

수학 I

I

지수함수와 로그함수

01 지수	2
02 로그	10
03 지수함수	20
04 로그함수	32

II

삼각함수

05 삼각함수	47
06 삼각함수의 그래프	59
07 삼각함수의 활용	74

III

수열

08 등차수열	82
09 등비수열	93
10 수열의 합	102
11 수학적 귀납법	112

● 정답을 확인하려고 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

01

지수

I. 지수함수와 로그함수

- 0001 $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$ 답 a^5
- 0002 $(a^5)^2 = a^{5 \times 2} = a^{10}$ 답 a^{10}
- 0003 $a^4 \div a^2 = a^{4-2} = a^2$ 답 a^2
- 0004 $a^5 \div a^5 = 1$ 답 1
- 0005 $a^3 \div a^7 = \frac{1}{a^{7-3}} = \frac{1}{a^4}$ 답 $\frac{1}{a^4}$
- 0006 $(ab)^4 = a^4b^4$ 답 a^4b^4
- 0007 $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$ 답 $\frac{a^3}{b^3}$
- 0008 $a^2b^3 \times ab^4 = a^{2+1}b^{3+4} = a^3b^7$ 답 a^3b^7
- 0009 $ab^4 \times a^2b^3 \times a^5b = a^{1+2+5}b^{4+3+1} = a^8b^8$ 답 a^8b^8
- 0010 $(a^3b^2)^3 = a^{3 \times 3}b^{2 \times 3} = a^9b^6$ 답 a^9b^6
- 0011 $(ab^4)^2 \times ab^2 = a^2b^{4 \times 2} \times ab^2 = a^{2+1}b^{8+2} = a^3b^{10}$ 답 a^3b^{10}
- 0012 $a^3b^7 \div (ab^2)^2 = a^3b^7 \div a^2b^{2 \times 2} = a^{3-2}b^{7-4} = ab^3$ 답 ab^3
- 0013 $a^5b^9 \div (a^2b)^3 \div \frac{b^3}{a} = a^5b^9 \div a^{2 \times 3}b^3 \div \frac{b^3}{a} = \frac{b^{9-3}}{a^{6-5}} \times \frac{a}{b^3} = b^{6-3} = b^3$ 답 b^3
- 0014 $2a^4b^3 \div \left(\frac{3b}{a^2}\right)^2 = 2a^4b^3 \div \frac{9b^2}{a^{2 \times 2}} = 2a^4b^3 \times \frac{a^4}{9b^2} = \frac{2}{9}a^{4+4}b^{3-2} = \frac{2}{9}a^8b$ 답 $\frac{2}{9}a^8b$
- 0015 $3a^8b^3 \div \left(\frac{2a^2}{b}\right)^3 \times 4ab^2 = 3a^8b^3 \div \frac{8a^{2 \times 3}}{b^3} \times 4ab^2 = 3a^8b^3 \times \frac{b^3}{8a^6} \times 4ab^2 = \frac{3}{2}a^{8-6+1}b^{3+3+2} = \frac{3}{2}a^3b^8$ 답 $\frac{3}{2}a^3b^8$

- 0016 3의 여섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[6]{3}$, $-\sqrt[6]{3}$ 의 2개이다. 답 ○
- 0017 0의 네제곱근 중 실수인 것은 0의 1개이다. 답 ×
- 0018 -2의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-2}$ 의 1개이다. 답 ○
- 0019 4의 다섯제곱근은 5개이다. 답 ×
- 0020 -3의 네제곱근은 4개이다. 답 ○
- 0021 1의 제곱근은 $x^2=1$ 의 근이므로 $x^2-1=0$, $(x+1)(x-1)=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=1$
 따라서 실수인 x 는 -1, 1이다. 답 -1, 1
- 0022 8의 세제곱근은 $x^3=8$ 의 근이므로 $x^3-2^3=0$, $(x-2)(x^2+2x+4)=0$
 $\therefore x=2$ 또는 $x=-1 \pm \sqrt{3}i$
 따라서 실수인 x 는 2이다. 답 2
- 0023 -27의 세제곱근은 $x^3=-27$ 의 근이므로 $x^3+3^3=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$
 $\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$
 따라서 실수인 x 는 -3이다. 답 -3
- 0024 -16의 네제곱근은 $x^4=-16$ 의 근이다. 이때 실수 x 에 대하여 $x^4 \geq 0$ 이므로 $x^4=-16$ 의 실근은 없다. 따라서 -16의 네제곱근 중 실수인 것은 없다. 답 없다.
- 0025 $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$ 답 4
- 0026 $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$ 답 -5
- 0027 $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ 답 2
- 0028 $\sqrt[4]{0.0016} = \sqrt[4]{0.2^4} = 0.2$ 답 0.2
- 0029 $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$ 답 -1
- 0030 $\sqrt[6]{\left(-\frac{2}{3}\right)^6} = \sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)^6} = \frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$
- 0031 $\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2 \cdot 8} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ 답 2
- 0032 $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ 답 3
- 0033 $(\sqrt[4]{9})^2 = \sqrt[4]{9^2} = \sqrt[4]{(3^2)^2} = \sqrt[4]{3^4} = 3$ 답 3
- 0034 $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2$ 답 2

0035  1

0036 $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

 $\frac{1}{27}$

0037 $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$

 $\frac{1}{25}$

0038 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$

 $\frac{125}{8}$

0039  $a^{\frac{1}{3}}$

0040  $a^{\frac{2}{5}}$

0041  $a^{-\frac{3}{4}}$

0042 $\frac{1}{\sqrt[5]{a^{-4}}} = \frac{1}{a^{-\frac{4}{5}}} = a^{\frac{4}{5}}$

 $a^{\frac{4}{5}}$

0043 $a^{\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{8}} = a^{\sqrt{2}+2\sqrt{2}} = a^{3\sqrt{2}}$

 $a^{3\sqrt{2}}$

0044 $a^{\frac{1}{6}} \div a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

 $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

0045 $(a^{\frac{2}{3}})^6 = a^{\frac{2}{3} \times 6} = a^4$

 a^4

0046 $(a^{\sqrt{3}}b^{\sqrt{6}})^{\sqrt{3}} = (a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} \times (b^{\sqrt{6}})^{\sqrt{3}} = a^3b^{3\sqrt{2}}$

 $a^3b^{3\sqrt{2}}$

0047 $5^{\frac{1}{6}} \times 25^{-\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{6}} \times (5^2)^{-\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{6}} \times 5^{-\frac{4}{3}} = 5^{\frac{1}{6}-\frac{4}{3}} = 5^{-\frac{7}{6}}$

 $5^{-\frac{7}{6}}$

0048 $\sqrt{27} \div \sqrt[3]{9} = \sqrt{3^3} \div \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{3}{2}} \div 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{5}{6}}$

 $3^{\frac{5}{6}}$

0049 $16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$


 8

0050 $27^{-\frac{1}{3}} = (3^3)^{-\frac{1}{3}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

 $\frac{1}{3}$


0051 $(\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2^3})^6 = (2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{3}{4}})^6 = (2^{\frac{13}{12}})^6 = 2^{\frac{13}{2}}$

 $2^{\frac{13}{2}}$

 $2^{\frac{13}{2}} = 2^6 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 64\sqrt{2}$

0052 $\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[4]{7^3}}\right)^6 = \left(\frac{7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{3}{4}}}\right)^6 = (7^{-\frac{5}{12}})^6 = 7^{-\frac{5}{2}}$

 $7^{-\frac{5}{2}}$

 $7^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{7^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{7^2 \cdot 7^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{49\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{343}$

0053 $5^{\sqrt{27}} \div 5^{\sqrt{3}} \times 5^{\sqrt{12}} = 5^{3\sqrt{3}-\sqrt{3}+2\sqrt{3}} = 5^{4\sqrt{3}}$

 $5^{4\sqrt{3}}$

0054 $(7^{\sqrt{2}} \div 7^{-\sqrt{8}} \times 7^3)^{\frac{1}{3}} = \{7^{\sqrt{2}-(-2\sqrt{2})+3}\}^{\frac{1}{3}} = 7^{(3\sqrt{2}+3) \times \frac{1}{3}} = 7^{\sqrt{2}+1}$

 $7^{\sqrt{2}+1}$

0055 ① 15의 세제곱근은 3개이다.

② -1의 세제곱근 중 실수인 것은 1개이다.

③ 4의 네제곱근은 $x^4=4$ 의 근이므로

$$x^4-4=0, \quad (x^2+2)(x^2-2)=0$$

$$(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{2}i \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{2}$$

따라서 4의 네제곱근은 $-\sqrt{2}i, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$ 이다.

⑤ n 이 짝수일 때, -4의 n 제곱근 중 실수인 것은 없다.

 ④

0056 ㄴ. -32의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

ㄷ. 81의 네제곱근은 $x^4=81$ 의 근이므로

$$x^4-81=0, \quad (x^2+9)(x^2-9)=0$$

$$(x+3i)(x-3i)(x+3)(x-3)=0$$

$$\therefore x=\pm 3i \text{ 또는 } x=\pm 3$$

따라서 81의 네제곱근은 $-3i, 3i, -3, 3$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

 ③

0057 -5의 세제곱근 중 실수인 것은 1개이고, 3의 네제곱근 중 실수인 것은 2개이므로

$$m=1, n=2$$

$$\therefore m+n=3$$

 3

0058 (i) n 이 홀수일 때,

$$R(x, n)=1$$

 ①

(ii) n 이 짝수일 때,

$$x>0 \text{ 이면 } R(x, n)=2$$

$$x=0 \text{ 이면 } R(x, n)=1$$

$$x<0 \text{ 이면 } R(x, n)=0$$

 ②

(i), (ii)에서

$$R(-6, 3)+R(6, 3)+R(-6, 6)+R(6, 6)$$

$$=1+1+0+2=4$$

 ③

 4

채점 기준	비율
① n 이 홀수일 때 $R(x, n)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② n 이 짝수일 때 $R(x, n)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ 답을 구할 수 있다.	20 %

0059 ① $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{3^5}$

② $\sqrt[3]{-\sqrt{64}} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

③ $\sqrt[5]{16} = \sqrt[10]{2^4} = \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4}$

④ $\frac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{256}{4}} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

⑤ $\left(\sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^6 = (\sqrt{5})^6 \times \frac{1}{(\sqrt[3]{5})^6} = \sqrt{5^6} \times \frac{1}{\sqrt[3]{5^6}}$

$$= \sqrt{(5^3)^2} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(5^2)^3}}$$

$$= 5^3 \times \frac{1}{5^2} = 5$$

 ⑤

$$\begin{aligned} 0060 \quad \sqrt{\frac{9^{10}+27^{10}}{9^7+27^8}} &= \sqrt{\frac{(3^2)^{10}+(3^3)^{10}}{(3^2)^7+(3^3)^8}} = \sqrt{\frac{3^{20}+3^{30}}{3^{14}+3^{24}}} \\ &= \sqrt{\frac{3^{20}(1+3^{10})}{3^{14}(1+3^{10})}} = \sqrt{\frac{3^{20}}{3^{14}}} \\ &= \sqrt{3^6} = 3^3 = 27 \end{aligned}$$

답 27

$$\begin{aligned} 0061 \quad \sqrt[4]{\frac{\sqrt{16}}{\sqrt[6]{16}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[3]{16}}{16}} &= \frac{\sqrt[4]{\sqrt{16}}}{\sqrt[4]{\sqrt[6]{16}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{16}}}{\sqrt{16}} \\ &= \frac{8\sqrt[4]{2^4}}{24\sqrt[4]{2^4}} \times \frac{6\sqrt[3]{2^4}}{24\sqrt[4]{2^4}} = \frac{24\sqrt[4]{2^{12}}}{24\sqrt[4]{2^4}} \times \frac{24\sqrt[4]{2^{16}}}{2^2} \\ &= \frac{1}{2^2} \times \sqrt[4]{\frac{2^{12} \times 2^{16}}{2^4}} = \frac{1}{4} \times \sqrt[4]{2^{24}} \\ &= \frac{1}{4} \times 2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

다른풀이

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{\sqrt{16}}{\sqrt[6]{16}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[3]{16}}{16}} &= \frac{\sqrt[8]{16}}{\sqrt[24]{16}} \times \frac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[4]{16}} \\ &= \frac{16^{\frac{1}{8}}}{16^{\frac{1}{24}}} \times \frac{16^{\frac{1}{6}}}{16^{\frac{1}{4}}} \\ &= 16^{\frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} - \frac{1}{4}} = (2^4)^{-\frac{1}{4}} \\ &= 2^{-1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0062 \quad \sqrt{ab^2} \div \sqrt[6]{a^4b^5} \times \sqrt[12]{a^8b^5} &= \sqrt[12]{a^6b^{12}} \div \sqrt[12]{a^8b^{10}} \times \sqrt[12]{a^8b^5} \\ &= \sqrt[12]{a^6b^7} \end{aligned}$$

따라서 $n=12$, $p=6$, $q=7$ 이므로
 $n+p+q=25$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0063 \quad \sqrt[3]{8a^2b} \times \sqrt[9]{a^3b^6} &= \sqrt[3]{8a^2b} \times \sqrt[3]{ab^2} \\ &= \sqrt[3]{2^3a^3b^3} = 2ab \end{aligned}$$

답 $2ab$

$$\begin{aligned} 0064 \quad \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}} &= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{\sqrt{x}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} \times \frac{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[8]{x}} \times \frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[6]{x}} \times \frac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[12]{x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

답 1

$$\begin{aligned} 0065 \quad 3^{-2} \div (9^{-4} \div 3^{-5})^{-3} &= 3^{-2} \div \{(3^2)^{-4} \div 3^{-5}\}^{-3} \\ &= 3^{-2} \div (3^{-8} \div 3^{-5})^{-3} \\ &= 3^{-2} \div (3^{-3})^{-3} \\ &= 3^{-2} \div 3^9 \\ &= 3^{-11} \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned} 0066 \quad ① -2^{-1} &= -\frac{1}{2} \quad ② 2^{-2} = \frac{1}{4} \\ ③ \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} &= 2^3 = 8 \quad ④ (-3)^{-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \\ ⑤ \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} &= (-3)^3 = -27 \end{aligned}$$

따라서 두 번째로 큰 것은 ②이다.

답 ②

$$\begin{aligned} 0067 \quad \frac{7^{10}+7^{20}}{7^{-10}+7^{-20}} &= \frac{7^{10}(1+7^{10})}{7^{-20}(7^{10}+1)} = \frac{7^{10}}{7^{-20}} = 7^{10-(-20)} = 7^{30} \\ \therefore k &= 30 \end{aligned}$$

답 30



밑이 같은 두 수의 합 또는 차는 지수가 작은 수로 묶어서 계산한다.

$$\begin{aligned} \text{예} \quad 2^5 - 2^3 &= 2^3(2^2 - 1) = 3 \times 2^3 \\ 3^{-10} + 3^{-9} &= 3^{-10}(1 + 3) = 4 \times 3^{-10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0068 \quad \frac{5^{-5}+25^{-2}}{6} \times \frac{4}{3^5+9^3} &= \frac{5^{-5}+(5^2)^{-2}}{6} \times \frac{4}{3^5+(3^2)^3} \\ &= \frac{5^{-5}+5^{-4}}{6} \times \frac{4}{3^5+3^6} \\ &= \frac{5^{-5}(1+5)}{6} \times \frac{4}{3^5(1+3)} \\ &= 5^{-5} \times 3^{-5} = (5 \times 3)^{-5} \\ &= 15^{-5} \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned} 0069 \quad \frac{1}{3^{-3}+1} + \frac{1}{3^{-1}+1} + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^3+1} \\ &= \frac{3^3}{3^3(3^{-3}+1)} + \frac{3}{3(3^{-1}+1)} + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^3+1} \\ &= \frac{3^3}{1+3^3} + \frac{3}{1+3} + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^3+1} \\ &= \frac{3^3+1}{3^3+1} + \frac{3+1}{3+1} = 2 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned} 0070 \quad 3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} &= 3 \times \sqrt{3} \times \sqrt[4]{3} \times \sqrt[8]{3} \\ &= 3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} = 3^{\frac{15}{8}} \\ \therefore k &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned} 0071 \quad \sqrt{a^6\sqrt[4]{a^k}} &= \sqrt{a} \times \sqrt[12]{a^k} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{k}{12}} = a^{\frac{6+k}{12}} \\ a^{\frac{6+k}{12}} &= a^3 \text{에서} \quad \frac{6+k}{12} = 3 \\ 6+k &= 36 \quad \therefore k = 30 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0072 \quad \sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^3\sqrt[2]{a^2}}} &= \sqrt[4]{a} \times \sqrt[8]{a} \times \sqrt[12]{a^2} = a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{8}} \times a^{\frac{1}{6}} \\ &= a^{\frac{13}{24}} \quad \dots\dots ㉠ \quad \dots\dots ① \\ \sqrt[12]{a^m\sqrt[4]{a}} &= \sqrt[12]{a^m} \times \sqrt[24]{a} = a^{\frac{m}{12}} \times a^{\frac{1}{24}} = a^{\frac{2m+1}{24}} \quad \dots\dots ㉡ \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ㉠, ㉡ \text{에서} \quad \frac{13}{24} &= \frac{2m+1}{24} \text{이므로} \quad 13 = 2m+1 \\ \therefore m &= 6 \end{aligned}$$

답 6

채점 기준	비율
① 좌변을 지수가 유리수인 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
② 우변을 지수가 유리수인 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
③ m의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른풀이 $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^3\sqrt[2]{a^2}}} = \sqrt[12]{a^m\sqrt[4]{a}}$ 의 양변을 12제곱하면

$$\begin{aligned} (a\sqrt[3]{a^3\sqrt[2]{a^2}})^3 &= a^m\sqrt[4]{a}, \quad a^3 \times (\sqrt[4]{a})^3 \times a^2 = a^m\sqrt[4]{a} \\ a^3 \times a\sqrt[3]{a} \times a^2 &= a^m\sqrt[4]{a}, \quad a^6\sqrt[3]{a} = a^m\sqrt[4]{a} \\ \therefore m &= 6 \end{aligned}$$

0073 이차방정식 $2x^2 - 4x - 9 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -\frac{9}{2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3^\alpha} \times \sqrt{3^\beta}}{(9^\alpha)^\beta} = \frac{3^{\frac{\alpha}{2}} \times 3^{\frac{\beta}{2}}}{9^{a\beta}} = \frac{3^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{3^{2a\beta}} = 3^{\frac{\alpha+\beta}{2} - 2a\beta} = 3^{\frac{2}{2} - 2 \times (-\frac{9}{2})} = 3^{10}$$

답 3¹⁰

0074 $2^5 = a$ 에서 $2 = a^{\frac{1}{5}}$

$3^2 = b$ 에서 $3 = b^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore 6^{10} = (2 \times 3)^{10} = 2^{10} \times 3^{10} = (a^{\frac{1}{5}})^{10} \times (b^{\frac{1}{2}})^{10} = a^2 b^5$$

답 ②

0075 $a = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ 에서 $a^3 = 2$

$b = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ 에서 $b^2 = 3$

$$\therefore \sqrt[6]{12} = (2^2 \times 3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = (a^3)^{\frac{2}{3}} \times (b^2)^{\frac{1}{6}} = ab^{\frac{1}{3}}$$

→ ②

따라서 $m=1, n=\frac{1}{3}$ 이므로 $m+n=\frac{4}{3}$

→ ③

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
① 2, 3을 각각 a, b 의 거듭제곱으로 나타낼 수 있다.	30 %
② $\sqrt[6]{12}$ 를 a, b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
③ $m+n$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0076 $a^3=2, b^4=5, c^5=7$ 에서

$$a=2^{\frac{1}{3}}, b=5^{\frac{1}{4}}, c=7^{\frac{1}{5}}$$

$$\text{이므로 } (abc)^n = (2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{5}})^n = 2^{\frac{n}{3}} \times 5^{\frac{n}{4}} \times 7^{\frac{n}{5}}$$

이때 $(abc)^n$ 이 자연수가 되려면 자연수 n 은 3, 4, 5의 공배수이어야 한다.

