b+7}{2}$, $\underline{a=4}$ 직선 AC와 직선 BD가 수직이고 직선 BD의 방정식이 $x=1$이므로 직선 AC의 방정식은 $y=4$

$a=4$를 $\dfrac{a+4}{2}=\dfrac{b+7}{2}$에 대입하여 정리하면 $\quad b=1$

$\therefore ab=4$

1186 $\overline{\mathrm{AD}}$는 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$

이때

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-3-2)^2+(-6-6)^2}=13,$

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(6-2)^2+(3-6)^2}=5$

이므로 $\quad \overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=13:5$

따라서 점 D는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 13 : 5로 내분하는 점이므로

$\dfrac{13\cdot6+5\cdot(-3)}{13+5}=\dfrac{7}{2},\ \dfrac{13\cdot3+5\cdot(-6)}{13+5}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{D}\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ 답 $\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

1187 $\overline{\mathrm{OP}}$는 ∠AOB의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}$

이때

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10},\ \overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$

이므로 $\quad \overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{10}:2\sqrt{10}=1:2$

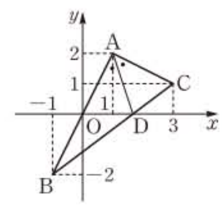
따라서 점 P는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\dfrac{1\cdot6+2\cdot1}{1+2}=\dfrac{8}{3},\ \dfrac{1\cdot(-2)+2\cdot3}{1+2}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ 답 ②

1188 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{AD}}$는 ∠A의 이등분선이므로



$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$

이때

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2}$

$=2\sqrt{5},$

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

이므로 $\quad \overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{5}:\sqrt{5}=2:1$

따라서 점 D는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$a=\dfrac{2\cdot3+1\cdot(-1)}{2+1}=\dfrac{5}{3},\ b=\dfrac{2\cdot1+1\cdot(-2)}{2+1}=0$

$\therefore a+b=\dfrac{5}{3}$ 답 ②

1189 전략 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$이므로

$\sqrt{(0-2)^2+(a-0)^2}=\sqrt{13}$

양변을 제곱하면 $\quad 4+a^2=13$

$a^2=9\qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 ③

1190 전략 구하는 점이 y축 위에 있으므로 좌표를 $(0,\ a)$로 놓는다.

풀이 구하는 점을 $\mathrm{P}(0,\ a)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

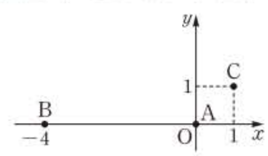
$(-3)^2+a^2=1^2+(a+2)^2$

$9=4a+5\qquad \therefore a=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 (0, 1)이다. 답 (0, 1)

1191 전략 먼저 세 지점 A, B, C의 위치를 좌표평면 위에 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 A 지점이 원점, B 지점이 x축 위에 오도록 좌표평면을 잡으면



A(0, 0), B(−4, 0),

C(1, 1)

물류창고를 지으려는 지점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$이므로 $\quad \overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$에서

$a^2+b^2=(a+4)^2+b^2,\qquad 8a+16=0$

$\therefore a=-2$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$에서

$a^2+b^2=(a-1)^2+(b-1)^2,\qquad -2a-2b+2=0$

$\therefore b=-a+1$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad b=3$

따라서 $P(-2,\ 3)$이므로 구하는 거리는

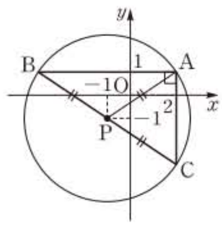
$\overline{PA}=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$ (km)

답 ②

1192 전략 외심의 성질을 이용하여 $\triangle ABC$가 어떤 삼각형인지 생각한다.

풀이 $\triangle ABC$의 외심을 P라 하면 점 P에서 각 꼭짓점까지의 거리가 같으므로 점 P는 $\overline{BC}$의 중점이다.

따라서 $\overline{BC}$는 $\triangle ABC$의 외접원의 지름이므로 $\triangle ABC$는 $\overline{BC}$를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.



$$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=(2\overline{AP})^2$$
$$=4\overline{AP}^2$$
$$=4\{(-1-2)^2+(-1-1)^2\}$$
$$=52$$

답 ②

1193 전략 $\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$$(a+3)^2+(2-1)^2=(a+1)^2+(2+3)^2$$
$$6a+10=2a+26, \qquad 4a=16$$
$$\therefore a=4$$

답 4

1194 전략 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하여 세 변의 길이 사이의 관계를 알아본다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(-1-5)^2}=3\sqrt{5}$,

$\overline{BC}=\sqrt{(8-2)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{5}$,

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-8)^2+(5-2)^2}=3\sqrt{10}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{BC},\ \overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $\angle B=90°$인 직각이등변삼각형이므로

$\angle C=45°$ ← $\triangle ABC$의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로 $\angle C=\frac{1}{2}\times(180°-90°)=45°$

답 ②

1195 전략 점 P의 좌표를 $(a,\ a-2)$라 하고 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P가 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로 $P(a,\ a-2)$라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$$
$$=(a-3)^2+(a-2-2)^2+(a+4)^2+(a-2-7)^2$$
$$=4a^2-24a+122$$
$$=4(a-3)^2+86$$

즉 $a=3$일 때 주어진 식의 최솟값은 86이므로 점 P의 좌표는 $(3,\ 1)$이다.

따라서 점 $P(3,\ 1)$과 원점 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

답 ③

1196 전략 두 점 사이의 거리를 구하는 공식과 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\overline{AB}=\sqrt{(4+2)^2+(-1-5)^2}=6\sqrt{2}$

ㄴ. $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot4+2\cdot(-2)}{1+2},\ \frac{1\cdot(-1)+2\cdot5}{1+2}\right),\ \text{즉 } (0,\ 3)$$

ㄷ. $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{5-1}{2}\right),\ \text{즉 } (1,\ 2)$$

ㄹ. $\overline{AB}$를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot4-1\cdot(-2)}{2-1},\ \frac{2\cdot(-1)-1\cdot5}{2-1}\right),\ \text{즉 } (10,\ -7)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

1197 전략 $\overline{AB}$를 삼등분하는 두 점 중 점 A에 가까운 점은 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 삼등분하는 두 점 중 점 A에 가까운 점은 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로 구하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot3+2\cdot0}{1+2},\ \frac{1\cdot(-7)+2\cdot(-4)}{1+2}\right),\ \text{즉 } (1,\ -5)$$

답 $(1,\ -5)$

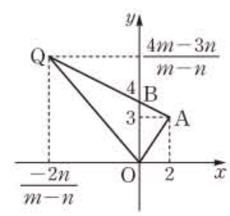
1198 전략 $\triangle OAQ=\triangle OAB+\triangle OBQ$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{m\cdot0-n\cdot2}{m-n},\ \frac{m\cdot4-n\cdot3}{m-n}\right),\ \text{즉 } \left(\frac{-2n}{m-n},\ \frac{4m-3n}{m-n}\right)$$

오른쪽 그림에서

$\triangle OAQ=\triangle OAB+\triangle OBQ$이므로



$$16=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2+\frac{1}{2}\cdot4\cdot\left|\frac{-2n}{m-n}\right|$$
$$\left|\frac{-2n}{m-n}\right|=6$$

이때 $m>n>0$이므로

$$\frac{2n}{m-n}=6, \qquad 2n=6m-6n$$
$$8n=6m \qquad \therefore \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$$

답 ④

다른 풀이 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2=4$이므로

$\triangle OAB:\triangle OAQ=4:16=1:4$

즉 $\overline{AB}:\overline{AQ}=1:4$이므로 점 Q는 $\overline{AB}$를 $4:3$으로 외분하는 점이다.

$$\therefore \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$$

1199 전략 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$이다.

풀이 $\overline{AB}$를 $5:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{5\cdot6+3\cdot2}{5+3},\ \frac{5\cdot(-5)+3\cdot3}{5+3}\right),\ \text{즉 } \left(\frac{9}{2},\ -2\right)$$

이 점이 직선 $y=2x+a$ 위에 있으므로

$$-2=2\cdot\frac{9}{2}+a \qquad \therefore a=-11$$

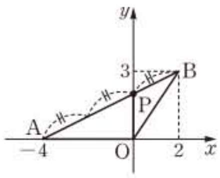
답 ①

1200 전략 $\triangle OAP:\triangle OBP=2:1$이므로 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$임을 이용한다.

풀이 $\triangle OAP=2\triangle OBP$에서

$\triangle OAP:\triangle OBP=2:1$

즉 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 P는 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점이다.



따라서

$$a=\frac{2\cdot2+1\cdot(-4)}{2+1}=0,$$

$$b=\frac{2\cdot3+1\cdot0}{2+1}=2$$

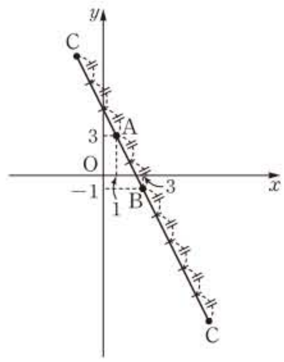
이므로 $\quad a+b=2$

답 2

1201 전략 $5\overline{AB}=2\overline{BC}$를 만족시키는 점 C는 선분 AB를 $7:5$로 외분하는 점 또는 선분 AB를 $3:5$로 외분하는 점임을 이용한다.

풀이 $5\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\quad \overline{AB}:\overline{BC}=2:5$

이를 만족시키는 점 C는 오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 $7:5$로 외분하는 점 또는 선분 AB를 $3:5$로 외분하는 점이다.



(i) 선분 AB를 $7:5$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{7\cdot3-5\cdot1}{7-5},\ \frac{7\cdot(-1)-5\cdot3}{7-5}\right),$$

즉 $(8,\ -11)$

(ii) 선분 AB를 $3:5$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot3-5\cdot1}{3-5},\ \frac{3\cdot(-1)-5\cdot3}{3-5}\right),\ \text{즉 } (-2,\ 9)$$

(i), (ii)에서 점 C의 좌표는 $(8,\ -11)$ 또는 $(-2,\ 9)$이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(-2-8)^2+(9+11)^2}=10\sqrt{5}$$

답 $10\sqrt{5}$

1202 전략 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 △ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

풀이 $\frac{-2+3+a}{3}=1,\ \frac{-1+3+b}{3}=-\frac{1}{3}$이므로

$a=2,\ b=-3 \qquad \therefore ab=-6$

답 -6

1203 전략 두 점 M, N의 좌표를 이용하여 두 점 B, C의 x좌표, y좌표의 합을 구한다.

풀이 두 꼭짓점 B, C의 좌표를 각각 $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$라 하자.

두 점 $M(x_1,\ y_1)$, $N(x_2,\ y_2)$의 x좌표는 각각 $x_1=\frac{1+a_1}{2}$,

$x_2=\frac{1+a_2}{2}$이므로

$2x_1=1+a_1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$2x_2=1+a_2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $\quad 2(x_1+x_2)=2+a_1+a_2$

$\therefore a_1+a_2=2\ (\because x_1+x_2=2)$

또 두 점 $M(x_1,\ y_1)$, $N(x_2,\ y_2)$의 y좌표는 각각 $y_1=\frac{6+b_1}{2}$,

$y_2=\frac{6+b_2}{2}$이므로

$2y_1=6+b_1 \quad \cdots\cdots$ ㉢

$2y_2=6+b_2 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉢+㉣을 하면 $\quad 2(y_1+y_2)=12+b_1+b_2$

$\therefore b_1+b_2=-4\ (\because y_1+y_2=4)$

이때 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

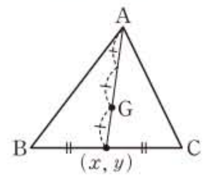
$$\left(\frac{1+a_1+a_2}{3},\ \frac{6+b_1+b_2}{3}\right)$$

이므로 $\quad \left(\frac{1+2}{3},\ \frac{6-4}{3}\right)$, 즉 $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$

답 ③

1204 전략 $\overline{AG}$를 $3:1$로 외분하는 점은 $\overline{BC}$의 중점임을 이용한다.

풀이 삼각형의 무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 $2:1$로 내분하므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AG}$를 $3:1$로 외분하는 점은 $\overline{BC}$의 중점이다.



따라서 $x=\frac{(-a+1)+(a-5)}{2}=-2$,

$y=\frac{(b-6)+(-b+8)}{2}=1$이므로

$xy=-2$

답 -2

다른 풀이 △ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{-5+(-a+1)+(a-5)}{3},\ \frac{7+(b-6)+(-b+8)}{3}\right),\ \text{즉}$$

$(-3,\ 3)$

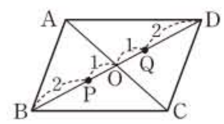
이므로 $\overline{AG}$를 $3:1$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot(-3)-1\cdot(-5)}{3-1},\ \frac{3\cdot3-1\cdot7}{3-1}\right),\ \text{즉 } (-2,\ 1)$$

따라서 $x=-2,\ y=1$이므로 $\quad xy=-2$

1205 전략 삼각형의 무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 $2:1$로 내분함을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라 하면 $\overline{BO}=\overline{DO}$이고



$\overline{BP}:\overline{PO}=\overline{DQ}:\overline{QO}=2:1$

이므로 $\quad \overline{PO}=\overline{QO}$

따라서 두 대각선의 교점은 $\overline{PQ}$의 중점과 같으므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-9+1}{2},\ \frac{7+5}{2}\right),\ \text{즉 } (-4,\ 6)$$

답 $(-4,\ 6)$

1206 전략 각의 이등분선의 성질과 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 ∠POQ의 이등분선과 $\overline{PQ}$의 교점을 R라 하면

$\overline{OP}:\overline{OQ}=\overline{PR}:\overline{QR}$

이때 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{OQ}=\sqrt{12^2+5^2}=13$이므로

$\overline{PR}:\overline{QR}=5:13$

따라서 점 R는 $\overline{PQ}$를 $5:13$으로 내분하는 점이므로 점 R의 x좌표는 $\quad \frac{5\cdot12+13\cdot3}{5+13}=\frac{11}{2}$

즉 $a=2,\ b=11$이므로 $\quad a+b=13$

답 13

1207 전략 직선 도로를 좌표평면 위에 나타낸다.

풀이 직선 OP를 x축, 직선 OQ를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 t초 후의 A, B 두 사람의 위치는 각각

$(10-t,\ 0),\ (0,\ 2t)$ ··· ❶

두 사람 사이의 거리는

$\sqrt{(10-t)^2+(-2t)^2}=\sqrt{5t^2-20t+100}$

$=\sqrt{5(t-2)^2+80}\ (\text{m})$ ··· ❷

따라서 A, B 두 사람 사이의 거리는 2초 후에 최소가 되고, 그 때의 거리는 $\sqrt{80}=4\sqrt{5}\,(\text{m})$이다. ··· ❸

답 $4\sqrt{5}$ m

채점 기준	비율
❶ t초 후의 A, B 두 사람의 위치를 각각 구할 수 있다.	20 %
❷ 두 사람 사이의 거리를 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 두 사람 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

1208 전략 두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AB}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AB}$ ··· ❶

$=\sqrt{(a-2a-1)^2+(4-a+3)^2}$

$=\sqrt{2a^2-12a+50}$

$=\sqrt{2(a-3)^2+32}$ ··· ❷

따라서 $a=3$일 때 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값이 최소이다. ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AB}$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\overline{AB}$를 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

1209 전략 평행사변형의 두 대각선의 중점이 일치함을 이용한다.

풀이 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점은 일치한다. ··· ❶

이때 선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{3-a}{2}\right)$, 즉 $\left(3,\ \dfrac{3-a}{2}\right)$ ······ ㉠

선분 BD의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+b}{2},\ \dfrac{a+1}{2}\right)$ ······ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로 $3=\dfrac{-2+b}{2},\ \dfrac{3-a}{2}=\dfrac{a+1}{2}$

$\therefore\ a=1,\ b=8$ ··· ❷

따라서 $\mathrm{A}(2,\ 3),\ \mathrm{B}(-2,\ 1),\ \mathrm{C}(4,\ -1),\ \mathrm{D}(8,\ 1)$이므로

$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$

$=\{(4-2)^2+(-1-3)^2\}+\{(8+2)^2+(1-1)^2\}$

$=120$ ··· ❸

답 120

채점 기준	비율
❶ 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치함을 알 수 있다.	20 %
❷ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$의 값을 구할 수 있다.	40 %

10 직선의 방정식

1210 $y-3=2(x-1)$ $\therefore\ y=2x+1$ 답 $y=2x+1$

1211 $y-(-2)=-3(x-0)$ $\therefore\ y=-3x-2$ 답 $y=-3x-2$

1212 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°이므로 직선의 기울기는 $\tan 45°=1$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-(-1)=x-2$ $\therefore\ y=x-3$ 답 $y=x-3$

1213 답 $y=1$

1214 답 $x=4$

1215 답 $x=3$

1216 답 $y=3$

1217 $y-4=\dfrac{6-4}{-1-1}(x-1)$

$\therefore\ y=-x+5$ 답 $y=-x+5$

1218 $y-(-5)=\dfrac{2-(-5)}{4-3}(x-3)$

$\therefore\ y=7x-26$ 답 $y=7x-26$

1219 두 점의 x좌표가 모두 6이므로 $x=6$ 답 $x=6$

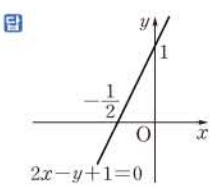
1220 답 $\dfrac{x}{7}-\dfrac{y}{3}=1$

1221 답 $-\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=1$

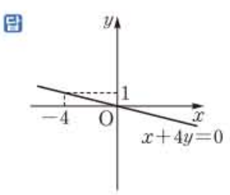
1222 x절편이 6, y절편이 5인 직선이므로

$\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{5}=1$ 답 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{5}=1$

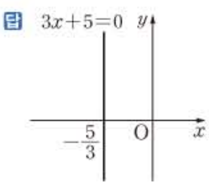
1223 답



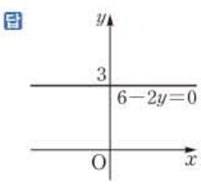
1224 답



1225 답



1226 답

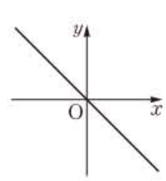


1227 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0,\ c=0$이므로

$y=-\dfrac{a}{b}x$

이때 $-\dfrac{a}{b}<0$이므로 주어진 직선의 기울기는 음수이고 y절편은 0이다.

따라서 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제2사분면, 제4사분면을 지난다.



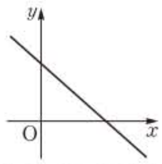
답 제2사분면, 제4사분면

1228 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq 0$이므로

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$이므로 주어진 직선의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이다.

따라서 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면을 지난다.



답 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면

1229 답 $(1,\ -1)$

$3x+y-2$, $x-2y-3$, 1, -1, 1, -1

1230 주어진 직선이 항상 지나는 점은 두 직선

$x+y-2=0$, $3x-y-6=0$

의 교점이다.

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=0$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2,\ 0)$ 답 $(2,\ 0)$

1231 답 $2x-y=0$

$3x-y-2$, 0, 1, 1, 2

다른 풀이 $x-y+2=0$, $3x-y-2=0$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=4$

즉 두 직선 $x-y+2=0$, $3x-y-2=0$의 교점의 좌표는

$(2,\ 4)$

따라서 두 점 $(2,\ 4)$, $(0,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=2x$ $\therefore 2x-y=0$

1232 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+y-3+k(4x-3y-1)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(3,\ 4)$를 지나므로

$7-k=0$ $\therefore k=7$

$k=7$을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$2x+y-3+7(4x-3y-1)=0$

$\therefore 3x-2y-1=0$ 답 $3x-2y-1=0$

1233 ㄱ. $\underline{5=5,\ -4\neq -6}$이므로 두 직선 $y=5x-4$, $y=5x-6$은 평행하다. └ 기울기는 같고 y절편은 다르다.

ㄹ. $\underline{5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=-1}$이므로 두 직선 $y=5x-4$, $y=-\frac{1}{5}x+9$는 수직이다. └ (기울기의 곱)$=-1$

답 평행한 직선: ㄱ, 수직인 직선: ㄹ

1234 ㄱ. $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{1}$이므로 두 직선 $2x+y-1=0$, $4x+2y+1=0$은 평행하다.

ㄷ. $2\cdot 1+1\cdot(-2)=0$이므로 두 직선 $2x+y-1=0$, $x-2y+6=0$은 수직이다.

답 평행한 직선: ㄱ, 수직인 직선: ㄷ

1235 답 -4

1236 $-4\cdot m=-1$이므로 $m=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

1237 $\frac{a}{1}=\frac{5}{-(a+6)}\neq\frac{-2}{2}$에서

$a^2+6a+5=0$, $a\neq -1$

$(a+1)(a+5)=0$, $a\neq -1$

$\therefore a=-5$ 답 -5

1238 $a\cdot 1+5\cdot\{-(a+6)\}=0$에서

$-4a=30$ $\therefore a=-\frac{15}{2}$ 답 $-\frac{15}{2}$

1239 직선 $y=3x$에 평행한 직선의 기울기는 3이다.

따라서 점 $(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y-1=3(x-1)$

$\therefore y=3x-2$ 답 $y=3x-2$

1240 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 수직인 직선의 기울기는 -2이다.

따라서 원점을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y=-2x$ 답 $y=-2x$

1241 직선 $5x-y=0$, 즉 $y=5x$에 평행한 직선의 기울기는 5이다.

따라서 점 $(2,\ 0)$을 지나고 기울기가 5인 직선의 방정식은

$y-0=5(x-2)$

$\therefore y=5x-10$ 답 $y=5x-10$

1242 직선 $x-4y=0$, 즉 $y=\frac{1}{4}x$에 수직인 직선의 기울기는 -4이다.

따라서 점 $(0,\ 6)$을 지나고 기울기가 -4인 직선의 방정식은

$y-6=-4(x-0)$

$\therefore y=-4x+6$ 답 $y=-4x+6$

1243 $\frac{|3\cdot 4-1\cdot(-1)-3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$ 답 $\sqrt{10}$

1244 점 $(3,\ 1)$과 직선 $y=-x+8$, 즉 $x+y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\cdot 3+1\cdot 1-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

1245 점 $(-1,\ -2)$와 직선 $y=\frac{3}{4}x+2$, 즉 $3x-4y+8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot(-1)-4\cdot(-2)+8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{13}{5}$ 답 $\frac{13}{5}$

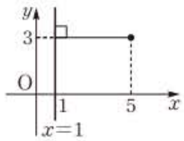
1246 $\frac{|10|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{10}{13}$ 답 $\frac{10}{13}$

1247 원점과 직선 $y=x-5$, 즉 $x-y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$ 답 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

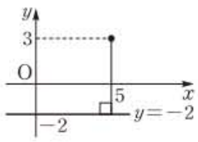
1248 오른쪽 그림에서

$|5-1|=4$ 답 4



1249 오른쪽 그림에서

$|3-(-2)|=5$ 답 5



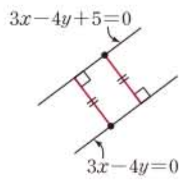
1250 두 직선 $3x-4y=0$, $3x-4y+5=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-4y=0$ 위의 한 점 $(0,\ 0)$과 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{5}{5}=1$$ 답 1

라쎈 특강

직선 $3x-4y+5=0$ 위의 한 점과 직선 $3x-4y=0$ 사이의 거리를 구해도 되지만 계산이 간단해지도록 직선 $3x-4y=0$ 위의 한 점인 원점과 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리를 구한 것이다.



