일품 확률과 통계

정답 및 풀이

I 순열과 조합

01 순열

개념 & 기출 유형 — 본책 8쪽 ~ 9쪽

001 4　002 ②　003 ④　004 72　005 ③
006 48　007 6　008 ②　009 ②　010 ⑤
011 1440　012 ⑤

내신 1등급 도전하기 — 본책 10쪽 ~ 11쪽

013 11　014 ①　015 ③　016 81　017 40
018 ②　019 330　020 ⑤　021 ①　022 36
023 120　024 60　025 ③

수능 따라잡기 — 본책 12쪽

026 ①　027 ④　028 ④　029 96　030 13
031 ②

02 여러 가지 순열

개념 & 기출 유형 — 본책 13쪽 ~ 14쪽

032 12　033 ②　034 ②　035 ⑤　036 6
037 60　038 90　039 ④　040 ④　041 ④
042 ②　043 78

내신 1등급 도전하기 — 본책 15쪽 ~ 16쪽

044 288　045 ③　046 ④　047 9　048 ④
049 52　050 54400　051 ③　052 4200　053 ③
054 55　055 ③　056 ③　057 138

수능 따라잡기 — 본책 17쪽 ~ 18쪽

058 864　059 ⑤　060 ①　061 ③　062 18
063 256　064 ④　065 ④　066 ④　067 19
068 ③　069 156

03 조합과 이항정리

개념 & 기출 유형 — 본책 19쪽 ~ 21쪽

070 ⑤　071 256　072 39　073 ③　074 71
075 ④　076 ③　077 2　078 ④　079 ②
080 66　081 30　082 ③　083 49　084 ③
085 8　086 ①　087 65

내신 1등급 도전하기 — 본책 22쪽 ~ 25쪽

088 50　089 ②　090 ③　091 18
092 18000　093 ①　094 ④　095 70　096 ④
097 7　098 36　099 ③　100 21　101 ①
102 ②　103 56　104 ④　105 ④　106 3
107 304　108 31　109 ⑤　110 3　111 ④
112 30　113 315　114 ②　115 98　116 ②

수능 따라잡기 — 본책 26쪽 ~ 27쪽

117 ②　118 ②　119 126　120 90　121 ⑤
122 ①　123 628　124 ②　125 ⑤　126 ②
127 ①　128 63　129 ⑤　130 15　131 42

1등급 완성하기

본책 28쪽 ~ 31쪽

132	12	**133**	10	**134**	③	**135**	78	**136**	④
137	120	**138**	256	**139**	⑤	**140**	③	**141**	⑤
142	960	**143**	164	**144**	2520	**145**	360	**146**	④
147	①	**148**	116	**149**	④	**150**	⑤	**151**	14
152	②	**153**	18	**154**	⑤	**155**	②	**156**	①
157	⑤	**158**	2592	**159**	2	**160**	③	**161**	11

Ⅱ 확률

04 확률의 뜻과 활용

개념 & 기출 유형

본책 34쪽 ~ 37쪽

162	③	**163**	⑤	**164**	⑤	**165**	④	**166**	①
167	③	**168**	5	**169**	③	**170**	225	**171**	$\frac{11}{18}$
172	③	**173**	$\frac{2}{3}$	**174**	④	**175**	⑤	**176**	0
177	③	**178**	③	**179**	③	**180**	③	**181**	③
182	④	**183**	⑤						

내신 1등급 도전하기

본책 38쪽 ~ 41쪽

184	②	**185**	④	**186**	10	**187**	③	**188**	$\frac{1}{15}$
189	④	**190**	113	**191**	②	**192**	③	**193**	$\frac{55}{216}$
194	③	**195**	$\frac{1}{5}$	**196**	$\frac{1}{2}$	**197**	③	**198**	④
199	$\frac{2}{3}$	**200**	$\frac{2}{3}$	**201**	②	**202**	②	**203**	$\frac{5}{8}$
204	②	**205**	④	**206**	7	**207**	$\frac{37}{45}$	**208**	$\frac{25}{32}$

수능 따라잡기

본책 42쪽

209	③	**210**	④	**211**	②	**212**	9	**213**	③
214	③								

05 조건부확률

개념 & 기출 유형

본책 43쪽 ~ 44쪽

215	$\frac{9}{19}$	**216**	$\frac{16}{49}$	**217**	③	**218**	⑤	**219**	$\frac{13}{30}$
220	③	**221**	②	**222**	③	**223**	$\frac{51}{50}$	**224**	⑤
225	④								

내신 1등급 도전하기

본책 45쪽 ~ 47쪽

226	46	**227**	①	**228**	$\frac{3}{7}$	**229**	①	**230**	39
231	④	**232**	④	**233**	②	**234**	$\frac{1}{6}$	**235**	⑤
236	②	**237**	$\frac{1}{4}$	**238**	③	**239**	③	**240**	$\frac{8}{27}$
241	23	**242**	$\frac{9}{128}$	**243**	$\frac{1}{8}$				

수능 따라잡기

본책 48쪽 ~ 49쪽

244	②	**245**	54	**246**	29	**247**	86	**248**	⑤
249	⑤	**250**	②	**251**	③	**252**	④	**253**	③
254	③	**255**	23						

1등급 완성하기

본책 50쪽 ~ 53쪽

256 $\frac{1}{9}$ **257** ③ **258** ② **259** ④ **260** 7

261 $\frac{1}{1920}$ **262** 5 **263** ③ **264** $\frac{3}{4}$ **265** ④

266 ② **267** ② **268** ④ **269** ② **270** ①

271 $\frac{233}{550}$ **272** ③ **273** $\frac{5}{18}$ **274** $\frac{11}{32}$ **275** ③

276 ④ **277** $\frac{7}{40}$ **278** $\frac{3}{496}$ **279** 20 **280** 11

Ⅲ 통계

06 확률분포

개념 & 기출 유형

본책 56쪽 ~ 58쪽

281 ② **282** ④ **283** ⑤ **284** ②

285 1800원 **286** ③ **287** 2 **288** $\frac{13}{4}$

289 ⑤ **290** ④ **291** $\frac{28}{3}$ **292** ② **293** ③

294 $\frac{13}{5}$ **295** ④ **296** ③ **297** ④

내신 1등급 도전하기

본책 59쪽 ~ 60쪽

298 ③ **299** 28 **300** $\frac{3}{2}$ **301** 7 **302** ④

303 $\frac{\sqrt{105}}{6}$ **304** 147 **305** ③ **306** ③ **307** ④

308 $\frac{51}{2}$ **309** 512

수능 따라잡기

본책 61쪽

310 ④ **311** ① **312** ④ **313** ② **314** 37

07 정규분포

개념 & 기출 유형

본책 62쪽 ~ 64쪽

315 ③ **316** ② **317** 30 **318** $a-2b$ **319** $\frac{37}{2}$

320 ③ **321** $\frac{8}{5}$ **322** ③ **323** ③ **324** ②

325 21 **326** 20시간 **327** ③ **328** ⑤ **329** ②

내신 1등급 도전하기

본책 65쪽 ~ 67쪽

330 ③ **331** $\frac{1}{4}$ **332** 32 **333** 0.5 **334** ③

335 ④ **336** ① **337** ③ **338** 13 **339** ⑤

340 ② **341** 240g **342** 0.0919 **343** ② **344** ⑤

345 228 **346** 16

수능 따라잡기

본책 68쪽

347 ③ **348** ③ **349** 48 **350** ④ **351** ②

08 통계적 추정

개념 & 기출 유형

본책 69쪽 ~ 71쪽

352 ② **353** 15 **354** ④ **355** ③ **356** ③

357 ③ **358** ⑤ **359** 62

360 $138.28 \le m \le 141.72$ **361** ① **362** ①

363 0.02 **364** 0.8185 **365** ④ **366** ④

367 $\frac{1}{10}$

내신 1등급 도전하기

본책 72쪽 ~ 74쪽

368 $\frac{7}{9}$ **369** ① **370** ① **371** 300 **372** ③

373 ② **374** 0.006 **375** 30 **376** ② **377** ③

378 94 **379** 92 **380** ③ **381** ③

382 0.158 **383** ① **384** 188 **385** 278

수능 따라잡기

본책 75쪽

386 ④ **387** ③ **388** ② **389** 858 **390** 69

1등급 완성하기

본책 76쪽 ~ 79쪽

391 ④ **392** $\frac{161}{36}$ **393** $\frac{2}{3}$ **394** ② **395** 11

396 ⑤ **397** 300 **398** ③ **399** 8 **400** ②

401 ② **402** ② **403** 0.07 **404** ④ **405** 4

406 ⑤ **407** ④ **408** 0.805 **409** 400 **410** ④

411 ② **412** 0.64 **413** 1657 **414** ③ **415** 300

Ⅰ 순열과 조합

01 순열 본책 8쪽

001 뽑힌 카드에 적힌 세 수를 x, y, z라 하면 평균이 4 또는 5가 되는 경우는

$\dfrac{x+y+z}{3}=4$ 또는 $\dfrac{x+y+z}{3}=5$

$\therefore x+y+z=12$ 또는 $x+y+z=15$

(ⅰ) 세 수의 합이 12인 경우

3, 4, 5의 1가지

(ⅱ) 세 수의 합이 15인 경우

3, 4, 8 또는 3, 5, 7 또는 4, 5, 6의 3가지

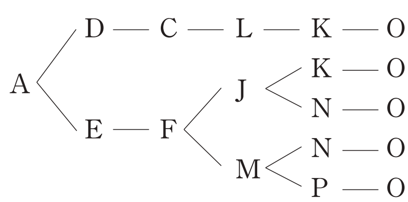
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$1+3=4$

(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어날 수 없다.
➡ 합의 법칙 이용

답 4

002 꼭짓점 A에서 꼭짓점 O까지 가는 방법 중 꼭짓점 B와 꼭짓점 G를 지나지 않고 최단 거리로 가는 방법은 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 5이다.

답 ②

참고 주어진 조건이 복잡하여 구하는 경우를 일일이 나열하기 힘들 때에는 수형도 또는 순서쌍을 이용하면 편리하다.

003 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는
$D=b^2-4ac\geq 0$이어야 한다.

(ⅰ) $b=2$일 때, 순서쌍 (a, c)는

$(1, 1)$의 1개

(ⅱ) $b=3$일 때, 순서쌍 (a, c)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$의 3개

(ⅲ) $b=4$일 때, 순서쌍 (a, c)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$의 8개

(ⅳ) $b=5$일 때, 순서쌍 (a, c)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$의 12개

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$1+3+8+12=24$

답 ④

참고 $b=1$일 때, $1-4ac\geq 0$

$\therefore ac\leq\dfrac{1}{4}$

$a\geq 1$, $c\geq 1$이므로 $ac\leq\dfrac{1}{4}$을 만족시키는 순서쌍 (a, c)는 존재하지 않는다.

004 (ⅰ) 갑이 지나갈 길을 택하는 방법의 수

$3\cdot 3\cdot 2=18$

(ⅱ) 을이 지나갈 길을 택하는 방법의 수

갑이 택한 길을 지나지 않아야 하므로

$1\cdot 2\cdot 2=4$

$(2-1)\times(3-1)\times(3-1)=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$18\cdot 4=72$

답 72

005 (ⅰ) 2□□ 꼴의 짝수

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 4, 6, 8의 4가지, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 8가지이므로

0, 1, 2, ⋯, 9의 10개의 숫자 중 백의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 숫자

$4\cdot 8=32$

(ⅱ) 3□□ 꼴의 짝수

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 8가지이므로

$5\cdot 8=40$

(ⅲ) 4□□ 꼴의 짝수

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 6, 8의 4가지, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 8가지이므로

$4\cdot 8=32$

이상에서 구하는 수의 개수는

$32+40+32=104$

답 ③

006 A도시에 칠할 수 있는 색은 4가지, D도시에 칠할 수 있는 색은 A도시에 칠한 색을 제외한 3가지, B도시에 칠할 수 있는 색은 A도시와 D도시에 칠한 색을 제외한 2가지, C도시에 칠할 수 있는 색은 B도시와 D도시에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$4\cdot 3\cdot 2\cdot 2=48$

답 48

007 ${}_n\mathrm{P}_4=3\cdot{}_n\mathrm{P}_3$에서

$n(n-1)(n-2)(n-3)=3n(n-1)(n-2)$

${}_n\mathrm{P}_4$에서 $n\geq 4$이므로 양변을 $n(n-1)(n-2)$로 나누면

$n(n-1)(n-2)>0$

$n-3=3 \qquad \therefore n=6$

답 6

008 ${}_n\mathrm{P}_3 : {}_{n+1}\mathrm{P}_2=2:1$에서

$2\cdot{}_{n+1}\mathrm{P}_2={}_n\mathrm{P}_3$

$2(n+1)n=n(n-1)(n-2)$

$2(n+1)=(n-1)(n-2)$

$n>0$이므로 양변을 n으로 나눈다.

$2n+2=n^2-3n+2$

$n^2-5n=0, \quad n(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n\geq 3$)

${}_n\mathrm{P}_3$에서 $n\geq 3$

$\therefore {}_{n+2}\mathrm{P}_n={}_7\mathrm{P}_5=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=2520$

답 ②

009 ${}_{n+1}P_3+{}_{n-1}P_2$

$=(n+1)n(n-1)+(n-1)(n-2)$

$=n^3-n+n^2-3n+2$

$=n^3+n^2-4n+2$

이므로 $n^3+n^2-4n+2=66$

$n^3+n^2-4n-64=0$

$(n-4)(n^2+5n+16)=0$

$\therefore n=4\ (\because n^2+5n+16>0)$

답 ②

1등급 비밀노트

고차방정식 $f(x)=0$에서 $f(x)$의 인수분해

다항식 $f(x)$에서 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가지므로 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값을 찾아 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

일품 BOX

$f(n)=n^3+n^2-4n-64$라 하면 $f(4)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(n)$을 인수분해하면

4	1	1	−4	−64
		4	20	64
	1	5	16	0

$\therefore f(n)=(n-4)(n^2+5n+16)$

010 7개의 문자 중 모음은 A, E이고, 자음은 B, C, D, F, G이다.

양 끝에 5개의 자음 중 두 개의 문자를 나열하는 방법의 수는

${}_5P_2=20$

2개의 모음을 한 묶음으로 생각하여 이 묶음과 3개의 자음을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 방법의 수 ➡ $n!$

이때 A와 E가 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$20\cdot24\cdot2=960$

답 ⑤

011 남학생 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$4!=24$

남학생 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리 중 3개의 자리에 여학생 3명을 세우는 방법의 수는

남학생을 ○라 하면 ∨○∨○∨○∨○∨

${}_5P_3=60$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot60=1440$

답 1440

012 i와 o 사이에 i와 o를 제외한 나머지 7개의 문자 중 3개의 문자를 나열하는 방법의 수는

${}_7P_3=210$

i□□□o를 한 묶음으로 생각하여 이 묶음과 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$5!=120$

이때 i와 o가 자리를 바꾸는 방법의 수는

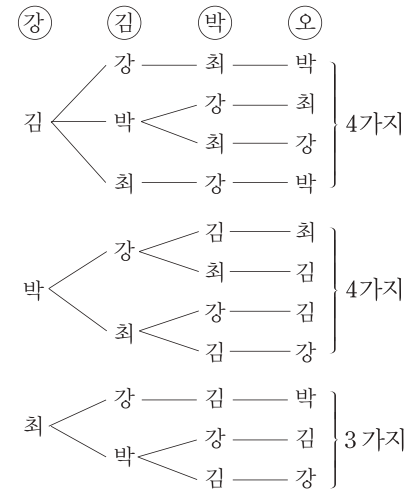
$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$210\cdot120\cdot2=50400$

답 ⑤

013 남자 4명에 대하여 여자 4명을 짝으로 정하는 방법은 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는

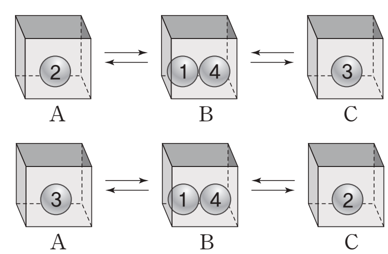
$4+4+3=11$

답 11

1등급 비밀노트

n번째에는 n이 오지 않도록 배열하는 경우의 수는 수형도를 이용한다.

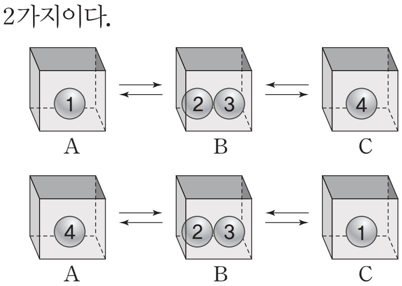
014 ㄱ. 한 번의 시행 후에 나올 수 있는 결과는 다음과 같이 2가지이다.



ㄴ. 1번 공을 A 또는 C에서 B로 옮기면 3번 공은 A 또는 C로 옮겨지고, 마찬가지로 1번 공을 B에서 A 또는 C로 옮기면 3번 공은 B로 옮겨진다. 따라서 1번 공과 3번 공을 B상자에 같이 넣을 수 없다.

ㄷ. 짝수 번의 시행 후에 나올 수 있는 결과는 다음과 같이 2가지이다.

짝수 번의 시행 후 B상자에는 항상 2번 공과 3번 공이 들어 있다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

015 $n=2^x3^y$이라 하면 n의 양의 약수의 개수는

$(x+1)(y+1)$

즉 $(x+1)(y+1)=20$이므로 등식을 만족시키는 각 경우는 다음 표와 같다.

$x+1$	1	2	4	5	10	20
$y+1$	20	10	5	4	2	1

따라서 자연수 n의 개수는 6이다.

답 ③

1등급 비밀노트

양의 약수의 개수
자연수 N이 $N=p^lq^m$(p, q는 서로 다른 소수, l, m은 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 개수는

$(l+1)(m+1)$

016 문제 이해 abc가 홀수이면 a, b, c가 모두 홀수이므로 $a+b+c$도 홀수가 되어 $abc+a+b+c$는 짝수이다.
즉 $abc+a+b+c$가 홀수가 되려면 abc는 짝수, $a+b+c$는 홀수이어야 한다. ● 30%

해결 과정 따라서 a, b, c 중 한 개는 홀수, 나머지 두 개는 짝수이어야 하므로 조건을 만족시키는 경우는 순서쌍 (a, b, c)가

(홀수, 짝수, 짝수), (짝수, 홀수, 짝수),
(짝수, 짝수, 홀수)

인 경우이다.
이때 위의 각 경우의 눈이 나오는 경우의 수는

$3\cdot3\cdot3=27$ ● 50%

답 구하기 따라서 구하는 경우의 수는

$27\cdot3=81$ ● 20%

답 81

1등급 비밀노트

네 수의 합이 홀수가 되려면 네 수 중 한 개 또는 세 개가 홀수이어야 하므로 a, b, c, abc 중 한 개 또는 세 개가 홀수가 되는 경우를 구하면 다음과 같다.

(i) a, b, c 중 한 개의 수가 홀수이면 abc는 짝수
➡ a, b, c, abc 중 한 개의 수가 홀수이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) a, b, c 중 두 개의 수가 홀수이면 abc는 짝수
➡ a, b, c, abc 중 두 개의 수가 홀수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) a, b, c 모두 홀수이면 abc는 홀수
➡ a, b, c, abc 네 개의 수가 모두 홀수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 조건을 만족시키는 경우는 a, b, c 중 한 개는 홀수, 나머지 두 개는 짝수인 경우이다.

017 해결 과정 (i) 첫 번째 카드로 2, 4, 6, 8을 선택하는 경우 9장의 카드를 모두 가져오는 방법은 없다. ● 20%

일품 BOX

• 2^x의 양의 약수의 개수는 2^0, 2^1, $\cdots$, 2^x의 $x+1$
3^y의 양의 약수의 개수는 3^0, 3^1, $\cdots$, 3^y의 $y+1$

• 두 번째 카드가 4 또는 6 또는 8인 경우

• 조건을 만족시키는 자연수 n은
2^03^{19}, 2^13^9, 2^33^4, 2^43^3, 2^93^1, $2^{19}3^0$
의 6개

(ii) 첫 번째 카드로 5를 선택한 경우 두 번째 카드를 선택하는 방법은 2, 4, 6, 8의 4가지가 있고 두 번째 카드가 2인 경우의 수형도를 그려 보면

$5-2 <$ $1-4-7-8-9-6-3$
$\qquad\quad$ $3-6-9-8-7-4-1$

의 2가지가 있다. 다른 경우도 마찬가지이므로 9장의 카드를 모두 가져오는 방법의 수는

$4\cdot2=8$ ● 30%

(iii) 첫 번째 카드로 1, 3, 7, 9를 선택한 경우 두 번째 카드를 선택하는 방법은 2가지가 있고 첫 번째 카드가 1, 두 번째 카드가 2인 경우의 수형도를 그려 보면

$1-2 <$ $5-4-7-8-9-6-3$
$\qquad$ $3-6 <$ $5-4-7-8-9$
$\qquad\qquad$ $9-8 <$ $5-4-7$
$\qquad\qquad\qquad$ $7-4-5$

의 4가지가 있다. 다른 경우도 마찬가지이므로 9장의 카드를 모두 가져오는 방법의 수는

$4\cdot2\cdot4=32$ ● 30%

답 구하기 이상에서 구하는 방법의 수는

$8+32=40$ ● 20%

답 40

018 (i) 점 A에서 출발하는 경우
ⓘ B 또는 D를 지나는 방법은 각각 2가지씩이므로
$2\cdot2=4$
ⓘⓘ E를 지나는 방법의 수는 5
$\therefore 4+5=9$

(ii) 점 B에서 출발하는 경우
ⓘ A를 지나는 방법의 수는 2
ⓘⓘ C를 지나는 방법의 수는 1
ⓘⓘⓘ E를 지나는 방법의 수는 5
$\therefore 2+1+5=8$

(iii) 점 C에서 출발하는 경우
B 또는 F를 지나는 방법은 각각 2가지씩이므로
$2\cdot2=4$

(iv) 점 E에서 출발하는 경우
ⓘ A 또는 I를 지나는 방법은 각각 2가지씩이므로
$2\cdot2=4$
ⓘⓘ B 또는 D 또는 F 또는 H를 지나는 방법은 각각 2가지씩이므로 $4\cdot2=8$
$\therefore 4+8=12$

점 I에서 출발하는 방법의 수는 점 A에서 출발하는 방법의 수와 같고, 점 D, F, H에서 출발하는 방법의 수는 점 B에서 출발하는 방법의 수와 같다. 또 점 G에서 출발하는 방법의 수는 점 C에서 출발하는 방법의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는

$9\cdot2+8\cdot4+4\cdot2+12=70$

답 ②

일품 BOX

019 $\sum_{n=2}^{10} {}_{n}\mathrm{P}_{2}=\sum_{n=2}^{10} n(n-1)$

$=\sum_{n=2}^{10}(n^2-n)$

$=\sum_{n=2}^{10} n^2-\sum_{n=2}^{10} n$

$=\sum_{n=1}^{10} n^2-1-\left(\sum_{n=1}^{10} n-1\right)$

$=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-\frac{10\cdot 11}{2}$

$=385-55=330$ 답 330

자연수의 거듭제곱의 합

$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

020 ${}_{n}\mathrm{P}_{r+1}+(r+1){}_{n}\mathrm{P}_{r}$

$=\frac{n!}{(n-r-1)!}+(r+1)\cdot\frac{n!}{(n-r)!}$

$=\frac{(\boxed{n-r})n!}{(n-r)(n-r-1)!}+(r+1)\cdot\frac{n!}{(n-r)!}$

$=\frac{(\boxed{n-r})n!}{(n-r)!}+\frac{(r+1)n!}{(n-r)!}$

$=\frac{n!(n-r+r+1)}{(n-r)!}$

$=\frac{(n+1)!}{(n-r)!}$

$=\frac{(n+1)!}{\{(n+1)-(r+1)\}!}$

$=\boxed{{}_{n+1}\mathrm{P}_{r+1}}$

$\therefore$ (가) ${}_{n+1}\mathrm{P}_{r+1}$ (나) $n-r$ 답 ⑤

021 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

${}_{5}\mathrm{P}_{3}=5\cdot4\cdot3=60$

60개의 자연수 중에서 백의 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5인 자연수가 각각 12개씩이므로 백의 자리의 합은

$(1+2+3+4+5)\cdot12\cdot100=18000$

4개의 수 중에서 2개를 뽑는 순열의 수이므로 ${}_{4}\mathrm{P}_{2}=12$

백의 자리의 합이므로 자리의 값을 곱하는 것을 빠뜨리지 않도록 한다.

60개의 자연수 중에서 십의 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5인 자연수가 각각 12개씩이므로 십의 자리의 합은

$(1+2+3+4+5)\cdot12\cdot10=1800$

60개의 자연수 중에서 일의 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5인 자연수가 각각 12개씩이므로 일의 자리의 합은

$(1+2+3+4+5)\cdot12=180$

따라서 구하는 자연수의 총합은

$18000+1800+180=19980$ 답 ①

022 문제 이해 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다. ● 20%

해결 과정 (i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

0을 제외한 5개의 숫자 중 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_{5}\mathrm{P}_{2}=20$ ● 30%

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 4개이고, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리에 온 숫자와 5를 제외한 4개이므로

$4\cdot4=16$ ● 30%

답 구하기 (i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$20+16=36$ ● 20%

답 36

023 6개의 좌석을 왼쪽부터 차례대로 a, b, c, d, e, f라 하자.

할아버지, 아버지, 아들이 서로 이웃하지 않게 앉으려면 3명은

a, c, e 또는 a, c, f 또는 a, d, f 또는 b, d, f

에 앉아야 한다.

(i) a, c, e에 앉는 경우

어머니와 딸이 항상 서로 이웃하지 않게 되므로 방법의 수는

$3!\cdot3!=36$

할아버지, 아버지, 아들이 자리를 바꾸는 방법의 수 $3!$
나머지 가족이 자리를 바꾸는 방법의 수 $3!$

(ii) a, c, f에 앉는 경우

어머니와 딸 중 1명은 b에 앉아야 하므로 방법의 수는

$3!\cdot2\cdot2=24$

할아버지, 아버지, 아들이 자리를 바꾸는 방법의 수 $3!$
어머니와 딸 중 b에 앉을 사람을 정하는 방법의 수 2
d, e에 앉는 두 사람이 자리를 바꾸는 방법의 수 2

(iii) a, d, f에 앉는 경우

어머니와 딸 중 1명은 e에 앉아야 하므로 방법의 수는

$3!\cdot2\cdot2=24$

(iv) b, d, f에 앉는 경우

어머니와 딸이 항상 서로 이웃하지 않게 되므로 방법의 수는

$3!\cdot3!=36$

이상에서 구하는 방법의 수는

$36+24+24+36=120$ 답 120

024 해결 과정 (i) 11월 6일의 전입생 1명이 배정받는 반은 1반 또는 4반이므로

2가지 ● 30%

(ii) 11월 10일의 전입생 1명이 배정받는 반은 1반 또는 4반 중 11월 6일의 전입생 1명이 배정받지 않은 반이므로

1가지 ● 30%

(iii) 11월 20일의 전입생 2명이 배정받는 반은 1, 2, 3, 4, 8, 10반 중 두 반이므로

${}_{6}\mathrm{P}_{2}=30$ ● 30%

답 구하기 이상에서 전입생 4명이 반을 배정받는 경우의 수는

$2\cdot1\cdot30=60$ ● 10%

답 60

025 3의 배수인 3, 6, 9를 한 묶음으로 생각하여 A라 하자.

1, 2, 5, 7, A를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5!$

이때 1, 2, 5, 7, A의 5개의 사이사이 및 양 끝의 6개의 자리 중 2개의 자리에 4의 배수인 4, 8을 나열하는 방법의 수는 $_6P_2$

묶음 A 안에서 3, 6, 9를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$3!$

$\therefore N=5!\cdot{}_6P_2\cdot 3!$

$=(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)\times(6\cdot5)\times(3\cdot2\cdot1)$

$=2^5\cdot3^3\cdot5^2$

따라서 N의 약수의 개수는

$(5+1)\cdot(3+1)\cdot(2+1)=72$ 답 ③

일품 BOX

3의 배수인 3, 6, 9 와 4의 배수인 4, 8 을 제외한 수

026 a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이이고 조건 (나)에서 a가 가장 긴 변의 길이이므로

$a<b+c$

이때 조건 (다)에서 $b+c=12-a$이므로

$a<12-a$, $2a<12$ $\therefore a<6$

또 조건 (나), (다)에 의하여

$a+b+c\le 3a$

$12\le 3a$ $\therefore a\ge 4$

$\therefore 4\le a<6$

(i) $a=4$일 때, $b+c=8$이므로

$b=4$, $c=4$

(ii) $a=5$일 때, $b+c=7$이므로

$b=5$, $c=2$ 또는 $b=4$, $c=3$

(i), (ii)에서 서로 다른 삼각형의 개수는

$1+2=3$ 답 ①

027 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 6을 제외한 5개, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 6의 1개, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리에 온 숫자와 6을 제외한 5개이므로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$5\cdot1\cdot5=25$

25개의 자연수 중에서 백의 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5인 자연수가 각각 5개씩이므로 백의 자리의 합은

$(1+2+3+4+5)\cdot5\cdot100=7500$

25개의 자연수 모두 십의 자리 숫자가 6이므로 십의 자리의 합은

$6\cdot25\cdot10=1500$

25개의 자연수 중에서 일의 자리의 숫자가 0인 자연수가 5개, 일의 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5인 자연수가 각각 4개씩이므로 일의 자리의 합은

$0\cdot5+(1+2+3+4+5)\cdot4=60$

따라서 구하는 자연수의 총합은

$7500+1500+60=9060$ 답 ④

백의 자리의 숫자가 각각 1, 2, 3, 4, 5인 경우

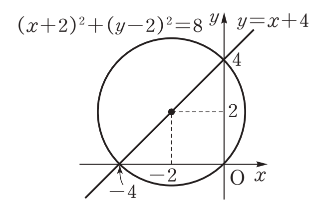
세 자리 자연수이므로 백의 자리에 0이 올 수 없다.

028 $x^2+y^2+4x-4y=0$에서

$(x+2)^2+(y-2)^2=8$

이므로 중심이 $(-2, 2)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원이다.

또 직선 $y=x+4$는 기울기가 1이고 원의 중심 $(-2, 2)$를 지나는 직선이므로 x축, y축 및 직선 $y=x+4$로 나누어진 원의 내부의 영역은 다음 그림과 같다.



즉 원의 내부는 모두 4개의 영역으로 나누어지므로 7가지 색 중에서 4가지의 색을 택하여 각 영역에 색을 칠하면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$_7P_4=840$ 답 ④

029 (가)에 들어가는 수를 x, (가)를 포함한 가로줄의 칸에 쓴 5개의 수의 합을 y라 하면 가로줄의 수의 합과 세로줄의 수의 합이 같으므로

$2+3+4+5+6+7+8+x=2y$ ...... ㉠

$\therefore y=\dfrac{35+x}{2}$

이때 ㉠에서 $35+x$는 짝수이므로 x는 홀수이다.

2y는 짝수이므로 $35+x$도 짝수이다.

(i) $x=3$일 때

$y=\dfrac{35+3}{2}=19$에서 두 수의 합이 16인 두 수는 존재하지 않으므로 세로줄을 채울 수 없다.

세로줄의 나머지 두 수를 a, b라 하면 $a+b+3=19$ $\therefore a+b=16$

(ii) $x=5$일 때

$y=\dfrac{35+5}{2}=20$에서 (가)를 제외한 세로줄의 칸에는 7과 8을, (가)를 제외한 가로줄의 칸에는 2, 3, 4, 6을 쓰면 된다.

세로줄에 7, 8을 써넣는 방법의 수는 $2!=2$

가로줄에 2, 3, 4, 6을 써넣는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 이 경우의 방법의 수는 $2\cdot24=48$

(iii) $x=7$일 때

$y=\dfrac{35+7}{2}=21$에서 (가)를 제외한 세로줄의 칸에는 6과 8을, (가)를 제외한 가로줄의 칸에는 2, 3, 4, 5를 쓰면 된다.

따라서 이 경우의 방법의 수는 (ii)와 마찬가지로

$2!\cdot4!=48$

이상에서 구하는 방법의 수는

$48+48=96$ 답 96

030 남학생 9명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$9!$

이때 다음 그림과 같이 남학생 9명을 3명씩 묶어서 그 사이사이 및 양 끝의 네 자리에 여학생 4명을 세우는 방법의 수는 $\quad 4!$

V(남)(남)(남)V(남)(남)(남)V(남)(남)(남)V

따라서 조건을 만족시키는 방법의 수는

$9!\cdot 4!$

$a=9$, $b=4$이므로 $\quad a+b=13$

답 13

031 두 명이 이웃하게 앉는 방법은 다음과 같다.

(A−1, A−2), (A−2, A−3), (A−3, A−4),
(B−1, B−2), (B−2, B−3), (B−3, B−4)

(ⅰ) 엄마와 막내아들이

(A−1, A−2) 또는 (A−3, A−4)
또는 (B−1, B−2) 또는 (B−3, B−4)

에 앉는 경우

엄마와 막내아들이 (A−1, A−2)에 앉을 때 할아버지와 할머니가 앉을 수 있는 경우는

(A−3, A−4), (B−1, B−2),
(B−2, B−3), (B−3, B−4)의 4가지

엄마와 막내아들, 할아버지와 할머니가 자리를 바꾸는 방법의 수는 각각 $\quad 2!=2$

남은 자리에 나머지 가족 4명이 앉는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 이 경우의 방법의 수는

$4\cdot 2\cdot 2\cdot 24=384$

엄마와 막내아들이 (A−3, A−4) 또는 (B−1, B−2) 또는 (B−3, B−4)에 앉을 때에도 방법의 수는 동일하므로 $\quad 384\cdot 4=1536$

(ⅱ) 엄마와 막내아들이 (A−2, A−3) 또는 (B−2, B−3)에 앉는 경우

엄마와 막내아들이 (A−2, A−3)에 앉을 때 할아버지와 할머니가 앉을 수 있는 경우는

(B−1, B−2), (B−2, B−3),
(B−3, B−4)의 3가지

엄마와 막내아들, 할아버지와 할머니가 자리를 바꾸는 방법의 수는 각각 $\quad 2!=2$

남은 자리에 나머지 가족 4명이 앉는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 이 경우의 방법의 수는

$3\cdot 2\cdot 2\cdot 24=288$

엄마와 막내아들이 (B−2, B−3)에 앉을 때에도 방법의 수는 동일하므로 $\quad 288\cdot 2=576$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$1536+576=2112$

답 ②

일품 BOX

여학생끼리 이웃하지 않고 남학생끼리 이웃한 학생 수가 항상 3명 이상인 경우는 남학생이 3명, 3명, 3명으로 서는 경우뿐이다.

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수
➡ $(n-1)!$

8가지 색을 원형으로 배열하여 칠하는 원순열의 수

02 여러 가지 순열

본책 13쪽

032 북한의 대표의 자리가 결정되면 한국의 대표의 자리는 마주 보는 자리에 고정된다.

한편 북한과 중국의 대표를 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이때 북한과 중국의 대표가 자리를 바꾸는 방법의 수는

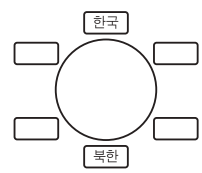
$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot 2=12$

답 12

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 한국과 북한의 대표를 마주 보게 앉힌 후에 중국의 대표를 북한의 대표와 이웃하게 앉히는 방법의 수는



$2!=2$

나머지 3개의 자리에 대표 3명을 앉히는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\cdot 6=12$

033 가운데 정사각형을 칠하는 방법의 수는 9이다.

이때 나머지 8가지 색을 원형으로 배열하여 칠하는 한 가지 방법에 대하여 정사각형에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.

①	②	③
⑧	⑨	④
⑦	⑥	⑤

⑧	①	②
⑦	⑨	③
⑥	⑤	④

따라서 구하는 방법의 수는

$9\cdot(8-1)!\cdot 2=18\cdot 7!$

답 ②

034 정육면체의 한 밑면에 한 가지 색을 칠하면 다른 한 밑면을 칠하는 방법의 수는 5이다.

또 옆면을 칠하는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot 6=30$

답 ②

035 ①, ②, ③, ④ 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수이므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

⑤ 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수이므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

답 ⑤

036 부호를 n번 이용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_n=2^n$$

이므로 부호를 n번 이하로 이용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_1+{}_2\Pi_2+{}_2\Pi_3+\cdots+{}_2\Pi_n$$

만들려고 하는 신호의 개수가 100 이상이므로

$${}_2\Pi_1+{}_2\Pi_2+{}_2\Pi_3+\cdots+{}_2\Pi_n\ge100$$

$$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n\ge100$$

$$\frac{2(2^n-1)}{2-1}\ge100$$

$$\therefore 2^n\ge51$$

이때 $2^5=32$, $2^6=64$이므로

$$n\ge6$$

따라서 최소한 부호를 6번 이용해야 한다. 답 6

1등급 비밀노트

신호를 만들 때 부호를 n번 모두 이용한다는 조건이 없으므로 $2^n\ge100$으로 생각하지 않도록 주의한다.

037 4개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

1개의 숫자로만 이루어진 세 자리 자연수는

111, 222, 333, 444의 4개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$64-4=60$$

답 60

038 (i) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

2, 2, 3, 3, 4를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

1, 2, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{5!}{2!}=60$$

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$$30+60=90$$

답 90

039 b, f를 a로 바꾸어 생각하여 6개의 문자 a, a, a, c, d, e를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{6!}{3!}=120$$

이때 두 번째 a와 세 번째 a를 b 또는 f로 바꾸는 방법의 수는

$$2!=2$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$120\cdot2=240$$

답 ④

040 a를 c로 바꾸어 생각하여 7개의 문자 b, c, c, c, d, d, d를 일렬로 나열한 후 가운데 c를 a로 바꾸면 된다.

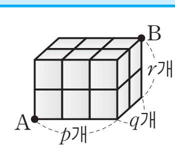
일품 BOX

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 $r(r\ne1)$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)
−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)



위의 그림과 같이 정육면체 여러 개를 이어 붙인 직육면체에서 작은 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수

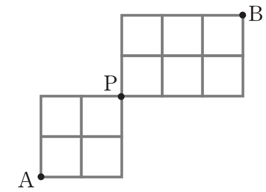
$$\Rightarrow \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$\frac{7!}{3!\cdot3!}=140$$

답 ④

041 오른쪽 그림과 같이 P지점을 잡으면 A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수는



$$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

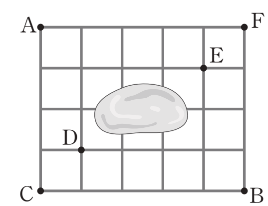
$$\frac{5!}{3!\cdot2!}=10$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$6\cdot10=60$$

답 ④

042 오른쪽 그림과 같이 네 지점 C, D, E, F를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 다음과 같다.



(i) A ⟶ C ⟶ B로 가는 방법의 수

$$1\cdot1=1$$

(ii) A ⟶ D ⟶ B로 가는 방법의 수

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{5!}{4!}=20$$

(iii) A ⟶ E ⟶ B로 가는 방법의 수

$$\frac{5!}{4!}\cdot\frac{4!}{3!}=20$$

(iv) A ⟶ F ⟶ B로 가는 방법의 수

$$1\cdot1=1$$

이상에서 구하는 방법의 수는

$$1+20+20+1=42$$

답 ②

043 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$$\frac{6!}{2!\cdot2!\cdot2!}=90$$

A ⟶ C ⟶ D ⟶ B로 가는 방법의 수는

$$1\cdot1\cdot\frac{4!}{2!}=12$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$90-12=78$$

답 78

044 해결 과정 조건 (가)에서 여자 4명은 이웃하게 앉아야 하므로 여자 4명을 한 사람으로 생각하여 이 사람과 특정한 남자 2명을 제외한 남자 2명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$$(3-1)!=2$$

● 30%

여자끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$4!=24$ ● 20%

조건 (다)에서 특정한 남자 2명이 이웃하게 앉은 여자 4명과 남자 2명 사이사이의 3개의 자리 중 2개의 자리에 앉는 방법의 수는

${}_3P_2=6$ ● 30%

답 구하기 따라서 구하는 방법의 수는

$2\cdot24\cdot6=288$ ● 20%

답 288

045 정육각형 모양의 탁자에서는 원탁에 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 2가지씩 존재하므로 $b=2a$

또 직사각형 모양의 탁자에서는 원탁에 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 6가지씩 존재하므로

$c=6a$

$\therefore \dfrac{bc}{a^2}=\dfrac{2a\cdot6a}{a^2}=12$

답 ③

참고 $a=11!$, $b=2\cdot11!$, $c=6\cdot11!$

046 1부터 6까지의 자연수 중 두 수의 합이 7이 되는 경우는

1, 6 또는 2, 5 또는 3, 4

(i) 마주 보는 숫자의 합이 7이 되는 경우가 한 쌍일 때,
마주 보는 한 쌍이 1, 6인 경우 나머지 4개의 면에 수를 적는 방법의 수는 $(4-1)!-2=4$
한 쌍이 2, 5 또는 3, 4인 경우에도 각각 4가지씩 존재하므로 $3\cdot4=12$

(ii) 마주 보는 숫자의 합이 7이 되는 경우가 두 쌍일 때,
나머지 한 쌍도 마주 보는 숫자의 합이 7이 되므로 한 쌍을 고정시키고 나머지 4개의 면에 두 쌍의 숫자를 적는 방법의 수는 2

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$12+2=14$

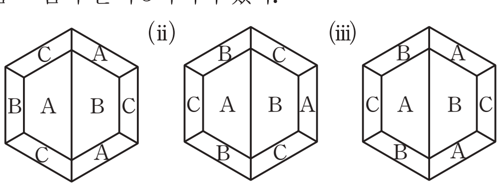
답 ④

1등급 비밀노트

정육면체의 한 면을 고정시켰을 때, 옆면에 숫자를 적는 방법의 수는 원순열의 수를 이용하여 구할 수 있다.

047 가운데 부분에 칠할 2가지 색을 정했을 때 인접한 영역이 다른 색이 되도록 각 영역을 칠하는 방법은 다음 그림과 같이 3가지가 있다.

(i) (ii) (iii)



A, B에 칠하는 색을 정하는 방법의 수는

${}_3P_2=6$

이때 (ii)의 경우는 B, A를 바꾸고 회전했을 때 (i)과 일치하고 (iii)의 경우는 회전했을 때 가운데 부분에 칠한 색이 A, B인 경우와 B, A인 경우가 일치하므로 각 경우에 회전했을 때 일치하는 경우가 2가지씩이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$\dfrac{6\cdot3}{2}=9$

답 9

048 $f(-x)=f(x)$이므로 X의 원소 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 7개 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 X의 원소 0, 1, 2, 3에 대응시키면 -3, -2, -1의 함숫값도 정해진다.

