쎈

정답 및 풀이

⋯→ 정답을 확인하려 할 때에는 「**빠른 정답 찾기**」를 이용하면 편리합니다.

01 여러 가지 순열

0001 $(6-1)!=5!=120$ 답 120

0002 $(5-1)!=4!=24$ 답 24

0003 서로 다른 6개의 찻잔 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$_6C_4={}_6C_2=15$

택한 찻잔 4개를 원형으로 놓는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot6=90$ 답 90

다른 풀이 서로 다른 6개의 찻잔 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 $_6P_4$

이를 원형으로 배열하면 같은 것이 4가지씩 있으므로 구하는 경우의 수는 $\frac{_6P_4}{4}=90$

0004 7명의 학생 중에서 3명을 택하는 경우의 수는

$_7C_3=35$

택한 3명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$35\cdot2=70$ 답 70

0005 반장과 부반장을 한 사람으로 생각하여 5명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

반장과 부반장이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot2=48$ 답 48

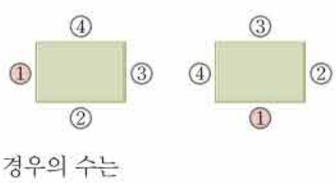
0006 4가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$ 답 6

0007 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot2=12$ 답 12

0008 $_8\Pi_1=8^1=8$ 답 8

0009 $_5\Pi_2=5^2=25$ 답 25

0010 $_2\Pi_7=2^7=128$ 답 128

0011 $_3\Pi_5=3^5=243$ 답 243

0012 $_n\Pi_3=n^3$이므로 $n^3=125$

이때 $5^3=125$이므로 $n=5$ 답 5

0013 $_2\Pi_r=2^r$이므로 $2^r=64$

이때 $2^6=64$이므로 $r=6$ 답 6

0014 1, 2, 3의 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_4=3^4=81$ 답 81

0015 ○, ×의 2개에서 10개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_{10}=2^{10}=1024$ 답 1024

0016 7개의 숫자 중 1이 2개, 3이 4개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\cdot4!}=105$ 답 105

0017 6개의 문자 중 b가 3개, c가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\cdot2!}=60$ 답 60

0018 하나의 f를 제외한 5개의 문자를 일렬로 나열하면 된다.

이때 5개의 문자 중 e가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$ 답 60

0019 $\frac{(5+3)!}{5!\cdot3!}=\frac{8!}{5!\cdot3!}=56$ 답 56

유형 01 원탁에 둘러앉는 경우의 수 본책 10쪽

n명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(n-1)!$

0020 A, B를 제외한 6명의 학생 중에서 3명을 택하는 경우의 수는

$_6C_3=20$

택한 3명의 학생과 A, B가 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\cdot24=480$ 답 480

0021 동아리 회원 n명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수가 120이므로

$(n-1)!=120$

이때 $120=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5!$이므로

$(n-1)!=5!, \quad n-1=5$

$\therefore n=6$

답 ③

0022 남학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$ ··· ❶

남학생들 사이사이의 3개의 자리에 여학생 3명이 앉는 경우의 수는

$3!=6$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot6=12$ ··· ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 남학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 여학생 3명이 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 남학생과 여학생이 번갈아 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0023 영철이 아버지의 자리가 결정되면 어머니의 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 구하는 경우의 수는 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같다.

3쌍의 부부와 영철이 아버지

따라서 구하는 경우의 수는

$(7-1)!=6!=720$

답 ④

다른 풀이 영철이네 부모님이 마주 보도록 원탁에 앉은 다음 나머지 여섯 자리에 6명이 앉으면 되므로 구하는 경우의 수는

$6!=720$

유형 02 이웃하는(이웃하지 않는) 원순열의 수

본책 10쪽

원탁에 둘러앉을 때
① 이웃하는 사람이 있으면
⇒ 이웃하는 사람을 한 사람으로 생각한다.
② 이웃하지 않는 사람이 있으면
⇒ 이웃해도 되는 사람을 먼저 원형으로 배열한다.

0024 커플인 2명을 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

커플끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 각각

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=96$

답 96

0025 일본인 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

일본인들 사이사이의 4개의 자리에 중국인 3명이 앉는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$

답 ①

SSEN 특강 이웃하지 않는 원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 배열할 때, 이웃하지 않는 것이 있으면 다음과 같은 순서로 경우의 수를 구한다.
(i) 이웃해도 되는 것을 원형으로 배열하는 경우의 수를 구한다.
(ii) (i)에서 배열한 것 사이사이에 이웃하지 않는 것을 나열하는 경우의 수를 구한다.
(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

0026 부모님과 인성이를 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$ ··· ❶

부모님이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot2=48$ ··· ❸

답 48

채점 기준	비율
❶ 부모님과 인성이를 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 부모님이 자리를 바꾸는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 인성이의 양 옆에 부모님이 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0027 A, C를 제외하고 B와 이웃하는 학생을 택하는 경우의 수는 3

택한 학생을 O라 할 때, 세 학생 A, B, O를 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

A와 B, B와 O가 이웃해야 하므로 A, B, O 중 B가 가운데에 있어야 한다.

이때 A와 O가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$ ABO, OBA

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot6\cdot2=36$

답 36

다른 풀이 A의 자리를 고정하면 B의 자리로 가능한 자리는 A의 양옆의 두 자리이므로 A와 B의 자리를 정하는 경우의 수는

$1\cdot2=2$

B와 C는 이웃하지 않으므로 B의 옆자리를 제외한 나머지 자리에 C가 앉는 경우의 수는

3

나머지 3개의 자리에 3명이 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot3\cdot6=36$

유형 03 평면도형을 칠하는 경우의 수 본책 11쪽

회전하면 모양이 일치하는 도형을 칠하는 경우의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(ⅰ) 기준이 되는 영역을 칠하는 경우의 수를 구한다.
(ⅱ) 원순열을 이용하여 나머지 영역을 칠하는 경우의 수를 구한다.
(ⅲ) (ⅰ)과 (ⅱ)의 결과를 곱한다.

0028 작은 원을 칠하는 경우의 수는 7이고, 6등분한 영역을 칠하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$7\cdot120=840$ 답 ④

0029 5가지 색을 고르는 경우의 수는

${}_6C_5={}_6C_1=6$

5가지 색을 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$ 답 144

0030 (1) 초록색과 노란색을 한 가지 색으로 생각하여 5가지 색을 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

초록색과 노란색으로 칠하는 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot2=48$ ⋯ ❶

(2) 6가지 색을 칠하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

(1)에서 초록색과 노란색을 이웃한 날개에 칠하는 경우의 수가 48이므로 구하는 경우의 수는

$120-48=72$ ⋯ ❷

답 (1) 48 (2) 72

채점 기준	비율
❶ 초록색과 노란색을 이웃한 날개에 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 초록색과 노란색을 이웃하지 않은 날개에 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %

SSEN 특강

이웃하지 않는 경우의 순열의 수를 구할 때, 2개가 이웃하지 않는 경우에만

(전체 경우의 수)−(이웃하는 경우의 수)

를 이용하여 구한다.

0031 작은 원의 6개의 구역에 심을 꽃 6가지를 택하는 경우의 수는

${}_{12}C_6$

작은 원의 6개의 구역에 꽃을 심는 경우의 수는

$(6-1)!=5!$

나머지 6개의 구역에 꽃을 심는 경우의 수는

$6!$

따라서 구하는 경우의 수는

${}_{12}C_6\cdot5!\cdot6!$ 답 ③

참고 먼저 큰 원의 6개의 구역에 심을 꽃 6가지를 택해도 그 경우의 수는 같다.

유형 04 입체도형을 칠하는 경우의 수 본책 11쪽

입체도형을 칠하는 경우의 수를 구할 때에는 밑면이나 마주 보는 면, 평행한 면 등을 칠하는 경우를 먼저 생각한다.

0032 사각뿔의 밑면을 칠하는 경우의 수는 5이고, 밑면을 제외한 4개의 옆면을 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot6=30$ 답 ⑤

0033 사각뿔대의 두 밑면을 칠하는 경우의 수는

${}_6P_2=30$

두 밑면을 제외한 4개의 옆면을 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$30\cdot6=180$ 답 180

0034 서로 다른 2가지 색을 택하여 두 밑면에 칠하는 경우의 수는

$\frac{{}_6P_2}{2}=15$

두 밑면을 제외한 4개의 옆면을 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!\cdot2=3!\cdot2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot12=180$ 답 180

SSEN 특강

0034번에서 옆면을 칠할 때, 한 변의 길이가 8 cm인 면부터 칠하는 경우와 한 변의 길이가 5 cm인 면부터 칠하는 경우가 다르므로 옆면을 칠하는 경우의 수는 4가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수인 $(4-1)!$에 2를 곱하여 구한다.

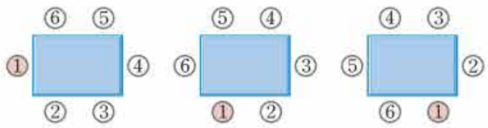
유형 05 여러 가지 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수 본책 12쪽

여러 가지 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(ⅰ) 원탁에 둘러앉는 경우의 수를 구한다.
(ⅱ) 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 서로 다른 경우가 몇 가지씩 존재하는지 구한다.
(ⅲ) (ⅰ)과 (ⅱ)의 결과를 곱한다.

0035 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



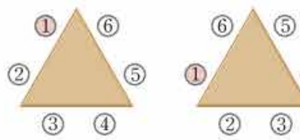
따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot3=360$ 답 ⑤

0036 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



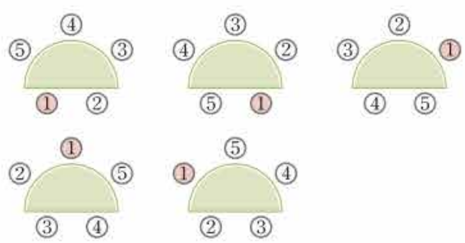
따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot2=240$ 답 240

0037 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 주어진 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

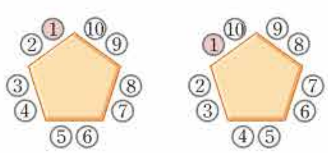
$24\cdot5=120$ 답 120

참고 주어진 탁자는 회전하여 일치하는 경우가 없으므로 $5!=120$으로 구할 수도 있다.

0038 10명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 정오각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 10명이 둘러앉는 경우의 수는

$9!\cdot2=9!\cdot10\cdot\frac{1}{5}=10!\cdot\frac{1}{5}$

$\therefore a=\frac{1}{5}$ 답 ①

0039 남학생 2명이 한 모서리에 이웃하게 앉는 경우의 수는

$2!=2$

여학생 6명이 나머지 6개의 자리에 앉는 경우의 수는

$6!=720$

따라서 구하는 경우의 수는

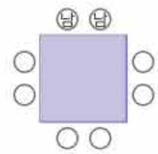
$2\cdot720=1440$ 답 ⑤

다른 풀이 남학생 2명을 한 명으로 생각하여 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!=720$

남학생끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

이때 오른쪽 그림과 같이 남학생 2명이 한 모서리에 앉으면 되므로 구하는 경우의 수는



$720\cdot2=1440$

유형 06 중복순열의 수 (본책 13쪽)

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수

➡ ${}_n\Pi_r=n^r$

0040 서로 다른 3개의 방에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$ 답 ④

0041 지우개 3개를 3명에게 한 개씩 나누어 주는 경우의 수는

$3!=6$

이때 연필을 나누어 주는 경우의 수는 3명 중에서 5명을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot243=1458$ 답 1458

0042 A 중학교 학생 2명이 3개의 고등학교 중에서 한 학교에 배정되는 경우의 수는 서로 다른 3개의 고등학교에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$ ··· ❶

B 중학교 학생 3명이 4개의 고등학교 중에서 한 학교에 배정되는 경우의 수는 서로 다른 4개의 고등학교에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$9\cdot64=576$ ··· ❸

답 576

채점 기준	비율
❶ A 중학교 학생 2명이 고등학교에 배정되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ B 중학교 학생 3명이 고등학교에 배정되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 고등학교에 배정되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0043 그릇 A에 담을 과일 2개를 택하는 경우의 수는

$_7C_2=21$

나머지 과일 5개를 2개의 그릇 B, C에 남김없이 나누어 담는 경우의 수는 서로 다른 2개의 그릇에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 경우의 수는

$21\cdot32=672$ 답 ③

0044 $n(U)=6$, $n(A\cup B)=5$이므로

$n((A\cup B)^C)=6-5=1$

이때 $A\cap B=\{2, 5\}$이므로 2, 5를 제외한 1, 3, 4, 6 중 하나는 집합 $(A\cup B)^C$의 원소이다.

즉 그 경우의 수는 4이고, 그 각각의 경우에 대하여 나머지 3개는 집합 $A-B$와 $B-A$ 중 어느 하나의 원소이므로 그 경우의 수는 서로 다른 두 개의 집합에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$\therefore\ _2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$4\cdot8=32$ 답 ④

0045 점검표에 ○, △, ×가 표시되는 경우의 수는 ○, △, ×에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_6=3^6=729$ ⋯ ❶

(i) 위생 상태가 양호한 음식점이 0개인 경우

6개의 음식점에 △ 또는 ×가 표시되는 경우의 수와 같으므로

$_2\Pi_6=2^6=64$ ⋯ ❷

(ii) 위생 상태가 양호한 음식점이 1개인 경우

6개의 음식점 중 1개에 ○가 표시되고 나머지 5개의 음식점에 △ 또는 ×가 표시되는 경우의 수와 같으므로

$6\cdot{}_2\Pi_5=6\cdot2^5=192$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$729-(64+192)=473$ ⋯ ❹

답 473

채점 기준	비율
❶ 점검표에 ○, △, ×가 표시되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 위생 상태가 양호한 음식점이 0개인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 위생 상태가 양호한 음식점이 1개인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 위생 상태가 양호한 음식점이 2개 이상인 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

SSEN 특강

① (X가 아닌 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(X인 경우의 수)
② (사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)
③ (X 이상인 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(X 미만인 경우의 수)
(X 이하인 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(X 초과인 경우의 수)

유형 07 신호의 개수 본책 13쪽

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 1개부터 r개까지 뽑아 일렬로 나열하여 만들 수 있는 신호의 개수
➡ $_n\Pi_1+{}_n\Pi_2+{}_n\Pi_3+\cdots+{}_n\Pi_r$

0046 전구 4개를 각각 켜거나 꺼서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_4=2^4=16$

이때 전구가 모두 꺼진 경우는 신호에서 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는

$16-1=15$ 답 15

0047 두 기호를 3개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_3=2^3=8$

두 기호를 4개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_4=2^4=16$

두 기호를 5개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_5=2^5=32$

두 기호를 6개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_6=2^6=64$

따라서 구하는 신호의 개수는

$8+16+32+64=120$ 답 ③

0048 깃발을 1번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_3\Pi_1=3$

깃발을 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_3\Pi_2=3^2$

같은 방법으로 깃발을 3번, 4번, ⋯, n번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 $_3\Pi_3$, $_3\Pi_4$, ⋯, $_3\Pi_n$이므로 n번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$3+3^2+3^3+\cdots+3^n$

$n=4$일 때, $3+3^2+3^3+3^4=120<200$

$n=5$일 때, $3+3^2+3^3+3^4+3^5=363>200$

따라서 n의 최솟값은 5이다. 답 5

유형 08 자연수의 개수 (1) 본책 14쪽

① 1, 2, 3, ⋯, $n(1\le n\le9)$의 n개의 숫자에서 중복을 허용하여 m개를 뽑아 만들 수 있는 m자리 자연수의 개수
➡ $_n\Pi_m$
② 0, 1, 2, ⋯, $n(1\le n\le9)$의 $(n+1)$개의 숫자에서 중복을 허용하여 m개를 뽑아 만들 수 있는 m자리 자연수의 개수
➡ $n\cdot{}_{n+1}\Pi_{m-1}$

0049 마지막 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

6, 8의 2개

첫 번째 자리, 두 번째 자리, 세 번째 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 5, 6, 7, 8, 9의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$2\cdot125=250$ 답 ②

0050 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

$\underbrace{1, 2, 3, \cdots, 9\text{의 } 9\text{개}}_{\text{천의 자리에는 0이 올 수 없다.}}$

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0, 5의 2개

백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, ⋯, 9의 10개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{10}\Pi_2=10^2=100$

따라서 구하는 5의 배수의 개수는

$9\cdot2\cdot100=1800$ 답 1800

0051 4개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

2를 제외한 나머지 3개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$64-27=37$ 답 ③

0052 3000보다 작아야 하므로 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2의 2개

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3, 4의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$2\cdot125=250$ 답 ①

0053 한 자리 자연수의 개수는 5

두 자리 자연수의 개수는 $5\cdot{}_6\Pi_1=5\cdot6=30$

세 자리 자연수의 개수는 $5\cdot{}_6\Pi_2=5\cdot6^2=180$

따라서 1000보다 작은 자연수의 개수는

$5+30+180=215$

이므로 1000은 216번째 수이다. 답 216번째

다른 풀이 한 자리 자연수를 백의 자리와 십의 자리의 숫자가 0인 세 자리 자연수로, 두 자리 자연수를 백의 자리의 숫자가 0인 세 자리 자연수로 생각하면 세 자리 이하의 자연수의 개수는

${}_6\Pi_3-\underbrace{1}_{000\text{인 경우}}=6^3-1=215$

따라서 1000은 216번째 수이다.

0054 3, 6, 9를 제외한 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8의 7개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 999 이하의 자연수의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) 한 자리 자연수의 개수는 6

(ii) 두 자리 자연수의 개수는 $6\cdot{}_7\Pi_1=6\cdot7=42$

(iii) 세 자리 자연수의 개수는 $6\cdot{}_7\Pi_2=6\cdot7^2=294$

이상에서 1부터 999까지의 자연수 중에서 3, 6, 9가 들어 있지 않은 수의 개수는

$6+42+294=342$ ⋯ ❶

따라서 3 또는 6 또는 9가 들어 있는 수의 개수는

$999-342=657$

이므로 박수를 모두 657번 쳤다. ⋯ ❷

답 657번

채점 기준	비율
❶ 1부터 999까지의 자연수 중에서 3, 6, 9가 들어 있지 않은 수의 개수를 구할 수 있다.	70 %
❷ 박수를 모두 몇 번 쳤는지 구할 수 있다.	30 %

유형 09 함수의 개수

본책 14쪽

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때, X에서 Y로의 함수의 개수

➡ ${}_n\Pi_m=n^m$

0055 X에서 Y로의 함수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 X의 원소 l, m, n에 대응시키면 되므로

$a={}_5\Pi_3=5^3=125$

$f(l)=3$인 함수 f는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 m, n에 대응시키면 되므로

$b={}_5\Pi_2=5^2=25$

$\therefore a+b=150$ 답 150

0056 $f(a)=p$, $f(b)=r$인 함수는 Y의 원소 p, q, r의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 c, d에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$ 답 ②

0057 $f(2)\neq6$이므로 $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 6을 제외한 4개이다.

또 Y의 원소 2, 4, 6, 8, 10의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 X의 원소 1, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$4\cdot{}_5\Pi_3=4\cdot5^3=500$ 답 500

다른 풀이 X에서 Y로의 함수의 개수는

${}_5\Pi_4=5^4=625$

$f(2)=6$인 함수의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 함수의 개수는

$625-125=500$

0058 X에서 Y로의 함수는 Y의 원소 a, b의 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5에 대응시키면 되므로 X에서 Y로의 함수의 개수는

$_2\Pi_5=2^5=32$
치역이 $\{a\}$인 함수의 개수는 $\quad 1$
치역이 $\{b\}$인 함수의 개수는 $\quad 1$
따라서 구하는 함수의 개수는
$32-(1+1)=30$ 답 ④

0059 $x_1+x_2=7$이면 $f(x_1)=f(x_2)$이므로
$f(2)=f(5)$, $f(3)=f(4)$ ⋯ ❶
즉 $f(2)$와 $f(3)$의 값이 정해지면 $f(5)$와 $f(4)$의 값도 각각 한 가지로 정해진다.
따라서 Y의 원소 a, b, c, d의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는
$_4\Pi_3=4^3=64$ ⋯ ❷
답 64

채점 기준	비율
❶ $f(2)=f(5)$, $f(3)=f(4)$임을 알 수 있다.	30 %
❷ 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있다.	70 %

유형 10 문자를 나열하는 경우의 수 본책 15쪽

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, ⋯, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 경우의 수
➡ $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

0060 c와 e를 제외한 6개의 문자 o, n, t, i, n, u를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{\underbrace{2!}_{\text{n이 2개}}}=360$
양 끝에 c와 e를 나열하는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$360\cdot2=720$ 답 720

0061 모음 a, e, a를 한 문자 A로 생각하여 6개의 문자 A, b, s, b, l, l을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{\underbrace{2!\cdot2!}_{\text{b가 2개, l이 2개}}}=180$
이때 모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
$\dfrac{3!}{\underbrace{2!}_{\text{a가 2개}}}=3$
따라서 구하는 경우의 수는
$180\cdot3=540$ 답 ①

0062 7개의 문자 A, A, A, B, B, C, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{7!}{3!\cdot2!}=420$
C, D를 한 문자 T로 생각하여 6개의 문자 A, A, A, B, B, T를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{3!\cdot2!}=60$
이때 C와 D가 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 C, D가 이웃하도록 나열하는 경우의 수는
$60\cdot2=120$
이므로 구하는 경우의 수는
$420-120=300$ 답 ⑤

다른 풀이 C, D를 제외한 5개의 문자 A, A, A, B, B를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{3!\cdot2!}=10$
이때 A, A, A, B, B의 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 C, D를 나열하는 경우의 수는
$_6P_2=30$
따라서 구하는 경우의 수는
$10\cdot30=300$

0063 7개의 문자 s, u, c, c, e, s, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{7!}{3!\cdot2!}=420$
(i) 양 끝에 s가 오는 경우
s, s를 제외한 나머지 문자 u, c, c, e, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{2!}=60$
(ii) 양 끝에 c가 오는 경우
c, c를 제외한 나머지 문자 s, u, e, s, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{3!}=20$
(i), (ii)에서 양 끝에 서로 같은 문자가 오도록 나열하는 경우의 수는
$60+20=80$
따라서 구하는 경우의 수는
$420-80=340$ 답 340

0064 (i) a와 a 사이에 1개의 문자가 놓이는 경우
ⓘ a, b, a를 한 문자 X로 생각하여 3개의 문자 X, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{3!}{2!}=3$
ⓘⓘ a, c, a를 한 문자 Y로 생각하여 3개의 문자 Y, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$3!=6$
ⓘ, ⓘⓘ에서 a와 a 사이에 1개의 문자가 놓이도록 나열하는 경우의 수는
$3+6=9$

(ii) a와 a 사이에 3개의 문자가 놓이는 경우
a와 a 사이에 b, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}=3$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$9+3=12$
답 ①

0065 (i) r끼리 이웃하는 경우
2개의 문자 r를 한 문자 A로 생각하여 7개의 문자 A, e, e, e, m, m, b를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{7!}{3!\cdot 2!}=420$ ⋯ ❶
(ii) m끼리 이웃하는 경우
2개의 문자 m을 한 문자 B로 생각하여 7개의 문자 B, r, r, e, e, e, b를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{7!}{2!\cdot 3!}=420$ ⋯ ❷
(iii) r끼리, m끼리 이웃하는 경우
2개의 문자 r, 2개의 문자 m을 각각 한 문자 A, B로 생각하여 6개의 문자 A, B, e, e, e, b를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{6!}{3!}=120$ ⋯ ❸
이상에서 구하는 경우의 수는
$420+420-120=720$ ⋯ ❹
답 720

채점 기준	비율
❶ r끼리 이웃하도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ m끼리 이웃하도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ r끼리, m끼리 이웃하도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ r끼리 또는 m끼리 이웃하도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

유형 11 자연수의 개수 (2)

본책 16쪽

같은 것이 있는 숫자를 이용하여 만들 수 있는 자연수의 개수를 구할 때에는 같은 것이 있는 순열의 수를 이용한다.
이때 특정한 자리에 대한 조건이 주어진 경우 먼저 특정한 자리에 그 조건에 맞는 숫자를 나열한 후 나머지 자리에 남은 숫자를 나열한다.

0066 6개의 숫자 0, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{6!}{2!\cdot 2!}=180$
이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 5개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$180-30=150$
답 ⑤

다른 풀이 주어진 6개의 숫자를 모두 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수의 맨 앞자리의 숫자는 1 또는 2 또는 3이다.
(i) 맨 앞자리의 숫자가 1인 경우
5개의 숫자 0, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$
(ii) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우
5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!}=60$
(iii) 맨 앞자리의 숫자가 3인 경우
5개의 숫자 0, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!}=60$
이상에서 구하는 자연수의 개수는
$30+60+60=150$

0067 8개의 숫자 중 홀수와 짝수가 각각 네 개씩 있으므로 홀수는 홀수 번째에, 짝수는 짝수 번째에 오도록 나열하면 된다.
홀수 1, 1, 3, 5를 홀수 번째에 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$ ⋯ ❶
짝수 2, 2, 2, 4를 짝수 번째에 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{3!}=4$ ⋯ ❷
따라서 구하는 경우의 수는
$12\cdot 4=48$ ⋯ ❸
답 48

채점 기준	비율
❶ 홀수를 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 짝수를 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 짝수 번째에 짝수가 오도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0068 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수일 때 3의 배수가 된다.
이때 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3에서 4개를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는
$1+1+2+2=6$ 또는 $2+2+2+3=9$
(i) 4개의 숫자 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$
(ii) 4개의 숫자 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{3!}=4$
(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는
$6+4=10$
답 10

0069 일의 자리의 숫자가 5일 때 5의 배수가 되므로 나머지 자리에 5를 제외한 6개의 숫자 1, 2, 2, 2, 4, 4에서 4개를 택하여 나열하면 된다.
(i) 4개의 숫자 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{3!}=4$
(ii) 4개의 숫자 1, 2, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$

(iii) 4개의 숫자 1, 2, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(iv) 4개의 숫자 2, 2, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(v) 4개의 숫자 2, 2, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

이상에서 구하는 5의 배수의 개수는

$4+12+12+4+6=38$ 답 ②

0070 일의 자리의 숫자가 0 또는 2일 때 짝수가 된다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

0, 1, 2, 2, 2가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

이고 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

이므로 일의 자리의 숫자가 0인 짝수의 개수는

$20-4=16$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

0, 0, 1, 2, 2가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$

이고 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

이므로 일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수는

$30-12=18$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$16+18=34$ 답 ④

다른 풀이 주어진 6장의 카드를 모두 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수의 맨 앞자리의 숫자는 1 또는 2이다.

(i) 맨 앞자리의 숫자가 1인 경우 항상 짝수이다.

0, 0, 2, 2, 2가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우

0, 0, 1, 2, 2가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$

이고 일의 자리의 숫자가 1인 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

이므로 맨 앞자리의 숫자가 2인 짝수의 개수는

$30-6=24$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는 $10+24=34$

0071 1 또는 2를 더하여 8이 되는 경우는

$1+1+1+1+1+1+1+1=8$

또는 $1+1+1+1+1+1+2=8$

또는 $1+1+1+1+2+2=8$

또는 $1+1+2+2+2=8$

또는 $2+2+2+2=8$

(i) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수는

1

(ii) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{6!}=7$

(iii) 1, 1, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$

(iv) 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$

(v) 2, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 1

이상에서 구하는 경우의 수는

$1+7+15+10+1=34$ 답 34

유형 12 순서가 정해진 경우의 수 본책 17쪽

서로 다른 n개를 일렬로 나열할 때, 특정한 $r\ (0<r\leq n)$개를 미리 정해진 순서대로 나열하는 경우의 수

➡ 순서가 정해진 r개를 같은 것으로 생각하여 같은 것이 r개 포함된 n개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

➡ $\frac{n!}{r!}$

0072 c, d의 순서가 정해져 있으므로 c, d를 모두 x로 생각하여 5개의 문자 a, b, x, x, e를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 c, 두 번째 x는 d로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$ 답 ③

0073 모음 i, e, a, e를 한 문자로 생각하고, 자음 p, n, p, p, l을 다른 한 문자로 생각하였을 때, 모음이 자음보다 앞에 오도록 나열하는 경우의 수는 1 ··· ❶

이때 모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$ ··· ❷

또 자음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$ ··· ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$1\cdot 12\cdot 20=240$ ··· ❹

답 240

채점 기준	비율
❶ 모음을 한 문자로, 자음을 다른 한 문자로 생각하였을 때, 모음이 자음보다 앞에 오도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 자음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 모음이 자음보다 앞에 오도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

0074 a, e와 b, d의 순서가 각각 정해져 있으므로 a, e를 모두 x로, b, d를 모두 y로 생각하여 6개의 문자 x, y, c, y, x, f를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 a, 두 번째 x는 e, 첫 번째 y는 b, 두 번째 y는 d로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot 2!}=180$ 　　　답 180

0075 3, 4, 5의 순서가 정해져 있으므로 3, 4, 5를 모두 x로 생각하여 1, 1, 2, 2, x, x, x를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 3, 두 번째 x는 4, 세 번째 x는 5로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}=210$ 　　　답 ③

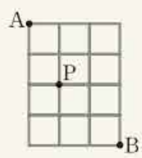
0076 2, 4, 6과 4, 5의 순서가 각각 정해져 있으므로 2, 4, 5, 6을 모두 x로 생각하여 1, x, 3, x, x, x, 7을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{4!}=210$

4개의 x를 순서대로 6, 4, 5, 2 또는 6, 4, 2, 5로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$210\cdot 2=420$ 　　　답 ②

유형 13 최단 거리로 가는 경우의 수 　본책 17쪽



오른쪽 그림과 같은 도로망에서 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
① P를 거치는 경우
➡ (A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수)
　×(P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수)
② P를 거치지 않는 경우
➡ (A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수)
　−(A에서 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수)

0077 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}=15$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot 6=90$ 　　　답 90

0078 오른쪽 그림과 같이 지점 C를 잡으면 A에서 C까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

C에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 6=36$ 　　　답 ②

0079 (1) $\underbrace{\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}}_{\text{A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수}}\cdot 1\cdot \overbrace{\dfrac{3!}{2!}}^{\text{Q에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수}}=10\cdot 1\cdot 3=30$ 　　　⋯ ❶

(2) A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{9!}{6!\cdot 3!}=84$

이때 (1)에서 A에서 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수가 30이므로 구하는 경우의 수는

$84-30=54$ 　　　⋯ ❷

답 (1) 30 　(2) 54

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{PQ}}$를 거쳐 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\overline{\mathrm{PQ}}$를 거치지 않고 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %

0080 (i) A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

(ii) P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{4!\cdot 3!}=35$

P에서 Q를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot \dfrac{3!}{2!}=6\cdot 3=18$

따라서 P에서 Q를 거치지 않고 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$35-18=17$

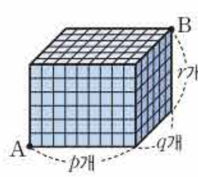
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 17=102$ 　　　답 ②

0081 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 4번, 3번, 4번 이동해야 하므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{11!}{4!\cdot 3!\cdot 4!}=11550$ 　　　답 ⑤

SSEN 특강 입체도형에서 최단 거리로 가는 경우의 수



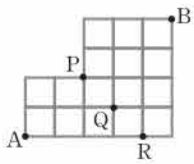
오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체를 가로, 세로, 높이의 칸의 개수가 각각 p, q, r가 되도록 쌓아 올려 직육면체를 만들었을 때, 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수

➡ $\dfrac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!}$

유형 14 최단 거리로 가는 경우의 수 ; 중간 지점을 잡아야 하는 경우 　본책 18쪽

도로망에서 최단 거리로 가는 경우의 수를 바로 구할 수 없을 때에는 반드시 거쳐야 하는 지점을 잡아 최단 거리로 가는 경우의 수를 구한다.

0082 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우는



$A \to P \to B$, $A \to Q \to B$,
$A \to R \to B$

(i) $A \to P \to B$로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}=6\cdot 10=60$$

(ii) $A \to Q \to B$로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}=4\cdot 10=40$$

(iii) $A \to R \to B$로 가는 경우의 수는

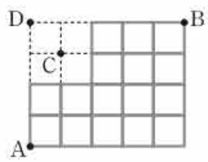
$$1\cdot\frac{5!}{4!}=5$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$60+40+5=105$

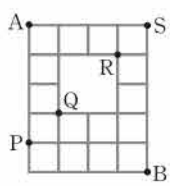
답 105

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 두 지점 C, D를 잡으면 구하는 경우의 수는 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 C 또는 D를 거쳐 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로



$$\frac{9!}{5!\cdot 4!}-\Big(\overbrace{1\cdot 1}^{A\to D\to B\text{로 가는 경우의 수}}+\underbrace{\frac{4!}{3!}\cdot\frac{5!}{4!}}_{A\to C\to B\text{로 가는 경우의 수}}\Big)=126-(1+4\cdot 5)=105$$

0083 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우는



$A \to P \to B$, $A \to Q \to B$,
$A \to R \to B$, $A \to S \to B$

(i) $A \to P \to B$로 가는 경우의 수는

$$1\cdot\frac{5!}{4!}=5$$

(ii) $A \to Q \to B$로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}=4\cdot 10=40$$

(iii) $A \to R \to B$로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{5!}{4!}=4\cdot 5=20$$

(iv) $A \to S \to B$로 가는 경우의 수는

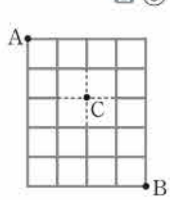
$$1\cdot 1=1$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$5+40+20+1=66$

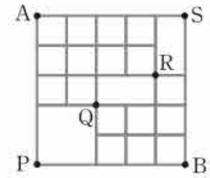
답 ⑤

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 지점 C를 잡으면 구하는 경우의 수는 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 C를 거쳐 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로



$$\frac{9!}{4!\cdot 5!}-\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}=126-6\cdot 10=66$$

0084 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우는



$A \to P \to B$, $A \to Q \to B$,
$A \to R \to B$, $A \to S \to B$

(i) $A \to P \to B$로 가는 경우의 수는

$$1\cdot 1=1$$

(ii) $A \to Q \to B$로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10\cdot 10=100$$

(iii) $A \to R \to B$로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\frac{4!}{3!}=15\cdot 4=60$$

(iv) $A \to S \to B$로 가는 경우의 수는

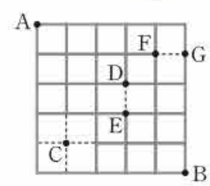
$$1\cdot 1=1$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$1+100+60+1=162$

답 162

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 다섯 지점 C, D, E, F, G를 잡으면 구하는 경우의 수는 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 다음과 같은 경우로 가는 경우의 수를 빼면 된다.



$A \to C \to B$, $A \to D \to E \to B$, $A \to F \to G \to B$

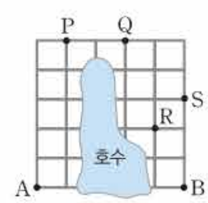
따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{10!}{5!\cdot 5!}-\left(\frac{5!}{4!}\cdot\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 1\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}+\frac{5!}{4!}\cdot 1\cdot 1\right)$$

$$=252-(5\cdot 5+10\cdot 1\cdot 6+5\cdot 1\cdot 1)$$

$$=252-(25+60+5)=162$$

0085 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우는



$A \to P \to Q \to R \to B$,
$A \to P \to Q \to S \to B$

(i) $A \to P \to Q \to R \to B$로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{5!}\cdot 1\cdot\frac{4!}{3!}\cdot\frac{3!}{2!}=6\cdot 1\cdot 4\cdot 3=72$$

(ii) $A \to P \to Q \to S \to B$로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{5!}\cdot 1\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 1=6\cdot 1\cdot 6\cdot 1=36$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$72+36=108$

답 108

0086 (1st) 6개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수를 구한다.

6개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

(2nd) 곱이 12인 두 수가 적혀 있는 2개의 의자가 서로 이웃한 경우의 수를 구한다.

1부터 6까지의 자연수 중에서 두 수의 곱이 12인 경우는

$2\cdot6=12$ 또는 $3\cdot4=12$

1부터 6까지의 자연수를 원형으로 배열할 때, 2, 6 또는 3, 4가 이웃하는 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

(i) 2, 6이 이웃하는 경우

2, 6을 하나로 생각하여 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

2, 6이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 그 경우의 수는 $24\cdot2=48$

(ii) 3, 4가 이웃하는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는

$24\cdot2=48$

(iii) 2, 6과 3, 4가 각각 이웃하는 경우

2, 6과 3, 4를 각각 하나로 생각하여 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

2, 6과 3, 4가 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot2!=4$

따라서 그 경우의 수는 $6\cdot4=24$

이상에서 2, 6 또는 3, 4가 이웃하는 경우의 수는

$48+48-24=72$

3rd 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구한다.

구하는 경우의 수는

$120-72=48$

답 48

0087 **1st** 가운데 정사각형을 칠하는 경우의 수와 나머지 8개의 정사각형을 원형으로 생각하여 칠하는 경우의 수를 구한다.

가운데 정사각형을 칠하는 경우의 수는 9이고, 나머지 8개의 정사각형을 원형으로 생각하여 칠하는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

2nd 원형으로 칠하는 한 가지 경우에 대하여 서로 다른 경우가 몇 가지씩 있는지 구한다.

원형으로 칠하는 한 가지 경우에 대하여 주어진 도형에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.

②	⑨	⑧
③	①	⑦
④	⑤	⑥

⑨	⑧	⑦
②	①	⑥
③	④	⑤

3rd k의 값을 구한다.

주어진 도형을 칠하는 경우의 수는

$9\cdot7!\cdot2=18\cdot7!$

$\therefore k=18$

답 18

0088 **1st** 6명이 정삼각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수를 구한다.

6명이 정삼각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!\cdot2=5!\cdot2=240$

2nd 선생님 2명이 탁자의 같은 모서리에 앉는 경우의 수를 구한다.

선생님 2명이 탁자의 같은 모서리에 앉는 경우의 수는

$2!\cdot\underline{4!}=2\cdot24=48$

학생 4명이 나머지 4개의 자리에 앉는 경우의 수

3rd 선생님 2명이 탁자의 서로 다른 모서리에 앉는 경우의 수를 구한다.

구하는 경우의 수는

$240-48=192$

답 ③

0089 **1st** 세 기호 ○, ◇, ♠만을 6개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수를 구한다.

주어진 세 기호만을 6개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_6=3^6=729$

2nd 세 기호가 ○, ◇, ♠의 순서대로 서로 이웃해서 나오는 경우의 수를 구한다.

세 기호가 ○, ◇, ♠의 순서대로 서로 이웃해서 나오는 경우는 다음과 같다.

(i) ○◇♠_ _ _　　(ii) _○◇♠_ _

(iii) _ _○◇♠_　　(iv) _ _ _○◇♠

각 경우의 _에 세 기호가 들어갈 수 있는 경우의 수는 세 기호 ○, ◇, ♠에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이때 (i), (iv)에서 ○◇♠○◇♠인 경우는 같은 신호이므로 세 기호가 ○, ◇, ♠의 순서대로 서로 이웃해서 나오는 경우의 수는

$4\cdot27-1=107$

3rd 조건을 만족시키는 신호의 개수를 구한다.

구하는 신호의 개수는

$729-107=622$

답 622

0090 **1st** 만들 수 있는 국번의 개수를 구한다.

국번의 첫 번째 자리에는 0을 제외한 2, 4, 6, 8이 올 수 있고 국번의 나머지 3자리에는 0, 2, 4, 6, 8을 중복하여 사용할 수 있으므로 만들 수 있는 국번의 개수는

$4\cdot{}_5\Pi_3=4\cdot5^3=500$

2nd 만들 수 있는 나머지 번호의 개수를 구한다.

전화번호의 나머지 번호 4자리는 0, 1, 2, $\cdots$, 9의 10개의 숫자를 중복하여 사용할 수 있으므로 만들 수 있는 나머지 번호의 개수는

${}_{10}\Pi_4=10^4=10000$

3rd 전화번호의 개수를 구한다.

구하는 전화번호의 개수는

$500\cdot10000=5000000$

답 5000000

0091 **1st** 1을 세 번 이하로 사용하는 경우의 수를 구한다.

1을 네 번 이상 사용하면 반드시 1끼리 서로 이웃하게 되므로 1은 세 번 이하로 사용해야 한다.

(i) 1을 사용하지 않는 경우

만의 자리에는 2만 올 수 있고 나머지 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 2의 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_4=2^4=16$

(ii) 1을 한 번 사용하는 경우

ⓘ 만의 자리에 1이 오면 나머지 자리에는 0 또는 2가 올 수 있으므로

$_2\Pi_4=2^4=16$

ⓘⓘ 만의 자리에 2가 오면 나머지 자리의 숫자 중 하나는 1이고 남은 세 자리에는 0 또는 2가 올 수 있으므로

$_4C_1\cdot{}_2\Pi_3=4\cdot2^3=32$

ⓘ, ⓘⓘ에서 1을 한 번 사용하는 경우의 수는

$16+32=48$

(iii) 1을 두 번 사용하는 경우

ⓘ 만의 자리에 1이 오면 천의 자리를 제외한 나머지 자리의 숫자 중 하나는 1이고 남은 세 자리에는 0 또는 2가 올 수 있으므로

$_3C_1\cdot{}_2\Pi_3=3\cdot2^3=24$

ⓘⓘ 만의 자리에 2가 오면 천의 자리와 십의 자리 또는 천의 자리와 일의 자리 또는 백의 자리와 일의 자리에 1이 와야 하고 남은 두 자리에는 0 또는 2가 올 수 있으므로

$3\cdot{}_2\Pi_2=3\cdot2^2=12$

ⓘ, ⓘⓘ에서 1을 두 번 사용하는 경우의 수는

$24+12=36$

(iv) 1을 세 번 사용하는 경우

만의 자리, 백의 자리, 일의 자리에 1이 와야 하고 남은 두 자리에는 0 또는 2가 올 수 있으므로

$_2\Pi_2=2^2=4$

2nd 만들 수 있는 모든 자연수의 개수를 구한다.

구하는 자연수의 개수는

$16+48+36+4=104$ 답 ⑤

0093 **1st** $f(4)$**의 값이 1, 2, 3, 4인 경우로 나누어 함수** f**의 개수를 각각 구한다.**

(i) $f(4)=1$인 경우

조건 (가)에서

$f(1)+f(2)+f(3)\geq3$

이고, 조건 (나)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 집합 $\{2, 3, 4\}$의 원소이다.

즉 집합 $\{2, 3, 4\}$의 원소 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

$_3\Pi_3=3^3=27$

(ii) $f(4)=2$인 경우

조건 (가)에서

$f(1)+f(2)+f(3)\geq6$

이고, 조건 (나)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 집합 $\{1, 3, 4\}$의 원소이다.

이때 $f(1)+f(2)+f(3)<6$인 경우는 $f(1)+f(2)+f(3)$의 값이

$\overbrace{1+1+1}^{f(1)=f(2)=f(3)=1}=3$ 또는 $\underbrace{1+1+3}_{f(1),\ f(2),\ f(3)\text{ 중 2개의 값이 1이고 1개의 값이 3이다.}}=5$

인 경우이므로 이 경우의 수는

$1+{}_3C_2\cdot{}_1C_1=1+3\cdot1=4$

따라서 함수 f의 개수는

$_3\Pi_3-4=3^3-4=23$

(iii) $f(4)=3$인 경우

조건 (가)에서

$f(1)+f(2)+f(3)\geq9$

이고, 조건 (나)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 집합 $\{1, 2, 4\}$의 원소이다.

이때 $f(1)+f(2)+f(3)\geq9$인 경우는 $f(1)+f(2)+f(3)$의 값이

$1+4+4=9$ 또는 $2+4+4=10$ 또는 $4+4+4=12$

인 경우이므로 함수 f의 개수는

$_3C_1\cdot{}_2C_2+{}_3C_1\cdot{}_2C_2+1=3\cdot1+3\cdot1+1=7$

(iv) $f(4)=4$인 경우

조건 (가)에서

$f(1)+f(2)+f(3)\geq12$

이고, 조건 (나)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 집합 $\{1, 2, 3\}$의 원소이다.

이때 조건을 모두 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

2nd 조건을 만족시키는 함수 f**의 개수를 구한다.**

구하는 함수 f의 개수는

$27+23+7=57$ 답 ⑤

0093 **1st 모든 학생이 짝이 있도록 짝을 짓는 경우를 모두 구하여 각각의 경우의 수를 구한다.**

1열에서 마주 보고 있는 사람과 짝을 짓는 학생을 A, 바로 옆에 있는 사람과 짝을 짓는 두 학생을 묶어서 B로 나타내자.

이때 1열에서 바로 옆에 있는 사람과 짝을 지으면 2열에서도 바로 옆에 있는 사람과 짝을 지어야 하므로 20명의 학생이 모두 짝이 있도록 짝을 짓는 경우는 다음과 같다.

(i) A가 10명인 경우

10개의 A를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

1

(ii) A가 8명인 경우

8개의 A와 1개의 B를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{9!}{8!}=9$

(iii) A가 6명인 경우

6개의 A와 2개의 B를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{8!}{6!\cdot2!}=28$

(iv) A가 4명인 경우

4개의 A와 3개의 B를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{7!}{4!\cdot3!}=35$

(v) A가 2명인 경우

2개의 A와 4개의 B를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{6!}{2!\cdot4!}=15$

(vi) A가 없는 경우

5개의 B를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

1

(2nd) 모든 학생이 짝이 있도록 짝을 짓는 경우의 수를 구한다.

구하는 경우의 수는

$1+9+28+35+15+1=89$

답 89

0094 (1st) 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

숫자 3, 3, 4, 4, 4가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\cdot3!}=10$

(2nd) 숫자 1, 2가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수를 구한다.

다음과 같이 □에 숫자 3, 4를 나열하고 ∨ 중 두 곳에 숫자 1, 2를 각각 나열할 수 있다고 하자.

∨□∨□∨□∨□∨□∨

6곳의 ∨에 1, 2를 각각 나열하는 경우의 수는

${}_6P_2=30$

1, 2 사이에 한 개의 □가 있도록 1, 2를 각각 나열하는 경우의 수는

1, 2의 자리를 바꾸는 경우의 수

$5\cdot2!=10$

따라서 1, 2 사이에 두 개 이상의 □가 있도록 1, 2를 각각 나열하는 경우의 수는

$30-10=20$

(3rd) 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

구하는 경우의 수는

$10\cdot20=200$

답 ⑤

다른 풀이 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\cdot3!}=10$

3, 3, 4, 4, 4를

① 3 ② 3 ③ 4 ④ 4 ⑤ 4 ⑥

과 같이 일렬로 나열하는 한 가지 경우에 대하여 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥의 6개의 자리에 1과 2 사이에 3 또는 4가 두 개 이상 있도록 1과 2가 놓일 두 자리를 택하는 경우는

①과 ③, ①과 ④, ①과 ⑤, ①과 ⑥, ②와 ④,
②와 ⑤, ②와 ⑥, ③과 ⑤, ③과 ⑥, ④와 ⑥

의 10가지이다.

이때 1, 2의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot10\cdot2=200$

0095 (1st) 홀수, 짝수를 선택하는 방법을 생각한다.

조건 (가)에서 1, 3, 5는 각각 0번 또는 1번 선택하므로 선택할 수 있는 홀수의 개수는

0, 1, 2, 3

조건 (나)에서 2, 4, 6은 각각 0번 또는 2번 선택하므로 선택할 수 있는 짝수의 개수는

0, 2, 4, 6

따라서 선택할 수 있는 다섯 개의 숫자는

(i) 홀수 1개, 짝수 4개 또는 (ii) 홀수 3개, 짝수 2개

의 2가지 경우가 가능하다.

(2nd) 각 경우에 대하여 만들 수 있는 자연수의 개수를 구한다.

(i) 홀수 1개, 짝수 4개를 선택하는 경우

1, 3, 5 중 하나를 골라 1번 선택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_3C_1=3$

2, 4, 6 중 두 개를 골라 2번씩 선택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_3C_2=3$

이때 선택한 다섯 개의 숫자 중에는 같은 짝수가 2개씩 있으므로 이것을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\cdot2!}=30$

따라서 만들 수 있는 자연수의 개수는

$3\cdot3\cdot30=270$

(ii) 홀수 3개, 짝수 2개를 선택하는 경우

1, 3, 5를 모두 1번씩 선택하면 되므로 그 경우의 수는

1

2, 4, 6 중 하나를 골라 2번 선택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_3C_1=3$

이때 선택한 다섯 개의 숫자 중에는 같은 짝수가 2개 있으므로 이것을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$

따라서 만들 수 있는 자연수의 개수는

$1\cdot3\cdot60=180$

(3rd) 자연수의 개수를 구한다.

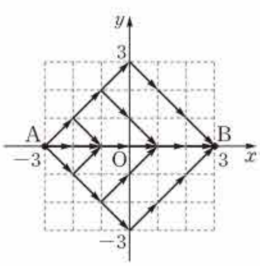
만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는

$270+180=450$

답 450

0096 (1st) 점 A에서 점 B까지 이동하는 경우를 좌표평면 위에 나타내어 본다.

점 A$(-3,\ 0)$에서 점 B$(3,\ 0)$까지 6번만 '점프'하여 이동하는 경우에서 길이가 1만큼 이동하는 방향은 →, 길이가 $\sqrt{2}$만큼 이동하는 방향은 ↗ 또는 ↘이다.



(2nd) 점 A에서 점 B까지 이동하는 경우를 나누어 각각의 경우의 수를 구한다.

점 A에서 점 B까지

(i) →, →, →, →, →, →로 이동하는 경우의 수는

1

(ii) ↗, ↘, →, →, →, →로 이동하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{4!}=30$

(iii) ↗, ↗, ↘, ↘, →, →로 이동하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot2!\cdot2!}=90$

(iv) $\nearrow$, $\nearrow$, $\nearrow$, $\searrow$, $\searrow$, $\searrow$로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!\cdot3!}=20$$

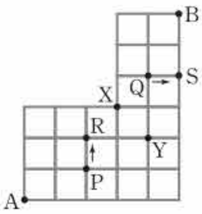
3rd **조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.**

구하는 경우의 수는

$1+30+90+20=141$ 답 141

0097 **1st** **P의 위쪽 지점을 R, Q의 오른쪽 지점을 S라 하고 A → P → R → B로 가는 경우의 수를 구한다.**

오른쪽 그림과 같이 P의 위쪽 지점을 R, Q의 오른쪽 지점을 S라 하자.



(i) A → P → R → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\cdot1\cdot\left(\overbrace{2!\cdot\frac{5!}{2!\cdot3!}}^{R\to X\to B}+\underbrace{1\cdot\frac{5!}{4!}}_{R\to Y\to B}\right)$$

$=3\cdot(20+5)=75$

2nd **A → Q → S → B로 가는 경우의 수를 구한다.**

(ii) A → Q → S → B로 가는 경우의 수는

$$\left(\overbrace{\frac{6!}{3!\cdot3!}\cdot2!}^{A\to X\to Q}+\underbrace{\frac{6!}{4!\cdot2!}\cdot1}_{A\to Y\to Q}\right)\cdot1\cdot1=40+15=55$$

3rd **A → P → R → Q → S → B로 가는 경우의 수를 구한다.**

(iii) A → P → R → Q → S → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\cdot1\cdot(\overbrace{2!\cdot2!}^{R\to X\to Q}+\underbrace{1\cdot1}_{R\to Y\to Q})\cdot1\cdot1=3\cdot(4+1)=15$$

4th **조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.**

구하는 경우의 수는

$75+55-15=115$ 답 ④

0098 **전략** **A, B 두 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 경우의 수에서 A, B, C 세 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 경우의 수를 뺀다.**

풀이 A, B 두 나라의 대표를 각각 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이때 같은 나라 대표들끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!\cdot3!=36$

이므로 A, B 두 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 경우의 수는

$24\cdot36=864$ ··· ❶

A, B, C 세 나라의 대표를 각각 한 사람으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

이때 같은 나라 대표들끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!\cdot3!\cdot3!=216$

이므로 A, B, C 세 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 경우의 수는

$2\cdot216=432$ ··· ❷

따라서 A, B 두 나라의 대표들만 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 경우의 수는

$864-432=432$ ··· ❸

답 432

채점 기준	비율
❶ A, B 두 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A, B, C 세 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ A, B 두 나라의 대표들만 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0099 **전략** **백의 자리 숫자를 기준으로 좌우가 대칭인 숫자 카드와 좌우가 대칭이 아닌 숫자 카드의 경우를 나누어 생각한다.**

풀이 세 개의 숫자 1, 2, 8에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$ ··· ❶

이 중에서 82128과 같이 백의 자리 숫자를 기준으로 좌우가 대칭인 자연수는 한 개씩이다.

즉 백의 자리 숫자를 기준으로 좌우가 대칭인 숫자 카드의 개수는 3개의 숫자에서 만의 자리, 천의 자리, 백의 자리의 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$ ··· ❷

따라서 백의 자리 숫자를 기준으로 좌우가 대칭이 아닌 자연수의 개수는 $243-27=216$

이때 12828, 82821과 같이 회전하여 같은 카드가 되는 것은 한 개의 카드만 만들어야 하므로 만들 수 있는 카드의 개수는

$\frac{216}{2}=108$ ··· ❸

따라서 구하는 숫자 카드의 개수는

$27+108=135$ ··· ❹

답 135

채점 기준	비율
❶ 3개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 백의 자리 숫자를 기준으로 좌우가 대칭인 숫자 카드의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 백의 자리 숫자를 기준으로 좌우가 대칭이 아닌 숫자 카드의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건을 만족시키는 숫자 카드의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0100 **전략** **$f(3)$의 값이 1, 3, 5인 경우로 나누어 생각한다.**

풀이 (i) $f(3)=1$인 경우

조건을 만족시키는 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 존재하지 않는다. ··· ❶

(ii) $f(3)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 4 또는 5 또는 6

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

1 또는 2

따라서 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_2\cdot{}_2\Pi_3=3^2\cdot2^3=72$ ··· ❷

(iii) $f(3)=5$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 6

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

1 또는 2 또는 3 또는 4

따라서 함수 f의 개수는

$1\cdot{}_4\Pi_3=1\cdot4^3=64$ ⋯➌

이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$72+64=136$ ⋯➍

답 136

채점 기준	비율
➊ $f(3)=1$인 경우를 생각할 수 있다.	10 %
➋ $f(3)=3$인 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	40 %
➌ $f(3)=5$인 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	40 %
➍ 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0101 **전략** 흰색 공을 맨 앞에 놓지 않는 경우의 수에서 검은색 공 또는 빨간색 공끼리 이웃하도록 나열하는 경우의 수를 뺀다.

