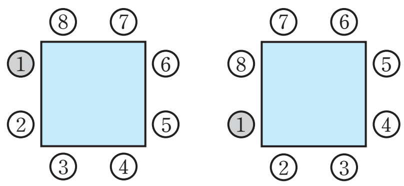
01강 원순열

확인 문제 p. 6

1 $(7-1)!=6!=720$

2 각 영역에 5가지 색을 칠하는 방법의 수는 5가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(5-1)!=4!=24$

3 8명을 원형으로 배열하는 방법의 수는
$(8-1)!=7!=5040$
이때 정사각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 있다.



따라서 구하는 방법의 수는 $5040\times2=10080$

교/과/서/속 핵심+유형 실전 문제 p. 7

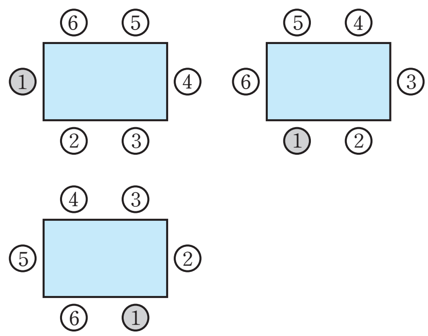
1 (1) 반장과 부반장을 한 명으로 생각하면 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)!=4!=24$
그 각각에 대하여 반장과 부반장이 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times2=48$
(2) 반장의 자리를 고정시키면 부반장이 앉는 경우의 수는 1
나머지 4명이 앉는 경우의 수는 4명을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로 $4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$1\times24=24$

2 부모님을 한 명으로 생각하면 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(6-1)!=5!=120$
그 각각에 대하여 부모님이 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2!=2$
$\therefore a=120\times2=240$
우진이와 부모님을 한 명으로 생각하면 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)!=4!=24$
그 각각에 대하여 부모님이 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2!=2$
$\therefore b=24\times2=48$
$\therefore a+b=240+48=288$
따라서 구하는 값은 ④이다.

3 주어진 그림의 가운데 삼각형을 칠하는 방법의 수는 4
나머지 3개의 삼각형을 칠하는 방법의 수는 가운데 삼각형에 칠한 색을 제외한 나머지 3가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(3-1)!=2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는 $4\times2=8$

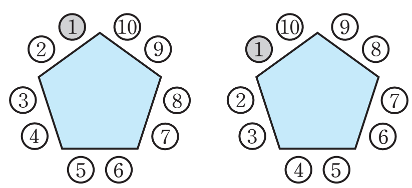
4 빨간색과 보라색을 하나로 생각하여 6가지 색을 칠하는 방법의 수는 6가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(6-1)!=5!=120$
이때 빨간색과 보라색의 칠해진 위치를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는 $120\times2=240$

5 6명을 원형으로 배열하는 방법의 수는
$(6-1)!=5!=120$
이때 직사각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 있다.



따라서 구하는 방법의 수는 $120\times3=360$

6 10명을 원형으로 배열하는 방법의 수는
$(10-1)!=9!$
이때 정오각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 있다.



즉, 정오각형 모양의 탁자에 10명이 둘러앉는 방법의 수는
$9!\times2=8!\times18$
따라서 $a=18$이므로 구하는 값은 ③이다.

02강 중복순열과 같은 것이 있는 순열

확인 문제 p. 8

1 (1) ${}_3\Pi_2=3^2=9$
(2) ${}_2\Pi_4=2^4=16$

2 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개 중에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_4=3^4=81$

3 $\dfrac{7!}{2!\times3!\times2!}=210$

4 오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라고 하면 구하는 최단 경로의 수는 a, a, a, b, b를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로
$\dfrac{5!}{3!\times2!}=10$

교/과/서/속 핵심 유형+ 실전 문제 p. 9

1 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2로 2개이다.
만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 3개이고, 나머지 세 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 4개이다.
따라서 구하는 짝수의 개수는
$2\times3\times{}_4\Pi_3=2\times3\times4^3=384$

2 5개의 숫자 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수는
${}_5\Pi_3=5^3=125$
숫자 3을 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_4\Pi_3=4^3=64$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$125-64=61$

3 (1) 구하는 함수는 집합 Y의 원소 4개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하고, 그 원소를 집합 X의 원소에 각각 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는 4개 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_3=4^3=64$
(2) 구하는 함수는 집합 Y의 원소 4개 중에서 서로 다른 3개를 택하여 집합 X의 원소에 각각 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는 4개 중에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_4P_3=24$

4 X에서 Y로의 함수는 집합 Y의 원소 5개 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하고, 그 원소를 집합 X의 원소에 각각 대응시키면 된다.
따라서 X에서 Y로의 함수의 개수는 5개 중에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$m={}_5\Pi_4=5^4=625$
X에서 Y로의 일대일함수는 집합 Y의 원소 5개 중에서 서로 다른 4개를 택하여 집합 X의 원소에 각각 대응시키면 된다.
따라서 X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 5개 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로
$n={}_5P_4=120$
$\therefore\ m-n=625-120=505$

5 (1) 양 끝에 3을 배열하는 경우의 수는 1
나머지 자리에 1, 1, 2, 2, 4를 배열하는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{2!\times2!}=30$
따라서 구하는 경우의 수는 $1\times30=30$
(2) 3개의 짝수 번째 자리에 2, 2, 4를 배열하는 경우의 수는
$\dfrac{3!}{2!}=3$
4개의 홀수 번째 자리에 1, 1, 3, 3을 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $3\times6=18$

6 3개의 E를 한 문자 e로 생각하면 구하는 경우의 수는 e, X, C, L, L, N, T를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로
$\dfrac{7!}{2!}=2520$

7 지점 A에서 지점 C까지 가는 최단 경로의 수는
$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$
지점 C에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는
$\dfrac{3!}{2!}=3$
따라서 구하는 최단 경로의 수는 $6\times3=18$

8 지점 P에서 지점 Q까지 가는 최단 경로의 수는
$\dfrac{9!}{5!\times4!}=126$
지점 P에서 지점 R까지 가는 최단 경로의 수는
$\dfrac{5!}{3!\times2!}=10$
지점 R에서 지점 Q까지 가는 최단 경로의 수는
$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$
즉, 지점 P에서 지점 R를 거쳐 지점 Q까지 가는 최단 경로의 수는 $10\times6=60$
따라서 구하는 최단 경로의 수는 $126-60=66$

계산력 다지기 p. 10~11

1 (1) $(5-1)!=4!=24$

(2) $(6-1)!=5!=120$

(3) 남학생 2명을 한 명으로 생각하면 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(6-1)!=5!=120$

이때 남학생 2명이 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $120\times2=240$

(4) 회장의 자리를 고정시키면 부회장이 서는 경우의 수는 1

나머지 6명이 서는 경우의 수는 6명을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로 $6!=720$

따라서 구하는 경우의 수는 $1\times720=720$

2 (1) 각 영역에 4가지 색을 칠하는 경우의 수는 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$

(2) 각 영역에 6가지 색을 칠하는 경우의 수는 6가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(6-1)!=5!=120$

(3) 주어진 그림의 가운데 사각형을 칠하는 경우의 수는 5

나머지 4개의 삼각형을 칠하는 경우의 수는 가운데 사각형에 칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $5\times6=30$

(4) 주어진 그림의 가운데 원을 칠하는 경우의 수는 7

나머지 6개의 영역을 칠하는 경우의 수는 가운데 원에 칠한 색을 제외한 나머지 6가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

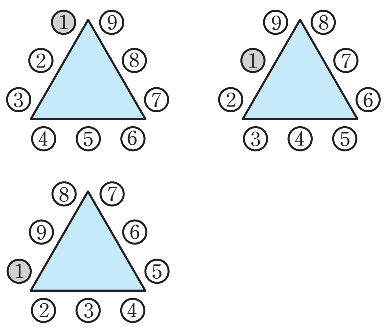
$(6-1)!=5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는 $7\times120=840$

3 (1) 9명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(9-1)!=8!$

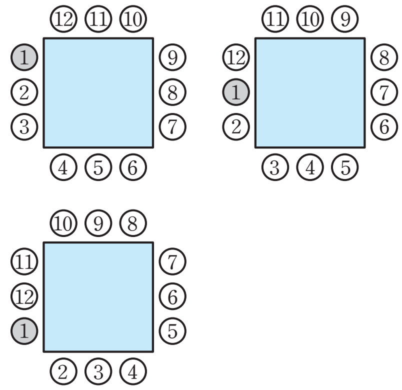
이때 정삼각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 있다.



따라서 구하는 방법의 수는 $8!\times3$

(2) 12명을 원형으로 배열하는 방법의 수는 $(12-1)!=11!$

이때 정사각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 있다.

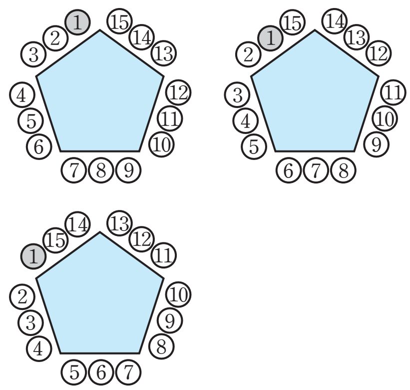


따라서 구하는 방법의 수는 $11!\times3$

(3) 15명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(15-1)!=14!$

이때 정오각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 있다.

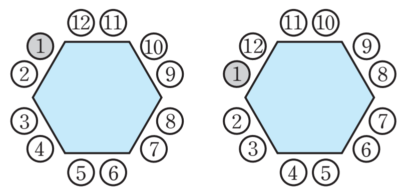


따라서 구하는 방법의 수는 $14!\times3$

(4) 12명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(12-1)!=11!$

이때 정육각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 있다.



따라서 구하는 방법의 수는 $11!\times2$

4 (1) ${}_n\Pi_4=n^4=81=3^4$ $\quad\therefore n=3$

(2) ${}_n\Pi_3=n^3=125=5^3$ $\quad\therefore n=5$

(3) ${}_4\Pi_r=4^r=64=4^3$ $\quad\therefore r=3$

(4) ${}_6\Pi_r=6^r=216=6^3$ $\quad\therefore r=3$

5 (1) 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4로 4개이다.
나머지 두 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 5개이다.
따라서 구하는 자연수의 개수는 $4\times{}_5\Pi_2=4\times5^2=100$

(2) 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4로 4개이다.
나머지 네 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 5개이다.
따라서 구하는 자연수의 개수는
$4\times{}_5\Pi_4=4\times5^4=2500$

(3) 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3으로 2개이다.
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4로 4개이다.
나머지 두 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 5개이다.
따라서 구하는 홀수의 개수는
$2\times4\times{}_5\Pi_2=2\times4\times5^2=200$

(4) 0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 $4\times{}_5\Pi_3=4\times5^3=500$
4를 제외한 0, 1, 2, 3의 4개의 숫자로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 $3\times{}_4\Pi_3=3\times4^3=192$
따라서 구하는 자연수의 개수는 $500-192=308$

6 (1) $\dfrac{6!}{2!\times3!}=60$

(2) $\dfrac{7!}{2!\times3!\times2!}=210$

(3) 양 끝에 m을 배열하는 경우의 수는 1
나머지 자리에 a, t, h, e, a ,t, i, c, s의 9개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{9!}{2!\times2!}=90720$
따라서 구하는 경우의 수는 $1\times90720=90720$

(4) o, o, a를 한 문자 X로 생각하면 6개의 문자 X, f, t, b, l, l을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!}=360$
o, o, a를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$
따라서 구하는 경우의 수는 $360\times3=1080$

7 (1) $\dfrac{6!}{4!\times2!}=15$ (2) $\dfrac{6!}{3!\times3!}=20$

(3) $\dfrac{8!}{3!\times5!}=56$ (4) $\dfrac{10!}{6!\times4!}=210$

01~02강 족집게 기출문제 p. 12~15

1 96	2 ②	3 ①	4 144	5 ⑤
6 ④	7 ⑤	8 ③	9 192	10 ④
11 ④	12 ⑤	13 ②	14 ②	15 ①
16 ③	17 ②	18 18	19 ④	20 66
21 ③	22 ③	23 228	24 84	
25 (1) 3^n (2) 360		26 64번째	27 600	

1 같은 운동부 학생을 각각 한 사람으로 생각하면 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(4-1)!=3!=6$
그 각각에 대하여 같은 운동부 학생끼리 서로 자리를 바꾸어 앉는 방법의 수는 각각 $2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는 $6\times2\times2\times2\times2=96$

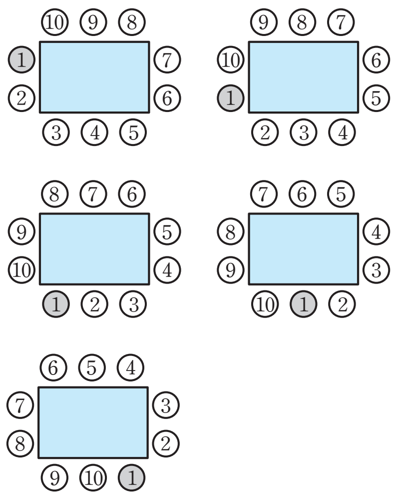
2 남학생 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는
$(3-1)!=2!=2$
여학생 3명이 남학생 사이사이의 3개의 자리에 앉는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 방법의 수는 $2\times6=12$

3 아이 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는
$(5-1)!=4!=24$
어른 3명이 아이 사이사이의 5개의 자리에 앉는 방법의 수는
${}_5P_3=60$
따라서 구하는 방법의 수는 $24\times60=1440$

4 정오각뿔의 밑면을 칠하는 방법의 수는 6
밑면에 칠한 색을 제외한 5가지 색을 사용하여 옆면 5개를 칠하는 방법의 수는 5가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로 $(5-1)!=4!=24$
따라서 구하는 방법의 수는 $6\times24=144$

5 작은 원의 안쪽 4개의 영역을 칠하는 4가지 색을 고르는 방법의 수는 ${}_8C_4=70$
고른 4가지 색으로 작은 원의 안쪽 4개의 영역을 칠하는 방법의 수는 $(4-1)!=3!=6$
남은 4가지 색으로 나머지 4개의 영역을 칠하는 방법의 수는
$4!=24$
따라서 구하는 방법의 수는 $70\times6\times24=10080$

6 10명을 원형으로 배열하는 방법의 수는 $(10-1)!=9!$
이때 직사각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 있다.



따라서 구하는 방법의 수는 $9!\times5$

7 구하는 방법의 수는 서로 다른 3개 중에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 $_3\Pi_4=3^4=81$

8 깃발을 1번, 2번, 3번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각
$_3\Pi_1=3$, $_3\Pi_2=3^2=9$, $_3\Pi_3=3^3=27$
따라서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는
$3+9+27=39$

9 4의 배수가 되려면 다섯 자리의 자연수의 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수이어야 하므로 그 경우는
□□□00, □□□12, □□□20, □□□32
의 4가지
그 각각에 대하여 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 3개, 나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 4개이므로
$3\times{}_4\Pi_2=3\times4^2=48$
따라서 4의 배수의 개수는 $4\times48=192$

10 학생 4명이 서로 다른 4인용 텐트 5개 중에서 각각 텐트를 한 개씩 택하는 경우의 수는 서로 다른 5개 중에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 $_5\Pi_4=5^4=625$
이때 학생 4명이 모두 다른 텐트를 택하는 경우의 수는
$_5P_4=120$
따라서 구하는 경우의 수는 $625-120=505$

11 a를 두 번 연속하여 나열하는 경우는
$aabb$, $baab$, $bbaa$, $aacc$, $caac$, $ccaa$,
$aabc$, $baac$, $bcaa$, $aacb$, $caab$, $cbaa$
의 12가지
a를 세 번 연속하여 나열하는 경우는
$aaab$, $baaa$, $aaac$, $caaa$의 4가지
a를 네 번 연속하여 나열하는 경우는
$aaaa$의 1가지
따라서 구하는 경우의 수는
$_3\Pi_4-(12+4+1)=3^4-17=64$

12 만들 수 있는 한 자리의 자연수의 개수는 $_4\Pi_1=4$
만들 수 있는 두 자리의 자연수의 개수는 $_4\Pi_2=4^2=16$
만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 $_4\Pi_3=4^3=64$
따라서 $4+16+64=84$이므로 90번째 수는
1111, 1112, 1113, 1114, 1121, 1122, 1123, …
에서 1122이다.

13 $f(3)=b$이므로 구하는 함수는 집합 Y의 원소 3개 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하고, 그 원소를 집합 X의 원소 1, 2, 4, 5에 각각 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는 $_3\Pi_4=3^4=81$

14 7개의 문자 A, A, B, B, B, C, D를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{7!}{2!\times3!}=420$
C, D를 한 문자로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{6!}{2!\times3!}=60$
그 각각에 대하여 C, D의 자리를 서로 바꾸어 배열하는 경우의 수는
$2!=2$
즉, C, D가 이웃하도록 배열하는 경우의 수는
$60\times2=120$
따라서 구하는 경우의 수는
$420-120=300$

15 5의 배수가 되려면 일의 자리의 숫자가 5이어야 한다.
나머지 자리에 올 수 있는 숫자를 택하는 경우의 수는 5를 제외한 5개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같다.
(i) 1, 1, 1을 택하는 경우
1, 1, 1을 나머지 자리에 배열하는 경우의 수는 1
(ii) 1, 1, 2를 택하는 경우
1, 1, 2를 나머지 자리에 배열하는 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}=3$
(iii) 1, 2, 2를 택하는 경우
1, 2, 2를 나머지 자리에 배열하는 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}=3$
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 5의 배수의 개수는
$1+3+3=7$

16 9개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{9!}{2!\times2!\times2!}=45360$
양 끝에 r를 배열하는 경우의 수는 양 끝에 r를 놓는 경우의 수가 1이고, 나머지 자리에 i, n, t, e, p, e, t를 배열하는 경우의 수가 $\frac{7!}{2!\times2!}=1260$이므로
$1\times1260=1260$
따라서 구하는 경우의 수는
$45360-1260=44100$

17 3개의 문자 D, A, M을 모두 x로, 2개의 문자 E, R를 모두 y로 생각하면 5개의 문자 x, x, x, y, y를 일렬로 배열한 후 첫 번째 x는 D, 두 번째 x는 A, 세 번째 x는 M으로 바꾸고 첫 번째 y는 E, 두 번째 y는 R로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는
$\frac{5!}{3!\times2!}=10$

18 4개의 문자를 택하는 방법은

A, A, B, C 또는 A, B, B, C 또는 A, B, C, C

로 3가지가 있다.

A, A, B, C를 일렬로 배열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

이때 두 문자 A, A를 한 문자로 생각하면 A, A를 이웃하게 배열하는 방법의 수는 3개의 문자를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로　$3!=6$

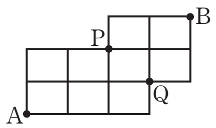
즉, 두 문자 A, A를 이웃하지 않게 배열하는 방법의 수는

$12-6=6$

같은 방법으로 A, B, B, C 또는 A, B, C, C를 택하여 같은 문자끼리 이웃하지 않게 배열하는 방법의 수는 각각　6

따라서 구하는 방법의 수는　$3\times6=18$

19 오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.



(i) A → P → B인 경우

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{3!}{2!}=18$

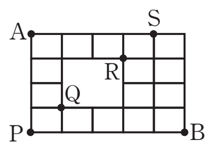
(ii) A → Q → B인 경우

$\frac{4!}{3!}\times\frac{3!}{2!}=12$

(i), (ii)에 의하여 구하는 최단 경로의 수는

$18+12=30$

20 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.



(i) A → P → B인 경우

$1\times1=1$

(ii) A → Q → B인 경우

$\frac{4!}{3!}\times\frac{5!}{4!}=20$

(iii) A → R → B인 경우

$\frac{4!}{3!}\times\frac{5!}{2!\times3!}=40$

(iv) A → S → B인 경우

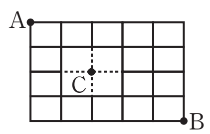
$1\times\frac{5!}{4!}=5$

(i)~(iv)에 의하여 구하는 최단 경로의 수는

$1+20+40+5=66$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 지점 C를 잡으면 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는



$\frac{9!}{5!\times4!}=126$

지점 A에서 지점 C를 거쳐 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{5!}{3!\times2!}=60$

따라서 구하는 최단 경로의 수는　$126-60=66$

21 가로 방향으로 한 칸 가는 것을 a, 세로 방향으로 한 칸 가는 것을 b, 아래쪽으로 한 칸 가는 것을 c라고 하자.

꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 가는 최단 경로의 수는 5개의 a, 2개의 b, 4개의 c를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{11!}{5!\times2!\times4!}=6930$

꼭짓점 A에서 꼭짓점 C까지 가는 최단 경로의 수는 2개의 a, 2개의 b를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

꼭짓점 C에서 꼭짓점 D까지 가는 최단 경로의 수는　1

꼭짓점 D에서 꼭짓점 B까지 가는 최단 경로의 수는 2개의 a, 4개의 c를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{6!}{2!\times4!}=15$

즉, 꼭짓점 A에서 모서리 CD를 거쳐 꼭짓점 B까지 가는 최단 경로의 수는

$6\times1\times15=90$

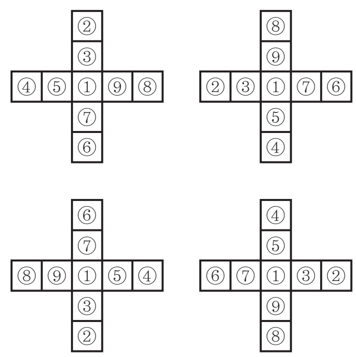
따라서 구하는 최단 경로의 수는

$6930-90=6840$

22 가운데 정사각형을 칠하는 방법의 수는　9

나머지 8가지 색을 사용하여 나머지 8개의 정사각형을 칠하는 방법의 수는 8개를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로　8!

이때 주어진 도형에서 8개의 정사각형을 칠하는 한 가지 방법에 대하여 다음과 같이 서로 같은 경우가 4가지씩 있다.



따라서 구하는 방법의 수는

$9\times\frac{8!}{4}=18\times7!$

23 공 5개를 서로 다른 가방 3개에 넣는 방법의 수는 서로 다른 3개 중에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

어느 한 가방에 넣은 공에 적힌 수의 합이 24보다 크려면 6, 8, 10이 각각 적힌 공을 포함하여 4개 이상의 공이 들어 있어야 하고, 그 경우의 수는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 어느 한 가방에 넣은 공이 4개인 경우

어느 한 가방에 넣은 공에 적힌 수가 2, 6, 8, 10이면 나머지 2개의 가방 중에서 한 가방에 넣은 공에 적힌 수는 4이고, 나머지 한 가방은 빈 가방이므로 그 경우의 수는

$3!=6$

또 어느 한 가방에 넣은 공에 적힌 수가 4, 6, 8, 10이면 나머지 2개의 가방 중에서 한 가방에 넣은 공에 적힌 수는 2이고, 나머지 한 가방은 빈 가방이므로 그 경우의 수는

$3!=6$

(ii) 어느 한 가방에 넣은 공이 5개인 경우

어느 한 가방에 넣은 공에 적힌 수가 2, 4, 6, 8, 10이면 나머지 2개의 가방은 빈 가방이므로 그 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

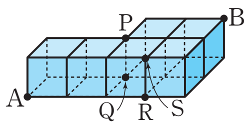
(i), (ii)에 의하여 어느 한 가방에 넣은 공에 적힌 수의 합이 24보다 큰 경우의 수는

$6+6+3=15$

따라서 구하는 방법의 수는

$243-15=228$

24 오른쪽 그림과 같이 네 꼭짓점 P, Q, R, S를 잡으면 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 가는 최단 경로의 수는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.



(i) A → P → B인 경우: $\dfrac{4!}{2!}\times\dfrac{3!}{2!}=36$

(ii) A → Q → B인 경우: $\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{4!}{2!}=36$

(iii) A → Q → P → B인 경우: $\dfrac{3!}{2!}\times1\times\dfrac{3!}{2!}=9$

(i), (ii), (iii)에 의하여 꼭짓점 A에서 꼭짓점 P 또는 꼭짓점 Q를 거쳐 꼭짓점 B까지 가는 최단 경로의 수는

$36+36-9=63$ …… ㉠

(iv) A → R → B인 경우: $1\times\dfrac{4!}{2!}=12$

(v) A → S → B인 경우: $\dfrac{4!}{3!}\times\dfrac{3!}{2!}=12$

(vi) A → R → S → B인 경우: $1\times1\times\dfrac{3!}{2!}=3$

(iv), (v), (vi)에 의하여 꼭짓점 A에서 꼭짓점 R 또는 꼭짓점 S를 거쳐 꼭짓점 B까지 가는 최단 경로의 수는

$12+12-3=21$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 구하는 최단 경로의 수는

$63+21=84$

25 (1) 3종류의 도형 중 n개를 택하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$_3\Pi_n=3^n$ …… (가)

(2) 3종류의 도형 중 2개 이상 5개 이하를 택하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$3^2+3^3+3^4+3^5=360$ …… (나)

채점 기준	배점
(가) 중복순열을 이용하여 만들 수 있는 신호의 개수를 구한다.	3점
(나) 도형을 2개 이상 5개 이하로 택하여 만들 수 있는 신호의 개수를 구한다.	3점

26 만들 수 있는 한 자리의 자연수의 개수는

3 …… (가)

만들 수 있는 두 자리의 자연수의 개수는

$3\times{}_4\Pi_1=3\times4=12$ …… (나)

만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$3\times{}_4\Pi_2=3\times4^2=48$ …… (다)

즉, 2000보다 작은 자연수의 개수는

$3+12+48=63$

따라서 2000은 64번째 수이다. …… (라)

채점 기준	배점
(가) 만들 수 있는 한 자리의 자연수의 개수를 구한다.	1점
(나) 만들 수 있는 두 자리의 자연수의 개수를 구한다.	2점
(다) 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수를 구한다.	2점
(라) 2000은 몇 번째 수인지 구한다.	2점

27 두 문자 a, a를 한 문자 A로 생각하면 a, a가 이웃하도록 배열하는 방법의 수는 6개의 문자 A, b, c, c, d, e를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{2!}=360$ …… (가)

두 문자 c, c를 한 문자 C로 생각하면 c, c가 이웃하도록 배열하는 방법의 수는 6개의 문자 a, a, b, C, d, e를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{2!}=360$ …… (나)

이때 문자 a는 a끼리, 문자 c는 c끼리 이웃하도록 배열하는 방법의 수는 5개의 문자 A, b, C, d, e를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로

$5!=120$ …… (다)

따라서 구하는 방법의 수는

$360+360-120=600$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 문자 a끼리 이웃하도록 배열하는 방법의 수를 구한다.	2점
(나) 문자 c끼리 이웃하도록 배열하는 방법의 수를 구한다.	2점
(다) 문자 a는 a끼리, 문자 c는 c끼리 이웃하도록 배열하는 방법의 수를 구한다.	2점
(라) 같은 문자는 적어도 한 쌍이 이웃하도록 배열하는 방법의 수를 구한다.	1점

03강 중복조합

확인 문제 p. 16

1 (1) ${}_{6}H_{2}={}_{6+2-1}C_{2}$
$={}_{7}C_{2}=21$
(2) ${}_{2}H_{8}={}_{2+8-1}C_{8}$
$={}_{9}C_{8}={}_{9}C_{1}=9$

2 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{5}H_{5}={}_{5+5-1}C_{5}$
$={}_{9}C_{5}={}_{9}C_{4}=126$

3 (1) 구하는 해의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3}H_{8}={}_{3+8-1}C_{8}={}_{10}C_{8}={}_{10}C_{2}=45$
(2) x, y, z가 양의 정수일 때, $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$로 놓으면 X, Y, Z는 음이 아닌 정수이다.
이때 $x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$을 방정식 $x+y+z=8$에 대입하면
$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=8$
$\therefore X+Y+Z=5$ …… ㉠
따라서 구하는 양의 정수해의 개수는 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 3개의 문자 X, Y, Z에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
$\therefore {}_{3}H_{5}={}_{3+5-1}C_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21$

교/과/서/속 핵심 유형+ 실전 문제 p. 17

1 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3}H_{6}={}_{3+6-1}C_{6}={}_{8}C_{6}={}_{8}C_{2}=28$

2 구하는 경우의 수는 서로 다른 8개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{8}H_{4}={}_{8+4-1}C_{4}={}_{11}C_{4}=330$
따라서 구하는 경우의 수는 ④이다.

