정답 및 풀이

V. 집합과 명제

15 집합의 뜻과 표현

유제

본책 12~21쪽

001-❶ 집합 B를 원소나열법으로 나타내면

$B=\{2, 3, 5, 7\}$

이므로 $x \in A$, $y \in B$일 때, $x+y$의 값은 다음 표와 같다.

x \ y	2	3	5	7
1	3	4	6	8
2	4	5	7	9
3	5	6	8	10
4	6	7	9	11

$\therefore C=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

따라서 집합 C의 원소의 개수는 9이다. 답 9

001-❷ $x \in S$, $y \in S$에 대하여 (x, y)를 구해 보면 다음 표와 같다.

x \ y	1	2	3	4	5
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)

이 중에서 $x<y$인 것은 색칠한 부분과 같으므로

$A=\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3),$
$(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$

따라서 집합 A의 원소의 개수는 10이다. 답 10

002-❶ ① 집합 $\{\varnothing\}$의 원소의 개수가 1이므로

$n(\{\varnothing\})=1$

② $n(\{1, 2\})=2$, $n(\{2, 3\})=2$이므로

$n(\{1, 2\})=n(\{2, 3\})$

③ $n(\{2, 3, 4\})-n(\{2, 3\})=3-2=1$

⑤ $n(\{3, 5, 7, 9\})=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

002-❷ $x^3-x^2-6x=0$에서

$x(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{-2, 0, 3\}$

$|x|=0$에서 $x=0$이므로 $B=\{0\}$

따라서 $n(A)=3$, $n(B)=1$이므로

$n(A)+n(B)=4$ 답 4

003-❶ $A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

① $2 \in A$

② $5 \in A$, $\{5\} \subset A$

③ $\{2, 7\} \subset A$

⑤ 집합 A의 원소 2에 대하여 $2 \notin \{1, 3, 5, 7\}$이므로

$A \not\subset \{1, 3, 5, 7\}$

따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

003-❷ 집합 A의 원소는

$a, b, \{c\}, \{c, d\}$

① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset A$

② $\{a, b\}$는 집합 A의 부분집합이므로

$\{a, b\} \subset A$

③ $\{c\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{c\} \in A$

④ $\{c\}$는 집합 A의 부분집합이 아니므로 $\{c\} \not\subset A$

⑤ $\{c, d\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{c, d\} \in A$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

004-❶ $3 \in B$이므로 $3 \in A$

즉 $a^2+5a-3=3$이므로

$a^2+5a-6=0$, $(a+6)(a-1)=0$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=1$

(i) $a=-6$일 때,

$A=\{-2, 3\}$, $B=\{3, 54\}$이므로

$A \neq B$

(ii) $a=1$일 때,

$A=\{-2, 3\}$, $B=\{-2, 3\}$이므로

$A=B$

(i), (ii)에서 $A=B$를 만족시키는 a의 값은 1이다.

답 1

004-❷ $2 \in A$이므로 $2 \in B$

(i) $a-1=2$, 즉 $a=3$일 때,

$A=\{2, 4\}$, $B=\{2, 4, 5\}$이므로

$A \subset B$

(ii) $3a-4=2$, 즉 $a=2$일 때,

$A=\{2, 3\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로

$A \not\subset B$

(i), (ii)에서 $A \subset B$를 만족시키는 a의 값은 3이다.

답 3

005-① 집합 $C=\{x|x\in B$이고 $x\notin A\}$이므로
$C=\{2, 4, 6\}$
$C\subset X\subset B$에서 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 2, 4, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{7-3}=2^4=16$ 답 16

005-② 집합 A의 원소 중 3의 배수는 3, 6, 9이고, 4의 배수는 4, 8이다.
따라서 구하는 집합의 개수는 집합 A의 부분집합 중 3, 6, 9는 반드시 원소로 갖고, 4, 8은 원소로 갖지 않는 집합의 개수이므로
$2^{10-3-2}=2^5=32$ 답 32

중단원 연습 문제

본책 22~25쪽

01 ③, ⑤	**02** $B=\left\{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\}$			
03 6	**04** ①, ②		**05** ①	**06** 3
07 ⑤	**08** 12	**09** -1	**10** 64	**11** ④
12 6	**13** $\{1, 2, 5, 8, 9\}$		**14** ②, ⑤	
15 5	**16** 64	**17** 56	**18** ②	**19** 8
20 3	**21** ②	**22** 8	**23** ③	

01 (전략) 집합은 어떤 대상이 그 모임에 속하는지 판단할 수 있는 기준이 분명해야 한다.

(풀이) '많이', '가까운', '잘하는'과 같은 조건은 명확하지 않으므로 ①, ②, ④는 집합이라고 할 수 없다.
답 ③, ⑤

Remark▶
③과 같이 모임에 속하는 대상이 무수히 많거나 ⑤와 같이 모임에 속하는 대상이 하나도 없더라도 기준이 명확하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것은 집합이다.

02 (전략) 집합 B의 원소는 집합 A의 원소에 의하여 정해지므로 먼저 집합 A의 원소를 구한다.

(풀이) $A=\{1, 2, 3, 4\}$

$a=1$일 때, $b=\frac{1}{12}$

$a=2$일 때, $b=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$a=3$일 때, $b=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$a=4$일 때, $b=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$\therefore B=\left\{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\}$

답 $B=\left\{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\}$

03 (전략) 집합 $A\otimes B$의 원소를 먼저 구한다.

(풀이) $a\in A$, $b\in B$일 때, ab의 값은 오른쪽 표와 같다.

a \ b	1	2	3
-1	-1	-2	-3
0	0	0	0

$\therefore A\otimes B$
$=\{-3, -2, -1, 0\}$ ⋯ ❶

또 $c\in A\otimes B$, $d\in A$일 때, cd의 값은 오른쪽 표와 같다.

c \ d	-1	0
-3	3	0
-2	2	0
-1	1	0
0	0	0

$\therefore (A\otimes B)\otimes A$
$=\{0, 1, 2, 3\}$ ⋯ ❷

따라서 구하는 모든 원소의 합은
$0+1+2+3=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 집합 $A\otimes B$를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 집합 $(A\otimes B)\otimes A$를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 집합 $(A\otimes B)\otimes A$의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

04 (전략) 각 집합을 원소나열법으로 나타낸 후 원소의 개수를 조사한다.

(풀이) ① $|x|<1$인 정수 x는 0이므로 $\{0\}$
따라서 유한집합이다.
② $x^2+1=0$인 실수 x는 없다.
따라서 공집합이므로 유한집합이다.
③ 0과 1 사이에 유리수는 무수히 많으므로 무한집합이다.
④ $\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$이므로 무한집합이다.
⑤ $-1<x-y<1$이고, -1과 1 사이에 실수는 무수히 많으므로 무한집합이다.
따라서 유한집합인 것은 ①, ②이다. 답 ①, ②

05 (전략) 원소의 개수가 0인 집합을 찾는다.

(풀이) ① 0과 곱하여 1이 되는 x는 없다.
② $x^3+1=0$에서 $x=-1$ $\therefore \{-1\}$

③ $x^2+4x+3<0$에서 $(x+3)(x+1)<0$

$-3<x<-1$

따라서 -3과 -1 사이에 유리수는 무수히 많으므로 무한집합이다.

④ $x^2=0$에서 $x=0$ $\therefore \{0\}$

⑤ 1보다 작은 실수는 무수히 많으므로 무한집합이다.

따라서 공집합인 것은 ①이다. 답 ①

06 전략 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 4의 양의 약수는 1, 2, 4이므로

$A=\{1, 2, 4\}$

3 이상 15 미만인 짝수는 4, 6, 8, 10, 12, 14이므로

$B=\{4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

따라서 $n(A)=3$, $n(B)=6$이므로

$n(B)-n(A)=3$ 답 3

07 전략 x가 집합 S의 원소이면 $x\in S$이고, $\{x\}\subset S$이다.

풀이 ⑤ 1, 2는 S의 원소이므로 $\{1, 2\}\subset S$

답 ⑤

08 전략 먼저 집합 A의 원소를 구한 후 $B\subset A$임을 이용한다.

풀이 $A=\{12, 24, 36, \cdots\}$이고 $B\subset A$이므로 k는 12의 양의 배수이다.

따라서 자연수 k의 최솟값은 12이다. 답 12

09 전략 $2\in A$이므로 $2\in B$이어야 함을 이용한다.

풀이 $A=B$이므로 $a^2-3a-2=2$

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$ ··· ❶

(i) $a=-1$일 때,

$A=\{-1, 2, 3\}$, $B=\{-1, 2, 3\}$이므로

$A=B$

(ii) $a=4$일 때,

$A=\{-7, 2, 4\}$, $B=\{-1, 2, 3\}$이므로

$A\neq B$

(i), (ii)에서 $a=-1$ ··· ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ $a^2-3a-2=2$를 만족시키는 a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $A=B$를 만족시키는 a의 값을 구할 수 있다.	50 %

10 전략 먼저 집합 A의 원소의 개수를 구한다.

풀이 $A=\{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$이므로

$n(A)=6$

따라서 집합 A의 부분집합의 개수는

$2^6=64$ 답 64

11 전략 집합 $P=\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$에 대하여 집합 P의 특정한 원소 $k(k<n)$개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는 2^{n-k}임을 이용한다.

풀이 10 이하의 자연수의 개수는 10이므로

$n(A)=10$

이때 $X\subset A$이지만 $X\neq A$이므로 집합 X는 집합 A의 진부분집합이다.

따라서 집합 X 중에서 2, 4, 6을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{10-3}-1=127$ 답 ④

12 전략 세 집합 A, B, C의 원소를 각각 구해 본다.

풀이 $A=\{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$이므로 $n(A)=4$ ··· ❶

$|x|=-1$을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않으므로

$B=\varnothing$ $\therefore n(B)=0$ ··· ❷

$x^4+x^3-x^2+x-2=0$에서

$(x^2+1)(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ ($\because$ x는 실수)

즉 $C=\{-2, 1\}$이므로 $n(C)=2$ ··· ❸

$\therefore n(A)+n(B)+n(C)=4+0+2$

$=6$ ··· ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ $n(A)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $n(B)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $n(C)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $n(A)+n(B)+n(C)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

13 전략 조건 (나)에서 $1\in A$, $5\in A$, $8\in A$이므로 집합 A의 나머지 두 원소를 a, b로 놓고 주어진 조건을 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 집합 A의 원소는 5개이므로 집합 A의 나머지 두 원소를 a, b라 하면 조건 (나), (다)에서

$1+5+8+a+b=25$ $\therefore a+b=11$

(ⅰ) $a=3$일 때,
$b=8$이므로 $\quad A=\{1, 3, 5, 8\}$
따라서 $n(A)=5$를 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $a=6$일 때,
$b=5$이므로 $\quad A=\{1, 5, 6, 8\}$
따라서 $n(A)=5$를 만족시키지 않는다.
(ⅲ) $a=9$일 때,
$b=2$이므로 $\quad A=\{1, 2, 5, 8, 9\}$
따라서 주어진 조건을 모두 만족시킨다.
이상에서 $\quad A=\{1, 2, 5, 8, 9\}$

답 $\{1, 2, 5, 8, 9\}$

14 전략 $n(A)$는 유한집합 A의 원소의 개수임을 이용한다.

풀이 ① $n(\{0, 1\})-n(\{\varnothing\})=2-1=1$
③ $A=\{1, 2\}$, $B=\{3, 4\}$이면 $n(A)=n(B)$이지만 $A\neq B$이다.
④ $A=\{1, 2\}$, $B=\{3, 4, 5\}$이면 $n(A)<n(B)$이지만 $A\not\subset B$이다.
⑤ $A=\varnothing$이므로 $\quad n(A)=0$
따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

답 ②, ⑤

15 전략 조건제시법으로 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내어 본다.

풀이 $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
이고 $B\subset A$, $A\neq B$이므로 a의 값이 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, 6, 9의 5개이다. 답 5

Remark▶
- $a=1$일 때, $\quad B=\{1\}$
- $a=2$일 때, $\quad B=\{1, 2\}$
- $a=3$일 때, $\quad B=\{1, 3\}$
- $a=6$일 때, $\quad B=\{1, 2, 3, 6\}$
- $a=9$일 때, $\quad B=\{1, 3, 9\}$

16 전략 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2를 원소로 갖는 집합이다.

풀이 집합 X의 개수가 16이므로
$2^{n-2}=2^4$
즉 $n-2=4$이므로
$n=6$
따라서 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 원소의 개수는 6이므로 부분집합의 개수는
$2^6=64$ 답 64

17 전략 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합은 전체 부분집합에서 홀수를 원소로 갖지 않는 부분집합을 제외한 것과 같다.

풀이 $A=\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$이므로 집합 A의 부분집합의 개수는
$2^6=64$ ··· ❶
집합 A의 부분집합 중 홀수를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 집합 $\{2, 10, 50\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^3=8$ ··· ❷
따라서 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는
$64-8=56$ ··· ❸

답 56

채점 기준	비율
❶ 집합 A의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 집합 A의 부분집합 중 홀수를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 A의 부분집합 중 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	20 %

18 전략 집합 A는 자연수를 원소로 가지므로 x와 $7-x$가 모두 자연수임을 이용한다.

풀이 x와 $7-x$가 모두 자연수이므로
$x\geq 1$, $7-x\geq 1$
$\therefore 1\leq x\leq 6$
따라서 집합 A의 원소가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.
원소의 개수에 따라 집합 A를 구해 보면 다음과 같다.
(ⅰ) 집합 A의 원소의 개수가 2일 때,
$\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$
(ⅱ) 집합 A의 원소의 개수가 4일 때,
$\{1, 2, 5, 6\}$, $\{1, 3, 4, 6\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$
(ⅲ) 집합 A의 원소의 개수가 6일 때,
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
ㄱ. 원소의 개수가 1인 집합 A는 존재하지 않는다.
ㄷ. 2를 원소로 갖는 집합 A는 $\{2, 5\}$, $\{1, 2, 5, 6\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 4개이다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

19 전략 주어진 조건을 이용하여 집합 X가 될 수 있는 경우를 찾아본다.

풀이 조건 ㈎에서 집합 X의 모든 원소는 홀수이어야 한다.

또 조건 (나)에서 집합 X의 원소의 개수는 홀수이어야 한다.
즉 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중에서 원소가 모두 홀수이고, 원소의 개수가 홀수인 집합이다. ⋯ ❶

(i) $n(X)=1$일 때,
집합 X는 $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$의 4개이다. ⋯ ❷

(ii) $n(X)=3$일 때,
집합 X는 $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 7\}$, $\{1, 5, 7\}$, $\{3, 5, 7\}$의 4개이다. ⋯ ❸

(i), (ii)에서 집합 X의 개수는
$4+4=8$ ⋯ ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ 집합 X의 조건을 알 수 있다.	30 %
❷ $n(X)=1$일 때, 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ $n(X)=3$일 때, 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	10 %

Remark▶
자연수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대하여
① $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$의 값이 홀수이려면 $a_1, a_2, \cdots, a_n$이 모두 홀수이어야 한다.
② $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$의 값이 짝수이려면 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.
③ $a_1+a_2+\cdots+a_n$의 값이 홀수이려면 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중 홀수인 것이 홀수 개이어야 한다.
④ $a_1+a_2+\cdots+a_n$의 값이 짝수이려면 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중 홀수인 것이 짝수 개이거나 없어야 한다.

20 전략 먼저 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하여 집합 A를 찾는다.

풀이 $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $\cdots$
즉 i^n(n은 자연수)은 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타나므로
$A=\{i, -1, -i, 1\}$
$i^2=-1$, $(-1)^2=1$, $(-i)^2=-1$, $1^2=1$이므로 집합 B의 원소는
$-1+1=0$, $-1+(-1)=-2$, $1+1=2$
즉 $B=\{-2, 0, 2\}$이므로 구하는 원소의 개수는 3이다.

답 3

21 전략 ab가 자연수의 제곱이 되는 각 경우의 집합 A를 구한다.

풀이 (i) $ab=4$일 때, $A=\{1, 4\}$
(ii) $ab=9$일 때, $A=\{1, 9\}$
(iii) $ab=16$일 때, $A=\{2, 8\}$
(iv) $ab=36$일 때, $A=\{4, 9\}$
이상에서 구하는 집합 A의 개수는 4이다.

답 ②

22 전략 먼저 집합 X의 원소로 가능한 것을 모두 나열해 본다.

풀이 $X=\{x+y\,|\,x\in A, y\in B\}$
$=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a+1, a+3, a+5\}$
그런데 a는 자연수이므로 $a+1$, $a+3$, $a+5$는 모두 2 이상의 자연수이다.
따라서 $n(X)=10$이 되기 위해서는
$a+1\le 9$, $a+3>9$
$\therefore 6<a\le 8$
따라서 자연수 a의 최댓값은 8이다.

답 8

23 전략 특정한 원소를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 이용하여 $f(n)$을 구한다.

풀이 집합 $X=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$의 원소 n에 대하여 X의 부분집합 중 n을 최소의 원소로 갖는 집합의 원소는 모두 n 이상이어야 한다.
즉 $f(n)$은 n을 반드시 원소로 갖고 n보다 작은 자연수를 원소로 갖지 않는 집합 X의 부분집합의 개수이므로
$f(n)=2^{10-1-(n-1)}=2^{10-n}$ (단, $1\le n<10$)
ㄱ. $f(8)=2^{10-8}=4$
ㄴ. $1\in X$, $2\in X$이고 $1<2$이지만
$f(1)=2^{10-1}=2^9$, $f(2)=2^{10-2}=2^8$
이므로 $f(1)>f(2)$이다.
ㄷ. $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$
$=2^9+2^7+2^5+2^3+2$
$=512+128+32+8+2$
$=682$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

Remark▶
$n=10$일 때, 10을 최소의 원소로 갖는 집합은 $\{10\}$뿐이므로 $f(10)=1$

Ⅴ. 집합과 명제

16 집합의 연산

유제

본책 29~50쪽

006-❶ $|x|=1$에서 $x=\pm1$이므로

$A=\{-1, 1\}$

$x^3-x=0$에서 $x(x+1)(x-1)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$\therefore B=\{-1, 0, 1\}$

5 이하의 소수는 2, 3, 5이므로

$C=\{2, 3, 5\}$

(1) $A\cup B=\{-1, 0, 1\}$

(2) $A\cap B=\{-1, 1\}$

(3) $A\cap B=\{-1, 1\}$이므로

$(A\cap B)\cup C=\{-1, 1, 2, 3, 5\}$

답 풀이 참조

006-❷ 두 집합 B, C를 원소나열법으로 나타내면

$B=\{3, 6, 9, \cdots\}$, $C=\{1, 3, 9\}$

이므로

$A\cap B=\{6\}\neq\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$,

$B\cap C=\{3, 9\}\neq\varnothing$

따라서 서로소인 두 집합은 A와 C이다.

답 A, C

006-❸ $a\in A$, $b\in A$일 때, $x=a+2b$의 값은 오른쪽 표와 같다.

a \ b	1	2	3
1	3	5	7
2	4	6	8
3	5	7	9

따라서

$B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

이므로

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\therefore n(A\cup B)=9$

답 9

007-❶ $A\cap B=\{4\}$에서 $4\in(A\cap B)$이므로

$4\in A$

따라서 $a^2+3a=4$이므로 $a^2+3a-4=0$

$(a+4)(a-1)=0$ $\therefore a=-4$ 또는 $a=1$

(i) $a=-4$일 때,

$A=\{3, 4\}$, $B=\{-2, 4, 6\}$이므로

$A\cap B=\{4\}$

(ii) $a=1$일 때,

$A=\{3, 4\}$, $B=\{3, 4, 6\}$이므로

$A\cap B=\{3, 4\}$

(i), (ii)에서 $A\cap B=\{4\}$를 만족시키는 a의 값은 -4이다.

답 -4

007-❷ $A\cup B=\{1, 2, 4, 5\}$에서 $4\in A$ 또는 $5\in A$이므로

$2a+1=4$ 또는 $2a+1=5$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=2$

(i) $a=\frac{3}{2}$일 때,

$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\left\{2, \frac{7}{2}\right\}$이므로

$A\cup B=\left\{1, 2, \frac{7}{2}, 4\right\}$

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{1, 2, 5\}$, $B=\{2, 4\}$이므로

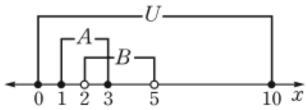
$A\cup B=\{1, 2, 4, 5\}$

(i), (ii)에서 $A\cup B=\{1, 2, 4, 5\}$를 만족시키는 a의 값은 2이므로

$A=\{1, 2, 5\}$

답 $\{1, 2, 5\}$

008-❶ 세 집합 U, A, B를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



위의 수직선에서 각 집합을 구하면

(1) $A^C=\{x|0\leq x<1$ 또는 $3<x\leq10\}$

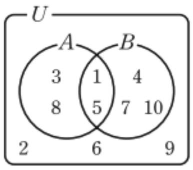
(2) $B^C=\{x|0\leq x\leq2$ 또는 $5\leq x\leq10\}$

(3) $A-B=\{x|1\leq x\leq2\}$

(4) $B-A=\{x|3<x<5\}$

답 풀이 참조

008-❷ 전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$과 주어진 조건을 만족시키는 두 부분집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore A=\{1, 3, 5, 8\}$

답 $\{1, 3, 5, 8\}$

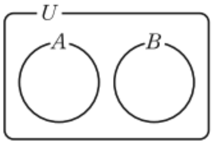
009-❶ $A\cap B=A \Longleftrightarrow A\subset B$

① $A\cup B=B \Longleftrightarrow A\subset B$

② $B^C \subset A^C \iff A \subset B$
③ $(A-B)^C = U \iff A-B=\varnothing \iff A \subset B$
④ $B^C - A^C = \varnothing \iff B^C \subset A^C \iff A \subset B$
⑤ $A \cup B^C = U \iff B \subset A$
따라서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

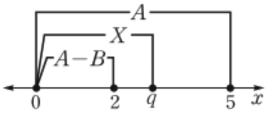
009-❷ A, B가 서로소이므로 이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$A \cap B = \varnothing$
$\iff A - B = A$
$\iff A \subset B^C$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ

010-❶ $B \cap X = X$에서 $X \subset B$이고,
$(B-A) \cup X = X$에서 $(B-A) \subset X$이므로
$(B-A) \subset X \subset B$
이때 $B-A=\{5, 6, 7\}$이므로
$\{5, 6, 7\} \subset X \subset \{3, 4, 5, 6, 7\}$
따라서 집합 X는 집합 $B-A$의 원소 5, 6, 7을 반드시 원소로 갖는 집합 B의 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는 $2^{5-3}=2^2=4$ 답 4

010-❷ $X - A = \varnothing$에서 $X \subset A$이고,
$(A-B) \cup X = X$에서 $(A-B) \subset X$이므로
$(A-B) \subset X \subset A$
이때 $A-B=\{x \mid 0 \le x \le 2\}$이므로
$\{x \mid 0 \le x \le 2\} \subset X \subset \{x \mid 0 \le x \le 5\}$
이를 만족시키도록 집합 X를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$p=0,\ 2 \le q \le 5$
따라서 구하는 q의 최댓값과 최솟값의 차는
$5-2=3$ 답 3

011-❶ (1) $(A \cap B) \cup (A^C \cap B)$
$= (A \cup A^C) \cap B = U \cap B = B$
(2) $\{A \cap (A^C \cup B)\} \cap \{B \cap (B \cup C)\}$
$= \{(A \cap A^C) \cup (A \cap B)\} \cap B$
$= \{\varnothing \cup (A \cap B)\} \cap B$
$= (A \cap B) \cap B = A \cap B$
답 (1) B (2) $A \cap B$

011-❷ (1) $(A-B)-C = (A \cap B^C) \cap C^C$
$= A \cap (B^C \cap C^C)$
$= A \cap (B \cup C)^C$
$= A - (B \cup C)$
(2) $A-(B-C) = A \cap (B \cap C^C)^C$
$= A \cap (B^C \cup C)$
$= (A \cap B^C) \cup (A \cap C)$
$= (A-B) \cup (A \cap C)$
답 풀이 참조

012-❶ 주어진 식의 좌변을 정리하면
$\{(A \cup B) \cap (A \cup B^C)\} \cap B$
$= \{A \cup (B \cap B^C)\} \cap B$
$= (A \cup \varnothing) \cap B$
$= A \cap B$
따라서 주어진 조건은 $A \cap B = A$이므로
$A \subset B$ 답 ①

Remark▶
② $A^C \subset B^C \iff B \subset A$
④ $A \cap B = \varnothing \iff A, B$는 서로소

012-❷ 주어진 식의 좌변을 정리하면
$\{A \cap (A^C \cap B^C)^C\} \cup \{A \cap (A^C \cup B)\}$
$= \{A \cap (A \cup B)\} \cup \{(A \cap A^C) \cup (A \cap B)\}$
$= A \cup \{\varnothing \cup (A \cap B)\}$
$= A \cup (A \cap B)$
$= A$
따라서 주어진 조건은
$A = A \cup B \quad \therefore B \subset A$ 답 풀이 참조

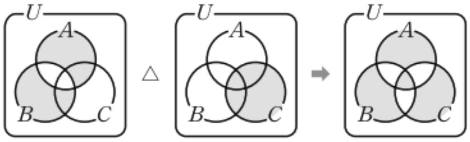
013-❶ 주어진 연산을 정리하면
$A \triangle B = (A \cup B) \cap B^C$
$= (A \cap B^C) \cup (B \cap B^C)$
$= (A \cap B^C) \cup \varnothing$
$= A \cap B^C$
① $A \triangle \varnothing = A \cap \varnothing^C = A \cap U = A$
② $A \triangle U = A \cap U^C = A \cap \varnothing = \varnothing$
③ $A \triangle A^C = A \cap (A^C)^C = A \cap A = A$
④ $A \triangle B^C = A \cap (B^C)^C = A \cap B$
⑤ $A^C \triangle B^C = A^C \cap (B^C)^C = A^C \cap B$
$= B \cap A^C = B \triangle A$
따라서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ③이다.
답 ③

013-❷ 주어진 연산을 정리하면

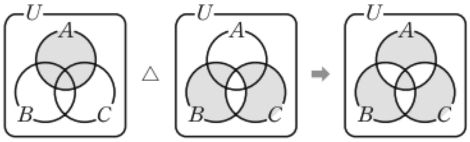
$$\begin{aligned} A*B &= (A^C\cap B^C)^C-(A\cap B) \\ &= (A\cup B)-(A\cap B) \\ &= \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}-\{3,\ 5\} \\ &= \{1,\ 2,\ 4,\ 6\} \end{aligned}$$

따라서 집합 $A*B$의 원소의 개수는 4이다. 답 4

014-❶



$A\triangle B$　　C　　$(A\triangle B)\triangle C$



A　　$B\triangle C$　　$A\triangle(B\triangle C)$

$\therefore\ (A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$

답 풀이 참조

015-❶ (1) $A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$이고 세 집합 $A-B$, $B-A$, $A\cap B$는 어느 두 집합을 짝 지어도 서로소이므로

$$\begin{aligned} n(A\cup B) &= n(A-B)+n(B-A) \\ &\quad +n(A\cap B) \\ &= 10+8+5=23 \end{aligned}$$

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B) \quad \cdots\cdots\ ㉠$$

그런데

$$\begin{aligned} n(A^C\cap B^C) &= n((A\cup B)^C) \\ &= n(U)-n(A\cup B) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} n(A\cup B) &= n(U)-n(A^C\cap B^C) \\ &= 45-15=30 \end{aligned}$$

따라서 ㉠에서

$$n(A)+n(B)=30+10=40$$

답 (1) 23　(2) 40

015-❷ (1) 1부터 30까지의 자연수의 집합을 U, 4의 배수의 집합을 A라 하면

$$n(U)=30,\ n(A)=7$$

이때 4의 배수가 아닌 수의 집합은 A^C이므로

$$n(A^C)=n(U)-n(A)=30-7=23$$

(2) 1부터 30까지의 자연수의 집합을 U, 2의 배수의 집합을 A, 3의 배수의 집합을 B라 하면

$$n(U)=30,\ n(A)=15,\ n(B)=10,$$
$$n(A\cap B)=5$$

$$\begin{aligned} \therefore\ n(A\cup B) &= n(A)+n(B)-n(A\cap B) \\ &= 15+10-5 \\ &= 20 \end{aligned}$$

이때 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수의 집합은 $A^C\cap B^C$, 즉 $(A\cup B)^C$이므로

$$\begin{aligned} n((A\cup B)^C) &= n(U)-n(A\cup B) \\ &= 30-20=10 \end{aligned}$$

답 (1) 23　(2) 10

016-❶ 1부터 100까지의 자연수 중 2의 배수의 집합을 A, 3의 배수의 집합을 B, 5의 배수의 집합을 C라 하자. $A\cap B$는 6의 배수의 집합, $B\cap C$는 15의 배수의 집합, $C\cap A$는 10의 배수의 집합, $A\cap B\cap C$는 30의 배수의 집합이고, 2 또는 3 또는 5로 나누어떨어지는 수의 집합은 $A\cup B\cup C$이다.

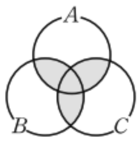
$$n(A)=50,\ n(B)=33,\ n(C)=20,$$
$$n(A\cap B)=16,\ n(B\cap C)=6,$$
$$n(C\cap A)=10,\ n(A\cap B\cap C)=3$$

$$\begin{aligned} &\therefore\ n(A\cup B\cup C) \\ &= n(A)+n(B)+n(C) \\ &\quad -n(A\cap B)-n(B\cap C) \\ &\quad -n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C) \\ &= 50+33+20-16-6-10+3 \\ &= 74 \end{aligned}$$

답 74

016-❷ $U=A\cup B\cup C$이므로

$$n(A\cup B\cup C)=n(U)=44$$



$(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.

$$\begin{aligned} &n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)) \\ &= n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A) \\ &\quad -2\times n(A\cap B\cap C) \\ &= n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-10 \quad \cdots\cdots\ ㉠ \end{aligned}$$

그런데

$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C) &= n(A)+n(B)+n(C) \\ &\quad -n(A\cap B)-n(B\cap C) \\ &\quad -n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$

에서

$44=24+19+23-n(A\cap B)$
$\quad -n(B\cap C)-n(C\cap A)+5$
$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$=71-44=27$

따라서 ㉠에서

$n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))$
$=27-10=17$

답 17

Remark▶

$A\cap B$, $B\cap C$, $C\cap A$에는 모두 $A\cap B\cap C$가 포함되어 있으므로 $n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))$를 구하려면 $n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$에서 $2\times n(A\cap B\cap C)$를 빼야 한다.

017-❶ 동호회 회원 전체의 집합을 U, 바둑을 좋아하는 회원의 집합을 A, 장기를 좋아하는 회원의 집합을 B라 하면

$n(U)=60$, $n(A)=38$, $n(B)=29$,
$n(A^C\cap B^C)=10$

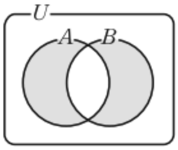
그런데 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=10$에서

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=60-10=50$

또한

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=38+29-50=17$

바둑과 장기 중 한 가지만 좋아하는 회원의 집합은 오른쪽 벤다이어그램의 색칠한 부분이므로 구하는 회원 수는



$n(A\cup B)-n(A\cap B)$
$=50-17=33$

답 33

017-❷ 영화 A, B, C를 관람한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(A)=26$, $n(B)=16$, $n(C)=25$,
$n(A\cap B\cap C)=5$, $n(A\cup B\cup C)=50$

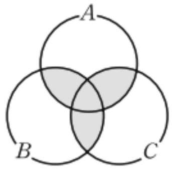
그런데

$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$\quad -n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

이므로

$50=26+16+25-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$\quad -n(C\cap A)+5$
$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=22$

영화를 두 편 이상 관람한 학생들의 집합은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이므로 구하는 학생 수는



$n(A\cap B)+n(B\cap C)$
$+n(C\cap A)$
$-2\times n(A\cap B\cap C)$
$=22-10=12$

답 12

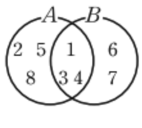
중단원 연습 문제

본책 51~55쪽

01 ④	02 3	03 16	04 $\{1, 5, 6, 9\}$	
05 ⑤	06 8	07 $\{b, c, d\}$		08 ③
09 33	10 10	11 10	12 38	13 16
14 ⑤	15 9	16 ①		
17 $\{3, 4, 5, 7, 9\}$		18 25	19 ④	20 7
21 8	22 ②	23 4	24 75	

01 전략 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내어 본다.

풀이 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로 주어진 조건을 만족시키는 두 집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore A=\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$

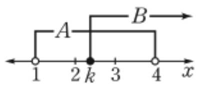
답 ④

02 전략 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타낸다.

풀이 $x^2-5x+4<0$에서 $\quad (x-1)(x-4)<0$

$\therefore 1<x<4$

두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



집합 $A\cap B$의 정수인 원소의 개수가 1이려면

$2<k\le 3$ ⋯ ❷

따라서 정수 k의 값은 3이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타낼 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 k의 값을 구할 수 있다.	20 %

03 (전략) $A\cap B=\{2\}$에서 $2\in B$임을 이용하여 a의 값을 먼저 구한다.

(풀이) $A\cap B=\{2\}$이므로 $\quad 2\in B$
즉 $a^2-a-4=2$이어야 하므로

$a^2-a-6=0,\qquad (a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

(ⅰ) $a=-2$일 때,

$A=\{2, 3, 10\}$, $B=\{2, 3\}$이므로

$A\cap B=\{2, 3\}$

(ⅱ) $a=3$일 때,

$A=\{-2, 2, 15\}$, $B=\{2, 3\}$이므로

$A\cap B=\{2\}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $A\cap B=\{2\}$를 만족시키는 a의 값은 3이다. ⋯ ❶

즉 $A=\{-2, 2, 15\}$, $B=\{2, 3\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{-2, 15\}\cup\{3\}$

$=\{-2, 3, 15\}$ ⋯ ❷

따라서 $(A-B)\cup(B-A)$의 모든 원소의 합은

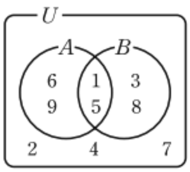
$-2+3+15=16$ ⋯ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ 집합 $(A-B)\cup(B-A)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

04 (전략) 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내어 본다.

