Solution

Lecture Book

Ⅰ 수열의 극한

Ⅱ 미분법

Ⅲ 적분법

Work Book

Ⅰ 수열의 극한

Ⅱ 미분법

Ⅲ 적분법

빠른 정답 찾기 Lecture Book

01 수열의 극한

6쪽 Lecture 01 1-1 (1) 3 (2) 5 (3) 1 (4) 0
2-1 (1) 양의 무한대로 발산 (2) 음의 무한대로 발산
2-2 (1) 발산(진동) (2) 수렴, 1

7쪽 Lecture 02 1-1 (1) 1 (2) -5 (3) -12 (4) -1
1-2 (1) $5-\alpha$ (2) $2\alpha-3\beta$ (3) $\alpha\beta^2$ (4) $\frac{2\alpha-1}{3\beta}$
1-3 (1) 1 (2) 5 (3) 2 (4) $\frac{2}{7}$

8쪽 유형 Q+Q 01 ⑤ 02 ⑤ 03 1 04 10
05 -2 06 ②

9쪽 Lecture 03 1-1 (1) 수렴, -3 (2) 수렴, 0 (3) 발산 (4) 발산
2-1 (1) 발산 (2) 발산 (3) 수렴, $\frac{1}{2}$ (4) 발산

10쪽 Lecture 04 1-1 2, 2 1-2 (1) 4 (2) 2 1-3 0

11쪽 유형 Q+Q 01 ④ 02 ② 03 ④ 04 3
05 ① 06 $\frac{7}{8}$ 07 3 08 ④ 09 ② 10 $\frac{1}{8}$
11 6 12 ③

13쪽 Lecture 05 1-1 (1) 수렴 (2) 발산 (3) 발산 (4) 수렴
1-2 (1) 발산 (2) 수렴 2-1 (1) $-\frac{1}{4}<r\le\frac{1}{4}$ (2) $-2\le r<2$
2-2 (1) $4<r\le 6$ (2) $-4<r\le 2$

14쪽 유형 Q+Q 01 ㄱ, ㄷ 02 ① 03 ③ 04 -7
05 ④ 06 ④ 07 $1<x<\frac{5}{3}$ 08 1 09 ⑤
10 ③ 11 $\frac{1}{2}$

16쪽 중단원 마무리 01 ④ 02 76 03 ③ 04 ③
05 ③ 06 ① 07 ② 08 110 09 ② 10 ①
11 -15 12 ③ 13 ⑤ 14 12 15 ① 16 ③
17 ③

02 급수

20쪽 Lecture 06 1-1 (1) 4 (2) 1
2-1 (1) $S_n=n^2$ (2) 발산 2-2 (1) 수렴, 2 (2) 발산

21쪽 Lecture 07 1-1 $\frac{n}{n+2}$, 1, 0 1-2 풀이 21쪽
2-1 (1) 2 (2) 6 (3) 6 (4) 25

22쪽 유형 Q+Q 01 $-\frac{2}{3}$ 02 $\frac{5}{6}$ 03 $\frac{1}{4}$ 04 ④
05 1 06 1 07 수렴, 1 08 ④ 09 2 10 21
11 ④ 12 ⑤ 13 3 14 ②

24쪽 Lecture 08 1-1 (1) 수렴, 1 (2) 수렴, $\frac{5}{7}$ (3) 발산
(4) 수렴, $2+\sqrt{3}$
1-2 (1) $\frac{9}{4}$ (2) $-\frac{3}{7}$ (3) $\frac{5}{3}$ (4) $-\frac{5}{6}$
2-1 (1) $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ (2) $1<x<3$ (3) $-4<x<4$

25쪽 Lecture 09 1-1 (1) $a_1=16\pi$, $a_2=4\pi$, $a_3=\pi$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{64}{3}\pi$
2-1 (1) $\frac{7}{37}$ (2) $\frac{13}{30}$ (3) $\frac{137}{90}$

26쪽 유형 Q+Q 01 ④ 02 4 03 12 04 ⑤
05 ④ 06 4 07 ④ 08 2 09 $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$
10 $\frac{\sqrt{3}}{7}$ 11 3 12 $24(\sqrt{2}+1)$ 13 $\frac{4}{3}$ 14 ⑤
15 ② 16 ④

29쪽 중단원 마무리 01 ③ 02 $\frac{3}{8}$ 03 ③ 04 1
05 ① 06 ③ 07 ② 08 ② 09 ④ 10 ③
11 ③ 12 ① 13 ① 14 $-\frac{4}{9}$ 15 ② 16 37
17 $\frac{16}{3}(\pi-2)$ 18 ③

03 지수함수와 로그함수의 미분

34쪽 Lecture 10 1-1 (1) 8 (2) 0 (3) ∞ (4) ∞
1-2 (1) -4 (2) ∞ 2-1 (1) 1 (2) ∞ 2-2 (1) -1 (2) $-\infty$

35쪽 **Lecture 11** **1-1** (1) 0 (2) ∞ (3) ∞ (4) $-\infty$

1-2 (1) $-\infty$ (2) ∞ **2-1** (1) $-\infty$ (2) 2 **2-2** (1) 0 (2) $\log 8$

36쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** ② **03** 1 **04** ③

05 $\log 3$ **06** ⑤

37쪽 **Lecture 12** **1-1** (1) e (2) e (3) $\frac{1}{e}$ (4) $e^{-\frac{1}{5}}$

2-1 (1) 4 (2) $\frac{1}{2}$ **3-1** (1) 4 (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{7\ln 7}$ (4) $\ln 6$

38쪽 **유형 Q+Q** **01** $e^{12}+\frac{1}{e^3}$ **02** ③ **03** $\frac{1}{e^3}$ **04** 4

05 ② **06** 2 **07** ② **08** $\frac{1}{4\ln 3}$ **09** ② **10** ⑤

11 $\frac{4}{3}$ **12** $\ln 2$ **13** ③ **14** ② **15** ④ **16** 2

17 $\ln 15$ **18** ④ **19** 3

41쪽 **Lecture 13** **1-1** (1) $y'=8e^x$ (2) $y'=e^{x+3}$ (3) $y'=4\ln 6\cdot 6^x$
(4) $y'=3\ln 3\cdot 3^x$

1-2 (1) $y'=(x+2)e^x$ (2) $y'=x(x+2)e^x$ (3) $y'=3\left(1+x\ln\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^x$
(4) $y'=2^x\{(x+4)\ln 2+1\}$

2-1 (1) $y'=\frac{9}{x}$ (2) $y'=-\frac{1}{x}$ (3) $y'=-\frac{4}{x\ln 2}$ (4) $y'=\frac{1}{x\ln 10}$

2-2 (1) $y'=\frac{3}{x}$ (2) $y'=\ln x+1$ (3) $y'=\log_7 x+\frac{1}{\ln 7}$
(4) $y'=e^x\left(\log_6 x+\frac{1}{x\ln 6}\right)$

42쪽 **유형 Q+Q** **01** ⑤ **02** ④ **03** ③ **04** 2

05 $a=e^5$, $b=1$ **06** $\frac{2}{3}$

43쪽 **중단원 마무리** **01** ④ **02** -1 **03** 3 **04** ①

05 ① **06** ① **07** 4 **08** $4-\ln 5$ **09** ⑤ **10** ③

11 ⑤ **12** $\ln 3\sqrt{2}$ **13** ③ **14** -36 **15** ① **16** ①

17 $3\ln 3$ **18** -1 **19** ②

04 삼각함수의 미분

46쪽 **Lecture 14** **1-1** (1) $\frac{5}{4}$ (2) $-\frac{5}{3}$ (3) $-\frac{3}{4}$

1-2 (1) $\csc\theta=\sqrt{2}$, $\sec\theta=\sqrt{2}$, $\cot\theta=1$
(2) $\csc\theta=-2$, $\sec\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\cot\theta=\sqrt{3}$
(3) $\csc\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sec\theta=-2$, $\cot\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$
(4) $\csc\theta=-2$, $\sec\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\cot\theta=-\sqrt{3}$

2-1 (1) $-\frac{\sqrt{7}}{3}$ (2) $-\frac{\sqrt{10}}{3}$ **2-1** $\frac{15}{4}$

47쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ **03** ⑤

04 $2\csc\theta\sec\theta$ **05** $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **06** ④

48쪽 **Lecture 15** **1-1** (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
(3) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (4) $2-\sqrt{3}$ **2-1** (1) $\frac{24}{25}$ (2) $-\frac{7}{25}$ (3) $-\frac{24}{7}$

3-1 (1) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ (2) $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ (3) $2\sin\left(\theta+\frac{11}{6}\pi\right)$

49쪽 **유형 Q+Q** **01** $\frac{63}{65}$ **02** ② **03** ② **04** $\frac{\pi}{3}$

05 $\frac{3}{4}$ **06** 18 **07** $-\frac{13}{16}$ **08** ③ **09** ③ **10** $-\frac{4}{3}\pi$

11 ⑤ **12** 15

51쪽 **Lecture 16** **1-1** (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) -1 (3) $\sqrt{3}$

2-1 (1) 4 (2) $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{4}$

3-1 (1) $y'=\cos x$ (2) $y'=1+2\sin x$ (3) $y'=-\cos x-3\sin x$
(4) $y'=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{x}$

52쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** $2\sqrt{2}$ **03** 4 **04** ⑤

05 ② **06** ④ **07** $\frac{1}{4}$ **08** 3 **09** -1 **10** ④

11 ③ **12** ③ **13** 2 **14** ② **15** 1 **16** ④

17 ② **18** $\frac{5}{2}\pi$ **19** -1 **20** -3π **21** ④ **22** 5

55쪽 **중단원 마무리** **01** ④ **02** ③ **03** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **04** ③

05 ⑤ **06** ④ **07** $-\frac{31}{25}$ **08** $\frac{20}{3}$ **09** ⑤ **10** ②

11 5 **12** ④ **13** 8 **14** $\frac{\pi}{2}$ **15** $\frac{3}{2}$ **16** 30

17 ⑤ **18** 0 **19** ⑤ **20** ③

05 여러 가지 미분법

58쪽 **Lecture 17** **1-1** (1) $y'=-\frac{1}{(x-1)^2}$ (2) $y'=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$

(3) $y'=\frac{13}{(2x+1)^2}$ (4) $y'=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$

2-1 (1) $y'=-\frac{1}{x^2}$ (2) $y'=-\frac{12}{x^5}$ (3) $y'=3x^2+\frac{3}{x^4}$

(4) $y'=-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}-\frac{20}{x^6}$

3-1 (1) $y'=3\cos x-\sec^2 x$ (2) $y'=\sec x\tan x+5\csc x\cot x$

(3) $y'=-\cos x-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ (4) $y'=\frac{2\sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$

59쪽 **Lecture 18** **1-1** (1) $y'=6(2x-3)^2$ (2) $y'=5e^{5x}$

(3) $y'=6^{x^3-1}\cdot 3x^2\ln 6$ (4) $y'=4\cos(4x-5)$

2-1 (1) $y'=\frac{3x^2-5}{x^3-5x+3}$ (2) $y'=\frac{2}{(2x-7)\ln 2}$ (3) $y'=\cot x$

(4) $y'=\frac{e^x}{(e^x+1)\ln 3}$

3-1 (1) $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ (2) $y'=-\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$ (3) $y'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$ (4) $y'=-\frac{\pi}{x^{\pi+1}}$

60쪽 **유형 Q+Q** **01** $-\frac{1}{12}$ **02** ③ **03** $\frac{9}{2}$ **04** ④

05 ① **06** 2 **07** ① **08** ③ **09** $\frac{2}{3}$ **10** ②

11 $-\frac{1}{2}$ **12** ② **13** ② **14** 1 **15** 30 **16** ③

17 $\frac{3}{2}$ **18** ②

63쪽 **Lecture 19** **1-1** $4t$, $4t$, $-4t$

1-2 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{2t^2+1}{2t^3}$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1}$ (3) $\frac{dy}{dx}=-\tan t$

64쪽 **Lecture 20** **1-1** y, y, $-\frac{y}{x}$

1-2 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ (2) $\frac{dy}{dx}=10xy$

65쪽 **Lecture 21** **1-1** (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}$

1-2 a, 1, 1, 1, 1, $\frac{1}{3}$

2-1 (1) $y''=12x^2-12x$ (2) $y''=\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$ (3) $y''=16e^{-4x}$

(4) $y''=-25\sin 5x$

66쪽 **유형 Q+Q** **01** $\frac{1}{2}$ **02** ④ **03** ② **04** -2

05 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **06** ③ **07** ② **08** $\frac{1}{3}$ **09** ④ **10** 2

11 ③

68쪽 **중단원 마무리** **01** 2 **02** ② **03** -8 **04** ④

05 ④ **06** ③ **07** ④ **08** ③ **09** 93 **10** ③

11 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **12** π **13** ④ **14** ⑤ **15** 4 **16** ③

17 15 **18** 5 **19** 1

06 도함수의 활용 (1)

72쪽 **Lecture 22** **1-1** (1) $y=-x+3$ (2) $y=\frac{1}{4}x+1$

(3) $y=x+\ln 5-1$ (4) $y=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+1$

2-1 (1) $y=x$ (2) $y=-x+\pi$ **3-1** (1) $y=\frac{1}{e^2}x+1$ (2) $y=ex$

73쪽 **유형 Q+Q** **01** ④ **02** 6 **03** ③ **04** ④

05 $\frac{\pi}{2}$ **06** 3 **07** ② **08** 2 **09** ① **10** ④

11 (1) $-\frac{1}{e}$ (2) $y=\frac{1}{e}x+\frac{2}{e}$ **12** 1 **13** -1

14 $y=-\pi x+\frac{\pi}{2}$ **15** ④

75쪽 **Lecture 23** **1-1** (1) $f'(x)=2-e^x$ (2) $\ln 2$

(3)

x	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$2\ln 2-2$	↘

(4) 구간 $(-\infty, \ln 2]$에서 증가하고, 구간 $[\ln 2, \infty)$에서 감소한다.

1-2 (1) 구간 $(-\infty, -2]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-2, 0)$, $(0, 2]$에서 감소한다.

(2) 구간 $(-\infty, 3]$에서 감소하고, 구간 $[3, \infty)$에서 증가한다.

(3) 구간 $(-\infty, -2]$, $[0, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-2, 0]$에서 감소한다.

(4) 구간 $(-3, e-3]$에서 증가하고, 구간 $[e-3, \infty)$에서 감소한다.

1-3 (1) 구간 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{5}{6}\pi, \pi\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$에서 감소한다.

(2) 구간 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$에서 증가하고, 구간 $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right)$에서 감소한다.

76쪽 **Lecture 24** **1-1**

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

,

$x=-1$에서 극솟값 $-\frac{1}{2}$, $x=1$에서 극댓값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

1-2 (1) 극댓값: -1 (2) 극솟값: 4

2-1 (1) $f'(x)=3x^2+12x$, $f''(x)=6x+12$

(2) $f''(-4)<0$, $f''(0)>0$ (3) 극댓값: 31, 극솟값: -1

2-2 (1) 극솟값: $-\frac{2}{e}$ (2) 극댓값: 1

77쪽 유형 Q+Q **01** ② **02** -12 **03** -1 **04** $a\geq 2$
05 ⑤ **06** 1 **07** 2 **08** 4 **09** ② **10** -35
11 -1 **12** ④ **13** $k\leq -2$ 또는 $k\geq 2$ **14** ③
15 $k<-5$ 또는 $k>5$ **16** 4

79쪽 중단원 마무리 **01** ① **02** 34 **03** ④ **04** ③
05 ① **06** 26 **07** ⑤ **08** 3 **09** ①
10 $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ **11** 4 **12** 2 **13** ③ **14** ②
15 $\frac{4}{5}$ **16** ④ **17** ③ **18** ② **19** $a\geq 0$ **20** ③

07 도함수의 활용 (2)

82쪽 Lecture 25 **1-1** (1) 구간 $(-\infty, 1)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(1, \infty)$에서 아래로 볼록하다.

(2) 구간 $(-\infty, 0)$ 또는 $(1, \infty)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(0, 1)$에서 아래로 볼록하다.

(3) 구간 $(-\infty, -2)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(-2, \infty)$에서 아래로 볼록하다.

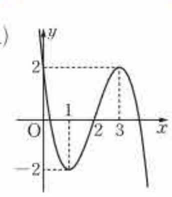
(4) 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 위로 볼록하고, 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$에서 아래로 볼록하다.

2-1 (1) $(0, 2)$ (2) $(0, -3)$, $(2, -19)$ (3) $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$, $\left(1, \frac{1}{4}\right)$

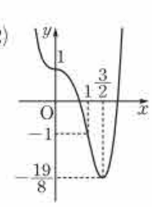
(4) $(-2, \ln 8)$, $(2, \ln 8)$

83쪽 Lecture 26 **1-1** -1, $\sqrt{3}$, -1, $\sqrt{3}$, -1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=0$

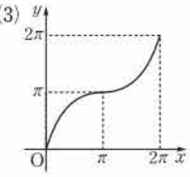
1-2 (1)



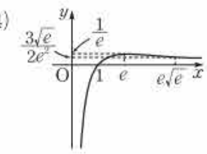
(2)



(3)



(4)



84쪽 Lecture 27 **1-1** (1) 최댓값: 2, 최솟값: 0

(2) 최댓값: 1, 최솟값: $-2e^3$ (3) 최댓값: $\frac{1}{6}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$

(4) 최댓값: π, 최솟값: $-\pi$

2-1 (1) $t>0$ (2) $2te^{-t}$ (3) $\frac{2}{e}$

85쪽 유형 Q+Q **01** ① **02** $a\geq 6$ **03** 4 **04** ①
05 ③ **06** 18 **07** ⑤ **08** ④ **09** ③ **10** 4
11 66 **12** ② **13** ③ **14** 3π **15** 8 **16** ②
17 $\frac{1}{e}$ **18** 3

88쪽 Lecture 28 **1-1** (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 2

1-2 $k<1$이면 0, $k=1$이면 1, $k>1$이면 2

2-1 (가) e^x-1 (나) 0 (다) 0 **2-2** 풀이 74쪽

89쪽 유형 Q+Q **01** 1 **02** $-\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}<k\leq -2$
03 ⑤ **04** $0<a\leq \frac{1}{2e}$ **05** $-e$ **06** $k\geq -6$
07 ② **08** $-e^2<m\leq 0$

90쪽 Lecture 29 **1-1** (1) 속도: $\frac{8}{9}$, 가속도: $\frac{2}{27}$

(2) 속도: $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 가속도: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2-1 (1) 속도: $(2, 5)$, 가속도: $(0, 2)$

(2) 속도: $(1+e, 3-e)$, 가속도: $(e, -e)$

2-2 속력: $\frac{\sqrt{15}}{2}$, 가속도의 크기: $\frac{\sqrt{17}}{2}$

91쪽 유형 Q+Q **01** -8 **02** ② **03** $2\sqrt{5}$ **04** 4
05 ② **06** $\sqrt{7}$

92쪽 중단원 마무리 **01** ① **02** 3 **03** 96 **04** ①
05 4 **06** 5 **07** ③ **08** $\frac{1}{e^3}$ **09** ② **10** $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$
11 2 **12** ⑤ **13** $-\frac{3}{2}$ **14** ③ **15** $\frac{1}{e}$ **16** ③
17 ⑤ **18** 2

08 여러 가지 적분법

98쪽 **Lecture 30** **1-1** (1) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$ (2) $-\frac{1}{x}+C$

(3) $6\ln|x|+C$ (4) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$

1-2 (1) $4\ln|x|-\frac{1}{3x^3}+C$ (2) $\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt{x}+C$

(3) $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{8}{3}x\sqrt{x}+C$ (4) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+C$

99쪽 **Lecture 31** **1-1** (1) $3e^x+C$ (2) $e^{x+2}+C$ (3) $-\frac{1}{2^x\ln 2}+C$

(4) $\frac{5^x}{5\ln 5}+C$ (5) e^x+2x+C (6) $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$

2-1 (1) $-\cos x-2\sin x+C$ (2) $3\tan x-\cot x+C$ (3) $-\csc x+C$

(4) $\sec x+\cos x+C$ (5) $-\csc x+\cot x+C$ (6) $\tan x-x+C$

100쪽 **유형 Q+Q** **01** ② **02** $-\frac{13}{5}$ **03** ④ **04** ③

05 $f(x)=5x-3\tan x+3$ **06** $\pi+7$

101쪽 **Lecture 32** **1-1** (가) $\frac{t+1}{2}$ (나) $\frac{1}{2}$ (다) $\frac{1}{12}$

1-2 (1) $\frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C$ (2) $\frac{1}{4}e^{4x-3}+C$

2-1 (가) $2x-1$ (나) x^2-x+2

2-2 (1) $\ln|x^3+1|+C$ (2) $-\ln|\cos x|+C$

102쪽 **Lecture 33** **1-1** (1) $x+\ln|x+1|+C$ (2) $3x+2\ln|x-1|+C$

1-2 (1) $\frac{1}{2}x^2-3x+\ln|x+3|+C$ (2) $\frac{1}{2}x^2+x-\ln|x+2|+C$

2-1 (1) $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$ (2) $\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

2-2 (1) $a=2,\ b=1$ (2) $\ln|(x+1)^2(x+2)|+C$

103쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** $\sqrt{6}$ **03** 3 **04** ②

05 ④ **06** 1 **07** $\frac{1}{3}$ **08** ② **09** -1 **10** ②

11 ⑤ **12** 0 **13** $f(x)=\ln|x^3+2x+1|+5$ **14** ⑤

15 ④ **16** $2\ln 2-1$ **17** ① **18** ④

106쪽 **Lecture 34** **1-1** $\sin x,\ -\cos x,\ \cos x,\ -\cos x,$

$-x\cos x+\sin x$

1-2 (1) xe^x-e^x+C (2) $x\ln x-x+C$

2-1 $\cos x,\ \sin x,\ \sin x,\ \sin x,\ -\cos x,\ (x^2-2)\sin x+2x\cos x$

107쪽 **유형 Q+Q** **01** ② **02** ②

03 $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$ **04** $f(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x-1$

108쪽 **중단원 마무리** **01** 13 **02** ③ **03** ① **04** ④

05 ⑤ **06** 10 **07** 4 **08** ⑤

09 $\frac{2\sqrt{2}}{3\ln 5}$ **10** $\frac{5}{2}$ **11** ① **12** ⑤ **13** 2 **14** ②

15 $-2x+6\ln|x+1|+C$ **16** ② **17** ④ **18** ②

19 ②

09 정적분

112쪽 **Lecture 35** **1-1** (1) $\frac{16}{3}$ (2) $\ln 7$ (3) 1 (4) 1

2-1 (1) 27 (2) $2\left(e^2-\frac{1}{e}\right)$ (3) 2π **3-1** (1) 0 (2) $2\left(e-\frac{1}{e}\right)$

113쪽 **유형 Q+Q** **01** ① **02** 3 **03** ③ **04** 25

05 ③ **06** $2+\frac{3}{2}\pi$ **07** ① **08** $2(\sqrt{2}-1)$ **09** $\frac{2}{3}\pi^3$

10 ① **11** ② **12** 0

115쪽 **Lecture 36** **1-1** (1) $\frac{38}{3}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) $\frac{e^4-e}{3}$ (4) $\frac{9}{64}$

2-1 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ **3-1** (1) 1 (2) 2

116쪽 **유형 Q+Q** **01** ② **02** ③ **03** ② **04** $\sqrt{3}$

05 3 **06** ③ **07** ① **08** $\frac{2}{3}$ **09** ① **10** ④

11 $\frac{7}{4}e^6-\frac{1}{4}$ **12** 1

118쪽 **Lecture 37** **1-1** (1) $\frac{3x-4}{x^2+4x+5}$ (2) $x\cos x$ (3) $\ln\frac{x+2}{x}$

(4) $e^x\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$

1-2 (1) $f(x)=\sin x+\cos x$ (2) $f(x)=\frac{1}{x}-e^x$

2-1 (1) 4 (2) e (3) e^2 (4) $\pi-1$ **2-2** $\sqrt{5}$

119쪽 **유형 Q+Q** **01** $f(x)=\ln x+2-3\ln 3$ **02** ③

03 6 **04** ② **05** 4 **06** ③ **07** $\frac{1}{4}$ **08** ④

09 $\frac{47}{10}$ **10** $-3\ln 3$ **11** ③ **12** ① **13** 3π

121쪽 **중단원 마무리** **01** ② **02** ④ **03** $\sqrt{3}-1$

04 $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$ **05** $e^4-\frac{1}{e^4}$ **06** 6 **07** 4 **08** ④

09 $\frac{2}{3}$ **10** ① **11** $\frac{2}{3}\pi-2$ **12** ⑤ **13** ③ **14** ④

15 ④ **16** $-\frac{3}{4}$ **17** 2 **18** ⑤ **19** ⑤

10 정적분의 활용

124쪽 **Lecture 38** **1-1** (가) $\frac{1}{n}$ (나) $\frac{k}{n}$ (다) 1 (라) $\frac{1}{3}$

1-2 (1) 2 (2) $\frac{21}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{4}{\pi}$

125쪽 **유형 Q+Q** **01** 12 **02** ③ **03** e^2-e **04** ④

05 $\frac{4}{3}$ **06** $\frac{98}{3}$

126쪽 **Lecture 39** **1-1** (1) $\frac{16}{3}$ (2) 2 **1-2** (1) $\ln 2$ (2) 18

2-1 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $2\sqrt{2}-2$

127쪽 **유형 Q+Q** **01** ① **02** ③ **03** $\frac{5}{2}$ **04** ③

05 $e+\frac{1}{e}-2$ **06** 2 **07** $2\ln 2-1$ **08** ③

09 ① **10** ③ **11** ① **12** 18 **13** $\frac{16}{9}$ **14** $-\frac{4}{\pi^2}$

15 ④ **16** ③ **17** ② **18** $e+\frac{1}{2}$

130쪽 **Lecture 40** **1-1** (1) 45 (2) e^2+11 **1-2** $\frac{14}{3}$ cm^3

1-3 (가) $\frac{\sqrt{3}}{4}\sin x$ (나) π (다) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

131쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** 205 **03** $\frac{128}{3}$ **04** ②

132쪽 **Lecture 41** **1-1** (1) 2 (2) $2-\sqrt{2}$ (3) 4

2-1 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\frac{3}{2}$ **3-1** (1) 30 (2) π

133쪽 **유형 Q+Q** **01** ① **02** 4 **03** ③ **04** 2

05 ② **06** 4

107쪽 **중단원 마무리** **01** 6 **02** $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ **03** ①

04 $\ln 2$ **05** ② **06** 4 **07** $\frac{1}{3}$ **08** $-\frac{1}{4}$ **09** ①

10 ② **11** ① **12** ① **13** ① **14** 108π **15** ②

16 4 **17** -36 **18** ⑤ **19** 56

01 수열의 극한

W 2쪽 **01 수열의 극한**

01 (1) 수렴, 0 (2) 음의 무한대로 발산 (3) 양의 무한대로 발산 (4) 발산(진동)
02 (1) 1 (2) 9 (3) 4 (4) -5 **03** (1) -2 (2) 1 (3) 3 **04** 3
05 ⑤ **06** ② **07** ③ **08** -5 **09** ② **10** -3
11 4 **12** ④ **13** ⑤

W 4쪽 **02 수열의 극한값의 계산**

01 (1) 수렴, 3 (2) 발산 (3) 수렴, 2 (4) 수렴, $\frac{2}{3}$ **02** 10 **03** 0
04 ③ **05** 3 **06** ③ **07** 2 **08** ③ **09** $\frac{1}{3}$
10 ① **11** 4 **12** ③ **13** $-\sqrt{2}$ **14** ④ **15** ⑤
16 2 **17** ⑤ **18** -1 **19** ① **20** 1 **21** ④
22 -5 **23** ④ **24** 2 **25** ② **26** ②

W 8쪽 **03 등비수열의 극한**

01 (1) 수렴, 0 (2) 발산 (3) 수렴, 0 (4) 발산 **02** ④ **03** ⑤
04 ③ **05** 5 **06** ③ **07** 3 **08** $\frac{\pi}{3}$ **09** ④
10 ④ **11** 3 **12** ② **13** $\frac{1}{6}$ **14** ④

02 급수

W 10쪽 **04 급수의 수렴과 발산**

01 (1) 2 (2) 4 **02** (1) 발산 (2) 수렴, 1 (3) 발산 **03** 풀이 120쪽
04 (1) 1 (2) -3 (3) 7 (4) -7 **05** $\frac{2}{3}$ **06** ③ **07** ④
08 $\frac{3}{4}$ **09** 2 **10** $\frac{1}{4}$ **11** 3 **12** ① **13** 1
14 발산 **15** ② **16** 2 **17** ④ **18** -12 **19** ②
20 ② **21** ⑤ **22** 6 **23** -1 **24** ③ **25** ⑤

W 14쪽 **05 등비급수**

01 (1) 수렴, $\frac{10}{9}$ (2) 발산 **02** (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{8}{3}$ (3) $\frac{11}{2}$ (4) $-\frac{2}{7}$
03 (1) $-1<x<1$ (2) $-3<x<7$
04 (1) $\overline{BC}=1$, $\overline{B_1C_1}=\frac{1}{2}$, $\overline{B_2C_2}=\frac{1}{4}$ (2) 2
05 (가) $\frac{41}{100}$ (나) $\frac{1}{100}$ (다) $\frac{41}{99}$ **06** (1) $\frac{56}{111}$ (2) $\frac{13}{18}$ (3) $\frac{32}{15}$
07 13 **08** ① **09** ③ **10** ⑤ **11** 3 **12** ①

13 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ **14** ⑤ **15** ④ **16** ① **17** 2
18 ④ **19** $\left(\frac{6}{13}, \frac{9}{13}\right)$ **20** $\frac{8}{3}$ **21** ③ **22** ③
23 $2+\sqrt{3}$ **24** 4 **25** ④ **26** 9π **27** ① **28** ⑤
29 41

03 지수함수와 로그함수의 미분

W 19쪽 **06 지수함수와 로그함수의 극한**

01 (1) 2 (2) ∞ (3) $-\infty$ (4) 0 **02** (1) $-\infty$ (2) ∞ (3) 0 (4) -1
03 3 **04** -2 **05** ② **06** ⑤ **07** 64 **08** ④

W 20쪽 **07 무리수 e와 자연로그**

01 (1) $e^{\frac{1}{5}}$ (2) $e^{-\frac{1}{3}}$ (3) 2 (4) -3 (5) $-\frac{5}{\ln 2}$ (6) $\ln 3$ **02** ④
03 ③ **04** 12 **05** $\frac{1}{e^{10}}$ **06** ③ **07** 3 **08** ⑤
09 5 **10** 2 **11** ④ **12** ① **13** -6 **14** $\frac{55}{\ln 10}$
15 ③ **16** ① **17** $-\frac{3}{\ln 2}$ **18** ⑤ **19** ③ **20** 6
21 $\frac{1}{3\ln 2}$ **22** ④ **23** 9 **24** ② **25** $\frac{3}{2\ln 3}$ **26** $2\ln 2$
27 ⑤ **28** 2 **29** ④

W 24쪽 **08 지수함수와 로그함수의 미분**

01 (1) $y'=e^{x-2}$ (2) $y'=(2x+1)e^{x}$ (3) $y'=54\ln 3\cdot 3^{2x}$
(4) $y'=6x\cdot 5^{x}(2+x\ln 5)$
02 (1) $y'=\frac{1}{x}$ (2) $y'=-e^{-x}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$ (3) $y'=\frac{1}{x\ln 3}$ (4) $y'=\frac{2\log_2 x}{x\ln 2}$
03 ⑤ **04** ① **05** ③ **06** 3 **07** $3e^{2}$ **08** ⑤
09 $\frac{1}{2\ln 3}$ **10** $\frac{3}{2}e^{3}$ **11** ① **12** 5 **13** ④ **14** ⑤

04 삼각함수의 미분

W 26쪽 **09 삼각함수**

01 (1) $\csc\theta=2$, $\sec\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\cot\theta=\sqrt{3}$
(2) $\csc\theta=\sqrt{2}$, $\sec\theta=-\sqrt{2}$, $\cot\theta=-1$
(3) $\csc\theta=-2$, $\sec\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\cot\theta=-\sqrt{3}$
(4) $\csc\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sec\theta=-2$, $\cot\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

02 (1) $-\sqrt{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ **03** ⑤ **04** 41 **05** ② **06** ⑤

07 ① **08** ② **09** ③ **10** ② **11** $\frac{18}{5}$ **12** ①

W 28쪽 10 삼각함수의 덧셈정리

01 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$ **02** (1) $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ (2) $-\frac{1}{9}$ (3) $4\sqrt{5}$

03 (1) $2\cos\left(\theta-\frac{5}{3}\pi\right)$ (2) $2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{3}{4}\pi\right)$ **04** ③ **05** $\frac{1}{5}$

06 ② **07** 2 **08** ① **09** $\frac{\pi}{3}$ **10** ①

11 $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}$ **12** 31 **13** ⑤ **14** $\frac{3}{4}$ **15** -3

16 ④ **17** $-\frac{1}{3}$ **18** ④ **19** ④ **20** $2\sqrt{7}$ **21** $6\sqrt{2}$

W 31쪽 11 삼각함수의 극한과 미분

01 (1) 1 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{2}$ **02** (1) 3 (2) 1 (3) $\frac{4}{5}$ (4) 4

03 (1) $y'=3\cos x-2$ (2) $y'=-\sin x+\frac{1}{x}$ (3) $y'=e^x(\sin x+\cos x)$

(4) $y'=x^2(3\cos x-x\sin x)$

04 ① **05** -2 **06** 3 **07** ⑤ **08** $-\frac{1}{3}$ **09** ④

10 ④ **11** 10 **12** ① **13** -4 **14** ② **15** 2

16 ② **17** ④ **18** $\frac{29}{2}$ **19** -4 **20** 2 **21** $\frac{1}{180}$

22 ② **23** ② **24** ② **25** $\frac{3}{2}$ **26** ① **27** 8

28 ① **29** 8 **30** 4 **31** ② **32** ② **33** 5

34 ① **35** $\frac{\pi}{4}$ **36** ⑤ **37** $-\frac{1}{2}$ **38** ② **39** ④

40 3 **41** ③ **42** ④ **43** $\frac{1}{e^2}+1$

05 여러 가지 미분법

W 37쪽 12 여러 가지 미분법 (1)

01 (1) $y'=\frac{-4x-2}{(x^2+x+1)^2}$ (2) $y'=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ (3) $y'=\frac{15}{x^6}$ (4) $y'=1-\frac{3}{x^4}$

(5) $y'=\sec x(\tan x+2\sec x)$ (6) $y'=x\csc x(2-x\cot x)$

02 (1) $y'=-\frac{8}{(2x+1)^5}$ (2) $y'=2(2x+3)(x+1)(x-1)$

(3) $y'=3\sin^2 x\cos x$ (4) $y'=-\sin(\sin x)\cos x$ (5) $y'=\frac{2^x\ln 2}{2^x+5}$

(6) $y'=\frac{2x-1}{(x^2-x+1)\ln 2}$ (7) $y'=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$ (8) $y'=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

03 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ **04** 2 **05** ① **06** ② **07** -1 **08** ③

09 ① **10** -1 **11** ④ **12** 1 **13** ⑤ **14** $-\frac{2}{e^2}$

15 ① **16** 3 **17** ⑤ **18** 12 **19** ④ **20** 3

21 $\frac{1}{2e^2}$ **22** ② **23** 6 **24** $-\frac{5}{2}$ **25** ④ **26** 1

27 ③ **28** -1 **29** ⑤

W 41쪽 13 여러 가지 미분법 (2)

01 (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3t}\,(t\neq 0)$ (2) $\frac{dy}{dx}=8\sqrt{t}(2t+3)$ (3) $\frac{dy}{dx}=3e^{3t}$

(4) $\frac{dy}{dx}=2t^2$

02 (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}\,(y\neq 0)$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2y^2-1}\left(y\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{\sin y}\,(\sin y\neq 0)$ (4) $\frac{dy}{dx}=\frac{6x\sqrt{y^2+2}}{y}\,(y\neq 0)$

03 (1) $\frac{dy}{dx}=2x$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-1)^3}}$ (3) $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^2}$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,(x\neq 0)$

04 (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{2}$

05 (1) $y''=24(2x-1)$ (2) $y''=4e^{2x}(1+x)$ (3) $y''=-\frac{1}{x^2}$

(4) $y''=-12\cos 2x$

06 $\frac{1}{2}$ **07** 2 **08** ③ **09** $\frac{1}{2}$

10 (1) $x^2+y^2=100$ (2) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ (3) $-\frac{4}{3}$ **11** ① **12** ④

13 ③ **14** 2 **15** ② **16** $\frac{8}{27}$ **17** ④ **18** ⑤

19 ②

06 도함수의 활용 (1)

W 44쪽 14 접선의 방정식

01 (1) $y=-3x-4$ (2) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$ (3) $y=2e^2x-e^2$ (4) $y=x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

02 (1) $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ (2) $y=ex+3e$ (3) $y=\frac{1}{2}x-1+\ln 2$ (4) $y=x-\frac{3}{2}\pi$

03 (1) $y=-x+2$ (2) $y=\frac{1}{4}x+6$ (3) $y=e^2x$ (4) $y=2x-e$

04 ② **05** -3 **06** ④ **07** 2 **08** $-3e$ **09** 1

10 ① **11** ② **12** ④ **13** ② **14** $y=x-3$ **15** 2

16 ④ **17** ① **18** 2 **19** ⑤ **20** $\frac{5}{4}$ **21** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

22 ④ **23** $\frac{8}{3}$ **24** ② **25** ⑤ **26** ② **27** $\frac{2\sqrt{17}}{17}$

W 48쪽 **15 함수의 증가와 감소, 극대와 극소**

01 (1) 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 증가하고, 구간 $[0,\ \infty)$에서 감소한다.

(2) 구간 $(-\infty,\ 1]$에서 감소하고, 구간 $[1,\ \infty)$에서 증가한다.

(3) 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 증가하고, 구간 $[0,\ \infty)$에서 감소한다.

(4) 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 감소하고, 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가한다.

(5) 구간 $(-\infty,\ 0)$, $\left(0,\ \frac{1}{4}\right]$에서 감소하고, 구간 $\left[\frac{1}{4},\ \infty\right)$에서 증가한다.

(6) 구간 $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$에서 감소하고, 구간 $\left[\frac{1}{e},\ \infty\right)$에서 증가한다.

02 (1) 구간 $\left(0,\ \frac{2}{3}\pi\right]$에서 증가하고, 구간 $\left[\frac{2}{3}\pi,\ \pi\right)$에서 감소한다.

(2) 구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$에서 감소한다.

03 (1) 극댓값: $\frac{1}{6}$, 극솟값: $-\frac{1}{2}$ (2) 극솟값: 1 (3) 극댓값: $\frac{1}{e}$

(4) 극솟값: 1 (5) 극댓값: $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$, 극솟값: $\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

04 (1) 극댓값: $\frac{1}{4}$ (2) 극댓값: 2 (3) 극솟값: 1 (4) 극솟값: 0

(5) 극솟값: $-\sqrt{2}$

05 -1	**06** ③	**07** ④	**08** ①	**09** ④	**10** 8
11 ①	**12** ⑤	**13** ③	**14** ②	**15** ②	**16** ③
17 $\frac{4}{e^2}$	**18** ⑤	**19** 0	**20** ②	**21** ①	**22** 2
23 ②	**24** 51	**25** 0	**26** 36		

07 도함수의 활용 (2)

W 52쪽 **16 함수의 그래프**

01 (1) 구간 $\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 또는 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\ \infty\right)$에서 아래로 볼록하고, 구간 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$에서 위로 볼록하다.

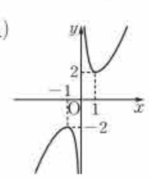
(2) 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(1,\ \infty)$에서 아래로 볼록하다.

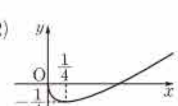
(3) 구간 $(0,\ \infty)$에서 아래로 볼록하다.

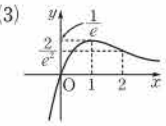
(4) 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 위로 볼록하다.

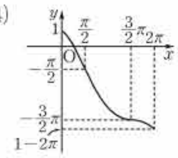
02 (1) $(1,\ 0)$ (2) $\left(-1,\ -\frac{1}{e^2}\right)$ (3) $\left(-1,\ \frac{1}{2}\ln 2\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{2}\ln 2\right)$

(4) $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi,\ 0\right)$

03 (1)


(2)


(3)


(4)


04 (1) 최댓값: 9, 최솟값: 8 (2) 최댓값: $-8\sqrt{2}$, 최솟값: -16

(3) 최댓값: 1, 최솟값: 0 (4) 최댓값: π, 최솟값: $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

05 ⑤	**06** ④	**07** 2	**08** ③	**09** ②	**10** -3
11 10	**12** ③	**13** ④	**14** ⑤	**15** ⑤	**16** ㄱ, ㄷ
17 ①	**18** ⑤	**19** -1	**20** ③	**21** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	**22** ①
23 ①	**24** 7	**25** 8	**26** ④	**27** $\frac{16\sqrt{3}}{9}$	**28** ②
29 $\frac{\pi}{3}$					

W 57쪽 **17 방정식과 부등식에의 활용**

01 (1) 0 (2) 2 (3) 1 **02** (1) 1 (2) 2 **03** 풀이 168쪽

04 $k<2$ **05** ③ **06** ① **07** 1 **08** $0<a<\frac{1}{3}$

09 ② **10** 1 **11** ⑤ **12** 3

W 59쪽 **18 속도와 가속도**

01 (1) 속도: $-2e^2$, 가속도: $-4e^2$ (2) 속도: $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$, 가속도: $\frac{3}{2}$

02 (1) 속도: $(-3,\ 6)$, 가속도: $(0,\ 12)$

(2) 속도: $\left(e^2,\ -\frac{1}{e^2}\right)$, 가속도: $\left(e^2,\ \frac{1}{e^2}\right)$

(3) 속도: $(0,\ -1)$, 가속도: $(-1,\ 0)$

03 속력: $\frac{\sqrt{13}}{2}$, 가속도의 크기: $\frac{3}{4}$ **04** 속도: 9, 가속도: $\frac{15}{8}$

05 $\frac{\pi}{12}$	**06** ④	**07** ①	**08** $2\sqrt{2}$	**09** 2	**10** ⑤
11 ①	**12** 2	**13** ①			

08 여러 가지 적분법

W 61쪽 **19 여러 가지 함수의 부정적분**

01 (1) $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C$ (2) $\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$ (3) $\frac{1}{2}x^2+2x+\ln|x|+C$

(4) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{8}{3}x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$

02 (1) $5e^x-\frac{2^{x+2}}{\ln 2}+C$ (2) $\frac{27^x}{\ln 27}+C$ (3) $e^{x-2}+C$ (4) $\frac{4^x-4^{-x}}{\ln 4}-2x+C$

03 (1) $\sin x+\cot x+C$ (2) $\sec x+x+C$ (3) $\sec x+C$ (4) $x-\cos x+C$

04 ② **05** $1+\frac{1}{2e^2}$ **06** 6 **07** 6 **08** $4e^x+C$ **09** ③

10 ④ **11** $1-e$ **12** $-\cot x-\csc x+C$ **13** ②

14 $a=3$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$

W 63쪽 **20 치환적분법**

01 (1) $-\frac{1}{4(2x-1)^2}+C$ (2) $-\frac{2}{3}(5-x)\sqrt{5-x}+C$

(3) $-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C$

02 (1) $\frac{1}{4}(3x^2-2)^4+C$ (2) $e^{x^2}+C$ (3) $\frac{1}{5}\sin^5 x+C$

03 (1) $\ln(x^4+1)+C$ (2) $\ln(e^x+1)+C$ (3) $\ln|x+\cos x|+C$

04 (1) $4x+\ln|x+2|+C$ (2) $\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+C$

(3) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$ (4) $\ln\left|\frac{(x+2)^2}{x-2}\right|+C$

05 $f(x)=\frac{1}{24}(4x+1)^6-\frac{1}{24}$ **06** ⑤ **07** 3 **08** ③

09 63 **10** ② **11** $2\sqrt{2}$ **12** 2 **13** ② **14** $\frac{1}{2}e^2$

15 ⑤ **16** $2\ln 2$ **17** ③ **18** $\frac{\sqrt{2}-3}{2}$ **19** ② **20** $\frac{8}{3}$

21 ③ **22** ④ **23** ⑤ **24** $\ln\frac{2}{\pi+2}$ **25** ④

26 $\ln 6$ **27** $\frac{4}{3}$ **28** $3-\ln 3$ **29** ④ **30** ①

W 68쪽 **21 부분적분법**

01 (1) $(x-2)e^x+C$ (2) $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$ (3) $x\sin x+\cos x+C$

02 ② **03** ④ **04** -2 **05** 3 **06** ④

09 정적분

W 69쪽 **22 여러 가지 함수의 정적분**

01 (1) 12 (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{8}{\ln 2}$ (4) 1 **02** (1) $\frac{8}{\ln 3}+2$ (2) $-\frac{4}{3}$ (3) 2 (4) 0

03 ④ **04** 11 **05** ② **06** ② **07** $2+\frac{3}{\ln 2}$

08 ⑤ **09** ③ **10** ② **11** $\frac{\pi}{4}$ **12** ③ **13** 1

14 ④ **15** 1 **16** $-\frac{\pi^3}{12}$ **17** ⑤ **18** 12 **19** ③

20 ④ **21** $5(e^3-4)$

W 72쪽 **23 치환적분법과 부분적분법을 이용한 정적분**

01 (1) $\frac{1}{2}\ln 3$ (2) $e-1$ (3) 4 (4) $\ln\frac{3}{2}$ **02** (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{8}$

03 (1) $1-\frac{3}{e^2}$ (2) $\frac{1-\ln 2}{2}$ (3) $-\frac{\pi}{2}$ (4) $3\pi+2$ **04** ③ **05** ④

06 ④ **07** 2 **08** ③ **09** ⑤ **10** e **11** ②

12 $\frac{4}{3}$ **13** ② **14** 2 **15** ① **16** ⑤ **17** 2

18 ① **19** $2\ln 2-1$ **20** ④ **21** ②

W 75쪽 **24 정적분으로 정의된 함수**

01 (1) $x^2\sin x$ (2) $\frac{4x-1}{x^2+3x+3}$ (3) $\ln\frac{x}{x-1}$ (4) $e^x(e^5-1)$

02 (1) $f(x)=2\cos x$ (2) $f(x)=2e^{2x+1}+4$ (3) $f(x)=\frac{1}{x}-3$

03 (1) π (2) $\ln 2+9$ **04** $\frac{e+3}{4}$ **05** ③ **06** $\frac{1}{6}$ **07** 2

08 ③ **09** ② **10** ② **11** 1 **12** ① **13** ③

14 -1 **15** ④ **16** $\frac{1}{2}\left(e^3-\frac{1}{e}\right)$ **17** 3 **18** ④

19 $-3e$ **20** -3 **21** ⑤

10 정적분의 활용

W 78쪽 **25 정적분과 급수**

01 (1) 9 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 6 (4) 2

02 (가) $\frac{2k}{n}$ (나) $\frac{k}{n}$ (다) 1 (라) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ **03** ③ **04** ②

05 $\frac{1}{2}(e^2-1)$ **06** ③ **07** $\frac{1}{2}$ **08** ① **09** 7

10 ② **11** $\frac{8}{3}$

W 80쪽 **26 넓이**

01 (1) $4\sqrt{6}$ (2) 3 (3) $2\ln 2$ (4) 1

02 (1) $\frac{3}{2}-2\ln 2$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $2e^2+\frac{2}{e^2}-4$

03 ④ **04** $2\sqrt{2}$ **05** ⑤ **06** ③ **07** π **08** ④

09 e **10** 3 **11** $e-\frac{5}{e}$ **12** $\ln 2$ **13** ② **14** $\frac{1}{4}$

15 $e^{\frac{5}{2}}$ **16** ④ **17** $\frac{1}{12}$ **18** 3 **19** ① **20** $\frac{2}{\pi}$

21 ③ **22** ② **23** $\frac{e^2-1}{4}$ **24** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ **25** 24 **26** ⑤

27 (1) $\frac{1}{e}$ (2) e^2-2e

W 84쪽 **27 부피**

01 (1) 132 (2) 16 **02** (1) $(2x+5)\text{ cm}^2$ (2) 66 cm^3

03 (1) $x+4\sqrt{x}+4$ (2) $\frac{43}{6}$ **04** ⑤ **05** ③ **06** 4

07 3 **08** ④ **09** $\frac{15}{4\ln 2}$ **10** ① **11** 6 **12** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

W 86쪽 **28 속도와 거리**

01 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{8}{3}$ **02** 12 **03** (1) 2 (2) π (3) $\frac{19}{3}$ (4) $\frac{7}{12}$

04 ② **05** $\frac{2}{3}\pi$ **06** 2 **07** ③ **08** 4 **09** ②

10 ④ **11** ⑤ **12** ③

Lecture Book

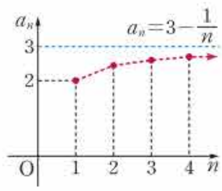
01 수열의 극한

01 수열의 극한

Lecture 01 수열의 수렴과 발산 6쪽

1-1 (1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

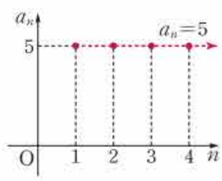
$$a_n=3-\frac{1}{n}$$



오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 3에 한없이 가까워지므로 이 수열은 3에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)=3$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=5$

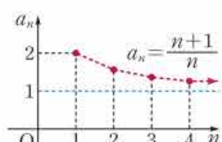


오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 항상 5로 일정하므로 이 수열은 5에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} 5=5$$

(3) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{n+1}{n}$$

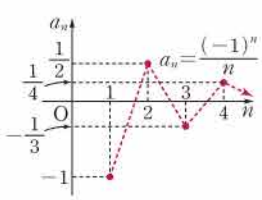


오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 1에 한없이 가까워지므로 이 수열은 1에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

(4) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$$



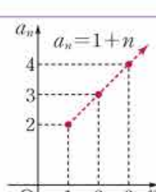
오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$$

답 (1) 3 (2) 5 (3) 1 (4) 0

2-1 (1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=1+n$$



Q BOX

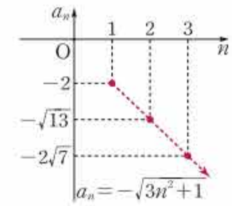
수열 $\{a_n\}$의 수렴과 발산
⇒ a_n에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 a_n의 값의 변화를 그래프로 나타내어 조사한다.

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$

앞의 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=-\sqrt{3n^2+1}$$



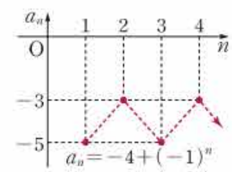
오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.

$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$

답 (1) 양의 무한대로 발산 (2) 음의 무한대로 발산

2-2 (1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

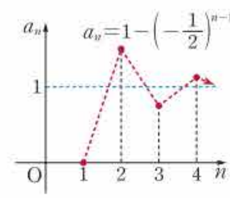
$$a_n=-4+(-1)^n$$



오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 이 수열은 진동한다.

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$



오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 1에 한없이 가까워지므로 이 수열은 1에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=1$$

답 (1) 발산(진동) (2) 수렴, 1

Lecture 02 수열의 극한에 대한 기본 성질 7쪽

수열의 극한에 대한 기본 성질은 두 수열이 수렴하는 경우에만 성립함에 유의한다.

1-1 (1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=-2+3=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=-2-3=-5$

(3) $\lim_{n\to\infty}2a_nb_n=2\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=2\cdot(-2)\cdot3=-12$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n}{2b_n}=\frac{3\lim_{n\to\infty}a_n}{2\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{3\cdot(-2)}{2\cdot3}=-1$

답 (1) 1 (2) −5 (3) −12 (4) −1

1-2 (1) $\lim_{n\to\infty}(5-a_n)=\lim_{n\to\infty}5-\lim_{n\to\infty}a_n=5-\alpha$

(2) $\lim_{n\to\infty}(2a_n-3b_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n-3\lim_{n\to\infty}b_n$
$=2\alpha-3\beta$

(3) $\lim_{n\to\infty}a_nb_n^2=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta^2$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-1}{3b_n}=\frac{2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}1}{3\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{2\alpha-1}{3\beta}$

답 (1) $5-\alpha$ (2) $2\alpha-3\beta$ (3) $\alpha\beta^2$ (4) $\frac{2\alpha-1}{3\beta}$

1-3 (1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1+4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1+4\cdot0=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}5-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=5-2\cdot0=5$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{5}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)$
$=2\cdot1=2$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{7-\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(7-\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{7}$

답 (1) 1 (2) 5 (3) 2 (4) $\frac{2}{7}$

기본+표준 **유형 Q+Q** 8쪽

01 ①, ② n의 값이 한없이 커지면 $5-4n$의 값과 $-(n+1)^2$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.
③ n의 값이 한없이 커지면 $\log_2 n$의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.
④ n의 값이 한없이 커지면 $\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$의 값은 양수와 음수가 교대로 되면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.
⑤ 홀수 번째 항 $1, \frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \cdots$가 2에 수렴하고, 짝수 번째 항 $\frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{13}{6}, \cdots$도 2에 수렴하므로 주어진 수열은 2에 수렴한다.

답 ⑤

02 ① n의 값이 한없이 커지면 $-1+\frac{1}{n}$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{-1+\frac{1}{n}\right\}$은 -1에 수렴한다.
② n의 값이 한없이 커지면 $3n+2$의 값은 한없이 커지므로 $\lim_{n\to\infty}(3n+2)=\infty$이다.
③ 홀수 번째 항 0, 0, 0, …은 0에 수렴하고, 짝수 번째 항 2, 2, 2, …는 2에 수렴하므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.
⑤ 어떤 수열이 수렴하지 않으면 그 수열은 양의 무한대로 발산하거나 음의 무한대로 발산할 수도 있다.

답 ⑤

03 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n-10}{-4a_n+b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}10}{-4\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n}$
$=\frac{3\cdot(-1)-10}{-4\cdot3-1}$
$=\frac{-13}{-13}=1$

답 1

Q BOX

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에서
ab
$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}$

$2-1, 2-\frac{1}{3}, 2-\frac{1}{5}, \cdots$

$2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{6}, \cdots$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한
➡ 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

04 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)^2-(a_n^2+b_n^2)\}$
$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)$
$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$
$-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)$
$=\frac{1}{2}\cdot7\cdot7-\frac{1}{2}\cdot29$
$=\frac{49}{2}-\frac{29}{2}=10$

답 10

05 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$
$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+9}{a_{n+1}-3}=-1$에서 $\frac{2\alpha+9}{\alpha-3}=-1$
$2\alpha+9=-\alpha+3$, $3\alpha=-6$
$\therefore \alpha=-2$
$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=-2$

답 -2

06 수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 실수에 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ $(\alpha\neq0)$라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$
$\frac{4}{a_{n+1}}=4-a_n$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{4}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(4-a_n)$이므로
$\frac{4}{\alpha}=4-\alpha$, $\alpha^2-4\alpha+4=0$
$(\alpha-2)^2=0$ $\therefore \alpha=2$
따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$이므로
$\lim_{n\to\infty}(3+a_n)=\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}a_n$
$=3+2=5$

답 ②

02 수열의 극한값의 계산

Lecture 03 수열의 극한값의 계산 9쪽

1-1 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}-1}=-3$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{5n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{5-\frac{1}{n^2}}=0$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+4n^2-n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+4-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\infty$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+2n}{n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n+2}{1-\frac{4}{n}}=-\infty$

답 (1) 수렴, -3 (2) 수렴, 0
(3) 발산 (4) 발산

2-1 (1) $\lim_{n\to\infty}(n^2-5n+2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)$

이때 $\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}(n^2-5n+2)=\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty}(n^2-4n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{1}{n}-4\right)$

이때 $\lim_{n\to\infty}n^3=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-4\right)=-4$이므로

$\lim_{n\to\infty}(n^2-4n^3)=-\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

$=\frac{1}{2}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}$

$=\infty$

답 (1) 발산 (2) 발산 (3) 수렴, $\frac{1}{2}$ (4) 발산

Q BOX

$\infty-\infty$ 꼴의 극한
➡ 다항식은 최고차항으로 묶고, 무리식은 유리화한다.

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모의 최고차항 $\sqrt{n^2}$, 즉 n으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

Lecture 04 수열의 극한의 대소 관계 (L 10쪽)

1-1 답 2, 2

1-2 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{7}{n^2}}=4$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1+\frac{5}{n^2}}=4$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=4$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1}=2$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1}=2$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

답 (1) 4 (2) 2

1-3 $-1\le\cos n\theta\le1$이므로 각 변을 n으로 나누면

$-\frac{1}{n}\le\frac{\cos n\theta}{n}\le\frac{1}{n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta}{n}=0$

답 0

기본+표준 유형 Q+Q (L 11쪽)

01 ① $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(3n-1)}{n^2+3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-1}{n^2+3n-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{9-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}$

$=9$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+5)^2}{(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+20n+25}{n^2-2n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{20}{n}+\frac{25}{n^2}}{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=4$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2-5n+2}}{-4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}}{-4+\frac{1}{n}}$

$=-1$

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{25n^2-3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{25-\frac{3}{n}}+1}=\frac{2}{3}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}$

$=\frac{1}{2}$

답 ④

02 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n\cdot na_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{na_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}na_n}$

$=\frac{2}{\frac{1}{5}}=10$

답 ②

$\lim_{n\to\infty}na_n=\frac{1}{5}$을 이용할 수 있도록 분자, 분모를 각각 n으로 나누어 식을 변형한다.

03 $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+2+3+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n(n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=2$

답 ④

쌤 한마디

자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

04 $\log_3(3n+5)-2\log_3(n+1)+\log_3(9n-2)$

$=\log_3\frac{(3n+5)(9n-2)}{(n+1)^2}$

$=\log_3\frac{27n^2+39n-10}{n^2+2n+1}$

$\therefore$ (주어진 식) $=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{27n^2+39n-10}{n^2+2n+1}$

$=\log_3\lim_{n\to\infty}\frac{27+\frac{39}{n}-\frac{10}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$

$=\log_3 27=3$ 답 3

로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 변형한 후 $\lim_{n\to\infty}\log_k a_n=\log_k(\lim_{n\to\infty}a_n)$ $(a_n>0,\ k>0,\ k\neq1)$임을 이용한다.

쌤 한마디

로그의 성질

$a>0,\ a\neq1,\ M>0,\ N>0$일 때

① $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

05 $\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2-1})(n+\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+3}+n)}{(\sqrt{n^2+3}-n)(\sqrt{n^2+3}+n)(n+\sqrt{n^2-1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{3(n+\sqrt{n^2-1})}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1+1}{1+1}=\frac{1}{3}$ 답 ①

분자, 분모가 각각 $\infty-\infty$ 꼴이면서 모두 근호가 있으므로 분자, 분모를 각각 유리화한다.

06 $\sqrt{16n^2}<\sqrt{16n^2+7n}<\sqrt{16n^2+8n+1}$ 에서

$(4n+1)^2$

$4n<\sqrt{16n^2+7n}<4n+1$이므로

$a_n=\sqrt{16n^2+7n}-4n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{16n^2+7n}-4n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{16n^2+7n}-4n)(\sqrt{16n^2+7n}+4n)}{\sqrt{16n^2+7n}+4n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{7n}{\sqrt{16n^2+7n}+4n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{7}{\sqrt{16+\frac{7}{n}}+4}=\frac{7}{4+4}=\frac{7}{8}$ 답 $\frac{7}{8}$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 수열의 극한에서 분자의 차수와 분모의 차수가 같으면 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

07 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn-2}{n-5}=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로 $a=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn-2}{n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn-2}{n-5}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-\frac{2}{n}}{1-\frac{5}{n}}=b$

따라서 $b=3$이므로 $a+b=3$ 답 3

08 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+kn}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+kn}-n)(\sqrt{n^2+kn}+n)}{\sqrt{n^2+kn}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{kn}{\sqrt{n^2+kn}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}+1}=\frac{k}{2}$

따라서 $\frac{k}{2}=4$이므로 $k=8$ 답 ④

09 $(3n-1)a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{b_n}{3n-1}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=6$이므로

$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\frac{b_n}{3n-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n-1}\lim_{n\to\infty}b_n$

$=\frac{1}{3}\cdot6=2$ 답 ②

10 $(2n+3)a_n=c_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{c_n}{2n+3}$

$(n^2-5)b_n=d_n$으로 놓으면 $b_n=\frac{d_n}{n^2-5}$

이때 $\lim_{n\to\infty}c_n=1,\ \lim_{n\to\infty}d_n=4$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(n+1)b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{c_n}{2n+3}}{(n+1)\cdot\frac{d_n}{n^2-5}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-5}{(2n+3)(n+1)}\cdot\frac{c_n}{d_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-5}{(2n+3)(n+1)}\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ 답 $\frac{1}{8}$

11 $\sqrt{36n^2-n}<(n+5)a_n<\sqrt{36n^2+7n}$에서

$\frac{\sqrt{36n^2-n}}{n+5}<a_n<\frac{\sqrt{36n^2+7n}}{n+5}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{36n^2-n}}{n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{36n^2+7n}}{n+5}=6$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=6$ 답 6

12 $-1\le\sin n\theta\le1$이므로

$-\frac{2n^2}{n^3+1}\le\frac{2n^2\sin n\theta}{n^3+1}\le\frac{2n^2}{n^3+1}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2n^2}{n^3+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^3+1}=0$이므로 수열의

극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2\sin n\theta}{n^3+1}=0$$ 답 ③

03 등비수열의 극한

Lecture 05 등비수열의 수렴과 발산 13쪽

1-1 (1) 공비가 0.2이고, $-1<0.2<1$이므로 0에 수렴한다.
(2) 공비가 $\sqrt{3}$이고, $\sqrt{3}>1$이므로 발산한다.
(3) 공비가 $-\frac{5}{3}$이고, $-\frac{5}{3}<-1$이므로 발산한다.
(4) 공비가 $-\frac{1}{4}$이고, $-1<-\frac{1}{4}<1$이므로 0에 수렴한다.

$\left\{\frac{(-1)^n}{4^n}\right\}$에서 $\frac{(-1)^n}{4^n}=\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ 이므로 공비는 $-\frac{1}{4}$이다.

답 (1) 수렴 (2) 발산 (3) 발산 (4) 수렴

1-2 (1) 공비가 -3이고, $-3<-1$이므로 발산한다.
(2) 공비가 $-\frac{1}{2}$이고, $-1<-\frac{1}{2}<1$이므로 0에 수렴한다.

답 (1) 발산 (2) 수렴

2-1 (1) 공비가 $4r$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<4r\le 1$ $\quad\therefore -\frac{1}{4}<r\le\frac{1}{4}$

(2) 공비가 $-\frac{r}{2}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<-\frac{r}{2}\le 1$ $\quad\therefore -2\le r<2$

답 (1) $-\frac{1}{4}<r\le\frac{1}{4}$ (2) $-2\le r<2$

2-2 (1) 공비가 $r-5$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<r-5\le 1$

$\therefore 4<r\le 6$

(2) 공비가 $\frac{r+1}{3}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{r+1}{3}\le 1,\quad -3<r+1\le 3$

$\therefore -4<r\le 2$

답 (1) $4<r\le 6$ (2) $-4<r\le 2$

기본+표준 유형 Q+Q 14쪽

01 ㄱ. 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이고, $-1<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$이므로 0에 수렴한다.
ㄴ. 공비가 -1.5이고, $-1.5<-1$이므로 발산한다.
ㄷ. 공비가 $\sqrt{3}-1$이고, $-1<\sqrt{3}-1<1$이므로 0에 수렴한다.
ㄹ. $\frac{5^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$에서 공비가 $\frac{5}{3}$이고, $\frac{5}{3}>1$이므로 발산한다.
이상에서 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

02 ㄱ. 주어진 수열은
3, 1, 3, 1, 3, 1, ⋯
이므로 발산(진동)한다.
ㄴ. 수열 $\{0.7^n\}$은 공비가 0.7이고, $-1<0.7<1$이므로 0에 수렴한다.
따라서 주어진 수열은 -1에 수렴한다.
ㄷ. 수열 $\left\{\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{4}{\sqrt{5}}$이고, $\frac{4}{\sqrt{5}}>1$이므로 발산한다.
따라서 주어진 수열은 발산한다.
ㄹ. $3^{-n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$에서 공비가 $\frac{1}{3}$이고, $-1<\frac{1}{3}<1$이므로 수열 $\{3^{-n}\}$은 0에 수렴한다.
$4^{-n}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$에서 공비가 $\frac{1}{4}$이고, $-1<\frac{1}{4}<1$이므로 수열 $\{4^{-n}\}$은 0에 수렴한다.
따라서 주어진 수열은 0에 수렴한다.
이상에서 발산하는 수열인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ①

03 $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{2n+1}}{4^n-2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-2}{1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}=-2$$

수열 $\left\{\frac{c^n+d^n}{a^n+b^n}\right\}$ (a, b, c, d는 실수) 꼴의 극한값 구하기
➡ $|a|>|b|$이면 a^n으로, $|a|<|b|$이면 b^n으로 분자, 분모를 각각 나눈 후 $|r|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$임을 이용한다.

답 ③

04 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n-1}\cdot a_n+3^{n+1}}{3^{n+1}\cdot a_n-7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{7}\cdot 7^n\cdot a_n+3\cdot 3^n}{3\cdot 3^n\cdot a_n-7^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{7}\cdot a_n+3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n}{3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n\cdot a_n-1}$$
$$=-\frac{\alpha}{7}$$

따라서 $-\frac{\alpha}{7}=1$이므로 $\quad\alpha=-7$ 답 -7

05 $n\ge 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=5^n-1-(5^{n-1}-1)$$
$$=5^n-5^{n-1}=5^n\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}\cdot 5^n$$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,
$a_1=S_1$
$a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge 2)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{5}\cdot 5^n}{5^n-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}=\frac{4}{5}$$

답 ④

06 공비가 $\frac{x-1}{4}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x-1}{4}\le 1, \quad -4<x-1\le 4$

$\therefore -3<x\le 5$

따라서 정수 x는 $-2, -1, 0, \cdots, 5$의 8개이다.

답 ④

07 등비수열 $\{(-3x+4)^n\}$은 공비가 $-3x+4$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<-3x+4\le 1, \quad -5<-3x\le -3$

$\therefore 1\le x<\frac{5}{3}$ ⋯⋯ ㉠

등비수열 $\{(\log_3 x-1)^n\}$은 공비가 $\log_3 x-1$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<\log_3 x-1\le 1, \quad 0<\log_3 x\le 2$

$\therefore 1<x\le 9$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $1<x<\frac{5}{3}$

답 $1<x<\frac{5}{3}$

08 (i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$a=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{5\cdot r^n-1}=0$

(ii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$b=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{5\cdot r^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5-\frac{1}{r^n}}=\frac{1}{5}$

(i), (ii)에서 $5(a+b)=5\left(0+\frac{1}{5}\right)=1$

답 1

09 ㄱ. $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} r^{2n}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r-1}{r^n+1}=r-1$

따라서 $r-1$에 수렴한다.

ㄴ. $r=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r-1}{r^n+1}=\frac{1+1-1}{1+1}=\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{1}{2}$에 수렴한다.

ㄷ. (i) $r<-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$, $\lim_{n\to\infty} r^{2n}=\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+\frac{1}{r^{n-1}}-\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}$

따라서 발산(진동)한다.

(ii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} r^{2n}=\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+\frac{1}{r^{n-1}}-\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}$

$=\infty$

(i), (ii)에서 $|r|>1$이면 발산한다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

Q BOX

원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는
$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

r^n을 포함한 수열의 극한에서 r가 미지수인 경우
➡ r의 값의 범위를
$|r|<1$, $r=1$,
$|r|>1$, $r=-1$
인 경우로 나누어 생각한다.

10 $\overline{OP_n}=\sqrt{n^2+(\sqrt{n})^2}=\sqrt{n^2+n}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n-\overline{OP_n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n-\sqrt{n^2+n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+\sqrt{n^2+n})}{(n-\sqrt{n^2+n})(n+\sqrt{n^2+n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+\sqrt{n^2+n})}{-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{-3\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\right\}=-6$

답 ③

11 점 $P_n(n, n^2)$에서 직선 OP_n의 기울기는

$\frac{n^2}{n}=n$

이므로 점 P_n을 지나고 직선 OP_n과 수직인 직선의 방정식은

$y-n^2=-\frac{1}{n}(x-n) \quad \therefore y=-\frac{1}{n}x+n^2+1$

이 직선의 y절편은 n^2+1이므로

$a_n=n^2+1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

중단원 마무리

16쪽

01 전략 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때 a_n의 값이 한없이 커지는지 또는 어떤 일정한 값에 가까워지는지 조사한다.

풀이 ㄱ. n의 값이 한없이 커지면 $\left(-\frac{1}{7}\right)^n$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄴ. n의 값이 한없이 커지면 $5-2n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

ㄷ. n의 값이 한없이 커지면 $\frac{-3n}{n+1}$의 값은 -3에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 -3에 수렴한다.

ㄹ. n의 값이 한없이 커지면 $\frac{4n}{\sqrt{n}+1}$의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

이상에서 발산하는 수열인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

02 전략 수열의 극한에 대한 기본 성질과 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}(a_n^3+b_n^3)$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^3-3a_nb_n(a_n+b_n)\}$

$=\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\}^3-3\lim_{n\to\infty}a_nb_n\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$

$=4^3-3\cdot(-1)\cdot 4=76$

답 76

03 전략 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 실수)이면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\alpha$임을 이용한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$$

$\lim_{n\to\infty}(a_n^2-a_{2n}-6)=0$에서 $\alpha^2-\alpha-6=0$

$$(\alpha+2)(\alpha-3)=0$$

$$\therefore \alpha=-2 \text{ 또는 } \alpha=3$$

이때 수열 $\{a_n\}$의 각 항이 양수이므로

$$\alpha=3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_{n+1}+6}=\sqrt{3+6}=3$$

답 ③

$a_n>0$에서 $\lim_{n\to\infty} a_n\ge 0$이므로 $\alpha\ge 0$

04 전략 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나누어 극한값을 구한다.

풀이 ① $\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{5n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}}{5-\frac{1}{n}}=\frac{1}{5}$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+2}{6n^2-4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{6-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2-2n}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}}=0$

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{36n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{36+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{6}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-6n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{6}{n}}=1$

따라서 극한값이 가장 작은 것은 ③이다.

답 ③

05 전략 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 등차수열임을 이용한다.

풀이 $x=-1$이 이차방정식 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$의 근이므로

$$a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}=0$$

$$\therefore 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$$

즉 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$a_n=a+(n-1)d$$

이차방정식 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$의 두 근이 -1, b_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-b_n=\frac{a_{n+2}}{a_n}$$

$$\therefore b_n=-\frac{a_{n+2}}{a_n}=-\frac{a+(n+1)d}{a+(n-1)d}$$

(i) $d=0$일 때,

$a=0$이면 $a_n=0$이므로 $a\neq 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{a}{a}\right)=-1$$

$a_n=0$이면 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$은 이차방정식이 아니다. 즉 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $d\neq 0$일 때,

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{dn+a+d}{dn+a-d}\right)$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{d+\frac{a+d}{n}}{d+\frac{a-d}{n}}$$

$$=-\frac{d}{d}$$

$$=-1$$

(i), (ii)에서

$$\lim_{n\to\infty} b_n=-1$$

답 ③

06 전략 주어진 수열의 일반항을 분모가 1인 분수 꼴로 생각하여 분자를 유리화한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+3n+1}-\sqrt{9n^2-3n-1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{9n^2+3n+1}-\sqrt{9n^2-3n-1})(\sqrt{9n^2+3n+1}+\sqrt{9n^2-3n-1})}{\sqrt{9n^2+3n+1}+\sqrt{9n^2-3n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(9n^2+3n+1)-(9n^2-3n-1)}{\sqrt{9n^2+3n+1}+\sqrt{9n^2-3n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+2}{\sqrt{9n^2+3n+1}+\sqrt{9n^2-3n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{2}{n}}{\sqrt{9+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{9-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{6}{3+3}=1$$

답 ①

07 전략 방정식 $(x+a)^2=b$의 두 근은 $x=-a\pm\sqrt{b}$임을 이용하여 방정식 $f(x)=n$의 두 근을 구한다.

풀이 $f(x)=n$, 즉 $(x-3)^2=n$에서

$x-3=\sqrt{n}$ 또는 $x-3=-\sqrt{n}$

$\therefore x=3+\sqrt{n}$ 또는 $x=3-\sqrt{n}$

$$\therefore h(n)=|\alpha-\beta|$$

$$=|(3+\sqrt{n})-(3-\sqrt{n})|$$

$$=2\sqrt{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$=\frac{2}{1+1}$$

$$=1$$

답 ②

08 전략 주어진 등식의 좌변에서 근호를 포함한 쪽을 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+4n}-bn)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{an^2+4n}-bn)(\sqrt{an^2+4n}+bn)}{\sqrt{an^2+4n}+bn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n^2+4n}{\sqrt{an^2+4n}+bn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n+4}{\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 극한값이 $\frac{1}{5}$이므로

$a-b^2=0$, $\frac{4}{\sqrt{a}+b}=\frac{1}{5}$

$a-b^2=0$에서 $a=b^2$ $\therefore \sqrt{a}=|b|$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\frac{4}{\sqrt{a}+b}=\frac{1}{5}$에서 $\sqrt{a}+b=20$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면 $|b|+b=20$

그런데 $b<0$이면 $|b|+b=-b+b=0$이므로

$b>0$

$2b=20$이므로 $b=10$

따라서 $a=b^2=100$이므로

$a+b=110$

답 110

$a-b^2\neq0$이면 ㉠은 발산한다.

09

전략 $\frac{a_n}{n}=b_n$으로 놓고 a_n을 b_n으로 나타낸 후 극한값을 구하는 식을 b_n이 포함되도록 변형한다.

풀이 $\frac{a_n}{n}=b_n$으로 놓으면

$a_n=nb_n$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{4}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+3n}-n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+3n}-n}{nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16+\frac{3}{n}}-1}{b_n}$$

$$=\frac{4-1}{\frac{1}{4}}$$

$$=12$$

답 ②

10

전략 수열의 극한에 대한 기본 성질을 바탕으로 주어진 명제가 옳은지 판단하고, 거짓인 명제는 반례를 찾는다.

풀이 ㄴ. [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$이면 $a_n<b_n$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, ⋯

이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

11

전략 수열의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 $5n-2<na_n<\sqrt{25n^2+9n}$에서

$$\frac{5n-2}{n}<a_n<\frac{\sqrt{25n^2+9n}}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{5n-2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+9n}}{n}=5$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=5$ ⋯ ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+4)a_n}{-n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4}{-n^2-1}\cdot a_n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4}{-n^2-1}\cdot\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$=-3\cdot5$$

$$=-15$$ ⋯ ❷

답 -15

단계	채점 기준	비율
❶	$\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷	극한값을 구할 수 있다.	30 %

12

전략 등비수열 $\{r^n\}$은 $-1<r\leq1$이면 수렴, $r\leq-1$ 또는 $r>1$이면 발산함을 이용한다.

풀이 ㄱ. 공비가 $\log_4 5$이고, $\log_4 5>1$이므로 주어진 수열은 발산한다.

ㄴ. 수열 $\{(-0.4)^n\}$은 공비가 -0.4이고, $-1<-0.4<1$이므로 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 3에 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{1}{6}$이고, $-1<\frac{1}{6}<1$이므로 0에 수렴한다.

수열 $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$은 공비가 $-\frac{1}{3}$이고,

$-1<-\frac{1}{3}<1$이므로 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄹ. 수열 $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이고, $-1<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$이므로 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 -4에 수렴한다.

ㅁ. 주어진 수열은

4, 2, 4, 2, 4, 2 ⋯

이므로 발산(진동)한다.

이상에서 수렴하는 수열과 그 극한값을 차례대로 나열한 것은 ③이다.

답 ③

13

전략 나머지정리를 이용하여 a_n을 구한 후 분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 각각 나누어 극한값을 구한다.

나머지정리
다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
$R=P(\alpha)$

풀이 $a_n=3\cdot3^{n+2}+3^{n-1}-6=3^{n+3}+3^{n-1}-6$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+6}{3^{n+2}-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+3}+3^{n-1}}{3^{n+2}-2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^3\cdot3^n+3^{-1}\cdot3^n}{3^2\cdot3^n-2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^3+\frac{1}{3}}{3^2-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{\frac{82}{3}}{9}=\frac{82}{27}$$

답 ⑤

14 전략 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하려면 $-1<r\le 1$이어야 한다.

풀이 공비가 $\frac{|x|}{3}-1$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{|x|}{3}-1\le 1$

$0<\frac{|x|}{3}\le 2$

$\therefore 0<|x|\le 6$ ···❶

$-6\le x<0$ 또는 $0<x\le 6$

따라서 정수 x는 ±1, ±2, ±3, $\cdots$, ±6의 12개이다. ···❷

답 12

단계	채점 기준	비율
❶	$\|x\|$의 값의 범위를 구할 수 있다.	80 %
❷	정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

15 전략 $0<\frac{m}{5}<1$, $\frac{m}{5}=1$, $\frac{m}{5}>1$인 경우로 나누어 m의 값을 구한다.

풀이 (i) $0<\frac{m}{5}<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{5}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1}=\frac{0+2}{0+1}=2$$

즉 $0<\frac{m}{5}<1$이면 조건을 만족시킨다.

이때 $0<m<5$이므로 자연수 m은

1, 2, 3, 4

(ii) $\frac{m}{5}=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{5}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $\frac{m}{5}>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{5}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{m}{5}+\frac{2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n}}{1+\frac{1}{\left(\frac{m}{5}\right)^n}}$$

$$=\frac{m}{5}$$

따라서 $\frac{m}{5}=2$에서 $m=10$

이상에서 자연수 m은 1, 2, 3, 4, 10의 5개이다.

답 ①

Q BOX

쌤 한마디

r^n 꼴이 포함된 수열의 극한에서는 r의 값의 범위를

$|r|<1$, $r=-1$, $r=1$, $|r|>1$

인 경우로 나누어 각각 극한을 조사한다. **15**번에서는 m이 자연수라는 조건이 있으므로 $\frac{m}{5}$의 값의 범위를

$0<\frac{m}{5}<1$, $\frac{m}{5}=1$, $\frac{m}{5}>1$

인 경우만 생각하면 된다.

16 전략 x^n을 포함한 극한으로 정의된 함수는 x의 값의 범위를 $|x|<1$, $x=1$, $x=-1$, $|x|>1$인 경우로 나누어 함수의 식을 구한다.

풀이 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}=-x$$

(ii) $x=1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$, $\lim_{n\to\infty}|x^{2n+1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\frac{1}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=x$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}=\frac{-1-(-1)}{1+1}=0$$

이상에서

$$f(x)=\begin{cases}-x & (|x|<1)\\ 0 & (x=1)\\ x & (|x|>1)\\ 0 & (x=-1)\end{cases}$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 ③이다.

답 ③

17 전략 두 점 A_n, B_n의 좌표를 n에 대한 식으로 나타낸 후 a_n, b_n을 구한다.

풀이 $A_n(n, \sqrt{5n+4})$, $B_n(n, \sqrt{2n-1})$이므로

$a_n=\sqrt{n^2+5n+4}$, $b_n=\sqrt{n^2+2n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{12}{a_n-b_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{\sqrt{n^2+5n+4}-\sqrt{n^2+2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12(\sqrt{n^2+5n+4}+\sqrt{n^2+2n-1})}{(\sqrt{n^2+5n+4}-\sqrt{n^2+2n-1})(\sqrt{n^2+5n+4}+\sqrt{n^2+2n-1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12(\sqrt{n^2+5n+4}+\sqrt{n^2+2n-1})}{3n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)}{3+\frac{5}{n}}$$

$$=\frac{12\cdot(1+1)}{3}=8$$

답 ③

02 급수

04 급수의 수렴과 발산

Lecture 06 급수

20쪽

1-1 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{n+1} = 4$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 1$

답 (1) 4 (2) 1

2-1 (1) $S_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$$= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k - n$$

$$= 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

(2) $1+3+5+\cdots+(2n-1)+\cdots = \lim_{n\to\infty} S_n$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 (1) $S_n = n^2$ (2) 발산

쌤 한마디

일반적으로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산은 다음과 같은 순서로 조사한다.

(ⅰ) 부분합 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$를 구한다.

(ⅱ) 극한 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$를 조사한다.

2-2 (1) 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{2}{3}} = 2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} = 2$$

따라서 주어진 급수는 2에 수렴한다.

(2) 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 (1) 수렴, 2 (2) 발산

Lecture 07 급수와 수열의 극한값 사이의 관계, 급수의 성질

21쪽

1-1 답 $\frac{n}{n+2}$, 1, 0

Q BOX

분자 또는 분모에 근호가 포함된 경우에는 분자 또는 분모를 유리화한다.

자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

(단, $r\neq1$)

급수와 수열의 극한값 사이의 관계를 이용하면 부분합의 수열 $\{S_n\}$의 수렴, 발산을 조사하지 않고도 급수가 발산하는지 판별할 수 있다.

1-2 (1) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n = \frac{3n-1}{3n+2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{3n+2} = 1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

(2) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n = \sqrt{n^2+2n} - n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+2n} - n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = 1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

2-1 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$= 4+(-2) = 2$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$= 4-(-2) = 6$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$= 2\cdot4+(-2) = 6$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(6a_n - \frac{b_n}{2}\right) = 6\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$= 6\cdot4 - \frac{1}{2}\cdot(-2) = 25$$

답 (1) 2 (2) 6 (3) 6 (4) 25

기본+표준 유형 Q+Q

22쪽

01 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^3-4n+5}{n(n+2)(3n-1)}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^3-4n+5}{3n^3+5n^2-2n} = -\frac{2}{3}$$

답 $-\frac{2}{3}$

02 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sqrt{9n^2+5n} - 3n$$

$$= \frac{(\sqrt{9n^2+5n}-3n)(\sqrt{9n^2+5n}+3n)}{\sqrt{9n^2+5n}+3n}$$

$$= \frac{9n^2+5n-9n^2}{\sqrt{9n^2+5n}+3n}$$

$$= \frac{5n}{\sqrt{9n^2+5n}+3n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{\sqrt{9n^2+5n}+3n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt{9+\frac{5}{n}}+3}$$
$$= \frac{5}{3+3} = \frac{5}{6}$$
답 $\frac{5}{6}$

03 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n = \frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right)$$

$\frac{1}{AB}$
$= \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)$
(단, $A \neq B$)

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}\right)$$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{4}$$
답 $\frac{1}{4}$

04 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n = \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{2}{n(n+1)}$$
$$= 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$1+2+3+\cdots+n$
$= \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= 2\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2$$
답 ④

05 $\sum_{n=2}^{\infty} \log_2 \frac{n^2}{n^2-1}$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \log_2 \frac{k \cdot k}{(k-1)(k+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \log_2\left(\frac{k}{k-1} \cdot \frac{k}{k+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\log_2\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) + \log_2\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) + \log_2\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) + \cdots + \log_2\left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \log_2\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \log_2 \frac{2n}{n+1} = \log_2 2 = 1$$
답 1

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ($a_n > 0$, $\alpha > 0$)일 때,
$\lim_{n\to\infty} \log a_n$
$= \log(\lim_{n\to\infty} a_n)$
$= \log \alpha$

06 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \log a_k$$
$$= \log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \cdots + \log a_n$$
$$= \log(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n) = \log \frac{10n-3}{n+8}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \log \frac{10n-3}{n+8}$$
$$= \log 10 = 1$$
답 1

07 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_1 = 1,\ S_2 = \frac{2}{3},\ S_3 = 1,\ S_4 = \frac{4}{5},\ S_5 = 1,\ S_6 = \frac{6}{7},$
$\cdots$

이므로 $S_{2n-1} = 1,\ S_{2n} = \frac{2n}{2n+1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = 1,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.
답 수렴, 1

쌤 한마디

항의 부호가 교대로 바뀌는 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 홀수 번째 항까지의 부분합 S_{2n-1}과 짝수 번째 항까지의 부분합 S_{2n}의 극한값을 비교하여 수렴, 발산을 조사한다.

① $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \alpha$ (α는 실수) ⇨ $\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$
⇨ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$

② $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n\to\infty} S_{2n}$ ⇨ $\lim_{n\to\infty} S_n$은 발산
⇨ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산

08 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

ㄱ. $S_n = 0+0+\cdots+0 = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0$$

따라서 주어진 급수는 0에 수렴한다.

ㄴ. $S_1 = -2,\ S_2 = -\frac{1}{2},\ S_3 = -2,\ S_4 = -\frac{2}{3},$

$S_5 = -2,\ S_6 = -\frac{3}{4},\ \cdots$이므로

$$S_{2n-1} = -2,\ S_{2n} = -\frac{n}{n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = -2,$$
$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n+1}\right) = -1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = 0,\ S_3 = \frac{1}{3},\ S_4 = 0,\ S_5 = \frac{1}{4},\ S_6 = 0,$

$\cdots$이므로

$$S_{2n-1} = \frac{1}{n+1},\ S_{2n} = 0$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 0$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 0$이므로 주어진 급수는 0에 수렴한다.

이상에서 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ④

09 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2+4n^2}{na_n+2n^2-3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n^2}{n^2}+4}{\frac{a_n}{n}+2-\frac{3}{n}} = 2$

답 2

10 $b_n = \frac{a_n}{3} - 7$이라 하면 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{3}-7\right)=0$

$a_n = 3b_n + 21$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(3b_n+21) = 3\lim_{n\to\infty} b_n + 21$

$= 3\cdot 0 + 21 = 21$

답 21

11 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{5n-3} = \frac{2}{5} \neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5n-3}$은 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = 1 \neq 0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right)$은 발산한다.

이상에서 발산하는 급수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

12 ① $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}$, 즉 주어진 급수는 발산한다.

② $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^3} = 1 \neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^3}$, 즉 주어진 급수는 발산한다.

③ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$

$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$

$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots = \infty$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

④ $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\cdots$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$= \lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$

$= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1) = \infty$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

⑤ $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\cdots$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$

답 ⑤

13 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n) = 10$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n) = 2$

에서

$3\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 10$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2$

$\therefore 3\alpha+\beta = 10$, $\alpha-\beta = 2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\alpha = 3$, $\beta = 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3b_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n - 3\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$= 2\cdot 3 - 3\cdot 1 = 3$

답 3

14 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n) = \beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$

$= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$

$= \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 모두 수렴한다.

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, ⋯

이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 모두 발산하지만 $a_n b_n = 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0$, 즉 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

Q BOX

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한이므로 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈 후 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$임을 이용한다.

수열 $\{a_n\}$을 포함한 급수가 수렴하면 이 급수의 일반항을 b_n으로 놓고 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$임을 이용한다.

급수의 성질은 수렴하는 급수에 대해서만 성립한다.

05 등비급수

Lecture 08 등비급수

24쪽

1-1 (1) 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$이고, $-1<\frac{1}{2}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

(2) 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{2}{5}$이고, $-1<-\frac{2}{5}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}=\frac{5}{7}$$

(3) 공비가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$이고, $1<\frac{\sqrt{5}}{2}$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

(4) 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{3}-1$이고, $-1<\sqrt{3}-1<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$$

답 (1) 수렴, 1 (2) 수렴, $\frac{5}{7}$ (3) 발산 (4) 수렴, $2+\sqrt{3}$

1-2 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}+\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$$

$$=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

급수의 성질을 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 기호를 분배한 후 등비급수의 합을 각각 구한다.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n\left(\frac{1}{4}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$

$$=\frac{-\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=-\frac{3}{7}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3^n}-\frac{1}{4^n}\right)=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$=4\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}-\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}=-\frac{5}{6}$$

답 (1) $\frac{9}{4}$ (2) $-\frac{3}{7}$ (3) $\frac{5}{3}$ (4) $-\frac{5}{6}$

2-1 (1) 공비가 $3x$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1<3x<1 \quad \therefore -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$$

(2) 공비가 $x-2$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1<x-2<1 \quad \therefore 1<x<3$$

(3) 공비가 $-\frac{x}{4}$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1<-\frac{x}{4}<1 \quad \therefore -4<x<4$$

답 (1) $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$
(2) $1<x<3$
(3) $-4<x<4$

Lecture 09 등비급수의 활용

25쪽

1-1 (1) $a_1=\pi\cdot4^2=16\pi$, $a_2=\pi\cdot2^2=4\pi$, $a_3=\pi\cdot1^2=\pi$

(2) 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

두 원 C_n, C_{n+1}의 닮음비가 2 : 1이므로 넓이의 비는 4 : 1이다.
즉 $a_n : a_{n+1}=4 : 1$이므로
$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$

(3) 모든 원의 넓이의 합은 첫째항이 16π, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수의 합과 같으므로

$$\frac{16\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{64}{3}\pi$$

답 (1) $a_1=16\pi$, $a_2=4\pi$, $a_3=\pi$
(2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{64}{3}\pi$

2-1 (1) $0.\dot{1}8\dot{9}=0.189+0.000189+0.000000189+\cdots$

0.189189189…

$$=\frac{0.189}{1-0.001}=\frac{7}{37}$$

(2) $0.4\dot{3}=0.4+0.03+0.003+0.0003+\cdots$

0.4333…

$$=0.4+\frac{0.03}{1-0.1}$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{30}=\frac{13}{30}$$

(3) $1.5\dot{2}=1.5+0.02+0.002+0.0002+\cdots$

1.5222…

$$=1.5+\frac{0.02}{1-0.1}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{45}=\frac{137}{90}$$

답 (1) $\frac{7}{37}$ (2) $\frac{13}{30}$ (3) $\frac{137}{90}$

쌤 한마디

순환소수를 공식을 이용하여 분수로 나타낼 수도 있다.

① $0.\dot{a}\dot{b}=\frac{ab}{99}$

② $0.a\dot{b}=\frac{ab-a}{90}$

③ $a.\dot{b}\dot{c}=\frac{abc-a}{99}$

기본+표준 유형 Q+Q 26쪽

01 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}+(-5)^{n+1}}{15^n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-1}\cdot 3^n}{15^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)\cdot(-5)^n}{15^n}$

$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n+(-5)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}+(-5)\cdot\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$=\frac{1}{12}+\frac{5}{4}=\frac{4}{3}$ 답 ④

02 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+3^2+3^3+\cdots+3^n}{4^n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{3(3^n-1)}{3-1}}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(3^n-1)}{2\cdot 4^n}$

$=\frac{3}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

$=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)$

$=\frac{3}{2}\cdot\left(3-\frac{1}{3}\right)=4$ 답 4

03 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(-1<r<1)$라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=6$에서

$\frac{3}{1-r}=6,\quad 1-r=\frac{1}{2}\quad\therefore r=\frac{1}{2}$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 $a_1^2=9$, 공비가 $r^2=\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{9}{1-\frac{1}{4}}=12$ 답 12

04 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(-1<r<1)$라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=10$에서

$\frac{a}{1-r}=10$ ...... ㉠

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=ar$, 공비가 r^2인 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\frac{5}{3}$에서 $\frac{ar}{1-r^2}=\frac{5}{3}$

$\therefore \frac{ar}{(1-r)(1+r)}=\frac{5}{3}$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$10\cdot\frac{r}{1+r}=\frac{5}{3},\quad \frac{r}{1+r}=\frac{1}{6}$

$6r=1+r,\quad 5r=1\quad\therefore r=\frac{1}{5}$

$r=\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{5}{4}a=10\quad\therefore a=8$

Q BOX

$x=0$이면 각 항이 0이므로 급수의 합은 0이다.

$\{a_{2n}\}$: ar, ar^3, ar^5, …

따라서 $a_n=8\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$이므로

$a_4=8\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{4-1}=\frac{8}{125}$ 답 ⑤

05 공비가 $\frac{2-x}{3}$이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$-1<\frac{2-x}{3}<1,\quad -3<2-x<3$

$-5<-x<1\quad\therefore -1<x<5$ 답 ④

06 (i) $x=0$일 때,

주어진 급수는 0에 수렴한다.

(ii) $x\neq 0$일 때,

공비가 $\frac{x-3}{2}$이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$-1<\frac{x-3}{2}<1,\quad -2<x-3<2$

$\therefore 1<x<5$

(i), (ii)에서 $x=0$ 또는 $1<x<5$

따라서 정수 x는 0, 2, 3, 4의 4개이다. 답 4

쌤 한마디

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$이 수렴할 조건은 $a=0$ 또는 $-1<r<1$이다. 따라서 $a\neq r$일 때, $a=0$인 경우를 빠뜨리지 않도록 주의한다.