3 먼저 4명의 학생에게 볼펜을 한 자루씩 나누어 주고, 나머지 볼펜 6자루를 4명의 학생에게 나누어 주면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{4}H_{6}={}_{4+6-1}C_{6}={}_{9}C_{6}={}_{9}C_{3}=84$

4 먼저 빨간 공, 노란 공, 파란 공을 각각 1개씩 꺼내고, 나머지 4개의 공을 꺼내면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$

5 $(x+y+z)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3}H_{5}={}_{3+5-1}C_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21$

6 $(a+b)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 a, b에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{2}H_{3}={}_{2+3-1}C_{3}={}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$
$(x+y+z)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$
따라서 구하는 항의 개수는
$4\times15=60$

7 (1) 구하는 해의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w에서 15개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{4}H_{15}={}_{4+15-1}C_{15}={}_{18}C_{15}={}_{18}C_{3}=816$
(2) x, y, z, w가 양의 정수일 때, $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$, $W=w-1$로 놓으면 X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수이다.
이때 $x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$, $w=W+1$을 방정식 $x+y+z+w=15$에 대입하면
$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+(W+1)=15$
$\therefore X+Y+Z+W=11$ …… ㉠
따라서 구하는 양의 정수해의 개수는 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 4개의 문자 X, Y, Z, W에서 11개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
$\therefore {}_{4}H_{11}={}_{4+11-1}C_{11}={}_{14}C_{11}={}_{14}C_{3}=364$

8 a의 값은 3개의 문자 x, y, z에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$a={}_{3}H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_{2}=66$
한편 x, y, z가 자연수일 때, $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$로 놓으면 X, Y, Z는 음이 아닌 정수이다.
이때 $x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$을 방정식 $x+y+z=10$에 대입하면
$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=10$
$\therefore X+Y+Z=7$ …… ㉠
따라서 b의 값은 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 3개의 문자 X, Y, Z에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
$\therefore b={}_{3}H_{7}={}_{3+7-1}C_{7}={}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=36$
$\therefore a+b=66+36=102$

04강 이항정리

확인 문제 p. 18

1 (1) $(2a+b)^5={}_5C_0(2a)^5+{}_5C_1(2a)^4b+{}_5C_2(2a)^3b^2$
$+{}_5C_3(2a)^2b^3+{}_5C_4(2a)b^4+{}_5C_5b^5$
$=32a^5+80a^4b+80a^3b^2+40a^2b^3+10ab^4+b^5$

(2) $(x-3y)^4={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3(-3y)+{}_4C_2x^2(-3y)^2$
$+{}_4C_3x(-3y)^3+{}_4C_4(-3y)^4$
$=x^4-12x^3y+54x^2y^2-108xy^3+81y^4$

2

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

(1) $(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

(2) $(a-b)^6$
$=a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$

교/과/서/속 핵심 유형+ 실전 문제 p. 19

1 (1) $(3x+2y)^7$의 전개식의 일반항은
${}_7C_r(3x)^{7-r}(2y)^r={}_7C_r3^{7-r}2^rx^{7-r}y^r$
xy^6항은 $7-r=1$, $r=6$일 때이므로 $r=6$
따라서 xy^6의 계수는 ${}_7C_6\times3\times2^6=1344$

(2) $\left(x-\dfrac{3}{x^3}\right)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_rx^{4-r}\left(-\dfrac{3}{x^3}\right)^r={}_4C_r(-3)^r\dfrac{x^{4-r}}{x^{3r}}$
상수항은 $4-r=3r$일 때이므로 $r=1$
따라서 상수항은 ${}_4C_1\times(-3)=-12$

2 $(4x-y)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(4x)^{5-r}(-y)^r={}_5C_r4^{5-r}(-1)^rx^{5-r}y^r$
x^2y^3항은 $5-r=2$, $r=3$일 때이므로 $r=3$
$\therefore a={}_5C_3\times4^2\times(-1)^3=-160$
$\left(x^2+\dfrac{5}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r(x^2)^{6-r}\left(\dfrac{5}{x}\right)^r={}_6C_r5^r\dfrac{x^{12-2r}}{x^r}$
x^9항은 $(12-2r)-r=9$일 때이므로 $r=1$
$\therefore b={}_6C_1\times5=30$
$\therefore b-a=30-(-160)=190$

3 (1) $(x+1)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3C_rx^{3-r}$
$(x+2)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5C_sx^{5-s}2^s$
따라서 $(x+1)^3(x+2)^5$의 전개식의 일반항은
${}_3C_rx^{3-r}\times{}_5C_sx^{5-s}2^s={}_3C_r{}_5C_s2^sx^{8-r-s}$ …… ㉠
x^2항은 $8-r-s=2$, 즉 $r+s=6$
$(0\le r\le3,\ 0\le s\le5$인 정수)일 때이므로
(i) $r=1$, $s=5$인 경우
㉠에서 ${}_3C_1\times{}_5C_5\times2^5=96$
(ii) $r=2$, $s=4$인 경우
㉠에서 ${}_3C_2\times{}_5C_4\times2^4=240$
(iii) $r=3$, $s=3$인 경우
㉠에서 ${}_3C_3\times{}_5C_3\times2^3=80$
(i), (ii), (iii)에 의하여 x^2의 계수는
$96+240+80=416$

(2) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_rx^{4-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_4C_r(-1)^r\dfrac{x^{4-r}}{x^r}$ …… ㉠
$(x^2+1)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항은 x^2과 ㉠의 $\dfrac{1}{x^2}$항, 1과 ㉠의 상수항이 곱해질 때 나타난다.
(i) ㉠에서 $\dfrac{1}{x^2}$항은 $r-(4-r)=2$, 즉 $r=3$일 때이므로
${}_4C_3\times(-1)^3\times\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{4}{x^2}$
(ii) ㉠에서 상수항은 $4-r=r$, 즉 $r=2$일 때이므로
${}_4C_2\times(-1)^2=6$
(i), (ii)에 의하여 상수항은
$x^2\times\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)+1\times6=2$

4 $(x-1)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_rx^{4-r}(-1)^r={}_4C_r(-1)^rx^{4-r}$
$(2x+1)^3$의 전개식의 일반항은
${}_3C_s(2x)^{3-s}1^s={}_3C_s2^{3-s}x^{3-s}$
따라서 $(x-1)^4(2x+1)^3$의 전개식의 일반항은
${}_4C_r(-1)^rx^{4-r}\times{}_3C_s2^{3-s}x^{3-s}$
$={}_4C_r{}_3C_s(-1)^r2^{3-s}x^{7-r-s}$ …… ㉠
x^5항은 $7-r-s=5$, 즉 $r+s=2$
$(0\le r\le4,\ 0\le s\le3$인 정수)일 때이므로
(i) $r=0$, $s=2$인 경우
㉠에서 ${}_4C_0\times{}_3C_2\times2=6$
(ii) $r=1$, $s=1$인 경우
㉠에서 ${}_4C_1\times{}_3C_1\times(-1)\times2^2=-48$
(iii) $r=2$, $s=0$인 경우
㉠에서 ${}_4C_2\times{}_3C_0\times(-1)^2\times2^3=48$
(i), (ii), (iii)에 의하여 x^5의 계수는
$6+(-48)+48=6$
따라서 x^5의 계수는 ②이다.

5 ${}_{2}C_{2}+{}_{3}C_{2}+{}_{4}C_{2}+\cdots+{}_{8}C_{2}$
$={}_{3}C_{3}+{}_{3}C_{2}+{}_{4}C_{2}+{}_{5}C_{2}+{}_{6}C_{2}+{}_{7}C_{2}+{}_{8}C_{2}$
$={}_{4}C_{3}+{}_{4}C_{2}+{}_{5}C_{2}+{}_{6}C_{2}+{}_{7}C_{2}+{}_{8}C_{2}$
$={}_{5}C_{3}+{}_{5}C_{2}+{}_{6}C_{2}+{}_{7}C_{2}+{}_{8}C_{2}$
$={}_{6}C_{3}+{}_{6}C_{2}+{}_{7}C_{2}+{}_{8}C_{2}$
$={}_{7}C_{3}+{}_{7}C_{2}+{}_{8}C_{2}$
$={}_{8}C_{3}+{}_{8}C_{2}={}_{9}C_{3}=84$

6 ${}_{2}C_{0}+{}_{3}C_{1}+{}_{4}C_{2}+\cdots+{}_{9}C_{7}$
$={}_{3}C_{0}+{}_{3}C_{1}+{}_{4}C_{2}+{}_{5}C_{3}+{}_{6}C_{4}+{}_{7}C_{5}+{}_{8}C_{6}+{}_{9}C_{7}$
$={}_{4}C_{1}+{}_{4}C_{2}+{}_{5}C_{3}+{}_{6}C_{4}+{}_{7}C_{5}+{}_{8}C_{6}+{}_{9}C_{7}$
$={}_{5}C_{2}+{}_{5}C_{3}+{}_{6}C_{4}+{}_{7}C_{5}+{}_{8}C_{6}+{}_{9}C_{7}$
$={}_{6}C_{3}+{}_{6}C_{4}+{}_{7}C_{5}+{}_{8}C_{6}+{}_{9}C_{7}$
$={}_{7}C_{4}+{}_{7}C_{5}+{}_{8}C_{6}+{}_{9}C_{7}$
$={}_{8}C_{5}+{}_{8}C_{6}+{}_{9}C_{7}$
$={}_{9}C_{6}+{}_{9}C_{7}={}_{10}C_{7}$
따라서 구하는 것은 ⑤이다.

7 (1) ${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n}$이므로
${}_{10}C_{0}+{}_{10}C_{1}+{}_{10}C_{2}+\cdots+{}_{10}C_{10}$
$=2^{10}=1024$
(2) ${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{4}+\cdots=2^{n-1}$이므로
${}_{11}C_{0}+{}_{11}C_{2}+{}_{11}C_{4}+\cdots+{}_{11}C_{10}$
$=2^{11-1}=2^{10}=1024$
(3) ${}_{n}C_{0}-{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}-\cdots+(-1)^{n}{}_{n}C_{n}=0$이므로
${}_{15}C_{0}-{}_{15}C_{1}+{}_{15}C_{2}-{}_{15}C_{3}+{}_{15}C_{4}-\cdots+{}_{15}C_{14}-{}_{15}C_{15}=0$
$\therefore {}_{15}C_{1}-{}_{15}C_{2}+{}_{15}C_{3}-{}_{15}C_{4}+\cdots-{}_{15}C_{14}$
$={}_{15}C_{0}-{}_{15}C_{15}=1-1=0$

8 ${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n}$이므로
${}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n}-{}_{n}C_{0}=2^{n}-1$
따라서 주어진 부등식은
$2000<2^{n}-1<3000$, $2001<2^{n}<3001$
이때 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로
$n=11$
따라서 구하는 자연수 n의 값은 ④이다.

계산력 다지기 p. 20~21

1 (1) ${}_{4}H_{2}={}_{4+2-1}C_{2}={}_{5}C_{2}$이므로 $n=5$
(2) ${}_{2}H_{3}={}_{2+3-1}C_{3}={}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}$이므로 $n=4$
(3) ${}_{6}H_{r}={}_{6+r-1}C_{r}={}_{5+r}C_{r}$이므로
${}_{5+r}C_{r}={}_{9}C_{4}$ $\therefore r=4$
(4) ${}_{3}H_{r}={}_{3+r-1}C_{r}={}_{2+r}C_{r}$이므로
${}_{2+r}C_{r}={}_{7}C_{2}={}_{7}C_{5}$ $\therefore r=5$
(5) ${}_{n}H_{2}={}_{n+2-1}C_{2}={}_{n+1}C_{2}=\dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!}=\dfrac{n(n+1)}{2}$
즉, $\dfrac{n(n+1)}{2}=45$에서 $n(n+1)=90=9\times10$
$\therefore n=9$
(6) ${}_{n}H_{3}={}_{n+3-1}C_{3}={}_{n+2}C_{3}=\dfrac{(n+2)!}{3!(n-1)!}$
$=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$
즉, $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}=4$에서
$n(n+1)(n+2)=24=2\times3\times4$
$\therefore n=2$

2 (1) 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3}H_{7}={}_{3+7-1}C_{7}={}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=36$
(2) 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{6}H_{4}={}_{6+4-1}C_{4}={}_{9}C_{4}=126$
(3) 먼저 5개의 상자에 초콜릿을 한 개씩 나누어 넣고, 나머지 초콜릿 3개를 5개의 상자에 넣으면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{5}H_{3}={}_{5+3-1}C_{3}={}_{7}C_{3}=35$
(4) 먼저 떡, 과자, 과일을 각각 1개씩 접시에 담고, 나머지 6개를 담으면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3}H_{6}={}_{3+6-1}C_{6}={}_{8}C_{6}={}_{8}C_{2}=28$

3 (1) $(x+y+z)^{6}$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3}H_{6}={}_{3+6-1}C_{6}={}_{8}C_{6}={}_{8}C_{2}=28$
(2) $(a+b+c+d)^{4}$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{4}H_{4}={}_{4+4-1}C_{4}={}_{7}C_{4}={}_{7}C_{3}=35$
(3) $(x+y)^{3}$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 x, y에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{2}H_{3}={}_{2+3-1}C_{3}={}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$
$(a+b+c)^{5}$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3}H_{5}={}_{3+5-1}C_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21$
따라서 구하는 항의 개수는 $4\times21=84$
(4) $(a+b)^{4}$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 a, b에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{2}H_{4}={}_{2+4-1}C_{4}={}_{5}C_{4}={}_{5}C_{1}=5$

$(x+y+z)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 항의 개수는 $5\times15=75$

4 (1) m의 값은 3개의 문자 x, y, z에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$m={}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

한편 x, y, z가 양의 정수일 때, $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$로 놓으면 X, Y, Z는 음이 아닌 정수이다.

이때 $x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$을 방정식 $x+y+z=6$에 대입하면

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=6$

$\therefore X+Y+Z=3$ …… ㉠

따라서 n의 값은 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 3개의 문자 X, Y, Z에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore n={}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

$\therefore m+n=28+10=38$

(2) m의 값은 3개의 문자 x, y, z에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$m={}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

한편 x, y, z가 양의 정수일 때, $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$로 놓으면 X, Y, Z는 음이 아닌 정수이다.

이때 $x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$을 방정식 $x+y+z=7$에 대입하면

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=7$

$\therefore X+Y+Z=4$ …… ㉠

따라서 n의 값은 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 3개의 문자 X, Y, Z에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore n={}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

$\therefore m+n=36+15=51$

(3) m의 값은 4개의 문자 x, y, z, w에서 11개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$m={}_4H_{11}={}_{4+11-1}C_{11}={}_{14}C_{11}={}_{14}C_3=364$

한편 x, y, z, w가 양의 정수일 때, $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$, $W=w-1$로 놓으면 X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수이다.

이때 $x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$, $w=W+1$을 방정식 $x+y+z+w=11$에 대입하면

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+(W+1)=11$

$\therefore X+Y+Z+W=7$ …… ㉠

따라서 n의 값은 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 4개의 문자 X, Y, Z, W에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore n={}_4H_7={}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$

$\therefore m+n=364+120=484$

(4) m의 값은 4개의 문자 x, y, z, w에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$m={}_4H_{12}={}_{4+12-1}C_{12}={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3=455$

한편 x, y, z, w가 양의 정수일 때, $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$, $W=w-1$로 놓으면 X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수이다.

이때 $x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$, $w=W+1$을 방정식 $x+y+z+w=12$에 대입하면

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+(W+1)=12$

$\therefore X+Y+Z+W=8$ …… ㉠

따라서 n의 값은 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 4개의 문자 X, Y, Z, W에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore n={}_4H_8={}_{4+8-1}C_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

$\therefore m+n=455+165=620$

5 (1) $(a-b)^3={}_3C_0a^3+{}_3C_1a^2(-b)+{}_3C_2a(-b)^2+{}_3C_3(-b)^3$
$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(2) $(x+1)^4={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3+{}_4C_2x^2+{}_4C_3x+{}_4C_4\times1$
$=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

(3) $(x+2y)^4={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3(2y)+{}_4C_2x^2(2y)^2+{}_4C_3x(2y)^3+{}_4C_4(2y)^4$
$=x^4+8x^3y+24x^2y^2+32xy^3+16y^4$

(4) $(3a-b)^5={}_5C_0(3a)^5+{}_5C_1(3a)^4(-b)+{}_5C_2(3a)^3(-b)^2+{}_5C_3(3a)^2(-b)^3+{}_5C_4(3a)(-b)^4+{}_5C_5(-b)^5$
$=243a^5-405a^4b+270a^3b^2-90a^2b^3+15ab^4-b^5$

(5) $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^5={}_5C_0a^5+{}_5C_1a^4\left(\dfrac{1}{a}\right)+{}_5C_2a^3\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+{}_5C_3a^2\left(\dfrac{1}{a}\right)^3+{}_5C_4a\left(\dfrac{1}{a}\right)^4+{}_5C_5\left(\dfrac{1}{a}\right)^5$
$=a^5+5a^3+10a+\dfrac{10}{a}+\dfrac{5}{a^3}+\dfrac{1}{a^5}$

(6) $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^4={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\left(-\dfrac{2}{x}\right)+{}_4C_2x^2\left(-\dfrac{2}{x}\right)^2+{}_4C_3x\left(-\dfrac{2}{x}\right)^3+{}_4C_4\left(-\dfrac{2}{x}\right)^4$
$=x^4-8x^2+24-\dfrac{32}{x^2}+\dfrac{16}{x^4}$

6 (1) $(x+y)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5C_rx^{5-r}y^r$

x^3y^2항은 $5-r=3$, $r=2$일 때이므로 $r=2$

따라서 x^3y^2의 계수는

${}_5C_2=10$

(2) $(2x-y)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(2x)^{6-r}(-y)^r={}_6C_r2^{6-r}(-1)^rx^{6-r}y^r$

x^2y^4항은 $6-r=2$, $r=4$일 때이므로 $r=4$

따라서 x^2y^4의 계수는

${}_6C_4\times2^2\times(-1)^4=60$

(3) $\left(x-\dfrac{3}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r\,x^{4-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r={}_4C_r\,(-3)^r\,\frac{x^{4-r}}{x^r}$$

상수항은 $4-r=r$일 때이므로 $\quad r=2$

따라서 상수항은

${}_4C_2\times(-3)^2=54$

(4) $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r\,(x^2)^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r\,\frac{x^{10-2r}}{x^r}$$

x^4항은 $(10-2r)-r=4$일 때이므로 $\quad r=2$

따라서 x^4의 계수는

${}_5C_2=10$

7 (1) ${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$

$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$

$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$

$={}_4C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$

$={}_5C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$

$={}_6C_4+{}_6C_5$

$={}_7C_5={}_7C_2=21$

(2) ${}_4C_2+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3$

$={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3$

$={}_5C_4+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3$

$={}_6C_4+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3$

$={}_7C_4+{}_7C_3+{}_8C_3$

$={}_8C_4+{}_8C_3$

$={}_9C_4=126$

(3) ${}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5=2^5=32$

(4) ${}_6C_0-{}_6C_1+{}_6C_2-{}_6C_3+{}_6C_4-{}_6C_5+{}_6C_6=0$

(5) ${}_7C_1+{}_7C_3+{}_7C_5+{}_7C_7=2^{7-1}=2^6=64$

(6) ${}_8C_0+{}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8=2^{8-1}=2^7=128$

03~04강 족집게 기출문제 p. 22~25

1 ④	2 ③	3 ③	4 ①	5 ⑤
6 4	7 146	8 15	9 ②	10 5
11 ③	12 ②	13 374	14 ⑤	15 9
16 8	17 ④	18 512	19 ③	20 ④
21 ①	22 85	23 ②	24 ⑤	25 10
26 (1) 4 (2) 20		27 -9		

1 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$

2 먼저 4명의 학생에게 사인펜을 한 자루씩 나누어 주고, 나머지 사인펜 2자루를 4명의 학생에게 나누어 주면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_5C_2=10$

3 먼저 감, 귤, 자두를 각각 3개씩 고르고, 나머지 5개를 고르면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

4 먼저 2개의 통 A, B에 각각 2개, 3개의 조약돌을 담고, 나머지 10개의 조약돌을 4개의 통에 나누어 담으면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 4개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=286$

5 $(x+y)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 x, y에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

$(a+b+c)^7$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

따라서 구하는 항의 개수는

$5\times36=180$

6 $(x+y+z)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_n={}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2=\frac{(n+2)!}{2!\,n!}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

즉, $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}=15$에서

$(n+2)(n+1)=30=6\times5$

$\therefore\ n=4$

7 a의 값은 3개의 문자 x, y, z에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$a={}_3H_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=91$

한편 x, y, z가 자연수일 때, $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$로 놓으면 X, Y, Z는 음이 아닌 정수이다.

이때 $x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$을 방정식 $x+y+z=12$에 대입하면

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=12$

$\therefore\ X+Y+Z=9 \quad \cdots\cdots$ ㉠

따라서 b의 값은 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 3개의 문자 X, Y, Z에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ b={}_3H_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

$\therefore\ a+b=91+55=146$

8 $A=a-1$, $B=b-2$, $C=c-3$으로 놓으면
$A\geq 0$, $B\geq 0$, $C\geq 0$
이때 $a=A+1$, $b=B+2$, $c=C+3$을 방정식
$a+b+c=10$에 대입하면
$(A+1)+(B+2)+(C+3)=10$
$\therefore A+B+C=4$ …… ㉠
따라서 구하는 해의 개수는 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 3개의 문자 A, B, C에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
$\therefore {}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

9 $(ax+y)^7$의 전개식의 일반항은
${}_7\mathrm{C}_r(ax)^{7-r}y^r={}_7\mathrm{C}_r\,a^{7-r}x^{7-r}y^r$
x^3y^4항은 $7-r=3$, $r=4$일 때이므로 $r=4$
이때 x^3y^4의 계수가 -280이므로
${}_7\mathrm{C}_4\times a^3=-280$, $35a^3=-280$
$a^3=-8$ $\therefore a=-2$ ($\because a$는 실수)
즉, $(-2x+y)^7$의 전개식의 일반항은
${}_7\mathrm{C}_r(-2)^{7-r}x^{7-r}y^r$
x^2y^5항은 $7-r=2$, $r=5$일 때이므로 $r=5$
따라서 x^2y^5의 계수는
${}_7\mathrm{C}_5\times(-2)^2=84$

10 $\left(x^3+\dfrac{3}{x^2}\right)^n$의 전개식의 일반항은
${}_n\mathrm{C}_r(x^3)^{n-r}\left(\dfrac{3}{x^2}\right)^r={}_n\mathrm{C}_r\,x^{3n-3r}\dfrac{3^r}{x^{2r}}={}_n\mathrm{C}_r\,3^r\dfrac{x^{3n-3r}}{x^{2r}}$
상수항은 $3n-3r=2r$일 때이므로
$r=\dfrac{3}{5}n$
이때 n, r는 자연수이고 5와 3은 서로소이므로 n은 5의 배수, r는 3의 배수이다.
따라서 자연수 n의 최솟값은 5이다.

11 $x(x+a)(x+3)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는
$(x+a)(x+3)^5$의 전개식에서 x^3의 계수와 같다.
$(x+3)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r\,x^{5-r}3^r={}_5\mathrm{C}_r\,3^rx^{5-r}$ …… ㉠
이때 $(x+a)(x+3)^5$의 전개식에서 x^3항은 x와 ㉠의 x^2항, a와 ㉠의 x^3항이 곱해질 때 나타난다.
(i) ㉠에서 x^2항은 $5-r=2$, 즉 $r=3$일 때이므로
${}_5\mathrm{C}_3\times 3^3=270$
(ii) ㉠에서 x^3항은 $5-r=3$, 즉 $r=2$일 때이므로
${}_5\mathrm{C}_2\times 3^2=90$
(i), (ii)에 의하여 $(x+a)(x+3)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는
$1\times 270+a\times 90=90a+270$
이때 $x(x+a)(x+3)^5$의 전개식에서 x^4의 계수가 90이므로
$90a+270=90$, $90a=-180$
$\therefore a=-2$

12 ${}_3\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3$
$={}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_3$

13 ${}_2\mathrm{C}_0={}_3\mathrm{C}_0=\cdots={}_{12}\mathrm{C}_0=1$이므로
${}_2\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_0+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_0=11$
${}_1\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_1$
$={}_2\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_1$
$={}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_1$
$={}_4\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_1$
$\vdots$
$={}_{12}\mathrm{C}_2+{}_{12}\mathrm{C}_1={}_{13}\mathrm{C}_2$
이므로
${}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_1={}_{13}\mathrm{C}_2-{}_1\mathrm{C}_1=77$
${}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_2$
$={}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_2$
$={}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_2$
$={}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_2$
$\vdots$
$={}_{12}\mathrm{C}_3+{}_{12}\mathrm{C}_2={}_{13}\mathrm{C}_3=286$
따라서 구하는 모든 수의 합은
$11+77+286=374$

14 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_n\mathrm{C}_r\,x^r$이므로 $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 $(1+x)^n$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_2$이다.
따라서 주어진 식의 전개식에서 x^2의 계수는 각 항의 전개식에서 x^2의 계수의 합이므로 구하는 계수는
${}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{11}\mathrm{C}_2$
$={}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{11}\mathrm{C}_2$
$={}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{11}\mathrm{C}_2$
$={}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{11}\mathrm{C}_2$
$\vdots$
$={}_{11}\mathrm{C}_3+{}_{11}\mathrm{C}_2={}_{12}\mathrm{C}_3=220$

15 ${}_2\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{18}$
$={}_3\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{18}$
$={}_4\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{18}$
$={}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{18}$
$\vdots$
$={}_{20}\mathrm{C}_{17}+{}_{20}\mathrm{C}_{18}={}_{21}\mathrm{C}_{18}$
따라서 ${}_n\mathrm{C}_{18}={}_{21}\mathrm{C}_{18}$이므로 $n=21$
${}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{15}\mathrm{C}_3$
$={}_4\mathrm{C}_4+{}_4\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{15}\mathrm{C}_3$
$={}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{15}\mathrm{C}_3$
$={}_6\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{15}\mathrm{C}_3$
$\vdots$
$={}_{15}\mathrm{C}_4+{}_{15}\mathrm{C}_3={}_{16}\mathrm{C}_4$
따라서 ${}_{16}\mathrm{C}_r={}_{16}\mathrm{C}_4$이므로 $r=4$ 또는 $r=12$
그런데 $8<r<16$이므로 $r=12$
$\therefore n-r=21-12=9$

16 ${}_{n}C_0+{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+{}_{n}C_3+\cdots+{}_{n}C_n=2^n$이므로

${}_{n}C_1+{}_{n}C_2+{}_{n}C_3+\cdots+{}_{n}C_n$

$=2^n-{}_{n}C_0=2^n-1$

따라서 $2^n-1=255$이므로

$2^n=256=2^8 \quad \therefore n=8$

17 ${}_{16}C_0+{}_{16}C_2+{}_{16}C_4+\cdots+{}_{16}C_{16}=2^{16-1}=2^{15}$

${}_{9}C_0+{}_{9}C_1+{}_{9}C_2+{}_{9}C_3+{}_{9}C_4$

$={}_{9}C_0+{}_{9}C_8+{}_{9}C_2+{}_{9}C_6+{}_{9}C_4$

$={}_{9}C_0+{}_{9}C_2+{}_{9}C_4+{}_{9}C_6+{}_{9}C_8$

$=2^{9-1}=2^8$

따라서 $\dfrac{{}_{16}C_0+{}_{16}C_2+{}_{16}C_4+\cdots+{}_{16}C_{16}}{{}_{9}C_0+{}_{9}C_1+{}_{9}C_2+{}_{9}C_3+{}_{9}C_4}=\dfrac{2^{15}}{2^8}=2^7$이므로

$n=7$

18 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이므로 집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 n인 부분집합의 개수는 집합 A의 원소 중 n개를 택하는 경우의 수와 같다.

$\therefore {}_{10}C_n$

따라서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

${}_{10}C_1+{}_{10}C_3+{}_{10}C_5+{}_{10}C_7+{}_{10}C_9=2^{10-1}=2^9=512$

19 ㄱ. ${}_{14}C_0+{}_{14}C_1+{}_{14}C_2+\cdots+{}_{14}C_{14}=2^{14}$이므로

${}_{14}C_0+{}_{14}C_1+{}_{14}C_2+\cdots+{}_{14}C_{13}$

$=2^{14}-{}_{14}C_{14}=2^{14}-1$

ㄴ. ${}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_{11}$

$={}_{11}C_6+{}_{11}C_4+{}_{11}C_8+{}_{11}C_2+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_0$

$={}_{11}C_0+{}_{11}C_2+{}_{11}C_4+{}_{11}C_6+{}_{11}C_8+{}_{11}C_{10}$

$=2^{11-1}=2^{10}$

ㄷ. ${}_{3n}C_0+{}_{3n}C_1+{}_{3n}C_2+\cdots+{}_{3n}C_{3n}=2^{3n}=8^n$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

20 ${}_{50}C_0\times9+{}_{50}C_1\times9^2+{}_{50}C_2\times9^3+\cdots+{}_{50}C_{50}\times9^{51}$

$=9({}_{50}C_0+{}_{50}C_1\times9+{}_{50}C_2\times9^2+\cdots+{}_{50}C_{50}\times9^{50})$

$=9({}_{50}C_0\times1^{50}+{}_{50}C_1\times1^{49}\times9^1+{}_{50}C_2\times1^{48}\times9^2$
$+\cdots+{}_{50}C_{50}\times9^{50})$

$=9(1+9)^{50}=9\times10^{50}$

21 $15^{12}=(13+2)^{12}$

$={}_{12}C_0\times13^{12}+{}_{12}C_1\times13^{11}\times2+{}_{12}C_2\times13^{10}\times2^2$
$+\cdots+{}_{12}C_{11}\times13\times2^{11}+{}_{12}C_{12}\times2^{12}$

${}_{12}C_{12}\times2^{12}$을 제외한 나머지 항은 모두 13의 배수이므로 15^{12}을 13으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{12}C_{12}\times2^{12}$, 즉 4096을 13으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 $4096=13\times315+1$이므로 구하는 나머지는 1이다.

22 ㈎에 의하여 a, b, c는 모두 홀수이거나 a, b, c 중 두 수는 짝수이고 나머지 한 수는 홀수이다.