따라서 자연수 n 의 최솟값은 3, 4, 5의 최소공배수인 60이다.

답 60

$$\begin{aligned} \text{0077 } \left\{ \left(\frac{4}{49} \right)^{\frac{3}{4}} \right\}^{\frac{2}{3}} \times \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{5}{2}} \right\}^{-\frac{4}{5}} &= \left(\frac{4}{49} \right)^{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}} \times \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{5}{2} \times (-\frac{4}{5})} \\ &= \left(\frac{4}{49} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{4} \right)^{-2} \\ &= \left\{ \left(\frac{2}{7} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times (2^{-2})^{-2} \\ &= \frac{2}{7} \times 2^4 = \frac{32}{7} \end{aligned}$$

답 $\frac{32}{7}$

$$\begin{aligned} \text{0078 } (2^{\frac{1}{2}} \times 5^{-\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{4}{3}} &= 2^{-\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{1}{6}} \times 2^{-\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{4}{3}} \\ &= 2^{-1} \times 5^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\text{0079 } \neg, 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{11}{12}} = 12\sqrt[12]{2^{11}}$$

$$\neg, (4^{-2})^{\frac{1}{4}} = 4^{-\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\neg, \{(-3)^2\}^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$$

$$\neg, (\sqrt{3})^{6\sqrt{2}} = (3^{\frac{1}{2}})^{6\sqrt{2}} = 3^{3\sqrt{2}}, (3\sqrt{3})^{2\sqrt{2}} = (3^{\frac{3}{2}})^{2\sqrt{2}} = 3^{3\sqrt{2}} \text{이므로}$$

$$(\sqrt{3})^{6\sqrt{2}} = (3\sqrt{3})^{2\sqrt{2}}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

주의 $\neg, \{(-3)^2\}^{\frac{3}{2}}$ 에서 밑이 음수이므로 지수법칙을 이용할 수 없다. 따라서 $\{(-3)^2\}^{\frac{3}{2}} = (-3)^{2 \times \frac{3}{2}} = (-3)^3 = -27$

과 같이 계산하지 않도록 유의한다.

$$\text{0080 } (\sqrt{a})^{\frac{3}{2}} \div (a^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{4}} \times (a^{\frac{1}{6}})^k$$

$$= (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}} \div (a^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{4}} \times (a^{\frac{1}{6}})^k$$

$$= a^{\frac{3}{4}} \div a^{\frac{5}{6}} \times a^{\frac{k}{6}} = a^{\frac{2k-1}{12}}$$

→ ①

$$a^{\frac{2k-1}{12}} = a^{\frac{1}{24}} \text{에서 } \frac{2k-1}{12} = \frac{1}{24}, \quad 2k-1 = \frac{1}{2}$$

$$2k = \frac{3}{2} \quad \therefore k = \frac{3}{4}$$

→ ②

답 $\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
① 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
② k 의 값을 구할 수 있다.	40 %

$$\text{0081 } \left(\frac{1}{3^{15}} \right)^{\frac{1}{n}} = (3^{-15})^{\frac{1}{n}} = 3^{-\frac{15}{n}}$$

이때 $3^{-\frac{15}{n}}$ 이 자연수가 되려면 $-\frac{15}{n}$ 가 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 정수 n 은 -1, -3, -5, -15의 4개이다.

답 ③

$$\text{0082 } (a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})^3 + (a^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})^3$$

$$= (a^{\frac{2}{3}})^3 + 3 \times (a^{\frac{2}{3}})^2 \times a^{-\frac{1}{3}} + 3 \times a^{\frac{2}{3}} \times (a^{-\frac{1}{3}})^2 + (a^{-\frac{1}{3}})^3$$

$$+ (a^{\frac{2}{3}})^3 - 3 \times (a^{\frac{2}{3}})^2 \times a^{-\frac{1}{3}} + 3 \times a^{\frac{2}{3}} \times (a^{-\frac{1}{3}})^2 - (a^{-\frac{1}{3}})^3$$

$$= a^2 + 3a + 3 + a^{-1} + a^2 - 3a + 3 - a^{-1}$$

$$= 2(a^2 + 3)$$

답 $2(a^2 + 3)$

$$\text{0083 } (3^{\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}})^2 + (3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}})(3^{\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}})$$

$$= (3^{\frac{1}{2}})^2 - 2 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} + (3^{-\frac{1}{2}})^2 + (3^{\frac{1}{2}})^2 - (3^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$= 3 - 2 + 3^{-1} + 3 - 3^{-1}$$

$$= 4$$

답 ④

$$\text{0084 } \frac{1}{1-5^{\frac{1}{8}}} + \frac{1}{1+5^{\frac{1}{8}}} + \frac{2}{1+5^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+5^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1+5^{\frac{1}{8}}+1-5^{\frac{1}{8}}}{(1-5^{\frac{1}{8}})(1+5^{\frac{1}{8}})} + \frac{2}{1+5^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+5^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{1-5^{\frac{1}{4}}} + \frac{2}{1+5^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+5^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2(1+5^{\frac{1}{4}})+2(1-5^{\frac{1}{4}})}{(1-5^{\frac{1}{4}})(1+5^{\frac{1}{4}})} + \frac{4}{1+5^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{4}{1-5^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+5^{\frac{1}{2}}} = \frac{4(1+5^{\frac{1}{2}})+4(1-5^{\frac{1}{2}})}{(1-5^{\frac{1}{2}})(1+5^{\frac{1}{2}})}$$

$$= \frac{8}{1-5} = -2$$

답 ①

0085 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ 이므로
 $13 = 15 + 2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca = -1$
 $\therefore (3^a)^{b+c} \times (3^b)^{c+a} \times (3^c)^{a+b} = 3^{ab+ac} \times 3^{bc+ba} \times 3^{ca+cb}$
 $= 3^{2(ab+bc+ca)}$
 $= 3^{-2} = \frac{1}{9}$ 답 1/9

0086 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ 의 양변을 제곱하면
 $x + x^{-1} + 2 = 5 \quad \therefore x + x^{-1} = 3$
 위의 식의 양변을 제곱하면
 $x^2 + x^{-2} + 2 = 9 \quad \therefore x^2 + x^{-2} = 7$ 답 7

0087 $2^x - 2^{-x} = 3$ 의 양변을 제곱하면
 $2^{2x} + 2^{-2x} - 2 = 9 \quad \therefore 4^x + 4^{-x} = 11$ 답 ③

0088 $(x+x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2 = 14 + 2 = 16$ 이므로
 $x + x^{-1} = 4 \quad (\because x + x^{-1} > 0)$... ①
 또 $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + x^{-1} + 2 = 4 + 2 = 6$ 이므로
 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{6} \quad (\because x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0)$... ②
 $\therefore \frac{x+x^{-1}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$... ③
답 2√6/3

채점 기준	비율
① $x+x^{-1}$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $\frac{x+x^{-1}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0089 $x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}} = 1 + \sqrt{2}$ 의 양변을 세제곱하면
 $x - x^{-1} - 3(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}) = (1 + \sqrt{2})^3$
 $\therefore x - x^{-1} = (1 + \sqrt{2})^3 + 3(1 + \sqrt{2})$
 $= 7 + 5\sqrt{2} + 3 + 3\sqrt{2} = 10 + 8\sqrt{2}$
 따라서 $a = 10, b = 8$ 이므로 $a - b = 2$ 답 2

0090 $\frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$ 의 분모, 분자에 2^x 를 곱하면
 $\frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{2^x(2^x - 2^{-x})}{2^x(2^x + 2^{-x})} = \frac{2^{2x} - 1}{2^{2x} + 1} = \frac{4^x - 1}{4^x + 1}$
 $= \frac{5 - 1}{5 + 1} = \frac{2}{3}$ 답 ②
다른풀이 $\frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{2^{-x}(2^{2x} - 1)}{2^{-x}(2^{2x} + 1)} = \frac{4^x - 1}{4^x + 1} = \frac{5 - 1}{5 + 1} = \frac{2}{3}$

0091 $\frac{5^x + 5^{-x}}{5^x - 5^{-x}}$ 의 분모, 분자에 5^x 를 곱하면
 $\frac{5^x + 5^{-x}}{5^x - 5^{-x}} = \frac{5^x(5^x + 5^{-x})}{5^x(5^x - 5^{-x})} = \frac{5^{2x} + 1}{5^{2x} - 1} = \frac{25^x + 1}{25^x - 1}$... ①
 $\frac{25^x + 1}{25^x - 1} = 5$ 이므로 $25^x + 1 = 5(25^x - 1)$
 $25^x + 1 = 5 \times 25^x - 5, \quad 4 \times 25^x = 6$
 $\therefore 25^x = \frac{3}{2}$... ②

$\therefore 25^x - 25^{-x} = 25^x - \frac{1}{25^x} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$... ③
답 5/6

채점 기준	비율
① 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	30 %
② 25^x 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $25^x - 25^{-x}$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0092 $2^{\frac{1}{x}} = a$ 에서 $a^x = 2$
 $\frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$ 의 분모, 분자에 a^{2x} 를 곱하면
 $\frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{a^{2x}(a^{2x} + a^{-2x})}{a^{2x}(a^{2x} - a^{-2x})} = \frac{a^{4x} + 1}{a^{4x} - 1}$
 $= \frac{(a^x)^4 + 1}{(a^x)^4 - 1} = \frac{2^4 + 1}{2^4 - 1} = \frac{17}{15}$ 답 17/15

0093 $4^x = 3$ 에서 $2^{2x} = 3$
 $\frac{8^x + 8^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$ 의 분모, 분자에 $8^x = 2^{3x}$ 를 곱하면
 $\frac{8^x + 8^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{2^{3x}(2^{3x} + 2^{-3x})}{2^{3x}(2^x + 2^{-x})} = \frac{2^{6x} + 1}{2^{4x} + 2^{2x}}$
 $= \frac{(2^{2x})^3 + 1}{(2^{2x})^2 + 2^{2x}} = \frac{3^3 + 1}{3^2 + 3} = \frac{7}{3}$
 따라서 $a = 3, b = 7$ 이므로 $a + b = 10$ 답 ④

다른풀이 $\frac{8^x + 8^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{2^{3x} + 2^{-3x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{(2^x + 2^{-x})(2^{2x} + 2^{-2x} - 1)}{2^x + 2^{-x}}$
 $= 2^{2x} + 2^{-2x} - 1 = 3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{7}{3}$
 따라서 $a = 3, b = 7$ 이므로 $a + b = 10$

0094 $3^x = 6$ 에서 $3 = 6^{\frac{1}{x}}$ ㉠
 $2^y = 6$ 에서 $2 = 6^{\frac{1}{y}}$ ㉡
 ㉠ \times ㉡을 하면 $6 = 6^{\frac{1}{y} \times \frac{1}{y}} = 6^{\frac{1}{y^2}}$
 $\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ 답 1

0095 $17^m = 8$ 에서 $17 = 8^{\frac{1}{m}} = (2^3)^{\frac{1}{m}} = 2^{\frac{3}{m}}$ ㉠
 $136^n = 16$ 에서 $136 = 16^{\frac{1}{n}} = (2^4)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{4}{n}}$ ㉡
 ㉠ \div ㉡을 하면
 $\frac{17}{136} = 2^{\frac{3}{m} - \frac{4}{n}} \quad \therefore 2^{\frac{3}{m} - \frac{4}{n}} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$
 $\therefore \frac{3}{m} - \frac{4}{n} = -3$ 답 ①

0096 $3^x = a$ 에서 $3 = a^{\frac{1}{x}}$ ㉠
 $5^y = a$ 에서 $5 = a^{\frac{1}{y}}$ ㉡
 $15^z = a$ 에서 $15 = a^{\frac{1}{z}}$ ㉢ ... ①
 ㉠ \times ㉡ \times ㉢을 하면
 $3 \times 5 \times 15 = a^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \quad \therefore a^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 15^2$... ②
 $a^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 15^2, \quad a^2 = 15^2$

$\therefore a=15$ ($\because a>0$)

→ ③

답 15

채점 기준	비율
① 3, 5, 15를 각각 a, x, y, z 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② $3 \times 5 \times 15$ 를 a, x, y, z 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	40 %

0097 $2^x = k^z$ 에서 $2 = k^{\frac{z}{x}}$ ㉠

$7^y = k^z$ 에서 $7 = k^{\frac{z}{y}}$ ㉡

㉠ \times ㉡을 하면 $14 = k^{\frac{z}{x}} \times k^{\frac{z}{y}}$

이때 $2xy = yz + zx$ 이므로

$$k^{\frac{z}{x}} \times k^{\frac{z}{y}} = k^{\frac{z}{x} + \frac{z}{y}} = k^{\frac{yz + zx}{xy}} = k^{\frac{2xy}{xy}} = k^2$$

따라서 $k^2 = 14$ 이므로 $k = \sqrt{14}$ ($\because k > 0$) ③

0098 $a^x = 7$ 에서 $a = 7^{\frac{1}{x}}$

$(ab)^y = 7^2$ 에서 $ab = 7^{\frac{2}{y}}$

$(abc)^z = 7^3$ 에서 $abc = 7^{\frac{3}{z}}$

$$\therefore 7^{\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}} = 7^{\frac{1}{x}} \times 7^{\frac{2}{y}} \div (7^{\frac{3}{z}})^2 = a \times ab \div (abc)^2$$

$$= \frac{a \times ab}{a^2 b^2 c^2} = \frac{1}{bc^2}$$
 ④

0099 $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}, \sqrt[6]{6} = 6^{\frac{1}{6}}$ 이므로 각 수를 여섯제곱하면

$$(2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8, (3^{\frac{1}{3}})^6 = 3^2 = 9, (6^{\frac{1}{6}})^6 = 6$$

즉 $(6^{\frac{1}{6}})^6 < (2^{\frac{1}{2}})^6 < (3^{\frac{1}{3}})^6$ 이므로 $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ ④

다른풀이 2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}, \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$$

$$\sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$$
이므로 $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

0100 $\sqrt[3]{30} = \sqrt[6]{30}, \sqrt[2]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2\sqrt{3} \times 3} = \sqrt[6]{24},$

$$\sqrt[3]{4\sqrt{5}} = \sqrt[3]{4^2 \times 5} = \sqrt[6]{80}$$
에서 $\sqrt[6]{24} < \sqrt[6]{30} < \sqrt[6]{80}$

따라서 가장 작은 수는 $\sqrt[6]{24}$, 즉 $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$ 이다. ④

0101 (i) $A - B = (\sqrt[3]{3} - 2\sqrt{2}) - (2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt{2})$

$$= \sqrt{2} - \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{8} - \sqrt[6]{9} < 0$$

$$\therefore A < B$$

(ii) $C - A = (2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{3}) - (\sqrt[3]{3} - 2\sqrt{2})$

$$= 4\sqrt{2} - 4\sqrt[3]{3} = 4(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}) < 0$$

$$\therefore C < A$$

(i), (ii)에서 $C < A < B$ ①

따라서 가장 작은 수는 $2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{3}$, 가장 큰 수는 $2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt{2}$ 이므로

$$(2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{3}) + (2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$$
 ②

즉 $a = -1, b = -1$ 이므로 $ab = 1$ ③

답 1

채점 기준	비율
① A, B, C의 대소를 비교할 수 있다.	60 %
② 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합을 구할 수 있다.	30 %
③ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0102 A지역에서

$$H_1 = 6, H_2 = 24, V_1 = 3, V_2 = 9$$

이므로 $9 = 3 \times \left(\frac{24}{6}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

$$\therefore 4^{\frac{2}{2-k}} = 3$$
 ㉠

B지역에서

$$H_1 = 5, H_2 = 80, V_1 = a, V_2 = b$$

이므로 $b = a \times \left(\frac{80}{5}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

$$\therefore \frac{b}{a} = 16^{\frac{2}{2-k}}$$
 ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{b}{a} = (4^2)^{\frac{2}{2-k}} = (4^{\frac{2}{2-k}})^2 = 3^2 = 9$ ④

0103 $t = 10, w = 5$ 일 때,

$$Q_A = 0.01 \times 10^{1.25} \times 5^{0.25}$$

$$Q_B = 0.05 \times 10^{0.75} \times 5^{0.30}$$

$$\therefore \frac{Q_A}{Q_B} = \frac{0.01 \times 10^{1.25} \times 5^{0.25}}{0.05 \times 10^{0.75} \times 5^{0.30}} = \frac{10^{0.5}}{5 \times 5^{0.05}}$$

$$= \frac{(2 \times 5)^{0.5}}{5^{1.05}} = 2^{0.5} \times 5^{0.5-1.05}$$

$$= 2^{0.5} \times 5^{-0.55}$$

따라서 $a = 0.5, b = -0.55$ 이므로

$$a + b = -0.05$$
 ④

0104 전략 n 이 짝수일 때, 양수 a 의 n 제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[n]{a}$ 이다.