1251 두 직선 $2x-y+6=0$, $2x-y-4=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+6=0$ 위의 한 점 $(0,\ 6)$과 직선 $2x-y-4=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|2\cdot 0-1\cdot 6-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$ 답 $2\sqrt{5}$

다른 풀이 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+6=0$ 위의 한 점 $(-3,\ 0)$과 직선 $2x-y-4=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|2\cdot(-3)-1\cdot 0-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

$\frac{1}{3}=\frac{-\frac{1}{3}}{-1}\neq\frac{7}{-9}$

1252 두 직선 $x-\frac{1}{3}y+7=0$, $3x-y-9=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-\frac{1}{3}y+7=0$ 위의 한 점 $(-7,\ 0)$과 직선 $3x-y-9=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|3\cdot(-7)-1\cdot 0-9|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{30}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}$$ 답 $3\sqrt{10}$

1253 두 점 $(1,\ 7)$, $(5,\ -9)$를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{7-9}{2}\right)$, 즉 $(3,\ -1)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y+1=4(x-3)$ $\quad\therefore y=4x-13$ 답 $y=4x-13$

1254 기울기가 -3이고 점 $(3,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=-3(x-3)$ $\quad\therefore y=-3x+9$

따라서 $a=-3$, $b=9$이므로

$a+b=6$ 답 ③

1255 점 $(-1,\ 4)$를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은

$y=k$ (k는 상수)

$y=4$ ······ ㉠ ⋯ ❶

점 $(6,\ -2)$를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y+2=-2(x-6)$

$\therefore y=-2x+10$ ······ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=4$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(3,\ 4)$ ⋯ ❸

답 $(3,\ 4)$

채점 기준	비율
❶ 점 $(-1,\ 4)$를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 $(6,\ -2)$를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 직선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

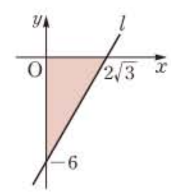
1256 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 직선 l의 기울기는 $\tan 60°=\sqrt{3}$

직선 l은 기울기가 $\sqrt{3}$이고 점 $(\sqrt{3},\ -3)$을 지나므로

$y+3=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$ $\quad\therefore y=\sqrt{3}x-6$

따라서 직선 l의 x절편은 $2\sqrt{3}$, y절편은 -6이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot|-6|=6\sqrt{3}$



답 ⑤

1257 두 점 $(1,\ 4)$, $(-2,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{-2-4}{-2-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=2x+2$

이 직선이 점 $(a,\ -6)$을 지나므로

$-6=2a+2$ $\quad\therefore a=-4$ 답 ②

1258 두 점 $(-1,\ 7)$, $(4,\ -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-7=\frac{-3-7}{4+1}(x+1)$ $\quad\therefore y=-2x+5$

따라서 구하는 y절편은 5이다. 답 5

1259 두 직선 $x=-1$, $y=4$의 교점의 좌표는

$(-1,\ 4)$

두 점 $(-1,\ 4)$, $(-4,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{-2-4}{-4+1}(x+1)$ $\quad\therefore 2x-y+6=0$

따라서 $a=2$, $b=6$이므로

$ab=12$ 답 ④

10 직선의 방정식

1260 $\overline{AB}$를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot 8+3\cdot(-2)}{2+3},\ \frac{2\cdot(-6)+3\cdot 14}{2+3}\right),\text{ 즉 }(2,\ 6) \qquad \cdots❶$$

따라서 두 점 $(2,\ 6)$, $(-3,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-6=\frac{1-6}{-3-2}(x-2) \qquad \therefore\ y=x+4 \qquad \cdots❷$$

답 $y=x+4$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %

1261 x절편이 3, y절편이 4인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$$

이 직선이 점 $(6,\ a)$를 지나므로

$$\frac{6}{3}+\frac{a}{4}=1, \qquad \frac{a}{4}=-1$$

$$\therefore\ a=-4$$

답 ②

1262 x절편이 6, y절편이 -8인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{6}-\frac{y}{8}=1$$

⑤ $\frac{9}{6}-\frac{5}{8}\neq 1$

답 ⑤

1263 y절편을 $a\ (a\neq 0)$라 하면 x절편은 $3a$이므로 직선 l의 방정식은 $\quad \frac{x}{3a}+\frac{y}{a}=1 \qquad \cdots❶$

이 직선이 점 $(3,\ 4)$를 지나므로

$$\frac{3}{3a}+\frac{4}{a}=1, \qquad \frac{5}{a}=1$$

$$\therefore\ a=5 \qquad \cdots❷$$

따라서 직선 l의 방정식은

$$\frac{x}{15}+\frac{y}{5}=1 \qquad \cdots❸$$

답 $\frac{x}{15}+\frac{y}{5}=1$

채점 기준	비율
❶ y절편을 $a\ (a\neq 0)$라 하고 직선 l의 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

1264 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{6-k}{2+2}=\frac{6-7}{2-k},\text{ 즉 }\frac{6-k}{4}=\frac{-1}{2-k}$$

$$(6-k)(2-k)=-4, \qquad k^2-8k+16=0$$

$$(k-4)^2=0 \qquad \therefore\ k=4$$

답 ③

1265 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{1+1}{a+3}=\frac{4-a+1}{5+3},\text{ 즉 }\frac{2}{a+3}=\frac{5-a}{8}$$

$$(a+3)(5-a)=16, \qquad a^2-2a+1=0$$

$$(a-1)^2=0 \qquad \therefore\ a=1$$

따라서 직선 l은 두 점 A$(-3,\ -1)$, B$(1,\ 1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$$y+1=\frac{1+1}{1+3}(x+3)$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

1266 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으려면 세 점은 한 직선 위에 있어야 한다.

즉 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{7-1}{-1-a}=\frac{a-6-7}{3+1},\text{ 즉 }\frac{6}{-1-a}=\frac{a-13}{4}$$

$$(-1-a)(a-13)=24, \qquad a^2-12a+11=0$$

$$(a-1)(a-11)=0 \qquad \therefore\ a=1\text{ 또는 }a=11$$

따라서 모든 a의 값의 합은 12이다.

답 ⑤

1267 직선 l이 △ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{AC}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+6}{2},\ \frac{1-1}{2}\right),\text{ 즉 }(1,\ 0)$$

따라서 직선 l은 두 점 $(1,\ 0)$, $(5,\ 8)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

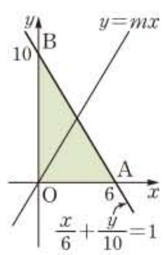
$$y-0=\frac{8-0}{5-1}(x-1)$$

$$\therefore\ y=2x-2$$

답 ②

1268 직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{10}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

A$(6,\ 0)$, B$(0,\ 10)$



오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx$가 원점 O를 지나므로 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 $\overline{AB}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{6+0}{2},\ \frac{0+10}{2}\right),\text{ 즉 }(3,\ 5)$$

따라서 직선 $y=mx$가 점 $(3,\ 5)$를 지나므로

$$5=3m \qquad \therefore\ m=\frac{5}{3}$$

답 ③

1269 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다. $\cdots❶$

직사각형의 두 대각선의 교점은 $\overline{BD}$의 중점과 같고 B$(1,\ 1)$, D$(5,\ 4)$이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{1+4}{2}\right),\text{ 즉 }\left(3,\ \frac{5}{2}\right) \qquad \cdots❷$$

따라서 두 점 $(0,\ 0)$, $\left(3,\ \frac{5}{2}\right)$를 지나는 직선의 기울기는

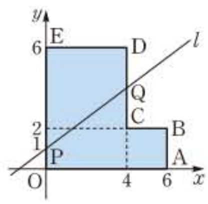
$$\frac{\frac{5}{2}-0}{3-0}=\frac{5}{6} \qquad \cdots❸$$

답 $\frac{5}{6}$

채점 기준	비율
❶ 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선의 조건을 알 수 있다.	30 %
❷ 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 직선의 기울기를 구할 수 있다.	30 %

1270 색칠한 부분의 넓이는

$4\cdot6+2\cdot2=28$



이므로 직선 l과 $\overline{OE}$, $\overline{CD}$의 교점을 각각 P, Q라 하면 사다리꼴 PQDE의 넓이가 14이어야 한다. 즉

$\frac{1}{2}\cdot(5+\overline{QD})\cdot4=14$

$\therefore \overline{QD}=2$

따라서 점 Q의 좌표는 $(4,\ 4)$이므로 두 점 $(0,\ 1)$, $(4,\ 4)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-1=\frac{4-1}{4-0}(x-0)$

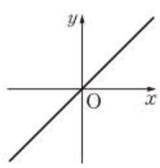
$\therefore\ y=\frac{3}{4}x+1$ 답 $y=\frac{3}{4}x+1$

1271 $bc=0$에서 $b=0$ 또는 $c=0$

그런데 $ab<0$이므로 $b\neq0$ $\therefore\ c=0$

따라서 직선 $ax+by-c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x$



이때 $\underbrace{-\frac{a}{b}}_{ab<0\text{에서 } \frac{a}{b}<0}>0$이므로 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면, 제3사분면을 지난다.

답 제1사분면, 제3사분면

1272 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ac<0$, $bc>0$에서 a, b의 부호가 서로 다르므로

$-\frac{a}{b}>0,\ -\frac{c}{b}<0$

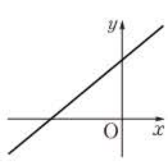
따라서 주어진 직선의 기울기는 양수, y절편은 음수이므로 직선의 개형은 ③과 같다. 답 ③

1273 직선 $ax-by+c=0$, 즉 $y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$의 기울기는 음수, y절편은 양수이므로

$\frac{a}{b}<0,\ \frac{c}{b}>0$ $\therefore\ ac<0$

직선 $bx-cy-a=0$에서 $c\neq0$이므로

$y=\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$



이때 $\frac{b}{c}>0$, $-\frac{a}{c}>0$이므로 직선 $bx-cy-a=0$의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.

따라서 직선 $bx-cy-a=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.

답 제4사분면

1274 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+3y-6)k+(x-2y+4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+3y-6=0,\ x-2y+4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=0,\ y=2$

따라서 $a=0$, $b=2$이므로 $a+b=2$ 답 ④

1275 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y+3)k+(2x+3y-7)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y+3=0,\ 2x+3y-7=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-4,\ y=5$

$\therefore\ P(-4,\ 5)$

따라서 점 P와 원점을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{5-0}{-4-0}=-\frac{5}{4}$ 답 ③

1276 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+y+3)k+(2x-y+3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+y+3=0,\ 2x-y+3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-2,\ y=-1$

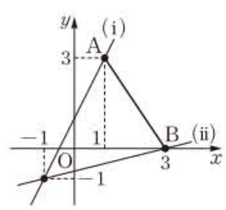
따라서 주어진 직선은 실수 k의 값에 관계없이 점 $(-2,\ -1)$을 지나므로 항상 제3사분면을 지난다. 답 ③

1277 $y=m(x+1)-1$에서

$m(x+1)-(y+1)=0$ ...... ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ -1)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 A$(1,\ 3)$을 지날 때,

$2m-4=0$ $\therefore\ m=2$

(ii) 직선 ㉠이 점 B$(3,\ 0)$을 지날 때,

$4m-1=0$ $\therefore\ m=\frac{1}{4}$

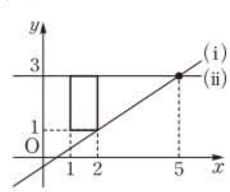
(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$\frac{1}{4}\leq m\leq2$ 답 ②

1278 $m(x-5)-y+3=0$ ...... ㉠

직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(5,\ 3)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 1)$을 지날 때,

$-3m+2=0$ $\therefore\ m=\frac{2}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 3)$을 지날 때,

$-3m=0$ $\therefore\ m=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 m의 값의 범위는

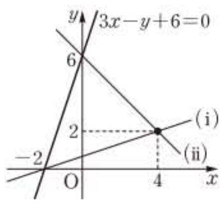
$0 \le m \le \frac{2}{3}$ 답 $0 \le m \le \frac{2}{3}$

1279 $mx-y-4m+2=0$에서

$m(x-4)-(y-2)=0$ …… ㉠

직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(4,\ 2)$를 지난다. ⋯ ❶

오른쪽 그림에서



(ⅰ) 직선 ㉠이 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때,

$-6m+2=0 \qquad \therefore m=\frac{1}{3}$

(ⅱ) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 6)$을 지날 때,

$-4m-4=0 \qquad \therefore m=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 m의 값의 범위는

$-1 < m < \frac{1}{3}$ ⋯ ❷

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{3}$이므로

$\alpha+\beta=-\frac{2}{3}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ 직선 $mx-y-4m+2=0$이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1280 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x-2y+7+k(2x-y+1)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(-1,\ 5)$를 지나므로

$-3-10+7+k(-2-5+1)=0$

$-6-6k=0 \qquad \therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$3x-2y+7-(2x-y+1)=0$

$\therefore x-y+6=0$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$a^2+b^2=1^2+(-1)^2=2$ 답 ②

다른 풀이 $3x-2y+7=0$, $2x-y+1=0$을 연립하여 풀면

$x=5$, $y=11$

즉 두 직선 $3x-2y+7=0$, $2x-y+1=0$의 교점의 좌표는

$(5,\ 11)$

따라서 두 점 $(5,\ 11)$, $(-1,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-11=\frac{5-11}{-1-5}(x-5)$

$\therefore x-y+6=0$

1281 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$4x+3y+9+k(x+y+2)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$4-6+9+k(1-2+2)=0$

$7+k=0 \qquad \therefore k=-7$

$k=-7$을 ㉠에 대입하면 직선 l의 방정식은

$4x+3y+9-7(x+y+2)=0$

$\therefore 3x+4y+5=0$

⑤ $3\cdot2+4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+5\neq0$ 답 ⑤

1282 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+y-1+k(x-y-3)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(4,\ 5)$를 지나므로

$8+5-1+k(4-5-3)=0$

$12-4k=0 \qquad \therefore k=3$

$k=3$을 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$2x+y-1+3(x-y-3)=0$

$\therefore 5x-2y-10=0$ ⋯ ❶

따라서 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -5)$이므로 ⋯ ❷

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-2)^2+(-5-0)^2}=\sqrt{29}$ ⋯ ❸

답 $\sqrt{29}$

채점 기준	비율
❶ 두 직선의 교점과 점 $(4,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
❷ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ 선분 AB의 길이를 구할 수 있다.	20 %

1283 직선 $(k+2)x+3y-4=0$과 직선 $kx-y+2=0$이 평행하려면

$\frac{k+2}{k}=\frac{3}{-1}\neq\frac{-4}{2}$

$-k-2=3k \qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha=-\frac{1}{2}$

또 직선 $(k+2)x+3y-4=0$과 직선 $kx-y+2=0$이 수직이려면

$(k+2)\cdot k+3\cdot(-1)=0$

$k^2+2k-3=0, \qquad (k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

$\therefore \beta=1$ ($\because \beta>0$)

$\therefore \alpha+\beta=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

1284 직선 $y=mx+3$과 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$이 수직이므로

$m\cdot\frac{1}{2}=-1 \qquad \therefore m=-2$

또 직선 $y=mx+3$과 직선 $y=(3-n)x-1$이 평행하므로

$m=3-n \qquad \therefore n=5$

$\therefore mn=-10$ 답 ①

1285 두 직선 $2x-ay+b=0$, $x+cy-4=0$이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$4-a+b=0 \qquad \therefore a-b=4$ …… ㉠

$2+c-4=0 \qquad \therefore c=2$

또 두 직선 $2x-ay+b=0$, $x+2y-4=0$이 수직이므로

$2\cdot1-a\cdot2=0 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=-3$

$\therefore a+b+c=0$

답 0

1286 직선 $ax+y+1=0$과 직선 $bx-2y+3=0$이 수직이므로

$a\cdot b+1\cdot(-2)=0 \qquad \therefore ab=2$ ··· ❶

또 직선 $ax+y+1=0$과 직선 $(b+3)x-y+4=0$이 평행하므로

$\dfrac{a}{b+3}=\dfrac{1}{-1}\neq\dfrac{1}{4}, \qquad -a=b+3$

$\therefore a+b=-3$ ··· ❷

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-3)^2-2\cdot2=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ ab의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

1287 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $y=ax+2$가 직선 $y=3x$ 또는 $y=-x+4$와 평행할 때,
세 직선 중 두 직선이 평행한 경우

$a=3$ 또는 $a=-1$

(ii) 직선 $y=ax+2$가 두 직선 $y=3x$, $y=-x+4$의 교점을 지날 때,
세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$y=3x$, $y=-x+4$를 연립하여 풀면

$x=1$, $y=3$

직선 $y=ax+2$가 점 $(1, 3)$을 지나야 하므로

$3=a+2 \qquad \therefore a=1$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은 3이다.

답 ④

$\frac{5}{4}\neq\frac{1}{-2}$이므로 기울기가 다르다.

1288 두 직선 $5x+y-4=0$, $4x-2y+1=0$이 한 점에서 만나므로 주어진 세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $ax+3y+2=0$이 직선 $5x+y-4=0$과 평행할 때,

$\dfrac{a}{5}=\dfrac{3}{1}\neq\dfrac{2}{-4}$에서 $\qquad a=15$

(ii) 직선 $ax+3y+2=0$이 직선 $4x-2y+1=0$과 평행할 때,

$\dfrac{a}{4}=\dfrac{3}{-2}\neq\dfrac{2}{1}$에서 $\qquad a=-6$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 -6, 15이다.

답 -6, 15

$2\cdot3+1\cdot(-1)\neq0$

1289 두 직선 $2x+y-6=0$, $3x-y-4=0$이 수직이 아니므로 주어진 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형인 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $kx-y+1=0$이 직선 $2x+y-6=0$과 수직일 때,

$k\cdot2+(-1)\cdot1=0$에서 $\qquad k=\dfrac{1}{2}$

그런데 $k=\dfrac{1}{2}$이면 직선 $kx-y+1=0$이 두 직선 $2x+y-6=0$, $3x-y-4=0$의 교점 $(2, 2)$를 지나므로 세 직선은 한 점에서 만난다.

따라서 세 직선이 삼각형을 이루지 않는다.

(ii) 직선 $kx-y+1=0$이 직선 $3x-y-4=0$과 수직일 때,

$k\cdot3+(-1)\cdot(-1)=0$에서 $\qquad k=-\dfrac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $\qquad k=-\dfrac{1}{3}$

답 $-\dfrac{1}{3}$

1290 두 점 $(5, 1)$, $(1, 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{4-1}{1-5}=-\dfrac{3}{4}$

이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 $-\dfrac{3}{4}$이다.

점 $(8, 0)$을 지나고 기울기가 $-\dfrac{3}{4}$인 직선의 방정식은

$y-0=-\dfrac{3}{4}(x-8) \qquad \therefore 3x+4y-24=0$

따라서 $a=4$, $b=-24$이므로 $\qquad a+b=-20$

답 ①

1291 직선 $2x+y-7=0$, 즉 $y=-2x+7$에 수직인 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 점 $(6, -1)$을 지나고 기울기가 $\dfrac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y+1=\dfrac{1}{2}(x-6) \qquad \therefore y=\dfrac{1}{2}x-4$

답 $y=\dfrac{1}{2}x-4$

1292 직선 $x+5y+7=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{5}x-\dfrac{7}{5}$에 평행한 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{5}$이다.

따라서 점 $(5, 2)$를 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{5}$인 직선의 방정식은

$y-2=-\dfrac{1}{5}(x-5) \qquad \therefore y=-\dfrac{1}{5}x+3$

이 직선이 점 $(a, 4)$를 지나므로

$4=-\dfrac{1}{5}a+3 \qquad \therefore a=-5$

답 ①

다른 풀이 두 점 $(5, 2)$, $(a, 4)$를 지나는 직선이 직선 $x+5y+7=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{5}x-\dfrac{7}{5}$에 평행하므로

$\dfrac{4-2}{a-5}=-\dfrac{1}{5}, \qquad a-5=-10 \qquad \therefore a=-5$

1293 두 점 $\mathrm{A}(-6, -2)$, $\mathrm{B}(0, 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{4+2}{0+6}=1$

이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

한편 $\overline{\mathrm{AB}}$를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\cdot0-1\cdot(-6)}{2-1}, \dfrac{2\cdot4-1\cdot(-2)}{2-1}\right)$, 즉 $(6, 10)$

따라서 점 $(6, 10)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-10=-(x-6) \qquad \therefore y=-x+16$

답 ②

1294 직선 $x-3y+5=0$, 즉 $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$에 수직인 직선 AH의 기울기는 -3이다. ··· ❶

따라서 직선 AH의 방정식은
기울기가 -3이고 점 $(-3, 4)$를 지나는 직선

$y-4=-3(x+3) \qquad \therefore 3x+y+5=0$ ··· ❷

$x-3y+5=0$, $3x+y+5=0$을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=1$

즉 점 H의 좌표는 $(-2,\ 1)$이다. ⋯→ ❸

답 $(-2,\ 1)$

채점 기준	비율
❶ 직선 AH의 기울기를 구할 수 있다.	20 %
❷ 직선 AH의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 H의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

1295 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3-1}{2},\ \frac{-7+1}{2}\right)$, 즉 $(1,\ -3)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1+7}{-1-3}=-2$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $(1,\ -3)$을 지나므로 그 방정식은

$y+3=\frac{1}{2}(x-1)\qquad \therefore x-2y-7=0$

즉 $a=1$, $b=-2$이므로

$a-b=3$ 답 ④

1296 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{7-5}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 1)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-5-7}{5-1}=-3$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $(3,\ 1)$을 지나므로 그 방정식은

$y-1=\frac{1}{3}(x-3)\qquad \therefore y=\frac{1}{3}x$

이 직선이 점 $(a,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{1}{3}a\qquad \therefore a=6$ 답 ⑤

1297 직선 $x-2y-8=0$의 x절편은 8, y절편은 -4이므로

A$(8,\ 0)$, B$(0,\ -4)$ ⋯→ ❶

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{8+0}{2},\ \frac{0-4}{2}\right)$, 즉 $(4,\ -2)$

또 직선 $x-2y-8=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-4$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 -2이다. ⋯→ ❷

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 방정식은

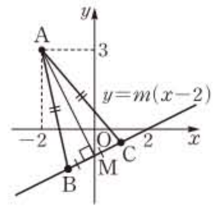
$y+2=-2(x-4)\qquad \therefore y=-2x+6$ ⋯→ ❸

답 $y=-2x+6$

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{AB}$의 중점의 좌표와 수직이등분선의 기울기를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{AB}$의 수직이등분선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

1298 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 점 M은 y축 위에 있고, △ABC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 직선 AM은 $\overline{BC}$의 수직이등분선이다.

