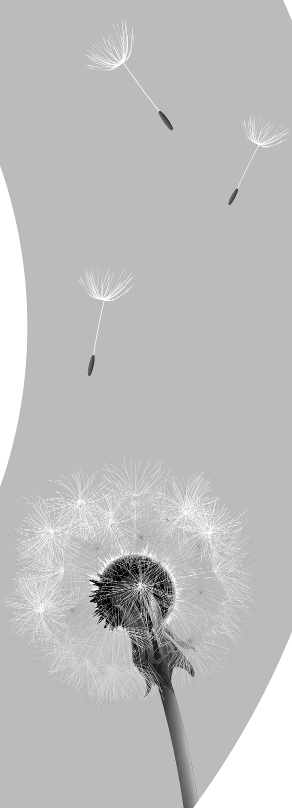
라이트 쎈

정답 및 풀이

미적분 I

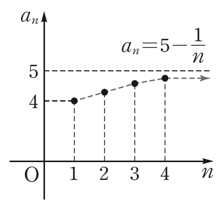


● 정답을 확인하려고 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

Ⅰ. 수열의 극한

01 수열의 극한

0001 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=5-\frac{1}{n}$

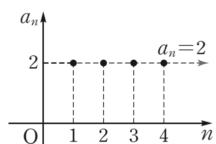


오른쪽 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 5에 한없이 가까워지므로 이 수열은 5에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}\right)=5$

답 5

0002 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=2$

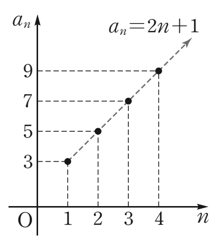


오른쪽 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 2이므로 이 수열은 2에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} 2=2$

답 2

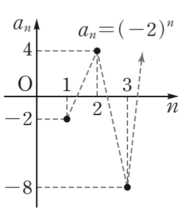
0003 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=2n+1$



오른쪽 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

답 풀이 참조

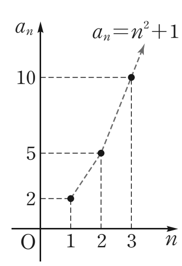
0004 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=(-2)^n$



오른쪽 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 이 수열은 진동한다.

답 풀이 참조

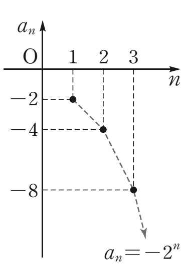
0005 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=n^2+1$



오른쪽 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

답 발산

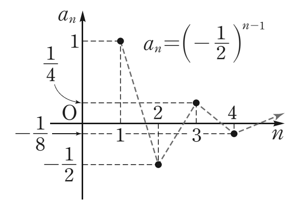
0006 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=-2^n$



오른쪽 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.

답 발산

0007 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

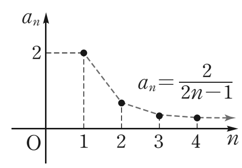


오른쪽 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

답 수렴, 0

0008 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{2}{2n-1}$

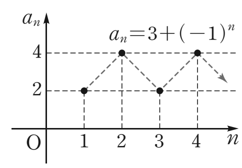


오른쪽 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2n-1}=0$

답 수렴, 0

0009 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=3+(-1)^n$



오른쪽 그림에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 이 수열은 진동한다.

답 발산

0010 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=3-1=2$

답 2

0011 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=3-(-1)=4$

답 4

0012 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=3\cdot(-1)=-3$

답 -3

0013 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{3}{-1}=-3$

답 -3

0014 $\lim_{n\to\infty}(5a_n-b_n)=5\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n$

$=5\cdot3-(-1)$

$=16$

답 16

0015 $\lim_{n\to\infty}(-2a_nb_n)=-2\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n$

$=-2\cdot3\cdot(-1)$

$=6$

답 6

0016 $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+3}{3b_n}=\frac{4\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}3}{3\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{4\cdot3+3}{3\cdot(-1)}$

$=-5$

답 -5

0017 $\lim_{n\to\infty}(a_n+3)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}3=\alpha+3$

답 $\alpha+3$

0018 $\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=2\alpha-\beta$

답 $2\alpha-\beta$

0019 $\lim_{n\to\infty} a_n{}^2 b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha^2\beta$ 답 $\alpha^2\beta$

0020 $\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n}{5b_n} = \frac{2\lim_{n\to\infty} a_n}{5\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{2\alpha}{5\beta}$ 답 $\frac{2\alpha}{5\beta}$

0021 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + 5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1+5\cdot 0 = 1$ 답 1

0022 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right) = 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$
$= 3\cdot 0 - 0\cdot 0 = 0$ 답 0

0023 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)$
$= \lim_{n\to\infty} 1 - 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$
$= 1-4\cdot 0\cdot 0 = 1$
답 1

다른풀이 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1+2\cdot 0 = 1$,
$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1-2\cdot 0 = 1$
$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)$
$= 1\cdot 1 = 1$

0024 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}{3-\frac{5}{n}}$
$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{n}\right)}$
$= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 3 - 5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$
$= \frac{1+2\cdot 0+4\cdot 0\cdot 0}{3-5\cdot 0} = \frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0025 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0026 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{-2n^2+3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n^2}}{-2+\frac{3}{n}} = -2$ 답 -2

0027 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{7+\frac{1}{n}} = 0$ 답 0

0028 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2+3n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = 0$ 답 0

0029 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+1}{n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = \infty$ 답 발산

0030 $\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+4n}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = -\infty$ 답 발산

0031 $\lim_{n\to\infty}(n^2-5n) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\frac{5}{n}\right)$
이때 $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right) = 1$이므로
$\lim_{n\to\infty}(n^2-5n) = \infty$ 답 발산

0032 $\lim_{n\to\infty}\left(n^2-\frac{1}{2}n^3\right) = \lim_{n\to\infty} n^3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)$
이때 $\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$이므로
$\lim_{n\to\infty}\left(n^2-\frac{1}{2}n^3\right) = -\infty$ 답 발산

0033 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$
$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$
$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$
$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0034 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3n+2}-n)$
$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-3n+2}-n)(\sqrt{n^2-3n+2}+n)}{\sqrt{n^2-3n+2}+n}$
$= \lim_{n\to\infty}\frac{-3n+2}{\sqrt{n^2-3n+2}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-3+\frac{2}{n}}{\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+1}$
$= \frac{-3}{1+1} = -\frac{3}{2}$ 답 $-\frac{3}{2}$

0035 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$
$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}$
$= \infty$ 답 발산

0036 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}$
$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{2n}$
$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2}$
$= \frac{1+1}{2} = 1$ 답 1

0037 답 (가) 1 (나) 1

0038 $\frac{7n-2}{n+1}<a_n<\frac{7n}{n+1}$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n-2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{7-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=7,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{7}{1+\frac{1}{n}}=7$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=7$ 답 7

0039 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)=3,$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)=3$

즉 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=\boxed{3}$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{3}$

∴ (가) 3 (나) 3 답 풀이 참조

0040 $4n^2-1<(n^2+1)a_n<4n^2+3$에서

$\frac{4n^2-1}{n^2+1}<a_n<\frac{4n^2+3}{n^2+1}$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=4,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=4$$

즉 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3}{n^2+1}=4$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=4$ 답 4

0041 공비가 0.3이고, $-1<0.3<1$이므로 0에 수렴한다.

답 수렴

0042 공비가 $\sqrt{2}$이고, $\sqrt{2}>1$이므로 발산한다.

답 발산

0043 공비가 $-\frac{4}{3}$이고, $-\frac{4}{3}<-1$이므로 발산한다.

답 발산

0044 공비가 $-\frac{1}{5}$이고, $-1<-\frac{1}{5}<1$이므로 0에 수렴한다.

답 수렴

0045 공비가 -2이고, $-2<-1$이므로 발산한다.

답 발산

0046 공비가 $\frac{2}{3}$이고, $-1<\frac{2}{3}<1$이므로 0에 수렴한다.

답 수렴

0047 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{5^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{25}\right)^n=0$ 답 0

0048 $\lim_{n\to\infty}(1+0.8^n)=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}0.8^n$

$=1+0=1$ 답 1

0049 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2$ 답 2

0050 $\lim_{n\to\infty}\frac{9^n-1}{3^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9^n-1}{3\cdot 9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{3}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

0051 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-7^n}{3^n+7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+1}=-1$ 답 -1

0052 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+(-2)^n}{5^{n-1}-(-2)^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+(-2)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}}=5$

답 5

0053 공비가 $2r$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<2r\le 1$ ∴ $-\frac{1}{2}<r\le\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}<r\le\frac{1}{2}$

0054 공비가 $-\frac{r}{3}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<-\frac{r}{3}\le 1$ ∴ $-3\le r<3$ 답 $-3\le r<3$

0055 공비가 $\frac{r}{4}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{r}{4}\le 1$ ∴ $-4<r\le 4$ 답 $-4<r\le 4$

0056 ①, ② n이 한없이 커지면 $8-2n$의 값과 $1-n^2$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

③ n이 한없이 커지면 $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$의 값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

④ 홀수 번째 항 $-1,\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{5},\ \cdots$은 0에 수렴하고, 짝수 번째 항 $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \cdots$도 0에 수렴하므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

⑤ 발산(진동)한다.

답 ④

0057 ㄱ. n이 한없이 커지면 $6-5n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

ㄴ. n이 한없이 커지면 $\left(\frac{4}{5}\right)^n$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄷ. n이 한없이 커지면 $\frac{n}{n+1}$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 1에 수렴한다.

ㄹ. n이 한없이 커지면 $\frac{n}{\sqrt{n}+1}$의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

이상에서 발산하는 수열은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

0058 $$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+b_n}{a_nb_n-1}=\frac{3\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n}{\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}1}=\frac{3\cdot1+(-2)}{1\cdot(-2)-1}=-\frac{1}{3}$$
답 $-\frac{1}{3}$

0059 $\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=4$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n(a_n+3)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}(a_n+3)=3\cdot(3+3)=18$$
답 ①

0060 $$\lim_{n\to\infty}(a_n+2)(b_n-1)=\lim_{n\to\infty}(a_n+2)\lim_{n\to\infty}(b_n-1)=(2+2)\cdot(3-1)=8$$
답 8

0061 $$\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n=5\cdot5-2\cdot1=23$$
답 ①

0062 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-3\right)=-3$,

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{4-\frac{1}{n(n+1)}\right\}=4$ ⇨ ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+2)(b_n-5)=\lim_{n\to\infty}(a_n+2)\lim_{n\to\infty}(b_n-5)=(-3+2)\cdot(4-5)=1$$ ⇨ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ $\lim_{n\to\infty}a_n$, $\lim_{n\to\infty}b_n$의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ $\lim_{n\to\infty}(a_n+2)(b_n-5)$의 값을 구할 수 있다.	50%

0063 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+1}+1}{a_n-1}=5$에서 $\frac{3\alpha+1}{\alpha-1}=5$

$3\alpha+1=5\alpha-5$, $2\alpha=6$

$\therefore \alpha=3$ 답 3

0064 수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 실수에 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\frac{4}{a_{n+1}}=4-a_n$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{4}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(4-a_n)$이므로

$\frac{4}{\alpha}=4-\alpha$, $\alpha^2-4\alpha+4=0$

$(\alpha-2)^2=0$ $\therefore \alpha=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(4-a_n)=4-2=2$ 답 ⑤

0065 ①, ②, ③, ④ [반례] 수열 $\{a_n\}$을
$1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots$
이라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n$, $\lim_{n\to\infty}a_{n+2}$는 발산(진동)한다.

또 $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{4n-1}=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}a_{2n}$, $\lim_{n\to\infty}a_{4n-1}\neq\lim_{n\to\infty}a_{2n}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$에서 n 대신 $2n$을 대입하면

$\lim_{2n\to\infty}a_{4n}=\alpha$

이때 $2n\longrightarrow\infty$이면 $n\longrightarrow\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_{4n}=\alpha$

답 ⑤

0066 $$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{3-2n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1}{3-2n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}-2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}$$
$$=-2+1=-1$$
답 -1

0067 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=1$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n-1)}{n^3+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2-n}{n^3+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^3}}=2$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{2}=\frac{1}{2}$

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{1}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

0068 $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=4\cdot3=12$$
답 ⑤

0069 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n+b_n=3n^2$, $a_nb_n=n^2-1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{a_nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{1-\frac{1}{n^2}}=3$$

답 3

0070 $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{4n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4}=\frac{1}{4}$$

답 ①

타센 특강 자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

0071 $2^2+3^2+4^2+\cdots+(n+1)^2$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+1)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{2n^3+9n^2+13n}{6}$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+9n^2+13n}{6n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{9}{n}+\frac{13}{n^2}}{6}=\frac{1}{3}$$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로

$a+b=4$

답 ②

0072 $a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n+2}{n+1}$$

$$=\frac{n+2}{2}$$ ⇨ ❶

$b_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ ⇨ ❷

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{(na_n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2(n+2)^2}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}=1$$ ⇨ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a_n을 간단히 할 수 있다.	30%
❷ b_n을 간단히 할 수 있다.	20%
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{(na_n)^2}$의 값을 구할 수 있다.	50%

0073 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{n-2}=\pm\infty$이므로 $a=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}=b$$

따라서 $b=4$이므로 $a+b=4$

답 ③

0074 $a=0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)(3n+1)}{an^2-1}=-\infty$이므로 $a\neq0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)(3n+1)}{an^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+16n+4}{an^2-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{16}{n}+\frac{4}{n^2}}{a-\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{12}{a}$$

따라서 $\frac{12}{a}=6$이므로 $a=2$

답 2

0075 $b\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-3n-1}{bn^3+2n^2+1}=0$이므로

$b=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2-3n-1}{bn^3+2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-3n-1}{2n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=\frac{1}{4}$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+1}{(an+b)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+1}{\left(\frac{1}{2}n\right)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+1}{\frac{1}{4}n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{4}}=8$$

답 8

0076 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2-2n+1}}{an^2+4n+3}=0$이므로

$a=0$ ($\because b\neq0$) ⇨ ❶

$$\therefore b=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2-2n+1}}{an^2+4n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2-2n+1}}{4n+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}{4+\frac{3}{n}}=1$$ ⇨ ❷

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2-5n+1}{\sqrt{bn^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5n+1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-5+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=-5$$ ⇨ ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 답을 구할 수 있다.	40%

0077 $\lim_{n\to\infty}(3n-\sqrt{9n^2+2n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-\sqrt{9n^2+2n})(3n+\sqrt{9n^2+2n})}{3n+\sqrt{9n^2+2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{3n+\sqrt{9n^2+2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{3+\sqrt{9+\frac{2}{n}}}$$

$$=\frac{-2}{3+3}=-\frac{1}{3}$$

답 ②

0078 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0079 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{n-2})}{(\sqrt{n}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2(\sqrt{n}+\sqrt{n-2})}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$$

$$=-\frac{1+1}{1+1}=-1$$

답 ③

0080 $1+2+3+\cdots+(n+1)=\sum_{k=1}^{n+1}k=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$

∴ (주어진 식)

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n^2+3n+2}{2}}-\sqrt{\frac{n^2+n}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+n})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+n})}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0081 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an}-n)(\sqrt{n^2+an}+n)}{\sqrt{n^2+an}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{\sqrt{n^2+an}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}$$

$$=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=6$이므로 $a=12$

답 12

0082 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an^2+an}+n\sqrt{a}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a+\frac{a}{n}}+\sqrt{a}\right)$$

$$=2\sqrt{a}$$

따라서 $2\sqrt{a}=10$이므로 $\sqrt{a}=5$ ∴ $a=25$

답 ④

0083 $a\le0$이면 $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+2n+2}-(an+b)\}=\infty$이므로

$a>0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+2n+2}-(an+b)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+2n+2}-(an+b)\}\{\sqrt{n^2+2n+2}+(an+b)\}}{\sqrt{n^2+2n+2}+(an+b)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2+2(1-ab)n+2-b^2}{\sqrt{n^2+2n+2}+(an+b)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n+2(1-ab)+\frac{2-b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+a+\frac{b}{n}}$$

이 식의 극한값이 3이므로

$$1-a^2=0,\ \frac{2(1-ab)}{1+a}=3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-2$ ($\because a>0$)

$\therefore a+b=-1$

답 ③

0084 $k\ge 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이므로 $k<0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)(n+3)}+kn)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{(n+1)(n+3)}+kn)(\sqrt{(n+1)(n+3)}-kn)}{\sqrt{(n+1)(n+3)}-kn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-k^2)n^2+4n+3}{\sqrt{n^2+4n+3}-kn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-k^2)n+4+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}-k}$$

이때 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$1-k^2=0$ $\therefore k=-1$ ($\because k<0$)

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{4}{1-k}=\frac{4}{1-(-1)}=2$$

답 2

0085 $\frac{2a_n-5}{5a_n+1}=b_n$으로 놓으면

$2a_n-5=5a_nb_n+b_n$, $(2-5b_n)a_n=b_n+5$

$$\therefore a_n=\frac{b_n+5}{2-5b_n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+5}{2-5b_n}=\frac{2+5}{2-5\cdot 2}=-\frac{7}{8}$$

답 ②

0086 $(n+2)a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{b_n}{n+2}$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(3n+4)a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(3n+4)\cdot\frac{b_n}{n+2}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{n+2}\lim_{n\to\infty} b_n$$
$$=3\cdot 5=15$$

답 ④

0087 $(n-1)a_n=c_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{c_n}{n-1}$ ⇨ ❶

$(n^3-1)b_n=d_n$으로 놓으면

$$b_n=\frac{d_n}{n^3-1}=\frac{d_n}{(n-1)(n^2+n+1)}$$ ⇨ ❷

이때 $\lim_{n\to\infty} c_n=2$, $\lim_{n\to\infty} d_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2\cdot\frac{d_n}{(n-1)(n^2+n+1)}}{\frac{c_n}{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n+1}{n^2+n+1}\cdot\frac{d_n}{c_n}\right)$$
$$=4\cdot\frac{3}{2}=6$$ ⇨ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ a_n을 c_n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ b_n을 d_n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2b_n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	60%

0088 $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=a_n-c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} c_n=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+b_n}{a_n-3b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+(a_n-c_n)}{a_n-3(a_n-c_n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n-c_n}{-2a_n+3c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{c_n}{a_n}}{-2+3\cdot\frac{c_n}{a_n}}$$
$$=\frac{4-0}{-2+3\cdot 0}=-2$$

답 -2

0089 $\sqrt{25n^2-n}<(n+3)a_n<\sqrt{25n^2+4n}$에서

$$\frac{\sqrt{25n^2-n}}{n+3}<a_n<\frac{\sqrt{25n^2+4n}}{n+3}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2-n}}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+4n}}{n+3}=5$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=5$$

답 ④

0090 $3n-50<a_n<3n+70$에서

$$\frac{3n^2-50n}{n^2+2}<\frac{na_n}{n^2+2}<\frac{3n^2+70n}{n^2+2}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-50n}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+70n}{n^2+2}=3$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2+2}=3$$

답 3

0091 $4n-3<(n+2)a_n<4n+5$에서

$$\frac{4n-3}{n+2}<a_n<\frac{4n+5}{n+2}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{n+2}=4$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=4$$ ⇨ ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(5n-1)a_n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{2n+1}\lim_{n\to\infty} a_n$$
$$=\frac{5}{2}\cdot 4=10$$ ⇨ ❷

답 10

채점 기준	비율
❶ $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{(5n-1)a_n}{2n+1}$의 값을 구할 수 있다.	50%

0092 $\frac{n^2+1}{n+2}<\frac{a_n}{n+1}<\frac{n^2+3}{n+2}$에서

$$\frac{(n+1)(n^2+1)}{n+2}<a_n<\frac{(n+1)(n^2+3)}{n+2}$$

$$\therefore \frac{(n+1)(n^2+1)}{(n+2)(n^2+4)}<\frac{a_n}{n^2+4}<\frac{(n+1)(n^2+3)}{(n+2)(n^2+4)}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2+1)}{(n+2)(n^2+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2+3)}{(n+2)(n^2+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}=1$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+4}=1$$

답 1

0093 ㄴ. [반례] $a_n=n$, $b_n=2n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}=\lim_{n\to\infty}2=2$$

ㄷ. [반례] $a_n=n$, $b_n=\frac{1}{n}$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이지만

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1=1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

0094 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{(3a_n+b_n)-3a_n\}$

$$=\lim_{n\to\infty}(3a_n+b_n)-3\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$=0-3\cdot1=-3$$

ㄴ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, ⋯

이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}0=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이다.

ㄷ. $\frac{b_n}{a_n}=c_n$이라 하면 $b_n=a_nc_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}c_n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n-a_nc_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}c_n$$

$$=0-0\cdot1=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0095 ㄱ. 공비가 -2이고, $-2<-1$이므로 발산한다.

ㄴ. 공비가 $\sqrt{2}-1$이고, $-1<\sqrt{2}-1<1$이므로 0에 수렴한다.

ㄷ. 공비가 $-\frac{4}{5}$이고, $-1<-\frac{4}{5}<1$이므로 0에 수렴한다.

ㄹ. $\frac{3^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$에서 공비가 $\frac{3}{2}$이고, $\frac{3}{2}>1$이므로 발산한다.

이상에서 수렴하는 수열은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0096 ㄱ. 수열 $\{0.3^n\}$은 공비가 0.3이고, $-1<0.3<1$이므로 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 1에 수렴한다.

ㄴ. 주어진 수열은

5, 3, 5, 3, 5, 3, ⋯

따라서 발산(진동)한다.

ㄷ. $2^{-n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$에서 공비가 $\frac{1}{2}$이고, $-1<\frac{1}{2}<1$이므로 수열 $\{2^{-n}\}$은 0에 수렴한다.

$5^{-n}=\left(\frac{1}{5}\right)^n$에서 공비가 $\frac{1}{5}$이고, $-1<\frac{1}{5}<1$이므로 수열 $\{5^{-n}\}$은 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄹ. 수열 $\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{2}{\sqrt{3}}$이고, $\frac{2}{\sqrt{3}}>1$이므로 발산한다.

따라서 주어진 수열은 발산한다.

이상에서 발산하는 수열은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ③

0097 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1-4^{n+1}}{2^{n+2}+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-4\cdot4^n}{2^2\cdot2^n+4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n-4}{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=-4$$

답 -4

0098 $$\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}+3^{n+2}}{(3^n+1)(2^n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\cdot6^n+3^2\cdot3^n}{6^n+3^n+2^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

$$=6$$

답 6

0099 $$a=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{2n}}{4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot3^n-4^n}{4^n+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=-1$$ ⇨ ❶

$a=-1$이므로

$$b=\lim_{n\to\infty}(a^{2n+1}-a^{2n})=\lim_{n\to\infty}\{(-1)^{2n+1}-(-1)^{2n}\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-2)$$

$$=-2$$ ⇨ ❷

$\therefore ab=2$ ⇨ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

0100 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^n\cdot a_n}{2^{n+1}-3^n\cdot a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot3^n+2^n\cdot a_n}{2\cdot2^n-3^n\cdot a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot a_n}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-a_n}=-\frac{3}{\alpha}$$

따라서 $-\frac{3}{\alpha}=6$이므로 $\alpha=-\frac{1}{2}$

답 ③

0101 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{3^n-1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{2\cdot 3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{2}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

타센 특강 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 $r\,(r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

0102 $a_n+b_n=5^{n+1}$, $a_n-b_n=2^{2n}$을 연립하면

$$a_n=\frac{5^{n+1}+2^{2n}}{2},\ b_n=\frac{5^{n+1}-2^{2n}}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^{n+1}-2^{2n}}{2}}{\frac{5^{n+1}+2^{2n}}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-4^n}{5^{n+1}+4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot5^n-4^n}{5\cdot5^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{5+\left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

$$=1$$

답 ③

0103 공비가 $\frac{x+1}{3}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x+1}{3}\le1,\qquad -3<x+1\le3$

$\therefore -4<x\le2$

따라서 정수 x는

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

의 6개이다.

답 6

0104 첫째항이 $(x-4)(2-x)$, 공비가 $2-x$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$(x-4)(2-x)=0$ 또는 $-1<2-x\le1$

$(x-4)(2-x)=0$에서 $\quad x=4$ 또는 $x=2$ ⋯⋯ ㉠ ⇨ ❶

$-1<2-x\le1$에서

$-3<-x\le-1$

$\therefore 1\le x<3$ ⋯⋯ ㉡ ⇨ ❷

㉠, ㉡에서 $\quad 1\le x<3$ 또는 $x=4$ ⇨ ❸

따라서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 정수 x는 1, 2, 4이므로 모든 정수 x의 곱은

$1\cdot2\cdot4=8$ ⇨ ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ (첫째항)$=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $-1<$(공비)≤1을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ 주어진 수열이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❹ 모든 정수 x의 곱을 구할 수 있다.	10%

0105 공비가 $(7-x)^2$이고 모든 실수 x에 대하여 $(7-x)^2\ge0$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$(7-x)^2\le1,\qquad x^2-14x+48\le0$

$(x-6)(x-8)\le0$

$\therefore 6\le x\le8$

답 $6\le x\le8$

0106 등비수열 $\{(x+1)^n\}$은 공비가 $x+1$이므로 수렴하려면

$-1<x+1\le1$

$\therefore -2<x\le0$ ⋯⋯ ㉠

등비수열 $\left\{\left(\frac{1-x}{2}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{1-x}{2}$이므로 수렴하려면

$-1<\frac{1-x}{2}\le1,\qquad -2<1-x\le2$

$-3<-x\le1$

$\therefore -1\le x<3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\le x\le0$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=0$이므로

$\alpha+\beta=-1$

답 ②

0107 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로

$-1<r\le1$ ⋯⋯ ㉠

ㄱ. 공비가 $-\frac{r}{2}$이고 ㉠에서 $\qquad -\frac{1}{2}\le-\frac{r}{2}<\frac{1}{2}$

따라서 수열 $\left\{\left(-\frac{r}{2}\right)^n\right\}$은 항상 수렴한다.

ㄴ. 공비가 $\frac{r-1}{3}$이고 ㉠에서 $\qquad -2<r-1\le0$

$\therefore -\frac{2}{3}<\frac{r-1}{3}\le0$

따라서 수열 $\left\{\left(\frac{r-1}{3}\right)^n\right\}$은 항상 수렴한다.

ㄷ. 공비가 r^2이고 ㉠에서 $\qquad 0\le r^2\le1$

따라서 수열 $\{r^{2n}\}$은 항상 수렴한다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 항상 수렴하는 수열이다.

답 ⑤

0108 (i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=-1$$

(ii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$$b=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}=1$$

(i), (ii)에서 $\qquad a+b=0$

답 ①

0109 (i) $r<-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+\frac{1}{r^n}}$$

따라서 발산 (진동)한다.

(ii) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}}{r^n+1}=0$$

(iii) $r=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}}{r^n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(iv) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+\frac{1}{r^n}}=\infty$$

ㄱ. $|r|>1$이면 $r>1$ 또는 $r<-1$이므로 발산한다.

ㄴ. $-1<\frac{1}{2}<1$이므로 $r=\frac{1}{2}$이면 0에 수렴한다.

ㄷ. 수렴하도록 하는 r의 값의 범위는 $-1<r\le1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0110 (i) $|r|<5$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{5}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-r^n}{5^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{r}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{r}{5}\right)^n}=1$$

(ii) $r=5$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-5^n}{5^n+5^n}=0$$

(iii) $|r|>5$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-r^n}{5^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{r}\right)^n+1}=-1$$

이상에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-r^n}{5^n+r^n}=1$을 만족시키는 r의 값의 범위는

$|r|<5$, 즉 $-5<r<5$

이므로 정수 r는

$-4, -3, -2, \cdots, 4$

의 9개이다.

답 9

0111 $f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n-1}-2-1}{(-1)^{2n}+1}=\frac{-1-3}{1+1}=-2$,

$$f\left(\frac{3}{8}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{8}\right)^{2n-1}+2\cdot\frac{3}{8}-1}{\left(\frac{3}{8}\right)^{2n}+1}=-\frac{1}{4},$$

$$f(4)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{2n-1}+2\cdot4-1}{4^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}+\frac{7}{4^{2n}}}{1+\frac{1}{4^{2n}}}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore f(-1)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f(4)=-2+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}$$

$$=-2$$

답 -2

다른풀이 (i) $|x|<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+2x-1}{x^{2n}+1}=2x-1$$

(ii) $x=1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+2x-1}{x^{2n}+1}=\frac{1+2-1}{1+1}=1$$

(iii) $|x|>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}|x^{2n-1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+2x-1}{x^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^{2n-1}}-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

(iv) $x=-1$일 때

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+2x-1}{x^{2n}+1}=\frac{-1-2-1}{1+1}=-2$$

이상에서

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & (|x|<1)\\ 1 & (x=1)\\ \frac{1}{x} & (|x|>1)\\ -2 & (x=-1)\end{cases}$$

$$\therefore f(-1)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f(4)=-2+\left(2\cdot\frac{3}{8}-1\right)+\frac{1}{4}$$

$$=-2$$

0112 (i) $0<x<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x^2-2}{x^n+1}=x^2-2$$ ⇨ ❶

(ii) $x=1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x^2-2}{x^n+1}=\frac{1+1-2}{1+1}$$

$$=0$$ ⇨ ❷

(iii) $x>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x^2-2}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x^{n-2}}-\frac{2}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}$$

$$=x$$ ⇨ ❸

이상에서 $f(x)=\begin{cases}x^2-2 & (0<x<1)\\ 0 & (x=1)\\ x & (x>1)\end{cases}$ ⇨ ❹

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $0<x<1$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ $x=1$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $x>1$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	30%
❹ $x>0$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	10%

0113 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$에서 $a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{3}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}\alpha$$

$\frac{2}{3}\alpha=2$이므로 $\alpha=3$

$$\therefore a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$$

따라서 수열 $\{a_n-3\}$은 첫째항이 $a_1-3=1$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$a_n-3=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad \therefore a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3\right\}=3$$

답 ②

0114 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이므로

$$a_n=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3n-1}{6}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{3-\frac{1}{n}}=2$$

답 2

0115
$$a_n-a_{n-1}=\frac{2}{n^2-1}=\frac{2}{(n-1)(n+1)}$$
$$=\frac{2}{n+1-(n-1)}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$$

위의 식의 양변에 n 대신 2, 3, 4, $\cdots$, n을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2-a_1=1-\frac{1}{3} \\ & a_3-a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4} \\ & a_4-a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{5} \\ & \vdots \\ & a_{n-1}-a_{n-2}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n} \\ +) & a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1} \\ \hline & a_n-a_1=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \end{array}$$

$$\therefore a_n=a_1+\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

답 2

다쎈 특강 **부분분수의 변형**

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right) \text{ (단, } A\neq B)$$

0116 $3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0$에서

$$3a_{n+2}-3a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$$

$$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$$

이때 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=2-1=1$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$a_{n+1}-a_n=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

앞의 식의 양변에 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=a_1+1 \\ & a_3=a_2+\frac{1}{3} \\ & a_4=a_3+\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ & \vdots \\ +) & a_n=a_{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ \hline & a_n=a_1+\left\{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\} \end{array}$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}=1+\frac{3}{2}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} 2a_n=2\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=2\cdot\frac{5}{2}=5$$

답 ④

0117 $\mathrm{P}_n(n, \sqrt{n})$, $\mathrm{Q}_n(n, 0)$이므로

$$\overline{\mathrm{OP}_n}=\sqrt{n^2+(\sqrt{n})^2}=\sqrt{n^2+n},\ \overline{\mathrm{OQ}_n}=n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OP}_n}-\overline{\mathrm{OQ}_n})=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

답 ④

0118 (1) $\mathrm{P}_n(n, 2n^2)$, $\mathrm{P}_{n+1}(n+1, 2(n+1)^2)$이므로

$$a_n=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\sqrt{1^2+\{2(n+1)^2-2n^2\}^2}$$

$$=\sqrt{16n^2+16n+5}$$ ⇨ ❶

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{16n^2+16n+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{16+\frac{16}{n}+\frac{5}{n^2}}}$$

$$=\frac{1}{4}$$ ⇨ ❷

답 (1) $a_n=\sqrt{16n^2+16n+5}$ (2) $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50%
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	50%

0119 $y=2x+4^n$, $y=-\frac{1}{2}x+3^n$에서

$$2x+4^n=-\frac{1}{2}x+3^n, \qquad \frac{5}{2}x=3^n-4^n$$

$$\therefore x=\frac{2}{5}\cdot3^n-\frac{2}{5}\cdot4^n$$

$x=\frac{2}{5}(3^n-4^n)$을 $y=2x+4^n$에 대입하면

$$y=\frac{4}{5}(3^n-4^n)+4^n=\frac{4}{5}\cdot3^n+\frac{1}{5}\cdot4^n$$

따라서 $a_n=\frac{2}{5}\cdot3^n-\frac{2}{5}\cdot4^n$, $b_n=\frac{4}{5}\cdot3^n+\frac{1}{5}\cdot4^n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{5}\cdot3^n-\frac{2}{5}\cdot4^n}{\frac{4}{5}\cdot3^n+\frac{1}{5}\cdot4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{5}}$$

$$=-2$$

답 -2

0120 a_n %의 소금물 100 g에 들어 있는 소금의 양은 a_n g이므로

$$a_{n+1}=\frac{a_n\cdot\frac{75}{100}+5}{100}\cdot100=\frac{3}{4}a_n+5$$

이것을 $a_{n+1}-\alpha=\frac{3}{4}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}\alpha$$

$\frac{1}{4}\alpha=5$이므로 $\alpha=20$

$$\therefore a_{n+1}-20=\frac{3}{4}(a_n-20)$$

따라서 수열 $\{a_n-20\}$은 첫째항이 a_1-20, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이므로

$$a_n-20=(a_1-20)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=(a_1-20)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+20$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(a_1-20)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+20\right\}=20$$

답 ④

0121 $(n+1)$번째 측정한 부추의 길이는 a_{n+1} cm이므로

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+3) \qquad \therefore a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+1$$

이것을 $a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{3}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}\alpha$$

$\frac{2}{3}\alpha=1$이므로 $\alpha=\frac{3}{2}$

$$\therefore a_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{3}{2}\right)$$

따라서 수열 $\left\{a_n-\frac{3}{2}\right\}$은 첫째항이 $a_1-\frac{3}{2}=6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$a_n-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{2}\right\}=\frac{3}{2}$$

답 ③

0122 전략 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 그 값이 어떤 일정한 값에 가까워지는지 조사한다.

풀이 ㄱ. n이 한없이 커지면 $5-4n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

ㄴ. n이 한없이 커지면 $\frac{2n^2-1}{n^2+3}$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 2에 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$은 공비가 $-\frac{1}{3}$이고, $-1<-\frac{1}{3}<1$이므로 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 1에 수렴한다.

이상에서 수렴하는 수열은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0123 전략 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

풀이 ① $\lim_{n\to\infty}\frac{n-4}{3n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{4}{n}}{3-\frac{5}{n}}=\frac{1}{3}$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{4n^2-5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{4-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n}{n^3+4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=0$

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}}=\frac{1}{2}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{3}{n}}=1$

따라서 극한값이 가장 작은 것은 ③이다.

답 ③

0124 전략 분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 거듭제곱으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

풀이 $a>2$에서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{a}\right)^n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{5a^{n+1}-3\cdot2^n}{a^n-2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5a-3\cdot\left(\frac{2}{a}\right)^n}{1-\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{2}{a}\right)^{n-1}}=5a$$

따라서 $5a=15$이므로 $a=3$

답 3

0125 전략 $r=1$일 때와 $r>1$일 때로 경우를 나누어 극한값을 구한다.

풀이 (i) $r=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-2}{r^{n+1}+3}=\frac{1-2}{1+3}=-\frac{1}{4}$$

(ii) $r>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-2}{r^{n+1}+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r}-\frac{2}{r^{n+1}}}{1+\frac{3}{r^{n+1}}}=\frac{1}{r}$$

(i), (ii)에서 주어진 수열의 극한값은

$r=1$일 때 $-\frac{1}{4}$, $r>1$일 때 $\frac{1}{r}$

답 풀이 참조

0126 전략 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$로 놓고 주어진 식을 α, β로 나타낸다.

풀이 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=5$에서 $\alpha+\beta=5$

$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=3$에서 $\alpha\beta=3$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}+\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{5^2-2\cdot3}{3}=\frac{19}{3}$$

답 ⑤

0127 전략 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\alpha\ (\alpha\neq0)$이면 ($a_n$의 차수)=($b_n$의 차수)이고, 최고차항의 계수의 비가 α임을 이용한다.

풀이 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-bn+3}{\frac{1}{2}n+2}=\pm\infty$이므로

$a=0$ ⇨ ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2-bn+3}{\frac{1}{2}n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-bn+3}{\frac{1}{2}n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-b+\frac{3}{n}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{n}}=-2b$$

따라서 $-2b=3$이므로 $b=-\frac{3}{2}$ ⇨ ❷

$\therefore a+b=-\frac{3}{2}$ ⇨ ❸

답 $-\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0128 전략 분자, 분모를 각각 유리화한다.

풀이
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-2015}-n}{n-\sqrt{n^2+2016}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-2015}-n)(\sqrt{n^2-2015}+n)(n+\sqrt{n^2+2016})}{(n-\sqrt{n^2+2016})(n+\sqrt{n^2+2016})(\sqrt{n^2-2015}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2015(n+\sqrt{n^2+2016})}{-2016(\sqrt{n^2-2015}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2015\left(1+\sqrt{1+\frac{2016}{n^2}}\right)}{2016\left(\sqrt{1-\frac{2015}{n^2}}+1\right)}$$
$$=\frac{2015}{2016}$$

답 ④

0129 전략 $(5n-3)a_n=b_n$으로 놓고, a_n을 b_n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $(5n-3)a_n=b_n$이라 하면 $a_n=\frac{b_n}{5n-3}$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{nb_n}{5n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n-3}\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{5}\cdot4=\frac{4}{5}$$

답 ②

0130 전략 먼저 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n과 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 구한다.

풀이 $a_n=a+(n-1)d=dn+a-d$이므로

$a_{n+1}=d(n+1)+a-d=dn+a$

$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{dn^2+(2a-d)n}{2}$

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{dn+a}{dn+a-d}=\lim_{n\to\infty}\frac{d+\frac{a}{n}}{d+\frac{a}{n}-\frac{d}{n}}=1$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{dn^2+(2a-d)n}{2n(dn+a-d)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d+\frac{2a-d}{n}}{2d+\frac{2a}{n}-\frac{2d}{n}}=\frac{1}{2}$$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{dn+a}-\sqrt{dn+a-d})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{dn+a}-\sqrt{dn+a-d})(\sqrt{dn+a}+\sqrt{dn+a-d})}{\sqrt{dn+a}+\sqrt{dn+a-d}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{\sqrt{dn+a}+\sqrt{dn+a-d}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d}{\sqrt{n}}}{\sqrt{d+\frac{a}{n}}+\sqrt{d+\frac{a}{n}-\frac{d}{n}}}=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

0131 전략 수열의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 $n<a_n<n+1$에서 $\sum_{k=1}^{n} k<\sum_{k=1}^{n} a_k<\sum_{k=1}^{n}(k+1)$

$$\frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n} a_k<\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$\frac{n^2+n}{2}<\sum_{k=1}^{n} a_k<\frac{n^2+3n}{2}$$
$$\frac{n^2+n}{2(3n^2+5)}<\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{3n^2+5}<\frac{n^2+3n}{2(3n^2+5)}$$
$$\therefore \frac{n^2+n}{6n^2+10}<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{3n^2+5}<\frac{n^2+3n}{6n^2+10}$$ ⇨ ❶

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{6n^2+10}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{6n^2+10}=\frac{1}{6}$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{3n^2+5}=\frac{1}{6}$$ ⇨ ❷

답 $\frac{1}{6}$

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{3n^2+5}$에 대한 부등식을 구할 수 있다.	50%
❷ 답을 구할 수 있다.	50%

0132 전략 $n\ge 2$이면 $a_n=S_n-S_{n-1}$임을 이용하여 a_n을 구한다.

풀이 $n\ge 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n+5^n)-(3^{n-1}+5^{n-1})$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot 3^n+\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot 5^n=\frac{2}{3}\cdot 3^n+\frac{4}{5}\cdot 5^n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\cdot 3^n+\frac{4}{5}\cdot 5^n}{3^n+5^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{4}{5}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}=\frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

0133 전략 분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 거듭제곱으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

풀이 $$5◎2=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 5^n+5\cdot 2^n}{5^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$
$$=2$$ ⇨ ❶

$$\therefore (5◎2)◎3=2◎3=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n+2\cdot 3^n}{2^n+3^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=2$$ ⇨ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ 5◎2의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ (5◎2)◎3의 값을 구할 수 있다.	50%

0134 전략 공비가 r인 등비수열이 수렴하면 $-1<r\le 1$임을 이용한다.

풀이 공비가 $\frac{x^2-3x-2}{2}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1<\frac{x^2-3x-2}{2}\le 1$$

(i) $-1<\frac{x^2-3x-2}{2}$, 즉 $x^2-3x>0$에서

$x(x-3)>0$ $\therefore x<0$ 또는 $x>3$

(ii) $\frac{x^2-3x-2}{2}\le 1$, 즉 $x^2-3x-4\le 0$에서

$(x+1)(x-4)\le 0$ $\therefore -1\le x\le 4$

(i), (ii)에서 $-1\le x<0$ 또는 $3<x\le 4$

따라서 정수 x는 -1, 4이므로 구하는 합은

$-1+4=3$

답 ②

0135 전략 $0\le x<1$, $x=1$, $x>1$인 경우로 나누어 y의 값을 구한다.

풀이 (i) $0\le x<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x+3}{x^{n+1}+2}=\frac{-x+3}{2}$$

(ii) $x=1$일 때,

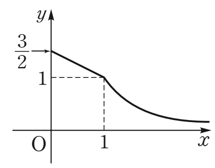
$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x+3}{x^{n+1}+2}=\frac{1-1+3}{1+2}=1$$

(iii) $x>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=\infty$이므로

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x+3}{x^{n+1}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^n}+\frac{3}{x^{n+1}}}{1+\frac{2}{x^{n+1}}}$$
$$=\frac{1}{x}$$

이상에서 $x\ge 0$에서 $y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x+3}{x^{n+1}+2}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 치역은



$$\left\{y\,\middle|\,0<y\le\frac{3}{2}\right\}$$

답 $\left\{y\,\middle|\,0<y\le\frac{3}{2}\right\}$

0136 전략 a_n과 b_n을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $n\ge 2$일 때, 원 $x^2+y^2=n^2$과 x축이 만나는 점의 좌표는 $(n,\ 0)$, $(-n,\ 0)$이므로

$a_n=n$ ($\because a_n>0$)

$x=\sqrt{n}$을 $x^2+y^2=n^2$에 대입하여 정리하면

$n+y^2=n^2$, $\quad y^2=n^2-n$

$y=\pm\sqrt{n^2-n}$

따라서 원 $x^2+y^2=n^2$과 직선 $x=\sqrt{n}$의 교점의 좌표는

$(\sqrt{n},\ \sqrt{n^2-n})$, $(\sqrt{n},\ -\sqrt{n^2-n})$이므로

$b_n=\sqrt{n^2-n}$ ($\because b_n>0$)

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-n}}{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-n}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1}=2$$

답 2

0137 전략 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

풀이 $a_n+a_{n+1}=n^2+3$ ...... ㉠

$a_{n+1}+a_{n+2}=(n+1)^2+3$ ...... ㉡

㉡−㉠을 하면

$a_{n+2}-a_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2$$

답 ⑤

0138 전략 분자에만 근호가 있는 경우 분모를 1로 놓고 분자를 유리화한다.

풀이 $(2n+1)^2<4n^2+5n+1<(2n+2)^2$이므로

$$a_n=\sqrt{4n^2+5n+1}-(2n+1)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{4n^2+5n+1}-(2n+1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{4n^2+5n+1}-(2n+1)\}\{\sqrt{4n^2+5n+1}+(2n+1)\}}{\sqrt{4n^2+5n+1}+(2n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+5n+1}+2n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+2+\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

0139 전략 $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, …를 차례대로 구한 다음 규칙을 찾는다.

풀이 $f(x)=\frac{x}{2}+1=\frac{x+2}{2}$이므로

$$f^2(x)=f\left(\frac{x+2}{2}\right)=\frac{\frac{x+2}{2}+2}{2}=\frac{x+2+2^2}{2^2}$$

$$f^3(x)=f\left(\frac{x+2+2^2}{2^2}\right)=\frac{\frac{x+2+2^2}{2^2}+2}{2}=\frac{x+2+2^2+2^3}{2^3}$$

$$\vdots$$

따라서 $f^n(x)=\frac{x+2+2^2+\cdots+2^n}{2^n}$이므로

$$f^n(1)=\frac{1+2+2^2+\cdots+2^n}{2^n}=\frac{\frac{2^{n+1}-1}{2-1}}{2^n}=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} f^n(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right)$$
$$=2$$

답 2

다른풀이 $f(x)=\frac{x}{2}+1$이므로

$$f(1)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}=\frac{2^2-1}{2}$$

$$f^2(1)=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}=\frac{2^3-1}{2^2}$$

$$f^3(1)=\frac{7}{8}+1=\frac{15}{8}=\frac{2^4-1}{2^3}$$

$$\vdots$$

따라서 $f^n(1)=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} f^n(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right)=2$$

0140 전략 이차방정식이 중근을 가지면 판별식 $D=0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-\sqrt{a_n}\,x+(a_{n+1}-3)=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(\sqrt{a_n})^2-4(a_{n+1}-3)=0$$
$$a_n-4a_{n+1}+12=0$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+3$$

이것을 $a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{4}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{4}\alpha$$

$\frac{3}{4}\alpha=3$이므로 $\alpha=4$

$$\therefore a_{n+1}-4=\frac{1}{4}(a_n-4)$$

따라서 수열 $\{a_n-4\}$는 첫째항이 $a_1-4=-3$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$a_n-4=-3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=-3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+4$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+4\right\}=4$$

답 ①

0141 전략 A물병에 남아 있는 물의 양을 수열의 귀납적 정의를 이용하여 나타낸다.

풀이 A물병에서 B물병으로 옮긴 다음 B물병에서 A물병으로 옮기는 것을 1회의 시행이라 할 때, n회의 시행 후에 A, B 두 물병에 남아 있는 물의 양을 각각 a_n L, b_n L라 하면

$$a_n+b_n=2 \qquad \therefore b_n=2-a_n$$

$(n+1)$회의 시행 후에 A물병에 남아 있는 물의 양은

$$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}a_n+b_n\right)=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}a_n+2-a_n\right)$$
$$=\frac{9}{16}a_n+\frac{1}{2}$$

이것을 $a_{n+1}-\alpha=\frac{9}{16}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$$a_{n+1}=\frac{9}{16}a_n+\frac{7}{16}\alpha$$

$\frac{7}{16}\alpha=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha=\frac{8}{7}$

$$\therefore a_{n+1}-\frac{8}{7}=\frac{9}{16}\left(a_n-\frac{8}{7}\right)$$

이때 $a_1=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{17}{16}$이므로 수열 $\left\{a_n-\frac{8}{7}\right\}$의 첫째항은

$$a_1-\frac{8}{7}=\frac{17}{16}-\frac{8}{7}=-\frac{9}{112}$$

또 공비가 $\frac{9}{16}$인 등비수열이므로

$$a_n-\frac{8}{7}=-\frac{9}{112}\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=-\frac{9}{112}\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}+\frac{8}{7}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{9}{112}\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}+\frac{8}{7}\right\}=\frac{8}{7}$$

따라서 A물병의 물의 양은 $\frac{8}{7}$ L에 가까워진다.

답 ④

Ⅰ. 수열의 극한

02 급수

0142 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-3}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0143 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} \left\{5-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}=5$ 답 5

0144 (1) $S_n=1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2}=\infty$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 발산한다.

(3) $1+2+3+\cdots+n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 (1) $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$ (2) 발산 (3) 발산

0145 (1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(2) $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} \left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 1에 수렴한다.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty} S_n=1$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

답 (1) $S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (2) 수렴 (3) 수렴, 1

0146 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=1+4+9+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0147 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}=3\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} 3\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0148 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} n^2=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0149 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}=\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} \frac{5}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}=\frac{5}{3}$$

따라서 주어진 급수는 $\frac{5}{3}$에 수렴한다.

답 수렴, $\frac{5}{3}$

0150 (1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

(2) $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}=1$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty} S_n=1$

답 (1) $S_n=\frac{n}{n+1}$ (2) 1 (3) 1

0151 답 (가) $\frac{n}{n+1}$ (나) 1

0152 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{2n-1}{2n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1}=1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

0153 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\sqrt{n^2+n}-n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

0154 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=(-1)^n$$

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n$은 발산(진동)한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

0155 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{n}{3n-1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

0156 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=3+(-1)=2$ 답 2

0157 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=3-(-1)=4$ 답 4

0158 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=3+2\cdot(-1)=1$ 답 1

0159 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=3\cdot 3-2\cdot(-1)=11$

답 11

0160 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$이고, $-1<\frac{1}{3}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

답 수렴, $\frac{1}{2}$

0161 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{10}$이고, $-1<-\frac{1}{10}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{10}\right)}=\frac{10}{11}$$

답 수렴, $\frac{10}{11}$

0162 공비가 $-\sqrt{2}$이고, $-\sqrt{2}<-1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다. 답 발산

0163 첫째항이 1, 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이고, $-1<\frac{\sqrt{3}}{3}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3}{3-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

답 수렴, $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

0164 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$에서 공비가 $\frac{4}{3}$이고, $\frac{4}{3}>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다. 답 발산

0165 $\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$에서 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{5}$이고, $-1<\frac{1}{5}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{2}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{2}$$

답 수렴, $\frac{5}{2}$

0166 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$에서 공비가 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$이고, $-\frac{2}{\sqrt{3}}<-1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다. 답 발산

0167 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-1)^{n-1}$에서 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{2}-1$이고, $-1<\sqrt{2}-1<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

답 수렴, $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

0168 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

답 $\frac{5}{6}$

0169 $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\left(\frac{1}{5}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n=\frac{-\frac{2}{5}}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}$

$$=-\frac{2}{7}$$

답 $-\frac{2}{7}$

0170 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$=3\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=3\cdot 1-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

0171 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=1+3=4$$

답 4

0172 주어진 등비급수의 공비가 $2x$이므로 수렴하려면

$-1<2x<1$ $\therefore -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

0173 주어진 등비급수의 공비가 $-\frac{x}{3}$이므로 수렴하려면

$-1<-\frac{x}{3}<1$ $\therefore -3<x<3$

답 $-3<x<3$

0174 주어진 등비급수의 공비가 $-x$이므로 수렴하려면

$-1<-x<1$ $\therefore -1<x<1$

답 $-1<x<1$

0175 (1) $a_1=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$, $a_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$, $a_3=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$

(2) 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

(3) 색칠한 모든 정삼각형의 넓이의 합은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수의 합과 같으므로

$$\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

답 (1) $a_1=\frac{1}{4}$, $a_2=\frac{1}{16}$, $a_3=\frac{1}{64}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{3}$

0176 답 (가) $\frac{23}{100}$ (나) $\frac{1}{100}$ (다) $\frac{23}{100}$ (라) $\frac{1}{100}$ (마) $\frac{23}{99}$

0177 $0.\dot{1}\dot{4}=0.14+0.0014+0.000014+\cdots$

$$=\frac{14}{100}+\frac{14}{100^2}+\frac{14}{100^3}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{14}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{14}{99}$$

답 $\frac{14}{99}$

0178 $0.\dot{1}5\dot{2}=0.152+0.000152+0.000000152+\cdots$

$$=\frac{152}{1000}+\frac{152}{1000^2}+\frac{152}{1000^3}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{152}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{152}{999}$$

답 $\frac{152}{999}$

0179 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+2n+3}{n(n+1)(2n+1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+2n+3}{2n^3+3n^2+n}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

답 ③

0180 $\lim_{n\to\infty}(S_n-3)=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}3=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-3$

$$=4-3=1$$

답 1

0181 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{5}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2n+1}-1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)$$

$$=-1$$

답 -1

0182 $S_n=\frac{n^2+1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{n^2+1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2n^2+2}{n^2+n}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2}{n^2+n}=2$$

답 2

0183 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

0184 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{2}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{5}{6}$$

답 ⑤

0185 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$ ⇨ ❶

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$ ⇨ ❷

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}$$ ⇨ ❸

답 $\frac{1}{4}$

02 급수

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40%
❷ S_n을 구할 수 있다.	40%
❸ 주어진 급수의 합을 구할 수 있다.	20%

0186 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

답 ②

0187 $S_n=\frac{n\{2\cdot3+(n-1)\cdot2\}}{2}=n(n+2)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$$

답 ③

0188 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2-1}}=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n-1}}=\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\right)=\left(1-\frac{1}{\sqrt3}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)=1$$

답 1

0189 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt n+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt n-n\sqrt{n+1}}{\{(n+1)\sqrt n+n\sqrt{n+1}\}\{(n+1)\sqrt n-n\sqrt{n+1}\}}=\frac{(n+1)\sqrt n-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{\sqrt n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt k}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=\left(1-\frac{1}{\sqrt2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$$

답 ①

0190 $\sum_{n=2}^{\infty}\log_2\frac{n^2}{n^2-1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log_2\frac{k\cdot k}{(k-1)(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(\frac{k}{k-1}\cdot\frac{k}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)+\log_2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)+\log_2\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)+\cdots+\log_2\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{2n}{n+1}=\log_2 2=1$$

답 ④

0191 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_3 a_k=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\log_3 a_3+\cdots+\log_3 a_n=\log_3(a_1a_2a_3\cdots a_n)=\log_3\frac{9n-1}{n+3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log_3 a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{9n-1}{n+3}=\log_3 9=2$$

답 2

0192 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

ㄱ. $S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ S_4=0,\ S_5=1,\ S_6=0,\ \cdots$이므로

$S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $S_1=1,\ S_2=-1,\ S_3=2,\ S_4=-2,\ \cdots$이므로

$S_{2n-1}=n,\ S_{2n}=-n$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\infty$, $\lim_{n\to\infty} S_{2n}=-\infty$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $S_1=2$, $S_2=\frac{3}{2}$, $S_3=2$, $S_4=\frac{7}{4}$, $S_5=2$, $S_6=\frac{11}{6}$, …이므로

$$S_{2n-1}=2,\ S_{2n}=\frac{4n-1}{2n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=2,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{2n}=2$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 주어진 급수는 2에 수렴한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

0193 $S_1=\frac{1}{2}$, $S_2=0$, $S_3=\frac{1}{3}$, $S_4=0$, $S_5=\frac{1}{4}$, $S_6=0$, …이므로

$$S_{2n-1}=\frac{1}{n+1},\ S_{2n}=0 \quad ⇨ ❶$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n}=0 \quad ⇨ ❷$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 0이다. ⇨ ❸

답 수렴, 0

채점 기준	비율
❶ S_{2n-1}, S_{2n}을 구할 수 있다.	40%
❷ $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$, $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 답을 구할 수 있다.	30%

0194 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{na_n+2n^2}{{a_n}^2+n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-n}=2$$

답 ⑤

0195 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim_{n\to\infty} S_n=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n+2}{2S_n+5a_n}=\frac{2+2}{2\cdot2+5\cdot0}=1$$

답 1

0196 주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2}\right)=0$$

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{4n^2}=\frac{1}{4}$$

답 ③

0197 $(a_1-1)+\left(\frac{a_2}{2}-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{a_3}{3}-\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{a_4}{4}-\frac{7}{4}\right)+\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n-1}{n}\right)$$

주어진 급수가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n-1}{n}\right)=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n+3a_n}{a_n-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3\cdot\frac{a_n}{n}}{\frac{a_n}{n}-1}=\frac{1+3\cdot2}{2-1}=7$$

답 7

0198 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4a_n+1}{a_n-5}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+1}{a_n-5}=0$ ⇨ ❶

$\frac{4a_n+1}{a_n-5}=b_n$으로 놓으면 $a_nb_n-5b_n=4a_n+1$

$$(b_n-4)a_n=5b_n+1 \qquad \therefore a_n=\frac{5b_n+1}{b_n-4} \quad ⇨ ❷$$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5b_n+1}{b_n-4}=\frac{5\cdot0+1}{0-4}=-\frac{1}{4} \quad ⇨ ❸$$

답 $-\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+1}{a_n-5}=0$임을 알 수 있다.	30%
❷ a_n을 b_n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	30%

0199 ① $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$, 즉 주어진 급수는 발산한다.