07 (i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2+n-\{2(n-1)^2+(n-1)\}$

$=2n^2+n-(2n^2-3n+1)$

$=4n-1$ ...... ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n-1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{a_na_{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{12}{(4k-1)(4k+3)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}12\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)\right\}$

$=3\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)\right\}$

$=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)$

$=3\cdot\frac{1}{3}=1$ 답 ④

08 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=3\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=\frac{3}{2}$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=3\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-3\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\left(-\frac{3}{2}+3\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=\frac{3}{2}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots$$
$$=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{4}}=2$$

답 2

09 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

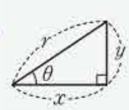
점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고, x, y를 각각 등비급수로 나타낸다.

$$x=\overline{\mathrm{OP_1}}+\overline{\mathrm{P_2P_3}}+\overline{\mathrm{P_4P_5}}+\overline{\mathrm{P_6P_7}}+\cdots$$
$$=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$
$$y=\overline{\mathrm{P_1P_2}}+\overline{\mathrm{P_3P_4}}+\overline{\mathrm{P_5P_6}}+\overline{\mathrm{P_7P_8}}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)$이다.

답 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

10 $\overline{\mathrm{OP_1}}=1$, $\overline{\mathrm{P_1P_2}}=\frac{3}{4}$, $\overline{\mathrm{P_2P_3}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$, $\overline{\mathrm{P_3P_4}}=\left(\frac{3}{4}\right)^3$, $\cdots$에서



➡ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$$x=\overline{\mathrm{OP_1}}\cos 30^\circ-\overline{\mathrm{P_1P_2}}\cos 30^\circ+\overline{\mathrm{P_2P_3}}\cos 30^\circ-\overline{\mathrm{P_3P_4}}\cos 30^\circ+\cdots$$
$$=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{7}$$
$$y=\overline{\mathrm{OP_1}}\sin 30^\circ+\overline{\mathrm{P_1P_2}}\sin 30^\circ+\overline{\mathrm{P_2P_3}}\sin 30^\circ+\overline{\mathrm{P_3P_4}}\sin 30^\circ+\cdots$$
$$=1\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{2}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{4}}=2$$
$$\therefore \frac{x}{y}=\frac{\sqrt{3}}{7}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{7}$

11 $\overline{\mathrm{A_1A_2}}$를 $5:2$로 외분하는 점이 $\mathrm{A_3}$이므로

$\overline{\mathrm{A_1A_2}}:\overline{\mathrm{A_2A_3}}=3:2$이므로 $\overline{\mathrm{A_2A_3}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{A_1A_2}}$

$$\overline{\mathrm{A_2A_3}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{A_1A_2}}=\frac{2}{3}$$

$\overline{\mathrm{A_2A_3}}$을 $5:2$로 외분하는 점이 $\mathrm{A_4}$이므로

$$\overline{\mathrm{A_3A_4}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{A_2A_3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$\overline{\mathrm{A_3A_4}}$를 $5:2$로 외분하는 점이 $\mathrm{A_5}$이므로

$$\overline{\mathrm{A_4A_5}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{A_3A_4}}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$$
$$\vdots$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$$

답 3

12 $\overline{\mathrm{AA_1}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$이고 $\triangle\mathrm{AB_1A_1}$은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AA_1}}=3\sqrt{2}$$
$$\therefore l_1=4\cdot 3\sqrt{2}=12\sqrt{2}$$

$\overline{\mathrm{A_1A_2}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$이고 $\triangle\mathrm{A_1A_2D_2}$는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{A_2D_2}}=\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{A_1A_2}}=3$$
$$\therefore l_2=4\cdot 3=12$$

$\overline{\mathrm{A_2A_3}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A_2D_2}}=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$이고 $\triangle\mathrm{A_2B_3A_3}$은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{A_3B_3}}=\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{A_2A_3}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$
$$\therefore l_3=4\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$$
$$\vdots$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}l_n=12\sqrt{2}+12+6\sqrt{2}+\cdots$$
$$=\frac{12\sqrt{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{24}{\sqrt{2}-1}$$
$$=24(\sqrt{2}+1)$$

답 $24(\sqrt{2}+1)$

13 색칠한 정사각형의 넓이를 큰 순서대로 S_1, S_2, S_3, $\cdots$이라 하면

$$S_1=4\cdot\frac{1}{4}=1,\ S_2=S_1\cdot\frac{1}{4}=1\cdot\frac{1}{4},$$
$$S_3=S_2\cdot\frac{1}{4}=1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2,\ \cdots$$
$$\therefore S_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

따라서 색칠한 정사각형의 넓이의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

14 정삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{16},\ S_2=S_1\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{1}{4},$$

$$S_3=S_2\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2,\ \cdots$$

$$\therefore S_n=\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{16}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

답 ⑤

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이
➡ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

15 $0.3\dot{6}=0.3+0.06+0.006+0.0006+\cdots$

$$=0.3+\frac{0.06}{1-0.1}=\frac{3}{10}+\frac{1}{15}=\frac{11}{30}$$

$0.0\dot{2}=0.02+0.002+0.0002+\cdots$

$$=\frac{0.02}{1-0.1}=\frac{1}{45}$$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{11}{30}}{1-\frac{1}{45}}=\frac{3}{8}$$

답 ②

16 $0.\dot{4}=0.4+0.04+0.004+\cdots=\frac{0.4}{1-0.1}=\frac{4}{9}$

$0.\dot{2}\dot{7}=0.27+0.0027+0.000027+\cdots$

$$=\frac{0.27}{1-0.01}=\frac{3}{11}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0.\dot{2}\dot{7}$에서

$$\frac{a_1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{11}$$

$$\therefore a_1=\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{33}$$

답 ④

중단원 마무리

29쪽

01 전략 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}S_n$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=6$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(2S_n-5)=2\lim_{n\to\infty}S_n-5=2\cdot6-5=7$$

답 ③

02 전략 S_n을 구한 후 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ $(A\neq B)$임을 이용한다.

풀이 $S_n=\frac{n\{2\cdot6+(n-1)\cdot4\}}{2}=2n(n+2)$이므로

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k(k+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

03 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a_n을 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2-2nx+n^2-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$$a_n=n^2-1$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{a_n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(n-1)(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{(k-1)(k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

답 ③

04 전략 로그를 포함한 급수의 합은 $\log A+\log B=\log AB$임을 이용하여 구한다.

풀이 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_3\left(1+\frac{2}{a_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\log_3\frac{a_k+2}{a_k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log_3\frac{k^2+3k+2}{k^2+3k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log_3\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log_3\left(\frac{k+2}{k}\cdot\frac{k+1}{k+3}\right)$$

$$=\log_3\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{4}\right)+\log_3\left(\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{5}\right)+\log_3\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{6}\right)+\cdots+\log_3\left(\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+1}{n+3}\right)$$

$$=\log_3\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+1}{n+3}\right)$$

$$=\log_3\frac{3(n+1)}{n+3}$$ ··· ❶

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log_3\left(1+\frac{2}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{3(n+1)}{n+3}=\log_3 3=1$$ ··· ❷

답 1

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 급수의 부분합 S_n을 구할 수 있다.	80 %
❷	$\sum_{n=1}^{\infty} \log_3\left(1+\frac{2}{a_n}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

05 **전략** 수열 $\{a_n\}$은 항의 부호가 교대로 바뀌므로 홀수 번째 항까지의 부분합과 짝수 번째 항까지의 부분합을 구하여 두 극한값이 같은지 확인한다.

풀이 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제n항까지의 부분합을 A_n이라 하면

$$A_1=1,\ A_2=\frac{1}{2},\ A_3=1,\ A_4=\frac{2}{3},\ A_5=1,$$
$$A_6=\frac{3}{4},\ \cdots$$

이므로 $\quad A_{2n-1}=1,\ A_{2n}=\frac{n}{n+1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} A_{2n-1}=1,\ \lim_{n\to\infty} A_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} A_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} A_{2n}=1$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 1에 수렴한다.

한편 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 제n항까지의 부분합을 B_n이라 하면

$$B_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} B_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 1에 수렴한다. 답 ①

06 **전략** 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n-3)=0$$

$\lim_{n\to\infty} a_n=r$이므로 $\quad 2r-3=0$

$$\therefore r=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+2}-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^{-n}}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^{-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{9}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$
$$=\frac{\frac{9}{4}-0}{1+0}=\frac{9}{4}$$

답 ③

분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 거듭제곱으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

07 **전략** 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$임을 이용한다.

풀이 주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{3n^3}\right)=0$$

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{3n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{3n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{18n^3}$$
$$=\frac{1}{9}$$

답 ②

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 수열의 극한에서 분자의 차수와 분모의 차수가 같으면 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

08 **전략** $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산하고, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이면 부분합 S_n을 구한 후 $\lim_{n\to\infty} S_n$을 조사한다.

풀이 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{3n+5}=\frac{4}{3}\neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{3n+5}$은 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})=\infty$$

ㄷ. 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

이상에서 수렴하는 급수인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

09 **전략** 먼저 급수와 수열의 극한값 사이의 관계를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값을 구한다.

풀이 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-3)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+3)=0,\ \lim_{n\to\infty}(b_n-3)=0$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=-3,\ \lim_{n\to\infty} b_n=3$$

$\lim_{n\to\infty} a_n$
$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+3)-3\}$
$=0-3=-3,$
$\lim_{n\to\infty} b_n$
$=\lim_{n\to\infty}\{(b_n-3)+3\}$
$=0+3=3$

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n=-3\cdot 3=-9$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} b_n=3\neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n+6)=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+3)-(b_n-3)\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3)-\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-3)$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n+6)$은 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

10 전략 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a와 공비 r를 구한 후 수렴하는 등비급수의 합은 $\frac{a}{1-r}$임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{ar^{n-1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a}{r}\cdot\left(\frac{r}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a}{r}\cdot\left(\frac{r}{3}\right)^n}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

즉 $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a}{r}\cdot\left(\frac{r}{3}\right)^n\right\}=\frac{1}{6}$이어야 하므로

$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a}{r}\cdot\left(\frac{r}{3}\right)^n\right\}$은 $\left|\frac{r}{3}\right|>1$ 또는 $\frac{r}{3}=-1$이면 발산하고 $\left|\frac{r}{3}\right|<1$이면 0에 수렴하므로 $\frac{r}{3}=1$이어야 한다.

$\frac{r}{3}=1 \quad \therefore r=3$

이때 $\frac{a}{r}=\frac{1}{6}$이므로

$\frac{a}{3}=\frac{1}{6} \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore a_n=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$ 답 ③

11 전략 주어진 급수가 수렴하므로 $-1<r<1$임을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 주어진 급수가 수렴하므로

$-1<r<1$ ...... ㉠

주어진 급수의 합이 $-\frac{1}{3}$이므로 $a\neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=-\frac{1}{3}$이므로 $\frac{a}{1-r}=-\frac{1}{3}$

$\therefore a=\frac{r-1}{3}$

㉠에서 $-2<r-1<0$

$-\frac{2}{3}<\frac{r-1}{3}<0 \quad \therefore -\frac{2}{3}<a<0$

따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

12 전략 주어진 두 급수가 수렴하므로 $-1<a<1$, $-1<b<1$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}a^n$이 수렴하므로 $-1<a<1$ ...... ㉠

또 $\sum_{n=1}^{\infty}b^n$이 수렴하므로 $-1<b<1$ ...... ㉡

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(ab)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(a^2b^2)^n$은 공비가 a^2b^2인 등비급수이고, ㉠, ㉡에서

$0\le a^2<1,\ 0\le b^2<1$

$\therefore 0\le a^2b^2<1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄴ. [반례] $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3a}{b}\right)^n$은 공비가 $\frac{3a}{b}$인 등비급수이고, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이면 $\frac{3a}{b}=3>1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3a}{b}\right)^n$은 발산한다.

따라서 주어진 급수가 항상 수렴하는 것은 아니다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a+2b)^n$은 공비가 $a+2b$인 등비급수이고, ㉠, ㉡에서

$-1<a<1,\ -2<2b<2$

$\therefore -3<a+2b<3$

따라서 주어진 급수가 항상 수렴하는 것은 아니다.

이상에서 항상 수렴하는 급수인 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

13 전략 $7^na_n=b_n$으로 놓고 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용한다.

풀이 $7^na_n=b_n$이라 하고, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=3^n-1$

(i) $n=1$일 때, $b_1=S_1=3-1=2$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$b_n=S_n-S_{n-1}=3^n-1-(3^{n-1}-1)$

$=3^n-3^{n-1}=3^{n-1}(3-1)$

$=2\cdot 3^{n-1}$ ...... ㉠

이때 $b_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$b_n=2\cdot 3^{n-1}$, 즉 $7^na_n=2\cdot 3^{n-1}$

따라서 $\frac{a_n}{3^{n-1}}=\frac{2}{7^n}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{7^n}=\frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{1}{3}$ 답 ①

14 전략 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge 2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 (i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=-\frac{2}{3}$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right\}-\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-1\right\}$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)$

$=-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ...... ㉠

이때 $a_1=-\frac{2}{3}$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ⋯❶

$\therefore a_{n+1}+a_{n+2}=-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left\{-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}$

$=-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(1+\frac{1}{3}\right)$

$=-\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}+a_{n+2})=\frac{-\frac{8}{27}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{4}{9} \quad \cdots ❷$$

답 $-\frac{4}{9}$

단계	채점 기준	비율
❶	a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷	급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}+a_{n+2})$의 합을 구할 수 있다.	50 %

15 전략 직선의 방정식과 이차함수의 식을 연립하여 풀어 점 P_n의 좌표를 구한 후, 점 P_n의 y좌표를 이용하여 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}$을 구한다.

풀이 점 P_n의 x좌표는 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)=3x(x-1)$에서

$$(x-1)\left\{3x-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=0$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (\because\ x\neq1)$$

$x=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$을 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$에 대입하면

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 $\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=\left|\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

자연수 n에 대하여 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}>\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로 $\left|\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=2-\frac{4}{9}=\frac{14}{9}$$

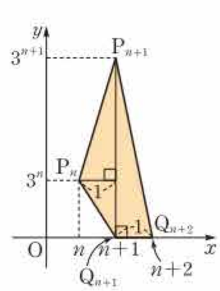
답 ②

16 전략 주어진 사각형의 넓이를 n에 대한 식으로 나타내어 a_n을 구한 후 등비급수의 합을 이용한다.

풀이 $\square\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+2}\mathrm{P}_{n+1}$의 네 꼭짓점의 좌표는

$\mathrm{P}_n(n,\ 3^n)$, $\mathrm{Q}_{n+1}(n+1,\ 0)$, $\mathrm{Q}_{n+2}(n+2,\ 0)$, $\mathrm{P}_{n+1}(n+1,\ 3^{n+1})$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}$을 그으면 밑변을 $\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}$로 하는 두 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$, $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+2}$의 높이는 모두 1이므로 두 삼각형의 넓이가 같다.



$$a_n=\square\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+2}\mathrm{P}_{n+1}$$

$$=\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}+\triangle\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+2}$$

$$=2\triangle\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+2}$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}\cdot\overline{\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+2}}\right)$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot3^{n+1}\cdot1\right)$$

$$=3^{n+1}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}$$

따라서 $p=6$, $q=1$이므로

$p^2+q^2=37$

답 37

17 전략 S_1, S_2, S_3, …을 구하여 S_n을 구한 후 등비급수의 합을 이용한다.

풀이 $S_1=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot4^2-\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=4\pi-8$

(사분원 $\mathrm{OA_1C_1}$의 넓이) $-$ ($\triangle\mathrm{OA_1C_1}$의 넓이)

정사각형 $\mathrm{OA_2B_2C_2}$의 한 변의 길이가 $4\cdot\frac{1}{2}=2$이므로

$$S_2=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot2^2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=(4\pi-8)\cdot\frac{1}{4}$$

정사각형 $\mathrm{OA_3B_3C_3}$의 한 변의 길이가 $2\cdot\frac{1}{2}=1$이므로

$$S_3=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot1^2-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=(4\pi-8)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$\therefore\ S_n=(4\pi-8)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(4\pi-8)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{4\pi-8}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}(\pi-2)$$

답 $\frac{16}{3}(\pi-2)$

18 전략 주어진 순환소수를 분수로 나타낸 후 등비급수의 합을 이용한다.

풀이 $0.\dot{1}\dot{2}=0.12+0.0012+0.000012+\cdots$

$$=\frac{0.12}{1-0.01}=\frac{4}{33}$$

$0.\dot{x}=0.x+0.0x+0.00x+\cdots$

$$=\frac{0.x}{1-0.1}=\frac{x}{9}$$

$0.\dot{1}\dot{8}=0.18+0.0018+0.000018+\cdots$

$$=\frac{0.18}{1-0.01}=\frac{2}{11}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0.\dot{1}\dot{8}$에서 $\quad\frac{\frac{4}{33}}{1-\frac{x}{9}}=\frac{2}{11}$

$$\frac{4}{33}=\frac{2}{11}\left(1-\frac{x}{9}\right),\quad 1-\frac{x}{9}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{x}{9}=\frac{1}{3}\quad\therefore\ x=3$$

답 ③

03 지수함수와 로그함수의 미분

06 지수함수와 로그함수의 극한

Lecture 10 지수함수의 극한

34쪽

1-1 (1) $\lim_{x\to3} 2^x = 2^3 = 8$

답 (1) 8 (2) 0 (3) ∞ (4) ∞

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 실수 r에 대하여
$\lim_{x\to r} a^x = a^r$

1-2 (1) $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^x - 4\right\} = 0-4=-4$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^{2x}}{8^x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{9}{8}\right)^x = \infty$

답 (1) −4 (2) ∞

2-1 (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{1+3^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^x+1}$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분자, 분모를 각각 3^x으로 나눈다.

이때 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^x+1} = 1$

(2) $\lim_{x\to\infty}(4^x-3^x) = \lim_{x\to\infty}4^x\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}$

∞ − ∞ 꼴이므로 밑이 가장 큰 항, 즉 4^x으로 묶는다.

이때 $\lim_{x\to\infty}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\} = 1$이므로

$\lim_{x\to\infty}4^x\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\} = \infty$

답 (1) 1 (2) ∞

2-2 (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-7^x}{3^x+7^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^x-1}{\left(\frac{3}{7}\right)^x+1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^x = 0$, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^x = 0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^x-1}{\left(\frac{3}{7}\right)^x+1} = -1$

(2) $\lim_{x\to\infty}(2^{3x}-10^x) = \lim_{x\to\infty}(8^x-10^x)$

$= \lim_{x\to\infty}10^x\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^x-1\right\}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^x-1\right\} = -1$이므로

$\lim_{x\to\infty}10^x\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^x-1\right\} = -\infty$

답 (1) −1 (2) −∞

Lecture 11 로그함수의 극한

35쪽

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로 양수 r에 대하여
$\lim_{x\to r}\log_a x = \log_a r$

1-1 (1) $\lim_{x\to1}\log_6 x = \log_6 1 = 0$

답 (1) 0 (2) ∞ (3) ∞ (4) −∞

1-2 (1) $\lim_{x\to0+}\log_3 3x = \lim_{x\to0+}(1+\log_3 x)$

$= -\infty$

(2) $x-1=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to1+}\log_{\frac{1}{4}}(x-1) = \lim_{t\to0+}\log_{\frac{1}{4}}t = \infty$

답 (1) −∞ (2) ∞

2-1 (1) $\lim_{x\to\infty}\log\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}(-\log x) = -\infty$

(2) $\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{9x+1}{x} = \log_3\left(\lim_{x\to\infty}\frac{9x+1}{x}\right)$

$= \log_3 9 = 2$

$a>0$, $a\neq1$, $f(x)>0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)>0$일 때,
$\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}$
$=\log_a\{\lim_{x\to\infty}f(x)\}$

답 (1) −∞ (2) 2

2-2 (1) $\lim_{x\to\infty}\{\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{2}}x\}$

$= \lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{x}$

$= \log_{\frac{1}{2}}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}\right)$

$= \log_{\frac{1}{2}}1 = 0$

(2) $\lim_{x\to4+}\{\log(x^2-16)-\log(x-4)\}$

$= \lim_{x\to4+}\log\frac{x^2-16}{x-4}$

$= \lim_{x\to4+}\log\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}$

$= \lim_{x\to4+}\log(x+4)$

$= \log\{\lim_{x\to4+}(x+4)\}$

$= \log 8$

답 (1) 0 (2) log 8

기본+표준 유형 Q+Q

36쪽

01 $\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}-4^x}{3^x-4^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x-1}{\left(\frac{3}{4}\right)^x-1} = 1$

답 ③

02 $\lim_{x\to\infty}(9^x-7^x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to\infty}\left\{9^x\left(1-\frac{7^x}{9^x}\right)\right\}^{\frac{1}{2x}}$

$= \lim_{x\to\infty}(9^x)^{\frac{1}{2x}}\cdot\left\{1-\left(\frac{7}{9}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2x}}$

$= \lim_{x\to\infty}(3^{2x})^{\frac{1}{2x}}\cdot\left\{1-\left(\frac{7}{9}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2x}}$

$= 3\cdot1 = 3$

답 ②

03 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $t\to-\infty$이므로

$\lim_{x\to0-}\frac{1}{1+6^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{1+6^t}$

$= \frac{1}{1+0} = 1$

답 1

04 $\lim_{x\to\infty}(\log_2 x-\log_2\sqrt{8x^2-x})$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{x}{\sqrt{8x^2-x}}$

$=\log_2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{8x^2-x}}\right)$

$=\log_2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{8-\frac{1}{x}}}\right)$

$=\log_2\frac{1}{\sqrt{8}}=\log_2 2^{-\frac{3}{2}}$

$=-\frac{3}{2}$

답 ③

05 $\lim_{x\to\infty}\{\log 3^{2x+1}-\log(3^x+9^x)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{3^{2x+1}}{3^x+9^x}$

$=\log\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\left(\frac{1}{3}\right)^x+1}\right\}$

$=\log 3$

답 $\log 3$

06 $\lim_{x\to\infty}\{\log_3(ax+1)-\log_3(4x-1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{ax+1}{4x-1}$

$=\log_3\left(\lim_{x\to\infty}\frac{ax+1}{4x-1}\right)$

$=\log_3\frac{a}{4}$

$\log_3\frac{a}{4}=2$에서 $\quad\frac{a}{4}=3^2=9$

$\therefore a=36$

답 ⑤

07 무리수 e와 자연로그

Lecture 12 무리수 e와 자연로그

37쪽

1-1 (3) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^{-1}$

$=e^{-1}=\frac{1}{e}$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right\}^{-\frac{1}{5}}$

$=e^{-\frac{1}{5}}$

답 (1) e (2) e (3) $\frac{1}{e}$ (4) $e^{-\frac{1}{5}}$

2-1 (1) $\ln e^4=4\ln e=4$

(2) $\ln\sqrt{e}=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$

답 (1) 4 (2) $\frac{1}{2}$

Q BOX

$a\neq 0$, $k>0$, $k\neq 1$일 때

① $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}=1$

② $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}=1$

③ $\lim_{x\to 0}\frac{\log_k(1+ax)}{ax}$

$=\frac{1}{\ln k}$

④ $\lim_{x\to 0}\frac{k^{ax}-1}{ax}=\ln k$

0이 아닌 상수 a, b에 대하여

$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{ab}$

$=e^{ab}$

0이 아닌 상수 a, b에 대하여

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{bx}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax}\right\}^{\frac{b}{a}}$

$=e^{\frac{b}{a}}$

Q 쌤 한마디

자연로그는 e를 밑으로 하는 로그의 특별한 경우이므로 다음 로그의 성질이 모두 성립한다.

$x>0$, $y>0$일 때

① $\ln 1=0$, $\ln e=1$

② $\ln xy=\ln x+\ln y$

③ $\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y$

④ $\ln x^n=n\ln x$ (단, n은 실수)

3-1 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot 4$

$=1\cdot 4=4$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{1}{4}$

$=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_7(1+x)}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_7(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{7}$

$=\frac{1}{\ln 7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{7\ln 7}$

답 (1) 4 (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{7\ln 7}$ (4) $\ln 6$

기본 + 표준 유형 Q+Q

38쪽

01 $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{4}{x}}+\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\}^{12}+\lim_{x\to 0}\{(1-3x)^{-\frac{1}{3x}}\}^{-3}$

$=e^{12}+e^{-3}=e^{12}+\frac{1}{e^3}$ 답 $e^{12}+\frac{1}{e^3}$

02 $\lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\frac{x}{5}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{5}{x}}\right\}^{\frac{1}{5}}\cdot\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$=e^{\frac{1}{5}}\cdot e^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{7}{10}}$ 답 ③

03 $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}^{6x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{6x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^{6x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^3\cdot\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-6}$

$=e^3\cdot e^{-6}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$ 답 $\frac{1}{e^3}$

04 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{9x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^{9a}=e^{9a}$

$e^{9a}=e^{36}$에서 $\quad 9a=36$

$\therefore a=4$ 답 4

05 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+5x)+8x}{3x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{\ln(1+5x)}{3x}+\dfrac{8}{3}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{\ln(1+5x)}{5x}\cdot\dfrac{5}{3}+\dfrac{8}{3}\right\}$

$=1\cdot\dfrac{5}{3}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{13}{3}$ 　답 ②

06 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\ln(x^2+4x+4)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\ln(x+2)^2}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2\ln(x+2)}{x+1}$

$x+1=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2\ln(x+2)}{x+1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2\ln(t+1)}{t}$

$=2\cdot1=2$ 　답 2

07 $\lim\limits_{x\to\infty}x\{\ln(6x+1)-\ln6x\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\dfrac{6x+1}{6x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{6x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}6x\ln\left(1+\dfrac{1}{6x}\right)\cdot\dfrac{1}{6}$

$=1\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$ 　답 ②

08 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_3(4+x)-\log_3 4}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_3\dfrac{4+x}{4}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_3\left(1+\dfrac{x}{4}\right)}{\dfrac{x}{4}}\cdot\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{\ln3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4\ln3}$ 　답 $\dfrac{1}{4\ln3}$

09 $x-3=t$로 놓으면 $x\to3$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\log_7(x-2)}{x-3}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\log_7(1+t)}{t}$

$=\dfrac{1}{\ln7}$ 　답 ②

10 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\dfrac{3}{x+2}$

$=1\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$ 　답 ⑤

11 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+8x)}{e^{6x}-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+8x)}{8x}\cdot\dfrac{6x}{e^{6x}-1}\cdot\dfrac{4}{3}$

$=1\cdot1\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}$ 　답 $\dfrac{4}{3}$

Q BOX

$\ln6-\ln3=\ln\dfrac{6}{3}$
$=\ln2$

$x\to a$일 때
① (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\to0$
② (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\to0$

0이 아닌 상수 a, b에 대하여
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+ax)}{e^{bx}-1}=\dfrac{a}{b}$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-1}{\ln(1+bx)}=\dfrac{a}{b}$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^t=(3^{-1})^t=3^{-t}$

12 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6^x-3^x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(6^x-1)-(3^x-1)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{6^x-1}{x}-\dfrac{3^x-1}{x}\right)$

$=\ln6-\ln3=\ln2$ 　답 $\ln2$

13 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2^{x-1}-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2^{x-1}-1}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2^{x-1}-1}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2^t-1}{t}\cdot\dfrac{1}{t+2}$

$=\ln2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\ln2$

$=\ln2^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{2}$

$\therefore a=\sqrt{2}$ 　답 ③

14 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to0}(ax+b)=0$이므로 　$b=0$

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax}{e^{4x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{e^{4x}-1}\cdot\dfrac{a}{4}$

$=1\cdot\dfrac{a}{4}=\dfrac{a}{4}$

$\dfrac{a}{4}=\dfrac{1}{2}$에서 　$a=2$

$\therefore a+b=2$ 　답 ②

15 $x\to0$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to0}(3^{x+1}-a)=0$이므로 　$3-a=0$

$\therefore a=3$

$a=3$을 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+bx)}{3^{x+1}-3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+bx)}{3(3^x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{3^x-1}\cdot\dfrac{\ln(1+bx)}{bx}\cdot\dfrac{b}{3}$

$=\dfrac{1}{\ln3}\cdot1\cdot\dfrac{b}{3}=\dfrac{b}{3\ln3}$

$\dfrac{b}{3\ln3}=\dfrac{2}{\ln3}$에서 　$b=6$

$\therefore ab=18$ 　답 ④

16 점 P의 x좌표가 t이므로 　$\mathrm{P}(t, \ln t)$

따라서 $S(t)=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot\ln t=2\ln t$이므로

$\lim\limits_{t\to1+}\dfrac{S(t)}{t-1}=\lim\limits_{t\to1+}\dfrac{2\ln t}{t-1}$

$t-1=s$로 놓으면 $t\to1+$일 때 $s\to0+$이므로

$\lim\limits_{t\to1+}\dfrac{2\ln t}{t-1}=\lim\limits_{s\to0+}\dfrac{2\ln(1+s)}{s}=2$ 　답 2

17 두 점 P, Q의 x좌표가 t이므로

$\mathrm{P}(t, 5^t)$, $\mathrm{Q}(t, 3^{-t})$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=5^t-3^{-t}$

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{\overline{PQ}}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{5^t-3^{-t}}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(5^t-1)-(3^{-t}-1)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{5^t-1}{t}+\frac{3^{-t}-1}{-t}\right)$$
$$=\ln5+\ln3=\ln15$$ 답 $\ln 15$

18 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$$\therefore a=\lim_{x\to0}\frac{e^x+2x-1}{6x}$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}+2\right)$$
$$=\frac{1}{6}(1+2)=\frac{1}{2}$$ 답 ④

19 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\ln(a+4x)}{x}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\ln(a+4x)=0$이므로 $\quad \ln a=0$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot4$$
$$=1\cdot4=4$$

$\therefore b-a=3$ 답 3

08 지수함수와 로그함수의 미분

Lecture 13 지수함수와 로그함수의 미분 41쪽

1-1 (1) $y'=8\cdot(e^x)'=8e^x$

(2) $y=e^3\cdot e^x$이므로

$y'=e^3\cdot(e^x)'=e^3\cdot e^x=e^{x+3}$

(3) $y'=4\cdot(6^x)'=4\cdot6^x\ln 6=4\ln6\cdot6^x$

(4) $y=3\cdot3^x$이므로

$y'=3\cdot(3^x)'=3\cdot3^x\ln 3=3\ln3\cdot3^x$

답 (1) $y'=8e^x$ (2) $y'=e^{x+3}$
(3) $y'=4\ln6\cdot6^x$ (4) $y'=3\ln3\cdot3^x$

1-2 (1) $y'=(x+1)'\cdot e^x+(x+1)\cdot(e^x)'$

$=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(2) $y'=(x^2)'\cdot e^x+x^2\cdot(e^x)'$

$=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x$

$=x(x+2)e^x$

(3) $y'=(3x)'\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x+3x\cdot\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}'$

$=3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x+3x\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x\ln\frac{1}{5}$

$=3\left(1+x\ln\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^x$

(4) $y'=(2^x)'\cdot(x+4)+2^x\cdot(x+4)'$

$=2^x\ln2\cdot(x+4)+2^x$

$=2^x\{(x+4)\ln2+1\}$

답 (1) $y'=(x+2)e^x$
(2) $y'=x(x+2)e^x$
(3) $y'=3\left(1+x\ln\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^x$
(4) $y'=2^x\{(x+4)\ln2+1\}$

2-1 (1) $y'=9\cdot(\ln x)'=9\cdot\frac{1}{x}=\frac{9}{x}$

(2) $y=\ln5-\ln x$이므로 $\quad y'=-\frac{1}{x}$

(3) $y'=(-4)\cdot(\log_2x)'=-\frac{4}{x\ln2}$

(4) $y=\log3+\log x$이므로 $\quad y'=\frac{1}{x\ln10}$

답 (1) $y'=\frac{9}{x}$ (2) $y'=-\frac{1}{x}$
(3) $y'=-\frac{4}{x\ln2}$ (4) $y'=\frac{1}{x\ln10}$

2-2 (1) $y=3\ln x$이므로 $\quad y'=\frac{3}{x}$

(2) $y'=(x)'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$

$=\ln x+1$

(3) $y'=(x)'\cdot\log_7x+x\cdot(\log_7x)'$

$=1\cdot\log_7x+x\cdot\frac{1}{x\ln7}$

$=\log_7x+\frac{1}{\ln7}$

(4) $y'=(e^x)'\cdot\log_6x+e^x\cdot(\log_6x)'$

$=e^x\cdot\log_6x+e^x\cdot\frac{1}{x\ln6}$

$=e^x\left(\log_6x+\frac{1}{x\ln6}\right)$

답 (1) $y'=\frac{3}{x}$ (2) $y'=\ln x+1$
(3) $y'=\log_7x+\frac{1}{\ln7}$
(4) $y'=e^x\left(\log_6x+\frac{1}{x\ln6}\right)$

기본+표준 유형 Q+Q 42쪽

01 $f(x)=(x+4)e^{x+2}=e^2(x+4)e^x$이므로

$f'(x)=e^2\{(x+4)'\cdot e^x+(x+4)\cdot(e^x)'\}$

$=e^2\{1\cdot e^x+(x+4)\cdot e^x\}$

$=e^2(x+5)e^x$

$\therefore f'(0)=5e^2$ 답 ⑤

02 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이고 $f'(x)=3^x\ln 3-2^x\ln 2$이므로

$$f'(1)=3\ln 3-2\ln 2=\ln 3^3-\ln 2^2=\ln\frac{3^3}{2^2}=\ln\frac{27}{4}$$

따라서 $\ln a=\ln\frac{27}{4}$이므로 $a=\frac{27}{4}$ 답 ④

Q BOX

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

03 $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}+3x^2=2x\ln x+x+3x^2$

이므로 $f'(1)=1+3=4$ 답 ③

04 $f'(x)=(e^x)'\cdot(\ln x+k^2x)+e^x\cdot(\ln x+k^2x)'$

$$=e^x(\ln x+k^2x)+e^x\left(\frac{1}{x}+k^2\right)=e^x\left(\ln x+k^2x+\frac{1}{x}+k^2\right)$$

이므로 $f'(1)=e(2k^2+1)$

$e(2k^2+1)=9e$에서 $2k^2+1=9$

$2k^2=8,\quad k^2=4$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$ 답 2

05 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to1+}\ln ax=\lim_{x\to1-}(bx+4)\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

또 $f'(1)$이 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>1)\\ b & (x<1)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=\lim_{x\to1-}b\quad\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $\ln a=5$

$\therefore a=e^5$ 답 $a=e^5,\ b=1$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$F(x)=\begin{cases}f(x) & (x\ge a)\\ g(x) & (x<a)\end{cases}$$

가 $x=a$에서 미분가능하면

① 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

➡ $\lim_{x\to a-}g(x)=f(a)$

② 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다.

➡ $\lim_{x\to a+}f'(x)=\lim_{x\to a-}g'(x)$

06 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하고 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1+}(ax^3+1)=\lim_{x\to1-}(e^{x-1}+b)$$

$a+1=1+b$

$\therefore a=b\quad\cdots\cdots\ ㉠$

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}3ax^2 & (x>1)\\ e^{x-1} & (x<1)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to1+}3ax^2=\lim_{x\to1-}e^{x-1}$

$3a=1\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

$\therefore b=\frac{1}{3}\ (\because ㉠)$

$\therefore a+b=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

중단원 마무리

43쪽

01 전략 밑이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 각각 나누거나 밑이 가장 큰 항으로 묶는다.

풀이 $$\lim_{x\to\infty}\frac{6^x-2^{x+1}}{6^{x+1}+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x}{6+\left(\frac{1}{3}\right)^x}=\frac{1}{6}$$

이므로 $a=\frac{1}{6}$

$$\lim_{x\to\infty}(8^x-3^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left\{8^x\left(1-\frac{3^x}{8^x}\right)\right\}^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}(8^x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left\{1-\left(\frac{3}{8}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}=8\cdot1=8$$

이므로 $\beta=8\quad\therefore \alpha\beta=\frac{4}{3}$ 답 ④

02 전략 로그의 성질을 이용하여 $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}$ 꼴로 변형한 후 $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}=\log_a\{\lim_{x\to\infty}f(x)\}$임을 이용한다.

풀이 $$\lim_{x\to\infty}\{\log_5(x^2+3)+\log_{\frac{1}{5}}(5x^2-2)\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\{\log_5(x^2+3)-\log_5(5x^2-2)\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_5\frac{x^2+3}{5x^2-2}=\log_5\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{5x^2-2}\right)$$

$$=\log_5\frac{1}{5}=-1$$ 답 -1

$\log_{\frac{1}{5}}(5x^2-2)=\log_{5^{-1}}(5x^2-2)=-\log_5(5x^2-2)$

03 전략 $(AB)^{\frac{1}{x}}=A^{\frac{1}{x}}B^{\frac{1}{x}}$임을 이용하여 식을 변형한 후 $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$임을 이용한다.

풀이 $$\lim_{x\to0}\left\{(1+ax)\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^a\cdot\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right\}^{\frac{1}{a}}$$

$$=e^a\cdot e^{\frac{1}{a}}=e^{a+\frac{1}{a}}$$

$e^{a+\frac{1}{a}}=e^{\frac{10}{3}}$에서 $a+\frac{1}{a}=\frac{10}{3}$

양변에 $3a$를 곱한 후 정리한다.

$3a^2-10a+3=0,\quad (3a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a$는 자연수$)$ 답 3

04 전략 약분하여 로그의 진수를 간단히 한 후 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $$\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n}\right)\right\}^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\cdots\cdot\frac{3n+1}{3n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$=\ln e^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$ 답 ①

05 전략 $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$를 이용할 수 있도록 주어진 식을 치환한다.

풀이 $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

ㄱ. $x+1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to-1}(x+2)^{\frac{1}{x+1}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-1}$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

ㄷ. $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^{-1}$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

이상에서 $\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}$과 값이 같은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

06 전략 로그의 성질을 이용하여 분자를 간단히 나타낸 후 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+\sqrt{5x})+\ln(1-\sqrt{5x})}{x}$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+\sqrt{5x})(1-\sqrt{5x})}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1-5x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1-5x)}{-5x}\cdot(-5)$$

$$=1\cdot(-5)=-5$$

답 ①

07 전략 좌변의 식을 변형하여 극한값을 구한 후 우변과 비교한다.

풀이 $\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+12x)}{\ln(1+3x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+12x)}{12x}\cdot\frac{3x}{\ln(1+3x)}\cdot4$$

$$=\frac{1}{\ln3}\cdot1\cdot4$$

$$=\frac{4}{\ln3}$$

$\therefore a=4$

답 4

08 전략 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-5^x}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{4x}-1)-(5^x-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot4-\frac{5^x-1}{x}\right)$$

$$=4-\ln5$$

답 $4-\ln5$

09 전략 $\lim_{x\to0}xf(x)=7$, $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{ax}=1$을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0}(e^{6x}-1)f(x)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{6x}\cdot6\cdot xf(x)$$

$$=1\cdot6\cdot7=42$$

답 ⑤

10 전략 함수의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 (i) $x>0$일 때,

$$\frac{\ln(1+x)}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{e^{2x}-1}{2x}$$

$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$이고 $\lim_{x\to0+}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=1$$

(ii) $-1<x<0$일 때,

$$\frac{e^{2x}-1}{2x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$\lim_{x\to0-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$이고 $\lim_{x\to0-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$이므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$

$\lim_{x\to0}\frac{f(3x)}{x}$에서 $3x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(3x)}{x}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{\frac{t}{3}}=3\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}$$

$$=3\cdot1=3$$

답 ③

Q BOX

함수의 극한의 대소 관계
세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$와 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le h(x)\le g(x)$, $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$ (L은 실수)이면 $\lim_{x\to a}h(x)=L$

부등식의 각 변을 x로 나누면 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

부등식의 각 변을 x로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

11 전략 $y=\log_a x\,(a>0,\ a\ne1)$의 역함수는 $y=a^x$임을 이용하여 $f(x)$의 역함수를 구한다.

풀이 $y=\log_2(x+3)$으로 놓으면

$x+3=2^y\qquad\therefore x=2^y-3$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=2^x-3$

즉 $g(x)=2^x-3$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x-2)}{g(x)+2}=\lim_{x\to0}\frac{\log_2(x+1)}{2^x-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{2^x-1}$$

$$=\frac{1}{\ln2}\cdot\frac{1}{\ln2}=\frac{1}{(\ln2)^2}$$

답 ⑤

12 전략 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to -3}\frac{3^{x+3}-1}{\ln(x+4)}$에서 $x+3=t$로 놓으면

$x\longrightarrow -3$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log_2(1+2x)}+\lim_{x\to -3}\frac{3^{x+3}-1}{\ln(x+4)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\log_2(1+2x)}\cdot\frac{1}{2}+\lim_{t\to 0}\frac{3^t-1}{\ln(1+t)}$$
$$=\ln 2\cdot\frac{1}{2}+\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\frac{3^t-1}{t}$$
$$=\ln\sqrt{2}+1\cdot\ln 3$$
$$=\ln 3\sqrt{2}$$

답 $\ln 3\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}\ln 2=\ln 2^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{2}$

13 전략 $x\to a$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\to 0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 0}\ln(ax+b)=0$

$\ln b=0$ $\therefore b=1$

$f(x)=\ln(ax+1)$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(ax+1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(ax+1)}{ax}\cdot a=1\cdot a=a$$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=\ln(2x+1)$이므로

$f(2)=\ln 5$

답 ③

14 전략 $x\to a$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\to 0$임을 이용한다.

풀이 $x\longrightarrow\frac{1}{5}$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to\frac{1}{5}}(ax+6)=0$이므로

$\frac{1}{5}a+6=0$ $\therefore a=-30$ ··· ❶

$a=-30$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to\frac{1}{5}}\frac{-30x+6}{\ln 5x}=\lim_{x\to\frac{1}{5}}\frac{-6(5x-1)}{\ln 5x}$$

이때 $5x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\frac{1}{5}$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{1}{5}}\frac{-6(5x-1)}{\ln 5x}=\lim_{t\to 0}\frac{-6t}{\ln(1+t)}$$
$$=-6\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}$$
$$=-6\cdot 1=-6$$

$\therefore b=-6$ ··· ❷

$\therefore a+b=-36$ ··· ❸

답 -36

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	$a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

15 전략 점 P의 좌표를 $(a, \ln a)$ $(a>0)$라 하고 $a+\ln a=t$에서 a와 t 사이의 관계식을 구한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a, \ln a)$ $(a>0)$라 하면 두 점 H, Q의 좌표는

$\mathrm{H}(a, 0)$, $\mathrm{Q}(a, e^a)$

따라서 $\overline{\mathrm{OH}}=a$, $\overline{\mathrm{QH}}=e^a$이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OH}}\cdot\overline{\mathrm{QH}}=\frac{1}{2}ae^a \quad\cdots\cdots ㉠$$

점 P는 직선 $x+y=t$ 위의 점이므로

$a+\ln a=t$, $\ln ae^a=t$

$\therefore ae^a=e^t$

$a=\ln e^a$이므로
$a+\ln a=\ln e^a+\ln a$
$=\ln ae^a$

$ae^a=e^t$을 ㉠에 대입하면 $S(t)=\frac{1}{2}e^t$

$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{2S(t)-1}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{2\cdot\frac{1}{2}e^t-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{e^t-1}{t}=1$$

답 ①

16 전략 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$$

이때

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(x^2+3x+2)=2,$$
$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{ax}-1}{3x}=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot\frac{a}{3}$$
$$=1\cdot\frac{a}{3}=\frac{a}{3}$$

이므로 $\frac{a}{3}=2$ $\therefore a=6$

답 ①

17 전략 함수 $f(x)$가 $x>0$인 모든 실수에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

풀이 조건 (나)에서 $x\neq 1$일 때,

$$f(x)=\frac{a\ln x+b-5}{x-1}$$

함수 $f(x)$가 $x>0$인 모든 실수에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=6$ ($\because$ (가))

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{a\ln x+b-5}{x-1}=6 \quad\cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}(a\ln x+b-5)=0$이므로

$b-5=0$ $\therefore b=5$

$b=5$를 ㉠에 대입하면 $\quad \lim_{x\to1}\dfrac{a\ln x}{x-1}=6$

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{a\ln x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{a\ln(1+t)}{t}=a$$

$\therefore\ a=6$

따라서 $x>0$에서 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6\ln x}{x-1} & (x\neq1)\\ 6 & (x=1)\end{cases}$이므로

$f(3)=\dfrac{6\ln3}{2}=3\ln3$ 　　답 $3\ln3$

18 전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 방정식 $f'(k)=0$을 만족시키는 k의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=(x^3-2x^2-5x-4)e^x$이므로

$f'(x)=(3x^2-4x-5)e^x+(x^3-2x^2-5x-4)e^x$

$=(x^3+x^2-9x-9)e^x$ ⋯ ❶

$f'(k)=0$에서 $\quad (k^3+k^2-9k-9)e^k=0$

$k^3+k^2-9k-9=0\ (\because e^k>0)$

$(k+1)(k+3)(k-3)=0$

$\therefore\ k=-1$ 또는 $k=-3$ 또는 $k=3$ ⋯ ❷

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$-1+(-3)+3=-1$ ⋯ ❸

답 -1

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & -9 & -9\\ & & -1 & 0 & 9\\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0\end{array}$$

$\therefore\ k^3+k^2-9k-9$
$=(k+1)(k^2-9)$
$=(k+1)(k+3)(k-3)$

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷	$f'(k)=0$을 만족시키는 k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	모든 실수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

19 전략 미분계수의 정의를 이용하여

$\lim_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$를 변형한다.

풀이 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3)+f(3)-f(3-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}+\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}\right\}$

$=f'(3)+f'(3)=2f'(3)$

이때 $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln3}$이므로

$2f'(3)=\dfrac{2}{3\ln3}$ 　　답 ②

QBOX

04 삼각함수의 미분

09 삼각함수

Lecture 14 삼각함수 　　46쪽

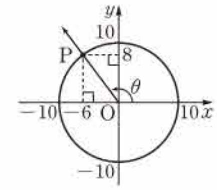
각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는 원의 교점이 $P(x,\ y)$일 때, $r=\sqrt{x^2+y^2}$이므로

$\csc\theta=\dfrac{r}{y}\ (y\neq0)$,

$\sec\theta=\dfrac{r}{x}\ (x\neq0)$,

$\cot\theta=\dfrac{x}{y}\ (y\neq0)$

1-1 $\overline{OP}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$이므로



(1) $\csc\theta=\dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}$

(2) $\sec\theta=-\dfrac{10}{6}=-\dfrac{5}{3}$

(3) $\cot\theta=-\dfrac{6}{8}=-\dfrac{3}{4}$ 답 (1) $\dfrac{5}{4}$ (2) $-\dfrac{5}{3}$ (3) $-\dfrac{3}{4}$

1-2 (1) $\csc\theta=\csc\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt2}{2}}=\sqrt2$

$\sec\theta=\sec\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt2}{2}}=\sqrt2$

$\cot\theta=\cot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{1}=1$

$-\theta$의 삼각함수
① $\sin(-\theta)=-\sin\theta$
② $\cos(-\theta)=\cos\theta$
③ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

(2) $\csc\theta=\csc\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)}$

$=-\dfrac{1}{\sin\frac{5}{6}\pi}=-\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=-2$

$\sec\theta=\sec\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)}$

$=\dfrac{1}{\cos\frac{5}{6}\pi}=\dfrac{1}{-\frac{\sqrt3}{2}}=-\dfrac{2\sqrt3}{3}$

$\cot\theta=\cot\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right)}$

$=-\dfrac{1}{\tan\frac{5}{6}\pi}=-\dfrac{1}{-\frac{\sqrt3}{3}}=\sqrt3$

$\pi-\theta$의 삼각함수
① $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$
② $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$
③ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

(3) $\csc\theta=\csc120^\circ=\dfrac{1}{\sin120^\circ}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt3}{2}}=\dfrac{2\sqrt3}{3}$

$\sec\theta=\sec120^\circ=\dfrac{1}{\cos120^\circ}=\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

$\cot\theta=\cot120^\circ=\dfrac{1}{\tan120^\circ}=\dfrac{1}{-\sqrt3}=-\dfrac{\sqrt3}{3}$

(4) $\csc\theta=\csc330^\circ=\dfrac{1}{\sin330^\circ}=\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

$\sec\theta=\sec330^\circ=\dfrac{1}{\cos330^\circ}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt3}{2}}=\dfrac{2\sqrt3}{3}$

$\cot\theta=\cot330^\circ=\dfrac{1}{\tan330^\circ}=\dfrac{1}{-\frac{\sqrt3}{3}}=-\sqrt3$

답 풀이 참조

2-1 (1) $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$이므로

$$\tan^2\theta+1=\left(-\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\therefore \tan^2\theta=\frac{7}{9}$$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로

$$\tan\theta<0$$

$$\therefore \tan\theta=-\frac{\sqrt{7}}{3}$$

(2) $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$이므로

$$\csc^2\theta=1+\frac{1}{\tan^2\theta}=1+\frac{1}{3^2}=\frac{10}{9}$$

이때 θ가 제3사분면의 각이므로

$$\csc\theta<0$$

$$\therefore \csc\theta=-\frac{\sqrt{10}}{3}$$

답 (1) $-\frac{\sqrt{7}}{3}$ (2) $-\frac{\sqrt{10}}{3}$

2-2 $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$이므로

$$\sec^2\theta=2^2+1=5$$

또 $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$이므로

$$\csc^2\theta=1+\frac{1}{\tan^2\theta}=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$$

$$\therefore \sec^2\theta-\csc^2\theta=5-\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$$

답 $\frac{15}{4}$

기본+표준 유형 Q+Q

L 47쪽

01 $\overline{OP}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$이므로

$$\csc\theta=-\frac{13}{12},\ \cot\theta=-\frac{5}{12}$$

$$\therefore \csc\theta+\cot\theta=-\frac{3}{2}$$

답 ③

02 $\sec(\pi-\theta)=\frac{1}{\cos(\pi-\theta)}$

$$=-\frac{1}{\cos\theta} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sin\theta=\frac{1}{3}$이므로

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

$$\therefore \cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \left(\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$$

따라서 ㉠에서

$$\sec(\pi-\theta)=-\frac{1}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

답 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

03 ① $\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1+\sin\theta}$

$$=\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{2}{1-\sin^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}$$

$$=2\sec^2\theta$$

② $\cos\theta\sec\theta+\tan\theta\cot\theta=1+1=2$

③ $\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}$

$$=\frac{\cos\theta}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}+\frac{\sin\theta}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$=\cos\theta+\sin\theta$$

④ $\frac{\cot\theta}{1+\csc\theta}+\frac{1+\csc\theta}{\cot\theta}$

$$=\frac{\cot^2\theta+(1+\csc\theta)^2}{(1+\csc\theta)\cot\theta}$$

$$=\frac{\cot^2\theta+1+2\csc\theta+\csc^2\theta}{(1+\csc\theta)\cot\theta}$$

$$=\frac{\csc^2\theta+2\csc\theta+\csc^2\theta}{(1+\csc\theta)\cot\theta}$$

$$=\frac{2\csc\theta(1+\csc\theta)}{(1+\csc\theta)\cot\theta}$$

$$=\frac{2\csc\theta}{\cot\theta}$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=2\sec\theta$$

⑤ $(\csc\theta+1)(\sec\theta+1)(\csc\theta-1)(\sec\theta-1)$

$$=(\csc\theta+1)(\csc\theta-1)(\sec\theta+1)(\sec\theta-1)$$

$$=(\csc^2\theta-1)(\sec^2\theta-1)$$

$$=\cot^2\theta\tan^2\theta=1$$

답 ⑤

> **Q BOX** 삼각함수 사이의 관계
> ① $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
> ② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
> ③ $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$
> ④ $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

04 $\frac{\csc\theta}{\sec\theta-\tan\theta}+\frac{\csc\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$

$$=\frac{\csc\theta(\sec\theta+\tan\theta)+\csc\theta(\sec\theta-\tan\theta)}{(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)}$$

$$=\frac{2\csc\theta\sec\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}=\frac{2\csc\theta\sec\theta}{\tan^2\theta+1-\tan^2\theta}$$

$$=2\csc\theta\sec\theta$$

답 $2\csc\theta\sec\theta$

05 $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=2+\sqrt{3}$에서

$$1+\tan\theta=(2+\sqrt{3})(1-\tan\theta)$$

$$1+\tan\theta=2-2\tan\theta+\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan\theta$$

$$(3+\sqrt{3})\tan\theta=1+\sqrt{3}$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore \sec^2\theta=\tan^2\theta+1=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1=\frac{4}{3}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\qquad \sec\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

06 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{25}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$

$\therefore \csc\theta\sec\theta=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{25}{12}$ 답 ④

10 삼각함수의 덧셈정리

Lecture 15 삼각함수의 덧셈정리

L 48쪽

1-1 (1) $\sin 15°=\sin(45°-30°)$

$=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos 105°=\cos(45°+60°)$

$=\cos 45°\cos 60°-\sin 45°\sin 60°$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(3) $\sin\frac{7}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(4) $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=2-\sqrt{3}$

답 (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(3) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (4) $2-\sqrt{3}$

2-1 $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

Q BOX

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$=1-2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)^2$

$=-\frac{7}{25}$

과 같이 구할 수도 있다.

$\sin\theta\pm\cos\theta$의 값 또는 $\sin\theta\cos\theta$의 값이 주어진 경우

➡ $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2$

$=1\pm 2\sin\theta\cos\theta$

(복호동순)임을 이용한다.

$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$=\frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}}$

$=-\frac{24}{7}$

와 같이 구할 수도 있다.

$15°=60°-45°$임을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수도 있다.

$\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$임을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있다.

α는 제3사분면의 각이다.

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$=2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{24}{25}$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=-\frac{7}{25}$

(3) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$이므로

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-\frac{24}{7}$

답 (1) $\frac{24}{25}$ (2) $-\frac{7}{25}$ (3) $-\frac{24}{7}$

Q 쌤 한마디

배각의 공식은 다음과 같이 $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$에 β 대신 α를 대입하면 유도할 수 있다.

① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

➡ $\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

➡ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

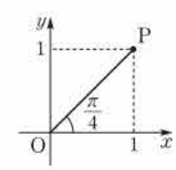
$=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$

$=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

➡ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

3-1 (1) 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 P(1, 1)을 잡으면



$\overline{OP}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

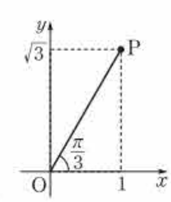
$\therefore \sin\theta+\cos\theta$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

(2) 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 P(1, $\sqrt{3}$)을 잡으면



$\overline{OP}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

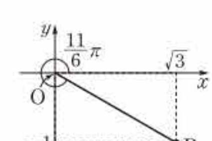
$\therefore \sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

$=2\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

(3) 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 P($\sqrt{3}$, -1)을 잡으면



$\overline{OP}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}$

$=2$

$\therefore \sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$

$=2\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=2\left(\sin\theta\cos\frac{11}{6}\pi+\cos\theta\sin\frac{11}{6}\pi\right)$

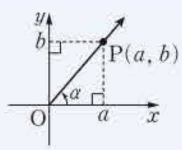
$=2\sin\left(\theta+\frac{11}{6}\pi\right)$

답 (1) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ (2) $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

(3) $2\sin\left(\theta+\frac{11}{6}\pi\right)$

쌤 한마디

좌표평면 위의 점 $P(a, b)$에 대하여 동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α라 하면 $\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$이고



$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$이므로

$a\sin\theta+b\cos\theta$

$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

기본+표준 유형 Q+Q

L 49쪽

01 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$, $\sin\beta>0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$,

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}$

$=\frac{63}{65}$

답 $\frac{63}{65}$

02 $\sin\alpha+\sin\beta=1$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=1$ …… ㉠

$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{9}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=\frac{10}{9}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,
$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$

$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{4}{9}$

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{9}$

답 ②

Q BOX

① 직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$\tan\theta=m$

② 두 직선 l, m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 α, β일 때, 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\tan\theta$
$=|\tan(\alpha-\beta)|$
$=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

03 두 직선 $y=x+2$, $y=5x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=1$, $\tan\beta=5$

이므로

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$

$=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{1-5}{1+1\cdot5}\right|=\frac{2}{3}$

답 ②

04 $x+y-5=0$에서

$y=-x+5$

$(2-\sqrt{3})x-y-4=0$에서

$y=(2-\sqrt{3})x-4$

두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=-1$, $\tan\beta=2-\sqrt{3}$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$

$=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{-1-(2-\sqrt{3})}{1+(-1)\cdot(2-\sqrt{3})}\right|=\sqrt{3}$

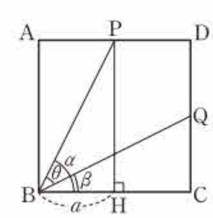
$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

답 $\frac{\pi}{3}$

주어진 도형에서 삼각함수의 값을 구할 수 있는 적당한 각을 문자로 놓은 후 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

05 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H, $\overline{BH}=a$, $\angle PBH=\alpha$, $\angle QBC=\beta$라 하면



$\tan\alpha=\frac{2a}{a}=2$,

$\tan\beta=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

이므로

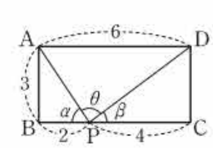
$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

06 점 P는 $\overline{BC}$를 $1:2$로 내분하므로



$\overline{BP}=2$, $\overline{CP}=4$

$\angle APB=\alpha$, $\angle DPC=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\frac{3}{2}$, $\tan\beta=\frac{3}{4}$

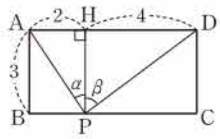
이므로

L 04 삼각함수의 미분

$$\tan\theta=\tan\{180°-(\alpha+\beta)\}$$
$$=-\tan(\alpha+\beta)$$
$$=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=-\frac{\frac{3}{2}+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}}=18$$

답 18

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{\mathrm{AD}}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



점 H는 $\overline{\mathrm{AD}}$를 1 : 2로 내분하므로 $\overline{\mathrm{AH}}=2$, $\overline{\mathrm{DH}}=4$

$\angle\mathrm{APH}=\alpha$, $\angle\mathrm{DPH}=\beta$라 하면

$$\tan\alpha=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=\frac{2}{3},\ \tan\beta=\frac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ \tan\theta=\tan(\alpha+\beta)$$
$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}}=18$$

07 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{3}{16}$$
$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{16}$$

따라서 $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{13}{16}$이므로

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\frac{13}{16}$$

답 $-\frac{13}{16}$

08 $y=\cos 2x-4\sin x+3$
$$=(1-2\sin^2 x)-4\sin x+3$$
$$=-2\sin^2 x-4\sin x+4$$
$$=-2(\sin x+1)^2+6$$

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로 주어진 함수는 $\sin x=-1$일 때 최댓값 6, $\sin x=1$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

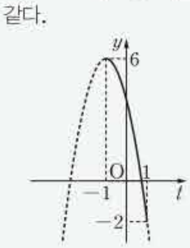
따라서 $M=6$, $m=-2$이므로

$$Mm=-12$$

답 ③

배각의 공식을 이용하여 한 종류의 삼각함수로 나타낸다.

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고
$$y=-2(\sin x+1)^2+6$$
$$=-2(t+1)^2+6$$
이므로 그래프는 다음과 같다.



09 $3\sin\theta+4\cos\theta$
$$=5\left(\sin\theta\cdot\frac{3}{5}+\cos\theta\cdot\frac{4}{5}\right)$$
$$=5(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$$
$$=5\sin(\theta+\alpha)\ \left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\right)$$
$$\therefore\ r=5$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$$ 이므로

$$r\tan\alpha=5\cdot\frac{4}{3}=\frac{20}{3}$$

답 ③

10 $y=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$
$$=2\left\{\sin x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$
$$=2\left(\sin x\cos\frac{2}{3}\pi+\cos x\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$=2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

따라서 $y=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{2}{3}\pi$만큼 평행이동한 것이므로

$$a=2,\ b=-\frac{2}{3}\pi$$
$$\therefore\ ab=-\frac{4}{3}\pi$$

답 $-\frac{4}{3}\pi$

$a\ne 0$, $b\ne 0$일 때, $y=a\sin x+b\cos x+c$ 꼴의 함수의 최대·최소
➡ $y=r\sin(x+\alpha)+c$ $(r>0)$ 꼴로 변형한 후 최댓값은 $r+c$, 최솟값은 $-r+c$임을 이용한다.

11 $y=\sin x-\cos x+6$
$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+6$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{7}{4}\pi+\cos x\sin\frac{7}{4}\pi\right)+6$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{7}{4}\pi\right)+6$$

이때 $-1\le\sin\left(x+\frac{7}{4}\pi\right)\le 1$이므로

$$-\sqrt{2}+6\le\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{7}{4}\pi\right)+6\le\sqrt{2}+6$$

따라서 $M=\sqrt{2}+6$, $m=-\sqrt{2}+6$이므로

$$Mm=(\sqrt{2}+6)(-\sqrt{2}+6)=34$$

답 ⑤

12 $f(x)=3a\sin x+\sqrt{7}a\cos x+3$
$$=4a\left(\sin x\cdot\frac{3}{4}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\right)+3$$
$$=4a(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha)+3$$
$$=4a\sin(x+\alpha)+3$$
$$\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4},\ \cos\alpha=\frac{3}{4}\right)$$

이때 $a>0$이고 $-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$이므로

$$-4a+3\le 4a\sin(x+\alpha)+3\le 4a+3$$

함수 $f(x)$의 최솟값이 -9이므로

$$-4a+3=-9,\qquad -4a=-12$$
$$\therefore\ a=3$$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$$4a+3=4\cdot 3+3=15$$

답 15

11 삼각함수의 극한과 미분

Lecture 16 삼각함수의 극한과 미분

51쪽

1-1 (1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos 3x = \cos \pi = -1$

(3) $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \tan 2x = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

답 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) -1 (3) $\sqrt{3}$

2-1 (1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{5x} = \frac{1}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

(4) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\tan 4x} \cdot \frac{3}{4}$

$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

답 (1) 4 (2) $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{4}$

3-1 답 (1) $y' = \cos x$

(2) $y' = 1 + 2\sin x$

(3) $y' = -\cos x - 3\sin x$

(4) $y' = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{x}$

기본+표준 유형 Q+Q

52쪽

01 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - \sin 2x}{4\cos^2 x}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - 2\sin x \cos x}{4(1-\sin^2 x)}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x(1-\sin x)}{4(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2(1+\sin x)}$

$= 0$

답 ③

02 $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\sin x - \cos x}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{\sin x - \cos x}$

분자, 분모에 각각 $\cos^2 x$를 곱한다.

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x(\sin x - \cos x)}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)}{\cos^2 x(\sin x - \cos x)}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x}$

$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

Q BOX

① $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

② $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

(단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

03 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x - \sin(-5x)}{2x}$

$= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{\sin 3x}{2x} - \frac{\sin(-5x)}{2x} \right\}$

$= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{2} - \frac{\sin(-5x)}{-5x} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \right\}$

$= 1 \cdot \frac{3}{2} - 1 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = 4$

답 4

04 $\lim_{x \to 0} \frac{f(\sin x)}{\sin f(x)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - 4\sin x}{\sin(x^2 - 4x)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x(\sin x - 4)}{\sin(x^2 - 4x)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 4x}{\sin(x^2 - 4x)} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x - 4}{x - 4}$

$x \to 0$일 때 $x^2 - 4x \to 0$이므로 $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 4x}{\sin(x^2 - 4x)} = 1$

$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{-4}{-4} = 1$

답 ⑤

① $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

② $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{ax} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

(단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

05 $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(4x^2 - x)}{x^2 + 3x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan(4x^2 - x)}{4x^2 - x} \cdot \frac{4x^2 - x}{x^2 + 3x}$

분자, 분모를 각각 x로 나눈다.

$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan(4x^2 - x)}{4x^2 - x} \cdot \frac{4x - 1}{x + 3}$

$= 1 \cdot \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

답 ②

06 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\tan x)}{6x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1}{6}$

$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

답 ④

07 $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{1 - \cos 4x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2x^2(1 + \cos 4x)}{(1 - \cos 4x)(1 + \cos 4x)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2x^2(1 + \cos 4x)}{1 - \cos^2 4x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2x^2(1 + \cos 4x)}{\sin^2 4x}$

$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{4x}{\sin 4x}\right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 4x}{8}$

$= 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

08 $\lim_{x \to 0} \frac{x \tan ax}{1 - \cos x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x \tan ax(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x \tan ax(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x \tan ax(1 + \cos x)}{\sin^2 x}$

$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \frac{\tan ax}{ax} \cdot a(1 + \cos x)$

$= 1^2 \cdot 1 \cdot 2a = 2a$

$2a=6$에서 　 $a=3$ 　　 답 3

09 $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{t\to 0} t\tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0} t\cdot\left(-\frac{1}{\tan t}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}\cdot(-1)$$
$$=1\cdot(-1)=-1$$

답 -1

$\tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot t$

10 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty} 3x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0} 3\frac{1}{t}\cdot\sin t$$
$$=\lim_{t\to 0} 3\cdot\frac{\sin t}{t}$$
$$=3\cdot 1=3$$

답 ④

11 $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(x^2+ax+b)=0$이므로 　 $b=0$

$b=0$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+a)}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot(x+a)$$
$$=1\cdot a=a$$

$\therefore a=-8$

$\therefore a+b=-8$ 　　 답 ③

$x \longrightarrow a$일 때
① (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하면
　(분자) $\longrightarrow 0$
② (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하면
　(분모) $\longrightarrow 0$

12 $x \longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}\ln(x+b)=0$이므로 　 $\ln b=0$

$\therefore b=1$

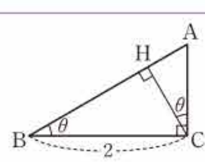
$b=1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}\cdot\frac{x}{\ln(x+1)}\cdot a$$
$$=1\cdot 1\cdot a=a$$

$\therefore a=4$

$\therefore a-b=3$ 　　 답 ③

13 $\triangle ABC \backsim \triangle ACH$ (AA 닮음)이므로



$\angle ACH=\angle ABC=\theta$

$\triangle CBH$에서

$\overline{CH}=2\sin\theta$

$\triangle ACH$에서

$\overline{AH}=\overline{CH}\tan\theta=2\sin\theta\tan\theta$

$\triangle ABC$와 $\triangle ACH$에서
$\angle A$는 공통,
$\angle ACB=\angle AHC=90°$
이므로
$\triangle ABC \backsim \triangle ACH$
(AA 닮음)

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{AH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin\theta\tan\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}2\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}$$
$$=2\cdot 1\cdot 1=2$$

답 2

14 $\triangle BOH$에서

$\overline{BH}=5\sin\theta$, $\overline{OH}=5\cos\theta$

따라서 $\overline{HA}=5-5\cos\theta=5(1-\cos\theta)$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 5\sin\theta\cdot 5(1-\cos\theta)$$
$$=\frac{25}{2}\sin\theta(1-\cos\theta)$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{25\sin\theta(1-\cos\theta)}{2\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{25\sin\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{2\theta^3(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{25\sin\theta(1-\cos^2\theta)}{2\theta^3(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{25\sin^3\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{25}{2}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$$
$$=\frac{25}{2}\cdot 1^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{4}$$

답 ②

15 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x}=b$ 　 ······ ㉠

$x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(a-\cos x)=0$이므로

$a-1=0$ 　 $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{1+\cos x}$$
$$=1^2\cdot 0=0$$

$\therefore a+b=1$ 　　 답 1

$x\neq a$인 모든 실수 x에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\neq a) \\ k & (x=a) \end{cases}$$

(k는 상수)가 모든 실수 x에서 연속이면

➡ $\lim_{x\to a}g(x)=k$

16 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{\sin 4(x-1)}{x-1}=k$

$x-1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$k=\lim_{x\to1}\frac{\sin4(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin4t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin4t}{4t}\cdot4$$
$$=1\cdot4=4$$

답 ④

17 $f(x)=5^x(\sin x-\cos x)$에서

$$f'(x)=5^x\ln5(\sin x-\cos x)+5^x(\cos x+\sin x)$$
$$=5^x\{(\ln5+1)\sin x+(1-\ln5)\cos x\}$$
$$\therefore f'(0)=1\cdot(1-\ln5)=1-\ln5$$

답 ②

18 $f(x)=e^x\sin x$에서

$$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$$
$$=e^x(\sin x+\cos x)$$

$f'(x)=0$에서 $e^x(\sin x+\cos x)=0$

$e^x>0$이므로 $\sin x=-\cos x$

$$\therefore \tan x=-1$$

$0<x<2\pi$이므로 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

따라서 구하는 합은

$$\frac{3}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=\frac{5}{2}\pi$$

답 $\frac{5}{2}\pi$

19 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

이때 $f(x)=-\sin x+\cos x$에서

$$f'(x)=-\cos x-\sin x$$

이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

답 -1

20 $\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)-\{f(\pi-h)-f(\pi)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{2h}\cdot2+\lim_{h\to0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$$
$$=2f'(\pi)+f'(\pi)=3f'(\pi)$$

이때 $f(x)=x\sin x$에서

$$f'(x)=\sin x+x\cos x$$

이므로

$$3f'(\pi)=3(\sin\pi+\pi\cos\pi)=-3\pi$$

답 -3π

21 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to0+}(ax+b)=\lim_{x\to0-}\cos x=f(0)$$
$$\therefore b=1$$

또 $f'(0)$이 존재해야 하므로

Q BOX

$\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}\neq0$

$\cos\frac{7}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq0$

$(\csc\theta-\cot\theta)(\csc\theta+\cot\theta)$
$=\csc^2\theta-\cot^2\theta$

함수 $F(x)=\begin{cases}f(x) & (x\ge a)\\ g(x) & (x<a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

① $f(a)=\lim_{x\to a-}g(x)$

② $\lim_{x\to a+}f'(x)=\lim_{x\to a-}g'(x)$

$$f'(x)=\begin{cases}a & (0<x<1)\\ -\sin x & (-1<x<0)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to0+}a=\lim_{x\to0-}(-\sin x)$

$$\therefore a=0$$
$$\therefore a+b=1$$

답 ④

22 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to0+}(e^x\cos x+a)=\lim_{x\to0-}(-4x^2+bx+6)$$
$$=f(0)$$

$1+a=6$ $\therefore a=5$

또 $f'(0)$이 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases}e^x\cos x-e^x\sin x & (x>0)\\ -8x+b & (x<0)\end{cases}$$

에서

$$\lim_{x\to0+}(e^x\cos x-e^x\sin x)=\lim_{x\to0-}(-8x+b)$$
$$\therefore b=1$$
$$\therefore ab=5$$

답 5

중단원 마무리

55쪽

01 전략 $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\frac{1}{\csc\theta-\cot\theta}+\frac{1}{\csc\theta+\cot\theta}$

$$=\frac{(\csc\theta+\cot\theta)+(\csc\theta-\cot\theta)}{\csc^2\theta-\cot^2\theta}$$
$$=\frac{2\csc\theta}{1}=2\csc\theta$$

답 ④

02 전략 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{3}{4}$$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{8}$

$$\therefore \tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=8$$

답 ③

03 전략 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

풀이 $\sin30^\circ\sin15^\circ-\cos30^\circ\cos15^\circ$

$$=-(\cos30^\circ\cos15^\circ-\sin30^\circ\sin15^\circ)$$
$$=-\cos(30^\circ+15^\circ)$$
$$=-\cos45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

04 전략 삼각함수의 덧셈정리와 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용한다.

풀이 $\sin\alpha+\cos\beta=\frac{5}{4}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{25}{16} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\cos\alpha+\sin\beta=\frac{1}{4}$의 양변을 제곱하면

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{16} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\frac{13}{8}$$

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=-\frac{3}{16}$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{16}$$

답 ③

05 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 삼각함수에 대한 식을 세운다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$$\tan\alpha+\tan\beta=2,\ \tan\alpha\tan\beta=\frac{k}{4}$$

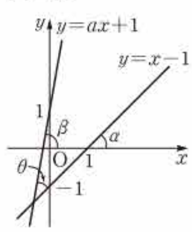
$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2}{1-\frac{k}{4}}=\frac{8}{4-k}$$

$\frac{8}{4-k}=8$에서 $4-k=1$ $\therefore k=3$

답 ⑤

06 전략 직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta=m$임을 이용한다.

풀이 두 직선 $x-y-1=0$, $ax-y+1=0$, 즉 $y=x-1$, $y=ax+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $a>1$에서 $\beta>\alpha$이므로



$$\theta=\beta-\alpha$$

$\tan\alpha=1$, $\tan\beta=a$이므로

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{a-1}{1+a}$$

$\tan\theta=\frac{1}{6}$이므로 $\frac{a-1}{1+a}=\frac{1}{6}$

$6a-6=1+a$ $\therefore a=\frac{7}{5}$

답 ④

07 전략 삼각함수 사이의 관계와 배각의 공식을 이용한다.

풀이 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin2\theta+\cos2\theta$$
$$=2\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta-1$$
$$=2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2-1$$
$$=-\frac{31}{25}$$

$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$ 또는 $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$임을 이용해도 같은 결과를 얻는다.

답 $-\frac{31}{25}$

08 전략 배각의 공식을 이용하여 $\tan(\angle CAB)$의 값을 구한다.

풀이 $\angle BAD=\angle CAD=\alpha$, $\overline{BD}=x$라 하면

$$\tan\alpha=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan(\angle CAB)=\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3} \quad \cdots ❶$$

이때 $\tan(\angle CAB)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{x+4}{8}$이므로

$\frac{x+4}{8}=\frac{4}{3}$ $\therefore x=\frac{20}{3}$

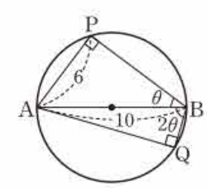
따라서 $\overline{BD}$의 길이는 $\frac{20}{3}$이다. $\cdots$ ❷

답 $\frac{20}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\tan(\angle CAB)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	$\overline{BD}$의 길이를 구할 수 있다.	50 %

09 전략 $\overline{BQ}$의 길이를 $\angle PBA$에 대한 삼각함수로 나타낸다.

풀이 $\angle PBA=\theta$라 하면



$\angle QBA=2\theta$

$\triangle ABP$에서 $\angle APB=90°$이므로

반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$이다.

$$\sin\theta=\frac{3}{5}$$

$\triangle ABQ$에서 $\angle AQB=90°$이므로

$$\overline{BQ}=\overline{AB}\cos2\theta$$
$$=10(1-2\sin^2\theta)$$
$$=10\left\{1-2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{14}{5}$$

답 ⑤

10 전략 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 주어진 식을 정리한 후 삼각함수의 합성을 이용하여 식을 변형한다.

풀이 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+4\cos x+3$

$$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)+4\cos x+3$$
$$=\sqrt{3}\sin x+5\cos x+3$$
$$=2\sqrt{7}\sin(x+\theta)+3$$
$$\left(\text{단, } \sin\theta=\frac{5\sqrt{7}}{14},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{21}}{14}\right)$$

이때 $-1\le\sin(x+\theta)\le1$이므로

$$-2\sqrt{7}+3\le2\sqrt{7}\sin(x+\theta)+3\le2\sqrt{7}+3$$

따라서 $M=2\sqrt{7}+3$, $m=-2\sqrt{7}+3$이므로

$$Mm=(2\sqrt{7}+3)(-2\sqrt{7}+3)=-19$$

답 ②

11 전략 주어진 식을 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$을 이용할 수 있도록 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0}\frac{\sin f(x)}{kf(\sin x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^2+5x)}{k(3\sin^2 x+5\sin x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^2+5x)}{k\sin x(3\sin x+5)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^2+5x)}{3x^2+5x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{3x+5}{k(3\sin x+5)}$

$=1\cdot1\cdot\frac{5}{5k}=\frac{1}{k}$

$\frac{1}{k}=\frac{1}{5}$에서 $k=5$ 답 5

$x\to0$일 때 $3x^2+5x\to0$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^2+5x)}{3x^2+5x}=1$

12 전략 $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$임을 이용하여 $f(n)$을 간단히 한다.

풀이 $f(n)=\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x+\tan 2x+\cdots+\tan nx}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\tan x}{x}+\frac{\tan 2x}{2x}\cdot2+\cdots+\frac{\tan nx}{nx}\cdot n}$

$=\frac{1}{1+2+\cdots+n}$

$=\frac{2}{n(n+1)}$

$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(k)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$

$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$ 답 ④

13 전략 $1-\cos kx$ 꼴을 포함한 삼각함수의 극한은 분자, 분모에 각각 $1+\cos kx$를 곱한다.

풀이 $\lim_{x\to0}x^2f(x)$

$=\lim_{x\to0}f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x^2}{1-\cos\frac{x}{2}}$

$=\lim_{x\to0}f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x^2\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}$

$=\lim_{x\to0}f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x^2\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{1-\cos^2\frac{x}{2}}$

$=\lim_{x\to0}f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot4\cdot\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)$

$\frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}}=\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$

$=1\cdot1^2\cdot4\cdot2=8$ 답 8

14 전략 $x+1=t$로 놓고 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$임을 이용한다.

풀이 $x+1=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{\sin\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\frac{\pi}{2}(t-1)\right\}}{t}$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)\right\}}{t}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)\right\}}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\pi}{2}$

$=1\cdot1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

답 $\frac{\pi}{2}$

15 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=b$일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(a-\cos x)=0$이므로

$a-1=0$ $\therefore a=1$ ··· ❶

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$b=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$

$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ··· ❷

$\therefore a+b=\frac{3}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{3}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷	b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸	$a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

16 전략 점 P와 점 Q의 좌표를 θ를 이용하여 나타낸 후 삼각함수의 극한을 이용한다.

풀이 $\overline{OP}=1$이고 $\angle POB=\theta$이므로

$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$

점 P와 점 Q의 y좌표가 같으므로 점 Q의 x좌표는

$\ln(x+1)=\sin\theta$에서

$x+1=e^{\sin\theta}\qquad \therefore\ x=e^{\sin\theta}-1$

$\therefore\ Q(e^{\sin\theta}-1,\ \sin\theta)$

따라서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{QP}\cdot\overline{HO}=\frac{1}{2}(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1)\sin\theta,$$

$$L(\theta)=\overline{HQ}=e^{\sin\theta}-1$$

이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{L(\theta)}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1)\sin\theta}{2(e^{\sin\theta}-1)}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}\cdot(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1)\\&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

즉 $k=\frac{1}{2}$이므로 $\quad 60k=60\cdot\frac{1}{2}=30$ 답 30

17 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$임을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a-4\qquad\therefore\ a=4$

$x\neq0$이면 $e^{2x}-1\neq0$이므로

$$f(x)=\frac{4-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}\ (x\neq0)$$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

$$\begin{aligned}&\therefore\ f(0)\\&=\lim_{x\to0}f(x)\\&=\lim_{x\to0}\frac{4-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{4\left(1-\cos\frac{\pi}{2}x\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{(e^{2x}-1)^2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}x}\right)^2\cdot\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{\pi^2}{4}\\&=1^2\cdot1^2\cdot\frac{1}{1+1}\cdot\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

$\therefore\ a\times f(0)=4\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{2}$ 답 ⑤

Q BOX

미분계수의 정의

$$\begin{aligned}&f'(a)\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\end{aligned}$$

$\theta\to0+$일 때 $\sin\theta\to0+$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}=1$$

18 전략 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $f(x)=\sin x+1$에서 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{f(x)}{x-\frac{3}{2}\pi}=\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{f(x)-f\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{x-\frac{3}{2}\pi}=f'\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

$f(x)=\sin x+1$에서 $\qquad f'(x)=\cos x$

$\therefore\ f'\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$ 답 0

19 전략 미분계수의 정의와 삼각함수의 극한을 이용한다.

풀이

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2\sin2h}{1-\cos h}-0}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h\sin2h}{1-\cos h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h\sin2h(1+\cos h)}{(1-\cos h)(1+\cos h)}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h\sin2h(1+\cos h)}{1-\cos^2h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{2h\sin h\cos h(1+\cos h)}{\sin^2h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{2h\cos h(1+\cos h)}{\sin h}\\&=\lim_{h\to0}2\cdot\frac{h}{\sin h}\cdot\cos h(1+\cos h)\\&=2\cdot1\cdot1\cdot2=4\end{aligned}$$

답 ⑤

20 전략 $x\to0$일 때 $\sin x\to0$임을 이용하여 주어진 식을 변형하고 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

풀이 $x\to0$일 때 $\sin x\to0$이고 $f(0)=0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x-0}\cdot\frac{\sin x}{x}\\&=f'(0)\cdot1=f'(0)\end{aligned}$$

$f(x)=-3\sin x-\cos x+1$에서

$f'(x)=-3\cos x+\sin x$

$\therefore\ f'(0)=-3$ 답 ③

05 여러 가지 미분법

12 여러 가지 미분법 (1)

Lecture 17 함수의 몫의 미분법 58쪽

1-1 (1) $y'=-\dfrac{(x-1)'}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

(2) $y'=-\dfrac{(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=-\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$

(3) $y'=\dfrac{(x-6)'(2x+1)-(x-6)(2x+1)'}{(2x+1)^2}$

$=\dfrac{1\cdot(2x+1)-(x-6)\cdot 2}{(2x+1)^2}$

$=\dfrac{13}{(2x+1)^2}$

(4) $y'=\dfrac{(x)'\ln x-x(\ln x)'}{(\ln x)^2}$

$=\dfrac{1\cdot\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

$=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$

답 (1) $y'=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ (2) $y'=-\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$

(3) $y'=\dfrac{13}{(2x+1)^2}$ (4) $y'=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$

2-1 (1) $y=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$이므로

$y'=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$

(2) $y'=3\cdot(-4)\cdot x^{-5}=-\dfrac{12}{x^5}$

(3) $y=x^3-\dfrac{1}{x^3}=x^3-x^{-3}$이므로

$y'=3x^2+3x^{-4}=3x^2+\dfrac{3}{x^4}$

(4) $y=\dfrac{2x^3-x^2+4}{x^5}=\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{4}{x^5}$

$=2x^{-2}-x^{-3}+4x^{-5}$

이므로

$y'=-4x^{-3}+3x^{-4}-20x^{-6}$

$=-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{20}{x^6}$

답 (1) $y'=-\dfrac{1}{x^2}$ (2) $y'=-\dfrac{12}{x^5}$

(3) $y'=3x^2+\dfrac{3}{x^4}$ (4) $y'=-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{20}{x^6}$

3-1 (2) $y'=\sec x\tan x-5(-\csc x\cot x)$

$=\sec x\tan x+5\csc x\cot x$

(3) $y'=(\cos x)'\cot x+\cos x(\cot x)'$

$=-\sin x\cot x+\cos x(-\csc^2 x)$

$=-\sin x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}-\cos x\cdot\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$=-\cos x-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

(4) $y'=\dfrac{(1+\tan x)'(1-\tan x)-(1+\tan x)(1-\tan x)'}{(1-\tan x)^2}$

$=\dfrac{\sec^2 x(1-\tan x)-(1+\tan x)\cdot(-\sec^2 x)}{(1-\tan x)^2}$

$=\dfrac{\sec^2 x(1-\tan x+1+\tan x)}{(1-\tan x)^2}$

$=\dfrac{2\sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$

답 (1) $y'=3\cos x-\sec^2 x$

(2) $y'=\sec x\tan x+5\csc x\cot x$

(3) $y'=-\cos x-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

(4) $y'=\dfrac{2\sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$

QBOX

$y=e^x$이면 $y'=e^x$

$y=\ln x$이면 $y'=\dfrac{1}{x}$

$y=f(x)g(x)$ 꼴이므로 함수의 곱의 미분법을 이용한다.

$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$ 꼴이므로 함수의 몫의 미분법을 이용한다.

$y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=a^x\ln a$

Lecture 18 합성함수의 미분법 59쪽

1-1 (1) $y'=3(2x-3)^2\cdot(2x-3)'$

$=3(2x-3)^2\cdot 2$

$=6(2x-3)^2$

(2) $y'=e^{5x}\cdot(5x)'=5e^{5x}$

(3) $y'=6^{x^3-1}\cdot\ln 6\cdot(x^3-1)'$

$=6^{x^3-1}\cdot 3x^2\ln 6$

(4) $y'=\cos(4x-5)(4x-5)'$

$=4\cos(4x-5)$

답 (1) $y'=6(2x-3)^2$ (2) $y'=5e^{5x}$

(3) $y'=6^{x^3-1}\cdot 3x^2\ln 6$ (4) $y'=4\cos(4x-5)$

2-1 (1) $y'=\dfrac{(x^3-5x+3)'}{x^3-5x+3}=\dfrac{3x^2-5}{x^3-5x+3}$

(2) $y'=\dfrac{(2x-7)'}{(2x-7)\ln 2}=\dfrac{2}{(2x-7)\ln 2}$

(3) $y'=\dfrac{(\sin x)'}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

(4) $y'=\dfrac{(e^x+1)'}{(e^x+1)\ln 3}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)\ln 3}$

답 (1) $y'=\dfrac{3x^2-5}{x^3-5x+3}$

(2) $y'=\dfrac{2}{(2x-7)\ln 2}$

(3) $y'=\cot x$

(4) $y'=\dfrac{e^x}{(e^x+1)\ln 3}$

3-1 (1) $y=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$이므로

$y'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=x^{-\frac{3}{4}}$이므로

$y'=-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}=-\dfrac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$

(4) $y'=-\pi x^{-\pi-1}=-\dfrac{\pi}{x^{\pi+1}}$

답 (1) $y'=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ (2) $y'=-\dfrac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$

(3) $y'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$ (4) $y'=-\dfrac{\pi}{x^{\pi+1}}$

기본+표준 유형 Q+Q 60쪽

01 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x-2}$이므로

$f'(x)=-\dfrac{(x^2+5x-2)'}{(x^2+5x-2)^2}=-\dfrac{2x+5}{(x^2+5x-2)^2}$

$\therefore \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

$=f'(-1)=-\dfrac{-2+5}{(1-5-2)^2}$

$=-\dfrac{3}{36}=-\dfrac{1}{12}$ 답 $-\dfrac{1}{12}$

02 $f'(x)=\dfrac{(2ax+b)(x-1)-(ax^2+bx+3)\cdot 1}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{ax^2-2ax-b-3}{(x-1)^2}$

$f'(0)=-2$에서 $\dfrac{-b-3}{1}=-2$

$\therefore b=-1$ ...... ㉠

$f'(3)=1$에서 $\dfrac{3a-b-3}{4}=1$

$\therefore 3a-b=7$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 풀면 $a=2$

$\therefore a-b=3$ 답 ③

03 $f(x)=\dfrac{2x^3-3x+1}{x^2}=2x-3x^{-1}+x^{-2}$이므로

$f'(x)=2+3x^{-2}-2x^{-3}=2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$

$\therefore f'(-1)-f'(2)=7-\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}$ 답 $\dfrac{9}{2}$

04 $f'(x)=-5ax^{-6}e^x+ax^{-5}e^x$

$=ax^{-5}e^x(-5x^{-1}+1)$

$f'(1)=-16e$에서

$ae\cdot(-4)=-16e$ $\therefore a=4$ 답 ④

05 $f(x)=\dfrac{1-\tan x}{\csc x}=\sin x(1-\tan x)$이므로

$f'(x)=\cos x(1-\tan x)+\sin x(-\sec^2 x)$

$=\cos x\left(1-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)-\sin x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$=\cos x-\sin x-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

$\therefore f'\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=\cos\dfrac{3}{4}\pi-\sin\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\sin\frac{3}{4}\pi}{\cos^2\frac{3}{4}\pi}$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-\sqrt{2})^2$

$=-2\sqrt{2}$ 답 ①

06 $f'(x)$

$=-\csc x\cot x(a+\cos x)+\csc x\cdot(-\sin x)$

$=-\dfrac{1}{\sin x}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}(a+\cos x)+\dfrac{1}{\sin x}\cdot(-\sin x)$

$=\dfrac{-\cos x(a+\cos x)-\sin^2 x}{\sin^2 x}$

$=\dfrac{-a\cos x-1}{\sin^2 x}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{8}{3}$에서

$\dfrac{-\frac{a}{2}-1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=-\dfrac{8}{3}$

$-\dfrac{a}{2}-1=-2$ $\therefore a=2$ 답 2

07 $f(x)=(4x^2-ax+1)^3$이므로

$f'(x)=3(4x^2-ax+1)^2\cdot(4x^2-ax+1)'$

$=3(4x^2-ax+1)^2(8x-a)$

$f'(0)=-6$에서

$3\cdot 1^2\cdot(-a)=-6$ $\therefore a=2$ 답 ①

08 $f'(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\left\{\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}'$

$=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot 2$

$=4\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\therefore f'(\pi)=4\sin\dfrac{5}{3}\pi\cos\dfrac{5}{3}\pi$

$=4\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=-\sqrt{3}$ 답 ③

09 $f(3x+2)=x^2+6x-5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3f'(3x+2)=2x+6$

$\therefore f'(3x+2)=\dfrac{2}{3}x+2$

$3x+2=-4$에서 $x=-2$이므로 위의 식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f'(-4)=\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{2}{3}$

10 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$이므로

$y'=f'(g(x))g'(x)$

따라서 $x=2$에서의 미분계수는

$f'(g(2))g'(2)=f'(2)g'(2)$

$=-3\cdot(-1)=3$ 답 ②

Q BOX

$x^{-\frac{7}{4}}=x^{-1}\cdot x^{-\frac{3}{4}}$

$=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

$=\dfrac{1}{x\sqrt[4]{x^3}}$

$-a\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x$에서 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

$-a\cos x-1$

$f'(a)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\sin^2\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\left\{\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}^2$

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, $y=f(ax+b)$ (a, b는 상수)이면

$y'=af'(ax+b)$

$g(2)=2$

11 $h(x)=f(g(x))=e^{\sin\frac{x}{2}}$이므로

$$h'(x)=e^{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}\right)'=e^{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}e^{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}$$

$$\therefore h'(2\pi)=\frac{1}{2}e^{\sin\pi}\cos\pi=\frac{1}{2}e^0\cdot(-1)=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

다른 풀이 $f'(x)=e^x$, $g'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$이므로

$$g'(2\pi)=\frac{1}{2}\cos\pi=-\frac{1}{2}$$

$$f'(0)=e^0=1$$

$$\therefore h'(2\pi)=f'(g(2\pi))g'(2\pi)$$
$$=f'(0)g'(2\pi)$$
$$=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

12 $h(x)=g(f(x))$에서

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$$

$h'(-2)=21$이므로

$$g'(f(-2))f'(-2)=21 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $f(x)=\frac{3x}{x+1}$이므로

$$f'(x)=\frac{3(x+1)-3x\cdot1}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$\therefore f(-2)=6,\ f'(-2)=3$$

따라서 ㉠에서 $g'(6)\cdot3=21$이므로

$$g'(6)=7$$

답 ②

13 $f(x)=\ln(\tan x)$이므로

$$f'(x)=\frac{\sec^2x}{\tan x}=\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$$

답 ②

14 $f(x)=\ln(x^4-ax^3+5)$이므로

$$f'(x)=\frac{4x^3-3ax^2}{x^4-ax^3+5}$$

$f'(1)=\frac{4-3a}{6-a}$이므로

$$\frac{4-3a}{6-a}=\frac{1}{5},\quad 5(4-3a)=6-a$$

$$-14a=-14\quad \therefore a=1$$

답 1

15 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=2\ln|x|+\ln|x-4|-3\ln|x-2|$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-4}-\frac{3}{x-2}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x-4}-\frac{3}{x-2}\right)$$

$f(3)=\frac{3^2\cdot(3-4)}{(3-2)^3}=-9$이므로

$$f'(3)=-9\cdot\left(\frac{2}{3}-1-3\right)=30$$

답 30

QBOX

로그의 진수는 양수이어야 하므로 먼저 식의 양변에 절댓값을 취한 후 로그를 취한다.

$x>0$이므로 $x^{\sin x}>0$
따라서 양변에 절댓값을 취하지 않아도 된다.

16 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y=\sin x\ln x$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore y'=y\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

따라서 $x=2\pi$에서의 미분계수는

$$(2\pi)^{\sin2\pi}\left(\cos2\pi\cdot\ln2\pi+\frac{\sin2\pi}{2\pi}\right)$$

$$=1\cdot\left(1\cdot\ln2\pi+\frac{0}{2\pi}\right)=\ln2\pi$$

답 ③

쌤 한마디

$y=\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴의 복잡한 분수함수는 함수의 곱의 미분법이나 함수의 몫의 미분법을 이용하여 도함수를 구하면 계산이 복잡한 경우가 있다. 또 $y=\{f(x)\}^{g(x)}$ $(f(x)>0)$ 꼴과 같이 밑과 지수에 모두 변수가 포함된 함수의 도함수는 지수함수의 도함수를 이용하여 미분할 수 없다. 이러한 함수의 도함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취한다.
(ii) (i)의 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.
(iii) (ii)의 식을 y'에 대하여 정리한다.