풀이 4의 제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt{4} = 2$ $\therefore a = 2$

세제곱근 27은 $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ $\therefore b = 3$

$$\therefore a + b = 5$$
 ⑤

0105 전략 $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n^p]{a^{mp}}$ 임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\sqrt[3]{\sqrt{a}} \times \sqrt[6]{\sqrt{a^7}} = \sqrt[6]{a} \times \sqrt[6]{\sqrt{a^7}} = \sqrt[6]{a} \times \sqrt[6]{a^{\frac{7}{2}}} = \sqrt[6]{a^{\frac{13}{2}}} = \sqrt[3]{a^{\frac{13}{4}}}$

$$\therefore n = 4$$
 ②

0106 전략 a 를 2의 거듭제곱으로 나타낸 후 $p^x = q$ 이면 $p = q^{\frac{1}{x}}$ 임을 이용한다.

풀이 $a = 16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}$ 이므로 $2 = a^{\frac{1}{12}}$

$$\therefore 32^9 = (2^5)^9 = 2^{45} = (a^{\frac{1}{12}})^{45} = a^{\frac{15}{4}}$$

$$\therefore k = \frac{15}{4}$$
 ④

0107 전략 지수가 유리수일 때, 밑이 양수이어야 지수법칙이 성립함을 이용한다.

풀이 ③ $\{(-5)^2\}^{\frac{1}{2}}$ 에서 밑이 음수이므로 지수법칙을 이용할 수 없다. ③

0108 전략 $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ 임을 이용한다.

풀이 $3^x + 3^{-x} = 3$ 의 양변을 세제곱하면

$$3^{3x} + 3^{-3x} + 3(3^x + 3^{-x}) = 27$$

$$27^x + 27^{-x} + 3 \times 3 = 27$$

$$\therefore 27^x + 27^{-x} = 27 - 9 = 18$$
 ④

0109 **전략** $a^r = k$ 이면 $a = k^{\frac{1}{r}}$ 임을 이용하여 밑을 통일한다.

풀이 $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 16$ 에서

$$\frac{1}{5} = 16^{\frac{1}{x}} = (2^4)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{4}{x}} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$15^y = 64$ 에서

$$15 = 64^{\frac{1}{y}} = (2^6)^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{6}{y}} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore 4^{\frac{2}{x} + \frac{3}{y}} &= (2^2)^{\frac{2}{x} + \frac{3}{y}} = 2^{\frac{4}{x} + \frac{6}{y}} \\ &= 2^{\frac{4}{x}} \times 2^{\frac{6}{y}} \\ &= \frac{1}{5} \times 15 = 3 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

답 3

채점 기준	비율
① $\frac{1}{5}$ 을 2^r (r 는 유리수) 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
② 15를 2^r (r 는 유리수) 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
③ $4^{\frac{2}{x} + \frac{3}{y}}$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

0110 **전략** 2 이상의 자연수 n 에 대하여 n 이 짝수일 때 양수 a 의 제곱근은 2개, 음수 a 의 제곱근은 0개이고, n 이 홀수일 때 양수 a 의 제곱근은 1개, 음수 a 의 제곱근은 1개이다.

풀이 -3의 제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

$$f_2(-3) = 0$$

-2의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-2}$ 의 1개이므로

$$f_3(-2) = 1$$

5의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{5}$ 의 2개이므로

$$f_4(5) = 2$$

$$\therefore f_2(-3) + f_3(-2) + f_4(5) = 3 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

0111 **전략** 거듭제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 ① $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3} = \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{2^2 \times 3^3} = \sqrt[6]{108}$

$$\textcircled{2} \sqrt[4]{3} \sqrt[3]{(-2)^{12}} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$$

$$\textcircled{3} \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$$

$$\textcircled{4} \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{9^3\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{81}{9 \times 3}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\textcircled{5} \sqrt[6]{\frac{5}{\sqrt{7}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{5}}} = \sqrt[12]{\frac{5}{\sqrt{7}}} \times \sqrt[8]{\frac{\sqrt{7}}{5}} = 1 \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

0112 **전략** 분모, 분자에 적당한 식을 곱한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } & \frac{1}{a^4-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^4-1} \\ &= \frac{a^4}{a^4(a^4-1)} + \frac{a^2}{a^2(a^2-1)} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^4-1} \\ &= \frac{a^4}{1-a^4} + \frac{a^2}{1-a^2} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^4-1} \\ &= \frac{1-a^4}{a^4-1} + \frac{1-a^2}{a^2-1} \\ &= \frac{-(a^4-1)}{a^4-1} + \frac{-(a^2-1)}{a^2-1} \\ &= -1-1 = -2 \quad \text{답 } -2 \end{aligned}$$

0113 **전략** $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ 임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } & \sqrt[4]{\sqrt{2}} \times \sqrt{2\sqrt[4]{2}} = \sqrt[8]{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt[16]{2} \\ &= 2^{\frac{1}{8}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{16}} \\ &= 2^{\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}} \\ &= 2^{\frac{15}{16}} \quad \text{답 } \textcircled{5} \end{aligned}$$

0114 **전략** 거듭제곱근을 지수가 유리수인 꼴로 나타낸 후 정수가 되도록 하는 자연수 n 의 개수를 구한다.

풀이 $\sqrt[3]{4^n} = 4^{\frac{n}{3}} = 2^{\frac{2n}{3}}$ 이 정수가 되려면 $\frac{2n}{3}$ 이 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 n 은 100 이하의 3의 배수이어야 하므로 n 은 3, 6, 9, ..., 99의 33개이다. **답** 33

0115 **전략** $a > 0$, $b > 0$ 이고 r , s 가 유리수일 때, $(a^r + b^s)(a^r - b^s) = a^{2r} - b^{2s}$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } & \left(\sqrt[4]{3} - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \left(\sqrt[4]{3} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \left(\sqrt[4]{3} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \left(3 + \frac{1}{3}\right) \\ &= (3^{\frac{1}{4}} - 3^{-\frac{1}{4}})(3^{\frac{1}{4}} + 3^{-\frac{1}{4}})(3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}})(3 + 3^{-1}) \\ &= (3^{\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}})(3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}})(3 + 3^{-1}) \\ &= (3 - 3^{-1})(3 + 3^{-1}) \\ &= 3^2 - 3^{-2} = 9 - \frac{1}{9} \\ &= \frac{80}{9} \quad \text{답 } \frac{80}{9} \end{aligned}$$

0116 **전략** 먼저 주어진 등식의 양변을 세제곱하여 $x + x^{-1}$ 의 값을 구한다.

풀이 $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 3$ 의 양변을 세제곱하면

$$x + x^{-1} + 3(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}) = 27$$

$$x + x^{-1} + 3 \times 3 = 27$$

$$\therefore x + x^{-1} = 18 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x + x^{-1} = 18$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2 + x^{-2} + 2 = 324$$

$$\therefore x^2 + x^{-2} = 322 \quad \cdots \textcircled{2}$$

답 322

채점 기준	비율
① $x + x^{-1}$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② $x^2 + x^{-2}$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0117 **전략** 주어진 식의 분모, 분자에 a^{3x} 을 곱한다.

풀이 $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 분모, 분자에 a^{3x} 을 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} &= \frac{a^{3x}(a^{3x} - a^{-3x})}{a^{3x}(a^x + a^{-x})} = \frac{a^{6x} - 1}{a^{4x} + a^{2x}} \\ &= \frac{(a^{2x})^3 - 1}{(a^{2x})^2 + a^{2x}} \\ &= \frac{5^3 - 1}{5^2 + 5} = \frac{62}{15} \quad \text{답 } \textcircled{3} \end{aligned}$$

0118 전략 $a^x=b^y=3^z=k$ ($k>0$)로 놓고 문자 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $a^x=b^y=3^z=k$ ($k>0$)로 놓으면

$$a^x=k \text{에서} \quad a=k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$b^y=k \text{에서} \quad b=k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$3^z=k \text{에서} \quad 3=k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{㉢} \quad \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡} \text{을 하면} \quad ab=k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

$$\textcircled{㉢} \text{의 양변을 제곱하면} \quad 9=(k^{\frac{1}{z}})^2=k^{\frac{2}{z}} \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

$$\text{이때} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z} \text{이므로} \quad k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{2}{z}}$$

$$\therefore ab=9 \quad \rightarrow \textcircled{3}$$

답 9

채점 기준	비율
① $a, b, 3$ 을 k (r 는 유리수) 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
② $ab, 9$ 를 k (r 는 유리수) 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
③ ab 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0119 전략 B, C 를 a^r (r 는 유리수) 꼴로 변형하여 지수 또는 밑을 통일한다.

$$\text{풀이} \quad A=2^{\sqrt{3}}, B=\sqrt[3]{81}=3^{\sqrt[3]{4}}=3^{\frac{4}{3}}, C=\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{2^8}=2^2$$

$$A, C \text{에서} \quad \sqrt{3}<2 \text{이므로} \quad 2^{\sqrt{3}}<2^2$$

$$\therefore A<C$$

B, C 에서

$$B^3=(3^{\frac{4}{3}})^3=3^4=81, C^3=(2^2)^3=2^6=64$$

이므로

$$C^3<B^3 \quad \therefore C<B$$

$$\therefore A<C<B \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0120 전략 주어진 식에 값을 대입하여 I_{20}, I_{12} 를 구한다.

$$\text{풀이} \quad I_{20}=I_0 \times 2^{-\frac{20}{4}}=I_0 \times 2^{-5},$$

$$I_{12}=I_0 \times 2^{-\frac{12}{4}}=I_0 \times 2^{-3} \text{이므로}$$

$$\frac{I_{20}}{I_{12}}=\frac{I_0 \times 2^{-5}}{I_0 \times 2^{-3}}=2^{-2}=\frac{1}{4}$$

따라서 수심이 20 m인 곳에서의 빛의 세기는 수심이 12 m인 곳에서의 빛의 세기의 $\frac{1}{4}$ 배이다. **답** $\frac{1}{4}$ 배

0121 전략 정육면체의 한 모서리의 길이를 x 로 놓고 x 를 a 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 정육면체의 한 모서리의 길이를 x 라 하면 대각선의 길이가 $\sqrt[6]{27a^4}$ 이므로

$$\sqrt{3}x=\sqrt[6]{27a^4}=\sqrt[6]{3^3 \cdot 6^4}=\sqrt[6]{3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^4}=\sqrt[6]{3^7 \cdot 2^4}$$

$$\therefore x=\sqrt[3]{a^2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 부피가 $8a$ 이므로

$$x^3=8a \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$(\sqrt[3]{a^2})^3=8a, \quad a^2=8a$$

$$a(a-8)=0 \quad \therefore a=8 \quad (\because a>0) \quad \text{답 } 8$$

0122 전략 기호 *의 정의를 이용하여 연산의 결과를 식으로 나타낸 후 지수법칙을 이용한다.

$$\text{풀이} \quad \neg, a^2 * \frac{b}{2}=(a^2)^{\frac{b}{2}}=a^b$$

$$=a * b$$

$$\neg, a * (-b)=a^{-b}=(a^{-1})^b=\left(\frac{1}{a}\right)^b$$

$$=\frac{1}{a} * b$$

$$\neg, a * (b+c)=a^{b+c}=a^b \times a^c$$

$$=(a * b) \times (a * c)$$

이상에서 옳은 것은 \neg, \neg 이다.

답 ④

0123 전략 밑을 통일한 후 지수법칙을 이용한다.

$$\text{풀이} \quad x^y=y^x \text{에서} \quad x=y^{\frac{x}{y}}=y^{\frac{3}{4}}$$

$$\text{이때} \quad \frac{x}{y}=\frac{3}{4} \text{에서} \quad x=\frac{3}{4}y \text{이므로} \quad \frac{3}{4}y=y^{\frac{3}{4}}$$

$$\text{양변을 } y \text{로 나누면} \quad y^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore y=(y^{-\frac{1}{4}})^{-4}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}=\left(\frac{4}{3}\right)^4=\frac{256}{81} \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

0124 전략 조건 ④를 이용하여 $a, 2b$ 를 6의 거듭제곱으로 나타낸다.

$$\text{풀이} \quad \text{조건 ④의 } a^{2x}=6 \text{에서} \quad a=6^{\frac{1}{2x}}$$

$$\therefore a^3=6^{\frac{3}{2x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{1}{(2b)^{3y}}=6 \text{에서} \quad 2b=6^{-\frac{1}{3y}}$$

$$\therefore (2b)^2=6^{-\frac{2}{3y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$a^3 \times (2b)^2=6^{\frac{3}{2x}} \times 6^{-\frac{2}{3y}}, \quad 6^{\frac{3}{2x}-\frac{2}{3y}}=4a^3b^2$$

이때 조건 ⑦에서 $a^3b^2=9$ 이므로

$$6^{\frac{3}{2x}-\frac{2}{3y}}=4 \times 9=6^2$$

$$\therefore \frac{3}{2x}-\frac{2}{3y}=2 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0125 전략 Q, H 의 값을 각각 대입하여 S_1, S_2 의 값을 구한 후 지수법칙을 이용한다.

풀이 $Q=28, H=4$ 일 때,

$$S_1=N \times 28^{\frac{1}{2}} \times 4^{-\frac{3}{4}} \quad \rightarrow \textcircled{1}$$

$Q=14, H=8$ 일 때,

$$S_2=N \times 14^{\frac{1}{2}} \times 8^{-\frac{3}{4}} \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{N \times 28^{\frac{1}{2}} \times 4^{-\frac{3}{4}}}{N \times 14^{\frac{1}{2}} \times 8^{-\frac{3}{4}}}=\left(\frac{28}{14}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{4}{8}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{4}}$$

$$=2^{\frac{5}{4}} \quad \rightarrow \textcircled{3}$$

답 $2^{\frac{5}{4}}$

채점 기준	비율
① S_1 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② S_2 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $\frac{S_1}{S_2}$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

02

로그

I. 지수함수와 로그함수

0126 밑: 10, 진수: 2

0127 밑: 25, 진수: 3

0128 밑: $\frac{1}{2}$, 진수: 3

0129 밑: $\sqrt{2}$, 진수: $\frac{1}{100}$

0130 $5 = \log_2 32$

0131 $-2 = \log_3 \frac{1}{9}$

0132 $\frac{1}{2} = \log_{100} 10$

0133 $0 = \log_7 1$

0134 $3^3 = 27$

0135 $9^{\frac{1}{2}} = 3$

0136 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

0137 $(\sqrt{5})^2 = 5$

0138 진수의 조건에서 $x-3 > 0$
 $\therefore x > 3$ $x > 3$

0139 진수의 조건에서 $x^2 - 2x > 0$
 $x(x-2) > 0 \therefore x < 0$ 또는 $x > 2$
 $x < 0$ 또는 $x > 2$

0140 밑의 조건에서 $x+1 > 0, x+1 \neq 1$
 $x > -1, x \neq 0$
 $\therefore -1 < x < 0$ 또는 $x > 0$ $-1 < x < 0$ 또는 $x > 0$

0141 진수의 조건에서 $5-x > 0 \therefore x < 5$ ㉠
 밑의 조건에서 $2x-1 > 0, 2x-1 \neq 1$
 $x > \frac{1}{2}, x \neq 1$
 $\therefore \frac{1}{2} < x < 1$ 또는 $x > 1$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $\frac{1}{2} < x < 1$ 또는 $1 < x < 5$ $\frac{1}{2} < x < 1$ 또는 $1 < x < 5$

0142 $\log_2 4 = x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여
 $2^x = 4 = 2^2 \therefore x = 2$
 $\therefore \log_2 4 = 2$ 2

0143 $\log_3 \frac{1}{3} = x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1} \therefore x = -1$

$\therefore \log_3 \frac{1}{3} = -1$ -1

0144 $\log_{\frac{1}{2}} 8 = x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8, 2^{-x} = 2^3 \therefore x = -3$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ -3

0145 $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3} = x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = \frac{1}{3}$

$2x = 1 \therefore x = \frac{1}{2}$

$\therefore \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

0146 $\log_3 x = 4$ 에서 $3^4 = x$

$\therefore x = 81$ 81

0147 $\log_{\frac{1}{5}} x = -2$ 에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = x$

$\therefore x = 25$ 25

0148 $\log_{11} x = 0$ 에서 $11^0 = x$

$\therefore x = 1$ 1

0149 $\log_x 9 = 2$ 에서 $x^2 = 9$

$\therefore x = 3$ ($\because x > 0$) 3

0150 $\log_x \frac{1}{8} = 3$ 에서 $x^3 = \frac{1}{8}$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

0151 $\log_x \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ 에서 $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

$\therefore x = 5$ 5

0152 0

0153 1

0154 $\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 6 = \log_2 \left(\frac{2}{3} \cdot 6\right) = \log_2 2^2 = 2$ 2

0155 $\log_3 54 - \log_3 2 = \log_3 \frac{54}{2} = \log_3 3^3 = 3$ 3

0156 $\log_{10} 12 = \log_{10} (2^2 \cdot 3) = 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3$
 $= 2a + b$ $2a + b$