따라서 구하는 함수의 개수는

${}_7\Pi_4=7^4$

답 ④

049 **해결 과정** X에서 Y로의 함수 중 $f(1)=3$인 함수의 개수는 Y의 원소 4개 중에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$a={}_4\Pi_2=4^2=16$ ● 20%

Y에서 X로의 함수의 개수는 X의 원소 3개 중에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$ ● 20%

이때 치역이 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$인 함수의 개수는 각각 1이고, 치역이 $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$인 함수의 개수는 각각 ${}_2\Pi_4-2=14$이므로 치역이 $\{1, 2, 3\}$인 함수의 개수는

$b=81-(1\cdot3+14\cdot3)=36$ ● 50%

답 구하기 $\therefore a+b=52$ ● 10%

답 52

050 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 4개이고, 십의 자리와 일의 자리에는 0, 2, 4, 6, 8이 중복하여 올 수 있으므로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$4\cdot{}_5\Pi_2=4\cdot5^2=100$

100개의 자연수 중에서 백의 자리의 숫자가 2, 4, 6, 8인 자연수가 각각 25개씩이므로 백의 자리의 합은

$(2+4+6+8)\cdot25\cdot100=50000$

100개의 자연수 중에서 십의 자리의 숫자가 0, 2, 4, 6, 8인 자연수가 각각 20개씩이므로 십의 자리의 합은

$(0+2+4+6+8)\cdot20\cdot10=4000$

100개의 자연수 중에서 일의 자리의 숫자가 0, 2, 4, 6, 8인 자연수가 각각 20개씩이므로 일의 자리의 합은

$(0+2+4+6+8)\cdot20=400$

따라서 구하는 자연수의 총합은

$50000+4000+400=54400$

답 54400

일품 BOX

$f(-1)=f(1)$, $f(-2)=f(2)$, $f(-3)=f(3)$

정사각형이 아닌 직사각형 모양의 탁자에 n명의 사람이 둘러앉는 방법의 수
$\Rightarrow (n-1)!\times\dfrac{n}{2}$

나머지 두 쌍 (2, 5), (3, 4)가 마주 보는 경우의 수

치역의 원소의 개수가 1인 함수의 개수

일품 BOX

1등급 비밀노트

100개의 자연수 중 2□□, 4□□, 6□□, 8□□ 꼴의 자연수의 개수가 모두 같으므로 백의 자리의 숫자가 2, 4, 6, 8인 자연수는 각각 $100\div4=25$(개)이다.
또 100개의 자연수 중 □0□, □2□, □4□, □6□, □8□ 꼴의 자연수의 개수가 모두 같으므로 십의 자리의 숫자가 0, 2, 4, 6, 8인 자연수는 각각 $100\div5=20$(개)이다.

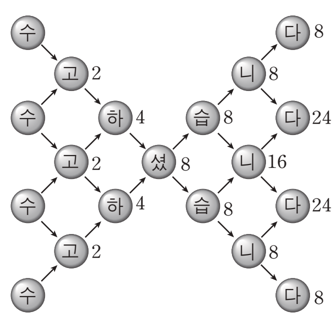
051 '수'에서 화살표 ↗와 ↘ 중 하나를 선택하여 '고'로 이동하고, '고'에서 화살표 ↗와 ↘ 중 하나를 선택하여 '하'로 이동하는 식으로 진행하면 화살표 방향에 따라 '수고하셨습니다'를 읽을 수 있다.
즉 구하는 방법의 수는 '수', '고', '하', '셨', '습', '니', '다' 사이의 2종류의 화살표 ↗와 ↘ 중 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_6=2^6=64$$

답 ③

↗와 ↘ 중 중복을 허용하여 6개를 택하여 일렬로 나열한 것 각각은 '수고하셨습니다'의 문자열 각각에 대응한다.

다른 풀이 '수'에서 출발하여 '다'로 가는 방법의 수는 다음 그림과 같으므로 $8+24+24+8=64$



052 택시를 a, 화물차를 b, 비어 있는 주차 구역을 c로 생각하면 구하는 방법의 수는 10개의 문자 a, a, a, b, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$$\frac{10!}{4!\cdot3!\cdot3!}=4200$$

답 4200

053 (i) 1□□□12인 경우
나머지 0, 1, 2의 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$
(ii) 2□□□12인 경우
나머지 0, 1, 1의 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$
(iii) □□□□20인 경우
나머지 1, 1, 1, 2의 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$
이상에서 구하는 4의 배수의 개수는
$6+3+4=13$

답 ③

끝의 두 자리 수가 4의 배수

054 **문제 이해** 조건 (가), (나), (다)에 의하여 앞에서 첫 번째, 두 번째, 세 번째에 올 수 있는 숫자는 2와 4뿐이다. ● 30%

해결 과정 (i) 2448□□□□□□인 경우
나머지 6, 6, 6, 8, 8, 8의 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$$\frac{6!}{3!\cdot3!}=20$$ ● 20%
(ii) 4248□□□□□□인 경우
나머지 6, 6, 6, 8, 8, 8의 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$$\frac{6!}{3!\cdot3!}=20$$ ● 20%
(iii) 4426□□□□□□인 경우
나머지 6, 6, 8, 8, 8, 8의 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$$\frac{6!}{2!\cdot4!}=15$$ ● 20%

답 구하기 이상에서 구하는 방법의 수는
$20+20+15=55$ ● 10%

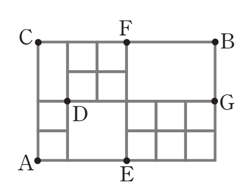
답 55

1등급 비밀노트

6 다음에는 2나 4가 올 수 없고, 8 다음에도 2나 4가 올 수 없으므로 2와 4는 항상 6과 8 앞에 놓여야 한다.
따라서 2, 4, 4가 앞에서 첫 번째, 두 번째, 세 번째 자리에 놓여야 한다.

길이 연결되어 있지 않거나 장애물이 있을 때 최단 거리로 가는 방법의 수
➡ 반드시 거쳐야 하는 점을 잡아 각각의 경로를 따라 최단 거리로 가는 방법의 수를 구한다.

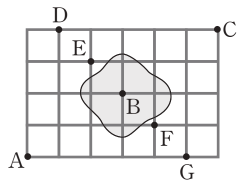
055 오른쪽 그림과 같이 다섯 지점 C, D, E, F, G를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 다음과 같다.



(i) A ⟶ C ⟶ F ⟶ B로 가는 방법의 수
$1\cdot1\cdot1=1$
(ii) A ⟶ D ⟶ F ⟶ B로 가는 방법의 수
$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot1=18$
(iii) A ⟶ D ⟶ G ⟶ B로 가는 방법의 수
$\frac{3!}{2!}\cdot1\cdot1=3$
(iv) A ⟶ E ⟶ F ⟶ B로 가는 방법의 수
$1\cdot1\cdot1=1$
(v) A ⟶ E ⟶ G ⟶ B로 가는 방법의 수
$1\cdot\frac{5!}{3!\cdot2!}\cdot1=10$
이상에서 구하는 방법의 수는
$1+18+3+1+10=33$

답 ③

056 오른쪽 그림과 같이 네 지점 D, E, F, G를 잡으면 A에서 어두운 부분을 지나지 않고 C까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 다음과 같다.



(i) A ⟶ D ⟶ C로 가는 방법의 수

$\dfrac{5!}{4!}\cdot 1=5$

(ii) A ⟶ E ⟶ C로 가는 방법의 수

$\dfrac{4!}{3!}\cdot 1\cdot 1=4$

(iii) A ⟶ F ⟶ C로 가는 방법의 수

$1\cdot 1\cdot \dfrac{4!}{3!}=4$

(iv) A ⟶ G ⟶ C로 가는 방법의 수

$1\cdot \dfrac{5!}{4!}=5$

이상에서 A에서 C까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$5+4+4+5=18$

C에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

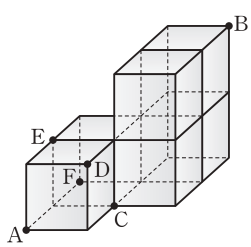
$\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=10$

이므로 구하는 방법의 수는

$18\cdot 10=180$

답 ③

057 아래 그림과 같이 네 점 C, D, E, F를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 다음과 같다.



(i) A ⟶ C ⟶ B로 가는 방법의 수

$2\cdot \dfrac{5!}{2!\cdot 2!}=60$

(ii) A ⟶ D ⟶ B로 가는 방법의 수

$2\cdot 1\cdot \dfrac{4!}{2!}=24$

(iii) A ⟶ E ⟶ B로 가는 방법의 수

$2\cdot \left(1\cdot \dfrac{4!}{2!}+1\cdot 3!\right)=36$

(iv) A ⟶ F ⟶ B로 가는 방법의 수

$1\cdot \left(1\cdot \dfrac{4!}{2!}+1\cdot 3!\right)=18$

이상에서 구하는 방법의 수는

$60+24+36+18=138$

답 138

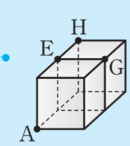
일품 BOX

각 의자에서 왼쪽 또는 오른쪽에 앉는 방법의 수

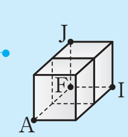
회전했을 때 같은 경우가 2가지씩이므로 2로 나눈다.

꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 가기 위해서는 C 또는 D 또는 E 또는 F를 반드시 지나야 한다.

4가지 색을 원형으로 배열하여 칠하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



(E → G)+(E → H)



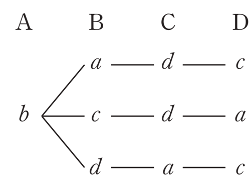
(F → I)+(F → J)

058 네 명의 남자를 A, B, C, D라 하고 처음에 함께 앉았던 여자를 각각 a, b, c, d라 하자.

네 명의 남자가 의자에 앉는 방법의 수는

$(4-1)!\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=96$

다시 앉을 때, A와 b가 함께 앉는 경우는 오른쪽과 같다. 마찬가지로 A와 c, A와 d가 함께 앉는 경우도 각각 3가지이므로 구하는 경우의 수는



$96\cdot 3\cdot 3=864$

답 864

059 조건 (가)에서 1학년 2명은 서로 이웃하게 앉으므로 한 명으로 생각하면 1학년과 3학년이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(6-1)!\cdot 2=240$

조건 (나)에서 2학년은 서로 이웃하지 않게 앉으므로 1학년과 3학년 사이의 6개의 자리에 2학년 3명을 앉히는 방법의 수는 $_6P_3=120$

따라서 구하는 방법의 수는

$240\cdot 120=28800$

답 ⑤

060 서로 다른 2가지 색을 2개의 밑면에 칠하는 방법의 수는

$\dfrac{_6P_2}{2}=15$

또 옆면을 칠하는 방법의 수는

$(4-1)!\cdot 2=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\cdot 12=180$

답 ①

061 a, b, c, d에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 문자열의 개수는 $_4\Pi_4=4^4=256$

만든 문자열을 사전식으로 배열하면

$aaaa$, $aaab$, $\cdots$, $ddca$, $ddcb$, $ddcc$, $ddcd$, $ddda$, $dddb$, $dddc$, $dddd$

이때 $ddcd$는 끝에서 다섯 번째 문자열이므로 252번째에 온다.

답 ③

062 (i) 0을 한 개 포함할 때

십의 자리의 숫자가 0이고 일의 자리의 숫자가 0이 아니거나 십의 자리의 숫자가 0이 아니고 일의 자리의 숫자가 0인 세 자리 자연수이므로

$a={}_9\Pi_2\cdot 2=9^2\cdot 2=162$

(ii) 0을 두 개 포함할 때

십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 모두 0인 세 자리 자연수이므로 $b=9$

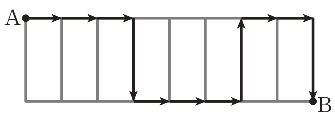
(i), (ii)에서 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{162}{9}=18$

답 18

063 도로망의 윗 부분의 가로 한 칸을 이동하는 것을 a, 아랫 부분의 가로 한 칸을 이동하는 것을 b라 하면 a, b 2개 중에서 8개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$\therefore {}_2\Pi_8=2^8=256$ 답 256

참고 예를 들어 $aaabbbaa$는 다음과 같은 방법으로 이동하는 것이다.



064 2개의 1을 A로 생각하여 A, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{5!}{2!}=60$

A와 1이 이웃하도록 나열하는 방법의 수는

$$\frac{4!}{2!}\cdot 2=24$$

따라서 구하는 방법의 수는 $60-24=36$ 답 ④

065 a, b, b, c, d, d를 일렬로 나열할 때 a가 맨 앞에 오지 않게 나열하는 방법의 수는

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!}-\frac{5!}{2!\cdot 2!}=180-30=150$$

(i) a가 맨 앞에 오지 않고 b와 b가 이웃하게 나열하는 방법의 수는

$$\frac{5!}{2!}-\frac{4!}{2!}=48$$

(ii) a가 맨 앞에 오지 않고 d와 d가 이웃하게 나열하는 방법의 수는

$$\frac{5!}{2!}-\frac{4!}{2!}=48$$

(iii) a가 맨 앞에 오지 않고 b와 b, d와 d가 각각 이웃하게 나열하는 방법의 수는 $4!-3!=18$

이상에서 구하는 방법의 수는

$150-(48+48-18)=72$ 답 ④

066 자음은 m, m, t, t, h, c, s의 7개, 모음은 a, a, e, i의 4개이다.

(i) 맨 앞에 m 또는 t가 오고, 맨 뒤에 a가 오는 경우

$$\frac{9!}{2!}\cdot 2=9!$$

(ii) 맨 앞에 m 또는 t가 오고, 맨 뒤에 e 또는 i가 오는 경우

$$\frac{9!}{2!\cdot 2!}\cdot 2\cdot 2=9!$$

(iii) 맨 앞에 h 또는 c 또는 s가 오고, 맨 뒤에 a가 오는 경우

$$\frac{9!}{2!\cdot 2!}\cdot 3=\frac{3}{4}\cdot 9!$$

(iv) 맨 앞에 h 또는 c 또는 s가 오고, 맨 뒤에 e 또는 i가 오는 경우

일품 BOX

함숫값이 1, 1, 3, 3인 함수 f를 순서쌍 $(f(a), f(b), f(c), f(d))$로 생각하면 함수 f의 개수는 1, 1, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 방법의 수

0, 1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 방법의 수

a, b, b, c, d, d를 일렬로 나열하는 방법의 수

b, b, c, d, d를 일렬로 나열하는 방법의 수

$$\frac{9!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot 3\cdot 2=\frac{3}{4}\cdot 9!$$

이상에서 구하는 방법의 수는

$9!+9!+\dfrac{3}{4}\cdot 9!+\dfrac{3}{4}\cdot 9!=\dfrac{7}{2}\cdot 9!$ 답 ④

067 $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)=8$을 만족시키는 경우는

$1+1+3+3=8$, $1+2+2+3=8$,

$2+2+2+2=8$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}+\dfrac{4!}{2!}+1=19$ 답 19

068 5의 배수가 되려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5가 되어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

ⓘ 새로 만든 카드가 0일 때

$$6!-5!=600$$

ⓘⓘ 새로 만든 카드가 0이 아닐 때

$$5\cdot\frac{6!}{2!}=1800$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

ⓘ 새로 만든 카드가 0일 때

$$\frac{6!}{2!}-5!=240$$

ⓘⓘ 새로 만든 카드가 5일 때

$$6!-5!=600$$

ⓘⓘⓘ 새로 만든 카드가 0, 5가 아닐 때

$$4\left(\frac{6!}{2!}-\frac{5!}{2!}\right)=1200$$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$600+1800+240+600+1200=4440$ 답 ③

069 (i) ❶의 방향으로 1번, ❹의 방향으로 5번 움직이는 경우

$$\frac{6!}{5!}=6$$

(ii) ❷, ❺의 방향으로 각각 1번씩, ❹의 방향으로 4번 움직이는 경우

$$\frac{6!}{4!}=30$$

(iii) ❸, ❻의 방향으로 각각 1번씩, ❹의 방향으로 4번 움직이는 경우

$$\frac{6!}{4!}=30$$

(iv) ❸, ❹, ❺의 방향으로 각각 2번씩 움직이는 경우

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=90$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+30+30+90=156$ 답 156

03 조합과 이항정리 본책 19쪽

일품 BOX

070 10명의 학생 중 대표 5명을 뽑는 방법의 수는

$_{10}C_5=252$

1학년, 2학년, 3학년을 각각 제외하고 대표를 뽑는 방법의 수는

$_7C_5+{}_7C_5+{}_6C_5={}_7C_2+{}_7C_2+{}_6C_1$

$=21+21+6=48$

따라서 구하는 방법의 수는

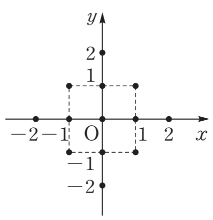
$252-48=204$

답 ⑤

각 학년의 학생 수가 5 미만이므로 한 학년에서만 대표가 뽑히는 경우는 없다.

$_nC_r={}_nC_{n-r}$

071 $|x|+|y|\le2$를 만족시키는 점 (x, y)는 오른쪽 그림과 같이 13개가 있다.



이 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 방법의 수는

$_{13}C_3=286$

이때 5개의 점이 한 직선 위에 있는 경우가 2가지이므로 한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 방법의 수는

$2\cdot{}_5C_3=20$

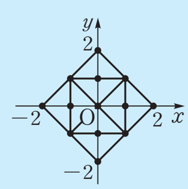
또 3개의 점이 한 직선 위에 있는 경우가 10가지이므로 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 방법의 수는

$10\cdot{}_3C_3=10$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$286-(20+10)=256$

답 256



1등급 비밀노트

서로 다른 n개의 점 중 r $(3\le r\le n)$개의 점이 한 직선 위에 있을 때

① 만들 수 있는 삼각형의 개수 ➡ $_nC_3-{}_rC_3$

② 만들 수 있는 직선의 개수 ➡ $_nC_2-{}_rC_2+1$

072 $n=2k+1$ (k는 자연수)이라 하면 가위바위보를 하여 이긴 사람의 수는 $\dfrac{n-1}{2}=k$

이때 모인 사람의 수는 $(k+1)$명이고, 악수를 한 횟수는 $(k+1)$명 중에서 서로 다른 두 명을 뽑는 조합의 수와 같으므로

$_{k+1}C_2=\dfrac{(k+1)k}{2}=190,\qquad (k+1)k=20\cdot19$

$\therefore k=19$

따라서 구하는 n의 값은

$n=2k+1=2\cdot19+1=39$

답 39

073 $x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$로 놓으면 주어진 방정식은

$X+Y+Z=6$

즉 a의 값은 방정식 $X+Y+Z=6$의 해 중에서 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같으므로 3개의 문자 X, Y, Z에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore a={}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

한편 $x=2X+1$, $y=2Y+1$, $z=2Z+1$로 놓으면 주어진 방정식은

$X+Y+Z=3$

즉 b의 값은 방정식 $X+Y+Z=3$의 해 중에서 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같으므로 3개의 문자 X, Y, Z에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore b={}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

$\therefore a-b=18$

답 ③

074 기명으로 투표하는 방법의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$a={}_2\Pi_6=2^6=64$

무기명으로 투표하는 방법의 수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$b={}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

$\therefore a+b=64+7=71$

답 71

무기명 투표는 어느 유권자가 어느 후보를 뽑았는지 알 수 없으므로 후보 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복조합으로 생각할 수 있다.

075 구하는 항의 개수는 세 문자 x, y, z 중에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

답 ④

076 $\left(ax^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$_6C_r(ax^2)^{6-r}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r={}_6C_ra^{6-r}(-2)^rx^{12-3r}$

$_6C_r\cdot a^{6-r}\cdot x^{12-2r}\cdot(-2)^r\cdot x^{-r}$
$={}_6C_ra^{6-r}(-2)^rx^{12-3r}$

상수항은 $12-3r=0$, 즉 $r=4$일 때이므로

$_6C_4a^2(-2)^4=60,\qquad a^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}\ (\because a>0)$

답 ③

077 $(x+1)^8$의 전개식의 일반항은

$_8C_rx^{8-r}$

$(x-1)^4$의 전개식의 일반항은

$_4C_sx^{4-s}(-1)^s$

따라서 $(x+1)^8(x-1)^4$의 전개식의 일반항은

$_8C_rx^{8-r}\cdot{}_4C_sx^{4-s}(-1)^s={}_8C_r\cdot{}_4C_s(-1)^sx^{12-r-s}$

$12-r-s=10$, 즉 $r+s=2$를 만족시키는 순서쌍 (r, s)는

$(0, 2), (1, 1), (2, 0)$

이므로 x^{10}의 계수는

$_8C_0\cdot{}_4C_2(-1)^2+{}_8C_1\cdot{}_4C_1(-1)^1+{}_8C_2\cdot{}_4C_0$

$=6-32+28=2$

답 2

078 $(a+2b+c)^5$의 전개식의 일반항은

$$\frac{5!}{p!q!r!}a^p(2b)^q c^r=\frac{5!}{p!q!r!}2^q a^p b^q c^r$$

(단, $p+q+r=5$, $p\ge0$, $q\ge0$, $r\ge0$)

a^2b^2c항은 $p=2$, $q=2$, $r=1$일 때이므로 a^2b^2c의 계수는

$$\frac{5!}{2!\cdot2!\cdot1!}\cdot2^2=120$$

답 ④

079 ㄱ. ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$이므로

${}_nC_r+{}_nC_{r+1}={}_{n+1}C_{r+1}$

ㄴ. ${}_6C_6+{}_7C_6+{}_8C_6+{}_9C_6={}_7C_7+{}_7C_6+{}_8C_6+{}_9C_6$

$={}_8C_7+{}_8C_6+{}_9C_6$

$={}_9C_7+{}_9C_6={}_{10}C_7={}_{10}C_3$

ㄷ. ${}_{91}C_0+{}_{92}C_1+{}_{93}C_2+{}_{94}C_3={}_{92}C_0+{}_{92}C_1+{}_{93}C_2+{}_{94}C_3$

$={}_{93}C_1+{}_{93}C_2+{}_{94}C_3$

$={}_{94}C_2+{}_{94}C_3={}_{95}C_3$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

080 $\sum_{r=0}^{10}{}_{r+1}C_r={}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{11}C_{10}$

$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{11}C_{10}$

$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{11}C_{10}$

$\vdots$

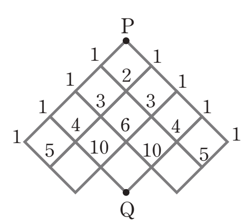
$={}_{11}C_9+{}_{11}C_{10}$

$={}_{12}C_{10}$

$={}_{12}C_2=66$

답 66

081 각 교차점에 도착하는 방법의 수를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는

$5+10+10+5=30$

답 30

1등급 비밀노트

주어진 문제는 P에서 Q까지 가는 모든 방법의 수를 구하는 것이다. P에서 Q까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 구하는 것으로 생각하여 $\frac{6!}{3!\cdot3!}=20$으로 계산하지 않도록 주의한다.

082 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

따라서 주어진 부등식은

$500<2^n-1<1500$, $\quad 501<2^n<1501$

$2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로

$n=9$ 또는 $n=10$

따라서 구하는 합은

$9+10=19$

답 ③

일품 BOX

n이 자연수일 때, $(a+b+c)^n$의 전개식의 일반항

➡ $\frac{n!}{p!q!r!}a^p b^q c^r$

(단, $p+q+r=n$, $p\ge0$, $q\ge0$, $r\ge0$)

$\log_4 2^{98}=\log_{2^2}2^{98}$

$=\frac{98}{2}\log_2 2$

$=49$

7권의 공책을 3개의 가방에 빈 가방이 없도록 나누어 넣으면 된다.

${}_nC_0=1$

083 ${}_{99}C_0+{}_{99}C_1+\cdots+{}_{99}C_{49}={}_{99}C_{99}+{}_{99}C_{98}+\cdots+{}_{99}C_{50}$

이고 ${}_{99}C_0+{}_{99}C_1+\cdots+{}_{99}C_{99}=2^{99}$이므로

$${}_{99}C_0+{}_{99}C_1+\cdots+{}_{99}C_{49}=\frac{1}{2}\cdot2^{99}=2^{98}$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\log_4 2^{98}=\frac{98}{2}=49$$

답 49

084 ${}_{20}C_0+{}_{20}C_2+{}_{20}C_4+\cdots+{}_{20}C_{20}=2^{19}$

${}_{40}C_0-{}_{40}C_1+{}_{40}C_2-{}_{40}C_3+\cdots-{}_{40}C_{39}+{}_{40}C_{40}=0$이므로

${}_{40}C_1-{}_{40}C_2+{}_{40}C_3-\cdots+{}_{40}C_{39}={}_{40}C_0+{}_{40}C_{40}$

$=1+1=2$

따라서 주어진 등식에서

$2^{19}=2\cdot2^n \qquad \therefore n=18$

답 ③

085 1을 반드시 포함하도록 11을 4개의 자연수로 분할하면

$11=8+1+1+1$

$=7+2+1+1$

$=6+3+1+1$

$=6+2+2+1$

$=5+4+1+1$

$=5+3+2+1$

$=4+4+2+1$

$=4+3+3+1$

따라서 구하는 방법의 수는 8이다.

답 8

086 각 가방에 적어도 1권의 공책이 들어가도록 넣는 방법의 수는 7을 3개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다. 7을 3개의 자연수로 분할하면

$7=5+1+1=4+2+1$

$=3+3+1=3+2+2$

따라서 구하는 방법의 수는 4이다.

답 ①

다른 풀이 각 가방에 공책을 1권씩 넣은 후, 남은 4권의 공책을 3개 이하의 가방에 넣으면 된다.

4를 3개 이하의 자연수로 분할하면

$4=4$

$=3+1=2+2$

$=2+1+1$

따라서 구하는 방법의 수는

$P(4,\ 1)+P(4,\ 2)+P(4,\ 3)=1+2+1=4$

087 $6=3+1+1+1=2+2+1+1$이므로 6명을 4개의 조로 나누는 방법은 다음과 같다.

(i) 3명, 1명, 1명, 1명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3\cdot{}_3C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{3!}=20$$

(ii) 2명, 2명, 1명, 1명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_1\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!\cdot2!}=45$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$20+45=65$

답 65

088 (해결 과정) 볼록십각형에서 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$_{10}C_3=120$ ● 20%

(ⅰ) 볼록십각형과 한 변만 공유하는 삼각형은 볼록십각형의 한 변에 6개씩 만들어지므로 그 개수는

$6\cdot 10=60$ ● 30%

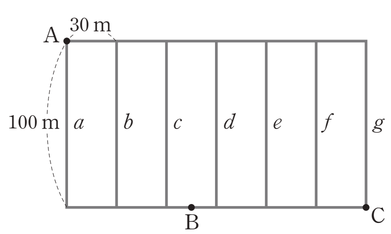
(ⅱ) 볼록십각형과 두 변을 공유하는 삼각형은 볼록십각형의 이웃하는 두 변에 대하여 하나씩만 존재하므로 10개이다. ● 30%

(답 구하기) 따라서 십각형과 한 변도 공유하지 않는 삼각형의 개수는

$120-(60+10)=50$ ● 20%

답 50

089 다음 그림과 같이 세로로 놓인 도로를 왼쪽부터 차례대로 a, b, c, d, e, f, g라 하자.



분속 60 m의 속력으로 10분 이내로 이동하기 위해서는 움직인 거리가 $60\cdot 10=600$ (m) 이하가 되어야 한다.

이때 가로로 놓인 도로의 길이가 180 m이므로 세로로 놓인 도로는 1번 또는 3번 이용할 수 있다.

(ⅰ) 세로로 놓인 도로를 1번 이용하는 경우

a, b, c 중에서 1개를 택하면 되므로

$_3C_1=3$

(ⅱ) 세로로 놓인 도로를 3번 이용하는 경우

ⓘ a, b, c 중에서 1개를 택하고 d, e, f, g 중에서 2개를 택하면 되므로

$_3C_1\cdot {_4C_2}=18$

ⓘⓘ a, b, c를 모두 택하면 되므로

$_3C_3=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$3+18+1=22$

답 ②

090 빨강, 주황, 노랑, 초록의 4가지 색 중에서 꺼내는 공의 3가지의 색을 택하는 방법의 수는

$_4C_3={_4C_1}=4$

각 색깔에서 1개의 공을 택하는 경우의 수는

$_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\cdot 3^3=108$

답 ③

일품 BOX

- 공유한 변의 양 끝 점 2개와 이웃한 두 변의 끝 점 2개를 제외한 6개의 꼭짓점마다 하나씩 만들어진다.
- $600-180=420$ (m)이므로 세로로 놓인 도로는 이동 거리가 420 m 이하가 되도록 이용해야 한다.
- 각 색깔에서 1개의 공을 선택하는 경우의 수는 3이고, 3가지 색의 공을 꺼내므로 3^3

091 (해결 과정) $_{x-1}C_y=\dfrac{(x-1)!}{y!(x-y-1)!}$에서

$$\frac{(x-1)!}{y!(x-y-1)!}=10 \quad \cdots ㉠$$

$_xC_{y+1}=\dfrac{x!}{(y+1)!(x-y-1)!}$에서

$$\frac{x!}{(y+1)!(x-y-1)!}=\frac{5}{2}x \quad \cdots ㉡$$ ● 30%

㉠÷㉡을 하면

$$\frac{\dfrac{(x-1)!}{y!(x-y-1)!}}{\dfrac{x!}{(y+1)!(x-y-1)!}}=\frac{10}{\dfrac{5x}{2}}$$

$$\frac{(x-1)!(y+1)!}{x!y!}=\frac{4}{x}$$

$$\frac{y+1}{x}=\frac{4}{x}$$

$y+1=4 \qquad \therefore y=3$ ● 30%

$y=3$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{(x-1)!}{3!(x-4)!}=10$$

$(x-1)(x-2)(x-3)=5\cdot 4\cdot 3$

즉 $x-1=5$이므로 $\quad x=6$ ● 30%

(답 구하기) $\therefore xy=18$ ● 10%

답 18

092 어린이 2명과 어른 4명을 뽑는 방법의 수는

$_5C_2\cdot {_6C_4}=150$

6명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$

따라서 구하는 방법의 수는

$150\cdot 120=18000$

답 18000

093 6가지 색 중에서 5가지 색을 고르는 방법의 수는

$_6C_5={_6C_1}=6$

원판의 중앙에 색을 칠하는 방법의 수는

$_5C_1=5$

나머지 4가지의 색을 4등분한 영역에 칠하는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot 5\cdot 6=180$

답 ①

094 ㄱ. $a<b$이면 $f(a)<f(b)$이므로

$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$

따라서 집합 Y의 6개의 원소 중 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$_6C_4=15$

ㄴ. $f(3)=8$이고, $a<b$이면 $f(a)<f(b)$이므로

$f(4)=9$ 또는 $f(4)=10$

또 $f(1)<f(2)$에서 집합 Y의 원소 5, 6, 7 중 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로 그 개수는

${}_3C_2=3$

따라서 구하는 함수의 개수는

$2\cdot3=6$

ㄷ. (i) $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$인 경우

${}_6C_4=15$

(ii) $f(1)=f(2)<f(3)<f(4)$인 경우

집합 Y의 6개의 원소 중 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_6C_3=20$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$15+20=35$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

1등급 비밀노트

두 집합 X, Y에 대하여 $n(X)=r$, $n(Y)=s$ $(r\le s)$일 때, X에서 Y로의 함수 f 중에서 $a\in X$, $b\in X$, $a<b$인 a, b에 대하여 $f(a)<f(b)$ (또는 $f(a)>f(b)$)를 만족시키는 f의 개수

➡ 순서가 이미 정해졌으므로 ${}_sC_r$

095 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_9 중에서 가장 큰 수는 a_5이므로

$a_5=9$

1, 2, 3, $\cdots$, 8의 8개 중에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, a_4로 놓고, 나머지 4개의 수를 큰 수부터 차례대로 a_6, a_7, a_8, a_9로 놓으면 되므로 나머지 8개의 수를 나열하는 방법의 수는

${}_8C_4=70$

따라서 구하는 방법의 수는 70이다.

답 70

096 2, 3, 5가 모두 소수이므로 집합 A의 원소의 개수는 3개의 숫자 2, 3, 5에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

따라서 집합 A의 부분집합의 개수는 2^{21}이다.

답 ④

1등급 비밀노트

2, 3, 5를 각각 x개, y개, z개 택한다고 하면 2, 3, 5가 모두 소수이므로 방정식 $x+y+z=5$ $(x\ge0,\ y\ge0,\ z\ge0)$를 만족시키는 서로 다른 해의 순서쌍 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여

$2^{x_1}\cdot3^{y_1}\cdot5^{z_1}\neq2^{x_2}\cdot3^{y_2}\cdot5^{z_2}$

이다. 즉 방정식의 각각의 해에 대하여 A의 원소가 1개씩 결정되므로 방정식 $x+y+z=5$ $(x\ge0,\ y\ge0,\ z\ge0)$의 해의 개수와 집합 A의 원소의 개수는 같다.

일품 BOX

3개의 문자 X, Y, Z에서 3개를 택하는 중복조합의 수

$f(1)=f(2)$이므로 $f(1)$의 값이 정해지면 $f(2)$의 값도 정해진다.

똑같은 공이므로 구분하지 않는다.

다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지 R ➡ $R=f(\alpha)$

(짝수)$+c=$(짝수)이므로 c는 짝수이다.

097 해결 과정 Ⅰ. 세 개의 주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수를 각각 x, y, z라 하면

$x+y+z=6$ $(x\ge1,\ y\ge1,\ z\ge1)$

$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$로 놓으면 위의 방정식은

$X+Y+Z=3$ $(X\ge0,\ Y\ge0,\ Z\ge0)$

따라서 조건 Ⅰ을 만족시키는 경우의 수는

$p={}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$ ● 30%

Ⅱ. 세 개의 주머니에 공을 넣는 모든 경우의 수는

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

이때 조건 Ⅰ에서 모든 주머니에 적어도 한 개의 공이 들어 있는 경우의 수가 10이므로 조건 Ⅱ를 만족시키는 경우의 수는

$q=28-10=18$ ● 30%

Ⅲ. 세 개의 주머니에 들어 있는 공이 0개, 1개, 5개인 경우의 수는 $3!=6$

세 개의 주머니에 들어 있는 공이 1개, 1개, 4개인 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

세 개의 주머니에 들어 있는 공이 1개, 2개, 3개인 경우의 수는

$3!=6$

따라서 조건 Ⅲ을 만족시키는 경우의 수는

$r=6+3+6=15$ ● 30%

답 구하기 $\therefore p-q+r=7$ ● 10%

답 7

098 해결 과정 과일 바구니에 사과, 배, 복숭아를 각각 x개, y개, z개 넣는다고 하면

$x+y+z=10$ $(x\ge0,\ y\ge1,\ z\ge2)$ ● 40%

$x=X$, $y=Y+1$, $z=Z+2$로 놓으면 위의 방정식은

$X+Y+Z=7$ $(X\ge0,\ Y\ge0,\ Z\ge0)$ ● 40%

답 구하기 따라서 구하는 방법의 수는 3개의 문자 X, Y, Z에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$ ● 20%

답 36

099 $f(x)=\dfrac{a}{2}x^2+bx+c$라 하면 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 18이므로 나머지정리에 의하여

$f(2)=2a+2b+c=18$ …… ㉠

이때 $2a+2b$는 짝수이므로 c도 짝수이어야 한다.

$a=X+1$, $b=Y+1$, $c=2(Z+1)$로 놓고 ㉠에 대입하여 정리하면

$X+Y+Z=6$ $(X\ge0, Y\ge0, Z\ge0)$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 일치하므로

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

답 ③

100 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$를 만족시키는 함수의 개수는 $\quad {}_5\mathrm{H}_5={}_9\mathrm{C}_5={}_9\mathrm{C}_4=126$

> 일품 BOX: 집합 X의 5개의 원소 중에서 중복을 허용하여 5개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4, 5에 대응시키면 된다.

$f(1)\le f(2)=f(3)\le f(4)\le f(5)$를 만족시키는 함수의 개수는

$\quad {}_5\mathrm{H}_4={}_8\mathrm{C}_4=70$

$f(1)\le f(2)\le f(3)=f(4)\le f(5)$를 만족시키는 함수의 개수는

$\quad {}_5\mathrm{H}_4={}_8\mathrm{C}_4=70$

$f(1)\le f(2)=f(3)=f(4)\le f(5)$를 만족시키는 함수의 개수는

$\quad {}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$

따라서 구하는 함수의 개수는

$\quad 126-(70+70-35)=21$

> 일품 BOX: $f(1)\le f(2)=f(3)=f(4)\le f(5)$를 만족시키는 함수의 개수가 중복되어 세어지므로 빼준다.

답 21

다른 풀이 $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)<f(5)$를 만족시키는 함수의 개수는 $\quad 1$

> 일품 BOX: 치역의 원소의 개수가 5인 경우

$f(1)=f(2)<f(3)<f(4)<f(5)$를 만족시키는 함수의 개수는

$\quad {}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)=f(5)$를 만족시키는 함수의 개수는

$\quad {}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

> 일품 BOX: 치역의 원소의 개수가 4인 경우

$f(1)=f(2)<f(3)<f(4)=f(5)$를 만족시키는 함수의 개수는

$\quad {}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

> 일품 BOX: 치역의 원소의 개수가 3인 경우

따라서 구하는 함수의 개수는

$\quad 1+5+5+10=21$

101 구하는 방법의 수는 정의역이 $\{\mathrm{A, B, C}\}$, 공역이 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$인 함수 f 중에서

$\quad f(\mathrm{A})\le f(\mathrm{B})\le f(\mathrm{C})$

를 만족시키는 함수 f의 개수와 같으므로

$\quad {}_7\mathrm{H}_3={}_9\mathrm{C}_3=84$ 답 ①

102 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$의 전개식의 일반항은

$$_{2n}\mathrm{C}_r x^{2n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_{2n}\mathrm{C}_r x^{2(n-r)}$$

x^2항은 $n-r=1$, x^4항은 $n-r=2$, x^6항은 $n-r=3$일 때이므로 x^2, x^4, x^6의 계수는 각각

$\quad {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1},\ {}_{2n}\mathrm{C}_{n-2},\ {}_{2n}\mathrm{C}_{n-3}$

세 수가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\cdot{}_{2n}\mathrm{C}_{n-2}={}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{n-3}$$

> 일품 BOX: 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 ➡ $2b=a+c$

$$2\cdot\frac{(2n)!}{(n-2)!(n+2)!}=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}+\frac{(2n)!}{(n-3)!(n+3)!}$$

양변에 $\dfrac{(n-1)!(n+3)!}{(2n)!}$을 곱하면

$\quad 2(n-1)(n+3)=(n+3)(n+2)+(n-1)(n-2)$

$\quad 2n=14 \qquad \therefore n=7$

답 ②

1등급 비밀노트

$$\frac{2}{(n-2)!(n+2)!}=\frac{1}{(n-1)!(n+1)!}+\frac{1}{(n-3)!(n+3)!}$$
의 양변에 $(n-2)!$, $(n-1)!$, $(n-3)!$ 중 차수가 가장 큰 $(n-1)!$과 $(n+2)!$, $(n+1)!$, $(n+3)!$ 중 차수가 가장 큰 $(n+3)!$을 곱해 주어야 분모에 미지수가 없도록 만들 수 있다.

103 (문제 이해) $\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은

$$_7\mathrm{C}_r(x^2)^{7-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r={}_7\mathrm{C}_r a^r x^{14-3r}$$ ● 30%

(해결 과정) x^2항은 $14-3r=2$, 즉 $r=4$일 때이므로

$\quad {}_7\mathrm{C}_4 a^4=140, \quad 35a^4=140 \quad \therefore a^4=4$ ● 30%

(답 구하기) $\dfrac{1}{x^4}$항은 $14-3r=-4$, 즉 $r=6$일 때이므로 $\dfrac{1}{x^4}$의 계수는

$\quad {}_7\mathrm{C}_6\, a^6=7\cdot(a^4)^{\frac{3}{2}}=7\cdot4^{\frac{3}{2}}=7\cdot2^3=56$ ● 40%

답 56

104 주어진 식은 첫째항이 $1+x^2$, 공비가 $1+x^2$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\frac{(1+x^2)\{(1+x^2)^{10}-1\}}{(1+x^2)-1}=\frac{(1+x^2)^{11}-(1+x^2)}{x^2}$$

이때 주어진 식에서 x^4의 계수는 $(1+x^2)^{11}$의 전개식에서 x^6의 계수와 같다.

$(1+x^2)^{11}$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_{11}\mathrm{C}_r(x^2)^r={}_{11}\mathrm{C}_r x^{2r}$

x^6항은 $2r=6$, 즉 $r=3$일 때이므로 구하는 계수는

$\quad {}_{11}\mathrm{C}_3=165$ 답 ④

다른 풀이 $(1+x^2)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x^2+{}_n\mathrm{C}_2x^4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^{2n}$이므로 x^4의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_2\,(n\ge2)$이다.

따라서 주어진 다항식의 전개식에서 x^4의 계수는

$$\begin{aligned}
&{}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_2\\
&=\sum_{n=2}^{10}{}_n\mathrm{C}_2\\
&=\sum_{n=2}^{10}\frac{n(n-1)}{2}\\
&=\sum_{n=1}^{10}\frac{n(n-1)}{2}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}(n^2-n)\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{10}n^2-\sum_{n=1}^{10}n\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-\frac{10\cdot11}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2}(385-55)=165
\end{aligned}$$

> 일품 BOX: $n=1$을 $\dfrac{n(n-1)}{2}$에 대입하면 0이므로 $\displaystyle\sum_{n=2}^{10}\frac{n(n-1)}{2}=\sum_{n=1}^{10}\frac{n(n-1)}{2}$

105 $(\sqrt{2}x+\sqrt[3]{2})^{100}$의 전개식의 일반항은

$${}_{100}C_r(\sqrt{2}x)^{100-r}(\sqrt[3]{2})^r$$
$$={}_{100}C_r 2^{\frac{100-r}{2}}x^{100-r}2^{\frac{r}{3}}$$
$$={}_{100}C_r\cdot 2^{\frac{300-r}{6}}x^{100-r}$$

따라서 x^n의 계수가 자연수가 되기 위해서는 $\frac{300-r}{6}$가 자연수가 되어야 하므로

$r=0,\ 6,\ 12,\ \cdots,\ 96\ (\because 0\le r\le 99)$

따라서 구하는 항의 개수는 17이다.

답 ④

106 $(ax^2+x-1)^8$의 전개식의 일반항은

$$\frac{8!}{p!q!r!}(ax^2)^p x^q(-1)^r=\frac{8!}{p!q!r!}(-1)^r a^p x^{2p+q}$$
(단, $p+q+r=8,\ p\ge0,\ q\ge0,\ r\ge0$)

$2p+q=4,\ p+q+r=8$을 동시에 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q,\ r)$는

$(0,\ 4,\ 4),\ (1,\ 2,\ 5),\ (2,\ 0,\ 6)$

즉 x^4의 계수는

$$\frac{8!}{0!\cdot4!\cdot4!}-\frac{8!}{1!\cdot2!\cdot5!}a+\frac{8!}{2!\cdot0!\cdot6!}a^2$$
$$=28a^2-168a+70$$
$$=28(a-3)^2-182$$

따라서 x^4의 계수는 $a=3$일 때 최소이다.