이등변삼각형에서 꼭짓점과 밑변의 중점을 이은 직선은 밑변과 수직이다.



이때 직선 BC의 기울기가 m이므로 직선 AM의 기울기는 $-\frac{1}{m}$이다.

따라서 점 A$(-2,\ 3)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{m}$인 직선 AM의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{m}(x+2)\qquad \therefore y=-\frac{1}{m}x-\frac{2}{m}+3$

두 직선 AM, BC의 y절편은 각각 $-\frac{2}{m}+3$, $-2m$이므로

$-\frac{2}{m}+3=-2m,\qquad 2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$

그런데 $m>0$이므로 $m=\frac{1}{2}$ 답 ③

1299 두 점 $(2,\ -1)$, $(1,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{6+1}{1-2}(x-2)\qquad \therefore 7x+y-13=0$

따라서 점 $(5,\ 8)$과 직선 $7x+y-13=0$ 사이의 거리는

$\frac{|7\cdot5+1\cdot8-13|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{30}{\sqrt{50}}=3\sqrt{2}$ 답 ③

1300 $\frac{|8\cdot(-1)+6\cdot2+k|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{1}{2}$이므로 $|4+k|=5$

$4+k=-5$ 또는 $4+k=5$

$\therefore k=-9$ 또는 $k=1$

그런데 $k>0$이므로 $k=1$ 답 1

1301 점 $(0,\ k)$에서 두 직선 $5x-y-4=0$, $x+5y-2=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|5\cdot0-1\cdot k-4|}{\sqrt{5^2+(-1)^2}}=\frac{|1\cdot0+5\cdot k-2|}{\sqrt{1^2+5^2}}$,

$|k+4|=|5k-2|$

$k+4=-(5k-2)$ 또는 $k+4=5k-2$

$\therefore k=-\frac{1}{3}$ 또는 $k=\frac{3}{2}$

따라서 모든 k의 값의 곱은 $-\frac{1}{2}$이다. 답 ②

1302 직선 $2x+3y+3=0$, 즉 $y=-\frac{2}{3}x-1$의 기울기가 $-\frac{2}{3}$이므로 구하는 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

이 직선의 방정식을 $y=\frac{3}{2}x+k$라 하면 원점과 직선 $y=\frac{3}{2}x+k$, 즉 $3x-2y+2k=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{13}$이므로

$\frac{|2k|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=2\sqrt{13},\qquad |2k|=26$

$2k=-26$ 또는 $2k=26$

$\therefore k=-13$ 또는 $k=13$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{2}x-13$ 또는 $y=\frac{3}{2}x+13$

답 $y=\frac{3}{2}x-13$, $y=\frac{3}{2}x+13$

1303 $\overline{AB}=\sqrt{(0+3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{13}$

직선 AB의 방정식은

$y-4=\frac{2-4}{0+3}(x+3)$

$\therefore 2x+3y-6=0$

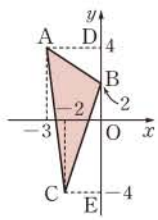
점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot(-2)+3\cdot(-4)-6|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{22}{\sqrt{13}}=\frac{22\sqrt{13}}{13}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{22\sqrt{13}}{13}=11$

답 ④

다른 풀이 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC$

$=\square DACE-(\triangle DAB+\triangle BCE)$

$=\frac{1}{2}\cdot(3+2)\cdot 8-\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6\right)$

$=20-9=11$

1304 직선 $x+y+4=0$의 x절편과 y절편이 모두 -4이므로

$A(-4, 0)$, $B(0, -4)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(0+4)^2+(-4-0)^2}=4\sqrt{2}$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|1\cdot(-1)+1\cdot 3+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=12$

답 ④

1305 $\overline{AB}=\sqrt{(2-0)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$ ··· ❶

직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \qquad \therefore 2x+y-4=0$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot 5+1\cdot a-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|6+a|}{\sqrt{5}}$ ··· ❷

$\triangle ABC$의 넓이가 9이므로

$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{|6+a|}{\sqrt{5}}=9, \qquad |6+a|=9$

$6+a=-9$ 또는 $6+a=9$

$\therefore a=-15$ 또는 $a=3$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %
❷ 점 C와 직선 AB 사이의 거리를 구할 수 있다.	40 %
❸ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	40 %

1306 주어진 두 직선이 평행하므로 직선 $x+7y-10=0$ 위의 한 점 $(10, 0)$과 직선 $x+7y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이다.

$\frac{|1\cdot 10+7\cdot 0+a|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\sqrt{2}, \qquad |10+a|=10$

$10+a=-10$ 또는 $10+a=10$

$\therefore a=-20$ 또는 $a=0$

그런데 $a\neq 0$이므로 $\quad a=-20$

답 -20

1307 두 직선이 평행하므로

$\frac{2}{m}=\frac{m-3}{-1}\neq\frac{14}{4}, \qquad m(m-3)=-2$

$m^2-3m+2=0, \qquad (m-1)(m-2)=0$

$\therefore m=2\ (\because m>1)$

따라서 두 직선의 방정식은

$2x-y+14=0$, $2x-y+4=0$

이므로 직선 $2x-y+14=0$ 위의 한 점 $(-7, 0)$과 직선 $2x-y+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot(-7)-1\cdot 0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

답 ⑤

1308 $\overline{AB}$의 길이는 평행한 두 직선 AD, BC 사이의 거리와 같다. ··· ❶

이때 직선 $x+2y=3$ 위의 한 점 $(3, 0)$과 직선 $x+2y=8$, 즉 $x+2y-8=0$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\frac{|1\cdot 3+2\cdot 0-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ ··· ❷

따라서 정사각형 ABCD의 넓이는

$(\sqrt{5})^2=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$의 길이는 두 직선 AD, BC 사이의 거리와 같음을 알 수 있다.	30 %
❷ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정사각형 ABCD의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

1309 직선 $3x+y-2=0$에 평행한 직선의 방정식을

$3x+y+k=0\ (k\neq -2)$

이라 하면 직선 $3x+y-2=0$ 위의 한 점 $(0, 2)$와 이 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|3\cdot 0+1\cdot 2+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$

$|2+k|=10$

$2+k=-10$ 또는 $2+k=10$

$\therefore k=-12$ 또는 $k=8$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$3x+y-12=0$ 또는 $3x+y+8=0$

답 $3x+y-12=0$, $3x+y+8=0$

1310 점 $P(x, y)$에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|x-2y+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2x-y-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$|x-2y+3|=|2x-y-3|$

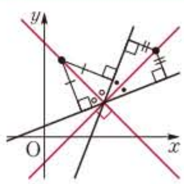
$x-2y+3=\pm(2x-y-3)$

$\therefore x-y=0$ 또는 $x+y-6=0$

답 $x-y=0$ 또는 $x+y-6=0$

라쎈특강

오른쪽 그림과 같이 한 점에서 만나는 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 도형은 두 직선이 이루는 각의 이등분선이다. 이때 두 직선이 한 점에서 만나면 두 쌍의 맞꼭지각이 생기므로 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 도형은 서로 수직인 두 개의 직선이다.



1311 점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로

$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}$

양변을 제곱하면

$(x-1)^2+(y-3)^2=(x-2)^2+(y-6)^2$

$x^2-2x+1+y^2-6y+9=x^2-4x+4+y^2-12y+36$

$2x+6y-30=0$

$\therefore x+3y-15=0$

따라서 직선 $x+3y-15=0$과 점 $(1, -2)$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot1+3\cdot(-2)-15|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$$

답 ④

1312 직선 $3x+5y-8=0$ 위의 임의의 점 A의 좌표를 (s, t)라 하면

$3s+5t-8=0$ …… ㉠

선분 OA의 중점 M의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{s}{2}$, $y=\frac{t}{2}$

$\therefore s=2x,\ t=2y$ …… ㉡

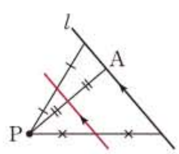
㉡을 ㉠에 대입하면

$6x+10y-8=0 \qquad \therefore 3x+5y-4=0$

답 $3x+5y-4=0$

라쎈특강

오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l 밖의 한 점 P를 이은 선분의 중점이 나타내는 도형은 직선 l 위의 한 점 A에 대하여 $\overline{AP}$의 중점을 지나고 직선 l에 평행한 직선이다.



1313 두 직선 $4x+3y+1=0$, $3x-4y+2=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 점을 $P(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|4x+3y+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|3x-4y+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$|4x+3y+1|=|3x-4y+2|$

$4x+3y+1=\pm(3x-4y+2)$

$\therefore 7x-y+3=0$ 또는 $x+7y-1=0$

따라서 기울기가 양수인 직선의 방정식은

$7x-y+3=0$

답 ④

1314 전략 점 (a, b)를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-b=m(x-a)$이다.

풀이 주어진 직선의 방정식은

$y+4=a(x-4) \qquad \therefore y=ax-4a-4$

따라서 $a=6$, $-4a-4=b$이므로

$a=6,\ b=-28$

$\therefore a+b=-22$

답 ②

다른 풀이 직선 $y=6x+b$의 기울기가 6이므로

$a=6$

직선 $y=6x+b$가 점 $(4, -4)$를 지나므로

$-4=24+b \qquad \therefore b=-28$

$\therefore a+b=-22$

1315 전략 x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이다. (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

풀이 주어진 직선의 방정식은

$\frac{x}{5}+y=1$

이 직선이 점 $(a, 8)$을 지나므로

$\frac{a}{5}+8=1, \qquad \frac{a}{5}=-7 \qquad \therefore a=-35$

답 -35

1316 전략 △ABC의 무게중심을 구하여 두 점을 지나는 직선의 방정식을 이용한다.

풀이 △ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+0+5}{3}, \frac{-9+5+7}{3}\right)$, 즉 $(1, 1)$

두 점 $(1, 1)$, $(-1, -5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{-5-1}{-1-1}(x-1) \qquad \therefore y=3x-2$

이 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하면

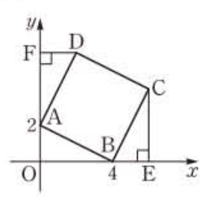
$0=3x-2 \qquad \therefore x=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 x절편은 $\frac{2}{3}$이다.

답 ②

1317 전략 두 점 C, D에서 각각 x축, y축에 수선의 발을 내린 후 합동인 도형을 찾아서 두 점 C, D의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 F라 하면



△AOB≡△BEC≡△DFA (RHA 합동)

즉 $\overline{BE}=2$, $\overline{CE}=4$이므로 $\quad C(6, 4)$

$\overline{DF}=2$, $\overline{FA}=4$이므로 $\quad D(2, 6)$

따라서 직선 CD의 방정식은

$y-4=\frac{6-4}{2-6}(x-6) \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+7$

답 $y=-\frac{1}{2}x+7$

다른 풀이 □ABCD가 정사각형이므로 직선 CD는 직선 AB와 평행하고 점 A와 직선 CD 사이의 거리는 $\overline{AB}$의 길이와 같다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{0-2}{4-0}=-\frac{1}{2}$이고

$\overline{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$이므로 직선 CD의 방정식을

$y=-\frac{1}{2}x+k\ (k\neq2)$로 놓으면 점 A$(0, 2)$와 직선

$y=-\frac{1}{2}x+k$, 즉 $x+2y-2k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot0+2\cdot2-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}, \qquad |4-2k|=10$$

$$4-2k=-10 \text{ 또는 } 4-2k=10 \qquad \therefore k=7 \text{ 또는 } k=-3$$

그런데 두 점 C, D가 제1사분면 위의 점이므로 $\quad k>0$

$\therefore k=7$

1318 **전략** 서로 다른 세 점이 한 직선 위에 있으려면 어느 두 점을 지나는 두 직선의 기울기가 같아야 함을 이용한다.

풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{4-1}{a+2}=\frac{a+4-1}{2+2}, \text{ 즉 } \frac{3}{a+2}=\frac{a+3}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$(a+2)(a+3)=12, \qquad a^2+5a-6=0$

$(a+6)(a-1)=0 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$

㉠에서 직선 l은 기울기가 1이고 점 $(-2, 1)$을 지나므로

$y-1=x+2 \qquad \therefore y=x+3$

따라서 이 직선의 x절편은 -3, y절편은 3이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot|-3|\cdot3=\frac{9}{2}$ **답** ⑤

1319 **전략** 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.

□OABC의 두 대각선의 교점은 $\overline{OB}$의 중점과 같고 B$(6, 5)$이므로 그 좌표는

└ 직사각형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.

$$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+5}{2}\right), \text{ 즉 } \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

□FADE의 두 대각선의 교점은 $\overline{DF}$의 중점과 같고 D$(6, 3)$, F$(4, 0)$이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{6+4}{2}, \frac{3+0}{2}\right), \text{ 즉 } \left(5, \frac{3}{2}\right)$$

따라서 □OABC, □FADE의 넓이를 모두 이등분하는 직선 l은 두 점 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, $\left(5, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 직선 l의 기울기는

$$\frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{5-3}=-\frac{1}{2}$$ **답** ③

1320 **전략** 주어진 직선의 기울기와 y절편이 모두 음수임을 이용한다.

풀이 직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 기울기와 y절편이 모두 음수이므로

$-\frac{a}{b}<0, \ -\frac{c}{b}<0 \qquad \therefore ac>0$

$-cx+ay-b=0$에서 $a\neq0$이므로

$y=\frac{c}{a}x+\frac{b}{a}$

이때 $\frac{c}{a}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 직선 $-cx+ay-b=0$의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.

따라서 직선 $-cx+ay-b=0$의 개형은 ①과 같다. **답** ①

1321 **전략** 직선 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x-y+4)k+(2x+y+a)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-y+4=0, \ 2x+y+a=0$

점 $(-5, b)$는 위의 두 직선의 교점이므로

$-5-b+4=0, \ -10+b+a=0$

$-5-b+4=0$에서

$b=-1$

$b=-1$을 $-10+b+a=0$에 대입하면

$a=11$

$\therefore a-b=12$ **답** 12

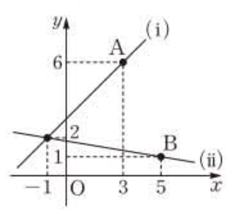
1322 **전략** 먼저 주어진 직선이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 찾는다.

풀이 $y=mx+m+2$에서

$m(x+1)-(y-2)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$를 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 A$(3, 6)$을 지날 때,

$4m-4=0 \qquad \therefore m=1$

(ii) 직선 ㉠이 점 B$(5, 1)$을 지날 때,

$6m+1=0 \qquad \therefore m=-\frac{1}{6}$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$-\frac{1}{6}<m<1$ **답** ④

1323 **전략** 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하고 이 직선이 지나는 점의 좌표를 이용한다.

풀이 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-2y+2+k(2x+y-6)=0\ (k\text{는 실수}) \qquad \cdots\cdots ㉠$

으로 놓으면 이 직선이 점 $(4, 0)$을 지나므로

$4-0+2+k(8+0-6)=0$

$6+2k=0 \qquad \therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$5x+5y-20=0$

$\therefore x+y-4=0$

따라서 구하는 y절편은 4이다. **답** ④

1324 전략 두 직선이 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

풀이 직선 AP의 기울기는

$$\frac{5-3}{4-0}=\frac{1}{2}$$

직선 BP의 기울기는

$$\frac{5-3}{4-n}=\frac{2}{4-n}$$

두 직선 AP와 BP가 수직이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4-n}=-1$$

$n-4=1 \qquad \therefore n=5$ 답 5

다른 풀이 $\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$이므로

$$n^2=(4-0)^2+(5-3)^2+(4-n)^2+(5-3)^2$$

$8n=40 \qquad \therefore n=5$

1325 전략 세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 다른 한 직선이 지나야 한다.

풀이 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $kx-2y=-5$가 두 직선 $2x+y=0$, $3x+y=-k$의 교점을 지나야 한다.

$2x+y=0$, $3x+y=-k$를 연립하여 풀면

$x=-k$, $y=2k$

직선 $kx-2y=-5$가 점 $(-k, 2k)$를 지나야 하므로

$k\cdot(-k)-2\cdot2k=-5$

$k^2+4k-5=0, \qquad (k+5)(k-1)=0$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=1$

따라서 모든 k의 값의 곱은 -5이다. 답 ①

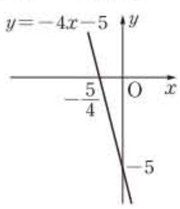
1326 전략 두 직선이 평행하면 두 직선의 기울기는 같다.

풀이 직선 $y=-4x+9$에 평행한 직선의 기울기는 -4이다.

점 $(-2, 3)$을 지나고 기울기가 -4인 직선의 방정식은

$y-3=-4(x+2)$

$\therefore y=-4x-5$



따라서 직선 $y=-4x-5$는 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.

답 제1사분면

1327 전략 기울기가 m, y절편이 n인 직선과 y축에서 수직으로 만나는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{m}x+n$임을 이용한다.

풀이 직선 $(3k+2)x-y+2=0$, 즉 $y=(3k+2)x+2$의 기울기는 $3k+2$, y절편은 2이므로 이 직선과 y축에서 수직으로 만나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{3k+2}x+2$$

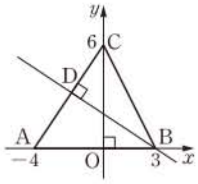
이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$$0=-\frac{1}{3k+2}+2$$

$\frac{1}{3k+2}=2, \qquad 6k+4=1$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$ 답 ②

1328 전략 점 C에서 변 AB에 그은 수선은 y축 위에 있음을 이용한다.



풀이 세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 점 C에서 변 AB에 그은 수선은 y축 위에 있다.

따라서 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하면 직선 BD와 y축이 만나는 점이 세 수선의 교점이다.

직선 AC의 기울기가 $\frac{6-0}{0+4}=\frac{3}{2}$이므로 직선 BD는 기울기가 $-\frac{2}{3}$이고 점 B$(3, 0)$을 지나는 직선이다.

즉 직선 BD의 방정식은

$$y=-\frac{2}{3}(x-3)$$

$$\therefore y=-\frac{2}{3}x+2$$

따라서 직선 BD와 y축의 교점의 좌표가 $(0, 2)$이므로 구하는 세 수선의 교점의 좌표는 $(0, 2)$이다. 답 ②

1329 전략 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분함을 이용한다.

풀이 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 직선 l은 $\overline{AC}$의 수직이등분선이다.

A$(1, 3)$, C$(5, 1)$이므로 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 $(3, 2)$

두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{1-3}{5-1}=-\frac{1}{2}$$

따라서 $\overline{AC}$의 수직이등분선은 기울기가 2이고 점 $(3, 2)$를 지나므로 그 방정식은

$y-2=2(x-3)$

$\therefore 2x-y-4=0$

즉 $a=-1$, $b=-4$이므로

$ab=4$ 답 4

1330 전략 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

풀이 주어진 두 직선이 평행하므로

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{a}\neq\frac{-1}{b}$$

$\therefore a=4$, $b\neq-2$

직선 $x+2y-1=0$ 위의 한 점 $(1, 0)$과 직선 $2x+4y+b=0$ 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$이므로

$$\frac{|2\cdot1+4\cdot0+b|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$|2+b|=5$

$2+b=-5$ 또는 $2+b=5$

$\therefore b=-7$ 또는 $b=3$

그런데 $b>0$이므로 $\qquad b=3$

$\therefore a+b=7$ 답 ③

1331 전략 곡선 $y=-x^2+4$에 접하고 직선 $y=2x+k$와 평행한 직선의 방정식을 구한다.

풀이 곡선 $y=-x^2+4$에 접하고 직선 $y=2x+k$와 평행한 직선의 방정식을 $y=2x+a$ (a는 상수)라 하면 이차방정식

$-x^2+4=2x+a$, 즉 $x^2+2x+a-4=0$

이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(a-4)=0$

$\therefore a=5$

따라서 주어진 거리의 최솟값은 두 직선 $y=2x+5$, $y=2x+k$ 사이의 거리와 같다.

이때 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=2x+5$ 위의 한 점 $(0, 5)$와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|2\cdot 0-1\cdot 5+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$, $\quad |k-5|=10$

$k-5=-10$ 또는 $k-5=10$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=15$

그런데 $k=-5$이면 곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=2x-5$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 거리의 최솟값이 0이다.

$\therefore k=15$

답 15

1332 전략 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)로 놓고 x와 y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 직선 $6x-4y-1=0$ 위의 임의의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 $\quad 6a-4b-1=0$ ...... ㉠

선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{2\cdot a+1\cdot 1}{2+1}=\frac{2a+1}{3}$

$y=\frac{2\cdot b+1\cdot(-1)}{2+1}=\frac{2b-1}{3}$

$\therefore a=\frac{3x-1}{2}$, $b=\frac{3y+1}{2}$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$6\cdot\frac{3x-1}{2}-4\cdot\frac{3y+1}{2}-1=0$

$9x-6y-6=0$

$\therefore 3x-2y-2=0$

답 $3x-2y-2=0$

1333 전략 두 직선의 교점이 존재하지 않으면 두 직선은 평행하다.

풀이 두 직선 $ax+3y-5=0$, $2x-(1-a)y+2=0$의 교점이 존재하지 않으므로 두 직선은 평행하다. ⋯ ❶

즉 $\frac{a}{2}=\frac{3}{-(1-a)}\neq\frac{-5}{2}$이므로 ⋯ ❷

$a(a-1)=6$, $\quad a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a<0$) ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 두 직선의 교점이 존재하지 않을 때의 조건을 알 수 있다.	30 %
❷ 두 직선이 평행할 때의 조건을 이용하여 a에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ 음수 a의 값을 구할 수 있다.	30 %

1334 전략 먼저 점 P의 좌표를 구한 후 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y)k+(2x-y-4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y=0$, $2x-y-4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=1$, $y=-2$

$\therefore$ P$(1, -2)$ ⋯ ❶

따라서 점 P$(1, -2)$와 직선 $y=-x-3$, 즉 $x+y+3=0$ 사이의 거리는

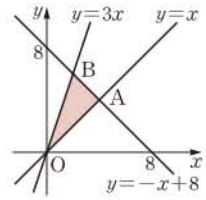
$\frac{|1\cdot 1+1\cdot(-2)+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ⋯ ❷

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ 점 P와 직선 $y=-x-3$ 사이의 거리를 구할 수 있다.	50 %

1335 전략 먼저 두 점 A, B의 좌표를 구한 후 삼각형의 넓이를 구한다.

