01강 지수

확인 문제 p. 6

1 (1) -27의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=-27$이므로
$x^3+27=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$
따라서 -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이다.
(2) 16의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=16$이므로
$x^4-16=0$, $(x+2)(x-2)(x^2+4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm2i$
따라서 16의 네제곱근 중 실수인 것은 -2, 2이다.

2 (1) $2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$
(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^0=1$
(3) $27^{-\frac{2}{3}}=(3^3)^{-\frac{2}{3}}$
$=3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$
(4) $16^{0.75}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^3=8$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 7

1 (1) $\sqrt[5]{-32}-\sqrt[4]{81}=\sqrt[5]{(-2)^5}-\sqrt[4]{3^4}$
$=-2-3=-5$
(2) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}=\sqrt[3]{2^3}=2$
(3) $\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt[4]{7}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[10]{7}}{\sqrt[5]{7}}}=\dfrac{\sqrt[10]{7}}{\sqrt[20]{7}}\times\dfrac{\sqrt[20]{7}}{\sqrt[10]{7}}=1$
(4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}\times\sqrt[5]{243}\div\sqrt[4]{\sqrt{256}}=\sqrt[6]{2^6}\times\sqrt[5]{3^5}\div\sqrt[8]{2^8}$
$=2\times3\div2=3$

2 (1) $\sqrt[4]{(-2)^4}+\sqrt[3]{125}=\sqrt[4]{2^4}+\sqrt[3]{5^3}=2+5=7$
(2) $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\dfrac{108}{4}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$
(3) $\sqrt[5]{32^2}\div(\sqrt[3]{3})^6=\sqrt[5]{2^{10}}\div\sqrt[3]{3^6}$
$=2^2\div3^2=\dfrac{4}{9}$
(4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}}\times\sqrt{\sqrt[3]{81}}=\sqrt[12]{3^4}\times\sqrt[6]{3^4}=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3^2}$
$=\sqrt[3]{3\times3^2}=\sqrt[3]{3^3}=3$

3 (1) $5^3\div(5^{-3})^{-1}=5^3\div5^3=1$
(2) $2^{-\frac{1}{2}}\times4^{\frac{5}{4}}=2^{-\frac{1}{2}}\times(2^2)^{\frac{5}{4}}=2^{-\frac{1}{2}}\times2^{\frac{5}{2}}$
$=2^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}=2^2=4$
(3) $(\sqrt[3]{a}\times a^2\div\sqrt{a^3})^6=(a^{\frac{1}{3}}\times a^2\div a^{\frac{3}{2}})^6$
$=(a^{\frac{1}{3}+2-\frac{3}{2}})^6=(a^{\frac{5}{6}})^6=a^5$
(4) $\sqrt{\sqrt[6]{a^5}\times\sqrt[3]{a^2}}=(a^{\frac{5}{6}}\times a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{5}{6}+\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$
$=(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{4}}$

4 (1) $4\times(2^{-1})^2=2^2\times2^{-2}=2^{2-2}=2^0=1$
(2) $2^{\frac{4}{3}}\times3^{-\frac{2}{3}}\times6^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}\times3^{-\frac{2}{3}}\times(2\times3)^{-\frac{1}{3}}$
$=2^{\frac{4}{3}}\times3^{-\frac{2}{3}}\times2^{-\frac{1}{3}}\times3^{-\frac{1}{3}}$
$=2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}\times3^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}$
$=2\times3^{-1}=\dfrac{2}{3}$
(3) $\sqrt[4]{a^3b}\times\sqrt{ab}\div\sqrt[4]{ab^3}=a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}$
$=a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\times b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}$
$=a\times b^0=a$
(4) $a\sqrt{a\sqrt{a}}=a\times(a\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=a\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{4}}$
$=a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{7}{4}}$

5 (1) $7^\pi\times8^{\frac{\pi}{3}}=7^\pi\times(2^3)^{\frac{\pi}{3}}=7^\pi\times2^\pi$
$=(7\times2)^\pi=14^\pi$
(2) $(\sqrt{2^{\sqrt{2}}})^{\sqrt{2}}=(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}})^{\sqrt{2}}=2$
(3) $a^{\sqrt{48}}\div a^{\sqrt{3}}=a^{4\sqrt{3}-\sqrt{3}}=a^{3\sqrt{3}}$
(4) $(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}}=a^{\sqrt{36}}=a^6$

6 (1) $(5^{\sqrt{2}+1})^{\sqrt{2}-1}=5^{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=5$
(2) $4^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}=(2^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\times(2^{-1})^{\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}}\times2^{-\sqrt{2}}$
$=2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}}=2^0=1$
(3) $a^{\sqrt{27}}\div a^{\sqrt{48}}\times a^{\sqrt{12}}=a^{3\sqrt{3}}\div a^{4\sqrt{3}}\times a^{2\sqrt{3}}$
$=a^{3\sqrt{3}-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}=a^{\sqrt{3}}$
(4) $(a^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\times b^{\sqrt{\frac{3}{4}}})^{2\sqrt{3}}=a^{\frac{1}{\sqrt{3}}\times2\sqrt{3}}\times b^{\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}}=a^2b^3$

7 (1) $(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}})(3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}})+(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}})^2$
$=(3^{\frac{1}{2}})^2-(3^{-\frac{1}{2}})^2+(3^{\frac{1}{2}})^2+2\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{1}{2}}+(3^{-\frac{1}{2}})^2$
$=3-3^{-1}+3+2+3^{-1}=8$
(2) $(a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}})$
$=(a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}})\{(a^{\frac{1}{3}})^2+a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+(b^{-\frac{1}{3}})^2\}$
$=(a^{\frac{1}{3}})^3-(b^{-\frac{1}{3}})^3=a-b^{-1}=a-\dfrac{1}{b}$

8 $(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{4}})(x+y^{\frac{1}{2}})$
$=\{(x^{\frac{1}{4}})^2-(y^{\frac{1}{8}})^2\}(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{4}})(x+y^{\frac{1}{2}})$
$=(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{4}})(x+y^{\frac{1}{2}})$
$=\{(x^{\frac{1}{2}})^2-(y^{\frac{1}{4}})^2\}(x+y^{\frac{1}{2}})$
$=(x-y^{\frac{1}{2}})(x+y^{\frac{1}{2}})$
$=x^2-(y^{\frac{1}{2}})^2=x^2-y$
이때 $x=3$, $y=2$이므로
$(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{4}})(x+y^{\frac{1}{2}})$
$=x^2-y=3^2-2=7$

02강 로그

확인 문제 p. 8

1 (1) $0=\log_5 1$

(2) $3=\log_4 64$

(3) $-4=\log_2 \frac{1}{16}$

2 (1) 진수의 조건에서 $x^2-4>0$

$(x+2)(x-2)>0$ $\therefore x<-2$ 또는 $x>2$

(2) 밑의 조건에서 $x+1>0$, $x+1\neq1$

$x>-1$, $x\neq0$ $\therefore -1<x<0$ 또는 $x>0$

(3) 밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq1$

$x>3$, $x\neq4$ $\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ …… ㉠

진수의 조건에서 $5-x>0$ $\therefore x<5$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$3<x<4$ 또는 $4<x<5$

3 (1) $\frac{\log_3 343}{\log_3 7}=\log_7 343=\log_7 7^3=3\log_7 7=3$

(2) $\log_4 8=\log_{2^2} 2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$

(3) $25^{\log_5 3}=3^{\log_5 25}=3^{\log_5 5^2}=3^{2\log_5 5}=3^2=9$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 9

1 (1) $\log_2 x=2$에서 $2^2=x$ $\therefore x=4$

(2) $\log_8 x=\frac{1}{3}$에서 $8^{\frac{1}{3}}=x$ $\therefore x=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2$

(3) $\log_x 27=3$에서 $x^3=27$

$x^3=3^3$ $\therefore x=3$

(4) $\log_x \sqrt{125}=\frac{3}{2}$에서 $x^{\frac{3}{2}}=\sqrt{125}$

$x^{\frac{3}{2}}=\sqrt{5^3}=5^{\frac{3}{2}}$ $\therefore x=5$

2 (1) $\log_3 x=4$에서 $3^4=x$ $\therefore x=81$

(2) $\log_{16} x=\frac{1}{2}$에서

$16^{\frac{1}{2}}=x$ $\therefore x=(2^4)^{\frac{1}{2}}=4$

(3) $\log_x 32=5$에서 $x^5=32$

$x^5=2^5$ $\therefore x=2$

(4) $\log_x \sqrt[3]{25}=\frac{2}{3}$에서 $x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{25}$

$x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2}=5^{\frac{2}{3}}$ $\therefore x=5$

3 (1) $\log_2 24+\log_2 \frac{1}{3}=\log_2\left(24\times\frac{1}{3}\right)=\log_2 8$

$=\log_2 2^3=3\log_2 2=3$

(2) $2\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 5-\log_3 4\sqrt{5}$

$=\log_3 2^2+\log_3\sqrt{5}-\log_3 4\sqrt{5}$

$=\log_3 \frac{2^2\times\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=\log_3 1=0$

4 (1) $\log_3 75-2\log_3 5=\log_3 75-\log_3 5^2$

$=\log_3\frac{75}{25}$

$=\log_3 3=1$

(2) $\log_5\sqrt{3}-\log_5\frac{1}{10}+\log_5\frac{1}{2\sqrt{15}}$

$=\log_5\sqrt{3}-\log_5 10^{-1}+\log_5\frac{1}{2\sqrt{15}}$

$=\log_5\sqrt{3}+\log_5 10+\log_5\frac{1}{2\sqrt{15}}$

$=\log_5\left(\sqrt{3}\times10\times\frac{1}{2\sqrt{15}}\right)$

$=\log_5\sqrt{5}=\log_5 5^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_5 5=\frac{1}{2}$

5 (1) $\log_{10}36=\log_{10}(2^2\times3^2)$

$=\log_{10}2^2+\log_{10}3^2$

$=2\log_{10}2+2\log_{10}3$

$=2a+2b$

(2) $\log_{10}1.08=\log_{10}\frac{108}{100}=\log_{10}\frac{2^2\times3^3}{10^2}$

$=\log_{10}2^2+\log_{10}3^3-\log_{10}10^2$

$=2\log_{10}2+3\log_{10}3-2\log_{10}10$

$=2a+3b-2$

6 (1) $\log_{10}\sqrt[3]{12}=\log_{10}12^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log_{10}(2^2\times3)$

$=\frac{1}{3}(\log_{10}2^2+\log_{10}3)$

$=\frac{1}{3}(2\log_{10}2+\log_{10}3)=\frac{2a+b}{3}$

(2) $\log_{10}\frac{24}{5}=\log_{10}\frac{48}{10}=\log_{10}\frac{2^4\times3}{10}$

$=\log_{10}2^4+\log_{10}3-\log_{10}10$

$=4\log_{10}2+\log_{10}3-1$

$=4a+b-1$

7 (1) $\log_2 3\times\log_3 8=\log_2 3\times\log_3 2^3$

$=\log_2 3\times3\log_3 2$

$=3\times\log_2 3\times\frac{1}{\log_2 3}=3$

(2) $\log_9 27\times\log_8 4=\log_{3^2}3^3\times\log_{2^3}2^2$

$=\frac{3}{2}\log_3 3\times\frac{2}{3}\log_2 2$

$=\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=1$

(3) $3^{\log_3 4}+4^{\log_2 3}=4^{\log_3 3}+3^{\log_2 4}=4+3^{\log_2 2^2}$

$=4+3^{2\log_2 2}=4+3^2=13$

8 (1) $\log_3 4\times\log_8 27=\log_3 2^2\times\log_{2^3} 3^3$
$=2\log_3 2\times\frac{3}{3}\log_2 3$
$=2\log_3 2\times\frac{1}{\log_3 2}=2$

(2) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}\times\log_3\sqrt{5}\times\log_5\sqrt{2}$
$=\log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{\frac{1}{2}}\times\log_3 5^{\frac{1}{2}}\times\log_5 2^{\frac{1}{2}}$
$=\log_2 3\times\frac{1}{2}\log_3 5\times\frac{1}{2}\log_5 2$
$=\frac{1}{4}\times\log_2 3\times\log_3 5\times\log_5 2$
$=\frac{1}{4}\times\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}\times\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}\times\frac{\log_{10}2}{\log_{10}5}=\frac{1}{4}$

(3) $2^{\log_2 5\times\log_5 7}=(2^{\log_2 5})^{\log_5 7}=(5^{\log_2 2})^{\log_5 7}$
$=5^{\log_5 7}=7^{\log_5 5}=7$

03강 상용로그

확인 문제 p. 10

1 (1) $\log 10000=\log 10^4=4\log 10=4$

(2) $\log\frac{1}{100}=\log 10^{-2}=-2\log 10=-2$

(3) $\log\sqrt[3]{100}=\log(10^2)^{\frac{1}{3}}=\log 10^{\frac{2}{3}}$
$=\frac{2}{3}\log 10=\frac{2}{3}$

2 (1) $\log 41.9=\log(4.19\times 10)$
$=\log 4.19+\log 10$
$=1+\log 4.19$

(2) $\log 0.0419=\log(4.19\times 10^{-2})$
$=\log 4.19+\log 10^{-2}$
$=-2+\log 4.19$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 11

1 (1) $\log 52.1=\log(5.21\times 10)$
$=\log 5.21+\log 10$
$=0.7168+1=1.7168$

(2) $\log 0.0521=\log(5.21\times 10^{-2})$
$=\log 5.21+\log 10^{-2}$
$=0.7168-2=-1.2832$

(3) $\log\sqrt{5.21}=\log(5.21)^{\frac{1}{2}}$
$=\frac{1}{2}\log 5.21=\frac{1}{2}\times 0.7168=0.3584$

2 (1) $\log 8150=\log(8.15\times 10^3)$
$=\log 8.15+\log 10^3$
$=0.9112+3=3.9112$

(2) $\log 0.815=\log(8.15\times 10^{-1})$
$=\log 8.15+\log 10^{-1}$
$=0.9112-1=-0.0888$

(3) $\log\sqrt{815}=\log 815^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log 815$
$=\frac{1}{2}\log(8.15\times 10^2)$
$=\frac{1}{2}(\log 8.15+\log 10^2)$
$=\frac{1}{2}(0.9112+2)=1.4556$

3 (1) $\log x=3.3483=3+0.3483=\log 10^3+\log 2.23$
$=\log(10^3\times 2.23)=\log 2230$
$\therefore x=2230$

다른 풀이

$\log x=3.3483$에서 $\log 2.23$과 소수 부분이 같으므로 x는 2.23과 숫자의 배열이 같고, 정수 부분이 3이므로 정수 부분이 네 자리인 수이다. 즉, $x=2230$이다.

(2) $\log x=-1.6517=-2+0.3483=\log 10^{-2}+\log 2.23$
$=\log(10^{-2}\times 2.23)=\log 0.0223$
$\therefore x=0.0223$

다른 풀이

$\log x=-1.6517=-2+0.3483$에서 $\log 2.23$과 소수 부분이 같으므로 x는 2.23과 숫자의 배열이 같고, 정수 부분이 -2이므로 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다. 즉, $x=0.0223$이다.

4 (1) $\log x=2.5105=2+0.5105=\log 10^2+\log 3.24$
$=\log(10^2\times 3.24)=\log 324$
$\therefore x=324$

다른 풀이

$\log x=2.5105$에서 $\log 3.24$와 소수 부분이 같으므로 x는 3.24와 숫자의 배열이 같고, 정수 부분이 2이므로 정수 부분이 세 자리인 수이다. 즉, $x=324$이다.

(2) $\log x=-2.4895=-3+0.5105=\log 10^{-3}+\log 3.24$
$=\log(10^{-3}\times 3.24)=\log 0.00324$
$\therefore x=0.00324$

다른 풀이

$\log x=-2.4895=-3+0.5105$에서 $\log 3.24$와 소수 부분이 같으므로 x는 3.24와 숫자의 배열이 같고, 정수 부분이 -3이므로 소수점 아래 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다. 즉, $x=0.00324$이다.

5 (1) 2^{30}에 상용로그를 취하면

$\log 2^{30}=30\log 2=30\times 0.3010=9.03=9+0.03$

따라서 $\log 2^{30}$의 정수 부분이 9이므로 2^{30}은 10자리의 자연수이다.

(2) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{10}$에 상용로그를 취하면

$$\log\left(\frac{1}{6}\right)^{10}=\log 6^{-10}=-10\log 6=-10\log(2\times 3)$$
$$=-10(\log 2+\log 3)=-10(0.3010+0.4771)$$
$$=-7.781=-8+0.219$$

따라서 $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{10}$의 정수 부분이 -8이므로 $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{10}$은 소수점 아래 8째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

6 (1) 12^{40}에 상용로그를 취하면

$$\log 12^{40}=40\log 12=40\log(2^2\times 3)$$
$$=40(2\log 2+\log 3)=40(2\times 0.3010+0.4771)$$
$$=43.164=43+0.164$$

따라서 $\log 12^{40}$의 정수 부분이 43이므로 12^{40}은 44자리의 자연수이다.

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{20}$에 상용로그를 취하면

$$\log\left(\frac{1}{3}\right)^{20}=\log 3^{-20}=-20\log 3=-20\times 0.4771$$
$$=-9.542=-10+0.458$$

따라서 $\log\left(\dfrac{1}{3}\right)^{20}$의 정수 부분이 -10이므로 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{20}$은 소수점 아래 10째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

7 규모가 7.5인 지진이 만들어내는 해일의 최고 높이를 H_1, 규모가 5.5인 지진이 만들어내는 해일의 최고 높이를 H_2라고 하면

$7.5=\log H_1+6.5 \quad \therefore \log H_1=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$5.5=\log H_2+6.5 \quad \therefore \log H_2=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $\log H_1-\log H_2=2$

$\log\dfrac{H_1}{H_2}=2 \quad \therefore \dfrac{H_1}{H_2}=10^2=100$

따라서 규모가 7.5인 지진이 만들어내는 해일의 최고 높이는 규모가 5.5인 지진이 만들어내는 해일의 최고 높이의 100배이다.

8 1등급인 별의 밝기를 I_1, 3등급인 별의 밝기를 I_2라고 하면

$1=-\dfrac{5}{2}\log I_1+C \quad \cdots\cdots$ ㉠

$3=-\dfrac{5}{2}\log I_2+C \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $-2=-\dfrac{5}{2}(\log I_1-\log I_2)$

$\log\dfrac{I_1}{I_2}=\dfrac{4}{5} \quad \therefore \dfrac{I_1}{I_2}=10^{\frac{4}{5}}=(10^{\frac{2}{5}})^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$

따라서 1등급인 별의 밝기는 3등급인 별의 밝기의 $\dfrac{25}{4}$배이다.

계산력 다지기

p. 12~13

1 (1) $\sqrt[6]{64}+\sqrt[3]{-125}=\sqrt[6]{2^6}+\sqrt[3]{(-5)^3}=2+(-5)=-3$

(2) $\sqrt[3]{343}-\sqrt[5]{-243}=\sqrt[3]{7^3}-\sqrt[5]{(-3)^5}=7-(-3)=10$

(3) $\sqrt[5]{4}\times\sqrt[5]{8}=\sqrt[5]{4\times 8}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

(4) $\dfrac{\sqrt[4]{567}}{\sqrt[4]{7}}=\sqrt[4]{\dfrac{567}{7}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

(5) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[8]{5}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{5}}}=\dfrac{\sqrt[8]{5}}{\sqrt[16]{5}}\times\dfrac{\sqrt[16]{5}}{\sqrt[8]{5}}=1$

(6) $(\sqrt[3]{6})^6\div\sqrt[4]{16^2}=\sqrt[3]{6^6}\div\sqrt[4]{2^8}=6^2\div 2^2=36\div 4=9$

(7) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}\times\sqrt{\sqrt{81}}\div\sqrt[3]{216}=\sqrt[8]{2^8}\times\sqrt[4]{3^4}\div\sqrt[3]{6^3}$
$=2\times 3\div 6=1$

(8) $\sqrt[4]{\sqrt[6]{64}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{64}}}=\sqrt[24]{2^6}\times\sqrt[8]{2^6}=\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{2^4}=2$

2 (1) $5^0\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=1\times(3^{-1})^{-1}=1\times 3=3$

(2) $9^{\frac{7}{4}}\times 3^{-\frac{3}{2}}=3^{\frac{7}{2}}\times 3^{-\frac{3}{2}}=3^{\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}=3^2=9$

(3) $2^{-\frac{5}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}\times 6^{\frac{2}{3}}=2^{-\frac{5}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}\times(2\times 3)^{\frac{2}{3}}$
$=(2^{-\frac{5}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}})\times(3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}})$
$=2^{-1}\times 3=\dfrac{3}{2}$

(4) $\sqrt[6]{a^5b}\times\sqrt[3]{ab}\div\sqrt[6]{ab^3}=a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\div a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{6}}$
$=a^{\frac{5}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{3}{6}}=a$

(5) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{a}}}=\dfrac{\sqrt[10]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\dfrac{\sqrt[15]{a^5}}{\sqrt[10]{a}}$
$=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}}=a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{6}}$

(6) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=\{a\times(a\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}=\{a\times(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$
$=(a\times a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{8}}$

3 (1) $(2^{1-\sqrt{3}})^{1+\sqrt{3}}=2^{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$

(2) $(\sqrt{5^{\sqrt{6}}})^{\sqrt{6}}=(5^{\frac{\sqrt{6}}{2}})^{\sqrt{6}}=5^3=125$

(3) $81^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\sqrt{2}}=3^{\frac{4}{\sqrt{2}}}\times(3^{-2})^{\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}}\times 3^{-2\sqrt{2}}=3^0=1$

(4) $a^{\sqrt{32}}\div a^{\sqrt{18}}\times a^{\sqrt{8}}=a^{4\sqrt{2}}\div a^{3\sqrt{2}}\times a^{2\sqrt{2}}=a^{3\sqrt{2}}$

(5) $(a^{\sqrt{\frac{3}{2}}}b^{\sqrt{\frac{2}{3}}})^{2\sqrt{6}}=a^{\sqrt{\frac{3}{2}}\times 2\sqrt{6}}b^{\sqrt{\frac{2}{3}}\times 2\sqrt{6}}=a^6b^4$

(6) $a^{\sqrt{45}}\times b^{\sqrt{20}}\div(ab)^{\sqrt{5}}=a^{3\sqrt{5}}b^{2\sqrt{5}}\div a^{\sqrt{5}}b^{\sqrt{5}}=a^{2\sqrt{5}}b^{\sqrt{5}}$

4 (1) $\log_4 x=3,\ 4^3=x \quad \therefore x=64$

(2) $\log_9 x=\dfrac{1}{4},\ 9^{\frac{1}{4}}=x \quad \therefore x=(3^2)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

(3) $\log_x 125=3,\ x^3=125=5^3 \quad \therefore x=5$

(4) $\log_x\sqrt[4]{8}=\dfrac{1}{4},\ x^{\frac{1}{4}}=8^{\frac{1}{4}} \quad \therefore x=8$

5 (1) $4\log_5\sqrt[8]{625}=\dfrac{4}{8}\log_5 5^4=\dfrac{1}{2}\times 4=2$

(2) $\log_6 36\times\log_7 7=\log_6 6^2\times 1=2$

(3) $\log_2 80+\log_2\dfrac{1}{5}=\log_2\left(80\times\dfrac{1}{5}\right)=\log_2 2^4=4$

(4) $\log_3 108 - 2\log_3 2 = \log_3 108 - \log_3 2^2$
$= \log_3 \frac{108}{4} = \log_3 3^3 = 3$

(5) $2\log_2 4 + \log_2 \sqrt{5} - \frac{1}{2}\log_2 20$
$= \log_2 4^2 + \log_2 \sqrt{5} - \log_2 20^{\frac{1}{2}}$
$= \log_2 \frac{16\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \log_2 2^3 = 3$

(6) $\frac{1}{2}\log_5 15 - \log_5 45 + \frac{1}{2}\log_5 27$
$= \log_5 15^{\frac{1}{2}} - \log_5 45 + \log_5 27^{\frac{1}{2}}$
$= \log_5 \frac{\sqrt{15}\times 3\sqrt{3}}{45} = \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

6 (1) $\frac{\log_2 225}{\log_2 15} = \log_{15} 225 = \log_{15} 15^2 = 2$

(2) $\log_3 4 \times \log_4 9 = 2\log_3 2 \times \log_2 3 = 2\log_3 2 \times \frac{1}{\log_3 2} = 2$

(3) $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{3} \times \log_{\sqrt{3}} 5 \times \log_{\sqrt{5}} 7$
$= \log_7 3 \times 2\log_3 5 \times 2\log_5 7$
$= 4 \times \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 7} \times \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 5} = 4$

(4) $\log_2(\log_5 3 \times \log_3 25) = \log_2(\log_5 3 \times 2\log_3 5)$
$= \log_2\left(2\log_5 3 \times \frac{1}{\log_5 3}\right)$
$= \log_2 2 = 1$

(5) $5^{\log_5 2} + 3^{\log_3 4} = 2^{\log_5 5} + 4^{\log_3 3} = 2 + 4 = 6$

(6) $3^{\log_3 4 \times \log_4 5} = (3^{\log_3 4})^{\log_4 5} = (4^{\log_3 3})^{\log_4 5} = 4^{\log_4 5} = 5^{\log_4 4} = 5$

7 (1) $x = \log 56.2 = \log(5.62\times 10) = \log 5.62 + \log 10$
$= 0.7497 + 1 = 1.7497$

(2) $x = \log 0.587 = \log(5.87\times 10^{-1}) = \log 5.87 + \log 10^{-1}$
$= 0.7686 - 1 = -0.2314$

(3) $x = \log 0.0603 = \log(6.03\times 10^{-2}) = \log 6.03 + \log 10^{-2}$
$= 0.7803 - 2 = -1.2197$

(4) $x = \log\sqrt{638} = \frac{1}{2}\log(6.38\times 10^2)$
$= \frac{1}{2}(\log 6.38 + \log 10^2) = \frac{1}{2}(0.8048 + 2)$
$= 1.4024$

(5) $\log x = 2.7716 = 2 + 0.7716 = \log 10^2 + \log 5.91$
$= \log(10^2\times 5.91) = \log 591$
$\therefore x = 591$

(6) $\log x = 3.7543 = 3 + 0.7543 = \log 10^3 + \log 5.68$
$= \log(10^3\times 5.68) = \log 5680$
$\therefore x = 5680$

(7) $\log x = -2.1925 = -3 + 0.8075 = \log 10^{-3} + \log 6.42$
$= \log(10^{-3}\times 6.42) = \log 0.00642$
$\therefore x = 0.00642$

(8) $\log x = -3.2154 = -4 + 0.7846 = \log 10^{-4} + \log 6.09$
$= \log(10^{-4}\times 6.09) = \log 0.000609$
$\therefore x = 0.000609$

01~03강 족집게 기출문제

p. 14~17

1 ④	2 ③	3 ②	4 ③	5 ②
6 ①	7 ③	8 ④	9 ③	10 ③
11 ④	12 2	13 ②	14 ③	15 ②
16 ③	17 ⑤	18 ②	19 ③	20 ①
21 92	22 23.3	23 ②	24 ①	25 ⑤
26 ③	27 10	28 (1) 5 (2) 27		
29 $\frac{1}{32}$배	30 2			

1 ㄱ. $\sqrt[3]{125} = 5$이므로 5의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}$이다.
ㄴ. 8의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3 = 8$이므로
$x^3 - 8 = 0$, $(x-2)(x^2+2x+4) = 0$
$\therefore x = 2$ 또는 $x = -1\pm\sqrt{3}i$
따라서 8의 세제곱근 중 실수인 것은 2뿐이다.
ㄷ. $\sqrt{81} = 9$이므로 9의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4 = 9$에서
$x^4 - 9 = 0$, $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+3) = 0$
$\therefore x = \pm\sqrt{3}$ 또는 $x = \pm\sqrt{3}i$
따라서 9의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{3}$이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2 ① $\sqrt[3]{-\sqrt{64}} = \sqrt[3]{-8}$
$= \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$
② $\sqrt[12]{27} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[4]{3}$
③ $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^4}\times\sqrt[12]{2^3}$
$= \sqrt[12]{2^4\times 2^3} = \sqrt[12]{2^7}$
④ $(\sqrt[4]{5})^8 = \sqrt[4]{5^8} = 5^2 = 25$
⑤ $\frac{\sqrt[5]{-243}}{\sqrt[5]{-32}} = \frac{\sqrt[5]{(-3)^5}}{\sqrt[5]{(-2)^5}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

3 $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$
$= (\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})\{(\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2\}$
$= (\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{2})^3$
$= 3 + 2 = 5$

4 $\sqrt[3]{ab^2}\times\sqrt[12]{a^3b^6}\div\sqrt[6]{a^2b} = \sqrt[12]{a^4b^8}\times\sqrt[12]{a^3b^6}\div\sqrt[12]{a^4b^2}$
$= \sqrt[12]{a^{4+3-4}b^{8+6-2}}$
$= \sqrt[12]{a^3b^{12}}$
$= b\sqrt[4]{a}$

5 $\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}} = \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[6]{a}}$
$= a^{\frac{1}{12}-\frac{1}{6}} = a^{-\frac{1}{12}}$
$= (2^{12})^{-\frac{1}{12}} = 2^{-1}$
$= \frac{1}{2}$

6 $A=\sqrt{a\sqrt{b}}=(ab^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(a^2b)^{\frac{1}{4}}$

$B=\sqrt{b\sqrt{a}}=(a^{\frac{1}{2}}b)^{\frac{1}{2}}=(ab^2)^{\frac{1}{4}}$

$C=\sqrt{\sqrt{ab}}=\{(ab)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}=(ab)^{\frac{1}{4}}$

이때 $0<a<b<1$이므로 a^2b, ab^2, ab의 크기를 비교하면

$a^2b-ab^2=ab(a-b)<0 \qquad \therefore\ a^2b<ab^2$

$ab^2-ab=ab(b-1)<0 \qquad \therefore\ ab^2<ab$

따라서 $a^2b<ab^2<ab$이므로 $\ A<B<C$

7 $3^4=a$에서 $\ 3=a^{\frac{1}{4}}$

$4^5=b$에서 $\ (2^2)^5=b$

$2^{10}=b \qquad \therefore\ 2=b^{\frac{1}{10}}$

$\therefore\ 6^{16}=(3\times2)^{16}=3^{16}\times2^{16}$

$=(a^{\frac{1}{4}})^{16}\times(b^{\frac{1}{10}})^{16}=a^4b^{\frac{8}{5}}$

8 $a^{3\sqrt{3}}\times(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}-\sqrt{6}}\div(\sqrt[3]{a})^6=a^{3\sqrt{3}}\times a^{2-2\sqrt{3}}\div a^2$

$=a^{3\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}-2}=a^{\sqrt{3}}$

$\therefore\ k=\sqrt{3}$

9 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=3^3-3\times3=18$

$x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}=3^2-2=7$

$x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2xx^{-1}=7^2-2=47$

$\therefore\ \dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}=\dfrac{18+2}{47+3}=\dfrac{2}{5}$

10 주어진 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$\dfrac{a^{3x}-a^{-x}}{a^x+a^{-3x}}=\dfrac{a^x(a^{3x}-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-3x})}$

$=\dfrac{a^{4x}-1}{a^{2x}+a^{-2x}}=\dfrac{(a^{2x})^2-1}{a^{2x}+a^{-2x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2-1}{\sqrt{2}+1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$

$=\dfrac{(3+2\sqrt{2})-1}{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}$

$=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

11 $a^x=64=2^6$에서 $\ a=2^{\frac{6}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$b^y=64=2^6$에서 $\ b=2^{\frac{6}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

$c^z=8=2^3$에서 $\ c=2^{\frac{3}{z}}$ ⋯⋯ ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$abc=2^{\frac{6}{x}}\times2^{\frac{6}{y}}\times2^{\frac{3}{z}}=2^{\frac{6}{x}+\frac{6}{y}+\frac{3}{z}}$

이때 $abc=16=2^4$이므로

$2^{\frac{6}{x}+\frac{6}{y}+\frac{3}{z}}=2^4$

따라서 $\dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}+\dfrac{3}{z}=4$이므로

$3\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=4 \qquad \therefore\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{4}{3}$

12 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면 정육면체의 부피가 2^4이므로

$a^3=2^4 \qquad \therefore\ a=2^{\frac{4}{3}}$

$\overline{AC}=\overline{AF}=\overline{FC}=\sqrt{2}a$이므로 삼각형 AFC의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2}a)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times(2^{\frac{4}{3}})^2$

$=\sqrt{3}\times2^{\frac{4}{3}\times2-1}$

$=\sqrt{3}\times2^{\frac{5}{3}}$

따라서 $p=5$, $q=3$이므로

$p-q=2$

13 밑의 조건에서

$a+1>0$, $a+1\neq1$

$\therefore\ -1<a<0$ 또는 $a>0$ ⋯⋯ ㉠

진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+4>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-16<0$, $(a+4)(a-4)<0$

$\therefore\ -4<a<4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\ -1<a<0$ 또는 $0<a<4$

따라서 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다.

14 $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$

$=(\log_2 3+\log_{2^2} 3^2)(\log_3 2^2+\log_{3^2} 2)$

$=(\log_2 3+\log_2 3)\left(2\log_3 2+\dfrac{1}{2}\log_3 2\right)$

$=2\log_2 3\times\dfrac{5}{2}\log_3 2$

$=5\times\log_2 3\times\log_3 2$

$=5\times\log_2 3\times\dfrac{1}{\log_2 3}=5$

15 $5^{1-\log_5 2}=5^{\log_5 5-\log_5 2}=5^{\log_5 \frac{5}{2}}=\dfrac{5}{2}$

$2^{1-\log_2 5}=2^{\log_2 2-\log_2 5}=2^{\log_2 \frac{2}{5}}=\dfrac{2}{5}$

$\therefore\ 5^{1-\log_5 2}\times2^{1-\log_2 5}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{2}{5}=1$

16 (주어진 식)

$=\log_2\left\{\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{8^2}\right)\right\}$

$=\log_2\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\right.$

$\left.\cdots\left(1-\dfrac{1}{8}\right)\left(1+\dfrac{1}{8}\right)\right\}$

$=\log_2\left(\dfrac{1}{2}\times\cancel{\dfrac{3}{2}}\times\cancel{\dfrac{2}{3}}\times\cancel{\dfrac{4}{3}}\times\cancel{\dfrac{3}{4}}\times\cancel{\dfrac{5}{4}}\times\cdots\times\cancel{\dfrac{7}{8}}\times\dfrac{9}{8}\right)$

$=\log_2\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{8}\right)=\log_2\dfrac{9}{16}$

$=\log_2 9-\log_2 16=2\log_2 3-4$

17 $\log_{36} 75=\dfrac{\log_3 75}{\log_3 36}=\dfrac{\log_3 (5^2\times 3)}{\log_3 (2^2\times 3^2)}$
$=\dfrac{2\log_3 5+\log_3 3}{2\log_3 2+2\log_3 3}=\dfrac{2b+1}{2a+2}$

18 $\log_{\sqrt{a}} 3=\log_b 27$에서
$\dfrac{1}{\log_3 \sqrt{a}}=\dfrac{1}{\log_{27} b}$
즉, $\log_3 \sqrt{a}=\log_{27} b$이므로
$\dfrac{1}{2}\log_3 a=\dfrac{1}{3}\log_3 b$
$\therefore \log_3 a^{\frac{1}{2}}=\log_3 b^{\frac{1}{3}}$
따라서 $a^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{1}{3}}$이므로
$b=a^{\frac{3}{2}}$ $\quad\therefore \log_a b=\dfrac{3}{2}$
$\therefore \log_a \sqrt{b}-\log_{ab} \sqrt[3]{a^2b^2}=\log_a b^{\frac{1}{2}}-\log_{ab} (ab)^{\frac{2}{3}}$
$=\dfrac{1}{2}\log_a b-\dfrac{2}{3}\log_{ab} ab$
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}$
$=\dfrac{1}{12}$

19 $16^x=81^y=216$에서
$x=\log_{16} 216$, $y=\log_{81} 216$
$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_{16} 216}+\dfrac{1}{\log_{81} 216}$
$=\log_{216} 16+\log_{216} 81$
$=\log_{6^3} (2^4\times 3^4)$
$=\log_{6^3} 6^4=\dfrac{4}{3}$

다른 풀이
$16^x=216$에서
$2^{4x}=6^3$ $\quad\therefore 2=6^{\frac{3}{4x}}$ …… ㉠
$81^y=216$에서
$3^{4y}=6^3$ $\quad\therefore 3=6^{\frac{3}{4y}}$ …… ㉡
㉠×㉡을 하면 $\quad 6=6^{\frac{3}{4x}+\frac{3}{4y}}$
따라서 $\dfrac{3}{4x}+\dfrac{3}{4y}=1$이므로
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{3}$

20 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\log_2 a+\log_2 b=6$,
$\log_2 a\times\log_2 b=-3$
$\therefore \log_a b+\log_b a=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}+\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b}$
$=\dfrac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$
$=\dfrac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$
$=\dfrac{6^2-2\times(-3)}{-3}=-14$

21 n의 값의 범위에 따른 $[\log n]$의 값을 구하면 다음과 같다.
(i) $1\le n<10$일 때
$0\le\log n<1$이므로 $\quad[\log n]=0$
(ii) $10\le n<100$일 때
$1\le\log n<2$이므로 $\quad[\log n]=1$
(iii) $n=100$일 때
$\log 100=2$이므로 $\quad[\log n]=2$
(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 식은
$([\log 1]+[\log 2]+\cdots+[\log 9])$
$+([\log 10]+[\log 11]+\cdots+[\log 99])+[\log 100]$
$=0\times 9+1\times 90+2\times 1=92$

22 상용로그표에서 $\log 5.43=0.7348$이므로
$\log\sqrt{543}=\dfrac{1}{2}\log 543$
$=\dfrac{1}{2}\log (5.43\times 10^2)$
$=\dfrac{1}{2}(\log 5.43+2)$
$=\dfrac{1}{2}(0.7348+2)$
$=1.3674=1+0.3674$
이때 $\log 2.33=0.3674$이므로
$\log\sqrt{543}=1+\log 2.33$
$=\log 10+\log 2.33$
$=\log (2.33\times 10)$
$=\log 23.3$
$\therefore \sqrt{543}=23.3$

23 a^{50}이 67자리의 수이므로 $\log a^{50}$의 정수 부분은 66이다.
즉, $66\le\log a^{50}<67$이므로 $\quad 66\le 50\log a<67$
$\therefore 1.32\le\log a<1.34$
각 변에 20을 곱하면
$26.4\le\log a^{20}<26.8$
따라서 $\log a^{20}$의 정수 부분이 26이므로 a^{20}은 27자리의 수이다.