(ⅰ) 세 수가 모두 홀수인 경우

㈏에서 1, 3, 5, 7, 9의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하면 되므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_{5}H_3={}_{7}C_3=35$

(ⅱ) 두 수는 짝수이고 나머지 한 수는 홀수인 경우

2, 4, 6, 8의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하고, 1, 3, 5, 7, 9의 5개에서 1개를 택하면 되므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_{4}H_2\times{}_{5}C_1={}_{5}C_2\times{}_{5}C_1=10\times5=50$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$35+50=85$

23 (ⅰ) $x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le x_5$인 경우의 수는 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{5}H_5={}_{9}C_5={}_{9}C_4=126$

(ⅱ) $x_1=x_2\le x_3\le x_4\le x_5$인 경우의 수는 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{5}H_4={}_{8}C_4=70$

(ⅲ) $x_1\le x_2\le x_3\le x_4=x_5$인 경우의 수는 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{5}H_4={}_{8}C_4=70$

(ⅳ) $x_1=x_2\le x_3\le x_4=x_5$인 경우의 수는 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{5}H_3={}_{7}C_3=35$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$126-(70+70-35)=21$

24 $11^{12}=(1+10)^{12}$

$={}_{12}C_0+{}_{12}C_1\times10+{}_{12}C_2\times10^2+{}_{12}C_3\times10^3$
$+\cdots+{}_{12}C_{12}\times10^{12}$

$=1+120+6600+{}_{12}C_3\times10^3+\cdots+{}_{12}C_{12}\times10^{12}$

$=6721+{}_{12}C_3\times10^3+\cdots+{}_{12}C_{12}\times10^{12}$

이때 10^3이 곱해진 항 이후에는 백의 자리 이하의 숫자에 영향을 미치지 않으므로 11^{12}의 일의 자리의 숫자는 1, 십의 자리의 숫자는 2, 백의 자리의 숫자는 7이다.

따라서 $a=7$, $b=2$, $c=1$이므로

$a+b+c=10$

25 x, y, z가 음이 아닌 정수이므로

$x+y+z=0$ 또는 $x+y+z=1$ 또는 $x+y+z=2$

(ⅰ) 방정식 $x+y+z=0$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_{3}H_0={}_{2}C_0=1$ …… ㈎

(ⅱ) 방정식 $x+y+z=1$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_{3}H_1={}_{3}C_1=3$ …… ㈏

(ⅲ) 방정식 $x+y+z=2$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_{3}H_2={}_{4}C_2=6$ …… ㈐

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 해의 개수는

$1+3+6=10$ …… ㈑

채점 기준	배점
(가) 방정식 $x+y+z=0$의 음이 아닌 정수해의 개수를 구한다.	2점
(나) 방정식 $x+y+z=1$의 음이 아닌 정수해의 개수를 구한다.	2점
(다) 방정식 $x+y+z=2$의 음이 아닌 정수해의 개수를 구한다.	2점
(라) 주어진 부등식을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수를 구한다.	1점

26 (1) 주어진 조건에 의하여

$f(1)<f(2)<f(3)$ ······ ㉠ ······ (가)

따라서 이를 만족하는 함수 f의 개수는 정의역의 원소 3개에 대응할 공역의 원소 4개 중 3개를 순서에 상관없이 뽑은 후 ㉠을 만족하도록 크기순으로 배열하는 조합의 수와 같으므로

${}_4C_3={}_4C_1=4$ ······ (나)

(2) 주어진 조건에 의하여

$f(1)\le f(2)\le f(3)$ ······ ㉡ ······ (다)

따라서 이를 만족하는 함수 f의 개수는 정의역의 원소 3개에 대응할 공역의 원소 4개 중 3개를 순서에 상관없이 중복을 허용하여 뽑은 후 ㉡을 만족하도록 크기순으로 배열하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_3={}_6C_3=20$ ······ (라)

채점 기준	배점
(가) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 대소 관계를 파악한다.	1점
(나) $f(1)<f(2)<f(3)$인 함수의 개수를 구한다.	2점
(다) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 대소 관계를 파악한다.	1점
(라) $f(1)\le f(2)\le f(3)$인 함수의 개수를 구한다.	2점

27 $(-2x+1)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(-2x)^r={}_4C_r(-2)^r x^r$

$(x+1)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6C_s x^s$

따라서 주어진 전개식의 일반항은

${}_4C_r(-2)^r x^r \times {}_6C_s x^s$

$={}_4C_r\,{}_6C_s(-2)^r x^{r+s}$ ······ ㉠ ······ (가)

이때 x^2항은 $r+s=2\,(0\le r\le 4,\ 0\le s\le 6$인 정수$)$일 때이므로

(i) $r=0$, $s=2$인 경우

㉠에서 ${}_4C_0\times{}_6C_2=15$

(ii) $r=1$, $s=1$인 경우

㉠에서 ${}_4C_1\times{}_6C_1\times(-2)=-48$

(iii) $r=2$, $s=0$인 경우

㉠에서 ${}_4C_2\times{}_6C_0\times(-2)^2=24$ ······ (나)

(i), (ii), (iii)에 의하여 x^2의 계수는

$15+(-48)+24=-9$ ······ (다)

채점 기준	배점
(가) 주어진 전개식의 일반항을 구한다.	2점
(나) 각 경우에서의 x^2의 계수를 구한다.	3점
(다) 주어진 전개식에서 x^2의 계수를 구한다.	2점

05강 확률의 뜻

확인 문제 p. 26

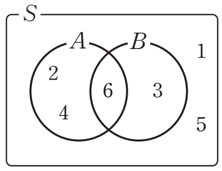
1 표본공간: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

근원사건: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$

2 표본공간을 S라고 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{3, 6\}$



(1) $A\cup B=\{2, 3, 4, 6\}$

(2) $A\cap B=\{6\}$

(3) $A^C=\{1, 3, 5\}$

3 (1) 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times 6=36$

서로 같은 수의 눈이 나오는 경우는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$

이므로 그 경우의 수는 6

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(2) 윷짝 한 개를 한 번 던질 때 평평한 면이 나올 확률은

$\frac{284}{700}=\frac{71}{175}$

교/과/서/속 핵심+유형 실전 문제 p. 27

1 표본공간을 S라고 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A=\{1, 3, 5, 7\}$,

$B=\{2, 4, 6, 8\}$, $C=\{2, 3, 5, 7\}$

따라서 $A\cap B=\varnothing$이므로 서로 배반인 두 사건은 A와 B이다.

2 보기의 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ의 사건을 각각 A, B, C, D라고 하면

$A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{1, 2, 4\}$, $D=\{5, 6\}$

따라서 $C\cap D=\varnothing$이므로 서로 배반사건인 것끼리 짝 지은 것은 ⑤이다.

3 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times 6=36$

두 눈의 수의 합이 홀수인 경우는 (홀수, 짝수) 또는 (짝수, 홀수)인 경우이다.

(i) (홀수, 짝수)인 경우의 수는 $3\times 3=9$

(ii) (짝수, 홀수)인 경우의 수는 $3\times 3=9$

(i), (ii)에 의하여 두 눈의 수의 합이 홀수인 경우의 수는

$9+9=18$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

4 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
두 눈의 수의 차가 4 이상인 경우는 두 눈의 수의 차가 4 또는 5인 경우이다.
(i) 두 눈의 수의 차가 4인 경우
$(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)$
이므로 그 경우의 수는 4
(ii) 두 눈의 수의 차가 5인 경우
$(1, 6), (6, 1)$이므로 그 경우의 수는 2
(i), (ii)에 의하여 두 눈의 수의 차가 4 이상인 경우의 수는
$4+2=6$
따라서 구하는 확률은
$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

5 (1) 5개의 문자 A, B, C, D, E를 일렬로 배열하는 방법의 수는 $5!=120$
C, D를 한 문자로 생각하면 4개의 문자를 일렬로 배열하는 방법의 수는 $4!=24$
C, D가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
즉, C, D를 이웃하게 배열하는 방법의 수는
$24\times2=48$
따라서 구하는 확률은
$\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$
(2) 5개의 문자 A, B, C, D, E 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_5C_3=10$
A는 택하고, D는 택하지 않는 방법의 수는 A와 D를 제외한 나머지 3개의 문자 B, C, E 중 2개를 고른 후 A를 포함시키는 방법의 수와 같으므로 ${}_3C_2=3$
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{10}$이다.

6 7개의 공 중에서 3개를 꺼내는 방법의 수는
${}_7C_3=35$
흰 공 2개와 검은 공 1개를 꺼내는 방법의 수는
${}_5C_2\times{}_2C_1=20$
따라서 구하는 확률은
$\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$

7 충청도에서 생산된 사과의 양은 96(천 톤)이므로 그 상대도수는 $\frac{96}{537}$
따라서 구하는 확률은 $\frac{96}{537}=\frac{32}{179}$

8 버스로 등교하는 학생은 32명이므로 그 상대도수는 $\frac{32}{150}$
따라서 구하는 확률은 $\frac{32}{150}=\frac{16}{75}$

06강 확률의 성질

확인 문제 p. 28

1 (1) 주사위 한 개를 던지는 시행에서 홀수 또는 짝수의 눈이 나오는 사건 A는 반드시 일어나는 사건이므로
$\mathrm{P}(A)=1$
(2) 주사위 한 개를 던지는 시행에서 7의 눈이 나오는 사건 B는 절대로 일어나지 않는 사건이므로
$\mathrm{P}(B)=0$

2 (1) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=0.3+0.4-0.1=0.6$
(2) 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로
$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A)$
$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{4}$

3 주사위 한 개를 던지는 시행에서 2의 배수의 눈이 나오는 사건을 A, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 B, 5의 배수의 눈이 나오는 사건을 C라고 하면
$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{6}$
(1) $A\cap B$는 6의 배수의 눈이 나오는 사건이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$
$=\frac{2}{3}$
(2) 두 사건 A, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)$
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$
$=\frac{2}{3}$

4 (1) 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 두 개의 동전을 동시에 던질 때, 표본공간을 S라고 하면
$S=\{\mathrm{HH, HT, TH, TT}\}$
$A=\{\mathrm{TT}\}$
$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$
(2) 두 개 모두 뒷면이 나오는 사건이 A이므로 적어도 한 개는 앞면이 나오는 사건은 A^C이다.
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

교/과/서/속 핵심유형+ 실전 문제 p. 29

1 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
두 눈의 수의 합이 6인 사건을 A, 차가 4인 사건을 B라고 하면
$A=\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$,
$B=\{(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)\}$,
$A\cap B=\{(1, 5), (5, 1)\}$
이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{36}$
$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{5}{36}+\frac{1}{9}-\frac{1}{18}=\frac{7}{36}$

2 10장의 카드 중에서 3장을 동시에 뽑을 때, 3이 적힌 카드가 나오는 사건을 A, 5가 적힌 카드가 나오는 사건을 B라고 하면
$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{3}{10}$
$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{3}{10}$
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_8C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{15}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}-\frac{1}{15}=\frac{8}{15}$

3 9개의 구슬 중에서 3개를 동시에 꺼낼 때, 3개 모두 빨간 구슬인 사건을 A, 흰 구슬인 사건을 B라고 하면
$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3}=\frac{5}{42}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{1}{21}$
두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$
$=\frac{5}{42}+\frac{1}{21}=\frac{1}{6}$

4 학생 8명 중에서 2명의 대표를 뽑을 때, 2명 모두 1학년인 사건을 A, 2학년인 사건을 B라고 하면
$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{3}{28}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{14}$
두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$
$=\frac{3}{28}+\frac{5}{14}=\frac{13}{28}$

5 13켤레의 장갑 중에서 3켤레를 동시에 꺼낼 때, 적어도 한 켤레는 흰 장갑인 사건을 A라고 하면 A^C은 꺼낸 3켤레의 장갑이 모두 파란 장갑인 사건이므로
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_8C_3}{{}_{13}C_3}=\frac{28}{143}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{28}{143}=\frac{115}{143}$

6 적어도 한쪽 끝에 t가 오는 사건을 A라고 하면 A^C은 양 끝에 모두 t가 오지 않는 사건이다.
5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!}=60$
양 끝에 a, s, e 중에서 2개의 문자가 오는 경우의 수는
${}_3P_2\times\frac{3!}{2!}=18$
즉, 양 끝에 모두 t가 오지 않을 확률은
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{18}{60}=\frac{3}{10}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

7 만든 자연수가 400보다 작은 사건을 A라고 하면 A^C은 만든 자연수가 400 이상인 사건이다.
(i) 백의 자리의 숫자가 4일 확률은
$\frac{{}_4P_2}{{}_5P_3}=\frac{1}{5}$
(ii) 백의 자리의 숫자가 5일 확률은
$\frac{{}_4P_2}{{}_5P_3}=\frac{1}{5}$
(i), (ii)에 의하여 만든 자연수가 400 이상일 확률은
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

8 12개의 제비 중에서 4개를 꺼낼 때, 당첨 제비가 2개 이상인 사건을 A라고 하면 A^C은 당첨 제비가 2개 미만인 사건이다.
(i) 당첨 제비가 0개일 확률은
$\frac{{}_5C_0\times{}_7C_4}{{}_{12}C_4}=\frac{7}{99}$
(ii) 당첨 제비가 1개일 확률은
$\frac{{}_5C_1\times{}_7C_3}{{}_{12}C_4}=\frac{35}{99}$
(i), (ii)에 의하여 당첨 제비가 2개 미만일 확률은
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{7}{99}+\frac{35}{99}=\frac{14}{33}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{14}{33}=\frac{19}{33}$

계산력 다지기

p. 30~31

1 표본공간을 S라고 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$, $C=\{4\}$

(1) $A\cap B=\{1, 3\}$

(2) $A\cup C=\{1, 3, 4\}$

(3) $B^C=\{4, 5\}$

(4) $A^C\cap B=B-A=\{2, 6\}$

(5) $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$이므로 서로 배반인 두 사건은 A와 C, B와 C이다.

(6) $A^C=\{2, 4, 5, 6\}$이고, 사건 A와 서로 배반인 사건은 집합 A^C의 부분집합이므로 구하는 배반사건의 개수는

$2^4=16$

2 (1) 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

두 눈의 수의 합이 3 이하인 경우는 두 눈의 수의 합이 2 또는 3인 경우이다.

(i) 두 눈의 수의 합이 2인 경우

$(1, 1)$이므로 그 경우의 수는 1

(ii) 두 눈의 수의 합이 3인 경우

$(1, 2)$, $(2, 1)$이므로 그 경우의 수는 2

(i), (ii)에 의하여 두 눈의 수의 합이 3 이하인 경우의 수는 $1+2=3$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

(2) 7명의 학생이 일렬로 줄을 서는 방법의 수는

$7!=5040$

맨 앞과 맨 뒤에 남학생이 서는 방법의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=6$

맨 앞과 맨 뒤에 선 학생을 제외한 나머지 5명의 학생이 일렬로 줄을 서는 방법의 수는

$5!=120$

즉, 맨 앞과 맨 뒤에 남학생이 서는 방법의 수는

$6\times120=720$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{720}{5040}=\dfrac{1}{7}$

(3) 5명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

건우와 송이를 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!=6$이고, 건우와 송이가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 건우와 송이가 이웃하게 앉는 경우의 수는

$6\times2=12$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{12}{24}=\dfrac{1}{2}$

(4) 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

이때 짝수가 되려면 일의 자리에는 2, 4의 2가지가 올 수 있고, 백의 자리와 십의 자리에는 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 나열하면 되므로 짝수의 개수는 $2\times{}_4\Pi_2=2\times4^2=32$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{32}{64}=\dfrac{1}{2}$

(5) 6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times3!}=60$

2개의 G를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{3!}=20$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{20}{60}=\dfrac{1}{3}$

(6) 9개의 공 중에서 5개를 꺼내는 방법의 수는 ${}_9\mathrm{C}_5=126$

빨간 공 2개와 파란 공 3개를 꺼내는 방법의 수는

${}_3\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_3=60$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{60}{126}=\dfrac{10}{21}$

(7) 방정식 $x+y+z=10$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$

$x=3$이면 $y+z=7$이므로 방정식 $y+z=7$의 음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_7={}_8\mathrm{C}_7={}_8\mathrm{C}_1=8$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{8}{66}=\dfrac{4}{33}$

(8) $\dfrac{2}{1000}=\dfrac{1}{500}$

3 (1) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}=1$

(2) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=0.4+0.6-0.8=0.2$

(3) 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

(4) 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(B)=0.8-0.3=0.5$

4 (1) 3의 배수가 적힌 공이 나오는 사건을 A, 4의 배수가 적힌 공이 나오는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{2}$

(2) 5의 배수가 적힌 공이 나오는 사건을 A, 7의 배수가 적힌 공이 나오는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{12}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{4}$

5 (1) $P(A)=1-P(A^C)=1-0.3=0.7$

(2) $P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)$

$=\frac{5}{6}+\frac{1}{4}-\frac{7}{12}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ P(B^C)=1-P(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(3) $P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.7-0.1=0.6$

$\therefore\ P(B^C)=1-P(B)=1-0.6=0.4$

(4) $P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

$P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

6 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

(1) 서로 다른 눈의 수가 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 서로 같은 눈의 수가 나오는 사건이므로

$A^C=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$\therefore\ P(A^C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

(2) 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A라고 하면 A^C은 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건이므로

$A^C=\{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$

$\therefore\ P(A^C)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

05~06강 족집게 기출문제 p. 32~35

1 ⑤	2 $\frac{7}{36}$	3 ①	4 ②	5 ①
6 ④	7 ②	8 ③	9 $\frac{2}{5}$	10 $\frac{6}{11}$
11 $\frac{5}{16}$	12 8개	13 ③	14 ㄱ, ㄴ	15 ④
16 ⑤	17 0.7	18 $\frac{4}{15}$	19 ④	20 ⑤
21 ④	22 $\frac{1}{3}$	23 ④	24 ①	25 $\frac{1}{3}$
26 5	27 $\frac{53}{100}$			

1 $A=\{4, 8\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$, $C=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\{2, 3\}$, $A\cap C=\varnothing$

따라서 서로 배반사건인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2 주사위 한 개를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

$3\le 2a+b\le 18$이므로 $2a+b$가 5의 배수가 되도록 하는 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음과 같다.

(i) $2a+b=5$인 경우

$(1, 3)$, $(2, 1)$이므로 그 경우의 수는 2

(ii) $2a+b=10$인 경우

$(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$이므로 그 경우의 수는 3

(iii) $2a+b=15$인 경우

$(5, 5)$, $(6, 3)$이므로 그 경우의 수는 2

(i), (ii), (iii)에 의하여 $2a+b$가 5의 배수인 경우의 수는

$2+3+2=7$

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{36}$이다.

3 포스터 6장을 일렬로 붙이는 방법의 수는

$6!=720$

액션 영화, 스릴러 영화의 순서로 번갈아 붙이는 방법의 수는

$3!\times3!=36$

스릴러 영화, 액션 영화의 순서로 번갈아 붙이는 방법의 수는

$3!\times3!=36$

즉, 포스터를 번갈아 붙이는 방법의 수는

$36+36=72$

따라서 구하는 확률은 $\frac{72}{720}=\frac{1}{10}$

4 9개의 문자를 일렬로 배열하는 방법의 수는 $9!$

4개의 자음 중에서 2개를 택하여 양 끝에 배열하는 방법의 수는 ${}_4P_2$이고, 그 각각에 대하여 나머지 7개의 문자를 일렬로 배열하는 방법의 수는 $7!$이다.

즉, 양 끝에 자음이 오도록 배열하는 방법의 수는

${}_4P_2\times7!$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_4P_2\times7!}{9!}=\frac{1}{6}$

5 9개의 글자를 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(9-1)!=8!$

'내, 공, 의, 힘'의 네 글자를 하나로 생각하면 6개의 글자를 원형으로 배열하는 방법의 수는 $(6-1)!=5!$이고, '내, 공, 의, 힘'의 네 글자의 자리를 바꾸어 배열하는 방법의 수는 $4!$이다.

즉, '내, 공, 의, 힘'의 네 글자가 이웃하도록 배열하는 방법의 수는 $5!\times4!$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5!\times4!}{8!}=\frac{1}{14}$

6 노래 3곡을 4개의 프로그램에 신청하는 방법의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

노래 3곡을 모두 다른 프로그램에 신청하는 방법의 수는

${}_4P_3=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$

7 학교에서 독서실까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{8!}{5!\times3!}=56$

학교에서 편의점을 거쳐 독서실까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$

8 7일 중에서 4일을 택하는 방법의 수는

${}_7C_4=35$

할인 행사일에 토요일과 일요일이 모두 포함되는 경우의 수는 토요일과 일요일을 제외한 나머지 5일 중에서 2일을 택한 후, 토요일과 일요일을 포함시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2=10$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$

9 6개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_6C_3=20$

원 위에 있는 임의의 1개의 점을 꼭짓점으로 하고 그 점과 이웃하는 양 옆의 두 점을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 아닌 이등변삼각형의 개수는 6이고, 정삼각형의 개수는 2이다.

즉, 만들 수 있는 이등변삼각형의 개수는 $6+2=8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

10 세 가지 색의 리본 중에서 10개를 고르는 경우의 수는

${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}=66$

하늘색, 보라색, 연두색 리본을 적어도 한 개씩 포함하는 경우의 수는 하늘색, 보라색, 연두색 리본을 한 개씩 고른 다음 나머지 7개를 고르는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7=36$

따라서 구하는 확률은 $\frac{36}{66}=\frac{6}{11}$

11 집합 $Y=\{1, 2, 5, 10\}$이므로 함수 f의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

$a<b$이면 $f(a)\le f(b)$를 만족시키는 함수 f의 개수는 집합 Y의 원소 중에서 중복을 허용하여 원소 3개를 뽑는 방법의 수와 같으므로

${}_4H_3={}_6C_3=20$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$

12 상자 안에 n개의 파란 공이 들어 있다고 하면 10개의 공 중에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 3개가 모두 파란 공일 확률은 $\frac{7}{15}$이므로 $\frac{{}_nC_3}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{15}$, ${}_nC_3=56$

$n(n-1)(n-2)=8\times7\times6$ $\quad\therefore n=8$

따라서 상자 안에 8개의 파란 공이 들어 있다고 볼 수 있다.

13 반지름의 길이가 12인 원의 넓이는 144π

반지름의 길이가 8인 원의 넓이는 64π

반지름의 길이가 4인 원의 넓이는 16π

색칠한 부분의 넓이는 $64\pi-16\pi=48\pi$

따라서 구하는 확률은 $\frac{48\pi}{144\pi}=\frac{1}{3}$

14 ㄱ. $0\le P(A)\le1$, $0\le P(B)\le1$이므로

$0\le P(A)P(B)\le1$

ㄴ. $\varnothing\subset(A\cup B)\subset S$에서 $P(\varnothing)\le P(A\cup B)\le P(S)$

이때 $P(\varnothing)=0$, $P(S)=1$이므로 $0\le P(A\cup B)\le1$

ㄷ. [반례] 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던질 때, 모두 앞면이 나오는 사건을 A, 모두 뒷면이 나오는 사건을 B라고 하면 $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{4}$

이때 $P(A)+P(B)=\frac{1}{2}$이므로

$P(S)>P(A)+P(B)$

ㄹ. [반례] 주사위 한 개를 던질 때, 소수의 눈이 나오는 사건을 A, 짝수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$

이때 $P(A)+P(B)=1$이지만 $A\cap B=\{2\}$이므로 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15 $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=0.4+0.5-0.6=0.3$

$\therefore P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)=1-P(A\cap B)$

$=1-0.3=0.7$

16 동전의 앞면이 나오는 사건을 A, 주사위의 눈의 수가 짝수가 나오는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

17 계곡에 다녀온 학생을 택하는 사건을 A, 바다에 다녀온 학생을 택하는 사건을 B라고 하면

$P(A\cup B)=0.8$, $P(B)=0.4$, $P(A\cap B)=0.3$

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$0.8=P(A)+0.4-0.3$ $\quad\therefore P(A)=0.7$

따라서 구하는 확률은 0.7이다.

18 두 학생의 선택과목이 모두 물리학, 화학, 생명과학, 지구과학인 사건을 각각 A, B, C, D라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{30}\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{145}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{{}_{30}\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{29}$

$\mathrm{P}(C)=\dfrac{{}_{11}\mathrm{C}_2}{{}_{30}\mathrm{C}_2}=\dfrac{11}{87}$, $\mathrm{P}(D)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{30}\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{87}$

네 사건 A, B, C, D는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(D)$

$=\dfrac{2}{145}+\dfrac{3}{29}+\dfrac{11}{87}+\dfrac{2}{87}=\dfrac{4}{15}$

19 세 수의 곱이 짝수인 사건을 A라고 하면 A^C은 세 수의 곱이 홀수인 사건이다.

세 수의 곱이 홀수가 되려면 세 수가 모두 홀수이어야 하므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{11}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{11}=\dfrac{10}{11}$

20 10개의 제비 중에서 3개를 꺼낼 때, 적어도 1개는 당첨 제비가 아닌 사건을 A라고 하면 A^C은 3개 모두 당첨 제비인 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{30}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{30}=\dfrac{29}{30}$

21 2개의 점을 택하여 선분을 그을 때, 선분의 길이가 1보다 긴 사건을 A라고 하면 A^C은 선분의 길이가 1 이하인 사건이다.

8개의 점 중에서 2개의 점을 택하여 선분을 그을 때, 선분의 길이가 1 이하일 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{8}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{2}{7}=\dfrac{5}{7}$

22 네 사람이 일렬로 줄을 서는 경우의 수는 $4!=24$

키가 작은 사람부터 차례로 A, B, C, D라고 하면 주어진 조건을 만족하는 경우는 다음과 같다.

(i) $\boxed{}\boxed{}\boxed{\mathrm{D}}\boxed{}$인 경우

나머지 세 사람이 서는 경우의 수는 $3!=6$

(ii) $\boxed{}\boxed{}\boxed{\mathrm{C}}\boxed{}$인 경우

맨 앞에 D가 서고, 나머지 두 사람 A, B가 서는 경우의 수는 $2!=2$

(i), (ii)에 의하여 앞에서 세 번째에 서는 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 키가 큰 경우의 수는 $6+2=8$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$

다른 풀이

구하는 확률은 맨 앞에 서는 사람을 제외한 나머지 세 사람 중에서 가장 큰 사람이 세 번째에 설 확률과 같다. 이때 나머지 세 사람 중에서 가장 큰 사람이 두 번째, 세 번째, 네 번째에 설 확률은 각각 $\dfrac{1}{3}$로 같다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다.

23 3명의 학생이 가위바위보를 한 번 할 때, 승부가 나는 사건을 A라고 하면 A^C은 승부가 나지 않는 사건이다.

3명의 학생이 가위바위보를 한 번 할 때, 나오는 모든 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

승부가 나지 않는 경우는 모두 같은 것을 내거나 모두 다른 것을 내는 두 가지 경우이다.

이때 모두 같은 것을 내는 경우의 수는 3, 모두 다른 것을 내는 경우의 수는 $3!=6$이므로 승부가 나지 않는 경우의 수는

$3+6=9$

즉, 승부가 나지 않을 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

다른 풀이

3명의 학생이 가위바위보를 한 번 할 때, 나오는 모든 경우의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$

승부가 나는 경우는 한 명이 이기거나 두 명이 이기는 두 가지 경우이다.

(i) 한 명이 이기는 경우

이기는 한 명을 정하는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$

그 각각에 대하여 가위, 바위, 보 중에서 한 가지로 이기는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$

즉, 한 명이 이기는 방법의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=9$

따라서 한 명이 이길 확률은

$\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$

(ii) 두 명이 이기는 경우

이기는 두 명을 정하는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$

그 각각에 대하여 가위, 바위, 보 중에서 한 가지로 이기는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$

즉, 두 명이 이기는 방법의 수는

${}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=9$

따라서 두 명이 이길 확률은

$\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$

(i), (ii)에 의하여 승부가 날 확률은

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

24 10장의 카드 중에서 3장을 꺼내는 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$
꺼낸 3장의 카드에 적힌 수 중에서 연속인 자연수가 없는 사건을 A라고 하면 A^C은 꺼낸 3장의 카드에 적힌 수 중에서 연속인 자연수가 있는 사건이다.
이때 연속인 자연수가 있는 경우는 두 자연수만 연속이거나 세 자연수가 모두 연속인 두 가지 경우가 있다.