풀이 7개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\cdot3!}=140$

이때 흰색 공을 맨 앞에 놓는 경우의 수는 검은색 공 3개, 빨간색 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{6!}{3!\cdot3!}=20$

따라서 조건 ㈎를 만족시키도록 나열하는 경우의 수는

$140-20=120$ ⋯⋯ ㉠ ⋯➊

흰색 공을 a, 검은색 공을 b, 빨간색 공을 c라 하자.

(i) 검은색 공끼리 이웃하는 경우

3개의 검은색 공을 묶어서 1개의 B로 생각하면 a, B, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

이때 흰색 공을 맨 앞에 놓는 경우의 수는 B, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{3!}=4$

따라서 조건 ㈎를 만족시키면서 검은색 공끼리 이웃하는 경우의 수는

$20-4=16$

(ii) 빨간색 공끼리 이웃하는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 조건 ㈎를 만족시키면서 빨간색 공끼리 이웃하는 경우의 수는

$20-4=16$

(iii) 검은색 공끼리, 빨간색 공끼리 이웃하는 경우

3개의 검은색 공을 묶어서 1개의 B, 3개의 빨간색 공을 묶어서 1개의 C로 생각하면 a, B, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

이때 흰색 공을 맨 앞에 놓는 경우의 수는 B, C를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$2!=2$

따라서 조건 ㈎를 만족시키면서 검은색 공끼리, 빨간색 공끼리 이웃하는 경우의 수는

$6-2=4$

이상에서 조건 ㈎를 만족시키면서 같은 색의 공끼리 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$16+16-4=28$ ⋯⋯ ㉡ ⋯➋

㉠, ㉡에서 구하는 경우의 수는

$120-28=92$ ⋯➌

답 92

채점 기준	비율
➊ 흰색 공을 맨 앞에 놓지 않도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
➋ 흰색 공을 맨 앞에 놓지 않고 같은 색의 공끼리 이웃하도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %
➌ 조건을 모두 만족시키면서 공을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

0102 **전략** 각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수의 개수를 구한다.

풀이 각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수는 다음의 숫자들을 나열하여 만들 수 있다.

4, 0, 0, 0 또는 3, 1, 0, 0 또는 2, 2, 0, 0

또는 2, 1, 1, 0 또는 1, 1, 1, 1 ⋯➊

(i) 4, 0, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ii) 3, 1, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(iii) 2, 2, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$

(iv) 2, 1, 1, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(v) 1, 1, 1, 1로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

1

이상에서 각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$4+12+6+12+1=35$ ⋯➋

따라서 구하는 자연수는 36번째 수이다. ⋯➌

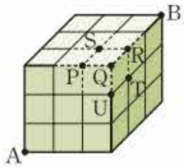
답 36번째

채점 기준	비율
➊ 각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수를 만들 수 있는 경우를 구할 수 있다.	30 %
➋ 각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수의 개수를 구할 수 있다.	60 %
➌ 가장 작은 다섯 자리 자연수는 몇 번째 수인지 구할 수 있다.	10 %

참고 각 자리의 숫자의 합이 4인 자연수 중 가장 작은 다섯 자리 자연수는 10003이다.

0103 **전략** 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 먼저 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 구하는 경우의 수는 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 P 또는 Q 또는 R 또는 S를 거쳐 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같다.



꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{9!}{3!\cdot3!\cdot3!}=1680$ ··· ①

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\cdot3!}\cdot\dfrac{4!}{3!}=10\cdot4=40$

(ii) P를 지나지 않고 A → Q → B로 가는 경우는 U를 반드시 지나야 하므로 A → U → Q → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!\cdot2!}\cdot1\cdot1=10$

(iii) P를 지나지 않고 A → S → B로 가는 경우의 수는

$\left(\dfrac{6!}{2!\cdot3!}-\dfrac{5!}{2!\cdot3!}\cdot1\right)\cdot\dfrac{3!}{2!}=(60-10)\cdot3=150$

(iv) P, Q, S를 지나지 않고 A → R → B로 가는 경우는 T를 반드시 지나야 하므로 A → T → R → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!\cdot2!}\cdot1\cdot1=60$ ··· ②

이상에서 구하는 경우의 수는

$1680-(40+10+150+60)=1420$ ··· ③

답 1420

채점 기준	비율
① 지나갈 수 없는 길을 연결했을 때, 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
② P 또는 Q 또는 R 또는 S를 거쳐 최단 거리로 가는 경우를 나누어 각각의 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
③ 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

02 중복조합과 이항정리

0104 ${}_5H_4={}_8C_4=70$ 답 70

0105 ${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$ 답 5

0106 ${}_6H_0={}_5C_0=1$ 답 1

0107 ${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$ 답 10

0108 ${}_4H_2={}_5C_2$이므로 $n=5$ 답 5

0109 ${}_2H_3={}_4C_3={}_4C_1$이므로 $n=4$ 답 4

0110 ${}_6H_r={}_{6+r-1}C_r={}_{5+r}C_r$이므로

${}_{5+r}C_r={}_9C_4$ $\therefore r=4$ 답 4

0111 ${}_4H_r={}_{4+r-1}C_r={}_{3+r}C_r$이므로

${}_{3+r}C_r={}_8C_3={}_8C_5$ $\therefore r=5$ 답 5

0112 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$ 답 36

0113 구하는 경우의 수는 서로 다른 8개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_8H_4={}_{11}C_4=330$ 답 330

0114 구하는 해의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$ 답 21

0115 구하는 해의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$ 답 165

0116 x, y, z가 자연수이므로

$x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$

로 놓으면 X, Y, Z는 음이 아닌 정수이다.

$x+y+z=6$에서 $(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=6$

$\therefore X+Y+Z=3$

따라서 구하는 해의 개수는 위의 방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같으므로

└ 3개의 문자 X, Y, Z에서 3개를 택하는 중복조합의 수

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$ 답 10

0117 x, y, z, w가 자연수이므로

$x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$, $w-1=W$

로 놓으면 X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수이다.

$x+y+z+w=7$에서

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+(W+1)=7$

$\therefore X+Y+Z+W=3$

따라서 구하는 해의 개수는 위의 방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$ 답 20

0118 답 ㄱ **0119** 답 ㄷ

0120 답 ㄴ **0121** 답 ㄹ

0122 구하는 함수의 개수는 Y의 원소 4, 5, 6, 7에서 서로 다른 3개를 뽑아 작은 수부터 차례대로 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같다.

따라서 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$ 답 4

0123 구하는 함수의 개수는 Y의 원소 4, 5, 6, 7에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같다.

따라서 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$ 답 20

0124 $(x+y)^6$

$={}_6\mathrm{C}_0x^6+{}_6\mathrm{C}_1x^5y+{}_6\mathrm{C}_2x^4y^2+{}_6\mathrm{C}_3x^3y^3+{}_6\mathrm{C}_4x^2y^4$

$+{}_6\mathrm{C}_5xy^5+{}_6\mathrm{C}_6y^6$

$=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$

답 $x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$

0125 $(a-3)^4={}_4\mathrm{C}_0a^4+{}_4\mathrm{C}_1a^3(-3)+{}_4\mathrm{C}_2a^2(-3)^2$

$+{}_4\mathrm{C}_3a(-3)^3+{}_4\mathrm{C}_4(-3)^4$

$=a^4-12a^3+54a^2-108a+81$

답 $a^4-12a^3+54a^2-108a+81$

0126 $(2a-b)^5$

$={}_5\mathrm{C}_0(2a)^5+{}_5\mathrm{C}_1(2a)^4(-b)+{}_5\mathrm{C}_2(2a)^3(-b)^2$

$+{}_5\mathrm{C}_3(2a)^2(-b)^3+{}_5\mathrm{C}_4(2a)(-b)^4+{}_5\mathrm{C}_5(-b)^5$

$=32a^5-80a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5$

답 $32a^5-80a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5$

0127 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4={}_4\mathrm{C}_0x^4+{}_4\mathrm{C}_1x^3\left(\dfrac{1}{x}\right)+{}_4\mathrm{C}_2x^2\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$

$+{}_4\mathrm{C}_3x\left(\dfrac{1}{x}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{x}\right)^4$

$=x^4+4x^2+6+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}$

답 $x^4+4x^2+6+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}$

0128 $(a+b)^7$의 전개식의 일반항은 ${}_7\mathrm{C}_r\,a^{7-r}b^r$

$a^{7-r}b^r=a^4b^3$에서 $r=3$

따라서 a^4b^3의 계수는 ${}_7\mathrm{C}_3=35$ 답 35

0129 $(x+2)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r\,x^{5-r}2^r={}_5\mathrm{C}_r\,2^rx^{5-r}$

$x^{5-r}=x^3$에서 $5-r=3$ $\therefore r=2$

따라서 x^3의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_2\cdot2^2=40$ 답 40

0130 $(a-4b)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r\,a^{4-r}(-4b)^r={}_4\mathrm{C}_r(-4)^ra^{4-r}b^r$

$a^{4-r}b^r=a^2b^2$에서 $r=2$

따라서 a^2b^2의 계수는 ${}_4\mathrm{C}_2\cdot(-4)^2=96$ 답 96

0131 $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r(x^2)^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r(-1)^r\dfrac{x^{12-2r}}{x^r}$

상수항은 $12-2r=r$일 때이므로

$3r=12$ $\therefore r=4$

따라서 상수항은 ${}_6\mathrm{C}_4\cdot(-1)^4=15$ 답 15

0132 ${}_9\mathrm{C}_0+{}_9\mathrm{C}_1+{}_9\mathrm{C}_2+\cdots+{}_9\mathrm{C}_9=2^9=512$ 답 512

0133 ${}_4\mathrm{C}_0-{}_4\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2-{}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_4=0$ 답 0

0134 ${}_6\mathrm{C}_0+{}_6\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_6=2^{6-1}=2^5=32$ 답 32

0135 ${}_{11}\mathrm{C}_1+{}_{11}\mathrm{C}_3+{}_{11}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{11}\mathrm{C}_{11}=2^{11-1}=2^{10}=1024$

답 1024

0136 ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$이므로

$2^n=128$

이때 $2^7=128$이므로 $n=7$ 답 7

0137 ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$이므로

${}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n-1$

즉 $2^n-1=63$이므로 $2^n=64$

이때 $2^6=64$이므로 $n=6$ 답 6

0138 오른쪽 파스칼의 삼각형에서

$(x-y)^5$

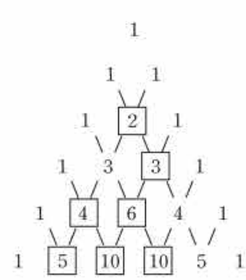
$=x^5+5x^4(-y)+10x^3(-y)^2$

$+10x^2(-y)^3+5x(-y)^4$

$+(-y)^5$

$=x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3$

$+5xy^4-y^5$



답 풀이 참조

0139 오른쪽 파스칼의 삼각형에서

$(x+2y)^4$
$=x^4+4x^3(2y)+6x^2(2y)^2$
$\quad+4x(2y)^3+(2y)^4$
$=x^4+8x^3y+24x^2y^2+32xy^3+16y^4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

답 풀이 참조

0140 오른쪽 파스칼의 삼각형에서

$(x-1)^6$
$=x^6+6x^5(-1)+15x^4(-1)^2$
$\quad+20x^3(-1)^3+15x^2(-1)^4$
$\quad+6x(-1)^5+(-1)^6$
$=x^6-6x^5+15x^4-20x^3$
$\quad+15x^2-6x+1$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

답 풀이 참조

0141 ${}_5C_2+{}_5C_3={}_6C_3$ 답 ${}_6C_3$

0142 ${}_6C_2+{}_6C_3+{}_7C_4={}_7C_3+{}_7C_4={}_8C_4$ 답 ${}_8C_4$

0143 ${}_4C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3={}_5C_1+{}_5C_2+{}_6C_3$
$={}_6C_2+{}_6C_3={}_7C_3$ 답 ${}_7C_3$

0144 ${}_6C_2+{}_6C_1+{}_7C_1+{}_8C_1={}_7C_2+{}_7C_1+{}_8C_1$
$={}_8C_2+{}_8C_1={}_9C_2$ 답 ${}_9C_2$

유형 01 중복조합의 수 본책 26쪽

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수
➡ ${}_nH_r$

0145 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$ 답 ④

0146 구하는 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$ 답 21

SSEN 특강 전개식의 항의 개수

자연수 n에 대하여 $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수 ➡ ${}_mH_n$

0147 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$ 답 28

SSEN 특강 무기명으로 투표하는 경우의 수

무기명 투표는 유권자가 어느 후보를 뽑았는지 알 수 없으므로 후보 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복조합으로 생각할 수 있다.

0148 (i) a를 0개 택하는 경우

a를 제외한 3개의 문자 b, c, d에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$ ⋯ ❶

(ii) a를 1개 택하는 경우

a를 제외한 3개의 문자 b, c, d에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$55+45=100$ ⋯ ❸

답 100

채점 기준	비율
❶ a를 0개 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ a를 1개 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ a를 1개 이하로 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0149 3종류의 마카롱 중에서 8개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

이때 딸기 맛 마카롱을 6개 이상 택하는 경우의 수는 딸기 맛 마카롱을 6개 택한 후 3종류의 마카롱 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_4C_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$45-6=39$ 답 ③

유형 02 '적어도'의 조건이 있는 중복조합의 수 본책 26쪽

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 $r\,(n\le r)$개를 택할 때
① 서로 다른 n개가 적어도 한 개씩 포함되도록 택하는 경우의 수
➡ ${}_nH_{r-n}$
② 서로 다른 n개 중 하나도 택하지 않은 것이 생기는 경우의 수
➡ ${}_nH_r-\underbrace{{}_nH_{r-n}}_{n\text{개가 적어도 한 개씩 포함되도록 택하는 경우}}$

0150 먼저 튤립, 장미, 작약을 각각 한 송이씩 꺼내고 나머지 4송이의 꽃을 꺼내면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$ 답 15

0151 먼저 구슬을 바구니 A에 2개, 바구니 B에 3개를 담고 나머지 7개의 구슬을 나누어 담으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중

복조합의 수와 같으므로

$_4H_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$ 답 ②

0152 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 n개를 택하는 경우의 수가 21이므로

$_3H_n={}_{3+n-1}C_n={}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2=21$

$\frac{(n+2)(n+1)}{2}=21,\quad n^2+3n-40=0$

$(n+8)(n-5)=0\quad \therefore n=5\ (\because n$은 자연수$)$ ···➊

빨간 공, 파란 공, 노란 공을 적어도 하나씩 포함하여 5개를 택하는 경우는 먼저 각 종류의 공을 하나씩 택한 후 나머지 2개의 공을 택하는 경우와 같다.

이때 나머지 2개의 공을 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_2={}_4C_2=6$ ···➋

답 6

채점 기준	비율
➊ n의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋ 각 종류의 공을 적어도 하나씩 포함하여 n개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %

0153 샌드위치 6개를 A, B, C, D 4명에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

A, B, C, D 4명 모두 적어도 한 개의 샌드위치를 받는 경우는 먼저 4명에게 샌드위치를 각각 1개씩 나누어 준 후 나머지 2개의 샌드위치를 나누어 주는 경우와 같다.

이때 나머지 2개의 샌드위치를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_2={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-10=74$ 답 ②

다른 풀이 한 개도 받지 못하는 사람이 한 명, 두 명, 세 명인 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 한 명이 한 개도 받지 못하는 경우

먼저 3명에게 샌드위치를 각각 1개씩 나누어 준 후 나머지 3개의 샌드위치를 이 3명에게 나누어 주는 경우와 같다.

이때 4명 중 샌드위치를 나누어 줄 3명을 뽑는 경우의 수는 $_4C_3$이고, 나머지 3개의 샌드위치를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4C_3\cdot{}_3H_3={}_4C_1\cdot{}_5C_3={}_4C_1\cdot{}_5C_2=4\cdot10=40$

(ii) 두 명이 한 개도 받지 못하는 경우

먼저 2명에게 샌드위치를 각각 1개씩 나누어 준 후 나머지 4개의 샌드위치를 이 2명에게 나누어 주는 경우와 같다.

이때 4명 중 샌드위치를 나누어 줄 2명을 뽑는 경우의 수는 $_4C_2$이고, 나머지 4개의 샌드위치를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4C_2\cdot{}_2H_4={}_4C_2\cdot{}_5C_4={}_4C_2\cdot{}_5C_1=6\cdot5=30$

(iii) 세 명이 한 개도 받지 못하는 경우

1명에게 샌드위치 6개를 모두 주는 경우와 같으므로 4명 중 1명을 뽑는 경우의 수는

$_4C_1=4$

이상에서 구하는 경우의 수는

$40+30+4=74$

0154 먼저 세 사람에게 빨간 펜과 파란 펜을 각각 한 자루씩 나누어 주면 빨간 펜 5자루, 파란 펜 3자루가 남는다.

이때 빨간 펜 5자루를 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

파란 펜 3자루를 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$21\cdot10=210$ 답 210

0155 먼저 조건 (가)에 의하여 A, B, C, D 4명에게 공책을 각각 1권씩 나누어 준 후 나머지 3권의 공책을 조건 (나)를 만족시키도록 나누어 주면 된다.

이때 조건 (나)를 만족시키려면 나머지 3권의 공책 중에서 A가 1권 이상을 받아야 한다.

(i) 나머지 3권의 공책 중에서 A가 1권을 받을 때,

나머지 2권의 공책을 두 학생 B, D에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는

$_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

(ii) 나머지 3권의 공책 중에서 A가 2권을 받을 때,

나머지 1권의 공책을 세 학생 B, C, D 중 1명에게 주면 되므로 그 경우의 수는

$_3C_1=3$

(iii) 나머지 3권의 공책을 A가 모두 받을 때,

남은 공책이 없으므로 그 경우의 수는 1

이상에서 구하는 경우의 수는

$3+3+1=7$ 답 7

유형 03 방정식과 부등식의 해의 개수 본책 27쪽

방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m=n$ (m, n은 자연수)에서

① 음이 아닌 정수인 해의 개수

➡ 서로 다른 m개에서 n개를 택하는 중복조합의 수

➡ $_mH_n$

② 자연수인 해의 개수

➡ 서로 다른 m개에서 $(n-m)$개를 택하는 중복조합의 수

➡ $_mH_{n-m}$ (단, $n\ge m$)

0156 (i) 방정식 $x+y+z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36\quad\therefore a=36$

(ii) x, y, z가 자연수일 때,

$x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$
로 놓으면 X, Y, Z는 음이 아닌 정수이다.
$x+y+z=7$에서 $(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=7$
$\therefore X+Y+Z=4$
따라서 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로
${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$ $\therefore b=15$
(i), (ii)에서 $a+b=51$

답 51

0157 x, y, z, w가 음이 아닌 정수이므로
$x+y+z+w=0$ 또는 $x+y+z+w=1$
또는 $x+y+z+w=2$
(i) $x+y+z+w=0$일 때,
순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 ${}_4H_0={}_3C_0=1$
(ii) $x+y+z+w=1$일 때,
순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 ${}_4H_1={}_4C_1=4$
(iii) $x+y+z+w=2$일 때,
순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 ${}_4H_2={}_5C_2=10$
이상에서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는
$1+4+10=15$

답 ④

0158 $a\geq 1$, $b\geq 2$, $c\geq 3$이므로
$a-1=A$, $b-2=B$, $c-3=C$ — A, B, C가 $A\geq 0$, $B\geq 0$, $C\geq 0$이 되도록 치환한다.
로 놓으면 A, B, C는 음이 아닌 정수이다.
$a+b+c=k$에서 $(A+1)+(B+2)+(C+3)=k$
$\therefore A+B+C=k-6$
위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수는
${}_3H_{k-6}={}_{k-4}C_{k-6}={}_{k-4}C_2$ ⋯ ❶
이때 순서쌍 (A, B, C)의 개수는 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로
$\dfrac{(k-4)(k-5)}{2}=15$, $k^2-9k-10=0$
$(k+1)(k-10)=0$ $\therefore k=10$ ($\because k$는 자연수) ⋯ ❷

답 10

채점 기준	비율
❶ $a-1=A$, $b-2=B$, $c-3=C$로 놓고 순서쌍 (A, B, C)의 개수를 중복조합을 이용하여 나타낼 수 있다.	70 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0159 x, y, z가 홀수인 자연수이므로
$x=2X+1$, $y=2Y+1$, $z=2Z+1$
(X, Y, Z는 음이 아닌 정수)
로 놓으면 $x+y+z=13$에서
$(2X+1)+(2Y+1)+(2Z+1)=13$
$2X+2Y+2Z=10$ $\therefore X+Y+Z=5$
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로
${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

답 ②

0160 x, y, z, w가 자연수이므로
$x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$, $w-1=W$
로 놓으면 X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수이다.
$x+y+z+5w=15$에서
$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+5(W+1)=15$
$\therefore X+Y+Z+5W=7$ ⋯⋯ ㉠
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 (X, Y, Z, W)의 개수와 같고, 이때의 W의 값은 0 또는 1이어야 한다.
— $W\geq 2$이면 $X+Y+Z$의 값은 음수가 된다.
(i) $W=0$일 때,
㉠에서 $X+Y+Z=7$
위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수는
${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$
(ii) $W=1$일 때,
㉠에서 $X+Y+Z=2$
위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수는
${}_3H_2={}_4C_2=6$
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$36+6=42$

답 42

참고 방정식 $x+y+z+5w=15$에서 $w=1$, $w=2$인 경우에 각각 $x+y+z=10$, $x+y+z=5$이므로 이 두 방정식을 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구해도 그 결과는 같다.

0161 구하는 순서쌍의 개수는 주어진 방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수에서 a, b, c가 모두 0이 아닌 경우의 해의 개수를 뺀 것과 같다.
방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
${}_3H_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$
한편 a, b, c가 모두 0이 아닌 경우는 a, b, c가 모두 자연수인 경우이므로
$a-1=A$, $b-1=B$, $c-1=C$
로 놓으면 A, B, C는 음이 아닌 정수이다.
$a+b+c=9$에서 $(A+1)+(B+1)+(C+1)=9$
$\therefore A+B+C=6$
즉 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수와 같으므로
${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$
따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$55-28=27$

답 ③

유형 04 중복조합의 수; 대소가 정해진 경우

본책 28쪽

a, b, c가 n 이하의 자연수일 때
① $a\leq b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수 ➡ ${}_nH_2$
② $a\leq b\leq c$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수 ➡ ${}_nH_3$

0162 1부터 4까지 4개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 그 값이 작거나 같은 순서대로 $|a|$, $|b|$, $|c|$의 값으로 정하면 되므로 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수는

$_4H_3={}_6C_3=20$

이때 각각의 $|a|$, $|b|$, $|c|$에 대하여 a, b, c는 각각 음의 정수 또는 양의 정수의 값을 가질 수 있으므로 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$2^3\cdot 20=160$ 답 160

0163 3부터 10까지 8개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 그 값이 작거나 같은 순서대로 a, b, c, d의 값으로 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

$_8H_4={}_{11}C_4=330$ 답 ④

0164 (1) 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 5개를 택한 후 그 값이 작거나 같은 순서대로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5의 값으로 정하면 되므로 구하는 경우의 수는

$_6H_5={}_{10}C_5=252$ ⋯ ❶

(2) 구하는 경우의 수는 (1)을 만족시키는 경우의 수에서 $a_1\le a_2\le a_3=a_4\le a_5$를 만족시키는 경우의 수를 뺀 것과 같다.
$a_1\le a_2\le a_3=a_4\le a_5$를 만족시키는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 그 값이 작거나 같은 순서대로 a_1, a_2, a_3, a_5의 값으로 정하면 되므로

$_6H_4={}_9C_4=126$

따라서 구하는 경우의 수는

$252-126=126$ ⋯ ❷

답 (1) 252 (2) 126

채점 기준	비율
❶ $a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le a_5$를 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ $a_1\le a_2\le a_3< a_4\le a_5$를 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %

0165 (i) $2\le a\le b\le c\le 7$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 2부터 7까지 6개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 그 값이 작거나 같은 순서대로 a, b, c의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$_6H_3={}_8C_3=56$

(ii) $7\le d\le e\le 9$를 만족시키는 순서쌍 (d, e)의 개수는 7부터 9까지 3개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 그 값이 작거나 같은 순서대로 d, e의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로 $_3H_2={}_4C_2=6$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$56\cdot 6=336$ 답 ③

0166 조건 (가)에 의하여 x, y, z는 모두 홀수이고 조건 (나)에 의하여 x, y, z는 모두 10 이하의 자연수이다.
따라서 1, 3, 5, 7, 9 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 그 값이 작거나 같은 순서대로 x, y, z의 값으로 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

$_5H_3={}_7C_3=35$ 답 35

유형 05 중복조합의 수; 함수의 개수 본책 28쪽

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n이고 $a\in X$, $b\in X$일 때, 함수 $f: X \longrightarrow Y$ 중에서 $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$를 만족시키는 함수의 개수 ➡ $_nH_m$

0167 Y의 원소 5, 6, 7, 8의 4개에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 크거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$ 답 56

0168 (1) Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$_4C_3={}_4C_1=4$

(2) Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_3={}_6C_3=20$

답 (1) 4 (2) 20

0169 $f(3)=8$이므로 조건 (나)에 의하여

$f(1)\le f(2)\le 8\le f(4)$

$f(1)\le f(2)\le 8$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 6, 7, 8이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_3H_2={}_4C_2=6$

$8\le f(4)$에서 $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는

8, 9, 10의 3개

따라서 구하는 함수의 개수는

$6\cdot 3=18$ 답 ①

0170 조건 (가), (나)에서 $f(3)=3$, $f(4)=2$ 또는 $f(3)=4$, $f(4)=1$이다. ⋯ ❶

(i) $f(3)=3$, $f(4)=2$일 때,
$f(1)\ge f(2)\ge f(3)=3$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 3, 4, 5, 6이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같고,
$f(4)=2\ge f(5)\ge f(6)$에서 $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2이므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
따라서 함수의 개수는

$${}_4H_2 \cdot {}_2H_2 = {}_5C_2 \cdot {}_3C_2 = 10 \cdot 3 = 30$$ ⋯ ❷

(ii) $f(3)=4$, $f(4)=1$일 때,

$f(1) \ge f(2) \ge f(3)=4$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 4, 5, 6이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같고,

$f(4)=1 \ge f(5) \ge f(6)$에서 $f(5)$, $f(6)$의 값은 각각 1이다.

따라서 함수의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$30+6=36$$ ⋯ ❹

답 36

채점 기준	비율
❶ $f(3)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 경우를 구할 수 있다.	10 %
❷ $f(3)=3$, $f(4)=2$일 때, 함수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(3)=4$, $f(4)=1$일 때, 함수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❹ 조건을 모두 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0171 조건 (가)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3이므로 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 원소 5개 중에서 치역의 원소 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 조건 (나)에 의하여 치역의 세 원소에 대응하는 정의역의 원소의 개수에 따라 함수 f가 하나로 결정된다.

치역의 세 원소에 대응하는 정의역의 원소의 개수를 각각 a, b, c라 하면 집합 X의 원소의 개수가 5이므로

$$a+b+c=5$$

이때 a, b, c 중 0인 것이 있으면 치역의 원소의 개수가 3이 아니므로 a, b, c는 모두 자연수이어야 한다.

따라서 $a-1=A$, $b-1=B$, $c-1=C$로 놓으면 A, B, C는 음이 아닌 정수이므로 $a+b+c=5$에서

$$(A+1)+(B+1)+(C+1)=5$$

$$\therefore A+B+C=2$$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 구하는 함수 f의 개수는

$$10 \cdot 6 = 60$$

답 ②

참고 함수 f의 치역을 $\{1, 2, 3\}$이라 하고, 1, 2, 3에 대응하는 정의역의 원소의 개수를 각각 2, 2, 1이라 하면 조건 (나)에 의하여

$f(1)=f(2)=1$, $f(3)=f(4)=2$, $f(5)=3$

따라서 함수 f가 하나로 결정된다.

유형 06 $(a+b)^n$의 전개식

본책 29쪽

① $(a+b)^n$의 전개식의 일반항 ➡ ${}_nC_r\, a^{n-r}b^r$

② $(a+x)^n$의 전개식에서 x^r의 계수 ➡ ${}_nC_r\, a^{n-r}$

③ $(ax+by)^n$의 전개식에서 $x^{n-r}y^r$의 계수 ➡ ${}_nC_r\, a^{n-r}b^r$

0172 $\left(ax+\dfrac{2}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(ax)^{5-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r = {}_5C_r\, a^{5-r}2^r \frac{x^{5-r}}{x^r}$$

$\dfrac{x^{5-r}}{x^r}=x^3$에서 $\quad 5-r-r=3, \quad 5-2r=3$

$\therefore r=1$

이때 x^3의 계수가 160이므로 $\quad {}_5C_1 \cdot a^4 \cdot 2 = 160$

$a^4=16 \quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

답 ②

0173 $(2+x)^8$의 전개식의 일반항은 ${}_8C_r\, 2^{8-r}x^r$이므로

$a={}_8C_2 \cdot 2^6$, $b={}_8C_5 \cdot 2^3$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{{}_8C_2 \cdot 2^6}{{}_8C_5 \cdot 2^3} = \frac{{}_8C_2 \cdot 2^3}{{}_8C_3} = \frac{28 \cdot 8}{56} = 4$$

답 4

0174 $(x+a)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r\, x^{6-r}a^r = {}_6C_r\, a^r x^{6-r}$$ ⋯ ❶

$x^{6-r}=x^2$에서 $\quad 6-r=2 \quad \therefore r=4$

따라서 x^2의 계수는

$${}_6C_4\, a^4 = 15a^4$$ ⋯ ❷

또 $x^{6-r}=x^3$에서 $\quad 6-r=3 \quad \therefore r=3$

따라서 x^3의 계수는

$${}_6C_3\, a^3 = 20a^3$$ ⋯ ❸

이때 x^2의 계수와 x^3의 계수가 같으므로

$15a^4=20a^3, \quad 5a^3(3a-4)=0$

$\therefore a=\dfrac{4}{3}\ (\because a>0)$ ⋯ ❹

답 $\dfrac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ $(x+a)^6$의 전개식의 일반항을 구할 수 있다.	20 %
❷ x^2의 계수를 구할 수 있다.	30 %
❸ x^3의 계수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0175 $(x^2+1)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(x^2)^{n-r}1^r = {}_nC_r\, x^{2n-2r}$$

$x^{2n-2r}=x^4$에서 $\quad 2n-2r=4 \quad \therefore r=n-2$

이때 x^4의 계수가 36이므로 $\quad {}_nC_{n-2} = {}_nC_2 = 36$

$\dfrac{n(n-1)}{2}=36, \quad n^2-n-72=0$

$(n+8)(n-9)=0 \quad \therefore n=9\ (\because n$은 자연수$)$

답 ④

0176 $\left(x+\dfrac{1}{x^n}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

$${}_{10}C_r\, x^{10-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r = {}_{10}C_r \frac{x^{10-r}}{x^{nr}}$$

상수항은 $10-r=nr$일 때이므로

$r(1+n)=10$

이를 만족시키는 r, n의 순서쌍 (r, n)은 r는 $0 \le r \le 10$인 정수, n은 자연수

$(1, 9)$, $(2, 4)$, $(5, 1)$

따라서 n의 최댓값은 9이다.

답 9

유형 07 $(1+x)^n$의 전개식의 응용 본책 30쪽

${}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n=(1+x)^n$에서 x 대신 상수 a를 대입
➡ ${}_nC_0+{}_nC_1a+{}_nC_2a^2+\cdots+{}_nC_na^n=(1+a)^n$

0177 ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1\cdot4+{}_{10}C_2\cdot4^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\cdot4^{10}=(1+4)^{10}=5^{10}$

답 ④

0178 ${}_{10}C_1\cdot2^9+{}_{10}C_2\cdot2^8+{}_{10}C_3\cdot2^7+\cdots+{}_{10}C_{10}$
$=({}_{10}C_0\cdot2^{10}+{}_{10}C_1\cdot2^9+{}_{10}C_2\cdot2^8+{}_{10}C_3\cdot2^7+\cdots+{}_{10}C_{10})$
$-{}_{10}C_0\cdot2^{10}$
$=(2+1)^{10}-2^{10}$
$=3^{10}-2^{10}$

답 ③

0179 $11^{99}=(1+10)^{99}$
$={}_{99}C_0+{}_{99}C_1\cdot10+{}_{99}C_2\cdot10^2+{}_{99}C_3\cdot10^3+\cdots+{}_{99}C_{99}\cdot10^{99}$
$=1+99\cdot10+10^2({}_{99}C_2+{}_{99}C_3\cdot10+\cdots+{}_{99}C_{99}\cdot10^{97})$
$=991+10^2({}_{99}C_2+{}_{99}C_3\cdot10+\cdots+{}_{99}C_{99}\cdot10^{97})$

이때 $10^2({}_{99}C_2+{}_{99}C_3\cdot10+\cdots+{}_{99}C_{99}\cdot10^{97})$은 100으로 나누어떨어지므로 11^{99}을 100으로 나누었을 때의 나머지는 991을 100으로 나누었을 때의 나머지와 같다.
따라서 구하는 나머지는 91이다.
$991=9\cdot100+91$

답 ④

0180 $21^{20}=(1+20)^{20}$
$={}_{20}C_0+{}_{20}C_1\cdot20+{}_{20}C_2\cdot20^2+{}_{20}C_3\cdot20^3+\cdots+{}_{20}C_{20}\cdot20^{20}$
$=1+20\cdot20+20^2({}_{20}C_2+{}_{20}C_3\cdot20+\cdots+{}_{20}C_{20}\cdot20^{18})$
$=401+20^2({}_{20}C_2+{}_{20}C_3\cdot20+\cdots+{}_{20}C_{20}\cdot20^{18})$ ··· ❶

이때 $20^2({}_{20}C_2+{}_{20}C_3\cdot20+\cdots+{}_{20}C_{20}\cdot20^{18})$의 백의 자리 이하의 숫자가 모두 0이므로 21^{20}의 백의 자리의 숫자는 4, 일의 자리의 숫자는 1이다.
따라서 $a=4$, $b=1$이므로 $a+b=5$ ··· ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ 21^{20}을 변형할 수 있다.	50 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 08 $(a+b)(c+d)^p$의 전개식 본책 30쪽

$(a+b)(c+d)^p$의 전개식의 일반항
➡ $a(c+d)^p+b(c+d)^p$으로 변형하여 생각한다.

0181 $(x^2+x)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^5+x\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_rx^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r\frac{x^{5-r}}{x^r}$ ······ ㉠

이때 $(x^2+x)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 상수항은 x^2과 ㉠의 $\frac{1}{x^2}$항, x와 ㉠의 $\frac{1}{x}$항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $\frac{x^{5-r}}{x^r}=\frac{1}{x^2}$에서 $r-(5-r)=2$
$2r=7$ $\therefore r=\frac{7}{2}$
그런데 r는 $0\le r\le5$인 정수이므로 ㉠의 $\frac{1}{x^2}$항은 존재하지 않는다.

(ii) $\frac{x^{5-r}}{x^r}=\frac{1}{x}$에서 $r-(5-r)=1$
$2r=6$ $\therefore r=3$
따라서 ㉠의 $\frac{1}{x}$항은 ${}_5C_3\frac{1}{x}=\frac{10}{x}$

(i), (ii)에서 구하는 상수항은
$x\cdot\frac{10}{x}=10$

답 ③

0182 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4=x^2\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4-\frac{1}{x}\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4$

$\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_rx^{4-r}\left(\frac{a}{x^2}\right)^r={}_4C_ra^r\frac{x^{4-r}}{x^{2r}}$ ······ ㉠

이때 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 x^3항은 x^2과 ㉠의 x항, $-\frac{1}{x}$과 ㉠의 x^4항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $\frac{x^{4-r}}{x^{2r}}=x$에서 $4-r-2r=1$
$3r=3$ $\therefore r=1$
따라서 ㉠의 x항은 ${}_4C_1a^1x=4ax$

(ii) $\frac{x^{4-r}}{x^{2r}}=x^4$에서 $4-r-2r=4$
$3r=0$ $\therefore r=0$
따라서 ㉠의 x^4항은 ${}_4C_0a^0x^4=x^4$

(i), (ii)에서 x^3항은
$x^2\cdot4ax-\frac{1}{x}\cdot x^4=(4a-1)x^3$
이때 x^3의 계수가 11이므로
$4a-1=11$ $\therefore a=3$

답 3

0183 $(1+x+x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$
$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}+x\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}+x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

${}_{10}C_rx^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_{10}C_r\frac{x^{10-r}}{x^r}$ ······ ㉠

이때 $(1+x+x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식에서 x항은 1과 ㉠의 x항, x와 ㉠의 상수항, x^2과 ㉠의 $\frac{1}{x}$항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $\frac{x^{10-r}}{x^r}=x$에서 $10-r-r=1$
$2r=9$ $\therefore r=\frac{9}{2}$

그런데 r는 $0 \le r \le 10$인 정수이므로 ㉠의 x항은 존재하지 않는다.

(ii) 상수항은 $10-r=r$일 때이므로 $\quad 2r=10$

$\therefore r=5$

따라서 ㉠의 상수항은 $\quad {}_{10}C_5$

(iii) $\dfrac{x^{10-r}}{x^r}=\dfrac{1}{x}$에서 $\quad r-(10-r)=1$

$2r=11 \quad \therefore r=\dfrac{11}{2}$

그런데 r는 $0 \le r \le 10$인 정수이므로 ㉠의 $\dfrac{1}{x}$항은 존재하지 않는다.

이상에서 x항은 ${}_{10}C_5 x$이므로 x의 계수는

${}_{10}C_5$ 답 ⑤

유형 09 $(a+b)^p(c+d)^q$의 전개식 본책 31쪽

$(a+b)^p(c+d)^q$의 전개식의 일반항
➡ $(a+b)^p$과 $(c+d)^q$의 전개식의 일반항을 각각 구하여 곱한다.
➡ ${}_pC_r \cdot {}_qC_s\, a^{p-r}b^rc^{q-s}d^s$

0184 $(1+x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\, x^r$

$(2+x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_s\, 2^{4-s}x^s$

따라서 $(1+x)^5(2+x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\, x^r \cdot {}_4C_s\, 2^{4-s}x^s={}_5C_r \cdot {}_4C_s\, 2^{4-s}x^{r+s}$

x^2항은 $r+s=2$ (r, s는 각각 $0 \le r \le 5$, $0 \le s \le 4$인 정수)일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 2), (1, 1), (2, 0)$

따라서 x^2의 계수는

${}_5C_0 \cdot {}_4C_2 \cdot 2^2+{}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot 2^3+{}_5C_2 \cdot {}_4C_0 \cdot 2^4$

$=24+160+160=344$ 답 ④

0185 $(a+x)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r\, a^{3-r}x^r$

$(1+x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_s\, x^s$

따라서 $(a+x)^3(1+x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r\, a^{3-r}x^r \cdot {}_5C_s\, x^s={}_3C_r \cdot {}_5C_s\, a^{3-r}x^{r+s}$ ··· ❶

x항은 $r+s=1$ (r, s는 각각 $0 \le r \le 3$, $0 \le s \le 5$인 정수)일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 1), (1, 0)$

이때 x의 계수가 8이므로

${}_3C_0 \cdot {}_5C_1 \cdot a^3+{}_3C_1 \cdot {}_5C_0 \cdot a^2=8$ ··· ❷

$5a^3+3a^2=8, \quad 5a^3+3a^2-8=0$

$(a-1)(5a^2+8a+8)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a$는 실수) ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $(a+x)^3(1+x)^5$의 전개식의 일반항을 구할 수 있다.	40 %
❷ a에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ 실수 a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0186 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r\, x^r$

$(1+x^2)^8$의 전개식의 일반항은

${}_8C_s(x^2)^s={}_8C_s\, x^{2s}$

따라서 $(1+x)^n(1+x^2)^8$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r\, x^r \cdot {}_8C_s\, x^{2s}={}_nC_r \cdot {}_8C_s\, x^{r+2s}$

x^2항은 $r+2s=2$ (r, s는 각각 $0 \le r \le n$, $0 \le s \le 8$인 정수)일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(2, 0), (0, 1)$

이때 x^2의 계수가 36이므로

${}_nC_2 \cdot {}_8C_0+{}_nC_0 \cdot {}_8C_1=36$

$\dfrac{n(n-1)}{2}+8=36, \quad n^2-n-56=0$

$(n+7)(n-8)=0 \quad \therefore n=8$ ($\because n$은 자연수) 답 8

0187 $({}_7C_0)^2+({}_7C_1)^2+({}_7C_2)^2+\cdots+({}_7C_7)^2$

$={}_7C_0 \cdot {}_7C_0+{}_7C_1 \cdot {}_7C_1+{}_7C_2 \cdot {}_7C_2+\cdots+{}_7C_7 \cdot {}_7C_7$

$={}_7C_0 \cdot {}_7C_7+{}_7C_1 \cdot {}_7C_6+{}_7C_2 \cdot {}_7C_5+\cdots+{}_7C_7 \cdot {}_7C_0$ ······ ㉠

이때 $(1+x)^7(1+x)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_p\, x^p \cdot {}_7C_q\, x^q={}_7C_p \cdot {}_7C_q \cdot x^{p+q}$

이고 $p+q=7$ (p, q는 각각 $0 \le p \le 7$, $0 \le q \le 7$인 정수)을 만족시키는 p, q의 순서쌍 (p, q)는

$(0, 7), (1, 6), (2, 5), \cdots, (7, 0)$

이므로 x^7의 계수는

${}_7C_0 \cdot {}_7C_7+{}_7C_1 \cdot {}_7C_6+{}_7C_2 \cdot {}_7C_5+\cdots+{}_7C_7 \cdot {}_7C_0$

따라서 ㉠은 $(1+x)^7(1+x)^7$, 즉 $(1+x)^{14}$의 전개식에서 x^7의 계수와 같다.

$(1+x)^{14}$의 전개식에서 x^7의 계수는 ${}_{14}C_7$이므로

$n=14, r=7 \quad \therefore n+r=21$ 답 ③

SSEN 특강 $(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수

$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$이므로 $(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는

${}_nC_0 \cdot {}_nC_n+{}_nC_1 \cdot {}_nC_{n-1}+{}_nC_2 \cdot {}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n \cdot {}_nC_0$

이때 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

${}_nC_0 \cdot {}_nC_n+{}_nC_1 \cdot {}_nC_{n-1}+{}_nC_2 \cdot {}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n \cdot {}_nC_0$

$={}_nC_0 \cdot {}_nC_0+{}_nC_1 \cdot {}_nC_1+{}_nC_2 \cdot {}_nC_2+\cdots+{}_nC_n \cdot {}_nC_n$

$=({}_nC_0)^2+({}_nC_1)^2+({}_nC_2)^2+\cdots+({}_nC_n)^2$

유형 10~11 이항계수의 성질 본책 31쪽

① ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$
② ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$
③ ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots=2^{n-1}$

0188 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-{}_nC_0=2^n-1$$

즉 주어진 부등식은

$$200<2^n-1<2000 \qquad \therefore 201<2^n<2001$$

이때 $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로 자연수 n은 8, 9, 10이다.

따라서 구하는 합은

$$8+9+10=27$$

답 27

0189 ${}_{50}C_0-{}_{50}C_1+{}_{50}C_2-\cdots-{}_{50}C_{49}+{}_{50}C_{50}=0$이므로

$${}_{50}C_1-{}_{50}C_2+{}_{50}C_3-{}_{50}C_4+\cdots+{}_{50}C_{49}={}_{50}C_0+{}_{50}C_{50}$$
$$=1+1=2$$

답 ②

0190 ${}_{16}C_1+{}_{16}C_3+{}_{16}C_5+\cdots+{}_{16}C_{15}=2^{16-1}=2^{15}$ ··· ❶

또 ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3={}_7C_7+{}_7C_6+{}_7C_5+{}_7C_4$이고

$$({}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3)+({}_7C_4+{}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7)=2^7$$

이므로

$$2({}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3)=2^7$$
$$\therefore {}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3=2^6$$ ··· ❷

따라서 $\dfrac{{}_{16}C_1+{}_{16}C_3+{}_{16}C_5+\cdots+{}_{16}C_{15}}{{}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3}=\dfrac{2^{15}}{2^6}=2^9$이므로

$$n=9$$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ ${}_{16}C_1+{}_{16}C_3+{}_{16}C_5+\cdots+{}_{16}C_{15}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	20 %

0191 서로 다른 종류의 사탕 8개 중 $r(r=0, 1, 2, \cdots, 8)$개를 먼저 택하고 나머지 $(8-r)$개는 같은 종류의 초콜릿을 택하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8=2^8=256$$

답 256

0192 구하는 경우의 수는

$${}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_{11}$$

이때 ${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11}$이고

$${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5$$
$$={}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_{11}$$

이므로

$${}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_{11}=\frac{1}{2}\cdot 2^{11}=2^{10}$$
$$=1024$$

답 1024

0193 구하는 경우의 수는

$${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6$$

이때 ${}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6=2^6$이므로

$${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6=2^6-{}_6C_0$$
$$=2^6-1=63$$

답 63

0194 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_2$

원소의 개수가 4인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_4$

원소의 개수가 6인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_6$

원소의 개수가 8인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_8$

원소의 개수가 10인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_{10}$

${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^{10-1}=2^9$이므로 구하는 부분집합의 개수는

$${}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^9-{}_{10}C_0$$
$$=512-1=511$$

답 ②

유형 12 이항계수의 합 본책 32쪽

① ${}_1C_0={}_2C_0={}_3C_0=\cdots={}_nC_0=1$
② ${}_1C_1={}_2C_2={}_3C_3=\cdots={}_nC_n=1$
③ ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$

0195 ${}_1C_0={}_2C_0$이므로

$${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_4C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_5C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_6C_4+{}_6C_5$$
$$={}_7C_5$$

답 ②

0196 ${}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$$
$$={}_5C_3+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$$
$$\vdots$$
$$={}_{10}C_3+{}_{10}C_2$$
$$={}_{11}C_3={}_{11}C_8$$

답 ③

0197 ${}_6C_0+{}_7C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_{18}C_{12}$

$$={}_7C_0+{}_7C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_{18}C_{12}$$
$$={}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_{18}C_{12}$$
$$\vdots$$
$$={}_{18}C_{11}+{}_{18}C_{12}$$
$$={}_{19}C_{12}={}_{19}C_7$$ ··· ❶

따라서 ${}_{19}C_7={}_nC_7$이므로 $n=19$ ··· ❷

답 19

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 간단히 정리할 수 있다.	80 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	20 %

0198 ${}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5$

$$={}_5C_0+{}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5-{}_5C_0$$
$$={}_6C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5-{}_5C_0$$
$$={}_7C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5-{}_5C_0$$
$$={}_8C_3+{}_8C_4+{}_9C_5-{}_5C_0$$
$$={}_9C_4+{}_9C_5-{}_5C_0$$
$$={}_{10}C_5-{}_5C_0$$
$$=252-1=251$$

답 ②

0199 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r x^r$$

$4\le n\le 10$인 경우에 x^4항이 나오므로 주어진 식에서 x^4의 계수는 $(1+x)^4$, $(1+x)^5$, $\cdots$, $(1+x)^{10}$의 각각의 전개식의 x^4의 계수를 더하면 된다.

$(1+x)^4$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_4C_4$

$(1+x)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_5C_4$

$\vdots$

$(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_{10}C_4$

따라서 구하는 x^4의 계수는

$$\begin{aligned}{}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4&={}_5C_5+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4\\&={}_6C_5+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4\\&\ \ \vdots\\&={}_{10}C_5+{}_{10}C_4\\&={}_{11}C_5\\&=462\end{aligned}$$

답 462

0200 1st 1, 2, 4, 8 중에서 중복을 허용하여 세 수를 택하는 경우의 수를 구한다.

네 개의 자연수 1, 2, 4, 8 중에서 중복을 허용하여 세 수를 택하는 경우의 수는

$${}_4H_3={}_6C_3=20$$

2nd 세 수의 곱이 100보다 큰 경우의 수를 구한다.

1, 2, 4, 8, 즉 1, 2^1, 2^2, 2^3에서 세 수를 곱하여 100보다 큰 경우는

$$(2^3,\ 2^3,\ 2^3),\ (2^3,\ 2^3,\ 2^2),\ (2^3,\ 2^3,\ 2^1),\ (2^3,\ 2^2,\ 2^2)$$

의 4가지이다.

3rd 세 수의 곱이 100 이하인 경우의 수를 구한다.

구하는 경우의 수는

$$20-4=16$$

답 ③

0201 1st 규칙 (가), (나)를 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수를 구한다.

규칙 (가), (나)를 만족시키는 경우의 수는 학생 A에게 사탕 1개, 학생 B에게 초콜릿 1개를 먼저 준 후 나머지 사탕 5개와 초콜릿 4개를 세 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수이므로

$$\begin{aligned}{}_3H_5\cdot{}_3H_4&={}_7C_5\cdot{}_6C_4={}_7C_2\cdot{}_6C_2\\&=21\cdot15=315\end{aligned}$$

2nd 규칙 (가), (나)를 만족시키고, 규칙 (다)는 만족시키지 않도록 나누어 주는 경우의 수를 구한다.

규칙 (가), (나)를 만족시키면서 규칙 (다)는 만족시키지 않는, 즉 학생 C가 사탕과 초콜릿을 한 개도 받지 못하는 경우의 수는 학생 A에게 사탕 1개, 학생 B에게 초콜릿 1개를 먼저 준 후 나머지 사탕 5개와 초콜릿 4개를 두 학생 A, B에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수이므로

$$\begin{aligned}{}_2H_5\cdot{}_2H_4&={}_6C_5\cdot{}_5C_4={}_6C_1\cdot{}_5C_1\\&=6\cdot5=30\end{aligned}$$

3rd 주어진 규칙에 따라 나누어 주는 경우의 수를 구한다.

구하는 경우의 수는

$$315-30=285$$

답 285

0202 1st $|a|=x$, $|b|=y$, $|c|=z$로 놓고 주어진 등식을 변형한다.

$|a|=x$, $|b|=y$, $|c|=z$로 놓으면

$$x+y+z=10,\ x\ge1,\ y\ge2,\ z\ge3$$

$x-1=X$, $y-2=Y$, $z-3=Z$로 놓으면 X, Y, Z는 음이 아닌 정수이므로 $x+y+z=10$에서

$$(X+1)+(Y+2)+(Z+3)=10$$

$$\therefore X+Y+Z=4$$

2nd 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구한다.

x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 방정식 $X+Y+Z=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z)$의 개수와 같으므로

$${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$$

3rd 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구한다.

각각의 x, y, z에 대하여 a, b, c는 각각 음의 정수 또는 양의 정수의 값을 가질 수 있으므로 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$2^3\cdot15=120$$

답 120

0203 1st 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구한다.

조건 (가)의 방정식 $a+b+c=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

2nd 조건 (나)를 만족시키지 않는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구한다.

조건 (나)에서

$$9^a\cdot3^b=3^{2a}\cdot3^b=3^{2a+b}$$

이고, 3^{2a+b}이 27의 배수, 즉 3^3의 배수이어야 하므로

$$2a+b\ge3$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 ㉠에서 $2a+b<3$인 경우, 즉 $2a+b=0$ 또는 $2a+b=1$ 또는 $2a+b=2$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 뺀 것과 같다.

(i) $2a+b=0$일 때,
순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(0,\ 0,\ 6)$의 1개

(ii) $2a+b=1$일 때,
순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(0,\ 1,\ 5)$의 1개

(iii) $2a+b=2$일 때,
순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(0,\ 2,\ 4)$, $(1,\ 0,\ 5)$의 2개

이상에서 $2a+b<3$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$1+1+2=4$$

3rd 조건을 모두 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구한다.

구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$28-4=24$$

답 ③

0204 1st x_1, x_2, x_3 사이의 관계를 부등식으로 나타낸다.

조건 (가)에서 $n=1$일 때, $x_2-x_1\ge2$이므로

$$x_2\ge x_1+2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $n=2$일 때, $x_3-x_2\geq 2$이므로

$x_3\geq x_2+2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $x_3\geq x_2+2\geq(x_1+2)+2$

$\therefore\ x_1+4\leq x_2+2\leq x_3$

이때 x_1은 음이 아닌 정수이므로 $4\leq x_1+4$이고, 조건 (나)에서 $x_3\leq 10$이므로

$x_1\geq 0$

$4\leq x_1+4\leq x_2+2\leq x_3\leq 10$

2nd 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수를 구한다.

$x_1+4=a,\ x_2+2=b,\ x_3=c$라 하면

$4\leq a\leq b\leq c\leq 10$

이므로 구하는 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는 위의 부등식을 만족시키는 정수 $a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같다.

$a,\ b,\ c$의 값은 4부터 10까지 7개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 그 값이 작거나 같은 순서대로 $a,\ b,\ c$의 값으로 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_7H_3={}_9C_3=84$

답 84

0205 1st a_4의 값이 될 수 있는 수를 구한다.