24 100 t의 오염 물질이 포함된 폐수를 기계에 10번 통과시킨 후 남아 있는 오염 물질의 양은 (100×0.9^{10}) t이다.
100×0.9^{10}에 상용로그를 취하면
$\log (100\times 0.9^{10})=2+10\log 0.9$
$=2+10\log\dfrac{9}{10}$
$=2+10(2\log 3-1)$
$=2+10(0.9542-1)$
$=1.542=1+0.542$
$=\log 10+\log 3.48$
$=\log (3.48\times 10)$
$=\log 34.8$
따라서 남아 있는 오염 물질의 양은 34.8 t이다.

25 $a^x=b^y=5^z=k\,(k>0)$로 놓으면

$xyz\neq0$에서 $k\neq1$

$a^x=k$에서 $a=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$b^y=k$에서 $b=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$5^z=k$에서 $5=k^{\frac{1}{z}}$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$이므로 ㉠×㉡을 하면

$ab=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

$=k^{\frac{2}{z}}=(k^{\frac{1}{z}})^2$

$=5^2=25$

다른 풀이

$a^x=b^y=5^z=k\ (k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서 $k\neq1$

$a^x=k$에서 $x=\log_a k$, $b^y=k$에서 $y=\log_b k$,

$5^z=k$에서 $z=\log_5 k$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$이므로 $\log_k a+\log_k b=2\log_k 5$

$\log_k ab=\log_k 25$ $\therefore ab=25$

26 $(a+1)^p=(b+1)^q=(c+1)^r=231^s$의 각 변에 상용로그를 취하면

$p\log(a+1)=s\log 231$에서

$\frac{1}{p}=\frac{\log(a+1)}{s\log 231}$

$q\log(b+1)=s\log 231$에서

$\frac{1}{q}=\frac{\log(b+1)}{s\log 231}$

$r\log(c+1)=s\log 231$에서

$\frac{1}{r}=\frac{\log(c+1)}{s\log 231}$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{\log(a+1)+\log(b+1)+\log(c+1)}{s\log 231}$

$=\frac{\log(a+1)(b+1)(c+1)}{s\log 231}=\frac{1}{s}$

이므로

$\log(a+1)(b+1)(c+1)=\log 231$

$\therefore (a+1)(b+1)(c+1)=231$

그런데 $a+1\geq2$, $b+1\geq2$, $c+1\geq2$이고

$231=3\times7\times11$

이므로

$(a+1)+(b+1)+(c+1)=3+7+11=21$

$\therefore a+b+c=18$

27 $[x]$는 x의 정수 부분, $x-[x]$는 x의 소수 부분을 의미한다.

(가)에서 $\log t$의 정수 부분이 3이므로

$3\leq\log t<4$

(나)에서 $\log t^2$의 소수 부분과 $\log\frac{1}{t}$의 소수 부분이 같으므로

$\log t^2-\log\frac{1}{t}=2\log t+\log t=3\log t$

에서 $3\log t$의 값은 정수이다.

그런데 $3\leq\log t<4$이므로

$9\leq3\log t<12$

따라서 $3\log t$의 값은 9 또는 10 또는 11이므로

$\log t=3$ 또는 $\log t=\frac{10}{3}$ 또는 $\log t=\frac{11}{3}$

즉, $t=10^3$ 또는 $t=10^{\frac{10}{3}}$ 또는 $t=10^{\frac{11}{3}}$이므로

$A=10^3\times10^{\frac{10}{3}}\times10^{\frac{11}{3}}$

$=10^{3+\frac{10}{3}+\frac{11}{3}}=10^{10}$

$\therefore \log A=\log10^{10}=10$

28 (1) $2^{2x}-5\times2^x-1=0$의 양변을 2^x으로 나누면

$2^x-5-2^{-x}=0$ …… (가)

$\therefore\ 2^x-2^{-x}=5$ …… (나)

(2) $2^x-2^{-x}=5$의 양변을 제곱하면

$2^{2x}-2+2^{-2x}=25$

$\therefore\ 2^{2x}+2^{-2x}=27$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 주어진 식의 양변을 2^x으로 나눈다.	3점
(나) 2^x-2^{-x}의 값을 구한다.	1점
(다) $2^{2x}+2^{-2x}$의 값을 구한다.	3점

29 $P_{60}=5000\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{60}{6}}=5000\times2^{-10}$ …… (가)

$P_{30}=5000\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{6}}=5000\times2^{-5}$ …… (나)

$\therefore \frac{P_{60}}{P_{30}}=\frac{5000\times2^{-10}}{5000\times2^{-5}}=2^{-5}=\frac{1}{32}$

따라서 60일이 지난 후 바다에 남아 있는 원유의 양은 30일이 지난 후 남아 있는 원유의 양의 $\frac{1}{32}$배이다. …… (다)

채점 기준	배점
(가) P_{60}의 값을 구한다.	2점
(나) P_{30}의 값을 구한다.	2점
(다) 몇 배인지 구한다.	2점

30 $\log_4 a=\frac{1}{\log_{81}9}$에서

$\log_4 a=\log_9 81=\log_9 9^2=2$

$\therefore a=4^2=16$ …… (가)

$\log_{\sqrt{2}} b=12\log_{125}5$에서

$\log_{\sqrt{2}} b=12\log_{5^3}5=\frac{12}{3}\log_5 5=4$

$\therefore b=(\sqrt{2})^4=4$ …… (나)

$\therefore \log_b a=\log_4 16=\log_4 4^2=2$ …… (다)

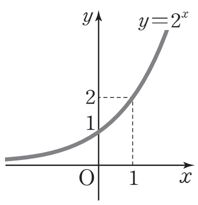
채점 기준	배점
(가) a의 값을 구한다.	2점
(나) b의 값을 구한다.	2점
(다) $\log_b a$의 값을 구한다.	2점

04강 지수함수

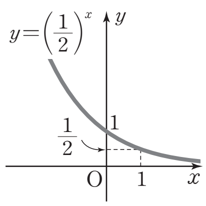
확인 문제 p. 18

1 ①, ③

2 (1)



(2)

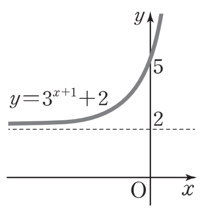


3 (1) $y=3^{x-1}-2$

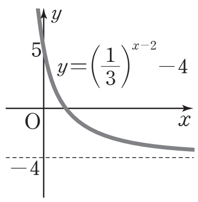
(2) $y=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 19

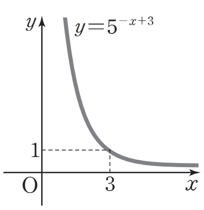
1 (1) 함수 $y=3^{x+1}+2$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $y=2$이다.



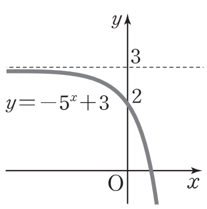
(2) 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-4$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $y=-4$이다.



2 (1) 함수 $y=5^{-x+3}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $y=0$이다.



(2) 함수 $y=-5^x+3$의 그래프는 함수 $y=5^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $y=3$이다.



3 (1) $9^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[5]{27}=3^{\frac{3}{5}}$이고, 함수 $y=3^x$은 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}$이므로 $9^{\frac{1}{4}}<\sqrt[5]{27}$

(2) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^5=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{2}}$이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$은 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $3>\frac{5}{2}$이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^3<\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^5$

4 (1) $0.2^2=5^{-2}$, $\sqrt[3]{25}=5^{\frac{2}{3}}$이고, 함수 $y=5^x$은 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $-2<\frac{2}{3}$이므로 $0.2^2<\sqrt[3]{25}$

(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{128}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{3}}$이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $0.6<\frac{7}{3}$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.6}>\frac{1}{\sqrt[3]{128}}$

5 함수 $y=2^x-2$는 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 즉,

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$y=2^2-2=2$

$x=0$일 때 최소이고, 최솟값은

$y=2^0-2=-1$

6 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-1$은 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 즉,

$x=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+1}-1=0$

$x=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2+1}-1=-\frac{7}{8}$

7 $y=2^{x^2-2x+3}$에서 $x^2-2x+3=t$라고 하면

$t=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ …… ㉠

㉠의 최솟값이 2이므로 $t\geq2$

따라서 함수 $y=2^t$은 밑이 1보다 크므로 t의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

즉, $t\geq2$에서 $t=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$y=2^2=4$

8 $y=3^{-x^2+4x}$에서 $-x^2+4x=t$라고 하면

$t=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$ …… ㉠

㉠의 최댓값이 4이므로 $t\leq4$

따라서 함수 $y=3^t$은 밑이 1보다 크므로 t의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

즉, $t\leq4$에서 $t=4$일 때 최대이고, 최댓값은

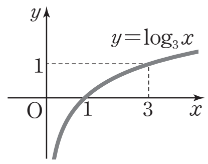
$y=3^4=81$

05강 로그함수

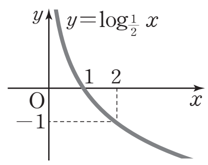
확인 문제 p. 20

1 (1) $y=5^{x+1}$에서 $x+1=\log_5 y$, $x=\log_5 y-1$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=\log_5 x-1$
(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$에서 $x=\log_{\frac{1}{3}} y$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=\log_{\frac{1}{3}} x$

2 (1)



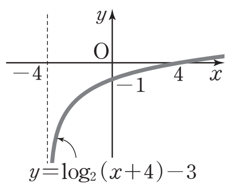
(2)



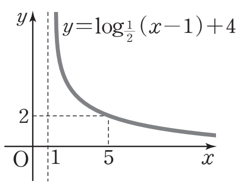
3 (1) $y=\log_5(x+2)+3$
(2) $y=-\log_5(-x)=\log_5\left(-\frac{1}{x}\right)$

교/과/서/속 핵심+유형 닮은꼴 문제 p. 21

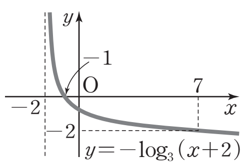
1 (1) 함수 $y=\log_2(x+4)-3$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=-4$이다.



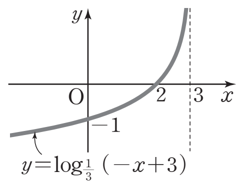
(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+4$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=1$이다.



2 (1) 함수 $y=-\log_3(x+2)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=-2$이다.



(2) 함수
$y=\log_{\frac{1}{3}}(-x+3)$
$=\log_{\frac{1}{3}}\{-(x-3)\}$
의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=3$이다.



3 (1) $\log_4 8=\log_2 2\sqrt{2}$이고, 함수 $y=\log_2 x$는 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 $3>2\sqrt{2}$이므로 $\log_2 3>\log_4 8$
(2) $3\log_{\frac{1}{3}} 2=\log_{\frac{1}{3}} 8$, $\frac{1}{4}\log_{\frac{1}{3}} 16=\log_{\frac{1}{3}} 2$이고, 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 $8>2$이므로 $3\log_{\frac{1}{3}} 2<\frac{1}{4}\log_{\frac{1}{3}} 16$

4 (1) $\log_{\frac{1}{5}} 0.5=\log_5 2$이고, 함수 $y=\log_5 x$는 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 $\sqrt{5}>2$이므로 $\log_5\sqrt{5}>\log_{\frac{1}{5}} 0.5$
(2) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 9=\log_{\frac{1}{4}} 9$이고, 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$는 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 $7<9$이므로 $\log_{\frac{1}{4}} 7>\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 9$

5 함수 $y=\log_3 x-2$는 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 즉,
$x=3$일 때 최대이고, 최댓값은
$y=\log_3 3-2=-1$
$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은
$y=\log_3 1-2=-2$

6 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}}(x+3)+1$은 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 즉,
$x=-2$일 때 최대이고, 최댓값은
$y=\log_{\frac{1}{5}}(-2+3)+1=1$
$x=2$일 때 최소이고, 최솟값은
$y=\log_{\frac{1}{5}}(2+3)+1=0$

7 $y=\log_2(-x^2-4x)$에서 $-x^2-4x=t$라고 하면
$t=-x^2-4x=-(x+2)^2+4$ ······ ㉠
㉠의 최댓값이 4이므로
$t\le 4$
따라서 함수 $y=\log_2 t$는 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
즉, $t\le 4$에서 $t=4$일 때 최대이고, 최댓값은
$y=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

8 $y=\log_3(x^2-6x+12)$에서 $x^2-6x+12=t$라고 하면
$t=x^2-6x+12=(x-3)^2+3$ $\cdots\cdots$ ㉠
㉠의 최솟값이 3이므로 $t\geq3$
따라서 함수 $y=\log_3 t$는 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
즉, $t\geq3$에서 $t=3$일 때 최소이고, 최솟값은
$y=\log_3 3=1$

06강 지수함수와 로그함수의 활용

확인 문제 p. 22

1 (1) $2^{x-5}=\frac{1}{4}$에서 $2^{x-5}=2^{-2}$이므로
$x-5=-2$ $\therefore x=3$
(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}=25$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$이므로
$2x=-2$ $\therefore x=-1$

2 (1) $10^{3-x}>10\sqrt{10}$에서 $10^{3-x}>10^{\frac{3}{2}}$이고, 밑이 1보다 크므로
$3-x>\frac{3}{2}$ $\therefore x<\frac{3}{2}$
(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$에서 밑이 1보다 작으므로
$2x-1<x+2$ $\therefore x<3$

3 (1) $\log_5(2x+1)=2$에서 $\log_5(2x+1)=\log_5 5^2$이므로
$2x+1=25$ $\therefore x=12$
(2) $\log_{\frac{1}{2}}(x+8)=-2$에서 $\log_{\frac{1}{2}}(x+8)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$이므로 $x+8=4$ $\therefore x=-4$

4 (1) $\log_4(x+2)>\log_4(5x-2)$에서 밑이 1보다 크므로
$x+2>5x-2$ $\therefore x<1$ $\cdots\cdots$ ㉠
진수의 조건에서 $x+2>0$, $5x-2>0$이므로
$x>-2$, $x>\frac{2}{5}$ $\therefore x>\frac{2}{5}$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $\frac{2}{5}<x<1$
(2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-3)>1$에서 $\log_{\frac{1}{3}}(x-3)>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$이고, 밑이 1보다 작으므로
$x-3<\frac{1}{3}$ $\therefore x<\frac{10}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠
진수의 조건에서 $x-3>0$이므로 $x>3$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $3<x<\frac{10}{3}$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 23

1 $9^x-2\times3^x-3=0$을 변형하면
$(3^x)^2-2\times3^x-3=0$
$3^x=t$ $(t>0)$로 치환하면
$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$
$\therefore t=3$ $(\because t>0)$
따라서 $t=3^x$이므로
$3^x=3$ $\therefore x=1$

2 $2^x(2^x-5)+4>0$을 변형하면
$(2^x)^2-5\times2^x+4>0$
$2^x=t$ $(t>0)$로 치환하면
$t^2-5t+4>0$, $(t-1)(t-4)>0$
$\therefore 0<t<1$ 또는 $t>4$ $(\because t>0)$
따라서 $t=2^x$이므로
$0<2^x<1$ 또는 $2^x>4$
$\therefore 2^x<2^0$ 또는 $2^x>2^2$
이때 밑이 1보다 크므로
$x<0$ 또는 $x>2$

3 $4\times10^6\times a^2=1.6\times10^7$이므로
$a^2=4$ $\therefore a=2$ $(\because a>0)$
x시간 후에 박테리아가 1.28×10^8마리가 된다고 하면
$4\times10^6\times2^x=1.28\times10^8$
$2^x=2^5$ $\therefore x=5$
따라서 5시간 후이다.

4 정수 필터를 한 번 통과할 때마다 불순물의 양의 60 %가 통과하므로 처음 불순물의 양을 a라 하고, 정수 필터를 x번 통과한 후의 불순물의 양이 처음 양의 $\frac{81}{625}$ 이하가 된다고 하면
$a\left(\frac{60}{100}\right)^x\leq\frac{81}{625}a$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x\leq\left(\frac{3}{5}\right)^4$
밑이 1보다 작으므로 $x\geq4$
따라서 정수 필터를 최소한 4번 통과해야 한다.

5 진수의 조건에 의하여 $x>0$, $x^5>0$이므로 $x>0$
$(\log_2 x)^2-\log_2 x^5+6=0$을 변형하면
$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6=0$
$\log_2 x=t$로 치환하면
$t^2-5t+6=0$, $(t-2)(t-3)=0$
$\therefore t=2$ 또는 $t=3$
따라서 $t=\log_2 x$이므로
$\log_2 x=2$ 또는 $\log_2 x=3$
$\therefore x=2^2=4$ 또는 $x=2^3=8$
이때 진수의 조건이 $x>0$이므로 구하는 해는
$x=4$ 또는 $x=8$

6 진수의 조건에 의하여

$x>0$, $x^3>0$이므로 $\quad x>0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$(\log_3 x)^2-\log_3\frac{x^3}{9}\geq 0$을 변형하면

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x+2\geq 0$

$\log_3 x=t$로 치환하면

$t^2-3t+2\geq 0$, $(t-1)(t-2)\geq 0$

$\therefore\ t\leq 1$ 또는 $t\geq 2$

$t=\log_3 x$이므로

$\log_3 x\leq 1$ 또는 $\log_3 x\geq 2$

$\therefore\ \log_3 x\leq\log_3 3$ 또는 $\log_3 x\geq\log_3 9$

이때 밑이 1보다 크므로

$x\leq 3$ 또는 $x\geq 9$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$0<x\leq 3$ 또는 $x\geq 9$

7 $1.77+5\log R\geq 9.27$에서

$\log R\geq 1.5$, $\log R\geq\log 10^{1.5}$

밑이 1보다 크므로 $\quad R\geq 10\sqrt{10}$

따라서 망원경의 구경은 $10\sqrt{10}$ mm 이상이다.

8 올해의 매출액을 a라 하고, 매년 r배씩 매출액을 증가시킨다고 하면

$ar^5=2.5a$, $r^5=2.5$

양변에 상용로그를 취하면

$\log r^5=\log 2.5$, $5\log r=0.40$

$\log r=0.08$, $\log r=\log 1.2$

$\therefore\ r=1.2$

따라서 매년 1.2배씩 매출액을 증가시켜야 한다.

04~06강 족집게 기출문제 p. 24~27

1 ②	**2** ⑤	**3** ②	**4** $\frac{17}{10}$	**5** $\frac{7}{2}$
6 $\frac{4}{7}$	**7** ①	**8** ⑤	**9** 3	**10** 28
11 ⑤	**12** ㄷ, ㄹ	**13** ⑤	**14** ④	**15** ⑤
16 ④	**17** -2	**18** ①	**19** ③	**20** ④
21 ③	**22** 1	**23** 6년	**24** ②	**25** 2
26 ④	**27** -6	**28** (1) $\frac{1}{10}$	(2) 2030년	**29** $\frac{1}{3}$

1 $f(1)=3$에서 $\quad 3^{a+b}=3 \qquad \therefore\ a+b=1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=27$에서 $\quad 3^{2a+b}=3^3 \qquad \therefore\ 2a+b=3$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $b=-1$

따라서 $f(x)=3^{2x-1}$이므로

$f(-1)=3^{-3}=\frac{1}{27}$

2 ① $f(x+y)=a^{x+y}=a^xa^y=f(x)f(y)$

② $f(x-y)=a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}=\frac{f(x)}{f(y)}$

③ $f(x^2)=a^{x^2}=(a^x)^x=\{f(x)\}^x$

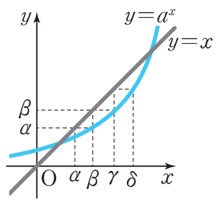
④ $f\left(\frac{x}{2}\right)=a^{\frac{x}{2}}=(a^x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{f(x)}$

⑤ $f(3x)=a^{3x}=(a^x)^3=\{f(x)\}^3\neq 3f(x)$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

3 오른쪽 그림에서 $a^{\beta}=\alpha$, $a^{\gamma}=\beta$이므로

$a^{2\beta+\gamma}=(a^{\beta})^2\times a^{\gamma}=\alpha^2\beta$



4 $f(a)=2$이므로 $\quad 3^a=2$

$\therefore\ \frac{f(2a)+f(-2a)}{f(a)+f(-a)}=\frac{3^{2a}+3^{-2a}}{3^a+3^{-a}}=\frac{4+\frac{1}{4}}{2+\frac{1}{2}}=\frac{17}{10}$

5 함수 $y=a^{1-x}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$이므로

$b=-3$

함수 $y=a^{1-x}-3$의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$1=a^{-2}-3$, $a^2=\frac{1}{4} \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$ $(\because\ a>0)$

$\therefore\ a-b=\frac{1}{2}-(-3)=\frac{7}{2}$

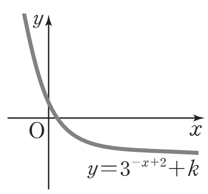
6 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 a, $2a$라고 하면

$k\times\left(\frac{3}{2}\right)^a=\left(\frac{3}{2}\right)^{-a}$에서 $\quad\left(\frac{3}{2}\right)^{2a}=\frac{1}{k}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$k\times\left(\frac{3}{2}\right)^{2a}=-4\times\left(\frac{3}{2}\right)^{2a}+8$에 ㉠을 대입하면

$k\times\frac{1}{k}=-4\times\frac{1}{k}+8$, $\frac{4}{k}=7 \qquad \therefore\ k=\frac{4}{7}$

7 함수 $y=3^{-x+2}+k=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+k$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 이 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 y축과 만나는 점의 y좌표가 0보다 크거나 같아야 한다.



$3^2+k\geq 0 \qquad \therefore\ k\geq -9$

따라서 상수 k의 최솟값은 -9이다.

8 $A=2^{0.5}$, $B=\sqrt[4]{8}=2^{\frac{3}{4}}$, $C=\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$이고, 밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{3}<0.5<\frac{3}{4}$에서 $2^{\frac{1}{3}}<2^{0.5}<2^{\frac{3}{4}}$

$\therefore C<A<B$

9 함수 $f(x)=3^x$은 밑이 1보다 크므로 $x=2$일 때 최대이고 최댓값은 $f(2)=3^2=9$

함수 $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$은 밑이 1보다 작으므로 $x=2$일 때 최소이고 최솟값은 $g(2)=\frac{1}{3}$

따라서 $M=9$, $m=\frac{1}{3}$이므로 $Mm=3$

10 함수 $(f\circ g)(x)=(\sqrt{5})^{-x^2+6x-5}$은 밑이 1보다 크므로 $g(x)$가 최대일 때, 최댓값을 갖는다.

$g(x)=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4$는 $x=3$일 때 최대이므로 함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은

$(f\circ g)(3)=(\sqrt{5})^4=25$

따라서 $a=3$, $b=25$이므로 $a+b=28$

11 $f(m)=2$에서 $\log_a m=2$

$f(n)=3$에서 $\log_a n=3$

$\therefore f\left(\frac{m^4}{n^2}\right)=\log_a \frac{m^4}{n^2}=4\log_a m-2\log_a n$

$=4\times2-2\times3=2$

12 $\log_a p=1$, $\log_a q=2$, $\log_a r=4$이므로

$p=a$, $q=a^2$, $r=a^4$

ㄱ. $a^4\neq a+2a^2$ ㄴ. $a^4\neq 2a+a^2$

ㄷ. $a^4=(a^2)^2$ ㄹ. $a^4=a^2\times a^2$

따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

13 ⑤ 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(3-x)-5=-\log_3(3-x)-5$의 그래프는 함수 $y=\log_3(3-x)+5$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

14 ㄱ. 함수 $y=\log_2 4x=\log_2 x+2$의 그래프는 함수 $y=\log_2(x+1)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=4\log_2 x$는 $y=\log_2(x-p)+q$ 꼴로 변형할 수 없으므로 함수 $y=4\log_2 x$의 그래프는 평행이동하여 함수 $y=\log_2(x+1)$의 그래프와 겹쳐지지 않는다.

ㄷ. 함수 $y=\log_2(x+4)+4$의 그래프는 함수 $y=\log_2(x+1)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. 함수 $y=\log_2 6x-1=\log_2 x+\log_2 3$의 그래프는 함수 $y=\log_2(x+1)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $\log_2 3$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\log_2(x+1)$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐지는 그래프는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

15 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+a)+2$는 밑이 1보다 작으므로 $x=-2$일 때 최댓값 1, $x=4$일 때 최솟값 b를 갖는다.

$\log_{\frac{1}{2}}(-2+a)+2=1$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(-2+a)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$-2+a=2$ $\therefore a=4$

$\log_{\frac{1}{2}}(4+4)+2=b$에서

$b=-\log_2 2^3+2=-1$

$\therefore a+b=4+(-1)=3$

16 $3^{x^2+x}-9^{3x-1}=0$에서 $3^{x^2+x}=3^{2(3x-1)}$이므로

$x^2+x=2(3x-1)$ $\therefore x^2-5x+2=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 근의 합은 5이다.

17 밑이 같으므로 주어진 방정식이 성립하려면 밑이 1이거나 지수가 같아야 한다.

(i) 밑이 1인 경우

$x+2=1$ $\therefore x=-1$

(ii) 지수가 같은 경우

$2x+1=4x-3$ $\therefore x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 모든 근의 곱은 $-1\times2=-2$

18 이차부등식 $x^2-2(2^a+1)x-3(2^a-5)>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 이차방정식

$x^2-2(2^a+1)x-3(2^a-5)=0$의 판별식을 D라고 할 때

$\frac{D}{4}=(2^a+1)^2+3(2^a-5)<0$, $2^{2a}+5\times2^a-14<0$

이때 $2^a=t$ $(t>0)$로 치환하면

$t^2+5t-14<0$, $(t+7)(t-2)<0$

$\therefore 0<t<2$ $(\because t>0)$

따라서 $t=2^a$이므로 $0<2^a<2$에서 $a<1$

19 진수의 조건에 의하여 $x>0$ …… ㉠

$(\log_2 x)^2-\log_2 x^7+10=0$에서 $\log_2 x=t$로 치환하면

$t^2-7t+10=0$, $(t-2)(t-5)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=5$

$t=\log_2 x$이므로 $\log_2 x=2$ 또는 $\log_2 x=5$

$\therefore x=4$ 또는 $x=32$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 두 실근의 차는

$32-4=28$

20 진수의 조건에서 $x>0$이고 $x>8$이므로

$x>8$ …… ㉠

$\log_3 x+\log_3(x-8)<2$에서 $\log_3 x(x-8)<\log_3 3^2$

밑이 1보다 크므로

$x(x-8)<9$, $(x+1)(x-9)<0$

$\therefore -1<x<9$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $8<x<9$

21 $\log x$에서 진수의 조건에 의하여

$x>0$ …… ㉠

$x^{\log x}<\dfrac{100}{x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}<\log \dfrac{100}{x}$

$\log x\times\log x<\log 100-\log x$

$\therefore\ (\log x)^2+\log x-2<0$

$\log x=t$로 치환하면

$t^2+t-2<0,\ (t+2)(t-1)<0$

$\therefore\ -2<t<1$

$t=\log x$이므로

$-2<\log x<1$

$\log 10^{-2}<\log x<\log 10$

$\therefore\ \log\dfrac{1}{100}<\log x<\log 10$

밑이 1보다 크므로

$\dfrac{1}{100}<x<10$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가

$\dfrac{1}{100}<x<10$이므로 주어진 부등식을 만족하는 자연수 x는

1, 2, ⋯, 9의 9개이다.

22 함수 $y=\log_2(x+a)+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\log_2(x+a)+b$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

따라서 $y=\log_2(x+a)+b$의 그래프는 두 점 (2, 2), (3, 3)을 지나므로

$\log_2(2+a)+b=2$ …… ㉠

$\log_2(3+a)+b=3$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$\log_2(3+a)-\log_2(2+a)=1$

$\log_2(3+a)=\log_2 2(2+a)$

$3+a=2(2+a)\qquad\therefore\ a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$\log_2 1+b=2\qquad\therefore\ b=2$

$\therefore\ a+b=-1+2=1$

23 현재의 이산화 탄소 배출량을 A라 하고, n년 후의 이산화 탄소 배출량이 현재의 80 % 이하가 된다고 하면

$A\left(\dfrac{96}{100}\right)^n\le\dfrac{80}{100}A$

$\left(\dfrac{96}{100}\right)^n\le\dfrac{8}{10}$

양변에 상용로그를 취하면

$n(\log 96-2)\le\log 8-1$

$\log 96=\log(2^5\times3)=5\log 2+\log 3=1.9821$이므로

$n(1.9821-2)\le3\times0.3010-1\qquad\therefore\ n\ge5.4\times\times\times$

따라서 최소 6년 후이다.

24 $y=4^x+4^{-x}-2(2^x+2^{-x})+1$에서

$2^x+2^{-x}=t$라고 하면

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2$

$=t^2-2$

이므로 주어진 식은

$y=(t^2-2)-2t+1$

$\therefore\ y=(t-1)^2-2$ …… ㉠

이때 $2^x>0,\ 2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\ge2\sqrt{2^x\times2^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

따라서 $t\ge2$에서 ㉠은 $t=2$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

25 $\overline{\text{AB}}=\log_2 k-\log_4\dfrac{1}{k}$

$=\dfrac{3}{2}\log_2 k$

$\overline{\text{CD}}=\log_2(k+2)-\log_4\dfrac{1}{k+2}$

$=\dfrac{3}{2}\log_2(k+2)$

사다리꼴 ABDC의 넓이가 $\dfrac{9}{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times2\times\left\{\dfrac{3}{2}\log_2 k+\dfrac{3}{2}\log_2(k+2)\right\}=\dfrac{9}{2}$

$\dfrac{3}{2}\log_2 k(k+2)=\dfrac{9}{2}$

$\log_2 k(k+2)=\log_2 2^3$

$k(k+2)=8$

$(k+4)(k-2)=0$

$\therefore\ k=2\ (\because\ k>1)$

26 $1<\log_a c<2<\log_a b$에서

$\log_a a<\log_a c<\log_a a^2<\log_a b$

이때 $a>1$이므로

$a<c<a^2<b$

ㄱ. $c<b$이고, $b>1$에서 $b<b^2$이므로

$c<b^2$

ㄴ. $a<b$이고, $c>1$이므로

$c^a<c^b$

ㄷ. $b>a^2$이고, $c>1$이므로

$\log_c b>\log_c a^2>0$

$\dfrac{1}{\log_c a}>\dfrac{2}{\log_c b}$

$\therefore\ \log_a c>2\log_b c$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

27 함수 $y=2^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y=2^{2(x-m)}+n$ …… (가)

이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$y=-2^{2(x-m)}-n=-2^{-2m}\times4^x-n$ …… (나)

이 식이 $y=-64\times4^x+3=-2^6\times4^x+3$과 같으므로

$-2m=6,\ -n=3$

따라서 $m=-3,\ n=-3$이므로

$m+n=-6$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 함수 $y=2^{2x}$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구한다.	2점
(나) (가)의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식을 구한다.	2점
(다) $m+n$의 값을 구한다.	2점

28 (1) $f(2010)=2N$이므로

$N\times2^{k(2010-2000)}=2N$

$2^{10k}=2,\ 10k=1$

$\therefore\ k=\frac{1}{10}$ …… (가)

(2) t년에 8배 이상이 된다고 하면

$N\times2^{\frac{1}{10}(t-2000)}\geq8N$ …… (나)

$2^{\frac{1}{10}(t-2000)}\geq2^3$에서 밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{10}(t-2000)\geq3$

$\therefore\ t\geq2030$

따라서 동물의 개체 수가 처음으로 2000년의 8배 이상이 되는 것은 2030년이다. …… (다)

채점 기준	배점
(가) k의 값을 구한다.	2점
(나) 부등식을 세운다.	2점
(다) 처음으로 2000년의 8배 이상이 되는 해를 구한다.	2점

29 (i) $a>1$일 때

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 -2를 갖는다.

$f(0)=\log_a4=-2$이므로

$a^{-2}=4,\ a^2=\frac{1}{4}$

그런데 $a>1$이므로 a의 값은 존재하지 않는다. …… (가)

(ii) $0<a<1$일 때

함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{5}$에서 최솟값 -2를 갖는다.

$f(\sqrt{5})=\log_a9=-2$이므로

$a^{-2}=9,\ a^2=\frac{1}{9}$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}\ (\because\ 0<a<1)$ …… (나)

(i), (ii)에 의하여 $a=\frac{1}{3}$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) $a>1$일 때, a의 값을 구한다.	3점
(나) $0<a<1$일 때, a의 값을 구한다.	3점
(다) a의 값을 구한다.	1점

07강 일반각과 호도법

확인 문제 p. 28

1 (2) $860^\circ=360^\circ\times2+140^\circ$

(3) $-220^\circ=360^\circ\times(-1)+140^\circ$

(4) $-1040^\circ=360^\circ\times(-3)+40^\circ$

따라서 동경이 서로 일치하는 것은 (1)과 (4), (2)와 (3)이다.