답 3

107 해결 과정 $a={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{12}C_{10}$

$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{12}C_{10}$

$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{12}C_{10}$

$={}_5C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{12}C_{10}$

$\vdots$

$={}_{12}C_9+{}_{12}C_{10}$

$={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=286$ ● 60%

${}_{13}C_3$은 제 14 행의 왼쪽에서 4번째 수, ${}_{13}C_{10}$은 제 14 행의 왼쪽에서 11번째 수이므로

$b=14,\ c=4$ 또는 $b=14,\ c=11$ ● 30%

답 구하기 따라서 $a+b+c$의 최솟값은

$286+14+4=304$ ● 10%

답 304

108 주어진 파스칼의 삼각형에 조합의 수를 대응시켜 보면

제 1 행	1	$_0C_0$ 1
제 2 행	1 1	${}_1C_0$ ${}_1C_1$
제 3 행	1 2 1	${}_2C_0$ ${}_2C_1$ ${}_2C_2$
제 4 행	1 3 3 1	${}_3C_0$ ${}_3C_1$ ${}_3C_2$ ${}_3C_3$
제 5 행	1 4 6 4 1	${}_4C_0$ ${}_4C_1$ ${}_4C_2$ ${}_4C_3$ ${}_4C_4$
⋮	⋮	⋮

따라서 제 n 행의 모든 수의 합은

${}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}=2^{n-1}$

$2^{n-1}=8^{10}=2^{30}$이므로

$n-1=30 \qquad \therefore n=31$

답 31

109 ㄱ. $f(2)=\sum_{k=1}^{2}k\cdot{}_2C_k={}_2C_1+2\cdot{}_2C_2$

$=2+2\cdot1=4$

ㄴ. $k\cdot{}_nC_k=k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$

$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$

$=n\cdot{}_{n-1}C_{k-1}$

$\therefore f(n)=\sum_{k=1}^{n}n\cdot{}_{n-1}C_{k-1}$

$=n\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}C_{k-1}$

$=n({}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1})$

$=n\cdot2^{n-1}$

따라서 $n\ge2$일 때, $f(n)$은 짝수이다.

ㄷ. ㄴ에서 $f(n)=n\cdot2^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{f(n)}{n}=\sum_{n=1}^{10}2^{n-1}=\frac{2^{10}-1}{2-1}=1023$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

110 8보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7이므로 8을 소수로만 분할하면

$8=5+3$
$=3+3+2$
$=2+2+2+2$

따라서 구하는 방법의 수는 3이다.

답 3

111 구하는 방법의 수는 12를 1, 2, 3으로만 분할하는 방법의 수와 같으므로

$12=3+3+3+3$
$=3+3+3+2+1$
$=3+3+3+1+1+1$
$=3+3+2+2+2$
$=3+3+2+2+1+1$
$=3+3+2+1+1+1+1$
$=3+3+1+1+1+1+1+1$
$=3+2+2+2+2+1$
$=3+2+2+2+1+1+1$
$=3+2+2+1+1+1+1+1$
$=2+2+2+2+2+2$
$=2+2+2+2+2+1+1$
$=2+2+2+2+1+1+1+1$
$=2+2+2+1+1+1+1+1+1$

따라서 구하는 방법의 수는 14이다.

답 ④

일품 BOX

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

$50-\frac{r}{6}$에서 r는 0 또는 6의 양의 배수이어야 한다.

$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$
$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!}$
$={}_{n-1}C_{k-1}$

영화는 용량별로 각각 6개씩 있으므로 1, 2, 3의 개수가 각각 6 이하가 되도록 분할한다.

112 해결 과정 구하는 도형의 개수는 9를 분할하는 방법의 수와 같으므로

일품 BOX

자연수 n의 분할의 수
➡ $P(n,\ 1)+P(n,\ 2)+\cdots+P(n,\ n)$

$9=9=8+1=7+2=6+3=5+4$
$=7+1+1=6+2+1=5+3+1=5+2+2$
$=4+4+1=4+3+2=3+3+3$
$=6+1+1+1=5+2+1+1=4+3+1+1$
$=4+2+2+1=3+3+2+1=3+2+2+2$
$=5+1+1+1+1=4+2+1+1+1$
$=3+3+1+1+1$
$=3+2+2+1+1$
$=2+2+2+2+1$
$=4+1+1+1+1+1$
$=3+2+1+1+1+1$
$=2+2+2+1+1+1$
$=3+1+1+1+1+1+1$
$=2+2+1+1+1+1+1$
$=2+1+1+1+1+1+1+1$
$=1+1+1+1+1+1+1+1+1$ ● 80%

답 구하기 따라서 구하는 도형의 개수는 30이다. ● 20%

답 30

113 해결 과정 7개의 반을 4개, 3개의 반으로 분할하는 방법의 수는

$_7C_4\cdot{_3C_3}=35$ ● 30%

분할된 4개의 반을 2개, 2개의 반으로 분할하는 방법의 수는

$_4C_2\cdot{_2C_2}\cdot\dfrac{1}{2!}=3$ ● 30%

분할된 3개의 반을 2개, 1개의 반으로 분할하는 방법의 수는

$_3C_2\cdot{_1C_1}=3$ ● 30%

답 구하기 따라서 구하는 방법의 수는

$35\cdot3\cdot3=315$ ● 10%

답 315

114 ㄱ. $4=2+1+1$이므로

$_4C_2\cdot{_2C_1}\cdot{_1C_1}\cdot\dfrac{1}{2!}\cdot3!=36$

세 집합 중 두 집합의 원소의 개수가 1, 1로 같으므로 2!로 나눈다.

ㄴ. $k=5$, $n(S_3)=3$이므로 $n(S_1)=n(S_2)=1$이다.
따라서 $n(S_3)=3$을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$_5C_3\cdot{_2C_1}\cdot{_1C_1}\cdot\dfrac{1}{2!}\cdot2!={_5C_2}\cdot2=20$

ㄷ. $7=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$
이므로 $n(S_1)\le n(S_2)\le n(S_3)$을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$_7C_5\cdot{_2C_1}\cdot{_1C_1}\cdot\dfrac{1}{2!}\cdot2!+{_7C_4}\cdot{_3C_2}\cdot{_1C_1}$
$+{_7C_3}\cdot{_4C_3}\cdot{_1C_1}\cdot\dfrac{1}{2!}\cdot2!+{_7C_3}\cdot{_4C_2}\cdot{_2C_2}\cdot\dfrac{1}{2!}\cdot2!$
$=21\cdot2\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2+35\cdot3\cdot1+35\cdot4\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2$
$+35\cdot6\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2$
$=42+105+140+210=497$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

115 $8=6+2=5+3=4+4$이므로 다음과 같다.

각 조의 인원이 2명 이상이므로 8을 2 이상의 2개의 자연수로 분할한다.

(i) 6명, 2명으로 나누는 방법의 수는
$_8C_6\cdot{_2C_2}=28$

(ii) 5명, 3명으로 나누는 방법의 수는
$_8C_5\cdot{_3C_3}=56$

(iii) 4명, 4명으로 나누는 방법의 수는
$_8C_4\cdot{_4C_4}\cdot\dfrac{1}{2!}=35$

이상에서 2명 이상의 2개의 조로 나누는 방법의 수는
$28+56+35=119$

이때 남학생으로만 이루어진 조가 있는 경우의 수는
$_4C_2+{_4C_3}+{_4C_4}=6+4+1=11$

마찬가지로 여학생으로만 이루어진 조가 있는 경우의 수도 11이다.

그런데 4명, 4명으로 나누는 경우에 한 쪽이 남학생으로만 이루어지면 다른 한 쪽은 여학생으로만 이루어지므로 중복된다.

따라서 구하는 방법의 수는
$119-(11+11)+1=98$

답 98

다른 풀이 (i) 2명, 6명으로 나누는 경우

2명의 조가 결정되면 6명의 조도 결정된다.

2명의 조에는 남학생과 여학생이 각각 한 명씩 있어야 하므로
$_4C_1\cdot{_4C_1}=16$

(ii) 3명, 5명으로 나누는 경우
ⓘ 3명의 조에 남학생 1명, 여학생 2명이 있는 경우
$_4C_1\cdot{_4C_2}=24$
ⓘⓘ 3명의 조에 남학생 2명, 여학생 1명이 있는 경우
$_4C_2\cdot{_4C_1}=24$

(iii) 4명, 4명으로 나누는 경우
ⓘ 한 조에 남학생 1명, 여학생 3명이 있는 경우
$_4C_1\cdot{_4C_3}=16$
ⓘⓘ 한 조에 남학생 2명, 여학생 2명이 있는 경우
$_4C_2\cdot{_4C_2}\cdot\dfrac{1}{2!}=18$

이상에서 구하는 방법의 수는
$16+24+24+16+18=98$

116 6명을 같은 층에서 내릴 2명, 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$_6C_2\cdot{_4C_2}\cdot{_2C_2}\cdot\dfrac{1}{3!}=15$

3개의 층에 내릴 사람이 2명, 2명, 2명으로 같으므로 3!로 나눈다.

6개 층 중에서 내릴 3개 층을 택하는 방법의 수는

$_6C_3=20$

2명, 2명, 2명을 선택된 3개 층에 대응시키는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\cdot20\cdot6=1800$ 답 ②

다른 풀이 6개 층 중에서 내릴 3개 층을 택하는 방법의 수는 $_6C_3=20$

위에서 택한 3개 층을 각각 A, B, C라 하자.

6명 중에서 A층에서 내릴 2명을 택하는 방법의 수는

$_6C_2=15$

4명 중에서 B층에서 내릴 2명을 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

2명 중에서 C층에서 내릴 2명을 택하는 방법의 수는

$_2C_2=1$

이상에서 구하는 경우의 수는

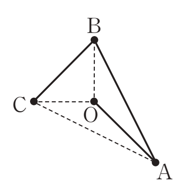
$20\cdot15\cdot6=1800$

117 그을 수 있는 선분은 △ABC의 세 변과 △ABC의 세 꼭짓점에서 내부의 한 점 O를 잇는 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$의 6개이다.

(i) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ 중 한 선분만 긋는 경우

오른쪽 그림과 같이 △ABC의 세 변 중에서 두 변을 그으면 되므로 방법의 수는

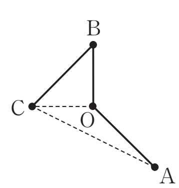
$_3C_1\cdot{}_3C_2=9$



(ii) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ 중 두 선분만 긋는 경우

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$ 또는 $\overline{AC}$를 그으면 되므로 방법의 수는

$_3C_2\cdot{}_2C_1=6$

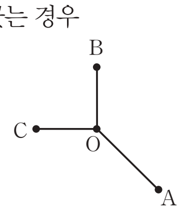


(iii) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ 세 선분을 모두 긋는 경우

오른쪽 그림과 같은 1가지뿐이다.

이상에서 구하는 방법의 수는

$9+6+1=16$



답 ②

다른 풀이 (i) 네 점 O, A, B, C를 일렬로 잇는 경우

네 점을 일렬로 나열하는 방법의 수에서 거꾸로 나열하였을 때 일치하는 경우가 2가지씩 있으므로

$\frac{4!}{2}=12$

(ii) 한 점과 나머지 세 점을 잇는 경우

네 점 중 나머지 세 점과 이을 한 점을 택하는 방법의 수이므로 $_4C_1=4$

일품 BOX

a, b, c, d, e는 다섯 자리 자연수의 각 자리의 숫자이므로 각각 한 자리 자연수이다.

O−A−B−C와 C−B−A−O는 서로 같은 경우이다.

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$12+4=16$

118 각 자리 숫자를 각각 a, b, c, d, e라 하면

$a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e=1000=2^3\cdot5^3$

따라서 a, b, c, d, e 중에서 3개는 5이고 나머지 두 개는 1과 8 또는 2와 4이어야 한다.

(i) 다섯 자리 중에서 세 자리에는 5가 들어가고, 나머지 두 자리에는 1과 8이 들어가는 경우의 수는

$_5C_3\cdot2!=20$

(ii) 다섯 자리 중에서 세 자리에는 5가 들어가고, 나머지 두 자리에는 2와 4가 들어가는 경우의 수는

$_5C_3\cdot2!=20$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$20+20=40$ 답 ②

다른 풀이 (i) 다섯 자리 중에서 세 자리에는 5가 들어가고, 나머지 두 자리에는 1과 8이 들어가는 경우의 수는 1, 5, 5, 5, 8을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!}=20$

(ii) 다섯 자리 중에서 세 자리에는 5가 들어가고, 나머지 두 자리에는 2와 4가 들어가는 경우의 수는 2, 4, 5, 5, 5를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!}=20$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$20+20=40$

119 뽑힌 4명이 앉을 의자를 제외한 나머지 6개의 의자를 나열하고 6개의 의자 사이사이 및 양 끝의 7개의 자리 중에서 4개의 자리에 뽑힌 4명이 앉을 의자 4개를 놓으면 된다.

6명 중 4명을 뽑는 방법의 수는 $_6C_4=15$

7개의 자리 중에서 4개를 택하여 4명을 앉히는 방법의 수는

$_7P_4=840$

따라서 $n=15\cdot840=12600$이므로

$\frac{n}{100}=126$ 답 126

1등급 비밀노트

일렬로 나열된 n개의 의자에 r명이 이웃하지 않도록 앉는 방법의 수는 $(n-r)$개의 의자를 먼저 나열한 뒤, $(n-r)$개의 의자 사이사이 및 양 끝의 $(n-r+1)$개의 자리에 r명이 앉을 의자를 나열하면 되므로 $_{n-r+1}P_r$ (단, $n-r+1\geq r$)

120 조건 (가), (나)에 의하여 7일 동안 운동 종목을 2번 바꾸게 된다.

운동 종목을 바꾸는 시점을 정하는 방법의 수는 7개의 자리의 사이사이인 6개의 자리에서 2자리를 선택하는 방법의 수와 같으므로

$_6C_2=15$

각각의 경우에 대하여 운동하는 순서를 정하는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\cdot6=90$ 답 90

> **일품 BOX** ○V○V○V○V○V○V○에서 V를 2개 택하는 방법의 수

1등급 비밀노트

7개의 자리의 사이사이인 6개의 자리에서 2자리를 선택하는 경우 중 하나인

○○○○ V ○○V○

는 세 종목의 운동을 각각 4일, 2일, 1일 동안 하는 방법으로 생각할 수 있다.

121 (i) 일의 자리의 숫자가 1일 때,

세 주사위의 눈의 수가 모두 1이어야 하므로 1가지이다.

(ii) 일의 자리의 숫자가 3일 때,

1, 2, 3 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_2={}_4C_2=6$

> 113, 123, 133, 223, 233, 333의 6개

(iii) 일의 자리의 숫자가 5일 때,

1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_5H_2={}_6C_2=15$

> 115, 125, 135, 145, 155, 225, 235, 245, 255, 335, 345, 355, 445, 455, 555의 15개

이상에서 구하는 홀수의 개수는

$1+6+15=22$ 답 ⑤

다른 풀이 만들 수 있는 세 자리 자연수의 백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자를 각각 a, b, c라 하면 $a\le b\le c$이어야 한다.

(i) $c=1$일 때, 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1)$의 1개

(ii) $c=3$일 때, 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 3)$의 6개

(iii) $c=5$일 때, 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(2,\ 4)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 3)$, $(3,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 4)$, $(4,\ 5)$, $(5,\ 5)$의 15개

이상에서 구하는 홀수의 개수는

$1+6+15=22$

122 $x+y+z<10\ (x\ge1,\ y\ge1,\ z\ge1)$에서

$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$로 놓으면

$X+Y+Z<7\ (X\ge0,\ Y\ge0,\ Z\ge0)$

$X+Y+Z=0$의 해의 개수는 $_3H_0$

$X+Y+Z=1$의 해의 개수는 $_3H_1$

$X+Y+Z=2$의 해의 개수는 $_3H_2$

⋮

$X+Y+Z=6$의 해의 개수는 $_3H_6$

따라서 구하는 부등식의 해의 개수는

$$\begin{aligned}&_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2+\cdots+{}_3H_6\\&={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_8C_6\\&={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_8C_6\\&={}_4C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_8C_6\\&={}_5C_2+\cdots+{}_8C_6\\&\ \vdots\\&={}_8C_5+{}_8C_6\\&={}_9C_6={}_9C_3\end{aligned}$$

답 ①

123 $28=1\cdot28=2\cdot14=4\cdot7$이므로 조건 (가), (나)에서

$f(2)=1,\ f(5)=28$ 또는 $f(2)=2,\ f(5)=14$ 또는 $f(2)=4,\ f(5)=7$

> 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r\}$에서 집합 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$으로의 함수에 대하여 $a\in X$, $b\in Y$이고 $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$를 만족시키는 함수 f의 개수 ➡ $_nH_r$

(i) $f(2)=1,\ f(5)=28$일 때,

$f(1)=1$이고 $f(3)$, $f(4)$는 1부터 28까지의 자연수 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하면 되므로

$_{28}H_2={}_{29}C_2=406$

(ii) $f(2)=2,\ f(5)=14$일 때,

$f(1)$은 1, 2 중에서 1개를 택하고 $f(3)$, $f(4)$는 2부터 14까지의 자연수 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하면 되므로 $2\cdot{}_{13}H_2=2\cdot{}_{14}C_2=182$

(iii) $f(2)=4,\ f(5)=7$일 때,

$f(1)$은 1, 2, 3, 4 중에서 1개를 택하고 $f(3)$, $f(4)$는 4부터 7까지의 자연수 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하면 되므로 $4\cdot{}_4H_2=4\cdot{}_5C_2=40$

이상에서 구하는 함수의 개수는

$406+182+40=628$ 답 628

124 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^n$은 $1+x+x^2+x^3+x^4$을 n개 곱한 것이므로 n개의 인수에서 각각 x^{p_1}, x^{p_2}, $\cdots$, x^{p_n} $(p_i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$을 택하여 곱하면

$x^{p_1}\cdot x^{p_2}\cdot\ \cdots\ \cdot x^{p_n}=x^4$

$x^{p_1+p_2+\cdots+p_n}=x^4$

따라서 $p_1+p_2+\cdots+p_n=4$를 만족시키는 순서쌍 $(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)$의 개수가 $f(n)$이므로

$$\begin{aligned}f(n)&={}_nH_4={}_{n+3}C_4\\&=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\\&=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24}\end{aligned}$$

> 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ (n, r는 자연수)에서 음이 아닌 정수인 해의 개수 ➡ $_nH_r$

$$\therefore\ \frac{f(11)}{f(10)}=\frac{\dfrac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{24}}{\dfrac{13\cdot12\cdot11\cdot10}{24}}=\frac{7}{5}$$

답 ②

125 $\left(x+\frac{3}{x}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

$${}_{10}C_r x^{10-r}\left(\frac{3}{x}\right)^r={}_{10}C_r 3^r x^{10-2r} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(2x^2+x+2)\left(x+\frac{3}{x}\right)^{10}$의 전개식에서 x^3항은 $2x^2$과 ㉠의 x항, x와 ㉠의 x^2항, 2와 ㉠의 x^3항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x항은 $10-2r=1$일 때이므로 $r=\frac{9}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le 10$인 정수이므로 x항은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠에서 x^2항은 $10-2r=2$, 즉 $r=4$일 때이므로

${}_{10}C_4\, 3^4x^2$

(iii) ㉠에서 x^3항은 $10-2r=3$일 때이므로 $r=\frac{7}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le 10$인 정수이므로 x^3항은 존재하지 않는다.

이상에서 x^3항은

$x\cdot{}_{10}C_4\, 3^4x^2={}_{10}C_4\, 3^4x^3$

이므로 x^3의 계수는 $3^4\cdot{}_{10}C_4$이다. 답 ⑤

126 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r x^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_nC_r x^{n-2r}$$

x^{-n+2}항은 $n-2r=-n+2$, 즉 $r=n-1$일 때이므로

$a_n={}_nC_{n-1}={}_nC_1=n$

$$\therefore \sum_{k=1}^{100}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$$
$$=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$$

답 ②

127 ${}_{10}C_0\,5^{10}+{}_{10}C_1\,5^9+{}_{10}C_2\,5^8+\cdots+{}_{10}C_9\,5+{}_{10}C_{10}\,5^0$
$=(5+1)^{10}=6^{10}$

이므로

$N=6^{10}-1=(7-1)^{10}-1$
$=({}_{10}C_0\,7^{10}-{}_{10}C_1\,7^9+{}_{10}C_2\,7^8-\cdots-{}_{10}C_9\,7+{}_{10}C_{10}\,7^0)-1$

이때 ${}_{10}C_0\,7^{10}-{}_{10}C_1\,7^9+{}_{10}C_2\,7^8-\cdots-{}_{10}C_9\,7$은 7로 나누어떨어지므로 N을 7로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{10}C_{10}\,7^0-1$을 7로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 ${}_{10}C_{10}\,7^0-1=1-1=0$이므로 N을 7로 나누었을 때의 나머지는 0이다. 답 ①

일품 BOX

$(a+b)^n$의 전개식의 일반항
➡ ${}_nC_r a^{n-r}b^r$

• 일반항 ${}_{10}C_r 3^r x^{10-2r}$에서 x의 지수 $10-2r$는 짝수이므로 차수가 홀수인 항은 존재하지 않는다.

• $2n$을 i개의 2와 j개의 1의 합으로 나타낼 수 있다고 하면
$2n=2i+j$
$\therefore j=2(n-i)$

부분분수로의 변형

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\ne B$)

• $(x+1)^n$
$={}_nC_0x^n+{}_nC_1x^{n-1}+\cdots+{}_nC_nx^0$
이므로 $n=10$, $x=5$를 대입하면
${}_{10}C_0 5^{10}+{}_{10}C_1 5^9+\cdots+{}_{10}C_{10} 5^0=(5+1)^{10}$

128 6명의 가족 중에서 사진에 나오는 가족의 수를 1명, 2명, 3명, 4명, 5명, 6명으로 택하는 방법의 수만큼 가족의 구성원이 다른 사진을 촬영할 수 있다.

따라서 사진의 개수의 최댓값은

${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_6C_6$
$=({}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_6C_6)-{}_6C_0$
$=2^6-1=63$

답 63

129 ㄱ. $4=2+2=2+1+1=1+1+1+1$

$\therefore a_4=3$

ㄴ. $2=1+1$이므로

$2n=2\cdot i+1\cdot 2(n-i)$ (단, $i=0, 1, 2, \cdots, n$)

즉 $i=0, 1, 2, \cdots, n$이므로

$a_{2n}=n+1$

$2n+1$은 $2n$을 1과 2의 합으로 나타낸 것의 각각에 1을 더하면 되므로

$a_{2n+1}=n+1 \qquad \therefore a_{2n}=a_{2n+1}$

ㄷ. ㄴ에서 $a_{2n+1}=n+1$이므로

$a_{2015}=a_{2\cdot 1007+1}=1007+1=1008$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

130 재민이와 한 조가 되는 선수를 뽑는 방법의 수는

${}_5C_1=5$

나머지 4명의 선수를 2명, 2명의 두 조로 나누는 방법의 수는 ${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=3$

따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot 3=15$

답 15

131 $A\cap B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로 구하는 순서쌍의 개수는 집합 $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$을 2개의 집합으로 나누는 방법의 수와 같다.

이때 $n(A)\ge n(B)$이므로 원소의 개수가 6, 0 또는 5, 1 또는 4, 2 또는 3, 3인 경우로 나눌 수 있다.

(i) 원소의 개수가 6, 0인 집합으로 나누는 경우 순서쌍 (A, B)의 개수는

${}_6C_6=1$

(ii) 원소의 개수가 5, 1인 집합으로 나누는 경우 순서쌍 (A, B)의 개수는

${}_6C_5\cdot{}_1C_1=6$

(iii) 원소의 개수가 4, 2인 집합으로 나누는 경우 순서쌍 (A, B)의 개수는

${}_6C_4\cdot{}_2C_2=15$

(iv) 원소의 개수가 3, 3인 집합으로 나누는 경우 순서쌍 (A, B)의 개수는

${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}\cdot 2!=20$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+6+15+20=42$

답 42

1등급 완성하기

▶ 본책 28쪽

132 오른쪽 그림과 같이 8개의 정사각형을 각각 a, b, c, d, e, f, g, h라 하면 a, b에 각각 들어갈 수 있는 수는

	a	c	
e	1	4	f
g	2	3	h
	b	d	

3, 4 또는 4, 3의 2가지

c, d에 각각 들어갈 수 있는 수는

1, 2 또는 2, 1의 2가지

e, f에 각각 들어갈 수 있는 수는

2, 3 또는 3, 2의 2가지

g, h에 각각 들어갈 수 있는 수는

1, 4 또는 4, 1의 2가지

따라서 8개의 정사각형에 들어갈 수 있는 수를 정하는 방법의 수는

$2\cdot2\cdot2\cdot2=16$

> a, b, c, d, e, f, g, h에 들어갈 수가 정해지면 나머지 4개의 정사각형에 들어갈 수도 정해진다.

이때 다음 그림과 같은 경우는 나머지 4개의 사각형에 조건을 만족시키도록 수를 적을 수 없다.

	3	1	
3	1	4	2
1	2	3	4
	4	2	

	3	1	
2	1	4	3
4	2	3	1
	4	2	

	4	2	
2	1	4	3
4	2	3	1
	3	1	

	4	2	
3	1	4	2
1	2	3	4
	3	1	

따라서 구하는 방법의 수는

$16-4=12$

답 12

133 문제 이해 평행한 두 직선에서 각각 두 점을 택하면 사각형이 되고, 직선 위의 두 변이 서로 평행하므로 이 사각형은 사다리꼴이다. ● 10%

> 사다리꼴은 직사각형과 평행사변형을 모두 포함한다.

해결 과정 윗변의 길이를 a, 아랫변의 길이를 b라 하면 사각형의 넓이는

$\frac{1}{2}(a+b)\cdot1=3$

> (사다리꼴의 넓이)
> $=\frac{1}{2}\{$(윗변의 길이)
> $+$(아랫변의 길이)$\}$
> $\times$(높이)

이므로

$a+b=6,\ 1\le a\le4,\ 1\le b\le4$ ● 20%

(i) $a=2,\ b=4$일 때

$a=2$인 경우는 3가지, $b=4$인 경우는 1가지이므로

$3\cdot1=3$

(ii) $a=3,\ b=3$일 때

> $a=3,\ b=3$인 경우에는 평행사변형 또는 직사각형이 된다.

$a=3$인 경우는 2가지, $b=3$인 경우도 2가지이므로

$2\cdot2=4$

(iii) $a=4,\ b=2$일 때

$a=4$인 경우는 1가지, $b=2$인 경우는 3가지이므로

$1\cdot3=3$ ● 50%

답 구하기 이상에서 구하는 사각형의 개수는

$3+4+3=10$ ● 20%

답 10

134 $1\square\square\square\square0$ 또는 $1\square\square\square\square2$ 또는 $1\square\square\square\square4$ 꼴의 수의 개수는

$3\cdot4!=3\cdot24=72$

$20\square\square\square4$ 또는 $21\square\square\square0$ 또는 $21\square\square\square4$ 꼴의 수의 개수는

$3\cdot3!=18$

$230\square\square4$ 또는 $231\square\square0$ 또는 $231\square\square4$ 또는 $234\square\square0$ 꼴의 수의 개수는

$4\cdot2!=8$

이때 $100-(72+18+8)=2$이므로 구하는 수는 $235\square\square\square$ 꼴의 짝수 중 2번째로 작은 수이다.

따라서 235014, 235104, …에서 구하는 수는

235104

답 ③

135 일대일 대응인 함수 f의 개수는 $5!=120$이고, 이 중 $f(x)=x$인 경우는 $f(4)=4,\ f(5)=5$일 때이다.

> $n(X)=n$인 집합 X에 대하여 X에서 X로의 일대일 대응의 개수
> $\Rightarrow n!$

$f(4)=4$인 함수 f의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$에서 집합 $\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$로의 일대일 대응의 개수와 같으므로

$4!=24$

> 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 집합 $\{4,\ 6,\ 7,\ 8\}$로의 일대일 대응의 개수

마찬가지로 $f(5)=5$인 함수 f의 개수는 $4!=24$

이때 $f(4)=4$이고 $f(5)=5$인 함수 f의 개수는

$3!=6$

> 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$에서 집합 $\{6,\ 7,\ 8\}$로의 일대일 대응의 개수

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$120-(24+24-6)=78$

답 78

다른 풀이 (i) $f(4)=5$인 경우

함수 f의 개수는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$에서 $\{4,\ 6,\ 7,\ 8\}$로의 일대일 대응의 개수와 같으므로 $4!=24$

(ii) $f(4)=6$인 경우

$f(5)$의 값은 4, 7, 8 중의 하나이고, $f(1),\ f(2),\ f(3)$의 값은 $f(4)$와 $f(5)$의 값을 제외한 나머지 함숫값을 가질 수 있으므로 함수 f의 개수는

$3\cdot3!=18$

(iii) $f(4)=7,\ f(4)=8$인 경우도 (ii)와 마찬가지이므로 함수 f의 개수는 각각 18개씩이다.

이상에서 구하는 함수 f의 개수는

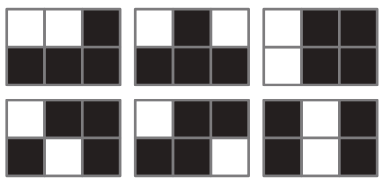
$24+3\cdot18=78$

136 (i) 6개의 타일에 모두 검은색을 칠하거나 흰색을 칠하는 방법의 수는 2

(ii) 6개의 타일 중 5개에 검은색, 1개에 흰색을 칠하는 방법의 수는 2

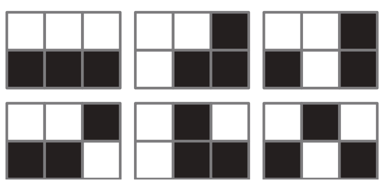
5개에 흰색, 1개에 검은색을 칠하는 경우도 같으므로 방법의 수는 2

(iii) 6개의 타일 중 4개에 검은색, 2개에 흰색을 칠하는 방법의 수는 6



4개에 흰색, 2개에 검은색을 칠하는 경우도 같으므로 방법의 수는 6

(iv) 6개의 타일 중 3개에 검은색, 3개에 흰색을 칠하는 방법의 수는 6



이상에서 구하는 서로 다른 도형의 개수는

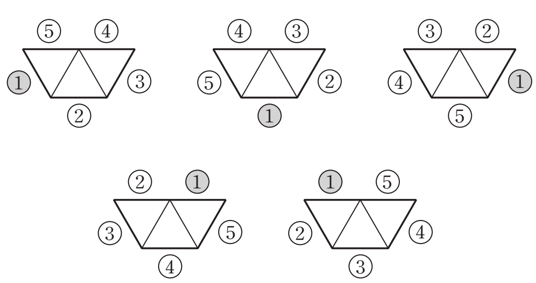
$2+2\cdot2+6\cdot2+6=24$

답 ④

137 5명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이때 주어진 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot5=120$

답 120

다른 풀이 주어진 모양의 탁자에 5명이 둘러앉을 때, 회전하여 일치하는 경우가 없으므로 구하는 방법의 수는 5명을 일렬로 세우는 방법의 수와 같다.

$\therefore 5!=120$

138 문제 이해 $A\cap B=\{1, 2\}$, $A\cup B=U$이므로

$B=(U-A)\cup\{1, 2\}$ ● 30%

일품 BOX

8개의 원소 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10은 각각 집합 A나 집합 B 중 하나의 집합에 속할 수 있다.

해결 과정 즉 원소 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10은 A, B 중 어느 한 집합의 원소이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는 A, B 중에서 8개를 택하는 중복순열의 수와 같다. ● 40%

답 구하기 따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

${}_2\Pi_8=2^8=256$ ● 30%

답 256

139 ㄱ. 두 자리 수의 16의 자리의 숫자는 0이 아니어야 하고 일의 자리의 숫자는 A, B, C, D, E, F 중 하나이어야 하므로

$15\cdot6=90$

16의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, …, 9의 9개
16의 자리에 올 수 있는 알파벳은 A, B, …, F의 6개
따라서 16의 자리에 올 수 있는 것의 개수는 $9+6=15$

ㄴ. n자리 수의 16^{n-1}의 자리의 숫자는 0이 아니어야 하므로

$15\cdot{}_{16}\Pi_{n-1}=15\cdot16^{n-1}$

ㄷ. n자리 이하의 수의 개수는 16개에서 n개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{16}\Pi_n=16^n$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 ㄷ. n자리 이하의 수의 개수는

$16+15\cdot16+15\cdot16^2+\cdots+15\cdot16^{n-1}$

$=1+(15+15\cdot16+15\cdot16^2+\cdots+15\cdot16^{n-1})$

$=1+\dfrac{15(16^n-1)}{16-1}=16^n$

첫째항이 15, 공비가 16인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

140 3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하므로 1을 적어도 한 개 포함하도록 5개의 숫자를 택하는 방법은

(1, 1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 3, 3),
(1, 1, 2, 2, 3), (1, 2, 2, 2, 2),
(1, 2, 3, 3, 3)

따라서 구하는 자연수의 개수는

$\dfrac{5!}{4!}+\dfrac{5!}{3!\cdot2!}+\dfrac{5!}{2!\cdot2!}+\dfrac{5!}{4!}+\dfrac{5!}{3!}$

$=5+10+30+5+20=70$ 답 ③

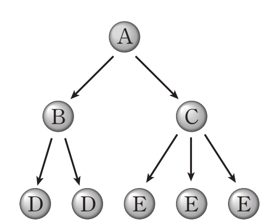
1등급 비밀노트

다섯 자리 자연수의 각 자리의 숫자의 합을 A라 하면 1을 적어도 한 개 포함해야 하므로

$5\le A<15$

따라서 각 자리의 숫자의 합이 6, 9, 12인 경우를 생각하면 된다.

141 오른쪽 그림에서 비상 연락망을 만드는 방법의 수는 A, B, C, D, D, E, E, E를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로



$\dfrac{8!}{2!\cdot3!}=3360$

답 ⑤

142 문제 이해 조건 (나)에 의하여 다음과 같이 세 가지의 경우로 나눌 수 있다. ● 20%

해결 과정 숫자를 □, 문자를 ○라 할 때

숫자가 들어갈 자리와 문자가 들어갈 자리를 먼저 정한다.

(i) 숫자가 1개, 문자가 4개인 경우

□, ○, ○, ○, ○를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{4!}=5$

숫자 1개를 택하는 순열의 수는 $_3P_1=3$

문자 4개를 택하는 중복순열의 수는 $_2\Pi_4=16$

이므로

$5\cdot3\cdot16=240$ ● 20%

(ii) 숫자가 2개, 문자가 3개인 경우

□, □, ○, ○, ○를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot3!}=10$

숫자 2개를 택하는 순열의 수는 $_3P_2=6$

문자 3개를 택하는 중복순열의 수는 $_2\Pi_3=8$

이므로

$10\cdot6\cdot8=480$ ● 20%

(iii) 숫자가 3개, 문자가 2개인 경우

□, □, □, ○, ○를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{3!\cdot2!}=10$

숫자 3개를 택하는 순열의 수는 $_3P_3=6$

문자 2개를 택하는 중복순열의 수는 $_2\Pi_2=4$

이므로

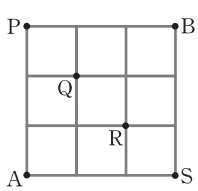
$10\cdot6\cdot4=240$ ● 20%

답 구하기 이상에서 만들 수 있는 모든 암호의 개수는

$240+480+240=960$ ● 20%

답 960

143 해결 과정 오른쪽 그림과 같이 두 사람이 만날 수 있는 지점을 P, Q, R, S라 하자.



(i) 갑과 을이 P에서 만나는 경우의 수는

$(1\cdot1)^2=1$ ● 20%

(ii) 갑과 을이 Q에서 만나는 경우의 수는

$\left(\frac{3!}{2!}\cdot\frac{3!}{2!}\right)^2=81$ ● 20%

(iii) 갑과 을이 R에서 만나는 경우의 수는

$\left(\frac{3!}{2!}\cdot\frac{3!}{2!}\right)^2=81$ ● 20%

(iv) 갑과 을이 S에서 만나는 경우의 수는

$(1\cdot1)^2=1$ ● 20%

답 구하기 이상에서 구하는 경우의 수는

$1+81+81+1=164$ ● 20%

답 164

1등급 비밀노트

① 갑과 을이 동시에 출발하고 속력이 같으므로 만나는 순간에 갑과 을의 이동 거리가 같아야 한다. 따라서 P, Q, R, S 이외의 지점에서는 만날 수 없다.

② 갑과 을이 P에서 만나는 경우의 수는

(A에서 P까지 가는 경로의 수)×(B에서 P까지 가는 경로의 수)

×(P에서 B까지 가는 경로의 수)×(P에서 A까지 가는 경로의 수)

={(A에서 P까지 가는 경로의 수)×(B에서 P까지 가는 경로의 수)}^{2}

144 오른쪽 그림과 같이 자동차 A, B에 나누어 타는 방법의 수는 a, b, c, d, e, f, f를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

	A		B	
앞	a	b	d	e
뒤	c		f	f

조건 (나)에서 자동차 B의 뒷좌석 두 자리는 같은 자리로 생각한다.

$\frac{7!}{2!}=2520$

답 2520

다른 풀이 두 자동차 A, B에 탈 사람을 3명, 4명으로 나누는 방법의 수는 $_7C_3\cdot{_4C_4}=35$

이때 자동차 A의 운전석, 운전석의 옆좌석, 뒷좌석에 앉을 사람을 정하는 방법의 수는 $3!=6$

자동차 B의 운전석, 운전석의 옆좌석에 앉을 사람을 정하는 방법의 수는 $_4P_2=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$35\cdot6\cdot12=2520$

145 1000부터 1999까지의 수는 천의 자리의 숫자가 1로 홀수이므로 가운데 세 자리의 숫자의 합이 홀수이면서 세 자리의 숫자가 모두 다른 경우를 구하면 된다.

각 자리의 숫자의 합이 짝수이다.

(i) 세 자리의 숫자가 모두 홀수인 경우

홀수인 1, 3, 5, 7, 9 중 3개를 뽑아 일렬로 나열하면 되므로

$_5P_3=60$

(ii) 세 자리의 숫자 중 짝수가 2개, 홀수가 1개인 경우

짝수인 0, 2, 4, 6, 8 중 2개를 뽑고, 홀수인 1, 3, 5, 7, 9 중 1개를 뽑은 후 일렬로 나열하면 되므로

$_5C_2\cdot{_5C_1}\cdot3!=10\cdot5\cdot6=300$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$60+300=360$

답 360

146 (i) 우리나라 남자 선수 4명과 미국 여자 선수 6명이 서로 악수를 하는 경우의 수는

$_4C_1\cdot{_6C_1}=24$

(ii) 우리나라 여자 선수 4명과 미국 남자 선수 6명이 서로 악수를 하는 경우의 수는

$_4C_1\cdot{_6C_1}=24$

(i), (ii)에서 구하는 악수의 횟수는

$24+24=48$

답 ④

147 조건 (가)에서 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 2개를 택하여 $f(2)<f(4)$가 되도록 하는 방법의 수는

$${}_5\mathrm{C}_2=10$$

조건 (나)에서 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 중복을 허용하여 3개를 택하여 $f(1)\le f(3)\le f(5)$가 되도록 하는 방법의 수는

$${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$10\cdot35=350$$

답 ①

148 해결 과정 11^{11}

$$=(10+1)^{11}$$
$$={}_{11}\mathrm{C}_0 10^{11}+{}_{11}\mathrm{C}_1 10^{10}+{}_{11}\mathrm{C}_2 10^9+\cdots+{}_{11}\mathrm{C}_9 10^2+{}_{11}\mathrm{C}_{10} 10+{}_{11}\mathrm{C}_{11}$$
$$=k\cdot10^3+5500+110+1$$
$$=k\cdot10^3+5611 \text{ (단, } k\text{는 자연수)}$$

● 80%

일품 BOX: ${}_{11}\mathrm{C}_9 10^2={}_{11}\mathrm{C}_2 10^2=5500$

일품 BOX: ${}_{11}\mathrm{C}_{10} 10={}_{11}\mathrm{C}_1 10=110$

답 구하기 따라서 11^{11}의 일의 자리의 숫자는 1, 십의 자리의 숫자는 1, 백의 자리의 숫자는 6이므로

$$a=1,\ b=1,\ c=6$$
$$\therefore 100a+10b+c=116$$

● 20%

답 116

149 $(N+1)^7={}_7\mathrm{C}_0 N^7+{}_7\mathrm{C}_1 N^6+\cdots+{}_7\mathrm{C}_6 N+{}_7\mathrm{C}_7 N^0$

이때 ${}_7\mathrm{C}_1 N^6+\cdots+{}_7\mathrm{C}_6 N$은 7로 나누어떨어지므로 $(N+1)^7$을 7로 나누었을 때의 나머지는 ${}_7\mathrm{C}_0 N^7+{}_7\mathrm{C}_7 N^0$을 7로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 ${}_7\mathrm{C}_0 N^7+{}_7\mathrm{C}_7 N^0=N^7+1$이므로 N^7을 7로 나누었을 때의 나머지가 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6일 때, $(N+1)^7$을 7로 나누었을 때의 나머지는 각각 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0이다.

따라서 오늘부터 N^7째 되는 날이 금요일이면 $(N+1)^7$째 되는 날은 토요일이다.

답 ④

일품 BOX: ${}_7\mathrm{C}_1$, ${}_7\mathrm{C}_2$, ${}_7\mathrm{C}_3$, ${}_7\mathrm{C}_4$, ${}_7\mathrm{C}_5$, ${}_7\mathrm{C}_6$은 모두 7의 배수이다.

1등급 비밀노트

오늘부터 $7N$째 되는 날이 월요일이면 $(7N_1+1)$째 되는 날은 화요일, $(7N_2+2)$째 되는 날은 수요일, $\cdots$, $(7N_6+6)$째 되는 날은 일요일이다. (단, N, N_1, N_2, $\cdots$, N_6은 자연수이다.)

150 서로 다른 21개의 제품 중에서 0개, 1개, $\cdots$, 10개를 택하고 나머지를 똑같은 제품으로 구성하면 된다.