조건 (가), (나)에 의하여

$a_4=2$ 또는 $a_4=4$ 또는 $a_4=6$

2nd a_4의 값에 따라 나머지 값을 정하는 경우의 수를 구한다.

(i) $a_4=2$일 때,

조건 (가), (다)에 의하여

$1\leq a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4=2\leq a_5\leq a_6\leq 7$

즉 $a_1,\ a_2,\ a_3$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2이므로 $a_1,\ a_2,\ a_3$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같고, $a_5,\ a_6$의 값이 될 수 있는 수는 2, 3, 4, 5, 6, 7이므로 $a_5,\ a_6$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 나머지 값을 정하는 경우의 수는

${}_2H_3\cdot{}_6H_2={}_4C_3\cdot{}_7C_2=4\cdot 21=84$

(ii) $a_4=4$일 때,

조건 (가), (다)에 의하여

$1\leq a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4=4\leq a_5\leq a_6\leq 7$

즉 $a_1,\ a_2,\ a_3$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4이므로 $a_1,\ a_2,\ a_3$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같고, $a_5,\ a_6$의 값이 될 수 있는 수는 4, 5, 6, 7이므로 $a_5,\ a_6$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 나머지 값을 정하는 경우의 수는

${}_4H_3\cdot{}_4H_2={}_6C_3\cdot{}_5C_2=20\cdot 10=200$

(iii) $a_4=6$일 때,

조건 (가), (다)에 의하여

$1\leq a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4=6\leq a_5\leq a_6\leq 7$

즉 $a_1,\ a_2,\ a_3$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 $a_1,\ a_2,\ a_3$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같고, $a_5,\ a_6$의 값이 될 수 있는 수는 6, 7이므로 $a_5,\ a_6$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 나머지 값을 정하는 경우의 수는

${}_6H_3\cdot{}_2H_2={}_8C_3\cdot{}_3C_2=56\cdot 3=168$

3rd 조건을 모두 만족시키는 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6)$의 개수를 구한다.

구하는 순서쌍의 개수는

$84+200+168=452$

답 452

0206 1st $f(1),\ f(3)$의 값이 될 수 있는 경우를 구한다.

조건 (가)에서 $f(1)\cdot f(3)$이 홀수가 되려면 $f(1),\ f(3)$이 모두 홀수이어야 한다.

이때 조건 (나)에서 $f(1)\leq f(3)$이므로

$f(1)=7,\ f(3)=7$ 또는 $f(1)=7,\ f(3)=9$

또는 $f(1)=9,\ f(3)=9$

2nd $f(1),\ f(3)$의 값에 따라 나머지 값을 정하는 경우의 수를 구한다.

(i) $f(1)=7,\ f(3)=7$일 때,

조건 (나)에 의하여 $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 7의 1개이다.

또 $f(4),\ f(5),\ f(6)$의 값이 될 수 있는 수는 7, 8, 9, 10이므로 $f(4),\ f(5),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 함수의 개수는

$1\cdot{}_4H_3=1\cdot{}_6C_3=20$

(ii) $f(1)=7,\ f(3)=9$일 때,

조건 (나)에 의하여 $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 7, 8, 9의 3개이다.

또 $f(4),\ f(5),\ f(6)$의 값이 될 수 있는 수는 9, 10이므로 $f(4),\ f(5),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 함수의 개수는

$3\cdot{}_2H_3=3\cdot{}_4C_3=3\cdot 4=12$

(iii) $f(1)=9,\ f(3)=9$일 때,

조건 (나)에 의하여 $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 9의 1개이다.

또 $f(4),\ f(5),\ f(6)$의 값이 될 수 있는 수는 9, 10이므로 $f(4),\ f(5),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 함수의 개수는

$1\cdot{}_2H_3=1\cdot{}_4C_3=4$

3rd 조건을 모두 만족시키는 함수의 개수를 구한다.

구하는 함수의 개수는

$20+12+4=36$

답 36

0207 1st 자연수 N의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}N&=9^2\cdot{}_5C_1+9^3\cdot{}_5C_2+9^4\cdot{}_5C_3+9^5\cdot{}_5C_4+9^6\cdot{}_5C_5\\&=9({}_5C_0+9\cdot{}_5C_1+9^2\cdot{}_5C_2+9^3\cdot{}_5C_3+9^4\cdot{}_5C_4+9^5\cdot{}_5C_5)-9\cdot{}_5C_0\\&=9(1+9)^5-9\\&=9\cdot 10^5-9\\&=899991\end{aligned}$$

2nd N의 각 자리의 숫자의 합을 구한다.

N의 각 자리의 숫자의 합은

$$8+9+9+9+9+1=45$$

답 ①

0208 1st $(1+a)^n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot a+{}_nC_2\cdot a^2+\cdots+{}_nC_n\cdot a^n$임을 이용한다.

$(1+43)^7={}_7C_0+{}_7C_1\cdot 43+{}_7C_2\cdot 43^2+\cdots+{}_7C_7\cdot 43^7$

에서 ${}_7C_0$, ${}_7C_7\cdot 43^7$을 제외한 나머지 항은 모두 7의 배수이다.

2nd 오늘부터 $(1+43)^7$일째 되는 날이 무슨 요일인지 구한다.

${}_7C_0+{}_7C_7\cdot 43^7=43^7+1$이고 오늘부터 43^7일째 되는 날이 목요일이므로 $(1+43)^7$일째 되는 날은 목요일 다음 날인 금요일이다.

답 ⑤

0209 1st ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$임을 이용한다.

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-{}_nC_0=2^n-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

2nd n의 개수를 구한다.

㉠에 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$을 대입하면 $1, 3, 7, 15, 31, 63, \cdots$이므로 n이 짝수일 때 ㉠은 3의 배수이다.

50 이하의 자연수 중에서 짝수의 개수는 25이므로 구하는 n의 개수는 25이다.

답 25

참고 n이 짝수일 때, 즉 $n=2k$(k는 자연수)일 때,

$$2^n-1=2^{2k}-1=4^k-1=(4-1)(4^{k-1}+4^{k-2}+\cdots+1)$$
$$=3(4^{k-1}+4^{k-2}+\cdots+1)$$

이므로 2^n-1은 3의 배수이다.

0210 1st (가)에 알맞은 식을 구한다.

${}_{2n}C_n<{}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n}=4^n$이므로

$${}_{2n}C_n<\boxed{4^n} \quad \cdots\cdots ㉠$$

2nd (나)에 알맞은 수를 구한다.

또 $1\le k\le n$을 만족시키는 자연수 k에 대하여

$$\frac{n+k}{k}\ge\frac{k+k}{k}=2$$

이므로

$${}_{2n}C_n=\frac{(2n)!}{n!\cdot(2n-n)!}$$
$$=\frac{2n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{1}$$
$$=\boxed{2}\cdot\frac{n+(n-1)}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{1}$$
$$\ge 2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2=2^n \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad 2^n\le{}_{2n}C_n<4^n$

3rd $f(a)$의 값을 구한다.

$f(n)=4^n$, $a=2$이므로

$$f(a)=f(2)=4^2=16$$

답 ①

0211 1st 두 원소 1, 2를 모두 포함하는 부분집합을 생각한다.

집합 A의 부분집합이 주어진 조건을 만족시키려면 1, 2를 제외한 나머지 18개의 원소 중에서 0개, 2개, 4개, $\cdots$, 18개를 택하여 1, 2와 함께 원소로 가지면 된다.

2nd 18개의 원소 중 0개, 2개, 4개, $\cdots$, 18개를 택하는 경우의 수를 각각 구한다.

18개의 원소 중에서

0개를 택하는 경우의 수는 $\quad {}_{18}C_0$

2개를 택하는 경우의 수는 $\quad {}_{18}C_2$

4개를 택하는 경우의 수는 $\quad {}_{18}C_4$

$\vdots$

18개를 택하는 경우의 수는 $\quad {}_{18}C_{18}$

3rd 조건을 만족시키는 부분집합의 개수를 구한다.

구하는 부분집합의 개수는

$${}_{18}C_0+{}_{18}C_2+{}_{18}C_4+\cdots+{}_{18}C_{18}=2^{18-1}=2^{17}$$

답 ④

0212 1st ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$임을 이용하여 주어진 식을 정리한다.

$$({}_4C_0+{}_4C_4)+({}_5C_1+{}_5C_4)+({}_6C_2+{}_6C_4)+({}_7C_3+{}_7C_4)+2\cdot{}_8C_4$$
$$=({}_4C_0+{}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4)+({}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4)$$
$$=({}_5C_0+{}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4)+({}_5C_5+{}_5C_4+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4)$$
$$=({}_6C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4)+({}_6C_5+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4)$$
$$=({}_7C_2+{}_7C_3+{}_8C_4)+({}_7C_5+{}_7C_4+{}_8C_4)$$
$$=({}_8C_3+{}_8C_4)+({}_8C_5+{}_8C_4)$$
$$={}_9C_4+{}_9C_5={}_{10}C_5$$

답 ④

0213 전략 먼저 주어진 등식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $ad+ae+bd+be+cd+ce$

$$=a(d+e)+b(d+e)+c(d+e)$$
$$=(a+b+c)(d+e)=51$$

이때 a, b, c, d, e는 자연수이므로

$a+b+c=3,\ d+e=17$ — $a+b+c$는 3 이상, $d+e$는 2 이상의 자연수

또는 $a+b+c=17,\ d+e=3$ ⋯ ❶

$a-1=A$, $b-1=B$, $c-1=C$, $d-1=D$, $e-1=E$로 놓으면 A, B, C, D, E는 음이 아닌 정수이다.

(i) $a+b+c=3$, $d+e=17$인 경우

$(A+1)+(B+1)+(C+1)=3$, $(D+1)+(E+1)=17$이므로

$$A+B+C=0,\ D+E=15$$

a, b, c, d, e의 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C, D, E의 순서쌍 (A, B, C, D, E)의 개수와 같으므로

$${}_3H_0\cdot{}_2H_{15}={}_2C_0\cdot{}_{16}C_{15}=1\cdot{}_{16}C_1=16$$ ⋯ ❷

(ii) $a+b+c=17$, $d+e=3$인 경우

$(A+1)+(B+1)+(C+1)=17$, $(D+1)+(E+1)=3$이므로

$$A+B+C=14,\ D+E=1$$

a, b, c, d, e의 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C, D, E의 순서쌍 (A, B, C, D, E)의 개수와 같으므로

$${}_3H_{14}\cdot{}_2H_1={}_{16}C_{14}\cdot{}_2C_1={}_{16}C_2\cdot{}_2C_1$$
$$=120\cdot 2=240$$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$16+240=256$$ ⋯ ❹

답 256

채점 기준	비율
❶ $a+b+c=3$, $d+e=17$ 또는 $a+b+c=17$, $d+e=3$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $a+b+c=3$, $d+e=17$인 경우의 순서쌍의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b+c=17$, $d+e=3$인 경우의 순서쌍의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0214 전략 $A=\frac{1}{b}x^2+\frac{1}{a}$이라 하고 $(ax^2+b+1)^{10}$을 변형하여 A^2으로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$를 구한다.

풀이 $A=\frac{1}{b}x^2+\frac{1}{a}$이라 하고 양변에 ab를 곱하면

$$abA=ax^2+b$$

$ax^2+b+1=abA+1$이므로

$$\begin{aligned}&(ax^2+b+1)^{10}\\&=(abA+1)^{10}\\&={}_{10}C_0+{}_{10}C_1(abA)^1+{}_{10}C_2(abA)^2+\cdots+{}_{10}C_{10}(abA)^{10}\\&=1+10abA\\&\quad+A^2\{{}_{10}C_2(ab)^2+{}_{10}C_3(ab)^3A+\cdots+{}_{10}C_{10}(ab)^{10}A^8\}\end{aligned}$$ ⋯ ❶

이때 $A^2\{{}_{10}C_2(ab)^2+{}_{10}C_3(ab)^3A+\cdots+{}_{10}C_{10}(ab)^{10}A^8\}$은 A^2, 즉 $\left(\frac{1}{b}x^2+\frac{1}{a}\right)^2$으로 나누어떨어지므로 $(ax^2+b+1)^{10}$을 $\left(\frac{1}{b}x^2+\frac{1}{a}\right)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $1+10abA$를 $\left(\frac{1}{b}x^2+\frac{1}{a}\right)^2$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

그런데

$$1+10abA=1+10ab\left(\frac{1}{b}x^2+\frac{1}{a}\right)=10ax^2+10b+1$$

이므로

$$R(x)=10ax^2+10b+1$$ ⋯ ❷

$R(2)=40a+10b+1=101$에서

$$4a+b=10$$

이므로 이를 만족시키는 10 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 6)$, $(2, 2)$의 2개이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $A=\frac{1}{b}x^2+\frac{1}{a}$이라 하고 $(ax^2+b+1)^{10}$을 변형할 수 있다.	50 %
❷ $R(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0215 전략 $(x-1)(x+a)^n$은 $x(x+a)^n-(x+a)^n$으로 변형하여 생각한다.

풀이 $4(x+a)^n$의 전개식의 일반항은

$$4\cdot{}_nC_r\,x^{n-r}a^r$$

$x^{n-r}=x^{n-1}$에서 $\quad r=1$

따라서 $4(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$$4\cdot{}_nC_1\cdot a=4an$$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

한편 $(x-1)(x+a)^n=x(x+a)^n-(x+a)^n$이므로 x^{n-1}의 계수는 $(x+a)^n$의 전개식의 x^{n-2}의 계수에서 $(x+a)^n$의 전개식의 x^{n-1}의 계수를 뺀 것이다.

$(x+a)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_s\,x^{n-s}a^s$$

x^{n-2}항은 $s=2$일 때이고, x^{n-1}항은 $s=1$일 때이므로 $(x-1)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$${}_nC_2\cdot a^2-{}_nC_1\cdot a=\frac{a^2n(n-1)}{2}-an$$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

이때 주어진 두 다항식의 전개식에서 x^{n-1}의 계수가 같으므로 ㉠, ㉡에서

$$4an=\frac{a^2n(n-1)}{2}-an, \qquad 8=a(n-1)-2$$

$$\therefore a=\frac{10}{n-1}$$

$n\geq2$이므로 $n=2$일 때, a의 최댓값은 10이다. ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ $4(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수를 구할 수 있다.	20 %
❷ $(x-1)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 실수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0216 전략 $f(n)$을 조합의 수로 나타낸 다음 이항계수의 성질을 이용한다.

풀이 $f(n)$은 1부터 20까지의 자연수에서 n을 제외한 19개의 자연수 중에서 서로 다른 $(n-1)$개의 자연수를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$f(n)={}_{19}C_{n-1}$$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}\therefore\ &f(2)+f(3)+\cdots+f(20)\\&={}_{19}C_1+{}_{19}C_2+{}_{19}C_3+\cdots+{}_{19}C_{19}\\&=({}_{19}C_0+{}_{19}C_1+{}_{19}C_2+\cdots+{}_{19}C_{19})-{}_{19}C_0\\&=2^{19}-1\end{aligned}$$

$$\therefore p=19$$ ⋯ ❷

답 19

채점 기준	비율
❶ $f(n)={}_{19}C_{n-1}$임을 알 수 있다.	40 %
❷ 자연수 p의 값을 구할 수 있다.	60 %

0217 전략 20 이하의 소수가 적힌 카드를 한 장 이상 뽑는 경우의 수에서 카드에 적힌 숫자의 합이 10 이하인 경우의 수를 뺀다.

풀이 20 이하의 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19의 8개이므로 한 장 이상의 카드를 뽑는 경우의 수는

$$\begin{aligned}&{}_8C_1+{}_8C_2+{}_8C_3+\cdots+{}_8C_8\\&=({}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8)-{}_8C_0\\&=2^8-1\\&=255\end{aligned}$$ ⋯ ❶

이때 $2+3+5=10$이므로 2, 3, 5가 적힌 카드 중에서 한 장 이상의 카드를 뽑는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_3C_1+{}_3C_2+{}_3C_3&=({}_3C_0+{}_3C_1+{}_3C_2+{}_3C_3)-{}_3C_0\\&=2^3-1=7\end{aligned}$$

또 7, $2+7=9$, $3+7=10$인 경우도 합이 10 이하이다. ⋯ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$255-(7+3)=245$ ⋯ ❸

답 245

채점 기준	비율
❶ 20 이하의 소수가 적힌 카드 중에서 한 장 이상의 카드를 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 카드에 적힌 숫자의 합이 10 이하인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 카드에 적힌 숫자의 합이 10보다 큰 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0218 전략 세 가지 맛 사탕을 각각 적어도 한 개씩 포함해야 하므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 0개, 1개, 2개, ⋯, 12개를 택하는 경우의 수와 같다.

풀이 먼저 딸기 맛, 포도 맛, 사과 맛 사탕을 각각 한 개씩 사고 나머지 12개 이하의 사탕을 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 12개 이하를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2+{}_3H_3+\cdots+{}_3H_{12} \quad \cdots ❶$$
$$={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{14}C_{12}$$
$$=\underbrace{{}_3C_0}_{{}_2C_0={}_3C_0}+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{14}C_{12}$$
$$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{14}C_{12}$$
$$={}_5C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{14}C_{12}$$
$$\vdots$$
$$={}_{14}C_{11}+{}_{14}C_{12}$$
$$={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3$$
$$=455 \quad \cdots ❷$$

답 455

채점 기준	비율
❶ 경우의 수를 중복조합의 수를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %

03 확률의 뜻과 활용

0219 답 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

0220 답 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

0221 답 $\{1, 3, 5\}$

0222 답 $\{2, 3, 5\}$

0223 $A=\{3, 6, 9, 12, 15\}$, $B=\{5, 10, 15\}$이므로

$A\cup B=\{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$

답 $\{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$

0224 답 $\{15\}$

0225 답 $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$

0226 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$

답 $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$

0227 $A=\{HH\}$, $B=\{HT, TH\}$, $C=\{HT, TH, TT\}$

$A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로 배반사건이다.

$B\cap C=\{HT, TH\}$이므로 B와 C는 서로 배반사건이 아니다.

$C\cap A=\varnothing$이므로 C와 A는 서로 배반사건이다.

답 A와 B, C와 A

0228 표본공간을 S라 하면

$S=\{HH, HT, TH, TT\}$

$A\cup B=\{HH, HT, TH\}$이므로

$(A\cup B)^C=\{TT\}$ 답 $\{TT\}$

0229 두 개의 정사면체를 동시에 던질 때 모든 경우의 수는

$4\cdot4=16$

바닥에 닿는 면에 적힌 두 수를 순서쌍으로 나타내면 두 수의 합이 3인 경우는

$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$ 답 $\frac{1}{8}$

0230 바닥에 닿는 면에 적힌 두 수의 차가 2인 경우는

$(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$의 4가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

0231 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

E를 가장 앞에 세우는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

0232 A, B를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!$이고, A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2!$이므로 A, B를 이웃하게 세우는 경우의 수는

$4!\cdot 2!=48$

따라서 구하는 확률은

$\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

0233 7가지 색 중에서 5가지 색을 택하는 경우의 수는

${}_7C_5={}_7C_2=21$

초록을 택하는 경우의 수는 초록을 제외한 6가지 색 중에서 4가지를 택하고 초록을 포함시키는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 확률은

$\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$ 답 $\frac{5}{7}$

0234 노랑은 택하지 않고 파랑은 택하는 경우의 수는 노랑과 파랑을 제외한 5가지 색 중에서 4가지를 택하고 파랑을 포함시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 확률은

$\frac{5}{21}$ 답 $\frac{5}{21}$

0235 어떤 위염 환자에게 약을 투여할 때 위염이 치료될 확률은

$\frac{280}{400}=\frac{7}{10}$ 답 $\frac{7}{10}$

0236 주어진 수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로 구하는 확률은

$\frac{(\text{소수가 적힌 영역의 넓이})}{(\text{전체 과녁의 넓이})}=\frac{4}{9}$ 답 $\frac{4}{9}$

0237 전체 7개의 구슬 중 노란 구슬이 3개이므로 구하는 확률은 $\frac{3}{7}$이다. 답 $\frac{3}{7}$

0238 꺼낸 구슬이 빨간 구슬 또는 노란 구슬인 사건은 반드시 일어나므로 구하는 확률은 1이다. 답 1

0239 꺼낸 구슬이 파란 구슬인 사건은 절대로 일어날 수 없으므로 구하는 확률은 0이다. 답 0

0240 짝수는 2, 4, 6, ⋯, 24의 12개이므로

$P(A)=\frac{12}{25}$ 답 $\frac{12}{25}$

0241 모든 카드에는 짝수 또는 홀수가 적혀 있으므로

$P(A\cup B)=1$ 답 1

0242 $A\cap B=\varnothing$이므로 — 짝수이면서 홀수인 자연수는 없다.

$P(A\cap B)=0$ 답 0

0243 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$ 답 $\frac{8}{15}$

0244 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$\frac{8}{9}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{6}$

$\therefore P(B)=\frac{8}{9}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{5}{9}$ 답 $\frac{5}{9}$

0245 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서 $\frac{2}{3}=\frac{1}{4}+P(B)$

$\therefore P(B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$ 답 $\frac{5}{12}$

0246 3의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, 4의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면 3의 배수 또는 4의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건은 $A\cup B$이고

$P(A)=\frac{33}{100}$, $P(B)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$,

$P(\underbrace{A\cap B}_{\text{12의 배수인 사건}})=\frac{8}{100}=\frac{2}{25}$

이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{33}{100}+\frac{1}{4}-\frac{2}{25}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0247 7의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, 15의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면 7의 배수 또는 15의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건은 $A\cup B$이고

$P(A)=\frac{14}{100}=\frac{7}{50}$, $P(B)=\frac{6}{100}=\frac{3}{50}$

이다. 이때 A, B는 서로 배반사건이므로 — 100 이하의 자연수 중 7의 배수이면서 15의 배수인 수, 즉 105의 배수는 없다.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{7}{50}+\frac{3}{50}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

0248 $P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$ 답 $\frac{4}{7}$

0249 $P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$

$=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$ 답 $\frac{7}{9}$

0250 $P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)=1-P(A\cap B)$

$=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

0251 9의 배수가 아닌 사건을 A라 하면 A^C는 9의 배수인 사건이므로
$A^C=\{9,\ 18,\ 27,\ 36\}$

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

답 $\frac{9}{10}$

0252 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 A^C는 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건이다.

이때 두 눈의 수의 곱이 홀수이려면 두 눈의 수가 모두 홀수이어야 하므로 그 경우의 수는
(홀수)×(홀수)=(홀수)

$3\cdot3=9$

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0253 8명의 학생 중에서 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_3=56$

(1) 남학생 5명 중에서 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$$

(2) 대표 중에서 적어도 한 명은 여학생인 사건을 A라 하면 A^C는 3명 모두 남학생인 사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{28}=\frac{23}{28}$$

답 (1) $\frac{5}{28}$ (2) $\frac{23}{28}$

유형 01 시행과 사건

본책 42쪽

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여
① 합사건 ➡ 합집합 ➡ $A\cup B$
② 곱사건 ➡ 교집합 ➡ $A\cap B$
③ 배반사건 ➡ 서로소 ➡ $A\cap B=\varnothing$
④ 여사건 ➡ 여집합 ➡ A^C, B^C

0254 $A=\{3,\ 6\}$, $B=\{6,\ 8\}$, $C=\{3,\ 5,\ 7,\ 11\}$이므로

$A\cap B=\{6\}$, $A\cap C=\{3\}$, $B\cap C=\varnothing$

따라서 서로 배반사건인 것은 B와 C이다. 답 ②

0255 표본공간을 S라 하면

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$,

$A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$, $B=\{5,\ 7,\ 9\}$

② $A\cup B=\{1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10\}$

③ $A\cap B=\{5\}$

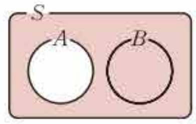
④ $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$이므로

$n(A^C\cup B^C)=9$

⑤ $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{3,\ 4,\ 6,\ 8\}$ 답 ⑤

0256 ㄴ. $A\cup B=S$임은 알 수 없다.

ㄹ. $C=A^C$이므로 오른쪽 벤다이어그램에서



$B\subset C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ③

0257 사건 A와 배반인 사건은 사건 A^C의 부분집합이고, 사건 B와 배반인 사건은 사건 B^C의 부분집합이므로 두 사건 A, B와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

이때

$A^C\cap B^C=\{5,\ 6,\ 7,\ 9\}\cap\{3,\ 7,\ 8,\ 9\}=\{7,\ 9\}$

이므로 구하는 사건의 개수는

$2^2=4$ 답 4

SSEN 특강 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$에 대하여 A의 부분집합의 개수는

2^n

유형 02 수학적 확률

본책 42쪽

어떤 시행에서 표본공간 S의 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 일어날 수학적 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

0258 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 두 눈의 수의 차가 2인 경우는

$(1,\ 3)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 6)$,

$(3,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 4)$의 8가지

(ii) 두 눈의 수의 차가 1인 경우는

$(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 5)$, $(5,\ 6)$,

$(2,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 3)$, $(5,\ 4)$, $(6,\ 5)$의 10가지

(iii) 두 눈의 수의 차가 0인 경우

$(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 4)$,

$(5,\ 5)$, $(6,\ 6)$의 6가지

이상에서 두 눈의 수의 차가 2 이하인 경우의 수는

$8+10+6=24$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$

답 ⑤

0259 집합 S의 부분집합의 개수는

$2^9=512$

2와 4를 반드시 원소로 갖고 9를 원소로 갖지 않는 집합 S의 부분집합의 개수는

$2^{9-3}=2^6=64$

따라서 구하는 확률은

$\frac{64}{512}=\frac{1}{8}$ 답 $\frac{1}{8}$

SSEN 특강 특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여
① A의 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수
⇒ 2^{n-k} (단, $k<n$)
② A의 특정한 원소 l개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수
⇒ 2^{n-l} (단, $l<n$)
③ A의 원소 중에서 k개는 반드시 원소로 갖고, l개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수
⇒ 2^{n-k-l} (단, $k+l<n$)

0260 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$ ⋯ ❶

이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가지려면 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 하므로

$D=a^2-4b=0$ $\therefore a^2=4b$ ⋯ ❷

$a^2=4b$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(4, 4)$의 2가지 ⋯ ❸

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ ⋯ ❹

답 $\frac{1}{18}$

채점 기준	비율
❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ a와 b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가지는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가질 확률을 구할 수 있다.	20 %

0261 $648=2^3\cdot3^4$이므로 648의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(4+1)=20$

648의 양의 약수 중에서 60의 약수는 648과 60의 양의 공약수와 같다.

$60=2^2\cdot3\cdot5$이므로 648과 60의 최대공약수는

$2^2\cdot3$

따라서 648과 60의 양의 공약수의 개수는

$(2+1)(1+1)=6$

이므로 구하는 확률은

$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ 답 $\frac{3}{10}$

참고 자연수 $N=p^aq^b$(a, b는 자연수, p, q는 서로 다른 소수)의 양의 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)$

0262 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot6\cdot6=216$

(i) $a=1$인 경우

b, c의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 경우의 수는

$5\cdot5=25$

(ii) $a=2$인 경우

b, c의 값이 될 수 있는 것은 3, 4, 5, 6이므로 그 경우의 수는

$4\cdot4=16$

(iii) $a=3$인 경우

b, c의 값이 될 수 있는 것은 4, 5, 6이므로 그 경우의 수는

$3\cdot3=9$

(iv) $a=4$인 경우

b, c의 값이 될 수 있는 것은 5, 6이므로 그 경우의 수는

$2\cdot2=4$

(v) $a=5$인 경우

b, c의 값이 될 수 있는 것은 6이므로 그 경우의 수는

$1\cdot1=1$

(vi) $a=6$인 경우

$a<b$이고 $a<c$를 만족시키는 b, c의 값은 없다.

이상에서 $a<b$이고 $a<c$인 경우의 수는

$25+16+9+4+1=55$

이므로 구하는 확률은 $\frac{55}{216}$ 답 $\frac{55}{216}$

유형 03 순열을 이용하는 확률 본책 43쪽

서로 다른 것을 일렬로 나열하는 경우의 확률을 구할 때에는 먼저 순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.
⇒ 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_{n}\mathrm{P}_{r}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\ (\text{단, } 0<r\le n)$$
$$=\frac{n!}{(n-r)!}\ (\text{단, } 0\le r\le n)$$

0263 5권을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$5!=120$

시집 3권 중에서 2권을 양 끝에 꽂는 경우의 수는

${}_{3}\mathrm{P}_{2}=6$

소설책 2권과 나머지 시집 1권을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 양 끝에 시집을 꽂는 경우의 수는

$6\cdot6=36$

이므로 구하는 확률은 $\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$ 답 ③

0264 다섯 개의 숫자를 모두 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는

$5!=120$

일의 자리의 숫자가 2 또는 4일 때 짝수가 되므로 짝수의 개수는

$4!\cdot2=48$

따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

0265 5명의 학생 중에서 3명이 소파에 나란히 앉는 경우의 수는

${}_{5}\mathrm{P}_{3}=60$ ⋯ ❶

A가 소파 가운데에 앉고, 나머지 4명의 학생 중에서 2명이 양 끝에 앉는 경우의 수는

$_4P_2=12$ ⋯ ❷

따라서 A가 소파 가운데에 앉을 확률이 $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$이므로

$n=5$ ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 3명이 소파에 나란히 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ A가 소파 가운데에 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	30 %

0266 6명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $6!=720$

각 부부를 한 사람으로 생각하여 3명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$3!=6$

세 쌍의 부부가 부부끼리 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!=8$

따라서 세 쌍의 부부가 부부끼리 서로 이웃하게 앉는 경우의 수는

$6\cdot8=48$

이므로 구하는 확률은

$\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$ 답 $\frac{1}{15}$

0267 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

p와 n 사이에 들어가는 2개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$_4P_2=12$

p와 n을 포함한 4개의 문자를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

p와 n이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 p와 n 사이에 2개의 문자가 있도록 나열하는 경우의 수는

$12\cdot6\cdot2=144$

이므로 구하는 확률은

$\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$ 답 ②

0268 네 사람을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

앞에서 세 번째에 서 있는 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 키가 작아야 하므로 세 번째에는 키가 가장 작은 사람 또는 키가 두 번째로 작은 사람이 설 수 있다.

(i) 키가 가장 작은 사람이 세 번째에 서는 경우

나머지 3명을 일렬로 세우면 되므로 경우의 수는

$3!=6$

(ii) 키가 두 번째로 작은 사람이 세 번째에 서는 경우

키가 가장 작은 사람을 첫 번째에 세우고 나머지 2명을 일렬로 세우면 되므로 경우의 수는

$2!=2$

(i), (ii)에서 앞에서 세 번째에 서 있는 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 키가 작도록 세우는 경우의 수는

$6+2=8$

이므로 구하는 확률은 $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

유형 04 원순열을 이용하는 확률

본책 44쪽

서로 다른 것을 원형으로 배열하는 경우의 확률을 구할 때에는 먼저 원순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

➡ 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$\frac{n!}{n}=(n-1)!$

0269 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

남학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

남학생 사이사이의 3개의 자리에 여학생 3명이 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 남녀가 번갈아 가며 앉는 경우의 수는

$2\cdot6=12$

이므로 구하는 확률은

$\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$ 답 ③

0270 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

부모님을 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

부모님이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 부모님이 이웃하게 앉는 경우의 수는

$6\cdot2=12$

이므로 구하는 확률은

$\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$ 답 ⑤

0271 6가지 색을 원판에 모두 칠하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$ ⋯ ❶

검은색을 칠한 영역의 맞은편에 흰색을 칠하고 나머지 4가지 색을 4개의 영역에 칠하는 경우의 수는

$4!=24$ ⋯ ❷

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{5}$

채점 기준	비율
❶ 6가지 색을 원판에 모두 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 검은색을 칠한 영역의 맞은편에 흰색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 검은색을 칠한 영역의 맞은편에 흰색을 칠할 확률을 구할 수 있다.	30 %

0272 의자 5개에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 1개이다.
빈 의자 1개에 앉는 또 다른 학생이 있다고 생각하면 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

남학생 3명을 한 사람, 여학생 2명을 한 사람으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

남학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 남학생은 남학생끼리, 여학생은 여학생끼리 이웃하게 앉는 경우의 수는

$2\cdot6\cdot2=24$

이므로 구하는 확률은

$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$ 답 ②

유형 05 중복순열을 이용하는 확률 본책 44쪽

중복을 허용하여 일렬로 나열하는 경우의 확률을 구할 때에는 먼저 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.
➡ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는
$_n\Pi_r=n^r$

0273 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$_3\Pi_4=3^4=81$

이때 4000보다 크려면 천의 자리의 숫자가 4이어야 하므로 그 수의 개수는
4□□□ 꼴

$_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 확률은

$\frac{27}{81}=\frac{1}{3}$ 답 ④

0274 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

$_3\Pi_3=3^3=27$

이때 일대일대응의 개수는 $_3P_3=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$ 답 ③

SSEN 특강 일대일대응

함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일대응
➡ 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$
이고, 치역과 공역이 같다.

0275 네 명의 학생이 다섯 개의 메뉴 중에서 임의로 각각 한 개를 고르는 경우의 수는

$_5\Pi_4=5^4=625$ ··· ❶

네 명이 서로 다른 메뉴를 고르는 경우의 수는

$_5P_4=120$ ··· ❷

따라서 구하는 확률은

$\frac{120}{625}=\frac{24}{125}$ ··· ❸

답 $\frac{24}{125}$

채점 기준	비율
❶ 다섯 개의 메뉴 중에서 임의로 각각 한 개를 고르는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 서로 다른 메뉴를 고르는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 서로 다른 메뉴를 고를 확률을 구할 수 있다.	30 %

0276 세 사람이 가위바위보를 한 번 할 때 나오는 모든 경우의 수는

$_3\Pi_3=3^3=27$

이기는 두 명을 정하는 경우는 지는 한 명을 정하는 경우와 같으므로 3가지이고, 이기는 두 명이 가위, 바위, 보 중에서 어느 하나를 냈을 때 나머지 한 명이 내는 것은 정해져 있으므로 두 명이 이기는 경우의 수는

$3\cdot3=9$

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$ 답 ③

0277 만의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는

$4\cdot{_5\Pi_4}=4\cdot5^4$

짝수이려면 일의 자리의 숫자가 0, 2, 4 중 하나이어야 하므로 짝수의 개수는

$3\cdot4\cdot{_5\Pi_3}=12\cdot5^3$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12\cdot5^3}{4\cdot5^4}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

참고 경우의 수를 이용하여 확률을 구할 때, $4\cdot5^4$, $12\cdot5^3$과 같이 큰 수가 나오는 경우에는 이를 먼저 계산하는 것보다 모든 경우의 수와 주어진 사건의 경우의 수를 분수로 나타내어 약분하는 것이 계산이 더 편리하다.

유형 06 같은 것이 있는 순열을 이용하는 확률 본책 45쪽

같은 것을 포함하여 일렬로 나열하는 경우의 확률을 구할 때에는 먼저 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.
➡ n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

0278 7개의 문자 A, L, P, H, A, G, O를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!}=2520$

모음 A, A, O를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

A, A, O가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 모음끼리 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$120\cdot3=360$

이므로 구하는 확률은

$\frac{360}{2520}=\frac{1}{7}$ 답 $\frac{1}{7}$

0279 여섯 개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot3!}=60$

맨 끝에 3을 놓고, 나머지 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$

따라서 구하는 확률은

$\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$ 답 ⑤

0280 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{8!}{4!\cdot4!}=70$ ··· ❶

A에서 C를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot3!}=30$ ··· ❷

따라서 구하는 확률은

$\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$ ··· ❸

답 $\frac{3}{7}$

채점 기준	비율
❶ A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ A에서 C를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ A에서 B까지 최단 거리로 갈 때, C를 거쳐 갈 확률을 구할 수 있다.	30 %

0281 집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

$f(1)+f(2)+f(3)=14$를 만족시키는 함수 f의 개수는 4, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $4+5+5=14$

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

0282 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot6\cdot6=216$

x, y, z는 1 이상 6 이하의 자연수이므로 곱이 4가 되는 세 자연수로 가능한 것은

1, 1, 4 또는 1, 2, 2

즉 $xyz=4$인 경우의 수는 1, 1, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수의 합과 같으므로

$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$ 답 $\frac{1}{36}$

0283 9개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{9!}{2!\cdot2!}$ c와 o가 2개씩 있다.

t가 c보다 앞에 오려면 c, c, t를 모두 x로 생각하여 일렬로 나열한 다음 맨 앞의 x를 t로, 나머지 x를 c로 바꾸면 된다.

x, x, x를 포함하여 9개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{9!}{2!\cdot3!}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{\frac{9!}{2!\cdot3!}}{\frac{9!}{2!\cdot2!}}=\frac{1}{3}$ 답 ②

유형 07 조합을 이용하는 확률
본책 46쪽

순서를 생각하지 않고 택하는 경우의 확률을 구할 때에는 먼저 조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

➡ 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 경우의 수는

$${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ (단, } 0\le r\le n)$$

0284 9개의 음료수 캔 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_9C_3=84$

콜라 캔 4개 중에서 2개, 사이다 캔 5개 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_2\cdot{}_5C_1=6\cdot5=30$

따라서 구하는 확률은

$\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$ 답 ③

0285 16명 중에서 대표 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_{16}C_2=120$

1학년 학생 수를 x라 하면 2학년 학생 수는 $16-x$이므로 각 학년에서 대표를 1명씩 뽑는 경우의 수는

${}_xC_1\cdot{}_{16-x}C_1=x(16-x)$

따라서 $\frac{x(16-x)}{120}=\frac{1}{2}$이므로

$x^2-16x+60=0,\quad (x-6)(x-10)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=10$ 1학년 학생이 6명, 2학년 학생이 10명 또는 1학년 학생이 10명, 2학년 학생이 6명

즉 구하는 학생 수의 차는 4이다.

답 ⑤

0286 5장의 카드 중에서 3장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

이때 세 수의 합이 짝수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) (홀수)+(홀수)+(짝수)인 경우

홀수가 적힌 2장의 카드 중에서 2장, 짝수가 적힌 3장의 카드 중에서 1장을 뽑는 경우의 수는

$_2C_2 \cdot {}_3C_1=3$

(ii) (짝수)+(짝수)+(짝수)인 경우

짝수가 적힌 3장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

$_3C_3=1$

(i), (ii)에서 세 수의 합이 짝수인 경우의 수는 $3+1=4$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ 답 ②

0287 정육면체의 8개의 꼭짓점 중에서 서로 다른 두 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 $_8C_2=28$ ··· ❶

이때 두 꼭짓점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

(i) 두 꼭짓점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$인 경우의 수는 각 면의 대각선의 개수와 같으므로 $2 \cdot 6=12$

(ii) 두 꼭짓점 사이의 거리가 $\sqrt{3}$인 경우의 수는 정육면체의 대각선의 개수와 같으므로 4

(i), (ii)에서 두 꼭짓점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우의 수는

$12+4=16$ ··· ❷

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$ ··· ❸

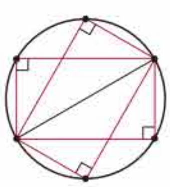
답 $\frac{4}{7}$

채점 기준	비율
❶ 8개의 꼭짓점 중에서 서로 다른 두 꼭짓점을 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 두 꼭짓점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %
❸ 두 꼭짓점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이상일 확률을 구할 수 있다.	20 %

0288 6개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$_6C_3=20$

오른쪽 그림과 같이 1개의 지름에 대하여 4개의 직각삼각형을 만들 수 있고, 6개의 점으로 만들 수 있는 지름은 3개이므로 직각삼각형의 개수는



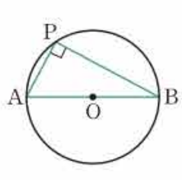
$4 \cdot 3=12$

따라서 직각삼각형일 확률은 $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$이므로

$a=5,\ b=3 \quad \therefore a+b=8$ 답 ①

SSEN 특강 원에 내접하는 직각삼각형

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 원의 지름의 양 끝 점과 원 위의 다른 한 점을 택하면 직각삼각형을 만들 수 있다.



0289 집합 A의 공집합이 아닌 모든 부분집합의 개수는

$2^3-1=7$

따라서 임의로 서로 다른 두 부분집합을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는

$_7P_2=42$

두 집합 X, Y의 원소의 개수에 따라 $X \subset Y$인 두 집합 X, Y를 정하는 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

(i) $n(X)=1$, $n(Y)=2$인 경우

집합 X를 정하는 경우의 수는 $_3C_1=3$

집합 Y는 집합 X를 포함하고, 집합 $A-X$의 2개의 원소 중 1개를 원소로 가질 수 있으므로 집합 Y를 정하는 경우의 수는 $_2C_1=2$

따라서 이 경우의 수는

$3 \cdot 2=6$

(ii) $n(X)=1$, $n(Y)=3$인 경우

집합 X를 정하는 경우의 수는 $_3C_1=3$

집합 Y를 정하는 경우의 수는 1 $n(Y)=3$이므로 $A=Y$

따라서 이 경우의 수는

$3 \cdot 1=3$

(iii) $n(X)=2$, $n(Y)=3$인 경우

집합 X를 정하는 경우의 수는 $_3C_2=3$

집합 Y를 정하는 경우의 수는 1

따라서 이 경우의 수는

$3 \cdot 1=3$

이상에서 $X \subset Y$인 두 집합 X, Y를 정하는 경우의 수는

$6+3+3=12$

이므로 구하는 확률은

$\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$ 답 $\frac{2}{7}$

유형 08 통계적 확률 본책 47쪽

① 사건 A가 n번 중에서 r번의 꼴로 일어날 때, 사건 A가 일어날 통계적 확률은 $\frac{r}{n}$

② 시행 횟수가 충분히 클 때, 통계적 확률은 수학적 확률에 가까워진다.

0290 흰 구슬이 나올 확률이 $\frac{1}{8}$이므로

$\frac{1}{8}=\frac{2}{2+3+n}, \quad 5+n=16$

$\therefore n=11$ 답 ③

0291 A 자동차에 하자가 발생할 확률은

$\frac{50}{10000}=\frac{1}{200} \quad \therefore a=\frac{1}{200}$

B 자동차에 하자가 발생할 확률은

$\frac{10}{5000}=\frac{1}{500} \quad \therefore b=\frac{1}{500}$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{1}{500} \cdot 200=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

0292 2단계까지 합격한 여학생은 69120명이고 5단계까지 최종 합격한 여학생은 20520명이므로

$$p=\frac{20520}{69120}=\frac{19}{64}$$

$$\therefore 64p=64\cdot\frac{19}{64}=19$$

답 ①

0293 주머니 속에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n이라 하면 꺼낸 2개의 제비가 모두 당첨 제비일 확률이 $\frac{1}{6}$이므로

$$\frac{{}_{n}C_{2}}{{}_{9}C_{2}}=\frac{1}{6},\qquad \frac{n(n-1)}{72}=\frac{1}{6}$$

$$n^2-n-12=0,\qquad (n+3)(n-4)=0$$

$\therefore n=4$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 주머니 속에 들어 있는 당첨 제비는 4개이다.

답 4

0294 이번 시즌에 던진 3점 슛의 개수를 a라 하면 성공한 3점 슛의 개수가 $\frac{54}{3}=18$이므로

$$\frac{18}{a}=\frac{45}{100}$$

$\therefore a=40$ ··· ❶

이번 시즌에 던진 2점 슛의 개수를 b라 하면 성공한 2점 슛의 개수가 $\frac{168}{2}=84$이므로

$$\frac{84}{b}=\frac{70}{100}$$

$\therefore b=120$ ··· ❷

따라서 3점 슛과 2점 슛의 개수의 합은

$a+b=160$ ··· ❸

답 160

채점 기준	비율
❶ 이번 시즌에 던진 3점 슛의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 이번 시즌에 던진 2점 슛의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 이번 시즌에 던진 3점 슛과 2점 슛의 개수의 합을 구할 수 있다.	20 %

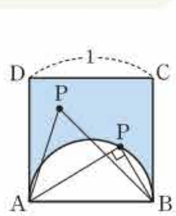
유형 09 기하적 확률

본책 48쪽

길이, 넓이, 부피, 시간 등 연속적으로 변하여 그 개수를 구할 수 없는 경우의 확률은 길이, 넓이, 부피, 시간 등의 비율을 이용하여 확률을 구한다.

➡ $\mathrm{P}(A)=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 영역의 크기})}{(\text{일어날 수 있는 모든 영역의 크기})}$

0295 점 P가 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때 △PAB는 직각삼각형이 되므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 △PAB는 예각삼각형이 된다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})}=\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1}$$

$$=1-\frac{\pi}{8}$$

답 $1-\frac{\pi}{8}$

0296 반지름의 길이가 6인 원의 넓이는

$$\pi\cdot6^2=36\pi$$

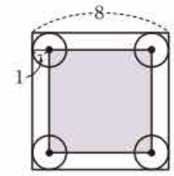
색칠한 부분의 넓이는

$$\pi\cdot4^2-\pi\cdot2^2=12\pi$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12\pi}{36\pi}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

0297 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 동전의 중심이 놓이면 동전이 색종이의 테두리 안쪽에 완전히 놓인다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{한 변의 길이가 6인 정사각형의 넓이})}{(\text{한 변의 길이가 8인 정사각형의 넓이})}$$

$$=\frac{6^2}{8^2}=\frac{9}{16}$$

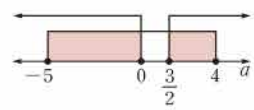
답 ④

0298 이차방정식 $x^2-4ax+6a=0$이 실근을 가지려면 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D\ge0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-2a)^2-6a\ge0,\qquad a(2a-3)\ge0$$

$$\therefore a\le0 \text{ 또는 } a\ge\frac{3}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 확률은



$$\frac{\{0-(-5)\}+\left(4-\frac{3}{2}\right)}{4-(-5)}=\frac{5}{6}$$

답 $\frac{5}{6}$

유형 10 확률의 기본 성질

본책 48쪽

① 임의의 사건 A에 대하여 $0\le\mathrm{P}(A)\le1$

② 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=1$

③ 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

0299 ㄱ. $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$이므로

$$\mathrm{P}(S)+\mathrm{P}(\varnothing)=1$$

ㄴ. $\varnothing\subset(A\cup B)\subset S$이므로

$$\mathrm{P}(\varnothing)\le\mathrm{P}(A\cup B)\le\mathrm{P}(S)$$

$$\therefore 0\le\mathrm{P}(A\cup B)\le1$$

ㄷ. [반례] $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$이면

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$$

$$\therefore \mathrm{P}(S)>\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0300 ㄱ. $0\le\mathrm{P}(A)\le1$, $0\le\mathrm{P}(B)\le1$이므로

$$0\le\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le2$$

ㄴ. [반례] $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 4, 5\}$이면 $A\cup B=S$이지만

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\ne1$$

ㄷ. A와 A^C는 서로 배반사건이므로

$$P(A\cup A^C)=P(A)+P(A^C)$$

이때 $P(A\cup A^C)=P(S)=1$이므로 $P(A)+P(A^C)=1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0301 ㄱ. $A\subset B$이면 $n(A)\le n(B)$이고 $\dfrac{n(A)}{n(S)}\le\dfrac{n(B)}{n(S)}$이므로 $P(A)\le P(B)$

ㄴ. [반례] $S=\{1, 2, 3\}$이고 $A=\{1, 2\}$, $B=\{1\}$이면

$P(A)=\dfrac{2}{3}$, $P(B)=\dfrac{1}{3}$이므로 $P(A)+P(B)=1$이지만 A와 B는 배반사건이 아니다.

ㄷ. [반례] $S=\{1, 2, 3\}$이고 $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$이면 $A\cup B=\{1, 2, 3\}$이므로 $P(A\cup B)=1$이지만 A는 B의 여사건이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

유형 11 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률 본책 49쪽

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여
① $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
② $P(A^C)=1-P(A)$

0302 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

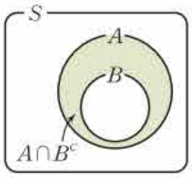
$0.9=0.7+P(B)-0.2 \qquad \therefore P(B)=0.4$

$\therefore P(B^C)=1-P(B)=1-0.4=0.6$ 답 ⑤

0303 A^C와 B는 서로 배반사건이므로

$A^C\cap B=\varnothing \qquad \therefore B\subset A$

따라서 표본공간을 S라 하면 오른쪽 벤다이어그램에서



$$P(B)=P(A)-P(A\cap B^C)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$ 답 ①

0304 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$ …… ㉠

이때

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

이므로 ㉠에서

$$P(A^C\cap B^C)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$ 답 ④

0305 $P(A\cap B)=\dfrac{2}{5}P(A)=\dfrac{2}{3}P(B)=k\,(k\ne0)$라 하면

$P(A)=\dfrac{5}{2}k$, $P(B)=\dfrac{3}{2}k$

이때

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{2}k+\frac{3}{2}k-k=3k$$ ··· ❶

이므로 $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\dfrac{k}{3k}=\dfrac{1}{3}$ ··· ❷

답 $\dfrac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $P(A\cup B)$를 $P(A\cap B)$를 이용하여 나타낼 수 있다.	70 %
❷ $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0306 세 사건 $A\cap B^C$, $A^C\cap B$, $A\cap B$는 서로 배반사건이고 $A\cup B=(A\cap B^C)\cup(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$이므로

$$P(A\cup B)=P(A\cap B^C)+P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$$

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{4}+P(A\cap B)+\frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{3}$$ 답 $\dfrac{1}{3}$

0307 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-P(A\cup B)=\frac{16}{15}-P(A\cup B)$$

이므로 $P(A\cup B)$가 최소일 때 $P(A\cap B)$가 최대이고 $P(A\cup B)$가 최대일 때 $P(A\cap B)$가 최소이다.

이때 $P(A\cup B)\ge P(A)$, $P(A\cup B)\ge P(B)$, $P(A\cup B)\le1$이므로

$$P(A\cup B)\ge\frac{2}{3},\ P(A\cup B)\ge\frac{2}{5},\ P(A\cup B)\le1$$

즉 $\dfrac{2}{3}\le P(A\cup B)\le1$이므로 $\dfrac{1}{15}\le\dfrac{16}{15}-P(A\cup B)\le\dfrac{2}{5}$

$$\therefore \frac{1}{15}\le P(A\cap B)\le\frac{2}{5}$$

따라서 $M=\dfrac{2}{5}$, $m=\dfrac{1}{15}$이므로

$$M+m=\frac{7}{15}$$ 답 $\dfrac{7}{15}$

유형 12~13 확률의 덧셈정리 본책 50쪽

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여
① A, B가 서로 배반사건이 아닐 때, 즉 $A\cap B\ne\varnothing$일 때
➡ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
② A, B가 서로 배반사건일 때, 즉 $A\cap B=\varnothing$일 때
➡ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

0308 두 주머니 A, B에서 각각 1장의 카드를 꺼낼 때 나오는 모든 경우의 수는

$5\cdot7=35$

두 카드에 적힌 숫자의 합이 10 이상인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 할 때, 두 카드에 적힌 숫자를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(3, 7), (4, 6), (5, 5), (4, 7), (5, 6), (5, 7)\}$,
$B=\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (3, 7), (4, 6), (5, 5)\}$,
$A\cap B=\{(3, 7), (4, 6), (5, 5)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{6}{35}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{35}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{6}{35}+\frac{1}{5}-\frac{3}{35}=\frac{2}{7}$$

답 ①

0309 수학을 좋아하는 학생을 택하는 사건을 A, 영어를 좋아하는 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.15$, $\mathrm{P}(B)=0.25$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.05$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=0.15+0.25-0.05=0.35$$

답 0.35

0310 14장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

${}_{14}\mathrm{C}_3$

ㄱ이 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, ㅎ이 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{13}\mathrm{C}_2}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{14}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_{13}\mathrm{C}_2}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{14}$

ㄱ이 적힌 카드와 ㅎ이 적힌 카드를 모두 뽑으려면 이 두 장의 카드를 먼저 뽑은 후 나머지 12장의 카드 중에서 1장을 뽑으면 되므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_{12}\mathrm{C}_1}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{91}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{3}{14}+\frac{3}{14}-\frac{3}{91}=\frac{36}{91}$$

답 ②

0311 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

${}_5\Pi_3$

$f(1)=1$인 사건을 A, $f(2)=2$인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\Pi_2}{{}_5\Pi_3}=\frac{5^2}{5^3}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\Pi_2}{{}_5\Pi_3}=\frac{5^2}{5^3}=\frac{1}{5}$ ⋯ ❶

$f(1)=1$이고 $f(2)=2$이려면 $f(1)=1$, $f(2)=2$로 정한 후 $f(3)$의 값만 정하면 되므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_5\Pi_1}{{}_5\Pi_3}=\frac{5}{5^3}=\frac{1}{25}$ ⋯ ❷

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{25}=\frac{9}{25}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{9}{25}$

채점 기준	비율
❶ $f(1)=1$일 확률과 $f(2)=2$일 확률을 각각 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(1)=1$이고 $f(2)=2$일 확률을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(1)=1$이거나 $f(2)=2$일 확률을 구할 수 있다.	30 %

0312 6명이 발표 순서를 정하는 경우의 수는

$6!$

A, B를 한 사람으로 생각하여 같은 것이 있는 순열을 이용한다.