2 $60^\circ=60\times1^\circ=60\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$

$\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{4}\pi\times1(\text{라디안})=\frac{3}{4}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=135^\circ$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 29

1 (1) $810^\circ=360^\circ\times2+90^\circ$이므로 구하는 일반각은

$360^\circ\times n+90^\circ$ (단, n은 정수)

(2) $-515^\circ=360^\circ\times(-2)+205^\circ$이므로 구하는 일반각은

$360^\circ\times n+205^\circ$ (단, n은 정수)

2 (1) $700^\circ=360^\circ\times1+340^\circ$이므로 구하는 일반각은

$360^\circ\times n+340^\circ$ (단, n은 정수)

(2) $-1010^\circ=360^\circ\times(-3)+70^\circ$이므로 구하는 일반각은

$360^\circ\times n+70^\circ$ (단, n은 정수)

3 (1) $550^\circ=360^\circ\times1+190^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

(2) $730^\circ=360^\circ\times2+10^\circ$이므로 제1사분면의 각이다.

(3) $-910^\circ=360^\circ\times(-3)+170^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.

(4) $-1165^\circ=360^\circ\times(-4)+275^\circ$이므로 제4사분면의 각이다.

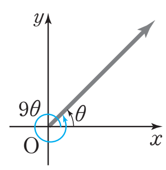
4 (1) $460^\circ=360^\circ\times1+100^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.

(2) $920^\circ=360^\circ\times2+200^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

(3) $-370^\circ=360^\circ\times(-2)+350^\circ$이므로 제4사분면의 각이다.

(4) $-1000^\circ=360^\circ\times(-3)+80^\circ$이므로 제1사분면의 각이다.

5 두 각 $\theta,\ 9\theta$를 나타내는 두 동경이 서로 일치하므로



$9\theta-\theta=2n\pi$ (단, n은 정수)

$\therefore\ \theta=\frac{n}{4}\pi$ …… ㉠

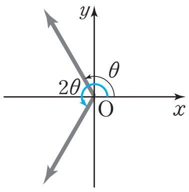
이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<\frac{n}{4}\pi<\frac{\pi}{2}\quad\therefore\ 0<n<2$

그런데 n은 정수이므로 $n=1$

따라서 $n=1$을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{4}$

6 두 각 θ, 2θ를 나타내는 두 동경이 x축에 대하여 대칭이므로



$\theta+2\theta=2n\pi$ (단, n은 정수)

$\therefore\ \theta=\frac{2n}{3}\pi$ ······ ㉠

이때 $0<\theta<\pi$이므로

$0<\frac{2n}{3}\pi<\pi \qquad \therefore\ 0<n<\frac{3}{2}$

그런데 n은 정수이므로

$n=1$

따라서 $n=1$을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{2}{3}\pi$

7 부채꼴의 호의 길이를 l이라고 하면

$l=2\times\frac{3}{2}\pi=3\pi$

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{3}{2}\pi=3\pi$

8 부채꼴의 호의 길이를 l이라고 하면

$l=3\times\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{2}\pi$

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{5}{6}\pi=\frac{15}{4}\pi$

08강 삼각함수

확인 문제 p. 30

1 $\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

2 (1) $200°$는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

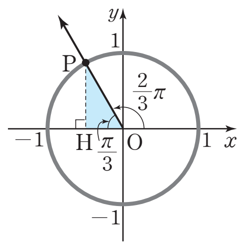
(2) $-\frac{\pi}{3}$는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

3 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 31

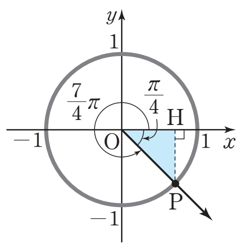
1 오른쪽 그림과 같이 각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\angle POH=\frac{\pi}{3}$이므로 점 P의 좌표는



$P\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

2 오른쪽 그림과 같이 각의 크기가 $\frac{7}{4}\pi$인 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\angle POH=\frac{\pi}{4}$이므로 점 P의 좌표는



$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

3 (1) $\sin\theta<0$을 만족하는 각 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\cos\theta>0$을 만족하는 각 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 두 식을 동시에 만족하는 각 θ는 제4사분면의 각이다.

(2) $\cos\theta<0$을 만족하는 각 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이고, $\tan\theta>0$을 만족하는 각 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 두 식을 동시에 만족하는 각 θ는 제3사분면의 각이다.

4 (1) $\sin\theta>0$을 만족하는 각 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고, $\tan\theta>0$을 만족하는 각 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 두 식을 동시에 만족하는 각 θ는 제1사분면의 각이다.

(2) $\cos\theta<0$을 만족하는 각 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이고, $\tan\theta<0$을 만족하는 각 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 두 식을 동시에 만족하는 각 θ는 제2사분면의 각이다.

5 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

각 θ가 제3사분면의 각이면 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{4}{5}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\tan\theta=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$

6 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

각 θ가 제4사분면의 각이면 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$\tan\theta=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$

7 (1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{16}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{15}{32}$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{1}{4}\times\left(1+\frac{15}{32}\right)=\frac{47}{128}$

8 (1) $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=-\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{3}{8}\right)=-\frac{11}{16}$

9 $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta-\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\frac{\sin^2\theta-\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\frac{1}{\sin\theta}$

10 $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

$=\frac{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2\sin\theta+2\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2\sin\theta(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}=2\tan\theta$

계산력 다지기

p. 32~33

1 (1) $470^\circ=360^\circ\times1+110^\circ$이므로

$360^\circ\times n+110^\circ$ (단, n은 정수)

(2) $780^\circ=360^\circ\times2+60^\circ$이므로

$360^\circ\times n+60^\circ$ (단, n은 정수)

(3) $1130^\circ=360^\circ\times3+50^\circ$이므로

$360^\circ\times n+50^\circ$ (단, n은 정수)

(4) $-510^\circ=360^\circ\times(-2)+210^\circ$이므로

$360^\circ\times n+210^\circ$ (단, n은 정수)

(5) $-600^\circ=360^\circ\times(-2)+120^\circ$이므로

$360^\circ\times n+120^\circ$ (단, n은 정수)

(6) $-930^\circ=360^\circ\times(-3)+150^\circ$이므로

$360^\circ\times n+150^\circ$ (단, n은 정수)

2 (1) $640^\circ=360^\circ\times1+280^\circ$이므로 제4사분면의 각이다.

(2) $880^\circ=360^\circ\times2+160^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.

(3) $1060^\circ=360^\circ\times2+340^\circ$이므로 제4사분면의 각이다.

(4) $-490^\circ=360^\circ\times(-2)+230^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

(5) $-980^\circ=360^\circ\times(-3)+100^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.

(6) $-1040^\circ=360^\circ\times(-3)+40^\circ$이므로 제1사분면의 각이다.

3 (1) $54^\circ=54\times\frac{\pi}{180}=\frac{3}{10}\pi$

(2) $72^\circ=72\times\frac{\pi}{180}=\frac{2}{5}\pi$

(3) $150^\circ=150\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{6}\pi$

(4) $\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\times\frac{180^\circ}{\pi}=45^\circ$

(5) $\frac{3}{5}\pi=\frac{3}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=108^\circ$

(6) $\frac{7}{10}\pi=\frac{7}{10}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=126^\circ$

4 (1) $l=3\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, $S=\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}\pi$

(2) $l=4\times\frac{3}{4}\pi=3\pi$, $S=\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{3}{4}\pi=6\pi$

(3) $l=8\times\frac{5}{8}\pi=5\pi$, $S=\frac{1}{2}\times8^2\times\frac{5}{8}\pi=20\pi$

(4) $\theta=36\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{5}$이므로

$l=10\times\frac{\pi}{5}=2\pi$, $S=\frac{1}{2}\times10^2\times\frac{\pi}{5}=10\pi$

(5) $\theta=75\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{12}\pi$이므로

$l=12\times\frac{5}{12}\pi=5\pi$, $S=\frac{1}{2}\times12^2\times\frac{5}{12}\pi=30\pi$

(6) $\theta=126\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{10}\pi$이므로

$l=20\times\frac{7}{10}\pi=14\pi$, $S=\frac{1}{2}\times20^2\times\frac{7}{10}\pi=140\pi$

5 각의 크기가 θ인 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P라고 하면

(1) $\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이므로

$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

(2) $\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$이므로

$\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$이므로

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(4) $\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=1$

(5) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

(6) $\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$이므로

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

6 (1) 제1사분면

(2) 제3사분면

(3) 제2사분면

(4) 제4사분면

7 (1) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$

이때 각 θ가 제1사분면의 각이므로 $\cos\theta=\frac{3}{5}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$

(2) $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

이때 각 θ가 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta=\frac{4}{5}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$

(3) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$

이때 각 θ가 제3사분면의 각이므로

$\cos\theta=-\frac{12}{13}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=\frac{5}{12}$

(4) $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

이때 각 θ가 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

8 (1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

(2) $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{4}{9}}=-\frac{3}{4}$

(3) $(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{17}{9}$

$\therefore |\sin\theta-\cos\theta|=\frac{\sqrt{17}}{3}$

(4) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{4}{9}\right)=\frac{13}{27}$

07~08강 족집게 기출문제

p. 34~37

1 ㄴ, ㄷ	2 ②	3 ⑤	4 ④	5 ⑤
6 ⑤	7 $\frac{5}{4}\pi$	8 ②	9 ④	10 16π
11 ①	12 ④	13 ④	14 ④	15 $\frac{8}{15}$
16 ⑤	17 ④	18 $\sqrt{2}$	19 ②	20 ①
21 ③	22 $-\frac{5}{6}$	23 ③	24 1	25 ④
26 -1	27 $2\cos\theta$	28 (1) $-\frac{7}{16}$ (2) $\frac{\sqrt{15}}{8}$		

1 ㄱ. $1=\frac{180°}{\pi}$

ㄴ. $\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}\times\frac{180°}{\pi}=36°$

ㄷ. $\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}\times\frac{180°}{\pi}=22.5°$

ㄹ. $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{180°}{\pi}=\frac{45°}{\pi}$

ㅁ. $\frac{9}{4}\pi=\frac{9}{4}\pi\times\frac{180°}{\pi}=405°$

ㅂ. $3\pi=3\pi\times\frac{180°}{\pi}=540°$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2 ① $\frac{5}{6}\pi$

② $\frac{13}{6}\pi=2\pi+\frac{\pi}{6}$

③ $1080°=360°\times3+0°$

④ $-\frac{5}{4}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{3}{4}\pi$

⑤ $1050°=360°\times2+330°$

따라서 $30°=\frac{\pi}{6}$를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ②이다.

3 ㄱ. $114°$는 제2사분면의 각이다.

ㄴ. $1003°=360°\times2+283°$이므로 제4사분면의 각이다.

ㄷ. $-127°=360°\times(-1)+233°$이므로 제3사분면의 각이다.

ㄹ. $\frac{4}{3}\pi$는 제3사분면의 각이다.

ㅁ. $\frac{11}{6}\pi$는 제4사분면의 각이다.

ㅂ. $\frac{28}{9}\pi=2\pi+\frac{10}{9}\pi$이므로 제3사분면의 각이다.

따라서 제3사분면의 각인 것은 ㄷ, ㄹ, ㅂ이다.

4 각 θ가 제3사분면의 각이므로 정수 n에 대하여

$2n\pi+\pi<\theta<2n\pi+\frac{3}{2}\pi$

$\therefore\ \frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{2}$

(ⅰ) $n=3k$ (k는 정수)일 때,

$\frac{2\times3k}{3}\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2\times3k}{3}\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 2k\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ⅱ) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때,

$\frac{2(3k+1)}{3}\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2(3k+1)}{3}\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 2k\pi+\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{7}{6}\pi$

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

(ⅲ) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때,

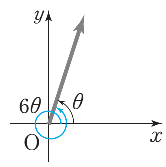
$\frac{2(3k+2)}{3}\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2(3k+2)}{3}\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 2k\pi+\frac{5}{3}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{11}{6}\pi$

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 위치할 수 있는 사분면은 제1사분면 또는 제3사분면 또는 제4사분면이다.

5 두 각 θ, 6θ를 나타내는 두 동경이 서로 일치하므로



$6\theta-\theta=2n\pi$ (단, n은 정수)

$\therefore\ \theta=\frac{2n}{5}\pi$ ...... ㉠

이때 $0<\theta<\pi$이므로

$0<\frac{2n}{5}\pi<\pi$ $\therefore\ 0<n<\frac{5}{2}$

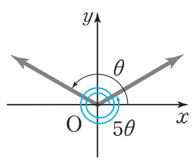
그런데 n은 정수이므로 $n=1$ 또는 $n=2$

따라서 $n=1$ 또는 $n=2$를 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{2}{5}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{5}\pi$

즉, 모든 각 θ의 크기의 합은 $\frac{2}{5}\pi+\frac{4}{5}\pi=\frac{6}{5}\pi$

6 두 각 θ, 5θ를 나타내는 두 동경이 y축에 대하여 대칭이므로



$\theta+5\theta=(2n+1)\pi$ (단, n은 정수)

$\therefore\ \theta=\frac{2n+1}{6}\pi$ ...... ㉠

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

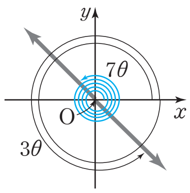
$\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{6}\pi<\pi$ $\therefore\ 1<n<\frac{5}{2}$

그런데 n은 정수이므로 $n=2$

따라서 $n=2$를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

7 두 각 3θ, 7θ를 나타내는 두 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로



$7\theta-3\theta=(2n+1)\pi$ (단, n은 정수)

$\therefore\ \theta=\dfrac{2n+1}{4}\pi$ …… ㉠

이때 $\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$이므로

$\pi<\dfrac{2n+1}{4}\pi<\dfrac{3}{2}\pi \qquad \therefore\ \dfrac{3}{2}<n<\dfrac{5}{2}$

그런데 n은 정수이므로 $n=2$

따라서 $n=2$를 ㉠에 대입하면 $\theta=\dfrac{5}{4}\pi$

8 부채꼴의 반지름의 길이를 r라고 하면

$r\times\dfrac{\pi}{3}=2\pi \qquad \therefore\ r=6$

따라서 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times6\times2\pi=6\pi$

9 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라고 하면

$2r+l=40 \qquad \therefore\ l=40-2r$

이때 $r>0$, $l>0$이므로

$40-2r>0 \qquad \therefore\ 0<r<20$

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

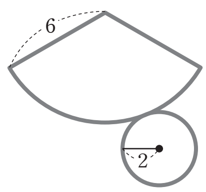
$S=\dfrac{1}{2}r(40-2r)=-r^2+20r=-(r-10)^2+100$

따라서 $r=10$일 때, 부채꼴의 넓이는 최댓값 100을 갖는다.

한편 이때의 중심각의 크기를 θ라 하고 $r=10$, $S=100$을 $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$에 대입하면 $100=\dfrac{1}{2}\times100\theta \qquad \therefore\ \theta=2$

따라서 부채꼴의 넓이의 최댓값은 100이고, 그때의 중심각의 크기는 2이다.

10 오른쪽 그림과 같은 원뿔의 전개도에서 옆면인 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로



$2\pi\times2=4\pi$

따라서 원뿔의 겉넓이는

$\pi\times2^2+\dfrac{1}{2}\times6\times4\pi=16\pi$

11 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-12)^2+(-5)^2}=13$

$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{5}{13}+\left(-\dfrac{12}{13}\right)=-\dfrac{17}{13}$

12 직선 $y=-2x\,(x\le0)$ 위의 임의의 한 점 P에 대하여 반직선 OP를 동경으로 하는 각 θ의 크기는 항상 일정하다.

따라서 점 P의 좌표를 $(-1,\ 2)$로 놓으면

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\dfrac{2}{5}$

13 $\sin\theta\tan\theta>0$을 만족하는 각 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\cos\theta\tan\theta<0$을 만족하는 각 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 두 식을 동시에 만족하는 각 θ는 제4사분면의 각이다.

14 각 θ가 제2사분면의 각이면 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sqrt{\sin^2\theta}-\sqrt{\cos^2\theta}+\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}$

$=\sin\theta-(-\cos\theta)-(\cos\theta-\sin\theta)$

$=2\sin\theta$

15 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25}$

이때 각 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ \sin\theta+\tan\theta=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{15}$

16 $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{1}{3}$에서 $3(1+\sin\theta)=1-\sin\theta$

$4\sin\theta=-2 \qquad \therefore\ \sin\theta=-\dfrac{1}{2}$

각 θ가 제4사분면의 각이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

17 $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{3}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3} \qquad \therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}&=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\\&=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\\&=\frac{1-2(\sin\theta\cos\theta)^2}{(\sin\theta\cos\theta)^2}=\frac{1-2\times\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}}\\&=7\end{aligned}$$

18 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=2$에서

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=2,\ \dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$

$\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=2 \qquad \therefore\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sin\theta+\cos\theta&=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\\&=\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}\\&=\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{1+2\times\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

19 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$에서

$\sin\theta=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

$$\begin{aligned}\therefore\ 2\cos^2\theta+2\cos^4\theta&=2\sin\theta+2\sin^2\theta\\&=2(\sin\theta+\sin^2\theta)\\&=2\times1=2\end{aligned}$$

20 $$\begin{aligned}\tan^2\theta-\sin^2\theta&=\tan^2\theta-\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\\&=\tan^2\theta-\tan^2\theta\cos^2\theta\\&=\tan^2\theta(1-\cos^2\theta)\\&=\tan^2\theta\times\boxed{\sin^2\theta}\end{aligned}$$

21 $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}$를 변형하면

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}&=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\\&=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\qquad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

$\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$를 변형하면

$$\begin{aligned}\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}&=\frac{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}\\&=\frac{\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}\\&=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\qquad\cdots\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned}&\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}-\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\\&=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}-\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\\&=0\end{aligned}$$

22 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{3}$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{4}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$

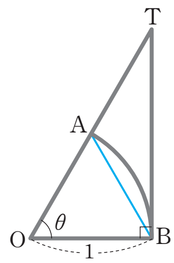
이때 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{3}$이므로

$1+2\times\dfrac{k}{3}=\dfrac{4}{9}$

$\therefore\ k=-\dfrac{5}{6}$

23 $\triangle$TOB에서

$\tan\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{TB}}}{\overline{\mathrm{OB}}}=\overline{\mathrm{TB}}$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 긋고, $\triangle$AOB, 부채꼴 OAB, $\triangle$TOB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라고 하면

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OA}}\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sin\theta$

$S_2=\dfrac{1}{2}\times1^2\times\theta=\dfrac{1}{2}\theta$

$S_3=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{TB}}=\dfrac{1}{2}\tan\theta$

이때 $S_1<S_2<S_3$이므로

$\dfrac{1}{2}\sin\theta<\dfrac{1}{2}\theta<\dfrac{1}{2}\tan\theta$

$\therefore\ \sin\theta<\theta<\tan\theta$

24 $\sin\theta+\cos\theta=1$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1$

$1+2\sin\theta\cos\theta=1$

$\sin\theta\cos\theta=0$

$\therefore\ \sin\theta=0$ 또는 $\cos\theta=0$

따라서 $\begin{cases}\sin\theta=0\\\cos\theta=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\sin\theta=1\\\cos\theta=0\end{cases}$이므로

$\sin^{2018}\theta+\cos^{2018}\theta=1$

25 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-k$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\sin\theta\cos\theta=-k$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=(-k)^2$

$1+2\sin\theta\cos\theta=k^2$, $1+2\times(-k)=k^2$ ($\because$ ㉡)

$k^2+2k-1=0$

$\therefore\ k=-1+\sqrt{2}$ ($\because\ k>0$) $\cdots\cdots$ ㉢

$$\begin{aligned}\therefore\ (\sin\theta-\cos\theta)^2&=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta\\&=(-k)^2-4\times(-k)\ (\because\ ㉠,\ ㉡)\\&=k^2+4k\\&=(-1+\sqrt{2})^2+4\times(-1+\sqrt{2})\ (\because\ ㉢)\\&=2\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

$\therefore\ k(\sin\theta-\cos\theta)^2=(-1+\sqrt{2})(2\sqrt{2}-1)=5-3\sqrt{2}$

26 각의 크기가 $-\dfrac{2}{3}\pi$인 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P라고 하면

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\cdots\cdots$ (가)

$\therefore\ \sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$ (나)

$$\begin{aligned}\therefore\ \sin\theta\tan\theta-\cos\theta&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1\qquad\cdots\cdots\ (다)\end{aligned}$$

채점 기준	배점
(가) 각의 크기가 $-\frac{2}{3}\pi$인 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 구한다.	2점
(나) $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구한다.	2점
(다) 주어진 식의 값을 구한다.	2점

27 $\sin\theta\cos\theta>0$을 만족하는 각 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이고, $\sin\theta\tan\theta<0$을 만족하는 각 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.
따라서 두 식을 동시에 만족하는 각 θ는 제3사분면의 각이다. …… (가)

각 θ가 제3사분면의 각이면
$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$ …… (나)
이므로

$$\sqrt{(\sin\theta-\tan\theta)^2}-|\sin\theta+\cos\theta|-\sqrt{\cos^2\theta}-|\tan\theta|$$
$$=-(\sin\theta-\tan\theta)+(\sin\theta+\cos\theta)+\cos\theta-\tan\theta$$
$$=2\cos\theta$$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) θ가 제몇 사분면의 각인지 구한다.	2점
(나) θ가 속한 사분면에서 삼각함수의 값의 부호를 구한다.	1점
(다) 주어진 식을 간단히 한다.	2점

28 (1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{8}$$
$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{8}$$
$$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{7}{16}$$ …… (가)

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2$
$$=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1-2\times\left(-\frac{7}{16}\right)$$
$$=\frac{15}{8}$$

각 θ가 제2사분면의 각이면 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로
$\sin\theta-\cos\theta>0$

$$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{15}{8}}=\frac{\sqrt{30}}{4}$$ …… (나)

$\therefore \sin^2\theta-\cos^2\theta$
$$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{30}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{15}}{8}$$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구한다.	3점
(나) $\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구한다.	2점
(다) $\sin^2\theta-\cos^2\theta$의 값을 구한다.	1점

09강 삼각함수의 그래프

확인 문제 p. 38

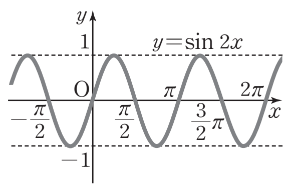
1 함수 $f(x)$의 주기가 4이므로
$f(2)=f(6)=f(10)$
$\therefore f(10)=1$

2

	치역	최댓값	최솟값	주기
$y=\sin x$	$\{y\mid -1\le y\le 1\}$	1	-1	2π
$y=\cos x$	$\{y\mid -1\le y\le 1\}$	1	-1	2π
$y=\tan x$	실수 전체의 집합	없다.	없다.	π

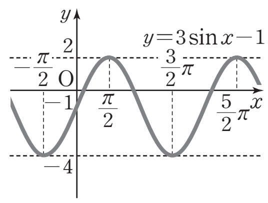
교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 39

1 (1) 함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



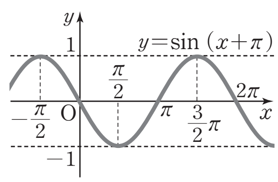
따라서 주기는 π이고, 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

(2) 함수 $y=3\sin x-1$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배한 다음 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



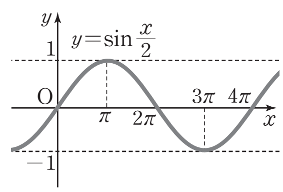
따라서 주기는 2π이고, 최댓값은 2, 최솟값은 -4이다.

2 (1) 함수 $y=\sin(x+\pi)$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



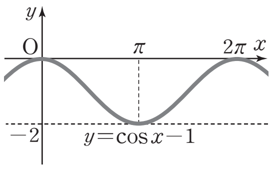
따라서 주기는 2π이고, 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

(2) 함수 $y=\sin\frac{x}{2}$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



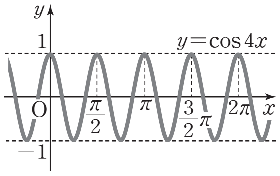
따라서 주기는 4π이고, 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

3 (1) 함수 $y=\cos x-1$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



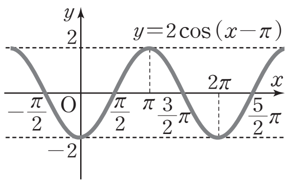
따라서 주기는 2π이고, 최댓값은 0, 최솟값은 -2이다.

(2) 함수 $y=\cos 4x$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$배한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



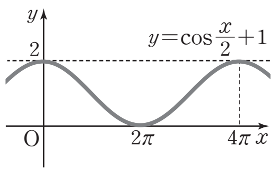
따라서 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고, 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

4 (1) 함수 $y=2\cos(x-\pi)$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 다음 y축의 방향으로 2배한 것이므로 위의 그림과 같다.



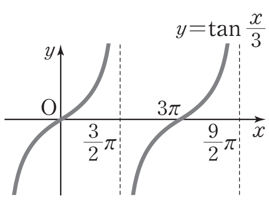
따라서 주기는 2π이고, 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

(2) 함수 $y=\cos\frac{x}{2}+1$의 그래프는 함수 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배한 다음 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같다.



따라서 주기는 4π이고, 최댓값은 2, 최솟값은 0이다.

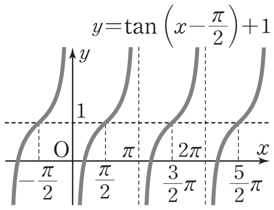
5 (1) 함수 $y=\tan\frac{x}{3}$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 3배한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주기는 3π이고, 점근선의 방정식은

$\frac{x}{3}=n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore x=3n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (n은 정수)

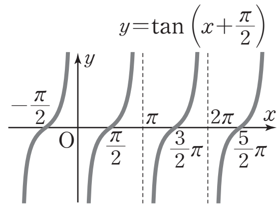
(2) 함수 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같다.



따라서 주기는 π이고, 점근선의 방정식은

$x-\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore x=n\pi+\pi$ (n은 정수)

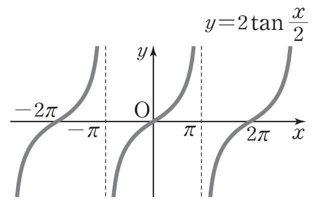
6 (1) 함수 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주기는 π이고, 점근선의 방정식은

$x+\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore x=n\pi$ (n은 정수)

(2) 함수 $y=2\tan\frac{x}{2}$의 그래프는 함수 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배, y축의 방향으로 2배한 것이므로 위의 그림과 같다.



따라서 주기는 2π이고, 점근선의 방정식은

$\frac{x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore x=2n\pi+\pi$ (n은 정수)

10강 | 삼각함수의 성질과 활용

확인 문제 p. 40

1 (1) $\sin\frac{13}{6}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

(2) $\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)=\cos\frac{4}{3}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

(3) $\tan\frac{10}{3}\pi=\tan\left(2\pi+\frac{4}{3}\pi\right)=\tan\frac{4}{3}\pi$

$=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

2 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

부등식 $\sin x\geq\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나거나 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{5}{6}\pi$

1 (1) $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\cos\frac{19}{6}\pi+\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$

$=-\sin\frac{2}{3}\pi\cos\left(2\pi+\frac{7}{6}\pi\right)-\tan\frac{3}{4}\pi$

$=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{3}\times\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)+\tan\frac{\pi}{4}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1=\frac{7}{4}$

(2) $\sin(\pi-\theta)\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\sin\theta\tan\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$

$=\sin\theta\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{\tan\theta}-\frac{\sin\theta}{\tan\theta}=0$

2 (1) $\sin\frac{25}{6}\pi\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\frac{5}{4}\pi\tan\left(-\frac{5}{3}\pi\right)$

$=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(-2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{4}$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos(-\theta)-\sin(\pi+\theta)\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$

$=\cos\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\cos^2\theta-\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

3 (1) $\sin 773^\circ=\sin(360^\circ\times2+53^\circ)=\sin 53^\circ=0.7986$

(2) $\cos(-36^\circ)=\cos 36^\circ=\cos(90^\circ-54^\circ)$

$=\sin 54^\circ=0.8090$

(3) $\tan 125^\circ=\tan(180^\circ-55^\circ)=-\tan 55^\circ=-1.4281$

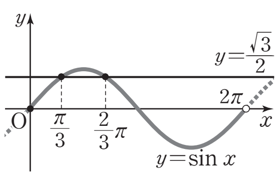
4 (1) $\sin(-100^\circ)=-\sin 100^\circ=-\sin(90^\circ+10^\circ)$

$=-\cos 10^\circ=-0.9848$

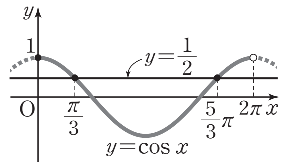
(2) $\cos 192^\circ=\cos(180^\circ+12^\circ)=-\cos 12^\circ=-0.9781$

(3) $\tan 371^\circ=\tan(360^\circ+11^\circ)=\tan 11^\circ=0.1944$

5 (1) 방정식 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 오른쪽 그림에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표이므로 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

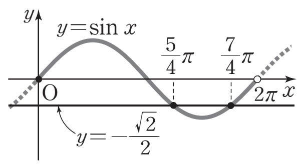


(2) 방정식 $\cos x=\frac{1}{2}$의 해는 오른쪽 그림에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표이므로 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

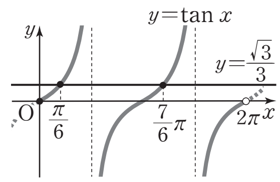


6 (1) 방정식 $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 오른쪽 그림에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표이므로

$x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

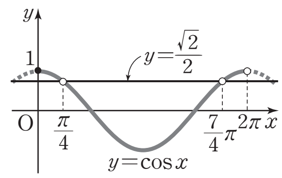


(2) 방정식 $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 오른쪽 그림에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표이므로 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$



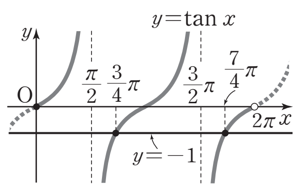
7 (1) 부등식 $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 오른쪽 그림에서 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{7}{4}\pi$



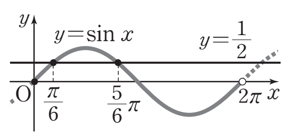
(2) 부등식 $\tan x\geq-1$의 해는 오른쪽 그림에서 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=-1$과 만나거나 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$0\leq x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi\leq x<\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi\leq x<2\pi$

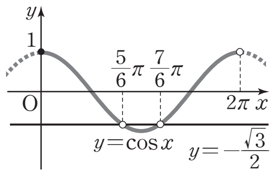


8 (1) 부등식 $\sin x\leq\frac{1}{2}$의 해는 오른쪽 그림에서 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나거나 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$0\leq x\leq\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\leq x<2\pi$



(2) 부등식 $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 오른쪽 그림에서 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로



$0 \le x < \frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi < x < 2\pi$

09~10강 족집게 기출문제

p. 42~45

1 ②	**2** ③	**3** 2π	**4** ㄱ, ㄷ	**5** 6
6 2	**7** ③	**8** ①	**9** ①	**10** ⑤
11 ④	**12** ③	**13** ②	**14** 1	**15** $\frac{89}{2}$
16 ④	**17** ③	**18** ②	**19** ①	**20** $-\frac{\pi}{4}$
21 $\frac{4}{3}\pi$	**22** $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$			**23** ㄱ
24 0	**25** ②			

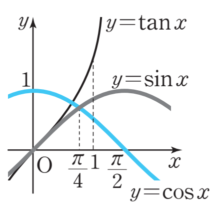
26 (1) $y=\cos^2 x - \cos x$ (2) $-\frac{1}{2}$

27 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

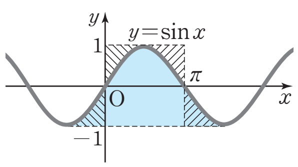
28 $\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi$ 또는 $\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$

1 $f(x+2)=f(x)$이므로
$f(2021)=f(2019)=f(2017)=\cdots=f(3)=f(1)=-1$
$f(2020)=f(2018)=f(2016)=\cdots=f(2)=f(0)=2$
$\therefore f(2019)+f(2020)+f(2021)=-1+2-1=0$

2 $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$이므로 오른쪽 그림에서
$\cos 1 < \sin 1 < \tan 1$



3 오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 도형의 넓이는 가로의 길이가 π이고 세로의 길이가 $1-(-1)=2$인 직사각형의 넓이와 같다.
$\therefore \pi \times 2 = 2\pi$



4 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1=2\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$
ㄱ. 최댓값은 $2+1=3$, 최솟값은 $-2+1=-1$이다.
ㄴ. 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.
ㄷ. 정의역은 실수 전체의 집합이다.
ㄹ. 그래프는 함수 $y=2\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5 $a>0$이고 최댓값이 4, 최솟값이 -2이므로
$a+c=4$, $-a+c=-2$
두 식을 연립하여 풀면
$a=3$, $c=1$
$b>0$이고 주기가 π이므로
$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$
$\therefore abc=3\times2\times1=6$

6 $b>0$이고 주어진 그래프에서 주기가 $\frac{\pi}{2}$이므로
$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore b=2$
함수 $y=a\tan 2x+c$의 그래프가 원점을 지나므로
$c=0$
함수 $y=a\tan 2x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{8}, 4\right)$를 지나므로
$4=a\tan\frac{\pi}{4}$
$\therefore a=4$
$\therefore a-b-c=4-2-0=2$

7 주어진 함수의 주기를 각각 구하면
① $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ② $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ③ $\frac{\pi}{2}$
④ π ⑤ π
따라서 주기가 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

8 주어진 함수의 주기를 각각 구하면
① $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ② $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ③ 2π
④ 2π ⑤ $\frac{2\pi}{2}=\pi$
이므로 (가)를 만족하는 함수는
①, ②, ⑤
(나)를 만족하는 함수는 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로
①, ③, ⑤
따라서 (가), (나)를 모두 만족하는 함수는
①, ⑤
① 최댓값이 3, 최솟값이 -3이므로 그 차는 6이다.
⑤ 최댓값이 1, 최솟값이 -1이므로 그 차는 2이다.
따라서 주어진 세 조건을 모두 만족하는 함수는 ①이다.

9 $y=-\cos^2 x+\sin x+4$

$=-(1-\sin^2 x)+\sin x+4$

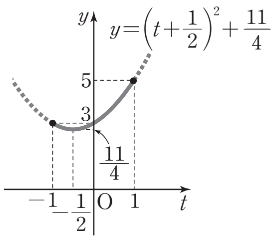
$=\sin^2 x+\sin x+3$

$\sin x=t$로 놓으면

$0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2+t+3=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$ …… ㉠

따라서 $-1\le t\le 1$에서 ㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 5, 최솟값은 $\frac{11}{4}$이다.



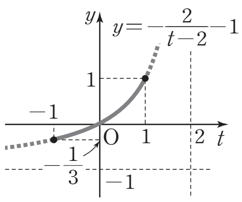
$\therefore\ 5-\frac{11}{4}=\frac{9}{4}$

10 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=\frac{t}{-t+2}=-\frac{2}{t-2}-1$ …… ㉠

따라서 $-1\le t\le 1$에서 ㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$M=1,\ m=-\frac{1}{3}$



$\therefore\ M+m=\frac{2}{3}$

11 함수 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore\ \alpha+\beta=\pi$

또 함수 $y=\sin x$의 주기는 2π이므로

$\gamma=\alpha+2\pi$

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(\pi+\alpha+2\pi)$

$=\sin(\pi+\alpha)$

$=-\sin\alpha=-a\ (\because\ \sin\alpha=a)$

12 ① $\sin 135^\circ=\sin(180^\circ-45^\circ)$

$=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

② $\sin 390^\circ=\sin(360^\circ+30^\circ)$

$=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

③ $\cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right)=\cos\frac{7}{6}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $\tan(-210^\circ)=-\tan 210^\circ=-\tan(180^\circ+30^\circ)$

$=-\tan 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

⑤ $\tan\left(-\frac{10}{3}\pi\right)=-\tan\frac{10}{3}\pi=-\tan\left(2\pi+\frac{4}{3}\pi\right)$

$=-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

따라서 옳은 것은 ③이다.