풀이 직선 $y=-x+8$과 두 직선 $y=x$, $y=3x$의 교점은 각각



A$(4, 4)$, B$(2, 6)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(2-4)^2+(6-4)^2}$

$=2\sqrt{2}$ ⋯ ❶

원점 O와 직선 $y=-x+8$, 즉 $x+y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\cdot 0+1\cdot 0-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$ ⋯ ❷

따라서 △OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ 원점 O와 직선 $y=-x+8$ 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %
❸ △OAB의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

11 원의 방정식

1336 답 $(2, 3)$, 2

1337 답 $(-4, 0)$, 3

1338 답 $(x-3)^2+(y+1)^2=1$

1339 답 $x^2+y^2=12$

1340 답 $(x-1)^2+(y-5)^2=25$

3, 5, 1, 5, 25

1341 두 점 $(-3, 7)$, $(-2, 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-2+3)^2+(4-7)^2}=\sqrt{10}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-7)^2=10$ 답 $(x+3)^2+(y-7)^2=10$

1342 두 점 $(-6, -2)$, $(0, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x+6)^2+(y+2)^2=40$ 답 $(x+6)^2+(y+2)^2=40$

1343 $x^2+y^2-4x+6y+9=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=4$

$\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=2^2$

따라서 중심의 좌표는 $(2, -3)$, 반지름의 길이는 2이다.

답 $(2, -3)$, 2

1344 $x^2+y^2+2x+4y+4=0$에서

$(x^2+2x+1)+(y^2+4y+4)=1$

$\therefore (x+1)^2+(y+2)^2=1^2$

따라서 중심의 좌표는 $(-1, -2)$, 반지름의 길이는 1이다.

답 $(-1, -2)$, 1

1345 $x^2+y^2-12y-13=0$에서

$x^2+(y^2-12y+36)=49$

$\therefore x^2+(y-6)^2=7^2$

따라서 중심의 좌표는 $(0, 6)$, 반지름의 길이는 7이다.

답 $(0, 6)$, 7

1346 $x^2+y^2+8x+k=0$에서

$(x^2+8x+16)+y^2=-k+16$

$\therefore (x+4)^2+y^2=-k+16$

이 방정식이 원을 나타내려면

$-k+16>0$ $\therefore k<16$ 답 $k<16$

1347 $x^2+y^2-6x-2y-k=0$에서

$(x^2-6x+9)+(y^2-2y+1)=k+10$

$\therefore (x-3)^2+(y-1)^2=k+10$

이 방정식이 원을 나타내려면

$k+10>0$ $\therefore k>-10$ 답 $k>-10$

1348 답 $(x-6)^2+(y+4)^2=16$

1349 답 $(x+6)^2+(y-9)^2=36$

1350 답 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

1351 답 $(x+7)^2+(y+7)^2=49$

1352 답 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

1353 답 $(x-6)^2+(y+2)^2=36$

1354 답 $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

1355 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은 두 원의 공통인 현의 방정식

$x^2+y^2-1-(x^2+y^2-2x-2y-2)=0$

$\therefore 2x+2y+1=0$ 답 $2x+2y+1=0$

1356 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

1, -3, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 서로 다른 두 점에서 만난다.

1357 원의 중심 $(4, 4)$와 직선 $x-y+8=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|4-4+8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$

이때 원의 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다. (접한다.) 답 한 점에서 만난다. (접한다.)

1358 $x^2+y^2+4x+6y+4=0$에서

$(x+2)^2+(y+3)^2=9$

원의 중심 $(-2, -3)$과 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-6-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{18}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 원 O와 직선 l은 만나지 않는다. 답 만나지 않는다.

1359 $x^2+y^2-2x-15=0$에서

$(x-1)^2+y^2=16$

원의 중심 $(1, 0)$과 직선 $2x+y+3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 4이므로 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다. 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

1360 답 만나지 않는다.

11, $<$, 만나지 않는다.

1361 $x-2y+1=0$에서
$x=2y-1$
$x=2y-1$을 $x^2+y^2-8y+4=0$에 대입하면
$(2y-1)^2+y^2-8y+4=0$
$\therefore 5y^2-12y+5=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-6)^2-5\cdot5=11>0$
따라서 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

1362 $3x-y+5=0$에서
$y=3x+5$
$y=3x+5$를 $x^2+y^2+10x+15=0$에 대입하면
$x^2+(3x+5)^2+10x+15=0$
$\therefore x^2+4x+4=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot4=0$
따라서 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다. (접한다.)

답 한 점에서 만난다. (접한다.)

1363 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$
(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면
$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<2,\quad |k|<2\sqrt{2}$
$\therefore -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$
(2) 원과 직선이 한 점에서 만나려면
$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=2,\quad |k|=2\sqrt{2}$
$\therefore k=-2\sqrt{2}$ 또는 $k=2\sqrt{2}$
(3) 원과 직선이 만나지 않으려면
$\frac{|k|}{\sqrt{2}}>2,\quad |k|>2\sqrt{2}$
$\therefore k<-2\sqrt{2}$ 또는 $k>2\sqrt{2}$

답 풀이 참조

참고 이차방정식의 판별식을 이용하여 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구할 수도 있다.

1364 $y=2x\pm\sqrt{2^2+1}$에서 $y=2x\pm\sqrt{5}$

답 $y=2x\pm\sqrt{5}$

1365 $y=-3x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{(-3)^2+1}$에서 $y=-3x\pm5\sqrt{2}$

답 $y=-3x\pm5\sqrt{2}$

1366 $y=4x\pm\sqrt{17}\cdot\sqrt{4^2+1}$에서 $y=4x\pm17$

답 $y=4x\pm17$

1367 답 $x+y=2$

1368 답 $2x-3y=13$

1369 $-4x-2y=20$에서 $2x+y=-10$

답 $2x+y=-10$

1370 (1) $x_1x+y_1y=5$
(2) 직선 $x_1x+y_1y=5$가 점 $(3,\ -1)$을 지나므로
$3x_1-y_1=5 \quad \therefore y_1=3x_1-5$ …… ㉠
또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로
$x_1^2+y_1^2=5$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $x_1^2+(3x_1-5)^2=5$
$x_1^2-3x_1+2=0,\quad (x_1-1)(x_1-2)=0$
$\therefore x_1=1$ 또는 $x_1=2$
$x_1=1$을 ㉠에 대입하면 $y_1=-2$
$x_1=2$를 ㉠에 대입하면 $y_1=1$
$\therefore x_1=1,\ y_1=-2$ 또는 $x_1=2,\ y_1=1$
(3) $x_1=1,\ y_1=-2$일 때, $x-2y=5$
$x_1=2,\ y_1=1$일 때, $2x+y=5$

답 풀이 참조

1371 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=6$
이 직선이 점 $(0,\ 6)$을 지나므로
$6y_1=6 \quad \therefore y_1=1$
또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=6$ 위의 점이므로
$x_1^2+y_1^2=6$ …… ㉠
$y_1=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $x_1^2=5$
$\therefore x_1=\pm\sqrt{5}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$\sqrt{5}x+y=6,\ -\sqrt{5}x+y=6$

답 $\sqrt{5}x+y=6,\ -\sqrt{5}x+y=6$

다른 풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-6=m(x-0) \quad \therefore mx-y+6=0$
원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y+6=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{6}$과 같아야 하므로
$\frac{|6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{6},\quad 6=\sqrt{6(m^2+1)}$
양변을 제곱하여 정리하면
$m^2=5 \quad \therefore m=\pm\sqrt{5}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$\sqrt{5}x+y=6,\ -\sqrt{5}x+y=6$

1372 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=4$

이 직선이 점 (1, 2)를 지나므로

$x_1+2y_1=4 \quad \therefore x_1=-2y_1+4$ …… ㉠

또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(-2y_1+4)^2+y_1^2=4$

$5y_1^2-16y_1+12=0, \quad (y_1-2)(5y_1-6)=0$

$\therefore y_1=2$ 또는 $y_1=\frac{6}{5}$

$y_1=2$를 ㉠에 대입하면 $x_1=0$

$y_1=\frac{6}{5}$을 ㉠에 대입하면 $x_1=\frac{8}{5}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2, 4x+3y=10$ 답 $y=2, 4x+3y=10$

다른 풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 (1, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=m(x-1)$

$\therefore mx-y-m+2=0$

원의 중심 (0, 0)과 직선 $mx-y-m+2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같아야 하므로

$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2, \quad |-m+2|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2+4m=0, \quad m(3m+4)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=-\frac{4}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2, 4x+3y=10$

1373 중심이 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$의 중심과 같으므로 그 좌표는 $(2, -1)$

두 점 $(2, -1), (2, -2)$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이

$|-2-(-1)|=1$

따라서 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=1$

이고 이 원이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$(a-2)^2+(0+1)^2=1, \quad (a-2)^2=0$

$\therefore a=2$ 답 ②

1374 직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

(3, 0), (0, 4)

이 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(0-3)^2+(4-0)^2}=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+y^2=25$ 답 ③

1375 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점이 구하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{1\cdot0+2\cdot3}{1+2}, \frac{1\cdot6+2\cdot0}{1+2}\right)$, 즉 (2, 2) ··· ❶

두 점 (2, 2), (3, 0) 사이의 거리는

$\sqrt{(3-2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$ ··· ❷

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=5$ ··· ❸

답 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$

채점 기준	비율
❶ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

1376 원의 중심이 x축 위에 있으므로 $b=0$

원 $(x-a)^2+y^2=c$가 점 (3, −4)를 지나므로

$(3-a)^2+(-4)^2=c$

$\therefore a^2-6a+25=c$ …… ㉠

또 원이 점 (10, −3)을 지나므로

$(10-a)^2+(-3)^2=c$

$\therefore a^2-20a+109=c$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6, c=25$

$\therefore a+b+c=31$ 답 31

1377 원의 중심의 좌표를 (a, a), 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$ ··· ❶

이 원이 점 (−2, 2)를 지나므로

$(-2-a)^2+(2-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2+8=r^2$ …… ㉠

또 원이 점 (2, 6)을 지나므로

$(2-a)^2+(6-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-16a+40=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2, r^2=16$ ··· ❷

따라서 구하는 원의 넓이는 16π이다. ··· ❸

반지름의 길이가 r인 원의 넓이는 πr^2이다.

답 16π

채점 기준	비율
❶ 중심의 좌표를 (a, a), 반지름의 길이를 r라 하고 원의 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ a, r^2의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 원의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

1378 원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 점 (−4, 0)을 지나므로

$(-4)^2+(0-a)^2=r^2$

$\therefore a^2+16=r^2$ …… ㉠

또 원이 점 (3, −1)을 지나므로

$3^2+(-1-a)^2=r^2$

$\therefore a^2+2a+10=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ r^2=25$

따라서 원의 방정식은 $x^2+(y-3)^2=25$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(0,\ 3)$이다.

ㄴ. $4^2+(6-3)^2=25$이므로 원은 점 $(4,\ 6)$을 지난다.

ㄷ. 원의 반지름의 길이가 5이므로 둘레의 길이는 $2\pi\cdot5=10\pi$이다.

반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

다른 풀이 원의 중심을 $A(0,\ a)$라 하고 $B(-4,\ 0)$, $C(3,\ -1)$이라 하면 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\sqrt{(-4-0)^2+(0-a)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(-1-a)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $a=3$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(-4-0)^2+(0-3)^2}=5$

1379 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a-3)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+\{y-(a-3)\}^2=r^2$

이 원이 점 $(1,\ -4)$를 지나므로

$(1-a)^2+(-1-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2+2=r^2$ …… ㉠

또 원이 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$(3-a)^2+(5-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-16a+34=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ r^2=10$

따라서 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=10$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$(x-2)^2+1=10,\quad (x-2)^2=9$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

즉 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표는

$(-1,\ 0),\ (5,\ 0)$

이므로 구하는 거리는

$|5-(-1)|=6$ 답 6

1380 $\overline{AB}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right)$, 즉 $(2,\ -1)$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(5+1)^2+(1+3)^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=13$ 답 $(x-2)^2+(y+1)^2=13$

1381 $\overline{AB}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{4+10}{2},\ \frac{1+9}{2}\right)$, 즉 $(7,\ 5)$

$\therefore a=7,\ b=5$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(10-4)^2+(9-1)^2}=5$

$\therefore r=5$

$\therefore a+b+r=17$ 답 ⑤

1382 $P(12,\ 0)$, $Q(0,\ 12)$이고, $\overline{PQ}$의 중점이 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{12+0}{2},\ \frac{0+12}{2}\right)$, 즉 $(6,\ 6)$

또 $\overline{PQ}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+12^2}=6\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-6)^2+(y-6)^2=72$ 답 ④

1383 원의 중심을 $P(a,\ b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-5)^2=(a-0)^2+(b-4)^2$

$\therefore a+b-5=0$ …… ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-0)^2+(b-4)^2=(a-3)^2+(b-1)^2$

$\therefore a-b+1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=3$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(1-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5}$

이므로 $c=(\sqrt{5})^2=5$

$\therefore a+b+c=10$ 답 ③

참고 $\overline{PB}$, $\overline{PC}$의 길이를 이용하여 반지름의 길이를 구할 수도 있다.

1384 원의 중심을 $P(a,\ b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+b^2=(a+2)^2+(b-4)^2$

$\therefore a-2b+5=0$ …… ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-0)^2+(b-2)^2$

$-4b+4=0 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a=-3$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

이므로 원의 넓이는 $\pi\cdot(\sqrt{10})^2=10\pi$ 답 10π

1385 원의 중심을 $P(a,\ b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+4)^2+(b-0)^2=(a-1)^2+(b+5)^2$

$\therefore a-b-1=0$ …… ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-1)^2+(b+5)^2=(a-5)^2+(b-3)^2$

$\therefore a+2b-1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=0$ ··· ❶

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=|-4-1|=5$

이므로 원의 방정식은

$(x-1)^2+y^2=25$ ··· ❷

이때 점 $D(-2, k)$가 이 원 위의 점이므로

$(-2-1)^2+k^2=25, \quad k^2=16$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$) ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 원의 중심을 $P(a, b)$라 하고 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	20 %

1386 점 A는 두 직선 $3x-y+3=0$, $x+y-7=0$의 교점이므로 $A(1, 6)$

두 점 B, C는 각각 두 직선 $3x-y+3=0$, $x+y-7=0$이 x축과 만나는 점이므로

$B(-1, 0)$, $C(7, 0)$

외접원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-6)^2=(a+1)^2+b^2$

$\therefore a+3b-9=0$ …… ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+1)^2+b^2=(a-7)^2+b^2$

$a-3=0 \quad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $3b-6=0 \quad \therefore b=2$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(1-3)^2+(6-2)^2}=2\sqrt{5}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=20$ 답 $(x-3)^2+(y-2)^2=20$

1387 $x^2+y^2-10x+8y+a=0$에서

$(x-5)^2+(y+4)^2=41-a$

이 원의 중심의 좌표는 $(5, -4)$이므로

$b=5, c=-4$

또 반지름의 길이는 $\sqrt{41-a}$이므로

$\sqrt{41-a}=5, \quad 41-a=25 \quad \therefore a=16$

$\therefore a-b+c=7$ 답 7

1388 $x^2+y^2-4x=0$에서

$(x-2)^2+y^2=4$

이므로 반지름의 길이는 $\sqrt{4}=2$

$x^2+y^2+6x-2y+1=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=9$

이므로 반지름의 길이는 $\sqrt{9}=3$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$2+3=5$ 답 ①

1389 $x^2+y^2+ax-12y+12=0$에서

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-6)^2=\frac{a^2}{4}+24$

직선 $y=-2x+4$가 이 원의 중심 $\left(-\frac{a}{2}, 6\right)$을 지나므로

$6=-2\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)+4, \quad a+4=6$

$\therefore a=2$ 답 ④

1390 두 원의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 원의 중심을 지난다.

$x^2+y^2-2x+2y-3=0$에서

$(x-1)^2+(y+1)^2=5$

이므로 중심의 좌표는 $(1, -1)$

$x^2+y^2-8x-4y=0$에서

$(x-4)^2+(y-2)^2=20$

이므로 중심의 좌표는 $(4, 2)$

따라서 두 점 $(1, -1)$, $(4, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{2-(-1)}{4-1}(x-1) \quad \therefore y=x-2$

답 $y=x-2$

1391 $x^2+y^2+2ax+4ay-12+6a^2=0$에서

$(x+a)^2+(y+2a)^2=12-a^2$

이 방정식이 원을 나타내려면

$12-a^2>0, \quad a^2<12$

$\therefore -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

따라서 정수 a는 $-3, -2, -1, \cdots, 3$의 7개이다. 답 7

1392 $x^2+y^2-4(k-1)y+3k^2-5k+4=0$에서

$x^2+\{y-2(k-1)\}^2=k^2-3k$

이 방정식이 반지름의 길이가 2 이하인 원을 나타내려면

$0<k^2-3k\le4$

$k^2-3k>0$에서

$k(k-3)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>3$ …… ㉠

$k^2-3k\le4$에서

$k^2-3k-4\le0, \quad (k+1)(k-4)\le0$

$\therefore -1\le k\le4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-1\le k<0$ 또는 $3<k\le4$

따라서 실수 k의 값이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

1393 $x^2+y^2+2(a+1)x-6ay+11a^2-7=0$에서

$\{x+(a+1)\}^2+(y-3a)^2=-a^2+2a+8$ ··· ❶

이 방정식이 원을 나타내려면

$-a^2+2a+8>0, \quad a^2-2a-8<0$

$(a+2)(a-4)<0 \qquad \therefore -2<a<4$ ⋯ ❷

원의 넓이가 최대이려면 반지름의 길이가 최대이어야 하고

$\sqrt{-a^2+2a+8}=\sqrt{-(a-1)^2+9}$

이므로 $-2<a<4$에서 $a=1$일 때 반지름의 길이가 최대이다.

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 3이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
❷ 원의 방정식이 되도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 넓이가 최대인 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %

1394 중심의 좌표가 $(a, 5)$이고 y축에 접하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-5)^2=a^2$

이 원이 점 $(1, 7)$을 지나므로

$(1-a)^2+(7-5)^2=a^2$

$-2a+5=0 \qquad \therefore a=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

1395 $x^2+y^2-4x+6y+k=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2=-k+13$

이 원이 x축에 접하므로

$|-3|=\sqrt{-k+13}, \qquad 9=-k+13$

$\therefore k=4$

답 4

1396 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 넓이가 9π이므로

$\pi r^2=9\pi \qquad \therefore r=3\ (\because r>0)$ ⋯ ❶

또 이 원이 점 $(0, 4)$에서 y축에 접하고, 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-3, 4)$이다. ⋯ ❷

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-4)^2=9$ ⋯ ❸

답 $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

채점 기준	비율
❶ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❸ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

1397 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$이라 하면 이 원이 점 $(2, 1)$을 지나므로

x축에 접하는 원의 방정식

$(2-a)^2+(1-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-4a-2b+5=0$ ⋯⋯ ㉠

또 원이 점 $(2, 9)$를 지나므로

$(2-a)^2+(9-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-4a-18b+85=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $\quad 16b-80=0 \qquad \therefore b=5$

$b=5$를 ㉠에 대입하면

$a^2-4a-5=0, \qquad (a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=5$

따라서 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-1, 5)$, $(5, 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$|5-(-1)|=6$

답 ②

1398 $x^2+y^2-6x+ky+4=0$에서

$(x-3)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}+5$

원의 중심 $\left(3, -\frac{k}{2}\right)$가 제4사분면 위에 있으므로

$-\frac{k}{2}<0 \qquad \therefore k>0$

또 원이 y축에 접하므로 $\quad \sqrt{\frac{k^2}{4}+5}=3$

$\frac{k^2}{4}+5=9, \qquad k^2=16$

$\therefore k=4\ (\because k>0)$

답 ③

1399 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

점 $(-1, 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 제2사분면 위에 있다.

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$

$r^2-6r+5=0, \qquad (r-1)(r-5)=0$

$\therefore r=1$ 또는 $r=5$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은 6이다.

답 ③

1400 $x^2+y^2-4x+2ay+10-b=0$에서

$(x-2)^2+(y+a)^2=a^2+b-6$

이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로

$2=|-a|=\sqrt{a^2+b-6}$

$|-a|=2$에서 $\qquad a=2\ (\because a>0)$

$\sqrt{a^2+b-6}=2$에서 $\qquad a^2+b-6=4$

$a=2$를 위의 식에 대입하면 $\qquad b=6$

$\therefore a+b=8$

답 ④

1401 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 (r, r)이다.

이때 원의 중심 (r, r)가 직선 $5x-2y=9$ 위에 있으므로

$5r-2r=9, \qquad 3r=9$

$\therefore r=3$ ⋯ ❶

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-3)^2=9$ ⋯ ❷

답 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$

채점 기준	비율
❶ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❷ 원의 방정식을 구할 수 있다.	50 %

1402 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 둘레의 길이가 8π이므로

$2\pi r=8\pi \qquad \therefore r=4$

반지름의 길이가 4이고 원의 중심이 제3사분면 위에 있으므로 중심의 좌표는 $(-4, -4)$이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y+4)^2=16$, 즉 $x^2+y^2+8x+8y+16=0$

이므로 $a=8$, $b=8$, $c=16$

$\therefore a+b-c=0$ 답 ③

1403 $x^2+y^2-8x+10y+37=0$에서

$(x-4)^2+(y+5)^2=4$

점 A$(7, -1)$과 원의 중심 $(4, -5)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(4-7)^2+(-5+1)^2}=5$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로

$M=5+2=7$, $m=5-2=3$

$\therefore Mm=21$ 답 ①

1404 점 A$(4, 2)$와 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 r이므로 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이의 최솟값은

$2\sqrt{5}-r=\sqrt{5}$ $\therefore r=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

1405 $\sqrt{(a+5)^2+(b-6)^2}$의 값은 두 점 $(-5, 6)$, P(a, b) 사이의 거리와 같으므로 구하는 최댓값은 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 위의 점 P(a, b)와 점 $(-5, 6)$ 사이의 거리의 최댓값과 같다.