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$, 즉 주어진 급수는 발산한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\infty$$

답 ④

0200 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n-1}=\frac{1}{4}\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n-1}$은 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right)$

$$=-\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)\right\}$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)=1$$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0201 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=17$,
$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=19$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n-2\sum_{n=1}^{\infty} b_n=17,\ 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n=19$$
$$\therefore \alpha-2\beta=17,\ 2\alpha-\beta=19$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\alpha=7,\ \beta=-5$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\alpha+\beta=2$$

답 ⑤

0202 $3a_n-2b_n=c_n$이라 하면 $2b_n=3a_n-c_n$

$$\therefore b_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{1}{2}c_n$$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=8$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n=18$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}a_n-\frac{1}{2}c_n\right)=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$
$$=\frac{3}{2}\cdot 8-\frac{1}{2}\cdot 18=3$$

답 3

0203 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$$
$$=\alpha-\beta$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=0$$

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

$\{b_n\}$: $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산하지만 $a_n+b_n=0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=0$, 즉 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0204
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}-5^n}{10^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4^n}{10\cdot 10^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{10\cdot 10^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}-\frac{1}{10}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{10}\cdot 1=\frac{1}{30}$$

답 ③

0205
$$\sum_{n=1}^{\infty}\{2^n+(-3)^n\}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{1}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n\left(\frac{1}{5}\right)^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{-\frac{3}{5}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}$$
$$=\frac{2}{3}+\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{24}$$

답 $\frac{7}{24}$

0206 $f(x)=x^n$이라 하면 나머지정리에 의하여

$$a_n=f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$ ⇨ ❶

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$ ⇨ ❷

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40%
❷ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	60%

타쎈 특강 나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$$R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

0207
$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\frac{1}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^5}+\cdots\right)+\left(\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^4}+\frac{3}{4^6}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4^2}}+\frac{\frac{3}{4^2}}{1-\frac{1}{4^2}}$$
$$=\frac{4}{15}+\frac{3}{15}=\frac{7}{15}$$

답 $\frac{7}{15}$

0208 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$

또 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n=\dfrac{r}{1-r}=\dfrac{1}{1-r}-1$이므로

$$-1<-r<1,\quad 0<1-r<2$$
$$\frac{1}{1-r}>\frac{1}{2}\quad \therefore \frac{1}{1-r}-1>-\frac{1}{2}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n>-\dfrac{1}{2}$이므로 그 합이 될 수 없는 것은 ①이다.

답 ①

0209 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=3$에서

$$\frac{2}{1-r}=3,\quad 1-r=\frac{2}{3}\quad \therefore r=\frac{1}{3}$$

따라서 수열 $\{a_n{}^2\}$은 첫째항이 $a^2=4$, 공비가 $r^2=\dfrac{1}{9}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2=\frac{4}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{2}$$

답 ②

0210 첫째항이 1, 공비가 $3x$인 등비급수의 합이 2이므로

$$\frac{1}{1-3x}=2,\quad 1=2(1-3x)$$
$$6x=1\quad \therefore x=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

0211 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\,(-1<r<1)$라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=-6$에서 $\quad \dfrac{a}{1-r}=-6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

수열 $\{a_n{}^2\}$은 첫째항이 a^2, 공비가 r^2인 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2=72$에서

$$\frac{a^2}{1-r^2}=72 \qquad \therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)}=72 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad -6\cdot\dfrac{a}{1+r}=72$

$$\therefore \frac{a}{1+r}=-12 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠÷㉢을 하면 $\quad \dfrac{1+r}{1-r}=\dfrac{1}{2}$

$$2(1+r)=1-r, \qquad 3r=-1 \qquad \therefore r=-\frac{1}{3} \quad ⇨ ❶$$

$r=-\dfrac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{a}{1+\frac{1}{3}}=-6 \qquad \therefore a=-8 \quad ⇨ ❷$$

따라서 $a_n=-8\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로

$$a_5=-8\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^4=-\frac{8}{81} \quad ⇨ ❸$$

답 $-\dfrac{8}{81}$

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$의 공비를 구할 수 있다.	50%
❷ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구할 수 있다.	30%
❸ a_5의 값을 구할 수 있다.	20%

0212 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2$에서 $\quad \dfrac{a_1}{1-r}=2$

$$\therefore a_1=2(1-r) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=8$에서 $\quad \dfrac{b_1}{1-r}=8$

$$\therefore b_1=8(1-r) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$a_1+b_1=2(1-r)+8(1-r)=10(1-r)$$

이때 $a_1+b_1=5$이므로 $\quad 10(1-r)=5, \quad 1-r=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore r=\frac{1}{2}$$

$r=\dfrac{1}{2}$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$$a_1=1,\ b_1=4$$

따라서 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 $a_1b_1=1\cdot4=4$, 공비가 $r^2=\dfrac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=\frac{4}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}$$

답 ⑤

0213 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-2x)^n$의 공비가 $1-2x$이므로 수렴하려면

$$-1<1-2x<1, \qquad -2<-2x<0$$

$$\therefore 0<x<1$$

답 ④

0214 공비가 $\dfrac{x-5}{2}$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1<\frac{x-5}{2}<1, \qquad -2<x-5<2$$

$$\therefore 3<x<7$$

따라서 정수 x는 4, 5, 6의 3개이다.

답 3

0215 $\sum_{n=1}^{\infty}(3x+1)^{2n}$의 공비가 $(3x+1)^2$이므로 수렴하려면

$$-1<(3x+1)^2<1$$

그런데 모든 실수 x에 대하여 $(3x+1)^2\ge0$이므로

$$(3x+1)^2<1, \qquad 9x^2+6x+1<1$$

$$3x^2+2x<0, \qquad x(3x+2)<0$$

$$\therefore -\frac{2}{3}<x<0$$

답 $-\dfrac{2}{3}<x<0$

0216 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{5}\right)^n$의 공비가 $\dfrac{x}{5}$이므로 수렴하려면

$$-1<\frac{x}{5}<1 \qquad \therefore -5<x<5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)^n$의 공비가 $\dfrac{2}{x}$이므로 수렴하려면

$$-1<\frac{2}{x}<1, \qquad \frac{x}{2}<-1 \text{ 또는 } \frac{x}{2}>1$$

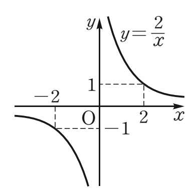
$$\therefore x<-2 \text{ 또는 } x>2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$-5<x<-2 \text{ 또는 } 2<x<5$$

답 $-5<x<-2$ 또는 $2<x<5$

참고 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로
$-1<\dfrac{2}{x}<1$이려면
$x<-2$ 또는 $x>2$



0217 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $\quad -1<r<1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$은 공비가 r^2인 등비급수이므로 ㉠에서

$$0<r^2<1$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{r+1}{2}\right)^n$은 공비가 $\dfrac{r+1}{2}$인 등비급수이므로 ㉠에서

$$0<r+1<2 \qquad \therefore 0<\frac{r+1}{2}<1$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{r}{3}+1\right)^n$은 공비가 $\dfrac{r}{3}+1$인 등비급수이므로 ㉠에서

$$-\frac{1}{3}<\frac{r}{3}<\frac{1}{3} \qquad \therefore \frac{2}{3}<\frac{r}{3}+1<\frac{4}{3}$$

따라서 주어진 급수가 항상 수렴하는 것은 아니다.

이상에서 항상 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0218 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$이 수렴하므로

$$-1<a<1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$이 수렴하므로

$$-1<b<1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

02 급수

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(ab)^n$은 공비가 ab인 등비급수이므로 ㉠, ㉡에서

$$-1<ab<1$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄴ. [반례] $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n$은 공비가 $\frac{a}{b}$인 등비급수이고, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$이면

$$\frac{a}{b}=\frac{3}{2}>1$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n$은 발산한다.

따라서 주어진 급수가 항상 수렴하는 것은 아니다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a+b)^n$은 공비가 $a+b$인 등비급수이고, ㉠, ㉡에서

$$-2<a+b<2$$

따라서 주어진 급수가 항상 수렴하는 것은 아니다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}(|a|-|b|)^n$은 공비가 $|a|-|b|$인 등비급수이고, ㉠, ㉡에서

$$0\le|a|<1,\ 0\le|b|<1$$

이므로 $\quad -1<|a|-|b|<1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

0219 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 첫째항이 $a_1=3$, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{3}{4}}{3}=\frac{1}{4}$이므로

$$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=4$$

답 ②

0220 $3a_{n+1}=a_n+6$에서 $\quad a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

$$\therefore a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$$

따라서 수열 $\{a_n-3\}$은 첫째항이 $a_1-3=1$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로 $\quad a_n-3=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(3-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{-1}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}$$

답 $-\frac{3}{2}$

0221 $a_{n+1}=a_n+2n+3$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}a_2&=a_1+2\cdot1+3\\a_3&=a_2+2\cdot2+3\\a_4&=a_3+2\cdot3+3\\&\vdots\\+)\ a_n&=a_{n-1}+2(n-1)+3\\\hline a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)=3+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+3(n-1)\\&=n^2+2n=n(n+2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

답 ③

0222 $a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$에서

$$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\\&=\frac{1}{a_2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, …이므로
$a_n<a_{n+1}<a_{n+2}<\cdots$
$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

답 $\frac{1}{2}$

0223 (i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=3$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}\\&=2n+1\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2n+1$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

답 ①

0224 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=\frac{1}{3}$

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(-\frac{2}{3}+1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=\frac{1}{3}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{5}$$

답 ①

0225 $\log_2(S_n+2)=n+1$에서 $\quad S_n+2=2^{n+1}$

$\therefore S_n=2^{n+1}-2$

(ⅰ) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=2$

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2-(2^n-2)$$
$$=2^n \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2^n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

답 1

0226 (1) $S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n+1$에서

$$S_{n+1}-2=\frac{1}{2}(S_n-2)$$

즉 수열 $\{S_n-2\}$는 첫째항이 $S_1-2=3$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$S_n-2=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore S_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$$

⇨ ❶

(2) $a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2-\left\{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+2\right\}$$
$$=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$=3\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$=-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

⇨ ❷

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=2}^{\infty}\left\{-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2=\sum_{n=2}^{\infty}9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$$=\frac{9\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=3$$

⇨ ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ S_n을 구할 수 있다.	30%
❷ a_n을 구할 수 있다.	30%
❸ $\sum_{n=2}^{\infty}a_n^2$의 값을 구할 수 있다.	40%

0227 $x=\overline{OP_1}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}+\overline{P_6P_7}+\cdots$

$$=1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{5}$$

$y=\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}+\overline{P_7P_8}+\cdots$

$$=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5+\left(\frac{2}{3}\right)^7+\cdots$$
$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{6}{5}$$
$$\therefore x+y=\frac{9}{5}+\frac{6}{5}=3$$

답 ③

0228 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\overline{P_1P_2}-\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}-\overline{P_7P_8}+\cdots$

$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5-\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2}{5}$$

$y=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{5}$$

따라서 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$이다.

답 $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

0229 $x=\overline{OP_1}\cos 45°-\overline{P_1P_2}\cos 45°+\overline{P_2P_3}\cos 45°-\overline{P_3P_4}\cos 45°+\cdots$

$$=1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$y=\overline{OP_1}\sin 45°+\overline{P_1P_2}\sin 45°+\overline{P_2P_3}\sin 45°+\overline{P_3P_4}\sin 45°+\cdots$

$$=1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

$\therefore\ xy=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2}=\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{2}{3}$

0230 $\overline{PQ}=1$이고 $\triangle OPQ \backsim \triangle OP_1Q_1$이므로

$\overline{PQ}:\overline{P_1Q_1}=\overline{OP}:\overline{OP_1}=3:2$

$\therefore\ \overline{P_1Q_1}=\dfrac{2}{3}\overline{PQ}=\dfrac{2}{3}$

같은 방법으로

$\overline{P_2Q_2}=\dfrac{2}{3}\overline{P_1Q_1}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2,\ \overline{P_3Q_3}=\dfrac{2}{3}\overline{P_2Q_2}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3,\ \cdots$

$\therefore\ \overline{PQ}+\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\cdots=1+\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\cdots$

$=\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=3$ 답 3

0231 $\overline{AA_1}=\dfrac{1}{2}\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\cdot 4=2$이고 $\triangle AB_1A_1$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{A_1B_1}=\sqrt{2}\,\overline{AA_1}=2\sqrt{2}$ $\therefore\ l_1=4\cdot 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

$\overline{A_1A_2}=\dfrac{1}{2}\overline{A_1B_1}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$이고 $\triangle A_1A_2D_2$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{A_2D_2}=\sqrt{2}\,\overline{A_1A_2}=2$ $\therefore\ l_2=4\cdot 2=8$

$\overline{A_2A_3}=\dfrac{1}{2}\overline{A_2D_2}=\dfrac{1}{2}\cdot 2=1$이고 $\triangle A_2B_3A_3$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{A_3B_3}=\sqrt{2}\,\overline{A_2A_3}=\sqrt{2}$ $\therefore\ l_3=4\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$\vdots$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n=8\sqrt{2}+8+4\sqrt{2}+\cdots$

$=\dfrac{8\sqrt{2}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{16}{\sqrt{2}-1}=16(\sqrt{2}+1)$

답 $16(\sqrt{2}+1)$

0232 $\angle OP_1P_2=60°$이므로

$\overline{P_1P_2}=\overline{OP_1}\cos 60°=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$

$\angle P_2P_1P_3=60°$이므로

$\overline{P_2P_3}=\overline{P_1P_2}\sin 60°=1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle P_3P_2P_4=60°$이므로

$\overline{P_3P_4}=\overline{P_2P_3}\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\vdots$

$\therefore\ \overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cdots$

$=\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$

$=2(2+\sqrt{3})$ 답 ④

0233 정삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$

이므로

$S_1=\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4},\ S_2=S_1\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1}{4},$

$S_3=S_2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2,\ \cdots$

$\therefore\ S_n=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

0234 원 C_n과 C_{n+1}의 지름의 길이의 비가 $2:1$이므로 넓이의 비는 $2^2:1^2$

즉 $S_n:S_{n+1}=4:1$이므로

$S_1=\pi,\ S_2=S_1\cdot\dfrac{1}{4}=\pi\cdot\dfrac{1}{4},\ S_3=S_2\cdot\dfrac{1}{4}=\pi\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2,\ \cdots$

$\therefore\ S_n=\pi\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\dfrac{\pi}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}\pi$ 답 ②

0235 $S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

정삼각형 R_2의 한 변의 길이가 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{3}{4}$

정삼각형 R_3의 한 변의 길이가 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{4}$이므로

$S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{9}{16}$

$\vdots$

$\therefore\ S_n=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k=\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}{1-\dfrac{3}{4}}=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

0236 $0.\dot{2}=0.2+0.02+0.002+\cdots=\dfrac{0.2}{1-0.1}=\dfrac{2}{9}$

$0.0\dot{5}=0.05+0.005+0.0005+\cdots=\dfrac{0.05}{1-0.1}=\dfrac{1}{18}$

이므로 공비를 r라 하면

$\dfrac{2}{9}r^2=\dfrac{1}{18},$ $r^2=\dfrac{1}{4}$ $\therefore\ r=\dfrac{1}{2}\ (\because\ r>0)$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$\dfrac{\dfrac{2}{9}}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{4}{9}=0.\dot{4}$ 답 ①

0237 $0.\dot{3}=0.3+0.03+0.003+\cdots=\dfrac{0.3}{1-0.1}=\dfrac{1}{3}$

$0.\dot{2}\dot{1}=0.21+0.0021+0.000021+\cdots=\dfrac{0.21}{1-0.01}=\dfrac{7}{33}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{7}{33}$에서 $\frac{a_1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{7}{33}$

$\therefore a_1 = \frac{7}{33} \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{99} = 0.\dot{1}\dot{4}$ 답 ③

0238 $1.1\dot{2} = 1.1 + 0.02 + 0.002 + 0.0002 + \cdots$

$= \frac{11}{10} + \frac{0.02}{1-0.1} = \frac{11}{10} + \frac{2}{90}$

$= \frac{101}{90}$ ⇨ ❶

구하는 수를 x로 놓으면 $1.1\dot{2}x - 1.12x = 6$이므로

$\frac{101}{90}x - \frac{112}{100}x = 6$

$\frac{1}{450}x = 6 \quad \therefore x = 2700$

따라서 구하는 수는 2700이다. ⇨ ❷

답 2700

채점 기준	비율
❶ $1.1\dot{2}$를 분수로 나타낼 수 있다.	40%
❷ 답을 구할 수 있다.	60%

0239 $\frac{1}{33} = 0.\dot{0}\dot{3}$이므로

$a_1 = 0,\ a_2 = 3,\ a_3 = 0,\ a_4 = 3, \cdots$

$\therefore \frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + \frac{a_3}{5^3} + \frac{a_4}{5^4} + \frac{a_5}{5^5} + \frac{a_6}{5^6} + \cdots$

$= \frac{3}{5^2} + \frac{3}{5^4} + \frac{3}{5^6} + \cdots$

$= \frac{\frac{3}{25}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{1}{8}$ 답 $\frac{1}{8}$

0240 추가 멈출 때까지 움직인 거리는

$10 + 10 \cdot \frac{4}{5} + 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \cdots$

$= \frac{10}{1-\frac{4}{5}} = 50\,(\text{cm})$ 답 50 cm

0241 한 번 튀어 오를 때마다 공이 움직인 거리는

$2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3}$ m, $2 \cdot 15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$ m, $2 \cdot 15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$ m, $\cdots$

따라서 공이 정지할 때까지 움직인 거리는

$15 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 15 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 15 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 15 + \cdots$

$= 15 + \frac{20}{1-\frac{2}{3}} = 15 + 60 = 75\,(\text{m})$ 답 ④

0242 (1) $V_1 = 16 - 16 \cdot \frac{1}{4} + 1 = 13$이고

$V_{n+1} = V_n - V_n \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}V_n + 1$

따라서 수열 $\{V_n\}$은

$V_1 = 13,\ V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n + 1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ ⇨ ❶

(2) $V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n + 1$이므로 $V_{n+1} - 4 = \frac{3}{4}(V_n - 4)$

따라서 수열 $\{V_n - 4\}$는 첫째항이 $V_1 - 4 = 9$, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이므로

$V_n - 4 = 9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ ⇨ ❷

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(V_n - 4) = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{9}{1-\frac{3}{4}} = 36$ ⇨ ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{V_n\}$을 귀납적으로 정의할 수 있다.	30%
❷ 수열 $\{V_n - 4\}$의 일반항을 구할 수 있다.	30%
❸ $\sum_{n=1}^{\infty}(V_n - 4)$의 값을 구할 수 있다.	40%

0243 전략 $\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0244 전략 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 1)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n - 1) = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - 4}{1 - 2a_n} = \frac{1-4}{1-2\cdot 1} = 3$ 답 ⑤

0245 전략 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ (α, β는 실수)이면 실수 p, q에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(pa_n + qb_n) = p\alpha + q\beta$임을 이용한다.

풀이 $a_n - b_n = c_n$이라 하면 $b_n = a_n - c_n$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 8$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 5 - 8 = -3$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(2a_n + b_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$= 2 \cdot 5 + (-3) = 7$

답 ①

다른풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(2a_n + a_n - c_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(3a_n - c_n)$

$= 3\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$

$= 3 \cdot 5 - 8 = 7$

0246 전략 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\alpha$ (α는 실수)이면 $\frac{a}{1-r}=\alpha\ (-1<r<1)$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(-x)^n}{2}=4$에서

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\{x^n+(-x)^n\}=4$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{x}{1-x}+\frac{-x}{1-(-x)}\right\}=4,\qquad \frac{x}{1-x}-\frac{x}{1+x}=8$$

$$x(1+x)-x(1-x)=8(1-x^2)$$

$$10x^2=8,\qquad x^2=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ x=\frac{2\sqrt{5}}{5}\ (\because\ x>0)$$

답 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

0247 전략 $\{r^n\}$이 수렴하면 $-1<r\le 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하면 $-1<r<1$임을 이용한다.

풀이 $\{(5x-2)^n\}$의 공비가 $5x-2$이므로 수렴하려면

$$-1<5x-2\le 1,\qquad 1<5x\le 3$$

$$\therefore\ \frac{1}{5}<x\le\frac{3}{5}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(3x-2)^n$의 공비가 $3x-2$이므로 수렴하려면

$$-1<3x-2<1,\qquad 1<3x<3$$

$$\therefore\ \frac{1}{3}<x<1\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{3}<x\le\frac{3}{5}$

답 $\frac{1}{3}<x\le\frac{3}{5}$

0248 전략 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 구한 다음 $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구한다.

풀이
$$a_n=\frac{2n+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$$
$$=\frac{2n+1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$
$$=\frac{6}{n(n+1)}=6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}6\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=6\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=6$$

답 6

0249 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$을 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2x-(n^2+2n)=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=-2,\ \alpha_n\beta_n=-n^2-2n=-n(n+2)$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}$$

답 ③

0250 전략 제n항까지의 부분합 S_n을 구한 다음 $\lim_{n\to\infty} S_n$을 구한다.

풀이 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\log_2\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$$
$$=\log_2\left\{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\log_2\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)\qquad ⇨ ❶$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+2}{k+1}\right)$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)+\log_2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)+\log_2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)+\cdots+\log_2\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_2\frac{n+2}{2(n+1)}\qquad ⇨ ❷$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+2}{2(n+1)}$$
$$=\log_2\frac{1}{2}=-1\qquad ⇨ ❸$$

답 -1

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	30%
❷ S_n을 구할 수 있다.	40%
❸ 주어진 급수의 합을 구할 수 있다.	30%

0251 전략 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$임을 이용한다.

풀이 주어진 급수의 제n항은

$$a_n-\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{(2n)^2}$$
$$=a_n-\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{4n^2}$$
$$=a_n-\frac{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n}{4n^2}$$
$$=a_n-\frac{1}{4}$$

이고 주어진 급수가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1}{4}\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{4}$

답 ②

0252 전략 급수의 성질과 급수와 수열의 극한 사이의 관계를 이용한다.

풀이 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\alpha-0=\alpha$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

ㄷ. [반례] $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$이면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n\neq 1\cdot\frac{1}{2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0253 전략 $|r|<1$일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}(a\neq 0)$의 합은 $\frac{a}{1-r}$임을 이용한다.

풀이 $$\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\frac{a_4}{3^4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

$$=3\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{-\frac{1}{6}}{1-\left(-\frac{1}{6}\right)}$$

$$=3\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{7}=\frac{19}{14}$$

답 ②

0254 전략 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\alpha$ (α는 실수)이면 $\frac{a}{1-r}=\alpha$ $(-1<r<1)$임을 이용한다.

풀이 $a=0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=0$이므로 $a\neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 공비가 r이므로 수렴하려면

$-1<r<1$ ...... ㉠

또 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=2$에서 $\frac{a}{1-r}=2$이므로

$a=2(1-r)$

㉠에서 $-1<-r<1$, $0<1-r<2$

$0<2(1-r)<4$

$\therefore 0<a<4$

따라서 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

0255 전략 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하면 $-1<r<1$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2+3x+1)^{n-1}$의 공비가 x^2+3x+1이므로 수렴하려면

$-1<x^2+3x+1<1$

(i) $x^2+3x+1>-1$에서

$x^2+3x+2>0$, $(x+2)(x+1)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>-1$

(ii) $x^2+3x+1<1$에서

$x^2+3x<0$, $x(x+3)<0$

$\therefore -3<x<0$

(i), (ii)에서 $-3<x<-2$ 또는 $-1<x<0$

따라서 x의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

답 ③

0256 전략 r의 값의 범위를 이용하여 각 수열의 공비가 $-1<(\text{공비})<1$을 만족시키는지 확인한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$ ...... ㉠

① $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2}$은 공비가 r인 등비급수이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다.

② $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1}$은 공비가 r^2인 등비급수이므로 ㉠에서

$0\le r^2<1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 공비가 $-r$인 등비급수이므로 ㉠에서

$-1<-r<1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-3r}{2}\right)^n$은 공비가 $\frac{1-3r}{2}$인 등비급수이므로 ㉠에서

$-3<-3r<3$, $-2<1-3r<4$

$\therefore -1<\frac{1-3r}{2}<2$

따라서 주어진 급수가 항상 수렴하는 것은 아니다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}=\beta$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(r^n-2r^{2n})=\sum_{n=1}^{\infty} r^n-2\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}=\alpha-2\beta$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

답 ④

0257 전략 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge 2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 $n\ge 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=25\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}-25\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=-25\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n+25\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

$$=25\cdot\left(-\frac{2}{5}+1\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

$$=15\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$ ⇨ ❶

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}15\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2n}=15\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{25}\right)^n$$

$$=15\cdot\frac{\frac{4}{25}}{1-\frac{4}{25}}=\frac{20}{7}$$ ⇨ ❷

답 $\frac{20}{7}$

채점 기준	비율
❶ $n\ge 2$일 때, a_n을 구할 수 있다.	50%
❷ $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}$의 값을 구할 수 있다.	50%

0258 전략 a_1, a_2, a_3, …을 차례대로 구한 다음 규칙을 찾는다.

풀이 a_n은 4^n+3을 5로 나누었을 때의 나머지이므로

$$a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=2,\ a_4=4,\ \cdots$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}&=\frac{2}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\cdots\\&=\left(\frac{2}{10}+\frac{2}{10^3}+\frac{2}{10^5}+\cdots\right)+\left(\frac{4}{10^2}+\frac{4}{10^4}+\frac{4}{10^6}+\cdots\right)\\&=\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{100}}+\frac{\frac{4}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{20}{99}+\frac{4}{99}=\frac{24}{99}\\&=0.\dot{2}\dot{4}\end{aligned}$$

답 ④

0259 전략 n번째와 $(n+1)$번째에 수거되어 재생산된 종이 상자의 양 사이의 관계를 구한다.

풀이 n번째에 수거되어 재생산된 종이 상자의 양을 a_n kg이라 하면

$$a_1=10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{4},\ a_{n+1}=\frac{3}{8}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad ⇨ ❶$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{15}{4}$, 공비가 $\frac{3}{8}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{15}{4}}{1-\frac{3}{8}}=6 \quad ⇨ ❷$$

즉 재생산된 종이 상자는 총 6 kg이다. ⇨ ❸

답 6 kg

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의할 수 있다.	40%
❷ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 재생산된 종이 상자의 양을 구할 수 있다.	10%

0260 전략 a_n과 b_n을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x-3y+3=0$에서 $y=\frac{1}{3}x+1$이므로 y좌표가 자연수이려면 x좌표가 3의 배수이어야 한다.

$x=3n$(n은 자연수)으로 놓으면 $y=n+1$이므로

$$a_n=3n,\ b_n=n+1$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 ①

0261 전략 급수의 성질을 이용한다.

풀이 α, β는 이차방정식 $8x^2-4x-1=0$의 두 근과 같으므로

$$|\alpha|<1,\ |\beta|<1$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n$은 각각 수렴한다.

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{1}{2},\ \alpha\beta=-\frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(\beta^n-\alpha^n)&=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\right)\\&=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{\beta}{1-\beta}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\\&=\frac{1}{\beta-\alpha}\left\{\frac{\beta-\alpha\beta-\alpha+\alpha\beta}{(1-\beta)(1-\alpha)}\right\}\\&=\frac{1}{(1-\beta)(1-\alpha)}=\frac{1}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}\\&=\frac{1}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

답 ④

참고 $8x^2-4x-1=0$에서 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{4}$

이때 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $-\frac{1}{4}<\frac{1-\sqrt{3}}{4}<0,\ \frac{1}{2}<\frac{1+\sqrt{3}}{4}<\frac{3}{4}$

$\therefore |\alpha|<1,\ |\beta|<1$

0262 전략 $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, …의 길이를 차례대로 구한 다음 규칙을 찾는다.

풀이 $\angle OP_1P_2=45°$이므로 $\overline{P_1P_2}=\overline{OP_1}\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{OP_2}=\overline{P_1P_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$\overline{P_2P_3}=\overline{OP_2}\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$\overline{OP_3}=\overline{P_2P_3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$이므로

$$\overline{P_3P_4}=\overline{OP_3}\cos 45°=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots&=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\cdots\\&=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\\&=1+\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ④

0263 전략 시행을 반복하여 규칙을 찾는다.

풀이 첫 번째 시행에서 색칠한 정사각형의 넓이는 $\frac{1}{9}$

두 번째 시행에서 색칠한 정사각형의 넓이의 합은

$$4\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}$$

세 번째 시행에서 색칠한 정사각형의 넓이의 합은

$$4^2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2$$

$$\vdots$$

따라서 색칠한 모든 정사각형의 넓이의 합은

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{1}{5}$$

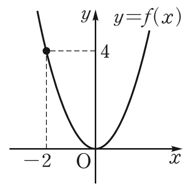
답 $\frac{1}{5}$

Ⅱ. 함수의 극한과 연속

03 함수의 극한

0264 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 4에 한없이 가까워지므로

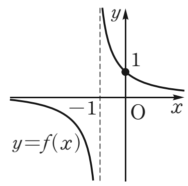
$\lim\limits_{x\to-2} x^2=4$



답 4

0265 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

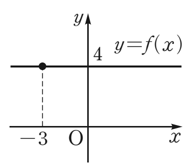
$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x+1}=1$



답 1

0266 $f(x)=4$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 4이므로

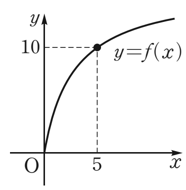
$\lim\limits_{x\to-3} 4=4$



답 4

0267 $f(x)=\sqrt{20x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 5에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 10에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to5} \sqrt{20x}=10$



답 10

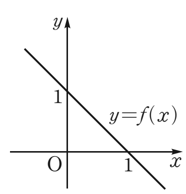
0268 답 1

0269 답 ∞

0270 답 0

0271 $f(x)=-x+1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

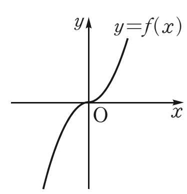
$\lim\limits_{x\to\infty} (-x+1)=-\infty$



답 $-\infty$

0272 $f(x)=x^3$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

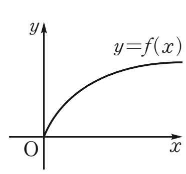
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$



답 $-\infty$

0273 $f(x)=\sqrt{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

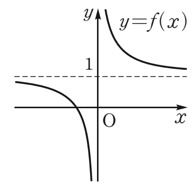
$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}=\infty$



답 ∞

0274 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$



답 1

0275 답 0

0276 답 2

0277 답 ∞

0278 답 $-\infty$

0279 $\lim\limits_{x\to2+} f(x)=\lim\limits_{x\to2+} (2x+1)=5$

답 5

0280 $\lim\limits_{x\to2-} f(x)=\lim\limits_{x\to2-} (-2x+1)=-3$

답 -3

0281 $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0+} 1=1$

답 1

0282 $\lim\limits_{x\to0-} \dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0-} \dfrac{x}{-x}=\lim\limits_{x\to0-} (-1)=-1$

답 -1

0283 답 ∞

0284 답 $-\infty$

0285 답 1

0286 답 1

0287 답 0

0288 답 -1

0289 답 1

0290 $\lim\limits_{x\to1+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-} f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

답 존재하지 않는다.

0291 $\lim\limits_{x\to0} \{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to0} f(x)+\lim\limits_{x\to0} g(x)$
$=5+(-2)=3$

답 3

0292 $\lim\limits_{x\to0} \{f(x)-g(x)\}=\lim\limits_{x\to0} f(x)-\lim\limits_{x\to0} g(x)$
$=5-(-2)=7$

답 7

0293 $\lim\limits_{x\to0} \{-2f(x)\}=-2\lim\limits_{x\to0} f(x)$
$=-2\cdot5=-10$

답 -10

0294 $\lim\limits_{x\to0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0} f(x)\lim\limits_{x\to0} g(x)$
$=5\cdot(-2)=-10$

답 -10

0295 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0} f(x)}{\lim\limits_{x\to0} g(x)}=\dfrac{5}{-2}=-\dfrac{5}{2}$

답 $-\dfrac{5}{2}$

0296 $\lim_{x\to1}\{3f(x)+4g(x)\}=\lim_{x\to1}3f(x)+\lim_{x\to1}4g(x)$

$=3\lim_{x\to1}f(x)+4\lim_{x\to1}g(x)$

$=3\cdot(-3)+4\cdot\frac{1}{2}$

$=-7$ 답 -7

0297 $\lim_{x\to1}8f(x)g(x)=8\lim_{x\to1}f(x)g(x)=8\lim_{x\to1}f(x)\lim_{x\to1}g(x)$

$=8\cdot(-3)\cdot\frac{1}{2}$

$=-12$ 답 -12

0298 $\lim_{x\to1}\{2f(x)g(x)+5\}=2\lim_{x\to1}f(x)g(x)+\lim_{x\to1}5$

$=2\lim_{x\to1}f(x)\lim_{x\to1}g(x)+5$

$=2\cdot(-3)\cdot\frac{1}{2}+5$

$=2$ 답 2

0299 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{2g(x)+1}=\frac{\lim_{x\to1}\{f(x)-1\}}{\lim_{x\to1}\{2g(x)+1\}}=\frac{\lim_{x\to1}f(x)-1}{2\lim_{x\to1}g(x)+1}$

$=\frac{-3-1}{2\cdot\frac{1}{2}+1}=-2$ 답 -2

0300 $\lim_{x\to-3}(-2x+1)=-2\cdot(-3)+1=7$ 답 7

0301 $\lim_{x\to-1}(x^2-3x+4)=1-3\cdot(-1)+4=8$ 답 8

0302 $\lim_{x\to2}(x-1)(3x+1)=(2-1)(3\cdot2+1)=7$ 답 7

0303 $\lim_{x\to1}(2x^2+1)(x^3-5)=(2\cdot1+1)(1-5)$

$=-12$ 답 -12

0304 $\lim_{x\to4}\frac{x^2-4x}{x-1}=\frac{4^2-4\cdot4}{4-1}=0$ 답 0

0305 $\lim_{x\to2}\frac{2x^3-3x+2}{x^2+2}=\frac{2\cdot2^3-3\cdot2+2}{2^2+2}=2$ 답 2

0306 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+1)=2$ 답 2

0307 $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}(x-1)=-3$ 답 -3

0308 $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$

$=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)=4$ 답 4

0309 $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

0310 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$ 답 0

0311 $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+1}{2x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5+\frac{1}{x}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

0312 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3+\frac{1}{x}}=\infty$ 답 ∞

0313 $\lim_{x\to\infty}\frac{4x(2x+1)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+4x}{x^2+3x+2}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}$

$=8$ 답 8

0314 $\lim_{x\to\infty}(x^3-x^2)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)=\infty$ 답 ∞

0315 $\lim_{x\to\infty}(5+2x^2-x^3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x}-1\right)=-\infty$

답 $-\infty$

0316 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)}{\sqrt{x^2+4}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}=0$ 답 0

0317 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)$

$=2$ 답 2

0318 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x-1}+1\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x-1}$

$=-1$ 답 -1

0319 $\lim_{x\to\infty} x\left(1-\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x-1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{1-\frac{1}{x}}=-2$ 답 -2

0320 (1) $x \longrightarrow 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

$\therefore \lim_{x\to2}(x^2+ax)=0$

(2) $\lim_{x\to2}(x^2+ax)=0$에서

$4+2a=0 \qquad \therefore a=-2$

답 (1) 0 (2) -2

0321 (1) $x \longrightarrow 3$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

$\therefore \lim_{x\to3}(x^2-7x+a)=0$

(2) $\lim_{x\to3}(x^2-7x+a)=0$에서

$3^2-7\cdot3+a=0 \qquad \therefore a=12$

답 (1) 0 (2) 12

0322 $x \longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(x+a)=0$이므로 $\quad a=0$ 답 0

0323 $x \longrightarrow -1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(x^2+ax-2)=0$이므로 $\quad 1-a-2=0$

$\therefore a=-1$ 답 -1

0324 (1) $\lim_{x\to1}2x=2\cdot1=2$

(2) $\lim_{x\to1}(x^2+1)=1^2+1=2$

(3) 모든 실수 x에 대하여 $2x\le f(x)\le x^2+1$이고

$\lim_{x\to1}2x=\lim_{x\to1}(x^2+1)=2$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to1}f(x)=2$

답 (1) 2 (2) 2 (3) 2

0325 모든 양수 x에 대하여 $1-\frac{1}{x}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x}$이고

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ 답 1

0326 ㄱ. $\lim_{x\to2+}|x-2|=\lim_{x\to2+}(x-2)=0$

$\lim_{x\to2-}|x-2|=\lim_{x\to2-}\{-(x-2)\}=0$

$\therefore \lim_{x\to2}|x-2|=0$

ㄴ. $\lim_{x\to1+}\frac{|x-1|}{x^2-x}=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{x(x-1)}=\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=1$

$\lim_{x\to1-}\frac{|x-1|}{x^2-x}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to1-}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$

이므로 $\quad \lim_{x\to1+}\frac{|x-1|}{x^2-x}\ne\lim_{x\to1-}\frac{|x-1|}{x^2-x}$

따라서 $\lim_{x\to1}\frac{|x-1|}{x^2-x}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to-3+}\frac{x^2-9}{|x+3|}=\lim_{x\to-3+}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}$

$=\lim_{x\to-3+}(x-3)=-6$

$\lim_{x\to-3-}\frac{x^2-9}{|x+3|}=\lim_{x\to-3-}\frac{(x+3)(x-3)}{-(x+3)}$

$=\lim_{x\to-3-}\{-(x-3)\}=6$

이므로 $\quad \lim_{x\to-3+}\frac{x^2-9}{|x+3|}\ne\lim_{x\to-3-}\frac{x^2-9}{|x+3|}$

따라서 $\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{|x+3|}$의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

0327 ② $\lim_{x\to0}f(x)=0$ 답 ②

참고 ⑤ $\lim_{x\to0}f(x)=-\infty$

이때 $-\infty$는 일정한 값이 아닌 한없이 작아지는 상태를 나타내므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

0328 ① $\lim_{x\to0+}f(x)=0$

② $\lim_{x\to1+}f(x)=0$, $\lim_{x\to1-}f(x)=-2$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)\ne\lim_{x\to1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=3$

$\therefore \lim_{x\to2}f(x)=3$

④ $\lim_{x\to3+}f(x)=1$

⑤ $\lim_{x\to4-}f(x)=4$ 답 ②

0329 $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}(kx+1)=3k+1$

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}(x-k)^2=(3-k)^2$ ➪ ❶

이때 $\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)$이어야 하므로

$3k+1=(3-k)^2, \qquad 3k+1=k^2-6k+9$

$k^2-9k+8=0, \qquad (k-1)(k-8)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=8$ ➪ ❷

따라서 실수 k의 값의 합은

$1+8=9$ ➪ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to3+}f(x)$, $\lim_{x\to3-}f(x)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 모든 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

0330 ㄱ. $\lim_{x\to0+} f(x)=1$, $\lim_{x\to0-} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to0+} f(x)\neq\lim_{x\to0-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to0} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0331 $\lim_{x\to1+} f(x)-\lim_{x\to1-} f(x)$

$=\lim_{x\to1+}(x^2-2x+4)-\lim_{x\to1-}(-x^2+2x-2)$

$=(1^2-2\cdot1+4)-(-1^2+2\cdot1-2)$

$=3-(-1)=4$ 답 ⑤

0332 $\lim_{x\to0} f(x)+\lim_{x\to1-} f(x)+\lim_{x\to2+} f(x)=0+1+1$

$=2$ 답 ②

0333 $x-2015=0$에서 $x=2015$

(i) $x>2015$일 때,

$f(x)=\dfrac{x-2015}{x-2015}=1$

$\therefore a=\lim_{x\to2015+} f(x)=1$ ⇨ ❶

(ii) $x<2015$일 때,

$f(x)=\dfrac{-(x-2015)}{x-2015}=-1$

$\therefore b=\lim_{x\to2015-} f(x)=-1$ ⇨ ❷

(i), (ii)에서 $a-b=2$ ⇨ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0334 $x\longrightarrow3+$일 때 $x+1\longrightarrow4+$이므로

$\lim_{x\to3+}[x+1]=4$

$x\longrightarrow3-$일 때 $x-1\longrightarrow2-$이므로

$\lim_{x\to3-}[x-1]=1$

$\therefore \lim_{x\to3+}[x+1]+\lim_{x\to3-}[x-1]=5$ 답 ④

0335 ① $x\longrightarrow0+$일 때 $[x]=0$이므로

$\lim_{x\to0+}\dfrac{[x]}{x}=\lim_{x\to0+}\dfrac{0}{x}=0$

② $x\longrightarrow0-$일 때 $x-1\longrightarrow-1-$이므로

$[x-1]=-2$

$\therefore \lim_{x\to0-}\dfrac{x-1}{[x-1]}=\lim_{x\to0-}\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$

③ $x\longrightarrow1-$일 때 $x+1\longrightarrow2-$이므로 $[x+1]=1$

$\therefore \lim_{x\to1-}\dfrac{x+1}{[x+1]}=\lim_{x\to1-}(x+1)=2$

④ $x\longrightarrow2+$일 때 $[x]=2$이므로

$\lim_{x\to2+}\dfrac{[x]^2+x}{[x]}=\lim_{x\to2+}\dfrac{2^2+x}{2}=\dfrac{4+2}{2}=3$

⑤ $-x^2+2x-1=-(x-1)^2$

$x\longrightarrow1+$일 때 $-(x-1)^2\longrightarrow0-$이므로

$\lim_{x\to1+}[-x^2+2x-1]=-1$ 답 ⑤

0336 (i) $x>1$일 때,

$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

$=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2$

$\therefore a=\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}(x-2)=-1$

(ii) $x\longrightarrow1-$일 때, $[x]=0$이므로

$f(x)=\dfrac{[x]}{x-1}=0$

$\therefore b=\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}0=0$

(i), (ii)에서 $a+b=-1$ 답 -1

0337 $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-1+$일 때 $t=0$이므로

$\lim_{x\to-1+} g(f(x))=g(0)=0$

또 $x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow1-$이므로

$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\lim_{t\to1-} g(t)=\lim_{t\to1-} t^2=1$

$\therefore \lim_{x\to-1+} g(f(x))+\lim_{x\to1+} g(f(x))=0+1=1$

답 ②

0338 $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0-$일 때 $t\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{x\to0-} f(f(x))=\lim_{t\to0+} f(t)=\lim_{t\to0+}(t+1)=1$ 답 1

0339 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x-3f(x)}{2x-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-3\cdot\dfrac{f(x)}{x}}{2-\dfrac{f(x)}{x}}=\dfrac{1-3\cdot\dfrac{1}{2}}{2-\dfrac{1}{2}}=-\dfrac{1}{3}$

답 $-\dfrac{1}{3}$

0340 $\lim_{x\to0} f(x)=2$, $\lim_{x\to0} g(x)=a$이므로

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)+2g(x)}{f(x)g(x)+4}=\dfrac{2+2a}{2a+4}$

즉 $\dfrac{2+2a}{2a+4}=2$이므로 $2+2a=4a+8$

$\therefore a=-3$ 답 ①

0341 $f(x)+2g(x)=h(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to2015} h(x)=10$이고

$g(x)=\dfrac{h(x)-f(x)}{2}$

$\therefore \lim_{x\to2015} g(x)=\lim_{x\to2015}\dfrac{h(x)-f(x)}{2}$

$=\dfrac{10-(-4)}{2}=7$ 답 7

다른풀이 $\lim_{x\to2015} g(x)=a$ (a는 실수)라 하면

$\lim_{x\to2015}\{f(x)+2g(x)\}=10$

에서 $-4+2a=10$ $\therefore a=7$

$\therefore \lim_{x\to2015} g(x)=7$

0342 ㄱ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-1 & (x\ge0)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$

이면 $f(x)+g(x)=0$이므로 $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=0$이지만

$\lim_{x\to0} f(x)$와 $\lim_{x\to0} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$ 이면

$f(x)-g(x)=0$이므로 $\lim_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}=0$이지만

$\lim_{x\to0} f(x)$와 $\lim_{x\to0} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\beta$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ②

0343 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{2x^2-3x-2}+\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{(2x+1)(x-2)}+\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{(2x+1)(x-2)}+\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{2x+1}+\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x-1}$

$=\frac{4}{5}-2=-\frac{6}{5}$

답 ①

0344 $\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{\frac{3}{x}+1}=\lim_{x\to-3}\frac{x(x+3)}{3+x}=\lim_{x\to-3}x=-3$

답 -3

0345 $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)f(x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{(x+1)f(x)}$

$=\frac{3}{2f(1)}$ ⇨ ❶

따라서 $\frac{3}{2f(1)}=2$이므로

$f(1)=\frac{3}{4}$ ⇨ ❷

답 $\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{(x^2-1)f(x)}=\frac{3}{2f(1)}$임을 알 수 있다.	70%
❷ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30%

0346 $\lim_{x\to9}\frac{(x-9)f(x)}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)f(x)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)f(x)(\sqrt{x}+3)}{x-9}$

$=\lim_{x\to9}f(x)(\sqrt{x}+3)$

$=-2\cdot(3+3)$

$=-12$

답 ①

0347 $x-2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^3-8}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{(t+2)^3-8}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t^3+6t^2+12t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\cdot\frac{1}{t^2+6t+12}$

$=5\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$

답 $\frac{5}{12}$

0348 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{4x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}$

$=\frac{3}{1+2}=1$

답 1

0349 $\lim_{x\to-\infty}\frac{5-x+2x^2}{3+x+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x}+2}{\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}+1}=2$

답 2

0350 $A=\lim_{x\to\infty}\frac{7x+1}{5x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{5-\frac{1}{x^2}}=0$

$B=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$C=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}{2}$

$=\frac{2}{2}=1$

$\therefore A<B<C$

답 ①

0351 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-f(x)}{x^2+\{f(x)\}^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}}{1+\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}$

$=\frac{2-(-1)\cdot0}{1+(-1)^2}=1$

답 ①

0352 $x=-t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{1+t+t^2}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{1+t+t^2}-t)(\sqrt{1+t+t^2}+t)}{\sqrt{1+t+t^2}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+t}{\sqrt{1+t+t^2}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}+1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}+1}$$
$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

답 ④

0353 (주어진 식)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-3x+5}}{(x-\sqrt{x^2-3x+5})(x+\sqrt{x^2-3x+5})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-3x+5}}{3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}$$
$$=\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0354 $$\lim_{x\to-1}\frac{4}{x+1}\left(x-\frac{2}{x-1}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{4}{x+1}\cdot\frac{x^2-x-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{4}{x+1}\cdot\frac{(x+1)(x-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{4(x-2)}{x-1}=\frac{4\cdot(-3)}{-1-1}$$
$$=6$$

답 6

0355 $$\lim_{x\to0}\frac{18}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+9}}-\frac{1}{3}\right)=\lim_{x\to0}\frac{18}{x}\cdot\frac{3-\sqrt{x+9}}{3\sqrt{x+9}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{6(3-\sqrt{x+9})(3+\sqrt{x+9})}{x\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-6x}{x\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-6}{\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}$$
$$=\frac{-6}{3(3+3)}=-\frac{1}{3}$$

답 ②

0356 $$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$$
$$=\frac{4}{1+1}=2$$

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2x+1}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-2x}{2x+1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-2}{2x+1}=-2$$

$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)+\lim_{x\to0}g(x)=0$

답 0

0357 $x \longrightarrow -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1-a+b=0$

$\therefore b=a-1$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+a-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x+a-1)=a-2$$

즉 $a-2=2$이므로 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore a+b=7$

답 7

0358 $x \longrightarrow 2$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(ax+b)=0$이므로 $2a+b=0$

$\therefore b=-2a$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{12+x^2}-2x}{ax-2a}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{12+x^2}-2x)(\sqrt{12+x^2}+2x)}{(ax-2a)(\sqrt{12+x^2}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{-3(x+2)(x-2)}{a(x-2)(\sqrt{12+x^2}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{-3(x+2)}{a(\sqrt{12+x^2}+2x)}$$
$$=\frac{-3\cdot4}{a(4+4)}=-\frac{3}{2a}$$

즉 $-\frac{3}{2a}=-3$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

$\therefore ab=-\frac{1}{2}$

답 ③

0359 $x \longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^3+ax^2+b)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ …… ㉠

㉠을 $f(x)=x^3+ax^2+b$에 대입하면

$f(x)=x^3+ax^2-(a+1)$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2-(a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{x^2+(a+1)x+a+1\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\{x^2+(a+1)x+a+1\}=2a+3$$

즉 $2a+3=5$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-2$이므로 $f(0)=-2$

답 ①

0360 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+x-2}=2$이므로 $a=2$ ⇨ ❶

또 $\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+bx+c}{x^2+x-2}=\frac{2}{3}$에서 $x \longrightarrow -2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(2x^2+bx+c)=0$이므로 $\quad 8-2b+c=0$

$\therefore c=2b-8$ ...... ㉠

㉠을 $\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+bx+c}{x^2+x-2}$에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+bx+2b-8}{x^2+x-2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(2x+b-4)}{(x+2)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{2x+b-4}{x-1}=\frac{b-8}{-3}$$

즉 $\frac{b-8}{-3}=\frac{2}{3}$이므로 $\quad b=6$

$b=6$을 ㉠에 대입하면 $\quad c=4$ ⇨ ❷

$\therefore abc=48$ ⇨ ❸

답 48

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ b, c의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	10%

0361 $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2-bx}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{at^2+bt}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{at^2+bt}-t)(\sqrt{at^2+bt}+t)}{\sqrt{at^2+bt}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-1)t^2+bt}{\sqrt{at^2+bt}+t} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠의 극한값이 존재하려면 $\quad a-1=0 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{bt}{\sqrt{t^2+bt}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b}{t}}+1}=\frac{b}{2}$$

즉 $\frac{b}{2}=2$이므로 $\quad b=4$

$\therefore a+b=5$

답 5

0362 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}$$
$$=\frac{2a}{1+1}=a$$

$\therefore a=4$

답 ③

0363 $a\le0$이면 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+x+1}-ax)=\infty$이므로

$a>0$

주어진 식의 좌변의 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+x+1}-ax)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{2x^2+x+1}-ax)(\sqrt{2x^2+x+1}+ax)}{\sqrt{2x^2+x+1}+ax}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-a^2)x^2+x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+ax} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠의 극한값이 존재하려면 $\quad 2-a^2=0$

$a^2=2 \quad \therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$

$a=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

따라서 $b=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 $\quad \frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=4$

답 ⑤

0364 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x-1}=1$에서 $f(x)$는 일차항의 계수가 2인 일차식임을 알 수 있다.