(i) 두 자연수만 연속인 경우
연속인 두 자연수 a, $b\,(a<b)$를 순서쌍 (a, b)로 나타내고, 나머지 자연수를 c라고 하자.
$(1, 2)$ 또는 $(9, 10)$일 때, c가 될 수 있는 수의 개수는 각각 7 …… ㉠
$(2, 3), (3, 4), \cdots, (8, 9)$일 때, c가 될 수 있는 수의 개수는 각각 6 …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 두 자연수만 연속인 경우의 수는
$2\times7+7\times6=56$
즉, 두 자연수만 연속일 확률은
$\dfrac{56}{120}=\dfrac{7}{15}$

(ii) 세 자연수가 모두 연속인 경우
연속인 세 자연수 $a, b, c\,(a<b<c)$를 순서쌍 (a, b, c)로 나타내면
$(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6),$
$(5, 6, 7), (6, 7, 8), (7, 8, 9), (8, 9, 10)$
이므로 그 개수는 8
즉, 세 자연수가 모두 연속일 확률은
$\dfrac{8}{120}=\dfrac{1}{15}$

(i), (ii)에 의하여 3장의 카드에 적힌 수 중에서 연속인 자연수가 있을 확률은
$P(A^C)=\dfrac{7}{15}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{8}{15}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)=1-\dfrac{8}{15}=\dfrac{7}{15}$

다른 풀이
10장의 카드 중에서 3장을 꺼내는 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$
연속인 자연수가 없는 경우는 3개의 a와 7개의 b를 일렬로 배열할 때, a가 이웃하지 않도록 배열한 후 배열한 문자에 차례로 1부터 10까지의 자연수를 대응시키는 경우와 같다.
즉, 연속인 자연수가 없는 경우의 수는 7개의 b 사이사이와 양 끝의 8개의 자리에 3개의 a를 배열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_8C_3=56$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{56}{120}=\dfrac{7}{15}$

25 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 5개를 뽑아 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우의 수는 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 5개, 나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 6개이므로
$5\times{}_6\Pi_4=5\times6^4$ …… (가)
6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 5개를 뽑아 다섯 자리의 5의 배수를 만드는 경우의 수는 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 5개, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 5의 2개, 나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 6개이므로
$5\times{}_6\Pi_3\times2=5\times6^3\times2=10\times6^3$ …… (나)
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{10\times6^3}{5\times6^4}=\dfrac{1}{3}$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 모든 경우의 수를 구한다.	2점
(나) 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 5개를 뽑아 다섯 자리의 5의 배수를 만드는 경우의 수를 구한다.	2점
(다) 만든 수가 5의 배수일 확률을 구한다.	2점

26 10개의 구슬 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_{10}C_2=45$ …… (가)
주머니 안에 x개의 분홍색 구슬이 들어 있다고 하면 노란색 구슬은 $(10-x)$개가 들어 있으므로 분홍색 구슬과 노란색 구슬을 각각 한 개씩 꺼내는 경우의 수는
${}_xC_1\times{}_{10-x}C_1=x(10-x)$ …… (나)
분홍색 구슬과 노란색 구슬이 각각 한 개씩 나올 확률은
$\dfrac{x(10-x)}{45}=-\dfrac{1}{45}(x-5)^2+\dfrac{5}{9}$ …… (다)
따라서 분홍색 구슬이 5개일 때 확률이 최대가 된다.
…… (라)

채점 기준	배점
(가) 모든 경우의 수를 구한다.	1점
(나) 분홍색 구슬과 노란색 구슬을 각각 한 개씩 꺼내는 경우의 수를 x에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(다) 확률을 x에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(라) 확률이 최대가 되는 분홍색 구슬의 개수를 구한다.	2점

27 카드에 적힌 수가 15와 서로소이려면 그 수는 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아니어야 한다.
임의로 한 장의 카드를 뽑을 때 3의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건을 A, 5의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건을 B라고 하면
$P(A)=\dfrac{33}{100}$, $P(B)=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$, $P(A\cap B)=\dfrac{6}{100}=\dfrac{3}{50}$
임의로 한 장의 카드를 뽑을 때 3의 배수 또는 5의 배수가 적힌 카드가 나올 확률은
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=\dfrac{33}{100}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{50}=\dfrac{47}{100}$ …… (가)
따라서 15와 서로소인 수가 적힌 카드가 나오는 사건은 $A^C\cap B^C$이므로 구하는 확률은
$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$
$=1-\dfrac{47}{100}=\dfrac{53}{100}$ …… (나)

채점 기준	배점
(가) 3의 배수 또는 5의 배수가 적힌 카드가 나올 확률을 구한다.	4점
(나) 15와 서로소인 수가 적힌 카드가 나올 확률을 구한다.	3점

07강 조건부확률

확인 문제 p. 36

1 $\mathrm{P}(A)=0.8$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.5$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.5}{0.8}=\dfrac{5}{8}$

2 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$

(1) $A\cap B=\{3, 5\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

(2) $\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$

3 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{15}$

교/과/서/속 핵심유형+ 실전 문제 p. 37

1 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=0.5-0.3=0.2$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.2}{0.3}=\dfrac{2}{3}$

2 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{20}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

$=\dfrac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

$=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{3}{20}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{5}$

3 임의로 뽑은 학생 한 명이 버스를 이용하여 통학하는 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=0.65$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.3$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.3}{0.65}=\dfrac{6}{13}$

4 임의로 택한 옷 한 벌이 B인 사건을 B, 중국에서 생산한 옷인 사건을 C라고 하면

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{900}{2000}=\dfrac{9}{20}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\dfrac{780}{2000}=\dfrac{39}{100}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(C|B)=\dfrac{\mathrm{P}(B\cap C)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{39}{100}}{\frac{9}{20}}=\dfrac{13}{15}$

5 갑이 당첨 제비를 뽑는 사건을 A라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}$

이때 을이 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라고 하면

(1) 갑이 당첨 제비를 뽑았을 때, 을도 당첨 제비를 뽑을 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{4}{14}=\dfrac{2}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{7}=\dfrac{2}{21}$

(2) 갑이 당첨 제비를 뽑지 못했을 때, 을이 당첨 제비를 뽑을 확률은

$\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{5}{14}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{14}=\dfrac{5}{21}$

(3) 갑이 당첨 제비를 뽑지 못했을 때, 을도 당첨 제비를 뽑지 못할 확률은

$\mathrm{P}(B^C|A^C)=\dfrac{9}{14}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C|A^C)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{9}{14}=\dfrac{3}{7}$

6 첫 번째에 노란 공을 꺼내는 사건을 A라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{12}$, $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{7}{12}$

두 번째에 노란 공을 꺼내는 사건을 B라고 하면 첫 번째에 노란 공을 꺼내었을 때, 두 번째에도 노란 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{4}{11}$

따라서 꺼낸 공 2개가 모두 노란 공일 확률은

$a=\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{5}{12}\times\dfrac{4}{11}=\dfrac{5}{33}$

한편 첫 번째에 노란 공을 꺼내었을 때, 두 번째에 빨간 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B^C|A)=\dfrac{7}{11}$

첫 번째에 빨간 공을 꺼내었을 때, 두 번째에 노란 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{5}{11}$

따라서 꺼낸 공 2개의 색이 다를 확률은

$b=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\dfrac{5}{12}\times\dfrac{7}{11}+\dfrac{7}{12}\times\dfrac{5}{11}=\dfrac{35}{66}$

$\therefore a+b=\dfrac{5}{33}+\dfrac{35}{66}=\dfrac{15}{22}$

7 노란 주머니를 택하는 사건을 A, 파란 주머니를 택하는 사건을 B, 2개 모두 흰 구슬이 나오는 사건을 E라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(E|A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{11}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{11}$, $\mathrm{P}(E|B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

(1) $\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$
$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{15}=\frac{41}{330}$

(2) $\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}}{\frac{41}{330}}=\frac{30}{41}$

8 A 회사의 제품을 뽑는 사건을 A, B 회사의 제품을 뽑는 사건을 B, 불량품이 나오는 사건을 E라고 하면

$\mathrm{P}(A)=0.6$, $\mathrm{P}(B)=0.4$,
$\mathrm{P}(E|A)=0.05$, $\mathrm{P}(E|B)=0.03$
$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$
$=0.6\times0.05+0.4\times0.03=0.042$

$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.6\times0.05}{0.042}=\frac{5}{7}$

08강 사건의 독립과 종속

확인 문제

p. 38

1 (1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=0.5\times0.9=0.45$

(2) $\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)=0.5$

(3) $\mathrm{P}(B^C|A)=\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)$
$=1-0.9=0.1$

2 두 선수 A, B가 한 번의 투구에서 스크라이크를 치는 사건을 각각 A, B라고 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=0.8\times0.7=0.56$

3 (1) 앞면이 2번 나오는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$

(2) 한 개의 동전을 한 번 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 구하는 확률은

${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=10\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

교/과/서/속 핵심 유형+ 실전 문제

p. 39

1 $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$,
$B=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $C=\{5, 10, 15, 20\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{5}$

(1) $A\cap B=\{6, 12, 18\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{20}$이고,

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ $\therefore$ A와 B는 서로 독립

(2) $B\cap C=\{15\}$에서 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{20}$이고,

$\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{50}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$ $\therefore$ B와 C는 서로 종속

(3) $A\cap C^C=\{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18\}$에서

$\mathrm{P}(A\cap C^C)=\frac{2}{5}$이고, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C^C)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}$

이므로 $\mathrm{P}(A\cap C^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C^C)$

$\therefore$ A와 C^C은 서로 독립

2 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{3}$

ㄱ. $A\cap B=\{3, 5\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$이고,

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\therefore$ A와 B는 서로 종속

ㄴ. $B\cap C=\{2, 3\}$에서 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{3}$이고,

$\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$ $\therefore$ B와 C는 서로 독립

ㄷ. $A^C\cap C=\{2, 6\}$에서 $\mathrm{P}(A^C\cap C)=\frac{1}{3}$이고,

$\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(C)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(C)$

$\therefore$ A^C과 C는 서로 독립

따라서 서로 독립인 사건은 ㄴ, ㄷ이다.

3 첫 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 B라고 하자.

(1) 꺼낸 공을 다시 넣는 경우에 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$

(2) $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{9}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$

4 첫 번째에 빨간 구슬을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 빨간 구슬을 꺼내는 사건을 B라고 하자.
꺼낸 구슬을 다시 넣는 경우에 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 두 번 모두 빨간 구슬이 나올 확률은
$p=\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{4}{25}$
꺼낸 구슬을 다시 넣지 않는 경우에
$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$
이므로 두 번 모두 빨간 구슬이 나올 확률은
$q=\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$
$\therefore\ p-q=\frac{4}{25}-\frac{2}{15}=\frac{2}{75}$

5 세 학생 A, B, C가 합격하는 사건을 각각 A, B, C라고 하자.
(1) 세 사건 A, B, C는 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$
$=\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{70}$
(2) 세 사건 A, B, C^C과 세 사건 A, B^C, C와 세 사건 A^C, B, C는 각각 서로 독립이므로
(ⅰ) A, B만 합격하고 C는 불합격할 확률은
$\mathrm{P}(A\cap B\cap C^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C^C)$
$=\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{2}{7}\right)=\frac{3}{28}$
(ⅱ) A, C만 합격하고 B는 불합격할 확률은
$\mathrm{P}(A\cap B^C\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C)$
$=\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{7}=\frac{1}{70}$
(ⅲ) B, C만 합격하고 A는 불합격할 확률은
$\mathrm{P}(A^C\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$
$=\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{35}$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cap B\cap C^C)+\mathrm{P}(A\cap B^C\cap C)+\mathrm{P}(A^C\cap B\cap C)$
$=\frac{3}{28}+\frac{1}{70}+\frac{6}{35}=\frac{41}{140}$
(3) 세 사건 A^C, B^C, C^C은 서로 독립이므로
(적어도 한 학생이 합격할 확률)
$=1-$(세 학생 모두 불합격할 확률)
$=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C^C)=1-\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C^C)$
$=1-\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$

6 세 사격 선수 A, B, C가 명중시키는 사건을 각각 A, B, C라고 하면 세 사건 A^C, B^C, C^C은 서로 독립이므로
(적어도 한 선수가 명중시킬 확률)
$=1-$(세 선수 모두 명중시키지 못할 확률)
$=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C^C)=1-\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C^C)$
$=1-(1-0.4)(1-0.7)(1-0.9)=1-0.018=0.982$

7 (1) 자유투를 3번 던졌을 때, 두 번 성공할 확률은
${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{48}{125}$
(2) (적어도 한 번 성공할 확률)
$=1-$(3번 모두 성공하지 못할 확률)
$=1-{}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^3$
$=1-\frac{1}{125}=\frac{124}{125}$

8 (ⅰ) 5명의 환자 중에서 4명이 완치될 확률은
${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{405}{1024}$
(ⅱ) 5명의 환자 모두 완치될 확률은
${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{243}{1024}$
(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$\frac{405}{1024}+\frac{243}{1024}=\frac{81}{128}$

07~08강 족집게 기출문제

p. 40~43

1 $\frac{3}{8}$	**2** ②	**3** ①	**4** $\frac{3}{7}$	**5** $\frac{1}{20}$
6 4	**7** ④	**8** $\frac{17}{28}$	**9** $\frac{8}{9}$	**10** $\frac{9}{13}$
11 ⑤	**12** ③	**13** ⑤	**14** ⑤	**15** ③
16 ④	**17** ②	**18** ⑤	**19** ①	**20** $\frac{25}{52}$
21 $\frac{5}{16}$	**22** $\frac{1}{4}$	**23** 0.064	**24** $\frac{41}{81}$	
25 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{5}{9}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{6}$			**26** (1) 0.73 (2) $\frac{28}{73}$	
27 $\frac{112}{625}$				

1 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$
$\therefore\ \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}$

2 임의로 택한 학생 한 명이 여학생인 사건을 A, B형인 사건을 B라고 하면
$\mathrm{P}(A)=\frac{30}{80}=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8}{80}=\frac{1}{10}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{8}}=\frac{4}{15}$

3 임의로 뽑은 회원 한 명이 A 동호회 회원인 사건을 A, 여자 회원인 사건을 C라 하고, A 동호회의 회원 수를 x명이라고 하면

(단위: 명)

	A 동호회	B 동호회	합계
남자 회원	$0.6x$	$0.7(60-x)$	$42-0.1x$
여자 회원	$0.4x$	$0.3(60-x)$	$18+0.1x$
합계	x	$60-x$	60

$\mathrm{P}(C)=\frac{18+0.1x}{60}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{0.4x}{60}$이므로

$$\mathrm{P}(A|C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(C)}=\frac{\frac{0.4x}{60}}{\frac{18+0.1x}{60}}=\frac{2}{5}$$

$5\times0.4x=2(18+0.1x)$, $1.8x=36$ $\quad\therefore x=20$

따라서 A 동호회의 회원은 총 20명이다.

4 나오는 눈의 수의 합이 5의 배수인 사건을 A, 두 번 모두 소수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$A=\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$

$B=\{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$

$A\cap B=\{(2, 3), (3, 2), (5, 5)\}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{7}{36}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{36}}=\frac{3}{7}$$

5 네 번째까지 2개의 불량품을 꺼내는 사건을 A, 다섯 번째에 불량품을 꺼내는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{20}$$

6 첫 번째에 주황색 탁구공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 연두색 탁구공을 꺼내는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{n+6}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{n+5}$

이때 첫 번째는 주황색 탁구공, 두 번째는 연두색 탁구공을 꺼낼 확률이 $\frac{4}{15}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{6}{n+6}\times\frac{n}{n+5}\\&=\frac{6n}{(n+6)(n+5)}=\frac{4}{15}\end{aligned}$$

$4(n+6)(n+5)=90n$, $2n^2-23n+60=0$

$(n-4)(2n-15)=0$ $\quad\therefore n=4$ ($\because$ n은 자연수)

7 민준이가 3의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$

소리가 3의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라고 하면

(i) 민준이가 3의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{3}{10}\times\frac{5}{19}=\frac{3}{38}\end{aligned}$$

(ii) 민준이가 3의 배수가 적힌 카드를 뽑지 않는 경우

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{7}{10}\times\frac{6}{19}=\frac{21}{95}\end{aligned}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{3}{38}+\frac{21}{95}=\frac{3}{10}$$

8 주머니 A에서 공 2개를 꺼내는 경우는

(i) 흰 공 2개

(ii) 검은 공 2개

(iii) 흰 공 1개, 검은 공 1개

의 세 가지가 있다.

세 경우의 사건을 각각 A_1, A_2, A_3이라 하고, 주머니 B에서 임의로 꺼낸 공 1개가 흰 공인 사건을 B라고 하자.

(i) 주머니 A에서 흰 공 2개를 꺼내는 경우

$\mathrm{P}(A_1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$, $\mathrm{P}(B|A_1)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A_1\cap B)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B|A_1)=\frac{1}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{28}$

(ii) 주머니 A에서 검은 공 2개를 꺼내는 경우

$\mathrm{P}(A_2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$, $\mathrm{P}(B|A_2)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A_2\cap B)=\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B|A_2)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{7}$

(iii) 주머니 A에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우

$\mathrm{P}(A_3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$, $\mathrm{P}(B|A_3)=\frac{5}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A_3\cap B)=\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(B|A_3)=\frac{4}{7}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{14}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A_1\cap B)+\mathrm{P}(A_2\cap B)+\mathrm{P}(A_3\cap B)\\&=\frac{3}{28}+\frac{1}{7}+\frac{5}{14}=\frac{17}{28}\end{aligned}$$

9 임의로 택한 한 명이 사범대 졸업생인 사건을 A, 비사범대 졸업생인 사건을 B, 고등학교로 발령이 나는 사건을 E라고 하면

$\mathrm{P}(A)=0.8$, $\mathrm{P}(B)=0.2$, $\mathrm{P}(E|A)=0.4$, $\mathrm{P}(E|B)=0.2$

임의로 택한 한 명이 고등학교로 발령이 날 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)\\&=0.8\times0.4+0.2\times0.2=0.36\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.8\times0.4}{0.36}=\frac{8}{9}$$

10 민수네 팀이 2승으로 우승할 수 있는 위치에 배정되는 사건을 A, 3승으로 우승할 수 있는 위치에 배정되는 사건을 B, 우승하는 사건을 E라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(E|A)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$, $\mathrm{P}(E|B)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

(i) 민수네 팀이 2승으로 우승할 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$$

(ii) 민수네 팀이 3승으로 우승할 확률은

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{2}{5}\times\frac{8}{27}=\frac{16}{135}$$

(i), (ii)에 의하여 민수네 팀이 우승할 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{4}{15}+\frac{16}{135}=\frac{52}{135}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{52}{135}}=\frac{9}{13}$$

11 수요일에 비가 오는 사건을 A, 목요일에 비가 오는 사건을 B, 금요일에 비가 오는 사건을 C라고 하면

$\mathrm{P}(A)=0.6$, $\mathrm{P}(A^C)=0.4$

$\mathrm{P}(B|A)=0.6$, $\mathrm{P}(B|A^C)=0.2$

$\mathrm{P}(C|B)=0.6$, $\mathrm{P}(C|B^C)=0.2$

목요일에 비가 올 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=0.6\times0.6+0.4\times0.2=0.44\end{aligned}$$

따라서 금요일에 비가 올 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C)&=\mathrm{P}(B\cap C)+\mathrm{P}(B^C\cap C)\\&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C|B)+\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C|B^C)\\&=0.44\times0.6+(1-0.44)\times0.2\\&=0.376\end{aligned}$$

즉, 37.6 %이다.

다른 풀이

비가 오는 것을 ○, 비가 오지 않는 것을 ×로 나타내면 금요일에 비가 오는 경우와 그때의 확률은 다음 표와 같다.

	수	목	금	확률
(i)	○	○	○	$0.6\times0.6\times0.6=0.216$
(ii)	○	×	○	$0.6\times0.4\times0.2=0.048$
(iii)	×	○	○	$0.4\times0.2\times0.6=0.048$
(iv)	×	×	○	$0.4\times0.8\times0.2=0.064$

(i)~(iv)는 모두 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$0.216+0.048+0.048+0.064=0.376$

즉, 37.6 %이다.

12 3명의 고객 A, B, C의 집에 방문하는 사건을 각각 A, B, C라 하고, 볼펜을 두고 오는 사건을 E라고 하자.

A 고객의 집에 볼펜을 두고 왔을 확률은

$\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{1}{5}$

B 고객의 집에 볼펜을 두고 왔을 확률은

$\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$

C 고객의 집에 볼펜을 두고 왔을 확률은

$\mathrm{P}(C\cap E)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$

3명의 고객 A, B, C의 집 중에서 한 곳에 볼펜을 두고 왔을 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)\\&=\frac{1}{5}+\frac{4}{25}+\frac{16}{125}=\frac{61}{125}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{61}{125}}=\frac{25}{61}$$

13 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고, 100원짜리 동전과 500원짜리 동전이 나오는 면을 차례로 나타내자.

표본공간을 S라고 하면

$S=\{\mathrm{HH, HT, TH, TT}\}$

$A=\{\mathrm{HH, HT}\}$, $B=\{\mathrm{HH, TH}\}$, $C=\{\mathrm{HT, TH}\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

ㄱ. $A\cap B=\{\mathrm{HH}\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$이고,

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ $\therefore$ A와 B는 서로 독립

ㄴ. $B\cap C=\{\mathrm{TH}\}$에서 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}$이고,

$\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$ $\therefore$ B와 C는 서로 독립

ㄷ. $A\cap C=\{\mathrm{HT}\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{4}$이고,

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$ $\therefore$ A와 C는 서로 독립

따라서 서로 독립인 사건은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{8}=\mathrm{P}(A)\times\frac{5}{16}$ $\therefore$ $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$

두 사건 A, C는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)$

$\frac{5}{8}=\frac{2}{5}+\mathrm{P}(C)$ $\therefore$ $\mathrm{P}(C)=\frac{9}{40}$

15 ㄱ. A와 B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=0$

ㄴ. A와 B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이지만 주어진 조건에서 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq 0$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

ㄷ. A와 B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(A)\neq\mathrm{P}(B)$이면 $\mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(B|A)$이다.

ㄹ. A와 B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$$\begin{aligned}&\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A\cap B)\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

16 LCD, CPU, GPU, RAM이 2년 이내에 고장이 나는 사건을 각각 A, B, C, D라고 하면 네 사건 A, B, C, D는 서로 독립이므로 A^C, B^C, C^C, D^C도 서로 독립이다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C^C\cap D^C)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C^C)\mathrm{P}(D^C)\\&=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\\&=\frac{3}{7}\end{aligned}$$

17 민영, 선주, 예림이가 서류 평가에 통과하는 사건을 각각 A, B, C라고 하면 세 사건 A, B, C는 서로 독립이므로 세 사건 A, B^C, C^C과 세 사건 A^C, B, C^C과 세 사건 A^C, B^C, C는 각각 서로 독립이다.

(ⅰ) 민영이만 통과할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C\cap C^C)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C^C)\\&=0.7\times(1-0.8)\times(1-0.6)=0.056\end{aligned}$$

(ⅱ) 선주만 통과할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B\cap C^C)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C^C)\\&=(1-0.7)\times 0.8\times(1-0.6)=0.096\end{aligned}$$

(ⅲ) 예림이만 통과할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C)\\&=(1-0.7)\times(1-0.8)\times 0.6=0.036\end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A\cap B^C\cap C^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B\cap C^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C)\\&=0.056+0.096+0.036\\&=0.188\end{aligned}$$

18 3개의 자가 발전기가 작동하는 사건을 각각 A, B, C라고 하면 세 사건 A, B, C는 서로 독립이므로 세 사건 A^C, B^C, C^C도 서로 독립이다.

∴ (전기가 공급될 확률)

$$\begin{aligned}&=1-(\text{3개의 발전기가 모두 멈출 확률})\\&=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C^C)\\&=1-0.01\times0.01\times0.01=0.999999\end{aligned}$$

19 (ⅰ) 지우가 3번의 시합만에 승리할 확률은

$${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{27}{64}$$

(ⅱ) 지우가 4번의 시합만에 승리할 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\frac{3}{4}=\frac{81}{256}$$

(ⅲ) 지우가 5번의 시합만에 승리할 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{81}{512}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{27}{64}+\frac{81}{256}+\frac{81}{512}=\frac{459}{512}$$

20 1회의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{1}{3}$인 사건 A가 50회의 독립시행에서 x회 일어날 확률 $\mathrm{P}(x)$는

$$\mathrm{P}(x)={}_{50}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{50-x}$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{P}(26)}{\mathrm{P}(25)}=\frac{{}_{50}\mathrm{C}_{26}\left(\frac{1}{3}\right)^{26}\left(\frac{2}{3}\right)^{24}}{{}_{50}\mathrm{C}_{25}\left(\frac{1}{3}\right)^{25}\left(\frac{2}{3}\right)^{25}}=\frac{\frac{50!}{26!\times24!}\times\frac{1}{3}}{\frac{50!}{25!\times25!}\times\frac{2}{3}}=\frac{25}{52}$$

21 동전의 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 한 개의 주사위를 한 번 던져서 소수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(ⅰ) 동전의 앞면이 나와서 주사위를 3번 던질 때, 소수의 눈이 2번 나올 확률은

$$\frac{1}{2}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{16}$$

(ⅱ) 동전의 뒷면이 나와서 주사위를 2번 던질 때, 소수의 눈이 2번 나올 확률은

$$\frac{1}{2}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{3}{16}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$$

22 양면이 모두 빨간색인 카드, 양면이 모두 검은색인 카드, 한 면은 빨간색이고 다른 면은 검은색인 카드를 꺼내는 사건을 각각 A, B, C라 하고, 바닥에 놓인 카드의 윗면이 검은색인 사건을 E라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{7}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{7}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{7}$

$\mathrm{P}(E|A)=0$, $\mathrm{P}(E|B)=1$, $\mathrm{P}(E|C)=\frac{1}{2}$

바닥에 놓인 카드의 윗면이 검은색일 확률은

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)\\&=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)+P(C)P(E|C)\\&=\frac{2}{7}\times 0+\frac{3}{7}\times 1+\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{7}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(C|E)=\frac{P(C\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}}{\frac{4}{7}}=\frac{1}{4}$$

23 전구에 불이 켜지려면 세 스위치 A, B, D가 닫히거나 두 스위치 C, D가 닫혀야 한다.

세 스위치 A, B, D가 닫히는 사건을 A, 두 스위치 C, D가 닫히는 사건을 B라고 하면

$P(A)=0.5\times 0.3\times 0.2=0.03$

$P(B)=0.2\times 0.2=0.04$

$P(A\cap B)=0.5\times 0.3\times 0.2\times 0.2=0.006$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=0.03+0.04-0.006=0.064\end{aligned}$$

24 꼭짓점 A에서 출발한 점 P가 꼭짓점 A로 다시 돌아오려면 움직인 길이가 4, 8, 12이어야 한다.

주사위를 4번 던져서 5의 약수의 눈이 나온 횟수를 x, 그 외의 눈이 나온 횟수를 y라고 하면

(ⅰ) 점 P가 움직인 거리가 4인 경우

$x+y=4$, $3x+y=4$

두 식을 연립하여 풀면 $x=0$, $y=4$

즉, 그 확률은 ${}_4C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

(ⅱ) 점 P가 움직인 거리가 8인 경우

$x+y=4$, $3x+y=8$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=2$

즉, 그 확률은 ${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

(ⅲ) 점 P가 움직인 거리가 12인 경우

$x+y=4$, $3x+y=12$

두 식을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=0$

즉, 그 확률은 ${}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{16}{81}+\frac{8}{27}+\frac{1}{81}=\frac{41}{81}$$

25 $P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)$

$=1-P(A\cup B)=\frac{1}{6}$

$\therefore\ P(A\cup B)=\frac{5}{6}$ …… (가)

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$ …… (나)

$\therefore\ P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{3}{4}}=\frac{5}{9}$, …… (다)

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{6}$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) $P(A\cup B)$를 구한다.	1점
(나) $P(A\cap B)$를 구한다.	1점
(다) $P(A\|B)$를 구한다.	2점
(라) $P(B\|A)$를 구한다.	2점

26 (1) 이 농장에서 생산한 토마토 중에서 임의로 고른 한 개가 '최상 등급', '1등급', '그 외 등급'인 사건을 각각 E_1, E_2, E_3이라 하고, 이 농장에서 생산한 토마토 한 개를 A 마트에서 판매하는 사건을 A라고 하면

$P(E_1)=0.5$, $P(E_2)=0.3$, $P(E_3)=0.2$,

$P(A|E_1)=0.9$, $P(A|E_2)=0.8$, $P(A|E_3)=0.2$

이 농장에서 생산한 토마토 중에서 임의로 고른 토마토 한 개를 A 마트에서 판매할 확률은

$$\begin{aligned}P(A)&=P(E_1\cap A)+P(E_2\cap A)+P(E_3\cap A)\\&=P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)\\&\quad+P(E_3)P(A|E_3)\\&=0.5\times 0.9+0.3\times 0.8+0.2\times 0.2\\&=0.73\end{aligned}$$ …… (가)

(2) A 마트에서 판매하는 토마토 중에서 임의로 고른 한 개가 '최상 등급'일 확률은

$P(E_1|A)=\frac{P(E_1\cap A)}{P(A)}$

$=\frac{0.5\times 0.9}{0.73}=\frac{45}{73}$ …… (나)

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{45}{73}=\frac{28}{73}$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 토마토를 A 마트에서 판매할 확률을 구한다.	4점
(나) 토마토가 '최상 등급'일 확률을 구한다.	2점
(다) 토마토가 '최상 등급'이 아닐 확률을 구한다.	1점

27 (ⅰ) 4문제 중 3문제의 정답을 맞힐 확률은

${}_4C_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{96}{625}$ …… (가)

(ⅱ) 4문제 모두 정답을 맞힐 확률은

${}_4C_4\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{16}{625}$ …… (나)

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{96}{625}+\frac{16}{625}=\frac{112}{625}$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 3문제의 정답을 맞힐 확률을 구한다.	2점
(나) 4문제 모두 정답을 맞힐 확률을 구한다.	2점
(다) 3문제 이상의 정답을 맞힐 확률을 구한다.	2점

09강 확률변수와 확률분포

확인 문제 p. 44

1 (1) 5의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 표본공간 S는 $S=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 200\}$

따라서 X는 이산확률변수이다.

(2) 버스를 탈 때까지 기다리는 시간을 확률변수 X라고 하면 표본공간 S는 $S=\{x\,|\,0\le x\le 5$인 실수$\}$

따라서 X는 연속확률변수이다.

(3) 박물관에 입장한 여행자 수를 확률변수 X라고 하면 표본공간 S는 $S=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 500\}$

따라서 X는 이산확률변수이다.