A가 B보다 먼저 발표하는 순서로 정해지는 사건을 A, A, B 사이에 2명의 학생만이 발표하는 순서로 정해지는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{\frac{6!}{2!}}{6!}=\frac{1}{2}$

A, B 사이에 2명의 학생만이 발표하려면 두 학생 A, B의 발표 순서를 정하고 두 학생 사이에 발표할 2명을 택하여 발표 순서를 정한 후, 4명을 한 사람으로 생각하여 3명의 발표 순서를 정하면 되므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{2!\cdot{}_4\mathrm{P}_2\cdot 3!}{6!}=\frac{1}{5}$

이때 A가 B보다 먼저 발표하고 두 학생 사이에 2명의 학생만이 발표하는 순서로 정해지는 경우는 사건 B의 경우에서 A, B의 발표 순서가 정해진 것과 같으므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_4\mathrm{P}_2\cdot 3!}{6!}=\frac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

0313 10명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3$

뽑은 3명이 모두 소방관인 사건을 A, 3명이 모두 경찰관인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{6}$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{30}+\frac{1}{6}=\frac{1}{5}$$

답 ②

0314 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!$

O가 맨 앞에 오는 사건을 A, O가 맨 뒤에 오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

0315 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot 6=36$

두 눈의 수의 합이 4인 사건을 A, 차가 4인 사건을 B라 할 때, 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$,
$B=\{(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\frac{7}{36}$$

답 ④

0316 빨간 구슬이 파란 구슬보다 많으려면 꺼낸 6개의 구슬 중에서 빨간 구슬이 4개 또는 5개이어야 한다. ⋯ ❶

9개의 구슬 중에서 6개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_9\mathrm{C}_6$$

빨간 구슬이 4개인 사건을 A, 5개인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_6}=\frac{5}{14},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_5\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_6}=\frac{1}{21}$$ ⋯ ❷

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{5}{14}+\frac{1}{21}=\frac{17}{42}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{17}{42}$

채점 기준	비율
❶ 빨간 구슬이 4개 또는 5개임을 알 수 있다.	30 %
❷ 빨간 구슬이 4개, 5개일 확률을 각각 구할 수 있다.	40 %
❸ 빨간 구슬이 파란 구슬보다 많을 확률을 구할 수 있다.	30 %

0317 1부터 6까지의 자연수 중에서 짝수는 2, 4, 6의 3개이므로 a와 b가 모두 짝수이려면 꺼낸 2개의 공 중에서 짝수가 적힌 공이 1개 또는 2개이어야 한다.

6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_6\mathrm{C}_2$$

짝수가 적힌 공이 1개인 사건을 A, 2개인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

유형 14~15 여사건의 확률

본책 51쪽

표본공간 S의 사건 A와 그 여사건 A^C에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$

0318 9개의 제품 중에서 2개를 고르는 경우의 수는

$${}_9\mathrm{C}_2$$

적어도 1개의 불량품을 고르는 사건을 A라 하면 A^C는 불량품을 고르지 않는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{7}{12}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

따라서 $a=5$, $b=12$이므로

$$b-a=7$$

답 7

0319 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$5!$$

선영이와 초희 사이에 적어도 한 명의 학생을 세우는 사건을 A라 하면 A^C는 선영이와 초희를 이웃하게 세우는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{4!\cdot2!}{5!}=\frac{2}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

답 ④

0320 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$6!$$

적어도 한쪽 끝에 남학생을 세우는 사건을 A라 하면 A^C는 양쪽 끝에 모두 여학생을 세우는 사건이므로

여학생 4명 중 2명을 양쪽 끝에 세우고 나머지 4명을 일렬로 세우는 사건

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{P}_2\cdot4!}{6!}=\frac{2}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

0321 적어도 1개가 흰 바둑돌일 확률이 $\frac{17}{38}$이므로 2개 모두 검은 바둑돌일 확률은

$$1-\frac{17}{38}=\frac{21}{38}$$ ⋯ ❶

즉 $\frac{{}_{15}\mathrm{C}_2}{{}_{n+15}\mathrm{C}_2}=\frac{21}{38}$이므로

$$\frac{15\cdot14}{(n+15)(n+14)}=\frac{21}{38}$$

$$(n+15)(n+14)=380,\qquad n^2+29n-170=0$$

$$(n+34)(n-5)=0$$

$\therefore n=5$ ($\because$ n은 자연수) ⋯ ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ 2개 모두 검은 바둑돌일 확률을 구할 수 있다.	30 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	70 %

0322 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3$

세 자리 자연수가 450 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 451 이상인 사건이고 451 이상인 자연수는 45□ 꼴 또는 5□□ 꼴이다.

(i) 45□ 꼴일 확률은

$$\frac{3}{{}_5\mathrm{P}_3}=\frac{1}{20}$$

(ii) 5□□ 꼴일 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_3}=\frac{1}{5}$$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0323 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

두 눈의 수의 곱이 소수가 아닌 사건을 A라 하면 A^C는 두 눈의 수의 곱이 소수인 사건이므로 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$A^C=\{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (3, 1), (5, 1)\}$

$\therefore P(A^C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ 답 ④

0324 12장의 카드 중에서 3장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

${}_{12}C_3$

3장의 카드의 무늬가 두 종류 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 3장이 모두 같은 무늬인 사건이다.

(i) 3장 모두 스페이드 무늬일 확률은

$\frac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{1}{55}$

(ii) 3장 모두 하트 무늬일 확률은

$\frac{{}_3C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{1}{220}$

(iii) 3장 모두 다이아몬드 무늬일 확률은

$\frac{{}_5C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{1}{22}$

이상에서

$P(A^C)=\frac{1}{55}+\frac{1}{220}+\frac{1}{22}=\frac{3}{44}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{44}=\frac{41}{44}$ 답 $\frac{41}{44}$

0325 7개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!$

같은 숫자가 적힌 공은 3이 적힌 빨간 공과 노란 공뿐이다.

따라서 같은 숫자가 적힌 공을 서로 이웃하지 않게 나열하는 사건을 A라 하면 A^C는 3이 적힌 두 공을 이웃하게 나열하는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{6!\cdot2!}{7!}=\frac{2}{7}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$ 답 ④

0326 6과 서로소이려면 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니어야 하므로 택한 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$,

$\underbrace{P(A\cap B)}_{\text{6의 배수인 사건}}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

택한 수가 6과 서로소인 사건은 $A^C\cap B^C$, 즉 $(A\cup B)^C$이므로 구하는 확률은

$P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ 답 ④

0327 1st 모든 경우의 수를 구한다.

10 이하의 자연수 m, n을 택하는 모든 경우의 수는

$10\cdot10=100$

2nd 3^m+4^n이 5로 나누어떨어지는 경우의 수를 구한다.

3^m+4^n이 5로 나누어떨어지려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다. 이때 3^m의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 이 순서대로 반복되고, 4^n의 일의 자리의 숫자는 4, 6이 이 순서대로 반복되므로 3^m+4^n이 5로 나누어떨어지는 경우는 다음과 같다.

(i) 4^n의 일의 자리의 숫자가 4인 경우

3^m의 일의 자리의 숫자는 1이어야 하므로 n의 값은 1, 3, 5, 7, 9의 5개, m의 값은 4, 8의 2개이다.

따라서 그 경우의 수는 $5\cdot2=10$

(ii) 4^n의 일의 자리의 숫자가 6인 경우

3^m의 일의 자리의 숫자는 9이어야 하므로 n의 값은 2, 4, 6, 8, 10의 5개, m의 값은 2, 6, 10의 3개이다.

따라서 그 경우의 수는 $5\cdot3=15$

(i), (ii)에서 3^m+4^n이 5로 나누어떨어지는 경우의 수는

$10+15=25$

3rd 확률을 구한다.

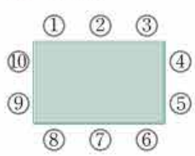
구하는 확률은 $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$ 답 ①

0328 1st 모든 경우의 수를 구한다.

10명의 학생이 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

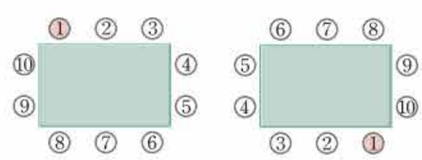
$(10-1)!\cdot\underbrace{5}_{\text{10명을 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.}}=9!\cdot5$

2nd 남학생과 여학생이 마주 보고 앉는 경우의 수를 구한다.



남학생과 여학생이 마주 보고 앉으려면 오른쪽 그림에서 남학생은 ①, ⑧ 중 하나, ②, ⑦ 중 하나, ③, ⑥ 중 하나, ④, ⑩ 중 하나, ⑤, ⑨ 중 하나에 앉고 나머지 자리에 여학생이 앉으면 된다.

이때 다음 그림과 같이 회전하여 일치하는 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 남학생과 여학생이 마주 보고 앉는 경우의 수는

$2^5\cdot5!\cdot5!\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{마주 보고 앉은 남학생과 여학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수}}$

3rd 확률을 구하여 $p+q$의 값을 구한다.

남학생과 여학생이 마주 보고 앉을 확률은

$\frac{2^5\cdot5!\cdot5!\cdot\frac{1}{2}}{9!\cdot5}=\frac{8}{63}$

이므로 $p=63$, $q=8$ $\therefore p+q=71$ 답 71

0329 (1st) 모든 함수 f의 개수를 구한다.

집합 A에서 집합 A로의 함수 f의 개수는

$${}_4\Pi_4=4^4=256$$

(2nd) 조건 (가)를 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$의 값을 구한다.

공역이 $\{1, 2, 3, 4\}$이므로 조건 (가)를 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$의 값은

$f(1)=3$, $f(2)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(2)=4$

또는 $f(1)=4$, $f(2)=3$ 또는 $f(1)=4$, $f(2)=4$

(3rd) $f(1)$, $f(2)$의 값에 따라 경우를 나누어 조건 (나)를 만족시키는 함수 f의 개수를 구한다.

(i) $f(1)=3$, $f(2)=3$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(3)$, $f(4)$의 값은 공역의 원소 1, 2, 4 중에서 서로 다른 2개를 택하여 하나씩 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는 ${}_3P_2=6$

(ii) $f(1)=3$, $f(2)=4$인 경우

ⓘ $f(3)=3$ 또는 $f(3)=4$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(4)$의 값은 1 또는 2이므로 함수 f의 개수는 $2\cdot2=4$

ⓘⓘ $f(3)\neq3$, $f(3)\neq4$인 경우

$f(3)$의 값은 1 또는 2이고 조건 (나)에 의하여 $f(4)$의 값은

$f(3)$의 값 또는 3 또는 4

따라서 함수 f의 개수는 $2\cdot3=6$

ⓘ, ⓘⓘ에서 함수 f의 개수는

$4+6=10$

(iii) $f(1)=4$, $f(2)=3$인 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 함수 f의 개수는 10

(iv) $f(1)=4$, $f(2)=4$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(3)$, $f(4)$의 값은 공역의 원소 1, 2, 3 중에서 서로 다른 2개를 택하여 하나씩 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는 ${}_3P_2=6$

이상에서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$6+10+10+6=32$

(4th) 확률을 구하여 $120p$의 값을 구한다.

$p=\dfrac{32}{256}=\dfrac{1}{8}$이므로

$120p=15$

답 15

0330 (1st) 모든 함수 f의 개수를 구한다.

집합 X에서 집합 X로의 함수 f의 개수는

$${}_5\Pi_5=5^5$$

(2nd) p_1을 구한다.

조건 (가)에서 $x=0$이면 $f(0)=-f(0)$

$\therefore f(0)=0$

$x>0$인 집합 X의 원소 x에 대하여

(i) $f(x)=-2$이면 $f(-x)=2$

(ii) $f(x)=-1$이면 $f(-x)=1$

(iii) $f(x)=0$이면 $f(-x)=0$

(iv) $f(x)=1$이면 $f(-x)=-1$

(v) $f(x)=2$이면 $f(-x)=-2$

이상에서 $f(x)$의 값에 따라 $f(-x)$의 값이 정해지므로 $f(1)$과 $f(-1)$의 값을 정하는 경우의 수는 5이고, $f(2)$와 $f(-2)$의 값을 정하는 경우의 수도 5이다.

즉 조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는

$1\cdot5\cdot5=5^2$

$\therefore p_1=\dfrac{5^2}{5^5}=\dfrac{1}{125}$

(3rd) p_2를 구한다.

조건 (나)를 만족시키는 함수는 $x>0$인 집합 X의 원소 x에 대하여 $f(-x)$의 값에 따라 $f(x)$의 값이 정해지므로 $f(1)$과 $f(-1)$의 값을 정하는 경우의 수는 5이고, $f(2)$와 $f(-2)$의 값을 정하는 경우의 수도 5이다.

이때 $f(0)$의 값은 -2, -1, 0, 1, 2 중 하나로 정해지면 되므로 조건 (나)를 만족시키는 함수 f의 개수는

$5\cdot5\cdot5=5^3$

$\therefore p_2=\dfrac{5^3}{5^5}=\dfrac{1}{25}$

(4th) $\dfrac{p_1}{p_2}$의 값을 구한다.

$\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{1}{125}\cdot25=\dfrac{1}{5}$

답 $\dfrac{1}{5}$

0331 (1st) 모든 경우의 수를 구한다.

가위바위보 게임을 4번 할 때 나오는 모든 경우의 수는

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

(2nd) 윤기의 점수가 홀수인 경우의 수를 구한다.

윤기가 이긴 횟수를 x, 진 횟수를 y, 비긴 횟수를 z라 하면 조건 (가), (나)에서 $2x-2y+z+10=(\text{홀수})$이므로 z는 홀수이어야 한다.

이때 $x+y+z=4$이므로 각 경우를 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)로 나타내면 다음과 같다.

(i) $z=1$인 경우는

$(0, 3, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(3, 0, 1)$

이므로 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$\underbrace{\frac{4!}{3!}}_{\text{윤기가 3번 지고 1번 비기는 경우의 수}}+\overbrace{\frac{4!}{2!}}^{\text{윤기가 1번 이기고 2번 지고 1번 비기는 경우의 수}}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{3!}=32$$

(ii) $z=3$인 경우는

$(0, 1, 3)$, $(1, 0, 3)$

이므로 조건을 만족시키는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}+\dfrac{4!}{3!}=8$

(i), (ii)에서 윤기의 점수가 홀수인 경우의 수는

$32+8=40$

(3rd) 확률을 구한다.

구하는 확률은 $\dfrac{40}{81}$

답 $\dfrac{40}{81}$

0332 (1st) 모든 경우의 수를 구한다.

원소의 개수가 4인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_4=210$

(2nd) 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

1부터 10까지의 자연수 중 3으로 나누었을 때의 나머지가 각각 0, 1, 2인 수의 집합을 차례대로 P, Q, R라 하면

$P=\{3, 6, 9\}$, $Q=\{1, 4, 7, 10\}$, $R=\{2, 5, 8\}$

이때 집합 X의 서로 다른 세 원소의 합이 항상 3의 배수가 아니려면 세 원소를 3으로 나누었을 때의 나머지의 합이 0, 3, 6이 아니어야 한다. 따라서 집합 X는 세 집합 P, Q, R 중 두 집합에서 각각 2개씩 택한 원소 4개를 원소로 가져야 한다.

(i) 두 집합 P, Q에서 2개씩 원소를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \cdot {}_4C_2 = 3 \cdot 6 = 18$$

(ii) 두 집합 Q, R에서 2개씩 원소를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_3C_2 = 6 \cdot 3 = 18$$

(iii) 두 집합 R, P에서 2개씩 원소를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \cdot {}_3C_2 = 3 \cdot 3 = 9$$

이상에서 집합 X의 서로 다른 세 원소의 합이 항상 3의 배수가 아닌 경우의 수는 $18+18+9=45$

(3rd) 확률을 구한다.

구하는 확률은 $\frac{45}{210}=\frac{3}{14}$

답 ①

참고 자연수를 3으로 나누었을 때의 나머지 0, 1, 2 중에서 중복을 허용하여 택한 4개 중에서 3개의 수의 합이 항상 0, 3, 6이 아닌 경우는

$\underbrace{(0, 0, 1, 1)}_{\text{(i)}}$, $\underbrace{(1, 1, 2, 2)}_{\text{(ii)}}$, $\underbrace{(2, 2, 0, 0)}_{\text{(iii)}}$

0333 (1st) 3가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우의 수를 구한다.

3가지 색을 적어도 한 번씩은 사용하여 칠하므로 6개의 영역을 3가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우는 다음과 같다.

(i) 3가지 색을 1번, 1번, 4번 칠하는 경우

3가지 색 중에서 4번 칠하는 색을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$이므로 6개의 영역을 칠하는 경우의 수는

$$3 \cdot \frac{6!}{4!}=90$$

(ii) 3가지 색을 1번, 2번, 3번 칠하는 경우

3가지 색 중에서 1번, 2번, 3번 칠하는 색을 정하는 경우의 수는 $3!=6$이므로 6개의 영역을 칠하는 경우의 수는

$$6 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 3!}=360$$

(iii) 3가지 색을 2번, 2번, 2번 칠하는 경우

6개의 영역을 칠하는 경우의 수는 $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}=90$

이상에서 3가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우의 수는

$$90+360+90=540$$

(2nd) 3가지 색을 모두 사용하여 이웃하는 영역을 서로 다른 색으로 칠하는 경우의 수를 구한다.

이웃하는 영역을 서로 다른 색으로 칠하는 경우의 수는

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2=96$$

이고 이 중에서 2가지 색만을 사용하여 칠하는 경우의 수는 3가지 색 중에서 2가지 색을 고른 후 맨 앞에 칠할 색을 정하면 되므로

$${}_3C_2 \cdot {}_2C_1=6$$

따라서 3가지 색을 모두 사용하여 이웃하는 영역을 서로 다른 색으로 칠하는 경우의 수는 $96-6=90$

(3rd) 확률을 구한다.

구하는 확률은 $\frac{90}{540}=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

0334 (1st) 모든 함수 f의 개수를 구한다.

집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

(2nd) 사건 X, Y를 정하여 $P(X)$, $P(Y)$를 구한다.

$f(1)\geq 2$인 사건을 X, 함수 f의 치역이 B인 사건을 Y라 하면 $f(1)\geq 2$인 함수 f의 개수는 A의 원소 1을 B의 원소 2 또는 3에 대응시키고 A의 나머지 3개의 원소를 B의 원소에 대응시키면 되므로 $P(X)=\frac{{}_2C_1 \cdot {}_3\Pi_3}{81}=\frac{2}{3}$

치역이 B인 함수 f의 개수는 정의역 A의 원소 4개 중 같은 함숫값을 갖는 2개를 정한 후 이 2개의 원소를 한 묶음으로 생각하여 A의 원소를 B의 세 원소에 각각 대응시키면 되므로

$$P(Y)=\frac{{}_4C_2 \cdot 3!}{81}=\frac{4}{9}$$

(3rd) $P(X\cap Y)$를 구한다.

(i) $f(1)=2$이고 치역이 B인 경우

1을 제외한 A의 3개의 원소 중 함숫값이 2인 원소가 존재하는 함수 f의 개수는

$\underline{3!=6}$ 집합 A의 원소 2, 3, 4에 집합 B의 원소 1, 2, 3을 대응시키는 경우의 수

1을 제외한 A의 3개의 원소 중 함숫값이 2인 원소가 존재하지 않는 함수 f는 A의 원소 2, 3, 4 중 같은 함숫값을 갖는 2개를 정한 후 이 2개의 원소를 한 묶음으로 생각하여 A의 원소를 B의 두 원소 1, 3에 각각 대응시키면 되므로 그 개수는

$${}_3C_2 \cdot 2!=3 \cdot 2=6$$

따라서 $f(1)=2$이고 치역이 B인 함수 f의 개수는

$$6+6=12$$

(ii) $f(1)=3$이고 치역이 B인 경우

(i)과 같은 방법으로 구하면 함수 f의 개수는 12이다.

(i), (ii)에서 $P(X\cap Y)=\frac{12+12}{81}=\frac{8}{27}$

(4th) 확률을 구한다.

구하는 확률은

$$P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}=\frac{22}{27}$$

답 ④

0335 (1st) 모든 경우의 수를 구한다.

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \cdot 6=36$$

(2nd) 경우를 나누어 시행을 2번 반복한 후 불이 켜져 있는 전구가 2개일 확률을 구한다.

주사위를 던지기 전에 불이 켜져 있는 전구를 a, b, 불이 꺼져 있는 전구를 c, d, e, f라 하자.

시행을 2번 반복한 후 불이 켜져 있는 전구가 2개인 경우는 다음과 같다.

(i) 두 번 모두 같은 눈의 수가 나오는 경우

시행을 2번 반복한 후 전구에 변화가 없으므로 불이 켜져 있는 전구는 그대로 a, b의 2개이다.

따라서 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

의 6가지이므로 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(ii) 한 번은 a, b 중 하나의 번호와 같은 눈의 수가 나오고 다른 한 번은 c, d, e, f 중 하나의 번호와 같은 눈의 수가 나오는 경우

a, b 중 하나의 전구는 불이 꺼지고, 나머지 c, d, e, f 중 하나의 전구는 불이 켜지므로 불이 켜져 있는 전구는 2개가 된다.

따라서 그 경우의 수는 ${}_2C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot \underbrace{2!}_{ac\text{와 } ca\text{는 다른 경우이다.}} = 16$이므로 확률은

$$\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

3rd 확률을 구한다.

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{6} + \frac{4}{9} = \frac{11}{18}$$

답 $\frac{11}{18}$

0336 **1st** 모든 경우의 수를 구한다.

9개의 공 중에서 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수 중 작은 것부터 순서대로 a, b, c의 값으로 정하면 되므로 모든 경우의 수는

$${}_9C_3$$

2nd 경우를 나누어 조건 (가), (나)를 만족시킬 확률을 구한다.

조건 (가)에서 세 수의 합이 홀수이려면 세 수가 모두 홀수이거나 하나만 홀수이어야 한다.

(i) 세 수가 모두 홀수인 경우

조건 (나)에서 $a \times b \times c$가 3의 배수이려면 뽑힌 세 수에 홀수이면서 3의 배수인 3, 9 중 적어도 하나가 포함되어야 한다.

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 홀수 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

3과 9가 모두 뽑히지 않는 경우의 수는 ${}_3C_3 = 1$

따라서 그 확률은 $\dfrac{10-1}{{}_9C_3} = \dfrac{3}{28}$

(ii) 하나만 홀수인 경우

조건 (나)에서 $a \times b \times c$가 3의 배수이려면 뽑힌 세 수에 짝수이면서 3의 배수인 6이 포함되거나 홀수이면서 3의 배수인 3 또는 9가 포함되어야 한다.

이때 6이 포함되는 경우는 6을 제외한 2, 4, 8의 3개의 짝수 중에서 1개를 뽑고, 1, 3, 5, 7, 9의 5개의 홀수 중에서 1개를 뽑으면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3C_1 \cdot {}_5C_1 = 3 \cdot 5 = 15$$

또 6이 포함되지 않는 경우는 6을 제외한 2, 4, 8의 3개의 짝수 중에서 2개를 뽑고, 3, 9의 2개의 홀수 중에서 1개를 뽑으면 되므로 그 경우의 수는 ${}_3C_2 \cdot {}_2C_1 = 3 \cdot 2 = 6$

따라서 그 확률은 $\dfrac{15+6}{{}_9C_3} = \dfrac{1}{4}$

3rd 확률을 구한다.

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{3}{28} + \frac{1}{4} = \frac{5}{14}$$

답 ①

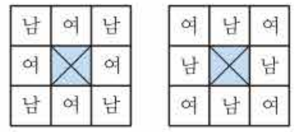
0337 **1st** 모든 경우의 수를 구한다.

8명의 학생이 좌석에 배정되는 경우의 수는 $8!$

2nd 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되는 사건의 여사건을 구한다.

적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되는 사건을 A라 하면 A^C는 남학생끼리 이웃하지 않게 배정되는 사건이다.

3rd 여사건의 확률을 구한다.



남학생끼리 이웃하지 않게 배정되는 경우는 남학생, 여학생의 자리가 위의 그림과 같은 2가지이고, 각 좌석에 남학생 4명, 여학생 4명이 배정되는 경우의 수는 각각 $4!$, $4!$이므로

$$P(A^C) = \frac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{1}{35}$$

4th 확률을 구하여 $70p$의 값을 구한다.

$p = 1 - P(A^C) = 1 - \dfrac{1}{35} = \dfrac{34}{35}$이므로 $70p = 68$

답 68

0338 **1st** 합성함수 $g \circ f$의 개수를 구한다.

일대일함수 f의 개수는 ${}_3P_2 = 6$

치역이 Z인 함수 g의 개수는 치역의 원소가 0뿐이거나 1뿐인 경우를 제외하면 되므로 ${}_2\Pi_3 - 2 = 2^3 - 2 = 6$

즉 합성함수 $g \circ f$의 개수는 $6 \cdot 6 = 36$

2nd 합성함수 $g \circ f$의 치역이 Z인 사건의 여사건을 구한다.

합성함수 $g \circ f$의 치역이 Z인 사건을 A라 하면 A^C는 치역이 $\{0\}$ 또는 $\{1\}$인 사건이다.

3rd 여사건의 확률을 구한다.

(i) 치역이 $\{0\}$인 경우

$f(1) = a$, $f(2) = b$라 하면

$$g(a) = 0,\ g(b) = 0,\ g(c) = 1\ (c \neq a,\ c \neq b)$$

이어야 한다.

$f(1)$과 $f(2)$의 값이 정해지면 함수 g가 하나로 정해진다.

따라서 치역이 $\{0\}$인 합성함수 $g \circ f$의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3 중에서 서로 다른 2개를 택하여 a, b로 정하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3P_2 = 6$

(ii) 치역이 $\{1\}$인 경우

$f(1) = a$, $f(2) = b$라 하면

$$g(a) = 1,\ g(b) = 1,\ g(c) = 0\ (c \neq a,\ c \neq b)$$

이어야 한다.

(i)과 같은 방법으로 구하면 치역이 $\{1\}$인 합성함수 $g \circ f$의 개수는 ${}_3P_2 = 6$

(i), (ii)에서 $P(A^C) = \dfrac{6+6}{36} = \dfrac{1}{3}$

4th 확률을 구한다.

구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0339 **전략** 먼저 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구한다.

풀이 방정식 $x+y=80$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(0, 80)$, $(1, 79)$, $\cdots$, $(80, 0)$의 81개 ⋯ ❶

$y = 80 - x$이므로 $xy \geq 1500$에서

$x(80-x) \geq 1500$, $x^2 - 80x + 1500 \leq 0$

$(x-30)(x-50) \leq 0$ $\therefore 30 \leq x \leq 50$

즉 $30 \le x \le 50$을 만족시키는 순서쌍 (x, y)는

$(30, 50), (31, 49), \cdots, (50, 30)$의 21개 ⋯ ❷

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{21}{81}=\dfrac{7}{27}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{7}{27}$

채점 기준	비율
❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ $xy \ge 1500$인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ $xy \ge 1500$일 확률을 구할 수 있다.	30 %

0340 **전략** $a_1+a_2+a_3=1$인 경우에 대하여 상자에 들어갈 수 있는 구슬의 경우를 생각한다.

풀이 1이 적힌 구슬 4개와 0이 적힌 구슬 2개를 임의로 한 개씩 6개의 상자에 넣는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{4! \cdot 2!}=15$ ⋯ ❶

$a_1+a_2+a_3=1$인 경우는 다음과 같다.

(i) $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=0$인 경우

1부터 6까지의 자연수가 적힌 상자에 각각 넣은 구슬에 적힌 수를 차례대로 나열할 때, 110□□□ 꼴이어야 한다.

따라서 □□□에 1, 1, 0을 나열해야 하므로 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

(ii) $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=0$인 경우

1부터 6까지의 자연수가 적힌 상자에 각각 넣은 구슬에 적힌 수를 차례대로 나열할 때, 011011이어야 하므로 경우의 수는 1

(iii) $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=1$인 경우

1부터 6까지의 자연수가 적힌 상자에 각각 넣은 구슬에 적힌 수를 차례대로 나열할 때, □011□□ 꼴이어야 한다.

따라서 □□□에 1, 1, 0을 나열해야 하므로 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

이상에서 $a_1+a_2+a_3=1$인 경우의 수는

$3+1+3=7$ ⋯ ❷

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{7}{15}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{7}{15}$

채점 기준	비율
❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ $a_1+a_2+a_3=1$인 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸ $a_1+a_2+a_3=1$일 확률을 구할 수 있다.	20 %

0341 **전략** 방정식의 해를 구하여 해가 정수가 되도록 하는 a의 조건을 구한다.

풀이 이차방정식 $6x^2-5ax+a^2=0$에서

$(3x-a)(2x-a)=0$

$\therefore x=\dfrac{a}{3}$ 또는 $x=\dfrac{a}{2}$ ⋯ ❶

$x=\dfrac{a}{3}$가 정수인 사건을 A, $x=\dfrac{a}{2}$가 정수인 사건을 B라 하면

$A=\{a \mid a$는 3의 배수$\}$, $B=\{a \mid a$는 2의 배수$\}$,

$A \cap B=\{a \mid a$는 6의 배수$\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A \cap B)=\dfrac{3}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)$

$=\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{20}=\dfrac{13}{20}$ ⋯ ❷

답 $\dfrac{13}{20}$

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $6x^2-5ax+a^2=0$의 해를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 이차방정식 $6x^2-5ax+a^2=0$이 정수인 해를 가질 확률을 구할 수 있다.	70 %

0342 **전략** 치역과 공역이 같으므로 함숫값이 같은 정의역의 두 원소가 존재한다.

풀이 정의역의 원소 6개 중에서 함숫값이 같은 두 원소를 택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2$이므로 치역과 공역이 같은 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 개수는

${}_6\mathrm{C}_2 \cdot 5!=1800$ ⋯ ❶

정의역의 어떤 두 원소의 함숫값을 a라 하면

(i) $a=1$일 때,

Y의 모든 원소와 a의 곱은 $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10=400=20^2$이므로 조건을 만족시키는 경우는 $1 \cdot 2 \cdot 10=1 \cdot 4 \cdot 5$일 때이다.

따라서 $\underbrace{f(x_1) \cdot f(x_3) \cdot f(x_5)=1 \cdot 2 \cdot 10}_{f(x_2) \cdot f(x_4) \cdot f(x_6)=1 \cdot 4 \cdot 5}$ 또는 $f(x_1) \cdot f(x_3) \cdot f(x_5)=1 \cdot 4 \cdot 5$이어야 하므로 그 확률은

$\dfrac{3! \cdot 3! \cdot 2!}{1800}=\dfrac{1}{25}$

(ii) $a=2$일 때,

Y의 모든 원소와 a의 곱은 $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10=800$이므로 조건을 만족시키는 경우는 존재하지 않는다.

(iii) $a=4$일 때,

Y의 모든 원소와 a의 곱은 $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10=1600=40^2$이므로 조건을 만족시키는 경우는 $1 \cdot 4 \cdot 10=2 \cdot 4 \cdot 5$일 때이다.

따라서 (i)과 같은 방법으로 구하면 그 확률은

$\dfrac{1}{25}$

(iv) $a=5$일 때,

Y의 모든 원소와 a의 곱은 $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10=2000$이므로 조건을 만족시키는 경우는 존재하지 않는다.

(v) $a=10$일 때,

Y의 모든 원소와 a의 곱은 $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10=4000$이므로 조건을 만족시키는 경우는 존재하지 않는다.

(i) ~ (v)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{25}=\dfrac{2}{25}$ ⋯ ❷

답 $\dfrac{2}{25}$

채점 기준	비율
❶ 치역과 공역이 같은 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x_1)\cdot f(x_3)\cdot f(x_5)=f(x_2)\cdot f(x_4)\cdot f(x_6)$을 만족시킬 확률을 구할 수 있다.	70 %

0343 전략 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 9개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_2=36$$

두 꼭짓점을 택할 때 서로 다른 모서리 위의 두 점을 택하는 사건을 A라 하면 A^C는 같은 모서리 위의 두 점을 택하는 사건이다.
이때 주어진 입체도형의 모서리의 개수가 16이므로 같은 모서리 위의 두 꼭짓점을 택할 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$ ⋯ ❶

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{5}{9}$

채점 기준	비율
❶ 같은 모서리 위의 두 꼭짓점을 택할 확률을 구할 수 있다.	70 %
❷ 서로 다른 모서리 위의 두 꼭짓점을 택할 확률을 구할 수 있다.	30 %

0344 전략 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 7개의 공 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_3=35$$ ⋯ ❶

공에 적힌 수 중 연속하는 자연수가 2개 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 연속하는 자연수가 없는 사건이고, 공에 적힌 세 수를 작은 수부터 차례대로 나열했을 때 세 수가 연속하지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 번째 수가 3인 경우
첫 번째 수가 1, 세 번째 수가 5, 6, 7 중 하나이어야 하므로 그 경우의 수는 $1\cdot{}_3C_1=3$

(ii) 두 번째 수가 4인 경우
첫 번째 수가 1, 2 중 하나, 세 번째 수가 6, 7 중 하나이어야 하므로 그 경우의 수는 ${}_2C_1\cdot{}_2C_1=4$

(iii) 두 번째 수가 5인 경우
첫 번째 수가 1, 2, 3 중 하나, 세 번째 수가 7이어야 하므로 그 경우의 수는 ${}_3C_1\cdot 1=3$

이상에서

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3+4+3}{35}=\frac{2}{7}$$ ⋯ ❷

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{5}{7}$

채점 기준	비율
❶ 7개의 공 중에서 3개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 연속하는 자연수가 없을 확률을 구할 수 있다.	50 %
❸ 연속하는 자연수가 2개 이상일 확률을 구할 수 있다.	20 %

Ⅱ. 확률

04 조건부확률

0345 (1) $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{1}{9}$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{5}$

답 (1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{1}{5}$

0346 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(1) $A=\{2, 3, 5\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

(2) $B=\{1, 3, 5\}$, $A\cap B=\{3, 5\}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

(3) $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$

0347 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(1) $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

(2) $A=\{3, 6\}$이므로 $A^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
따라서 $A^C\cap B=\{1, 2\}$이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

(3) $\mathrm{P}(A^C|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$

0348 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 100원짜리 동전과 10원짜리 동전 2개를 차례대로 나타내면 표본공간은

{HHH, HHT, HTH, THH,
HTT, THT, TTH, TTT}

동전의 앞면이 1개 나오는 사건을 A, 100원짜리 동전의 앞면이 나오는 사건을 B라 하면

$A=\{$HTT, THT, TTH$\}$,
$B=\{$HHH, HHT, HTH, HTT$\}$,
$A\cap B=\{$HTT$\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$$ 답 $\frac{1}{3}$

0349 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{10}{30}}{\frac{16}{30}}=\frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

0350 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{10}{30}}{\frac{18}{30}}=\frac{5}{9}$ 답 $\frac{5}{9}$

0351 사건 B^C는 안경을 쓰지 않은 학생인 사건이므로

$$\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{6}{30}}{\frac{16}{30}}=\frac{3}{8}$$ 답 $\frac{3}{8}$

0352 사건 A^C는 여학생인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C|B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{8}{30}}{\frac{18}{30}}=\frac{4}{9}$$ 답 $\frac{4}{9}$

0353 (1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$

답 (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{4}$

0354 (1) $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

(2) 첫 번째에 당첨 제비를 뽑으면 주머니 안에는 당첨 제비 3개를 포함하여 9개의 제비가 들어 있으므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

(3) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{15}$

0355 첫 번째에 검은 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 검은 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$ 답 $\frac{2}{5}$

0356 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0357 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0358 (1) $\underbrace{\mathrm{P}(B|A)}_{\text{첫 번째에 흰 공을 꺼냈을 때, 두 번째에 검은 공을 꺼낼 확률}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

(2) $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$$

$$=\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}+\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}$$

$$=\frac{3}{5}$$

(3) $\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{3}{5}$ (3) 종속

0359 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.15\times0.2=0.03$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.05$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다. 답 종속

0360 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.8\times0.5=0.4$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.4$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다. 답 독립

0361 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 3\}$, $A\cap B=\{1\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\underbrace{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}_{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}}$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다. 답 종속

0362 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B=\{1, 3\}$, $C=\{1, 2, 4\}$, $B\cap C=\{1\}$이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$$

따라서 $\mathrm{P}(B\cap C)=\underbrace{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)}_{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}}$이므로 두 사건 B, C는 서로 독립이다. 답 독립

0363 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.25\times0.4=0.1$ 답 0.1

0364 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=(1-0.25)\times0.4=0.3$

답 0.3

0365 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)=0.25$ 답 0.25

0366 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B^C|A^C)=\mathrm{P}(B^C)=1-0.4=0.6$ 답 0.6

0367 두 선수 A, B가 표적을 명중시키는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.7\times0.8=0.56$ 답 0.56

0368 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(1) $A=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(2) $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이고, 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{32}{81}$

0369 오지선다형인 한 문제에 임의로 답할 때 문제를 맞히는 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{12}{125}$ 답 $\frac{12}{125}$

0370 원판에 화살을 한 번 쏠 때 짝수가 적힌 영역을 맞히는 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{3}{64}$ 답 $\frac{3}{64}$

유형 01 조건부확률의 계산 본책 60쪽

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(B|A)$를 구할 때에는 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률을 이용하여 $\mathrm{P}(A\cap B)$, $\mathrm{P}(A)$를 구한 후

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

에 대입한다.

0371 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=0.2$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=0.8$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.8=0.5+0.4-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.1$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.1}{0.5}=\frac{1}{5}=0.2$ 답 ②

0372 $\mathrm{P}(A^C|B)=3\mathrm{P}(A|B)$에서

$\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=3\cdot\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B)=3\mathrm{P}(A\cap B)=3\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0373 $\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0374 $\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing$ $\therefore A\subset B^C$

따라서 $A\cap B^C=A$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

SSEN 특강 배반사건

사건 A와 사건 B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉

$A\cap B=\varnothing$

일 때, A와 B는 서로 배반사건이라 한다.

0375 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{2}$에서

$\mathrm{P}(B)=2\mathrm{P}(A\cap B)$ ···· ❶

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(A)=3\mathrm{P}(A\cap B)$ ···· ❷

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{4}{5}=3\mathrm{P}(A\cap B)+2\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\frac{4}{5}=4\mathrm{P}(A\cap B)$ $\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$ ···· ❸

답 $\frac{1}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(B)$와 $\mathrm{P}(A\cap B)$ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\mathrm{P}(A)$와 $\mathrm{P}(A\cap B)$ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구할 수 있다.	40 %

유형 02 조건부확률 (1) 본책 60쪽

사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구한다.

(ii) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$를 구한다. (단, $\mathrm{P}(A)\neq0$)

0376 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

ab가 짝수인 사건을 A, $a+b$가 짝수인 사건을 B라 하자.

ab가 짝수이려면 a, b 중 적어도 하나는 짝수이어야 하므로
└ 여사건의 확률을 이용한다.

$$\mathrm{P}(A)=1-\underbrace{\frac{3\cdot3}{36}}_{a,\ b\text{가 모두 홀수일 확률}}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

사건 $A\cap B$는 ab와 $a+b$가 모두 짝수인 사건이므로
└ a, b가 모두 짝수이다.

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3\cdot3}{36}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

답 ②

0377 남학생을 택하는 사건을 A, 자전거로 등교한 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=0.4,\ \mathrm{P}(A\cap B)=0.24$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.24}{0.4}=0.6$$

답 ③

0378 10개의 제비 중 2개를 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_2=45$$

당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 1등 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하자.

1개의 당첨 제비를 뽑는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1=24$

2개의 당첨 제비를 뽑는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2=15$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{24+15}{45}=\frac{13}{15}$$

사건 $A\cap B$는 1등 당첨 제비를 뽑는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_9\mathrm{C}_1}{45}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{13}{15}}=\frac{3}{13}$$

답 ④

0379 모든 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_2=10\cdot3=30$

지아가 꺼낸 검은 공의 개수가 진호가 꺼낸 검은 공의 개수보다 많은 사건을 A, 진호가 꺼낸 공이 모두 흰 공인 사건을 B라 하자.

(i) 지아가 검은 공 2개를 꺼내는 경우

흰 공 2개, 검은 공 1개가 남으므로 지아가 꺼낸 검은 공의 개수가 진호가 꺼낸 검은 공의 개수보다 항상 많다.
└ 0 또는 1

따라서 그 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_2=3\cdot3=9$$

(ii) 지아가 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼내는 경우

진호는 검은 공 1개를 반드시 꺼내므로 지아가 꺼낸 검은 공의 개수가 진호가 꺼낸 검은 공의 개수보다 많을 수 없다.

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$ ··· ❶

사건 $A\cap B$는 지아가 검은 공 2개, 진호가 흰 공 2개를 꺼내는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{30}=\frac{3\cdot1}{30}=\frac{1}{10}$$ ··· ❷

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$ ··· ❸

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\mathrm{P}(B\vert A)$를 구할 수 있다.	20 %

유형 03 조건부확률 (2)

본책 61쪽

두 사건 A, B와 그 각각의 여사건 A^C, B^C가 일어나는 경우의 수를 표를 이용하여 아래와 같이 나타낼 때, 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 다음과 같이 구한다.

	A	A^C	합계
B	a	b	$a+b$
B^C	c	d	$c+d$
합계	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

➡ $\mathrm{P}(A)=\frac{a+c}{a+b+c+d}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{a}{a+b+c+d}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{a}{a+c}$$

0380 일본어를 선택한 학생을 뽑는 사건을 A, 여학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{135}{300}=\frac{9}{20},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{75}{300}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{20}}=\frac{5}{9}$$

답 $\frac{5}{9}$

0381 남학생을 뽑는 사건을 A, A 반 학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{21+14}{100}=\frac{35}{100}=\frac{7}{20},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{21}{100}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{21}{100}}{\frac{7}{20}}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

0382 조사에 참여한 전체 학생 수가 200이므로

$$10a+(b+8)+(48-2a)+b=200$$

$$\therefore\ 4a+b=72 \quad \cdots\cdots\ ㉠$$

여학생을 뽑는 사건을 A, 고양이를 선택한 학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{b}{200}}{\frac{(48-2a)+b}{200}}=\frac{b}{-2a+b+48}$$

즉 $\frac{b}{-2a+b+48}=\frac{5}{9}$이므로

$9b=-10a+5b+240$

$\therefore 5a+2b=120$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=40$

$\therefore a+b=48$

답 48

0383 피아노를 선택한 남자 회원 수와 여자 회원 수를 각각 a, b라 하고 기타와 피아노를 선택한 회원 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

	기타	피아노	합계
남자 회원 수	10	a	$10+a$
여자 회원 수	6	b	$6+b$
합계	16	$a+b$	48

$16+(a+b)=48$이므로 $a+b=32$ …… ㉠

피아노를 선택한 회원을 뽑는 사건을 A, 남자 회원을 뽑는 사건을 B라 하면

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{a}{48}}{\frac{32}{48}}=\frac{a}{32}$$

즉 $\frac{a}{32}=\frac{5}{8}$이므로 $a=20$

$a=20$을 ㉠에 대입하면 $b=12$

따라서 구하는 여자 회원 수는

$6+12=18$

답 18

0384 두 영화 A, B를 관람한 학생 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

	여학생 수	남학생 수	합계
A를 관람	125	145	270
B를 관람	110	180	290
A, B를 모두 관람	35	25	60

두 영화 A, B를 모두 관람한 학생을 택하는 사건을 S, 남학생을 택하는 사건을 M이라 하면

$$P(S)=\frac{60}{500}=\frac{3}{25},\ P(S\cap M)=\frac{25}{500}=\frac{1}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(M|S)=\frac{P(S\cap M)}{P(S)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{25}}=\frac{5}{12}$$

답 ②

참고 두 영화 A, B를 관람한 남학생 수는 각각

$270-125=145$, $290-110=180$

또 여학생은 200명, 남학생은 300명이므로 두 영화 A, B를 모두 관람한 여학생과 남학생 수는 각각

$125+110-200=35$, $145+180-300=25$

유형 04 확률의 곱셈정리 본책 62쪽

두 사건 A, B에 대하여

① $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$ (단, $P(A)\neq 0$)

② $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$ (단, $P(B)\neq 0$)

0385 첫 번째에 불량품이 아닌 제품을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 불량품이 아닌 제품을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6},\ P(B|A)=\frac{9}{11}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{11}=\frac{15}{22}$$

답 $\frac{15}{22}$

0386 빨간 주머니를 택하는 사건을 A, 100원짜리 동전을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B|A)=\frac{5}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{16}$$

답 ①

0387 준성이가 당첨권을 뽑는 사건을 A, 경은이가 당첨권을 뽑는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10},\ P(B|A)=\frac{5}{19}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{19}=\frac{3}{38}$$

답 ③

0388 갑이 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 을이 파란 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{n}{n+3},\ P(B|A)=\frac{3}{n+2}$$

이므로

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)P(B|A)\\&=\frac{n}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\\&=\frac{3n}{(n+3)(n+2)}\end{aligned}$$ ··· ❶

즉 $\frac{3n}{(n+3)(n+2)}=\frac{1}{4}$이므로

$(n+3)(n+2)=12n$, $n^2-7n+6=0$

$(n-1)(n-6)=0$

$\therefore n=1$ 또는 $n=6$ ··· ❷

따라서 모든 n의 값의 합은 7이다. ··· ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ $P(A\cap B)$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 모든 n의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

유형 05 $P(E)=P(A\cap E)+P(A^c\cap E)$ 본책 62쪽

두 사건 A, E에 대하여

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A\cap E)+P(A^c\cap E)\\&=P(A)P(E|A)+P(A^c)P(E|A^c)\end{aligned}$$

0389 내일 비가 내리는 사건을 A, 내일 경기에서 이기는 사건을 E라 하면 내일 비가 내리지 않는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=0.2$, $\mathrm{P}(A^C)=0.8$, $\mathrm{P}(E|A)=0.7$,
$\mathrm{P}(E|A^C)=0.5$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=0.2\times0.7+0.8\times0.5\\&=0.54\end{aligned}$$

답 0.54

0390 버스로 등교한 학생을 택하는 사건을 A, 걸어서 등교한 학생을 택하는 사건을 B, 지각한 학생을 택하는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$,

$\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{20}$, $\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{20}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{15}\\&=\frac{17}{300}\end{aligned}$$

답 ④

0391 A 지역의 사람을 뽑는 사건을 A, B 지역의 사람을 뽑는 사건을 B, 성이 김씨인 사람을 뽑는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5+3}=\frac{3}{8}$,

$\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)\\&=\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}\\&=\frac{7}{32}\end{aligned}$$

답 ②

0392 A 주머니를 택하는 사건을 A, B 주머니를 택하는 사건을 B, 꺼낸 2개의 바둑돌이 서로 다른 색인 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(E|A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{10}{21}$,

$\mathrm{P}(E|B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$ ··· ❶

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{21}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}=\frac{11}{21}\end{aligned}$$ ··· ❷

답 $\frac{11}{21}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(E|A)$, $\mathrm{P}(E|B)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\mathrm{P}(E)$를 구할 수 있다.	50 %

유형 06 $\mathrm{P}(A|E)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)}$

본책 63쪽

사건 E가 일어났을 때 사건 A의 조건부확률

➡ $\mathrm{P}(A|E)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)}$

0393 안경을 쓴 학생을 택하는 사건을 A, 재검사 요청을 받은 학생을 택하는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{60}{100}\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{40}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\left(1-\frac{60}{100}\right)\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{25}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\frac{1}{40}+\frac{1}{25}=\frac{13}{200}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{40}}{\frac{13}{200}}=\frac{5}{13}$$

답 $\frac{5}{13}$

0394 홈 경기인 사건을 A, 원정 경기인 사건을 B, 경기에서 승리하는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=0.3\times0.6=0.18$,

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=(1-0.3)\times0.4=0.28$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=0.18+0.28=0.46\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.18}{0.46}=\frac{9}{23}$$

답 ③

0395 A 공장에서 생산된 제품을 택하는 사건을 A, B 공장에서 생산된 제품을 택하는 사건을 B, 불량품을 택하는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=0.2\times0.04=0.008$,

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=0.8\times0.05=0.04$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=0.008+0.04=0.048\end{aligned}$$ ··· ❶

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.008}{0.048}=\frac{1}{6}$$ ··· ❷

답 $\frac{1}{6}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A\cap E)$, $\mathrm{P}(E)$를 구할 수 있다.	80 %
❷ $\mathrm{P}(A|E)$를 구할 수 있다.	20 %

0396 A 주머니를 택하는 사건을 A, B 주머니를 택하는 사건을 B, 검은 공 2개를 꺼내는 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=\frac{1}{6},$$

$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{12}$$

$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0397 양면이 모두 빨간색인 카드, 양면이 모두 검은색인 카드, 한 면은 빨간색이고 다른 면은 검은색인 카드를 꺼내는 사건을 각각 A, B, C라 하고, 바닥에 놓인 카드의 윗면이 빨간색인 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3},$$

$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{1}{3}\cdot 0=0,$$

$$P(C\cap E)=P(C)P(E|C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)=\frac{1}{3}+0+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(C|E)=\frac{P(C\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

답 ④

0398 정환이가 2개의 동전을 던져서 뒷면이 0개 나오는 사건을 A, 1개 나오는 사건을 B, 2개 나오는 사건을 C, 혜지가 동전을 던져서 뒷면이 1개 나오는 사건을 E라 하자.
정환이가 던진 동전의 뒷면이 0개이면 혜지는 동전을 0개 던지므로

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{1}{4}\cdot 0=0$$

정환이가 던진 동전의 뒷면이 1개이면 혜지는 동전을 1개 던지므로

$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

정환이가 던진 동전의 뒷면이 2개이면 혜지는 동전을 2개 던지므로

$$P(C\cap E)=P(C)P(E|C)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)=0+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(C|E)=\frac{P(C\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$$

답 ③

유형 07 사건의 독립과 종속의 판정

본책 64쪽

두 사건 A, B에 대하여
① $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ ➡ 독립
② $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$ ➡ 종속

0399 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 표본공간은 {HH, HT, TH, TT}이고

$A=\{HH, HT\}$, $B=\{HH, TH\}$, $C=\{HT, TH\}$

$\therefore A\cap B=\{HH\}$, $B\cap C=\{TH\}$, $A\cap C=\{HT\}$

ㄱ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{2}$, $P(B\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$P(B\cap C)=P(B)P(C)$

따라서 B와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$P(A\cap C)=P(A)P(C)$

따라서 A와 C는 서로 독립이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 서로 독립인 사건이다.

답 ⑤

0400 $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$,
$B=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, $C=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로 배반사건이다.

ㄴ. $A\cap C=\{3, 5, 7, 11, 13\}$이므로

$P(A)=\frac{8}{15}$, $P(C)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$,

$P(A\cap C)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

$\therefore P(A\cap C)\neq P(A)P(C)$

따라서 A와 C는 서로 종속이다.

ㄷ. $B\cap C=\{2\}$이므로

$P(B)=\frac{7}{15}$, $P(C)=\frac{2}{5}$, $P(B\cap C)=\frac{1}{15}$

$\therefore P(B\cap C)\neq P(B)P(C)$

따라서 B와 C는 서로 종속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0401 $P(A)=\frac{75+k}{200}$, $P(B)=\frac{80}{200}=\frac{2}{5}$,

$P(A\cap B)=\frac{k}{200}$ ··· ❶

두 사건 A, B가 서로 독립이려면 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$가 성립해야 하므로

$$\frac{k}{200}=\frac{75+k}{200}\cdot\frac{2}{5}$$ ··· ❷

$5k=150+2k$, $3k=150$

$\therefore k=50$ ··· ❸

답 50

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ k에 대한 등식을 세울 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 08 독립과 종속의 성질

본책 65쪽

두 사건 A, B가 서로
① 독립 ➡ $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$,
$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$
② 종속 ➡ $\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B|A^C)$, $\mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(A|B^C)$

0402 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^C)$

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\}\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}-\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(A)\}\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이다.

ㄷ. $$\begin{aligned}1-\mathrm{P}(A^C|B)&=1-\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=1-\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(A|B)\end{aligned}$$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A|B)$

$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=1-\mathrm{P}(A^C|B)$

ㄹ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\quad \mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때 $\mathrm{P}(A)\neq 0$, $\mathrm{P}(B)\neq 0$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

다른 풀이 ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C와 B도 각각 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)$

이때 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$이므로

$\mathrm{P}(A|B^C)=1-\mathrm{P}(A^C|B)$

0403 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\boxed{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$

$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$이고 $A\cap B$와 $A\cap B^C$는 서로 $\boxed{\text{배반}}$사건이므로 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\boxed{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}=\mathrm{P}(A)\boxed{\mathrm{P}(B^C)}\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A와 B^C도 서로 독립이다.

$\therefore$ (가) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ (나) 배반 (다) $\mathrm{P}(B^C)$ 답 ④

0404 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\\&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=\mathrm{P}(A)\end{aligned}$$

ㄷ. $$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C|B)&=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=1-\mathrm{P}(A)\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

유형 09~10 독립인 사건의 확률

본책 65쪽

① 두 사건 A, B가 서로 독립이다.
$\iff \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
② 세 사건 A, B, C가 서로 독립이다.
$\iff \mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

0405 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$, $\quad \frac{4}{5}\mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}-\mathrm{P}(B)$

$\frac{9}{5}\mathrm{P}(B)=\frac{4}{5} \quad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{4}{9}$ 답 $\frac{4}{9}$

0406 두 사건 A^C, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A)=k$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{3}k$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{5}{6}=k+\frac{4}{3}k-\frac{4}{3}k^2, \quad 8k^2-14k+5=0$

$(2k-1)(4k-5)=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}\ (\because 0<k<1)$ 답 $\frac{1}{2}$

0407 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B^C|A)=\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6} \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B^C|A)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0408 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B), \qquad \frac{1}{6}=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$$ ⋯ ❶

두 사건 B, C가 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(B\cup C)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$$

$$\frac{7}{9}=\frac{2}{3}+\mathrm{P}(C) \qquad \therefore \mathrm{P}(C)=\frac{1}{9}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{1}{9}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(B)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\mathrm{P}(C)$를 구할 수 있다.	50 %

0409 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C와 B도 각각 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C),\ \mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$$

즉 $\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{3}$에서

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}\{1-\mathrm{P}(B)\}+\left(1-\frac{1}{4}\right)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{12} \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

0410 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{9}$$

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}\\&=\frac{10}{9}-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}\end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$가 최소일 때, $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$는 최대이다.