$f(x)=2x+a$ (a는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(2x+a)=-2+a$

즉 $-2+a=2$이므로 $\quad a=4$

따라서 $f(x)=2x+4$이므로

$f(2)=2\cdot2+4=8$

답 ③

0365 조건 (가)에서 $f(x)$는 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 2인 삼차식임을 알 수 있다.

또 조건 (나)에서 $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $\quad f(0)=0$

$f(x)=x^3+2x^2+ax$ (a는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+2x+a)}{x}=\lim_{x\to0}(x^2+2x+a)=a$$

$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-x$이므로 구하는 나머지는

$f(1)=1^3+2\cdot1^2-1=2$

답 2

라세 특강 나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=f(a)$

0366 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $\quad f(0)=0$ ...... ㉠

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$에서 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수)

로 놓으면 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x-1)(ax+b)=-b$$

즉 $-b=2$이므로 $\quad b=-2$

또 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-1$에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(ax-2)}{x-1}=\lim_{x\to1}x(ax-2)=a-2$$

즉 $a-2=-1$이므로 $\quad a=1$

따라서 $f(x)=x(x-1)(x-2)$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x(x-1)=2\cdot1=2$$

답 2

0367 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$에서 $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-4}=1$

ax^3+bx^2+cx+d는 이차항의 계수가 1인 이차식이어야 하므로

$a=0,\ b=1$ ⇨ ❶

또 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=2$에서 $\quad \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+cx+d}{x^2-4}=2$ ...... ㉠

㉠에서 $x\longrightarrow2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+cx+d)=0$이므로 $\quad 4+2c+d=0$

$\therefore d=-2c-4$ ...... ㉡ ⇨ ❷

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+cx-2c-4}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2+c)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x+2+c}{x+2}=\frac{4+c}{4}$$

즉 $\dfrac{4+c}{4}=2$이므로 $\quad 4+c=8 \quad \therefore c=4$ ⇨ ❸

$c=4$를 ㉡에 대입하면 $\quad d=-12$ ⇨ ❹

답 $a=0,\ b=1,\ c=4,\ d=-12$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ d를 c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ c의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ d의 값을 구할 수 있다.	10%

0368 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-3x^2}{2x-3}=a$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=10$에서 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$f(x)=3(x-1)(x+k)$(k는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+k)}{x-1}=\lim_{x\to1}3(x+k)=3(1+k)$$

즉 $3(1+k)=10$이므로 $\quad 1+k=\dfrac{10}{3}$

$\therefore k=\dfrac{7}{3}$

따라서 $f(x)=3(x-1)\left(x+\dfrac{7}{3}\right)=3x^2+4x-7$이므로

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+4x-7)-3x^2}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-7}{2x-3}=2$$

답 ④

0369 $x>0$일 때, $2x+1<f(x)<2x+5$의 각 변을 제곱하면

$(2x+1)^2<\{f(x)\}^2<(2x+5)^2$

각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{(2x+1)^2}{x^2+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}<\frac{(2x+5)^2}{x^2+1}$$

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+5)^2}{x^2+1}=4$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}=4$$

답 4

0370 (i) $x>1$일 때, $x-1>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{x^2-1}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{2x^2-2x}{x-1}$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{2x(x-1)}{x-1}$$

$$\therefore x+1\le\frac{f(x)}{x-1}\le2x$$

이때 $\lim\limits_{x\to1+}(x+1)=\lim\limits_{x\to1+}2x=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

(ii) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{2x^2-2x}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$\frac{2x(x-1)}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$\therefore 2x\le\frac{f(x)}{x-1}\le x+1$$

이때 $\lim\limits_{x\to1-}2x=\lim\limits_{x\to1-}(x+1)=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

(i), (ii)에서 $\quad \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$

답 ⑤

0371 직선 OP의 기울기가 $\dfrac{t^2}{t}=t$이므로 점 P를 지나고 직선 OP와 수직인 직선의 방정식은

$$y-t^2=-\frac{1}{t}(x-t)$$

위의 식에 $x=0$을 대입하면 $y=t^2+1$이므로

$f(t)=t^2+1$

P $\longrightarrow$ O이면 $t\longrightarrow0$이므로 구하는 값은

$$\lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}(t^2+1)=1$$

답 1

타쎈 특강

점 $(a,\ b)$를 지나고, 기울기가 $m\ (m\neq0)$인 직선과 수직인 직선의 방정식은

$$y-b=-\frac{1}{m}(x-a)$$

0372 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(t+1)^2+(\sqrt{2t}\,)^2}=\sqrt{t^2+4t+1}$

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(t-1)^2+(\sqrt{2t}\,)^2}=\sqrt{t^2+1}$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}})\\&=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+4t+1}-\sqrt{t^2+1}\,)\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+4t+1}-\sqrt{t^2+1}\,)(\sqrt{t^2+4t+1}+\sqrt{t^2+1}\,)}{\sqrt{t^2+4t+1}+\sqrt{t^2+1}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{4t}{\sqrt{t^2+4t+1}+\sqrt{t^2+1}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\\&=\frac{4}{1+1}=2\end{aligned}$$

답 ④

0373 전략 우극한과 좌극한을 각각 구한 다음 그 값을 비교한다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to-1+}f(x)=2,\ \lim_{x\to-1-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=2$

ㄴ. $\lim_{x\to1+}f(x)=0,\ \lim_{x\to1-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0$

ㄷ. $\lim_{x\to2+}f(x)=2,\ \lim_{x\to2-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)\neq\lim_{x\to2-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0374 전략 주어진 분수식의 분자, 분모를 $f(x)$로 각각 나눈다.

풀이 $\lim_{x\to3}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to3}g(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{g(x)}{f(x)}=0$$

$$\therefore\ \lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{2f(x)+3g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{2+3\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}=\frac{1-0}{2+3\cdot0}=\frac{1}{2}$$

답 ②

0375 전략 $x\longrightarrow a$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow0$이면 (분모) $\longrightarrow0$임을 이용하여 미정계수를 구한다.

풀이 $x\longrightarrow1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow0$이므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(3x+a)=0$이므로 $3+a=0$

$\therefore\ a=-3$ ⇨ ❶

$a=-3$을 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{3x-3}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{3(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$ ⇨ ❷

$\therefore\ ab=-1$ ⇨ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

0376 전략 x가 유리수인 경우와 x가 무리수인 경우의 극한값을 각각 구한 다음 그 값을 비교한다.

풀이 (i) x가 유리수일 때,

$f(x)=x^2$이므로 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}x^2=a^2$

(ii) x가 무리수일 때,

$f(x)=x^3$이므로 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}x^3=a^3$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하려면 $a^3=a^2$이어야 하므로

$a^3-a^2=0,\quad a^2(a-1)=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 실수 a의 개수는 2이다.

답 ③

0377 전략 정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n+}[x]=n,\ \lim_{x\to n-}[x]=n-1$임을 이용한다.

풀이 ① $x\longrightarrow-2-$일 때, $f(x)\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{x\to-2-}[f(x)]=0$

② $x\longrightarrow-2+$일 때, $f(x)\longrightarrow0-$이므로

$\lim_{x\to-2+}[f(x)]=-1$

③ $x\longrightarrow0+$일 때, $f(x)\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{x\to0+}[f(x)]=0$

④ $x\longrightarrow2-$일 때, $f(x)\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{x\to2-}[f(x)]=0$

⑤ $x\longrightarrow2+$일 때, $f(x)\longrightarrow0-$이므로

$\lim_{x\to2+}[f(x)]=-1$

답 ④

0378 전략 $f(x)=t$로 놓고 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때 t의 값이 한없이 가까워지는 값을 찾는다.

풀이 $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0-$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x\to0-}f(f(x))=f(1)=0$

또 $x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}(t-1)=-1$

$\therefore\ \lim_{x\to0-}f(f(x))-\lim_{x\to1+}f(f(x))=0-(-1)=1$

답 1

0379 전략 절댓값 기호 안의 식의 부호를 확인한다.

풀이 $x\longrightarrow-1+$일 때 $x^2\longrightarrow1-$이므로 $x^2-1<0$

$\therefore a=\lim_{x\to-1+}\frac{x^2+x}{|x^2-1|}=\lim_{x\to-1+}\frac{x^2+x}{-(x^2-1)}$

$=\lim_{x\to-1+}\frac{x(x+1)}{-(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to-1+}\frac{x}{-(x-1)}=-\frac{1}{2}$

$x\longrightarrow 0+$일 때 $x>0$이므로

$b=\lim_{x\to0+}\frac{2x}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{2x}{x}=2$

$\therefore ab=-1$

답 -1

0380 전략 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

풀이 $p=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$

$=\lim_{x\to1}\left(-\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)$

$=-\frac{1}{2}$ ⇨ ❶

$q=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x})(\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x})}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$

$=\frac{-4}{1+1}=-2$ ⇨ ❷

$\therefore 2p+q=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-3$ ⇨ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ q의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $2p+q$의 값을 구할 수 있다.	20%

0381 전략 분자, 분모가 모두 다항식이면 분자, 분모를 각각 인수분해하여 약분하고, 분자, 분모 중에 무리식이 있으면 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

풀이 $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=2a$

즉 $2a=6$이므로 $a=3$

$a=3$을 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})$에 대입하면

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+bx})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+bx})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+bx})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+bx}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3-b)x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+bx}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-b}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{b}{x}}}=\frac{3-b}{2}$

즉 $\frac{3-b}{2}=2$이므로 $3-b=4$ $\therefore b=-1$

$\therefore a+b=2$

답 ④

0382 전략 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이면 $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같음을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=1$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-2$에서 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(x+a)$ (a는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+a}{x+1}=\frac{1+a}{2}$

즉 $\frac{1+a}{2}=-2$이므로 $1+a=-4$ $\therefore a=-5$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-5)$이므로

$f(4)=3\cdot(-1)=-3$

답 -3

0383 전략 그래프를 이용하여 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$ 또는 $g(x)$의 값이 한없이 가까워지는 값을 찾는다.

풀이 $g(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1-$일 때 $t=0$이므로

$\lim_{x\to1-}f(g(x))=f(0)=0$

또 $f(x)=s$로 놓으면 $x\longrightarrow1+$일 때 $s\longrightarrow-1-$이므로

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{s\to-1-}g(s)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1-}f(g(x))-\lim_{x\to1+}g(f(x))=1$

답 1

0384 전략 $x-1=t$로 치환한다.

풀이 $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t(t+2)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\cdot\frac{1}{t+2}$

$=2\cdot\frac{1}{2}=1$

답 ④

0385 전략 △OPQ의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=1$

$\therefore b=\sqrt{1-a^2}$ ($\because b>0$)

따라서 $\mathrm{Q}(a, -\sqrt{1-a^2})$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{1-a^2}$

$\therefore S(a)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot2\sqrt{1-a^2}=a\sqrt{1-a^2}$

$\therefore \lim_{a\to1-}\frac{S(a)}{\sqrt{1-a}}=\lim_{a\to1-}\frac{a\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a}}$

$=\lim_{a\to1-}\frac{a\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}$

$=\lim_{a\to1-}a\sqrt{1+a}=\sqrt{2}$

답 ④

Ⅱ. 함수의 극한과 연속

04 함수의 연속

0386 답 ㄱ

0387 $\lim_{x\to0+}f(x)=4$, $\lim_{x\to0-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. 답 ㄴ

0388 $f(0)=0$, $\lim_{x\to0}f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. 답 ㄷ

0389 $f(1)=1$, $\lim_{x\to1}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0390 $f(1)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 답 불연속

0391 $f(1)=1$, $\lim_{x\to1}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0392 $f(1)=0$, $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 답 불연속

0393 $f(1)=1$이고,

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(2x-1)=1$

이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0394 답 $[-2, 1]$

0395 답 $[0, 7)$

0396 답 $[-1, \infty)$

0397 답 $(-\infty, 10)$

0398 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이므로

$(-\infty, \infty)$ 답 $(-\infty, \infty)$

0399 주어진 함수의 정의역은 $x-2\neq0$, 즉 $x<2$ 또는 $x>2$인 x의 값들의 집합이므로

$(-\infty, 2)\cup(2, \infty)$ 답 $(-\infty, 2)\cup(2, \infty)$

0400 주어진 함수의 정의역은 $x+1\geq0$, 즉 $x\geq-1$인 x의 값들의 집합이므로 $[-1, \infty)$ 답 $[-1, \infty)$

0401 주어진 함수의 정의역은 $16-x^2\geq0$, 즉 $-4\leq x\leq4$인 x의 값들의 집합이므로

$[-4, 4]$ 답 $[-4, 4]$

0402 함수 $f(x)=x^2$은 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0403 함수 $f(x)=\sqrt{x-3}$은 $x-3\geq0$, 즉 $x\geq3$일 때 연속이므로 구간 $[3, \infty)$에서 연속이다. 답 $[3, \infty)$

0404 함수 $f(x)=\frac{x-3}{x-1}$은 $x\neq1$일 때, 즉 $x<1$ 또는 $x>1$일 때 연속이므로 구간 $(-\infty, 1)\cup(1, \infty)$에서 연속이다.

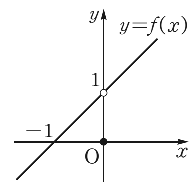
답 $(-\infty, 1)\cup(1, \infty)$

0405 $f(0)=0$,

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(x+1)=1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 그 이외의 x의 값에서는 연속이다.



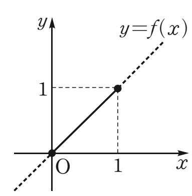
답 풀이 참조

0406 답 최댓값: 1, 최솟값은 없다.

0407 답 최댓값: 0, 최솟값: -2

0408 함수 $f(x)=x$는 구간 $[0, 1]$에서 연속이고 구간 $[0, 1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

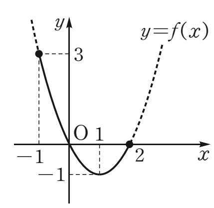
따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 1, $x=0$에서 최솟값 0을 갖는다.



답 최댓값: 1, 최솟값: 0

0409 함수 $f(x)=x^2-2x$는 구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

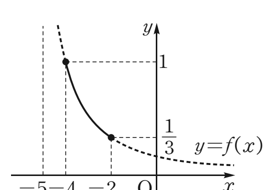
따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 3, $x=1$에서 최솟값 -1을 갖는다.



답 최댓값: 3, 최솟값: -1

0410 함수 $f(x)=\frac{1}{x+5}$은 구간 $[-4, -2]$에서 연속이고 구간 $[-4, -2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

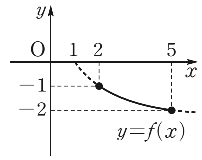
따라서 $f(x)$는 $x=-4$에서 최댓값 1, $x=-2$에서 최솟값 $\frac{1}{3}$을 갖는다.



답 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{3}$

04 함수의 연속

0411 함수 $f(x)=-\sqrt{x-1}$은 구간 $[2, 5]$에서 연속이고 구간 $[2, 5]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 -1, $x=5$에서 최솟값 -2를 갖는다.



답 최댓값: -1, 최솟값: -2

0412 답 (가) 연속 (나) 사이값 정리

0413 (1) $f(1)=1^2+2\cdot1-4=-1$, $f(2)=2^2+2\cdot2-4=4$
(2) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[1, 2]$에서 연속이고 $f(1)f(2)=-4<0$이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

0414 ① $f(0)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
② $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}[x]=0$, $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}[x]=-1$이므로
$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$
따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
③ $f(0)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
④ $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$,
$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0-}\frac{x}{-x}=-1$이므로
$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$
따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
⑤ $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to0}(x+2)=2$
이때 $f(0)=2$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

답 ⑤

타센 특강 여러 가지 함수의 연속성

① 다항함수 ➡ 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속
② 유리함수 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ ➡ $g(x)\neq0$인 x에서 연속
③ 무리함수 $y=\sqrt{f(x)}$ ➡ $f(x)\geq0$인 x에서 연속
④ 가우스 함수 $y=[x]$ (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)
➡ $x\neq n$ (n은 정수)에서 연속

0415 $f(x)=\frac{1}{x}+3$, $g(x)=x-1$에서
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-1)=\frac{1}{x-1}+3$
따라서 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로
$a=1$

답 1

0416 $f(a)=-2a$이고,
$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(-2x)=-2a$
$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(x^2-3)=a^2-3$ ➡ ❶
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하고 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이어야 하므로
$-2a=a^2-3$, $a^2+2a-3=0$
$(a+3)(a-1)=0$ $\therefore a=-3$ 또는 $a=1$ ➡ ❷
따라서 실수 a의 값의 합은
$-3+1=-2$ ➡ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $f(a)$, $\lim_{x\to a+}f(x)$, $\lim_{x\to a-}f(x)$의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 모든 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

0417 ㄱ. $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geq0) \\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$이므로 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.
$f(0)=0$, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x|x|=0$이므로
$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.
ㄴ. $f(-1)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.
ㄷ. $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.
$f(1)=5$이고,
$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+4)(x-1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}(x+4)=5$
이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.
이상에서 모든 실수 x에서 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0418 (i) $f(-1)=2$이고,
$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(x^2+1)=2$,
$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(x+3)=2$
이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)=2$
$\therefore \lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$
따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.
(ii) $f(2)=4$이고,
$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}2x=4$, $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x^2+1)=5$
이므로 $\lim_{x\to2+}f(x)\neq\lim_{x\to2-}f(x)$
따라서 $\lim_{x\to2}f(x)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.
(i), (ii)에서 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이고 그 이외의 x의 값에서는 연속이다. 답 풀이 참조

0419 (i) $\lim_{x\to-1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to-1-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to-1}f(x)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $f(1)=0$, $\lim_{x\to1}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 $a=1$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=5$ 답 5

0420 ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)=2$

ㄴ. $\lim_{x\to3+}f(x)=2$, $\lim_{x\to3-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to3}f(x)=2$

따라서 $x=3$에서 극한값이 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$, 3에서 불연속이므로 불연속이 되는 x의 값은 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0421 (1) $f(1)=0$이므로

$(f\circ f)(1)=f(0)=1$ ⇨ ❶

(2) $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow2-$이므로

$\lim_{x\to1}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to1}f(f(x))=\lim_{t\to2-}f(t)=1$ ⇨ ❷

(3) $\lim_{x\to1}(f\circ f)(x)=(f\circ f)(1)$

따라서 $(f\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다. ⇨ ❸

답 (1) 1 (2) 1 (3) 연속

채점 기준	비율
❶ $(f\circ f)(1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $\lim_{x\to1}(f\circ f)(x)$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 함수 $(f\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속임을 알 수 있다.	20%

0422 함수 $f(x)$가 $x=1$, 2, 3에서 불연속이므로 $x=1$, 2, 3에서 함수 $g(x)$의 연속성을 조사해 보자.

(i) $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}(x-1)f(x)=0\cdot0=0$

이때 $g(1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to2+}g(x)=\lim_{x\to2+}(x-1)f(x)=1\cdot1=1$,

$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}(x-1)f(x)=1\cdot2=2$이므로

$\lim_{x\to2+}g(x)\neq\lim_{x\to2-}g(x)$

따라서 $\lim_{x\to2}g(x)$가 존재하지 않으므로 $g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iii) $\lim_{x\to3}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to3}g(x)=\lim_{x\to3}(x-1)f(x)=2\cdot2=4$

이때 $g(3)=2f(3)=0$이므로 $\lim_{x\to3}g(x)\neq g(3)$

따라서 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

이상에서 구간 $[0, 4]$에서 함수 $g(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 2, 3이므로 구하는 합은

$2+3=5$ 답 5

0423 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$$\therefore k=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x^2+1)=2$$ 답 ②

0424 $f(0)=-2$이므로

$-b=-2$ $\therefore b=2$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$2+a=1-b$, $2+a=-1$ $\therefore a=-3$

또 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

$1-b=-3-c$, $-1=-3-c$ $\therefore c=-2$

$\therefore abc=12$ 답 ⑤

0425 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

$$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+8}+a}{x+1}=f(-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(\sqrt{x^2+8}+a)=0$이므로

$3+a=0$ $\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x^2+8}-3)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}+3}=-\frac{1}{3}$$ 답 $-\frac{1}{3}$

라쎈 특강 미정계수의 결정

$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\alpha$ (α는 실수)일 때

① $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$

② $\alpha\neq0$이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

0426 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a}+b}{x^2}=\frac{1}{2}$ …… ㉠ ⇨ ❶

$x \longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x\to0}(\sqrt{x^2+a}+b)=0$이므로

$\sqrt{a}+b=0 \quad \therefore b=-\sqrt{a}$ …… ㉡ ⇨ ❷

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{a}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a})}{x^2(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

즉 $\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$이므로 $\quad a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $\quad b=-1$ ⇨ ❸

$\therefore a-b=2$ ⇨ ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a}+b}{x^2}=\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.	30%
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0427 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\frac{ax+b}{2}$$

(ii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{a}{x^{2n-1}}+\frac{b}{x^{2n}}}{1+\frac{2}{x^{2n}}}=x$$

(iii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=1$이므로

$$f(x)=\frac{1+a+b}{1+2}=\frac{a+b+1}{3}$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\frac{-1-a+b}{1+2}=\frac{-a+b-1}{3}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$과 $x=-1$에서 연속이어야 한다.

$x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1+}x=\lim_{x\to1-}\frac{ax+b}{2}=\frac{a+b+1}{3}$

$1=\frac{a+b}{2}=\frac{a+b+1}{3}$

$\therefore a+b=2$ …… ㉠

또 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

$\lim_{x\to-1+}\frac{ax+b}{2}=\lim_{x\to-1-}x=\frac{-a+b-1}{3}$

$\frac{-a+b}{2}=-1=\frac{-a+b-1}{3}$

$\therefore a-b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=0$

$\therefore a^2+b^2=4$

답 4

0428 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

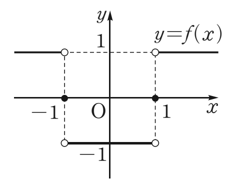
(ii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=1$$

(iii) $|x|=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로

$$f(x)=\frac{1-1}{1+1}=0$$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 -1, 1의 2개이다.

답 ②

0429 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$$f(x)=\frac{0+ax}{0+1}=ax$$

(ii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x^n|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{a}{x^{n-1}}}{1+\frac{1}{x^n}}=x$$

(iii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=1$이므로

$$f(x)=\frac{1+a}{1+1}=\frac{1+a}{2}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1+}x=\lim_{x\to1-}ax=\frac{1+a}{2}$

$1=a=\frac{1+a}{2} \quad \therefore a=1$

답 1

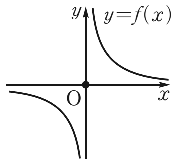
0430 (i) $x=0$일 때, $\quad f(0)=0$

(ii) $x\neq0$일 때,

함수 $f(x)$는 첫째항이 $\frac{x}{1+x^2}$, 공비가 $\frac{1}{1+x^2}$인 등비급수의 합이고, $0<\frac{1}{1+x^2}<1$이므로

$$f(x)=\frac{\frac{x}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{1}{x}$$

(i), (ii)에서 $\quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

타쎈 특강 등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}\,(a\neq 0)$에 대하여

① $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.

② $|r|\geq 1$일 때, 발산한다.

0431 $f(x)=x+\dfrac{x}{1+|x|}+\dfrac{x}{(1+|x|)^2}+\cdots$

(i) $x=0$일 때, $\quad f(0)=0$

(ii) $x\neq 0$일 때,

함수 $f(x)$는 첫째항이 x, 공비가 $\dfrac{1}{1+|x|}$인 등비급수의 합이고, $0<\dfrac{1}{1+|x|}<1$이므로

$$f(x)=\frac{x}{1-\dfrac{1}{1+|x|}}=\frac{x(1+|x|)}{|x|}$$

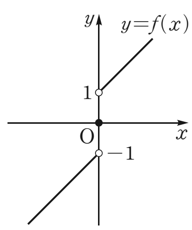
이때 $x>0$이면

$$f(x)=\frac{x(1+x)}{x}=x+1$$

$x<0$이면

$$f(x)=\frac{x(1-x)}{-x}=-(1-x)=x-1$$

(i), (ii)에서 $\quad f(x)=\begin{cases} x+1 & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ x-1 & (x<0) \end{cases}$



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 그 이외의 x의 값에서는 연속이다.

답 풀이 참조

0432 $x\neq 1$일 때, $\quad f(x)=\dfrac{x^2-3x+a}{x-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+a}{x-1}$$

$x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+a)=0$이므로 $\quad -2+a=0 \quad \therefore a=2$

$$\therefore f(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1$$

답 -1

0433 $x\neq -2$일 때,

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=x-2$$ ⇨ ❶

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-2$에서 연속이므로

$$f(-2)=\lim_{x\to -2}f(x)=\lim_{x\to -2}(x-2)=-4$$ ⇨ ❷

답 -4

채점 기준	비율
❶ $x\neq -2$일 때 $f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $f(-2)$의 값을 구할 수 있다.	60%

0434 $x\neq 4$일 때,

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2}=\frac{(\sqrt{x})^3-2^3}{\sqrt{x}-2}=\frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2}$$
$$=x+2\sqrt{x}+4$$

함수 $f(x)$가 $x>0$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=4$에서 연속이므로

$$f(4)=\lim_{x\to 4}f(x)=\lim_{x\to 4}(x+2\sqrt{x}+4)=12$$

답 12

0435 $x\neq -1$일 때, $\quad f(x)=\dfrac{ax^3+bx}{x+1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$$f(-1)=\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{ax^3+bx}{x+1}$$

$x\longrightarrow -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to -1}(ax^3+bx)=0$이므로

$-a-b=0 \quad \therefore a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

이때 $f(2)=2$이므로 $x=2$를 $(x+1)f(x)=ax^3+bx$에 대입하면

$3f(2)=8a+2b \quad \therefore 4a+b=3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-1$

$\therefore ab=-1$

답 ②

0436 ① $f(x)+g(x)=x+3+\dfrac{1}{x^2}$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

② $f(x)g(x)=\dfrac{1}{x^2}(x+3)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

③ $\dfrac{f(x)}{g(x)}=x^2(x+3)$

따라서 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

④ $f(g(x))=f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{x^2}+3$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $g(f(x))=g(x+3)=\dfrac{1}{(x+3)^2}$

이 함수는 $x=-3$에서 정의되지 않으므로 $x=-3$에서 불연속이다.

답 ③

0437 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$

ㄱ. $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\lim\limits_{x\to a}g(x)=f(a)g(a)$이므로

$f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $f(a)=g(a)$이면 $\dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}$는 $x=a$에서 정의되지 않으므로 $\dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}$는 $x=a$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\}^2=\lim\limits_{x\to a}f(x)\lim\limits_{x\to a}f(x)=\{f(a)\}^2$이므로 $\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

ㄹ. [반례] $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$이면

$$g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}-2}=\frac{x}{1-2x}$$

이때 $x=\dfrac{1}{2}$에서 $f(x)$, $g(x)$가 모두 연속이지만 $g(f(x))$는 $x=\dfrac{1}{2}$에서 정의되지 않으므로 $g(f(x))$는 $x=\dfrac{1}{2}$에서 불연속이다.

이상에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0438 ① $f(x)$와 $g(x)$가 연속함수이면 $\{f(x)\}^2$과 $\{g(x)\}^2$도 연속함수이다.
따라서 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$도 연속함수이다.

② $f(x)+g(x)=h(x)$로 놓으면 $\quad g(x)=h(x)-f(x)$
이때 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

③ [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면

$$f(x)g(x)=0$$

따라서 $f(x)$와 $f(x)g(x)$는 연속함수이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

④ 임의의 실수 a에 대하여 $g(a)=b$라 하면 $g(x)$가 연속함수이므로

$$\lim_{x\to a}g(x)=b$$

즉 $g(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow a$일 때 $t\longrightarrow b$이므로

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to a}f(g(x))=\lim_{t\to b}f(t)=f(b)$$

($\because$ $f(x)$가 연속함수)

이때 $(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(b)$이므로

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(a)$$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 연속함수이다.

⑤ $f(x)$와 $g(x)$가 연속함수이고 $|g(x)|+1>0$이므로 $\dfrac{f(x)}{|g(x)|+1}$는 연속함수이다.

답 ③

0439 ① $\lim\limits_{x\to 3+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3-}f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to 3}f(x)=2$$

② $\lim\limits_{x\to 5+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 5-}f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to 5+}f(x)\neq\lim_{x\to 5-}f(x)$$

따라서 $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ 불연속이 되는 x의 값은 3, 5의 2개이다.

④ 함수 $f(x)$가 구간 $[1, 2]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최솟값을 갖는다.

답 ⑤

0440 함수 $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$은 $x=-1$에서 불연속이고, 그 이외의 x의 값에서는 연속이다.

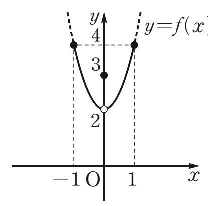
①, ④, ⑤ $f(x)$는 주어진 구간에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

② $-2\leq x<-1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 최댓값은 $\quad f(-2)=\dfrac{3}{-2+1}=-3$

③ $-1<x\leq 0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 최댓값은 없다.

답 ③

0441 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최댓값 4를 갖고, 최솟값은 없다.



답 최댓값: 4, 최솟값은 없다.

0442 $f(x)=x^3+3x-3$으로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이고

$$f(-2)=-17<0,\ f(-1)=-7<0,\ f(0)=-3<0,$$
$$f(1)=1>0,\ f(2)=11>0,\ f(3)=33>0$$

따라서 $f(0)f(1)<0$이므로 사이값 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(0, 1)$이다.

답 ③

0443 $f(-2)f(-1)=-2\cdot 2=-4<0$,
$f(0)f(1)=2\cdot(-1)=-2<0$,
$f(1)f(2)=(-1)\cdot 1=-1<0$
이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 3개의 실근을 가지므로

$$n=3$$

답 ②

0444 $f(x)=x^2-2x+a$로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 연속이고

$$f(-1)=a+3,\ f(1)=a-1$$

이므로 $f(-1)f(1)<0$에서

$$(a+3)(a-1)<0$$
$$\therefore\ -3<a<1$$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0의 3개이다.

답 3

0445 주어진 조건에서 $f(0)=0$, $f(3)=0$이므로

$$f(x)=x(x-3)Q(x)\ (Q(x)\text{는 다항함수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓을 수 있다.

㉠을 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)Q(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(x-3)Q(x)=-3Q(0)$$

즉 $-3Q(0)=1$이므로 $\quad Q(0)=-\dfrac{1}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$

또 ㉠을 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=1$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)Q(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}xQ(x)=3Q(3)$$

즉 $3Q(3)=1$이므로

$$Q(3)=\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

이때 $Q(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이고, ㉡, ㉢에서 $Q(0)Q(3)<0$이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $Q(x)=0$은 구간 $(0, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $[0, 3]$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

답 ③

0446 전략 그래프에서 불연속인 a의 값을 먼저 찾는다.

풀이 주어진 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=-1, 0, 2$에서 불연속이다.

(i) $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=1$

(ii) $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=2$

(iii) $\lim_{x\to2+}f(x)=0$, $\lim_{x\to2-}f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to2+}f(x)\neq\lim_{x\to2-}f(x)$$

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 정수 a의 값은 -1, 0이다.

답 -1, 0

0447 전략 $\lim_{x\to2}f(x)g(x)=f(2)g(2)$를 만족시키는 k의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=f(2)g(2) \qquad ⇨ ❶$$

$$\lim_{x\to2+}(x+1)(x+k)=\lim_{x\to2-}(-x+4)(x+k)=(2+1)(2+k)$$

$$6+3k=4+2k \qquad ⇨ ❷$$

$$\therefore k=-2 \qquad ⇨ ❸$$

답 -2

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=f(2)g(2)$임을 알 수 있다.	20%
❷ k에 대한 식을 세울 수 있다.	60%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

0448 전략 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

풀이 $x\neq2$일 때,

$$f(x)=\frac{-x^3+6x^2-5x-6}{x-2}=\frac{(x-2)(-x^2+4x+3)}{x-2}=-x^2+4x+3$$

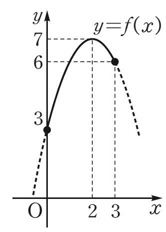
이때 $f(2)=7$이고, $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(-x^2+4x+3)=7$이므로

$$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$$

즉 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 구간 $[0, 3]$에서 연속이다.
따라서 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

구간 $[0, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 7, $x=0$에서 최솟값 3을 갖는다.
따라서 $M=7$, $m=3$이므로

$$M+m=10$$



답 ⑤

0449 전략 경곗값에서의 함수의 연속성을 조사한다.

풀이 ㄱ. $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.
$f(1)=1$이고,

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

$$\therefore \lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.
$g(0)=1$이고,

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}(2\sqrt{x}+1)=1,\ \lim_{x\to0-}g(x)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to0}g(x)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to0}g(x)=g(0)$$

따라서 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

ㄷ. $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x\to-1+}h(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1+}x=-1,$$

$$\lim_{x\to-1-}h(x)=\lim_{x\to-1-}\frac{x(x+1)}{-(x+1)}=\lim_{x\to-1-}(-x)=1\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to-1+}h(x)\neq\lim_{x\to-1-}h(x)$$

따라서 $\lim_{x\to-1}h(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $h(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

이상에서 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수는 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

0450 전략 합성함수의 연속성을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=0\cdot1=0$, $\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=0\cdot(-1)=0$
이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$$

이때 $f(0)g(0)=2\cdot1=2$이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)g(x)\neq f(0)g(0)$$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to0+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to0+}f(g(x))=f(1)=1$,

$\lim_{x\to0-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to0-}f(g(x))=f(-1)=1$

이므로 $\lim_{x\to0}(f\circ g)(x)=1$

이때 $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to0}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(0)$$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to0}g(f(x))=\lim_{x\to0+}g(x)=1$

이때 $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(2)=1$이므로

$$\lim_{x\to0}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$$

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0451 전략 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

풀이 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2-ax-3}{x-1}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^2-ax-3)=0$이므로

$1-a-3=0 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x+3)=4$$

$\therefore a+b=2$ 답 2

0452 전략 $x\longrightarrow0$일 때 $f(x)$의 극한값을 이용하여 $\lim_{x\to0}g(x)$의 값을 구한다.

풀이 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0}g(x)=g(0)$$

$$\therefore k=\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}[f(x)]=\lim_{x\to0}[x^2+2]$$

$x\longrightarrow0$일 때 $x^2+2\longrightarrow2+$이므로

$$\lim_{x\to0}[x^2+2]=2$$

$\therefore k=2$ 답 ③

0453 전략 $0\le x<1$, $x=1$, $x>1$인 경우로 나누어 각각 $f(x)$를 구한다.

풀이 (i) $0\le x<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\frac{0+0-1}{0+0-1}=1$$

(ii) $x=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=1$이므로

$$f(x)=\frac{1+2(a-1)-1}{1+a-1}=\frac{2(a-1)}{a}$$

(iii) $x>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{2(a-1)}{x^n}-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{a}{x^n}-\frac{1}{x^{2n}}}=x$$

함수 $f(x)$가 $x\ge0$에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to1+}x=1=\frac{2(a-1)}{a}$$

즉 $\frac{2(a-1)}{a}=1$이므로 $\qquad 2(a-1)=a$

$\therefore a=2$ 답 2

0454 전략 $f(x)$가 $x=3$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $x\ne3$일 때, $\qquad f(x)=\frac{a\sqrt{x-2}+b}{x-3}$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x-2}+b}{x-3}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}(a\sqrt{x-2}+b)=0$이므로

$a+b=0 \qquad \therefore b=-a \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x-2}-a}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{a(\sqrt{x-2}-1)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{a(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{a}{\sqrt{x-2}+1}=\frac{a}{2}$$

즉 $\frac{a}{2}=1$이므로 $\qquad a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면 $\qquad b=-2$

$\therefore ab=-4$

답 -4

0455 전략 사이값 정리를 이용한다.

풀이 이차함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $f(1)<0$이면 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 하나의 실근을 갖는다.

$f(1)<0$에서

$a^2-7a+10<0, \qquad (a-2)(a-5)<0$

$\therefore 2<a<5$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=5$이므로

$\beta-\alpha=3$ 답 ②

0456 전략 $\lim_{x\to0}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(0)$인 것을 찾는다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to0+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to0+}f(g(x))=f(-1)=0$

$\lim_{x\to0-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to0-}f(g(x))=\lim_{x\to1-}f(x)=0$

$$\therefore \lim_{x\to0}(f\circ g)(x)=0$$

이때 $(f\circ g)(0)=f(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(0)$$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=0$

이때 $(f\circ g)(0)=f(0)=0$이므로

$\lim_{x\to0}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(0)$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=-1$

이때 $(f\circ g)(0)=f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to0}(f\circ g)(x)\neq(f\circ g)(0)$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 $(f\circ g)(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 $g(x)$의 그래프는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

0457 전략 $f(x)$가 등비급수의 합임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^m+\dfrac{x^m}{1+x^2}+\dfrac{x^m}{(1+x^2)^2}+\cdots$

(i) $x=0$일 때, $f(0)=0$

(ii) $x\neq0$일 때,

함수 $f(x)$는 첫째항이 x^m, 공비가 $\dfrac{1}{1+x^2}$인 등비급수의 합이고,

$0<\dfrac{1}{1+x^2}<1$이므로

$$f(x)=\frac{x^m}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=x^{m-2}(1+x^2)$$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases}x^{m-2}(1+x^2) & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

이때 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to0}x^{m-2}(1+x^2)=0$

여기서 $\lim_{x\to0}(1+x^2)=1$이므로 $\lim_{x\to0}x^{m-2}=0$이어야 한다.

따라서 $m-2\geq1$이므로 자연수 m의 최솟값은 3이다. 답 3

0458 전략 사이값 정리를 이용한다.

풀이 $g(x)=f(x)-x$로 놓으면 함수 $g(x)$는 구간 $[a, b]$에서 연속이고, ⇨ ❶

$g(a)=f(a)-a=b-a>0$, $g(b)=f(b)-b=a-b<0$

이므로 $g(a)g(b)<0$ ⇨ ❷

따라서 사이값 정리에 의하여 $g(c)=0$인 c가 구간 (a, b)에 적어도 1개 존재한다. 즉 방정식 $f(x)=x$는 구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. ⇨ ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $g(x)=f(x)-x$가 구간 $[a, b]$에서 연속임을 알 수 있다.	25%
❷ $g(a)g(b)<0$임을 알 수 있다.	25%
❸ $f(x)=x$가 구간 (a, b)에서 실근을 가짐을 알 수 있다.	50%

Ⅲ. 다항함수의 미분법

05 미분계수와 도함수

0459 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{5-3}{2}=1$ 답 1

0460 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{-32-(-2)}{3}=-10$ 답 -10

0461 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\dfrac{30-(-2)}{4}=8$ 답 8

0462 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(-1)-f(-4)}{-1-(-4)}=\dfrac{-1-(-7)}{3}=2$ 답 2

0463 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{(1+\Delta x)-1}=\dfrac{\{2(1+\Delta x)+1\}-3}{\Delta x}$

$=\dfrac{2\Delta x}{\Delta x}=2$ 답 2

0464 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(\boxed{1})}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{\boxed{(\Delta x)^2+2\Delta x}}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x+2)=\boxed{2}$

$\therefore$ (가) 1 (나) $(\Delta x)^2+2\Delta x$ (다) 2

답 풀이 참조

0465 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{\{-(1+\Delta x)+2\}-1}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$ 답 -1

0466 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{\{(1+\Delta x)^2-(1+\Delta x)\}-0}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x+1)$

$=1$ 답 1

0467 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{\{3(1+\Delta x)^3+(1+\Delta x)+1\}-5}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{3(\Delta x)^3+9(\Delta x)^2+10\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\{3(\Delta x)^2+9\Delta x+10\}=10$ 답 10

0468 답 (가) 연속 (나) 미분가능하지 않다

0469 (ⅰ) $f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+} x^2=0$, $\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-} x^3=0$

이므로 $\lim_{x\to0} f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ⅱ) $\lim_{x\to0+} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+} \frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0+} x=0$,

$\lim_{x\to0-} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-} \frac{x^3}{x}=\lim_{x\to0-} x^2=0$

이므로 $\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x}=0$

따라서 $f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

답 연속이고 미분가능하다.

0470 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0} \frac{10-10}{\Delta x}=0$

답 $f'(x)=0$

0471 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0} \frac{\{3(x+\Delta x)+1\}-(3x+1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0} \frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$

답 $f'(x)=3$

0472 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0} \frac{\{(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\}-(x^2+x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0} \frac{(\Delta x)^2+(2x+1)\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0} (\Delta x+2x+1)=2x+1$

답 $f'(x)=2x+1$

0473 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0} \frac{\{(x+\Delta x)^3+5\}-(x^3+5)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0} \frac{(\Delta x)^3+3x(\Delta x)^2+3x^2\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0} \{(\Delta x)^2+3x\Delta x+3x^2\}$

$=3x^2$

답 $f'(x)=3x^2$

0474 (1) $f'(x)$

$=\lim_{\Delta x\to0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0} \frac{\{-(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+2\}-(-x^2+3x+2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0} \frac{-(\Delta x)^2+(-2x+3)\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0} (-\Delta x-2x+3)=-2x+3$

(2) $f'(x)=-2x+3$이므로 $f'(0)=3$

답 (1) $f'(x)=-2x+3$ (2) 3

0475 $y'=(x^{10})'=10x^9$

답 $y'=10x^9$

0476 $y'=(-9)'=0$

답 $y'=0$

0477 $y'=(2x^7)'=14x^6$

답 $y'=14x^6$

0478 $y'=(-4x+3)'=(-4x)'+(3)'$

$=-4$

답 $y'=-4$

0479 $y'=(x^2-3x+8)'=(x^2)'-(3x)'+(8)'$

$=2x-3$

답 $y'=2x-3$

0480 $y'=(2x^3-3x^2+x+1)'$

$=(2x^3)'-(3x^2)'+(x)'+(1)'$

$=6x^2-6x+1$

답 $y'=6x^2-6x+1$

0481 함수 $f(x)+g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는

$f'(0)+g'(0)=2+(-3)=-1$

답 -1

0482 함수 $f(x)-2g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는

$f'(0)-2g'(0)=2-2\cdot(-3)=8$

답 8

0483 $y'=(x+1)'(2x+3)+(x+1)(2x+3)'$

$=2x+3+2(x+1)=4x+5$

답 $y'=4x+5$

0484 $y'=(3x)'(3x-1)+3x(3x-1)'$

$=3(3x-1)+3x\cdot3$

$=18x-3$

답 $y'=18x-3$

0485 $y'=(x)'(x-1)(x-2)+x(x-1)'(x-2)$

$+x(x-1)(x-2)'$

$=(x-1)(x-2)+x(x-2)+x(x-1)$

$=3x^2-6x+2$

답 $y'=3x^2-6x+2$

0486 $y'=(x+1)'(2x-1)(-x+2)$

$+(x+1)(2x-1)'(-x+2)$

$+(x+1)(2x-1)(-x+2)'$

$=(2x-1)(-x+2)+2(x+1)(-x+2)$

$-(x+1)(2x-1)$

$=-6x^2+6x+3$

답 $y'=-6x^2+6x+3$

0487 $y'=\{(2x-3)^5\}'=5(2x-3)^4(2x-3)'$

$=10(2x-3)^4$

답 $y'=10(2x-3)^4$

0488 $y'=\{(x^2-3x+3)^2\}'$

$=2(x^2-3x+3)(x^2-3x+3)'$

$=2(2x-3)(x^2-3x+3)$

답 $y'=2(2x-3)(x^2-3x+3)$

0489 x의 값이 2에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(2)}{a-2}=\frac{(a^3-2a)-4}{a-2}=\frac{(a-2)(a^2+2a+2)}{a-2}$$
$$=a^2+2a+2$$

따라서 $a^2+2a+2=26$이므로

$a^2+2a-24=0,\quad (a+6)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>2)$

답 ②

0490 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3^3-3a+5-(1^3-a+5)}{2}$$
$$=\frac{26-2a}{2}=13-a$$

따라서 $13-a=4$이므로

$a=9$

답 9

0491 x의 값이 -2에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{10-(-2)}{4}=3$$

또 x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=\frac{a^2+3a-(-2)}{a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a+2)}{a+1}$$
$$=a+2$$

따라서 $a+2=3$이므로

$a=1$

답 1

0492 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은 두 점 $\mathrm{A}(0,\ f(0))$, $\mathrm{B}(4,\ f(4))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

따라서 직선 AB의 기울기는 -1이다.

답 -1

0493 직선 OA의 기울기는 함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=2$$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=0$에 대하여 대칭이므로

$f(-2)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -2에서 0까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\frac{f(0)-f(2)}{2}=-\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$
$$=-2$$

답 ①

0494 x의 값이 -1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{12-0}{4}=3$$

또 함수 $f(x)$의 $x=c$에서의 미분계수는

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(c+h)^2+(c+h)\}-(c^2+c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+(2c+1)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(h+2c+1)=2c+1$$

따라서 $2c+1=3$이므로

$c=1$

답 ④

0495 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^2-3b+2)-(a^2-3a+2)}{b-a}$$
$$=\frac{(b^2-a^2)-3(b-a)}{b-a}$$
$$=\frac{(b+a)(b-a)-3(b-a)}{b-a}$$
$$=a+b-3$$

⇨ ❶

또 함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 순간변화율은

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(-1+h)^2-3(-1+h)+2\}-6}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-5h}{h}=\lim_{h\to 0}(h-5)=-5$$

⇨ ❷

따라서 $a+b-3=-5$이므로

$a+b=-2$

⇨ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40%
❷ $x=-1$에서의 순간변화율을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0496 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)$$
$$=-2f'(1)$$
$$=-2\cdot 2=-4$$

답 ①

0497 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{5h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot\frac{2}{5}$$
$$=\frac{2}{5}f'(a)$$

답 ①

0498 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a+h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(a+3h)-f(a)\}-\{f(a+h)-f(a)\}}{3h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}-\frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=f'(a)-\frac{1}{3}f'(a)=\frac{2}{3}f'(a)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot 3=2$$

답 2

0499 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(4h)}{-4h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{\{f(h)-f(0)\}-\{f(4h)-f(0)\}}{-4h}$

$=-\dfrac{1}{4}\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}\dfrac{f(4h)-f(0)}{4h}$

$=-\dfrac{1}{4}f'(0)+f'(0)=\dfrac{3}{4}f'(0)$

따라서 $\dfrac{3}{4}f'(0)=6$이므로 $f'(0)=8$

답 8

0500 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}$

$=\dfrac{1}{2}f'(1)=\dfrac{1}{2}\cdot2$

$=1$

답 ④

0501 $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2f(2)-4f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{\{x^2f(2)-4f(2)\}-\{4f(x)-4f(2)\}}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{(x^2-4)f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\dfrac{4\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}\cdot f(2)-4\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=4f(2)-4f'(2)=4\cdot3-4\cdot2=4$

답 4

0502 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-5\}=0$이므로 $f(1)=5$ ⇨ ❶

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-5}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}f'(1)$

따라서 $\dfrac{1}{2}f'(1)=2$이므로

$f'(1)=4$ ⇨ ❷

$\therefore f(1)+f'(1)=9$ ⇨ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $f(1)+f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0503 $x^2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-1$일 때 $t\longrightarrow1$이므로

$\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{(x+1)(x-1)}\cdot(x-1)$

$=\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x-1)$

$=\lim_{t\to1}\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}\cdot(-2)$

$=-2f'(1)$

$=-2\cdot5=-10$

답 -10

0504 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$

$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(1)+f(h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

$=f'(0)=3$

답 3

0505 $f'(2)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(2)+f(h)+2-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)+2}{h}$

즉 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)+2}{h}=3$이므로 자연수 k에 대하여

$f'(k)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(k+h)-f(k)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(k)+f(h)+2-f(k)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)+2}{h}=3$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}f'(k)=\sum_{k=1}^{10}3=30$

답 ⑤

0506 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 기울기가 -3이므로 $f'(2)=-3$

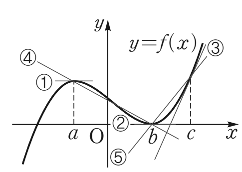
$\therefore \lim_{h\to0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{h}=-\lim_{h\to0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=-f'(2)=3$

답 3

0507 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기이고, 평균변화율은 두 점을 지나는 직선의 기울기이다.

따라서 직선의 기울기 중 가장 큰 것을 찾으면 ③이다.



답 ③

0508 곡선 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+3x-4$ 위의 점 $(0, -4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3+3x-4-(-4)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3+3x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\dfrac{1}{3}x^2+3\right)=3$ ⇨ ❶

이때 $\tan\theta$의 값은 이 접선의 기울기와 같으므로

$\tan\theta=3$ ⇨ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ 접선의 기울기를 구할 수 있다.	70%
❷ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%

다른풀이 $f'(x)=x^2+3$이므로 $f'(0)=3$

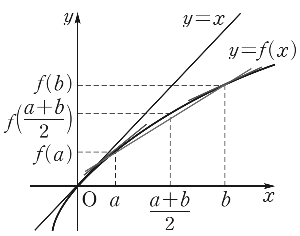
$\therefore \tan\theta=3$

0509 ㄱ. $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 $x=b$인 점에서의 접선의 기울기보다 크므로

$f'(a)>f'(b)$

ㄴ. $a\le x\le b$에서 함수 $f(x)$는 위로 볼록하므로

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$$



ㄷ. 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

타센 특강

$a<b$일 때

① 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하면

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2},\quad f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

② 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하면

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2},\quad f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

0510 ㄱ. (i) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{|h|-h}{h}=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{0}{h}=0,$

$\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{|h|-h}{h}=\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{-2h}{h}=-2$

이므로 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. (i) $\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)=0$

따라서 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(h)-g(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h|h|}{h}=\lim\limits_{h\to0}|h|=0$

따라서 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. (i) $\lim\limits_{x\to0}k(x)=k(0)=0$

따라서 $k(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{|h^3|}{h}=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{h^3}{h}=\lim\limits_{h\to0+}h^2=0,$

$\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{|h^3|}{h}=\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{-h^3}{h}=\lim\limits_{h\to0-}(-h^2)=0$

이므로 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}=0$

따라서 $k(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

이상에서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ뿐이다. 답 ①

0511 함수 $y=f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 불연속이므로

$m=2$

또 $x=-1$, $x=0$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로

$n=3$

$\therefore m+n=5$ 답 5

0512 ① 함수 $f(x)$는 $x=3$, $x=4$에서 불연속이므로 불연속인 x의 값은 2개이다.

② 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=3$, $x=4$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x의 값은 3개이다.

③ $f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$의 1개뿐이다

④ $1<x<2$에서의 접선의 기울기는 음수이므로 $f'(x)<0$이다.

⑤ $\lim\limits_{x\to3+}f(x)=\lim\limits_{x\to3-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$의 값이 존재한다.