따라서 만들 수 있는 세트 상품의 개수는

$${}_{21}\mathrm{C}_0+{}_{21}\mathrm{C}_1+{}_{21}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{10}$$
$$={}_{21}\mathrm{C}_{21}+{}_{21}\mathrm{C}_{20}+{}_{21}\mathrm{C}_{19}+\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{11}$$
$$=\frac{1}{2}({}_{21}\mathrm{C}_0+{}_{21}\mathrm{C}_1+{}_{21}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{21})$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2^{21}=2^{20}$$

답 ⑤

151 문제 이해 n이 짝수이므로

$${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_4-{}_n\mathrm{C}_5+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=0$$
$$\therefore {}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2={}_n\mathrm{C}_3-{}_n\mathrm{C}_4+{}_n\mathrm{C}_5-\cdots-{}_n\mathrm{C}_n$$

● 50%

해결 과정 즉 ${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2=78$이므로

$$1-n+\frac{n(n-1)}{2}=78$$

● 30%

답 구하기 $n^2-3n-154=0$

$$(n+11)(n-14)=0$$
$$\therefore n=14$$

● 20%

답 14

152 9의 배수가 되기 위해서는 각 자리의 숫자들의 합이 9의 배수가 되어야 한다. 백의 자리의 숫자를 x, 십의 자리의 숫자를 y, 일의 자리의 숫자를 z라 하자.

(i) $x+y+z=9$인 경우

9를 2개의 자연수로 분할하면

$$9=8+1=7+2=6+3=5+4$$

이므로 0을 1개 포함하는 자연수의 개수는

$$4\cdot2\cdot2!=16$$

0을 2개 포함하는 자연수의 개수는 1

$$\therefore 16+1=17$$

(ii) $x+y+z=18$인 경우

0을 1개 포함하는 자연수는 909, 990의 2개이고 0을 2개 포함하는 자연수는 없다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$17+2=19$$

답 ②

일품 BOX: 십의 자리의 숫자가 0이거나 일의 자리의 숫자가 0인 자연수

일품 BOX: 900

153 해결 과정 10을 1부터 5까지의 자연수 3개로 분할하면

$$10=5+4+1=5+3+2$$
$$=4+4+2=4+3+3$$

● 20%

(i) 5, 4, 1 또는 5, 3, 2가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는

$$2\cdot3!=12$$

● 30%

(ii) 4, 4, 2 또는 4, 3, 3이 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는

$$2\cdot\frac{3!}{2!}=6$$

● 30%

답 구하기 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12+6=18$$

● 20%

답 18

일품 BOX: 5, 4, 1 또는 5, 3, 2를 일렬로 나열하는 방법의 수

일품 BOX: 4, 4, 2 또는 4, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수

154 컵의 들이의 분모는 9이므로 2L가 되려면 분자의 네 개의 합이 18이 되어야 한다.

$$18=8+8+1+1=8+7+2+1$$
$$=8+6+3+1=8+6+2+2$$
$$=8+5+4+1=8+5+3+2$$
$$=8+4+4+2=8+4+3+3$$
$$=7+7+3+1=7+7+2+2$$
$$=7+6+4+1=7+6+3+2$$

일품 BOX: $2\mathrm{L}=\frac{18}{9}\mathrm{L}$

$=7+5+5+1=7+5+4+2$
$=7+5+3+3=7+4+4+3$
$=6+6+5+1=6+6+4+2$
$=6+6+3+3=6+5+5+2$
$=6+5+4+3=6+4+4+4$
$=5+5+5+3=5+5+4+4$

$\therefore a=24$

3L가 되려면 분자의 네 개의 합이 27이 되어야 한다.

$27=8+8+8+3=8+8+7+4$
$=8+8+6+5=8+7+7+5$
$=8+7+6+6=7+7+7+6$

$\therefore b=6$

$\therefore a-b=18$

답 ⑤

> 일품 BOX: $3\text{L}=\frac{27}{9}\text{L}$

155 6개의 수를 2개씩 3개의 조로 나눈 후 두 수의 합이 작은 것부터 차례대로 1열, 2열, 3열에 써넣으면 되므로 각 열에 써넣을 수를 선택하는 방법의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15$$

이때 각 열마다 두 수를 써넣는 방법의 수가 2가지씩이므로 구하는 방법의 수는

$$15\cdot2\cdot2\cdot2=120$$

답 ②

> 일품 BOX: 3개의 조에 들어가는 수가 각각 2개, 2개, 2개로 같으므로 3!로 나눈다.

1등급 비밀노트

$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^n$ (n은 자연수)에서

$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-2<2^n$

이므로 가장 큰 수는 반드시 3열에 써넣어야 한다. 2열과 1열에 처음으로 써넣을 수를 선택할 때에도 같은 방법으로 남은 수 중 가장 큰 수를 선택해야 한다.

156 3의 배수가 되기 위해서는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수가 되어야 한다. 3으로 나누었을 때 나머지가 0인 수의 집합을 A_0, 나머지가 1인 수의 집합을 A_1, 나머지가 2인 수의 집합을 A_2라 하면

$$A_0=\{0,\ 3,\ 6,\ 9\},\ A_1=\{1,\ 4,\ 7\},\ A_2=\{2,\ 5,\ 8\}$$

(i) A_0, A_1, A_2 중 한 집합의 원소만으로 만든 3의 배수의 개수는

$$3\cdot3\cdot2+3!+3!=30$$

(ii) A_0, A_1, A_2의 원소를 각각 한 개씩 택하여 나열하는 방법의 수는

$${}_4C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_1\cdot3!=216$$

이때 백의 자리에 0이 오는 경우의 수가

${}_3C_1\cdot{}_3C_1\cdot2!=18$이므로 3의 배수의 개수는

$$216-18=198$$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$$30+198=228$$

답 ①

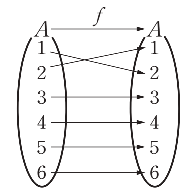
> 일품 BOX: 각 자리의 숫자의 합이 $3k+0=3k$, $3l+3=3(l+1)$, $3m+6=3(m+2)$ 꼴이므로 3의 배수이다. (단, k, l, m은 자연수)

> 일품 BOX: 각 자리의 숫자의 합이 $3k+3=3(k+1)$ 꼴이므로 3의 배수이다. (단, k는 자연수)

157 $f(f(x))=x \Longleftrightarrow f(x)=f^{-1}(x)$에서 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

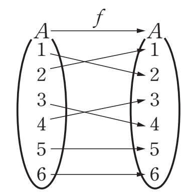
(i) 항등함수 1가지

(ii) 오른쪽 그림과 같이 2개의 수는 값이 서로 바뀌어 대응되고 나머지 4개의 수는 자기 자신으로 대응되는 경우의 수는



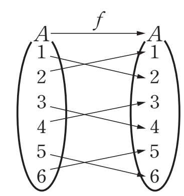
$${}_6C_2=15$$

(iii) 오른쪽 그림과 같이 2개의 수가 서로 바뀌어 대응되는 것이 2쌍 존재하고 나머지 2개의 수는 자기 자신으로 대응되는 경우의 수는



$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot\frac{1}{2!}=45$$

(iv) 오른쪽 그림과 같이 2개의 수가 서로 바뀌어 대응되는 것이 3쌍 존재하는 경우의 수는



$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15$$

이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$$1+15+45+15=76$$

답 ⑤

1등급 비밀노트

$f(f(x))=x \Longleftrightarrow f(x)=f^{-1}(x)$에서

① $f(a)=a$일 때, $f^{-1}(a)=a$이므로 $f(f(x))=x$를 만족시킨다.

② $f(a)=b\ (a\neq b)$일 때, $f^{-1}(a)=b$이어야 하므로 $f(b)=a$이어야 한다.

158 문제 이해 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$이므로 각 가로줄에 있는 세 수의 합은 $\frac{45}{3}=15$이어야 한다.

이때 7, 8, 9는 서로 다른 가로줄에 있어야 하므로 세 수의 합이 15가 되도록 나누는 경우의 수는

(7, 2, 6), (8, 3, 4), (9, 1, 5)
또는 (7, 3, 5), (8, 1, 6), (9, 2, 4)
의 2가지 ● 40%

> 일품 BOX: $7+8=15$, $7+9=16>15$, $8+9=17>15$ 이므로 7, 8, 9는 같은 가로줄에 올 수 없다.

해결 과정 (i) (7, 2, 6), (8, 3, 4), (9, 1, 5)인 경우

위의 세 묶음을 각 줄에 나열하는 경우의 수는

$$3!=6$$

이고, 각 줄에서 세 수를 나열하는 경우의 수는

$$3!\cdot3!\cdot3!=216$$

이므로 이 경우의 수는

$$6\cdot216=1296$$

(ii) (7, 3, 5), (8, 1, 6), (9, 2, 4)인 경우

(i)과 마찬가지이므로 1296 ● 50%

답 구하기 이상에서 구하는 경우의 수는

$$2\cdot1296=2592$$ ● 10%

답 2592

159 전략 a_4를 점등하는 사람이 A, B, C일 때로 경우를 나누어 생각한다.

Step 1 $k=2$일 때, A, B, C가 점등하는 전구는 각각

a_{1+p}, a_{2+q}, a_{3+r}

이다.

Step 2 (i) A가 a_4를 점등하는 경우

$a_{1+p}=a_4$에서 $p=3$이므로 A가 점등하는 전구는

a_{3k-2} …… ㉠

ⓘ B가 a_5를 점등하는 경우

$a_{2+q}=a_5$에서 $q=3$이므로 B가 점등하는 전구는

a_{3k-1} …… ㉡

㉠, ㉡에서 a_6은 C가 점등하게 된다.

$a_{3+r}=a_6$에서 $r=3$이므로 C가 점등하는 전구는

a_{3k}

따라서 $(p,\ q,\ r)$는 $(3,\ 3,\ 3)$이다.

ⓘⓘ C가 a_5를 점등하는 경우

$a_{3+r}=a_5$에서 $r=2$이므로 C가 점등하는 전구는

a_{2k+1}

이 경우에는 $k=3$일 때 A, C 두 사람이 a_7을 점등하게 되므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) B가 a_4를 점등하는 경우

$a_{2+q}=a_4$에서 $q=2$이므로 B가 점등하는 전구는

a_{2k} …… ㉢

ⓘ A가 a_5를 점등하는 경우

$a_{1+p}=a_5$에서 $p=4$이므로 A가 점등하는 전구는

a_{4k-3} …… ㉣

㉢, ㉣에서 a_7은 C가 점등하게 된다.

$a_{3+r}=a_7$에서 $r=4$이므로 C가 점등하는 전구는

a_{4k-1}

따라서 $(p,\ q,\ r)$는 $(4,\ 2,\ 4)$이다.

ⓘⓘ C가 a_5를 점등하는 경우

$a_{3+r}=a_5$에서 $r=2$이므로 C가 점등하는 전구는

a_{2k+1}

이 경우에는 a_2 이후의 모든 전구를 B와 C만이 점등하게 된다.

따라서 p가 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) C가 a_4를 점등하는 경우

$a_{3+r}=a_4$에서 $r=1$이므로 가 점등하는 전구는

a_{k+2}

이 경우에는 a_3 이후의 모든 전구를 C만이 점등하게 된다.

따라서 p, q가 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

Step 3 이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$(3,\ 3,\ 3)$, $(4,\ 2,\ 4)$

의 2이다. 답 2

일품 BOX

A, B, C가 두 번째로 점등하는 전구

㉠에서 A가 점등하는 전구는 a_1, a_4, a_7, …
㉡에서 B가 점등하는 전구는 a_2, a_5, a_8, …

$k=3$일 때
$a_{3k-2}=a_{3\cdot3-2}=a_7$
$a_{2k+1}=a_{2\cdot3+1}=a_7$

㉢에서 B가 점등하는 전구는 a_2, a_4, a_6, a_8, …
㉣에서 A가 점등하는 전구는 a_1, a_5, a_9, …

$a_{1+p}=a_1$이므로 $p=0$

$a_{1+p}=a_1$이므로 $p=0$
$a_{2+q}=a_2$이므로 $q=0$

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때 $\log_a N^k=k\log_a N$

1등급 비밀노트

$a_{1+p(k-1)}$, $a_{2+q(k-1)}$, $a_{3+r(k-1)}$(k, p, q, r는 자연수)에서
$1+p(k-1)$, $2+q(k-1)$, $3+r(k-1)$
은 공차가 각각 p, q, r인 등차수열의 일반항으로 생각할 수 있다.

160 전략 쌓는 동전의 순서를 결정하는 방법의 수와 동전의 면을 결정하는 방법의 수를 각각 구하여 곱한다.

Step 1 50원짜리 동전 4개와 500원짜리 동전 4개를 앞면, 뒷면을 구분하지 않고 위로 쌓는 방법의 수는

$\dfrac{8!}{4!\cdot4!}=70$ …… ㉠

Step 2 한 개의 동전을 쌓을 때 그림이 새겨진 면이 위로 올라오게 쌓는 경우를 a, 숫자가 새겨진 면이 위로 올라오게 쌓는 경우를 b라 하면 조건에 의하여 a, b가 이 순서로 연속하여 나열될 수 없다.

따라서 8개의 동전을 쌓을 때 그림이 새겨진 면이 맞닿지 않도록 8개의 동전의 각 면을 정하는 방법의 수는 다음과 같다.

(i) 맨 아래에 있는 동전이 a인 경우

$aaaaaaaa$의 1가지

(ii) 맨 아래에 있는 동전이 b인 경우

$baaaaaaa$, $bbaaaaaa$, $bbbaaaaa$,
$bbbbaaaa$, $bbbbbaaa$, $bbbbbbaa$,
$bbbbbbba$, $bbbbbbbb$의 8가지

(i), (ii)에서 8개의 동전을 쌓는 방법의 수는

$1+8=9$

Step 3 ㉠의 각각의 경우에 대하여 동전을 쌓는 방법의 수가 9이므로 구하는 방법의 수는

$70\cdot9=630$ 답 ③

161 전략 $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_r$임을 이용한다.

Step 1 주어진 등식

$$\frac{1}{9!\cdot2!}+\frac{1}{8!\cdot3!}+\frac{1}{7!\cdot4!}+\frac{1}{6!\cdot5!}=\frac{n}{11!}$$

의 양변에 $11!$을 곱하면

$$n=\frac{11!}{9!\cdot2!}+\frac{11!}{8!\cdot3!}+\frac{11!}{7!\cdot4!}+\frac{11!}{6!\cdot5!}$$
$$={}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5$$

Step 2 이때

${}_{11}C_2={}_{11}C_9$, ${}_{11}C_3={}_{11}C_8$, ${}_{11}C_4={}_{11}C_7$, ${}_{11}C_5={}_{11}C_6$

이므로

$2n={}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+\cdots+{}_{11}C_9$

또 ${}_{11}C_0={}_{11}C_{11}=1$, ${}_{11}C_1={}_{11}C_{10}=11$이므로

$2n+1+11+11+1={}_{11}C_0+{}_{11}C_1+\cdots+{}_{11}C_{11}$

$2n+24=2^{11}$

Step 3 $\therefore \log_2(2n+24)=\log_2 2^{11}=11$ 답 11

Ⅱ 확률

04 확률의 뜻과 활용 본책 34쪽

162 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내면 표본공간 S는

$S=\{(\mathrm{H},\ 1),\ (\mathrm{H},\ 2),\ (\mathrm{H},\ 3),\ (\mathrm{H},\ 4),\ (\mathrm{H},\ 5),\ (\mathrm{H},\ 6),\ (\mathrm{T},\ 1),\ (\mathrm{T},\ 2),\ (\mathrm{T},\ 3),\ (\mathrm{T},\ 4),\ (\mathrm{T},\ 5),\ (\mathrm{T},\ 6)\}$

$\therefore n(S)=12$

동전의 앞면과 주사위의 짝수의 눈이 나오는 사건 A는

$A=\{(\mathrm{H},\ 2),\ (\mathrm{H},\ 4),\ (\mathrm{H},\ 6)\}$

$\therefore n(A)=3$

$\therefore n(S)+n(A)=15$ 답 ③

일품 BOX
- $2\cdot6$
- $1\cdot3$

163 ㄱ. $n(S)={}_5\mathrm{C}_2=10$이므로 근원사건의 개수는 10이다.

ㄴ. 꺼낸 공에 적힌 두 수 a, b $(a<b)$를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면 차가 홀수인 사건 A는

$A=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (1,\ 4),\ (2,\ 5)\}$

$\therefore n(A)=6$

ㄷ. 꺼낸 공에 적힌 두 수의 합의 최댓값은 9이므로

$B=\varnothing$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

- 꺼낸 공에 적힌 두 수 a, b $(a<b)$를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면
  $S=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 5)\}$
- 두 수의 차가 1 또는 3

164 $A=\{1,\ 4\}$라 하면

$A^C=\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$

따라서 사건 A와 서로 배반사건인 것은 사건 A^C의 부분집합이므로 구하는 사건의 개수는

$2^4=16$ 답 ⑤

165 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$,

$A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6\}$, $C=\{5\}$

ㄱ. $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}=C^C$

ㄴ. $A\cap B=\{2\}\neq\varnothing$이므로 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. $A\cap C=\varnothing$이므로 A와 C는 서로 배반사건이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

166 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot2!\cdot2!}=90$

1, 1과 2, 2와 3, 3을 각각 한 개의 숫자로 생각하여 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{6}{90}=\dfrac{1}{15}$ 답 ①

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 모두 일렬로 나열하는 순열의 수
➡ $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$
(단, $p+q+\cdots+r=n$)

167 $|x-1|\le3$에서

$-3\le x-1\le3,\qquad -2\le x\le4$

$\therefore A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

$(x^2-1)(x^2-4)=0$에서

$x=\pm1,\ \pm2$

$\therefore B=\{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$

$a\in A$, $b\in B$인 a, b에 대하여 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$7\cdot4=28$

이고 $ab\ge0$인 경우는 다음 세 가지 경우이다.

(i) $a>0$, $b>0$일 때

$a>0$인 경우의 수 4

$b>0$인 경우의 수 2

따라서 $a>0$, $b>0$인 경우의 수는

$4\cdot2=8$

(ii) $a<0$, $b<0$일 때

$a<0$인 경우의 수 2

$b<0$인 경우의 수 2

따라서 $a<0$, $b<0$인 경우의 수는

$2\cdot2=4$

(iii) $a=0$일 때

$a=0$일 때 b는 $b\in B$인 모든 수이므로 경우의 수는

4

이상에서 $ab\ge0$인 경우의 수는

$8+4+4=16$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{16}{28}=\dfrac{4}{7}$ 답 ③

168 9개의 구슬 중에서 2개의 구슬을 꺼내는 방법의 수는

${}_9\mathrm{C}_2=36$

흰 구슬의 개수를 x라 하면 빨간 구슬의 개수는 $9-x$이므로 흰 구슬을 1개, 빨간 구슬을 1개 꺼내는 방법의 수는

${}_x\mathrm{C}_1\cdot{}_{9-x}\mathrm{C}_1=x(9-x)$

즉 $\dfrac{x(9-x)}{36}=\dfrac{5}{9}$이므로

$x^2-9x+20=0,\qquad (x-4)(x-5)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=5$

이때 $x>9-x$이므로 $\quad x=5$

따라서 흰 구슬의 개수는 5이다. 답 5

- 흰 구슬이 빨간 구슬보다 더 많다.

169 3 이상의 눈이 나오는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 1 또는 2의 눈이 나오는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$1000-(125+150)=725$

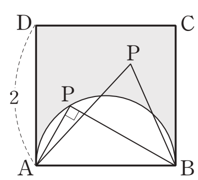
따라서 구하는 확률은

$\dfrac{725}{1000}=\dfrac{29}{40}$ 답 ③

170 20살인 여자가 80살까지 생존할 확률은
0.45
20살인 여자 500명 중 80살까지 생존할 것으로 기대되는 사람을 x명이라 하면
$$\frac{x}{500}=0.45$$
$$\therefore x=500\times0.45=225$$
따라서 구하는 사람 수는 225이다. 답 225

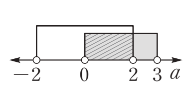
171 12시간 동안 생존한 쥐는 72마리이고, 앞으로 6시간, 즉 18시간 동안 생존한 쥐는 28마리이므로 6시간 이내에 사망한 쥐의 개체 수는
$$72-28=44$$
따라서 구하는 확률은
$$\frac{44}{72}=\frac{11}{18}$$
답 $\frac{11}{18}$

172 오른쪽 그림과 같이 점 P가 $\overline{\text{AB}}$를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때, △ABP는 직각삼각형이 되고, 이 반원의 외부에 점 P를 잡으면 △ABP는 예각삼각형이 된다.



따라서 구하는 확률은
$$\frac{(\text{어두운 부분의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})}=\frac{2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot1^2}{2\cdot2}$$
$$=1-\frac{\pi}{8}$$
답 ③

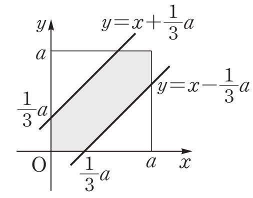
173 이차방정식 $x^2+ax+1=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 허근을 가지려면
$D=a^2-4<0$ $\therefore -2<a<2$
이때 $0<a<3$이므로 주어진 방정식이 허근을 갖도록 하는 a의 값의 범위는
$$0<a<2$$
따라서 오른쪽 그림에서 구하는 확률은



$$\frac{2}{3}$$
답 $\frac{2}{3}$

174 수직선 위의 네 점 A, B, P, Q의 좌표를 각각
A(0), B(a), P(x), Q(y) ($0\le x\le a$, $0\le y\le a$)
라 하면
$\overline{\text{PQ}}=|y-x|$, $\overline{\text{AB}}=a$
이므로 $\overline{\text{PQ}}\le\frac{1}{3}\overline{\text{AB}}$에서
$$|y-x|\le\frac{1}{3}a$$
$$\therefore x-\frac{1}{3}a\le y\le x+\frac{1}{3}a \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 부등식 ㉠의 영역은 오른쪽 그림에서 어두운 부분이므로 구하는 확률은



$$\frac{a^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)^2}{a^2}=\frac{5}{9}$$
답 ④

175 3, 6, 9는 모두 3의 배수이므로 두 자리 자연수의 각 자리의 숫자의 합도 항상 3의 배수이다.
따라서 구하는 확률은 1이다. 답 ⑤

176 주머니에 검은 공이 2개 들어 있으므로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공이 반드시 나온다.
따라서 구하는 확률은 0이다. 답 0

177 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\cdot6=36$
나온 두 눈의 수 a, b를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면 두 눈의 수의 곱이 소수인 경우는
(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (3, 1), (5, 1)
의 6가지이므로 $p=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
두 눈의 수의 합의 최댓값은 12이므로 $q=0$
또 두 눈의 수의 차는 항상 5 이하이므로 $r=1$
$\therefore q<p<r$ 답 ③

178 카드에 적힌 수가 4의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면
$$\text{P}(A)=\frac{50}{200},\ \text{P}(B)=\frac{40}{200},$$
$$\text{P}(A\cap B)=\frac{10}{200}$$
따라서 구하는 확률은
$$\text{P}(A\cup B)=\text{P}(A)+\text{P}(B)-\text{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{50}{200}+\frac{40}{200}-\frac{10}{200}$$
$$=\frac{2}{5}$$
답 ③

179 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\cdot6=36$
눈의 수의 합이 5인 사건을 A, 눈의 수의 합이 7인 사건을 B라 하고 나온 두 눈의 수 a, b를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면
$A=\{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\}$,
$B=\{(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),$
$(4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)\}$
$\therefore \text{P}(A)=\frac{4}{36},\ \text{P}(B)=\frac{6}{36}$
A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

일품 BOX

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이다.

반드시 일어나는 사건의 확률 ➡ 1

절대로 일어나지 않는 사건의 확률 ➡ 0

$(a+2)(a-2)<0$
$\therefore -2<a<2$

$200\div4=50$이므로 1부터 200까지의 자연수 중에서 4의 배수는 50개이고, $200\div5=40$이므로 5의 배수는 40개이다.

4와 5의 공배수, 즉 20의 배수가 적힌 카드가 나올 확률

$-\frac{1}{3}a\le y-x\le\frac{1}{3}a$
$\therefore x-\frac{1}{3}a\le y\le x+\frac{1}{3}a$

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{4}{36}+\frac{6}{36}$$
$$=\frac{5}{18}$$

답 ③

180 뽑힌 2명의 학생이 모두 A형인 사건을 A, 모두 O형인 사건을 O라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{6}{28},\ \mathrm{P}(O)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{3}{28}$$

A, O는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup O)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(O)$$
$$=\frac{6}{28}+\frac{3}{28}=\frac{9}{28}$$

답 ③

181 세 사람 중 적어도 두 사람이 같은 수를 적어 내는 사건을 A라 하면 A^C는 세 사람이 모두 다른 수를 적어 내는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{P}_3}{{}_5\Pi_3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{5^3}=\frac{12}{25}$$
$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{12}{25}=\frac{13}{25}$$

답 ③

182 적어도 2개가 빨간 공인 사건을 A라 하면 A^C는 빨간 공이 없거나 1개인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_4}+\frac{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_4}$$
$$=\frac{15}{210}+\frac{80}{210}=\frac{19}{42}$$
$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{19}{42}=\frac{23}{42}$$

답 ④

183 세 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 A^C는 세 수의 곱이 홀수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$
$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

답 ⑤

1등급 비밀노트

세 수의 곱이 짝수인 경우는
(짝수)×(짝수)×(짝수),
(짝수)×(짝수)×(홀수),
(짝수)×(홀수)×(홀수)
의 3가지이고 세 수의 곱이 홀수인 경우는
(홀수)×(홀수)×(홀수)
의 1가지이다. 따라서 세 수의 곱이 짝수인 경우의 수를 직접 구하는 것보다 여사건을 이용하는 것이 편리하다.

184 n개의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 택하는 방법의 수는 ${}_n\mathrm{C}_2$이므로

일품 BOX

• B형인 학생은 1명이므로 2명 모두 B형일 확률은 0이다.

• 모든 경우의 수는 1부터 5까지의 자연수 중 3개의 수를 택하는 중복순열의 수이므로 ${}_5\Pi_3$

• $a=1$, $b=1$이면 두 직선이 일치하므로 $b\neq1$이어야 한다.

• 세 수의 곱이 홀수가 되려면 세 수 모두 홀수이어야 하므로 1, 3, 5, 7, 9의 5장의 카드 중에서 3장을 뽑는다.

$${}_n\mathrm{C}_2=\frac{n(n-1)}{2}=91$$
$$n(n-1)=182=14\cdot13 \qquad \therefore n=14$$

답 ②

185 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$,
$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$
$\therefore A\cap B=\{3,\ 5,\ 7\}$
$A\cap B$와 서로 배반사건인 것은
$(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$
의 부분집합이다.
따라서 구하는 사건의 개수는 $2^5=32$

답 ④

186 (문제 이해) 사건 A와 서로 배반사건인 것은 사건 A^C의 부분집합이고, 사건 B와 서로 배반사건인 것은 사건 B^C의 부분집합이다.
따라서 사건 A, B와 모두 배반사건인 것은 $A^C\cap B^C$, 즉 $(A\cup B)^C$의 부분집합이다. ● 40%

(해결 과정) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=3+4-2=5$
이므로 $n((A\cup B)^C)=m-5$ ● 40%

(답 구하기) 따라서 $2^{m-5}=32=2^5$이므로
$m-5=5 \qquad \therefore m=10$ ● 20%

답 10

187 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는
$6\cdot6=36$
두 직선이 평행하려면
$a=1,\ b\neq1$
이를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6)$
의 5개이므로 구하는 확률은

$$\frac{5}{36}$$

답 ③

1등급 비밀노트

직선의 위치 관계
두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이
① 평행 ➡ $m=m',\ n\neq n'$
② 수직 ➡ $mm'=-1$

188 (해결 과정) 6장의 카드를 3장씩 2줄로 나열하는 방법의 수는
$6!=720$ ● 20%
두 수의 합이 7이 되는 경우는
$(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4)$ ● 30%
이 순서쌍을 세 열에 일렬로 나열하는 방법의 수는
$3!\cdot2\cdot2\cdot2=48$ ● 30%

(답 구하기) 따라서 구하는 확률은

$$\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$$ ● 20%

답 $\frac{1}{15}$

189 $f(n)=i^n+i^{n+1}$이라 하면

$f(1)=i+i^2=i-1=-1+i$

$f(2)=i^2+i^3=-1-i$

$f(3)=i^3+i^4=-i+1=1-i$

$f(4)=i^4+i^5=1+i$

$f(5)=i^5+i^6=i-1=-1+i$

$f(6)=i^6+i^7=-1-i$

$\vdots$

$\therefore A=\{-1+i,\ -1-i,\ 1-i,\ 1+i\}$

집합 A에서 서로 다른 두 복소수를 뽑는 방법의 수는

${}_4C_2=6$

그 곱이 실수가 되는 경우는

$-1+i,\ -1-i$ 또는 $-1+i,\ 1+i$ 또는

$-1-i,\ 1-i$ 또는 $1-i,\ 1+i$

의 4가지이다.

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

답 ④

일품 BOX

$(-1+i)(-1-i)$
$=(-1)^2-i^2=2$
$(-1+i)(1+i)$
$=-1^2+i^2=-2$
$(-1-i)(1-i)$
$=-1^2+i^2=-2$
$(1-i)(1+i)$
$=1^2-i^2=2$

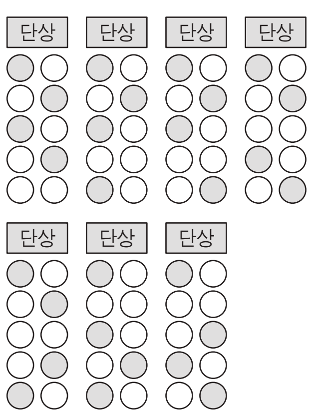
190 10명의 학생이 2명씩 5줄로 서는 방법의 수는

$10!$

여학생의 앞, 뒤, 좌, 우 모두에 여학생이 서지 않도록 여학생이 설 자리를 잡는 경우는 다음과 같다.

(i) 첫 번째 줄 왼쪽부터 여학생이 서는 경우

다음과 같이 7가지가 있다.

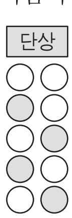


(ii) 첫 번째 줄 오른쪽부터 여학생이 서는 경우

(i)과 마찬가지이므로 7가지

(iii) 두 번째 줄 왼쪽부터 여학생이 서는 경우

다음과 같이 1가지가 있다.



(iv) 두 번째 줄 오른쪽부터 여학생이 서는 경우

(iii)과 마찬가지이므로 1가지

이상에서 10명의 학생이 조건에 맞게 서는 방법의 수는

$(7+7+1+1)\cdot 4!\cdot 6!=16\cdot 4!\cdot 6!$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{16\cdot 4!\cdot 6!}{10!}=\dfrac{8}{105}$

$\therefore p=105,\ q=8$

$\therefore p+q=113$

답 113

6개의 자리에 남학생을 세우는 경우의 수

4개의 자리에 여학생을 세우는 경우의 수

191 10장의 카드 중에서 2장의 카드를 뽑는 방법의 수는 ${}_{10}C_2=45$

20 미만의 양의 홀수 중 두 수의 평균의 최솟값은 2, 최댓값은 18이므로 평균이 5의 배수가 되는 경우는 5, 10, 15일 때이다. 따라서 그때의 두 수 $a,\ b\ (a<b)$를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내어 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

1, 3을 뽑을 때

17, 19를 뽑을 때

(i) 평균이 5인 경우

$(1,\ 9),\ (3,\ 7)$의 2가지

(ii) 평균이 10인 경우

$(1,\ 19),\ (3,\ 17),\ (5,\ 15),\ (7,\ 13),\ (9,\ 11)$

의 5가지

(iii) 평균이 15인 경우

$(11,\ 19),\ (13,\ 17)$의 2가지

이상에서 두 수의 평균이 5의 배수가 되는 경우의 수는

$2+5+2=9$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{9}{45}=\dfrac{1}{5}$

답 ②

192 10개의 공 중에서 2개의 공을 택하는 방법의 수는 ${}_{10}C_2=45$

2개의 공이 접할 때 접하는 공에 적힌 두 수 $a,\ b\ (a<b)$를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),$

$(3,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (4,\ 7),\ (4,\ 8),$

$(5,\ 6),\ (5,\ 8),\ (5,\ 9),\ (6,\ 9),\ (6,\ 10),$

$(7,\ 8),\ (8,\ 9),\ (9,\ 10)$

의 18가지이므로 구하는 확률은

$\dfrac{18}{45}=\dfrac{2}{5}$

답 ③

193 한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot 6\cdot 6=216$

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$이 좌표축과 만나지 않으려면 원의 중심 $(a,\ b)$에서 x축, y축까지의 거리가 각각 반지름의 길이보다 커야 하므로

$a>c,\ b>c$

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$의 중심 $(a,\ b)$에서
x축까지의 거리 ➡ $|b|$
y축까지의 거리 ➡ $|a|$

(i) $c=1$인 경우

$a,\ b$는 각각 2, 3, 4, 5, 6의 5가지이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $5\cdot 5=25$

(ii) $c=2$인 경우

a, b는 각각 3, 4, 5, 6의 4가지이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $4\cdot4=16$

(iii) $c=3$인 경우

a, b는 각각 4, 5, 6의 3가지이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3\cdot3=9$

(iv) $c=4$인 경우

a, b는 각각 5, 6의 2가지이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2\cdot2=4$

(v) $c=5$인 경우

a, b는 각각 6의 1가지이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $1\cdot1=1$

이상에서 원이 좌표축과 만나지 않는 경우의 수는

$25+16+9+4+1=55$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{55}{216}$ 답 $\dfrac{55}{216}$

194 세 꼭짓점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

${}_8C_3=56$

(i) 두 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형의 개수는

$4\cdot6=24$

(ii) 두 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 이등변삼각형의 개수는

8

(i), (ii)에서 이등변삼각형의 개수는

$24+8=32$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{32}{56}=\dfrac{4}{7}$ 답 ③

195 해결 과정 6명 중에서 4명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수는

${}_6P_4=360$ ● 30%

A, B가 뽑혀 이웃하게 서려면 A, B를 제외한 나머지 4명 중 2명을 뽑은 다음 A, B가 이웃하도록 A, B를 포함한 4명을 일렬로 세우면 되므로

${}_4C_2\cdot3!\cdot2!=72$ ● 50%

답 구하기 따라서 구하는 확률은

$\dfrac{72}{360}=\dfrac{1}{5}$ ● 20%

답 $\dfrac{1}{5}$

196 해결 과정 갑과 을이 동전을 각각 3번, 4번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$2^3\cdot2^4=2^7$ ● 30%

이때 을이 이기는 경우는 다음과 같다.

(i) 갑은 모두 뒷면이 나오고, 을은 앞면이 1번 이상 나오는 경우

${}_3C_0({}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4)=15$

일품 BOX

• 각 면에서 두 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형을 4개씩 만들 수 있다.

• 세 변의 길이가 모두 $\sqrt{2}$인 정삼각형

• A, B를 제외한 4명 중 2명을 뽑는 방법의 수 ${}_4C_2$
A, B를 한 명으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수 $3!$
A, B가 자리를 바꾸는 방법의 수 $2!$

삼각형의 세 중선의 교점
➡ 삼각형의 무게중심

(ii) 갑은 앞면이 1번 나오고, 을은 앞면이 2번 이상 나오는 경우

${}_3C_1({}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4)=33$

(iii) 갑은 앞면이 2번 나오고, 을은 앞면이 3번 이상 나오는 경우

${}_3C_2({}_4C_3+{}_4C_4)=15$

(iv) 갑은 앞면이 3번 나오고, 을은 앞면이 4번 나오는 경우

${}_3C_3\cdot{}_4C_4=1$

이상에서 을이 이기는 경우의 수는

$15+33+15+1=64$ ● 50%

답 구하기 따라서 구하는 확률은

$\dfrac{64}{2^7}=\dfrac{2^6}{2^7}=\dfrac{1}{2}$ ● 20%

답 $\dfrac{1}{2}$

1등급 비밀노트

을이 갑보다 동전을 던지는 횟수가 많으므로 을이 이길 확률이 $\dfrac{1}{2}$보다 클 것이라 생각할 수도 있다. 그러나 갑과 을이 비기는 경우도 있으므로 을이 이길 확률은 $\dfrac{1}{2}$이 될 수 있다.

197 이 공장에서 생산된 제품이 심사를 통과할 확률은

$\dfrac{3250}{4000}=\dfrac{13}{16}$

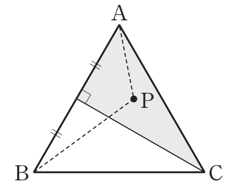
n개의 제품을 심사받는다고 하면

$n\cdot\dfrac{13}{16}\ge1000$ $\therefore n\ge1230.\times\times\times$

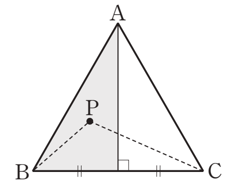
따라서 최소한 1231개의 제품을 심사받아야 한다.

답 ③

198 $\overline{AP}\le\overline{BP}$를 만족시키는 점 P가 존재하는 영역은 [그림 1]의 어두운 부분과 같고, $\overline{BP}\le\overline{CP}$를 만족시키는 점 P가 존재하는 영역은 [그림 2]의 어두운 부분과 같다.



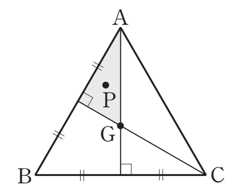
[그림 1]



[그림 2]

따라서 $\overline{AP}\le\overline{BP}\le\overline{CP}$를 만족시키는 점 P가 존재하는 영역은 [그림 3]의 어두운 부분과 같다. 이때 점 G는 △ABC의 무게중심이므로 구하는 확률은

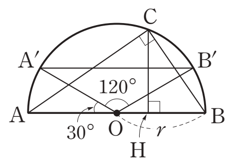
$\dfrac{1}{6}$ 답 ④



[그림 3]

Ⅱ 확률

199 해결 과정 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 지름 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CH}$$

$\therefore\ \overline{AC}\cdot\overline{BC}=2r\cdot\overline{CH}$ ● 30%

이때 $\overline{AC}\cdot\overline{BC}>r^2$이려면

$2r\cdot\overline{CH}>r^2 \quad \therefore\ \overline{CH}>\frac{r}{2}$ ● 30%

한편 지름 AB와 평행하고 반원의 중심 O에서의 거리가 $\frac{r}{2}$인 직선과 반원의 교점을 각각 A′, B′이라 하면

$\angle AOA'=\angle BOB'=30°$

$\therefore\ \angle A'OB'=120°$ ● 20%

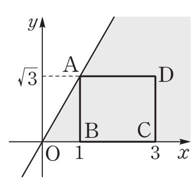
답 구하기 따라서 구하는 확률은

$$\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{\overset{\frown}{AB}}=\frac{\frac{120}{180}\cdot\pi r}{\pi r}=\frac{2}{3}$$ ● 20%

답 $\frac{2}{3}$

200 원점을 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\quad 0°<\theta<90°$

원점과 점 A$(1,\ \sqrt{3})$을 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60°이므로 직선과 □ABCD가 만나려면



$0°<\theta\le 60°$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{60°}{90°}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

1등급 비밀노트

기하학적 확률에서는 특정한 값을 가질 확률, 즉 $\theta=0°$, $\theta=60°$일 확률이 0이므로

$0°\le\theta\le60°,\ 0°\le\theta<60°,\ 0°<\theta\le60°,\ 0°<\theta<60°$

는 모두 같은 경우로 생각한다.

201 세 사람이 각각 주사위를 던질 때, 모든 경우의 수는 $\quad 6\cdot6\cdot6=216$

A, B, C 세 사람이 주사위를 던져서 나오는 세 수를 각각 a, b, c라 하자.

$b+c=n$ (n은 자연수)을 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c)$는

$(1,\ n-1),\ (2,\ n-2),\ \cdots,\ (n-1,\ 1)$의 $(n-1)$개

이므로 A가 이기는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $a=3$인 경우

$b+c=2$이므로 $\quad 1$

(ii) $a=4$인 경우

$b+c=2,\ 3$이므로

$1+2=3$

(iii) $a=5$인 경우

$b+c=2,\ 3,\ 4$이므로

$1+2+3=6$

(iv) $a=6$인 경우

$b+c=2,\ 3,\ 4,\ 5$이므로

$1+2+3+4=10$

이상에서 A가 이기는 경우의 수는

$1+3+6+10=20$

같은 방법으로 B, C가 이기는 경우의 수도 각각 $\quad 20$

A, B, C 세 사람이 각각 이기는 사건을 A, B, C라 하면

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{20}{216}=\frac{5}{54}$$

이고, A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

$$=\frac{5}{54}+\frac{5}{54}+\frac{5}{54}=\frac{5}{18}$$

답 ②

202 3의 배수인 두 수를 택하는 사건을 A, 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수와 2인 수를 각각 하나씩 택하는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{{}_{n}C_2}{{}_{3n+1}C_2}=\frac{n(n-1)}{\frac{(3n+1)\cdot 3n}{2}}$$

$$=\frac{n-1}{9n+3}$$

$$P(B)=\frac{{}_{n+1}C_1\cdot{}_{n}C_1}{{}_{3n+1}C_2}=\frac{(n+1)n}{\frac{(3n+1)\cdot3n}{2}}$$

$$=\frac{2n+2}{9n+3}$$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

$$=\frac{n-1}{9n+3}+\frac{2n+2}{9n+3}$$

$$=\frac{3n+1}{9n+3}=\frac{1}{3}$$

답 ②

203 U의 부분집합의 개수는 $\quad 2^5=32$

$n(A)=a$라 하면 U의 부분집합 중 집합 A를 포함하는 부분집합의 개수는 $\quad 2^{5-a}$

집합 A를 포함하는 부분집합을 택하는 사건을 사건 A라 하면

$$P(A)=\frac{2^{5-a}}{2^5}=\frac{1}{4}\qquad \therefore\ a=2$$

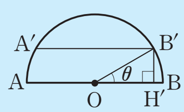
같은 방법으로 $n(B)=b$라 하고 집합 B를 포함하는 부분집합을 택하는 사건을 사건 B라 하면

$$P(B)=\frac{2^{5-b}}{2^5}=\frac{1}{8}\qquad \therefore\ b=3$$

따라서 집합 X, Y는 U의 부분집합 중 원소의 개수가 각각 2, 3인 것을 원소로 가지므로

$n(X)={}_5C_2=10,\ n(Y)={}_5C_3=10$

일품 BOX



$$\sin\theta=\frac{\overline{B'H'}}{\overline{OB'}}$$

$$=\frac{\frac{r}{2}}{r}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta=30°$

$\tan 60°=\sqrt{3}$

1부터 $3n+1$까지의 자연수 중 3의 배수의 개수는 $\ n$

1부터 $3n+1$까지의 자연수 중 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수와 2인 수의 개수는 각각

$n+1,\ n$

$2^{-a}=2^{-2}$

$2^{-b}=2^{-3}$

집합 X, Y의 원소를 택하는 사건을 각각 사건 X, Y라 하면

$$\mathrm{P}(X)=\frac{10}{32}=\frac{5}{16},\ \mathrm{P}(Y)=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$$

이고, X, Y는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\cup Y)=\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)$$
$$=\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$$

답 $\frac{5}{8}$

204 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{4}$$

$\mathrm{P}(B^C\cap C^C)=\mathrm{P}((B\cup C)^C)=\frac{2}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(B\cup C)=1-\mathrm{P}((B\cup C)^C)=\frac{1}{3}$$

사건 A는 사건 B, C와 모두 배반사건이므로 사건 $B\cup C$와도 서로 배반사건이다. 즉

$$\mathrm{P}(A\cap(B\cup C))=0$$
$$\therefore \mathrm{P}(A\cup B\cup C)$$
$$=\mathrm{P}(A\cup(B\cup C))$$
$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B\cup C)-\mathrm{P}(A\cap(B\cup C))$$
$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B\cup C)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

답 ②

205 A, B, C 세 학생에게 수험표 세 개를 나누어 주는 방법의 수는

$$3!=6$$

세 학생 중에서 적어도 한 명은 자신의 수험표를 받는 사건을 A라 하면 A^C는 세 학생 모두 자신의 수험표를 받지 않는 사건이다.