13 함수 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면

$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

다시 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=2\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-2\cos x$

14 $\dfrac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}{\cos(\pi+\theta)\sin^2(\pi-\theta)}-\dfrac{\sin(-\theta)\tan^2\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

$=\frac{-\cos\theta}{-\cos\theta\sin^2\theta}-\frac{-\sin\theta}{-\sin\theta(-\tan\theta)^2}$

$=\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\tan^2\theta}$

$=\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$=\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=1$

15 $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$임을 이용하면

$\cos^2 46^\circ=\cos^2(90^\circ-44^\circ)=\sin^2 44^\circ$

$\cos^2 47^\circ=\cos^2(90^\circ-43^\circ)=\sin^2 43^\circ$

$\vdots$

$\cos^2 89^\circ=\cos^2(90^\circ-1^\circ)=\sin^2 1^\circ$

$\therefore\ \cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cos^2 3^\circ+\cdots+\cos^2 89^\circ+\cos^2 90^\circ$

$=\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cdots+\cos^2 45^\circ+\sin^2 44^\circ+\sin^2 43^\circ+\cdots+\sin^2 1^\circ+\cos^2 90^\circ$

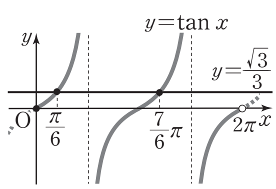
$=(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ)+\cdots+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+\cos^2 45^\circ+\cos^2 90^\circ$

$=1\times 44+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0=\frac{89}{2}$

16 (i) $\cos x\ne 0$일 때,

$\sqrt{3}\sin x=\cos x$의 양변을 $\cos x$로 나누면

$\sqrt{3}\tan x=1$ $\quad\therefore\ \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$



방정식 $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 위의 그림에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표이므로

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

(ii) $\cos x=0$일 때, 즉 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$일 때는 주어진 방정식을 만족하지 않는다.

따라서 주어진 방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$이므로

$\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{7}{6}\pi$ $\quad\therefore \beta-\alpha=\pi$

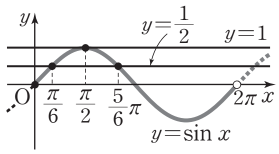
17 $3-2\cos^2 x-3\sin x=0$에서

$3-2(1-\sin^2 x)-3\sin x=0$

$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

$(2\sin x-1)(\sin x-1)=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$



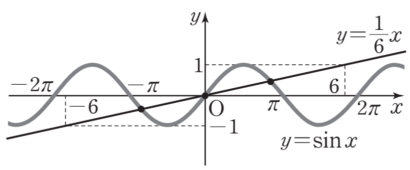
주어진 방정식의 해는 위의 그림에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 또는 직선 $y=1$의 교점의 x좌표이므로

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 해의 합은

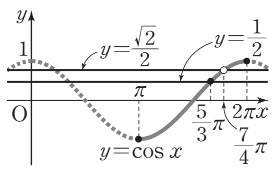
$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi$

18 방정식 $\sin x=\frac{1}{6}x$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{6}x$의 교점의 개수이다.



따라서 위의 그림과 같이 교점의 개수가 3이므로 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

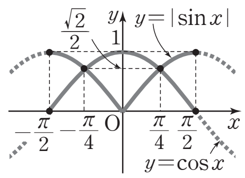
19



부등식 $\frac{1}{2}\le\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 위의 그림에서 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나거나 위쪽에 있고 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{5}{3}\pi\le x<\frac{7}{4}\pi$

20 부등식 $\cos x\ge|\sin x|$의 해는 오른쪽 그림에서 함수 $y=\cos x$의 그래프가 함수 $y=|\sin x|$의 그래프와 만나거나 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로



$-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$

따라서 구하는 최솟값은 $-\frac{\pi}{4}$이다.

21 $5\cos x+2\sin^2 x<4$에서

$5\cos x+2(1-\cos^2 x)<4$

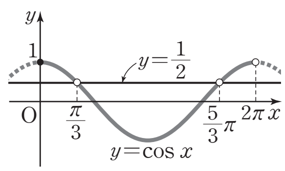
$2\cos^2 x-5\cos x+2>0$

$(2\cos x-1)(\cos x-2)>0$

이때 항상 $\cos x-2<0$이므로

$2\cos x-1<0$

$\therefore \cos x<\frac{1}{2}$



부등식 $\cos x<\frac{1}{2}$의 해는 위의 그림에서 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{4}{3}\pi$

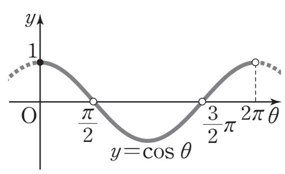
22 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2x\cos\theta+2\cos\theta>0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2-2x\cos\theta+2\cos\theta=0$의 판별식을 D라고 할 때, $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=\cos^2\theta-2\cos\theta<0$

$\cos\theta(\cos\theta-2)<0$

이때 항상 $\cos\theta-2<0$이므로

$\cos\theta>0$



부등식 $\cos\theta>0$의 해는 위의 그림에서 함수 $y=\cos\theta$의 그래프가 θ축보다 위쪽에 있는 θ의 값의 범위이므로

$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

23 함수 $f(x)=\sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로
$f(-x)=-f(x)$
함수 $g(x)=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로
$g(-x)=g(x)$
ㄱ. $f(f(-x))=f(-f(x))=-f(f(x))$이므로 함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
ㄴ. $f(g(-x))=f(g(x))$이므로 함수 $y=f(g(x))$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
ㄷ. $g(f(-x))=g(-f(x))=g(f(x))$이므로 함수 $y=g(f(x))$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
ㄹ. $g(g(-x))=g(g(x))$이므로 함수 $y=g(g(x))$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
따라서 그래프가 원점에 대하여 대칭인 것은 ㄱ이다.

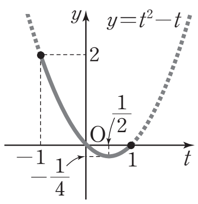
24 $\theta=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$이므로 $5\theta=\pi$

$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 10\theta$
$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos\pi$
$\quad+\cos(\pi+\theta)+\cos(\pi+2\theta)+\cos(\pi+3\theta)$
$\quad+\cos(\pi+4\theta)+\cos 2\pi$
$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta-1$
$\quad-\cos\theta-\cos 2\theta-\cos 3\theta-\cos 4\theta+1$
$=0$

25 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$이므로 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$
따라서 $\overline{AB}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$이므로
$\cos(\alpha+2\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-\sin\beta$
$=-\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$

26 (1) $y=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)$
$=\cos^2 x+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=\cos^2 x-\cos x$ ...... (가)

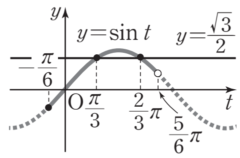
(2) $y=\cos^2 x-\cos x$에서 $\cos x=t$로 놓으면
$y=t^2-t=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ ...... ㉠ ...... (나)
이때 $-1\le\cos x\le 1$에서 $-1\le t\le 1$ ...... (다)
따라서 ㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 ㉠의 최댓값은 2, 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다.



$\therefore 2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$ ...... (라)

채점 기준	배점
(가) 주어진 함수를 $\cos x$에 대한 함수로 나타낸다.	3점
(나) $\cos x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 함수로 나타낸다.	1점
(다) t의 값의 범위를 구한다.	1점
(라) 주어진 함수의 최댓값과 최솟값의 곱을 구한다.	2점

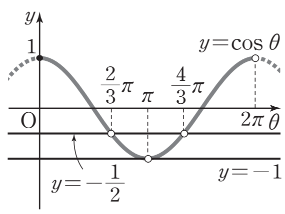
27 $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$에서
$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면
$0\le x<\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}\le t<\frac{5}{6}\pi$이고
$\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ...... (가)
방정식 $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 오른쪽 그림에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 t좌표이므로



$t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{2}{3}\pi$ ...... (나)
$t=x-\frac{\pi}{6}$이므로
$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$
$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ...... (다)

채점 기준	배점
(가) $x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓고 t에 대한 방정식을 세운다.	2점
(나) t의 값을 구한다.	2점
(다) 주어진 방정식의 해를 구한다.	2점

28 $f(x)=2x^2+3x\cos\theta-2\sin^2\theta+1$이라고 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 존재하므로
$f(1)<0$
$2+3\cos\theta-2\sin^2\theta+1<0$ ...... (가)
$3+3\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)<0$
$2\cos^2\theta+3\cos\theta+1<0$
$(\cos\theta+1)(2\cos\theta+1)<0$
$\therefore -1<\cos\theta<-\frac{1}{2}$ ...... (나)
부등식 $-1<\cos\theta<-\frac{1}{2}$의 해는 오른쪽 그림에서 함수 $y=\cos\theta$의 그래프가 직선 $y=-1$보다 위쪽에 있고 직선 $y=-\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 θ의 값의 범위이므로



$\frac{2}{3}\pi<\theta<\pi$ 또는 $\pi<\theta<\frac{4}{3}\pi$ ...... (다)

채점 기준	배점
(가) 주어진 조건을 이용하여 부등식을 세운다.	2점
(나) $\cos\theta$의 값의 범위를 구한다.	2점
(다) θ의 값의 범위를 구한다.	2점

11강 사인법칙과 코사인법칙

확인 문제 p. 46

1 (1) 사인법칙에서 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로

$\dfrac{2}{\sin 45^\circ}=\dfrac{c}{\sin 60^\circ}$, $c\sin 45^\circ=2\sin 60^\circ$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}c=\sqrt{3}\qquad \therefore c=\sqrt{6}$

(2) 사인법칙에서 $\dfrac{b}{\sin B}=2R$이므로

$\dfrac{2}{\sin 45^\circ}=2R$, $2R\sin 45^\circ=2$

$\sqrt{2}R=2\qquad \therefore R=\sqrt{2}$

2 코사인법칙에서 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$이므로

$b^2=4^2+2^2-2\times4\times2\times\cos 60^\circ$

$=20-16\times\dfrac{1}{2}=12$

$\therefore b=2\sqrt{3}$ ($\because b>0$)

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 47

1 (1) $B=180^\circ-(45^\circ+105^\circ)=30^\circ$

사인법칙에서 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$이므로

$\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=\dfrac{b}{\sin 30^\circ}$, $b\sin 45^\circ=4\sin 30^\circ$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}b=2\qquad \therefore b=2\sqrt{2}$

사인법칙에서 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$이므로

$\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=2R$, $2R\sin 45^\circ=4$

$\sqrt{2}R=4\qquad \therefore R=2\sqrt{2}$

$\therefore b+R=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

(2) 사인법칙에서 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{3}{\sin B}$, $\sqrt{3}\sin B=3\sin 30^\circ$

$\sqrt{3}\sin B=\dfrac{3}{2}\qquad \therefore \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로

$B=60^\circ$ 또는 $B=120^\circ$

$\therefore B=60^\circ, C=90^\circ$ 또는 $B=120^\circ, C=30^\circ$

2 (1) $A=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$

사인법칙에서 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로

$\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{6}{\sin 60^\circ}$, $a\sin 60^\circ=6\sin 45^\circ$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=3\sqrt{2}\qquad \therefore a=2\sqrt{6}$

사인법칙에서 $\dfrac{c}{\sin C}=2R$이므로

$\dfrac{6}{\sin 60^\circ}=2R$, $2R\sin 60^\circ=6$

$\sqrt{3}R=6\qquad \therefore R=2\sqrt{3}$

$\therefore aR=2\sqrt{6}\times2\sqrt{3}=12\sqrt{2}$

(2) 사인법칙에서 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}=\dfrac{1}{\sin C}$, $\sqrt{2}\sin C=\sin 135^\circ$

$\sqrt{2}\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\qquad \therefore \sin C=\dfrac{1}{2}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=30^\circ$ 또는 $C=150^\circ$

그런데 $C=150^\circ$이면 $B+C>180^\circ$이므로

$C=30^\circ$

$\therefore A=15^\circ, C=30^\circ$

3 (1) 코사인법칙에 의하여 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$이므로

$\cos A=\dfrac{8^2+7^2-13^2}{2\times8\times7}=-\dfrac{1}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=120^\circ$

(2) 코사인법칙에서 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$이므로

$a^2=(\sqrt{2})^2+3^2-2\times\sqrt{2}\times3\times\cos 45^\circ$

$=11-6\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5$

$\therefore a=\sqrt{5}$ ($\because a>0$)

사인법칙에서 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$이므로

$\dfrac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin B}$, $\sqrt{5}\sin B=\sqrt{2}\sin 45^\circ$

$\sqrt{5}\sin B=1\qquad \therefore \sin B=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

4 (1) 코사인법칙에 의하여 $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로

$\cos B=\dfrac{(\sqrt{2})^2+4^2-(\sqrt{10})^2}{2\times\sqrt{2}\times4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=45^\circ$

(2) 코사인법칙에서 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$이므로

$c^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos 120^\circ$

$=136-120\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=196$

$\therefore c=14$ ($\because c>0$)

사인법칙에서 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로

$\dfrac{6}{\sin A}=\dfrac{14}{\sin 120^\circ}$, $14\sin A=6\sin 120^\circ$

$14\sin A=3\sqrt{3}\qquad \therefore \sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

5 삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 $a\sin A=b\sin B=c\sin C$에 대입하면

$a\times\frac{a}{2R}=b\times\frac{b}{2R}=c\times\frac{c}{2R}$

$\therefore a^2=b^2=c^2$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

6 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이를 $b\cos C-c\cos B=a$에 대입하면

$b\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-c\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=a$

양변에 $2a$를 곱하면

$a^2+b^2-c^2-(c^2+a^2-b^2)=2a^2$

$2b^2-2c^2=2a^2$ $\quad\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

7 $C=180^\circ-(30^\circ+105^\circ)=45^\circ$

△ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ}=\frac{3}{\sin 45^\circ}$, $\overline{BC}\sin 45^\circ=3\sin 30^\circ$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BC}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore \overline{BC}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\,(\text{km})$

따라서 구하는 거리는 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ km이다.

8 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$

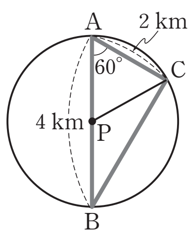
$=4^2+2^2-2\times4\times2\times\cos 60^\circ$

$=20-16\times\frac{1}{2}=12$

$\therefore \overline{BC}=2\sqrt{3}\,(\text{km})$ $(\because \overline{BC}>0)$

이때 △ABC에서 $\overline{AB}=4$ km, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$ km, $\overline{CA}=2$ km이고 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$이므로 △ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

한편 학교를 세우려는 지점을 P라고 하면 점 P는 세 지점 A, B, C로부터 같은 거리에 있으므로 △ABC의 외접원의 중심이다.



따라서 구하는 거리는 $\overline{PC}$의 길이이므로

$\overline{PC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times4=2\,(\text{km})$

12강 다각형의 넓이

확인 문제 p. 48

1 $\triangle ABC=\frac{1}{2}ca\sin B$

$=\frac{1}{2}\times2\times4\times\sin 30^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$

2 $\square ABCD=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B$

$=2\sqrt{3}\times6\times\sin 60^\circ$

$=12\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=18$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 49

1 $A=180^\circ-(64^\circ+76^\circ)=40^\circ$

사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$이므로

$\frac{32}{\sin 40^\circ}=\frac{b}{\sin 64^\circ}$, $b\sin 40^\circ=32\sin 64^\circ$

$0.64b=32\times0.90=28.8$ $\quad\therefore b=45$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\frac{1}{2}\times32\times45\times\sin 76^\circ$

$=720\times0.97=698.4$

2 $C=180^\circ-(107^\circ+30^\circ)=43^\circ$

사인법칙에서 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$이므로

$\frac{b}{\sin 30^\circ}=\frac{17}{\sin 43^\circ}$, $b\sin 43^\circ=17\sin 30^\circ$

$0.68b=17\times\frac{1}{2}=8.5$ $\quad\therefore b=12.5$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A$

$=\frac{1}{2}\times12.5\times17\times\sin 107^\circ$

$=106.25\times\sin 73^\circ$

$=106.25\times0.96=102$

3 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{7^2+8^2-9^2}{2\times7\times8}=\frac{2}{7}$

$\sin^2 C=1-\cos^2 C$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos C}$ $(\because 0^\circ<C<180^\circ)$

$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times7\times8\times\frac{3\sqrt{5}}{7}=12\sqrt{5}$

4 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{8^2+13^2-15^2}{2\times8\times13}=\frac{1}{26}$

$\sin^2 C=1-\cos^2 C$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos C}$ ($\because 0^\circ<C<180^\circ$)

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{26}\right)^2}=\frac{15\sqrt{3}}{26}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times8\times13\times\frac{15\sqrt{3}}{26}=30\sqrt{3}$

5 $\square ABCD=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B$

$=6\times10\times\sin B=60\sin B$

이때 평행사변형 ABCD의 넓이가 30이므로

$60\sin B=30 \qquad \therefore \sin B=\frac{1}{2}$

따라서 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=30^\circ$ 또는 $B=150^\circ$

6 $\square ABCD=\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin A$

$=5\times8\sqrt{2}\times\sin A=40\sqrt{2}\sin A$

이때 평행사변형 ABCD의 넓이가 40이므로

$40\sqrt{2}\sin A=40 \qquad \therefore \sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=45^\circ$ 또는 $A=135^\circ$

7 $\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times6\times8\times\sin\theta$

$=24\sin\theta$

이때 사각형 ABCD의 넓이가 12이므로

$24\sin\theta=12 \qquad \therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$

따라서 θ는 예각이므로 $\theta=30^\circ$

8 등변사다리꼴은 두 대각선의 길이가 같으므로

$\overline{AC}=\overline{BD}=x$라고 하면

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times x^2\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times x^2\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

이때 등변사다리꼴 ABCD의 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=4\sqrt{3},\ x^2=16 \qquad \therefore x=4$ ($\because x>0$)

계산력 다지기

p. 50~51

1 (1) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$에서 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin45^\circ}=\frac{b}{\sin60^\circ}$

$b\sin45^\circ=2\sqrt{3}\sin60^\circ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}b=3 \qquad \therefore b=3\sqrt{2}$

$\frac{a}{\sin A}=2R$에서 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin45^\circ}=2R$

$2R\sin45^\circ=2\sqrt{3},\ \sqrt{2}R=2\sqrt{3} \qquad \therefore R=\sqrt{6}$

(2) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$에서 $\frac{a}{\sin120^\circ}=\frac{6}{\sin30^\circ}$

$a\sin30^\circ=6\sin120^\circ,\ \frac{a}{2}=3\sqrt{3} \qquad \therefore a=6\sqrt{3}$

$\frac{b}{\sin B}=2R$에서 $\frac{6}{\sin30^\circ}=2R$

$2R\sin30^\circ=6 \qquad \therefore R=6$

(3) $A=180^\circ-(30^\circ+105^\circ)=45^\circ$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$에서 $\frac{a}{\sin45^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{\sin30^\circ}$

$a\sin30^\circ=4\sqrt{3}\sin45^\circ,\ \frac{a}{2}=2\sqrt{6} \qquad \therefore a=4\sqrt{6}$

$\frac{b}{\sin B}=2R$에서 $\frac{4\sqrt{3}}{\sin30^\circ}=2R$

$2R\sin30^\circ=4\sqrt{3} \qquad \therefore R=4\sqrt{3}$

(4) $B=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$

$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$에서 $\frac{b}{\sin60^\circ}=\frac{8}{\sin45^\circ}$

$b\sin45^\circ=8\sin60^\circ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}b=4\sqrt{3} \qquad \therefore b=4\sqrt{6}$

$\frac{c}{\sin C}=2R$에서 $\frac{8}{\sin45^\circ}=2R$

$2R\sin45^\circ=8,\ \sqrt{2}R=8 \qquad \therefore R=4\sqrt{2}$

2 (1) $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$에서 $\frac{1}{\sin30^\circ}=\frac{2}{\sin C}$

$\therefore \sin C=2\sin30^\circ=1$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=90^\circ$

$\therefore B=60^\circ,\ C=90^\circ$

(2) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$에서 $\frac{\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\sin45^\circ}$

$\sqrt{2}\sin A=\sqrt{3}\sin45^\circ=\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad \therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$A=60^\circ$ 또는 $A=120^\circ$

$\therefore A=60^\circ,\ C=75^\circ$ 또는 $A=120^\circ,\ C=15^\circ$

(3) $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$에서 $\frac{\sqrt{6}}{\sin B}=\frac{3}{\sin60^\circ}$

$3\sin B=\sqrt{6}\sin60^\circ=\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore \sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로

$B=45^\circ$ 또는 $B=135^\circ$

그런데 $B=135^\circ$이면 $B+C>180^\circ$이므로

$B=45^\circ$

$\therefore A=75^\circ,\ B=45^\circ$

(4) $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$에서 $\frac{3}{\sin A}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin120^\circ}$

$3\sqrt{3}\sin A=3\sin120^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \sin A=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$A=30^\circ$ 또는 $A=150^\circ$

그런데 $A=150^\circ$이면 $A+C>180^\circ$이므로

$A=30^\circ$

$\therefore A=30^\circ,\ B=30^\circ$

3 (1) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=60^\circ$

(2) $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$=\frac{2^2+(2\sqrt{3})^2-2^2}{2\times2\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=30^\circ$

(3) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=120^\circ$

(4) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\times(\sqrt{3}+1)\times2}=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=60^\circ$

4 (1) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=8^2+6^2-2\times8\times6\times\cos 60^\circ$

$=100-96\times\frac{1}{2}=52$

$\therefore b=2\sqrt{13}$ ($\because b>0$)

(2) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=(3\sqrt{2})^2+6^2-2\times3\sqrt{2}\times6\times\cos 135^\circ$

$=54-36\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=90$

$\therefore c=3\sqrt{10}$ ($\because c>0$)

(3) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=3^2+(2\sqrt{3})^2-2\times3\times2\sqrt{3}\times\cos 30^\circ$

$=21-12\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

$\therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$에서 $\frac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=\frac{3}{\sin B}$

$\sqrt{3}\sin B=3\sin 30^\circ=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=4^2+(4\sqrt{3})^2-2\times4\times4\sqrt{3}\times\cos 150^\circ$

$=64-32\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=112$

$\therefore b=4\sqrt{7}$ ($\because b>0$)

$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$에서 $\frac{4\sqrt{7}}{\sin 150^\circ}=\frac{4}{\sin C}$

$4\sqrt{7}\sin C=4\sin 150^\circ=2$ $\quad\therefore \sin C=\frac{\sqrt{7}}{14}$

5 (1) $\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\times\sin 45^\circ=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

(2) $\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A$

$=\frac{1}{2}\times4\times6\times\sin 60^\circ=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

(3) $\triangle ABC=\frac{1}{2}ca\sin B$

$=\frac{1}{2}\times8\times9\times\sin 150^\circ=36\times\frac{1}{2}=18$

(4) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5^2+9^2-10^2}{2\times5\times9}=\frac{1}{15}$

$\sin C=\sqrt{1-\cos C}$ ($\because 0^\circ<C<180^\circ$)

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{15}\right)^2}=\frac{4\sqrt{14}}{15}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times5\times9\times\frac{4\sqrt{14}}{15}$

$=6\sqrt{14}$

(5) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{8^2+9^2-11^2}{2\times8\times9}=\frac{1}{6}$

$\sin C=\sqrt{1-\cos C}$ ($\because 0^\circ<C<180^\circ$)

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{35}}{6}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times8\times9\times\frac{\sqrt{35}}{6}=6\sqrt{35}$

(6) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{13^2+14^2-15^2}{2\times13\times14}=\frac{5}{13}$

$\sin C=\sqrt{1-\cos C}$ ($\because 0^\circ<C<180^\circ$)

$=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times13\times14\times\frac{12}{13}=84$

6 (1) $\square ABCD=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B$

$=4\times6\times\sin 45^\circ=24\times\frac{\sqrt{2}}{2}=12\sqrt{2}$

(2) $\square ABCD=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B$

$=3\sqrt{3}\times8\times\sin 60^\circ=24\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=36$

(3) $\square ABCD=\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin A$

$=3\times4\sqrt{3}\times\sin 120^\circ=12\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=18$

(4) $\square ABCD=\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin A$

$=6\times9\times\sin 150^\circ=54\times\frac{1}{2}=27$

7 (1) $\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{3}$

(2) $\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin 150^\circ$

$=\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$

(3) $\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

(4) $\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin 135^\circ$

$=\frac{1}{2}\times8\times8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=16\sqrt{2}$

11~12강 족집게 기출문제 p. 52~55

1 ② 2 10 3 ⑤
4 $A=90°$인 직각삼각형 5 $8\sqrt{2}$ m 6 ⑤
7 ④ 8 ② 9 ② 10 ②
11 $b=c$인 이등변삼각형 12 ② 13 ⑤ 14 376
15 $9\sqrt{2}$ 16 ③ 17 6 18 5460 19 ③
20 ③ 21 ③ 22 $3\sqrt{3}$ 23 ④ 24 ④
25 (1) $A=30°$, $B=30°$, $C=120°$ (2) $1:1:3$ 26 $\frac{2}{3}$
27 $\frac{39\sqrt{3}}{4}$

1 사인법칙에서 $\frac{12}{\sin 120°}=\frac{c}{\sin 30°}$이므로

$c\sin 120°=12\sin 30°$, $\frac{\sqrt{3}}{2}c=6$

$\therefore c=4\sqrt{3}$ …… ㉠

또 사인법칙에서 $\frac{12}{\sin 120°}=2R$이므로

$2R\sin 120°=12$, $\sqrt{3}R=12$

$\therefore R=4\sqrt{3}$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$cR=4\sqrt{3}\times4\sqrt{3}=48$

2 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

따라서 △ABC의 둘레의 길이는

$a+b+c=2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C$

$=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$

$=2\times4\times\frac{5}{4}=10$

3 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

$\therefore a:b:c=2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C$

$=\sin A:\sin B:\sin C=3:4:2$

$a=3k$, $b=4k$, $c=2k$ $(k>0)$라고 하면

$a+b=7k$, $b+c=6k$, $c+a=5k$

$\therefore (a+b):(b+c):(c+a)$

$=7k:6k:5k$

$=7:6:5$

4 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$에 대입하면

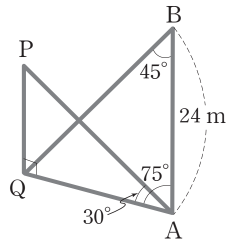
$\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2$, $\frac{a^2}{4R^2}=\frac{b^2}{4R^2}+\frac{c^2}{4R^2}$

$\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 △ABC는 $A=90°$인 직각삼각형이다.

5 $\angle AQB=180°-(75°+45°)=60°$

△ABQ에서 사인법칙에 의하여



$\frac{\overline{AQ}}{\sin 45°}=\frac{24}{\sin 60°}$

$\overline{AQ}\sin 60°=24\sin 45°$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AQ}=12\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AQ}=8\sqrt{6}\,(\text{m})$

이때 △PQA에서 $\tan 30°=\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}$이므로

$\overline{PQ}=\overline{AQ}\tan 30°=8\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=8\sqrt{2}\,(\text{m})$

따라서 나무의 높이는 $8\sqrt{2}$ m이다.

6 코사인법칙에 의하여

$a^2=5^2+7^2-2\times5\times7\times\cos 60°$

$=74-70\times\frac{1}{2}=39$

$\therefore a=\sqrt{39}$ ($\because a>0$) …… ㉠

사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{39}}{\sin 60°}=\frac{5}{\sin B}$, $\frac{\sqrt{39}}{\sin 60°}=\frac{7}{\sin C}$

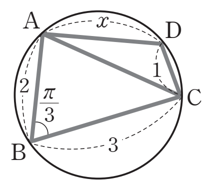
$\sqrt{39}\sin B=5\sin 60°$, $\sqrt{39}\sin C=7\sin 60°$

$\therefore \sin B=\frac{5\sqrt{13}}{26}$, $\sin C=\frac{7\sqrt{13}}{26}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a(\sin B+\sin C)=\sqrt{39}\times\left(\frac{5\sqrt{13}}{26}+\frac{7\sqrt{13}}{26}\right)=6\sqrt{3}$

7 $\overline{AD}=x$라 하고 주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.



△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=13-12\times\frac{1}{2}=7$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{7}$ ($\because \overline{AC}>0$)

또 원에 내접하는 사각형의 성질에 의하여 마주 보는 두 대각의 크기의 합이 π이므로

$\angle ADC=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

따라서 △ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=x^2+1^2-2\times x\times1\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$(\sqrt{7})^2=x^2+1-2x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

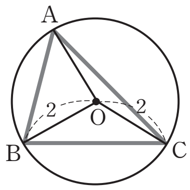
$7=x^2+x+1$, $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=2$ ($\because x>0$)

$\therefore \overline{AD}=2$

8 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로

$\angle \mathrm{BOC}=360^\circ\times\dfrac{4}{3+4+5}=120^\circ$



그런데 △ABC의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=2$

△OBC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos 120^\circ$

$=8-8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=12$

$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}\ (\because \overline{\mathrm{BC}}>0)$

9 △ABC의 세 변의 길이를 $a=2k,\ b=3k,\ c=4k\ (k>0)$라고 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\times3k\times4k}$

$=\dfrac{21k^2}{24k^2}=\dfrac{7}{8}$

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}\ (\because 0^\circ<A<180^\circ)$

$=\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{8}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

10 $2\sqrt{5}\sin A=\sqrt{5}\sin B=2\sin C=k\ (k>0)$라고 하면

$\sin A=\dfrac{k}{2\sqrt{5}},\ \sin B=\dfrac{k}{\sqrt{5}},\ \sin C=\dfrac{k}{2}$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C$

$=\dfrac{k}{2\sqrt{5}}:\dfrac{k}{\sqrt{5}}:\dfrac{k}{2}=1:2:\sqrt{5}$

사인법칙에 의하여

$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$이므로

$a:b:c=2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C$

$=\sin A:\sin B:\sin C$

$=1:2:\sqrt{5}$

따라서 △ABC의 세 변의 길이를 $a=l,\ b=2l,\ c=\sqrt{5}l$ $(l>0)$이라고 하면 c의 값이 가장 크므로 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 가장 길고, 그 대각인 C의 크기가 가장 크다.

즉, 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{l^2+(2l)^2-(\sqrt{5}l)^2}{2\times l\times2l}=0$

$\therefore C=90^\circ\ (\because 0^\circ<C<180^\circ)$

다른 풀이

$a:b:c=1:2:\sqrt{5}$에서 $a^2+b^2=c^2$이므로

△ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 세 내각의 크기중 가장 큰 값은 $C=90^\circ$이다.

11 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R},\ \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

이를 $\sin A=2\sin C\cos B$에 대입하면

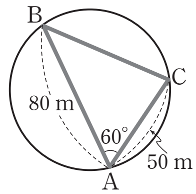
$\dfrac{a}{2R}=2\times\dfrac{c}{2R}\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$a^2=a^2+c^2-b^2,\ b^2=c^2$

$\therefore b=c\ (\because b>0,\ c>0)$

따라서 △ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

12 세 지점 A, B, C는 한 원 위에 있으므로 울타리의 길이는 △ABC의 외접원의 둘레의 길이와 같다.



목장의 반지름의 길이를 R라고 하면

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 60^\circ}=2R$ ······ ㉠

이때 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=80^2+50^2-2\times80\times50\times\cos 60^\circ$

$=8900-8000\times\dfrac{1}{2}$

$=4900$

$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=70\,(\mathrm{m})\ (\because \overline{\mathrm{BC}}>0)$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{70}{\sin 60^\circ}=2R\qquad \therefore R=\dfrac{70\sqrt{3}}{3}\,(\mathrm{m})$

따라서 구하는 울타리의 길이는

$2\pi R=2\pi\times\dfrac{70\sqrt{3}}{3}=\dfrac{140\sqrt{3}}{3}\pi\,(\mathrm{m})$

13 △ABC의 넓이를 S라고 하면 그 넓이가 3이므로

$S=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\times\sin A=3$

$\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\qquad \therefore A=\dfrac{\pi}{3}\ (\because A$는 예각$)$

14 $B=180^\circ-(110^\circ+40^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin 110^\circ}=\dfrac{25}{\sin 30^\circ}$이므로

$a\sin 30^\circ=25\sin 110^\circ,\ a\sin 30^\circ=25\sin 70^\circ$

$\dfrac{1}{2}a=25\times0.94=23.5$

$\therefore a=47$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times47\times25\times\sin 40^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times47\times25\times0.64=376$

15 $\angle\mathrm{ACB}=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

△ABC에서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{6}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin 60^\circ}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}\sin 45^\circ=6\sin 60^\circ,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{3}$

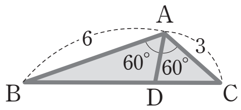
$\therefore \overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{6}$

따라서 △ACD의 넓이를 S라고 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin 60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{6}\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{2}$

16 △ABC는 오른쪽 그림과 같으므로



△ABC=△ABD+△ACD ⋯⋯ ㉠

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times3\times\sin120^\circ=9\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times6\times\overline{AD}\times\sin60^\circ=3\times\overline{AD}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\overline{AD}$

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times3\times\overline{AD}\times\sin60^\circ=\frac{3}{2}\times\overline{AD}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\overline{AD}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{9\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\overline{AD}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\overline{AD}$, $\frac{9\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}\overline{AD}$

$\therefore \overline{AD}=2$

17 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(x+1)^2+(x+2)^2-x^2}{2(x+1)(x+2)}=\frac{x+5}{2(x+2)}$

이때 $\cos A=\frac{4}{5}$이므로 $\frac{x+5}{2(x+2)}=\frac{4}{5}$

$5(x+5)=8(x+2)$ $\therefore x=3$

따라서 △ABC의 세 변의 길이는 $a=3$, $b=4$, $c=5$

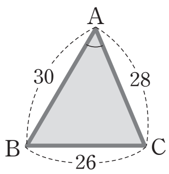
$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ ($\because 0^\circ<A<180^\circ$)

$=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

이므로 △ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\times5\times\frac{3}{5}=6$

18 △ABC가 오른쪽 그림과 같다고 하자.



코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{28^2+30^2-26^2}{2\times28\times30}=\frac{3}{5}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ ($\because 0^\circ<A<180^\circ$)

$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$\therefore S=\frac{1}{2}\times30\times28\times\frac{4}{5}=336$ ⋯⋯ ㉠

한편 사인법칙에 의하여 $\frac{26}{\sin A}=2R$이므로

$2R\sin A=26$, $\frac{8}{5}R=26$ $\therefore R=\frac{65}{4}$ ⋯⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $SR=336\times\frac{65}{4}=5460$

19 □ABCD가 원에 내접하고, 원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle ADC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

따라서 □ABCD의 넓이를 S라고 하면

$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin120^\circ$

$=\frac{15}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{21\sqrt{3}}{4}$

20 $\overline{CD}=\overline{AB}=4$이고, □ABCD의 넓이가 24이므로

$\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\angle BCD)=24$

$4\sqrt{3}\times4\times\sin(\angle BCD)=24$

$\therefore \sin(\angle BCD)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \angle BCD=120^\circ$ ($\because 90^\circ<\angle BCD<180^\circ$)

21 □ABCD의 넓이가 $10\sqrt{3}\,\text{cm}^2$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\theta=10\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}\times5\times8\times\sin\theta=10\sqrt{3}$ $\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

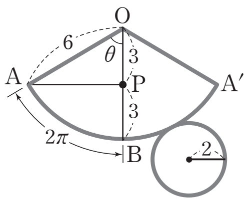
즉, $\theta=60^\circ$ 또는 $\theta=120^\circ$ ($\because 0^\circ<\theta<180^\circ$)이므로

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 모든 값의 합은

$\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

22 주어진 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 두 점 A, P를 잇는 최단 거리는 $\overline{AP}$이다.