점 $(-5, 6)$과 원의 중심 $(1, -2)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(1+5)^2+(-2-6)^2}=10$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 구하는 최댓값은

$10+3=13$ 답 ⑤

1406 P(a, b)라 하고, $\overline{\mathrm{AP}}$의 중점을 Q(x, y)라 하면

$x=\dfrac{1+a}{2}$, $y=\dfrac{3+b}{2}$

$\therefore a=2x-1$, $b=2y-3$ …… ㉠

점 P(a, b)가 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점이므로

$a^2+b^2-2a+4b-3=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(2x-1)^2+(2y-3)^2-2(2x-1)+4(2y-3)-3=0$

$4x^2+4y^2-8x-4y-3=0$

$\therefore (x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=2$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}\pi$ 답 $2\sqrt{2}\pi$

1407 P(x, y)라 하면 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=20$에서

$(x+3)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=20$

$2x^2+2y^2+18=20$

$\therefore x^2+y^2=1$ 답 $x^2+y^2=1$

1408 P(a, b), G(x, y)라 하면

$x=\dfrac{3+0+a}{3}$, $y=\dfrac{0+6+b}{3}$

$\therefore a=3x-3$, $b=3y-6$ …… ㉠

점 P(a, b)가 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=9$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(3x-3)^2+(3y-6)^2=9$

$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=1$

따라서 $p=1$, $q=2$, $r=1$이므로

$p+q+r=4$ 답 ④

1409 주어진 조건을 만족시키는 점을 P(x, y)라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:1$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{BP}}$ ··· ❶

$\overline{\mathrm{AP}}^2=4\overline{\mathrm{BP}}^2$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=4\{(x-5)^2+(y+4)^2\}$

$x^2+y^2-14x+12y+53=0$

$\therefore (x-7)^2+(y+6)^2=32$ ··· ❷

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(7, -6)$, 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$인 원이므로 그 넓이는

$\pi\cdot(4\sqrt{2})^2=32\pi$ ··· ❸

답 32π

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{BP}}$임을 알 수 있다.	30 %
❷ 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❸ 점 P가 나타내는 도형의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

1410 $(x-a)^2+(y+2)^2=5$에서

$x^2+y^2-2ax+4y+a^2-1=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2ax+4y+a^2-1)=0$

$\therefore 2ax-4y-a^2-3=0$

이 직선이 직선 $x-2y-10=0$과 평행하므로

$\dfrac{2a}{1}=\dfrac{-4}{-2}\neq\dfrac{-a^2-3}{-10}$ $\therefore a=1$ 답 ④

1411 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-ax+y-(x^2+y^2+x-ay-1)=0$

$\therefore (a+1)x-(1+a)y-1=0$ ··· ❶

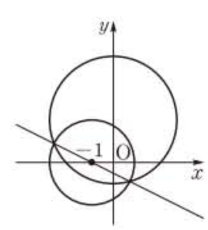
이 직선이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$(a+1)-2(1+a)-1=0$ $\therefore a=-2$ ··· ❷

답 -2

채점 기준	비율
❶ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

1412 원 $x^2+y^2-2ay+a^2-9=0$이 원 $(x+1)^2+y^2=4$의 둘레를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 $(x+1)^2+y^2=4$의 중심을 지나야 한다.



$(x+1)^2+y^2=4$에서

$x^2+y^2+2x-3=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-2ay+a^2-9-(x^2+y^2+2x-3)=0$$

$$\therefore\ 2x+2ay-a^2+6=0$$

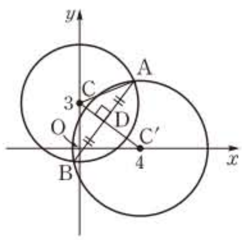
이 직선이 원 $(x+1)^2+y^2=4$의 중심 $(-1,\ 0)$을 지나야 하므로

$$-2-a^2+6=0, \qquad a^2=4$$

$$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$$

답 ②

1413 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+(y-3)^2=15$, $(x-4)^2+y^2=20$의 중심을 각각 C, C′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



$x^2+(y-3)^2=15$에서

$$x^2+y^2-6y-6=0$$

$(x-4)^2+y^2=20$에서

$$x^2+y^2-8x-4=0$$

따라서 두 원의 공통인 현의 방정식은

$$x^2+y^2-6y-6-(x^2+y^2-8x-4)=0$$

$$\therefore\ 4x-3y-1=0$$

이 직선과 점 C$(0,\ 3)$ 사이의 거리는

$$\overline{CD}=\frac{|-9-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$$

직각삼각형 ACD에서

$$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}$$

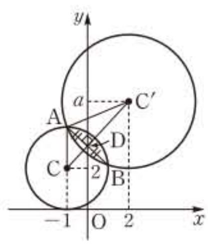
$$=\sqrt{(\sqrt{15})^2-2^2}=\sqrt{11}$$

따라서 공통인 현의 길이는

$$\overline{AB}=2\overline{AD}=2\sqrt{11}$$

답 ③

1414 오른쪽 그림과 같이 두 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$, $(x-2)^2+(y-a)^2=10$의 중심을 각각 C, C′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



공통인 현 AB의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$$\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{2}$$

직각삼각형 ACD에서

$$\overline{CD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}$$

$$=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$$

직각삼각형 AC′D에서

$$\overline{C'D}=\sqrt{\overline{AC'}^2-\overline{AD}^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$$

따라서 두 점 C$(-1,\ 2)$, C′$(2,\ a)$ 사이의 거리가

$\overline{CC'}=\overline{CD}+\overline{C'D}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$이므로

$$\sqrt{(2+1)^2+(a-2)^2}=3\sqrt{2}$$

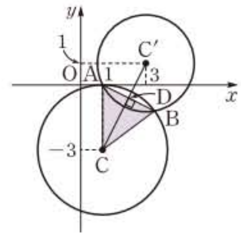
양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2-4a-5=0, \qquad (a+1)(a-5)=0$$

$$\therefore\ a=5\ (\because\ a>0)$$

답 5

1415 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



$(x-1)^2+(y+3)^2=9$에서

$$x^2+y^2-2x+6y+1=0$$

$(x-3)^2+(y-1)^2=5$에서

$$x^2+y^2-6x-2y+5=0$$

따라서 두 원의 공통인 현의 방정식은

$$x^2+y^2-2x+6y+1-(x^2+y^2-6x-2y+5)=0$$

$$\therefore\ x+2y-1=0$$

이 직선과 점 C$(1,\ -3)$ 사이의 거리는

$$\overline{CD}=\frac{|1-6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

직각삼각형 ACD에서

$$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AD}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$=\frac{18}{5}$$

답 ④

1416 원의 중심 $(0,\ 3)$과 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|6-k|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|6-k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}, \qquad |6-k|<5$$

$$-5<6-k<5 \qquad \therefore\ 1<k<11$$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, ⋯, 10의 9개이다.

답 ②

다른 풀이 $x+2y-k=0$, 즉 $x=-2y+k$를 $x^2+(y-3)^2=5$에 대입하면

$$(-2y+k)^2+(y-3)^2=5$$

$$\therefore\ 5y^2-2(2k+3)y+k^2+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4}=\{-(2k+3)\}^2-5(k^2+4)>0$$

$$k^2-12k+11<0, \qquad (k-1)(k-11)<0$$

$$\therefore\ 1<k<11$$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, ⋯, 10의 9개이다.

1417 원의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $3x-4y+6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+8+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{17}{5}$$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\qquad r>\frac{17}{5}$

따라서 자연수 r의 최솟값은 4이다.

답 ②

11 원의 방정식

1418 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=mx-4$, 즉 $mx-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}<\sqrt{2},\qquad 4<\sqrt{2m^2+2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2-7>0,\qquad (m+\sqrt{7})(m-\sqrt{7})>0$$

$\therefore\ m<-\sqrt{7}$ 또는 $m>\sqrt{7}$ 답 $m<-\sqrt{7}$ 또는 $m>\sqrt{7}$

다른 풀이 $y=mx-4$를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$$x^2+(mx-4)^2=2$$

$$\therefore\ (m^2+1)x^2-8mx+14=0$$

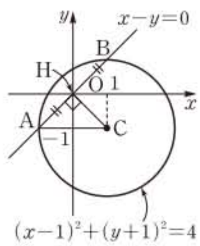
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4}=(-4m)^2-14(m^2+1)>0$$

$$m^2-7>0,\qquad (m+\sqrt{7})(m-\sqrt{7})>0$$

$$\therefore\ m<-\sqrt{7} \text{ 또는 } m>\sqrt{7}$$

1419 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(1,\ -1)$이라 하고, 점 C에서 직선 $x-y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH}=\frac{|1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}$$

$$=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{2}$ 답 ③

라쎈 특강

현의 성질

① 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 이등분한다.
거꾸로 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

② 한 원 또는 합동인 두 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 서로 같다.
거꾸로 한 원 또는 합동인 두 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

1420 $x^2+y^2-12x+2y+28=0$에서

$$(x-6)^2+(y+1)^2=9$$

이 원의 중심을 $C(6,\ -1)$이라 하고 원과 x축의 두 교점을 A, B라 하자.

점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH}=1$$

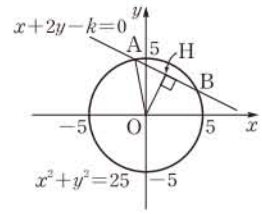
직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AH}=4\sqrt{2}$ 답 ⑤

1421 오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 $O(0,\ 0)$에서 직선 $x+2y-k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$$

직각삼각형 OAH에서

$$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

따라서 원의 중심 $O(0,\ 0)$과 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리가 4이므로 ··· ❶

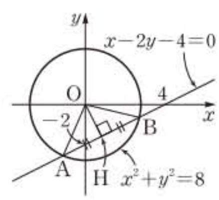
$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=4,\qquad |k|=4\sqrt{5}$$

$\therefore\ k=4\sqrt{5}\ (\because\ k>0)$ ··· ❷

답 $4\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	50 %
❷ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	50 %

1422 오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 $O(0,\ 0)$에서 직선 $x-2y-4=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OH}=\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

직각삼각형 OAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{5}}$$

두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이므로 구하는 넓이는

$\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{24}{5}}\right)^2=\frac{24}{5}\pi$ 답 $\frac{24}{5}\pi$

1423 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

따라서 원의 중심 $(3,\ 1)$과 x축 사이의 거리와 직선 $y=ax$, 즉 $ax-y=0$ 사이의 거리는 같으므로

$$1=\frac{|3a-1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}},\qquad \sqrt{a^2+1}=|3a-1|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4a^2-3a=0,\qquad a(4a-3)=0$$

$\therefore\ a=\frac{3}{4}\ (\because\ a\neq 0)$ 답 ②

1424 $x^2+y^2-2x+6y=0$에서

$$(x-1)^2+(y+3)^2=10$$

원의 중심 $(1,\ -3)$과 직선 $x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+9+k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|10+k|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$\dfrac{|10+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$,　　$|10+k|=10$

$10+k=-10$ 또는 $10+k=10$

$\therefore k=-20\ (\because k<0)$　　답 -20

다른 풀이 $x=3y-k$를 $x^2+y^2-2x+6y=0$에 대입하면

$(3y-k)^2+y^2-2(3y-k)+6y=0$

$\therefore 10y^2-6ky+k^2+2k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 한 점에서 만나므로

$\dfrac{D}{4}=(-3k)^2-10(k^2+2k)=0$

$k^2+20k=0$,　　$k(k+20)=0$

$\therefore k=-20\ (\because k<0)$

1425 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=8\pi$　　$\therefore r=2\sqrt{2}\ (\because r>0)$

원의 중심 $(1,\ 1)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1+1+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|2+k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|2+k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$,　　$|2+k|=4$

$2+k=-4$ 또는 $2+k=4$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=2$

따라서 모든 k의 값의 합은 -4이다.　　답 ④

1426 원의 중심이 제3사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$　　··· ❶

이 원의 중심 $(-r,\ -r)$와 직선 $3x+4y+12=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-3r-4r+12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|-7r+12|}{5}$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|-7r+12|}{5}=r$,　　$|-7r+12|=5r$

$-7r+12=-5r$ 또는 $-7r+12=5r$

$\therefore r=6$ 또는 $r=1$　　··· ❷

따라서 두 원의 넓이의 합은

$\pi\cdot 6^2+\pi\cdot 1^2=37\pi$　　··· ❸

답 37π

채점 기준	비율
❶ 원의 반지름의 길이를 r라 하고 원의 방정식을 세울 수 있다.	20 %
❷ r의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 두 원의 넓이의 합을 구할 수 있다.	30 %

1427 두 직선 $y=x-2$, $y=x+2$가 서로 평행하므로 구하는 두 원의 중심은 직선 $y=x$ 위에 있다.

즉 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a)$로 놓을 수 있다.

한편 두 직선 $y=x-2$, $y=x+2$ 사이의 거리는 직선 $y=x-2$ 위의 점 $(0,\ -2)$와 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

즉 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2=2$

이때 이 원이 원점을 지나므로

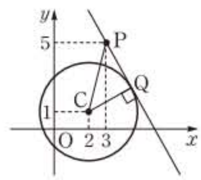
$a^2+a^2=2$,　　$a^2=1$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(-1,\ -1)$ 또는 $(1,\ 1)$이므로 구하는 거리는

$\sqrt{(1+1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}$　　답 ③

1428 원의 중심을 C라 하면 C$(2,\ 1)$이므로



$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(3-2)^2+(5-1)^2}$

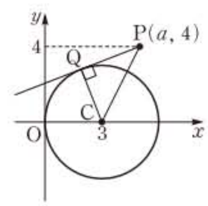
$=\sqrt{17}$

직각삼각형 CQP에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CQ}}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{17})^2-(\sqrt{8})^2}=3$　　답 3

1429 원의 중심을 C라 하면 C$(3,\ 0)$이므로



$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(a-3)^2+4^2}$

$=\sqrt{a^2-6a+25}$

직각삼각형 CPQ에서

$\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{CQ}}^2+\overline{\mathrm{PQ}}^2$

이므로

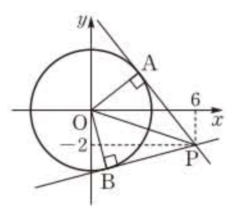
$a^2-6a+25=3^2+(\sqrt{11})^2$

$a^2-6a+5=0$,　　$(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 모든 a의 값의 합은　　$1+5=6$　　답 ③

1430 원의 중심이 O$(0,\ 0)$이므로



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$

직각삼각형 AOP에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-(2\sqrt{3})^2}$

$=2\sqrt{7}$

이때 $\triangle$AOP$\equiv\triangle$BOP (RHS 합동)이므로

$\square$AOBP$=2\triangle$AOP

$=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{3}\right)=4\sqrt{21}$　　답 ⑤

1431 $x^2+y^2+4x-4=0$에서　　$(x+2)^2+y^2=8$

원의 중심 $(-2,\ 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-2+k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{|-2+k|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$,　　$|-2+k|>4$

11 원의 방정식

$-2+k<-4$ 또는 $-2+k>4$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>6$

따라서 k의 값이 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

다른 풀이 $y=x+k$를 $x^2+y^2+4x-4=0$에 대입하면

$x^2+(x+k)^2+4x-4=0$

$\therefore 2x^2+2(k+2)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=(k+2)^2-2(k^2-4)<0$

$k^2-4k-12>0$, $\quad (k+2)(k-6)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>6$

1432 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=kx-10$, 즉 $kx-y-10=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-10|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{k^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{10}{\sqrt{k^2+1}}>\sqrt{10}$, $\quad 10>\sqrt{10(k^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$k^2-9<0$, $\quad (k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-3)^2+3^2=18$ 답 ④

다른 풀이 $y=kx-10$을 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$x^2+(kx-10)^2=10$

$\therefore (k^2+1)x^2-20kx+90=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=(-10k)^2-90(k^2+1)<0$

$k^2-9<0$, $\quad (k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$

1433 원의 중심 $(0, a)$와 직선 $x-y=1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-a-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}$ ··· ❶

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}>3\sqrt{2}$, $\quad |a+1|>6$

$a+1<-6$ 또는 $a+1>6$

$\therefore a<-7$ 또는 $a>5$ ··· ❷

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

1434 원의 중심 $(1, 1)$과 직선 $4x+3y+13=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4+3+13|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로

$M=4+3=7$, $m=4-3=1$

$\therefore Mm=7$ 답 ⑤

1435 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k|}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값이 5이려면

$\frac{|k|}{5}+2=5$, $\quad |k|=15$

$\therefore k=15$ ($\because k>0$) 답 ③

1436 $x^2+y^2-8x+2y+12=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=5$

원의 중심 $(4, -1)$과 직선 $x+2y-12=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4-2-12|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$ ··· ❶

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $x+2y-12=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$2\sqrt{5}-\sqrt{5}\le d\le 2\sqrt{5}+\sqrt{5}$, 즉 $\sqrt{5}\le d\le 3\sqrt{5}$ ··· ❷

따라서 정수 d는 3, 4, 5, 6이고 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 8이다. ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %
❷ 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 P의 개수를 구할 수 있다.	30 %

1437 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=x-4$, 즉 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원 위의 점 A와 직선 BC 사이의 거리의 최솟값과 최댓값은 각각

$2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서 정삼각형 ABC의 높이가 $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$일 때 넓이가 각각 최소와 최대이므로 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는

$(\sqrt{2})^2:(3\sqrt{2})^2=1:9$

닮은 두 도형의 닮음비가 $m:n$이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.

$\therefore a=9$ 답 9

1438 직선 $x+3y-1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 3이고 원 $x^2+y^2=6$의 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$이므로 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{6}\cdot\sqrt{3^2+1}$ $\qquad \therefore y=3x\pm2\sqrt{15}$

답 $y=3x\pm2\sqrt{15}$

다른 풀이 직선 $x+3y-1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 원 $x^2+y^2=6$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식을 $y=3x+k$라 하면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{6},\qquad |k|=2\sqrt{15}\qquad \therefore k=\pm2\sqrt{15}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=3x\pm2\sqrt{15}$

1439 직선 $y=2x+6$에 평행한 직선의 기울기는 2이고 원 $x^2+y^2=5$의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 접선의 방정식은

$$y=2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1}\qquad \therefore y=2x\pm5$$

따라서 두 직선이 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0,\ 5)$, $(0,\ -5)$이므로 $\overline{PQ}=10$

답 ②

1440 $x^2+y^2-2x-6y+1=0$에서

$$(x-1)^2+(y-3)^2=9$$

접선의 방정식을 $y=3x+k$라 하면 원의 중심 $(1,\ 3)$과 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-3+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{10}}=3,\qquad |k|=3\sqrt{10}\qquad \therefore k=\pm3\sqrt{10}$$

따라서 두 접선의 y절편은 각각 $3\sqrt{10}$, $-3\sqrt{10}$이므로 구하는 y절편의 곱은

$$3\sqrt{10}\cdot(-3\sqrt{10})=-90$$

답 -90

1441 점 $(-6,\ k)$가 원 $x^2+y^2=100$ 위의 점이므로

$$(-6)^2+k^2=100,\qquad k^2=64$$

$$\therefore k=8\ (\because k>0)$$

원 $x^2+y^2=100$ 위의 점 $(-6,\ 8)$에서의 접선의 방정식은

$$-6x+8y=100\qquad \therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{25}{2}$$

따라서 구하는 y절편은 $\frac{25}{2}$이다.

답 ④

1442 원 $x^2+y^2=15$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=15\qquad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{15}{b}$$

이 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$$-\frac{a}{b}=\frac{1}{2}\qquad \therefore b=-2a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=15$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=15 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a^2+(-2a)^2=15,\qquad a^2=3$$

$$\therefore a=\pm\sqrt{3}$$

$a=\pm\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 $b=\mp2\sqrt{3}$ (복호동순)

$$\therefore ab=-6$$

답 ①

1443 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$$x+3y=10\qquad \therefore x+3y-10=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$ ··· ❶

$x^2+y^2+6x-2y+k-1=0$에서

$$(x+3)^2+(y-1)^2=11-k \qquad \cdots\cdots ㉡$$

직선 ㉠과 원 ㉡의 중심 $(-3,\ 1)$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3+3-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$$ ··· ❷

원 ㉡의 반지름의 길이가 $\sqrt{11-k}$이므로 직선 ㉠과 원 ㉡이 접하려면

$$\sqrt{11-k}=\sqrt{10},\qquad 11-k=10$$

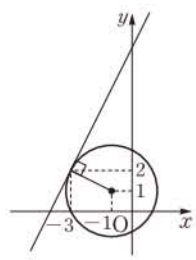
$$\therefore k=1$$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 직선 ㉠과 원 ㉡의 중심 사이의 거리를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

1444 $x^2+y^2+2x-2y-3=0$에서

$$(x+1)^2+(y-1)^2=5$$



원의 중심 $(-1,\ 1)$과 점 $(-3,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2-1}{-3+1}=-\frac{1}{2}$$

따라서 점 $(-3,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 2이므로 접선의 방정식은

$$y-2=2(x+3)\qquad \therefore y=2x+8$$

이 직선이 점 $(a,\ 10)$을 지나므로

$$10=2a+8\qquad \therefore a=1$$

답 ④

1445 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=25$$

이 직선이 점 $(7,\ -1)$을 지나므로

$$7x_1-y_1=25\qquad \therefore y_1=7x_1-25 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로

$${x_1}^2+{y_1}^2=25 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 ${x_1}^2+(7x_1-25)^2=25$

$${x_1}^2-7x_1+12=0,\qquad (x_1-3)(x_1-4)=0$$

$$\therefore x_1=3 \text{ 또는 } x_1=4$$

$x_1=3$을 ㉠에 대입하면 $y_1=-4$

$x_1=4$를 ㉠에 대입하면 $y_1=3$

따라서 접선의 방정식은

$$3x-4y-25=0,\ 4x+3y-25=0$$

즉 $a=-25$, $b=-3$이므로

$$a-b=-22$$

답 -22

다른 풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(7,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=m(x-7)$$

11 원의 방정식

$\therefore mx-y-7m-1=0$ ······ ㉠

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\frac{|-7m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|7m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|7m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=5,\qquad |7m+1|=5\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$12m^2+7m-12=0,\qquad (3m+4)(4m-3)=0$$

$\therefore m=-\frac{4}{3}$ 또는 $m=\frac{3}{4}$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 접선의 방정식은

$$4x+3y-25=0,\ 3x-4y-25=0$$

1446 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=mx\qquad \therefore mx-y=0$$

원의 중심 $(2,\ -1)$과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\qquad |2m+1|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3m^2+4m=0,\qquad m(3m+4)=0$$

$\therefore m=-\frac{4}{3}\ (\because m\neq 0)$ 답 $-\frac{4}{3}$

1447 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=20$$

이 직선이 점 $(0,\ 10)$을 지나므로

$$10y_1=20\qquad \therefore y_1=2$$

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

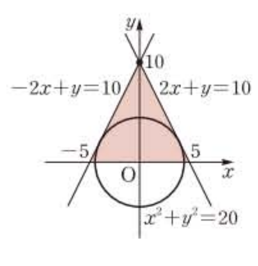
$x_1^2+y_1^2=20$ ······ ㉠

$y_1=2$를 ㉠에 대입하면

$$x_1^2=16\qquad \therefore x_1=\pm 4$$

따라서 접선의 방정식은

$$2x+y=10,\ -2x+y=10$$



두 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(5+5)\cdot 10=50$$

답 ⑤

다른 풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ 10)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=mx+10\qquad \therefore mx-y+10=0$ ······ ㉠

원의 중심 $(0,\ 0)$과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{20}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{10}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{20},\qquad 10=\sqrt{20(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2=4\qquad \therefore m=\pm 2$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$2x-y+10=0,\ 2x+y-10=0$$

1448 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=m(x+1)\qquad \therefore mx-y+m=0$$

원의 중심 $(0,\ a)$와 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|-a+m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

이고 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-a+m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5},\qquad |-a+m|=\sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

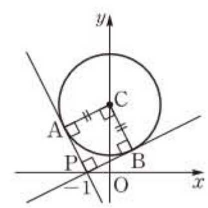
$$4m^2+2am+5-a^2=0$$

이때 두 접선이 서로 수직이려면 두 접선의 기울기의 곱이 -1이어야 하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{5-a^2}{4}=-1,\qquad a^2=9$$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 ①

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+(y-a)^2=5$의 중심을 C, 점 P$(-1,\ 0)$에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자.