답 ③

0513 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore a+b=1$ ⋯⋯ ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to0+}(h+2)=2$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{a(1+h)+b-1}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{a(1+h)-a}{h}\ (\because ㉠)=\lim_{h\to0-}\frac{ah}{h}=a$$

에서 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-1$

$\therefore ab=-2$ 답 -2

0514 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore b=1$

또 $f'(0)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(ah+1)-1}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{ah}{h}=a$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h^3+h^2+1-1}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h^2(h+1)}{h}=\lim_{h\to0-}h(h+1)=0$$

에서 $a=0$

$\therefore a+b=1$ 답 ①

0515 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$-b+3=a-2$

$\therefore a+b=5$ …… ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1+}\frac{(x^2+ax-3)-(a-2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{x^2+ax-1-a}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}(x+1+a)\\&=2+a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{(-bx^2+3x)-(a-2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{(-bx^2+3x)-(-b+3)}{x-1}\ (\because ㉠)\\&=\lim_{x\to1-}\frac{-bx^2+3x+b-3}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(-bx-b+3)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}(-bx-b+3)\\&=-2b+3\end{aligned}$$

에서 $2+a=-2b+3$

$\therefore a+2b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=-4$

$\therefore a-b=13$ 답 ⑤

0516 $f'(-1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}&=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+a)|x+1|}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+a)(x+1)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1+}(x+a)\\&=a-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}&=\lim_{x\to-1-}\frac{(x+a)|x+1|}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1-}\frac{-(x+a)(x+1)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1-}\{-(x+a)\}\\&=-a+1\end{aligned}$$

에서 $a-1=-a+1$, $2a=2$

$\therefore a=1$ 답 1

0517 $f'(x)=3x^2+1$이므로 $f'(a)=10$에서

$3a^2+1=10$, $a^2=3$

$\therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>0)$ 답 $\sqrt{3}$

0518 $f'(x)=2x^2+2x+1$이므로

$f'(3)=2\cdot3^2+2\cdot3+1=25$ 답 ③

0519 $f(2)=3$에서 $4+2a+b=3$

$\therefore 2a+b=-1$ …… ㉠

$f'(x)=2x+a$이므로 $f'(0)=-2$에서

$a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore ab=-6$ 답 ①

0520 $f(x)=2x^2-xf'(2)$에서

$f'(x)=4x-f'(2)$

위의 식에 $x=2$를 대입하면 $f'(2)=8-f'(2)$

$2f'(2)=8$ $\therefore f'(2)=4$

따라서 $f'(x)=4x-4$이므로

$f'(4)=4\cdot4-4=12$ 답 ⑤

0521 $f(x)=\sum_{k=1}^{10}kx^k=x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10}$이므로

$f'(x)=1+2^2x+3^2x^2+\cdots+10^2x^9$ ➪ ❶

$$\begin{aligned}\therefore f'(1)&=1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2\\&=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}\\&=385\end{aligned}$$ ➪ ❷

답 385

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	60%
❷ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	40%

0522
$$\begin{aligned}f'(x)&=(x^2+x+1)'(x^3+x^2-x-1)\\&\quad+(x^2+x+1)(x^3+x^2-x-1)'\\&=(2x+1)(x^3+x^2-x-1)\\&\quad+(x^2+x+1)(3x^2+2x-1)\end{aligned}$$

$\therefore f'(-1)=-1\cdot0+1\cdot0=0$ 답 ③

0523
$$\begin{aligned}f'(x)&=(x)'(x+2)(x+4)+x(x+2)'(x+4)\\&\quad+x(x+2)(x+4)'\\&=(x+2)(x+4)+x(x+4)+x(x+2)\\&=3x^2+12x+8\end{aligned}$$

$f'(k)=0$에서 k는 이차방정식 $3k^2+12k+8=0$의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 합은

$-\frac{12}{3}=-4$ 답 -4

0524
$$\begin{aligned}f'(x)&=4(x^2-x)^3(x^2-x)'\\&=4(2x-1)(x^2-x)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(-1)+f'(2)&=4\cdot(-3)\cdot2^3+4\cdot3\cdot2^3\\&=0\end{aligned}$$ 답 ③

0525 $f'(x)=(3x-1)'(a-2x)+(3x-1)(a-2x)'$
$=3(a-2x)+(3x-1)\cdot(-2)$
$=-12x+3a+2$

$f'(-1)=20$에서 $3a+14=20$

$3a=6 \quad \therefore a=2$

답 ⑤

0526 임의의 실수 x에 대하여

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

이므로

$$f(x)=\frac{(x+1)(x^6-1)}{x^2-x+1}=\frac{(x+1)(x^3+1)(x^3-1)}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$$

$\therefore f'(x)=\{(x+1)^2\}'(x-1)(x^2+x+1)$
$+(x+1)^2(x-1)'(x^2+x+1)$
$+(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)'$
$=2(x+1)(x-1)(x^2+x+1)+(x+1)^2(x^2+x+1)$
$+(x+1)^2(x-1)(2x+1)$

$\therefore f'(1)=2\cdot2\cdot0\cdot3+2^2\cdot3+2^2\cdot0\cdot3$
$=12$

답 12

0527 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2)-f(2-h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$
$=f'(2)$

이때 $f'(x)=3x^2-4x$이므로 구하는 값은

$f'(2)=4$

답 4

0528 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

이때 $f'(x)=4x^3-3x^2+2x-1$이므로 구하는 값은

$f'(1)=2$

답 ③

0529 $f(-1)=0$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\frac{1}{2}f'(-1)$$

이때

$f'(x)=(x^2-1)'(x^3-2x+2)+(x^2-1)(x^3-2x+2)'$
$=2x(x^3-2x+2)+(x^2-1)(3x^2-2)$

이므로 $f'(-1)=-2\cdot3+0\cdot1=-6$

따라서 구하는 값은

$\frac{1}{2}f'(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-6)=-3$

답 ②

0530 $\lim\limits_{x\to3}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(3)\}^2}{x-3}$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\{f(x)-f(3)\}\{f(x)+f(3)\}}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\lim_{x\to3}\{f(x)+f(3)\}$$
$=f'(3)\cdot2f(3)$ ⇨ ❶

이때 $f(x)=x^3-2x^2$, $f'(x)=3x^2-4x$이므로 구하는 값은 ⇨ ❷

$f'(3)\cdot2f(3)=15\cdot2\cdot9=270$ ⇨ ❸

답 270

채점 기준	비율
❶ $\lim\limits_{x\to3}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(3)\}^2}{x-3}$을 $f'(3)$, $f(3)$으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❸ 답을 구할 수 있다.	20%

0531 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$

$f'(x)=4x^3-6x$이므로 $f'(2)=20$

따라서 구하는 값은

$2f'(2)=2\cdot20=40$

답 ③

0532 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$
$=\frac{1}{2}f'(1)$

즉 $\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}$이므로 $f'(1)=1$

한편 $f(x)=x^3+ax^2+b$, $f'(x)=3x^2+2ax$이므로

$f(-1)=3$에서 $-1+a+b=3$

$\therefore a+b=4$ ...... ㉠

$f'(1)=1$에서 $3+2a=1$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$b=5$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+5$이므로

$f(-2)=-8-4+5=-7$

답 -7

0533 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서 $x\longrightarrow-1$일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$ ⇨ ❶

$\therefore \lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$
$=f'(-1)=2$ ⇨ ❷

한편 $f(x)=x^3+ax+b$, $f'(x)=3x^2+a$이므로

$f(-1)=0$에서 $-1-a+b=0$

$\therefore a-b=-1$ ...... ㉠

$f'(-1)=2$에서 $3+a=2$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=0$ ⇨ ❸

$\therefore a+b=-1$ ⇨ ❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

타쎈 특강 함수의 극한에서 미정계수의 결정

① $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)일 때, $\lim_{x \to a} g(x)=0$이면
$\lim_{x \to a} f(x)=0$

② $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)일 때, $\lim_{x \to a} f(x)=0$이면
$\lim_{x \to a} g(x)=0$

0534 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}=-2$에서 $x \longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고
(분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.
즉 $\lim_{x \to 0} f(x)=0$에서 $\quad f(0)=0$ ...... ㉠
또 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=5$에서 $x \longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고
(분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.
즉 $\lim_{x \to 1} f(x)=0$에서 $\quad f(1)=0$ ...... ㉡
㉠, ㉡에 의하여 삼차함수 $f(x)$는 $x(x-1)$을 인수로 가지므로
$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ ($a\neq0$, a, b는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x \to 0} \frac{x(x-1)(ax+b)}{x}=\lim_{x \to 0}(x-1)(ax+b)=-b$$

즉 $-b=-2$이므로 $\quad b=2$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)(ax+2)}{x-1}=\lim_{x \to 1} x(ax+2)=a+2$$

즉 $a+2=5$이므로 $\quad a=3$
따라서 $f(x)=x(x-1)(3x+2)$이므로

$$\begin{aligned} f'(x)&=(x)'(x-1)(3x+2)+x(x-1)'(3x+2)\\ &\quad+x(x-1)(3x+2)'\\ &=(x-1)(3x+2)+x(3x+2)+3x(x-1)\\ &=9x^2-2x-2 \end{aligned}$$

따라서 방정식 $f'(x)=0$의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{-2}{9}=\frac{2}{9}$ 답 $\frac{2}{9}$

0535 $f(x)=x^8+2x$로 놓으면 $f(-1)=-1$이므로

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^8+2x+1}{x+1}=\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$$

이때 $f'(x)=8x^7+2$이므로 구하는 값은
$f'(-1)=-6$ 답 -6

0536 $p=1$, $q=1$, $r=8$이므로
$p+q+r=10$ 답 10

0537 $f(x)=x^n-3x$로 놓으면 $f(1)=-2$이므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n-3x+2}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=10$$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}-3$이므로 $f'(1)=10$에서
$n-3=10 \quad \therefore n=13$ 답 ⑤

0538 $f(1)=2$에서
$1+a+2=2 \quad \therefore a=-1$
따라서 $f'(x)=2x+a=2x-1$이므로
$m=f'(1)=2\cdot1-1=1$
$\therefore a+m=0$ 답 ③

0539 $f'(x)=2x-5$이므로 $f'(a)=3$에서
$2a-5=3 \quad \therefore a=4$
$f(a)=b$이므로 $\quad b=f(4)=4^2-5\cdot4=-4$
$\therefore ab=-16$ 답 -16

0540 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)로 놓으면
$f'(x)=2ax+b$
$f(-1)=6$에서 $\quad a-b+c=6$ ...... ㉠
$f(1)=0$에서 $\quad a+b+c=0$ ...... ㉡
$f'(1)=1$에서 $\quad 2a+b=1$ ...... ㉢ ⇨ ❶
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=2$, $b=-3$, $c=1$ ⇨ ❷
$\therefore a^2+b^2+c^2=4+9+1=14$ ⇨ ❸
답 14

채점 기준	비율
❶ a, b, c에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40%
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	20%

0541 $f(x)$가 이차함수이므로
$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)
로 놓으면 $\quad f'(x)=2ax+b$
$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면
$(x+1)(2ax+b)-2(ax^2+bx+c)+2=0$
$\therefore (2a-b)x+(b-2c+2)=0$
위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$2a-b=0$, $b-2c+2=0$ ...... ㉠
한편 $f(0)=2$이므로 $\quad c=2$
$c=2$를 ㉠에 대입한 후 두 식을 연립하면
$a=1$, $b=2$
따라서 $f(x)=x^2+2x+2$이므로
$f(2)=2^2+2\cdot2+2=10$ 답 10

타쎈 특강 항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면
$a=b=c=0$
② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면
$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$
③ $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이면
$a=b=c=0$

0542 $f'(x)=2x+2$이므로 주어진 등식에 대입하면

$x(2x+2)+a(x^2+2x)+2x=0$

$(2+a)x^2+(2a+4)x=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2+a=0,\ 2a+4=0$

$\therefore\ a=-2$ 답 ②

0543 $f(x)=x^8+ax^2+b$로 놓으면 $\quad f'(x)=8x^7+2ax$

$f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(1)=0,\ f'(1)=0$

$f(1)=0$에서 $\quad 1+a+b=0$ ...... ㉠

$f'(1)=0$에서

$8+2a=0 \quad \therefore\ a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=3$

$\therefore\ b-a=7$ 답 ④

0544 다항식 $x^{10}-1$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{10}-1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-a+b$ ...... ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a=-10$

$a=-10$을 ㉡에 대입하면

$b=-10$

따라서 $R(x)=-10x-10$이므로

$R\left(-\frac{1}{2}\right)=-10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-10=-5$ 답 -5

다른풀이 $f(x)=x^{10}-1$로 놓으면 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는

$R(x)=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

이때 $f(x)=x^{10}-1,\ f'(x)=10x^9$이므로

$f(-1)=0,\ f'(-1)=-10$

따라서 $R(x)=-10(x+1)=-10x-10$이므로

$R\left(-\frac{1}{2}\right)=-5$

라쎈 특강 다항식을 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 나머지

다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$ (a는 상수)으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)=px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$f(a)=R(a),\ f'(a)=R'(a)$

즉 $f(a)=pa+q,\ f'(a)=p$이므로

$$\begin{aligned}R(x)&=f'(a)\cdot x+\{f(a)-pa\}\\&=f'(a)\cdot x+\{f(a)-f'(a)\cdot a\}\\&=f'(a)(x-a)+f(a)\end{aligned}$$

0545 전략 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$임을 이용한다.

풀이 x의 값이 2에서 $2+h$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2}&=\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\frac{h^2+4h}{h}\\&=h+4\end{aligned}$$

따라서 $h+4=8$이므로 $\quad h=4$ 답 ④

0546 전략 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $f'(3)=2$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(3+3h)-f(3)}{h}&=3\lim_{h\to0}\frac{f(3+3h)-f(3)}{3h}\\&=3f'(3)=3\cdot2=6\end{aligned}$$

답 6

0547 전략 $f'(x)$를 구하여 $x=1$을 대입한다.

풀이 $f'(x)=x^3-x^2+2ax+4$이므로 $f'(1)=2$에서

$2a+4=2 \quad \therefore\ a=-1$ 답 -1

0548 전략 곱의 미분법을 이용한다.

풀이 $F(x)=f(x)g(x)$라 하면

$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ ⇨ ❶

이므로 구하는 순간변화율은

$F'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=6\cdot2+(-1)\cdot(-3)=15$ ⇨ ❷

답 15

채점 기준	비율
❶ $f(x)g(x)$의 도함수를 구할 수 있다.	50%
❷ 답을 구할 수 있다.	50%

0549 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이다.

풀이 $f(x)=(x^2+1)(3x-1)$로 놓으면

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x^2+1)'(3x-1)+(x^2+1)(3x-1)'\\&=2x(3x-1)+(x^2+1)\cdot3\\&=9x^2-2x+3\end{aligned}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=9-2+3=10$ 답 ⑤

0550 전략 평균변화율과 미분계수를 각각 구한 후, 방정식을 세운다.

풀이 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -1에서 k까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(k)-f(-1)}{k-(-1)}&=\frac{(k^3-3)-(-4)}{k+1}=\frac{k^3+1}{k+1}\\&=\frac{(k+1)(k^2-k+1)}{k+1}\\&=k^2-k+1\end{aligned}$$

한편 $f'(x)=3x^2$이므로 $x=\sqrt{7}$에서의 미분계수는

$f'(\sqrt{7})=3\cdot(\sqrt{7})^2=21$

따라서 $k^2-k+1=21$이므로

$k^2-k-20=0, \quad (k+4)(k-5)=0$

$\therefore\ k=5\ (\because\ k>-1)$ 답 5

0551 전략 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$이므로 $f'(a)=3$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a+h^2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(a+4h)-f(a)\}-\{f(a+h^2)-f(a)\}}{h}$$
$$=4\lim_{h\to0}\frac{\{f(a+4h)-f(a)\}}{4h}-\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot h$$
$$=4f'(a)-f'(a)\cdot0=4f'(a)$$
$$=4\cdot3=12$$

답 ④

0552 전략 $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$의 $f(x+h)$에 주어진 항등식을 대입하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0 \qquad \therefore f(0)=0$

$f'(0)=5$에서 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=5$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-2xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2xh}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-2x$$
$$=-2x+5$$

답 ②

0553 전략 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이지만 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$이 존재하지 않는 함수 $f(x)$를 찾는다.

풀이 ① (i) $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=-7$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-7-(-7)}{h}=0$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

② (i) $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|^2-0}{h}$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to0}h=0$$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

③ $f(0)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

④ (i) $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{2h-0}{h}=\lim_{h\to0+}2=2$,

$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h-0}{h}=\lim_{h\to0-}(-1)=-1$

이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

⑤ (i) $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=1$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(h-1)^2-1}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2-2h}{h}$
$$=\lim_{h\to0+}(h-2)=-2$$
$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{(-2h+1)-1}{h}$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{-2h}{h}=-2$$

이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=-2$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

답 ④

0554 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=(x^2+k)(2x-1)^3$으로 놓으면

$$f'(x)=(x^2+k)'(2x-1)^3+(x^2+k)\{(2x-1)^3\}'$$
$$=2x\cdot(2x-1)^3+(x^2+k)\cdot3(2x-1)^2(2x-1)'$$
$$=2x(2x-1)^3+6(x^2+k)(2x-1)^2$$
$$=2(2x-1)^2(5x^2-x+3k)$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 -4이므로

$f'(1)=-4, \qquad 2(4+3k)=-4$

$4+3k=-2, \qquad 3k=-6$

$\therefore k=-2$

답 -2

0555 전략 $\frac{1}{n}=h$로 놓고 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(3+\frac{1}{n}\right)-f(3)\right\}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\{f(3+h)-f(3)\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$$

이때 $f'(x)=2x-4$이므로 구하는 값은

$f'(3)=2$

답 ⑤

0556 전략 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $f(1)=g(1)=3$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-g(1-h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-3+3-g(1-h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+2h)-f(1)\}-\{g(1-h)-g(1)\}}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot\frac{2}{3}+\lim_{h\to0}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2}{3}f'(1)+\frac{1}{3}g'(1)$$

이때 $f'(x)=9x^2-4x+1$, $g'(x)=6x^5+4x^3+2x$이므로

$f'(1)=6$, $g'(1)=12$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{2}{3}f'(1)+\frac{1}{3}g'(1)$

$=\frac{2}{3}\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 12$

$=8$

답 ③

0557 전략 주어진 조건을 이용하여 a, b, c에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 $f(1)=0$에서 $a+b+c=0$ ······ ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로 $f'(-2)=-14$에서

$-4a+b=-14$ ······ ㉡

$f'(1)=4$에서 $2a+b=4$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-2$, $c=-1$

$\therefore abc=6$

답 ⑤

0558 전략 도함수를 구하여 a, b에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$이므로

$f'(1)=-1$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{-h}=-f'(-2)$

이므로 $-f'(-2)=-26$

$\therefore f'(-2)=26$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(1)=-1$에서 $3+2a+b=-1$

$\therefore 2a+b=-4$ ······ ㉠

$f'(-2)=26$에서 $12-4a+b=26$

$\therefore 4a-b=-14$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$이므로

$f(1)=1$

답 1

0559 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=c$ (c는 상수)이면 $f(a)=b$, $f'(a)=c$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}=2$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x)-3\}=0$이므로

$f(1)=3$

따라서 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=2$ ⇨ ❶

또 $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x-1}=4$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{g(x)-1\}=0$이므로

$g(1)=1$

따라서 $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$이므로

$g'(1)=4$ ⇨ ❷

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=2\cdot 1+3\cdot 4=14$ ⇨ ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $g(1)$, $g'(1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $h'(1)$의 값을 구할 수 있다.	40%

0560 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용한다.

풀이 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=5$인 점에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(5)=1$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(5+3h)-f(5)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(5+3h)-f(5)}{3h}\cdot\frac{3}{2}$

$=\frac{3}{2}f'(5)$

$=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

0561 전략 $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓고 $f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 항등식에 대입한 후 계수를 비교한다.

풀이 $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$, a, b, c는 상수)

로 놓으면 $f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$x(2ax+b)=ax^2+bx+c+x^2+3$

$\therefore 2ax^2+bx=(a+1)x^2+bx+c+3$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a=a+1$, $0=c+3$

$\therefore a=1$, $c=-3$

한편 $f'(x)=2x+b$이므로 $f'(1)=4$에서

$2+b=4$ $\therefore b=2$

즉 $f(x)=x^2+2x-3$이므로 $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근의 합은

$-3+1=-2$

답 -2

0562 전략 $f(x)$를 몫과 나머지를 이용하여 나타낸 후 점의 좌표와 그 점에서의 접선의 기울기를 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ······ ㉠

$f(1)=2$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a+b=2$ ······ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

$f'(1)=-3$이므로 위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면 $\quad b=5$

따라서 $R(x)=-3x+5$이므로

$R(-1)=8$ 답 ①

0563 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-x^3f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x^3)-f(1)\}-\{x^3f(1)-f(1)\}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}\cdot f(1)$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)-\lim_{x\to1}(x^2+x+1)\cdot f(1)$

$=3f'(1)-3f(1)$

$=3\cdot(-1)-3\cdot(-2)=3$ 답 ③

0564 전략 $x^2=t$로 놓고 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $x^2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-1$일 때 $t\longrightarrow1$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(1)$

이때 $f'(x)=4x^3+2x$이므로 구하는 값은

$f'(1)=6$ 답 ③

0565 전략 $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$의 $f(x+h)$에 주어진 항등식을 대입하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=3f(0)f(0)$

$f(0)>0$이므로 $\quad f(0)=\frac{1}{3}$

$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{3f(x)f(h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{3f(x)\left\{f(h)-\frac{1}{3}\right\}}{h}$

$=3f(x)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$=3f(x)f'(0)=3f(x)\cdot2$

$=6f(x)$

이때 $f(x)\neq0$이므로

$\frac{f'(x)}{f(x)}=6$ 답 ②

0566 전략 먼저 $f(x)$의 차수를 구한다.

풀이 $f(x)$가 이차 이상의 다항식이면 $f(x)f'(x)$의 차수가 삼차 이상이므로 $f(x)$는 일차식이다. ⇨ ❶

$f(x)=ax+b\,(a\neq0,\ a,\ b$는 상수)로 놓으면

$f'(x)=a$

이것을 주어진 식에 대입하면

$(ax+b)a=4x+6$

$(a^2-4)x+(ab-6)=0$

이 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a^2-4=0,\ ab-6=0$

$\therefore a=2,\ b=3$ 또는 $a=-2,\ b=-3$ ⇨ ❷

(i) $a=2,\ b=3$일 때,

$f(x)=2x+3$이므로

$f(1)f(2)=5\cdot7=35$

(ii) $a=-2,\ b=-3$일 때,

$f(x)=-2x-3$이므로

$f(1)f(2)=-5\cdot(-7)=35$

(i), (ii)에서

$f(1)f(2)=35$ ⇨ ❸

답 35

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 일차식임을 알 수 있다.	30%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $f(1)f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30%

0567 전략 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 m이면 $f(a)=b$, $f'(a)=m$임을 이용한다.

풀이 $y=\frac{1}{2}x+3$에 $x=2$를 대입하면

$y=\frac{1}{2}\cdot2+3=4$

즉 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$f(2)=4$

또 $x=2$에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$f'(2)=\frac{1}{2}$

$g(x)=(x^2-2x+4)f(x)$에서

$g'(x)=(x^2-2x+4)'f(x)+(x^2-2x+4)f'(x)$

$=(2x-2)f(x)+(x^2-2x+4)f'(x)$

이므로

$g'(2)=2f(2)+4f'(2)$

$=2\cdot4+4\cdot\frac{1}{2}=10$

답 ⑤

Ⅲ. 다항함수의 미분법

06 도함수의 활용 (1)

0568 $f(x)=2x^2-1$로 놓으면 $f'(x)=4x$
따라서 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=-4$
답 -4

0569 $f(x)=x^3+x-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+1$
따라서 점 $(2,\ 8)$에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=3\cdot 2^2+1=13$
답 13

0570 $f(x)=-3x^4+4x^2+3x+4$로 놓으면
$f'(x)=-12x^3+8x+3$
따라서 점 $(0,\ 4)$에서의 접선의 기울기는
$f'(0)=3$
답 3

0571 $f(x)=x^2-4x$로 놓으면 $f'(x)=2x-4$
점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=2\cdot 1-4=-2$
이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-(-3)=-2\cdot(x-1)$
$\therefore\ y=-2x-1$
답 $y=-2x-1$

0572 $f(x)=-x^2+3x+3$으로 놓으면 $f'(x)=-2x+3$
점 $(2,\ 5)$에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=-2\cdot 2+3=-1$
이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-5=-1\cdot(x-2)$
$\therefore\ y=-x+7$
답 $y=-x+7$

0573 $f(x)=2x^3+x+5$로 놓으면 $f'(x)=6x^2+1$
점 $(0,\ 5)$에서의 접선의 기울기는
$f'(0)=1$
이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-5=x$ $\therefore\ y=x+5$
답 $y=x+5$

0574 (1) $f(x)=-x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=-2x$
점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-2$
직선 l의 기울기를 a라 하면 $-2a=-1$
$\therefore\ a=\frac{1}{2}$
(2) 직선 l은 점 $(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로
$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

라셀 특강 수직인 두 직선의 기울기

두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$이 수직이면
$aa'=-1$

0575 $f(x)=x^3+2x^2-1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+4x$
점 $(-1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=3\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)=-1$
따라서 점 $(-1,\ 0)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 1이므로
구하는 직선의 방정식은
$y=x+1$
답 $y=x+1$

0576 $g(2)=f(2)=4\cdot 2^2-7\cdot 2=2$
답 2

0577 $f'(x)=8x-7$이므로 $f'(2)=8\cdot 2-7=9$
$\therefore\ g'(2)=f'(2)=9$
답 9

0578 (1) $f(x)=x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=2x$
$\therefore\ f'(t)=2t$
접선의 기울기가 -4이므로 $2t=-4$ $\therefore\ t=-2$
(2) $f(-2)=5$에서 접점의 좌표가 $(-2,\ 5)$이므로 직선 l의 방정식은
$y-5=-4(x+2)$
$\therefore\ y=-4x-3$
답 (1) -2 (2) $y=-4x-3$

0579 $f(x)=-x^2$으로 놓으면 $f'(x)=-2x$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2)$이라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=-2t=2$ $\therefore\ t=-1$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(-1,\ -1)$
답 $(-1,\ -1)$

0580 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{3}$로 놓으면 $f'(x)=x-2$
접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^2-2t+\frac{1}{3}\right)$이라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=t-2=2$ $\therefore\ t=4$
따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$
답 $\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$

0581 $f(x)=x^3+3x^2+5x-4$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+6x+5$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+3t^2+5t-4)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=3t^2+6t+5=2$
$t^2+2t+1=0$, $(t+1)^2=0$ $\therefore\ t=-1$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(-1,\ -7)$
답 $(-1,\ -7)$

0582 $f(x)=-x^4+\frac{4}{3}x^3+2x$로 놓으면
$f'(x)=-4x^3+4x^2+2$
접점의 좌표를 $\left(t,\ -t^4+\frac{4}{3}t^3+2t\right)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=-4t^3+4t^2+2=2$
$t^3-t^2=0$, $t^2(t-1)=0$
$\therefore\ t=0$ 또는 $t=1$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(0,\ 0)$, $\left(1,\ \frac{7}{3}\right)$
답 $(0,\ 0)$, $\left(1,\ \frac{7}{3}\right)$

0583 $f(x)=-x^2+3x+5$로 놓으면

$f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+3t+5)$라 하면 접선의 기울기가 5이므로

$f'(t)=-2t+3=5, \quad -2t=2$

$\therefore t=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=5(x+1) \quad \therefore y=5x+6$

답 $y=5x+6$

0584 $f(x)=x^3-2x+4$로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t+4)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=3t^2-2=1, \quad t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 5)$, $(1,\ 3)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $\quad y-5=x+1,\ y-3=x-1$

$\therefore y=x+2,\ y=x+6$

답 $y=x+2,\ y=x+6$

0585 (1) $f(x)=x^2-4x$로 놓으면 $\quad f'(x)=2x-4$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-4t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-4t)=(2t-4)(x-t)$

$\therefore y=(2t-4)x-t^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

(2) 직선 $y=(2t-4)x-t^2$이 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지나므로

$t^2+t-2=0, \quad (t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

(3) $t=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-8x-4$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=-2x-1$

답 풀이 참조

0586 $f(x)=-x^2+3x-5$로 놓으면

$f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+3t-5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+3$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+3t-5)=(-2t+3)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+3)x+t^2-5 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=t^2-2t-2, \quad t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

이것을 ㉠에 각각 대입하면

$y=-3x+4,\ y=5x-4$

답 $y=-3x+4,\ y=5x-4$

0587 $f(x)=x^3+16$으로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+16)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+16)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3+16 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-2t^3+16, \quad t^3=8 \quad \therefore t=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$y=12x$

답 $y=12x$

0588 함수 $f(x)=x^2-2x+4$는 닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=4$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-2$이므로 $\quad f'(c)=2c-2=0$

$\therefore c=1$

답 1

0589 함수 $f(x)=4x-x^2$은 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(3)=3$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4-2x$이므로 $\quad f'(c)=4-2c=0$

$\therefore c=2$

답 2

0590 함수 $f(x)=x^3-x$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(1)=0$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-1$이므로 $\quad f'(c)=3c^2-1=0$

$c^2=\frac{1}{3} \quad \therefore c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(\because 0<c<1)$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0591 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+2$는 닫힌 구간 $[-3,\ 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(-3,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(-3)=f(3)=11$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-3,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=x^2+2x-3$이므로 $\quad f'(c)=c^2+2c-3=0$

$(c+3)(c-1)=0$

$\therefore c=1$ $(\because -3<c<3)$

답 1

0592 함수 $f(x)=-x^4+2x^2+4$는 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(2)=-4$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-2,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-4x^3+4x$이므로 $\quad f'(c)=-4c^3+4c=0$

$c^3-c=0, \quad c(c+1)(c-1)=0$

$\therefore c=-1$ 또는 $c=0$ 또는 $c=1$

답 $-1,\ 0,\ 1$

0593 함수 $f(x)=x^2$은 닫힌 구간 $[-2,\ 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(-2,\ 1)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-2,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x$이므로

$\frac{1-4}{1-(-2)}=2c, \quad 2c=-1$

$\therefore c=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

0594 함수 $f(x)=2x^2-x$는 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$인 c가 구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4x-1$이므로

$\frac{15-1}{3-1}=4c-1, \quad 4c-1=7$

$\therefore c=2$

답 2

0595 함수 $f(x)=x^3+2x$는 닫힌 구간 $[-3,\ 0]$에서 연속이고 열린 구간 $(-3,\ 0)$에서 미분가능하므로 $\dfrac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-3, 0)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2+2$이므로

$$\frac{0-(-33)}{0-(-3)}=3c^2+2, \qquad 3c^2+2=11, \qquad c^2=3$$

$\therefore\ c=-\sqrt{3}\ (\because\ -3<c<0)$ 답 $-\sqrt{3}$

0596 함수 $f(x)=2x^3-5x$는 닫힌 구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하므로 $\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=6x^2-5$이므로

$$\frac{6-3}{2-(-1)}=6c^2-5, \qquad 6c^2-5=1, \qquad c^2=1$$

$\therefore\ c=1\ (\because\ -1<c<2)$ 답 1

0597 함수 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-1$은 닫힌 구간 $[-3,\ 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(-3,\ 3)$에서 미분가능하므로
$\dfrac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=f'(c)$인 c가 구간 $(-3,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-x^2+2x$이므로

$$\frac{-1-17}{3-(-3)}=-c^2+2c, \qquad c^2-2c-3=0$$

$(c+1)(c-3)=0$

$\therefore\ c=-1\ (\because\ -3<c<3)$ 답 -1

0598 $f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2+a$
점 $(1,\ 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $\quad f(1)=2$

$1+a+b=2 \qquad \therefore\ a+b=1$ …… ㉠

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 -3이므로 $\quad f'(1)=-3$

$3+a=-3 \qquad \therefore\ a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=7$

$\therefore\ ab=-42$ 답 ①

0599 $f'(3)=2$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{h}=2\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}$$
$$=2f'(3)=2\cdot2=4$$

답 4

0600 $f(x)=x^3-3x^2+x-5$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+1=3(x-1)^2-2$

이므로 $f'(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -2를 갖는다.
따라서 접선의 기울기 m의 최솟값은 -2이다. 답 -2

0601 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

두 점 $(-1,\ 3)$, $(3,\ -17)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-1)=3,\ f(3)=-17$

$-1+a-b+c=3,\ 27+9a+3b+c=-17$

$\therefore\ a-b+c=4,\ 9a+3b+c=-44$ …… ㉠

또 두 점 $(-1,\ 3)$, $(3,\ -17)$에서의 접선이 서로 평행하므로

$f'(-1)=f'(3)$

$3-2a+b=27+6a+b, \qquad 8a=-24 \qquad \therefore\ a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$-3-b+c=4,\ -27+3b+c=-44$

$\therefore\ b-c=-7,\ 3b+c=-17$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad b=-6,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=-8$ 답 ③

0602 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-4x+1$로 놓으면

$f'(x)=x-4$

점 $(2,\ -5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=2-4=-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-5)=-2(x-2)$

$\therefore\ y=-2x-1$

$-2x-1=0$에서 $\qquad x=-\dfrac{1}{2}$

따라서 접선의 x절편은 $-\dfrac{1}{2}$이다. 답 $-\dfrac{1}{2}$

0603 $f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a$

점 $(-1,\ 1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $\quad f(-1)=1$

$-1-a+b=1 \qquad \therefore\ a-b=-2$ …… ㉠

또 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 3이므로 $\quad f'(-1)=3$

$3+a=3 \qquad \therefore\ a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=2$

$\therefore\ a^2+b^2=0^2+2^2=4$ 답 ②

0604 $f(-1)=f(0)=f(1)=1$에서 삼차식 $f(x)-1$은 $x+1$, x, $x-1$을 인수로 갖는다. $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-1=x(x+1)(x-1)$

$\therefore\ f(x)=x^3-x+1$ ⇨ ❶

$f(x)=x^3-x+1$에서 $\quad f'(x)=3x^2-1$ ⇨ ❷

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=2(x-1) \qquad \therefore\ y=2x-1$ ⇨ ❸

답 $y=2x-1$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	50%
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20%
❸ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%

0605 $f(x)=-x^3+2x^2-x+1$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+4x-1$

점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-x \qquad \therefore\ y=-x+1$

직선 $y=-x+1$이 이 곡선과 다시 만나는 점의 x좌표는

$-x^3+2x^2-x+1=-x+1$

에서 $x^2(x-2)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 다시 만나는 점의 좌표가 $(2,\ -1)$이므로

$a=2,\ b=-1$

$\therefore a-b=3$ 답 ④

0606 $f(x)=x^3+x^2-2x-3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2x-2$

점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=3$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 점 $(1,\ -3)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y-(-3)=-\frac{1}{3}(x-1)$

$\therefore x+3y+8=0$

따라서 $a=1,\ b=8$이므로 $\frac{b}{a}=8$ 답 ⑤

0607 $f(x)=x^2+ax+b$로 놓으면

$f'(x)=2x+a$

점 $(2,\ 3)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(2)=3$

$4+2a+b=3$ $\therefore 2a+b=-1$ …… ㉠

점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4+a$이므로

$(4+a)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$4+a=2$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-4+b=-1$ $\therefore b=3$

$\therefore ab=-6$ 답 -6

0608 $f(x)=x^3,\ g(x)=ax^2+bx$로 놓으면

$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=2ax+b$

두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프가 모두 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로 $f(-1)=g(-1)$에서

$a-b=-1$ …… ㉠

또 점 $(-1,\ -1)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(-1)g'(-1)=-1$에서

$3(-2a+b)=-1$ $\therefore 2a-b=\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{4}{3},\ b=\frac{7}{3}$

$\therefore a+b=\frac{11}{3}$ 답 ⑤

0609 $g(x)=-x^2$으로 놓으면 $g'(x)=-2x$

점 $\mathrm{P}(t,\ -t^2)$에서의 접선의 기울기가 $g'(t)=-2t$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2t}$이다.

따라서 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y-(-t^2)=\frac{1}{2t}(x-t)$ $\therefore y=\frac{1}{2t}x-t^2-\frac{1}{2}$

$x=0$일 때 $y=-t^2-\frac{1}{2}$이므로 $f(t)=-t^2-\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{t\to 0}\left(-t^2-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0610 $f(x)=x^2-x+2$로 놓으면

$f'(x)=2x-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-t+2)$라 하면 직선 $x+y-1=0$, 즉 $y=-x+1$에 평행한 직선의 기울기는 -1이므로

$f'(t)=2t-1=-1$ $\therefore t=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 2)$이므로 직선의 방정식은

$y-2=-x$ $\therefore x+y-2=0$

$\therefore k=-2$ 답 -2

0611 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1),\ \mathrm{B}(1,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-1}{1-0}=2$

$f(x)=-x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=-2x$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+4)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=-2t=2$ $\therefore t=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=2(x+1)$ $\therefore y=2x+5$

즉 구하는 y절편은 5이다. 답 ⑤

0612 $f(x)=x^2+4x+2$로 놓으면

$f'(x)=2x+4$ ⇨ ❶

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+4t+2)$라 하면 접선의 기울기가 $\tan 45°=1$이므로

$f'(t)=2t+4=1$ $\therefore t=-\frac{3}{2}$ ⇨ ❷

따라서 접점의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{7}{4}\right)$이므로

$a=-\frac{3}{2},\ b=-\frac{7}{4}$

$\therefore a+2b=-\frac{3}{2}+2\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)=-5$ ⇨ ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ t의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+2b$의 값을 구할 수 있다.	30%

0613 $f(x)=x^3-5x-3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-5$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t-3)\ (t>0)$이라 하면 직선 $y=-x+5$와 수직인 직선의 기울기는 1이므로

$f'(t)=3t^2-5=1$

$t^2=2$ $\therefore t=\sqrt{2}\ (\because t>0)$

따라서 접점의 좌표는 $(\sqrt{2},\ -3\sqrt{2}-3)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-3\sqrt{2}-3)=x-\sqrt{2}$

$\therefore y=x-4\sqrt{2}-3$

즉 $g(x)=x-4\sqrt{2}-3$이므로

$g(3)=-4\sqrt{2}$ 답 $-4\sqrt{2}$

0614 $f(x)=x^2+2x-3$으로 놓으면

$f'(x)=2x+2$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=2x-7$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2t-3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=2t+2=2 \qquad \therefore t=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ -3)$이고, 점 $(0,\ -3)$과 직선 $y=2x-7$, 즉 $2x-y-7=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$\frac{|3-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 답 ④

0615 $f(x)=x^3-2x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t+2)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=3t^2-2=1, \qquad t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 3)$, $(1,\ 1)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=x+1,\ y-1=x-1$

$\therefore x-y+4=0,\ x-y=0$

이 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-y+4=0$ 위의 점 $(0,\ 4)$와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

라쎈 특강 평행한 두 직선 사이의 거리

① 평행한 두 직선 $l,\ l'$ 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

② 평행한 두 직선 $ax+by+c=0,\ ax+by+c'=0$ 사이의 거리는

$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

0616 $f(x)=x^3-x$로 놓으면 $\qquad f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3$

이 직선이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2t^3=-2, \qquad t^3=1$

$\therefore t=1$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$f'(1)=3-1=2$ 답 ④

0617 $f(x)=x^2+x$로 놓으면

$f'(x)=2x+1$ ⇨ ❶

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$

$\therefore y=(2t+1)x-t^2$ ⇨ ❷

이 직선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=2t+1-t^2, \qquad t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$ ⇨ ❸

따라서 두 접선의 방정식은

$y=x,\ y=5x-4$ ⇨ ❹

이므로 구하는 y절편의 합은

$0-4=-4$ ⇨ ❺

답 -4

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	10%
❷ 접선의 방정식을 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ t의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20%
❺ y절편의 합을 구할 수 있다.	10%

0618 $f(x)=x^3-7$로 놓으면 $\qquad f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-7)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-7)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3-7$ ...... ㉠

이 직선이 점 $(0,\ 9)$를 지나므로

$9=-2t^3-7, \qquad t^3=-8 \qquad \therefore t=-2$

$t=-2$를 ㉠에 대입하면 $\qquad y=12x+9$

따라서 직선 $y=12x+9$ 위의 점의 좌표는 ②이다. 답 ②

0619 $f(x)=\frac{1}{8}x^2+a$로 놓으면 $\qquad f'(x)=\frac{1}{4}x$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{8}t^2+a\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{4}t$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{8}t^2+a\right)=\frac{1}{4}t(x-t)$

$\therefore y=\frac{1}{4}tx-\frac{1}{8}t^2+a$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}t^2+a$

$\therefore t^2-2t-8a=0$ ...... ㉠

두 접점의 x좌표를 각각 $t_1,\ t_2$라 하면 $t_1,\ t_2$는 ㉠의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1t_2=-8a$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$\frac{1}{4}t_1\cdot\frac{1}{4}t_2=-1, \qquad \frac{1}{16}\cdot(-8a)=-1$

$\therefore a=2$ 답 ③

0620 $f(x)=x^4+2x^2+5$로 놓으면 $\qquad f'(x)=4x^3+4x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^4+2t^2+5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3+4t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4+2t^2+5)=(4t^3+4t)(x-t)$

$\therefore y=(4t^3+4t)x-3t^4-2t^2+5$

이 직선이 원점을 지나므로 $\qquad 0=-3t^4-2t^2+5$

$3t^4+2t^2-5=0, \qquad (t+1)(t-1)(3t^2+5)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$ $(\because 3t^2+5>0)$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 8)$, $(1,\ 8)$이므로

$\overline{PQ}=2$ 답 2

0621 $f(x)=x^4+12$로 놓으면 $\quad f'(x)=4x^3$
접점의 좌표를 $(t,\ t^4+12)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4+12)=4t^3(x-t)$

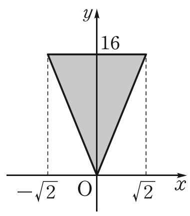
$\therefore\ y=4t^3x-3t^4+12$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-3t^4+12, \quad t^4-4=0$

$(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})(t^2+2)=0$

$\therefore\ t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$ $(\because\ t^2+2>0)$



따라서 접점의 좌표는 $(-\sqrt{2},\ 16)$, $(\sqrt{2},\ 16)$이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot16=16\sqrt{2}$ 답 ④

0622 $f(x)=x^3$으로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3)$이라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=3t^2=3$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ -1)$, $(1,\ 1)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-1)=3(x+1)$, $y-1=3(x-1)$

$\therefore\ y=3x+2$, $y=3x-2$

이때 k는 양수이므로 $\quad k=2$ 답 ②

0623 $f(x)=-x^2+3x+a$로 놓으면 $\quad f'(x)=-2x+3$
점 $(t,\ t+1)$에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(t)=1$에서

$-2t+3=1 \quad \therefore\ t=1$

따라서 접점의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로 $y=-x^2+3x+a$에서

$2=-1+3+a \quad \therefore\ a=0$

$\therefore\ a+t=1$ 답 ①

0624 $f(x)=x^3+k$로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2$ ⇨ ❶
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+k)$라 하면 접선의 기울기가 6이므로

$f'(t)=3t^2=6, \quad t^2=2$

$\therefore\ t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$ ⇨ ❷

이때 주어진 직선과 곡선이 제1사분면에서 접하므로 접점의 좌표는 $(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}+k)$
점 $(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}+k)$가 직선 $y=6x$ 위에 있으므로

$2\sqrt{2}+k=6\sqrt{2}$

$\therefore\ k=4\sqrt{2}$ ⇨ ❸

답 $4\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20%
❷ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40%

0625 $f(x)=x^3+x+a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+t+a)$라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=3t^2+1=4, \quad t^2=1$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ a-2)$, $(1,\ a+2)$이고, 이 접점은 직선 $y=4x+b$ 위의 점이므로

$a-2=-4+b$, $a+2=4+b$

$a-b=-2$ 또는 $a-b=2$

$\therefore\ |a-b|=2$ 답 ③

0626 $f(x)=x^2-1$로 놓으면 $\quad f'(x)=2x$
점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 접선의 방정식은 $\quad y-3=4(x-2)$

$\therefore\ y=4x-5$ …… ㉠

한편 $g(x)=x^3+ax+11$로 놓으면 $\quad g'(x)=3x^2+a$
㉠과 곡선 $y=g(x)$의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+at+11)$이라 하면 접선의 기울기는 $g'(t)=3t^2+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at+11)=(3t^2+a)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2+a)x-2t^3+11$

이 직선이 ㉠과 일치해야 하므로

$3t^2+a=4$ …… ㉡

$-2t^3+11=-5$ …… ㉢

㉢에서 $\quad t^3=8 \quad \therefore\ t=2$
$t=2$를 ㉡에 대입하면 $\quad 12+a=4$

$\therefore\ a=-8$ 답 -8

0627 $f(x)=x^3+2$로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2$
점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3$이므로 접선의 방정식은

$y-1=3(x+1) \quad \therefore\ y=3x+4$ …… ㉠

$y=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad 3x+4=0 \quad \therefore\ x=-\frac{4}{3}$
$x=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=4$
따라서 접선의 x절편이 $-\frac{4}{3}$, y절편이 4이므로 구하는 도형의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot4=\frac{8}{3}$ 답 ③

0628 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+3$으로 놓으면

$f'(x)=-x+1$

접점의 좌표를 $\left(t,\ -\frac{1}{2}t^2+t+3\right)$이라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(t)=-t+1=-1 \quad \therefore\ t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=-1\cdot(x-2) \quad \therefore\ y=-x+5$ …… ㉠

$y=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad -x+5=0 \quad \therefore\ x=5$
$x=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=5$
따라서 접선의 x절편과 y절편이 모두 5이므로 구하는 도형의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\cdot5\cdot5=\frac{25}{2}$ 답 $\frac{25}{2}$

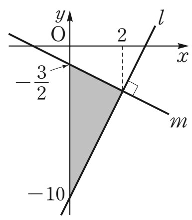
0629 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+2$로 놓으면 $\quad f'(x)=2x^3-6x$
점 $\mathrm{P}(2,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 접선 l의 방정식은

$y+2=4(x-2) \quad \therefore\ y=4x-10$

한편 직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이므로 직선 m의 방정식은

$$y+2=-\frac{1}{4}(x-2)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$$



따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{-\frac{3}{2}-(-10)\right\}\cdot 2=\frac{17}{2}$$

답 $\frac{17}{2}$

0630 $f(x)=x^3+ax-3$, $g(x)=x^2+4x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2x+4$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad t^3+at-3=t^2+4t \quad$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 3t^2+a=2t+4$

$\therefore a=-3t^2+2t+4 \quad$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2t^3-t^2+3=0, \quad (t+1)(2t^2-3t+3)=0$

$2t^2-3t+3>0$이므로 $\quad t=-1$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면 $\quad a=-1$

답 ③

0631 (1) $f(x)=ax^3+6x$, $g(x)=2x^2+bx$로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+6$, $g'(x)=4x+b$

두 곡선이 $x=3$에서 공통인 접선을 가지므로

$f(3)=g(3)$에서 $\quad 27a+18=18+3b$

$\therefore 9a-b=0 \quad$ …… ㉠

$f'(3)=g'(3)$에서 $\quad 27a+6=12+b$

$\therefore 27a-b=6 \quad$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{1}{3}$, $b=3 \quad$ ⇨ ❶

(2) 두 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3+6x$, $y=2x^2+3x$의 접점의 좌표가 $(3, 27)$이고 접선의 기울기가 $g'(3)=15$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-27=15(x-3) \quad \therefore y=15x-18 \quad$ ⇨ ❷

답 (1) $a=\frac{1}{3}$, $b=3$ (2) $y=15x-18$

채점 기준	비율
❶ 상수 a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50%

0632 $f(x)=x^3-2$, $g(x)=2x^3-3x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=6x^2-3$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad t^3-2=2t^3-3t$

$t^3-3t+2=0, \quad (t+2)(t-1)^2=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 3t^2=6t^2-3, \quad t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표가 $(1, -1)$이고 접선의 기울기가 $f'(1)=3$이므로 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 공통인 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y-(-1)=-\frac{1}{3}(x-1)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

즉 $m=-\frac{1}{3}$, $n=-\frac{2}{3}$이므로

$$9mn=9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=2$$

답 2

0633 함수 $f(x)=x^3-3x+1$은 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(2)=3$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-3$이므로 $\quad f'(c)=3c^2-3=0$

$3(c+1)(c-1)=0$

$\therefore c=1 \ (\because -1<c<2)$

따라서 상수 c의 값의 개수는 1이다.

답 1

0634 함수 $f(x)=-x^2+kx$에서 $\quad f'(x)=-2x+k$

닫힌 구간 $[2, 4]$에서 $x=3$이 롤의 정리를 만족시키므로

$f'(3)=k-6=0 \quad \therefore k=6$

답 ⑤

0635 함수 $f(x)=-x^2+6x+1$에서 $\quad f'(x)=-2x+6$

닫힌 구간 $[1, k]$에서 $x=2$가 평균값 정리를 만족시키므로

$$\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'(2)$$

$$\frac{-k^2+6k+1-6}{k-1}=2, \quad -k^2+6k-5=2k-2$$

$k^2-4k+3=0, \quad (k-1)(k-3)=0$

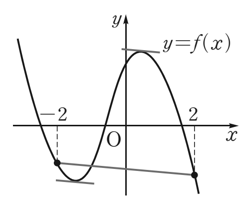
$\therefore k=3 \ (\because k>2)$

답 3

0636 답 (가) (a, x) (나) $f(a)$

0637 구간 $[-2, 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-2, f(-2))$, $(2, f(2))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-2, f(-2))$, $(2, f(2))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있으므로 상수 c의 개수는 2이다.



답 ③

0638 $f'(x)=3x^2-1$이므로 $f(2)-f(0)=2f'(c)$, 즉

$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$에서

$$\frac{8-2}{2}=3c^2-1, \quad c^2=\frac{4}{3}$$

$$\therefore c=\frac{2\sqrt{3}}{3} \ (\because 0<c<2)$$

답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

0639 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이다.

풀이 점 $(1, c)$는 직선 $y=3x$ 위의 점이므로 $\quad c=3$

$f(x)=2x^2+ax+b$로 놓으면 $\quad f'(x)=4x+a$
점 $(1, 3)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $\quad f(1)=3$
$\quad 2+a+b=3 \quad \therefore a+b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기가 3이므로 $\quad f'(1)=3$
$\quad 4+a=3 \quad \therefore a=-1$
$a=-1$을 ㉠에 대입하면
$\quad -1+b=1 \quad \therefore b=2$
$\quad \therefore ab+c=-1\cdot 2+3=1$

답 ④

0640 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$에서 공통인 접선을 가지면 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+4$로 놓으면
$\quad f'(x)=-2x+a$, $g'(x)=2x$
두 곡선이 $x=1$인 점에서 공통인 접선을 가지므로
$f(1)=g(1)$에서 $\quad -1+a+b=5$
$\quad \therefore a+b=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$f'(1)=g'(1)$에서 $\quad -2+a=2 \quad \therefore a=4$
$a=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=2$
$\quad \therefore a-b=2$

답 ③

0641 전략 $f'(x)=0$이면 $f(x)$가 상수함수임을 이용한다.

풀이 $F'(x)=f'(x)-g'(x)=\boxed{0}$
따라서 $F(x)$는 구간 $[a, b]$에서 $\boxed{\text{상수}}$함수이다.
$\quad \therefore$ (가) 0 (나) 상수

답 풀이 참조

0642 전략 두 직선 l, m의 방정식을 각각 구해 본다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+4$로 놓으면
$\quad f'(x)=3x^2-6x$
점 $(-1, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=9$이므로 직선 l의 방정식은 $\quad y=9(x+1)$
$\quad \therefore 9x-y=-9 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-3$이므로 직선 m의 방정식은 $\quad y-2=-3(x-1)$
$\quad \therefore 3x+y=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$\quad x=-\frac{1}{3}$, $y=6$
따라서 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{3}, 6\right)$이므로
$\quad a=-\frac{1}{3}$, $b=6$
$\quad \therefore ab=-2$

답 -2

0643 전략 기울기가 a인 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{a}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$로 놓으면
$\quad f'(x)=3x^2-12x+9$
$x-3y-3=0$에서 $y=\frac{1}{3}x-1$이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 -3이다.
접점의 좌표를 (t, t^3-6t^2+9t+2)라 하면 접선의 기울기가 -3이므로
$\quad f'(t)=3t^2-12t+9=-3, \quad t^2-4t+4=0$
$\quad (t-2)^2=0 \quad \therefore t=2$
따라서 접점의 좌표는 $(2, 4)$이므로 직선의 방정식은
$\quad y-4=-3(x-2) \quad \therefore 3x+y-10=0$
이 직선이 점 $(1, a)$를 지나므로
$\quad 3+a-10=0 \quad \therefore a=7$

답 ⑤

0644 전략 $x \longrightarrow a$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이면 (분자) $\longrightarrow$ 0임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=-1$에서 $x \longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.
즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=0$이므로 $\quad f(1)=2$ ⇨ ❶
$\quad \therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
$\quad =f'(1)=-1$ ⇨ ❷
따라서 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식은
$\quad y-2=-1\cdot(x-1)$
$\quad \therefore y=-x+3$ ⇨ ❸
즉 접선의 x절편은 3이다. ⇨ ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $f'(1)=-1$임을 알 수 있다.	30%
❸ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❹ 접선의 x절편을 구할 수 있다.	10%

0645 전략 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓고 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=x^2-3$으로 놓으면 $\quad f'(x)=2x$
접점의 좌표를 (t, t^2-3)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은
$\quad y-(t^2-3)=2t(x-t)$
$\quad \therefore y=2tx-t^2-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
이 직선이 점 $(0, -4)$를 지나므로
$\quad -4=-t^2-3, \quad t^2=1$
$\quad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$
이것을 ㉠에 각각 대입하면
$\quad y=-2x-4$, $y=2x-4$
$\quad \therefore mn=-2\cdot 2=-4$

답 ②

0646 전략 곡선에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구하여 평행이동한 직선의 방정식과 비교한다.