(풀이) 전체집합
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$와 주어진 조건을 만족시키는 두 부분집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore A=\{1, 5, 6, 9\}$

답 $\{1, 5, 6, 9\}$

05 (전략) 조건 $A\cup B=A$로부터 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 생각한다.

(풀이) $A\cup B=A \Longleftrightarrow B\subset A$ ⬅①

$\Longleftrightarrow A\cap B=B$ ⬅②

$\Longleftrightarrow A^C\subset B^C$ ⬅③

$\Longleftrightarrow A^C\cap B=\varnothing$ ⬅④

⑤ $U-A=A^C$이므로 $\qquad A^C\cup B\neq U-A$

따라서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

Remark▶
$A^C\cup B=U-A \Longleftrightarrow A\cap B=\varnothing$

06 (전략) 세 집합 A, X, $(B-A)^C$ 사이의 포함 관계를 조사한다.

(풀이) 조건 (가)에서 $A\cup X=X$이므로 $\qquad A\subset X$
조건 (나)에서 $(B-A)\subset X^C$이므로

$X\subset(B-A)^C$

$\therefore A\subset X\subset(B-A)^C$ ⋯ ❶

이때

$B-A=\{2, 6, 7, 8\}-\{1, 2\}$

$=\{6, 7, 8\}$

이므로 $\qquad (B-A)^C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ⋯ ❷

따라서 집합 X는 원소 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 세 집합 A, X, $(B-A)^C$ 사이의 포함 관계를 알 수 있다.	40 %
❷ 집합 $(B-A)^C$를 구할 수 있다.	20 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	40 %

07 (전략) 집합의 분배법칙과 드모르간의 법칙을 이용한다.

(풀이) $(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$

$=A\cap(B^C\cup C^C)$

$=A\cap(B\cap C)^C$

$=\{a, b, c, d\}\cap\{b, c, d, e, f\}$

$=\{b, c, d\}$

답 $\{b, c, d\}$

08 (전략) 집합의 연산 법칙과 연산에 대한 성질, 드모르간의 법칙을 이용한다.

(풀이) ① $B-A=B\cap A^C=A^C\cap B$

② $(A^C-B)^C=(A^C\cap B^C)^C=A\cup B$

③ $(A-B^C)\cup B=\{A\cap(B^C)^C\}\cup B$

$=(A\cap B)\cup B=B$

④ $(A\cap B)\cup(A\cap B^C)=A\cap(B\cup B^C)$

$=A\cap U=A$

⑤ $(A\cup B)\cap(A^C\cap B^C)=(A\cup B)\cap(A\cup B)^C$

$=\varnothing$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

09 (전략) 먼저 분배법칙을 이용하여 주어진 집합을 간단한 연산으로 정리한다.

(풀이) $A_2\cap(A_3\cup A_4)=(A_2\cap A_3)\cup(A_2\cap A_4)$
$=A_6\cup A_4$
따라서 구하는 원소의 개수는
$n(A_6\cup A_4)=n(A_6)+n(A_4)-n(A_6\cap A_4)$
$=n(A_6)+n(A_4)-n(A_{12})$
이때 $n(A_6)=16$, $n(A_4)=25$, $n(A_{12})=8$이므로
$n(A_6\cup A_4)=16+25-8=33$

답 33

10 (전략) $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$임을 이용하여 먼저 $n(A\cap B)$를 구한다.

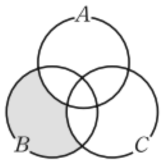
(풀이) $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=18+15-25=8$ ⋯ ❶
$\therefore n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=18-8=10$ ⋯ ❷

답 10

채점 기준	비율
❶ $n(A\cap B)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $n(A-B)$를 구할 수 있다.	40 %

11 (전략) 먼저 집합 $A^C\cap B\cap C^C$를 벤다이어그램으로 나타내어 본다.

(풀이) 집합 $A^C\cap B\cap C^C$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



이때
$n(A\cup C)$
$=n(A)+n(C)-n(A\cap C)$
$=12+11-5=18$
이므로
$n(A^C\cap B\cap C^C)=n(A\cup B\cup C)-n(A\cup C)$
$=28-18=10$ 답 10

12 (전략) 두 집합의 교집합의 원소의 개수가 최대, 최소일 때를 생각해 본다.

(풀이) 반 학생 전체의 집합을 U, 사과를 좋아하는 학생의 집합을 A, 배를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=40$, $n(A)=30$, $n(B)=24$
사과와 배를 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로 $n(A\cap B)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면
$B\subset A$일 때 $n(A\cap B)$가 최대이다.
$\therefore M=24$
또 $A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로
$n(U)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서
$40=30+24-m$
$\therefore m=14$
따라서 구하는 합은
$M+m=24+14=38$ 답 38

Remark▶ 유한집합의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값

전체집합 U의 두 부분집합 A, $B(n(B)<n(A))$에 대하여 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$이므로
① $n(A\cap B)$가 최대가 되는 경우
➡ $n(A\cup B)$가 최소가 될 때, 즉 $B\subset A$
② $n(A\cap B)$가 최소가 되는 경우
➡ $n(A\cup B)$가 최대가 될 때, 즉 $A\cup B=U$

13 (전략) 두 집합 A, B는 집합 $A\cap B$의 원소를 반드시 원소로 가져야 함을 이용한다.

(풀이) $A\cap B=\{1, 2\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 두 집합 A, B는 모두 1과 2를 원소로 갖고, 집합 $\{3, 4, 5, 6\}$의 모든 원소를 중복 없이 나누어 가져야 한다.
즉 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 중 원소 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합 A에 대하여
$B=(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}-A)\cup\{1, 2\}$
이므로 집합 A가 정해지면 집합 B가 하나로 결정된다.
따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는 집합 $\{3, 4, 5, 6\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^4=16$ 답 16

14 (전략) 집합 A의 2를 제외한 나머지 원소로 가능한 것을 찾는다.

(풀이) $2\in A$이고, 집합 A의 모든 원소의 곱이 12이므로 2를 제외한 집합 A의 나머지 원소의 곱은 6이 되어야 한다.
$1\cdot6=6$이므로
$A=\{1, 2, 6\}$ 또는 $A=\{2, 6\}$
$A\cup B=U$, $A\cap B=\{2\}$이므로
(i) $A=\{1, 2, 6\}$이면
$B=\{2, 3, 4, 5, 7\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 21

(ⅱ) $A=\{2, 6\}$이면

$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 22

(ⅰ), (ⅱ)에서 집합 B의 모든 원소의 합의 최댓값은 22이다. 답 ⑤

15 전략 집합 $A\cup B$의 원소 중 하나가 집합 A 또는 B에 있을 경우를 조사해 본다.

풀이 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 $3\in A$ 또는 $3\in B$이다. ⋯ ❶

$3\in A$이면

$a^2+a+3=3$, $a^2+a=0$

$a(a+1)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=-1$

(ⅰ) $a=0$일 때,

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{-3, 3, 4, 6\}$이므로

$A\cup B=\{-3, 1, 2, 3, 4, 6\}$

(ⅱ) $a=-1$일 때,

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{-1, 4, 6\}$이므로

$A\cup B=\{-1, 1, 2, 3, 4, 6\}$ ⋯ ❷

한편 $3\in B$이면 $3-a=3$ 또는 $a^2-a-3=3$이므로

$a=0$ 또는 $a^2-a-6=0$

이때 $a=0$인 경우는 (ⅰ)의 경우이므로

$a^2-a-6=0$에서 $(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

(ⅲ) $a=-2$일 때,

$A=\{1, 2, 4, 5\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(ⅳ) $a=3$일 때,

$A=\{1, 2, 4, 15\}$, $B=\{0, 3, 4, 6\}$이므로

$A\cup B=\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 15\}$ ⋯ ❸

이상에서 조건을 만족시키는 a의 값은 -2이다. ⋯ ❹

이때 $A\cap B=\{4, 5\}$이므로 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은 $4+5=9$ ⋯ ❺

답 9

채점 기준	비율
❶ $3\in A$ 또는 $3\in B$임을 알 수 있다.	20 %
❷ $3\in A$일 때, $A\cup B$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $3\in B$일 때, $A\cup B$를 구할 수 있다.	30 %
❹ a의 값을 구할 수 있다.	10 %
❺ 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

Remark▶

$5\in A$ 또는 $5\in B$로 생각하여도 같은 결과를 얻는다.

16 전략 집합의 연산 법칙과 연산에 대한 성질, 드모르간의 법칙을 이용한다.

풀이 ㄱ. $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=U-(A\cap B)$

ㄴ. $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B^C)\cap(A\cap C^C)$

$=A\cap(B^C\cap C^C)$

$=A\cap(B\cup C)^C$

$=A-(B\cup C)$

ㄷ. $A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 2\}$, $C=\{2, 3\}$이면

$(B-C)\cup(C-B)=\{1\}\cup\{3\}=\{1, 3\}$이므로

$A\subset\{(B-C)\cup(C-B)\}$

이지만 $A\not\subset B$이고 $A\not\subset C$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

17 전략 $A\triangle B$를 먼저 구한 후 이 집합과 집합 C를 다시 연산한다.

풀이 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 9\}$,

$C=\{2, 3, 5, 7\}$ ⋯ ❶

$\therefore A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$

$=\{2, 4\}\cup\{9\}$

$=\{2, 4, 9\}$ ⋯ ❷

$\therefore (A\triangle B)\triangle C$

$=\{(A\triangle B)-C\}\cup\{C-(A\triangle B)\}$

$=\{4, 9\}\cup\{3, 5, 7\}$

$=\{3, 4, 5, 7, 9\}$ ⋯ ❸

답 $\{3, 4, 5, 7, 9\}$

채점 기준	비율
❶ 두 집합 B, C를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $A\triangle B$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $(A\triangle B)\triangle C$를 구할 수 있다.	40 %

18 전략 $(X\cap Y)\subset Y\subset(X\cup Y)$임을 이용하여 $n(Y)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $n(X^C)=n(U)-n(X)$이므로

$13=30-n(X)$ $\therefore n(X)=17$

또 $n(X-Y)=n(X)-n(X\cap Y)$이므로

$11=17-n(X\cap Y)$ $\therefore n(X\cap Y)=6$

이때 $(X\cap Y)\subset Y$이므로

$n(Y)\geq n(X\cap Y)=6$ ⋯⋯ ㉠

$n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$에서

$n(X\cup Y)=17+n(Y)-6$

$\therefore n(Y)=n(X\cup Y)-11$

따라서 $n(X\cup Y)$의 값이 최대일 때 $n(Y)$가 최댓값을 갖는다.

$(X\cup Y)\subset U$에서 $n(X\cup Y)\le n(U)=30$이므로

$n(Y)\le 30-11=19$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $6\le n(Y)\le 19$이므로

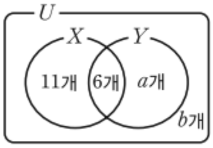
$M=19,\ m=6$

$\therefore M+m=25$ 답 25

다른 풀이 $n(X)=17,\ n(X-Y)=11$에서

$n(X\cap Y)=n(X)-n(X-Y)=6$

이므로 $n(Y-X)=a,\ n((X\cup Y)^C)=b$라 하고 각 영역에 해당하는 집합의 원소의 개수를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$n(U)=30$이므로

$a+b=13$

$n(Y)$는 $a=13,\ b=0$일 때 최댓값을 가지므로

$M=6+13=19$

$n(Y)$는 $a=0,\ b=13$일 때 최솟값을 가지므로

$m=6+0=6$

$\therefore M+m=25$

19 전략 X_3과 $X_4\cap X_5$의 원소의 개수를 각각 구한 다음 합집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 $X_4=\{x\mid x=4n+1,\ n$은 정수$\}$,

$X_5=\{x\mid x=5n+1,\ n$은 정수$\}$이므로

$x\in(X_4\cap X_5)$라 하면 $x-1$은 4와 5의 공배수이다.

즉 $x-1$은 20의 배수이므로

$x-1=0,\ 20,\ 40,\ 60,\ 80\ (\because 0\le x-1\le 99)$

$\therefore x=1,\ 21,\ 41,\ 61,\ 81$

즉 $X_4\cap X_5=\{1,\ 21,\ 41,\ 61,\ 81\}$이므로

$n(X_4\cap X_5)=5$

한편 $X_3=\{x\mid x=3n+1,\ n$은 정수$\}$,

즉 $X_3=\{1,\ 4,\ 7,\ \cdots,\ 100\}$이므로 $n(X_3)=34$

이때 $X_4\cap X_5$의 원소 중에서 X_3의 원소는 1, 61이므로

$n(X_3\cap X_4\cap X_5)=2$

따라서 $X_3\cup(X_4\cap X_5)$의 원소의 개수는

$n(X_3\cup(X_4\cap X_5))$

$=n(X_3)+n(X_4\cap X_5)-n(X_3\cap X_4\cap X_5)$

$=34+5-2=37$ 답 ④

20 전략 먼저 $A\cap B$의 원소를 구한다.

풀이 $A\cap B^C=\{6,\ 7\}$, 즉 $A-B=\{6,\ 7\}$이므로

$A\cap B=\{3\}$

따라서 $3\in B$이므로

$a-4=3 \qquad \therefore a=7$ 답 7

21 전략 주어진 조건을 이용하여 세 집합 $A,\ B^C,\ X$ 사이의 포함 관계를 조사한다.

풀이 $X\cup A=X$이므로 $A\subset X$

$X\cap B^C=X$이므로 $X\subset B^C$

$\therefore A\subset X\subset B^C$

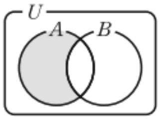
$A=\{1,\ 2\},\ B^C=\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$이므로 집합 X는 원소 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합 $\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 부분집합이다.

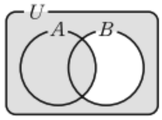
따라서 구하는 집합 X의 개수는

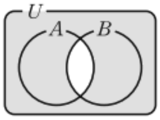
$2^{5-2}=2^3=8$ 답 8

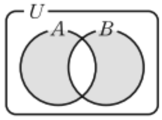
22 전략 주어진 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내어 본다.

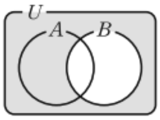
풀이 주어진 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.

①


②


③


④


⑤


따라서 구하는 집합은 ②이다. 답 ②

다른 풀이 색칠한 부분을 나타내는 집합은 $A\cup B^C$

① $A\cap B^C$

② $(A\cap B)\cup B^C=(A\cup B^C)\cap(B\cup B^C)$

$=(A\cup B^C)\cap U$

$=A\cup B^C$

③ $(A\cap B^C)\cup A^C=(A\cup A^C)\cap(B^C\cup A^C)$

$=U\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cap B)^C$

④ $(A\cup B)\cap(A\cap B)^C=(A\cup B)-(A\cap B)$

⑤ $(A-B)\cup(A^C\cap B^C)=(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)$

$=(A\cup A^C)\cap B^C$

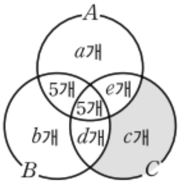
$=U\cap B^C=B^C$

23 전략 세 집합의 원소의 개수를 벤다이어그램에 나타내어 본다.

풀이 $n(A\cap B)=10,\ n(A\cap B\cap C)=5$에서

$n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)=5$

이므로 각 영역에 해당하는 집합의 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 벤다이어그램에 나타내면



$n(C)=19$에서

$c+d+e+5=19$

$\therefore c=14-(d+e)$

따라서 $d+e$가 최대일 때 c는 최소가 된다.

$n(A)=14$에서

$a+e+5+5=14 \qquad \therefore e=4-a$

$n(B)=16$에서

$b+d+5+5=16 \qquad \therefore d=6-b$

이때 $a\geq 0$, $b\geq 0$이므로

$0\leq d\leq 6$, $0\leq e\leq 4 \qquad \therefore 0\leq d+e\leq 10$

따라서 $d+e$의 최댓값이 10이므로

$c\geq 14-10=4$

즉 구하는 최솟값은 4이다. 답 4

24 전략 주어진 조건을 집합으로 나타내어 유한집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 2학년 전체 학생의 집합을 U, 문학 체험, 역사 체험, 과학 체험을 신청한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면 조건 (가), (나)에서

$n(U)=212$, $n(A)=80$, $n(B)=90$,

$n(A\cap B)=45$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=80+90-45=125$

조건 (다)에서 $n(A^C\cap B^C\cap C^C)=12$이므로

$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n((A\cup B\cup C)^C)$

$=n(U)-n(A^C\cap B^C\cap C^C)$

$=212-12=200$

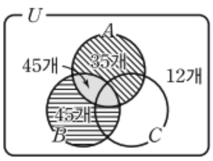
따라서 과학 체험만 신청한 학생의 수는

$n(C-(A\cup B))=n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)$

$=200-125=75$ 답 75

다른 풀이 2학년 전체 학생의 집합을 U, 문학 체험, 역사 체험, 과학 체험을 신청한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하자.

주어진 조건을 만족시키는 집합의 원소의 개수를 벤다이어그램에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 과학 체험만 신청한 학생의 수는

$212-45-35-45-12=75$

V. 집합과 명제

17 명제

유제

본책 63~87쪽

018-❶ 조건 $p(x)$의 진리집합을 P라 하자.

(1) $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로

$P=\{1, 2, 3, 4\}$

(2) $U=\{x\,|\,x$는 자연수$\}$이므로

$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

답 (1) $\{1, 2, 3, 4\}$ (2) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

018-❷ $x^2\leq 4$를 만족시키는 자연수 x는

$x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore P=\{1, 2\}$ …… ㉠

x는 6의 약수를 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 6이므로

$Q=\{1, 2, 3, 6\}$ …… ㉡

또 $|x+2|<3$을 만족시키는 자연수 x는 없으므로

$R=\varnothing$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $R\subset P\subset Q$

답 $R\subset P\subset Q$

019-❶ 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 3, 4\}$, $Q=\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(1) 조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로

$P^C=\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(2) 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은 $P\cap Q$이므로

$P\cap Q=\{4\}$

(3) 조건 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P^C\cup Q^C$이므로

$P^C\cup Q^C=(P\cap Q)^C$

$=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

답 풀이 참조

019-❷ 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{4, 8, 12, 16, 20\}$, $Q=\{5, 10, 15, 20\}$

조건 '$\sim(p$ 또는 $\sim q)$'는 '$\sim p$ 그리고 q'이므로 그 진리집합은 $P^C\cap Q$이다.

$\therefore P^C\cap Q=Q\cap P^C=Q-P$

$=\{5, 10, 15\}$

답 $\{5, 10, 15\}$

17 명제

020-❶ (1) p: $0<x<2$, q: $0\le x<2$라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$$P=\{x\mid 0<x<2\},\ Q=\{x\mid 0\le x<2\}$$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

(2) [반례] $x=-5$이면 $x^2\ge16$이지만 $x<4$이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

(3) [반례] $x=\sqrt{2}$이면 $x^2=2$이므로 x^2은 유리수이지만 x는 무리수이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

(4) p: $2x-3=5$, q: $x^2-5x+4=0$이라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
p: $2x-3=5$에서
$2x=8\qquad\therefore x=4$
$\therefore P=\{4\}$
q: $x^2-5x+4=0$에서
$(x-1)(x-4)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=4$
$\therefore Q=\{1, 4\}$
따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 거짓 (4) 참

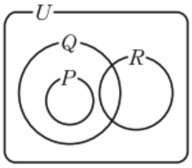
020-❷ [반례] $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이면 a, b는 무리수이지만

$$a+b=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$$

이므로 $a+b$는 유리수이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다. 답 풀이 참조

021-❶ 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 $P^C\subset Q$
$\therefore Q^C\subset P$ 답 ③

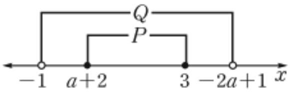
021-❷ 세 집합 P, Q, R를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$P\subset Q$, $P\not\subset R$,
$Q\not\subset P$, $Q\not\subset R$, $R\not\subset P$
따라서 항상 참인 명제는 ①이다.

답 ①

022-❶ 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.
따라서 $P\subset Q$가 성립하도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $a+2>-1$, $-2a+1>3$이므로
$a>-3$, $a<-1$
$\therefore -3<a<-1$ 답 ④

023-❶ (1) 대우: $x^2+y^2\le0$이면 $xy\ge0$이다. (참)
(2) 대우: $x\le0$ 또는 $y\le0$이면 $x+y\le0$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$, $y=2$이면 $x+y>0$이다.
답 풀이 참조

Remark▶
임의의 두 실수 x, y에 대하여 $x^2\ge0$, $y^2\ge0$이므로
$x^2+y^2\le0 \Longleftrightarrow x^2=0,\ y^2=0 \Longleftrightarrow x=0,\ y=0$

024-❶ (1) $x>0$이고 $y>0 \Longrightarrow xy>0$
$x>0$이고 $y>0 \not\Longleftarrow xy>0$
따라서 $x>0$이고 $y>0$인 것은 $xy>0$이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$ 조건이다.
[←의 반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $xy>0$이지만 $x<0$, $y<0$이다.

(2) $x+y$가 정수 $\not\Longrightarrow$ x, y가 모두 정수
$x+y$가 정수 $\Longleftarrow$ x, y가 모두 정수
따라서 $x+y$가 정수인 것은 x, y가 모두 정수이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$ 조건이다.
[→의 반례] $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$이면 $x+y$는 정수이지만 x, y는 모두 정수가 아니다.

(3) △ABC가 이등변삼각형 $\not\Longrightarrow$ △ABC가 정삼각형
△ABC가 이등변삼각형 $\Longleftarrow$ △ABC가 정삼각형
따라서 △ABC가 이등변삼각형인 것은 △ABC가 정삼각형이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$ 조건이다.
[→의 반례] 삼각형의 세 변의 길이가 2, 2, 3이면 이등변삼각형이지만 정삼각형은 아니다.

(4) $x=y=0 \Longleftrightarrow |x|+|y|=0$
따라서 $x=y=0$은 $|x|+|y|=0$이기 위한 $\boxed{\text{필요충분}}$ 조건이다.

답 (1) 충분 (2) 필요 (3) 필요 (4) 필요충분

025-❶ p는 q이기 위한 필요조건이므로
$Q\subset P$
$\therefore P\cup Q=P$, $P\cap Q=Q$,
$Q-P=\varnothing$, $P^C-Q^C=\varnothing$
따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

답 ④

025-❷ q가 p이기 위한 필요조건이므로

$q \Longleftarrow p$, 즉 $P \subset Q$

또 q가 r이기 위한 충분조건이므로

$q \Longrightarrow r$, 즉 $Q \subset R$

ㄱ. $P \subset Q$, $Q \subset R$이므로 $\quad P \subset R$

ㄴ. $P \subset Q$에서 $P \cup Q = Q$이므로

$P \cup Q = Q \subset R$

ㄷ. $P \subset R$에서 $R^C \subset P^C$이므로

$P^C \cap R^C = R^C$

$\therefore (P^C \cap R^C) \subset Q^C \; (\because Q \subset R)$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

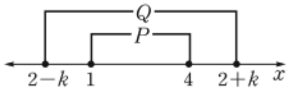
026-❶ 주어진 조건을 각각

p: $1 \le x \le 4$, $\quad q$: $|x-2| \le k$

로 놓고 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P = \{x \mid 1 \le x \le 4\}$, $Q = \{x \mid 2-k \le x \le 2+k\}$

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$이고, 이를 만족시키도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$2-k \le 1$에서 $\quad k \ge 1$

$2+k \ge 4$에서 $\quad k \ge 2$

따라서 $k \ge 2$이므로 k의 최솟값은 2이다. 답 2

026-❷ 주어진 조건을 각각

p: $a \le x \le b$, $\quad q$: $x+4>0$, $\quad r$: $|x|<1$

로 놓고 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P = \{x \mid a \le x \le b\}$,

$Q = \{x \mid x > -4\}$,

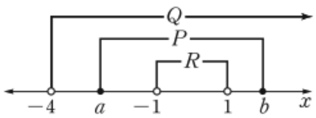
$R = \{x \mid -1 < x < 1\}$

이때 p는 q이기 위한 충분조건이고 r이기 위한 필요조건이므로

$p \Longrightarrow q$, $r \Longrightarrow p$

즉 $P \subset Q$, $R \subset P$이므로 $\quad R \subset P \subset Q$

이를 만족시키도록 세 집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore -4 < a \le -1$, $b \ge 1$

따라서 a의 최댓값은 -1이고 b의 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$-1+1=0$ 답 0

027-❶ 주어진 명제의 대우는

'$x=2$이고 $y=3$이면 $xy=6$이다.'

이고, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

… 증명 끝

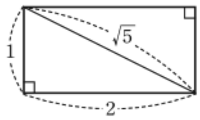
답 풀이 참조

028-❶ x가 유리수라고 가정하면 유리수끼리의 곱셈은 유리수이므로 $x \cdot x = x^2$은 유리수이다.

이것은 x^2이 무리수라는 가정에 모순이므로 x^2이 무리수이면 x도 무리수이다. … 증명 끝

답 풀이 참조

028-❷ 오른쪽 그림에서 직사각형의 대각선의 길이는 피타고라스 정리에 의하여



$\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

$\sqrt{5}$가 유리수라고 가정하면

$\sqrt{5} = \dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 정수, $p \ne 0$)

로 놓을 수 있다.

$\sqrt{5} = \dfrac{q}{p}$의 양변을 제곱하면

$5 = \dfrac{q^2}{p^2} \qquad \therefore q^2 = 5p^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 q^2이 5의 배수이므로 q도 5의 배수이다.

$q=5k$ (k는 정수)로 놓고 ㉠에 대입하면

$(5k)^2 = 5p^2 \qquad \therefore p^2 = 5k^2$

p^2이 5의 배수이므로 p도 5의 배수이다.

따라서 p, q가 서로소라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{5}$는 유리수가 아니다. … 증명 끝

답 풀이 참조

029-❶ ① 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

② 명제 $q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow \sim q$도 참이다.

③ 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.

④ 명제 $\sim r \longrightarrow p$는 명제 $p \longrightarrow \sim r$의 역이므로 반드시 참이라고는 할 수 없다.

⑤ 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

029-② ㄱ. 두 명제 $r \longrightarrow s$, $s \longrightarrow q$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow q$도 참이다.

ㄴ. 두 명제 $r \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow q$도 참이다.

ㄷ. 명제 $p \longrightarrow \sim s$가 참이면 그 대우 $s \longrightarrow \sim p$도 참이다. 즉 명제 $r \longrightarrow s$, $s \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow q$도 참이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 명제 $r \longrightarrow q$가 참임을 보일 수 있다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

Remark▶
참인 두 명제가 주어졌을 때, 앞의 명제의 결론과 뒤의 명제의 가정이 같아야만 삼단논법을 활용할 수 있다. 두 명제에서 연결 고리를 찾을 수 없을 때에는 두 명제의 대우를 찾아 삼단논법을 활용하도록 한다.

중단원 연습 문제

본책 88~92쪽

01 3	02 ④	03 ④	04 a	05 -1
06 ④	07 ④	08 ④	09 -10	
10 풀이 참조		11 ③	12 $-\frac{1}{2}<a\le\frac{1}{3}$	
13 ③	14 ⑤	15 ④	16 ①	
17 (가) 홀수 (나) 음이 아닌 정수 (다) 홀수				
18 ⑤	19 ④	20 ⑤	21 ④	

01 전략 참, 거짓을 판별할 수 있는 문장이나 식을 명제라 한다.

풀이 ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 명제가 아니다.

ㄴ. $3+4=7$은 참인 명제이다.

ㄷ. 2는 소수이지만 짝수이므로 거짓인 명제이다.

ㄹ. 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

ㅁ. 마름모는 두 대각선이 직교하는 사각형이지만 정사각형이 아니므로 거짓인 명제이다.

이상에서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ의 3개이다.

답 3

02 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $\sim p$의 진리집합은 P^C, 'p이고 q'의 진리집합은 $P\cap Q$임을 이용한다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{2, 3, 4, 5\}$, $Q=\{4, 5, 6, 7, 8\}$

① $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로
$P^C=\{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$

② $\sim q$의 진리집합은 Q^C이므로
$Q^C=\{1, 2, 3, 9, 10\}$

③ 'p이고 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cap Q^C$이므로
$P\cap Q^C=\{2, 3, 4, 5\}\cap\{1, 2, 3, 9, 10\}$
$=\{2, 3\}$

④ '$\sim p$이고 q'의 진리집합은 $P^C\cap Q$이므로
$P^C\cap Q=\{1, 6, 7, 8, 9, 10\}\cap\{4, 5, 6, 7, 8\}$
$=\{6, 7, 8\}$

⑤ '$\sim p$이고 $\sim q$'의 진리집합은 $P^C\cap Q^C$이므로
$P^C\cap Q^C$
$=\{1, 6, 7, 8, 9, 10\}\cap\{1, 2, 3, 9, 10\}$
$=\{1, 9, 10\}$

따라서 진리집합이 $\{6, 7, 8\}$인 것은 ④이다.

답 ④

03 전략 명제 $p \longrightarrow q$에서 p를 만족시키지만 q를 만족시키지 않는 경우가 있는 것을 찾는다.

풀이 ④ $x(x+1)=12$에서 $x^2+x-12=0$
$(x+4)(x-3)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=3$
따라서 -4는 자연수가 아니므로 주어진 명제는 거짓이다.

⑤ $x(x+2)=6$에서 $x^2+2x-6=0$
$\therefore x=-1\pm\sqrt{7}$
따라서 x는 무리수이므로 주어진 명제는 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ④이다.

답 ④

Remark▶
계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해는
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

04 전략 조건 p의 진리집합이 P일 때, $\sim p$의 진리집합은 P^C임을 이용한다.

풀이 두 조건 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이다.

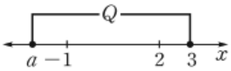
명제 '$\sim q$이면 $\sim p$이다.'가 거짓이려면 $Q^C \not\subset P^C$이어야 하므로 Q^C의 원소이면서 P^C의 원소가 아닌 것을 찾으

면 된다.
$a\in Q^C$이지만 $a\notin P^C$이므로 명제 '$\sim q$이면 $\sim p$이다.'가 거짓임을 보여주는 반례는 a이다. 답 a

다른 풀이 명제 '$\sim q$이면 $\sim p$이다.'의 대우가 'p이면 q이다.'이므로 P의 원소이면서 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
$a\in P$, $a\notin Q$이므로 명제 '$\sim q$이면 $\sim p$이다.'가 거짓임을 보여주는 반례는 a이다.

05 **전략** 두 조건 p, q의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

풀이 $x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{-1, 2\}$, $Q=\{x\,|\,a\le x\le 3\}$ ⋯ ❶
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하고, 이를 만족시키도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore a\le -1$ ⋯ ❷
따라서 a의 최댓값은 -1이다. ⋯ ❸
답 -1

채점 기준	비율
❶ 두 조건 p, q의 진리집합을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

06 **전략** '모든 x에 대하여 p이다.' ➡ 전체집합의 모든 원소가 p를 만족시킨다.
'어떤 x에 대하여 p이다.' ➡ 전체집합의 원소 중 p를 만족시키는 원소가 적어도 하나 존재한다.

풀이 ① [반례] $x=1$일 때 $2x=2$이므로 $2x>2$가 성립하지 않는다.
따라서 거짓인 명제이다.
② $x-5=6$에서 $x=11$
따라서 전체집합 U의 원소 중 $x-5=6$을 만족시키는 원소는 없으므로 거짓인 명제이다.
③ [반례] $x=10$일 때 $x^2=100$이므로 $x^2<100$이 성립하지 않는다.
따라서 거짓인 명제이다.
④ $-x\ge -1$에서 $x\le 1$
따라서 $x=1$이면 $-x\ge -1$을 만족시키므로 참인 명제이다.
⑤ [반례] $x=2$일 때 $2+5=7$이므로 $x+5\ge 8$이 성립하지 않는다.
따라서 거짓인 명제이다.
따라서 참인 명제는 ④이다. 답 ④

07 **전략** 명제와 그 대우의 참, 거짓은 항상 일치하므로 명제 또는 그 대우와 역의 참, 거짓을 알아본다.

풀이 ㄱ. 대우: x 또는 y가 짝수이면 xy는 짝수이다. (참)
[증명] (짝수)×(짝수)=(짝수),
(짝수)×(홀수)=(짝수),
(홀수)×(짝수)=(짝수)
이므로 x 또는 y가 짝수이면 xy는 짝수이다.
역: x, y가 모두 홀수이면 xy는 홀수이다. (참)
ㄴ. 대우: xy가 홀수이면 x^2+y^2은 짝수이다. (참)
[증명] xy가 홀수이면 x, y는 모두 홀수이고 x^2, y^2도 홀수이다. 따라서 x^2+y^2은 짝수이다.
역: xy가 짝수이면 x^2+y^2은 홀수이다. (거짓)
[반례] $x=2$, $y=2$이면 xy가 짝수이지만 $x^2+y^2=8$이므로 짝수이다.
ㄷ. 명제: $x^2+xy+y^2=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다. (참)
[증명] $x^2+xy+y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2=0$이면
$x+\dfrac{y}{2}=0$, $y=0$ $\quad\therefore x=0$, $y=0$
따라서 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
역: $x=0$이고 $y=0$이면 $x^2+xy+y^2=0$이다. (참)
이상에서 명제의 역, 대우가 모두 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

Remark▶
실수 a, b에 대하여
$a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$

08 **전략** 명제 $p \longrightarrow q$와 그 역 $q \longrightarrow p$가 모두 참인 것을 찾는다.