17 $f(x)=8x^{\sqrt{2}}$이므로

$$f'(x)=8\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$$

$$\therefore f'(2)=8\sqrt{2}\cdot2^{\sqrt{2}-1}=2^{3+\frac{1}{2}+\sqrt{2}-1}=2^{\frac{5}{2}+\sqrt{2}}$$

따라서 $k=\frac{5}{2}+\sqrt{2}$이므로 $\quad a=\frac{5}{2},\ b=1$

$$\therefore a-b=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

18 $f(x)=\sqrt{x^3+ax+1}=(x^3+ax+1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^3+ax+1)^{-\frac{1}{2}}(x^3+ax+1)'$$

$$=\frac{3x^2+a}{2\sqrt{x^3+ax+1}}$$

$f'(0)=-4$에서 $\quad \frac{a}{2}=-4$

$$\therefore a=-8$$

따라서 $f(x)=\sqrt{x^3-8x+1}$이므로

$$f(3)=\sqrt{27-24+1}=2$$

답 ②

쌤 한마디

$y=\sqrt[n]{f(x)}$ (n은 2 이상의 자연수) 꼴의 함수는
$y=\{f(x)\}^{\frac{1}{n}}$ 꼴로 바꾸어

$$y'=\frac{1}{n}\{f(x)\}^{\frac{1}{n}-1}f'(x)$$

임을 이용한다.
이때 $y=\sqrt{f(x)}$의 도함수는 $y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$임을 이용하면 편리하다.

13 여러 가지 미분법 (2)

Lecture 19 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 63쪽

1-1 답 $4t$, $4t$, $-4t$

1-2 (1) $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=2+\frac{1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2+\frac{1}{t^2}}{2t}=\frac{\frac{2t^2+1}{t^2}}{2t}=\frac{2t^2+1}{2t^3}$$

(2) $\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}=\frac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1}$$

분자, 분모에 각각 e^t을 곱한다.

(3) $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t$$

답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{2t^2+1}{2t^3}$
(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1}$
(3) $\frac{dy}{dx}=-\tan t$

Lecture 20 음함수의 미분법 64쪽

1-1 답 y, y, $-\frac{y}{x}$

1-2 (1) $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=7$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$x\cdot\frac{1}{y}-y\cdot\frac{1}{x}=7$

$$\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}-\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2y}}{\frac{x^2+y^2}{xy^2}}=\frac{y}{x}$$

(2) $\ln|y|=5x^2$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=10x \quad \therefore \frac{dy}{dx}=10xy$$

답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ (2) $\frac{dy}{dx}=10xy$

Lecture 21 역함수의 미분법, 이계도함수 65쪽

1-1 (1) $x=y^5$의 각 항을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=5y^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{5y^4}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

$x=y^5$에서 $y=\sqrt[5]{x}$이므로
$y^4=\sqrt[5]{x^4}$

(2) $y=\sqrt[3]{3x-1}$에서 $y^3=3x-1$이므로

$$x=\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}$$

위의 식의 각 항을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{y^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}$$

답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$
(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}$

1-2 답 a, 1, 1, 1, 1, $\frac{1}{3}$

2-1 (1) $y'=4x^3-6x^2+1$이므로

$$y''=12x^2-12x$$

(2) $y'=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$이므로

$$y''=\frac{-2(x^2-1)^2-(-2x)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$
$$=\frac{-2(x^2-1)^2+8x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4}$$
$$=\frac{-2x^2+2+8x^2}{(x^2-1)^3}$$
$$=\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$
$$=\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

분자, 분모를 각각 x^2-1로 나눈다.

(3) $y'=-4e^{-4x}$이므로

$$y''=-4e^{-4x}\cdot(-4)=16e^{-4x}$$

(4) $y'=\cos 5x\cdot 5=5\cos 5x$이므로

$$y''=5(-\sin 5x)\cdot 5=-25\sin 5x$$

답 (1) $y''=12x^2-12x$
(2) $y''=\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$
(3) $y''=16e^{-4x}$
(4) $y''=-25\sin 5x$

기본+표준 유형 Q+Q

66쪽

01 $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2}{t^3}$,

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$이므로

$$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}}{-\dfrac{2}{t^3}}=\dfrac{2t^4}{(1+t^2)^2}$$

따라서 $t=1$일 때 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cdot 1}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

02 $\dfrac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=-6\sin\theta$이므로

$$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\dfrac{-6\sin\theta}{3\cos\theta}=-2\tan\theta$$

$$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{dy}{dx}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}(-2\tan\theta)=-2\cdot 1=-2$$

답 ④

03 $e^{2x}\ln y=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2e^{2x}\ln y+e^{2x}\cdot\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$$

$$\dfrac{e^{2x}}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=-2e^{2x}\ln y \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx}=-2y\ln y$$

위의 식에 $x=0$, $y=e$를 대입하면

$$\dfrac{dy}{dx}=-2\cdot e\cdot 1=-2e$$ 답 ②

04 $x^2+axy+y^2=bx$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2x+ay+ax\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}=b$$

$$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b-2x-ay}{ax+2y}\ (ax+2y\neq 0)$$

$x=1$, $y=0$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값이 $\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{b-2}{a}=\dfrac{1}{3}$, $a=3b-6$

$\therefore a-3b=-6$ ...... ㉠

또 주어진 곡선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$1=b$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a-3=-6$

$\therefore a=-3$

$\therefore a+b=-2$ 답 -2

05 $x=\sqrt{y^2+1}$의 각 항을 y에 대하여 미분하면

$$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}=\dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{y}$$

따라서 $y=2$일 때의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$$\dfrac{\sqrt{2^2+1}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$$ 답 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Q BOX

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b$
$\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

$f'(x)=2\ln x+2x\cdot\dfrac{1}{x}$
$=2\ln x+2$

미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

$x^2+axy+y^2=bx$에 $x=1$, $y=0$을 대입한다.

06 $x=e^y+5y$의 각 항을 y에 대하여 미분하면

$$\dfrac{dx}{dy}=e^y+5$$

$$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{e^y+5}$$

$x=e^y+5y$에서 $x=1$일 때 $y=0$

따라서 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는

$$\dfrac{1}{e^0+5}=\dfrac{1}{6}$$ 답 ③

07 $g(2e)=a$라 하면 $f(a)=2e$이므로

$2a\ln a=2e$ $\therefore a=e$

따라서 $g(2e)=e$이고 $f'(x)=2\ln x+2$에서

$f'(e)=4$이므로

$$g'(2e)=\dfrac{1}{f'(e)}=\dfrac{1}{4}$$ 답 ②

08 $f(2)=5$이므로 $g(5)=2$

$$\therefore g'(5)=\dfrac{1}{f'(g(5))}=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{3}$$ 답 $\dfrac{1}{3}$

09 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}-h\right)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\dfrac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}-h\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\dfrac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}+\lim_{h\to 0}\dfrac{g\left(\frac{1}{2}-h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{-h}$$

$$=g'\left(\dfrac{1}{2}\right)+g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$$

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=a$라 하면 $f(a)=\dfrac{1}{2}$이므로

$\sin a=\dfrac{1}{2}$ $\therefore a=\dfrac{\pi}{6}\left(\because -\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$이고 $f'(x)=\cos x$이므로

$$2g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\cdot\dfrac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=2\cdot\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$=2\cdot\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$$ 답 ④

10 $f(x)=e^x\sin x$이므로

$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$
$=2e^x\cos x$

따라서 $g(x)=\dfrac{f''(x)}{f(x)}=\dfrac{2e^x\cos x}{e^x\sin x}=2\cot x$이므로

$$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cot\dfrac{\pi}{4}=2$$ 답 2

11 $f(x)=(x+a)e^{bx}$이므로

$f'(x)=e^{bx}+(x+a)be^{bx}=e^{bx}(bx+ab+1)$

$f''(x)=be^{bx}(bx+ab+1)+e^{bx}\cdot b$
$=be^{bx}(bx+ab+2)$

$f'(0)=-5$에서 $\quad ab+1=-5$

$\therefore ab=-6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f''(0)=-8$에서 $\quad b(ab+2)=-8$

㉠을 위의 식에 대입하면

$b(-6+2)=-8 \quad \therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$2a=-6 \quad \therefore a=-3$

$\therefore a+b=-1$

답 ③

중단원 마무리

68쪽

01 전략 몫의 미분법을 이용하여 $g(x)$의 도함수를 구한 후 $x=1$을 대입한다.

풀이 $g(x)=\dfrac{x-3}{f(x)}$이므로

$$g'(x)=\frac{f(x)-(x-3)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

$$\therefore g'(1)=\frac{f(1)+2f'(1)}{\{f(1)\}^2}=\frac{2+2\cdot3}{2^2}=2$$

답 2

02 전략 $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타내어 $f(t)$를 구한 후 몫의 미분법을 이용하여 $f'(t)$를 구한다.

풀이 $\overline{OP}=t+\dfrac{1}{t}$,

$\overline{OQ}=\overline{OR}=\left|-\dfrac{1}{\sqrt{2}t}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}t}$이므로

$$f(t)=\overline{OP}\times\overline{OQ}=\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}t}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}t^2}$$

$f'(t)=-\dfrac{2\sqrt{2}t}{2t^4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{t^3}$이므로

$$f'(\sqrt{2})=-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

답 ②

03 전략 $f(x)$에서 x^3으로 분자의 각 항을 나누어 $f(x)$를 x^n (n은 정수)의 합으로 나타낸 후 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{x^6-3x^5+2}{x^3}=x^3-3x^2+2x^{-3}$이므로

$$f'(x)=3x^2-6x-6x^{-4}=3x^2-6x-\frac{6}{x^4}$$

따라서 $f'(-1)=3+6-6=3$,

$f'(2)=12-12-\dfrac{6}{16}=-\dfrac{3}{8}$이므로

$$\frac{f'(-1)}{f'(2)}=\frac{3}{-\frac{3}{8}}=-8$$

답 -8

04 전략 $f(x)$를 간단히 정리한 후 몫의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\sec x}=\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{1}{\cos x}}=\dfrac{\sin x}{\cos x+1}$이므로

분자, 분모에 각각 $\cos x$를 곱한다.

$$f'(x)=\frac{\cos x(\cos x+1)-\sin x(-\sin x)}{(\cos x+1)^2}=\frac{\cos^2 x+\cos x+\sin^2 x}{(\cos x+1)^2}=\frac{\cos x+1}{(\cos x+1)^2}=\frac{1}{\cos x+1}$$

따라서 구하는 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}+1}=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}$$

답 ④

다른 풀이 $f'(x)=\dfrac{\sec^2 x(1+\sec x)-\tan x\sec x\tan x}{(1+\sec x)^2}$

$\tan^2 x+1=\sec^2 x$에서 $\sec^2 x-\tan^2 x=1$

$$=\frac{\sec x(\sec x+\sec^2 x-\tan^2 x)}{(1+\sec x)^2}=\frac{\sec x(\sec x+1)}{(1+\sec x)^2}=\frac{\sec x}{1+\sec x}$$

따라서 구하는 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$$

05 전략 먼저 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 $x=1$을 대입하여 a의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=(3x^2+a)^4$이므로

$$f'(x)=4(3x^2+a)^3\cdot6x=24x(3x^2+a)^3$$

이때 $f'(1)=-24$이므로

$24(3+a)^3=-24, \quad (a+3)^3=-1$

$\therefore a=-4$

따라서 $f'(x)=24x(3x^2-4)^3$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=24$$

$f'(-1)=24\cdot(-1)\cdot(-1)=24$

답 ④

06 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $h'(x)$를 구한 후 $x=2$를 대입한다.

풀이 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$\therefore h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(0)g'(2) \quad \cdots\cdots$ ㉠

$g(2)=8-10+2=0$

$f'(x)=\dfrac{4(x^2+1)-4x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}$이므로

$f'(0)=4$

또 $g'(x)=3x^2-5$이므로 $\quad g'(2)=12-5=7$

따라서 ㉠에서 $\quad h'(2)=4\cdot7=28$

답 ③

07 전략 $h(x)=g(f(x))$로 놓고 주어진 극한을 함수 $h(x)$의 미분계수로 나타낸다.

풀이 $h(x)=g(f(x))$라 하면

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin^2\dfrac{\pi}{4}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이고

$f'(x)=2\sin x\cos x$, $g'(x)=e^x$

이므로

$$h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=g'\left(\frac{1}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=e^{\frac{1}{2}}\cdot 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}$$
$$=\sqrt{e}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{e}$$

답 ④

08 전략 로그함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 부분분수를 이용하여 급수의 합을 구한다.

풀이 $f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$이므로 $f'(n)=\frac{2n}{n^2-1}$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2f'(n)}{n}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(n-1)(n+1)}$$
$$=2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\cdot\frac{3}{2}=3$$

답 ③

Q BOX

$$\frac{4}{(n-1)(n+1)}=4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

09 전략 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 적당한 함수를 $f(x)$로 놓고 주어진 극한을 변형한다.

풀이 $f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{30x})$이라 하면

$f(0)=\ln(1+1+1+\cdots+1)=\ln 30$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{6}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{30x}}{30}$$
$$=6\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{30x})-\ln 30}{x}$$
$$=6\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=6f'(0) \quad \cdots ❶$$

이때 $f'(x)=\frac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\cdots+30e^{30x}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{30x}}$이므로 $\cdots ❷$

$$f'(0)=\frac{1+2+3+\cdots+30}{30}=\frac{\frac{30\cdot31}{2}}{30}=\frac{31}{2}$$

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore$ (구하는 식)$=6f'(0)=6\cdot\frac{31}{2}=93$ $\cdots ❸$

답 93

단계	채점 기준	비율
❶	함수 $f(x)$를 정하고 주어진 극한을 변형할 수 있다.	40 %
❷	$f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸	극한값을 구할 수 있다.	20 %

10 전략 $f(x)$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취한 후 $\{\ln|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=(x+2)(x^2+2)(x^4+1)$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=\ln|x+2|+\ln|x^2+2|+\ln|x^4+1|$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+2}+\frac{2x}{x^2+2}+\frac{4x^3}{x^4+1}$$

$g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$이므로

$$g(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{2x}{x^2+2}+\frac{4x^3}{x^4+1}$$
$$g'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}+\frac{2(x^2+2)-2x\cdot2x}{(x^2+2)^2}+\frac{12x^2(x^4+1)-4x^3\cdot4x^3}{(x^4+1)^2}$$
$$=-\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}+\frac{-4x^6+12x^2}{(x^4+1)^2}$$
$$\therefore g'(0)=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$

답 ③

11 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $y=f(\sqrt{2x})$의 도함수를 구한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(4, f(4))$에서의 접선의 기울기가 $\sqrt{2}$이므로

$f'(4)=\sqrt{2}$

이때 $y'=f'(\sqrt{2x})(\sqrt{2x})'=f'(\sqrt{2x})\cdot\frac{1}{\sqrt{2x}}$이므로 함수 $y=f(\sqrt{2x})$의 $x=8$에서의 미분계수는

$$f'(\sqrt{16})\cdot\frac{1}{\sqrt{16}}=f'(4)\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

12 전략 $\frac{1}{\sqrt{2+\cos x}}=(2+\cos x)^{-\frac{1}{2}}$으로 나타낸 후 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+\cos x}}=(2+\cos x)^{-\frac{1}{2}}$에서

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(2+\cos x)^{-\frac{3}{2}}(2+\cos x)'$$
$$=\frac{\sin x}{2(2+\cos x)\sqrt{2+\cos x}} \quad \cdots ❶$$

$f'(a)=0$에서 $\frac{\sin a}{2(2+\cos a)\sqrt{2+\cos a}}=0$이므로

$\sin a=0$

$\therefore a=\pi$ ($\because 0<a<2\pi$) $\cdots ❷$

답 π

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷	a의 값을 구할 수 있다.	30 %

13 전략 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한 후 그 값이 접선의 기울기와 같을 때의 θ의 값을 구한다.

풀이 $\frac{dx}{d\theta}=2\sec^2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=3\sec\theta\tan\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3\sec\theta\tan\theta}{2\sec^2\theta}$$

$$=\frac{3\tan\theta}{2\sec\theta}=\frac{3}{2}\sin\theta$$

$\frac{3\tan\theta}{2\sec\theta}=\frac{\frac{3\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{2}{\cos\theta}}=\frac{3}{2}\sin\theta$

$\frac{3}{2}\sin\theta=\frac{3\sqrt{2}}{4}$에서 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ ($\because\ 0\le\theta<2\pi$)

$\theta=\frac{3}{4}\pi$일 때 $x<0$, $y<0$이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ a=2\tan\frac{\pi}{4}=2$, $b=3\sec\frac{\pi}{4}=3\sqrt{2}$

$\therefore\ ab=6\sqrt{2}$ 답 ④

14 전략 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$임을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

풀이 $x=\ln t+t$, $y=-t^3+3t$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}+1$, $\frac{dy}{dt}=-3t^2+3$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3t^2+3}{\frac{1}{t}+1}=\frac{-3t(t^2-1)}{t+1}$$

$$=\frac{-3t(t+1)(t-1)}{t+1}=-3t(t-1)$$

$$=-3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

따라서 $\frac{dy}{dx}$는 $t=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$ 답 ⑤

15 전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한 후 $x=a$, $y=0$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 b임을 이용한다.

풀이 점 $(a, 0)$은 곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점이므로

$a^3=1$, $a^3-1=0$

$(a-1)(a^2+a+1)=0$

$\therefore\ a=1$ ($\because\ a^2+a+1>0$)

$x^3-y^3=e^{xy}$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2-3y^2\frac{dy}{dx}=e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$(xe^{xy}+3y^2)\frac{dy}{dx}=3x^2-ye^{xy}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^2}\ (xe^{xy}+3y^2\neq0)$$

점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$$b=\frac{3\cdot1^2-0\cdot e^0}{1\cdot e^0+3\cdot0}=3$$

$\therefore\ a+b=1+3=4$ 답 4

16 전략 역함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

풀이 $x=\sqrt{y^2+2}-4$의 각 항을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{2\sqrt{y^2+2}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+2}}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{\sqrt{y^2+2}}{y}$$ 답 ③

17 전략 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, a)$에서의 접선의 기울기가 b이므로 $g(1)=a$, $g'(1)=b$임을 이용한다.

풀이 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 1)$을 지나고, 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f(2)=1$, $f'(2)=1$

곡선 $y=g(x)$가 점 $(1, a)$를 지나므로

$g(1)=a$ ...... ㉠

$h(x)=f(2x)$라 하면 $h(1)=f(2)=1$이므로

$g(1)=1$

$g(x)$는 $h(x)$의 역함수이다.

따라서 ㉠에서 $a=1$

또 $h'(x)=2f'(2x)$이므로

$$b=g'(1)=\frac{1}{h'(g(1))}=\frac{1}{h'(1)}$$

$$=\frac{1}{2f'(2)}=\frac{1}{2\cdot1}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ 10(a+b)=10\left(1+\frac{1}{2}\right)=15$ 답 15

다른 풀이 $f(2)=1$, $f'(2)=1$이므로 함수 $f(x)$의 역함수를 $p(x)$라 하면

함수 $f(x)$의 역함수를 이용한다.

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로, 즉 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$p(1)=2$,

$$p'(1)=\frac{1}{f'(p(1))}=\frac{1}{f'(2)}=1$$

한편 $y=f(2x)$에서 $2x=f^{-1}(y)$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}f^{-1}(y)$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{2}f^{-1}(x)=\frac{1}{2}p(x)$

따라서 $g(x)=\frac{1}{2}p(x)$이므로

$a=g(1)=\frac{1}{2}p(1)=\frac{1}{2}\cdot2=1$

또 $g'(x)=\frac{1}{2}p'(x)$이므로

$b=g'(1)=\frac{1}{2}p'(1)=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 10(a+b)=10\left(1+\frac{1}{2}\right)=15$

18 전략 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$임을 이용한다. (단, $f'(g(x))\neq0$)

풀이 $g\left(\frac{x+8}{10}\right)=f^{-1}(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{10}\cdot g'\left(\frac{x+8}{10}\right)=(f^{-1})'(x) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\frac{x+8}{10}=1$에서 $\quad x+8=10 \quad \therefore x=2$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$\frac{1}{10}g'(1)=(f^{-1})'(2)$$

$$\therefore g'(1)=10\cdot(f^{-1})'(2)=\frac{10}{f'(f^{-1}(2))} \quad \cdots\cdots ㉡$$

$g\left(\frac{x+8}{10}\right)=f^{-1}(x)$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$g(1)=f^{-1}(2) \quad \therefore f^{-1}(2)=0$$

$f'(x)=2xe^{-x}+(x^2+2)\cdot(-e^{-x})=(2x-x^2-2)e^{-x}$

이므로 ㉡에서

$$g'(1)=\frac{10}{f'(0)}=\frac{10}{-2}=-5$$

$$\therefore |g'(1)|=|-5|=5$$

답 5

다른 풀이 $g\left(\frac{x+8}{10}\right)=f^{-1}(x)$에서

$$f\left(g\left(\frac{x+8}{10}\right)\right)=x$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'\left(g\left(\frac{x+8}{10}\right)\right)\cdot g'\left(\frac{x+8}{10}\right)\cdot\frac{1}{10}=1$$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$f'(g(1))\cdot g'(1)=10$$

$$\therefore g'(1)=\frac{10}{f'(g(1))}$$

$$=\frac{10}{f'(0)}=-5 \ (\because g(1)=0)$$

$$\therefore |g'(1)|=|-5|=5$$

19 전략 $x\to a$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\to 0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-4}{x-1}=2$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x\to1}\{f'(f(x))-4\}=0$$

$f'(f(1))=4$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-4}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$$

$$=f''(f(1))f'(1)$$

$$=f''(4)\cdot2=2f''(4)$$

따라서 $2f''(4)=2$이므로

$$f''(4)=1$$

답 1

Q BOX

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P$(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

$f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능하므로

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

이 성립한다.

합성함수의 미분법을 이용한다.

$$\sec^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=2$$

$$f(1)=e^0=1$$

06 도함수의 활용 (1)

14 접선의 방정식

Lecture 22 접선의 방정식

72쪽

1-1 (1) $f(x)=\frac{1}{x-1}$이라 하면

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

이므로

$$f'(2)=-\frac{1}{1^2}=-1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=-(x-2) \quad \therefore y=-x+3$$

(2) $f(x)=\sqrt{x}$라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

이므로

$$f'(4)=\frac{1}{2\cdot2}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-2=\frac{1}{4}(x-4) \quad \therefore y=\frac{1}{4}x+1$$

(3) $f(x)=\ln5x$라 하면

$$f'(x)=\frac{5}{5x}=\frac{1}{x}$$

이므로

$$f'(1)=1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-\ln5=x-1 \quad \therefore y=x+\ln5-1$$

(4) $f(x)=\tan\frac{\pi}{4}x$라 하면

$$f'(x)=\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}x$$

이므로

$$f'(1)=\frac{\pi}{4}\cdot2=\frac{\pi}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{\pi}{2}(x-1) \quad \therefore y=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+1$$

답 (1) $y=-x+3$ (2) $y=\frac{1}{4}x+1$
(3) $y=x+\ln5-1$ (4) $y=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+1$

2-1 (1) $f(x)=e^{x-1}$이라 하면 $\quad f'(x)=e^{x-1}$

접점의 좌표를 (t, e^{t-1})이라 하면 $f'(t)=e^{t-1}$이므로

$$e^{t-1}=1 \quad \therefore t=1$$

따라서 접점의 좌표가 $(1, 1)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-1=x-1 \quad \therefore y=x$$

(2) $f(x)=\sin x$라 하면 $\quad f'(x)=\cos x$

접점의 좌표를 $(t, \sin t)$라 하면 $f'(t)=\cos t$이므로

$\cos t=-1 \quad \therefore t=\pi \ (\because 0<t<2\pi)$

따라서 접점의 좌표가 $(\pi, 0)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$f(\pi)=\sin\pi=0$

$y-0=-(x-\pi) \quad \therefore y=-x+\pi$

답 (1) $y=x$ (2) $y=-x+\pi$

3-1 (1) $f(x)=\ln x$라 하면 $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t, \ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln t=\dfrac{1}{t}(x-t) \qquad \cdots\cdots ㉠$

이 직선이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1-\ln t=\dfrac{1}{t}\cdot(-t), \qquad \ln t=2$

$\therefore t=e^2$

이것을 ㉠에 대입하면

$y-\ln e^2=\dfrac{1}{e^2}(x-e^2) \quad \therefore y=\dfrac{1}{e^2}x+1$

(2) $f(x)=e^x$이라 하면 $\quad f'(x)=e^x$

접점의 좌표를 (t, e^t)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=e^t$이므로 접선의 방정식은

$y-e^t=e^t(x-t) \qquad \cdots\cdots ㉠$

이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0-e^t=-te^t, \qquad (t-1)e^t=0$

$\therefore t=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$y-e=e(x-1) \quad \therefore y=ex$

답 (1) $y=\dfrac{1}{e^2}x+1$ (2) $y=ex$

기본+표준 유형 Q+Q

73쪽

01 $f(x)=\sqrt{x^2+7}$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+7}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}$

점 $(-3, 4)$에서의 접선의 기울기가 $f'(-3)=-\dfrac{3}{4}$이므로 접선의 방정식은

$y-4=-\dfrac{3}{4}(x+3) \quad \therefore y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{4}$

따라서 $a=-\dfrac{3}{4}$, $b=\dfrac{7}{4}$이므로

$a+b=1$

답 ④

02 $f(x)=3xe^x+a$라 하면 $\quad f'(x)=3e^x+3xe^x$

점 $(0, a)$에서의 접선의 기울기가 $f'(0)=3$이므로 접선의 방정식은

Q BOX

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 평행하면
$m=m'$, $n\neq n'$

$0<t<2\pi$이므로
$0<\dfrac{t}{2}<\pi$

$y-a=3x \quad \therefore y=3x+a$

이 직선이 점 $(1, 9)$를 지나므로

$9=3+a \quad \therefore a=6$

답 6

03 $f(x)=x\ln x-3x$라 하면

$f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-3=\ln x-2$

점 $(e, -2e)$에서의 접선의 기울기가 $f'(e)=-1$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 1이고, 직선의 방정식은

$y+2e=x-e \quad \therefore x-y-3e=0$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$a-b=2$

답 ③

04 $f(x)=e^{3x}-5$라 하면 $\quad f'(x)=3e^{3x}$

접점의 좌표를 $(t, e^{3t}-5)$라 하면 직선 $3x-y+1=0$, 즉 $y=3x+1$에 평행한 직선의 기울기는 3이므로

$f'(t)=3e^{3t}=3 \quad \therefore t=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0, -4)$이므로 접선의 방정식은

$y=3x-4$

즉 구하는 x절편은 $\dfrac{4}{3}$이다.

답 ④

05 평행이동한 직선의 방정식은 $\quad y=-\dfrac{1}{2}x+a$

$f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$라 하면

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \cos\dfrac{t}{2}\right)$라 하면 접선의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이므로

$f'(t)=-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{t}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$\sin\dfrac{t}{2}=1$에서 $0<\dfrac{t}{2}<\pi$이므로

$\dfrac{t}{2}=\dfrac{\pi}{2} \quad \therefore t=\pi$

따라서 접점의 좌표는 $(\pi, 0)$이므로 접선의 방정식은

$y-0=-\dfrac{1}{2}(x-\pi) \quad \therefore y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore a=\dfrac{\pi}{2}$

답 $\dfrac{\pi}{2}$

06 $f(x)=4x\ln x$라 하면

$f'(x)=4\ln x+4x\cdot\dfrac{1}{x}=4\ln x+4$

접점의 좌표를 $(t, 4t\ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4\ln t+4$이므로 접선의 방정식은

$y-4t\ln t=(4\ln t+4)(x-t)$

$\therefore y=4(\ln t+1)x-4t \qquad \cdots\cdots ㉠$

이 직선이 점 $(0, -4)$를 지나므로

$-4=-4t \quad \therefore t=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$y=4x-4$

이 직선이 점 $(a, 8)$을 지나므로

$8=4a-4 \qquad \therefore a=3$ 답 3

07 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$라 하면

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+2)-(x-2)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{4}{(x+2)^2}$$

접점의 좌표를 $\left(t, \dfrac{t-2}{t+2}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{4}{(t+2)^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{t-2}{t+2}=\frac{4}{(t+2)^2}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{4}{(t+2)^2}x+\frac{t^2-4t-4}{(t+2)^2}$$

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$$0=\frac{4}{(t+2)^2}+\frac{t^2-4t-4}{(t+2)^2}, \qquad \frac{t^2-4t}{(t+2)^2}=0$$

$$t^2-4t=0, \qquad t(t-4)=0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=4$$

따라서 접선의 기울기는 $f'(0)=1$, $f'(4)=\dfrac{1}{9}$이므로 두 접선의 기울기의 곱은

$1\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{9}$ 답 ②

08 $f(x)=x+\dfrac{3}{x}$이라 하면 $\qquad f'(x)=1-\dfrac{3}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, t+\dfrac{3}{t}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=1-\dfrac{3}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\left(t+\frac{3}{t}\right)=\left(1-\frac{3}{t^2}\right)(x-t)$$

$$\therefore y=\left(1-\frac{3}{t^2}\right)x+\frac{6}{t}$$

이 직선이 점 $(3, -5)$를 지나므로

$$-5=3-\frac{9}{t^2}+\frac{6}{t}, \qquad -\frac{9}{t^2}+\frac{6}{t}+8=0$$

$$8t^2+6t-9=0, \qquad (2t+3)(4t-3)=0$$

$$\therefore t=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } t=\frac{3}{4}$$

따라서 점 $(3, -5)$에서 곡선 $y=x+\dfrac{3}{x}$에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다. 답 2

쌤 한마디

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점에서 곡선에 그은 접선의 개수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓고 접선의 방정식을 세운다.

(ii) 곡선 밖의 점의 좌표를 접선의 방정식에 대입하여 t에 대한 방정식을 만든다.

(iii) 실근 t의 개수를 이용하여 접선의 개수를 구한다.

09 $f(x)=(x-k)e^{-x}$이라 하면

$$f'(x)=e^{-x}-(x-k)e^{-x}=-(x-k-1)e^{-x}$$

접점의 좌표를 $(t, (t-k)e^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-(t-k-1)e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t-k)e^{-t}=-(t-k-1)e^{-t}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-(t-k)e^{-t}=-(t-k-1)e^{-t}\cdot(-t)$$

$$e^{-t}(t^2-kt-k)=0$$

$$\therefore t^2-kt-k=0 \ (\because e^{-t}>0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

원점에서 곡선 $y=(x-k)e^{-x}$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$D=(-k)^2+4k=0, \qquad k(k+4)=0$$

$\therefore k=-4 \ (\because k\neq 0)$ 답 ①

10 $f(x)=ax^2$, $g(x)=8e\ln x$라 하면

$$f'(x)=2ax,\ g'(x)=\frac{8e}{x}$$

두 곡선이 $x=b$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(b)=g(b)$에서 $\qquad ab^2=8e\ln b \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f'(b)=g'(b)$에서 $\qquad 2ab=\dfrac{8e}{b}$

$\therefore ab^2=4e \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $\qquad 4e=8e\ln b$

$$\ln b=\frac{1}{2} \qquad \therefore b=\sqrt{e}$$

이것을 ㉡에 대입하면 $\qquad ae=4e \qquad \therefore a=4$

$\therefore ab=4\cdot\sqrt{e}=4\sqrt{e}$ 답 ④

11 (1) $f(x)=e^x$, $g(x)=\dfrac{a}{x}$라 하면

$$f'(x)=e^x,\ g'(x)=-\frac{a}{x^2}$$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\qquad e^t=\dfrac{a}{t} \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f'(t)=g'(t)$에서 $\qquad e^t=-\dfrac{a}{t^2} \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면 $\qquad \dfrac{a}{t}=-\dfrac{a}{t^2}$

$a=0$이면 $g(x)=0$이므로 $a\neq 0$

$$t^2+t=0, \qquad t(t+1)=0$$

$$\therefore t=-1 \ (\because t\neq 0)$$

함수 $g(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 0$인 실수$\}$이므로 $t\neq 0$

이것을 ㉠에 대입하면

$$e^{-1}=-a \qquad \therefore a=-\frac{1}{e}$$

(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(-1, \dfrac{1}{e}\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=\dfrac{1}{e}$이므로 구하는 접선의 방정식은

곡선 $y=g(x)$를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수도 있다.

$f(-1)=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

$$y-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(x+1) \qquad \therefore y=\frac{1}{e}x+\frac{2}{e}$$

답 (1) $-\dfrac{1}{e}$ (2) $y=\dfrac{1}{e}x+\dfrac{2}{e}$

12 $\frac{dx}{dt}=e^t+e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=e^t-e^{-t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$$

$t=\ln 2$일 때

$$x=e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$y=e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{2-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{5}{2}=\frac{3}{5}\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore\ y=\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$$

따라서 $a=\frac{3}{5}$, $b=\frac{8}{5}$이므로

$b-a=1$ 답 1

13 $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=1-\frac{3}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{3}{t^2}}{2}=\frac{t^2-3}{2t^2}\ (t\neq 0)$$

$t=1$일 때

$$x=2\cdot 1+1=3,\ y=1+\frac{3}{1}=4,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-3}{2\cdot 1}=-1$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-4=-(x-3)$$

$$\therefore\ y=-x+7$$

이 직선이 점 $(a, 8)$을 지나므로

$8=-a+7\qquad\therefore\ a=-1$ 답 -1

14 $x^2-\cos y+2xy=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2x+\sin y\frac{dy}{dx}+2y+2x\frac{dy}{dx}=0$$

$$(\sin y+2x)\frac{dy}{dx}=-2x-2y$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{-2(x+y)}{2x+\sin y}\ (2x+\sin y\neq 0)$$

따라서 점 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\left(0+\frac{\pi}{2}\right)}{0+\sin\frac{\pi}{2}}=-\pi$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{\pi}{2}=-\pi x\qquad\therefore\ y=-\pi x+\frac{\pi}{2}$$

답 $y=-\pi x+\frac{\pi}{2}$

15 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

따라서 점 $(1, 9)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-3$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-9=-3(x-1)$$

$$\therefore\ y=-3x+12$$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$0=-3a+12\qquad\therefore\ a=4$ 답 ④

15 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

Lecture 23 함수의 증가와 감소

75쪽

1-1 (1) $f(x)=2x-e^x$에서

$$f'(x)=2-e^x$$

(2) $f'(x)=0$에서 $2-e^x=0$

$e^x=2\qquad\therefore\ x=\ln 2$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때
① 열린구간 (a, b)에서 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 증가한다.
② 열린구간 (a, b)에서 $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소한다.

(3)

x	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$2\ln 2-2$	↘

(4) 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \ln 2]$에서 증가하고, 구간 $[\ln 2, \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

1-2 (1) $f(x)=x+\frac{4}{x}$에서 $x\neq 0$이고

$$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\frac{4}{x^2}=1$

$x^2=4\qquad\therefore\ x=\pm 2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-2, 0)$, $(0, 2]$에서 감소한다.

(2) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}$에서

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+10}}=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+10}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=3$

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 3]$에서 감소하고, 구간 $[3, \infty)$에서 증가한다.

74~76쪽

(3) $f(x)=x^2e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=xe^x(2+x)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -2]$, $[0,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-2,\ 0]$에서 감소한다.

(4) $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$에서 $x>-3$이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+3}\cdot(x+3)-\ln(x+3)\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $1-\ln(x+3)=0$

$\ln(x+3)=1,\quad x+3=e$

$\therefore x=e-3$

x	-3	$\cdots$	$e-3$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-3,\ e-3]$에서 증가하고, 구간 $[e-3,\ \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

1-3 (1) $f(x)=x+2\cos x$에서

$f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{6}\right]$, $\left[\dfrac{5}{6}\pi,\ \pi\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi\right]$에서 감소한다.

(2) $f(x)=\sin x+\cos x$에서

$f'(x)=\cos x-\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\sin x$

$\cos x=\sin x$에서 $\cos x\neq 0$이므로

$1=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\therefore \tan x=1$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ ($\because 0<x<\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$에서 증가하고, 구간 $\left[\dfrac{\pi}{4},\ \pi\right)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

Lecture 24 함수의 극대와 극소

76쪽

1-1 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $-x^2+1=0$

$x^2-1=0,\quad (x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{2}$, $x=1$에서 극댓값 $\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

답 풀이 참조

1-2 (1) $f(x)=x-e^x$에서

$f'(x)=1-e^x$

$f'(x)=0$에서 $e^x=1$

$\therefore x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 -1을 갖는다.

(2) $f(x)=\dfrac{x+5}{\sqrt{x+1}}$에서 $x+1>0$이므로 $x>-1$이고

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x+1}-(x+5)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{x-3}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

분자, 분모에 각각 $2\sqrt{x+1}$을 곱하면

$$\frac{2(x+1)-(x+5)}{2(x+1)\sqrt{x+1}}=\frac{x-3}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=3$

x	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 4를 갖는다.

답 (1) 극댓값: -1 (2) 극솟값: 4

2-1 (1) $f(x)=x^3+6x^2-1$에서

$f'(x)=3x^2+12x$, $f''(x)=6x+12$

다항함수와 같이 이계도함수를 쉽게 구할 수 있는 함수는 이계도함수를 이용하면 도함수를 이용하는 방법보다 극대와 극소를 빠르게 판정할 수 있다.

(2) $f'(x)=0$에서

$3x^2+12x=0,\quad 3x(x+4)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=0$

$\therefore f''(-4)=-12<0$, $f''(0)=12>0$

(3) 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극대이고 극댓값은 $f(-4)=31$, $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=-1$이다.

답 풀이 참조

2-2 (1) $f(x)=2x\ln x$에서

$$f'(x)=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}=2\ln x+2$$

$$f''(x)=\frac{2}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=-1$

$$\therefore\ x=\frac{1}{e}$$

이때 $f''\left(\frac{1}{e}\right)=2e>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e}$에서 극소이고, 극솟값은 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{2}{e}$이다.

(2) $f(x)=\sin^2 x$에서

$$f'(x)=2\sin x\cos x$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=2\cos x\cos x+2\sin x\cdot(-\sin x)\\&=2\cos^2 x-2\sin^2 x\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2\sin x\cos x=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=0$

$$\therefore\ x=\frac{\pi}{2}\ (\because\ 0<x<\pi)$$

이때 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극대이고, 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이다.

답 (1) 극솟값: $-\frac{2}{e}$ (2) 극댓값: 1

기본+표준 유형 Q+Q

77쪽

01 $f(x)=\frac{5x}{x^2+1}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{5(x^2+1)-5x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-5x^2+5}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{-5(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1,\ 1]$에서 증가하므로

$\alpha=-1,\ \beta=1 \qquad \therefore\ \alpha\beta=-1$

답 ②

02 $f'(x)=(6x+a)e^x+(3x^2+ax)e^x$
$\quad=\{3x^2+(a+6)x+a\}e^x$

$f'(x)=0$에서

$3x^2+(a+6)x+a=0\ (\because\ e^x>0)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $-4\le x\le b$이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은 $-4,\ b$이다.

$x=-4$를 ㉠에 대입하면

$48-4a-24+a=0, \qquad 3a=24$

$\therefore\ a=8$

따라서 ㉠에 $a=8$을 대입하면

$3x^2+14x+8=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-4\cdot b=\frac{8}{3} \qquad \therefore\ b=-\frac{2}{3}$

$\therefore\ \frac{a}{b}=8\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-12$

답 -12

03 $f(x)=ax-\ln(x^2+2)$에서

$$f'(x)=a-\frac{2x}{x^2+2}=\frac{ax^2-2x+2a}{x^2+2}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이때 $x^2+2>0$이므로 $ax^2-2x+2a\le 0$이어야 한다.

Q BOX

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식이 성립할 조건은 다음과 같다.
① $ax^2+bx+c>0$
$\Rightarrow a>0,\ D<0$
② $ax^2+bx+c\ge 0$
$\Rightarrow a>0,\ D\le 0$
③ $ax^2+bx+c<0$
$\Rightarrow a<0,\ D<0$
④ $ax^2+bx+c\le 0$
$\Rightarrow a<0,\ D\le 0$

$a<0$이고, 이차방정식 $ax^2-2x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-2a^2\le 0, \qquad 2\left(a^2-\frac{1}{2}\right)\ge 0$$

$$2\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ge 0$$

$$\therefore\ a\le -\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{또는}\ a\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$$

그런데 $a<0$이므로 $\qquad a\le -\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다.

답 -1

04 $f(x)=ax-\cos 2x$에서

$$f'(x)=a+2\sin 2x$$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

어떤 구간에서 부등식 $P(x)\ge 0$이 성립함을 보이려면 그 구간에서 (함수 $P(x)$의 최솟값) ≥ 0임을 보인다.

이때 $-1\le\sin 2x\le 1$에서 $\qquad -2\le 2\sin 2x\le 2$

$\therefore\ a-2\le a+2\sin 2x\le a+2$

따라서 $a-2\ge 0$이어야 하므로 $\qquad a\ge 2$

답 $a\ge 2$

05 $f(x)=\ln x-3ax$에서 $x>0$이고

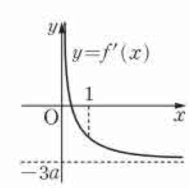
$$f'(x)=\frac{1}{x}-3a$$

함수 $f(x)$가 구간 $(1,\ \infty)$에서 감소하려면 $x>1$일 때 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서

$f'(1)=1-3a\le 0$

$\therefore\ a\ge\frac{1}{3}$



답 ⑤

06 $f(x)=\frac{x^2+4x+a}{x^2+1}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(2x+4)(x^2+1)-(x^2+4x+a)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{-4x^2+2(1-a)x+4}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1,\ 1)$에서 증가하려면 $-1<x<1$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이때 $(x^2+1)^2>0$이므로 $-4x^2+2(1-a)x+4\ge 0$이어야 한다.

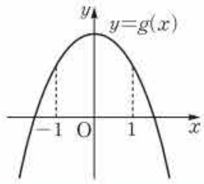
$g(x)=-4x^2+2(1-a)x+4$라 하면

오른쪽 그림에서

$g(-1)$
$=-4-2(1-a)+4\geq 0,$

$g(1)$
$=-4+2(1-a)+4\geq 0$

$\therefore a=1$



답 1

$a\geq 1$

$a\leq 1$

07 $f(x)=x+\dfrac{9}{x-1}$에서 $x\neq 1$이고

$$f'(x)=1-\frac{9}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-9}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}=\frac{(x+2)(x-4)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-5	↘		↘	7	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 -5, $x=4$에서 극솟값 7을 가지므로

$M=-5,\ m=7 \qquad \therefore M+m=2$

답 2

극댓값이 극솟값보다 항상 큰 것은 아니다.

08 $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}$에서 $-3\leq x\leq 5$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{3+x}}-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}$$
$$=\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{2\sqrt{3+x}\sqrt{5-x}}$$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{5-x}=\sqrt{3+x}$

양변을 제곱하면 $5-x=3+x \qquad \therefore x=1$

x	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2\sqrt{2}$	↗	4	↘	$2\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 4를 가지므로

$a=1,\ b=4 \qquad \therefore ab=4$

답 4

$3+x\geq 0$에서 $x\geq -3$
$5-x\geq 0$에서 $x\leq 5$
$\therefore -3\leq x\leq 5$

09 $f(x)=(x^2-4x+1)e^x$에서

$$f'(x)=(2x-4)e^x+(x^2-4x+1)e^x$$
$$=(x^2-2x-3)e^x$$
$$=(x+1)(x-3)e^x$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$ ($\because e^x>0$)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{6}{e}$	↘	$-2e^3$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\dfrac{6}{e}$, $x=3$에서 극솟값 $-2e^3$을 가지므로

$M=\dfrac{6}{e},\ m=-2e^3 \qquad \therefore Mm=-12e^2$

답 ②

Q BOX

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖는다.
➡ $f'(a)=0$

10 $f(x)=x^2+ax+b\ln x$에서

$$f'(x)=2x+a+\frac{b}{x}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=\dfrac{5}{2}$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0,\ f'\left(\dfrac{5}{2}\right)=0$

$2+a+b=0,\ 5+a+\dfrac{2}{5}b=0$

$\therefore a+b=-2,\ 5a+2b=-25$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-7,\ b=5$

$\therefore ab=-35$

답 -35

11 $f(x)=x\cos x-\sin x$에서

$$f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x$$
$$=-x\sin x$$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$ ($\because 0<x<2\pi$)

$\therefore x=\pi$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-\pi$	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 극솟값 $-\pi$를 가지므로

$a=\pi,\ b=-\pi \qquad \therefore \dfrac{a}{b}=-1$

답 -1

12 $\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta}=2\sin 2\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2\sin 2\theta}{1-\cos\theta}$$

$\dfrac{dy}{dx}=0$에서 $\sin 2\theta=0$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{2}$ ($\because 0<\theta<\pi$)

또 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$일 때 $\dfrac{dy}{dx}>0$, $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때 $\dfrac{dy}{dx}<0$이므로 주어진 함수는 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 구하는 극댓값은

$$1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=1-(-1)=2$$

답 ④

13 $f(x)=kx+2\cos x$에서

$$f'(x)=k-2\sin x$$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$ 또는 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$k-2\sin x\leq 0$ 또는 $k-2\sin x\geq 0$

$\therefore \sin x\geq \dfrac{k}{2}$ 또는 $\sin x\leq \dfrac{k}{2}$

이때 $-1\leq \sin x\leq 1$이므로

$\dfrac{k}{2}\leq -1$ 또는 $\dfrac{k}{2}\geq 1$

$\therefore k\leq -2$ 또는 $k\geq 2$

답 $k\leq -2$ 또는 $k\geq 2$

쌤 한미디

미분가능한 함수 $f(x)$가
① 극값을 갖는다.
 ○ $f'(x)=0$이 실근을 갖고 $f'(x)=0$의 실근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.
② 극값을 갖지 않는다.
 ○ 정의역의 모든 실수 x에 대하여
 $f'(x)\geq0$ 또는 $f'(x)\leq0$

14 $f(x)=(2x^3-6x^2+k)e^x$에서

$f'(x)=(6x^2-12x)e^x+(2x^3-6x^2+k)e^x$
$=(2x^3-12x+k)e^x$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $2x^3-12x+k=0$이 2개 이상의 실근을 갖고, 실근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

즉 $g(x)=2x^3-12x+k$라 하면 삼차함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 부호가 달라야 한다.

삼차함수 $g(x)$가 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$g'(x)=6x^2-12=6(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$이므로
$g'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$
$g(-\sqrt{2})g(\sqrt{2})<0$이어야 하므로
$(k+8\sqrt{2})(k-8\sqrt{2})<0$ $\therefore -8\sqrt{2}<k<8\sqrt{2}$
따라서 $\alpha=-8\sqrt{2}$, $\beta=8\sqrt{2}$이므로
$\beta-\alpha=16\sqrt{2}$

답 ③

15 $f(x)=\dfrac{5x+k}{x^2-1}$에서

$$f'(x)=\frac{5(x^2-1)-(5x+k)\cdot2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-5x^2-2kx-5}{(x^2-1)^2}$$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-5x^2-2kx-5=0$, 즉 $5x^2+2kx+5=0$이 $x\neq\pm1$인 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

함수 $f(x)$의 정의역은 $x\neq\pm1$인 모든 실수이다.

$5+2k+5\neq0$, $5-2k+5\neq0$
$\therefore k\neq\pm5$
이차방정식 $5x^2+2kx+5=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=k^2-25>0$ $\therefore k<-5$ 또는 $k>5$

답 $k<-5$ 또는 $k>5$

16 $f(x)=x-2k\ln x-\dfrac{4k}{x}$에서

$$f'(x)=1-\frac{2k}{x}+\frac{4k}{x^2}=\frac{x^2-2kx+4k}{x^2}$$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2-2kx+4k=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $x^2-2kx+4k=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=k^2-4k\leq0$, $k(k-4)\leq0$
$\therefore 0\leq k\leq4$
따라서 실수 k의 최댓값은 4이다.

답 4

중단원 마무리

79쪽

01 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=(2x-5)^6$이라 하면
$f'(x)=6(2x-5)^5\cdot2=12(2x-5)^5$
점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(3)=12$이므로 접선의 방정식은
$y-1=12(x-3)$
$\therefore y=12x-35$
따라서 직선 $y=12x-35$ 위의 점의 좌표는 ①이다.

답 ①

02 전략 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$라 하면

$a=f(3)=\dfrac{3}{3-2}=3$ ···❶

$f'(x)=\dfrac{(x-2)-x}{(x-2)^2}=-\dfrac{2}{(x-2)^2}$이므로 점 $(3,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=-2$

따라서 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이므로 직선의 방정식은

$y-3=\dfrac{1}{2}(x-3)$ $\therefore y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ ···❷

이 직선이 점 $(b,\ -1)$을 지나므로 $-1=\dfrac{1}{2}b+\dfrac{3}{2}$

$\therefore b=-5$ ···❸
$\therefore a^2+b^2=34$ ···❹

답 34

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷	접선과 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❸	b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹	a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	10 %

03 전략 먼저 접선의 방정식을 구한 후 $y=0$을 대입하여 x절편을 구한다.

풀이 $g(x)=\cos x$라 하면
$g'(x)=-\sin x$
점 $(t,\ \cos t)$에서의 접선의 기울기가 $g'(t)=-\sin t$이므로 접선의 방정식은
$y-\cos t=-\sin t(x-t)$
$\therefore y=-x\sin t+t\sin t+\cos t$
위의 식에 $y=0$을 대입하면
$0=-x\sin t+t\sin t+\cos t$
$x\sin t=t\sin t+\cos t$
$\therefore x=t+\cot t$ ($\because \sin t\neq0$)

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\sin t\neq0$

따라서 $f(t)=t+\cot t$이므로 $f(2t)=2t+\cot 2t$

$\therefore \lim_{t\to 0} tf(2t) = \lim_{t\to 0} t(2t+\cot 2t)$

$= \lim_{t\to 0} t\left(2t+\frac{1}{\tan 2t}\right)$

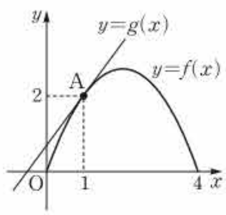
$= \lim_{t\to 0}\left(2t^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{\tan 2t}\right)$

$= 0+\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$ 답 ④

QBOX: $\lim_{t\to 0}\frac{at}{\tan at}=1$

04 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A(1, 2)에서의 접선이 직선 $y=g(x)$임을 이용하여 함수 $g(x)$를 구한다.

풀이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 모두 점 A(1, 2)를 지나고, 일차함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, 4]$에서 $f(x)\le g(x)$를 만족시키기 위해서는 오른쪽 그림과 같이 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 A에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접해야 한다.



즉 직선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (1, 2)에서의 접선이다.

$f(x)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x$에서

$f'(x)=2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}x=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}x$

점 A(1, 2)에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{2}$

이므로 접선의 방정식은

$y-2=\frac{\pi}{2}(x-1)$ $\quad\therefore y=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+2$

따라서 $g(x)=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+2$이므로

$g(3)=\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}+2=\pi+2$ 답 ③

쌤 한마디

04번 문제에 '접선의 방정식'이라는 표현은 없지만 주어진 조건을 만족시키는 직선이 접선임을 알아야 문제를 해결할 수 있다.
주어진 점 A를 지나는 직선을 여러 가지 그어 보고 닫힌구간 $[0, 4]$에서 $f(x)\le g(x)$를 만족시키는 직선 $y=g(x)$의 의미를 생각하면 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$의 접선임을 알 수 있다.

05 전략 접점의 좌표를 $(t, 0)$으로 놓고 접선의 기울기가 0임을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 점 $(t, 0)$에서 접한다고 하면 $f(t)=0$에서

$e^{3t}+at=0$ ...... ㉠

$f'(x)=3e^{3x}+a$이고, 점 $(t, 0)$에서의 접선의 기울기가 0이므로 $f'(t)=0$에서

QBOX: 접선이 x축이므로 기울기가 0이다.

$3e^{3t}+a=0$ $\quad\therefore a=-3e^{3t}$ ...... ㉡

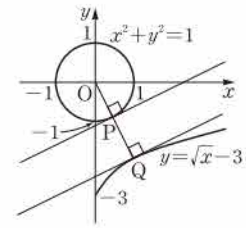
㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad e^{3t}-3e^{3t}\cdot t=0$

$e^{3t}(1-3t)=0$ $\quad\therefore t=\frac{1}{3}\ (\because e^{3t}>0)$

$t=\frac{1}{3}$을 ㉡에 대입하면 $\quad a=-3e$ 답 ①

06 전략 $\overline{PQ}$의 길이가 최소가 되는 경우는 $\overline{OQ}$와 원의 교점이 점 P이고, 점 P에서의 접선과 점 Q에서의 접선이 평행할 때임을 이용한다.

풀이 $\overline{PQ}$의 길이가 최소가 되려면 $\overline{OQ}$와 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 점이 P이고, 점 P에서의 접선과 곡선 $y=\sqrt{x}-3$ 위의 점 Q에서의 접선이 평행해야 한다.



이때 점 P에서의 접선은 직선 OP와 수직이므로 점 Q에서의 접선은 직선 OQ와 수직이다.

$f(x)=\sqrt{x}-3$이라 하면 $\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\overline{PQ}$의 길이가 최소일 때의 점 Q의 좌표를 $(t, \sqrt{t}-3)$ $(t>0)$이라 하면 점 Q에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$

직선 OQ의 기울기는 $\frac{\sqrt{t}-3}{t}$이고 점 Q에서의 접선과 직선 OQ는 서로 수직이므로

$\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{t}-3}{t}=-1$, $\quad \sqrt{t}-3=-2t\sqrt{t}$

$2t\sqrt{t}+\sqrt{t}-3=0$

이때 $\sqrt{t}=X\ (X>0)$로 놓으면

$2X^3+X-3=0$

QBOX:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ & & 2 & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$(X-1)(2X^2+2X+3)=0$

$\therefore X=1\ (\because 2X^2+2X+3>0)$

QBOX: $2X^2+2X+3 =2\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$

즉 $\sqrt{t}=1$이므로 $\quad t=1$

점 Q의 좌표는 $(1, -2)$이므로

$\overline{OQ}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=\sqrt{5}-1$

QBOX: 원의 반지름의 길이

따라서 $a=5$, $b=1$이므로

$a^2+b^2=26$ 답 26

다른 풀이 곡선 $y=\sqrt{x}-3$ 위의 임의의 점 Q의 좌표를 $(t^2, t-3)$ $(t\ge 0)$이라 하고, 원점을 O라 하자.

QBOX: 원의 중심 O에 대하여 $\overline{OQ}$의 길이의 최솟값을 구한다.

$\overline{OQ}^2=(t^2)^2+(t-3)^2=t^4+t^2-6t+9$이므로

$f(t)=t^4+t^2-6t+9$라 하면

$f'(t)=4t^3+2t-6=2(t-1)(2t^2+2t+3)$

QBOX:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 4 & 0 & 2 & -6 \\ & & 4 & 4 & 6 \\ \hline & 4 & 4 & 6 & 0 \end{array}$$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=1\ (\because 2t^2+2t+3>0)$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	9	↘	극소	↗

즉 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 극소이면서 최소이므로 $f(t)$의 최솟값은

$f(1)=1+1-6+9=5$

따라서 $\overline{OQ}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}$이므로 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\quad\sqrt{5}-1$

QBOX: 원의 반지름의 길이

즉 $a=5$, $b=1$이므로

$$a^2+b^2=26$$

07 전략 접점의 좌표를 $(t,\ 3e^{t-1})$으로 놓고 접선의 방정식을 구한 후 이 직선이 원점을 지남을 이용한다.

풀이 $f(x)=3e^{x-1}$이라 하면 $\quad f'(x)=3e^{x-1}$

점 A의 좌표를 $(t,\ 3e^{t-1})$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3e^{t-1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-3e^{t-1}=3e^{t-1}(x-t)$$

$$\therefore\ y=3e^{t-1}x-3te^{t-1}+3e^{t-1}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0=-3te^{t-1}+3e^{t-1}, \qquad (1-t)e^{t-1}=0$$

$$\therefore\ t=1\ (\because\ e^{t-1}>0)$$

따라서 점 A의 좌표는 $(1,\ 3)$이므로

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

답 ⑤

08 전략 주어진 두 곡선이 $x=1$인 점에서 만나고, 두 곡선의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 서로 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=e^{x-1}$, $g(x)=\sqrt{ax+b}$라 하면

$$f'(x)=e^{x-1},\ g'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

$f(1)=g(1)$에서

$$1=\sqrt{a+b} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f'(1)=g'(1)$에서

$$1=\frac{a}{2\sqrt{a+b}} \qquad \cdots\cdots ㉡ \qquad \cdots ❶$$

㉠, ㉡에서

$$1=\frac{a}{2} \qquad \therefore\ a=2$$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$$1=\sqrt{2+b} \qquad \therefore\ b=-1 \qquad \cdots ❷$$

$$\therefore\ a-b=3 \qquad \cdots ❸$$

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	a, b에 대한 두 방정식을 세울 수 있다.	50 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 전략 두 곡선이 점 P에서 만나고 두 접선이 수직임을 이용한다.

풀이 $f(x)=ke^x+1$, $g(x)=x^2-3x+4$라 하고, 점 P의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$$ke^t+1=t^2-3t+4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f'(x)=ke^x$, $g'(x)=2x-3$이고 점 P에서의 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(t)\cdot g'(t)=-1$에서

$$ke^t(2t-3)=-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $ke^t=t^2-3t+3$이므로 이 식을 ㉡에 대입하면

$$(t^2-3t+3)(2t-3)=-1$$

$$2t^3-9t^2+15t-8=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -9 & 15 & -8 \\ & & 2 & -7 & 8 \\ \hline & 2 & -7 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$$(t-1)(2t^2-7t+8)=0$$

$$\therefore\ t=1\ (\because\ 2t^2-7t+8>0)$$

$$2t^2-7t+8=2\left(t-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$$

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$$ke+1=2 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{e}$$

답 ①

10 전략 $t=1$일 때 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{3}$를 만족시키는 a의 값을 구한다.

풀이 $\dfrac{dx}{dt}=3at^2$, $\dfrac{dy}{dt}=4t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t}{3at^2}=\frac{4}{3at}\ (t\neq 0)$$

$t=1$일 때 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{3}$이므로

$$\frac{4}{3a}=\frac{2}{3} \qquad \therefore\ a=2$$

따라서 $t=1$일 때 $x=2$, $y=2-1=1$이므로 접선의 방정식은

$x=2t^3$, $y=2t^2-1$에서 $t=1$일 때 $x=2$, $y=1$

$$y-1=\frac{2}{3}(x-2) \qquad \therefore\ y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$$

답 $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}$

11 전략 주어진 곡선의 접선이 원의 중심을 지남을 이용한다.

풀이 점 $(1,\ -1)$이 곡선 $\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=x^2+3$ 위의 점이므로

$$a+b=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=x^2+3$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$-\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=2x$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{(2x^3+a)y^2}{bx^2}$$

점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a+2}{b}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y+1=\frac{a+2}{b}(x-1)$$

$$\therefore\ y=\frac{a+2}{b}(x-1)-1$$

이 직선이 원 $(x-4)^2+(y-5)^2=1$의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(4,\ 5)$를 지난다.

즉 $5=\dfrac{a+2}{b}\cdot 3-1$에서 $\qquad 3a-6b=-6$

$$\therefore\ a-2b=-2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=2$, $b=2$

$$\therefore\ ab=4$$

답 4

12 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이 성립함을 이용한다.

풀이 $f(x)=(x^2+ax+3)e^x$에서

$$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+3)e^x$$
$$=\{x^2+(a+2)x+a+3\}e^x$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

Q BOX

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간에서
① $f(x)$가 증가하면 $f'(x)\geq 0$
② $f(x)$가 감소하면 $f'(x)\leq 0$

이때 $e^x>0$이므로 $x^2+(a+2)x+a+3\geq 0$이어야 한다.
따라서 이차방정식 $x^2+(a+2)x+a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+2)^2-4(a+3)\leq 0$$
$$a^2-8\leq 0,\qquad (a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})\leq 0$$
$$\therefore\ -2\sqrt{2}\leq a\leq 2\sqrt{2}$$

따라서 정수 a의 최댓값은 2이다. 답 2

13 전략 구간 $(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\geq 0$을 만족시키는 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{k}{x}$에서

$$f'(x)=x-3+\frac{k}{x^2}$$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하므로 $x>0$에서 $f'(x)\geq 0$, 즉 $x-3+\frac{k}{x^2}\geq 0$이다.
이때 $x^2>0$이므로 $\quad x^3-3x^2+k\geq 0$

$$\therefore\ k\geq -x^3+3x^2$$

$g(x)=-x^3+3x^2$이라 하면 $k\geq(g(x)$의 최댓값$)$이다.
$g'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$이므로 $g'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because\ x>0)$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$		+	0	−
$g(x)$		↗	극대	↘

따라서 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$g(2)=-8+12=4$$

따라서 $k\geq 4$이므로 실수 k의 최솟값은 4이다. 답 ③

14 전략 도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 주어진 구간에서 $f'(x)\geq 0$을 만족시키는 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{e^{ax}}{x+2}$에서

$$f'(x)=\frac{ae^{ax}(x+2)-e^{ax}}{(x+2)^2}=\frac{(ax+2a-1)e^{ax}}{(x+2)^2}$$

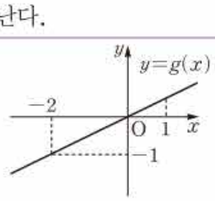
함수 $f(x)$가 구간 $(1,\ \infty)$에서 증가하려면 $x>1$일 때 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$$ax+2a-1\geq 0\ (\because\ (x+2)^2>0,\ e^{ax}>0)$$

$g(x)=ax+2a-1$이라 하면 직선 $y=g(x)$는 a의 값에 관계없이 점 $(-2,\ -1)$을 지난다.

$y=a(x+2)-1$에서 $x=-2,\ y=-1$이면 a의 값에 관계없이 등식이 성립한다.

$x>1$일 때 $g(x)\geq 0$이려면 오른쪽 그림에서



$$a>0,\ g(1)\geq 0$$

이어야 하므로

$$a>0,\ 3a-1\geq 0$$

$$\therefore\ a\geq\frac{1}{3}$$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다. 답 ②

15 전략 $f'(x)=0$인 x의 값을 구하여 $f(x)$의 증감표를 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1-x}}$에서 $0<x\leq 1$이고

$$f'(x)=-\frac{1+\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{(x+\sqrt{1-x})^2}$$
$$=\frac{1-2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}\,(x+\sqrt{1-x})^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2\sqrt{1-x}=1,\quad \sqrt{1-x}=\frac{1}{2}$

양변을 제곱하면 $\quad 1-x=\frac{1}{4}\quad\therefore\ x=\frac{3}{4}$ ⋯ ❶

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{4}{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	$f(x)$의 극솟값을 구할 수 있다.	50 %

16 전략 $f(t)$를 구한 후 $f'(t)=0$인 t의 값을 구하여 $f(t)$의 증감표를 이용한다.

풀이 $f(t)=\overline{\mathrm{OP}}^2=t^2+\frac{54}{t}\ (t>0)$이므로

$$f'(t)=2t-\frac{54}{t^2}$$

$f'(t)=0$에서 $\quad 2t-\frac{54}{t^2}=0$

$$\frac{2t^3-54}{t^2}=0,\qquad \frac{2(t-3)(t^2+3t+9)}{t^2}=0$$
$$\therefore\ t=3\ (\because\ t^2+3t+9>0)$$

$$t^2+3t+9=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}>0$$

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		−	0	+
$f(t)$		↘	27	↗

따라서 함수 $f(t)$는 $t=3$에서 극솟값 27을 갖는다.

답 ④

17 전략 $f'(x)=0$인 x의 값을 구하여 $f(x)$의 증감표를 이용한다.

풀이 $f(x)=e^{-x+2}(x-k)$에서

$$f'(x)=-e^{-x+2}(x-k)+e^{-x+2}$$
$$=-e^{-x+2}(x-k-1)$$

$f'(x)=0$에서

$$x=k+1\ (\because\ e^{-x+2}>0)$$

x	$\cdots$	$k+1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

ㄱ. 함수 $f(x)$는 극댓값만 갖는다.

ㄴ. $f(x)$의 극댓값은

$$f(k+1)=e^{-(k+1)+2}(k+1-k)=e^{-k+1}$$

ㄷ. $k+1=-1$에서 $\quad k=-2$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

18 전략 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 가지면 $f'(a)=0$, $f(a)=b$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\tan(\pi x^2+ax)$에서

$$f'(x)=(2\pi x+a)\sec^2(\pi x^2+ax)$$

$x=\frac{1}{2}$에서 극솟값을 가지므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서

$$(\pi+a)\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)=0$$

이때 $\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\neq0$이므로

$$\pi+a=0$$

$$\therefore a=-\pi$$

따라서 $f(x)=\tan(\pi x^2-\pi x)$이므로

$$k=f\left(\frac{1}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

답 ②

19 전략 미분가능한 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 정의역의 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$ 또는 $f'(x)\leq0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=ax+\ln 2x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=a+\frac{1}{x}$$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $x>0$인 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 하므로

$$a+\frac{1}{x}\geq0$$

그런데 $x>0$일 때 $\frac{1}{x}>0$이므로

$$a\geq0$$

답 $a\geq0$

20 전략 $f'(x)=g(x)h(x)$에서 $g(x)$가 이차식이고 모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$일 때, $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가짐을 이용한다.

풀이 $f(x)=(x^2-4x+a)e^x$에서

$$f'(x)=(2x-4)e^x+(x^2-4x+a)e^x$$

$$=(x^2-2x+a-4)e^x$$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $x^2-2x+a-4=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-2x+a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-(a-4)>0 \qquad \therefore a<5$$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4의 4개이다. 답 ③

Q BOX

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서

① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록

② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록

$$\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)}\neq0$$

함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

➡ 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

07 도함수의 활용 (2)

16 함수의 그래프

Lecture 25 곡선의 오목과 볼록

L 82쪽

1-1 (1) $f(x)=x^3-3x^2+4$라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x$$

$$f''(x)=6x-6=6(x-1)$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=1$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 1)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(1, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

(2) $f(x)=-x^4+2x^3+5$라 하면

$$f'(x)=-4x^3+6x^2$$

$$f''(x)=-12x^2+12x=-12x(x-1)$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$ 또는 $(1, \infty)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(0, 1)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

(3) $f(x)=xe^x$이라 하면

$$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

$$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-2$ ($\because e^x>0$)

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, -2)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(-2, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

(4) $f(x)=\cos x$라 하면

$$f'(x)=-\sin x$$

$$f''(x)=-\cos x$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<x<\pi$)

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

답 풀이 참조

2-1 (1) $f(x)=x^3+x+2$라 하면

$$f'(x)=3x^2+1$$

$$f''(x)=6x$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=0$

$x<0$일 때 $f''(x)<0$, $x>0$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0, 2)$이다.

(2) $f(x)=x^4-4x^3-3$이라 하면

$$f'(x)=4x^3-12x^2$$

$$f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$$

$f''(x)=0$에서　　$x=0$ 또는 $x=2$

$x<0$ 또는 $x>2$일 때 $f''(x)>0$,

$0<x<2$일 때 $f''(x)<0$

따라서 $x=0$, $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0,\ -3)$, $(2,\ -19)$이다.

$f(2)=16-32-3$
$=-19$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$이라 하면

$$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2(x^2+3)^2-(-2x)\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$=\frac{6(x^2-1)(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$$

$$=\frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

$f''(x)=0$에서　　$x=-1$ 또는 $x=1$

$x<-1$ 또는 $x>1$일 때 $f''(x)>0$,

$-1<x<1$일 때 $f''(x)<0$

따라서 $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-1,\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$이다.

(4) $f(x)=\ln(x^2+4)$라 하면

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+4}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+4)-2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}$$

$$=\frac{-2(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$$

$f''(x)=0$에서　　$x=-2$ 또는 $x=2$

$x<-2$ 또는 $x>2$일 때 $f''(x)<0$,

$-2<x<2$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=-2$, $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-2,\ \ln 8)$, $(2,\ \ln 8)$이다.

답 (1) $(0,\ 2)$
(2) $(0,\ -3)$, $(2,\ -19)$
(3) $\left(-1,\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$
(4) $(-2,\ \ln 8)$, $(2,\ \ln 8)$

쌤 한마디

곡선 $y=f(x)$에서 $f''(a)=0$이지만 점 $(a,\ f(a))$가 변곡점이 아닌 경우도 있다.
따라서 $f''(x)=0$인 x의 값을 구한 후 그 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌는지 확인해야 한다.

Lecture 26 함수의 그래프

83쪽

1-1 답 -1, $\sqrt{3}$, -1, $\sqrt{3}$, -1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=0$

1-2 (1) $f(x)=-x^3+6x^2-9x+2$라 하면

$f'(x)=-3x^2+12x-9$
$=-3(x-1)(x-3)$

$f''(x)=-6x+12=-6(x-2)$

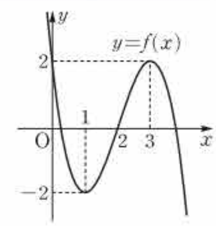
$f'(x)=0$에서　　$x=1$ 또는 $x=3$

$f''(x)=0$에서　　$x=2$

x	…	1	…	2	…	3	…
$f'(x)$	−	0	+	+	+	0	−
$f''(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f(x)$	↘	−2	⤴	0	↗	2	⤵

표에서 ↗, ⤵은 위로 볼록이면서 각각 증가, 감소를 나타내고 ⤴, ↘은 아래로 볼록이면서 각각 증가, 감소를 나타낸다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=2x^4-4x^3+1$이라 하면

$f'(x)=8x^3-12x^2=4x^2(2x-3)$

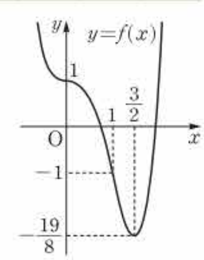
$f''(x)=24x^2-24x=24x(x-1)$

$f'(x)=0$에서　　$x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

$f''(x)=0$에서　　$x=0$ 또는 $x=1$

x	…	0	…	1	…	$\frac{3}{2}$	…
$f'(x)$	−	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	+	0	−	0	+	+	+
$f(x)$	↘	1	⤵	−1	↘	$-\frac{19}{8}$	⤴

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $f(x)=x+\sin x$라 하면

$f'(x)=1+\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

$f'(x)=0$에서　　$x=\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

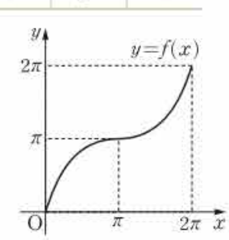
$1+\cos x=0$에서
$\cos x=-1$
$\therefore x=\pi$
($\because 0\le x\le 2\pi$)

$f''(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

x	0	…	π	…	2π
$f'(x)$		+	0	+	
$f''(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↗	π	⤴	2π

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(4) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=e$

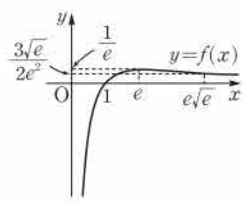
$f''(x)=0$에서 $\quad x=e\sqrt{e}$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3\sqrt{e}}{2e^2}$	↘

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$,

$\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$이므로 점근선은 x축, y축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.



답 풀이 참조

1$-\ln x=0$에서
$\ln x=1$
$\therefore x=e$

$2\ln x-3=0$에서
$\ln x=\frac{3}{2}$
$\therefore x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

쌤 한마디

a, b가 실수일 때, 곡선 $y=f(x)$의 점근선은 다음과 같이 함수의 극한값을 이용하여 구한다.

① $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ 또는 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$
 ⊙ 점근선은 직선 $y=b$

② $\lim_{x\to a+} f(x)=\pm\infty$ 또는 $\lim_{x\to a-} f(x)=\pm\infty$
 ⊙ 점근선은 직선 $x=a$

③ $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(mx+n)\}=0$
 또는 $\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(mx+n)\}=0$
 ⊙ 점근선은 직선 $y=mx+n$

Lecture 27 함수의 최대와 최소

L 84쪽

1-1 (1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$에서

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	2	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 2, $x=-2$ 또는 $x=2$일 때 최솟값 0을 갖는다.

(2) $f(x)=x-x\ln x$에서

$$f'(x)=1-\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=-\ln x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	1	$\cdots$	e^3
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	↘	$-2e^3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 1, $x=e^3$일 때 최솟값 $-2e^3$을 갖는다.

(3) $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$에서

$$f'(x)=\frac{(x^2+3)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$$

$$=-\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{6}$	↘	$\frac{3}{19}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $\frac{1}{6}$, $x=-1$일 때 최솟값 $-\frac{1}{2}$을 갖는다.

(4) $f(x)=\sin x-x\cos x$에서

$$f'(x)=\cos x-\{\cos x+x\cdot(-\sin x)\}$$

$$=x\sin x$$

$f'(x)=0$에서

$x=-\pi$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\pi$

$(\because -\pi\le x\le\pi)$

x	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\pi$	↗	0	↗	π

$f(-\pi)$
$=\sin(-\pi)-(-\pi)\cos(-\pi)$
$=0+\pi\cdot(-1)=-\pi$
$f(\pi)$
$=\sin\pi-\pi\cos\pi$
$=0-\pi\cdot(-1)=\pi$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$일 때 최댓값 π, $x=-\pi$일 때 최솟값 $-\pi$를 갖는다.

답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: 0
(2) 최댓값: 1, 최솟값: $-2e^3$
(3) 최댓값: $\frac{1}{6}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$
(4) 최댓값: π, 최솟값: $-\pi$

2-1 (1) 점 Q는 제1사분면 위의 점이므로 $\quad t>0$

(2) Q(t, e^{-t})이므로 직사각형의 가로의 길이는 $2t$, 세로의 길이는 e^{-t}이다.

주어진 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$은 y축에 대하여 대칭이므로
P$(-t, e^{-t})$
$\therefore \overline{PQ}=2t$

따라서 직사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=2te^{-t}$

(3) $S(t)=2te^{-t}$에서

$S'(t)=2e^{-t}-2te^{-t}$

$=2(1-t)e^{-t}$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=1$ $(\because e^{-t}>0)$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘

따라서 $S(t)$는 $t=1$일 때 최댓값 $\frac{2}{e}$를 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{2}{e}$이다.

답 (1) $t>0$ (2) $2te^{-t}$ (3) $\frac{2}{e}$

기본+표준 유형 Q+Q

85쪽

01 $f(x)=x\ln x-\frac{2}{x}$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=\ln x+1+\frac{2}{x^2}$

$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}=\frac{x^2-4}{x^3}$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 한다. 이때 $x>0$이므로 $\frac{x^2-4}{x^3}<0$에서

$x^2-4<0$

$(x+2)(x-2)<0,\quad -2<x<2$

$\therefore 0<x<2$ ($\because x>0$)

따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $(0, 2)$이다. 답 ①

02 $f(x)=(3x^2+a)e^x$이라 하면

$f'(x)=6xe^x+(3x^2+a)e^x=(3x^2+6x+a)e^x$

$f''(x)=(6x+6)e^x+(3x^2+6x+a)e^x$

$=(3x^2+12x+6+a)e^x$

곡선 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\geq 0$이어야 한다.

이때 $e^x>0$이므로 부등식 $3x^2+12x+6+a\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.

따라서 이차방정식 $3x^2+12x+6+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=6^2-3(6+a)\leq 0,\quad -3a+18\leq 0$

$\therefore a\geq 6$ 답 $a\geq 6$

03 $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}=(x^2+1)e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=2xe^{-x}+(x^2+1)\cdot(-e^{-x})$

$=(-x^2+2x-1)e^{-x}$

$f''(x)=(-2x+2)e^{-x}+(-x^2+2x-1)\cdot(-e^{-x})$

$=(x^2-4x+3)e^{-x}$

$=(x-1)(x-3)e^{-x}$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$ ($\because e^{-x}>0$)

$x<1$ 또는 $x>3$일 때 $f''(x)>0$,

$1<x<3$일 때 $f''(x)<0$

따라서 $x=1$, $x=3$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 모든 변곡점의 x좌표의 합은

$1+3=4$ 답 4

Q BOX

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는
$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여
① 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$이 성립하려면
$a>0$, $D\leq 0$
② 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq 0$이 성립하려면
$a<0$, $D\leq 0$

04 $f(x)=x^4+2x^3-1$이라 하면

$f'(x)=4x^3+6x^2$

$f''(x)=12x^2+12x=12x(x+1)$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$

$x<-1$ 또는 $x>0$일 때 $f''(x)>0$,

$-1<x<0$일 때 $f''(x)<0$

즉 $x=-1$, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는 $(-1, -2)$, $(0, -1)$이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$\sqrt{1^2+(-1+2)^2}=\sqrt{2}$ 답 ①

05 $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f''(x)=6x+2a$

변곡점의 좌표가 $(-1, 9)$이므로

$f(-1)=9$에서 $\quad -1+a-b-2=9$

$\therefore a-b=12$ ⋯⋯ ㉠

$f''(-1)=0$에서 $\quad -6+2a=0$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad 3-b=12$

$\therefore b=-9$

$\therefore 2a+b=-3$ 답 ③

06 $f(x)=-8x^2+ax+b\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=-16x+a+\frac{b}{x}$

$f''(x)=-16-\frac{b}{x^2}$

$x=1$에서 극대이므로 $\quad f'(1)=0$

$-16+a+b=0\quad \therefore a+b=16$ ⋯⋯ ㉠

변곡점의 x좌표가 $\frac{1}{4}$이므로 $\quad f''\left(\frac{1}{4}\right)=0$

$-16-16b=0\quad \therefore b=-1$

$b=-1$을 ㉠에 대입하면

$a-1=16\quad \therefore a=17$

$\therefore a-b=17-(-1)=18$ 답 18

07 $f(x)=e^{-x^2}$에서

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f''(x)=-2e^{-x^2}+(-2x)e^{-x^2}\cdot(-2x)$

$=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

$=2(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)e^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ ($\because e^{-x^2}>0$)

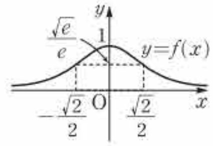
$f''(x)=0$에서

$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because e^{-x^2}>0$)

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	⤴	$\frac{\sqrt{e}}{e}$	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{e}}{e}$	⤵

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 구간 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \infty\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

08 $f(x)=x-\sqrt{x-1}$에서 $x\ge1$이고

$$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2\sqrt{x-1}-1=0$

$2\sqrt{x-1}=1, \quad \sqrt{x-1}=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{5}{4}$

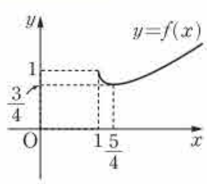
x	1	$\cdots$	$\frac{5}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗

$f(x)=x-(x-1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$f'(x)$
$=1-\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}$
$=1-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$f''(x)$
$=\frac{1}{4}(x-1)^{-\frac{3}{2}}$
$=\frac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① $f(x)$의 극솟값은 $f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{3}{4}$이다.

③ 구간 $\left(1,\ \frac{5}{4}\right)$에서 $f'(x)<0$이므로 이 구간에서 $f(x)$는 감소한다.

④ 구간 $(1,\ 2)$에서 $f''(x)>0$이므로 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

⑤ $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 없다.

답 ④

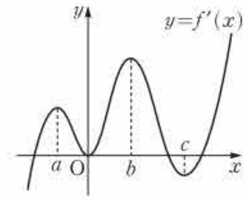
09 구간 $(a,\ e)$에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

구간 $(a,\ e)$에서 $y=f'(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기를 조사한다.

x	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로 구하는 구간은 $(b,\ d)$이다. 답 ③

10 오른쪽 그림과 같이 a, b, c를 정하고 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.



x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x=a$, $x=0$, $x=b$, $x=c$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 4이다.

답 4

11 $f(x)=\frac{x-3}{x^2-x+3}$에서

$$f'(x)=\frac{(x^2-x+3)-(x-3)(2x-1)}{(x^2-x+3)^2}$$

$$=\frac{-x(x-6)}{(x^2-x+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=6$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	$\frac{1}{11}$	↘

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=6$일 때 최댓값 $\frac{1}{11}$을 갖는다.

따라서 $a=6$, $b=\frac{1}{11}$이므로

$\frac{a}{b}=66$ 답 66

12 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$에서 $-1\le x\le1$이고

$1-x^2\ge0$에서 $\quad x^2\le1$
$\therefore -1\le x\le1$

$$f'(x)=\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2}x)(1-\sqrt{2}x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 최댓값 $\frac{1}{2}$, $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{2}$을 가지므로

$M=\frac{1}{2}$, $m=-\frac{1}{2}$

$\therefore Mm=-\frac{1}{4}$ 답 ②

13 $f(x)=e^x-x$에서

$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $e^x=1$ $\therefore x=0$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e^2}+2$	↘	1	↗	$e-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 $\frac{1}{e^2}+2$, $x=0$일 때 최솟값 1을 가지므로 구하는 합은

$\frac{1}{e^2}+2+1=\frac{1}{e^2}+3$ 답 ③

$e=2.7\times\times\times$이므로
$\frac{1}{e^2}+2>2$,
$e-1<2$
$\therefore e-1<\frac{1}{e^2}+2$

14 $f(x)=2(\sin x-x\cos x)$에서

$f'(x)=2\{\cos x-(\cos x-x\sin x)\}$
$=2x\sin x$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	2π	↘	-4π

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$일 때 최댓값 2π를 가지므로

$a=\pi$, $M=2\pi$

$\therefore a+M=3\pi$ 답 3π

15 $\log_2 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{2}\le x\le 4$에서

$-1\le t\le 2$

주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3-4t^2+2$

$\therefore g'(t)=3t^2-8t=t(3t-8)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ ($\because -1\le t\le 2$)

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-3	↗	2	↘	-6

따라서 함수 $g(t)$는 $t=0$일 때 최댓값 2, $t=2$일 때 최솟값 -6을 가지므로

$M=2$, $m=-6$

$\therefore M-m=8$ 답 8

로그함수 $y=\log_a f(x)$는
① $a>0$
➡ $f(x)$가 최대일 때 최댓값, 최소일 때 최솟값을 갖는다.
② $0<a<1$
➡ $f(x)$가 최대일 때 최솟값, 최소일 때 최댓값을 갖는다.

쌤 한마디

함수 $f(x)$의 식에 공통부분이 있을 때, 함수 $f(x)$의 최대·최소는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 공통부분을 t로 치환하여 t의 값의 범위를 구한다.
(ii) 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타낸다.
(iii) $g(t)$의 최대·최소를 구한다.

16 $f(x)=\cos^3 x-3\sin^2 x+2$

$=\cos^3 x-3(1-\cos^2 x)+2$
$=\cos^3 x+3\cos^2 x-1$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고, 주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+3t^2-1$

$\therefore g'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ ($\because -1\le t\le 1$)

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	1	↘	-1	↗	3

따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$일 때 최댓값 3, $t=0$일 때 최솟값 -1을 가지므로 구하는 합은

$3+(-1)=2$ 답 ②

17 점 P의 좌표를 $\left(t, \ln\frac{1}{t}\right)$이라 하면 점 P는 제1사분면 위에 있으므로 $0<t<1$이다.

$t>0$, $\ln\frac{1}{t}>0$이므로
$\ln\frac{1}{t}>0$에서
$-\ln t>0$
$\therefore 0<t<1$

사각형 OQPR의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=t\cdot\ln\frac{1}{t}=-t\ln t$

$\therefore S'(t)=-\ln t-t\cdot\frac{1}{t}=-\ln t-1$

$S'(t)=0$에서 $\ln t=-1$ $\therefore t=\frac{1}{e}$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{1}{e}$일 때 최댓값 $\frac{1}{e}$을 가지므로 사각형 OQPR의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{e}$이다.

답 $\frac{1}{e}$

18 $P(t, e^t+2)$, $Q(t, t)$이므로

$\overline{PQ}=e^t+2-t$

이때 $f(t)=e^t+2-t$라 하면

$f'(t)=e^t-1$

$f'(t)=0$에서 $e^t=1$ $\therefore t=0$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	3	↗

따라서 $f(t)$는 $t=0$일 때 최솟값 3을 가지므로 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 3이다.

답 3

17 방정식과 부등식에의 활용

Lecture 28 방정식과 부등식에의 활용 88쪽

1-1 (1) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$이라 하면 $x>0$이고

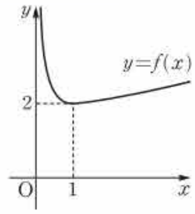
$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$

이때 $\lim_{x\to0+} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



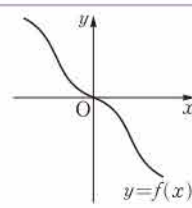
따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않으므로 주어진 방정식은 실근을 갖지 않는다.

(2) $f(x)=\sin x-2x$라 하면

$f'(x)=\cos x-2$

$f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 감소한다. 이때 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$-1\le\cos x\le1$이므로
$-3\le\cos x-2\le-1$
$\therefore f'(x)<0$



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

(3) $f(x)=\sqrt{x+1}-x$라 하면 $x\ge-1$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-1=\frac{1-2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$$

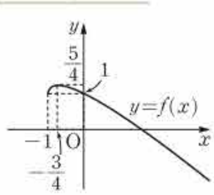
$f'(x)=0$에서 $\quad 1-2\sqrt{x+1}=0$

$\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}, \quad x+1=\frac{1}{4}$

$\therefore x=-\frac{3}{4}$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

(4) $f(x)=e^x-x-2$라 하면

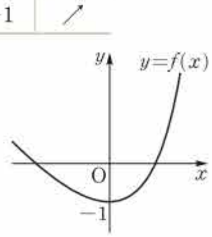
$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

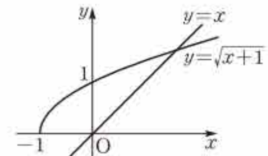


따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

답 (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 2

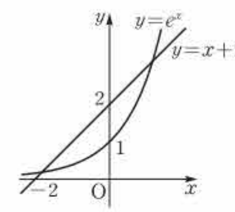
다른 풀이 (3) 방정식 $\sqrt{x+1}-x=0$, 즉 $\sqrt{x+1}=x$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=\sqrt{x+1}$과 직선 $y=x$의 교점의 개수와 같다.

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.



(4) 방정식 $e^x-x-2=0$, 즉 $e^x=x+2$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=e^x$과 직선 $y=x+2$의 교점의 개수와 같다.

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.



방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

1-2 $f(x)=x-\ln x$라 하면 $x>0$이고

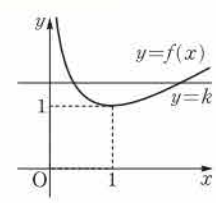
$f'(x)=1-\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad 1-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to0+} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 방정식 $x-\ln x=k$, 즉 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는

(i) $k<1$이면 $\quad$ 0

(ii) $k=1$이면 $\quad$ 1

(iii) $k>1$이면 $\quad$ 2

답 풀이 참조

2-1 답 (가) e^x-1 (나) 0 (다) 0

2-2 $f(x)=x+1-\ln(x+1)$이라 하면 $x>-1$이고

$f'(x)=1-\frac{1}{x+1}$

$x>0$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

$f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$이고 $x>0$이므로 $f'(x)>0$

그런데 $f(0)=1$이므로

$f(x)>0$, 즉 $x+1-\ln(x+1)>0$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $\ln(x+1)<x+1$이 성립한다.

답 풀이 참조

기본+표준 유형 Q+Q

89쪽

01 방정식 $\dfrac{1}{x^2-2x+2}=k$가 오직 한 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$과 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다.

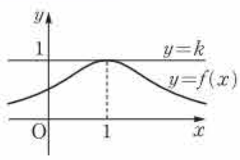
$f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$이라 하면

$$f'(x)=-\frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2}=-\frac{2(x-1)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나려면

$k=1$ 답 1

02 $x+2\cos x+k=0$에서 $\quad x+2\cos x=-k$

$f(x)=x+2\cos x$라 하면

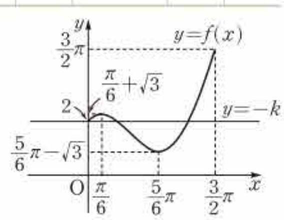
$f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi\ \left(\because\ 0\le x\le\dfrac{3}{2}\pi\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\pi$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

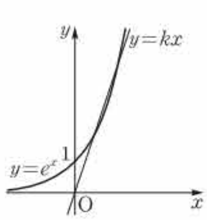


$$2\le-k<\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$$

$$\therefore\ -\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}<k\le-2$$

답 $-\dfrac{\pi}{6}-\sqrt{3}<k\le-2$

03 방정식 $e^x=kx$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^x$과 직선 $y=kx$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



$f(x)=e^x$, $g(x)=kx$라 하면

$f'(x)=e^x$, $g'(x)=k$

QBOX: 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=g(x)$의 기울기는 양수이면서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 기울기보다 커야 한다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때, 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad e^t=kt \quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad e^t=k \quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$e^t=e^t\cdot t$, $\quad e^t(t-1)=0$

$\therefore\ t=1\ (\because\ e^t>0)$

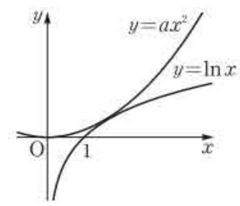
$t=1$을 ㉡에 대입하면 $\quad k=e$

즉 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\quad k>e$

따라서 k의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

04 $\ln x-ax^2=0$에서 $\quad \ln x=ax^2$

방정식 $\ln x-ax^2=0$이 적어도 한 개의 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=\ln x$, $y=ax^2$이 접하거나 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



$f(x)=\ln x$, $g(x)=ax^2$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=2ax$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 접할 때, 접점의 x좌표를 $t\ (t>0)$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad \ln t=at^2 \quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad \dfrac{1}{t}=2at$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2t^2} \quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad \ln t=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ t=\sqrt{e}$

$t=\sqrt{e}$를 ㉡에 대입하면 $\quad a=\dfrac{1}{2e}$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 한 점 이상에서 만나도록 하는 양수 a의 값의 범위는

QBOX: 이차함수 $y=kx^2$의 그래프는 $|k|$의 값이 작을수록 x축과 가깝다.

$0<a\le\dfrac{1}{2e}$ 답 $0<a\le\dfrac{1}{2e}$

05 $f(x)=x\ln x-2x$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-2=\ln x-1$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1 \quad \therefore\ x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-e$	$\nearrow$

즉 $x>0$에서 함수 $f(x)$는 $x=e$일 때 최솟값 $-e$를 가지므로 부등식 $f(x)\ge k$가 항상 성립하려면

$k\le-e$

따라서 k의 최댓값은 $-e$이다. 답 $-e$

06 $x+\frac{9}{x}+k\geq 0$에서

$x+\frac{9}{x}\geq -k$

$f(x)=x+\frac{9}{x}$라 하면

$$f'(x)=1-\frac{9}{x^2}=\frac{x^2-9}{x^2}=\frac{(x+3)(x-3)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=3\ (\because x>0)$

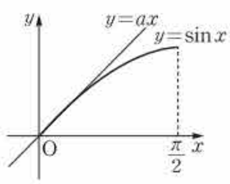
x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	6	↗

따라서 $x>0$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최솟값 6을 가지므로 부등식 $f(x)\geq -k$가 항상 성립하려면

$-k\leq 6 \qquad \therefore k\geq -6$

답 $k\geq -6$

07 $0<x<\frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\sin x\leq ax$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sin x$가 직선 $y=ax$보다 아래쪽에 있거나 접해야 한다.



$f(x)=\sin x$라 하면

$f'(x)=\cos x$

$y=ax$가 원점을 지나는 직선이고 $f'(0)=1$이므로

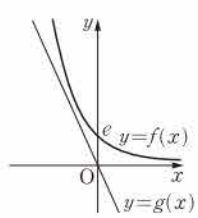
$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 주어진 부등식이 성립하려면

$a\geq 1$

따라서 a의 최솟값은 1이다.

답 ②

08 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있으려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(x)=e^{-x+1}$, $g(x)=mx$에서

$f'(x)=-e^{-x+1}$,

$g'(x)=m$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때, 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad e^{-t+1}=mt \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad -e^{-t+1}=m \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad e^{-t+1}=-e^{-t+1}\cdot t$

$\therefore t=-1$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면

$m=-e^2$

따라서 구하는 m의 값의 범위는

$-e^2<m\leq 0$

$m>0$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 한 점에서 만난다.

답 $-e^2<m\leq 0$

18 속도와 가속도

Lecture 29 속도와 가속도 90쪽

1-1 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하자.