이때 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)&\ge 2\sqrt{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}\\&=2\cdot\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$

즉 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$의 최솟값이 $\frac{2}{3}$이므로 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$의 최댓값은

$$\frac{10}{9}-\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

답 ②

0411 희주와 현무가 완주하는 사건을 각각 A, B라 하면

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4},\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{4}\mathrm{P}(B), \qquad \frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0412 A, B, C 세 도시에서 내일 비가 오는 사건을 각각 A, B, C라 하면 세 사건은 서로 독립이므로 내일 세 도시 중 두 도시에서만 비가 올 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A\cap B\cap C^C)+\mathrm{P}(A\cap B^C\cap C)+\mathrm{P}(A^C\cap B\cap C)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\\&=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

답 ④

0413 전구에 불이 켜지려면 두 스위치 A, B가 모두 닫히거나 스위치 C가 닫혀야 한다. 두 스위치 A, B가 모두 닫히는 사건을 A, 스위치 C가 닫히는 사건을 B라 하면 A, B는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A)=0.8\times0.5=0.4,\ \mathrm{P}(B)=0.2,$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.4\times0.2=0.08$$

따라서 전구에 불이 켜질 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=0.4+0.2-0.08=0.52\end{aligned}$$

답 0.52

0414 두 수의 합이 짝수이려면 두 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다. 두 상자 A, B에서 짝수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이므로

(i) A, B에서 모두 짝수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$$

(ii) A, B에서 모두 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{4}{25}+\frac{9}{25}=\frac{13}{25}$

답 $\frac{13}{25}$

0415 민준이의 미술 점수가 80점이려면 1차 수행 평가에서 A, 2차 수행 평가에서 C를 받거나 1차, 2차 수행 평가에서 모두 B를 받거나 1차 수행 평가에서 C, 2차 수행 평가에서 A를 받아야 한다. ⋯ ❶

(i) 1차 수행 평가에서 A, 2차 수행 평가에서 C를 받을 확률은

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$$

(ii) 1차, 2차 수행 평가에서 모두 B를 받을 확률은

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(iii) 1차 수행 평가에서 C, 2차 수행 평가에서 A를 받을 확률은

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$$ ⋯ ❷

이상에서 구하는 확률은 $\frac{1}{18}+\frac{1}{4}+\frac{1}{18}=\frac{13}{36}$ ⋯ ❸

답 $\frac{13}{36}$

채점 기준	비율
❶ 민준이의 미술 점수가 80점이 되는 경우를 구할 수 있다.	30 %
❷ 각각의 경우에 대한 확률을 구할 수 있다.	60 %
❸ 민준이의 미술 점수가 80점일 확률을 구할 수 있다.	10 %

0416 A와 B가 시합을 하려면 준결승 또는 결승에서 만나야 한다. 이때 A를 제외한 나머지 6개의 나라를 4개, 2개의 두 조로 나누었을 때, B가 4개의 조에 배정되면 결승에서 만날 수 있고, 2개의 조에 배정되면 준결승에서 만날 수 있다.

(i) 준결승에서 만나는 경우

B가 2개의 조에 배정된 후 1번 이겨야 하므로 그 확률은

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

(ii) 결승에서 만나는 경우

B가 4개의 조에 배정된 후 2번 이기고, A도 1번 이겨야 하므로 그 확률은

$$\underbrace{\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{B가 결승에 갈 확률}}\cdot\overbrace{\frac{1}{2}}^{\text{A가 결승에 갈 확률}}=\frac{1}{12}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

유형 11~12 독립시행의 확률

본책 67쪽

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $p\,(0<p<1)$일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_n\mathrm{C}_r\,p^r(1-p)^{n-r}\ (\text{단, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

0417 자유투를 한 번 이상 성공하는 사건을 A라 하면 자유투를 한 번도 성공하지 못하는 사건은 A^C이므로

$$\mathrm{P}(A^C)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{125}=\frac{124}{125}$$

답 $\frac{124}{125}$

0418 앞면이 나오는 횟수를 x, 뒷면이 나오는 횟수를 y라 하면

$x+y=6$ ⋯⋯ ㉠

이때 뒷면이 앞면보다 2번 더 많이 나오므로

$y=x+2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=4$

따라서 6번의 시행에서 앞면이 2번, 뒷면이 4번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$$

답 $\frac{15}{64}$

0419 경품을 받을 확률이 $\frac{1}{10}$이므로 음료수를 3병 구입한 사람이 경품으로 1병의 음료수를 받을 확률은

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\underbrace{\frac{9}{10}}_{\text{경품으로 받은 음료수에는 '한 병 더'가 새겨져 있지 않을 확률}}=\frac{3\cdot 9^3}{10^4}=\frac{3^7}{10^4}$$

따라서 $\frac{3^7}{10^4}=\frac{3^k}{10^4}$이므로

$k=7$

답 ④

0420 졸업시험에 통과하려면 1차 시험에 통과하거나 2차 시험에 통과해야 하므로 한 학생이 졸업시험에 통과할 확률은

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

따라서 5명 중에서 3명만 졸업시험에 통과할 확률은

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

이므로 $p=16,\ q=5$

$\therefore p+q=21$

답 21

0421 여섯 번째 경기에서 우승팀이 결정되려면 우승팀은 5번의 경기에서 3번 이기고 마지막 여섯 번째 경기에서도 이겨야 한다.

이때 두 팀 A, B는 실력이 같은 정도로 기대되므로 A 팀과 B 팀이 이길 확률은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$이다.

(i) A 팀이 우승할 확률은 ${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$

(ii) B 팀이 우승할 확률은 ${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{5}{32}+\frac{5}{32}=\frac{5}{16}$

답 ②

0422 $10\cdot\frac{4}{5}=8$(명)이므로 8명 이상 참석해야 동아리 활동을 진행할 수 있다.

(i) 8명이 참석할 확률은 ${}_{10}\mathrm{C}_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{45}{2^{10}}$

(ii) 9명이 참석할 확률은 ${}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{10}{2^{10}}$

(iii) 10명이 참석할 확률은 ${}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{2^{10}}$

이상에서 동아리 활동이 진행될 확률은

$$\frac{45}{2^{10}}+\frac{10}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}=\frac{56}{2^{10}}=\frac{7}{2^7}\qquad\therefore n=7$$

답 7

0423 방이 부족한 경우는 5건의 예약 중 취소가 1건 이하일 때이다.

(i) 취소가 0건일 확률은 ${}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$

(ii) 취소가 1건일 확률은 ${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{32}{243}+\frac{80}{243}=\frac{112}{243}$$

답 ⑤

0424 3부터 10까지의 자연수 중에서 소수는 3, 5, 7의 3개, 짝수는 4, 6, 8, 10의 4개이다.

(i) 소수가 적힌 공을 꺼내고 동전을 3번 던져서 3번 모두 앞면이 나올 확률은

$$\frac{3}{8}\cdot{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{64}$$ ··· ❶

(ii) 짝수가 적힌 공을 꺼내고 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$$\frac{4}{8}\cdot{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{8}$$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{64}+\frac{1}{8}=\frac{11}{64}$$ ··· ❸

답 $\frac{11}{64}$

채점 기준	비율
❶ 소수가 적힌 공을 꺼내고 동전의 앞면이 3번 나올 확률을 구할 수 있다.	40 %
❷ 짝수가 적힌 공을 꺼내고 동전의 앞면이 3번 나올 확률을 구할 수 있다.	40 %
❸ 동전의 앞면이 3번 나올 확률을 구할 수 있다.	20 %

0425 한 개의 주사위를 5번 던져서 홀수의 눈이 나온 횟수를 x라 하면 짝수의 눈이 나온 횟수는 $5-x$이므로

$2x+1\cdot(5-x)\geq7$

$\therefore x\geq2$

즉 홀수의 눈이 2번 이상 나올 때 점수의 합이 7 이상이다.

홀수의 눈이 2번 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 홀수의 눈이 1번 이하로 나오는 사건이다.

(i) 홀수의 눈이 0번 나올 확률은

$${}_5C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

(ii) 홀수의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{32}$$

(i), (ii)에서 $\quad \mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}=\frac{3}{16}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$

답 ④

0426 점 P가 색칠한 부분을 지나려면 점 (3, 1) 또는 점 (3, 2)를 지나야 한다.

이때 4 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이므로

(i) 점 P가 점 (3, 1)을 지날 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$$

(ii) 점 P가 점 (3, 2)를 지날 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$$

(iii) 점 P가 두 점 (3, 1), (3, 2)를 모두 지날 확률은

점 (3, 1)에서 y축의 양의 방향으로 1만큼 움직여야 한다.

$${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\frac{1}{3}=\frac{32}{243}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{32}{81}+\frac{80}{243}-\frac{32}{243}=\frac{16}{27}$$

답 ③

0427 1st 30대가 차지하는 비율을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

30대가 차지하는 비율이 12 %이므로

$(60-a)+b=300\cdot\frac{12}{100}\quad \therefore a-b=24$ ······ ㉠

2nd 주어진 확률에 대한 조건을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

도서관 이용자 300명 중에서 임의로 선택한 한 명이 남성인 사건을 A, 20대인 사건을 B, 30대인 사건을 C라 하면

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(C|A^C)$이므로

여성인 사건은 남성인 사건의 여사건이다.

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap C)}{\mathrm{P}(A^C)}$$

$$\frac{\frac{a}{300}}{\frac{200}{300}}=\frac{\frac{b}{300}}{\frac{100}{300}},\qquad \frac{a}{200}=\frac{b}{100}$$

$\therefore a=2b$ ······ ㉡

3rd $a+b$의 값을 구한다.

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=48,\ b=24$

$\therefore a+b=72$

답 72

0428 1st $n(1\leq n\leq5)$ 번째에 A가 공을 받지 못할 확률을 각각 구한다.

A에서 시작하여 n 번째에 공을 받은 사람을 a_n이라 하자.

a_1이 될 수 있는 사람은 B, C, D, E, F의 5명이므로 A가 공을 받지 못할 확률은 $\quad 1$

a_2가 될 수 있는 사람은 A, a_1을 제외한 4명이므로 A가 공을 받지 못할 확률은 $\quad 1$

a_3이 될 수 있는 사람은 a_1, a_2를 제외한 4명이고 이 4명에 A가 포함되므로 A가 공을 받지 못할 확률은 $\quad \frac{3}{4}$

a_4가 될 수 있는 사람은 a_2, a_3을 제외한 4명이고 이 4명에 A가 포함되므로 A가 공을 받지 못할 확률은 $\quad \frac{3}{4}$

a_5가 될 수 있는 사람은 a_3, a_4를 제외한 4명이고 이 4명에 A가 포함되므로 A가 공을 받지 못할 확률은 $\quad \frac{3}{4}$

2nd 확률을 구한다.

구하는 확률은 $\quad 1\cdot1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{64}$

답 ③

0429 1st 사건 X, Y를 정한다.

가위바위보를 2번 하여 A가 최종 승자로 정해지는 사건을 X, 두 번째에 가위바위보를 한 학생이 2명인 사건을 Y라 하자.

2nd $\mathrm{P}(X)$를 구한다.

(i) 첫 번째에 이긴 학생이 없는 경우

첫 번째에 모두 다른 것을 내거나 모두 같은 것을 낼 확률은

$$\frac{\underbrace{3!}_{\text{모두 다른 것을 내는 경우의 수는 }3!}+\underbrace{3}_{\text{모두 같은 것을 내는 경우의 수는 }3}}{3^3}=\frac{1}{3}$$

두 번째에 세 학생 중 A만 이길 확률은

$$\frac{3}{3^3}=\frac{1}{9}$$

따라서 A가 최종 승자가 될 확률은

$$\mathrm{P}(X\cap Y^C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$$

04 조건부확률

(ii) 첫 번째에 이긴 학생이 2명인 경우

첫 번째에 A를 포함하여 2명이 이길 확률은

$\frac{3\cdot 2}{3^3}=\frac{2}{9}$ A, B가 이기거나 A, C가 이긴다.

두 번째에 두 학생 중 A가 이길 확률은

$\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}$

따라서 A가 최종 승자가 될 확률은

$$P(X\cap Y)=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

(i), (ii)에서

$$P(X)=P(X\cap Y^C)+P(X\cap Y)$$
$$=\frac{1}{27}+\frac{2}{27}=\frac{1}{9}$$

3rd 확률을 구한다.

구하는 확률은

$$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}$$

답 ④

0430 1st ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $A_4=\{4, 8\}$, $A_6=\{6\}$이므로

$A_4\cap A_6=\varnothing$

따라서 A_4와 A_6은 서로 배반사건이다.

2nd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $A_2=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A_5=\{5, 10\}$, $A_2\cap A_5=\{10\}$이므로

$P(A_2)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, $P(A_5)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$,

$P(A_2\cap A_5)=\frac{1}{10}$

$\therefore P(A_2)P(A_5)=P(A_2\cap A_5)$

따라서 A_2와 A_5는 서로 독립이다.

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $A_n\subset A_m$이므로 $A_m\cap A_n=A_n$

A_m과 A_n의 원소의 개수를 각각 a, b라 하면

$P(A_m)=\frac{a}{10}$, $P(A_n)=\frac{b}{10}$,

$P(A_m\cap A_n)=P(A_n)=\frac{b}{10}$

따라서 $P(A_m)P(A_n)=\frac{ab}{100}$이므로

$P(A_m)P(A_n)\neq P(A_m\cap A_n)$ ($\because a\neq 10$)

즉 A_m과 A_n은 서로 종속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0431 1st 두 사건 A, B가 독립이기 위한 조건을 구한다.

$P(A)=\frac{a}{6}$ $(a=1, 2, 3, 4)$, $P(B)=\frac{b}{6}$ $(b=2, 3, 4, 5)$,

$P(A\cap B)=\frac{c}{6}$ $(c=1, 2)$라 하자.

두 사건 A, B가 서로 독립이기 위해서는

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$이어야 하므로

$\frac{c}{6}=\frac{a}{6}\cdot\frac{b}{6}$ $\quad\therefore c=\frac{ab}{6}$

2nd $c=1$일 때의 확률을 구한다.

(i) $c=1$, 즉 $ab=6$인 경우 $A\cap B=\{8\}$이고, 6은 택하지 않는다.

ⓘ $a=2$, $b=3$일 때,

집합 A의 원소로 2, 4 중 1개를 택하고, 집합 B의 원소로 5, 7, 9 중 2개를 택하고, 원판에 적는 나머지 숫자로 1, 3 중 2개를 택할 확률이므로

$$\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_2\cdot{}_2C_2}{{}_8C_5}=\frac{3}{28}$$

ⓘⓘ $a=3$, $b=2$일 때,

$A=\{2, 4, 8\}$이고 집합 B의 원소로 5, 7, 9 중 1개를 택하고, 원판에 적는 나머지 숫자로 1, 3 중 2개를 택할 확률이므로

$$\frac{1\cdot{}_3C_1\cdot{}_2C_2}{{}_8C_5}=\frac{3}{56}$$

3rd $c=2$일 때의 확률을 구한다.

(ii) $c=2$, 즉 $ab=12$인 경우 $A\cap B=\{6, 8\}$

ⓘ $a=3$, $b=4$일 때,

집합 A의 원소로 2, 4 중 1개를 택하고, 집합 B의 원소로 5, 7, 9 중 2개를 택하고, 원판에 적는 나머지 숫자로 1, 3 중 1개를 택할 확률이므로

$$\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_2\cdot{}_2C_1}{{}_8C_5}=\frac{3}{14}$$

ⓘⓘ $a=4$, $b=3$일 때,

$A=\{2, 4, 6, 8\}$이고 집합 B의 원소로 5, 7, 9 중 1개를 택하고, 원판에 적는 나머지 숫자로 1, 3 중 1개를 택할 확률이므로

$$\frac{1\cdot{}_3C_1\cdot{}_2C_1}{{}_8C_5}=\frac{3}{28}$$

4th 확률을 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{28}+\frac{3}{56}+\frac{3}{14}+\frac{3}{28}=\frac{27}{56}$$

답 $\frac{27}{56}$

0432 1st $f(n_1)+f(n_2)=0$을 만족시키는 순서쌍 $(f(n_1), f(n_2))$를 구한다.

$f(1)=f(5)=-i$, $f(2)=f(6)=-1$, $f(3)=i$, $f(4)=1$이므로

$f(n_1)+f(n_2)=0$을 만족시키는 순서쌍 $(f(n_1), f(n_2))$는

$(-i, i)$, $(i, -i)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$

2nd 확률을 구한다.

(i) $f(n_1)=-i$, $f(n_2)=i$일 확률은 $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

(ii) $f(n_1)=i$, $f(n_2)=-i$일 확률은 $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{18}$

(iii) $f(n_1)=-1$, $f(n_2)=1$일 확률은 $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

(iv) $f(n_1)=1$, $f(n_2)=-1$일 확률은 $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{18}$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$$

답 $\frac{2}{9}$

0433 1st 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 될 조건을 구한다.

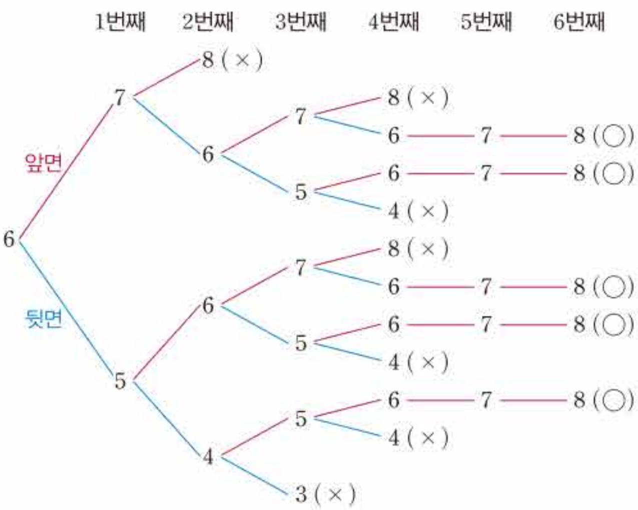
6번째 시행 후 처음으로 상자 B에 8개의 공이 들어 있으려면 '상자 A에서 공 1개를 꺼내어 상자 B에 넣는 것'을 '상자 B에서 공 1개를 꺼내어 상자 A에 넣는 것'보다 2번 더 해야 하므로 동전을 6번 던져 앞면이 4번, 뒷면이 2번 나와야 한다.
또한 5번째 시행 후에는 7개, 4번째 시행 후에는 6개의 공이 상자 B에 들어 있어야 하므로 4번째 시행까지 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나오고 5번째, 6번째 시행에서 각각 앞면이 나와야 한다. 이때 1번째, 2번째 시행에서 모두 앞면이 나오는 경우는 제외해야 한다.
2번째 시행 후에 처음으로 8개의 공이 들어 있게 된다.

2nd 확률을 구한다.
구하는 확률은

$$({}_4C_2-1)\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{64}$$ 답 ③

1번째, 2번째 시행에서 모두 앞면이 나오는 경우

다른 풀이 동전을 6번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$2^6=64$
각 시행 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수를 수형도를 이용하여 나타내면 다음과 같다.



즉 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 되는 경우의 수가 5이므로 구하는 확률은

$$\frac{5}{64}$$

0434 1st 점 P가 꼭짓점 A로 돌아오기 위한 조건을 구한다.
주사위를 네 번 던져서 꼭짓점 A에서 출발한 점 P가 꼭짓점 A로 돌아오려면 움직인 길이가 4 또는 8 또는 12이어야 한다.
2nd 확률을 구한다.
3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, 그 외의 눈이 나올 확률은 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로
(i) 점 P가 움직인 길이가 4인 경우 ┌ 4=1+1+1+1
3의 배수가 아닌 눈이 4번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_4C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

(ii) 점 P가 움직인 길이가 8인 경우 ┌ 8=3+3+1+1
3의 배수의 눈이 2번, 그 외의 눈이 2번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

(iii) 점 P가 움직인 길이가 12인 경우 ┌ 12=3+3+3+3
3의 배수의 눈이 4번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{16}{81}+\frac{8}{27}+\frac{1}{81}=\frac{41}{81}$$ 답 $\frac{41}{81}$

0435 1st 앞면이 3번 나올 때의 확률을 구한다.
(i) 앞면이 3번 나오는 경우 – '앞, 앞, 앞, 뒤, 뒤, 뒤, 뒤'를 나열
앞면이 3번 나올 확률은 ${}_7C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{128}$
조건 (나)를 만족시키려면 앞면이 3번 나오는 경우에서 앞면이 연속해서 나오지 않는 경우를 제외해야 한다. 이때 앞면이 연속해서 나오지 않으려면 뒷면 4개를 일렬로 나열하고 그 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 앞면 3개를 나열하면 되므로 그 확률은
∨뒤∨뒤∨뒤∨뒤∨

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{64}$$

따라서 조건을 모두 만족시킬 확률은

$$\frac{35}{128}-\frac{5}{64}=\frac{25}{128}$$

2nd 앞면이 4번 나올 때의 확률을 구한다.
(ii) 앞면이 4번 나오는 경우 – '앞, 앞, 앞, 앞, 뒤, 뒤, 뒤'를 나열
앞면이 4번 나올 확률은 ${}_7C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{35}{128}$
조건 (나)를 만족시키려면 앞면이 4번 나오는 경우에서 앞면이 연속해서 나오지 않는 경우를 제외해야 한다. 이때 앞면이 연속해서 나오지 않으려면 앞면, 뒷면, 앞면, 뒷면, 앞면, 뒷면, 앞면의 순서로 나오면 되므로 그 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{128}$$

따라서 조건을 모두 만족시킬 확률은

$$\frac{35}{128}-\frac{1}{128}=\frac{17}{64}$$

3rd 앞면이 5번 또는 6번 또는 7번 나올 때의 확률을 구한다.
(iii) 앞면이 5번 또는 6번 또는 7번 나오는 경우
앞면이 연속해서 나오는 경우가 반드시 있으므로 그 확률은

$${}_7C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_7C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_7C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^0$$
$$=\frac{21}{128}+\frac{7}{128}+\frac{1}{128}=\frac{29}{128}$$

4th 주어진 조건을 만족시킬 확률을 구한다.
이상에서 구하는 확률은

$$\frac{25}{128}+\frac{17}{64}+\frac{29}{128}=\frac{11}{16}$$ 답 ①

다른 풀이 (i) 앞면이 3번 미만 나오는 경우
앞면이 0번 또는 1번 또는 2번 나올 확률은

$${}_7C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_7C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^5$$
$$=\frac{1}{128}+\frac{7}{128}+\frac{21}{128}=\frac{29}{128}$$

04 조건부확률

(ii) 앞면이 3번 나오면서 연속해서 나오지 않는 경우

뒷면 4개를 일렬로 나열하고 그 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 앞면 3개를 나열하면 되므로 그 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{64}$$

(iii) 앞면이 4번 나오면서 연속해서 나오지 않는 경우

앞면, 뒷면, 앞면, 뒷면, 앞면, 뒷면, 앞면의 순서로 나오면 되므로 그 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{128}$$

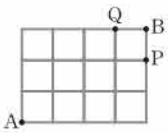
이상에서 구하는 확률은

$$1-\left(\frac{29}{128}+\frac{5}{64}+\frac{1}{128}\right)=\frac{11}{16}$$

0436 (1st) **동전을 7번 던지는 경우의 확률을 구한다.**

A에서 B까지 이동하려면 동전을 최소 7번 던져야 한다.

(i) 동전을 7번 던져서 B에 도착하는 경우



ⓘ P를 지날 때,

앞면이 4번, 뒷면이 2번 나온 후 뒷면이 나와야 하므로 그 확률은

$${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{P\to B}=\frac{15}{2^7}$$

ⓘⓘ Q를 지날 때,

앞면이 3번, 뒷면이 3번 나온 후 앞면이 나와야 하므로 그 확률은

$${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{Q\to B}=\frac{20}{2^7}$$

(2nd) **동전을 8번 던지는 경우의 확률을 구한다.**

(ii) 동전을 8번 던져서 B에 도착하는 경우

ⓘ P를 지날 때,

앞면이 5번, 뒷면이 2번 나온 후 뒷면이 나와야 하므로 그 확률은

$${}_7C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{P\to B}=\frac{21}{2^8}$$

ⓘⓘ Q를 지날 때,

앞면이 3번, 뒷면이 4번 나온 후 앞면이 나와야 하므로 그 확률은

$${}_7C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{Q\to B}=\frac{35}{2^8}$$

(3rd) **확률을 구한다.**

동전을 던진 횟수가 8회 이하로 게임이 끝나는 사건을 A, P를 지나는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{\frac{15}{2^7}+\frac{21}{2^8}}{\frac{15}{2^7}+\frac{20}{2^7}+\frac{21}{2^8}+\frac{35}{2^8}}$$

$$=\frac{30+21}{30+40+21+35}=\frac{17}{42}$$

답 $\frac{17}{42}$

0437 전략 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$**임을 이용하여 조건부확률을 구한다.**

풀이 각 과목을 같은 과목끼리 겹치지 않게 4시간씩 나누는 경우는 다음과 같다.

수학, 영어, 국어, 사회

또는 수학, 영어, 국어, 과학

또는 수학, 영어, 사회, 과학 ...... ㉠ ⋯→ ❶

같은 요일에 같은 과목을 2시간 이상 배치하지 않는 사건을 A, 1교시에 수학 또는 영어를 배치하는 사건을 B라 하자.

사건 A는 ㉠을 월, 수, 금에 배치한 후 각각의 경우에서 네 과목의 순서를 정하는 사건이므로 그 경우의 수는

$n(A)=3!\cdot4!\cdot4!\cdot4!$ ⋯→ ❷

사건 $A\cap B$는 ㉠을 월, 수, 금에 배치한 후 각각의 경우에서 1교시에 수학 또는 영어를 배치한 후 남은 세 과목의 순서를 정하는 사건이므로 그 경우의 수는

$n(A\cap B)=3!\cdot({}_2C_1\cdot3!)\cdot({}_2C_1\cdot3!)\cdot({}_2C_1\cdot3!)$

$=8\cdot3!\cdot3!\cdot3!\cdot3!$ ⋯→ ❸

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

$$=\frac{8\cdot3!\cdot3!\cdot3!\cdot3!}{3!\cdot4!\cdot4!\cdot4!}=\frac{1}{8}$$ ⋯→ ❹

답 $\frac{1}{8}$

채점 기준	비율
❶ 각 과목을 같은 과목끼리 겹치지 않게 4시간씩 나누는 경우를 구할 수 있다.	20 %
❷ $n(A)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $n(A\cap B)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $\mathrm{P}(B\|A)$를 구할 수 있다.	20 %

0438 전략 **먼저 한 번의 시행에서 A가 우승하는 경우의 수를 구한다.**

풀이 A, B, C 세 사람이 주사위를 한 번씩 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b, c라 하자.

A가 우승하는 경우는 $b+c<a$일 때이고, $b+c=n$이 되는 경우를 b, c의 순서쌍 (b, c)로 나타내면

$(1, n-1)$, $(2, n-2)$, $\cdots$, $(n-1, 1)$

의 $(n-1)$개이다.

(i) $a=3$일 때, $b+c=2$이므로 경우의 수는 1

(ii) $a=4$일 때, $b+c$의 값이 될 수 있는 수는 2 또는 3이므로 경우의 수는

$1+2=3$

(iii) $a=5$일 때, $b+c$의 값이 될 수 있는 수는 2 또는 3 또는 4이므로 경우의 수는

$1+2+3=6$

(iv) $a=6$일 때, $b+c$의 값이 될 수 있는 수는 2 또는 3 또는 4 또는 5이므로 경우의 수는

$1+2+3+4=10$

이상에서 A가 우승하는 경우의 수는

$1+3+6+10=20$

마찬가지로 B, C가 우승하는 경우의 수도 각각 20이다.

즉 한 번의 시행에서 우승자가 나올 확률은

$$\frac{20\cdot3}{\underbrace{6^3}_{\text{주사위를 3번 던진다.}}}=\frac{5}{18}$$ ⋯ ❶

따라서 시행을 3번 이상 하여 우승자가 나올 확률은

$$1-\Big(\frac{5}{18}+\underbrace{\frac{13}{18}\cdot\frac{5}{18}}_{\text{첫 번째 시행에서 우승자가 나오지 않을 확률}}\Big)=\frac{169}{324}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{169}{324}$

채점 기준	비율
❶ 한 번의 시행에서 우승자가 나올 확률을 구할 수 있다.	60 %
❷ 시행을 3번 이상 하여 우승자가 나올 확률을 구할 수 있다.	40 %

0439 전략 $a=0$, $a=1$, $a=2$, $a\geq3$인 경우로 나누어 $3a=b$일 확률을 구한다.

풀이 (i) $a=0$일 때,

$b\geq1$이므로 $3a=b$일 확률은 0이다. ⋯ ❶

(ii) $a=1$일 때,

3번 중 흰 공 2번, 검은 공 1번이 나와야 하므로

$$\underbrace{\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{7}}_{(\text{흰, 흰, 검})}+\underbrace{\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{7}}_{(\text{흰, 검, 흰})}+\underbrace{\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}}_{(\text{검, 흰, 흰})}=\frac{3}{14}$$

또 $b=3a=3$에서 남은 2번 중 흰 공 1번, 노란 공 1번 또는 검은 공 2번이 나와야 하므로

$$\Big(\underbrace{\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}}_{(\text{흰, 노})}+\underbrace{\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}}_{(\text{노, 흰})}\Big)+\underbrace{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}}_{(\text{검, 검})}=\frac{1}{3}$$

따라서 $3a=b$일 확률은

$$\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{14}$$ ⋯ ❷

(iii) $a=2$일 때,

3번 중 흰 공 1번, 검은 공 2번 또는 흰 공 2번, 노란 공 1번이 나와야 한다.

그런데 $b=6$이므로 흰 공 2번, 노란 공 1번은 나올 수 없다.

따라서 3번 중 흰 공 1번, 검은 공 2번이 나와야 하므로

$$\underbrace{\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}}_{(\text{흰, 검, 검})}+\underbrace{\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{2}{7}}_{(\text{검, 흰, 검})}+\underbrace{\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{4}{7}}_{(\text{검, 검, 흰})}=\frac{1}{7}$$

또 $b=3a=6$에서 남은 2번 모두 노란 공이 나와야 하므로

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

따라서 $3a=b$일 확률은

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{105}$$ ⋯ ❸

(iv) $a\geq3$일 때,

$b\geq9$인데 b의 최댓값은 7이므로 $3a=b$일 확률은 0이다.

검은 공 3개, 노란 공 2개가 나온 경우

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{14}+\frac{1}{105}=\frac{17}{210}$$ ⋯ ❹

답 $\frac{17}{210}$

채점 기준	비율
❶ $a=0$일 때 $3a=b$일 확률을 구할 수 있다.	20 %
❷ $a=1$일 때 $3a=b$일 확률을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a=2$일 때 $3a=b$일 확률을 구할 수 있다.	30 %
❹ $3a=b$일 확률을 구할 수 있다.	20 %

0440 전략 $f(a)=7$인 경우와 $f(b)f(c)=9$인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 $\{f(a)-7\}\{f(b)f(c)-9\}=0$이려면

$f(a)=7$ 또는 $f(b)f(c)=9$

이어야 한다.

$f(a)=7$인 사건을 A, $f(b)f(c)=9$인 사건을 B라 하면

$f(1)=f(5)=f(9)=3$, $f(2)=f(6)=f(10)=9$,

$f(3)=f(7)=7$, $f(4)=f(8)=1$

이므로

(i) $f(a)=7$일 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$ ⋯ ❶

(ii) $f(b)f(c)=9$일 확률은

ⓘ $f(b)=1$, $f(c)=9$일 때,

$$\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{50}$$

ⓘⓘ $f(b)=3$, $f(c)=3$일 때,

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$$

ⓘⓘⓘ $f(b)=9$, $f(c)=1$일 때,

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{3}{50}$$

이상에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{50}+\frac{9}{100}+\frac{3}{50}=\frac{21}{100}$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{5}+\frac{21}{100}-\frac{1}{5}\cdot\frac{21}{100}\\&=\frac{46}{125}\end{aligned}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{46}{125}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\mathrm{P}(B)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\mathrm{P}(A\cup B)$를 구할 수 있다.	30 %

0441 전략 A가 7번째, 8번째, 9번째 게임에서 이기는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 7번째 게임에서 A가 상금을 모두 갖는 경우

A가 6번째, 7번째 게임에서 모두 이겨야 하므로 그 확률은

$${}_2\mathrm{C}_2\Big(\frac{1}{2}\Big)^2=\frac{1}{4}$$ ⋯ ❶

(ii) 8번째 게임에서 A가 상금을 모두 갖는 경우

A가 6번째, 7번째 게임 중에서 1번 이기고 8번째 게임에서 이겨야 하므로 그 확률은

$${}_2\mathrm{C}_1\Big(\frac{1}{2}\Big)^1\Big(\frac{1}{2}\Big)^1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$ ⋯ ❷

(iii) 9번째 게임에서 A가 상금을 모두 갖는 경우

A가 6번째, 7번째, 8번째 게임 중에서 1번 이기고 9번째 게임에서 이겨야 하므로 그 확률은

$${}_3\mathrm{C}_1\Big(\frac{1}{2}\Big)^1\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$ ⋯ ❸

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}$$ ⋯ ❹

답 $\frac{11}{16}$

채점 기준	비율
❶ 7번째 게임에서 A가 상금을 모두 가질 확률을 구할 수 있다.	30 %
❷ 8번째 게임에서 A가 상금을 모두 가질 확률을 구할 수 있다.	30 %
❸ 9번째 게임에서 A가 상금을 모두 가질 확률을 구할 수 있다.	30 %
❹ A가 상금을 모두 가질 확률을 구할 수 있다.	10 %

0442 전략 주사위를 던져 나온 눈의 수가 같을 때와 다를 때의 경우로 나누어 생각한다.

풀이 동전을 2번 던지려면 서로 다른 2개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 같아야 한다.

서로 다른 2개의 주사위를 던져서 나온 두 눈의 수가 같은 사건을 A, 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같은 사건을 E라 하자. ⋯ ❶

(i) 두 눈의 수가 같은 경우

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수가 같을 확률은

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

이때 한 개의 동전을 2번 던져서 앞면과 뒷면이 각각 1번씩 나오면 되므로

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{1}{6}\cdot{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{12}$$ ⋯ ❷

(ii) 두 눈의 수가 다른 경우

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수가 다를 확률은

$$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

이때 한 개의 동전을 4번 던져서 앞면과 뒷면이 각각 2번씩 나오면 되므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{5}{6}\cdot{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{5}{16}}=\frac{4}{19}$$ ⋯ ❹

답 $\frac{4}{19}$

채점 기준	비율
❶ 사건 A, E를 정할 수 있다.	20 %
❷ $\mathrm{P}(A\cap E)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\mathrm{P}(A^C\cap E)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $\mathrm{P}(A|E)$를 구할 수 있다.	20 %

05 확률변수와 확률분포

0443 답 1, 2, 3, 4, 5, 6

0444 답 0, 1, 2, 3, 4, 5

0445 답 0, 1, 2, 3

0446 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

$X=0$인 경우는 TTT의 1가지

$\therefore \mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8}$

$X=1$인 경우는 HTT, THT, TTH의 3가지

$\therefore \mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{8}$

$X=2$인 경우는 HHT, HTH, THH의 3가지

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{8}$

$X=3$인 경우는 HHH의 1가지

$\therefore \mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

답 풀이 참조

0447 (1) X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2

6개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3$

꺼낸 3개의 공 중에서 검은 공이 x개 포함되는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_x\cdot{}_4\mathrm{C}_{3-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2)$

따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_2\mathrm{C}_x\cdot{}_4\mathrm{C}_{3-x}}{{}_6\mathrm{C}_3}\ (x=0,\ 1,\ 2)$$

(2) $\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{5}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

답 풀이 참조

0448 (1) 확률의 총합은 1이므로 $b=1$

또 $\frac{1}{10}+a+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=1$이므로 $a=\frac{3}{10}$

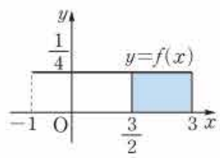
(2) $P(X=0 \text{ 또는 } X=2)=P(X=0)+P(X=2)$
$$=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$$
(3) $P(-1\le X\le 1)=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)$
$$=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$$
답 (1) $a=\frac{3}{10}$, $b=1$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{4}{5}$

다른 풀이 (3) $P(-1\le X\le 1)=1-P(X=2)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

0449 연속확률변수는 어떤 범위에 속하는 모든 실수의 값을 가질 수 있으므로 보기에서 연속확률변수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㅁ

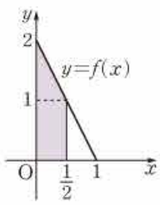
0450 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $P\left(X\ge\frac{3}{2}\right)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$P\left(X\ge\frac{3}{2}\right)=\left(3-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

0451 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $P\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

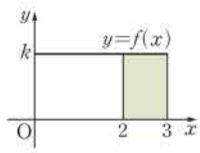


$$P\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot(2+1)\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

다른 풀이 $P\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)=1-P\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)$
$$=1-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=\frac{3}{4}$$

0452 (1) $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

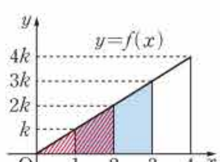


$3\cdot k=1$　　$\therefore k=\frac{1}{3}$

(2) $P(X\ge 2)$는 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로
$$P(X\ge 2)=(3-2)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$

0453 (1) $f(x)=kx$라 하면 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4k=1$　　$\therefore k=\frac{1}{8}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{8}x\ (0\le x\le 4)$

(2) $P(1\le X\le 3)$은 앞의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로
$$P(1\le X\le 3)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)\cdot 2=\frac{1}{2}$$
(3) $P(X<2)$는 앞의 그림의 빗금 친 부분의 넓이와 같으므로
$$P(X<2)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

답 (1) $f(x)=\frac{1}{8}x\ (0\le x\le 4)$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$

0454 (1) $E(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

(2) $E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{2}$이므로
$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{15}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$
(3) $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{5}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

0455 (1) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 $\underbrace{\text{6의 약수의 눈}}_{1,\,2,\,3,\,6}$이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이므로

$P(X=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$,

$P(X=1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$,

$P(X=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

(2) $E(X)=0\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{9}+1^2\cdot\frac{4}{9}+2^2\cdot\frac{4}{9}=\frac{20}{9}$

이므로
$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{20}{9}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$
$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

답 풀이 참조

0456 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

(1) $E(X)=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{2}{5}=3$

(2) $V(X)=\underbrace{1^2\cdot\frac{1}{10}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{3}{10}+4^2\cdot\frac{2}{5}}_{E(X^2)}-3^2=1$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=1$

답 (1) 3 (2) 1 (3) 1

다른 풀이 (2) $V(X)=(1-3)^2\cdot\frac{1}{10}+(2-3)^2\cdot\frac{1}{5}+(3-3)^2\cdot\frac{3}{10}$
$+(4-3)^2\cdot\frac{2}{5}$
$=1$

0457 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 200이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$P(X=100)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$P(X=200)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	200	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore E(X)=0\cdot\frac{1}{4}+100\cdot\frac{1}{2}+200\cdot\frac{1}{4}=100$

따라서 구하는 기댓값은 100원이다. 답 100원

0458 $E(-X)=-E(X)=-1\cdot10=-10$
$V(-X)=(-1)^2V(X)=1\cdot9=9$
$\sigma(-X)=|-1|\underline{\sigma(X)}=1\cdot3=3$ — $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{9}=3$

답 평균: -10, 분산: 9, 표준편차: 3

0459 $E(3X-1)=3E(X)-1=3\cdot10-1=29$
$V(3X-1)=3^2V(X)=9\cdot9=81$
$\sigma(3X-1)=|3|\sigma(X)=3\cdot3=9$

답 평균: 29, 분산: 81, 표준편차: 9

0460 $E\left(\frac{1}{2}X+6\right)=\frac{1}{2}E(X)+6=\frac{1}{2}\cdot10+6=11$
$V\left(\frac{1}{2}X+6\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2V(X)=\frac{1}{4}\cdot9=\frac{9}{4}$
$\sigma\left(\frac{1}{2}X+6\right)=\left|\frac{1}{2}\right|\sigma(X)=\frac{1}{2}\cdot3=\frac{3}{2}$

답 평균: 11, 분산: $\frac{9}{4}$, 표준편차: $\frac{3}{2}$

0461 $E(-2X+7)=-2E(X)+7=-2\cdot10+7=-13$
$V(-2X+7)=(-2)^2V(X)=4\cdot9=36$
$\sigma(-2X+7)=|-2|\sigma(X)=2\cdot3=6$

답 평균: -13, 분산: 36, 표준편차: 6

0462 $E(-4X+1)=-4E(X)+1=-4\cdot5+1=-19$

답 -19

0463 $V\left(\frac{X-3}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2V(X)=\frac{1}{4}\cdot2=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0464 $\sigma(-5X)=|-5|\sigma(X)=5\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ 답 $5\sqrt{2}$

0465 $E(X)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$,
$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{23}{6}$
이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
$=\frac{23}{6}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{19}{12}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{19}{12}}=\frac{\sqrt{57}}{6}$

(1) $E(2X+3)=2E(X)+3=2\cdot\frac{3}{2}+3=6$

(2) $V(6X-2)=6^2V(X)=36\cdot\frac{19}{12}=57$

(3) $\sigma(-6X+5)=|-6|\sigma(X)=6\cdot\frac{\sqrt{57}}{6}=\sqrt{57}$

답 (1) 6 (2) 57 (3) $\sqrt{57}$

유형 **01** **확률질량함수의 성질; $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$** 본책 78쪽

이산확률변수 X의 확률질량함수 $P(X=x_i)=p_i$ ($i=1, 2, \cdots, n$)에 대하여
$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

0466 확률의 총합은 1이므로
$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$
$k\cdot1^2+k\cdot2^2+k\cdot3^2=1$, $14k=1$
$\therefore k=\frac{1}{14}$ 답 ④

0467 확률의 총합은 1이므로
$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}+a^2=1$, $2a^2+a-1=0$
$(a+1)(2a-1)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{2}$
이때 $0\le P(X=x)\le1$이므로
$a=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

참고 $a=-1$이면 $P(X=0)=-\frac{1}{2}<0$이다.

0468 확률의 총합은 1이므로
$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=100)=1$
$\frac{a}{1\cdot2}+\frac{a}{2\cdot3}+\cdots+\frac{a}{100\cdot101}=1$
$a\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)\right\}=1$
$a\left(1-\frac{1}{101}\right)=1$, $\frac{100}{101}a=1$
$\therefore a=\frac{101}{100}$ 답 ⑤

SSEN 특강 부분분수로의 변형

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\ne B$)

유형 02 확률질량함수의 성질 ; $P(x_i \le X \le x_j) = p_i + p_{i+1} + \cdots + p_j$ 본책 78쪽

이산확률변수 X의 확률질량함수 $P(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$에 대하여

① $P(X=x_i$ 또는 $X=x_j)=P(X=x_i)+P(X=x_j)$
$=p_i+p_j$ (단, $i \ne j$)

② $P(x_i \le X \le x_j)=p_i+p_{i+1}+\cdots+p_j$ (단, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ i \le j$)

0469 확률의 총합은 1이므로

$4a+3a+a=1, \quad 8a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{8}$

$\therefore P(X^2=1)=P(X=-1$ 또는 $X=1)$
$=P(X=-1)+P(X=1)$
$=4a+a=5a$
$=5\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

답 ④

0470 확률의 총합은 1이므로

$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=1$

$\left(k-\frac{2}{8}\right)+\left(k-\frac{1}{8}\right)+k+\left(k-\frac{1}{8}\right)=1$

$4k-\frac{1}{2}=1, \quad 4k=\frac{3}{2} \quad \therefore k=\frac{3}{8}$

따라서

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{3}{8}+\frac{x}{8} & (x=-2,\ -1)\\ \frac{3}{8}-\frac{x}{8} & (x=0,\ 1)\end{cases}$$

이므로

$P(X=-1$ 또는 $X=0)=P(X=-1)+P(X=0)$
$=\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\right)+\frac{3}{8}$
$=\frac{5}{8}$

답 $\frac{5}{8}$

0471 확률의 총합은 1이므로

$a+b+3b+2a+\frac{1}{4}=1$

$\therefore 3a+4b=\frac{3}{4}$ ...... ㉠

$P(X=2)=\frac{3}{4}P(X=4)$에서

$b=\frac{3}{4}\cdot 2a \quad \therefore b=\frac{3}{2}a$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{12},\ b=\frac{1}{8}$ ⋯ ❶

$\therefore P(2 \le X \le 4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$
$=b+3b+2a=2a+4b$
$=2\cdot\frac{1}{12}+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{2}{3}$ ⋯ ❷

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $P(2 \le X \le 4)$를 구할 수 있다.	40 %

0472 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=9)=1$

$P(X=1)+2P(X=1)+\cdots+9P(X=1)=1$

$45P(X=1)=1 \quad \therefore P(X=1)=\frac{1}{45}$

따라서 $P(X=k)=\frac{k}{45}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9)$이므로

$P(3 \le X \le 7)$
$=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)$
$=\frac{3}{45}+\frac{4}{45}+\frac{5}{45}+\frac{6}{45}+\frac{7}{45}$
$=\frac{5}{9}$

답 $\frac{5}{9}$

유형 03 이산확률변수의 확률 본책 79쪽

이산확률변수 X에 대하여 $P(a \le X \le b)$는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $a \le X \le b$를 만족시키는 X의 값을 구한다.
(ii) 확률변수 X가 (i)의 각 값을 가질 확률을 구하여 모두 더한다.

0473 정사면체를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$4\cdot 4=16$

바닥에 놓인 면에 적힌 두 수를 $a,\ b$라 하면 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 두 수의 평균이

2인 경우는 $(0,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 0)$의 3가지,
4인 경우는 $(2,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 2)$의 3가지

이므로 그 확률은 각각

$P(X=2)=\frac{3}{16},\ P(X=4)=\frac{3}{16}$

$\therefore P(X=2$ 또는 $X=4)=P(X=2)+P(X=4)$
$=\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}$

답 ⑤

참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

0474 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{14}$,

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_5C_1}{{}_8C_2}=\frac{15}{28}$,

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_5C_0}{{}_8C_2}=\frac{3}{28}$

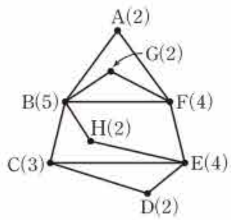
이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

$\therefore P(X \ge 1)=P(X=1)+P(X=2)$
$=\frac{15}{28}+\frac{3}{28}=\frac{9}{14}$

답 ③

0475 확률변수 X는 택한 지점에 연결된 도로의 개수이므로 각 지점에 연결된 도로의 개수를 표시하면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이다.

한편 $2X-1<7$에서

$2X<8 \quad \therefore X<4$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(2X-1<7)=\mathrm{P}(X<4)$$
$$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$이므로 ㉠에서

$$\mathrm{P}(2X-1<7)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

답 $\frac{5}{8}$

참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

0476 (1) 10개의 제품 중에서 3개의 제품을 뽑는 경우의 수는

$_{10}\mathrm{C}_3$

뽑힌 3개의 제품 중에서 불량품이 x개인 경우의 수는

$_4\mathrm{C}_x \cdot {_6\mathrm{C}_{3-x}}$ $(x=0, 1, 2, 3)$

따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{_4\mathrm{C}_x \cdot {_6\mathrm{C}_{3-x}}}{_{10}\mathrm{C}_3}\ (x=0, 1, 2, 3) \quad \cdots ❶$$

(2) 불량품이 2개 이하로 나올 확률은

$$\mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$$
$$=1-\mathrm{P}(X=3)$$

이때 $\mathrm{P}(X=3)=\frac{_4\mathrm{C}_3 \cdot {_6\mathrm{C}_0}}{_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30}$이므로 구하는 확률은

$$1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30} \quad \cdots ❷$$

답 (1) $\mathrm{P}(X=x)=\frac{_4\mathrm{C}_x \cdot {_6\mathrm{C}_{3-x}}}{_{10}\mathrm{C}_3}$ $(x=0, 1, 2, 3)$ (2) $\frac{29}{30}$

채점 기준	비율
❶ X의 확률질량함수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 불량품이 2개 이하로 나올 확률을 구할 수 있다.	50 %

참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

0477 $X^2-3X<0$에서

$X(X-3)<0 \quad \therefore 0<X<3$

이때 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이므로

$$\mathrm{P}(X^2-3X<0)=\mathrm{P}(0<X<3)$$
$$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하면 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수의 차가

1인 경우는 (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)의 4가지,

2인 경우는 (1, 3), (2, 4), (3, 5)의 3가지

이므로 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5},$$
$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$

따라서 ㉠에서

$$\mathrm{P}(X^2-3X<0)=\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

답 ⑤

참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

0478 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{_3\mathrm{C}_3 \cdot {_7\mathrm{C}_2}}{_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{1}{12},$$
$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{_3\mathrm{C}_2 \cdot {_7\mathrm{C}_3}}{_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{5}{12},$$
$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{_3\mathrm{C}_1 \cdot {_7\mathrm{C}_4}}{_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{5}{12},$$
$$\mathrm{P}(X=5)=\frac{_3\mathrm{C}_0 \cdot {_7\mathrm{C}_5}}{_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{1}{12}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

따라서

$$\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)=\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\quad \mathrm{P}(X\ge 4)=\frac{1}{2}$

$\therefore a=4$

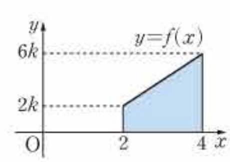
답 4

유형 04 확률밀도함수의 성질

본책 80쪽

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$ $(\alpha\le x\le\beta)$에 미정계수가 있는 경우에는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1임을 이용하여 미정계수를 구한다.

0479 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\cdot(2k+6k)\cdot 2=1$$

$8k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{8}$

답 $\frac{1}{8}$

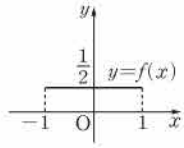
0480 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot k=1$

$2k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

답 ④

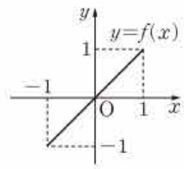
0481 ㄱ. $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



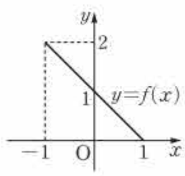
$2\cdot\frac{1}{2}=1$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수이다.

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $-1\le x<0$에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.



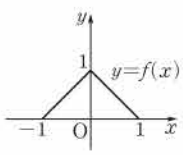
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=-1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2\neq 1$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

ㄹ. $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



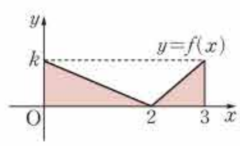
$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수이다.

이상에서 확률밀도함수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

0482 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



$y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot k+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot k=1$

$\frac{3}{2}k=1 \qquad \therefore k=\frac{2}{3}$ ⋯ ❷

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	60 %

유형 05 연속확률변수의 확률

본책 80쪽

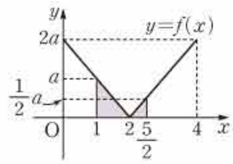
연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$ $(\alpha\le x\le\beta)$에 대하여

① $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

② $\mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}(\alpha\le X\le b)-\mathrm{P}(\alpha\le X\le a)$

(단, $\alpha\le a\le b\le\beta$)

0483 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2a+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2a=1$

$4a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

이때 $\mathrm{P}\left(1\le X\le\frac{5}{2}\right)$는 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}\left(1\le X\le\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{32}$

답 $\frac{5}{32}$

0484 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

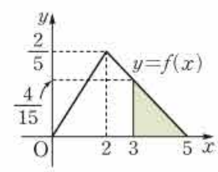
$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot k=1 \qquad \therefore k=\frac{2}{5}$

$2\le x\le 5$에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(2,\ \frac{2}{5}\right)$, $(5,\ 0)$을 지나는 직선이므로 그 직선의 방정식은

$y=\frac{0-\frac{2}{5}}{5-2}(x-5), \qquad y=-\frac{2}{15}x+\frac{2}{3}$

$\therefore f(x)=-\frac{2}{15}x+\frac{2}{3}\ (2\le x\le 5)$

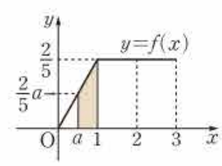
따라서 $f(3)=\frac{4}{15}$이고 $\mathrm{P}(X\ge 3)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(X\ge 3)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{15}=\frac{4}{15}$

답 ②

0485 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\mathrm{P}(1\le X\le 2)=1\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(a\le X\le 2)=\frac{11}{20}$에서 $0\le a<1$이고

$\mathrm{P}(a\le X\le 1)=\frac{11}{20}-\frac{2}{5}=\frac{3}{20}$ ⋯ ❶

이때 $\mathrm{P}(a\le X\le 1)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}a+\frac{2}{5}\right)\cdot(1-a)=\frac{3}{20}$

$\frac{1}{5}(1-a^2)=\frac{3}{20}, \qquad 1-a^2=\frac{3}{4}$

$a^2=\frac{1}{4} \qquad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because 0\le a<1)$ ⋯ ❷

답 $\frac{1}{2}$

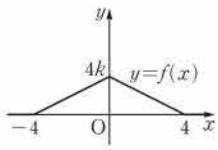
채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(a\le X\le 1)$을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %

0486 $f(3-x)=f(3+x)$가 성립하므로 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

$\therefore \mathrm{P}(3\le X\le 4)=\mathrm{P}(2\le X\le 3)$
$=\mathrm{P}(0\le X\le 3)-\mathrm{P}(0\le X\le 2)$
$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

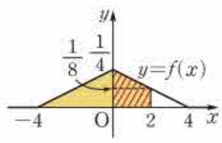
참고 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=6$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로
$\mathrm{P}(0\le X\le 6)=1$
이때 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\mathrm{P}(3\le X\le 6)=\frac{1}{2}$

0487 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4k=1$
$\therefore k=\frac{1}{16}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$에서
$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(X\le 2)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(X\le 2)$
$=1-\mathrm{P}(2\le X\le 4)$
$=1-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

또 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(0\le X\le 2)$는 위의 그림의 빗금 친 부분의 넓이와 같으므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(0\le X\le 2)$
$=\mathrm{P}(0\le X\le 4)-\mathrm{P}(2\le X\le 4)$
$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}}=\frac{3}{7}$ 답 ③

다른 풀이 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(X\le 2)$
$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\cdot 2$
$=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$

유형 06 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차 ; 확률분포가 주어진 경우

본책 81쪽

이산확률변수 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$에 대하여
① 평균: $\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$
② 분산: $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
③ 표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

0488 확률의 총합은 1이므로
$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+a+\frac{1}{4}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$
$\therefore \mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}=\frac{13}{8}$
$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{29}{8}$이므로
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{29}{8}-\left(\frac{13}{8}\right)^2=\frac{63}{64}$
$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{63}{64}}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$
따라서 X의 평균은 $\frac{13}{8}$, 표준편차는 $\frac{3\sqrt{7}}{8}$이다.