풀이 ① p: $xy<0 \Longrightarrow q$: $x^2+y^2>0$
p: $xy<0 \not\Longleftarrow q$: $x^2+y^2>0$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
[$\longleftarrow$의 반례] $x=1$, $y=2$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $xy>0$이다.
② p: $x>y>0 \Longrightarrow q$: $x^2>y^2$
p: $x>y>0 \not\Longleftarrow q$: $x^2>y^2$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

[$\longleftarrow$의 반례] $x=-3$, $y=1$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y$이다.

③ p: $x^2+y^2>0 \not\Longrightarrow q$: $x+y>0$

p: $x^2+y^2>0 \Longleftarrow q$: $x+y>0$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

[$\longrightarrow$의 반례] $x=1$, $y=-2$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $x+y<0$이다.

④ p: $x^2+y^2=0 \Longleftrightarrow q$: $|x|+|y|=0$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

⑤ p: $x>1$이고 $y>1 \Longrightarrow q$: $x+y>2$

p: $x>1$이고 $y>1 \not\Longleftarrow q$: $x+y>2$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

[$\longleftarrow$의 반례] $x=-1$, $y=5$이면 $x+y>2$이지만 $x<1$이고 $y>1$이다.

따라서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ④이다.

답 ④

09 전략 세 조건의 진리집합을 조건을 만족시키도록 수직선 위에 나타낸다.

풀이 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x|-2<x<-1$ 또는 $x>5\}$,

$Q=\{x|x>a\}$,

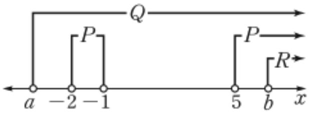
$R=\{x|x>b\}$

q는 p이기 위한 필요조건이고, r는 p이기 위한 충분조건이므로

$P\subset Q$, $R\subset P$, 즉 $R\subset P\subset Q$

이어야 한다. ⋯ ❶

이를 만족시키도록 집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore a\le -2$, $b\ge 5$ ⋯ ❷

따라서 a의 최댓값은 -2, b의 최솟값은 5이므로 구하는 곱은

$(-2)\cdot 5=-10$ ⋯ ❸

답 -10

채점 기준	비율
❶ 세 조건 p, q, r의 진리집합의 포함 관계를 알 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 최댓값과 b의 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

10 전략 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참임을 이용한다.

풀이 주어진 명제의 대우는

'$x\ne 0$ 또는 $y\ne 0$이면 $x^2+y^2\ne 0$이다.' ⋯ ❶

(i) $x\ne 0$일 때,

$x^2>0$, $y^2\ge 0$이므로 $x^2+y^2\ne 0$

(ii) $y\ne 0$일 때,

$x^2\ge 0$, $y^2>0$이므로 $x^2+y^2\ne 0$

(i), (ii)에서 $x\ne 0$ 또는 $y\ne 0$이면 $x^2+y^2\ne 0$이므로 주어진 명제의 대우가 참이다. ⋯ ❷

따라서 주어진 명제도 참이다. ⋯ ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우를 말할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 명제의 대우가 참임을 증명할 수 있다.	60 %
❸ 주어진 명제가 참임을 증명할 수 있다.	10 %

11 전략 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용한다.

풀이 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 $p \longrightarrow q$도 참이다.

따라서 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$와 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 반드시 참이다.

답 ③

12 전략 세 조건 p, q, r의 진리집합의 포함 관계를 생각한다.

풀이 q: $3x-1=10$에서

$3x=11 \quad \therefore x=\frac{11}{3}$

r: $x^2+3x-10=0$에서

$(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

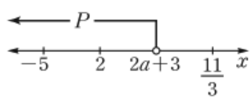
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x|x<2a+3\}$, $Q=\left\{\frac{11}{3}\right\}$, $R=\{-5, 2\}$ ⋯ ❶

명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이고, 명제 $r \longrightarrow p$는 참이므로

$Q\not\subset P$, $R\subset P$

이를 만족시키도록 집합 P를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❷



따라서 $2<2a+3\le \frac{11}{3}$이므로

$$-1<2a\le\frac{2}{3}\qquad\therefore -\frac{1}{2}<a\le\frac{1}{3}$$ ⋯ ❸

답 $-\frac{1}{2}<a\le\frac{1}{3}$

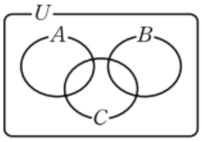
채점 기준	비율
❶ 세 조건 p, q, r의 진리집합을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 조건을 만족시키도록 조건 p의 진리집합을 수직선 위에 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

13 전략 명제 '어떤 x에 대하여 $p(x)$'가 거짓이면 '모든 x에 대하여 $\sim p(x)$'는 참이고, 명제 '모든 x에 대하여 $\sim q(x)$'가 거짓이면 '어떤 x에 대하여 $q(x)$'는 참이다.

풀이 ㄱ. p의 부정 '$x\in A$인 모든 x에 대하여 $x\notin B$이다.'가 참이므로 $A\cap B=\varnothing$이다.

ㄴ. q의 부정 '$x\in C$인 어떤 x에 대하여 $x\in A$이다.'가 참이므로 $A\cap C\neq\varnothing$이다. 이때 $(A\cap C)\subset(A\cup C)$이므로 $A\cup C\neq\varnothing$이다.

ㄷ. 세 집합 A, B, C를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같이 $B\cap C\neq\varnothing$인 경우도 있다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

14 전략 조건이 '적어도~'의 꼴로 주어지면 조건의 부정을 이용한다.

풀이 조건 t의 부정은

$\sim t$: a와 b는 모두 1이 아니다.

조건 $a\neq1$의 진리집합은 $P\cup Q$이고, 조건 $b\neq1$의 진리집합은 $R\cup S$이므로 조건 $\sim t$의 진리집합은

$$(P\cup Q)\cap(R\cup S)$$

조건 t의 진리집합을 T라 하면 조건 $\sim t$의 진리집합은 T^C이므로

$$T^C=(P\cup Q)\cap(R\cup S)$$
$$\begin{aligned}\therefore T&=\{(P\cup Q)\cap(R\cup S)\}^C\\&=(P\cup Q)^C\cup(R\cup S)^C\\&=(P^C\cap Q^C)\cup(R^C\cap S^C)\\&=(P^C-Q)\cup(R^C-S)\end{aligned}$$

답 ⑤

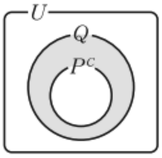
15 전략 두 조건 p, q 사이의 관계를 이용하여 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 구한다.

풀이 $\sim p$가 q이기 위한 충분조건이므로

$\sim p \Longrightarrow q$, 즉 $P^C\subset Q$

ㄱ. $P^C\subset Q$이므로 $x\in P^C$이면 $x\in Q$이다.

ㄴ. x가 오른쪽 벤다이어그램의 색칠한 부분의 원소이면 $x\in P$이지만 $x\in Q$, 즉 $x\notin Q^C$이다.



ㄷ. $P^C\subset Q$에서

$$Q^C\subset P$$
$$\therefore P-Q=P\cap Q^C=Q^C$$

따라서 $x\in Q^C$이면 $x\in(P-Q)$이다.

이상에서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

Remark▶
두 집합 A, B에 대하여
$A\subset B \Longleftrightarrow x\in A$이면 $x\in B$이다.

16 전략 $p\Longrightarrow q$이고 $q\Longrightarrow p$, 즉 $p\Longleftrightarrow q$이면 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

풀이 ㄱ. p: $A\cup B^C=U \Longleftrightarrow q$: $B-A=\varnothing$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

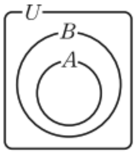
[$\Longleftrightarrow$의 증명] $A\cup B^C=U \Longleftrightarrow (A\cup B^C)^C=U^C$
$\Longleftrightarrow A^C\cap B=\varnothing$
$\Longleftrightarrow B-A=\varnothing$

ㄴ. p: $A\cup B=\varnothing \Longrightarrow q$: $A\subset B$

p: $A\cup B=\varnothing \not\Longleftarrow q$: $A\subset B$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

[$\longleftarrow$의 반례] 오른쪽 그림과 같은 경우 $A\subset B$이지만 $A\cup B=B\neq\varnothing$이다.

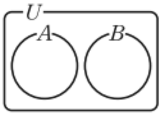


ㄷ. p: $A-B=A \not\Longrightarrow q$: $B=\varnothing$

p: $A-B=A \Longleftarrow q$: $B=\varnothing$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

[$\longrightarrow$의 반례] 오른쪽 그림과 같은 경우 $A-B=A$이지만 $B\neq\varnothing$이다.



이상에서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

17 전략 귀류법은 결론을 부정하여 가정에 모순이 됨을 이끌어 냄으로써 그 명제가 참임을 증명하는 방법이다.

풀이 a, b를 모두 $\boxed{\text{홀수}}$라 하면

$a=2k-1$, $b=2l-1$ (k, l은 자연수)

로 놓을 수 있으므로

$$\begin{aligned}ab&=(2k-1)(2l-1)\\&=4kl-2k-2l+1\\&=2(2kl-k-l)+1\end{aligned}$$

그런데 k, l이 자연수이므로 $2kl-k-l$은 $\boxed{\text{음이 아닌 정수}}$이다. 따라서 ab는 $\boxed{\text{홀수}}$가 되어 ab가 짝수라는 가정에 모순이므로 ab가 짝수이면 a 또는 b는 짝수이다.

$\therefore$ (가) 홀수 (나) 음이 아닌 정수 (다) 홀수

답 풀이 참조

18 전략 조건 p의 진리집합을 P라 하면 $\sim p$의 진리집합은 P^C임을 이용한다.

풀이 $x(x-11)\geq 0$에서 $\quad x\leq 0$ 또는 $x\geq 11$

조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{x\,|\,x$는 $x\leq 0$ 또는 $x\geq 11$인 정수$\}$

이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은

$P^C=\{x\,|\,x$는 $0<x<11$인 정수$\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 1, 2, 3, $\cdots$, 10의 10이다.

답 ⑤

19 전략 각 조건의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

① $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

② $R\not\subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.

③ $P\not\subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.

④ $R\subset (P\cup Q)$이므로 명제 $r \longrightarrow (p$ 또는 $q)$는 참이다.

⑤ $(P\cap R)\not\subset Q$이므로 명제 (p이고 r) $\longrightarrow q$는 거짓이다.

따라서 항상 참인 것은 ④이다.

답 ④

20 전략 $p \Longrightarrow q$일 때 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이고, $p \Longleftrightarrow q$일 때 p는 q이기 위한 필요충분조건임을 이용한다.

풀이 p: $|a|+|b|=0$에서 $\quad a=0,\ b=0$

q: $a^2-2ab+b^2=0$에서 $\quad (a-b)^2=0$

$\therefore a=b$

r: $|a+b|=|a-b|$에서

$a+b=a-b$ 또는 $a+b=-(a-b)$

$\therefore a=0$ 또는 $b=0$

ㄱ. $p \Longrightarrow q$, $p \not\Longleftarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $\sim p$: $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$, $\sim r$: $a\neq 0$, $b\neq 0$
따라서 $\sim p \not\Longrightarrow \sim r$, $\sim p \Longleftarrow \sim r$이므로 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. q이고 r는 $\quad a=b=0$
따라서 (q이고 r) $\Longleftrightarrow p$이므로 q이고 r는 p이기 위한 필요충분조건이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

21 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 수직선 위에 나타낸다.

풀이 p: $|x-1|\leq 3$에서 $\quad -3\leq x-1\leq 3$

$\therefore -2\leq x\leq 4$

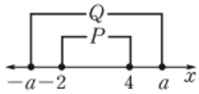
q: $|x|\leq a$에서 $\quad -a\leq x\leq a$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,-2\leq x\leq 4\}$, $Q=\{x\,|\,-a\leq x\leq a\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.

이를 만족시키도록 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-a\leq -2$, $4\leq a$

$\therefore a\geq 4$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

V. 집합과 명제

18 절대부등식

유제

본책 98~106쪽

030-❶ (1) $(a^2+b^2)-(2a+2b-2)$

$=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)$

$=(a-1)^2+(b-1)^2\geq 0$

$\therefore\ a^2+b^2\geq 2a+2b-2$

여기서 등호는 $a-1=0$, $b-1=0$, 즉 $a=b=1$일 때 성립한다.

(2) 세 수 A, B, C에 대하여

$A^2=(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2=6+7+2\sqrt{42}=13+2\sqrt{42}$

$B^2=(\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2=5+8+4\sqrt{10}=13+2\sqrt{40}$

$C^2=(\sqrt{3}+\sqrt{10})^2=3+10+2\sqrt{30}$

$=13+2\sqrt{30}$

$\sqrt{42}>\sqrt{40}>\sqrt{30}$이므로 $\quad A^2>B^2>C^2$

그런데 A, B, C는 모두 양수이므로

$A>B>C$

답 (1) $a^2+b^2\geq 2a+2b-2$ (2) $A>B>C$

031-❶ (1) $(a^2+b^2+1)-(ab-a-b)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2-2ab+2a+2b)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2+2a+1)$

$+(b^2+2b+1)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a+1)^2+(b+1)^2\}$

a, b가 실수이므로

$(a-b)^2\geq 0$, $(a+1)^2\geq 0$, $(b+1)^2\geq 0$

따라서 $a^2+b^2+1-(ab-a-b)\geq 0$이므로

$a^2+b^2+1\geq ab-a-b$

여기서 등호는 $a-b=0$, $a+1=0$, $b+1=0$, 즉 $a=b=-1$일 때 성립한다. … 증명 끝

(2) $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-a^2-2ab-b^2$

$=2|ab|-2ab$

$=2(|ab|-ab)$

이때 $|ab|\geq ab$이므로 $\quad |ab|-ab\geq 0$

$\therefore\ (|a|+|b|)^2-|a+b|^2\geq 0$

그런데 $|a|+|b|\geq 0$, $|a+b|\geq 0$이므로

$|a|+|b|\geq |a+b|$

여기서 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab\geq 0$일 때 성립한다.

… 증명 끝

답 풀이 참조

032-❶ (1) $\frac{4y}{x}>0$, $\frac{x}{y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=4$

$\therefore\ \frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geq 4$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{4y}{x}=\frac{x}{y}\text{, 즉 } x=2y\text{일 때 성립}\right)$

… 증명 끝

(2) $\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{9}{x}\right)=xy+9+1+\frac{9}{xy}$

$=xy+\frac{9}{xy}+10$

$xy>0$, $\frac{9}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$xy+\frac{9}{xy}\geq 2\sqrt{xy\cdot\frac{9}{xy}}=6$

$\therefore\ xy+\frac{9}{xy}+10\geq 16$

$\therefore\ \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{9}{x}\right)\geq 16$

$\left(\text{단, 등호는 } xy=\frac{9}{xy}\text{, 즉 } xy=3\text{일 때 성립}\right)$

… 증명 끝

답 풀이 참조

032-❷ $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$ …… ㉠

$y+z\geq 2\sqrt{yz}$ …… ㉡

$z+x\geq 2\sqrt{zx}$ …… ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$

(단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립) … 증명 끝

답 풀이 참조

033-❶ (1) $\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{8}{x}+y\right)=8+xy+\frac{16}{xy}+2$

$=10+xy+\frac{16}{xy}$

$xy>0$, $\frac{16}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

18 절대부등식

$$10+xy+\frac{16}{xy}\geq 10+2\sqrt{xy\cdot\frac{16}{xy}}$$
$$=10+2\cdot 4=18$$
$$\left(\text{단, 등호는 } xy=\frac{16}{xy}\text{, 즉 } xy=4\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{8}{x}+y\right)$의 최솟값은 18이다.

(2) $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\text{ (단, 등호는 } x=y\text{일 때 성립)}$$

그런데 $x+y=8$이므로

$$4\geq\sqrt{xy}$$

양변을 제곱하면　　$xy\leq 16$

따라서 xy의 최댓값은 16이다.

답 (1) 18　(2) 16

033-❷ $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4x+9y\geq 2\sqrt{4x\cdot 9y}\qquad\therefore\ 20\geq 12\sqrt{xy}$$
$$\therefore\ (2\sqrt{x}+3\sqrt{y})^2$$
$$=4x+9y+12\sqrt{xy}$$
$$=20+12\sqrt{xy}$$
$$\leq 20+20$$
$$=40\text{ (단, 등호는 } 4x=9y\text{일 때 성립)}$$

따라서 $2\sqrt{x}+3\sqrt{y}$의 최댓값은 $\sqrt{40}=2\sqrt{10}$이다.

답 $2\sqrt{10}$

034-❶ (1) a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(3^2+4^2)(a^2+4b^2)\geq(3a+8b)^2$$
$$\left(\text{단, 등호는 }\frac{a}{3}=\frac{2b}{4}\text{, 즉 } 2a=3b\text{일 때 성립}\right)$$

$a^2+4b^2=10$이므로

$$250\geq(3a+8b)^2$$
$$\therefore\ -5\sqrt{10}\leq 3a+8b\leq 5\sqrt{10}$$

따라서 $3a+8b$의 최댓값은 $5\sqrt{10}$이다.

(2) a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+3^2)(a^2+b^2)\geq(a+3b)^2$$
$$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{b}{3}\text{, 즉 } 3a=b\text{일 때 성립}\right)$$

$a+3b=20$이므로

$$10(a^2+b^2)\geq 400$$
$$\therefore\ a^2+b^2\geq 40$$

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 40이다.

답 (1) $5\sqrt{10}$　(2) 40

034-❷ 실수 a, b, c, x, y, z에 대하여

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$$

이 성립하므로 $a=1$, $b=2$, $c=2$를 대입하면

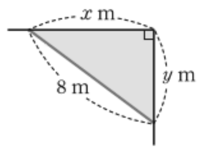
$$(1^2+2^2+2^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(x+2y+2z)^2$$
$$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

$x^2+y^2+z^2=4$이므로

$$9\cdot 4\geq(x+2y+2z)^2$$
$$\therefore\ -6\leq x+2y+2z\leq 6$$

답 $-6\leq x+2y+2z\leq 6$

035-❶ 오른쪽 그림과 같이 꽃밭에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 x m, y m라 하면 피타고라스 정리에 의하여



$$x^2+y^2=8^2$$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}$$
$$64\geq 2xy$$
$$\therefore\ xy\leq 32\text{ (단, 등호는 } x=y=4\sqrt{2}\text{일 때 성립)}$$

꽃밭의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}xy(\mathrm{m}^2)$이므로

$$S=\frac{1}{2}xy\leq\frac{1}{2}\cdot 32=16(\mathrm{m}^2)$$

따라서 꽃밭의 넓이의 최댓값은 $x=y=4\sqrt{2}$일 때 $16\ \mathrm{m}^2$이다.

답 $16\ \mathrm{m}^2$

035-❷ 세 개의 구 O_1, O_2, O_3의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3이라 하면 겉넓이는 각각 $4\pi r_1{}^2$, $4\pi r_2{}^2$, $4\pi r_3{}^2$이므로

$$4\pi(r_1{}^2+r_2{}^2+r_3{}^2)=60\pi$$
$$\therefore\ r_1{}^2+r_2{}^2+r_3{}^2=15\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2+1^2)(r_1{}^2+r_2{}^2+r_3{}^2)\geq(r_1+r_2+r_3)^2$$
$$3(r_1{}^2+r_2{}^2+r_3{}^2)\geq(r_1+r_2+r_3)^2$$
$$\text{(단, 등호는 } r_1=r_2=r_3\text{일 때 성립)}$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$3\cdot 15\geq(r_1+r_2+r_3)^2$$
$$\therefore\ 0<r_1+r_2+r_3\leq 3\sqrt{5}$$

$\overline{\mathrm{PQ}}=2(r_1+r_2+r_3)$이므로 구하는 선분 PQ의 길이의 최댓값은

$$2\cdot 3\sqrt{5}=6\sqrt{5}$$

답 $6\sqrt{5}$

중단원 연습 문제

본책 107~109쪽

01 $P<Q$		02 ③	03 $A<B<C$	
04 풀이 참조		05 ④	06 6	07 6
08 ②	09 ③	10 4	11 $\frac{2}{3}$	12 8
13 ②	14 ②	15 ①		

01 전략 두 식의 제곱의 차의 부호를 조사한다.

풀이 $a>0$, $b>0$이므로 P, Q는 양수이다.

$$P^2-Q^2=\frac{a+b}{2}-\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{2}$$
$$=-\sqrt{ab}<0$$
$$\therefore P^2<Q^2$$

그런데 P, Q는 모두 양수이므로

$P<Q$ 답 $P<Q$

02 전략 두 식의 차의 부호를 조사한다.

풀이 $0<a<1$일 때,

$$0<a^2<1,\ 0<\sqrt{a}<1,\ \frac{1}{a}>1$$

이므로 주어진 네 수 중 $\frac{1}{a}$이 가장 크다.

$a^2-a=a(a-1)<0$이므로

$a^2<a$

$a-\sqrt{a}=\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)<0$이므로

$a<\sqrt{a}$

$\therefore a^2<a<\sqrt{a}<\frac{1}{a}$ 답 ③

03 전략 주어진 세 수는 근호를 포함한 양수이므로 제곱하여 대소를 비교한다.

풀이 $A^2=(2\sqrt{3}+\sqrt{15})^2=12+15+4\sqrt{45}$

$=27+12\sqrt{5}$

$B^2=(2\sqrt{5}+3)^2=20+9+12\sqrt{5}=29+12\sqrt{5}$

$C^2=(\sqrt{30}+\sqrt{6})^2=30+6+2\sqrt{180}=36+12\sqrt{5}$

이므로 $A^2<B^2<C^2$ ⋯ ❶

그런데 A, B, C는 모두 양수이므로

$A<B<C$ ⋯ ❷

답 $A<B<C$

채점 기준	비율
❶ A^2, B^2, C^2의 대소를 비교할 수 있다.	70 %
❷ A, B, C의 대소를 비교할 수 있다.	30 %

04 전략 양변의 제곱의 차의 부호를 조사한다.

풀이 $(|a|-|b|)^2-|a-b|^2$

$=a^2-2|a||b|+b^2-(a-b)^2$

$=a^2-2|ab|+b^2-a^2+2ab-b^2$

$=2(ab-|ab|)$

$ab\le|ab|$이므로 $ab-|ab|\le0$

$\therefore (|a|-|b|)^2\le|a-b|^2$

(i) $|a|\ge|b|$일 때,

$|a|-|b|\ge0$, $|a-b|\ge0$이므로

$|a|-|b|\le|a-b|$

(ii) $|a|<|b|$일 때,

$|a|-|b|<0$, $|a-b|>0$이므로

$|a|-|b|<|a-b|$

(i), (ii)에서 $|a|-|b|\le|a-b|$

여기서 등호는 $|ab|=ab$, $|a|\ge|b|$일 때 성립한다.

⋯ 증명 끝

답 풀이 참조

05 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $x>2$에서 $x^2-4>0$, $\frac{25}{x^2-4}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+\frac{25}{x^2-4}=(x^2-4)+\frac{25}{x^2-4}+4$$
$$\ge2\sqrt{(x^2-4)\cdot\frac{25}{x^2-4}}+4$$
$$=2\cdot5+4=14$$
$$\left(\text{단, 등호는 } x^2-4=\frac{25}{x^2-4}\text{, 즉 } x=3\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $x^2+\frac{25}{x^2-4}$의 최솟값은 14이다. 답 ④

06 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$$
$$=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$$
$$\ge2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}$$
$$=2+2+2$$
$$=6\ (\text{단, 등호는 } a=b=c\text{일 때 성립})$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 6이다. 답 6

Remark▶

$x+\frac{1}{x}+x+\frac{4}{x}$ $(x>0)$의 최솟값을 구할 때,

$$x+\frac{1}{x}+x+\frac{4}{x}\geq2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=2+2\cdot2=6$$

에서 $x+\frac{1}{x}+x+\frac{4}{x}$의 최솟값이 6이라 생각하면 안 된다.

$x+\frac{1}{x}\geq2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}$에서 등호가 성립하는 조건은 $x=1$이고,

$x+\frac{4}{x}\geq2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}$에서 등호가 성립하는 조건은 $x=2$이므로 두 식의 등호가 동시에 성립할 수 없기 때문이다.

그러나 이 문제에서는 세 식 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}$, $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}$에서 등호가 성립할 조건이 동시에 성립할 수 있으므로 앞과 같이 풀 수 있다.

07

전략 x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

풀이 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2+2^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+2z)^2$$

$$\left(\text{단, 등호는 } x=y=\frac{z}{2}\text{일 때 성립}\right) \quad \cdots ❶$$

$x+y+2z=6$이므로 $\quad 6(x^2+y^2+z^2)\geq36$

$\therefore x^2+y^2+z^2\geq6$ ⋯ ❷

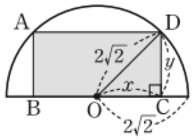
따라서 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은 6이다. ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 코시-슈바르츠 부등식을 이용하여 식을 세울 수 있다.	50 %
❷ $x^2+y^2+z^2$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $x^2+y^2+z^2$의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

08

전략 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 $2x$, y로 놓고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.



풀이 직사각형의 가로의 길이를 $2x$, 세로의 길이를 y로 놓으면 △OCD에서 피타고라스 정리에 의하여 $\quad x^2+y^2=8$

x^2, y^2은 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $\quad x^2+y^2\geq2\sqrt{x^2y^2}$

$\therefore 8\geq2xy$ (단, 등호는 $x=y=2$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이 $2xy$는 $x=y=2$일 때 최댓값 8을 갖고, 이때 직사각형의 둘레의 길이는

$4x+2y=12$

답 ②

09

전략 $A-B>0 \Longleftrightarrow A>B$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\frac{a^2}{1+a^2}-\frac{b^4}{1+b^4}$

$=\frac{a^2(1+b^4)-b^4(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^4)}$

$=\frac{a^2-b^4}{(1+a^2)(1+b^4)}<0$

$\therefore \frac{a^2}{1+a^2}<\frac{b^4}{1+b^4}$

ㄴ. $1<a^2<b^4$이고 $a>0$, $b>0$이므로

$1<a<b^2$

$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a}=\frac{a-b^2}{ab^2}<0$이므로

$\frac{1}{b^2}<\frac{1}{a}$

ㄷ. [반례] $a=1.2$, $b=1.1$이면 $1<a<b^2$이지만

$\frac{a^4b^2}{a^2b^4}=\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{1.2}{1.1}\right)^2>1$

$\therefore a^4b^2>a^2b^4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

10

전략 '허근을 갖는다.'는 조건에서 a의 값의 범위를 구하고, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $x^2-2x+a=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a<0 \qquad \therefore a>1$ ⋯ ❶

따라서 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a-1+\frac{4}{a-1}\geq2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{4}{a-1}}=4$$

$$\left(\text{단, 등호는 } a-1=\frac{4}{a-1}\text{, 즉 } a=3\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $a-1+\frac{4}{a-1}$의 최솟값은 4이다. ⋯ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $a-1+\frac{4}{a-1}$의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

11

전략 코시-슈바르츠 부등식을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $a+b+c=1$에서

$a+b=1-c$ ⋯⋯ ㉠

$a^2+b^2+c^2=3$에서

$a^2+b^2=3-c^2$ ⋯⋯ ㉡

a, b는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(a^2+b^2)\ge(a+b)^2$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립) ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$2(3-c^2)\ge(1-c)^2$, $\quad 6-2c^2\ge1-2c+c^2$

$3c^2-2c-5\le0$, $\quad (3c-5)(c+1)\le0$

$\therefore -1\le c\le\frac{5}{3}$

따라서 c의 최댓값은 $\frac{5}{3}$, 최솟값은 -1이므로

$\alpha=\frac{5}{3}$, $\beta=-1$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

다른 풀이 $a+b+c=1$에서

$a+b=1-c$ ⋯⋯ ㉠

$a^2+b^2+c^2=3$에서

$a^2+b^2=3-c^2$ ⋯⋯ ㉡

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$(1-c)^2=3-c^2+2ab$

$\therefore ab=c^2-c-1$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉢에서 a, b는 t에 대한 이차방정식

$t^2-(1-c)t+c^2-c-1=0$의 두 근이다.

이때 a, b는 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\quad D=(1-c)^2-4(c^2-c-1)\ge0$

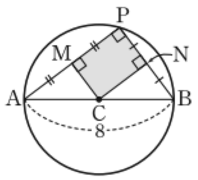
$3c^2-2c-5\le0$, $\quad (3c-5)(c+1)\le0$

$\therefore -1\le c\le\frac{5}{3}$

12

전략 $\overline{AP}=x$, $\overline{BP}=y$로 놓고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 xy의 최댓값을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\angle APB$는 반원에 대한 원주각이므로 $\quad \angle APB=90°$



$\overline{CM}$, $\overline{CN}$은 현의 수직이등분선이므로

$\angle CMP=\angle CNP=90°$

따라서 □MCNP는 직사각형이다.

$\overline{AP}=x$, $\overline{BP}=y$라 하면 △APB는 직각삼각형이므로

$x^2+y^2=8^2$

$x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\ge2\sqrt{x^2y^2}=2xy$, $\quad 64\ge2xy$

$\therefore xy\le32$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

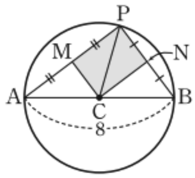
한편 $\overline{MP}=\frac{x}{2}$, $\overline{NP}=\frac{y}{2}$이므로 □MCNP의 넓이는

$\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}=\frac{1}{4}xy\le\frac{1}{4}\cdot32=8$

따라서 □MCNP의 넓이의 최댓값은 8이다.

답 8

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PC}$를 그으면



□MCNP

$=$△MCP$+$△NCP

$=\frac{1}{2}$△ACP$+\frac{1}{2}$△BCP

$=\frac{1}{2}$△ABP

따라서 △ABP의 넓이가 최대일 때 □MCNP의 넓이도 최대이다. 이때 △ABP의 밑변을 $\overline{AB}$로 정하면 높이의 최댓값은 반지름의 길이이므로

△ABP$\le\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times$(반지름의 길이)

$=\frac{1}{2}\times8\times4=16$

∴ □MCNP$=\frac{1}{2}$△ABP$\le\frac{1}{2}\cdot16=8$

따라서 □MCNP의 넓이의 최댓값은 8이다.

13

전략 두 식의 차의 부호를 조사한다.

풀이 $0<a<b$에서 $\quad a-b<0$

$A-B=\frac{a}{a+1}-\frac{b}{b+1}=\frac{a-b}{(a+1)(b+1)}<0$

$\therefore A<B$ ⋯⋯ ㉠

$A-C=\frac{a}{a+1}-\frac{a+b}{a+b+2}$

$=\frac{a-b}{(a+1)(a+b+2)}<0$

$\therefore A<C$ ⋯⋯ ㉡

$B-C=\frac{b}{b+1}-\frac{a+b}{a+b+2}$

$=\frac{b-a}{(b+1)(a+b+2)}>0$

$\therefore B>C$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\quad A<C<B$

답 ②

14

전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\frac{1}{xy}$의 값의 범위를 구한다.

풀이 $xy>0$, $x+y>0$이므로 $\quad x>0$, $y>0$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+y\geq 2\sqrt{xy}$$

이때 $x+y=3$이므로

$$3\geq 2\sqrt{xy}\ \left(\text{단, 등호는 } x=y=\frac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

$$4xy\leq 9 \qquad \therefore \frac{1}{xy}\geq\frac{4}{9}$$

$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{xy}$$

$$\geq 3\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } x=y=\frac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$의 최솟값은 $\frac{4}{3}$이다. 답 ②

15 전략 점 C의 x좌표를 구한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 $x^2-2ax=\frac{1}{a}x$에서

$$x^2-\left(2a+\frac{1}{a}\right)x=0, \qquad x\left\{x-\left(2a+\frac{1}{a}\right)\right\}=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2a+\frac{1}{a}$$

$$\therefore \mathrm{A}\left(2a+\frac{1}{a},\ 2+\frac{1}{a^2}\right)$$

한편 $f(x)=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$이므로

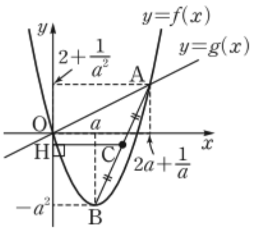
$$\mathrm{B}(a,\ -a^2)$$

따라서 선분 AB의 중점 C의 좌표는

$$\mathrm{C}\left(\frac{1}{2}\left(2a+\frac{1}{a}+a\right),\ \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{a^2}-a^2\right)\right),$$

$$\text{즉 } \mathrm{C}\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2a},\ 1+\frac{1}{2a^2}-\frac{a^2}{2}\right)$$

이때 오른쪽 그림에서 선분 CH의 길이는 점 C의 x좌표와 같으므로



$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2a}$$

이때 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3}{2}a+\frac{1}{2a}\geq 2\sqrt{\frac{3}{2}a\cdot\frac{1}{2a}}=\sqrt{3}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{3}{2}a=\frac{1}{2a}\text{, 즉 } a=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{일 때 성립}\right)$$

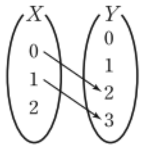
따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{3}$이다. 답 ①

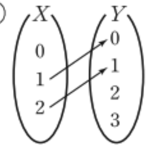
19 함수

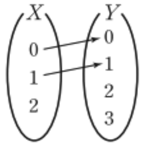
Ⅵ. 함수

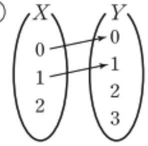
유제 본책 116~132쪽

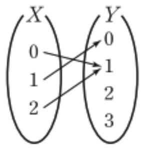
036-❶ 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


⑤는 X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩 대응하므로 이 대응은 함수이다. 답 ⑤

037-❶ $f(-3)=\frac{6}{-3}=-2$, $f(-2)=\frac{6}{-2}=-3$, $f(2)=\frac{6}{2}=3$, $f(3)=\frac{6}{3}=2$이므로 함수 f의 치역은

$$\{-3,\ -2,\ 2,\ 3\}$$

답 $\{-3, -2, 2, 3\}$

037-❷ $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$이므로

(i) x가 짝수, 즉 $x=2, 4, 6, 8, 10$일 때,

$f(2)=2+2=4$, $f(4)=4+2=6$,
$f(6)=6+2=8$, $f(8)=8+2=10$,
$f(10)=10+2=12$

(ii) x가 홀수, 즉 $x=1, 3, 5, 7, 9$일 때,

$f(1)=7-1=6$, $f(3)=7-3=4$,
$f(5)=7-5=2$, $f(7)=7-7=0$,
$f(9)=7-9=-2$

(i), (ii)에서 함수 f의 치역은

$$\{-2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$$

답 $\{-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

037-❸ 자연수 k에 대하여

(i) $n=3k$일 때, $\quad f(n)=0$

(ⅱ) $n=3k-1$일 때, $n=3(k-1)+2$이므로

$f(n)=2$

(ⅲ) $n=3k-2$일 때, $n=3(k-1)+1$이므로

$f(n)=1$

이상에서 함수 f의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2\}$이므로 치역의 모든 원소의 합은

$0+1+2=3$ 답 3

038-❶ $f(-2)=g(-2)$에서

$f(-2)=-(-2)^2+3\cdot(-2)-5=-15$,

$g(-2)=(-2)^2+a\cdot(-2)+b$

$=-2a+b+4$

이므로 $-2a+b+4=-15$

$\therefore 2a-b=19$ …… ㉠

$f(2)=g(2)$에서

$f(2)=-2^2+3\cdot2-5=-3$,

$g(2)=2^2+2a+b=2a+b+4$

이므로

$2a+b+4=-3$

$\therefore 2a+b=-7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-13$ 답 $a=3,\ b=-13$

038-❷ ㄱ. $f(-1)=-6,\ f(0)=-5,\ f(1)=-4$

$g(-1)=-4,\ g(0)=-5,\ g(1)=-4$

즉 $f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$이지만

$f(-1)\neq g(-1)$이므로 두 함수 $f,\ g$는 서로 같지 않다.