(1) $v(t)=f'(t)=1-\frac{1}{(t+1)^2}$,

$a(t)=f''(t)=\frac{2}{(t+1)^3}$

$f'(t)=1-\frac{1}{(t+1)^2}$에서

$f''(t)=\frac{2(t+1)}{(t+1)^4}=\frac{2}{(t+1)^3}$

이므로 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v(2)=\frac{8}{9}$, $a(2)=\frac{2}{27}$

(2) $v(t)=f'(t)=\sin t$,

$a(t)=f''(t)=\cos t$

이므로 $t=\frac{\pi}{4}$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 (1) 속도: $\frac{8}{9}$, 가속도: $\frac{2}{27}$

(2) 속도: $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 가속도: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2-1 (1) $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=2t-1$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는 $\quad (2,\ 2t-1)$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 속도는 $\quad (2,\ 5)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=2$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $\quad (0,\ 2)$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는 $\quad (0,\ 2)$

(2) $\frac{dx}{dt}=1+e^t$, $\frac{dy}{dt}=3-e^t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는 $\quad (1+e^t,\ 3-e^t)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$(1+e,\ 3-e)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-e^t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $\quad (e^t,\ -e^t)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $\quad (e,\ -e)$

답 (1) 속도: $(2,\ 5)$, 가속도: $(0,\ 2)$

(2) 속도: $(1+e,\ 3-e)$, 가속도: $(e,\ -e)$

2-2 $\frac{dx}{dt}=-2\sin 2t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(-2\sin 2t,\ \cos t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 점 P의 속도는 $\left(-\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 속력은

$$\sqrt{(-\sqrt{3})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-4\cos 2t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(-4\cos 2t,\ -\sin t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 점 P의 가속도는 $\left(-2,\ -\frac{1}{2}\right)$이므로 가속도의 크기는

$\sqrt{(-2)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

답 속력: $\frac{\sqrt{15}}{2}$, 가속도의 크기: $\frac{\sqrt{17}}{2}$

기본+표준 유형 Q+Q

91쪽

01 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=-\frac{a}{2}\sin\frac{t}{2}$

$v(\pi)=4$이므로 $-\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{2}=4$

$-\frac{a}{2}=4 \qquad \therefore a=-8$

답 -8

02 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)$

$=2(t-1)e^t+(t-1)^2e^t$

$=(t^2-1)e^t$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$(t^2-1)e^t=0, \qquad t^2-1=0\ (\because e^t>0)$

$(t+1)(t-1)=0 \qquad \therefore t=1\ (\because t>0)$

따라서 $t=1$일 때 점 P가 운동 방향을 바꾼다.

답 ②

03 $\frac{dx}{dt}=1+\frac{3}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=3-\frac{1}{t^2}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$\left(1+\frac{3}{t^2},\ 3-\frac{1}{t^2}\right)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는 $(4,\ 2)$이므로 구하는 속력은

$\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

답 $2\sqrt{5}$

04 $\frac{dx}{dt}=6$, $\frac{dy}{dt}=6-4t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(6,\ 6-4t)$

점 P의 속력이 $2\sqrt{34}$이므로

$\sqrt{6^2+(6-4t)^2}=2\sqrt{34}, \qquad (6-4t)^2=100$

$6-4t=\pm 10 \qquad \therefore t=4\ (\because t>0)$

따라서 구하는 시각은 4이다.

답 4

05 $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-1$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(2,\ 3t^2-1)$

점 P의 속력이 $5\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{2^2+(3t^2-1)^2}=5\sqrt{5}, \qquad (3t^2-1)^2=121$

$3t^2-1=\pm 11, \qquad t^2=4\ (\because t^2>0)$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

한편 $\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=6t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(0,\ 6t)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $(0,\ 12)$이므로 구하는 가속도의 크기는

$\sqrt{0^2+12^2}=12$

답 ②

06 $\frac{dx}{dt}=4\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-2\sin t$에서

$\frac{d^2x}{dt^2}=-4\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-2\cos t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(-4\sin t,\ -2\cos t)$

$x=2$일 때 $4\sin t=2$에서 $\sin t=\frac{1}{2}$이므로

$t=\frac{\pi}{6}\ \left(\because 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$

Q BOX: 다음과 같이 y좌표를 이용하여 구할 수도 있다.
$y=\sqrt{3}$일 때
$2\cos t=\sqrt{3}$에서
$\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로
$t=\frac{\pi}{6}\ \left(\because 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 점 P의 가속도는 $(-2,\ -\sqrt{3})$이므로 구하는 가속도의 크기는

$\sqrt{(-2)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$

답 $\sqrt{7}$

중단원 마무리

92쪽

01 전략 함수 $f(x)$에 대하여 어떤 구간에서 $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하고, $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

풀이 $f(x)=x-3\cos x$라 하면

$f'(x)=1+3\sin x$

$f''(x)=3\cos x$

곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로

$3\cos x>0$, 즉 $\cos x>0$

$\therefore 0<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi\ (\because 0<x<2\pi)$

따라서 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록한 구간은 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$이다.

답 ①

02 전략 함수 $f(x)$에 대하여 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2\ln x$라 하면

$$f'(x)=x^2+\frac{2}{x}$$

$$f''(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x^3-1)}{x^2}$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1 \ (\because x^2+x+1>0)$

$x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x좌표는 1이다.

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=1^2+\frac{2}{1}=3$ 답 3

03 **전략** 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표가 (α, β)이면 $f(\alpha)=\beta$, $f''(\alpha)=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{2}{x^2+b}\ (b>0)$라 하면

$$f'(x)=\frac{-2\cdot 2x}{(x^2+b)^2}=\frac{-4x}{(x^2+b)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-4(x^2+b)^2-(-4x)\cdot 2(x^2+b)\cdot 2x}{(x^2+b)^4}$$

$$=\frac{-4(x^2+b)+16x^2}{(x^2+b)^3}$$

$$=\frac{12x^2-4b}{(x^2+b)^3}$$

점 $(2, a)$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로 $f''(2)=0$에서

$\frac{12\cdot 2^2-4b}{(2^2+b)^3}=0, \qquad 48-4b=0$

$\therefore b=12$

따라서 $f(x)=\frac{2}{x^2+12}$이므로

$a=f(2)=\frac{2}{2^2+12}=\frac{1}{8}$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{12}{\frac{1}{8}}=96$ 답 96

04 **전략** $y=f(x)$의 그래프를 그릴 때에는 $f'(x)=0$, $f''(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값을 경계로 나눈 구간에서 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 조사한다.

풀이 $f(x)=(2-x)e^x$에서

$f'(x)=-e^x+(2-x)e^x=(1-x)e^x$

$f''(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1\ (\because e^x>0)$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=0\ (\because e^x>0)$

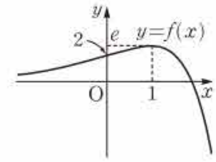
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	+	+	0	−
$f''(x)$	+	0	−	−	−
$f(x)$	⤴	2	⤻	e	⤵

Q BOX

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기 ➡ $f'(a)$

$\frac{125}{4}=31.25$이므로 $27<\frac{125}{4}<32$

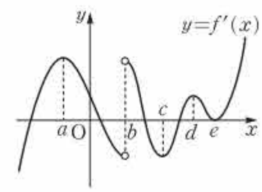
이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 ①

05 **전략** 함수 $f(x)$에 대하여 $f''(k)=0$이고 $x=k$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(k, f(k))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 a, b, c, d, e를 정하고 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.



x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f''(x)$	+	0	−		−	0	+	0	−	0	+

$x=a$, $x=c$, $x=d$, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 4이다.

답 4

06 **전략** 닫힌구간에서의 함수의 최대, 최소는 극값과 구간의 양 끝 점의 함숫값을 구하여 비교한다.

풀이 $f(x)=\frac{x^3}{x-2}$에서

$f'(x)=\frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2}=\frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$ ···· ❶

$f'(x)=0$에서 $\quad x=3\left(\because \frac{5}{2}\le x\le 4\right)$

x	$\frac{5}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$\frac{125}{4}$	↘	27	↗	32

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 32, $x=3$일 때 최솟값 27을 가지므로

$M=32$, $m=27$ ···· ❷

$\therefore M-m=5$ ···· ❸

답 5

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷	M, m의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	$M-m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 **전략** $f'(x)=0$, $f''(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값을 경계로 나눈 구간에서의 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 조사하여 극대, 극소가 되는 점과 변곡점을 구한다.

풀이 $f'(x)=0$에서

$x=a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=d$ 또는 $x=f$

$f''(x)=0$에서

$x=b$ 또는 $x=0$ 또는 $x=c$ 또는 $x=e$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	0	$\cdots$	c
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗	변곡점	↗	변곡점

x	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$	f	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	변곡점	↘	극소	↗

ㄱ. 구간 $[a, f]$에서 곡선 $y=f(x)$는 $x=b$, $x=0$, $x=c$, $x=e$에서 변곡점을 가지므로 변곡점은 4개이다.

ㄴ. 구간 $[a, e]$에서 $f(x)$가 극대가 되는 x는 d의 1개이다.

ㄷ. 구간 $[a, e]$에서 $f(x)$는 $x=d$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $f(d)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

08 전략 연속함수의 극값이 오직 하나 존재하고 극값이 극댓값이면 (극댓값) = (최댓값)임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{x-1}{e^{x+1}}$에서

$$f'(x)=\frac{e^{x+1}-(x-1)e^{x+1}}{(e^{x+1})^2}=\frac{2-x}{e^{x+1}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\dfrac{1}{e^3}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{e^3}$을 갖는다.

답 $\dfrac{1}{e^3}$

09 전략 $2^x+2^{-x}=t$로 놓고 주어진 함수식을 변형한다.

풀이 $f(x)$

$=2^{3x}+2^{-3x}-24(2^x+2^{-x})+21$

$=(2^x+2^{-x})^3-3(2^x+2^{-x})-24(2^x+2^{-x})+21$

$=(2^x+2^{-x})^3-27(2^x+2^{-x})+21$

에서 $2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

$\therefore t\ge 2$

주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3-27t+21$

$\therefore g'(t)=3t^2-27=3(t+3)(t-3)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=3$ ($\because t\ge 2$)

t	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$	-25	↘	-33	↗

따라서 함수 $g(t)$는 $t=3$일 때 최솟값 -33을 갖는다. 답 ②

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이 l은
$l=r\theta$

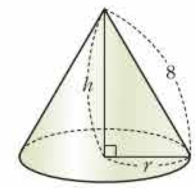
산술평균과 기하평균의 관계
$a>0$, $b>0$일 때,
$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

쌤 한마디

산술평균과 기하평균의 관계는 양수 조건이 주어지고 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제에서 자주 이용된다. 두 양수의 곱이 일정할 때 두 수의 합의 최솟값을 구하는 경우 또는 두 양수의 합이 일정할 때 두 수의 곱의 최댓값을 구하는 경우에 주로 이용되므로 잘 기억해 두고 활용하면 문제를 좀 더 빠르게 해결할 수 있다.

10 전략 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r라 하고 θ와 부피를 각각 r에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 잘라 낸 부채꼴로 원뿔을 만들었을 때, 밑면의 반지름의 길이를 $r\,(0<r<8)$라 하면



$8\theta=2\pi r$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi r}{4}$ ...... ㉠

원뿔의 높이를 h라 하면 $h=\sqrt{64-r^2}$이므로 원뿔의 부피를 $V(r)$라 하면

$$V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{64-r^2}$$

$$\therefore V'(r)=\frac{1}{3}\pi\left(2r\sqrt{64-r^2}+r^2\cdot\frac{-2r}{2\sqrt{64-r^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{2r(64-r^2)-r^3}{\sqrt{64-r^2}}$$

$$=\frac{\pi r(128-3r^2)}{3\sqrt{64-r^2}}$$

$V'(r)=0$에서 $\quad r^2=\dfrac{128}{3}$

$\therefore r=\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$ ($\because 0<r<8$)

r	0	$\cdots$	$\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	8
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(r)$는 $r=\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$\theta=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{8\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$$

답 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

11 전략 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 방정식 $e^{2x}+e^{-2x}=k$가 오직 한 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=e^{2x}+e^{-2x}$과 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다. ···· ❶

$f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$이라 하면

$f'(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}$

$f'(x)=0$에서

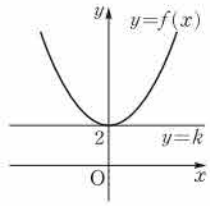
$e^{2x}=e^{-2x}, \qquad 2x=-2x$

$\therefore x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❷



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나려면

$k=2$ ⋯ ❸

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	곡선 $y=e^{2x}+e^{-2x}$과 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 함을 알 수 있다.	20 %
❷	$y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	50 %
❸	k의 값을 구할 수 있다.	30 %

12 **전략** 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2이어야 함을 이용한다.

풀이 $\sin x - x\cos x - k=0$에서

$\sin x - x\cos x = k$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 곡선 $y=\sin x - x\cos x$와 직선 $y=k$는 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\sin x - x\cos x$라 하면

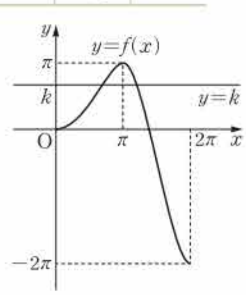
$f'(x)=\cos x-(\cos x - x\sin x)=x\sin x$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	π	↘	-2π

닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$0\le k<\pi$

따라서 정수 k는 $0, 1, 2, 3$이므로 구하는 합은

$0+1+2+3=6$

답 ⑤

13 **전략** 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

풀이 $f(x)=x^4-2x^3-kx^2+1$이라 하면

$f'(x)=4x^3-6x^2-2kx$

$f''(x)=12x^2-12x-2k$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

$f''(x)=0$에서

$12x^2-12x-2k=0$, 즉 $6x^2-6x-k=0$

이차방정식 $6x^2-6x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9+6k\le 0$

$\therefore k\le -\frac{3}{2}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $-\frac{3}{2}$이다. 답 $-\frac{3}{2}$

QBOX

$k=-\frac{3}{2}$일 때,
$f''(x)$
$=12x^2-12x+3$
$=3(2x-1)^2$
$f''(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$
$x=\frac{1}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 존재하지 않는다.

14 **전략** 모든 실수 x에서 부등식 $f(x)\ge a$가 성립함을 보이려면 ($f(x)$의 최솟값)$\ge a$임을 보인다.

풀이 $2x-1\ge ke^{x^2}$에서

$(2x-1)e^{-x^2}\ge k$ ⋯⋯ ㉠

$f(x)=(2x-1)e^{-x^2}$이라 하면

$f'(x)=2e^{-x^2}-2x(2x-1)e^{-x^2}$

$=(\boxed{-4x^2+2x+2})\times e^{-x^2}$

$=-2(2x+1)(x-1)e^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서

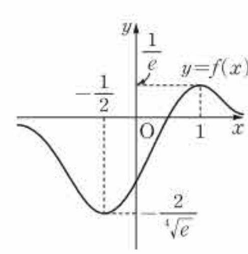
$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ $(\because e^{-x^2}>0)$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$	↗	$\frac{1}{e}$	↘

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하면 함수 $f(x)$의 극솟값은 $\boxed{-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}}$이다.

또한 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $f(x)$의 최솟값은 $\boxed{-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}}$이고 ㉠이 성립하려면 $k\le -\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$이어야 한다.

따라서 $2x-1\ge ke^{x^2}$을 성립시키는 실수 k의 최댓값은 $\boxed{-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}}$이다.

$g(x)=-4x^2+2x+2$, $p=-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$이므로

$g(2)\times p=-10\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\right)=\frac{20}{\sqrt[4]{e}}$

답 ③

15 전략 주어진 부등식의 각 변을 x로 나누어 부등식을 변형한 후 함수 $f(x)$에 대하여 $p \le f(x) \le q$가 성립하기 위한 조건을 찾는다.

풀이 $1 \le x \le 16$이므로 $ax \le \ln x \le bx$에서

$$a \le \frac{\ln x}{x} \le b$$

$x>0$이므로 부등식의 각 변을 x로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$

$\therefore x=e$

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	16
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{\ln 16}{16}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$일 때 최댓값 $\frac{1}{e}$, $x=1$일 때 최솟값 0을 가지므로 $1 \le x \le 16$인 모든 실수 x에 대하여

$$0 \le \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e}$$

즉 $a \le 0$, $b \ge \frac{1}{e}$이므로 $b-a$의 최솟값은

$(b-a$의 최솟값$)$
$=(b$의 최솟값$)$
$-(a$의 최댓값$)$

$$\frac{1}{e}-0=\frac{1}{e}$$

답 $\frac{1}{e}$

16 전략 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 v와 가속도 a는 각각 $f'(t)$, $f''(t)$이다.

풀이 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=1+\frac{2t}{t^2+6}$$

$$a(t)=f''(t)=\frac{2(t^2+6)-2t\cdot 2t}{(t^2+6)^2}=\frac{-2(t^2-6)}{(t^2+6)^2}$$

가속도가 0이 되는 시각은 $\frac{-2(t^2-6)}{(t^2+6)^2}=0$에서

$t^2-6=0$ $(\because (t^2+6)^2>0)$

$(t+\sqrt{6})(t-\sqrt{6})=0$

$\therefore t=\sqrt{6}$ $(\because t>0)$

답 ③

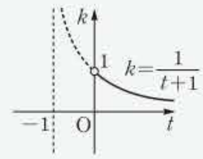
17 전략 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$이다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{t+1}}$, $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t+1}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)^2+\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{t+1}+1}$$

Q BOX



이때 $t>0$이므로 $\frac{1}{t+1}=k$ $(0<k<1)$라 하면

$$\sqrt{k^2-k+1}=\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

따라서 점 P의 속력은 $k=\frac{1}{2}$일 때 최솟값

$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 갖는다.

답 ⑤

18 전략 점 P의 위치가 $\left(7, \frac{3}{2}\right)$일 때의 시각을 구하여 이 시각에서의 가속도의 크기를 구한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=t-\frac{1}{t}$에서

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=1+\frac{1}{t^2}$$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$$\left(0, 1+\frac{1}{t^2}\right)$$

$x=7$일 때 $2t+5=7$에서 $t=1$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $(0, 2)$이므로 구하는 가속도의 크기는

$$\sqrt{0^2+2^2}=2$$

답 2

08 여러 가지 적분법

19 여러 가지 함수의 부정적분

Lecture 30 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분 98쪽

1-1 (1) $\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

(2) $\int \frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$

$=-x^{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$

(3) $\int \frac{6}{x}dx=6\int \frac{1}{x}dx=6\ln|x|+C$

(4) $\int \sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+C$

$=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$

답 (1) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$ (2) $-\frac{1}{x}+C$

(3) $6\ln|x|+C$ (4) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$

1-2 (1) $\int\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\int\left(\frac{4}{x}+x^{-4}\right)dx$

$=4\ln|x|-\frac{1}{3}x^{-3}+C$

$=4\ln|x|-\frac{1}{3x^3}+C$

(2) $\int\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(2x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt{x}+C$

(3) $\int\sqrt{x}(x+2)^2dx=\int\sqrt{x}(x^2+4x+4)dx$

$=\int(x^{\frac{5}{2}}+4x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}})dx$

$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{8}{3}x\sqrt{x}+C$

(4) $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\int(x^2-x^{-2})\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^{-1}+C$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+C$

답 (1) $4\ln|x|-\frac{1}{3x^3}+C$

(2) $\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt{x}+C$

(3) $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{8}{3}x\sqrt{x}+C$

(4) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+C$

QBOX

$x^{\frac{5}{2}}=x^{2+\frac{1}{2}}=x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}$
$=x^2\sqrt{x}$

$\int kf(x)dx$
$=k\int f(x)dx$
(단, k는 0이 아닌 실수)

피적분함수가 곱의 꼴로 주어진 경우에는 피적분함수의 식을 전개한 후 적분한다.

Lecture 31 지수함수와 삼각함수의 부정적분 99쪽

1-1 (1) $\int 3e^x dx=3\int e^x dx=3e^x+C$

(2) $\int e^{x+2}dx=\int e^x\cdot e^2dx=e^2\int e^xdx$

$=e^2\cdot e^x+C=e^{x+2}+C$

(3) $\int\left(\frac{1}{2}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}+C$

$=-\frac{1}{2^x\ln 2}+C$

(4) $\int 5^{x-1}dx=\int 5^x\cdot\frac{1}{5}dx=\frac{1}{5}\int 5^x dx$

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+C=\frac{5^x}{5\ln 5}+C$

(5) $\int\frac{e^{2x}-4}{e^x-2}dx=\int\frac{(e^x-2)(e^x+2)}{e^x-2}dx$

$=\int(e^x+2)dx$

$=e^x+2x+C$

(6) $\int(2^x+1)^2dx=\int(4^x+2\cdot 2^x+1)dx$

$=\int 4^xdx+2\int 2^xdx+\int 1\,dx$

$=\frac{4^x}{\ln 4}+2\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

$=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$

답 (1) $3e^x+C$ (2) $e^{x+2}+C$

(3) $-\frac{1}{2^x\ln 2}+C$ (4) $\frac{5^x}{5\ln 5}+C$

(5) e^x+2x+C (6) $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$

2-1 (1) $\int(\sin x-2\cos x)dx$

$=\int\sin x\,dx-2\int\cos x\,dx$

$=-\cos x-2\sin x+C$

(2) $\int(3\sec^2x+\csc^2x)dx$

$=3\int\sec^2x\,dx+\int\csc^2x\,dx$

$=3\tan x-\cot x+C$

(3) $\int\frac{1}{\sin x\tan x}dx=\int\csc x\cot x\,dx$

$=-\csc x+C$

(4) $\int\left(\frac{\tan x}{\cos x}-\sin x\right)dx$

$=\int\sec x\tan x\,dx-\int\sin x\,dx$

$=\sec x+\cos x+C$

(5) $\int \csc x(\cot x-\csc x)dx$

$=\int(\csc x\cot x-\csc^2 x)\,dx$

$=\int \csc x\cot x\,dx-\int \csc^2 x\,dx$

$=-\csc x+\cot x+C$

(6) $\int \tan^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)dx$

$=\tan x-x+C$

답 (1) $-\cos x-2\sin x+C$ (2) $3\tan x-\cot x+C$
(3) $-\csc x+C$ (4) $\sec x+\cos x+C$
(5) $-\csc x+\cot x+C$ (6) $\tan x-x+C$

삼각함수 사이의 관계
① $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
② $\tan^2 x+1=\sec^2 x$,
$1+\cot^2 x=\csc^2 x$

기본+표준 유형 Q+Q

100쪽

01 $f(x)=\int\left(4-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)dx=\int\left(4-\frac{1}{x}+5x^{-2}\right)dx$

$=4x-\ln|x|-5x^{-1}+C$

$=4x-\ln|x|-\frac{5}{x}+C$

$f(1)=-1$이므로 $4-5+C=-1$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=4x-\ln|x|-\frac{5}{x}$이므로

$f(e)=4e-\frac{5}{e}-1$ 답 ②

02 $F(x)=\int(x\sqrt{x}-3)dx=\int(x^{\frac{3}{2}}-3)dx$

$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-3x+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-3x+C$

$\therefore F(1)-F(0)=\left(-\frac{13}{5}+C\right)-(0+C)$

$=-\frac{13}{5}$ 답 $-\frac{13}{5}$

03 $\int(3^x-2^x)^2dx=\int(3^{2x}-2\cdot3^x\cdot2^x+2^{2x})dx$

$=\int(9^x-2\cdot6^x+4^x)dx$

$=\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{2\cdot6^x}{\ln 6}+\frac{4^x}{\ln 4}+C$

답 ④

04 $f(x)=\int\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1}dx$

$=\int\frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^{2x}+e^x+1}dx$

$=\int(e^x-1)dx$

$=e^x-x+C$

$f(0)=2$이므로

$1+C=2$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=e^x-x+1$이므로

$f(1)=e$ 답 ③

05 $f(x)=\int(2-3\tan^2 x)dx$

$=\int\{2-3(\sec^2 x-1)\}dx$

$=\int(5-3\sec^2 x)dx=5x-3\tan x+C$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{4}\pi$이므로

$\frac{5}{4}\pi-3+C=\frac{5}{4}\pi$ $\therefore C=3$

$\therefore f(x)=5x-3\tan x+3$

답 $f(x)=5x-3\tan x+3$

06 $f(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$

$=\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$

$=1+\sin x$

$\therefore F(x)=\int f(x)dx=\int(1+\sin x)dx$

$=x-\cos x+C$

$F(0)=5$이므로 $-1+C=5$ $\therefore C=6$

따라서 $F(x)=x-\cos x+6$이므로

$F(\pi)=\pi-(-1)+6=\pi+7$ 답 $\pi+7$

쌤 한마디

배각의 공식
① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
③ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

20 치환적분법

Lecture 32 치환적분법

101쪽

1-1 답 (가) $\frac{t+1}{2}$ (나) $\frac{1}{2}$ (다) $\frac{1}{12}$

1-2 (1) $x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$, $\frac{dx}{dt}=1$이므로

$\int x\sqrt{x+1}\,dx$

$=\int(t-1)\sqrt{t}\,dt=\int(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}})dt$

$=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}-\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$=\frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C$

치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한 후에는 그 결과를 처음의 변수로 바꾸어 나타낸다.

(2) $4x-3=t$로 놓으면 $x=\frac{t+3}{4}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4}$이므로

$\int e^{4x-3}dx=\int e^t\cdot\frac{1}{4}dt$

$=\frac{1}{4}e^t+C=\frac{1}{4}e^{4x-3}+C$

답 (1) $\frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C$
(2) $\frac{1}{4}e^{4x-3}+C$

2-1 답 (가) $2x-1$ (나) x^2-x+2

2-2 (1) $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$에서

$(x^3+1)'=3x^2$이므로

$$\int \frac{3x^2}{(x+1)(x^2-x+1)}dx$$
$$=\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx=\int \frac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx$$
$$=\ln|x^3+1|+C$$

Q BOX

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ 꼴의 부정적분

➡ $\ln|f(x)|+C$

(2) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $(\cos x)'=-\sin x$이므로

$$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=-\ln|\cos x|+C$$

답 (1) $\ln|x^3+1|+C$ (2) $-\ln|\cos x|+C$

Lecture 33 유리함수의 부정적분

Ⓛ 102쪽

1-1 (1) $\frac{x+2}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$이므로

$$\int \frac{x+2}{x+1}dx=\int\left(1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=x+\ln|x+1|+C$$

(2) $\frac{3x-1}{x-1}=3+\frac{2}{x-1}$이므로

$$\frac{3x-1}{x-1}=\frac{3(x-1)+2}{x-1}=3+\frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{3x-1}{x-1}dx=\int\left(3+\frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$=3x+2\ln|x-1|+C$$

답 (1) $x+\ln|x+1|+C$
(2) $3x+2\ln|x-1|+C$

1-2 (1) $\frac{x^2-8}{x+3}=x-3+\frac{1}{x+3}$이므로

$$\begin{array}{r} x-3 \\ x+3\overline{)\,x^2\qquad\;\; -8} \\ \underline{x^2+3x\qquad} \\ -3x-8 \\ \underline{-3x-9} \\ 1 \end{array}$$

$$\int \frac{x^2-8}{x+3}dx=\int\left(x-3+\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-3x+\ln|x+3|+C$$

(2) $\frac{x^2+3x+1}{x+2}=x+1-\frac{1}{x+2}$이므로

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x+2\overline{)\,x^2+3x+1} \\ \underline{x^2+2x\quad} \\ x+1 \\ \underline{x+2} \\ -1 \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+3x+1}{x+2}dx=\int\left(x+1-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+x-\ln|x+2|+C$$

답 (1) $\frac{1}{2}x^2-3x+\ln|x+3|+C$
(2) $\frac{1}{2}x^2+x-\ln|x+2|+C$

2-1 (1) $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$이므로

$$\int \frac{1}{x(x+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\ln|x|-\ln|x+1|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$$

(2) $\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$이므로

$$\int \frac{4}{x^2-4}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\ln|x-2|-\ln|x+2|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$$

답 (1) $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$ (2) $\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

2-2 (1) $\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}=\frac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$이므로

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$$

따라서 $a+b=3$, $2a+b=5$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

(2) $$\int \frac{3x+5}{x^2+3x+2}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=2\ln|x+1|+\ln|x+2|+C$$
$$=\ln|(x+1)^2(x+2)|+C$$

답 (1) $a=2$, $b=1$ (2) $\ln|(x+1)^2(x+2)|+C$

기본+표준 유형 Q+Q

Ⓛ 103쪽

01 $x^2+5x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+5$이므로

$\frac{dt}{dx}=2x+5$에서
$(2x+5)dx=dt$

$$\int(2x+5)(x^2+5x+1)^3dx$$
$$=\int t^3dt=\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=\frac{1}{4}(x^2+5x+1)^4+C$$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=4$이므로

$ab=1$ 답 ③

02 $mx-3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=m$이므로

$$f(x)=\int(mx-3)^5dx=\int t^5\cdot\frac{1}{m}dt$$
$$=\frac{1}{6m}t^6+C=\frac{1}{6m}(mx-3)^6+C$$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 $6\sqrt{6}$이고 $m>0$이므로

$\frac{1}{6m}\cdot m^6=6\sqrt{6}$, $m^5=36\sqrt{6}=6^{\frac{5}{2}}$

$\therefore m=(6^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{5}}=\sqrt{6}$ 답 $\sqrt{6}$

03 $4x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=4$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{\sqrt{4x+1}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{4}dt$$
$$=\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{t}+C=\frac{1}{2}\sqrt{4x+1}+C$$

$f(0)=2$이므로 $\quad \frac{1}{2}+C=2 \quad \therefore C=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4x+1}+\frac{3}{2}$이므로

$f(2)=3$ 답 3

04 $x^2-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-1$이므로

$$\int(2x-1)\sqrt{x^2-x}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}(x^2-x)\sqrt{x^2-x}+C$$

$\therefore a=\frac{2}{3}$ 답 ②

05 $f'(x)=\frac{5}{8}e^x(e^x+1)^4$이고 $e^x+1=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\frac{5}{8}\int e^x(e^x+1)^4dx$$
$$=\frac{5}{8}\int t^4dt$$
$$=\frac{1}{8}t^5+C=\frac{1}{8}(e^x+1)^5+C$$

$f(0)=5$이므로 $\quad 4+C=5 \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{8}(e^x+1)^5+1$이므로

$f(\ln 3)=\frac{1}{8}(3+1)^5+1=129$ 답 ④

06 $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$f(x)=\int e^{\sin x}\cos x\,dx=\int e^t dt$$
$$=e^t+C=e^{\sin x}+C$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$이므로

$e+C=e \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=e^{\sin x}$이므로

$f(\pi)=1$ 답 1

07 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int t^2dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}(\ln x)^3+C$$

$f(e)=1$이므로

$\frac{1}{3}+C=1 \quad \therefore C=\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(\ln x)^3+\frac{2}{3}$이므로

$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

Q BOX

① $\int\sin ax\,dx$
$=-\frac{1}{a}\cos ax+C$

② $\int\cos ax\,dx$
$=\frac{1}{a}\sin ax+C$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 5)$를 지난다.

08 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{\ln 5x+2}{x}dx$

$\ln 5x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{\ln 5x+2}{x}dx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\ln 5x+2)^2+C$$

$f\left(\frac{1}{5}\right)=2$이므로 $\quad \frac{1}{2}\cdot 2^2+C=2 \quad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(\ln 5x+2)^2$ 답 ②

09 $\int(\cos 2x-2)dx=\frac{1}{2}\sin 2x-2x+C$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-2$이므로 $\quad ab=-1$ 답 -1

10 $f(x)=\int(\sin x+\cos x)^2dx$

$$=\int(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x)dx$$
$$=\int(1+\sin 2x)dx$$
$$=x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

$f(0)=-\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{1}{2}+C=-\frac{1}{2} \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=x-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$f(\pi)=\pi-\frac{1}{2}$ 답 ②

11 $\int\cos^3 x\,dx=\int\cos^2 x\cdot\cos x\,dx$

$$=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int\cos^3 x\,dx=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$
$$=\int(1-t^2)dt=t-\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

따라서 $a=-\frac{1}{3}$, $b=1$이므로

$a+b=\frac{2}{3}$ 답 ⑤

쌤 한마디

① 피적분함수가 $f(\sin x)\cos x$ 꼴인 경우

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx=\int f(t)dt$$

② 피적분함수가 $f(\cos x)\sin x$ 꼴인 경우

$\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx=\int f(t)\cdot(-1)dt$$

12 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int \frac{\sin(\ln x)}{2x}\,dx=\int \sin t\cdot\frac{1}{2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}(-\cos t)+C=-\frac{1}{2}\cos(\ln x)+C$$

$f(1)=-\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad -\dfrac{1}{2}+C=-\dfrac{1}{2} \qquad \therefore\ C=0$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(\ln x)$이므로

$f(\sqrt{e^{\pi}})=0$ 답 0

$$f(\sqrt{e^{\pi}})=-\frac{1}{2}\cos(\ln\sqrt{e^{\pi}})=-\frac{1}{2}\cos(\ln e^{\frac{\pi}{2}})=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}=0$$

13 $(x^3+2x+1)'=3x^2+2$이므로

$$f(x)=\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}\,dx=\int \frac{(x^3+2x+1)'}{x^3+2x+1}\,dx$$
$$=\ln|x^3+2x+1|+C$$

$f(0)=5$이므로 $\quad C=5$

$\therefore\ f(x)=\ln|x^3+2x+1|+5$

답 $f(x)=\ln|x^3+2x+1|+5$

14 $(1+\cos x)'=-\sin x$이므로

$$f(x)=\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx=-\int \frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}\,dx$$
$$=-\ln(1+\cos x)+C\ (\because\ 1+\cos x>0)$$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$이므로 $\quad C=3$

따라서 $f(x)=-\ln(1+\cos x)+3$이므로

$f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\ln 2+3$ 답 ⑤

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+3=-\ln\frac{1}{2}+3=\ln 2+3$$

15 $f'(x)=\dfrac{x-2}{x+3}=1-\dfrac{5}{x+3}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{x-2}{x+3}\,dx$$
$$=\int\left(1-\frac{5}{x+3}\right)dx=x-5\ln|x+3|+C$$

$f(-2)=2$이므로 $\quad C=4$

$\therefore\ f(x)=x-5\ln|x+3|+4$ 답 ④

$$\frac{x-2}{x+3}=\frac{x+3-5}{x+3}=1-\frac{5}{x+3}$$

$-2-5\ln 1+C=2$이므로

$-2+C=2$

$\therefore\ C=4$

16 $f'(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x+1}=2x-3+\dfrac{2}{x+1}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{2x^2-x-1}{x+1}\,dx$$
$$=\int\left(2x-3+\frac{2}{x+1}\right)dx$$
$$=x^2-3x+2\ln|x+1|+C$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$f(0)=1$에서

$C=1$

따라서 $f(x)=x^2-3x+2\ln|x+1|+1$이므로

$f(1)=2\ln 2-1$ 답 $2\ln 2-1$

$$\begin{array}{r} 2x-3 \\ x+1\,\big)\,\overline{2x^2-x-1} \\ \underline{2x^2+2x} \\ -3x-1 \\ \underline{-3x-3} \\ 2 \end{array}$$

17 $\dfrac{6}{x^2-9}=\dfrac{6}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}$이므로

$$f(x)=\int \frac{6}{x^2-9}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=\ln|x-3|-\ln|x+3|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$$

$f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|$이므로

$f(5)=\ln\dfrac{1}{4}=-2\ln 2$ 답 ①

18 $\dfrac{4x-1}{x^2+x-2}=\dfrac{4x-1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+2}$로 놓으면

$$\frac{4x-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)(x+2)}$$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a+b=4,\ 2a-b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=3$

$$\therefore\ \int \frac{4x-1}{x^2+x-2}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx$$
$$=\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C$$

답 ④

21 부분적분법

Lecture 34 부분적분법 106쪽

1-1 답 $\sin x,\ -\cos x,\ \cos x,\ -\cos x,$
$-x\cos x+\sin x$

1-2 (1) $f(x)=x,\ g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=e^x$

$$\therefore\ \int xe^x\,dx=xe^x-\int 1\cdot e^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx$$
$$=xe^x-e^x+C$$

(2) $f(x)=\ln x,\ g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=x$

$$\therefore\ \int \ln x\,dx=(\ln x)\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$=x\ln x-\int 1\,dx$$
$$=x\ln x-x+C$$

답 (1) xe^x-e^x+C (2) $x\ln x-x+C$

쌤 한마디

부분적분법을 이용할 때에는 미분하여 간단해지는 것을 $f(x)$로, 적분하기 쉬운 것을 $g'(x)$로 놓는다. 이때 **1-2** (2)번과 같이 $\ln h(x)$ 꼴을 적분할 때에는 $\ln h(x)$에 상수 1이 곱해졌다고 생각하여 로그함수인 $\ln h(x)$를 $f(x)$로, 다항함수인 1을 $g'(x)$로 놓는다.

2-1 $f(x)=x^2$, $g'(x)=\boxed{\cos x}$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=\boxed{\sin x}$

이므로

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2\times\boxed{\sin x}-\int 2x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int 2x\sin x\,dx$에서 $u(x)=2x$, $v'(x)=\boxed{\sin x}$로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=\boxed{-\cos x}$

이므로

$$\begin{aligned}&\int 2x\sin x\,dx\\&=-2x\cos x-\int 2\cdot(-\cos x)\,dx\\&=-2x\cos x+\int 2\cos x\,dx\\&=-2x\cos x+2\sin x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}&\int x^2\cos x\,dx\\&=x^2\sin x-(-2x\cos x+2\sin x+C_1)\\&=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C\\&=\boxed{(x^2-2)\sin x+2x\cos x}+C\end{aligned}$$

답 $\cos x$, $\sin x$, $\sin x$, $\sin x$, $-\cos x$, $(x^2-2)\sin x+2x\cos x$

기본+표준 유형 Q+Q

107쪽

01 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=\int x\ln x\,dx\\&=(\ln x)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\right)-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2dx\\&=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x\,dx\\&=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C\end{aligned}$$

$f(1)=-\frac{1}{4}$이므로 $-\frac{1}{4}+C=-\frac{1}{4}$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$이므로

$f(e)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2=\frac{1}{4}e^2$ 답 ②

02 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

$$\begin{aligned}\therefore &\int x\cos 2x\,dx\\&=x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\int 1\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,dx\\&=\frac{1}{2}x\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x\,dx\\&=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$이므로

$ab=\frac{1}{8}$ 답 ②

Q BOX

(지수함수)×(삼각함수) 꼴의 부정적분

➡ 같은 꼴이 나타날 때까지 부분적분법을 반복한다.

$\int\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$

03 $f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$

$$\begin{aligned}\therefore &\int e^x\sin x\,dx\\&=\sin x\cdot e^x-\int\cos x\cdot e^x\,dx\\&=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$\int e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$

$$\begin{aligned}\therefore &\int e^x\cos x\,dx\\&=\cos x\cdot e^x-\int(-\sin x)\cdot e^x dx\\&=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\left(e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx\right)$$

$$2\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-e^x\cos x$$

$$\therefore \int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$

답 $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

04 $h(x)=(\ln x)^2$, $k'(x)=1$로 놓으면

$h'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $k(x)=x$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=\int(\ln x)^2dx\\&=x(\ln x)^2-\int\frac{2\ln x}{x}\cdot x\,dx\\&=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$\int\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$$\begin{aligned}\therefore \int\ln x\,dx&=x\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx\\&=x\ln x-\int 1\,dx\\&=x\ln x-x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x)&=x(\ln x)^2-2(x\ln x-x+C_1)\\&=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C\end{aligned}$$

$f(1)=1$이므로

$2+C=1$ $\therefore C=-1$

$\therefore f(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x-1$

답 $f(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x-1$

중단원 마무리 108쪽

01 전략 $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

$f(1)=10$이므로 $C=10$

따라서 $f(x)=\ln|x|+10$이므로

$$f(e^3)=\ln e^3+10=3+10=13$$

답 13

02 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $\int \frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=-x^{-1}+C_1=-\frac{1}{x}+C_1$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}+C_1 & (x<-1)\\ x^3+x+C_2 & (x>-1)\end{cases}$$

$f(-2)=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{1}{2}+C_1=\frac{1}{2}$$

$\therefore C_1=0$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$이므로

$$\lim_{x\to-1+}(x^3+x+C_2)=\lim_{x\to-1-}\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$-1-1+C_2=1$$

$\therefore C_2=3$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x} & (x\le-1)\\ x^3+x+3 & (x\ge-1)\end{cases}$이므로

$$f(0)=3$$

답 ③

03 전략 피적분함수가 지수함수를 포함한 경우에는 지수법칙을 이용하여 피적분함수를 적분하기 쉬운 꼴로 변형한다.

풀이 $f'(x)=(e^x-e^{-x})^2=e^{2x}+e^{-2x}-2$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(e^{2x}+e^{-2x}-2)dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}-2x+C$$

$f(0)=0$이므로 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+C=0$

$\therefore C=0$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}-2x$$

답 ①

04 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$임을 이용한다.

Q BOX

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각 $x\ge a$, $x<a$인 모든 실수 x에서 연속일 때, 함수

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & (x\ge a)\\ g(x) & (x<a)\end{cases}$$

가 모든 실수 x에서 연속이려면

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}g(x)=f(a)$$

$x=-2$일 때, $-2<-1$이므로

$$f(x)=-\frac{1}{x}+C_1$$

$x=0$일 때, $0>-1$이므로

$$f(x)=x^3+x+3$$

풀이 $f'(x)=\frac{1}{2}\sin x\cot x$

$$=\frac{1}{2}\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{2}\cos x$$

이므로 $f(x)=\int\frac{1}{2}\cos x\,dx=\frac{1}{2}\sin x+C$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$f(0)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+1$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

답 ④

05 전략 $\frac{1}{\cos x}=\sec x$, $\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$임을 이용하여 피적분함수를 적분하기 쉬운 꼴로 변형한다.

풀이 $\int\frac{1+2\sin x}{\cos^2 x}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+2\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$=\int(\sec^2 x+2\sec x\tan x)dx$$

$$=\tan x+2\sec x+C$$

따라서 $p=1$, $q=2$이므로 $p+q=3$

답 ⑤

06 전략 $x^2-x-2=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $x^2-x-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-1$이므로

$$f(x)=\int(2x-1)(x^2-x-2)^5dx$$

$$=\int t^5dt=\frac{1}{6}t^6+C$$

$$=\frac{1}{6}(x^2-x-2)^6+C \quad \cdots ❶$$

$f(2)=-\frac{2}{3}$이므로 $C=-\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{6}(x^2-x-2)^6-\frac{2}{3}$이므로 $\cdots$ ❷

$$f(1)=\frac{1}{6}\cdot(-2)^6-\frac{2}{3}=\frac{32}{3}-\frac{2}{3}=10 \quad \cdots ❸$$

답 10

단계	채점 기준	비율
❶	부정적분을 구할 수 있다.	50 %
❷	$f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸	$f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 전략 $14-3x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $14-3x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-3$이므로

$$f(x)=\int\sqrt[3]{14-3x}\,dx=\int\sqrt[3]{t}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}}dt=-\frac{1}{4}t^{\frac{4}{3}}+C$$

$$=-\frac{1}{4}t\sqrt[3]{t}+C$$

$$=-\frac{1}{4}(14-3x)\sqrt[3]{14-3x}+C$$

$f\left(\frac{14}{3}\right)=8$이므로 $\quad C=8$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}(14-3x)\sqrt[3]{14-3x}+8$이므로

$f(2)=-4+8=4$ 답 4

$f(2)=-\frac{1}{4}\cdot 8\cdot\sqrt[3]{8}+8$
$=-\frac{1}{4}\cdot 8\cdot 2+8$
$=-4+8$

08 전략 $x-1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}$에서

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}dx$

$x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이므로

$f(x)=\int\frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{3t-1}{\sqrt{t}}dt$

$x=t+1$이므로
$3x-4=3(t+1)-4$
$=3t-1$

$=\int(3t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})dt$

$=2t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C$

$=2t\sqrt{t}-2\sqrt{t}+C$

$=2(x-1)\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-1}+C$

$\therefore f(5)-f(2)$

$=(2\cdot 4\cdot 2-2\cdot 2+C)-(2-2+C)$

$=12$ 답 ⑤

09 전략 조건 (가)에서 도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 치환적분법을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+5h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+5h)-f(x)}{5h}\cdot 5=5f'(x)$

이므로

$5f'(x)=5^{x+1}\sqrt{5^x+3}\qquad\therefore f'(x)=5^x\sqrt{5^x+3}$

$5^x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=5^x\ln 5$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int 5^x\sqrt{5^x+3}\,dx$

$=\int\sqrt{t}\cdot\frac{1}{\ln 5}dt$

$=\frac{1}{\ln 5}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3\ln 5}t^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{2}{3\ln 5}t\sqrt{t}+C$

$=\frac{2}{3\ln 5}(5^x+3)\sqrt{5^x+3}+C$

조건 (나)에서 $f(0)=\frac{16}{3\ln 5}$이므로

$\frac{16}{3\ln 5}+C=\frac{16}{3\ln 5}$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3\ln 5}(5^x+3)\sqrt{5^x+3}$이므로

$\frac{f(1)}{16}=\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3\ln 5}\cdot 8\cdot 2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3\ln 5}$ 답 $\frac{2\sqrt{2}}{3\ln 5}$

10 전략 $\ln(x^2+1)=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $\frac{f'(x)}{2x}=\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{2x\ln(x^2+1)}{x^2+1}$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2x\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx$

$\ln(x^2+1)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{2x}{x^2+1}$이므로

$f(x)=\int\frac{2x\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx=\int t\,dt$

$=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\{\ln(x^2+1)\}^2+C$

$f(0)=\frac{1}{2}$이므로 $\quad C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\{\ln(x^2+1)\}^2+\frac{1}{2}$이므로

$f(\sqrt{e^2-1})=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

11 전략 $\ln x+4=t$로 놓고 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{3^{\ln x+4}}{x}dx$

$\ln x+4=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int\frac{3^{\ln x+4}}{x}dx=\int 3^t\,dt$

$=\frac{3^t}{\ln 3}+C=\frac{3^{\ln x+4}}{\ln 3}+C$

$f(1)=\frac{81}{\ln 3}$이므로

$\frac{81}{\ln 3}+C=\frac{81}{\ln 3}\qquad\therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{3^{\ln x+4}}{\ln 3}$

방정식 $f(x)=\frac{3}{\ln 3}$에서 $\quad\frac{3^{\ln x+4}}{\ln 3}=\frac{3}{\ln 3}$

$3^{\ln x+4}=3,\qquad\ln x+4=1$

$\ln x=-3\qquad\therefore x=\frac{1}{e^3}$ 답 ①

12 전략 $\int\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+C$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int 2\cos\frac{x}{2}dx$

$=4\sin\frac{x}{2}+C$

$f(0)=1$이므로 $\quad C=1$

따라서 $f(x)=4\sin\frac{x}{2}+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\frac{\pi}{6}+1=4\cdot\frac{1}{2}+1=3$ 답 ⑤

13 전략 $\tan x=t$로 놓고 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\tan x\sec^2 x\,dx$

$\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$이므로

$f(x)=\int\tan x\sec^2 x\,dx=\int t\,dt$

$=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\tan^2 x+C$ ··· ❶

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$이므로 $\frac{1}{2}+C=1$ $\therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+\frac{1}{2}$이므로 ··· ❷

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$ $\therefore a=2$ ··· ❸

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	부정적분을 구할 수 있다.	50 %
❷	$f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸	a의 값을 구할 수 있다.	20 %

14 전략 조건 (가)의 좌변은 $g(f(x))f'(x)$ 꼴이고, 우변은 $\frac{h'(x)}{h(x)}$ 꼴이므로 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 조건 (가)의 좌변에서 $f(x)=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int\{f(x)\}^2 f'(x)\,dx=\int t^2 dt=\frac{1}{3}t^3+C_1$$
$$=\frac{1}{3}\{f(x)\}^3+C_1 \quad \cdots ㉠$$

조건 (가)의 우변에서

$$\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$$
$$=\ln(x^2+1)+C_2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{1}{3}\{f(x)\}^3+C_1=\ln(x^2+1)+C_2$$
$$\therefore \{f(x)\}^3=3\ln(x^2+1)+C \quad \cdots\cdots ㉢$$

조건 (나)에서 $f(0)=0$이므로 $x=0$을 ㉢의 양변에 대입하면

$0=3\ln 1+C$ $\therefore C=0$

따라서 $\{f(x)\}^3=3\ln(x^2+1)$이므로

$\{f(1)\}^3=3\ln 2$

답 ②

다른 풀이 $\{f(x)\}^2 f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$에서

$$\int\{f(x)\}^2 f'(x)dx=\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

이때 $[\{f(x)\}^3]'=3\{f(x)\}^2 f'(x)$이므로

$$\{f(x)\}^3=3\int\{f(x)\}^2 f'(x)\,dx$$
$$=3\int\frac{2x}{x^2+1}dx=3\ln(x^2+1)+C$$

$f(0)=0$이므로 $0=3\ln 1+C$ $\therefore C=0$

$\therefore \{f(1)\}^3=3\ln 2$

15 전략 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$를 구한 후 분자의 차수와 분모의 차수를 비교하여 함수를 변형한 후 부정적분을 구한다.

풀이 $y=\frac{4-x}{2+x}$로 놓으면

$y(2+x)=4-x,$ $x(y+1)=4-2y$

$\therefore x=\frac{4-2y}{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{4-2x}{x+1}$

$\therefore g(x)=\frac{4-2x}{x+1}$

이때 $\frac{4-2x}{x+1}=-2+\frac{6}{x+1}$이므로

$$\int g(x)dx=\int\frac{4-2x}{x+1}dx=\int\left(-2+\frac{6}{x+1}\right)dx$$
$$=-2x+6\ln|x+1|+C$$

답 $-2x+6\ln|x+1|+C$

16 전략 $\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$임을 이용하여 피적분함수를 간단한 유리함수의 차로 나타낸 후 부정적분을 구한다.

풀이 $\frac{1}{x^2-25}=\frac{1}{(x-5)(x+5)}$
$=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+5}\right)$

이므로

$$\int\frac{1}{x^2-25}dx=\frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+5}\right)dx$$
$$=\frac{1}{10}(\ln|x-5|-\ln|x+5|)+C$$
$$=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C$$

$\therefore a=\frac{1}{10}$

답 ②

17 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=f(a)$임을 이용한다.

풀이 $\int\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$$\therefore \int\ln x\,dx=(\ln x)\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$=x\ln x-x+C_2$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2+3x+C_1 & (x<1)\\ x\ln x-x+C_2 & (x>1)\end{cases}$$

$f(e)=2$이므로 $e-e+C_2=2$

$\therefore C_2=2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$이므로

$\lim_{x\to 1+}(x\ln x-x+2)=\lim_{x\to 1-}(x^2+3x+C_1)$

$-1+2=1+3+C_1$ $\therefore C_1=-3$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2+3x-3 & (x\le 1)\\ x\ln x-x+2 & (x\ge 1)\end{cases}$이므로

$f(-6)=36-18-3=15$

답 ④

18 전략 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$임을 이용하여 조건 (나)에 주어진 등식의 양변을 적분한다.

풀이 조건 (나)에서

$\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)=x\cos x$

Q BOX

$\frac{4-2x}{x+1}$
$=\frac{-2(x+1)+6}{x+1}$
$=-2+\frac{6}{x+1}$

$x<1$일 때
$\int(2x+3)dx$
$=x^2+3x+C_1$

$[\{f(x)\}^3]'$
$=3\{f(x)\}^2 f'(x)$
임을 이용한다.

$x=e$일 때, $e>1$이므로
$f(x)=x\ln x-x+C_2$

$x=-6$일 때, $-6<1$이므로
$f(x)=x^2+3x-3$

함수 $f(x)$의 역함수 구하기
➡ $y=f(x)$에서 x를 y에 대한 식으로 나타낸 후 x와 y를 서로 바꾼다.

이므로

$$xf(x)=\int\{xf(x)\}'dx=\int x\cos x\,dx$$

이때 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$

$\therefore\ xf(x)=x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=x\sin x+\cos x+C$ …… ㉠

조건 (가)에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이므로 $x=\frac{\pi}{2}$를 ㉠의 양변에 대입하면

$\frac{\pi}{2}\cdot1=\frac{\pi}{2}\cdot1+0+C$ $\therefore\ C=0$

$\therefore\ xf(x)=x\sin x+\cos x$ …… ㉡

$x=\pi$를 ㉡의 양변에 대입하면

$\pi f(\pi)=\pi\cdot0-1=-1$

$\therefore\ f(\pi)=-\frac{1}{\pi}$ 답 ②

쌤 한마디

적분은 미분의 역연산이므로

① $f(x)+xf'(x)=\{xf(x)\}'$

⇨ $\int\{f(x)+xf'(x)\}dx=xf(x)$

② $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'$

⇨ $\int\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}dx=\frac{f(x)}{x}$

를 기억해 두면 이러한 유형의 문제에 쉽게 접근할 수 있다.

19 전략 부분적분법을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $h(x)=x(x-1)=x^2-x$, $k'(x)=e^x$으로 놓으면

$h'(x)=2x-1$, $k(x)=e^x$

$\therefore\ f(x)=\int x(x-1)e^x dx$

$=(x^2-x)e^x-\int(2x-1)e^x dx$ … ㉠

$\int(2x-1)e^x dx$에서 $u(x)=2x-1$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$

$\therefore\ \int(2x-1)e^x dx=(2x-1)e^x-\int 2e^x dx$

$=(2x-1)e^x-2e^x+C_1$

$=(2x-3)e^x+C_1$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x^2-x)e^x-\{(2x-3)e^x+C_1\}$

$=(x^2-3x+3)e^x+C$

$f(0)=2$이므로

$3\cdot1+C=2$ $\therefore\ C=-1$

따라서 $f(x)=(x^2-3x+3)e^x-1$이므로

$f(2)=e^2-1$ 답 ②

09 정적분

22 여러 가지 함수의 정적분

Lecture 35 정적분의 계산

L 112쪽

1-1 (1) $\int_0^4\sqrt{x}\,dx=\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{16}{3}$

(2) $\int_{-1}^5\frac{1}{x+2}dx=\Big[\ln|x+2|\Big]_{-1}^5=\ln7$

(3) $\int_0^{\ln2}e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^{\ln2}=2-1=1$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2x\,dx=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1$

답 (1) $\frac{16}{3}$ (2) $\ln7$ (3) 1 (4) 1

2-1 (1) $\int_1^8 4\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

$=4\int_1^8(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})dx=4\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_1^8$

$=4\left\{(12-6)-\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)\right\}=27$

적분 구간이 같은 정적분의 계산
➡ 하나의 정적분으로 나타낸 후 피적분함수를 간단히 정리하여 적분한다.

(2) $\int_{-1}^3(e^x+1)dx+\int_{-1}^3(e^x-1)dx$

$=\int_{-1}^3(e^x+1+e^x-1)dx$

$=\int_{-1}^3 2e^x dx=2\int_{-1}^3 e^x dx=2\Big[e^x\Big]_{-1}^3$

$=2(e^3-e^{-1})=2\left(e^3-\frac{1}{e}\right)$

피적분함수가 같고, 한 정적분의 위끝과 다른 정적분의 아래끝이 같은 정적분의 계산
➡ 적분 구간을 하나로 나타내어 적분한다.

(3) $\int_0^{\pi}(\cos x+1)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(\cos x+1)dx$

$=\int_0^{2\pi}(\cos x+1)dx=\Big[\sin x+x\Big]_0^{2\pi}=2\pi$

답 (1) 27 (2) $2\left(e^3-\frac{1}{e}\right)$ (3) 2π

3-1 (1) $\sin x$는 기함수이므로

$\sin(-x)=-\sin x$

$\int_{-2\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=0$

(2) $f(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓으면

$f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$

따라서 e^x+e^{-x}은 우함수이므로

$\int_{-1}^1(e^x+e^{-x})dx=2\int_0^1(e^x+e^{-x})dx$

$=2\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1=2\left(e-\frac{1}{e}\right)$

답 (1) 0 (2) $2\left(e-\frac{1}{e}\right)$

기본+표준 유형 Q+Q

L 113쪽

01 $\int_1^e\frac{4x^4+2x^2-1}{x}dx$

$=\int_1^e\left(4x^3+2x-\frac{1}{x}\right)dx=\Big[x^4+x^2-\ln|x|\Big]_1^e$

$=(e^4+e^2-1)-(1+1)=e^4+e^2-3$ 답 ①

02 $\int_1^3 \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx=\int_1^3 \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx$

$$=\int_1^3\left(\sqrt{x}+2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$
$$=\int_1^3 (x^{\frac{1}{2}}+2+x^{-\frac{1}{2}})dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x+2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^3$$
$$=(4\sqrt{3}+6)-\frac{14}{3}$$
$$=4\sqrt{3}+\frac{4}{3}$$

따라서 $a=4$, $b=\frac{4}{3}$이므로

$\frac{a}{b}=4\cdot\frac{3}{4}=3$ 답 3

03 $\int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx+\int_2^0 \frac{1}{e^x+1}dx$

$$=\int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx-\int_0^2 \frac{1}{e^x+1}dx$$
$$=\int_0^2 \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx=\int_0^2 \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx$$
$$=\int_0^2 (e^x-1)dx=\left[e^x-x\right]_0^2$$
$$=(e^2-2)-1=e^2-3$$

답 ③

04 $\int_0^1 (3^x+1)(9^x-3^x+1)dx$

$$=\int_0^1 (27^x+1)dx$$
$$=\left[\frac{27^x}{\ln 27}+x\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{27}{\ln 27}+1\right)-\frac{1}{\ln 27}$$
$$=\frac{26}{3\ln 3}+1$$

따라서 $a=26$, $b=1$이므로

$a-b=25$ 답 25

05 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x+2)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x+1)dx$

$$=\left[\tan x+x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=1+\frac{\pi}{4}$$

답 ③

06 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이면 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}(\sin x+k)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(\cos x+2)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin\frac{\pi}{2}+k=\cos\frac{\pi}{2}+2 \quad \therefore k=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\sin x+1 & \left(x\ge\frac{\pi}{2}\right)\\ \cos x+2 & \left(x\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$이므로

Q BOX

삼각함수 사이의 관계
① $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$
② $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

① $f(x)$가 우함수, 즉 $f(-x)=f(x)$이면
$\int_{-a}^a f(x)dx$
$=2\int_0^a f(x)dx$
② $f(x)$가 기함수, 즉 $f(-x)=-f(x)$이면
$\int_{-a}^a f(x)dx=0$

$$\int_0^\pi f(x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+2)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi(\sin x+1)dx$$
$$=\left[\sin x+2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\cos x+x\right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi$$
$$=(1+\pi)+\left(1+\frac{\pi}{2}\right)=2+\frac{3}{2}\pi$$

답 $2+\frac{3}{2}\pi$

07 $e^x-1=0$에서 $x=0$

$|e^x-1|=\begin{cases}e^x-1 & (x\ge0)\\ -e^x+1 & (x\le0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^2|e^x-1|dx=\int_{-2}^0(-e^x+1)dx+\int_0^2(e^x-1)dx$$
$$=\left[-e^x+x\right]_{-2}^0+\left[e^x-x\right]_0^2$$
$$=-1-(-e^{-2}-2)+(e^2-2)-1$$
$$=e^2+\frac{1}{e^2}-2$$

답 ①

08 $\cos x-\sin x=0$에서 $\sin x=\cos x$

$\tan x=1 \quad \therefore x=\frac{\pi}{4}\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

$|\cos x-\sin x|=\begin{cases}\cos x-\sin x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)\\ -\cos x+\sin x & \left(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x+\sin x)dx$$
$$=\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\sin x-\cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1+(-1)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=2(\sqrt{2}-1)$$

답 $2(\sqrt{2}-1)$

09 x는 기함수, $\cos x$는 우함수이므로 $x\cos x$는 기함수이다. 또 x^2은 우함수이므로

$$\int_{-\pi}^\pi(x\cos x+x^2)dx=2\int_0^\pi x^2dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^\pi$$
$$=\frac{2}{3}\pi^3$$

답 $\frac{2}{3}\pi^3$

10 $f(x)=x^2(e^x-e^{-x})$에서

$f(-x)=x^2(e^{-x}-e^x)=-f(x)$

이므로 $f(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^2 f(x)dx=0$$

답 ①

쌤 한마디

09번, **10**번과 같이 정적분의 계산에서 위끝과 아래끝의 절댓값이 같은 경우에는 피적분함수가 우함수인지 기함수인지 먼저 확인하여 정적분의 값을 간단히 구한다.

11 $f(x)=|\cos 2x|$라 하면 $f(x)$는 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 주기함수이므로

$$\int_0^{2\pi}|\cos 2x|dx$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos 2x|dx$$
$$=4\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos 2x)dx\right\}$$
$$=4\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-4\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=2-(-2)=4$$

답 ②

12 $f(x)=\sin\frac{x}{4}$라 하면 $f(x)$는 주기가 8π인 주기함수이므로

$$\int_a^{a+8\pi}\sin\frac{x}{4}dx=\int_0^{8\pi}\sin\frac{x}{4}dx=\left[-4\cos\frac{x}{4}\right]_0^{8\pi}$$
$$=-4-(-4)=0$$

답 0

쌤 한마디

주기함수는 한 주기에 해당하는 구간의 정적분의 값이 항상 같다. 즉 함수 $f(x)$가 주기가 p인 연속함수이면 다음이 성립한다.

① $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p}f(x)dx$

② $\int_a^{a+p}f(x)dx=\int_b^{b+p}f(x)dx$

Q BOX

$y=a\sin bx$, $y=a\cos bx$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이고, $y=|a\sin bx|$, $y=|a\cos bx|$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$이다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos 2x|dx$
$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\cos 2x|dx$
$=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\cos 2x|dx$
$=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}|\cos 2x|dx$
이므로
$\int_0^{2\pi}|\cos 2x|dx$
$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos 2x|dx$

23 치환적분법과 부분적분법을 이용한 정적분

Lecture 36 치환적분법과 부분적분법을 이용한 정적분 115쪽

1-1 (1) $x+6=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$

또한 $x=-2$일 때 $t=4$, $x=3$일 때 $t=9$이므로

$$\int_{-2}^{3}\sqrt{x+6}\,dx=\int_4^9\sqrt{t}\,dt=\int_4^9 t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_4^9=\frac{2}{3}(27-8)$$
$$=\frac{38}{3}$$

(2) $x^2-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

또한 $x=-1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=3$이므로

$$\int_{-1}^{2}x(x^2-1)^2dx=\int_0^3 t^2\cdot\frac{1}{2}dt=\left[\frac{1}{6}t^3\right]_0^3$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 27=\frac{9}{2}$$

(3) $3x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^1 e^{3x+1}dx=\int_1^4 e^t\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\left[e^t\right]_1^4=\frac{e^4-e}{3}$$

(4) $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$

또한 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^3 x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}t^3dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{9}{64}$$

답 (1) $\frac{38}{3}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) $\frac{e^4-e}{3}$ (4) $\frac{9}{64}$

2-1 (1) $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

이때 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$에서

$\cos^2\theta=\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1)$이므로

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta+1)d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

(2) $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}1\,d\theta$$
$$=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

답 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{3}$

미분하여 간단해지는 것을 $f(x)$, 적분하기 쉬운 것을 $g'(x)$로 놓는다.

3-1 (1) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$$\therefore\int_1^e\ln x\,dx=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e 1\,dx$$
$$=e-\left[x\right]_1^e=e-(e-1)$$
$$=1$$

L 09 정적분

(2) $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$

$$\therefore \int_{\pi}^{2\pi} x\cos x\,dx$$
$$=\left[x\sin x\right]_{\pi}^{2\pi}-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx$$
$$=\left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}=1-(-1)=2$$

Q BOX: $\left[x\sin x\right]_{\pi}^{2\pi}=0$

답 (1) 1 (2) 2

쌤 한마디

부분적분법을 이용하여 $\int_a^b \ln x\,dx$의 값을 구하는 문제가 자주 출제된다. 이때

$$\int_a^b \ln x\,dx=\left[x\ln x-x\right]_a^b$$

임을 기억하면 빠르게 계산할 수 있다.

기본+표준 유형 Q+Q

116쪽

01 $3x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=3$

또한 $x=1$일 때 $t=2$, $x=3$일 때 $t=8$이므로

$$\int_1^3 f(3x-1)dx=\int_2^8 f(t)\cdot\frac{1}{3}dt$$
$$=\frac{1}{3}\int_2^8 f(x)dx$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 3=1$$

답 ②

02 $6-x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-1$

또한 $x=-1$일 때 $t=7$, $x=3$일 때 $t=3$이므로

$$\int_{-1}^3 f(6-x)dx=\int_7^3 f(t)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_3^7 f(t)dt$$
$$=\int_3^7 f(x)dx$$

답 ③

03 $x^2+2x+3=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x+2$

Q BOX: $\int_\alpha^\beta \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx$ ➡ $f(x)=t$로 치환하면 $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}\dfrac{1}{t}dt$

또한 $x=-1$일 때 $t=2$, $x=1$일 때 $t=6$이므로

$$\int_{-1}^1 \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx=\int_2^6\frac{1}{t^2}dt=\int_2^6 t^{-2}dt$$
$$=\left[-t^{-1}\right]_2^6=-\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}$$

답 ②

04 $x^2+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$

Q BOX: $\int_\alpha^\beta \sqrt{f(x)}f'(x)dx$ ➡ $f(x)=t$로 치환하면 $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}\sqrt{t}\,dt$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=k$일 때 $t=k^2+1$이므로

$$\int_0^k 2x\sqrt{x^2+1}dx=\int_1^{k^2+1}\sqrt{t}\,dt=\int_1^{k^2+1}t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{k^2+1}=\frac{2}{3}(k^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}$$

따라서 $\dfrac{2}{3}(k^2+1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{14}{3}$이므로

$$\frac{2}{3}(k^2+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3},\qquad (k^2+1)^{\frac{3}{2}}=8$$
$$k^2+1=(2^3)^{\frac{2}{3}}=4,\qquad k^2=3$$
$$\therefore k=\sqrt{3}\ (\because k>0)$$

답 $\sqrt{3}$

05 $\ln x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

Q BOX: $\int_\alpha^\beta f(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}dx$ ➡ $\ln x=t$로 치환하면 $\int_{\ln\alpha}^{\ln\beta}f(t)dt$

또한 $x=1$일 때 $t=-1$, $x=e^3$일 때 $t=2$이므로

$$\int_1^{e^3}\frac{(\ln x-1)^2}{x}dx=\int_{-1}^2 t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^2$$
$$=\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=3$$

답 3

06 $\displaystyle\int_0^a\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^a\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

Q BOX: $\int_\alpha^\beta f(e^x)\cdot e^x dx$ ➡ $e^x=t$로 치환하면 $\int_{e^\alpha}^{e^\beta}f(t)dt$

$e^{2x}+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2e^{2x}$

또한 $x=0$일 때 $t=2$, $x=a$일 때 $t=e^{2a}+1$이므로

$$\int_0^a\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\int_2^{e^{2a}+1}\frac{1}{t}dt=\left[\ln|t|\right]_2^{e^{2a}+1}$$
$$=\ln(e^{2a}+1)-\ln 2$$
$$=\ln\frac{e^{2a}+1}{2}$$

따라서 $\ln\dfrac{e^{2a}+1}{2}=\ln 13$이므로

$$\frac{e^{2a}+1}{2}=13,\qquad e^{2a}=25$$
$$e^a=(5^2)^{\frac{1}{2}}=5\qquad \therefore a=\ln 5$$

답 ③

07 $1+\tan x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\sec^2 x$

Q BOX: $\int_\alpha^\beta f(\tan x)\sec^2 x\,dx$ ➡ $\tan x=t$로 치환하면 $\int_{\tan\alpha}^{\tan\beta}f(t)dt$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}dx=\int_1^2\frac{1}{t^2}dt=\int_1^2 t^{-2}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

답 ①

08 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos x\,dx$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

Q BOX: $\int_\alpha^\beta f(\sin x)\cos x\,dx$ ➡ $\sin x=t$로 치환하면 $\int_{\sin\alpha}^{\sin\beta}f(t)dt$

$\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$

또한 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int_0^1(1-t^2)dt$$
$$=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}$$

답 $\dfrac{2}{3}$

09 $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{1}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}1\,d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

답 ①

10 $x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=a\sec^2\theta$$

또한 $x=-a$일 때 $\theta=-\frac{\pi}{4}$, $x=a$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_{-a}^{a}\frac{1}{x^2+a^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2\tan^2\theta+a^2}\cdot a\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}\,d\theta=2\Big[\frac{1}{a}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2a}$$

따라서 $\frac{\pi}{2a}=\frac{\pi}{4}$이므로 $a=2$

답 ④

11 $f(x)=x+1$, $g'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$\therefore \int_0^3(x+1)e^{2x}dx$$
$$=\Big[(x+1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_0^3-\int_0^3\frac{1}{2}e^{2x}dx$$
$$=\left(2e^6-\frac{1}{2}\right)-\Big[\frac{1}{4}e^{2x}\Big]_0^3$$
$$=2e^6-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}e^6-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{7}{4}e^6-\frac{1}{4}$$

답 $\frac{7}{4}e^6-\frac{1}{4}$

12 $f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^\pi e^x\sin x\,dx=\Big[e^x\sin x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$$
$$=-\int_0^\pi e^x\cos x\,dx \quad\cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^\pi e^x\cos x\,dx$$
$$=\Big[e^x\cos x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi(-e^x\sin x)dx$$
$$=-e^\pi-1+\int_0^\pi e^x\sin x\,dx \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^\pi e^x\sin x\,dx=e^\pi+1-\int_0^\pi e^x\sin x\,dx$$
$$2\int_0^\pi e^x\sin x\,dx=e^\pi+1$$
$$\therefore \int_0^\pi e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^\pi+\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=1$

답 1

Q BOX

상수함수는 우함수이므로
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}\,d\theta$$

$$\Big[e^x\sin x\Big]_0^\pi=0$$

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

쌤 한마디

12번과 같이 부분적분법을 한 번 이용하여 정적분의 값을 구했을 때 그 결과가 정적분으로 나오는 경우에는 부분적분법을 한 번 더 이용하여 정적분의 값을 구한다.
이때 첫 번째 계산에서 $f(x)$를 삼각함수로, $g'(x)$를 지수함수로 놓았으면 두 번째 계산에서도 $u(x)$를 삼각함수로, $v'(x)$를 지수함수로 놓아야 함에 주의한다.

24 정적분으로 정의된 함수

Lecture 37 정적분으로 정의된 함수 118쪽

1-1 (3) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+2}\ln t\,dt=\ln(x+2)-\ln x$

$$=\ln\frac{x+2}{x}$$

(4) $\frac{d}{dx}\int_{x-3}^{x}e^t\,dt=e^x-e^{x-3}=e^x\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$

답 (1) $\frac{3x-4}{x^2+4x+5}$ (2) $x\cos x$ (3) $\ln\frac{x+2}{x}$ (4) $e^x\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$

1-2 (1) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\sin x+\cos x$

(2) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{x}-e^x$

답 (1) $f(x)=\sin x+\cos x$ (2) $f(x)=\frac{1}{x}-e^x$

2-1 (1) $F'(t)=(3^t+1)^2$이라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(3^t+1)^2dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=4$$

(2) $F'(t)=t\ln t$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_e^{x+e}t\ln t\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_e^{x+e}F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+e)-F(e)}{x}$$
$$=F'(e)=e$$

(3) $F'(t)=e^t$이라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x e^t\,dt=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=e^2$$

(4) $F'(t)=t+\cos t$라 하면

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_\pi^x(t+\cos t)dt$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_\pi^x F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}$$
$$=F'(\pi)=\pi-1$$

답 (1) 4 (2) e (3) e^2 (4) $\pi-1$

2-2 $F'(x)=f(x)$라 하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^x f(t)dt=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^x F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{F(x)-F(-1)}{x+1}$$
$$=F'(-1)=f(-1)$$
$$=\sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

기본+표준 유형 Q+Q

119쪽

01 $\int_1^3 f(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=\ln x+k$

이것을 ㉠에 대입하면 $\int_1^3(\ln t+k)dt=k$

$\int_1^3(\ln t+k)dt$에서 $u(t)=\ln t+k$, $v'(t)=1$로 놓으면

$$u'(t)=\frac{1}{t},\ v(t)=t$$
$$\therefore \int_1^3(\ln t+k)dt=\Big[t\ln t+kt\Big]_1^3-\int_1^3\frac{1}{t}\cdot t\,dt$$
$$=3\ln3+3k-k-\int_1^3 1\,dt$$
$$=3\ln3+2k-\Big[t\Big]_1^3$$
$$=3\ln3+2k-2$$

즉 $3\ln3+2k-2=k$이므로 $k=2-3\ln3$

$\therefore f(x)=\ln x+2-3\ln3$

답 $f(x)=\ln x+2-3\ln3$

정적분의 아래끝과 위끝이 모두 상수이면 정적분의 결과도 상수이다.

02 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=\cos x-k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-k)\sin t\,dt=k$$

이때

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-k)\sin t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t-k\sin t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin2t-k\sin t\right)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{4}\cos2t+k\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}+k\right)$$
$$=\frac{1}{2}-k$$

Q BOX

$\sin2t=2\sin t\cos t$ 이므로

$$\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin2t$$

이므로 $\frac{1}{2}-k=k$ $\therefore k=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\cos x-\frac{1}{4}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

답 ③

03 $\int_1^x f(t)dt=4x^2+2k\sqrt{x}$ ...... ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=8x+\frac{k}{\sqrt{x}}$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=4+2k$ $\therefore k=-2$

따라서 $f(x)=8x-\frac{2}{\sqrt{x}}$이므로

$f(1)=8-2=6$

답 6

04 $\int_1^x f(t)dt=x\ln x+ax+1$ ...... ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+a$$
$$=\ln x+1+a$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a+1$ $\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=\ln x$이므로 $f(e)=1$

$\therefore a+f(e)=-1+1=0$

답 ②

05 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=\cos x+ax^2-a$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=1-a$ $\therefore a=1$

㉠에서 $x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\cos x+x^2-1$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-\sin x+2x$$
$$\therefore \int_0^x f(t)dt=-\sin x+2x$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-\cos x+2$ $\therefore b=f(\pi)=1+2=3$

$\therefore a+b=1+3=4$

답 4

06 $\int_0^x (x-t)f'(t)dt=e^{2x}-2e^x+1$에서

$$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=e^{2x}-2e^x+1$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=2e^{2x}-2e^x$$

$$\int_0^x f'(t)dt=2e^{2x}-2e^x,\quad \Big[f(t)\Big]_0^x=2e^{2x}-2e^x$$

$$f(x)-f(0)=2e^{2x}-2e^x$$

$f(0)=2$이므로

$$f(x)=2e^{2x}-2e^x+2=2(e^{2x}-e^x+1)$$ 답 ③

07 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\sin x(2\cos x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$$\therefore x=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극대이므로 극댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin t(2\cos t-1)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin t\cos t-\sin t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2t-\sin t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t+\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{4}$$ 답 $\frac{1}{4}$

08 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{x-4}{x+2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=4$

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=4$에서 극소이고 극솟값은

$$f(4)=\int_1^4\frac{t-4}{t+2}dt=\int_1^4\left(1-\frac{6}{t+2}\right)dt$$
$$=\Big[t-6\ln|t+2|\Big]_1^4$$
$$=(4-6\ln 6)-(1-6\ln 3)$$
$$=4-6\ln 2-6\ln 3-1+6\ln 3$$
$$=3-6\ln 2$$

즉 $a=4$, $b=3-6\ln 2$이므로

$$a-b=6\ln 2+1$$ 답 ④

QBOX

$0\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(1)$이고, 최댓값은 $f(0)$, $f(4)$ 중 큰 값이다.

$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$

$\frac{t-4}{t+2}=\frac{t+2-6}{t+2}=1-\frac{6}{t+2}$

$6\ln 6=6(\ln 2+\ln 3)=6\ln 2+6\ln 3$

09 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x(\sqrt{x}-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

$$f(0)=\int_0^0 t(\sqrt{t}-1)dt=0$$
$$f(1)=\int_0^1 t(\sqrt{t}-1)dt=\int_0^1(t^{\frac{3}{2}}-t)dt$$
$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}$$
$$f(4)=\int_0^4 t(\sqrt{t}-1)dt=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}t^2\right]_0^4$$
$$=\frac{64}{5}-8=\frac{24}{5}$$

따라서 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 $\frac{24}{5}$, $x=1$일 때 최솟값 $-\frac{1}{10}$을 가지므로

$$M=\frac{24}{5},\ m=-\frac{1}{10}$$
$$\therefore M+m=\frac{47}{10}$$ 답 $\frac{47}{10}$

10 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(e^x+1)(e^x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $x=\ln 3\ (\because e^x+1>0)$

x	$\cdots$	$\ln 3$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=\ln 3$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$$f(\ln 3)=\int_0^{\ln 3}(e^t+1)(e^t-3)dt$$
$$=\int_0^{\ln 3}(e^{2t}-2e^t-3)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2t}-2e^t-3t\right]_0^{\ln 3}$$
$$=\left(-\frac{3}{2}-3\ln 3\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$=-3\ln 3$$ 답 $-3\ln 3$

11 $F'(x)=f(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot e^2=\frac{e^2}{2}$$ 답 ③

12 $F'(x)=f(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^{2h}f(t)dt=\lim_{h\to 0}\frac{F(2h)-F(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(2h)-F(0)}{2h}\cdot 2$$
$$=2F'(0)=2f(0)$$
$$=2\cdot(-2)$$
$$=-4$$

답 ①

13 $f(x)=x\cos x+a$, $F'(x)=f(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_\pi^{\pi+2h}(x\cos x+a)dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_\pi^{\pi+2h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(\pi+2h)-F(\pi)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(\pi+2h)-F(\pi)}{2h}\cdot 2$$
$$=2F'(\pi)=2f(\pi)$$
$$=2(-\pi+a)$$

$2(-\pi+a)=4\pi$이므로 $\quad -2\pi+2a=4\pi$

$2a=6\pi \qquad \therefore a=3\pi$

답 3π

중단원 마무리

121쪽

01 전략 피적분함수를 부분분수로 변형한다.

풀이 $\displaystyle\int_0^a\frac{2}{x^2+4x+3}dx$

$$=\int_0^a\frac{2}{(x+1)(x+3)}dx$$
$$=\int_0^a\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=\Big[\ln|x+1|-\ln|x+3|\Big]_0^a$$
$$=(\ln|a+1|-\ln|a+3|)-(-\ln 3)$$
$$=\ln|a+1|-\ln|a+3|+\ln 3$$
$$=\ln\frac{3(a+1)}{a+3}\ (\because a>0)$$

따라서 $\ln\dfrac{3(a+1)}{a+3}=\ln 2$이므로

$\dfrac{3(a+1)}{a+3}=2,\qquad 3a+3=2a+6$

$\therefore a=3$

답 ②

02 전략 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분은 적분 구간을 나누어 각각 정적분의 값을 구한다.

풀이 $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)dx$

$$=\int_{-1}^0 3\sqrt{x+1}\,dx+\int_0^3(e^{-x}+2)dx$$
$$=\Big[2(x+1)\sqrt{x+1}\Big]_{-1}^0+\Big[-e^{-x}+2x\Big]_0^3$$
$$=2+\left(-\frac{1}{e^3}+6\right)-(-1)=9-\frac{1}{e^3}$$

답 ④

Q BOX

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt$
$=f(a)$

$f(0)=-\ln e^2=-2$

등비급수의 합
$-1<r<1$일 때,
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$

적분 구간이 0에서 $\frac{\pi}{4}$까지이므로
$0\le x\le\frac{\pi}{4}$
$\therefore 0\le 2x\le\frac{\pi}{2}$

$\dfrac{1}{AB}$
$=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$
(단, $A\neq B$)

03 전략 $|r|<1$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}=\frac{1}{1-r}$임을 이용한다.

풀이 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin^2 x<1$이므로

$$f(x)=1+\sin^2 x+\sin^4 x+\sin^6 x+\cdots$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\sin^2 x)^{n-1}$$
$$=\frac{1}{1-\sin^2 x} \quad \cdots ❶$$
$$\therefore \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1-\sin^2 x}dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sec^2 x\,dx$$
$$=\Big[\tan x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\sqrt{3}-1 \quad \cdots ❷$$

답 $\sqrt{3}-1$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$를 간단히 할 수 있다.	50 %
❷	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %

04 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나누어 구한다.

풀이 $2\sin 2x-1=0$에서 $\qquad \sin 2x=\frac{1}{2}$

$2x=\frac{\pi}{6}\left(\because 0\le 2x\le\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore x=\frac{\pi}{12}$

$$|2\sin 2x-1|=\begin{cases}-2\sin 2x+1 & \left(0\le x\le\frac{\pi}{12}\right)\\ 2\sin 2x-1 & \left(\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}|2\sin 2x-1|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{12}}(-2\sin 2x+1)dx+\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}(2\sin 2x-1)dx$$
$$=\Big[\cos 2x+x\Big]_0^{\frac{\pi}{12}}+\Big[-\cos 2x-x\Big]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}\right)-1+\left\{-\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right\}$$
$$=\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$$

답 $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$

05 전략 $\displaystyle\int_{-2}^3 f(x)dx+\int_3^2 f(x)dx=\int_{-2}^2 f(x)dx$이므로 함수 $f(x)$가 우함수인지, 기함수인지 확인한다.

풀이 $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$에서

$f(-x)=e^{-2x}+e^{2x}=f(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{2} f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{2} f(x)dx=2\int_{0}^{2} f(x)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(e^{2x}+e^{-2x})dx=2\left[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{0}^{2}$$
$$=\left[e^{2x}-e^{-2x}\right]_{0}^{2}=e^{4}-\frac{1}{e^{4}}$$
답 $e^{4}-\dfrac{1}{e^{4}}$

06 전략 주기가 p인 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx$가 성립함을 이용한다.

풀이 $f(x+4)=f(x)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{2}^{6} f(x)dx=\int_{6}^{10} f(x)dx$$

또 $f(-x)=e^{-x}+e^{x}=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다. ··· ❶

$$\therefore \int_{-2}^{10} f(x)dx=3\int_{-2}^{2} f(x)dx=6\int_{0}^{2} f(x)dx$$
$$=6\int_{0}^{2}(e^{x}+e^{-x})dx$$
$$=6\left[e^{x}-e^{-x}\right]_{0}^{2}$$
$$=6\left(e^{2}-\frac{1}{e^{2}}\right)$$ ··· ❷

$\therefore k=6$ ··· ❸

답 6

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$가 주기함수이고 우함수임을 알 수 있다.	40 %
❷	$\int_{-2}^{10} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	k의 값을 구할 수 있다.	10 %

07 전략 $x^{2}+x+2=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $x^{2}+x+2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x+1$

또한 $x=0$일 때 $t=2$, $x=1$일 때 $t=4$이므로

$$\int_{0}^{1}\frac{4x+2}{x^{2}+x+2}dx=\int_{2}^{4}\frac{1}{t}\cdot 2dt=\left[2\ln|t|\right]_{2}^{4}$$
$$=2\ln 4-2\ln 2=2\ln 4-\ln 4$$
$$=\ln 4$$

$\therefore k=4$

답 4

08 전략 먼저 피적분함수의 분자와 분모에 각각 e^{t}을 곱하여 $\dfrac{g'(t)}{g(t)}$ 꼴이 되도록 변형한다.

풀이 $f(x)=\displaystyle\int_{0}^{x}\frac{1}{1+e^{-t}}dt=\int_{0}^{x}\frac{e^{t}}{e^{t}+1}dt$

$(e^{t}+1)'=e^{t}$이므로

$$f(x)=\int_{0}^{x}\frac{e^{t}}{e^{t}+1}dt=\int_{0}^{x}\frac{(e^{t}+1)'}{e^{t}+1}dt$$
$$=\left[\ln(e^{t}+1)\right]_{0}^{x}=\ln(e^{x}+1)-\ln 2$$
$$=\ln\frac{e^{x}+1}{2}$$

이때 $(f\circ f)(a)=\ln 5$에서 $f(a)=k$라 하면 $f(k)=\ln 5$이므로

$$\ln\frac{e^{k}+1}{2}=\ln 5,\quad \frac{e^{k}+1}{2}=5$$
$$e^{k}=9\qquad \therefore k=\ln 9$$

따라서 $f(a)=\ln 9$이므로

$$\ln\frac{e^{a}+1}{2}=\ln 9,\quad \frac{e^{a}+1}{2}=9$$
$$e^{a}=17\qquad \therefore a=\ln 17$$

답 ④

09 전략 $\cos 2x=1-2\sin^{2}x$이므로 $\sin x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\cos x\,dx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^{2}x)\cos x\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$

또한 $x=-\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=-1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^{2}x)\cos x\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(1-2t^{2})dt=2\int_{0}^{1}(1-2t^{2})dt$$
$$=2\left[t-\frac{2}{3}t^{3}\right]_{0}^{1}=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 $\dfrac{2}{3}$

Q BOX
$1-2t^{2}$은 우함수이므로
$\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-2t^{2})dt$
$\displaystyle=2\int_{0}^{1}(1-2t^{2})dt$

10 전략 $\overline{OH}=\overline{OP}\cos\theta$, $\overline{PH}=\overline{OP}\sin\theta$임을 이용한다.

풀이 직각삼각형 POH에서 $\overline{OH}=\overline{OP}\cos\theta$, $\overline{PH}=\overline{OP}\sin\theta$이므로

$$f(\theta)=\frac{\overline{OH}}{\overline{PH}}=\frac{\overline{OP}\cos\theta}{\overline{OP}\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{d\theta}=\cos\theta$

또한 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$일 때 $t=\dfrac{1}{2}$, $\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{t}dt=\left[\ln|t|\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{1}{2}=\ln\sqrt{3}$$
$$=\frac{1}{2}\ln 3$$

답 ①

11 전략 피적분함수가 $\sqrt{a^{2}-x^{2}}$ 꼴이므로 $x=a\sin\theta$로 치환한다.

풀이 $x=4\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=4\cos\theta$$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$4\sin\theta=2\sqrt{3}$에서
$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}$

$$\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{2-x}{\sqrt{16-x^2}}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2-4\sin\theta}{\sqrt{16-16\sin^2\theta}}\cdot 4\cos\theta\, d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(2-4\sin\theta)4\cos\theta}{4\cos\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-4\sin\theta)d\theta=\Big[2\theta+4\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\left(\frac{2}{3}\pi+2\right)-4=\frac{2}{3}\pi-2$$

답 $\frac{2}{3}\pi-2$

12 전략 피적분함수가 두 함수의 곱의 꼴이고, 치환적분법을 이용할 수 없으므로 부분적분법을 이용한다.

풀이 $f(x)=1-\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$$f'(x)=-\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2$$
$$\therefore \int_1^e x(1-\ln x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2(1-\ln x)\right]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{2}x^2dx$$
$$=-\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}(e^2-3)$$

답 ⑤

13 전략 부분적분법과 치환적분법을 이용하여 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)g'(x)dx$의 값을 구한다.

풀이 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)g'(x)dx$

$$=\Big[f(x)g(x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f'(x)g(x)dx$$
$$=f(\pi)g(\pi)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin 2x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$
$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin 2x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$

$g(x)=\sin 2x$에서
$g(\pi)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로
$f(\pi)g(\pi)$
$=f\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$1+\cos^2 x=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=-2\sin x\cos x=-\sin 2x$$

또한 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$, $x=\pi$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)g'(x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin 2x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$
$$=\int_1^2\frac{1}{t^2}dt=\int_1^2 t^{-2}dt$$
$$=\Big[-t^{-1}\Big]_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

답 ③

14 전략 $\int_0^1 tf(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓고 k의 값을 구한다.

풀이 $\int_0^1 tf(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=e^{x^2}+k$

이것을 ㉠에 대입하면 $\int_0^1 t(e^{t^2}+k)dt=k$

$t^2=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=2t$

또한 $t=0$일 때 $s=0$, $t=1$일 때 $s=1$이므로

$$\int_0^1 t(e^{t^2}+k)dt=\int_0^1(e^s+k)\cdot\frac{1}{2}ds=\frac{1}{2}\Big[e^s+ks\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}(e+k-1)$$

따라서 $\frac{1}{2}(e+k-1)=k$이므로 $k=e-1$

$$\therefore \int_0^1 xf(x)dx=e-1$$

답 ④

15 전략 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하여 a의 값을 구한 후 양변을 미분한다.

풀이 $xf(x)=3^x+a+\int_0^x tf'(t)dt$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=1+a\qquad \therefore\ a=-1$

$xf(x)=3^x-1+\int_0^x tf'(t)dt$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=3^x\ln 3+xf'(x)$$

$f(x)=3^x\ln 3$이므로

$$f(a)=f(-1)=3^{-1}\ln 3=\frac{\ln 3}{3}$$

답 ④

16 전략 피적분함수에 x가 포함되지 않도록 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=\cos\frac{x}{2}+ax+b$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=1+b\qquad \therefore\ b=-1$

㉠에서 $x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\cos\frac{x}{2}+ax-1$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+a$$
$$\therefore \int_0^x f(t)dt=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+a \quad\text{...... ㉡}$$

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$$

따라서 $f(2\pi)=-\frac{1}{4}\cos\pi=\frac{1}{4}$이므로

$$f(2\pi)+a+b=\frac{1}{4}+0-1=-\frac{3}{4}$$

답 $-\frac{3}{4}$

17 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{2-\ln x}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=e^2$

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=e^2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(e^2)=\int_1^{e^2}\frac{2-\ln t}{t}dt$$

이때 $\ln t=s$로 놓으면 $\quad \frac{ds}{dt}=\frac{1}{t}$

또한 $t=1$일 때 $s=0$, $t=e^2$일 때 $s=2$이므로

$$\int_1^{e^2}\frac{2-\ln t}{t}dt=\int_0^2(2-s)ds=\left[2s-\frac{1}{2}s^2\right]_0^2$$
$$=4-2=2$$

답 2

18 전략 $f(t)=\frac{t}{\pi}\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$, $F'(t)=f(t)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 정리한다.

풀이 $f(t)=\frac{t}{\pi}\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\pi-x}\int_\pi^x\frac{t}{\pi}\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)dt$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{x-\pi}\int_\pi^x f(t)dt$$
$$=-\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}$$
$$=-F'(\pi)=-f(\pi)$$
$$=-\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cot\frac{\pi}{6}$$
$$=\sqrt{3}$$

답 ⑤

19 전략 $F'(t)=f(t)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 정리한다.

풀이 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1}f(t)dt\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{x^2+1}{x}\{F(x+1)-F(1)\}\right]$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{(x^2+1)\cdot\frac{F(x+1)-F(1)}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}(x^2+1)\cdot\lim_{x\to0}\frac{F(x+1)-F(1)}{x}$$
$$=F'(1)$$
$$=f(1)$$

$f(1)=3$이므로 $f(x)=a\cos(\pi x^2)$에서

$a\cos\pi=3, \quad -a=3$

$\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-3\cos(\pi x^2)$이므로

$$f(a)=f(-3)=-3\cos 9\pi$$
$$=-3\cdot(-1)=3$$

답 ⑤

Q BOX

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$

정수 n에 대하여
$\cos 2n\pi=1$
$\cos(2n-1)\pi=-1$

10 정적분의 활용

25 정적분과 급수

Lecture 38 정적분과 급수의 관계

L 124쪽

1-1 답 (가) $\frac{1}{n}$ (나) $\frac{k}{n}$ (다) 1 (라) $\frac{1}{3}$

$\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

1-2 (1) $f(x)=x^3$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ x_k=\frac{k}{n}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\frac{2k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$$
$$=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$
$$=8\int_0^1x^3dx$$
$$=8\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=2$$

(2) $f(x)=x$, $a=2$, $b=5$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{3}{n},\ x_k=2+\frac{3k}{n}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(2+\frac{3k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$
$$=\int_2^5 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^5$$
$$=\frac{25}{2}-2=\frac{21}{2}$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^n k^3$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$$

이때 $f(x)=x^3$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ x_k=\frac{k}{n}$$
$$\therefore (\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$
$$=\int_0^1x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^n\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$$

이때 $f(x)=\sin x$, $a=0$, $b=\pi$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{\pi}{n},\ x_k=\frac{k\pi}{n}$$
$$\therefore (\text{주어진 식})=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin x\,dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^\pi$$
$$=\frac{2}{\pi}\{1-(-1)\}=\frac{4}{\pi}$$

답 (1) 2 (2) $\frac{21}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{4}{\pi}$

다른 풀이 (1) $f(x)=x^3$, $a=0$, $b=2$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{2}{n},\ x_k=\frac{2k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 x^3\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=2$$

(2) $f(x)=2+x$, $a=0$, $b=3$으로 놓으면

$$\Delta x=\frac{3}{n},\ x_k=\frac{3k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

$$=\int_0^3(2+x)\,dx$$

$$=\left[2x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{21}{2}$$

Q BOX

무엇을 적분변수로 정하느냐에 따라 여러 가지 정적분으로 나타낼 수 있으나 그 값은 같다.