0157 $\log_{10} 20 = \log_{10} (2 \cdot 10) = \log_{10} 2 + \log_{10} 10$
 $= a + 1$ $a + 1$

$$\begin{aligned} 0158 \quad \log_{10} \frac{27}{16} &= \log_{10} \frac{3^3}{2^4} = 3 \log_{10} 3 - 4 \log_{10} 2 \\ &= 3b - 4a \end{aligned} \quad \text{답 } 3b - 4a$$

$$\begin{aligned} 0159 \quad \log_{10} 5 &= \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \\ &= 1 - a \end{aligned} \quad \text{답 } 1 - a$$

$$0160 \quad \log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2} = \frac{b}{a} \quad \text{답 } \frac{b}{a}$$

$$0161 \quad \log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3} = \frac{1}{b} \quad \text{답 } \frac{1}{b}$$

$$\begin{aligned} 0162 \quad \log_3 36 &= \frac{\log_5 36}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (2^2 \cdot 3^2)}{\log_5 3} \\ &= \frac{2 \log_5 2 + 2 \log_5 3}{\log_5 3} \\ &= \frac{2a + 2b}{b} = \frac{2a}{b} + 2 \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{2a}{b} + 2$$

다른풀이 $\log_3 36 = \log_3 6^2 = 2 \log_3 6 = 2 \cdot \frac{\log_5 6}{\log_5 3}$
 $= 2 \cdot \frac{\log_5 (2 \cdot 3)}{\log_5 3} = 2 \cdot \frac{\log_5 2 + \log_5 3}{\log_5 3}$
 $= \frac{2(a + b)}{b} = \frac{2a}{b} + 2$

$$\begin{aligned} 0163 \quad \log_6 10 &= \frac{\log_5 10}{\log_5 6} = \frac{\log_5 (2 \cdot 5)}{\log_5 (2 \cdot 3)} \\ &= \frac{\log_5 2 + \log_5 5}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{a + 1}{a + b} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{a + 1}{a + b}$$

$$0164 \quad \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2} \quad \text{답 } \frac{3}{2}$$

$$0165 \quad \log_{27} 9 = \log_{3^3} 3^2 = \frac{2}{3} \log_3 3 = \frac{2}{3} \quad \text{답 } \frac{2}{3}$$

$$0166 \quad \log_{100} \frac{1}{10} = \log_{10^2} 10^{-1} = -\frac{1}{2} \log_{10} 10 = -\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$

$$0167 \quad \log_{0.1} 10 = \log_{10^{-1}} 10^1 = \frac{1}{-1} \log_{10} 10 = -1 \quad \text{답 } -1$$

$$0168 \quad 2^{\log_5 5} - 3^{\log_5 2} = 5^{\log_5 2} - 2^{\log_5 3} = 5 - 2 = 3 \quad \text{답 } 3$$

$$\begin{aligned} 0169 \quad 4^{\log_5 3} \cdot 3^{\log_5 4} &= 3^{\log_5 4} \cdot 4^{\log_5 3} = 3^{\log_5 2^2} \cdot 4^{\log_5 3} \\ &= 3^2 \cdot 4 = 36 \end{aligned} \quad \text{답 } 36$$

$$0170 \quad \log 1000 = \log 10^3 = 3 \quad \text{답 } 3$$

$$0171 \quad \log \sqrt[3]{10000} = \log 10^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \quad \text{답 } \frac{4}{3}$$

$$0172 \quad \log 10\sqrt{10} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \quad \text{답 } \frac{3}{2}$$

$$0173 \quad \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2 \quad \text{답 } -2$$

$$0174 \quad \log \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = \log 10^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \quad \text{답 } -\frac{1}{3}$$

$$0175 \quad \text{답 } 0.3096$$

$$0176 \quad \text{답 } 0.5453$$

$$0177 \quad \text{답 } 0.6599$$

$$0178 \quad \text{답 } 0.9484$$

$$\begin{aligned} 0179 \quad \log 26.1 &= \log (10 \times 2.61) \\ &= \log 10 + \log 2.61 \\ &= 1 + 0.4166 = 1.4166 \end{aligned} \quad \text{답 } 1.4166$$

$$\begin{aligned} 0180 \quad \log 2610 &= \log (10^3 \times 2.61) \\ &= \log 10^3 + \log 2.61 \\ &= 3 + 0.4166 = 3.4166 \end{aligned} \quad \text{답 } 3.4166$$

$$\begin{aligned} 0181 \quad \log 0.0261 &= \log (10^{-2} \times 2.61) \\ &= \log 10^{-2} + \log 2.61 \\ &= -2 + 0.4166 = -1.5834 \end{aligned} \quad \text{답 } -1.5834$$

$$\begin{aligned} 0182 \quad \log 0.00261 &= \log (10^{-3} \times 2.61) \\ &= \log 10^{-3} + \log 2.61 \\ &= -3 + 0.4166 = -2.5834 \end{aligned} \quad \text{답 } -2.5834$$

$$\begin{aligned} 0183 \quad \log 185 &= \log (10^2 \times 1.85) \\ &= \log 10^2 + \log 1.85 \\ &= 2 + 0.2672 = 2.2672 \end{aligned} \quad \text{답 } 2.2672$$

$$\begin{aligned} 0184 \quad \log 18500 &= \log (10^4 \times 1.85) \\ &= \log 10^4 + \log 1.85 \\ &= 4 + 0.2672 = 4.2672 \end{aligned} \quad \text{답 } 4.2672$$

$$\begin{aligned} 0185 \quad \log 0.185 &= \log (10^{-1} \times 1.85) \\ &= \log 10^{-1} + \log 1.85 \\ &= -1 + 0.2672 = -0.7328 \end{aligned} \quad \text{답 } -0.7328$$

$$\begin{aligned} 0186 \quad \log 0.000185 &= \log (10^{-4} \times 1.85) \\ &= \log 10^{-4} + \log 1.85 \\ &= -4 + 0.2672 = -3.7328 \end{aligned} \quad \text{답 } -3.7328$$

0187 $\log_a 2 = 3$ 에서 $a^3 = 2 \quad \therefore a = \sqrt[3]{2}$
 $\log_b 5 = 3$ 에서 $b^3 = 5 \quad \therefore b = \sqrt[3]{5}$
 $\therefore ab = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{10}$

답 ②

라센 특강 거듭제곱근의 성질

$a > 0, b > 0$ 이고 n 이 2 이상의 자연수일 때
 ① $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ② $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

0188 $\log_a 3 = \frac{5}{2}$ 에서 $a^{\frac{5}{2}} = 3$
 $a^{\frac{5}{2}} = 3$ 의 양변을 네제곱하면
 $(a^{\frac{5}{2}})^4 = 3^4 \quad \therefore a^{10} = 81$

답 ④

0189 $x = \log_2 2$ 에서 $3^x = 2$
 $\therefore 3^x + 3^{-x} = 3^x + \frac{1}{3^x} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

다른풀이 $3^x + 3^{-x} = 3^{\log_2 2} + 3^{-\log_2 2} = 2^{\log_2 3} + 2^{-\log_2 3}$
 $= 2 + 2^{-1} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

0190 $\log_6 \{ \log_3 (\log_2 n) \} = 0$ 에서
 $\log_3 (\log_2 n) = 6^0 = 1, \quad \log_2 n = 3^1 = 3$
 $\therefore n = 2^3 = 8$

답 8

0191 밑의 조건에서 $x-1 > 0, x-1 \neq 1$
 $x > 1, x \neq 2$
 $\therefore 1 < x < 2$ 또는 $x > 2$ ㉠
 진수의 조건에서 $-x^2 + 8x - 12 > 0$
 $x^2 - 8x + 12 < 0, \quad (x-2)(x-6) < 0$
 $\therefore 2 < x < 6$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2 < x < 6$
 따라서 정수 x 는 3, 4, 5이다.

답 3, 4, 5

0192 (i) $\log_{x-2}(x-3)^2$ 이 정의되려면
 밑의 조건에서 $x-2 > 0, x-2 \neq 1, \quad x > 2, x \neq 3$
 $\therefore 2 < x < 3$ 또는 $x > 3$ ㉠
 진수의 조건에서 $(x-3)^2 > 0$ 이어야 하므로
 $x \neq 3$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2 < x < 3$ 또는 $x > 3$

(ii) $\log_{7-x}|7-x|$ 가 정의되려면
 밑의 조건에서 $7-x > 0, 7-x \neq 1, \quad x < 7, x \neq 6$
 $\therefore x < 6$ 또는 $6 < x < 7$ ㉢
 진수의 조건에서 $|7-x| > 0$ 이어야 하므로
 $x \neq 7$ ㉣
 ㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $x < 6$ 또는 $6 < x < 7$

(i), (ii)에서
 $2 < x < 3$ 또는 $3 < x < 6$ 또는 $6 < x < 7$
 따라서 정수 x 는 4, 5이므로 구하는 합은 $4+5=9$

답 9

0193 밑의 조건에서 $a > 0, a \neq 1$
 $\therefore 0 < a < 1$ 또는 $a > 1$ ㉠

진수의 조건에서 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + 2ax + 5 > 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $ax^2 + 2ax + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - a \cdot 5 < 0, \quad a(a-5) < 0$
 $\therefore 0 < a < 5$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $0 < a < 1$ 또는 $1 < a < 5$

따라서 정수 a 는 2, 3, 4의 3개이다.

답 3

채점 기준	비율
① 밑의 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
② 진수의 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
③ 정수 a 의 개수를 구할 수 있다.	20 %

라센 특강 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 이 항상 성립할 조건

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 이 성립하려면
 $a > 0, b^2 - 4ac < 0$

0194 $\log_2 12 + \log_2 2\sqrt{3} - \frac{3}{2} \log_2 3$
 $= \log_2 12 + \log_2 2\sqrt{3} - \log_2 3^{\frac{3}{2}}$
 $= \log_2 12 + \log_2 2\sqrt{3} - \log_2 3\sqrt{3}$
 $= \log_2 \frac{12 \cdot 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \log_2 8$
 $= \log_2 2^3 = 3$

답 ①

0195 $\log_2 (\log_3 81) = \log_2 (\log_3 3^4) = \log_2 4$
 $= \log_2 2^2 = 2$

답 ②

0196 $\log_3 2 + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \cdots + \log_3 \frac{27}{26}$
 $= \log_3 \left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{27}{26} \right)$
 $= \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

답 3

0197 $\log_a x = \frac{1}{2}$ 에서 $\frac{1}{\log_x a} = \frac{1}{2} \quad \therefore \log_x a = 2$

$\log_b x = \frac{1}{3}$ 에서 $\frac{1}{\log_x b} = \frac{1}{3} \quad \therefore \log_x b = 3$

$\therefore \frac{1}{\log_{ab} x} = \log_x ab = \log_x a + \log_x b = 5$

답 ④

0198 $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_5 x} = \log_x 3 + \log_x 4 + \log_x 5$
 $= \log_x (3 \cdot 4 \cdot 5)$
 $= \log_x 60 = \frac{1}{\log_{60} x}$

즉 $\frac{1}{\log_{60} x} = \frac{1}{\log_a x}$ 이므로 $a = 60$

답 60

$$\begin{aligned} 0199 \quad \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8 &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 5} \\ &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \frac{3 \log_{10} 2}{\log_{10} 5} \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned} 0200 \quad \log_2 (\log_3 25) + \log_2 (\log_5 49) + \log_2 (\log_7 81) \\ &= \log_2 (\log_3 25 \cdot \log_5 49 \cdot \log_7 81) \\ &= \log_2 \left(\frac{\log_{10} 5^2}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 7^2}{\log_{10} 5} \cdot \frac{\log_{10} 3^4}{\log_{10} 7} \right) \\ &= \log_2 \left(\frac{2 \log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \frac{2 \log_{10} 7}{\log_{10} 5} \cdot \frac{4 \log_{10} 3}{\log_{10} 7} \right) \\ &= \log_2 2^4 = 4 \end{aligned}$$

답 4

$$\begin{aligned} 0201 \quad (2 \log_2 \sqrt{3} + 6 \log_3 2) \cdot \log_3 2\sqrt{2} \\ &= (2 \log_2 3^{\frac{1}{2}} + 6 \log_3 2^{\frac{3}{2}}) \cdot \log_3 2^{\frac{3}{2}} \\ &= (\log_2 3 + 3 \log_2 2) \cdot \frac{3}{4} \log_3 2 \\ &= 4 \log_2 3 \cdot \frac{3}{4} \log_3 2 = 3 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0202 \quad (\log_2 5 + \log_8 25)(\log_3 4 - \log_{25} 8) \\ &= (\log_2 5 + \log_2 5^2)(\log_3 2^2 - \log_5 2^3) \\ &= \left(\log_2 5 + \frac{2}{3} \log_2 5 \right) \left(2 \log_3 2 - \frac{3}{2} \log_5 2 \right) \\ &= \frac{5}{3} \log_2 5 \cdot \frac{1}{2} \log_5 2 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

답 5

$$\begin{aligned} 0203 \quad \log_5 4 - \log_5 3 &= \log_5 \frac{4}{3} \text{ 이므로 } A = 5^{\log_5 \frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \\ B &= \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} + \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_3 3^{-\frac{1}{2}} + \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \\ C &= \log_4 (\log_2 16) = \log_4 (\log_2 2^4) = \log_4 4 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } 1 < \frac{4}{3} < \frac{3}{2} \text{ 이므로 } C < A < B$$

답 ④

$$\begin{aligned} 0204 \quad 3 \log_2 3 - 2 \log_2 15 - 2 \log_{\frac{1}{2}} 5 \\ &= 3 \log_2 3 - 2 \log_2 15 - 2 \log_{2^{-1}} 5 \\ &= 3 \log_2 3 - 2 \log_2 15 + 2 \log_2 5 \\ &= \log_2 3^3 - \log_2 15^2 + \log_2 5^2 \\ &= \log_2 \frac{3^3 \cdot 5^2}{15^2} = \log_2 3 \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= 4^{\log_2 3} = 3^{\log_2 4} = 3^{\log_2 2^2} \\ &= 3^2 = 9 \end{aligned}$$

→ ①

→ ②

답 9

채점 기준	비율
① 주어진 식의 지수를 간단히 할 수 있다.	60 %
② 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

$$\begin{aligned} 0205 \quad \log_a b &= x, \log_c a = y \text{로 놓으면 로그의 정의에 의하여} \\ a^x &= b, c^y = a \text{ 이므로} \\ b &= a^x = (c^y)^x = \boxed{c^{xy}} \end{aligned}$$

따라서 로그의 정의에 의하여 $\log_c b = xy$ 이므로

$$\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$$

$$\text{이때 } \boxed{a \neq 1} \text{에서 } \log_c a \neq 0 \text{ 이므로 } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\therefore \textcircled{7} c^{xy} \quad \textcircled{4} a \neq 1$$

답 ②

$$0206 \quad \log_a M = m, \log_a N = n \text{으로 놓으면 로그의 정의에 의하여} \\ a^m = \boxed{M}, a^n = \boxed{N} \text{ 이므로}$$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n = \boxed{MN}$$

따라서 로그의 정의에 의하여 $\log_a MN = m+n$ 이므로

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\therefore \textcircled{7} M \quad \textcircled{4} N \quad \textcircled{4} MN$$

답 ⑦ M ④ N ④ MN

$$0207 \quad \log_{\frac{1}{7}} 18 = \log_{7^{-1}} (2 \cdot 3^2) = -\log_7 (2 \cdot 3^2)$$

$$= -(\log_7 2 + \log_7 3^2)$$

$$= -(\log_7 2 + 2 \log_7 3)$$

$$= -(a + 2b)$$

$$= -a - 2b$$

답 ①

$$0208 \quad \log_3 10 = a \text{에서 } \log_3 2 + \log_3 5 = a \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$\log_3 \frac{2}{5} = b \text{에서 } \log_3 2 - \log_3 5 = b \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{7} + \textcircled{4} \text{을 하면 } 2 \log_3 2 = a + b$$

$$\therefore \log_3 2 = \frac{a+b}{2}$$

$$\textcircled{7} - \textcircled{4} \text{을 하면 } 2 \log_3 5 = a - b$$

$$\therefore \log_3 5 = \frac{a-b}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore \log_3 50 = \log_3 (2 \cdot 5^2) = \log_3 2 + 2 \log_3 5$$

$$= \frac{a+b}{2} + 2 \cdot \frac{a-b}{2} = \frac{3a-b}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{따라서 } p = \frac{3}{2}, q = -\frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$p + q = 1$$

→ ③

답 1

채점 기준	비율
① $\log_3 2, \log_3 5$ 를 a, b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
② $\log_3 50$ 를 a, b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
③ $p+q$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

$$0209 \quad \log_3 2 = \frac{1}{a}, \log_3 5 = b \text{ 이므로}$$

$$\log_{60} 90 = \frac{\log_3 90}{\log_3 60} = \frac{\log_3 (2 \cdot 3^2 \cdot 5)}{\log_3 (2^2 \cdot 3 \cdot 5)}$$

$$= \frac{\log_3 2 + 2 \log_3 3 + \log_3 5}{2 \log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 5}$$

$$= \frac{\frac{1}{a} + 2 + b}{\frac{2}{a} + 1 + b}$$

$$= \frac{ab + 2a + 1}{ab + a + 2}$$

$$\text{답 } \frac{ab + 2a + 1}{ab + a + 2}$$

0210 $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = \frac{1}{b}$, $\log_7 5 = c$ 이고, $\log_7 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 7}$ 에서

$$\begin{aligned}\log_3 7 &= \frac{\log_3 5}{\log_7 5} = \frac{1}{c} = \frac{1}{bc} \\ \therefore \log_{14} 70 &= \frac{\log_3 70}{\log_3 14} = \frac{\log_3 (2 \cdot 5 \cdot 7)}{\log_3 (2 \cdot 7)} \\ &= \frac{\log_3 2 + \log_3 5 + \log_3 7}{\log_3 2 + \log_3 7} \\ &= \frac{a + \frac{1}{b} + \frac{1}{bc}}{a + \frac{1}{bc}} \\ &= \frac{abc + c + 1}{abc + 1}\end{aligned}$$

답 $\frac{abc + c + 1}{abc + 1}$

0211 $2^a = x$, $2^b = y$ 에서 $\log_2 x = a$, $\log_2 y = b$

$$\begin{aligned}\therefore \log_{xy} xy^3 &= \frac{\log_2 xy^3}{\log_2 xy} = \frac{\log_2 x + 3 \log_2 y}{\log_2 x + \log_2 y} \\ &= \frac{a + 3b}{a + b}\end{aligned}$$