ㄴ. $f(-1)=0,\ f(0)=0,\ f(1)=2$

$g(-1)=0,\ g(0)=0,\ g(1)=2$

즉 $f(-1)=g(-1),\ f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$이므로 두 함수 $f,\ g$는 서로 같다.

ㄷ. $f(-1)=1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$

$g(-1)=-1,\ g(0)=0,\ g(1)=1$

즉 $f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$이지만

$f(-1)\neq g(-1)$이므로 두 함수 $f,\ g$는 서로 같지 않다.

ㄹ. $f(-1)=1,\ f(0)=\frac{1}{2},\ f(1)=\frac{1}{3}$

$g(-1)=1,\ g(0)=\frac{1}{2},\ g(1)=\frac{1}{3}$

즉 $f(-1)=g(-1),\ f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$이므로 두 함수 $f,\ g$는 서로 같다.

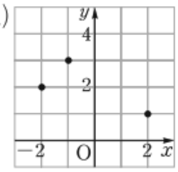
이상에서 두 함수 $f,\ g$가 서로 같은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

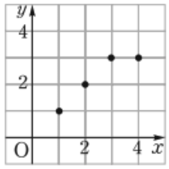
039-❶ (1), (3)은 X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩 대응하므로 함수이고, (2)는 X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 (1), (3)의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

(1)



(3)



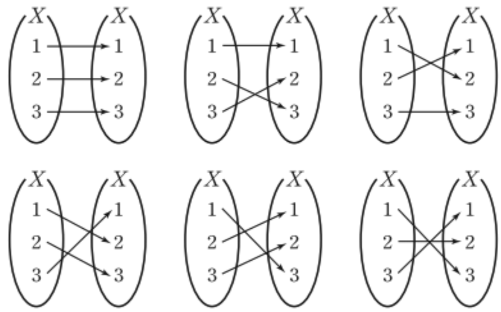
답 풀이 참조

039-❷ 그래프 (1)에서는 X의 원소 0에 대응하는 원소가 없으므로 함수의 그래프가 아니다. 또 그래프 (3)에서는 X의 원소 1에 대응하는 원소가 $-1,\ 2$의 2개이므로 함수의 그래프가 아니다.

그래프 (2)는 X의 각 원소에 공역의 원소가 하나씩 대응하므로 함수의 그래프이다.

답 (2)

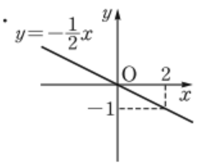
040-❶ $X=\{1,\ 2,\ 3\}$일 때, X에서 X로의 일대일 대응은 다음 그림과 같이 6가지가 있다.



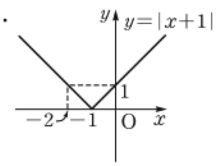
답 풀이 참조

040-❷ 각 함수의 그래프를 그려 보면 다음과 같다.

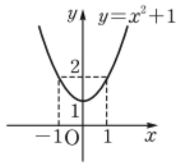
ㄱ.



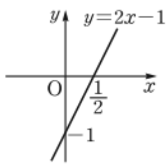
ㄴ.



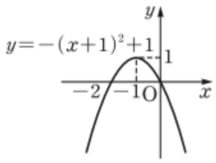
ㄷ.



ㄹ.



ㄱ.



ㄴ. $x=-2$일 때, $y=|-2+1|=|-1|=1$

$x=0$일 때, $y=1$

따라서 일대일대응이 아니다.

ㄷ. $x=-1$일 때, $y=(-1)^2+1=2$

$x=1$일 때, $y=1^2+1=2$

따라서 일대일대응이 아니다.

ㅁ. $x=-2$일 때, $y=-(-2+1)^2+1=0$

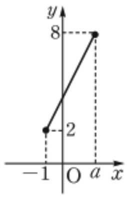
$x=0$일 때, $y=-(0+1)^2+1=0$

따라서 일대일대응이 아니다.

이상에서 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

041-❶ 함수 f가 일대일대응이 되려면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-1)=2,\ f(a)=8$

$f(x)=2x+b$이므로

$-2+b=2,\ 2a+b=8$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=4$

$\therefore a+b=6$

답 6

042-❶ 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수를 f라 하자.

f가 일대일함수일 때, $f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이므로 5개

$f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$의 값을 제외한 4개

$f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$, $f(b)$를 제외한 3개

따라서 일대일함수의 개수는

$5\cdot4\cdot3=60 \quad \therefore p=60$

한편 f가 상수함수일 때, 상수함수는 5개이므로

$q=5$

$\therefore p+q=65$

답 65

042-❷ 집합 X에 대하여 X에서 X로의 함수를 f라 하면

(1) $f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 중 하나이므로 4개

$f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 중 하나이므로 4개

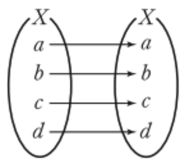
$f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 중 하나이므로 4개

$f(d)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 중 하나이므로 4개

따라서 함수의 개수는

$4\cdot4\cdot4\cdot4=4^4=256$

(2) 항등함수는 오른쪽 그림과 같은 1가지 경우뿐이므로 항등함수의 개수는 1이다.



답 (1) 256 (2) 1

중단원 연습 문제

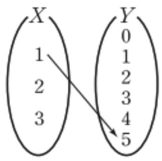
본책 133~136쪽

01 ⑤	02 6	03 8	04 6	
05 −2	06 ⑤	07 2	08 5	09 ②
10 $\frac{21}{4}$	11 $a>-1$		12 2	13 ③
14 ②	15 20	16 ④	17 ②	18 5

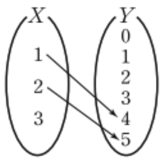
01 전략 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하는지 확인한다.

풀이 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

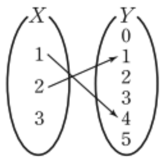
①



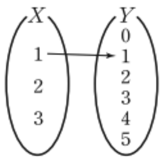
②



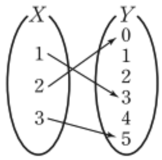
③



④



⑤



따라서 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하는 것은 ⑤이므로 X에서 Y로의 함수는 ⑤이다.

답 ⑤

02 (전략) 먼저 x가 유리수인지 무리수인지 판단한 후 함숫값을 구한다.

(풀이) 5는 유리수이므로 $\quad f(5)=5\sqrt{5}+4$

$\sqrt{5}$는 무리수이므로 $\quad f(\sqrt{5})=-5\sqrt{5}+2$

$\therefore f(5)+f(\sqrt{5})=5\sqrt{5}+4-5\sqrt{5}+2$

$=6$

답 6

03 (전략) 정의역의 원소를 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 x에 각각 대입하여 함숫값을 구한다.

(풀이) $X=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$에서

$f(-3)=3$, $f(-2)=f(2)=2$, $f(-1)=f(1)=1$, $f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$의 치역 A는

$A=\{0, 1, 2, 3\}$ ⋯ ❶

또 $g(-3)=1$, $g(-2)=0$, $g(-1)=-1$, $g(0)=-2$, $g(1)=-3$, $g(2)=-4$이므로 함수 $g(x)$의 치역 B는

$B=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ ⋯ ❷

따라서 $A\cup B=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$이므로 ⋯ ❸

$n(A\cup B)=8$ ⋯ ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 구할 수 있다.	40 %
❷ 집합 B를 구할 수 있다.	40 %
❸ $A\cup B$를 구할 수 있다.	10 %
❹ $n(A\cup B)$를 구할 수 있다.	10 %

04 (전략) 주어진 관계식에 적당한 x의 값을 대입하여 $g(2)$의 값을 구한다.

(풀이) $f(2x-3)=g(x+1)$의 양변에 $x=1$을 대입하면 $\quad f(-1)=g(2)$

$\therefore g(2)=f(-1)=(-1)^2-2\cdot(-1)+3=6$

답 6

05 (전략) 주어진 정의역의 각 원소에 대한 두 함수 f, g의 함숫값이 각각 같도록 하는 a, b의 값을 구한다.

(풀이) 두 함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=x^3+x-1$이 서로 같으므로

$f(-1)=g(-1)$, $f(1)=g(1)$ ⋯ ❶

이때 $f(-1)=g(-1)$에서

$-a+b=(-1)^3+(-1)-1$

$\therefore -a+b=-3$ ⋯⋯ ㉠

$f(1)=g(1)$에서

$a+b=1^3+1-1$

$\therefore a+b=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $b=-1$ ⋯ ❷

$\therefore ab=-2$ ⋯ ❸

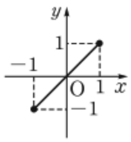
답 -2

채점 기준	비율
❶ $f(-1)=g(-1)$, $f(1)=g(1)$임을 알 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

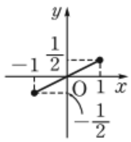
06 (전략) 주어진 정의역과 공역에서 각각의 함수의 그래프를 그려 본다.

(풀이) 각 함수의 그래프를 그려 보면 다음과 같다.

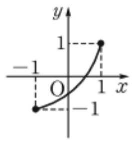
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



그래프가 치역의 임의의 원소 a에 대하여 직선 $y=a$와 한 점에서 만나고, 치역과 공역이 같으면 일대일대응이다.

따라서 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

Remark▶

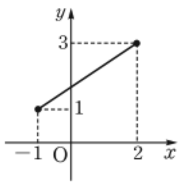
ㄴ. $f(x)=\frac{1}{2}x$의 치역은 $\left\{f(x)\,\middle|\,-\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{1}{2}\right\}$이므로 치역과 공역이 같지 않다.

따라서 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x$는 일대일함수이지만 일대일대응은 아니다.

07 (전략) 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응이면 x의 값이 증가할 때, y의 값은 항상 증가하거나 항상 감소한다.

(풀이) (i) $a=0$일 때, $f(x)=b$가 되어 일대일대응이 될 수 없다.

(ii) $a>0$일 때, 함수 f가 일대일대응이 되려면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-1)=1$, $f(2)=3$

$f(x)=ax+b$이므로

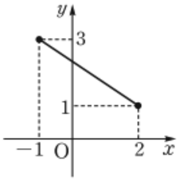
$-a+b=1$, $2a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{5}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=2$

(iii) $a<0$일 때, 함수 f가 일대일대응이 되려면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-1)=3$, $f(2)=1$

$f(x)=ax+b$이므로

$-a+b=3$, $2a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{7}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{3}=2$

이상에서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ 답 2

08 전략 정의역의 각 원소에 대하여 함숫값으로 가능한 것의 개수를 찾는다.

풀이 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수를 f라 하자.

함수 f에서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d, e 중 하나이므로 5개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d, e 중 하나이므로 5개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d, e 중 하나이므로 5개

따라서 함수의 개수는 $5\cdot5\cdot5=5^3=125$

$\therefore p=125$

한편 f가 일대일함수일 때, $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d, e 중 하나이므로 5개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 4개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 3개

따라서 일대일함수의 개수는

$5\cdot4\cdot3=60$ $\therefore q=60$

$\therefore p-2q=5$ 답 5

09 전략 $f(x)=f(-x)$에서 $f(1)=f(-1)$임을 알 수 있다.

풀이 $f(x)=f(-x)$에서 $f(1)=f(-1)$

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0, 1 중 하나이므로 3개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0, 1 중 하나이므로 3개

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$의 값과 같으므로 1개

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$3\cdot3\cdot1=9$ 답 ②

Remark▶
$f(x)=f(-x)$를 만족시키는 함수 f의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$f(1)=f(-1)=-1$

인 경우의 함수 f의 그래프는 다음과 같다.

10 전략 $f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 적당한 수를 대입하여 함숫값을 구한다.

풀이 $f(x+y)=f(x)f(y)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)f(0)$

$f(0)>0$이므로 양변을 $f(0)$으로 나누면

$f(0)=1$

㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1+1)=f(1)f(1)$

$\therefore f(2)=2\cdot2=4$

㉠의 양변에 $x=2$, $y=-2$를 대입하면

$f(2-2)=f(2)f(-2)$

$f(0)=f(2)f(-2)$, $1=4f(-2)$

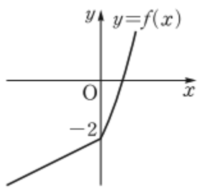
$\therefore f(-2)=\frac{1}{4}$

$\therefore f(-2)+f(0)+f(2)=\frac{21}{4}$ 답 $\frac{21}{4}$

11 전략 $y=f(x)$가 일대일대응이려면 x의 값이 증가할 때, y의 값도 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.

풀이 $y=x^2+2x-2$에서 $y=(x+1)^2-3$이므로 이차함수 $y=x^2+2x-2$는 $x\geq-1$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값이 항상 증가한다.

$y=x^2+2x-2$는 $x\geq0$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하므로 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 일대일대응이 되려면 오른쪽 그림과 같이 $x<0$에서 직선 $y=(a+1)x-2$도 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하는 그래프이어야 한다. ⋯ ❶



즉 $a+1>0$이므로 $\quad a>-1$ ⋯ ❷

이때 곡선 $y=x^2+2x-2$와 직선 $y=(a+1)x-2$는 모두 점 $(0,\ -2)$를 지나므로 함수 $f(x)$는 치역과 공역이 실수 전체의 집합으로 같다. ⋯ ❸

따라서 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는

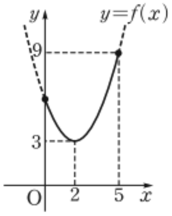
$a>-1$ ⋯ ❹

답 $a>-1$

채점 기준	비율
❶ $x<0$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가해야 함을 알 수 있다.	20 %
❷ 직선 $y=(a+1)x-2$의 기울기가 양수임을 이용할 수 있다.	30 %
❸ 함수 $f(x)$의 치역과 공역이 같음을 알 수 있다.	30 %
❹ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

12 전략 함수 f의 치역과 공역이 같아야 함을 이용한다.

풀이 집합 Y에 속하는 임의의 원소 y에 대하여 $y=f(x)$인 x가 집합 X에 속하므로 함수 f의 치역과 공역이 같아야 한다. ⋯ ❶



오른쪽 그림에서

$f(2)=3,\ f(5)=9$

이어야 하므로

$b=3,\ 9a+b=9$

$b=3$을 $9a+b=9$에 대입하면

$9a+3=9$

$\therefore\ a=\dfrac{2}{3}$ ⋯ ❷

$\therefore\ ab=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 함수 f의 치역과 공역이 같아야 함을 알 수 있다.	30 %
❷ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

13 전략 공역의 원소가 2개이므로 함수의 총개수에서 상수함수가 되는 경우를 제외한다.

풀이 X의 원소 1에 대응할 수 있는 Y의 원소는 4, 5의 $\quad$ 2개

X의 원소 2에 대응할 수 있는 Y의 원소는 4, 5의 $\quad$ 2개

X의 원소 3에 대응할 수 있는 Y의 원소는 4, 5의 $\quad$ 2개

따라서 함수의 개수는 $\quad 2\cdot2\cdot2=8$

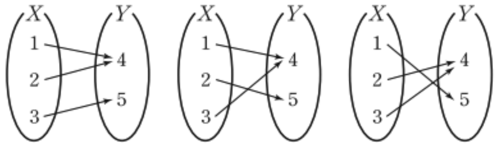
이때 치역이 $\{4\}$ 또는 $\{5\}$인 함수의 개수는 2이므로 치역과 공역이 같은 함수의 개수는

$8-2=6$

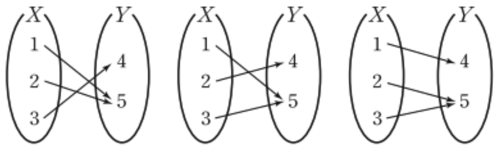
답 ③

다른 풀이 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수도 있다.

(ⅰ) Y의 원소 4에 X의 원소가 2개 대응할 때,



(ⅱ) Y의 원소 5에 X의 원소가 2개 대응할 때,



(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는 6이다.

14 전략 정의역의 각 원소에 대하여 함숫값으로 가능한 것의 개수를 찾는다.

풀이 $f(-x)=-f(x)$이므로

$f(-2)=-f(2),\ f(-1)=-f(1),$

$f(0)=-f(0)$

ㄱ. $f(0)=-f(0)$이므로

$2f(0)=0 \qquad \therefore\ f(0)=0$

ㄴ. $f(-2)=-f(2)$이고 $f(1)=-f(-1)$이므로

$f(-2)=f(1)$이면

$-f(2)=-f(-1) \qquad \therefore\ f(2)=f(-1)$

ㄷ. $f(-2)$의 값이 될 수 있는 것은 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 중 하나이므로 $\quad$ 5개

$f(-2)=-f(2)$이므로 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $-f(-2)$의 값과 같은 $\quad$ 1개

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 중 하나이므로 $\quad$ 5개

$f(-1)=-f(1)$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-f(-1)$의 값과 같은 $\quad$ 1개

또 ㄱ에서 $f(0)=0$이므로 구하는 함수의 개수는 $\quad 5\cdot1\cdot5\cdot1\cdot1=25$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

15 전략 주어진 관계식에 적당한 x의 값을 대입하여 $f(2)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x-3)=x^2-5$의 양변에 $x=5$를 대입하면

$f(2)=5^2-5=20$

답 20

16 전략 주어진 정의역의 각 원소에 대한 두 함수 f, g의 함숫값이 각각 같도록 하는 상수 a, b의 값을 구한다.

풀이 $f(0)=g(0)$에서

$3=a+b$ …… ㉠

$f(1)=g(1)$에서

$1=b$ …… ㉡

$f(2)=g(2)$에서 $3=a+b$

㉡을 ㉠에 대입하면

$3=a+1$ $\therefore a=2$

$\therefore 2a-b=3$

답 ④

17 전략 일대일대응, 항등함수, 상수함수의 정의를 이용하여 함숫값을 구한다.

풀이 $g(x)$가 항등함수이므로 $g(3)=3$

따라서 조건 ㈎에 의하여 $f(2)=h(6)=3$

한편 $f(x)$는 일대일대응이고, 조건 ㈏에서

$f(2)f(3)=f(6)$이므로 $3f(3)=f(6)$

$\therefore f(3)=2,\ f(6)=6$

또 $h(x)$는 상수함수이므로 조건 ㈎에 의하여

$h(2)=h(3)=h(6)=3$

$\therefore f(3)+h(2)=2+3=5$

답 ②

18 전략 주어진 조건을 이용하여 $h(4)$의 값을 먼저 구한 후 h가 일대일대응이 되도록 나머지 함숫값도 구한다.

풀이 $f(4)=2$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $g(4)=3$이므로

$g(4)>f(4)$ $\therefore h(4)=g(4)=3$

함수 $y=h(x)$는 일대일대응이므로 $h(3)\neq 3$

그런데 $g(3)=3$이므로 $h(3)\neq g(3)$

따라서 함수 h의 정의에 의하여 $h(3)=f(3)$이고,

$f(3)>g(3)=3$이므로

$f(3)=4$ $\therefore h(3)=4$

$h(3)=4$, $h(4)=3$이므로 $h(1)$, $h(2)$는 각각 1, 2 중 하나의 값을 갖고 $h(1)\neq h(2)$이다.

(i) $h(1)=1$인 경우

$h(1)$은 $f(1)$과 $g(1)$ 중 작지 않은 값을 갖는데 $g(1)=2$이므로 $h(1)$의 값은 $f(1)$의 값에 관계없이 2 이상이 되어 모순이다.

(ii) $h(2)=1$인 경우

$h(2)$는 $f(2)$와 $g(2)$ 중 작지 않은 값을 갖는데 $g(2)=1$이므로

$f(2)=1$

(i), (ii)에서 $f(2)=1$이므로

$f(2)+h(3)=1+4=5$

답 5

Ⅵ. 함수

20 합성함수와 역함수

유제 본책 142~160쪽

043-❶ $g(x)=(h\circ f)(x)=h(f(x))$에서

$f(x)=2$를 만족시키는 x의 값은 1이므로

$g(1)=(h\circ f)(1)=h(f(1))=h(2)$

그런데 $g(1)=0$이므로 $h(2)=0$

답 0

044-❶ $f(x)=\frac{x}{2}$에서

$f^1(x)=f(x)=\frac{x}{2}$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x}{4}=\frac{x}{2^2}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2^2}=\frac{x}{2^3}$

⋮

$\therefore f^n(x)=\frac{x}{2^n}$

따라서 $f^6(x)=\frac{x}{2^6}$이므로

$f^6(192)=\frac{192}{2^6}=\frac{192}{64}=3$

답 3

044-❷ $f(x)=-x+4$에서

$f^1(x)=f(x)=-x+4$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=-(-x+4)+4=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=-x+4$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=-(-x+4)+4=x$

⋮

$\therefore f^n(x)=\begin{cases}-x+4 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

답 $f^n(x)=\begin{cases}-x+4 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

045-❶ $f(x)=x-1$, $g(x)=ax+5$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+5)$

$=ax+5-1=ax+4$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-1)$

$=a(x-1)+5=ax-a+5$

이때 $f\circ g=g\circ f$이므로 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$

즉 $ax+4=ax-a+5$이므로

$4=-a+5$ $\therefore a=1$

따라서 $g(x)=x+5$이므로

$g(-2)=-2+5=3$

답 3

045-❷ $f(x)=ax+b$, $g(x)=4x-3$에서

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4x-3)$$
$$=a(4x-3)+b$$
$$=4ax-3a+b$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)$$
$$=4(ax+b)-3$$
$$=4ax+4b-3$$

이때 $f\circ g=g\circ f$이므로 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$

즉 $4ax-3a+b=4ax+4b-3$이므로

$-3a+b=4b-3$, $3a+3b=3$

$\therefore a+b=1$ …… ㉠

또 $f(-1)=5$이므로

$-a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=3$ 답 $a=-2$, $b=3$

046-❶ (1) $(f\circ h)(x)=f(h(x))=3h(x)-1$이고, $(f\circ h)(x)=g(x)$이므로

$3h(x)-1=2x+5$ $\therefore h(x)=\frac{2}{3}x+2$

(2) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(3-2x)$이고, $(h\circ g)(x)=f(x)$이므로

$h(3-2x)=2x-1$ …… ㉠

$3-2x=1$일 때, $x=1$

$x=1$을 ㉠에 대입하면

$h(1)=2\cdot1-1=1$

답 (1) $h(x)=\frac{2}{3}x+2$ (2) 1

046-❷ $f\left(\frac{2x-1}{3}\right)=4x-5$ …… ㉠

$\frac{2x-1}{3}=t$로 놓으면

$2x-1=3t$ $\therefore x=\frac{3t+1}{2}$

$x=\frac{3t+1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$f(t)=4\cdot\frac{3t+1}{2}-5=6t-3$

$\therefore f\left(\frac{3-x}{2}\right)=6\cdot\frac{3-x}{2}-3=-3x+6$

답 $f\left(\frac{3-x}{2}\right)=-3x+6$

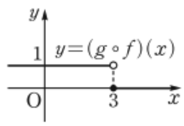
047-❶ (ⅰ) $x<3$일 때, $f(x)=1$이므로

$y=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(1)=1$

(ⅱ) $x\geq3$일 때, $f(x)=4$이므로

$y=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4)=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

048-❶ $f^{-1}(2)=a$, $f^{-1}(9)=b$ (a, b는 실수)라 하면

$f(a)=2$, $f(b)=9$

$a^3+1=2$, $b^3+1=9$

$\therefore a^3=1$, $b^3=8$

이때 a, b는 실수이므로 $a=1$, $b=2$

$\therefore f^{-1}(2)+f^{-1}(9)=1+2=3$ 답 3

048-❷ 함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재하므로 두 함수 f, f^{-1}는 모두 X에서 X로의 일대일대응이다.

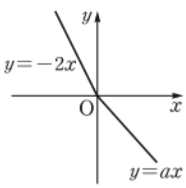
따라서 X의 각 원소 2, 4, 6은 f^{-1}에 의하여 X의 각 원소 2, 4, 6에 하나씩 대응하므로

$f^{-1}(2)+f^{-1}(4)+f^{-1}(6)$의 값은 집합 $X=\{2, 4, 6\}$의 원소의 합과 같다.

$\therefore f^{-1}(2)+f^{-1}(4)+f^{-1}(6)=12$ 답 12

049-❶ 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.

따라서 $x\geq0$인 부분에서의 직선의 기울기는 오른쪽 그림과 같이 음수가 되어야 하므로



$a<0$ 답 $a<0$

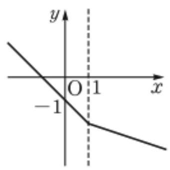
049-❷ (ⅰ) $x\geq1$일 때,

$$f(x)=(x-1)+kx-2$$
$$=(k+1)x-3$$

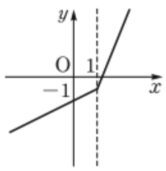
(ⅱ) $x<1$일 때,

$$f(x)=-(x-1)+kx-2$$
$$=(k-1)x-1$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

즉 $x\ge1$인 부분과 $x<1$인 부분의 직선의 기울기는 같은 부호이어야 하므로

$(k+1)(k-1)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>1$

답 $k<-1$ 또는 $k>1$

050-❶ $(f^{-1}\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ(f^{-1})^{-1}=g^{-1}\circ f$이므로

$f^{-1}\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1}$
$=f^{-1}\circ(g^{-1}\circ f)\circ f^{-1}$
$=(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(f\circ f^{-1})$
$=(f^{-1}\circ g^{-1})\circ I$ (I는 항등함수)
$=f^{-1}\circ g^{-1}$
$=(g\circ f)^{-1}$

$\therefore (f^{-1}\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(2)=(g\circ f)^{-1}(2)$

$(g\circ f)^{-1}(2)=k$ (k는 상수)라 하면 $(g\circ f)(k)=2$에서

$(g\circ f)(k)=g(f(k))=g(-3k+2)$
$=\frac{1}{2}(-3k+2)+3=-\frac{3}{2}k+4$

이므로

$-\frac{3}{2}k+4=2$

$\therefore k=\frac{4}{3}$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(2)=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

050-❷ $f\circ g=g\circ f=I$이므로 $g=f^{-1}$

$\therefore g(x)=f^{-1}(x)$

이때 $f(1)=2$에서 $f^{-1}(2)=1$이고,
$(g^{-1}\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g$이므로

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g)(2)$
$=f^{-1}(g(2))=f^{-1}(f^{-1}(2))$
$=f^{-1}(1)=g(1)$
$=3$ 답 3

050-❸ $g^{-1}\circ f^{-1}\circ h=I$ (I는 항등함수)에서

$(g^{-1}\circ f^{-1})\circ h=I$

이므로

$h=(g^{-1}\circ f^{-1})^{-1}=(f^{-1})^{-1}\circ(g^{-1})^{-1}=f\circ g$

$\therefore h(x)=(f\circ g)(x)$
$=f(g(x))$
$=f(-x+3)$
$=2(-x+3)-7$
$=-2x-1$ 답 $h(x)=-2x-1$

051-❶ 함수 $f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{4}{3}$는 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=\frac{3}{2}x-\frac{4}{3}$라 하고 x에 대하여 풀면

$\frac{3}{2}x=y+\frac{4}{3}$ $\therefore x=\frac{2}{3}\left(y+\frac{4}{3}\right)$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{2}{3}\left(x+\frac{4}{3}\right)$, 즉 $f^{-1}(x)=\frac{2}{3}x+\frac{8}{9}$

함수 $g(x)=-2x+\frac{1}{3}$은 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=-2x+\frac{1}{3}$이라 하고 x에 대하여 풀면

$2x=-y+\frac{1}{3}$ $\therefore x=\frac{1}{2}\left(-y+\frac{1}{3}\right)$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{2}\left(-x+\frac{1}{3}\right)$, 즉 $g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1})(x)=f^{-1}(g^{-1}(x))$
$=f^{-1}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\right)$
$=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\right)+\frac{8}{9}$
$=-\frac{1}{3}x+1$

답 $(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=-\frac{1}{3}x+1$

052-❶ (1) 주어진 그림에서 $f(-1)=0$이므로

$f^{-1}(0)=-1$

$\therefore (f\circ f)(0)+f^{-1}(0)=f(f(0))+f^{-1}(0)$
$=f(1)+(-1)$
$=\frac{3}{2}-1$
$=\frac{1}{2}$

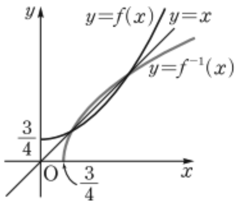
(2) 주어진 그림에서 $f(1)=\frac{3}{2}$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$이므로

$f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=1$, $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}$

$\therefore (f\circ f)^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=(f^{-1}\circ f^{-1})\left(\frac{5}{2}\right)$
$=f^{-1}\left(f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right)$
$=f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$
$=1$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1

053-❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다. 이때



함수 $y=f(x)$와 그 역함수의 그래프의 교점이 2개 존재하고, 그 교점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}=x$에서

$x^2+3=4x$, $\quad x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(1, 1)$, $(3, 3)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}$

$=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

중단원 연습 문제

본책 161~164쪽

01 -9	02 -1	03 ②	04 ②	05 3
06 -1	07 8	08 ④	09 ④	10 50
11 5	12 1	13 4	14 ③	15 -2
16 ③	17 ④	18 16	19 ⑤	

01 전략 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$임을 이용한다.

풀이 $g(2)=2+2=4$이므로

$(f\circ g)(2)=f(g(2))$

$=f(4)$

$=-4^2+1=-15$ ⋯ ❶

$f(-3)=1-(-3)=4$이므로

$(g\circ f)(-3)=g(f(-3))$

$=g(4)$

$=4+2=6$ ⋯ ❷

$\therefore (f\circ g)(2)+(g\circ f)(-3)=-9$ ⋯ ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ $(f\circ g)(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $(g\circ f)(-3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $(f\circ g)(2)+(g\circ f)(-3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

02 전략 $f^1, f^2, f^3, f^4, \cdots$를 구하여 f^n을 추론한다.

풀이 $f(x)=2x+1$에서

$f^2(x)=f(f(x))=f(2x+1)=2(2x+1)+1$

$=4x+3$

$=2^2x+2^2-1$

$f^3(x)=f(f^2(x))=f(4x+3)=2(4x+3)+1$

$=8x+7$

$=2^3x+2^3-1$

$f^4(x)=f(f^3(x))=f(8x+7)=2(8x+7)+1$

$=16x+15$

$=2^4x+2^4-1$

$\vdots$

$f^n(x)=2^nx+2^n-1$

$\therefore f^n(-1)=-2^n+2^n-1=-1$

답 -1

다른 풀이 $f(-1)=2\cdot(-1)+1=-1$이므로

$f^2(-1)=f(f(-1))=f(-1)=-1$

$f^3(-1)=f(f^2(-1))=f(-1)=-1$

$\vdots$

$f^n(-1)=-1$

03 전략 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$가 성립하므로 이 등식이 x에 대한 항등식임을 이용하여 동류항의 계수를 비교한다.

풀이 $f(x)=ax+b$, $g(x)=bx+a$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+a)$

$=a(bx+a)+b$

$=abx+a^2+b$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)$

$=b(ax+b)+a$

$=abx+b^2+a$

이때 $f\circ g=g\circ f$이므로

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$

따라서 $abx+a^2+b=abx+b^2+a$이므로

$a^2+b=b^2+a$, $\quad a^2-b^2-a+b=0$

$(a-b)(a+b)-(a-b)=0$

$(a-b)(a+b-1)=0$

$\therefore a-b=0$ 또는 $a+b-1=0$

그런데 $a\neq b$, 즉 $a-b\neq 0$이므로

$a+b-1=0$

$\therefore a+b=1$

$\therefore f(1)+g(1)=a+b+b+a$

$=2(a+b)$

$=2\cdot 1=2$

답 ②

04 전략 $(g\circ h)(x)=g(h(x))$에서 $h(x)$를 $g(x)$의 x에 대입하여 정리한다.