기본+표준 유형 Q+Q

125쪽

01 $f(x)=\sin x$, $a=4$, $b=6$으로 놓으면

$$\Delta x=\frac{2}{n},\ x_k=4+\frac{2k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(4+\frac{2k}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(4+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\int_4^6 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_4^6\sin x\,dx$$

즉 $p=\frac{1}{2}$, $q=4$, $r=6$이므로 $pqr=12$ 답 12

02 $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ x_k=\frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1(5x\sqrt{x}+x)\,dx$$

$$=\int_0^1\left(5x^{\frac{3}{2}}+x\right)dx$$

$$=\left[2x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{5}{2}$$

답 ③

03 $\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n}\left(\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\sqrt[n]{e^3}+\cdots+\sqrt[n]{e^n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{e^k}=e\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

이때 $f(x)=e^x$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ x_k=\frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$e\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=e\int_0^1 e^x\,dx$$

$$=e\left[e^x\right]_0^1=e^2-e$$

답 e^2-e

04 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{3+\frac{1}{n}}+\frac{1}{3+\frac{2}{n}}+\frac{1}{3+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{3+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_3^4\frac{1}{x}\,dx=\left[\ln|x|\right]_3^4$$

$$=\ln 4-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$$

$f(x)=\frac{1}{x}$, $a=3$, $b=4$로 놓으면

$\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_k=3+\frac{k}{n}$

이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

$=\int_3^4\frac{1}{x}\,dx$

따라서 $a=3$, $b=4$, $c=\frac{4}{3}$이므로

$$abc=3\cdot4\cdot\frac{4}{3}=16$$

답 ④

05 점 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{n-1}이 x축 위의 구간 $[0, 2]$를 n 등분하였으므로 $\mathrm{A}_k\left(\frac{2k}{n},\ 0\right)$

따라서 $\mathrm{B}_k\left(\frac{2k}{n},\ \left(\frac{2k}{n}\right)^2\right)$이므로 $\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}=\left(\frac{2k}{n}\right)^2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=4\int_0^1 x^2\,dx$$

$$=4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

$f(x)=x^2$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

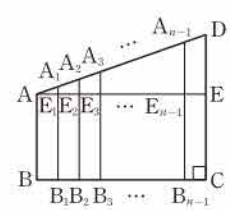
$\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_k=\frac{k}{n}$

이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$

$=\int_0^1 x^2\,dx$

06 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$와 평행한 직선을 그어 $\overline{\mathrm{CD}}$와 만나는 점을 E라 하고 $\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$와 만나는 점을 E_k라 하면



$$\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{E}_k}=3,\ \overline{\mathrm{ED}}=2$$

$\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{E}_k}=\overline{\mathrm{AB}}=3$,

$\overline{\mathrm{ED}}=\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{CE}}$

$=5-3=2$

한편 $\triangle\mathrm{AED}\backsim\triangle\mathrm{AE}_k\mathrm{A}_k$이므로

$\angle\mathrm{AED}=\angle\mathrm{AE}_k\mathrm{A}_k=90°$,

$\angle\mathrm{A}$는 공통이므로

$\triangle\mathrm{AED}\backsim\triangle\mathrm{AE}_k\mathrm{A}_k$

(AA 닮음)

$$\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{ED}}=\overline{\mathrm{AE}_k}:\overline{\mathrm{E}_k\mathrm{A}_k}$$

$$3:1=\frac{6k}{n}:\overline{\mathrm{E}_k\mathrm{A}_k}\qquad\therefore\ \overline{\mathrm{E}_k\mathrm{A}_k}=\frac{2k}{n}$$

따라서 $\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}=\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{E}_k}+\overline{\mathrm{E}_k\mathrm{A}_k}=3+\frac{2k}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}^2=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(3+\frac{2k}{n}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(3+\frac{2k}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\int_3^5 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_3^5$$

$$=\frac{125}{3}-9=\frac{98}{3}$$

답 $\frac{98}{3}$

$f(x)=x^2$, $a=3$, $b=5$로 놓으면

$\Delta x=\frac{2}{n}$, $x_k=3+\frac{2k}{n}$

이므로

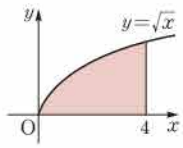
$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(3+\frac{2k}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n}$

$=\int_3^5 x^2\,dx$

26 넓이

Lecture 39 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 126쪽

1-1 (1) 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

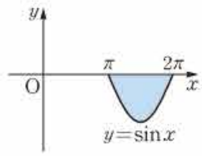


$\int_0^4 \sqrt{x}\,dx=\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

$=\frac{16}{3}$

(2) 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\int_\pi^{2\pi}(-\sin x)dx$

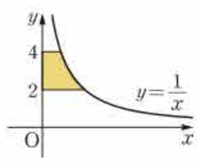
$=\left[\cos x\right]_\pi^{2\pi}$

$=1-(-1)=2$

답 (1) $\frac{16}{3}$ (2) 2

1-2 (1) $y=\frac{1}{x}$에서 $x=\frac{1}{y}$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

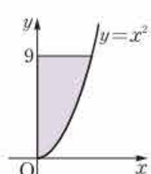


$\int_2^4 \frac{1}{y}dy=\left[\ln|y|\right]_2^4$

$=\ln 4-\ln 2=\ln 2$

(2) $y=x^2$에서 $x=\sqrt{y}$ ($\because x\ge 0$)

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\int_0^9 \sqrt{y}\,dy=\int_0^9 y^{\frac{1}{2}}dy$

$=\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^9=18$

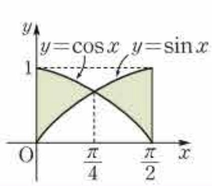
답 (1) $\ln 2$ (2) 18

2-1 (1) 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 교점의 x좌표는

$\sin x=\cos x$에서

$x=\frac{\pi}{4}\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

(2) 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx$

$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$

$=\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-2$

답 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $2\sqrt{2}-2$

Q BOX

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서

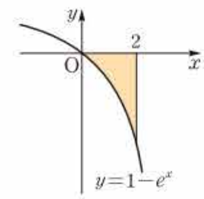
$\sin x\le\cos x$

$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$에서

$\cos x\le\sin x$

기본+표준 유형 Q+Q 127쪽

01 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\int_0^2|1-e^x|dx$

$=\int_0^2(e^x-1)dx$

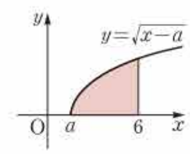
$=\left[e^x-x\right]_0^2$

$=(e^2-2)-1$

$=e^2-3$

답 ①

02 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$\int_a^6\sqrt{x-a}\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}}\right]_a^6$

$=\frac{2}{3}(6-a)^{\frac{3}{2}}$

따라서 $\frac{2}{3}(6-a)^{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}$이므로 $(6-a)^{\frac{3}{2}}=8$

$(6-a)^{\frac{3}{2}}=2^3$이므로

$6-a=2^2=4$

$6-a=4$ $\therefore a=2$

답 ③

03 $\cos x=0$에서

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

따라서 구하는 넓이는

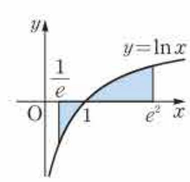
$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(-\cos x)dx$

$=\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\{1-(-1)\}=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

04 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\int_{\frac{1}{e}}^1(-\ln x)dx+\int_1^{e^2}\ln x\,dx$

$f(x)=-\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=-\frac{1}{x}$,

$g(x)=x$

$=\left[-x\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^1-\int_{\frac{1}{e}}^1(-1)dx$

$+\left[x\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}1\,dx$

$=-\frac{1}{e}+\left[x\right]_{\frac{1}{e}}^1+2e^2-\left[x\right]_1^{e^2}$

$=e^2-\frac{2}{e}+2$

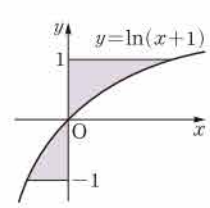
답 ③

05 $y=\ln(x+1)$에서

$x+1=e^y$

$\therefore x=e^y-1$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

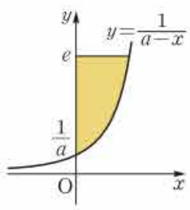


$$\int_{-1}^{1}|e^y-1|dy$$
$$=\int_{-1}^{0}(-e^y+1)dy+\int_{0}^{1}(e^y-1)dy$$
$$=\left[-e^y+y\right]_{-1}^{0}+\left[e^y-y\right]_{0}^{1}$$
$$=-1-\left(-\frac{1}{e}-1\right)+e-1-1$$
$$=e+\frac{1}{e}-2$$

답 $e+\frac{1}{e}-2$

06 $y=\frac{1}{a-x}$에서 $\quad a-x=\frac{1}{y}$

$\therefore x=a-\frac{1}{y}$



오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{\frac{1}{a}}^{e}\left(a-\frac{1}{y}\right)dy=\left[ay-\ln y\right]_{\frac{1}{a}}^{e}$$
$$=(ae-1)-(1+\ln a)$$
$$=ae-\ln a-2$$

따라서 $ae-\ln a-2=2e-\ln 2-2$이므로

$ae-\ln a=2e-\ln 2 \qquad \therefore a=2$

답 2

07 곡선 $y=\frac{2x}{x^2+1}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$\frac{2x}{x^2+1}=x$에서 $\qquad x^3+x=2x$

$x^3-x=0, \qquad x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\left(x-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\frac{2x}{x^2+1}-x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{0}+\left[\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=-\left(\frac{1}{2}-\ln 2\right)+\ln 2-\frac{1}{2}$$
$$=2\ln 2-1$$

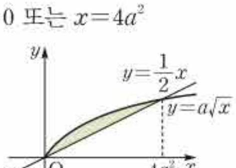
답 $2\ln 2-1$

08 곡선 $y=a\sqrt{x}$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 교점의 x좌표는

$a\sqrt{x}=\frac{1}{2}x$에서

$2a\sqrt{x}=x, \qquad 4a^2x=x^2$

$x(x-4a^2)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=4a^2$



오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{0}^{4a^2}\left(a\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)dx$$
$$=\left[\frac{2a}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^2\right]_{0}^{4a^2}$$
$$=\frac{16}{3}a^4-4a^4=\frac{4}{3}a^4$$

따라서 $\frac{4}{3}a^4=\frac{64}{3}$이므로 $\qquad a^4=16$

$\therefore a=2 \ (\because a>0)$

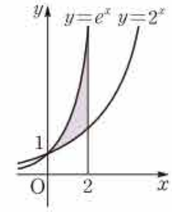
답 ③

QBOX

닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$에서 $\cos x \ge \sin x$
닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$에서 $\sin x \ge \cos x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한 후 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용하여 구한다.

09 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{2}(e^x-2^x)dx$$
$$=\left[e^x-\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{0}^{2}$$
$$=\left(e^2-\frac{4}{\ln 2}\right)-\left(1-\frac{1}{\ln 2}\right)$$
$$=e^2-\frac{3}{\ln 2}-1$$

따라서 $a=-3$, $b=-1$이므로

$a-b=-2$

답 ①

10 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\sin x$의 교점의 x좌표는 $\cos x=\sin x$에서

$x=\frac{\pi}{4} \ (\because 0\le x\le \pi)$

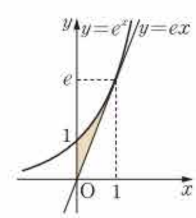
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx$$
$$=\left[\sin x+\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1+1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=2\sqrt{2}$$

답 ③

11 $y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 곡선 위의 점 $(1, e)$에서의 접선의 기울기는 e이고 접선의 방정식은

$y-e=e(x-1) \qquad \therefore y=ex$



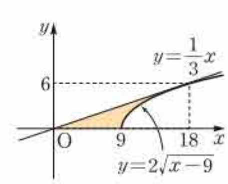
따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}(e^x-ex)dx$$
$$=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{e}{2}-1$$

답 ①

12 $y=2\sqrt{x-9}$에서

$y'=\frac{1}{\sqrt{x-9}}$



이므로 접점의 좌표를 $(t, 2\sqrt{t-9})$라 하면 접선의 기울기는 $\frac{1}{\sqrt{t-9}}$이고 접선의 방정식은

$$y-2\sqrt{t-9}=\frac{1}{\sqrt{t-9}}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-2\sqrt{t-9}=-\frac{t}{\sqrt{t-9}}$$

$2(t-9)=t \qquad \therefore t=18$

곡선 $y=2\sqrt{x-9}$ 위의 점 $(18, 6)$에서의 접선의 방정식은

$y-6=\frac{1}{3}(x-18) \qquad \therefore y=\frac{1}{3}x$

따라서 앞의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^{18}\frac{1}{3}x\,dx-\int_9^{18}2\sqrt{x-9}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{6}x^2\right]_0^{18}-\left[\frac{4}{3}(x-9)^{\frac{3}{2}}\right]_9^{18}$$

$$=54-36=18$$

답 18

QBOX

세 점 $(0,\ 0)$, $(18,\ 0)$, $(18,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 직각삼각형의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\cdot18\cdot6=54$

와 같이 구할 수도 있다.

쌤 한마디

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(x_1,\ y_1)$에서 곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같이 구한다.

(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 한다.
(ii) 접선의 기울기 $f'(t)$를 구한다.
(iii) 직선 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$가 점 $(x_1,\ y_1)$을 지남을 이용하여 t의 값을 구한다.
(iv) t의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 대입한다.

13 $\int_0^k(\sqrt{x}-x)dx=0$이므로

$$\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^k=0,\qquad \frac{2}{3}k\sqrt{k}-\frac{1}{2}k^2=0$$

$$k\sqrt{k}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)=0$$

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{k}=0\ (\because k>1)$$

$$\sqrt{k}=\frac{4}{3}\qquad \therefore k=\frac{16}{9}$$

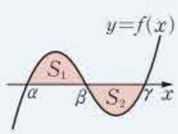
답 $\frac{16}{9}$

쌤 한마디

두 도형의 넓이가 같을 조건

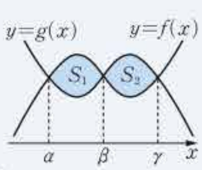
① 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx=0$$



② 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면

$$\int_\alpha^\gamma\{f(x)-g(x)\}dx=0$$



14 $\int_0^\pi\{\sin x-k(x-\pi)\}dx=0$이므로

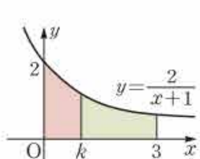
$$\left[-\cos x-\frac{k}{2}x^2+k\pi x\right]_0^\pi=0$$

$$1-\frac{k\pi^2}{2}+k\pi^2-(-1)=0,\qquad \frac{k\pi^2}{2}=-2$$

$$\therefore k=-\frac{4}{\pi^2}$$

답 $-\frac{4}{\pi^2}$

15 오른쪽 그림에서 곡선 $y=\frac{2}{x+1}$와 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_0^3\frac{2}{x+1}dx$$

$$=\Big[2\ln|x+1|\Big]_0^3$$

$$=4\ln2$$

곡선 $y=\frac{2}{x+1}$와 x축, y축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^k\frac{2}{x+1}dx=\Big[2\ln|x+1|\Big]_0^k$$

$$=2\ln(k+1)\ (\because k+1>0)$$

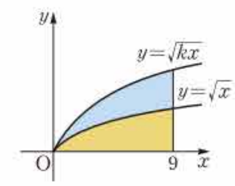
이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$$2\ln(k+1)=2\ln2,\qquad \ln(k+1)=\ln2$$

$$k+1=2\qquad \therefore k=1$$

답 ④

16 오른쪽 그림에서 곡선 $y=\sqrt{kx}$와 x축 및 직선 $x=9$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_0^9\sqrt{kx}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3k}(kx)^{\frac{3}{2}}\right]_0^9$$

$$=18\sqrt{k}$$

곡선 $y=\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=9$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^9\sqrt{x}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9=18$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$$18=9\sqrt{k},\qquad \sqrt{k}=2$$

$$\therefore k=4$$

답 ③

다른 풀이 $S_2=\int_0^9\sqrt{x}\,dx$이므로

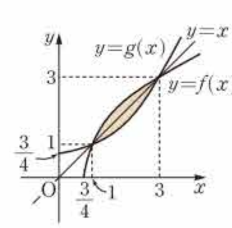
$$S_1=\int_0^9\sqrt{kx}\,dx=\sqrt{k}\int_0^9\sqrt{x}\,dx=\sqrt{k}\,S_2$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로 $\qquad S_2=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}\,S_2$

$$1=\frac{1}{2}\sqrt{k}\qquad \therefore k=4$$

S_1, S_2를 각각 식으로 나타낸 후 정적분의 성질을 이용한다.

17 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉 $\sqrt{4x-3}=x$에서 $\qquad 4x-3=x^2$

$$x^2-4x+3=0,\qquad (x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=1\ \text{또는}\ x=3$$

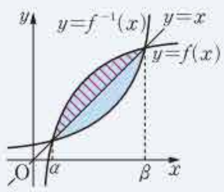
이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_1^3(\sqrt{4x-3}-x)dx=2\left[\frac{1}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$
$$=2\left\{-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{2}{3}$$

답 ②

쌤 한마디

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 α, β일 때, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

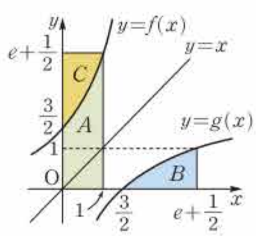


$$S=\int_\alpha^\beta|f(x)-f^{-1}(x)|dx$$
$$=2\int_\alpha^\beta|f(x)-x|dx$$

18 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(0)=\frac{3}{2}$, $f(1)=e+\frac{1}{2}$이므로

$$g\left(\frac{3}{2}\right)=0,\ g\left(e+\frac{1}{2}\right)=1$$

따라서 오른쪽 그림과 같이 $\int_0^1 f(x)dx=A$, $\int_{\frac{3}{2}}^{e+\frac{1}{2}} g(x)dx=B$라 하고, 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=e+\frac{1}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 C라 하면 $B=C$이므로



$$\int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{e+\frac{1}{2}} g(x)dx$$
$$=A+B=A+C$$
$$=1\cdot\left(e+\frac{1}{2}\right)=e+\frac{1}{2}$$

답 $e+\frac{1}{2}$

27 부피

Lecture 40 입체도형의 부피 130쪽

1-1 (1) 단면의 넓이가 $4x^2+3$이므로 구하는 부피는

$$\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3(4x^2+3)dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^3+3x\right]_0^3=45$$

(2) 단면의 넓이가 e^x+4이므로 구하는 부피는

$$\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3(e^x+4)dx$$
$$=\left[e^x+4x\right]_0^3=e^3+11$$

답 (1) 45 (2) e^3+11

Q BOX

1-2 $\int_0^3\sqrt{x+1}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$

$$=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}\,(\text{cm}^3)$$

답 $\frac{14}{3}$ cm³

1-3 답 (가) $\frac{\sqrt{3}}{4}\sin x$ (나) π (다) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_0^\pi\frac{\sqrt{3}}{4}\sin x\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[-\cos x\right]_0^\pi$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\{1-(-1)\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

기본+표준 유형 Q+Q 131쪽

01 $\int_0^4\frac{3x+4}{x+1}dx=\int_0^4\left(3+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$=\left[3x+\ln|x+1|\right]_0^4$$
$$=12+\ln 5\,(\text{cm}^3)$$

답 ③

밑면으로부터의 높이가 x인 곳에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형에서 밑면으로부터의 높이가 a일 때의 부피는

$$\int_0^a S(x)dx$$

02 물의 높이가 x일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

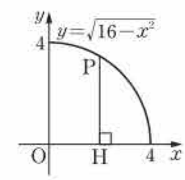
$$S(x)=(\sqrt{3x^2+16})^2=3x^2+16$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^5 S(x)\,dx=\int_0^5(3x^2+16)dx$$
$$=\left[x^3+16x\right]_0^5=205$$

답 205

03 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{16-x^2}$ 위의 점 $\text{P}(x,\sqrt{16-x^2})$ $(0\le x\le 4)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{\text{PH}}=\sqrt{16-x^2}$$

이때 점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\overline{\text{PH}}^2=16-x^2$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^4 S(x)dx=\int_0^4(16-x^2)dx$$
$$=\left[16x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^4=\frac{128}{3}$$

답 $\frac{128}{3}$

밑면에 대한 도형의 방정식이 주어진 입체도형의 부피는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 밑면을 좌표평면 위에 나타낸 후 입체도형을 밑면에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 식으로 나타낸다.
(ii) 주어진 조건을 만족시키는 구간에서 적분한다.

04 점 P의 x좌표를 x $(0\le x\le 3)$라 하면 $\overline{\text{PH}}=2e^x$이므로 $\overline{\text{PH}}$를 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{\text{PH}}=\frac{1}{2}\cdot 2e^x=e^x$$

이때 점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\overline{\text{PH}}\right)^2=\frac{\pi}{2}\cdot(e^x)^2=\frac{\pi}{2}e^{2x}$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^3 S(x)\,dx=\int_0^3\frac{\pi}{2}e^{2x}dx=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^3$$
$$=\frac{\pi}{4}(e^6-1)$$

답 ②

28 속도와 거리

Lecture 41 속도와 거리

132쪽

1-1 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로

(1) $\int_0^{\pi} \cos\frac{t}{2}\,dt=\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=2$

(2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{t}{2}\,dt=\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2-\sqrt{2}$

(3) $\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}\left(-\cos\frac{t}{2}\right)dt$

$=\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}+\left[-2\sin\frac{t}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}$

$=2+2=4$

답 (1) 2 (2) $2-\sqrt{2}$ (3) 4

2-1 (1) $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=4t$이므로

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(2t)^2+(4t)^2=20t^2$

따라서 구하는 거리는

$\int_0^1\sqrt{20t^2}\,dt=\int_0^1 2\sqrt{5}t\,dt=\left[\sqrt{5}t^2\right]_0^1=\sqrt{5}$

(2) $\frac{dx}{dt}=1-t$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{t}$이므로

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(1-t)^2+(2\sqrt{t})^2$

$=t^2+2t+1=(t+1)^2$

따라서 구하는 거리는

$\int_0^1\sqrt{(t+1)^2}\,dt=\int_0^1(t+1)dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^1=\frac{3}{2}$

답 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\frac{3}{2}$

3-1 (1) $\frac{dx}{dt}=2\sqrt{3}t$, $\frac{dy}{dt}=t^2-3$이므로 구하는 곡선의 길이는

$\int_1^4\sqrt{(2\sqrt{3}t)^2+(t^2-3)^2}\,dt$

$=\int_1^4\sqrt{t^4+6t^2+9}\,dt$

$=\int_1^4\sqrt{(t^2+3)^2}\,dt$

$=\int_1^4(t^2+3)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+3t\right]_1^4$

$=\frac{100}{3}-\frac{10}{3}=30$

(2) $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$이므로 구하는 곡선의 길이는

$\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=\int_0^{\pi}1\,dt=\left[t\right]_0^{\pi}=\pi$

답 (1) 30 (2) π

Q BOX

$|e-e^t|$
$=\begin{cases} e-e^t & (0\le t\le 1) \\ -e+e^t & (1\le t\le 2)\end{cases}$

$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & 1 & -10 \\ & & 2 & 4 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 0 \end{array}$

a^2+2a+5
$=(a+1)^2+4>0$

기본+표준 유형 Q+Q

133쪽

01 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^2|e-e^t|dt=\int_0^1(e-e^t)dt+\int_1^2(-e+e^t)dt$

$=\left[et-e^t\right]_0^1+\left[-et+e^t\right]_1^2$

$=e^2-2e+1=(e-1)^2$

답 ①

02 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로 $t=a\,(0<a\le 9)$에서의 점 P의 위치는

$\int_0^a\sin\pi t\,dt=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^a=\frac{1}{\pi}(1-\cos\pi a)$

점 P가 원점을 지나려면

$\frac{1}{\pi}(1-\cos\pi a)=0,\quad \cos\pi a=1$

$\therefore a=2, 4, 6, 8\ (\because 0<a\le 9)$

따라서 점 P는 원점을 4번 지난다.

답 4

03 $\frac{dx}{dt}=\cos t-t\sin t-\cos t=-t\sin t$,

$\frac{dy}{dt}=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t$이므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^2\sqrt{(-t\sin t)^2+(t\cos t)^2}\,dt$

$=\int_0^2\sqrt{t^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt$

$=\int_0^2 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=2$

답 ③

04 $\frac{dx}{dt}=3t^2-1$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{3}t$

이때 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리가 10이므로

$\int_0^a\sqrt{(3t^2-1)^2+(2\sqrt{3}t)^2}\,dt=10$

$\int_0^a\sqrt{9t^4+6t^2+1}\,dt=10$

$\int_0^a\sqrt{(3t^2+1)^2}\,dt=10,\quad \int_0^a(3t^2+1)dt=10$

$\left[t^3+t\right]_0^a=10,\quad a^3+a=10$

$a^3+a-10=0,\quad (a-2)(a^2+2a+5)=0$

$\therefore a=2\ (\because a^2+2a+5>0)$

답 2

05 $\frac{dx}{dt}=\sqrt{2}e^t\sin t+\sqrt{2}e^t\cos t=\sqrt{2}e^t(\sin t+\cos t)$

$\frac{dy}{dt}=\sqrt{2}e^t\cos t-\sqrt{2}e^t\sin t=\sqrt{2}e^t(\cos t-\sin t)$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$\int_0^2\sqrt{2e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+2e^{2t}(\cos t-\sin t)^2}\,dt$

$=\int_0^2\sqrt{4e^{2t}}\,dt=\int_0^2 2e^t\,dt\ (\because e^t>0)$

$=2\left[e^t\right]_0^2=2(e^2-1)$

답 ②

06 $y=\frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}=\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$이므로

$$y'=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=2x\sqrt{x^2+1}$$

따라서 주어진 곡선의 길이는

$$\int_1^a \sqrt{1+(2x\sqrt{x^2+1})^2}\,dx=\int_1^a \sqrt{4x^4+4x^2+1}\,dx$$
$$=\int_1^a \sqrt{(2x^2+1)^2}\,dx$$
$$=\int_1^a (2x^2+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3+x\right]_1^a$$
$$=\frac{2}{3}a^3+a-\frac{5}{3}$$

즉 $\frac{2}{3}a^3+a-\frac{5}{3}=45$에서 $\quad 2a^3+3a-140=0$

$$(a-4)(2a^2+8a+35)=0$$
$$\therefore a=4\ (\because \underline{2a^2+8a+35>0})$$

답 4

$2a^2+8a+35$
$=2(a+2)^2+27>0$

중단원 마무리

L 134쪽

01 전략 정적분과 급수의 관계를 이용한다.

풀이 $a=1$, $b=4$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{3}{n},\ x_k=1+\frac{3k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n}f'\left(1+\frac{3k}{n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f'\left(1+\frac{3k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}$$
$$=2\int_1^4 f'(x)\,dx$$
$$=2\Big[3\sqrt{x}\Big]_1^4=6$$

답 6

02 전략 주어진 합의 꼴을 Σ를 이용하여 나타낸 후 정적분과 급수의 관계를 이용한다.

풀이 (주어진 식) $=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2n}{n+2k}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{1+\frac{2k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}}\cdot\frac{2}{n}$$

이때 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $a=1$, $b=3$으로 놓으면

$$\Delta x=\frac{2}{n},\ x_k=1+\frac{2k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}}\cdot\frac{2}{n}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^3 f(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^3\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^3=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

03 전략 정적분과 급수의 관계를 이용한다.

풀이 부채꼴 OAB의 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이고, 호 AB를 $2n$ 등분하였으므로

$$\angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{OP}_n=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n}$$
$$\therefore \angle \mathrm{P}_{n-k}\mathrm{OP}_{n+k}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n}\cdot 2k=\frac{k\pi}{2n}$$

$\triangle \mathrm{OP}_{n-k}\mathrm{P}_{n+k}$의 두 변의 길이는 모두 1이고 그 끼인각의 크기가 $\frac{k\pi}{2n}$이므로

$$\underline{S_k=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{k\pi}{2n}}=\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}$$

삼각형의 넓이
두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이는
$\frac{1}{2}ab\sin\theta$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}$$
$$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}$$

이때 $f(x)=\sin x$, $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{\pi}{2n},\ x_k=\frac{k\pi}{2n}$$

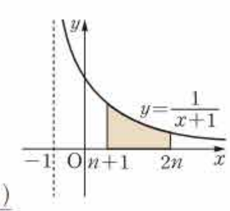
따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{\pi}$$

답 ①

04 전략 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x)|\,dx$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림에서



$$a_n=\int_{n+1}^{2n}\frac{1}{x+1}\,dx$$
$$=\Big[\ln|x+1|\Big]_{n+1}^{2n}$$
$$=\underline{\ln(2n+1)-\ln(n+2)}$$
$$=\ln\frac{2n+1}{n+2}$$

$n>1$인 자연수이므로
$2n+1>0,\ n+2>0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n+2}$$
$$=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}\right)$$
$$=\ln 2$$

답 $\ln 2$

05 전략 곡선 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이는 $f(x)\ge 0$인 구간과 $f(x)\le 0$인 구간으로 나누어 구한다.

풀이 A, B의 넓이가 각각 4, 8이므로

$$\int_0^4 f(x)\,dx=4,\ \int_4^9 f(x)\,dx=-8$$

$\int_0^3 xf(x^2)\,dx$에서 $x^2=t$로 놓으면 $\quad 2x=\frac{dt}{dx}$

또한 $x=0$일 때 $t=0$, $x=3$일 때 $t=9$이므로

$$\int_0^3 xf(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^9 f(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^4 f(t)\,dt+\int_4^9 f(t)\,dt\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(4-8)=-2$$

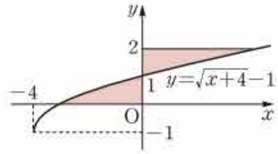
답 ②

06 전략 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_c^d |g(y)|dy$임을 이용한다.

풀이 $y=\sqrt{x+4}-1$에서 $\quad y+1=\sqrt{x+4}$

$x+4=(y+1)^2 \qquad \therefore x=y^2+2y-3$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^1(-y^2-2y+3)dy+\int_1^2(y^2+2y-3)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3-y^2+3y\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}y^3+y^2-3y\right]_1^2$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)=4$$

답 4

07 전략 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정하고, 그 구간 안에서 곡선과 직선의 위치 관계를 파악하여 정적분의 값을 구한다.

풀이 곡선 $y=\sqrt{x+2}$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는 $\sqrt{x+2}=-x$에서

$x+2=x^2, \qquad x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1 \ (\because x\le 0)$

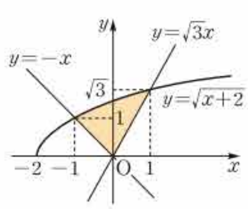
곡선 $y=\sqrt{x+2}$와 직선 $y=\sqrt{3}x$의 교점의 x좌표는 $\sqrt{x+2}=\sqrt{3}x$에서

$x+2=3x^2, \qquad 3x^2-x-2=0$

$(3x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=1 \ (\because x\ge 0)$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{-1}^0\{\sqrt{x+2}-(-x)\}dx+\int_0^1(\sqrt{x+2}-\sqrt{3}x)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\left\{\frac{4\sqrt{2}}{3}-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\right\}+\left\{\left(2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right\}$$

$$=-\frac{7}{6}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $a=-\frac{7}{6}$, $b=\frac{3}{2}$이므로

$a+b=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

08 전략 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정하고, 그 구간 안에서 곡선과 직선의 위치 관계를 파악하여 정적분의 값을 구한다.

풀이 곡선 $y=\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$과 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 교점의 x좌표는 $\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}=\frac{3}{4}x$에서

$4xe^{x^2}=3xe^{x^2}+3x, \qquad x(e^{x^2}-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{\ln 3}$

QBOX

$e^{x^2}=3$에서

$\ln e^{x^2}=\ln 3$, 즉

$x^2=\ln 3$

$\therefore x=\pm\sqrt{\ln 3}$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{-\sqrt{\ln 3}}^{\sqrt{\ln 3}}\left|\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}-\frac{3}{4}x\right|dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{\ln 3}}\left(\frac{3}{4}x-\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\right)dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{\ln 3}}\frac{3}{2}x\,dx-\int_0^{\sqrt{\ln 3}}\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}x^2\right]_0^{\sqrt{\ln 3}}-\int_0^{\sqrt{\ln 3}}\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx$$

$$=\frac{3}{4}\ln 3-\int_0^{\sqrt{\ln 3}}\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx$$

이때 $e^{x^2}+1=t$로 놓으면 $\qquad 2xe^{x^2}=\frac{dt}{dx}$

또한 $x=0$일 때 $t=2$, $x=\sqrt{\ln 3}$일 때 $t=4$이므로

$$\frac{3}{4}\ln 3-\int_0^{\sqrt{\ln 3}}\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx$$

$$=\frac{3}{4}\ln 3-\int_2^4\frac{1}{t}dt=\frac{3}{4}\ln 3-\Big[\ln t\Big]_2^4$$

$$=\frac{3}{4}\ln 3-(\ln 4-\ln 2)=\frac{3}{4}\ln 3-\ln 2$$

따라서 $a=-1$, $b=\frac{3}{4}$이므로

$a+b=-\frac{1}{4}$

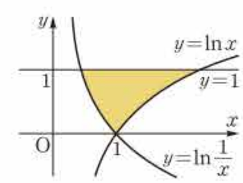
답 $-\frac{1}{4}$

09 전략 두 곡선의 위치 관계를 파악하여 두 곡선 사이의 넓이를 구한다.

풀이 $y=\ln x$에서 $\qquad x=e^y$

$y=\ln\frac{1}{x}$에서 $\qquad \frac{1}{x}=e^y \qquad \therefore x=e^{-y}$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^1(e^y-e^{-y})dy$$

$0<y<1$에서 $e^y>e^{-y}$

$$=\Big[e^y+e^{-y}\Big]_0^1$$

$$=e+\frac{1}{e}-2$$

답 ①

10 전략 점 P의 x좌표를 이용하여 a의 값을 구한 후 두 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

풀이 두 함수 $f(x)=ax^2\,(a>0)$, $g(x)=\ln x$의 그래프가 한 점 P에서 만나므로 점 P의 x좌표를 t라 하면

$at^2=\ln t \qquad \cdots\cdots ㉠$

두 곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(x)=2ax$, $g'(x)=\frac{1}{x}$에서

$2at=\frac{1}{t} \qquad \therefore at^2=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$

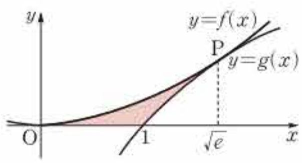
㉠, ㉡에서 $\qquad \ln t=\frac{1}{2}$

$\therefore t=\sqrt{e}$

$t=\sqrt{e}$를 ㉡에 대입하면

$ae=\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{1}{2e}$

$f(x)=\frac{x^2}{2e}$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{e}}\frac{x^2}{2e}dx-\int_1^{\sqrt{e}}\ln x\,dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{6e}\right]_0^{\sqrt{e}}-\left(\left[x\ln x\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}1\,dx\right)$$
$$=\frac{\sqrt{e}}{6}-\frac{\sqrt{e}}{2}+\left[x\right]_1^{\sqrt{e}}$$
$$=\frac{\sqrt{e}}{6}-\frac{\sqrt{e}}{2}+\sqrt{e}-1$$
$$=\frac{2\sqrt{e}-3}{3}$$

답 ②

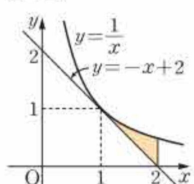
곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=\sqrt{e}$로 둘러싸인 부분의 넓이에서 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=\sqrt{e}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 것과 같다.

11 전략 접선의 방정식을 구한 후 곡선과 접선의 위치 관계를 파악하여 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

풀이 $y=\frac{1}{x}$에서 $y'=-\frac{1}{x^2}$이므로 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 -1이고 접선의 방정식은

$y-1=-(x-1)$ $\quad\therefore\ y=-x+2$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_1^2\left\{\frac{1}{x}-(-x+2)\right\}dx$$
$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx$$
$$=\left[\ln x+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^2$$
$$=\ln 2-2-\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\ln 2-\frac{1}{2}$$

답 ①

12 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으면 $\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\int_0^1\{e^{2x}-(-2x+a)\}dx=0$이므로

$\left[\frac{1}{2}e^{2x}+x^2-ax\right]_0^1=0,\qquad \frac{1}{2}e^2+1-a-\frac{1}{2}=0$

$\therefore\ a=\frac{e^2+1}{2}$

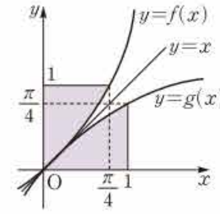
답 ①

13 전략 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 $x=0$인 점에서 접하고, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\tan x$에서 $f(0)=0$이고, $f'(x)=\sec^2 x$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=1$이고 접선의 방정식은

$y=x$

또 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 $\int_0^1 g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\int_0^1 g(x)dx$$
$$=\frac{\pi}{4}\cdot 1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$$
$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$$
$$=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=\frac{\pi}{4}+\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

답 ①

14 전략 물의 깊이가 x일 때 수면의 넓이가 $S(x)$이면 물의 부피는 $\int_0^x S(x)dx$임을 이용한다.

풀이 물의 깊이가 x일 때, 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\pi(\sqrt{2x+3})^2=\pi(2x+3)$ ···· ❶

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^9 S(x)dx=\int_0^9\pi(2x+3)dx$$
$$=\pi\left[x^2+3x\right]_0^9=108\pi \quad ····\ ❷$$

답 108π

단계	채점 기준	비율
❶	$S(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷	부피를 구할 수 있다.	50 %

15 전략 입체도형의 단면의 넓이를 식으로 나타낸 후 적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구한다.

풀이 x좌표가 $t\ (0\le t\le k)$일 때의 단면인 정사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\left(\sqrt{\frac{e^t}{e^t+1}}\right)^2=\frac{e^t}{e^t+1}$$

따라서 주어진 입체도형의 부피는

$$\int_0^k S(t)dt=\int_0^k\frac{e^t}{e^t+1}dt$$

이때 $e^t+1=s$로 놓으면 $\quad\frac{ds}{dt}=e^t$

또 $t=0$일 때 $s=2$, $t=k$일 때 $s=e^k+1$이므로

$$\int_0^k\frac{e^t}{e^t+1}dt=\int_2^{e^k+1}\frac{1}{s}ds=\left[\ln|s|\right]_2^{e^k+1}$$
$$=\ln(e^k+1)-\ln 2$$
$$=\ln\frac{e^k+1}{2}$$

즉 $\ln\frac{e^k+1}{2}=\ln 7$이므로 $\quad\frac{e^k+1}{2}=7$

$e^k=13\qquad\therefore\ k=\ln 13$

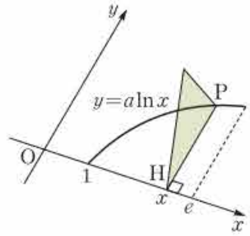
답 ②

16 전략 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피는 $\int_a^b S(x)dx$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P의 x좌표를 $x\,(1\le x\le e)$라 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=a\ln x$

이때 $\overline{\mathrm{PH}}$를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$라 하면



$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{PH}}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(\ln x)^2 \quad \cdots ❶$$

따라서 주어진 입체도형의 부피는

$$\int_1^e S(x)dx=\int_1^e \frac{\sqrt{3}}{4}a^2(\ln x)^2dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left\{\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-\int_1^e 2\ln x\,dx\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left\{e-2\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e 1\,dx\right)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left\{e-2\left(e-\left[x\right]_1^e\right)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(e-2) \quad \cdots ❷$$

$f(x)=(\ln x)^2,\ g'(x)=1$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$, $g(x)=x$

즉 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2(e-2)=4\sqrt{3}(e-2)$이므로 $\quad a^2=16$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a>0) \quad \cdots ❸$

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	$S(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷	입체도형의 부피를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸	a의 값을 구할 수 있다.	10 %

17 전략 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 구한 후 t에 대한 방정식을 세운다.

풀이 점 P의 시각 t에서의 위치를 x_1이라 하면

$$x_1=\int_0^t(t^2-6t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2\right]_0^t$$
$$=\frac{1}{3}t^3-3t^2$$

점 Q의 시각 t에서의 위치를 x_2라 하면

$$x_2=\int_0^t(-t^2+2t)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^t$$
$$=-\frac{1}{3}t^3+t^2$$

$x_1=x_2$에서 $\quad \dfrac{1}{3}t^3-3t^2=-\dfrac{1}{3}t^3+t^2$

$\dfrac{2}{3}t^3-4t^2=0,\quad \dfrac{2}{3}t^2(t-6)=0$

$\therefore\ t=6\ (\because\ t>0)$

따라서 다시 만나는 시각은 $t=6$이므로 구하는 두 점의 위치는

$\dfrac{1}{3}\cdot 6^3-3\cdot 6^2=-36$ 답 -36

점 Q의 위치에 $t=6$을 대입하면 $-\dfrac{1}{3}\cdot 6^3+6^2=-36$

18 전략 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=f(t),\ y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\dfrac{dx}{dt}=1-2\sin t,\ \dfrac{dy}{dt}=\sqrt{3}\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(1-2\sin t,\ \sqrt{3}\cos t)$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{2}$일 때, 점 P의 속도는

$\left(1-2\sin\dfrac{\pi}{2},\ \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ 0)$

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 속도의 크기는

(속도의 크기)=(속력)

$$\sqrt{(1-2\sin t)^2+(\sqrt{3}\cos t)^2}$$
$$=\sqrt{4\sin^2 t-4\sin t+1+3\cos^2 t}$$
$$=\sqrt{3(\sin^2 t+\cos^2 t)+\sin^2 t-4\sin t+1}$$
$$=\sqrt{\sin^2 t-4\sin t+4}$$
$$=\sqrt{(\sin t-2)^2}$$
$$=|\sin t-2|$$

$0\le t\le 2\pi$에서 $-1\le\sin t\le 1$이므로

$-3\le\sin t-2\le -1 \quad \therefore\ 1\le|\sin t-2|\le 3$

따라서 점 P의 속도의 크기의 최솟값은 1이다.

ㄷ. 점 P가 $t=\pi$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리는

$$\int_\pi^{2\pi}\sqrt{(1-2\sin t)^2+(\sqrt{3}\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_\pi^{2\pi}|\sin t-2|dt=\int_\pi^{2\pi}(2-\sin t)dt$$
$$=\left[2t+\cos t\right]_\pi^{2\pi}=4\pi+1-(2\pi-1)$$
$$=2\pi+2$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

19 전략 곡선 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$의 길이는 $\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$임을 이용한다.

풀이 $y=\dfrac{1}{3}x\sqrt{x}=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$이므로

$$y'=\frac{\sqrt{x}}{2}$$

따라서 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^{12}\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{12}\sqrt{1+\frac{x}{4}}\,dx$$

이때 $\sqrt{1+\dfrac{x}{4}}=t$로 놓으면 $1+\dfrac{x}{4}=t^2$에서

$$2t\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{4}$$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=12$일 때 $t=2$이므로

$$l=\int_1^2 8t^2dt=\left[\frac{8}{3}t^3\right]_1^2=\frac{56}{3}$$

$\therefore\ 3l=3\cdot\dfrac{56}{3}=56$ 답 56

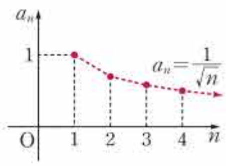
Work Book

01 수열의 극한

01 수열의 극한 W 2쪽

01 (1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$

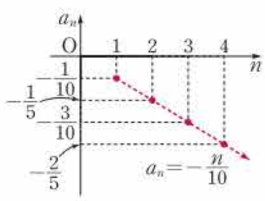


오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=-\frac{n}{10}$

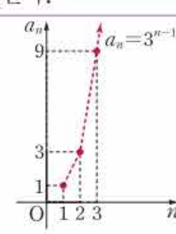


오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$

(3) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=3^{n-1}$

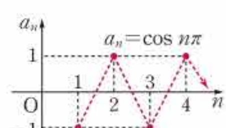


오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

(4) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\cos n\pi$



오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 이 수열은 진동한다.

답 (1) 수렴, 0
(2) 음의 무한대로 발산
(3) 양의 무한대로 발산
(4) 발산(진동)

02 (1) $\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}2=3-2=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}(2a_n-3b_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n-3\lim_{n\to\infty}b_n$

$=2\cdot 3-3\cdot(-1)=9$

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여
$\lim_{n\to\infty}(ka_n+lb_n)$
$=\lim_{n\to\infty}ka_n+\lim_{n\to\infty}lb_n$
$=k\lim_{n\to\infty}a_n+l\lim_{n\to\infty}b_n$
(단, k, l은 상수)

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n^2)=\lim_{n\to\infty}a_n+\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right)^2$

$=3+(-1)^2=4$

$\lim_{n\to\infty}b_n^2=\lim_{n\to\infty}b_nb_n$
$=\lim_{n\to\infty}b_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$
$=\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right)^2$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{3b_n}=\frac{5\lim_{n\to\infty}a_n}{3\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{5\cdot 3}{3\cdot(-1)}=-5$

답 (1) 1 (2) 9 (3) 4 (4) -5

03 (1) $\lim_{n\to\infty}(a_n-3b_n)=8$에서

$\lim_{n\to\infty}a_n-3\lim_{n\to\infty}b_n=8$, $\quad 2-3\lim_{n\to\infty}b_n=8$

$3\lim_{n\to\infty}b_n=-6 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}b_n=-2$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n-5)=-3$에서

$\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}5=-3$

$2\lim_{n\to\infty}b_n-5=-3$, $\quad 2\lim_{n\to\infty}b_n=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=1$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+1}{a_n^2}=1$에서

$\frac{\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}1}{\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^2}=1$, $\quad \frac{\lim_{n\to\infty}b_n+1}{4}=1$

$\lim_{n\to\infty}b_n+1=4 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}b_n=3$

답 (1) -2 (2) 1 (3) 3

04 ㄱ. n의 값이 한없이 커지면 $1+\frac{1}{n^2}$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 1에 수렴한다.

ㄴ. n의 값이 한없이 커지면 $\frac{n^2}{n+1}$의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

ㄷ. n의 값이 한없이 커지면 $-\frac{n}{n+1}$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 -1에 수렴한다.

ㄹ. n의 값이 한없이 커지면 $2+(-2)^n$의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

0, 6, -6, 18, -30, 66, -126, $\cdots$

이상에서 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄷ의 2개, 양의 무한대로 발산하는 수열은 ㄴ의 1개이므로

$a=2$, $b=1 \quad \therefore a+b=3$

답 3

05 수열 $\left\{\frac{2}{3n+10}\right\}$에서 n의 값이 한없이 커지면 $\frac{2}{3n+10}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 0에 수렴한다.

$\therefore a=0$

$\frac{(-1)^n-3n}{n}=\frac{(-1)^n}{n}-3$이므로 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 $\frac{(-1)^n}{n}-3$에 차례로 대입하면

$-1-3,\ \frac{1}{2}-3,\ -\frac{1}{3}-3,\ \frac{1}{4}-3,\ \cdots$

따라서 n의 값이 한없이 커지면 $\frac{(-1)^n-3n}{n}$의 값은 -3에 한없이 가까워지므로 -3에 수렴한다.

$\therefore b=-3$

$\therefore a-b=3$

답 ⑤

06 ㄱ. n의 값이 한없이 커지면 $\sqrt{\frac{2n+1}{n+2}}$의 값은 $\sqrt{2}$에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 $\sqrt{2}$에 수렴한다.

ㄴ. n의 값이 한없이 커지면 $(-1)^n \cdot n$의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

ㄷ. $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 $\cos 2n\pi$에 차례로 대입하면

$1, 1, 1, 1, \cdots$

따라서 n의 값이 한없이 커지면 $\cos 2n\pi$의 값은 항상 1이므로 주어진 수열은 1에 수렴한다.

ㄹ. $\log \frac{1}{n}=-\log n$이므로 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 $-\log n$에 차례로 대입하면

$0, -\log 2, -\log 3, -\log 4, \cdots$

따라서 n의 값이 한없이 커지면 $\log \frac{1}{n}$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

이상에서 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

07 $\lim_{n\to\infty}(2a_n-1)=3$에서 $2\lim_{n\to\infty}a_n-1=3$

$2\lim_{n\to\infty}a_n=4$ $\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n(3a_n+1)=\lim_{n\to\infty}a_n(3\lim_{n\to\infty}a_n+1)$

$=2\cdot(3\cdot2+1)=14$ 답 ③

08 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4}=2$에서 $\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}a_n=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=8$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-1}{3b_n}=-1$에서 $\frac{2\lim_{n\to\infty}a_n-1}{3\lim_{n\to\infty}b_n}=-1$

$\frac{2\cdot8-1}{3\lim_{n\to\infty}b_n}=-1$, $3\lim_{n\to\infty}b_n=-15$

$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=-5$ 답 -5

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-1}{3b_n}=-1$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{4}\cdot8-1}{3b_n}=-1$, $\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4}\cdot8-1}{3\lim_{n\to\infty}b_n}=-1$

$\frac{2\cdot8-1}{3\lim_{n\to\infty}b_n}=-1$ $\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=-5$

09 $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)=4$에서

$2\lim_{n\to\infty}a_n+3\lim_{n\to\infty}b_n=4$ ······ ㉠

$\lim_{n\to\infty}(4a_n-b_n)=-6$에서

$4\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=-6$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\lim_{n\to\infty}a_n=-1$, $\lim_{n\to\infty}b_n=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=-1\cdot2=-2$

답 ②

Q BOX

$\sqrt{\frac{3}{3}}, \sqrt{\frac{5}{4}}, \sqrt{\frac{7}{5}}, \sqrt{\frac{9}{6}}, \cdots$

$-1, 2, -3, 4, \cdots$

n의 값이 한없이 커지면 $2-\frac{1}{n^2}$의 값은 2에 한없이 가까워진다.

n의 값이 한없이 커지면 $\frac{1}{(n+1)(n+2)}-3$의 값은 -3에 한없이 가까워진다.

$\alpha=-2$를 ㉠에 대입하면 (좌변)$=-2$, (우변)$=2$

$\{a_{n+3}\}$: $0, 1, 2, 0, 1, 2, \cdots$

$-2\times$㉠$+$㉡을 하면 $-7\lim_{n\to\infty}b_n=-14$ $\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=2$

㉠에서 $2\lim_{n\to\infty}a_n+6=4$ $\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=-1$

10 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2$,

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}-3\right\}=-3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+1)(b_n+2)$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+1)\lim_{n\to\infty}(b_n+2)$

$=(2+1)\cdot(-3+2)=-3$ 답 -3

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n^2}\right)=3$,

$\lim_{n\to\infty}(b_n+2)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}-1\right\}=-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+1)(b_n+2)$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+1)\lim_{n\to\infty}(b_n+2)$

$=3\cdot(-1)=-3$

11 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\frac{2}{3}$

$\therefore 3\lim_{n\to\infty}a_{n-1}-\lim_{n\to\infty}a_{n+1}+4\lim_{n\to\infty}a_{2n}$

$=(3-1+4)\cdot\frac{2}{3}=4$ 답 4

12 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$a_{n+1}=\sqrt{3a_n+10}$에서 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3a_n+10}$

$\alpha=\sqrt{3\alpha+10}$ ······ ㉠

양변을 제곱하면 $\alpha^2=3\alpha+10$

$\alpha^2-3\alpha-10=0$, $(\alpha+2)(\alpha-5)=0$

$\therefore \alpha=-2$ 또는 $\alpha=5$

이때 $\alpha=-2$는 ㉠을 만족시키지 않으므로 $\alpha=5$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n^2=\alpha^2=25$ 답 ④

13 ㄱ, ㄴ. [반례] 수열 $\{a_n\}$을

$0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \cdots$

라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{3n}=2$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_{n+3}$은 발산(진동)한다.

또 $\lim_{n\to\infty}a_{3n+1}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_{3n+1}\neq\lim_{n\to\infty}a_{3n}$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_{3n}=\alpha$에서 n 대신 $n+1$을 대입하면

$\lim_{n\to\infty}a_{3(n+1)}=\alpha$

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}a_{3n}=\alpha$에서 n 대신 $2n$을 대입하면

$\lim_{n\to\infty}a_{6n}=\alpha$

이상에서 반드시 α로 수렴하는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

02 수열의 극한값의 계산 W 4쪽

01 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+1}{2n^2-n+10}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{10}{n^2}}=3$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-2}{1-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3-\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}-1}=-\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}$

$=\frac{4}{1+1}=2$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{3n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}{3}$

$=\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$

답 (1) 수렴, 3 (2) 발산 (3) 수렴, 2 (4) 수렴, $\frac{2}{3}$

02 $10-\frac{1}{n}\le a_n\le 10+\frac{1}{n}$에서

$\lim_{n\to\infty}\left(10-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(10+\frac{1}{n}\right)=10$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=10$ 답 10

03 $-1\le\sin n\theta\le 1$이므로 각 변을 $2n$으로 나누면

$-\frac{1}{2n}\le\frac{\sin n\theta}{2n}\le\frac{1}{2n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{2n}=0$ 답 0

04 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{2n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-1}{2+\frac{1}{n}}=-\frac{1}{2}$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+1}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{2}{n}}=3$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-2n^2}{n^2+4n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+2n+1}{n^2+4n-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}=-1$

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+3)(2n+1)}{(2n-3)(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2+11n+3}{2n^2-5n+3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{10+\frac{11}{n}+\frac{3}{n^2}}{2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}$

$=5$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

05 $\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-n}{n^2a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-n}{n^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(6-\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}$

$=6\cdot\frac{1}{2}=3$ 답 3

06 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4=16$에서

$-2+3d=16$ $\therefore d=6$

$\therefore a_n=-2+(n-1)\cdot 6=6n-8$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{9n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n}{6n-8}=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{6-\frac{8}{n}}=\frac{3}{2}$

답 ③

07 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n+b_n=-4n^2$, $a_nb_n=-2n^2-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{a_nb_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^2}{-2n^2-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{-2-\frac{1}{n^2}}=2$

답 2

08 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 답 ③

09 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}$

$=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

10 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$

$=n^2$

Q BOX

두 수열 $\left\{\frac{6n^2-n}{n^2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 모두 수렴하므로 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용할 수 있다.

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n=a+(n-1)d$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때,
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$,
$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모의 최고차항 $\sqrt{n^2}$, 즉 n으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{n^2+n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}$

$=2$ 답 ①

11 $a_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)$

$\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$

$=\frac{n+1}{2n}$

$b_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3$

$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{(na_n)^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4}\cdot\frac{16}{(n+1)^4}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{(n+1)^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n^2+2n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$

$=4$ 답 4

12 ① $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+1}-2n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+1}-2n)(\sqrt{4n^2+1}+2n)}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2}$

$=\frac{0}{2+2}=0$

② $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$

$=\frac{2}{1+1}=1$

Q BOX

분자, 분모를 각각 $\sqrt{n}$으로 나눈다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,
$a_1=S_1$,
$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)=1+1=2$

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2+3n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+3n}}{(n-\sqrt{n^2+3n})(n+\sqrt{n^2+3n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+3n}}{-3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{-3}$

$=\frac{1+1}{-3}=-\frac{2}{3}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$

$=\frac{-2\cdot(1+1)}{1+1}=-2$

따라서 극한값이 가장 큰 것은 ③이다. 답 ③

쌤 한마디

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$와 같이 분자, 분모에 모두 근호를 포함한 식이 있는 경우 분자, 분모를 모두 유리화해야 한다. 분자, 분모 중 어느 한쪽만 유리화하지 않도록 주의한다.

13 $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-4n)-\{(n-1)^2-4(n-1)\}$

$=2n-5$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_n+2})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{2n-5}-\sqrt{2n-3})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n-5}+\sqrt{2n-3}}{\sqrt{n}(\sqrt{2n-5}-\sqrt{2n-3})(\sqrt{2n-5}+\sqrt{2n-3})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n-5}+\sqrt{2n-3}}{-2\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{5}{n}}+\sqrt{2-\frac{3}{n}}}{-2}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{-2}=-\sqrt{2}$ 답 $-\sqrt{2}$

14 $2+4+\cdots+2(n+1)$

$=2\{1+2+\cdots+(n+1)\}$

$=2\sum_{k=1}^{n+1} k=2\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$=n^2+3n+2$

$2+4+\cdots+2n=2(1+2+\cdots+n)$

$=2\sum_{k=1}^{n} k=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+n})}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$

$=\frac{2}{1+1}=1$ 답 ④

15 $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(4n-5)}{an^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2-11n-5}{an^2-2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{12-\frac{11}{n}-\frac{5}{n^2}}{a-\frac{2}{n^2}}$

$=\frac{12}{a}$

따라서 $\frac{12}{a}=2$이므로 $a=6$ 답 ⑤

16 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2+an}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+an}}{(n-\sqrt{n^2+an})(n+\sqrt{n^2+an})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+an}}{-an}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{a}{n}}}{-a}$

$=\frac{1+1}{-a}=-\frac{2}{a}$

따라서 $-\frac{2}{a}=-1$이므로 $a=2$ 답 2

17 $b+1\neq0$, 즉 $b\neq-1$이면

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b)n^2-1}{(b+1)n^3+2n^2}=0$이므로 $b=-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(a-b)n^2-1}{(b+1)n^3+2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)n^2-1}{2n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+1-\frac{1}{n^2}}{2}$

$=\frac{a+1}{2}$

따라서 $\frac{a+1}{2}=3$이므로 $a=5$

$\therefore a+b=4$ 답 ⑤

Q BOX

$k<0$이므로 $\infty-\infty$ 꼴이다.

$1-k^2\neq0$이면 (분자의 차수) > (분모의 차수) 이므로 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{1-k}=2$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,a_n=-2$를 이용할 수 있도록 적당히 식을 변형한다.

$b\neq-1$이면 (분자의 차수) < (분모의 차수) 이므로 극한값은 0이 되어 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

18 $k\geq0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로 $k<0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}+kn)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n}+kn)(\sqrt{n^2+4n}-kn)}{\sqrt{n^2+4n}-kn}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-k^2)n^2+4n}{\sqrt{n^2+4n}-kn}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-k^2)n+4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}-k}$

이때 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $1-k^2=0$

$\therefore k=-1$ ($\because k<0$) 답 -1

19 $\sqrt{n}\,a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{b_n}{\sqrt{n}}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=-2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)a_n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+3}}\cdot\frac{b_n}{\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+\sqrt{n^2+3n}}\lim_{n\to\infty}b_n$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}\lim_{n\to\infty}b_n$

$=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$ 답 ①

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)a_n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+3}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n+3})}\cdot\sqrt{n}\,a_n$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+\sqrt{n^2+3n}}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,a_n$

$=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$

20 $\frac{1-4a_n}{2a_n-3}=b_n$으로 놓으면

$1-4a_n=2a_nb_n-3b_n$, $(2b_n+4)a_n=3b_n+1$

$\therefore a_n=\frac{3b_n+1}{2b_n+4}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n+1}{2b_n+4}=\frac{3\cdot3+1}{2\cdot3+4}=1$ 답 1

쌤 한마디

$\lim_{n\to\infty}\frac{ra_n+s}{pa_n+q}=\alpha$ (α는 실수)일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은 다음과 같은 순서로 구할 수 있다.

(단, p, q, r, s는 상수, $p\neq0$, $r\neq0$)

(i) $\frac{ra_n+s}{pa_n+q}=b_n$으로 놓고 a_n을 b_n에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) $\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$임을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구한다.

21 $a_n-4=c_n$으로 놓으면 $a_n=c_n+4$

이때 $\lim_{n\to\infty} c_n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(c_n+4)=1+4=5$$

$2a_n-3b_n=d_n$으로 놓으면 $b_n=\frac{2a_n-d_n}{3}$

이때 $\lim_{n\to\infty} d_n=-2$이므로

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-d_n}{3}=\frac{2\cdot5-(-2)}{3}=4$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+2)(b_n-1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+2)\lim_{n\to\infty}(b_n-1)$$
$$=(5+2)\cdot(4-1)=21$$

답 ④

22 $2a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=2a_n-c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} c_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+b_n}{a_n-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+2a_n-c_n}{a_n-(2a_n-c_n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-c_n}{-a_n+c_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{c_n}{a_n}}{-1+\frac{c_n}{a_n}}$$
$$=-5$$

답 -5

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n\left(2-\frac{b_n}{a_n}\right)=3$$

에서 $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$이어야 하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+b_n}{a_n-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{b_n}{a_n}}{1-\frac{b_n}{a_n}}$$
$$=\frac{3+2}{1-2}=-5$$

23 $4n^2-2n+1<a_n<4n^2-n+3$에서

$$\frac{4n^3-2n^2+n}{n^3+1}<\frac{na_n}{n^3+1}<\frac{4n^3-n^2+3n}{n^3+1}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-2n^2+n}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-n^2+3n}{n^3+1}=4$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^3+1}=4$$

답 ④

24 $|a_n-2n|<10$에서 $-10<a_n-2n<10$

$2n-10<a_n<2n+10$

$$\therefore \frac{2n-10}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{2n+10}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-10}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+10}{n}=2$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$$

답 2

Q BOX

$\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$: 1, 0, -1, 0, 1, ⋯

$\{\cos n\pi\}$: -1, 1, -1, 1, ⋯

$0<\cdots<\tan\frac{\pi}{8}<\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이므로 a_n으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$의 값이 존재하려면 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이어야 함을 이용한다.

$2-\frac{b_n}{a_n}=p_n$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty} p_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(2-p_n)=2$$

$4\cdot1<a_1<4\cdot1+1$
$4\cdot2<a_2<4\cdot2+1$
$4\cdot3<a_3<4\cdot3+1$
⋮
$4\cdot n<a_n<4\cdot n+1$
이므로

$$\sum_{k=1}^{n}4k<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}(4k+1)$$

25 ㄱ. $-1\le\sin\frac{n\pi}{2}\le1$이므로

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{n\pi}{2}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{n\pi}{2}=0$$

ㄴ. $-1\le\cos n\pi\le1$이므로

$$-\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n+1}\cos n\pi\le\frac{1}{n+1}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cos n\pi=0$$

ㄷ. $0<\tan\frac{\pi}{4n}\le1$이므로

$$0<\frac{1}{n^2}\tan\frac{\pi}{4n}\le\frac{1}{n^2}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\tan\frac{\pi}{4n}=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

Q 쌤 한마디

삼각함수를 포함한 수열 $\{a_n\}$의 극한은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $-1\le\sin\theta\le1$, $-1\le\cos\theta\le1$임을 이용하여 a_n의 범위를 구한다.

(ii) 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구한다.

26 $4n<a_n<4n+1$에서

$$\sum_{k=1}^{n}4k<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}(4k+1)$$

$$2n^2+2n<\sum_{k=1}^{n}a_k<2n^2+3n$$

$$\therefore \frac{2n^2+2n}{(2n+1)^2}<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{(2n+1)^2}<\frac{2n^2+3n}{(2n+1)^2}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n}{(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{(2n+1)^2}=\frac{1}{2}$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{(2n+1)^2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

03 등비수열의 극한

W 8쪽

01 (1) 공비가 -0.9이고, $-1<-0.9<1$이므로 0에 수렴한다.

(2) 공비가 $\frac{3}{2}$이고, $\frac{3}{2}>1$이므로 발산한다.

(3) 공비가 $\frac{1}{2}$이고, $-1<\frac{1}{2}<1$이므로 0에 수렴한다.

(4) 공비가 $-\sqrt{5}$이고, $-\sqrt{5}<-1$이므로 발산한다.

답 (1) 수렴, 0 (2) 발산 (3) 수렴, 0 (4) 발산

02 ㄱ. 수열 $\{1.5^n\}$은 공비가 1.5이고, $1.5>1$이므로 발산한다.

따라서 주어진 수열은 발산한다.

ㄴ. 수열 $\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이고, $-1<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$이므로 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 4에 수렴한다.

ㄷ. 주어진 수열은

1, 3, 1, 3, 1, ⋯

이므로 발산(진동)한다.

ㄹ. $10^{-n}=\left(\frac{1}{10}\right)^n$에서 공비가 $\frac{1}{10}$이고, $-1<\frac{1}{10}<1$이므로 수열 $\{10^{-n}\}$은 0에 수렴한다.

$100^{-n}=\left(\frac{1}{100}\right)^n$에서 공비가 $\frac{1}{100}$이고, $-1<\frac{1}{100}<1$이므로 수열 $\{100^{-n}\}$은 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 0에 수렴한다.

이상에서 수렴하는 수열인 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

03 ① 수열 $\{(2-\sqrt{3})^n\}$은 공비가 $2-\sqrt{3}$이고, $-1<2-\sqrt{3}<1$이므로 0에 수렴한다.

② 수열 $\{2^n\}$은 공비가 2이고, $2>1$이므로 발산한다.

따라서 수열 $\{1-2^n\}$은 발산한다.

③ 수열 $\{3^n-(-3)^n\}$은

6, 0, 54, 0, 486, 0, ⋯

이므로 발산(진동)한다.

④ 수열 $\{0.1^n\}$은 공비가 0.1이고, $-1<0.1<1$이므로 0에 수렴한다.

따라서 수열 $\{0.1^n-0.1\}$은 -0.1에 수렴한다.

⑤ $\frac{3^{n-1}}{5^n}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$에서 공비가 $\frac{3}{5}$이고, $-1<\frac{3}{5}<1$이므로 수열 $\left\{\frac{3^{n-1}}{5^n}\right\}$은 0에 수렴한다.

답 ⑤

04 $\lim_{n\to\infty}(2^n-\sqrt{4^n-2^n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n-\sqrt{4^n-2^n})(2^n+\sqrt{4^n-2^n})}{2^n+\sqrt{4^n-2^n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+\sqrt{4^n-2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$

$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ 답 ③

Q BOX

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\frac{3}{4}}<1$

① 첫째항이 a, 공비가 $r\ (r\neq0)$인 등비수열의 일반항 a_n은
$a_n=ar^{n-1}$

② 첫째항이 a, 공비가 $r\ (r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면
$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$1<\sqrt{3}<2$이므로
$0<2-\sqrt{3}<1$

$\infty-\infty$ 꼴이므로 분모가 1인 분수 꼴로 생각하여 분자를 유리화한다.

분자, 분모를 각각 $2^n=\sqrt{4^n}$으로 나눈다.

05 $a>3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-3^{n-1}}{2a^{n+1}+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{a}\right)^n}{2a+\left(\frac{3}{a}\right)^n}=\frac{1}{2a}$

따라서 $\frac{1}{2a}=\frac{1}{10}$이므로 $a=5$ 답 5

06 $a_n=4\cdot3^{n-1}$, $S_n=\frac{4(3^n-1)}{3-1}=2\cdot3^n-2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot3^{n-1}}{2\cdot3^n-2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{3}}{2-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$=\frac{2}{3}$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p+q=5$ 답 ③

07 첫째항이 $(x-3)(x-4)$, 공비가 $x-4$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$(x-3)(x-4)=0$ 또는 $-1<x-4\le1$

$(x-3)(x-4)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=4$ ⋯⋯ ㉠

$-1<x-4\le1$에서

$3<x\le5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $3\le x\le5$

따라서 정수 x는 3, 4, 5의 3개이다. 답 3

08 주어진 수열은 공비가 $\sqrt{3}\tan x$이므로 주어진 수열이 수렴하려면

$-1<\sqrt{3}\tan x\le1$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}<\tan x\le\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore -\frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{6}\ \left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $\alpha=-\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$이므로

$\beta-\alpha=\frac{\pi}{3}$ 답 $\frac{\pi}{3}$

09 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로

$-1<r\le1$ ⋯⋯ ㉠

ㄱ. 공비가 $-\frac{r}{2}$이고 ㉠에서

$-\frac{1}{2}\le-\frac{r}{2}<\frac{1}{2}$

따라서 수열 $\left\{\left(-\frac{r}{2}\right)^n\right\}$은 항상 수렴한다.

ㄴ. 공비가 $\frac{3r-1}{4}$이고 ㉠에서

$-3<3r\le3$

$-4<3r-1\le2$ $\therefore -1<\frac{3r-1}{4}<\frac{1}{2}$

따라서 수열 $\left\{\left(\frac{3r-1}{4}\right)^n\right\}$은 항상 수렴한다.

ㄷ. 공비가 $-r$이고 ㉠에서

$-1 \le -r < 1$

이때 $-r=-1$, 즉 $r=1$이면 수열 $\{(-r)^n\}$은 발산한다.

ㄹ. 공비가 r^2이고 ㉠에서 $0 \le r^2 \le 1$

따라서 수열 $\{r^{2n}\}$은 항상 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

10 ① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n-1}{r^{n+1}+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r^{n+1}}}{1+\frac{2}{r^{n+1}}} = \frac{1}{r}$$

② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{r^n-1}{r^{n+1}+2} = \frac{1-1}{1+2} = 0$

③ $0<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n-1}{r^{n+1}+2} = -\frac{1}{2}$$

④ $-1<r<0$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n-1}{r^{n+1}+2} = -\frac{1}{2}$$

⑤ $r<-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r^{n+1}| = \infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n-1}{r^{n+1}+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r^{n+1}}}{1+\frac{2}{r^{n+1}}} = \frac{1}{r}$$

답 ④

11 (i) $r=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2r^{n+1}-5r^n+1}{r^n+1} = \frac{2-5+1}{1+1} = -1$$

(ii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2r^{n+1}-5r^n+1}{r^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2r-5+\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}$$

$$=2r-5$$

$2r-5=-1$에서 $r=2$

(i), (ii)에서 $\lim_{n\to\infty} \frac{2r^{n+1}-5r^n+1}{r^n+1} = -1$을 만족시키는 자연수 r는 1, 2이므로 구하는 합은

$1+2=3$

답 3

12 (i) $|r|<2$일 때,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-r^n}{r^n+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{r}{2}\right)^n}{\left(\frac{r}{2}\right)^n+1} = 1$$

(ii) $r=2$일 때,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-2^n}{2^n+2^n} = 0$$

(iii) $|r|>2$일 때,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-r^n}{r^n+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{r}\right)^n-1}{1+\left(\frac{2}{r}\right)^n} = -1$$

Q BOX

수열 $\{(-1)^n\}$은 발산(진동)한다.

수열 1, 3, 5, …는 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로 일반항은 $1+(n-1)\cdot 2=2n-1$

자연수 r의 값의 합을 구하는 문제이므로 $r \ge 1$인 범위에서 생각한다.

분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 거듭제곱이 r^n인지 2^n인지에 따라 극한값이 달라진다.

$|r|<2$이므로 분자, 분모를 각각 2^n으로 나눈다.

$|r|>2$이므로 분자, 분모를 각각 r^n으로 나눈다.

이상에서 $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-r^n}{r^n+2^n} = 1$을 만족시키는 r의 값의 범위는

$|r|<2$, 즉 $-2<r<2$

이므로 정수 r는 -1, 0, 1의 3개이다.

답 ②

13 $y=\sqrt{n}$을 $x^2+y^2=9n^2$에 대입하면

$x^2+n=9n^2$, $x^2=9n^2-n$

$\therefore x=\pm\sqrt{9n^2-n}$

$a_n>0$에서 $a_n=\sqrt{9n^2-n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}(3n-a_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(3n-\sqrt{9n^2-n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-\sqrt{9n^2-n})(3n+\sqrt{9n^2-n})}{3n+\sqrt{9n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+\sqrt{9n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\sqrt{9-\frac{1}{n}}}$$
$$=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

14 $a_1=1$, $a_2=1+3$, $a_3=1+3+5$, …에서

$$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$
$$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$$
$$=n^2$$

$b_1=1+2$, $b_2=1+2+3$, $b_3=1+2+3+4$, …에서

$$b_n=1+2+3+\cdots+(n+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}k$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4b_n}{a_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+6n+4}{n^2+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$
$$=2$$

답 ④

02 급수

04 급수의 수렴과 발산

W 10쪽

01 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2-n+2}{3n^2-1}=2$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} \left\{4-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}=4$

답 (1) 2 (2) 4

① 수열의 수렴, 발산
➡ $\lim_{n\to\infty} a_n$을 조사
② 급수의 수렴, 발산
➡ $\lim_{n\to\infty} S_n$을 조사

02 (1) 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2}=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(2) 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

(3) 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 (1) 발산 (2) 수렴, 1 (3) 발산

03 (1) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{2n}{2n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}=1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

(2) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=(-1)^{n-1}\cdot 2n$$

이때 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

(3) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=-4n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(-4n)=-\infty$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

(4) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1-(-1)^n}{2}$$

$\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, ⋯

이때 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

04 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=-1+2=1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n=-1-2=-3$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-5a_n+b_n)=-5\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
$=-5\cdot(-1)+2=7$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty} a_n-2\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
$=3\cdot(-1)-2\cdot 2=-7$

답 (1) 1 (2) −3 (3) 7 (4) −7

05 $$S_n=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n(1+2+3+\cdots+n)}=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n\cdot\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2n+1}{3n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

06 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{kn^2-n}{2n^2+n-1}=\frac{k}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{kn^2-n}{2n^2+n-1}\neq 0$이므로 $k\neq 0$

$\frac{k}{2}=-3$에서 $k=-6$

답 ③

07 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ④

08 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

앞에서 첫 번째, 세 번째가 남으면 뒤에서도 첫 번째, 세 번째가 남는다.

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

09 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$라 하면

$a_{n+1}-a_n=d$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{d}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{3d}$$

$\frac{1}{3d}=\frac{1}{6}$에서 $d=2$

답 2

Q BOX

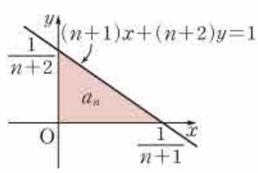
$a_{k+1}-a_k=d$

$a_1=3$

$a_{n+1}=3+nd$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+nd}=0$

10 오른쪽 그림에서



a_n

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

$(n+1)x+(n+2)y=1$에서

$y=0$이면 $x=\frac{1}{n+1}$

$x=0$이면 $y=\frac{1}{n+2}$

11 $\sum_{n=1}^{\infty}(\log_{n+1}8-\log_{n+2}8)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\log_{k+1}8-\log_{k+2}8)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\log_8(k+1)}-\frac{1}{\log_8(k+2)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{\log_8 2}-\frac{1}{\log_8 3}\right)+\left(\frac{1}{\log_8 3}-\frac{1}{\log_8 4}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{\log_8(n+1)}-\frac{1}{\log_8(n+2)}\right\}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\log_8 2}-\frac{1}{\log_8(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{\log_8 2}=\log_2 8=\log_2 2^3=3$$

답 3

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$일 때,

$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

$\lim_{n\to\infty}\log_8(n+2)=\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log_8(n+2)}=0$

12 $\sum_{n=1}^{\infty}\log_2\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+2}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)+\log_2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)+\log_2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)+\cdots+\log_2\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$$

답 ①

13 $a_{n+1}=3^{\frac{1}{n(n+1)}}a_n$에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3^{\frac{1}{n(n+1)}}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\log_3 a_{n+1}-\log_3 a_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\log_3 a_{k+1}-\log_3 a_k)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log_3\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log_3 3^{\frac{1}{k(k+1)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

답 1

14 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_1=1$, $S_2=-1$, $S_3=2$, $S_4=-2$, $S_5=3$, $S_6=-3$, $\cdots$

이므로

$S_{2n-1}=n$, $S_{2n}=-n$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\infty$, $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=-\infty$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 발산

15 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

ㄱ. $S_1=2$, $S_2=0$, $S_3=2$, $S_4=0$, $S_5=2$, $S_6=0$, $\cdots$ 이므로

$S_{2n-1}=2$, $S_{2n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=2$, $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $S_n=1-0-0-\cdots-0=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=1$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

ㄷ. $S_1=1$, $S_2=\frac{1}{3}$, $S_3=1$, $S_4=\frac{1}{4}$, $S_5=1$, $S_6=\frac{1}{5}$, $\cdots$이므로

$$S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=\frac{1}{n+2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=1,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄹ. $S_1=\frac{1}{3},\ S_2=0,\ S_3=\frac{1}{5},\ S_4=0,\ S_5=\frac{1}{7},\ S_6=0,$ …이므로

$$S_{2n-1}=\frac{1}{2n+1},\ S_{2n}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n}=0$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}=0$이므로 주어진 급수는 0에 수렴한다.

이상에서 발산하는 급수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

16 주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n+1}{n+1}\right)=0$$

$a_n-\frac{2n+1}{n+1}=b_n$으로 놓으면 $\quad a_n=b_n+\frac{2n+1}{n+1}$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{2n+1}{n+1}\right)=2$$

답 2

17 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=4$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty} a_n=0,\ \lim_{n\to\infty} S_n=4$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3S_n-5a_n}{2S_n-3a_n+1}=\frac{3\cdot4-5\cdot0}{2\cdot4-3\cdot0+1}=\frac{4}{3}$$

답 ④

18 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)$가 수렴하므로 $\quad \lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$

$a_n-2=c_n$으로 놓으면 $\quad a_n=c_n+2$

이때 $\lim_{n\to\infty} c_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(c_n+2)=2$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{2}+3\right)$이 수렴하므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{2}+3\right)=0$

$\frac{b_n}{2}+3=d_n$으로 놓으면 $\quad b_n=2d_n-6$

이때 $\lim_{n\to\infty} d_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(2d_n-6)=-6$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_nb_n=2\cdot(-6)=-12$$

답 -12

19 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+2}-3\right)=2$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n+2}-3\right)=0$

$\frac{a_n}{n+2}-3=c_n$으로 놓으면 $\quad \frac{a_n}{n+2}=c_n+3$

$$\therefore a_n=(n+2)(c_n+3)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{b_n}+2\right)=5$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{b_n}+2\right)=0$

$\frac{2n-1}{b_n}+2=d_n$으로 놓으면 $\quad \frac{2n-1}{b_n}=d_n-2$

$$\therefore b_n=\frac{2n-1}{d_n-2}$$

Q BOX

$$\left(a_1-\frac{3}{2}\right)+\left(a_2-\frac{5}{3}\right)+\left(a_3-\frac{7}{4}\right)+\cdots+\left(a_n-\frac{2n+1}{n+1}\right)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n+1}{n+1}\right)$$

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{9n^2+3n-2}=0$이므로 부분합 S_n을 구하여 $\lim_{n\to\infty} S_n$의 수렴, 발산을 조사한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다.

$\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=4$

이때 $\lim_{n\to\infty} c_n=0,\ \lim_{n\to\infty} d_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(c_n+3)(d_n-2)}{2n-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n-1}\cdot(c_n+3)(d_n-2)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot(-2)=-3$$

답 ②

20 ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n}{2n^2-1}=2\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$
$$=\frac{1}{2}\neq0$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{6}$$

이상에서 수렴하는 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

21 ① 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_1=2,\ S_2=\frac{5}{3},\ S_3=2,\ S_4=\frac{9}{5},\ S_5=2,\ S_6=\frac{13}{7},\ \cdots$$

이므로 $\quad S_{2n-1}=2,\ S_{2n}=\frac{4n+1}{2n+1}$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}=2$이므로 주어진 급수는 2에 수렴한다.

② $\log\frac{3}{4}+\log\frac{8}{9}+\log\frac{15}{16}+\log\frac{24}{25}+\cdots$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+2}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)+\cdots+\log\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+2}{2(n+1)}=\log\frac{1}{2}$$

③ $\frac{3}{1^2}+\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+\frac{9}{1^2+2^2+3^2+4^2}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}6\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=6\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=6\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=6$

④ $\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}\right)+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}-\frac{k+2}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)=2-1=1$

⑤ $(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+(\sqrt{9}-\sqrt{7})+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$
$=0$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-1)=\infty$ 답 ⑤

22 $3a_n-\frac{1}{2}b_n=c_n$으로 놓으면 $\frac{1}{2}b_n=3a_n-c_n$

$\therefore\ b_n=6a_n-2c_n$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=9$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(6a_n-2c_n)=6\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}c_n$

$=6\cdot4-2\cdot9=6$ 답 6

23 $\sum_{n=1}^{\infty}\log_2 a_n{}^2b_n=4$에서

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때
① $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
② $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
③ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

$\sum_{n=1}^{\infty}(2\log_2 a_n+\log_2 b_n)=4$

$\therefore\ 2\sum_{n=1}^{\infty}\log_2 a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\log_2 b_n=4$ ...... ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}\log_2\frac{a_n}{b_n{}^2}=-3$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}(\log_2 a_n-2\log_2 b_n)=-3$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\log_2 a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}\log_2 b_n=-3$ ...... ㉡

$\sum_{n=1}^{\infty}\log_2 a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}\log_2 b_n=\beta$라 하면 ㉠, ㉡에서

$2\alpha+\beta=4$, $\alpha-2\beta=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\alpha=1$, $\beta=2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\log_2\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\log_2 a_n-\log_2 b_n)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\log_2 a_n-\sum_{n=1}^{\infty}\log_2 b_n$

$=\alpha-\beta=-1$ 답 -1

24 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$은 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$

$a_n-1=b_n$으로 놓으면 $a_n=b_n+1$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(b_n+1)=1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(a_n+1)=1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}(a_n+1)\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)$은 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

25 ① [반례] $a_n=0$, $b_n=n$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산한다.

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty\neq0$
이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산한다.

이때 $a_nb_n=0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$

즉 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 수렴한다.

② [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, 0, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, 1, ⋯

이면 $a_nb_n=0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$

즉 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 수렴하지만 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이다.

③ [반례] $a_n=1$, $b_n=2$이면 $a_nb_n=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2\neq0$

즉 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 발산하지만 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$, $\lim_{n\to\infty}b_n=2$이므로 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$

$a_n<b_n$이므로
$a_n-b_n<0$
$\therefore\ a_1-b_1<0$,
$a_2-b_2<0$, ⋯

$=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_n-b_n)+\cdots$

<0

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n<\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 답 ⑤

05 등비급수

W 14쪽

01 (1) 첫째항이 1, 공비가 0.1이고, $-1<0.1<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-0.1}=\frac{10}{9}$$

(2) 공비가 $-\sqrt{2}$이고, $-\sqrt{2}<-1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

답 (1) 수렴, $\frac{10}{9}$ (2) 발산

02 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{2}{7^{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7}}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{7}{3}=\frac{8}{3}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6^n}+\frac{3^{n+1}}{5^n}\right)=5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n+3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$$=5\cdot\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}+3\cdot\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}$$

$$=1+\frac{9}{2}=\frac{11}{2}$$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-6)^n}{8^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$

$$=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}+\frac{-\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{7}+\left(-\frac{3}{7}\right)=-\frac{2}{7}$$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{8}{3}$ (3) $\frac{11}{2}$ (4) $-\frac{2}{7}$

03 (1) 공비가 $-x$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1<-x<1 \qquad \therefore -1<x<1$$

(2) 공비가 $\frac{2-x}{5}$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1<\frac{2-x}{5}<1, \qquad -5<2-x<5$$

$$-7<-x<3 \qquad \therefore -3<x<7$$

답 (1) $-1<x<1$ (2) $-3<x<7$

04 (1) $\overline{BC}=\sqrt{2}\cos 45°=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

$\overline{AB_1}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

또 $\triangle AB_1C_1$은 빗변의 길이가 $\overline{AB_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$인 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{B_1C_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 45°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$$

같은 방법으로 하면

$\overline{AB_2}=\frac{1}{2}\overline{AB_1}$

$$\overline{B_2C_2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos 45°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

(2) $\overline{BC}+\overline{B_1C_1}+\overline{B_2C_2}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

답 (1) $\overline{BC}=1$, $\overline{B_1C_1}=\frac{1}{2}$, $\overline{B_2C_2}=\frac{1}{4}$ (2) 2

05 답 (가) $\frac{41}{100}$ (나) $\frac{1}{100}$ (다) $\frac{41}{99}$

06 (1) $0.\dot{5}0\dot{4}=0.504+0.000504+0.000000504+\cdots$

$0.504504504\cdots$

$$=\frac{0.504}{1-0.001}=\frac{56}{111}$$

(2) $0.7\dot{2}=0.7+0.02+0.002+0.0002+\cdots$

$0.7222\cdots$

$$=0.7+\frac{0.02}{1-0.1}$$

$$=\frac{7}{10}+\frac{1}{45}=\frac{13}{18}$$

(3) $2.1\dot{3}=2.1+0.03+0.003+0.0003+\cdots$

$$=2.1+\frac{0.03}{1-0.1}$$

$$=\frac{21}{10}+\frac{1}{30}=\frac{32}{15}$$

답 (1) $\frac{56}{111}$ (2) $\frac{13}{18}$ (3) $\frac{32}{15}$

07 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\sin\frac{n\pi}{2}$

$$=\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\sin\pi+\left(\frac{1}{3}\right)^3\sin\frac{3}{2}\pi+\cdots$$

$$=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^5-\cdots$$

첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $-\left(\frac{1}{3}\right)^2$, 즉 $-\frac{1}{9}$인 등비급수이다.

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)}=\frac{3}{10}$$

따라서 $p=10$, $q=3$이므로

$p+q=13$

답 13

08 $f(x)=x^n$이라 하면 나머지정리에 의하여

다항식 $P(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=P\left(-\frac{b}{a}\right)$

$$a_n=f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

답 ①

09 $\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}-\frac{2}{3^6}+\cdots$

$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\cdots\right)-\left(\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+\cdots\right)$

$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}-\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}}$

$=\frac{3}{8}-\frac{2}{8}=\frac{1}{8}$ 답 ③

10 주어진 급수는 첫째항이 x, 공비가 $-3x$인 등비급수이므로

$\frac{x}{1-(-3x)}=\frac{1}{7},\quad 7x=1+3x$

$4x=1\quad \therefore x=\frac{1}{4}$ 답 ⑤

11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n-(-x)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{5}\right)^n$

$=\frac{\frac{x}{5}}{1-\frac{x}{5}}-\frac{-\frac{x}{5}}{1-\left(-\frac{x}{5}\right)}$

$=\frac{x}{5-x}+\frac{x}{5+x}$

$=\frac{10x}{25-x^2}$

$\frac{10x}{25-x^2}=\frac{15}{8}$에서 $\quad\frac{2x}{25-x^2}=\frac{3}{8}$

$3x^2+16x-75=0,\quad (3x+25)(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because 0<x<5)$ 답 3

다른 풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n-(-x)^n}{5^n}$

$=2\cdot\frac{x}{5}+0+2\cdot\left(\frac{x}{5}\right)^3+0+\cdots$

따라서 주어진 급수는 첫째항이 $\frac{2}{5}x$, 공비가 $\left(\frac{x}{5}\right)^2$, 즉 $\frac{x^2}{25}$인 등비급수이므로

$\frac{\frac{2}{5}x}{1-\frac{x^2}{25}}=\frac{15}{8},\quad \frac{10x}{25-x^2}=\frac{15}{8}$

$3x^2+16x-75=0,\quad (3x+25)(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because 0<x<5)$

12 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 $r\ (-1<r<1)$라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$에서

$\frac{a_1}{1-r}=2\quad \therefore a_1=2(1-r)\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-4$에서

$\frac{b_1}{1-r}=-4\quad \therefore b_1=-4(1-r)\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$a_1+b_1=2(1-r)-4(1-r)=-2(1-r)$

따라서 $-2(1-r)=-3$이므로 $\quad 1-r=\frac{3}{2}$

$\therefore r=-\frac{1}{2}$

$r=-\frac{1}{2}$을 ㉠, ㉡에 대입하면

$a_1=3,\ b_1=-6$

따라서 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이

$a_1b_1=3\cdot(-6)=-18$, 공비가 $r^2=\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{-18}{1-\frac{1}{4}}=-24$ 답 ①

13 공비가 $\sqrt{2}\sin\theta$이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$-1<\sqrt{2}\sin\theta<1,\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore 0<\theta<\frac{\pi}{4}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

답 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$

쌤 한마디

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=ar^{n-1}$일 때, 수열 $\{a_n\}$과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 수렴 조건을 혼동하지 않도록 주의한다.

① 수열 $\{a_n\}$의 수렴 조건 ⇨ $a=0$ 또는 $-1<r\le 1$

② 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 수렴 조건 ⇨ $a=0$ 또는 $-1<r<1$

14 공비가 $\frac{1-\log x}{3}$이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$-1<\frac{1-\log x}{3}<1,\quad -3<1-\log x<3$

$-4<-\log x<2,\quad -2<\log x<4$

$\therefore \frac{1}{100}<x<10000$

따라서 $\alpha=\frac{1}{100}$, $\beta=10000$이므로

$\alpha\beta=100$ 답 ⑤

15 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로

$-1<r<1\quad\cdots\cdots$ ㉠

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n-1}$은 공비가 r^2인 등비급수이므로 ㉠에서

$0\le r^2<1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{5}\right)^n$은 공비가 $\frac{r-1}{5}$인 등비급수이므로 ㉠에서

$-2<r-1<0\quad \therefore -\frac{2}{5}<\frac{r-1}{5}<0$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{3}-1\right)^n$은 공비가 $\frac{r}{3}-1$인 등비급수이므로 ㉠에서

$-\frac{1}{3}<\frac{r}{3}<\frac{1}{3}\quad \therefore -\frac{4}{3}<\frac{r}{3}-1<-\frac{2}{3}$

Q BOX

$a_1=2\cdot\frac{3}{2}=3$,

$b_1=-4\cdot\frac{3}{2}=-6$

$a_n=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$b_n=-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_nb_n=-18\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$0<x<5$이므로

$0<\frac{x}{5}<1$,

$-1<-\frac{x}{5}<0$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{5}\right)^n$이 모두 수렴한다.

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하면 $-1<r<1$임을 이용하여 주어진 등비급수의 공비의 범위를 구한다.

따라서 주어진 급수는 항상 수렴하는 것은 아니다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n+(-r)^n}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} r^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} r^n$도 수렴한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 공비가 $-r$인 등비급수이므로 ㉠에서

$-1<-r<1$

즉 $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$이 수렴하므로 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$도 수렴한다. 따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right) +\cdots+\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$S_{n+1} = \frac{(n+1)(2\cdot10+nd)}{2}$

$= \frac{(n+1)(20+nd)}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{10}-\frac{2}{(n+1)(20+nd)}\right\}$

$= \frac{1}{10}$

답 ①

17 $\log_2(S_n+1)=n$에서 $S_n+1=2^n$

$\therefore S_n=2^n-1$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-1-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}$ …… ㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2^{n-1}$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

답 2

18 $S_n=\sum_{k=1}^{n}4^ka_k=3^n-1$이라 하자.

(i) $n=1$일 때, $4a_1=S_1=2$ $\therefore a_1=\frac{1}{2}$

(ii) $n\ge2$일 때,

$4^na_n=S_n-S_{n-1}=3^n-1-(3^{n-1}-1)=2\cdot3^{n-1}$

$\therefore a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ …… ㉠

이때 $a_1=\frac{1}{2}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{9}{16}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{4}{7}$

답 ④

19 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\overline{P_1P_2}-\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}-\overline{P_7P_8}+\cdots$

$=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5-\left(\frac{2}{3}\right)^7+\cdots$

$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{6}{13}$

$y=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots$

$=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$

$=\frac{1}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{9}{13}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{6}{13}, \frac{9}{13}\right)$이다.