A, B, C의 수험표를 각각 a, b, c라 할 때, A, B, C가 아무도 자신의 수험표를 받지 못하는 경우는 오른쪽 표와 같으므로

A	B	C
b	c	a
c	a	b

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$
$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ④

206 문제 이해 흰 공이 적어도 1개 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 검은 공만 2개 나오는 사건이다. ● 20%

해결 과정 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3C_2}{{}_{n+3}C_2}=\frac{6}{(n+3)(n+2)}$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{6}{(n+3)(n+2)}$$ ● 30%

일품 BOX

드모르간 법칙
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
① $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$
② $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

확률의 덧셈정리
표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여
$\mathrm{P}(A\cup B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\mathrm{P}(A)\geq\frac{14}{15}$에서

$$1-\frac{6}{(n+3)(n+2)}\geq\frac{14}{15}$$
$$\frac{6}{(n+3)(n+2)}\leq\frac{1}{15}$$
$$(n+3)(n+2)\geq 90$$
$$n^2+5n-84\geq 0$$
$$(n+12)(n-7)\geq 0$$

$n+12>0$이므로

$n-7\geq 0 \quad \therefore n\geq 7$ ● 40%

답 구하기 따라서 n의 최솟값은 7이다. ● 10%

답 7

207 해결 과정 10장의 카드 중에서 2장의 카드를 뽑는 방법의 수는

${}_{10}C_2=45$ ● 10%

$f(a)\neq f(b)$인 사건을 A라 하면 A^C는 $f(a)=f(b)$인 사건이다.

$$f(1)=f(5)=f(9)=7,$$
$$f(2)=f(6)=f(10)=9,$$
$$f(3)=f(7)=3,$$
$$f(4)=f(8)=1$$

이므로 $f(a)=f(b)$인 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

(i) $f(a)=f(b)=7$인 경우
1, 5, 9의 3개의 숫자 중에서 2개를 택하는 경우의 수이므로 ${}_3C_2=3$

(ii) $f(a)=f(b)=9$인 경우
2, 6, 10의 3개의 숫자 중에서 2개를 택하는 경우의 수이므로 ${}_3C_2=3$

(iii) $f(a)=f(b)=3$인 경우
3, 7의 2개의 숫자 중에서 2개를 택하는 경우의 수이므로 ${}_2C_2=1$

(iv) $f(a)=f(b)=1$인 경우
4, 8의 2개의 숫자 중에서 2개를 택하는 경우의 수이므로 ${}_2C_2=1$

이상에서 $f(a)=f(b)$인 경우의 수는

$3+3+1+1=8$ ● 50%

이므로 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{8}{45}$ ● 10%

답 구하기 $\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{8}{45}=\frac{37}{45}$ ● 30%

답 $\frac{37}{45}$

208 $X=\{a, b, c\}$에서 $Y=\{-2, -1, 0, 1\}$로의 함수의 개수는

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

집합 F에서 함수 f를 하나 선택할 때 함수 f가 $f(a)f(b)f(c)\geq 0$을 만족시키는 함수인 사건을 A라 하면 A^C는 함수 f가 $f(a)f(b)f(c)<0$을 만족시키는 함수인 사건이다.

함수 f를 $(f(a),\ f(b),\ f(c))$로 나타내면 $f(a)f(b)f(c)<0$을 만족시키는 함수 f의 개수는 다음과 같다.

(i) 치역이 $\{-2\}$일 때

$(-2,\ -2,\ -2)$의 1개

(ii) 치역이 $\{-1\}$일 때

$(-1,\ -1,\ -1)$의 1개

(iii) 치역이 $\{-2,\ -1\}$일 때

$(-2,\ -1,\ -1),\ (-1,\ -2,\ -1),$

$(-1,\ -1,\ -2),\ (-2,\ -2,\ -1),$

$(-2,\ -1,\ -2),\ (-1,\ -2,\ -2)$의 6개

(iv) 치역이 $\{-2,\ 1\}$일 때

$(-2,\ 1,\ 1),\ (1,\ -2,\ 1),\ (1,\ 1,\ -2)$의 3개

(v) 치역이 $\{-1,\ 1\}$일 때

$(-1,\ 1,\ 1),\ (1,\ -1,\ 1),\ (1,\ 1,\ -1)$의 3개

이상에서 $f(a)f(b)f(c)<0$을 만족시키는 함수 f의 개수는

$1+1+6+3+3=14$

이므로 $\quad \mathrm{P}(A^C)=\frac{14}{64}=\frac{7}{32}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{32}=\frac{25}{32}$ 답 $\frac{25}{32}$

일품 BOX

$f(a),\ f(b),\ f(c)$ 중 음수가 3개 또는 음수가 1개, 양수가 2개인 경우이다.

1등급 비밀노트

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r\}$에서 집합 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ $(r\leq n)$으로의 함수 f에 대하여

① 함수 f의 개수 $\quad {}_n\Pi_r$

② 일대일함수의 개수 $\quad {}_n\mathrm{P}_r$

③ 일대일 대응의 개수 $\quad {}_n\mathrm{P}_r$ (단, $n=r$)

209

원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=120$

원소의 개수가 3인 부분집합의 원소를 각각 $a_1,\ a_2,\ a_3$ $(a_1<a_2<a_3)$이라 하고 등차수열을 이루는 $a_1,\ a_2,\ a_3$을 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$으로 나타내면 그 개수는 다음과 같다.

(i) 공차가 1인 경우

$(1,\ 2,\ 3),\ \cdots,\ (8,\ 9,\ 10)$의 8개

(ii) 공차가 2인 경우

$(1,\ 3,\ 5),\ \cdots,\ (6,\ 8,\ 10)$의 6개

(iii) 공차가 3인 경우

$(1,\ 4,\ 7),\ \cdots,\ (4,\ 7,\ 10)$의 4개

(iv) 공차가 4인 경우

$(1,\ 5,\ 9),\ (2,\ 6,\ 10)$의 2개

이상에서 조건을 만족시키는 부분집합의 개수는

$8+6+4+2=20$

주어진 집합을 S라 하면 $n(S)=10$

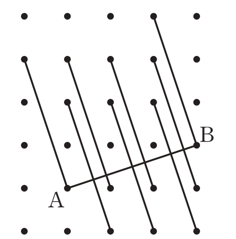
따라서 구하는 확률은 $\quad \frac{20}{120}=\frac{1}{6}$ 답 ③

210

36개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_{36}\mathrm{C}_2=630$

$\overline{\mathrm{AB}}$와 수직으로 만나는 선분은 오른쪽 그림과 같이 8개이므로 구하는 확률은



$\frac{8}{630}=\frac{4}{315}$

답 ④

1등급 비밀노트

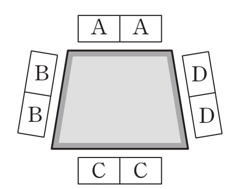
선분 AB의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 기울기가 -3인 선분을 모두 그려 그중에서 선분 AB와 만나는 것을 찾는다.

211

8명이 자리에 앉는 경우의 수는

$8!$

오른쪽 그림과 같이 탁자의 각 변에 있는 4개의 의자를 각각 A, B, C, D라 하면 여학생 3명을 A, B, C, D 중 3개의 의자에 배정하는 방법의 수는



${}_4\mathrm{P}_3$

여학생 3명이 각각 배정된 의자에 앉는 방법의 수는

$2!\cdot 2!\cdot 2!=8$

각 의자에는 2명이 앉을 수 있으므로 각 의자에 앉는 방법의 수는 $2!$

남학생 5명이 나머지 5개의 자리에 앉는 방법의 수는

$5!$

이므로 여학생 3명이 모두 남학생과 짝이 되게 앉는 방법의 수는 $\quad {}_4\mathrm{P}_3\cdot 8\cdot 5!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{{}_4\mathrm{P}_3\cdot 8\cdot 5!}{8!}=\frac{4}{7}$ 답 ②

212

반올림한 값이 2가 되는 x의 값의 범위는

$\frac{3}{2}\leq x<\frac{5}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

반올림하여 자연수 n이 되는 x의 값의 범위는

➡ $n-\frac{1}{2}\leq x<n+\frac{1}{2}$

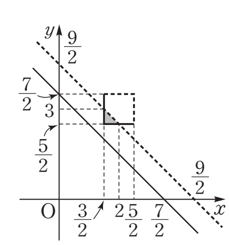
반올림한 값이 3이 되는 y의 값의 범위는

$\frac{5}{2}\leq y<\frac{7}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

반올림한 값이 4가 되는 $x+y$의 값의 범위는

$\frac{7}{2}\leq x+y<\frac{9}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

부등식 ㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{1}{2}\left(2-\frac{3}{2}\right)\left(3-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 1}=\frac{1}{8}$$

이므로 $p=8,\ q=1$

$\therefore p+q=9$

답 9

213 두 자리 자연수는 90개, 짝수인 한 자리 자연수는 4개이므로 모든 경우의 수는

$90\cdot 4=360$

두 자리 자연수와 짝수인 한 자리 자연수를 곱하여 세 자리 자연수가 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 두 자리 자연수와 짝수인 한 자리 자연수를 곱하여 두 자리 자연수가 나오는 사건이다. 이때 두 자리 자연수가 나오는 경우는 다음과 같다.

(i) 한 자리 자연수가 2인 경우

10, 11, ⋯, 49의 40개

(ii) 한 자리 자연수가 4인 경우

10, 11, ⋯, 24의 15개

(iii) 한 자리 자연수가 6인 경우

10, 11, ⋯, 16의 7개

(iv) 한 자리 자연수가 8인 경우

10, 11, 12의 3개

이상에서 두 자리 자연수가 나오는 경우의 수는

$40+15+7+3=65$

이므로 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{65}{360}=\frac{13}{72}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{13}{72}=\frac{59}{72}$

답 ③

214 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\cdot 6=36$

두 개의 주사위의 눈의 수의 합이 짝수이려면 두 개의 주사위의 눈의 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 하므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3\cdot 3+3\cdot 3}{36}=\frac{18}{36}$$

사건 B의 여사건 B^C는 두 개의 주사위의 눈의 수가 모두 4가 아닌 사건이므로

$$\mathrm{P}(B^C)=\frac{5\cdot 5}{36}=\frac{25}{36}$$

$\therefore \mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)$

$=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$

이때

$A\cap B=\{(2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (4,\ 4),\ (4,\ 6),\ (6,\ 4)\}$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{36}$$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{18}{36}+\frac{11}{36}-\frac{5}{36}=\frac{2}{3}$

답 ③

일품 BOX

$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\right)$

2, 4, 6, 8

두 자리 자연수와 짝수인 한 자리 자연수의 곱의 최솟값은

$10\cdot 2=20$

최댓값은

$99\cdot 8=792$

이므로 두 자리 자연수와 짝수인 한 자리 자연수를 곱하면 두 자리 또는 세 자리 자연수가 나온다.

1부터 99까지의 자연수 중 6의 배수의 개수는

16

동전을 3번 던질 때, 모든 경우의 수는

$2\cdot 2\cdot 2=8$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나오는 경우는

(H, H, T),

(H, T, H),

(T, H, H)

의 3가지이므로 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은 $\frac{3}{8}$

동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률

05 조건부확률

본책 43쪽

215 안경을 안 쓴 학생을 택하는 사건을 A, 여학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{19}{30},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{9}{30}}{\frac{19}{30}}=\frac{9}{19}$$

답 $\frac{9}{19}$

216 꺼낸 공에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{49}{99},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{16}{99}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{16}{99}}{\frac{49}{99}}=\frac{16}{49}$$

답 $\frac{16}{49}$

217 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{4}$에서

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{4}$$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{3}$에서

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{3}$$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$1=\mathrm{P}(A)+\frac{3}{4}\mathrm{P}(A)-\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

답 ③

218 주사위를 던져서 홀수의 눈이 나오는 사건을 A, 동전을 던져서 앞면이 2번 나오는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{16}$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)$

$=\frac{3}{16}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$ 답 ⑤

219 A가 B에게 준 구슬이 흰 구슬인 사건을 A, 파란 구슬인 사건을 B, B가 흰 구슬을 택하는 사건을 E라 하면

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)$

$=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{10}$

$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)$

$=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{15}$

$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$

$=\frac{3}{10}+\frac{2}{15}=\frac{13}{30}$ 답 $\frac{13}{30}$

220 S코스로 게임을 하는 사건을 A, Z코스로 게임을 하는 사건을 B, 승리하는 사건을 E라 하자.

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)$

$=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{21}{50}$

$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)$

$=\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{3}{25}$

$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$

$=\frac{21}{50}+\frac{3}{25}=\frac{27}{50}$

$\therefore P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}$

$=\frac{\frac{3}{25}}{\frac{27}{50}}=\frac{2}{9}$ 답 ③

221 ㄱ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=0$ 이므로

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 A와 B는 서로 종속이다.

ㄴ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 A와 B는 서로 종속이다.

ㄷ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서 A와 B는 서로 독립이다.

이상에서 서로 독립인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

222 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}$

또 $P(A^C\cap B^C)=\frac{1}{12}$에서

$P((A\cup B)^C)=\frac{1}{12}$

$1-P(A\cup B)=\frac{1}{12}$

$\therefore P(A\cup B)=\frac{11}{12}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$\frac{11}{12}=P(A)+P(B)-\frac{1}{2}$

$\therefore P(A)+P(B)=\frac{17}{12}$ 답 ③

223 $P(r)={}_{100}C_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{100-r}={}_{100}C_r\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

이므로

$$\frac{P(50)}{P(51)}=\frac{{}_{100}C_{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{{}_{100}C_{51}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}}=\frac{\frac{100!}{50!\cdot 50!}}{\frac{100!}{51!\cdot 49!}}$$

$=\frac{51}{50}$ 답 $\frac{51}{50}$

224 4명의 환자 중 3명의 환자가 완치될 확률은

${}_4C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64}$

4명의 환자가 모두 완치될 확률은

${}_4C_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{81}{256}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{27}{64}+\frac{81}{256}=\frac{189}{256}$ 답 ⑤

225 가위바위보를 한 번 하여 준수가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$, 비기거나 질 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

10번의 가위바위보를 하여 준수가 이긴 횟수를 n이라 하면 10번의 가위바위보를 한 후 상자에 20개의 공이 남아 있으므로

$30-3n+2(10-n)=20$

$30-5n=0 \qquad \therefore n=6$

따라서 준수가 6번 이길 확률은

${}_{10}C_6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^4={}_{10}C_4\frac{2^4}{3^{10}}=210\cdot\frac{2^4}{3^{10}}$

$=70\cdot\frac{2^4}{3^9}=\frac{1120}{3^9}$

$\therefore k=1120$ 답 ④

226 $P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ ······ ㉠

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$\frac{5}{6}=\frac{2}{5}+P(B)-P(A\cap B)$

$\therefore P(A\cap B)=P(B)-\frac{13}{30}$ ······ ㉡

$P(B|A)=1-P(B^C|A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$이므로

일품 BOX

$\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$

$1-\frac{75}{100}=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

S코스와 Z코스의 두 코스가 있으므로 두 사건 $A\cap E$와 $B\cap E$는 서로 배반사건이다.

민우가 이기거나 비길 확률

준수가 이겨서 상자 안에서 꺼낸 공의 개수

준수가 지거나 비겨서 상자 밖에서 넣은 공의 개수

$P(B|A)+P(B^C|A)$

$=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}+\frac{P(A\cap B^C)}{P(A)}$

$=\frac{P(A)}{P(A)}=1$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{5}{6} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

일품 BOX: $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$$\frac{P(B)-\frac{13}{30}}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{6}$$

$$P(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}+\frac{13}{30}=\frac{23}{30}$$

$\therefore 60P(B)=46$ 답 46

227 세 사람이 한 개의 주사위를 한 번씩 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6\cdot6=216$

$a+b+c>16$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(5,\ 6,\ 6),\ (6,\ 5,\ 6),\ (6,\ 6,\ 5),\ (6,\ 6,\ 6)$

의 4개이므로 $P(A^C)=\dfrac{4}{216}$

$$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{4}{216}=\frac{212}{216}$$

$a+b=2c$에서

(i) $c=1$일 때, $a+b=2$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 1,\ 1)$의 1개

(ii) $c=2$일 때, $a+b=4$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 1,\ 2)$의 3개

(iii) $c=3$일 때, $a+b=6$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 5,\ 3),\ (2,\ 4,\ 3),\ (3,\ 3,\ 3),\ (4,\ 2,\ 3),$

$(5,\ 1,\ 3)$의 5개

(iv) $c=4$일 때, $a+b=8$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(2,\ 6,\ 4),\ (3,\ 5,\ 4),\ (4,\ 4,\ 4),\ (5,\ 3,\ 4),$

$(6,\ 2,\ 4)$의 5개

(v) $c=5$일 때, $a+b=10$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(4,\ 6,\ 5),\ (5,\ 5,\ 5),\ (6,\ 4,\ 5)$의 3개

(vi) $c=6$일 때, $a+b=12$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(6,\ 6,\ 6)$의 1개

일품 BOX: $6+6+6>16$이므로 $(6,\ 6,\ 6)$은 사건 $A\cap B$가 아니다.

$$\therefore P(A\cap B)=\frac{1+3+5+5+3}{216}=\frac{17}{216}$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{17}{216}}{\frac{212}{216}}=\frac{17}{212}$$ 답 ①

1등급 비밀노트

$a+b+c$의 최댓값은 18이므로 $a+b+c\le16$의 해를 모두 구하는 것보다 여사건 $a+b+c>16$의 해를 구하는 것이 편리하다.

228 해결 과정 정사면체를 택하는 사건을 A, 정육면체를 택하는 사건을 B라 하고, 바닥에 놓인 면에 적힌 숫자가 2인 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$ ● 30%

$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$ ● 30%

$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}$$ ● 20%

답 구하기 따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{24}}=\frac{3}{7}$$ ● 20%

답 $\dfrac{3}{7}$

229 두 기계 A, B에서 생산한 볼트를 구입하는 사건을 각각 A, B라 하고, 불량품을 구입하는 사건을 E라 하면

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=0.4\times0.03=0.012$

$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=0.6\times0.04=0.024$

$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$

$=0.012+0.024=0.036$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{0.012}{0.036}=\frac{1}{3}$$ 답 ①

230 갑과 을이 각각 자신이 꺼낸 공을 보고 검은 공이라 말하는 사건을 E, 갑과 을이 모두 흰 공을 꺼내는 사건을 A라 하자.

갑과 을이 각각 자신이 꺼낸 공을 보고 검은 공이라 말하는 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) 갑, 을 모두 검은 공을 꺼내는 경우

일품 BOX: 갑, 을 모두 거짓말을 하지 않는 경우

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{160}{900}$$

(ii) 갑은 검은 공을, 을은 흰 공을 꺼내는 경우

일품 BOX: 갑은 거짓말을 하지 않고, 을은 거짓말을 하는 경우

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{20}{900}$$

(iii) 갑은 흰 공을, 을은 검은 공을 꺼내는 경우

일품 BOX: 갑은 거짓말을 하고, 을은 거짓말을 하지 않는 경우

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{48}{900}$$

(iv) 갑, 을 모두 흰 공을 꺼내는 경우

일품 BOX: 갑, 을 모두 거짓말을 하는 경우

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{6}{900}$$

이상에서

$$P(E)=\frac{160}{900}+\frac{20}{900}+\frac{48}{900}+\frac{6}{900}=\frac{234}{900},$$

$$P(A\cap E)=\frac{6}{900}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{6}{900}}{\frac{234}{900}}=\frac{1}{39}$$

$\therefore n=39$ 답 39

다른 풀이 갑이 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 검은 공을 꺼내는 사건을 B, 자신이 꺼낸 공을 검은 공이라 말하는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{1}{10}+\frac{1}{3}=\frac{13}{30}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{13}{30}}=\frac{3}{13}$$

을이 흰 공을 꺼내는 사건을 C, 검은 공을 꺼내는 사건을 D, 자신이 꺼낸 공을 검은 공이라 말하는 사건을 F라 하면

$$\mathrm{P}(C\cap F)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(F|C)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

$$\mathrm{P}(D\cap F)=\mathrm{P}(D)\mathrm{P}(F|D)=\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

$$\therefore \mathrm{P}(F)=\mathrm{P}(C\cap F)+\mathrm{P}(D\cap F)=\frac{1}{15}+\frac{8}{15}=\frac{3}{5}$$

$$\therefore \mathrm{P}(C|F)=\frac{\mathrm{P}(C\cap F)}{\mathrm{P}(F)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{9}$$

따라서 갑과 을이 자신이 꺼낸 공을 검은 공이라 말했을 때 실제로는 모두 흰 공일 확률은

$$\frac{3}{13}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{39}\qquad \therefore n=39$$

231 두 번의 경기에서 A가 B를 두 번 모두 이기는 사건을 X, A, B가 한 번씩 이기는 사건을 Y, B가 A를 두 번 모두 이기는 사건을 Z라 하면

$$\mathrm{P}(X)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$\mathrm{P}(Y)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$\mathrm{P}(Z)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}$$

C가 두 번 우승하는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(X\cap E)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(E|X)=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{81}$$

$$\mathrm{P}(Y\cap E)=\mathrm{P}(Y)\mathrm{P}(E|Y)=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{27}$$

$$\mathrm{P}(Z\cap E)=\mathrm{P}(Z)\mathrm{P}(E|Z)=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{72}$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(X\cap E)+\mathrm{P}(Y\cap E)+\mathrm{P}(Z\cap E)=\frac{2}{81}+\frac{2}{27}+\frac{1}{72}=\frac{73}{648}$$

답 ④

일품 BOX

경제 활동을 하는 인구의 60 %가 남성이므로 경제 활동을 하는 인구의 40 %는 여자이다.

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{40}{100}=0.4$

갑이 자신이 꺼낸 공을 검은 공이라 말했을 때 실제로는 흰 공을 꺼냈을 확률

우리나라 사람 중 한 명을 택할 때 경제 활동을 하지 않는 여성을 택할 확률

을이 자신이 꺼낸 공을 검은 공이라 말했을 때 실제로는 흰 공을 꺼냈을 확률

C가 A를 두 번째 상대할 때 이길 확률

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

C가 B를 두 번째 상대할 때 이길 확률

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

1등급 비밀노트

C는 두 번의 대회에서 모두 부전승으로 올라가므로 C가 두 번 모두 우승할 확률은 A, B가 두 번 경기할 때 일어날 수 있는 결과에 따라 달라진다. 따라서 A, B가 두 번 경기할 때, 일어나는 모든 경우에 따른 확률을 먼저 구한다.

232 우리나라 사람 중 한 명을 택할 때, 여성인 사건을 A, 경제 활동을 하는 사람인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=0.5,\ \mathrm{P}(B)=0.8,\ \mathrm{P}(A|B)=0.4$$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=0.8\times0.4=0.32$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^{C})=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=0.5-0.32=0.18$$

따라서 우리나라 인구 중 경제 활동을 하지 않는 여성 인구의 비율은 18 %이다.

답 ④

1등급 비밀노트

구하는 비율이 우리나라 인구 중 경제 활동을 하지 않는 여성 인구의 비율이므로 $\mathrm{P}(A\cap B^{C})$의 값을 구해야 한다. $\mathrm{P}(A|B^{C})$를 구하지 않도록 유의한다.

233 ㄱ. $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$인 두 사건 A, B에 대하여 A, B가 서로 독립이면

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(A)$$

이때 $\mathrm{P}(A)\neq0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)\neq0$$

따라서 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄴ. A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cap B^{C})&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B^{C})\end{aligned}$$

따라서 A, B^{C}도 서로 독립이다.

ㄷ. [반례] 주사위를 던져 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

이지만 B는 A의 여사건이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

다른 풀이 ㄱ. [반례] 주사위를 던져 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 A, B는

서로 독립이지만 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq 0$이므로 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

234 (해결 과정) 두 사건 A, C가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$$

$$\frac{1}{4}=\mathrm{P}(A)\cdot\frac{1}{2}\qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$$ ● 50%

(답 구하기) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)\qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$$ ● 50%

답 $\frac{1}{6}$

235 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A, B^C도 서로 독립이고 A^C, B^C도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$에서

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$에서

$$\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{4}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{4}$$

$$\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)\}\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{4}$$

$$\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{4}$$

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{4}$을 ㉡에 대입하면

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

답 ⑤

236 1부터 20까지의 자연수가 적힌 공 중에는

노란 공이 n개, 흰 공이 $(20-n)$개

가 있고 21부터 36까지의 자연수가 적힌 공 중에는

노란 공이 4개, 흰 공이 12개

가 있으므로 전체 공 중에는

노란 공이 $(n+4)$개, 흰 공이 $(32-n)$개

가 있다.

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{n+4}{36},\ \mathrm{P}(B)=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n}{36}$$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{n}{36}=\frac{n+4}{36}\cdot\frac{5}{9}$$

$$9n=5n+20\qquad \therefore n=5$$

답 ②

일품 BOX

주사위를 한 번 던져서 5 이하의 눈이 나올 확률 $\frac{5}{6}$

4 이하의 눈이 나올 확률 $\frac{4}{6}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$

완주할 확률이 $0.4=\frac{2}{5}$이므로 완주하지 못할 확률은 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

두 사건 A, B가 독립이므로 A^C, B도 독립이다.

공을 막은 횟수가 1회, 3회, 5회, 7회, 9회인 사건은 서로 배반사건이다.

237 (해결 과정) $F(3)=5$이려면 한 개의 주사위를 3번 던져서 나온 눈의 수의 최댓값이 5이어야 하므로 3번 모두 5 이하의 눈이 나올 확률에서 3번 모두 4 이하의 눈이 나올 확률을 빼면 된다.

$$\therefore p=\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{61}{216}$$ ● 40%

또 $f(3)=5$이려면 한 개의 주사위를 3번 던져서 나온 눈의 수의 최솟값이 5이어야 하므로 3번 모두 5 또는 6의 눈이 나올 확률에서 3번 모두 6의 눈이 나올 확률을 빼면 된다.

$$\therefore q=\left(\frac{2}{6}\right)^3-\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{7}{216}$$ ● 40%

(답 구하기) $\therefore p-q=\frac{61}{216}-\frac{7}{216}=\frac{1}{4}$ ● 20%

답 $\frac{1}{4}$

1등급 비밀노트

$F(n)=m$이려면 한 개의 주사위를 n번 던져서 나온 눈의 수의 최댓값이 m이어야 하므로 그 확률은

$$\left(\frac{m}{6}\right)^n-\left(\frac{m-1}{6}\right)^n\ (\text{단, } 1\le m\le 6)$$

238 (i) 모두 완주하지 못할 확률은

$${}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^6$$

(ii) 1개 대회에서 완주할 확률은

$${}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^5$$

(iii) 2개 대회에서 완주할 확률은

$${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^4$$

이상에서 구하는 확률은

$$1-\left\{{}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^5+{}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^4\right\}$$

$$=1-\sum_{k=0}^{2}{}_6\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{6-k}$$

답 ③

239 구하는 확률은 공을 막은 횟수가 1회, 3회, 5회, 7회, 9회일 확률을 모두 더한 것이므로

$${}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9+{}_{10}\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_{10}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$+{}_{10}\mathrm{C}_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}({}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_5+{}_{10}\mathrm{C}_7+{}_{10}\mathrm{C}_9)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot 2^9=\frac{1}{2}$$

답 ③

참고 이항계수의 성질에 의하여

$$\begin{aligned}
&\ {}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_9+{}_{10}\mathrm{C}_{10}=2^{10}\\
-)&\ {}_{10}\mathrm{C}_0-{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_2-{}_{10}\mathrm{C}_3+\cdots-{}_{10}\mathrm{C}_9+{}_{10}\mathrm{C}_{10}=0\\
\hline
&\ 2({}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_5+{}_{10}\mathrm{C}_7+{}_{10}\mathrm{C}_9)=2^{10}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ {}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_5+{}_{10}\mathrm{C}_7+{}_{10}\mathrm{C}_9=2^9$$

240 문제 이해 5번째 경기에서 우승팀이 결정되려면 4번째 경기까지 3번 이긴 팀이 5번째 경기에서도 이겨야 한다. ● 20%

해결 과정 (i) A팀이 우승할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\frac{2}{3}=\frac{64}{243}$$

(ii) B팀이 우승할 확률은

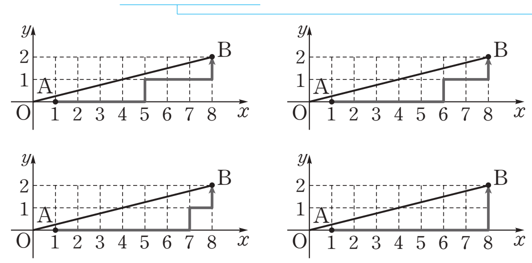
$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{243}$$ ● 60%

답 구하기 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{64}{243}+\frac{8}{243}=\frac{8}{27}$$ ● 20%

답 $\frac{8}{27}$

241 점 P가 점 A를 출발하여 직선 OB와 만나지 않고 점 B까지 이동하는 방법은 다음과 같이 4가지이다.



각 경우에 점 P는 x축의 방향으로 1만큼 7번 이동하고, y축의 방향으로 1만큼 2번 이동하므로

$$p=4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^7\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3^7}{4^8}=\frac{3^7}{2^{16}}$$

$\log p=\log\left(\frac{3^7}{2^{16}}\right)=7\log 3-16\log 2$이므로

$m=7,\ n=16$

$\therefore m+n=23$

답 23

1등급 비밀노트

주머니에서 한 개의 공을 꺼내는 시행을 9번 반복할 때 점 P가 점 A에서 출발하여 점 B까지 이동할 확률은

$${}_9C_7\left(\frac{3}{4}\right)^7\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

이다. 이 확률은 점 P가 직선 OB와 만나는 경우의 확률도 포함하고 있으므로 ${}_9C_7$가지의 방법 중 조건을 만족시키는 4가지 방법을 찾아야 한다.

242 참가자가 20점짜리, 30점짜리 문제를 맞힐 확률은 각각

$$\frac{40-20}{40}=\frac{1}{2},\ \frac{40-30}{40}=\frac{1}{4}$$

남은 문제를 모두 풀었을 때 500점이 되려면 80점을 더 얻어야 하므로 20점짜리 1문제와 30점짜리 2문제를 맞혀야 한다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{2}\cdot{}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{128}$$

답 $\frac{9}{128}$

일품 BOX

- 4가지 방법 모두 x축의 방향으로 7만큼, y축의 방향으로 2만큼 이동한다.
- 주머니에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{4}$이고 검은 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

로그의 성질

① $\log_a MN$
$=\log_a M+\log_a N$

② $\log_a \frac{M}{N}$
$=\log_a M-\log_a N$

③ $\log_a M^k$
$=k\log_a M$

(단, $a>0,\ a\neq1,$
$M>0,\ N>0$)

- 30점짜리 3문제 중 2문제는 맞히고 1문제는 틀릴 확률

243 문제 이해 점 A에서 출발하여 점 A에서 멈추려면 움직인 거리가 4의 배수이어야 한다. ● 10%

해결 과정 동전을 4번 던져서 움직일 수 있는 거리 중에서 움직인 거리가 4의 배수인 경우는

$1+1+1+1=4,\ 2+2+2+2=8$

의 2가지이다. ● 20%

(i) 동전을 4번 던져서 모두 뒷면이 나올 확률은

$${}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

(ii) 동전을 4번 던져서 모두 앞면이 나올 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$$ ● 60%

답 구하기 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$ ● 10%

답 $\frac{1}{8}$

244 2학기 보충수업을 신청한 학생이 1학기에도 보충수업을 신청한 학생일 확률이 1이므로 2학기 보충수업을 신청한 학생 18명은 모두 1학기 보충수업을 신청한 학생이다.

따라서 1학기 보충수업을 신청한 학생 중 2학기 보충수업을 신청하지 않은 학생 수는

$26-18=8$

2학기 보충수업을 신청하지 않은 학생을 택하는 사건을 A, 1학기 보충수업을 신청한 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{14}{32},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8}{32}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{8}{32}}{\frac{14}{32}}=\frac{4}{7}$$

답 ②

245 조건 (가)에서 수시 전형으로 합격한 학생 수는

$200\times0.6=120$

정시 전형으로 합격한 학생 수는

$200\times0.4=80$

조건 (나)에서 수시 전형으로 합격한 여학생 수를 $2a$라 하면 정시 전형으로 합격한 여학생 수는 a이므로 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
수시 전형 합격		$2a$	120
정시 전형 합격	50	a	80
합계			200

$50+a=80$에서 $a=30$

따라서 표를 완성하면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
수시 전형 합격	60	60	120
정시 전형 합격	50	30	80
합계	110	90	200

대학에 합격한 학생 중에서 남학생을 택하는 사건을 A, 수시 전형으로 합격한 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{110}{200},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{60}{200}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{60}{200}}{\frac{110}{200}}=\frac{6}{11}$$

따라서 $p=\frac{6}{11}$이므로 $99p=54$

답 54

246 3명이 모두 요가, 다이어트 복싱, 플로어 볼 종목을 신청하는 사건을 각각 A, B, C라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{15}\mathrm{C}_3}=\frac{4}{455},$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{15}\mathrm{C}_3}=\frac{10}{455},$$

$$\mathrm{P}(C)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{15}\mathrm{C}_3}=\frac{20}{455}$$

또 3명이 신청한 종목이 모두 같은 사건을 E라 하면 세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cup B\cup C)$$
$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$$
$$=\frac{4}{455}+\frac{10}{455}+\frac{20}{455}=\frac{34}{455}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{4}{455}+\frac{20}{455}}{\frac{34}{455}}=\frac{12}{17}$$

따라서 $p=17$, $q=12$이므로 $p+q=29$

답 29

247 (i) 1회에서 시행을 멈출 확률

1회에 나오는 공에 적힌 숫자가 3인 경우이므로

$$\frac{1}{6}$$

(ii) 2회에서 시행을 멈출 확률

(1회, 2회)에 나오는 공에 적힌 숫자가

(1, 2), (2, 1)

인 경우이므로

$$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

(iii) 3회에서 시행을 멈출 확률

(1회, 2회, 3회)에 나오는 공에 적힌 숫자가

(1, 1, 1), (1, 3, 2), (2, 3, 1)

인 경우이므로

$$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$$

이상에서 확률 p는

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{5}+\frac{3}{20}=\frac{43}{60}$$

이므로

$120p=86$

답 86

248 주사위를 두 번 던져서 첫 번째에 나온 눈의 수를 a, 두 번째에 나온 눈의 수를 b라 하고 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$A=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$

$B=\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5)\}$

$C=\{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$

$A\cap B=\{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$

$B\cap C=\{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$

$A\cap C=\{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 B와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 A와 C는 서로 독립이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 서로 독립인 사건이다.

답 ⑤

249 A, B, C가 10점을 맞히는 사건을 각각 A, B, C라 하면 세 사건 A, B, C는 서로 독립이므로 3명의 선수가 모두 10점을 맞히지 못할 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C^C)$$
$$=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C^C)$$
$$=(1-0.9)(1-0.85)(1-0.8)$$
$$=0.1\times0.15\times0.2$$
$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{15}{100}\cdot\frac{2}{10}$$

일품 BOX

세 사건 A, B, C가 서로 배반사건이면
$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

모든 경우의 수는
$6\cdot6=36$
이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$,
$\mathrm{P}(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$,
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

세 사건 A, B, C가 서로 독립
➡ A^C, B^C, C^C도 서로 독립

1회 또는 2회까지 나온 공의 숫자의 합은 3의 배수가 아니어야 하므로 (3, 1, 2), (3, 2, 1), (1, 2, 3), (2, 1, 3)인 경우는 제외시킨다.

Ⅱ 확률

$=\frac{3}{1000}$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{3}{1000}=\frac{997}{1000}$$

답 ⑤

250 스위치 A, D를 통하여 전류가 흐르는 사건을 E, 스위치 B, C를 통하여 전류가 흐르는 사건을 F라 하면

$$\mathrm{P}(E)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9},\ \mathrm{P}(F)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$

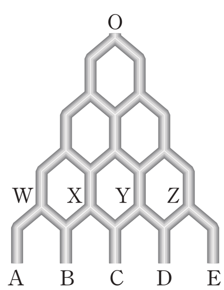
$$\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{81}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(E\cup F)=\mathrm{P}(E)+\mathrm{P}(F)-\mathrm{P}(E\cap F)$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{81}=\frac{17}{81}$$

답 ②

251 오른쪽 그림에서 구슬이 W, X, Y, Z를 지나는 사건을 각각 W, X, Y, Z라 하면



$$\mathrm{P}(W)=\mathrm{P}(Z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$\mathrm{P}(W)+\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)+\mathrm{P}(Z)=1$이므로

$$\mathrm{P}(X)=\mathrm{P}(Y)=\frac{3}{8}$$

구슬이 출구 B, C로 나오는 사건을 각각 B, C라 하면

$$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$\left(\begin{matrix}\mathrm{W}\to\mathrm{B}\\ \text{일 확률}\end{matrix}\right)+\left(\begin{matrix}\mathrm{X}\to\mathrm{B}\\ \text{일 확률}\end{matrix}\right)$

$$\mathrm{P}(C)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$\left(\begin{matrix}\mathrm{X}\to\mathrm{C}\\ \text{일 확률}\end{matrix}\right)+\left(\begin{matrix}\mathrm{Y}\to\mathrm{C}\\ \text{일 확률}\end{matrix}\right)$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

답 ③

252 주사위를 n번 던졌을 때 소수의 눈이 연속해서 나오지 않는 경우는 다음과 같이 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) n번째에 소수가 나오는 경우의 확률

$(n-2)$번째까지 소수의 눈이 연속해서 나오지 않고, $(n-1)$번째에 소수가 나오지 않아야 하므로

$$p_{n-2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}p_{n-2}$$

주사위를 $(n-2)$번 던질 때 소수의 눈이 연속해서 나오지 않을 확률

(ii) n번째에 소수가 나오지 않는 경우의 확률

$(n-1)$번째까지 소수의 눈이 연속해서 나오지 않아야 하므로

$$p_{n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}p_{n-1}$$

(i), (ii)에서

$$p_n=\frac{1}{4}p_{n-2}+\frac{1}{2}p_{n-1}\ (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$$

따라서 $p_{10}=\frac{1}{4}p_8+\frac{1}{2}p_9$이므로

$$p_{10}=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}$$

답 ④

253 정사면체를 4번 던질 때, 점 P가 원점을 출발하여 점 $(1,\ -1)$에 도착하는 경우는 다음과 같이 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) 이동방향이 →, →, ←, ↓일 때의 확률

1이 2번, 2, 4가 각각 1번씩 나올 확률이므로

$$\frac{4!}{2!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{3}{64}$$

1, 1, 2, 4를 일렬로 나열하는 방법의 수

(ii) 이동방향이 →, ↑, ↓, ↓일 때의 확률

4가 2번, 1, 3이 각각 1번씩 나올 확률이므로

$$\frac{4!}{2!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{3}{64}$$

1, 3, 4, 4를 일렬로 나열하는 방법의 수

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{64}+\frac{3}{64}=\frac{3}{32}$$

답 ③

254 1개의 박테리아가 10분 후에 2개가 되고, 20분 후에 3개 또는 4개가 되어야 30분 후 6개가 될 수 있다.

(i) 10분 후에 2개, 20분 후에 3개, 30분 후에 6개가 될 확률은

$$\frac{1}{2}\cdot\left({}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{48}$$

(ii) 10분 후에 2개, 20분 후에 4개, 30분 후에 6개가 될 확률은

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left({}_4\mathrm{C}_2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+{}_4\mathrm{C}_3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{32}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{48}+\frac{1}{32}=\frac{5}{96}$

답 ③

255 (i) 5개의 숫자를 모두 정상적으로 수신할 확률은

$${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{9}{10}\right)^5\left(\frac{1}{10}\right)^0=\frac{9^5}{10^5}$$

(ii) 1개의 숫자를 잘못 수신할 확률은

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{9}{10}\right)^4\left(\frac{1}{10}\right)^1=\frac{5\cdot 9^4}{10^5}$$

(i), (ii)에서 정보를 송신할 확률은

$$\frac{9^5}{10^5}+\frac{5\cdot 9^4}{10^5}=\frac{14\cdot 9^4}{10^5}$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{\frac{9^5}{10^5}}{\frac{14\cdot 9^4}{10^5}}=\frac{9}{14}$$

따라서 $p=14,\ q=9$이므로

$$p+q=23$$

답 23

1등급 완성하기

▶ 본책 50쪽

256 해결 과정 두 개의 주사위를 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot 6=36$

$4x^2+4y^2-8x-8y-1\le 0$에서

$(x-1)^2+(y-1)^2\le \frac{9}{4}$

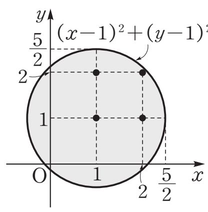
이므로 집합 A의 부등식의 영역은 중심의 좌표가 $(1,\ 1)$이고, 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 원의 내부(경계선 포함)이다. ● 50%

오른쪽 그림에서 집합 A의 원소 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1),\ (1,\ 2),$

$(2,\ 1),\ (2,\ 2)$

의 4개 ● 30%



답 구하기 따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ ● 20%

답 $\frac{1}{9}$

257 A, B, C, D 네 사람에게 4개의 선물을 나누어 주는 방법의 수는

$4!=24$

A가 2가 적힌 카드를 뽑았을 때, 네 사람 모두 자신이 준비한 선물을 받지 않는 경우는 오른쪽과 같이 3가지가 있다.

A	B	C	D
2	1	4	3
	3	4	1
	4	1	3

같은 방법으로 A가 3, 4가 적힌 카드를 뽑았을 때, 네 사람 모두 자신이 준비한 선물을 받지 않는 경우도 각각 3가지씩 있으므로 네 사람 모두 자신이 준비한 선물을 받지 않는 경우의 수는

$3\cdot 3=9$

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

답 ③

258 두 개의 주사위를 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot 6=36$

$y=(g\circ f)(x)$에서

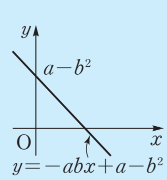
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)$$
$$=-b(ax+b)+a$$
$$=-abx+a-b^2$$

직선 $y=-abx+a-b^2$의 기울기 $-ab$가 음수이므로 이 직선이 제1, 2, 4 사분면을 모두 지나려면 y절편 $a-b^2$이 양수이어야 한다.