답 평균: $\frac{13}{8}$, 표준편차: $\frac{3\sqrt{7}}{8}$

0489 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여
$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{7}+2\cdot\frac{3}{14}+3\cdot\frac{2}{7}+4\cdot\frac{5}{14}=\frac{20}{7}$,
$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{7}+2^2\cdot\frac{3}{14}+3^2\cdot\frac{2}{7}+4^2\cdot\frac{5}{14}=\frac{65}{7}$
$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{65}{7}-\left(\frac{20}{7}\right)^2=\frac{55}{49}$

답 ④

0490 (1) 확률의 총합은 1이므로
$\frac{1}{3}+a+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{2}{3}$ ······ ㉠
$\mathrm{E}(X)=\frac{5}{6}$이므로
$0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot a+2\cdot b=\frac{5}{6}$
$\therefore a+2b=\frac{5}{6}$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{6}$ ··· ❶

(2) $\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$이므로
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{7}{6}-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{17}{36}$
$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{17}{36}}=\frac{\sqrt{17}}{6}$ ··· ❷

답 (1) $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{6}$ (2) $\frac{\sqrt{17}}{6}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ X의 표준편차를 구할 수 있다.	50 %

0491 확률의 총합은 1이므로
$a+b+c=1$ ······ ㉠
$\mathrm{E}(X)=1$이므로 $0\cdot a+1\cdot b+2\cdot c=1$
$\therefore b+2c=1$ ······ ㉡
$\mathrm{V}(X)=\frac{1}{2}$이므로 $\underbrace{0^2\cdot a+1^2\cdot b+2^2\cdot c}_{\mathrm{E}(X^2)}-1^2=\frac{1}{2}$
$\therefore b+4c=\frac{3}{2}$ ······ ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{4}$

$b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=\frac{1}{4}$

$\therefore\ abc=\frac{1}{32}$ 답 ①

0492 확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{1}{3}+b+\frac{1}{6}=1 \qquad \therefore\ a+b=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\begin{aligned}E(X)&=(-1)\cdot a+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot b+2\cdot\frac{1}{6}\\&=-a+b+\frac{1}{3}\\&=-a+\left(\frac{1}{2}-a\right)+\frac{1}{3}\ (\because ㉠)\\&=-2a+\frac{5}{6},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=(-1)^2\cdot a+0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot b+2^2\cdot\frac{1}{6}\\&=a+b+\frac{2}{3}\\&=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ (\because ㉠)\\&=\frac{7}{6}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}V(X)&=E(X^2)-\{E(X)\}^2\\&=\frac{7}{6}-\left(-2a+\frac{5}{6}\right)^2\\&=-4\left(a-\frac{5}{12}\right)^2+\frac{7}{6}\ \left(0\le a\le\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$b=\frac{1}{2}-a\ge 0$에서 $a\le\frac{1}{2}$

따라서 $V(X)$는 $a=\frac{5}{12}$일 때 최댓값 $\frac{7}{6}$을 갖는다. 답 ④

유형 07 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차 ; 확률분포가 주어지지 않은 경우 본책 82쪽

이산확률변수 X의 확률분포가 주어지지 않을 때, 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 확률변수 X가 가질 수 있는 모든 값에 대하여 그 값을 가질 확률을 각각 구한다.

(ii) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

(iii) 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.

0493 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35},\ P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_4C_2}{{}_7C_3}=\frac{18}{35},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_4C_1}{{}_7C_3}=\frac{12}{35},\ P(X=3)=\frac{{}_3C_3\cdot{}_4C_0}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{4}{35}+1\cdot\frac{18}{35}+2\cdot\frac{12}{35}+3\cdot\frac{1}{35}=\frac{9}{7},$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{4}{35}+1^2\cdot\frac{18}{35}+2^2\cdot\frac{12}{35}+3^2\cdot\frac{1}{35}=\frac{15}{7}$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{15}{7}-\left(\frac{9}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$$ 답 $\frac{24}{49}$

0494 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{15},$$

$$P(X=1)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5},$$

$$P(X=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{15}+1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{8}{15}=\frac{22}{15}$$ 답 ③

0495 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_0}{2^4}=\frac{1}{16},\ P(X=1)=\frac{{}_4C_1}{2^4}=\frac{1}{4},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2}{2^4}=\frac{3}{8},\ P(X=3)=\frac{{}_4C_3}{2^4}=\frac{1}{4},$$

$$P(X=4)=\frac{{}_4C_4}{2^4}=\frac{1}{16}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{16}=2,$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{16}+1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{16}=5$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$$ 답 ②

0496 뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하면 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수 중 큰 수가

1인 경우는 (0, 1)의 1가지,

2인 경우는 (0, 2), (1, 2)의 2가지,

3인 경우는 (0, 3), (1, 3), (2, 3)의 3가지

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=1)=\frac{1}{{}_4C_2}=\frac{1}{6},\ P(X=2)=\frac{2}{{}_4C_2}=\frac{1}{3},$$

$$P(X=3)=\frac{3}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

··· ❶

확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{3},$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{2}=6$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=6-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

··· ❷

답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

채점 기준	비율
❶ X의 확률분포를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\sigma(X)$를 구할 수 있다.	50 %

0497 두 눈의 수의 차는 다음 표와 같다.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9},\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},$$

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},\ \mathrm{P}(X=5)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{5}{18}+2\cdot\frac{2}{9}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{9}+5\cdot\frac{1}{18}$$

$$=\frac{35}{18}$$

답 ③

유형 08 기댓값 본책 83쪽

이산확률변수 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$에 대하여 X의 기댓값

➡ $\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$

0498 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고, 100원짜리 동전 1개와 50원짜리 동전 2개를 동시에 던져서 나오는 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

100원	50원	50원	받는 금액(원)
H	H	H	200
H	H	T	150
H	T	H	150
H	T	T	100
T	H	H	100
T	H	T	50
T	T	H	50
T	T	T	0

한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 50, 100, 150, 200이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8},\ \mathrm{P}(X=50)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(X=100)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(X=150)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(X=200)=\frac{1}{8}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	50	100	150	200	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{8}+50\cdot\frac{1}{4}+100\cdot\frac{1}{4}+150\cdot\frac{1}{4}+200\cdot\frac{1}{8}$$

$$=100$$

이므로 구하는 기댓값은 100원이다.

답 ②

0499 한 번의 게임에서 받을 수 있는 상금을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 700, 1400, 1750이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=700)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7},$$

$$\mathrm{P}(X=1400)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7},$$

$$\mathrm{P}(X=1750)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	700	1400	1750	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

··· ❶

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=700\cdot\frac{2}{7}+1400\cdot\frac{1}{7}+1750\cdot\frac{4}{7}$$

$$=1400$$

이므로 구하는 기댓값은 1400원이다. ··· ❷

답 1400원

채점 기준	비율
❶ 상금을 X원이라 하고 X의 확률분포를 구할 수 있다.	50 %
❷ 상금의 기댓값을 구할 수 있다.	50 %

0500 카드의 총개수는

$1+2+3+\cdots+10=55$

한 장의 카드를 꺼낼 때 나오는 숫자를 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	$\cdots$	10	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{3}{55}$	$\cdots$	$\frac{10}{55}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=1\cdot\frac{1}{55}+2\cdot\frac{2}{55}+3\cdot\frac{3}{55}+\cdots+10\cdot\frac{10}{55}\\&=\frac{1}{55}(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)\\&=\frac{1}{55}\cdot385=7\end{aligned}$$

이므로 구하는 기댓값은 7이다. 답 ④

유형 09 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 ; 평균, 분산이 주어진 경우 본책 83쪽

확률변수 X와 두 상수 a, b $(a\neq0)$에 대하여
① $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$
② $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$
③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

0501 $\mathrm{E}(X)=-1$, $\mathrm{V}(X)=2$이므로

$\mathrm{E}(Y)=1$에서 $\quad \mathrm{E}(aX+b)=1$

$a\mathrm{E}(X)+b=1 \quad \therefore -a+b=1$ …… ㉠

$\mathrm{V}(Y)=2$에서 $\quad \mathrm{V}(aX+b)=2$

$a^2\mathrm{V}(X)=2, \quad 2a^2=2, \quad a^2=1$

$\therefore a=1 \ (\because a>0)$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=2$

$\therefore a+b=3$ 답 ②

0502 $\mathrm{E}(3X+4)=13$에서 $\quad 3\mathrm{E}(X)+4=13$

$\therefore \mathrm{E}(X)=3$

$\mathrm{V}(3X)=18$에서 $\quad 3^2\mathrm{V}(X)=18$

$\therefore \mathrm{V}(X)=2$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$2=\mathrm{E}(X^2)-3^2 \quad \therefore \mathrm{E}(X^2)=11$ 답 11

0503 $\mathrm{E}(Y)=\frac{3}{2}$에서 $\quad \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}X-1\right)=\frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)-1=\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2}\mathrm{E}(X)=\frac{5}{2}$

$\therefore \mathrm{E}(X)=5$

또 $\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=\frac{25}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=4$이므로

$\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X-1\right)=4, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{V}(X)=4$

$\therefore \mathrm{V}(X)=16$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{16}=4$이므로

$\frac{\sigma(X)}{\mathrm{E}(X)}=\frac{4}{5}$ 답 $\frac{4}{5}$

0504 $\mathrm{E}(X)=960$, $\sigma(X)=80$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\mathrm{E}\left(\frac{5}{4}X+240\right)=\frac{5}{4}\mathrm{E}(X)+240\\&=\frac{5}{4}\cdot960+240=1440\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(Y)&=\sigma\left(\frac{5}{4}X+240\right)=\frac{5}{4}\sigma(X)\\&=\frac{5}{4}\cdot80=100\end{aligned}$$

따라서 확률변수 Y의 평균은 1440원, 표준편차는 100원이다.

답 평균: 1440원, 표준편차: 100원

0505 $\mathrm{E}(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$이므로 표준 점수 T의 평균과 표준편차는

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T)&=\mathrm{E}\left(10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50\right)\\&=\frac{10}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{10m}{\sigma}+50\\&=\frac{10m}{\sigma}-\frac{10m}{\sigma}+50=50\end{aligned}$$ … ❶

$$\begin{aligned}\sigma(T)&=\sigma\left(10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50\right)=\left|\frac{10}{\sigma}\right|\sigma(X)\\&=\frac{10}{\sigma}\cdot\sigma=10\end{aligned}$$ … ❷

답 평균: 50점, 표준편차: 10점

채점 기준	비율
❶ 표준 점수 T의 평균을 구할 수 있다.	50 %
❷ 표준 점수 T의 표준편차를 구할 수 있다.	50 %

0506 $\mathrm{E}(X)=a$, $\mathrm{E}(X^2)=a+2$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=a+2-a^2$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{V}(2X+1)&=2^2\mathrm{V}(X)=4(a+2-a^2)\\&=4\left\{-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right\}\\&=-4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+9\end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{V}(2X+1)$은 $a=\frac{1}{2}$일 때 최댓값이 9이므로 $\sigma(2X+1)$의 최댓값은 $\quad \sqrt{9}=3$ 답 3

유형 10 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 ; 확률분포가 주어진 경우 본책 84쪽

확률변수 X의 확률분포를 이용하여 X의 평균, 분산, 표준편차를 구한 후 다음을 이용한다. (단, a, b는 상수이고, $a\neq0$이다.)
$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$, $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$,
$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

0507 확률의 총합은 1이므로

$2a+a+a=1,\quad 4a=1\quad \therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=(-1)\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$,

$E(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{1}{2}+0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{11}{16}}=\frac{\sqrt{11}}{4}$이므로

$\sigma(4X+5)=4\sigma(X)=4\cdot\frac{\sqrt{11}}{4}=\sqrt{11}$ 답 ①

0508 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=1$

$k+\frac{3}{2}k+2k+\frac{5}{2}k+3k=1$

$10k=1\quad \therefore k=\frac{1}{10}$

$\therefore P(X=x)=\frac{x+1}{20}\ (x=1, 2, 3, 4, 5)$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{3}{20}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{3}{10}=\frac{7}{2}$

이므로

$E(6X-1)=6E(X)-1=6\cdot\frac{7}{2}-1=20$ 답 20

0509 (1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+a+2a=1,\quad 3a=\frac{1}{2}\quad \therefore a=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{25}{3}$

(2) $E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{25}{3}-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{11}{9}$

이때 $a=\frac{1}{6}$이므로

$V\left(\frac{1}{a}X+a\right)=V\left(6X+\frac{1}{6}\right)=6^2V(X)=36\cdot\frac{11}{9}=44$

답 (1) $\frac{25}{3}$ (2) 44

0510 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{10}=1$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{2}{5}+1^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{1}{10}=2$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2-1^2=1$

$E(Y)=3$에서 $\quad E(aX+b)=3$

$aE(X)+b=3\quad \therefore a+b=3$ …… ㉠

$V(Y)=4$에서 $\quad V(aX+b)=4$

$a^2V(X)=4,\quad a^2=4\quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=1$

$\therefore a^2+b^2=5$ 답 5

유형 **11** **확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 ; 확률분포가 주어지지 않은 경우** 본책 85쪽

확률분포가 주어지지 않을 때, 확률변수 $aX+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 확률변수 X가 가질 수 있는 모든 값에 대하여 그 값을 가질 확률을 각각 구한다.

(ii) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

(iii) 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.

(iv) $E(aX+b)=aE(X)+b$, $V(aX+b)=a^2V(X)$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$임을 이용한다.

0511 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_2C_0}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$,

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$,

$P(X=2)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{3}{10}+1^2\cdot\frac{3}{5}+2^2\cdot\frac{1}{10}=1$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\therefore V(5X+3)=5^2V(X)=25\cdot\frac{9}{25}=9$ 답 ⑤

0512 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 동전을 세 번 던졌을 때 받을 수 있는 점수는

HHH일 때, $\quad 3\cdot 3=9$

HHT, HTH, THH일 때, $\quad 3\cdot 2+(-2)\cdot 1=4$

HTT, THT, TTH일 때, $\quad 3\cdot 1+(-2)\cdot 2=-1$

TTT일 때, $\quad (-2)\cdot 3=-6$

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 9, 4, -1, -6이고, 그 확률은 각각 $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	9	4	-1	-6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=9\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{3}{8}+(-1)\cdot\frac{3}{8}+(-6)\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2},$$

$$E(X^2)=9^2\cdot\frac{1}{8}+4^2\cdot\frac{3}{8}+(-1)^2\cdot\frac{3}{8}+(-6)^2\cdot\frac{1}{8}=21$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=21-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{75}{4}$$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\sigma(2X)=2\sigma(X)=2\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$$ 답 ②

0513 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$이다.
$X=1$일 때, 두 꼭짓점은 모서리의 양 끝 점이므로

$$P(X=1)=\frac{12}{{}_8C_2}=\frac{3}{7}$$

$X=\sqrt{2}$일 때, 두 꼭짓점은 각 면의 대각선의 양 끝 점이므로

$$P(X=\sqrt{2})=\frac{6\cdot 2}{{}_8C_2}=\frac{3}{7}$$

$X=\sqrt{3}$일 때, 두 꼭짓점은 정육면체의 대각선의 양 끝 점이므로

$$P(X=\sqrt{3})=\frac{4}{{}_8C_2}=\frac{1}{7}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{3}{7}+\sqrt{2}\cdot\frac{3}{7}+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{7}$$

이므로

$$E(7X-3)=7E(X)-3=7\cdot\frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{7}-3$$
$$=3\sqrt{2}+\sqrt{3}$$ 답 $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$

0514 이차방정식 $x^2-2ax+b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-b^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

$X=0$이려면 $\frac{D}{4}=(a+b)(a-b)<0$이어야 하므로

$a-b<0$ ($\because a+b>0$)

$\therefore a<b$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3),
(2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6),
(4, 5), (4, 6), (5, 6)

의 15개이므로

$$P(X=0)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

$X=1$이려면 $\frac{D}{4}=(a+b)(a-b)=0$이어야 하므로

$a-b=0$ ($\because a+b>0$)

$\therefore a=b$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)

의 6개이므로

$$P(X=1)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$X=2$이려면 $\frac{D}{4}=(a+b)(a-b)>0$이어야 하므로

$a-b>0$ ($\because a+b>0$)

$\therefore a>b$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3),
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2),
(6, 3), (6, 4), (6, 5)

의 15개이므로

$$P(X=2)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	1

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{5}{12}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{5}{12}=1$$

이므로

$$E(3X+2)=3E(X)+2=3\cdot 1+2=5$$ 답 ⑤

0515 $X=1$이려면 맨 앞에 여학생 2명 중에서 1명을 세우고, 그 뒤에 나머지 4명을 세우면 되므로

$$P(X=1)=\frac{{}_2P_1\cdot 4!}{5!}=\frac{2}{5}$$

$X=2$이려면 맨 앞에 남학생 3명 중에서 1명을, 그 뒤에 여학생 2명 중에서 1명을 세우고, 나머지 3명을 세우면 되므로

$$P(X=2)=\frac{{}_3P_1\cdot{}_2P_1\cdot 3!}{5!}=\frac{3}{10}$$

$X=3$이려면 맨 앞과 그 뒤에 남학생 3명 중에서 2명을, 그 뒤에 여학생 2명 중에서 1명을 세우고, 나머지 2명을 세우면 되므로

$$P(X=3)=\frac{{}_3P_2\cdot{}_2P_1\cdot 2!}{5!}=\frac{1}{5}$$

$X=4$이려면 남학생 3명을 세우고, 그 뒤에 여학생 2명을 세우면 되므로

$$P(X=4)=\frac{3!\cdot 2!}{5!}=\frac{1}{10}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

⋯ ❶

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{10}=2,$$

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{10}=5$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1 \quad \cdots ❷$$
$$\therefore V(10X+7)=10^2V(X)=100\cdot 1=100 \quad \cdots ❸$$

답 100

채점 기준	비율
❶ X의 확률분포를 구할 수 있다.	50 %
❷ $V(X)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $V(10X+7)$을 구할 수 있다.	20 %

0516 (1st) X의 확률분포를 구한다.

두 눈의 수의 합은 다음 표와 같다.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12이고, 그 확률은 각각

$$P(X=2)=\frac{1}{36},\ P(X=3)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18},$$
$$P(X=4)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12},\ P(X=5)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},$$
$$P(X=6)=\frac{5}{36},\ P(X=7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},$$
$$P(X=8)=\frac{5}{36},\ P(X=9)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},$$
$$P(X=10)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12},\ P(X=11)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18},$$
$$P(X=12)=\frac{1}{36}$$

(2nd) $Y=XP(X=x)$를 구한다.

X의 확률분포와 $Y=XP(X=x)$를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	1
Y	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{10}{9}$	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{3}$	

(3rd) $P(Y<1)$을 구한다.

$Y\geq 1$을 만족시키는 X는 7 또는 8 또는 9이므로

$$\begin{aligned}P(Y<1)&=1-P(X=7 \text{ 또는 } X=8 \text{ 또는 } X=9)\\&=1-\{P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)\}\\&=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{1}{9}\right)\\&=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

답 $\frac{7}{12}$

0517 (1st) a의 값을 구한다.

$y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot 1=1 \qquad \therefore a=2$$

(2nd) $f(x)$를 구한다.

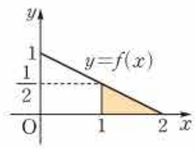
$y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(2, 0)$, $(0, 1)$을 지나는 직선이므로 그 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1, \qquad y=-\frac{1}{2}x+1$$
$$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x+1\ (0\leq x\leq 2)$$

(3rd) X_1, X_2 중 적어도 하나는 1보다 작을 확률을 구한다.

임의의 두 값 X_1, X_2를 택할 때, 두 값 중 적어도 하나는 1보다 작은 사건의 여사건은 두 값이 모두 1보다 크거나 같은 사건이다.

이때 $f(1)=\frac{1}{2}$이고 $P(X\geq 1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$P(X\geq 1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{16}$$

답 $\frac{15}{16}$

0518 (1st) X의 확률분포를 구한다.

$P(X=k)=p_k\ (k=1, 2, 3, 4, 5)$라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=k)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	1

(2nd) Y의 확률분포를 구한다.

$$\begin{aligned}P(Y=k)&=\frac{1}{2}P(X=k)+\frac{1}{10}\\&=\frac{1}{2}p_k+\frac{1}{10}\ (k=1, 2, 3, 4, 5)\end{aligned}$$

이므로 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	5	합계
$P(Y=k)$	$\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_3+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_4+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}$	1

(3rd) $E(Y)$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}&E(Y)\\&=1\cdot\left(\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}\right)+\cdots+5\cdot\left(\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}\right)\\&=\frac{1}{2}(p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5)+\frac{1}{10}(1+2+3+4+5)\\&=\frac{1}{2}(p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5)+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

이때 $E(X)=4$에서 $p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5=4$이므로

$$E(Y)=\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

답 ②

참고 $Y=\frac{1}{2}X+\frac{1}{10}$로 착각하여

$$E(Y)=\frac{1}{2}E(X)+\frac{1}{10}$$

과 같이 풀지 않도록 주의한다.

0519 (1st) 부채꼴 $P_{k-1}OP_k\ (k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$의 넓이를 구한다.

부채꼴 AOB의 넓이는

$$\pi\cdot1^2\cdot\frac{90}{360}=\frac{\pi}{4}$$

따라서 부채꼴 $P_{k-1}OP_k$ ($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$)의 넓이는

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{24}$$

2nd X의 확률분포를 구한다.

P가 P_1 또는 P_5일 때, $X=\left|\frac{\pi}{24}-\frac{5}{24}\pi\right|=\frac{\pi}{6}$

P가 P_2 또는 P_4일 때, $X=\left|\frac{2}{24}\pi-\frac{4}{24}\pi\right|=\frac{\pi}{12}$

P가 P_3일 때, $X=0$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

3rd $E(X)$를 구한다.

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{5}+\frac{\pi}{12}\cdot\frac{2}{5}+\frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{\pi}{10}$$ 답 ②

SSEN 특강 부채꼴의 넓이

반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 넓이 S는

$$S=\pi r^2\cdot\frac{x}{360}$$

0520 1st Y를 X에 대한 식으로 나타낸다.

두 이산확률변수 X, Y에 대하여 X가 1, 2, 3, 4일 때의 확률이 각각 Y가 11, 21, 31, 41일 때의 확률과 같으므로

$$Y=10X+1$$

로 놓을 수 있다.

2nd $E(Y)+V(Y)$의 값을 구한다.

$E(X)=2$이므로

$$E(Y)=E(10X+1)=10E(X)+1$$
$$=10\cdot2+1=21$$

또 $E(X)=2$, $E(X^2)=5$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$$
$$\therefore V(Y)=V(10X+1)=10^2V(X)$$
$$=100\cdot1=100$$
$$\therefore E(Y)+V(Y)=121$$ 답 121

0521 1st 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형인 경우에 X가 가질 수 있는 값을 각각 구한다.

세 점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$${}_6C_3=20$$

삼각형의 세 꼭짓점에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내고, 그때의 확률변수 X의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) 예각삼각형인 경우는

(1, 3, 5), (2, 4, 6) — $X=1+3=4$

의 2가지이고, 그때의 X의 값은 각각 4, 6이다.

(ii) 직각삼각형인 경우는 — $X=1+4=5$

(1, 4, 2), (1, 4, 3), (1, 4, 5), (1, 4, 6),
(2, 5, 1), (2, 5, 3), (2, 5, 4), (2, 5, 6),
(3, 6, 1), (3, 6, 2), (3, 6, 4), (3, 6, 5)

의 12가지이고, 그때의 X의 값은 각각 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9이다.

(iii) 둔각삼각형인 경우는 — $X=3$

(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5),
(4, 5, 6), (5, 6, 1), (6, 1, 2)

의 6가지이고, 그때의 X의 값은 각각 3, 4, 5, 6, 6, 6이다.

2nd X의 확률분포를 구한다.

$P(X=3)=\frac{1}{20}$, $P(X=4)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$,

$P(X=5)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$, $P(X=6)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$,

$P(X=7)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$, $P(X=9)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	7	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

3rd $E(5X+4)$를 구한다.

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=3\cdot\frac{1}{20}+4\cdot\frac{1}{10}+5\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{5}+7\cdot\frac{1}{5}+9\cdot\frac{1}{5}$$
$$=\frac{31}{5}$$

이므로

$$E(5X+4)=5E(X)+4=5\cdot\frac{31}{5}+4=35$$ 답 35

0522 전략 $P(X=1)=P(X=3)$, $P(X=2)=P(X=4)$, $P(X=5)=P(X=6)$임을 이용한다.

풀이 $3P(X=2)=2P(X=5)=\frac{3}{10}$에서

$$P(X=2)=\frac{1}{10},\ P(X=5)=\frac{3}{20}$$ ⋯ ❶

한편 $P(X=1)=P(X=3)$, $P(X=2)=P(X=4)$, $P(X=5)=P(X=6)$이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=5)=\frac{1}{2}$에서

$$P(X=1)=\frac{1}{2}-P(X=2)-P(X=5)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{3}{20}=\frac{1}{4}$$ ⋯ ❷
$$\therefore P(X\le3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}=\frac{3}{5}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{3}{5}$

채점 기준	비율
❶ $P(X=2)$, $P(X=5)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $P(X=1)$을 구할 수 있다.	50 %
❸ $P(X\le3)$을 구할 수 있다.	30 %

0523 전략 정육각형의 한 변의 길이를 확률변수 X라 하고 X의 평균, 분산을 구한다.

풀이 정육각형의 한 변의 길이를 확률변수 X라 하면 둘레의 길이는 $6X$이므로

$$\mathrm{E}(6X)=33,\ \mathrm{V}(6X)=(3\sqrt{7})^2=63$$

$$6\mathrm{E}(X)=33,\ 6^2\mathrm{V}(X)=63$$

$$\therefore \mathrm{E}(X)=\frac{11}{2},\ \mathrm{V}(X)=\frac{7}{4} \quad \cdots❶$$

이때 한 변의 길이가 X인 정육각형의 넓이는

$$6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot X^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}X^2$$

└ 한 변의 길이가 X인 정삼각형 6개의 넓이의 합과 같다.

이고, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{7}{4}+\left(\frac{11}{2}\right)^2=32 \quad \cdots❷$$

따라서 구하는 정육각형의 넓이의 평균은

$$\mathrm{E}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}X^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{E}(X^2)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 32=48\sqrt{3} \quad \cdots❸$$

답 $48\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 정육각형의 한 변의 길이를 X라 하고 $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\mathrm{E}(X^2)$을 구할 수 있다.	40 %
❸ 정육각형의 넓이의 평균을 구할 수 있다.	20 %

0524 전략 12개의 정사각형을 각각 1, 2, ⋯, 12라 한 후 $X=20$, $X=10$, $X=0$이 되는 경우의 수를 각각 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 12개의 정사각형을 각각 1, 2, ⋯, 12라 하자.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

12개의 정사각형에서 3개의 정사각형을 임의로 택하는 경우의 수는

$${}_{12}\mathrm{C}_3=220$$

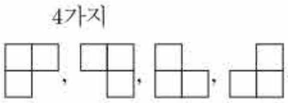
(i) $X=20$일 때,

가로로 연속된 3개를 택하는 경우는

6가지

세로로 연속된 3개를 택하는 경우는

4가지

의 경우가 각각 6가지이므로

$4\cdot 6=24$(가지)

따라서 $X=20$인 경우의 수는

$6+4+24=34$

(ii) $X=10$일 때,

$\boxed{1}\boxed{2}$, $\boxed{3}\boxed{4}$, $\boxed{9}\boxed{10}$, $\boxed{11}\boxed{12}$일 때, 나머지 하나는 이웃한 3개를 제외한 7개이므로

$4\cdot 7=28$(가지)

$\boxed{2}\boxed{3}$, $\boxed{10}\boxed{11}$일 때, 나머지 하나는 이웃한 4개를 제외한 6개이므로

$2\cdot 6=12$(가지)

$\boxed{5}\boxed{6}$, $\boxed{7}\boxed{8}$일 때, 나머지 하나는 이웃한 5개를 제외한 5개이므로

$2\cdot 5=10$(가지)

$\boxed{6}\boxed{7}$일 때, 나머지 하나는 이웃한 6개를 제외한 4개이므로

$1\cdot 4=4$(가지)

$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 5\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|}\hline 4\\\hline 8\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|}\hline 5\\\hline 9\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|}\hline 8\\\hline 12\\\hline\end{array}$일 때, 나머지 하나는 이웃한 3개를 제외한 7개이므로

$4\cdot 7=28$(가지)

$\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 6\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 7\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|}\hline 6\\\hline 10\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|}\hline 7\\\hline 11\\\hline\end{array}$일 때, 나머지 하나는 이웃한 5개를 제외한 5개이므로

$4\cdot 5=20$(가지)

따라서 $X=10$인 경우의 수는

$28+12+10+4+28+20=102$

(iii) $X=0$일 때,

(i), (ii)에 의하여 $X=0$인 경우의 수는

$220-(34+102)=84 \quad \cdots❶$

이상에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	10	20	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{21}{55}$	$\frac{51}{110}$	$\frac{17}{110}$	1

$\cdots❷$

확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{21}{55}+10\cdot\frac{51}{110}+20\cdot\frac{17}{110}=\frac{85}{11}$$

이므로

$$\mathrm{E}(11X)=11\mathrm{E}(X)=11\cdot\frac{85}{11}=85 \quad \cdots❸$$

답 85

채점 기준	비율
❶ $X=20$, $X=10$, $X=0$인 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %
❷ X의 확률분포를 구할 수 있다.	20 %
❸ $\mathrm{E}(11X)$를 구할 수 있다.	20 %

Ⅲ. 통계

06 이항분포와 정규분포

0525 한 개의 동전을 한 번 던질 때 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 뒷면이 나오는 횟수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

답 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$

0526 2개의 구슬을 차례대로 꺼낼 때 꺼낸 구슬을 다시 넣지 않으므로 각 시행은 독립시행이 아니다.
따라서 X는 이항분포를 따르지 않는다.

답 이항분포를 따르지 않는다.

0527 (1) $\mathrm{P}(X=x)={}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

(2) $\mathrm{P}(X=2)={}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$

답 풀이 참조

0528 (1) $\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{5-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

(2) $\mathrm{P}(X=3)={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{135}{512}$

답 풀이 참조

0529 $\mathrm{E}(X)=150\cdot\frac{2}{5}=60$

$\mathrm{V}(X)=150\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=36$

$\sigma(X)=\sqrt{36}=6$

답 $\mathrm{E}(X)=60,\ \mathrm{V}(X)=36,\ \sigma(X)=6$

0530 $\mathrm{E}(X)=240\cdot\frac{3}{4}=180$

$\mathrm{V}(X)=240\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=45$

$\sigma(X)=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

답 $\mathrm{E}(X)=180,\ \mathrm{V}(X)=45,\ \sigma(X)=3\sqrt{5}$

0531 (1) $\mathrm{E}(X)=1$에서

$10p=1 \qquad \therefore p=\frac{1}{10}$

(2) X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=10\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9}{10}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

답 (1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{9}{10}$ (3) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

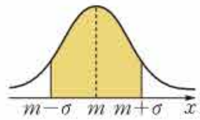
0532 답 $\mathrm{N}(8,\ 2^2)$

0533 답 $\mathrm{N}(-3,\ 3^2)$

0534 ㄷ. m의 값이 일정할 때, σ의 값이 클수록 곡선의 폭은 넓어진다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

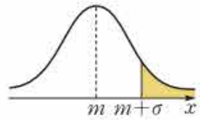
0535 $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)$
$\quad+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=2a$



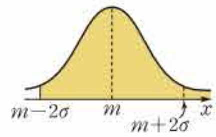
답 $2a$

0536 $\mathrm{P}(X\ge m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=0.5-a$

답 $0.5-a$



0537 $\mathrm{P}(X\ge m-2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)$
$\quad+\mathrm{P}(X\ge m)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)+0.5$
$=b+0.5$



답 $b+0.5$

0538 $\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.4332+0.4332$
$=0.8664$

답 0.8664

0539 $\mathrm{P}(1.25\le Z\le 2)=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.25)$
$=0.4772-0.3944$
$=0.0828$

답 0.0828

0540 $\mathrm{P}(Z\le 1.75)=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.75)$
$=0.5+0.4599$
$=0.9599$

답 0.9599

0541 $\mathrm{P}(Z\le -1.25)=\mathrm{P}(Z\ge 1.25)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.25)$
$=0.5-0.3944$
$=0.1056$

답 0.1056

0542 $\mathrm{P}(Z\ge 2)=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772$
$=0.0228$

답 0.0228

0543 $\mathrm{P}(Z\ge -1.5)=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$
$=0.4332+0.5$
$=0.9332$

답 0.9332

06 이항분포와 정규분포

0544 $P(Z\ge a)=0.3085$에서
$P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le a)=0.3085$
$0.5-P(0\le Z\le a)=0.3085$
$\therefore\ P(0\le Z\le a)=0.1915$
$\therefore\ a=0.5$ 답 0.5

0545 $P(Z\le a)=0.9772$에서
$P(Z\le 0)+P(0\le Z\le a)=0.9772$
$0.5+P(0\le Z\le a)=0.9772$
$\therefore\ P(0\le Z\le a)=0.4772$
$\therefore\ a=2$ 답 2

0546 $P(-a\le Z\le a)=0.6826$에서
$P(-a\le Z\le 0)+P(0\le Z\le a)=0.6826$
$2P(0\le Z\le a)=0.6826$
$\therefore\ P(0\le Z\le a)=0.3413$
$\therefore\ a=1$ 답 1

0547 $P(Z\ge a-2)=0.6915$에서
$P(a-2\le Z\le 0)+P(Z\ge 0)=0.6915$
$P(0\le Z\le -a+2)+0.5=0.6915$
$\therefore\ P(0\le Z\le -a+2)=0.1915$
따라서 $-a+2=0.5$이므로 $a=1.5$ 답 1.5

0548 $P(Z\le 3a)=0.0668$에서
$P(Z\le 0)-P(3a\le Z\le 0)=0.0668$
$0.5-P(0\le Z\le -3a)=0.0668$
$\therefore\ P(0\le Z\le -3a)=0.4332$
따라서 $-3a=1.5$이므로 $a=-0.5$ 답 -0.5

0549 $P(-a\le Z\le 2a)=0.5328$에서
$P(-a\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2a)=0.5328$
$\therefore\ P(0\le Z\le a)+P(0\le Z\le 2a)=0.5328$
이때
$$P(0\le Z\le 0.5)+P(0\le Z\le 1)=0.1915+0.3413=0.5328$$
이므로 $a=0.5$ 답 0.5

0550 답 $Z=\dfrac{X-18}{2}$ **0551** 답 $Z=\dfrac{X-50}{10}$

0552 답 $Z=\dfrac{X-150}{3}$ **0553** 답 $Z=\dfrac{X+12}{7}$

0554 (1) $Z=\dfrac{X-27}{4}$
(2) $$\begin{aligned}P(23\le X\le 33)&=P\left(\frac{23-27}{4}\le Z\le\frac{33-27}{4}\right)\\&=P(-1\le Z\le 1.5)\\&=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)\\&=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.3413+0.4332=0.7745\end{aligned}$$
답 (1) $Z=\dfrac{X-27}{4}$ (2) 0.7745

0555 $E(X)=100\times 0.2=20$, $V(X)=100\times 0.2\times 0.8=16$
이때 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(20,\ 4^2)$을 따른다. 답 $N(20,\ 4^2)$

0556 $E(X)=180\cdot\dfrac{5}{6}=150$, $V(X)=180\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=25$
이때 180은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(150,\ 5^2)$을 따른다. 답 $N(150,\ 5^2)$

0557 (1) $E(X)=400\cdot\dfrac{1}{5}=80$, $V(X)=400\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5}=64$
이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(80,\ 8^2)$을 따른다.
따라서 X를 확률변수 Z로 표준화하면
$$Z=\frac{X-80}{8}$$
(2) $$\begin{aligned}P(X\ge 104)&=P\left(Z\ge\frac{104-80}{8}\right)\\&=P(Z\ge 3)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 3)\\&=0.5-0.4987\\&=0.0013\end{aligned}$$
답 (1) $Z=\dfrac{X-80}{8}$ (2) 0.0013

유형 01 이항분포에서의 확률; 이항분포가 주어진 경우 본책 92쪽

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때, X의 확률질량함수는
$$P(X=x)={}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

0558 확률변수 X의 확률질량함수는
$$\begin{aligned}P(X=x)&={}_7C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{7-x}\\&={}_7C_x\left(\frac{1}{2}\right)^7\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\therefore\ P(X<3)&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\&={}_7C_0\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7C_1\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7C_2\left(\frac{1}{2}\right)^7\\&=\frac{1}{128}+\frac{7}{128}+\frac{21}{128}=\frac{29}{128}\end{aligned}$$
답 $\dfrac{29}{128}$

0559 확률변수 X의 확률질량함수는
$$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$
이므로 $P(X=2)=kP(X=3)$에서
$${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=k\cdot{}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$\dfrac{80}{243}=\dfrac{40}{243}k$ $\therefore\ k=2$ 답 2

0560 확률변수 X의 확률질량함수는
$$P(X=x)={}_3C_x p^x(1-p)^{3-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$ ⋯ ❶
이므로 $P(X<1)=\dfrac{1}{64}$에서

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{64},\quad {}_3\mathrm{C}_0 p^0(1-p)^3=\frac{1}{64}$$

$$(1-p)^3=\left(\frac{1}{4}\right)^3,\quad 1-p=\frac{1}{4}$$

$$\therefore p=\frac{3}{4}$$ ⋯ ❷

따라서 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로 Y의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(Y=y)={}_4\mathrm{C}_y\left(\frac{3}{4}\right)^y\left(\frac{1}{4}\right)^{4-y}\ (y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$ ⋯ ❸

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(Y\geq 1)&=1-\mathrm{P}(Y=0)\\&=1-{}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^4\\&=1-\frac{1}{256}\\&=\frac{255}{256}\end{aligned}$$ ⋯ ❹

답 $\frac{255}{256}$

채점 기준	비율
❶ X의 확률질량함수를 구할 수 있다.	20 %
❷ p의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ Y의 확률질량함수를 구할 수 있다.	20 %
❹ $\mathrm{P}(Y\geq 1)$을 구할 수 있다.	30 %

유형 02 이항분포에서의 확률 ; 이항분포가 주어지지 않은 경우 본책 92쪽

확률변수 X가 이항분포를 따를 때에는 시행 횟수 n과 한 번의 시행에서 어떤 사건이 일어날 확률 p를 구하여 $\mathrm{B}(n,\ p)$로 나타낸 후 확률변수 X의 확률질량함수를 이용하여 확률을 구한다.

0561 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{10-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\leq 9)&=1-\mathrm{P}(X=10)\\&=1-{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^0\\&=1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\end{aligned}$$

답 ④

0562 (1) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 2 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(6,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.
따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$

(2) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(2\leq X\leq 4)&=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\\&={}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4+{}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2\\&=\frac{240}{729}+\frac{160}{729}+\frac{60}{729}\\&=\frac{460}{729}\end{aligned}$$

답 풀이 참조

0563 싹이 튼 씨앗의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\geq 4)&=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)\\&={}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0\\&=\frac{405}{1024}+\frac{243}{1024}\\&=\frac{81}{128}\end{aligned}$$

답 ②

0564 실제로 고속버스에 탑승하는 사람 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(30,\ 0.9)$를 따르므로

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{30}\mathrm{C}_x 0.9^x\times 0.1^{30-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 30)$$

좌석이 부족하려면 $X>28$이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X>28)&=\mathrm{P}(X=29)+\mathrm{P}(X=30)\\&={}_{30}\mathrm{C}_{29}0.9^{29}\times 0.1+{}_{30}\mathrm{C}_{30}0.9^{30}\times 0.1^0\\&=30\times 0.047\times 0.1+1\times 0.042\times 1\\&=0.141+0.042\\&=0.183\end{aligned}$$

답 0.183

유형 03 이항분포에서의 평균, 분산, 표준편차 ; 이항분포가 주어진 경우 본책 93쪽

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때,
$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=np(1-p),\ \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

0565 $\mathrm{E}(X)=6$에서

$$15p=6\qquad \therefore p=\frac{2}{5}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=15\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{18}{5}$$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{18}{5}+6^2=\frac{198}{5}\end{aligned}$$

답 ④

0566 $\mathrm{E}(X)=16,\ \mathrm{V}(X)=12$이므로

$\mathrm{E}(X)=np=16$ ⋯⋯ ㉠

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=12$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $16(1-p)=12$

$$1-p=\frac{3}{4}\qquad \therefore p=\frac{1}{4}$$

$p=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{4}n=16$

$$\therefore n=64$$

답 ①

0567 $$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=x)&={}_{45}\mathrm{C}_x\frac{2^x}{3^{45}}\\&={}_{45}\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{45-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 45)\end{aligned}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(45,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=45\cdot\frac{2}{3}=30,$$

$$\mathrm{V}(X)=45\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=10$$ 답 ⑤

0568 $\sigma(X)=\sqrt{20p(1-p)}=\sqrt{-20\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+5}$

$p=\frac{1}{2}$일 때 확률변수 X의 표준편차가 최대이므로 이때 X의 평균은

$$\mathrm{E}(X)=20p=20\cdot\frac{1}{2}=10$$ 답 10

0569 $\mathrm{V}(X)=16p(1-p)=4$에서

$4p^2-4p+1=0,\qquad (2p-1)^2=0$

$\therefore p=\frac{1}{2}$ ··· ❶

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{16}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{16-x}$$

$$={}_{16}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^{16}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 16)$$

$$\therefore \frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X=2)}=\frac{{}_{16}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{16}}{{}_{16}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{16}}$$

$$=\frac{{}_{16}\mathrm{C}_1}{{}_{16}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{15}$$ ··· ❷

답 $\frac{2}{15}$

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X=2)}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0570 $\mathrm{E}(X)=\frac{1}{3}n,\ \mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\frac{2}{9}n=40-\left(\frac{1}{3}n\right)^2,\qquad \frac{2}{9}n=40-\frac{1}{9}n^2$

$n^2+2n-360=0,\qquad (n+20)(n-18)=0$

$\therefore n=18$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\sigma(X)=\sqrt{18\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\sqrt{4}=2$$

$$\therefore \sigma(3X-2)=3\sigma(X)=3\cdot2=6$$ 답 ⑤

SSEN 특강 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X와 두 상수 a, $b\,(a\neq0)$에 대하여
① $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$
② $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$
③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

유형 04 이항분포에서의 평균, 분산, 표준편차 ; 이항분포가 주어지지 않은 경우

본책 93쪽

이항분포를 따르는 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차를 구할 때에는 먼저 시행 횟수 n과 한 번의 시행에서 어떤 사건이 일어날 확률 p를 구하여 $\mathrm{B}(n,\ p)$로 나타낸 후
$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=np(1-p),\ \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$
임을 이용한다.

0571 4개의 동전을 동시에 한 번 던질 때 2개는 앞면, 2개는 뒷면이 나올 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=4\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{2}$$ 답 $\frac{3}{2}$

0572 가위바위보를 한 번 할 때 A가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

이때 $\mathrm{E}(X)=\frac{10}{3}$이므로

$\frac{1}{3}n=\frac{10}{3}\qquad \therefore n=10$

따라서 $\mathrm{V}(X)=10\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{20}{9}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=\frac{20}{9}+\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{40}{3}$$ 답 ④

0573 한 번의 시행에서 불량인 전구가 나올 확률은

$\frac{3}{10}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(30,\ \frac{3}{10}\right)$을 따르므로 ··· ❶

$$\mathrm{V}(X)=30\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{63}{10}$$ ··· ❷

$$\therefore \mathrm{V}(10X-3)=10^2\mathrm{V}(X)$$

$$=100\cdot\frac{63}{10}=630$$ ··· ❸

답 630

채점 기준	비율
❶ X가 따르는 이항분포를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\mathrm{V}(10X-3)$을 구할 수 있다.	30 %

0574 한 세트를 만들 때 티셔츠와 바지가 모두 정상일 확률은

$$\left(1-\frac{5}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{100}\right)=\frac{114}{125}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1000,\ \frac{114}{125}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=1000\cdot\frac{114}{125}=912$$

$\therefore \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}X-6\right)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)-6$

$=\frac{1}{2}\cdot 912-6=450$ 답 ①

0575 $(x+3)$개의 공이 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때 흰 공이 나올 확률은

$\frac{x}{x+3}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{x}{x+3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\cdot\frac{x}{x+3}=36$ ...... ㉠

$\mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{x}{x+3}\cdot\frac{3}{x+3}=9$ ...... ㉡

$1-\frac{x}{x+3}=\frac{3}{x+3}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$36\cdot\frac{3}{x+3}=9,\quad x+3=12$

$\therefore x=9$

$x=9$를 ㉠에 대입하면

$\frac{9}{12}n=36\quad \therefore n=48$

$\therefore n+x=57$ 답 57

0576 동전을 10번 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $10-Y$이므로

$X=3Y-2(10-Y)=5Y-20$

한편 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(Y)=10\cdot\frac{1}{2}=5$이므로

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(5Y-20)=5\mathrm{E}(Y)-20$

$=5\cdot 5-20=5$ 답 ④

유형 05 정규분포곡선의 성질 본책 94쪽

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선은 다음과 같은 성질을 갖는다.

① 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 x축이 점근선인 종 모양의 곡선이다.
② 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.
③ σ의 값이 일정할 때, m의 값이 달라지면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 변하지 않는다.
④ m의 값이 일정할 때, σ의 값이 클수록 가운데 부분의 높이는 낮아지고 옆으로 퍼진 모양이 된다.

0577 ㄱ. $x_1<x_2$일 때,

$\mathrm{P}(x_1\le X\le x_2)=\mathrm{P}(X\le x_2)-\mathrm{P}(X\le x_1)$

ㄴ. 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(X\le m)=\mathrm{P}(X\ge m)=0.5$

ㄷ. 정규분포곡선과 x축 사이의 넓이가 1이므로

$\mathrm{P}(X\le a)+\mathrm{P}(X\ge a)=1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0578 두 학교 A, B의 정규분포곡선이 각각 직선 $x=m_1$, 직선 $x=m_2$에 대하여 대칭이므로

$m_1<m_2$

A 학교의 정규분포곡선이 B 학교의 정규분포곡선보다 가운데 부분의 높이는 낮고 옆으로 퍼진 모양이므로

$\sigma_1>\sigma_2$ 답 ③

0579 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $\mathrm{P}(X\le 10)=\mathrm{P}(X\ge 20)$이므로

$m=\frac{10+20}{2}=15$ ··· ❶

또 $\mathrm{V}\left(\frac{1}{4}X\right)=4$에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^2\mathrm{V}(X)=4$

$\therefore \mathrm{V}(X)=64$

즉 $\sigma^2=64$이므로 $\sigma=8\ (\because \sigma>0)$ ··· ❷

$\therefore m+\sigma=23$ ··· ❸

답 23

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ σ의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $m+\sigma$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0580 확률변수 X의 평균이 7이므로 X의 확률밀도함수는 $x=7$에서 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x=7$에 대하여 대칭이다.

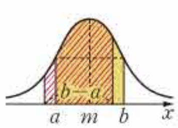
따라서 $\mathrm{P}(a-5\le X\le a-3)$이 최대가 되려면

$\frac{a-5+a-3}{2}=7,\quad 2a-8=14$

$\therefore a=11$ 답 11

SSEN 특강 정규분포곡선과 확률의 최댓값

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 오른쪽 정규분포곡선에서 색칠한 부분의 넓이가 빗금 친 부분의 넓이보다 크다.



따라서 $b-a$가 일정할 때 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$가 최대이려면 $\frac{a+b}{2}=m$이어야 한다.

0581 ㄱ. 정규분포곡선은 직선 $x=8$에 대하여 대칭이므로

$f(2)=\mathrm{P}(2\le X\le 6)=\mathrm{P}(10\le X\le 14)=f(10)$

ㄴ. $f(k)=\mathrm{P}(k\le X\le k+4)$가 최대가 되려면

$\frac{k+k+4}{2}=8,\quad 2k+4=16$

$\therefore k=6$

따라서 함수 $f(k)$는 $k=6$일 때 최댓값을 갖는다.

ㄷ. $f(a)=\mathrm{P}(a\le X\le a+4)$,

$f(12-a)=\mathrm{P}(12-a\le X\le 16-a)$이고

$\frac{a+(16-a)}{2}=8,\ \frac{(a+4)+(12-a)}{2}=8$

이므로

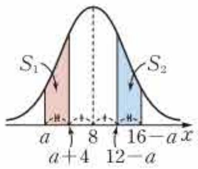
$\mathrm{P}(a \le X \le a+4) = \mathrm{P}(12-a \le X \le 16-a)$

$\therefore f(a) = f(12-a)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

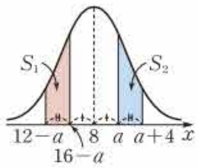
참고 ㄷ은 다음과 같이 정규분포곡선을 이용하여 확인할 수도 있다.