답 $\left(\frac{6}{13}, \frac{9}{13}\right)$

20 $a=\overline{OP_1}\cos45°+\overline{P_1P_2}\cos45°+\overline{P_2P_3}\cos45° +\overline{P_3P_4}\cos45°+\cdots$

$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} +2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$

$=\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$

$b=\overline{OP_1}\sin45°-\overline{P_1P_2}\sin45°+\overline{P_2P_3}\sin45° -\overline{P_3P_4}\sin45°+\cdots$

$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} -2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$

$=\frac{\sqrt{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore ab=2\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{8}{3}$

답 $\frac{8}{3}$

21 원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x\pm\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\sqrt{2}$, 즉 $y=x\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Q BOX

$S_1=a_1=10$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)(20+nd)}=0$

$2^n-1-(2^{n-1}-1)$
$=2^n-2^{n-1}$
$=2\cdot2^{n-1}-2^{n-1}$
$=(2-1)\cdot2^{n-1}$
$=2^{n-1}$

$3^n-1-(3^{n-1}-1)$
$=3^n-3^{n-1}$
$=3\cdot3^{n-1}-3^{n-1}$
$=(3-1)\cdot3^{n-1}$
$=2\cdot3^{n-1}$

$a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$이므로
$a_n^2=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}$

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

이때 제2사분면을 지나는 접선의 방정식은

$y=x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_n=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=-\sqrt{2}$ 답 ③

Q BOX

$y=x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$에 $y=0$을 대입하면 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

22 $\overline{PQ}=4$이고 $\triangle POQ \backsim \triangle P_1OQ_1$이므로

$\overline{PQ} : \overline{P_1Q_1}=\overline{OP} : \overline{OP_1}=4 : 3$

$\therefore \overline{P_1Q_1}=\frac{3}{4}\overline{PQ}=3$

같은 방법으로 하면

$\overline{P_2Q_2}=\frac{3}{4}\overline{P_1Q_1}=3\cdot\frac{3}{4}$,

$\overline{P_3Q_3}=\frac{3}{4}\overline{P_2Q_2}=3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$, …

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nQ_n}=\frac{3}{1-\frac{3}{4}}=12$ 답 ③

$\overline{OP} : \overline{OP_1}=\overline{OQ} : \overline{OQ_1}=4 : 3$, $\angle O$는 공통

$\therefore \triangle POQ \backsim \triangle P_1OQ_1$ (SAS 닮음)

23 $\angle P_2P_1O=60°$이므로

$\overline{P_1P_2}=\overline{OP_1}\cos 60°=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\angle P_2P_1P_3=60°$이므로

$\overline{P_2P_3}=\overline{P_1P_2}\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle P_3P_2P_4=60°$이므로

$\overline{P_3P_4}=\overline{P_2P_3}\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

⋮

$\therefore \overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cdots$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

$=2+\sqrt{3}$ 답 $2+\sqrt{3}$

$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$

24 $\angle P_1OP_2=45°$이므로

$\overline{P_1P_2}=\overline{OP_1}\sin 45°=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$\angle P_2OP_3=45°$이고 $\overline{OP_2}=\overline{P_1P_2}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{P_2P_3}=\overline{OP_2}\sin 45°=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

$\angle P_3OP_4=45°$이고 $\overline{OP_3}=\overline{P_2P_3}=1$이므로

$\overline{P_3P_4}=\overline{OP_3}\sin 45°=1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

⋮

$\triangle P_nOP_{n+1}$은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{OP_{n+1}}=\overline{P_nP_{n+1}}$

$\therefore \overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots=\sqrt{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$

$=\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$=2+2\sqrt{2}$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로 $ab=4$ 답 4

25 두 원 C_n과 C_{n+1}의 지름의 길이의 비가 $3 : 2$이므로 넓이의 비는

$3^2 : 2^2$, 즉 $9 : 4$

$\overline{AB_n} : \overline{AB_{n+1}}=\overline{AB_1} : \overline{AB_2}=3 : 2$

원 C_n의 넓이를 S_n이라 하면 $S_n : S_{n+1}=9 : 4$이므로

$S_1=\pi$, $S_2=S_1\cdot\frac{4}{9}=\pi\cdot\frac{4}{9}$,

$S_3=S_2\cdot\frac{4}{9}=\pi\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2$, …

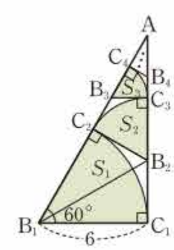
$\therefore S_n=\pi\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

따라서 모든 원의 넓이의 합은

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{5}\pi$ 답 ④

26 $S_1=\pi\cdot 6^2\cdot\frac{60}{360}=6\pi$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{B_1B_2}$를 그으면



$\triangle B_1C_1B_2 \equiv \triangle B_1C_2B_2$이므로

$\angle C_1=\angle C_2=90°$, $\overline{B_1B_2}$는 공통, $\overline{B_1C_1}=\overline{B_1C_2}$

$\therefore \triangle B_1C_1B_2 \equiv \triangle B_1C_2B_2$ (RHS 합동)

$\angle C_2B_1B_2=\frac{1}{2}\cdot 60°=30°$

$\therefore \overline{B_2C_2}=\overline{B_1C_2}\tan 30°$

$=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

$\therefore S_2=\pi\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{60}{360}=2\pi$

따라서 $S_n : S_{n+1}=6\pi : 2\pi=3 : 1$이므로

$S_n=6\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{6\pi}{1-\frac{1}{3}}=9\pi$ 답 9π

쌤 한마디

닮은꼴인 부채꼴이 반복되는 도형이 주어졌으므로 부채꼴의 반지름의 길이의 변화를 파악하면 넓이의 비를 구할 수 있다. 즉 보조선 $\overline{B_2C_2}$를 그은 후 합동인 도형을 이용하여 $\overline{B_2C_2}$의 길이를 구한 후 넓이의 비를 구한다.

27 $0.\dot{6}=0.6+0.06+0.006+\cdots=\frac{0.6}{1-0.1}=\frac{2}{3}$,

$0.08\dot{3}=0.08+0.003+0.0003+0.00003+\cdots$

$=0.08+\frac{0.003}{1-0.1}=\frac{2}{25}+\frac{1}{300}=\frac{1}{12}$

이므로 공비를 $r\,(r>0)$라 하면

$\frac{2}{3}r^3=\frac{1}{12}$, $\quad r^3=\frac{1}{8}$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$)

따라서 구하는 등비급수의 합은

$\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$ 답 ①

28 $3.0\dot{1}=3+0.01+0.001+0.0001+\cdots$

$=3+\dfrac{0.01}{1-0.1}=3+\dfrac{1}{90}=\dfrac{271}{90}$

어떤 수를 x라 하면 $3.0\dot{1}x-3.01x=2$이므로

$\frac{271}{90}x-\frac{301}{100}x=2$, $\quad \frac{1}{900}x=2$

$\therefore x=1800$

따라서 어떤 수는 1800이다. 답 ⑤

29 $\frac{3}{11}=0.\dot{2}\dot{7}$이므로

$a_1=2,\ a_2=7,\ a_3=2,\ a_4=7,\ \cdots$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\frac{a_4}{5^4}+\frac{a_5}{5^5}+\frac{a_6}{5^6}+\cdots$

$=\frac{2}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{7}{5^4}+\frac{2}{5^5}+\frac{7}{5^6}+\cdots$

$=\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{5^3}+\frac{2}{5^5}+\cdots\right)$

$+\left(\frac{7}{5^2}+\frac{7}{5^4}+\frac{7}{5^6}+\cdots\right)$

$=\dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}+\dfrac{\frac{7}{25}}{1-\frac{1}{25}}$

$=\frac{10}{24}+\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$

따라서 $p=24$, $q=17$이므로

$p+q=41$ 답 41

03 지수함수와 로그함수의 미분

06 지수함수와 로그함수의 극한

W 19쪽

01 (1) $\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+2\right\}=0+2=2$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{5^x}{2^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x=\infty$

(3) $\lim_{x\to\infty}(3^x-7^x)=\lim_{x\to\infty}7^x\left\{\left(\frac{3}{7}\right)^x-1\right\}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{7}\right)^x-1\right\}=-1$이므로

$\lim_{x\to\infty}7^x\left\{\left(\frac{3}{7}\right)^x-1\right\}=-\infty$

(4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{2^x+2^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{2x}}{2^{2x}+1}$

분자, 분모에 각각 2^x을 곱한다.

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x}{4^x+1}$

이때 $\lim_{x\to-\infty}4^x=0$이므로

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$에서
① $a>1$일 때, $\lim_{x\to-\infty}a^x=0$
② $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to-\infty}a^x=\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x}{4^x+1}=0$

답 (1) 2 (2) ∞ (3) $-\infty$ (4) 0

02 (1) $\lim_{x\to0+}\log_3 9x=\lim_{x\to0+}(2+\log_3 x)=-\infty$

(2) $x-2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 2+$일 때 $t\longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to2+}\log_{\frac{1}{5}}(x-2)=\lim_{t\to0+}\log_{\frac{1}{5}}t=\infty$

(3) $\lim_{x\to\infty}\{\log(x+5)-\log(x+10)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{x+5}{x+10}$

$=\log\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x+10}\right)$

$=\log 1=0$

(4) $\lim_{x\to1+}\{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\}$

$=\lim_{x\to1+}\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\log_{\frac{1}{2}}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

r가 실수일 때 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to r}f(x)$가 존재하고 $f(x)>0$, $\lim_{x\to r}f(x)>0$이면
$\lim_{x\to r}\{\log_a f(x)\}$
$=\log_a\{\lim_{x\to r}f(x)\}$
(단, $a>0$, $a\neq1$)

$=\log_{\frac{1}{2}}\{\lim_{x\to1+}(x+1)\}$

$=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$

답 (1) $-\infty$ (2) ∞ (3) 0 (4) -1

03 $\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot5^{x+1}-1}{2-5^x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{a\cdot5-\frac{1}{5^x}}{\frac{2}{5^x}-1}=-5a$

$-5a=-15$에서 $\quad a=3$ 답 3

04 $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-6x^3-1}{3x^3+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{2^{-t}+6t^3-1}{-3t^3+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{2^t\cdot t^3}+6-\frac{1}{t^3}}{-3+\frac{1}{t^3}}$$
$$=\frac{6}{-3}=-2$$
답 -2

05 ㄱ. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{\sqrt{10^x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^x=\infty$

ㄴ. $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow0-$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{4^{\frac{1}{x}}-1}=\lim_{t\to0-}\frac{7}{4^t-1}=-\infty$$

ㄷ. $\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5^{2x}-1}{5^{2x}+1}$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{25^x-1}{25^x+1}$$

이때 $\lim_{x\to-\infty}25^x=0$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{25^x-1}{25^x+1}=-1$$

ㄹ. $\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}3^{\frac{1}{x}}=\infty,\ \lim_{x\to0+}3^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=0,$$
$$\lim_{x\to0-}3^{\frac{1}{x}}=0,\ \lim_{x\to0-}3^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0-}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\infty$$
$$\therefore\ \lim_{x\to0+}\frac{3^{\frac{1}{x}}}{3^{-\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0+}\frac{1}{3^{-\frac{2}{x}}-1}=-1,$$
$$\lim_{x\to0-}\frac{3^{\frac{1}{x}}}{3^{-\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x}}}=0$$

따라서 $\lim_{x\to0+}\frac{3^{\frac{1}{x}}}{3^{-\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x}}}\neq\lim_{x\to0-}\frac{3^{\frac{1}{x}}}{3^{-\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x}}}$이므로

극한값이 존재하지 않는다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

쌤 한마디

ㄹ에서 $\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}\neq\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}$이므로 주어진 극한을 조사할 때, $x\longrightarrow0+$인 경우와 $x\longrightarrow0-$인 경우로 나누어 생각해야 한다. 이때 함수 $f(x)$에 대하여

① $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)$
　⇨ 극한값이 존재한다.

② $\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$
　⇨ 극한값이 존재하지 않는다.

06 $\lim_{x\to5}(\log_2|x^2-1|-\log_2|x+1|)$

$$=\lim_{x\to5}\log_2\left|\frac{x^2-1}{x+1}\right|=\lim_{x\to5}\log_2\left|\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\right|$$
$$=\lim_{x\to5}\log_2|x-1|=\log_2(\lim_{x\to5}|x-1|)$$
$$=\log_2 4=2$$

답 ⑤

Q BOX

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때,
$x=\log_a N\Longleftrightarrow a^x=N$

$\frac{3}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{9}{10}}<1$

분자, 분모에 각각 $3^{-\frac{1}{x}}$을 곱한다.

07 $\lim_{x\to\infty}\{\log_4(ax+3)-\log_4(x-1)\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_4\frac{ax+3}{x-1}$$
$$=\log_4\left(\lim_{x\to\infty}\frac{ax+3}{x-1}\right)$$
$$=\log_4\left(\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)=\log_4 a$$

$\log_4 a=3$에서

$a=4^3=64$ 답 64

08 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log(6^x+10^x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\log(6^x+10^x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log\left[10^x\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$=\log\left[\lim_{x\to\infty}10\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}\right]$$
$$=\log(10\cdot1)=1$$

답 ④

07 무리수 e와 자연로그

Ⓦ 20쪽

01 (1) $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{5}{x}}\right\}^{\frac{1}{5}}=e^{\frac{1}{5}}$

(2) $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{3t}\right)^{-t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3t}\right)^{3t}\right\}^{-\frac{1}{3}}$$
$$=e^{-\frac{1}{3}}$$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{4x}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\ln(1+2x)}\cdot2$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}\cdot2$$
$$=\frac{1}{1}\cdot2=2$$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{e^{-3x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-3x}-1}{-3x}\cdot(-3)$
$$=1\cdot(-3)=-3$$

(5) $\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1-5x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1-5x)}{-5x}\cdot(-5)$
$$=\frac{1}{\ln2}\cdot(-5)=-\frac{5}{\ln2}$$

(6) $\lim_{x\to0}\frac{9^x-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{9^x-1}{x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln9$
$$=\ln\sqrt{9}=\ln3$$

답 (1) $e^{\frac{1}{5}}$ (2) $e^{-\frac{1}{3}}$ (3) 2 (4) -3 (5) $-\frac{5}{\ln2}$ (6) $\ln3$

02 $\lim_{x\to0}(9x^2+6x+1)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+3x)^2\}^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\}^6$

$=e^6$

답 ④

03 $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}+\lim_{x\to0}(1-5x)^{\frac{2}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^{10}+\lim_{x\to0}\{(1-5x)^{-\frac{1}{5x}}\}^{-10}$

$=e^{10}+e^{-10}$

따라서 $a=10$, $b=-10$ 또는 $a=-10$, $b=10$이므로

$a+b=0$

답 ③

04 $\lim_{x\to0}\left\{\left(1-\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)\right\}^{-\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-\frac{3}{x}}\right\}^{\frac{1}{3}}\cdot\left\{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{x}}\right\}^{-\frac{1}{4}}$

$=e^{\frac{1}{3}}\cdot e^{-\frac{1}{4}}=e^{\frac{1}{12}}$

$\therefore k=12$

답 12

05 $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$1-x=t$로 놓아도 같은 결과를 얻는다.

$\lim_{x\to1}x^{\frac{10}{1-x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{10}{t}}$

$=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-10}$

$=e^{-10}=\frac{1}{e^{10}}$

답 $\frac{1}{e^{10}}$

06 $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3x}\right)\left(1-\frac{1}{4x}\right)\right\}^{12x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{12x}\cdot\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{12x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right\}^4\cdot\left\{\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{-4x}\right\}^{-3}$

$=e^4\cdot e^{-3}=e$

답 ③

07 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right\}^{-5a}=e^{-5a}$

$e^{-5a}=e^{-15}$에서

$-5a=-15$

$\therefore a=3$

답 3

08 ① $\lim_{x\to0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}=e$

② $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}=e$

③ $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-t-1}{-t}\right)^t$

$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^t$

$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$

④ $x+2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to-2}(x+3)^{\frac{1}{x+2}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

⑤ $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{1-x}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{-t}$

$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}$

$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^{-1}$

$=e^{-1}=\frac{1}{e}$

답 ⑤

09 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+10x)}{\ln(1+2x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+10x)}{10x}\cdot\frac{2x}{\ln(1+2x)}\cdot\frac{10}{2}$

$=1\cdot1\cdot5=5$

답 5

10 $x+2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\ln\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\frac{1}{2}\ln(x+3)}$

$=\lim_{t\to0}2\cdot\frac{t}{\ln(1+t)}$

$=2\cdot1=2$

답 2

11 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{x^3-3x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{ax}\cdot\frac{a}{x^2-3}$

$=1\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)=-\frac{a}{3}$

$-\frac{a}{3}=-2$에서 $a=6$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{ax}{\ln(9x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{6x}{\ln(9x+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{9x}{\ln(9x+1)}\cdot\frac{6}{9}$

$=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

답 ④

$a>0$, $a\neq1$, $b\neq0$일 때,

$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+bx)}{x}=\frac{b}{\ln a}$

12 $\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1-4x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1-4x)}{-4x}\cdot(-4)$

$=\frac{1}{\ln2}\cdot(-4)=-\frac{4}{\ln2}$

답 ①

13 $\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+3x)}{\log_9(1-x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+3x)}{3x}\cdot\frac{-x}{\log_9(1-x)}\cdot(-3)$

$=\frac{1}{\ln3}\cdot\ln9\cdot(-3)$

$\ln9=\ln3^2=2\ln3$

$=\frac{1}{\ln3}\cdot2\ln3\cdot(-3)$

$=-6$

답 -6

14 $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+10x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)+\log(1+2x)+\log(1+3x)+\cdots+\log(1+10x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log(1+x)}{x}+\frac{\log(1+2x)}{2x}\cdot 2+\frac{\log(1+3x)}{3x}\cdot 3+\cdots+\frac{\log(1+10x)}{10x}\cdot 10\right\}$

$=\frac{1}{\ln 10}+\frac{2}{\ln 10}+\frac{3}{\ln 10}+\cdots+\frac{10}{\ln 10}$

$=\frac{55}{\ln 10}$ 답 $\frac{55}{\ln 10}$

15 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\ln(1+4x)}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{4}$

$=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 답 ③

16 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-5x}-e^{2x}}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{-5x}-1)-(e^{2x}-1)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-5x}-1}{x}-\frac{e^{2x}-1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{-5x}-1}{-5x}\cdot(-5)-\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2\right\}$

$=1\cdot(-5)-1\cdot 2=-7$ 답 ①

17 $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+4x}{e^{ax}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{e^{ax}-1}\cdot\frac{x^2+4}{a}$

$=1\cdot\frac{4}{a}=\frac{4}{a}$

$\frac{4}{a}=2$에서 $2a=4$ $\therefore a=2$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1-6x)}{ax}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1-6x)}{2x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1-6x)}{-6x}\cdot\left(-\frac{6}{2}\right)$

$=\frac{1}{\ln 2}\cdot(-3)=-\frac{3}{\ln 2}$ 답 $-\frac{3}{\ln 2}$

18 $\lim_{x\to 0}\frac{(27^x-1)\log_3(1+x)}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{27^x-1}{x}\cdot\frac{\log_3(1+x)}{x}$

$=\ln 27\cdot\frac{1}{\ln 3}$

$=3\ln 3\cdot\frac{1}{\ln 3}$

$=3$ 답 ⑤

Q BOX

$a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때, $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

$1+2+3+\cdots+10=\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\cdot 11}{2}=55$

$3^{3x}-3^{2x}-3^x+1=3^{2x}(3^x-1)-(3^x-1)=(3^{2x}-1)(3^x-1)$

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한에서 무리식이 있으면 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

$\ln 27=\ln 3^3=3\ln 3$

19 $\lim_{x\to 0}\frac{(a+8)^x-a^x}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\{(a+8)^x-1\}-(a^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{(a+8)^x-1}{x}-\frac{a^x-1}{x}\right\}$

$=\ln(a+8)-\ln a=\ln\frac{a+8}{a}$

$\ln\frac{a+8}{a}=\ln 3$에서 $\frac{a+8}{a}=3$

$a+8=3a$, $2a=8$

$\therefore a=4$ 답 ③

20 $\lim_{x\to 0}\frac{27^x-9^x-3^x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3^{3x}-3^{2x}-3^x+1}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(3^{2x}-1)(3^x-1)}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{9^x-1}{x}\cdot\frac{3^x-1}{x}$

$=\ln 9\cdot\ln 3$

$=2\ln 3\cdot\ln 3$

$=2(\ln 3)^2$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로 $ab=6$ 답 6

21 $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}\{\log_2(1+2x)+a\}=0$이므로 $a=0$

$a=0$을 주어진 식에 대입하면

$b=\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+2x)}{2x^2+6x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+2x)}{2x}\cdot\frac{1}{x+3}$

$=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3\ln 2}$

$\therefore a+b=\frac{1}{3\ln 2}$ 답 $\frac{1}{3\ln 2}$

22 $x \longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(\sqrt{ax+b}-2)=0$이므로

$\sqrt{b}-2=0$ $\therefore b=4$

$b=4$를 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sqrt{ax+4}-2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(\sqrt{ax+4}+2)}{(\sqrt{ax+4}-2)(\sqrt{ax+4}+2)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(\sqrt{ax+4}+2)}{ax}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{ax+4}+2}{a}$

$=1\cdot\frac{2+2}{a}=\frac{4}{a}$

$\frac{4}{a}=2$에서 $a=2$

$\therefore ab=8$ 답 ④

23 $x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(a\ln x+b)=0$이므로 $\quad b=0$

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{a\ln x}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{a\ln x}{(x+2)(x-1)}$$

이때 $x-1=t$로 놓으면 $x \to 1$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{a\ln x}{(x+2)(x-1)}=\lim_{t\to0}\frac{a\ln(t+1)}{(t+3)t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{t}\cdot\frac{a}{t+3}$$
$$=1\cdot\frac{a}{3}=\frac{a}{3}$$

$\frac{a}{3}=3$에서 $\quad a=9$

$\therefore a-b=9$ 답 9

24 $\overline{AQ}=|t|$, $\overline{PQ}=|a^t-1|$이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}=\lim_{t\to0+}\frac{a^t-1}{t}=\ln a$$

$\ln a=1$에서 $\quad a=e$ 답 ②

25 두 점 P, Q의 x좌표가 모두 t이므로

P$(t, \log_9 t)$, Q$(t, -\log_3 t)$

따라서 $\overline{PQ}=\log_9 t-(-\log_3 t)=\log_9 t+\log_3 t$이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{\overline{PQ}}{t-1}=\lim_{t\to1+}\frac{\log_9 t+\log_3 t}{t-1}$$

이때 $t-1=s$로 놓으면 $t \to 1+$일 때 $s \to 0+$이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{\log_9 t+\log_3 t}{t-1}$$
$$=\lim_{s\to0+}\frac{\log_9(s+1)+\log_3(s+1)}{s}$$
$$=\lim_{s\to0+}\left\{\frac{\log_9(s+1)}{s}+\frac{\log_3(s+1)}{s}\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln9}+\frac{1}{\ln3}$$
$$=\frac{1}{2\ln3}+\frac{1}{\ln3}$$
$$=\frac{3}{2\ln3}$$

답 $\frac{3}{2\ln3}$

26 점 P의 좌표를 $(t, 2^t-1)$이라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot1\cdot t=\frac{1}{2}t,$$
$$S_2=\frac{1}{2}\cdot2\cdot(2^t-1)=2^t-1$$
$$\therefore \frac{S_2}{S_1}=\frac{2(2^t-1)}{t}$$

이때 점 P가 원점에 한없이 가까워지면 $t \to 0+$이므로 구하는 극한값은

$$\lim_{t\to0+}\frac{S_2}{S_1}=\lim_{t\to0+}\frac{2(2^t-1)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{2^t-1}{t}\cdot2$$
$$=2\ln2$$

답 $2\ln2$

Q BOX

$a>1$, $t>0$일 때,
$|t|=t$,
$|a^t-1|=a^t-1$

$\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)=b$

$\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot$(점 P의 x좌표)

$\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot$(점 P의 y좌표)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,
$\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

점 P가 제1사분면 위의 점이므로 $t>0$이고 점 P의 x좌표가 0에 한없이 가까워지므로 $t \to 0+$이다.

27 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$$\therefore a=\lim_{x\to0}\frac{5^x-1}{x\cdot4^x}=\lim_{x\to0}\frac{5^x-1}{x}\cdot\frac{1}{4^x}$$
$$=\ln5\cdot1=\ln5$$

답 ⑤

28 $(x-2)f(x)=e^{2x-4}-1$에서 $x\neq2$일 때,

$$f(x)=\frac{e^{2x-4}-1}{x-2}$$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

$$\therefore f(2)=\lim_{x\to2}\frac{e^{2x-4}-1}{x-2}$$

이때 $x-2=t$로 놓으면 $x \to 2$일 때 $t \to 0$이므로

$$f(2)=\lim_{x\to2}\frac{e^{2x-4}-1}{x-2}=\lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{2t}\cdot2=1\cdot2=2$$

답 2

29 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$

$$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{\ln(a+2x)}{x}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x \to 0+$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0+}\ln(a+2x)=0$이므로

$\ln a=0 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+2x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot2=1\cdot2=2$$

$\therefore b-a=1$ 답 ④

08 지수함수와 로그함수의 미분

W 24쪽

01 (1) $y=\frac{1}{e^2}\cdot e^x$이므로

$$y'=\frac{1}{e^2}\cdot(e^x)'=\frac{1}{e^2}\cdot e^x=e^{x-2}$$

(2) $y'=(2x-1)'\cdot e^x+(2x-1)\cdot(e^x)'$
$=2\cdot e^x+(2x-1)\cdot e^x$
$=(2x+1)e^x$

(3) $y=3^3\cdot3^{2x}=27\cdot9^x$이므로
$y'=27\cdot9^x\ln9=54\ln3\cdot3^{2x}$

(4) $y'=(6x^2)'\cdot5^x+6x^2\cdot(5^x)'$
$=12x\cdot5^x+6x^2\cdot5^x\ln5$
$=6x\cdot5^x(2+x\ln5)$

답 (1) $y'=e^{x-2}$ (2) $y'=(2x+1)e^x$
(3) $y'=54\ln3\cdot3^{2x}$ (4) $y'=6x\cdot5^x(2+x\ln5)$

02 (1) $y=\ln 10+\ln x$이므로

$y'=\frac{1}{x}$

(2) $y'=(e^{-x})'\cdot\ln x+e^{-x}\cdot(\ln x)'$

$=-e^{-x}\cdot\ln x+e^{-x}\cdot\frac{1}{x}$

$=-e^{-x}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$

(3) $y=\log_3 2+\log_3 x$이므로

$y'=\frac{1}{x\ln 3}$

(4) $y=\log_2 x\cdot\log_2 x$이므로

$y'=(\log_2 x)'\cdot\log_2 x+\log_2 x\cdot(\log_2 x)'$

$=\frac{1}{x\ln 2}\cdot\log_2 x+\log_2 x\cdot\frac{1}{x\ln 2}$

$=\frac{2\log_2 x}{x\ln 2}$

답 (1) $y'=\frac{1}{x}$ (2) $y'=-e^{-x}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$

(3) $y'=\frac{1}{x\ln 3}$ (4) $y'=\frac{2\log_2 x}{x\ln 2}$

03 $y=5^{x+2}=5^2\cdot 5^x$이므로 $f(x)=5^{x+2}$으로 놓으면

$f'(x)=5^2\cdot(5^x)'=5^2\cdot 5^x\ln 5=25\ln 5\cdot 5^x$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$f'(-1)=25\ln 5\cdot\frac{1}{5}=5\ln 5$ 답 ⑤

04 $f'(x)=(ax+3)'\cdot e^x+(ax+3)\cdot(e^x)'$

$=ae^x+(ax+3)e^x$

$=(ax+3+a)e^x$

이므로 $f'(1)=(2a+3)e$

$(2a+3)e=-e$에서 $2a+3=-1$

$\therefore a=-2$ 답 ①

05 $f'(x)=3^x\ln 3+a^x\ln a$이므로

$f'(0)=\ln 3+\ln a=\ln 3a$

$\ln 3a=3\ln 3$에서 $\ln 3a=\ln 27$

$3a=27$ $\therefore a=9$

따라서 $f'(x)=3^x\ln 3+9^x\ln 9$이므로

$f'(-1)=\frac{1}{3}\ln 3+\frac{1}{9}\ln 9$

$=\frac{1}{3}\ln 3+\frac{2}{9}\ln 3$

$=\frac{5}{9}\ln 3$ 답 ③

06 $f(0)=b$에서 $b=1$이므로 $f(x)=2^x(ax+1)$

$\therefore f'(x)=(2^x)'\cdot(ax+1)+2^x\cdot(ax+1)'$

$=2^x\ln 2\cdot(ax+1)+2^x\cdot a$

$=2^x\{\ln 2\cdot(ax+1)+a\}$

$\therefore f'(0)=\ln 2+a$

Q BOX

$f(1)=e^2(1+1-2)$
$=0$

$(e^{-x})'=\left\{\left(\frac{1}{e}\right)^x\right\}'$
$=\left(\frac{1}{e}\right)^x\ln\frac{1}{e}$
$=-e^{-x}$

$1=\ln e$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는
$f'(a)$

$\log_9\frac{1}{x}=\log_9 x^{-1}$
$=-\log_9 x$,
$\log_3\frac{1}{x}=\log_3 x^{-1}$
$=-\log_3 x$

$3\ln 3=\ln 3^3=\ln 27$

$\ln 9=\ln 3^2=2\ln 3$

$f'(1)=3e^2(0+e)$
$=3e^3$

$f(0)=2^0(0+b)=b$

$\ln 2+a=2+\ln 2$에서 $a=2$

$\therefore a+b=3$ 답 3

07 $f(1)=0$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

이때 $f(x)=e\cdot e^x(x^2+x-2)$이므로

$f'(x)=e\{(e^x)'\cdot(x^2+x-2)+e^x\cdot(x^2+x-2)'\}$

$=e\{e^x(x^2+x-2)+e^x(2x+1)\}$

$=e^{x+1}(x^2+3x-1)$

$\therefore f'(1)=3e^2$ 답 $3e^2$

쌤 한마디

미분계수를 이용한 극한값의 계산은 다음과 같은 순서로 한다.

(i) 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한을 $f'(a)$를 사용한 식으로 변형한다.

(ii) $f'(x)$를 구한 후 $f'(a)$의 값을 구한다.

(iii) (i)의 식에 $f'(a)$의 값을 대입한다.

08 $f(x)=x\ln 3x=x(\ln 3+\ln x)$이므로

$f'(x)=(x)'\cdot(\ln 3+\ln x)+x\cdot(\ln 3+\ln x)'$

$=1\cdot(\ln 3+\ln x)+x\cdot\frac{1}{x}$

$=\ln 3+\ln x+1$

$=\ln 3ex$

$\ln 3ex=\ln ax$에서 $a=3e$ 답 ⑤

09 $f(x)=\log_9\frac{1}{x}-\log_3\frac{1}{x}=-\log_9 x+\log_3 x$이므로

$f'(x)=-\frac{1}{x\ln 9}+\frac{1}{x\ln 3}$

$\therefore f'(1)=-\frac{1}{\ln 9}+\frac{1}{\ln 3}=-\frac{1}{2\ln 3}+\frac{1}{\ln 3}$

$=\frac{1}{2\ln 3}$ 답 $\frac{1}{2\ln 3}$

10 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$=f'(1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(1)$

이때 $f(x)=e^{x+2}\ln x^3=e^2\cdot e^x\cdot 3\ln x=3e^2\cdot e^x\cdot\ln x$이므로

$f'(x)=3e^2\{(e^x)'\cdot\ln x+e^x\cdot(\ln x)'\}$

$=3e^2\left(e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}\right)$

$\therefore \frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\cdot 3e^3=\frac{3}{2}e^3$ 답 $\frac{3}{2}e^3$

11 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-1}{x-3}=\frac{2}{\ln 3}$에서 $x\to 3$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}\{f(x)-1\}=0$이므로

$f(3)=1$

$a\log_3 3+b=1 \quad \therefore a+b=1 \quad \cdots\cdots ㉠$

한편 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$이고

$f'(x)=\frac{a}{x\ln3}$이므로 $\quad f'(3)=\frac{a}{3\ln3}$

$\frac{a}{3\ln3}=\frac{2}{\ln3}$에서 $\quad \frac{a}{3}=2 \quad \therefore a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면

$6+b=1 \quad \therefore b=-5$

$\therefore ab=-30$ 답 ①

12 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}(e^x+a)=\lim_{x\to0-}(bx-3)=f(0)$

$1+a=-3 \quad \therefore a=-4$

또 $f'(0)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases} e^x & (x>0) \\ b & (x<0) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to0+}e^x=\lim_{x\to0-}b \quad \therefore b=1$

$\therefore b-a=5$ 답 5

13 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(ax^3-b)=\lim_{x\to1-}(3^x-3)=f(1)$

$\therefore a-b=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

또 $f'(1)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases} 3ax^2 & (x>1) \\ 3^x\ln3 & (x<1) \end{cases}$

에서

$\lim_{x\to1+}3ax^2=\lim_{x\to1-}3^x\ln3, \quad 3a=3\ln3$

$\therefore a=\ln3$

$a=\ln3$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=\ln3$

$\therefore e^a+e^b=e^{\ln3}+e^{\ln3}=3+3=6$ 답 ④

14 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하고 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(ax^2-3\ln x)=\lim_{x\to1-}be^{x-1}=f(1)$

$\therefore a=b \quad \cdots\cdots ㉠$

또 $f'(1)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases} 2ax-\frac{3}{x} & (x>1) \\ be^{x-1} & (x<1) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to1+}\left(2ax-\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to1-}be^{x-1}$

$2a-3=b \quad \therefore 2a-b=3 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=3$

$\therefore ab=9$ 답 ⑤

Q BOX

$\sin\frac{3}{4}\pi=\sin\frac{\pi}{4}$

$\cos\frac{3}{4}\pi=-\cos\frac{\pi}{4}$

$\tan\frac{3}{4}\pi=-\tan\frac{\pi}{4}$

$\sin240°=-\sin60°$

$\cos240°=-\cos60°$

$e^{\ln3}=3^{\ln e}=3$

$\tan240°=\tan60°$

$b=a$를 $2a-b=3$에 대입하면

$2a-a=3 \quad \therefore a=3$

$\therefore b=a=3$

$\sin\theta<0$이므로

$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}<0$

04 삼각함수의 미분

09 삼각함수

W 26쪽

01 (1) $\csc\theta=\csc\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\sec\theta=\sec\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cot\theta=\cot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$

(2) $\csc\theta=\csc\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$

$\sec\theta=\sec\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{\cos\frac{3}{4}\pi}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}$

$\cot\theta=\cot\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{\tan\frac{3}{4}\pi}=\frac{1}{-1}=-1$

(3) $\csc\theta=\csc(-30°)=\frac{1}{\sin(-30°)}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

$\sec\theta=\sec(-30°)=\frac{1}{\cos(-30°)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cot\theta=\cot(-30°)=\frac{1}{\tan(-30°)}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$=-\sqrt{3}$

(4) $\csc\theta=\csc240°=\frac{1}{\sin240°}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sec\theta=\sec240°=\frac{1}{\cos240°}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

$\cot\theta=\cot240°=\frac{1}{\tan240°}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 풀이 참조

참고 (3) $\csc(-30°)=-\csc30°$, $\sec(-30°)=\sec30°$, $\cot(-30°)=-\cot30°$임을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수도 있다.

02 (1) $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$이므로

$\tan^2\theta+1=(-\sqrt{3})^2 \quad \therefore \tan^2\theta=2$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\quad \tan\theta<0$

$\therefore \tan\theta=-\sqrt{2}$

(2) $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$이므로

$1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\csc^2\theta \quad \therefore \csc^2\theta=\frac{5}{4}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\quad \csc\theta<0$

$\therefore \csc\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

답 (1) $-\sqrt{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

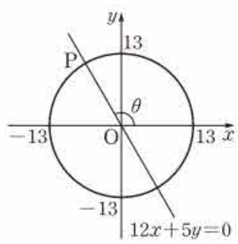
03 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta=\frac{4}{5}$

$\therefore \csc\theta-\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{5}}=2$ 답 ⑤

04 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 13인 원이 직선 $12x+5y=0$, 즉 $y=-\frac{12}{5}x$와 만나는 점 중에서 제2사분면 위의 점을 P라 하면



$P(-5, 12)$

$\overline{OP}=13$이므로

$\csc\theta=\frac{13}{12}$, $\sec\theta=-\frac{13}{5}$, $\cot\theta=-\frac{5}{12}$

$\therefore 10(\csc\theta-\sec\theta-\cot\theta)$

$=10\left(\frac{13}{12}+\frac{13}{5}+\frac{5}{12}\right)=41$ 답 41

다른 풀이 $12x+5y=0$에서 $y=-\frac{12}{5}x$

$\tan\theta=-\frac{12}{5}$이므로

$\sec^2\theta=\tan^2\theta+1=\left(-\frac{12}{5}\right)^2+1=\frac{169}{25}$

이때 $0<\theta<\pi$이고 $\tan\theta<0$에서 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\sec\theta=-\frac{13}{5}$

$\cot\theta=-\frac{5}{12}$이므로

$\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\left(-\frac{5}{12}\right)^2=\frac{169}{144}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\csc\theta=\frac{13}{12}$

$\therefore 10(\csc\theta-\sec\theta-\cot\theta)$

$=10\left(\frac{13}{12}+\frac{13}{5}+\frac{5}{12}\right)=41$

05 조건 ㈎에서 $\sin\theta$와 $\cot\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.
조건 ㈏에서 $\csc\theta$와 $\sec\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
따라서 θ는 제2사분면의 각이다. 답 ②

06 $\frac{1-\sin\theta}{\csc\theta+\cot\theta}-\frac{1+\sin\theta}{\csc\theta-\cot\theta}+2$

$=\frac{(1-\sin\theta)(\csc\theta-\cot\theta)-(1+\sin\theta)(\csc\theta+\cot\theta)}{(\csc\theta+\cot\theta)(\csc\theta-\cot\theta)}+2$

$=\csc\theta-\cot\theta-\sin\theta\csc\theta+\sin\theta\cot\theta$
$\quad-(\csc\theta+\cot\theta+\sin\theta\csc\theta+\sin\theta\cot\theta)+2$

$=\csc\theta-\cot\theta-1+\cos\theta$
$\quad-(\csc\theta+\cot\theta+1+\cos\theta)+2$

$=-2\cot\theta$ 답 ⑤

Q BOX

$\sin\theta>0$

$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$에서
$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$

$\cos\theta>0$, $\csc\theta>0$

직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때,
$\tan\theta=m$

$\cos\theta<0$, $\csc\theta<0$

$\sec\theta<0$, $\cot\theta>0$

$\sec\theta>0$, $\cot\theta<0$

$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$

$\sin\theta>0$, $\cot\theta<0$이면
➡ 제2사분면
$\sin\theta<0$, $\cot\theta>0$이면
➡ 제3사분면

$\csc\theta>0$, $\sec\theta<0$이면
➡ 제2사분면
$\csc\theta<0$, $\sec\theta>0$이면
➡ 제4사분면

$\cot^2\theta=\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{9}{16}$

$(\csc\theta+\cot\theta)$
$\times(\csc\theta-\cot\theta)$
$=\csc^2\theta-\cot^2\theta$
$=1$

07 ㄱ. $(1+\cot\theta+\csc\theta)(1+\tan\theta-\sec\theta)$

$=\left(1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right)$

$=\frac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{\cos\theta}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$

ㄴ. $\frac{\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}+\frac{\cos\theta}{\sec\theta-\tan\theta}$

$=\frac{\cos\theta(\sec\theta-\tan\theta)+\cos\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)}$

$=\frac{2\cos\theta\sec\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$

$=2\cos\theta\sec\theta$

$=2$

ㄷ. $(\sin\theta-\csc\theta)^2+(\cos\theta-\sec\theta)^2-(\tan\theta-\cot\theta)^2$

$=\sin^2\theta-2+\csc^2\theta+\cos^2\theta-2+\sec^2\theta$
$\quad-\tan^2\theta+2-\cot^2\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\csc^2\theta-\cot^2\theta)$
$\quad+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)-2$

$=1+1+1-2=1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

08 $\cos\theta\csc\theta>0$에서 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이고, $\sec\theta\cot\theta<0$에서 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.
따라서 θ는 제3사분면의 각이므로

$\sqrt{\sec^2\theta-1}\sqrt{1+\cot^2\theta}=\sqrt{\tan^2\theta}\sqrt{\csc^2\theta}$

$=\tan\theta\cdot(-\csc\theta)$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right)$

$=-\frac{1}{\cos\theta}=-\sec\theta$

답 ②

09 $\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$,

$\sec^2\theta=\tan^2\theta+1=(\sqrt{2})^2+1=3$이므로

$4\csc^2\theta-\sec^2\theta=4\cdot\frac{3}{2}-3=3$

답 ③

10 $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1=\left(\frac{5}{3}\right)^2-1=\frac{16}{9}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

$\therefore \csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\csc\theta=-\frac{5}{4}$

$\therefore \tan\theta-\csc\theta=-\frac{4}{3}-\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{1}{12}$

답 ②

11 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{5}{18}$

$$\therefore \tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{18}{5}$$

답 $\frac{18}{5}$

12 $$\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}=\frac{(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}=\frac{2}{1-\cos^2\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}=2\csc^2\theta$$

$2\csc^2\theta=6$에서 $\quad\csc^2\theta=3$

$\therefore \cot^2\theta=\csc^2\theta-1=3-1=2$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\quad\cot\theta=\sqrt{2}$

답 ①

10 삼각함수의 덧셈정리

W 28쪽

01 (1) $\sin 15°\cos 30°+\cos 15°\sin 30°$

$=\sin(15°+30°)=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos 20°\cos 50°+\sin 20°\sin 50°$

$=\cos(20°-50°)=\cos(-30°)$

$=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\frac{\tan 25°+\tan 35°}{1-\tan 25°\tan 35°}=\tan(25°+35°)$

$=\tan 60°=\sqrt{3}$

답 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

02 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\sin\alpha>0$이므로

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$=2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

$=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

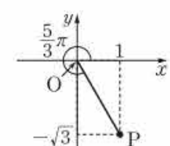
$=\left(-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=-\frac{1}{9}$

(3) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$이므로

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=4\sqrt{5}$$

답 (1) $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ (2) $-\frac{1}{9}$ (3) $4\sqrt{5}$

03 (1) 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $P(1, -\sqrt{3})$을 잡으면



$\overline{OP}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

원점과 점 (x_1, y_1) 사이의 거리는 $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

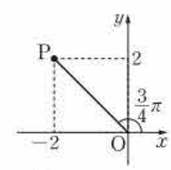
$\therefore -\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

$=2\left\{\sin\theta\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right\}$

$=2\left(\sin\theta\sin\frac{5}{3}\pi+\cos\theta\cos\frac{5}{3}\pi\right)$

$=2\cos\left(\theta-\frac{5}{3}\pi\right)$

(2) 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $P(-2, 2)$를 잡으면



$\overline{OP}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore 2\sin\theta-2\cos\theta$

$=2\sqrt{2}\left\{\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\theta\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\sin\frac{3}{4}\pi+\cos\theta\cos\frac{3}{4}\pi\right)$

$=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{3}{4}\pi\right)$

답 (1) $2\cos\left(\theta-\frac{5}{3}\pi\right)$ (2) $2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{3}{4}\pi\right)$

04 $$\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}=\csc\alpha$$

답 ③

다른 풀이 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$

$=\frac{1-2\sin^2\alpha}{\sin\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$

$=\frac{1}{\sin\alpha}-2\sin\alpha+2\sin\alpha$

$=\frac{1}{\sin\alpha}=\csc\alpha$

05 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$에서 $\sin\beta<0$이므로

$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{3}{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$=-\frac{3\sqrt{5}}{25}+\frac{8\sqrt{5}}{25}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\therefore k=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

06 $\overline{PQ}=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\beta-\cos\alpha)^2}=\sqrt{3}$이므로

$(\sin\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\beta-\cos\alpha)^2=3$

$2-2(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)=3$

$\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=-\frac{1}{2}$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$ 답 ②

07 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$이고 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore \tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

이때 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$이므로

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$

$\therefore \tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$ ...... ㉠

$\therefore (1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$

$=1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta$

$=1+(1-\tan\alpha\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta$ ($\because$ ㉠)

$=2$ 답 2

08 두 직선 $y=\frac{1}{2}x-2$, $y=3x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=3$

이므로

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{\frac{1}{2}-3}{1+\frac{1}{2}\cdot3}\right|=1$$

$\therefore \sec^2\theta=\tan^2\theta+1=1+1=2$ 답 ①

쌤 한마디

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\tan\alpha=m$, $\tan\beta=m'$이므로 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right| \text{ (단, } mm'\neq-1)$$

09 $3\sqrt{3}x-y-2=0$에서 $\quad y=3\sqrt{3}x-2$

$\sqrt{3}x+2y-1=0$에서 $\quad y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}$

두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=3\sqrt{3}$, $\tan\beta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{3\sqrt{3}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1+3\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right|=\sqrt{3}$$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

답 $\frac{\pi}{3}$

10 $ax-2y+5=0$에서 $\quad y=\frac{1}{2}ax+\frac{5}{2}$

$x+3y-1=0$에서 $\quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=\frac{1}{2}a$, $\tan\beta=-\frac{1}{3}$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}$

$\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1$, $\quad\frac{\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}a}=\pm1$

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}=1-\frac{1}{6}a$ 또는 $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}=-1+\frac{1}{6}a$

$\therefore a=1$ 또는 $a=-4$

이때 $a>0$이므로 $\quad a=1$ 답 ①

11 $\triangle BDC$에서 $\quad\overline{BC}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

$\triangle ABC$에서 $\quad\overline{AB}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+3^2}=3\sqrt{3}$

$\angle ABC=\alpha$, $\angle CBD=\beta$라 하면

$\sin\alpha=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\sin\beta=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \cos\theta=\cos(\alpha+\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}$

12 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\angle C=\angle B=\beta$

따라서 $\alpha+\beta+\beta=180°$이므로 $\quad\alpha+\beta=180°-\beta$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\tan(180°-\beta)=-\tan\beta$

이때 $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{4}{3}$이므로 $\quad\tan\beta=\frac{4}{3}$

Q BOX

두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

양변에 6을 곱하면

$3a+2=6-a$

$\therefore a=1$

양변에 6을 곱하면

$3a+2=-6+a$

$\therefore a=-4$

또 $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{4}{3}$에서

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{4}{3}$$

$$\frac{\tan\alpha+\frac{4}{3}}{1-\tan\alpha\cdot\frac{4}{3}}=-\frac{4}{3}$$

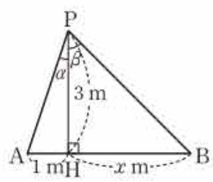
$$\tan\alpha+\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}+\frac{16}{9}\tan\alpha,\qquad \frac{7}{9}\tan\alpha=\frac{8}{3}$$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{24}{7}$$

따라서 $p=7$, $q=24$이므로

$p+q=31$ 답 31

13 오른쪽 그림과 같이 $\angle APH=\alpha$, $\angle BPH=\beta$, $\overline{BH}=x$ m라 하면



$$\tan\alpha=\frac{1}{3},\ \tan\beta=\frac{x}{3}$$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}+\frac{x}{3}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{3}}$$

$$=\frac{3+3x}{9-x}$$

$\frac{3+3x}{9-x}=2$에서 $\quad 3+3x=18-2x$

$5x=15 \qquad \therefore x=3$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는

$\overline{AH}+\overline{BH}=1+3=4$ (m) 답 ⑤

14 $3\sin\theta-\cos\theta=0$에서

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{3}\qquad \therefore \tan\theta=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

15 $y=2\cos 2x-8\sin x+a$

$=2(1-2\sin^2 x)-8\sin x+a$

$=-4\sin^2 x-8\sin x+2+a$

$=-4(\sin x+1)^2+6+a$

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로 주어진 함수는 $\sin x=-1$일 때 최댓값 $6+a$를 갖는다.

즉 $6+a=3$이므로 $\quad a=-3$

답 -3

16 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{10}{3}$에서 $\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{10}$

$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{5}$

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $0<2\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\quad \cos 2\theta>0$

$\therefore \cos 2\theta=\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

따라서 $p=5$, $q=4$이므로 $\quad p+q=9$ 답 ④

다른 풀이 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{10}{3}$에서

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{10}{3}$

$3\tan^2\theta-10\tan\theta+3=0$

$(3\tan\theta-1)(\tan\theta-3)=0$

$\therefore \tan\theta=\frac{1}{3}$ 또는 $\tan\theta=3$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이므로 $\quad \tan\theta=\frac{1}{3}$

> $0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서
> $0<\tan\theta<1$

$\therefore \sec^2\theta=\tan^2\theta+1=\left(\frac{1}{3}\right)^2+1=\frac{10}{9}$

따라서 $\cos^2\theta=\frac{9}{10}$이므로

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\frac{9}{10}-1=\frac{4}{5}$

즉 $p=5$, $q=4$이므로 $\quad p+q=9$

17 $2\sin\theta+\sqrt{5}\cos\theta=3\left(\sin\theta\cdot\frac{2}{3}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

$=3(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$

$=3\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3},\ \cos\alpha=\frac{2}{3}\right)$

$\therefore r=3$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-1=-\frac{1}{9}$이므로

$r\cos 2\alpha=3\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

18 $y=-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{7}{4}\pi+\sin x\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

$=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{7}{4}\pi\right)$

> 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은
> $y=f(x-m)+n$

따라서 $y=-\sin x+\cos x$의 그래프는 $y=\sqrt{2}\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{7}{4}\pi$만큼 평행이동한 것이므로

$a=\sqrt{2}$, $b=\frac{7}{4}\pi$

$\therefore ab=\frac{7\sqrt{2}}{4}\pi$ 답 ④

19 $f(x)=5\sin x+12\cos x+2$

$=13\left(\sin x\cdot\frac{5}{13}+\cos x\cdot\frac{12}{13}\right)+2$

$=13\sin(x+\alpha)+2$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{12}{13},\ \cos\alpha=\frac{5}{13}\right)$

> 함수
> $y=a\sin(bx+c)+d$의
> ① 최댓값: $|a|+d$
> ② 최솟값: $-|a|+d$
> ③ 주기: $\frac{2\pi}{|b|}$

① $f(0)=0+12+2=14$

② $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=5+0+2=7$

③ 주기는 2π이다.

④ 최댓값은 $13+2=15$이다.

⑤ 최솟값은 $-13+2=-11$이다. 답 ④

20 $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos x-3$

$$=2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)+\cos x-3$$
$$=\cos x-\sqrt{3}\sin x+\cos x-3$$
$$=2\cos x-\sqrt{3}\sin x-3$$
$$=\sqrt{7}\left(\cos x\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}-\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)-3$$
$$=\sqrt{7}\cos(x+\alpha)-3$$
$$\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$$

이때 $-1\le\cos(x+\alpha)\le1$이므로

$$-\sqrt{7}-3\le\sqrt{7}\cos(x+\alpha)-3\le\sqrt{7}-3$$

따라서 $M=\sqrt{7}-3$, $m=-\sqrt{7}-3$이므로

$M-m=2\sqrt{7}$ 답 $2\sqrt{7}$

$M-m$
$=(\sqrt{7}-3)-(-\sqrt{7}-3)$
$=\sqrt{7}-3+\sqrt{7}+3$
$=2\sqrt{7}$

21 $\angle APB=90°$이므로 $\angle PAB=\theta$라 하면

반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$이다.

$\overline{AP}=6\cos\theta$, $\overline{PB}=6\sin\theta$

$\therefore \overline{AP}+\overline{PB}=6\cos\theta+6\sin\theta$

$$=6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$$
$$=6\sqrt{2}\left(\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}+\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=6\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$이므로

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le1$$

$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$일 때, $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$$\therefore 6<6\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le6\sqrt{2}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최댓값은 $6\sqrt{2}$이다.

답 $6\sqrt{2}$

11 삼각함수의 극한과 미분

W 31쪽

01 (1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin3x=\sin\frac{\pi}{2}=1$

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x\tan x=\sin\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}$$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1$$

(4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$

$\sin^2x+\cos^2x=1$에서
$\cos^2x=1-\sin^2x$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{2}$$

답 (1) 1 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{2}$

02 (1) $\lim_{x\to0}\frac{6x}{\sin2x}=3\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin2x}=3\cdot1=3$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot1=1$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\tan8x}{\tan10x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan8x}{8x}\cdot\frac{10x}{\tan10x}\cdot\frac{4}{5}$

$$=1\cdot1\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{\tan12x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan12x}{12x}\cdot\frac{3x}{\sin3x}\cdot4$

$$=1\cdot1\cdot4=4$$

답 (1) 3 (2) 1 (3) $\frac{4}{5}$ (4) 4

03 (3) $y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

(4) $y'=3x^2\cos x+x^3(-\sin x)=x^2(3\cos x-x\sin x)$

답 (1) $y'=3\cos x-2$ (2) $y'=-\sin x+\frac{1}{x}$

(3) $y'=e^x(\sin x+\cos x)$

(4) $y'=x^2(3\cos x-x\sin x)$

04 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{1-\cos2x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{1-(2\cos^2x-1)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2(1-\cos^2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2(1+\cos x)(1-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(1+\cos x)}$$
$$=\frac{1}{2\cdot(1+1)}=\frac{1}{4}$$

답 ①

05 $\lim_{x\to2\pi}\frac{\tan^2x}{\cos x-1}=\lim_{x\to2\pi}\frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}{\cos x-1}$

$$=\lim_{x\to2\pi}\frac{\sin^2x}{\cos^2x(\cos x-1)}$$
$$=\lim_{x\to2\pi}\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x(\cos x-1)}$$
$$=\lim_{x\to2\pi}\frac{-(\cos x+1)(\cos x-1)}{\cos^2x(\cos x-1)}$$
$$=\lim_{x\to2\pi}\left(-\frac{\cos x+1}{\cos^2x}\right)$$
$$=-\frac{1+1}{1}=-2$$

답 -2

06 $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{a\cot^2 x}{1+\sin x}$

$=\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{a\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}{1+\sin x}$

$=\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{a\cos^2 x}{\sin^2 x(1+\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{a(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x(1+\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{a(1+\sin x)(1-\sin x)}{\sin^2 x(1+\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{a(1-\sin x)}{\sin^2 x}$

$=\frac{a(1+1)}{1}=2a$

$2a=6$에서 $a=3$ 답 3

07 $\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{1+f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$

$=1+1=2$ 답 ⑤

08 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3-4x^2+x)}{2x^2-3x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3-4x^2+x)}{x^3-4x^2+x}\cdot\frac{x^3-4x^2+x}{2x^2-3x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3-4x^2+x)}{x^3-4x^2+x}\cdot\frac{x^2-4x+1}{2x-3}$

$=1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

09 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin 4x)}{\sin 3x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin 4x)}{\sin 4x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{4}{3}$

$=1\cdot1\cdot1\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$ 답 ④

10 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{e^{4x}-1}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{e^{4x}-1}\cdot\frac{\sin 6x}{6x}\cdot\frac{3}{2}$

$+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot 2$

$=1\cdot1\cdot\frac{3}{2}+1\cdot1\cdot2=\frac{7}{2}$ 답 ④

Q BOX

분자, 분모를 각각 x로 나눈다.

$1(\text{라디안})=\frac{180^\circ}{\pi}$

$1^\circ=\frac{\pi}{180}(\text{라디안})$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$

$\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cot x$

분자, 분모를 각각 x로 나눈다.

$x\to 0$일 때 $x^3-4x^2+x\to 0$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3-4x^2+x)}{x^3-4x^2+x}=1$

$a>0$, $a\neq 1$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

$x\to 0$일 때 $\sin 4x\to 0$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin 4x)}{\sin 4x}=1$

$x\to 0$일 때 $2\sin 3x\to 0$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2\sin 3x)}{2\sin 3x}=1$

① $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

② $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

11 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\sin 3x}{x}+\cdots+\frac{\sin nx}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2+\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3+\cdots+\frac{\sin nx}{nx}\cdot n}$

$=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

$=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$

$\frac{2}{n(n+1)}=\frac{1}{55}$에서 $n(n+1)=110$

$n^2+n-110=0$, $(n+11)(n-10)=0$

$\therefore n=10$ ($\because n$은 자연수) 답 10

12 $x^\circ=\frac{\pi}{180}x$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^\circ}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{\pi}{180}x}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{\pi}{180}$

$=1\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{180}$ 답 ①

쌤 한마디

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$에서 x의 단위는 라디안이므로 x°가 주어진 경우에는 $x^\circ=\frac{\pi}{180}x$임을 이용하여 x의 단위를 라디안으로 바꿔야 함에 주의한다.

13 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{2x-\tan 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 8x}{x}}{2-\frac{\tan 4x}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 8x}{8x}\cdot 8}{2-\frac{\tan 4x}{4x}\cdot 4}$

$=\frac{1\cdot 8}{2-1\cdot 4}=-4$ 답 -4

14 $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{a\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{1}{a}$

$=\ln 2\cdot 1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\ln 2$

$\frac{1}{a}\ln 2=\frac{1}{3}\ln 2$에서 $a=3$ 답 ②

15 $\lim_{x\to 0}\frac{g(f(x))}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2\sin 3x)}{\sin 3x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2\sin 3x)}{2\sin 3x}\cdot 2$

$=1\cdot 2=2$ 답 2

16 $\lim_{x\to0}\frac{2\cos^2x-\cos x-1}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(2\cos x+1)}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}\cdot(2\cos x+1)$

$=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{x^2(\cos x+1)}\cdot(2\cos x+1)$

$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{x^2(\cos x+1)}\cdot(2\cos x+1)$

$=\lim_{x\to0}(-1)\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{2\cos x+1}{\cos x+1}$

$=-1\cdot1^2\cdot\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$ 답 ②

17 $\lim_{x\to0}\frac{\sec x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\cos x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x^2\cos x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2\cos x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}$

$=1^2\cdot\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2}$

답 ④

18 $f(n)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos nx}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos nx)(1+\cos nx)}{x^2(1+\cos nx)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2nx}{x^2(1+\cos nx)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2nx}{x^2(1+\cos nx)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin nx}{nx}\right)^2\cdot\frac{n^2}{1+\cos nx}$

$=1^2\cdot\frac{n^2}{2}=\frac{n^2}{2}$

$\therefore f(2)+f(3)+f(4)=\frac{2^2}{2}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^2}{2}$

$=\frac{29}{2}$ 답 $\frac{29}{2}$

19 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos ax}{5x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos ax)(1+\cos ax)}{5x^2(1+\cos ax)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2ax}{5x^2(1+\cos ax)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2ax}{5x^2(1+\cos ax)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2\cdot\frac{a^2}{5}\cdot\frac{1}{1+\cos ax}$

$=1^2\cdot\frac{a^2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{10}$

$\frac{a^2}{10}=\frac{2}{5}$에서 $a^2=4$

$\therefore a=\pm2$

따라서 구하는 곱은

$-2\cdot2=-4$ 답 -4

20 $x-\pi=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)\tan x}{1+\cos x}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t\tan(t+\pi)}{1+\cos(t+\pi)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t\tan t}{1-\cos t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t\tan t(1+\cos t)}{(1-\cos t)(1+\cos t)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t\tan t(1+\cos t)}{1-\cos^2t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t\tan t(1+\cos t)}{\sin^2t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}\cdot\left(\frac{t}{\sin t}\right)^2\cdot(1+\cos t)$

$=1\cdot1^2\cdot2=2$ 답 2

Q BOX

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$
$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$
$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

쌤 한마디

$a\neq0$일 때, $x\to a$ 또는 $x\to\infty$인 삼각함수의 극한은 $x\to a$이면 $x-a=t$로 놓고, $x\to\infty$이면 $\frac{1}{x}=t$로 놓아 $t\to0$이 되도록 주어진 식을 변형한다.

21 $x°=\frac{\pi}{180}x$이므로

$\lim_{x\to\infty}x°\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{180}x\sin\frac{1}{x}$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{180}x\sin\frac{1}{x}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sin t}{t}$

$=\frac{\pi}{180}\cdot1=\frac{\pi}{180}$

$\therefore a=\frac{1}{180}$ 답 $\frac{1}{180}$

22 $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\cos x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\sin(-\sin t)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\sin(-\sin t)}{-\sin t}\cdot\frac{\sin t}{t}\cdot(-1)$

$=1\cdot1\cdot(-1)$

$=-1$ 답 ②

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$

23 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\tan\frac{1}{x}\right)\csc\frac{1}{x}$$
$$=\lim_{t\to0}\sin(\tan t)\csc t$$
$$=\lim_{t\to0}\sin(\tan t)\cdot\frac{1}{\sin t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\tan t)}{\tan t}\cdot\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{\tan t}{t}$$
$$=1\cdot1\cdot1=1$$

답 ②

24 $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x+\cos x}{6x+\pi}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{6\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$$

$x+\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\frac{\pi}{6}$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{6\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{2\sin t}{6t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{3}$$
$$=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

답 ②

Q BOX

$\sqrt{3}\sin x+\cos x$
$=2\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\cdot\frac{1}{2}\right)$
$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$
$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

25 $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(e^x+a)=0$이므로 $\quad a=-1$

$a=-1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{2x}{\sin2x}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore b-a=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

26 $x \longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-1)=0$이므로

$\sqrt{b}-1=0 \qquad \therefore b=1$

$b=1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{\sqrt{ax+1}-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{ax}\cdot(\sqrt{ax+1}+1)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{3x}\cdot\frac{3}{a}\cdot(\sqrt{ax+1}+1)$$
$$=1\cdot\frac{3}{a}\cdot2=\frac{6}{a}$$

$\frac{6}{a}=6$에서 $\quad a=1$

$\therefore a+b=2$

답 ①

Q BOX

$(\sqrt{ax+1}-1)$
$\times(\sqrt{ax+1}+1)$
$=ax+1-1=ax$

27 $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(a-b\cos x)=0$이므로

$a-b=0 \qquad \therefore a=b$

$b=a$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{a-a\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{a(1-\cos x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{a(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{a\sin^2x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{a}{1+\cos x}$$
$$=1^2\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$

$\frac{a}{2}=\sqrt{2}$에서 $\qquad a=2\sqrt{2},\ b=2\sqrt{2}$

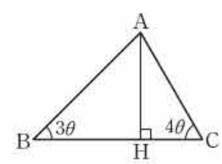
$\therefore ab=8$

답 8

Q BOX

$a(1-\cos x)(1+\cos x)$
$=a(1-\cos^2x)$
$=a\sin^2x$

28 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AB}=\frac{\overline{AH}}{\sin3\theta}$,

$\overline{AC}=\frac{\overline{AH}}{\sin4\theta}$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\overline{AH}}{\sin4\theta}}{\frac{\overline{AH}}{\sin3\theta}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin3\theta}{\sin4\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin3\theta}{3\theta}\cdot\frac{4\theta}{\sin4\theta}\cdot\frac{3}{4}$$
$$=1\cdot1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

답 ①

Q BOX

△ABH에서

$\sin3\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$

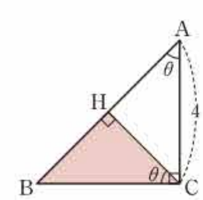
$\therefore \overline{AB}=\frac{\overline{AH}}{\sin3\theta}$

△AHC에서

$\sin4\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}$

$\therefore \overline{AC}=\frac{\overline{AH}}{\sin4\theta}$

29 △ABC∽△CBH (AA 닮음)이므로



$\angle BCH=\angle BAC=\theta$

△AHC에서

$\overline{CH}=\overline{AC}\sin\theta=4\sin\theta$

△BCH에서

$\overline{BH}=\overline{CH}\tan\theta=4\sin\theta\tan\theta$

$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{CH}\cdot\overline{BH}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot4\sin\theta\cdot4\sin\theta\tan\theta$$
$$=8\sin^2\theta\tan\theta$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\sin^2\theta\tan\theta}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}8\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}$$
$$=8\cdot1^2\cdot1=8$$

답 8

Q BOX

△ABC와 △CBH에서

∠B는 공통,

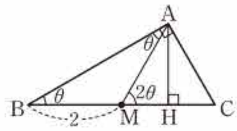
∠ACB=∠CHB=90°

이므로

△ABC∽△CBH

(AA 닮음)

30 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AM}$을 그으면



$\overline{AM}=\overline{BM}=2$

$\therefore \angle MAB=\angle MBA$
$=\theta$

$\triangle$MAB에서 $\angle AMH=2\theta$

$\triangle$AMH에서

$\overline{MH}=\overline{AM}\cos 2\theta=2\cos 2\theta$

$\therefore \overline{CH}=\overline{CM}-\overline{MH}=2-2\cos 2\theta$
$=2(1-\cos 2\theta)$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2(1-\cos 2\theta)}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2(1-\cos 2\theta)(1+\cos 2\theta)}{\theta^2(1+\cos 2\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2(1-\cos^2 2\theta)}{\theta^2(1+\cos 2\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin^2 2\theta}{\theta^2(1+\cos 2\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\cdot\frac{8}{1+\cos 2\theta}$$
$$=1^2\cdot 4=4$$

답 4

직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이므로
$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$

삼각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않은 두 내각의 크기의 합과 같으므로
$\angle AMH$
$=\angle MAB+\angle MBA$
$=\theta+\theta=2\theta$

31 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{\tan 3(x-1)}{x-1}=k$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$k=\lim_{x\to 1}\frac{\tan 3(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan 3t}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\tan 3t}{3t}\cdot 3=1\cdot 3=3$$

답 ②

32 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{a-3\cos x}{x\sin x}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(a-3\cos x)=0$이므로 $a-3=0$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos x}{x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos^2 x)}{x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3}{1+\cos x}$$
$$=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore f(0)=\frac{3}{2}$$

답 ②

Q BOX

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}+b}{\tan 2x} & (x\neq 0)\\ 3 & (x=0)\end{cases}$$

33 $x\neq 0$일 때, $f(x)=\dfrac{e^{ax}+b}{\tan 2x}$

함수 $f(x)$가 구간 $\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}+b}{\tan 2x}=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(e^{ax}+b)=0$이므로 $1+b=0$

$\therefore b=-1$

$b=-1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot\frac{2x}{\tan 2x}\cdot\frac{a}{2}$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$

$\frac{a}{2}=3$에서 $a=6$

$\therefore a+b=5$

답 5

34 $f(x)=x^2\cos x$에서

$f'(x)=2x\cos x+x^2(-\sin x)$
$=2x\cos x-x^2\sin x$

$\therefore f'(\pi)=2\pi\cos\pi-\pi^2\sin\pi=-2\pi$

$\therefore a=-2$

답 ①

35 $f(x)=\sin x-\cos x+2x$에서

$f'(x)=\cos x+\sin x+2$

$$=\sqrt{2}\left(\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos x\sin\frac{\pi}{4}+\sin x\cos\frac{\pi}{4}\right)+2$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2$$

$f'(\alpha)=2+\sqrt{2}$에서 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+2=2+\sqrt{2}$

$\therefore \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{4}\le\alpha+\frac{\pi}{4}\le\frac{3}{4}\pi$이므로

$\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore \alpha=\frac{\pi}{4}$

답 $\frac{\pi}{4}$

$\sin\frac{\pi}{2}=1$

36 $f(x)=e^x(a\sin x+b\cos x)$라 하면 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로 $f(0)=-2$에서

$b=-2$

따라서 $f(x)=e^x(a\sin x-2\cos x)$이므로

$f'(x)=e^x(a\sin x-2\cos x)+e^x(a\cos x+2\sin x)$
$=e^x\{(a+2)\sin x+(a-2)\cos x\}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ -2)$에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(0)=1$에서

$1=a-2$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore a-b=5$

답 ⑤

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는
$f'(a)$

04 삼각함수의 미분

37 $f(x)=\sin^2 x=\sin x\sin x$에서

$$f'(x)=\cos x\sin x+\sin x\cos x$$
$$=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{f'(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\sin 2x}$$

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\sin 2x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(2t+\pi)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{t}{\sin 2t}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\sin 2t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

38 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

이때 $f(x)=x\cos x$에서 $f'(x)=\cos x-x\sin x$이므로

$$\frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

답 ②

39 $f(x)=\sin x$에서 $f'(x)=\cos x$

ㄱ. $f'(\pi)=\cos\pi=-1$

ㄴ. $f'\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x=-f(x)$

ㄷ. $f(0)=0$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$$
$$=\cos 0=1$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

40 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-2h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(\pi+h)-f(\pi)\}-\{f(\pi-2h)-f(\pi)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi-2h)-f(\pi)}{-2h}\cdot 2$$
$$=f'(\pi)+2f'(\pi)=3f'(\pi)$$

이때 $f(x)=\sin x\cos x$에서 $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$이므로

$$3f'(\pi)=3(\cos^2\pi-\sin^2\pi)=3$$

답 3

41 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $f'(0)$이 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases}-\sin x+a & (x>0)\\ 2x-b & (x<0)\end{cases}$$

에서 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}(-\sin x+a)=\lim_{x\to 0-}(2x-b)$

$a=-b$ $\quad\therefore a+b=0$

답 ③

Q BOX

$x-\frac{\pi}{2}=t$에서
$2x-\pi=2t$
$\therefore 2x=2t+\pi$

$f(x)$
$=\begin{cases}a\sin x+\cos x & (x\ge 0)\\ e^x & (x<0)\end{cases}$

$f'(x)$
$=\cos x\cos x$
$+\sin x(-\sin x)$
$=\cos^2 x-\sin^2 x$

$f(x)$가 모든 실수에서 미분가능하려면 $x=0$에서 미분가능해야 한다.

42 $f(x)$가 모든 실수에서 미분가능하려면 모든 실수에서 연속이어야 하므로 $x=0$에서 연속이어야 한다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}(e^x\sin x+a)=\lim_{x\to 0-}(\cos x+bx)=f(0)$이므로

$a=1$

또 $f'(0)$이 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases}e^x\sin x+e^x\cos x & (x>0)\\ -\sin x+b & (x<0)\end{cases}$$

에서

$$\lim_{x\to 0+}(e^x\sin x+e^x\cos x)=\lim_{x\to 0-}(-\sin x+b)$$

$\therefore b=1$

$\therefore ab=1$

답 ④

43 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}(a\sin x+\cos x)=\lim_{x\to 0-}be^{x-2}=f(0)$$

$1=\frac{b}{e^2}$ $\quad\therefore b=e^2$

또 $f'(0)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}a\cos x-\sin x & (x>0)\\ e^x & (x<0)\end{cases}$$

에서

$$\lim_{x\to 0+}(a\cos x-\sin x)=\lim_{x\to 0-}e^x$$

$\therefore a=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\sin x+\cos x & (x\ge 0)\\ e^x & (x<0)\end{cases}$이므로

$$f(-2)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{-2}+\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{e^2}+1$$

답 $\frac{1}{e^2}+1$

05 여러 가지 미분법

12 여러 가지 미분법 (1)

Ⓦ 37쪽

01 (1) $y'=\frac{-2(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$=\frac{-4x-2}{(x^2+x+1)^2}$

(2) $y'=\frac{(1-\cos x)'\sin x-(1-\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$

$=\frac{\sin x\sin x-(1-\cos x)\cos x}{\sin^2 x}$

$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos x}{\sin^2 x}$

$=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

(3) $y=-\frac{3}{x^5}=-3x^{-5}$이므로

$y'=15x^{-6}=\frac{15}{x^6}$

(4) $y=\frac{x^4+1}{x^3}=x+\frac{1}{x^3}=x+x^{-3}$이므로

$y'=1-3x^{-4}=1-\frac{3}{x^4}$

(5) $y'=\sec x\tan x+2\sec^2 x$

$=\sec x(\tan x+2\sec x)$

(6) $y'=(x^2)'\csc x+x^2(\csc x)'$

$=2x\csc x+x^2(-\csc x\cot x)$

$=2x\csc x-x^2\csc x\cot x$

$=x\csc x(2-x\cot x)$

답 (1) $y'=\frac{-4x-2}{(x^2+x+1)^2}$ (2) $y'=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

(3) $y'=\frac{15}{x^6}$ (4) $y'=1-\frac{3}{x^4}$

(5) $y'=\sec x(\tan x+2\sec x)$

(6) $y'=x\csc x(2-x\cot x)$

02 (1) $y=\frac{1}{(2x+1)^4}=(2x+1)^{-4}$이므로

$y'=-4(2x+1)^{-5}(2x+1)'$

$=-4(2x+1)^{-5}\cdot 2$

$=-\frac{8}{(2x+1)^5}$

(2) $y'=(x^2-3)'(x+1)^2+(x^2-3)\{(x+1)^2\}'$

$=2x(x+1)^2+(x^2-3)\cdot 2(x+1)\cdot 1$

$=2x(x+1)^2+2(x^2-3)(x+1)$

$=2(x+1)\{x(x+1)+x^2-3\}$

$=2(x+1)(2x^2+x-3)$

$=2(2x+3)(x+1)(x-1)$

(3) $y'=3\sin^2 x\cdot(\sin x)'=3\sin^2 x\cos x$

(4) $y'=-\sin(\sin x)\cdot(\sin x)'=-\sin(\sin x)\cos x$

(5) $y'=\frac{(2^x+5)'}{2^x+5}=\frac{2^x\ln 2}{2^x+5}$

(6) $y'=\frac{(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)\ln 2}=\frac{2x-1}{(x^2-x+1)\ln 2}$

(7) $y=\sqrt{3x+2}=(3x+2)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=\frac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x+2)'$

$=\frac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3$

$=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$

(8) $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}=x^{-\frac{3}{2}}$이므로

$y'=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

$x^{-\frac{5}{2}}=x^{-2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$
$=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$
$=\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

답 (1) $y'=-\frac{8}{(2x+1)^5}$

(2) $y'=2(2x+3)(x+1)(x-1)$

(3) $y'=3\sin^2 x\cos x$

(4) $y'=-\sin(\sin x)\cos x$

(5) $y'=\frac{2^x\ln 2}{2^x+5}$

(6) $y'=\frac{2x-1}{(x^2-x+1)\ln 2}$

(7) $y'=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$

(8) $y'=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

03 $f(x)=\frac{1}{\cos x+1}$이라 하면

$f'(x)=-\frac{(\cos x+1)'}{(\cos x+1)^2}=\frac{\sin x}{(\cos x+1)^2}$

따라서 $x=\frac{\pi}{3}$인 점에서의 접선의 기울기는

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 답 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

04 $f(x)=\frac{1}{ae^x-3x}$이므로

$f'(x)=-\frac{(ae^x-3x)'}{(ae^x-3x)^2}=-\frac{ae^x-3}{(ae^x-3x)^2}$

$f'(0)=\frac{1}{4}$에서

$-\frac{a-3}{a^2}=\frac{1}{4},\qquad a^2=-4a+12$

$a^2+4a-12=0,\qquad (a+6)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$ 답 2

05 $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$이므로

$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+3)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

$=\frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)\geq 0$에서 $(x^2+3)^2>0$이므로

$-x^2-2x+3\geq 0,\quad x^2+2x-3\leq 0$

$(x+3)(x-1)\leq 0\quad \therefore -3\leq x\leq 1$

따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)+0+1=-5$ 답 ①

06 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$=\frac{1}{2}g'(1)$

$\displaystyle g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

$g(x)=\frac{f(x)}{e^{x-1}}$이므로

$g'(x)=\frac{f'(x)e^{x-1}-f(x)e^{x-1}}{(e^{x-1})^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^{x-1}}$

$\therefore \frac{1}{2}g'(1)=\frac{1}{2}\{f'(1)-f(1)\}$

$=\frac{1}{2}(-1-3)=-2$ 답 ②

07 $f(x)=\frac{x^4-x^2+1}{x^3}=x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}$

$=x-x^{-1}+x^{-3}$

이므로 $f'(x)=1+x^{-2}-3x^{-4}=1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=-3$이므로

$a+b+c=-1$ 답 -1

08 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{1}{x^{20}}$

$=x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+\cdots+x^{-20}$

이므로

$f'(x)=-x^{-2}-2x^{-3}-3x^{-4}-\cdots-20x^{-21}$

$\therefore f'(1)=-1-2-3-\cdots-20$

$=-(1+2+3+\cdots+20)$

$\displaystyle =-\sum_{k=1}^{20}k=-\frac{20\cdot 21}{2}$

$=-210$ 답 ③

09 $f(x)=2\sec x+\cot x$이므로

$f'(x)=2\sec x\tan x-\csc^2 x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sec\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{6}-\csc^2\frac{\pi}{6}$

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$
이므로
$\sec\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\csc\frac{\pi}{6}=2$

$=2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}-2^2$

$=-\frac{8}{3}$ 답 ①

10 $f(0)=\frac{\cos 0}{1+\tan 0}=1$이므로

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)$

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

$f(x)=\frac{\cos x}{1+\tan x}$이므로

$f'(x)=\frac{-\sin x(1+\tan x)-\cos x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

$\therefore f'(0)=\frac{-\sin 0(1+\tan 0)-\cos 0\sec^2 0}{(1+\tan 0)^2}$

$=\frac{-0\cdot(1+0)-1\cdot 1^2}{(1+0)^2}=-1$ 답 -1

11 $f(x)=a\sec x\csc x$이므로

$f'(x)$

$=a\sec x\tan x\csc x+a\sec x(-\csc x\cot x)$

$=a\sec x\csc x(\tan x-\cot x)$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=8$에서

$a\sec\frac{\pi}{3}\csc\frac{\pi}{3}\left(\tan\frac{\pi}{3}-\cot\frac{\pi}{3}\right)=8$

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,
$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로
$\sec\frac{\pi}{3}=2$,
$\csc\frac{\pi}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$,
$\cot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$a\cdot 2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=8$

$\frac{8}{3}a=8\quad \therefore a=3$ 답 ④

12 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$

즉 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\tan x=\lim_{x\to 0-}(3e^x+ax+b)$이므로

$0=3+b\quad \therefore b=-3$

또 $f'(x)=\begin{cases}\sec^2 x & (x>0)\\ 3e^x+a & (x<0)\end{cases}$에서 $f'(0)$이 존재하므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}\sec^2 x=\lim_{x\to 0-}(3e^x+a)$

$1=3+a\quad \therefore a=-2$

$\therefore a-b=1$ 답 1

쌤 한마디

구간에 따라 다르게 정의된 함수의 미분가능성에 대한 조건이 주어지면 다음을 이용하여 문제를 해결한다.

두 미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수

$F(x)=\begin{cases}f(x) & (x\geq a)\\ g(x) & (x<a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

① 함수 $F(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

⇨ $\displaystyle\lim_{x\to a-}g(x)=f(a)$

② 함수 $F(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

⇨ $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

13 $f(x)=\left(\frac{2x}{x^2+3}\right)^3$이므로

$f'(x)=3\left(\frac{2x}{x^2+3}\right)^2\left(\frac{2x}{x^2+3}\right)'$

$=3\left(\frac{2x}{x^2+3}\right)^2\cdot\frac{2(x^2+3)-2x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

$=-\frac{24x^2(x^2-3)}{(x^2+3)^4}$

$\therefore f'(1)=-\frac{24\cdot 1\cdot(-2)}{4^4}=\frac{3}{16}$

따라서 $p=16$, $q=3$이므로

$p+q=19$ 답 ⑤

14 $f(x)=e^{x^2-4x+1}$이라 하면

$$f'(x)=e^{x^2-4x+1}(x^2-4x+1)'=e^{x^2-4x+1}(2x-4)$$

$$\therefore f'(1)=e^{-2}\cdot(-2)=-\frac{2}{e^2}$$ 답 $-\frac{2}{e^2}$

15 $f(x)=a^{\cos x}$이므로

$$f'(x)=a^{\cos x}\ln a\cdot(\cos x)'=-a^{\cos x}\ln a\cdot\sin x$$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\ln 2$에서

$$-a^{\cos\frac{\pi}{2}}\ln a\cdot\sin\frac{\pi}{2}=-\ln 2$$

$-\ln a=-\ln 2 \quad \therefore a=2$ 답 ①

16 $f(1-x)=f(1+x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(1-x)\cdot(1-x)'=f'(1+x)\cdot(1+x)'$$

$$\therefore -f'(1-x)=f'(1+x)$$

양변에 $x=2$를 대입하면

$-f'(-1)=f'(3) \quad \therefore f'(3)=3$ 답 3

17 $h(x)=g(f(x))=3^{f(x)}$이므로

$$h'(x)=3^{f(x)}\ln 3\cdot f'(x)$$

$$\therefore h'(1)=3^{f(1)}\ln 3\cdot f'(1)=3^{-1}\ln 3\cdot 6=2\ln 3$$ 답 ⑤

18 $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)+2}{x+2}=3$에서 $x\to-2$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}\{f(x)+2\}=0$이므로 $\quad f(-2)=-2$

$$\therefore \lim_{x\to-2}\frac{f(x)+2}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=f'(-2)$$

$$\therefore f'(-2)=3$$

또 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)+2}{x-2}=4$에서 $x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}\{g(x)+2\}=0$이므로 $\quad g(2)=-2$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{g(x)+2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$$

$$\therefore g'(2)=4$$

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$라 하면

$$h'(x)=\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

$$\therefore h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(-2)g'(2)=3\cdot4=12$$ 답 12

Q BOX

$x\to a$일 때

① 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이면 (분자)$\to 0$

② 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자)$\to 0$이면 (분모)$\to 0$

19 $F(x)=f(f(x))$라 하면

$$F(0)=f(f(0))=f(0)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(f(x))}{x}=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)$$

$F'(x)=\{f(f(x))\}'=f'(f(x))f'(x)$이므로

$$F'(0)=f'(f(0))f'(0)=f'(0)f'(0)=(-3)\cdot(-3)=9$$ 답 ④

20 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=3x-2$에서

$f(g(2))=4 \quad \therefore f(4)=4$

$f(g(x))=3x-2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=3$$

양변에 $x=2$를 대입하면

$$f'(g(2))g'(2)=3$$

$f'(4)\cdot3=3 \quad \therefore f'(4)=1$

$\therefore f(4)-f'(4)=3$ 답 3

21 $f(x)=\ln(\ln x)$라 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}$$

$$\therefore f'(e^2)=\frac{1}{e^2\ln e^2}=\frac{1}{2e^2}$$ 답 $\frac{1}{2e^2}$

22 $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=\frac{1}{2}\{\ln(1-\sin x)-\ln(1+\sin x)\}$

이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos x(1+\sin x)-\cos x(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cos x}{1-\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\cos^2 x}=-\frac{1}{\cos x}=-\sec x$$ 답 ②

23 $f(x)=\ln(\tan^2 x)$이므로

$$f'(x)=\frac{2\tan x\sec^2 x}{\tan^2 x}=\frac{2\sec^2 x}{\tan x}=\frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{2}{\sin x\cos x}=\frac{4}{\sin 2x}=4\csc 2x$$

따라서 $a=4$, $b=2$이므로 $\quad a+b=6$ 답 6

24 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=4\ln|x+2|+2\ln|x+4|-3\ln|x+1|-6\ln|x+3|$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{4}{x+2}+\frac{2}{x+4}-\frac{3}{x+1}-\frac{6}{x+3}$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{f(x)}=2+\frac{1}{2}-3-2=-\frac{5}{2}$$ 답 $-\frac{5}{2}$

25 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=x\ln x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$$\therefore f'(x)=f(x)(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

$$\therefore f'(e)=e^e(1+1)=2e^e$$

답 ④

26 $f(x)=(\ln x)^x\ (x>1)$이라 하고 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=x\ln(\ln x)$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=1\cdot\ln(\ln x)+x\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\left\{\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right\}=(\ln x)^x\left\{\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right\}$$

$$\therefore f'(e)=1\cdot(0+1)=1$$

답 1

27 $f(x)=\sqrt{x^3+2}$라 하면

$f(x)=\sqrt{x^3+2}=(x^3+2)^{\frac{1}{2}}$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^3+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^3+2)'=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}}$$

$$\therefore f'(1)=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 ③

28 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}}=(3x+1)^{-\frac{1}{3}}$이므로

$$f'(x)=-\frac{1}{3}(3x+1)^{-\frac{4}{3}}\cdot(3x+1)'=-\frac{1}{(3x+1)\sqrt[3]{3x+1}}=f(x)\cdot\left(-\frac{1}{3x+1}\right)$$

따라서 $g(x)=-\frac{1}{3x+1}$이므로

$g(0)=-1$

답 -1

29 $f(x)=(2x-\sqrt{2x^2+1})^4=\{2x-(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}\}^4$이므로

$f'(x)$

$$=4\{2x-(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}\}^3\cdot\left\{2-\frac{1}{2}(2x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4x\right\}$$

$$=4(2x-\sqrt{2x^2+1})^3\left(2-\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}\right)$$

$$\therefore f'(1)f'(-1)$$

$$=4(2-\sqrt{3})^3\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot 4(-2-\sqrt{3})^3\left(2+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=16\{(2-\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})\}^3\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(2+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=16\cdot(-1)^3\cdot\frac{8}{3}$$

$$=-\frac{128}{3}$$

따라서 $p=3,\ q=128$이므로 $p+q=131$

답 ⑤

Q BOX

$x>0$이므로 $x^x>0$
즉 $f(x)>0$이므로 양변에 절댓값을 취하지 않아도 된다.

$x>1$이므로 $\ln x>0$
$\therefore (\ln x)^x>0$
$\therefore f(x)>0$

13 여러 가지 미분법 (2)

W 41쪽

01 (1) $\frac{dx}{dt}=6t^2,\ \frac{dy}{dt}=-2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{3t}\ (t\neq0)$$

(2) $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}},\ \frac{dy}{dt}=2(2t+3)\cdot2=4(2t+3)$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=8\sqrt{t}(2t+3)$$

(3) $\frac{dx}{dt}=1,\ \frac{dy}{dt}=3e^{3t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=3e^{3t}$$

(4) $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t},\ \frac{dy}{dt}=2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=2t^2$$

답 (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3t}\ (t\neq0)$ (2) $\frac{dy}{dx}=8\sqrt{t}(2t+3)$
(3) $\frac{dy}{dx}=3e^{3t}$ (4) $\frac{dy}{dx}=2t^2$

02 (1) $2x^2+y^2=4$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$4x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}\ (y\neq0)$$

(2) $x^3-2y^3+3y=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2-6y^2\frac{dy}{dx}+3\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2y^2-1}\ \left(y\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(3) $\sin x+\cos y=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\cos x-\sin y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{\sin y}\ (\sin y\neq0)$$

(4) $\sqrt{y^2+2}=3x^2$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+2}}\cdot\frac{dy}{dx}=6x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{6x\sqrt{y^2+2}}{y}\ (y\neq0)$$

답 (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}\ (y\neq0)$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2y^2-1}\ \left(y\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{\sin y}\ (\sin y\neq0)$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{6x\sqrt{y^2+2}}{y}\ (y\neq0)$

03 (1) $x=\sqrt{y+1}$의 각 항을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=2\sqrt{y+1}=2x$$

(2) $y=\sqrt[4]{x-1}$에서 $x=y^4+1$이므로 각 항을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=4y^3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{4y^3}=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-1)^3}}$$

(3) $x=\frac{4}{y+2}$의 각 항을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{4}{(y+2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{(y+2)^2}{4}=-\frac{4}{x^2}$$

(4) $x=y\sqrt{y}$의 각 항을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{3}{2}\sqrt{y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{2}{3\sqrt{y}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\ (x\neq0)$$

답 (1) $\frac{dy}{dx}=2x$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

(3) $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^2}$ (4) $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\ (x\neq0)$

04 (1) $g(-8)=a$라 하면 $f(a)=-8$이므로

$a^3=-8,\quad a^3+8=0$

$(a+2)(a^2-2a+4)=0$

$\therefore a=-2\ (\because a^2-2a+4>0)$

따라서 $g(-8)=-2$이고 $f'(x)=3x^2$에서

$f'(-2)=12$이므로

$$g'(-8)=\frac{1}{f'(-2)}=\frac{1}{12}$$

(2) $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$a^3-4a+1=1,\quad a^2-4a=0$

$a(a-4)=0\quad \therefore a=4\ (\because a\geq2)$

Q BOX

$(\sqrt{y^2+2})'$
$=\{(y^2+2)^{\frac{1}{2}}\}'$
$=\frac{2y}{2\sqrt{y^2+2}}$
$=\frac{y}{\sqrt{y^2+2}}$

$x=g(y)$ 꼴에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하기 어려울 때는 $\frac{dx}{dy}\ \left(\frac{dx}{dy}\neq0\right)$를 구한 후 역함수의 미분법을 이용하는 것이 편리하다.

$x=\sqrt{y+1}$이므로
$2\sqrt{y+1}=2x$

$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
$=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2$

$x=y^{\frac{3}{2}}$에서
$y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{3}}$, 즉 $\sqrt{y}=\sqrt[3]{x}$

$\frac{\tan\theta}{\sec\theta}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}}=\sin\theta$

a^2-2a+4
$=(a-1)^2+3>0$

따라서 $g(1)=4$이고 $f'(x)=2x-4$에서

$f'(4)=4$이므로

$$g'(1)=\frac{1}{f'(4)}=\frac{1}{4}$$

(3) $g(0)=a$라 하면 $f(a)=0$이므로

$\frac{e^a-e^{-a}}{2}=0,\quad e^a=e^{-a}$

$a=-a\quad \therefore a=0$

따라서 $g(0)=0$이고 $f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$에서

$f'(0)=1$이므로

$$g'(0)=\frac{1}{f'(0)}=1$$

(4) $g(-1)=a$라 하면 $f(a)=-1$이므로

$\tan a=-1$

$\therefore a=-\frac{\pi}{4}\ \left(\because -\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $g(-1)=-\frac{\pi}{4}$이고 $f'(x)=\sec^2 x$에서

$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2$이므로

$$g'(-1)=\frac{1}{f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}$$

답 (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{2}$

05 (1) $y'=3(2x-1)^2\cdot2=6(2x-1)^2$이므로

$y''=6\cdot2(2x-1)\cdot2=24(2x-1)$

(2) $y'=1\cdot e^{2x}+x\cdot2e^{2x}=(1+2x)e^{2x}$이므로

$y''=2\cdot e^{2x}+(1+2x)\cdot2e^{2x}=4e^{2x}(1+x)$

(3) $y'=\frac{1}{x}$이므로

$y''=-\frac{1}{x^2}$

(4) $y'=-3\sin2x\cdot2=-6\sin2x$이므로

$y''=-6\cdot\cos2x\cdot2=-12\cos2x$

답 (1) $y''=24(2x-1)$ (2) $y''=4e^{2x}(1+x)$

(3) $y''=-\frac{1}{x^2}$ (4) $y''=-12\cos2x$

06 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=\sec\theta\tan\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^2\theta}=\frac{\tan\theta}{\sec\theta}=\sin\theta$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 $\frac{dy}{dx}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

07 $\frac{dx}{dt}=1-\frac{a}{t^2},\ \frac{dy}{dt}=1+\frac{a}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+\frac{a}{t^2}}{1-\frac{a}{t^2}}=\frac{t^2+a}{t^2-a}$$

$t=2$일 때 $\frac{dy}{dx}=3$이므로

$$\frac{4+a}{4-a}=3, \quad 4+a=12-3a$$

$4a=8 \quad \therefore a=2$ 답 2

08 $(x-1)^2-(y+1)^2=3$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2(x-1)-2(y+1)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x-1}{y+1}\ (y\neq-1)$$ 답 ③

09 $y=\ln x-xy$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}-y-x\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{x}-y}{x+1}=\frac{1-xy}{x^2+x}$$

따라서 위의 식에 $x=1$, $y=0$을 대입하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$$ 답 $\frac{1}{2}$

10 (1) $x^2+y^2=10^2$, 즉 $x^2+y^2=100$

(2) $x^2+y^2=100$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

(3) $x=8$일 때 $y=6$이므로 $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{3}$

답 (1) $x^2+y^2=100$ (2) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ (3) $-\frac{4}{3}$

11 $x=\cos y$의 각 항을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=-\sin y \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{1}{\sin y}$$

$x=\cos y$에서 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때 $y=\frac{\pi}{6}$ ($\because 0<y<\pi$)

따라서 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$$ 답 ①

12 $x=\frac{2y}{y^2+1}$의 각 항을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2(y^2+1)-2y\cdot 2y}{(y^2+1)^2}=\frac{-2y^2+2}{(y^2+1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{(y^2+1)^2}{-2y^2+2}$$

따라서 $y=0$일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$ 답 ④

13 $g(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로

$a^2-2a+3=3, \quad a^2-2a=0$

$a(a-2)=0 \quad \therefore a=2$ ($\because a>1$)

$g(6)=b$라 하면 $f(b)=6$이므로

$b^2-2b+3=6, \quad b^2-2b-3=0$

$(b+1)(b-3)=0 \quad \therefore b=3$ ($\because b>1$)

즉 $g(3)=2$, $g(6)=3$이고 $f'(x)=2x-2$이므로

$$g'(3)-g'(6)=\frac{1}{f'(g(3))}-\frac{1}{f'(g(6))}$$
$$=\frac{1}{f'(2)}-\frac{1}{f'(3)}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$ 답 ③

14 $(g\circ f)(x)=x$이므로 $g(x)=f^{-1}(x)$

$g(2)=a$라 하면 $f(a)=2$이므로

$\sqrt{a^2+3}=2, \quad a^2+3=4$

$a^2=1 \quad \therefore a=1$ ($\because a>0$)

따라서 $g(2)=1$이고 $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$이므로

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=2$$ 답 2

15 $\lim_{h\to 0}\frac{g(1+2h)-g(1)}{h}$

$=2\lim_{h\to 0}\frac{g(1+2h)-g(1)}{2h}$

$=2g'(1)$

$g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$e^{3a}=1 \quad \therefore a=0$

따라서 $g(1)=0$이고 $f'(x)=3e^{3x}$이므로

$$2g'(1)=2\cdot\frac{1}{f'(g(1))}=2\cdot\frac{1}{f'(0)}=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ②

16 $f(x)=\frac{1}{2x+1}$이므로

$$f'(x)=-\frac{2}{(2x+1)^2}$$

$$f''(x)=-\frac{-2\cdot 2(2x+1)\cdot 2}{(2x+1)^4}=\frac{8}{(2x+1)^3}$$

$$\therefore f''(1)=\frac{8}{27}$$ 답 $\frac{8}{27}$

17 $f(x)=\ln(x^2+3)$이므로

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+3}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+3)-2x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}$$

$$\therefore f''(1)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$ 답 ④

18 $f(x)=6x\ln x-x^2-3x$이므로

$f'(x)=6\ln x+6-2x-3=6\ln x-2x+3$

$f'(1)=1$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)\{f'(x)-1\}}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)\{f'(x)-f'(1)\}}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}\cdot f'(x)$

$=f''(1)\cdot f'(1)$

Q BOX

함수 f의 역함수가 f^{-1}일 때
➡ $f\circ f^{-1}$, $f^{-1}\circ f$는 항등함수이다.