풀이 $(g\circ h)(x)=g(h(x))=2h(x)-5$이고,
$(g\circ h)(x)=f(x)$이므로

$2h(x)-5=2x^2-7$

$2h(x)=2x^2-2$

$\therefore h(x)=x^2-1$

답 ②

05 전략 함수 g가 일대일대응이므로 정의역의 서로 다른 두 원소에 대응하는 공역의 원소가 서로 다름을 이용한다.

풀이 함수 g는 일대일대응이고 $g(1)=1$이므로

$g(2)=0$ 또는 $g(2)=2$

$g(2)=0$이라 하면

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(0)=1$

그런데 이것은 주어진 조건 $(f\circ g)(2)=2$에 모순이므로 $g(2)=2$이다.
$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2)$이므로

$f(2)=2$

따라서 $f(0)=1$, $f(2)=2$이므로 $f(1)=0$이고,
$g(1)=1$, $g(2)=2$이므로 $g(0)=0$이다.
$f(2)=2$에서 $f^{-1}(2)=2$이고, $g(2)=2$에서
$g^{-1}(2)=2$이므로

$(f\circ g)(0)+(g^{-1}\circ f^{-1})(2)$
$=f(g(0))+g^{-1}(f^{-1}(2))$
$=f(0)+g^{-1}(2)$
$=1+2=3$

답 3

06 전략 $y=f(x)$를 x에 대하여 푼 후 x와 y를 서로 바꾸어 $f^{-1}(x)$를 구한다.

풀이 $y=ax+5$라 하고 x에 대하여 풀면

$$x=\frac{1}{a}(y-5)$$

x와 y를 서로 바꾸면

$$y=\frac{1}{a}(x-5)$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{5}{a}$$ ⋯ ❶

$f(x)=f^{-1}(x)$에서 $ax+5=\frac{1}{a}x-\frac{5}{a}$이므로

$$a=\frac{1}{a},\ 5=-\frac{5}{a}$$

$\therefore a=-1$ ⋯ ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

07 전략 $g(x)$가 $f(x)$의 역함수임을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 임의의 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=x$를 만족시키므로 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. ⋯ ❶
$g(g(k))=0$에서 $f(0)=g(k)$이고, $f(0)=3$이므로

$g(k)=3$

따라서 $f(3)=k$이므로

$k=3^2-2\cdot3+5=8$ ⋯ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ $g(x)$가 $f(x)$의 역함수임을 알 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	70 %

08 전략 역함수의 성질을 이용하여 먼저 $(g\circ f)(2)$의 값을 구한다.

풀이 $f^{-1}\circ g^{-1}=(g\circ f)^{-1}$이므로

$(g\circ f)^{-1}(1)=(f^{-1}\circ g^{-1})(1)=2$

$\therefore (g\circ f)(2)=1$

이때 $(g\circ f)(2)=g(f(2))$이고, $f(2)=2$이므로

$g(2)=1$

또 $(g\circ f)(1)=3$에서

$g(f(1))=3$

$g(3)=3$이고, 함수 g는 일대일대응이므로

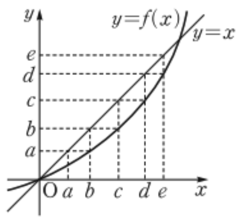
$f(1)=3$

$\therefore f(1)+g(2)=3+1=4$

답 ④

09 전략 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하여 표시한 후 $f(p)=q \Longleftrightarrow f^{-1}(q)=p$임을 이용한다.

풀이 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 주어진 그림에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(b)=k$라 하면

$f(k)=b$

위의 그림에서 $f(c)=b$이므로

$k=c$, 즉 $f^{-1}(b)=c$

$f^{-1}(c)=l$이라 하면 $\quad f(l)=c$

앞의 그림에서 $f(d)=c$이므로

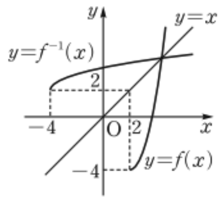
$l=d$, 즉 $f^{-1}(c)=d$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(b)=f^{-1}(f^{-1}(b))$
$=f^{-1}(c)$
$=d$

답 ④

10 전략 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$와 그 역함수의 그래프의 교점이 1개 존재하고, 그 교점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 함수 $y=x^2-4x\ (x\geq 2)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=x^2-4x\ (x\geq 2)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$x^2-4x=x$에서 $\quad x^2-5x=0$

$x(x-5)=0 \quad \therefore x=5\ (\because x\geq 2)$

따라서 교점의 좌표가 $(5, 5)$이므로

$a=5,\ b=5$

$\therefore 2ab=2\cdot 5\cdot 5=50$

답 50

11 전략 합성함수 $f^1, f^2, f^3, f^4, \cdots$의 치역을 조사하고 $f^n(a)=0$이면 $f^{n+1}(a)=0$임을 이용한다.

풀이 정의역의 원소를 30부터 차례대로 대입하여 각각의 $f^n(x)$의 함숫값을 구하면 다음 표와 같다.

x \ f^n	$f(x)$	$f^2(x)$	$f^3(x)$	$f^4(x)$	$f^5(x)$	$\cdots$
30	15	7	3	1	0	0
29, 28	14	7	3	1	0	0
27, 26	13	6	3	1	0	0
25, 24	12	6	3	1	0	0
23, 22	11	5	2	1	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3, 2	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

따라서 $n=5, 6, 7, \cdots$일 때, 합성함수 f^n의 정의역의 모든 원소의 함숫값이 0이 되므로 구하는 n의 최솟값은 5이다.

답 5

12 전략 $(h\circ g\circ f)(x)=h((g\circ f)(x))$에서 $(g\circ f)(x)$를 $h(x)$의 x에 대입하여 정리한다.

풀이 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$=g(5x+1)$
$=2(5x+1)-1$
$=10x+1$ ⋯ ❶

이므로

$(h\circ g\circ f)(x)=(h\circ(g\circ f))(x)$
$=h((g\circ f)(x))$
$=h(10x+1)$

즉 $(h\circ g\circ f)(x)=h(10x+1)=100x^2$이므로

$10x+1=t$로 놓으면

$x=\dfrac{t-1}{10}$

따라서 $h(t)=100\left(\dfrac{t-1}{10}\right)^2=t^2-2t+1$이므로

$h(x)=x^2-2x+1$ ⋯ ❷

$\therefore h(2)=2^2-2\cdot 2+1$
$=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $(g\circ f)(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $h(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❸ $h(2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

13 전략 $f(x)=t$로 놓고 t의 값의 범위를 a로 나타낸다.

풀이 $-a-2\leq x\leq a$일 때,

$f(-a-2)\leq f(x)\leq f(a)$

그런데 $f(-a-2)=2(-a-2)+3=-2a-1$,

$f(a)=2a+3$이므로

$-2a-1\leq f(x)\leq 2a+3$

$f(x)=t$로 놓으면

$-2a-1\leq t\leq 2a+3$ ⋯⋯ ㉠

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)=(t-2)^2$이고 ㉠에서

$-2a-3\leq t-2\leq 2a+1$

이때 $|-2a-3|>|2a+1|$이므로

$0\leq (t-2)^2\leq (-2a-3)^2$

$\therefore 0\leq (t-2)^2\leq (2a+3)^2$

즉 $(g\circ f)(x)$의 치역은

$A=\{y\,|\,0\leq y\leq (2a+3)^2\}$

집합 A의 원소 중 자연수가 100개 이상이어야 하므로

$(2a+3)^2\geq 100$

이때 a는 자연수이므로

$$2a+3\geq 10$$

$$\therefore a\geq \frac{7}{2}$$

따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 4

14 전략 x의 값의 범위를 나누어 $f(x)$, $g(x)$의 함수식을 각각 구한다.

풀이 $f(x)=\begin{cases} 4x & \left(0\leq x\leq \frac{1}{2}\right) \\ -4x+4 & \left(\frac{1}{2}\leq x\leq 1\right) \\ 0 & (1\leq x\leq 2) \end{cases}$이고,

$g(x)=\begin{cases} 2 & (0\leq x\leq 1) \\ -2x+4 & (1\leq x\leq 2) \end{cases}$이므로

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} 2 & (0\leq f(x)\leq 1) \\ -2f(x)+4 & (1\leq f(x)\leq 2) \end{cases}$$

(ⅰ) $0\leq x\leq \frac{1}{4}$일 때,

$0\leq f(x)\leq 1$이므로

$$(g\circ f)(x)=2$$

(ⅱ) $\frac{1}{4}\leq x\leq \frac{1}{2}$일 때,

$1\leq f(x)\leq 2$이므로

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=-2f(x)+4\\&=-2\cdot 4x+4\\&=-8x+4\end{aligned}$$

(ⅲ) $\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{3}{4}$일 때,

$1\leq f(x)\leq 2$이므로

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=-2f(x)+4\\&=-2(-4x+4)+4\\&=8x-4\end{aligned}$$

(ⅳ) $\frac{3}{4}\leq x\leq 1$일 때,

$0\leq f(x)\leq 1$이므로

$$(g\circ f)(x)=2$$

(ⅴ) $1\leq x\leq 2$일 때,

$f(x)=0$이므로

$$(g\circ f)(x)=2$$

이상에서 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 ③과 같다.

답 ③

다른 풀이 본책 148쪽 **특강 054**를 이용하여 합성함수의 그래프를 그리는 방법을 나타내면 다음과 같다.

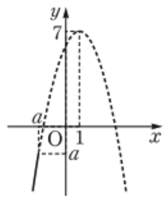
❶단계	❷단계	❸단계	❹단계
x의 값	$t=f(x)$의 값	$y=g(t)$의 값	그래프의 개형
$0\to\frac{1}{2}$	$0\to 2$	$2\to 2\to 0$	↘
$\frac{1}{2}\to 1$	$2\to 0$	$0\to 2\to 2$	↗
$1\to 2$	0	2	→

15 전략 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^2+2x+6$

$$=-(x-1)^2+7$$

이고 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $a\leq 1$, $f(a)=a$이어야 하므로

$f(a)=a$에서

$$-a^2+2a+6=a$$

$$a^2-a-6=0,\qquad (a+2)(a-3)=0$$

$$\therefore a=-2\ (\because a\leq 1)$$

답 -2

Remark▶

$f(x)$의 공역은 $\{x\,|\,x\leq a\}$이고 $a\leq 1$일 때 치역은 $\{f(x)\,|\,f(x)\leq f(a)\}$이므로 $f(x)$가 일대일대응이려면 $f(a)=a$를 만족시켜야 한다.

16 전략 이차함수의 그래프가 축에 대하여 대칭임을 이용하여 주어진 방정식을 만족시키는 모든 실근의 합을 구한다.

풀이 방정식 $f(f(x))=-5$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$$f(t)=-5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

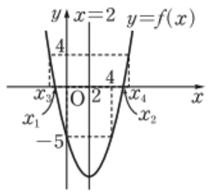
$$f(0)=f(4)=-5$$

따라서 ㉠을 만족시키는 t의 값은

$$t=0 \text{ 또는 } t=4$$

$$\therefore f(x)=0 \text{ 또는 } f(x)=4$$

방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 각각 x_1, x_2라 하고, 방정식 $f(x)=4$를 만족시키는 x의 값을 각각 x_3, x_4라 하면 오른쪽 그림에서



$y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=2$, $\dfrac{x_3+x_4}{2}=2$

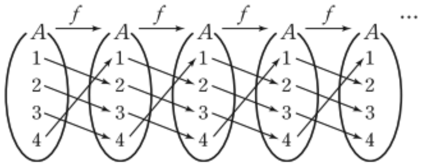
$\therefore x_1+x_2=4$, $x_3+x_4=4$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$x_1+x_2+x_3+x_4=4+4=8$ 답 ③

17 전략 $f^1, f^2, f^3, f^4, \cdots$를 구하여 f^n을 추론한다.

풀이 주어진 함수를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $f^4(x)=x$이므로

$f^{2012}(2)=f^{4\cdot503}(2)=2$

$f^{2013}(3)=f^{4\cdot503+1}(3)$

$=f^1(3)=4$

$\therefore f^{2012}(2)+f^{2013}(3)=6$ 답 ④

18 전략 함수 $f(n)$의 역함수가 존재하려면 $f(n)$이 일대일대응이어야 함을 이용한다.

풀이 집합 S는

$S=\{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99\}$

따라서 $f(n)$은

$f(9)=f(72)=2$,

$f(18)=f(81)=4$,

$f(27)=f(90)=6$,

$f(36)=f(99)=1$,

$f(45)=3$, $f(54)=5$, $f(63)=0$

함수 $f(n)$의 역함수가 존재하려면 $f(n)$이 일대일대응이어야 하므로

$f^{-1}(1)=36$ 또는 $f^{-1}(1)=99$,

$f^{-1}(2)=9$ 또는 $f^{-1}(2)=72$,

$f^{-1}(4)=18$ 또는 $f^{-1}(4)=81$,

$f^{-1}(6)=27$ 또는 $f^{-1}(6)=90$

이어야 한다.

따라서 집합 X의 개수는

$2\cdot2\cdot2\cdot2=16$ 답 16

19 전략 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수의 대응 관계를 그림으로 나타내어 본다.

풀이 ㄱ. 함수 f가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

조건 (가)에서 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $(f\circ f)(x)=x$이므로 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=f^{-1}(x)$이다.

$\therefore f(3)=f^{-1}(3)$

ㄴ. 조건 (나)에 의하여 집합 X의 원소 중 $f(x)=2x$를 만족시키는 원소 x가 적어도 하나 존재하므로

$f(1)=2$ 또는 $f(2)=4$

그런데 $f(1)=3$이므로

$f(2)=4$

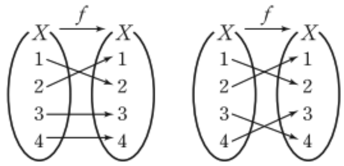
ㄷ. 조건 (나)에 의하여 함수 f의 대응 관계는 다음 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $f(1)=2$, $f(2)\neq4$일 때,

조건 (가)에서 $(f\circ f)(1)=1$이므로

$f(f(1))=f(2)=1$

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수 f는 다음의 2가지이다.

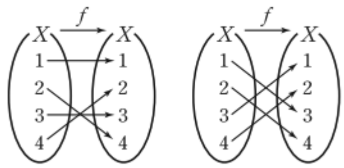


(ii) $f(1)\neq2$, $f(2)=4$일 때,

조건 (가)에서 $(f\circ f)(2)=2$이므로

$f(f(2))=f(4)=2$

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수 f는 다음의 2가지이다.



(iii) $f(1)=2$, $f(2)=4$일 때,

$f(f(1))=f(2)=4$

그런데 조건 (가)에서 $(f\circ f)(1)=1$이므로 모순이다.

따라서 가능한 함수 f의 개수는 4이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

VI. 함수

21 여러 가지 함수의 그래프

유제

본책 170~186쪽

054-① 함수 $y=(a-2)x+a-2b$의 그래프는 기울기가 $a-2$이고, y절편이 $a-2b$인 직선이다.
이때 주어진 함수의 그래프가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 $45°$이므로

$a-2=\tan 45°$, 즉 $a-2=1$

$\therefore a=3$ …… ㉠

또 y절편이 1이므로

$a-2b=1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $3-2b=1$ $\therefore b=1$

$\therefore a+b=4$

답 4

Remark▶

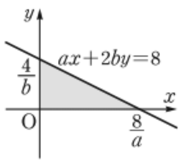
함수 $y=ax+b$의 그래프가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0°\le\theta<90°)$라 하면

$a=\tan\theta$

054-② $ax+2by=8$에서 x절편은 $\frac{8}{a}$, y절편은 $\frac{4}{b}$이고, $a>0$, $b>0$이므로

$\frac{8}{a}>0$, $\frac{4}{b}>0$

따라서 직선 $ax+2by=8$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같고, 그 넓이가 4이므로



$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{a}\cdot\frac{4}{b}=4$

$\therefore ab=4$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

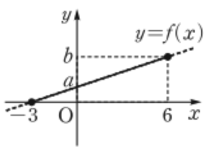
$a+b\ge 2\sqrt{ab}$

$=2\cdot\sqrt{4}=4$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 $a+b$의 최솟값은 4이다.

답 4

055-① $f(x)=\frac{1}{3}x+a$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$f(-3)=0$, $f(6)=b$

이때 $f(-3)=\frac{1}{3}\cdot(-3)+a=a-1$이므로

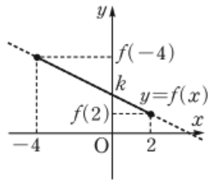
$a-1=0$ $\therefore a=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x+1$이므로

$f(6)=\frac{1}{3}\cdot 6+1=3$ $\therefore b=3$

답 $a=1$, $b=3$

055-② $f(x)=-\frac{1}{2}x+k$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $-4\le x\le 2$에서 주어진 일차함수는 $x=2$일 때 최솟값을 갖고, $x=-4$일 때 최댓값을 갖는다.



즉 $f(2)=1$에서 $-\frac{1}{2}\cdot 2+k=1$ $\therefore k=2$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$이므로 구하는 최댓값은

$f(-4)=-\frac{1}{2}\cdot(-4)+2=4$

답 4

056-① (1) $f(x)=2mx-m-3$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 직선이고, $-1<x\le 1$에서 항상 $y<0$이 되어야 하므로 $f(-1)\le 0$, $f(1)<0$이어야 한다. 이때

$f(-1)=-2m-m-3=-3m-3$

이므로 $-3m-3\le 0$

$\therefore m\ge -1$ …… ㉠

또 $f(1)=2m-m-3=m-3$이므로

$m-3<0$ $\therefore m<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\le m<3$

(2) y를 m에 대한 함수로 생각하고

$f(m)=(2x-1)m-3$

이라 하자. $y=f(m)$의 그래프는 직선이고, $1<m\le 2$에서 항상 $y>0$이 되어야 하므로 $f(1)\ge 0$, $f(2)>0$이어야 한다. 이때

$f(1)=(2x-1)-3=2x-4$

이므로 $2x-4\ge 0$

$\therefore x\ge 2$ …… ㉠

또

$f(2)=(2x-1)\cdot 2-3=4x-5$

이므로 $4x-5>0$

$\therefore x>\frac{5}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x\ge 2$

답 (1) $-1\le m<3$ (2) $x\ge 2$

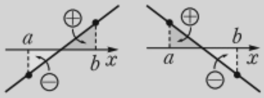
Remark▶

일차함수 $y=f(x)$에 대하여 $a\le x\le b$에서 y의 값의 부호와 함숫값 사이의 관계는 다음과 같다.

(1) y가 항상 양일 때 (2) y가 항상 음일 때

$f(a)>0,\ f(b)>0$ $f(a)<0,\ f(b)<0$

(3) y가 양의 값과 음의 값을 모두 가질 때



$f(a)f(b)<0$

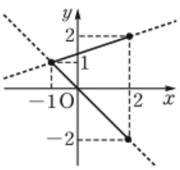
056-② $y=mx+m+1$을 m에 대하여 정리하면

$$m(x+1)+1-y=0$$

이므로 $y=mx+m+1$의 그래프는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

$f(x)=mx+m+1$이라 하면 $y=f(x)$는 집합 A를 정의역, 집합 B를 공역으로 하는 함수이다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 직선이므로 $y=f(x)$의 기울기는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기보다 작거나 같고,



두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ -2)$를 지나는 직선의 기울기보다 크거나 같아야 한다.

(i) 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2-1}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$$

(ii) 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ -2)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-2-1}{2-(-1)}=-1$$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$$-1\le m\le\frac{1}{3}$$

답 $-1\le m\le\frac{1}{3}$

다른 풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 집합 A에서 집합 B로의 함수가 정의되려면 $-2\le f(2)\le 2$이면 된다.

$f(x)=mx+m+1$에서

$$f(2)=2m+m+1=3m+1$$

이므로

$$-2\le 3m+1\le 2,\qquad -3\le 3m\le 1$$

$$\therefore\ -1\le m\le\frac{1}{3}$$

057-① $y=x^2+kx-3k$를 k에 대하여 정리하면

$$k(x-3)+x^2-y=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립하려면

$$x-3=0,\ x^2-y=0$$

$$\therefore\ x=3,\ y=9$$

점 $\mathrm{P}(3,\ 9)$가 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점이므로

$$y=(x-3)^2+9=x^2-6x+18$$

이 식이 $y=x^2+kx-3k$와 일치하므로

$$k=-6$$

답 -6

057-② $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

① 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

② 축이 y축의 왼쪽에 있으므로

$$-\frac{b}{2a}<0\qquad\therefore\ b<0\ (\because\ a<0)$$

③ y축과 $y>0$인 부분에서 만나므로 $c>0$

④ $f(1)=a+b+c$이고 그래프에서 $x=1$일 때 $y<0$이므로

$$a+b+c<0$$

⑤ $f(-2)=4a-2b+c$이고 그래프에서 $x=-2$일 때 $y<0$이므로

$$4a-2b+c<0$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

058-① (1) $y=-|x-3|+x$에서

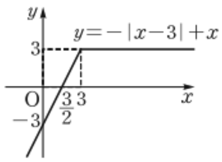
(i) $x<3$일 때, $x-3<0$이므로

$$y=-\{-(x-3)\}+x$$
$$=2x-3$$

(ii) $x\ge 3$일 때, $x-3\ge 0$이므로

$$y=-(x-3)+x$$
$$=3$$

(i), (ii)에서 구하는 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $y=\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$에서

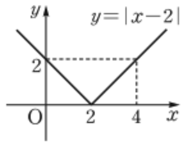
(i) $x<2$일 때, $x-2<0$이므로

$$y=-(x-2)=-x+2$$

(ii) $x\ge 2$일 때, $x-2\ge 0$이므로

$$y=x-2$$

(i), (ii)에서 구하는 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



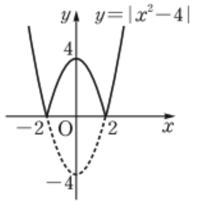
답 풀이 참조

Remark▶

$\sqrt{\{f(x)\}^2}=|f(x)|$이므로

$y=\sqrt{\{f(x)\}^2} \Longleftrightarrow y=|f(x)|$

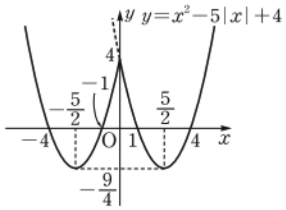
059-❶ (1) $y=|x^2-4|$의 그래프는 $y=x^2-4$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



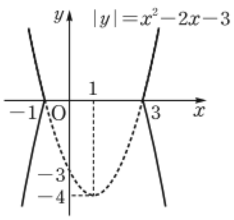
(2) $x^2=|x|^2$이므로

$$y=x^2-5|x|+4=|x|^2-5|x|+4$$

따라서 주어진 식의 그래프는 $y=x^2-5x+4$의 그래프에서 $x\geq0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분을 없앤 다음 $x\geq0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



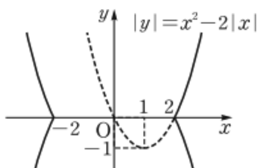
(3) $|y|=x^2-2x-3$의 그래프는 $y=x^2-2x-3$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분만 남기고, $y<0$인 부분을 없앤 다음 $y\geq0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(4) $x^2=|x|^2$이므로

$$|y|=x^2-2|x|=|x|^2-2|x|$$

따라서 주어진 식의 그래프는 $y=x^2-2x$의 그래프에서 $x\geq0$, $y\geq0$인 부분만 남긴 후 $x\geq0$, $y\geq0$인 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

060-❶ $2|x|+|y|=6$에서

(i) $x\geq0$, $y\geq0$일 때,

$2x+y=6$

$\therefore y=-2x+6$

(ii) $x\geq0$, $y<0$일 때,

$2x-y=6$

$\therefore y=2x-6$

(iii) $x<0$, $y\geq0$일 때,

$-2x+y=6$

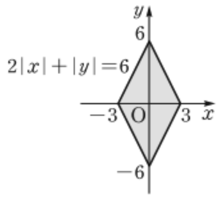
$\therefore y=2x+6$

(iv) $x<0$, $y<0$일 때,

$-2x-y=6$

$\therefore y=-2x-6$

이상에서 방정식 $2|x|+|y|=6$이 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot6\cdot12=36$

답 36

Remark▶

$2|x|+|y|=6$의 그래프는 $2x+y=6$의 그래프에서 $x\geq0$, $y\geq0$인 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이다.

060-❷ $|x-2|+|y-1|=1$에서

(i) $x\geq2$, $y\geq1$일 때,

$(x-2)+(y-1)=1$

$\therefore y=-x+4$

(ii) $x\geq2$, $y<1$일 때,

$(x-2)-(y-1)=1$

$\therefore y=x-2$

(iii) $x<2$, $y\geq1$일 때,

$-(x-2)+(y-1)=1$

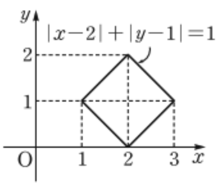
$\therefore y=x$

(iv) $x<2$, $y<1$일 때,

$-(x-2)-(y-1)=1$

$\therefore y=-x+2$

이상에서 $|x-2|+|y-1|=1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

Remark▶

$|x-2|+|y-1|=1$의 그래프는 $|x|+|y|=1$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

061-❶ $y=|x+2|+|x|+|x-3|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 -2, 0, 3이다.

(i) $x<-2$일 때,

$x+2<0$, $x<0$, $x-3<0$이므로

$y=-(x+2)-x-(x-3)$

$\therefore y=-3x+1$

(ii) $-2\le x<0$일 때,

$x+2\ge 0$, $x<0$, $x-3<0$이므로

$y=x+2-x-(x-3)$

$\therefore y=-x+5$

(iii) $0\le x<3$일 때,

$x+2>0$, $x\ge 0$, $x-3<0$이므로

$y=x+2+x-(x-3)$

$\therefore y=x+5$

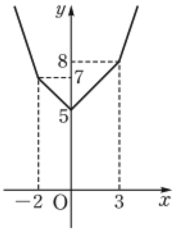
(iv) $x\ge 3$일 때,

$x+2>0$, $x>0$, $x-3\ge 0$이므로

$y=x+2+x+x-3$

$\therefore y=3x-1$

이상에서 $y=|x+2|+|x|+|x-3|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

061-❷ $y=|x|-|x-1|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 0, 1이다.

(i) $x<0$일 때,

$x<0$, $x-1<0$이므로

$y=-x+(x-1)$

$\therefore y=-1$

(ii) $0\le x<1$일 때,

$x\ge 0$, $x-1<0$이므로

$y=x+(x-1)$

$\therefore y=2x-1$

(iii) $x\ge 1$일 때,

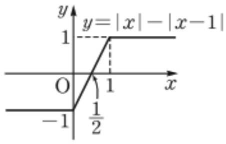
$x>0$, $x-1\ge 0$이므로

$y=x-(x-1)$

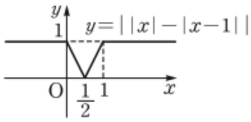
$\therefore y=1$

이상에서 $y=|x|-|x-1|$의 그래프는 [그림 1]과 같다.

그런데 $y=||x|-|x-1||$의 그래프는 [그림 1]에서 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 [그림 2]와 같고, 치역은 $\{y|0\le y\le 1\}$이다.



[그림 1]



[그림 2]

답 풀이 참조

062-❶ $y=|x-4|+|x+3|$ $(-4\le x\le 5)$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 -3, 4이다.

(i) $-4\le x<-3$일 때,

$y=-(x-4)-(x+3)=-2x+1$

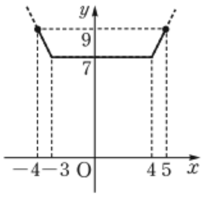
(ii) $-3\le x<4$일 때,

$y=-(x-4)+x+3=7$

(iii) $4\le x\le 5$일 때,

$y=x-4+x+3=2x-1$

이상에서 $-4\le x\le 5$에서 함수 $y=|x-4|+|x+3|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 9, 최솟값은 7이다.



답 최댓값: 9, 최솟값: 7

062-❷ $y=x-2|x-1|$ $(0\le x\le 3)$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 1이다.

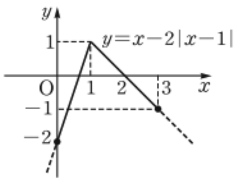
(i) $0\le x<1$일 때,

$y=x+2(x-1)=3x-2$

(ii) $1\le x\le 3$일 때,

$y=x-2(x-1)=-x+2$

(i), (ii)에서 $0\le x\le 3$에서 함수 $y=x-2|x-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 1, 최솟값은 -2이다.



따라서 $M=1$, $m=-2$이므로

$M+m=-1$

답 -1

063-❶ $f(x)$는 우함수, $g(x)$는 기함수이므로

$f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$

$\therefore f(-3)+g(-2)=f(3)-g(2)$

$=1-(-3)$

$=4$

답 4

063-❷ $f\circ g$는 우함수이므로 $h=f\circ g$로 놓으면 $h(-x)=h(x)$이다.

ㄱ, ㄴ. [반례] $f(x)=x^2$(우함수), $g(x)=x^4$(우함수) 이면

$$h(x)=(f\circ g)(x)$$
$$=f(g(x))$$
$$=f(x^4)=x^8 \text{ (우함수)}$$

ㄷ. g가 기함수이면 $g(-x)=-g(x)$를 만족시키므로

$$h(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))$$

그런데 h는 우함수이므로

$$h(-x)=h(x)=f(g(x))$$
$$\therefore f(-g(x))=f(g(x))$$

따라서 f는 우함수이다.

ㄹ. $k=g\circ f$로 놓으면

(i) f가 우함수일 때,

$f(-x)=f(x)$이므로

$$k(-x)=g(f(-x))$$
$$=g(f(x))=k(x)$$

따라서 k는 우함수이다.

(ii) f가 기함수일 때,

$f\circ g$가 우함수이므로

$$f(g(-x))=f(g(x))$$

즉 g는 우함수이어야 하므로

$$k(-x)=g(f(-x))$$
$$=g(-f(x))$$
$$=g(f(x))$$
$$=k(x)$$

따라서 k는 우함수이다.

(i), (ii)에서 $g\circ f$는 우함수이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄷ, ㄹ

중단원 연습 문제

본책 187~189쪽

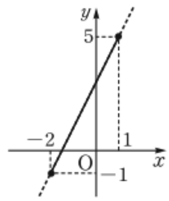
01 5, 13 **02** $m<-1$ **03** $a>\frac{1}{4}$
04 풀이 참조 **05** $k=0$ 또는 $k>1$ **06** 13
07 ③ **08** -2 **09** $a>2$ **10** ⑤ **11** 4
12 6 **13** 풀이 참조 **14** ④ **15** 48
16 ①

01 전략 $a>0$일 때와 $a<0$일 때로 나누어 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x)=ax+b$라 하면 $-2\le x\le 1$에서

(i) $a>0$일 때,

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



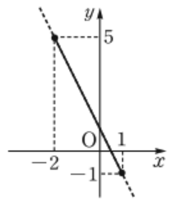
$$f(-2)=-1,\ f(1)=5$$
$$\therefore -2a+b=-1,$$
$$a+b=5$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=3$$ ··· ❶

(ii) $a<0$일 때,

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$f(-2)=5,\ f(1)=-1$$
$$\therefore -2a+b=5,$$
$$a+b=-1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-2,\ b=1$$ ··· ❷

(i), (ii)에서

$$a^2+b^2=2^2+3^2=13$$

또는 $a^2+b^2=(-2)^2+1^2=5$ ··· ❸

답 5, 13

채점 기준	비율
❶ $a>0$일 때 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a<0$일 때 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 모두 구할 수 있다.	20 %

02 전략 주어진 구간에서 함숫값이 항상 음이 되는 경우를 생각해 본다.

풀이 함수 $f(x)=mx+2m+3$에 대하여 $1\le x<3$에서 $f(x)<0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프가 이 범위에서 x축보다 아래쪽에 있어야 하므로 $f(1)<0$이고 $f(3)\le 0$이어야 한다.

$f(1)=m+2m+3<0$에서

$$3m<-3$$
$$\therefore m<-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(3)=3m+2m+3\le 0$에서

$$5m\le -3$$
$$\therefore m\le -\frac{3}{5} \quad \cdots\cdots ㉡$$

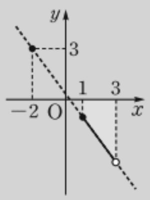
㉠, ㉡에서 구하는 m의 값의 범위는

$m<-1$

답 $m<-1$

Remark ▶

$f(x)=mx+2m+3$
$\quad =(x+2)m+3$
에서 $y=f(x)$의 그래프는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 3)$을 지나므로 $1\le x<3$에서 항상 $f(x)<0$이려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.
이때 $f(1)<0$이면 $f(3)\le 0$이 항상 성립함을 알 수 있다.



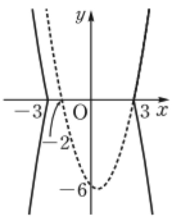
03 (전략) 주어진 식을 $y=k(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 꼭짓점의 좌표를 구한다.

(풀이) $y=-x^2+6x+4a-10$
$\quad =-(x-3)^2+4a-1$
이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$\quad (3,\ 4a-1)$
꼭짓점이 제1사분면 위에 있으므로
$\quad 4a-1>0 \qquad \therefore a>\frac{1}{4}$

답 $a>\frac{1}{4}$

04 (전략) $f(x)=x^2-x-6$의 그래프를 그린 후 $|y|=f(|x|)$의 그래프를 그리는 방법을 이용한다.

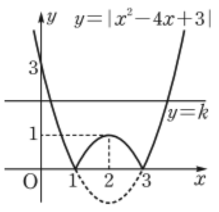
(풀이) $|y|=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$, 즉 $y=x^2-x-6$의 그래프에서 $x\ge0$, $y\ge0$인 부분만 남긴 다음 이 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

05 (전략) 방정식 $|x^2-4x+3|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x+3|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

(풀이) 방정식 $|x^2-4x+3|=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=|x^2-4x+3|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
$y=|x^2-4x+3|$의 그래프는 $y=x^2-4x+3$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



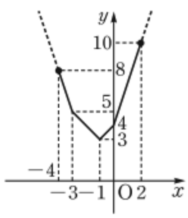
따라서 구하는 k의 값 또는 k의 값의 범위는
$\quad k=0$ 또는 $k>1$

답 $k=0$ 또는 $k>1$

06 (전략) x의 값의 범위를 나누어 주어진 함수의 그래프를 그려 본다.