$\widehat{AA'}$의 길이는 원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$\widehat{AA'}=2\pi\times2=4\pi$

이때 $\widehat{AB}$는 밑면인 원의 지름이므로

$\widehat{AB}=\frac{1}{2}\widehat{AA'}=\frac{1}{2}\times4\pi=2\pi$

부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ라고 하면

$\widehat{AB}=6\theta=2\pi$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

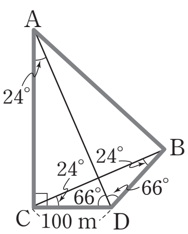
따라서 △OAP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AP}^2=6^2+3^2-2\times6\times3\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=45-36\times\frac{1}{2}=27$

$\therefore \overline{AP}=3\sqrt{3}$ ($\because \overline{AP}>0$)

23 오른쪽 그림에서 △ACD는 직각삼각형이므로



$\sin24^\circ=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$

$0.4=\frac{100}{\overline{AD}}$ $\therefore \overline{AD}=250\,(\text{m})$

△BCD에서

$\angle CBD=180^\circ-(24^\circ+132^\circ)=24^\circ$

이므로 △BCD는 $\overline{BD}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{BD}=\overline{CD}=100\,(\text{m})$

또, △ACD에서

$\angle ADC=180^\circ-(24^\circ+90^\circ)=66^\circ$

이므로

$\angle ADB=\angle BCD-\angle ADC$

$=132^\circ-66^\circ=66^\circ$

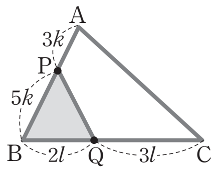
이때 $\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{BD}\times\cos 66^\circ$$
$$=250^2+100^2-2\times250\times100\times\cos(90^\circ-24^\circ)$$
$$=62500+10000-50000\times\sin 24^\circ$$
$$=72500-50000\times0.4$$
$$=72500-20000$$
$$=52500$$

$\therefore\ \overline{AB}=50\sqrt{21}\,(\mathrm{m})\ (\because\ \overline{AB}>0)$

따라서 구하는 터널의 길이는 $50\sqrt{21}$ m이다.

24 $5\overline{AP}=3\overline{BP}$에서 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:5$ 이므로



$\overline{AP}=3k$, $\overline{BP}=5k$ $(k>0)$라 하고,

$3\overline{BQ}=2\overline{CQ}$에서 $\overline{BQ}:\overline{CQ}=2:3$ 이므로

$\overline{BQ}=2l$, $\overline{CQ}=3l$ $(l>0)$이라고 하자.

$\triangle$ABC$=80$이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=80$$
$$\frac{1}{2}\times8k\times5l\times\sin B=80$$

$\therefore\ kl\sin B=4$

$\therefore\ \triangle$PBQ

$$=\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{BQ}\times\sin B$$
$$=\frac{1}{2}\times5k\times2l\times\sin B$$
$$=5kl\sin B$$
$$=5\times4=20$$

25 (1) 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로 $\triangle$ABC에서

$$A=180^\circ\times\frac{1}{1+1+4}=30^\circ,$$
$$B=180^\circ\times\frac{1}{1+1+4}=30^\circ,$$
$$C=180^\circ\times\frac{4}{1+1+4}=120^\circ \qquad \cdots\cdots \text{(가)}$$

(2) $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$ $\cdots\cdots$ (나)

$\therefore\ a^2:b^2:c^2$

$$=(2R\sin A)^2:(2R\sin B)^2:(2R\sin C)^2$$
$$=\sin^2 A:\sin^2 B:\sin^2 C$$
$$=\sin^2 30^\circ:\sin^2 30^\circ:\sin^2 120^\circ$$
$$=\frac{1}{4}:\frac{1}{4}:\frac{3}{4}$$
$$=1:1:3 \qquad \cdots\cdots \text{(다)}$$

채점 기준	배점
(가) A, B, C의 값을 구한다.	2점
(나) 사인법칙을 변형한다.	1점
(다) $a^2:b^2:c^2$을 구한다.	2점

26 $\overline{AD}=x$라고 하면

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times4\times x\times\sin\alpha$$
$$=2x\sin\alpha \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times3\times x\times\sin\beta$$
$$=\frac{3}{2}x\sin\beta \qquad \cdots\cdots ㉡ \qquad \cdots\cdots \text{(가)}$$

그런데 $\overline{BD}:\overline{DC}=2:1$이고, $\triangle$ABD와 $\triangle$ACD는 높이가 같으므로 $\triangle$ABD와 $\triangle$ACD의 넓이의 비는

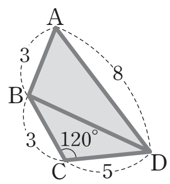
$\triangle ABD:\triangle ACD=2:1$ $\cdots\cdots$ ㉢ $\cdots\cdots$ (나)

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$$2x\sin\alpha:\frac{3}{2}x\sin\beta=2:1$$
$$2\sin\alpha=3\sin\beta$$
$$\therefore\ \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots \text{(다)}$$

채점 기준	배점
(가) $\triangle$ABD와 $\triangle$ACD의 넓이를 각각 $\sin\alpha$, $\sin\beta$를 사용하여 나타낸다.	2점
(나) $\triangle$ABD와 $\triangle$ACD의 넓이의 비를 구한다.	1점
(다) $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$의 값을 구한다.	2점

27 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면



$\triangle$BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\cos120^\circ$$
$$=3^2+5^2-2\times3\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=49$$

$\therefore\ \overline{BD}=7\ (\because\ \overline{BD}>0)$ $\cdots\cdots$ (가)

또 $\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}$$
$$=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\times3\times8}=\frac{1}{2}$$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ $(\because\ 0^\circ<A<180^\circ)$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots\cdots \text{(나)}$$

$\therefore\ \square$ABCD$=\triangle$ABD$+\triangle$BCD

$$=\frac{1}{2}\times3\times8\times\sin A+\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin120^\circ$$
$$=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{15}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{39\sqrt{3}}{4} \qquad \cdots\cdots \text{(다)}$$

채점 기준	배점
(가) $\overline{BD}$의 길이를 구한다.	3점
(나) $\sin A$의 값을 구한다.	2점
(다) $\square$ABCD의 넓이를 구한다.	2점

13강 등차수열

확인 문제 p. 56

1 (1) $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2,\ \sqrt{5}$
(2) $1,\ 6,\ 15,\ 28,\ 45$

2 (1) 공차: 4
(3) 공차: -1

3 (1) $a_n=3+(n-1)\times(-2)=-2n+5$
(2) 첫째항이 -8, 공차가 3이므로
$a_n=-8+(n-1)\times3=3n-11$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 57

1 (1) $a_1=2=2\times1,\ a_2=4=2\times2,\ a_3=6=2\times3,$
$a_4=8=2\times4,\ a_5=10=2\times5,\ \cdots$
$\therefore a_n=2n$
(2) $a_1=-1,\ a_2=\frac{1}{2}=(-1)^2\times\frac{1}{2},\ a_3=-\frac{1}{3}=(-1)^3\times\frac{1}{3},$
$a_4=\frac{1}{4}=(-1)^4\times\frac{1}{4},\ a_5=-\frac{1}{5}=(-1)^5\times\frac{1}{5},\ \cdots$
$\therefore a_n=(-1)^n\times\frac{1}{n}$

2 (1) $a_1=1\times3=1\times(1+2),\ a_2=2\times4=2\times(2+2),$
$a_3=3\times5=3\times(3+2),\ a_4=4\times6=4\times(4+2),\ \cdots$
$\therefore a_n=n(n+2)$
(2) $a_1=9=10-1,\ a_2=99=10^2-1,\ a_3=999=10^3-1,$
$a_4=9999=10^4-1,\ a_5=99999=10^5-1,\ \cdots$
$\therefore a_n=10^n-1$

3 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_3=a+2d=-5$ ······ ㉠
$a_7=a+6d=23$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-19,\ d=7$
$\therefore a_n=-19+(n-1)\times7=7n-26$

4 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_4=a+3d=75$ ······ ㉠
$a_{12}=a+11d=51$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=84,\ d=-3$
$\therefore a_n=84+(n-1)\times(-3)=-3n+87$

5 주어진 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n=-23+(n-1)\times4=4n-27$
이때 제n항에서 처음으로 양수가 된다고 하면
$a_n=4n-27>0 \qquad \therefore n>6.75$
그런데 n은 자연수이므로 n의 최솟값은 7이다.
따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제7항이다.

6 주어진 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n=36+(n-1)\times(-5)=-5n+41$
이때 제n항에서 처음으로 음수가 된다고 하면
$a_n=-5n+41<0 \qquad \therefore n>8.2$
그런데 n은 자연수이므로 n의 최솟값은 9이다.
따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제9항이다.

7 (1) x가 -7과 3의 등차중항이므로
$x=\frac{-7+3}{2}=-2$
y가 3과 13의 등차중항이므로
$y=\frac{3+13}{2}=8$
$\therefore x=-2,\ y=8$
(2) x가 13과 5의 등차중항이므로
$x=\frac{13+5}{2}=9$
y가 5와 -3의 등차중항이므로
$y=\frac{5+(-3)}{2}=1$
$\therefore x=9,\ y=1$

8 $2x+1$이 $x-3$과 $4x+1$의 등차중항이므로
$2(2x+1)=(x-3)+(4x+1)$
$4x+2=5x-2 \qquad \therefore x=4$

14강 등차수열의 합

확인 문제 p. 58

1 (1) $\frac{10\{1+(-23)\}}{2}=-110$
(2) $\frac{10\{2\times16+(10-1)\times(-3)\}}{2}=25$

2 $a_7=S_7-S_6$
$=(2\times7^2-1)-(2\times6^2-1)$
$=97-71=26$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 59

1 주어진 등차수열의 첫째항이 -9, 공차가 4이므로
$a_n=-9+(n-1)\times4=4n-13$
이 수열의 제n항을 15라고 하면
$4n-13=15 \quad \therefore n=7$
따라서 첫째항부터 제7항까지의 합은
$\frac{7(-9+15)}{2}=21$

2 주어진 등차수열의 첫째항이 31, 공차가 -7이므로
$a_n=31+(n-1)\times(-7)=-7n+38$
이 수열의 제n항을 -25라고 하면
$-7n+38=-25 \quad \therefore n=9$
따라서 첫째항부터 제9항까지의 합은
$\frac{9\{31+(-25)\}}{2}=27$

3 100 미만의 자연수 중에서 4의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면
$4, 8, 12, 16, \cdots, 96$
이므로 첫째항이 4, 공차가 4인 등차수열이다.
이 수열의 일반항을 a_n이라고 하면
$a_n=4+(n-1)\times4=4n$
제n항을 96이라고 하면
$4n=96 \quad \therefore n=24$
따라서 이 수열의 첫째항부터 제24항까지의 합은
$\frac{24(4+96)}{2}=1200$

4 100 이하의 자연수 중에서 7로 나누었을 때의 나머지가 2인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면
$2, 9, 16, 23, \cdots, 100$
이므로 첫째항이 2, 공차가 7인 등차수열이다.
이 수열의 일반항을 a_n이라고 하면
$a_n=2+(n-1)\times7=7n-5$
제n항을 100이라고 하면
$7n-5=100 \quad \therefore n=15$
따라서 이 수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은
$\frac{15(2+100)}{2}=765$

5 주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면
$S_4=\frac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=26 \quad \therefore 2a+3d=13 \quad \cdots\cdots ㉠$
$S_8=\frac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=100 \quad \therefore 2a+7d=25 \quad \cdots\cdots ㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, d=3$
$\therefore S_{10}=\frac{10\{2\times2+(10-1)\times3\}}{2}=155$

6 주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면
$S_5=\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=85$
$\therefore a+2d=17 \quad \cdots\cdots ㉠$
$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=-5$
$\therefore 2a+9d=-1 \quad \cdots\cdots ㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=31, d=-7$
$\therefore S_{20}=\frac{20\{2\times31+(20-1)\times(-7)\}}{2}=-710$

7 (i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=-2+1=-1$
(ii) $n\geq2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(-2n^2+1)-\{-2(n-1)^2+1\}$
$=-4n+2 \quad \cdots\cdots ㉠$
이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열이다.
따라서 일반항은
$a_1=-1, a_n=-4n+2\ (n\geq2)$

8 (i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=2+3=5$
(ii) $n\geq2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(2n^2+3n)-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}$
$=4n+1 \quad \cdots\cdots ㉠$
이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같다.
따라서 일반항은
$a_n=4n+1$

15강 등비수열과 등비수열의 합

확인 문제 p. 60

1 (1) $a_n=3\times(\sqrt{2})^{n-1}$
(2) $a_n=2\times(-3)^{n-1}$

2 $\frac{48\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}=93$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 61

1 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=18$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_6=ar^5=486$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=27$

그런데 r는 실수이므로 $r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$9a=18$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore a_n=2\times3^{n-1}$

2 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2=ar=\dfrac{3}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_7=ar^6=\dfrac{16}{81}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^5=\dfrac{32}{243}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^5$

그런데 r는 실수이므로

$r=\dfrac{2}{3}$

$r=\dfrac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2}{3}a=\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore a=\dfrac{9}{4}$

$\therefore a_n=\dfrac{9}{4}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

3 x가 6과 $\dfrac{3}{2}$의 등비중항이므로

$x^2=6\times\dfrac{3}{2}$, $x^2=9$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

4 $x+1$이 $x-5$와 $3x+3$의 등비중항이므로

$(x+1)^2=(x-5)(3x+3)$

$x^2+2x+1=3x^2-12x-15$

$x^2-7x-8=0$, $(x+1)(x-8)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=8$

그런데 $x=-1$이면 $x+1=0$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

$\therefore x=8$

5 주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_3=\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=6$ $\cdots\cdots$ ㉠

$S_6=\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}=\dfrac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=-42$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6(1+r^3)=-42$ $\quad\therefore r^3=-8$

이때 r는 실수이므로 $r=-2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{a\{1-(-2)^3\}}{1-(-2)}=6$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore S_9=\dfrac{2\{1-(-2)^9\}}{1-(-2)}=342$

6 주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_4=\dfrac{a(1-r^4)}{1-r}=-15$ $\cdots\cdots$ ㉠

$S_8=\dfrac{a(1-r^8)}{1-r}$

$=\dfrac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r}=-255$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-15(1+r^4)=-255$ $\quad\therefore r^4=16$

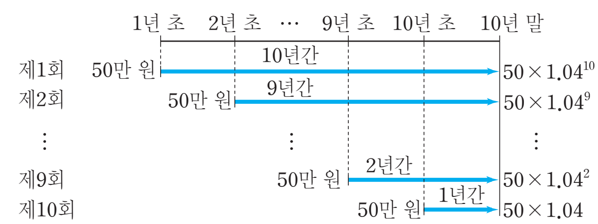
이때 $r>0$이므로 $r=2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{a(1-2^4)}{1-2}=-15$ $\quad\therefore a=-1$

$\therefore S_{12}=\dfrac{(-1)\times(2^{12}-1)}{2-1}=-4095$

7 매년 초에 50만 원씩 10년 동안 적립할 때, 10년 말까지 적립금의 원리합계는 다음과 같다.

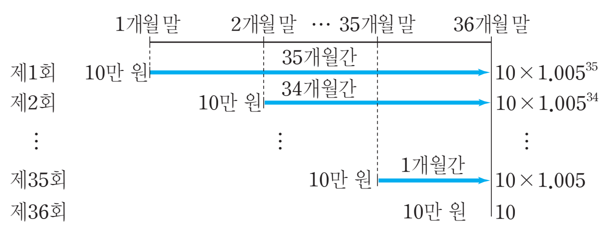


따라서 10년 말까지 적립금의 원리합계는

$50\times1.04+50\times1.04^2+50\times1.04^3+\cdots+50\times1.04^{10}$

$=\dfrac{50\times1.04\times(1.04^{10}-1)}{1.04-1}=650$(만 원)

8 매월 말에 10만 원씩 3년, 즉 36개월 동안 적립할 때, 3년 말까지 적립금의 원리합계는 다음과 같다.



따라서 3년 말까지 적립금의 원리합계는

$10+10\times1.005+10\times1.005^2+\cdots+10\times1.005^{35}$

$=\dfrac{10\times(1.005^{36}-1)}{1.005-1}=400$(만 원)

계산력 다지기

p. 62~63

1 (1) 첫째항이 -9, 공차가 5이므로
$a_n=-9+(n-1)\times5=5n-14$
(2) 첫째항이 7, 공차가 -3이므로
$a_n=7+(n-1)\times(-3)=-3n+10$
(3) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_3=a+2d=-3$, $a_6=a+5d=9$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-11$, $d=4$
$\therefore a_n=-11+(n-1)\times4=4n-15$
(4) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_2=a+d=29$, $a_5=a+4d=47$
두 식을 연립하여 풀면 $a=23$, $d=6$
$\therefore a_n=23+(n-1)\times6=6n+17$
(5) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_4=a+3d=-18$, $a_9=a+8d=-43$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $d=-5$
$\therefore a_n=-3+(n-1)\times(-5)=-5n+2$
(6) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_5=a+4d=14$, $a_{10}=a+9d=-21$
두 식을 연립하여 풀면
$a=42$, $d=-7$
$\therefore a_n=42+(n-1)\times(-7)=-7n+49$

2 (1) $a_n=-23+(n-1)\times5=5n-28$
이때 제n항에서 처음으로 양수가 된다고 하면
$a_n=5n-28>0$ $\quad\therefore n>5.6$
그런데 n은 자연수이므로 n의 최솟값은 6이다.
따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제6항이다.
(2) $a_n=-44+(n-1)\times4=4n-48$
이때 제n항에서 처음으로 양수가 된다고 하면
$a_n=4n-48>0$ $\quad\therefore n>12$
그런데 n은 자연수이므로 n의 최솟값은 13이다.
따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제13항이다.
(3) $a_n=41+(n-1)\times(-6)=-6n+47$
이때 제n항에서 처음으로 음수가 된다고 하면
$a_n=-6n+47<0$ $\quad\therefore n>7.8\dot{3}$
그런데 n은 자연수이므로 n의 최솟값은 8이다.
따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제8항이다.
(4) $a_n=57+(n-1)\times(-7)=-7n+64$
이때 제n항에서 처음으로 음수가 된다고 하면
$a_n=-7n+64<0$ $\quad\therefore n>9.\dot{1}4285\dot{7}$
그런데 n은 자연수이므로 n의 최솟값은 10이다.
따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제10항이다.

3 (1) x가 12와 4의 등차중항이므로
$x=\dfrac{12+4}{2}=8$
y가 4와 -4의 등차중항이므로
$y=\dfrac{4+(-4)}{2}=0$
(2) x가 -21과 -9의 등차중항이므로
$x=\dfrac{-21+(-9)}{2}=-15$
y가 -9와 3의 등차중항이므로
$y=\dfrac{-9+3}{2}=-3$
(3) x가 24와 y의 등차중항이므로
$x=\dfrac{24+y}{2}$ $\quad\therefore 2x=24+y$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
y가 x와 -9의 등차중항이므로
$y=\dfrac{x+(-9)}{2}$ $\quad\therefore 2y=x-9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=13$, $y=2$
(4) x가 -33과 y의 등차중항이므로
$x=\dfrac{-33+y}{2}$ $\quad\therefore 2x=-33+y$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
y가 x와 3의 등차중항이므로
$y=\dfrac{x+3}{2}$ $\quad\therefore 2y=x+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-21$, $y=-9$

4 (1) 첫째항이 11, 공차가 3이므로
$a_n=11+(n-1)\times3=3n+8$
이 수열의 제n항을 41이라고 하면
$3n+8=41$ $\quad\therefore n=11$
따라서 첫째항부터 제11항까지의 합은
$\dfrac{11(11+41)}{2}=286$
(2) 첫째항이 -8, 공차가 4이므로
$a_n=-8+(n-1)\times4=4n-12$
이 수열의 제n항을 28이라고 하면
$4n-12=28$ $\quad\therefore n=10$
따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은
$\dfrac{10(-8+28)}{2}=100$
(3) 첫째항이 20, 공차가 -7이므로
$a_n=20+(n-1)\times(-7)=-7n+27$
이 수열의 제n항을 -29라고 하면
$-7n+27=-29$ $\quad\therefore n=8$
따라서 첫째항부터 제8항까지의 합은
$\dfrac{8\{20+(-29)\}}{2}=-36$
(4) 첫째항이 -15, 공차가 6이므로
$a_n=-15+(n-1)\times6=6n-21$
이 수열의 제n항을 33이라고 하면
$6n-21=33$ $\quad\therefore n=9$
따라서 첫째항부터 제9항까지의 합은
$\dfrac{9(-15+33)}{2}=81$

5 (1) (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2+5=7$

(ii) $n>2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2+5n)-\{2(n-1)^2+5(n-1)\}$

$=4n+3$ …… ㉠

이때 $a_1=7$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 일반항은 $a_n=4n+3$

(2) (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-3+1=-2$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(-3n^2+n)-\{-3(n-1)^2+(n-1)\}$

$=-6n+4$ …… ㉠

이때 $a_1=-2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 일반항은 $a_n=-6n+4$

(3) (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1-4+2=-1$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-4n+2)-\{(n-1)^2-4(n-1)+2\}$

$=2n-5$ …… ㉠

이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열이다.

따라서 일반항은 $a_1=-1$, $a_n=2n-5$ $(n\geq2)$

(4) (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-2+6+4=8$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(-2n^2+6n+4)$

$-\{-2(n-1)^2+6(n-1)+4\}$

$=-4n+8$ …… ㉠

이때 $a_1=8$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열이다.

따라서 일반항은 $a_1=8$, $a_n=-4n+8$ $(n\geq2)$

6 (1) 첫째항이 7, 공비가 2이므로 $a_n=7\times2^{n-1}$

(2) 첫째항이 243, 공비가 $-\frac{1}{3}$이므로

$a_n=243\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_4=ar^3=-12\sqrt{3}$ …… ㉠

$a_7=ar^6=108$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=-3\sqrt{3}=(-\sqrt{3})^3$

그런데 r는 실수이므로 $r=-\sqrt{3}$

$r=-\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면

$-3\sqrt{3}a=-12\sqrt{3}$ $\therefore a=4$

$\therefore a_n=4\times(-\sqrt{3})^{n-1}$

(4) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2=ar=384$ …… ㉠

$a_5=ar^4=162$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=\frac{27}{64}=\left(\frac{3}{4}\right)^3$

그런데 r는 실수이므로 $r=\frac{3}{4}$

$r=\frac{3}{4}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{4}a=384$ $\therefore a=512$

$\therefore a_n=512\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

(5) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=3$ …… ㉠

$a_6=ar^5=-375$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=-125=(-5)^3$

그런데 r는 실수이므로 $r=-5$

$r=-5$을 ㉠에 대입하면

$25a=3$ $\therefore a=\frac{3}{25}$

$\therefore a_n=\frac{3}{25}\times(-5)^{n-1}$

(6) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=24$ …… ㉠

$a_6=ar^5=384\sqrt{2}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=16\sqrt{2}=(2\sqrt{2})^3$

그런데 r는 실수이므로 $r=2\sqrt{2}$

$r=2\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$8a=24$ $\therefore a=3$

$\therefore a_n=3\times(2\sqrt{2})^{n-1}$

7 (1) a가 7과 28의 등비중항이므로

$a^2=7\times28=14^2$ $\therefore a=14$ ($\because a>0$)

b가 28과 112의 등비중항이므로

$b^2=28\times112=56^2$ $\therefore b=56$ ($\because b>0$)

(2) a가 4와 $\frac{4}{9}$의 등비중항이므로

$a^2=4\times\frac{4}{9}=\left(\frac{4}{3}\right)^2$ $\therefore a=\frac{4}{3}$ ($\because a>0$)

b가 $\frac{4}{9}$와 $\frac{4}{81}$의 등비중항이므로

$b^2=\frac{4}{9}\times\frac{4}{81}=\left(\frac{4}{27}\right)^2$ $\therefore b=\frac{4}{27}$ ($\because b>0$)

8 (1) $a+1$이 $a-1$과 $3a-1$의 등비중항이므로

$(a+1)^2=(a-1)(3a-1)$, $a^2-3a=0$

$a(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a>0$)

(2) $a+2$가 $a-4$와 $4a-1$의 등비중항이므로

$(a+2)^2=(a-4)(4a-1)$, $a^2-7a=0$

$a(a-7)=0$ $\therefore a=7$ ($\because a>0$)

9 (1) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2=ar=4$ ...... ㉠

$a_5=ar^4=32$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8=2^3$

그런데 r는 실수이므로 $r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$2a=4$ $\therefore a=2$

따라서 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$S_{10}=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2^{11}-2$

(2) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=2$ ...... ㉠

$a_6=ar^5=\frac{2}{27}$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=\frac{1}{27}=\left(\frac{1}{3}\right)^3$

그런데 r는 실수이므로 $r=\frac{1}{3}$

$r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{a}{9}=2$ $\therefore a=18$

따라서 첫째항이 18, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$$S_{10}=\frac{18\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)}{1-\frac{1}{3}}=27\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$$

(3) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2=ar=12$ ...... ㉠

$a_5=ar^4=324$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=27=3^3$

그런데 r는 실수이므로 $r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$3a=12$ $\therefore a=4$

따라서 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$S_{10}=\frac{4(3^{10}-1)}{3-1}=2(3^{10}-1)$

(4) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=\frac{3}{2}$ ...... ㉠

$a_6=ar^5=\frac{3}{16}$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

그런데 r는 실수이므로

$r=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{a}{4}=\frac{3}{2}$ $\therefore a=6$

따라서 첫째항이 6, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$$S_{10}=\frac{6\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=12\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$$

13~15강 족집게 기출문제

p. 64~67

1 ④	2 ①	3 ③	4 ⑤	5 ①
6 ②	7 ④	8 ②	9 ③	10 22
11 ②	12 ⑤	13 ②	14 ④	15 ③
16 -2	17 ⑤	18 $\frac{\sqrt{3}}{4}$	19 ②	20 $\frac{1}{4}$
21 ①	22 ⑤	23 ②	24 880	25 ③
26 ④	27 18	28 (1) $a_n=2^{n-1}$ (2) 255		
29 15				

1 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2=a+d=10$ ...... ㉠

$a_5=a+4d=43$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $d=11$

따라서 $a_n=-1+(n-1)\times11=11n-12$이므로

$a_{11}=11\times11-12=109$

2 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3+a_6+a_9=(a+2d)+(a+5d)+(a+8d)$

$=3a+15d=15$ ...... ㉠

$a_4+a_7+a_{10}=(a+3d)+(a+6d)+(a+9d)$

$=3a+18d=17$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{5}{3}$, $d=\frac{2}{3}$

$\therefore a_n=\frac{5}{3}+(n-1)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}n+1$

따라서 $a_k=\frac{2}{3}k+1=13$에서

$\frac{2}{3}k=12$ $\therefore k=18$

3 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_3+a_9=0$이므로
$(a+2d)+(a+8d)=0$
$\therefore a+5d=0$ ...... ㉠
$a_{10}=12$이므로
$a+9d=12$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-15$, $d=3$
$\therefore a_n=-15+(n-1)\times 3=3n-18$
$a_n>100$에서
$3n-18>100$
$\therefore n>\frac{118}{3}=39.\dot{3}$
따라서 처음으로 100보다 커지는 항은 제40항이다.

4 주어진 등차수열의 공차를 d라고 하면 첫째항이 -1이고 제7항이 17이므로
$-1+6d=17$, $6d=18$
$\therefore d=3$
이때 y는 제5항이므로
$y=-1+(5-1)\times 3=11$

5 다항식 $P(x)=x^2+ax+2$를 일차식 $x-1$, $x-2$, $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
$P(1)=a+3$, $P(2)=2a+6$, $P(4)=4a+18$
따라서 $a+3$, $2a+6$, $4a+18$이 이 순서대로 등차수열이므로
$2(2a+6)=(a+3)+(4a+18)$
$\therefore a=-9$

6 주어진 삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(a-d)+a+(a+d)=3$, $3a=3$ $\therefore a=1$
따라서 삼차방정식의 한 근이 1이므로 방정식에 $x=1$을 대입하면
$1-3+k+3=0$ $\therefore k=-1$

7 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면
$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=110$
$\therefore 2a+9d=22$ ...... ㉠
또 제11항부터 제20항까지의 합이 310이므로
$S_{20}-S_{10}=310$, $S_{20}-110=310$
$\therefore S_{20}=420$
$\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=420$
$\therefore 2a+19d=42$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=2$, $d=2$
따라서 제21항부터 제30항까지의 합은
$S_{30}-S_{20}=\frac{30\{2\times 2+(30-1)\times 2\}}{2}-420$
$=930-420=510$

8 n각형의 내각의 크기의 합은
$180^\circ(n-2)$
첫째항이 120°, 공차가 5°, 항의 개수가 n인 등차수열의 합은
$\frac{n\{2\times 120^\circ+(n-1)\times 5^\circ\}}{2}$
따라서 $\frac{n\{2\times 120^\circ+(n-1)\times 5^\circ\}}{2}=180^\circ(n-2)$이므로
$n^2-25n+144=0$, $(n-9)(n-16)=0$
$\therefore n=9$ 또는 $n=16$
그런데 $n=16$이면 가장 큰 내각의 크기는
$120^\circ+(16-1)\times 5^\circ=195^\circ$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.
$\therefore n=9$

9 3으로 나누었을 때의 나머지가 2이고 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 수는 3의 배수보다 1이 작고 4의 배수보다 1이 작은 수이다. 즉, 이 수에 1을 더한 수는 3의 배수이면서 동시에 4의 배수인 수이어야 하므로 주어진 조건을 만족하는 수는 12의 배수보다 1이 작은 수이다.
두 자리의 자연수 중에서 12의 배수보다 1이 작은 수를 작은 것부터 차례로 나열하면
11, 23, 35, 47, $\cdots$, 95
이므로 첫째항이 11, 공차가 12인 등차수열이다.
이 수열의 일반항을 a_n이라고 하면
$a_n=11+(n-1)\times 12=12n-1$
제n항을 95라고 하면
$12n-1=95$ $\therefore n=8$
따라서 이 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은
$\frac{8(11+95)}{2}=424$

10 두 곡선에 의하여 잘려진 선분의 길이를 $h(x)$라고 하면
$1\le x\le 2$일 때 $h(x)=x^2-(x-1)^2=2x-1$이므로
$l_1=h(1)=1$
$l_2=h\left(\frac{11}{10}\right)=\frac{6}{5}$
$l_3=h\left(\frac{12}{10}\right)=\frac{7}{5}$
$l_4=h\left(\frac{13}{10}\right)=\frac{8}{5}$
$\vdots$
$l_{11}=h(2)=3$
따라서 l_1, l_2, l_3, $\cdots$, l_{11}은 첫째항이 1, 공차가 $\frac{1}{5}$인 등차수열이다.
$\therefore l_1+l_2+l_3+\cdots+l_{11}=\frac{11(1+3)}{2}=22$

11 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=4+2=6$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=4n^2+2n-\{4(n-1)^2+2(n-1)\}\\&=8n-2 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=8n-2$

$\therefore a_1+a_3+a_5=6+22+38=66$

12 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=2n^2$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=2n^2-2(n-1)^2\\&=4n-2 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n-2$

$\therefore a_{2n}=4\times 2n-2=8n-2$

따라서 구하는 값은 첫째항이 6, 공차가 8인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같으므로

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}$

$=\dfrac{10\{2\times 6+(10-1)\times 8\}}{2}=420$

13 $a_2=2$에서 $ar=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_3:a_5=1:4$에서

$ar^2:ar^4=1:4$, $4ar^2=ar^4$

$\therefore r^2=4$

그런데 $r>0$이므로 $r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$2a=2$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a+r=3$

14 $a_4=4$에서 $ar^3=4$ $\cdots\cdots$ ㉠

$$\begin{aligned}&\frac{a_1+a_4+a_7+a_{10}}{a_2+a_5+a_8+a_{11}}\\&=\frac{a+ar^3+ar^6+ar^9}{ar+ar^4+ar^7+ar^{10}}\\&=\frac{a(1+r^3+r^6+r^9)}{ar(1+r^3+r^6+r^9)}\\&=\frac{1}{r}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$8a=4$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a_{12}=ar^{11}=\dfrac{1}{2}\times 2^{11}=2^{10}$

15 첫째항이 1000, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=1000\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

주어진 수열은 1000부터 시작하여 항의 값이 감소하므로 1보다 크거나 같은 값이 나오는 마지막 항까지의 곱이 최대이다.

따라서 제n항까지 1보다 크거나 같은 수가 나온다고 하면

$1000\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\ge 1$에서

$\dfrac{1000}{3^{n-1}}\ge 1$

$\therefore 3^{n-1}\le 1000$

이때 $3^6=729$, $3^7=2187$이므로

$n-1\le 6$ $\quad\therefore n\le 7$

따라서 제7항까지 1보다 큰 수이므로 구하는 n의 값은 7이다.

16 4, a, b가 이 순서대로 등차수열이므로

$2a=4+b$ $\cdots\cdots$ ㉠

a, b, 4가 이 순서대로 등비수열이므로

$b^2=4a$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b^2=2(4+b)$, $b^2-2b-8=0$

$(b+2)(b-4)=0$

$\therefore b=-2$ 또는 $b=4$

(i) $b=-2$일 때, $a=1$

(ii) $b=4$일 때, $a=4$

그런데 4, a, b는 서로 다른 수이므로

$a=1$, $b=-2$

$\therefore ab=-2$

17 세 수를 a, ar, ar^2 $(ar\ne 0)$이라고 하면

$a+ar+ar^2=7$

$\therefore a(1+r+r^2)=7$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a\times ar\times ar^2=-27$, $(ar)^3=-27$

$\therefore ar=-3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠÷㉡을 하면

$\dfrac{1+r+r^2}{r}=-\dfrac{7}{3}$

$3r^2+10r+3=0$

$(r+3)(3r+1)=0$

$\therefore r=-3$ 또는 $r=-\dfrac{1}{3}$

(i) $r=-3$일 때,

㉡에서 $a=1$이므로 세 수는

1, -3, 9

(ii) $r=-\dfrac{1}{3}$일 때,

㉡에서 $a=9$이므로 세 수는

9, -3, 1

따라서 (i), (ii)에 의하여 가장 큰 수는 9이다.

18 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$

n회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이를 a_n이라고 하면

$a_1=\sqrt{3}\times\frac{3}{4}$

$a_2=\sqrt{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$a_3=\sqrt{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3$

$\vdots$

$\therefore\ a_n=\sqrt{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

따라서 $a=\sqrt{3}$, $r=\frac{3}{4}$이므로

$\frac{r}{a}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

19 주어진 등비수열을 $\{a_n\}$이라고 하면 첫째항이 -3, 공비가 -2이므로

$a_n=-3\times(-2)^{n-1}$

이 수열의 제n항을 384라고 하면

$a_n=-3\times(-2)^{n-1}=384$

$(-2)^{n-1}=-128=(-2)^7$

$n-1=7 \qquad \therefore\ n=8$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\frac{-3\{1-(-2)^8\}}{1-(-2)}=-(1-2^8)$

$=-1+256=255$

20 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=\frac{a(1-r^{20})}{1-r}=15 \qquad \cdots\cdots ㉠$

수열 a_1, a_3, a_5, $\cdots$의 공비는 r^2이므로

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=\frac{a\{1-(r^2)^{10}\}}{1-r^2}$

$=\frac{a(1-r^{20})}{1-r^2}$

$=\frac{a(1-r^{20})}{(1+r)(1-r)}=12 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{15}{1+r}=12$, $1+r=\frac{5}{4}$

$\therefore\ r=\frac{1}{4}$

21 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3\times 2^{1+1}+k=12+k \qquad \cdots\cdots ㉠$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3\times 2^{n+1}+k)-(3\times 2^n+k)$

$=3\times 2^n(2-1)=3\times 2^n \qquad \cdots\cdots ㉡$

따라서 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되려면 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값이 ㉠과 같아야 하므로

$3\times 2=12+k \qquad \therefore\ k=-6$

22 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2^{1+1}-2=2$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)$

$=2^n(2-1)=2^n \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2^n$

$\therefore\ a_1+a_3+a_5+a_7=2+2^3+2^5+2^7$

$=\frac{2\{(2^2)^4-1\}}{2^2-1}$

$=\frac{2(256-1)}{3}=170$

23 매월 초에 2만 원씩 12개월 동안 저금할 때, 12월 말까지 저금액의 원리합계는

$2\times 1.01+2\times 1.01^2+2\times 1.01^3+\cdots+2\times 1.01^{12}$

$=\frac{2\times 1.01\times(1.01^{12}-1)}{1.01-1}=\frac{2.02\times(1.13-1)}{0.01}=26.26$(만 원)

따라서 구하는 원리합계는 262600원이다.