$f(x)=\sqrt{x^2+3}$에서
$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

y cm는 직육면체의 모서리의 길이이므로 $y>0$

$f''(x)=\frac{6}{x}-2$이므로 $\quad f''(1)=4$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)\{f'(x)-1\}}{x-1}=f''(1)\cdot f'(1)$

$=4\cdot 1=4$

답 ⑤

19 $y=e^{2x}\sin x$이므로

$y'=2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x=e^{2x}(2\sin x+\cos x)$

$y''=2e^{2x}(2\sin x+\cos x)+e^{2x}(2\cos x-\sin x)$

$=e^{2x}(3\sin x+4\cos x)$

$5y+ay'+y''=0$에서

$5e^{2x}\sin x+ae^{2x}(2\sin x+\cos x)$

$+e^{2x}(3\sin x+4\cos x)=0$

$e^{2x}(5\sin x+2a\sin x+a\cos x+3\sin x+4\cos x)=e^{2x}\{2(a+4)\sin x+(a+4)\cos x\}$

$e^{2x}\{2(a+4)\sin x+(a+4)\cos x\}=0$

$e^{2x}(a+4)(2\sin x+\cos x)=0$

위의 등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로

x에 대한 항등식

$a=-4$

답 ②

쌤 한마디

문제에서 다음과 같은 표현이 있으면 항등식의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

① 모든 x에 대하여 성립하는 등식
② 임의의 x에 대하여 성립하는 등식
③ x의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식

x에 대한 항등식은 **19**번 풀이처럼 x를 포함한 식과 포함하지 않는 식으로 나누어 나타낸 후, x를 포함하지 않는 식의 값이 0이 되도록 하는 미지수의 값을 구한다.

06 도함수의 활용 (1)

14 접선의 방정식

W 44쪽

01 (1) $f(x)=\frac{1}{3x+2}$이라 하면

$f'(x)=-\frac{3}{(3x+2)^2}$

이므로

$f'(-1)=-\frac{3}{(-1)^2}=-3$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y+1=-3(x+1)$

$\therefore y=-3x-4$

(2) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

이므로

$f'(2)=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$

$\therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$

(3) $f(x)=e^{2x}$이라 하면

$f'(x)=2e^{2x}$

이므로

$f'(1)=2e^2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-e^2=2e^2(x-1)$

$\therefore y=2e^2x-e^2$

(4) $f(x)=\sin 2x$라 하면

$f'(x)=2\cos 2x$

이므로

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=x-\frac{\pi}{6}$

$\therefore y=x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 (1) $y=-3x-4$ (2) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$
(3) $y=2e^2x-e^2$ (4) $y=x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

02 (1) $f(x)=\sqrt{2x-1}$이라 하면

$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{2t-1})$이라 하면

$f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2t-1}}$이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{2t-1}}=\dfrac{1}{3}$, $\quad \sqrt{2t-1}=3$

$2t-1=9 \quad \therefore t=5$

따라서 접점의 좌표가 (5, 3)이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-3=\dfrac{1}{3}(x-5) \quad \therefore y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$

(2) $f(x)=e^{x+3}$이라 하면

$f'(x)=e^{x+3}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{t+3})$이라 하면 $f'(t)=e^{t+3}$이므로

$e^{t+3}=e, \quad t+3=1$

$\therefore t=-2$

따라서 접점의 좌표가 $(-2,\ e)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-e=e(x+2) \quad \therefore y=ex+3e$

(3) $f(x)=\ln x$라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t,\ \ln t)$라 하면 $f'(t)=\dfrac{1}{t}$이므로

$\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2} \quad \therefore t=2$

따라서 접점의 좌표가 $(2,\ \ln 2)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-\ln 2=\dfrac{1}{2}(x-2) \quad \therefore y=\dfrac{1}{2}x-1+\ln 2$

(4) $f(x)=\cos x$라 하면

$f'(x)=-\sin x$

접점의 좌표를 $(t,\ \cos t)$라 하면 $f'(t)=-\sin t$이므로

$-\sin t=1, \quad \sin t=-1$

$\therefore t=\dfrac{3}{2}\pi \ (\because 0<t<2\pi)$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ 0\right)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=x-\dfrac{3}{2}\pi$

답 (1) $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$ (2) $y=ex+3e$ (3) $y=\dfrac{1}{2}x-1+\ln 2$ (4) $y=x-\dfrac{3}{2}\pi$

03 (1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$이라 하면

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-\dfrac{1}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{t}=-\dfrac{1}{t^2}(x-t)$ …… ㉠

이 직선이 점 (0, 2)를 지나므로

$2-\dfrac{1}{t}=-\dfrac{1}{t^2}\cdot(-t), \quad \dfrac{2}{t}=2 \quad \therefore t=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad y-1=-(x-1)$

$\therefore y=-x+2$

(2) $f(x)=\sqrt{x}+5$라 하면 $\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

접점의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t}+5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$이므로 접선의 방정식은

$y-(\sqrt{t}+5)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$ …… ㉠

이 직선이 점 $(-4,\ 5)$를 지나므로

$5-(\sqrt{t}+5)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}(-4-t)$

$-\sqrt{t}=-\dfrac{2}{\sqrt{t}}-\dfrac{\sqrt{t}}{2}, \quad 2t=4+t$

$\therefore t=4$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad y-7=\dfrac{1}{4}(x-4)$

$\therefore y=\dfrac{1}{4}x+6$

(3) $f(x)=e^{x+1}$이라 하면

$f'(x)=e^{x+1}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{t+1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=e^{t+1}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{t+1}=e^{t+1}(x-t)$ …… ㉠

이 직선이 점 (0, 0)을 지나므로

$-e^{t+1}=e^{t+1}\cdot(-t) \quad \therefore t=1\ (\because e^{t+1}>0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad y-e^2=e^2(x-1)$

$\therefore y=e^2x$

(4) $f(x)=x\ln x$라 하면

$f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t\ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\ln t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-t\ln t=(\ln t+1)(x-t)$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0,\ -e)$를 지나므로

$-e-t\ln t=(\ln t+1)\cdot(-t)$

$e+t\ln t=t\ln t+t \quad \therefore t=e$

이것을 ㉠에 대입하면

$y-e=2(x-e) \quad \therefore y=2x-e$

답 (1) $y=-x+2$ (2) $y=\dfrac{1}{4}x+6$ (3) $y=e^2x$ (4) $y=2x-e$

04 $f(x)=2\sqrt{x-1}+3$이라 하면

$f'(x)=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

점 (2, 5)에서의 접선의 기울기가 $f'(2)=1$이므로 접선의 방정식은

$y-5=x-2 \quad \therefore y=x+3$

답 ②

Q BOX

$f(5)=\sqrt{9}=3$

$f(-2)=e$

$-\sqrt{t}=-\dfrac{2}{\sqrt{t}}-\dfrac{\sqrt{t}}{2}$에서 양변에 $-2\sqrt{t}$를 곱하면

$2t=4+t$

$f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=\cos\dfrac{3}{2}\pi=0$

Q BOX

05 $f(x)=x\cos x$라 하면

$$f'(x)=\cos x+x\cdot(-\sin x)=\cos x-x\sin x$$

점 $(\pi,\ -\pi)$에서의 접선의 기울기가 $f'(\pi)=-1$이므로 접선의 방정식은

$$f'(\pi)=\cos\pi-\pi\sin\pi=-1-\pi\cdot 0=-1$$

$$y+\pi=-(x-\pi) \qquad \therefore\ y=-x$$

따라서 직선 $y=-x$가 점 $(3,\ a)$를 지나므로

$$a=-3$$

답 -3

06 $f(x)=\dfrac{4}{x^2+1}$라 하면

$$f'(x)=-\frac{4\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{8x}{(x^2+1)^2}$$

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=-2$이고, 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이므로 직선의 방정식은

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

$$y-2=\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

따라서 구하는 y절편은 $\dfrac{3}{2}$이다.

답 ④

07 $f(x)=ax\ln x+b$라 하면 점 $(1,\ 1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=1$

$$b=1$$

$f(x)=ax\ln x+1$이므로

$$f'(x)=a\ln x+ax\cdot\frac{1}{x}=a\ln x+a$$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=a$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=a(x-1) \qquad \therefore\ y=ax-a+1$$

이 직선이 직선 $y=2x-1$과 일치하므로

$$a=2$$

$$\therefore\ ab=2$$

답 2

08 $f(x)=\ln x+3$이라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

직선 $y=\dfrac{1}{e}x$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{e}(x-a)=\dfrac{1}{e}x-\dfrac{a}{e}$이므로 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{e}$이다.

접점의 좌표를 $(t,\ \ln t+3)$이라 하면

$$f'(t)=\frac{1}{t}=\frac{1}{e} \qquad \therefore\ t=e$$

따라서 접점의 좌표가 $(e,\ 4)$이므로 접선의 방정식은

$$y-4=\frac{1}{e}(x-e) \qquad \therefore\ y=\frac{1}{e}x+3$$

즉 $-\dfrac{a}{e}=3$이므로 $\quad a=-3e$

답 $-3e$

09 $f(x)=\tan\dfrac{\pi}{4}x$라 하면

$$f'(x)=\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}x$$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \tan\dfrac{\pi}{4}t\right)$라 하면 직선 $y=-\dfrac{2}{\pi}x$에 수직인 직선의 기울기는 $\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$f'(t)=\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}t=\frac{\pi}{2}$$

$$\sec^2\frac{\pi}{4}t=2$$

$$\sec\frac{\pi}{4}t=\sqrt{2}\ \left(\because\ 0<\frac{\pi}{4}t<\frac{\pi}{2}\right)$$

$0<t<2$이므로 $0<\dfrac{\pi}{4}t<\dfrac{\pi}{2}$

$\cos\dfrac{\pi}{4}t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$\frac{\pi}{4}t=\frac{\pi}{4}\ \left(\because\ 0<\frac{\pi}{4}t<\frac{\pi}{2}\right) \qquad \therefore\ t=1$$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{\pi}{2}(x-1) \qquad \therefore\ y=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+1$$

즉 $a=\dfrac{\pi}{2}$, $b=-\dfrac{\pi}{2}+1$이므로

$$a+b=1$$

답 1

10 $f(x)=x\ln x$라 하면

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

접점의 좌표를 $(t,\ t\ln t)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(t)=\ln t+1=1, \qquad \ln t=0$$

$$\therefore\ t=1$$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로 접선의 방정식은

$$y=x-1$$

접선의 x절편과 y절편이 각각 $1,\ -1$이므로

$$\mathrm{A}(1,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ -1)$$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$$

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}$

답 ①

11 $f(x)=\dfrac{4}{x-1}$라 하면

$$f'(x)=-\frac{4}{(x-1)^2}$$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{4}{t-1}\right)$라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$$f'(t)=-\frac{4}{(t-1)^2}=-1, \qquad (t-1)^2=4$$

$$t-1=\pm 2 \qquad \therefore\ t=-1\ \text{또는}\ t=3$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ -2)$, $(3,\ 2)$이므로 접선의 방정식은

$y+2=-(x+1)$, $y-2=-(x-3)$, 즉

$y=-x-3$, $y=-x+5$

즉 $a=-3$, $b=5$ 또는 $a=5$, $b=-3$이므로

$$ab=-15$$

답 ②

12 $f(x)=\sqrt{x}+2$라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

W 06 도함수의 활용 (1)

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t}+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$이므로 접선의 방정식은

$$y-(\sqrt{t}+2)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}+2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 직선이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$$2=-\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{2}+2$$

$$\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{\sqrt{t}}{2}, \qquad 2t=2$$

$$\therefore t=1$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$이므로

$$a+b=3$$

답 ④

직선 $y=px+q$의 기울기는 p, y절편은 q이다.

13 $f(x)=e^{3x-1}$이라 하면 $\quad f'(x)=3e^{3x-1}$

접점의 좌표를 (t, e^{3t-1})이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3e^{3t-1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-e^{3t-1}=3e^{3t-1}(x-t)$$

$$\therefore y=3e^{3t-1}x+(1-3t)e^{3t-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 직선이 점 $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$을 지나므로

$$0=3e^{3t-1}\left(-\frac{1}{3}\right)+(1-3t)e^{3t-1}, \qquad 3te^{3t-1}=0$$

$$\therefore t=0 \ (\because e^{3t-1}>0)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$y=\frac{3}{e}x+\frac{1}{e}$$

따라서 직선 $y=\frac{3}{e}x+\frac{1}{e}$ 위의 점의 좌표인 것은 ②이다.

답 ②

$x=-1$이면

$$y=\frac{3}{e}\cdot(-1)+\frac{1}{e}=-\frac{2}{e}$$

14 조건 (가)에서 $f(x)=2x-\ln x$라 하면

$$f'(x)=2-\frac{1}{x}$$

접점의 좌표를 $(t, 2t-\ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2-\frac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-(2t-\ln t)=\left(2-\frac{1}{t}\right)(x-t)$$

이 직선이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$$1-(2t-\ln t)=\left(2-\frac{1}{t}\right)\cdot(-t)$$

$$1-2t+\ln t=-2t+1, \qquad \ln t=0$$

$$\therefore t=1$$

따라서 접선의 기울기는 $\quad f'(1)=1$

조건 (나)에서 기울기가 1이고 점 $(5, 2)$를 지나므로 직선의 방정식은

$$y-2=x-5 \qquad \therefore y=x-3$$

답 $y=x-3$

15 $f(x)=\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}-1$이라 하면

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{t}-1\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-\frac{1}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\left(\frac{1}{t}-1\right)=-\frac{1}{t^2}(x-t)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}-1$$

이 직선이 점 $(2, -3)$을 지나므로

$$-3=-\frac{2}{t^2}+\frac{2}{t}-1$$

$$\therefore t^2+t-1=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 점 $(2, -3)$에서 곡선 $y=\frac{1-x}{x}$에 그을 수 있는 접선의 개수는 방정식 ㉠의 실근의 개수와 같고 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$D=1^2-4\cdot(-1)=5>0$$

이므로 접선의 개수는 2이다.

답 2

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D라 하면
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근
② $D=0$ ➡ 중근
③ $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근

16 $f(x)=(x-2)e^{-x}$이라 하면

$$f'(x)=e^{-x}+(x-2)\cdot(-e^{-x})=(3-x)e^{-x}$$

접점의 좌표를 $(t, (t-2)e^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(3-t)e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t-2)e^{-t}=(3-t)e^{-t}(x-t)$$

$$\therefore y=(3-t)e^{-t}x+(t^2-2t-2)e^{-t}$$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$$0=(3-t)e^{-t}\cdot a+(t^2-2t-2)e^{-t}$$

$$\{t^2-(a+2)t+3a-2\}e^{-t}=0$$

$$\therefore t^2-(a+2)t+3a-2=0 \ (\because e^{-t}>0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=(x-2)e^{-x}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+2)^2-4(3a-2)>0$$

$$a^2-8a+12>0, \qquad (a-2)(a-6)>0$$

$$\therefore a<2 \text{ 또는 } a>6$$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

17 $f(x)=xe^x$이라 하면

$$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$$

접점의 좌표를 (t, te^t)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(1+t)e^t$이므로 접선의 방정식은

$$y-te^t=(1+t)e^t(x-t)$$

$$\therefore y=(1+t)e^tx-t^2e^t$$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$$0=(1+t)e^ta-t^2e^t$$

$$(t^2-at-a)e^t=0$$

$\therefore t^2-at-a=0$ ($\because e^t>0$) ...... ㉠

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=xe^x$에 접선을 그을 수 없으려면 방정식 ㉠이 실근을 갖지 않아야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=a^2+4a<0$, $\quad a(a+4)<0$

$\therefore -4<a<0$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)=-6$ 답 ①

18 $f(x)=\ln x+3$, $g(x)=ax+\dfrac{b}{x}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=a-\dfrac{b}{x^2}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1,\ 3)$에서 공통인 접선을 가지므로

$f(1)=g(1)$에서 $\quad 3=a+b$

$f'(1)=g'(1)$에서 $\quad 1=a-b$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $b=1$

$\therefore ab=2$ 답 2

19 $f(x)=ax^2$, $g(x)=\sqrt{2x+b}$라 하면

$f'(x)=2ax$, $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+b}}$

두 곡선이 $x=\dfrac{1}{2}$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)$에서 $\quad \dfrac{1}{4}a=\sqrt{1+b}$ ...... ㉠

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$에서 $\quad a=\dfrac{1}{\sqrt{1+b}}$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad a=\dfrac{4}{a}$

$a^2=4$ $\quad \therefore a=2$ ($\because a>0$)

㉡에서 $a>0$

이것을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{1}{2}=\sqrt{1+b}$, $\quad b+1=\dfrac{1}{4}$

$\therefore b=-\dfrac{3}{4}$

$\therefore a+b=\dfrac{5}{4}$ 답 ⑤

20 $f(x)=a-\sin x$, $g(x)=\cos^2 x$라 하면

$f'(x)=-\cos x$, $g'(x)=-2\cos x\sin x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad a-\sin t=\cos^2 t$

$\therefore a-\sin t=1-\sin^2 t$ ...... ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad -\cos t=-2\cos t\sin t$

$\cos t(2\sin t-1)=0$

$\therefore \sin t=\dfrac{1}{2}$ ($\because \cos t\neq 0$)

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos t>0$

이것을 ㉠에 대입하면

$a-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{4}$ $\quad \therefore a=\dfrac{5}{4}$ 답 $\dfrac{5}{4}$

21 $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=2\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\cos t}{-\sin t}=-2\cot t$$

$t=\dfrac{\pi}{3}$일 때

$x=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$, $y=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,

$\dfrac{dy}{dx}=-2\cot\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{3}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore y=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 y절편은 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$이다. 답 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

22 $\dfrac{dx}{dt}=2at+2$, $\dfrac{dy}{dt}=3at^2$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3at^2}{2at+2}$$

$t=2$일 때 $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{12a}{4a+2}=\dfrac{6a}{2a+1}$

직선 $y=2x+1$에 평행한 직선의 기울기는 2이므로

$\dfrac{6a}{2a+1}=2$, $\quad 6a=4a+2$

$\therefore a=1$ 답 ④

23 $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t\cdot t-(1+t^2)}{t^2}=\dfrac{t^2-1}{t^2}$이므로

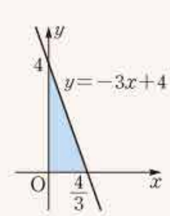
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{-\frac{1}{t^2}}=1-t^2$$

이때 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}$에서 $\quad t=2$

$t=2$일 때 $\quad \dfrac{dy}{dx}=-3$

즉 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\dfrac{5}{2}=-3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad \therefore y=-3x+4$



따라서 이 직선의 x절편은 $\dfrac{4}{3}$, y절편은 4이므로 구하는 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot 4=\dfrac{8}{3}$ 답 $\dfrac{8}{3}$

24 $x^2+2y^3-3xy=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x+6y^2\dfrac{dy}{dx}-3y-3x\dfrac{dy}{dx}=0$

$(6y^2-3x)\dfrac{dy}{dx}=-2x+3y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x+3y}{6y^2-3x}\ (2y^2\neq x)$

따라서 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2+3}{6-3}=\dfrac{1}{3}$

이므로 접선의 방정식은

$y-1=\dfrac{1}{3}(x-1)$

$\therefore y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

이 직선이 점 $(4,\ a)$를 지나므로

$a=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}=2$ 답 ②

25 $x^2y^3=8$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2xy^3+x^2\cdot 3y^2\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2xy^3}{3x^2y^2}=-\dfrac{2y}{3x}$

따라서 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4}{3}$

이므로 접선의 방정식은

$y-2=-\dfrac{4}{3}(x-1)$

$\therefore y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{10}{3}$

즉 구하는 x절편은 $\dfrac{5}{2}$이다. 답 ⑤

26 $x-\sin y-xy=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$1-\cos y\dfrac{dy}{dx}-y-x\dfrac{dy}{dx}=0$

$-(\cos y+x)\dfrac{dy}{dx}=y-1$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-y}{\cos y+x}\ (\cos y\neq -x)$

따라서 점 $(0,\ \pi)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\pi}{-1}=\pi-1$

이므로 접선의 방정식은

$y-\pi=(\pi-1)x$

$\therefore (\pi-1)x-y+\pi=0$

즉 $a=\pi-1,\ b=\pi$이므로

$a-b=\pi-1-\pi=-1$ 답 ②

27 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{y^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^2}{x^2}$

따라서 점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는

Q BOX

원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$y=0$일 때

$0=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{10}{3}$

$\dfrac{4}{3}x=\dfrac{10}{3}$

$\therefore x=\dfrac{5}{2}$

$(x^2+3)^2>0$

x^2-2x+3
$=(x-1)^2+2>0$

$f(x)=(x^2+2)^{-\frac{1}{2}}$

$x^2+2>0$

$\dfrac{dy}{dx}=-4$

이므로 직선 l의 방정식은

$y+2=-4(x-1)\qquad \therefore 4x+y-2=0$

즉 원점과 직선 l 사이의 거리는

$\dfrac{|-2|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$ 답 $\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$

15 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

W 48쪽

01 (1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$에서

$f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 증가하고, 구간 $[0,\ \infty)$에서 감소한다.

(2) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$에서

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+3}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 1]$에서 감소하고, 구간 $[1,\ \infty)$에서 증가한다.

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$에서

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$

$=-\dfrac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 증가하고, 구간 $[0,\ \infty)$에서 감소한다.

(4) $f(x)=x+e^{-x}$에서

$f'(x)=1-e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $e^{-x}=1\quad \therefore x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소하고, 구간 $[0, \infty)$에서 증가한다.

(5) $f(x)=\frac{e^{4x}}{x}$에서 $x\neq0$이고

$$f'(x)=\frac{4e^{4x}\cdot x-e^{4x}\cdot 1}{x^2}=\frac{e^{4x}(4x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 4x-1=0 \quad \therefore x=\frac{1}{4}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{1}{4}\right]$에서 감소하고, 구간 $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$에서 증가한다.

(6) $f(x)=x\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=-1 \quad \therefore x=\frac{1}{e}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{1}{e}\right]$에서 감소하고, 구간 $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

02 (1) $f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$에서

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\cos x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{2}{3}\pi \ (\because 0<x<\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{2}{3}\pi\right]$에서 증가하고, 구간 $\left[\frac{2}{3}\pi, \pi\right)$에서 감소한다.

(2) $f(x)=\tan x-2x$에서

$$f'(x)=\sec^2 x-2$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sec^2 x=2, \quad \sec x=\pm\sqrt{2}$

$\sec x=\pm\sqrt{2}$에서 $\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x=-\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

03 (1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$에서

$$f'(x)=\frac{x^2+3-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$
$$=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}=-\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$$

$x^2+3>0$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{6}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 $\frac{1}{6}$, $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{1}{2}$을 갖는다.

(2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$에서 $\quad f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$x^2+1>0$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 1을 갖는다.

(3) $f(x)=-xe^x$에서

$$f'(x)=-e^x-xe^x=-(1+x)e^x$$

$e^x>0$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{1}{e}$을 갖는다.

(4) $f(x)=x-\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 1을 갖는다.

(5) $f(x)=\frac{1}{2}x+\cos x$에서

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\sin x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi \ (\because 0<x<\pi)$

W 06 도함수의 활용 (1)

x	0	⋯	$\frac{\pi}{6}$	⋯	$\frac{5}{6}\pi$	⋯	π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값 $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x=\frac{5}{6}\pi$에서 극솟값 $\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$을 갖는다.

답 (1) 극댓값: $\frac{1}{6}$, 극솟값: $-\frac{1}{2}$

(2) 극솟값: 1 (3) 극댓값: $\frac{1}{e}$ (4) 극솟값: 1

(5) 극댓값: $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$, 극솟값: $\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

04 (1) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$에서 $x\neq0$이고

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{x^4}=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}$

$f''(x)=\frac{2x}{x^4}-\frac{2\cdot3x^2}{x^6}=\frac{2}{x^3}-\frac{6}{x^4}$

$f'(x)=0$에서 $\frac{1}{x^2}=\frac{2}{x^3}$

$x^3=2x^2$, $x^2(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x\neq0$)

이때 $f''(2)=-\frac{1}{8}<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고, 극댓값은 $f(2)=\frac{1}{4}$이다.

(2) $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$에서

$f'(x)=\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$

$f''(x)=\frac{-1\cdot\sqrt{4x-x^2}-(2-x)\cdot\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}}{4x-x^2}$

$=-\frac{4}{(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

이때 $f''(2)=-\frac{1}{2}<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고, 극댓값은 $f(2)=2$이다.

(3) $f(x)=e^{x^2}$에서

$f'(x)=2xe^{x^2}$

$e^{x^2}>0$

$f''(x)=2e^{x^2}+2x\cdot2xe^{x^2}=2e^{x^2}(1+2x^2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

이때 $f''(0)=2>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고, 극솟값은 $f(0)=1$이다.

(4) $f(x)=\ln(x^2+1)$에서

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

$x^2+1>0$

$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

이때 $f''(0)=2>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고, 극솟값은 $f(0)=0$이다.

Q BOX

(5) $f(x)=\cos x-\sin x$에서

$f'(x)=-\sin x-\cos x$

$f''(x)=-\cos x+\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=-\cos x$

$\tan x=-1$ $\therefore x=\frac{3}{4}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

$\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $f''\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{4}\pi$에서 극소이고, 극솟값은 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}$이다.

답 (1) 극댓값: $\frac{1}{4}$ (2) 극댓값: 2

(3) 극솟값: 1 (4) 극솟값: 0

(5) 극솟값: $-\sqrt{2}$

05 $f(x)=\ln x^2+2x$에서

$f'(x)=\frac{2x}{x^2}+2=\frac{2}{x}+2$

$f'(x)=0$에서 $\frac{2}{x}=-2$ $\therefore x=-1$

x	⋯	−1	⋯	0
$f'(x)$	+	0	−	
$f(x)$	↗		↘	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 증가하고 구간 $[-1, 0)$에서 감소하므로

$a=-1$ 답 −1

06 $f(x)=x+\sqrt{20-x^2}$에서 $0<x\leq2\sqrt{5}$이고

$20-x^2\geq0$이므로
$x^2-20\leq0$
$(x+2\sqrt{5})(x-2\sqrt{5})\leq0$
$\therefore -2\sqrt{5}\leq x\leq2\sqrt{5}$
이때 $x>0$이므로
$0<x\leq2\sqrt{5}$

$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{20-x^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{20-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\frac{x}{\sqrt{20-x^2}}=1$

$x=\sqrt{20-x^2}$, $x^2=20-x^2$

$x^2=10$ $\therefore x=\sqrt{10}$ ($\because 0<x\leq2\sqrt{5}$)

x	0	⋯	$\sqrt{10}$	⋯	$2\sqrt{5}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, \sqrt{10}]$에서 증가하므로 정수 x는 1, 2, 3의 3개이다. 답 ③

07 $f(x)=2\cos x+x$에서 $f'(x)=-2\sin x+1$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

x	0	⋯	$\frac{\pi}{6}$	⋯	$\frac{5}{6}\pi$	⋯	π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{5}{6}\pi, \pi\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$에서 감소한다.

ㄱ. $0<a<b<\frac{\pi}{6}$이면 $\quad f(a)<f(b)$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

쌤 한마디

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.

08 $f(x)=ax+\sin 2x$에서

$f'(x)=a+2\cos 2x$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이때 $-1\le\cos 2x\le 1$에서 $\quad -2\le 2\cos 2x\le 2$

$\therefore a-2\le a+2\cos 2x\le a+2$

따라서 $a+2\le 0$이어야 하므로 $\quad a\le -2$ 답 ①

어떤 구간에서 부등식 $P(x)\le 0$이 성립함을 보이려면 그 구간에서 (함수 $P(x)$의 최댓값)≤ 0임을 보인다.

09 $f(x)=(x^2+2)e^{ax}$에서

$f'(x)=2xe^{ax}+(x^2+2)\cdot ae^{ax}$

$=(ax^2+2x+2a)e^{ax}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이때 $e^{ax}>0$이므로 $ax^2+2x+2a\ge 0$이어야 한다.

따라서 $a>0$이고, 이차방정식 $ax^2+2x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-2a^2\le 0,\quad 2a^2-1\ge 0$

$(\sqrt{2}a+1)(\sqrt{2}a-1)\ge 0$

$\therefore a\le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $a\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ④

쌤 한마디

$ax^2+2x+2a\ge 0$에서 $a=0$이면

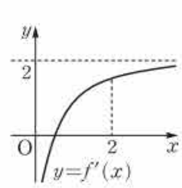
$2x\ge 0\quad\therefore x\ge 0$

따라서 함수 $f(x)$가 구간 $(0, \infty]$에서만 증가하므로 $a\ne 0$임을 알 수 있다.

10 $f(x)=2x+\frac{a}{x}$에서 $\quad f'(x)=2-\frac{a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 구간 $(2, \infty)$에서 증가하려면 $x>2$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$f'(2)=2-\frac{a}{4}\ge 0$

$\therefore a\le 8$

따라서 실수 a의 최댓값은 8이다.

답 8

11 $f(x)=(x^2+2x+a)e^x$에서

$f'(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x+a)e^x$

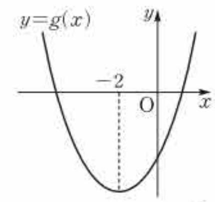
$=(x^2+4x+a+2)e^x$

함수 $f(x)$가 구간 $(-2, 0)$에서 감소하려면 $-2<x<0$일 때 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이때 $e^x>0$이므로 $x^2+4x+a+2\le 0$이어야 한다.

$x^2+4x+a+2$
$=(x+2)^2+a-2$

$g(x)=x^2+4x+a+2$라 하면 오른쪽 그림에서



$g(-2)=4-8+a+2\le 0,$ $\quad a\le 2$

$g(0)=a+2\le 0$

$\therefore a\le -2$

답 ①

12 $f(x)=\frac{x^2-3x}{x+1}$에서 $x\ne -1$이고

$f'(x)=\frac{(2x-3)(x+1)-(x^2-3x)}{(x+1)^2}$

$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이고, $x=1$에서 극소이므로

극댓값은 $f(-3)=-9$, 극솟값은 $f(1)=-1$

$a=-3,\ b=1\quad\therefore b-a=4$ 답 ⑤

13 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+x$에서 $0<x\le 2$이고

$4-x^2\ge 0$이므로
$x^2-4\le 0$
$(x+2)(x-2)\le 0$
$\therefore -2\le x\le 2$
그런데 $x>0$이므로
$0<x\le 2$

$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}+1=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}+1$

$f'(x)=0$에서 $\quad\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=1,\quad x=\sqrt{4-x^2}$

$x^2=4-x^2,\quad x^2=2$

$\therefore x=\sqrt{2}\ (\because x>0)$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$2\sqrt{2}$	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{2}$에서 극댓값 $2\sqrt{2}$를 갖는다.

답 ③

14 $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$에서 $x>0$이고

$f(x)=2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$이므로
$f'(x)$
$=2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$
$=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$\sqrt{x}=2x\sqrt{x},\quad 2x=1\ (\because x>0)$

$\therefore x=\frac{1}{2}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$2\sqrt{2}$	↗

ㄱ. 정의역은 $\{x|x>0\}$이다.

ㄴ. $x=\frac{1}{2}$에서 극솟값 $2\sqrt{2}$를 갖는다.

ㄷ. 구간 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$에서 $f'(x)\le 0$이므로 이 구간에서 감소한다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

15 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+2}$에서

$$f'(x)=\frac{a(x^2+2)-(ax+b)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{-ax^2-2bx+2a}{(x^2+2)^2}$$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값 $\frac{1}{2}$을 가지므로

$f'(2)=0,\ f(2)=\frac{1}{2}$

$\frac{-a-2b}{18}=0,\ \frac{2a+b}{6}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+2b=0,\ 2a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$

$\therefore\ a^2+b^2=4+1=5$ 답 ②

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 p를 갖는다.
➡ $f'(a)=0,\ f(a)=p$

16 $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x^2}$에서 $x\ne 0$이고

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\cdot x^2-e^{2x}\cdot 2x}{x^4}=\frac{2xe^{2x}(x-1)}{x^4}$$

$e^{2x}>0,\ x^4>0$

$f'(x)=0$에서 $x=1\ (\because\ x\ne 0)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘	e^2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 증가하고, $x=1$에서 극솟값 e^2을 갖는다. 답 ③

17 $f(x)=x(\ln x)^2$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=(\ln x)^2+x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=(\ln x+2)\ln x$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{e^2}$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e^2}$에서 극댓값 $\frac{4}{e^2}$, $x=1$에서 극솟값 0을 가지므로

$M=\frac{4}{e^2},\ m=0 \qquad \therefore\ M-m=\frac{4}{e^2}$ 답 $\frac{4}{e^2}$

18 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극솟값 $-4e^3$을 가지므로 $f(-2)=-4e^3$에서

$(4+a)e^3=-4e^3,\qquad 4+a=-4$

$\therefore\ a=-8$

따라서 $f(x)=(x^2-8)e^{1-x}$이므로

$$f'(x)=2xe^{1-x}+(x^2-8)\cdot(-e^{1-x})$$

$$=-(x^2-2x-8)e^{1-x}$$

$f'(x)=0$에서 $x^2-2x-8=0\ (\because\ e^{1-x}>0)$

$(x+2)(x-4)=0\qquad \therefore\ x=-2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-4e^3$	↗	$\frac{8}{e^3}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값 $\frac{8}{e^3}$을 갖는다.

답 ⑤

19 $f(x)=4x-\tan x$에서

$f'(x)=4-\sec^2 x$

$f'(x)=0$에서 $\sec^2 x=4$

$\cos^2 x=\frac{1}{4}\qquad \therefore\ \cos x=\frac{1}{2}\left(\because\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ x=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$-\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$	↗	$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극댓값 $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$, $x=-\frac{\pi}{3}$에서 극솟값 $-\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$을 가지므로 구하는 합은

$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}+\left(-\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}\right)=0$ 답 0

20 $f(x)=\cos 2x+x$에서

$f'(x)=-2\sin 2x+1$

$f'(x)=0$에서 $\sin 2x=\frac{1}{2}$

$2x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $2x=\frac{5}{6}\pi\ (\because\ 0<2x<2\pi)$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{5}{12}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{12}$	$\cdots$	$\frac{5}{12}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

$0<x<\frac{\pi}{12}$에서
$0<2x<\frac{\pi}{6}$이므로
$0<\sin 2x<\frac{1}{2}$
$\therefore\ 0<-2\sin 2x+1<1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{12}$에서 극대, $x=\frac{5}{12}\pi$에서 극소이므로

$\alpha=\frac{\pi}{12},\ \beta=\frac{5}{12}\pi$

$\therefore f(\alpha-\beta)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)-\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{3}$ 답 ②

21 $f(x)=e^x(\sin x-\cos x)$에서

$f'(x)=e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)$

$=2e^x\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0<x<3\pi$)

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π	$\cdots$	3π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	e^{π}	↘	$-e^{2\pi}$	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 극댓값 e^{π}, $x=2\pi$에서 극솟값 $-e^{2\pi}$을 가지므로

$M=e^{\pi}$, $m=-e^{2\pi}$ $\therefore \frac{m}{M}=-e^{\pi}$ 답 ①

22 $\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta-1$, $\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta+1}$$

$\frac{dy}{dx}=0$에서 $\cos\theta=0$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<\theta<\pi$)

또 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때 $\frac{dy}{dx}<0$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때 $\frac{dy}{dx}>0$이므로 주어진 함수는 $\theta=\frac{\pi}{2}$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구하는 극솟값은

$\sin\frac{\pi}{2}+1=2$ 답 2

23 $f(x)=a\sin x-x$에서 $f'(x)=a\cos x-1$

$f'(x)=0$에서 $a\cos x-1=0$

$\therefore \cos x=\frac{1}{a}$ ······ ㉠

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 ㉠의 근이 존재해야 하고, 그 근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

즉 $\frac{1}{|a|}<1$이어야 하므로

$|a|>1$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>1$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ②이다. 답 ②

24 $f(x)=(x^3-24x+k)e^x$에서

$f'(x)=(3x^2-24)e^x+(x^3-24x+k)e^x$

$=(x^3+3x^2-24x-24+k)e^x$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $x^3+3x^2-24x-24+k=0$이 2개 이상의 실근을 갖고, 실근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

즉 $g(x)=x^3+3x^2-24x-24+k$라 하면 삼차함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 부호가 달라야 한다.

$g'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$이므로

$g'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

$g(-4)g(2)<0$이어야 하므로

$(k+56)(k-52)<0$

$\therefore -56<k<52$

따라서 정수 k의 최댓값은 51이다. 답 51

25 $f(x)=(x^2+2ax+1)e^{-x}$에서

$f'(x)=(2x+2a)e^{-x}+(x^2+2ax+1)e^{-x}\cdot(-1)$

$=\{-x^2+2(1-a)x+2a-1\}e^{-x}$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $-x^2+2(1-a)x+2a-1=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $-x^2+2(1-a)x+2a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1-a)^2+2a-1\le 0$

$a^2\le 0$ $\therefore a=0$ ($\because a$는 실수) 답 0

26 $f(x)=\ln(x^2+n)-\frac{1}{3}x$에서

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+n}-\frac{1}{3}=\frac{-x^2+6x-n}{3(x^2+n)}$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-x^2+6x-n=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $-x^2+6x-n=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-n>0$ $\therefore n<9$

따라서 자연수 n은 1, 2, $\cdots$, 8이므로 구하는 합은

$1+2+\cdots+8=36$ 답 36

Q BOX

$g(-4)$
$=(-4)^3+3\cdot(-4)^2-24\cdot(-4)-24+k$
$=-64+48+96-24+k$
$=k+56$
$g(2)$
$=2^3+3\cdot2^2-24\cdot2-24+k$
$=8+12-48-24+k$
$=k-52$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때
$\cos\theta>0$, $\sin\theta+1>0$이므로
$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta+1}<0$
$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때
$\cos\theta<0$, $\sin\theta+1>0$이므로
$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta+1}>0$

$\sum_{k=1}^{8}k=\frac{8\cdot9}{2}=36$

06 도함수의 활용 (1)

07 도함수의 활용 (2)

16 함수의 그래프

W 52쪽

01 (1) $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$이라 하면

$$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2(x^2+2)^2-(-2x)\cdot 2(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2+2)^4}$$

$$=\frac{2(3x^2-2)(x^2+2)}{(x^2+2)^4}=\frac{2(3x^2-2)}{(x^2+2)^3}$$

$f''(x)=0$에서 $3x^2-2=0$

$\therefore x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 또는 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \infty\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

(2) $f(x)=e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2$이라 하면

$f'(x)=e^{x-1}-x$

$f''(x)=e^{x-1}-1$

$f''(x)=0$에서 $e^{x-1}=1$ $\therefore x=1$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 1)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(1, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

(3) $f(x)=x\ln x$라 하면 $x>0$이고

$$f'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

(4) $f(x)=3x+\sin x$라 하면

$f'(x)=3+\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

답 풀이 참조

02 (1) $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$이라 하면 $x\neq0$이고

$$f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x)=2-\frac{2}{x^3}=\frac{2(x^3-1)}{x^3}$$

$$=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$$

$f''(x)=0$에서

$x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

$0<x<1$일 때 $f''(x)<0$,

$x>1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(1, 0)$이다.

(2) $f(x)=xe^{2x}$이라 하면

$f'(x)=e^{2x}+x\cdot 2e^{2x}$

$=(1+2x)e^{2x}$

$f''(x)=2e^{2x}+(1+2x)\cdot 2e^{2x}$

$=4e^{2x}(1+x)$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because e^{2x}>0$)

$x<-1$일 때 $f''(x)<0$,

$x>-1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-1, -\frac{1}{e^2}\right)$이다.

(3) $f(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$이라 하면

$$f'(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$=-\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x<-1$ 또는 $x>1$일 때 $f''(x)<0$,

$-1<x<1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-1, \frac{1}{2}\ln 2\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\ln 2\right)$이다.

(4) $f(x)=\cos 2x$라 하면

$f'(x)=-2\sin 2x$

$f''(x)=-4\cos 2x$

$f''(x)=0$에서

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

$0<x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi<x<\pi$일 때 $f''(x)<0$,

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3}{4}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$이다.

답 (1) $(1, 0)$

(2) $\left(-1, -\frac{1}{e^2}\right)$

(3) $\left(-1, \frac{1}{2}\ln 2\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\ln 2\right)$

(4) $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$

Q BOX

$e^{x-1}=1$에서

$x-1=0$ $\therefore x=1$

구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서

$0<\sin x<1$이므로

$-1<-\sin x<0$

x^2+x+1

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$-4\cos 2x=0$이고

$0<x<\pi$에서

$0<2x<2\pi$이므로

$2x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $2x=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$

또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

03 (1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$이라 하면 $x\neq0$이고

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}$$

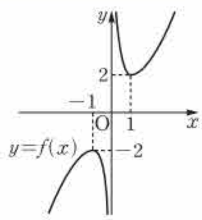
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	-2	↘		↘	2	↗

이때 $\lim_{x\to0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to0-}f(x)=-\infty$이므로 점근선은 y축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=x-\sqrt{x}$라 하면 $x\geq0$이고

$$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \frac{1}{2\sqrt{x}}=1$

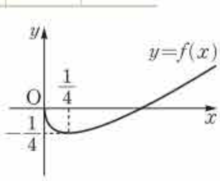
$\sqrt{x}=\frac{1}{2} \quad \therefore x=\frac{1}{4}$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

$f(x)=x-x^{\frac{1}{2}}$이므로
$f'(x)=1-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f''(x)$
$=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$
$=\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $f(x)=xe^{-x}$이라 하면

$$f'(x)=e^{-x}+x\cdot(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$$

$$f''(x)=-e^{-x}+(1-x)\cdot(-e^{-x})$$
$$=(x-2)e^{-x}$$

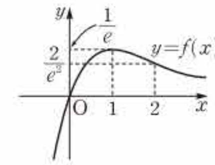
$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ ($\because e^{-x}>0$)

$f''(x)=0$에서 $\quad x=2$ ($\because e^{-x}>0$)

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(4) $f(x)=\cos x-x$라 하면

$$f'(x)=-\sin x-1$$

$$f''(x)=-\cos x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\leq x\leq2\pi$)

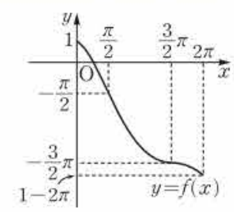
$\sin x=-1$
$\therefore x=\frac{3}{2}\pi$
($\because 0\leq x\leq2\pi$)

$f''(x)=0$에서

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\leq x\leq2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$-\frac{\pi}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}\pi$	↘	$1-2\pi$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

04 (1) $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x-1}$에서

$$f'(x)=\frac{2(x+1)(x-1)-(x+1)^2}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=3$ ($\because 2\leq x\leq4$)

x	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	↘	8	↗	$\frac{25}{3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 9, $x=3$일 때 최솟값 8을 갖는다.

(2) $f(x)=x\sqrt{x+12}$에서

$$f'(x)=\sqrt{x+12}+\frac{x}{2\sqrt{x+12}}=\frac{3(x+8)}{2\sqrt{x+12}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-8$

x	-10	$\cdots$	-8	$\cdots$	-4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-10\sqrt{2}$	↘	-16	↗	$-8\sqrt{2}$

$-10\sqrt{2}=-\sqrt{200}$,
$-16=-\sqrt{256}$,
$-8\sqrt{2}=-\sqrt{128}$이므로
$-16<-10\sqrt{2}<-8\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$일 때 최댓값 $-8\sqrt{2}$, $x=-8$일 때 최솟값 -16을 갖는다.

(3) $f(x)=x^2e^{x-1}$에서

$$f'(x)=2xe^{x-1}+x^2e^{x-1}=x(x+2)e^{x-1}$$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ ($\because e^{x-1}>0$)

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{9}{e^4}$	↗	$\frac{4}{e^3}$	↘	0	↗	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 1, $x=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.

(4) $f(x)=x-2\sin x$에서 $\quad f'(x)=1-2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0\le x\le \pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	↗	π

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$일 때 최댓값 π, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 최솟값 $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$을 갖는다.

답 (1) 최댓값: 9, 최솟값: 8
(2) 최댓값: $-8\sqrt{2}$, 최솟값: -16
(3) 최댓값: 1, 최솟값: 0
(4) 최댓값: π, 최솟값: $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

05 $f(x)=-x^3+12x^2-5x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+24x-5$

$f''(x)=-6x+24$

곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로

$-6x+24>0 \quad \therefore x<4$

따라서 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록한 구간은 $(-\infty, 4)$이므로 이 구간에 속하지 않는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

06 ① $f(x)=x^4+x-1$이라 하면

$f'(x)=4x^3+1,\ f''(x)=12x^2$

양의 실수 전체의 집합에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.

② $f(x)=\frac{1}{2}x^2+4\sqrt{x}$라 하면

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x^{\frac{1}{2}}$이므로

$f'(x)=x+2x^{-\frac{1}{2}}$
$=x+\frac{2}{\sqrt{x}}$

$f''(x)=1-x^{-\frac{3}{2}}$
$=1-\frac{1}{x\sqrt{x}}$

$f'(x)=x+\frac{2}{\sqrt{x}},\ f''(x)=1-\frac{1}{x\sqrt{x}}$

$f''(x)=0$에서 $\quad \frac{1}{x\sqrt{x}}=1, \quad x^3-1=0$

양변을 제곱하여 정리한다.

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0, 1)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(1, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

③ $f(x)=e^x-x$라 하면

$f'(x)=e^x-1,\ f''(x)=e^x$

양의 실수 전체의 집합에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.

④ $f(x)=\ln x^2$이라 하면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x},\ f''(x)=-\frac{2}{x^2}$

양의 실수 전체의 집합에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 위로 볼록하다.

⑤ $f(x)=x^2-\sin x$라 하면

$f'(x)=2x-\cos x,\ f''(x)=2+\sin x$

양의 실수 전체의 집합에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.

$-1\le \sin x\le 1$에서 $1\le 2+\sin x\le 3$, 즉 $f''(x)>0$

답 ④

07 $f(x)=x+2\cos x$라 하면

$f'(x)=1-2\sin x,\ f''(x)=-2\cos x$

$f''(x)=0$에서

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

$0<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$일 때 $f''(x)<0$,

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 2이다.

답 2

08 $f(x)=\ln(x^2+3)$이라 하면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+3}$

$f''(x)=\frac{2(x^2+3)-2x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}$

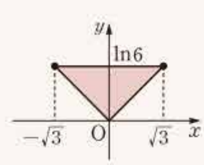
$=\frac{-2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$x<-\sqrt{3}$ 또는 $x>\sqrt{3}$일 때 $f''(x)<0$,

$-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$일 때 $f''(x)>0$

즉 $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는 $(-\sqrt{3}, \ln 6)$, $(\sqrt{3}, \ln 6)$이다.



따라서 △OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot \ln 6=\sqrt{3}\ln 6$

답 ③

09 $f(x)=(\ln ax)^2$이라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=2\ln ax\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln ax}{x}$

$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $\quad \ln ax=1$

$ax=e \quad \therefore x=\frac{e}{a}$

$0<x<\frac{e}{a}$일 때 $f''(x)>0$,

$x>\frac{e}{a}$일 때 $f''(x)<0$

즉 $x=\frac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{a},\ 1\right)$

이때 변곡점이 직선 $y=\frac{2}{e}x$ 위에 있으므로

$1=\frac{2}{a}$ $\quad\therefore a=2$ 답 ②

10 $f(x)=ax^3+bx^2-1$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx$, $f''(x)=6ax+2b$

조건 (가)에서 $f'(-1)=9$이므로

$3a-2b=9$ ······ ㉠

조건 (나)에서 $f''(1)=0$이므로

$6a+2b=0$ $\quad\therefore 3a+b=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-3$

$\therefore ab=-3$ 답 -3

11 $f(x)=(x^2-6x+a)e^x$이라 하면

$f'(x)=(2x-6)e^x+(x^2-6x+a)e^x$

$=(x^2-4x+a-6)e^x$

$f''(x)=(2x-4)e^x+(x^2-4x+a-6)e^x$

$=(x^2-2x+a-10)e^x$

$e^x>0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 2개이려면 방정식 $x^2-2x+a-10=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-2x+a-10=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(a-10)>0$ $\quad\therefore a<11$

따라서 정수 a의 최댓값은 10이다. 답 10

12 $f(x)=x-2\ln x$에서 $x>0$이고

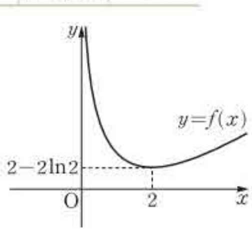
$f'(x)=1-\frac{2}{x}$, $f''(x)=\frac{2}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad \frac{2}{x}=1$ $\quad\therefore x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘	$2-2\ln 2$	⤴

또 $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 y축이다.

ㄴ. 구간 $(0,\ \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

ㄷ. $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

13 $f(x)=x-\cos x+1$에서

$f'(x)=1+\sin x$, $f''(x)=\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=-1$

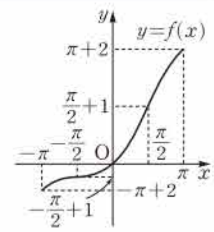
$\therefore x=-\frac{\pi}{2}$ $(\because -\pi\le x\le\pi)$

$f''(x)=0$에서 $\quad \cos x=0$

$\therefore x=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ $(\because -\pi\le x\le\pi)$

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\pi+2$	↗	$-\frac{\pi}{2}+1$	⤴	$\frac{\pi}{2}+1$	↗	$\pi+2$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① $f(x)$의 극솟값은 없다.

② $y=f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,-\pi+2\le y\le\pi+2\}$이다.

③ $f(-x)=-x-\cos(-x)+1$

$=-x-\cos x+1\ne -f(x)$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이 아니다.

④ 구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

⑤ $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 2개이다.

답 ④

변곡점의 좌표는 $\left(-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}+1\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+1\right)$

14 구간 $(a,\ e)$에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로 구하는 구간은 $(d,\ e)$이다. 답 ⑤

15 점 A, B, C, D, E의 x좌표를 각각 a, b, c, d, e라 하자.

$f'(x)=0$에서 $\quad x=b$ 또는 $x=d$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=c$

x	a	b	c	d	e
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

$f'(x)f''(x)>0$에서

$f'(x)>0,\ f''(x)>0$ 또는 $f'(x)<0,\ f''(x)<0$

따라서 조건을 만족시키는 점은 E이다. 답 ⑤

점 C가 변곡점이므로 $f''(c)=0$

$f'(x)$가 구간에서 증가하면 $f''(x)>0$

$f'(x)$가 구간에서 감소하면 $f''(x)<0$

$x=e$일 때, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$

16 $f'(x)=0$에서　　$x=a$ 또는 $x=0$

$f''(x)=0$에서　　$x=b$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	⤴	변곡점	↗	변곡점	⤴

ㄴ. $f(x)$는 극댓값을 갖지 않는다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 $x=b$, $x=0$에서 변곡점을 가지므로 변곡점은 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.　　답 ㄱ, ㄷ

17 $f(x)=x+\dfrac{9}{x+2}$에서

$$f'(x)=1-\frac{9}{(x+2)^2}=\frac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2}$$

$f'(x)=0$에서　　$x=1$ $(\because -1\le x\le 4)$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↘	4	↗	$\dfrac{11}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 8, $x=1$일 때 최솟값 4를 가지므로

$M=8$, $m=4$　　$\therefore \dfrac{M}{m}=2$　　답 ①

18 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$에서 $0\le x\le 4$이고

$x\ge 0$, $4-x\ge 0$이므로
$x\ge 0$, $x\le 4$
$\therefore 0\le x\le 4$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}=\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$$

$f'(x)=0$에서　　$\sqrt{4-x}=\sqrt{x}$

$4-x=x$　　$\therefore x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $2\sqrt{2}$, $x=0$ 또는 $x=4$일 때 최솟값 2를 가지므로 구하는 곱은

$2\sqrt{2}\cdot 2=4\sqrt{2}$　　답 ⑤

19 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2-x+2}$에서

$$f'(x)=\frac{a(x^2-x+2)-(ax+b)(2x-1)}{(x^2-x+2)^2}$$
$$=\frac{-ax^2-2bx+2a+b}{(x^2-x+2)^2}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 미분가능한 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극대이면서 최대이다.

$f'(4)=0$에서　　$\dfrac{-16a-8b+2a+b}{14^2}=0$

$14a+7b=0$　　$\therefore 2a+b=0$　　$\cdots\cdots$ ㉠

$f(4)=\dfrac{1}{7}$에서

$\dfrac{4a+b}{14}=\dfrac{1}{7}$　　$\therefore 4a+b=2$　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　　$a=1$, $b=-2$

$\therefore a+b=-1$　　답 -1

20 $f(x)=x\ln x-x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x$$

$f'(x)=0$에서　　$\ln x=0$　　$\therefore x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

답 ③

21 $f(x)=(1-\sin x)\cos x$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=(-\cos x)\cos x+(1-\sin x)(-\sin x)\\&=-\cos^2 x-\sin x+\sin^2 x\\&=-(1-\sin^2 x)-\sin x+\sin^2 x\\&=2\sin^2 x-\sin x-1\\&=(2\sin x+1)(\sin x-1)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서　　$\sin x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{11}{6}\pi$

$(\because 0\le x\le 2\pi)$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	0	↘	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{11}{6}\pi$일 때 최댓값 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, $x=\dfrac{7}{6}\pi$일 때 최솟값 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$을 가지므로 구하는 차는

$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　답 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

22 $f(x)=axe^x$에서

$$f'(x)=ae^x+axe^x=a(1+x)e^x$$

$f'(x)=0$에서　　$x=-1$ $(\because e^x>0)$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\dfrac{2a}{e^2}$	↘	$-\dfrac{a}{e}$	↗	ae

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 ae, $x=-1$일 때 최솟값 $-\dfrac{a}{e}$를 갖고, 최댓값과 최솟값의 곱이 -4이므로

$ae\cdot\left(-\dfrac{a}{e}\right)=-4$,　　$a^2=4$

$\therefore a=2$ $(\because a>0)$　　답 ①

23 $2^x=t$로 놓으면 $2^x>0$에서 $t>0$이고, 주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+4t^2-3t$

$\therefore\ g'(t)=3t^2+8t-3=(t+3)(3t-1)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=\frac{1}{3}$ ($\because t>0$)

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	$-\frac{14}{27}$	↗

따라서 함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{3}$일 때 최솟값 $-\frac{14}{27}$를 갖는다. 답 ①

Q BOX

$f(x)$
$=8^x+4^{x+1}-3\cdot2^x$
$=(2^x)^3+4\cdot(2^x)^2-3\cdot2^x$
이므로
$g(t)=t^3+4t^2-3t$

24 $f(x)=\sin^3x+6\cos^2x-8$

$=\sin^3x+6(1-\sin^2x)-8$

$=\sin^3x-6\sin^2x-2$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고, 주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3-6t^2-2$

$\therefore\ g'(t)=3t^2-12t=3t(t-4)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=0$ ($\because -1\le t\le1$)

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-9	↗	-2	↘	-7

따라서 함수 $g(t)$는 $t=0$일 때 최댓값 -2, $t=-1$일 때 최솟값 -9를 가지므로

$M=-2,\ m=-9$

$\therefore\ M-m=7$ 답 7

25 $g(x)=t$로 놓으면 $-3\le t\le-1$이고

$-1\le\sin x\le1$이므로
$-3\le\sin x-2\le-1$,
즉 $-3\le t\le-1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3+3t^2+2$

$\therefore\ f'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=-2$ ($\because -3\le t\le-1$)

t	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	2	↗	6	↘	4

따라서 함수 $f(t)$는 $t=-2$일 때 최댓값 6, $t=-3$일 때 최솟값 2를 가지므로 구하는 합은

$6+2=8$ 답 8

26 $\mathrm{P}(t,\ e^t+1)$이라 하면 $\mathrm{Q}(e^t+1,\ t)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(e^t+1-t)^2+(t-e^t-1)^2}=\sqrt{2}(e^t+1-t)$

$f(t)=\sqrt{2}(e^t+1-t)$라 하면

$f'(t)=\sqrt{2}(e^t-1)$

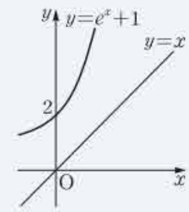
$f'(t)=0$에서 $\quad e^t=1 \quad \therefore\ t=0$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	$2\sqrt{2}$	↗

따라서 $f(t)$는 $t=0$일 때 최솟값 $2\sqrt{2}$를 가지므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다. 답 ④

쌤 한마디

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2(e^t+1-t)^2}=\sqrt{2}\,|e^t+1-t|$
이때 $y=e^x+1$, $y=x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 실수 x에 대하여
$e^x+1>x$, 즉
$e^x+1-x>0$
$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}(e^t+1-t)$



27 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t+4})$ $(-4<t<0)$라 하고 사각형 PQOR의 넓이를 $S(t)$라 하면

점 P는 제2사분면 위의 점이므로
$-4<t<0$

$S(t)=-t\sqrt{t+4}$

$\therefore\ S'(t)=-\sqrt{t+4}-\frac{t}{2\sqrt{t+4}}=-\frac{3t+8}{2\sqrt{t+4}}$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=-\frac{8}{3}$

t	-4	$\cdots$	$-\frac{8}{3}$	$\cdots$	0
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$\frac{16\sqrt{3}}{9}$	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=-\frac{8}{3}$일 때 최댓값 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$을 가지므로 직사각형 PQOR의 넓이의 최댓값은 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$이다.

답 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$

28 원점과 곡선 위의 점 $(e^{2t},\ e^{-2t})$ 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

원점과 점 $(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는
$\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

$f(t)=\sqrt{(e^{2t})^2+(e^{-2t})^2}=\sqrt{e^{4t}+e^{-4t}}$

$\therefore\ f'(t)=\frac{4e^{4t}-4e^{-4t}}{2\sqrt{e^{4t}+e^{-4t}}}=\frac{2(e^{4t}-e^{-4t})}{\sqrt{e^{4t}+e^{-4t}}}$

$f'(t)=0$에서 $\quad e^{4t}-e^{-4t}=0$

$e^{8t}=1 \quad \therefore\ t=0$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	$\sqrt{2}$	↗

따라서 $f(t)$는 $t=0$일 때 최솟값 $\sqrt{2}$를 가지므로 구하는 최솟값은 $\sqrt{2}$이다. 답 ②

29 $\overline{\mathrm{PO}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로 직각삼각형 POH에서

$\overline{\mathrm{PH}}=4\sin\theta,\ \overline{\mathrm{OH}}=4\cos\theta$

삼각형 AHP의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AH}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}(4+4\cos\theta)\cdot4\sin\theta$

$=8(1+\cos\theta)\sin\theta$

$\therefore\ S'(\theta)=-8\sin^2\theta+8(1+\cos\theta)\cos\theta$

$=8(-\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=8\{-(1-\cos^2\theta)+\cos\theta+\cos^2\theta\}$

$=8(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$

$=8(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$

$S'(\theta)=0$에서 $\quad \cos\theta=\frac{1}{2}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

QBOX

$0<\cos\theta<1$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		+	0	−	
$S(\theta)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 삼각형 AHP의 넓이가 최대가 되도록 하는 θ의 값은 $\frac{\pi}{3}$이다.

답 $\frac{\pi}{3}$

17 방정식과 부등식에의 활용

W 57쪽

01 (1) $f(x)=e^{x+1}-x$라 하면

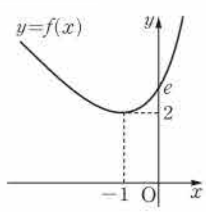
$f'(x)=e^{x+1}-1$

$f'(x)=0$에서 $\quad e^{x+1}=1$

$\therefore x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	2	↗

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않으므로 주어진 방정식은 실근을 갖지 않는다.

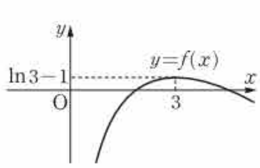
(2) $f(x)=\ln x-\frac{x}{3}$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{3}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=3$

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	$\ln3-1$	↘

이때 $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

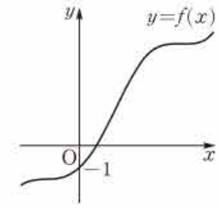
(3) $f(x)=x-\cos x$라 하면

$f'(x)=1+\sin x$

$-1\le\sin x\le1$이므로
$0\le1+\sin x\le2$,
즉 $f'(x)\ge0$

$f'(x)\ge0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 증가한다.

이때 $f(0)=-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

답 (1) 0 (2) 2 (3) 1

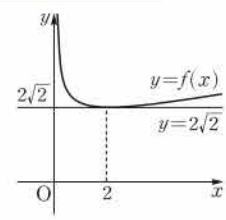
02 (1) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{x-2}{2x\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$2\sqrt{2}$	↗

이때 $\lim_{x\to0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=2\sqrt{2}$와 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$이라 하면

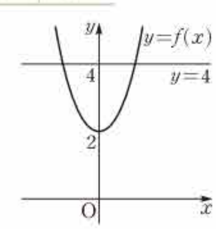
$f'(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}=2(e^{2x}-e^{-2x})$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

$e^{2x}=e^{-2x}$이므로
$e^{4x}=1 \quad \therefore x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	2	↗

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=4$와 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

답 (1) 1 (2) 2

03 (1) $f(x)=x-\sin x$라 하면

$f'(x)=1-\cos x$

$-1\le\cos x\le1$이므로
$-1\le-\cos x\le1$
$0\le1-\cos x\le2$,
즉 $f'(x)\ge0$

$x>0$일 때 $f'(x)\ge0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

$f(0)=0$이므로 $x>0$일 때

$f(x)>0$, 즉 $x-\sin x>0$

따라서 $x>0$일 때 부등식 $x>\sin x$가 성립한다.

(2) $f(x)=e^x-ex$라 하면

$f'(x)=e^x-e$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이다.

즉 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$f(x)\ge 0$, 즉 $e^x-ex\ge 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $e^x\ge ex$가 성립한다.

답 풀이 참조

쌤 한마디

$x>a$에서 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 다음과 같이 증명할 수 있다.

① 함수 $f(x)$의 극값이 존재할 때

⇨ $x>a$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0임을 보인다.

② 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않을 때

⇨ $x>a$에서 함수 $f(x)$가 증가하고 $f(a)\ge 0$임을 보인다.

$f'(x)\ge 0$

04 방정식 $x-e^x+3=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=x-e^x+3$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x-e^x+3$이라 하면

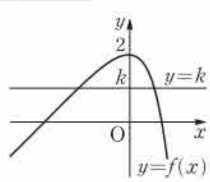
$f'(x)=1-e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$k<2$

답 $k<2$

05 $\dfrac{\ln x}{x}-k=0$에서 $\dfrac{\ln x}{x}=k$ ...... ㉠

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$라 하면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

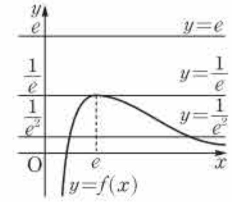
$f'(x)=0$에서 $x=e$

$1-\ln x=0$이므로 $\ln x=1$ $\therefore x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

이때 $\lim_{x\to0+} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=e$는 만나지 않으므로 $k=e$일 때, 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않는다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{e}$은 한 점에서 만나므로 $k=\frac{1}{e}$일 때, 방정식 ㉠은 오직 한 개의 실근을 갖는다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{e^2}$은 서로 다른 두 점에서 만나므로 $k=\frac{1}{e^2}$일 때, 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

06 $\dfrac{x^3}{(x-1)^2}-k=0$에서 $\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=k$

$f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$이라 하면 $x\ne1$이고

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

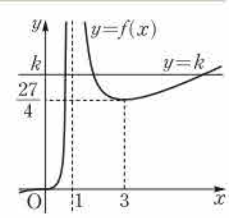
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗		↘	$\frac{27}{4}$	↗

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to1} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



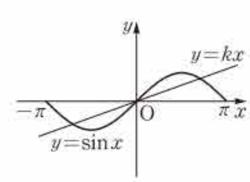
따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$k>\frac{27}{4}$

이므로 k의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

답 ①

07 구간 $[-\pi, \pi]$에서 방정식 $\sin x=kx$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 $-\pi\le x\le\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.



$f(x)=\sin x$라 하면 $f'(x)=\cos x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=\cos 0\cdot x$ $\therefore y=x$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(a)$
$=f'(a)(x-a)$

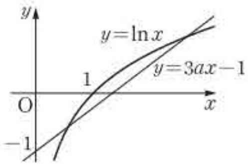
따라서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$0 \le k < 1$

즉 $\alpha=0$, $\beta=1$이므로 $\quad \alpha+\beta=1$ 답 1

08 $e^{3ax-1}=x$에서 $\quad 3ax-1=\ln x$

방정식 $3ax-1=\ln x$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=3ax-1$이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



$f(x)=\ln x$, $g(x)=3ax-1$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=3a$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때, 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad \ln t=3at-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad \dfrac{1}{t}=3a \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\ln t=\dfrac{1}{t}\cdot t-1, \quad \ln t=0$

$\therefore t=1$

$t=1$을 ㉡에 대입하면

$1=3a \quad \therefore a=\dfrac{1}{3}$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$0<a<\dfrac{1}{3}$ 답 $0<a<\dfrac{1}{3}$

09 $\ln(x^2-2x+3)+k \ge 0$에서

$\ln(x^2-2x+3) \ge -k$

$f(x)=\ln(x^2-2x+3)$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-2x+3}=\dfrac{2(x-1)}{x^2-2x+3}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	ln2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $\ln 2$를 가지므로 부등식 $f(x) \ge -k$가 항상 성립하려면

$-k \le \ln 2$

$\therefore k \ge \ln\dfrac{1}{2}$ 답 ②

10 $f(x)=x^2+\cos x$라 하면

$f'(x)=2x-\sin x$, $f''(x)=2-\cos x$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 함수 $f'(x)$는 증가하고

$f'(0)=0$이므로

$f'(x)>0$

Q BOX

$k<0$ 또는 $k \ge 1$일 때, 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=kx$는 한 점에서 만난다.

$-1 \le \cos x \le 1$이므로
$1 \le 2-\cos x \le 3$
$\therefore f''(x)>0$

또 $x>0$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가하고, $f(0)=1$이므로

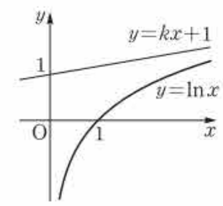
$f(x)>1$

따라서 $x>0$에서 부등식 $f(x)>k$가 성립하려면

$k \le 1$

이므로 k의 최댓값은 1이다. 답 1

11 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\ln x \le kx+1$이 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=kx+1$이 곡선 $y=\ln x$보다 위쪽에 있거나 접해야 한다.



$f(x)=\ln x$, $g(x)=kx+1$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=k$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때, 접점의 x좌표를 $t\ (t>0)$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad \ln t=kt+1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad \dfrac{1}{t}=k \quad \cdots\cdots$ ㉡

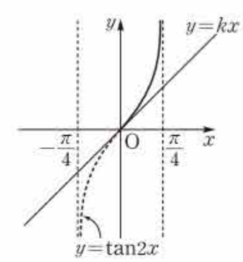
㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad \ln t=2 \quad \therefore t=e^2$

$t=e^2$을 ㉡에 대입하면 $\quad k=\dfrac{1}{e^2}$

따라서 구하는 k의 값의 범위는

$k \ge \dfrac{1}{e^2}$ 답 ⑤

12 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\tan 2x>kx$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\tan 2x$가 직선 $y=kx$보다 위쪽에 있어야 한다.



$f(x)=\tan 2x$라 하면

$f'(x)=2\sec^2 2x$

$y=kx$가 원점을 지나는 직선이고 $f'(0)=2$이므로

$0<x<\dfrac{\pi}{4}$에서 부등식 $f(x)>kx$가 성립하려면

$k \le 2$

따라서 자연수 k는 1, 2이므로 구하는 합은

$1+2=3$ 답 3

18 속도와 가속도

W 59쪽

01 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하자.

(1) $v(t)=f'(t)=-2e^{2t}$, $a(t)=f''(t)=-4e^{2t}$

이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v(1)=-2e^2$, $a(1)=-4e^2$

(2) $v(t)=f'(t)=2t+\cos t$, $a(t)=f''(t)=2-\sin t$

이므로 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$$v\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2},\ a\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$$

답 (1) 속도: $-2e^2$, 가속도: $-4e^2$

(2) 속도: $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$, 가속도: $\frac{3}{2}$

02 (1) $\frac{dx}{dt}=3t^2-6t$, $\frac{dy}{dt}=4t^3+2$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(3t^2-6t,\ 4t^3+2)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는 $(-3,\ 6)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=6t-6$, $\frac{d^2y}{dt^2}=12t^2$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $(6t-6,\ 12t^2)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $(0,\ 12)$

(2) $\frac{dx}{dt}=e^{t-1}$, $\frac{dy}{dt}=-e^{1-t}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(e^{t-1},\ -e^{1-t})$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 속도는 $\left(e^2,\ -\frac{1}{e^2}\right)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^{t-1}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=e^{1-t}$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $(e^{t-1},\ e^{1-t})$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는 $\left(e^2,\ \frac{1}{e^2}\right)$

(3) $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(\cos t,\ -\sin t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{2}$에서의 점 P의 속도는 $(0,\ -1)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $(-\sin t,\ -\cos t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{2}$에서의 점 P의 가속도는 $(-1,\ 0)$

답 (1) 속도: $(-3,\ 6)$, 가속도: $(0,\ 12)$

(2) 속도: $\left(e^2,\ -\frac{1}{e^2}\right)$, 가속도: $\left(e^2,\ \frac{1}{e^2}\right)$

(3) 속도: $(0,\ -1)$, 가속도: $(-1,\ 0)$

03 $\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dy}{dt}=\frac{3}{2}\sqrt{t}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$\left(1,\ \frac{3}{2}\sqrt{t}\right)$$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는 $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$이므로 속력은

$$\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{3}{4\sqrt{t}}$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$$\left(0,\ \frac{3}{4\sqrt{t}}\right)$$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$이므로 가속도의 크기는

$$\sqrt{0^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$$

답 속력: $\frac{\sqrt{13}}{2}$, 가속도의 크기: $\frac{3}{4}$

04 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=2t+\frac{2}{\sqrt{t}}$$

$$a(t)=f''(t)=2-\frac{1}{t\sqrt{t}}$$

$f'(t)=2t+2t^{-\frac{1}{2}}$이므로

$f''(t)$

$=2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\right)$

$=2-\frac{1}{t\sqrt{t}}$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$$v(4)=9,\ a(4)=\frac{15}{8}$$

답 속도: 9, 가속도: $\frac{15}{8}$

05 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=2t+2\cos 2t$$

$$a(t)=f''(t)=2-4\sin 2t$$

$t=k$에서의 점 P의 가속도를 0이라 하면

$$2-4\sin 2k=0,\qquad \sin 2k=\frac{1}{2}$$

$k\ge 0$이므로

$$2k=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{17}{6}\pi,\ \cdots$$

$$\therefore k=\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi,\ \cdots$$

따라서 점 P의 가속도가 처음으로 0이 되는 시각은 $\frac{\pi}{12}$이다.

답 $\frac{\pi}{12}$

06 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=2at+\frac{b}{t}$$

$$a(t)=f''(t)=2a-\frac{b}{t^2}$$

$t=2$에서의 점 P의 속도가 -3이므로

$v(2)=-3$

$$4a+\frac{b}{2}=-3\qquad \therefore 8a+b=-6 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$t=2$에서의 점 P의 가속도가 $-\frac{5}{2}$이므로

$a(2)=-\frac{5}{2}$

$$2a-\frac{b}{4}=-\frac{5}{2}\qquad \therefore 8a-b=-10 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=2$

$$\therefore a^2+b^2=1+4=5$$

답 ④

07 $\frac{dx}{dt}=a+2e^{2(t-2)}$, $\frac{dy}{dt}=-be^{2-t}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$(a+2e^{2(t-2)},\ -be^{2-t})$$

$t=2$에서의 점 P의 속도가 $(4,\ 1)$이므로

$a+2=4,\ -b=1$

$\therefore\ a=2,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=3$ 답 ①

08 $\dfrac{dx}{dt}=2t,\ \dfrac{dy}{dt}=-2t+4$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(2t,\ -2t+4)$

따라서 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(2t)^2+(-2t+4)^2}=\sqrt{8(t-1)^2+8}$

이므로 $t=1$일 때 최솟값 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$를 갖는다. 답 $2\sqrt{2}$

09 $\dfrac{dx}{dt}=\cos t,\ \dfrac{dy}{dt}=a+\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(\cos t,\ a+\sin t)$

따라서 $t=\pi$에서의 점 P의 속도는 $(-1,\ a)$이고 이때의 속력이 $\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(-1)^2+a^2}=\sqrt{5},\qquad 1+a^2=5$

$a^2=4\qquad \therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$ 답 2

10 $\dfrac{dx}{dt}=10,\ \dfrac{dy}{dt}=-10t+10\sqrt{3}$이므로 시각 t에서의 공의 속도는

$(10,\ -10t+10\sqrt{3})$

한편 공이 지면에 떨어질 때 $y=0$이므로

$-5t^2+10\sqrt{3}t=0,\qquad -5t(t-2\sqrt{3})=0$

$\therefore\ t=2\sqrt{3}\ (\because\ t>0)$

따라서 $t=2\sqrt{3}$에서의 공의 속도는 $(10,\ -10\sqrt{3})$이므로 구하는 속력은

$\sqrt{10^2+(-10\sqrt{3})^2}=20\,(\text{m/s})$ 답 ⑤

11 $\dfrac{dx}{dt}=1+e^t,\ \dfrac{dy}{dt}=1-e^t$이므로

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=e^t,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-e^t$

따라서 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(e^t,\ -e^t)$

$t=1$에서의 점 P의 가속도는 $(e,\ -e)$이므로 구하는 가속도의 크기는

$\sqrt{e^2+(-e)^2}=\sqrt{2}e$ 답 ①

12 $\dfrac{dx}{dt}=t-a\cos t,\ \dfrac{dy}{dt}=\sin t$이므로

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=1+a\sin t,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\cos t$

따라서 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(1+a\sin t,\ \cos t)$

$t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 점 P의 가속도는 $(1+a,\ 0)$이고 이때의 가속도의 크기가 3이므로

$\sqrt{(1+a)^2}=3,\qquad 1+a=3$

$\therefore\ a=2$ 답 2

Q BOX

$a>0$이므로 $1+a>0$

$\therefore\ \sqrt{(1+a)^2}=|1+a|$

$=1+a$

13 $\dfrac{dx}{dt}=\sin t,\ \dfrac{dy}{dt}=2\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(\sin t,\ 2\cos t)$

점 P의 시각 t에서의 속력은

$\sqrt{\sin^2 t+(2\cos t)^2}=\sqrt{\sin^2 t+4\cos^2 t}$

$=\sqrt{(1-\cos^2 t)+4\cos^2 t}$

$=\sqrt{3\cos^2 t+1}$

$0\le\cos^2 t\le 1$이므로 $\cos^2 t=1$일 때 점 P의 속력은 최대이다.

$\cos^2 t=1$이면 $\sin^2 t=0$이므로 이것을 이용하여 가속도의 크기를 구할 수도 있다.

한편 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\cos t,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-2\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(\cos t,\ -2\sin t)$

점 P의 시각 t에서의 가속도의 크기는

$\sqrt{\cos^2 t+(-2\sin t)^2}=\sqrt{\cos^2 t+4\sin^2 t}$

$=\sqrt{\cos^2 t+4(1-\cos^2 t)}$

$=\sqrt{-3\cos^2 t+4}$

따라서 $\cos^2 t=1$일 때 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{-3+4}=1$ 답 ①

08 여러 가지 적분법

19 여러 가지 함수의 부정적분

61쪽

01 (1) $\int x^2\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1}+C$

$x^2\sqrt{x}=x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{5}{2}}$

$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C$

(2) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$

$=\int\left(\frac{1}{x}+x^{-2}-x^{-3}\right)dx$

$=\ln|x|+\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}-\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C$

$=\ln|x|-x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-2}+C=\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$

(3) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\int\left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\frac{1}{1+1}x^{1+1}+2x+\ln|x|+C$

$=\frac{1}{2}x^2+2x+\ln|x|+C$

(4) $\int\frac{(x-2)^2}{\sqrt{x}}dx$

$=\int\frac{x^2-4x+4}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int(x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}})\,dx$

$=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}-4\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}$

$+4\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C$

$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+8x^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{8}{3}x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$

답 (1) $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C$

(2) $\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$

(3) $\frac{1}{2}x^2+2x+\ln|x|+C$

(4) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{8}{3}x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$

02 (1) $\int(5e^x-2^{x+2})dx$

$=\int(5e^x-2^x\cdot2^2)dx=5\int e^xdx-4\int2^xdx$

$=5e^x-4\cdot\frac{2^x}{\ln2}+C=5e^x-\frac{2^{x+2}}{\ln2}+C$

(2) $\int3^{3x}dx=\int27^xdx=\frac{27^x}{\ln27}+C$

(3) $\int(\sqrt{e})^{2x-4}dx=\int\{(\sqrt{e})^2\}^{x-2}dx=\int e^{x-2}dx$

$=\int e^x\cdot e^{-2}dx=\frac{1}{e^2}\int e^xdx$

$=\frac{1}{e^2}\cdot e^x+C=e^{x-2}+C$

(4) $\int(2^x-2^{-x})^2dx=\int\left\{4^x-2+\left(\frac{1}{4}\right)^x\right\}dx$

$=\frac{4^x}{\ln4}-2x+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{\ln\frac{1}{4}}+C$

$\ln\frac{1}{4}=\ln4^{-1}=-\ln4$

$=\frac{4^x}{\ln4}-2x-\frac{4^{-x}}{\ln4}+C$

$=\frac{4^x-4^{-x}}{\ln4}-2x+C$

답 (1) $5e^x-\frac{2^{x+2}}{\ln2}+C$ (2) $\frac{27^x}{\ln27}+C$

(3) $e^{x-2}+C$ (4) $\frac{4^x-4^{-x}}{\ln4}-2x+C$

03 (1) $\int(\cos x-\csc^2x)dx=\sin x+\cot x+C$

(2) $\int(\sec x+\cot x)\tan x\,dx$

$(\sec x+\cot x)\tan x$
$=\sec x\tan x$
$+\cot x\tan x$
$=\sec x\tan x+1$

$=\int(\sec x\tan x+1)dx=\sec x+x+C$

(3) $\int\frac{\sin x}{\cos^2x}dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}dx$

$=\int\tan x\sec x\,dx=\sec x+C$

(4) $\int\frac{\cos^2x}{1-\sin x}dx=\int\frac{1-\sin^2x}{1-\sin x}dx$

$\sin^2x+\cos^2x=1$

$=\int(1+\sin x)dx$

$=x-\cos x+C$

답 (1) $\sin x+\cot x+C$ (2) $\sec x+x+C$

(3) $\sec x+C$ (4) $x-\cos x+C$

04 $f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int\frac{\sqrt{x}-1}{x^2}dx=\int(x^{-\frac{3}{2}}-x^{-2})dx$

$=-2x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}+C=-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}+C$

$f(1)=-2$이므로 $-2+1+C=-2$

$\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}-1$이므로

$f(4)=-1+\frac{1}{4}-1=-\frac{7}{4}$ 답 ②

05 $f(x)=\int\frac{(x+1)(x-1)}{x^3}dx=\int\frac{x^2-1}{x^3}dx$

$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x}-x^{-3}\right)dx$

$=\ln|x|+\frac{1}{2}x^{-2}+C$

$=\ln|x|+\frac{1}{2x^2}+C$

$f(1)=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln|x|+\frac{1}{2x^2}$이므로

$f(e)=1+\frac{1}{2e^2}$ 답 $1+\frac{1}{2e^2}$

06 $f'(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=1+\frac{1}{\sqrt{x}}=1+x^{-\frac{1}{2}}$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(1+x^{-\frac{1}{2}})dx$

$=x+2\sqrt{x}+C$

$f(1)=1$이므로 $1+2+C=1$ $\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=x+2\sqrt{x}-2$이므로

$f(4)=4+2\cdot2-2=6$ 답 6

07 $F(x)=xf(x)-x^2+\ln x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x+\frac{1}{x}$

$f'(x)=2-\frac{1}{x^2}$이므로

$f(x)=\int\left(2-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int(2-x^{-2})dx$

$=2x+\frac{1}{x}+C$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=6$이므로 $1+2+C=6$ $\therefore C=3$

따라서 $f(x)=2x+\frac{1}{x}+3$이므로

$f(1)=2+1+3=6$ 답 6

쌤 한마디

$F(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분이다.
$\Longleftrightarrow F'(x)=f(x)$
$\Longleftrightarrow$ 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$이다.
$\Longleftrightarrow \int f(x)dx=F(x)+C$ (단, C는 적분상수)

08 $\int(1+e^x)^2dx-\int(1-e^x)^2dx$

$=\int\{(1+e^x)^2-(1-e^x)^2\}dx$

$=\int\{(1+2e^x+e^{2x})-(1-2e^x+e^{2x})\}dx$

$=\int 4e^x dx=4e^x+C$ 답 $4e^x+C$

09 $f(x)=\int f'(x)dx=\int 2^x\ln 2\,dx=2^x+C$

$f(0)=1$이므로 $1+C=1$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=2^x$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$ 답 ③

10 $\int\frac{27^x+1}{3^x+1}dx=\int\frac{3^{3x}+1}{3^x+1}dx$

$=\int\frac{(3^x+1)(9^x-3^x+1)}{3^x+1}dx$

$=\int(9^x-3^x+1)dx$

$=\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{3^x}{\ln 3}+x+C$

따라서 $p=\ln 9$, $q=-\ln 3$, $r=1$이므로

$p+qr=\ln 9-\ln 3=2\ln 3-\ln 3=\ln 3$ 답 ④

Q BOX

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

$y=2x-1$에서 $x=1$일 때 $y=1$이므로
$f(1)=1$

$f(x)=\frac{e}{2}x^2+x+C_1$에 $x=2$를 대입한 값이다.

$|r|<1$일 때,
$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$

$2\tan x\cot x$
$=2\tan x\cdot\frac{1}{\tan x}=2$

$x\rightarrow a$일 때
① 극한값이 존재하고 (분모) → 0이면 (분자) → 0이다.
② 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) → 0이면 (분모) → 0이다.

11 $x>0$일 때,

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(ex+1)dx$

$=\frac{e}{2}x^2+x+C_1$

$x<0$일 때,

$f(x)=\int f'(x)dx=\int e^{x+1}dx=e^{x+1}+C_2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉 $\lim_{x\rightarrow0+}f(x)=\lim_{x\rightarrow0-}f(x)=f(0)$이므로

$\lim_{x\rightarrow0+}\left(\frac{e}{2}x^2+x+C_1\right)=\lim_{x\rightarrow0-}(e^{x+1}+C_2)$

$\therefore C_1=e+C_2$ ······ ㉠

한편 $f(2)=2e+2$이므로

$2e+2+C_1=2e+2$ $\therefore C_1=0$

이것을 ㉠에 대입하면

$e+C_2=0$ $\therefore C_2=-e$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{e}{2}x^2+x & (x\geq0)\\ e^{x+1}-e & (x\leq0)\end{cases}$이므로

$f(-1)=1-e$ 답 $1-e$

쌤 한마디

구간에 따라 다르게 정의된 함수의 부정적분을 구할 때에는 각 구간에서의 식을 각각 적분한다. 이때 적분상수를 C_1, C_2와 같이 서로 다른 문자를 사용하여 나타내어야 함에 주의한다.

12 $\int\frac{1}{1-\cos x}dx=\int\frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}dx$

$=\int\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}dx$

$=\int\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}dx$

$=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx$

$=\int(\csc^2 x+\csc x\cot x)dx$

$=-\cot x-\csc x+C$

답 $-\cot x-\csc x+C$

13 $\int(\tan x+\cot x)^2dx$

$=\int(\tan^2 x+2+\cot^2 x)dx$

$=\int\{(\sec^2 x-1)+2+(\csc^2 x-1)\}dx$

$=\int(\sec^2 x+\csc^2 x)dx$

$=\tan x-\cot x+C$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$ab=-1$ 답 ②

14 조건 (나)에서 $x\rightarrow\frac{\pi}{6}$일 때 극한값이 존재하고 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이다.

즉 $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\{f(x)-\sqrt{3}\}=0$이므로 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)-\sqrt{3}}{6x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

따라서 $\frac{1}{6}f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$이므로 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=12$

조건 (가)에서

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\csc^2\frac{\pi}{6}=4a$$

$\csc^2\frac{\pi}{6}=2^2=4$

즉 $4a=12$이므로 $a=3$

$f'(x)=3\csc^2 x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 3\csc^2 x\,dx=-3\cot x+C$$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$이므로 $-3\cot\frac{\pi}{6}+C=\sqrt{3}$

$-3\sqrt{3}+C=\sqrt{3}$ $\quad\therefore C=4\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=-3\cot x+4\sqrt{3}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-3\cot\frac{\pi}{3}+4\sqrt{3}=-\sqrt{3}+4\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

답 $a=3$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$

20 치환적분법

63쪽

01 (1) $2x-1=t$로 놓으면 $x=\frac{t+1}{2}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이므로

$$\int\frac{1}{(2x-1)^3}dx=\int\frac{1}{t^3}\cdot\frac{1}{2}dt=\int\frac{1}{2}t^{-3}dt=-\frac{1}{4}t^{-2}+C=-\frac{1}{4}(2x-1)^{-2}+C=-\frac{1}{4(2x-1)^2}+C$$

(2) $5-x=t$로 놓으면 $x=-t+5$, $\frac{dx}{dt}=-1$이므로

$$\int\sqrt{5-x}\,dx=\int\sqrt{t}\cdot(-1)dt=-\int t^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C=-\frac{2}{3}(5-x)\sqrt{5-x}+C$$

(3) $3x+1=t$로 놓으면 $x=\frac{t-1}{3}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$이므로

$$\int\sin(3x+1)dx=\int\sin t\cdot\frac{1}{3}dt=-\frac{1}{3}\cos t+C=-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C$$

답 (1) $-\frac{1}{4(2x-1)^2}+C$
(2) $-\frac{2}{3}(5-x)\sqrt{5-x}+C$
(3) $-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C$

02 (1) $3x^2-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=6x$이므로

$\frac{dt}{dx}=6x$에서 $6x\,dx=dt$

$$\int 6x(3x^2-2)^3dx=\int t^3dt=\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{4}(3x^2-2)^4+C$$

(2) $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int 2xe^{x^2}dx=\int e^t dt=e^t+C=e^{x^2}+C$$

(3) $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int\sin^4 x\cos x\,dx=\int t^4dt=\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

답 (1) $\frac{1}{4}(3x^2-2)^4+C$
(2) $e^{x^2}+C$
(3) $\frac{1}{5}\sin^5 x+C$

03 (1) $(x^4+1)'=4x^3$이므로

$$\int\frac{4x^3}{x^4+1}dx=\int\frac{(x^4+1)'}{x^4+1}dx=\ln(x^4+1)+C\ (\because x^4+1>0)$$

(2) $(e^x+1)'=e^x$이므로

$$\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx=\ln(e^x+1)+C\ (\because e^x+1>0)$$

(3) $(x+\cos x)'=1-\sin x$이므로

$$\int\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx=\int\frac{(x+\cos x)'}{x+\cos x}dx=\ln|x+\cos x|+C$$

답 (1) $\ln(x^4+1)+C$
(2) $\ln(e^x+1)+C$
(3) $\ln|x+\cos x|+C$

04 (1) $\frac{4x+9}{x+2}=4+\frac{1}{x+2}$이므로

$\frac{4x+9}{x+2}=\frac{4(x+2)+1}{x+2}=4+\frac{1}{x+2}$

$$\int\frac{4x+9}{x+2}dx=\int\left(4+\frac{1}{x+2}\right)dx=4x+\ln|x+2|+C$$

(2) $\frac{x^2}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}$이므로

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x-1\overline{)\,x^2} \\ \underline{x^2-x} \\ x \\ \underline{x-1} \\ 1 \end{array}$$

$$\int\frac{x^2}{x-1}dx=\int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+C$$

(3) $\frac{1}{x^2+3x}=\frac{1}{x(x+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)$이므로

$$\int\frac{1}{x^2+3x}dx=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}(\ln|x|-\ln|x+3|)+C$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$$

(4) $\frac{x-6}{x^2-4}=\frac{x-6}{(x+2)(x-2)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-2}$라 하면

$$\frac{x-6}{x^2-4}=\frac{(a+b)x-2a+2b}{x^2-4}$$

이므로 $a+b=1,\ -2a+2b=-6$

$\therefore a+b=1,\ a-b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$

$$\therefore \int\frac{x-6}{x^2-4}dx=\int\left(\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-2}\right)dx$$
$$=2\ln|x+2|-\ln|x-2|+C$$
$$=\ln\left|\frac{(x+2)^2}{x-2}\right|+C$$

답 (1) $4x+\ln|x+2|+C$

(2) $\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+C$

(3) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$

(4) $\ln\left|\frac{(x+2)^2}{x-2}\right|+C$

05 $4x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=4$이므로

$$f(x)=\int(4x+1)^5dx=\int t^5\cdot\frac{1}{4}dt$$
$$=\frac{1}{24}t^6+C=\frac{1}{24}(4x+1)^6+C$$

$f(0)=0$이므로 $\frac{1}{24}+C=0$ $\therefore C=-\frac{1}{24}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{24}(4x+1)^6-\frac{1}{24}$

답 $f(x)=\frac{1}{24}(4x+1)^6-\frac{1}{24}$

06 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-5)^6dx$

$2x-5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이므로

$$f(x)=\int(2x-5)^6dx=\int t^6\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{14}t^7+C=\frac{1}{14}(2x-5)^7+C$$

$f(3)=0$이므로 $\frac{1}{14}+C=0$ $\therefore C=-\frac{1}{14}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{14}(2x-5)^7-\frac{1}{14}$

따라서 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=-\frac{1}{14}-\frac{1}{14}=-\frac{1}{7}$ 답 ⑤

07 $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x(x^2+1)^9dx$

$x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$F(x)=\int 2x(x^2+1)^9dx=\int t^9dt$$
$$=\frac{1}{10}t^{10}+C=\frac{1}{10}(x^2+1)^{10}+C$$

$F(0)=\frac{1}{10}$이므로 $\frac{1}{10}+C=\frac{1}{10}$ $\therefore C=0$

$\therefore F(x)=\frac{1}{10}(x^2+1)^{10}$

$F(a)=10^9$이므로 $\frac{1}{10}(a^2+1)^{10}=10^9$

$(a^2+1)^{10}=10^{10},\quad a^2+1=10$

$a^2=9\quad \therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 3

08 $x^2-3x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-3$이므로

$$\int(2x-3)\sqrt[3]{x^2-3x}\,dx$$
$$=\int t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}+C$$
$$=\frac{3}{4}(x^2-3x)\sqrt[3]{x^2-3x}+C$$

답 ③

09 $x^2+6=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int x\sqrt{x^2+6}\,dx=\int\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2+6)\sqrt{x^2+6}+C$$

$\therefore f(\sqrt{30})-f(\sqrt{3})=(72+C)-(9+C)$

$=63$ 답 63

10 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

$4-x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2x$이므로

$$f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-t^{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{t}+C$$
$$=-\sqrt{4-x^2}+C$$

$f(0)=-2$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-\sqrt{4-x^2}$이므로

$f(1)=-\sqrt{3}$ 답 ②

11 $x^2-8x+18=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-8$이므로

$$f(x)=\int\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+18}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=t^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t}+C$$
$$=\sqrt{x^2-8x+18}+C=\sqrt{(x-4)^2+2}+C$$

$1\le x\le 8$에서 함수 $f(x)$는

$x=8$일 때 최댓값 $f(8)=3\sqrt{2}+C$,

$x=4$일 때 최솟값 $f(4)=\sqrt{2}+C$

를 가지므로

$M=3\sqrt{2}+C,\ m=\sqrt{2}+C$

$\therefore M-m=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

Q BOX

$f(\sqrt{30})-f(\sqrt{3})$

$=\left(\frac{1}{3}\cdot 36\cdot 6+C\right)$

$-\left(\frac{1}{3}\cdot 9\cdot 3+C\right)$

$=(72+C)-(9+C)$

나머지정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=P(a)$

쌤 한마디

제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소
$\alpha \le x \le \beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은
① $\alpha \le p \le \beta$이면 ◎ $f(\alpha)$, $f(p)$, $f(\beta)$의 값을 비교한다.
② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$이면 ◎ $f(\alpha)$, $f(\beta)$의 값을 비교한다.