(풀이) $y=|x+3|+|x+1|+|x|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 $-3,\ -1,\ 0$이다. ⋯ ❶

(i) $-4\le x<-3$일 때,
$\quad y=-(x+3)-(x+1)-x$
$\quad\ =-3x-4$
(ii) $-3\le x<-1$일 때,
$\quad y=x+3-(x+1)-x=-x+2$
(iii) $-1\le x<0$일 때,
$\quad y=x+3+x+1-x=x+4$
(iv) $0\le x\le 2$일 때,
$\quad y=x+3+x+1+x$
$\quad\ =3x+4$
이상에서 $-4\le x\le2$에서 $y=|x+3|+|x+1|+|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❷



따라서 최댓값은 10, 최솟값은 3이므로
$\quad M=10,\ m=3$
$\quad \therefore M+m=13$ ⋯ ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ 함수 $y=\|x+3\|+\|x+1\|+\|x\|$의 그래프를 그릴 수 있다.	60 %
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 (전략) 함수 $F(x)$가 $F(-x)=F(x)$를 만족시키면 우함수, $F(-x)=-F(x)$를 만족시키면 기함수이다.

(풀이) ㄱ. $F(x)=f(x)+f(-x)$로 놓으면
$\quad F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$
따라서 $f(x)+f(-x)$는 우함수이다.
ㄴ. $G(x)=f(x)-f(-x)$로 놓으면
$\quad G(-x)=f(-x)-f(x)$
$\quad\quad =-\{f(x)-f(-x)\}=-G(x)$
따라서 $f(x)-f(-x)$는 기함수이다.
ㄷ. $H(x)=f(x)f(-x)$로 놓으면
$\quad H(-x)=f(-x)f(x)=H(x)$
따라서 $f(x)f(-x)$는 우함수이다.
이상에서 우함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

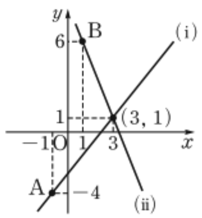
08 전략 직선 $y=mx-3m+1$이 m의 값에 관계없이 지나는 점의 좌표를 구한 후 직선이 두 점 A, B 사이를 지나는 경우를 알아본다.

풀이 $y=mx-3m+1=m(x-3)+1$ …… ㉠

에서 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 1)$을 지난다. ⋯ ❶

(i) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(-1,\ -4)$를 지날 때,

$$m=\frac{1-(-4)}{3-(-1)}=\frac{5}{4}$$



(ii) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}(1,\ 6)$을 지날 때,

$$m=\frac{1-6}{3-1}=-\frac{5}{2}$$

(i), (ii)에서 직선 ㉠이 두 점 A, B 사이를 지나도록 하는 m의 값의 범위는

$$-\frac{5}{2}<m<\frac{5}{4}$$ ⋯ ❷

따라서 정수 m은 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$이므로 구하는 모든 정수 m의 값의 합은

$$-2+(-1)+0+1=-2$$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 직선이 반드시 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ 모든 정수 m의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

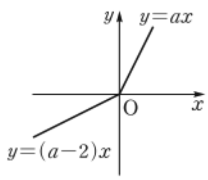
09 전략 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 $f(x)$를 구한다.

풀이 $|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x\geq 0) \\ (a-2)x & (x<0) \end{cases}$$

그런데 $a>0$이므로 $x\geq 0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 기울기가 양수인 직선이다.

따라서 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 오른쪽 그림과 같이 $x<0$일 때도 함수 $y=f(x)$의 그래프는 기울기가 양수인 직선이어야 한다.



즉 $a-2>0$이어야 하므로

$$a>2$$

답 $a>2$

Remark▶

문제에서 a가 양수라는 조건이 없으면 두 직선 $y=ax$, $y=(a-2)x$의 기울기가 모두 음수인 경우, 즉 $a<0$이고 $a-2<0$인 경우에도 $f(x)$가 일대일대응이 된다.

10 전략 $A\cap B\neq\varnothing$이려면 함수 $y=|x|-|x-2|$의 그래프와 직선 $y=n$이 만나야 함을 이용한다.

풀이 $y=|x|-|x-2|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 0, 2이다.

(i) $x<0$일 때,

$$y=-x+(x-2)=-2$$

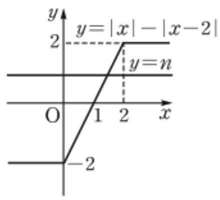
(ii) $0\leq x<2$일 때,

$$y=x+(x-2)=2x-2$$

(iii) $x\geq 2$일 때,

$$y=x-(x-2)=2$$

이상에서 $y=|x|-|x-2|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=n$은 x축에 평행하므로 $A\cap B\neq\varnothing$이려면



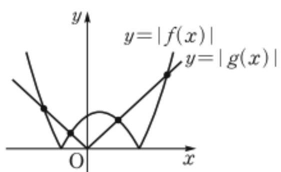
$$-2\leq n\leq 2$$

따라서 n의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

11 전략 방정식 $|f(x)|=|g(x)|$의 실근의 개수는 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=|g(x)|$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

풀이 방정식 $|f(x)|=|g(x)|$의 실근의 개수는 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=|g(x)|$의 그래프의 교점의 개수와 같다. 이때 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=|g(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같고 두 함수의 그래프의 교점의 개수는 4이다.



따라서 집합 A의 원소의 개수는 4이다.

답 4

12 전략 점 P와 세 점 A, B, C 사이의 거리의 합을 식으로 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 x라 하면 점 P와 세 점 A, B, C 사이의 거리가 각각 $|x+3|$, $|x|$, $|x-3|$이므로 점 P와 세 점 A, B, C 사이의 거리의 합은

$$|x+3|+|x|+|x-3| \quad \cdots ❶$$

$y=|x+3|+|x|+|x-3|$으로 놓으면 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 -3, 0, 3이다.

(i) $x<-3$일 때,

$$y=-(x+3)-x-(x-3)=-3x$$

(ii) $-3\le x<0$일 때,

$$y=x+3-x-(x-3)=-x+6$$

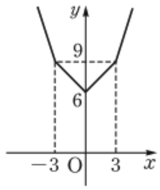
(iii) $0\le x<3$일 때,

$$y=x+3+x-(x-3)=x+6$$

(iv) $x\ge 3$일 때,

$$y=x+3+x+x-3=3x \quad \cdots ❷$$

이상에서 $y=|x+3|+|x|+|x-3|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 최솟값은 6이다. ⋯ ❸



답 6

채점 기준	비율
❶ 점 P와 세 점 A, B, C 사이의 거리의 합을 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ x의 값의 범위를 나누어 함수식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 P와 세 점 A, B, C 사이의 거리의 합의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

Remark ▶

점 P가 점 B의 위치에 있을 때, 점 P와 세 점 A, B, C 사이의 거리의 합이 최소가 된다.

13

전략 x의 값이 (정수)$-\frac{1}{2}$이 되는 값을 경계로 구간을 나눈다.

풀이 (i) $-1\le x<-\frac{1}{2}$일 때, $\{x\}=-1$이므로

$$y=\{x\}=-1$$

(ii) $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$일 때, $\{x\}=0$이므로

$$y=\{x\}=0$$

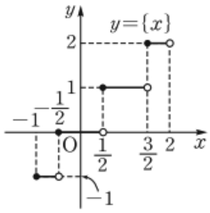
(iii) $\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}$일 때, $\{x\}=1$이므로

$$y=\{x\}=1$$

(iv) $\frac{3}{2}\le x<2$일 때, $\{x\}=2$이므로

$$y=\{x\}=2$$

이상에서 $-1\le x<2$에서 함수 $y=\{x\}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

Remark ▶

$x\ge 0$인 x에 대하여 $\{x\}$는 x를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 값과 같다.

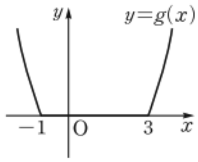
14

전략 $f(x)<0$, $f(x)\ge 0$일 때로 x의 값의 범위를 나누어 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그린다.

풀이 $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 3) \\ -f(x) & (-1<x<3) \end{cases}$이므로

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 3) \\ 0 & (-1<x<3) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $g(x)=1$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

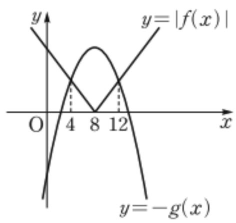
15

전략 주어진 함수의 그래프를 이용하여 두 함수 $y=|f(x)|$와 $y=-g(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $|f(x)|+g(x)=0$에서

$$|f(x)|=-g(x)$$

두 함수 $y=|f(x)|$와 $y=-g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $x=8$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표는



$$x=4 \text{ 또는 } x=12$$

따라서 방정식 $|f(x)|+g(x)=0$의 근은

$$x=4 \text{ 또는 } x=12$$

이므로 구하는 모든 실근의 곱은

$$4\cdot 12=48$$

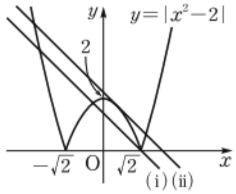
답 48

16 전략 주어진 방정식을 $f(x)=g(x)$ 꼴로 변형하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이 3개가 될 때를 조사한다.

풀이 $|x^2-2|+x-k=0$에서

$$|x^2-2|=-x+k$$

함수 $y=|x^2-2|$의 그래프와 직선 $y=-x+k$는 다음 그림과 같다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(\sqrt{2},\ 0)$을 지날 때,

$$0=-\sqrt{2}+k \qquad \therefore\ k=\sqrt{2}$$

(ii) 함수 $y=-x^2+2$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때,

$-x^2+2=-x+k$, 즉 이차방정식

$x^2-x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=1-4(k-2)=0, \qquad -4k+9=0$$

$$\therefore\ k=\frac{9}{4}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은

$$\sqrt{2}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$$

답 ①

Ⅵ. 함수

22 유리함수

유제 본책 196~218쪽

064-❶ 주어진 식의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$$
$$=\frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$$

즉 $\frac{2x}{x^2-1}=\frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$가 x에 대한 항등식이므로

$$a+b=2,\ a-b=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1,\ b=1$$

$$\therefore\ ab=1$$

답 1

064-❷ 주어진 식의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{a(x-1)^2+bx(x-1)+cx}{x(x-1)^2}$$
$$=\frac{a(x^2-2x+1)+bx^2-bx+cx}{x(x-1)^2}$$
$$=\frac{(a+b)x^2-(2a+b-c)x+a}{x(x-1)^2}$$

즉 $\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{(a+b)x^2-(2a+b-c)x+a}{x(x-1)^2}$가 x에 대한 항등식이므로

$$a+b=0,\ 2a+b-c=0,\ a=1$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a=1,\ b=-1,\ c=1$$

$$\therefore\ a+b+c=1$$

답 1

065-❶ (1) $\frac{x^2+3x+1}{x+3}=\frac{x(x+3)+1}{x+3}$

$$=x+\frac{1}{x+3}$$

$$\frac{x^2-3x+1}{x-3}=\frac{x(x-3)+1}{x-3}$$
$$=x+\frac{1}{x-3}$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$=\left(x+\frac{1}{x+3}\right)-\left(x+\frac{1}{x-3}\right)$$
$$=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}$$
$$=\frac{x-3-(x+3)}{(x+3)(x-3)}$$
$$=-\frac{6}{(x+3)(x-3)}$$

(2) $\frac{x+3}{x+1}=1+\frac{2}{x+1}$, $\frac{x+5}{x+3}=1+\frac{2}{x+3}$,

$\frac{x+7}{x+5}=1+\frac{2}{x+5}$, $\frac{x+9}{x+7}=1+\frac{2}{x+7}$

$\therefore$ (주어진 식)

$$=\left(1+\frac{2}{x+1}\right)-\left(1+\frac{2}{x+3}\right)$$
$$-\left(1+\frac{2}{x+5}\right)+\left(1+\frac{2}{x+7}\right)$$
$$=\left(\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x+3}\right)-\left(\frac{2}{x+5}-\frac{2}{x+7}\right)$$
$$=\frac{2(x+3)-2(x+1)}{(x+1)(x+3)}-\frac{2(x+7)-2(x+5)}{(x+5)(x+7)}$$
$$=\frac{4}{(x+1)(x+3)}-\frac{4}{(x+5)(x+7)}$$
$$=\frac{4(x+5)(x+7)-4(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)}$$
$$=\frac{32(x+4)}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)}$$

답 (1) $-\frac{6}{(x+3)(x-3)}$

(2) $\frac{32(x+4)}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)}$

066-❶ $\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}$

$$+\frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}$$
$$=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)+\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b+c}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{a+b+c+d}\right)$$
$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b+c+d}$$
$$=\frac{a+b+c+d-a}{a(a+b+c+d)}$$
$$=\frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}$$

답 $\frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}$

066-❷ (1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{19\cdot 20}$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)$$
$$=1-\frac{1}{20}$$
$$=\frac{19}{20}$$

(2) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{18\cdot 20}$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{20}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{20}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)$$
$$=\frac{531}{760}$$

답 (1) $\frac{19}{20}$ (2) $\frac{531}{760}$

Remark▶

부분분수로의 변형을 이용하여 분수의 합을 구할 때 (1)과 같이 연달아 소거되는 경우에는 앞에서 첫 번째 수가 남으면 뒤에서도 첫 번째 수가 남는다. 또 (2)와 같이 건너뛰며 소거되는 경우에는 앞에서 첫 번째, 세 번째가 남으면 뒤에서도 첫 번째, 세 번째가 남는다.
즉 수가 연쇄적으로 소거될 때 앞에서 남는 수와 뒤에서 남는 수는 서로 대칭이 되는 위치에 있다.

067-❶ (1) $\dfrac{\frac{2x-3y}{x-y}-1}{2-\frac{x}{x-y}}=\dfrac{\frac{2x-3y-(x-y)}{x-y}}{\frac{2(x-y)-x}{x-y}}$

$$=\frac{x-2y}{x-2y}$$
$$=1$$

(2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1-a}{(1-a)-1}}$

$$=\frac{1}{1+\frac{1-a}{a}}$$
$$=\frac{a}{a+(1-a)}$$
$$=a$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1+a}}}=\frac{1}{1-\frac{1+a}{(1+a)-1}}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1+a}{a}}$$
$$=\frac{a}{a-(1+a)}$$
$$=-a$$

$\therefore$ (주어진 식)$=a\cdot(-a)=-a^2$

답 (1) 1 (2) $-a^2$

다른 풀이 (1) $\dfrac{\frac{2x-3y}{x-y}-1}{2-\frac{x}{x-y}}$

$$=\frac{(x-y)\left(\frac{2x-3y}{x-y}-1\right)}{(x-y)\left(2-\frac{x}{x-y}\right)}$$
$$=\frac{2x-3y-(x-y)}{2(x-y)-x}$$
$$=\frac{x-2y}{x-2y}=1$$

067-❷ $\dfrac{36}{151}=\dfrac{1}{\frac{151}{36}}=\dfrac{1}{4+\frac{7}{36}}$

$$=\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{36}{7}}}=\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{7}}}$$

이므로

$a=4,\ b=5,\ c=7$

$\therefore a+b+c=16$

답 16

068-❶ $x^2-2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-2-\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\dfrac{1}{x}=2$

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=2^2+2=6$

(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=2^3+3\cdot2=14$

(3) $x^6+\dfrac{1}{x^6}=\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)^2+2=14^2+2=198$

답 (1) 6 (2) 14 (3) 198

068-❷ $x^2-4x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore 2x^2-x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}$

$=2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\right\}-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=2\cdot(4^2-2)-4=24$

답 24

069-❶ $\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{1}{4}$이므로

$4(x-y)=x+y$

$\therefore 3x=5y$, 즉 $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{3}$

$\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{3}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x=5k,\ y=3k$

$\therefore \dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{2\cdot5k\cdot3k}{(5k)^2+(3k)^2}$

$=\dfrac{30k^2}{34k^2}=\dfrac{15}{17}$

답 $\dfrac{15}{17}$

069-❷ $x+\dfrac{2}{y}=0$에서 $\qquad x=-\dfrac{2}{y}$

$y+\dfrac{1}{z}=0$에서 $\qquad \dfrac{1}{z}=-y \qquad \therefore z=-\dfrac{1}{y}$

$\therefore \dfrac{xz}{x^2+z^2}=\dfrac{\left(-\frac{2}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)}{\left(-\frac{2}{y}\right)^2+\left(-\frac{1}{y}\right)^2}$

$=\dfrac{\frac{2}{y^2}}{\frac{5}{y^2}}=\dfrac{2}{5}$

답 $\dfrac{2}{5}$

070-❶ $y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}$

$=\dfrac{3}{x-1}+2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

(1) $x=2$일 때 $y=5$이고, $x=4$일 때 $y=3$이므로

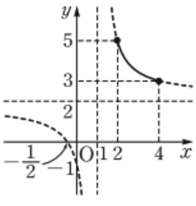
[그림 1]에서 치역은

$\{y\,|\,3\le y\le5\}$

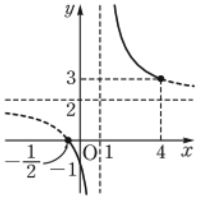
(2) $y=0$일 때 $x=-\dfrac{1}{2}$이고, $y=3$일 때 $x=4$이므로

[그림 2]에서 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{2}\le x<1 \text{ 또는 } 1<x\le4\right\}$



[그림 1]



[그림 2]

답 (1) $\{y|3\le y\le 5\}$

(2) $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}\le x<1 \text{ 또는 } 1<x\le 4\right\}$

071-❶ 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=3$이므로 주어진 함수를

$$y=\frac{k}{x-1}+3\ (k\ne 0)$$

으로 놓을 수 있다. 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$$2=\frac{k}{0-1}+3 \qquad \therefore k=1$$

따라서 $y=\frac{1}{x-1}+3=\frac{3x-2}{x-1}$이므로

$$a=3,\ b=-2,\ c=-1$$

$$\therefore abc=6$$

답 6

다른 풀이 $y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}$

$$=\frac{-ac+b}{x+c}+a$$

이므로 이 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-c,\ y=a$$

$$\therefore a=3,\ c=-1$$

즉 $y=\frac{3x+b}{x-1}$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$$2=\frac{b}{-1} \qquad \therefore b=-2$$

$$\therefore abc=6$$

072-❶ $y=\frac{4x+5}{2x-1}=\frac{2(2x-1)+7}{2x-1}$

$$=\frac{7}{2x-1}+2=\frac{7}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+2$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 점근선 $x=\frac{1}{2}$, $y=2$의 교점 $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=2$이므로

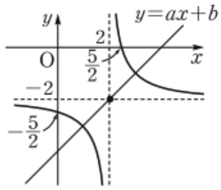
$$a+b=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

072-❷ $y=\frac{-2x+5}{x-2}=\frac{-2(x-2)+1}{x-2}$

$$=\frac{1}{x-2}-2$$

에서 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-2$이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 함수의 그래프는 점근선의 교점 $(2,\ -2)$를 지나고 기울기가 1 또는 -1인 직선에 대하여 대칭이다.

이때 $a>0$이므로

$$a=1$$

따라서 직선 $y=x+b$가 점 $(2,\ -2)$를 지나므로

$$-2=2+b$$

$$\therefore b=-4$$

답 $a=1$, $b=-4$

073-❶ $y=\frac{2x-3}{x-1}=\frac{2(x-1)-1}{x-1}$

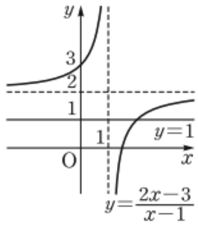
$$=-\frac{1}{x-1}+2$$

이므로 $y=\frac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

한편 직선 $y=mx+1$은 m의 값에 관계없이 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

(i) $m=0$일 때,

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\frac{2x-3}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=1$은 한 점에서 만난다.



(ii) $m\ne 0$일 때,

$\frac{2x-3}{x-1}=mx+1$에서

$$2x-3=(mx+1)(x-1)$$

$$2x-3=mx^2-mx+x-1$$

$$\therefore mx^2-(m+1)x+2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 곡선과 직선이 만나야 하므로

$$D=(m+1)^2-8m\ge 0$$

$$m^2-6m+1\ge 0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 이차방정식 $m^2-6m+1=0$의 두 근이 $3-2\sqrt{2}$, $3+2\sqrt{2}$이므로 부등식 ㉠의 해는

$$m\le 3-2\sqrt{2} \text{ 또는 } m\ge 3+2\sqrt{2}$$

그런데 $m\neq0$이므로

$m<0$ 또는 $0<m\leq3-2\sqrt{2}$

또는 $m\geq3+2\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$m\leq3-2\sqrt{2}$ 또는 $m\geq3+2\sqrt{2}$

답 $m\leq3-2\sqrt{2}$ 또는 $m\geq3+2\sqrt{2}$

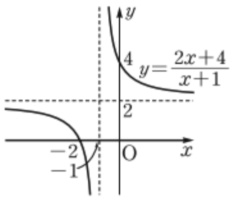
073-② $n(A\cap B)=0$이려면 $y=\dfrac{2x+4}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=mx$가 만나지 않아야 한다.

$$y=\frac{2x+4}{x+1}=\frac{2(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+2$$

이므로 $y=\dfrac{2x+4}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

(i) $m=0$일 때,

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{2x+4}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=0$, 즉 x축이 만나므로 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $m\neq0$일 때,

$\dfrac{2x+4}{x+1}=mx$에서 $\quad 2x+4=mx(x+1)$

$\therefore\ mx^2+(m-2)x-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 곡선과 직선이 만나지 않아야 하므로

$D=(m-2)^2+16m<0$

$m^2+12m+4<0$

$\therefore\ -6-4\sqrt{2}<m<-6+4\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$-6-4\sqrt{2}<m<-6+4\sqrt{2}$

답 $-6-4\sqrt{2}<m<-6+4\sqrt{2}$

074-①
$$f_2(x)=(f_1\circ f_1)(x)=f_1(f_1(x))=\frac{f_1(x)}{f_1(x)-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=x$$

따라서 $f_2(x)=f_4(x)=\cdots=f_{2k}(x)$ (k는 자연수)는 항등함수이므로

$f_{2000}(x)=f_{2\times1000}(x)=x$

$\therefore\ f_{2000}(3)=3$

답 3

075-① $(f^{-1})^{-1}=f$이므로 $f^{-1}(x)$의 역함수가 $f(x)$이다.

$y=\dfrac{x-5}{-2x+3}$로 놓고 x에 대하여 풀면

$y(-2x+3)=x-5$

$(2y+1)x=3y+5$

$\therefore\ x=\dfrac{3y+5}{2y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{3x+5}{2x+1}$

따라서 $f(x)=\dfrac{3x+5}{2x+1}$이므로

$a=3,\ b=5,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=9$

답 9

중단원 연습 문제

본책 219~222쪽

01 $\dfrac{8}{1-a^8}$		02 $f(x)=6x^2+36x+42$	
03 $\dfrac{4}{x(x+4)}$		04 ②	05 ② · 06 4
07 ②	08 12	09 ③	10 $\dfrac{3}{8}\leq m\leq\dfrac{2}{3}$
11 3	12 4	13 3	14 46
15 $-\dfrac{13}{2}$	16 103	17 ⑤	18 $\left(-3,\ \dfrac{1}{2}\right)$
19 ⑤	20 ⑤	21 ①	22 ④

01 전략 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$임을 이용하여 분모를 통분한다.

풀이 (주어진 식)

$$=\frac{1+a+1-a}{(1-a)(1+a)}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}$$
$$=\frac{2}{1-a^2}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}$$
$$=\frac{2(1+a^2)+2(1-a^2)}{(1-a^2)(1+a^2)}+\frac{4}{1+a^4}$$
$$=\frac{4}{1-a^4}+\frac{4}{1+a^4}$$
$$=\frac{4(1+a^4)+4(1-a^4)}{(1-a^4)(1+a^4)}$$
$$=\frac{8}{1-a^8}$$

답 $\dfrac{8}{1-a^8}$

02 전략 (분자의 차수)<(분모의 차수)가 되도록 분수식을 변형한 후 두 개씩 묶어서 계산한다.

풀이 $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2(x+1)+1}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}$

$\frac{3x+7}{x+2}=\frac{3(x+2)+1}{x+2}=3+\frac{1}{x+2}$

$\frac{2x+9}{x+4}=\frac{2(x+4)+1}{x+4}=2+\frac{1}{x+4}$

$\frac{3x+16}{x+5}=\frac{3(x+5)+1}{x+5}=3+\frac{1}{x+5}$

이므로 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}&\frac{2x+3}{x+1}+\frac{3x+7}{x+2}-\frac{2x+9}{x+4}-\frac{3x+16}{x+5}\\&=\left(2+\frac{1}{x+1}\right)+\left(3+\frac{1}{x+2}\right)-\left(2+\frac{1}{x+4}\right)\\&\quad-\left(3+\frac{1}{x+5}\right)\\&=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}\right)\\&=\frac{3}{(x+1)(x+4)}+\frac{3}{(x+2)(x+5)}\\&=\frac{3(x+2)(x+5)+3(x+1)(x+4)}{(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)}\\&=\frac{6x^2+36x+42}{(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)}\end{aligned}$$

$\therefore f(x)=6x^2+36x+42$

답 $f(x)=6x^2+36x+42$

03 전략 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$임을 이용한다.

풀이
$$\begin{aligned}&\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}\\&\quad+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}\\&=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)\\&=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}=\frac{x+4-x}{x(x+4)}\\&=\frac{4}{x(x+4)}\end{aligned}$$

답 $\frac{4}{x(x+4)}$

04 전략 분모, 분자를 각각 통분하여 간단히 한다.

풀이
$$\begin{aligned}\frac{x-\frac{2}{x-1}}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}&=\frac{x-\frac{2}{x-1}}{1-\frac{x}{x-1}}=\frac{x(x-1)-2}{(x-1)-x}\\&=-x^2+x+2\end{aligned}$$

따라서 $-x^2+x+2=ax^2+bx+c$이므로

$a=-1,\ b=1,\ c=2$

$\therefore abc=-2$

답 ②

05 전략 주어진 등식의 양변을 x로 나눈 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

풀이 $x^2-5x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-5+\frac{1}{x}=0$, 즉 $x+\frac{1}{x}=5$이므로

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\\&=5^2-4=21\end{aligned}$$

그런데 $0<x<1$에서 $x-\frac{1}{x}<0$이므로

$x-\frac{1}{x}=-\sqrt{21}$

답 ②

06 전략 $\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}=k\ (k\neq0)$로 놓고, x, y, z를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x+y=3k,\ y+z=4k,\ z+x=5k$ …… ㉠

㉠의 세 식을 변끼리 더하면

$2(x+y+z)=12k$

$\therefore x+y+z=6k$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$x=2k,\ y=k,\ z=3k$ ⋯→ ❶

$$\begin{aligned}\therefore \frac{2x-y+3z}{x+y}&=\frac{4k-k+9k}{2k+k}\\&=\frac{12k}{3k}=4\end{aligned}$$ ⋯→ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ x, y, z를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	70 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

07 전략 주어진 함수식을

$y=\frac{k}{3(x-p)}+q\ (k\neq0)$ 꼴로 변형하여 그래프를 그린 후 최댓값과 최솟값을 찾는다.

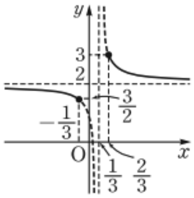
풀이
$$\begin{aligned}y&=\frac{6x-1}{3x-1}=\frac{2(3x-1)+1}{3x-1}\\&=\frac{1}{3x-1}+2=\frac{1}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}+2\end{aligned}$$

22 유리함수

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$x=-\frac{1}{3}$일 때 $y=\frac{3}{2}$이고,

$x=\frac{2}{3}$일 때 $y=3$이므로 오른쪽 그림에서



$x=\frac{2}{3}$일 때 최댓값 3,

$x=-\frac{1}{3}$일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$

을 갖는다.

따라서 $M=3$, $m=\frac{3}{2}$이므로

$M+m=\frac{9}{2}$

답 ②

08 전략 주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ $(k\neq0)$로 놓고 p, q, k의 값을 구한다.

풀이 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로 주어진 함수를

$y=\frac{k}{x-1}+2$ $(k\neq0)$ ...... ㉠

로 놓을 수 있다. ··· ❶

이때 ㉠의 그래프가 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{3-1}+2$ $\therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-4}{x-1}+2=\frac{2(x-1)-4}{x-1}$

$=\frac{2x-6}{x-1}$

따라서 $a=2$, $b=-6$, $c=-1$이므로 ··· ❷

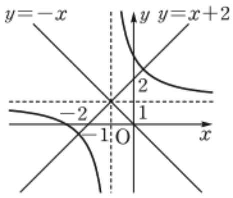
$abc=12$ ··· ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 그래프를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 전략 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$ $(k\neq0)$의 그래프는 두 점근선의 교점 (p, q)를 지나고 기울기가 ±1인 직선에 대하여 각각 대칭이다.

풀이 두 직선 $y=x+2$, $y=-x$의 교점의 좌표는 $(-1, 1)$이므로 오른쪽 그림에서 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은



$x=-1$, $y=1$

따라서 주어진 함수의 식은

$y=\frac{2}{x+1}+1$

이므로

$a=-1$, $b=1$

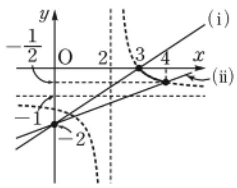
$\therefore a+b=0$

답 ③

10 전략 조건을 만족시키도록 함수 $y=\frac{-x+3}{x-2}$의 그래프와 직선 $y=mx-2$를 그려 본다.

풀이 $y=\frac{-x+3}{x-2}=\frac{-(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}-1$

이므로 $3\le x\le4$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=mx-2$는 m의 값에 관계없이 점 $(0, -2)$를 지난다. ··· ❶



(i) 직선 $y=mx-2$가 점 $(3, 0)$을 지날 때,

$0=3m-2$ $\therefore m=\frac{2}{3}$

(ii) 직선 $y=mx-2$가 점 $\left(4, -\frac{1}{2}\right)$을 지날 때,

$-\frac{1}{2}=4m-2$ $\therefore m=\frac{3}{8}$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$\frac{3}{8}\le m\le\frac{2}{3}$ ··· ❸

답 $\frac{3}{8}\le m\le\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ 조건을 만족시키도록 좌표평면 위에 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 직선 $y=mx-2$가 두 점 $(3, 0)$, $\left(4, -\frac{1}{2}\right)$을 지날 때의 m의 값을 각각 구할 수 있다.	40 %
❸ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

11 전략 $f^1(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, …를 차례대로 구하여 $f^p(x)=x$가 되는 자연수 p를 찾는다.

풀이 $f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))$

$$=\frac{f^1(x)+1}{f^1(x)-1}=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}$$

$$=\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=x$$

따라서 $f^2(x)=f^4(x)=\cdots=f^{2k}(x)$($k$는 자연수)는 항등함수이고, $1001=2\times500+1$이므로

$$f^{1001}(x)=f^1(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

$$\therefore f^{1001}(2)=\frac{2+1}{2-1}=3$$

답 3

12 전략 주어진 함수의 역함수를 구하여 원래 함수와 비교한다.

풀이 $y=\frac{ax+b}{x-3}$라 하고 x에 대하여 풀면

$$y(x-3)=ax+b$$

$$(y-a)x=3y+b$$

$$\therefore x=\frac{3y+b}{y-a}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{3x+b}{x-a}$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{3x+b}{x-a}$$

이때 $f=f^{-1}$이므로

$$\frac{ax+b}{x-3}=\frac{3x+b}{x-a}$$

$$\therefore a=3$$

함수 $y=\frac{3x+b}{x-3}$의 그래프가 점 $\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$$-\frac{1}{2}=\frac{3+b}{1-3} \qquad \therefore b=-2$$

$$\therefore 2a+b=4$$

답 4

13 전략 주어진 식을 통분한 후 인수분해 공식을 이용한다.

풀이 주어진 식을 통분하여 계산하면

$$\frac{a^2+2}{bc}+\frac{b^2+2}{ca}+\frac{c^2+2}{ab}$$

$$=\frac{a(a^2+2)+b(b^2+2)+c(c^2+2)}{abc}$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3+2(a+b+c)}{abc}$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\ (\because a+b+c=0) \quad \cdots ❶$$

또 $a+b+c=0$이므로

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=0$$

에서

$$a^3+b^3+c^3=3abc \quad \cdots ❷$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\frac{3abc}{abc}=3 \quad \cdots ❸$$

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 통분할 수 있다.	40 %
❷ $a^3+b^3+c^3=3abc$임을 알 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

14 전략 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$임을 이용하여 $f(x)$의 각 항을 부분분수로 변형한다.

풀이 $f(x)$

$$=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\cdots+\frac{1}{(x-59)(x-60)}$$

$$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)+\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x-60}-\frac{1}{x-59}\right)$$

$$=\frac{1}{x-60}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{60}{x(x-60)}$$

이므로

$$f(62)=\frac{60}{62(62-60)}=\frac{15}{31}$$

따라서 $p=31$, $q=15$이므로

$$p+q=46$$

답 46

15 전략 주어진 조건에서 $x+y=a$, $xy=b$로 놓고 a, b의 값을 구한다.