이때 □APBC는 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형이므로

$$\overline{PC}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$$

한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형의 대각선의 길이

즉 P$(-1,\ 0)$, C$(0,\ a)$에서

$$\overline{PC}=\sqrt{1^2+a^2}=\sqrt{10}$$

$$1+a^2=10,\qquad a^2=9\qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$$

1449 **전략** 원의 중심의 좌표를 구하고 원의 중심과 점 $(-2,\ 4)$ 사이의 거리를 구한다.

풀이 원 $(x+3)^2+(y-1)^2=6$의 중심의 좌표는 $(-3,\ 1)$

따라서 중심의 좌표가 $(-3,\ 1)$이고 점 $(-2,\ 4)$를 지나는 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{(-2+3)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$ 답 $\sqrt{10}$

1450 **전략** 두 점 B, C를 지름의 양 끝 점으로 하는 원은 (원의 중심)$=$($\overline{BC}$의 중점)임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot 2-2\cdot 1}{3-2},\ \frac{3\cdot 1-2\cdot 3}{3-2}\right),\ \text{즉 } (4,\ -3)$$

두 점 $(2,\ 1)$, $(4,\ -3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{1-3}{2}\right),\ \text{즉 } (3,\ -1)$$

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로

$a+b=2$ 답 ②

1451 전략 주어진 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2\,(r>0)$ 꼴로 변형하여 반지름의 길이를 구한다.

풀이 $x^2+y^2-8x+6y=0$에서

$(x-4)^2+(y+3)^2=25$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{25}=5$이므로 원의 넓이는

$\pi\cdot5^2=25\pi$ $\quad\therefore k=25$ 답 25

1452 전략 원의 넓이를 이등분하는 직선은 그 원의 중심을 지남을 이용한다.

풀이 직선 $6x-3y=-4$, 즉 $y=2x+\dfrac{4}{3}$의 기울기가 2이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

한편 $x^2+y^2-2x=0$에서 $(x-1)^2+y^2=1$이고 원의 넓이를 이등분하는 직선은 그 원의 중심을 지나므로 점 $(1,\ 0)$을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}(x-1)$ $\quad\therefore x+2y=1$ 답 ①

1453 전략 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ 꼴로 변형한 후 $c>0$이어야 함을 이용한다.

풀이 ① $x^2+y^2-2x-3=0$에서

$(x-1)^2+y^2=4$

즉 중심의 좌표가 $(1,\ 0)$, 반지름의 길이가 2인 원이다.

② $x^2+y^2-2x+6y-2=0$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2=12$

즉 중심의 좌표가 $(1,\ -3)$, 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이다.

③ $x^2+y^2+4x+4y+5=0$에서

$(x+2)^2+(y+2)^2=3$

즉 중심의 좌표가 $(-2,\ -2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원이다.

④ $x^2+y^2-6x-8y+25=0$에서

$(x-3)^2+(y-4)^2=0$

따라서 원이 아니다.

⑤ $x^2+y^2+10x-8y+40=0$에서

$(x+5)^2+(y-4)^2=1$

즉 중심의 좌표가 $(-5,\ 4)$, 반지름의 길이가 1인 원이다.

답 ④

1454 전략 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구한 후 이 원이 제1사분면 위에 있을 조건을 생각한다.

풀이 $x^2+y^2-10x-6y+2k+27=0$에서

$(x-5)^2+(y-3)^2=7-2k$

이 방정식이 원을 나타내려면

$7-2k>0$ $\quad\therefore k<\dfrac{7}{2}$ ...... ㉠

원의 중심의 좌표는 $(5,\ 3)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{7-2k}$이므로 이 원이 제1사분면 위에 있으려면

$\sqrt{7-2k}<3$, $\quad 7-2k<9$

$\therefore k>-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $\quad -1<k<\dfrac{7}{2}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\dfrac{7}{2}$이므로

$\alpha+2\beta=6$ 답 6

1455 전략 y축에 접하는 원은 |(중심의 x좌표)|=(반지름의 길이)임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2-4x+8y=0$에서

$(x-2)^2+(y+4)^2=20$

따라서 중심의 좌표가 $(2,\ -4)$이고 y축에 접하는 원의 반지름의 길이는 2이므로 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\cdot2=4\pi$ 답 4π

1456 전략 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 2a-1)$이라 하면 원의 반지름의 길이는 $|2a-1|$임을 이용한다.

풀이 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 2a-1)$이라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-2a+1)^2=(2a-1)^2$

이 원이 점 $(4,\ 3)$을 지나므로

$(4-a)^2+(4-2a)^2=(2a-1)^2$

$\therefore a^2-20a+31=0$

이 이차방정식의 두 실근을 a_1, a_2라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_1+a_2=20$

따라서 구하는 y좌표의 합은

$(2a_1-1)+(2a_2-1)=2(a_1+a_2)-2$

$=2\cdot20-2=38$ 답 ③

1457 전략 원점 O와 원의 중심 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원 위의 점 P에 대하여 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값은 $d+r$이다.

풀이 원점 O와 원의 중심 $(a,\ b)$ 사이의 거리는

$\sqrt{a^2+b^2}$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값이 9이면

$\sqrt{a^2+b^2}+2=9$, $\quad \sqrt{a^2+b^2}=7$

양변을 제곱하면

$a^2+b^2=49$ 답 ⑤

1458 전략 도형 C 위의 점을 $Q(x,\ y)$라 하고 a, b를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 도형 C 위의 점을 $Q(x,\ y)$라 하면 점 Q는 $\overline{AP}$를 $2:1$로 외분하는 점이므로

$x=\dfrac{2\cdot a-1\cdot4}{2-1}=2a-4$, $y=\dfrac{2\cdot b-1\cdot(-2)}{2-1}=2b+2$

$\therefore a=\dfrac{x+4}{2}$, $b=\dfrac{y-2}{2}$ ...... ㉠

점 $P(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=2$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\left(\dfrac{x+4}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y-2}{2}\right)^2=2$

11 원의 방정식

$\therefore (x+4)^2+(y-2)^2=8$

이 원의 중심 $(-4, 2)$와 원점 사이의 거리는

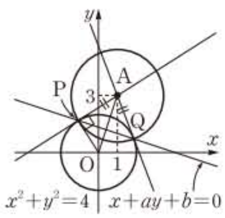
$\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 구하는 최솟값은

$2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ 　　　답 ④

1459 전략• 직선 PQ는 점 A를 중심으로 하고 $\overline{AP}$를 반지름으로 하는 원과 원 $x^2+y^2=4$의 교점을 지나는 직선임을 이용한다.

•풀이 직선 PQ는 점 A를 중심으로 하고 $\overline{AP}$를 반지름으로 하는 원과 원 $x^2+y^2=4$의 교점을 지나는 직선이다.



$\overline{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$, $\overline{OP}=2$이므로

직각삼각형 OAP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$
$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{6}$

점 A(1, 3)을 중심으로 하고 $\overline{AP}$를 반지름으로 하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-3)^2=6$

$\therefore x^2+y^2-2x-6y+4=0$

따라서 직선 PQ는 두 원 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-2x-6y+4=0$의 교점을 지나는 직선이므로 그 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2x-6y+4)=0$

$\therefore x+3y-4=0$

즉 $a=3$, $b=-4$이므로

$a+b=-1$ 　　　답 ③

1460 전략• 원과 직선이 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 r라 할 때, $d\le r$임을 이용한다.

•풀이 원의 중심 $(0, k)$와 직선 $x+y+5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|k+5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|k+5|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나려면

$\dfrac{|k+5|}{\sqrt{2}}\le 2\sqrt{2}$, 　$|k+5|\le 4$

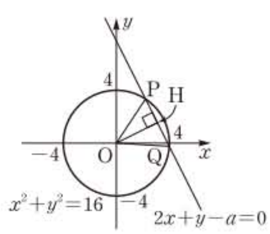
$-4\le k+5\le 4$ 　$\therefore -9\le k\le -1$

따라서 정수 k는 -9, -8, -7, $\cdots$, -1의 9개이다.

답 9

1461 전략• 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$임을 이용한다.

•풀이 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O(0, 0)에서 직선 $2x+y-a=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=\dfrac{|-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$

$(\because a>0)$

원의 반지름의 길이가 4이므로

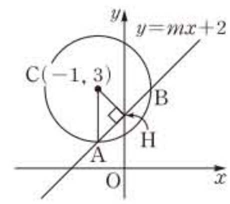
$\overline{OP}=\overline{OQ}=4$

따라서 $\overline{OH}$는 한 변의 길이가 4인 정삼각형 OPQ의 높이이므로

$\dfrac{a}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4$ 　$\therefore a=2\sqrt{15}$ 　　　답 ①

1462 전략• 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 이등분함을 이용한다.

•풀이 오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C$(-1, 3)$이라 하고 점 C에서 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\overline{CA}=2$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

이때 점 C$(-1, 3)$과 직선 $mx-y+2=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-m-3+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$

따라서 $\dfrac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$이므로

$|m+1|=\sqrt{2m^2+2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2-2m+1=0$, 　$(m-1)^2=0$

$\therefore m=1$ 　　　답 ③

1463 전략• 원과 직선이 접하려면 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 r라 할 때, $d=r$임을 이용한다.

•풀이 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=25\pi$ 　$\therefore r=5$ $(\because r>0)$

원의 중심 $(5, 0)$과 직선 $3x-4y-k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|15-k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|15-k|}{5}$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

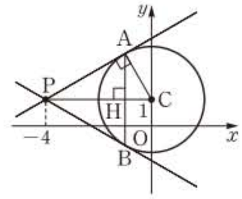
$\dfrac{|15-k|}{5}=5$, 　$|15-k|=25$

$15-k=-25$ 또는 $15-k=25$

$\therefore k=40$ $(\because k>0)$ 　　　답 40

1464 전략• 먼저 접선의 길이를 구하고 삼각형의 넓이를 이용한다.

•풀이 원의 중심을 C라 하면 C(0, 1)이므로



$\overline{CP}=|0-(-4)|=4$

직각삼각형 CAP에서

$\overline{PA}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CA}^2}$
$=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

한편 $\overline{PC}$와 $\overline{AB}$의 교점을 H라 하면

$\triangle CAP=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{PA}\cdot\overline{CA}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{CP}\cdot\overline{AH}$

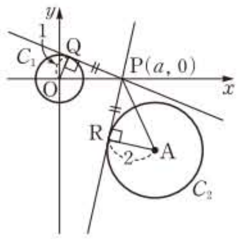
이므로 　$\overline{PA}\cdot\overline{CA}=\overline{CP}\cdot\overline{AH}$

$2\sqrt{3}\cdot 2=4\cdot\overline{AH}$ 　$\therefore \overline{AH}=\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{3}$ 　　　답 $2\sqrt{3}$

1465 전략 점 P의 좌표를 $(a, 0)$으로 놓고, 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 $\overline{OQ}\perp\overline{PQ}$이므로 직각삼각형 OPQ에서



$$\overline{PQ}^2=a^2-1$$

$x^2+y^2-8x+6y+21=0$에서

$$(x-4)^2+(y+3)^2=4$$

원 C_2는 중심이 점 $(4, -3)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 원 C_2의 중심을 A라 하면

$$\overline{AR}\perp\overline{PR}$$

직각삼각형 APR에서

$$\overline{PR}^2=\overline{PA}^2-\overline{AR}^2=\{(a-4)^2+3^2\}-2^2$$
$$=a^2-8a+21$$

$\overline{PQ}=\overline{PR}$에서 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$이므로

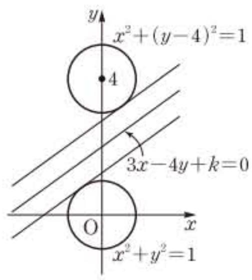
$$a^2-1=a^2-8a+21, \qquad 8a=22$$

$$\therefore a=\frac{11}{4}$$

답 ④

1466 전략 기울기가 m이고 두 원 C_1, C_2 사이를 지나는 직선은 기울기가 m인 두 원 C_1, C_2의 접선 사이에 있음을 이용한다.

풀이 직선 $3x-4y+k=0$, 즉 $y=\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$가 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-4)^2=1$ 사이를 지나려면 이 직선이 오른쪽 그림과 같이 기울기가 $\frac{3}{4}$인 두 원의 접선 사이에 있어야 한다.



원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k|}{5}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k|}{5}=1, \qquad |k|=5$$

$$\therefore k=-5 \text{ 또는 } k=5$$

이때 직선이 원 $x^2+y^2=1$의 위쪽에서 접할 때의 k의 값이 5이므로 $\quad k>5 \quad$ ...... ㉠

원 $x^2+(y-4)^2=1$의 중심 $(0, 4)$와 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-16+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-16+k|}{5}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-16+k|}{5}=1, \qquad |-16+k|=5$$

$$-16+k=-5 \text{ 또는 } -16+k=5$$

$$\therefore k=11 \text{ 또는 } k=21$$

이때 직선이 원 $x^2+(y-4)^2=1$의 아래쪽에서 접할 때의 k의 값이 11이므로 $\quad k<11 \quad$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 5<k<11$

따라서 정수 k는 6, 7, 8, 9, 10의 5개이다.

답 ①

1467 전략 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 $\overline{PH}$의 길이의 최솟값을 구한다.

풀이 $x^2+y^2-10x-4y+24=0$에서

$$(x-5)^2+(y-2)^2=5$$

원의 중심 $(5, 2)$와 직선 $x-2y-11=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5-4-11|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 $\overline{PH}$의 길이의 최솟값은

$$2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

답 ②

1468 전략 한 점을 지나고 원점과의 거리가 최대인 직선은 원점과 주어진 점을 지나는 직선에 수직임을 이용한다.

풀이 직선 l은 점 $(3, 4)$를 지나는 직선 중에서 원점과의 거리가 최대인 직선이므로 원점과 점 $(3, 4)$를 지나는 직선에 수직이다.

이때 원점과 점 $(3, 4)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

기울기가 $-\frac{3}{4}$이고 점 $(3, 4)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3) \qquad \therefore 3x+4y-25=0$$

원의 중심 $(7, 5)$와 직선 $3x+4y-25=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|21+20-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$$\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$$

따라서 $m=\frac{11}{5}$이므로 $\qquad 10m=22$

답 22

1469 전략 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 직선의 기울기를 m이라 하면 x절편이 4이므로 직선의 방정식은

$$y=m(x-4) \qquad \therefore mx-y-4m=0$$

원의 중심 $(0, 3)$과 직선 $mx-y-4m=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3-4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|3+4m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|3+4m|}{\sqrt{m^2+1}}=2, \qquad |3+4m|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$12m^2+24m+5=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 직선의 기울기의 합은 -2이다.

답 ②

1470 전략 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$이다.

풀이 $y=x$를 $x^2+y^2=18$에 대입하면

$$x^2+x^2=18, \qquad x^2=9 \qquad \therefore x=\pm3$$

원과 직선의 교점 중 제1사분면 위에 있는 점의 x좌표는 3이므로 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$

따라서 원 $x^2+y^2=18$ 위의 점 $(3,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$$3x+3y=18 \qquad \therefore\ x+y=6$$

이 직선이 점 $(8,\ a)$를 지나므로

$$8+a=6 \qquad \therefore\ a=-2$$

답 ②

1471 전략 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하고 접선의 방정식을 구한다.

풀이 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=1$$

이 직선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$$3y_1=1 \qquad \therefore\ y_1=\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x_1^{\ 2}+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1, \qquad x_1^{\ 2}=\frac{8}{9}$$

$$\therefore\ x_1=-\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ 또는 } x_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 접선의 방정식은

$$2\sqrt{2}x+y=3,\ 2\sqrt{2}x-y=-3$$

이므로 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$$k=-\frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ 또는 } k=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore\ 16k^2=18$$

답 18

1472 전략 구하는 원의 중심을 $P(a,\ b)$라 하고 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$임을 이용한다.

풀이 $y=x+1$을 $x^2+y^2=13$에 대입하면

$$x^2+(x+1)^2=13, \qquad x^2+x-6=0$$

$$(x+3)(x-2)=0 \qquad \therefore\ x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

$x=-3$을 $y=x+1$에 대입하면 $\quad y=-2$

$x=2$를 $y=x+1$에 대입하면 $\quad y=3$

따라서 원 $x^2+y^2=13$과 직선 $y=x+1$의 두 교점은 $A(-3,\ -2)$, $B(2,\ 3)$이다. ··· ❶

구하는 원의 중심을 $P(a,\ b)$라 하면

$$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$$(a+3)^2+(b+2)^2=(a-2)^2+(b-3)^2$$

$$\therefore\ a+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$$(a-2)^2+(b-3)^2=(a-1)^2+(b-0)^2$$

$$\therefore\ a+3b-6=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-3,\ b=3$

따라서 원의 중심은 $P(-3,\ 3)$이고 반지름의 길이는

$$\overline{PA}=|-2-3|=5 \qquad ···\ ❷$$

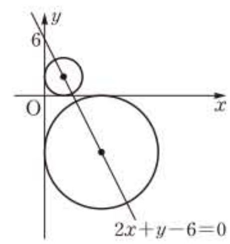
즉 구하는 원의 방정식은 $\quad (x+3)^2+(y-3)^2=25$ ··· ❸

답 $(x+3)^2+(y-3)^2=25$

채점 기준	비율
❶ 두 교점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 원의 중심과 반지름의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❸ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

1473 전략 x축과 y축에 동시에 접하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 $(x\pm r)^2+(y\pm r)^2=r^2$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 중심이 직선 $2x+y-6=0$ 위에 있고 x축과 y축에 동시에 접하는 두 원은 중심이 제1사분면 또는 제4사분면 위에 있다. ··· ❶



(i) 원의 중심이 제1사분면 위에 있는 경우

반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이고, 중심이 직선 $2x+y-6=0$ 위에 있으므로

$$2r+r-6=0, \qquad 3r=6$$

$$\therefore\ r=2$$

즉 중심의 좌표는 $\quad (2,\ 2)$ ··· ❷

(ii) 원의 중심이 제4사분면 위에 있는 경우

반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r,\ -r)$이고, 중심이 직선 $2x+y-6=0$ 위에 있으므로

$$2r-r-6=0 \qquad \therefore\ r=6$$

즉 중심의 좌표는 $\quad (6,\ -6)$ ··· ❸

(i), (ii)에서 두 원의 중심의 좌표는 $(2,\ 2)$, $(6,\ -6)$이므로 구하는 거리는

$$\sqrt{(6-2)^2+(-6-2)^2}=4\sqrt{5} \qquad ···\ ❹$$

답 $4\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ 두 원의 중심이 제1사분면 또는 제4사분면 위에 있음을 알 수 있다.	20 %
❷ 원의 중심이 제1사분면 위에 있을 때, 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 원의 중심이 제4사분면 위에 있을 때, 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❹ 두 원의 중심 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

1474 전략 두 원의 중심 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 두 원 위의 점 P와 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값과 최솟값은 각각 $d+(r_1+r_2)$, $d-(r_1+r_2)$임을 이용한다. (단, $d>r_1+r_2$)

풀이 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$에서

$$(x-2)^2+(y-3)^2=1$$

$x^2+y^2-8x+2y+8=0$에서

$$(x-4)^2+(y+1)^2=9 \qquad ···\ ❶$$

두 원의 중심을 각각 C, C′이라 하면 $C(2,\ 3)$, $C'(4,\ -1)$이므로

$$\overline{CC'}=\sqrt{(4-2)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$$

이때 두 원의 반지름의 길이는 각각 1, 3이므로

$$M=2\sqrt{5}+4,\ m=2\sqrt{5}-4 \qquad ···\ ❷$$

두 원의 반지름의 길이의 합

$\therefore Mm=(2\sqrt{5}+4)(2\sqrt{5}-4)=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ Mm의 값을 구할 수 있다.	20 %

1475 전략 원의 중심을 P라 하고 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$임을 이용하여 원의 중심의 좌표를 구한다.