12 $x^2+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int x\cdot 3^{x^2+5}dx=\int 3^t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{3^t}{2\ln 3}+C$$
$$=\frac{3^{x^2+5}}{2\ln 3}+C$$

$\therefore a=2$ 답 2

13 ㄱ. $2x-7=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이므로

$$\int e^{2x-7}dx=\int e^t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}e^t+C$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x-7}+C$$

ㄴ. $e^x+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$\int e^x\sqrt{e^x+5}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}(e^x+5)\sqrt{e^x+5}+C$$

ㄷ. $e^x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$$
$$=2\sqrt{e^x+1}+C$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

14 $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int xe^{x^2+1}dx=\int e^t\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+C$$

$f(0)=\frac{1}{2}e$이므로 $\frac{1}{2}e+C=\frac{1}{2}e$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}e^{x^2+1}$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}e^2$ 답 $\frac{1}{2}e^2$

15 $3+\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$\int\frac{1}{x\sqrt{3+\ln x}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$$
$$=2\sqrt{3+\ln x}+C$$

$\therefore a=2$ 답 ⑤

Q BOX

$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$ 이면
$y'=\frac{1}{x\ln a}$

$\cos\frac{\pi}{2}=0$

$\sin\pi=\cos\frac{\pi}{2}=0$

16 $F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{\log_2 x}{x}dx$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x\ln 2}$이므로

$$F(x)=\int\frac{\log_2 x}{x}dx=\int t\cdot\ln 2\,dt$$
$$=\ln 2\cdot\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\ln 2(\log_2 x)^2+C$$

$F(1)=0$이므로 $C=0$

따라서 $F(x)=\frac{1}{2}\ln 2(\log_2 x)^2$이므로

$F(4)=\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)\cdot 2^2=2\ln 2$ 답 $2\ln 2$

17 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(-2\sin\frac{x}{2}\right)dx$

$$=4\cos\frac{x}{2}+C$$

$f(\pi)=-2\sqrt{3}$이므로

$4\cos\frac{\pi}{2}+C=-2\sqrt{3}$ $\therefore C=-2\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=4\cos\frac{x}{2}-2\sqrt{3}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\frac{\pi}{6}-2\sqrt{3}=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3}=0$$

답 ③

18 $f'(x)=\cos 2x-\sin x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(\cos 2x-\sin x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x+C$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2$이므로 $\frac{1}{2}\sin\pi+\cos\frac{\pi}{2}+C=-2$

$\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x-2$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4}-2$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-2=\frac{\sqrt{2}-3}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}-3}{2}$

19 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$f(x)=\int(\cos^2 x+\cos x+1)\sin x\,dx$$
$$=\int(t^2+t+1)\cdot(-1)dt$$
$$=-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-t+C$$
$$=-\frac{1}{3}\cos^3 x-\frac{1}{2}\cos^2 x-\cos x+C$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}\cos^3 x-\frac{1}{2}\cos^2 x-\cos x$이므로

$f(0)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1=-\frac{11}{6}$ 답 ②

20 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(\sin x-1)^2\cos x\,dx$

W 08 여러 가지 적분법

$\sin x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$f(x)=\int(\sin x-1)^2\cos x\,dx=\int t^2dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}(\sin x-1)^3+C$$
$$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=C-\left(-\frac{8}{3}+C\right)=\frac{8}{3}$$

답 $\dfrac{8}{3}$

21 $x^3+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=3x^2$이므로

$$f(x)=\int 6x^2\cos(x^3+1)dx=\int\cos t\cdot 2\,dt$$
$$=2\sin t+C=2\sin(x^3+1)+C$$

$f(-1)=3$이므로 $C=3$

$\therefore f(x)=2\sin(x^3+1)+3$

이때 $-1\le\sin(x^3+1)\le1$이므로

$-2\le2\sin(x^3+1)\le2$

$1\le2\sin(x^3+1)+3\le5$

따라서 $M=5$, $m=1$이므로 $Mm=5$

답 ③

22 $f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=\int\frac{1}{(x+e)\ln(x+e)}dx$

$\{\ln(x+e)\}'=\dfrac{1}{x+e}$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{(x+e)\ln(x+e)}dx$$
$$=\int\frac{\{\ln(x+e)\}'}{\ln(x+e)}dx$$
$$=\ln|\ln(x+e)|+C$$

$f(0)=0$이므로 $\ln|\ln e|+C=0$

$\therefore C=0$

$\therefore f(x)=\ln|\ln(x+e)|$

답 ④

23 $F(x)=\displaystyle\int f(x)dx=\int\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+2}dx$

$(e^{3x}+2)'=3e^{3x}$이므로

$$F(x)=\int\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+2}dx=\int\frac{(e^{3x}+2)'}{e^{3x}+2}dx$$
$$=\ln|e^{3x}+2|+C$$

$F(0)=\ln3$이므로 $\ln3+C=\ln3$ $\therefore C=0$

따라서 $F(x)=\ln|e^{3x}+2|$이므로

$$F(\ln2)=\ln|e^{3\ln2}+2|=\ln|e^{\ln8}+2|$$
$$=\ln|8+2|=\ln10$$

답 ⑤

24 $(x-2\cos x)'=1+2\sin x$이므로

$$f(x)=\int\frac{1+2\sin x}{x-2\cos x}dx=\int\frac{(x-2\cos x)'}{x-2\cos x}dx$$
$$=\ln|x-2\cos x|+C$$
$$\therefore f(0)-f(\pi)=\ln2+C-\{\ln(\pi+2)+C\}$$
$$=\ln\frac{2}{\pi+2}$$

답 $\ln\dfrac{2}{\pi+2}$

Q BOX

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2}-1\right)^3+C=C$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{3}{2}\pi-1\right)^3+C=-\frac{8}{3}+C$$

$$\begin{array}{r} 2x-1 \\ x+3\,\overline{)\,2x^2+5x-2} \\ \underline{2x^2+6x} \\ -x-2 \\ \underline{-x-3} \\ 1 \end{array}$$

$2\sin0+C=3$

미분가능한 함수 $f(x)$ $(f(x)\neq0)$에 대하여 $y=\ln|f(x)|$이면 $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$\begin{array}{r} x^2+2x \\ x-2\,\overline{)\,x^3-4x-1} \\ \underline{x^3-2x^2} \\ 2x^2-4x-1 \\ \underline{2x^2-4x} \\ -1 \end{array}$$

$\ln|\ln e|=\ln1=0$

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\ (\text{단, } A\neq B)$$

25 $f'(x)=2f(x)$에서 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2$이므로

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int2\,dx$$

$\ln f(x)=2x+C$ ($\because f(x)>0$)

$\therefore f(x)=e^{2x+C}$

$f'(0)=2f(0)$에서 $f'(0)=2$이므로

$2=2f(0)$ $\therefore f(0)=1$

따라서 $e^C=1$이므로 $C=0$

즉 $f(x)=e^{2x}$이므로 $f(1)=e^2$

답 ④

26 $\dfrac{2x^2+5x-2}{x+3}=2x-1+\dfrac{1}{x+3}$이므로

$$f(x)=\int\frac{2x^2+5x-2}{x+3}dx$$
$$=\int\left(2x-1+\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=x^2-x+\ln|x+3|+C$$

$f(-2)=0$이므로 $4+2+C=0$ $\therefore C=-6$

따라서 $f(x)=x^2-x+\ln|x+3|-6$이므로

$f(3)=9-3+\ln6-6=\ln6$

답 $\ln6$

27 $f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=\int\frac{x^3-4x-1}{x-2}dx$

$\dfrac{x^3-4x-1}{x-2}=x^2+2x-\dfrac{1}{x-2}$이므로

$$f(x)=\int\frac{x^3-4x-1}{x-2}dx$$
$$=\int\left(x^2+2x-\frac{1}{x-2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+x^2-\ln|x-2|+C$$

$f(0)=-\ln2$이므로 $-\ln2+C=-\ln2$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-\ln|x-2|$이므로

$f(1)=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$

답 $\dfrac{4}{3}$

28 $f(x)=\displaystyle\int\frac{x}{x^2+2x}dx-\int\frac{x-2}{x^2+2x}dx$

$$=\int\left(\frac{x}{x^2+2x}-\frac{x-2}{x^2+2x}\right)dx$$
$$=\int\frac{2}{x^2+2x}dx$$

이때 $\dfrac{2}{x^2+2x}=\dfrac{2}{x(x+2)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}$이므로

$$f(x)=\int\frac{2}{x^2+2x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\ln|x|-\ln|x+2|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$$

$f(-1)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=\ln\left|\dfrac{x}{x+2}\right|+3$이므로

$f(1)=\ln\dfrac{1}{3}+3=3-\ln3$

답 $3-\ln3$

29 $\dfrac{3x-1}{x^2+x-6}=\dfrac{3x-1}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{p}{x+3}+\dfrac{q}{x-2}$
로 놓으면

$$\frac{3x-1}{(x+3)(x-2)}=\frac{(p+q)x-(2p-3q)}{(x+3)(x-2)}$$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$p+q=3,\ 2p-3q=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $p=2,\ q=1$

즉 $\dfrac{3x-1}{x^2+x-6}=\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{1}{x-2}$이므로

$$\int\frac{3x-1}{x^2+x-6}dx=\int\left(\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x-2}\right)dx$$
$$=2\ln|x+3|+\ln|x-2|+C$$

따라서 $a=2,\ b=1$이므로 $a-b=1$ 답 ④

30 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\dfrac{2}{x^2-1}dx$

이때 $\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$이므로

$$f(x)=\int\frac{2}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\ln|x-1|-\ln|x+1|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$이므로

$$\sum_{k=2}^{10}f(k)=\sum_{k=2}^{10}\ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right|$$
$$=\ln\frac{1}{3}+\ln\frac{2}{4}+\ln\frac{3}{5}+\cdots+\ln\frac{8}{10}+\ln\frac{9}{11}$$
$$=\ln\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{9}{11}\right)$$
$$=\ln\frac{1}{55}=-\ln 55$$

답 ①

21 부분적분법

68쪽

01 (1) $f(x)=x-1,\ g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=e^x$

$$\therefore \int(x-1)e^x dx=(x-1)e^x-\int 1\cdot e^x dx$$
$$=(x-1)e^x-e^x+C$$
$$=(x-2)e^x+C$$

(2) $f(x)=\ln x,\ g'(x)=x^2$으로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=\dfrac{1}{3}x^3$

$$\therefore \int x^2\ln x\,dx=\ln x\cdot\frac{1}{3}x^3-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{3}x^3dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^2dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$$

(3) $f(x)=x,\ g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=\sin x$

$$\therefore \int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C$$

답 (1) $(x-2)e^x+C$

(2) $\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+C$

(3) $x\sin x+\cos x+C$

02 $u(x)=3x+1,\ v'(x)=e^{x-2}$으로 놓으면

$u'(x)=3,\ v(x)=e^{x-2}$

$$\therefore f(x)=\int(3x+1)e^{x-2}dx$$
$$=(3x+1)e^{x-2}-\int 3e^{x-2}dx$$
$$=(3x+1)e^{x-2}-3e^{x-2}+C$$
$$=(3x-2)e^{x-2}+C$$

$f(2)=3$이므로 $4+C=3$ $\therefore C=-1$

$\therefore f(x)=(3x-2)e^{x-2}-1$ 답 ②

03 $u(x)=\ln(x+1),\ v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\dfrac{1}{x+1},\ v(x)=x$

$$\therefore \int\ln(x+1)dx$$
$$=\ln(x+1)\cdot x-\int\frac{1}{x+1}\cdot x\,dx$$
$$=x\ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx$$
$$=x\ln(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=x\ln(x+1)-\{x-\ln(x+1)\}+C$$
$$=(x+1)\ln(x+1)-x+C$$

따라서 $f(x)=x+1$이므로

$f(100)=101$ 답 ④

Q BOX

$\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+1-1}{x+1}$
$=1-\dfrac{1}{x+1}$

$\ln(x+1)$이 정의되므로
$x>-1$
$\therefore \ln|x+1|$
$=\ln(x+1)$

04 $f(x)=\int f'(x)dx=\int x\sec^2 x\,dx$

$u(x)=x,\ v'(x)=\sec^2 x$로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=\tan x$

$$\therefore f(x)=\int x\sec^2 x\,dx$$
$$=x\tan x-\int 1\cdot\tan x\,dx$$
$$=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$$
$$=x\tan x+\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=x\tan x+\ln|\cos x|+C$$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x\tan x+\ln|\cos x|$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

$\therefore a=4,\ b=-\frac{1}{2}$

$\therefore ab=-2$ 답 -2

05 $h(x)=x^2+x-4,\ k'(x)=e^x$으로 놓으면

$h'(x)=2x+1,\ k(x)=e^x$

$\therefore \int(x^2+x-4)e^x dx$

$=(x^2+x-4)e^x-\int(2x+1)e^x dx$ ...... ㉠

$\int(2x+1)e^x dx$에서 $u(x)=2x+1,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2,\ v(x)=e^x$

$\therefore \int(2x+1)e^x dx=(2x+1)e^x-\int 2e^x dx$

$=(2x+1)e^x-2e^x+C_1$

$=(2x-1)e^x+C_1$ ... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int(x^2+x-4)e^x dx$

$=(x^2+x-4)e^x-\{(2x-1)e^x+C_1\}$

$=(x^2-x-3)e^x+C$

따라서 $f(x)=x^2-x-3$이므로

$f(3)=9-3-3=3$ 답 3

부분적분법을 한 번 이용하여 부정적분을 구할 수 없는 경우에는 부분적분법으로 나온 결과에 다시 부분적분법을 적용한다.

06 $h(x)=(\ln x)^2,\ k'(x)=x$로 놓으면

$h'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x},\ k(x)=\frac{1}{2}x^2$

$\therefore f(x)=\int x(\ln x)^2 dx$

$=(\ln x)^2\cdot\frac{1}{2}x^2-\int\frac{2\ln x}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2 dx$

$=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\int x\ln x\, dx$ ... ㉠

$\int x\ln x\, dx$에서 $u(x)=\ln x,\ v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=\frac{1}{2}x^2$

$\therefore \int x\ln x\, dx=\ln x\cdot\frac{1}{2}x^2-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2 dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x\, dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_1$

...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_1\right)$

$=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$

$f(1)=\frac{1}{4}$이므로 $\frac{1}{4}+C=\frac{1}{4}$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2$이므로

$f(e)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}e^2=\frac{1}{4}e^2$

답 ④

09 정적분

22 여러 가지 함수의 정적분

W 69쪽

01 (1) $\int_0^8 \sqrt[3]{x}\, dx=\int_0^8 x^{\frac{1}{3}} dx=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^8=12$

(2) $\int_1^3 \frac{2}{x^2}dx=\int_1^3 2x^{-2}dx=\left[-2x^{-1}\right]_1^3$

$=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$

(3) $\int_3^4 2^x dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_3^4=\frac{16}{\ln 2}-\frac{8}{\ln 2}=\frac{8}{\ln 2}$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

답 (1) 12 (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{8}{\ln 2}$ (4) 1

02 (1) $\int_0^1 (3^x+1)^2 dx+\int_0^1 (3^x-1)^2 dx$

$=\int_0^1 (3^{2x}+2\cdot3^x+1)dx+\int_0^1 (3^{2x}-2\cdot3^x+1)dx$

$=\int_0^1 (2\cdot9^x+2)dx=\left[2\cdot\frac{9^x}{\ln 9}+2x\right]_0^1$

$=\frac{18}{\ln 9}+2-\frac{2}{\ln 9}=\frac{8}{\ln 3}+2$

(2) $\int_1^3(\sqrt{x}-2)dx+\int_3^4(\sqrt{x}-2)dx$

$=\int_1^4(\sqrt{x}-2)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x\right]_1^4$

$=-\frac{8}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}$

(3) $\cos x$는 우함수이므로

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$

$=2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=2$

(4) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$이라 하면

$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-f(x)$

따라서 $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$은 기함수이므로

$\int_{-1}^1 \frac{e^x-e^{-x}}{2}dx=0$

답 (1) $\frac{8}{\ln 3}+2$ (2) $-\frac{4}{3}$ (3) 2 (4) 0

03 $\int_1^5 \frac{x-2}{x+3}dx=\int_1^5\left(1-\frac{5}{x+3}\right)dx$

$=\left[x-5\ln|x+3|\right]_1^5$

$=(5-5\ln 8)-(1-5\ln 4)$

$=5-15\ln 2-1+10\ln 2$

$=4-5\ln 2$ 답 ④

$\frac{x-2}{x+3}=\frac{x+3-5}{x+3}$

$=1-\frac{5}{x+3}$

$\ln 8=\ln 2^3=3\ln 2$

$\ln 4=\ln 2^2=2\ln 2$

04 $\int_2^6 \frac{x^2}{x-1}dx+\int_6^2 \frac{x+1}{x-1}dx$

$=\int_2^6 \frac{x^2}{x-1}dx-\int_2^6 \frac{x+1}{x-1}dx$

$=\int_2^6 \left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x+1}{x-1}\right)dx$

$=\int_2^6 \frac{x^2-x-1}{x-1}dx$

$=\int_2^6 \left(x-\frac{1}{x-1}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln|x-1|\right]_2^6$

$=(18-\ln 5)-2$

$=16-\ln 5$

따라서 $a=16$, $b=5$이므로 $a-b=11$ 답 11

05 $\int_0^{10} f(x)dx-\int_{20}^{10} f(y)dy-\int_1^{20} f(z)dz$

$=\int_0^{10} f(x)dx+\int_{10}^{20} f(x)dx+\int_{20}^{1} f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \sqrt[5]{x^3}dx$

$=\int_0^1 x^{\frac{3}{5}}dx=\left[\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}\right]_0^1=\frac{5}{8}$ 답 ②

06 $\int_0^{\ln 2} \frac{(e^x-1)^2}{e^x}dx$

$=\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}-2e^x+1}{e^x}dx$

$=\int_0^{\ln 2} (e^x-2+e^{-x})dx$

$=\left[e^x-2x-e^{-x}\right]_0^{\ln 2}=2-2\ln 2-\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{2}-2\ln 2$ 답 ②

07 $\int_0^2 \sqrt{1+2^{x+1}+4^x}dx=\int_0^2 (1+2^x)dx$

$=\left[x+\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^2$

$=\left(2+\frac{4}{\ln 2}\right)-\frac{1}{\ln 2}$

$=2+\frac{3}{\ln 2}$ 답 $2+\frac{3}{\ln 2}$

08 $\int_{-1}^9 f(x)dx=\int_{-1}^0 (e^x-1)dx+\int_0^9 \sqrt{x}dx$

$=\left[e^x-x\right]_{-1}^0+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9$

$=18-\frac{1}{e}$ 답 ⑤

쌤 한마디

구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분은 적분 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.
08번에 주어진 함수는 $x=0$을 경계로 함수식이 다르므로 이 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.

Q BOX

$\frac{x^2-x-1}{x-1}$
$=\frac{x(x-1)-1}{x-1}$
$=x-\frac{1}{x-1}$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$
$=2\cos^2 x-1$
$=1-2\sin^2 x$

정적분에서 변수를 x 대신 다른 문자를 사용해도 그 값은 변하지 않는다.
즉
$\int_a^b f(x)dx$
$=\int_a^b f(t)dt$
$=\int_a^b f(u)du$

$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$
$=2\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$
$=2\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)$
$=2\sin x$

$e^{\ln 2}=2^{\ln e}=2$

$1+2^{x+1}+4^x$
$=1+2\cdot 2^x+(2^x)^2$
$=(1+2^x)^2$

09 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

따라서 $a=2$, $b=-1$이므로

$a+b=1$ 답 ③

10 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2(\cos x+1)}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(2\cos^2 x-1)}{2(\cos x+1)}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{-\frac{2(\cos x+1)(\cos x-1)}{2(\cos x+1)}\right\}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x+1)dx=\left[-\sin x+x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{2}-1$ 답 ②

11 $\int_0^a\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx+\int_a^0\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$

$=\int_0^a\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx-\int_0^a\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$

$=\int_0^a\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$-\int_0^a\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$=\int_0^a 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$

$=\int_0^a 2\sin x\,dx=\left[-2\cos x\right]_0^a$

$=-2\cos a-(-2)$

$=-2\cos a+2$

따라서 $-2\cos a+2=2-\sqrt{2}$이므로

$\cos a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a=\frac{\pi}{4}\left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$ 답 $\frac{\pi}{4}$

12 $3^x-1=0$에서 $x=0$

$|3^x-1|=\begin{cases}3^x-1 & (x\ge 0)\\ -3^x+1 & (x\le 0)\end{cases}$이므로

$\int_{-1}^1 |3^x-1|dx$

$=\int_{-1}^0(-3^x+1)dx+\int_0^1(3^x-1)dx$

$=\left[-\frac{3^x}{\ln 3}+x\right]_{-1}^0+\left[\frac{3^x}{\ln 3}-x\right]_0^1$

$=-\frac{1}{\ln 3}-\left(-\frac{1}{3\ln 3}-1\right)+\left(\frac{3}{\ln 3}-1\right)-\frac{1}{\ln 3}$

$=\frac{4}{3\ln 3}$

$\therefore a=\frac{4}{3}$ 답 ③

13 $\left|\dfrac{x-3}{x-1}\right|=\left|1-\dfrac{2}{x-1}\right|$

$$=\begin{cases}-1+\dfrac{2}{x-1} & (2\le x\le 3)\\ 1-\dfrac{2}{x-1} & (3\le x\le 5)\end{cases}$$

이므로

$$\int_2^5\left|\frac{x-3}{x-1}\right|dx$$

$$=\int_2^3\left(-1+\frac{2}{x-1}\right)dx+\int_3^5\left(1-\frac{2}{x-1}\right)dx$$

$$=\Big[-x+2\ln|x-1|\Big]_2^3+\Big[x-2\ln|x-1|\Big]_3^5$$

$$=(-3+2\ln 2)+2+(5-2\ln 4)-(3-2\ln 2)$$

$$=1$$

답 1

$\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{x-1-2}{x-1}$
$=1-\dfrac{2}{x-1}$

14 $|\cos x|+a=\begin{cases}\cos x+a & \left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\cos x+a & \left(\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\right)\end{cases}$ 이므로

$$\int_0^{\pi}(|\cos x|+a)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+a)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x+a)dx$$

$$=\Big[\sin x+ax\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x+ax\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\left(1+\frac{a}{2}\pi\right)+a\pi-\left(-1+\frac{a}{2}\pi\right)$$

$$=2+a\pi$$

따라서 $2+a\pi=4$이므로

$a\pi=2 \qquad \therefore\ a=\dfrac{2}{\pi}$

답 ④

15 $(f\circ g)(x)=|\sin^2 x-\cos^2 x|$
$=|-\cos 2x|=|\cos 2x|$

$\cos 2x=0$에서 $\quad x=\dfrac{\pi}{4}\ \left(\because\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

$(f\circ g)(x)=\begin{cases}\cos 2x & \left(0\le x\le\dfrac{\pi}{4}\right)\\ -\cos 2x & \left(\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f\circ g)(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos 2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

답 1

적분 구간 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 생각한다.

16 $3\sin 2x$는 기함수, $-x^2$은 우함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\sin 2x-x^2)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-x^2)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{\pi^3}{12}$$

답 $-\dfrac{\pi^3}{12}$

$3\sin(-2x)=-3\sin 2x$ 이므로 $3\sin 2x$는 기함수이다.

17 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2^x-3^{-x})dx+\int_{-1}^{1}(3^x+2^{-x})dx$

$$=\int_{-1}^{1}(2^x-3^{-x}+3^x+2^{-x})dx$$

$f(x)=2^x+2^{-x}$이라 하면

$f(-x)=2^{-x}+2^x=f(x)$

이므로 2^x+2^{-x}은 우함수이다.

$g(x)=3^x-3^{-x}$이라 하면

$g(-x)=3^{-x}-3^x=-g(x)$

이므로 3^x-3^{-x}은 기함수이다.

$$\therefore\ \int_{-1}^{1}(2^x-3^{-x}+3^x+2^{-x})dx$$

$$=2\int_0^1(2^x+2^{-x})dx$$

$$=2\left[\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^1$$

$$=2\cdot\frac{3}{2\ln 2}=\frac{3}{\ln 2}$$

답 ⑤

$\displaystyle\int 2^{-x}dx=\frac{2^{-x}}{\ln 2^{-1}}+C$
$=-\dfrac{2^{-x}}{\ln 2}+C$
(단, C는 적분상수)

18 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\tan x+2)f(x)dx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}f(x)\tan x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}2f(x)dx$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 $f(x)$는 우함수이고, $\tan x$는 기함수이므로 $f(x)\tan x$는 기함수이다.

$$\therefore\ \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\tan x+2)f(x)dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}2f(x)dx=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)dx$$

$$=4\cdot 3=12$$

답 12

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}f(x)\tan x\,dx=0$

상수함수는 우함수이다.

19 ㄱ. $f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다.

$$\therefore\ \int_{-a}^{a}f(x)dx\ne 0$$

ㄴ. $g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$

이므로 $g(x)$는 기함수이다.

$$\therefore\ \int_{-a}^{a}xf(x)dx=0$$

ㄷ. $h(x)=x^2f(x)$라 하면

$h(-x)=x^2f(-x)=x^2f(x)=h(x)$

이므로 $h(x)$는 우함수이다.

$$\therefore\ \int_{-a}^{a}x^2f(x)dx\ne 0$$

ㄹ. $f'(x)=e^x-e^{-x}$이므로

$f'(-x)=e^{-x}-e^x=-f'(x)$

따라서 $f'(x)$는 기함수이다.

$$\therefore\ \int_{-a}^{a}f'(x)dx=0$$

이상에서 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ③

다른 풀이 ㄴ. x는 기함수, $f(x)$는 우함수이므로 $xf(x)$는 기함수이다.

$\therefore \int_{-a}^{a} xf(x)dx=0$

ㄷ. x^2은 우함수, $f(x)$는 우함수이므로 $x^2f(x)$는 우함수이다.

$\therefore \int_{-a}^{a} x^2f(x)dx\neq 0$

20 $f(x)=|\sin x|$라 하면 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이므로

$$\int_a^{a+3\pi}|\sin x|dx=\int_0^{3\pi}|\sin x|dx$$
$$=3\int_0^{\pi}|\sin x|dx=3\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=3\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=3(1+1)=6$$

답 ④

21 $\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3(e^x-1)dx=\Big[e^x-x\Big]_0^3$

$=(e^3-3)-1=e^3-4$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+3)$이므로

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_3^6 f(x)dx=\int_6^9 f(x)dx$$
$$=\int_9^{12} f(x)dx=\int_{12}^{15} f(x)dx$$
$$=e^3-4$$
$$\therefore \int_0^{15} f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx+\int_6^9 f(x)dx+\int_9^{12} f(x)dx+\int_{12}^{15} f(x)dx$$
$$=5(e^3-4)$$

답 $5(e^3-4)$

23 치환적분법과 부분적분법을 이용한 정적분

Ⓦ 72쪽

01 (1) $x^2+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

또한 $x=0$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=6$이므로

$$\int_0^2\frac{x}{x^2+2}dx=\int_2^6\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\Big[\ln|t|\Big]_2^6$$
$$=\frac{1}{2}(\ln 6-\ln 2)=\frac{1}{2}\ln 3$$

(2) $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

또한 $x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\int_0^1 e^t dt=\Big[e^t\Big]_0^1=e-1$$

(3) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

또한 $x=e$일 때 $t=1$, $x=e^3$일 때 $t=3$이므로

$$\int_e^{e^3}\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^3 t\,dt=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_1^3$$
$$=\frac{1}{2}(9-1)=4$$

(4) $\tan x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$

또한 $x=0$일 때 $t=2$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{\tan x+2}dx=\int_2^3\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_2^3$$
$$=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

답 (1) $\frac{1}{2}\ln 3$ (2) $e-1$ (3) 4 (4) $\ln\frac{3}{2}$

02 (1) $x=3\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{3}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}}\cdot 3\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3\cos\theta}\cdot 3\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}1\,d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

(2) $x=2\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=2\sec^2\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\tan^2\theta+4}\cdot 2\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\sec^2\theta}\cdot 2\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}d\theta$$
$$=\Big[\frac{1}{2}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$$

답 (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{8}$

03 (1) $f(x)=x$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$

$$\therefore \int_0^2 xe^{-x}dx=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^2-\int_0^2(-e^{-x})dx$$
$$=-\frac{2}{e^2}-\Big[e^{-x}\Big]_0^2$$
$$=-\frac{2}{e^2}-\left(\frac{1}{e^2}-1\right)$$
$$=1-\frac{3}{e^2}$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=-\frac{1}{x}$

Q BOX

① (우함수)×(우함수) =(우함수)
② (우함수)×(기함수) =(기함수)
③ (기함수)×(기함수) =(우함수)

$t=\tan\frac{\pi}{4}+2=1+2=3$

$\sqrt{9-9\sin^2\theta}$
$=3\sqrt{1-\sin^2\theta}$
$=3\sqrt{\cos^2\theta}$
$=3\cos\theta\left(\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{6}\right)$

$4\tan^2\theta+4$
$=4(\tan^2\theta+1)$
$=4\sec^2\theta$

$\ln 6-\ln 2=\ln\frac{6}{2}=\ln 3$

$t=\ln e^3=3\ln e=3$

$$\therefore \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^2-\int_1^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2}\ln 2-\left[\frac{1}{x}\right]_1^2$$
$$=-\frac{1}{2}\ln 2-\left(\frac{1}{2}-1\right)$$
$$=\frac{1-\ln 2}{2}$$

(3) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$\therefore \int_0^\pi x\sin 2x\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^\pi-\int_0^\pi\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$=-\frac{\pi}{2}-\left[-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi=-\frac{\pi}{2}$$

(4) $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x-\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x+\cos x$

$$\therefore \int_\pi^{2\pi} x(\cos x-\sin x)dx$$
$$=\Big[x(\sin x+\cos x)\Big]_\pi^{2\pi}$$
$$-\int_\pi^{2\pi}(\sin x+\cos x)dx$$
$$=2\pi-(-\pi)-\Big[-\cos x+\sin x\Big]_\pi^{2\pi}$$
$$=3\pi-(-1-1)=3\pi+2$$

답 (1) $1-\frac{3}{e^2}$ (2) $\frac{1-\ln 2}{2}$ (3) $-\frac{\pi}{2}$ (4) $3\pi+2$

04 $2x-4=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$

또한 $x=0$일 때 $t=-4$, $x=4$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^4 f(2x-4)dx$$
$$=\int_{-4}^4 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_{-4}^4 f(x)dx=\frac{k}{2}$$

답 ③

05 $x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=3$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^3 e^x f(x+1)dx=\int_1^4 e^{t-1}f(t)dt$$

이때 $1\le t\le 4$에서 $f(t)=1$이므로

$$\int_1^4 e^{t-1}f(t)dt=\int_1^4 e^{t-1}dt=\Big[e^{t-1}\Big]_1^4$$
$$=e^3-1$$

답 ④

06 $1+3x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{(1+3x)^2}dx=\int_1^4\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int_1^4 t^{-2}dt$$
$$=\frac{1}{3}\Big[-t^{-1}\Big]_1^4=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}+1\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$

답 ④

Q BOX

$\ln 4-\ln 2=2\ln 2-\ln 2$
$=\ln 2$

$x-1=t$에서 $x=t+1$

07 $x^2-x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-1$

또한 $x=1$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$$\int_1^2\frac{2x-1}{x^2-x+2}dx=\int_2^4\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_2^4$$
$$=\ln 4-\ln 2=\ln 2$$

$\therefore a=2$

답 2

08 $x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$

또한 $x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx=\int_0^1(t+1)\sqrt{t}\,dt$$
$$=\int_0^1\left(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{16}{15}$$

따라서 $p=15$, $q=16$이므로 $q-p=1$

답 ③

09 $\int_0^{\sqrt{2}}(x+2)^2e^{x^2}dx-\int_0^{\sqrt{2}}(x-2)^2e^{x^2}dx$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}e^{x^2}\{(x^2+4x+4)-(x^2-4x+4)\}dx$$
$$=\int_0^{\sqrt{2}}8xe^{x^2}dx$$

$x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

또한 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{2}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^{\sqrt{2}}8xe^{x^2}dx=\int_0^2 4e^t dt$$
$$=\Big[4e^t\Big]_0^2$$
$$=4(e^2-1)$$

따라서 $a=4$, $b=2$이므로

$a-b=2$

답 ⑤

10 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

또한 $x=1$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=\ln a$이므로

$$\int_1^a\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int_0^{\ln a}t^2dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\ln a}$$
$$=\frac{1}{3}(\ln a)^3$$

따라서 $\frac{1}{3}(\ln a)^3=\frac{1}{3}$이므로 $(\ln a)^3=1$

$\ln a=1$ $\therefore a=e$

답 e

11 $-\sqrt{x}=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

또한 $x=1$일 때 $t=-1$, $x=n$일 때 $t=-\sqrt{n}$이므로

$$\int_1^n\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_{-1}^{-\sqrt{n}}e^t\cdot(-2)dt$$
$$=\int_{-\sqrt{n}}^{-1}2e^t dt=\Big[2e^t\Big]_{-\sqrt{n}}^{-1}$$
$$=2\left\{\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}\right)^{\sqrt{n}}\right\}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\lim_{n\to\infty}2\left\{\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}\right)^{\sqrt{n}}\right\}=\frac{2}{e}$

답 ②

12 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$

$\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$

또한 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$

$=\int_0^1(1+t^2)dt=\left[t+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

13 $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$

또한 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\cos x\,dx=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 e^t dt$

$=\left[e^t\right]_0^1=e-1$

답 ②

14 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$1+\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$

또한 $x=0$일 때 $t=2$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=\int_2^1\frac{1}{t}\cdot(-1)dt=\int_1^2\frac{1}{t}dt$

$=\left[\ln|t|\right]_1^2=\ln 2$

$\therefore a=2$

답 2

15 $x=\sqrt{2}\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{2}\cos\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\sin^2\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\cos^2\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\,d\theta$

이때 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$에서 $2\cos^2\theta=\cos 2\theta+1$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta+1)d\theta$

$=\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

답 ①

Q BOX

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{\sqrt{n}}=0$

$\sqrt{3}=2\sin\theta$에서

$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

$\left(\because -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\left(-2\cdot\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-(-2)$

$=-1+\frac{\pi}{3}+2$

$=1+\frac{\pi}{3}$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$\int_b^a f(x)dx$

$=-\int_a^b f(x)dx$

$\sqrt{2}=\sqrt{2}\sin\theta$에서

$\sin\theta=1$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{2}$

$\left(\because -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$

16 $x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\theta+1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\theta+1}{\sqrt{4\cos^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin\theta+1)d\theta$

$=\left[-2\cos\theta+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=1+\frac{\pi}{3}$

따라서 $a=1$, $b=\frac{1}{3}$이므로 $a+b=\frac{4}{3}$

답 ⑤

17 $2x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$x=\frac{a}{2}\tan\theta$

$\therefore \frac{dx}{d\theta}=\frac{a}{2}\sec^2\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{a}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{4}{4x^2+a^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4}{a^2\tan^2\theta+a^2}\cdot\frac{a}{2}\sec^2\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4}{a^2(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{a}{2}\sec^2\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{a}d\theta$

$=\left[\frac{2}{a}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2a}$

따라서 $\frac{\pi}{2a}=\frac{\pi}{4}$이므로 $a=2$

답 2

18 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x-2$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$

$\therefore \int_1^e(x-2)\ln x\,dx$

$=\left[\ln x\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)dx$

$=\frac{1}{2}e^2-2e-\int_1^e\left(\frac{1}{2}x-2\right)dx$

$=\frac{1}{2}e^2-2e-\left[\frac{1}{4}x^2-2x\right]_1^e$

$=\frac{1}{2}e^2-2e-\left\{\left(\frac{1}{4}e^2-2e\right)-\left(-\frac{7}{4}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}e^2-\frac{7}{4}$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{7}{4}$이므로

$a+b=-\frac{3}{2}$

답 ①

19 $\int_0^1 f(x)dx-\int_{\ln 2}^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{\ln 2} f(x)dx$

$=\int_0^{\ln 2} f(x)dx$

$=\int_0^{\ln 2} xe^x dx$

$u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$\therefore \int_0^{\ln 2} xe^x dx=\Big[xe^x\Big]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2} e^x dx$

$=2\ln 2-\Big[e^x\Big]_0^{\ln 2}=2\ln 2-(2-1)$

$=2\ln 2-1$ 답 $2\ln 2-1$

Q BOX

$\Big[xe^x\Big]_0^{\ln 2}=\ln 2\cdot e^{\ln 2}$
$=\ln 2\cdot 2^{\ln e}$
$=2\ln 2$

20 $f(x)=x^2$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=-\cos x$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$

$=\Big[-x^2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2x\cos x)\,dx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

$=2\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$=\pi-2\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\pi-2$

답 ④

21 $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=2x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $g(x)=x^2$

$\therefore \int_1^e 2x(\ln x)^2 dx$

$=\Big[x^2(\ln x)^2\Big]_1^e-\int_1^e 2x\ln x\,dx$

$=e^2-\int_1^e 2x\ln x\,dx$ …… ㉠

$\int_1^e 2x\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=2x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x^2$

$\therefore \int_1^e 2x\ln x\,dx=\Big[x^2\ln x\Big]_1^e-\int_1^e x\,dx$

$=e^2-\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_1^e$

$=\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_1^e 2x(\ln x)^2 dx=e^2-\left(\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2-1}{2}$ 답 ②

24 정적분으로 정의된 함수

W 75쪽

01 (3) $\frac{d}{dx}\int_{x-1}^x \ln t\,dt=\ln x-\ln(x-1)$

$=\ln\frac{x}{x-1}$

(4) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+5} e^t\,dt=e^{x+5}-e^x=e^x(e^5-1)$

답 (1) $x^2\sin x$ (2) $\frac{4x-1}{x^2+3x+3}$

(3) $\ln\frac{x}{x-1}$ (4) $e^x(e^5-1)$

02 (1) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2\cos x$

(2) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2e^{2x+1}+4$

(3) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{x}-3$

답 (1) $f(x)=2\cos x$ (2) $f(x)=2e^{2x+1}+4$

(3) $f(x)=\frac{1}{x}-3$

03 (1) $F'(t)=t\cos t$라 하면

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{x-\pi} t\cos t\,dt$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{x-\pi} F'(t)dt$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x-\pi)-F(-\pi)}{x}$

$=F'(-\pi)=\pi$

Q BOX

$F'(-\pi)$
$=-\pi\cdot\cos(-\pi)$
$=-\pi\cdot(-1)=\pi$

(2) $F'(t)=\ln t+3^t$이라 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x(\ln t+3^t)dt$

$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x F'(t)\,dt$

$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$

$=F'(2)=\ln 2+9$

답 (1) π (2) $\ln 2+9$

04 $\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=e^x-3k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1(e^t-3k)dt=k$, $\Big[e^t-3kt\Big]_0^1=k$

$e-3k-1=k$ $\therefore k=\frac{e-1}{4}$

따라서 $f(x)=e^x-\frac{3}{4}(e-1)$이므로

$f(1)=\frac{e+3}{4}$ 답 $\frac{e+3}{4}$

05 $f(x)=\ln x-\int_1^e \frac{f(t)}{x}dt=\ln x-\frac{1}{x}\int_1^e f(t)dt$

$\int_1^e f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=\ln x-\frac{k}{x}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_1^e \left(\ln t-\frac{k}{t}\right)dt=k$

$\int_1^e \ln t\,dt-k\int_1^e \frac{1}{t}dt=k$

$\int_1^e \ln t\,dt-k\Big[\ln t\Big]_1^e=k$

$\int_1^e \ln t\,dt-k=k$

$\therefore \int_1^e \ln t\,dt=2k$

이때 $u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$

$\therefore \int_1^e \ln t\,dt=\Big[t\ln t\Big]_1^e-\int_1^e \frac{1}{t}\cdot t\,dt$

$=e-\int_1^e 1\,dt$

$=e-\Big[t\Big]_1^e$

$=e-(e-1)$

$=1$

따라서 $1=2k$이므로 $k=\frac{1}{2}$

$\therefore \int_1^e f(t)dt=\frac{1}{2}$ 답 ③

06 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=\sin x-2k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t-2k)\cos t\,dt=k$

이때

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t-2k)\cos t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t\cos t-2k\cos t)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2t-2k\cos t\right)dt$

$=\Big[-\frac{1}{4}\cos 2t-2k\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{4}-2k-\left(-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}-2k$

이므로 $\frac{1}{2}-2k=k$ $\therefore k=\frac{1}{6}$

따라서 $f(x)=\sin x-\frac{1}{3}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

Q BOX

정적분에서 변수가 t이므로 x는 상수로 생각한다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,
$\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\Big[\ln t\Big]_1^e=\ln e-\ln 1=1$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}\pi$
$=2\cdot 0+\frac{a}{2}\pi$
$=\frac{a}{2}\pi$

$\sin 2t=2\sin t\cos t$이므로
$\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$

07 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(\sin x-\cos x)+x(\cos x+\sin x)$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=(1-0)+\frac{\pi}{2}(0+1)=1+\frac{\pi}{2}$

따라서 $a=1$, $b=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{a}{b}=2$ 답 2

08 $\int_0^x f(t)dt=\sin 2x+ax^2+b$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2\cos 2x+2ax$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{2}\pi$

따라서 $\frac{a}{2}\pi=\pi$이므로 $a=2$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=b$

$\therefore a+b=2$ 답 ③

09 $xf(x)=x^2e^{-x}+\int_1^x f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}+f(x)$

$xf'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$

$f'(x)=(2-x)e^{-x}$이므로

$f(x)=\int(2-x)e^{-x}dx$

이때 $u(x)=2-x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=-1$, $v(x)=-e^{-x}$

$\therefore f(x)=\int(2-x)e^{-x}dx$

$=(2-x)\cdot(-e^{-x})-\int e^{-x}dx$

$=(x-2)e^{-x}-(-e^{-x})+C$

$=(x-1)e^{-x}+C$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=\frac{1}{e}$

㉡에서 $f(1)=C$이므로 $C=\frac{1}{e}$

따라서 $f(x)=(x-1)e^{-x}+\frac{1}{e}$이므로

$f(0)=-1+\frac{1}{e}$ 답 ②

10 $\int_\pi^x (x-t)f'(t)dt=\frac{1}{2}\sin 2x-x+\pi$에서

$x\int_\pi^x f'(t)dt-\int_\pi^x tf'(t)dt=\frac{1}{2}\sin 2x-x+\pi$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_\pi^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=\cos 2x-1$

$\int_\pi^x f'(t)dt=\cos 2x-1$

$\Big[f(t)\Big]_\pi^x=\cos 2x-1$, $f(x)-f(\pi)=\cos 2x-1$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right)-f(\pi)=\cos\frac{\pi}{3}-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

답 ②

11 $\int_1^x (x-t)f(t)dt = x^2\ln x - x + 1$에서

$$x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt = x^2\ln x - x + 1$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} - 1$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt = 2x\ln x + x - 1$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x) = 2\ln x + 2x\cdot\frac{1}{x} + 1$$
$$= 2\ln x + 3$$

따라서 $f'(x) = \frac{2}{x}$이므로 $f'(2) = 1$ 답 1

12 $\int_0^x tf(t)dt = \int_0^x (x-1)f(t)dt + ex$에서

$$\int_0^x tf(t)dt = (x-1)\int_0^x f(t)dt + ex$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$xf(x) = \int_0^x f(t)dt + (x-1)f(x) + e$$

$$\therefore f(x) = \int_0^x f(t)dt + e \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x) = f(x), \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int 1\,dx$$

$\ln f(x) = x + C$ ($\because f(x) > 0$)

$\therefore f(x) = e^{x+C}$

또 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0) = e$

$e^C = e \quad \therefore C = 1$

따라서 $f(x) = e^{x+1}$이므로

$f(-1) = 1$ 답 ①

Q BOX

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$
$$= \ln|f(x)| + C$$

13 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$

$f'(x) = 0$에서 $x = 1$ ($\because x > 0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$$f(1) = \int_0^1 (t - \sqrt{t})dt = \int_0^1 (t - t^{\frac{1}{2}})dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{1}{6}$$ 답 ③

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가
① 양 → 음 ➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극대
② 음 → 양 ➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극소

14 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = (2-x)e^{2x}$

$f'(x) = 0$에서 $x = 2$ ($\because e^{2x} > 0$)

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 극댓값은

$$f(2) = \int_0^2 (2-t)e^{2t}dt$$

$u(t) = 2-t$, $v'(t) = e^{2t}$으로 놓으면

$$u'(t) = -1, \quad v(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$\therefore f(2) = \int_0^2 (2-t)e^{2t}dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}(2-t)e^{2t}\right]_0^2 - \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}e^{2t}\right)dt$$
$$= -1 - \left[-\frac{1}{4}e^{2t}\right]_0^2$$
$$= -1 + \frac{1}{4}(e^4 - 1)$$
$$= \frac{1}{4}e^4 - \frac{5}{4}$$

따라서 $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{5}{4}$이므로

$a + b = -1$ 답 -1

15 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = \cos x(1 - 2\sin x)$

$f'(x) = 0$에서 $\cos x = 0$ 또는 $\sin x = \frac{1}{2}$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x = \frac{\pi}{6}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t(1 - 2\sin t)dt$$

$\sin t = s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt} = \cos t$

또한 $t=0$일 때 $s=0$, $t = \frac{\pi}{6}$일 때 $s = \frac{1}{2}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t(1 - 2\sin t)dt$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2s)ds$$
$$= \left[s - s^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{4}$$ 답 ④

16 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = (1-x)e^{x^2-2x}$

$f'(x) = 0$에서 $x = 1$ ($\because e^{x^2-2x} > 0$)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$$f(1)=\int_{-1}^{1}(1-t)e^{t^2-2t}dt$$

$t^2-2t=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=2t-2$

또한 $t=-1$일 때 $s=3$, $t=1$일 때 $s=-1$이므로

$$\begin{aligned}f(1)&=\int_{-1}^{1}(1-t)e^{t^2-2t}dt\\&=\int_{3}^{-1}e^{s}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)ds\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}e^{s}ds\\&=\frac{1}{2}\Big[e^{s}\Big]_{-1}^{3}\\&=\frac{1}{2}\left(e^3-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}\left(e^3-\frac{1}{e}\right)$

$\int_a^b f(x)dx$
$=-\int_b^a f(x)dx$

17 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\ln x-2$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=2$ $\therefore x=e^2$

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=e^2$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$f(e^2)=\int_{1}^{e^2}(\ln t-2)dt$$

$u(t)=\ln t-2$, $v'(t)=1$로 놓으면

$$u'(t)=\frac{1}{t},\ v(t)=t$$

$$\begin{aligned}\therefore f(e^2)&=\int_{1}^{e^2}(\ln t-2)dt\\&=\Big[t(\ln t-2)\Big]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\frac{1}{t}\cdot t\,dt\\&=2-\int_1^{e^2}1\,dt=2-\Big[t\Big]_1^{e^2}\\&=2-(e^2-1)=3-e^2\end{aligned}$$

따라서 $\alpha=e^2$, $\beta=3-e^2$이므로

$$\alpha+\beta=3$$

답 3

18 $F'(x)=f(x)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{e}^{e+h}f(t)dt&=\lim_{h\to0}\frac{F(e+h)-F(e)}{h}\\&=F'(e)=f(e)\\&=e^{e+1}\end{aligned}$$

$\therefore k=e+1$

답 ④

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는
$f'(a)$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

19 $f(t)=(t+2)e^t$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{1}{1-x}\int_1^x(t+2)e^t dt\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{1-x}\int_1^x f(t)dt\\&=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{1-x}\\&=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot(-1)\\&=-F'(1)=-f(1)\\&=-3e\end{aligned}$$

답 $-3e$

20 $F'(x)=f(x)$라 하면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^3}f(t)dt\\&=\lim_{x\to1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)\\&=3F'(1)=3f(1)\\&=-3\end{aligned}$$

답 -3

x^3-1
$=(x-1)(x^2+x+1)$

21 $f(x)=x\tan x$, $F'(x)=f(x)$라 하면

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{4}-h}^{\frac{\pi}{4}+h}x\tan x\,dx\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{4}-h}^{\frac{\pi}{4}+h}f(x)dx\\&=\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)+F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{4}-h\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)}{-h}\\&=F'\left(\frac{\pi}{4}\right)+F'\left(\frac{\pi}{4}\right)\\&=2F'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2f\left(\frac{\pi}{4}\right)\\&=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

답 ⑤

10 정적분의 활용

25 정적분과 급수

W 78쪽

01 (1) $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=3$으로 놓으면

$$\Delta x=\frac{3}{n},\ x_k=\frac{3k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3k}{n}\right)^2\cdot\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_0^3 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=9$$

(2) $f(x)=\sqrt{x}$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ x_k=\frac{k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_0^1\sqrt{x}dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

(3) $f(x)=x$, $a=1$, $b=5$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{4}{n},\ x_k=1+\frac{4k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{4k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{4k}{n}\right)\cdot\frac{4}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^5 xdx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^5$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\right)=6$$

(4) $f(x)=\sin x$, $a=0$, $b=\pi$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{\pi}{n},\ x_k=\frac{k\pi}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_0^\pi\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^\pi=-(-1)-(-1)=2$$

답 (1) 9 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 6 (4) 2

02 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k\sqrt{n^2+k^2}}{n^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\boxed{\frac{2k}{n}}\sqrt{1+\left(\boxed{\frac{k}{n}}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

이때 $f(x)=2x\sqrt{1+x^2}$, $a=0$, $b=\boxed{1}$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ x_k=\frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\boxed{\frac{2k}{n}}\sqrt{1+\left(\boxed{\frac{k}{n}}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$1+x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{t}\,dt=\int_1^2 t^{\frac{1}{2}}dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\boxed{\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)}$$

$\therefore$ (가) $\frac{2k}{n}$ (나) $\frac{k}{n}$ (다) 1 (라) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

답 풀이 참조

03 $f(x)=x^3$, $a=1$, $b=3$으로 놓으면

$$\Delta x=\frac{2}{n},\ x_k=1+\frac{2k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3=\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3 x^3dx=\int_0^2(x+1)^3dx=\int_{-2}^0(x+3)^3dx$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

04 $a=1$, $b=3$으로 놓으면

$$\Delta x=\frac{2}{n},\ x_k=1+\frac{2k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\left[\ln x\right]_1^3=\frac{1}{2}\ln 3$$

답 ②

다른 풀이 $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ x_k=\frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)=\int_0^1 f(1+2x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+2x}dx=\left[\frac{1}{2}\ln|1+2x|\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 3$$

Q BOX

$1+\frac{4k}{n}$를 x로, $\frac{4}{n}$를 dx로 나타낼 때, $k=1$이고 $n\to\infty$이면 $x=1$이므로 $a=1$
$k=n$이면 $x=5$이므로 $b=5$

치환적분법을 이용한 정적분
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면
$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

05 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{4}{n}}+e^{\frac{6}{n}}+\cdots+e^{\frac{2n}{n}})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}\cdot\frac{2}{n}$

이때 $f(x)=e^x$, $a=0$, $b=2$로 놓으면

$\Delta x=\frac{2}{n}$, $x_k=\frac{2k}{n}$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}\cdot\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2 e^x dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[e^x\Big]_0^2=\frac{1}{2}(e^2-1)$$

답 $\frac{1}{2}(e^2-1)$

06 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\cos\left(1+\frac{1}{n}\right)\pi+\cos\left(1+\frac{2}{n}\right)\pi+\cos\left(1+\frac{3}{n}\right)\pi+\cdots+\cos\left(1+\frac{n}{n}\right)\pi\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(1+\frac{k}{n}\right)\pi$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(1+\frac{k}{n}\right)\pi\cdot\frac{1}{n}$

이때 $f(x)=\cos\pi x$, $a=1$, $b=2$로 놓으면

$\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_k=1+\frac{k}{n}$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(1+\frac{k}{n}\right)\pi\cdot\frac{1}{n}=\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\int_1^2\cos\pi x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_1^2$$
$$=0$$

답 ③

07 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{4}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{6}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{2n}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$

이때 $f(x)=\ln x$, $a=1$, $b=3$으로 놓으면

$\Delta x=\frac{2}{n}$, $x_k=1+\frac{2k}{n}$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3\ln x\,dx$$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

이므로

$$\frac{1}{2}\int_1^3\ln x\,dx=\frac{1}{2}\left(\Big[x\ln x\Big]_1^3-\int_1^3\frac{1}{x}\cdot x\,dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(3\ln3-\Big[x\Big]_1^3\right)$$
$$=\frac{1}{2}(3\ln3-2)$$
$$=\frac{3}{2}\ln3-1$$

따라서 $p=\frac{3}{2}$, $q=-1$이므로

$p+q=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

> **Q BOX**
> **부분적분법을 이용한 정적분**
> 닫힌구간 $[a, b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,
> $\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$

08 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

이때 $a=0$, $b=1$로 놓으면

$\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_k=\frac{k}{n}$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\int_0^1(\sqrt{x}+p)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+px\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}+p$$

즉 $\frac{2}{3}+p=\frac{8}{3}$이므로 $p=2$

답 ①

09 $\triangle ABC\backsim\triangle AB_kC_k$ $(k=1, 2, 3, \cdots, n-1)$이므로

> $\angle C=\angle AC_kB_k=90°$, $\angle A$는 공통이므로 $\triangle ABC\backsim\triangle AB_kC_k$ (AA 닮음)

$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AC_k}:\overline{B_kC_k}$

$3:2=\frac{3k}{n}:\overline{B_kC_k}$ $\quad\therefore\ \overline{B_kC_k}=\frac{2k}{n}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2k}{n}\right)^2$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$
$$=4\int_0^1 x^2dx$$
$$=4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로 $p+q=7$

답 7

10 점 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{n-1}이 x축 위의 구간 $[0, 1]$을 n 등분하였으므로 $A_k\left(\frac{k}{n}, 0\right)$

따라서 $B_k\left(\frac{k}{n}, \sqrt{\frac{2k}{n}+1}\right)$이므로

> 좌표평면 위의 원점 O와 점 $P(x_1, y_1)$에 대하여
> $\overline{OP}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

$$\overline{OB_k}=\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2k}{n}+1}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{2k}{n}+1}$$
$$=\frac{k}{n}+1$$

> $\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{2k}{n}+1=\left(\frac{k}{n}+1\right)^2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{OB}_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+1\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+1\right)\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_1^2 x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

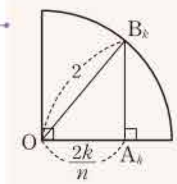
답 ②

11 점 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{n-1}이 $\overline{\mathrm{OA}}$를 n 등분하였으므로

$$\overline{\mathrm{OA}_k}=\frac{2k}{n}$$

따라서 직각삼각형 $\mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k$에서

$$\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}^2=2^2-\left(\frac{2k}{n}\right)^2=4-4\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2$$



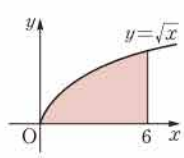
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{4-4\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=4\int_0^1(1-x^2)dx$$
$$=4\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

26 넓이

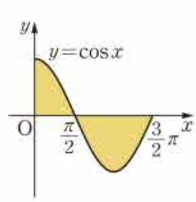
W 80쪽

01 (1) 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^6\sqrt{x}\,dx=\int_0^6 x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^6$$
$$=4\sqrt{6}$$

(2) 곡선 $y=\cos x$와 x축의 교점의 x좌표는 $\cos x=0$에서



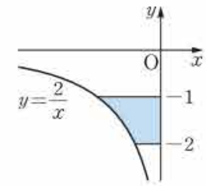
$$x=\frac{\pi}{2}\text{ 또는 }x=\frac{3}{2}\pi$$
$$\left(\because\ 0\le x\le\frac{3}{2}\pi\right)$$

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}|\cos x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}$$
$$=1+2=3$$

(3) $y=\dfrac{2}{x}$에서 $\quad x=\dfrac{2}{y}$

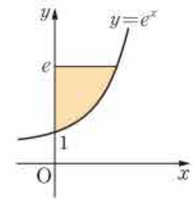
따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^{-1}\left|\frac{2}{y}\right|dy$$
$$=\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{2}{y}\right)dy$$
$$=\Big[-2\ln|y|\Big]_{-2}^{-1}=2\ln 2$$

(4) $y=e^x$에서 $\quad x=\ln y$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_1^e \ln y\,dy$$

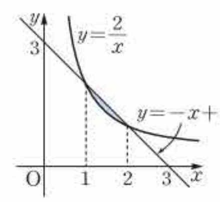
$f(y)=\ln y$, $g'(y)=1$로 놓으면
$f'(y)=\dfrac{1}{y}$, $g(y)=y$

$$=\Big[y\ln y\Big]_1^e-\int_1^e 1\,dy$$
$$=e-\Big[y\Big]_1^e=e-(e-1)=1$$

답 (1) $4\sqrt{6}$ (2) 3 (3) $2\ln 2$ (4) 1

02 (1) 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$와 직선 $y=-x+3$의 교점의 x좌표는 $\dfrac{2}{x}=-x+3$에서

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같다.

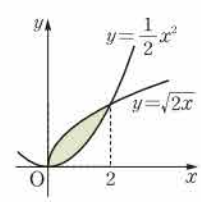


$$x^2-3x+2=0$$
$$(x-1)(x-2)=0$$
$$\therefore x=1\text{ 또는 }x=2$$

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_1^2\left(-x+3-\frac{2}{x}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x-2\ln|x|\right]_1^2$$
$$=(4-2\ln 2)-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}-2\ln 2$$

(2) 두 곡선 $y=\dfrac{1}{2}x^2$, $y=\sqrt{2x}$의 교점의 x좌표는 $\dfrac{1}{2}x^2=\sqrt{2x}$에서 $\quad \dfrac{1}{4}x^4=2x$



$$x^4-8x=0$$
$$x(x^3-8)=0$$
$$x(x-2)(x^2+2x+4)=0$$
$$\therefore x=0\text{ 또는 }x=2\ (\because x^2+2x+4>0)$$

x^2+2x+4
$=(x+1)^2+3>0$

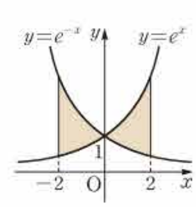
따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\int_0^2\left(\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$
$$=\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{4}{3}$$

(3) 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$의 교점의 x좌표는 $e^x=e^{-x}$에서

$$x=-x \qquad \therefore x=0$$

따라서 오른쪽 그림에서 구

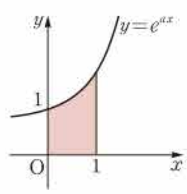


하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}|e^{x}-e^{-x}|dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(e^{-x}-e^{x})dx+\int_{0}^{2}(e^{x}-e^{-x})dx$$
$$=\Big[-e^{-x}-e^{x}\Big]_{-2}^{0}+\Big[e^{x}+e^{-x}\Big]_{0}^{2}$$
$$=(-1-1)-(-e^{2}-e^{-2})+(e^{2}+e^{-2})-(1+1)$$
$$=2e^{2}+\frac{2}{e^{2}}-4$$

답 (1) $\frac{3}{2}-2\ln 2$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $2e^{2}+\frac{2}{e^{2}}-4$

03 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{1}e^{ax}dx=\Big[\frac{1}{a}e^{ax}\Big]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{a}e^{a}-\frac{1}{a}$$

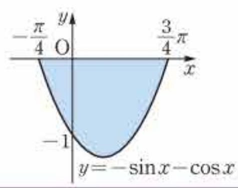
따라서 $\frac{1}{a}e^{a}-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}e^{2}-\frac{1}{2}$이므로

$a=2$ 답 ④

04 $y=-\sin x-\cos x$

$$=-\sqrt{2}\sin\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big)$$

이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\Big|-\sqrt{2}\sin\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big)\Big|dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sqrt{2}\sin\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big)dx$$
$$=\Big[-\sqrt{2}\cos\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big)\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$
$$=-\sqrt{2}\cos\pi-(-\sqrt{2}\cos 0)$$
$$=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

삼각함수의 합성
$a\sin\theta+b\cos\theta$
$=\sqrt{a^{2}+b^{2}}\sin(\theta+\alpha)$
$\Big($단, $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}$, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}\Big)$

05 $S(n)=\int_{e^{n}}^{e^{2n}}\frac{\ln x}{x}dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

또한 $x=e^{n}$일 때 $t=n$, $x=e^{2n}$일 때 $t=2n$이므로

$$S(n)=\int_{n}^{2n}t\,dt=\Big[\frac{1}{2}t^{2}\Big]_{n}^{2n}$$
$$=\frac{3}{2}n^{2}$$

따라서 $S(1)=\frac{3}{2}$, $S(3)=\frac{27}{2}$이므로

$S(1)+S(3)=15$ 답 ⑤

$x=e^{n}$일 때,
$t=\ln e^{n}=n\ln e=n$
$x=e^{2n}$일 때,
$t=\ln e^{2n}=2n\ln e$
$=2n$

06 $\int_{-1}^{0}\Big(-\frac{2x}{x^{2}+1}\Big)dx+\int_{0}^{1}\frac{2x}{x^{2}+1}dx$

$$=\Big[-\ln(x^{2}+1)\Big]_{-1}^{0}+\Big[\ln(x^{2}+1)\Big]_{0}^{1}$$
$$=\ln 2+\ln 2=2\ln 2$$

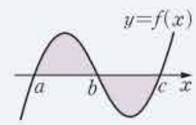
답 ③

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$
$=\ln|f(x)|+C$

Q BOX

Q쌤 한마디

오른쪽 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{a}^{c}|f(x)|dx$$
$$=\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{b}^{c}\{-f(x)\}dx$$

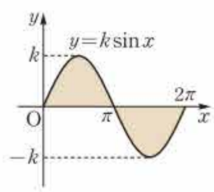
07 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-x\cos x)dx$

$f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면
$f'(x)=1$,
$g(x)=\sin x$

$$=\Big(\Big[x\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\Big)$$
$$+\Big\{\Big[-x\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\sin x)dx\Big\}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\Big[-\cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}-\Big[\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{2}-(-1)=\pi$$

답 π

08 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

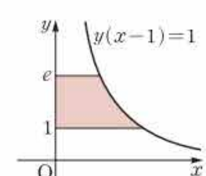


$$a_{k}=\int_{0}^{\pi}k\sin x\,dx$$
$$+\int_{\pi}^{2\pi}(-k\sin x)dx$$
$$=\Big[-k\cos x\Big]_{0}^{\pi}+\Big[k\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=2k+2k=4k$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_{k}=\sum_{k=1}^{10}4k=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=220$$

답 ④

자연수의 거듭제곱의 합
① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$
② $\sum_{k=1}^{n}k^{2}$
$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
③ $\sum_{k=1}^{n}k^{3}=\Big\{\frac{n(n+1)}{2}\Big\}^{2}$

09 $y(x-1)=1$에서



$$x-1=\frac{1}{y}$$
$$\therefore x=\frac{1}{y}+1$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_{1}^{e}\Big(\frac{1}{y}+1\Big)dy=\Big[\ln|y|+y\Big]_{1}^{e}$$
$$=1+e-1=e$$

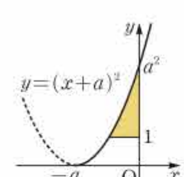
답 e

10 $y=(x+a)^{2}$에서

$\sqrt{y}=x+a$ ($\because x\geq -a$)

$\therefore x=\sqrt{y}-a$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$S(a)=\int_{1}^{a^{2}}(-\sqrt{y}+a)dy$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+ay\Big]_{1}^{a^{2}}$$
$$=\Big(-\frac{2}{3}a^{3}+a^{3}\Big)-\Big(-\frac{2}{3}+a\Big)$$
$$=\frac{1}{3}a^{3}-a+\frac{2}{3}$$

W 10 정적분의 활용

따라서 $S(a)=\frac{20}{3}$이므로

$\frac{1}{3}a^3-a+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$, $\quad a^3-3a-18=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 0 & -3 & -18 \\ & & 3 & 9 & 18 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

$(a-3)(a^2+3a+6)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a^2+3a+6>0$) 답 3

a^2+3a+6
$=\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$

11 곡선 $y=xe^{1-x}$과 직선 $y=\frac{1}{e}x$의 교점의 x좌표는

$xe^{1-x}=\frac{1}{e}x$에서

$x\left(e^{1-x}-\frac{1}{e}\right)=0$, $\quad x(e^{1-x}-e^{-1})=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$e^{1-x}=e^{-1}$에서
$1-x=-1$
$\therefore x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^2\left(xe^{1-x}-\frac{1}{e}x\right)dx$

$=\int_0^2 xe^{1-x}dx-\int_0^2\frac{1}{e}x\,dx$

$f(x)=x$, $g'(x)=e^{1-x}$으로 놓으면
$f'(x)=1$,
$g(x)=-e^{1-x}$

$=\left[-xe^{1-x}\right]_0^2-\int_0^2(-e^{1-x})dx-\left[\frac{1}{2e}x^2\right]_0^2$

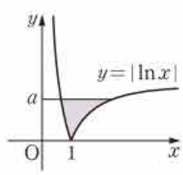
$=-2e^{-1}-\left[e^{1-x}\right]_0^2-\frac{2}{e}$

$=e-\frac{5}{e}$ 답 $e-\frac{5}{e}$

12 $0<x<1$에서 $y=-\ln x$이므로 $x=e^{-y}$

$x\geq1$에서 $y=\ln x$이므로

$x=e^y$



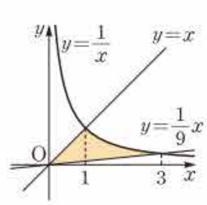
오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$\int_0^a(e^y-e^{-y})dy=\left[e^y+e^{-y}\right]_0^a=e^a+\frac{1}{e^a}-2$

따라서 $e^a+\frac{1}{e^a}-2=\frac{1}{e^a}$이므로

$e^a=2 \qquad \therefore a=\ln 2$ 답 $\ln 2$

13 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{x}=x$에서



$x^2=1$

$\therefore x=1$ ($\because x>0$)

또 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 직선 $y=\frac{1}{9}x$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{x}=\frac{1}{9}x$에서

$x^2=9 \qquad \therefore x=3$ ($\because x>0$)

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$\int_0^1\left(x-\frac{1}{9}x\right)dx+\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{9}x\right)dx$

$=\left[\frac{4}{9}x^2\right]_0^1+\left[\ln|x|-\frac{1}{18}x^2\right]_1^3$

$=\frac{4}{9}+\ln 3-\frac{4}{9}=\ln 3$ 답 ②

14 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$의 교점의 x좌표는

$\sin x=\sin 2x$에서

$\sin x=2\sin x\cos x$

$\sin x(2\cos x-1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

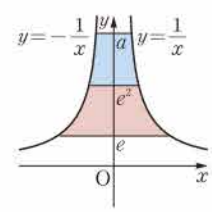
$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

쌤 한마디

두 곡선 사이의 넓이는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.
(ii) 두 곡선을 그려 위치 관계를 파악한다.
(iii) (i)의 적분 구간에서 {(위쪽의 식)−(아래쪽의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

15 $y=\frac{1}{x}$에서 $\quad x=\frac{1}{y}$

$y=-\frac{1}{x}$에서 $\quad x=-\frac{1}{y}$



따라서 오른쪽 그림에서

$S_1=\int_e^{e^2}\left\{\frac{1}{y}-\left(-\frac{1}{y}\right)\right\}dy$

$=2\int_e^{e^2}\frac{1}{y}dy=2\left[\ln|y|\right]_e^{e^2}=2$

$S_2=\int_{e^2}^a\left\{\frac{1}{y}-\left(-\frac{1}{y}\right)\right\}dy=2\int_{e^2}^a\frac{1}{y}dy$

$=2\left[\ln|y|\right]_{e^2}^a=2\ln a-4$

이때 $S_1:S_2=2:1$에서 $S_1=2S_2$이므로

$2=4\ln a-8$, $\quad 4\ln a=10$

$\ln a=\frac{5}{2} \qquad \therefore a=e^{\frac{5}{2}}$ 답 $e^{\frac{5}{2}}$

16 두 곡선 $y=\frac{4}{x}$, $y=\sqrt{2x}$의 교점의 x좌표는

$\frac{4}{x}=\sqrt{2x}$에서

$\frac{16}{x^2}=2x$, $\quad x^3-8=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x^2+2x+4>0$)

x^2+2x+4
$=(x+1)^2+3>0$

따라서 구하는 넓이는

$\int_1^2\left(\frac{4}{x}-\sqrt{2x}\right)dx+\int_2^4\left(\sqrt{2x}-\frac{4}{x}\right)dx$

$=\left[4\ln|x|-\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2+\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-4\ln|x|\right]_2^4$

$=\left(-\frac{8}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}+4\ln 2\right)+\left(-\frac{8}{3}+\frac{16\sqrt{2}}{3}-4\ln 2\right)$

$=6\sqrt{2}-\frac{16}{3}$

즉 $a=6$, $b=-\dfrac{16}{3}$이므로

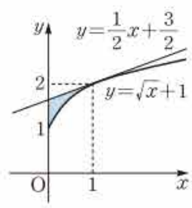
$$a+b=\frac{2}{3}$$

답 ④

17 $y=\sqrt{x}+1$에서 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이므로 곡선 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이고 접선의 방정식은

$$y-2=\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^1\left\{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-(\sqrt{x}+1)\right\}dx$$
$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{12}$$

답 $\dfrac{1}{12}$

18 $f(x)=ke^{x-1}$, $g(x)=2x$라 하면

$$f'(x)=ke^{x-1},\ g'(x)=2$$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 접점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$에서

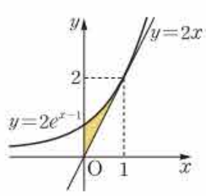
$$ke^{t-1}=2t \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad ke^{t-1}=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$t=1,\ k=2$$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_0^1(2e^{x-1}-2x)dx$$
$$=\left[2e^{x-1}-x^2\right]_0^1=1-\frac{2}{e}$$

따라서 $a=1$, $b=-2$이므로

$$a-b=3$$

답 3

19 $y=2\ln x$에서 $y'=\dfrac{2}{x}$이므로 접점의 좌표를 $(t,\ 2\ln t)$라 하면 접선의 기울기는 $\dfrac{2}{t}$이고 접선의 방정식은

$$y-2\ln t=\frac{2}{t}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-2\ln t=\frac{2}{t}\cdot(-t), \qquad \ln t=1$$
$$\therefore\ t=e$$

즉 접선의 방정식은

$$y-2=\frac{2}{e}(x-e)$$
$$\therefore\ y=\frac{2}{e}x$$

Q BOX

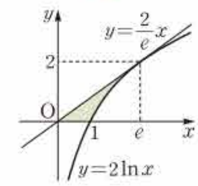
세 점 $(0,\ 0)$, $(e,\ 0)$, $(e,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 직각삼각형의 넓이와 같으므로

$$\frac{1}{2}\cdot e\cdot 2=e$$

와 같이 구할 수도 있다.

$\ln 8=\ln 2^3=3\ln 2$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^e\frac{2}{e}x\,dx-\int_1^e 2\ln x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{e}x^2\right]_0^e$$
$$-2\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e 1\,dx\right)$$
$$=e-2\left(e-\left[x\right]_1^e\right)$$
$$=e-2\{e-(e-1)\}$$
$$=e-2$$

답 ①

20 $\displaystyle\int_0^1\left(\cos\frac{\pi}{2}x-a\right)dx=0$이므로

$$\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x-ax\right]_0^1=0$$
$$\frac{2}{\pi}-a=0 \qquad \therefore\ a=\frac{2}{\pi}$$

답 $\dfrac{2}{\pi}$

21 $\displaystyle\int_a^e\frac{2\ln x}{x}dx=0$이므로 $\ln x=t$로 놓으면

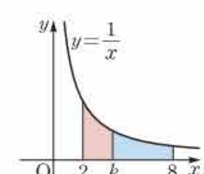
$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$$

또한 $x=a$일 때 $t=\ln a$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_a^e\frac{2\ln x}{x}dx=2\int_{\ln a}^1 t\,dt=0$$
$$2\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\ln a}^1=0, \qquad 2\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right\}=0$$
$$(\ln a)^2=1, \qquad \ln a=-1\ (\because\ 0<a<1)$$
$$\therefore\ a=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

답 ③

22 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=8$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_2^8\frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_2^8$$
$$=3\ln 2-\ln 2=2\ln 2$$

곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_2^k\frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_2^k$$
$$=\ln k-\ln 2$$

이때 $S_2=\dfrac{1}{2}S_1$이므로

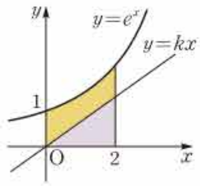
$$\ln k-\ln 2=\ln 2, \qquad \ln k=\ln 4$$
$$\therefore\ k=4$$

답 ②

다른 풀이 $\displaystyle\int_2^k\frac{1}{x}dx=\int_k^8\frac{1}{x}dx$이므로

$$\left[\ln|x|\right]_2^k=\left[\ln|x|\right]_k^8$$
$$\ln k-\ln 2=3\ln 2-\ln k$$
$$2\ln k=4\ln 2, \qquad \ln k=2\ln 2=\ln 4$$
$$\therefore\ k=4$$

23 곡선 $y=e^x$과 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_0^2 e^x\,dx$$
$$=\Big[e^x\Big]_0^2=e^2-1$$

직선 $y=kx$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

세 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 2k)$를 꼭짓점으로 하는 직각삼각형

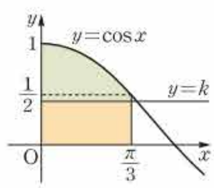
$$S_2=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2k=2k$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$$2k=\frac{e^2-1}{2}\qquad\therefore\ k=\frac{e^2-1}{4}$$

답 $\frac{e^2-1}{4}$

24 곡선 $y=\cos x$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

x축, y축 및 두 직선 $y=k$, $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

가로, 세로의 길이가 각각 $\frac{\pi}{3}$, k인 직사각형

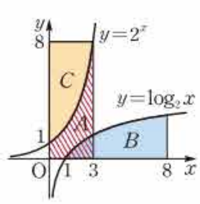
$$S_2=\frac{\pi}{3}k$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$$\frac{\pi}{3}k=\frac{\sqrt{3}}{4}\qquad\therefore\ k=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

답 $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

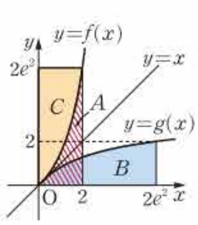
25 두 함수 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 오른쪽 그림에서 $B=C$이므로



$$A+B=A+C=3\cdot8=24$$

답 24

26 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(0)=0$, $f(2)=2e^2$이므로
$g(0)=0$, $g(2e^2)=2$
따라서 오른쪽 그림과 같이

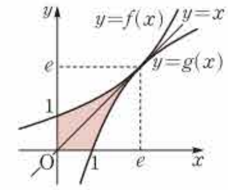


$\int_0^2 f(x)dx=A$, $\int_0^{2e^2} g(x)dx=B$라 하고, 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=2e^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 C라 하면 $B=C$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx+\int_0^{2e^2} g(x)dx=A+B=A+C$$
$$=2\cdot2e^2=4e^2$$

답 ⑤

27 (1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=e$인 점에서 서로 접하므로 직선 $y=x$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=e$인 점에서의 접선이다.



$$\therefore\ f(e)=e,\ f'(e)=1$$

$f(e)=e$에서

$e^{ek}=e$ …… ㉠

$f'(x)=ke^{kx}$이므로 $f'(e)=1$에서

$ke^{ek}=1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$ek=1\qquad\therefore\ k=\frac{1}{e}$$

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

이때 $f(x)=e^{\frac{1}{e}x}$이므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^e\left(e^{\frac{1}{e}x}-x\right)dx=2\Big[e\cdot e^{\frac{1}{e}x}-\frac{1}{2}x^2\Big]_0^e$$
$$=2\left\{\left(e^2-\frac{1}{2}e^2\right)-e\right\}$$
$$=e^2-2e$$

답 (1) $\frac{1}{e}$ (2) e^2-2e

27 부피

W 84쪽

01 (1) 단면의 넓이가 $6x^2+1$이므로 구하는 부피는

$$\int_0^4 S(x)dx=\int_0^4(6x^2+1)dx$$
$$=\Big[2x^3+x\Big]_0^4=132$$

(2) 단면의 넓이가 $3\sqrt{x}$이므로 구하는 부피는

$$\int_0^4 S(x)dx=\int_0^4 3\sqrt{x}\,dx$$
$$=\Big[2x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4=16$$

답 (1) 132 (2) 16

02 (2) $\int_0^6(2x+5)dx=\Big[x^2+5x\Big]_0^6$
$=66\,(\text{cm}^3)$

답 (1) $(2x+5)\ \text{cm}^2$ (2) $66\ \text{cm}^3$

03 (1) $(\sqrt{x}+2)^2=x+4\sqrt{x}+4$

(2) $\int_0^1 (x+4\sqrt{x}+4)dx=\int_0^1 (x+4x^{\frac{1}{2}}+4)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x\right]_0^1$$

$$=\frac{43}{6}$$

답 (1) $x+4\sqrt{x}+4$ (2) $\frac{43}{6}$

04 물의 깊이가 x일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$\int_0^x S(x)dx=\ln(x^2+1)+3x$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$S(x)=\frac{2x}{x^2+1}+3$$

따라서 물의 깊이가 7일 때의 수면의 넓이는

$$S(7)=\frac{7}{25}+3=\frac{82}{25}$$

이므로 $p=25,\ q=82$

$\therefore p+q=107$ 답 ⑤

05 단면인 직사각형의 가로의 길이가 e^x일 때 세로의 길이는 $4e^x$이므로 높이가 x일 때의 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=e^x\cdot 4e^x=4e^{2x}$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3 4e^{2x}dx=\left[2e^{2x}\right]_0^3$$

$$=2(2^6-1)$$

답 ③

06 높이가 x일 때의 입체도형의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=\int_0^x \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\left[\ln(x^2+x+1)\right]_0^x$$

$$=\ln(x^2+x+1)$$

$V(x)=\ln 21$일 때

$\ln(x^2+x+1)=\ln 21$, $x^2+x+1=21$

$x^2+x-20=0$, $(x+5)(x-4)=0$

$\therefore x=4$ ($\because x>0$)

따라서 구하는 높이는 4이다. 답 4

x는 높이이므로 양수이다.

07 물의 깊이가 x일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\pi\cdot(\sqrt{10^x})^2=10^x\pi$$

물의 깊이가 $\log 3$일 때의 그릇에 담긴 물의 부피 V는

$$V=\int_0^{\log 3} S(x)dx=\int_0^{\log 3} 10^x\pi\,dx$$

$$=\left[\frac{10^x}{\ln 10}\pi\right]_0^{\log 3}$$

$$=\frac{2}{\ln 10}\pi$$

Q BOX

$$\frac{10^{\log 3}}{\ln 10}\pi-\frac{1}{\ln 10}\pi$$
$$=\frac{3}{\ln 10}\pi-\frac{1}{\ln 10}\pi$$
$$=\frac{2}{\ln 10}\pi$$

물의 깊이가 $\log 7$일 때의 그릇에 담긴 물의 부피는

$$\int_0^{\log 7} S(x)dx=\int_0^{\log 7} 10^x\pi\,dx$$

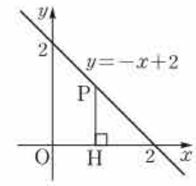
$$=\left[\frac{10^x}{\ln 10}\pi\right]_0^{\log 7}$$

$$=\frac{6}{\ln 10}\pi=3V$$

$$\frac{10^{\log 7}}{\ln 10}\pi-\frac{1}{\ln 10}\pi$$
$$=\frac{7}{\ln 10}\pi-\frac{1}{\ln 10}\pi$$
$$=\frac{6}{\ln 10}\pi$$

$\therefore k=3$ 답 3

08 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-x+2$ 위의 점 $P(x,\ -x+2)$ $(0\le x\le 2)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{PH}=-x+2$$

이때 점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{PH}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(-x+2)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-4x+4)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-4x+4)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ④

09 점 P의 x좌표를 x $(0\le x\le 2)$라 하면 $\overline{PH}=2^x$이므로 점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\overline{PH}^2=\frac{1}{2}\cdot(2^x)^2=\frac{1}{2}\cdot 4^x$$

따라서 구하는 부피는

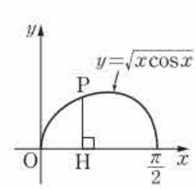
$$\int_0^2 S(x)\,dx=\int_0^2 \frac{1}{2}\cdot 4^x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4^x}{\ln 4}\right]_0^2$$

$$=\frac{15}{4\ln 2}$$

답 $\frac{15}{4\ln 2}$

10 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x\cos x}$ 위의 점 $P(x,\ \sqrt{x\cos x})$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{PH}=\sqrt{x\cos x}$$

이때 점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=(\sqrt{x\cos x})^2=x\cos x$$

W 10 정적분의 활용

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$$

$$=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

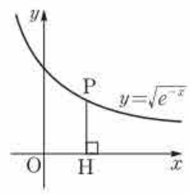
$$=\frac{\pi}{2}-\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

답 ①

$f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면
$f'(x)=1$,
$g(x)=\sin x$

11 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{e^{-x}}$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ \sqrt{e^{-x}})$ $(\ln 2\le x\le \ln k)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}$를 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이는



$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\sqrt{e^{-x}}$$

이때 점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PH}}\right)^2=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{e^{-x}}\right)^2=\frac{\pi}{8}e^{-x}$$

따라서 반원이 만드는 입체도형의 부피는

$$\int_{\ln 2}^{\ln k} S(x)dx=\int_{\ln 2}^{\ln k}\frac{\pi}{8}e^{-x}dx=\frac{\pi}{8}\Big[-e^{-x}\Big]_{\ln 2}^{\ln k}$$

$$=-\frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\right)$$

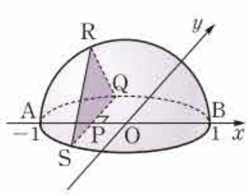
$$\frac{\pi}{8}\Big[-e^{-x}\Big]_{\ln 2}^{\ln k}=-\frac{\pi}{8}\Big[e^{-x}\Big]_{\ln 2}^{\ln k}=-\frac{\pi}{8}(e^{-\ln k}-e^{-\ln 2})=-\frac{\pi}{8}(e^{\ln\frac{1}{k}}-e^{\ln\frac{1}{2}})=-\frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\right)$$

이므로 $\quad -\frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{24},\quad \frac{1}{k}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{k}=\frac{1}{6}\quad \therefore\ k=6$

답 6

12 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 원점, 직선 AB를 x축으로 정하고, x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$ $(-1\le x\le 1)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 △QRS라 하자. 이때



$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{1-x^2}$$

직각삼각형 POQ에서
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}$

이므로 $\quad \overline{\mathrm{SQ}}=2\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{1-x^2}$

△QRS의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{SQ}}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{1-x^2})^2$$

$$=\sqrt{3}(1-x^2)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-1}^{1} S(x)dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{3}(1-x^2)dx$$

$$=2\int_0^1\sqrt{3}(1-x^2)dx$$

$$=2\sqrt{3}\Big[x-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

① $f(x)$가 우함수이면
$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$
② $f(x)$가 기함수이면
$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

28 속도와 거리

W 86쪽

01 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로

(1) $\int_0^1(2-\sqrt{t})dt=\Big[2t-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{4}{3}$

(2) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때, $v(t)=0$이므로

$2-\sqrt{t}=0,\quad \sqrt{t}=2$

$\therefore\ t=4$

따라서 구하는 점 P의 위치는

$$\int_0^4(2-\sqrt{t})dt=\Big[2t-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4=\frac{8}{3}$$

답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{8}{3}$

02 $\frac{dx}{dt}=-4\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-4\cos t$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=16\sin^2 t+16\cos^2 t=16$$

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^3\sqrt{16}\,dt=\Big[4t\Big]_0^3=12$$

답 12

03 (1) $\frac{dx}{dt}=2\sqrt{3}t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-1$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^1\sqrt{(2\sqrt{3}t)^2+(3t^2-1)^2}\,dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{9t^4+6t^2+1}\,dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{(3t^2+1)^2}\,dt$$

$$=\int_0^1(3t^2+1)dt$$

$$=\Big[t^3+t\Big]_0^1=2$$

(2) $\frac{dx}{dt}=2\cos t$, $\frac{dy}{dt}=2\sin t$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(2\cos t)^2+(2\sin t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\,dt$$

$$=\Big[2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi$$

(3) $y'=\frac{1}{2}\sqrt{x-4}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$y=\frac{1}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}$이므로
$y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(x-4)^{\frac{1}{2}}$
$=\frac{1}{2}\sqrt{x-4}$

$$\int_4^9\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{x-4}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_4^9\sqrt{1+\frac{1}{4}(x-4)}\,dx$$

$$=\int_4^9\frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_4^9=\frac{19}{3}$$

(4) $y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_{\ln 2}^{\ln 3}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(3-\frac{1}{3}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{7}{12}$$

답 (1) 2 (2) π (3) $\frac{19}{3}$ (4) $\frac{7}{12}$

Q BOX

$\Big[e^x-e^{-x}\Big]_{\ln 2}^{\ln 3}$
$=(e^{\ln 3}-e^{-\ln 3})-(e^{\ln 2}-e^{-\ln 2})$
$=(e^{\ln 3}-e^{\ln\frac{1}{3}})-(e^{\ln 2}-e^{\ln\frac{1}{2}})$
$=\left(3-\frac{1}{3}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)$
$=\frac{7}{6}$

04 점 P가 운동 방향을 바꿀 때, $v(t)=0$이므로

$2^t-2=0$ $\quad\therefore t=1$

$0\le t\le 1$일 때 $v(t)\le 0$이므로 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1|2^t-2|\,dt=\int_0^1(2-2^t)\,dt=\left[2t-\frac{2^t}{\ln 2}\right]_0^1$$
$$=\left(2-\frac{2}{\ln 2}\right)-\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)$$
$$=2-\frac{1}{\ln 2}$$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로 $\quad a+b=3$ 답 ②

05 시각 t에서의 점 P의 위치를 x_1이라 하면

$$x_1=\int_0^t\cos\frac{t}{2}\,dt=\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^t=2\sin\frac{t}{2}$$

시각 t에서의 점 Q의 위치를 x_2라 하면

$$x_2=\int_0^t 2\cos t\,dt=\Big[2\sin t\Big]_0^t=2\sin t$$

두 점 P, Q가 출발한 후 다시 만나려면

$2\sin\frac{t}{2}=2\sin t$, $\quad\sin\frac{t}{2}=2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$

$\sin\frac{t}{2}\left(2\cos\frac{t}{2}-1\right)=0$

$\therefore \sin\frac{t}{2}=0$ 또는 $\cos\frac{t}{2}=\frac{1}{2}$

$\frac{t}{2}=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \cdots$이므로

$t=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ 2\pi,\ \frac{10}{3}\pi,\ \cdots$

따라서 두 점 P, Q가 처음으로 다시 만나는 시각은 $\frac{2}{3}\pi$이다. 답 $\frac{2}{3}\pi$

$\sin\frac{t}{2}=0$에서
$\frac{t}{2}=0,\ \pi,\ 2\pi,\ \cdots$
$\cos\frac{t}{2}=\frac{1}{2}$에서
$\frac{t}{2}=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \cdots$

06 점 P의 시각 t에서의 위치를 x라 하면

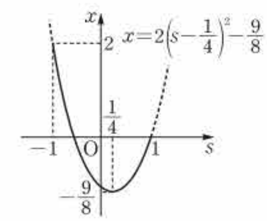
$$x=\int_0^t(\sin t-2\sin 2t)\,dt$$
$$=\Big[-\cos t+\cos 2t\Big]_0^t$$
$$=-\cos t+\cos 2t$$
$$=-\cos t+(2\cos^2 t-1)$$
$$=2\cos^2 t-\cos t-1$$

$0\le t\le\pi$에서
$-1\le\cos t\le 1$이므로
$-1\le s\le 1$

$\cos t=s$라 하면 $-1\le s\le 1$이고

$$x=2\cos^2 t-\cos t-1$$
$$=2s^2-s-1$$
$$=2\left(s-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$$

오른쪽 그림에서 x는 $s=-1$일 때 최댓값 2를 가지므로 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 2이다. 답 2



07 $\frac{dx}{dt}=\sqrt{2}e^t$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}e^{2t}-1$이므로 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1\sqrt{(\sqrt{2}e^t)^2+\left(\frac{1}{2}e^{2t}-1\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{2e^{2t}+\frac{1}{4}e^{4t}-e^{2t}+1}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}e^{4t}+e^{2t}+1}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{1}{2}e^{2t}+1\right)^2}\,dt=\int_0^1\left(\frac{1}{2}e^{2t}+1\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}e^{2t}+t\right]_0^1=\frac{e^2+3}{4}$$

답 ③

08 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$이므로 시각 $t=2$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_2^a\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\right\}^2}\,dt$$
$$=\int_2^a\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^2}+1\right)}\,dt$$
$$=\int_2^a\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}+1\right)\right\}^2}\,dt$$
$$=\int_2^a\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}+1\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}+t\right]_2^a$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{1}{a}+a\right)-\left(-\frac{1}{2}+2\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}-\frac{3}{2}\right)$$

$\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\right\}^2$
$=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{4t^4}$
$=\frac{1}{4t^4}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{4}$
$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^2}+1\right)$

따라서 $\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{8}$이므로

$a-\frac{1}{a}-\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$, $\quad a-\frac{1}{a}-\frac{15}{4}=0$

$a\ne 0$이므로 양변에 $4a$를 곱한다.

$4a^2-15a-4=0$, $\quad(4a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>2)$ 답 4

09 $\frac{dx}{dt}=2\sin t\cos t=\sin 2t$,

$\frac{dy}{dt}=-2\cos t\sin t=-\sin 2t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

W 10 정적분의 활용

$(\sin 2t,\ -\sin 2t)$

점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{(\sin 2t)^2+(-\sin 2t)^2}$$
$$=\sqrt{2\sin^2 2t}=\sqrt{2}\,|\sin 2t|$$

이때 점 P가 출발한 후 처음으로 속력이 0이 되는 때는 $\sqrt{2}\,|\sin 2t|=0$, 즉 $|\sin 2t|=0$에서

$$t=\frac{\pi}{2}$$

따라서 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,|\sin 2t|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin 2t\,dt$$
$$=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\sqrt{2}$$

답 ②

10 $y'=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{x^2}$이므로

$$l=\int_2^3\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_2^3\sqrt{\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}}\,dx$$
$$=\int_2^3\sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_2^3\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{x}\right]_2^3$$
$$=\frac{7}{4}$$

$\therefore\ 20l=35$

답 ④

$$1+\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2$$
$$=1+\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}$$
$$=\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}$$

11 $y'=\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}$이므로 주어진 곡선의 길이는

$$\int_1^4\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^4\sqrt{\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}}\,dx$$
$$=\int_1^4\sqrt{\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^4\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{8}x^2+\ln x\right]_1^4$$
$$=\frac{15}{8}+2\ln 2$$

따라서 $a=\frac{15}{8}$, $b=2$이므로

$$ab^3=\frac{15}{8}\cdot 8=15$$

답 ⑤

12 $\frac{dx}{d\theta}=3\sin^2\theta\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-3\cos^2\theta\sin\theta$이므로

구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(3\sin^2\theta\cos\theta)^2+(-3\cos^2\theta\sin\theta)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\sin^4\theta\cos^2\theta+9\cos^4\theta\sin^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}\,d\theta$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\,|\sin\theta\cos\theta|\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}\,|\sin 2\theta|\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}\sin 2\theta\,d\theta$$
$$=\left[-\frac{3}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 ③