① $a+4<8$일 때,



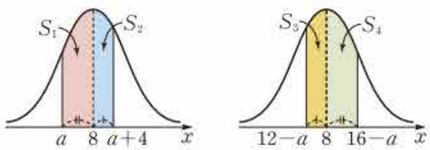
➡ $S_1=S_2$

② $a>8$일 때,



➡ $S_1=S_2$

③ $a<8<a+4$일 때,



➡ $S_1=S_4$, $S_2=S_3$이므로 $S_1+S_2=S_3+S_4$

유형 06 ~ 07 정규분포에서의 확률

본책 95쪽

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

① $\mathrm{P}(X \le m) = \mathrm{P}(X \ge m) = 0.5$

② $\mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m) = \mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)$

0582 $m=60$, $\sigma=3$이므로

$\mathrm{P}(57 \le X \le 66)$

$= \mathrm{P}(60-3 \le X \le 60+2\cdot 3)$

$= \mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m+2\sigma)$

$= \mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m) + \mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)$

$= \mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma) + \mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)$

$= 0.3413 + 0.4772$

$= 0.8185$ 답 0.8185

0583 $\mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m+\sigma) = a$에서

$2\mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma) = a$

$\therefore \mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma) = \dfrac{a}{2}$

$\mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m+2\sigma) = b$에서

$2\mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma) = b$

$\therefore \mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma) = \dfrac{b}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m+\sigma)$

$= \mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m) + \mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)$

$= \mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma) + \mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)$

$= \dfrac{a+b}{2}$ 답 ③

0584 $\mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m+2\sigma) = 0.9544$에서

$2\mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma) = 0.9544$

$\therefore \mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma) = 0.4772$

$\therefore \mathrm{P}(X \ge m-2\sigma) = \mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m) + \mathrm{P}(X \ge m)$

$= \mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma) + 0.5$

$= 0.4772 + 0.5$

$= 0.9772$ 답 0.9772

0585 이차방정식 $t^2 - Xt + 4 = 0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 허근을 가지려면

$D = X^2 - 4\cdot 4 < 0$, $\quad (X+4)(X-4) < 0$

$\therefore -4 < X < 4$ ··· ❶

이때 $m=4$, $\sigma=4$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(-4 < X < 4) = \mathrm{P}(4 - 2\cdot 4 < X < 4)$

$= \mathrm{P}(m-2\sigma < X < m)$

$= \mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)$

$= 0.4772$ ··· ❷

답 0.4772

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차방정식이 허근을 가질 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 이차방정식이 허근을 가질 확률을 구할 수 있다.	60 %

0586 $\mathrm{P}(X \le a) = 0.1587$에서

$\mathrm{P}(X \le m) - \mathrm{P}(a \le X \le m) = 0.1587$

$0.5 - \mathrm{P}(a \le X \le m) = 0.1587$

$\therefore \mathrm{P}(a \le X \le m) = 0.3413$

이때 $\mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma) = 0.3413$이므로

$\mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m) = 0.3413$

$\therefore a = m - \sigma = 53 - 7 = 46$ 답 ②

0587 $\mathrm{P}(X \ge a) = 0.8849$에서

$\mathrm{P}(a \le X \le m) + \mathrm{P}(X \ge m) = 0.8849$

$\mathrm{P}(a \le X \le m) + 0.5 = 0.8849$

$\therefore \mathrm{P}(a \le X \le m) = 0.3849$

한편 $\mathrm{P}(X \ge m+1.2\sigma) = 0.1151$에서

$\mathrm{P}(X \ge m) - \mathrm{P}(m \le X \le m+1.2\sigma) = 0.1151$

$0.5 - \mathrm{P}(m \le X \le m+1.2\sigma) = 0.1151$

$\mathrm{P}(m \le X \le m+1.2\sigma) = 0.3849$

$\therefore \mathrm{P}(m-1.2\sigma \le X \le m) = 0.3849$

$\therefore a = m - 1.2\sigma = 50 - 1.2 \times 5 = 44$ 답 ④

0588 (가) $\mathrm{P}(X \ge m+a) = 0.04$에서

$\mathrm{P}(X \ge m) - \mathrm{P}(m \le X \le m+a) = 0.04$

$0.5 - \mathrm{P}(m \le X \le m+a) = 0.04$

$\therefore \mathrm{P}(m \le X \le m+a) = 0.46$

(나) $\mathrm{P}(X \le m-b) = 0.12$에서

$\mathrm{P}(X \ge m+b) = 0.12$

$\mathrm{P}(X \ge m) - \mathrm{P}(m \le X \le m+b) = 0.12$

$0.5 - \mathrm{P}(m \le X \le m+b) = 0.12$

$\therefore \mathrm{P}(m \le X \le m+b) = 0.38$

(다) $\mathrm{P}(|X-m|\le c)=0.45$에서

$$\mathrm{P}(m-c\le X\le m+c)=0.45$$
$$2\mathrm{P}(m\le X\le m+c)=0.45$$
$$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+c)=0.225$$

(라) $\mathrm{P}(X\ge m-d)=0.81$에서

$$\mathrm{P}(m-d\le X\le m)+\mathrm{P}(X\ge m)=0.81$$
$$\mathrm{P}(m-d\le X\le m)+0.5=0.81$$
$$\mathrm{P}(m-d\le X\le m)=0.31$$
$$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+d)=0.31$$

이상에서 $0.225<0.31<0.38<0.46$이므로

$c<d<b<a$

답 $c<d<b<a$

유형 08 정규분포의 표준화

본책 96쪽

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때

① 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

② $\mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\le Z\le \dfrac{b-m}{\sigma}\right)$

0589 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(10, 2^2)$, $\mathrm{N}(20, 4^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-10}{2}$, $Z_Y=\dfrac{Y-20}{4}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(12\le X\le 16)=\mathrm{P}(24\le Y\le k)$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{12-10}{2}\le Z_X\le \frac{16-10}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{24-20}{4}\le Z_Y\le \frac{k-20}{4}\right)$$
$$\therefore \mathrm{P}(1\le Z_X\le 3)=\mathrm{P}\left(1\le Z_Y\le \frac{k-20}{4}\right)$$

따라서 $\dfrac{k-20}{4}=3$이므로 $\quad k-20=12$

$\therefore k=32$

답 ④

0590 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(15, 5^2)$, $\mathrm{N}(30, 10^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-15}{5}$, $Z_Y=\dfrac{Y-30}{10}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}(Y\le k)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_X\ge \frac{k-15}{5}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le \frac{k-30}{10}\right)$$

이므로

$$\frac{k-15}{5}=-\frac{k-30}{10}$$
$$2(k-15)=-(k-30)$$
$$3k=60 \qquad \therefore k=20$$

답 20

0591 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(2, 1)$, $\mathrm{N}(m, 4^2)$을 따르므로 $Z_X=X-2$, $Z_Y=\dfrac{Y-m}{4}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$2\mathrm{P}(2\le X\le 4)=\mathrm{P}(3\le Y\le 2m-3)$에서

$$2\mathrm{P}(2-2\le Z_X\le 4-2)=\mathrm{P}\left(\frac{3-m}{4}\le Z_Y\le \frac{2m-3-m}{4}\right)$$
$$2\mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)=\underbrace{\mathrm{P}\left(-\frac{m-3}{4}\le Z_Y\le \frac{m-3}{4}\right)}_{2\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le \frac{m-3}{4}\right)}$$
$$\therefore \mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)=\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le \frac{m-3}{4}\right)$$

따라서 $\dfrac{m-3}{4}=2$이므로 $\quad m-3=8$

$\therefore m=11$

답 11

유형 09 표준화하여 확률 구하기

본책 97쪽

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 표준화한 후 이를 이용하여 구하는 확률을 Z에 대한 확률로 나타낸다.

➡ $\mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\le Z\le \dfrac{b-m}{\sigma}\right)$

0592 $Z=\dfrac{X-40}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(35\le X\le 55)&=\mathrm{P}\left(\frac{35-40}{10}\le Z\le \frac{55-40}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.1915+0.4332\\&=0.6247\end{aligned}$$

답 0.6247

0593 $Z=\dfrac{X-15}{3}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

① $\mathrm{P}(X\le 12)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{12-15}{3}\right)$
$$\begin{aligned}&=\mathrm{P}(Z\le -1)=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

② $\mathrm{P}(12\le X\le 15)=\mathrm{P}\left(\dfrac{12-15}{3}\le Z\le \dfrac{15-15}{3}\right)$
$$\begin{aligned}&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.3413\end{aligned}$$

③ $\mathrm{P}(12\le X\le 18)=\mathrm{P}\left(\dfrac{12-15}{3}\le Z\le \dfrac{18-15}{3}\right)$
$$\begin{aligned}&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=2\times 0.3413\\&=0.6826\end{aligned}$$

④ $\mathrm{P}(15\le X\le 18)=\mathrm{P}\left(\dfrac{15-15}{3}\le Z\le \dfrac{18-15}{3}\right)$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$$

⑤ $\mathrm{P}(X\ge 15)=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{15-15}{3}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$

답 ①

0594 $Z=\dfrac{X-33}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

⋯➊

$P(30\le X\le 36)=0.4514$에서

$P\left(\frac{30-33}{5}\le Z\le\frac{36-33}{5}\right)=0.4514$

$P(-0.6\le Z\le 0.6)=0.4514$

$2P(0\le Z\le 0.6)=0.4514$

$\therefore P(0\le Z\le 0.6)=0.2257$ ⋯ ❷

$\therefore P(X>36)=P\left(Z>\frac{36-33}{5}\right)$

$=P(Z>0.6)$

$=0.5-P(0\le Z\le 0.6)$

$=0.5-0.2257$

$=0.2743$ ⋯ ❸

답 0.2743

채점 기준	비율
❶ X를 표준화할 수 있다.	20 %
❷ $P(30\le X\le 36)=0.4514$를 Z에 대한 식으로 변형할 수 있다.	40 %
❸ $P(X>36)$을 구할 수 있다.	40 %

0595 $E(X)=50$, $\sigma(X)=10$에서

$E(Y)=E(2X-1)=2E(X)-1=2\cdot 50-1=99$,

$\sigma(Y)=\sigma(2X-1)=2\sigma(X)=2\cdot 10=20$

이때 X가 정규분포 $N(50,\ 10^2)$을 따르므로 Y는 정규분포 $N(99,\ 20^2)$을 따른다.

$Z=\frac{Y-99}{20}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(Y\le 89)=P\left(Z\le\frac{89-99}{20}\right)$

$=P(Z\le -0.5)=P(Z\ge 0.5)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 0.5)$

$=0.5-0.1915=0.3085$

답 0.3085

다른 풀이 $Y=2X-1$이므로

$P(Y\le 89)=P(2X-1\le 89)=P(X\le 45)$

$Z=\frac{X-50}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(Y\le 89)=P(X\le 45)=P\left(Z\le\frac{45-50}{10}\right)$

$=P(Z\le -0.5)=P(Z\ge 0.5)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 0.5)$

$=0.5-0.1915=0.3085$

유형 10 표준화하여 미지수의 값 구하기

본책 97쪽

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $P(m\le X\le a)=k$를 만족시키는 a의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) X를 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 표준화한다.

(ii) 주어진 확률을 Z에 대한 확률로 나타낸다.

➡ $P\left(0\le Z\le\frac{a-m}{\sigma}\right)=k$

(iii) 표준정규분포표에서 이를 만족시키는 $\frac{a-m}{\sigma}$의 값을 찾아 a의 값을 구한다.

0596 $Z=\frac{X-45}{5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(40\le X\le a)=0.84$에서

$P\left(\frac{40-45}{5}\le Z\le\frac{a-45}{5}\right)=0.84$

$P\left(-1\le Z\le\frac{a-45}{5}\right)=0.84$

$P(-1\le Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{a-45}{5}\right)=0.84$

$P(0\le Z\le 1)+P\left(0\le Z\le\frac{a-45}{5}\right)=0.84$

$0.3413+P\left(0\le Z\le\frac{a-45}{5}\right)=0.84$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-45}{5}\right)=0.4987$

이때 $P(0\le Z\le 3)=0.4987$이므로

$\frac{a-45}{5}=3,\qquad a-45=15$

$\therefore a=60$

답 ③

0597 $Z=\frac{X-m}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(X\ge 57)=0.0228$에서

$P\left(Z\ge\frac{57-m}{2}\right)=0.0228$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{57-m}{2}\right)=0.0228$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{57-m}{2}\right)=0.0228$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{57-m}{2}\right)=0.4772$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{57-m}{2}=2,\qquad 57-m=4$

$\therefore m=53$

답 ③

0598 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(m-k\sigma\le X\le m+k\sigma)=0.823$에서

$P\left(\frac{m-k\sigma-m}{\sigma}\le Z\le\frac{m+k\sigma-m}{\sigma}\right)=0.823$

$P(-k\le Z\le k)=0.823$

$2P(0\le Z\le k)=0.823$

$\therefore P(0\le Z\le k)=0.4115$ ⋯ ❶

이때 $P(0\le Z\le 1.35)=0.4115$이므로

$k=1.35$ ⋯ ❷

답 1.35

채점 기준	비율
❶ $P(m-k\sigma\le X\le m+k\sigma)=0.823$을 Z에 대한 식으로 변형할 수 있다.	70 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0599 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(m\le X\le m+8)-P(X\le m-8)=0.3664$에서

$P\left(\frac{m-m}{\sigma}\le Z\le\frac{m+8-m}{\sigma}\right)-P\left(Z\le\frac{m-8-m}{\sigma}\right)=0.3664$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{8}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{8}{\sigma}\right)=0.3664$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{8}{\sigma}\right)-\underbrace{\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{8}{\sigma}\right)}_{\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{8}{\sigma}\right)}=0.3664$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{8}{\sigma}\right)-\left\{0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{8}{\sigma}\right)\right\}=0.3664$

$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{8}{\sigma}\right)-0.5=0.3664$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{8}{\sigma}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$\frac{8}{\sigma}=1.5\qquad\therefore\ \sigma=\frac{16}{3}$ 답 ④

다른 풀이 $\mathrm{P}(X\le m-8)=\mathrm{P}(X\ge m+8)$이므로 주어진 등식은

$\mathrm{P}(m\le X\le m+8)-\mathrm{P}(X\ge m+8)=0.3664$ …… ㉠

이때 $\mathrm{P}(X\ge m)=0.5$이므로

$\mathrm{P}(m\le X\le m+8)+\mathrm{P}(X\ge m+8)=0.5$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\mathrm{P}(m\le X\le m+8)=0.8664$

$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le m+8)=0.4332$

$Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\sigma}\le Z\le\frac{m+8-m}{\sigma}\right)=0.4332$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{8}{\sigma}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$\frac{8}{\sigma}=1.5\qquad\therefore\ \sigma=\frac{16}{3}$

유형 11 정규분포의 활용; 확률 구하기

본책 98쪽

정규분포에 대한 실생활 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.
(i) 확률변수 X를 정한 후 X가 따르는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 구한다.
(ii) X를 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 표준화한다.
(iii) 구하는 확률을 식으로 나타낸 후 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다.

0600 학생들의 진단 평가 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(67,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-67}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le65)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{65-67}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)\\&=0.5-0.19\\&=0.31\end{aligned}$$

답 0.31

0601 수하물의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(18,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-18}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(14\le X\le20)&=\mathrm{P}\left(\frac{14-18}{2}\le Z\le\frac{20-18}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le1)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le2)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.4772+0.3413\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 ④

0602 승연이가 등교하는 데 걸리는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-30}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ··· ❶
학교에 오전 8시 30분이 지난 후에 도착하면, 즉 $X>36$이면 지각이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X>36)&=\mathrm{P}\left(Z>\frac{36-30}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z>1.2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1.2)\\&=0.5-0.38\\&=0.12\end{aligned}$$

··· ❷

답 0.12

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X를 정하고 표준화할 수 있다.	40 %
❷ 승연이가 지각할 확률을 구할 수 있다.	60 %

0603 온도계의 눈금을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(27.5,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-27.5}{5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
자동 검사 장비의 기준 온도가 30 °C이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\underbrace{|X-30|\ge5}_{X-30\le-5\text{ 또는 }X-30\ge5\ \therefore\ X\le25\text{ 또는 }X\ge35})\\&=\mathrm{P}(X\le25)+\mathrm{P}(X\ge35)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{25-27.5}{5}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{35-27.5}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-0.5)+\mathrm{P}(Z\ge1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0.5)+\mathrm{P}(Z\ge1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)+0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)\\&=1-0.19-0.43\\&=0.38\end{aligned}$$

답 0.38

0604 응시자들의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(55,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-55}{\sigma}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
점수가 50점 이상 60점 이하인 학생이 680명이므로

$\mathrm{P}(50\le X\le60)=\frac{680}{1000}=0.68$

$\mathrm{P}\left(\frac{50-55}{\sigma}\le Z\le\frac{60-55}{\sigma}\right)=0.68$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{5}{\sigma} \le Z \le \frac{5}{\sigma}\right)=0.68$$

$$2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{5}{\sigma}\right)=0.68$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{5}{\sigma}\right)=0.34$$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)=0.34$이므로

$$\frac{5}{\sigma}=1 \qquad \therefore \sigma=5$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \ge 65)&=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{65-55}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z \ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

답 0.02

유형 12 정규분포의 활용; 도수 구하기

본책 99쪽

정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여 n개의 자료 중 특정 범위에 속하는 자료의 개수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) X를 표준화한다.
(ii) 표준정규분포표를 이용하여 X가 특정 범위에 속할 확률 p를 구한다.
(iii) pn의 값을 구한다.

0605 학생들의 몸무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(65,\ 7^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-65}{7}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(54.5 \le X \le 68.5)&=\mathrm{P}\left(\frac{54.5-65}{7} \le Z \le \frac{68.5-65}{7}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 0.5)\\&=\mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)\\&=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)\\&=0.43+0.19\\&=0.62\end{aligned}$$

따라서 몸무게가 54.5 kg 이상 68.5 kg 이하인 학생 수는

$0.62 \times 1400=868$

답 ②

0606 신입생들의 한 달 용돈을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ··· ❶

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X \le 30)&=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{30-40}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z \le -2)\\&=\mathrm{P}(Z \ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$ ··· ❷

따라서 한 달 용돈이 30만 원 이하인 신입생 수는

$0.02 \times 300=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X를 정하고 표준화할 수 있다.	30 %
❷ 한 달 용돈이 30만 원 이하일 확률을 구할 수 있다.	40 %
❸ 한 달 용돈이 30만 원 이하인 신입생 수를 구할 수 있다.	30 %

0607 TV 사용 기간을 확률변수 X라 하면 X의 평균은 108개월, 즉 9년이고 표준편차는 12개월, 즉 1년이므로 X는 정규분포 $\mathrm{N}(9,\ 1)$을 따른다.

$Z=X-9$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(10 \le X \le 11)&=\mathrm{P}(10-9 \le Z \le 11-9)\\&=\mathrm{P}(1 \le Z \le 2)\\&=\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)\\&=0.48-0.34\\&=0.14\end{aligned}$$

따라서 TV 사용 기간이 10년 이상 11년 이하인 소비자는

$0.14 \times 150=21$(만 명)

$\therefore n=21$

답 21

0608 사원들의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$M=-0.3$이므로 $\frac{m-80}{5\sigma}=-0.3$에서

$$m-80=-1.5\sigma \qquad \therefore 80-m=1.5\sigma$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X \ge 80)&=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{80-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{1.5\sigma}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}(Z \ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)\\&=0.5-0.43\\&=0.07\end{aligned}$$

따라서 성과급을 받는 사원 수는

$0.07 \times 400=28$

답 28

유형 13 정규분포의 활용; 최저 점수 구하기

본책 100쪽

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 상위 k % 안에 속하는 X의 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 상위 k % 안에 드는 X의 최솟값을 a라 한다.
➡ $\mathrm{P}(X \ge a)=\frac{k}{100}$
(ii) X를 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 표준화한다.
➡ $\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{a-m}{\sigma}\right)=\frac{k}{100}$
(iii) 표준정규분포표를 이용하여 a의 값을 구한다.

0609 응시자들의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(310,\ 50^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-310}{50}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a점이라 하면

$$P(X \geq a)=\frac{900}{6000}=0.15$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-310}{50}\right)=0.15$$

$$P(Z \geq 0)-P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-310}{50}\right)=0.15$$

$$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-310}{50}\right)=0.15$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-310}{50}\right)=0.35$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.04)=0.35$이므로

$$\frac{a-310}{50}=1.04, \qquad a-310=52$$

$$\therefore a=362$$

따라서 합격자의 최저 점수는 362점이다. 답 362점

0610 학생들의 지능 지수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(100,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-100}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

상위 10 %에 속하는 학생의 최저 지능 지수를 a라 하면

$$P(X \geq a)=0.1$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-100}{5}\right)=0.1$$

$$P(Z \geq 0)-P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-100}{5}\right)=0.1$$

$$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-100}{5}\right)=0.1$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-100}{5}\right)=0.4$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.3)=0.4$이므로

$$\frac{a-100}{5}=1.3, \qquad a-100=6.5$$

$$\therefore a=106.5$$

따라서 상위 10 %에 속하는 학생의 최저 지능 지수는 106.5이다.

답 ③

0611 학생들의 100 m 달리기 기록을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(14,\ 0.5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-14}{0.5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ⋯ ❶

반 대표로 세 번째에 뽑힌 학생의 기록을 a초라 하면

$$P(X \leq a)=\frac{3}{25}=0.12$$

$$P\left(Z \leq \frac{a-14}{0.5}\right)=0.12$$

$$P\left(Z \geq \frac{14-a}{0.5}\right)=0.12$$

$$P(Z \geq 0)-P\left(0 \leq Z \leq \frac{14-a}{0.5}\right)=0.12$$

$$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \frac{14-a}{0.5}\right)=0.12$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{14-a}{0.5}\right)=0.38$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.2)=0.38$이므로

$$\frac{14-a}{0.5}=1.2, \qquad 14-a=0.6$$

$$\therefore a=13.4$$

따라서 반 대표로 세 번째에 뽑힌 학생의 기록은 13.4초이다.

⋯ ❷

답 13.4초

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X를 정하고 표준화할 수 있다.	30 %
❷ 반 대표로 세 번째에 뽑힌 학생의 기록을 구할 수 있다.	70 %

0612 염소들의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(70,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-70}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

무게가 가벼운 쪽에서 200번째인 염소의 무게를 a kg이라 하면

$$P(X \leq a)=\frac{200}{500}=0.4$$

$$P\left(Z \leq \frac{a-70}{12}\right)=0.4$$

$$P\left(Z \geq \frac{70-a}{12}\right)=0.4$$

$$P(Z \geq 0)-P\left(0 \leq Z \leq \frac{70-a}{12}\right)=0.4$$

$$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \frac{70-a}{12}\right)=0.4$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{70-a}{12}\right)=0.1$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.25)=0.1$이므로

$$\frac{70-a}{12}=0.25, \qquad 70-a=3$$

$$\therefore a=67$$

따라서 무게가 가벼운 쪽에서 200번째인 염소의 무게는 67 kg이다. 답 67 kg

0613 A 반 학생들의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(165.9,\ 10^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-165.9}{10}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

A 반에서 학생의 키가 180 cm 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 180) &= P\left(Z_X \geq \frac{180-165.9}{10}\right) \\ &= P(Z_X \geq 1.41) \\ &= P(Z_X \geq 0)-P(0 \leq Z_X \leq 1.41) \\ &= 0.5-0.42=0.08 \end{aligned}$$

한편 B 반 학생들의 키를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $N(169.8,\ 5^2)$을 따르므로 $Z_Y=\frac{Y-169.8}{5}$로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 B 반에서 키가 a cm 이상인 학생 수는 A 반에서 키가 180 cm 이상인 학생 수의 2배이고 두 반의 전체 학생 수가 같으므로 B 반에서 학생의 키가 a cm 이상일 확률도 A 반에서 학생의 키가 180 cm 이상일 확률의 2배이다. 즉

$$P(Y \geq a)=2P(X \geq 180)$$

$$P\left(Z_Y \geq \frac{a-169.8}{5}\right)=2 \times 0.08=0.16$$

$$\mathrm{P}(Z_Y \geq 0) - \mathrm{P}\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{a-169.8}{5}\right) = 0.16$$

$$0.5 - \mathrm{P}\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{a-169.8}{5}\right) = 0.16$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{a-169.8}{5}\right) = 0.34$$

이때 $\mathrm{P}(0 \leq Z_Y \leq 1) = 0.34$이므로

$$\frac{a-169.8}{5} = 1, \qquad a - 169.8 = 5$$

$$\therefore a = 174.8$$

답 174.8

유형 14 정규분포의 활용; 표준화하여 확률 비교하기

본책 100쪽

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m_X, \sigma_X^2)$, $\mathrm{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$을 따를 때, X, Y를 각각 $Z_X = \frac{X-m_X}{\sigma_X}$, $Z_Y = \frac{X-m_Y}{\sigma_Y}$로 표준화하여 확률을 비교한다.

0614 유권이네 반 전체 학생의 국어, 수학, 영어 시험 성적을 각각 확률변수 X_A, X_B, X_C라 하면 X_A, X_B, X_C는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(70, 15^2)$, $\mathrm{N}(72, 18^2)$, $\mathrm{N}(74, 16^2)$을 따르므로

$$Z_\mathrm{A} = \frac{X_\mathrm{A}-70}{15},\ Z_\mathrm{B} = \frac{X_\mathrm{B}-72}{18},\ Z_\mathrm{C} = \frac{X_\mathrm{C}-74}{16}$$

로 놓으면 Z_A, Z_B, Z_C는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. 다른 학생들이 유권이보다 국어, 수학, 영어 시험 성적이 높을 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X_\mathrm{A} > 85) = \mathrm{P}\left(Z_\mathrm{A} > \frac{85-70}{15}\right) = \mathrm{P}(Z_\mathrm{A} > 1),$$

$$\mathrm{P}(X_\mathrm{B} > 92) = \mathrm{P}\left(Z_\mathrm{B} > \frac{92-72}{18}\right) = \mathrm{P}\left(Z_\mathrm{B} > \frac{10}{9}\right),$$

$$\mathrm{P}(X_\mathrm{C} > 88) = \mathrm{P}\left(Z_\mathrm{C} > \frac{88-74}{16}\right) = \mathrm{P}\left(Z_\mathrm{C} > \frac{7}{8}\right)$$

이때 $\mathrm{P}\left(Z_\mathrm{B} > \frac{10}{9}\right) < \mathrm{P}(Z_\mathrm{A} > 1) < \mathrm{P}\left(Z_\mathrm{C} > \frac{7}{8}\right)$이므로

$$\mathrm{P}(X_\mathrm{B} > 92) < \mathrm{P}(X_\mathrm{A} > 85) < \mathrm{P}(X_\mathrm{C} > 88)$$

따라서 유권이의 성적이 상대적으로 좋은 과목부터 순서대로 나열하면 수학, 국어, 영어이다. 확률이 낮은 과목일수록 상대적으로 성적이 좋다.

답 수학, 국어, 영어

0615 세 확률변수 W, X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(60, a^2)$, $\mathrm{N}(62, b^2)$, $\mathrm{N}(64, c^2)$을 따르므로

$$Z_W = \frac{W-60}{a},\ Z_X = \frac{X-62}{b},\ Z_Y = \frac{Y-64}{c}$$

로 놓으면 Z_W, Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
이때

$$p = \mathrm{P}(W \geq 66) = \mathrm{P}\left(Z_W \geq \frac{66-60}{a}\right) = \mathrm{P}\left(Z_W \geq \frac{6}{a}\right),$$

$$q = \mathrm{P}(X \leq 56) = \mathrm{P}\left(Z_X \leq \frac{56-62}{b}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(Z_X \leq -\frac{6}{b}\right) = \mathrm{P}\left(Z_X \geq \frac{6}{b}\right),$$

$$r = \mathrm{P}(Y \geq 70) = \mathrm{P}\left(Z_Y \geq \frac{70-64}{c}\right) = \mathrm{P}\left(Z_Y \geq \frac{6}{c}\right)$$

이고 $0 < a < b < c$에서 $0 < \frac{6}{c} < \frac{6}{b} < \frac{6}{a}$이므로

$$\mathrm{P}\left(Z_W \geq \frac{6}{a}\right) < \mathrm{P}\left(Z_X \geq \frac{6}{b}\right) < \mathrm{P}\left(Z_Y \geq \frac{6}{c}\right)$$

$$\therefore p < q < r$$

답 ①

0616 1반, 2반, 3반 학생들의 1분 동안의 줄넘기 횟수를 각각 확률변수 X_1, X_2, X_3이라 하면 X_1, X_2, X_3은 각각 정규분포 $\mathrm{N}(174, 6^2)$, $\mathrm{N}(170, 2^2)$, $\mathrm{N}(172, 3^2)$을 따르므로

$$Z_1 = \frac{X_1-174}{6},\ Z_2 = \frac{X_2-170}{2},\ Z_3 = \frac{X_3-172}{3}$$

로 놓으면 Z_1, Z_2, Z_3은 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
1반, 2반, 3반 학생들이 각각 A, B, C보다 줄넘기 횟수가 많을 확률은

$$\mathrm{P}(X_1 > 175) = \mathrm{P}\left(Z_1 > \frac{175-174}{6}\right) = \mathrm{P}\left(Z_1 > \frac{1}{6}\right),$$

$$\mathrm{P}(X_2 > 173) = \mathrm{P}\left(Z_2 > \frac{173-170}{2}\right) = \mathrm{P}\left(Z_2 > \frac{3}{2}\right),$$

$$\mathrm{P}(X_3 > 174) = \mathrm{P}\left(Z_3 > \frac{174-172}{3}\right) = \mathrm{P}\left(Z_3 > \frac{2}{3}\right)$$

이때 $\mathrm{P}\left(Z_2 > \frac{3}{2}\right) < \mathrm{P}\left(Z_3 > \frac{2}{3}\right) < \mathrm{P}\left(Z_1 > \frac{1}{6}\right)$이므로

$$\mathrm{P}(X_2 > 173) < \mathrm{P}(X_3 > 174) < \mathrm{P}(X_1 > 175)$$

따라서 각자 자기 반에서 상대적으로 줄넘기 횟수가 많은 학생부터 순서대로 나열하면 B, C, A이다.

답 B, C, A

유형 15 이항분포와 정규분포의 관계

본책 101쪽

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따른다. (단, $q = 1-p$)

0617 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(192, \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X) = 192 \cdot \frac{3}{4} = 144,\ \mathrm{V}(X) = 192 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = 36$$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(144, 6^2)$을 따른다.
따라서 $Z = \frac{X-144}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \geq 135) &= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{135-144}{6}\right)\\ &= \mathrm{P}(Z \geq -1.5)\\ &= \mathrm{P}(-1.5 \leq Z \leq 0) + \mathrm{P}(Z \geq 0)\\ &= \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5) + 0.5\\ &= 0.4332 + 0.5\\ &= 0.9332\end{aligned}$$

답 ④

0618 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(180, p)$를 따르고 $\mathrm{V}(X) = 25$이므로

$$180p(1-p) = 25, \qquad 36p^2 - 36p + 5 = 0$$

$$(6p-1)(6p-5) = 0 \qquad \therefore p = \frac{5}{6}\ \left(\because \frac{1}{2} < p < 1\right)$$

즉 $\mathrm{E}(X) = 180 \cdot \frac{5}{6} = 150$이고 180은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150, 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-150}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X\le 145)&=P\left(Z\le \frac{145-150}{5}\right)\\&=P(Z\le -1)\\&=P(Z\ge 1)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 ②

0619 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로 ⋯ ❶

$$E(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20,\ V(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(20, 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 ⋯ ❷

$$\begin{aligned}P(16\le X\le 24)&=P\left(\frac{16-20}{4}\le Z\le \frac{24-20}{4}\right)\\&=P(-1\le Z\le 1)\\&=2P(0\le Z\le 1)\\&=2\times 0.34\\&=0.68\end{aligned}$$

⋯ ❸

답 0.68

채점 기준	비율
❶ X가 따르는 이항분포를 구할 수 있다.	20 %
❷ X를 표준화할 수 있다.	40 %
❸ $P(16\le X\le 24)$를 구할 수 있다.	40 %

0620 ${}_{450}C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{450-x}$은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{2}{3}$인 어떤 사건이 450번의 독립시행에서 x번 일어날 확률이다.

이 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(450, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$E(X)=450\cdot\frac{2}{3}=300,\ V(X)=450\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=100$$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(300, 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-300}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&{}_{450}C_{450}\left(\frac{2}{3}\right)^{450}+{}_{450}C_{449}\left(\frac{2}{3}\right)^{449}\left(\frac{1}{3}\right)^1+\cdots+{}_{450}C_{330}\left(\frac{2}{3}\right)^{330}\left(\frac{1}{3}\right)^{120}\\&=P(X=450)+P(X=449)+\cdots+P(X=330)\\&=P(X\ge 330)\\&=P\left(Z\ge\frac{330-300}{10}\right)\\&=P(Z\ge 3)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 3)\\&=0.5-0.4987=0.0013\end{aligned}$$

답 0.0013

유형 16 이항분포와 정규분포의 관계의 활용 ; 확률 구하기

본책 102쪽

n번의 독립시행에서 사건 A가 a번 이상 b번 이하로 일어날 확률은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하고, X가 따르는 이항분포를 $B(n, p)$로 나타낸다.
(ii) X의 평균 m과 분산 σ^2을 구한다.
(iii) X가 근사적으로 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따름을 이용하여 X를 표준화한다.
(iv) 표준정규분포표를 이용하여 $P(a\le X\le b)$를 구한다.

0621 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$E(X)=720\cdot\frac{1}{6}=120,\ V(X)=720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=100$$

이때 720은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(120, 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-120}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(100\le X\le 130)&=P\left(\frac{100-120}{10}\le Z\le\frac{130-120}{10}\right)\\&=P(-2\le Z\le 1)\\&=P(-2\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)\\&=P(0\le Z\le 2)+P(0\le Z\le 1)\\&=0.4772+0.3413\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 ②

0622 동전 2개를 동시에 한 번 던질 때, 2개 모두 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 2개의 동전이 모두 뒷면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(192, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(X)=192\cdot\frac{1}{4}=48,\ V(X)=192\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=36$$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(48, 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-48}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le 57)&=P\left(Z\le\frac{57-48}{6}\right)\\&=P(Z\le 1.5)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5+0.4332\\&=0.9332\end{aligned}$$

답 ④

0623 A 회사의 제품을 택할 확률은 $\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$이므로 225명의 고객 중 A 회사의 제품을 택하는 고객의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(225, \frac{1}{5}\right)$을 따른다. ⋯ ❶

$\therefore \mathrm{E}(X)=225\cdot\frac{1}{5}=45,\ \mathrm{V}(X)=225\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=36$

이때 225는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(45,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-45}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은 ⋯ ❷

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 30)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{30-45}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq -2.5)\\&=\mathrm{P}(-2.5\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(Z\geq 0)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)+0.5\\&=0.4938+0.5\\&=0.9938\end{aligned}$$ ⋯ ❸

답 0.9938

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X를 정하고 X가 따르는 이항분포를 구할 수 있다.	30 %
❷ X를 표준화할 수 있다.	30 %
❸ A 회사의 제품을 택하는 고객이 30명 이상일 확률을 구할 수 있다.	40 %

0624 10점을 얻는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1600,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=1600\cdot\frac{1}{5}=320,\ \mathrm{V}(X)=1600\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=256$$

이때 1600은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 16^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-320}{16}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

한편 1600번의 시행 중에서 2점을 잃는 횟수는 $1600-X$이므로 736점 이상을 얻기 위해서는

$10X-2(1600-X)\geq 736,\qquad 12X\geq 3936$

$\therefore X\geq 328$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 328)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{328-320}{16}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)\\&=0.5-0.1915\\&=0.3085\end{aligned}$$

답 0.3085

유형 17 이항분포와 정규분포의 관계의 활용 ; 미지수의 값 구하기 본책 102쪽

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, $\mathrm{P}(X\geq a)=\alpha$ (α는 상수)를 만족시키는 a의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) X가 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ np(1-p))$를 따름을 이용하여 X를 표준화한다.

(ii) 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(Z\geq k)=\alpha$를 만족시키는 k를 찾아 a의 값을 구한다.

0625 맞힌 문제의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20,\ \mathrm{V}(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\geq a)=0.01$에서

$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-20}{4}\right)=0.01$

$\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-20}{4}\right)=0.01$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-20}{4}\right)=0.01$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-20}{4}\right)=0.49$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)=0.49$이므로

$\frac{a-20}{4}=2.5,\qquad a-20=10$

$\therefore a=30$

답 30

0626 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(1458,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=1458\cdot\frac{1}{3}=486,\ \mathrm{V}(X)=1458\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=324$$

이때 1458은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(486,\ 18^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-486}{18}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\geq k)=0.1587$에서

$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{k-486}{18}\right)=0.1587$

$\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-486}{18}\right)=0.1587$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-486}{18}\right)=0.1587$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-486}{18}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)=0.3413$이므로

$\frac{k-486}{18}=1,\qquad k-486=18$

$\therefore k=504$

답 504

0627 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=n\cdot\frac{1}{10}=\frac{n}{10},\ \mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9n}{100}$$

이때 n은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{n}{10},\ \left(\frac{3\sqrt{n}}{10}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-\frac{n}{10}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}\left(\left|X-\frac{n}{10}\right|\leq\frac{15}{2}\right)\geq 0.8664$에서

$$P\left(-\frac{15}{2}\le X-\frac{n}{10}\le\frac{15}{2}\right)\ge 0.8664$$

$$P\left(\frac{-\frac{15}{2}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}}\le Z\le\frac{\frac{15}{2}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}}\right)\ge 0.8664$$

$$P\left(-\frac{25}{\sqrt{n}}\le Z\le\frac{25}{\sqrt{n}}\right)\ge 0.8664$$ $2P\left(0\le Z\le\frac{25}{\sqrt{n}}\right)$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{25}{\sqrt{n}}\right)\ge 0.4332$$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{25}{\sqrt{n}}\ge 1.5,\quad \sqrt{n}\le\frac{50}{3}$$

$$\therefore n\le\frac{2500}{9}=277.7\cdots$$

n은 자연수이므로 n의 최댓값은 277이다. 답 277

0628 1st a_n을 구하여 $P(X=n)$을 구한다.

$(2x+3)^{100}$의 전개식의 일반항은

$${}_{100}C_r(2x)^r3^{100-r}={}_{100}C_r\,2^r\cdot 3^{100-r}\cdot x^r\ (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$$

이므로 x^n의 계수는

$$a_n={}_{100}C_n\,2^n\cdot 3^{100-n}$$

$$\therefore P(X=n)=\frac{1}{5^{100}}\cdot a_n$$

$$=\frac{1}{5^{100}}\cdot{}_{100}C_n\,2^n\cdot 3^{100-n}$$

$$=\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{100-n}\cdot{}_{100}C_n\,2^n\cdot 3^{100-n}$$

$$={}_{100}C_n\left(\frac{2}{5}\right)^n\left(\frac{3}{5}\right)^{100-n}\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$$

2nd $E(X^2)$을 구한다.

확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$$E(X)=100\cdot\frac{2}{5}=40,\ V(X)=100\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=24$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$$
$$=24+40^2=1624$$

3rd $E\left(\frac{1}{8}X^2\right)$을 구한다.

$$E\left(\frac{1}{8}X^2\right)=\frac{1}{8}E(X^2)=\frac{1}{8}\cdot 1624=203$$ 답 203

0629 1st 확률변수 Y를 정하고 X를 Y에 대한 식으로 나타낸다.

주어진 시행을 15번 반복할 때 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼 이동하는 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 Y라 하면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼 이동하는 사건이 일어나는 횟수는 $15-Y$이므로 이동된 점 P의 좌표는

$$(3Y,\ 15-Y)$$

이때 주어진 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리가 확률변수 X이므로

$$X=\frac{|3\cdot 3Y+4(15-Y)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5Y+60|}{5}$$

$$=\frac{5Y+60}{5}\ (\because 0\le Y\le 15)$$

$$=Y+12$$

2nd $E(Y)$를 구한다.

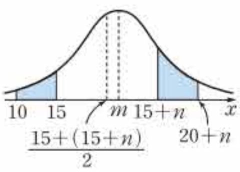
한 번의 시행에서 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼 이동하는 사건이 일어날 확률은 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하일 확률인 $\frac{1}{3}$이므로 Y는 이항분포 $B\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(Y)=15\cdot\frac{1}{3}=5$$

3rd $E(X)$를 구한다.

$E(X)=E(Y+12)=E(Y)+12=5+12=17$ 답 ③

0630 1st n의 값의 범위를 구한다.



확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고

$$P(10\le X\le 15)$$
$$<P(15+n\le X\le 20+n)$$

에서

$$15-10=(20+n)-(15+n)$$

이므로

$$m>\frac{15+(15+n)}{2}$$

$$\therefore 1\le n<2m-30$$

$m=\frac{15+(15+n)}{2}$이면 위의 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로 주어진 조건을 만족시키려면 $m>\frac{15+(15+n)}{2}$이어야 한다.

2nd m의 최댓값을 구한다.

자연수 n의 최댓값이 9이므로

$$9<2m-30\le 10,\quad 39<2m\le 40$$

$$\therefore 19.5<m\le 20$$

따라서 m의 최댓값은 20이다. 답 20

0631 1st 두 확률변수 X, Y를 각각 표준화한다.

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(m,\ (2\sigma)^2)$, $N(2m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-m}{2\sigma},\ Z_Y=\frac{Y-2m}{\sigma}$$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

2nd ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $P(X\le 0)=P\left(Z_X\le-\frac{m}{2\sigma}\right)$, $P(Y\ge 0)=P\left(Z_Y\ge-\frac{2m}{\sigma}\right)$

이고 $-\frac{2m}{\sigma}<-\frac{m}{2\sigma}<0$이므로

$$P\left(Z_X\le-\frac{m}{2\sigma}\right)<0.5<P\left(Z_Y\ge-\frac{2m}{\sigma}\right)$$

$$\therefore P(X\le 0)<P(Y\ge 0)$$

3rd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $P(m\le X\le 2m)=P\left(0\le Z_X\le\frac{m}{2\sigma}\right)$

$$\frac{1}{2}P(m\le Y\le 2m)=\frac{1}{2}P\left(-\frac{m}{\sigma}\le Z_Y\le 0\right)$$

$$=\frac{1}{2}P\left(0\le Z_Y\le\frac{m}{\sigma}\right)$$

이때 $P\left(0\le Z_X\le\frac{m}{2\sigma}\right)=\frac{1}{2}P\left(0\le Z_Y\le\frac{m}{\sigma}\right)$인지는 알 수 없다.

4th ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $P(X\ge a)=P(Y\le b)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_X \geq \frac{a-m}{2\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y \leq \frac{b-2m}{\sigma}\right)$$

따라서 $\frac{a-m}{2\sigma}=-\frac{b-2m}{\sigma}$이므로

$$a-m=-2b+4m \qquad \therefore a+2b=5m$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0632 (1st) 두 확률변수 X, Y를 각각 표준화한다.

$\mathrm{E}(X)=60$, $\sigma(X)=10$이고, $Y=2X-50$이므로

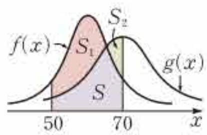
$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-50)=2\mathrm{E}(X)-50=2\cdot 60-50=70,$$

$$\sigma(Y)=\sigma(2X-50)=2\sigma(X)=2\cdot 10=20$$

따라서 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 10^2)$, $\mathrm{N}(70,\ 20^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-60}{10}$, $Z_Y=\frac{Y-70}{20}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(2nd) 두 곡선과 x축 및 두 직선 $x=50$, $x=m$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 이용하여 S_1, S_2를 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 두 곡선과 x축 및 두 직선 $x=50$, $x=70$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면



$$S_1=\mathrm{P}(50\leq X\leq 70)-S,$$

$$S_2=\mathrm{P}(50\leq Y\leq 70)-S$$

(3rd) S_1-S_2의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}S_1-S_2&=\mathrm{P}(50\leq X\leq 70)-S-\{\mathrm{P}(50\leq Y\leq 70)-S\}\\&=\mathrm{P}(50\leq X\leq 70)-\mathrm{P}(50\leq Y\leq 70)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{50-60}{10}\leq Z_X\leq \frac{70-60}{10}\right)\\&\quad-\mathrm{P}\left(\frac{50-70}{20}\leq Z_Y\leq \frac{70-70}{20}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\leq Z_X\leq 1)-\mathrm{P}(-1\leq Z_Y\leq 0)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=0.3413\end{aligned}$$

답 0.3413

0633 (1st) m_X의 값을 구한다.

모든 실수 x에 대하여 $f(80-x)=f(80+x)$가 성립하므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=80$에 대하여 대칭이고, 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m_X,\ \sigma^2)$을 따르므로

$$m_X=80$$

(2nd) σ의 값을 구한다.

$Z_X=\frac{X-80}{\sigma}$으로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(80\leq X\leq 90)=0.4938$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{80-80}{\sigma}\leq Z_X\leq \frac{90-80}{\sigma}\right)=0.4938$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z_X\leq \frac{10}{\sigma}\right)=0.4938$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)=0.4938$이므로

$$\frac{10}{\sigma}=2.5 \qquad \therefore \sigma=4$$

(3rd) m_Y의 값을 구한다.

$g(x)=g(80-x)$에 x 대신 $40-x$를 대입하면

$$g(40-x)=g(40+x)$$

이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $x=40$에 대하여 대칭이고, 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_Y,\ \frac{4^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m_Y,\ 2^2)$을 따르므로

$$m_Y=40$$

(4th) $\mathrm{P}(36\leq Y\leq 46)$을 구한다.

$Z_Y=\frac{Y-40}{2}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(36\leq Y\leq 46)&=\mathrm{P}\left(\frac{36-40}{2}\leq Z_Y\leq \frac{46-40}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\leq Z_Y\leq 3)\\&=\mathrm{P}(-2\leq Z_Y\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z_Y\leq 3)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z_Y\leq 2)+\mathrm{P}(0\leq Z_Y\leq 3)\\&=0.4772+0.4987\\&=0.9759\end{aligned}$$

답 0.9759

0634 (1st) 확률변수 X를 표준화하여 주어진 등식을 변형한다.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{P}(X\leq 3)=\mathrm{P}(3\leq X\leq 80)=0.3$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{3-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{3-m}{\sigma}\leq Z\leq \frac{80-m}{\sigma}\right)=0.3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(2nd) m, σ에 대한 연립방정식을 세운다.

$\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{3-m}{\sigma}\right)=0.3$에서

$$\mathrm{P}(Z\leq 0)-\mathrm{P}\left(\frac{3-m}{\sigma}\leq Z\leq 0\right)=0.3$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(\frac{3-m}{\sigma}\leq Z\leq 0\right)=0.3$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{3-m}{\sigma}\leq Z\leq 0\right)=0.2$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{m-3}{\sigma}\right)=0.2$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.52)=0.2$이므로

$$\frac{m-3}{\sigma}=0.52 \qquad \therefore m=3+0.52\sigma \qquad \cdots\cdots ㉡$$

한편 ㉠에서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{80-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{3-m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{3-m}{\sigma}\leq Z\leq \frac{80-m}{\sigma}\right)\\&=0.3+0.3=0.6\end{aligned}$$

이므로

$$\mathrm{P}(Z\leq 0)+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{80-m}{\sigma}\right)=0.6$$

$$0.5+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{80-m}{\sigma}\right)=0.6$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{80-m}{\sigma}\right)=0.1$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.25)=0.1$이므로

$$\frac{80-m}{\sigma}=0.25 \qquad \therefore m=80-0.25\sigma \qquad \cdots\cdots ㉢$$

(3rd) $m+\sigma$의 값을 구한다.

㉡, ㉢을 연립하여 풀면　　$m=55,\ \sigma=100$

$\therefore\ m+\sigma=155$　　답 155

0635 (1st) 한라봉 한 개의 무게를 확률변수 X로 놓고 표준화한다.

한라봉 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(250,\ 25^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-250}{25}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(2nd) 한라봉 한 개의 가격을 확률변수 Y로 놓고 Y의 확률분포를 구한다.

한라봉 한 개의 가격을 확률변수 Y라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y=1200)&=\mathrm{P}(X<250)\\&=\mathrm{P}\left(Z<\frac{250-250}{25}\right)\\&=\mathrm{P}(Z<0)\\&=0.5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y=1500)&=\mathrm{P}(250\le X<300)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{250-250}{25}\le Z<\frac{300-250}{25}\right)\\&=\mathrm{P}(0\le Z<2)\\&=0.48,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y=1800)&=\mathrm{P}(X\ge 300)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{300-250}{25}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

이므로 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1200	1500	1800	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	0.5	0.48	0.02	1

(3rd) 한라봉 한 개의 가격의 기댓값을 구한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=1200\times 0.5+1500\times 0.48+1800\times 0.02\\&=1356\end{aligned}$$

따라서 구하는 기댓값은 1356원이다.　　답 1356원

0636 (1st) 사건 A, B를 정하여 구하는 확률을 A, B로 나타낸다.

임의로 선택한 직원 1명이 출근 시간이 73분 이상인 사건을 A, 지하철을 이용한 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B|A)=0.4,\ \mathrm{P}(B|A^C)=0.2$

└ 출근 시간이 73분 미만인 사건

이때 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=0.4\mathrm{P}(A)+0.2\mathrm{P}(A^C)\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

(2nd) 출근 시간이 73분 이상일 확률과 73분 미만일 확률을 구한다.

출근 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(66.4,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-66.4}{15}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 73)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{73-66.4}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0.44)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.44)\\&=0.5-0.17\\&=0.33\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X<73)&=1-\mathrm{P}(X\ge 73)\\&=1-0.33\\&=0.67\end{aligned}$$

(3rd) 지하철을 이용하였을 확률을 구한다.

$\mathrm{P}(A)=0.33,\ \mathrm{P}(A^C)=0.67$이므로 구하는 확률은 ㉠에서

$\mathrm{P}(B)=0.4\times 0.33+0.2\times 0.67=0.266$　　답 ⑤

0637 (1st) 두 확률변수 X, Y를 정한다.

A, B 과목 시험 점수를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(m+3,\ \sigma^2)$을 따른다.

(2nd) X를 표준화하고 m, σ에 대한 식을 구한다.

$Z_X=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

A 과목 시험 점수가 80점 이상인 학생의 비율이 9 %이므로

$\mathrm{P}(X\ge 80)=0.09$

$\mathrm{P}\left(Z_X\ge\dfrac{80-m}{\sigma}\right)=0.09$

$\mathrm{P}(Z_X\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\dfrac{80-m}{\sigma}\right)=0.09$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\dfrac{80-m}{\sigma}\right)=0.09$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\dfrac{80-m}{\sigma}\right)=0.41$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.34)=0.41$이므로

$\dfrac{80-m}{\sigma}=1.34\qquad\therefore\ m+1.34\sigma=80\qquad\cdots\cdots ㉠$

(3rd) Y를 표준화하고 m, σ에 대한 식을 구한다.

$Z_Y=\dfrac{Y-(m+3)}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

B 과목 시험 점수가 80점 이상인 학생의 비율이 15 %이므로

$\mathrm{P}(Y\ge 80)=0.15$

$\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\dfrac{80-(m+3)}{\sigma}\right)=0.15$

$\mathrm{P}(Z_Y\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\dfrac{77-m}{\sigma}\right)=0.15$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\dfrac{77-m}{\sigma}\right)=0.15$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\dfrac{77-m}{\sigma}\right)=0.35$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.04)=0.35$이므로

$\dfrac{77-m}{\sigma}=1.04\qquad\therefore\ m+1.04\sigma=77\qquad\cdots\cdots ㉡$

(4th) $m+\sigma$의 값을 구한다.

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　　$m=66.6,\ \sigma=10$

$\therefore\ m+\sigma=76.6$　　답 ⑤

0638 전략 확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르면 $E(X)=np$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X는 이항분포 $B(4,\ p)$를 따르므로

$E(X)=4p$

확률변수 Y는 이항분포 $B(2,\ 1-p)$를 따르므로

$E(Y)=2(1-p)$

이때 $E(X)=E(5Y-3)$에서 $E(X)=5E(Y)-3$이므로

$4p=10(1-p)-3,\qquad 14p=7$

$\therefore p=\frac{1}{2}$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}\therefore P(X=3)+P(Y=1)&={}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\\&=4\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{1}{4}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $P(X=3)+P(Y=1)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0639 전략 A가 점수를 얻는 횟수에 대한 확률변수는 이항분포를 따름을 이용한다.

풀이 두 사람 A와 B가 동시에 공을 한 개씩 꺼내는 경우의 수는

$6\cdot5=30$

A가 꺼낸 공에 적힌 숫자가 B가 꺼낸 공에 적힌 숫자보다 큰 경우는

A가 3을 꺼낼 때, $2\cdot4=8$(가지),

A가 2를 꺼낼 때, $2\cdot2=4$(가지)

이므로 한 번의 시행에서 A가 점수를 얻을 확률은

$\frac{8+4}{30}=\frac{2}{5}$ ⋯ ❶

15회의 시행에서 A가 점수를 얻는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(15,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$E(X)=15\cdot\frac{2}{5}=6$

따라서 A가 얻는 점수의 합 $10X$에 대하여

$E(10X)=10E(X)=10\cdot6=60$

이므로 A가 얻는 점수의 합의 기댓값은 60점이다. ⋯ ❷

한편 15회의 시행에서 B가 점수를 얻는 횟수를 확률변수 Y라 하면 $Y=15-X$이므로

$E(Y)=E(15-X)=15-E(X)=15-6=9$

따라서 B가 얻는 점수의 합 $5Y$에 대하여

$E(5Y)=5E(Y)=5\cdot9=45$

이므로 B가 얻는 점수의 합의 기댓값은 45점이다. ⋯ ❸

답 A: 60점, B: 45점

채점 기준	비율
❶ 한 번의 시행에서 A가 점수를 얻을 확률을 구할 수 있다.	20 %
❷ A가 얻는 점수의 합의 기댓값을 구할 수 있다.	40 %
❸ B가 얻는 점수의 합의 기댓값을 구할 수 있다.	40 %

참고 한 번의 시행에서 B가 점수를 얻을 확률은 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$이므로 Y는 이항분포 $B\left(15,\ \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore E(Y)=15\cdot\frac{3}{5}=9$

0640 전략 확률변수 X에 대하여 $E(aX+b)=aE(X)+b$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$임을 이용한다. (단, a, b는 상수, $a\neq0$)

풀이 확률변수 X가 정규분포 $N(60,\ 10^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-60}{10}$으로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\le50)=0.1587$에서

$P\left(Z_X\le\frac{50-60}{10}\right)=0.1587$

$P(Z_X\le-1)=0.1587$

$\therefore P(Z_X\ge1)=0.1587$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

$Y=3X-4$에서

$E(Y)=E(3X-4)=3E(X)-4=3\cdot60-4=176$

$\sigma(Y)=\sigma(3X-4)=3\sigma(X)=3\cdot10=30$

즉 확률변수 Y는 정규분포 $N(176,\ 30^2)$을 따르므로

$Z_Y=\frac{Y-176}{30}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ⋯ ❷

$$\begin{aligned}\therefore P(Y\le206)&=P\left(Z_Y\le\frac{206-176}{30}\right)=P(Z_Y\le1)\\&=1-P(Z_Y\ge1)=1-0.1587\ (\because ㉠)\\&=0.8413\end{aligned}$$ ⋯ ❸

답 0.8413

채점 기준	비율
❶ X를 표준화하여 $P(X\le50)=0.1587$을 Z_X에 대한 식으로 변형할 수 있다.	40 %
❷ Y를 표준화할 수 있다.	30 %
❸ $P(Y\le206)$을 구할 수 있다.	30 %

다른 풀이 $Y=3X-4$이므로

$$\begin{aligned}P(Y\le206)&=P(3X-4\le206)=P(X\le70)\\&=P\left(Z_X\le\frac{70-60}{10}\right)=P(Z_X\le1)\\&=1-P(Z_X\ge1)\\&=1-0.1587\\&=0.8413\end{aligned}$$

0641 전략 확률변수 X, Y를 정하고 각각 표준화한 후 확률을 비교한다.

풀이 두 회사 A, B에서 생산한 호스의 길이를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X, Y는 각각 정규분포 $N(12,\ 0.5^2)$, $N(15,\ 0.7^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-12}{0.5},\ Z_Y=\frac{Y-15}{0.7}$

로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

⋯ ❶

A 회사에서 생산한 호스를 A 회사에서 생산한 호스로 판단할 확률은

$$P(X<t)=P\left(Z_X<\frac{t-12}{0.5}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

B 회사에서 생산한 호스를 B 회사에서 생산한 호스로 판단할 확률은

$$P(Y\geq t)=P\left(Z_Y\geq\frac{t-15}{0.7}\right) \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉠, ㉡이 같아야 하므로

$$\frac{t-12}{0.5}=-\frac{t-15}{0.7}$$

$$7(t-12)=-5(t-15), \quad 12t=159$$

$$\therefore t=\frac{53}{4}=13.25$$ ⋯ ❷

답 13.25

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X, Y를 정하고 표준화할 수 있다.	30 %
❷ t의 값을 구할 수 있다.	70 %

0642 전략 원이 제4사분면을 지나려면 반지름의 길이가 원의 중심에서 원점까지의 거리보다 길어야 함을 이용한다.