풀이 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+b^2=(a+2)^2+b^2$

$a+1=0 \quad \therefore a=-1$

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+2)^2+b^2=(a-1)^2+(b-3)^2$

$\therefore a+b-1=0$

$a=-1$을 위의 식에 대입하면

$b=2 \quad \therefore P(-1, 2)$ ··· ❶

이때 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$ ··· ❷

이고 원의 중심 $P(-1, 2)$와 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-1+4-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|3-k|}{\sqrt{5}}$

이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{|3-k|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}, \quad |3-k|>5$

$3-k<-5$ 또는 $3-k>5$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>8$ ··· ❸

따라서 자연수 k의 최솟값은 9이다. ··· ❹

답 9

채점 기준	비율
❶ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	20 %
❸ 원과 직선이 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

12 도형의 이동

1476 $(1+8, 1+1) \quad \therefore (9, 2)$ 답 $(9, 2)$

1477 $(5+2, 8-5) \quad \therefore (7, 3)$ 답 $(7, 3)$

1478 $(-6-3, 2+4) \quad \therefore (-9, 6)$ 답 $(-9, 6)$

1479 $(4+6, 7-1) \quad \therefore (10, 6)$ 답 $(10, 6)$

1480 $(2+6, -4-1) \quad \therefore (8, -5)$ 답 $(8, -5)$

1481 $(-7+6, 6-1) \quad \therefore (-1, 5)$ 답 $(-1, 5)$

1482 $x-4=0$, $y+5=8$이므로

$x=4$, $y=3 \quad \therefore (4, 3)$ 답 $(4, 3)$

1483 $x-4=4$, $y+5=-9$이므로

$x=8$, $y=-14 \quad \therefore (8, -14)$ 답 $(8, -14)$

1484 $x-4=-3$, $y+5=-6$이므로

$x=1$, $y=-11 \quad \therefore (1, -11)$ 답 $(1, -11)$

1485 $0+a=5$, $1+b=10$이므로

$a=5$, $b=9$ 답 $a=5$, $b=9$

1486 $-2+a=-3$, $6+b=9$이므로

$a=-1$, $b=3$ 답 $a=-1$, $b=3$

1487 $3+a=-7$, $-8+b=4$이므로

$a=-10$, $b=12$ 답 $a=-10$, $b=12$

1488 $(x-2)-2(y-4)-7=0$

$\therefore x-2y-1=0$ 답 $x-2y-1=0$

1489 $\{(x-9)+1\}^2+\{(y+1)-1\}^2=4$

$\therefore (x-8)^2+y^2=4$ 답 $(x-8)^2+y^2=4$

1490 $y-5=(x+3)^2+3$

$\therefore y=x^2+6x+17$ 답 $y=x^2+6x+17$

1491 $3(x+5)+2(y-4)-1=0$

$\therefore 3x+2y+6=0$ 답 $3x+2y+6=0$

1492 $(x+5)^2+\{(y-4)-5\}^2=6$

$\therefore (x+5)^2+(y-9)^2=6$ 답 $(x+5)^2+(y-9)^2=6$

1493 $y-4=-(x+5)^2+1$

$\therefore y=-x^2-10x-20$ 답 $y=-x^2-10x-20$

1494 주어진 직선을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 원래의 직선과 일치하므로 구하는 직선의 방정식은

$(x+3)+(y+1)-2=0$

$\therefore x+y+2=0$ 답 $x+y+2=0$

1495 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$가 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은

$\{(x-a)+2\}^2+\{(y-b)-1\}^2=4$

$\therefore (x-a+2)^2+(y-b-1)^2=4$

이 원이 원 $(x+7)^2+(y-5)^2=4$와 일치하므로

$-a+2=7$, $-b-1=-5$

$\therefore a=-5$, $b=4$ 답 $a=-5$, $b=4$

1496 $(x+1)+4(y-2)+6=0$

$\therefore x+4y-1=0$ 답 $x+4y-1=0$

1497 주어진 포물선을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동하면 원래의 포물선과 일치하므로 구하는 포물선의 방정식은

$y-6=2(x-3)^2$

$\therefore y=2x^2-12x+24$ 답 $y=2x^2-12x+24$

1498 답 $(2, -6)$

1499 답 $(-3, -7)$

1500 답 $(-5, 5)$

1501 답 $(-4, 15)$

1502 답 $(-3, -8)$

1503 답 $(2, -1)$

1504 답 $(12, -5)$

1505 답 $(-3, 6)$

1506 답 $(2, 10)$

1507 답 $(14, 5)$

1508 답 $(6, -7)$

1509 답 $(-4, -9)$

1510 $-y=x-8$ $\quad\therefore y=-x+8$ 답 $y=-x+8$

1511 $x^2+(-y-1)^2=4$

$\therefore x^2+(y+1)^2=4$ 답 $x^2+(y+1)^2=4$

1512 $-y=2x^2-5x+3$

$\therefore y=-2x^2+5x-3$ 답 $y=-2x^2+5x-3$

1513 $2\cdot(-x)+y+4=0$

$\therefore 2x-y-4=0$ 답 $2x-y-4=0$

1514 $(-x-5)^2+(y+3)^2=6$

$\therefore (x+5)^2+(y+3)^2=6$ 답 $(x+5)^2+(y+3)^2=6$

1515 $y=(-x)^2-(-x)+1$

$\therefore y=x^2+x+1$ 답 $y=x^2+x+1$

1516 $-y=9\cdot(-x)-1$ $\quad\therefore y=9x+1$ 답 $y=9x+1$

1517 $(-x)^2+(-y)^2-2\cdot(-x)-1=0$

$\therefore x^2+y^2+2x-1=0$ 답 $x^2+y^2+2x-1=0$

1518 $-y=-(-x)^2+11$ $\quad\therefore y=x^2-11$ 답 $y=x^2-11$

1519 $y-3x+9=0$ $\quad\therefore 3x-y-9=0$ 답 $3x-y-9=0$

1520 $y^2+x^2-2y+4x+4=0$

$\therefore x^2+y^2+4x-2y+4=0$ 답 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$

1521 $\left(\frac{6-2}{2}, \frac{7+5}{2}\right)$ $\quad\therefore (2, 6)$ 답 $(2, 6)$

1522 $\left(\frac{5-3}{2}, \frac{-1+11}{2}\right)$ $\quad\therefore (1, 5)$ 답 $(1, 5)$

1523 $\left(\frac{-4-8}{2}, \frac{9-7}{2}\right)$ $\quad\therefore (-6, 1)$ 답 $(-6, 1)$

1524 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{2+a}{2}=-1$, $\frac{5+b}{2}=6$

$\therefore a=-4$, $b=7$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-4, 7)$ 답 $(-4, 7)$

1525 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{-4+a}{2}=1$, $\frac{-3+b}{2}=-1$

$\therefore a=6$, $b=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(6, 1)$ 답 $(6, 1)$

1526 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{7+a}{2}=10$, $\frac{-2+b}{2}=4$

$\therefore a=13$, $b=10$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(13, 10)$ 답 $(13, 10)$

1527 답 (가) $\frac{-2+q}{2}$ (나) -1 (다) 2 (라) -3

1528 점 $\mathrm{P}(9, -8)$을 직선 $x-2y-10=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{Q}(p, q)$라 하자.

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{9+p}{2}, \frac{-8+q}{2}\right)$

이 점이 직선 $x-2y-10=0$ 위의 점이므로

$\frac{9+p}{2}-2\cdot\frac{-8+q}{2}-10=0$

$\therefore p-2q=-5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 직선 PQ는 직선 $x-2y-10=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-5$와 수직이므로

$\frac{q+8}{p-9}\cdot\frac{1}{2}=-1$

$\therefore 2p+q=10$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=3,\ q=4$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3,\ 4)$ 답 $(3,\ 4)$

1529 주어진 평행이동에 의하여 점 $(-2,\ 1)$이 옮겨지는 점의 좌표는

$(-2+4,\ 1-9)$, 즉 $(2,\ -8)$

이 점이 직선 $y=ax+2$ 위의 점이므로

$-8=2a+2 \quad \therefore a=-5$ 답 ①

1530 $a-1=-5,\ 8-7=b$이므로

$a=-4,\ b=1 \quad \therefore b-a=5$ 답 5

1531 점 $(1,\ 3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-2,\ 4)$라 하면

$1+a=-2,\ 3+b=4$

$\therefore a=-3,\ b=1$

따라서 점 $(-1,\ 6)$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-1-3,\ 6+1)$, 즉 $(-4,\ 7)$ 답 ②

1532 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 $\mathrm{P}'(a-3,\ b+5)$ ···➊

$\therefore \overline{\mathrm{PP}'}=\sqrt{(a-3-a)^2+(b+5-b)^2}$

$=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$ ···➋

답 $\sqrt{34}$

채점 기준	비율
➊ $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하고 점 P'의 좌표를 $a,\ b$로 나타낼 수 있다.	60 %
➋ $\overline{\mathrm{PP}'}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %

1533 점 $\mathrm{A}(0,\ 6)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점 B의 좌표는

$(0+a,\ 6-2)$, 즉 $(a,\ 4)$

점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{BH}}=12, \quad \frac{1}{2}\cdot 6\cdot|a|=12$

$|a|=4 \quad \therefore a=4\ (\because a>0)$ 답 4

1534 평행이동한 직선의 방정식은

$5(x-a)+(y-2)-13=0$

$\therefore 5x+y-5a-15=0$

이 직선이 원점을 지나므로

$-5a-15=0 \quad \therefore a=-3$ 답 ②

1535 평행이동한 직선의 방정식은

$y-b=3(x-a)+1$

$\therefore y=3x-3a+b+1$

이 직선이 직선 $y=3x+1$과 일치하므로

$-3a+b+1=1, \quad 3a=b$

$\therefore \frac{b}{a}=3$ 답 ⑤

1536 점 $(3,\ 1)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-3,\ 8)$이라 하면

$3+m=-3,\ 1+n=8$

$\therefore m=-6,\ n=7$

따라서 직선 $x+ay+b=0$을 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x+6)+a(y-7)+b=0$

$\therefore x+ay+6-7a+b=0$

이 직선이 직선 $x-2y+10=0$과 일치하므로

$a=-2,\ 6-7a+b=10 \quad \therefore a=-2,\ b=-10$

$\therefore a+b=-12$ 답 ①

1537 주어진 평행이동은 도형을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 직선 $4x+y-9=0$을 평행이동한 직선의 방정식은

$4(x-5)+(y+1)-9=0$

$\therefore 4x+y-28=0$ 답 $4x+y-28=0$

1538 평행이동한 직선의 방정식은

$y+3=(x-2)+k$

$\therefore x-y-5+k=0$ ······ ㉠ ···➊

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=2$에 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{2}$와 같다. 즉

$\frac{|-5+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}, \quad |-5+k|=2$

$-5+k=-2$ 또는 $-5+k=2$

$\therefore k=3$ 또는 $k=7$ ···➋

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 10이다. ···➌

답 10

채점 기준	비율
➊ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
➋ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ 모든 상수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

1539 $x^2+y^2+4x-2y+a=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=5-a$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x-2+2)^2+(y+5-1)^2=5-a$

$\therefore x^2+(y+4)^2=5-a$

이 원이 원 $x^2+(y+b)^2=3$과 일치하므로

$4=b,\ 5-a=3 \quad \therefore a=2,\ b=4$

$\therefore a-b=-2$ 답 ②

1540 평행이동하여 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$와 완전히 겹쳐지기 위해서는 반지름의 길이가 3으로 같아야 한다.

ㄱ. 원 $x^2+y^2=9$의 반지름의 길이가 3이므로 평행이동하여 주어진 원과 완전히 겹쳐진다.

ㄴ. 원 $x^2+(y+3)^2=4$의 반지름의 길이가 2이므로 평행이동하여도 주어진 원과 완전히 겹쳐지지 않는다.

ㄷ. $x^2+y^2+2x-6y+1=0$에서

$$(x+1)^2+(y-3)^2=9$$

따라서 반지름의 길이가 3이므로 평행이동하여 주어진 원과 완전히 겹쳐진다.

이상에서 평행이동하여 주어진 원과 완전히 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

1541 주어진 평행이동은 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$x^2+y^2-8x+2y+1=0$에서

$$(x-4)^2+(y+1)^2=16$$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$$(x+1-4)^2+(y-3+1)^2=16$$

$$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=16$$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(3,\ 2)$ 답 $(3,\ 2)$

다른 풀이 $x^2+y^2-8x+2y+1=0$에서

$$(x-4)^2+(y+1)^2=16$$

이므로 중심의 좌표는 $(4,\ -1)$이다.

따라서 주어진 평행이동에 의하여 점 $(4,\ -1)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(4-1,\ -1+3)$, 즉 $(3,\ 2)$

1542 원 $(x+2)^2+(y-9)^2=5$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a+2)^2+(y-b-9)^2=5$$

이 원이 원 $(x-8)^2+(y+3)^2=5$와 일치하므로

$$-a+2=-8,\ -b-9=3$$

$$\therefore a=10,\ b=-12$$

따라서 점 $(-7,\ -1)$을 x축의 방향으로 10만큼, y축의 방향으로 -12만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-7+10,\ -1-12)$, 즉 $(3,\ -13)$ 답 ④

1543 $x^2+y^2+6x+4y-12=0$에서

$$(x+3)^2+(y+2)^2=25 \quad \cdots ❶$$

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a+3)^2+(y-b+2)^2=25 \quad \cdots ❷$$

이므로 이 원의 중심의 좌표는

$$(a-3,\ b-2)$$

이때 원의 중심이 제1사분면 위에 있고 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$$a-3=5,\ b-2=5 \quad \therefore a=8,\ b=7 \quad \cdots ❸$$

$$\therefore a+b=15 \quad \cdots ❹$$

답 15

채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
❷ 평행이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1544 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-1=(x+1)^2+4(x+1)+m$$

$$\therefore y=x^2+6x+m+6$$

이 포물선이 포물선 $y=x^2+nx+3$과 일치하므로

$$6=n,\ m+6=3 \quad \therefore m=-3,\ n=6$$

$$\therefore m+n=3$$

답 ③

1545 점 $(3,\ -4)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(4,\ -6)$이라 하면

$$3+m=4,\ -4+n=-6$$

$$\therefore m=1,\ n=-2$$

포물선 $y=x^2+8x+6$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y+2=(x-1)^2+8(x-1)+6$$

$$\therefore y=x^2+6x-3=(x+3)^2-12$$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ -12)$이므로

$$a=-3,\ b=-12 \quad \therefore a-b=9$$

답 ④

다른 풀이 $y=x^2+8x+6$에서

$$y=(x+4)^2-10$$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-4,\ -10)$이다.

주어진 평행이동에 의하여 점 $(-4,\ -10)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(-4+1,\ -10-2)$, 즉 $(-3,\ -12)$

1546 포물선 $y=2x^2+12x+5$, 즉 $y=2(x+3)^2-13$을 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-(a+3)=2(x-a+3)^2-13$$

$$\therefore y=2(x-a+3)^2-10+a$$

이 포물선의 꼭짓점 $(a-3,\ -10+a)$가 y축 위에 있으므로

$$a-3=0 \quad \therefore a=3$$

따라서 꼭짓점의 y좌표는

$$-10+3=-7$$

답 ①

다른 풀이 $y=2x^2+12x+5$에서

$$y=2(x+3)^2-13$$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ -13)$이다.

주어진 평행이동에 의하여 점 $(-3,\ -13)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(-3+a,\ -13+a+3)$

이 점이 y축 위에 있으므로

$$-3+a=0 \quad \therefore a=3$$

1547 점 $(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(a,\ -b)$$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-b,\ a)$$

이 점이 점 $(-3,\ 4)$와 일치하므로

$$-b=-3,\ a=4$$

$$\therefore a=4,\ b=3$$

답 $a=4,\ b=3$

1548 점 $(5,\ -2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는

$$(-5,\ 2)$$

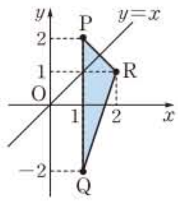
점 $(5,\ -2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는

$(-2,\ 5)$

$\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{(-2+5)^2+(5-2)^2}$

$=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

1549 점 $P(1,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는



$(1,\ -2)$

점 $P(1,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는

$(2,\ 1)$

$\therefore\ \triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{4}_{\overline{PQ}=2-(-2)=4}\cdot 1=2$ 답 ②

1550 점 $(2,\ -4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-2,\ 4)$ ··· ❶

이 점이 직선 $ax+6y-a^2=0$ 위의 점이므로

$-2a+24-a^2=0,\quad a^2+2a-24=0$

$(a+6)(a-4)=0\quad \therefore\ a=-6$ 또는 $a=4$ ··· ❷

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 -2이다. ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 실수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

1551 점 $(a,\ b)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a,\ b)$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$-a<0,\ b>0\quad \therefore\ a>0,\ b>0$

점 $(-a-b,\ ab)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a+b,\ -ab)$

이때 $a+b>0$, $-ab<0$이므로 이 점은 제4사분면 위에 있다.

답 제4사분면

1552 점 $(-3,\ 9)$를 x축에 대하여 대칭이동하면 점 $(-3,\ -9)$로 옮겨지므로 직선 $3x+2y-2=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3x-2y-2=0$ 답 ⑤

1553 직선 $y=-3x+k$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=3x+k$

이 직선이 점 $(-1,\ 5)$를 지나므로

$5=-3+k\quad \therefore\ k=8$ 답 ④

1554 직선 $x-2y+6=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l_1의 방정식은

$y-2x+6=0\quad \therefore\ 2x-y-6=0$ ··· ❶

직선 l_1을 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l_2의 방정식은

$-2x+y-6=0\quad \therefore\ 2x-y+6=0$ ··· ❷

따라서 직선 l_2의 y절편은 6이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 직선 l_1의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선 l_2의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 직선 l_2의 y절편을 구할 수 있다.	20 %

1555 직선 l의 방정식은

$3x+(k+1)y-8=0$

이 직선이 직선 $2x-ky+1=0$과 수직이므로

$3\cdot 2+(k+1)\cdot(-k)=0,\quad k^2+k-6=0$

$(k+3)(k-2)=0\quad \therefore\ k=-3$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 -1이다. 답 ③

참고 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 수직이면
$aa'+bb'=0$

1556 직선 $x-2y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-x+2y+a=0$

$\therefore\ x-2y-a=0$ ······ ㉠

직선 ㉠이 원 $(x-1)^2+(y+4)^2=20$과 만나지 않으므로

$\frac{|1+8-a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}>\underbrace{2\sqrt{5}}_{\text{원의 반지름의 길이}},\quad |9-a|>10$

$9-a<-10$ 또는 $9-a>10$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>19$

따라서 자연수 a의 최솟값은 20이다. 답 20

1557 중심의 좌표가 $(3,\ -2)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$

이므로 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-3)^2+(-y+2)^2=r^2$

$\therefore\ (x-3)^2+(y-2)^2=r^2$

이 원이 점 $(4,\ 5)$를 지나므로

$(4-3)^2+(5-2)^2=r^2,\quad r^2=10$

$\therefore\ r=\sqrt{10}\ (\because\ r>0)$ 답 ③

1558 원 $(x+a)^2+(y+1)^2=9$를 원점에 대하여 대칭이동하면

$(-x+a)^2+(-y+1)^2=9$

$\therefore\ (x-a)^2+(y-1)^2=9$

이 원이 원 $(x+2)^2+(y-b)^2=9$와 일치하므로

$a=-2,\ b=1$

$\therefore\ a+b=-1$ 답 -1

1559 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+1)^2+(-y-3)^2=4$

$\therefore\ (x-1)^2+(y+3)^2=4$

이 원을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-1)^2+(y+3)^2=4$

$\therefore (x+1)^2+(y+3)^2=4$

이 원의 중심 $(-1, -3)$이 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로

$-a+b=-3 \qquad \therefore a-b=3$ 답 ⑤

1560 원 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+(-y)^2-4x-2\cdot(-y)-4=0$

$\therefore x^2+y^2-4x+2y-4=0$ ⋯ ❶

원 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x)^2+y^2-4\cdot(-x)-2y-4=0$

$\therefore x^2+y^2+4x-2y-4=0$ ⋯ ❷

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4x+2y-4-(x^2+y^2+4x-2y-4)=0$

$\therefore 2x-y=0$ ⋯ ❸

답 $2x-y=0$

채점 기준	비율
❶ 주어진 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

참고 두 점에서 만나는 두 원

$x^2+y^2+ax+by+c=0,\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$

의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$

1561 원 $x^2+y^2+4x-10y+9=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$y^2+x^2+4y-10x+9=0$

이 원이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$x^2-10x+9=0, \qquad (x-1)(x-9)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=9$

따라서 두 교점 사이의 거리는

$9-1=8$ 답 ④

1562 포물선 $y=x^2-4ax+4$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=(-x)^2-4a\cdot(-x)+4$

$=x^2+4ax+4$

$=(x+2a)^2+4-4a^2$

이 포물선의 꼭짓점 $(-2a, 4-4a^2)$이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로

$4-4a^2=-2a+2, \qquad 4a^2-2a-2=0$

$2a^2-a-1=0, \qquad (2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$ 답 ③

1563 포물선 $y=x^2+ax+b$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2+a\cdot(-x)+b$

$\therefore y=-x^2+ax-b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$ ⋯ ❶

이 포물선의 꼭짓점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}-b\right)$가 점 $(5, -1)$과 일치하므로

$\frac{a}{2}=5,\ \frac{a^2}{4}-b=-1 \qquad \therefore a=10,\ b=26$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=36$ ⋯ ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ 대칭이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1564 포물선 $y=2x^2-8x+5$를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=2x^2-8x+5$

$\therefore y=-2x^2+8x-5$

이 포물선을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-2\cdot(-x)^2+8\cdot(-x)-5$

$\therefore y=-2x^2-8x-5$

이 포물선이 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=-2+8-5=1$ 답 ④

참고 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것은 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

1565 점 $(3, a)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a, 3)$

이 점을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a-2, 3+3)$, 즉 $(a-2, 6)$

이 점이 점 $(4, b)$와 일치하므로

$a-2=4,\ 6=b \qquad \therefore a=6,\ b=6$

$\therefore a-b=0$ 답 0

1566 원 $(x-4)^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-4)^2+(y-b)^2=4$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-a-4)^2+(y-b)^2=4$

$\therefore (x+a+4)^2+(y-b)^2=4$

이 원의 중심 $(-a-4, b)$가 점 $(1, 2)$와 일치하므로

$-a-4=1,\ b=2 \qquad \therefore a=-5,\ b=2$

$\therefore a+b=-3$ 답 -3

1567 포물선 $y=x^2+a$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-3=(x-2)^2+a$

$\therefore y=(x-2)^2+a+3$

이 포물선을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(x-2)^2+a+3$

$\therefore y=-(x-2)^2-a-3$

$=-x^2+4x-a-7$

이 포물선이 포물선 $y=-x^2+4x-3$과 일치하므로

$-a-7=-3$

$\therefore a=-4$

답 ②

1568 직선 $5x-2y+1=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-5x+2y+1=0$

$\therefore 5x-2y-1=0$ ⋯ ❶

이 직선을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$5(x-a)-2(y-3)-1=0$

$\therefore 5x-2y-5a+5=0$ ⋯ ❷

이 직선이 원 $(x-3)^2+y^2=2$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(3,\ 0)$을 지나야 하므로

$15-5a+5=0,\qquad 5a=20$

$\therefore a=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

1569 $x^2+y^2-10x+2y+18=0$에서

$(x-5)^2+(y+1)^2=8$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-5)^2+(-y+1)^2=8$

$\therefore (x-5)^2+(y-1)^2=8$

이 원을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원 O'의 방정식은

$(x-5-5)^2+(y-3-1)^2=8$

$\therefore (x-10)^2+(y-4)^2=8$

$\overline{PQ}$의 최댓값은 두 원 O, O'의 중심 $(5,\ -1)$, $(10,\ 4)$를 이은 선분의 길이에 두 원의 반지름의 길이의 합을 더한 것이므로 구하는 최댓값은

$\sqrt{(10-5)^2+(4+1)^2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=9\sqrt{2}$

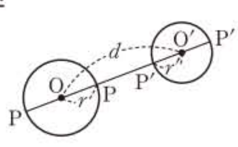
답 ⑤

라쎈 특강

두 원 위의 점 사이의 거리의 최대·최소

반지름의 길이가 r인 원 O 위의 점 P와 반지름의 길이가 r'인 원 O' 위의 점 P′에 대하여 두 원 O, O'의 중심 사이의 거리를 d라 할 때

(단, $d>r+r'$)



① ($\overline{PP'}$의 최댓값)$=d+(r+r')$

② ($\overline{PP'}$의 최솟값)$=d-(r+r')$

1570 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면 $\quad f(x,\ -y)=0$

이 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $\quad f(x-1,\ -y)=0$

따라서 방정식 $f(x-1,\ -y)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 ③이다.