풀이 $x+y-3xy=9$, $3x+3y+xy=7$에서 $x+y=a$, $xy=b$로 놓으면

$$a-3b=9,\ 3a+b=7$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=3,\ b=-2$$

22 유리함수

즉 $x+y=3$, $xy=-2$이므로 구하는 값은

$$\frac{1-\frac{y}{x+y}}{1-\frac{x}{x+y}}-\frac{1-\frac{x}{x-y}}{1+\frac{y}{x-y}}$$
$$=\frac{(x+y)-y}{(x+y)-x}-\frac{(x-y)-x}{(x-y)+y}$$
$$=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}$$
$$=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{3^2-2\cdot(-2)}{-2}$$
$$=-\frac{13}{2}$$

답 $-\frac{13}{2}$

16 전략 $x^4-7x^2+1=0$의 양변을 x^2으로 나눈 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

풀이 $x^4-7x^2+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2-7+\frac{1}{x^2}=0$$
$$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=7 \quad \cdots ❶$$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=7+2=9$이고 $x>0$이므로

$$x+\frac{1}{x}=3 \quad \cdots ❷$$
$$\therefore x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2$$
$$=7^2-2=47$$
$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=3^3-3\cdot3=18 \quad \cdots ❸$$
$$\therefore x^4+3x^3+2+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}$$
$$=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+3\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+2$$
$$=47+3\cdot18+2$$
$$=103 \quad \cdots ❹$$

답 103

채점 기준	비율
❶ $x^2+\frac{1}{x^2}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $x^4+\frac{1}{x^4}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	10 %

17 전략 자연수 n에 대하여 $f^{n+1}(x)=(f\circ f^n)(x)=x$이면 $f^n(x)$의 역함수는 $f(x)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$이므로

$$f^2(x)=f(f^1(x))=1-\frac{1}{f^1(x)}$$
$$=1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1+\frac{x}{1-x}$$
$$=\frac{1}{1-x}$$
$$f^3(x)=f(f^2(x))=1-\frac{1}{f^2(x)}$$
$$=1-\frac{1}{\frac{1}{1-x}}=x$$
$$\vdots$$

따라서 $f^3(x)=f^6(x)=f^9(x)=\cdots=f^{3k}(x)$ (k는 자연수)는 항등함수이므로

$$f^{2019}(x)=f^{673\times3}(x)=x$$

이때 $f^{2019}(x)=(f\circ f^{2018})(x)=x$에서 $f^{2018}(x)$의 역함수는 $f(x)$이므로

$$g(x)=f(x)$$
$$\therefore g(2018)=f(2018)$$
$$=\frac{2018-1}{2018}=\frac{2017}{2018}$$

답 ⑤

18 전략 주어진 유리함수를 $y=f(x)$로 놓고 x에 대하여 푼 후 x와 y를 바꾸어 역함수를 구한다.

풀이 $y=\frac{-6x+4}{2x-1}$라 하고 x에 대하여 풀면

$$y(2x-1)=-6x+4$$
$$(2y+6)x=y+4 \qquad \therefore x=\frac{y+4}{2y+6}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x+4}{2x+6}$

$$\therefore g(x)=\frac{x+4}{2x+6}$$
$$g(x)=\frac{x+4}{2x+6}=\frac{\frac{1}{2}(2x+6)+1}{2x+6}=\frac{1}{2x+6}+\frac{1}{2}$$

에서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=\frac{1}{2}$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는

$$\left(-3,\ \frac{1}{2}\right)$$

답 $\left(-3,\ \frac{1}{2}\right)$

다른 풀이 $f(x)=\frac{-6x+4}{2x-1}$

$$=\frac{-3(2x-1)+1}{2x-1}$$
$$=\frac{1}{2x-1}-3$$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=\frac{1}{2}$, $y=-3$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -3\right)$이다.

한편 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선은 $y=f(x)$의 그래프의 점근선과 각각 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 $y=g(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점과 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그 좌표는 $\left(-3,\ \frac{1}{2}\right)$이다.

19 전략 주어진 연산의 정의에 따라 각 괄호 안을 먼저 계산한다.

풀이 $x◎1=\frac{x+1}{x-1}$, $\frac{1}{x◎1}=\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{x-1}{x+1}$

이므로

$$\begin{aligned}(x◎1)◎\left(\frac{1}{x◎1}\right)&=\frac{x+1}{x-1}◎\frac{x-1}{x+1}\\&=\frac{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}\\&=\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2-(x-1)^2}\\&=\frac{x^2+1}{2x}\end{aligned}$$

답 ⑤

20 전략 $f(x)$의 식을 $y=\frac{a}{x-p}+q\ (a\neq0)$ 꼴로 변형한 후 $y=g(x)$의 함수식을 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{3x+k}{x+4}=\frac{3(x+4)+k-12}{x+4}$

$=\frac{k-12}{x+4}+3$

이므로 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-3=\frac{k-12}{(x+2)+4}+3$, 즉 $y=\frac{k-12}{x+6}+6$

$\therefore g(x)=\frac{k-12}{x+6}+6$

따라서 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은

$x=-6$, $y=6$

이므로 두 점근선의 교점의 좌표는

$(-6,\ 6)$

이 점이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

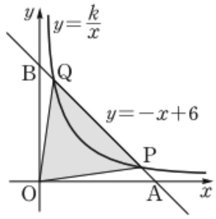
$\frac{3\cdot(-6)+k}{-6+4}=6,\qquad k-18=-12$

$\therefore k=6$

답 ⑤

21 전략 함수 $y=\frac{k}{x}\ (k>0)$의 그래프와 직선 $y=-x+6$은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-x+6$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면



A$(6,\ 0)$, B$(0,\ 6)$

삼각형 OAB의 넓이는

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6=18$

함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+6$은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 삼각형 OAP와 삼각형 OQB의 넓이는 서로 같다.

이때 삼각형 OPQ의 넓이가 14이므로

$\triangle OAP=\triangle OQB$

$=\frac{1}{2}(18-14)=2$

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\triangle OAP=\frac{1}{2}\cdot6\cdot b=2\qquad\therefore b=\frac{2}{3}$

점 P는 직선 $y=-x+6$ 위의 점이므로

$\frac{2}{3}=-a+6\qquad\therefore a=\frac{16}{3}$

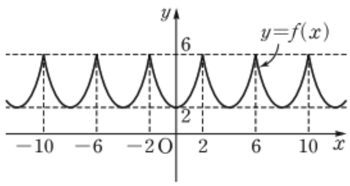
또 점 P는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$k=ab=\frac{16}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32}{9}$

답 ①

22 전략 $y=\frac{ax}{x+2}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구한 후 a의 값의 범위에 따른 함수 $y=\frac{ax}{x+2}$의 그래프를 그려 본다.

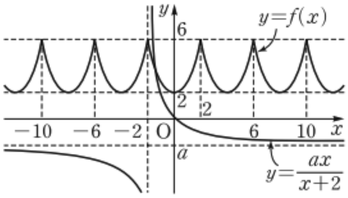
풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$y=\dfrac{ax}{x+2}=\dfrac{a(x+2)-2a}{x+2}=-\dfrac{2a}{x+2}+a$에서 그래프의 점근선의 방정식은

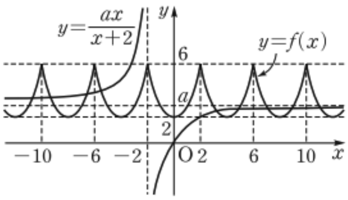
$x=-2,\ y=a$

(i) $a<0$일 때,



a의 값에 관계없이 두 함수 $y=f(x)$, $y=\dfrac{ax}{x+2}$의 그래프의 교점의 개수는 1이다.

(ii) $a>0$일 때,



두 함수 $y=f(x)$, $y=\dfrac{ax}{x+2}$의 그래프의 교점의 개수가 무수히 많으려면 위의 그림과 같아야 하므로

$2\le a\le 6$

(i), (ii)에서 정수 a의 값은 2, 3, 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$2+3+4+5+6=20$ 답 ④

Ⅵ. 함수

23 무리함수

유제

본책 228~245쪽

076-❶ $\sqrt{a^2+2+\dfrac{1}{a^2}}-\sqrt{a^2-2+\dfrac{1}{a^2}}$

$=\sqrt{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2}$

$=\left|a+\dfrac{1}{a}\right|-\left|a-\dfrac{1}{a}\right|$

이때 $0<a<1$에서 $a+\dfrac{1}{a}>0$, $a-\dfrac{1}{a}<0$이므로

(주어진 식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$

$=2a$ 답 $2a$

076-❷ $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-4}$

$=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}-2}$

$=\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2}=\left|a-\dfrac{1}{a}\right|$

이때 $0<a<1$에서 $a-\dfrac{1}{a}<0$이므로

$\sqrt{x^2-4}=-\left(a-\dfrac{1}{a}\right)=-a+\dfrac{1}{a}$

$\therefore \sqrt{x^2-4}+x=\left(-a+\dfrac{1}{a}\right)+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$

$=\dfrac{2}{a}$

답 $\dfrac{2}{a}$

077-❶ (1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$

$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}$

$=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$

$\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3})}$

$=\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$$
$$=(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$$
$$+(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})$$
$$=\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$$

(2) $\dfrac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$=\frac{4\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}$$
$$=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{2}+2-\sqrt{6}$$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$
$$=\sqrt{2}+1$$

답 (1) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$ (2) $\sqrt{2}+2-\sqrt{6}$ (3) $\sqrt{2}+1$

078-❶ (1) 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$(x+2\sqrt{2}y)(\sqrt{2}+1)=(x+4y)+(x+2y)\sqrt{2}$$

즉 $(x+4y)+(x+2y)\sqrt{2}=-7-3\sqrt{2}$이고 $x+4y$, $x+2y$가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x+4y=-7,\ x+2y=-3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=1,\ y=-2$$
$$\therefore x^2+y^2=5$$

(2) 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$(x-\sqrt{3})(y-\sqrt{3})=(xy+3)-(x+y)\sqrt{3}$$

즉 $(xy+3)-(x+y)\sqrt{3}=6-4\sqrt{3}$이고 $xy+3$, $x+y$가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$xy+3=6,\ x+y=4$$
$$\therefore xy=3,\ x+y=4$$
$$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$
$$=16-6=10$$

답 (1) 5 (2) 10

078-❷ $x^2+\sqrt{2}y^2-5x+4\sqrt{2}y-6-5\sqrt{2}=0$에서

$$x^2-5x-6+(y^2+4y-5)\sqrt{2}=0$$

x^2-5x-6, y^2+4y-5는 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2-5x-6=0,\ y^2+4y-5=0$$

두 방정식을 풀면

$x=-1$ 또는 $x=6$, $y=-5$ 또는 $y=1$

따라서 $x+y$의 최댓값은

$$6+1=7$$

답 7

079-❶ (1) 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프이므로 $x=1$, $y=2$를 대입하면

$$2=\sqrt{a} \qquad \therefore a=4$$
$$\therefore y=\sqrt{4x}$$

(2) 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프이므로 $x=-1$, $y=-2$를 대입하면

$$-2=-\sqrt{-a}, \qquad \sqrt{-a}=2$$
$$-a=4 \qquad \therefore a=-4$$
$$\therefore y=-\sqrt{-4x}$$

답 (1) $y=\sqrt{4x}$ (2) $y=-\sqrt{-4x}$

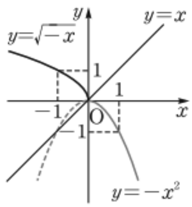
079-❷ $y=\sqrt{-x}\ (x\le 0)$에서

$$y^2=-x$$
$$\therefore x=-y^2\ (y\ge 0)$$

x와 y를 서로 바꾸면

$$y=-x^2\ (x\ge 0)$$

따라서 $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 $y=-x^2\ (x\ge 0)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

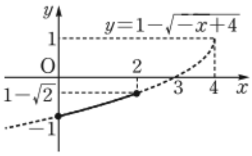


답 풀이 참조

23 무리함수

080-❶ $y=1-\sqrt{-x+4}=1-\sqrt{-(x-4)}$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



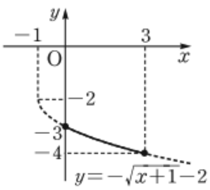
이때 주어진 함수는

$x=2$일 때 최댓값 $1-\sqrt{2}$,

$x=0$일 때 최솟값 -1

을 갖는다. 답 최댓값: $1-\sqrt{2}$, 최솟값: -1

080-❷ $y=-\sqrt{x+1}-2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때

$y=-4$일 때 $x=3$,

$y=-3$일 때 $x=0$

이므로 정의역은

$\{x\,|\,0\le x\le 3\}$

즉 $a=0$, $b=3$이므로

$a+b=3$ 답 3

081-❶ 주어진 함수의 그래프는 $y=a\sqrt{-x}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수식을

$y=a\sqrt{-(x-1)}+1\ (a<0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=a\sqrt{-(0-1)}+1$

$-1=a+1 \qquad \therefore a=-2$

따라서 주어진 함수는

$y=-2\sqrt{-(x-1)}+1=-2\sqrt{-x+1}+1$

즉 $a=-2$, $b=1$, $c=1$이므로

$a+b+c=0$ 답 0

081-❷ $y=\sqrt{a-x}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 함수식은

$y=\sqrt{a-(x+2)}+2+b$

$=\sqrt{a-2-x}+2+b$

이 식이 $y=\sqrt{1-x}+5$와 같아야 하므로

$a-2=1,\ 2+b=5$

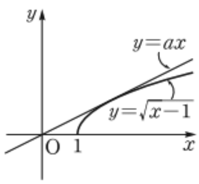
$\therefore a=3,\ b=3$ 답 $a=3$, $b=3$

Remark▶

두 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq 0)$,

$y=\sqrt{a'(x-p')}+q'\ (a'\neq 0)$에서 $a=a'$이면 두 함수의 그래프는 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있다.

082-❶ $y=\sqrt{x-1}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, $y=ax$는 원점을 지나는 직선이므로 오른쪽 그림에서 곡선과 직선이 접하려면 $a>0$이어야 한다.



$ax=\sqrt{x-1}$의 양변을 제곱하면

$a^2x^2=x-1$

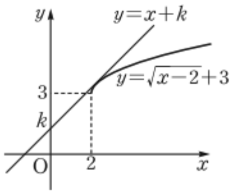
$\therefore a^2x^2-x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1-4a^2=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$ 답 $\frac{1}{2}$

082-❷ $y=\sqrt{x-2}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



$y=\sqrt{x-2}+3$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

$\sqrt{x-2}+3=x+k$에서

$x+k-3=\sqrt{x-2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+(2k-7)x+k^2-6k+11=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-7)^2-4(k^2-6k+11)=0$

$4k^2-28k+49-4k^2+24k-44=0$

$-4k+5=0 \qquad \therefore k=\frac{5}{4}$

따라서 주어진 함수의 그래프와 직선이 만나지 않으려면

$k>\frac{5}{4}$ 답 $k>\frac{5}{4}$

083-❶ 함수 $y=-\sqrt{2x+1}-1$의 치역이 $\{y|y\le -1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\le -1\}$이다.

$y=-\sqrt{2x+1}-1$에서

$\sqrt{2x+1}=-y-1,\quad 2x+1=(y+1)^2$

$\therefore x=\frac{1}{2}(y+1)^2-\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}\ (x\le -1)$

답 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}\ (x\le -1)$

083-❷ $y=x^2-4x+7$이라 하면

$y=(x-2)^2+3\ (x\ge 2)$

에서 치역이 $\{y|y\ge 3\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\ge 3\}$이다.

$y=(x-2)^2+3$에서

$(x-2)^2=y-3,\quad x-2=\pm\sqrt{y-3}$

그런데 $x\ge 2$이므로

$x-2=\sqrt{y-3}\qquad \therefore x=\sqrt{y-3}+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\sqrt{x-3}+2\,(x\ge 3)$

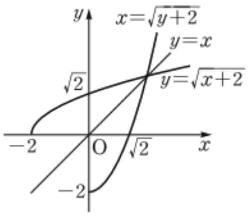
따라서 $a=1,\ b=-3,\ c=2,\ d=3$이므로

$a+b+c+d=3$

답 3

083-❸ 함수 $y=\sqrt{x+2}$에서 x와 y를 서로 바꾸면 $x=\sqrt{y+2}$이므로 두 함수는 서로 역함수이다. 따라서 두 함수 $y=\sqrt{x+2},\ x=\sqrt{y+2}$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉 두 함수 $y=\sqrt{x+2}$, $x=\sqrt{y+2}$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 두 함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x+2}=x$의 양변을 제곱하면

$x+2=x^2,\qquad x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x>0$이므로

$x=2,\ y=2$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.

답 $(2,\ 2)$

중단원 연습 문제

본책 246~249쪽

01 $2a-2c$		02 $-x+2$		03 5
04 99	05 $2-\sqrt{2}$		06 11	07 ⑤
08 ⑤	09 0	10 8	11 $-\frac{1}{2}$	12 3
13 ③	14 $0<k<\frac{1}{2}$		15 ③	
16 $5+\sqrt{13}$		17 ②	18 10	19 ⑤
20 ②				

01 전략 $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases} A & (A\ge 0) \\ -A & (A<0)\end{cases}$임을 이용한다.

풀이 $a-b>0,\ b-c>0,\ c-a<0$이므로

$\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-c)^2}+\sqrt{(c-a)^2}$

$=|a-b|+|b-c|+|c-a|$

$=(a-b)+(b-c)-(c-a)$

$=2a-2c$

답 $2a-2c$

02 전략 $\sqrt{A}$의 값이 실수이려면 $A\ge 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $\sqrt{x+2}$에서 $\quad x+2\ge 0$

$\therefore x\ge -2$ ······ ㉠

$\sqrt{2-x}$에서 $\quad 2-x\ge 0$

$\therefore x\le 2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는

$-2\le x\le 2$ ⋯ ❶

$-2\le x\le 2$일 때, $2x-5<0,\ x-3<0$이므로

$|2x-5|-\sqrt{x^2-6x+9}$

$=|2x-5|-\sqrt{(x-3)^2}$

$=|2x-5|-|x-3|$

$=-(2x-5)+(x-3)$

$=-x+2$ ⋯ ❷

답 $-x+2$

채점 기준	비율
❶ $\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	50 %

03 전략 분모를 유리화하여 간단히 정리한다.

풀이 $\dfrac{5}{1+\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}}+\dfrac{5}{1+\dfrac{1}{4+\sqrt{15}}}$

$=\dfrac{5}{1+\dfrac{4+\sqrt{15}}{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}}$

$+\dfrac{5}{1+\dfrac{4-\sqrt{15}}{(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}}$

$=\dfrac{5}{1+(4+\sqrt{15})}+\dfrac{5}{1+(4-\sqrt{15})}$

$=\dfrac{5}{5+\sqrt{15}}+\dfrac{5}{5-\sqrt{15}}$

$=\dfrac{5(5-\sqrt{15})+5(5+\sqrt{15})}{(5+\sqrt{15})(5-\sqrt{15})}$

$=\dfrac{50}{10}=5$

답 5

04

전략 먼저 $x+y$, xy의 값을 구한 후 주어진 식을 $x+y$, xy를 포함한 식으로 변형한다.

풀이 $x+y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$=10$

$xy=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=1$

$\therefore\ x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$

$=10^2-1$

$=99$

답 99

05

전략 $x=a+\sqrt{b}$ 꼴은 $x-a=\sqrt{b}$로 변형한 후 양변을 제곱한다.

풀이 $x=2-\sqrt{2}$에서 $\quad x-2=-\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $\quad (x-2)^2=2$

$x^2-4x+4=2$

$\therefore\ x^2-4x+2=0$ ⋯ ❶

$x^4-4x^3+3x^2-3x+2$를 x^2-4x+2로 나누면 몫이 x^2+1, 나머지가 x이므로

$x^4-4x^3+3x^2-3x+2$

$=(x^2-4x+2)(x^2+1)+x$

$=x\ (\because\ x^2-4x+2=0)$

$=2-\sqrt{2}$ ⋯ ❷

답 $2-\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $x^2-4x+2=0$임을 알 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

06

전략 주어진 등식에 x의 값을 대입한 후 정리한다.

풀이 $x=2-\sqrt{3}$을 $ax^2+bx=\dfrac{1}{x}$에 대입하면

$a(2-\sqrt{3})^2+b(2-\sqrt{3})=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 좌변을 전개하여 정리하면

$a(2-\sqrt{3})^2+b(2-\sqrt{3})$

$=a(4-4\sqrt{3}+3)+b(2-\sqrt{3})$

$=(7a+2b)-(4a+b)\sqrt{3}$

㉠의 우변을 정리하면

$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$=2+\sqrt{3}$

즉

$(7a+2b)-(4a+b)\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$ ⋯ ❶

이고 $7a+2b$, $-(4a+b)$가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$7a+2b=2,\ -(4a+b)=1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=15$ ⋯ ❷

$\therefore\ a+b=11$ ⋯ ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식에 $x=2-\sqrt{3}$을 대입한 후 정리할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

07

전략 주어진 함수를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$ 꼴로 나타낸 후 평행이동 또는 대칭이동을 조사한다.

풀이 ㄴ. $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ. $y=-\sqrt{3-x}=-\sqrt{-(x-3)}$
$y=-\sqrt{3-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\sqrt{x+1}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 그래프가 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

08 (전략) 주어진 함수를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$ 꼴로 변형한다.

(풀이) ① $6-2x\geq0$에서 $x\leq3$이므로 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\leq3\}$이다.

② $\sqrt{6-2x}\geq0$에서 $y=\sqrt{6-2x}+1\geq1$이므로 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\geq1\}$이다.

③ $x=0$을 $y=\sqrt{6-2x}+1$에 대입하면 $y=\sqrt{6}+1$이므로 $y=\sqrt{6-2x}+1$의 그래프는 점 $(0, \sqrt{6}+1)$을 지난다.

④ $y=\sqrt{6-2x}+1=\sqrt{-2(x-3)}+1$이므로 $y=\sqrt{6-2x}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$$y=-\sqrt{2(x-3)}-1$$

이것을 다시 x축에 대하여 대칭이동하면

$$-y=-\sqrt{2(x-3)}-1$$

$$\therefore y=\sqrt{2x-6}+1$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

09 (전략) 그래프를 보고 주어진 식을 $f(x)=-\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$ 꼴로 나타낸 후 그래프가 지나는 한 점의 좌표를 함수식에 대입한다.

(풀이) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$$f(x)=-\sqrt{a(x-4)}+2$$

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, -2)$를 지나므로

$$-2=-\sqrt{a(0-4)}+2$$

$$\therefore a=-4$$

따라서 $f(x)=-\sqrt{-4(x-4)}+2$이므로

$$f(3)=-\sqrt{-4(3-4)}+2=0$$

답 0

10 (전략) 주어진 함수의 그래프를 평행이동한 함수식과 $y=x-3$을 연립하여 이차방정식을 세운다.

(풀이) $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면

$$y=\sqrt{a(x-1)}-4\ (a\neq0)$$

이 그래프와 직선 $y=x-3$이 접할 때,

$\sqrt{a(x-1)}-4=x-3$에서 $\quad\sqrt{a(x-1)}=x+1$

양변을 제곱하면

$$ax-a=x^2+2x+1$$

$$\therefore x^2+(2-a)x+1+a=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(2-a)^2-4(1+a)=0$$

$$a^2-8a=0,\quad a(a-8)=0$$

$$\therefore a=8\ (\because a\neq0)$$

답 8

11 (전략) $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$임을 이용한다.

(풀이) $(f\circ g)^{-1}(1)=(g^{-1}\circ f^{-1})(1)$
$=g^{-1}(f^{-1}(1))$

에서 $f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$$\sqrt{k+4}-1=1$$

$$\sqrt{k+4}=2,\quad k+4=4$$

$$\therefore k=0$$ ⋯ ❶

즉 $(f\circ g)^{-1}(1)=g^{-1}(0)$에서 $g^{-1}(0)=m$이라 하면 $g(m)=0$이므로

$$\sqrt{2m+1}=0,\quad 2m+1=0$$

$$\therefore m=-\frac{1}{2}$$ ⋯ ❷

$$\therefore (f\circ g)^{-1}(1)=g^{-1}(f^{-1}(1))=g^{-1}(0)=-\frac{1}{2}$$ ⋯ ❸

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f^{-1}(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g^{-1}(0)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $(f\circ g)^{-1}(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

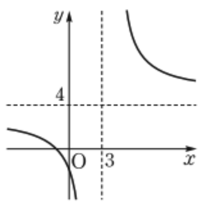
12 (전략) $k<0$일 때와 $k>0$일 때로 나누어 생각한다.

(풀이) $k<0$이면 함수 $y=\frac{k}{x-3}+4$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으므로 $k>0$이어야 한다.

또 [그림 1]과 같이 그래프가 y축과 $y<0$인 부분에서 만날 때에만 이 함수의 그래프가 모든 사분면을 지나므로

$$\frac{k}{0-3}+4<0$$

$$\therefore k>12 \quad \cdots\cdots ㉠$$

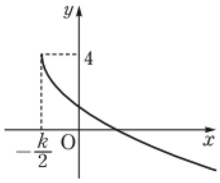


[그림 1]

한편 $y=-\sqrt{2x+k}+4=-\sqrt{2\left(x+\frac{k}{2}\right)}+4$에서

$k<0$이면 이 함수의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으므로 $k>0$이어야 한다.

또 [그림 2]와 같이 그래프가 y축과 $y>0$인 부분에서 만날 때에만 이 함수의 그래프가 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면을 지나므로



[그림 2]

$-\sqrt{k}+4>0$

$\sqrt{k}<4$

$\therefore 0<k<16$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $12<k<16$

따라서 정수 k는 13, 14, 15의 3개이다. 답 3

13 전략 주어진 그래프에서 점근선과 y절편을 이용하여 a, b, c의 값의 부호를 구한다.

풀이 $y=\dfrac{bx+c}{x-a}=\dfrac{b(x-a)+ab+c}{x-a}$

$=\dfrac{ab+c}{x-a}+b$

의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$이므로 주어진 그래프에서 $a<0$, $b>0$

또 $y=\dfrac{bx+c}{x-a}$의 그래프가 y축과 $y<0$인 부분에서 만나므로

$-\dfrac{c}{a}<0$ $\therefore c<0$ ($\because a<0$)

따라서 $y=a\sqrt{x+b}+c$의 그래프는 $y=a\sqrt{x}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b(-b<0)$만큼, y축의 방향으로 $c(c<0)$만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 개형으로 옳은 것은 ③이다. 답 ③

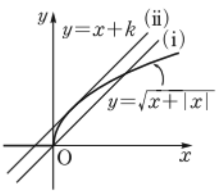
14 전략 함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프와 직선 $y=x+k$를 좌표평면 위에 나타내어 본다.

풀이 $x\geq 0$일 때,

$y=\sqrt{x+|x|}=\sqrt{x+x}=\sqrt{2x}$

$x<0$일 때, $y=\sqrt{x+|x|}=\sqrt{x+(-x)}=0$

함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프와 직선 $y=x+k$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



(i) 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때,

$k=0$ ⋯ ❷

(ii) $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

$\sqrt{2x}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-k^2=0$, $-2k+1=0$

$\therefore k=\dfrac{1}{2}$ ⋯ ❸

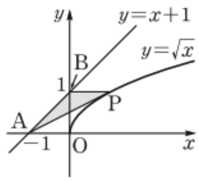
(i), (ii)에서 $0<k<\dfrac{1}{2}$일 때, 함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프와 직선 $y=x+k$는 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $\sqrt{x+|x|}=x+k$는 서로 다른 세 실근을 갖는다. ⋯ ❹

답 $0<k<\dfrac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프와 직선 $y=x+k$를 좌표평면 위에 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때 k의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때 k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

15 전략 밑변의 길이가 일정한 삼각형의 넓이는 삼각형의 높이가 최소일 때 최소가 된다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABP에서 선분 AB를 밑변으로 생각하면 점 P에서 직선 AB에 이르는 거리가 높이가 된다.



따라서 두 점 A, B를 지나는 직선과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{x}$에 접할 때의 접점이 P일 때, 삼각형 ABP의 넓이는 최소가 된다.

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식이 $y=x+1$이므로 두 점 A, B를 지나는 직선과 평행하면서 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 접하는 직선의 방정식을

$y=x+k$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다.

$x+k=\sqrt{x}$의 양변을 제곱하면

$x^2+2kx+k^2=x$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4k^2=0$, $-4k+1=0$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

직선 $y=x+\frac{1}{4}$ 위의 한 점 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$과 직선 $y=x+1$, 즉 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|0-\frac{1}{4}+1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

이고, 밑변 AB의 길이는

$$\sqrt{(-1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{3}{8}$$

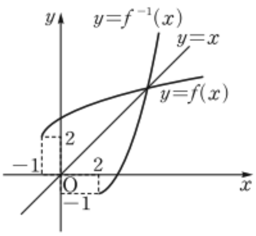
답 ③

16 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 주어진 그래프에서 $a=1$, $b=2$이므로

$$f(x)=\sqrt{x+1}+2$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x+1}+2=x$에서

$$\sqrt{x+1}=x-2$$

양변을 제곱하면

$$x+1=(x-2)^2,\qquad x^2-5x+3=0$$

$$\therefore x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}\ (\because x\geq 2)$$

따라서 교점의 좌표가 $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2},\ \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$이므로

$$p+q=5+\sqrt{13}$$

답 $5+\sqrt{13}$

17 전략 주어진 식을 통분하여 간단히 정리한다.

풀이 $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$$=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$

$$=\frac{2\sqrt{x+1}}{x+1-x}$$

$$=2\sqrt{x+1}$$

따라서 구하는 값은

$$2\sqrt{8+1}=6$$

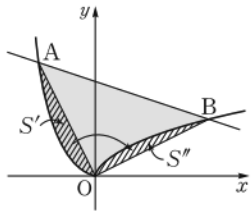
답 ②

18 전략 두 직선 OA, OB와 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같음을 이용한다.

풀이 구하는 넓이를 S라 하자.

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 함수 $y=x^2\ (x\leq 0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치하므로 점 A는 점 B로 이동한다.

즉 오른쪽 그림에서 S'의 영역과 S''의 영역의 넓이는 서로 같으므로 넓이 S는 삼각형 AOB의 넓이와 같다.



삼각형 AOB에서 밑변을 $\overline{\text{AB}}$라 하면 높이는 원점과 직선 $x+3y-10=0$ 사이의 거리이다.

따라서 $\overline{\text{AB}}=\sqrt{(4+2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{10}$이고, 높이는

$$\frac{|-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$$

이므로

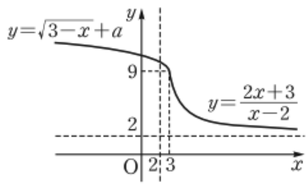
$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=10$$

답 10

19 전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\frac{2x+3}{x-2}=\frac{2(x-2)+7}{x-2}=\frac{7}{x-2}+2$

조건 (가)에서 함수 f의 치역이 $\{y|y>2\}$이고, 조건 (나)에서 함수 f는 일대일함수이므로 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉 $f(3)=9$이므로

$$\sqrt{3-3}+a=9\qquad \therefore a=9$$

이때 $f(2)=\sqrt{3-2}+9=10$이므로

$$f(2)f(k)=10f(k)=40$$

$$\therefore f(k)=4$$

$f(k)=4$에서 $k>3$이므로

$$\frac{2k+3}{k-2}=4,\qquad 2k+3=4k-8$$

$$\therefore k=\frac{11}{2}$$

답 ⑤

20 (전략) 먼저 $f(x)$의 역함수를 구하여 $f(x)$와 $g(x)$의 관계를 파악한다.

(풀이) 함수 $f(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}k$는 집합 $\{x|x\ge0\}$에서 집합 $\left\{y \middle| y\ge\frac{1}{5}k\right\}$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}k$라 하고 x에 대하여 풀면

$$\frac{1}{5}x^2=y-\frac{1}{5}k,\qquad x^2=5y-k$$

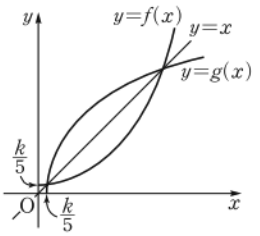
$$\therefore x=\pm\sqrt{5y-k}$$

그런데 $x\ge0$이므로 $\quad x=\sqrt{5y-k}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\sqrt{5x-k}$

즉 함수 $g(x)=\sqrt{5x-k}$는 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.



$\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}k=x$에서

$$x^2-5x+k=0$$

이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

$$\alpha\beta=k\ge0,\ D=(-5)^2-4k>0$$

$$\therefore 0\le k<\frac{25}{4}$$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, $\cdots$, 6의 7개이다.

답 ②

Remark ▶

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 음이 아닌 서로 다른 두 실근 α, β를 가질 때, 판별식을 D라 하면

➡ $D>0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta\ge0$

Ⅶ. 순열과 조합

24 순열과 조합

유제

본책 255~278쪽

084-① (i) 꺼낸 공에 적힌 수의 차가 3인 경우

(1, 4), (2, 5), (4, 1), (5, 2)의 4가지

(ii) 꺼낸 공에 적힌 수의 차가 4인 경우

(1, 5), (5, 1)의 2가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$4+2=6$

답 6

084-② x, y, z가 자연수이므로

$x\ge1,\ y\ge1,\ z\ge1$

$x+6y+10z=40$에서 $10z<40$, 즉 $z<4$이므로

$z=1$ 또는 $z=2$ 또는 $z=3$

(i) $z=1$일 때,

$x+6y+10=40$, 즉 $x+6y=30$이므로 순서쌍 (x, y)는

(24, 1), (18, 2), (12, 3), (6, 4)의 4개

(ii) $z=2$일 때,

$x+6y+20=40$, 즉 $x+6y=20$이므로 순서쌍 (x, y)는

(14, 1), (8, 2), (2, 3)의 3개

(iii) $z=3$일 때,

$x+6y+30=40$, 즉 $x+6y=10$이므로 순서쌍 (x, y)는

(4, 1)의 1개

(i)~(iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 합의 법칙에 의하여

$4+3+1=8$

답 8

Remark ▶

x, y, z 중에서 계수가 가장 큰 z를 기준으로 경우를 나누는 것이 편리하다.