일품 BOX

원의 내부와 외부
원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$에 대하여
① $x^2+y^2<r^2$의 영역 ➡ 원의 내부
② $x^2+y^2>r^2$의 영역 ➡ 원의 외부

A	B	C	D
3	1	4	2
	4	1	2
		2	1
4	1	2	3
	3	1	2
		2	1



10원짜리 동전이 50원짜리 동전보다 더 많다.
$\therefore x>5$

$\therefore a>b^2$

이를 만족시키는 $a,\ b$의 값은

(i) $b=1$일 때, $a=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

(ii) $b=2$일 때, $a=5,\ 6$

(i), (ii)에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$5+2=7$

따라서 구하는 확률은

$\frac{7}{36}$

답 ②

259 9개의 동전 중 뒤집을 동전 4개를 택하는 방법의 수는

${}_9C_4=126$

앞면이 보이는 동전 4개 중에서 m개, 뒷면이 보이는 동전 5개 중에서 $(4-m)$개를 택하여 뒤집으면 뒷면이 보이는 동전의 개수는

$m+\{5-(4-m)\}=2m+1$

즉 $2m+1=7$에서 $m=3$

따라서 앞면이 보이는 동전 4개 중 3개, 뒷면이 보이는 동전 5개 중 1개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_3\cdot {}_5C_1=20$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{126}=\frac{10}{63}$

답 ④

260 꺼낸 2개의 동전의 금액의 합이 60원이려면 10원짜리 동전 1개와 50원짜리 동전 1개를 꺼내야 한다.

10원짜리 동전의 개수를 $x\ (x>5)$라 하면

$\frac{{}_xC_1\cdot {}_{10-x}C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15},\quad \frac{x(10-x)}{45}=\frac{7}{15}$

$x^2-10x+21=0,\quad (x-3)(x-7)=0$

$\therefore x=7\ (\because x>5)$

답 7

261 해결 과정 집합 A에서 A로의 일대일 대응인 함수의 개수는

$10!$ ● 10%

10개의 원소 중 $f(a)=a$를 만족시키는 6개의 원소를 택하는 방법의 수는 ${}_{10}C_6$ ● 20%

$f(a)=a$를 만족시키는 6개의 원소를 각각 1, 2, 3, 4, 5, 6이라 할 때, 나머지 4개의 원소를 대응시키는 방법은 오른쪽과 같이 9가지이다. ● 50%

a	7	8	9	10
$f(a)$	8	7	10	9
		9	10	7
		10	7	9
	9	7	10	8
		10	7	8
			8	7
	10	7	8	9
		9	7	8
			8	7

답 구하기 따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_{10}C_6\cdot 9}{10!}=\frac{1}{1920}$$ ● 20%

답 $\frac{1}{1920}$

262 두 주머니 A, B에서 2장의 카드를 꺼내는 방법의 수는 각각 ${}_nC_2$이므로 주머니 A, B에서 각각 두 장의 카드를 꺼내는 모든 방법의 수는

$${}_nC_2\cdot{}_nC_2=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

주머니 A에서 꺼낸 2장의 카드에 적힌 수 중 큰 수와 주머니 B에서 꺼낸 2장의 카드에 적힌 수 중 작은 수를 k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$라 하면 주머니 A에서 다른 카드 한 장을 뽑는 방법의 수는

$${}_{k-1}C_1$$

이고 주머니 B에서 다른 카드 한 장을 뽑는 방법의 수는

$${}_{n-k}C_1$$

이므로 주머니 A에서 꺼낸 2장의 카드에 적힌 수 중 큰 수와 주머니 B에서 꺼낸 2장의 카드에 적힌 수 중 작은 수가 서로 같은 경우의 수는

$$\sum_{k=2}^{n-1}{}_{k-1}C_1\cdot{}_{n-k}C_1$$
$$=\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)(n-k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)(n-k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\{(n+1)k-k^2-n\}$$
$$=\frac{(n-1)n(n+1)}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-(n-1)n$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

따라서 $\dfrac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{n^2(n-1)^2}{4}}=\frac{1}{10}$이므로

$$\frac{2(n-2)}{3n(n-1)}=\frac{1}{10}$$
$$3n^2-23n+40=0$$
$$(3n-8)(n-5)=0$$
$$\therefore n=5\ (\because n\text{은 자연수})$$

답 5

263 세 개의 주사위를 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6\cdot 6\cdot 6=216$$

사건 $A\cap B$는 세 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 최솟값이 4이고 최댓값이 6인 사건이다.

(i) 4, 4, 6이 나오는 경우의 수

$$\frac{3!}{2!}=3$$

(ii) 4, 5, 6이 나오는 경우의 수

$$3!=6$$

(iii) 4, 6, 6이 나오는 경우의 수

$$\frac{3!}{2!}=3$$

이상에서 눈의 수의 최솟값이 4이고 최댓값이 6인 경우의 수는

$$3+6+3=12$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=\frac{12}{216}=\frac{1}{18}$$

답 ③

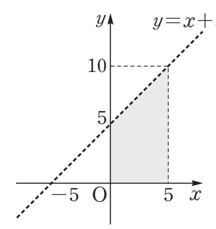
264 해결 과정 갑이 지하철을 기다리는 시간을 x분, 을이 버스를 기다리는 시간을 y분이라 하면

$$0\le x<5,\ 0\le y<10 \quad \cdots\cdots ㉠$$ ● 30%

갑의 소요 시간은 $(25+x)$분, 을의 소요 시간은 $(20+y)$분이므로 을이 먼저 도착하려면

$$25+x>20+y$$
$$\therefore y<x+5 \quad \cdots\cdots ㉡$$ ● 30%

답 구하기 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같으므로 구하는 확률은



$$\frac{\frac{1}{2}(5+10)\cdot 5}{5\cdot 10}=\frac{3}{4}$$ ● 40%

답 $\frac{3}{4}$

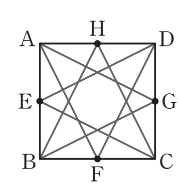
265 임의로 서로 다른 두 점을 택할 때, 모든 경우의 수는

$${}_8C_2=28$$

임의로 택한 두 점 사이의 거리가 2 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 두 점 사이의 거리가 2보다 큰 사건이다.

(i) 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{5}$인 경우

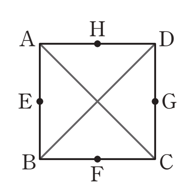
오른쪽 그림과 같이 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{5}$인 것은 각 꼭짓점에 대하여 2개씩 있으므로 경우의 수는



$$4\cdot 2=8$$

(ii) 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$인 경우

오른쪽 그림과 같이 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$인 것은 정사각형의 두 대각선이므로 경우의 수는



$$2$$

(i), (ii)에서

$$P(A^C)=\frac{8+2}{28}=\frac{5}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$$

답 ④

일품 BOX

- 4, 6, 6을 일렬로 나열하는 방법의 수
- 1부터 $(k-1)$까지의 자연수 중에서 한 개를 뽑는 경우의 수
- $(k+1)$부터 n까지의 자연수 중에서 한 개를 뽑는 경우의 수
- $0\le x<5,\ 0\le y<10$을 만족시키는 영역의 넓이
- $k=1$일 때, $(k-1)(n-k)=0$ $\therefore \sum_{k=2}^{n-1}(k-1)(n-k)=\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)(n-k)$
- $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$
- $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$
- 4, 4, 6을 일렬로 나열하는 방법의 수
- 4, 5, 6을 일렬로 나열하는 방법의 수

266 2개의 주사위를 던져서 나오는 두 눈의 수가 모두 소수인 사건을 A, 두 눈의 수의 합이 소수인 사건을 B라 하면

$A=\{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$,

$A\cap B=\{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (5, 2)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{9}$$

답 ②

267 주머니 A에서 흰 바둑돌 2개, 검은 바둑돌 2개를 주머니 B로 옮기는 사건을 A, B에서 흰 바둑돌 2개를 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2C_2\cdot{}_4C_2}{{}_6C_4}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{6}$$

답 ②

1등급 비밀노트

구하는 확률은 흰 바둑돌 2개와 검은 바둑돌 2개에서 흰 바둑돌 2개를 꺼내는 확률과 같으므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$

268 두 개의 빨간 구슬에 적힌 두 수의 합이 7인 경우는

$(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$의 2가지

두 개의 파란 구슬에 적힌 두 수의 합이 7인 경우는

$(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$, $(3,\ 4)$의 3가지

빨간 구슬 1개, 파란 구슬 1개에 적힌 두 수의 합이 7인 경우는

$(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(4,\ 3)$, $(5,\ 2)$의 5가지

따라서 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 두 수의 합이 7인 사건을 A, 꺼낸 구슬의 색이 서로 다른 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2+3+5}{{}_{12}C_2}=\frac{10}{66}=\frac{5}{33}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{{}_{12}C_2}=\frac{5}{66}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{66}}{\frac{5}{33}}=\frac{1}{2}$$

답 ④

일품 BOX

첫 번째 자유투는 성공하고 두 번째 자유투는 실패할 확률

첫 번째 자유투는 실패하고 두 번째 자유투는 성공할 확률

적어도 한 번은 짝수를 맞혀야 한다.

파란 구슬 중 숫자 3이 적힌 구슬은 2개이므로 $(3,\ 4)$를 꺼내는 경우는 2가지이다.

269 A가 첫 번째 자유투를 성공하는 사건을 A, 두 번째 자유투를 성공하는 사건을 B라 하고, 자유투를 두 번 하여 한 번 성공하는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.6,\ \mathrm{P}(B)=0.75$

$\mathrm{P}(A\cap E)=0.6\times0.25=0.15$

$\mathrm{P}(B\cap E)=0.4\times0.75=0.3$

$\therefore \mathrm{P}(E)=0.15+0.3=0.45$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.15}{0.45}=\frac{1}{3}$$

답 ②

270 화살을 두 번 쏘았을 때, 맞힌 2개의 숫자의 곱이 짝수인 사건을 A, 맞힌 2개의 숫자의 합이 짝수인 사건을 B라 하자.

사건 A는 맞힌 두 숫자가 (홀수, 짝수), (짝수, 홀수), (짝수, 짝수)인 경우이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{16}{25}$

사건 $A\cap B$는 맞힌 두 숫자가 (짝수, 짝수)인 경우이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{4}{25}}{\frac{16}{25}}=\frac{1}{4}$$

답 ①

다른 풀이 맞힌 2개의 숫자의 곱이 홀수인 사건 A^C는 맞힌 두 숫자가 (홀수, 홀수)인 경우이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=\frac{16}{25}$

271 (해결 과정) 갑이 진실을 말하는 사건을 A, 거짓말 탐지기가 진실로 판단하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{10}{11}$

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{10}$ ● 50%

(답 구하기) 따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{11}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{10}=\frac{233}{550}$ ● 50%

답 $\frac{233}{550}$

272 3개의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_9C_3=84$

당첨 번호와 2개가 일치하는 경우의 수는

${}_3C_2\cdot{}_6C_1=18$

이므로 갑의 번호가 당첨 번호와 2개가 일치할 확률은

$\frac{18}{84}=\frac{3}{14}$

당첨 번호와 1개가 일치하는 경우의 수는

${}_3C_1\cdot{}_6C_2=45$

이므로 을의 번호가 당첨 번호와 1개가 일치할 확률은

$\frac{45}{84}=\frac{15}{28}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{14}\cdot\frac{15}{28}=\frac{45}{392}$ 답 ③

273 해결 과정 (i) 첫 경기에서 a와 c, b와 d가 시합을 하는 경우

ⓘ 결승에서 a와 b가 만나 b가 우승할 확률은

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{18}$ ● 20%

ⓘⓘ 결승에서 c와 b가 만나 b가 우승할 확률은

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ ● 20%

(ii) 첫 경기에서 a와 d, b와 c가 만나 시합을 하는 경우

ⓘ 결승에서 a와 b가 만나 b가 우승할 확률은

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{18}$ ● 20%

ⓘⓘ 결승에서 d와 b가 만나 b가 우승할 확률은

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ ● 20%

답 구하기 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}=\frac{5}{18}$ ● 20%

답 $\frac{5}{18}$

274 축구팀이 2승 1패를 하는 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) (승, 승, 패)인 경우

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{32}$

(ii) (승, 패, 승)인 경우

$\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$

(iii) (패, 승, 승)인 경우

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$

이상에서 구하는 확률은

$\frac{3}{32}+\frac{1}{16}+\frac{3}{16}=\frac{11}{32}$ 답 $\frac{11}{32}$

1등급 비밀노트

연승할 확률이 $\frac{3}{4}$이므로 승리한 다음 경기에서 질 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 또 연패할 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 패한 다음 경기에서 이길 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

일품 BOX

첫 번째 시행에서 검은 공이 나오면 흰 공을 1개 넣으므로 주머니에 모두 흰 공만 들어 있게 된다. 따라서 두 번째 시행에서 흰 공이 나올 확률은 1이다.

갑이 당첨 번호와 2개가 일치하는 사건과 을이 당첨 번호와 1개가 일치하는 사건은 독립이다.

첫 경기에서 a와 c, b와 d가 만날 확률이 $\frac{1}{2}$

a가 c를 이길 확률이 $\frac{1}{3}$

b가 d를 이길 확률이 $\frac{1}{2}$

b가 a를 이길 확률이 $\frac{2}{3}$

첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합

275 3회 시행 후 주머니에 있는 공이 모두 흰 공인 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) 흰 공, 검은 공, 검은 공의 순서대로 꺼내는 경우의 확률은

$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

(ii) 검은 공, 흰 공, 검은 공의 순서대로 꺼내는 경우의 확률은

$\frac{1}{3}\cdot1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{4}{27}+\frac{1}{9}=\frac{7}{27}$ 답 ③

276 던지는 횟수가 5 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 던지는 횟수가 6회 이상인 사건이다. 즉 5회까지 1 또는 2의 눈이 나오지 않아야 하므로

$P(A^C)={}_5C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$

$\therefore P(A)=1-P(A^C)=\frac{211}{243}$ 답 ④

다른 풀이 1회까지 던질 확률은 $\frac{1}{3}$

2회까지 던질 확률은 $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$

3회까지 던질 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$

4회까지 던질 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}$

5회까지 던질 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right\}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=1-\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{211}{243}$$

277 해결 과정 (i) 빨간 공을 꺼내고, 동전을 3번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$\frac{3}{5}\cdot{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{3}{40}$ ● 40%

(ii) 노란 공을 꺼내고, 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$\frac{2}{5}\cdot{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{10}$ ● 40%

답 구하기 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{40}+\frac{1}{10}=\frac{7}{40}$ ● 20%

답 $\frac{7}{40}$

278 전략 조건 (나)를 이용하여 집합 A를 먼저 구한다.

Step 1 집합 P의 원소의 개수는 $2^5=32$이므로, 집합 P에서 서로 다른 두 원소 A, B를 택하는 모든 방법의 수는

$${}_{32}\mathrm{P}_2=992$$

Step 2 집합 U에서 임의로 택한 1개의 원소가 집합 A에 속하는 사건을 A, 집합 B에 속하지 않는 사건을 B^C라 하면 조건 (나)에서 $\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B^C)}{n(U)}}{\frac{n(A)}{n(U)}}=\frac{n(A-B)}{n(A)}=\frac{n(A)-n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{n(A)-2}{n(A)}=\frac{1}{2}$$

$\therefore n(A)=4$

따라서 집합 A의 개수는 집합 U의 원소 중 1, 2를 제외한 3개에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{C}_2=3$$

$a\notin A$인 U의 원소 a에 대하여 집합 B는 $\{1, 2\}$, $\{1, 2, a\}$의 2개가 있으므로 조건을 만족시키는 집합 A, B에 대하여 순서쌍 (A, B)의 개수는

$$3\cdot2=6$$

Step 3 따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{992}=\frac{3}{496}$$

답 $\frac{3}{496}$

279 전략 주사위를 5번 던져서 점이 -1의 위치로 이동한 후 6번째 던질 때 왼쪽으로 1만큼 이동하면 수지가 이길 수 있다.

Step 1 주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈이 나오는 경우는 1, 2, 3, 6이므로 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Step 2 주사위를 6번 던져서 수지가 이기려면 주사위를 5번 던질 때까지 점이 -1의 위치로 이동하고 주사위를 6번째 던질 때 점이 왼쪽으로 1만큼 이동해야 한다.

주사위를 5번 던지는 동안 6의 약수의 눈이 x번 나온다고 하면

$$x-(5-x)=-1,\qquad 2x=4$$

$\therefore x=2$

따라서 주사위를 5번 던질 때까지 6의 약수의 눈은 2번, 그 외의 눈은 3번 나와야 한다.

이때 6의 약수의 눈이 나오는 경우를 ○, 6의 약수의 눈이 나오지 않는 경우를 ×라 하고 2개의 ○과 3개의 ×를 배열할 때 주사위를 5번 던지기 전에 게임이 끝나는 경우를 구하면 다음과 같다.

(i) 주사위를 2번 던졌을 때 게임이 끝나는 경우

×××○○
××○×○
××○○×

(ii) 주사위를 4번 던졌을 때 게임이 끝나는 경우

×○××○
○×××○

(i), (ii)에서 주사위를 5번 던지는 동안 게임이 끝나는 경우의 수는

$$3+2=5$$

이므로 주사위를 5번 던지는 동안 게임이 끝나지 않고 점이 -1의 위치로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\cdot3!}-5=10-5=5$$

Step 3 따라서 주사위를 6번 던져서 수지가 이길 확률은

$$5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}=\frac{20}{3^6}$$

$\therefore n=20$

답 20

280 전략 점 P의 x좌표와 y좌표의 합이 2가 되는 경우를 구하여 각 경우의 확률을 구한다.

Step 1 점 P가 x축의 방향으로 1만큼 이동하는 사건을 A, y축의 방향으로 1만큼 이동하는 사건을 B, 이동하지 않는 사건을 C라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$$

Step 2 주사위를 4번 던져서 점 P의 x좌표와 y좌표의 합이 2가 되는 경우는

$$(2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2)$$

(i) 점 P의 좌표가 $(2,\ 0)$이 될 확률

$$\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{24}$$

(ii) 점 P의 좌표가 $(1,\ 1)$이 될 확률

$$\frac{4!}{2!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{6}$$

(iii) 점 P의 좌표가 $(0,\ 2)$가 될 확률

$$\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{6}$$

Step 3 이상에서 점 P의 x좌표와 y좌표의 합이 2가 될 확률은

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{8}$$

따라서 $p=8$, $q=3$이므로

$$p+q=11$$

답 11

일품 BOX

- 주사위를 2번 던진 후 점이 -2의 위치로 옮겨진다.
- 집합 P의 서로 다른 두 원소 X, Y에 대하여 $A=X$, $B=Y$ 와 $A=Y$, $B=X$ 는 서로 다른 경우이므로 순열의 수를 이용한다.
- $A\cap B^C=A-B$
- 주사위를 4번 던진 후 점이 -2의 위치로 옮겨진다. 주사위를 3번 던진 후 점이 -2의 위치로 옮겨지는 경우는 없다.
- 조건 (가)에서 $A\cap B=\{1,\ 2\}$이므로 $n(A\cap B)=2$
- ○○×××를 일렬로 나열하는 방법의 수

Ⅲ 통계

06 확률분포 본책 56쪽

281 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4}+\frac{a^3}{2}+\frac{1-a^2}{4}+\frac{3}{2}-2a=1$$

$$2a^3-a^2-8a+4=0$$

$$(a+2)(2a-1)(a-2)=0$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=2$$

이때 $0\le\frac{a^3}{2}<1,\ 0\le\frac{1-a^2}{4}<1,\ 0\le\frac{3}{2}-2a<1$이어야 하므로

$$a=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X=2)=\frac{a^3}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$$

답 ②

282 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=10)=1$$

$$P(X=1)+2P(X=1)+\cdots+10P(X=1)=1$$

$$(1+2+3+\cdots+10)P(X=1)=1$$

$$55P(X=1)=1 \qquad \therefore P(X=1)=\frac{1}{55}$$

$$\therefore P(X=k)=k\cdot\frac{1}{55}=\frac{k}{55}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&P(3\le X\le 6)\\&=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)\\&=\frac{3}{55}+\frac{4}{55}+\frac{5}{55}+\frac{6}{55}\\&=\frac{18}{55}\end{aligned}$$

답 ④

283 확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{1}{12}+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{11}{12} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$E(X)=\frac{16}{3}$이므로 $\quad 2\cdot a+4\cdot\frac{1}{12}+6\cdot b=\frac{16}{3}$

$$\therefore 2a+6b=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{1}{8},\ b=\frac{19}{24}$

$$\therefore b-a=\frac{2}{3}$$

답 ⑤

284 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{10},$$

$$P(X=1)=\frac{3}{5}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{20},$$

$$P(X=2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{20}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{10}+1\cdot\frac{9}{20}+2\cdot\frac{9}{20}=\frac{27}{20}$$

답 ②

285 한 번의 시행에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2800, 2100, 1400이고, 그 확률은 각각

$$P(X=2800)=\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{3}{28},$$

$$P(X=2100)=\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{14},$$

$$P(X=1400)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_5C_1}{{}_8C_2}=\frac{15}{28}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2800	2100	1400	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\begin{aligned}E(X)&=2800\cdot\frac{3}{28}+2100\cdot\frac{5}{14}+1400\cdot\frac{15}{28}\\&=1800\end{aligned}$$

답 1800원

286 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{2}{7},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{7}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{2}{7}+1\cdot\frac{4}{7}+2\cdot\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{2}{7}+1^2\cdot\frac{4}{7}+2^2\cdot\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{8}{7}-\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{20}{49}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{20}{49}}=\frac{2\sqrt{5}}{7}$$

답 ③

일품 BOX

확률질량함수의 성질

이산확률변수 X의 확률질량함수

$P(X=x_i)=p_i$
$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

에 대하여

① $0\le p_i\le 1$

② $\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i)=1$

$a=\frac{1}{2}$일 때

$\frac{a^3}{2}=\frac{1}{16},$

$\frac{1-a^2}{4}=\frac{3}{16},$

$\frac{3}{2}-2a=\frac{1}{2}$

$\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\cdot 11}{2}=55$

꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률

꺼낸 공이 모두 검은 공일 확률

꺼낸 공이 흰 공 1개, 검은 공 1개일 확률

$V(X)$의 정의를 이용하여 다음과 같이 계산할 수도 있다.

$$\begin{aligned}&V(X)\\&=\left(0-\frac{6}{7}\right)^2\cdot\frac{2}{7}\\&\quad+\left(1-\frac{6}{7}\right)^2\cdot\frac{4}{7}\\&\quad+\left(2-\frac{6}{7}\right)^2\cdot\frac{1}{7}\\&=\frac{20}{49}\end{aligned}$$

287 확률의 총합은 1이므로

$a+b+c=1$ …… ㉠

$E(X)=1$이므로 $0\cdot a+1\cdot b+2\cdot c=1$

$\therefore b+2c=1$ …… ㉡

$V(X)=\frac{1}{3}$이므로 $0^2\cdot a+1^2\cdot b+2^2\cdot c-1^2=\frac{1}{3}$

$\therefore b+4c=\frac{4}{3}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{6},\ b=\frac{2}{3},\ c=\frac{1}{6}$

$\therefore a+2b+3c=2$

답 2

288 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$V(X)=3k+1-k^2=-\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$

따라서 $V(X)$는 $k=\frac{3}{2}$일 때 최댓값 $\frac{13}{4}$을 갖는다.

답 $\frac{13}{4}$

289 $E(Y)=11$에서 $E\left(\frac{1}{2}X+5\right)=11$

$\frac{1}{2}E(X)+5=11$ $\therefore E(X)=12$

또 $E(Y^2)=124$이므로 $V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$에서

$V(Y)=124-11^2=3$

$V(Y)=3$에서 $V\left(\frac{1}{2}X+5\right)=3$

$\frac{1}{2^2}V(X)=3$ $\therefore V(X)=12$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$12=E(X^2)-12^2$ $\therefore E(X^2)=156$

답 ⑤

290 $E(X)=10$이므로

$E(Y)=E\left(\frac{X+b}{a}\right)=\frac{1}{a}E(X)+\frac{b}{a}$

$=\frac{10}{a}+\frac{b}{a}=0$

$\therefore b=-10$

또 $\sigma(X)=3$이므로

$\sigma(Y)=\sigma\left(\frac{X+b}{a}\right)=\frac{1}{a}\sigma(X)=\frac{3}{a}=1$

$\therefore a=3$

$\therefore a-b=3-(-10)=13$

답 ④

291 O형인 학생이 2명이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\cdot{}_8C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{15}$,

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_8C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{15}$,

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\cdot{}_8C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{15}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\cdot\frac{7}{15}+1\cdot\frac{7}{15}+2\cdot\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{7}{15}+1^2\cdot\frac{7}{15}+2^2\cdot\frac{1}{15}=\frac{11}{15}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{11}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{28}{75}$

$\therefore V(5X+3)=5^2V(X)$

$=25\cdot\frac{28}{75}=\frac{28}{3}$

답 $\frac{28}{3}$

292 $P(X=n-1)=12P(X=n)$에서

${}_nC_{n-1}p^{n-1}(1-p)=12\cdot{}_nC_np^n$

$np^{n-1}(1-p)=12p^n$

$p\neq0$이므로 위의 식의 양변을 p^{n-1}으로 나누면

$n(1-p)=12p$ …… ㉠

$np=6$에서 $n=\frac{6}{p}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\frac{6}{p}(1-p)=12p$

$1-p=2p^2$, $2p^2+p-1=0$

$(p+1)(2p-1)=0$

$\therefore p=\frac{1}{2}$ ($\because 0<p\le1$)

$p=\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면 $n=12$

$\therefore n+6p=15$

답 ②

293 원판에 적힌 수 중에서 양의 약수의 개수가 3 또는 4인 수는 4, 6, 8이다.

즉 양의 약수의 개수가 3 또는 4인 수가 적힌 영역에 화살을 맞힐 확률은 $\frac{3}{8}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(320,\ \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$n=320,\ p=\frac{3}{8}$

$\therefore np=120$

답 ③

294 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{2}{5}\right)^{5-x}$

$(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

따라서 구하는 확률은

$P(X\ge4)=P(X=4)+P(X=5)$

$={}_5C_4\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^1+{}_5C_5\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^0$

$=2\left(\frac{3}{5}\right)^4+\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{13}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^4$

$\therefore k=\frac{13}{5}$

답 $\frac{13}{5}$

일품 BOX

이항분포 $B(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 확률질량함수

➡ $P(X=x)={}_nC_xp^xq^{n-x}$

$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ q=1-p)$

${}_nC_{n-1}={}_nC_1=n$

	양의 약수
4	1, 2, 4
6	1, 2, 3, 6
8	1, 2, 4, 8

$\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$

$a>0$이므로 $\left|\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{a}$

295 확률변수 X는 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르므로
$E(X)=16,\ V(X)=12$에서

$np=16$ …… ㉠

$np(1-p)=12$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$16(1-p)=12,\quad 1-p=\frac{3}{4}$

$\therefore p=\frac{1}{4}$

$p=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $n=64$

$\therefore \frac{n}{p}=256$

답 ④

296 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$E(X)=100\cdot\frac{1}{10}=10$

$\sigma(X)=\sqrt{100\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}=\sqrt{9}=3$

답 ③

297 1회의 시행에서 빨간 공이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이다.
따라서 20회의 시행에서 빨간 공이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$E(X)=20\cdot\frac{2}{5}=8$

이때 받는 총 금액을 Y원이라 하면 $Y=200X$이므로

$E(Y)=E(200X)=200E(X)=200\cdot 8=1600$

따라서 구하는 기댓값은 1600원이다.

답 ④

298 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{8}+a+b+c=1$

$\therefore a+b+c=\frac{7}{8}$ …… ㉠

$a,\ b,\ c$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+c$ …… ㉡

㉠에서 $a+c=\frac{7}{8}-b$이므로 ㉡에 대입하면

$b=\frac{7}{24}$

또 세 수 $\frac{1}{8},\ a,\ \frac{7}{24}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a=\frac{1}{8}+\frac{7}{24}\qquad\therefore a=\frac{5}{24}$

$a=\frac{5}{24},\ b=\frac{7}{24}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{5}{24}+\frac{7}{24}+c=\frac{7}{8}\qquad\therefore c=\frac{3}{8}$

$\therefore a+2b+3c=\frac{23}{12}$

답 ③

일품 BOX

확률변수 X의 확률질량함수가
$P(X=x)$
$={}_nC_xp^x(1-p)^{n-x}$
$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$
➡ X는 이항분포 $B(n,\ p)$를 따른다.

자연수의 거듭제곱의 합
① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$
② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때,
$E(X)=np$
$V(X)=npq$
$\sigma(X)=\sqrt{npq}$
(단, $q=1-p$)

2, 3, 5의 카드 중 1장을 뽑고 1, 4, 6의 카드 중 2장의 카드를 뽑는 방법의 수

$2b=\frac{7}{8}-b$에서
$3b=\frac{7}{8}$
$\therefore b=\frac{7}{24}$

299 확률의 총합은 1이므로

$\sum_{x=1}^{n}P(X=x)=\sum_{x=1}^{n}ax=a\cdot\frac{n(n+1)}{2}=1$

즉 $a=\frac{2}{n(n+1)}$이므로

$\sum_{k=1}^{n}ak^2=a\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{1}{3}(2n+1)$

따라서 $\frac{1}{3}(2n+1)=19$이므로 $2n+1=57$

$\therefore n=28$

답 28

300 해결 과정 1부터 6까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5의 3개이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_3C_3}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$,

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{9}{20}$,

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_3C_1}{{}_6C_3}=\frac{9}{20}$,

$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\cdot{}_3C_0}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$ ● 50%

답 구하기 따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\cdot\frac{1}{20}+1\cdot\frac{9}{20}+2\cdot\frac{9}{20}+3\cdot\frac{1}{20}$

$=\frac{3}{2}$ ● 50%

답 $\frac{3}{2}$

301 한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-500	1000	합계
$P(X=x)$	$\frac{x}{8+x}$	$\frac{8}{8+x}$	1

이 게임을 한 번 해서 받을 수 있는 금액의 기댓값이 300원이므로

$-500\cdot\frac{x}{8+x}+1000\cdot\frac{8}{8+x}=300$

$-500x+8000=300(8+x)$

$800x=5600\qquad\therefore x=7$

답 7

302 빨간 공과 흰 공에 적힌 두 수의 합은 2, 3, 4, 5이고 흰 공에 적힌 두 수의 곱은 2이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$,

$$P(X=2)=\frac{1}{{}_5C_2}+\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{2}{10},$$
$$P(X=3)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{2}{10},$$
$$P(X=4)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{2}{10},$$
$$P(X=5)=\frac{1}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{2}{10}+3\cdot\frac{2}{10}+4\cdot\frac{2}{10}+5\cdot\frac{1}{10}=\frac{23}{10}$$
$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{2}{10}+3^2\cdot\frac{2}{10}+4^2\cdot\frac{2}{10}+5^2\cdot\frac{1}{10}=\frac{83}{10}$$
$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{83}{10}-\left(\frac{23}{10}\right)^2=\frac{301}{100}$$

답 ④

303 해결 과정 1, 3, 5를 각각 한 번씩 이용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 $3!=6$이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고, 그 확률은 각각

$$P(X=1)=\frac{1}{6},$$
$$P(X=2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{6},$$
$$P(X=3)=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6},$$
$$\vdots$$
$$\therefore P(X=x)=\frac{1}{6}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$$ ● 40%

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=\sum_{x=1}^{6}x\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot7}{2}=\frac{7}{2}$$
$$E(X^2)=\sum_{x=1}^{6}x^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}=\frac{91}{6}$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$ ● 40%

답 구하기 $\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{12}}=\frac{\sqrt{105}}{6}$ ● 20%

답 $\frac{\sqrt{105}}{6}$

304 해결 과정 확률의 총합은 1이므로

$$\sum_{k=1}^{6}P(X=k)=1,\quad \sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k(k+1)}+a=1$$
$$\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+a=1$$
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+a=1$$
$$\frac{5}{6}+a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{6}$$ ● 50%

답 구하기 $\therefore E\left(\frac{10}{a}X\right)=E(60X)=60E(X)$

$$=60\left(\sum_{k=1}^{5}k\cdot\frac{1}{k(k+1)}+6\cdot a\right)$$
$$=60\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k+1}+6\cdot\frac{1}{6}\right)$$
$$=60\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+1\right)$$
$$=30+20+15+12+10+60$$
$$=147$$ ● 50%

답 147

305 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, …, 9이고, 확률변수 Y, Z가 가질 수 있는 값은 각각 0, 2, 4, 6, …, 18이다. X, Y, Z가 각각의 값을 가질 확률은 모두 $\frac{1}{10}$이므로 $\quad Y=Z=2X$

$$\therefore V(Y)=V(Z)=V(2X)=2^2V(X)=4V(X)$$

이때 $V(X)>0$이므로 $\quad V(X)<V(Y)=V(Z)$

$$\therefore a<b=c$$

답 ③

306 확률변수 X의 확률질량함수가

$$P(X=x)={}_{50}C_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{50-x}\quad (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 50)$$

이므로

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k+1)}=\frac{{}_{50}C_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{50-k}}{{}_{50}C_{k+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{49-k}}$$
$$=\frac{\frac{50!}{k!(50-k)!}}{\frac{50!}{(k+1)!(49-k)!}}\cdot\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{k+1}{50-k}\cdot3$$

즉 $\frac{3(k+1)}{50-k}=\frac{21}{10}$이므로 $\quad 10k+10=350-7k$

$17k=340 \qquad \therefore k=20$

답 ③

307 의약품 K를 투여하였을 때 발진을 일으킬 확률이 0.2이고, 이 중 1시간 내에 정상으로 회복하지 못할 확률이 0.2이므로 의약품 K를 투여하였을 때 발진을 일으킨 후 1시간 내에 정상으로 회복하지 못한 확률은

$$0.2\times0.2=0.04$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B(60000,\ 0.04)$를 따르므로

$$E(X)=60000\times0.04=2400$$
$$\sigma(X)=\sqrt{60000\times0.04\times0.96}=48$$

답 ④

일품 BOX

- 1이 적힌 빨간 공 1개와 1이 적힌 흰 공 1개를 꺼내는 경우의 수
- 흰 공 2개를 꺼내는 경우의 수

$6\cdot P(X=6)$

확률변수 X와 두 상수 $a\,(a\neq0)$, b에 대하여
① $E(aX+b)=aE(X)+b$
② $V(aX+b)=a^2V(X)$
③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$1-0.8=0.2$

부분분수로의 변형
$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$$
(단, $A\neq B$)

308 (문제 이해) 확률변수 X의 확률질량함수가

$$P(X=x)={}_{50}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{50-x}$$

$$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 50)$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(50,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

● 40%

(해결 과정) 따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=50\cdot\frac{1}{2}=25$$

$$V(X)=50\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{2}$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$$

$$=\frac{25}{2}+25^2=\frac{1275}{2}$$

● 40%

(답 구하기) $\therefore E\left(\frac{X^2}{25}\right)=\frac{1}{25}E(X^2)=\frac{1}{25}\cdot\frac{1275}{2}$

$$=\frac{51}{2}$$

● 20%

답 $\frac{51}{2}$

$E(aX^2)=\sum_{i=1}^{n}ax_i^2p_i$
$=a\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i$
$=aE(X^2)$

309 1회의 시행에서 서로 다른 색의 공이 나올 확률은

$$\frac{{}_1C_1\cdot{}_4C_1}{{}_5C_2}=\frac{2}{5}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(50,\ \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=50\cdot\frac{2}{5}=20$$

$$V(X)=50\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=12$$

이므로

$$\sum_{k=0}^{50}kP(X=k)=20,\ \sum_{k=0}^{50}k^2P(X=k)=412$$

$$\therefore f(x)=\sum_{k=0}^{50}(-x^2+kx+k^2)P(X=k)$$

$$=-x^2\sum_{k=0}^{50}P(X=k)+x\sum_{k=0}^{50}kP(X=k)$$

$$+\sum_{k=0}^{50}k^2P(X=k)$$

$$=-x^2\cdot1+x\cdot20+412$$

$$=-x^2+20x+412$$

$$=-(x-10)^2+512$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=10$일 때 최댓값 512를 갖는다.

답 512

$\sum_{k=0}^{50}k^2P(X=k)-20^2=12$

• 확률의 총합은 1이다.

310 (i) 카드에 적힌 숫자 중 소수는 2, 3, 7이므로 소수가 나왔을 때 받을 수 있는 금액의 기댓값은

$$\frac{1}{5}\cdot(2+3+7)\cdot100=240(\text{원})$$

• 카드를 뒤집었을 때 카드에 적힌 숫자가 2(3 또는 7)일 확률

(ii) 처음 카드에 적힌 숫자가 소수가 아닐 확률은 $\frac{2}{5}$이므로 [규칙 2]에 의하여 받을 수 있는 금액의 기댓값은

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}(1+2+3+6+7)\cdot500=\frac{2}{5}\cdot1900$$

$$=760(\text{원})$$

(i), (ii)에서 구하는 기댓값은

$$240+760=1000(\text{원})$$

답 ④

1등급 비밀노트

카드를 한 장 뒤집었을 때 나오는 숫자가 소수, 즉 2, 3, 7인 사건은 서로 독립이고, 각 사건이 일어날 확률은 $\frac{1}{5}$로 같다.

이때 소수가 나올 확률을 $\frac{3}{5}$으로 생각하여 기댓값을

$$\frac{3}{5}(2+3+7)\cdot100=720$$

으로 계산하지 않도록 주의한다.

311 (i) A농가

$$E(X)=20\times0.2+15\times0.6+10\times0.2=15$$

$$E(X^2)=20^2\times0.2+15^2\times0.6+10^2\times0.2=235$$

이므로 $V(X)=235-15^2=10$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{10}$$

(ii) B농가

$$E(X)=20\times0.25+15\times0.5+10\times0.25=15$$

$$E(X^2)=20^2\times0.25+15^2\times0.5+10^2\times0.25=237.5$$

이므로 $V(X)=237.5-15^2=12.5$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{12.5}$$

(iii) C농가

$$E(X)=20\times0.35+15\times0.3+10\times0.35=15$$

$$E(X^2)=20^2\times0.35+15^2\times0.3+10^2\times0.35=242.5$$

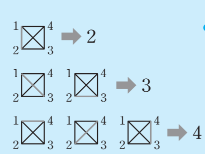
이므로 $V(X)=242.5-15^2=17.5$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{17.5}$$

이상에서 표준편차가 작은 농가부터 순서대로 나열하면

A, B, C

답 ①



312 6개의 선분의 양 끝 점에 대응하는 수 중 큰 수를 나열하면 2, 3, 3, 4, 4, 4이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$$P(X=2)=\frac{1}{6},$$

$$P(X=3)=\frac{2}{6},$$

$$P(X=4)=\frac{3}{6}$$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{2}{6}+4\cdot\frac{3}{6}=\frac{10}{3}$$

$$E(X^2)=2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{2}{6}+4^2\cdot\frac{3}{6}=\frac{35}{3}$$

이므로 $V(X)=\frac{35}{3}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 이므로

$\sigma(3X+2)=3\sigma(X)=3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$ 답 ④

313 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n=a+(n-1)d$

이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $\cdots$, $a+100d$이다. $X=a+dY$라 하고 확률변수 Y의 확률질량함수를

$$P(Y=k)={}_{100}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$$

으로 정의하면 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$E(Y)=100\cdot\frac{1}{2}=50,\ \sigma(Y)=\sqrt{100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=5$$

$\therefore E(X)=E(a+dY)$

$=a+50d=103$ …… ㉠

$\sigma(X)=\sigma(a+dY)=5d=10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3,\ d=2$

$\therefore a_{20}=a+19d=3+38=41$ 답 ②

314 확률변수 X는 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르므로 $E(X)=6$, $V(X)=4$에서

$np=6$ …… ㉠

$np(1-p)=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $n=18,\ p=\frac{1}{3}$

$$\therefore \sum_{x=0}^{n}x^2{}_nC_x(4p)^x(1-p)^{n-x}$$
$$=\sum_{x=0}^{18}x^2{}_{18}C_x\left(\frac{4}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$$
$$=2^{18}\sum_{x=0}^{18}x^2{}_{18}C_x\left(\frac{4}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{18-x}$$
$$=2^{18}\sum_{x=0}^{18}x^2{}_{18}C_x\left(\frac{4}{6}\right)^x\left(\frac{2}{6}\right)^{18-x}$$
$$=2^{18}\sum_{x=0}^{18}x^2{}_{18}C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{18-x}$$

확률변수 Y가 이항분포 $B\left(18,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다고 할 때

$$E(Y)=18\cdot\frac{2}{3}=12,\ V(Y)=18\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=4$$

이므로

$$\sum_{x=0}^{18}x^2{}_{18}C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{18-x}=E(Y^2)$$
$$=V(Y)+\{E(Y)\}^2$$
$$=4+12^2=148$$

$$\therefore \frac{1}{2^{20}}\sum_{x=0}^{n}x^2{}_nC_x(4p)^x(1-p)^{n-x}$$
$$=\frac{1}{2^{20}}\cdot2^{18}\cdot148$$
$$=37$$ 답 37

일품 BOX

$y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이

$f(x)=\frac{1}{8}x$에서

$f(3)=\frac{3}{8}$

$0\le x\le\frac{2}{3}$에서

$f(x)=-3x+2$

이므로

$f\left(\frac{1}{3}\right)=-3\cdot\frac{1}{3}+2$

$=1$

㉠을 ㉡에 대입하면

$1-p=\frac{2}{3}$

$\therefore p=\frac{1}{3}$

$p=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$n=18$

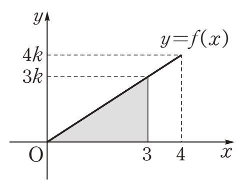
$N(2,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$에서

$E(Y^2)=V(Y)+\{E(Y)\}^2$

07 정규분포 본책 62쪽

315 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot4\cdot4k=1$

$8k=1\qquad\therefore k=\frac{1}{8}$

$P(0\le X\le3)$은 위의 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로

$P(0\le X\le3)=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{16}$ 답 ③

316 $P(a\le X\le0)=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot(-a)\cdot2=\frac{1}{3}\qquad\therefore a=-\frac{1}{3}$

$P(0\le X\le b)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot b\cdot2=\frac{2}{3}\qquad\therefore b=\frac{2}{3}$

따라서 $a+b=\frac{1}{3}$이고, $f\left(\frac{1}{3}\right)=1$이므로

$$P(a+b\le X\le b)=P\left(\frac{1}{3}\le X\le\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\cdot1$$
$$=\frac{1}{6}$$ 답 ②

317 $N(a,\ b)$를 따르는 확률변수 X의 정규분포 곡선은 직선 $x=a$에 대하여 대칭이므로 조건 (가)에서

$a=\frac{10+18}{2}=14$

$\sigma(X)=c$라 하면 $V(X)=c^2$이므로 조건 (나)에서

$c^2=3c+4,\qquad c^2-3c-4=0$

$(c+1)(c-4)=0\qquad\therefore c=4\ (\because c>0)$

따라서 $b=c^2=16$이므로

$a+b=14+16=30$ 답 30

318 $P(2-3\sigma\le X\le2+3\sigma)=a$에서

$2P(2\le X\le2+3\sigma)=a$

$\therefore P(2\le X\le2+3\sigma)=\frac{a}{2}$

$P(2+2\sigma\le X\le2+3\sigma)=b$에서

$P(2\le X\le2+3\sigma)-P(2\le X\le2+2\sigma)=b$

$\therefore P(2\le X\le2+2\sigma)=\frac{a}{2}-b$

$\therefore P(2-2\sigma\le X\le2+2\sigma)=2P(2\le X\le2+2\sigma)$

$=2\left(\frac{a}{2}-b\right)=a-2b$

답 $a-2b$

통계 Ⅲ

319 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(8,\ 3^2)$, $N(24,\ 4^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-8}{3},\ Z_Y=\frac{Y-24}{4}$$

로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$P(5\le X\le a)=P\left(\frac{5-8}{3}\le Z_X\le\frac{a-8}{3}\right)$$
$$=P\left(-1\le Z_X\le\frac{a-8}{3}\right)$$
$$P(10\le Y\le 28)=P\left(\frac{10-24}{4}\le Z_Y\le\frac{28-24}{4}\right)$$
$$=P\left(-\frac{7}{2}\le Z_Y\le 1\right)$$
$$=P\left(-1\le Z_Y\le\frac{7}{2}\right)$$

$P(5\le X\le a)=P(10\le Y\le 28)$에서

$$P\left(-1\le Z_X\le\frac{a-8}{3}\right)=P\left(-1\le Z_Y\le\frac{7}{2}\right)$$

따라서 $\frac{a-8}{3}=\frac{7}{2}$이므로

$$a-8=\frac{21}{2}\qquad\therefore a=\frac{37}{2}$$

답 $\frac{37}{2}$

320 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(1,\ 2^2)$, $N(2,\ 1^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-1}{2},\ Z_Y=\frac{Y-2}{1}$$

로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$a=P(1\le X\le 5)=P\left(\frac{1-1}{2}\le Z_X\le\frac{5-1}{2}\right)$$
$$=P(0\le Z_X\le 2)$$
$$b=P(-1\le Y\le 1)=P\left(\frac{-1-2}{1}\le Z_Y\le\frac{1-2}{1}\right)$$
$$=P(-3\le Z_Y\le -1)=P(1\le Z_Y\le 3)$$
$$c=P(1\le Y\le 3)=P\left(\frac{1-2}{1}\le Z_Y\le\frac{3-2}{1}\right)$$
$$=P(-1\le Z_Y\le 1)$$

$P(1\le Z_Y\le 3)<P(0\le Z_X\le 2)<P(-1\le Z_Y\le 1)$이므로 $\quad b<a<c$

답 ③

1등급 비밀노트

① 정규분포를 따르는 확률변수 X, Y에 대한 확률을 비교할 때에는 각각을 표준화한 다음 확률을 비교한다.