답 ③

다른 풀이 주어진 도형은 세 직선

$y=-x+1,\ y=x+1,\ y=0$ ⋯⋯ ㉠

으로 둘러싸인 도형이다.

㉠의 세 식에 x 대신 $x-1$, y 대신 $-y$를 각각 대입하면

$-y=-(x-1)+1,\ -y=(x-1)+1,\ -y=0$

$\therefore y=x-2,\ y=-x,\ y=0$

따라서 방정식 $f(x-1,\ -y)=0$이 나타내는 도형은 ③이다.

1571 방정식 $f(-x,-y)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 ④이다.

답 ④

다른 풀이 주어진 도형은 네 직선

$x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=1$ ⋯⋯ ㉠

로 둘러싸인 도형이다.

㉠의 네 식에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 각각 대입하면

$-x=1,\ -x=2,\ -y=0,\ -y=1$

$\therefore x=-1,\ x=-2,\ y=0,\ y=-1$

따라서 방정식 $f(-x,\ -y)=0$이 나타내는 도형은 ④이다.

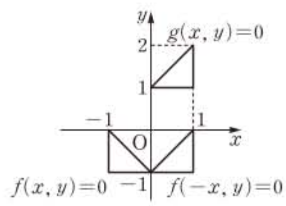
1572 오른쪽 그림에서 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동하면

$f(-x,\ y)=0$

이 방정식이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$f(-x,\ y-2)=0$

$\therefore g(x,\ y)=f(-x,\ y-2)$



답 ②

1573 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $\quad f(y,\ x)=0$

이 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $\quad f(y,\ x+2)=0$

따라서 방정식 $f(y,\ x+2)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 ①이다.

답 ①

참고 방정식 $f(y,\ x+2)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것과도 같다. 즉

$f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(x,\ y+2)=0 \longrightarrow f(y,\ x+2)=0$

다른 풀이 주어진 도형은 네 직선

$x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2$ ⋯⋯ ㉠

로 둘러싸인 도형이다.

㉠의 네 식에 x 대신 y, y 대신 $x+2$를 각각 대입하면

$y=0,\ y=1,\ x+2=0,\ x+2=2$

$\therefore\ y=0,\ y=1,\ x=-2,\ x=0$

따라서 방정식 $f(y,\ x+2)=0$이 나타내는 도형은 ①이다.

1574 두 점 $(a,\ 4)$, $(-5,\ b)$를 잇는 선분의 중점의 좌표가 $(2,\ 3)$이므로

$\dfrac{a-5}{2}=2,\ \dfrac{4+b}{2}=3$

$\therefore\ a=9,\ b=2$

$\therefore\ ab=18$ 답 18

1575 두 포물선이 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

포물선 $y=x^2-6x+6=(x-3)^2-3$의 꼭짓점의 좌표는

$(3,\ -3)$ ··· ❶

포물선 $y=-x^2+8x-2=-(x-4)^2+14$의 꼭짓점의 좌표는

$(4,\ 14)$ ··· ❷

따라서 두 꼭짓점 $(3,\ -3)$, $(4,\ 14)$를 잇는 선분의 중점의 좌표가 $(a,\ b)$이므로

$a=\dfrac{3+4}{2}=\dfrac{7}{2},\ b=\dfrac{-3+14}{2}=\dfrac{11}{2}$ ··· ❸

$\therefore\ b-a=2$ ··· ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ 포물선 $y=x^2-6x+6$의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ 포물선 $y=-x^2+8x-2$의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1576 $x^2+y^2-8x+12=0$에서

$(x-4)^2+y^2=4$

이 원의 중심 $(4,\ 0)$을 점 $(3,\ -1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\dfrac{4+a}{2}=3,\ \dfrac{0+b}{2}=-1$

$\therefore\ a=2,\ b=-2$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -2)$이고, 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 반지름의 길이는 2이다.

즉 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+2)^2=4$ 답 ②

1577 두 점 $(-2,\ 9)$, $(4,\ 15)$를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+4}{2},\ \dfrac{9+15}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 12)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$12=a+b$ ······ ㉠

또 두 점 $(-2,\ 9)$, $(4,\ 15)$를 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 −1이다.

$\dfrac{15-9}{4+2}\cdot a=-1$ $\quad\therefore\ a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $\quad b=13$

$\therefore\ ab=-13$ 답 ②

1578 두 점 $(-3,\ 2)$, $(b,\ -8)$을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-3+b}{2},\ \dfrac{2-8}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{-3+b}{2},\ -3\right)$

이 점이 직선 $y=x+a$ 위의 점이므로

$-3=\dfrac{-3+b}{2}+a$

$\therefore\ 2a+b=-3$ ······ ㉠

또 두 점 $(-3,\ 2)$, $(b,\ -8)$을 지나는 직선이 직선 $y=x+a$와 수직이므로

$\dfrac{-8-2}{b+3}\cdot 1=-1$ $\quad\therefore\ b=7$

$b=7$을 ㉠에 대입하여 풀면 $\quad a=-5$

$\therefore\ a+b=2$ 답 ④

1579 $C(a,\ b)$라 하면 $\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{1+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=x+3$ 위의 점이므로

$\dfrac{1+b}{2}=\dfrac{1+a}{2}+3$

$\therefore\ a-b=-6$ ······ ㉠ ··· ❶

또 직선 BC가 직선 $y=x+3$과 수직이므로

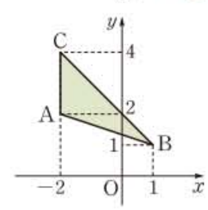
$\dfrac{b-1}{a-1}\cdot 1=-1$

$\therefore\ a+b=2$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=4$

$\therefore\ C(-2,\ 4)$ ··· ❸



따라서 오른쪽 그림에서

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot \underbrace{3}_{1-(-2)=3}=3$ ··· ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ $\overline{BC}$의 중점의 좌표가 주어진 직선 위의 점임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 직선 BC가 주어진 직선과 수직임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❹ △ABC의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

1580 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=2$의 중심 $(-1,\ 3)$을 직선 $y=-x-4$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $(-1,\ 3)$, $(a,\ b)$를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-1+a}{2},\ \dfrac{3+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-x-4$ 위의 점이므로

$\dfrac{3+b}{2}=-\dfrac{-1+a}{2}-4$

$\therefore\ a+b=-10$ ······ ㉠

또 두 점 $(-1,\ 3)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선이 직선 $y=-x-4$와 수직이므로

$$\frac{b-3}{a+1}\cdot(-1)=-1$$

$\therefore\ a-b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

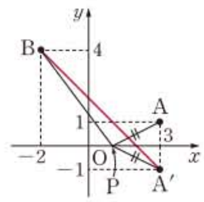
$a=-7,\ b=-3$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(-7,\ -3)$이고, 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

즉 구하는 원의 방정식은

$(x+7)^2+(y+3)^2=2$ 　답 $(x+7)^2+(y+3)^2=2$

1581 점 $A(3,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

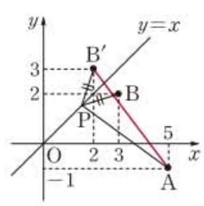


$A'(3,\ -1)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AP}+\overline{BP}&=\overline{A'P}+\overline{BP}\\&\ge\overline{A'B}\\&=\sqrt{(-2-3)^2+(4+1)^2}\\&=5\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다. 　답 ②

1582 점 $B(3,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

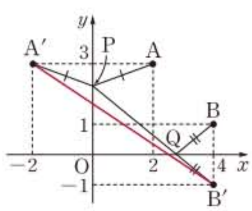


$B'(2,\ 3)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AP}+\overline{BP}&=\overline{AP}+\overline{B'P}\\&\ge\overline{AB'}\\&=\sqrt{(2-5)^2+(3+1)^2}\\&=5\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다. 　답 ③

1583 점 $A(2,\ 3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면



$A'(-2,\ 3)$ ⋯ ❶

점 $B(4,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$B'(4,\ -1)$ ⋯ ❷

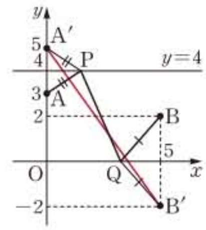
$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}&=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\\&\ge\overline{A'B'}\\&=\sqrt{(4+2)^2+(-1-3)^2}\\&=2\sqrt{13}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{13}$이다. ⋯ ❸

답 $2\sqrt{13}$

채점 기준	비율
❶ 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

1584 점 $A(0,\ 3)$을 직선 $y=4$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a,\ b)$라 하면 $\overline{AA'}$의 중점의 좌표는



$$\left(\frac{0+a}{2},\ \frac{3+b}{2}\right),\ 즉\ \left(\frac{a}{2},\ \frac{3+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=4$ 위의 점이므로

$\dfrac{3+b}{2}=4$ 　$\therefore\ b=5$

또 직선 AA'이 직선 $y=4$와 수직이므로

$a=0$

따라서 점 A'의 좌표는 　$(0,\ 5)$

점 $B(5,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$B'(5,\ -2)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}&=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\\&\ge\overline{A'B'}\\&=\sqrt{(5-0)^2+(-2-5)^2}\\&=\sqrt{74}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{74}$이다. 　답 ④

1585 전략 점 $(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(x+a,\ y+b)$이다.

풀이 $2+a=b,\ -3+a+1=1$이므로

$a=3,\ b=5$ 　$\therefore\ ab=15$ 　답 ③

1586 전략 □O′A′B′C′이 직사각형이면 □OABC도 직사각형임을 이용한다.

풀이 $B(a,\ b)$라 하면 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+6,\ b+5)$

이 점이 점 $B'(11,\ 8)$과 일치하므로

$a+6=11,\ b+5=8$

$\therefore\ a=5,\ b=3$

따라서 점 B의 좌표는 $(5,\ 3)$이고 □OABC가 직사각형이므로 구하는 넓이는

$5\cdot3=15$ 　답 15

참고 도형을 평행이동해도 그 모양과 크기는 변하지 않는다.

1587 전략 평행이동에 의하여 직선은 기울기가 같은 직선으로, 원은 반지름의 길이가 같은 원으로 옮겨진다.

풀이 ㄱ. $\dfrac{1}{2}\ne\dfrac{2}{1}$이므로 두 직선은 서로 평행하지 않다.

따라서 평행이동하여도 서로 완전히 겹쳐지지 않는다.

ㄴ. $\dfrac{3}{6}=\dfrac{4}{8}\ne\dfrac{-2}{-1}$이므로 두 직선은 서로 평행하다.

따라서 평행이동하였을 때 서로 완전히 겹쳐진다.

ㄷ. 두 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$로 같으므로 평행이동하였을 때 서로 완전히 겹쳐진다.

ㄹ. $x^2+y^2-4=0$에서 　$x^2+y^2=4$

$x^2+y^2-2x-1=0$에서 　$(x-1)^2+y^2=2$

두 원의 반지름의 길이가 각각 2, $\sqrt{2}$로 같지 않으므로 평행이동하여도 서로 완전히 겹쳐지지 않는다.

12 도형의 이동

이상에서 평행이동하였을 때 서로 완전히 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ 이다. 답 ②

1588 전략 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이보다 작아야 함을 이용한다.

풀이 직선 $y=-3x+14$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=-3(x-a)+14$

$\therefore 3x+y-3a-14=0$ …… ㉠

직선 ㉠이 원 $(x-1)^2+y^2=10$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(1, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{10}$보다 작아야 하므로

$\dfrac{|3-3a-14|}{\sqrt{3^2+1^2}}<\sqrt{10}$, $|3a+11|<10$

$-10<3a+11<10$, $-21<3a<-1$

$\therefore -7<a<-\dfrac{1}{3}$

따라서 정수 a는 $-6, -5, -4, \cdots, -1$의 6개이다. 답 6

1589 전략 원의 넓이가 직선에 의하여 이등분되려면 원의 중심이 이 직선 위에 있어야 함을 이용한다.

풀이 원 C의 방정식은

$(x-3+1)^2+(y-a+2)^2=9$

$\therefore (x-2)^2+(y-a+2)^2=9$

원 C의 넓이가 직선 $3x+4y-7=0$에 의하여 이등분되려면 원 C의 중심 $(2, a-2)$가 이 직선 위에 있어야 하므로

$6+4(a-2)-7=0$, $4a-9=0$

$\therefore a=\dfrac{9}{4}$ 답 ⑤

1590 전략 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 포물선 $y=x^2-2x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-b=(x-a)^2-2(x-a)$

$\therefore y=x^2-2(a+1)x+a^2+2a+b$

이 포물선이 포물선 $y=x^2-12x+30$과 일치하므로

$-2(a+1)=-12$, $a^2+2a+b=30$

$\therefore a=5, b=-5$

따라서 직선 l을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은

$(x-5)-2(y+5)=0$ $\therefore x-2y-15=0$

두 직선 l, l'은 평행하므로 두 직선 사이의 거리 d는 직선 l 위의 점 $(0, 0)$과 직선 l' 사이의 거리와 같다. 즉

$d=\dfrac{|-15|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=3\sqrt{5}$

$\therefore d^2=(3\sqrt{5})^2=45$ 답 45

1591 전략 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

풀이 점 $(6, -9)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은

$P(6, 9)$

점 P를 y축에 대하여 대칭이동한 점은

$Q(-6, 9)$

점 Q를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은

$R(9, -6)$

따라서 △PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{6-6+9}{3}, \dfrac{9+9-6}{3}\right)$, 즉 $(3, 4)$

즉 $a=3$, $b=4$이므로

$ab=12$ 답 12

1592 전략 주어진 규칙에 따라 점 P_2, P_3, P_4, …의 좌표를 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 점 $P_1(3, 2)$에서 $3\cdot2=6>0$, $3>2$이므로 규칙 (가)에 의하여 점 P_2의 좌표는 $(2, 3)$

점 $P_2(2, 3)$에서 $2\cdot3=6>0$, $2<3$이므로 규칙 (나)에 의하여 점 P_3의 좌표는 $(2, -3)$

점 $P_3(2, -3)$에서 $2\cdot(-3)=-6<0$이므로 규칙 (다)에 의하여 점 P_4의 좌표는 $(-2, -3)$

점 $P_4(-2, -3)$에서 $(-2)\cdot(-3)=6>0$, $-2>-3$이므로 규칙 (가)에 의하여 점 P_5의 좌표는 $(-3, -2)$

점 $P_5(-3, -2)$에서 $(-3)\cdot(-2)=6>0$, $-3<-2$이므로 규칙 (나)에 의하여 점 P_6의 좌표는 $(-3, 2)$

점 $P_6(-3, 2)$에서 $(-3)\cdot2=-6<0$이므로 규칙 (다)에 의하여 점 P_7의 좌표는 $(3, 2)$

즉 점 P_n은 6개의 점 $(3, 2)$, $(2, 3)$, $(2, -3)$, $(-2, -3)$, $(-3, -2)$, $(-3, 2)$가 이 순서대로 반복된다.

이때 $P_{50}=P_{6\cdot8+2}=P_2$이므로

$x_{50}=2$, $y_{50}=3$

$\therefore 10x_{50}+y_{50}=10\cdot2+3=23$ 답 23

1593 전략 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$이다.

풀이 원 $(x-a)^2+(y-4)^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-a)^2+(x-4)^2=16$

$\therefore (x-4)^2+(y-a)^2=16$

이 원의 중심의 좌표는 $(4, a)$

따라서 두 점 $(4, a)$, $(8, 0)$ 사이의 거리가 5이므로

$\sqrt{(8-4)^2+(0-a)^2}=5$

양변을 제곱하여 정리하면 $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$) 답 ①

1594 전략 $(ax+by+c)k+(a'x+b'y+c')=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하면 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$임을 이용한다.

풀이 직선 $(2k+1)x+(k+1)y-4=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$(2k+1)y+(k+1)x-4=0$

$\therefore\ (k+1)x+(2k+1)y-4=0$

이 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+2y)k+(x+y-4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+2y=0,\ x+y-4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=8,\ y=-4$

따라서 $a=8$, $b=-4$이므로 $a-b=12$ 답 ⑤

1595 전략 이동하는 순서에 주의하여 평행이동과 대칭이동한 점의 좌표를 구한다.

풀이 $P(a, b)$라 하면 이 점을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+5,\ b-3)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a-5,\ -b+3)$

이 점이 점 $P(a, b)$와 일치하므로

$-a-5=a,\ -b+3=b$

$\therefore\ a=-\frac{5}{2},\ b=\frac{3}{2}$

따라서 $P\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$이므로 이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 답 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

1596 전략 이동하는 순서에 주의하여 대칭이동과 평행이동한 직선의 방정식을 구한다.

풀이 직선 $2x+3y-7=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2y+3x-7=0 \qquad \therefore\ 3x+2y-7=0$

이 직선을 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+a, y-1)$에 의하여 옮긴 직선의 방정식은

$3(x-a)+2(y+1)-7=0$

$\therefore\ 3x+2y-3a-5=0$

이 직선이 직선 $3x+2y-2=0$과 일치하므로

$-3a-5=-2 \qquad \therefore\ a=-1$ 답 ②

1597 전략 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 방정식 $f(x+1, 2-y)=0$이 나타내는 도형으로 옮기는 평행이동과 대칭이동을 생각한다.

풀이 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면 $f(x, -y)=0$

이 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$f(x+1, -(y-2))=0$, 즉 $f(x+1, 2-y)=0$

따라서 방정식 $f(x+1, 2-y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 ②이다. 답 ②

참고 방정식 $f(x+1, 2-y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것과도 같다. 즉

$f(x, y)=0 \longrightarrow f(x+1, y+2)=0 \longrightarrow f(x+1, 2-y)=0$

1598 전략 점 $(4, 2)$가 $\overline{PQ}$의 중점임을 이용한다.

풀이 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표가 $(4, 2)$이므로

$\frac{a-8}{2}=4,\ \frac{3+b}{2}=2 \qquad \therefore\ a=16,\ b=1$

따라서 두 점 $P(16, 3)$, $Q(-8, 1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-3}{-8-16}=\frac{1}{12}$ 답 ①

1599 전략 원의 중심 C를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 C′이라 하면 직선 l이 $\overline{CC'}$을 수직이등분함을 이용한다.

풀이 원 $(x+4)^2+(y-1)^2=4$의 중심 $(-4, 1)$을 직선 $y=-x+2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (p, q)라 하면 두 점 $(-4, 1)$, (p, q)를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+p}{2}, \frac{1+q}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$\frac{1+q}{2}=-\frac{-4+p}{2}+2 \qquad \therefore\ p+q=7$ …… ㉠

또 두 점 $(-4, 1)$, (p, q)를 지나는 직선이 직선 $y=-x+2$와 수직이므로

$\frac{q-1}{p+4}\cdot(-1)=-1 \qquad \therefore\ p-q=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=1,\ q=6$

대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(1, 6)$이고, 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 반지름의 길이는 2이다.

따라서 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-6)^2=4$

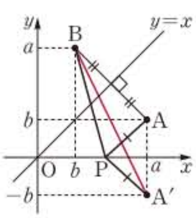
$\therefore\ x^2+y^2-2x-12y+33=0$

즉 $a=-2$, $b=-12$, $c=33$이므로

$a+b+c=19$ 답 ④

1600 전략 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $\overline{AP}+\overline{PB} \geq \overline{A'B}$임을 이용한다.

풀이 $A(a, b)\ (a>0, b>0)$라 하면 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $B(b, a)$



점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $A'(a, -b)$

$\therefore\ \overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(b-a)^2+(a+b)^2}$

$=\sqrt{2(a^2+b^2)}$

$\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값이 $10\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{2(a^2+b^2)}=10\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+b^2=100$

이때 $\overline{OA}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{100}=10$

답 10

1601 전략 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$에 의하여 점 (a, b)가 점 (p, q)로 옮겨지면 $p=a+m$, $q=b+n$이다.

풀이 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$에 의하여 점 $(0, 0)$이 점 $(3, -2)$로 옮겨지므로

$0+m=3$, $0+n=-2$

$\therefore m=3, n=-2$ ··· ❶

따라서 점 $P(a, b)$가 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(a+3, b-2)$

이 점이 점 $(0, 0)$과 일치하므로

$a+3=0, b-2=0 \qquad \therefore a=-3, b=2$ ··· ❷

$\therefore a-b=-5$ ··· ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ m, n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1602 전략 원이 x축에 의하여 잘리는 현의 길이는 원과 x축이 만나는 두 점 사이의 거리와 같다.

풀이 $x^2+y^2+2x-3=0$에서 $\qquad (x+1)^2+y^2=4$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+1)^2+(-y)^2=4$

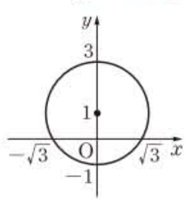
$\therefore (x-1)^2+y^2=4$ ······ ㉠ ··· ❶

원 ㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-1)^2+x^2=4$

$\therefore x^2+(y-1)^2=4$ ······ ㉡ ··· ❷

원 ㉡이 x축에 의하여 잘리는 현의 길이는 원과 x축이 만나는 두 점 사이의 거리와 같으므로 ㉡에 $y=0$을 대입하면



$x^2+1=4, \qquad x^2=3$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$

따라서 원과 x축이 만나는 두 점의 좌표는 $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$이므로 구하는 현의 길이는

$|\sqrt{3}-(-\sqrt{3})|=2\sqrt{3}$ ··· ❸

답 $2\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 현의 길이를 구할 수 있다.	40 %

1603 전략 먼저 구하는 직선의 기울기를 m이라 하고 직선의 방정식을 구한 후 이동하는 순서에 주의하여 평행이동과 대칭이동을 한다.

풀이 점 $(2, -9)$를 지나는 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y+9=m(x-2)$

$\therefore y=mx-2m-9$ ··· ❶

직선 l을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=m(x-1)-2m-9$

$\therefore y=mx-3m-9$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-mx-3m-9$

$\therefore y=mx+3m+9$ ··· ❷

이 직선이 점 $(10, -4)$를 지나므로

$-4=10m+3m+9, \qquad 13m=-13$

$\therefore m=-1$

따라서 직선 l의 기울기는 -1이다. ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 직선 l의 기울기를 m이라 하고 직선의 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 직선 l을 평행이동한 후 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 직선 l의 기울기를 구할 수 있다.	30 %

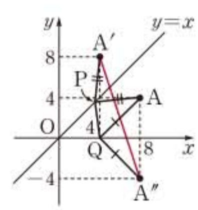
1604 전략 점 $A(8, 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A', x축에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라 하면 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA} \ge \overline{A'A''}$임을 이용한다.

풀이 점 $A(8, 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$A'(4, 8)$ ··· ❶

점 $A(8, 4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라 하면

$A''(8, -4)$ ··· ❷



$\therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QA''}$

$\ge \overline{A'A''}$

$=\sqrt{(8-4)^2+(-4-8)^2}$

$=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{10}$이다. ··· ❸

답 $4\sqrt{10}$

채점 기준	비율
❶ 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

memo

memo