답 ⑤

다른풀이 $2^a = x$, $2^b = y$ 에서

$$\begin{aligned}xy &= 2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}, \quad xy^3 = 2^a \cdot (2^b)^3 = 2^{a+3b} \\ \therefore \log_{xy} xy^3 &= \log_{2^{a+b}} 2^{a+3b} \\ &= \frac{a+3b}{a+b} \log_2 2 = \frac{a+3b}{a+b}\end{aligned}$$

0212 $5^a = 3$ 에서 $\log_5 3 = a$

$$\begin{aligned}\therefore \log_{125} 9 &= \log_{5^3} 3^2 = \frac{2}{3} \log_5 3 = \frac{2}{3} a \\ \therefore p &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

0213 $9^x = a$, $9^y = b$ 에서 $\log_9 a = x$, $\log_9 b = y$

$$\begin{aligned}\log_3 a &= x, \quad \log_3 b = y \\ \frac{1}{2} \log_3 a &= x, \quad \frac{1}{2} \log_3 b = y \\ \therefore \log_3 a &= 2x, \quad \log_3 b = 2y \\ \therefore \log_3 \frac{a^3}{\sqrt{b}} &= 3 \log_3 a - \frac{1}{2} \log_3 b = 3 \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot 2y \\ &= 6x - y\end{aligned}$$

따라서 $p = 6$, $q = -1$ 이므로 $pq = -6$

답 ③

0214 $16^x = 81^y = 36$ 에서 $x = \log_{16} 36$, $y = \log_{81} 36$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{\log_{16} 36} + \frac{1}{\log_{81} 36} \\ &= \log_{36} 16 + \log_{36} 81 \\ &= \log_{6^2} (2^4 \cdot 3^4) \\ &= \log_{6^2} 6^4 \\ &= 2\end{aligned}$$

답 ④

다른풀이 $16^x = 36$ 에서 $16 = 36^{\frac{1}{x}}$

$$2^4 = 6^{\frac{2}{x}} \quad \therefore 2 = 6^{\frac{1}{2x}} \quad \dots\dots ㉠$$

$81^y = 36$ 에서 $81 = 36^{\frac{1}{y}}$

$$3^4 = 6^{\frac{2}{y}} \quad \therefore 3 = 6^{\frac{1}{2y}} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠ \times ㉡을 하면 $6 = 6^{\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}}$

따라서 $1 = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}$ 이므로 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$

0215 $15^a = 25$ 에서 $a = \log_{15} 25 = \log_{15} 5^2 = 2 \log_{15} 5$

$$\therefore \frac{2}{a} = \frac{1}{\log_{15} 5} = \log_5 15 \quad \dots\dots ㉠$$

$3^b = 125$ 에서 $b = \log_3 125 = \log_3 5^3 = 3 \log_3 5$

$$\therefore \frac{3}{b} = \frac{1}{\log_3 5} = \log_5 3 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\therefore \frac{2}{a} - \frac{3}{b} = \log_5 15 - \log_5 3 = \log_5 5 = 1 \quad \dots\dots ㉢$$

답 1

채점 기준	비율
① $\frac{2}{a}$ 를 로그로 나타낼 수 있다.	40 %
② $\frac{3}{b}$ 를 로그로 나타낼 수 있다.	40 %
③ $\frac{2}{a} - \frac{3}{b}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0216 $a^p = b^q = c^r = 165^s = k$ ($k > 0$, $k \neq 1$)로 놓으면

$$p = \log_a k, \quad q = \log_b k, \quad r = \log_c k, \quad s = \log_{165} k$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s}$ 에서

$$\frac{1}{\log_a k} + \frac{1}{\log_b k} + \frac{1}{\log_c k} = \frac{1}{\log_{165} k}$$

$$\log_k a + \log_k b + \log_k c = \log_k 165$$

$$\log_k abc = \log_k 165 \quad \therefore abc = 165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$$

이때 a, b, c 는 자연수이고 $p \neq 0$, $q \neq 0$, $r \neq 0$, $s \neq 0$ 이므로

$$a = 11, \quad b = 5, \quad c = 3 \quad (\because a > b > c)$$

$$\therefore a + b + c = 19 \quad \dots\dots ㉠$$

0217 $\log_9 x^2 + \log_3 y = 1$ 에서 $\log_3 x^2 + \log_3 y = 1$

$$\therefore \log_3 x + \log_3 y = 1$$

$$\therefore 3^{\log_3 x} \cdot 9^{\log_3 y} = 3^{\log_3 x} \cdot (3^2)^{\log_3 y} = 3^{2 \log_3 x} \cdot 3^{2 \log_3 y}$$

$$= 3^{2(\log_3 x + \log_3 y)}$$

$$= 3^2 = 9$$

답 9

0218 $\log_b a : \log_b c = 1 : 2$ 에서 $2 \log_b a = \log_b c$

$$\log_b a^2 = \log_b c \quad \therefore c = a^2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\therefore \log_a c + \log_c a = \log_a a^2 + \log_{a^2} a$$

$$= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
① a 와 c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
② $\log_a c + \log_c a$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0219 $a^4 b = 1$ 의 양변에 a 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_a a^4 b = \log_a 1, \quad \log_a a^4 + \log_a b = 0$$

$$4 + \log_a b = 0 \quad \therefore \log_a b = -4$$

$$\begin{aligned}\therefore \log_a a^2 b^3 &= \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2 + 3 \log_a b \\ &= 2 + 3 \cdot (-4) \\ &= -10\end{aligned}$$

답 ①

다른풀이 $a^4 b = 1$ 에서 $b = \frac{1}{a^4} = a^{-4}$

$$\begin{aligned}\therefore \log_a a^2 b^3 &= \log_a \{a^2 \cdot (a^{-4})^3\} = \log_a a^{-10} \\ &= -10\end{aligned}$$

0220 $\log_2 a + \log_2 c = \log_{\sqrt{2}} b$ 에서

$$\log_2 ac = \log_2 b^2 \quad \therefore b^2 = ac \quad \dots\dots ㉠$$

$$\begin{aligned}\therefore \log_2 (a+b) + \log_2 (b-c) - \log_2 (a-b) - \log_2 (b+c) \\ &= \log_2 \frac{(a+b)(b-c)}{(a-b)(b+c)} \\ &= \log_2 \frac{ab-ac+b^2-bc}{ab+ac-b^2-bc} \\ &= \log_2 \frac{ab-bc}{ab-bc} \quad (\because ㉠) \\ &= \log_2 1 = 0\end{aligned}$$

답 0

0221 $a^4 = b^3$ 에서 $b = (a^4)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3}}$

$$\therefore A = \log_a a^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$$

$b^3 = c^7$ 에서 $c = (b^3)^{\frac{1}{7}} = b^{\frac{3}{7}}$

$$\therefore B = \log_b b^{\frac{3}{7}} = \frac{3}{7}$$

$a^4 = c^7$ 에서 $a = (c^7)^{\frac{1}{4}} = c^{\frac{7}{4}}$

$$\therefore C = \log_c c^{\frac{7}{4}} = \frac{7}{4}$$

이때 $\frac{3}{7} < \frac{4}{3} < \frac{7}{4}$ 이므로

$$B < A < C$$

답 ③

0222 $\log_3 9 < \log_3 15 < \log_3 27$ 에서 $2 < \log_3 15 < 3$ 이므로

$$a = \log_3 15 - 2 = \log_3 15 - \log_3 9 = \log_3 \frac{5}{3}$$

$$\therefore 3^a = 3^{\log_3 \frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$$

답 ⑤

0223 $\log_2 16 < \log_2 30 < \log_2 32$ 에서 $4 < \log_2 30 < 5$ 이므로

$$a = 4,$$

$$b = \log_2 30 - 4 = \log_2 30 - \log_2 16 = \log_2 \frac{15}{8}$$

$$\therefore 8(3^a + 2^b) = 8(3^4 + 2^{\log_2 \frac{15}{8}})$$

$$= 8\left(81 + \frac{15}{8}\right) = 663$$

답 ④

0224 $\log_5 5 < \log_5 10 < \log_5 25$ 에서 $1 < \log_5 10 < 2$ 이므로

$$x = 1,$$

$$y = \log_5 10 - 1 = \log_5 10 - \log_5 5 = \log_5 2$$

→ ①

$$\therefore \frac{5^y - 5^{-y}}{5^x + 5^{-x}} = \frac{5^{\log_5 2} - 5^{-\log_5 2}}{5 + 5^{-1}} = \frac{2 - 2^{-1}}{5 + 5^{-1}}$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{2}}{5 + \frac{1}{5}} = \frac{15}{52}$$

→ ②

답 $\frac{15}{52}$

채점 기준	비율
① x, y 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② $\frac{5^y - 5^{-y}}{5^x + 5^{-x}}$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0225 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 6, \quad \alpha\beta = 3$$

$$\begin{aligned}\therefore \log_{\alpha+\beta} 2\alpha + \log_{\alpha+\beta} \beta &= \log_{\alpha+\beta} 2\alpha\beta \\ &= \log_6 (2 \cdot 3) = 1\end{aligned}$$

답 1

0226 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5, \quad \alpha\beta = 2$$

$$\therefore \log_{\alpha+\beta} \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \log_{\alpha+\beta} \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= \log_{\alpha+\beta} \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= \log_{\alpha+\beta} \left(\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2\right)$$

$$= \log_5 \left(2 + \frac{1}{2} + 2\right) = \log_5 \frac{9}{2}$$

답 ②

0227 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2 \log_2 3, \quad \alpha\beta = 2$$

$$\begin{aligned}\therefore 2^{(\alpha+1)(\beta+1)} &= 2^{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = 2^{2 + 2 \log_2 3 + 1} \\ &= 2^{\log_2 9} \cdot 2^3 \\ &= 9 \cdot 8 = 72\end{aligned}$$

답 72

0228 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 a + \log_3 b = 4, \quad \log_3 a \cdot \log_3 b = 1$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a = \frac{\log_3 b}{\log_3 a} + \frac{\log_3 a}{\log_3 b}$$

$$= \frac{(\log_3 a)^2 + (\log_3 b)^2}{\log_3 a \cdot \log_3 b}$$

$$= \frac{(\log_3 a + \log_3 b)^2 - 2 \log_3 a \cdot \log_3 b}{\log_3 a \cdot \log_3 b}$$

$$= \frac{4^2 - 2 \cdot 1}{1} = 14$$

답 14

0229 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + \log_3 4 = -a, \quad 1 \cdot \log_3 4 = b$$

$$\begin{aligned}\therefore a &= -(1 + \log_3 4) = -(\log_3 3 + \log_3 4) = -\log_3 12, \\ b &= \log_3 4\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{-\log_3 12}{\log_3 4} = -\log_4 12$$

답 ①

0230 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \log_2 a + \log_2 b &= 3, \quad \log_2 a \cdot \log_2 b = k \\ \log_2 a + \log_2 b &= 3 \text{에서} \quad \log_2 ab = 3 \\ \therefore ab &= 2^3 = 8 \\ \text{이때 } a + b &= 6 \text{에서 } b = 6 - a \text{이므로} \\ a(6 - a) &= 8, \quad a^2 - 6a + 8 = 0 \\ (a - 2)(a - 4) &= 0 \quad \therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 4 \\ \text{즉 } a = 2, b = 4 \text{ 또는 } a = 4, b = 2 \text{이므로} \\ k &= \log_2 2 \cdot \log_2 4 = 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

답 2

0231 ① $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$

② $\log \frac{1}{16} = \log 2^{-4} = -4 \log 2 = -4 \times 0.3010 = -1.2040$

③ $\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \times 0.3010 = 0.9030$

④ $\log 20 = \log (10 \times 2) = \log 10 + \log 2 = 1 + 0.3010 = 1.3010$

⑤ $\log 0.2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - 1 = 0.3010 - 1 = -0.6990$

답 ⑤

0232 상용로그표에서 $\log 6.91 = 0.8395$ 이므로

$$\begin{aligned} \log \sqrt[5]{69.1} &= \frac{1}{5} \log (10 \times 6.91) \\ &= \frac{1}{5} (\log 10 + \log 6.91) \\ &= \frac{1}{5} (1 + 0.8395) = 0.3679 \end{aligned}$$

답 0.3679

0233 $a = \log 3430 = \log (10^3 \times 3.43) = \log 10^3 + \log 3.43$
 $= 3 + 0.5353 = 3.5353$... ①

한편 $\log b = -0.4647$ 에서

$$\begin{aligned} \log b &= -1 + 0.5353 = \log 10^{-1} + \log 3.43 \\ &= \log (10^{-1} \times 3.43) = \log 0.343 \\ \therefore b &= 0.343 \quad \dots ② \\ \therefore a + b &= 3.8783 \quad \dots ③ \end{aligned}$$

답 3.8783

채점 기준	비율
① a의 값을 구할 수 있다.	40 %
② b의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ a + b의 값을 구할 수 있다.	20 %

0234 $\log 27.9 = 1.4456$ 에서

$$\begin{aligned} \log (10 \times 2.79) &= 1.4456, \quad 1 + \log 2.79 = 1.4456 \\ \therefore \log 2.79 &= 0.4456 \end{aligned}$$

한편 $\log x = -1.5544$ 에서

$$\begin{aligned} \log x &= -2 + 0.4456 = \log 10^{-2} + \log 2.79 \\ &= \log (10^{-2} \times 2.79) = \log 0.0279 \\ \therefore x &= 0.0279 \end{aligned}$$

답 0.0279

0235 3등급인 별의 밝기를 I_1 이라 하면

$$3 = -\frac{5}{2} \log I_1 + C \quad \dots ①$$

8등급인 별의 밝기를 I_2 라 하면

$$8 = -\frac{5}{2} \log I_2 + C \quad \dots ②$$

①-②을 하면

$$-5 = -\frac{5}{2} (\log I_1 - \log I_2), \quad -5 = -\frac{5}{2} \log \frac{I_1}{I_2}$$

$$\log \frac{I_1}{I_2} = 2 \quad \therefore \frac{I_1}{I_2} = 10^2 = 100$$

따라서 3등급인 별의 밝기는 8등급인 별의 밝기의 100배이다.

답 ④

0236 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $R^{\frac{26}{23}}$ 만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 $\frac{1}{2}v_c$ 이므로

$$\frac{v_c}{\frac{1}{2}v_c} = 1 - k \log \frac{R^{\frac{26}{23}}}{R}, \quad 2 = 1 - k \log R^{\frac{3}{23}}$$

$$\frac{3}{23} k \log R = -1 \quad \therefore k \log R = -\frac{23}{3} \quad \dots ①$$

급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 R^a 만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 $\frac{1}{4}v_c$ 이므로

$$\frac{v_c}{\frac{1}{4}v_c} = 1 - k \log \frac{R^a}{R}, \quad 4 = 1 - k \log R^{a-1}$$

$$(a-1)k \log R = -3, \quad -\frac{23}{3}(a-1) = -3 \quad (\because ①)$$

$$a-1 = \frac{9}{23} \quad \therefore a = 1 + \frac{9}{23} = \frac{32}{23} \quad \dots ②$$

0237 페로몬을 분비한 후 1초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 3인 곳에서 측정된 페로몬의 농도가 a 이므로

$$\begin{aligned} \log a &= A - \frac{1}{2} \log 1 - 3^2 K \\ &= A - 9K \end{aligned}$$

① ... ①

페로몬을 분비한 후 9초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 d 인 곳에서 측정된 페로몬의 농도가 $\frac{a}{3}$ 이므로

$$\log \frac{a}{3} = A - \frac{1}{2} \log 9 - \frac{Kd^2}{9}$$

$$\log a - \log 3 = A - \log 3 - \frac{Kd^2}{9}$$

$$\therefore \log a = A - \frac{Kd^2}{9} \quad \dots ②$$

①, ②에서

$$A - 9K = A - \frac{Kd^2}{9}$$

$$9K = \frac{Kd^2}{9}, \quad d^2 = 9^2$$

$$\therefore d = 9 \quad (\because d \geq 0) \quad \dots ③$$

답 9

채점 기준	비율
① 페로몬을 분비한 후 1초가 지났을 때의 식을 간단히 할 수 있다.	40 %
② 페로몬을 분비한 후 9초가 지났을 때의 식을 간단히 할 수 있다.	40 %
③ d의 값을 구할 수 있다.	20 %

0238 올해 생산량을 A , 생산량의 증가율을 $a\%$ 라 하면

$$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^{10}=2A \quad \therefore \left(1+\frac{a}{100}\right)^{10}=2$$

양변에 상용로그를 취하면

$$10\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log 2$$

$$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{1}{10}\log 2=\frac{1}{10}\times 0.3=0.03$$

이때 $\log 1.07=0.03$ 이므로

$$1+\frac{a}{100}=1.07 \quad \therefore a=7$$

따라서 생산량을 매년 7% 씩 증가시켜야 한다. 답 ⑤

0239 처음 빛의 밝기를 A , 통과시킨 유리판의 장수를 n 이라 하면

$$A\left(1-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{8}A \quad \therefore \left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{8}$$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log \frac{2}{3}=\log \frac{1}{8}$

$$n(\log 2-\log 3)=-3\log 2$$

$$n(0.3-0.48)=-3\times 0.3$$

$$\therefore n=\frac{-0.9}{-0.18}=5$$

따라서 5장의 유리판을 통과시켜야 한다. 답 ④

0240 $\log 2.3^9=9\log 2.3=9\times 0.3617=\boxed{3.2553}$

$\log 1.8=0.2553$ 이므로

$$\log 2.3^9=3+0.2553=3+\log 1.8$$

$$=\log (10^3\times 1.8)=\log \boxed{1800}$$

따라서 $2.3^9=1800$ 이다.

$$\therefore \textcircled{가} 3.2553 \quad \textcircled{나} 1800$$

답 가) 3.2553 나) 1800

0241 10마리의 세균을 5시간, 즉 300분 동안 배양하면 전체 세균은 10×2^{30} 마리이다.