2 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고, 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

교/과/서/속 핵심유형+ 실전 문제 p. 45

1 (1) 동전 한 개를 5번 던질 때, 각 시행은 독립시행이므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

(2) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)={}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

$$\mathrm{P}(X=1)={}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}$$

$$\mathrm{P}(X=2)={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}$$

$$\mathrm{P}(X=3)={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}$$

$$\mathrm{P}(X=4)={}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}$$

$$\mathrm{P}(X=5)={}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

(3) $\mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$$=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{5}{16}=\frac{1}{2}$$

2 남학생 6명과 여학생 4명 중에서 대표 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_3$이고, 뽑힌 학생 중에서 남학생이 x명인 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{3-x}$이므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_6\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{3-x}}{{}_{10}\mathrm{C}_3}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_6\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_6\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{6}$$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 1)=1-\mathrm{P}(X=0)$

$$=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$$

3 (1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{3}{7}+\frac{1}{7}+a+\frac{2}{7}=1$, $\frac{6}{7}+a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{7}$

(2) $\mathrm{P}(X>1)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$$=a+\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$$

4 확률의 총합은 1이므로

$2a+3a+a+2a=1$, $8a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(X^2=1)=\mathrm{P}(X=-1$ 또는 $X=1)$

$=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)$

$=2a+a=3a=3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

5 (1) 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$\frac{a}{12}+\frac{2a}{12}+\frac{3a}{12}+\frac{4a}{12}=1$

$\frac{10a}{12}=1$ $\quad\therefore a=\frac{6}{5}$

(2) $\mathrm{P}(X\ge 3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$$=\frac{3a}{12}+\frac{4a}{12}=\frac{7a}{12}=\frac{7}{12}\times\frac{6}{5}=\frac{7}{10}$$

6 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$\frac{k}{1\times2}+\frac{k}{2\times3}+\frac{k}{3\times4}+\frac{k}{4\times5}=1$

$$k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\right\}=1$$

$k\left(1-\frac{1}{5}\right)=1$, $\frac{4}{5}k=1$ $\quad\therefore k=\frac{5}{4}$

$$\therefore \mathrm{P}(2\le X\le 3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$$
$$=\frac{k}{2\times3}+\frac{k}{3\times4}=\frac{k}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{5}{4}=\frac{5}{16}$$

10강 이산확률변수의 기댓값과 표준편차

확인 문제 p. 46

1 (1) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{1}{9}=\frac{4}{3}$

(2) $\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{9}+2^2\times\frac{4}{9}+3^2\times\frac{1}{9}=\frac{26}{9}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{26}{9}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$

2 $\mathrm{E}(X)=6$, $\mathrm{V}(X)=25$이므로

(1) $\mathrm{E}(5X)=5\mathrm{E}(X)=5\times6=30$

$\mathrm{V}(5X)=5^2\mathrm{V}(X)=25\times25=625$

따라서 X의 평균은 30, 분산은 625이다.

(2) $\mathrm{E}(X+3)=\mathrm{E}(X)+3=6+3=9$

$\mathrm{V}(X+3)=\mathrm{V}(X)=25$

따라서 X의 평균은 9, 분산은 25이다.

(3) $\mathrm{E}(2X-10)=2\mathrm{E}(X)-10=2\times6-10=2$

$\mathrm{V}(2X-10)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times25=100$

따라서 X의 평균은 2, 분산은 100이다.

교/과/서/속 핵심 유형+ 실전 문제 p. 47

1 (1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+a+\frac{2}{5}=1$ $\quad\therefore a=\frac{3}{10}$

(2) $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{2}{5}=3$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{2}{5}=10$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=10-3^2=1$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$

따라서 X의 평균은 3, 분산은 1, 표준편차는 1이다.

2 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+a=1$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{6}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{3}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{19}{18}$

따라서 X의 분산은 $\frac{19}{18}$이다.

3 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_{12}\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{22}{35}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_{12}\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{12}{35}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_{12}\mathrm{C}_0}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{35}$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

(2) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{22}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{1}{35}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{22}{35}+1^2\times\frac{12}{35}+2^2\times\frac{1}{35}=\frac{16}{35}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{16}{35}-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{52}{175}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{52}{175}}=\frac{2\sqrt{91}}{35}$

따라서 X의 평균은 $\frac{2}{5}$, 분산은 $\frac{52}{175}$, 표준편차는 $\frac{2\sqrt{91}}{35}$이다.

4 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_5\mathrm{C}_0\times{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{12}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{5}{12}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{5}{12}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{12}$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{12}=\frac{3}{2}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{12}+1^2\times\frac{5}{12}+2^2\times\frac{5}{12}+3^2\times\frac{1}{12}=\frac{17}{6}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{17}{6}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{12}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{7}{12}}=\frac{\sqrt{21}}{6}$

5 상금을 확률변수 X라고 하면 X가 가질 수 있는 값은 1000, 2000, 3000이고, 그 확률은 각각

$P(X=1000)=\frac{{}_{10}C_0\times{}_{15}C_2}{{}_{25}C_2}=\frac{7}{20}$

$P(X=2000)=\frac{{}_{10}C_1\times{}_{15}C_1}{{}_{25}C_2}=\frac{1}{2}$

$P(X=3000)=\frac{{}_{10}C_2\times{}_{15}C_0}{{}_{25}C_2}=\frac{3}{20}$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1000	2000	3000	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{20}$	1

$\therefore E(X)=1000\times\frac{7}{20}+2000\times\frac{1}{2}+3000\times\frac{3}{20}=1800$

따라서 상금의 기댓값은 1800원이다.

6 상금을 확률변수 X라고 하면 X가 가질 수 있는 값은 1400, 2100, 2800이고, 그 확률은 각각

$P(X=1400)=\frac{{}_3C_2\times{}_4C_0}{{}_7C_2}=\frac{1}{7}$

$P(X=2100)=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$

$P(X=2800)=\frac{{}_3C_0\times{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1400	2100	2800	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

$\therefore E(X)=1400\times\frac{1}{7}+2100\times\frac{4}{7}+2800\times\frac{2}{7}=2200$

따라서 X의 기댓값은 2200원이다.

7 $E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{1}{7}+3\times\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{2}{7}+1^2\times\frac{3}{7}+2^2\times\frac{1}{7}+3^2\times\frac{1}{7}=\frac{16}{7}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{16}{7}-\left(\frac{8}{7}\right)^2=\frac{48}{49}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{48}{49}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

이때 $Y=7X+2$의 평균과 표준편차를 구하면

$E(Y)=E(7X+2)=7E(X)+2=7\times\frac{8}{7}+2=10$

$\sigma(Y)=\sigma(7X+2)=|7|\sigma(X)=7\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=4\sqrt{3}$

따라서 Y의 평균은 10, 표준편차는 $4\sqrt{3}$이다.

8 $E(X)=(-1)\times\frac{1}{5}+0\times\frac{4}{15}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$

$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{5}+0^2\times\frac{4}{15}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{5}=\frac{4}{3}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{4}{3}-\left(\frac{8}{15}\right)^2=\frac{236}{225}$

$\therefore V(15X-6)=15^2V(X)=225\times\frac{236}{225}=236$

계산력 다지기

p. 48~49

1 (1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{1}{5}+a+\frac{1}{3}=1$

$\therefore a=\frac{4}{15}$

(2) $P(2\le X\le 4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

$=\frac{2}{15}+\frac{1}{5}+\frac{4}{15}=\frac{3}{5}$

(3) $P(X\le 5a)=P\left(X\le\frac{4}{3}\right)=P(X=1)=\frac{1}{15}$

(4) $E(X)=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{2}{15}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{4}{15}+5\times\frac{1}{3}$

$=\frac{11}{3}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{15}+2^2\times\frac{2}{15}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{4}{15}+5^2\times\frac{1}{3}$

$=15$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=15-\left(\frac{11}{3}\right)^2=\frac{14}{9}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{14}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{3}$

따라서 X의 평균은 $\frac{11}{3}$, 분산은 $\frac{14}{9}$, 표준편차는 $\frac{\sqrt{14}}{3}$이다.

(5) $E(9X)=9E(X)=9\times\frac{11}{3}=33$

$V(9X)=9^2V(X)=81\times\frac{14}{9}=126$

$\sigma(9X)=|9|\sigma(X)=9\times\frac{\sqrt{14}}{3}=3\sqrt{14}$

따라서 $9X$의 평균은 33, 분산은 126, 표준편차는 $3\sqrt{14}$이다.

(6) $E(3X+2)=3E(X)+2=3\times\frac{11}{3}+2=13$

$V(3X+2)=3^2V(X)=9\times\frac{14}{9}=14$

$\sigma(3X+2)=|3|\sigma(X)=3\times\frac{\sqrt{14}}{3}=\sqrt{14}$

따라서 $3X+2$의 평균은 13, 분산은 14, 표준편차는 $\sqrt{14}$이다.

2 (1) 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$\frac{a}{8}+\frac{2a}{8}+\frac{3a}{8}+\frac{4a}{8}=1$

$\frac{5a}{4}=1 \quad \therefore a=\frac{4}{5}$

(2)

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

(3) $\mathrm{P}\left(X\geq\frac{5}{2}a\right)$

$=\mathrm{P}(X\geq 2)$

$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{9}{10}$

(4) $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{2}{5}=3$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{2}{5}=10$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=10-3^2=1$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$

따라서 X의 평균은 3, 분산은 1, 표준편차는 1이다.

(5) $\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}X\right)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$

$\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{V}(X)=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$

$\sigma\left(\frac{1}{2}X\right)=\left|\frac{1}{2}\right|\sigma(X)=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{1}{2}X$의 평균은 $\frac{3}{2}$, 분산은 $\frac{1}{4}$, 표준편차는 $\frac{1}{2}$이다.

(6) $\mathrm{E}(-X+4)=-\mathrm{E}(X)+4=-3+4=1$

$\mathrm{V}(-X+4)=(-1)^2\mathrm{V}(X)=1\times 1=1$

$\sigma(-X+4)=|-1|\sigma(X)=1\times 1=1$

따라서 $-X+4$의 평균은 1, 분산은 1, 표준편차는 1이다.

3 (1) $\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x\times{}_9\mathrm{C}_{2-x}}{{}_{12}\mathrm{C}_2}$ $(x=0,\ 1,\ 2)$

(2)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$	1

(3) $\mathrm{P}(X=0$ 또는 $X=2)$

$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{6}{11}+\frac{1}{22}=\frac{13}{22}$

(4) $\mathrm{P}(X\geq 1)$

$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{9}{22}+\frac{1}{22}=\frac{5}{11}$

(5) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{6}{11}+1\times\frac{9}{22}+2\times\frac{1}{22}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{6}{11}+1^2\times\frac{9}{22}+2^2\times\frac{1}{22}=\frac{13}{22}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{13}{22}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{44}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{15}{44}}=\frac{\sqrt{165}}{22}$

따라서 X의 평균은 $\frac{1}{2}$, 분산은 $\frac{15}{44}$, 표준편차는 $\frac{\sqrt{165}}{22}$

이다.

(6) $\mathrm{E}(2X+5)=2\mathrm{E}(X)+5=2\times\frac{1}{2}+5=6$

$\mathrm{V}(2X+5)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times\frac{15}{44}=\frac{15}{11}$

$\sigma(2X+5)=|2|\sigma(X)=2\times\frac{\sqrt{165}}{22}=\frac{\sqrt{165}}{11}$

따라서 $2X+5$의 평균은 6, 분산은 $\frac{15}{11}$, 표준편차는

$\frac{\sqrt{165}}{11}$이다.

4 (1) $\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_5\mathrm{C}_x\times{}_3\mathrm{C}_{3-x}}{{}_8\mathrm{C}_3}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

(2)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$	1

(3) $\mathrm{P}(2\leq X\leq 3)$

$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{15}{28}+\frac{5}{28}=\frac{5}{7}$

(4) $\mathrm{P}(X<3)=1-\mathrm{P}(X=3)$

$=1-\frac{5}{28}=\frac{23}{28}$

(5) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{56}+1\times\frac{15}{56}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{28}$

$=\frac{15}{8}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{56}+1^2\times\frac{15}{56}+2^2\times\frac{15}{28}+3^2\times\frac{5}{28}$

$=\frac{225}{56}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{225}{56}-\left(\frac{15}{8}\right)^2=\frac{225}{448}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{225}{448}}=\frac{15\sqrt{7}}{56}$

따라서 X의 평균은 $\frac{15}{8}$, 분산은 $\frac{225}{448}$, 표준편차는 $\frac{15\sqrt{7}}{56}$

이다.

(6) $\mathrm{E}(-4X+9)=-4\mathrm{E}(X)+9$

$=-4\times\frac{15}{8}+9=\frac{3}{2}$

$\mathrm{V}(-4X+9)=(-4)^2\mathrm{V}(X)$

$=16\times\frac{225}{448}=\frac{225}{28}$

$\sigma(-4X+9)=|-4|\sigma(X)$

$=4\times\frac{15\sqrt{7}}{56}=\frac{15\sqrt{7}}{14}$

따라서 $-4X+9$의 평균은 $\frac{3}{2}$, 분산은 $\frac{225}{28}$, 표준편차는

$\frac{15\sqrt{7}}{14}$이다.

09~10강 족집게 기출문제

p. 50~53

1 ①	2 $\frac{7}{9}$	3 ④	4 $\frac{5}{8}$	5 ③
6 ③	7 ②	8 12	9 ②	10 ②
11 ①	12 $\frac{1}{9}$	13 ②	14 120	15 ⑤
16 $\frac{7}{2}$	17 1	18 ③	19 ②	20 ①
21 $\frac{115}{2}$	22 ④	23 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{2}{3}$		24 $\frac{5}{3}$
25 6				

1 $\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

$=\dfrac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$

$=a(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ $(x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 35)$

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=35)=1$

$a\{(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})$
$+\cdots+(\cancel{\sqrt{35}}-\cancel{\sqrt{34}})+(\sqrt{36}-\cancel{\sqrt{35}})\}$
$=1$

$(\sqrt{36}-\sqrt{1})a=1,\ 5a=1$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{5}$

2 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$\dfrac{k}{6}+\dfrac{k}{3}+(k-1)+\left(k-\dfrac{4}{3}\right)=1$

$\dfrac{5}{2}k-\dfrac{7}{3}=1,\ \dfrac{5}{2}k=\dfrac{10}{3}\qquad \therefore\ k=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\dfrac{2}{9}x & (x=1,\ 2)\\ \dfrac{4}{3}-\dfrac{x}{3} & (x=3,\ 4)\end{cases}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(2\le X\le 3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\dfrac{4}{9}+\left(\dfrac{4}{3}-1\right)=\dfrac{7}{9}$

3 확률의 총합은 1이므로

$2a+a+b=1\qquad \therefore\ 3a+b=1\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(X=-1)$에서

$b=\dfrac{1}{2}\times 2a\qquad \therefore\ b=a\qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{4},\ b=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=a+b=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

4 확률의 총합은 1이므로

$a^2+\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{4}=1,\ 8a^2+2a-3=0$

$(4a+3)(2a-1)=0\qquad \therefore\ a=-\dfrac{3}{4}$ 또는 $a=\dfrac{1}{2}$

이때 $0\le\mathrm{P}(X=x)\le 1$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}(2X^2-7X+3<0)=\mathrm{P}((2X-1)(X-3)<0)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}<X<3\right)$

$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=a^2+\dfrac{3}{8}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$

5 5개의 귤과 4개의 한라봉이 들어 있는 바구니에서 임의로 3개의 과일을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_9\mathrm{C}_3$이고, 꺼낸 과일 중에서 한라봉이 x개인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_x\times{}_5\mathrm{C}_{3-x}$이므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_x\times{}_5\mathrm{C}_{3-x}}{{}_9\mathrm{C}_3}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

$\therefore\ \mathrm{P}(1\le X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}+\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3}$

$=\dfrac{10}{21}+\dfrac{5}{14}=\dfrac{5}{6}$

6 바닥에 닿는 면에 적힌 두 수를 a, b라고 하면 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여

(i) $a+b=3$인 경우는 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$의 2개

(ii) $a+b=5$인 경우는 $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$의 4개

(i), (ii)에 의하여 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8},\ \mathrm{P}(X=5)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=3$ 또는 $X=5)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=5)$

$=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{8}$

7 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 나오는 모든 경우와 그 때의 상금을 표로 나타내면 다음과 같다.

100원	500원	상금(원)
H	HH	1100
H	HT	600
H	TH	600
H	TT	100
T	HH	1000
T	HT	500
T	TH	500
T	TT	0

상금을 확률변수 X라고 하면 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 500, 600, 1000, 1100이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{1}{8},\ \mathrm{P}(X=100)=\dfrac{1}{8}$

$\mathrm{P}(X=500)=\dfrac{1}{4},\ \mathrm{P}(X=600)=\dfrac{1}{4}$

$P(X=1000)=\frac{1}{8}$, $P(X=1100)=\frac{1}{8}$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	500	600	1000	1100	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\therefore E(X)=0\times\frac{1}{8}+100\times\frac{1}{8}+500\times\frac{1}{4}+600\times\frac{1}{4}+1000\times\frac{1}{8}+1100\times\frac{1}{8}$

$=550$

따라서 상금의 기댓값은 550원이다.

8 받을 수 있는 금액을 확률변수 X라고 하면 X가 가질 수 있는 값은 -1000, 5000이고, 그 확률은 각각

$P(X=-1000)=\frac{x}{6+x}$, $P(X=5000)=\frac{6}{6+x}$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1000	5000	합계
$P(X=x)$	$\frac{x}{6+x}$	$\frac{6}{6+x}$	1

이때 X의 기댓값이 1000원이므로

$-1000\times\frac{x}{6+x}+5000\times\frac{6}{6+x}=1000$

$\frac{-1000x+30000}{6+x}=1000$

$-x+30=6+x \qquad \therefore x=12$

9 확률의 총합은 1이므로 $\frac{1}{4}+a+\frac{1}{8}+b=1$

$\therefore a+b=\frac{5}{8}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$E(X)=\frac{11}{4}$이므로

$0\times\frac{1}{4}+2a+4\times\frac{1}{8}+6b=\frac{11}{4}$

$\therefore a+3b=\frac{9}{8}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{8}$, $b=\frac{1}{4}$

$\therefore a-b=\frac{1}{8}$

10 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{7}{12}=\frac{5}{2}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{12}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{7}{12}=\frac{20}{3}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{20}{3}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{12}$

11 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\times{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{6}$, $P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_6C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{2}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_6C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{3}{10}$, $P(X=3)=\frac{{}_4C_3\times{}_6C_0}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{30}$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{30}=2$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$

12 확률의 총합은 1이므로 $a+\frac{1}{3}+b=1$

$\therefore a+b=\frac{2}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$E(X)=0\times a+1\times\frac{1}{3}+2b=\frac{1}{3}+2b$

$E(X^2)=0^2\times a+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times b=\frac{1}{3}+4b$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{1}{3}+4b-\left(\frac{1}{3}+2b\right)^2$

$=-4\left(b-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

즉, $b=\frac{1}{3}$일 때 분산이 최대이다.

$b=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $a+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

$\therefore ab=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

13 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=125-5^2=100$이므로

$V(Y)=V\left(\frac{2}{5}X+40\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^2V(X)$

$=\frac{4}{25}\times100=16$

$\therefore \sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{16}=4$

14 $E(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$이므로

$E(T)=E\left(20\times\frac{X-m}{\sigma}+100\right)$

$=\frac{20}{\sigma}E(X)-\frac{20m}{\sigma}+100$

$=\frac{20m}{\sigma}-\frac{20m}{\sigma}+100=100$

$\sigma(T)=\sigma\left(20\times\frac{X-m}{\sigma}+100\right)$

$=\left|\frac{20}{\sigma}\right|\sigma(X)=\frac{20}{\sigma}\times\sigma=20$

$\therefore E(T)+\sigma(T)=100+20=120$

15 $E(X)=770$, $\sigma(X)=70$이므로

$$E(Y)=E\left(\frac{8}{7}X+160\right)=\frac{8}{7}E(X)+160$$
$$=\frac{8}{7}\times770+160=1040$$
$$\sigma(Y)=\sigma\left(\frac{8}{7}X+160\right)=\left|\frac{8}{7}\right|\sigma(X)$$
$$=\frac{8}{7}\times70=80$$
$$\therefore \frac{E(Y)}{\sigma(Y)}=\frac{1040}{80}=13$$

16 $E(Y)=E(4X-2)=4E(X)-2$이므로

$6=4E(X)-2\qquad \therefore E(X)=2$

$E(Y)=6$, $E(Y^2)=60$이므로

$$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$$
$$=60-6^2=24$$

한편 $V(Y)=V(4X-2)=4^2V(X)$이므로

$24=4^2V(X)$

$\therefore V(X)=\frac{3}{2}$

$\therefore E(X)+V(X)=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

다른 풀이

$Y=4X-2$에서 $Y^2=16X^2-16X+4$

이것을 $E(Y^2)=60$에 대입하면

$E(16X^2-16X+4)=60$

$16E(X^2)-16E(X)+4=60$

이때 $E(Y)=E(4X-2)=4E(X)-2$에서 $E(X)=2$이므로

$16E(X^2)-32+4=60$, $16E(X^2)=88$

$\therefore E(X^2)=\frac{11}{2}$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{11}{2}-2^2=\frac{3}{2}$$

$\therefore E(X)+V(X)=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

17 확률의 총합은 1이므로

$a+b+c=1\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$E(X)=1$이므로

$b+2c=1\qquad\cdots\cdots$ ㉡

이때 $E(X^2)=b+4c$, $V(X)=\frac{1}{3}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=b+4c-1=\frac{1}{3}$$

$\therefore b+4c=\frac{4}{3}\qquad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{1}{6}$

$b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{1}{6}$을 ㉠에 대입하면

$a+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=1\qquad\therefore a=\frac{1}{6}$

$$\therefore E(2aX+b)=2aE(X)+b$$
$$=2\times\frac{1}{6}\times1+\frac{2}{3}=1$$

18 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$

$k+4k+9k+16k=1$

$30k=1\qquad\therefore k=\frac{1}{30}$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{8}{15}$	1

$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{30}+2\times\frac{2}{15}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{8}{15}=\frac{10}{3}$

$$\therefore E(6X-5)=6E(X)-5$$
$$=6\times\frac{10}{3}-5=15$$

19 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 9, 11, 13, 15이고, 그 확률은 모두 $\frac{1}{4}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	9	11	13	15	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X)=9\times\frac{1}{4}+11\times\frac{1}{4}+13\times\frac{1}{4}+15\times\frac{1}{4}=12$

$E(X^2)=9^2\times\frac{1}{4}+11^2\times\frac{1}{4}+13^2\times\frac{1}{4}+15^2\times\frac{1}{4}=149$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=149-12^2=5$

$\therefore V(2X+4)=2^2V(X)=4\times5=20$

20 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 2, 4이고, 그 확률은 각각 다음과 같다.

(i) $X=0$인 경우

(짝, 홀, 짝), (홀, 짝, 홀)이므로 그 경우의 수는 2

$\therefore P(X=0)=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

(ii) $X=2$인 경우

(짝, 짝, 홀), (홀, 짝, 짝), (홀, 홀, 짝), (짝, 홀, 홀)이므로 그 경우의 수는 4

$\therefore P(X=2)=4\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

(iii) $X=4$인 경우

(짝, 짝, 짝), (홀, 홀, 홀)이므로 그 경우의 수는 2

$\therefore P(X=4)=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{4}=6$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=6-2^2=2$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{2}$

21 색종이의 한 변의 길이를 확률변수 X라고 하면 둘레의 길이는 $4X$이므로

$\mathrm{E}(4X)=30$에서 $4\mathrm{E}(X)=30$

$\therefore \mathrm{E}(X)=\frac{15}{2}$

$\mathrm{V}(4X)=20$에서 $4^2\mathrm{V}(X)=20$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\frac{5}{4}$

이때 한 변의 길이가 X인 색종이의 넓이는 X^2이고, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로 색종이의 넓이의 평균은

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{5}{4}+\left(\frac{15}{2}\right)^2=\frac{115}{2}$

22 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$이고, 그 확률은 각각 다음과 같다.

(i) $X=1$인 경우

정육면체의 모서리의 양 끝점을 택해야 하므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{12}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{3}{7}$

(ii) $X=\sqrt{2}$인 경우

정육면체의 각 면의 대각선의 양 끝점을 택해야 하므로

$\mathrm{P}(X=\sqrt{2})=\frac{6\times2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{3}{7}$

(iii) $X=\sqrt{3}$인 경우

정육면체의 대각선의 양 끝점을 택해야 하므로

$\mathrm{P}(X=\sqrt{3})=\frac{4}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{3}{7}+(\sqrt{2})^2\times\frac{3}{7}+(\sqrt{3})^2\times\frac{1}{7}=\frac{12}{7}$

$\therefore \mathrm{E}(14X^2)=14\mathrm{E}(X^2)=14\times\frac{12}{7}=24$

23 (1) 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)=1$

$a+2a+3a=1,\ 6a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{6}$ …… (가)

(2) $\mathrm{P}(X^2=1)$

$=\mathrm{P}(X=-1$ 또는 $X=1)$

$=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)$ …… (나)

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) a의 값을 구한다.	2점
(나) $\mathrm{P}(X^2=1)$이 나타내는 확률을 찾는다.	2점
(다) $\mathrm{P}(X^2=1)$을 구한다.	2점

24 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각 다음과 같다.

(i) $X=1$인 경우

나머지 카드에 적힌 숫자는 2, 3, 4로 3가지이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}$

(ii) $X=2$인 경우

나머지 카드에 적힌 숫자는 3, 4로 2가지이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$

(iii) $X=3$인 경우

나머지 카드에 적힌 숫자는 4로 1가지이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

…… (가)

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$ …… (나)

채점 기준	배점
(가) X가 가질 수 있는 값과 그 확률을 각각 구한다.	4점
(나) X의 평균을 구한다.	3점

25 $\mathrm{E}(X)=m,\ \mathrm{E}(X^2)=4m+5$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=4m+5-m^2$

$=-(m-2)^2+9$ …… (가)

$\sigma(X)=\sqrt{-(m-2)^2+9}$이므로

$\sigma(-2X+5)=|-2|\sigma(X)$

$=2\sigma(X)$

$=2\sqrt{-(m-2)^2+9}$ …… (나)

따라서 $m=2$일 때, $\sigma(-2X+5)$는 최댓값 6을 갖는다.

…… (다)

채점 기준	배점
(가) $\mathrm{V}(X)$를 m에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(나) $\sigma(-2X+5)$를 m에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(다) $\sigma(-2X+5)$의 최댓값을 구한다.	2점

11강 이항분포

확인 문제 p. 54

1 화살을 10발 쏘는 시행은 독립시행이고, 명중률은 0.8이므로 확률변수 X의 확률분포는 이항분포 $B(10, 0.8)$이다.

2 (1) $E(X)=15\times\frac{1}{3}=5$

(2) $V(X)=15\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\frac{10}{3}}=\frac{\sqrt{30}}{3}$

3 $\frac{1}{6}$

교/과/서/속 핵심 유형+ 실전 문제 p. 55

1 (1) 6명의 환자가 주사를 맞는 시행은 독립시행이고, 주사를 맞고 치유될 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(6, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_6C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 6)$

(2) $P(X=4)={}_6C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}$

2 10명이 이벤트에 응모하는 시행은 독립시행이고, 이벤트에 당첨될 확률이 $\frac{2}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

즉, X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{10-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 10)$

$\therefore P(X\geq 1)=1-P(X=0)$

$=1-{}_{10}C_0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^{10}=1-\left(\frac{3}{5}\right)^{10}$

따라서 $P(X\geq 1)$은 ④이다.

3 자유투가 성공하는 횟수를 확률변수 X라고 하면 자유투가 성공할 확률이 0.2이므로 X는 이항분포 $B(10, 0.2)$를 따른다.

즉, X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{10}C_x\,0.2^x\,0.8^{10-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 10)$

따라서 자유투가 성공한 횟수가 한 번 이하일 확률은

$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)$

$={}_{10}C_0\,0.2^0\,0.8^{10}+{}_{10}C_1\,0.2^1\,0.8^9$

$=0.107+0.268=0.375$

4 정답을 맞히는 문항 수를 확률변수 X라고 하면 정답을 맞힐 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

즉, X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}={}_{10}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$(x=0, 1, 2, \cdots, 10)$

따라서 시험 점수가 45점 이상이려면 $X\geq 9$이어야 하므로 합격할 확률은

$P(X\geq 9)=P(X=9)+P(X=10)$

$={}_{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$=\frac{10}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{11}{1024}$

5 확률변수 X는 이항분포 $B\left(36, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$E(X)=36\times\frac{2}{3}=24$, $\sigma(X)=\sqrt{36\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}=2\sqrt{2}$

6 확률변수 X는 이항분포 $B(20, p)$를 따른다.

$E(X)=4$이므로 $20p=4$ $\quad\therefore p=\frac{1}{5}$

이때 $V(X)=20\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$이고,

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{16}{5}+4^2=\frac{96}{5}$

7 확률변수 X는 이항분포 $B(60, 0.05)$를 따르므로

$E(X)=60\times 0.05=3$

$V(X)=60\times 0.05\times 0.95=2.85$

따라서 X의 평균은 3, 분산은 2.85이다.

8 확률변수 X는 이항분포 $B\left(50, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

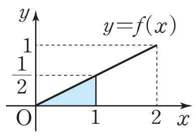
$E(X)=50\times\frac{2}{5}=20$, $V(X)=50\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=12$

$\therefore E(X)+V(X)=20+12=32$

12강 정규분포

확인 문제 p. 56

1 구하는 확률은 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$P(0\leq X\leq 1)=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

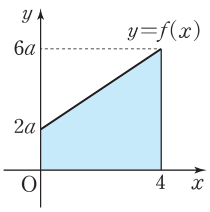
2 (1) $\mathrm{N}(6,\ 2^2)$
(2) $\mathrm{N}(-3,\ 3^2)$

교/과/서/속 핵심 유형+ 실전 문제 p. 57

1 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 3\times a=1 \qquad \therefore a=\frac{2}{3}$

2 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times(2a+6a)\times 4=1,\ 16a=1$

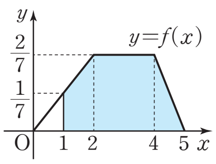
$\therefore a=\frac{1}{16}$

3 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times(2+5)\times a=1$

$\frac{7}{2}a=1 \qquad \therefore a=\frac{2}{7}$

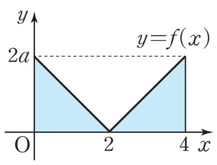
따라서 구하는 확률은 오른쪽 그림에서 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(1\le X\le 5)=1-\mathrm{P}(0\le X\le 1)$

$=1-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{7}=\frac{13}{14}$

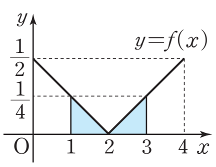
4 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$2\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 2a\right)=1$

$4a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은 오른쪽 그림에서 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(1\le X\le 3)$은 ④이다.