24 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2 : a_3=5 : 2$에서 $(a+d) : (a+2d)=5 : 2$

$5(a+2d)=2(a+d) \qquad \therefore\ 3a+8d=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$a_5=-8$에서 $a+4d=-8 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=16$, $d=-6$

$\therefore\ a_n=16+(n-1)\times(-6)=-6n+22$

$-6n+22<0$에서 $n>\frac{11}{3}=3.\dot{6}$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제4항이다.

$\therefore\ |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{20}|$

$=a_1+a_2+a_3-(a_4+a_5+\cdots+a_{20})$

$=16+10+4+(2+8+\cdots+98)$

$=30+\frac{17(2+98)}{2}=30+850=880$

25 m번째 가로줄은 첫째항이 1, 공차가 $2(m-1)$인 등차수열을 이루므로 m번째 가로줄의 n번째 수는

$1+(n-1)\{2(m-1)\}$

$1+2(m-1)(n-1)=51$에서 $(m-1)(n-1)=25=5^2$

m, n은 자연수이므로 이 식을 만족하는 $m-1$, $n-1$의 값을 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

$m-1$	1	5	5^2
$n-1$	5^2	5	1

따라서 순서쌍 (m, n)은 $(2, 26)$, $(6, 6)$, $(26, 2)$의 3개이므로 51은 3번 나타난다.

26 $g(x)$의 상수항은 $g(0)$이고 $p(0)=-2$이므로

$g(0)=p(p(0))=p(-2)$

따라서 구하는 상수항은

$$p(-2)=(-2)^{100}+(-2)^{99}+\cdots+(-2)-2$$
$$=\{(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{99}+(-2)^{100}\}-2$$
$$=\frac{(-2)\{1-(-2)^{100}\}}{1-(-2)}-2$$
$$=\frac{-2+2^{101}}{3}-2$$
$$=\frac{1}{3}(2^{101}-8)$$

27 각 조에 나누어 준 사탕의 개수가 등차수열을 이루므로 4등, 3등, 2등, 1등을 한 조가 받는 사탕의 개수를 각각

$a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ $(d>0)$ …… (가)

라고 하면 사탕은 모두 60개이므로

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=60$

$4a=60$

$\therefore a=15$ …… (나)

또 1등을 한 조가 받는 사탕의 개수는 4등을 한 조가 받는 사탕의 개수의 4배이므로

$a+3d=4(a-3d)$

$\therefore a=5d$

이때 $a=15$이므로

$15=5d$

$\therefore d=3$ …… (다)

따라서 2등을 한 조가 받는 사탕의 개수는

$a+d=15+3=18$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 각 조가 받는 사탕의 개수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$로 나타낸다.	2점
(나) a의 값을 구한다.	2점
(다) d의 값을 구한다.	2점
(라) 2등을 한 조가 받는 사탕의 개수를 구한다.	1점

다른 풀이

4등, 3등, 2등, 1등을 한 조가 받는 사탕의 개수를 각각

a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ $(d>0)$ …… (가)

라고 하면

$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)=60$

$4a+6d=60$

$\therefore 2a+3d=30$ …… ㉠

또 1등을 한 조가 받는 사탕의 개수는 4등을 한 조가 받는 사탕의 개수의 4배이므로

$a+3d=4a$

$\therefore a=d$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6$, $d=6$ …… (나)

따라서 2등을 한 조가 받는 사탕의 개수는

$a+2d=6+2\times6=18$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 각 조가 받는 사탕의 개수를 a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$로 나타낸다.	2점
(나) a, d의 값을 구한다.	4점
(다) 2등을 한 조가 받는 사탕의 개수를 구한다.	1점

28 (1) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_1+a_3+a_5=a+ar^2+ar^4$

$=a(1+r^2+r^4)=21$ …… ㉠

$a_2+a_4+a_6=ar+ar^3+ar^5$

$=ar(1+r^2+r^4)=42$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r=2$ …… (가)

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$a(1+2^2+2^4)=21$

$21a=21$

$\therefore a=1$ …… (나)

따라서 주어진 등비수열의 일반항은

$a_n=2^{n-1}$ …… (다)

(2) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$S_8=\frac{1\times(2^8-1)}{2-1}$

$=2^8-1=255$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 공비를 구한다.	2점
(나) 첫째항을 구한다.	2점
(다) 일반항 a_n을 구한다.	1점
(라) S_8의 값을 구한다.	2점

29 주어진 등비수열의 공비를 r라고 하면 첫째항이 2, 제12항이 4이므로

$2r^{11}=4$

$\therefore r^{11}=2$ …… (가)

$x_1x_2x_3\cdots x_{10}$

$=2r\times2r^2\times2r^3\times\cdots\times2r^{10}$

$=2^{10}\times r^{1+2+3+\cdots+10}$

이때 $1+2+3+\cdots+10$은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$1+2+3+\cdots+10=\frac{10(1+10)}{2}=55$

$\therefore x_1x_2x_3\cdots x_{10}=2^{10}\times r^{55}$

$=2^{10}\times(r^{11})^5$

$=2^{10}\times2^5=2^{15}$ …… (나)

$\therefore A=15$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) r^{11}의 값을 구한다.	2점
(나) $x_1x_2x_3\cdots x_{10}$의 값을 구한다.	3점
(다) A의 값을 구한다.	1점

16강 수열의 합

확인 문제
p. 68

1 (1) $\sum_{k=1}^{5} k^2$ (2) $\sum_{k=1}^{10} 2^k$ (3) $\sum_{k=1}^{6} 3$

2 (1) $4+8+12+\cdots+40$
(2) $3^2+3^3+3^4+\cdots+3^7$

3 (1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k=\alpha+\beta$
(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k=\alpha-\beta$
(3) $\sum_{k=1}^{n}3a_k=3\sum_{k=1}^{n}a_k=3\alpha$
(4) $\sum_{k=1}^{n}4=4n$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제
p. 69

1 (1) 수열 $-1, 1, 3, \cdots, 19$는 첫째항이 -1, 공차가 2인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라고 하면
$a_n=-1+(n-1)\times2=2n-3$
$2n-3=19$에서 $n=11$
$\therefore -1+1+3+\cdots+19=\sum_{k=1}^{11}(2k-3)$

(2) 수열 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{1024}$은 첫째항이 $-\frac{1}{2}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 일반항을 a_n이라고 하면
$a_n=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$
$\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1024}$에서 $n=10$
$\therefore -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1024}=\sum_{k=1}^{10}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$

2 (1) 수열 $3, 6, 9, \cdots, 27$은 첫째항이 3, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라고 하면
$a_n=3+(n-1)\times3=3n$
$3n=27$에서 $n=9$
$\therefore \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{27}=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{3k}$

(2) 수열 $2, 5, 8, \cdots, 20$은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라고 하면
$a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$
$3n-1=20$에서 $n=7$
$\therefore 2^2+5^2+8^2+\cdots+20^2=\sum_{k=1}^{7}(3k-1)^2$

3 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$
$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$
$=\sum_{k=1}^{2n}a_k=n^2$
이므로 $\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{2\times5}a_k=5^2=25$

4 $\sum_{k=1}^{n}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})$
$=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})$
$=\sum_{k=1}^{3n}a_k=5n$
이므로
$\sum_{k=1}^{30}a_k=\sum_{k=1}^{3\times10}a_k=5\times10=50$

5 (1) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+1)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$
$=2\times5+1\times10=20$
(2) $\sum_{k=1}^{10}(3a_k-4b_k)=3\sum_{k=1}^{10}a_k-4\sum_{k=1}^{10}b_k$
$=3\times5-4\times(-2)=23$

6 (1) $\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{a_k}{2}-\frac{b_k}{3}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}a_k-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{20}b_k$
$=\frac{1}{2}\times20-\frac{1}{3}\times30=0$
(2) $\sum_{k=1}^{20}(-3a_k+b_k-2)=-3\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=1}^{20}b_k-\sum_{k=1}^{20}2$
$=-3\times20+30-2\times20=-70$

7 (1) $\sum_{k=1}^{5}(2^k+3^k)=\sum_{k=1}^{5}2^k+\sum_{k=1}^{5}3^k$
$=(2+2^2+2^3+2^4+2^5)$
$+(3+3^2+3^3+3^4+3^5)$
$=\frac{2(2^5-1)}{2-1}+\frac{3(3^5-1)}{3-1}$
$=62+363=425$
(2) $\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{11}}\right)=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{2^{11}}$
$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^8}\right)+\frac{1}{2^{11}}\times8$
$=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^8}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2^{11}}\times2^3$
$=1-\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^8}=1$

8 (1) $\sum_{k=1}^{4}(5^k+4)=\sum_{k=1}^{4}5^k+\sum_{k=1}^{4}4$
$=(5+5^2+5^3+5^4)+4\times4$
$=\frac{5(5^4-1)}{5-1}+16$
$=780+16=796$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{3^k-2^{k+1}}{6^k}=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k-2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^k$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}\right)-2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{10}}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-2\times\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)-\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)=\frac{1}{3^{10}}-\frac{1}{2^{10}}$$

17강 자연수의 거듭제곱의 합

확인 문제 p. 70

1 (1) $1+2+3+\cdots+8=\displaystyle\sum_{k=1}^{8}k=\frac{8\times9}{2}=36$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\times11\times21}{6}=385$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+7^3=\displaystyle\sum_{k=1}^{7}k^3=\left(\frac{7\times8}{2}\right)^2=784$

2 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$

$$=\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{14}}-\frac{1}{15}\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{15}=\frac{4}{15}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{21}(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3})$

$=(\cancel{\sqrt{5}}-2)+(\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{5}})+(\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{6}})+\cdots+(5-2\cancel{\sqrt{6}})$

$=5-2=3$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 71

1 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(3k+2)=3\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}2$

$$=3\times\frac{10\times11}{2}+2\times10=185$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(k-2)(k+2)=\sum_{k=1}^{8}(k^2-4)=\sum_{k=1}^{8}k^2-\sum_{k=1}^{8}4$

$$=\frac{8\times9\times17}{6}-4\times8=172$$

2 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k+1)(3k-2)=\sum_{k=1}^{5}(6k^2-k-2)$

$$=6\sum_{k=1}^{5}k^2-\sum_{k=1}^{5}k-\sum_{k=1}^{5}2$$

$$=6\times\frac{5\times6\times11}{6}-\frac{5\times6}{2}-2\times5$$

$=305$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(k+1)(k^2-k+1)=\sum_{k=1}^{6}(k^3+1)$

$$=\sum_{k=1}^{6}k^3+\sum_{k=1}^{6}1$$

$$=\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2+1\times6$$

$=447$

3 (1) $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=n^2(n+2)$

$n^2(n+2)=20^2\times22$에서 $n=20$

$\therefore 1\times3+2^2\times4+3^2\times5+\cdots+20^2\times22$

$$=\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}k^2(k+2)$$

$$=\sum_{k=1}^{20}(k^3+2k^2)$$

$$=\sum_{k=1}^{20}k^3+2\sum_{k=1}^{20}k^2=\left(\frac{20\times21}{2}\right)^2+2\times\frac{20\times21\times41}{6}$$

$=49840$

4 (1) $1+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\times\frac{n(n+1)}{2}+1\times n$$

$$=\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=n(n+1)^2$

$n(n+1)^2=10\times11^2$에서 $n=10$

$\therefore 1\times2^2+2\times3^2+3\times4^2+\cdots+10\times11^2$

$$=\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}k(k+1)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(k^3+2k^2+k)=\sum_{k=1}^{10}k^3+2\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k$$

$$=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+2\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}$$

$=3850$

5 (1) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{21\times22}$에서 $n=20$

$\therefore \frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{21\times22}$

$=\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)$

$+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{21}}-\frac{1}{22}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{22}=\frac{5}{11}$

6 (1) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{n}{2n+1}$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{88\times91}$에서 $n=30$

$\therefore \frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{88\times91}$

$=\sum_{k=1}^{30}a_k=\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{10}}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{88}}-\frac{1}{91}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{91}\right)=\frac{30}{91}$

7 (1) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\cancel{\sqrt{2}}-1)+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{2}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$

$=\sqrt{n+1}-1$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$

$\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{47}+7}$에서 $n=24$

$\therefore \frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{47}+7}$

$=\sum_{k=1}^{24}a_k=\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{24}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{24}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=\frac{1}{2}\{(\cancel{\sqrt{3}}-1)+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}})$

$+\cdots+(7-\cancel{\sqrt{47}})\}$

$=\frac{1}{2}(7-1)=3$

8 (1) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}$

$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$

$=(\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{2})+(\cancel{2}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{2})$

$+\cdots+(\sqrt{n+2}-\cancel{\sqrt{n+1}})$

$=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=\frac{1}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{4n+1}}$

$\frac{1}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{4n+1}}=\frac{1}{\sqrt{77}+9}$에서 $n=20$

$\therefore \frac{1}{1+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+3}+\frac{1}{3+\sqrt{13}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{77}+9}$

$=\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{\sqrt{4k-3}+\sqrt{4k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{20}\frac{\sqrt{4k-3}-\sqrt{4k+1}}{(\sqrt{4k-3}+\sqrt{4k+1})(\sqrt{4k-3}-\sqrt{4k+1})}$

$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}(\sqrt{4k+1}-\sqrt{4k-3})$

$=\frac{1}{4}\{(\cancel{\sqrt{5}}-1)+(\cancel{3}-\cancel{\sqrt{5}})+(\cancel{\sqrt{13}}-\cancel{3})$

$+\cdots+(9-\cancel{\sqrt{77}})\}$

$=\frac{1}{4}(9-1)=2$

18강 수학적 귀납법

확인 문제 p. 72

1 $a_1=1$이고, $a_{n+1}=3a_n$에서

$a_2=3a_1=3\times1=3$

$a_3=3a_2=3\times3=9$

$a_4=3a_3=3\times9=27$

$a_5=3a_4=3\times27=81$

따라서 첫째항부터 제5항까지는

1, 3, 9, 27, 81

2 (가) 2 (나) 2^{k+1} (다) 2^{k+2} (라) $k+1$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 73

1 (1) $a_1=2$이고, $a_{n+1}=a_n+2n-1$에서

$a_2=a_1+2\times1-1$

$=2+2-1=3$

$a_3=a_2+2\times2-1$

$=3+4-1=6$

$a_4=a_3+2\times3-1$

$=6+6-1=11$

$a_5=a_4+2\times4-1$

$=11+8-1=18$

(2) $a_1=1$이고, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$에서

$a_2=\dfrac{a_1}{3a_1+1}=\dfrac{1}{3+1}=\dfrac{1}{4}$

$a_3=\dfrac{a_2}{3a_2+1}=\dfrac{\frac{1}{4}}{3\times\frac{1}{4}+1}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}=\dfrac{1}{7}$

$a_4=\dfrac{a_3}{3a_3+1}=\dfrac{\frac{1}{7}}{3\times\frac{1}{7}+1}=\dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{10}{7}}=\dfrac{1}{10}$

$a_5=\dfrac{a_4}{3a_4+1}=\dfrac{\frac{1}{10}}{3\times\frac{1}{10}+1}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{13}{10}}=\dfrac{1}{13}$

2 (1) $a_1=-3$이고, $a_{n+1}=2a_n+1$에서

$a_2=2a_1+1=2\times(-3)+1$

$=-6+1=-5$

$a_3=2a_2+1=2\times(-5)+1$

$=-10+1=-9$

$a_4=2a_3+1=2\times(-9)+1$

$=-18+1=-17$

(2) $a_1=2$이고, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+1}$에서

$a_2=\dfrac{a_1}{1+1}=\dfrac{2}{2}=1$

$a_3=\dfrac{a_2}{2+1}=\dfrac{1}{3}$

$a_4=\dfrac{a_3}{3+1}=\dfrac{\frac{1}{3}}{4}=\dfrac{1}{12}$

3 (1) $a_{n+1}=a_n+6$에서 주어진 수열은 공차가 6인 등차수열이다.

이때 $a_1=-2$이므로

$a_n=-2+(n-1)\times6=6n-8$

$\therefore\ a_{20}=6\times20-8=112$

(2) $a_{n+1}=\dfrac{1}{5}a_n$에서 주어진 수열은 공비가 $\dfrac{1}{5}$인 등비수열이다.

이때 $a_1=1$이므로

$a_n=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_{20}=\dfrac{1}{5^{19}}$

4 (1) $a_{n+1}=a_n-3$에서 주어진 수열은 공차가 -3인 등차수열이다.

이때 $a_1=4$이므로

$a_n=4+(n-1)\times(-3)=-3n+7$

$\therefore\ a_{30}=-3\times30+7=-83$

(2) $a_{n+1}=2a_n$에서 주어진 수열은 공비가 2인 등비수열이다.

이때 $a_1=-2$이므로

$a_n=-2\times2^{n-1}=-2^n$

$\therefore\ a_{30}=-2^{30}$

5 (1) a_1은 처음 수조에 들어 있는 물의 양 100 L의 절반을 버리고 30 L의 물을 새로 넣었을 때, 수조에 남아 있는 물의 양이므로

$a_1=\dfrac{100}{2}+30=80$

(2) 시행을 n번 반복한 후 수조에 남아 있는 물의 양 a_n L의 절반을 버리고 30 L의 물을 새로 넣었을 때, 수조에 남아 있는 물의 양이 a_{n+1} L이므로

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+30\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

6 (1) a_1은 지상 10 m 높이에서 떨어뜨린 공이 떨어진 거리의 $\dfrac{4}{5}$배만큼 수직 방향으로 튀어 올랐을 때의 공의 높이이므로

$a_1=10\times\dfrac{4}{5}=8$

(2) n번째 튀어 올랐을 때의 공의 높이 a_n m에서 떨어진 공이 떨어진 거리의 $\dfrac{4}{5}$배만큼 튀어 올랐을 때의 공의 높이가 a_{n+1} m이므로

$a_{n+1}=\dfrac{4}{5}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

7 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1^2=1$

(우변)$=\dfrac{1\times2\times3}{6}=1$

따라서 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$=\dfrac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$=\dfrac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}$

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 등식 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

8 (i) $n=4$일 때,

(좌변)$=1\times2\times3\times4=24$

(우변)$=2^4=16$

따라서 $24>16$이므로 $n=4$일 때 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k\,(k\geq4)$일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1\times2\times3\times\cdots\times k>2^k$

위의 부등식의 양변에 $k+1$을 곱하면

$1\times2\times3\times\cdots\times k\times(k+1)>2^k(k+1)$

그런데 $k+1\geq5$이므로

$2^k(k+1)>2^k\times2=2^{k+1}$

$\therefore\ 1\times2\times3\times\cdots\times(k+1)>2^{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 부등식 ㉠은 $n\geq4$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

계산력 다지기 p. 74~75

1 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(4a_k-3)=4\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}3$

$=4\times6-3\times10=-6$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{a_k}{3}+\frac{b_k}{2}\right)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}a_k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=\dfrac{1}{3}\times6+\dfrac{1}{2}\times(-4)=0$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2a_k-5b_k+3)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-5\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}3$

$=2\times6-5\times(-4)+3\times10$

$=62$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(-3a_k+6b_k+4)=-3\sum_{k=1}^{10}a_k+6\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}4$

$=-3\times6+6\times(-4)+4\times10$

$=-2$

2 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(7^k-5)=\sum_{k=1}^{4}7^k-\sum_{k=1}^{4}5$

$=(7+7^2+7^3+7^4)-5\times4$

$=\dfrac{7(7^4-1)}{7-1}-20=2780$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{2}{3^k}+\frac{1}{3^{11}}\right)=2\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{3^k}+\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{3^{11}}$

$=2\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{3^9}\right)+\dfrac{1}{3^{11}}\times9$

$=2\times\dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^9}\right)}{1-\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{3^{11}}\times3^2$

$=1-\dfrac{1}{3^9}+\dfrac{1}{3^9}=1$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(5^k+2^k)=\sum_{k=1}^{5}5^k+\sum_{k=1}^{5}2^k$

$=(5+5^2+5^3+5^4+5^5)$

$+(2+2^2+2^3+2^4+2^5)$

$=\dfrac{5(5^5-1)}{5-1}+\dfrac{2(2^5-1)}{2-1}$

$=3967$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{2^{k+2}-5^k}{10^k}=4\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^k-\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$=4\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}+\cdots+\dfrac{1}{5^{10}}\right)$

$-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{10}}\right)$

$=4\times\dfrac{\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5^{10}}\right)}{1-\frac{1}{5}}-\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)}{1-\frac{1}{2}}$

$=\left(1-\dfrac{1}{5^{10}}\right)-\left(1-\dfrac{1}{2^{10}}\right)$

$=\dfrac{1}{2^{10}}-\dfrac{1}{5^{10}}$

3 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2k-5)=2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}5$

$=2\times\dfrac{10\times11}{2}-5\times10$

$=60$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(3-k)(3+k)=\sum_{k=1}^{8}(9-k^2)=\sum_{k=1}^{8}9-\sum_{k=1}^{8}k^2$

$=9\times8-\dfrac{8\times9\times17}{6}$

$=-132$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(3k+2)(2k-1)=\sum_{k=1}^{6}(6k^2+k-2)$

$$=6\sum_{k=1}^{6}k^2+\sum_{k=1}^{6}k-\sum_{k=1}^{6}2$$
$$=6\times\frac{6\times7\times13}{6}+\frac{6\times7}{2}-2\times6$$
$$=555$$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(k-1)(k^2+k+1)=\sum_{k=1}^{6}(k^3-1)=\sum_{k=1}^{6}k^3-\sum_{k=1}^{6}1$

$$=\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2-1\times6=435$$

4 (1) $1\times4+2\times5+3\times6+\cdots+n(n+3)$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(k+3)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

(2) $1^2+4^2+7^2+\cdots+(3n-2)^2$

$$=\sum_{k=1}^{n}(3k-2)^2=\sum_{k=1}^{n}(9k^2-12k+4)$$
$$=9\sum_{k=1}^{n}k^2-12\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4$$
$$=9\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-12\times\frac{n(n+1)}{2}+4n$$
$$=\frac{n(6n^2-3n-1)}{2}$$

(3) $1\times1+2^2\times3+3^2\times5+\cdots+10^2\times19$

$$=\sum_{k=1}^{10}k^2(2k-1)=\sum_{k=1}^{10}(2k^3-k^2)$$
$$=2\sum_{k=1}^{10}k^3-\sum_{k=1}^{10}k^2$$
$$=2\times\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2-\frac{10\times11\times21}{6}$$
$$=5665$$

(4) $1\times3^2+2\times5^2+3\times7^2+\cdots+10\times21^2$

$$=\sum_{k=1}^{10}k(2k+1)^2=\sum_{k=1}^{10}(4k^3+4k^2+k)$$
$$=4\sum_{k=1}^{10}k^3+4\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=4\times\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+4\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}$$
$$=13695$$

5 (1) $\displaystyle\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\cdots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+3)(k+4)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{6}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)$$
$$+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n+3}}-\frac{1}{n+4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}=\frac{n}{4n+16}$$

(2) $\displaystyle\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{10}}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{3n-2}}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$$

(3) $\displaystyle\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{29\times31}$

$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{29}}-\frac{1}{31}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{31}\right)=\frac{15}{31}$$

(4) $\displaystyle\frac{1}{1\times5}+\frac{1}{5\times9}+\frac{1}{9\times13}+\cdots+\frac{1}{33\times37}$

$$=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{13}}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{33}}-\frac{1}{37}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{37}\right)=\frac{9}{37}$$

6 (1) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2})$$
$$=(\cancel{2}-\sqrt{3})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{2})+(\sqrt{6}-\cancel{\sqrt{5}})$$
$$+\cdots+(\sqrt{n+3}-\cancel{\sqrt{n+2}})$$
$$=\sqrt{n+3}-\sqrt{3}$$

(2) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+3}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+3}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k+3}}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+3})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k+3})}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+3}-\sqrt{2k+1})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\cancel{\sqrt{5}}-\sqrt{3})+(\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}})+(\cancel{3}-\cancel{\sqrt{7}})$$
$$+\cdots+(\sqrt{2n+3}-\cancel{\sqrt{2n+1}})\}$$
$$=\frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{3}}{2}$$

(3) $\frac{1}{1+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+4}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{29}+11}$

$=\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{5k-4}+\sqrt{5k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{24}\frac{\sqrt{5k-4}-\sqrt{5k+1}}{(\sqrt{5k-4}+\sqrt{5k+1})(\sqrt{5k-4}-\sqrt{5k+1})}$

$=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{24}(\sqrt{5k+1}-\sqrt{5k-4})$

$=\frac{1}{5}\{(\cancel{\sqrt{6}}-1)+(\cancel{\sqrt{11}}-\cancel{\sqrt{6}})+(\cancel{4}-\cancel{\sqrt{11}})$
$+\cdots+(11-\cancel{2\sqrt{29}})\}$

$=\frac{1}{5}(11-1)=2$

(4) $\frac{1}{\sqrt{3}+3}+\frac{1}{3+\sqrt{15}}+\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{21}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{141}+7\sqrt{3}}$

$=\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{6k-3}+\sqrt{6k+3}}$

$=\sum_{k=1}^{24}\frac{\sqrt{6k-3}-\sqrt{6k+3}}{(\sqrt{6k-3}+\sqrt{6k+3})(\sqrt{6k-3}-\sqrt{6k+3})}$

$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{24}(\sqrt{6k+3}-\sqrt{6k-3})$

$=\frac{1}{6}\{(\cancel{3}-\sqrt{3})+(\cancel{\sqrt{15}}-\cancel{3})+(\cancel{\sqrt{21}}-\cancel{\sqrt{15}})$
$+\cdots+(7\sqrt{3}-\cancel{\sqrt{141}})\}$

$=\frac{1}{6}(7\sqrt{3}-\sqrt{3})=\sqrt{3}$

7 (1) $a_2=a_1+3\times1=2+3=5$
$a_3=a_2+3\times2=5+6=11$
$\therefore\ a_4=a_3+3\times3=11+9=20$

(2) $a_2=3a_1+2=3\times(-3)+2=-7$
$a_3=3a_2+2=3\times(-7)+2=-19$
$\therefore\ a_4=3a_3+2=3\times(-19)+2=-55$

(3) $a_2=\frac{a_1}{1-5}=-\frac{1}{4}$

$a_3=\frac{a_2}{2-5}=\frac{-\frac{1}{4}}{-3}=\frac{1}{12}$

$\therefore\ a_4=\frac{a_3}{3-5}=\frac{\frac{1}{12}}{-2}=-\frac{1}{24}$

(4) $a_2=\frac{a_1}{2a_1-1}=\frac{2}{2\times2-1}=\frac{2}{3}$

$a_3=\frac{a_2}{2a_2-1}=\frac{\frac{2}{3}}{2\times\frac{2}{3}-1}=2$

$\therefore\ a_4=\frac{a_3}{2a_3-1}=\frac{2}{2\times2-1}=\frac{2}{3}$

8 (1) 주어진 수열은 첫째항이 -1, 공차가 4인 등차수열이므로
$a_n=-1+(n-1)\times4=4n-5$
$\therefore\ a_{20}=4\times20-5=75$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 2, 공차가 -7인 등차수열이므로
$a_n=2+(n-1)\times(-7)=-7n+9$
$\therefore\ a_{20}=-7\times20+9=-131$

(3) 주어진 수열은 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열이므로
$a_n=3\times3^{n-1}=3^n$　　$\therefore\ a_{20}=3^{20}$

(4) 주어진 수열은 첫째항이 -5, 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비수열이므로
$a_n=-5\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=-\frac{1}{5^{n-2}}$　　$\therefore\ a_{20}=-\frac{1}{5^{18}}$

16~18강 족집게 기출문제 p. 76~79

1 ③	**2** 47	**3** ⑤	**4** ①	**5** ④
6 ④	**7** ③	**8** ③	**9** ②	**10** ③
11 ②	**12** ④	**13** ③	**14** $\frac{11}{6}$	**15** ①
16 ②	**17** ⑤	**18** ④	**19** ②	
20 (가) $(k+1)(k+2)$	(나) $\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$	(다) $k+1$		
21 (가) $\frac{5}{4}$	(나) $\frac{1}{(k+1)^2}$	(다) $2-\frac{1}{k+1}$		**22** ③
23 120	**24** ⑤	**25** -4	**26** 896	
27 (1) $l_n=(n-2)\pi$　(2) 36π				

1 ㄱ. $\sum_{k=1}^{2n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n}$
$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$
$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{2n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

ㄴ. $\sum_{k=m}^{n}a_k=a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n$
$\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{m}a_k=(a_1+a_2+\cdots+a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n)$
$-(a_1+a_2+\cdots+a_m)$
$=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n$
$\therefore\ \sum_{k=m}^{n}a_k\neq\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{m}a_k$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n}k(k-1)=1\times0+2\times1+3\times2+\cdots+n(n-1)$
$\sum_{k=0}^{n-1}k(k+1)=0\times1+1\times2+2\times3+\cdots+(n-1)n$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}k(k-1)=\sum_{k=0}^{n-1}k(k+1)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2 $\sum_{k=1}^{9}a_{k+1}-\sum_{k=2}^{10}a_{k-1}$
$=(a_2+a_3+\cdots+a_{10})-(a_1+a_2+\cdots+a_9)$
$=a_{10}-a_1=50-3=47$

3 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n 중 0, 1, 2의 개수를 각각 x, y, z $(x+y+z=n)$라고 하면

$\sum_{k=1}^{n} a_k = 0\times x + 1\times y + 2\times z = 16$

$\therefore\ y+2z=16$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0\times x + 1^2\times y + 2^2\times z = 26$

$\therefore\ y+4z=26$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad y=6,\ z=5$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} a_k^4 = 0\times x + 1^4\times y + 2^4\times z$$
$$= y+16z = 6+16\times 5 = 86$$

4
$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-1)^2 = \sum_{k=1}^{10}(4a_k^2-4a_k+1)$$
$$=4\sum_{k=1}^{10}a_k^2 - 4\sum_{k=1}^{10}a_k + \sum_{k=1}^{10}1$$
$$=4\times 9 - 4\times 3 + 10 = 34$$

5
$$\sum_{k=1}^{n}(2a_k-3b_k+4) = 2\sum_{k=1}^{n}a_k - 3\sum_{k=1}^{n}b_k + \sum_{k=1}^{n}4$$
$$=2\times 10n - 3\times 5n + 4n = 9n$$
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}(2a_k-3b_k+4) = 9\times 10 = 90$$

6
$\sum_{k=1}^{15} a_{2k} = a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{30} = 20$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{k=1}^{15} a_{2k-1} = a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{29} = 30$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30}=50 \qquad \therefore\ \sum_{k=1}^{30}a_k = 50$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{30}(2a_k+1) = 2\sum_{k=1}^{30}a_k + \sum_{k=1}^{30}1 = 2\times 50 + 30 = 130$$

7 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면 $\quad a_n = 1+2^n$

따라서 주어진 수열의 모든 항의 합은

$$\sum_{k=1}^{10}(1+2^k) = \sum_{k=1}^{10}1 + \sum_{k=1}^{10}2^k = 10 + \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} = 2056$$

8
$$\sum_{k=1}^{n-1}(4k-3) = 4\sum_{k=1}^{n-1}k - \sum_{k=1}^{n-1}3$$
$$=4\times\frac{n(n-1)}{2} - 3(n-1) = 2n^2-5n+3$$

$2n^2-5n+3=153$에서 $\quad 2n^2-5n-150=0$

$(2n+15)(n-10)=0 \qquad \therefore\ n=-\frac{15}{2}$ 또는 $n=10$

그런데 n은 자연수이므로 $\quad n=10$

9
$$\sum_{k=5}^{10}k^3 - \sum_{k=10}^{15}k^2$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{10}k^3 - \sum_{k=1}^{4}k^3\right) - \left(\sum_{k=1}^{15}k^2 - \sum_{k=1}^{9}k^2\right)$$
$$=\left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2 - \left(\frac{4\times 5}{2}\right)^2 - \frac{15\times 16\times 31}{6} + \frac{9\times 10\times 19}{6}$$
$$=1970$$

10 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n+b_n=-n,\ a_nb_n=-2n$이므로

$$\begin{aligned}(a_n^2-1)(b_n^2-1) &= (a_nb_n)^2 - (a_n^2+b_n^2) + 1\\ &= (a_nb_n)^2 - \{(a_n+b_n)^2 - 2a_nb_n\} + 1\\ &= (-2n)^2 - \{(-n)^2 - 2\times(-2n)\} + 1\\ &= 3n^2-4n+1\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{6}(a_k^2-1)(b_k^2-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{6}(3k^2-4k+1) = 3\sum_{k=1}^{6}k^2 - 4\sum_{k=1}^{6}k + \sum_{k=1}^{6}1$$
$$=3\times\frac{6\times 7\times 13}{6} - 4\times\frac{6\times 7}{2} + 6 = 195$$

11 위에서 n번째 줄에 있는 n개의 수의 합을 a_n이라고 하면

$$a_n = 1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$$

따라서 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^{10}a_k = \sum_{k=1}^{10}\frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{10}k^2 + \sum_{k=1}^{10}k\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\times 11\times 21}{6} + \frac{10\times 11}{2}\right) = 220$$

12
$$\sum_{k=1}^{8}(k+n) = \sum_{k=1}^{8}k + \sum_{k=1}^{8}n = \frac{8\times 9}{2} + 8n = 36+8n$$
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{5}\left\{\sum_{k=1}^{8}(k+n)\right\} = \sum_{n=1}^{5}(36+8n) = \sum_{n=1}^{5}36 + 8\sum_{n=1}^{5}n$$
$$=36\times 5 + 8\times\frac{5\times 6}{2} = 300$$

13 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}a_k = n^2-n$$

(i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=0$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2-n) - \{(n-1)^2-(n-1)\}$$
$=2n-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $a_1=0$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-2$

따라서 $a_{2k+1}=2(2k+1)-2=4k$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k+1} = \sum_{k=1}^{10}4k = 4\sum_{k=1}^{10}k = 4\times\frac{10\times 11}{2} = 220$$

14 수열 1, $\frac{1}{1+2}$, $\frac{1}{1+2+3}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore\ (\text{주어진 식}) = \sum_{k=1}^{11}a_k = \sum_{k=1}^{11}\frac{2}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{11}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{11}}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{12}\right) = \frac{11}{6}$$

15 $\displaystyle\sum_{k=1}^{19}\frac{5}{\sqrt{5k-1}+\sqrt{5k+4}}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{19}\frac{5(\sqrt{5k-1}-\sqrt{5k+4})}{(\sqrt{5k-1}+\sqrt{5k+4})(\sqrt{5k-1}-\sqrt{5k+4})}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{19}(\sqrt{5k+4}-\sqrt{5k-1})$

$=(\cancel{3}-2)+(\cancel{\sqrt{14}}-\cancel{3})+(\cancel{\sqrt{19}}-\cancel{\sqrt{14}})+\cdots+(3\sqrt{11}-\cancel{\sqrt{94}})$

$=3\sqrt{11}-2$

따라서 $a=11$, $b=2$이므로 $a+b=13$

16 $a_1=1$이고, $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$에서

$a_3=a_1+a_2=1+a_2$

$a_4=a_2+a_3=a_2+(1+a_2)=2a_2+1$

$a_5=a_3+a_4=(1+a_2)+(2a_2+1)=3a_2+2$

이때 $3a_2+2=5$이므로

$a_2=1$ $\therefore a_4=3$

$\therefore a_6=a_4+a_5=3+5=8$

17 $a_1=\frac{1}{4}$이고, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

따라서 $a_n=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$이므로

$a_{24}=\left(\frac{1}{2}\right)^{25}=\frac{1}{2^{25}}$ $\therefore k=25$

18 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$에서 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2=2a_1$에서

$a+d=2a$ $\therefore d=a$ …… ㉠

$a_{10}=50$에서

$a+9d=50$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a+9a=50$ $\therefore a=5$

㉠에서 $d=5$

$\therefore a_6=a+5d=5+5\times5=30$

19 $a_1=4$

$a_2=a_1+\underline{6}$

$a_3=a_2+\underline{8}$

$a_4=a_3+\underline{10}$

첫째항이 6, 공차가 2인 등차수열이므로 $6+(n-1)\times2=2n+4$

$\vdots$

$a_{n+1}=a_n+\underline{2n+4}$

따라서 $f(n)=2n+4$이므로

$f(10)=2\times10+4=24$

20 (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=1\times2=2$, (우변)$=\frac{1\times2\times3}{3}=2$

이므로 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)$

$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

위의 식의 양변에 $\boxed{(k+1)(k+2)}$를 더하면

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)+\boxed{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+\boxed{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$

$=\boxed{\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}}$

따라서 $n=\boxed{k+1}$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 등식 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$\therefore$ (가) $(k+1)(k+2)$

(나) $\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

(다) $k+1$

21 (ⅰ) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\boxed{\frac{5}{4}}$,

(우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서 $\frac{5}{4}<\frac{3}{2}$이므로 $n=2$일 때 부등식 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k\geq2)$일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$

위의 식의 양변에 $\boxed{\frac{1}{(k+1)^2}}$을 더하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\boxed{\frac{1}{(k+1)^2}}<2-\frac{1}{k}+\boxed{\frac{1}{(k+1)^2}}$

이때 $2-\frac{1}{k}+\boxed{\frac{1}{(k+1)^2}}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{k(k+1)}$이고

$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{k(k+1)}=2-\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\boxed{2-\frac{1}{k+1}}$

$\therefore 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}<\boxed{2-\frac{1}{k+1}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 부등식 ㉠은 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$\therefore$ (가) $\frac{5}{4}$

(나) $\frac{1}{(k+1)^2}$

(다) $2-\frac{1}{k+1}$

22 1보다 큰 자연수 n으로 나누었을 때의 몫과 나머지가 서로 같은 자연수는

$kn+k\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$

이므로 모두 $(n-1)$개이다.

$$\therefore\ a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(kn+k)=\sum_{k=1}^{n-1}k(n+1)=(n+1)\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=(n+1)\times\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)(n+1)}{2}$$

$a_n<300$에서 $\dfrac{n(n-1)(n+1)}{2}<300$

$n(n-1)(n+1)<600$

이때 $7\times8\times9=504,\ 8\times9\times10=720$이므로

$1<n\le8$

따라서 구하는 자연수 n의 최댓값은 8이다.