풀이 평행이동한 직선의 방정식은
$\quad y=3(x-m)+1 \quad \therefore y=3x-3m+1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$f(x)=x^3-9x+2$로 놓으면
$\quad f'(x)=3x^2-9$
접점의 좌표를 (t, t^3-9t+2)라 하면 접선의 기울기가 3이므로
$\quad f'(t)=3t^2-9=3, \quad t^2=4$
$\quad \therefore t=-2$ 또는 $t=2$

(i) $t=-2$일 때,

접점의 좌표가 $(-2,\ 12)$이므로 접선의 방정식은

$y-12=3(x+2)$ $\quad\therefore\ y=3x+18$

이 방정식이 ㉠과 일치해야 하므로 $\quad -3m+1=18$

$\therefore\ m=-\dfrac{17}{3}$

(ii) $t=2$일 때,

접점의 좌표가 $(2,\ -8)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-8)=3(x-2)$ $\quad\therefore\ y=3x-14$

이 방정식이 ㉠과 일치해야 하므로 $\quad -3m+1=-14$

$\therefore\ m=5$

(i), (ii)에서 $\quad m=5$

답 5

0647 전략 $x=t$인 점에서의 접선의 방정식을 구하여 주어진 직선의 방정식과 비교한다.

풀이 $f(x)=x^3$으로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-t^3=3t^2(x-t)$

$\therefore\ y=3t^2x-2t^3$

이 직선이 직선 $y=ax-2$와 일치하므로

$3t^2=a,\ -2t^3=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad t=1,\ a=3$

답 ④

0648 전략 두 점 A, B에서의 접선의 방정식을 각각 구한다.

풀이 $f(x)=x^2-a^2$으로 놓으면

$f'(x)=2x$

곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 $A(-a,\ 0)$, $B(a,\ 0)$이라 하면

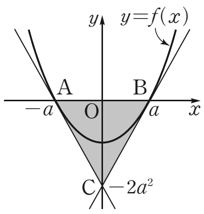
$f'(-a)=-2a,\ f'(a)=2a$

이므로 점 $A(-a,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=-2a(x+a)=-2ax-2a^2$

점 $B(a,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=2a(x-a)=2ax-2a^2$



두 접선의 y절편이 같으므로 두 접선의 교점을 C라 하면

$C(0,\ -2a^2)$

따라서 $\overline{OC}=2a^2$이고, $\triangle ACB$의 넓이가 8이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a^2=8,\quad a^3=4$

$\therefore\ a=\sqrt[3]{4}$

답 ③

0649 전략 $f'(c)=0$인 상수 c의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=0$에서 $\quad x^3-x=0$

$x(x+1)(x-1)=0,\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$\therefore\ \alpha=-1,\ \beta=0$

함수 $f(x)=x^3-x$는 닫힌 구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1,\ 0)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(0)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-1$이므로

$f'(c)=3c^2-1=0,\quad c^2=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ c=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ (\because\ -1<c<0)$

답 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

0650 전략 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는 $f'(x)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^3+6x^2-10x+1$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+12x-10=-3(x-2)^2+2$

이므로 $f'(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 2를 갖는다.

따라서 접점의 좌표가 $(2,\ -3)$이고 기울기가 2이므로 직선의 방정식은

$y-(-3)=2(x-2)$ $\quad\therefore\ y=2x-7$

즉 $m=2,\ n=-7$이므로

$m+n=-5$

답 -5

0651 전략 접선의 방정식을 구하여 x절편과 y절편을 찾는다.

풀이 $f(x)=x^2+a$로 놓으면 $\quad f'(x)=2x$

점 $(1,\ k)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$k=1+a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 $(1,\ k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 접선의 방정식은

$y-k=2(x-1)$

$\therefore\ y=2x+k-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$y=0$을 ㉡에 대입하면 $\quad 2x+k-2=0\quad\therefore\ x=\dfrac{2-k}{2}$

$x=0$을 ㉡에 대입하면 $\quad y=k-2$

따라서 접선의 x절편은 $\dfrac{2-k}{2}$, y절편은 $k-2$이다. ⇨ ❶

이때 $k>2$이고 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{k-2}{2}\cdot(k-2)=1,\quad (k-2)^2=4$

$k^2-4k=0,\quad k(k-4)=0$

$\therefore\ k=4\ (\because\ k>2)$ ⇨ ❷

$k=4$를 ㉠에 대입하면

$4=1+a\quad\therefore\ a=3$ ⇨ ❸

$\therefore\ a+k=7$ ⇨ ❹

답 7

채점 기준	비율
❶ 접선의 x절편과 y절편을 구할 수 있다.	40%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $a+k$의 값을 구할 수 있다.	10%

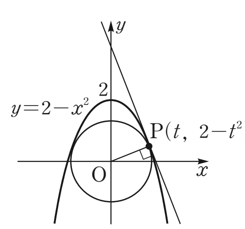
0652 전략 곡선 $y=f(x)$와 원 O가 접할 때 원 O의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선과 수직임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2-x^2$으로 놓으면

$f'(x)=-2x$

접점을 $P(t,\ 2-t^2)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-2t$



직선 OP의 기울기는 $\quad\dfrac{2-t^2}{t}$

이때 접선과 직선 OP는 서로 수직이므로

$-2t\cdot\dfrac{2-t^2}{t}=-1,\quad t^2=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ t=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $t=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 접점의 좌표는

$\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right),\ \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

이고 원 O의 반지름의 길이는 원점과 점 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

따라서 원 O의 둘레의 길이는

$2\pi\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}\pi$

답 ③

0653 전략 주어진 등식에 $f(1+h)$, $f'(1+\theta h)$를 대입한 다음 θ에 대하여 정리한다.

풀이 $f(x)=x^3$에서 $\quad f'(x)=3x^2$

$f(1+h)=f(1)+hf'(1+\theta h)$, 즉 $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1+\theta h)$

에서

$\dfrac{(1+h)^3-1}{h}=3(1+\theta h)^2$

$h^2+3h+3=3+6\theta h+3\theta^2h^2$

$3h^2\theta^2+6h\theta-h^2-3h=0$

$h\neq0$이므로

$3h\theta^2+6\theta-h-3=0$

$\therefore\ \theta=\dfrac{-3+\sqrt{9+9h+3h^2}}{3h}\ (\because\ \theta>0)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{h\to0+}\theta&=\lim_{h\to0+}\frac{\sqrt{9+9h+3h^2}-3}{3h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{(\sqrt{9+9h+3h^2}-3)(\sqrt{9+9h+3h^2}+3)}{3h(\sqrt{9+9h+3h^2}+3)}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{3h(3+h)}{3h(\sqrt{9+9h+3h^2}+3)}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{3+h}{\sqrt{9+9h+3h^2}+3}\\&=\frac{3}{3+3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ④

Ⅲ. 다항함수의 미분법

07 도함수의 활용 (2)

0654 $a<b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$$\begin{aligned}f(a)-f(b)&=(a^3-1)-(b^3-1)\\&=a^3-b^3\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

이때 $a-b<0$, $a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2>0$이므로

$f(a)-f(b)\boxed{<}0$

$\therefore\ f(a)<f(b)$

따라서 함수 $f(x)=x^3-1$은 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 $\boxed{\text{증가}}$한다.

$\therefore$ (가) $<$ (나) 증가

답 풀이 참조

0655 $a<b$인 임의의 두 양수 a, b에 대하여

$f(a)-f(b)=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

이때 $a+b>0$, $a-b<0$이므로

$f(a)-f(b)<0$

$\therefore\ f(a)<f(b)$

따라서 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가한다.

답 증가

0656 $a<b<1$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$$\begin{aligned}&f(a)-f(b)\\&=(-2a^2+4a+1)-(-2b^2+4b+1)\\&=-2(a+b)(a-b)+4(a-b)\\&=-2(a-b)(a+b-2)\end{aligned}$$

이때 $a-b<0$, $a+b-2<1+1-2=0$이므로

$f(a)-f(b)<0$

$\therefore\ f(a)<f(b)$

따라서 함수 $f(x)=-2x^2+4x+1$은 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 증가한다.

답 증가

0657 $a<b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$$\begin{aligned}f(a)-f(b)&=-a^3-(-b^3)=-(a^3-b^3)\\&=-(a-b)(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

이때 $a-b<0$, $a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2>0$이므로

$f(a)-f(b)>0 \qquad \therefore\ f(a)>f(b)$

따라서 함수 $f(x)=-x^3$은 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소한다.

답 감소

0658 답 (가) $>$ (나) $<$ (다) 증가 (라) 감소

0659 $f(x)=x^2+2x$에서

$f'(x)=2x+2=2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 감소하고, 구간 $(-1,\ \infty)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

0660 $f(x)=-x^2+4x-2$에서

$f'(x)=-2x+4=-2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 2)$에서 증가하고, 구간 $(2,\ \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0661 $f(x)=x^3+3x^2+2$에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -2)$ 또는 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-2,\ 0)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0662 $f(x)=-x^3+3x^2-9x$에서

$f'(x)=-3x^2+6x-9=-3(x-1)^2-6<0$

즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0663 답 극댓값: 4, 극솟값: -3

0664 답 (1) a, c (2) b, d

0665 답 (1) 6 (2) 0

0666 (1) $f'(x)=3x^2-6x-9$

(2) $f'(x)=0$에서 $\quad 3x^2-6x-9=0$

$x^2-2x-3=0, \quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(3)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	12	↘	-20	↗

(4) 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 12, $x=3$에서 극솟값 -20을 갖는다.

답 풀이 참조

0667 $f(x)=x^3-6x^2$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-32	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0, $x=4$에서 극솟값 -32를 갖는다.

답 극댓값: 0, 극솟값: -32

0668 $f(x)=-x^3+3x+1$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	3	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 3, $x=-1$에서 극솟값 -1을 갖는다.

답 극댓값: 3, 극솟값: -1

0669 (1) $f'(x)=3x^2-12x+9$

(2) $f'(x)=0$에서 $\quad 3x^2-12x+9=0$

$x^2-4x+3=0, \quad (x-1)(x-3)=0$

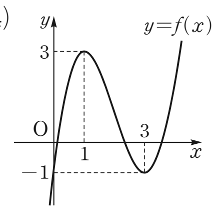
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

(3)

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 3, $x=3$에서 극솟값 -1을 갖는다.

(4)



답 풀이 참조

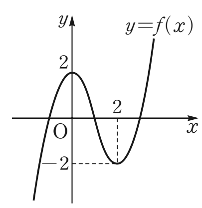
0670 $f(x)=x^3-3x^2+2$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

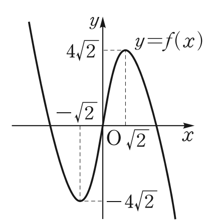
0671 $f(x)=-x^3+6x$에서

$f'(x)=-3x^2+6=-3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-4\sqrt{2}$	↗	$4\sqrt{2}$	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

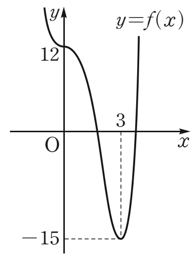
0672 $f(x)=x^4-4x^3+12$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 　$x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	12	$\searrow$	-15	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

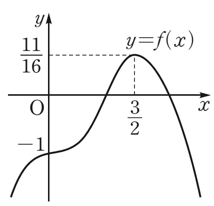
0673 $f(x)=-x^4+2x^3-1$에서

$f'(x)=-4x^3+6x^2=-2x^2(2x-3)$

$f'(x)=0$에서 　$x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{11}{16}$	$\searrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0674 $f(x)=x^2-2x$에서

$f'(x)=2x-2=2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 　$x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 3, $x=1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

답 최댓값: 3, 최솟값: -1

0675 $f(x)=-x^3+3x^2+5$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 　$x=0$ $(\because -2\le x\le 1)$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	25	$\searrow$	5	$\nearrow$	7

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 25, $x=0$일 때 최솟값 5를 갖는다.

답 최댓값: 25, 최솟값: 5

0676 $f(x)=x^4-6x^3+4x^2-1$에서

$f'(x)=4x^3-18x^2+8x=2x(2x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 　$x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ $(\because -1\le x\le 1)$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	10	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{11}{16}$	$\searrow$	-2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 10, $x=1$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

답 최댓값: 10, 최솟값: -2

0677 (1) $-x^2+3=0$에서

$x^2-3=0$, 　$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

이때 $a>0$이므로

$0<a<\sqrt{3}$

(2) 오른쪽 그림에서

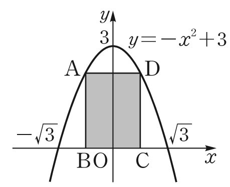
$\mathrm{A}(-a,\ -a^2+3)$, $\mathrm{B}(-a,\ 0)$,

$\mathrm{C}(a,\ 0)$, $\mathrm{D}(a,\ -a^2+3)$

이므로 직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(-a^2+3)$

$=-2a^3+6a$



(3) $S(a)=-2a^3+6a$에서

$S'(a)=-6a^2+6=-6(a^2-1)$

$=-6(a+1)(a-1)$

$S'(a)=0$에서 　$a=1$ $(\because 0<a<\sqrt{3})$

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$(\sqrt{3})$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

따라서 직사각형의 넓이는 $a=1$일 때 최댓값 4를 갖는다.

답 (1) $0<a<\sqrt{3}$ (2) $-2a^3+6a$ (3) 4

0678 $f(x)=-x^3+12x+9$에서

$f'(x)=-3x^2+12$

$=-3(x+2)(x-2)$

이때 $f'(x)>0$인 구간에서 함수 $f(x)$가 증가하므로

$-3(x+2)(x-2)>0$, 　$(x+2)(x-2)<0$

$\therefore -2<x<2$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=-4$

답 ①

0679 ① 구간 $(-\infty,\ -2)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

② 구간 $(-2,\ -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

③ 구간 $(-1,\ 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

④ 구간 $(1,\ 2)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

⑤ 구간 $(2,\ 3)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소하고, 구간 $(3,\ \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

답 ④

0680 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+3$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$ ⇨ ❶

주어진 조건에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=1$의 좌우에서 증가와 감소가 바뀌므로 $x=-2$, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -2, 1이다. ⇨ ❷

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+1=-\dfrac{2a}{6}$, $-2\cdot1=\dfrac{b}{6}$

$\therefore a=3,\ b=-12$ ⇨ ❸

$\therefore a-b=15$ ⇨ ❹

답 15

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20%
❷ $f'(x)=0$의 두 근이 -2, 1임을 알 수 있다.	40%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0681 $f(x)=x^3+x^2+ax-3$에서

$f'(x)=3x^2+2x+a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-3a\leq0$ $\therefore a\geq\dfrac{1}{3}$ 답 ⑤

타쎈 특강 이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq0$이 성립하려면
$a>0,\ D\leq0$
② 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq0$이 성립하려면
$a<0,\ D\leq0$

0682 $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+4x^2+ax+2$에서

$f'(x)=-2x^2+8x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=16+2a\leq0$ $\therefore a\leq-8$

따라서 실수 a의 최댓값은 -8이다. 답 ①

0683 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일 대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다. 그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 증가해야 한다. ⇨ ❶

$f(x)=2x^3+x^2+kx-1$에서

$f'(x)=6x^2+2x+k$ ⇨ ❷

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-6k\leq0$ $\therefore k\geq\dfrac{1}{6}$ ⇨ ❸

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. ⇨ ❹

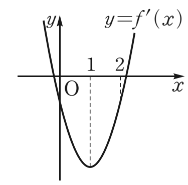
답 1

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 증가해야 함을 알 수 있다.	30%
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❹ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	10%

0684 $f(x)=x^3-3x^2+ax+4$에서

$f'(x)=3x^2-6x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(1,\ 2)$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\leq0$이어야 한다.



오른쪽 그림에서

$f'(1)=a-3\leq0$이어야 하므로

$a\leq3$ ...... ㉠

$f'(2)=a\leq0$이어야 하므로

$a\leq0$ ...... ㉡

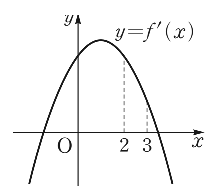
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a\leq0$ 답 $a\leq0$

0685 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+ax-4$에서

$f'(x)=-x^2+2x+a$

함수 $f(x)$가 $2<x<3$에서 증가하려면 $2<x<3$에서 $f'(x)\geq0$이어야 한다.



오른쪽 그림에서

$f'(2)=a\geq0$이어야 하므로

$a\geq0$ ...... ㉠

$f'(3)=a-3\geq0$이어야 하므로

$a\geq3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a\geq3$

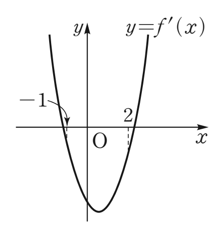
따라서 실수 a의 최솟값은 3이다. 답 ②

0686 구간 $(-1,\ 2)$에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 구간 $(-1,\ 2)$에서 감소해야 한다.

$f(x)=x^3+ax^2-7x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-7$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1,\ 2)$에서 감소하려면 $-1<x<2$에서 $f'(x)\leq0$이어야 한다.



오른쪽 그림에서

$f'(-1)=-2a-4\leq0$이어야 하므로

$a\geq-2$ ...... ㉠

$f'(2)=4a+5\leq0$이어야 하므로

$a\leq-\dfrac{5}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-2\leq a\leq-\dfrac{5}{4}$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-\dfrac{5}{4}$이므로

$\alpha+\beta=-\dfrac{13}{4}$ 답 ①

0687 $f(x)=-x^3+3x+5$에서

07 도함수의 활용 (2)

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	3	↗	7	↘

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 7, $x=-1$에서 극솟값 3을 가지므로
$M=7$, $m=3$
$\therefore M+m=10$

답 ⑤

0688 $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+11$에서
$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-21	↗	11	↘	6	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고 $x=-2$, $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $a=1$, $b=2$
$\therefore a-b=-1$

답 -1

0689 $f(x)=-x^4+\frac{8}{3}x^3-2x^2+1$에서
$f'(x)=-4x^3+8x^2-4x=-4x(x-1)^2$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↘	$\frac{2}{3}$	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1을 가지므로
$a=0$, $b=1$
$\therefore a+b=1$

답 ④

참고 $f'(1)=0$이지만 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=1$에서는 극값을 갖지 않는다.

0690 $f(x)=x^3-3x^2+6$에서
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ ⇨ ❶

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	2	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 6, $x=2$에서 극솟값 2를 가지므로
$A(0, 6)$, $B(2, 2)$ ⇨ ❷
따라서 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는
$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{6+2}{2}\right)$, 즉 $(1, 4)$ ⇨ ❸

답 $(1, 4)$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❸ $\overline{AB}$의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	20%

0691 $f(x)=-2x^3+3x^2+ax+b$에서
$f'(x)=-6x^2+6x+a$
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값 -5를 가지므로
$f(-1)=-5$, $f'(-1)=0$
$2+3-a+b=-5$, $-6-6+a=0$
$\therefore a=12$, $b=2$
$\therefore a+b=14$

답 14

0692 $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+4$	↘	a	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 a를 가지므로
$a=3$
또 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $a+4$를 가지므로 구하는 극댓값은
$3+4=7$

답 ②

0693 $f(x)=x^3-6x^2+a$에서
$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	a	↘	$a-32$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 a, $x=4$에서 극솟값 $a-32$를 갖는다.
이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 $a\neq a-32$이므로
$a=-(a-32)$, $2a=32$
$\therefore a=16$

답 ⑤

0694 $f(x)=-x^3+3ax^2-a$에서
$f'(x)=-3x^2+6ax=-3x(x-2a)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a$ ⇨ ❶
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2a$에서 극값을 갖는다.
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로
$f(0)=0$ 또는 $f(2a)=0$
그런데 $f(0)=-a\neq0$이므로 $f(2a)=0$
$-(2a)^3+3a\cdot(2a)^2-a=0$
$4a^3-a=0$, $a(2a+1)(2a-1)=0$
$\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ $(\because a\neq0)$ ⇨ ❷
따라서 모든 실수 a의 값의 곱은
$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$ ⇨ ❸

답 $-\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ a의 값의 곱을 구할 수 있다.	20%

0695 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=3$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0$, $f'(3)=0$

즉 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 1, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=\frac{2a}{3}$, $1\cdot 3=-\frac{b}{3}$

$\therefore a=6$, $b=-9$

$\therefore f(x)=-x^3+6x^2-9x$, $f'(x)=-3x^2+12x-9$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=2$인 점의 좌표는 $(2, -2)$이고, 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=-12+24-9=3$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-2)=3(x-2)$

$\therefore y=3x-8$ 답 $y=3x-8$

0696 $f(x)=x^3+ax^2+3x-5$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9>0$, $(a+3)(a-3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>3$ 답 ①

참고 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.

$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

0697 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+ax$에서

$f'(x)=x^2-2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-a>0$, $a(a-1)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>1$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다. 답 ②

0698 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+ax^2+8x+2$에서

$f'(x)=2x^2+2ax+8$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-16\le 0$, $(a+4)(a-4)\le 0$

$\therefore -4\le a\le 4$ 답 ④

0699 $f(x)=2x^3+ax^2+ax+5$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-6a\le 0$, $a(a-6)\le 0$

$\therefore 0\le a\le 6$

따라서 실수 a의 최댓값은 6, 최솟값은 0이므로 구하는 합은

$6+0=6$ 답 6

0700 $f(x)=2x^3+ax^2+6x+1$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+6$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-36>0$, $(a+6)(a-6)>0$

$\therefore a<-6$ 또는 $a>6$ ...... ㉠

$g(x)=x^3+ax^2-3ax+2$에서

$g'(x)=3x^2+2ax-3a$

함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $g'(x)=0$은 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2+9a\le 0$ $a(a+9)\le 0$

$\therefore -9\le a\le 0$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

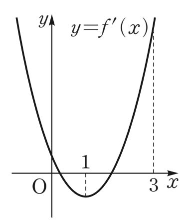
$-9\le a<-6$

따라서 정수 a는 -9, -8, -7의 3개이다. 답 3

0701 $f(x)=x^3-3x^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2-6x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(0, 3)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 $0<x<3$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3a>0$ $\therefore a<3$

(ii) $f'(0)>0$에서 $a>0$

$f'(3)>0$에서 $9+a>0$ $\therefore a>-9$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$

이상에서 a의 값의 범위는

$0<a<3$ 답 $0<a<3$

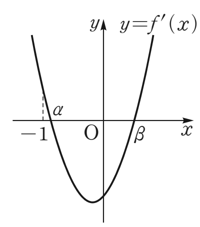
0702 $f(x)=2x^3+x^2+ax-3$에서

$f'(x)=6x^2+2x+a$

함수 $f(x)$가 $-1<x<0$에서 극댓값, $x>0$에서 극솟값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때,

$-1<\alpha<0$, $\beta>0$

이어야 한다.



(i) $f'(-1)>0$에서 $4+a>0$

$\therefore a>-4$

(ii) $f'(0)<0$에서 $a<0$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$-4<a<0$

이므로 정수 a는 -3, -2, -1의 3개이다. 답 3

0703 $f(x)=x^3+ax^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a$

함수 $f(x)$가 $x>-2$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 $x>-2$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a>0$, $\quad a(a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>3$

(ⅱ) $f'(-2)>0$에서 $\quad 12-3a>0 \quad \therefore a<4$

(ⅲ) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{a}{3}$이므로

$-\frac{a}{3}>-2 \quad \therefore a<6$

이상에서 실수 a의 값의 범위는

$a<0$ 또는 $3<a<4$

따라서 보기 중 a의 값이 될 수 없는 것은 ④이다. 답 ④

0704 $f(x)=3x^4-6x^3+3ax^2+9$에서

$f'(x)=12x^3-18x^2+6ax=6x(2x^2-3x+a)$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2-3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $2x^2-3x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $a\neq0$, $D=9-8a>0$이므로

$a\neq0$, $a<\frac{9}{8}$

$\therefore a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다. 답 ③

0705 $f(x)=-x^4+8x^3+2ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+24x^2+4ax=-4x(x^2-6x-a)$ ➡ ❶

함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 즉 이차방정식 $x^2-6x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ➡ ❷

따라서 이차방정식 $x^2-6x-a=0$의 판별식을 D라 하면 $a\neq0$,

$\frac{D}{4}=9+a>0$이므로

$a\neq0$, $a>-9$

$\therefore -9<a<0$ 또는 $a>0$ ➡ ❸

즉 $\alpha=-9$, $\beta=0$이므로

$\beta-\alpha=9$ ➡ ❹

답 9

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20%
❷ $x^2-6x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	30%
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❹ $\beta-\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20%

0706 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3+(a-2)x^2-4ax$에서

$f'(x)=2x^3-2x^2+2(a-2)x-4a$

$=2(x-2)(x^2+x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.

(ⅰ) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$2(x-2)(x^2+x+a)=0$의 한 근이 $x=2$이므로 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 허근을 가져야 한다. 따라서 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4a<0 \quad \therefore a>\frac{1}{4}$

(ⅱ) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는 경우

$2(x-2)(x^2+x+a)=0$의 한 근이 $x=2$이므로 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x=2$를 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

$x^2+x+a=0$이 $x=2$를 근으로 가지면

$6+a=0 \quad \therefore a=-6$

$x^2+x+a=0$이 중근을 가지면 판별식을 D라 할 때,

$D=1-4a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 실수 a의 값의 범위는

$a=-6$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ②이다. 답 ②

0707 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 1이므로

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f'(-2)=0$, $f'(1)=0$이므로

$f'(-2)=24-4a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

$f'(1)=6+2a+b=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3$, $b=-12$

즉 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+c$이고, 함수 $f(x)$의 극댓값이 15이므로

$f(-2)=-16+12+24+c=15$

$\therefore c=-5$

따라서 $f(x)=2x^3+3x^2-12x-5$이므로

$f(1)=2+3-12-5=-12$ 답 -12

0708 주어진 그래프에서 $f'(x)$는 $x=-2$, $x=1$, $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=1$, $x=4$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 구하는 모든 x의 값의 합은

$-2+1+4=3$ 답 3

0709 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 2이므로

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f'(0)=0$, $f'(2)=0$이므로

$f'(0)=c=0$

$f'(2)=12a+4b+c=0$

$\therefore 3a+b=0$ ······ ㉠

$f(x)$의 극솟값이 -3, 극댓값이 5이므로

$f(0)=d=-3$

$f(2)=8a+4b+d=5$

$\therefore 2a+b=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=6$

$\therefore ad-bc=-2\cdot(-3)-6\cdot 0=6$

답 ⑤

0710 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $-1<x<1$에서 감소하고, $x>1$에서 증가한다.
또 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

답 ④

0711 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -4, -1, 1, 3이므로

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. 구간 $(-3, -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
ㄴ. $f'(3)=0$이고 $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. $-4<x<3$에서 극댓값을 갖는 x의 값은 1의 1개뿐이다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

0712 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 3이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않고, $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ②이다.

답 ②

0713 $f(x)=-x^4+2x^2-3$에서

$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	-11	↗	-2	↘	-3	↗	-2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최댓값 -2, $x=-2$에서 최솟값 -11을 가지므로 $M=-2$, $m=-11$

$\therefore M-m=9$

답 ⑤

0714 $f(x)=-x^4+\frac{4}{3}x^3+2x^2-4x$에서

$f'(x)=-4x^3+4x^2+4x-4=-4(x-1)^2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because -2\le x\le 0$)

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{32}{3}$	↗	$\frac{11}{3}$	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $\frac{11}{3}$을 가지므로

$a=-1$, $b=\frac{11}{3}$

$\therefore a+b=\frac{8}{3}$

답 $\frac{8}{3}$

0715 $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2-8x+a$에서

$f'(x)=4x^3-4x^2+8x-8=4(x-1)(x^2+2)$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ ($\because x^2+2>0$)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{13}{3}+a$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $-\frac{13}{3}+a$를 가지므로

$-\frac{13}{3}+a=-\frac{1}{3}$

$\therefore a=4$

답 ③

0716 $f(x)=2x^3-3x^2+k$에서

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ ⇨ ❶

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-5$	↗	k	↘	$k-1$	↗	$k+27$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $k+27$, $x=-1$일 때 최솟값 $k-5$를 갖는다. ⇨ ❷

이때 함수 $f(x)$의 최솟값은 -6이므로

$k-5=-6$ $\therefore k=-1$ ⇨ ❸

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$-1+27=26$ ⇨ ❹

답 26

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

0717 $f(x)=-x^3+12x+k$에서

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2\ (\because -1\le x\le 3)$

x	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$k-11$	$\nearrow$	$k+16$	$\searrow$	$k+9$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $k+16$, $x=-1$일 때 최솟값 $k-11$을 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 17이므로

$k+16+k-11=17,\quad 2k=12$

$\therefore k=6$

답 ②

0718 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+b$에서

$f'(x)=ax^2-2ax=ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2\ (\because 1\le x\le 3)$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2}{3}a+b$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}a+b$	$\nearrow$	b

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 b, $x=2$일 때 최솟값 $-\frac{4}{3}a+b$를 가지므로

$b=5,\ -\frac{4}{3}a+b=-3$

$\therefore a=6,\ b=5$

$\therefore ab=30$

답 ④

0719 잘라낸 정사각형의 한 변의 길이를 $x\ (x>0)$라 하면 상자의 밑면은 한 변의 길이가 $12-2x$인 정사각형이므로

$12-2x>0\quad \therefore 0<x<6$

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(12-2x)^2=4x^3-48x^2+144x$

$\therefore V'(x)=12x^2-96x+144=12(x-2)(x-6)$

$V'(x)=0$에서 $x=2\ (\because 0<x<6)$

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(6)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 상자의 부피는 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$V(2)=2\cdot 8^2=128$

답 ④

0720 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2-1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2=t^2+(t^2-2)^2=t^4-3t^2+4$ ⇨ ❶

$f(t)=t^4-3t^2+4$로 놓으면

$f'(t)=4t^3-6t=2t(2t^2-3)$ ⇨ ❷

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

t	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때 최솟값 $\frac{7}{4}$을 가지므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2$의 최솟값은 $\frac{7}{4}$이다. ⇨ ❸

답 $\frac{7}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{AP}}^2$을 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $f'(t)$를 구할 수 있다.	20%
❸ $\overline{\mathrm{AP}}^2$의 최솟값을 구할 수 있다.	50%

0721 점 P의 좌표를 $(a,\ -a^2+6a)\ (0<a<6)$로 놓으면 $\mathrm{H}(a,\ 0)$이므로 △OPH의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}a(-a^2+6a)=\frac{1}{2}(-a^3+6a^2)$

$\therefore S'(a)=\frac{1}{2}(-3a^2+12a)=-\frac{3}{2}a(a-4)$

$S'(a)=0$에서 $a=4\ (\because 0<a<6)$

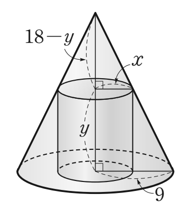
a	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(6)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $S(a)$는 $a=4$일 때 극대이면서 최대이므로 △OPH의 넓이의 최댓값은

$S(4)=\frac{1}{2}(-64+96)=16$

답 ④

0722 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면



$9:18=x:(18-y)$

$18-y=2x$

$\therefore y=18-2x\ (0<x<9)$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2(18-2x)=2\pi(9x^2-x^3)$

$\therefore V'(x)=2\pi(18x-3x^2)=6\pi x(6-x)$

$V'(x)=0$에서 $x=6\ (\because 0<x<9)$

x	(0)	$\cdots$	6	$\cdots$	(9)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $V(x)$는 $x=6$일 때 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은

$V(6)=2\pi(324-216)=216\pi$

답 ③

0723 전략 $f'(x)=0$의 근이 $-1,\ b$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+ax-4$에서

$f'(x)=3x^2-6x+a$

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $-1<x<b$이므로 이차부등식 $f'(x)<0$의 해가 $-1<x<b$이다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 $-1,\ b$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+b=2,\ -b=\frac{a}{3}$

$\therefore a=-9,\ b=3$

$\therefore a+b=-6$

답 -6

0724 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사한다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x 좌표가 -2, 0, 2이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $f'(1)<0$이므로 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄴ. 구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(2)$이다.

ㄷ. 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $f(-2)$와 $f(2)$의 값 중 작은 것을 최솟값으로 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0725 전략 주어진 구간에서의 $f(x)$의 극값과 양 끝 값의 함숫값을 비교하여 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=2x^3-3x^2-12x$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	-4	↗	7	↘	-20	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 -20을 가지므로

$a=2$, $b=-20$

$\therefore ab=-40$ 답 -40

0726 전략 주어진 조건을 만족시키려면 $f(x)$가 증가해야 한다.

풀이 $f(x)=x^3+2ax^2+4ax$에서

$f'(x)=3x^2+4ax+4a$

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 항상 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-12a\le 0,\quad 4a(a-3)\le 0$

$\therefore 0\le a\le 3$

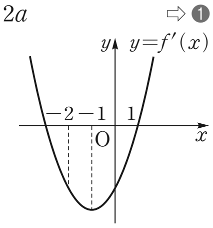
따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3의 4개이다. 답 ⑤

0727 전략 주어진 조건을 만족시키도록 $y=f'(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x)=x^3+3x^2+(2a+3)x$에서

$f'(x)=3x^2+6x+2a+3=3(x+1)^2+2a$ ⇨ ❶

함수 $f(x)$가 구간 $(-2,\ 1)$에서 감소하려면 $-2<x<1$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.



오른쪽 그림에서

$f'(1)=2a+12\le 0$이어야 하므로

$a\le -6$ ⋯⋯ ㉠

$f(-2)=2a+3\le 0$이어야 하므로

$a\le -\frac{3}{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a\le -6$ ⇨ ❷

따라서 a의 최댓값은 -6이다. ⇨ ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ a의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

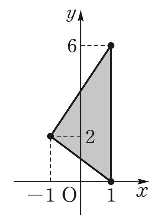
0728 전략 먼저 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 극값을 갖는 점의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=-x^3+3x+4$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	2	↗	6	↘



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 2, $x=1$에서 극댓값 6을 가지므로 세 점 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 6)$, $(1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2=6$

답 ⑤

0729 전략 주어진 조건을 이용하여 a, b, c, d에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 18을 가지므로

$f(-2)=18$, $f'(-2)=0$

$\therefore -8a+4b-2c+d=18$, $12a-4b+c=0$ ⋯⋯ ㉠

또 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 -4이므로

$f(0)=2$, $f'(0)=-4$

$\therefore c=-4$, $d=2$

$c=-4$, $d=2$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$2a-b=-2$, $3a-b=1$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=8$

$\therefore a+b+c+d=9$ 답 9

0730 전략 사차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4+6x^3+ax^2$에서

$f'(x)=4x^3+18x^2+2ax=2x(2x^2+9x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 즉 이차방정식 $2x^2+9x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2+9x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $a\ne 0$,

$D=81-8a>0$이므로 $a\ne 0$, $a<\frac{81}{8}$

$\therefore a<0$ 또는 $0<a<\frac{81}{8}$

따라서 정수 a의 최댓값은 10이다. 답 ⑤

0731 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 보고 함수 $f(x)$가 극대, 극소가 되는 점을 찾는다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(0)=0$에서 $b=0$

$f'(2)=0$에서 $12+4a+b=0$ $\therefore a=-3$ ⇨ ❶

$f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

즉 $f(0)=5$이므로 $c=5$ ⇨ ❷

$\therefore f(x)=x^3-3x^2+5$, $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	5	↘	1	↗	5

따라서 구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 1이다. ⇨ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ c의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 함수 $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

0732 전략 $f(x)$의 증감표를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

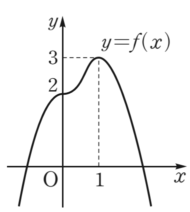
풀이 $f(x)=-3x^4+4x^3+2$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↗	3	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$에서 증가한다.

ㄴ. $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 극값을 갖는 점은 1개이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 치역은 $\{y|y\le 3\}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0733 전략 x개를 판매하여 얻은 이익은 $1000x-f(x)$(원)이다.

풀이 x개를 판매하여 얻은 이익을 $g(x)$원이라 하면

$g(x)=1000x-f(x)$

$=1000x-(x^3-60x^2+1000x+4000)$

$=-x^3+60x^2-4000$

$\therefore g'(x)=-3x^2+120x=-3x(x-40)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=40$

x	0	$\cdots$	40	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$	-4000	↗	극대	↘

따라서 $g(x)$는 $x=40$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 제품의 개수는 40이다.

답 40

0734 전략 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3b>0$, $3b<a^2$

$\therefore b<\frac{1}{3}a^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 점 (a, b)가 존재하는 영역은 ②이다.

답 ②

0735 전략 $x^2-4x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 함수로 변형한다.

풀이 $x^2-4x=t$로 놓으면

$t=x^2-4x=(x-2)^2-4$

$1\le x\le 4$에서 t의 값의 범위는 $-4\le t\le 0$

$g(t)=t^3-12t+1$로 놓으면

$g'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=-2$ ($\because -4\le t\le 0$)

t	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-15	↗	17	↘	1

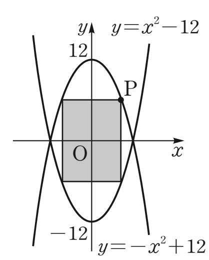
따라서 함수 $g(t)$는 $t=-2$일 때 최댓값 17, $t=-4$일 때 최솟값 -15를 가지므로 구하는 합은

$17-15=2$

답 2

0736 전략 직사각형의 한 꼭짓점의 x좌표를 a로 놓고 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 꼭짓점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하고 점 P의 x좌표를 a라 하면



$P(a, 12-a^2)$ $(0<a<2\sqrt{3})$

직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a\cdot 2(12-a^2)$

$=-4a^3+48a$

$\therefore S'(a)=-12a^2+48$

$=-12(a+2)(a-2)$

$S'(a)=0$에서 $a=2$ ($\because 0<a<2\sqrt{3}$)

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	$(2\sqrt{3})$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=2$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 직사각형의 넓이의 최댓값은

$S(2)=-32+96=64$

답 64

Ⅲ. 다항함수의 미분법

08 도함수의 활용 (3)

0737 (1) $f(x)=x^3-3x^2+1$에서

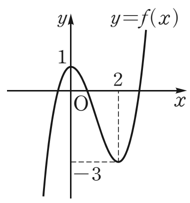
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $3x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

(2)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

(3) (2)에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $x^3-3x^2+1=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

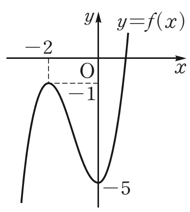
답 풀이 참조

0738 $f(x)=x^3+3x^2-5$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

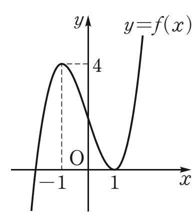
답 1

0739 $f(x)=x^3-3x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

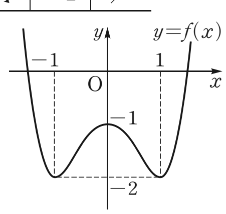
답 2

0740 $f(x)=x^4-2x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 2

0741 $f(x)=2x^3-3x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{1}$ ($\because x>0$)

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

$x>0$일 때, $f(x)$의 최솟값은 $\boxed{1}$이므로

$f(x)\geq0$, 즉 $2x^3-3x^2+2\geq0$

$\therefore$ (가) 1 (나) 1

답 풀이 참조

0742 $f(x)=x^3-x^2-x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\geq0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

$x\geq0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 1이므로

$f(x)>0$, 즉 $x^3-x^2-x+2>0$

따라서 $x\geq0$일 때, 부등식 $x^3-x^2-x+2>0$이 성립한다.

답 풀이 참조

0743 $f(x)=x^4+4x+3$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3+4=4(x^3+1)$

$=4(x+1)(x^2-x+1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ ($\because x^2-x+1>0$)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$f(x)\geq0$, 즉 $x^4+4x+3\geq0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4+4x+3\geq0$이 성립한다.

답 풀이 참조

0744 $v=\dfrac{dx}{dt}=10t-20$, $a=\dfrac{dv}{dt}=10$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=10-20=-10$, $a=10$

답 $v=-10$, $a=10$

0745 $v=\dfrac{dx}{dt}=-6t^2+12$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-12t$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=-6+12=6$, $a=-12$

답 $v=6$, $a=-12$

0746 $v=\dfrac{dx}{dt}=4t^3-8t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=12t^2-8$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=4-8=-4$, $a=12-8=4$

답 $v=-4$, $a=4$

0747 (1) 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-6t,\ a=\frac{dv}{dt}=12t-6$$

이므로 $t=2$일 때 점 P의 속도와 가속도는

$$v=6\cdot2^2-6\cdot2=12,\ a=12\cdot2-6=18$$

(2) 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$6t^2-6t=0$에서 $\quad 6t(t-1)=0$

$\therefore\ t=1\ (\because\ t>0)$

따라서 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾼다.

답 (1) 속도: 12, 가속도: 18 (2) 1

0748 (1) $\dfrac{dl}{dt}=10t-7$

(2) $10\cdot4-7=33$

답 (1) $\dfrac{dl}{dt}=10t-7$ (2) 33

0749 $\dfrac{dS}{dt}=(2t+1)+(t+1)\cdot2=4t+3$

이므로 $t=1$에서의 도형의 넓이의 변화율은

$$4\cdot1+3=7$$

답 7

0750 $\dfrac{dV}{dt}=3\left(10+\dfrac{t}{3}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}=\left(10+\dfrac{t}{3}\right)^2$

이므로 $t=3$에서의 도형의 부피의 변화율은

$$\left(10+\frac{3}{3}\right)^2=11^2=121$$

답 121

0751 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선

$y=\dfrac{1}{2}x^4-4x^3+8x^2$과 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

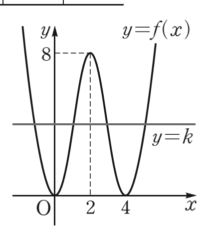
$f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-4x^3+8x^2$으로 놓으면

$$f'(x)=2x^3-12x^2+16x$$
$$=2x(x-2)(x-4)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	8	↘	0	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로



$$0<k<8$$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 7의 7개이다.

답 7

0752 $3x^4+4x^3-12x^2-k=0$에서

$$3x^4+4x^3-12x^2=k$$

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=3x^4+4x^3-12x^2$과 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2$으로 놓으면

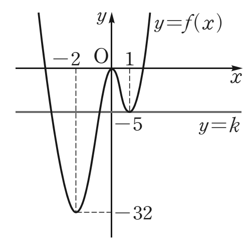
$$f'(x)=12x^3+12x^2-24x$$
$$=12x(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-32	↗	0	↘	-5	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$$k=-5 \text{ 또는 } k=0$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$$-5+0=-5$$

답 ②

0753 $x^4-\dfrac{8}{3}x^3+5-k=0$에서

$$x^4-\frac{8}{3}x^3+5=k$$

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선

$y=x^4-\dfrac{8}{3}x^3+5$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^4-\dfrac{8}{3}x^3+5$로 놓으면

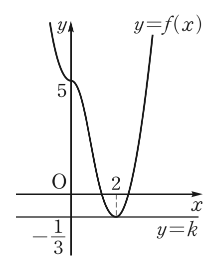
$$f'(x)=4x^3-8x^2=4x^2(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	5	↘	$-\frac{1}{3}$	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서 만나야 하므로



$$k=-\frac{1}{3}$$

답 $-\dfrac{1}{3}$

0754 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 α, β, γ이고 $\alpha<\beta<\gamma$이므로 함수 $y=f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지려면

$$f(\alpha)<0,\ f(\beta)>0,\ f(\gamma)<0$$

이어야 한다.

답 ④

0755 $x^3+3x^2-9x-k=0$에서

$$x^3+3x^2-9x=k$$

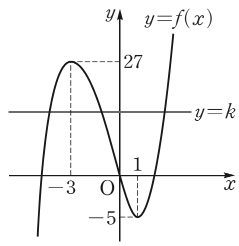
$f(x)=x^3+3x^2-9x$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	27	↘	-5	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이어야 하므로



$0<k<27$

답 ⑤

0756 $2x^3+5x^2-x+k=2x^2-x$에서

$2x^3+3x^2=-k$ ⇨ ❶

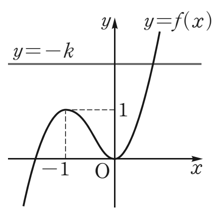
$f(x)=2x^3+3x^2$으로 놓으면

$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ ⇨ ❷

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 한 개의 양근만을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$의 교점이 1개이고, 교점의 x좌표가 양수이어야 하므로



$-k>1 \qquad \therefore k<-1$ ⇨ ❸

따라서 정수 k의 최댓값은 -2이다. ⇨ ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 정리할 수 있다.	10%
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❹ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	10%

0757 $x^3-3x^2+4x-1=3x^2-5x+k$에서

$x^3-6x^2+9x-1=k$

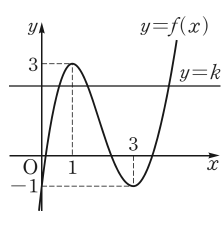
$f(x)=x^3-6x^2+9x-1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 세 개의 양근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 서로 다른 세 개의 양수이어야 하므로



$-1<k<3$

따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0758 $x^4-8x^2+48=k-4x^3$에서

$x^4+4x^3-8x^2+48=k$

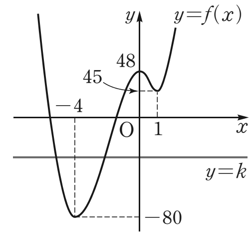
$f(x)=x^4+4x^3-8x^2+48$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+12x^2-16x=4x(x+4)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-80	↗	48	↘	45	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 두 개의 음근만을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점이 2개이고, 교점의 x좌표가 모두 음수이어야 하므로



$-80<k<45$

따라서 정수 k는

$-79,\ -78,\ -77,\ \cdots,\ 44$

의 124개이다.

답 124

0759 $f(x)=x^3-12x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-2)f(2)<0$이어야 하므로

$(k+16)(k-16)<0 \qquad \therefore -16<k<16$

따라서 정수 k는 $-15,\ -14,\ -13,\ \cdots,\ 15$의 31개이다.

답 31

0760 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+k$로 놓으면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 개의 실근과 중근을 가지려면

$f(-1)f(3)=0$이어야 하므로

$\left(k+\frac{5}{3}\right)(k-9)=0 \qquad \therefore k=-\frac{5}{3}$ 또는 $k=9$

따라서 정수 k의 값은 9이다.

답 9

0761 $f(x)=x^3-3x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

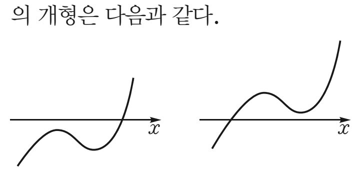
삼차방정식 $f(x)=0$이 한 개의 실근을 가지려면 $f(0)f(2)>0$이어야 하므로 $\quad k(k-4)>0 \qquad \therefore k<0$ 또는 $k>4$

따라서 $\alpha=0,\ \beta=4$이므로 $\qquad \beta-\alpha=4$

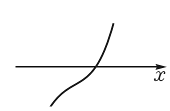
답 ④

다쎈 특강 삼차함수의 그래프의 개형

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가질 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



[극값을 갖는 경우]



[극값을 갖지 않는 경우]

0762 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$$\frac{1}{3}x^3+2x^2=-3x+k, \text{ 즉 } \frac{1}{3}x^3+2x^2+3x-k=0$$

이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x-k$로 놓으면

$$f'(x)=x^2+4x+3$$
$$=(x+3)(x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-3)f(-1)<0$이어야 하므로

$$-k\left(-k-\frac{4}{3}\right)<0, \quad k\left(k+\frac{4}{3}\right)<0$$

$$\therefore -\frac{4}{3}<k<0$$

답 $-\frac{4}{3}<k<0$

다른풀이 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$$\frac{1}{3}x^3+2x^2=-3x+k, \text{ 즉 } \frac{1}{3}x^3+2x^2+3x=k$$

가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

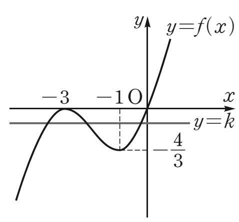
$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x$로 놓으면

$$f'(x)=x^2+4x+3$$
$$=(x+3)(x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{4}{3}$	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$-\frac{4}{3}<k<0$$

0763 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식

$$x^3-x^2=2x^2-k, \text{ 즉 } x^3-3x^2+k=0$$

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+k$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(0)f(2)=0$이어야 하므로

$$k(k-4)=0$$
$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=4$$

따라서 자연수 k의 값은 4이다.

답 4

0764 주어진 곡선과 직선이 한 점에서 만나려면 방정식

$$x^3+\frac{3}{2}x^2=6x-k, \text{ 즉 } x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+k=0$$

이 오직 한 개의 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+k$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서

$$x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면 $f(-2)f(1)>0$이어야 하므로

$$(k+10)\left(k-\frac{7}{2}\right)>0$$

$$\therefore k<-10 \text{ 또는 } k>\frac{7}{2}$$

따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

답 ③

0765 주어진 두 곡선이 한 점에서는 만나고 다른 한 점에서는 접하려면 방정식

$$x^3+x^2-4x-12=-2x^2+5x+k,$$
$$\text{즉 } x^3+3x^2-9x-12-k=0$$

이 한 실근과 중근을 가져야 한다. ➡ ❶

$f(x)=x^3+3x^2-9x-12-k$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2+6x-9$$
$$=3(x+3)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$ ➡ ❷

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-3)f(1)=0$이어야 하므로

$$(-k+15)(-k-17)=0$$
$$\therefore k=-17 \text{ 또는 } k=15$$ ➡ ❸

따라서 실수 k의 값의 합은

$$-17+15=-2$$ ➡ ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ 방정식이 한 실근과 중근을 가짐을 알 수 있다.	20%
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	50%
❹ k의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

0766 $f(x)=x^4+4a^3x+12$로 놓으면

$$f'(x)=4x^3+4a^3$$
$$=4(x+a)(x^2-ax+a^2)$$

이때 $x^2-ax+a^2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2\geq 0$이므로 $f'(x)=0$에서

$$x=-a$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-a$일 때 극소이면서 최소이므로 $f(x)$의 최솟값은

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

$$f(-a)=a^4-4a^4+12$$
$$=-3a^4+12$$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $f(-a)>0$이어야 하므로

$$-3a^4+12>0, \quad a^4-4<0$$
$$(a^2+2)(a^2-2)<0, \quad a^2-2<0 \ (\because a^2+2>0)$$
$$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})<0$$
$$\therefore -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다.

답 ③

0767 $x^4-2x^2 \geq k$에서　　$x^4-2x^2-k \geq 0$

$f(x)=x^4-2x^2-k$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4x$
$=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서　　$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(-1)=f(1)=-1-k$

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이려면 $f(-1)=f(1) \geq 0$이어야 하므로

$-1-k \geq 0$　　$\therefore k \leq -1$

답 $k \leq -1$

0768 $x^4+2ax^2-4ax+a^2>4x$에서

$x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2>0$

$f(x)=x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3+4ax-4(a+1)$
$=4(x-1)(x^2+x+a+1)$

이때 자연수 a에 대하여

$$x^2+x+a+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}>0$$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

$f(1)=1+2a-4(a+1)+a^2$
$=a^2-2a-3$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $f(1)>0$이어야 하므로

$a^2-2a-3>0$,　　$(a+1)(a-3)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 4

0769 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=x^4-x^2-9x-(5x^2-x-k)$
$=x^4-6x^2-8x+k$

$\therefore h'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$h'(x)=0$에서　　$x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$h(2)=2^4-6\cdot2^2-8\cdot2+k=k-24$

모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이려면 $h(2)>0$이어야 하므로

$k-24>0$　　$\therefore k>24$

$\therefore a=24$

답 ⑤

0770 $f(x)=x^3-3x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$0<x<2$일 때 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 2)$에서 감소한다.

따라서 $0<x<2$에서 $f(x)>0$이려면 $f(2) \geq 0$이어야 하므로

$8-12+k=-4+k \geq 0$

$\therefore k \geq 4$

즉 실수 k의 최솟값은 4이다.