이때

$$\log (10\times 2^{30})=1+30\log 2=1+30\times 0.3=10$$

이므로 $10\times 2^{30}=10^{10}$

따라서 5시간 후의 세균은 10^{10} 마리이므로

$$k=10$$

답 10

라벤
특강

일정한 비율로 증가하는 개체의 수

처음 수가 a 인 세균이 10분마다 2배로 증가할 때

10분 후 세균의 수는 $2a$

20분 후 세균의 수는 $2\cdot 2a=2^2a$

30분 후 세균의 수는 $2\cdot 2^2a=2^3a$

\vdots \vdots

10n분 후 세균의 수는 $2\cdot 2^{n-1}a=2^na$

0242 **전략** (밀) >0 , (밀) $\neq 1$, (진수) >0 임을 이용한다.

풀이 밀의 조건에서 $x+1>0$, $x+1\neq 1$

$$x>-1, x\neq 0$$

$$\therefore -1<x<0 \text{ 또는 } x>0$$

..... ㉠ \rightarrow ①

진수의 조건에서 $-x^2+4x+5>0$

$$x^2-4x-5<0, \quad (x+1)(x-5)<0$$

$$\therefore -1<x<5$$

..... ㉡ \rightarrow ②

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-1<x<0 \text{ 또는 } 0<x<5$$

따라서 정수 x 는 1, 2, 3, 4의 4개이다. ③

답 4

채점 기준	비율
① 밀의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
② 진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ 정수 x 의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0243 **전략** 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 ① $\log_6 12+\log_6 3=\log_6 (12\cdot 3)=\log_6 36$
 $=\log_6 6^2=2$

② $\log_2 1+\log_2 2+\log_2 4=0+1+2=3$

③ $\log_2 24-\frac{1}{\log_3 2}=\log_2 24-\log_2 3=\log_2 \frac{24}{3}$
 $=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

④ $\log_{\sqrt{5}} 5+\log_9 3=\log_{5^{\frac{1}{2}}} 5+\log_{3^2} 3=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

⑤ $\log_4 (\log_5 3)+\log_4 (\log_9 5)=\log_4 (\log_5 3\cdot \log_9 5)$
 $=\log_4 \left(\frac{1}{2}\log_5 3\cdot \log_3 5\right)$
 $=\log_4 \frac{1}{2}=\log_{2^2} 2^{-1}$
 $=-\frac{1}{2}$ ③

답 ③

0244 **전략** 로그의 밑의 변환 공식을 이용한다.

풀이 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{\log_2 5}{\log_3 5}$
 $=\frac{\log_5 3}{\log_5 2}$
 $=\log_2 3$ ④

답 ④

0245 **전략** $\log_9 150$ 을 밑이 5인 로그를 사용하여 변형한다.

풀이 $\log_9 150=\frac{\log_5 150}{\log_5 9}=\frac{\log_5 (2\cdot 3\cdot 5^2)}{\log_5 3^2}$
 $=\frac{\log_5 2+\log_5 3+2\log_5 5}{2\log_5 3}$
 $=\frac{a+b+2}{2b}$ $\frac{a+b+2}{2b}$

답 $\frac{a+b+2}{2b}$

0246 **전략** 로그의 성질을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\log_{\sqrt{3}} a=\log_9 ab$ 에서

$$2\log_3 a=\frac{1}{2}\log_3 ab, \quad 2\log_3 a=\frac{1}{2}(\log_3 a+\log_3 b)$$

$$4\log_3 a=\log_3 a+\log_3 b, \quad 3\log_3 a=\log_3 b$$

$$\log_3 a^3=\log_3 b \quad \therefore a^3=b$$

$$\therefore \log_a b=\log_a a^3=3$$

..... ③

0247 **전략** 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} a\beta &= 1 \quad \therefore \beta = \frac{1}{a} \\ \therefore \log_a \beta &= \log_a \frac{1}{a} = \log_a a^{-1} = -1 \end{aligned}$$

답 ②

0248 **전략** 로그의 정의를 이용하여 10^a 를 구한 후 $10^{-a} = \frac{1}{10^a}$ 임을 이용한다.

풀이 $a = \log(1 + \sqrt{2})$ 에서

$$10^a = 1 + \sqrt{2}$$

이므로

$$\begin{aligned} 10^{-a} &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \sqrt{2} - 1 \\ \therefore \frac{10^a + 10^{-a}}{10^a - 10^{-a}} &= \frac{1 + \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)}{1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

답 ③

0249 **전략** (진수) > 0임을 이용한다.

풀이 $\log_2(x-2) + \log_2(4-x)$ 가 정의되려면

$$x-2 > 0, 4-x > 0$$

$$\therefore 2 < x < 4$$

→ ①

따라서 $x-1 > 0, x-5 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} |x-1| + |x-5| &= x-1 - (x-5) \\ &= 4 \end{aligned}$$

→ ②

답 4

채점 기준	비율
① x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
② $ x-1 + x-5 $ 를 간단히 할 수 있다.	40 %

0250 **전략** 로그의 성질을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\log_5(a^2 + b^2) - \log_5(a-b) = \log_5(a+2b)$ 에서

$$\log_5 \frac{a^2 + b^2}{a-b} = \log_5(a+2b) \text{ 이므로}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a-b} = a+2b, \quad a^2 + b^2 = (a-b)(a+2b)$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + ab - 2b^2, \quad 3b^2 - ab = 0$$

$$b > 0 \text{ 이므로 } 3b - a = 0$$

$$\therefore a = 3b$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3b}{b} = 3$$

답 3

0251 **전략** $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ 임을 이용한다.

$$\text{풀이 } \log_9 2 + \log_9 3 = \log_9 6 = \frac{1}{2} \log_3 6,$$

$$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= (3^{\frac{1}{2} \log_3 6})^2 + (2^{\log_2 15})^{\log_2 4} \\ &= 3^{\log_3 6} + 2^{2 \log_2 15 \cdot \log_2 2} \\ &= 6 + 2^2 = 10 \end{aligned}$$

답 ①

0252 **전략** 로그의 정의와 성질을 이용한다.

풀이 $a^{\log_b c} = x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$$\boxed{\log_a x} = \log_b c$$

$$\text{이때 } \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}, \log_b c = \frac{1}{\log_c b} \text{ 이므로}$$

$$\frac{\log_c x}{\log_c a} = \frac{1}{\log_c b}$$

$$\therefore \log_c x = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$$

따라서 로그의 정의에 의하여 $x = c^{\log_b a}$ 이므로

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$\therefore (\text{㉞}) \log_a x \quad (\text{㉝}) \log_c a \quad (\text{㉜}) \log_c b$$

답 풀이 참조

0253 **전략** $a^m = k$ 이면 $\log_a k = m$ 이므로 $\log_a a = \frac{1}{m}$ 임을 이용한다.

풀이 $a^m = 7, b^n = 7$ 에서 $\log_a 7 = m, \log_b 7 = n$

$$\therefore \log_7 a = \frac{1}{m}, \log_7 b = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \log_{ab} a^3 = \frac{\log_7 a^3}{\log_7 ab} = \frac{3 \log_7 a}{\log_7 a + \log_7 b}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{3}{m}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = \frac{3n}{m+n} \end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이 $a^m = 7, b^n = 7$ 에서 $a = 7^{\frac{1}{m}}, b = 7^{\frac{1}{n}}$

$$\therefore \log_{ab} a^3 = \log_{7^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} 7^{\frac{3}{m}} = \frac{\frac{3}{m}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \log_7 7 = \frac{3n}{m+n}$$

0254 **전략** x, y 를 로그를 이용하여 나타낸 후 주어진 식에 대입한다.

풀이 $2^x = 24$ 에서

$$x = \log_2 24 = \log_2(2^3 \cdot 3) = 3 + \log_2 3$$

$$\therefore x - 3 = \log_2 3$$

$3^y = 24$ 에서

$$y = \log_3 24 = \log_3(2^3 \cdot 3) = 3 \log_3 2 + 1$$

$$\therefore y - 1 = 3 \log_3 2$$

$$\begin{aligned} \therefore (x-3)(y-1) &= \log_2 3 \cdot 3 \log_3 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 ③

0255 **전략** 로그의 정의를 이용하여 a, b 를 각각 c 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\log_a c = \frac{1}{2}$ 에서 $a^{\frac{1}{2}} = c$

$$\therefore a = c^2$$

→ ①

$\log_b c = \frac{1}{5}$ 에서 $b^{\frac{1}{5}} = c$

$$\therefore b = c^5$$

→ ②

$$\therefore 2 \log_a b + 5 \log_b c + \log_c a$$

$$= 2 \log_{c^2} c^5 + 5 \log_{c^5} c + \log_c c^2$$

$$= 2 \cdot \frac{5}{2} + 5 \cdot \frac{1}{5} + 2 = 8$$

→ ③

답 8

채점 기준	비율
① a 를 c 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② b 를 c 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
③ 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

0256 **전략** 정수 m 에 대하여 $m < \log_a b < m+1$ 이면 $\log_a b$ 의 정수 부분은 m 임을 이용한다.

풀이 $\log_4 16 < \log_4 18 < \log_4 64$ 이므로

$$\log_4 4^2 < \log_4 18 < \log_4 4^3$$

$$\therefore 2 < \log_4 18 < 3$$

따라서 $\log_4 18$ 의 정수 부분이 2이므로 $y=2$

$$\therefore 2^{2x} + 2^y = 4^x + 2^y = 4^{\log_4 18} + 2^2$$

$$= 18 + 4 = 22 \quad \text{답 ②}$$

0257 **전략** $\log x^2 - \log \sqrt{x}$ 를 간단히 한 후 그 값이 정수임을 이용한다.

풀이 $\log x^2 - \log \sqrt{x} = 2 \log x - \frac{1}{2} \log x = \frac{3}{2} \log x \quad \dots ①$

$100 < x < 1000$ 에서 $2 < \log x < 3$

$$\therefore 3 < \frac{3}{2} \log x < \frac{9}{2} \quad \dots ②$$

이때 $\frac{3}{2} \log x$ 가 정수이므로

$$\frac{3}{2} \log x = 4 \quad \therefore \log x = \frac{8}{3} \quad \dots ③$$

답 $\frac{8}{3}$

채점 기준	비율
① $\log \sqrt{x}$ 와 $\log x^2$ 의 차를 간단히 할 수 있다.	30 %
② $\frac{3}{2} \log x$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ $\log x$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0258 **전략** A 가 매년 $a\%$ 씩 증가할 때 n 년 후에는 $A\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n$ 이 된다.

풀이 올해 판매량을 A 라 하고, n 년 후의 판매량이 올해 판매량의 3배가 된다고 하면

$$A(1+0.05)^n = 3A, \quad 1.05^n = 3$$

양변에 상용로그를 취하면 $n \log 1.05 = \log 3$

$$\therefore n = \frac{\log 3}{\log 1.05} = \frac{0.48}{0.02} = 24$$

따라서 판매량이 올해 판매량의 3배가 되는 것은 24년 후이다.

답 24년

0259 **전략** 로그의 성질을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 세운다.

풀이 $\log_a(b+c) + \log_a(b-c) = 2$ 에서

$$\log_a(b+c)(b-c) = 2, \quad \log_a(b^2 - c^2) = 2$$

이므로 $a^2 = b^2 - c^2$

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형이다.

답 ⑤

0260 **전략** n 의 값의 범위를 나누어 $[\log n]$ 의 값을 구한다.

풀이 (i) $1 \leq n < 10$ 일 때,

$$\log 1 \leq \log n < \log 10 \text{이므로}$$

$$0 \leq \log n < 1 \quad \therefore [\log n] = 0$$

(ii) $10 \leq n \leq 50$ 일 때,

$$\log 10 \leq \log n \leq \log 50 < \log 100 \text{이므로}$$

$$1 \leq \log n < 2 \quad \therefore [\log n] = 1$$

(i), (ii)에서

$$[\log 1] + [\log 2] + [\log 3] + \dots + [\log 50]$$

$$= 0 \cdot 9 + 1 \cdot 41 = 41 \quad \text{답 ②}$$

0261 **전략** 로그의 정의를 이용하여 x 의 값을 구한다.

풀이 $2.72^x = 20100$ 이므로 로그의 정의에 의하여

$$x = \log_{2.72} 20100 \quad \dots ①$$

$$= \frac{\log 20100}{\log 2.72}$$

$$= \frac{\log(10^4 \times 2.01)}{\log 2.72}$$

$$= \frac{4 + \log 2.01}{\log 2.72} = \frac{4 + 0.3}{0.43}$$

$$= \frac{4.3}{0.43} = 10 \quad \dots ②$$

따라서 빠르게 계산하면

$$2.72x = 2.72 \times 10 = 27.2 \quad \dots ③$$

답 27.2

채점 기준	비율
① $x = \log_{2.72} 20100$ 임을 알 수 있다.	20 %
② x 의 값을 구할 수 있다.	60 %
③ 빠르게 계산한 답을 구할 수 있다.	20 %

0262 **전략** H_A, H_B 에 대한 식을 세운 후, $\sqrt{3}H_A = 2H_B$,

$L_A = 2L_B$ 임을 이용하여 S_A 와 S_B 사이의 관계식을 구한다.

풀이 A 지역의 헤이즈계수가 H_A , 여과지 이동거리가 L_A , 빛전달률이 S_A 이므로

$$H_A = \frac{k}{L_A} \log \frac{1}{S_A}$$

B 지역의 헤이즈계수가 H_B , 여과지 이동거리가 L_B , 빛전달률이 S_B 이므로

$$H_B = \frac{k}{L_B} \log \frac{1}{S_B}$$

$$\sqrt{3}H_A = 2H_B \text{에서} \quad \frac{\sqrt{3}k}{L_A} \log \frac{1}{S_A} = \frac{2k}{L_B} \log \frac{1}{S_B}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{L_A} \log \frac{1}{S_A} = \frac{2}{L_B} \log \frac{1}{S_B}$$

이때 $L_A = 2L_B$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2L_B} \log \frac{1}{S_A} = \frac{2}{L_B} \log \frac{1}{S_B}, \quad -\sqrt{3} \log S_A = -4 \log S_B$$

$$\frac{\log S_A}{\log S_B} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \quad \log_{S_B} S_A = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore S_A = (S_B)^{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

$$\therefore p = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \text{답 ②}$$

03

지수함수

I. 지수함수와 로그함수

0263 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

0264 $f(0)=5^0=1$

답 1

0265 $f(2)=5^2=25$

답 25

0266 $f(-1)=5^{-1}=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

0267 $\frac{f(1)}{f(-2)}=\frac{5^1}{5^{-2}}=5^{1-(-2)}=5^3=125$

답 125

0268 $f(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$

답 1

0269 $f(4)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

답 $\frac{1}{81}$

0270 $f(-2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=(3^{-1})^{-2}=3^2=9$

답 9

0271 $f(-1)f(3)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1+3}$
 $=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

답 $\frac{1}{9}$

0272 답 ○

0273 치역은 $\{y|y \text{는 양의 실수}\}$ 이다.

답 ×

0274 답 ○

0275 답 ○

0276 그래프의 점근선은 x 축이다.

답 ×

0277 $-2 < -1$ 이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

답 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

0278 $\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$ 이고, $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ 이다.

이때 함수 $y=3^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$3^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{2}{3}} \quad \therefore \sqrt{3} < \sqrt[3]{3^2}$

답 $\sqrt{3} < \sqrt[3]{3^2}$

0279 $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$ 이고, $0.3 < \frac{1}{3}$ 이다.

이때 함수 $y=5^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$5^{0.3} < 5^{\frac{1}{3}} \quad \therefore 5^{0.3} < \sqrt[3]{5}$

답 $5^{0.3} < \sqrt[3]{5}$

0280 $\sqrt{\frac{1}{7}}=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$ 이고, $-1 < \frac{1}{2}$ 이다.

이때 함수 $y=\left(\frac{1}{7}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{7}\right)^{-1} \quad \therefore \sqrt{\frac{1}{7}} < \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$

답 $\sqrt{\frac{1}{7}} < \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$

0281 답 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}-1$

0282 $-y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 에서 $y=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$

답 $y=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$

0283 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$ 에서 $y=(5^{-1})^{-x} \quad \therefore y=5^x$

답 $y=5^x$

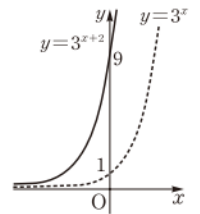
0284 $-y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$ 에서 $y=-(5^{-1})^{-x} \quad \therefore y=-5^x$

답 $y=-5^x$

0285 $y=3^{x+2}$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

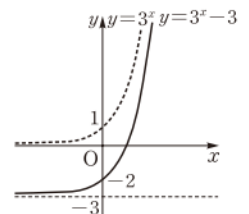
따라서 치역은 $\{y|y > 0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.

답 풀이 참조



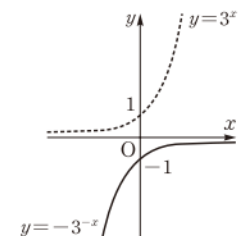
0286 $y=3^x-3$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 따라서 치역은 $\{y|y > -3\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y=-3$ 이다.

답 풀이 참조



0287 $y=-3^{-x}$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 따라서 치역은 $\{y|y < 0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.

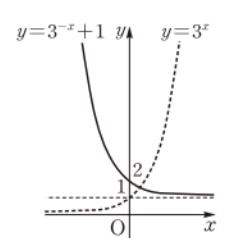
답 풀이 참조



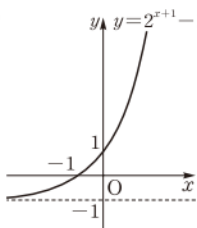
0288 $y=3^{-x}+1$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y|y > 1\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y=1$ 이다.

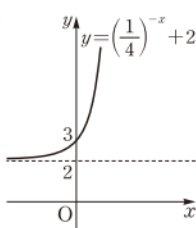
답 풀이 참조



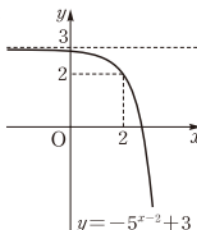
0289



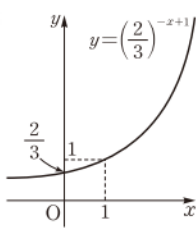
0290



0291



0292



0293 함수 $y=10^x$ 에서

$$x=-2\text{일 때, } y=10^{-2}=\frac{1}{100}$$

$$x=1\text{일 때, } y=10^1=10$$

따라서 최댓값은 10, 최솟값은 $\frac{1}{100}$ 이다.