② $P(\alpha\le Z\le\beta)$, $P(\alpha'\le Z\le\beta')$에 대하여

$\beta-\alpha=\beta'-\alpha'$일 때, $\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|>\left|\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right|$이면

$P(\alpha\le Z\le\beta)<P(\alpha'\le Z\le\beta')$

321 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(a,\ 2^2)$, $N(a+4,\ 3^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-a}{2},\ Z_Y=\frac{Y-a-4}{3}$$

로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\ge b)=P(Y\le b)$에서

$$P\left(Z_X\ge\frac{b-a}{2}\right)=P\left(Z_Y\le\frac{b-a-4}{3}\right)$$

따라서 $\frac{b-a}{2}=-\frac{b-a-4}{3}$이므로

$$3b-3a=-2b+2a+8$$
$$5b-5a=8\qquad\therefore b-a=\frac{8}{5}$$

답 $\frac{8}{5}$

322 확률변수 X가 정규분포 $N(40,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore P(35\le X\le 55)$$
$$=P\left(\frac{35-40}{10}\le Z\le\frac{55-40}{10}\right)$$
$$=P(-0.5\le Z\le 1.5)$$
$$=P(-0.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)$$
$$=P(0\le Z\le 0.5)+P(0\le Z\le 1.5)$$
$$=0.1915+0.4332$$
$$=0.6247$$

답 ③

323 $P(-0.5\le X\le 0.5)-P(-0.5\le Z\le 0.5)$

$$=2\{P(0\le X\le 0.5)-P(0\le Z\le 0.5)\}$$
$$=2\{P(0\le X\le 0.5)-0.1915\}$$

이므로 $2\{P(0\le X\le 0.5)-0.1915\}=0.2996$에서

$$P(0\le X\le 0.5)=0.3413$$

확률변수 X가 정규분포 $N(0,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X}{\sigma}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$P\left(0\le Z_X\le\frac{0.5}{\sigma}\right)=0.3413$$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\frac{0.5}{\sigma}=1\qquad\therefore\sigma=0.5$$

답 ③

324 음료수의 용량을 X mL라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(250,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-250}{8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(242\le X\le 262)$$
$$=P\left(\frac{242-250}{8}\le Z\le\frac{262-250}{8}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le 1.5)$$
$$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 1.5)$$
$$=0.3413+0.4332=0.7745$$

답 ②

일품 BOX

- Z_Y의 정규분포 곡선은 직선 $z=0$에 대하여 대칭이므로
  $P(-a\le Z_Y\le b)$
  $=P(-b\le Z_Y\le a)$

- 확률변수 Z가 표준정규분포를 따를 때, (단, $0<a<b$)
  ① $P(0\le Z\le a)$
  $=P(-a\le Z\le 0)$
  ② $P(-a\le Z\le b)$
  $=P(-a\le Z\le 0)$
  $+P(0\le Z\le b)$
  $=P(0\le Z\le a)$
  $+P(0\le Z\le b)$

- 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 모두 직선 $x=0$에 대하여 대칭이다.

- $P(-1\le Z\le 0)$
  $+P(0\le Z\le 1.5)$
  $=P(0\le Z\le 1)$
  $+P(0\le Z\le 1.5)$

일품 BOX

325 학생들의 수학 성적을 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(62,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-62}{12}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge 80)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{80-62}{12}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.43=0.07\end{aligned}$$

따라서 수학 성적이 80점 이상인 학생 수는

$0.07\times 300=21$ 답 21

(80점 이상일 확률) × (2학년 학생 수)

326 일주일 동안 자율학습실에서 공부한 시간을 X시간이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(14,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-14}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

지정석을 받기 위한 최소 시간을 a시간이라 하면

$\mathrm{P}(X\ge a)=\dfrac{67}{1000}=0.067$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{a-14}{4}\right)=0.067$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-14}{4}\right)=0.067$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-14}{4}\right)=0.067$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-14}{4}\right)=0.433$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.433$이므로

$$\frac{a-14}{4}=1.5 \qquad \therefore a=20$$

따라서 지정석을 받기 위한 최소 시간은 20시간이다.

답 20시간

327 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=72\cdot\frac{2}{3}=48,\ \mathrm{V}(X)=72\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=16$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-48}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(44\le X\le 56)&=\mathrm{P}\left(\frac{44-48}{4}\le Z\le \frac{56-48}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

답 ③

328 확률변수 X에 대하여 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(256,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=256\cdot\frac{1}{2}=128,\ \mathrm{V}(X)=256\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=64$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(128,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-128}{8}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=136}^{144}p_k&=p_{136}+p_{137}+\cdots+p_{144}\\&=\mathrm{P}(X=136)+\mathrm{P}(X=137)\\&\quad+\cdots+\mathrm{P}(X=144)\\&=\mathrm{P}(136\le X\le 144)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{136-128}{8}\le Z\le \frac{144-128}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4772-0.3413=0.1359\end{aligned}$$

답 ⑤

329 정사면체 모양의 주사위 2개를 동시에 던질 때, 바닥에 놓인 면에 적힌 두 수의 합이 6 이상인 경우는

(2, 4), (3, 3), (4, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4)

의 6가지이므로 사건 A가 일어날 확률은 $\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$

$4\cdot 4=16$

따라서 960회의 시행 중 사건 A가 일어나는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(960,\ \dfrac{3}{8}\right)$을 따른다.

$$\mathrm{E}(X)=960\cdot\frac{3}{8}=360,$$

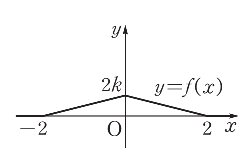
$$\mathrm{V}(X)=960\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}=225$$

에서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-360}{15}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\le 330)&=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{330-360}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 ②

330 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이다.

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2k=1$$

$$\therefore k=\frac{1}{4}$$

$-2\le x\le 2$에서 $f(x)=\dfrac{1}{4}(2-|x|)$이므로 $f(1)=\dfrac{1}{4}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(X\le 1)\\&=\mathrm{P}(-2\le X\le 1)\\&=1-\mathrm{P}(1\le X\le 2)\\&=1-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{8}\end{aligned}$$

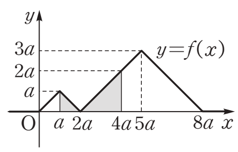
Ⅲ 통계

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(0\le X\le 1)$$
$$=\mathrm{P}(0\le X\le 2)-\mathrm{P}(1\le X\le 2)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}}=\frac{3}{7}$$

답 ③

331 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



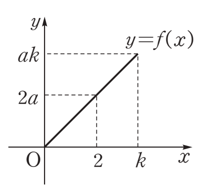
$$\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 6a\cdot 3a=1$$
$$10a^2=1$$
$$\therefore a=\frac{1}{\sqrt{10}}\ (\because a>0)$$

$\mathrm{P}(a\le X\le 4a)$는 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}(a\le X\le 4a)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a$$
$$=\frac{5}{2}a^2=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

332 해결 과정 함수 $f(x)=ax$가 확률밀도함수이므로 $a>0$이고, $0\le x\le k$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\mathrm{P}(0\le X\le k)=1$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot k\cdot ak=1 \qquad \therefore ak^2=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$ ● 30%

$$\mathrm{P}(0\le X\le 2)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2a=2a,$$

$\mathrm{P}(2\le X\le k)=1-\mathrm{P}(0\le X\le 2)=1-2a$이므로

$$2a:(1-2a)=1:3$$
$$1-2a=6a \qquad \therefore a=\frac{1}{8}$$ ● 30%

$a=\frac{1}{8}$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{8}k^2=2, \qquad k^2=16$$
$$\therefore k=4\ (\because k>2)$$ ● 30%

답 구하기 $\therefore \frac{k}{a}=\frac{4}{\frac{1}{8}}=32$ ● 10%

답 32

333 문제 이해 정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 2)$를 따르는 확률변수 W의 확률밀도함수를 $k(x)$라 하자.

$$\mathrm{E}(X)=0,\ \mathrm{E}(Y)=3,\ \mathrm{E}(W)=5$$

이므로 세 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=k(x)$는 각각 직선 $x=0$, $x=3$, $x=5$에 대하여 대칭이고,

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(W)=2$$

이므로 세 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=k(x)$의 모양은 서로 같다. ● 30%

일품 BOX

곡선 $y=k(x)$는 직선 $x=5$에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(T\ge 5)=0.5$

$\frac{10+22}{2}=16$,
$\frac{14+18}{2}=16$

$\frac{k+(k+4)}{2}=16$일 때, 즉 $k=14$일 때 최댓값을 갖는다.

정규분포 곡선이 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(4-a\le X\le 4)$
$=\mathrm{P}(4\le X\le 4+a)$

해결 과정 즉 곡선 $y=k(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=g(x)$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$$f(x-5)=k(x),\ g(x-2)=k(x)$$ ● 20%

$$\therefore h(x)=\frac{1}{3}f(x-5)+\frac{2}{3}g(x-2)$$
$$=\frac{1}{3}k(x)+\frac{2}{3}k(x)=k(x)$$ ● 20%

답 구하기 따라서 확률변수 T는 정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 2)$를 따르므로

$$\mathrm{P}(T\ge 5)=0.5$$ ● 30%

답 0.5

334 ㄱ. $f(10)=\mathrm{P}(10\le X\le 14)$이고, 정규분포 곡선은 직선 $x=16$에 대하여 대칭이므로

$$\mathrm{P}(10\le X\le 14)=\mathrm{P}(18\le X\le 22)$$
$$\therefore f(10)=f(18)$$

ㄴ. $\mathrm{P}(k\le X\le k+4)$의 최댓값은 $\mathrm{P}(14\le X\le 18)$이므로 함수 $f(k)$는 $k=14$일 때 최댓값을 갖는다.

ㄷ. $f(a)=\mathrm{P}(a\le X\le a+4)$,
$f(28-a)=\mathrm{P}(28-a\le X\le 32-a)$
이고

$$\frac{a+(32-a)}{2}=16,\ \frac{(a+4)+(28-a)}{2}=16$$

이므로

$$\mathrm{P}(a\le X\le a+4)=\mathrm{P}(28-a\le X\le 32-a)$$
$$\therefore f(a)=f(28-a)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

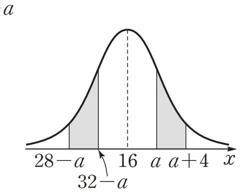
답 ③

1등급 비밀노트

ㄷ. 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $x=k$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(2k-x,\ y)=0$이다. 따라서 직선 $x=a+4$를 직선 $x=16$에 대하여 대칭이동하면

$$x=2\cdot 16-(a+4)=28-a$$

이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=28-a$와 직선 $x=a+4$는 직선 $x=16$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.
따라서 $f(a)=f(28-a)$이다.



335 $\mathrm{P}(4-a\le X\le 4+b)=p_2$에서

$$\mathrm{P}(4-a\le X\le 4)+\mathrm{P}(4\le X\le 4+b)=p_2$$
$$\mathrm{P}(4\le X\le 4+a)+\mathrm{P}(4\le X\le 4+b)=p_2$$
$$p_1+\mathrm{P}(4\le X\le 4+b)=p_2$$
$$\therefore \mathrm{P}(4\le X\le 4+b)=p_2-p_1$$

$\mathrm{P}(4-b\le X\le 4+c)=p_3$에서

$$\mathrm{P}(4-b\le X\le 4)+\mathrm{P}(4\le X\le 4+c)=p_3$$
$$\mathrm{P}(4\le X\le 4+b)+\mathrm{P}(4\le X\le 4+c)=p_3$$
$$(p_2-p_1)+\mathrm{P}(4\le X\le 4+c)=p_3$$
$$\therefore \mathrm{P}(4\le X\le 4+c)=p_3-p_2+p_1$$

$\therefore \mathrm{P}(4-a \le X \le 4+c)$
$=\mathrm{P}(4-a \le X \le 4)+\mathrm{P}(4 \le X \le 4+c)$
$=\mathrm{P}(4 \le X \le 4+a)+\mathrm{P}(4 \le X \le 4+c)$
$=p_1+(p_3-p_2+p_1)$
$=2p_1-p_2+p_3$

답 ④

336 두 확률변수 X_1, X_2의 확률밀도함수의 그래프의 대칭축이 일치하므로 확률변수 X_3의 확률밀도함수의 그래프는 맨 오른쪽에 있는 것이다.

$\therefore a>10$

또 맨 오른쪽의 확률밀도함수의 그래프가 가운데 부분이 가장 높고 옆으로 좁으므로 표준편차가 가장 작다.

$\therefore 0<b<4$

답 ①

337 $Z^2-(a+b)Z+ab \ge 0$에서

$(Z-a)(Z-b) \ge 0$

$\therefore Z \le a$ 또는 $Z \ge b$ ($\because a<b$)

이때 $\mathrm{P}(Z \le a)=0.5+\mathrm{P}(0 \le Z \le a)$
$=0.5+0.1=0.6$

$\mathrm{P}(Z \ge b)=0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le b)$
$=0.5-\{\mathrm{P}(0 \le Z \le a)+\mathrm{P}(a \le Z \le b)\}$
$=0.5-(0.1+0.3)$
$=0.1$

이므로

$\mathrm{P}(Z^2-(a+b)Z+ab \ge 0)$
$=\mathrm{P}(Z \le a)+\mathrm{P}(Z \ge b)$
$=0.6+0.1=0.7$

답 ③

338 해결 과정 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(4,\ a^2)$, $\mathrm{N}(6,\ b^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-4}{a},\quad Z_Y=\frac{Y-6}{b}$$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ● 20%

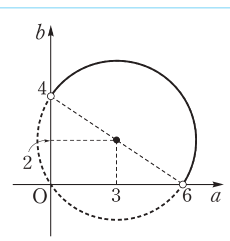
$\mathrm{P}(X \ge b)=\mathrm{P}(Y \le a)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_X \ge \frac{b-4}{a}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y \le \frac{a-6}{b}\right)$$

따라서 $\dfrac{b-4}{a}=-\dfrac{a-6}{b}$이므로

$b(b-4)=-a(a-6)$
$a^2-6a+b^2-4b=0$
$\therefore (a-3)^2+(b-2)^2=13$ ● 40%

답 구하기 이때 $a>0,\ b>0$이므로 점 $(a,\ b)$가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 그 길이는

$$\frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot \sqrt{13}=\sqrt{13}\pi$$

이므로 $k=\sqrt{13}$

$\therefore k^2=13$ ● 40%

답 13

참고 A(6, 0), B(0, 4)라 하면 직선 AB의 방정식은

$b=-\dfrac{2}{3}(a-6)$, 즉 $b=-\dfrac{2}{3}a+4$ ⋯⋯ ㉠

$a=3$, $b=2$를 ㉠에 대입하면

$2=-\dfrac{2}{3}\cdot 3+4$

따라서 점 (3, 2)는 직선 AB 위의 점이다.
즉 현 AB는 원 $(a-3)^2+(b-2)^2=13$의 지름임을 알 수 있다.

일품 BOX

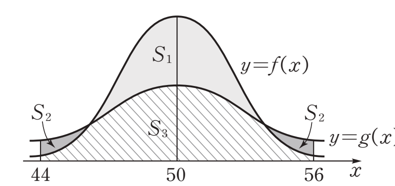
정규분포 곡선의 성질
① σ의 값이 일정할 때, m의 값이 달라지면 대칭축의 위치는 바뀌지만 모양은 변하지 않는다.
② m의 값이 일정할 때, σ의 값이 클수록 가운데 부분의 높이는 낮아지고 옆으로 퍼진 모양이 된다.

$\sigma(X)<\sigma(Y)$이므로 $f(50)>g(50)$

$\dfrac{a+56}{2}=50$에서 $a=44$

$a>0,\ b>0$일 때 점 $(a,\ b)$는 제1사분면 위에 있다.

339 확률변수 X, Y의 정규분포 곡선은 모두 직선 $x=50$에 대하여 대칭이고, $\sigma(X)<\sigma(Y)$이므로 X, Y의 정규분포 곡선을 각각 $y=f(x)$, $y=g(x)$라 하면 다음 그림과 같다.



확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 3^2)$, $\mathrm{N}(50,\ 4^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-50}{3},\quad Z_Y=\frac{Y-50}{4}$$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

한편 위의 그림에서 빗금친 부분의 넓이를 S_3이라 하면

$S_1-2S_2=(S_1+S_3)-(2S_2+S_3)$
$=\mathrm{P}(44 \le X \le 56)-\mathrm{P}(44 \le Y \le 56)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{44-50}{3} \le Z_X \le \dfrac{56-50}{3}\right)$
$\quad -\mathrm{P}\left(\dfrac{44-50}{4} \le Z_Y \le \dfrac{56-50}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(-2 \le Z_X \le 2)-\mathrm{P}(-1.5 \le Z_Y \le 1.5)$
$=2\mathrm{P}(0 \le Z_X \le 2)-2\mathrm{P}(0 \le Z_Y \le 1.5)$
$=2(0.4772-0.4332)$
$=0.088$

$\therefore 1000(S_1-2S_2)=88$

답 ⑤

340 2학년 전체 학생의 기말고사의 국어, 수학, 영어 점수를 각각 X점, Y점, W점이라 하면 확률변수 X, Y, W는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(62,\ 10^2)$, $\mathrm{N}(65,\ 12^2)$, $\mathrm{N}(78,\ 8^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-62}{10},\quad Z_Y=\frac{Y-65}{12},\quad Z_W=\frac{W-78}{8}$$

로 놓으면 Z_X, Z_Y, Z_W는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$P(X \geq 78) = P\left(Z_X \geq \frac{78-62}{10}\right) = P(Z_X \geq 1.6)$$
$$= 0.5 - P(0 \leq Z_X \leq 1.6)$$
$$= 0.5 - 0.4452$$
$$= 0.0548 > 0.04$$
$$P(Y \geq 83) = P\left(Z_Y \geq \frac{83-65}{12}\right)$$
$$= P(Z_Y \geq 1.5) > P(Z_Y \geq 1.6) > 0.04$$
$$P(W \geq 94) = P\left(Z_W \geq \frac{94-78}{8}\right) = P(Z_W \geq 2)$$
$$= 0.5 - P(0 \leq Z_W \leq 2)$$
$$= 0.5 - 0.4772$$
$$= 0.0228 < 0.04$$

따라서 영희가 1등급을 받은 과목은 영어뿐이다. 답 ②

341 감귤의 무게를 X g이라 하고,
$E(X) = m$, $\sigma(X) = \sigma$
라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로
$Z = \frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
$P(X \leq 200) = 0.0228$에서

$$P\left(Z \leq \frac{200-m}{\sigma}\right) = 0.0228$$
$$P\left(Z \geq \frac{m-200}{\sigma}\right) = 0.0228$$
$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-200}{\sigma}\right) = 0.0228$$
$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-200}{\sigma}\right) = 0.0228$$
$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-200}{\sigma}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$이므로
$$\frac{m-200}{\sigma} = 2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$P(X \geq 260) = 0.1587$에서
$$P\left(Z \geq \frac{260-m}{\sigma}\right) = 0.1587$$
$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{260-m}{\sigma}\right) = 0.1587$$
$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{260-m}{\sigma}\right) = 0.1587$$
$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{260-m}{\sigma}\right) = 0.3413$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$이므로
$$\frac{260-m}{\sigma} = 1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$
㉠÷㉡을 하면 $\frac{m-200}{260-m} = 2$
$m - 200 = 520 - 2m$, $\quad 3m = 720$
$\therefore m = 240$

따라서 이 과수원에서 생산되는 감귤의 평균 무게는 240 g이다. 답 240 g

342 2학년 남학생의 몸무게를 X kg이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(60, \sigma^2)$을 따르므로 $Z = \frac{X-60}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
몸무게가 50 kg 이상 70 kg 이하인 학생이 6826명이므로
$$P(50 \leq X \leq 70) = \frac{6826}{10000} = 0.6826$$
에서
$$P(50 \leq X \leq 70) = P\left(\frac{50-60}{\sigma} \leq Z \leq \frac{70-60}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(-\frac{10}{\sigma} \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right)$$
$$= 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = 0.6826$$
$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = 0.3413$$
이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$이므로
$$\frac{10}{\sigma} = 1 \qquad \therefore \sigma = 10$$
$$\therefore P(70 \leq X \leq 75)$$
$$= P\left(\frac{70-60}{10} \leq Z \leq \frac{75-60}{10}\right)$$
$$= P(1 \leq Z \leq 1.5)$$
$$= P(0 \leq Z \leq 1.5) - P(0 \leq Z \leq 1)$$
$$= 0.4332 - 0.3413$$
$$= 0.0919$$
답 0.0919

1등급 비밀노트

표준편차가 주어져 있지 않으므로 몸무게가 50 kg 이상 70 kg 이하인 학생 수를 이용하여 표준편차를 구한다.

343 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(165.6, 10^2)$, $N(169.8, 5^2)$을 따르므로
$$Z_X = \frac{X-165.6}{10}, \ Z_Y = \frac{Y-169.8}{5}$$
로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
$$P(X \geq 180) = P\left(Z_X \geq \frac{180-165.6}{10}\right)$$
$$= P(Z_X \geq 1.44)$$
$$= P(Z_X \geq 0) - P(0 \leq Z_X \leq 1.44)$$
$$= 0.5 - 0.425 = 0.075$$
따라서 A고등학교에서 키가 180 cm 이상인 학생 수는
$0.075 \times 1000 = 75$
B고등학교에서 키가 a cm 이상인 학생 수는 150명이므로

일품 BOX

0.0548

$P(-a \leq Z \leq a)$
$= 2P(0 \leq Z \leq a)$

무게가 200 g 이하일 확률

무게가 260 g 이상일 확률

$75 \times 2 = 150$(명)

$P(Y \ge a)=\dfrac{150}{1000}=0.15$

$\therefore P(Y \ge a)=P\left(Z_Y \ge \dfrac{a-169.8}{5}\right)$

$=P(Z_Y \ge 0)-P\left(0 \le Z_Y \le \dfrac{a-169.8}{5}\right)$

$=0.5-P\left(0 \le Z_Y \le \dfrac{a-169.8}{5}\right)$

$=0.15$

$\therefore P\left(0 \le Z_Y \le \dfrac{a-169.8}{5}\right)=0.35$

이때 $P(0 \le Z \le 1.04)=0.35$이므로

$\dfrac{a-169.8}{5}=1.04 \qquad \therefore a=175$ 답 ②

344 한 번의 시행에서 흰 공 2개와 검은 공 1개가 나올 확률은

$\dfrac{{}_4C_2 \cdot {}_2C_1}{{}_6C_3}=\dfrac{3}{5}$

이므로 흰 공 2개와 검은 공 1개가 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(150,\ \dfrac{3}{5}\right)$을 따른다.

$E(X)=150 \cdot \dfrac{3}{5}=90$,

$V(X)=150 \cdot \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{5}=36$

에서 X는 근사적으로 정규분포 $N(90,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-90}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(X \ge 84)=P\left(Z \ge \dfrac{84-90}{6}\right)$

$=P(Z \ge -1)$

$=P(-1 \le Z \le 0)+P(Z \ge 0)$

$=P(0 \le Z \le 1)+0.5$

$=0.3413+0.5$

$=0.8413$ 답 ⑤

345 해결 과정 학생들의 통학 시간을 X시간이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(20,\ 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-20}{5}$으로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$p_1=P(X \ge 30)=P\left(Z_X \ge \dfrac{30-20}{5}\right)$

$=P(Z_X \ge 2)$

$=P(Z_X \ge 0)-P(0 \le Z_X \le 2)$

$=0.5-0.48=0.02$ ● 40%

한편 10000명의 학생 중 통학 시간이 30분 이상인 학생 수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $B(10000,\ 0.02)$를 따른다.

일품 BOX

• 꺼낸 공을 다시 넣으므로 독립시행이다.

사건 S에 대하여 $P(S)=1-P(S^C)$

$E(Y)=10000 \times 0.02=200$,

$V(Y)=10000 \times 0.02 \times 0.98=196$

에서 Y는 근사적으로 정규분포 $N(200,\ 14^2)$을 따르므로 $Z_Y=\dfrac{Y-200}{14}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ● 40%

답 구하기 $p_2=P(Y \ge n)=P\left(Z_Y \ge \dfrac{n-200}{14}\right)$

$p_1=p_2$이므로 $\dfrac{n-200}{14}=2$

$\therefore n=228$ ● 20%

답 228

346 해결 과정 제품 A의 무게를 Xg이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(80,\ 4^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-80}{4}$으로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(X \le 72$ 또는 $X \ge 88)$

$=1-P(72 \le X \le 88)$

$=1-P\left(\dfrac{72-80}{4} \le Z_X \le \dfrac{88-80}{4}\right)$

$=1-P(-2 \le Z_X \le 2)$

$=1-2P(0 \le Z_X \le 2)$

$=1-2 \times 0.48=0.04$ ● 40%

즉 제품 A 한 개가 불량품으로 판정받을 확률이 0.04이므로 15000개의 제품 중 불량품으로 판정받는 것의 개수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $B(15000,\ 0.04)$를 따른다.

$E(Y)=15000 \times 0.04=600$,

$V(Y)=15000 \times 0.04 \times 0.96=576$ ● 20%

에서 Y는 근사적으로 정규분포 $N(600,\ 24^2)$을 따르므로 $Z_Y=\dfrac{Y-600}{24}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(Y \ge 624)=P\left(Z_Y \ge \dfrac{624-600}{24}\right)$

$=P(Z_Y \ge 1)$

$=P(Z_Y \ge 0)-P(0 \le Z_Y \le 1)$

$=0.5-P(0 \le Z_Y \le 1)$

$=0.5-0.34=0.16$ ● 30%

답 구하기 $\therefore 100p=100 \times 0.16=16$ ● 10%

답 16

347 확률변수 X가 정규분포 $N(m+1,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-m-1}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore f(m)=P(X \ge 1)=P\left(Z \ge \dfrac{1-m-1}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge -\dfrac{m}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{m}{2}\right)$

ㄱ. $f(0)=\mathrm{P}(Z\le 0)=0.5$

ㄴ. $f(2)+f(-2)=\mathrm{P}(Z\le 1)+\mathrm{P}(Z\le -1)$

$=\mathrm{P}(Z\le 1)+\mathrm{P}(Z\ge 1)$

$=1$

ㄷ. $m_1<m_2$이면

$\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{m_1}{2}\right)<\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{m_2}{2}\right)$

$\therefore f(m_1)<f(m_2)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

일품 BOX

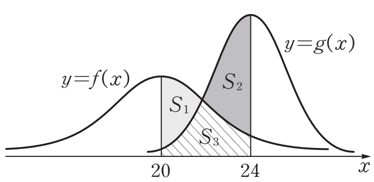
$a<b$일 때
$\mathrm{P}(Z\le a)<\mathrm{P}(Z\le b)$

348 확률변수 X, Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$, $\mathrm{N}(24,\ 2^2)$을 따르므로

$Z_X=\dfrac{X-20}{4}$, $Z_Y=\dfrac{Y-24}{2}$

로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

한편 오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이를 S_3이라 하면



S_1+S_3
$=\mathrm{P}(20\le X\le 24)$,

$S_2+S_3=\mathrm{P}(20\le Y\le 24)$

$\therefore S_2-S_1=(S_2+S_3)-(S_1+S_3)$

$=\mathrm{P}(20\le Y\le 24)-\mathrm{P}(20\le X\le 24)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{20-24}{2}\le Z_Y\le \dfrac{24-24}{2}\right)$

$-\mathrm{P}\left(\dfrac{20-20}{4}\le Z_X\le \dfrac{24-20}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z_Y\le 0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 1)$

$=0.4772-0.3413=0.1359$ 답 ③

349 포물선 $y=x^2+Kx+1$과 직선 $y=x+K$가 교점을 갖지 않으려면 방정식

$x^2+Kx+1=x+K$,

즉 $x^2+(K-1)x+1-K=0$ …… ㉠

이 실근을 갖지 않아야 한다.

㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(K-1)^2-4(1-K)<0$

$K^2+2K-3<0$, $(K+3)(K-1)<0$

$\therefore -3<K<1$

확률변수 K가 정규분포 $\mathrm{N}(1,\ 2^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{K-1}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

포물선 $y=ax^2+bx+c$와 직선 $y=px+q$의 교점의 개수
$ax^2+bx+c=px+q$에서 이차방정식
$ax^2+(b-p)x+c-q=0$의 판별식을 D라 할 때
① $D>0$: 교점이 2개
② $D=0$: 교점이 1개
③ $D<0$: 교점이 없다.

$\therefore p=\mathrm{P}(-3<K<1)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{-3-1}{2}<Z<\dfrac{1-1}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-2<Z<0)=\mathrm{P}(0<Z<2)=0.48$

$\therefore 100p=48$ 답 48

350 고객 한 명이 C사의 휴대폰을 구입할 확률은

$\dfrac{60}{100}=\dfrac{3}{5}$

이므로 600명 중 C사의 휴대폰을 구입하는 고객의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(600,\ \dfrac{3}{5}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=600\cdot\dfrac{3}{5}=360$,

$\mathrm{V}(X)=600\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{5}=144$

에서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-360}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 336)=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{336-360}{12}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge -2)$

$=\mathrm{P}(Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5+0.4772$

$=0.9772$ 답 ④

351 $\mathrm{P}(|X-m|<\sigma)=0.6826$에서

$\mathrm{P}(m-\sigma<X<m+\sigma)=0.6826$

$2\mathrm{P}(0<X<m+\sigma)=0.6826$

$\therefore \mathrm{P}(0<X<m+\sigma)=0.3413$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

같은 방법으로

$\mathrm{P}(0<X<m+2\sigma)=0.4772$,

$\mathrm{P}(0<X<m+3\sigma)=0.4987$

한편 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로

1개의 주사위를 던져서 1 또는 2의 눈이 나올 확률

$\mathrm{E}(Y)=450\cdot\dfrac{1}{3}=150$,

$\mathrm{V}(Y)=450\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=100$

에서 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 10^2)$을 따른다. $m=150$, $\sigma=10$으로 놓으면

$\mathrm{P}(160\le Y\le 180)$

$=\mathrm{P}(150+10\le Y\le 150+3\cdot 10)$

$=\mathrm{P}(m+\sigma\le Y\le m+3\sigma)$

$=\mathrm{P}(0\le Y\le m+3\sigma)-\mathrm{P}(0\le Y\le m+\sigma)$

$=0.4987-0.3413=0.1574$

즉 $p=0.1574$이므로

$[1000p]=[157.4]=157$ 답 ②

08 통계적 추정 본책 69쪽

352 $\overline{X}=3$인 경우는 표본이

$(2,\ 4),\ (4,\ 2)$

이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

> 일품 BOX: $\frac{2+4}{2}=\frac{4+2}{2}=3$

$\overline{X}=4$인 경우는 표본이

$(2,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 2)$

이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=4)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

> $\frac{2+6}{2}=\frac{4+4}{2}=\frac{6+2}{2}=4$

$$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}=3)+\mathrm{P}(\overline{X}=4)=\frac{13}{36}$$

답 ②

참고 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	7	8	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	1

353 $\mathrm{E}(X)=64$이므로

$$20\cdot a+40\cdot\left(\frac{1}{4}-a\right)+60\cdot\frac{1}{4}+80\cdot\frac{1}{2}=64$$

$$-20a+65=64$$

$$\therefore a=\frac{1}{20}$$

$$\therefore \mathrm{P}(X=20)=\frac{1}{20},$$

$$\mathrm{P}(X=40)=\frac{1}{5}$$

> $\frac{1}{4}-\frac{1}{20}=\frac{5}{20}-\frac{1}{20}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

$\overline{X}=50$인 경우는 표본이

$(20,\ 80),\ (40,\ 60),\ (60,\ 40),\ (80,\ 20)$

이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=50)$$

$$=\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}$$

> $\mathrm{P}(X=20)\cdot\mathrm{P}(X=80)$
> $+\mathrm{P}(X=40)\cdot\mathrm{P}(X=60)$
> $+\mathrm{P}(X=60)\cdot\mathrm{P}(X=40)$
> $+\mathrm{P}(X=80)\cdot\mathrm{P}(X=20)$

$$=\frac{3}{20}$$

$$\therefore 100\mathrm{P}(\overline{X}=50)=100\cdot\frac{3}{20}=15$$

답 15

354 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{1}{5}\ (\text{단, } x=0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8)$$

$$\therefore \mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+6\cdot\frac{1}{5}+8\cdot\frac{1}{5}$$

$$=4$$

$$\mathrm{V}(X)=0^2\cdot\frac{1}{5}+2^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{5}+6^2\cdot\frac{1}{5}+8^2\cdot\frac{1}{5}-4^2$$

$$=24-16=8$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{8}{4}=2$$

답 ④

355 $\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{9}$이므로

$\mathrm{E}(2\overline{X}+3)=23$에서

$$2\mathrm{E}(\overline{X})+3=23$$

$$2m+3=23 \qquad \therefore m=10$$

$\mathrm{V}(6\overline{X}-1)=64$에서

$$36\mathrm{V}(\overline{X})=64$$

$$36\cdot\frac{\sigma^2}{9}=64$$

$$\sigma^2=16 \qquad \therefore \sigma=4\ (\because \sigma>0)$$

$$\therefore m+\sigma=14$$

답 ③

> 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여
> ① $\mathrm{E}(\overline{X})=m$
> ② $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$
> ③ $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

356 모표준편차를 σ라 하면

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{49}}=2 \qquad \therefore \sigma=14$$

$$\therefore \sigma(\overline{X'})=\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$$

답 ③

357 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(3,\ 1)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(3,\ \left(\frac{1}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-3}{\frac{1}{5}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}\left(\overline{X}\le\frac{2}{5}k\right)=0.0668$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\frac{2}{5}k-3}{\frac{1}{5}}\right)=0.0668$$

$$\mathrm{P}(Z\le 2k-15)=0.0668$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 15-2k)=0.0668$$

> $\mathrm{P}(Z\le a)$
> $=\mathrm{P}(Z\ge -a)$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 15-2k)=0.0668$$

$$0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 15-2k)=0.0668$$

$$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le 15-2k)=0.4332$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$$15-2k=1.5$$

$$\therefore k=6.75$$

답 ③

358 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(54,\ 18^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(54,\ \frac{18^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(54,\ 6^2)$을 따른다.

Ⅲ 통계

$Z=\dfrac{\overline{X}-54}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(45\le\overline{X}\le66)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{45-54}{6}\le Z\le\frac{66-54}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.4332+0.4772\\&=0.9104\end{aligned}$$

답 ⑤

1등급 비밀노트

외래 환자들의 진료 대기 시간을 X라 하면 임의추출한 9명의 진료 대기 시간의 평균은 $\overline{X}$이다.
따라서 구하는 값은 $\mathrm{P}(45\le X\le66)$이 아니라 $\mathrm{P}(45\le\overline{X}\le66)$임에 유의한다.

359 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60,\ \dfrac{4^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(60,\ 1)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-60}{1}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge a)=0.02$에서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(Z\ge a-60)=0.02\\&\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le a-60)=0.02\\&0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le a-60)=0.02\\&\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le a-60)=0.48\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.48$이므로

$a-60=2 \qquad \therefore a=62$

답 62

360 표본평균이 140, 모표준편차가 6, 표본의 크기가 81이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\begin{aligned}&140-2.58\times\frac{6}{\sqrt{81}}\le m\le140+2.58\times\frac{6}{\sqrt{81}}\\&140-1.72\le m\le140+1.72\\&\therefore 138.28\le m\le141.72\end{aligned}$$

답 $138.28\le m\le141.72$

361 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하면 모표준편차가 2, 표본의 크기가 16일 때 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간의 길이는 $b-a=3$에서

$2\cdot k\cdot\dfrac{2}{\sqrt{16}}=3 \qquad \therefore k=3$

또 표본의 크기가 n일 때 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간의 길이는 $d-c=1$에서

$2\cdot3\cdot\dfrac{2}{\sqrt{n}}=1, \qquad \sqrt{n}=12$

$\therefore n=144$

답 ①

362 모비율이 0.6이고, 표본의 크기가 240이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\hat{p})&=\frac{0.6\times0.4}{240}\\&=0.001\end{aligned}$$

답 ①

363 모비율이 0.2이고, 표본의 크기가 400이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.2,\ \dfrac{0.2\times0.8}{400}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.2,\ 0.02^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\hat{p}-0.2}{0.02}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\hat{p}\ge0.24)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{0.24-0.2}{0.02}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

답 0.02

364 임의추출한 100명 중에서 암보험에 가입한 우리나라 직장인의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.5,\ \dfrac{0.5\times0.5}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.5,\ 0.05^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.5}{0.05}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(0.45\le\hat{p}\le0.6)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{0.45-0.5}{0.05}\le Z\le\frac{0.6-0.5}{0.05}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 0.8185

365 표본의 크기가 100이고, 표본비율이 $\dfrac{64}{100}=0.64$이므로 찬성률 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\begin{aligned}&0.64-2\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{100}}\le p\le0.64+2\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{100}}\\&0.64-0.096\le p\le0.64+0.096\\&\therefore 0.544\le p\le0.736\end{aligned}$$

답 ④

일품 BOX

모집단에서 어떤 사건에 대한 모비율이 p일 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하면 표본비율 $\hat{p}$에 대하여
① $\mathrm{E}(\hat{p})=p$
② $\mathrm{V}(\hat{p})=\dfrac{pq}{n}$
③ $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$
(단, $q=1-p$)

모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \dfrac{pq}{n}\right)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이
➡ $2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}\right)$

$\dfrac{8^2}{100}\times\dfrac{6^2}{100}\times\dfrac{1}{100}$
$=\left(\dfrac{48}{1000}\right)^2$
$=0.048^2$

일품 BOX

366 표본의 크기가 400이고, 표본비율이 $\frac{40}{400}=0.1$ 이므로 O형인 사람의 비율 p의 신뢰도 98 %의 신뢰구간은

$$0.1-2.4\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{400}}\le p\le 0.1+2.4\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{400}}$$

$$\therefore b-a=2\times2.4\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{400}}$$
$$=2\times2.4\times0.015$$
$$=0.072$$

답 ④

367 표본의 크기가 400이므로 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\hat{p}-2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{400}}\le p\le\hat{p}+2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{400}}$$

> $\mathrm{P}(|Z|\le2)=0.95$

$$\therefore f(\hat{p})=b-a$$
$$=2\times2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{400}}$$
$$=\frac{1}{5}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$
$$=\frac{1}{5}\sqrt{-\hat{p}^2+\hat{p}}$$
$$=\frac{1}{5}\sqrt{-\left(\hat{p}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

따라서 $\hat{p}=\frac{1}{2}$일 때, $f(\hat{p})$은 최대이고, 최댓값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{10}$$

답 $\frac{1}{10}$

368 $\mathrm{P}(1<\overline{X}<3)$
$=\mathrm{P}(\overline{X}=1.5)+\mathrm{P}(\overline{X}=2)+\mathrm{P}(\overline{X}=2.5)$
이고 $\overline{X}=1.5$인 경우는 표본이
(1, 2), (2, 1)
$\overline{X}=2$인 경우는 표본이
(1, 3), (2, 2), (3, 1)
$\overline{X}=2.5$인 경우는 표본이
(2, 3), (3, 2)
이므로

$$\mathrm{P}(1<\overline{X}<3)=\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

> 모든 경우의 수는 3장의 카드 중 2장의 카드를 복원추출하는 방법의 수이므로 $3\cdot3=9$

답 $\frac{7}{9}$

참고 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	1.5	2	2.5	3	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

다른 풀이 $\mathrm{P}(1<\overline{X}<3)$
$=1-\{\mathrm{P}(\overline{X}=1)+\mathrm{P}(\overline{X}=3)\}$
$=1-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{7}{9}$

> $\overline{X}=1$인 경우는 표본이 (1, 1)
> $\overline{X}=3$인 경우는 표본이 (3, 3)

369 $\overline{X}=2$인 경우는 표본이
(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1),
(3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 2, 2)
이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\frac{11}{54}$$

> 1, 2, 3을 표본으로 추출하는 방법의 수는 $3!=6$

답 ①

370 $\overline{X}=2$인 경우는 표본이
(1, 3), (3, 1)
이므로 $\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{2}{5}$에서

$$\frac{1}{2}\cdot a+a\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{5}\qquad\therefore a=\frac{2}{5}$$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+b=1\qquad\therefore b=\frac{1}{10}$$

$\overline{X}=3$인 경우는 표본이
(1, 5), (3, 3), (5, 1)
이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{50}$$
$$\therefore c=\frac{13}{50}$$

$\overline{X}=4$인 경우는 표본이
(3, 5), (5, 3)
이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=4)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{25}$$
$$\therefore d=\frac{2}{25}$$
$$\therefore cd=\frac{13}{625}$$

답 ①

371 해결 과정 표본의 크기가 39이고, $\mathrm{E}(\overline{X})=12$, $\mathrm{V}(\overline{X})=4$이므로

$\mathrm{E}(X)=12$, $\mathrm{V}(X)=39\cdot4=156$ ● 20%

> $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{39}$ 이므로
> $\mathrm{V}(X)=39\mathrm{V}(\overline{X})$

$\mathrm{E}(X)=12$에서

$$0\cdot\frac{2}{5}+a\cdot\frac{3}{10}+b\cdot\frac{3}{10}=12$$

$\therefore a+b=40$ ● 30%

$\mathrm{V}(X)=156$에서

$$0^2\cdot\frac{2}{5}+a^2\cdot\frac{3}{10}+b^2\cdot\frac{3}{10}-12^2=156$$

$\therefore a^2+b^2=1000$ ● 30%

답 구하기 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서
$1000=40^2-2ab$, $\quad 2ab=600$
$\therefore ab=300$ ● 20%

답 300

372 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 X라 하면 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

통계 Ⅲ

X	3	6	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=3\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{3}+9\cdot\frac{1}{2}=7$$

$$\mathrm{V}(X)=3^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{3}+9^2\cdot\frac{1}{2}-7^2$$

$$=54-49=5$$

이때 표본의 크기가 5이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=7,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{5}=1$$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=1+7^2=50$$

답 ③

일품 BOX

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{2+4+6}=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{4}{2+4+6}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X=9)=\frac{6}{2+4+6}=\frac{1}{2}$

373 ㄱ. 표본의 크기에 관계없이

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{Y})=m$$

ㄴ. $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n_1}$, $\mathrm{V}(\overline{Y})=\frac{\sigma^2}{n_2}$이므로 $n_1<n_2$이면

$$\mathrm{V}(\overline{X})>\mathrm{V}(\overline{Y})$$

ㄷ. $\sigma(\overline{X})=\sigma(\overline{Y})$이면 $\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$이므로

$$n_1=n_2$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

표본의 크기가 클수록 분산은 작아진다.