답 ⑤

0771 $x^3>6x^2-k$에서　　$x^3-6x^2+k>0$

$f(x)=x^3-6x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$x>4$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(4, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x>4$에서 $f(x)>0$이려면 $f(4) \geq 0$이어야 하므로

$f(4)=64-96+k \geq 0$

$\therefore k \geq 32$

답 ⑤

0772 $2<x<4$에서 함수 $y=x^3+2x^2$의 그래프가 직선 $y=4x-k$보다 항상 아래에 있으려면 부등식

$x^3+2x^2<4x-k$, 즉 $x^3+2x^2-4x+k<0$

이 성립해야 한다. ⇨ ❶

$f(x)=x^3+2x^2-4x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+4x-4$
$=(x+2)(3x-2)$

$2<x<4$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(2, 4)$에서 증가한다. ⇨ ❷

따라서 $2<x<4$에서 $f(x)<0$이려면 $f(4) \leq 0$이어야 하므로

$64+32-16+k=80+k \leq 0$

$\therefore k \leq -80$ ⇨ ❸

즉 실수 k의 최댓값은 -80이다. ⇨ ❹

답 -80

채점 기준	비율
❶ 부등식을 세울 수 있다.	20%
❷ $f(x)$가 구간 $(2, 4)$에서 증가함을 알 수 있다.	30%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❹ k의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

0773 $2x^3+3x^2-12x \geq k$에서

$2x^3+3x^2-12x-k \geq 0$

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+6x-12$
$=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서　　$x=1$ ($\because x>0$)

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은　$f(1)=2+3-12-k=-7-k$

따라서 $x>0$일 때 $f(x) \geq 0$이려면 $f(1) \geq 0$이어야 하므로

$-7-k \geq 0$　　$\therefore k \leq -7$

답 ①

0774 $f(x)=2x^3+3x^2-36x+k$로 놓으면
$f'(x)=6x^2+6x-36=6(x+3)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ ($\because x<1$)

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	(1)
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	

$x<1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은
$f(-3)=-54+27+108+k=81+k$
따라서 $x<1$일 때 $f(x)\le 0$이려면 $f(-3)\le 0$이어야 하므로
$81+k\le 0$ $\therefore k\le -81$

답 ①

0775 $f(x)<g(x)$에서 $x^4+x^3+x^2<x^3-x^2+k$
$\therefore x^4+2x^2-k<0$
$h(x)=x^4+2x^2-k$로 놓으면
$h'(x)=4x^3+4x=4x(x^2+1)$
$h'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because x^2+1>0$)

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$3-k$	$\searrow$	$-k$	$\nearrow$	$24-k$

$-1\le x\le 2$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $24-k$를 갖는다.
따라서 $-1\le x\le 2$일 때 $h(x)<0$이려면 $h(2)<0$이어야 하므로
$24-k<0$ $\therefore k>24$
즉 정수 k의 최솟값은 25이다.

답 25

0776 점 P가 원점을 지나는 순간은 $x=0$일 때이므로
$t^3-2t^2+t=0$, $t(t-1)^2=0$
$\therefore t=0$ 또는 $t=1$
따라서 점 P가 출발 후 다시 원점을 지나는 순간은 $t=1$일 때이고, 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-4t+1$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-4$
이므로 $t=1$에서의 점 P의 가속도는
$6-4=2$

답 2

0777 점 P의 속도를 v라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2-12t-8$
$6t^2-12t-8=10$에서 $6t^2-12t-18=0$
$6(t+1)(t-3)=0$
$\therefore t=3$ ($\because t\ge 0$)
따라서 $t=3$에서의 점 P의 위치는
$2\cdot 3^3-6\cdot 3^2-8\cdot 3=-24$

답 ①

0778 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=2t^2+2pt+q$, $a=\dfrac{dv}{dt}=4t+2p$ ⇨ ❶
이때 $t=2$에서의 점 P의 속도가 9이므로
$2\cdot 2^2+2p\cdot 2+q=9$
$\therefore 4p+q=1$ …… ㉠
또 $t=2$에서의 점 P의 가속도가 6이므로
$4\cdot 2+2p=6$, $2p=-2$
$\therefore p=-1$
$p=-1$을 ㉠에 대입하면
$-4+q=1$ $\therefore q=5$ ⇨ ❷
$\therefore p+q=4$ ⇨ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도를 구할 수 있다.	40%
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20%

0779 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-15t+12=3(t-1)(t-4)$
운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$t=1$ 또는 $t=4$
즉 $t=1$일 때 점 P는 첫 번째로 운동 방향을 바꾸고, $t=4$일 때 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.
따라서 구하는 위치는 $t=4$에서의 점 P의 위치이므로
$4^3-\dfrac{15}{2}\cdot 4^2+12\cdot 4=-8$

답 ①

0780 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=t^2-8t+15=(t-3)(t-5)$
점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$t=3$ 또는 $t=5$
따라서 점 P는 $t=3$, $t=5$에서 운동 방향을 2번 바꾼다.

답 2번

0781 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-4t=t(3t-4)$
점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$t=0$ 또는 $t=\dfrac{4}{3}$
따라서 점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸는 순간은 $t=\dfrac{4}{3}$일 때이고, 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면
$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-4$
이므로 $t=\dfrac{4}{3}$에서의 점 P의 가속도는
$6\cdot\dfrac{4}{3}-4=4$

답 ④

0782 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면
$v_P=\dfrac{dx_P}{dt}=2t-4$, $v_Q=\dfrac{dx_Q}{dt}=2t-8$ ⇨ ❶
두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로
$(2t-4)(2t-8)<0$, $4(t-2)(t-4)<0$
$\therefore 2<t<4$ ⇨ ❷

따라서 $t=2$에서 $t=4$까지 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이므로 $\quad a=2,\ b=4$

$\therefore\ b-a=2$ ⇨ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 속도를 각각 구할 수 있다.	40%
❷ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20%

0783 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=5$

$t=1$에서의 점 P의 위치는

$1^3-9\cdot1^2+15=7$

$t=5$에서의 점 P의 위치는

$5^3-9\cdot5^2+15\cdot5=-25$

$\therefore\ |p-q|=|-25-7|=32$ 답 32

0784 ㄱ. $v(b)=0$이고 $t=b$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=b$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

ㄴ. $c<t<d$에서 $v'(t)>0$이므로 점 P의 속도는 증가한다.

ㄷ. $v'(t)=0$이면 가속도가 0이고, $v'(a)=0$, $v'(c)=0$이므로 가속도가 0이 되는 순간은 두 번이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0785 주어진 그림에서 점 P가 원점을 지나는 시각은 $t=3$ 또는 $t=5$이고, 이 중 처음으로 원점을 지나는 순간은 $t=3$이므로 구하는 속도는 $f'(3)$의 값과 같다. 답 ④

0786 자동차가 브레이크를 밟은 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=7.2-0.72t$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$7.2-0.72t=0 \qquad \therefore\ t=10$

따라서 이 자동차가 10초 동안 움직인 거리는

$7.2\times10-0.36\times10^2=36(\text{m})$ 답 ③

0787 제동을 건 지 t초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=4.8-2at$$ ⇨ ❶

이때 열차가 제동을 건 지 3초 후에 정지하므로 $t=3$일 때의 속도는 0이다.

즉 $4.8-6a=0$에서

$a=0.8$ ⇨ ❷

답 0.8

채점 기준	비율
❶ 속도를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%

0788 로켓의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=20-10t$$

최고 지점에 도달했을 때 $v=0$이므로

$20-10t=0 \qquad \therefore\ t=2$

따라서 2초 후 이 로켓의 지면으로부터의 높이는

$30+20\cdot2-5\cdot2^2=50\,(\text{m})$

답 ④

0789 공이 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $24.5t-4.9t^2=0$에서

$49t(5-t)=0 \qquad \therefore\ t=0$ 또는 $t=5$

따라서 공이 지면에 떨어지는 순간은 $t=5$일 때이고, 공의 t초 후의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=24.5-9.8t$$

이므로 $t=5$일 때의 공의 속도는

$24.5-9.8\times5=-24.5(\text{m/s})$

답 -24.5 m/s

0790 물체의 t초 후의 속도를 v m/s, 가속도를 a m/s²이라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=30-10t$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-10$$

ㄱ. 가속도 a는 상수이므로 물체의 가속도는 일정하다.

ㄴ. $t=1$일 때의 속도는

$30-10\cdot1=20(\text{m/s})$

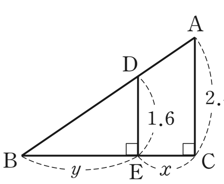
ㄷ. 최고 높이에 도달한 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$30-10t=0 \qquad \therefore\ t=3$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0791 t초 동안 재현이가 움직인 거리를 x m, 재현이의 그림자의 길이를 y m라 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle\text{ABC}\backsim\triangle\text{DBE}$

이므로

$2.4:1.6=(x+y):y$

$2.4y=1.6(x+y), \qquad 0.8y=1.6x$

$\therefore\ y=2x$

이때 $x=2t$이므로 $\qquad y=4t$

$$\therefore\ \frac{dy}{dt}=4$$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 4 m/s이다.

답 ④

0792 $l=t^2+3t+20$에서 $\qquad \dfrac{dl}{dt}=2t+3$

따라서 $t=3$일 때 고무줄의 길이의 변화율은

$2\cdot3+3=9$

답 ③

0793 변의 길이가 길어지기 시작한 지 t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(6+2t)$ cm이므로 정사각형의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=(6+2t)^2$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\frac{dS}{dt}=2\cdot(6+2t)\cdot2=8t+24$

따라서 3초 후의 정사각형의 넓이의 변화율은

$8\cdot3+24=48\,(\text{cm}^2/\text{s})$ 답 ④

라쎈 특강

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $y=\{f(x)\}^n$이면

$y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

0794 돌을 던진 지 t초 후의 가장 바깥쪽 파문의 반지름의 길이는 $15t$ cm이므로 가장 바깥쪽 파문의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=\pi(15t)^2=225\pi t^2$ ⇨ ❶

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\frac{dS}{dt}=450\pi t$ ⇨ ❷

따라서 2초 후의 가장 바깥쪽 파문의 넓이의 변화율은

$450\pi\cdot2=900\pi\,(\text{cm}^2/\text{s})$ ⇨ ❸

답 900π cm^2/s

채점 기준	비율
❶ 가장 바깥쪽 파문의 넓이 S를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $\frac{dS}{dt}$를 구할 수 있다.	30%
❸ 답을 구할 수 있다.	30%

0795 점 P가 출발한 지 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는

$\text{P}(2t,\ 0),\ \text{Q}(0,\ 3(t-1))\ (t\ge1)$

이므로 △OPQ의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot2t\cdot3(t-1)=3t^2-3t$

$\therefore \frac{dS}{dt}=6t-3$

따라서 점 P가 출발한 지 4초 후의 △OPQ의 넓이의 변화율은

$6\cdot4-3=21$ 답 ④

0796 시각 t에서의 구의 부피를 V라 하면

$V=\frac{4}{3}\pi(0.5t)^3=\frac{1}{6}\pi t^3$

$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{1}{2}\pi t^2$

따라서 $t=10$일 때 구의 부피의 변화율은

$\frac{1}{2}\pi\times10^2=50\pi$ 답 50π

0797 t초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(4+t)$cm이므로 정육면체의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=(4+t)^3$

$\therefore \frac{dV}{dt}=3(4+t)^2$

따라서 $t=2$일 때 정육면체의 부피의 변화율은

$3(4+2)^2=108\,(\text{cm}^3/\text{s})$ 답 108 cm^3/s

0798 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면

$r=5+t,\ h=10-t$

원기둥의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=\pi r^2h=\pi(5+t)^2(10-t)$

$\therefore \frac{dV}{dt}=2\pi(5+t)(10-t)+\pi(5+t)^2\cdot(-1)$

$=3\pi(5+t)(5-t)$

$\frac{dV}{dt}=0$에서

$t=5\ (\because\ 0<t<10)$ 답 ⑤

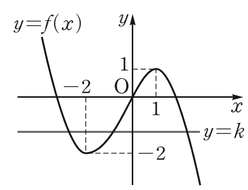
0799 전략 주어진 조건을 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x)-k=0$에서 $f(x)=k$

주어진 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(-2)=f'(1)=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	1	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=k$와 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$-2<k<1$

따라서 정수 k는 -1, 0의 2개이다. 답 2

0800 전략 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 $(f(x)$의 최솟값$)>0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4-4x^3+k$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(3)=3^4-4\cdot3^3+k=k-27$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $f(3)>0$이어야 하므로

$k-27>0 \qquad \therefore k>27$

즉 정수 k의 최솟값은 28이다. 답 ④

0801 전략 점 P의 시각 t에서의 위치가 x일 때, 점 P의 속도는 $v=\frac{dx}{dt}$, 가속도는 $a=\frac{dv}{dt}$임을 이용한다.

풀이 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=30+50t-15t^2,\quad a=\frac{dv}{dt}=50-30t$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$50-30\cdot4=-70$ 답 ①

0802 전략 시각 t에서의 넓이를 S라 할 때, 넓이의 변화율은 $\dfrac{dS}{dt}$임을 이용한다.

풀이 원의 반지름의 길이가 $4t$이므로 원의 넓이를 S라 하면

$S=\pi(4t)^2=16\pi t^2$ ⇨ ❶

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=32\pi t$ ⇨ ❷

이때 원의 넓이가 48π이려면

$16\pi t^2=48\pi,\quad t^2=3$

$\therefore t=\sqrt{3}\ (\because\ t>0)$ ⇨ ❸

따라서 구하는 원의 넓이의 변화율은

$32\pi\cdot\sqrt{3}=32\sqrt{3}\pi$ ⇨ ❹

답 $32\sqrt{3}\pi$

채점 기준	비율
❶ 원의 넓이 S를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $\dfrac{dS}{dt}$를 구할 수 있다.	30%
❸ 넓이가 48π일 때의 t의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ 답을 구할 수 있다.	20%

0803 전략 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형하고 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $3x^4+8x^3-18x^2+k=0$에서

$-3x^4-8x^3+18x^2=k$ …… ㉠

$f(x)=-3x^4-8x^3+18x^2$으로 놓으면

$f'(x)=-12x^3-24x^2+36x$

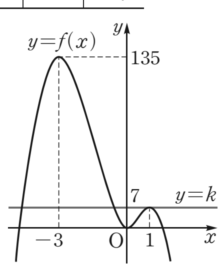
$=-12x(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	135	↘	0	↗	7	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$k=7$ ($\because$ k는 자연수)



답 ⑤

0804 전략 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표의 부호를 알아본다.

풀이 $x^3-9x^2+24x-k=0$에서

$x^3-9x^2+24x=k$

$f(x)=x^3-9x^2+24x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-18x+24$

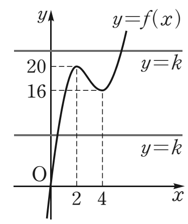
$=3(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	16	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 한 개의 양근만을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점이 1개이고, 교점의 x좌표가 양수이어야 하므로

$0<k<16$ 또는 $k>20$



즉 $\alpha=16$, $\beta=20$이므로

$\beta-\alpha=4$

답 ②

0805 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 서로 접하면 방정식 $f(x)=g(x)$가 중근을 가짐을 이용한다.

풀이 주어진 곡선과 직선이 접하려면 방정식

$x^3-2x+7=x+k$, 즉 $x^3-3x+7-k=0$

이 중근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x+7-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(1)=0$이어야 하므로

$(9-k)(5-k)=0$

$\therefore k=5$ 또는 $k=9$

따라서 구하는 k의 값의 합은

$5+9=14$

답 14

다른풀이 $f(x)=x^3-2x+7$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t+7)$이라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=3t^2-2=1,\quad t^2=1$

$\therefore t=\pm1$

즉 접점의 좌표가 $(-1,\ 8)$, $(1,\ 6)$이므로 접선의 방정식은

$y-8=x+1$, $y-6=x-1$

$\therefore\ y=x+9$, $y=x+5$

따라서 $k=9$ 또는 $k=5$이므로 구하는 k의 값의 합은

$9+5=14$

0806 전략 함수 $f(x)$의 그래프가 함수 $g(x)$의 그래프보다 항상 위에 있으면 $f(x)>g(x)$이다.

풀이 $x>3$에서 곡선 $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$이 직선 $y=-2x+k$보다 항상 위에 있으려면

$\dfrac{1}{3}x^3-x^2>-2x+k$, 즉 $\dfrac{1}{3}x^3-x^2+2x-k>0$

이어야 한다.

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+2x-k$로 놓으면

$f'(x)=x^2-2x+2$

$=(x-1)^2+1\ge1$

$f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(3,\ \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x>3$에서 $f(x)>0$이려면 $f(3)\ge0$이어야 하므로

$f(3)=6-k\ge0\quad \therefore k\le6$

즉 실수 k의 최댓값은 6이다.

답 ③

0807 전략 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$일 때 속도는 $f'(t)$이다.

풀이 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_{P}, v_{Q}라 하면

$v_{\mathrm{P}}=p'(t)=t^2+10,\quad v_{\mathrm{Q}}=q'(t)=7t$

$v_{\mathrm{P}}=v_{\mathrm{Q}}$에서 $\quad t^2+10=7t,\quad t^2-7t+10=0$

$(t-2)(t-5)=0 \qquad \therefore t=2\ (\because 0<t<5)$

이때 $t=2$에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$p(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3+10\cdot 2+\frac{1}{3}=23,$$

$$q(2)=\frac{7}{2}\cdot 2^2-8=6$$

이므로 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|p(2)-q(2)|=|23-6|=17$

답 ③

0808 전략 시각 t에서의 속도가 v일 때 가속도는 $\frac{dv}{dt}$이다.

풀이 ① 점 P의 가속도는 $v'(t)$이고, $v'(a)<0$이므로 $t=a$일 때 가속도는 음수이다.

② $c<t<d$일 때, $v'(t)>0$이므로 속도는 증가한다.

③ $b<t<d$일 때, $v(t)$가 일차함수이므로

$v'(t)=c$ (c는 상수)

따라서 가속도는 일정하다.

④ $t=e$에서 $v(t)>0$이므로 점 P는 양의 방향으로 움직이고 있다.

⑤ $v(c)=0$이고, $t=c$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

따라서 $0<t<e$에서 점 P는 운동 방향을 1번 바꾼다.

답 ④

0809 전략 구의 반지름의 길이를 r라 할 때 겉넓이는 $4\pi r^2$이다.

풀이 t초 후의 고무풍선의 반지름의 길이는 $(2+t)$ cm이므로 고무풍선의 겉넓이를 $S\ \mathrm{cm}^2$라 하면

$S=4\pi(2+t)^2$

$$\therefore \frac{dS}{dt}=2\cdot 4\pi(2+t)=8\pi(2+t)$$

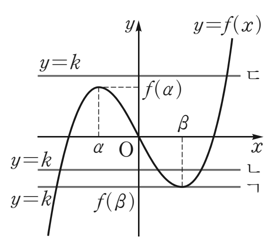
따라서 4초 후의 고무풍선의 겉넓이의 변화율은

$8\pi(2+4)=48\pi\ (\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

답 $48\pi\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$

0810 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이고 $f(0)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $k=f(\beta)$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=k$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(\beta)<k<0$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점이 3개이고, 교점의 x좌표 중에서 양수가 2개, 음수가 1개이므로 방정식 $f(x)=k$는 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 갖는다.

ㄷ. $k>f(\alpha)$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점이 1개이고, 교점의 x좌표가 양수이므로 방정식 $f(x)=k$는 오직 하나의 양근을 갖는다.

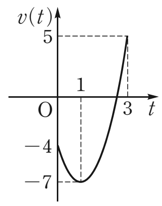
이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0811 전략 점 P의 시각 t에서의 속도는 $x'(t)$임을 이용한다.

풀이 $v(t)=x'(t)=3t^2-6t-4$

$=3(t-1)^2-7$ ⇨ ❶



즉 $0\le t\le 3$에서 $v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$-7\le v(t)\le 5$

$0\le |v(t)|\le 7$ ⇨ ❷

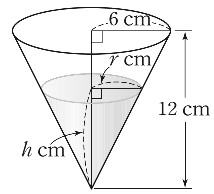
따라서 $|v(t)|$의 최댓값은 7이다. ⇨ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ $v(t)$를 구할 수 있다.	30%
❷ $\lvert v(t)\rvert$의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ $\lvert v(t)\rvert$의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

0812 전략 시각 t에서의 부피가 V일 때, 부피의 변화율은 $\frac{dV}{dt}$이다.

풀이 t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm, 수면의 높이를 h cm라 하면 오른쪽 그림에서



$6:12=r:h$

$$\therefore r=\frac{1}{2}h$$

이때 $h=0.5t=\frac{1}{2}t$이므로 $\qquad r=\frac{1}{4}t$

따라서 물의 부피를 $V\ \mathrm{cm}^3$라 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{4}t\right)^2\cdot\frac{1}{2}t$$

$$=\frac{1}{96}\pi t^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{1}{32}\pi t^2$$

높이가 5 cm가 되는 시각은

$5=0.5t \qquad \therefore t=10$

이므로 $t=10$일 때 물의 부피의 변화율은

$$\frac{1}{32}\pi\cdot 10^2=\frac{25}{8}\pi\ (\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$$

답 ①

Ⅳ. 다항함수의 적분법

09 부정적분

0813 (1) $f'(x)=2x-1$

(2) $\int f'(x)dx=\int(2x-1)dx=x^2-x+C$

답 풀이 참조

0814 ㄴ. $\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$이므로 $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$

ㄷ. $\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)'=x+1$이므로 $\int(x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x+C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

0815 $f(x)=(3x+C)'=3$

답 $f(x)=3$

0816 $f(x)=(x^2+2x+C)'=2x+2$

답 $f(x)=2x+2$

0817 $f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-3x+C\right)'=x-3$

답 $f(x)=x-3$

0818 $f(x)=(x^3+5x+C)'=3x^2+5$

답 $f(x)=3x^2+5$

0819 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$이므로

$\frac{d}{dx}\int(x^2+x)dx=x^2+x$

답 x^2+x

0820 $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+x)\right\}dx=x^2+x+C$

답 x^2+x+C

0821 답 $5x+C$

0822 답 $\frac{1}{2}x^2+C$

0823 답 $\frac{1}{4}x^4+C$

0824 답 $\frac{1}{8}x^8+C$

0825 답 $5x^2+C$

0826 답 $\frac{1}{2}x^2+x+C$

0827 답 $\frac{1}{2}x^2-7x+C$

0828 답 x^2+x+C

0829 답 $\frac{1}{3}x^3-2x^2+C$

0830 답 $\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+5x+C$

0831 $\int(x+1)^2dx=\int(x^2+2x+1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$

답 $\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$

0832 $\int(x-1)(x^2+x+1)dx=\int(x^3-1)dx=\frac{1}{4}x^4-x+C$

답 $\frac{1}{4}x^4-x+C$

0833 $\int\frac{x^2-1}{x-1}dx=\int\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}dx=\int(x+1)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+x+C$

답 $\frac{1}{2}x^2+x+C$

0834 $\int\frac{x^3+1}{x+1}dx=\int\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$

$=\int(x^2-x+1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

답 $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

0835 $\int f(x)dx=-x^3+3x^2+5x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(-x^3+3x^2+5x+C)'=-3x^2+6x+5$

$\therefore f(2)=-3\cdot2^2+6\cdot2+5=5$

답 ③

0836 $F(x)=2x^2-3x+1$로 놓으면

$f(x)=F'(x)=(2x^2-3x+1)'=4x-3$

$\therefore f(-1)=-7$

답 ②

0837 $\int xf(x)dx=x^3+4x^2-7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=(x^3+4x^2-7)'=3x^2+8x$

$=x(3x+8)$

따라서 $f(x)=3x+8$이므로

$f(4)=3\cdot4+8=20$

답 20

0838 $f(x)=F'(x)=(x^3+ax^2+bx)'$

$=3x^2+2ax+b$

$f(0)=1$이므로 $b=1$ ⇨ ❶

따라서 $f(x)=3x^2+2ax+1$이므로

$f'(x)=6x+2a$

$f'(0)=4$이므로 $2a=4$

$\therefore a=2$ ⇨ ❷

$\therefore ab=2$ ⇨ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

0839 $\int F(x)dx=f(x)g(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}F(x)&=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\\&=2x(2x-3)+(x^2+1)\cdot 2\\&=6x^2-6x+2\end{aligned}$$

따라서 함수 $F(x)$의 상수항은 2이다. 답 2

0840 $\frac{d}{dx}\int(x^2+ax+5)dx=bx^2-x+c$이므로

$x^2+ax+5=bx^2-x+c$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=-1,\ b=1,\ c=5$

$\therefore\ a+b+c=5$ 답 ③

라쎈 특강 항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이다.
➡ $a=b=c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이다.
➡ $a=a',\ b=b',\ c=c'$

③ $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이다.
➡ $a=b=c=0$

④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 x, y에 대한 항등식이다.
➡ $a=a',\ b=b',\ c=c'$

0841 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=5x^2-2x+1$이므로

$f(x)=5x^2-2x+1$

$\therefore\ f(1)=5-2+1=4$ 답 4

0842 $F(x)=\frac{d}{dx}\int xf(x)dx=xf(x)$

$=x(3x^2-4x)=3x^3-4x^2$

$\therefore\ F(2)=3\cdot 2^3-4\cdot 2^2=8$ 답 8

0843 $\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3+2x)\right\}dx=x^3+2x+C$이므로

$F(x)=x^3+2x+C$

$F(0)=-1$이므로 $\quad C=-1$

따라서 $F(x)=x^3+2x-1$이므로

$F(1)=1+2-1=2$ 답 2

0844 $\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-4x)\right\}dx=x^2-4x+C$이므로

$f(x)=x^2-4x+C=(x-2)^2+C-4$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 2이므로

$C-4=2 \qquad \therefore\ C=6$

따라서 $f(x)=x^2-4x+6$이므로

$f(3)=3^2-4\cdot 3+6=3$ 답 ①

0845 $\int\left[\frac{d}{dx}\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$

$=f(x)+C$

이므로

$F(x)=100x^{100}+99x^{99}+98x^{98}+\cdots+2x^2+x+C$

이때 $F(0)=1$이므로

$C=1$

따라서 $F(x)=100x^{100}+99x^{99}+98x^{98}+\cdots+2x^2+x+1$이므로

$$\begin{aligned}F(1)&=100+99+98+\cdots+2+1+1\\&=\sum_{k=1}^{100}k+1=\frac{100\cdot 101}{2}+1\\&=5051\end{aligned}$$

답 5051

0846 $\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+kx)\right\}dx=x^2+kx+C$이므로

$f(x)=x^2+kx+C$

$f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

즉 $f(x)=x^2+kx$이므로 $\quad f'(x)=2x+k$ …… ㉠

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=3$에서

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=3$

이므로 $x=-1$을 ㉠에 대입하면

$-2+k=3 \qquad \therefore\ k=5$

따라서 $f(x)=x^2+5x$이므로

$k+f(-2)=5-6=-1$ 답 ⑤

0847 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 2dx$

$\therefore\ f(x)+g(x)=2x+C_1$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=C_1$

이때 $f(0)=5$, $g(0)=-5$이므로

$C_1=0$

$\therefore\ f(x)+g(x)=2x$ …… ㉠

또 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=2x$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 2x\,dx$

$\therefore\ f(x)g(x)=x^2+C_2$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C_2$

이때 $f(0)=5$, $g(0)=-5$이므로

$C_2=-25$

$\therefore\ f(x)g(x)=x^2-25=(x+5)(x-5)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\begin{cases}f(x)=x+5\\g(x)=x-5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=x-5\\g(x)=x+5\end{cases}$

그런데 $f(0)=5$, $g(0)=-5$이므로

$f(x)=x+5$, $g(x)=x-5$

$\therefore\ f(1)-g(1)=6-(-4)=10$ 답 ④

다른풀이 $f(x)$, $g(x)$가 일차함수이고 $f(0)=5$, $g(0)=-5$이므로

$f(x)=ax+5$, $g(x)=bx-5$ (a, b는 0이 아닌 상수)

로 놓으면

$f(x)+g(x)=(a+b)x$, $f(x)g(x)=(ax+5)(bx-5)$

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=a+b$이므로

$a+b=2$ ...... ㉠

또 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=a(bx-5)+(ax+5)\cdot b=2abx-5a+5b$이므로 $2ab=2$, $-5a+5b=0$

$\therefore ab=1$, $a=b$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

따라서 $f(x)=x+5$, $g(x)=x-5$이므로

$f(1)-g(1)=10$

0848 $\int(x+2)f'(x)dx=x^3+x^2-8x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x+2)f'(x)=3x^2+2x-8=(x+2)(3x-4)$

$\therefore f'(x)=3x-4$ ⇨ ❶

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-4)dx$

$=\dfrac{3}{2}x^2-4x+C_1$ ⇨ ❷

따라서 함수 $f(x)$의 일차항의 계수는 -4이다. ⇨ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	50%
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $f(x)$의 일차항의 계수를 구할 수 있다.	10%

0849 $f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)dx$

$=x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}+C$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}$이므로

$f(2)=\underbrace{1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}}_{\text{첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제11항까지의 합}}$

$=\dfrac{2^{11}-1}{2-1}=2047$

답 ③

타쎈 특강 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 $r(r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

0850 $f(x)=\int(3+\sqrt{x})^2dx+\int(3-\sqrt{x})^2dx$

$=\int\{(3+\sqrt{x})^2+(3-\sqrt{x})^2\}dx$

$=\int(2x+18)dx=x^2+18x+C$ ⇨ ❶

$f(1)=10$이므로 $1+18+C=10$

$\therefore C=-9$ ⇨ ❷

따라서 $f(x)=x^2+18x-9$이므로

$f(-1)=1-18-9=-26$ ⇨ ❸

답 -26

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ C의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	30%

0851 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+4x+a)dx$

$=x^3+2x^2+ax+C$

이때 $f(0)=-4$이므로 $C=-4$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+ax-4$이므로 $f(-1)=2$에서

$-1+2-a-4=2$ $\therefore a=-5$

즉 $f(x)=x^3+2x^2-5x-4$이므로

$f(2)=8+8-10-4=2$

답 2

0852 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+8x+1)dx$

$=x^3+4x^2+x+C$

이때 $f(-1)=-4$이므로 $-1+4-1+C=-4$

$\therefore C=-6$

따라서 $f(x)=x^3+4x^2+x-6$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{-6}{1}=6$

답 ③

타쎈 특강 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

0853 $f'(x)=6x^2+8x-5$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2+8x-5)dx$

$=2x^3+4x^2-5x+C_1$

이때 $f(0)=1$이므로 $C_1=1$

따라서 $f(x)=2x^3+4x^2-5x+1$이므로

$\int f(x)dx=\int(2x^3+4x^2-5x+1)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+x+C$

답 ③

0854 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\dfrac{x^3+8}{x^2-2x+4}dx$

$=\int\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}dx=\int(x+2)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2+2x+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$f(0)=3$ $\therefore C=3$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2x+3$이고 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=f(-1)=\dfrac{1}{2}-2+3=\dfrac{3}{2}$

답 ④

0855 $\int f(x)dx=xf(x)-2x^3+x^2+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$
$xf'(x)=6x^2-2x$
$\therefore\ f'(x)=6x-2$
$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx=3x^2-2x+C_1$

이때 $f(1)=3$이므로
$3-2+C_1=3 \qquad \therefore\ C_1=2$
$\therefore\ f(x)=3x^2-2x+2$

답 $f(x)=3x^2-2x+2$

0856 $\int g(x)dx=x^3f(x)+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$
$\therefore\ g(3)=3\cdot3^2f(3)+3^3f'(3)$
$=3^3\cdot1+3^3\cdot(-2)=-27$

답 ②

0857 $2\int f(x)dx=xf(x)+6x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=f(x)+xf'(x)+6$
$\therefore\ f(x)=xf'(x)+6$ …… ㉠

$f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b\ (a\neq0)$로 놓으면 $f'(x)=a$이므로 ㉠에서
$ax+b=x\cdot a+6 \qquad \therefore\ b=6$
$\therefore\ f(x)=ax+6$

이때 $f(2)=10$이므로
$2a+6=10 \qquad \therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=2x+6$이므로
$f(-2)=-4+6=2$

답 ②

0858 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 부정적분이므로 $\quad F'(x)=f(x)$

$F(x)+\int(x-1)f(x)dx=x^4+8x^3-3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-1)f(x)=4x^3+24x^2-6x$ ⇨ ❶
$xf(x)=x(4x^2+24x-6)$
$\therefore\ f(x)=4x^2+24x-6$
$=4(x+3)^2-42$ ⇨ ❷

따라서 $f(x)$는 $x=-3$에서 최솟값 -42를 갖는다. ⇨ ❸

답 -42

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분할 수 있다.	30%
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ 최솟값을 구할 수 있다.	30%

타쎈 특강 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최대 · 최소

$y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형하면
① $a>0$일 때 $x=m$에서 최솟값 n을 갖는다.
② $a<0$일 때 $x=m$에서 최댓값 n을 갖는다.

0859 $f'(x)=\begin{cases}-2x & (x>1)\\ 3x^2 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x\geq1)\\ x^3+C_2 & (x<1)\end{cases}$

이때 $f(2)=2$이므로
$-4+C_1=2 \qquad \therefore\ C_1=6$

또 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉 $f(1)=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$에서
$-1+6=1+C_2 \qquad \therefore\ C_2=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-x^2+6 & (x\geq1)\\ x^3+4 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(-3)+f(3)=(-27+4)+(-9+6)$
$=-26$

답 -26

타쎈 특강 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.
(i) $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.
(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.
(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

0860 $f'(x)=\begin{cases}x+2 & (x>-1)\\ k & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+2x+C_1 & (x\geq-1)\\ kx+C_2 & (x<-1)\end{cases}$

$f(0)=2$이므로 $\quad C_1=2$
$f(-2)=-4$이므로 $\quad -2k+C_2=-4$ …… ㉠

또 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로
$f(-1)=\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)$에서
$\frac{1}{2}-2+2=-k+C_2$
$\therefore\ -k+C_2=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$C_2=5,\ k=\frac{9}{2}$

답 ⑤

0861 $f'(x)=\begin{cases}-x+2 & (x\geq1)\\ 1 & (x<1)\end{cases}$이므로 ⇨ ❶

$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+2x+C_1 & (x\geq1)\\ x+C_2 & (x<1)\end{cases}$ ⇨ ❷

$y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로
$f(0)=0 \qquad \therefore\ C_2=0$

또 $f(x)$가 연속함수이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉 $f(1)=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$에서
$-\frac{1}{2}+2+C_1=1$
$\therefore\ C_1=-\frac{1}{2}$ ⇨ ❸

따라서 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2} & (x\ge1) \\ x & (x<1) \end{cases}$ 이므로

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{11}{8}$$ ⇨ ❹

답 $\frac{11}{8}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20%
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	20%
❸ C_1, C_2의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ $f\left(\frac{3}{2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0862 $f'(x)=x^2+1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2+1)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+x+C$$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$f(0)=-2$ $\quad\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x-2$이므로

$$f(2)=\frac{8}{3}+2-2=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

0863 $f(x)=\int(1-2ax)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-2ax$

점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 -3이므로 $\quad f'(1)=-3$

$1-2a=-3$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore f'(x)=1-4x$

$$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx=\int(1-4x)dx$$
$$=x-2x^2+C$$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로 $\quad f(1)=4$

$1-2+C=4$ $\quad\therefore C=5$

따라서 $f(x)=-2x^2+x+5$이므로

$f(3)=-18+3+5=-10$

답 ①

0864 $f'(x)=4x-k$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x-k)dx$$
$$=2x^2-kx+C$$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$f(0)=1$ $\quad\therefore C=1$

$\therefore\ f(x)=2x^2-kx+1$

따라서 이차방정식 $2x^2-kx+1=0$의 두 근의 합이 $\frac{3}{2}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{k}{2}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore k=3$

즉 $f(x)=2x^2-3x+1$이므로 $\quad f(2)=3$

답 ⑤

0865 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(h)-f(0)\}-\{f(-h)-f(0)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}$$
$$=f'(0)+f'(0)=2f'(0)$$

$f(x)=\int(x-2)(x^2+2x+4)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8$

$\therefore f'(0)=-8$

따라서 구하는 값은

$2f'(0)=2\cdot(-8)=-16$

답 ①

0866 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x-2h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x-h)-f(x)\}-\{f(x-2h)-f(x)\}}{h}$$
$$=-\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}+2\lim_{h\to0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}$$
$$=-f'(x)+2f'(x)=f'(x)$$

즉 $f'(x)=3x^2-4x+5$에서

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x+5)dx$$
$$=x^3-2x^2+5x+C$$

$f(0)=1$이므로 $\quad C=1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+5x+1$이므로

$f(-1)=-1-2-5+1=-7$

답 -7

0867 $f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{3}{2}$을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-x-2)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C$$

이므로 $f(-1)=\frac{3}{2}$에서

$-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2+C=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore\ C=\frac{1}{3}$

즉 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{3}$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(2)=\frac{8}{3}-2-4+\frac{1}{3}=-3$

답 ④

0868 $f'(x)=a(x+1)^2+1\ (a\neq0)$로 놓으면 $f'(0)=0$이므로

$a+1=0$ $\quad\therefore\ a=-1$

$\therefore\ f'(x)=-(x+1)^2+1=-x^2-2x=-x(x+2)$ ⇨ ❶

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$ ⇨ ❷

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-x^2-2x)dx$$
$$=-\frac{1}{3}x^3-x^2+C$$

$f(0)=1$이므로 $\quad C=1$

즉 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+1$이므로 ⇨ ❸

$f(3)=-9-9+1=-17$ ⇨ ❹

답 -17

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❹ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	10%

0869 $f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이다. 이때 $f'(1)=f'(5)=0$이므로

$f'(x)=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 7을 갖고, $x=5$에서 극솟값을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int 3(x-1)(x-5)dx=\int(3x^2-18x+15)dx$$
$$=x^3-9x^2+15x+C$$

$f(1)=7$이므로 $\quad 1-9+15+C=7$

$\therefore C=0$

즉 $f(x)=x^3-9x^2+15x$이므로 극솟값은

$f(5)=125-225+75=-25$

답 ②

다른풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(1)=0$에서 $\quad 3+2a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(5)=0$에서 $\quad 75+10a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-9,\ b=15$

$\therefore f(x)=x^3-9x^2+15x+c$

$f(1)=7$에서 $\quad 1-9+15+c=7 \quad \therefore c=0$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+15x$이므로 극솟값은

$f(5)=-25$

0870 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0 \quad \therefore f(0)=0$

$f'(0)=2$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0)+f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=2$$

즉 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=2$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-x=2-x$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2-x)dx$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+2x+C$$

그런데 $f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$이므로

$f(2)=-2+4=2$

답 ③

0871 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+2 \quad \therefore f(0)=-2$

$f'(0)=3$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0)+f(h)+2-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2}{h}=3$$

즉 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2}{h}=3$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2}{h}=3$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int 3dx=3x+C$$

그런데 $f(0)=-2$이므로 $\quad C=-2$

$\therefore f(x)=3x-2$

답 $f(x)=3x-2$

0872 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy+1$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1 \quad \therefore f(0)=-1$

$f'(1)=1$이므로

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-2h+1-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2h+1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}-2=1$$

즉 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}=3$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-2xh+1-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2xh+1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}-2x$$
$$=3-2x$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3-2x)dx$$
$$=-x^2+3x+C$$

그런데 $f(0)=-1$이므로 $\quad C=-1$

따라서 $f(x)=-x^2+3x-1$이므로

$f(1)=-1+3-1=1$ 답 1

0873 전략 적분변수가 y이므로 y 이외의 문자는 상수로 생각하여 적분한다.

풀이 $\int(2x+y)^2dy=\int(4x^2+4xy+y^2)dy$

$$=4x^2y+2xy^2+\frac{1}{3}y^3+C$$

답 $4x^2y+2xy^2+\frac{1}{3}y^3+C$

0874 전략 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{d}{dx}\int(2x^3+x+1)dx=2x^3+x+1$

따라서 $f'(x)=6x^2+1$이므로

$f'(1)=6+1=7$ 답 7

0875 전략 $\int f(x)dx-\int g(x)dx=\int\{f(x)-g(x)\}dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int\frac{x^3}{x-1}dx-\int\frac{1}{x-1}dx=\int\frac{x^3-1}{x-1}dx$

$$=\int\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx=\int(x^2+x+1)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$$

이때 $f(1)=\frac{5}{6}$이므로

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+C=\frac{5}{6}\qquad\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-1$이므로

$f(2)=\frac{8}{3}+2+2-1=\frac{17}{3}$ 답 ②

0876 전략 $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-12x)dx=x^3-6x^2+C$

이때 $f(0)=1$이므로

$C=1$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+1$이므로

$f(-1)=-1-6+1=-6$ 답 ③

0877 전략 $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int3x^2dx$이므로

$f(x)g(x)=x^3+C$

이때 조건 (나)에서 $f(1)=3,\ g(1)=0$이므로

$f(1)g(1)=1+C,\qquad 0=1+C$

$\therefore C=-1$

따라서 $f(x)g(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이고 $f(1)=3$, $g(1)=0$이므로

$f(x)=x^2+x+1,\ g(x)=x-1$

$\therefore f(2)+g(4)=(4+2+1)+3=10$ 답 10

0878 전략 $\int f(x)dx\pm\int g(x)dx=\int\{f(x)\pm g(x)\}dx$ (복호동순)임을 이용한다.

풀이 $f(x)+g(x)=\int(x^2-6x)dx$ …… ㉠

$f(x)-g(x)=\int(x^2+2x)dx$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$$2f(x)=\int(x^2-6x)dx+\int(x^2+2x)dx$$
$$=\int(2x^2-4x)dx=\frac{2}{3}x^3-2x^2+C_1$$
$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{C_1}{2}$$

이때 $f(0)=0$이므로 $\quad C_1=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$ ⇨ ❶

㉠−㉡을 하면

$$2g(x)=\int(x^2-6x)dx-\int(x^2+2x)dx$$
$$=\int(-8x)dx=-4x^2+C_2$$
$$\therefore g(x)=-2x^2+\frac{C_2}{2}$$

이때 $g(0)=0$이므로 $\quad C_2=0$

$\therefore g(x)=-2x^2$ ⇨ ❷

$\therefore f(6)g(-1)=36\cdot(-2)=-72$ ⇨ ❸

답 -72

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $f(6)g(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0879 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $F(x)=xf(x)-x^3+2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2+4x$

$xf'(x)=3x^2-4x\qquad\therefore f'(x)=3x-4$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-4)dx$$
$$=\frac{3}{2}x^2-4x+C$$

이때 $f(0)=1$이므로 $\quad C=1$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-4x+1$이므로

$$f(1)=\frac{3}{2}-4+1=-\frac{3}{2}$$

답 ①

0880 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이다.

풀이 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^2에 정비례하므로

$f'(x)=ax^2$ (a는 상수)

으로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax^2dx=\frac{a}{3}x^3+C$$

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ -2)$를 지나므로

$f(-2)=0$에서 $\quad -\frac{8}{3}a+C=0$ …… ㉠

$f(0)=-2$에서 $\quad C=-2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad a=-\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-2$이므로

$$f(-4)=16-2=14$$

답 ④

0881 전략 극한의 성질과 미분계수를 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3a-1$에서 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0 \quad \therefore f(1)=0$ ⇨ ❶

즉 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=3a-1$

한편 $f'(x)=3x+a$에서 $f'(1)=3+a$이므로

$3a-1=3+a,\quad 2a=4$

$\therefore a=2$ ⇨ ❷

따라서 $f'(x)=3x+2$이므로

$$f(x)=\int(3x+2)dx=\frac{3}{2}x^2+2x+C$$

이때 $f(1)=0$이므로 $\quad \frac{3}{2}+2+C=0$

$\therefore C=-\frac{7}{2}$

즉 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{7}{2}$이므로 ⇨ ❸

$f(0)=-\frac{7}{2}$ ⇨ ❹

답 $-\frac{7}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f(1)=0$임을 알 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	30%
❹ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	10%

0882 전략 극댓값을 갖는 x좌표와 극솟값을 갖는 x좌표를 각각 찾는다.

풀이 $f'(x)=ax(x-3)$ $(a<0)$으로 놓으면

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 14를 갖고, $x=0$에서 극솟값 5를 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax(x-3)dx$$
$$=\int(ax^2-3ax)dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3-\frac{3}{2}ax^2+C$$

$f(3)=14$에서 $\quad -\frac{9}{2}a+C=14$ …… ㉠

$f(0)=5$에서 $\quad C=5$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad a=-2$

$\therefore f(x)=-\frac{2}{3}x^3+3x^2+5$

답 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+3x^2+5$

0883 전략 도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{axh+\frac{1}{2}h^2}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\left(ax+\frac{1}{2}h\right)=ax$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int ax\,dx=\frac{1}{2}ax^2+C$$

$f(1)=2$에서 $\quad \frac{1}{2}a+C=2$

$\therefore a+2C=4$ …… ㉠

$f(3)=6$에서 $\quad \frac{9}{2}a+C=6$

$\therefore 9a+2C=12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ C=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$이므로

$$f(2)=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

답 ④

0884 전략 $f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ $(a\neq0)$로 놓고 주어진 조건을 이용하여 $g(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=ax+b$ $(a\neq0)$로 놓으면

$$g(x)=\int\{x+f(x)\}dx=\int\{(1+a)x+b\}dx$$
$$=\frac{1+a}{2}x^2+bx+C$$

이때 $f(x)g(x)=-2x^2+4x$이고 $f(x)$는 일차함수이므로 $g(x)$도 일차함수이다. 즉

$\frac{1+a}{2}=0 \quad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)g(x)=(-x+b)(bx+C)$
$=-bx^2+(-C+b^2)x+bC$
따라서 $-b=-2$, $-C+b^2=4$, $bC=0$이므로
$b=2$, $C=0$
즉 $g(x)=2x$이므로
$g(1)=2$

답 2

0885 전략 $\int nx^{n-1}dx=x^n+C$임을 이용한다.

풀이 $f_n(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$
$=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+C$
이때 $f_n(0)=1$이므로 $C=1$
따라서 $f_n(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(\frac{3}{4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$$

답 ⑤

타센 특강 등비급수의 합

$|r|<1$일 때,
$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$
$$=\frac{a}{1-r}$$

0886 전략 직선 $y=3x+2$와 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를 (a, b)로 놓고 주어진 조건을 이용한다.

풀이 직선 $y=3x+2$와 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를 (a, b)라 하면 $f'(a)=3$이므로
$3a^2-a+1=3$, $3a^2-a-2=0$
$(3a+2)(a-1)=0$
$\therefore a=1$ ($\because a>0$)
또 $b=3a+2$이므로 $b=5$
한편 $f'(x)=3x^2-x+1$이므로
$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-x+1)dx$$
$$=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$$
이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 5)$를 지나므로 $f(1)=5$
$1-\frac{1}{2}+1+C=5$ $\therefore C=\frac{7}{2}$
따라서 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{7}{2}$이므로 곡선 $y=f(x)$의 y절편은 $\frac{7}{2}$이다.

답 $\frac{7}{2}$

다른풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-x+1)dx$
$$=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는
$f'(a)=3a^2-a+1$
이므로 접선의 방정식은
$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$
$$=(3a^2-a+1)(x-a)+a^3-\frac{1}{2}a^2+a+C$$
$$=(3a^2-a+1)x-2a^3+\frac{1}{2}a^2+C \quad \cdots\cdots ㉠$$
이때 $y=3x+2$는 ㉠과 같으므로
$3a^2-a+1=3$, $-2a^3+\frac{1}{2}a^2+C=2$
$3a^2-a+1=3$에서 $3a^2-a-2=0$
$(3a+2)(a-1)=0$
$\therefore a=-\frac{2}{3}$ 또는 $a=1$
이때 $a>0$이므로 $a=1$
$a=1$을 $-2a^3+\frac{1}{2}a^2+C=2$에 대입하면
$-2+\frac{1}{2}+C=2$ $\therefore C=\frac{7}{2}$
$\therefore f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{7}{2}$
따라서 곡선 $y=f(x)$의 y절편은 $\frac{7}{2}$이다.