답 최댓값: 10, 최솟값: $\frac{1}{100}$

0294 함수 $y=5^{-x}$ 에서

$$x=-4\text{일 때, } y=5^4=625$$

$$x=-1\text{일 때, } y=5^1=5$$

따라서 최댓값은 625, 최솟값은 5이다.

답 최댓값: 625, 최솟값: 5

0295 함수 $y=6^{x+2}-2$ 에서

$$x=-3\text{일 때, } y=6^{-3+2}-2=-\frac{11}{6}$$

$$x=0\text{일 때, } y=6^{0+2}-2=34$$

따라서 최댓값은 34, 최솟값은 $-\frac{11}{6}$ 이다.

답 최댓값: 34, 최솟값: $-\frac{11}{6}$

0296 $3^x=27$ 에서 $3^x=3^3$ 이므로

$$x=3$$

답 $x=3$

0297 $(\frac{1}{10})^x=100$ 에서 $10^{-x}=10^2$ 이므로

$$-x=2 \quad \therefore x=-2$$

답 $x=-2$

0298 $25^x=5 \cdot 5^{3x}$ 에서 $5^{2x}=5^{3x+1}$ 이므로

$$2x=3x+1 \quad \therefore x=-1$$

답 $x=-1$

0299 $\sqrt{3^x}=3 \cdot (\frac{1}{3})^x$ 에서 $3^{\frac{1}{2}x}=3^{1-x}$ 이므로

$$\frac{1}{2}x=1-x, \quad \frac{3}{2}x=1 \quad \therefore x=\frac{2}{3}$$

답 $x=\frac{2}{3}$

0300 $3^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2-2t+1=0, \quad (t-1)^2=0$$

$$\therefore t=1$$

$$\text{즉 } 3^x=1\text{이므로 } x=0$$

$$\therefore \textcircled{가} 2 \text{ } \textcircled{나} 1 \text{ } \textcircled{다} 0$$

답 $\textcircled{가} 2 \text{ } \textcircled{나} 1 \text{ } \textcircled{다} 0$

0301 $5^{2x}-6 \cdot 5^x+5=0$ 에서 $(5^x)^2-6 \cdot 5^x+5=0$

$5^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2-6t+5=0, \quad (t-1)(t-5)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=5$$

$$\text{즉 } 5^x=1 \text{ 또는 } 5^x=5\text{이므로}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=1$$

답 $x=0$ 또는 $x=1$

0302 $4^x-3 \cdot 2^x-4=0$ 에서 $2^{2x}-3 \cdot 2^x-4=0$

$$(2^x)^2-3 \cdot 2^x-4=0$$

$2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2-3t-4=0, \quad (t+1)(t-4)=0$$

$$\therefore t=4 \quad (\because t>0)$$

$$\text{즉 } 2^x=2^2\text{이므로 } x=2$$

답 $x=2$

0303 $(\frac{1}{2})^{2x}-2 \cdot (\frac{1}{2})^x-8=0$ 에서

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^x \right\}^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^x - 8 = 0$$

$(\frac{1}{2})^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2-2t-8=0, \quad (t+2)(t-4)=0$$

$$\therefore t=4 \quad (\because t>0)$$

$$\text{즉 } \left(\frac{1}{2} \right)^x=4\text{이므로 } \left(\frac{1}{2} \right)^x=\left(\frac{1}{2} \right)^{-2}$$

$$\therefore x=-2$$

답 $x=-2$

0304 $\frac{1}{25^x}-5^{-x}-20=0$ 에서 $\left\{ \left(\frac{1}{5} \right)^x \right\}^2 - \left(\frac{1}{5} \right)^x - 20 = 0$

$(\frac{1}{5})^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2-t-20=0, \quad (t+4)(t-5)=0$$

$$\therefore t=5 \quad (\because t>0)$$

$$\text{즉 } \left(\frac{1}{5} \right)^x=5\text{이므로 } \left(\frac{1}{5} \right)^x=\left(\frac{1}{5} \right)^{-1}$$

$$\therefore x=-1$$

답 $x=-1$

0305 $4^{2x+1}=5^{2x+1}$ 에서 $2x+1=0$

$$\therefore x=-\frac{1}{2}$$

답 $x=-\frac{1}{2}$

0306 $(\frac{1}{7})^{x-3}=3^{-x+3}$ 에서 $7^{-x+3}=3^{-x+3}$

$$-x+3=0 \quad \therefore x=3$$

답 $x=3$

0307 $3^{x-1}<81$ 에서 $3^{x-1}<3^4$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x-1<4 \quad \therefore x<5$$

답 $x<5$

0308 $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} \geq 64$ 에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$
 밑이 1보다 작으므로 $2x \leq -3 \quad \therefore x \leq -\frac{3}{2}$ **답** $x \leq -\frac{3}{2}$

0309 $5\sqrt{5} \leq \frac{1}{25} \cdot 5^{x-1}$ 에서 $5^{\frac{3}{2}} \leq 5^{x-3}$
 밑이 1보다 크므로 $\frac{3}{2} \leq x-3 \quad \therefore x \geq \frac{9}{2}$ **답** $x \geq \frac{9}{2}$

0310 $2^{1-3x} > 8 \cdot (\sqrt{2})^x$ 에서 $2^{1-3x} > 2^{\frac{1}{2}x+3}$
 밑이 1보다 크므로 $1-3x > \frac{1}{2}x+3$
 $-\frac{7}{2}x > 2 \quad \therefore x < -\frac{4}{7}$ **답** $x < -\frac{4}{7}$

0311 $\frac{1}{2} < 2^{2x} < 4\sqrt{2}$ 에서 $2^{-1} < 2^{2x} < 2^{\frac{5}{2}}$
 밑이 1보다 크므로 $-1 < 2x < \frac{5}{2}$
 $\therefore -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{4}$ **답** $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{4}$

0312 $\frac{1}{81} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^x \leq 81$ 에서 $\left(\frac{1}{9}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{9}\right)^x \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{-2}$
 밑이 1보다 작으므로 $-2 \leq x \leq 2$ **답** $-2 \leq x \leq 2$

0313 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 주어진 부등식은
 $t^2 - 3t + 2 < 0, \quad (t-1)(t-2) < 0$
 $\therefore \boxed{1} < t < \boxed{2}$
 즉 $1 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 2$ 이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$
 밑이 1보다 작으므로 $\boxed{-1} < x < \boxed{0}$
 \therefore (가) 2 (나) 1 (다) 2 (라) -1 (마) 0 **답** 풀이 참조

0314 $3^{2x+3} - 12 \cdot 3^x + 1 \leq 0$ 에서 $27 \cdot (3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 1 \leq 0$
 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $27t^2 - 12t + 1 \leq 0, \quad (9t-1)(3t-1) \leq 0$
 $\therefore \frac{1}{9} \leq t \leq \frac{1}{3}$
 즉 $3^{-2} \leq 3^x \leq 3^{-1}$ 에서 밑이 1보다 크므로
 $-2 \leq x \leq -1$ **답** $-2 \leq x \leq -1$

0315 $25^x - 20 \cdot 5^x - 125 > 0$ 에서 $(5^x)^2 - 20 \cdot 5^x - 125 > 0$
 $5^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 - 20t - 125 > 0, \quad (t+5)(t-25) > 0$
 $\therefore t < -5$ 또는 $t > 25$
 그런데 $t > 0$ 이므로 $t > 25$
 즉 $5^x > 25$ 에서 밑이 1보다 크므로 $x > 2$ **답** $x > 2$

0316 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 30 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 81 < 0$ 에서
 $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - 30 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 81 < 0$
 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 30t + 81 < 0, \quad (t-3)(t-27) < 0$$

$$\therefore 3 < t < 27$$

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ 에서 밑이 1보다 작으므로
 $-3 < x < -1$ **답** $-3 < x < -1$

0317 $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 32 \leq 0$ 에서
 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 32 \leq 0$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 - 14t - 32 \leq 0, \quad (t+2)(t-16) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq t \leq 16$
 그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t \leq 16$
 즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ 에서 밑이 1보다 작으므로
 $x \geq -4$ **답** $x \geq -4$

0318 ④ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$ 이므로 $y = 3^x$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다. **답** ④

0319 주어진 조건을 만족시키는 함수는 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가하는 함수이다. 이때
 $f(x) = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x$
 이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ②이다. **답** ②

0320 $y = (a^2 - 3a + 3)^x$ 에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하려면 $a^2 - 3a + 3 > 1$ 이어야 하므로
 $a^2 - 3a + 2 > 0, \quad (a-1)(a-2) > 0$ **→ ①**
 $\therefore a < 1$ 또는 $a > 2$ **→ ②**
답 $a < 1$ 또는 $a > 2$

채점 기준	비율
① $a^2 - 3a + 3$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

0321 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y = 3^{x+2}$
 이 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
 $y = 3^{-x+2}$
 $y = 3^{-x+2}$ 의 그래프가 점 $(3, k)$ 를 지나므로
 $k = 3^{-3+2} = \frac{1}{3}$ **답** $\frac{1}{3}$

0322 $y = \frac{1}{4} \cdot 2^x - 8 = 2^{x-2} - 8$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 것이다.
 따라서 $m = 2, n = -8$ 이므로 $m + n = -6$ **답** -6

0323 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-n=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-m} \quad \therefore y=3^{-x+m}+n$$

이 함수의 그래프가 점 $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ 를 지나므로

$$3^{m+1}+n=\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $3^m+n=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$

$$\textcircled{㉠}-\textcircled{㉡}\text{을 하면} \quad 3^{m+1}-3^m=\frac{2}{3}, \quad 2 \cdot 3^m=\frac{2}{3}$$

$$3^m=3^{-1} \quad \therefore m=-1$$

$$m=-1\text{을 } \textcircled{㉡}\text{에 대입하면} \quad 3^{-1}+n=0 \quad \therefore n=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore mn=\frac{1}{3} \quad \text{답 ④}$$

0324 ㄱ. $y=\frac{2^x}{2}=2^{x-1}$ 이므로 $y=\frac{2^x}{2}$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\sqrt{2} \cdot 2^x=2^{x+\frac{1}{2}}$ 이므로 $y=\sqrt{2} \cdot 2^x$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄷ. } y=\frac{1}{4^x}=2^{-2x}$$

$$\text{ㄹ. } y=\sqrt{2^x}=2^{\frac{x}{2}}$$

ㅁ. $y=3 \cdot 2^x=2^{\log_2 3} \cdot 2^x=2^{x+\log_2 3}$ 이므로 $y=3 \cdot 2^x$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\log_2 3$ 만큼 평행이동한 것이다.

ㅂ. $y=-8 \cdot 2^x=-2^{x+3}$ 이므로 $y=-8 \cdot 2^x$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 $y=2^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ

0325 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $y=-2$ 이므로 $b=-2$

→ ①

그래프가 원점을 지나므로

$$0=\left(\frac{1}{2}\right)^{0-a}-2, \quad 2^a=2$$

$$\therefore a=1$$

→ ②

$$\therefore a+b=-1$$

→ ③

답 -1

채점 기준	비율
① b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	60 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

$$\textbf{0326} \quad f(2)=m\text{에서} \quad a^2=m \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(5)=n\text{에서} \quad a^5=n \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠}\text{을 하면} \quad \frac{n}{m}=a^{5-2}=a^3$$

$$\therefore f(6)=a^6=(a^3)^2=\left(\frac{n}{m}\right)^2 \quad \text{답 ⑤}$$

$$\textbf{0327} \quad f(p)=3\text{이므로} \quad \frac{1}{2}(a^p+a^{-p})=3$$

$$\therefore a^p+a^{-p}=6$$

$$\begin{aligned} \therefore f(2p) &= \frac{1}{2}(a^{2p}+a^{-2p}) \\ &= \frac{1}{2}\{(a^p+a^{-p})^2-2\} \\ &= \frac{1}{2}(6^2-2)=17 \end{aligned}$$

답 17

$$\textbf{0328} \quad f(0)=3^n=4\text{이므로 } f(2)=3^{2m+n}=16\text{에서}$$

$$4 \cdot 3^{2m}=16, \quad 3^{2m}=4 \quad \therefore 3^m=2 (\because 3^m > 0)$$

$$\therefore f(-1)=3^{-m+n}=\frac{3^n}{3^m}=\frac{4}{2}=2$$

답 2

$$\textbf{0329} \quad f(-a)f(2b)=25\text{에서}$$

$$5^a \cdot 5^{-2b}=25, \quad 5^{a-2b}=5^2$$

$$\therefore a-2b=2$$

→ ①

$$f(b-a)=5\text{에서} \quad 5^{-(b-a)}=5$$

$$5^{a-b}=5 \quad \therefore a-b=1$$

→ ②

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}\text{을 연립하여 풀면} \quad a=0, b=-1$$

→ ③

$$\therefore a^2+b^2=1$$

→ ④

답 1

채점 기준	비율
① ①의 식을 구할 수 있다.	30 %
② ②의 식을 구할 수 있다.	30 %
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ a^2+b^2 의 값을 구할 수 있다.	10 %

$$\textbf{0330} \quad y=2^x\text{의 그래프는 점 } (0, 1)\text{을 지나므로} \quad a=1$$

$$2^a=b\text{이므로} \quad b=2$$

$$2^b=c\text{이므로} \quad c=2^2=4$$

$$\therefore a-b+c=1-2+4=3$$

답 ①

$$\textbf{0331} \quad \text{그래프가 점 } (-1, a)\text{를 지나므로}$$

$$a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$$

$$\text{또 점 } (b, 32)\text{를 지나므로 } 32=\left(\frac{1}{2}\right)^b\text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \quad \therefore b=-5$$

$$\therefore a+b=-3$$

답 ③

0332 두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 a, b 라 하면 점 P($a, 9$)가 $y=3^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$3^a=9, \quad 3^a=3^2 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore P(2, 9)$$

또 점 Q($b, 9$)가 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\left(\frac{1}{9}\right)^b=9, \quad \left(\frac{1}{9}\right)^b=\left(\frac{1}{9}\right)^{-1} \quad \therefore b=-1$$

$$\therefore Q(-1, 9)$$

$$\therefore \overline{PQ}=2-(-1)=3$$

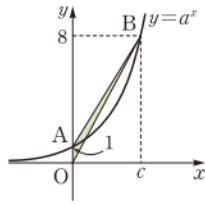
답 3

0333 함수 $y=a^x$ ($a>1$)의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 $b=1$
오른쪽 그림에서

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot c = \frac{3}{2}$$

$$\therefore c=3$$

따라서 점 B의 좌표는 $(3, 8)$ 이고, 점 B는 $y=a^x$ 의 그래프 위의 점이므로 $8=a^3 \therefore a=2$
 $\therefore a+b+c=6$



답 6

0334 $A=27^{\frac{1}{4}}=(3^3)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$

$$B=\left(\frac{1}{243}\right)^{-3}=(3^{-5})^{-3}=3^{15}$$

$$C=\sqrt[5]{81}=\sqrt[5]{3^4}=3^{\frac{4}{5}}$$

이때 $\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < 15$ 이고 밑이 1보다 크므로 $3^{\frac{3}{4}} < 3^{\frac{4}{5}} < 3^{15}$

$$\therefore A < C < B$$

답 ②

0335 $\sqrt[5]{0.5} = \sqrt[5]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{32}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}$$

$$\sqrt[3]{0.25} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

이때 $\frac{1}{5} < \frac{2}{3} < \frac{5}{4}$ 이고 밑이 1보다 작으므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\therefore \sqrt[4]{\frac{1}{32}} < \sqrt[3]{0.25} < \sqrt[5]{0.5}$$

답 $\sqrt[4]{\frac{1}{32}} < \sqrt[3]{0.25} < \sqrt[5]{0.5}$

0336 $x=\frac{1}{2}$ 일 때, $x^3=\frac{1}{8}$, $x^2=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{2}$

이때 $\frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ 이고 밑이 1보다 크므로

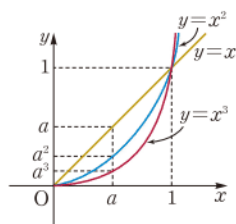
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{8}} < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{x^3} < \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} < \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

따라서 가장 큰 수는 $\left(\frac{3}{2}\right)^x$, 가장 작은 수는 $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^3}$ 이다.

답 $\left(\frac{3}{2}\right)^x, \left(\frac{3}{2}\right)^{x^3}$

참고 $x>0$ 에서 세 함수 $y=x^3$, $y=x^2$, $y=x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0 < a < 1$ 이면 $a^3 < a^2 < a$



0337 $y=4^{x+1}-1$ 에서

$$x=-2\text{일 때, } y=4^{-2+1}-1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$$

$$x=1\text{일 때, } y=4^{1+1}-1=16-1=15$$

따라서 $M=15$, $m=-\frac{3}{4}$ 이므로

$$M+m=\frac{57}{4}$$

답 ③

0338 $y=3^{-x} \cdot 2^x = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 에서

$$x=-1\text{일 때, } y=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$$

$$x=3\text{일 때, } y=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

따라서 치역은 $\left\{y \mid \frac{8}{27} \leq y \leq \frac{3}{2}\right\}$ 이므로

$$a=\frac{8}{27}, b=\frac{3}{2}$$

$$\therefore ab=\frac{4}{9}$$

답 ②

0339 $f(x)=5^{-a-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+a}$ 에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값을 갖는다. \rightarrow ①

$$\text{즉 } f(2)=\frac{1}{125}\text{이므로 } \left(\frac{1}{5}\right)^{2+a}=\left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$2+a=3 \therefore a=1$$

\rightarrow ②

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$ 이므로 구하는 최댓값은

$$f(-2)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2+1}=5$$

\rightarrow ③

답 5

채점 기준	비율
① $f(x)$ 가 $x=2$ 일 때 최솟값을 가짐을 알 수 있다.	20 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $f(x)$ 의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0340 $f(x)=x^2-2x$ 로 놓으면 $f(x)=(x-1)^2-1$

$y=\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x}$ 에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$ 가 최소일 때 y 는 최댓값을 갖는다.