23 $f(x)=n$에서 $\sqrt{x}$의 정수 부분이 n이므로

$n\le\sqrt{x}<n+1$

이때 $\sqrt{x}>0,\ n>0$이므로 $n^2\le x<(n+1)^2$

이 부등식을 만족하는 자연수 x의 개수는

$(n+1)^2-n^2=2n+1$

따라서 $a_n=2n+1$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$$

$$=2\times\frac{10\times11}{2}+10=120$$

24 n회 시행 후 만들어진 삼각형 중에서 흰색 삼각형의 개수를 a_n, 검은색 삼각형의 개수를 b_n이라고 하면

$a_n+b_n=4^n \qquad \therefore\ b_n=4^n-a_n$

n회 시행 후 만들어진 흰색 삼각형 1개에 대하여 $(n+1)$회 시행하였을 때 만들어지는 흰색 삼각형은 3개이고, n회 시행 후 만들어진 검은색 삼각형 1개에 대하여 $(n+1)$회 시행하였을 때 만들어지는 흰색 삼각형은 1개이므로

$a_{n+1}=3a_n+b_n=3a_n+(4^n-a_n)$

$\therefore\ a_{n+1}=2a_n+4^n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이때 $a_1=3,\ a_2=10$이므로

$a_3=2a_2+4^2=2\times10+16=36$

$a_4=2a_3+4^3=2\times36+64=136$

$a_5=2a_4+4^4=2\times136+256=528$

따라서 구하는 흰색 삼각형의 개수는 528이다.

25 $\displaystyle\sum_{k=1}^{80}\log_3\left(1-\frac{1}{1+k}\right)$

$$=\sum_{k=1}^{80}\log_3\frac{k}{1+k}$$

$$=\log_3\frac{1}{2}+\log_3\frac{2}{3}+\log_3\frac{3}{4}+\cdots+\log_3\frac{80}{81} \qquad \cdots\cdots\ (가)$$

$$=\log_3\left(\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{80}}{81}\right)$$

$$=\log_3\frac{1}{81} \qquad \cdots\cdots\ (나)$$

$$=\log_3 3^{-4}=-4 \qquad \cdots\cdots\ (다)$$

채점 기준	배점
(가) 주어진 식을 $\sum$를 사용하지 않은 합의 꼴로 나타낸다.	2점
(나) 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.	2점
(다) 주어진 식의 값을 구한다.	1점

26 근호 안의 식을 정리하면

$k(k+1)(k+2)(k+3)+1$

$=\{k(k+3)\}\{(k+1)(k+2)\}+1$

$=(k^2+3k)(k^2+3k+2)+1$

$=(k^2+3k)^2+2(k^2+3k)+1$

$=(k^2+3k+1)^2 \qquad \cdots\cdots\ (가)$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{12}\sqrt{k(k+1)(k+2)(k+3)+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{12}(k^2+3k+1)\ (\because\ k^2+3k+1>0)$$

$$=\sum_{k=1}^{12}k^2+3\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}1$$

$$=\frac{12\times13\times25}{6}+3\times\frac{12\times13}{2}+12$$

$=650+234+12$

$=896 \qquad \cdots\cdots\ (나)$

채점 기준	배점
(가) 근호 안의 식을 간단히 한다.	3점
(나) 주어진 식의 값을 구한다.	3점

27 (1) 정n각형의 한 내각의 크기는 $\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$이므로 정$n$각형의 내부에 그린 부채꼴의 호 1개의 길이는

$$1\times\left\{\frac{180(n-2)}{n}\times\frac{\pi}{180}\right\}=\frac{n-2}{n}\pi \qquad \cdots\cdots\ (가)$$

$$\therefore\ l_n=\frac{n-2}{n}\pi\times n$$

$=(n-2)\pi \qquad \cdots\cdots\ (나)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=3}^{10}l_k=l_3+l_4+l_5+\cdots+l_{10}$

$=\pi+2\pi+3\pi+\cdots+8\pi$

$=(1+2+3+\cdots+8)\pi$

$$=\left(\sum_{k=1}^{8}k\right)\pi$$

$$=\frac{8\times9}{2}\pi$$

$=36\pi \qquad \cdots\cdots\ (다)$

채점 기준	배점
(가) 부채꼴의 호 1개의 길이를 n에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(나) 수열 $\{l_n\}$의 일반항을 구한다.	2점
(다) $\sum_{k=3}^{10}l_k$의 값을 구한다.	3점

내공 점검

01~03강 내공 점검 p. 82~84

1 3	**2** ⑤	**3** ②	**4** ②	**5** ③
6 ③	**7** ③	**8** ③	**9** ③	**10** ③
11 0	**12** ⑤	**13** ④	**14** ③	**15** 2
16 ③	**17** ①	**18** ④	**19** $\frac{3}{47}$	**20** 4

21 (1) 0.092 (2) 42.5 cm

1 $a=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^3\times3}=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$
$b=\sqrt{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[6]{9}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[3]{3}$
$\therefore \frac{a}{b}=\frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}=3$

2 $\left\{\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{4\times\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$

3 $\sqrt[4]{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}=\sqrt[4]{\frac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}}=\sqrt[4]{\frac{2^{20}(2^{10}+1)}{2^{12}(1+2^{10})}}$
$=\sqrt[4]{2^{20-12}}=\sqrt[4]{2^8}=2^2=4$

4 $\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}}}=\left[\frac{b}{a}\left\{\frac{a}{b}\times\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$
$=\left[\frac{b}{a}\left\{\frac{a}{b}\times\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$
$=\left[\frac{b}{a}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{1-\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$
$=\left\{\frac{b}{a}\times\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\times\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{1}{2}}$
$=\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1+\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{3}{8}}$
$\therefore k=-\frac{3}{8}$

5 $b=9a$를 $a^b=b^a$에 대입하면
$a^{9a}=(9a)^a$, $(a^9)^a=(9a)^a$
$a^9=9a$ $\therefore a^8=9$
$\therefore a=9^{\frac{1}{8}}=(3^2)^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}$

6 (주어진 식)$=(a+2+a^{-1})-(a-a^{-1})$
$=2+2a^{-1}=2+2\times\frac{1}{2}=3$

7 $\frac{10^m-10^{-m}}{10^m+10^{-m}}=\frac{1}{2}$에서 좌변의 분모, 분자에 10^m을 곱하면
$\frac{10^m(10^m-10^{-m})}{10^m(10^m+10^{-m})}=\frac{1}{2}$, $\frac{10^{2m}-1}{10^{2m}+1}=\frac{1}{2}$
$2(10^{2m}-1)=10^{2m}+1$ $\therefore 10^{2m}=3$
$\frac{10^n-10^{-n}}{10^n+10^{-n}}=\frac{1}{3}$에서 좌변의 분모, 분자에 10^n을 곱하면
$\frac{10^n(10^n-10^{-n})}{10^n(10^n+10^{-n})}=\frac{1}{3}$, $\frac{10^{2n}-1}{10^{2n}+1}=\frac{1}{3}$
$3(10^{2n}-1)=10^{2n}+1$ $\therefore 10^{2n}=2$
$\frac{10^{m+n}-10^{-(m+n)}}{10^{m+n}+10^{-(m+n)}}$의 분모, 분자에 10^{m+n}을 곱하면
(주어진 식)$=\frac{10^{m+n}\{10^{m+n}-10^{-(m+n)}\}}{10^{m+n}\{10^{m+n}+10^{-(m+n)}\}}$
$=\frac{10^{2(m+n)}-1}{10^{2(m+n)}+1}$
$=\frac{10^{2m}\times10^{2n}-1}{10^{2m}\times10^{2n}+1}$
$=\frac{3\times2-1}{3\times2+1}=\frac{5}{7}$

8 $m_1=1000^{1-\frac{1}{6}}=1000^{\frac{5}{6}}=10^{\frac{5}{2}}$
$m_3=1000^{1-\frac{3}{6}}=1000^{\frac{1}{2}}=10^{\frac{3}{2}}$
$\therefore \frac{m_1}{m_3}=\frac{10^{\frac{5}{2}}}{10^{\frac{3}{2}}}=10^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}=10$
따라서 1시간 후 남아 있는 비타민 C의 양은 3시간 후 남아 있는 비타민 C의 양의 10배이다.

9 밑의 조건에서 $x-2>0$, $x-2\neq1$
$\therefore 2<x<3$ 또는 $x>3$ …… ㉠
진수의 조건에서 $-x^2+7x-6>0$
$x^2-7x+6<0$, $(x-1)(x-6)<0$
$\therefore 1<x<6$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $2<x<3$ 또는 $3<x<6$
따라서 자연수 x는 4, 5이므로 구하는 합은 $4+5=9$

10 (주어진 식)$=\left(\frac{1}{2}\log_3 5+\frac{3}{2}\log_3 5\right)\times\log_{5^2}3^{\frac{3}{2}}$
$=2\log_3 5\times\frac{3}{4}\log_5 3=\frac{3}{2}$

11 $\frac{\log_2 a}{2}=\log_2 x$에서 $\log_2 a=\log_2 x^2$ $\therefore a=x^2$
$\frac{\log_2 b}{3}=\log_2 x$에서 $\log_2 b=\log_2 x^3$ $\therefore b=x^3$
$\frac{\log_2 c}{4}=\log_2 x$에서 $\log_2 c=\log_2 x^4$ $\therefore c=x^4$
$\therefore \frac{b^2}{ac}=\frac{(x^3)^2}{x^2\times x^4}=\frac{x^6}{x^6}=1=x^0$ $\therefore y=0$

12 $x=\frac{\log_3 25}{\log_3 4}=\log_4 25=\log_2 5$ $\therefore 2^x=5$
$\therefore 2^x+2^{-x}=2^x+\frac{1}{2^x}=5+\frac{1}{5}=\frac{26}{5}$

13 $\log_8 3=p$에서 $\log_3 8=\frac{1}{p}$
$3\log_3 2=\frac{1}{p}$ $\therefore \log_3 2=\frac{1}{3p}$
$\therefore \log_{10} 5=\frac{\log_3 5}{\log_3 10}=\frac{\log_3 5}{\log_3 2+\log_3 5}$
$=\frac{q}{\frac{1}{3p}+q}=\frac{3pq}{1+3pq}$

14 $3.45^x=100$에서　$x=\log_{3.45} 100$

$0.00345^y=100$에서　$y=\log_{0.00345} 100$

$\therefore \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\log_{100} 3.45-\log_{100} 0.00345=\log_{100} \dfrac{3.45}{0.00345}$

$=\log_{100} 1000=\log_{10^2} 10^3=\dfrac{3}{2}$

다른 풀이

$3.45^x=100$에서　$3.45=100^{\frac{1}{x}}$　…… ㉠

$0.00345^y=100$에서　$0.00345=100^{\frac{1}{y}}$　…… ㉡

㉠÷㉡을 하면　$1000=100^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

$10^3=10^{2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}$, $3=2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)$　$\therefore \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}$

15 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=5$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=25-20=5$

그런데 $\alpha>\beta$이므로　$\alpha-\beta=\sqrt{5}$

$\therefore m=\sqrt{5}$

$\therefore \log_m \alpha+\log_m \beta=\log_m \alpha\beta=\log_{\sqrt{5}} 5=2$

16 $a=\log 4310=\log(4.31\times10^3)$

$=3+\log 4.31=3.6345$

$\log b=-1.3655=-2+0.6345=\log 10^{-2}+\log 4.31$

$=\log(4.31\times10^{-2})=\log 0.0431$

$\therefore b=0.0431$

$\therefore a+10b=3.6345+0.431=4.0655$

17 $\log_2\{\log_2(\log_2 x)\}=2$에서　$\log_2(\log_2 x)=2^2=4$

따라서 $\log_2 x=2^4=16$이므로　$x=2^{16}$

2^{16}에 상용로그를 취하면

$\log 2^{16}=16\log 2=16\times0.3=4.8$

따라서 $\log 2^{16}$의 정수 부분이 4이므로 2^{16}은 5자리의 자연수이다.

18 $\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x+\log x^2=\log x+2\log x=3\log x$

에서 $3\log x$의 값은 정수이다.

이때 $\log x$의 정수 부분이 1이므로　$1\le\log x<2$

그런데 $\log x=1$이면 $\log x$의 소수 부분은 0이므로

$1<\log x<2$　$\therefore 3<3\log x<6$

따라서 $3\log x$의 값은 4 또는 5이므로

$\log x=\dfrac{4}{3}$ 또는 $\log x=\dfrac{5}{3}$

즉, $x=10^{\frac{4}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{5}{3}}$이므로 구하는 곱은

$10^{\frac{4}{3}}\times10^{\frac{5}{3}}=10^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}=10^3=1000$

19 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2=7+2=9$

이때 $x>0$이므로　$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$　…… (가)

$x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2=49-2=47$　…… (나)

$\therefore \dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{x^2+x^{-2}}=\dfrac{3}{47}$　…… (다)

채점 기준	배점
(가) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$의 값을 구한다.	4점
(나) x^2+x^{-2}의 값을 구한다.	4점
(다) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{x^2+x^{-2}}$의 값을 구한다.	1점

20 $a\log_9 a=\log_3 b$에서

$a=\dfrac{\log_3 b}{\log_9 a}=\dfrac{\log_3 b}{\frac{1}{2}\log_3 a}$

$=2\times\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}=2\log_a b$　…… (가)

$b\log_9 b=\log_3 a$에서

$b=\dfrac{\log_3 a}{\log_9 b}=\dfrac{\log_3 a}{\frac{1}{2}\log_3 b}$

$=2\times\dfrac{\log_3 a}{\log_3 b}=2\log_b a$　…… (나)

$\therefore ab=2\log_a b\times2\log_b a$

$=4\times\log_a b\times\dfrac{1}{\log_a b}=4$　…… (다)

채점 기준	배점
(가) a를 로그를 사용한 식으로 나타낸다.	3점
(나) b를 로그를 사용한 식으로 나타낸다.	3점
(다) ab의 값을 구한다.	3점

21 (1) $d=50$이고 $P=\dfrac{1}{100}P_0$, 즉 $\dfrac{P_0}{P}=100$이므로

$50=\dfrac{2.3}{k}(\log P_0-\log P)$

$=\dfrac{2.3}{k}\log\dfrac{P_0}{P}$

$=\dfrac{2.3}{k}\log 100$

$=\dfrac{2.3}{k}\times2=\dfrac{4.6}{k}$

$\therefore k=\dfrac{4.6}{50}=0.092$　…… (가)

(2) $P=\dfrac{1}{50}P_0$, 즉 $\dfrac{P_0}{P}=50$이고 $k=0.092$이므로

$d=\dfrac{2.3}{0.092}(\log P_0-\log P)$

$=25\log\dfrac{P_0}{P}=25\log 50$

$=25\log\dfrac{100}{2}=25(2-\log 2)$

$=25(2-0.3)=42.5$

따라서 벽의 두께는 42.5 cm이다.　…… (나)

채점 기준	배점
(가) k의 값을 구한다.	5점
(나) 벽의 두께를 구한다.	5점

04~06강 내공 점검 p. 85~87

1 ④	2 ③	3 ③	4 ③	5 ②
6 ③	7 ③	8 ④	9 ①	10 ①
11 ①	12 ①	13 $x=\frac{1}{15}$	14 ①	15 ④
16 (2, 1)	17 2	18 32		

1 ㄱ. $ab>1$이므로 함수 $y=(ab)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

ㄴ. $a>b>1$이면 $\frac{b}{a}<1$이므로 함수 $y=\left(\frac{b}{a}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

ㄷ. $a+b>a+1>2$이므로 $\frac{a+b}{a+1}>1$

따라서 함수 $y=\left(\frac{a+b}{a+1}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

2 $f(0)=2^b=5$이므로 $f(3)=2^{3a+b}=135$에서

$2^{3a}\times2^b=135$, $2^{3a}\times5=135$

$2^{3a}=27=3^3$ $\quad\therefore 2^a=3$

$\therefore f(1)=2^{a+b}=2^a\times2^b=3\times5=15$

3 $A=2^{1.5}=2^{\frac{3}{2}}$

$B=0.25^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$

$C=\sqrt[3]{32}=2^{\frac{5}{3}}$

이때 세 수 A, B, C의 밑이 1보다 크므로

$\frac{4}{3}<\frac{3}{2}<\frac{5}{3}$에서 $\quad 2^{\frac{4}{3}}<2^{\frac{3}{2}}<2^{\frac{5}{3}}$

$\therefore B<A<C$

4 함수 $f(x)=\sqrt{3^{2x^2-3}}=(\sqrt{3})^{2x^2-3}$은 밑이 1보다 크므로 $2x^2-3$이 최대일 때 최댓값을 갖고, $2x^2-3$이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $-1\le x\le2$에서 $2x^2-3$은

$x=2$일 때 최댓값 5, $x=0$일 때 최솟값 -3

을 가지므로 함수 $f(x)$의

최댓값은 $\quad(\sqrt{3})^5=9\sqrt{3}$, 최솟값은 $\quad(\sqrt{3})^{-3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

따라서 $a=9\sqrt{3}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{9}$이므로 $\quad ab=3$

5 $y=-\log_4(x-1)+3$에서

$\log_4(x-1)=-y+3$, $x-1=4^{-y+3}$

$\therefore\ x=4^{-y+3}+1$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=4^{-x+3}+1=2^{-2x+6}+1$

따라서 $a=-2$, $b=6$, $c=1$이므로 $\quad a+b+c=5$

6 $\log_2 c=b$, $\log_2 d=c$이므로

$c-b=\log_2 d-\log_2 c=\log_2\frac{d}{c}$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{b-c}=2^{c-b}=2^{\log_2\frac{d}{c}}=\left(\frac{d}{c}\right)^{\log_2 2}=\frac{d}{c}$

따라서 $2d=3c$에서 $\frac{d}{c}=\frac{3}{2}$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{b-c}=\frac{3}{2}$

7 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(3x+1)$은 밑이 1보다 작으므로 $x=a$일 때 최댓값 -1을 갖고, $x=b$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

$\log_{\frac{1}{3}}(3a+1)=-1$에서

$3a+1=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $3a+1=3$

$\therefore\ a=\frac{2}{3}$

$\log_{\frac{1}{3}}(3b+1)=-3$에서

$3b+1=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $3b+1=27$

$\therefore\ b=\frac{26}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{28}{3}$

8 $y=\log_2 4x=\log_2 x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y=\log_2(x-m)+2+n$

이 그래프를 다시 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=\log_2(x-m)+2+n$

$\therefore\ y=\log_{\frac{1}{2}}(x-m)-(2+n)$

이 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$이므로

$m=-1$

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-(2+n)$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\log_{\frac{1}{2}}1-(2+n)$ $\qquad\therefore\ n=-2$

$\therefore\ m-n=-1-(-2)=1$

9 $y=\log_4(x^2+10x+9)-\log_4 x$

$=\log_4\frac{x^2+10x+9}{x}$

$=\log_4\left(x+\frac{9}{x}+10\right)$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

진수의 조건에서 $x^2+10x+9>0$이고 $x>0$이므로

$x>0$

이때 ㉠에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{9}{x}+10\ge2\sqrt{x\times\frac{9}{x}}+10=16$이므로

$\log_4(x^2+10x+9)-\log_4 x\ge\log_4 16=2$

이때 등호는 $x=3$일 때 성립하므로

$a=3$, $b=2$

$\therefore\ a-b=1$

10 $2^x=X\ (X>0)$로 치환하면 주어진 방정식은

$X+\frac{1}{X}-3=0,\ X^2-3X+1=0$

이 이차방정식의 두 근이 2^α, 2^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha\times2^\beta=1,\ 2^{\alpha+\beta}=2^0$

$\therefore\ \alpha+\beta=0$

11 $x^{2x-4}=(2x+3)^{x-2}$에서 $\quad(x^2)^{x-2}=(2x+3)^{x-2}$

이때 좌변과 우변의 지수가 같으므로 이 방정식이 성립하려면 밑이 같거나, 지수가 0이어야 한다.

(i) 밑이 같은 경우

$x^2=2x+3,\ x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \qquad \therefore\ x=3\ (\because\ x>0)$

(ii) 지수가 0인 경우

$x-2=0 \qquad \therefore\ x=2$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 모든 근의 곱은 6이다.

12 $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}\le27\le\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-8}$에서

$3^{-2(x+2)}\le3^3\le3^{-(2x-8)} \qquad \therefore\ 3^{-2x-4}\le3^3\le3^{-2x+8}$

밑이 1보다 크므로

$-2x-4\le3\le-2x+8$

$-2x-4\le3$에서 $\quad x\ge-\frac{7}{2}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$3\le-2x+8$에서 $\quad x\le\frac{5}{2}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$-\frac{7}{2}\le x\le\frac{5}{2}$

따라서 $\alpha=-\frac{7}{2}$, $\beta=\frac{5}{2}$이므로 $\quad\alpha+\beta=-1$

13 진수의 조건에 의하여

$3x>0,\ 5x>0 \qquad \therefore\ x>0$

$3^{\log3x}=5^{\log5x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log3^{\log3x}=\log5^{\log5x}$

$\log3x\times\log3=\log5x\times\log5$

$(\log3+\log x)\times\log3=(\log5+\log x)\times\log5$

$(\log5-\log3)\times\log x=(\log3)^2-(\log5)^2$

$\therefore\ \log x=\frac{(\log3+\log5)(\log3-\log5)}{\log5-\log3}$

$=-(\log3+\log5)=-\log15=\log\frac{1}{15}$

$\therefore\ x=\frac{1}{15}$

14 $\log_a(2x+4)-\log_a(x-1)\le\log_a3$에서

$\log_a(2x+4)\le\log_a3(x-1)$

$0<a<1$이므로 $\quad 2x+4\ge3(x-1)$

$\therefore\ x\le7$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

진수의 조건에서 $2x+4>0$, $x-1>0$이므로

$x>1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$1<x\le7$

따라서 주어진 부등식은 만족하는 정수 x는 2, 3, 4, 5, 6, 7이므로 그 합은 27이다.

15 $A\times2^{2k}=8A$에서 $\quad 2^{2k}=2^3$

$2k=3 \qquad \therefore\ k=\frac{3}{2}$

따라서 $f(t)=A\times2^{\frac{3}{2}t}$이므로 $A\times2^{\frac{3}{2}a}=512A$에서

$2^{\frac{3}{2}a}=2^9,\ \frac{3}{2}a=9 \qquad \therefore\ a=6$

16 곡선 $y=4^x$을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y=4^{x-2}$

$\therefore\ f(x)=4^{x-2}$ $\qquad\cdots\cdots$ (가)

곡선 $y=8^{-x-2}$을 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=8^{x-2}$

$\therefore\ g(x)=8^{x-2}$ $\qquad\cdots\cdots$ (나)

$f(x)=g(x)$에서

$4^{x-2}=8^{x-2},\ 2^{2x-4}=2^{3x-6}$

$2x-4=3x-6 \qquad \therefore\ x=2$

따라서 구하는 교점의 좌표는 (2, 1)이다. $\qquad\cdots\cdots$ (다)

채점 기준	배점
(가) $f(x)$를 구한다.	2점
(나) $g(x)$를 구한다.	2점
(다) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 좌표를 구한다.	4점

17 $\log_3x=t$로 치환하면

$y=\log_3x\times(2-\log_9x)=\log_3x\times\left(2-\frac{1}{2}\log_3x\right)$

$=t\left(2-\frac{1}{2}t\right)=-\frac{1}{2}(t-2)^2+2$ $\qquad\cdots\cdots$ (가)

이때 $t=\log_3x$는 밑이 1보다 크므로 $1\le x\le27$에서

$\log_31\le\log_3x\le\log_327$

$\therefore\ 0\le t\le3$ $\qquad\cdots\cdots$ (나)

따라서 $0\le t\le3$에서 함수 $y=-\frac{1}{2}(t-2)^2+2$는

$t=2$일 때 최댓값 $\quad M=2$,

$t=0$일 때 최솟값 $\quad m=0$ $\qquad\cdots\cdots$ (다)

을 가지므로 $\quad M+m=2$ $\qquad\cdots\cdots$ (라)

채점 기준	배점
(가) $\log_3x=t$로 치환하고 주어진 식을 t에 대한 식으로 나타낸다.	3점
(나) t의 값의 범위를 구한다.	3점
(다) M, m의 값을 구한다.	2점
(라) $M+m$의 값을 구한다.	1점

18 $\log y=2+\log(1+r^{-\frac{x}{50}})$에서

$\log y=\log 100(1+r^{-\frac{x}{50}})$

$\therefore y=100(1+r^{-\frac{x}{50}})$ …… (가)

$100(1+r^{-\frac{20}{50}})=\frac{5}{6}\times 100(1+r^{-\frac{10}{50}})$이므로 …… (나)

$6(1+r^{-\frac{2}{5}})=5(1+r^{-\frac{1}{5}})$

$r^{-\frac{1}{5}}=X(X>0)$로 치환하면 $6(1+X^2)=5(1+X)$

$6X^2-5X+1=0,\ (3X-1)(2X-1)=0$

$\therefore X=\frac{1}{3}$ 또는 $X=\frac{1}{2}$

$\therefore r=2^5=32\ (\because 1<r<100)$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 주어진 식에서 y를 x에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(나) 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.	2점
(다) r의 값을 구한다.	4점

07~08강 내공 점검 p. 88~89

1 ②	**2** ②	**3** ③	**4** ③	**5** ⑤
6 $\tan\theta$	**7** 1	**8** ⑤	**9** ⑤	**10** ③
11 $\frac{2}{3}\pi$	**12** $\frac{1}{\sin\theta}$	**13** (1) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ (2) $-\frac{5\sqrt{7}}{16}$		

1 ① $830°=360°\times2+110°$

② $1210°=360°\times3+130°$

③ $1550°=360°\times4+110°$

④ $-610°=360°\times(-2)+110°$

⑤ $-1330°=360°\times(-4)+110°$

따라서 α의 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

2 각 θ가 제2사분면의 각이므로 정수 n에 대하여

$2n\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2n\pi+\pi$

$\therefore n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<n\pi+\frac{\pi}{2}$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때, $2k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

즉, 각 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore 2k\pi+\frac{5}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$

즉, 각 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

따라서 각 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

3 두 각 θ와 $\left(3\theta+\frac{\pi}{3}\right)$를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이면 두 동경은 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$\left(3\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\theta=(2n+1)\pi$ (단, n은 정수)

$\therefore \theta=\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi$

이때 $\pi<\theta<2\pi$이므로

$\pi<\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi<2\pi \qquad \therefore \frac{2}{3}<n<\frac{5}{3}$

그런데 n은 정수이므로 $n=1$

$\therefore \theta=\frac{4}{3}\pi$

4 $60°=60°\times\frac{\pi}{180°}=\frac{\pi}{3}$이므로

$a=\frac{60°}{\pi}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\pi}=\frac{1}{3}$

$\frac{\pi}{60}=\frac{\pi}{60}\times\frac{180°}{\pi}=30°$이므로 $b=30$

$\therefore ab=\frac{1}{3}\times30=10$

5 부채꼴의 반지름의 길이를 r라고 하면

$\frac{1}{2}r^2\times\frac{4}{3}\pi=6\pi,\ r^2=9 \qquad \therefore r=3\ (\because r>0)$

부채꼴의 호의 길이를 l이라고 하면

$l=3\times\frac{4}{3}\pi=4\pi$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$2r+l=6+4\pi$

6 음수의 제곱근의 성질에 의하여 실수 a, b에 대하여

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a>0,\ b<0$ 또는 $a=0,\ b\neq0$

이때 $\frac{\sqrt{\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}=-\sqrt{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$이고 $\sin\theta\cos\theta\neq0$이므로

$\cos\theta>0,\ \sin\theta<0$

즉, θ는 제4사분면의 각이므로 $\tan\theta<0$이고

$\cos\theta-\tan\theta>0$

$\therefore |\cos\theta|-\sqrt{(\cos\theta-\tan\theta)^2}$

$=|\cos\theta|-|\cos\theta-\tan\theta|$

$=\cos\theta-(\cos\theta-\tan\theta)=\tan\theta$

7 $\frac{(\tan^2\theta+1)(1-\cos^2\theta)}{\tan^2\theta}=\frac{(\tan^2\theta+1)\times\sin^2\theta}{\tan^2\theta}$

$=\frac{\tan^2\theta\sin^2\theta+\sin^2\theta}{\tan^2\theta}$

$=\sin^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{\tan^2\theta}$

$=\sin^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

8 $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\tan^2\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\cos\theta}+\dfrac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\dfrac{1}{1-\sin\theta}=\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$

9 $\cos\theta-\tan^2\theta=1$에서 $\cos\theta-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=1$이므로 양변에 $\cos^2\theta$를 곱하면

$\cos^3\theta-\sin^2\theta=\cos^2\theta$, $\cos^3\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$\cos^3\theta=1$, $\cos^3\theta-1=0$

$(\cos\theta-1)(\cos^2\theta+\cos\theta+1)=0$

그런데 $\cos\theta$의 값은 실수이므로 $\cos\theta=1$

$\therefore \cos\theta+\cos^2\theta+\cdots+\cos^{100}\theta$

$=1+1+\cdots+1=100$

10 이차방정식 $8x^2-4x+a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{a}{8}$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

이때 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{a}{8}$이므로

$1+2\times\dfrac{a}{8}=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore a=-3$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

한편 이차방정식 $3x^2+bx+c=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\tan\theta)+\left(1-\dfrac{1}{\tan\theta}\right)=\left(1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)+\left(1-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$=2-\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=2-\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=2+\dfrac{8}{3}=\dfrac{14}{3}=-\dfrac{b}{3}$

$\therefore b=-14$

$(1-\tan\theta)\left(1-\dfrac{1}{\tan\theta}\right)=1-\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)+1$

$=2-\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$=2-\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=2-\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=2+\dfrac{8}{3}=\dfrac{14}{3}=\dfrac{c}{3}$

$\therefore c=14$ $\quad\therefore a+b+c=-3-14+14=-3$

11 각 θ가 제2사분면의 각이므로 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ …… (가)

이때 두 각 θ, 5θ를 나타내는 두 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=2n\pi$ (단, n은 정수) $\quad\therefore \theta=\dfrac{n}{3}\pi$ …… (나)

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{n}{3}\pi<\pi$ $\quad\therefore \dfrac{3}{2}<n<3$

그런데 n은 정수이므로 $n=2$ …… (다)

$\therefore \theta=\dfrac{2}{3}\pi$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 각 θ의 크기의 범위를 구한다.	2점
(나) 각 θ를 n에 대한 식으로 나타낸다.	4점
(다) n의 값을 구한다.	3점
(라) 각 θ의 크기를 구한다.	1점

12 $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ …… (가)

$=\dfrac{\sin^2\theta-\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$ …… (나)

$=\dfrac{1}{\sin\theta}$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$임을 이용하여 식을 변형한다.	4점
(나) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 식을 변형한다.	4점
(다) 주어진 식을 간단히 한다.	2점

13 (1) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$ …… (가)

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{7}{4}$

이때 각 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta+\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ …… (나)

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta)$

$=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\left(1-\dfrac{3}{8}\right)=-\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구한다.	2점
(나) $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구한다.	4점
(다) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$의 값을 구한다.	4점

09~10강 내공 점검

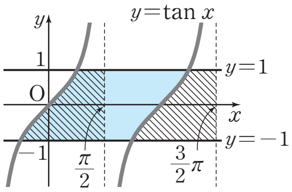
p. 90~91

1 ④ **2** ② **3** ④ **4** ⑤ **5** ①
6 ③ **7** ⑤ **8** 1
9 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ **10** $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi\le x<\pi$
11 9 **12** 7 **13** 6

1 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $0<\sin\theta<\cos\theta$이므로

$\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$
$=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}$
$\quad-\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}$
$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}$
$=\sin\theta+\cos\theta+(\sin\theta-\cos\theta)=2\sin\theta$

2 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 도형의 넓이는 가로의 길이가 $\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}=\pi$이고 세로의 길이가 2인 직사각형의 넓이와 같다.