5 (1) 세 곡선 A, B, C는 각각 직선 $x=m_1$, $x=m_2$, $x=m_3$에 대하여 대칭이므로
$m_1<m_2<m_3$
(2) 표준편차가 클수록 곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼진 모양이므로
$\sigma_2<\sigma_1<\sigma_3$

6 ㄱ. 확률변수 X_1의 확률밀도함수의 그래프의 대칭축이 확률변수 X_2의 확률밀도함수의 그래프의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로
$\mathrm{E}(X_1)<\mathrm{E}(X_2)$
ㄴ. 확률변수 X_1의 확률밀도함수의 그래프의 가운데 부분의 높이가 확률변수 X_2의 확률밀도함수의 그래프의 가운데 부분의 높이보다 낮으므로
$\sigma(X_2)<\sigma(X_1)$
ㄷ. $\mathrm{E}(X_1)<a$이므로 $\mathrm{P}(X_1\ge a)<0.5$
$\mathrm{E}(X_2)>a$이므로 $\mathrm{P}(X_2\ge a)>0.5$
$\therefore \mathrm{P}(X_1\ge a)\ne\mathrm{P}(X_2\ge a)$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

13강 표준정규분포

확인 문제 p. 58

1 (1) $\mathrm{P}(Z\ge 1.5)=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.5-0.4332$
$=0.0668$
(2) $\mathrm{P}(Z\le 1)=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.5+0.3413$
$=0.8413$
(3) $\mathrm{P}(-2\le Z\le 0.5)$
$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=0.4772+0.1915=0.6687$

2 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르고, $n=400$, $p=\frac{1}{2}$이다.
이때 n이 충분히 크고
$np=400\times\frac{1}{2}=200$,
$npq=400\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=100$
이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 10^2)$을 따른다.

교/과/서/속 핵심유형+ 실전 문제

p. 59

1 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 10^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-60}{10}$으로 놓으면 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(55\le X\le 65)=\mathrm{P}\left(\frac{55-60}{10}\le Z\le \frac{65-60}{10}\right)$
$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0.5)$
$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=2\times 0.1915=0.383$

(2) $\mathrm{P}(X\ge 75)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{75-60}{10}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.5-0.4332=0.0668$

2 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(44,\ 8^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-44}{8}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(36\le X\le 48)=\mathrm{P}\left(\frac{36-44}{8}\le Z\le \frac{48-44}{8}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0.5)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=0.3413+0.1915=0.5328$

3 지원자들의 점수를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(420,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-420}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(402\le X\le 432)=\mathrm{P}\left(\frac{402-420}{12}\le Z\le \frac{432-420}{12}\right)$
$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.4332+0.3413=0.7745$

따라서 점수가 402점 이상 432점 이하인 지원자는 전체의 $77.45\,\%$이다.

(2) $\mathrm{P}(X\ge 426)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{426-420}{12}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 0.5)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=0.5-0.1915=0.3085$

따라서 구하는 지원자의 수는
$6000\times 0.3085=1851$(명)

4 신입생의 키를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(165,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-165}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

신입생의 키가 171 cm 이하일 확률은
$\mathrm{P}(X\le 171)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{171-165}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1.5)$
$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.5+0.4332=0.9332$

따라서 구하는 신입생의 수는
$10000\times 0.9332=9332$(명)

5 400명 중에서 초대권으로 입장한 관람객의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 $n=400$, $p=0.2$인 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.2)$를 따른다.
이때 n이 충분히 크고
$np=400\times 0.2=80$, $npq=400\times 0.2\times 0.8=64$
이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따른다.
즉, $Z=\frac{X-80}{8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 초대권으로 입장한 관람객이 96명 이상일 확률은
$\mathrm{P}(X\ge 96)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{96-80}{8}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$

6 600명 중에서 O형인 학생 수를 확률변수 X라고 하면 X는 $n=600$, $p=0.4$인 이항분포 $\mathrm{B}(600,\ 0.4)$를 따른다.
이때 n이 충분히 크고
$np=600\times 0.4=240$, $npq=600\times 0.4\times 0.6=144$
이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 12^2)$을 따른다.
즉, $Z=\frac{X-240}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 O형인 학생이 246명 이상 258명 이하일 확률은
$\mathrm{P}(246\le X\le 258)=\mathrm{P}\left(\frac{246-240}{12}\le Z\le \frac{258-240}{12}\right)$
$=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=0.4332-0.1915=0.2417$

11~13강 족집게 기출문제

p. 60~63

1 ③	**2** 40	**3** 60	**4** ②	**5** ②
6 ②	**7** ㄴ, ㅁ	**8** 5	**9** ⑤	**10** ⑤
11 45	**12** 39	**13** ②	**14** ③	
15 1637명	**16** 67.8점	**17** ①	**18** ②	**19** 36
20 0.3848	**21** 0.8185	**22** 0.16	**23** (1) $\frac{2}{3}$	(2) $\frac{5}{6}$
24 $\frac{7}{64}$	**25** 81점			

1 명중시키는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$$

따라서 이 선수가 4발 이상 명중시킬 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge4)&=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)\\&={}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^1+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{5}\right)^5\left(\frac{3}{5}\right)^0\\&=\frac{240}{3125}+\frac{32}{3125}=\frac{272}{3125}\end{aligned}$$

2 $\mathrm{E}(X)=18p=6$에서 $p=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=18\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=4$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=4+6^2=40$

3 $\mathrm{P}(X=x)={}_{80}\mathrm{C}_x\frac{3^x}{4^{80}}={}_{80}\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{80-x}$

$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 80)$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(80,\ \frac{3}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=80\times\frac{3}{4}=60$

4 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(20,\ 0.8)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=20\times0.8\times0.2=3.2$

5 5종류의 액세서리 중에서 2종류를 택할 때, 2종류 모두 목걸이일 확률은 $\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{100\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}=3$

6 동전 한 개를 20번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X, 총점을 확률변수 Y라고 하면

$Y=3X-(20-X)=4X-20$

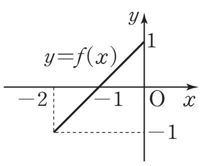
X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=20\times\frac{1}{2}=10$

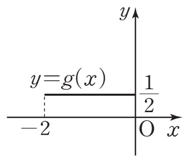
$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{E}(Y)&=\mathrm{E}(4X-20)=4\mathrm{E}(X)-20\\&=4\times10-20=20\end{aligned}$$

따라서 총점의 기댓값은 20점이다.

7 ㄱ. $-2\le x<-1$에서 $f(x)<0$이므로 확률밀도함수가 아니다.



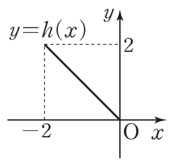
ㄴ. $-2\le x\le0$에서 $g(x)\ge0$이고 $y=g(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가



$2\times\frac{1}{2}=1$

이므로 확률밀도함수이다.

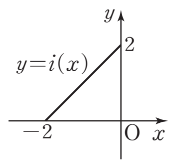
ㄷ. $y=h(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가



$\frac{1}{2}\times2\times2=2$

이므로 확률밀도함수가 아니다.

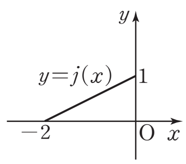
ㄹ. $y=i(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가



$\frac{1}{2}\times2\times2=2$

이므로 확률밀도함수가 아니다.

ㅁ. $-2\le x\le0$에서 $j(x)\ge0$이고 $y=j(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가



$\frac{1}{2}\times2\times1=1$

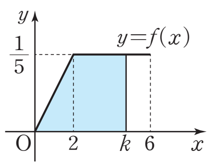
이므로 확률밀도함수이다.

따라서 확률밀도함수가 될 수 있는 것은 ㄴ, ㅁ이다.

8 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=6$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times(4+6)\times a=1$, $5a=1$ $\quad\therefore\ a=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X\le k)=\frac{4}{5}$이고 $\mathrm{P}(X\le k)$는 오른쪽 그림에서 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$\frac{1}{2}\times(k-2+k)\times\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

$2k-2=8$ $\quad\therefore\ k=5$

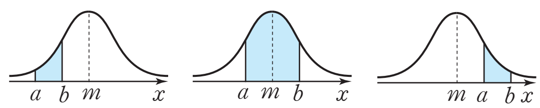
9 ㄱ. 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(X\ge m)=0.5$

ㄴ. 정규분포 곡선과 x축 사이의 넓이가 1이므로

$\mathrm{P}(X\le a)+\mathrm{P}(X\ge a)=1$

ㄷ. $a<b$일 때,



$\therefore\ \mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}(X\le b)-\mathrm{P}(X\le a)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 $E(X)=8$이므로 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=8$에 대하여 대칭이다.
따라서 $P(a\le X\le a+4)$가 최대가 되려면
$\frac{a+(a+4)}{2}=8$
$2a+4=16 \qquad \therefore a=6$

11 $P(X\le k)=0.9772>0.5$이므로
$P(X\le m)+P(m\le X\le k)=0.9772$
$0.5+P(m\le X\le k)=0.9772$
$\therefore P(m\le X\le k)=0.4772 \qquad \cdots\cdots ㉠$
한편 $P(X\le m-2\sigma)=0.0228<0.5$이므로
$P(X\le m)-P(m-2\sigma\le X\le m)=0.0228$
$0.5-P(m-2\sigma\le X\le m)=0.0228$
$\therefore P(m-2\sigma\le X\le m)=0.4772 \qquad \cdots\cdots ㉡$
㉠, ㉡에 의하여
$P(m\le X\le k)=P(m-2\sigma\le X\le m)$
$=P(m\le X\le m+2\sigma)$
$\therefore k=m+2\sigma=25+2\times10=45$

12 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(45, 6^2)$, $N(56, 10^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-45}{6}$, $Z_Y=\frac{Y-56}{10}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
$P(33\le X\le k)=P\left(\frac{33-45}{6}\le Z_X\le\frac{k-45}{6}\right)$
$=P\left(-2\le Z_X\le\frac{k-45}{6}\right)$
$P(66\le Y\le 76)=P\left(\frac{66-56}{10}\le Z_Y\le\frac{76-56}{10}\right)$
$=P(1\le Z_Y\le 2)$
$=P(-2\le Z_Y\le -1)$
$P(33\le X\le k)=P(66\le Y\le 76)$이므로
$\frac{k-45}{6}=-1$, $k-45=-6 \qquad \therefore k=39$

13 화영이의 수학 시험 점수를 각각 표준화하면
1학기 중간고사: $\frac{72-45}{12}=2.25$
1학기 기말고사: $\frac{80-50}{15}=2$
2학기 중간고사: $\frac{95-60}{20}=1.75$
2학기 기말고사: $\frac{86-56}{16}=1.875$
따라서 상대적으로 1학기 중간고사 성적이 가장 높고, 2학기 중간고사 성적이 가장 낮다.

14 감귤 한 개의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(100, 20^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-100}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
따라서 택한 감귤의 무게가 80 g 이하일 확률은
$P(X\le 80)=P\left(Z\le\frac{80-100}{20}\right)$
$=P(Z\le -1)$
$=P(Z\le 0)-P(-1\le Z\le 0)$
$=0.5-P(0\le Z\le 1)$
$=0.5-0.3413$
$=0.1587$

15 학생들의 몸무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(62, 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-62}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
몸무게가 56 kg 이상 74 kg 이하일 확률은
$P(56\le X\le 74)=P\left(\frac{56-62}{6}\le Z\le\frac{74-62}{6}\right)$
$=P(-1\le Z\le 2)$
$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$
$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)$
$=0.3413+0.4772$
$=0.8185$
따라서 구하는 학생 수는
$2000\times 0.8185=1637$(명)

16 지원자들의 점수를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(60, 20^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-60}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
입사 가능한 최저 점수를 a점이라고 하면
$P(X\ge a)=\frac{3500}{10000}=0.35$
$P\left(Z\ge\frac{a-60}{20}\right)=0.35$
$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{a-60}{20}\right)=0.35$
$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-60}{20}\right)=0.35$
$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-60}{20}\right)=0.15$
이때 $P(0\le Z\le 0.39)=0.15$이므로
$\frac{a-60}{20}=0.39 \qquad \therefore a=67.8$
따라서 입사 가능한 최저 점수는 67.8점이다.

17 확률변수 X가 이항분포 $B\left(450, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로 $n=450$, $p=\frac{2}{3}$이다.
이때 n이 충분히 크고
$np=450\times\frac{2}{3}=300$,
$npq=450\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=100$
이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(300, 10^2)$을 따른다.

즉, $Z=\frac{X-300}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ P(X\le 280)=P\left(Z\le\frac{280-300}{10}\right)$
$=P(Z\le -2)$
$=P(Z\le 0)-P(-2\le Z\le 0)$
$=0.5-P(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$

18 영화 B를 예매할 확률은 0.2
400명의 관객 중 영화 B를 예매하는 관객 수를 확률변수 X라고 하면 X는 $n=400$, $p=0.2$인 이항분포 $B(400,\ 0.2)$를 따른다.
이때 n이 충분히 크고
$np=400\times 0.2=80$,
$npq=400\times 0.2\times 0.8=64$
이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(80,\ 8^2)$을 따른다.
즉, $Z=\frac{X-80}{8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 영화 B를 예매하는 관객이 72명 이상일 확률은
$P(X\ge 72)=P\left(Z\ge\frac{72-80}{8}\right)$
$=P(Z\ge -1)$
$=P(-1\le Z\le 0)+P(Z\ge 0)$
$=P(0\le Z\le 1)+0.5$
$=0.3413+0.5$
$=0.8413$

19 108번 중에서 화살을 항아리에 넣는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 $n=108$, $p=\frac{1}{4}$인 이항분포 $B\left(108,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.
이때 n이 충분히 크고
$np=108\times\frac{1}{4}=27$,
$npq=108\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{81}{4}$
이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N\left(27,\ \left(\frac{9}{2}\right)^2\right)$을 따른다.
즉, $Z=\frac{X-27}{\frac{9}{2}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
이때 성공한 횟수가 k번 이상일 확률이 0.023이므로
$P(X\ge k)=0.023$
$P\left(Z\ge\frac{k-27}{\frac{9}{2}}\right)=0.023$
$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-27}{\frac{9}{2}}\right)=0.023$
$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-27}{\frac{9}{2}}\right)=0.023$
$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{k-27}{\frac{9}{2}}\right)=0.477$
이때 $P(0\le Z\le 2)=0.477$이므로
$\frac{k-27}{\frac{9}{2}}=2$, $k-27=9$
$\therefore\ k=36$

20 한 팩에 들어 있는 당도가 12브릭스 미만인 딸기의 개수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B(20,\ 0.05)$를 따른다.
즉, X의 확률질량함수는
$P(X=x)={}_{20}C_x\,0.05^x\,0.95^{20-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$
한 팩에 당도가 12브릭스 미만인 딸기가 2알 이상 들어 있을 확률은
$P(X\ge 2)=1-P(X<2)$
$=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}$
$=1-({}_{20}C_0\,0.05^0\,0.95^{20}+{}_{20}C_1\,0.05^1\,0.95^{19})$
$=1-(0.36+0.38)=0.26$
따라서 2팩 중에서 한 팩의 딸기 값을 지불하지 않을 확률은
${}_2C_1\times 0.26\times(1-0.26)=0.3848$

21 (가)에서 $f(80-x)=f(80+x)$이면 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=80$에 대하여 대칭이므로
$m=80$
확률변수 X는 정규분포 $N(80,\ \sigma^2)$을 따르므로
$Z=\frac{X-80}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$P(m-6\le X\le m+6)=P(80-6\le X\le 80+6)$
$=P(74\le X\le 86)$
$=P\left(\frac{74-80}{\sigma}\le Z\le\frac{86-80}{\sigma}\right)$
$=P\left(-\frac{6}{\sigma}\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)$
$=2P\left(0\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)$
$=0.8664$
$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)=0.4332$
이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로
$\frac{6}{\sigma}=1.5\qquad\therefore\ \sigma=4$
$\therefore\ P(72\le X\le 84)=P\left(\frac{72-80}{4}\le Z\le\frac{84-80}{4}\right)$
$=P(-2\le Z\le 1)$
$=P(-2\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)$
$=P(0\le Z\le 2)+P(0\le Z\le 1)$
$=0.4772+0.3413$
$=0.8185$

22 치약 한 개의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(160,\ 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-160}{5}$으로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

치약 한 개의 무게가 150 g 이하일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 150)&=\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{150-160}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_X\le -2)\\&=\mathrm{P}(Z_X\le 0)-\mathrm{P}(-2\le Z_X\le 0)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

한편 제품 2500개 중에서 출고하지 않은 치약의 개수를 확률변수 Y라고 하면 Y는 $n=2500,\ p=0.02$인 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.02)$를 따른다.

이때 n이 충분히 크고

$np=2500\times0.02=50$,

$npq=2500\times0.02\times0.98=49$

이므로 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 7^2)$을 따른다.

즉, $Z_Y=\dfrac{Y-50}{7}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

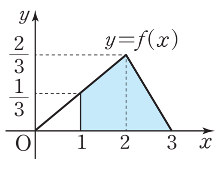
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\ge 57)&=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{57-50}{7}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\ge 1)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 1)\\&=0.5-0.34\\&=0.16\end{aligned}$$

23 (1) $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\dfrac{1}{2}\times3\times k=1,\ \dfrac{3}{2}k=1$

$\therefore\ k=\dfrac{2}{3}$ …… (가)

(2) 구하는 확률은 다음 그림에서 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1,\ x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$\begin{aligned}\mathrm{P}(1\le X\le 3)&=1-\mathrm{P}(0\le X\le 1)\\&=1-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}\\&=\frac{5}{6}\end{aligned}$$ …… (나)

채점 기준	배점
(가) k의 값을 구한다.	3점
(나) $\mathrm{P}(1\le X\le 3)$을 구한다.	3점

24 배터리의 충전 후 사용 가능 시간은 평균 48시간인 정규분포를 따르므로 배터리 한 개가 48시간 이상 사용 가능할 확률은 $\dfrac{1}{2}$이다. …… (가)

충전 후 사용 가능 시간이 48시간 이상인 배터리의 개수를 확률변수 X라고 하면 X는 $n=6,\ p=\dfrac{1}{2}$인 이항분포 $\mathrm{B}\left(6,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따른다.

즉, X의 확률질량함수는

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=x)&={}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}\\&={}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^6\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)\end{aligned}$$

따라서 충전 후 사용 가능 시간이 48시간 이상인 배터리가 5개 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 5)&=\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)\\&={}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\\&=\frac{6}{64}+\frac{1}{64}\\&=\frac{7}{64}\end{aligned}$$ …… (나)

채점 기준	배점
(가) 충전 후 48시간 이상 사용 가능할 확률을 구한다.	3점
(나) 충전 후 사용 가능 시간이 48시간 이상인 배터리가 5개 이상일 확률을 구한다.	4점

25 학생들의 영어 점수를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(68,\ 10^2)$을 따른다.

즉, $Z=\dfrac{X-68}{10}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. …… (가)

상위 10 % 이내에 속하기 위한 최소 점수를 c점이라고 하면

$\mathrm{P}(X\ge c)=0.1$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{c-68}{10}\right)=0.1$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{c-68}{10}\right)=0.1$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{c-68}{10}\right)=0.1$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{c-68}{10}\right)=0.4$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.3)=0.4$이므로

$\dfrac{c-68}{10}=1.3$

$c-68=13$

$\therefore\ c=81$

따라서 최소 81점 이상이어야 한다. …… (나)

채점 기준	배점
(가) 확률변수 X를 정하고 표준화한다.	2점
(나) 상위 10 % 이내에 속하기 위한 최소 점수를 구한다.	5점

14강 표본평균의 분포

확인 문제 p. 64

1 (1) 표본조사
(2) 전수조사

2 모평균은 $m=8$, 모분산은 $\sigma^2=16$, 표본의 크기는 $n=16$이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m=8,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{16}{16}=1$$

따라서 $\overline{X}$의 평균은 8, 분산은 1이다.

교/과/서/속 핵심유형+ 실전 문제 p. 65

1 모평균은 5, 모표준편차는 3, 표본의 크기는 25이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=5,\ \sigma(\overline{X})=\frac{3}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5}$$

따라서 $\overline{X}$의 평균은 5, 표준편차는 $\frac{3}{5}$이다.

2 모평균은 10, 모분산은 $6^2=36$, 표본의 크기는 9이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=10,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{36}{9}=4$$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=4+10^2=104$$

3 $$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{5}=\frac{19}{10}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{2}{5}=\frac{47}{10}$$

$$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{47}{10}-\left(\frac{19}{10}\right)^2=\frac{109}{100}$$

이때 표본의 크기가 $n=109$이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{19}{10},\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{109}{100}}{109}=\frac{1}{100}$$

따라서 $\overline{X}$의 평균은 $\frac{19}{10}$, 분산은 $\frac{1}{100}$이다.

4 상자에서 카드 한 장을 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

$$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{2}{7}+5\times\frac{3}{7}+7\times\frac{2}{7}=5$$

$$\mathrm{E}(X^2)=3^2\times\frac{2}{7}+5^2\times\frac{3}{7}+7^2\times\frac{2}{7}=\frac{191}{7}$$

$$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{191}{7}-5^2=\frac{16}{7}$$

이때 표본의 크기가 $n=3$이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=5,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{16}{7}}{3}=\frac{16}{21}$$

5 음식 배달 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(27,\ 9^2)$을 따르므로 9번 측정한 배달 시간의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(27,\ \frac{9^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(27,\ 3^2)$을 따른다.

즉, $Z=\frac{\overline{X}-27}{3}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 33)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{33-27}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(30\le\overline{X}\le 33)&=\mathrm{P}\left(\frac{30-27}{3}\le Z\le\frac{33-27}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4772-0.3413=0.1359\end{aligned}$$

6 달걀 한 개의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(55,\ 8^2)$을 따르므로 달걀 16개의 무게의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(55,\ \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(55,\ 2^2)$을 따른다.

즉, $Z=\frac{\overline{X}-55}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 달걀 한 개의 평균 무게가 53 g 이상 60 g 이하일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(53\le\overline{X}\le 60)&=\mathrm{P}\left(\frac{53-55}{2}\le Z\le\frac{60-55}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2.5)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\&=0.3413+0.4938=0.8351\end{aligned}$$

15강 모평균의 추정

확인 문제 p. 66

1 모표준편차는 $\sigma=3$, 표본의 크기는 $n=100$, 표본평균은 $\overline{x}=70$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$70-1.96\times\frac{3}{\sqrt{100}}\le m\le 70+1.96\times\frac{3}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore\ 69.412\le m\le 70.588$$

2 모표준편차는 $\sigma=5$, 표본의 크기는 $n=25$이므로

(1) 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{25}}=3.92$

(2) 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{5}{\sqrt{25}}=5.16$

교/과/서/속 핵심유형+ 실전 문제

p. 67

1 모표준편차는 $\sigma=30$, 표본의 크기는 $n=400$, 표본평균은 $\overline{x}=1200$이므로 모평균 m에 대하여

(1) 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$1200-1.96\times\frac{30}{\sqrt{400}}\le m\le1200+1.96\times\frac{30}{\sqrt{400}}$

$\therefore\ 1197.06\le m\le1202.94$

(2) 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$1200-2.58\times\frac{30}{\sqrt{400}}\le m\le1200+2.58\times\frac{30}{\sqrt{400}}$

$\therefore\ 1196.13\le m\le1203.87$

2 모표준편차는 $\sigma=40$, 표본의 크기는 $n=100$, 표본평균은 $\overline{x}=1000$이므로 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$1000-1.96\times\frac{40}{\sqrt{100}}\le m\le1000+1.96\times\frac{40}{\sqrt{100}}$

$\therefore\ 992.16\le m\le1007.84$

3 표본의 크기는 $n=100$으로 충분히 크고, 표본평균은 $\overline{x}=170$, 표본표준편차는 $S=16$이므로 모평균 m에 대하여

(1) 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$170-1.96\times\frac{16}{\sqrt{100}}\le m\le170+1.96\times\frac{16}{\sqrt{100}}$

$\therefore\ 166.864\le m\le173.136$

(2) 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$170-2.58\times\frac{16}{\sqrt{100}}\le m\le170+2.58\times\frac{16}{\sqrt{100}}$

$\therefore\ 165.872\le m\le174.128$

4 표본의 크기는 $n=400$으로 충분히 크고, 표본평균은 $\overline{x}=1200$, 표본표준편차는 $S=40$이므로 모평균 m에 대하여 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$1200-2.58\times\frac{40}{\sqrt{400}}\le m\le1200+2.58\times\frac{40}{\sqrt{400}}$

$\therefore\ 1194.84\le m\le1205.16$

5 모표준편차는 $\sigma=2$, 표본의 크기는 $n=400$이므로

(1) 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{2}{\sqrt{400}}=0.392$

(2) 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{2}{\sqrt{400}}=0.516$

6 모표준편차는 $\sigma=7$, 표본의 크기는 $n=196$이므로 신뢰도 95 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$a=2\times1.96\times\frac{7}{\sqrt{196}}=1.96$

또 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$b=2\times2.58\times\frac{7}{\sqrt{196}}=2.58$

$\therefore\ b-a=0.62$

14~15강 족집게 기출문제

p. 68~71

1 ②	**2** ④	**3** ①	**4** 9	**5** ⑤
6 4	**7** ①	**8** 9		
9 $54.12\le m\le65.88$	**10** ②	**11** ②	**12** 396	
13 ①	**14** ③	**15** 400	**16** ④	**17** ⑤
18 ③	**19** 0.0228	**20** 90	**21** 25	**22** 11
23 8	**24** $22.16\le m\le37.84$			

1 모평균은 $m=30$, 모분산은 $\sigma^2=16$, 표본의 크기는 n이므로

$E(\overline{X})=m=30$

$V(\overline{X})=\frac{16}{n}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ n=32$

$\therefore\ m+n=62$

2 모표준편차는 $\sigma=18$, 표본의 크기는 n이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{18}{\sqrt{n}}\le3$에서 $\sqrt{n}\ge6\qquad\therefore\ n\ge36$

따라서 n의 최솟값은 36이다.

3 상자에서 구슬 한 개를 꺼낼 때, 구슬에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	1	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=(-1)\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{6}=\frac{7}{3}$

$\therefore\ V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{7}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{17}{9}$

이때 표본의 크기는 $n=3$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{2}{3}$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{17}{9}}{3}=\frac{17}{27}$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\overline{X}^2)&=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2\\&=\frac{17}{27}+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{29}{27}\end{aligned}$$

4 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}=\frac{11}{10}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{3}{10}=\frac{17}{10}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{17}{10}-\left(\frac{11}{10}\right)^2=\frac{49}{100}\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{49}{900}$이므로

$\frac{\frac{49}{100}}{n}=\frac{49}{900}$ $\quad\therefore n=9$

5 로션 한 개의 용량을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 4^2)$을 따르므로 로션 64개의 용량의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(200,\ \frac{4^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(200,\ 0.5^2)$을 따른다.

즉, $Z=\frac{\overline{X}-200}{0.5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 로션의 평균 용량이 199 mL 이상 201 mL 이하일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(199\le\overline{X}\le201)&=\mathrm{P}\left(\frac{199-200}{0.5}\le Z\le\frac{201-200}{0.5}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le2)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=2\times0.4772=0.9544\end{aligned}$$

6 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(80,\ \frac{10^2}{n}\right)$을 따른다.

즉, $Z=\frac{\overline{X}-80}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le75)=0.1587$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{75-80}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)=0.1587$

$\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.1587$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.1587$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.1587$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=1$, $\sqrt{n}=2$

$\therefore n=4$

7 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{20^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따른다.

즉, $Z=\frac{\overline{X}-m}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le4)&=\mathrm{P}(-4\le\overline{X}-m\le4)\\&=\mathrm{P}(m-4\le\overline{X}\le m+4)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{m-4-m}{4}\le Z\le\frac{m+4-m}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le1)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=2\times0.3413\\&=0.6826\end{aligned}$$

8 고속버스를 타고 이동하는 데 걸리는 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(4.5,\ 0.5^2)$을 따르므로 n번 측정한 시간의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(4.5,\ \frac{0.5^2}{n}\right)$을 따른다.

즉, $Z=\frac{\overline{X}-4.5}{\frac{0.5}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge5)=0.0013$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{5-4.5}{\frac{0.5}{\sqrt{n}}}\right)=0.0013$

$\mathrm{P}(Z\ge\sqrt{n})=0.0013$

$\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le\sqrt{n})=0.0013$

$0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le\sqrt{n})=0.0013$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le\sqrt{n})=0.4987$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le3)=0.4987$이므로

$\sqrt{n}=3$ $\quad\therefore n=9$

9 표본평균은 $\overline{x}=60$, 모표준편차는 $\sigma=15$, 표본의 크기는 $n=25$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$60-1.96\times\frac{15}{\sqrt{25}}\le m\le60+1.96\times\frac{15}{\sqrt{25}}$

$\therefore 54.12\le m\le65.88$

10 표본의 크기는 $n=400$으로 충분히 크고, 표본평균은 $\overline{x}=50$, 표본표준편차는 $S=15$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$50-1.96\times\frac{15}{\sqrt{400}}\le m\le50+1.96\times\frac{15}{\sqrt{400}}$

$\therefore 48.53\le m\le51.47$

따라서 신뢰구간에 속하는 정수는 49, 50, 51의 3개이다.