0887 전략 함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases}3x^2 & (|x|>1)\\-3x^2+4 & (|x|<1)\end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}x^3+C_1 & (x\ge1)\\-x^3+4x+C_2 & (-1\le x<1)\\x^3+C_3 & (x<-1)\end{cases}$$
$f(-2)=-7$이므로
$-8+C_3=-7$ $\therefore C_3=1$
이때 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로
$f(-1)=\lim_{x\to-1+}(-x^3+4x+C_2)=\lim_{x\to-1-}(x^3+1)$
$1-4+C_2=-1+1$ $\therefore C_2=3$
또 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$f(1)=\lim_{x\to1+}(x^3+C_1)=\lim_{x\to1-}(-x^3+4x+3)$
$1+C_1=6$ $\therefore C_1=5$
따라서 $f(x)=\begin{cases}x^3+5 & (x\ge1)\\-x^3+4x+3 & (-1\le x<1)\\x^3+1 & (x<-1)\end{cases}$이므로
$f(2)=8+5=13$

답 ①

Ⅳ. 다항함수의 적분법

10 정적분

0888 n개의 직사각형의 가로의 길이는 위에서부터 차례대로

$$\frac{a}{n},\ \frac{2a}{n},\ \frac{3a}{n},\ \cdots,\ \frac{na}{n}=a$$

이때 직사각형 한 개의 세로의 길이는 $\boxed{\frac{h}{n}}$이므로 이들 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{h}{n}\cdot\frac{a}{n}+\frac{h}{n}\cdot\frac{2a}{n}+\frac{h}{n}\cdot\frac{3a}{n}+\cdots+\frac{h}{n}\cdot a$$
$$=\frac{h}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka}{n}=\frac{ah}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{ah}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\boxed{\frac{ah(n+1)}{2n}}$$

$$\therefore S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{ah(n+1)}{2n}=\boxed{\frac{ah}{2}}$$

$\therefore$ (가) $\frac{h}{n}$ (나) $\frac{ah(n+1)}{2n}$ (다) $\frac{ah}{2}$

답 풀이 참조

0889 $f(x)=2x$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이다.
정적분의 정의에서 $a=0$, $b=1$이라 하면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\boxed{\frac{1}{n}},\ x_k=a+k\Delta x=\boxed{\frac{k}{n}},$$

$$f(x_k)=2x_k=\frac{\boxed{2k}}{n}$$

$$\therefore \int_0^1 2x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\boxed{1}$$

$\therefore$ (가) $\frac{1}{n}$ (나) $\frac{k}{n}$ (다) $2k$ (라) 1

답 풀이 참조

0890 답 x^2+2

0891 답 $(x+1)^2$

0892 $\int 4x\,dx=2x^2+C$이므로

$$\int_0^3 4x\,dx=\Big[2x^2\Big]_0^3=18$$

답 18

0893 $\int(x^2+1)dx=\frac{1}{3}x^3+x+C$이므로

$$\int_0^1(x^2+1)dx=\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

0894 $\int(3x^2-2x)dx=x^3-x^2+C$이므로

$$\int_1^3(3x^2-2x)dx=\Big[x^3-x^2\Big]_1^3$$
$$=(27-9)-(1-1)$$
$$=18$$

답 18

0895 $\int(x^3+2x+1)dx=\frac{1}{4}x^4+x^2+x+C$이므로

$$\int_{-1}^1(x^3+2x+1)dx=\Big[\frac{1}{4}x^4+x^2+x\Big]_{-1}^1$$
$$=\Big(\frac{1}{4}+1+1\Big)-\Big(\frac{1}{4}+1-1\Big)$$
$$=2$$

답 2

0896 (1) $\int f(x)dx=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x+C$이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1(2x^2+3x+1)dx=\Big[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x\Big]_{-1}^1$$
$$=\Big(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+1\Big)-\Big(-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-1\Big)$$
$$=\frac{10}{3}$$

(2) $\int_1^{-1}f(x)dx=-\int_{-1}^1 f(x)dx=-\frac{10}{3}$

답 (1) $\frac{10}{3}$ (2) $-\frac{10}{3}$

다른풀이 (2) $\int_1^{-1}f(x)dx=\int_1^{-1}(2x^2+3x+1)dx$

$$=\Big[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x\Big]_1^{-1}$$
$$=\Big(-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-1\Big)-\Big(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+1\Big)$$
$$=-\frac{10}{3}$$

0897 $\int(5x-2)dx=\frac{5}{2}x^2-2x+C$이므로

$$\int_0^{-1}(5x-2)dx=\Big[\frac{5}{2}x^2-2x\Big]_0^{-1}$$
$$=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

0898 $\int(3x^2+1)dx=x^3+x+C$이므로

$$\int_3^1(3x^2+1)dx=\Big[x^3+x\Big]_3^1$$
$$=(1+1)-(27+3)$$
$$=-28$$

답 -28

0899 $\int(6x^2-2x+5)dx=2x^3-x^2+5x+C$이므로

$$\int_2^1(6x^2-2x+5)dx=\Big[2x^3-x^2+5x\Big]_2^1$$
$$=(2-1+5)-(16-4+10)$$
$$=-16$$

답 -16

0900 $\int(4x^3+3x^2-6x)dx=x^4+x^3-3x^2+C$이므로

$$\int_{-1}^{-2}(4x^3+3x^2-6x)dx=\Big[x^4+x^3-3x^2\Big]_{-1}^{-2}$$
$$=(16-8-12)-(1-1-3)$$
$$=-1$$

답 -1

0901 $\int_1^2 3(3x^2+4x)dx=3\int_1^2(3x^2+4x)dx$

$$=3\Big[x^3+2x^2\Big]_1^2$$
$$=3\{(8+8)-(1+2)\}$$
$$=39$$

답 39

0902 $\int_{-1}^1(x^2+6)dx+\int_{-1}^1(x^2-x-2)dx$

$$=\int_{-1}^1(x^2+6+x^2-x-2)dx$$
$$=\int_{-1}^1(2x^2-x+4)dx$$
$$=\Big[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x\Big]_{-1}^1$$
$$=\Big(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+4\Big)-\Big(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-4\Big)$$
$$=\frac{28}{3}$$

답 $\frac{28}{3}$

0903 $\int_0^2(2x+1)^2dx-\int_0^2(2x-1)^2dx$

$$=\int_0^2(4x^2+4x+1)dx-\int_0^2(4x^2-4x+1)dx$$
$$=\int_0^2(4x^2+4x+1-4x^2+4x-1)dx$$
$$=\int_0^2 8x\,dx=\Big[4x^2\Big]_0^2$$
$$=16$$

답 16

0904 $\int_{-1}^0(2x-5)dx+\int_0^2(2x-5)dx$

$$=\int_{-1}^2(2x-5)dx$$
$$=\Big[x^2-5x\Big]_{-1}^2$$
$$=(4-10)-(1+5)$$
$$=-12$$

답 -12

0905 $\int_{-2}^0(x^2+3x+1)dx+\int_0^1(x^2+3x+1)dx$

$$=\int_{-2}^1(x^2+3x+1)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x\Big]_{-2}^1$$
$$=\Big(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+1\Big)-\Big(-\frac{8}{3}+6-2\Big)$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

0906 $\int_{-1}^0(5x^2-2x+3)dx+\int_0^1(5x^2-2x+3)dx$

$$=\int_{-1}^1(5x^2-2x+3)dx$$
$$=\Big[\frac{5}{3}x^3-x^2+3x\Big]_{-1}^1$$
$$=\Big(\frac{5}{3}-1+3\Big)-\Big(-\frac{5}{3}-1-3\Big)$$
$$=\frac{28}{3}$$

답 $\frac{28}{3}$

0907 $-1\le x\le 0$일 때, $|x|=\boxed{-x}$
$0\le x\le 1$일 때, $|x|=x$

$$\therefore \int_{-1}^1|x|dx=\int_{-1}^0|x|dx+\int_0^1|x|dx$$
$$=\int_{-1}^0(-x)dx+\int_0^1 x\,dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^0+\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$
$$=-\Big(-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{2}$$
$$=\boxed{1}$$

$\therefore$ (가) $-x$ (나) 1

답 풀이 참조

0908 $\int_{-3}^3(2x^2+x+1)dx=\int_{-3}^3(2x^2+1)dx+\int_{-3}^3 x\,dx$

$$=2\int_0^3(2x^2+1)dx$$
$$=2\Big[\frac{2}{3}x^3+x\Big]_0^3$$
$$=2(18+3)=42$$

답 42

0909 $\int_{-1}^1(x^3+3x^2+4x+2)dx$

$$=\int_{-1}^1(3x^2+2)dx+\int_{-1}^1(x^3+4x)dx$$
$$=2\int_0^1(3x^2+2)dx$$
$$=2\Big[x^3+2x\Big]_0^1$$
$$=2(1+2)=6$$

답 6

0910 $\int_{-2}^2(x^4+4x^3-6x^2+1)dx$

$$=\int_{-2}^2(x^4-6x^2+1)dx+\int_{-2}^2 4x^3dx$$
$$=2\int_0^2(x^4-6x^2+1)dx$$
$$=2\Big[\frac{1}{5}x^5-2x^3+x\Big]_0^2$$
$$=2\Big(\frac{32}{5}-16+2\Big)$$
$$=-\frac{76}{5}$$

답 $-\frac{76}{5}$

0911 답 $2x^2+5x+1$

0912 $\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+1}(t^2-3t+1)dt$

$=\{(x+1)^2-3(x+1)+1\}-(x^2-3x+1)$

$=2x-2$

답 $2x-2$

0913 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{a}^{x+a}f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{a}^{x+a}F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_{a}^{x+a}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\boxed{F(x+a)}-F(a)}{x}$$
$$=F'(\boxed{a})=\boxed{f(a)}$$

$\therefore$ (가) $f(a)$ (나) $F(x+a)$ (다) a

답 풀이 참조

라셀 특강 미분계수의 정의

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

0914 $F'(x)=3x^2+x-1$이라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}(3x^2+x-1)dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}F'(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{0}^{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(h)-F(0)}{h}$$
$$=F'(0)=-1$$

답 -1

0915 $F'(t)=(t+1)(t+2)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}(t+1)(t+2)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_{1}^{x}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=2\cdot3=6$$

답 6

0916 $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\boxed{\frac{1}{n}},\ x_k=a+k\Delta x=\boxed{\frac{k}{n}}$$

따라서 정적분의 정의에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_{0}^{1}f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{\boxed{1}}x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}$$

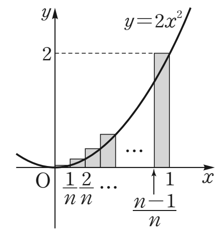
$\therefore$ (가) $\frac{1}{n}$ (나) $\frac{k}{n}$ (다) 1

답 풀이 참조

0917 구간 $[0, 1]$을 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 차례대로

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n}=1$$

n등분한 각 구간을 밑변으로 하고, 오른쪽 끝에서의 함숫값을 높이로 하는 직사각형을 만들면 오른쪽 그림과 같다. 이들 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면



$$S_n=\frac{1}{n}\cdot2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2$$
$$+\frac{1}{n}\cdot2\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot2\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

답 ④

0918 (1) $\overline{AB}=\frac{l_n}{n}$이므로

$$S_n=n\cdot\triangle OAB=n\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{l_n}{n}\cdot h_n\right)=\frac{1}{2}l_nh_n$$ ⇨ ❶

(2) $n\longrightarrow\infty$이면 $l_n\longrightarrow2\pi r$, $h_n\longrightarrow r$이므로 구하는 원의 넓이를 S라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}l_nh_n=\frac{1}{2}\cdot2\pi r\cdot r=\pi r^2$$ ⇨ ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ S_n을 l_n과 h_n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ 원의 넓이를 구할 수 있다.	50%

0919 구간 $[0, 2]$를 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 차례대로

$$0,\ \frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \cdots,\ \frac{2(n-1)}{n},\ \frac{2n}{n}=2$$

n등분한 각 구간을 밑변으로 하고, 오른쪽 끝에서의 함숫값을 높이로 하는 n개의 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{n}\right)^2+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{6}{n}\right)^2$$
$$+\cdots+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2n}{n}\right)^2$$
$$=\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2$$

$$\therefore S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2$$

$\therefore a=2$

답 2

0920 원뿔을 자른 단면의 반지름의 길이는 위에서부터 차례대로

$$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n},\ \frac{3r}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)r}{n}$$

각 단면을 밑면으로 하고, 높이가 $\boxed{\frac{h}{n}}$인 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합을 V_n이라 하면

$$V_n=\frac{h}{n}\left[\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{3r}{n}\right)^2+\cdots+\pi\left\{\frac{(n-1)r}{n}\right\}^2\right]$$
$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\}$$
$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}k^2}=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{\pi r^2h(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$
$$\therefore V=\lim_{n\to\infty}V_n=\boxed{\frac{\pi r^2h}{3}}$$
$\therefore$ (가) $\frac{h}{n}$ (나) $\sum_{k=1}^{n-1}k^2$ (다) $\frac{\pi r^2h}{3}$ 답 ③

0921 사각뿔의 높이를 n등분하여 만들어진 직육면체의 밑넓이는 위에서부터 차례대로

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2a}{n}\right)^2,\ \left(\frac{3a}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left\{\frac{(n-1)a}{n}\right\}^2$$

이고, 높이는 $\frac{h}{n}$이므로 $(n-1)$개의 직육면체의 부피의 합 V_n은

$$V_n=\frac{h}{n}\left[\left(\frac{a}{n}\right)^2+\left(\frac{2a}{n}\right)^2+\left(\frac{3a}{n}\right)^2+\cdots+\left\{\frac{(n-1)a}{n}\right\}^2\right]$$
$$=\frac{a^2h}{n^3}\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\}=\frac{a^2h}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$=\frac{a^2h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{a^2h}{6n^2}(n-1)(2n-1)$$
$$\therefore f(n)=(n-1)(2n-1)$$

답 $f(n)=(n-1)(2n-1)$

참고 사각뿔의 부피 V는

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2h}{6n^2}(n-1)(2n-1)=\frac{a^2h}{3}$$

0922 $f(x)=x^3$으로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[1,\ 4]$에서 연속이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\Delta x=\frac{4-1}{n}=\frac{3}{n},\ x_k=1+k\Delta x=1+\frac{3k}{n},$$
$$f(x_k)={x_k}^3=\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3$$
$$\therefore \int_1^4 x^3dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\cdot\frac{3}{n}$$

따라서 $a=3,\ b=3$이므로 $a+b=6$ 답 ⑤

0923 $f(x)=x^2+2$로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n},\ x_k=k\Delta x=\frac{k}{n},$$
$$f(x_k)={x_k}^2+2=\left(\frac{k}{n}\right)^2+2$$
$$\therefore \int_0^1(x^2+2)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\right\}\cdot\frac{1}{n}$$
$$\therefore a=1$$

답 1

0924 $f(x)=2x^2$으로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 연속이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\Delta x=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n},\ x_k=k\Delta x=\frac{2k}{n},$$
$$f(x_k)=2{x_k}^2=2\left(\frac{2k}{n}\right)^2=\frac{8k^2}{n^2}$$
$$\therefore \int_0^2 2x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k^2}{n^2}\cdot\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{16}{3}$$

따라서 $a=8,\ b=\frac{16}{3}$이므로 $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0925 $f(x)=x-1$로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[1,\ 3]$에서 연속이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\Delta x=\frac{3-1}{n}=\frac{2}{n},\ x_k=1+k\Delta x=1+\frac{2k}{n},$$
$$f(x_k)=x_k-1=1+\frac{2k}{n}-1=\frac{2k}{n}$$ ⇨ ❶
$$\therefore \int_1^3(x-1)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}\cdot\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=2$$ ⇨ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $\Delta x,\ x_k,\ f(x_k)$를 $n,\ k$에 대한 식으로 각각 나타낼 수 있다.	50%
❷ $\int_1^3(x-1)dx$의 값을 구할 수 있다.	50%

0926 $\int_3^3(x+1)(4x+5)dx-\int_{-1}^{-3}(y-1)(3y+1)dy$

$$=0+\int_{-3}^{-1}(y-1)(3y+1)dy$$
$$=\int_{-3}^{-1}(3y^2-2y-1)dy$$
$$=\left[y^3-y^2-y\right]_{-3}^{-1}$$
$$=(-1-1+1)-(-27-9+3)$$
$$=32$$

답 32

0927 $\int_0^{-2}\frac{4-x^2}{x-2}dx=\int_{-2}^0\frac{x^2-4}{x-2}dx$

$$=\int_{-2}^0\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}dx$$
$$=\int_{-2}^0(x+2)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^0$$
$$=-(2-4)=2$$

답 2

0928 $f(x)=x^2+5x+1$이므로

$$\int_0^1 x^3f(x)dx=\int_0^1 x^3(x^2+5x+1)dx$$
$$=\int_0^1 (x^5+5x^4+x^3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{6}x^6+x^5+\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{6}+1+\frac{1}{4}=\frac{17}{12}$$

답 ⑤

0929 $\int_1^2 (x-2)(x^2+2x+4)dx=\int_1^2 (x^3-8)dx$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-8x\right]_1^2$$
$$=(4-16)-\left(\frac{1}{4}-8\right)$$
$$=-\frac{17}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=17$이므로

$p+q=21$

답 ④

0930 $\int_0^{-1} f(x)dx=\int_0^{-1} (2x^3-3kx)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}kx^2\right]_0^{-1}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}k$$

이때 $f(-1)=-2+3k$이므로 $\quad \frac{1}{2}-\frac{3}{2}k=-2+3k$

$\frac{9}{2}k=\frac{5}{2} \qquad \therefore k=\frac{5}{9}$

답 $\frac{5}{9}$

0931 $f'(x)=4x-1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x-1)dx=2x^2-x+C$$
$$\therefore \int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 (2x^2-x+C)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+Cx\right]_{-1}^1$$
$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+C\right)-\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-C\right)$$
$$=\frac{4}{3}+2C$$

이때 $\frac{4}{3}+2C=0$이므로 $\quad C=-\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=2x^2-x-\frac{2}{3}$이므로

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 \left(2x^2-x-\frac{2}{3}\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x\right]_0^3$$
$$=18-\frac{9}{2}-2=\frac{23}{2}$$

답 $\frac{23}{2}$

0932 $\int_1^a (4x+a)dx=\left[2x^2+ax\right]_1^a=(2a^2+a^2)-(2+a)$

$$=3a^2-a-2$$

이때 $3a^2-a-2=8$이므로

$3a^2-a-10=0, \qquad (3a+5)(a-2)=0$

$\therefore a=2 \ (\because a>0)$

답 2

0933 $\int_{-2}^1 (3x^2+2kx+1)dx=\left[x^3+kx^2+x\right]_{-2}^1$

$$=(2+k)-(4k-10)$$
$$=-3k+12$$

이때 $-3k+12>6$이므로 $\quad k<2$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

답 ①

0934 $\int_1^k (2x-5)dx=\left[x^2-5x\right]_1^k=(k^2-5k)-(1-5)$

$$=k^2-5k+4=\left(k-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$ ⇨ ❶

따라서 $\int_1^k (2x-5)dx$는 $k=\frac{5}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{9}{4}$를 가지므로

$m=\frac{5}{2}, \ n=-\frac{9}{4}$ ⇨ ❷

$\therefore m+n=\frac{1}{4}$ ⇨ ❸

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\int_1^k (2x-5)dx$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20%

0935 $\int_0^2 (2x^2+x)dx+\int_2^0 (x-x^2)dx$

$$=\int_0^2 (2x^2+x)dx-\int_0^2 (x-x^2)dx$$
$$=\int_0^2 (2x^2+x-x+x^2)dx$$
$$=\int_0^2 3x^2dx=\left[x^3\right]_0^2=8$$

답 ⑤

0936 $\int_0^1 \frac{x^3}{x+2}dx+\int_0^1 \frac{8}{t+2}dt$

$$=\int_0^1 \frac{x^3}{x+2}dx+\int_0^1 \frac{8}{x+2}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{x^3+8}{x+2}dx=\int_0^1 \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$$
$$=\int_0^1 (x^2-2x+4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x\right]_0^1=\frac{10}{3}$$

답 ④

0937 $\int_0^1 1dx+\int_0^1 2xdx+\int_0^1 3x^2dx+\cdots+\int_0^1 nx^{n-1}dx$

$$=\int_0^1 (1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$$
$$=\left[x+x^2+x^3+\cdots+x^n\right]_0^1$$
$$=1+1+1+\cdots+1=n$$

$\therefore n=10$

답 10

0938 $\int_{-1}^{2}(2x+k)^2dx-\int_{2}^{-1}(1-3x^2)dx$

$=\int_{-1}^{2}(2x+k)^2dx+\int_{-1}^{2}(1-3x^2)dx$

$=\int_{-1}^{2}(4x^2+4kx+k^2+1-3x^2)dx$

$=\int_{-1}^{2}(x^2+4kx+k^2+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+2kx^2+(k^2+1)x\right]_{-1}^{2}$

$=\left\{\frac{8}{3}+8k+2(k^2+1)\right\}-\left\{-\frac{1}{3}+2k-(k^2+1)\right\}$

$=3k^2+6k+6=3(k+1)^2+3$

따라서 주어진 정적분은 $k=-1$일 때 최솟값 3을 갖는다. 답 3

0939 $\int_{0}^{1}(x^3+x-4)dx+\int_{1}^{4}(y^3+y-4)dy$

$=\int_{0}^{1}(x^3+x-4)dx+\int_{1}^{4}(x^3+x-4)dx$

$=\int_{0}^{4}(x^3+x-4)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-4x\right]_{0}^{4}$

$=56$

답 ④

0940 $\int_{0}^{3}(6x-1)dx-\int_{a}^{3}(6x-1)dx$

$=\int_{0}^{3}(6x-1)dx+\int_{3}^{a}(6x-1)dx$

$=\int_{0}^{a}(6x-1)dx=\left[3x^2-x\right]_{0}^{a}$

$=3a^2-a$ ⇨ ❶

이때 $3a^2-a=44$이므로 $3a^2-a-44=0$

$(3a+11)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$) ⇨ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%

0941 $\int_{1}^{5}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{5}f(x)dx$

$=\left\{\int_{1}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{2}f(x)dx\right\}+\int_{2}^{5}f(x)dx$

$=\int_{1}^{3}f(x)dx-\int_{2}^{3}f(x)dx+\int_{2}^{5}f(x)dx$

$=5-2+4=7$ 답 7

0942 $\int_{-2}^{-1}\frac{x^2}{x^2+3}dx-\int_{1}^{-1}\frac{x^2}{x^2+3}dx+\int_{-2}^{1}\frac{3}{x^2+3}dx$

$=\int_{-2}^{-1}\frac{x^2}{x^2+3}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x^2+3}dx+\int_{-2}^{1}\frac{3}{x^2+3}dx$

$=\int_{-2}^{1}\frac{x^2}{x^2+3}dx+\int_{-2}^{1}\frac{3}{x^2+3}dx$

$=\int_{-2}^{1}\frac{x^2+3}{x^2+3}dx=\int_{-2}^{1}1dx$

$=\left[x\right]_{-2}^{1}=1-(-2)=3$ 답 3

0943 $\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$

$=\int_{0}^{1}(-x+2)dx+\int_{1}^{2}(2x-1)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{0}^{1}+\left[x^2-x\right]_{1}^{2}$

$=\left(-\frac{1}{2}+2\right)+(4-2)-(1-1)$

$=\frac{7}{2}$

답 ③

0944 $f(x)=\begin{cases}2 & (x\geq 0)\\ 2x+2 & (x\leq 0)\end{cases}$이므로

$xf(x)=\begin{cases}2x & (x\geq 0)\\ 2x^2+2x & (x\leq 0)\end{cases}$ ⇨ ❶

$\therefore \int_{-2}^{2}xf(x)dx=\int_{-2}^{0}xf(x)dx+\int_{0}^{2}xf(x)dx$

$=\int_{-2}^{0}(2x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}2xdx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_{-2}^{0}+\left[x^2\right]_{0}^{2}$

$=-\left(-\frac{16}{3}+4\right)+4=\frac{16}{3}$ ⇨ ❷

답 $\frac{16}{3}$

채점 기준	비율
❶ $xf(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ $\int_{-2}^{2}xf(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	70%

0945 (i) $a\leq 2$일 때,

$\int_{1}^{a}f(x)dx=\int_{1}^{a}(2x-4)dx$

$=\left[x^2-4x\right]_{1}^{a}$

$=(a^2-4a)-(1-4)$

$=a^2-4a+3$

이때 $a^2-4a+3=0$이므로 $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

그런데 $a\neq 1$, $a\leq 2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a\geq 2$일 때,

$\int_{1}^{a}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{a}f(x)dx$

$=\int_{1}^{2}(2x-4)dx+\int_{2}^{a}\left(\frac{1}{2}x-1\right)dx$

$=\left[x^2-4x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{1}{4}x^2-x\right]_{2}^{a}$

$=(4-8)-(1-4)+\left(\frac{1}{4}a^2-a\right)-(1-2)$

$=\frac{1}{4}a^2-a$

이때 $\frac{1}{4}a^2-a=0$이므로

$a^2-4a=0$, $a(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a\geq 2$)

(i), (ii)에서 $a=4$ 답 4

0946 $|x^2-3x|=\begin{cases} x^2-3x & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 3) \\ -x^2+3x & (0\le x\le 3)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^{2}|x^2-3x|dx=\int_{-1}^{0}(x^2-3x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{8}{3}+6\right)$$
$$=\frac{31}{6}$$

답 ⑤

0947 $|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & (x\le -2 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x^2+4 & (-2\le x\le 2)\end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{3}\frac{|x^2-4|}{x+2}dx$$
$$=\int_{0}^{2}\frac{-x^2+4}{x+2}dx+\int_{2}^{3}\frac{x^2-4}{x+2}dx$$
$$=-\int_{0}^{2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}dx+\int_{2}^{3}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}dx$$
$$=-\int_{0}^{2}(x-2)dx+\int_{2}^{3}(x-2)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{0}^{2}+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{2}^{3}$$
$$=-(2-4)+\left(\frac{9}{2}-6\right)-(2-4)=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

0948 $|2x-1|=\begin{cases} 2x-1 & \left(x\ge \frac{1}{2}\right) \\ -2x+1 & \left(x\le \frac{1}{2}\right)\end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{a}|2x-1|dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-2x+1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{a}(2x-1)dx$$
$$=\left[-x^2+x\right]_{0}^{\frac{1}{2}}+\left[x^2-x\right]_{\frac{1}{2}}^{a}$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+(a^2-a)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=a^2-a+\frac{1}{2}$$

이때 $a^2-a+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$이므로 $\quad a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0 \qquad \therefore a=3 \left(\because a>\frac{1}{2}\right)$

답 ①

0949 $|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\ge a) \\ -x+a & (x\le a)\end{cases}$이므로

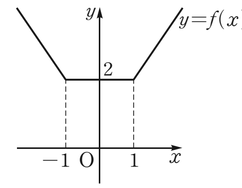
$$\int_{1}^{4}|x-a|dx$$
$$=\int_{1}^{a}(-x+a)dx+\int_{a}^{4}(x-a)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{1}^{a}+\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_{a}^{4}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}a^2+a^2\right)-\left(-\frac{1}{2}+a\right)+(8-4a)-\left(\frac{1}{2}a^2-a^2\right)$$
$$=a^2-5a+\frac{17}{2}=\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

따라서 주어진 정적분은 $a=\frac{5}{2}$일 때 최솟값 $\frac{9}{4}$를 갖는다.

답 $\frac{5}{2}$

0950 $f(x)=\begin{cases} 2x & (x\ge 1) \\ 2 & (-1\le x\le 1) \\ -2x & (x\le -1)\end{cases}$ ⇨ ❶

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $-1\le x\le 1$에서 최솟값 2를 가지므로

$a=2$ ⇨ ❷

$1\le x\le 2$일 때 $f(x)=2x$이므로

$$\int_{1}^{a}f(x)dx=\int_{1}^{2}2x\,dx=\left[x^2\right]_{1}^{2}$$
$$=4-1=3$$ ⇨ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	20%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $\int_{1}^{a}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	60%

0951 $\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$$=\int_{-1}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(\underbrace{1+3x^2+\cdots+9x^8}_{\text{우함수}})dx+\int_{-1}^{1}(\underbrace{2x+4x^3+\cdots+10x^9}_{\text{기함수}})dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(1+3x^2+5x^4+7x^6+9x^8)dx$$
$$=2\left[x+x^3+x^5+x^7+x^9\right]_{0}^{1}$$
$$=2\cdot 5=10$$

답 10

0952 $\int_{-a}^{a}(3x^2-5x)dx=2\int_{0}^{a}3x^2dx=2\left[x^3\right]_{0}^{a}=2a^3$

이때 $2a^3=\frac{1}{4}$이므로 $\quad a^3=\frac{1}{8} \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because$ a는 실수)

$\therefore 20a=10$

답 ②

0953 $\int_{-1}^{1}xf(x)dx=2$에서

$$\int_{-1}^{1}x(ax+b)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)dx=2\int_{0}^{1}ax^2dx$$
$$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}a$$

이때 $\frac{2}{3}a=2$이므로 $\quad a=3$

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=-4$에서

$$\int_{-1}^{1}x^2(ax+b)dx=\int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2)dx=2\int_{0}^{1}bx^2dx$$
$$=2\left[\frac{b}{3}x^3\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}b$$

이때 $\frac{2}{3}b=-4$이므로 $\quad b=-6$

$\therefore a-b=9$

답 9

0954 $|x^3|=\begin{cases} x^3 & (x\ge 0) \\ -x^3 & (x\le 0)\end{cases}$ 이므로

$$\int_{-2}^{2}(3x^5-|x^3|+4x+1)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(-|x^3|+1)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3+1)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x\right]_{0}^{2}$$
$$=-(4-2)+(-4+2)=-4$$

답 -4

0955 $f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이고, $g(x)=-g(-x)$에서 $g(-x)=-g(x)$이므로 $g(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^{2}\{f(x)+g(x)\}dx=\int_{-2}^{2}f(x)dx+\int_{-2}^{2}g(x)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=2\cdot 2=4$$

답 ①

0956 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로 $x^3f(x)$, $xf(x)$는 모두 기함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^{1}(3x^3-x+2)f(x)dx$$
$$=3\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx-\int_{-1}^{1}xf(x)dx+2\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=2\int_{-1}^{1}f(x)dx=4\int_{0}^{1}f(x)dx$$
$$=4\cdot 5=20$$

답 20

라센특강 우함수, 기함수의 곱

① (우함수)×(우함수)=(우함수)
② (우함수)×(기함수)=(기함수)
③ (기함수)×(기함수)=(우함수)

0957 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$이므로

$$\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{2}^{3}f(x)dx=\int_{3}^{4}f(x)dx=\int_{4}^{5}f(x)dx=4$$
$$\therefore \int_{1}^{5}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{5}f(x)dx$$
$$=4\cdot 4=16$$

답 ⑤

0958 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}3x^2dx=2\int_{0}^{1}3x^2dx$

$$=2\left[x^3\right]_{0}^{1}=2$$ ⇨ ❶

이때 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로 실수 a에 대하여

$$\int_{a}^{a+2}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx=2$$

$$\therefore \int_{-4}^{4}f(x)dx=\int_{-4}^{-2}f(x)dx+\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{4}f(x)dx$$
$$=4\cdot 2=8$$ ⇨ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ $\int_{-1}^{1}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $\int_{-4}^{4}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	60%

0959 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_{-1}^{5}f(x)dx=\int_{-1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{5}f(x)dx=2\int_{0}^{3}f(x)dx$$

이때 $2\int_{0}^{3}f(x)dx=10$이므로 $\int_{0}^{3}f(x)dx=5$

$$\therefore \int_{0}^{3}\{2x+f(x)\}dx=\int_{0}^{3}2xdx+\int_{0}^{3}f(x)dx$$
$$=\left[x^2\right]_{0}^{3}+5$$
$$=9+5=14$$

답 14

0960 $\int_{0}^{2}f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_{0}^{2}(-2t+k)dt=k,\quad \left[-t^2+kt\right]_{0}^{2}=k$$
$$-4+2k=k \quad \therefore k=4$$

따라서 $f(x)=-2x+4$이므로 $f(1)=2$

답 ④

0961 $\int_{0}^{1}tf(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^2-3x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_{0}^{1}t(t^2-3t+k)dt=k,\quad \int_{0}^{1}(t^3-3t^2+kt)dt=k$$
$$\left[\frac{1}{4}t^4-t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_{0}^{1}=k,\quad -\frac{3}{4}+\frac{k}{2}=k$$
$$\therefore k=-\frac{3}{2}$$
$$\therefore f(x)=x^2-3x-\frac{3}{2}$$

답 $f(x)=x^2-3x-\frac{3}{2}$

0962 $f(x)=3x^2+\int_{0}^{1}(x+1)f(t)dt$

$$=3x^2+x\int_{0}^{1}f(t)dt+\int_{0}^{1}f(t)dt$$

$\int_{0}^{1}f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^2+kx+k$ ⇨ ❶

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_{0}^{1}(3t^2+kt+k)dt=k,\quad \left[t^3+\frac{1}{2}kt^2+kt\right]_{0}^{1}=k$$

$1+\frac{3}{2}k=k \qquad \therefore k=-2$ ⇨ ❷

따라서 $f(x)=3x^2-2x-2$이므로 $\quad f'(x)=6x-2$

$\therefore f'(-1)=-8$ ⇨ ❸

답 -8

채점 기준	비율
❶ 정적분을 k로 치환하고 $f(x)$를 k를 이용하여 나타낼 수 있다.	30%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	30%

0963 $\int_a^x f(t)dt=x^2-x$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$a^2-a=0, \quad a(a-1)=0 \quad \therefore a=1\ (\because a>0)$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-1$

$\therefore f(a)=f(1)=1$

답 1

0964 $f(x)=\int_1^x (t^2+2t)dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=0$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+2x \qquad \therefore f'(1)=3$

$\therefore f(1)+f'(1)=3$

답 ⑤

0965 $f(x)=\int_1^x (2t-1)(t^2+3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(2x-1)(x^2+3)$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot3$$
$$=3f'(1)=3\cdot4$$
$$=12$$

답 12

0966 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$4+2a-10=0 \qquad \therefore a=3$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+a=2x+3$

$\therefore f(5)=13$

답 ②

0967 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-f(-1)=-2-1$

$\therefore f(-1)=3$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2-2x+f(x)$

$xf'(x)=6x^2-2x \qquad \therefore f'(x)=6x-2$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx$$
$$=3x^2-2x+C \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad f(-1)=3+2+C=3$

$\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-2$이므로 $f(k)=19$에서

$3k^2-2k-2=19, \qquad 3k^2-2k-21=0$

$(3k+7)(k-3)=0$

$\therefore k=3\ (\because k$는 정수)

답 ③

0968 $\int_{-1}^x (x-t)f(t)dt=x^3+3x^2+3x+1$에서

$x\int_{-1}^x f(t)dt-\int_{-1}^x tf(t)dt=x^3+3x^2+3x+1$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-1}^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+6x+3$

$\therefore \int_{-1}^x f(t)dt=3x^2+6x+3$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+6 \qquad \therefore f(0)=6$

답 ④

0969 $\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^3+ax^2+9x-4$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+9-4=0 \qquad \therefore a=-6$

$\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^3-6x^2+9x-4$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3-6x^2+9x-4$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-12x+9$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2-12x+9$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-12 \qquad \therefore b=f(1)=-6$

$\therefore a+b=-12$

답 -12

0970 $\int_0^x (x-t)f'(t)dt=x^3$에서

$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=x^3$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=3x^2$

$\int_0^x f'(t)dt=3x^2, \qquad \Big[f(t)\Big]_0^x=3x^2$

$\therefore f(x)-f(0)=3x^2$

이때 $f(0)=4$이므로 $\quad f(x)=3x^2+4$

답 $f(x)=3x^2+4$

0971 $f(x)=\int_1^x (t^2+t-2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 a, $x=1$에서 극솟값 b를 가지므로

$$a=f(-2)=\int_1^{-2}(t^2+t-2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t\right]_1^{-2}$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{9}{2}$$

$b=f(1)=\int_1^1 (t^2+t-2)dt=0$

$\therefore 2a+b=2\cdot\frac{9}{2}+0=9$ 답 ⑤

0972 $f(x)=\int_{-2}^{x}(t^2-kt+3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-kx+3$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$

$1-k+3=0 \qquad \therefore k=4$ 답 4

0973 $f(x)=\int_{-1}^{x}(-t^2+at-a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-x^2+ax-a$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때,

$D=a^2-4a>0, \qquad a(a-4)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>4$

따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다. 답 ⑤

0974 $f(x)=\int_0^x (3t^2+at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 2를 가지므로

$f(2)=2, f'(2)=0$

$f'(2)=12+2a+b=0$이므로

$2a+b=-12$ …… ㉠

$f(2)=\int_0^2 (3t^2+at+b)dt=\left[t^3+\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^2=8+2a+2b=2$

이므로 $a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-9, b=6$ ⇨ ❶

따라서 $f'(x)=3x^2-9x+6$이므로 $f'(x)=0$에서

$3x^2-9x+6=0, \qquad (x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ ⇨ ❷

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가지므로 구하는 극댓값은

$f(1)=\int_0^1 (3t^2-9t+6)dt$

$=\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_0^1=\frac{5}{2}$ ⇨ ❸

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $f(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	30%

0975 $\int_0^x (x-t)f(t)dt=\frac{1}{4}x^4-2x^3+x^2$에서

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\frac{1}{4}x^4-2x^3+x^2$

앞의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=x^3-6x^2+2x$

$\therefore \int_0^x f(t)dt=x^3-6x^2+2x$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-12x+2=3(x-2)^2-10$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 -10을 갖는다. 답 -10

0976 $f(x)=3x^2-2\int_0^1 xf(t)dt=3x^2-2x\int_0^1 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^2-2kx$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 (3t^2-2kt)dt=k, \qquad \left[t^3-kt^2\right]_0^1=k$

$1-k=k \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=3x^2-x=3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{12}$

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{1}{6}$에서 최솟값 $-\frac{1}{12}$을 갖는다.

답 $-\frac{1}{12}$

0977 $f(x)=\int_x^{x+1}(t^2+t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^2+(x+1)\}-(x^2+x)$

$=2x+2=2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

이때 $-2\le x\le 2$이므로

$f(-2)=\int_{-2}^{-1}(t^2+t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_{-2}^{-1}=\frac{5}{6}$

$f(-1)=\int_{-1}^{0}(t^2+t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{0}=-\frac{1}{6}$

$f(2)=\int_2^3 (t^2+t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_2^3=\frac{53}{6}$

따라서 $M=\frac{53}{6}$, $m=-\frac{1}{6}$이므로

$M-m=9$ 답 ⑤

0978 $g(k)=\int_0^1 (x+k)^2f(x)dx$

$=\int_0^1 (x^2+2kx+k^2)f(x)dx$

$=\int_0^1 x^2f(x)dx+2k\int_0^1 xf(x)dx+k^2\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 x^2f(x)dx+10k+2k^2$

$=2\left(k+\frac{5}{2}\right)^2+\int_0^1 x^2f(x)dx-\frac{25}{2}$

이때 정적분 $\int_0^1 x^2f(x)dx$는 상수이므로 $g(k)$는 $k=-\frac{5}{2}$에서 최솟값을 갖는다.

답 ②

10 정적분

0979 주어진 그래프에서

$f(x)=ax(x-4)=a(x-2)^2-4a\ (a>0)$

로 놓을 수 있다. 이때 $f(x)$의 최솟값이 -2이므로

$-4a=-2 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x(x-4)=\frac{1}{2}x^2-2x$

한편 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

즉 $f(x)$는 $F(x)$의 도함수이다.

주어진 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(4)=0$이고 $x=4$의 좌우에서 $f(x)$의 값이 음에서 양으로 바뀌므로 $F(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구하는 극솟값은

$$F(4)=\int_0^4 f(t)dt=\int_0^4\left(\frac{1}{2}t^2-2t\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{6}t^3-t^2\right]_0^4=-\frac{16}{3}$$

답 $-\frac{16}{3}$

참고 주어진 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$의 값이 양에서 음으로 바뀌므로 $F(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

0980 주어진 그래프에서

$F(x)=a(x-1)(x-2)=a(x^2-3x+2)\ (a<0)$

로 놓을 수 있다.

이때 $F(x)=\int_1^x f(t)dt$에서

$a(x^2-3x+2)=\int_1^x f(t)dt$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=a(2x-3)$

$f(2)=-1$이므로 $\qquad a=-1$

따라서 $f(x)=-(2x-3)=-2x+3$이므로

$f(0)=3$

답 ⑤

0981 주어진 그래프에서 $\qquad f(x)=x(x-3)=x^2-3x$ ➪ ❶

$F(x)=\int_x^{x+2} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x+2)-f(x)$$
$$=\{(x+2)^2-3(x+2)\}-(x^2-3x)$$
$$=4x-2$$

➪ ❷

$F'(x)=0$에서

$x=\frac{1}{2}$ ➪ ❸

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $F(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}(t^2-3t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}$$
$$=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{125}{8}-\frac{3}{2}\cdot\frac{25}{4}\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)$$
$$=-\frac{23}{6}$$

➪ ❹

답 $-\frac{23}{6}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	20%
❷ $F'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $F'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $F(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

0982 $f(x)=4x^2-5x+1$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x(4t^2-5t+1)dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)$$
$$=f(0)$$
$$=1$$

답 ①

0983 $f(x)=\int_0^x(2t^3+t^2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2x^3+x^2$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h}f'(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$$
$$=2\cdot(2\cdot2^3+2^2)$$
$$=40$$

답 40

0984 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-3h}^{1+h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{F(1+h)-F(1)\}-\{F(1-3h)-F(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+3\lim_{h\to0}\frac{F(1-3h)-F(1)}{-3h}$$
$$=F'(1)+3F'(1)$$
$$=4F'(1)=4f(1)$$
$$=4(4+a)$$
$$=4a+16$$

이때 $4a+16=2$이므로 $\qquad 4a=-14$

$\therefore a=-\frac{7}{2}$

답 $-\frac{7}{2}$

0985 $f(t)=|t-a|$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x|t-a|dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)$$
$$=|-a|=-a\ (\because a<0)$$

따라서 $-a=a^2-6$이므로 $\quad a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=-3\ (\because a<0)$

답 -3

0986 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=f(2)$$
$$=2\cdot2^3+2^2-2-1$$
$$=17$$

답 ④

0987 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{x^2}^1 f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{-1}{x-1}\int_1^{x^2} f(t)dt$$
$$=-\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$
$$=-\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$$
$$=-2F'(1)=-2f(1)$$
$$=-2(1-3+1+5)$$
$$=-8$$

답 -8

0988 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{5+a}{2}$$

따라서 $\frac{5+a}{2}=7$이므로 $\quad a=9$

답 ⑤

0989 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$$=2\int_1^2 f(x)dx$$
$$=2\int_0^1 f(1+x)dx$$

따라서 바르게 나타낸 것은 ④이다.

답 ④

0990 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\cdot\frac{3}{n}$

$1+\frac{3k}{n}$를 x로, $\frac{3}{n}$을 dx로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $\quad x=\boxed{1}$

$k=n$이면 $\quad x=\boxed{4}$

이므로 적분 구간은 $[1,\ 4]$이다.

$$\therefore (\text{주어진 식})=\frac{2}{3}\int_1^4 x^3dx=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^4$$
$$=\frac{1}{6}(4^4-1)=\boxed{\frac{85}{2}}$$

$\therefore$ (가) 1 (나) 4 (다) $\frac{85}{2}$

따라서 $a=1,\ b=4,\ c=\frac{85}{2}$이므로

$a+b-c=-\frac{75}{2}$

답 $-\frac{75}{2}$

0991 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)^2$$ ⇨ ❶

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=2\int_1^2 x^2dx$$ ⇨ ❷

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{14}{3}$$ ⇨ ❸

답 $\frac{14}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 급수를 Σ를 이용하여 나타낼 수 있다.	20%
❷ 주어진 급수를 정적분으로 나타낼 수 있다.	50%
❸ 답을 구할 수 있다.	30%

0992 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{a-1}{n}\left\{a+\frac{(a-1)k}{n}\right\}^3$에서 $a+\frac{(a-1)k}{n}$를 x로, $\frac{a-1}{n}$을 dx로 나타내면

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $\quad x=a$

$k=n$이면 $\quad x=2a-1$

이므로 적분 구간은 $[a,\ 2a-1]$이다.

$$\therefore (\text{주어진 식})=\int_a^{2a-1}x^3dx$$
$$=\int_0^{a-1}(a+x)^3dx$$

따라서 바르게 나타낸 것은 ④이다.

답 ④

0993 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+f\left(\frac{6}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{2n}{n}\right)\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2(3x^2-8x+5)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x^3-4x^2+5x\right]_0^2=\frac{1}{2}\cdot2=1$$

답 ⑤

0994 $\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{AB}_k\mathrm{C}_k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$이므로

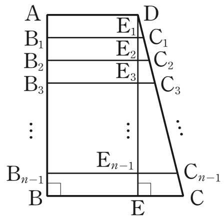
$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}_k}:\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k},\quad 1:1=\frac{k}{n}:\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}$

$\therefore \overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}=\frac{k}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 x^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0995 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 D에서 변 AB에 평행하게 직선을 그어 변 BC와 만나는 점을 E라 하고 선분 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$와 만나는 점을 E_k라 하면



$\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{E}_k}=2$, $\overline{\mathrm{EC}}=1$

한편 $\triangle\mathrm{DEC} \backsim \triangle\mathrm{DE}_k\mathrm{C}_k$

$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$이므로

$\overline{\mathrm{DE}} : \overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{DE}_k} : \overline{\mathrm{E}_k\mathrm{C}_k}$

$4 : 1=\dfrac{4k}{n} : \overline{\mathrm{E}_k\mathrm{C}_k}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{E}_k\mathrm{C}_k}=\dfrac{k}{n}$

따라서 $\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}=\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{E}_k}+\overline{\mathrm{E}_k\mathrm{C}_k}=2+\dfrac{k}{n}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}^{\,2}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n}\\&=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\&=2\int_2^3 x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3\\&=2\left(9-\frac{8}{3}\right)=\frac{38}{3}\end{aligned}$$

답 ⑤

0996 전략 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$임을 이용한다.

풀이 $\displaystyle\int_0^k(6x-1)dx=\Big[3x^2-x\Big]_0^k=3k^2-k$

이때 $3k^2-k=\dfrac{5}{4}$이므로 $\quad 12k^2-4k-5=0$

$(2k+1)(6k-5)=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{1}{2}\ (\because\ k<0)$

답 ③

0997 전략 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $\displaystyle\int_{-1}^0(x^3-4x)dx+\int_0^1(y^3-4y)dy+\int_1^2(z^3-4z)dz$

$$\begin{aligned}&=\int_{-1}^0(x^3-4x)dx+\int_0^1(x^3-4x)dx+\int_1^2(x^3-4x)dx\\&=\int_{-1}^2(x^3-4x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-1}^2\\&=(4-8)-\left(\frac{1}{4}-2\right)\\&=-\frac{9}{4}\end{aligned}$$

답 $-\dfrac{9}{4}$

0998 전략 $f(x+k)=f(x)$이면 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_{a+k}^{b+k}f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=\int_4^6 f(x)dx$

따라서 항상 같은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0999 전략 $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$임을 이용한다.

풀이 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2+4x-5$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$a^2+4a-5=0,\qquad (a+5)(a-1)=0$

$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+4$

$\therefore\ f(a)=f(1)=6$

답 6

1000 전략 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_a^{a+p}f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^3&=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}\\&=2\int_2^3 x^3\,dx\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$ab=6$

답 ⑤

1001 전략 $F'(x)=f(x)$일 때, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$임을 이용한다.

풀이 $$\begin{aligned}\int_1^3\{5f'(x)-4x\}dx&=\Big[5f(x)-2x^2\Big]_1^3\\&=\{5f(3)-18\}-\{5f(1)-2\}\\&=5f(3)-5f(1)-16\\&=5f(3)-26\ (\because\ f(1)=2)\end{aligned}$$

따라서 $5f(3)-26=4$이므로 $\qquad 5f(3)=30$

$\therefore\ f(3)=6$

답 ⑤

1002 전략 $\displaystyle\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $$\begin{aligned}\int_1^2\{1+f(x)\}^2dx&=\int_1^2[\{f(x)\}^2+2f(x)+1]dx\\&=\int_1^2\{f(x)\}^2dx+2\int_1^2 f(x)dx+\int_1^2 1dx\\&=4-2\int_2^1 f(x)dx+\Big[x\Big]_1^2\\&=4+2+(2-1)=7\end{aligned}$$

답 7

1003 전략 구간에 따라 다르게 정의된 함수는 구간을 나누어 각각 정적분의 값을 구한다.

풀이 $|x|=\begin{cases}x & (x\ge0)\\ -x & (x\le0)\end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\le-1\ \text{또는}\ x\ge1)\\ x & (0\le x\le1)\\ -x & (-1\le x\le0)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_0^3 f(x)dx&=\int_0^1 xdx+\int_1^3 1dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\Big[x\Big]_1^3\\&=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

답 ③

1004 전략 $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$, $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\int_{-a}^{a}(x^5+4x^3+2x^2-5x+a)dx=2\int_{0}^{a}(2x^2+a)dx$

$$=2\left[\frac{2}{3}x^3+ax\right]_0^a$$
$$=2\left(\frac{2}{3}a^3+a^2\right)$$
$$=\frac{4}{3}a^3+2a^2$$

이때 $\frac{4}{3}a^3+2a^2=a^2$이므로

$4a^3+3a^2=0$, $\quad a^2(4a+3)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{4}$ ($\because a\neq 0$)

답 $-\frac{3}{4}$

1005 전략 $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$, $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=2$에서

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx=2\int_{0}^{1}(x^2+b)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+bx\right]_0^1=2\left(\frac{1}{3}+b\right)$$
$$=\frac{2}{3}+2b$$

이때 $\frac{2}{3}+2b=2$이므로 $\quad b=\frac{2}{3}$ ⇨ ❶

또 $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=4$에서

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx)dx=2\int_{0}^{1} ax^2dx$$
$$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}a$$

이때 $\frac{2}{3}a=4$이므로 $\quad a=6$ ⇨ ❷

$\therefore ab=4$ ⇨ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

1006 전략 $f(x+k)=f(x)$이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a+k}^{b+k} f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$이므로

$$\int_{1}^{2} f(x)dx=\int_{2}^{3} f(x)dx=\cdots=\int_{100}^{101} f(x)dx=\int_{101}^{102} f(x)dx$$

$\int_{100}^{102} f(x)dx=a$에서

$$\int_{100}^{101} f(x)dx+\int_{101}^{102} f(x)dx=a$$

$2\int_{1}^{2} f(x)dx=a \qquad \therefore \int_{1}^{2} f(x)dx=\frac{a}{2}$

$$\therefore \int_{1}^{500} f(x)dx=\int_{1}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{3} f(x)dx+\cdots+\int_{499}^{500} f(x)dx$$
$$=499\int_{1}^{2} f(x)dx$$
$$=\frac{499}{2}a$$

답 ③

1007 전략 먼저 $\int_{a}^{b} f(t)dt=k$로 놓고 k의 값을 구한다.

풀이 $\int_{0}^{2} f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $\quad f(x)=x^3+4x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{2}(t^3+4t+k)dt=k$, $\quad \left[\frac{1}{4}t^4+2t^2+kt\right]_0^2=k$

$12+2k=k \qquad \therefore k=-12$

따라서 $f(x)=x^3+4x-12$이므로

$f(2)=4$

답 ④

1008 전략 먼저 $\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{b}^{c} f(x)dx=\int_{a}^{c} f(x)dx$임을 이용하여 주어진 등식의 우변을 간단히 한다.

풀이 일차함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$$f(x)=-2x+\int_{0}^{3} f(t)dt-\int_{0}^{1} f(t)dt$$
$$=-2x+\int_{1}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{3} f(t)dt$$
$$=-2x+\int_{1}^{3} f(t)dt$$

$\int_{1}^{3} f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $\quad f(x)=-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{1}^{3}(-2t+k)dt=k$, $\quad \left[-t^2+kt\right]_1^3=k$

$(-9+3k)-(-1+k)=k \qquad \therefore k=8$

$\therefore f(x)=-2x+8$

답 $f(x)=-2x+8$

1009 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분한 다음 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\int_{0}^{x}(t-1)(t-a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=a$

이때 $f(x)$는 $x=1$일 때 극대이므로 $x=a$일 때 극소이다. ⇨ ❶

$f(1)=\frac{4}{3}$에서

$$f(1)=\int_{0}^{1}(t-1)(t-a)dt$$
$$=\int_{0}^{1}\{t^2-(a+1)t+a\}dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a+1}{2}t^2+at\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{a+1}{2}+a=\frac{3a-1}{6}$$

즉 $\frac{3a-1}{6}=\frac{4}{3}$이므로 $\quad 3a-1=8$

$\therefore a=3$ ⇨ ❷

따라서 구하는 극솟값은

$$f(3)=\int_0^3 (t-1)(t-3)dt=\int_0^3 (t^2-4t+3)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^3$$

$$=9-18+9=0$$ ⇨ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ 극값을 갖는 x의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 극솟값을 구할 수 있다.	40%

1010 전략 $a+\int_0^1 \{f(t)\}^2dt=k$로 놓고 k의 값을 구한다.

풀이 $a+\int_0^1 \{f(t)\}^2dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $\quad f(x)=x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$a+\int_0^1 (t+k)^2dt=k, \qquad a+\int_0^1 (t^2+2kt+k^2)dt=k$$

$$a+\left[\frac{1}{3}t^3+kt^2+k^2t\right]_0^1=k$$

$$a+\frac{1}{3}+k+k^2=k$$

$$\therefore a=-k^2-\frac{1}{3}$$

따라서 a는 $k=0$일 때 최댓값 $-\frac{1}{3}$을 갖는다. 답 ①

1011 전략 $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$임을 이용한다.

풀이 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a^2}^{x^2} f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x^2)-F(a^2)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{F(x^2)-F(a^2)}{x^2-a^2}\cdot(x+a)$$

$x^2=t$로 놓으면 $x \longrightarrow a$일 때 $t \longrightarrow a^2$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x^2)-F(a^2)}{x^2-a^2}\cdot(x+a)=\lim_{t\to a^2}\frac{F(t)-F(a^2)}{t-a^2}\cdot 2a$$

$$=2aF'(a^2)$$

$$=2af(a^2)$$ 답 ⑤

1012 전략 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합 V_n을 구한다.

풀이 각 단면을 밑면으로 하고 높이가 $\frac{r}{n}$인 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합을 V_n이라 하면

$$V_n=\frac{r}{n}\pi\left[\frac{r^2(n^2-1^2)}{n^2}+\frac{r^2(n^2-2^2)}{n^2}+\frac{r^2(n^2-3^2)}{n^2}+\cdots+\frac{r^2\{n^2-(n-1)^2\}}{n^2}\right]$$

$$=\frac{r^3}{n^3}\pi[(n^2-1^2)+(n^2-2^2)+\cdots+\{n^2-(n-1)^2\}]$$

$$=\boxed{\frac{r^3}{n^3}}\pi\sum_{k=1}^{n-1}(n^2-k^2)$$

$$=\frac{r^3}{n^3}\pi\left\{n^2(n-1)-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right\}$$

$$=\frac{r^3}{n^3}\pi\cdot\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\pi r^3\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{4n+1}{n}$$

$$=\frac{1}{6}\pi r^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\boxed{4+\frac{1}{n}}\right)$$

$\therefore$ (가) $\frac{r^3}{n^3}$ (나) $4+\frac{1}{n}$ 답 ⑤

1013 전략 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서

$$\int_n^{n+3} f(x)dx=\int_n^{n+1} 4xdx=\left[2x^2\right]_n^{n+1}$$

$$=2(n+1)^2-2n^2=4n+2$$

$$\therefore \int_0^9 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx+\int_6^9 f(x)dx$$

$$=2+14+26=42$$ ⇨ ❶

조건 (가)에서 $\int_0^1 f(x)dx=1$이므로

$$\int_0^7 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx$$

$$=1+6+18=25$$ ⇨ ❷

$$\therefore \int_7^9 f(x)dx=\int_7^0 f(x)dx+\int_0^9 f(x)dx$$

$$=\int_0^9 f(x)dx-\int_0^7 f(x)dx$$

$$=42-25=17$$ ⇨ ❸

답 17

채점 기준	비율
❶ $\int_0^9 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $\int_0^7 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\int_7^9 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	20%

1014 전략 $\int_0^1 g(t)dt=k$, $\int_0^2 f(t)dt=l$로 놓고 k, l의 값을 구한다.

풀이 $\int_0^1 g(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

$\int_0^2 f(t)dt=l$ (l은 상수) …… ㉡

로 놓으면 $\quad f(x)=2x-1+k$, $g(x)=4x+5-l$

㉠에서 $\quad \int_0^1 (4t+5-l)dt=k$

$$\left[2t^2+(5-l)t\right]_0^1=k, \qquad 7-l=k$$

$\therefore k+l=7$ …… ㉢

㉡에서 $\quad \int_0^2 (2t-1+k)dt=l$

$$\left[t^2+(-1+k)t\right]_0^2=l,\qquad 2+2k=l$$

$\therefore\ 2k-l=-2$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $k=\frac{5}{3}$, $l=\frac{16}{3}$

$$\therefore\ f(x)=2x-1+\frac{5}{3}=2x+\frac{2}{3}$$

$$g(x)=4x+5-\frac{16}{3}=4x-\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ f(2)-g(1)=\frac{14}{3}-\frac{11}{3}=1$$

답 ④

1015 전략 증감표를 이용하여 $f(x)$가 최대가 되는 x의 값을 찾는다.