풀이 원 $(x+a)^2+(y-a)^2=b^2$의 중심 $\underline{(-a,\ a)}_{\text{제2사분면 위에 있다.}}$에서 원점까지의 거리는

$$\sqrt{(-a)^2+a^2}=a\sqrt{2}$$

이므로 원 $(x+a)^2+(y-a)^2=b^2$이 제4사분면을 지나려면 $b>a\sqrt{2}$이어야 한다.

이때 $b>a\sqrt{2}$가 성립하는 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$, $(1,\ 6)$, $(2,\ 3)$,
$(2,\ 4)$, $(2,\ 5)$, $(2,\ 6)$, $(3,\ 5)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 6)$

의 12개이므로 한 번의 시행에서 사건 E가 일어날 확률은

$$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$ ⋯ ❶

사건 E가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(162,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 ⋯ ❷

$$E(X)=162\cdot\frac{1}{3}=54,\ V(X)=162\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=36$$

이때 162는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(54,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-54}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은 ⋯ ❸

$$\begin{aligned}P(X\geq 60)&=P\left(Z\geq\frac{60-54}{6}\right)\\&=P(Z\geq 1)\\&=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$ ⋯ ❹

답 0.1587

채점 기준	비율
❶ 사건 E가 일어날 확률을 구할 수 있다.	30 %
❷ 확률변수 X를 정하고 X가 따르는 이항분포를 구할 수 있다.	20 %
❸ X를 표준화할 수 있다.	30 %
❹ 사건 E가 60번 이상 일어날 확률을 구할 수 있다.	20 %

0643 전략 확률변수 X가 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{2n}{9},\ \left(\frac{4\sqrt{n}}{9}\right)^2\right)$을 따름을 이용하여 X를 표준화한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $B\left(2n,\ \frac{1}{9}\right)$을 따르므로

$$E(X)=2n\cdot\frac{1}{9}=\frac{2n}{9},\ V(X)=2n\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}=\frac{16n}{81}$$

이때 $2n$은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{2n}{9},\ \left(\frac{4\sqrt{n}}{9}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-\frac{2n}{9}}{\frac{4\sqrt{n}}{9}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ⋯ ❶

이때

$$\begin{aligned}P\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{2}{9}\right|\leq\frac{4}{n}\right)&=P\left(\left|X-\frac{2n}{9}\right|\leq 4\right)\\&=P\left(-4\leq X-\frac{2n}{9}\leq 4\right)\\&=P\left(\frac{-4}{\frac{4\sqrt{n}}{9}}\leq Z\leq\frac{4}{\frac{4\sqrt{n}}{9}}\right)\\&=2P\left(0\leq Z\leq\frac{9}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

이므로 $\quad f(n)=2P\left(0\leq Z\leq\frac{9}{\sqrt{n}}\right)$

$f(n)=2P(0\leq Z\leq 0.5)$에서

$$\frac{9}{\sqrt{n}}=0.5, \quad \sqrt{n}=18 \quad \therefore n=324$$ ⋯ ❷

즉 $f(324-m)=2P(0\leq Z\leq 1)$에서

$f(324-m)=2P\left(0\leq Z\leq\frac{9}{\sqrt{324-m}}\right)$이므로

$$\frac{9}{\sqrt{324-m}}=1, \quad \sqrt{324-m}=9$$

$$324-m=81 \quad \therefore m=243$$ ⋯ ❸

답 243

채점 기준	비율
❶ X를 표준화할 수 있다.	30 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ m의 값을 구할 수 있다.	30 %

07 통계적 추정

0644 답 전수조사

0645 답 표본조사

0646 답 표본조사

0647 답 전수조사

0648 답 ㄱ, ㄷ

0649 6장의 카드에서 3장을 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

$_6\Pi_3=6^3=216$ 답 216

0650 6장의 카드에서 3장을 뽑는 순열의 수와 같으므로

$_6P_3=120$ 답 120

0651 6장의 카드에서 3장을 뽑는 조합의 수와 같으므로

$_6C_3=20$ 답 20

0652 (1) $m=2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{4}=\frac{20}{4}=5$

$\sigma^2=2^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{4}+6^2\cdot\frac{1}{4}+8^2\cdot\frac{1}{4}-5^2=\frac{120}{4}-25=5$

$\therefore\ \sigma=\sqrt{5}$

(2) $\overline{X}=\frac{1}{2}(2+6)=4$

$S^2=\frac{1}{2-1}\{(2-4)^2+(6-4)^2\}=8$

$\therefore\ S=2\sqrt{2}$

답 (1) $m=5$, $\sigma=\sqrt{5}$ (2) $\overline{X}=4$, $S=2\sqrt{2}$

0653 $\overline{X}=\frac{1}{3}(1+5+9)=5$

$S^2=\frac{1}{3-1}\{(1-5)^2+(5-5)^2+(9-5)^2\}=16$

$S=\sqrt{16}=4$

답 $\overline{X}=5$, $S^2=16$, $S=4$

0654 $\overline{X}=\frac{1}{3}(3+7+7)=\frac{17}{3}$

$S^2=\frac{1}{3-1}\left[\left(3-\frac{17}{3}\right)^2+\left(7-\frac{17}{3}\right)^2+\left(7-\frac{17}{3}\right)^2\right]=\frac{16}{3}$

$S=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

답 $\overline{X}=\frac{17}{3}$, $S^2=\frac{16}{3}$, $S=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

0655 $\overline{X}=\frac{1}{4}(3+5+7+9)=6$

$S^2=\frac{1}{4-1}\{(3-6)^2+(5-6)^2+(7-6)^2+(9-6)^2\}=\frac{20}{3}$

$S=\sqrt{\frac{20}{3}}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$

답 $\overline{X}=6$, $S^2=\frac{20}{3}$, $S=\frac{2\sqrt{15}}{3}$

0656 모집단 $\{3,\ 4,\ 5\}$에서 크기가 2인 표본을 복원추출하는 경우의 수는

$_3\Pi_2=3^2=9$

$\overline{X}=4$인 경우는

$(3,\ 5)$, $(4,\ 4)$, $(5,\ 3)$의 3가지

이므로 $\mathrm{P}(\overline{X}=4)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0657 모집단 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에서 크기가 2인 표본을 복원추출하는 경우의 수는

$_4\Pi_2=4^2=16$

(i) $\overline{X}=3$인 경우

$(1,\ 5)$, $(3,\ 3)$, $(5,\ 1)$의 3가지이므로

$a=\mathrm{P}(\overline{X}=3)=\frac{3}{16}$

(ii) $\overline{X}=4$인 경우

$(1,\ 7)$, $(3,\ 5)$, $(5,\ 3)$, $(7,\ 1)$의 4가지이므로

$b=\mathrm{P}(\overline{X}=4)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

(iii) $\overline{X}=6$인 경우

$(5,\ 7)$, $(7,\ 5)$의 2가지이므로

$c=\mathrm{P}(\overline{X}=6)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

답 $a=\frac{3}{16}$, $b=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{8}$

0658 (1) 표본이 $(2,\ 2)$일 때, $\overline{X}=2$

표본이 $(2,\ 4)$, $(4,\ 2)$일 때, $\overline{X}=3$

표본이 $(2,\ 6)$, $(4,\ 4)$, $(6,\ 2)$일 때, $\overline{X}=4$

표본이 $(4,\ 6)$, $(6,\ 4)$일 때, $\overline{X}=5$

표본이 $(6,\ 6)$일 때, $\overline{X}=6$

따라서 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $\mathrm{E}(\overline{X})=2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{2}{9}+4\cdot\frac{1}{3}+5\cdot\frac{2}{9}+6\cdot\frac{1}{9}=\frac{36}{9}=4$

$\mathrm{V}(\overline{X})=2^2\cdot\frac{1}{9}+3^2\cdot\frac{2}{9}+4^2\cdot\frac{1}{3}+5^2\cdot\frac{2}{9}+6^2\cdot\frac{1}{9}-4^2$

$=\frac{156}{9}-16=\frac{4}{3}$

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 풀이 참조

다른 풀이 (2) 모평균은 $\frac{1}{3}(2+4+6)=4$

모분산은 $\frac{1}{3}\{(2-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2\}=\frac{8}{3}$

표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=4$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{8}{3}}{2}=\frac{4}{3}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sqrt{\frac{8}{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

0659 모평균이 30, 모표준편차가 3, 표본의 크기가 100이므로

(1) $E(\overline{X})=30$

(2) $V(\overline{X})=\frac{9}{100}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\frac{3}{\sqrt{100}}=\frac{3}{10}$

답 (1) 30 (2) $\frac{9}{100}$ (3) $\frac{3}{10}$

0660 모평균이 50, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 25이므로

(1) $E(\overline{X})=50$

(2) $V(\overline{X})=\frac{4}{25}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}$

답 (1) 50 (2) $\frac{4}{25}$ (3) $\frac{2}{5}$

0661 (1) $E(\overline{X})=100$, $V(\overline{X})=\frac{125}{5}=25$

(2) $N(100,\ 5^2)$

(3) $Z=\frac{\overline{X}-100}{5}$

(4) $$\begin{aligned}P(\overline{X}\le 95)&=P\left(Z\le\frac{95-100}{5}\right)\\&=P(Z\le -1)\\&=P(Z\ge 1)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 (1) 평균: 100, 분산: 25 (2) $N(100,\ 5^2)$

(3) $Z=\frac{\overline{X}-100}{5}$ (4) 0.1587

0662 $E(\overline{X})=180$, $V(\overline{X})=\frac{24^2}{36}=16$이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N(180,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-180}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\ge 174)&=P\left(Z\ge\frac{174-180}{4}\right)\\&=P(Z\ge -1.5)\\&=P(-1.5\le Z\le 0)+P(Z\ge 0)\\&=P(0\le Z\le 1.5)+P(Z\ge 0)\\&=0.4332+0.5\\&=0.9332\end{aligned}$$

답 0.9332

0663 $$\begin{aligned}P(184\le\overline{X}\le 188)&=P\left(\frac{184-180}{4}\le Z\le\frac{188-180}{4}\right)\\&=P(1\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1)\\&=0.4772-0.3413\\&=0.1359\end{aligned}$$

답 0.1359

0664 $55-1.96\times\frac{6}{\sqrt{144}}\le m\le 55+1.96\times\frac{6}{\sqrt{144}}$이므로

$54.02\le m\le 55.98$

답 $54.02\le m\le 55.98$

0665 $55-2.58\times\frac{6}{\sqrt{144}}\le m\le 55+2.58\times\frac{6}{\sqrt{144}}$이므로

$53.71\le m\le 56.29$

답 $53.71\le m\le 56.29$

0666 표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 20을 사용할 수 있다.

따라서 구하는 신뢰구간은

$130-1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 130+1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}$

$\therefore 126.08\le m\le 133.92$

답 $126.08\le m\le 133.92$

0667 $130-2.58\times\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 130+2.58\times\frac{20}{\sqrt{100}}$이므로

$124.84\le m\le 135.16$

답 $124.84\le m\le 135.16$

0668 $2\times 1.96\times\frac{15}{\sqrt{400}}=2.94$

답 2.94

0669 $2\times 2.58\times\frac{15}{\sqrt{400}}=3.87$

답 3.87

유형 01 표본평균의 평균, 분산, 표준편차 ; 모평균, 모표준편차가 주어진 경우 본책 110쪽

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=m$, $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

0670 $E(\overline{X})=10$, $V(\overline{X})=\frac{4}{2}=2$

이때 $V(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-\{E(\overline{X})\}^2$이므로

$$\begin{aligned}E(\overline{X}^2)&=V(\overline{X})+\{E(\overline{X})\}^2\\&=2+10^2=102\end{aligned}$$

답 102

0671 $E(\overline{X})=36$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\frac{1}{3}$이므로

$E(\overline{X})\cdot\sigma(\overline{X})=36\cdot\frac{1}{3}=12$

답 ③

0672 $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, $\sigma(\overline{Y})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$이고 $n_1=4n_2$이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{4n_2}}=\frac{\sigma}{2\sqrt{n_2}}=\frac{1}{2}\sigma(\overline{Y})$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0673 표본평균 $\overline{X}$의 표준편차가 $\frac{0.4}{\sqrt{n}}$이므로

$\frac{0.4}{\sqrt{n}}\le 0.2,\quad \sqrt{n}\ge 2\quad \therefore n\ge 4$

따라서 n의 최솟값은 4이다.

답 ②

유형 02 표본평균의 평균, 분산, 표준편차 ; 모집단의 확률분포가 주어진 경우

본책 110쪽

모집단의 확률변수 X의 확률분포가 주어질 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 모평균 m, 모분산 σ^2을 구한다.
(ii) (i)과 표본의 크기 n을 이용하여 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.
➡ $E(\overline{X})=m$, $V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

0674 확률의 총합은 1이므로

$\dfrac{1}{4}+a+\dfrac{1}{4}=1 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}=2$$

$$\underbrace{V(X)}_{V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2}=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{2}+3^2\cdot\frac{1}{4}-2^2=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$E(\overline{X})=2,\ V(\overline{X})=\frac{\frac{1}{2}}{4}=\frac{1}{8}$$

답 평균: 2, 분산: $\dfrac{1}{8}$

0675 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{3}{16}+5\cdot\frac{5}{16}+7\cdot\frac{7}{16}=\frac{21}{4}$$

$$V(X)=1^2\cdot\frac{1}{16}+3^2\cdot\frac{3}{16}+5^2\cdot\frac{5}{16}+7^2\cdot\frac{7}{16}-\left(\frac{21}{4}\right)^2$$

$$=31-\frac{441}{16}=\frac{55}{16}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{55}{16}}=\frac{\sqrt{55}}{4}$$

이때 표본의 크기가 9이므로

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\frac{\sqrt{55}}{4}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{55}}{12}$$

$$\therefore \sigma(12\overline{X})=|12|\sigma(\overline{X})=12\cdot\frac{\sqrt{55}}{12}=\sqrt{55}$$

답 ②

0676 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

$$V(X)=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4} \quad \cdots ❶$$

표본의 크기가 n일 때 $V(\overline{X})=\dfrac{1}{20}$이므로

$$\frac{\frac{3}{4}}{n}=\frac{1}{20} \qquad \therefore n=15 \quad \cdots ❷$$

답 15

채점 기준	비율
❶ $V(X)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 03 표본평균의 평균, 분산, 표준편차 ; 모집단이 주어진 경우

본책 111쪽

모집단이 주어질 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 구한다.
(ii) 모평균 m, 모분산 σ^2을 구한다.
(iii) (ii)와 표본의 크기 n을 이용하여 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.
➡ $E(\overline{X})=m$, $V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

0677 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

$$\therefore E(X)=1\cdot\frac{2}{7}+2\cdot\frac{3}{7}+3\cdot\frac{2}{7}=2$$

$$V(X)=1^2\cdot\frac{2}{7}+2^2\cdot\frac{3}{7}+3^2\cdot\frac{2}{7}-2^2=\frac{32}{7}-4=\frac{4}{7}$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$E(\overline{X})=2,\ V(\overline{X})=\frac{\frac{4}{7}}{4}=\frac{1}{7}$$

답 $E(\overline{X})=2$, $V(\overline{X})=\dfrac{1}{7}$

0678 상자에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1

$$\therefore E(X)=1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{3}{8}=2$$

$$V(X)=1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{3}{8}-2^2=\frac{19}{4}-4=\frac{3}{4}$$

표본의 크기가 n일 때 $V(\overline{X})=\dfrac{1}{4}$이므로

$$\frac{\frac{3}{4}}{n}=\frac{1}{4} \qquad \therefore n=3$$

답 ②

0679 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 3의 숫자가 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은 $\dfrac{1}{n+1}$, 5의 숫자가 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은 $\dfrac{n}{n+1}$이다.

$\overline{X}=4$이려면 3이 적힌 공과 5가 적힌 공을 각각 한 번씩 꺼내야 하므로

$$P(\overline{X}=4)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{2n}{(n+1)^2}$$

이때 $P(\overline{X}=4)=\frac{3}{8}$이므로 $\quad\frac{2n}{(n+1)^2}=\frac{3}{8}$

$3(n+1)^2=16n,\quad 3n^2-10n+3=0$

$(3n-1)(n-3)=0\quad\therefore n=3$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

$\therefore E(\overline{X})=E(X)=3\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

다른 풀이 2번의 시행에서 첫 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a, 두 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 b라 하면

$$\overline{X}=\frac{a+b}{2}$$

$\overline{X}=4$이려면 $a+b=8$이어야 하므로

$a=3,\ b=5$ 또는 $a=5,\ b=3$

$$\therefore P(\overline{X}=4)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{2n}{(n+1)^2}$$

이때 $P(\overline{X}=4)=\frac{3}{8}$이므로 $\quad\frac{2n}{(n+1)^2}=\frac{3}{8}$

$\therefore n=3$ ($\because$ n은 자연수)

$\overline{X}=3$이려면 $a+b=6$이어야 하므로 $\quad a=3,\ b=3$

$\therefore P(\overline{X}=3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

$\overline{X}=5$이려면 $a+b=10$이어야 하므로 $\quad a=5,\ b=5$

$\therefore P(\overline{X}=5)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$

따라서 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	3	4	5	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	1

$\therefore E(\overline{X})=3\cdot\frac{1}{16}+4\cdot\frac{3}{8}+5\cdot\frac{9}{16}=\frac{9}{2}$

유형 04 표본평균의 확률 구하기

본책 111쪽

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 확률은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 구한다.

(ii) 표본평균 $\overline{X}$를 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 표준화한다.

(iii) 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다.

0680 모집단이 정규분포 $N(65,\ 5^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(65,\ \frac{5^2}{25}\right)$, 즉 $N(65,\ 1)$을 따른다.

따라서 $Z=\overline{X}-65$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(64\le\overline{X}\le66)=P(64-65\le Z\le66-65)$$
$$=P(-1\le Z\le1)$$
$$=2P(0\le Z\le1)$$
$$=2\times0.34=0.68$$

답 ①

0681 모집단이 정규분포 $N(80,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(80,\ \frac{12^2}{9}\right)$, 즉 $N(80,\ 4^2)$을 따른다. ··· ❶

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-80}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(\overline{X}\ge70)=P\left(Z\ge\frac{70-80}{4}\right)$$
$$=P(Z\ge-2.5)$$
$$=P(-2.5\le Z\le0)+P(Z\ge0)$$
$$=P(0\le Z\le2.5)+P(Z\ge0)$$
$$=0.494+0.5$$
$$=0.994$$ ··· ❷

답 0.994

채점 기준	비율
❶ 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	30 %
❷ 표본평균이 70점 이상일 확률을 구할 수 있다.	70 %

0682 이항분포 $B\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르는 확률변수를 X라 하면

$$E(X)=400\cdot\frac{1}{5}=80,\ V(X)=400\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=64$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(80,\ 8^2)$을 따른다.

모집단이 정규분포 $N(80,\ 8^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(80,\ \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(80,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-80}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$P(78\le\overline{X}\le84)=P\left(\frac{78-80}{2}\le Z\le\frac{84-80}{2}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le2)$$
$$=P(-1\le Z\le0)+P(0\le Z\le2)$$
$$=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)$$
$$=0.3413+0.4772$$
$$=0.8185$$

답 0.8185

0683 모집단이 정규분포 $N(m,\ 9^2)$을 따르고 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{9^2}{36}\right)$, 즉 $N\left(m,\ \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{3}{2}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 3)&=\mathrm{P}(m-3\le\overline{X}\le m+3)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{m-3-m}{\frac{3}{2}}\le Z\le\frac{m+3-m}{\frac{3}{2}}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=2\times 0.48=0.96\end{aligned}$$

답 ⑤

유형 05 표본평균의 확률; 표본의 크기 구하기

본책 112쪽

표본평균 $\overline{X}$가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따를 때, $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 표준화하고 주어진 확률과 표준정규분포표를 이용하여 표본의 크기를 구한다.

0684 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(250,\ 18^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(250,\ \frac{18^2}{n}\right)$을 따른다.
따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-250}{\frac{18}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 253)=0.0668$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{253-250}{\frac{18}{\sqrt{n}}}\right)=0.0668$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{6}\right)=\underbrace{0.0668}_{0.0668<0.5\text{이므로 } \frac{\sqrt{n}}{6}>0}$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.0668$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.0668$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.4332$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{6}=1.5,\qquad \sqrt{n}=9$$

$$\therefore\ n=81$$

답 ④

SSEN 특강 표준정규분포에서의 확률

① $\mathrm{P}(Z\le k)<0.5$이면 $k<0$
➡ $\mathrm{P}(Z\le k)=0.5-\mathrm{P}(k\le Z\le 0)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le -k)$
② $\mathrm{P}(Z\le k)>0.5$이면 $k>0$
➡ $\mathrm{P}(Z\le k)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le k)$
③ $\mathrm{P}(Z\ge k)<0.5$이면 $k>0$
➡ $\mathrm{P}(Z\ge k)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le k)$
④ $\mathrm{P}(Z\ge k)>0.5$이면 $k<0$
➡ $\mathrm{P}(Z\ge k)=0.5+\mathrm{P}(k\le Z\le 0)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le -k)$

0685 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(450,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(450,\ \frac{10^2}{n}\right)$을 따른다.
따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-450}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(445\le\overline{X}\le 460)=0.8185$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{445-450}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{460-450}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)=0.8185$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le\sqrt{n}\right)=0.8185$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}(0\le Z\le\sqrt{n})=0.8185$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)+\mathrm{P}(0\le Z\le\sqrt{n})=0.8185$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이고
$0.3413+0.4772=0.8185$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{2}=1,\ \sqrt{n}=2\qquad\therefore\ n=4$$

답 4

0686 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(24,\ \frac{4^2}{n}\right)$을 따른다. ⋯ ❶
따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-24}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(22\le\overline{X}\le 26)\ge 0.96$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{22-24}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{26-24}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)\ge 0.96$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.96$$

$$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.96\qquad\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.48$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.05)=0.48$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{2}\ge 2.05,\qquad\sqrt{n}\ge 4.1$$

$$\therefore\ n\ge 16.81$$

따라서 $\underbrace{n}_{n\text{은 자연수이다.}}$의 최솟값은 17이다. ⋯ ❷

답 17

채점 기준	비율
❶ 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	30 %
❷ n의 최솟값을 구할 수 있다.	70 %

유형 06 표본평균의 확률; 미지수의 값 구하기

본책 112쪽

표본평균 $\overline{X}$가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따를 때, $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 표준화하고 주어진 확률과 표준정규분포표를 이용하여 미지수의 값을 구한다.

0687 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(2000,\ 200^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(2000,\ \frac{200^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(2000,\ 20^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-2000}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\le k)=0.08$에서

$$P\left(Z\le\frac{k-2000}{20}\right)=0.08$$

$$P(Z\le 0)-P\left(\frac{k-2000}{20}\le Z\le 0\right)=0.08$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{2000-k}{20}\right)=0.08$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{2000-k}{20}\right)=0.42$$

이때 $P(0\le Z\le 1.4)=0.42$이므로

$$\frac{2000-k}{20}=1.4,\qquad 2000-k=28$$

$$\therefore k=1972$$

답 1972

0688 모집단이 정규분포 $N(m,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(m,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-m}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\ge 1000)=0.9938$에서

$$P\left(Z\ge\frac{1000-m}{2}\right)=0.9938$$

$$P\left(\frac{1000-m}{2}\le Z\le 0\right)+P(Z\ge 0)=0.9938$$

$$P\left(0\le Z\le\frac{m-1000}{2}\right)+0.5=0.9938$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{m-1000}{2}\right)=0.4938$$

이때 $P(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로

$$\frac{m-1000}{2}=2.5,\qquad m-1000=5$$

$$\therefore m=1005$$

답 ④

0689 모집단이 정규분포 $N(m,\ 15^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{15^2}{9}\right)$, 즉 $N(m,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-m}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(|m-\overline{X}|\ge k)=0.05$에서

$$P\left(\frac{|\overline{X}-m|}{5}\ge\frac{k}{5}\right)=0.05,\qquad P\left(|Z|\ge\frac{k}{5}\right)=0.05$$

$$P\left(Z\le -\frac{k}{5}\right)+P\left(Z\ge\frac{k}{5}\right)=0.05$$

$$2P\left(Z\ge\frac{k}{5}\right)=0.05,\qquad P\left(Z\ge\frac{k}{5}\right)=0.025$$

$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{k}{5}\right)=0.025$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k}{5}\right)=0.025$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{k}{5}\right)=0.475$$

이때 $P(0\le Z\le 1.96)=0.475$이므로

$$\frac{k}{5}=1.96\qquad \therefore k=9.8$$

답 ④

유형 07 모평균의 추정; 모표준편차가 주어진 경우 본책 113쪽

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$$

0690 표본평균이 3.5, 모표준편차가 0.2, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$3.5-1.96\times\frac{0.2}{\sqrt{400}}\le m\le 3.5+1.96\times\frac{0.2}{\sqrt{400}}$$

$$\therefore 3.4804\le m\le 3.5196$$

답 $3.4804\le m\le 3.5196$

0691 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 5, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore \overline{x}-1.29\le m\le\overline{x}+1.29$$

즉 $a=\overline{x}-1.29$, $b=\overline{x}+1.29$이므로 $a+b=220$에서

$$(\overline{x}-1.29)+(\overline{x}+1.29)=220$$

$$2\overline{x}=220\qquad \therefore \overline{x}=110$$

$$\therefore b=110+1.29=111.29$$

답 111.29

0692 표본평균이 150, 모표준편차가 6, 표본의 크기가 9이므로 $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$150-k\cdot\frac{6}{\sqrt{9}}\le m\le 150+k\cdot\frac{6}{\sqrt{9}}$$

$$\therefore 150-2k\le m\le 150+2k$$

이것이 $147.74\le m\le 152.26$과 같으므로

$$150-2k=147.74,\ 150+2k=152.26$$

$$\therefore k=1.13$$ ⋯ ❶

이때 주어진 표준정규분포표에서

$$P(|Z|\le 1.13)=2P(0\le Z\le 1.13)=2\times 0.37=0.74$$

이므로 $\frac{\alpha}{100}=0.74$에서

$$\alpha=74$$ ⋯ ❷

답 74

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 08 모평균의 추정; 표본표준편차가 주어진 경우 본책 113쪽

정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 $n\ (n\ge 30)$인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$, 표본표준편차 S의 값이 s일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-k\frac{s}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\frac{s}{\sqrt{n}}\ \left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$$

0693 표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 20을 사용할 수 있다.
이때 표본평균이 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$100-2\cdot\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 100+2\cdot\frac{20}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 96\le m\le 104$ 　　답 $96\le m\le 104$

0694 표본의 크기 400이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 40을 사용할 수 있다.
이때 표본평균이 $3\cdot 60+50=230$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$230-2.58\times\frac{40}{\sqrt{400}}\le m\le 230+2.58\times\frac{40}{\sqrt{400}}$$

$\therefore 224.84\le m\le 235.16$ 　　답 ③

0695 표본의 크기 256이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 24를 사용할 수 있다.
이때 표본평균이 128이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$128-1.96\times\frac{24}{\sqrt{256}}\le m\le 128+1.96\times\frac{24}{\sqrt{256}}$$

$\therefore 125.06\le m\le 130.94$

따라서 신뢰구간에 속하는 자연수는 126, 127, 128, 129, 130의 5개이다. 　　답 5

유형 09 모평균의 추정; 표본의 크기 구하기 　본책 114쪽

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간이 $p\le m\le q$이면

➡ $p=\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $q=\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용하여 표본의 크기 n의 값을 구한다. $\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

0696 표본평균이 13.2, 모표준편차가 5이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$13.2-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le 13.2+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}$$

이것이 $12.34\le m\le 14.06$과 같으므로

$$13.2-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=12.34,\ 13.2+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=14.06$$

따라서 $2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=0.86$이므로

$\sqrt{n}=15$ 　　$\therefore n=225$ 　　답 ②

0697 표본평균이 80, 모표준편차가 15이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$80-1.96\times\frac{15}{\sqrt{n}}\le m\le 80+1.96\times\frac{15}{\sqrt{n}}$$

이때 $80-1.96\times\frac{15}{\sqrt{n}}=77.06$이므로

$1.96\times\frac{15}{\sqrt{n}}=2.94,$ 　$\sqrt{n}=10$ 　$\therefore n=100$ 　··· ❶

따라서 $a=80+1.96\times\frac{15}{\sqrt{100}}=82.94$이므로 　··· ❷

$n+a=182.94$ 　··· ❸

답 182.94

채점 기준	비율
❶ n의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $n+a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0698 표본의 크기 n이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 6을 사용할 수 있다.
이때 표본평균이 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$100-3\cdot\frac{6}{\sqrt{n}}\le m\le 100+3\cdot\frac{6}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore 100-\frac{18}{\sqrt{n}}\le m\le 100+\frac{18}{\sqrt{n}}$$

이 구간에 속하는 자연수의 개수가 5이어야 하므로 　98, 99, 100, 101, 102

$$97<100-\frac{18}{\sqrt{n}}\le 98,\ 102\le 100+\frac{18}{\sqrt{n}}<103$$

즉 $2\le\frac{18}{\sqrt{n}}<3$이므로 　$\frac{1}{9}\le\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{6}$

$6<\sqrt{n}\le 9$ 　　$\therefore 36<n\le 81$

따라서 n은 37, 38, 39, ⋯, 81의 45개이다. 　　답 45

유형 10~12 신뢰구간의 길이 　본책 114쪽

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$$

0699 모표준편차가 5, 표본의 크기가 400이므로 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.58\times\frac{5}{\sqrt{400}}=1.29$ 　　답 ④

0700 $b-a$는 모평균 m을 신뢰도 95 %로 추정할 때의 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2\times 1.96\times\frac{4}{\sqrt{100}}=1.568$ 　　답 1.568

0701 모표준편차가 6, 표본의 크기가 n^2+n이므로 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이 l_n은

$$l_n=2\cdot 2\cdot\frac{6}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{24}{\sqrt{n(n+1)}}$$

따라서

$$l_n^{\,2}=\frac{576}{n(n+1)}=576\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$ 　$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

이므로

$l_1^2+l_2^2+l_3^2+\cdots+l_{15}^2$

$=576\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)\right\}$

$=576\left(1-\frac{1}{16}\right)$

$=576\cdot\frac{15}{16}$

$=540$ 답 ⑤

0702 $b-a$는 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간의 길이이므로 $b-a\le 2$에서

$2\times1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\le 2,\quad \sqrt{n}\ge 3.92$

$\therefore n\ge 15.3664$

따라서 n의 최솟값은 16이다. 답 ②

0703 표본의 크기가 900일 때 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$2\cdot3\cdot\frac{30000}{\sqrt{900}}=6000$ ··· ❶

표본의 크기가 n일 때 신뢰도 95 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$2\cdot2\cdot\frac{30000}{\sqrt{n}}=\frac{120000}{\sqrt{n}}$ ··· ❷

두 신뢰구간의 길이가 같으므로

$\frac{120000}{\sqrt{n}}=6000,\quad \sqrt{n}=20$

$\therefore n=400$ ··· ❸

답 400

채점 기준	비율
❶ 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ 신뢰도 95 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20 %

0704 $P(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때 모표준편차가 1, 표본의 크기가 9, 신뢰구간의 길이가 3이므로

$2k\cdot\frac{1}{\sqrt{9}}=3\quad \therefore k=\frac{9}{2}$

또 표본의 크기를 n이라 하고 같은 신뢰도로 모평균을 추정할 때 신뢰구간의 길이가 1 이하가 되려면

$2\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\le 1,\quad \sqrt{n}\ge 9\quad \therefore n\ge 81$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 81이다. 답 ④

0705 모표준편차가 50, 표본의 크기가 64이므로

$P(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$2k\cdot\frac{50}{\sqrt{64}}=25\quad \therefore k=2$

따라서 $P(-2\le Z\le 2)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$\alpha=100P(-2\le Z\le 2)=200P(0\le Z\le 2)$

$=200\times0.48=96$ 답 96

0706 모표준편차가 2, 표본의 크기가 144이므로

$P(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$2k\cdot\frac{2}{\sqrt{144}}=0.2\quad \therefore k=0.6$

즉 $P(-0.6\le Z\le 0.6)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$\alpha=100P(-0.6\le Z\le 0.6)=200P(0\le Z\le 0.6)$

$=200\times0.23=46$

$P(-k'\le Z\le k')=\frac{2\alpha}{100}=\frac{92}{100}$라 하면

$2P(0\le Z\le k')=0.92$이므로

$P(0\le Z\le k')=0.46$

이때 $P(0\le Z\le 1.8)=0.46$이므로 $k'=1.8$

따라서 신뢰도 2α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$2\times1.8\times\frac{2}{\sqrt{144}}=0.6$ 답 0.6

0707 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$b-a=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$P(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$d-c=2k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 $(b-a):(d-c)=3:2$에서 $d-c=\frac{2}{3}(b-a)$

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2}{3}\times2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore k=1.72$

따라서 $P(-1.72\le Z\le 1.72)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$\alpha=100P(-1.72\le Z\le 1.72)=200P(0\le Z\le 1.72)$

$=200\times0.457=91.4$ 답 91.4

유형 13 모평균과 표본평균의 차

본책 116쪽

정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$일 때, 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차는

$|m-\overline{x}|\le k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

0708 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 99 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$\overline{x}-3\cdot\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+3\cdot\frac{5}{\sqrt{n}}$

$$-\frac{15}{\sqrt{n}} \le m-\bar{x} \le \frac{15}{\sqrt{n}} \qquad \therefore |m-\bar{x}| \le \frac{15}{\sqrt{n}}$$

모평균 m과 표본평균 $\bar{x}$의 차가 1 이하가 되려면

$$\frac{15}{\sqrt{n}} \le 1, \qquad \sqrt{n} \ge 15 \qquad \therefore n \ge 225$$

따라서 n의 최솟값은 225이다. 답 ②

0709 모평균을 m, 표본평균을 $\bar{x}$, 모표준편차를 σ라 하면 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$$\bar{x}-2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}+2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \le m-\bar{x} \le \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \therefore |m-\bar{x}| \le \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

모평균 m과 표본평균 $\bar{x}$의 차가 $\frac{1}{6}\sigma$ 이하가 되려면

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \le \frac{\sigma}{6}, \qquad \sqrt{n} \ge 12 \qquad \therefore n \ge 144$$

따라서 n의 최솟값은 144이다. 답 144

유형 14 신뢰구간의 성질
본책 116쪽

① 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이는 길어진다.
② 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

0710 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left(\text{단, } P(|Z| \le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$$

ㄱ. 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지고 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

ㄴ. 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지고 표본의 크기를 작게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이가 반드시 길어진다고 할 수 없다.

ㄷ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 작을수록 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0711 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left(\text{단, } P(|Z| \le t)=\frac{\alpha}{100}\right)$$

이므로 n 대신 $9n$을 대입하면 신뢰구간의 길이는

$$2t\frac{\sigma}{\sqrt{9n}}=\frac{1}{3}\cdot 2t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 표본의 크기가 9배가 되면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{3}$배가 되므로 $\quad k=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0712 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는 다음과 같다.

① $2\cdot 2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{36}}=\frac{2\sigma}{3}$ ② $2\cdot 3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{36}}=\sigma$

③ $2\cdot 2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{64}}=\frac{\sigma}{2}$ ④ $2\cdot 3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{64}}=\frac{3\sigma}{4}$

⑤ $2\cdot 2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{2\sigma}{5}$

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 ②이다. 답 ②

참고 ①, ②와 ③, ④는 각각 표본의 크기가 같으므로 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이가 길어진다. 따라서 ①보다 ②, ③보다 ④의 신뢰구간의 길이가 길다. 또 ①, ③, ⑤와 ②, ④는 각각 신뢰도가 같으므로 표본의 크기가 작아지면 신뢰구간의 길이가 길어진다. 따라서 ①, ③, ⑤ 중 ①의 신뢰구간의 길이가 가장 길고, ④보다 ②의 신뢰구간의 길이가 길다.

0713 1st ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $V(\overline{X})=\frac{2^2}{n}=\frac{4}{n}$

2nd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 확률변수 X가 정규분포 $N(10, 2^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(10, \frac{2^2}{n}\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$P(\overline{X} \le 10-a)=P\left(Z \le \frac{10-a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=P\left(Z \le -\frac{a\sqrt{n}}{2}\right),$$

$$P(\overline{X} \ge 10+a)=P\left(Z \ge \frac{10+a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=P\left(Z \ge \frac{a\sqrt{n}}{2}\right)=P\left(Z \le -\frac{a\sqrt{n}}{2}\right)$$

$$\therefore P(\overline{X} \le 10-a)=P(\overline{X} \ge 10+a)$$

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $P(\overline{X} \ge a)=P\left(Z \ge \frac{a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=P\left(Z \le \frac{10-a}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$이므로

$$\frac{10-a}{\frac{2}{\sqrt{n}}}=b, \qquad 10-a=\frac{2}{\sqrt{n}}b$$

$$\therefore a+\frac{2}{\sqrt{n}}b=10$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0714 1st X가 따르는 정규분포를 구한다.

확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따른다고 하면 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $P(X \ge 3.4)=\frac{1}{2}$이므로

$$m=3.4$$

따라서 $Z_X=\dfrac{X-3.4}{\sigma}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\le 3.9)+\mathrm{P}(Z\le -1)=1$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_X\le \frac{3.9-3.4}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z\le -1)=1$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(Z_X\le \frac{0.5}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z\ge 1)=1$$

즉 $\dfrac{0.5}{\sigma}=1$이므로 $\sigma=0.5$

따라서 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3.4,\ 0.5^2)$을 따른다.

(2nd) $\overline{X}$를 표준화하여 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 3.55)$의 값을 구한다.

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(3.4,\ \dfrac{0.5^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(3.4,\ 0.1^2)$을 따르므로 $Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}-3.4}{0.1}$로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(\overline{X}\ge 3.55)&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge \frac{3.55-3.4}{0.1}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 ③

0715 (1st) 남학생 4명이 곤돌라에 탑승할 확률을 구한다.

임의추출한 남학생 4명의 몸무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(71,\ \dfrac{12^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(71,\ 6^2)$을 따르므로

$Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}-71}{6}$로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

남학생 4명의 몸무게의 합이 260 kg 이하이려면 $4\overline{X}\le 260$, 즉 $\overline{X}\le 65$이어야 하므로 남학생 4명이 곤돌라에 탑승할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le 65)&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le \frac{65-71}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le -1)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 1)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

(2nd) 여학생 4명이 곤돌라에 탑승할 확률을 구한다.

임의추출한 여학생 4명의 몸무게의 평균을 $\overline{Y}$라 하면 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(61,\ \dfrac{8^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(61,\ 4^2)$을 따르므로

$Z_{\overline{Y}}=\dfrac{\overline{Y}-61}{4}$로 놓으면 $Z_{\overline{Y}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

여학생 4명의 몸무게의 합이 260 kg 이하이려면 $4\overline{Y}\le 260$, 즉 $\overline{Y}\le 65$이어야 하므로 여학생 4명이 곤돌라에 탑승할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{Y}\le 65)&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le \frac{65-61}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\le 1)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{Y}}\le 1)\\&=0.5+0.34=0.84\end{aligned}$$

(3rd) 남학생 4명과 여학생 4명이 모두 곤돌라에 탑승할 확률을 구한다.

남학생 4명과 여학생 4명이 모두 곤돌라에 탑승할 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le 65)\times \mathrm{P}(\overline{Y}\le 65)=0.16\times 0.84=0.1344$$

답 ③

0716 (1st) 작년에 운행된 택시의 연간 주행거리를 확률변수 X라 하고 표준화한다.

작년에 운행된 택시의 연간 주행거리를 확률변수 X, 모표준편차를 σ라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(2nd) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구한다.

표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 16이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le \overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$\therefore \overline{x}-0.49\sigma\le m\le \overline{x}+0.49\sigma$$

(3rd) 연간 주행거리가 $m+c$ 이하일 확률을 구한다.

$c=0.49\sigma$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le m+c)&=\mathrm{P}(X\le m+0.49\sigma)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{m+0.49\sigma-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0.49)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.49)\\&=0.5+0.1879\\&=0.6879\end{aligned}$$

답 ③

0717 (1st) $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$로 놓고 주어진 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구한다.

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하자.

$\overline{x_1}$를 이용하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간 I_1은

$$9.82-k\times\frac{1.6}{\sqrt{16}}\le m\le 9.82+k\times\frac{1.6}{\sqrt{16}}$$

$$\therefore 9.82-0.4k\le m\le 9.82+0.4k$$

9가 I_1에 포함되지 않으므로

$9<9.82-0.4k$

$0.4k<0.82 \qquad \therefore k<2.05 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\overline{x_2}$를 이용하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간 I_2는

$$8.67-k\times\frac{1.6}{\sqrt{64}}\le m\le 8.67+k\times\frac{1.6}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore 8.67-0.2k\le m\le 8.67+0.2k$$

9가 I_2에 포함되므로

$9\le 8.67+0.2k$

$0.2k\ge 0.33 \qquad \therefore k\ge 1.65 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $1.65\le k<2.05$

(2nd) α의 값의 범위를 구한다.

$\mathrm{P}(|Z|\le 1.65)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.65)=2\times 0.45=0.90$,

$\mathrm{P}(|Z|\le 2.05)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2.05)=2\times 0.48=0.96$

이므로

$90\le \alpha<96$

(3rd) $\alpha_2-\alpha_1$의 값을 구한다.

$\alpha_1=90,\ \alpha_2=96$이므로

$\alpha_2-\alpha_1=6$

답 ②

07 통계적 추정

0718 (1st) 확률변수 X를 표준화하여 $\mathrm{P}(56\le X\le 74)$를 변형한다.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(65,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-65}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(56\le X\le 74)&=\mathrm{P}\left(\frac{56-65}{4}\le Z\le\frac{74-65}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-2.25\le Z\le 2.25)\\&=\frac{\alpha}{100}\end{aligned}$$

(2nd) 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간을 구한다.

$\mathrm{P}(|Z|\le 2.25)=\frac{\alpha}{100}$이고 표본평균이 90, 모표준편차가 12, 표본의 크기가 9이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$90-2.25\times\frac{12}{\sqrt{9}}\le m\le 90+2.25\times\frac{12}{\sqrt{9}}$$

$$\therefore\ 81\le m\le 99$$

(3rd) $2a-b$의 값을 구한다.

$a=81,\ b=99$이므로

$$2a-b=2\cdot 81-99=63$$

답 63

0719 (1st) $\overline{x_1},\ a$의 값을 구한다.

모표준편차가 5이므로 표본평균이 $\overline{x_1}$, 표본의 크기가 25일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x_1}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{25}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{25}}$$

$$\therefore\ \overline{x_1}-1.96\le m\le\overline{x_1}+1.96$$

이것이 $80-a\le m\le 80+a$와 같으므로

$\overline{x_1}=80,\ a=1.96$ …… ㉠

(2nd) $\overline{x_2},\ n$을 $\overline{x_1},\ a$로 나타낸다.

표본평균이 $\overline{x_2}$, 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$$

이것이 $\frac{15}{16}\overline{x_1}-\frac{5}{7}a\le m\le\frac{15}{16}\overline{x_1}+\frac{5}{7}a$와 같으므로

$\overline{x_2}=\frac{15}{16}\overline{x_1},\ 1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{5}{7}a$ …… ㉡

(3rd) $n+\overline{x_2}$의 값을 구한다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\overline{x_2}=\frac{15}{16}\overline{x_1}=\frac{15}{16}\times 80=75,$$

$$1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{5}{7}\times 1.96$$

이므로

$$\sqrt{n}=7\qquad\therefore\ n=49$$

$$\therefore\ n+\overline{x_2}=124$$

답 ②

0720 (1st) l을 구한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(-2.70\le Z\le 2.70)&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2.70)\\&=2\times 0.4965\\&=0.993\end{aligned}$$

이므로 신뢰도 99.3 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이 l은

$$l=2\times 2.70\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(2nd) $\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 k의 값을 구한다.

$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는 $\frac{l}{2}$이므로

$$2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\times 2\times 2.70\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ k=1.35$$

(3rd) α의 값을 구한다.

$\mathrm{P}(-1.35\le Z\le 1.35)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$$\begin{aligned}\alpha&=100\mathrm{P}(-1.35\le Z\le 1.35)\\&=200\mathrm{P}(0\le Z\le 1.35)\\&=200\times 0.4115\\&=82.3\end{aligned}$$

답 82.3

0721 전략 먼저 한 세트에 들어 있는 훈제 계란 4개의 무게의 평균이 따르는 정규분포를 구한다.

풀이 식품 회사에서 하루에 생산되는 훈제 계란 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 2^2)$을 따른다.
이때 임의로 선택한 훈제 계란 4개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(32,\ \frac{2^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(32,\ 1^2)$을 따르므로 $Z=\overline{X}-32$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ⋯ ❶

훈제 계란 4개를 포장한 한 세트가 불량품으로 판정될 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(4\overline{X}<120)&=\mathrm{P}(\overline{X}<30)\\&=\mathrm{P}(Z<30-32)\\&=\mathrm{P}(Z<-2)=\mathrm{P}(Z>2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$ ⋯ ❷

따라서 하루에 생산되는 세트 상품 $\underbrace{5000}_{\frac{20000}{4}}$개 중 불량품으로 판정되는 세트 상품의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(5000,\ 0.02)$를 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=5000\times 0.02=100$ ⋯ ❸

답 100

채점 기준	비율
❶ 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구하고 표준화할 수 있다.	20 %
❷ 포장된 한 세트가 불량품으로 판정될 확률을 구할 수 있다.	40 %
❸ 하루에 생산되는 세트 상품 중 불량품으로 판정될 세트 상품의 평균 개수를 구할 수 있다.	40 %

0722 전략 각 표본의 표본평균을 표준화하여 $p_1,\ p_2$를 구한 후 정규분포곡선의 성질을 이용한다.

풀이 1학년 학생 중에서 임의추출한 100명의 하루 수면 시간의

평균을 $\overline{X_1}$라 하면 $\overline{X_1}$는 정규분포 $N\left(6.75,\ \frac{1^2}{100}\right)$,

즉 $N\left(6.75,\ \left(\frac{1}{10}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z_{\overline{X_1}}=\frac{\overline{X_1}-6.75}{\frac{1}{10}}$로 놓으면

$Z_{\overline{X_1}}$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore\ p_1=P(\overline{X_1}\ge 7)=P\left(Z_{\overline{X_1}}\ge\frac{7-6.75}{\frac{1}{10}}\right)$$

$$=P(Z_{\overline{X_1}}\ge 2.5) \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

한편 3학년 학생 중에서 임의추출한 n명의 하루 수면 시간의 평균을 $\overline{X_2}$라 하면 $\overline{X_2}$는 정규분포 $N\left(6.25,\ \frac{0.5^2}{n}\right)$을 따르므로

$Z_{\overline{X_2}}=\frac{\overline{X_2}-6.25}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}$로 놓으면 $Z_{\overline{X_2}}$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore\ p_2=P(\overline{X_2}\ge 6.5)=P\left(Z_{\overline{X_2}}\ge\frac{6.5-6.25}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}\right)$$

$$=P\left(Z_{\overline{X_2}}\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \quad \cdots\cdots ㉡ \quad \cdots ❷$$

$p_1\ge p_2$가 성립하려면 ㉠, ㉡에서 $\frac{\sqrt{n}}{2}\ge 2.5$이어야 하므로

$\sqrt{n}\ge 5 \qquad \therefore\ n\ge 25$

따라서 n의 최솟값은 25이다. ⋯ ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ p_1을 구할 수 있다.	40 %
❷ p_2를 구할 수 있다.	40 %
❸ n의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0723 **전략** 모든 실수 x에 대하여 $f(a-x)=f(a+x)$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 확률밀도함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(10-x)=f(10+x)$를 만족시키므로 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=10$에 대하여 대칭이다.

즉 모평균이 10이고 표본의 크기가 100이므로 모표준편차를 σ'이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(10,\ \left(\frac{\sigma'}{10}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-10}{\frac{\sigma'}{10}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$P(9\le\overline{X}\le 12)=P\left(\frac{9-10}{\frac{\sigma'}{10}}\le Z\le\frac{12-10}{\frac{\sigma'}{10}}\right)$$

$$=P\left(-\frac{10}{\sigma'}\le Z\le\frac{20}{\sigma'}\right)$$

$$=P\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma'}\right)+P\left(0\le Z\le 2\cdot\frac{10}{\sigma'}\right) \cdots ❶$$

이때 $P(9\le\overline{X}\le 12)=0.8185$이고, 주어진 확률밀도함수의 그래프에서

$P(m\le X\le m+\sigma)=P(0\le Z\le 1)=0.3413$,

$P(m\le X\le m+2\sigma)=P(0\le Z\le 2)=0.4772$

이므로

$$P\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma'}\right)=0.3413,\ P\left(0\le Z\le 2\cdot\frac{10}{\sigma'}\right)=0.4772$$

따라서 $\frac{10}{\sigma'}=1$이므로 $\qquad \sigma'=10$ ⋯ ❷

답 10

채점 기준	비율
❶ 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구하고 표준화하여 $P(9\le\overline{X}\le 12)$를 변형할 수 있다.	50 %
❷ 모집단의 표준편차를 구할 수 있다.	50 %

0724 **전략** 먼저 확률변수 X와 $\overline{X}$를 표준화하여 n의 값을 구한다.

풀이 확률변수 X는 정규분포를 따르고 조건 (가)에서

$P(3\le X\le 5)=P(17\le X\le 19)$이므로

$$m=\frac{3+19}{2}=\frac{5+17}{2}=11$$

즉 확률변수 X는 정규분포 $N(11,\ 6^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(11,\ \frac{6^2}{n}\right)$을 따른다.

따라서 $Z_X=\frac{X-11}{6}$, $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-11}{\frac{6}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 Z_X, $Z_{\overline{X}}$는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ⋯ ❶

조건 (나)에서

$$P(X\le 8)=P\left(Z_X\le\frac{8-11}{6}\right)=P\left(Z_X\le-\frac{1}{2}\right),$$

$$P(\overline{X}\ge 12)=P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{12-11}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right)=P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{\sqrt{n}}{6}\right)$$

이므로

$$P\left(Z_X\le-\frac{1}{2}\right)=P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{\sqrt{n}}{6}\right)$$

즉 $\frac{\sqrt{n}}{6}=\frac{1}{2}$에서 $\qquad \sqrt{n}=3$

$\therefore\ n=9$ ⋯ ❷

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(11,\ 2^2)$을 따른다.

이때

$$P(-1\le X\le 5)=P\left(\frac{-1-11}{6}\le Z_X\le\frac{5-11}{6}\right)$$

$$=P(-2\le Z_X\le -1),$$

$$P(-1+c\le\overline{X}\le 1+c)$$

$$=P\left(\frac{-1+c-11}{2}\le Z_{\overline{X}}\le\frac{1+c-11}{2}\right)$$

$$=P\left(-6+\frac{c}{2}\le Z_{\overline{X}}\le -5+\frac{c}{2}\right)$$

에서

$$-1-(-2)=-5+\frac{c}{2}-\left(-6+\frac{c}{2}\right)=1$$

이므로 $P(-1\le X\le 5)=P(-1+c\le\overline{X}\le 1+c)$가 성립하려면

$-6+\frac{c}{2}=-2$ 또는 $\underbrace{-6+\frac{c}{2}=1}_{P(-2\le Z_X\le -1)=P(1\le Z_X\le 2)}$이어야 한다.

즉 $c=8$ 또는 $c=14$이므로 구하는 합은

$8+14=22$ ⋯ ❸

답 22

07 통계적 추정

채점 기준	비율
❶ 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구하고 X와 $\overline{X}$를 각각 표준화할 수 있다.	30 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 모든 자연수 c의 값의 합을 구할 수 있다.	40 %

0725 전략 $\mathrm{P}(-c \le Z \le c)=\dfrac{p\alpha+q\beta}{100}$라 하고, c와 k 사이의 관계식을 구한다.

풀이 모표준편차가 5, 표본의 크기가 100이므로

$\mathrm{P}(-c \le Z \le c)=\dfrac{p\alpha+q\beta}{100}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 $(p\alpha+q\beta)$ %의 신뢰구간은

$$\bar{x}-c\cdot\frac{5}{\sqrt{100}} \le m \le \bar{x}+c\cdot\frac{5}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore\ \bar{x}-\frac{c}{2} \le m \le \bar{x}+\frac{c}{2}$$

즉 $\dfrac{c}{2}=k$이므로 $\quad c=2k$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(-c \le Z \le c)\\ &=\mathrm{P}(-2k \le Z \le 2k)\\ &=2\mathrm{P}(0 \le Z \le 2k)\\ &=2\{\mathrm{P}(-k \le Z \le 2k)-\mathrm{P}(-k \le Z \le 0)\}\\ &=2\{\mathrm{P}(-k \le Z \le 2k)-\mathrm{P}(0 \le Z \le k)\}\\ &=2(\beta-\alpha)\\ &=-2\alpha+2\beta\end{aligned}$$ ⋯ ❷

따라서 $\dfrac{p\alpha+q\beta}{100}=-2\alpha+2\beta$이므로

$$p\alpha+q\beta=-200\alpha+200\beta$$

$$\therefore\ p=-200,\ q=200$$

$$\therefore\ p+q=0$$ ⋯ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(-c \le Z \le c)=\dfrac{p\alpha+q\beta}{100}$라 하고 c와 k 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\mathrm{P}(-c \le Z \le c)$를 α, β에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

memo

memo