374 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(200,\ \frac{20^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(200,\ 4^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-200}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 210)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{210-200}{4}\right)$$

$$=\mathrm{P}(Z\geq 2.5)$$

$$=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)$$

$$=0.5-0.494=0.006$$

답 0.006

375 해결 과정 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(2880,\ 100^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(2880,\ \frac{100^2}{n}\right)$을 따른다. ● 20%

$Z=\frac{\overline{X}-2880}{\frac{100}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}\left(\overline{X}\geq 2900+\frac{20}{\sqrt{n}}\right)\leq\frac{1}{10}$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{2900+\frac{20}{\sqrt{n}}-2880}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right)\leq\frac{1}{10}$$

$$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{\frac{20\sqrt{n}+20}{\sqrt{n}}}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right)\leq\frac{1}{10}$$

$$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{\sqrt{n}+1}{5}\right)\leq 0.1$$

$$\mathrm{P}(Z\geq 0)-\left(0\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}+1}{5}\right)\leq 0.1$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}+1}{5}\right)\geq 0.4$$ ● 50%

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.28)=0.40$이므로

$$\frac{\sqrt{n}+1}{5}\geq 1.28,\qquad \sqrt{n}\geq 5.4$$

$$\therefore\ n\geq 29.16$$ ● 20%

답 구하기 따라서 n의 최솟값은 30이다. ● 10%

n은 표본의 크기이므로 자연수이다.

답 30

376 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\sigma}\right|\leq\frac{1}{5}\right)\geq 0.93$에서

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\leq\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\geq 0.93$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(|Z|\leq\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\geq 0.93$$

$\left|\frac{\overline{X}-m}{\sigma}\right|\leq\frac{1}{5}$의 양변을 $\frac{1}{\sqrt{n}}$로 나눈다.

이때 $\mathrm{P}(|Z|\leq 1.82)=2\times 0.465=0.93$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{5}\geq 1.82,\qquad \sqrt{n}\geq 9.1$$

$$\therefore\ n\geq 82.81$$

따라서 n의 최솟값은 83이다. 답 ②

377 표본평균이 $\overline{X}$, 모표준편차가 0.4일 때 표본의 크기를 n이라 하면 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{X}-1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}\leq m\leq\overline{X}+1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{0.784}{\sqrt{n}}\leq m-\overline{X}\leq\frac{0.784}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ |m-\overline{X}|\leq\frac{0.784}{\sqrt{n}}$$

모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 차가 0.05 이하이어야 하므로

$$\frac{0.784}{\sqrt{n}}\leq 0.05,\qquad \sqrt{n}\geq 15.68$$

$$\therefore\ n\geq 245.8624$$

따라서 표본의 크기가 246명 이상이어야 한다. 답 ③

$\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 $\alpha\%$로 모평균을 추정할 때의 모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 차

➡ $|\overline{X}-m|\leq k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\leq k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

378 해결 과정 표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 50을 사용할 수 있고 표본평균이 500이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$500-k\cdot\frac{50}{\sqrt{100}}\le m\le 500+k\cdot\frac{50}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 500-5k\le m\le 500+5k$ ● 40%

이때 $490.6\le m\le 509.4$이므로

$500-5k=490.6,\ 500+5k=509.4$

$5k=9.4 \quad \therefore k=1.88$ ● 30%

답 구하기 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.88)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.88)$

$=2\times 0.470=0.94$

이므로 $\frac{\alpha}{100}=0.94 \quad \therefore \alpha=94$ ● 30%

답 94

379 모표준편차가 10, 표본의 크기가 100이므로 신뢰도 90 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간의 길이는

$$b-a=2\times 1.65\times\frac{10}{\sqrt{100}}=3.3$$

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간의 길이는

$$d-c=2\times k\times\frac{10}{\sqrt{100}}=2k$$

$b-a=\frac{11}{12}(d-c)$에서

$3.3=\frac{11}{12}\times 2k=\frac{11}{6}k$

$\therefore k=1.8$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.8)=2\times 0.46=0.92$이므로

$\frac{\alpha}{100}=0.92 \quad \therefore \alpha=92$

답 92

380 표본의 크기 400이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 0.2를 사용할 수 있고 표본평균이 2이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$2-2\times\frac{0.2}{\sqrt{400}}\le m\le 2+2\times\frac{0.2}{\sqrt{400}}$$

$2-0.02\le m\le 2+0.02$

$1.98\le m\le 2.02$

$\therefore a=1.98,\ b=2.02$

또 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$2-2.6\times\frac{0.2}{\sqrt{400}}\le m\le 2+2.6\times\frac{0.2}{\sqrt{400}}$$

$2-0.026\le m\le 2+0.026$

$1.974\le m\le 2.026$

$\therefore c=1.974,\ d=2.026$

$\therefore b+d=2.02+2.026=4.046$

답 ③

일품 BOX

모비율이 0.36, 표본의 크기가 100이므로
$\mathrm{E}(\hat{p})=0.36$,
$\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.36\times 0.64}{100}$

모비율 p에 대하여 $\mathrm{E}(\hat{p})=p$이므로
$\mathrm{E}(\hat{p})=\frac{1}{4}=0.25$

$\mathrm{P}(|Z|\le 1.65)$
$=2\times 0.45=0.9$

모비율이 0.2, 표본의 크기가 100이므로
$\mathrm{E}(\hat{p})=0.2$,
$\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.2\times 0.8}{100}$

381 임의추출한 100명 중 당뇨병 환자의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.36,\ \frac{0.36\times 0.64}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.36,\ 0.048^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\hat{p}-0.36}{0.048}$으로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\hat{p}\ge 0.432)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{0.432-0.36}{0.048}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 ③

382 해결 과정 잡종 1세대에서 얻은 300개의 완두콩 중에서 주름진 완두의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.25,\ \frac{0.25\times 0.75}{300}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.25,\ 0.025^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\hat{p}-0.25}{0.025}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

● 50%

답 구하기 따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(0.275\le\hat{p}\le 0.325)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{0.275-0.25}{0.025}\le Z\le\frac{0.325-0.25}{0.025}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 3)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.499-0.341=0.158\end{aligned}$$

● 50%

답 0.158

383 100편의 영화 중 별 4개 이상의 평가를 받은 영화의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.2,\ \frac{0.2\times 0.8}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.2,\ 0.04^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}\left(\hat{p}\le\frac{k}{100}\right)=0.933$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\frac{k}{100}-0.2}{0.04}\right)=0.933$$

$$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\frac{k}{100}-0.2}{0.04}\right)=0.933$$

$$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\frac{k}{100}-0.2}{0.04}\right)=0.933$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\frac{k}{100}-0.2}{0.04}\right)=0.433$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.433$이므로

$$\frac{\frac{k}{100}-0.2}{0.04}=1.5$$

$$\frac{k}{100}-0.2=0.06, \quad \frac{k}{100}=0.26$$

$\therefore k=26$

답 ①

384 표본의 크기가 400이고, 표본비율이 $\frac{80}{400}=0.2$이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k_1)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 $\alpha\%$로 추정한 불량률 p의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot k_1\cdot\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{400}}=\frac{1}{25}k_1$$

즉 $\frac{1}{25}k_1=0.2466-0.1534=0.0932$이므로

$k_1=2.33$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le 2.33)=2\times0.49=0.98$이므로

$\frac{\alpha}{100}=0.98$

$\therefore \alpha=98$

또 $\mathrm{P}(|Z|\le k_2)=\frac{\beta}{100}$라 하면 신뢰도 $\beta\%$로 추정한 불량률 p의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot k_2\cdot\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{400}}=\frac{1}{25}k_2$$

즉 $\frac{1}{25}k_2=0.233-0.167=0.066$이므로

$k_2=1.65$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.65)=2\times0.45=0.9$이므로

$\frac{\beta}{100}=0.9$

$\therefore \beta=90$

$\therefore \alpha+\beta=188$

답 188

385 문제 이해 n이 충분히 크면 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{p(1-p)}{n}\right)$를 따르고,

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$ 로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ● 20%

해결 과정 $\mathrm{P}(|\hat{p}-p|\le 0.09\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})})\ge 0.8664$에서

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}\right|\le 0.09\sqrt{n}\right)\ge 0.8664$$

$\therefore \mathrm{P}(|Z|\le 0.09\sqrt{n})\ge 0.8664$ ● 30%

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.5)=2\times0.4332=0.8664$이므로

$$0.09\sqrt{n}\ge 1.5, \quad \sqrt{n}\ge\frac{50}{3}$$

$$\therefore n\ge\frac{2500}{9}=277.7\times\times\times$$ ● 30%

답 구하기 따라서 n의 최솟값은 278이다. ● 20%

답 278

일품 BOX

신뢰구간의 성질

① 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아질수록 신뢰구간의 길이는 커진다.

② 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 커질수록 신뢰구간의 길이는 작아진다.

모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율 $\hat{p}$에 대하여 모비율의 신뢰도 $\alpha\%$의 신뢰구간의 길이

➡ $2k\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

$0<a<b$일 때, $\mathrm{P}(Z\ge a)>\mathrm{P}(Z\ge b)$이므로

$\frac{\mathrm{P}(Z\ge b)}{\mathrm{P}(Z\ge a)}<1$

표본의 크기 n이 충분히 크면 $\hat{p}$의 표준편차 $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$에서 모비율 p 대신 표본비율 $\hat{p}$을 이용한 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$도 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

양변을 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$으로 나눈다.

386 모표준편차를 σ라 하면 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 표본의 크기가 n인 표본평균 $\overline{X_n}$에 대하여

$$f(n)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 $\overline{X_n}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(i) $f(10)=\sigma(\overline{X_{10}})=\frac{\sigma}{\sqrt{10}}$, $f(20)=\sigma(\overline{X_{20}})=\frac{\sigma}{\sqrt{20}}$ 이므로

$$A=\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{10}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{20}}}=\sqrt{2}$$

(ii) $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge m+f(n))&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m+f(n)-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{f(n)}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore B=\frac{\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{1}{\sqrt{10}}\right)}{\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{1}{\sqrt{20}}\right)}<1$$

(iii) $Z_n=\frac{\overline{X_n}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z_n은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|\overline{X_n}-m|\le f(n))&=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X_n}-m}{f(n)}\right|\le 1\right)\\&=\mathrm{P}(|Z_n|\le 1)\end{aligned}$$

$$\therefore C=\frac{\mathrm{P}(|Z_{10}|\le 1)}{\mathrm{P}(|Z_{20}|\le 1)}=1$$

이상에서 $B<C<A$

답 ④

1등급 비|밀|노|트|

확률변수 $Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ \cdots,\ Z_n$이 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|Z_1|\le a)&=\mathrm{P}(|Z_2|\le a)=\mathrm{P}(|Z_3|\le a)=\cdots\\&=\mathrm{P}(|Z_n|\le a)\end{aligned}$$

387 $P(|Z|<c)=0.76$에서

$P(-c<Z<c)=0.76$

$2P(0<Z<c)=0.76$

$P(0<Z<c)=0.38$

$\therefore P(Z\ge c)=0.5-0.38=0.12$

$P(|Z|<2c)=0.98$에서

$P(-2c<Z<2c)=0.98$

$2P(0<Z<2c)=0.98$

$P(0<Z<2c)=0.49$

$\therefore P(Z\ge 2c)=0.5-0.49=0.01$

ㄱ. $P(|Z|\ge a)=0.05$에서

$$P(Z\ge a)=\frac{0.05}{2}=0.025$$

따라서 $P(Z\ge 2c)<P(Z\ge a)<P(Z\ge c)$이므로

$c<a<2c$

ㄴ. 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60,\ \frac{4^2}{64}\right)$, 즉

$N(60,\ 0.5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\overline{X}-60}{0.5}$으로 놓으면

Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore P(\overline{X}\ge c+60)=P\left(Z\ge \frac{c+60-60}{0.5}\right)$$

$$=P(Z\ge 2c)=0.01$$

ㄷ. $P(\overline{X}<b)=0.80$에서

$P(\overline{X}\ge b)=0.2$

$$P(\overline{X}\ge b)=P\left(Z\ge \frac{b-60}{0.5}\right)$$

$$=P(Z\ge 2b-120)=0.2$$

이때 $P(Z\ge c)=0.12$이므로

$2b-120<c$

$\therefore\ 2b-c<120$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

388 모집단이 정규분포 $N(100,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$N\left(100,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(100,\ 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-100}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르고 25개의 귤의 무게의 합이 2435 g이면 이들의 무게의 평균은 $\frac{2435}{25}=97.4$(g)이므로 선택한 상자가 합격품일 확률은

$$P(\overline{X}\ge 97.4)=P\left(Z\ge \frac{97.4-100}{2}\right)$$

$$=P(Z\ge -1.3)$$

$$=0.5+P(0\le Z\le 1.3)$$

$$=0.5+0.4$$

$$=0.9$$

일품 BOX

$P(|Z|\le 1.96)$
$=2\times 0.475=0.95$

모평균이 60, 모표준편차가 4, 표본의 크기가 64이므로
$E(\overline{X})=60$,
$V(\overline{X})=\frac{4^2}{64}$

$P(Z\ge -1.3)$
$=P(Z\le 1.3)$
$=P(Z\le 0)$
$\quad +P(0\le Z\le 1.3)$
$=0.5+P(0\le Z\le 1.3)$

따라서 갑과 을이 선택한 두 상자가 모두 합격품일 확률은 $\quad 0.9\times 0.9=0.81$

답 ②

1등급 비밀노트

상자에 담긴 귤의 무게의 합을 귤의 개수 25로 나누면 크기가 25인 표본의 표본평균으로 생각할 수 있다.

389 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 신뢰도 95 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$b-a=2\times 1.96\times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$d-c=2\times k\times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$(b-a):(d-c)=4:3$에서

$$d-c=\frac{3}{4}(b-a)$$

$$2\times k\times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{3}{4}\times 2\times 1.96\times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\therefore k=1.47$

이때 $P(|Z|\le 1.47)=2\times 0.429=0.858$이므로

$$\frac{\alpha}{100}=0.858 \qquad \therefore \alpha=85.8$$

$\therefore 10\alpha=858$

답 858

390 모비율이 $\frac{50}{100}=0.5$이고, 표본의 크기가 n이므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.5,\ \frac{0.5\times 0.5}{n}\right)$를 따른다.

$Z=\frac{\hat{p}-0.5}{\frac{0.5}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(0.5\le \hat{p}\le 0.6)\ge 0.45$에서

$$P\left(\frac{0.5-0.5}{\frac{0.5}{\sqrt{n}}}\le Z\le \frac{0.6-0.5}{\frac{0.5}{\sqrt{n}}}\right)\ge 0.45$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.45$$

이때 $P(0\le Z\le 1.65)=0.45$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{5}\ge 1.65, \qquad \sqrt{n}\ge 8.25$$

$\therefore n\ge 68.0625$

따라서 n의 최솟값은 69이다.

답 69

1등급 완성하기

▶ 본책 76쪽

391 ㄱ. $G(3)=\mathrm{P}(X>3)=p_4+p_5+\cdots+p_{10}$

$=1-(p_0+p_1+p_2+p_3)$

$=1-\mathrm{P}(0\le X\le 3)$

$=1-F(3)$

ㄴ. $\mathrm{P}(3\le X\le 8)=p_3+p_4+\cdots+p_8$

$=(p_0+p_1+\cdots+p_8)-(p_0+p_1+p_2)$

$=\mathrm{P}(0\le X\le 8)-\mathrm{P}(0\le X\le 2)$

$=F(8)-F(2)$

ㄷ. $\mathrm{P}(3\le X\le 8)=p_3+p_4+\cdots+p_8$

$=(p_3+p_4+\cdots+p_{10})-(p_9+p_{10})$

$=\mathrm{P}(X>2)-\mathrm{P}(X>8)$

$=G(2)-G(8)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

1등급 비밀노트

ㄴ에서 확률변수 X가 연속확률변수이면 $\mathrm{P}(X=3)=0$이므로

$\mathrm{P}(3\le X\le 8)=\mathrm{P}(0\le X\le 8)-\mathrm{P}(0\le X<3)$

$=\mathrm{P}(0\le X\le 8)-\mathrm{P}(0\le X\le 3)$

$=F(8)-F(3)$

그러나 X가 이산확률변수이므로 $\mathrm{P}(X=3)\ne 0$이다. 즉

$\mathrm{P}(3\le X\le 8)\ne F(8)-F(3)$

임에 유의한다.

392 $k=1$일 때, $\mathrm{P}(X=1)=a$

$2\le k\le 6$일 때,

$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X\le k)-\mathrm{P}(X\le k-1)$

$=ak^2-a(k-1)^2$

$=a(2k-1)$

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=6)=1$

$a+3a+5a+\cdots+11a=1$

$36a=1$

$\therefore a=\frac{1}{36}$

$\therefore \mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{36}(2k-1)\ (k=1, 2, 3, \cdots, 6)$

$\therefore \mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{6}k\mathrm{P}(X=k)$

$=\sum_{k=1}^{6}\left\{k\cdot\frac{1}{36}(2k-1)\right\}$

$=\frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6}(2k^2-k)$

$=\frac{1}{36}\left(2\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}-\frac{6\cdot7}{2}\right)$

$=\frac{1}{36}(182-21)$

$=\frac{161}{36}$

답 $\frac{161}{36}$

일품 BOX

(0, 0)

(1, 0), (0, 1)

(2, 0), (1, 1), (0, 2)

(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)

a, $a+1$, $a+2$는 공차가 1인 등차수열

r, $\frac{1}{2}r$, $\frac{1}{4}r$는 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열

$a=2$, $r=\frac{4}{7}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$k=1$일 때

$\frac{1}{36}(2\cdot1-1)=\frac{1}{36}$

이므로

$\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{36}(2k-1)$

은 $k=1$일 때에도 성립한다.

393 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

$\mathrm{P}(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$

$\mathrm{P}(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$

$\mathrm{P}(X=3)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{27}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{27}+1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{4}{9}+3\cdot\frac{8}{27}=2$

$\therefore \mathrm{V}(X)=0^2\cdot\frac{1}{27}+1^2\cdot\frac{2}{9}+2^2\cdot\frac{4}{9}+3^2\cdot\frac{8}{27}-2^2$

$=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

1등급 비밀노트

주사위를 3번 던져서 점 P가 옮겨진 점의 x좌표와 y좌표의 합은 주사위를 3번 던질 때 1 또는 2 또는 3 또는 4의 눈이 나오는 횟수와 같다. 따라서 주어진 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

와 같이 계산할 수도 있다.

394 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 $x_1=a$, $x_2=a+1$, $x_3=a+2$라 하고, 그 확률을 각각

$\mathrm{P}(X=x_1)=r$, $\mathrm{P}(X=x_2)=\frac{1}{2}r$,

$\mathrm{P}(X=x_3)=\frac{1}{4}r$

라 하자.

이때 확률의 총합은 1이므로 $r+\frac{1}{2}r+\frac{1}{4}r=1$

$\frac{7}{4}r=1 \qquad \therefore r=\frac{4}{7}$

또 $\mathrm{E}(X)=\frac{18}{7}$에서

$a\cdot\frac{4}{7}+(a+1)\cdot\frac{2}{7}+(a+2)\cdot\frac{1}{7}=\frac{18}{7}$

$a+\frac{4}{7}=\frac{18}{7} \qquad \therefore a=2$

$\therefore \mathrm{V}(X)=2^2\cdot\frac{4}{7}+3^2\cdot\frac{2}{7}+4^2\cdot\frac{1}{7}-\left(\frac{18}{7}\right)^2$

$=\frac{50}{7}-\frac{324}{49}=\frac{26}{49}$

답 ②

395 해결 과정 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$2a+2b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉠ ● 20%

한편

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(X\ge 2)=a+b+b=a+2b$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(2\le X\le 3)=a+b$$

이므로 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{4}{7}$에서

$$\frac{a+b}{a+2b}=\frac{4}{7},\qquad 7a+7b=4a+8b$$

$$\therefore b=3a \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{8},\ b=\dfrac{3}{8}$ ● 30%

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{3}{8}=3$$ ● 20%

답 구하기 $\therefore \mathrm{E}(2X+5)=2\mathrm{E}(X)+5$

$$=2\cdot 3+5$$

$$=11$$ ● 30%

답 11

396 확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)=1$$

$$a+a^2+a^2=1,\qquad 2a^2+a-1=0$$

$$(a+1)(2a-1)=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because 0\le a\le 1)$$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=-1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=0$$

$$\mathrm{V}(X)=(-1)^2\cdot\frac{1}{2}+0^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}-0^2=\frac{3}{2}$$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$이므로

$$\sigma(-4X+3)=|-4|\sigma(X)=4\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{6}$$

답 ⑤

397 해결 과정 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{2}{a+2}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=n\cdot\frac{2}{a+2}=5 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$\mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{2}{a+2}\cdot\frac{a}{a+2}$$

$$=\frac{25}{6} \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$ ● 50%

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{5a}{a+2}=\frac{25}{6}\qquad \therefore a=10$$ ● 20%

$a=10$을 ㉠에 대입하면

$$n=30$$ ● 20%

답 구하기 $\therefore na=300$ ● 10%

답 300

398 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(120,\ \dfrac{1}{121}\right)$을 따르므로

일품 BOX

$k^2-2akx+a^2x^2$

$\sum_{x=0}^{120}\mathrm{P}(X=x)=1$

• 확률질량함수의 성질에 의하여 $\mathrm{P}(X=-1)=a$에서 $0\le a\le 1$

확률변수 X와 두 상수 $a\ (a\ne 0)$, b에 대하여
① $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$
② $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$
③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

$$\mathrm{E}(X)=120\cdot\frac{1}{121}=\frac{120}{121}$$

$$\mathrm{V}(X)=120\cdot\frac{1}{121}\cdot\frac{120}{121}=\left(\frac{120}{121}\right)^2$$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=\left(\frac{120}{121}\right)^2+\left(\frac{120}{121}\right)^2$$

$$=2\cdot\left(\frac{120}{121}\right)^2$$

$$\therefore f(k)=\sum_{x=0}^{120}(k-ax)^2\mathrm{P}(X=x)$$

$$=k^2\sum_{x=0}^{120}\mathrm{P}(X=x)-2ak\sum_{x=0}^{120}x\mathrm{P}(X=x)$$

$$+a^2\sum_{x=0}^{120}x^2\mathrm{P}(X=x)$$

$$=k^2-2ak\mathrm{E}(X)+a^2\mathrm{E}(X^2)$$

$$=k^2-2\cdot\frac{120}{121}ak+2\left(\frac{120}{121}\right)^2a^2$$

$$=\left(k-\frac{120}{121}a\right)^2+\left(\frac{120}{121}\right)^2a^2$$

따라서 $f(k)$는 $k=\dfrac{120}{121}a$일 때 최솟값 $\left(\dfrac{120}{121}\right)^2a^2$을 가지므로

$$\left(\frac{120}{121}\right)^2a^2=4,\qquad a^2=4\cdot\left(\frac{121}{120}\right)^2$$

$$\therefore a=2\cdot\frac{121}{120}=\frac{121}{60}\ (\because a>0)$$

답 ③

399 해결 과정 $\mathrm{V}(1-3X)=9$이므로

$$(-3)^2\mathrm{V}(X)=9$$

$$\mathrm{V}(X)=1,\qquad \sigma^2=1\qquad \therefore \sigma=1$$ ● 30%

$Z=\dfrac{X-m}{1}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\ge 10)=0.1587$에서

$$\mathrm{P}(Z\ge 10-m)=0.1587$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 10-m)=0.1587$$

$$0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 10-m)=0.1587$$

$$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le 10-m)=0.3413$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$10-m=1\qquad \therefore m=9$$ ● 50%

답 구하기 $\therefore m-\sigma=8$ ● 20%

답 8

400 축구공의 무게를 Xg이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-m}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 380)=0.98$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{380-m}{12}\right)=0.98$$

Ⅲ 통계

$P\left(Z\le\frac{m-380}{12}\right)=0.98$

$P(Z\le0)+P\left(0\le Z\le\frac{m-380}{12}\right)=0.98$

$0.5+P\left(0\le Z\le\frac{m-380}{12}\right)=0.98$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{m-380}{12}\right)=0.48$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.48$이므로

$\frac{m-380}{12}=2\quad\therefore m=404$ 답 ②

401 주사위를 1번 던져서 4의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 이때 1개의 주사위를 100번, 400번, 1000번 던져서 4의 약수의 눈이 나오는 횟수를 각각 X_1, X_2, X_3이라 하자.

(ⅰ) 확률변수 X_1은 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X_1)=100\cdot\frac{1}{2}=50,$

$V(X_1)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=25$

따라서 X_1은 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따른다.

$Z_1=\frac{X_1-50}{5}$으로 놓으면 Z_1은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$p_1=P(X_1\le60)$

$=P\left(Z_1\le\frac{60-50}{5}\right)$

$=P(Z_1\le2)$

(ⅱ) 확률변수 X_2는 이항분포 $B\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X_2)=400\cdot\frac{1}{2}=200,$

$V(X_2)=400\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=100$

따라서 X_2는 근사적으로 정규분포 $N(200,\ 10^2)$을 따른다.

$Z_2=\frac{X_2-200}{10}$으로 놓으면 Z_2는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$p_2=P(X_2\le230)$

$=P\left(Z_2\le\frac{230-200}{10}\right)$

$=P(Z_2\le3)$

(ⅲ) 확률변수 X_3은 이항분포 $B\left(1000,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X_3)=1000\cdot\frac{1}{2}=500,$

$V(X_3)=1000\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=250$

따라서 X_3은 근사적으로 정규분포 $N(500,\ (5\sqrt{10})^2)$을 따른다.

$Z_3=\frac{X_3-500}{5\sqrt{10}}$으로 놓으면 Z_3은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$p_3=P(X_3\le550)$

$=P\left(Z_3\le\frac{550-500}{5\sqrt{10}}\right)$

$=P(Z_3\le\sqrt{10})$

이상에서 $p_1<p_2<p_3$ 답 ②

402 한 개의 주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 주사위를 450번 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(450,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$E(X)=450\cdot\frac{1}{3}=150,$

$V(X)=450\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=100$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(150,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

게임을 450번 한 후의 점수를 Y점이라 하면

$Y=2X-(450-X)=3X-450$

$Y\ge45$에서 $3X-450\ge45\quad\therefore X\ge165$

$\therefore P(Y\ge45)=P(X\ge165)$

$=P\left(Z\ge\frac{165-150}{10}\right)$

$=P(Z\ge1.5)$

$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1.5)$

$=0.5-P(0\le Z\le1.5)$

$=0.5-0.4332$

$=0.0668$ 답 ②

403 해결 과정 부품의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(96,\ 4^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-96}{4}$으로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X<89)=P\left(Z_X<\frac{89-96}{4}\right)$

$=P(Z_X<-1.75)$

$=P(Z_X>1.75)$

$=P(Z_X\ge0)-P(0\le Z_X\le1.75)$

$=0.5-0.46=0.04$ ● 40%

6만 개의 부품 중 불량품의 개수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $B(60000,\ 0.04)$를 따르므로

일품 BOX

$P(Z\le0)$
$=P(Z\ge0)$
$=0.5$

$2<3<\sqrt{10}$이므로
$p_1<p_2<p_3$

4의 약수의 눈은
1, 2, 4
이므로 4의 약수의 눈이 나올 확률은
$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

3의 배수의 눈은
3, 6
이므로 3의 배수의 눈이 나올 확률은
$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$P(Z<-a)$
$=P(Z>a)$

부품이 불량품으로 판정받을 확률

$E(Y)=60000\times0.04=2400$,

$V(Y)=60000\times0.04\times0.96=2304$

따라서 Y는 근사적으로 정규분포 $N(2400,\ 48^2)$을 따른다. ● 30%

답 구하기 이때 $Z_Y=\dfrac{Y-2400}{48}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(Y\le2328)&=P\left(Z_Y\le\frac{2328-2400}{48}\right)\\&=P(Z_Y\le-1.5)\\&=P(Z_Y\ge1.5)\\&=P(Z_Y\ge0)-P(0\le Z_Y\le1.5)\\&=0.5-0.43=0.07\end{aligned}$$

● 30%

답 0.07

404 모집단이 정규분포 $N(50,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50,\ \dfrac{10^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-50}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}f(n)&=P(48\le\overline{X}\le52)\\&=P\left(\frac{48-50}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{52-50}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)\\&=P\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\\&=2P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\end{aligned}$$

ㄱ. $f(25)=2P\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{25}}{5}\right)$

$=2P(0\le Z\le1)$

$=2\times0.3413$

$=0.6826$

ㄴ. $f(4n)=2P\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{4n}}{5}\right)$

$=2P\left(0\le Z\le\dfrac{2}{5}\sqrt{n}\right)$

$2f(n)=4P\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)$

이때 $P\left(0\le Z\le\dfrac{2}{5}\sqrt{n}\right)\ne2P\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)$이므로

$f(4n)\ne2f(n)$

ㄷ. $n_1<n_2$이면

$P\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n_1}}{5}\right)<P\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n_2}}{5}\right)$

$\therefore f(n_1)<f(n_2)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

일품 BOX

$P(-a\le Z\le a)$
$=2P(0\le Z\le a)$

$P(-a\le Z\le0)$
$=P(0\le Z\le a)$

$P(0\le Z\le2k)$
$<2P(0\le Z\le k)$

1등급 비밀노트

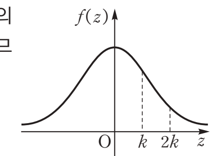
표준정규분포를 따르는 확률변수 Z의 정규분포 곡선은 오른쪽 그림과 같으므로 양수 k에 대하여

$P(k\le Z\le2k)<P(0\le Z\le k)$

$\therefore P(0\le Z\le2k)$

$=P(0\le Z\le k)+P(k\le Z\le2k)$

$<2P(0\le Z\le k)$



405 해결 과정 모집단이 정규분포 $N(50,\ 3^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50,\ \dfrac{3^2}{n}\right)$을 따른다. ● 20%

$Z=\dfrac{\overline{X}-50}{\frac{3}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(47\le\overline{X}\le53)=0.96$에서

$$P\left(\frac{47-50}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{53-50}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)=0.96$$

$P(-\sqrt{n}\le Z\le\sqrt{n})=0.96$

$2P(0\le Z\le\sqrt{n})=0.96$

$\therefore P(0\le Z\le\sqrt{n})=0.48$ ● 50%

답 구하기 이때 $P(0\le Z\le2)=0.48$이므로

$\sqrt{n}=2\quad\therefore n=4$ ● 30%

답 4

406 달걀의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(80,\ 10^2)$을 따르고, 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(80,\ \dfrac{10^2}{16}\right)$, 즉 $N(80,\ 2.5^2)$을 따른다.

상자의 무게가 1200 g 이상이려면

$16\overline{X}\ge1200$

$\therefore \overline{X}\ge75$

$Z=\dfrac{\overline{X}-80}{2.5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\ge75)&=P\left(Z\ge\frac{75-80}{2.5}\right)\\&=P(Z\ge-2)\\&=P(-2\le Z\le0)+P(Z\ge0)\\&=P(0\le Z\le2)+P(Z\ge0)\\&=0.48+0.5\\&=0.98\end{aligned}$$

이때 3200개의 달걀을 16개씩 포장한 상자는 200개이다.

따라서 하루 평균 납품할 수 있는 상자의 개수는

$200\times0.98=196$ 답 ⑤

407 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-c\cdot\frac{2}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x}+c\cdot\frac{2}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore \overline{x}-\frac{c}{5}\le m\le\overline{x}+\frac{c}{5}$$

이때 $49.68\le m\le 50.32$이므로

$$\overline{x}-\frac{c}{5}=49.68,\ \overline{x}+\frac{c}{5}=50.32$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$\overline{x}=50,\ c=1.6$$

$$\therefore \overline{x}+c=50+1.6=51.6$$

일품 BOX

- 두 식을 더하면 $2\overline{x}=100$ $\therefore \overline{x}=50$
  $50+\frac{c}{5}=50.32$에서 $\frac{c}{5}=0.32$ $\therefore c=1.6$

답 ④

408 해결 과정 3학년 학생의 1일 수면시간을 X시간이라 하고 X의 표준편차를 σ라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다.
표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}$$ ● 30%

- $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=2\times 0.495=0.99$

$$\therefore c=2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}=0.43\sigma$$ ● 30%

답 구하기 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge m-2c)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m-2c-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{-2c}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{-2\times0.43\sigma}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge-0.86)\\&=\mathrm{P}(Z\le0.86)\\&=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.86)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le0.86)\\&=0.5+0.305\\&=0.805\end{aligned}$$ ● 40%

답 0.805

409 모표준편차가 2, 표본의 크기가 64이므로 $\mathrm{P}(-c\le Z\le c)=\frac{p\alpha+q\beta}{100}$라 할 때, 모평균 m의 신뢰도 $(p\alpha+q\beta)$ %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-c\cdot\frac{2}{\sqrt{64}}\le m\le\overline{x}+c\cdot\frac{2}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore \overline{x}-\frac{1}{4}c\le m\le\overline{x}+\frac{1}{4}c$$

즉 $\frac{1}{4}c=\frac{k}{2}$이므로

$$c=2k$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(-c\le Z\le c)&=\mathrm{P}(-2k\le Z\le 2k)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2k)\\&=2\{\mathrm{P}(-k\le Z\le 2k)-\mathrm{P}(-k\le Z\le 0)\}\\&=2\{\mathrm{P}(-k\le Z\le 2k)-\mathrm{P}(0\le Z\le k)\}\\&=2(\beta-\alpha)\\&=-2\alpha+2\beta\end{aligned}$$

따라서 $\frac{p\alpha+q\beta}{100}=-2\alpha+2\beta$이므로

$$p\alpha+q\beta=-200\alpha+200\beta$$

$$\therefore p=-200,\ q=200$$

$$\therefore q-p=400$$

답 400

410 크기가 n_1, n_2인 표본의 표본평균을 각각 $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$라 하고 $\mathrm{P}(|Z|\le k_1)=\frac{\alpha}{100}$, $\mathrm{P}(|Z|\le k_2)=\frac{\beta}{100}$라 하면

$$a=\overline{x_1}-k_1\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}},\ b=\overline{x_1}+k_1\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}},$$

$$c=\overline{x_2}-k_2\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}},\ d=\overline{x_2}+k_2\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$$

ㄱ. [반례] $\overline{x_1}=10$, $\overline{x_2}=12$이고 $n_1=n_2$일 때,

$k_1\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=2$, $k_2\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}=4$라 하면

$a=10-2=8$, $c=12-4=8$

즉 $a=c$이지만 $k_2=2k_1$이므로

$\alpha\ne\beta$

- $k_1\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=2$에서 $k_1=\frac{2\sqrt{n_1}}{\sigma}$
  $k_2\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}=4$에서 $k_2=\frac{4\sqrt{n_2}}{\sigma}$
  $n_1=n_2$이므로 $k_2=2\cdot\frac{2\sqrt{n_1}}{\sigma}=2k_1$

ㄴ. $a<c<d<b$이면 $b-a>d-c$이므로

$b-a=2k_1\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, $d-c=2k_2\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$에서

$2k_1\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}>2k_2\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

이때 $n_1=n_2$이면 $k_1>k_2$이므로

$\alpha>\beta$

ㄷ. $n_1=4n_2$이면 $b-a=2k_1\frac{\sigma}{\sqrt{4n_2}}=k_1\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

이때 $\alpha<\beta$이면 $k_1<k_2$이므로

$b-a=k_1\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}<k_2\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}<2k_2\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}=d-c$

$\therefore b-a\ne d-c$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

411 100명 중에서 하루 평균 12000보 이상을 걷는 주민의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.2,\ \frac{0.2\times0.8}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.2,\ 0.04^2)$을 따르므로

- 모비율이 0.2, 표본의 크기가 100이므로 $\mathrm{E}(\hat{p})=0.2$, $\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.2\times0.8}{100}$

$Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(0.16\le\hat{p}\le0.26)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{0.16-0.2}{0.04}\le Z\le\frac{0.26-0.2}{0.04}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le1.5)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$$
$$=0.3413+0.4332$$
$$=0.7745$$

답 ②

412 표본의 크기가 100, 표본비율이 $\frac{10}{100}=0.1$이므로 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.1-2\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{100}}\le p\le0.1+2\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{100}}$$
$$0.1-0.06\le p\le0.1+0.06$$
$$\therefore\ 0.04\le p\le0.16$$

따라서 $\alpha=0.04,\ \beta=0.16$이므로

$$100\alpha\beta=0.64$$

답 0.64

413 전략 확률변수 X에 대하여 $\sum_{r=0}^{30}r^2\mathrm{P}(X=r)=\mathrm{E}(X^2)$임을 이용한다.

Step ① 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(30,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=30\cdot\frac{1}{6}=5,$$
$$\mathrm{V}(X)=30\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{6}$$

Step ② $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{25}{6}+5^2=\frac{175}{6}$$

Step ③ 따라서

$$\sum_{r=4}^{30}r^2\mathrm{P}(X=r)$$
$$=\sum_{r=0}^{30}r^2\mathrm{P}(X=r)$$
$$-\{\mathrm{P}(X=1)+2^2\mathrm{P}(X=2)+3^2\mathrm{P}(X=3)\}$$
$$=\sum_{r=0}^{30}r^2\mathrm{P}(X=r)-(p_1+4p_2+9p_3)$$
$$=\mathrm{E}(X^2)-(0.025+4\times0.073+9\times0.137)$$
$$=\frac{175}{6}-1.55$$

이므로

$$60\sum_{r=4}^{30}r^2\mathrm{P}(X=r)=60\left(\frac{175}{6}-1.55\right)$$
$$=1750-93$$
$$=1657$$

답 1657

414 전략 함수 $f(x)$의 식을 구하고, $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

Step ① 점 P가 매초 1의 속력으로 움직이므로 x초 동안 점 P가 움직인 거리는 x이다.

일품 BOX

$$\mathrm{P}(-1\le Z\le1.5)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)$$
$$+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)$$
$$+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$$

$$\overline{\mathrm{OA}}+\widehat{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BO}}$$
$$=r+2r+r$$
$$=4r$$

표본비율 $\hat{p}$으로부터 추정한 모비율 p의 신뢰구간이
$a\le p\le b$
일 때
$\hat{p}=\frac{a+b}{2}$

$r=0$일 때
$r^2\mathrm{P}(X=r)=0$

$0\le x\le r$이면 점 P는 선분 OA 위에 놓이므로

$$\overline{\mathrm{OP}}=x$$

$r\le x\le3r$이면 점 P는 호 AB 위에 놓이므로

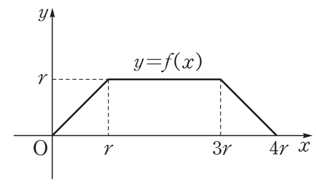
$$\overline{\mathrm{OP}}=r$$

$3r\le x\le4r$이면 점 P는 선분 BO 위에 놓이므로

$$\overline{\mathrm{OP}}=4r-x$$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}x & (0\le x\le r)\\ r & (r\le x\le3r)\\ 4r-x & (3r\le x\le4r)\end{cases}$$

Step ② 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



Step ③ $0\le x\le4r$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}(2r+4r)\cdot r=1$$
$$3r^2=1,\qquad r^2=\frac{1}{3}$$
$$\therefore\ r=\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\because\ r>0)$$

답 ③

415 전략 표본비율로부터 모비율의 신뢰구간을 구하여 c의 값과 $f(n)$의 식을 구한다.

Step ① $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모집단에서 크기가 144인 표본을 임의추출하여 구한 모비율 p의 신뢰도 α %의 신뢰구간이 $\frac{1}{4}-c\le p\le\frac{1}{4}+c$이므로 표본비율은 $\hat{p}=\frac{1}{4}$이고

$$c=k\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{144}}=\frac{\sqrt{3}}{48}k$$

Step ② 같은 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 모비율 p의 신뢰도 α %의 신뢰구간이 $\frac{1}{5}-f(n)\le p\le\frac{1}{5}+f(n)$이므로 표본비율은 $\hat{p}=\frac{1}{5}$이고

$$f(n)=k\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{n}}=\frac{2k}{5\sqrt{n}}$$

Step ③ $f(n)=\frac{16}{25}c$이므로

$$\frac{2k}{5\sqrt{n}}=\frac{16}{25}\cdot\frac{\sqrt{3}}{48}k$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{3}}{30},\qquad \sqrt{n}=10\sqrt{3}$$
$$\therefore\ n=300$$

답 300

통계 Ⅲ

Memo