11 모표준편차는 $\sigma=4$, 표본평균은 $\overline{x}=27$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$27-2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le m\le 27+2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}$

이때 $26.14\le m\le 27.86$이므로

$2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}=0.86$, $\sqrt{n}=12$ $\qquad\therefore\ n=144$

12 표본평균은 $\overline{x}$, 모표준편차는 5이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

이때 $199.3\le m\le 200.7$이므로

$\overline{x}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=199.3$, $\overline{x}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=200.7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\overline{x}=200$, $n=196$

$\therefore\ n+\overline{x}=396$

13 표본의 크기는 $n=900$으로 충분히 크고, 표본표준편차는 $S=2$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{2}{\sqrt{900}}=0.344$

14 $\mathrm{P}(|Z|\le a)=0.9$, $\mathrm{P}(|Z|\le b)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z|\le c)=0.99$라고 하면 각각의 신뢰구간의 길이는

① $2a\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{a\sigma}{5}$

② $2b\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{b\sigma}{5}$

③ $2c\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{c\sigma}{5}$

④ $2b\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}=\frac{b\sigma}{10}$

⑤ $2c\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}=\frac{c\sigma}{10}$

이때 $a<b<c$이므로

$\frac{a\sigma}{5}<\frac{b\sigma}{5}<\frac{c\sigma}{5}$, $\frac{b\sigma}{10}<\frac{c\sigma}{10}<\frac{c\sigma}{5}$

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 ③이다.

15 모표준편차를 σ, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고, 모평균을 신뢰도 α %로 추정할 때, 표본의 크기는 100, 신뢰구간의 길이는 16이므로

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=16$ $\qquad\therefore\ k\sigma=80$

모평균을 신뢰도 α %로 추정할 때, 구하는 표본의 크기를 n이라고 하면 신뢰구간의 길이는 8이므로 $\quad 2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=8$

이때 $k\sigma=80$이므로

$\frac{160}{\sqrt{n}}=8$, $\sqrt{n}=20$ $\qquad\therefore\ n=400$

따라서 표본의 크기는 400으로 해야 한다.

16 모표준편차는 $\sigma=10$이고, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 0.98 이하가 되어야 하므로

$2\times1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le0.98$

$\sqrt{n}\ge40$

$\therefore\ n\ge1600$

따라서 n의 최솟값은 1600이다.

17 표본평균은 $\overline{x}$, 모표준편차는 $\sigma=30$이고, 표본의 크기를 n이라고 하면 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$\overline{x}-2\times\frac{30}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2\times\frac{30}{\sqrt{n}}$

$-\frac{60}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{60}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ |m-\overline{x}|\le\frac{60}{\sqrt{n}}$

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 6 이하가 되려면

$\frac{60}{\sqrt{n}}\le6$, $\sqrt{n}\ge10$

$\therefore\ n\ge100$

따라서 최소 100개의 표본을 조사해야 한다.

18 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)\ (\sigma>0)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

ㄱ. 신뢰도 α %가 일정하면 k의 값이 일정하므로 표본의 크기 n이 커질수록 $2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값은 작아진다.
즉, 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

ㄴ. 표본의 크기 n이 일정할 때, 신뢰도 α %를 높일수록 k의 값이 커지므로 $2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값은 커진다.
즉, 신뢰구간의 길이는 길어진다.

ㄷ. 표본의 크기 n을 크게 하여도 신뢰도 α %를 높이면 k의 값이 같이 커지므로 $2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이 반드시 작아진다고 할 수 없다.
즉, 신뢰구간의 길이는 짧아진다고 할 수 없다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19 초콜릿 한 개의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 1^2)$을 따르므로 초콜릿 4개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라고 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(6,\ \frac{1^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(6,\ 0.5^2)$을 따른다.

즉, $Z=\frac{\overline{X}-6}{0.5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

초콜릿 4개가 들어 있는 세트 한 개의 무게는

$X_1+X_2+X_3+X_4=4\overline{X}$

따라서 초콜릿 세트가 중량 미달로 판매되지 못할 확률은

$P(4\overline{X} \le 20) = P(\overline{X} \le 5)$

$= P\left(Z \le \frac{5-6}{0.5}\right)$

$= P(Z \le -2)$

$= P(Z \le 0) - P(-2 \le Z \le 0)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

20 $P(|Z| \le k) = \frac{\alpha}{100}$라고 하면 모표준편차는 $\sigma = 10$, 표본의 크기는 $n = 100$, 표본평균은 $\overline{x} = 70$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$70 - k \times \frac{10}{\sqrt{100}} \le m \le 70 + k \times \frac{10}{\sqrt{100}}$

$\therefore 70 - k \le m \le 70 + k$

$68.35 \le m \le 71.65$이므로 $k = 1.65$

이때 $P(0 \le Z \le 1.65) = 0.45$이므로

$P(|Z| \le 1.65) = P(-1.65 \le Z \le 1.65)$

$= 2P(0 \le Z \le 1.65)$

$= 2 \times 0.45 = 0.9$

따라서 $0.9 = \frac{\alpha}{100}$이므로 $\alpha = 90$

21 모표준편차를 σ라고 하면

$b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = 0.516\sigma$

$d - c = 2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5.16 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$d - c = 2(b - a)$이므로

$5.16 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \times 0.516\sigma$

$\sqrt{n} = 5$ $\therefore n = 25$

22 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{3}$

$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{2} = 6$

$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

$= 6 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$ …… (가)

이때 표본의 크기는 $n = 4$이므로

$E(\overline{X}) = \frac{7}{3}$, $V(\overline{X}) = \frac{\frac{5}{9}}{4} = \frac{5}{36}$ …… (나)

$E(3\overline{X} - 1) = 3E(\overline{X}) - 1 = 3 \times \frac{7}{3} - 1 = 6$

$V(6\overline{X}) = 6^2 V(\overline{X}) = 36 \times \frac{5}{36} = 5$

$\therefore E(3\overline{X} - 1) + V(6\overline{X}) = 6 + 5 = 11$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 모평균 $E(X)$와 모분산 $V(X)$를 구한다.	2점
(나) 표본평균 $E(\overline{X})$와 표본분산 $V(\overline{X})$를 구한다.	2점
(다) $E(3\overline{X}-1)+V(6\overline{X})$의 값을 구한다.	2점

23 감나무에 달린 감의 개수를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(200, 50^2)$을 따르므로 n그루에 달린 감의 개수의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(200, \frac{50^2}{n}\right)$을 따른다.

즉, $Z = \frac{\overline{X} - 200}{\frac{50}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. …… (가)

$P(\overline{X} \ge 200 + 8\sqrt{n}) \le 0.1$에서

$P\left(Z \ge \frac{200 + 8\sqrt{n} - 200}{\frac{50}{\sqrt{n}}}\right) \le 0.1$

$P(Z \ge 0.16n) \le 0.1$

$P(Z \ge 0) - P(0 \le Z \le 0.16n) \le 0.1$

$0.5 - P(0 \le Z \le 0.16n) \le 0.1$

$\therefore P(0 \le Z \le 0.16n) \ge 0.4$ …… (나)

이때 $P(0 \le Z \le 1.28) = 0.4$이므로

$0.16n \ge 1.28$ $\therefore n \ge 8$

따라서 n의 최솟값은 8이다. …… (다)

채점 기준	배점
(가) $\overline{X}$가 따르는 확률분포를 구하고 표준화한다.	2점
(나) $P(\overline{X} \ge 200+8\sqrt{n}) \le 0.1$을 확률변수 Z에 대한 식으로 변형한다.	3점
(다) n의 최솟값을 구한다.	2점

24 표본평균을 $\overline{x}$라고 하면 모표준편차는 σ, 표본의 크기는 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ …… (가)

이때 $19.68 \le m \le 40.32$이므로

$\overline{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 19.68$

$\overline{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 40.32$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\overline{x} = 30$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4$ …… (나)

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$30 - 1.96 \times 4 \le m \le 30 + 1.96 \times 4$

$\therefore 22.16 \le m \le 37.84$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구한다.	2점
(나) 표본평균 $\overline{x}$의 값과 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값을 구한다.	3점
(다) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구한다.	2점

내공 점검

01~02강 내공 점검 p. 74~75

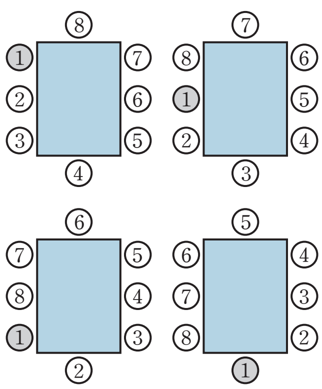
1 ④	**2** ③	**3** ②	**4** ③	**5** 15
6 ④	**7** 100	**8** ④	**9** ①	**10** ①
11 720	**12** 162	**13** 38		

1 A, B를 한 명으로 생각하면 $(n-1)$명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(n-2)!$
이때 A, B가 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 A, B가 이웃하게 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(n-2)!\times 2$
이 경우의 수가 240이므로
$(n-2)!\times 2=240$, $(n-2)!=120=5!$
$n-2=5 \quad \therefore n=7$

2 이웃한 두 수의 곱이 항상 짝수이려면 홀수끼리 이웃하지 않도록 배열해야 하므로 짝수를 원형으로 배열한 후 그 사이사이의 자리에 홀수를 배열하면 된다.
짝수 2, 4, 6, 8, 10을 원형으로 배열하는 방법의 수는
$(5-1)!=4!=24$
짝수 사이사이의 5개의 자리에 홀수 1, 3, 5, 7, 9를 배열하는 방법의 수는 $5!=120$
따라서 구하는 방법의 수는
$24\times 120=2880$

3 정육각형 모양의 영역을 칠하는 방법의 수는 2이다.
반원 6개를 나머지 6가지 색으로 칠하는 방법의 수는
$(6-1)!=5!=120$
따라서 구하는 방법의 수는
$2\times 120=240$

4 8명을 원형으로 배열하는 방법의 수는
$(8-1)!=7!$
이때 직사각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 4가지씩 있다.



따라서 구하는 방법의 수는 $7!\times 4$

5 전구 4개를 각각 켜거나 끄는 경우의 수는
${}_2\Pi_4=2^4=16$
이때 전구가 모두 꺼진 경우는 신호에서 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는 $16-1=15$

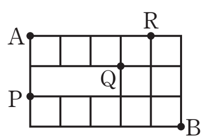
6 만들 수 있는 한 자리의 자연수의 개수는 3
만들 수 있는 두 자리의 자연수의 개수는
$3\times {}_4\Pi_1=3\times 4=12$
만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는
$3\times {}_4\Pi_2=3\times 4^2=48$
즉, 1000보다 작은 자연수의 개수는
$3+12+48=63$
따라서 1000은 64번째 수이다.

7 $f(2)\neq 5$이므로 $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 3, 7, 9의 4개이고, Y의 원소 1, 3, 5, 7, 9의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 1, 3에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는
$4\times {}_5\Pi_2=4\times 5^2=100$

8 7개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\dfrac{7!}{3!\times 2!\times 2!}=210$
이때 1112233은 제외하므로 구하는 자연수의 개수는
$210-1=209$

9 8개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\dfrac{8!}{2!\times 2!}=10080$
이때 양 끝에 서로 다른 문자를 배열하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 양 끝에 서로 같은 문자를 배열하는 경우의 수를 빼면 된다.
(i) 양 끝에 t를 배열하는 경우
나머지 문자 e, x, b, o, o, k를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!}=360$
(ii) 양 끝에 o를 배열하는 경우
나머지 문자 t, e, x, t, b, k를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!}=360$
(i), (ii)에 의하여 양 끝에 서로 같은 문자를 배열하는 경우의 수는 $360+360=720$
따라서 구하는 경우의 수는 $10080-720=9360$

10 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.



(ⅰ) A → P → B인 경우: $1\times\dfrac{6!}{5!}=6$

(ⅱ) A → Q → B인 경우: $\dfrac{4!}{3!}\times\dfrac{4!}{2!\times2!}=24$

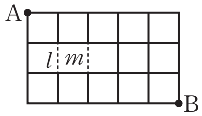
(ⅲ) A → R → B인 경우: $1\times\dfrac{4!}{3!}=4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 최단 경로의 수는

$6+24+4=34$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 두 도로 l, m이 있다고 가정하면 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는



$\dfrac{8!}{5!\times3!}=56$

지점 A에서 도로 l을 거쳐 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는 $2!\times1\times\dfrac{5!}{4!}=10$

지점 A에서 도로 m을 거쳐 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는 $\dfrac{3!}{2!}\times1\times\dfrac{4!}{3!}=12$

따라서 구하는 최단 경로의 수는 $56-(10+12)=34$

11 성호의 자리를 고정하면 윤주가 앉는 방법의 수는 1 …… (가)

나머지 6명이 앉는 방법의 수는 6명을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로

$6!=720$ …… (나)

따라서 구하는 방법의 수는

$1\times720=720$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 성호, 윤주가 앉는 방법의 수를 구한다.	4점
(나) 나머지 6명이 앉는 방법의 수를 구한다.	4점
(다) 8명의 학생이 앉는 방법의 수를 구한다.	2점

12 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0이어야 하므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0으로 1개이다. …… (가)

이때 십만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 2개이다. …… (나)

또 나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 3개이다. …… (다)

따라서 구하는 5의 배수의 개수는

$1\times2\times{}_3\Pi_4=1\times2\times3^4=162$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 일의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수를 구한다.	2점
(나) 십만의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수를 구한다.	2점
(다) 나머지 각 자리에 올 수 있는 숫자의 개수를 구한다.	2점
(라) 5의 배수의 개수를 구한다.	4점

13 4개의 문자를 택하는 방법은

a, a, a, b 또는 a, a, a, c 또는 a, a, b, b 또는 a, a, b, c 또는 a, b, b, c

로 5가지 경우가 있다.

(ⅰ) a, a, a, b 또는 a, a, a, c를 일렬로 배열하는 방법의 수는 각각 $\dfrac{4!}{3!}=4$

(ⅱ) a, a, b, b를 일렬로 배열하는 방법의 수는 $\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

(ⅲ) a, a, b, c 또는 a, b, b, c를 일렬로 배열하는 방법의 수는 각각 $\dfrac{4!}{2!}=12$ …… (가)

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 방법의 수는

$2\times4+6+2\times12=38$ …… (나)

채점 기준	배점
(가) 4개의 문자를 택하는 각 경우에 대하여 일렬로 배열하는 방법의 수를 구한다.	6점
(나) 4개의 문자를 일렬로 배열하는 방법의 수를 구한다.	4점

03~04강 내공 점검

p. 76~77

1 ⑤	**2** ⑤	**3** ③	**4** 165	**5** ⑤
6 $\dfrac{4}{3}$	**7** ③	**8** 1	**9** ③	**10** ③
11 ③	**12** 210	**13** 2	**14** 11	

1 구하는 방법의 수는 서로 다른 3개 중에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

2 먼저 사과, 포도, 딸기, 배를 각각 1개씩 꺼내고, 나머지 4개의 과일을 꺼내면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

3 $(a+b+c)$에서 서로 다른 항의 개수는 3이다.

$(x+y+z)^5$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개의 문자 x, y, z 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

따라서 구하는 항의 개수는 $3\times21=63$

4 $X=x+1$, $Y=y$, $Z=z-1$, $W=w-2$로 놓으면 X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수이다.

이때 $x=X-1$, $y=Y$, $z=Z+1$, $w=W+2$를 방정식 $x+y+z+w=10$에 대입하면

$(X-1)+Y+(Z+1)+(W+2)=10$

$\therefore X+Y+Z+W=8$ …… ㉠

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

즉, 구하는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 4개의 문자 X, Y, Z, W 중에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

5 주어진 조건을 만족하려면 집합 Y의 5개의 원소 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 작은 수부터 차례로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는
${}_5H_3={}_7C_3=35$

6 $(x+ay)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r x^{6-r}(ay)^r={}_6C_r a^r x^{6-r} y^r$
x^2y^4항은 $6-r=2$, $r=4$일 때이므로 $r=4$
즉, x^2y^4의 계수는 ${}_6C_4\times a^4=15a^4$
x^3y^3항은 $6-r=3$, $r=3$일 때이므로 $r=3$
즉, x^3y^3의 계수는 ${}_6C_3\times a^3=20a^3$
이때 x^2y^4의 계수와 x^3y^3의 계수가 같으므로
$15a^4=20a^3$, $5a^3(3a-4)=0$
$\therefore a=\frac{4}{3}$ ($\because a>0$)

7 $\frac{(x+1)^6-x^4}{x}$의 전개식에서 x^3의 계수는 $(1+x)^6-x^4$의 전개식에서 x^4의 계수와 같다.
$(1+x)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r 1^{6-r}x^r={}_6C_r x^r$
즉, $(1+x)^6$의 전개식에서 x^4항은 $r=4$일 때이므로 x^4의 계수는
${}_6C_4={}_6C_2=15$
따라서 구하는 x^3의 계수는 $15-1=14$

8 $(1+x)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r 1^{5-r}x^r={}_5C_r x^r$
$(a+x)^3$의 전개식의 일반항은
${}_3C_s a^{3-s}x^s$
따라서 주어진 식의 전개식의 일반항은
${}_5C_r x^r\times {}_3C_s a^{3-s}x^s={}_5C_r\,{}_3C_s a^{3-s}x^{r+s}$ ...... ㉠
x의 계수는 $r+s=1$ $(0\le r\le 5,\ 0\le s\le 3)$일 때이므로
(i) $r=0$, $s=1$인 경우
㉠에서 ${}_5C_0\times{}_3C_1\times a^2=3a^2$
(ii) $r=1$, $s=0$인 경우
㉠에서 ${}_5C_1\times{}_3C_0\times a^3=5a^3$
(i), (ii)에 의하여 x의 계수는
$3a^2+5a^3=8$, $5a^3+3a^2-8=0$
$(a-1)(5a^2+8a+8)=0$
$\therefore a=1$ ($\because a$는 실수)

9 ${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_7C_6$
$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_7C_6$
$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_7C_6$
$={}_4C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5+{}_7C_6$
$\vdots$
$={}_7C_5+{}_7C_6$
$={}_8C_6$

10 $(1+2x)^n$의 전개식의 일반항은
${}_nC_r 1^{n-r}(2x)^r={}_nC_r 2^r x^r$
이므로 $n\ge 3$인 자연수 n에 대하여 $(1+2x)^n$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_nC_3\times 2^3$이다.
주어진 식의 전개식에서 x^3의 계수는 각 항의 전개식에서 x^3의 계수의 합이므로 구하는 계수는
${}_3C_3 2^3+{}_4C_3 2^3+{}_5C_3 2^3+\cdots+{}_{10}C_3 2^3$
$=2^3({}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_3)$
$=2^3({}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_3)$
$=2^3({}_5C_4+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3)$
$=2^3({}_6C_4+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3+{}_{10}C_3)$
$\vdots$
$=2^3({}_{10}C_4+{}_{10}C_3)$
$=2^3\times{}_{11}C_4$
$=8\times 330$
$=2640$

11 ${}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$이므로
$2^{2n-1}=128=2^7$
따라서 $2n-1=7$이므로 $n=4$

12 $a\le b\le c\le d$인 경우는 8개의 자연수 중에서 중복을 허락하여 4개를 뽑은 후 크기가 작은 수부터 a, b, c, d에 차례로 대응시키면 된다.
즉, $a\le b\le c\le d$인 경우의 수는
${}_8H_4={}_{11}C_4=330$ ...... (가)
$a\le b\le c=d$인 경우는 8개의 자연수 중에서 중복을 허락하여 3개를 뽑은 후 크기가 작은 수부터 a, b, c에 차례로 대응시키고, d는 c와 같은 수를 대응시키면 된다.
즉, $a\le b\le c=d$인 경우의 수는
${}_8H_3={}_{10}C_3=120$ ...... (나)
따라서 구하는 경우의 수는
$330-120=210$ ...... (다)

채점 기준	배점
(가) $a\le b\le c\le d$인 경우의 수를 구한다.	3점
(나) $a\le b\le c=d$인 경우의 수를 구한다.	3점
(다) $a\le b\le c<d$인 경우의 수를 구한다.	2점

13 $\left(x-\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r x^{5-r}\left(-\frac{a}{x}\right)^r={}_5C_r(-1)^r a^r\frac{x^{5-r}}{x^r}$ ...... ㉠
$(x-4)\left(x-\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^2항은 x와 ㉠의 x항, -4와 ㉠의 x^2항이 곱해질 때 나타난다.
(i) ㉠에서 x항은 $(5-r)-r=1$, 즉 $r=2$일 때이므로
${}_5C_2\times(-1)^2\times a^2x=10a^2x$
즉, 주어진 전개식에서 x^2의 계수는
$1\times 10a^2=10a^2$

(ii) ㉠에서 x^2항은 $(5-r)-r=2$, 즉 $r=\frac{3}{2}$일 때이다.

그런데 r는 자연수이어야 하므로 ㉠에서 x^2항은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 전개식에서 x^2의 계수는 $10a^2$이다. …… (가)

한편 $(x-4)\left(x-\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^3항은 x와 ㉠의 x^2항, -4와 ㉠의 x^3항이 곱해질 때 나타난다.

그런데 (ii)에서 ㉠의 x^2항이 존재하지 않으므로 x^3항은 -4와 ㉠의 x^3항이 곱해질 때 나타난다.

㉠에서 x^3항은 $(5-r)-r=3$, 즉 $r=1$일 때이므로

${}_5C_1\times(-1)\times ax^3=-5ax^3$

따라서 주어진 전개식에서 x^3의 계수는

$-4\times(-5a)=20a$ …… (나)

이때 x^2의 계수와 x^3의 계수가 같으므로

$10a^2=20a$

$10a(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 주어진 전개식에서 x^2의 계수를 구한다.	3점
(나) 주어진 전개식에서 x^3의 계수를 구한다.	3점
(다) a의 값을 구한다.	2점

14 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$ …… (가)

따라서 주어진 부등식은

$2000<2^n-1<3000$

$\therefore 2001<2^n<3001$ …… (나)

이때 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로

$n=11$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$을 2^n에 대한 식으로 나타낸다.	3점
(나) 주어진 부등식을 2^n에 대한 부등식으로 나타낸다.	2점
(다) n의 값을 구한다.	2점

05~06강 내공 점검 p. 78~79

1 ④	2 ③	3 ③	4 ②	5 ②
6 $\frac{7}{32}$	7 $\frac{1}{3}$	8 $\frac{3}{5}$	9 ②	10 ⑤
11 166	12 $\frac{9}{14}$	13 $\frac{5}{7}$		

1 $A=\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

$B=\{(2, 4), (4, 2)\}$

$C=\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

$D=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

④ $B\cap D=\varnothing$이므로 B와 D는 서로 배반사건이다.

2 11명 중에서 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{11}C_3=165$

남학생 2명과 여학생 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_5C_1=75$

따라서 구하는 확률은

$\frac{75}{165}=\frac{5}{11}$

3 서로 다른 6개의 동전 중에서 3개를 뽑는 방법의 수는

${}_6C_3=20$

꺼낸 동전 3개의 총 금액이 300원 이상이려면 500원짜리 동전 1개는 반드시 꺼내고, 나머지 동전 5개 중에서 2개를 꺼내야 하므로 그 방법의 수는

${}_5C_2=10$

따라서 구하는 확률은

$\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

4 확률의 총합은 1이므로

$0.14+0.41+p+0.06+0.03=1$

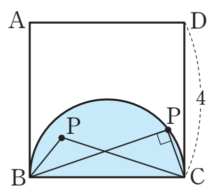
$\therefore p=0.36$

즉, 걸이 나올 확률이 0.36이므로

$\frac{90}{n}=0.36$

$\therefore n=250$

5 변 BC를 지름으로 하는 원 위에 점 P를 잡을 때 삼각형 PBC는 직각삼각형이 되므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 점 P를 잡을 때 삼각형 PBC는 둔각삼각형이 된다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})}=\frac{\frac{1}{2}\times\pi\times2^2}{4^2}=\frac{\pi}{8}$$

6 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{3}{4}=\mathrm{P}(A)+3\mathrm{P}(A)-\frac{1}{8}$

$4\mathrm{P}(A)=\frac{7}{8}\quad\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{7}{32}$

7 꺼낸 공 4개 중에서 빨간 공이 2개인 사건을 A, 3개인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\dfrac{3}{10}$

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\dfrac{1}{30}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{30}=\dfrac{1}{3}$

8 빨간색과 노란색이 이웃하지 않도록 칠하는 사건을 A라고 하면 A^C은 빨간색과 노란색이 이웃하도록 칠하는 사건이다.
빨간색과 노란색이 이웃하도록 칠하는 경우의 수는 빨간색과 노란색을 하나로 생각하여 5가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수에 빨간색과 노란색이 칠해진 위치를 바꾸는 경우의 수를 곱한 것과 같으므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{(5-1)!\times2!}{(6-1)!}=\dfrac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$\quad=1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$

9 함수 $f: X \longrightarrow X$가 $f(1)\neq f(2)$인 사건을 A라고 하면 A^C은 함수 f가 $f(1)=f(2)$인 사건이다.
함수 f가 $f(1)=f(2)$인 경우는 정의역의 원소 1, 2는 공역의 원소 1, 2, 3, 4 중 하나의 값에 대응시키고, 공역의 원소 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 나머지 정의역의 원소 3, 4에 대응시키는 경우이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{4\times{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_4}=\dfrac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$\quad=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

10 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 7개를 뽑을 때, 짝수를 적어도 한 개 뽑는 사건을 A라고 하면 A^C은 뽑은 7개가 모두 홀수인 사건이다.
홀수만 뽑는 경우는 1, 3 중에서 중복을 허락하여 7개를 뽑는 경우이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_2\mathrm{H}_7}{{}_4\mathrm{H}_7}=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_7}{{}_{10}\mathrm{C}_7}=\dfrac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$\quad=1-\dfrac{1}{15}=\dfrac{14}{15}$

11 방정식 $x+y+z=16$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3\mathrm{H}_{16}={}_{18}\mathrm{C}_{16}={}_{18}\mathrm{C}_2=153$ …… (가)

$y=4$이면 $x+z=12$이므로 방정식 $x+z=12$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_2\mathrm{H}_{12}={}_{13}\mathrm{C}_{12}={}_{13}\mathrm{C}_1=13$ …… (나)

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{13}{153}$이므로

$p=153$, $q=13$ …… (다)

$\therefore p+q=166$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 방정식 $x+y+z=16$의 음이 아닌 정수해의 개수를 구한다.	3점
(나) $y=4$일 때의 음이 아닌 정수해의 개수를 구한다.	4점
(다) p, q의 값을 구한다.	2점
(라) $p+q$의 값을 구한다.	1점

12 흰 공이 나오지 않는 사건을 A, 흰 공이 1개 나오는 사건을 B, 흰 공이 2개 나오는 사건을 C라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{1}{126}$ …… (가)

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{10}{63}$ …… (나)

$\mathrm{P}(C)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{10}{21}$ …… (다)

세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)=\dfrac{1}{126}+\dfrac{10}{63}+\dfrac{10}{21}=\dfrac{9}{14}$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 흰 공이 나오지 않을 확률을 구한다.	3점
(나) 흰 공이 1개 나올 확률을 구한다.	3점
(다) 흰 공이 2개 나올 확률을 구한다.	3점
(라) 주어진 조건을 만족하는 확률을 구한다.	1점

13 u와 e가 이웃하지 않도록 배열하는 사건을 A라고 하면 A^C은 u와 e가 이웃하도록 배열하는 사건이다.
주어진 7개의 문자를 일렬로 배열하는 방법의 수는

$\dfrac{7!}{3!\times2!}=420$ …… (가)

u와 e를 한 문자로 생각하면 6개의 문자를 일렬로 배열하는 방법의 수는 $\dfrac{6!}{3!\times2!}=60$이고, u와 e가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이므로 u와 e가 이웃하도록 배열하는 방법의 수는

$60\times2=120$ …… (나)

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\dfrac{120}{420}=\dfrac{2}{7}$ …… (다)

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{2}{7}=\dfrac{5}{7}$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 전체 경우의 수를 구한다.	2점
(나) u, e가 이웃하는 경우의 수를 구한다.	4점
(다) u, e가 이웃할 확률을 구한다.	2점
(라) u, e가 이웃하지 않을 확률을 구한다.	2점

07~08강 내공 점검 p. 80~81

1 $\frac{2}{5}$	2 ③	3 ④	4 ②	5 ③
6 $\frac{4}{9}$	7 ⑤	8 $\frac{20}{81}$	9 ①	10 $\frac{15}{32}$
11 (1) $\frac{7}{8}$ (2) $\frac{4}{7}$		12 $\frac{4}{9}$	13 $\frac{26}{81}$	

1 제주도를 선호하는 학생을 뽑는 사건을 A, 1학년 학생을 뽑는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{220}{400}=\frac{11}{20}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{88}{400}=\frac{11}{50}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{11}{50}}{\frac{11}{20}}=\frac{2}{5}$$

2 60세 이상인 사람을 뽑는 사건을 A, 남자를 뽑는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{9}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{3}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{15}\end{aligned}$$

3 두 정육면체 A, B를 고르는 사건을 각각 A, B라 하고, 두 번 모두 빨간색 면이 나오는 사건을 R라고 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(R)&=\mathrm{P}(A\cap R)+\mathrm{P}(B\cap R)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(R|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(R|B)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\\&=\frac{13}{72}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|R)=\frac{\mathrm{P}(A\cap R)}{\mathrm{P}(R)}=\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{13}{72}}=\frac{9}{13}$$

4 뽑은 한 사람이 양성 반응이 나타난 사람인 사건을 A, 실제로 C 질병에 걸린 사람인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A|B)=0.9$, $\mathrm{P}(A^C|B^C)=0.9$, $\mathrm{P}(B)=0.04$이므로

$\mathrm{P}(A|B^C)=0.1$, $\mathrm{P}(B^C)=0.96$

뽑은 한 사람이 양성 반응이 나타난 사람일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(B\cap A)+\mathrm{P}(B^C\cap A)\\&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)\\&=0.04\times0.9+0.96\times0.1\\&=0.132\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{0.04\times0.9}{0.132}=\frac{3}{11}\end{aligned}$$

5 $A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$, $C=\{1, 2, 3, 6\}$

$A\cap B=\{1, 3\}$, $A\cap C=\{1, 3\}$, $B\cap C=\{1, 2, 3\}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{3}{8}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

즉, A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

즉, A와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

즉, B와 C는 서로 종속이다.