풀이 $f(x)=\int_{-2}^{x}(2-|t|)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2-|x|$$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because\ 0\le x\le 3$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	2	↗	극대	↘	$\frac{7}{2}$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$$f(2)=\int_{-2}^{2}(2-|t|)dt=2\int_{0}^{2}(2-|t|)dt$$

$y=2-|x|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 우함수이다.

$$=2\int_{0}^{2}(2-t)dt=2\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2$$

$$=2\cdot 2=4$$

답 ⑤

1016 전략 n^7으로 분자, 분모를 각각 나눈 다음 정적분으로 변형한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+\cdots+n)(1^4+2^4+\cdots+n^4)}{(1^2+2^2+\cdots+n^2)(1^3+2^3+\cdots+n^3)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k\cdot\sum_{k=1}^{n}k^4}{\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}k^3}=\frac{\frac{1}{n^2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{n^5}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k^4}{\frac{1}{n^3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{1}{n^4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k^3}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{\int_0^1 x\,dx\cdot\int_0^1 x^4\,dx}{\int_0^1 x^2\,dx\cdot\int_0^1 x^3\,dx}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\cdot\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1}{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\cdot\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{6}{5}$$

답 $\frac{6}{5}$

Ⅳ. 다항함수의 적분법

11 정적분의 활용

1017 $-x^2+3x-2=0$에서 $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

주어진 곡선의 x절편은 1과 $\boxed{2}$이고, 구간 $[1, 2]$에서 $y\,\boxed{\ge}\,0$이다.

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_1^2(-x^2+3x-2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)=\boxed{\frac{1}{6}}$$

$\therefore$ (가) 2 (나) $\ge$ (다) $\frac{1}{6}$

답 풀이 참조

1018 $S=\int_1^4|x^2-3x|dx$

$$=\int_1^3(\boxed{-x^2+3x})dx+\int_3^4(\boxed{x^2-3x})dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^3+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_3^4$$

$$=\frac{9}{2}-\frac{7}{6}+\left(-\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{9}{2}\right)$$

$$=\boxed{\frac{31}{6}}$$

$\therefore$ (가) $-x^2+3x$ (나) x^2-3x (다) $\frac{31}{6}$

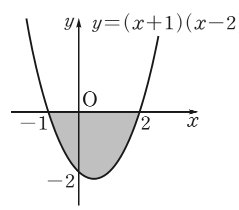
답 풀이 참조

1019 곡선 $y=(x+1)(x-2)$와 x축의 교점의 x좌표는 $(x+1)(x-2)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

$y=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$이므로

구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{2}\{-(x^2-x-2)\}dx=-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=-\left(-\frac{10}{3}-\frac{7}{6}\right)=\frac{9}{2}$$

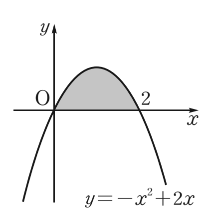
답 $\frac{9}{2}$

1020 곡선 $y=-x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=0$에서

$-x(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$

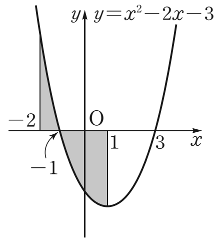
$$=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

1021 곡선 $y=x^2-2x-3$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-2x-3=0$에서

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}|x^2-2x-3|dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x^2-2x-3)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+2x+3)dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x^2-2x-3)dx+2\int_{0}^{1}(-x^2+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-2}^{-1}+2\left[-\frac{1}{3}x^3+3x\right]_{0}^{1}$$

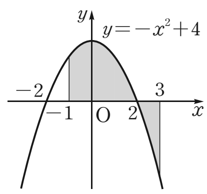
$$=\frac{5}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)+2\cdot\frac{8}{3}=\frac{23}{3}$$

답 $\frac{23}{3}$

1022 곡선 $y=-x^2+4$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+4=0$에서

$-(x+2)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{3}|-x^2+4|dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+4)dx+\int_{2}^{3}(x^2-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_{2}^{3}$$

$$=\frac{16}{3}-\left(-\frac{11}{3}\right)-3-\left(-\frac{16}{3}\right)=\frac{34}{3}$$

답 $\frac{34}{3}$

1023 $y=\sqrt{x}$에서 $x=y^2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{1}^{3}y^2dy=\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{1}^{3}=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

답 $\frac{26}{3}$

1024 (1) 곡선 $y=x^2-2$와 직선 $y=4x+3$의 교점의 x좌표는

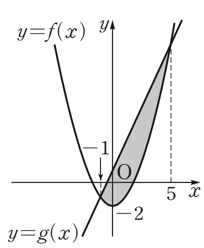
$x^2-2=4x+3$에서 $x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$ $\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=5$

$\therefore$ $a=-1$, $b=5$ ($\because$ $a<b$)

(2) $f(x)=x^2-2$, $g(x)=4x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구간 $[-1, 5]$에서

$f(x)\le g(x)$



(3) $\int_{-1}^{5}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{5}\{g(x)-f(x)\}dx$

$$=\int_{-1}^{5}(-x^2+4x+5)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right]_{-1}^{5}$$

$$=\frac{100}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)=36$$

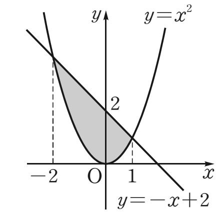
답 (1) $a=-1$, $b=5$ (2) $f(x)\le g(x)$ (3) 36

1025 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=-x+2$의 교점의 x좌표는 $x^2=-x+2$에서

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{(-x+2)-x^2\}dx=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{7}{6}-\left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$=\frac{9}{2}$$

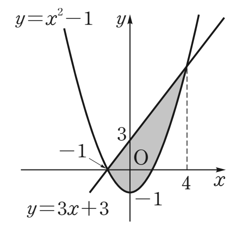
답 $\frac{9}{2}$

1026 곡선 $y=x^2-1$과 직선 $y=3x+3$의 교점의 x좌표는 $x^2-1=3x+3$에서

$x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=4$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{4}\{3x+3-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{4}$$

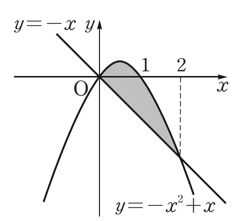
$$=\frac{56}{3}-\left(-\frac{13}{6}\right)=\frac{125}{6}$$

답 $\frac{125}{6}$

1027 곡선 $y=-x^2+x$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는 $-x^2+x=-x$에서

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{2}\{(-x^2+x)-(-x)\}dx=\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}$$

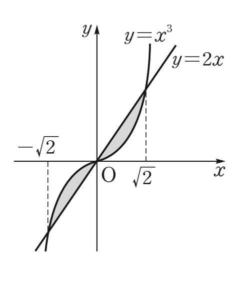
$$=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

1028 곡선 $y=x^3$과 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=0$에서

$x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-\sqrt{2}}^{0}(x^3-2x)dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}(-x^3+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2\right]_{-\sqrt{2}}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{0}^{\sqrt{2}}$$

$$=1+1=2$$

답 2

1029 (1) 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2-2x+4$의 교점의 x좌표는

$x^2=-x^2-2x+4$에서 $\quad 2x^2+2x-4=0$

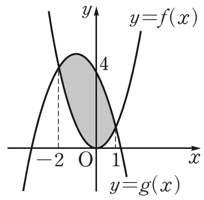
$2(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$\therefore a=-2,\ b=1\ (\because a<b)$

(2) $f(x)=x^2$, $g(x)=-x^2-2x+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구간 $[-2,\ 1]$에서

$f(x)\le g(x)$



(3) $\displaystyle\int_{-2}^{1}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_{-2}^{1}\{g(x)-f(x)\}dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)\,dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}$

$\displaystyle=\frac{7}{3}-\left(-\frac{20}{3}\right)=9$

답 (1) $a=-2,\ b=1$ (2) $f(x)\le g(x)$ (3) 9

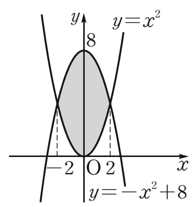
1030 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+8$의 교점의 x좌표는 $x^2=-x^2+8$에서

$2x^2-8=0$

$2(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는



$\displaystyle\int_{-2}^{2}\{(-x^2+8)-x^2\}dx=\int_{-2}^{2}(-2x^2+8)\,dx$

$\displaystyle=2\int_{0}^{2}(-2x^2+8)\,dx$

$\displaystyle=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_{0}^{2}$

$\displaystyle=2\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$

답 $\dfrac{64}{3}$

1031 두 곡선 $y=x^2-9$, $y=-x^2+2x+3$의 교점의 x좌표는

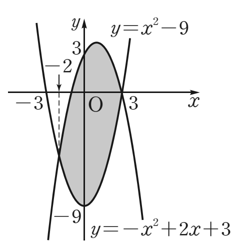
$x^2-9=-x^2+2x+3$에서

$2x^2-2x-12=0$

$2(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는



$\displaystyle\int_{-2}^{3}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-9)\}dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{3}(-2x^2+2x+12)\,dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+12x\right]_{-2}^{3}$

$\displaystyle=27-\left(-\frac{44}{3}\right)=\frac{125}{3}$

답 $\dfrac{125}{3}$

1032 두 곡선 $y=x^2-4x$, $y=-x^2+4x-6$의 교점의 x좌표는

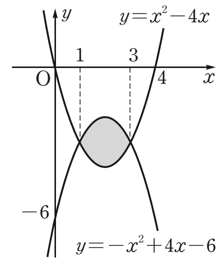
$x^2-4x=-x^2+4x-6$에서

$2x^2-8x+6=0$

$2(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는



$\displaystyle\int_{1}^{3}\{(-x^2+4x-6)-(x^2-4x)\}dx$

$\displaystyle=\int_{1}^{3}(-2x^2+8x-6)\,dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_{1}^{3}$

$\displaystyle=-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}$

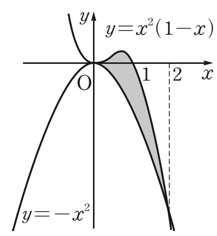
답 $\dfrac{8}{3}$

1033 두 곡선 $y=x^2(1-x)$, $y=-x^2$의 교점의 x좌표는 $x^2(1-x)=-x^2$에서

$x^2(2-x)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는



$\displaystyle\int_{0}^{2}\{x^2(1-x)-(-x^2)\}dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{2}(-x^3+2x^2)\,dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{2}$

$\displaystyle=\frac{4}{3}$

답 $\dfrac{4}{3}$

1034 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 $x=\boxed{0}$이므로 시각 t에서 점 P의 위치 x는

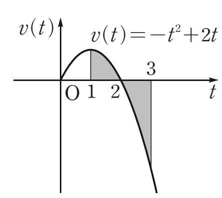
$\displaystyle x=0+\int_{0}^{t}(-t^2+2t)\,dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_{0}^{t}$

$\displaystyle=\boxed{-\frac{1}{3}t^3+t^2}$

$\therefore$ (가) 0 (나) $-\dfrac{1}{3}t^3+t^2$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{3}v(t)\,dt=\int_{1}^{3}(-t^2+2t)\,dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_{1}^{3}=-\frac{2}{3}$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{3}|v(t)|\,dt$



$\displaystyle=\int_{1}^{2}(-t^2+2t)\,dt+\int_{2}^{3}(t^2-2t)\,dt$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_{1}^{2}+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{2}^{3}$

$\displaystyle=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$

답 (1) (가) 0 (나) $-\dfrac{1}{3}t^3+t^2$ (2) $-\dfrac{2}{3}$ (3) 2

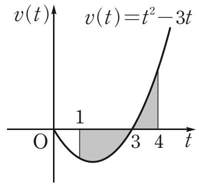
1035 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 $x=0$이므로 $t=4$에서 점 P의 위치는

$\displaystyle 0+\int_{0}^{4}v(t)\,dt=\int_{0}^{4}(t^2-3t)\,dt$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_{0}^{4}=-\frac{8}{3}$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{4}v(t)\,dt=\int_{1}^{4}(t^2-3t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_{1}^{4}=-\frac{3}{2}$

(3) $\int_1^4 |v(t)|dt$



$=\int_1^3 (-t^2+3t)dt+\int_3^4 (t^2-3t)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_1^3+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_3^4$

$=\frac{10}{3}+\frac{11}{6}=\frac{31}{6}$

답 (1) $-\frac{8}{3}$ (2) $-\frac{3}{2}$ (3) $\frac{31}{6}$

1036 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 $x=\boxed{1}$이므로 시각 t에서 점 P의 위치 x는

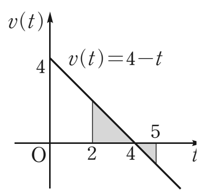
$x=1+\int_0^t (4-t)dt=1+\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^t$

$=\boxed{-\frac{1}{2}t^2+4t+1}$

$\therefore$ (가) 1 (나) $-\frac{1}{2}t^2+4t+1$

(2) $\int_2^5 v(t)dt=\int_2^5 (4-t)dt=\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_2^5=\frac{3}{2}$

(3) $\int_2^5 |v(t)|dt$



$=\int_2^4 (4-t)dt+\int_4^5 (t-4)dt$

$=\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_2^4+\left[\frac{1}{2}t^2-4t\right]_4^5$

$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

답 (1) (가) 1 (나) $-\frac{1}{2}t^2+4t+1$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$

다른풀이 (3) 움직인 거리는 직선 $v(t)=4-t$와 t축 및 두 직선 $t=2$, $t=5$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$\int_2^5 |v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|4-2|+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot|4-5|$

$=\frac{5}{2}$

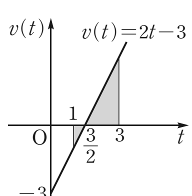
1037 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 3이므로 $t=3$에서 점 P의 위치는

$3+\int_0^3 v(t)dt=3+\int_0^3 (2t-3)dt=3+\left[t^2-3t\right]_0^3$

$=3+0=3$

(2) $\int_1^3 v(t)dt=\int_1^3 (2t-3)dt=\left[t^2-3t\right]_1^3=2$

(3) $\int_1^3 |v(t)|dt$



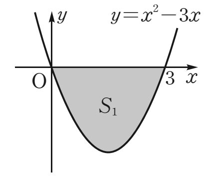
$=\int_1^{\frac{3}{2}} (3-2t)dt+\int_{\frac{3}{2}}^3 (2t-3)dt$

$=\left[3t-t^2\right]_1^{\frac{3}{2}}+\left[t^2-3t\right]_{\frac{3}{2}}^3$

$=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}$

답 (1) 3 (2) 2 (3) $\frac{5}{2}$

1038 곡선 $y=x^2-3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=0$에서



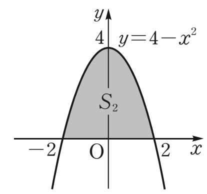
$x(x-3)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=3$

$\therefore$ $S_1=-\int_0^3 (x^2-3x)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$

곡선 $y=4-x^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $4-x^2=0$에서



$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=2$

$\therefore$ $S_2=\int_{-2}^2 (4-x^2)dx$

$=2\int_0^2 (4-x^2)dx=2\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$

$=2\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$

$\therefore$ $2S_1+3S_2=2\cdot\frac{9}{2}+3\cdot\frac{32}{3}=41$

답 41

다른풀이 포물선 $y=x(x-3)$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$S_1=\frac{(3-0)^3}{6}=\frac{9}{2}$

포물선 $y=-(x+2)(x-2)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$S_2=\frac{\{2-(-2)\}^3}{6}=\frac{32}{3}$

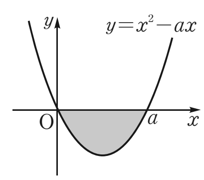
$\therefore$ $2S_1+3S_2=41$

라쎈 특강 **포물선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이**

포물선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha<\beta)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$S=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$

1039 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$-\int_0^a (x^2-ax)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a$

$=\frac{a^3}{6}$

따라서 $\frac{a^3}{6}=\frac{4}{3}$이므로 $a^3=8$ $\therefore$ $a=2$

답 ②

1040 $S_n=\int_0^1 \frac{1}{n}x^n dx=\left[\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}\right]_0^1$

$=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ⇨ ❶

$\therefore$ $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{20}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)$

$=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$ ⇨ ❷

답 $\frac{20}{21}$

채점 기준	비율
❶ S_n을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{20}$의 값을 구할 수 있다.	50%

라쎈 특강 부분분수의 변형

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

1041 $\int_1^x f(t)dt=x^3+kx^2$의 양변에 $x=1$을 대입하면

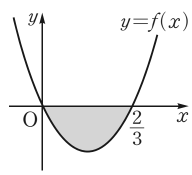
$1+k=0$ $\therefore k=-1$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=x^3-x^2$

이 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-2x$

$f(x)=3x^2-2x$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $3x^2-2x=0$에서



$x(3x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

따라서 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$-\int_0^{\frac{2}{3}}(3x^2-2x)dx=-\left[x^3-x^2\right]_0^{\frac{2}{3}}=\frac{4}{27}$

즉 $a=4$, $b=27$이므로

$a+b=31$ 답 31

라쎈 특강 정적분으로 정의된 함수의 미분

① $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (단, a는 상수)

② $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt=f(x+a)-f(x)$ (단, a는 상수)

1042 구하는 넓이는

$\int_0^3|x^2-5x+4|dx$

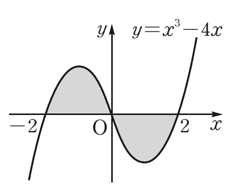
$=\int_0^1(x^2-5x+4)dx+\int_1^3(-x^2+5x-4)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^3$

$=\frac{11}{6}+\frac{10}{3}=\frac{31}{6}$ 답 ③

1043 $y=x(x+2)(x-2)=x^3-4x$

따라서 구하는 넓이는



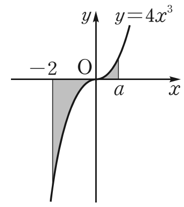
$\int_{-2}^2|x^3-4x|dx$

$=\int_{-2}^0(x^3-4x)dx+\int_0^2(-x^3+4x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_0^2$

$=4+4=8$ 답 8

1044 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$\int_{-2}^a|4x^3|dx=\int_{-2}^0(-4x^3)dx+\int_0^a 4x^3dx$

$=\left[-x^4\right]_{-2}^0+\left[x^4\right]_0^a=16+a^4$

따라서 $16+a^4=17$이므로

$a^4=1$ $\therefore a=1$ ($\because a>0$) 답 1

1045 $x=y(y^2-1)$에서 $x=y^3-y$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^1|y^3-y|dy=\int_{-1}^0(y^3-y)dy+\int_0^1(-y^3+y)dy$

$=\left[\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{2}y^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{2}y^2\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ 답 ②

1046 $y=\sqrt{1-x}-1$에서 $y+1=\sqrt{1-x}$

$(y+1)^2=1-x$ $\therefore x=-y^2-2y$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^1|-y^2-2y|dy=\int_{-1}^0(-y^2-2y)dy+\int_0^1(y^2+2y)dy$

$=\left[-\frac{1}{3}y^3-y^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}y^3+y^2\right]_0^1$

$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$ 답 ②

1047 $x=(y-2)(y-a)=y^2-(2+a)y+2a$

이므로 색칠한 부분의 넓이는

$\int_2^a|y^2-(2+a)y+2a|dy=\int_2^a\{-y^2+(2+a)y-2a\}dy$

$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}(2+a)y^2-2ay\right]_2^a$

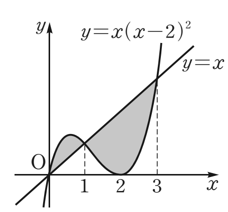
$=\frac{1}{6}a^3-a^2+2a-\frac{4}{3}$

따라서 $\frac{1}{6}a^3-a^2+2a-\frac{4}{3}=\frac{9}{2}$이므로

$a^3-6a^2+12a-35=0,$ $(a-5)(a^2-a+7)=0$

$\therefore a=5$ 답 5

1048 곡선 $y=x(x-2)^2$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x(x-2)^2=x$에서



$x(x^2-4x+3)=0$

$x(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

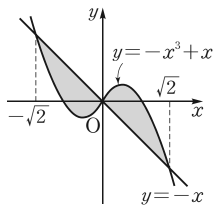
$\int_0^1\{x(x-2)^2-x\}dx+\int_1^3\{x-x(x-2)^2\}dx$

$=\int_0^1(x^3-4x^2+3x)dx+\int_1^3(-x^3+4x^2-3x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_1^3$

$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$ 답 ④

1049 곡선 $y=-x^3+x$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는



$-x^3+x=-x$에서

$x^3-2x=0$

$x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-\sqrt{2}}^{0}\{-x-(-x^3+x)\}dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}\{(-x^3+x)-(-x)\}dx$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{0}(x^3-2x)dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}(-x^3+2x)dx$$

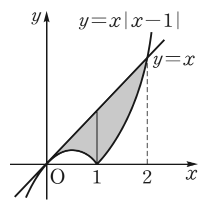
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2\right]_{-\sqrt{2}}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{0}^{\sqrt{2}}$$

$=1+1=2$

답 ①

1050 $y=x|x-1|=\begin{cases} x^2-x & (x\geq 1) \\ -x^2+x & (x<1)\end{cases}$ ⇨ ❶

$y=x|x-1|$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



(i) $x\geq 1$일 때,

$x^2-x=x$에서 $\quad x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$\therefore\ x=2\ (\because\ x\geq 1)$

(ii) $x<1$일 때,

$-x^2+x=x$에서 $\quad -x^2=0$

$\therefore\ x=0$ ⇨ ❷

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}\{x-(-x^2+x)\}dx+\int_{1}^{2}\{x-(x^2-x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{1}x^2dx+\int_{1}^{2}(-x^2+2x)dx$$

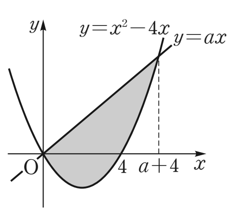
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{1}^{2}$$

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ ⇨ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 구간을 나누어 정리할 수 있다.	20%
❷ 함수의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	50%

1051 곡선 $y=x^2-4x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $x^2-4x=ax$에서



$x^2-(a+4)x=0$

$x\{x-(a+4)\}=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=a+4$

곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 36이므로

$$\int_{0}^{a+4}\{ax-(x^2-4x)\}dx=36$$

$$\int_{0}^{a+4}\{-x^2+(a+4)x\}dx=36$$

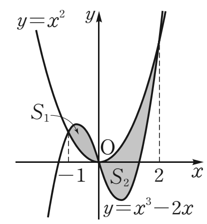
$$\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+4}{2}x^2\right]_{0}^{a+4}=36$$

$\frac{(a+4)^3}{6}=36,\qquad (a+4)^3=6^3$

$a+4=6\qquad \therefore\ a=2$

답 ④

1052 두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=x^2$에서



$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 두 도형의 넓이는

$$S_1=\int_{-1}^{0}\{(x^3-2x)-x^2\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{5}{12}$$

$$S_2=\int_{0}^{2}\{x^2-(x^3-2x)\}dx$$

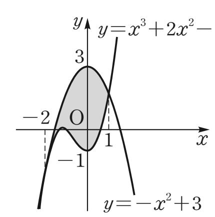
$$=\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}$$

$\therefore\ S_2-S_1=\frac{9}{4}$

답 $\frac{9}{4}$

1053 두 곡선 $y=x^3+2x^2-1$, $y=-x^2+3$의 교점의 x좌표는



$x^3+2x^2-1=-x^2+3$에서

$x^3+3x^2-4=0$

$(x+2)^2(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{(-x^2+3)-(x^3+2x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-2}^{1}$$

$=\frac{11}{4}-(-4)$

$=\frac{27}{4}$

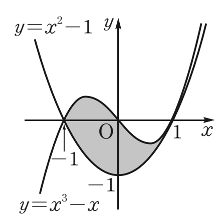
답 ③

1054 두 곡선 $y=x^3+ax$와 $y=x^2+b$가 모두 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$y=x^3+ax$에서 $\quad 1+a=0 \quad \therefore\ a=-1$

$y=x^2+b$에서 $\quad 1+b=0 \quad \therefore\ b=-1$

두 곡선 $y=x^3-x$, $y=x^2-1$의 교점의 x좌표는 $x^3-x=x^2-1$에서



$x^3-x^2-x+1=0$

$(x+1)(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{(x^3-x)-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

1055 두 곡선 $y=x^2-2$, $y=-x^2+\frac{4}{n^2}$의 교점의 x좌표는

$x^2-2=-x^2+\frac{4}{n^2}$에서

$$2x^2=2+\frac{4}{n^2},\qquad x^2=1+\frac{2}{n^2}$$
$$\therefore\ x=\pm\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}$$

$\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}=\alpha$라 하면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $\alpha\longrightarrow 1$이고

$$S_n=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left\{\left(-x^2+\frac{4}{n^2}\right)-(x^2-2)\right\}dx$$
$$=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(-2x^2+2+\frac{4}{n^2}\right)dx$$
$$=2\int_{0}^{\alpha}\left(-2x^2+2+\frac{4}{n^2}\right)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+\left(2+\frac{4}{n^2}\right)x\right]_0^{\alpha}$$
$$=2\left\{-\frac{2}{3}\alpha^3+\left(2+\frac{4}{n^2}\right)\alpha\right\}$$
$$=-4\alpha\left(\frac{1}{3}\alpha^2-1-\frac{2}{n^2}\right)$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-4\alpha\left(\frac{1}{3}\alpha^2-1-\frac{2}{n^2}\right)\right\}$$
$$=-4\cdot1\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1-1\right)$$
$$=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

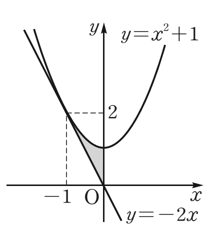
참고 $n\longrightarrow\infty$일 때, 곡선 $y=-x^2+\frac{4}{n^2}$는 곡선 $y=-x^2$에 한없이 가까워지므로 $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은 두 곡선 $y=x^2-2$, $y=-x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

1056 $y=x^2+1$에서 $y'=2x$이므로 곡선 위의 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$$2\cdot(-1)=-2$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-2=-2(x+1),\ \text{즉}\ y=-2x$$

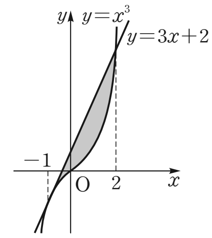


이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{(x^2+1)-(-2x)\}dx=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{1}{3}$$

답 ①

1057 $y=x^3$에서 $y'=3x^2$이므로 곡선 위의 점 $(-1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는



$$3\cdot(-1)^2=3$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-(-1)=3(x+1),\ \text{즉}\ y=3x+2$$

곡선 $y=x^3$과 직선 $y=3x+2$의 교점의 x좌표는 $x^3=3x+2$에서

$$x^3-3x-2=0,\qquad (x-2)(x+1)^2=0$$
$$\therefore\ x=-1\ \text{또는}\ x=2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{(3x+2)-x^3\}dx=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=6-\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{27}{4}$$

답 $\frac{27}{4}$

1058 (1) $y=x^2-3x+3$에서 $\qquad y'=2x-3$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-3t+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $2t-3$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^2-3t+3)=(2t-3)(x-t)$$
$$\therefore\ y=(2t-3)x-t^2+3$$

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$$0=2(2t-3)-t^2+3$$
$$t^2-4t+3=0,\qquad (t-1)(t-3)=0$$
$$\therefore\ t=1\ \text{또는}\ t=3$$

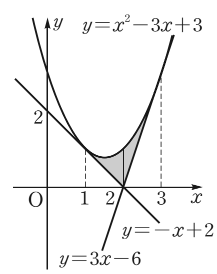
따라서 접선의 방정식은

$$y=-x+2,\ y=3x-6$$

⇨ ❶

(2) $\int_{1}^{2}\{(x^2-3x+3)-(-x+2)\}dx$

$$+\int_{2}^{3}\{(x^2-3x+3)-(3x-6)\}dx$$
$$=\int_{1}^{2}(x^2-2x+1)dx$$
$$+\int_{2}^{3}(x^2-6x+9)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_2^3$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$



⇨ ❷

답 (1) $y=-x+2$, $y=3x-6$ (2) $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	50%

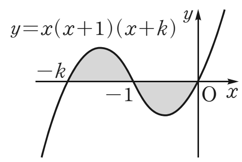
다른풀이 (2) 구하는 넓이는

$$\int_{1}^{3}(x^2-3x+3)dx-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1-\frac{1}{2}\cdot1\cdot3$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x\right]_1^3-2$$
$$=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$$

1059 곡선 $y=x(x+1)(x+k)$와 x축의 교점의 x좌표는
$x(x+1)(x+k)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-k$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로



$$\int_{-k}^{0} x(x+1)(x+k)dx=0$$

$$\int_{-k}^{0} \{x^3+(k+1)x^2+kx\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{k+1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_{-k}^{0}=0$$

$$\frac{k^3(-k+2)}{12}=0, \qquad k^3(k-2)=0$$

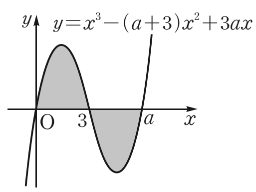
$\therefore\ k=2\ (\because\ k>1)$ 답 ②

1060 곡선 $y=x^3-(a+3)x^2+3ax$와 x축의 교점의 x좌표는
$x^3-(a+3)x^2+3ax=0$에서

$x(x-3)(x-a)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=a$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로



$$\int_{0}^{a} \{x^3-(a+3)x^2+3ax\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+3)x^3+\frac{3}{2}ax^2\right]_{0}^{a}=0$$

$$\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}(a+3)a^3+\frac{3}{2}a^3=0$$

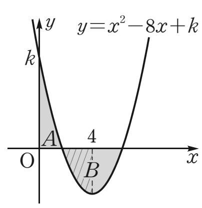
$$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^3=0, \qquad a^3(a-6)=0$$

$\therefore\ a=6\ (\because\ a>3)$ 답 ⑤

1061 $A:B=1:2$에서 $\qquad B=2A$

곡선 $y=x^2-8x+k$가 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금친 도형의 넓이는 A와 같다.

즉 곡선 $y=x^2-8x+k$와 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로



$$\int_{0}^{4}(x^2-8x+k)dx=0, \qquad \left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+kx\right]_{0}^{4}=0$$

$$\frac{64}{3}-64+4k=0 \qquad \therefore\ k=\frac{32}{3}$$ 답 $\frac{32}{3}$

1062 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_{0}^{2}\{-x^2(x-2)-ax(x-2)\}dx=0$$

$$\int_{0}^{2}\{-x^3+(2-a)x^2+2ax\}dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2-a}{3}x^3+ax^2\right]_{0}^{2}=0$$

$$-4+\frac{8(2-a)}{3}+4a=0$$

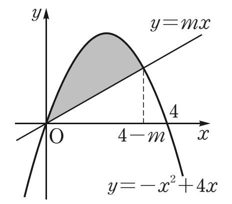
$$\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}=0 \qquad \therefore\ a=-1$$ 답 -1

1063 곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는
$-x^2+4x=mx$에서

$x^2+(m-4)x=0, \qquad x(x+m-4)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=4-m$

따라서 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{4-m}\{(-x^2+4x)-mx\}dx$$

$$=\int_{0}^{4-m}\{-x^2+(4-m)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{4-m}{2}x^2\right]_{0}^{4-m}$$

$$=\frac{(4-m)^3}{6}$$

이때 곡선 $y=-x^2+4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{4}(-x^2+4x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{4}=\frac{32}{3}$$

이므로 $\quad \frac{1}{6}(4-m)^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}=\frac{16}{3}$

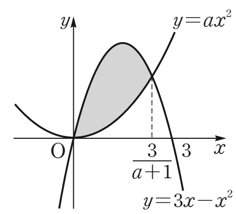
$\therefore\ (4-m)^3=32$ 답 32

1064 두 곡선 $y=ax^2$, $y=3x-x^2$의 교점의 x좌표는
$ax^2=3x-x^2$에서

$(a+1)x^2-3x=0, \qquad x\{(a+1)x-3\}=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{3}{a+1}$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{\frac{3}{a+1}}\{(3x-x^2)-ax^2\}dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{3}{a+1}}\{3x-(a+1)x^2\}dx$$

$$=\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{a+1}{3}x^3\right]_{0}^{\frac{3}{a+1}}$$

$$=\frac{9}{2(a+1)^2}$$

이때 곡선 $y=3x-x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{3}(3x-x^2)dx=\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{3}=\frac{9}{2}$$

이므로 $\quad \frac{9}{2(a+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}=\frac{9}{4}$

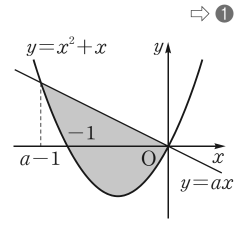
$(a+1)^2=2 \qquad \therefore\ a=\sqrt{2}-1\ (\because\ a>0)$ 답 ①

1065 곡선 $y=x^2+x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는
$x^2+x=ax$에서

$x^2+(1-a)x=0, \qquad x(x+1-a)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=a-1$ ⇨ ❶

따라서 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{a-1}^{0}\{ax-(x^2+x)\}dx$$

$$=\int_{a-1}^{0}\{-x^2+(a-1)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a-1}{2}x^2\right]_{a-1}^{0}=-\frac{(a-1)^3}{6}$$ ⇨ ❷

이때 곡선 $y=x^2+x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$-\int_{-1}^{0}(x^2+x)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{6}$$ ⇨ ❸

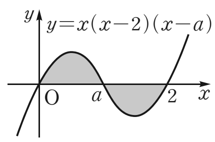
이므로 $\quad -\frac{(a-1)^3}{6}=2\cdot\frac{1}{6}$

$\therefore (1-a)^3=2$ ⇨ ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30%
❸ 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30%
❹ $(1-a)^3$의 값을 구할 수 있다.	20%

1066 $0<a<2$이므로 곡선 $y=x(x-2)(x-a)$는 오른쪽 그림과 같다. 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면



$$S(a)=\int_0^a x(x-2)(x-a)dx-\int_a^2 x(x-2)(x-a)dx$$

$$=\int_0^a\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$$

$$-\int_a^2\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_0^a$$

$$-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_a^2$$

$$=\left(-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3\right)-\left(\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3+\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}\right)$$

$$=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$$

이 식의 양변을 a에 대하여 미분하면

$$S'(a)=-\frac{2}{3}(a^3-3a^2+2)=-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$$

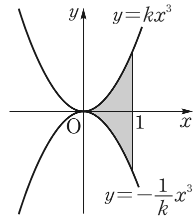
$S'(a)=0$에서 $\quad a=1\ (\because 0<a<2)$

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $0<a<2$에서 $S(a)$는 $a=1$일 때 극소이면서 최소이다.

답 1

1067 두 곡선 $y=kx^3$, $y=-\frac{1}{k}x^3$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_0^1\left\{kx^3-\left(-\frac{1}{k}x^3\right)\right\}dx$$

$$=\left(k+\frac{1}{k}\right)\int_0^1 x^3dx$$

$$=\left(k+\frac{1}{k}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}\left(k+\frac{1}{k}\right)$$

이때 $k>0$, $\frac{1}{k}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{4}\left(k+\frac{1}{k}\right)\geq\frac{1}{4}\cdot2\sqrt{k\cdot\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}$$ (단, 등호는 $k=1$일 때 성립)

따라서 주어진 두 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $k=1$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

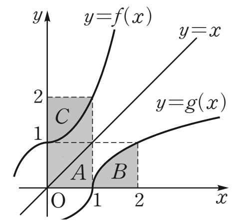
답 ②

타쎈 특강 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

1068 함수 $f(x)=x^3+1$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 오른쪽 그림에서



$\quad (B$의 넓이$)=(C$의 넓이$)$

이므로

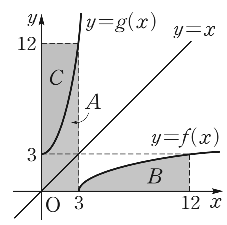
$$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 g(x)dx=(A\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})$$

$$=(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})$$

$$=1\cdot2=2$$

답 ②

1069 함수 $f(x)=\sqrt{x-3}$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 오른쪽 그림에서



$\quad (B$의 넓이$)=(C$의 넓이$)$

이므로

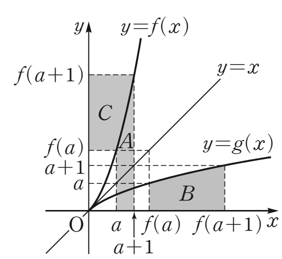
$$\int_0^3 g(x)dx+\int_3^{12} f(x)dx=(A\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})$$

$$=(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})$$

$$=3\cdot12=36$$

답 36

1070 함수 $f(x)=x^2+x\ (x\geq0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 오른쪽 그림에서



$\quad (B$의 넓이$)=(C$의 넓이$)$

이므로

$$\int_a^{a+1}f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(a+1)}g(x)dx$$

$=(A$의 넓이$)+(B$의 넓이$)$

$=(A$의 넓이$)+(C$의 넓이$)$

$=(a+1)f(a+1)-af(a)$

$=3a^2+5a+2$

즉 $3a^2+5a+2=14$이므로

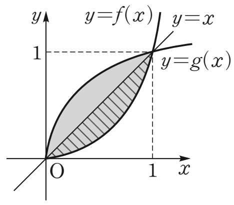
$3a^2+5a-12=0,\quad (a+3)(3a-4)=0$

$\therefore a=\frac{4}{3}\ (\because a>0)$

답 $\frac{4}{3}$

11 정적분의 활용

1071 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



$x^2=x$에서

$x(x-1)=0$

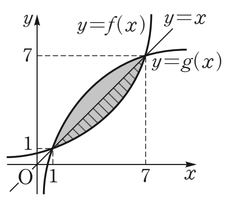
$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^1 (x-x^2)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

답 ④

1072 오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이는



$$\int_1^7 \{x-f(x)\}dx$$

$$=\int_1^7 x\,dx-\int_1^7 f(x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^7-13$$

$$=24-13=11$$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 빗금친 부분의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$2\cdot11=22$

답 22

1073 $v(t)=0$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로

$2-t=0$ $\quad\therefore t=2$

따라서 $t=2$에서 점 P의 위치는

$$5+\int_0^2 (2-t)dt=5+\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=5+2=7$$

답 ①

1074 점 P가 원점으로 되돌아오는 시각을 $t=a$ $(a>0)$라 하면

$\int_0^a (8-4t)dt=0,\qquad \left[8t-2t^2\right]_0^a=0$

$-2a^2+8a=0,\qquad a(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

따라서 $t=4$일 때 점 P가 원점으로 되돌아오므로 걸리는 시간은 4이다.

답 4

1075 $t=3$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3 v(t)dt=\int_0^1 (t^2-t)dt+\int_1^3 (-t^2+4t-3)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3$$

$$=-\frac{1}{6}+\frac{4}{3}=\frac{7}{6}$$

답 ④

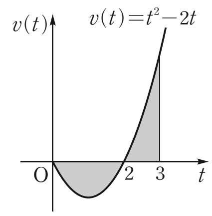
1076 점 P가 출발한 후 다시 원점을 지나는 시각을 $t=a$ $(a>0)$라 하면

$\int_0^a (t^2-2t)dt=0,\qquad \left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^a=0$

$\frac{1}{3}a^3-a^2=0,\qquad \frac{1}{3}a^2(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

따라서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는



$$\int_0^3 |t^2-2t|dt$$

$$=\int_0^2 (-t^2+2t)dt+\int_2^3 (t^2-2t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^3$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

답 ②

1077 시각 t에서 두 점 A, B의 위치를 각각 $x_A(t)$, $x_B(t)$라 하면

$$x_A(t)=0+\int_0^t (-2t+6)dt=\left[-t^2+6t\right]_0^t=-t^2+6t$$

$$x_B(t)=0+\int_0^t (2t-6)dt=\left[t^2-6t\right]_0^t=t^2-6t$$ ⇨ ❶

$t=t_1$일 때 다시 만나므로

$-t_1{}^2+6t_1=t_1{}^2-6t_1,\qquad 2t_1(t_1-6)=0$

$\therefore t_1=6$ ($\because t_1>0$) ⇨ ❷

또 두 점 A, B 사이의 거리는

$|(-t^2+6t)-(t^2-6t)|=2|-t^2+6t|=2|-(t-3)^2+9|$

$0\le t\le 6$에서 두 점 사이의 거리는 $t=3$일 때 최대이므로

$t_2=3$ ⇨ ❸

$\therefore t_1+t_2=9$ ⇨ ❹

답 9

채점 기준	비율
❶ $x_A(t)$, $x_B(t)$를 구할 수 있다.	30%
❷ t_1의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ t_2의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ t_1+t_2의 값을 구할 수 있다.	10%

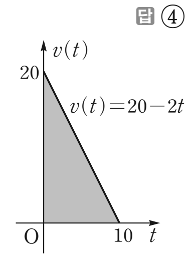
1078 $v(t)=20-2t=0$에서 $\qquad t=10$

따라서 자동차는 제동을 건 지 10초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^{10} (20-2t)dt=\left[20t-t^2\right]_0^{10}=100(\mathrm{m})$$

답 ④

다른풀이 $v(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 제동을 건 후 자동차가 정지할 때까지 달린 거리는



$$\int_0^{10} |v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot10\cdot20$$

$$=100(\mathrm{m})$$

1079 $v(t)=15-10t=0$에서 $\qquad t=\frac{3}{2}$

따라서 물체는 위로 쏘아 올린 지 $\frac{3}{2}$초 후에 최고 높이에 도달하므

로 구하는 높이는

$$5+\int_0^{\frac{3}{2}}(15-10t)dt=5+\left[15t-5t^2\right]_0^{\frac{3}{2}}$$
$$=5+\frac{45}{4}=\frac{65}{4}(\text{m})$$

답 ②

1080 $t=a\ (a>0)$일 때 열차가 달린 거리가 4 km라 하면

$$\int_0^a\left(t^2+\frac{2}{3}t\right)dt=4$$
$$\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{3}t^2\right]_0^a=4,\qquad \frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}a^2=4$$
$$a^3+a^2-12=0,\qquad (a-2)(a^2+3a+6)=0$$
$$\therefore a=2$$

열차가 출발한 후 $t=2$일 때의 속도는

$$v(2)=2^2+\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{16}{3}(\text{km/m})$$

이므로 구하는 거리는

$$4+\int_2^5\frac{16}{3}dt=4+\left[\frac{16}{3}t\right]_2^5=4+16=20(\text{km})$$

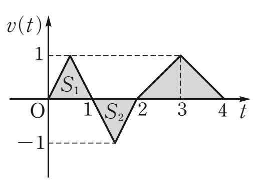
답 20 km

1081 $t=3$에서 점 P의 위치는 $\int_0^3 v(t)dt$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-2)+\frac{1}{2}\cdot(3-2)\cdot 2=-1$$

답 -1

1082 $t=a$일 때, 원점을 다시 지난다고 하면 $\int_0^a v(t)dt=0$이어야 한다.



오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이므로 $t=2$일 때 원점을 다시 지난다.

답 2

1083 $t=3$에서의 점 P의 위치는 $\int_0^3 v(t)dt$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3a+\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot(-a)=2$$
$$\frac{1}{2}a=2\qquad \therefore a=4$$

따라서 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5|v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 12+\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot(5-3)\cdot 12$$
$$=22$$

답 ①

1084 전략 $y\geq 0$인 구간과 $y\leq 0$인 구간으로 나누어 정적분의 값을 구한다.

풀이 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^a|x^3|dx=\int_{-2}^0(-x^3)dx+\int_0^a x^3dx$$
$$=\left[-\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^0+\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a$$
$$=4+\frac{a^4}{4}$$

즉 $4+\frac{a^4}{4}=8$이므로 $\quad\frac{a^4}{4}=4,\quad a^4=16$

$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

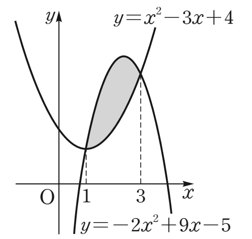
답 ④

1085 전략 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 다음 두 곡선의 위치 관계를 파악한다.

풀이 두 곡선 $y=x^2-3x+4$, $y=-2x^2+9x-5$의 교점의 x좌표는

$x^2-3x+4=-2x^2+9x-5$에서

$$3x^2-12x+9=0$$
$$x^2-4x+3=0$$
$$(x-1)(x-3)=0$$
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3\{(-2x^2+9x-5)-(x^2-3x+4)\}dx$$
$$=\int_1^3(-3x^2+12x-9)dx$$
$$=\left[-x^3+6x^2-9x\right]_1^3$$
$$=4$$

답 4

1086 전략 시각 $t=a$에서의 점 P의 위치가 x_0일 때, 시각 t에서 점 P의 위치는 $x_0+\int_a^t v(t)dt$임을 이용한다.

풀이 $t=0$에서 점 P의 위치를 x_0이라 하면 $t=2$에서 점 P의 위치는

$$x_0+\int_0^2(3-2t)dt=x_0+\left[3t-t^2\right]_0^2$$
$$=x_0+2$$

$x_0+2=10$이므로

$$x_0=8$$

따라서 $t=0$에서 점 P의 위치는 8이다.

답 ⑤

1087 전략 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$, 움직인 거리는 $\int_a^b|v(t)|dt$임을 이용한다.

풀이 $t=0$에서 $t=c$까지 이 물체의 위치의 변화량은 $\int_0^c v(t)dt$이므로

$$p=-2+3-16=-15$$

또 움직인 거리는 $\int_0^c|v(t)|dt$이므로

$$q=2+3+16=21$$
$$\therefore p+q=6$$

답 6

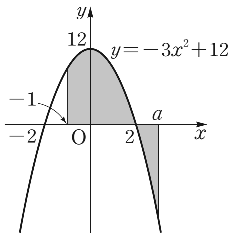
1088 전략 $y\geq 0$인 구간과 $y\leq 0$인 구간으로 나누어 정적분의 값을 구한다.

풀이 곡선 $y=-3x^2+12$와 x축의 교점의 x좌표는 $-3x^2+12=0$에서

$$x^2=4$$
$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

⇨ ❶

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{-1}^{a}|-3x^2+12|dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-3x^2+12)dx$$
$$+\int_{2}^{a}(3x^2-12)dx$$
$$=\Big[-x^3+12x\Big]_{-1}^{2}+\Big[x^3-12x\Big]_{2}^{a}$$
$$=27+a^3-12a-(-16)$$
$$=a^3-12a+43$$ ⇨ ❷

따라서 $a^3-12a+43=34$이므로

$$a^3-12a+9=0$$
$$(a-3)(a^2+3a-3)=0$$
$$\therefore a=3\ (\because a>2)$$ ⇨ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ 색칠한 부분의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

1089 전략 주어진 곡선과 y축의 교점의 y좌표를 구한다.

풀이 곡선 $x=-y^2+4$와 y축의 교점의 y좌표는 $-y^2+4=0$에서

$$(y+2)(y-2)=0$$
$$\therefore y=-2 \text{ 또는 } y=2$$

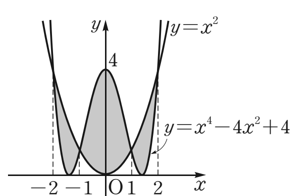
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}(-y^2+4)dy=2\int_{0}^{2}(-y^2+4)dy$$
$$=2\Big[-\frac{1}{3}y^3+4y\Big]_{0}^{2}$$
$$=2\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$$

답 ④

1090 전략 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 다음 두 곡선의 위치 관계를 파악한다.

풀이 두 곡선 $y=x^4-4x^2+4$, $y=x^2$의 교점의 x좌표는 $x^4-4x^2+4=x^2$에서



$$x^4-5x^2+4=0$$
$$(x^2-1)(x^2-4)=0$$
$$(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)=0$$
$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}|x^2-(x^4-4x^2+4)|dx$$
$$=2\int_{0}^{1}\{(x^4-4x^2+4)-x^2\}dx+2\int_{1}^{2}\{x^2-(x^4-4x^2+4)\}dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(x^4-5x^2+4)dx+2\int_{1}^{2}(-x^4+5x^2-4)dx$$
$$=2\Big[\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x\Big]_{0}^{1}+2\Big[-\frac{1}{5}x^5+\frac{5}{3}x^3-4x\Big]_{1}^{2}$$
$$=2\cdot\Big(\frac{38}{15}+\frac{22}{15}\Big)=8$$

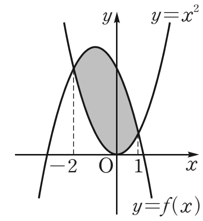
답 ②

1091 전략 평행이동한 곡선의 함수식을 찾은 다음, 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한다.

풀이 곡선 $y=-x^2$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면

$$y=-(x+1)^2+5=-x^2-2x+4$$ ⇨ ❶

두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2-2x+4$의 교점의 x좌표는 $x^2=-x^2-2x+4$에서



$$x^2+x-2=0$$
$$(x+2)(x-1)=0$$
$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$ ⇨ ❷

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{(-x^2-2x+4)-x^2\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)dx$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\Big]_{-2}^{1}$$
$$=\frac{7}{3}-\Big(-\frac{20}{3}\Big)=9$$ ⇨ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	20%
❷ 두 곡선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	50%

1092 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$임을 이용한다.

풀이 $y=x^2-1$에서 $\quad y'=2x$

점 $\mathrm{P}(a, a^2-1)$에서의 접선의 기울기는 $2a$이므로 접선의 방정식은

$$y-(a^2-1)=2a(x-a),\ \text{즉 } y=2ax-a^2-1$$

따라서 주어진 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{1}\{x^2-1-(2ax-a^2-1)\}dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^2-2ax+a^2)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-ax^2+a^2x\Big]_{0}^{1}$$
$$=a^2-a+\frac{1}{3}$$
$$=\Big(a-\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{1}{12}$$

이므로 구하는 최솟값은 $\frac{1}{12}$이다.

답 $\frac{1}{12}$

1093 전략 $\int_{0}^{1}\{(1-x^2)-k\}dx=0$임을 이용한다.

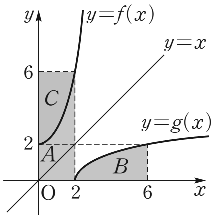
풀이 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_{0}^{1}\{(1-x^2)-k\}dx=0,\qquad \int_{0}^{1}(-x^2+1-k)dx=0$$
$$\Big[-\frac{1}{3}x^3+(1-k)x\Big]_{0}^{1}=0,\qquad -\frac{1}{3}+1-k=0$$
$$\therefore k=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

1094 전략 두 곡선이 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=x^2+2$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



따라서 오른쪽 그림에서

$(B\text{의 넓이})=(C\text{의 넓이})$

이므로

$$\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 g(x)dx=(A\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})$$
$$=(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})$$
$$=2\cdot 6=12$$

답 12

1095 전략 $t=a$에서 $t=b$까지 물체가 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)|dt$임을 이용한다.

풀이 낙하를 시작한 지 $t(t>0)$초부터 $t+1$초까지 물체가 낙하한 거리는

$$\int_t^{t+1} |-10t|dt=\int_t^{t+1} 10t\,dt=\Big[5t^2\Big]_t^{t+1}=10t+5(\mathrm{m})$$

이때 물체가 1초 동안 낙하한 거리가 50 m 이상이 되려면

$10t+5\ge 50 \qquad \therefore t\ge 4.5$

따라서 이 물체가 1초 동안 낙하한 거리가 50 m 이상이 되는 것은 낙하를 시작한 지 4.5초가 지나서부터이다.

답 ③

1096 전략 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근임을 이용한다.

풀이 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax+1$의 교점의 x좌표는 $x^2=ax+1$에서

$x^2-ax-1=0$

방정식 $x^2-ax-1=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-1$

이므로 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2+4$

$\therefore \beta-\alpha=\sqrt{a^2+4}$

따라서 주어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_\alpha^\beta (ax+1-x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+x\right]_\alpha^\beta$$
$$=-\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{a}{2}(\beta^2-\alpha^2)+(\beta-\alpha)$$
$$=(\beta-\alpha)\left\{-\frac{1}{3}\underbrace{(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)}_{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=a^2+1}+\frac{a}{2}(\alpha+\beta)+1\right\}$$
$$=(\beta-\alpha)\left\{-\frac{1}{3}(a^2+1)+\frac{a^2}{2}+1\right\}$$
$$=\sqrt{a^2+4}\left(\frac{1}{6}a^2+\frac{2}{3}\right)$$

이때 $a^2\ge 0$이므로 구하는 최솟값은

$$\sqrt{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

1097 전략 물이 멈추면 $v(t)=0$임을 이용한다.

풀이 $v(t)=0$일 때 물이 멈추므로

$3t-t^2=0, \quad t(3-t)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=3$

따라서 $t=3$일 때까지 흘러나온 물의 양은

$$2^2\cdot\int_0^3 (3t-t^2)dt=4\left[\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3=4\cdot\frac{9}{2}=18$$

답 ②

타쎈 특강 물체의 운동과 속도의 관계

① 움직이던 물체가 정지할 때 ➡ (속도)=0
② 움직이던 물체가 운동 방향을 바꿀 때 ➡ (속도)=0

1098 전략 $v(t)=0$을 만족시키는 t를 기준으로 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

풀이 ㄱ. $0<t\le 7$에서 $v(t)$의 그래프는 t축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 $t=7$일 때까지 운동 방향이 두 번 바뀐다.

ㄴ. $t=4$일 때 $|v(t)|$의 값이 가장 크므로 속력이 가장 크다.

ㄷ. $3\le t\le 4$일 때, $v(t)=-3t+10$이므로

$-3t+10=0$에서 $\qquad t=\frac{10}{3}$

따라서 $t=7$일 때 점 P의 위치는

$$\int_0^7 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{10}{3}\right)\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\left(6-\frac{10}{3}\right)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$
$$=0$$

이므로 $t=7$일 때 점 P는 원점에 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

memo