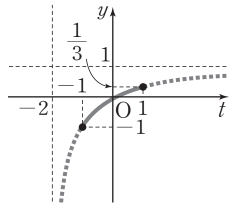
$\therefore\ \pi\times2=2\pi$

3 최댓값은 $a=2+1=3$
주기는 $b=\frac{2\pi}{\pi}=2$ $\quad\therefore\ ab=6$

4 $a>0$이고 최댓값이 9, 최솟값이 -3이므로
$a+d=9,\ -a+d=-3$
두 식을 연립하여 풀면 $a=6,\ d=3$
$b>0$이고 주어진 그래프에서 주기가 π이므로
$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore\ b=2$
함수 $y=6\cos(2x+c)+3$의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{12}\pi,\ -3\right)$을 지나므로
$6\cos\left(\frac{5}{6}\pi+c\right)+3=-3,\ \cos\left(\frac{5}{6}\pi+c\right)=-1$
$\frac{5}{6}\pi+c=t$로 놓으면 $-\pi<c<\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}<t<\frac{11}{6}\pi$이고
$\cos t=-1$ $\quad\therefore\ t=\pi$ $\quad\therefore\ c=\frac{\pi}{6}$
$\therefore\ abcd=6\times2\times\frac{\pi}{6}\times3=6\pi$

5 주어진 함수에서 $\sin x=t$로 치환하면
$y=\frac{t}{t+2}=-\frac{2}{t+2}+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
t의 값의 범위를 구하면
$-1\le\sin x\le1$ $\quad\therefore\ -1\le t\le1$

따라서 ㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=1$일 때, 최댓값 $M=\frac{1}{3}$
$t=-1$일 때, 최솟값 $m=-1$
$\therefore\ M+m=-\frac{2}{3}$

6 $\sin\frac{29}{4}\pi+\cos\left(-\frac{17}{4}\pi\right)+\tan\left(-\frac{7}{4}\pi\right)$
$=\sin\left(6\pi+\frac{5}{4}\pi\right)+\cos\left(-4\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(-2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$
$=\sin\frac{5}{4}\pi+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\frac{\pi}{4}$
$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}$
$=-\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1=1$

7 ㄱ. 함수 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 함수 $y=\sin2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이다.
ㄴ. 함수 $y=-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+1=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
ㄷ. $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$이므로 함수 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2=\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)-2$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{2}{3}\pi$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=\sin x$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

8 $\tan89^\circ=\tan(90^\circ-1^\circ)=\frac{1}{\tan1^\circ}$
$\tan88^\circ=\tan(90^\circ-2^\circ)=\frac{1}{\tan2^\circ}$
$\vdots$
$\tan46^\circ=\tan(90^\circ-44^\circ)=\frac{1}{\tan44^\circ}$
$\therefore\ \tan1^\circ\times\tan2^\circ\times\cdots\times\tan88^\circ\times\tan89^\circ$
$=\tan1^\circ\times\tan2^\circ\times\cdots\times\tan44^\circ\times\tan45^\circ$
$\quad\times\frac{1}{\tan44^\circ}\times\frac{1}{\tan43^\circ}\times\cdots\times\frac{1}{\tan2^\circ}\times\frac{1}{\tan1^\circ}$
$=\left(\tan1^\circ\times\frac{1}{\tan1^\circ}\right)\times\left(\tan2^\circ\times\frac{1}{\tan2^\circ}\right)$
$\quad\times\cdots\times\left(\tan44^\circ\times\frac{1}{\tan44^\circ}\right)\times\tan45^\circ$
$=1\times1\times\cdots\times1\times1=1$

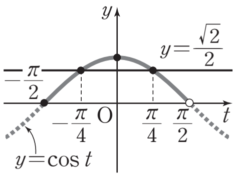
9 $2\cos\frac{x-\pi}{2}=\sqrt{2}$에서 $\frac{x-\pi}{2}=t$로 치환하면

$2\cos t=\sqrt{2}$ $\quad\therefore \cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$0\le x<2\pi$에서 t의 값의 범위를 구하면

$-\frac{\pi}{2}\le\frac{x-\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore -\frac{\pi}{2}\le t<\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\le t<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$는 오른쪽 그림과 같다.



이때 방정식 ㉠의 해는 두 그래프의 교점의 t좌표이고

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$t=\frac{x-\pi}{2}=\pm\frac{\pi}{4}$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

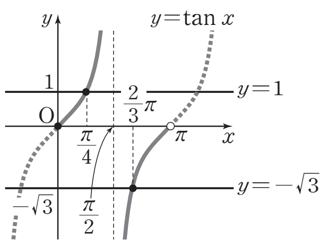
10 $\sqrt{3}(\tan x-1)\le\tan x(1-\tan x)$에서

$\sqrt{3}(\tan x-1)+\tan x(\tan x-1)\le 0$

$(\tan x+\sqrt{3})(\tan x-1)\le 0$

$\therefore -\sqrt{3}\le\tan x\le 1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$0\le x<\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 두 직선 $y=1$, $y=-\sqrt{3}$은 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=\tan x$의 그래프와 두 직선 $y=1$, $y=-\sqrt{3}$의 교점의 x좌표는 각각

$x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{2}{3}\pi$

부등식 ㉠의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나거나 아래쪽에 있고 직선 $y=-\sqrt{3}$과 만나거나 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi\le x<\pi$

11 $f(x)=a\sin\frac{x}{p}+b$의 주기는 8π이고, $p>0$이므로

$\frac{2\pi}{\frac{1}{p}}=8\pi$ $\quad\therefore p=4$ $\quad\cdots\cdots$ (가)

이때 $f(x)=a\sin\frac{x}{4}+b$의 최댓값이 1이고, $a>0$이므로

$a+b=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}$이므로

$a\sin\frac{\frac{2}{3}\pi}{4}+b=a\sin\frac{\pi}{6}+b=\frac{a}{2}+b=-\frac{1}{2}$

$\therefore a+2b=-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$ $\quad\cdots\cdots$ (나)

$\therefore a-b+p=3-(-2)+4=9$ $\quad\cdots\cdots$ (다)

채점 기준	배점
(가) p의 값을 구한다.	3점
(나) a, b의 값을 구한다.	6점
(다) $a-b+p$의 값을 구한다.	1점

12 $\sin^3 x+\cos^4 x=1$에서

$\sin^3 x+(1-\sin^2 x)^2-1=0$

$\sin^4 x+\sin^3 x-2\sin^2 x=0$ $\quad\cdots\cdots$ (가)

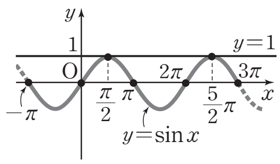
$\sin^2 x(\sin x+2)(\sin x-1)=0$

이때 $\sin x+2>0$이므로

$\sin x=0$ 또는 $\sin x=1$

(i) $\sin x=0$일 때,

$x=-\pi$ 또는 $x=0$
또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$
또는 $x=3\pi$



(ii) $\sin x=1$일 때,

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{2}\pi$ $\quad\cdots\cdots$ (나)

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 7이다. $\quad\cdots\cdots$ (다)

채점 기준	배점
(가) 주어진 방정식을 $\sin x$에 대한 식으로 나타낸다.	4점
(나) 주어진 방정식의 해를 구한다.	5점
(다) 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구한다.	1점

13 $2\sin^2 x-3\sin x-2\ge 0$에서

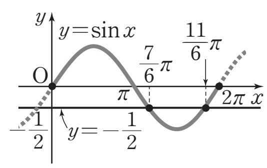
$(\sin x-2)(2\sin x+1)\ge 0$

이때 $\sin x-2<0$이므로

$2\sin x+1\le 0$

$\sin x\le-\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ (가)

$\therefore \frac{7}{6}\pi\le x\le\frac{11}{6}\pi$ $\quad\cdots\cdots$ (나)



$x-\frac{\pi}{2}=t$로 치환하면 $\frac{7}{6}\pi\le x\le\frac{11}{6}\pi$에서 $\frac{2}{3}\pi\le t\le\frac{4}{3}\pi$이므로 $-\sqrt{3}\le\tan t\le\sqrt{3}$

따라서 $M=\sqrt{3}$, $m=-\sqrt{3}$이므로 $\quad\cdots\cdots$ (다)

$M^2+m^2=3+3=6$ $\quad\cdots\cdots$ (라)

채점 기준	배점
(가) $\sin x$의 값의 범위를 구한다.	2점
(나) 실수 x의 값의 범위를 구한다.	3점
(다) M, m의 값을 구한다.	4점
(라) M^2+m^2의 값을 구한다.	1점

11~12강 내공 점검 p. 92~93

1 ① 2 $C=90°$인 직각삼각형 3 $19200\pi\ \text{m}^2$
4 ④ 5 ① 6 $C=90°$인 직각삼각형
7 ② 8 ③ 9 ② 10 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$
11 $3:6:4$ 12 $\frac{1}{36}$ 13 $8+8\sqrt{3}$

1 사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$이므로

$\frac{10}{\sin A}=\frac{10\sqrt{3}}{\sin 60°}$, $10\sqrt{3}\sin A=10\sin 60°$

$\therefore \sin A=\frac{5\sqrt{3}}{10\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

이때 $0°<A<180°$이므로 $A=30°$ 또는 $A=120°$

그런데 $A=120°$이면 $A+B=180°$이므로

$A=30°$

2 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 $\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$에 대입하면

$\frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}:\frac{c}{2R}=a:b:c=3:4:5$

이때 $a=3k$, $b=4k$, $c=5k$ $(k>0)$라고 하면

$a^2+b^2=(3k)^2+(4k)^2=25k^2$, $c^2=(5k)^2=25k^2$

이므로 $a^2+b^2=c^2$

따라서 △ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다.

3 △ABC에서 $A=180°-(75°+45°)=60°$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A}=2R$이므로

$\frac{240}{\sin 60°}=2R$ $\therefore R=80\sqrt{3}\,(\text{m})$

따라서 구하는 호수의 넓이는

$\pi R^2=\pi\times(80\sqrt{3})^2=19200\pi\,(\text{m}^2)$

4 코사인법칙에서 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$이므로

$7^2=5^2+c^2-2\times5\times c\times\cos 60°$

$49=25+c^2-5c$, $c^2-5c-24=0$

$(c+3)(c-8)=0$ $\therefore c=8$ $(\because c>0)$

5 $\frac{\sin A}{4}=\frac{\sin B}{5}=\frac{\sin C}{6}=k$ $(k>0)$라고 하면

$\sin A=4k$, $\sin B=5k$, $\sin C=6k$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=4:5:6$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C$

$=\frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}:\frac{c}{2R}$

$=a:b:c=4:5:6$

즉, $a=4l$, $b=5l$, $c=6l$ $(l>0)$이라고 하면

a의 값이 가장 작으므로 그 대각인 A가 가장 작은 각이다.

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{(5l)^2+(6l)^2-(4l)^2}{2\times5l\times6l}=\frac{3}{4}$

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ $(\because 0°<A<180°)$

$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

6 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$,

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

이를 $\sin A+\sin B=\sin C(\cos A+\cos B)$에 대입하면

$\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}=\frac{c}{2R}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)$

이 식의 양변에 $4abR$를 곱하면

$2a^2b+2ab^2=a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)$

$a^3+b^3+a^2b+ab^2-ac^2-bc^2=0$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab(a+b)-c^2(a+b)=0$

$(a+b)(a^2-ab+b^2+ab-c^2)=0$

$(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$\therefore a^2+b^2=c^2$ $(\because a+b>0)$

따라서 △ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다.

7 트랙의 가장 안쪽 경계는 △ABC의 외접원이므로 이 트랙의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에서

$\frac{a}{\sin A}=2R$이므로 $\frac{130}{\sin A}=2R$ …… ㉠

이때 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{140^2+150^2-130^2}{2\times140\times150}=\frac{3}{5}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ $(\because 0°<A<180°)$

$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2R=\frac{130}{\frac{4}{5}}=\frac{325}{2}\,(\text{m})$

따라서 트랙의 가장 안쪽 경계의 둘레의 길이는

$2\pi R=\frac{325}{2}\pi\,(\text{m})$

8 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{3}{2}$에 대입하면

$\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}=\frac{3}{2}$

$\therefore a+b+c=3R$

이때 △ABC의 외접원의 반지름의 길이 $R=8$이므로

$a+b+c=24$

따라서 △ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라고 하면 $r=4$이므로 △ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}\times4\times24=48$

9 점 P는 $\overline{AB}$의 중점이므로

$\overline{AP}=\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ ······ ㉠

점 Q는 $\overline{AC}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{AQ}:\overline{CQ}=2:1$

$\therefore \overline{AQ}=\frac{2}{3}\overline{AC}$ ······ ㉡

$\therefore \triangle APQ=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overline{AB}\times\frac{2}{3}\overline{AC}\times\sin A$ ($\because$ ㉠, ㉡)

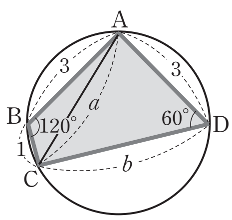
$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A\right)$

$=\frac{1}{3}\triangle ABC$

따라서 △ABC$=3$△APQ이므로

$k=3$

10 △ABC에서 $\overline{AC}=a$로 놓으면



코사인법칙에 의하여

$a^2=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos120^\circ$

$=10-6\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=13$

$\therefore a=\sqrt{13}$ ($\because a>0$)

이때 □ABCD가 원에 내접하므로

$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$

$\therefore \angle ADC=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

이때 △ACD에서 $\overline{CD}=b$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$a^2=3^2+b^2-2\times3\times b\times\cos60^\circ$

$13=9+b^2-6\times b\times\frac{1}{2}$

$b^2-3b-4=0$

$(b+1)(b-4)=0$

$\therefore b=4$ ($\because b>0$)

따라서 □ABCD의 넓이는

□ABCD$=$△ABC$+$△ACD

$=\frac{1}{2}\times3\times1\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin60^\circ$

$=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+6\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

11 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$ ······ (가)

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C$

$=\frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}:\frac{c}{2R}$

$=a:b:c=2:3:4$ ······ (나)

$a=2k$, $b=3k$, $c=4k$ $(k>0)$라고 하면

$ab:bc:ca=6k^2:12k^2:8k^2$

$=3:6:4$ ······ (다)

채점 기준	배점
(가) 사인법칙을 변형한다.	2점
(나) $a:b:c$를 구한다.	3점
(다) $ab:bc:ca$를 구한다.	5점

12 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R, 넓이를 S라고 하면 사인법칙에 의하여 $\sin A=\frac{a}{2R}$이므로

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$

$=\frac{1}{2}bc\times\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$

그런데 $R=6$이므로

$S=\frac{abc}{4R}=\frac{abc}{4\times6}=\frac{abc}{24}$ ······ ㉠ ······ (가)

한편 △ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라고 하면 $r=3$이므로

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{3}{2}(a+b+c)$ ······ ㉡ ······ (나)

㉠$=$㉡이므로

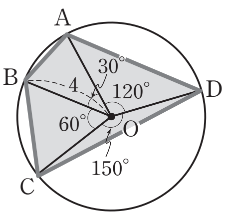
$\frac{abc}{24}=\frac{3}{2}(a+b+c)$

$\therefore \frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{24}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{36}$

$\therefore \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{36}$ ······ (다)

채점 기준	배점
(가) 외접원의 반지름의 길이를 이용하여 삼각형 ABC의 넓이를 구한다.	3점
(나) 내접원의 반지름의 길이를 이용하여 삼각형 ABC의 넓이를 구한다.	3점
(다) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$의 값을 구한다.	4점

13 호의 길이는 부채꼴의 중심각의 크기에 정비례하므로 오른쪽 그림에서



$\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CD}:\widehat{DA}$

$=\angle AOB:\angle BOC$

$\quad :\angle COD:\angle DOA$

이때 $\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CD}:\widehat{DA}=1:2:5:4$이고,

$\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOA=360°$이므로

$\angle AOB=360°\times\dfrac{1}{1+2+5+4}=30°$

$\angle BOC=360°\times\dfrac{2}{1+2+5+4}=60°$

$\angle COD=360°\times\dfrac{5}{1+2+5+4}=150°$

$\angle DOA=360°\times\dfrac{4}{1+2+5+4}=120°$ …… (가)

□ABCD의 외접원의 반지름의 길이는 4이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=4$

$\therefore$ □ABCD

$=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCD+\triangle ODA$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times4\times\sin 30°+\dfrac{1}{2}\times4\times4\times\sin 60°$

$\quad+\dfrac{1}{2}\times4\times4\times\sin 150°+\dfrac{1}{2}\times4\times4\times\sin 120°$

$=4+4\sqrt{3}+4+4\sqrt{3}$

$=8+8\sqrt{3}$ …… (나)

채점 기준	배점
(가) ∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠DOA의 크기를 구한다.	4점
(나) □ABCD의 넓이를 구한다.	6점

13~15강 내공 점검 p. 94~96

1 ②	**2** ③	**3** ⑤	**4** -4	**5** ③
6 ②	**7** ③	**8** ②	**9** ⑤	**10** ①
11 ②	**12** ①	**13** 12	**14** ④	**15** $\dfrac{63}{2}$
16 $\dfrac{1}{16}$	**17** ④	**18** ③	**19** 1717	**20** 24

21 (1) 1317000원 (2) 1313000원 (3) 상품 A

1 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=a+2(n-1)$

$\therefore \dfrac{2^{a_2}+2^{a_4}+2^{a_6}}{2^{a_1}+2^{a_3}+2^{a_5}}=\dfrac{2^{a+2}+2^{a+6}+2^{a+10}}{2^a+2^{a+4}+2^{a+8}}$

$=\dfrac{2^{a+2}(1+2^4+2^8)}{2^a(1+2^4+2^8)}$

$=2^2=4$

2 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=11$에서

$a+2d=11$ …… ㉠

$a_6:a_{10}=5:8$에서

$(a+5d):(a+9d)=5:8$

$5(a+9d)=8(a+5d)$

$\therefore 3a-5d=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5,\ d=3$

따라서 $a_n=5+(n-1)\times3=3n+2$이므로

$a_{20}=3\times20+2=62$

3 a, 10, b가 이 순서대로 등차수열이므로

$a+b=20$ …… ㉠

$\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{1}{b}$이 이 순서대로 등차수열이므로

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{5}$

$\therefore \dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{2}{5}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{20}{ab}=\dfrac{2}{5}$

$\therefore ab=50$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$\qquad=20^2-2\times50=300$

4 네 수를 $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$라고 하면

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=8$에서

$4a=8 \quad \therefore a=2$

$(a-3d)(a+3d)=-32$에서

$a^2-9d^2=-32$

$4-9d^2=-32$

$d^2=4$

$\therefore d=\pm2$

따라서 네 수는 $-4,\ 0,\ 4,\ 8$이므로 가장 작은 수는 -4이다.

5 주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a+3d=-3,\ a+9d=9$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-9,\ d=2$

따라서 첫째항부터 제20항까지의 합은

$\dfrac{20\{2\times(-9)+(20-1)\times2\}}{2}=200$

6 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$\dfrac{6\{a+(a+5d)\}}{2}=\dfrac{6\{(a+6d)+(a+11d)\}}{2}+12$

$2a+5d=2a+17d+4 \qquad \therefore d=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore a_6-a_3=3d=3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-1$

7 첫째항이 -3, 마지막 항이 11, 항의 개수가 $n+2$인 등차수열의 모든 항의 합이 32이므로

$\dfrac{(n+2)(-3+11)}{2}=32$

$4(n+2)=32 \qquad \therefore n=6$

8 선분 A_nA_{n+1}의 길이를 a_n이라고 하면 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 3이다. 공차를 d라고 하면

$a_n=3+(n-1)\times d$

$\overline{A_1A_{11}}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$

$=\dfrac{10\{3+(3+9d)\}}{2}$

$=30+45d$

$\overline{A_1A_6}=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

$=\dfrac{5\{3+(3+4d)\}}{2}$

$=15+10d$

이때 점 A_6이 선분 A_1A_{11}을 $2:1$로 내분하므로

$\overline{A_1A_6}:\overline{A_1A_{11}}=2:3$

$(15+10d):(30+45d)=2:3$

$2(30+45d)=3(15+10d)$

$\therefore d=-\dfrac{1}{4}$

9 $S_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$

$=n(n+1)(n+2)$

라고 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1\times2\times3=6$

(ii) $n\ge2$일 때,

$na_n=S_n-S_{n-1}$

$=n(n+1)(n+2)-n(n-1)(n+1)$

$=3n(n+1)$

$\therefore a_n=3(n+1) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=3(n+1)$

$\therefore a_1+a_{10}=6+33=39$

10 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_1+a_2+a_3=5$에서

$a+ar+ar^2=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$a_4+a_5+a_6=-40$에서

$ar^3+ar^4+ar^5=-40 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=-8$

그런데 r는 실수이므로 $r=-2$

$r=-2$를 ㉠에 대입하면

$a-2a+4a=5 \qquad \therefore a=\dfrac{5}{3}$

$\therefore a_2+a_4+a_6=ar+ar^3+ar^5$

$=ar(1+r^2+r^4)$

$=\dfrac{5}{3}\times(-2)\times21=-70$

11 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2=2$에서 $ar=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$a_6=8$에서 $ar^5=8 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=4$

그런데 $r>0$이므로 $r=\sqrt{2}$

$r=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$\sqrt{2}a=2 \qquad \therefore a=\sqrt{2}$

따라서 $a_n=\sqrt{2}\times(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^n$이므로

$a_n{}^2=(\sqrt{2})^{2n}=2^n$

$a_n{}^2<1000$에서 $2^n<1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 구하는 n의 최댓값은 9이다.

12 주어진 등비수열의 공비를 r라고 하면 첫째항이 3, 제9항이 48이므로

$3r^8=48$에서 $r^8=16$

그런데 r는 실수이므로 $r^2=2$

이때 x_4는 제5항이므로

$\sqrt{x_4}=\sqrt{3r^4}=\sqrt{3\times2^2}=2\sqrt{3}$

13 30, a, b는 이 순서대로 등차수열이므로

$2a=30+b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

a, b, 2는 이 순서대로 등비수열이므로

$b^2=2a \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $b^2=30+b$

$b^2-b-30=0$, $(b+5)(b-6)=0$

$\therefore b=6$ ($\because$ b는 자연수)

$b=6$을 ㉠에 대입하면

$2a=36 \qquad \therefore a=18$

$\therefore a-b=18-6=12$

14 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{24}=\dfrac{1}{4}\times24+\{1+(-3)+(-3)^2+(-3)^3+\cdots+(-3)^{23}\}$

$=6+\dfrac{1\times\{1-(-3)^{24}\}}{1-(-3)}=6+\dfrac{1}{4}(1-3^{24})$

$=\dfrac{1}{4}(25-3^{24})$

15 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=24 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$S_{2n}=\dfrac{a(1-r^{2n})}{1-r}=\dfrac{a(1-r^n)(1+r^n)}{1-r}=30 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $24(1+r^n)=30$

$1+r^n=\dfrac{5}{4} \qquad \therefore r^n=\dfrac{1}{4}$

$\therefore S_{3n}=\dfrac{a(1-r^{3n})}{1-r}=\dfrac{a(1-r^n)(1+r^n+r^{2n})}{1-r}$

$=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}\times(1+r^n+r^{2n})$

$=24\times\left(1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{63}{2}$

16 주어진 정사각형의 넓이가 4이므로 한 변의 길이는

$\sqrt{4}=2$

n번째 그리는 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라고 하면

$a_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,

$a_2=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$,

$a_3=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cdots$

$\therefore\ a_n=\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

따라서 10번째 그리는 정사각형의 한 변의 길이는

$a_{10}=\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^9=\frac{1}{16}$

17 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=6$에서 $ar^2=6$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_7=24$에서 $ar^6=24$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^4=4$ $\quad\therefore\ r^2=2$

$r^2=2$를 ㉠에 대입하면

$2a=6$ $\quad\therefore\ a=3$

$\therefore\ {a_n}^2=(ar^{n-1})^2=a^2\times(r^2)^{n-1}=9\times2^{n-1}$

따라서 구하는 값은 첫째항이 9, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같으므로

${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_{10}}^2=\frac{9(2^{10}-1)}{2-1}=9207$

18 매년 인구의 증가율을 r라고 하면 n년 후의 인구는

$100(1+r)^n$(만 명)

10년 후인 2010년 초의 인구가 130만 명이므로

$100(1+r)^{10}=130$ $\quad\therefore\ (1+r)^{10}=\frac{13}{10}$

따라서 20년 후인 2020년 초의 인구는

$100(1+r)^{20}=100\{(1+r)^{10}\}^2=100\left(\frac{13}{10}\right)^2$

$=100\times\frac{169}{100}=169$(만 명)

19 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_{18}=a+17d=49$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_{20}=a+19d=43$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=100$, $d=-3$

$\therefore\ a_n=100+(n-1)\times(-3)=-3n+103$ $\cdots\cdots$ (가)

이때 등차수열 $\{a_n\}$이 제n항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$-3n+103<0$에서 $\quad n>34.\dot{3}$

즉, 처음으로 음수가 되는 항은 제35항이다. $\cdots\cdots$ (나)

따라서 등차수열 $\{a_n\}$은 제35항부터 음수이므로 S_n의 최댓값은 첫째항부터 제34항까지의 합이다.

$S_{34}=\frac{34\{2\times100+(34-1)\times(-3)\}}{2}=1717$ $\cdots\cdots$ (다)

채점 기준	배점
(가) 일반항 a_n을 구한다.	3점
(나) 처음으로 음수가 되는 항을 구한다.	3점
(다) S_n의 최댓값을 구한다.	3점

20 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=11$에서 $a+2d=11$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_7=3$에서 $a+6d=3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=15$, $d=-2$ $\cdots\cdots$ (가)

$\therefore\ S_n=\frac{n\{2\times15+(n-1)\times(-2)\}}{2}$

$=-n^2+16n$

$S_n>60$에서

$-n^2+16n>60$, $n^2-16n+60<0$

$(n-6)(n-10)<0$ $\quad\therefore\ 6<n<10$ $\cdots\cdots$ (나)

따라서 n의 값은 7, 8, 9이므로 구하는 합은

$7+8+9=24$ $\cdots\cdots$ (다)

채점 기준	배점
(가) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구한다.	3점
(나) $S_n>60$을 만족하는 n의 값의 범위를 구한다.	4점
(다) n의 값의 합을 구한다.	2점

21 (1) 월이율이 1.5 %이고 1개월마다 단리로 1월부터 매월 초에 10만 원씩 12개월 동안 적립할 때, 그 해 12월 말의 적립금의 원리합계를 S_A라고 하면

$S_A=10^5\times(1+0.015\times1)+10^5\times(1+0.015\times2)$
$+\cdots+10^5\times(1+0.015\times12)$

$=10^5\times12+\{1500+(1500\times2)+\cdots+(1500\times12)\}$

$=1200000+1500(1+2+\cdots+12)$

$=1200000+1500\times\frac{12(1+12)}{2}$

$=1200000+117000$

$=1317000$(원) $\cdots\cdots$ (가)

(2) 월이율이 1 %이고 1개월마다 복리로 1월부터 매월 초에 10만 원씩 12개월 동안 적립할 때, 그 해 12월 말의 적립금의 원리합계를 S_B라고 하면

$S_B=10^5\times1.01+10^5\times1.01^2+\cdots+10^5\times1.01^{12}$

$=\frac{10^5\times1.01\times(1.01^{12}-1)}{1.01-1}$

$=\frac{10^5\times1.01\times0.13}{0.01}=1313000$(원) $\cdots\cdots$ (나)

(3) (1), (2)에 의하여 $S_A>S_B$이므로 상품 A에 가입해야 한다. $\cdots\cdots$ (다)

채점 기준	배점
(가) A 상품의 원리합계를 구한다.	4점
(나) B 상품의 원리합계를 구한다.	4점
(다) 어느 상품에 가입해야 하는지 말한다.	2점

16~18강 내공 점검 p. 97~99

1 ②	2 ⑤	3 ⑤	4 ③	5 ④
6 ④	7 ③	8 ②	9 ③	10 ③
11 ①	12 ②	13 ②	14 ①	15 ⑤
16 3	17 5	18 22		

1 ㄱ. $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$

ㄴ. $\sum_{k=m}^{n} a_k=a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n$

$\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=2}^{m} a_{k-1}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-1})$

$=a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n$

$\therefore \sum_{k=m}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=2}^{m} a_{k-1}$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n} ca_k=ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n$

$\sum_{k=1}^{n} a_k+cn=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+cn$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} ca_k\neq\sum_{k=1}^{n} a_k+cn$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

2 $\sum_{k=1}^{n} k(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+3(a_4-a_3)+\cdots+n(a_{n+1}-a_n)$

$=na_{n+1}-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)$

$=na_{n+1}-\sum_{k=1}^{n} a_k$

즉, $na_{n+1}-\sum_{k=1}^{n} a_k=na_{n+1}-5n^2$이므로 $\sum_{k=1}^{n} a_k=5n^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k=5\times10^2=500$

3 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3-\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k+1)^3-(a_k-1)^3\}$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k^3+3a_k^2+3a_k+1)-(a_k^3-3a_k^2+3a_k-1)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(6a_k^2+2)=6\sum_{k=1}^{10} a_k^2+\sum_{k=1}^{10} 2$

$=6\times40+2\times10=260$

4 $\sum_{k=1}^{100}\frac{2^k-5^k}{4^k}=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{5}{4}\right)^k$

$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{5}{4}\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{100}-1\right\}}{\frac{5}{4}-1}$

$=\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right\}-5\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{100}-1\right\}$

$=6-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}-5\left(\frac{5}{4}\right)^{100}$

따라서 $a=6$, $b=-1$, $c=-5$이므로 $abc=30$

5 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=n(n+4)$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10} k(k+4)=\sum_{k=1}^{10}(k^2+4k)$

$=\sum_{k=1}^{10} k^2+4\sum_{k=1}^{10} k$

$=\frac{10\times11\times21}{6}+4\times\frac{10\times11}{2}$

$=385+220=605$

6 $\sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{10} n^2k\right)=\sum_{n=1}^{5} n^2\left(\sum_{k=1}^{10} k\right)$

$=\sum_{n=1}^{5} n^2\left(\frac{10\times11}{2}\right)=55\sum_{n=1}^{5} n^2$

$=55\times\frac{5\times6\times11}{6}=3025$

7 $a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{12}\log_8 a_n=\sum_{n=1}^{12}\log_{2^3} 2^{n-1}$

$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{12}(n-1)=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{12} n-\sum_{n=1}^{12} 1\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{12\times13}{2}-12\right)=22$

8 $\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\cdots+\frac{1}{41^2-1}$

$=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{(2k+1)^2-1}$

$=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{(2k+1-1)(2k+1+1)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{20}}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{5}{21}$

9 $\frac{1}{1+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+4}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{5n-4}+\sqrt{5n+1}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5k-4}+\sqrt{5k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{5k-4}-\sqrt{5k+1}}{(\sqrt{5k-4}+\sqrt{5k+1})(\sqrt{5k-4}-\sqrt{5k+1})}$

$=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{5k+1}-\sqrt{5k-4})$

$=\frac{1}{5}\{(\cancel{\sqrt{6}}-1)+(\cancel{\sqrt{11}}-\cancel{\sqrt{6}})+(\cancel{4}-\cancel{\sqrt{11}})$

$+\cdots+(\sqrt{5n+1}-\cancel{\sqrt{5n-4}})\}$

$=\frac{1}{5}(\sqrt{5n+1}-1)=\frac{\sqrt{5n+1}-1}{5}$

따라서 $\frac{\sqrt{5n+1}-1}{5}=3$이므로

$\sqrt{5n+1}=16$, $5n+1=256$

$5n=255$ $\therefore n=51$

10 탁자를 n개 사용한 구성을 만드는 데 필요한 의자의 개수를 a_n이라고 하면 $a_1=4,\ a_2=6,\ a_3=8,\ \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=4+(n-1)\times 2=2n+2$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}(2k+2)\\ &=2\times\frac{n(n+1)}{2}+2n\\ &=n^2+3n\end{aligned}$$

의자는 최대 100개까지 사용할 수 있으므로

$n^2+3n\le 100$에서 $n(n+3)\le 100$

이때 $8\times 11=88,\ 9\times 12=108$이므로 n의 최댓값은 8이다.

$$\begin{aligned}\therefore 1+2+3+\cdots+8 &= \sum_{k=1}^{8} k\\ &=\frac{8\times 9}{2}=36\end{aligned}$$

따라서 필요한 탁자의 개수는 36이다.

11 (i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1+4=5$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n-S_{n-1}\\ &=n^2+4n-\{(n-1)^2+4(n-1)\}\\ &=2n+3 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+3$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k+3}-\frac{1}{2k+5}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{5}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{11}}\right)\right.\\ &\qquad \left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{23}}-\frac{1}{25}\right)\right\}\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{25}\right)=\frac{2}{25}\end{aligned}$$

12 $2a_{n+1}-a_{n+2}=a_n$에서 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 $a_1=-2,\ a_2=3$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -2, 공차는 5이다.

따라서 $a_n=-2+(n-1)\times 5=5n-7$이므로

$a_{100}=5\times 100-7=493$

13 이차방정식 $a_{n+2}x^2-2a_{n+1}x+a_n=0$의 판별식을 D라고 하면 이 이차방정식이 중근을 가지므로 $D=0$이어야 한다.

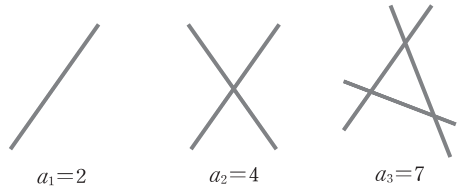
$\dfrac{D}{4}={a_{n+1}}^2-a_{n+2}a_n=0$

$\therefore {a_{n+1}}^2=a_n a_{n+2}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, $a_1=1,\ a_2=2$이므로 첫째항은 1, 공비는 2이다.

$a_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$ $\quad\therefore a_{20}=2^{19}$

14 직선을 한 개씩 그을 때마다 나누어지는 평면의 개수는 다음과 같다.



따라서 n개의 직선이 그어져 있는 평면에 직선 1개를 더 그으면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 점에서 만나므로 기존의 평면의 개수에 $(n+1)$개의 평면이 추가된다.

$\therefore a_{n+1}=a_n+n+1$

15 (ii) $n=k$일 때, $3^{2n}-1$이 8로 나누어떨어진다고 가정하면

$3^{2k}-1=8m$ (m은 자연수) $\qquad\cdots\cdots ㉠$

으로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned}3^{2(k+1)}-1 &= \boxed{9}\times 3^{2k}-1\\ &=(8+1)\times 3^{2k}-1\\ &=8\times 3^{2k}+3^{2k}-1\\ &=8\times 3^{2k}+8m\ (\because ㉠)\\ &=8(3^{2k}+\boxed{m})\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $3^{2n}-1$은 8로 나누어떨어진다.

$\therefore$ (가) 9

(나) m

16
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(i-j)\right\} &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}i-\sum_{j=1}^{n}j\right)\\ &=\sum_{i=1}^{m}\left\{in-\frac{n(n+1)}{2}\right\}\\ &=\sum_{i=1}^{m}in-\sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2}\\ &=n\sum_{i=1}^{m}i-\sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2}\\ &=n\times\frac{m(m+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}\times m\\ &=\frac{mn(m-n)}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠ \qquad \cdots\cdots \text{(가)}\end{aligned}$$

$m+n=5,\ mn=6$이므로

$$\begin{aligned}(m-n)^2 &= (m+n)^2-4mn\\ &=5^2-4\times 6=1\end{aligned}$$

그런데 $m>n$이므로

$m-n=1 \qquad \cdots\cdots$ (나)

$mn=6,\ m-n=1$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(i-j)\right\} &= \frac{mn(m-n)}{2}\\ &=\frac{6\times 1}{2}=3 \qquad \cdots\cdots \text{(다)}\end{aligned}$$

채점 기준	배점
(가) $\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(i-j)\right\}$를 간단히 한다.	4점
(나) $m-n$의 값을 구한다.	3점
(다) $\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(i-j)\right\}$의 값을 구한다.	1점

17 $\sum_{k=1}^{47}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+3}}$

$=\sum_{k=1}^{47}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+3})}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{47}(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+1})$ …… (가)

$=\frac{1}{2}\{(\cancel{2}-\sqrt{2})+(\cancel{\sqrt{5}}-\sqrt{3})+(\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{2})+(\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}})$

$+\cdots+(7-\cancel{\sqrt{47}})+(5\sqrt{2}-\cancel{4\sqrt{3}})\}$

$=\frac{1}{2}(-\sqrt{2}-\sqrt{3}+7+5\sqrt{2})$

$=\frac{7}{2}+2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ …… (나)

따라서 $a=\frac{7}{2}$, $b=2$, $c=-\frac{1}{2}$이므로 …… (다)

$a+b+c=5$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+3}}$을 유리화하여 간단히 한다.	3점
(나) $\sum_{k=1}^{47}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+3}}$의 값을 구한다.	4점
(다) a, b, c의 값을 구한다.	1점
(라) $a+b+c$의 값을 구한다.	1점

18 $a_{n+2}-a_n=n$에서

$a_{n+2}=a_n+n$ …… ㉠

(ⅰ) ㉠의 n에 1, 3, 5를 차례로 대입하면

$a_3=a_1+1=0+1=1$

$a_5=a_3+3=1+3=4$

$a_7=a_5+5=4+5=9$ …… (가)

(ⅱ) ㉠의 n에 2, 4, 6을 차례로 대입하면

$a_4=a_2+2=1+2=3$

$a_6=a_4+4=3+4=7$

$a_8=a_6+6=7+6=13$ …… (나)

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$a_7+a_8=9+13=22$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) a_7의 값을 구한다.	3점
(나) a_8의 값을 구한다.	3점
(다) a_7+a_8의 값을 구한다.	2점