085-① 주어진 다항식에서 a, b, c 중 어느 하나를 택하면 그 각각에 대하여 p, q의 2가지의 선택이 가능하고, 이들 각각에 대하여 x, y의 2가지의 선택이 가능하므로 구하는 항의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$3\cdot2\cdot2=12$

답 12

085-❷ 120과 300의 양의 공약수의 개수는 120과 300의 최대공약수의 양의 약수의 개수와 같다.
이때 120과 300의 최대공약수는 60이고 $60=2^2\cdot3\cdot5$이다.
2^2의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2$의 3개
3의 양의 약수는 1, 3의 2개
5의 양의 약수는 1, 5의 2개
따라서 구하는 양의 공약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여
$3\cdot2\cdot2=12$ 답 12

다른 풀이 120과 300의 최대공약수는 60이므로 120과 300의 양의 공약수의 개수는 60의 양의 약수의 개수와 같다.
이때 $60=2^2\cdot3\cdot5$이므로 구하는 양의 공약수의 개수는
$(2+1)(1+1)(1+1)=12$

086-❶ A지점에서 출발하여 C지점으로 이동한 후 다시 A지점으로 돌아올 때, B지점을 한 번 지나는 방법은
$A\to B\to C\to A,\quad A\to C\to B\to A$
의 2가지가 있다.
(i) $A\to B\to C\to A$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $4\cdot3\cdot2=24$
(ii) $A\to C\to B\to A$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\cdot3\cdot4=24$
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여
$24+24=48$ 답 48

086-❷ A지점에서 D지점으로 가는 방법은
$A\to B\to D,\quad A\to C\to D,$
$A\to B\to C\to D,\quad A\to C\to B\to D$
의 4가지가 있다.
(i) $A\to B\to D$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3\cdot2=6$
(ii) $A\to C\to D$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\cdot2=4$
(iii) $A\to B\to C\to D$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3\cdot2\cdot2=12$
(iv) $A\to C\to B\to D$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\cdot2\cdot2=8$
(i)~(iv)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여
$6+4+12+8=30$ 답 30

087-❶ 10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원, …, 60원의 7가지
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, 300원, 400원의 5가지
1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은
0원, 1000원의 2가지
이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는
$7\cdot5\cdot2-1=69$ 답 69

087-❷ (1) 1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은
0장, 1장, 2장, 3장, 4장, 5장의 6가지
5000원짜리 지폐를 지불하는 방법은
0장, 1장, 2장의 3가지
10000원짜리 지폐를 지불하는 방법은
0장, 1장의 2가지
이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는 $6\cdot3\cdot2-1=35$
(2) 5000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐 5장으로 지불할 수 있는 금액이 같고, 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐 10장으로 지불할 수 있는 금액이 같다.
따라서 10000원짜리 지폐 1장을 1000원짜리 지폐 10장, 5000원짜리 지폐 2장을 1000원짜리 지폐 10장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 25장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같으므로 구하는 금액의 수는 25
답 (1) 35 (2) 25

088-❶ A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여
$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ 답 48

088-❷ A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2=96$ 답 96

089-❶ (1) ${}_n\mathrm{P}_2=n(n-1)$이므로 ${}_n\mathrm{P}_2=9n$에서

$n(n-1)=9n$

$n\geq2$이므로 $n-1=9$

$\therefore n=10$

(2) ${}_6\mathrm{P}_r\cdot3!=720$에서 ${}_6\mathrm{P}_r\cdot6=720$

$\therefore {}_6\mathrm{P}_r=120$

$120=6\cdot5\cdot4$이므로 $r=3$

(3) ${}_n\mathrm{P}_3+3{}_n\mathrm{P}_2=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)$

$=(n+1)n(n-1)$

이때 $60=5\cdot4\cdot3$이므로 $n=4$

(4) ${}_n\mathrm{P}_4:{}_{n+1}\mathrm{P}_3=10:3$에서 $3{}_n\mathrm{P}_4=10{}_{n+1}\mathrm{P}_3$이므로

$3n(n-1)(n-2)(n-3)=10(n+1)n(n-1)$

$n\geq4$이므로

$3(n-2)(n-3)=10(n+1)$

$3n^2-25n+8=0$, $(3n-1)(n-8)=0$

$\therefore n=8$

답 (1) 10 (2) 3 (3) 4 (4) 8

089-❷ ${}_{n-1}\mathrm{P}_r+r{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{\{n-1-(r-1)\}!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}+\frac{r\cdot(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{(n-r)\cdot(n-1)!}{(n-r)!}+\frac{r\cdot(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{\{(n-r)+r\}\cdot(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$={}_n\mathrm{P}_r$ … **증명 끝** 답 풀이 참조

090-❶ (1) 서로 다른 10개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_{10}\mathrm{P}_3=10\cdot9\cdot8=720$

(2) 1번을 제외한 9명에서 회장과 부회장을 각각 한 사람씩 뽑으면 된다. 따라서 서로 다른 9개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_9\mathrm{P}_2=9\cdot8=72$

답 (1) 720 (2) 72

090-❷ 타순이 정해져 있지 않은 선수를 m명이라 하면 $n+m=9$

이때 n명의 선수의 타순이 이미 정해져 있으므로 9명의 선수의 타순을 정하는 방법의 수는

${}_m\mathrm{P}_m=m!$

이때 $120=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5!$이므로 $m=5$

$\therefore n=4$ 답 4

091-❶ (1) 축구 선수 3명을 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$5!=120$

그 각각에 대하여 축구 선수 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$120\cdot6=720$

(2) 야구 선수 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$4!=24$

야구 선수 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 3개의 자리에 축구 선수 3명을 세우는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot60=1440$

(3) 축구 선수 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$3!=6$

축구 선수 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 야구 선수 4명을 세우는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot24=144$

답 (1) 720 (2) 1440 (3) 144

092-❶ (1) h를 맨 처음에, y를 맨 마지막에 고정시키고, 나머지 o, l, i, d, a의 5개의 문자를 나열하는 방법의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$5!=120$

(2) h ○○ y를 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

h와 y 사이에 2개의 문자를 나열하는 방법의 수는

${}_5\mathrm{P}_2=20$

이때 h와 y의 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot20\cdot2=960$

답 (1) 120 (2) 960

093-❶ 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$5!=120$

양 끝에 남학생 3명 중에서 2명을 택하여 세우는 방법의 수는 $_3P_2=6$

가운데에 나머지 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-6\cdot6=84$

답 84

093-❷ 7개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$7!=5040$

양 끝에 모음인 o, a, e의 3개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하는 방법의 수는

$_3P_2=6$

가운데에 나머지 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-6\cdot120=4320$

답 4320

094-❶ (1) 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지이다. 각각에 대하여 십의 자리와 일의 자리에는 백의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 세 자리 자연수의 개수는 $5\cdot{}_5P_2=100$

(2) 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

백의 자리와 십의 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

$_5P_2=20$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이고, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4가지이므로

$4\cdot4=16$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$20+16=36$

답 (1) 100 (2) 36

094-❷ (1) 3의 배수이려면 각 자리의 수의 합이 3의 배수이어야 한다.

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 4개를 택하였을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

1, 2, 3, 6 또는 1, 2, 4, 5 또는 1, 3, 5, 6 또는 2, 3, 4, 6 또는 3, 4, 5, 6

의 5가지이고, 각각에 대하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$4!=24$

이므로 구하는 3의 배수의 개수는

$5\cdot24=120$

(2) 천의 자리의 숫자가 1 또는 2 또는 3 또는 4인 자연수의 개수는

$4\cdot{}_5P_3=240$

51□□ 꼴의 자연수의 개수는

$_4P_2=12$

따라서 5200보다 작은 자연수의 개수는

$240+12=252$

답 (1) 120 (2) 252

다른 풀이 (2) 모든 네 자리 자연수의 개수는

$_6P_4=360$

5200보다 큰 자연수의 개수는

$4\cdot{}_4P_2+{}_5P_3=108$

따라서 5200보다 작은 자연수의 개수는

$360-108=252$

Remark▶ 배수의 판정

① 2의 배수: 일의 자리의 수가 0 또는 2의 배수인 수
② 3의 배수: 각 자리의 수의 합이 3의 배수인 수
③ 4의 배수: 끝의 두 자리 수가 4의 배수인 수
④ 5의 배수: 일의 자리의 수가 0 또는 5인 수
⑤ 9의 배수: 각 자리의 수의 합이 9의 배수인 수

095-❶ 'ㄱ□□□□□' 꼴인 문자열의 개수는

$5!=120$

'ㄴ□□□□□' 꼴인 문자열의 개수는

$5!=120$

'ㄷㄱ□□□□' 꼴인 문자열의 개수는

$4!=24$

'ㄷㄴ□□□□' 꼴인 문자열의 개수는

$4!=24$

'ㄷㄹㄱ□□□' 꼴인 문자열을 순서대로 나열하면

'ㄷㄹㄱㄴㅁㅂ', 'ㄷㄹㄱㄴㅂㅁ', 'ㄷㄹㄱㅁㄴㅂ', 'ㄷㄹㄱㅁㅂㄴ', …

즉 'ㄷㄹㄱㅁㅂㄴ'은 'ㄷㄹㄱ□□□' 꼴의 네 번째에 오는 문자열이므로

$120+120+24+24+4=292$(번째)

에 오는 문자열이다.

답 292번째

096-❶ (1) ${}_nC_2+{}_nC_3$

$=\frac{n(n-1)}{2\cdot1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}$

$=\frac{1}{6}n(n-1)\{3+(n-2)\}$

$=\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$

이므로 $\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)=56$

$(n+1)n(n-1)=8\cdot7\cdot6$

$\therefore n=7$

(2) ${}_nP_3+5{}_nC_3$

$=n(n-1)(n-2)+5\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}$

$=n(n-1)(n-2)\left(1+\frac{5}{6}\right)$

$=\frac{11}{6}n(n-1)(n-2)$

이므로 $\frac{11}{6}n(n-1)(n-2)=44$

$n(n-1)(n-2)=4\cdot3\cdot2$

$\therefore n=4$

(3) ${}_{16}C_{n+7}={}_{16}C_{2n}$에서

(i) $n+7=2n$인 경우

$n=7$

(ii) $n+7+2n=16$인 경우

$3n=9$ $\therefore n=3$

(i), (ii)에서

$n=3$ 또는 $n=7$

답 (1) 7 (2) 4 (3) 3, 7

096-❷ $n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$

$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=r\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}=r\cdot{}_nC_r$

$\therefore r\cdot{}_nC_r=n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$ … **증명 끝**

답 풀이 참조

097-❶ (1) 볼펜 6자루 중에서 2자루를 꺼내는 방법의 수는 ${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

연필 5자루 중에서 2자루를 꺼내는 방법의 수는

${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

따라서 구하는 방법의 수는 $15\cdot10=150$

(2) (i) 볼펜 6자루 중에서 3자루를 꺼내는 방법의 수는

${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$

연필 5자루 중에서 1자루를 꺼내는 방법의 수는

${}_5C_1=5$

따라서 방법의 수는

$20\cdot5=100$

(ii) 볼펜 6자루 중에서 4자루를 꺼내는 방법의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$100+15=115$

(3) 11자루 중에서 4자루를 꺼내는 방법의 수는

${}_{11}C_4=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=330$

볼펜만 4자루를 꺼내는 방법의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

연필만 4자루를 꺼내는 방법의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 방법의 수는

$330-(15+5)=310$

답 (1) 150 (2) 115 (3) 310

098-❶ 어른 6명 중에서 2명, 어린이 5명 중에서 1명을 뽑는 방법의 수는

${}_6C_2\cdot{}_5C_1=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot5=75$

(1) 뽑힌 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$75\cdot6=450$

(2) 어른 2명을 한 사람으로 생각하여 2명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $2!$이고, 그 각각의 경우에 대하여 어른 2명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!$이므로 $2!\cdot2!=4$

따라서 구하는 방법의 수는

$75\cdot4=300$

답 (1) 450 (2) 300

098-❷ 7을 제외한 6개의 숫자 중에서 2개를 뽑는 방법의 수는

${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

7을 포함한 숫자 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$15 \cdot 6 = 90$

답 90

다른 풀이 7이 올 수 있는 자리는 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 3가지이고, 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 숫자 중에서 2개를 뽑아 나머지 자리에 나열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$3 \cdot {}_6P_2 = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$

099-❶ (1) 8개의 점에서 2개의 점을 택하는 방법의 수는

$${}_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$$

직선 l_1 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

직선 l_2 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

이때 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개이므로 구하는 직선의 개수는

$$28 - 3 + 1 - 10 + 1 = 17$$

(2) 8개의 점에서 3개의 점을 택하는 방법의 수는

$${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

직선 l_1 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_3C_3 = 1$$

직선 l_2 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

이때 일직선 위에 있는 세 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$56 - 1 - 10 = 45$$

답 (1) 17 (2) 45

다른 풀이 (1) 직선 l_1 위의 한 점과 직선 l_2 위의 한 점을 택하는 방법의 수는

$${}_3C_1 \cdot {}_5C_1 = 3 \cdot 5 = 15$$

직선 l_1 위의 점으로 만들 수 있는 직선이 1개, 직선 l_2 위의 점으로 만들 수 있는 직선이 1개이므로 구하는 직선의 개수는

$$15 + 1 + 1 = 17$$

100-❶ (1) 가로선 5개 중에서 2개, 세로선 4개 중에서 2개를 택하면 하나의 직사각형이 결정되므로 구하는 직사각형의 개수는

$${}_5C_2 \cdot {}_4C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 10 \cdot 6 = 60$$

(2) 가장 작은 정사각형 1개, 4개, 9개로 이루어진 정사각형의 개수는 각각

$3 \cdot 4 = 12,\ 2 \cdot 3 = 6,\ 1 \cdot 2 = 2$

이므로 정사각형의 개수는

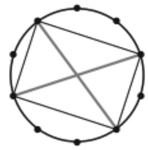
$12 + 6 + 2 = 20$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$60 - 20 = 40$

답 (1) 60 (2) 40

100-❷ 지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 오른쪽 그림과 같이 원의 서로 다른 지름 2개가 직사각형의 대각선이 되도록 하는 원 위의 4개의 점을 연결하면 직사각형을 만들 수 있다.



따라서 원의 지름 5개 중에서 2개를 택하면 이들을 대각선으로 하는 직사각형이 결정되므로 구하는 직사각형의 개수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

답 10

101-❶ 서로 다른 종류의 꽃 9송이를 4송이, 4송이, 1송이씩 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

$$\begin{aligned} {}_9C_4 \cdot {}_5C_4 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 126 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 315 \end{aligned}$$

이때 세 묶음으로 나누어진 꽃을 3명에게 나누어 주는 방법의 수는 3!이므로 구하는 방법의 수는

$$315 \cdot 3! = 315 \cdot 6 = 1890$$

답 1890

101-❷ 먼저 6개의 팀을 2개, 4개의 팀으로 나눈 후 4개의 팀을 다시 2개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} &({}_6C_2 \cdot {}_4C_4) \cdot \left({}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!}\right) \\ &= \left(\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 1\right) \cdot \left(\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= 15 \cdot 3 = 45 \end{aligned}$$

답 45

다른 풀이 6개의 팀을 2개, 2개, 2개씩 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}$$
$$=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot1\cdot\frac{1}{3\cdot2\cdot1}$$
$$=15\cdot6\cdot\frac{1}{6}=15$$

이때 세 묶음 중 부전승으로 올라갈 한 묶음을 선택하는 방법의 수는 3이므로 구하는 방법의 수는

$15\cdot3=45$

중단원 연습 문제

본책 279~283쪽

01 ⑤	02 ①	03 8	04 240	05 ④
06 9	07 72	08 ③	09 ③	10 21
11 180	12 ②	13 420	14 84	15 84
16 24	17 30	18 1	19 198번	20 10
21 ④	22 235	23 64	24 ⑤	25 ⑤
26 ④	27 ②			

01 전략 x, y가 자연수임을 이용하여 x, y의 값의 범위를 구하고, x의 값에 따라 y의 개수를 구한다.

풀이 x, y가 자연수이므로 $x\ge1$, $y\ge1$

$5x+y\le12$에서 $5x<12$ $\therefore x<\frac{12}{5}$

즉 $1\le x<\frac{12}{5}$이므로 $x=1$ 또는 $x=2$

(i) $x=1$일 때,
$5+y\le12$, 즉 $y\le7$이므로 y는
1, 2, 3, ⋯, 7의 7개

(ii) $x=2$일 때,
$10+y\le12$, 즉 $y\le2$이므로 y는
1, 2의 2개

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$7+2=9$ 답 ⑤

02 전략 두 수의 합이 홀수가 되려면 두 수가 (짝수, 홀수) 또는 (홀수, 짝수)이어야 한다.

풀이 (i) 집합 A의 원소가 짝수이고, 집합 B의 원소가 홀수인 경우의 수는
$2\cdot3=6$

(ii) 집합 A의 원소가 홀수이고, 집합 B의 원소가 짝수인 경우의 수는
$2\cdot2=4$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 $6+4=10$ 답 ①

03 전략 270을 소인수분해한 후 홀수가 되는 조건을 생각한다.

풀이 270을 소인수분해하면 $270=2\cdot3^3\cdot5$

2의 양의 약수 중 홀수는 1의 1개

3^3의 양의 약수 중 홀수는
1, 3, 3^2, 3^3의 4개

5의 양의 약수 중 홀수는
1, 5의 2개

따라서 구하는 홀수의 개수는
$1\cdot4\cdot2=8$ 답 8

04 전략 돌아올 때는 A지점에서 C지점으로 갈 때 지나간 길을 제외한다.

풀이 $A\to B\to C$로 가는 방법의 수는
$5\cdot4=20$ ⋯ ❶

$C\to B\to A$로 가는 방법의 수는 $A\to B$, $B\to C$로 갔던 길을 제외해야 하므로
$(4-1)\cdot(5-1)=12$ ⋯ ❷

따라서 구하는 방법의 수는
$20\cdot12=240$ ⋯ ❸

답 240

채점 기준	비율
❶ $A\to B\to C$로 가는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ $C\to B\to A$로 가는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ $A\to C\to A$로 가는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

05 전략 곱의 법칙을 이용하여 지불하는 방법의 수를 구한다.

풀이 100원짜리 동전을 지불하는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

500원짜리 동전을 지불하는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은
0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$4\cdot3\cdot4-1=47$ 답 ④

06 (전략) 먼저 $_nP_r$를 n에 대한 식으로 나타낸다.

(풀이) $_nP_4-6_nP_3+20_{n-1}P_2=0$에서

$n(n-1)(n-2)(n-3)-6n(n-1)(n-2)$
$+20(n-1)(n-2)=0$ ⋯ ❶

$n\geq4$이므로

$n(n-3)-6n+20=0$

$n^2-9n+20=0,\quad (n-4)(n-5)=0$

$\therefore n=4$ 또는 $n=5$ ⋯ ❷

따라서 구하는 자연수 n의 값의 합은

$4+5=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ n의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

07 (전략) '짝홀짝홀짝홀' 또는 '홀짝홀짝홀짝'으로 나열하는 방법의 수를 구한다.

(풀이) 홀수 1, 3, 5를 나열하는 방법의 수는

$3!=6$ ⋯ ❶

짝수 2, 4, 6을 나열하는 방법의 수는

$3!=6$ ⋯ ❷

각 경우에 대하여 홀수부터 나열하는 경우와 짝수부터 나열하는 경우의 2가지가 있다.

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot6\cdot2=72$ ⋯ ❸

답 72

채점 기준	비율
❶ 홀수를 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 짝수를 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 교대로 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %

08 (전략) f, g 사이에 적어도 1개의 문자가 들어가는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 f, g가 이웃하는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

(풀이) 7개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$7!=5040$

f, g를 한 묶음으로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\quad 6!=720$

그 각각에 대하여 f와 g가 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

이므로 f, g가 서로 이웃하도록 나열하는 방법의 수는

$720\cdot2=1440$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-1440=3600$

답 ③

09 (전략) 만의 자리에 작은 수부터 차례대로 대입하여 각 경우의 자연수의 개수를 구한다.

(풀이) 1□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$4!=24$

2□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $\quad 4!=24$

31□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $\quad 3!=6$

이때 32145는 32□□□ 꼴인 자연수 중에서 가장 작은 자연수이므로

$24+24+6+1=55$(번째)

로 나타난다.

답 ③

10 (전략) n개 중에서 특정한 m개를 반드시 포함하여 r개를 뽑는 방법의 수는 $_{n-m}C_{r-m}$이고, 특정한 m개를 포함하지 않고 r개를 뽑는 방법의 수는 $_{n-m}C_r$이다.

(풀이) 7개의 공 중에서 특정한 1개를 포함하여 5개를 뽑는 방법의 수는 특정한 1개를 제외한 6개에서 4개를 뽑는 방법의 수와 같으므로

$$a={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$

또 7개의 공 중에서 특정한 1개를 포함하지 않는 방법의 수는 특정한 1개를 제외한 6개에서 5개를 뽑는 방법의 수와 같으므로

$b={}_6C_5={}_6C_1=6$

$\therefore a+b=21$

답 21

11 (전략) B와 G를 제외한 나머지 6개의 문자 중에서 2개를 뽑는 조합의 수를 구한 후 B와 G를 포함한 4개의 문자를 B, G가 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수를 구한다.

(풀이) 8개의 문자 중에서 B, G를 포함하여 4개를 뽑는 방법의 수는 B와 G를 제외한 나머지 6개의 문자 중에서 2개를 뽑는 방법의 수와 같으므로

$${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$

B, G를 포함하여 뽑은 4개의 문자 중에서 B, G를 제외한 2개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $2!$이고, 그 사이와 양 끝의 3개의 자리 중에서 2개의 자리에 B, G를 나열하는 방법의 수는 $_3P_2$이므로 B, G가 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수는

$2!\cdot{}_3P_2=2\cdot6=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\cdot12=180$

답 180

다른 풀이 B와 G가 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수는 뽑은 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수에서 B와 G를 서로 이웃하게 나열하는 방법의 수를 뺀 것과 같다.

뽑힌 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

B, G를 한 묶음으로 생각하여 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!$이고, 그 각각의 경우에 대하여 B, G가 자리를 바꾸는 방법의 수가 $2!$이므로 B와 G를 서로 이웃하게 나열하는 방법의 수는

$3!\cdot 2!=6\cdot 2=12$

따라서 B, G가 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수는

$24-12=12$

12 **전략** 원에서 지름에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용하여 직각삼각형의 개수를 구한다.

풀이 6개의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$${}_6C_3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20$$

주어진 점들을 연결하여 만들 수 있는 원의 지름은 3개이고, 오른쪽 그림과 같이 원의 지름 한 개에 대하여 4개의 직각삼각형을 만들 수 있으므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는

$3\cdot 4=12$

따라서 직각삼각형이 아닌 삼각형의 개수는

$20-12=8$ 답 ②

13 **전략** 과일을 3개, 3개, 1개의 세 묶음으로 나눈 후 세 사람에게 분배하는 경우의 수이다.

풀이 과일 7개를 3개, 3개, 1개로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_3\cdot {}_4C_3\cdot {}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}$$
$$=70$$

이것을 A, B, C 세 사람에게 나누어 주는 방법의 수는 $3!$이므로 구하는 방법의 수는

$70\cdot 3!=70\cdot 6=420$ 답 420

14 **전략** A와 C에 같은 색을 칠하는 경우와 다른 색을 칠하는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 방법의 수는

$4\cdot 3\cdot 1\cdot 3=36$

(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 방법의 수는

$4\cdot 3\cdot 2\cdot 2=48$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$36+48=84$ 답 84

15 **전략** a, c가 서로 이웃하는 경우와 c, e가 서로 이웃하는 경우를 구한 후 중복되는 경우를 제외한다.

풀이 (i) a, c가 서로 이웃하는 경우

a, c를 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!$이고, a와 c가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!$이므로

$4!\cdot 2!=48$

(ii) c, e가 서로 이웃하는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면

$4!\cdot 2!=48$

(iii) a와 c, c와 e가 모두 서로 이웃하는 경우

a, c, e가 ace 순서로 서로 이웃하는 경우의 수는

$3!=6$

a, c, e가 eca 순서로 서로 이웃하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 경우의 수는 $6+6=12$

이상에서 구하는 경우의 수는

$48+48-12=84$ 답 84

Remark▶

a, c가 서로 이웃하는 경우의 수와 c, e가 서로 이웃하는 경우의 수에는 각각 a, c, e가 서로 이웃하는 경우의 수가 포함되어 있으므로 a, c, e가 서로 이웃하는 경우의 수를 빼주어야 한다.

이때 a, c 또는 c, e가 서로 이웃하는 경우에서 c는 a와 e 사이에 있어야 하므로 ace 또는 eca의 2가지 경우가 있음에 주의한다.

16 **전략** 조건 (나)를 이용하여 함수 f가 어떤 함수인지 알아낸다.

풀이 조건 (나)에 의하여 함수 f는 일대일함수이고, 조

건 ㈎에 의하여 $f(1)=3$, $f(2)=4$이므로 3, 4를 제외한 Y의 원소 1, 2, 5, 6 중에서 3개를 뽑아 X의 원소 3, 4, 5에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는

$${}_4P_3=24$$

답 24

Remark▶ 일대일함수의 개수

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, $n(m\leq n)$일 때, X에서 Y로의 일대일함수의 개수
➡ 서로 다른 n개에서 m개를 택하는 순열의 수
➡ ${}_nP_m$

17 전략 끝의 두 자리 수가 4의 배수인 수의 개수를 구한다.

풀이 4의 배수인 네 자리 자연수는

□□04, □□12, □□20, □□24,
□□32, □□40

꼴이다.

(i) □□04, □□20, □□40 꼴의 자연수
천의 자리와 백의 자리에는 끝의 두 자리의 숫자를 제외한 3개의 숫자 중 2개를 택하여 나열하면 되므로

$$3\cdot{}_3P_2=18$$

(ii) □□12, □□24, □□32 꼴의 자연수
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 끝의 두 자리의 숫자를 제외한 2가지, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리와 끝의 두 자리의 숫자를 제외한 2가지이므로

$$3\cdot2\cdot2=12$$

(i), (ii)에서 구하는 4의 배수의 개수는

$$18+12=30$$

답 30

18 전략 먼저 ${}_nC_r$를 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\alpha+\beta=\dfrac{6}{5}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{{}_nC_5}{{}_nC_6}=\frac{6}{5} \quad \cdots ❶$$

즉

$$\frac{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{6}{5}$$

이고, $n\geq6$이므로

$$\frac{6}{n-5}=\frac{6}{5} \qquad \therefore n=10 \quad \cdots ❷$$

따라서 주어진 이차방정식은

$${}_{10}C_6x^2-{}_{10}C_5x+{}_{10}C_4=0$$

이므로

$$\alpha\beta=\frac{{}_{10}C_4}{{}_{10}C_6}=\frac{{}_{10}C_4}{{}_{10}C_4}=1 \quad \cdots ❸$$

답 1

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{{}_nC_5}{{}_nC_6}=\dfrac{6}{5}$임을 알 수 있다.	20 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

19 전략 악수를 하려면 2명이 있어야 하므로 n명이 모두 서로 악수를 하였을 때, 악수를 한 총횟수는 ${}_nC_2$이다.

풀이 24명 중에서 악수할 2명을 택하는 방법의 수는

$${}_{24}C_2=\frac{24\cdot23}{2\cdot1}=276$$

부인 12명 중에서 2명을 택하는 방법의 수는

$${}_{12}C_2=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}=66$$

24명 중에서 부부 2명을 택하는 방법의 수는

12

따라서 악수한 총횟수는

$$276-(66+12)=198(\text{번})$$

답 198번

20 전략 치역의 원소만 정해지면 함수를 결정할 수 있다.

풀이 주어진 조건을 만족시키려면 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 3개를 택한 후 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.
즉 함수 f의 개수는 공역의 원소 5개 중에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$$

답 10

Remark▶

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, $n(m\leq n)$일 때, 함수 $f: X\longrightarrow Y$ 중에서 $a<b$이면 $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수 f의 개수
➡ 서로 다른 n개에서 m개를 택하는 조합의 수
➡ ${}_nC_m$

21 전략 1부터 40까지의 홀수를 3으로 나눈 나머지에 따라 분류한다.

풀이 1부터 40까지의 홀수 중에서 3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2인 집합을 각각 A_0, A_1, A_2라 하면

$A_0=\{3, 9, 15, 21, 27, 33, 39\}$,
$A_1=\{1, 7, 13, 19, 25, 31, 37\}$,
$A_2=\{5, 11, 17, 23, 29, 35\}$

두 수의 합이 3의 배수가 되려면 A_0에서 2개의 원소를 뽑거나 A_1과 A_2에서 각각 1개의 원소를 뽑아야 한다.

(i) A_0에서 2개의 원소를 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_2=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=21$$

(ii) A_1과 A_2에서 각각 1개의 원소를 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_1\cdot{}_6C_1=42$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$21+42=63$$

답 ④

22 전략 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수는 ${}_nC_2$, 삼각형의 개수는 ${}_nC_3$이다.

풀이 (i) 12개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

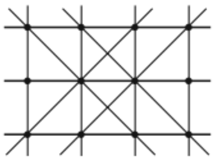
$${}_{12}C_2=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}=66$$

일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_3C_2={}_3C_1=3$$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2=6$$



이때 오른쪽 그림과 같이 일직선 위에 3개의 점이 있는 경우는 8가지이고, 일직선 위에 4개의 점이 있는 경우는 3가지이므로 서로 다른 직선의 개수는

$$66-8\cdot3-3\cdot6+8+3=35$$

$\therefore a=35$ ⋯ ❶

(ii) 12개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_{12}C_3=\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=220$$

이때 일직선 위에 있는 3개의 점을 택하는 방법의 수는

$$8\cdot{}_3C_3+3\cdot{}_4C_3=8\cdot1+3\cdot4=20$$

따라서 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$$220-20=200$$

$\therefore b=200$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서

$$a+b=235$$ ⋯ ❸

답 235

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

23 전략 $x>0$인 집합 X의 원소 x에 대하여 $f(x)=1$, $f(x)=2$, $f(x)=3$인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 $|f(x)+f(-x)|=1$에서

$f(x)+f(-x)=1$ 또는 $f(x)+f(-x)=-1$

$x>0$인 집합 X의 원소 x에 대하여

(i) $f(x)=1$일 때,

$f(-x)=-2$

(ii) $f(x)=2$일 때,

$f(-x)=-3$ 또는 $f(-x)=-1$

(iii) $f(x)=3$일 때,

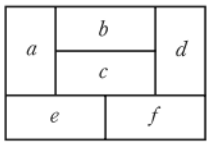
$f(-x)=-2$

이상에서 $f(x)$의 값에 따라 $f(-x)$의 값이 정해지므로 $f(1)$과 $f(-1)$의 값을 정하는 경우의 수는 4이고, $f(2)$와 $f(-2)$의 값을 정하는 경우의 수와 $f(3)$과 $f(-3)$의 값을 정하는 경우의 수도 각각 4이므로 구하는 함수 $f(x)$의 개수는

$$4\cdot4\cdot4=64$$

답 64

24 전략 1명의 조사원이 담당해야 할 이웃한 2개 지역을 먼저 정한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 6개 지역을 각각 a, b, c, d, e, f라 하면 서로 이웃한 2개 지역을 택하는 경우의 수는

$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, e\}$,
$\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{c, e\}$, $\{c, f\}$,
$\{d, f\}$, $\{e, f\}$의 10

서로 이웃한 2개 지역을 조사하는 조사원을 정하는 경우의 수는

$$5$$

나머지 4명의 조사원이 남은 4개 지역을 조사하는 경우의 수는

$$4!=24$$

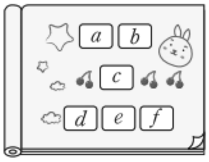
따라서 구하는 경우의 수는

$$10\cdot5\cdot24=1200$$

답 ⑤

25 전략 먼저 A와 B를 이웃하게 배치할 수 있는 자리를 생각한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 6개 빈칸을 각각 a, b, c, d, e, f라 하면 A와 B를 이웃하게 배치하는 경우의 수는



$\{a, b\}$, $\{d, e\}$, $\{e, f\}$의 3

A, B의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

나머지 4개의 빈칸에 C, D, E, F를 배치하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot2\cdot24=144$ 답 ⑤

26 전략 요가를 하는 3일을 선택한 후 수영, 줄넘기 중 한 가지를 하는 하루를 선택하면 남은 하루는 농구, 축구 중 한 가지를 하는 날이다.

풀이 5일 중에서 요가를 하는 3일을 선택하는 경우는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$$

요가를 하지 않는 2일 중 하루를 선택하여 수영, 줄넘기 중 한 가지를 하는 경우의 수는

${}_2C_1\cdot{}_2C_1=2\cdot2=4$

남은 하루에 농구, 축구 중 한 가지를 하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

따라서 구하는 계획의 가짓수는

$10\cdot4\cdot2=80$ 답 ④

27 전략 사각형의 네 꼭짓점이 각각 위치해야 하는 점을 조사한다.

풀이 주어진 삼각형을 포함하는 사각형의 네 꼭짓점은 다음과 같이 택하면 된다.

(i) 원점 $(0, 0)$

(ii) x축 위의 점 $(4, 0)$, $(8, 0)$ 중 한 점

(iii) y축 위의 점 $(0, 4)$, $(0, 8)$ 중 한 점

(iv) 제1사분면 위의 점 $(4, 4)$, $(4, 8)$, $(8, 4)$, $(8, 8)$ 중 한 점

이상에서 조건을 만족시키는 사각형의 꼭짓점이 될 4개의 점을 택하는 방법의 수는

$1\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_4C_1=1\cdot2\cdot2\cdot4=16$

그런데 네 점 $(0, 0)$, $(8, 0)$, $(4, 4)$, $(0, 8)$을 택하는 경우는 사각형을 만들 수 없으므로 구하는 사각형의 개수는

$16-1=15$ 답 ②

MEMO