따라서 서로 독립인 사건은 ㄱ, ㄴ이다.

6 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{9}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{9}$

A와 B^C, A^C과 B도 각각 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}+\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\frac{2}{9}\end{aligned}$$

이때 $0<\mathrm{P}(A)\le1$, $0<\mathrm{P}(B)\le1$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\ge2\sqrt{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}=2\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}$

(단, 등호는 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$일 때 성립)

$\therefore$ $\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\ge\frac{2}{3}-\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{4}{9}$이다.

7 세 선수 A, B, C가 화살을 한 번 쏘아 표적을 맞히는 사건을 각각 A, B, C라고 하면 세 사건 A, B, C는 서로 독립이므로 A^C, B^C, C^C도 서로 독립이다.

$\therefore$ (표적을 맞힌 화살이 있을 확률)

=(적어도 한 명이 표적을 맞힐 확률)

$=1-$(세 명 모두 표적을 맞히지 못할 확률)

$=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C^C)$

$=1-\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C^C)$

$=1-\left(1-\frac{4}{5}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)$

$=1-\frac{1}{60}=\frac{59}{60}$

8 주사위를 한 번 던져서 6의 약수가 나오는 경우를 ○, 6의 약수가 나오지 않는 경우를 ×로 나타내면 총 4번을 던져서 성수가 이기는 경우와 그 확률은 다음 표와 같다.

	지은	성수	지은	성수	확률
(i)	×	○	×	○	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{81}$
(ii)	○	○	×	○	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$
(iii)	×	○	○	○	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{4}{81}+\frac{8}{81}+\frac{8}{81}=\frac{20}{81}$

9 4쌍의 부부가 시험관아기 시술을 하였을 때

(i) 한 쌍의 부부도 성공하지 못할 확률은

$_4C_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$

(ii) 한 쌍의 부부만 성공할 확률은

$_4C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$1-\left(\frac{81}{256}+\frac{27}{64}\right)=\frac{67}{256}$

10 동전 한 개를 5번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 x, 뒷면이 나오는 횟수를 y라고 하자.

(i) 점 P의 위치가 4인 경우

$x+y=5,\ 2x-y=4$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=2$

즉, 그 확률은 $_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

(ii) 점 P의 위치가 7인 경우

$x+y=5,\ 2x-y=7$

두 식을 연립하여 풀면 $x=4,\ y=1$

즉, 그 확률은 $_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{5}{16}+\frac{5}{32}=\frac{15}{32}$

11 (1) 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

사건 A의 여사건 A^C은 눈의 수의 곱이 홀수인 사건이고, 눈의 수의 곱이 홀수이려면 눈의 수가 모두 홀수이어야 하므로 그 경우의 수는

$3\times3\times3=27$

$\therefore\ P(A^C)=\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$ …… (가)

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ …… (나)

(2) $A\cap B$는 눈의 수의 곱이 짝수이고, 그 합도 짝수인 사건으로 다음 두 가지 경우가 있다.

(i) 세 눈의 수가 모두 짝수인 경우

그 경우의 수는 $3\times3\times3=27$

(ii) 두 눈의 수는 홀수, 나머지 한 눈의 수는 짝수인 경우

그 경우의 수는 $_3C_1\times(3\times3\times3)=81$

(i), (ii)에 의하여 $A\cap B$가 일어나는 경우의 수는

$27+81=108$

$\therefore\ P(A\cap B)=\frac{108}{216}=\frac{1}{2}$ …… (다)

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{8}}=\frac{4}{7}$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) $P(A^C)$을 구한다.	3점
(나) $P(A)$를 구한다.	2점
(다) $P(A\cap B)$를 구한다.	3점
(라) $P(B\|A)$를 구한다.	2점

12 선미가 딸기 맛 사탕을 꺼내는 사건을 A, 지호가 딸기 맛 사탕을 꺼내는 사건을 B라고 하자.

(i) 선미, 지호 모두 딸기 맛 사탕을 꺼내는 경우

$P(A)=\frac{5}{9}$

$P(B|A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

$=\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$ …… (가)

(ii) 선미, 지호 모두 오렌지 맛 사탕을 꺼내는 경우

$P(A^C)=\frac{4}{9},\ P(B^C|A^C)=\frac{3}{8}$

$\therefore\ P(A^C\cap B^C)=P(A^C)P(B^C|A^C)$

$=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$ …… (나)

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$P(A\cap B)+P(A^C\cap B^C)=\frac{5}{18}+\frac{1}{6}=\frac{4}{9}$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 선미, 지호 모두 딸기 맛 사탕을 꺼낼 확률을 구한다.	4점
(나) 선미, 지호 모두 오렌지 맛 사탕을 꺼낼 확률을 구한다.	4점
(다) 선미와 지호가 같은 맛 사탕을 꺼낼 확률을 구한다.	2점

13 동전을 두 번 던져서 모두 앞면이 나오는 사건을 A라고 하면

$P(A)=\frac{1}{4}$ …… (가)

꺼낸 구슬 중에서 검은 구슬이 3개인 사건을 B라고 하면 주머니에서 구슬을 한 개씩 4번 꺼낼 때, 검은 구슬이 3개일 확률은

$P(B|A)={}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$ …… (나)

주머니에서 구슬을 한 개씩 3번 꺼낼 때, 검은 구슬이 3개일 확률은

$P(B|A^C)={}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{27}$ …… (다)

따라서 구하는 확률은

$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A^C)$
$=P(A)P(B|A)+P(A^C)P(B|A^C)$
$=\frac{1}{4}\times\frac{32}{81}+\frac{3}{4}\times\frac{8}{27}$
$=\frac{26}{81}$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 동전을 두 번 던져서 모두 앞면이 나올 확률을 구한다.	1점
(나) 구슬을 한 개씩 4번 꺼낼 때, 검은 구슬이 3개일 확률을 구한다.	3점
(다) 구슬을 한 개씩 3번 꺼낼 때, 검은 구슬이 3개일 확률을 구한다.	3점
(라) 검은 구슬이 3개일 확률을 구한다.	3점

09~10강 내공 점검

p. 82~83

1 ③	2 $\frac{3}{4}$	3 ④	4 $\frac{6}{7}$	5 ③
6 ④	7 ②	8 ②	9 ①	10 ④
11 $\frac{4}{15}$	12 (1) $a=\frac{2}{5}$, $b=\frac{3}{10}$ (2) $\frac{12}{5}$			13 $3\sqrt{5}$

1 $P(X\le3)=1-P(X=4)$
$=1-\frac{3\times4+2}{40}=\frac{13}{20}$

2 확률의 총합은 1이므로

$a^2+\frac{1}{4}+a=1$, $4a^2+4a-3=0$

$(2a+3)(2a-1)=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because 0<a<1$)

$\therefore P(X\ge0)=P(X=0)+P(X=1)$
$=\frac{1}{4}+a=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

3 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

(i) 두 눈의 수의 차가 0인 경우
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)
이므로 그 경우의 수는 6

(ii) 두 눈의 수의 차가 1인 경우
(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6),
(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)
이므로 그 경우의 수는 10

(iii) 두 눈의 수의 차가 2인 경우
(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6),
(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)
이므로 그 경우의 수는 8

(i), (ii), (iii)에 의하여

$P(X=0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $P(X=1)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

$P(X=2)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

$\therefore P(0\le X\le2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$
$=\frac{1}{6}+\frac{5}{18}+\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$

4 $X^2-3X+2\le0$에서 $(X-1)(X-2)\le0$

$\therefore 1\le X\le2$

$\therefore P(X^2-3X+2\le0)=P(X=1)+P(X=2)$

$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_2}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_3C_1}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$

$\therefore P(X^2-3X+2\le0)=P(X=1)+P(X=2)$
$=\frac{12}{35}+\frac{18}{35}=\frac{6}{7}$

5 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{2}{15}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{4}{15}+5\times\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{15}+2^2\times\frac{2}{15}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{4}{15}+5^2\times\frac{1}{3}$
$=15$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=15-\left(\frac{11}{3}\right)^2=\frac{14}{9}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{14}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{3}$

따라서 X의 표준편차는 $\frac{\sqrt{14}}{3}$이다.

6 확률의 총합은 1이므로

$a+a+3a+2a+2a=1$

$9a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{9}$

$E(X)=-2a-a+0+2a+4a$
$=3a=3\times\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$

$E(X^2)=4a+a+0+2a+8a$
$=15a=15\times\frac{1}{9}=\frac{5}{3}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{5}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{14}{9}$

따라서 X의 분산은 $\frac{14}{9}$이다.

7 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_2H_4}{{}_3H_4}=\frac{{}_5C_4}{{}_6C_4}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2H_3}{{}_3H_4}=\frac{{}_4C_3}{{}_6C_4}=\frac{4}{15}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2H_2}{{}_3H_4}=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_4}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_2H_1}{{}_3H_4}=\frac{{}_2C_1}{{}_6C_4}=\frac{2}{15}$$

$$P(X=4)=\frac{{}_2H_0}{{}_3H_4}=\frac{{}_1C_0}{{}_6C_4}=\frac{1}{15}$$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{4}{15}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{15}+4\times\frac{1}{15}=\frac{4}{3}$$

따라서 X의 평균은 $\frac{4}{3}$이다.

8 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_6C_2}{{}_9C_2}=\frac{5}{12}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_6C_1}{{}_9C_2}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_6C_0}{{}_9C_2}=\frac{1}{12}$$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	1

$$E(X)=0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{5}{12}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{5}{6}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{18}$$

9 $E(aX+b)=7$, $V(aX+b)=12$에서

$aE(X)+b=7$, $a^2V(X)=12$

이때 $E(X)=5$, $V(X)=3$이므로

$5a+b=7$, $3a^2=12$

$3a^2=12$에서 $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$a=2$를 $5a+b=7$에 대입하면

$10+b=7$ $\therefore b=-3$

$\therefore a-b=5$

10 확률의 총합은 1이므로

$\frac{3}{10}+\frac{2}{5}+a+2a=1$, $3a=\frac{3}{10}$ $\therefore a=\frac{1}{10}$

$$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{2}{5}+3\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{5}=\frac{11}{5}$$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{2}{5}+3^2\times\frac{1}{10}+4^2\times\frac{1}{5}=6$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=6-\left(\frac{11}{5}\right)^2=\frac{29}{25}$$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{29}}{5}$이므로

$$\sigma(5X+2)=|5|\sigma(X)=5\times\frac{\sqrt{29}}{5}=\sqrt{29}$$

11 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=10)=1$

$\frac{k}{1\times2}+\frac{k}{2\times3}+\cdots+\frac{k}{10\times11}=1$ …… (가)

$k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}=1$

$k\left(1-\frac{1}{11}\right)=1$, $\frac{10}{11}k=1$

$\therefore k=\frac{11}{10}$ …… (나)

$\therefore P(X\geq3)=1-\{P(X=1)+P(X=2)\}=1-\left(\frac{11}{20}+\frac{11}{60}\right)=1-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 확률의 총합이 1임을 이용하여 k에 대한 식을 세운다.	3점
(나) k의 값을 구한다.	3점
(다) $P(X\geq3)$을 구한다.	4점

12 (1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{3}{10}+a+b=1$

$\therefore a+b=\frac{7}{10}$ …… ㉠ …… (가)

$E(X^2)=\frac{8}{5}$이므로

$a+4b=\frac{8}{5}$ …… ㉡ …… (나)

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{5}$, $b=\frac{3}{10}$ …… (다)

(2) $E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10}=1$

$E(X^2)=\frac{8}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{8}{5}-1^2=\frac{3}{5}$ …… (라)

$\therefore V(2X+3)=2^2V(X)=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$

따라서 $2X+3$의 분산은 $\frac{12}{5}$이다. …… (마)

채점 기준	배점
(가) 확률의 총합이 1임을 이용하여 식을 세운다.	1점
(나) X^2의 평균이 $\frac{8}{5}$임을 이용하여 식을 세운다.	1점
(다) a, b의 값을 구한다.	2점
(라) $V(X)$를 구한다.	3점
(마) $2X+3$의 분산을 구한다.	3점

13 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\times{}_5C_3}{{}_9C_3}=\frac{5}{42}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_5C_2}{{}_9C_3}=\frac{10}{21}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_5C_1}{{}_9C_3}=\frac{5}{14}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_4C_3\times{}_5C_0}{{}_9C_3}=\frac{1}{21}$$

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$	1

…… (가)

$$E(X)=0\times\frac{5}{42}+1\times\frac{10}{21}+2\times\frac{5}{14}+3\times\frac{1}{21}=\frac{4}{3}$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{5}{42}+1^2\times\frac{10}{21}+2^2\times\frac{5}{14}+3^2\times\frac{1}{21}=\frac{7}{3}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{7}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$이므로 …… (나)

$$\sigma(9X+1)=|9|\sigma(X)$$
$$=9\times\frac{\sqrt{5}}{3}=3\sqrt{5}$$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 확률변수 X의 확률분포를 구한다.	3점
(나) $\sigma(X)$를 구한다.	4점
(다) $\sigma(9X+1)$을 구한다.	3점

11~13강 내공 점검 p. 84~85

1 ⑤	2 ②	3 5	4 46	5 ②
6 $\frac{8}{27}$	7 14	8 ②	9 ⑤	10 ⑤
11 4	12 160	13 0.0668		

1 확률변수 X가 이항분포 $B\left(10, \frac{7}{10}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{7}{10}\right)^x\left(\frac{3}{10}\right)^{10-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 10)$$

$$\therefore P(X\le 9)=1-P(X=10)$$
$$=1-{}_{10}C_{10}\left(\frac{7}{10}\right)^{10}\left(\frac{3}{10}\right)^0$$
$$=1-\left(\frac{7}{10}\right)^{10}$$

2 $E(X)=5$에서 $20p=5$

$$\therefore p=\frac{1}{4}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$V(X)=20\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{15}{4}+5^2$$
$$=\frac{115}{4}$$

3 확률변수 X는 이항분포 $B\left(500, \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$$E(X)=500\times\frac{1}{10}=50$$

$$V(X)=500\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=45$$

$$\therefore V\left(\frac{1}{3}X-5\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2V(X)$$
$$=\frac{1}{9}\times 45=5$$

4 주사위를 18번 던졌을 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라고 하면 3의 배수 이외의 눈이 나오는 횟수는 $18-Y$이므로

$$X=3Y+(18-Y)=2Y+18$$

주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(18, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

이때

$$E(Y)=18\times\frac{1}{3}=6,$$

$$V(Y)=18\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=4$$

이므로

$$E(X)=E(2Y+18)=2E(Y)+18$$
$$=2\times 6+18=30$$
$$V(X)=V(2Y+18)=2^2V(Y)$$
$$=4\times 4=16$$
$$\therefore E(X)+V(X)=30+16=46$$

5 ①, ④ $-1\le x\le 1$에서 항상 $f(x)\ge 0$, $i(x)\ge 0$인 것이 아니므로 확률밀도함수의 그래프가 아니다.

② $g(x)\ge 0$이고 $y=g(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times 1\right)=1$이므로 확률밀도함수의 그래프이다.

③ $y=h(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$이므로 확률밀도함수의 그래프가 아니다.

⑤ $y=j(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $2\times 1=2$이므로 확률밀도함수의 그래프가 아니다.

따라서 확률밀도함수의 그래프가 될 수 있는 것은 ②이다.

6 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

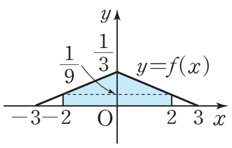
$\frac{1}{2}\times 6\times a=1$, $3a=1$ $\qquad\therefore a=\frac{1}{3}$

$0\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$, $(3,\ 0)$을 지나는 직선이므로 이 직선의 방정식은

$$f(x)=\frac{0-\frac{1}{3}}{3-0}(x-3)=-\frac{1}{9}(x-3)$$

$\therefore f(2)=\frac{1}{9}$

$\mathrm{P}(|X|\le 2)=\mathrm{P}(-2\le X\le 2)$는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로



$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|X|\le 2)&=\mathrm{P}(-2\le X\le 2)\\&=2\mathrm{P}(0\le X\le 2)\\&=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\times 2\\&=\frac{8}{9}\end{aligned}$$

$\therefore a\mathrm{P}(|X|\le 2)=\frac{1}{3}\times\frac{8}{9}=\frac{8}{27}$

7 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, (가)에서 $\mathrm{P}(X\le 5)=\mathrm{P}(X\ge 17)$이므로

$m=\frac{5+17}{2}=11$

(나)에서 $\sigma(-2X+1)=6$이므로

$|-2|\sigma(X)=6$ $\qquad\therefore \sigma(X)=3$, 즉 $\sigma=3$

$\therefore m+\sigma=11+3=14$

8 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$, $\mathrm{N}(40,\ 2^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-50}{5}$, $Z_Y=\frac{Y-40}{2}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 60)=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{60-50}{5}\right)=\mathrm{P}(Z_X\ge 2)$

$\mathrm{P}(Y\le a)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{a-40}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{40-a}{2}\right)$

이때 $\mathrm{P}(X\ge 60)=\mathrm{P}(Y\le a)$이므로

$2=\frac{40-a}{2}$ $\qquad\therefore a=36$

9 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-80}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le a)=0.8413$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-80}{4}\right)=0.8413$

$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-80}{4}\right)=0.8413$

$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-80}{4}\right)=0.8413$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-80}{4}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{a-80}{4}=1$ $\qquad\therefore a=84$

10 사과 한 개의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(280,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-280}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 택한 사과의 무게가 270 g 이상 295 g 이하일 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(270\le X\le 295)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{270-280}{10}\le Z\le\frac{295-280}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.3413+0.4332\\&=0.7745\end{aligned}$$

11 $\mathrm{E}(X)=72p$, $\mathrm{V}(X)=72p(1-p)$이므로

$3\mathrm{V}(X)-\mathrm{E}(X)$

$=3\times 72p(1-p)-72p$

$=-216\left(p-\frac{1}{3}\right)^2+24$ …… (가)

즉, $p=\frac{1}{3}$일 때, $3\mathrm{V}(X)-\mathrm{E}(X)$의 값이 최대이므로 …… (나)

$\sigma(X)=\sqrt{72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=4$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) $3\mathrm{V}(X)-\mathrm{E}(X)$를 p에 대한 식으로 나타낸다.	5점
(나) $3\mathrm{V}(X)-\mathrm{E}(X)$의 값이 최대일 때의 p의 값을 구한다.	2점
(다) $\sigma(X)$를 구한다.	3점

12 응시한 학생의 입학 시험 점수를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(55,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-55}{10}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. …… (가)

이때 입학 시험 점수가 65점 이상일 확률은

$$P(X\ge65)=P\left(Z\ge\frac{65-55}{10}\right)=P(Z\ge1)$$
$$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1)$$
$$=0.5-0.34=0.16 \quad \cdots\cdots (나)$$

따라서 입학 시험 점수가 65점 이상인 학생 수는

$1000\times0.16=160$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 확률변수 X를 정하고 표준화한다.	3점
(나) 입학 시험 점수가 65점 이상일 확률을 구한다.	4점
(다) 입학 시험 점수가 65점 이상인 학생 수를 구한다.	3점

13 150발의 화살을 쏠 때, 목표물을 맞힌 화살의 개수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(150,\ \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

…… (가)

이때 n은 충분히 크고

$np=150\times\frac{3}{5}=90,\ npq=150\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=36$

이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(90,\ 6^2)$을 따른다.

즉, $Z=\frac{X-90}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. …… (나)

따라서 99발 이상이 목표물을 맞힐 확률은

$$P(X\ge99)=P\left(Z\ge\frac{99-90}{6}\right)=P(Z\ge1.5)$$
$$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1.5)$$
$$=0.5-0.4332=0.0668 \quad \cdots\cdots (다)$$

채점 기준	배점
(가) 확률변수 X를 정하고, X가 이항분포를 따름을 안다.	2점
(나) X가 정규분포를 따름을 알고 표준화한다.	3점
(다) 99발 이상이 목표물을 맞힐 확률을 구한다.	5점

14~15강 내공 점검 p. 86~87

1 ③	**2** ②	**3** $\frac{4}{27}$	**4** 20	**5** ①
6 203	**7** 9	**8** ②	**9** ⑤	**10** ②
11 71	**12** 97	**13** 97		

1 $E(\overline{X})=m$이므로 $\quad m=8$

$V(\overline{X})=\frac{36}{n}$이므로 $\quad \frac{36}{n}=2 \qquad \therefore n=18$

$\therefore m+n=26$

2 표본평균의 표준편차가 $\frac{3}{\sqrt{n}}$이므로

$\frac{3}{\sqrt{n}}\le0.5,\ \sqrt{n}\ge6 \qquad \therefore n\ge36$

따라서 n의 최솟값은 36이다.

3 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+a=1$

$\therefore a=\frac{2}{9}$

$E(X)=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{2}{9}=\frac{8}{3}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{9}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{2}{9}=8$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=8-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

이때 표본의 크기는 $n=6$이므로

$V(\overline{X})=\frac{\frac{8}{9}}{6}=\frac{4}{27}$

4 상자에서 임의로 1장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=2$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}=\frac{14}{3}$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{14}{3}-2^2=\frac{2}{3}$$

표본의 크기가 n일 때 $V(\overline{X})=\frac{1}{30}$이므로

$\frac{\frac{2}{3}}{n}=\frac{1}{30} \qquad \therefore n=20$

5 모집단이 정규분포 $N(30,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(30,\ \frac{12^2}{16}\right)$, 즉 $N(30,\ 3^2)$을 따른다.

즉, $Z=\frac{\overline{X}-30}{3}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$P(27\le\overline{X}\le33)=P\left(\frac{27-30}{3}\le Z\le\frac{33-30}{3}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le1)$$
$$=2P(0\le Z\le1)$$
$$=2\times0.3413$$
$$=0.6826$$

6 모집단이 정규분포 $N(200,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(200,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(200,\ 2^2)$을 따른다.

즉, $Z=\frac{\overline{X}-200}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\ge k)=0.0668$에서

$P\left(Z\ge\frac{k-200}{2}\right)=0.0668$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-200}{2}\right)=0.0668$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{k-200}{2}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{k-200}{2}=1.5,\ k-200=3$

$\therefore\ k=203$

7 모집단이 정규분포 $N(100,\ 15^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(100,\ \frac{15^2}{n}\right)$을 따른다.

즉, $Z=\frac{\overline{X}-100}{\frac{15}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\le 95)=0.1587$에서

$P\left(Z\le\frac{95-100}{\frac{15}{\sqrt{n}}}\right)=0.1587$

$P\left(Z\le-\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.1587$

$P\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.1587$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.1587$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.1587$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.3413$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{3}=1,\ \sqrt{n}=3$

$\therefore\ n=9$

8 모표준편차는 $\sigma=16$, 표본의 크기는 $n=64$, 표본평균은 $\overline{x}=120$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$120-2\times\frac{16}{\sqrt{64}}\le m\le 120+2\times\frac{16}{\sqrt{64}}$

$\therefore\ 116\le m\le 124$

9 표본의 크기는 $n=36$, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는 5.88이므로

$2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}=5.88$

$\therefore\ \sigma=9$

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.58\times\frac{9}{\sqrt{36}}=7.74$

10 모표준편차는 5, 표본의 크기는 n이므로 신뢰도 95 %로 모평균을 추정할 때 신뢰구간의 길이가 4 이하가 되려면

$2\times 2\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le 4$

$\sqrt{n}\ge 5$

$\therefore\ n\ge 25$

따라서 n의 최솟값은 25이다.

11 모집단은 정규분포 $N(55,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기는 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(55,\ \frac{4^2}{n}\right)$을 따른다.

$\therefore\ m=55$ …… (가)

$\frac{4^2}{n}=1$이므로

$n=16$ …… (나)

$\therefore\ m+n=55+16=71$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) m의 값을 구한다.	4점
(나) n의 값을 구한다.	4점
(다) $m+n$의 값을 구한다.	2점

12 샴푸 한 개의 용량을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(700,\ 7^2)$을 따르므로 n개의 용량의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(700,\ \frac{7^2}{n}\right)$을 따른다.

즉, $Z=\frac{\overline{X}-700}{\frac{7}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(|\overline{X}-700|\le 1.4)\ge 0.95$에서

$P\left(\left|\frac{\overline{X}-700}{\frac{7}{\sqrt{n}}}\right|\le\frac{1.4}{\frac{7}{\sqrt{n}}}\right)\ge 0.95$

$P(|Z|\le 0.2\sqrt{n})\ge 0.95$ …… (가)

$2P(0\le Z\le 0.2\sqrt{n})\ge 0.95$

$\therefore\ P(0\le Z\le 0.2\sqrt{n})\ge 0.475$ …… (나)

이때 $P(0\le Z\le 1.96)=0.475$이므로

$0.2\sqrt{n}\ge 1.96$

$\sqrt{n}\ge 9.8$

$\therefore\ n\ge 96.04$ …… (다)

따라서 n의 최솟값은 97이다. …… (라)

채점 기준	배점
(가) $P(\|\overline{X}-700\|\le 1.4)\ge 0.95$를 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대한 식으로 변형한다.	4점
(나) 표준정규분포표를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.	2점
(다) n의 값의 범위를 구한다.	2점
(라) n의 최솟값을 구한다.	2점

13 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.44)=0.425$에서

$\mathrm{P}(|Z| \le 1.44)=0.85$

이때 모표준편차는 σ, 표본의 크기는 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 85 %의 신뢰구간의 길이 l은

$l=2\times1.44\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ …… (가)

이때 신뢰도 a %의 신뢰구간의 길이가 $\dfrac{3}{2}l$이므로

$\dfrac{3}{2}l=\dfrac{3}{2}\times2\times1.44\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$=2\times2.16\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ …… (나)

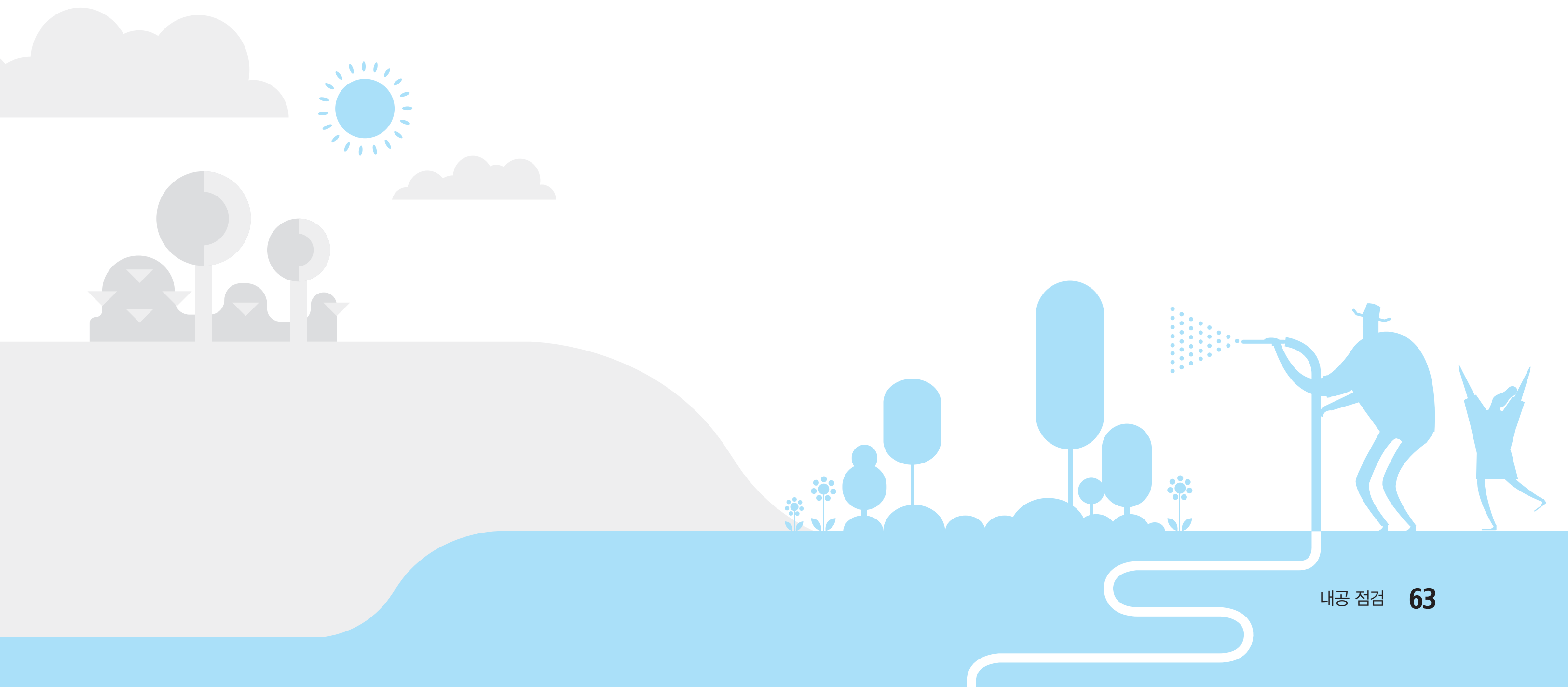
$\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.16)=0.485$에서

$\mathrm{P}(|Z| \le 2.16)=0.97$

따라서 신뢰구간의 길이가 $\dfrac{3}{2}l$인 신뢰구간의 신뢰도는 97 %이다.

$\therefore a=97$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 신뢰도 85 %의 신뢰구간의 길이를 식으로 나타낸다.	3점
(나) 신뢰도 a %의 신뢰구간의 길이를 식으로 나타낸다.	3점
(다) a의 값을 구한다.	4점



memo