따라서 y 는 $f(x)=-1$, 즉 $x=1$ 일 때 최댓값 7을 가지므로

$$a=1, b=7$$

$$\therefore a+b=8$$

답 ①

0341 $f(x)=x^2-6x+5$ 로 놓으면 $f(x)=(x-3)^2-4$

$$0 \leq x \leq 4\text{에서 } f(0)=5, f(3)=-4, f(4)=-3\text{이므로}$$

$$-4 \leq f(x) \leq 5$$

$y=3^{x^2-6x+5}$ 에서 밑이 1보다 크므로 y 는

$$f(x)=5\text{일 때 최대이고 최댓값은 } 3^5$$

$$f(x)=-4\text{일 때 최소이고 최솟값은 } 3^{-4}$$

$$\text{따라서 구하는 곱은 } 3^5 \cdot 3^{-4}=3$$

답 ④

0342 $f(x)=x^2-x+\frac{9}{4}$ 로 놓으면 $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2$

$f(x)$ 는 $x=\frac{1}{2}$ 에서 최솟값 2를 갖는다. \rightarrow ①

그런데 함수 $y=a^{f(x)}$ 도 최솟값을 가지므로 $a>1$ \rightarrow ②

$y=a^{f(x)}$ 의 최솟값이 16이므로
 $a^2=16 \quad \therefore a=4 (\because a>1)$

→ ③

답 4

채점 기준	비율
① $f(x)$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 $f(x) \geq 2$ 이므로 $0 < a < 10$ 이면 $a^{f(x)} \leq a^2$
 즉 $y=a^{f(x)}$ 의 최솟값은 없다.

0343 $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ 로 놓으면

$$f(x) = -(x-1)^2 + 2$$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ 이므로
 $-2 \leq f(x) \leq 2$

$y = a^{-x^2+2x+1}$ 에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$ 가 최소일 때 y 는 최댓값을 갖는다.

즉 y 는 $f(x) = -2$ 일 때 최댓값 9를 가지므로

$$a^{-2} = 9, \quad a^2 = \frac{1}{9} \quad \therefore a = \frac{1}{3} (\because 0 < a < 1)$$

따라서 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2+2x+1}$ 이고 $f(x) = 2$ 일 때 최솟값을 가지므로 구

하는 최솟값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ 답 1/9

0344 $y = 9^x - 6 \cdot 3^x + 10 = (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x + 10$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$y = t^2 - 6t + 10 = (t-3)^2 + 1$$

따라서 y 는 $t=3$, 즉 $x=1$ 일 때 최솟값 1을 가지므로

$$a=1, b=1$$

$$\therefore b-a=0 \quad \text{답 ③}$$

0345 $y = 2^{x+2} - 4^x + 1 = -(2^x)^2 + 4 \cdot 2^x + 1$

$2^x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $1 \leq t \leq 4$ 이고

$$y = -t^2 + 4t + 1 = -(t-2)^2 + 5$$

따라서 y 는 $t=2$ 일 때 최댓값 5, $t=4$ 일 때 최솟값 1을 가지므로

$$M=5, m=1$$

$$\therefore M+m=6 \quad \text{답 6}$$

0346 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - k\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 3 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2 - 2k\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$y = t^2 - 2kt + 3 = (t-k)^2 - k^2 + 3$$

(i) $k \leq 0$ 이면 $t > 0$ 에서 최솟값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k > 0$ 이면 y 는 $t=k$ 일 때 최솟값 $-k^2 + 3$ 을 가지므로

$$-k^2 + 3 = -1, \quad k^2 = 4$$

$$\therefore k=2 (\because k>0)$$

(i), (ii)에서 $k=2$ 답 2

0347 $f(x) = 4 \cdot 3^x + 3^{-x+2} = 4 \cdot 3^x + \frac{9}{3^x}$

이때 $3^x > 0$, $\frac{1}{3^x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$f(x) = 4 \cdot 3^x + \frac{9}{3^x} \geq 2\sqrt{4 \cdot 3^x \cdot \frac{9}{3^x}} = 12$$

(단, 등호는 $3^x = \frac{3}{2}$ 일 때 성립)

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 12이다. 답 12

라벤
특강

산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0$, $b > 0$ 일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)

0348 $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+4} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+4} \geq 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+4}} \\ &= 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad (\text{단, 등호는 } x=2 \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$ 을 가지므로

$$a=2, b=\frac{1}{2} \quad \therefore ab=1 \quad \text{답 ②}$$

0349 $x+y+2=0$ 에서 $y=-x-2$ 이므로

$$6^x + 6^y = 6^x + 6^{-x-2}$$

이때 $6^x > 0$, $6^{-x-2} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$6^x + 6^{-x-2} \geq 2\sqrt{6^x \cdot 6^{-x-2}} = 2\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

(단, 등호는 $x=-1$ 일 때 성립)

따라서 $6^x + 6^y$ 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이다. 답 1/3

0350 $5^x + 5^{-x} = t$ 로 놓으면 $5^x > 0$, $5^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 5^x + 5^{-x} \geq 2\sqrt{5^x \cdot 5^{-x}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } x=0 \text{일 때 성립})$$

이때

$$25^x + 25^{-x} = 5^{2x} + 5^{-2x} = (5^x + 5^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$$

이므로 주어진 함수는

$$y = -(t^2 - 2) + 4t$$

$$= -t^2 + 4t + 2$$

$$= -(t-2)^2 + 6 \quad (t \geq 2)$$

따라서 $t=2$ 일 때 y 의 최댓값은 6이다. 답 ②

0351 $\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot (\sqrt{3})^x = \frac{1}{27}$ 에서

$$3^{-x} \cdot 3^{\frac{1}{2}x} = 3^{-3}, \quad 3^{-x+\frac{1}{2}x} = 3^{-3}$$

즉 $-x + \frac{1}{2}x = -3$ 이므로 $2x^2 - x - 6 = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 $\frac{1}{2}$ 이다. 답 1/2

0352 $4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3x+a}$ 에서 $2^{2x} = 2^{3x-a}$ 이므로
 $2x^2 = 3x - a \quad \therefore 2x^2 - 3x + a = 0 \quad \dots\dots ㉠$
 이때 주어진 방정식의 한 근이 3이므로 ㉠에 $x=3$ 을 대입하면
 $18 - 9 + a = 0 \quad \therefore a = -9 \quad \text{답 ①}$

0353 $\frac{3^{-x^2+2}}{3^{x-1}} = \frac{1}{81}$ 에서 $3^{-x^2+2-(x-1)} = 3^{-4}$
 $\therefore 3^{-x^2-x+3} = 3^{-4} \quad \dots\dots ㉠$
 즉 $-x^2 - x + 3 = -4$ 이므로 $x^2 + x - 7 = 0 \quad \dots\dots ㉡$
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -1$,
 $\alpha\beta = -7$ 이므로
 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
 $= (-1)^2 - 2 \cdot (-7) = 15 \quad \dots\dots ㉢$
답 15

채점 기준	비율
① 주어진 방정식을 $3^{f(x)} = 3^k$ (k 는 상수) 꼴로 정리할 수 있다.	40 %
② x 에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	30 %
③ $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0354 $3^{x+1} + 3^{-x} = 4$ 의 양변에 3^x 를 곱하면
 $3 \cdot (3^x)^2 + 1 = 4 \cdot 3^x \quad \therefore 3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$
 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $3t^2 - 4t + 1 = 0$
 $(3t-1)(t-1) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{3} \text{ 또는 } t = 1$
 즉 $3^x = \frac{1}{3}$ 또는 $3^x = 1$ 이므로 $x = -1$ 또는 $x = 0$
 $\therefore \alpha = -1, \beta = 0$ 또는 $\alpha = 0, \beta = -1$
 $\therefore \alpha + \beta = -1 \quad \text{답 -1}$

0355 $64^x + 16^x = 3 \cdot 4^{x+1}$ 에서 $(4^x)^3 + (4^x)^2 = 12 \cdot 4^x$
 $4^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 주어진 방정식은
 $t^3 + t^2 - 12t = 0, \quad t(t^2 + t - 12) = 0$
 $t(t+4)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 3$ ($\because t > 0$)
 즉 $4^x = 3$ 이므로 $2^x = \sqrt{3}$ ($\because 2^x > 0$)
참고 $4^x = 3$ 에서 $x = \log_4 3$ 이므로 $\alpha = \log_4 3$
답 ③

0356 $\frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = 3$ 에서 $2^x + 2^{-x} = 3(2^x - 2^{-x})$
 $2 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x} = 0$
 양변에 2^x 를 곱하면 $2 \cdot (2^x)^2 - 4 = 0$
 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $2t^2 - 4 = 0, \quad t^2 = 2 \quad \therefore t = \sqrt{2}$ ($\because t > 0$)
 즉 $2^x = \sqrt{2}$ 이므로 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{1}{2} \quad \text{답 } x = \frac{1}{2}$

0357 $a^{2x} + a^x - 20 = 0$ 에서 $(a^x)^2 + a^x - 20 = 0$
 $a^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $t^2 + t - 20 = 0 \quad \dots\dots ㉠$
 $(t+5)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 4$ ($\because t > 0$)
답 ②

즉 $a^x = 4$ 에서 방정식의 근이 $x = \frac{1}{2}$ 이므로 $a^{\frac{1}{2}} = 4$
 $\therefore a = 4^2 = 16 \quad \dots\dots ㉢$
답 16

채점 기준	비율
① t 에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
② t 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0358 (i) $x+3=0$, 즉 $x=-3$ 일 때, $2^0 = 7^0 = 1$ 이므로 등식이 성립한다.
 (ii) $x+3 \neq 0$ 일 때, $x+5=7$ 에서 $x=2$
 (i), (ii)에서 모든 근의 합은 $-3+2=-1 \quad \text{답 ③}$

0359 (i) $5x=0$, 즉 $x=0$ 일 때, $2^0 = 4^0 = 1$ 이므로 등식이 성립한다.
 (ii) $5x \neq 0$ 일 때, $3x+2=x+4$ 에서 $x=1$
 (i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=0$ 또는 $x=1$
답 $x=0$ 또는 $x=1$

0360 (i) $x=1$ 일 때, $1^5 = 1^1$ 이므로 등식이 성립한다.
 (ii) $x \neq 1$ 일 때, $2x+3=x^2$ 에서 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x+1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 3$ ($\because x > 0$)
 (i), (ii)에서 모든 근의 곱은 $1 \cdot 3 = 3 \quad \text{답 ①}$

0361 (i) $x+1=1$, 즉 $x=0$ 일 때, $1^0 = 1^3$ 이므로 등식이 성립한다.
 (ii) $x+1 \neq 1$ 일 때, $4x=x+3$ 에서 $x=1$
 (i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=0$ 또는 $x=1$
답 $x=0$ 또는 $x=1$

0362 $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^y = 12 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x+y} = 27 \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^y = 12 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^y = 27 \end{cases}$
 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = X, \left(\frac{1}{3}\right)^y = Y$ ($X > 0, Y > 0$)로 놓으면
 $\begin{cases} X+Y=12 \\ XY=27 \end{cases}$
 이 연립방정식을 풀면 $X=3, Y=9$ 또는 $X=9, Y=3$
 즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3, \left(\frac{1}{3}\right)^y = 9$ 또는 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9, \left(\frac{1}{3}\right)^y = 3$ 이므로
 $x=-1, y=-2$ 또는 $x=-2, y=-1$
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 5 \quad \text{답 ⑤}$

0363 $\begin{cases} 3^x + 2 \cdot 2^y = 25 \\ 3 \cdot 3^x - 2^y = 19 \end{cases}$ 에서 $3^x = X, 2^y = Y$ ($X > 0, Y > 0$)로 놓으면
 $\begin{cases} X+2Y=25 \\ 3X-Y=19 \end{cases}$
 이 연립방정식을 풀면 $X=9, Y=8$
 즉 $3^x = 9, 2^y = 8$ 이므로 $x=2, y=3$
 $\therefore \alpha\beta = 6 \quad \text{답 ③}$

0364 $\begin{cases} 2^x+2^y=7 \\ 4^x+4^y=29 \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} 2^x+2^y=7 \\ (2^x)^2+(2^y)^2=29 \end{cases}$

$2^x=X, 2^y=Y (X>0, Y>0)$ 로 놓으면

$$\begin{cases} X+Y=7 \\ X^2+Y^2=29 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면

$$X=2, Y=5 \text{ 또는 } X=5, Y=2 \\ \therefore 2^x=2, 2^y=5 \text{ 또는 } 2^x=5, 2^y=2$$

그런데 $\alpha>\beta$ 이므로 $2^\alpha=5, 2^\beta=2$

$$\therefore 2^\alpha-2^\beta=3$$

답 3

0365 $25^x-2\cdot 5^{x+1}+5=0$ 에서 $(5^x)^2-10\cdot 5^x+5=0$

$$5^x=t (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-10t+5=0$$

이 이차방정식의 두 근은 $5^\alpha, 5^\beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $5^\alpha\cdot 5^\beta=5, 5^{\alpha+\beta}=5$

$$\therefore \alpha+\beta=1$$

답 ①

0366 $9^x-7\cdot 3^x+9=0$ 에서 $(3^x)^2-7\cdot 3^x+9=0$

$$3^x=t (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-7t+9=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이 이차방정식의 두 근은 $3^\alpha, 3^\beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $3^\alpha+3^\beta=7, 3^\alpha\cdot 3^\beta=9 \quad \cdots \textcircled{2}$

$$\therefore 9^\alpha+9^\beta=(3^\alpha)^2+(3^\beta)^2=(3^\alpha+3^\beta)^2-2\cdot 3^\alpha\cdot 3^\beta \\ =7^2-2\cdot 9=31 \quad \cdots \textcircled{3}$$

답 31

채점 기준	비율
① t 에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
② $3^\alpha+3^\beta, 3^\alpha\cdot 3^\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $9^\alpha+9^\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0367 $4^x-4\cdot 2^x+k=0$ 에서 $(2^x)^2-4\cdot 2^x+k=0$

$$2^x=t (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-4t+k=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 양의 근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-k>0 \quad \therefore k<4$$

(ii) (두 근의 합) $=4>0$

(iii) (두 근의 곱) $=k>0$

이상에서 $0<k<4$

답 $0<k<4$

라센

특강 이차방정식의 실근의 부호

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D , 두 실근을 α, β 라 하면

① 두 근이 모두 양 $\iff D\geq 0, \alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음 $\iff D\geq 0, \alpha+\beta<0, \alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 $\iff \alpha\beta<0$

0368 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x+2}<\left(\frac{1}{16}\right)^{2-3x}$ 에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x+2}<\left(\frac{1}{4}\right)^{4-6x}$

밑이 1보다 작으므로

$$-x+2>4-6x, \quad 5x>2 \quad \therefore x>\frac{2}{5}$$

답 ②

0369 $\left(\frac{1}{36}\right)^{x^2+x-4}\geq\left(\frac{1}{6}\right)^{x^2}$ 에서 $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x^2+2x-8}\geq\left(\frac{1}{6}\right)^{x^2}$

밑이 1보다 작으므로

$$2x^2+2x-8\leq x^2, \quad x^2+2x-8\leq 0 \\ (x+4)(x-2)\leq 0 \quad \therefore -4\leq x\leq 2$$

따라서 $\alpha=-4, \beta=2$ 이므로 $\alpha+\beta=-2$

답 -2

0370 $3^{2x}<\frac{\sqrt{3}}{9}<27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ 에서 $3^{2x}<3^{-\frac{3}{2}}<3^{x+3}$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 2x<-\frac{3}{2}<x+3$$

$$(i) 2x<-\frac{3}{2} \text{에서 } x<-\frac{3}{4}$$

$$(ii) -\frac{3}{2}<x+3 \text{에서 } x>-\frac{9}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{9}{2}<x<-\frac{3}{4}$ 이므로 정수 x 는 $-4, -3, -2, -1$ 의 4개이다.

답 ③

0371 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{g(x)}$ 에서 밑이 1보다 작으므로

$$f(x)\leq g(x)$$

따라서 주어진 부등식의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=g(x)$ 보다 아래쪽에 있거나 만날 때의 x 의 값의 범위이므로

$$x\leq b \text{ 또는 } x\geq c$$

답 ⑤

0372 (i) $x=1$ 일 때, $1^5=1^2$ 이므로 부등식이 성립한다.

(ii) $0<x<1$ 일 때, $-x+6\leq 2x$ 에서 $x\geq 2$

그런데 $0<x<1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$ 일 때, $-x+6\geq 2x$ 에서 $x\leq 2$

그런데 $x>1$ 이므로 $1<x\leq 2$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $1\leq x\leq 2$

답 $1\leq x\leq 2$

0373 $x>1$ 이므로 $4x+4>x^2-1, \quad x^2-4x-5<0$

$$(x+1)(x-5)<0 \quad \therefore -1<x<5$$

그런데 $x>1$ 이므로 $1<x<5$

답 ②

0374 (i) $x=1$ 일 때, $1^{-17}=1^3$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(ii) $0<x<1$ 일 때, $x^2-18>3x$ 에서 $x^2-3x-18>0$

$$(x+3)(x-6)>0 \quad \therefore x<-3 \text{ 또는 } x>6$$

그런데 $0<x<1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$ 일 때, $x^2-18<3x$ 에서 $x^2-3x-18<0$

$$(x+3)(x-6)<0 \quad \therefore -3<x<6$$

그런데 $x>1$ 이므로 $1<x<6$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $1<x<6$ 이므로 정수 x 는 2, 3, 4, 5의 4개이다.

답 ③

0375 $3^{2x}-5\cdot 3^{x+1}+14<0$ 에서 $(3^x)^2-15\cdot 3^x+14<0$

$$3^x=t (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-15t+14<0$$

$$(t-1)(t-14)<0 \quad \therefore 1<t<14$$

즉 $1<3^x<14$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$3^\alpha=1, 3^\beta=14 \quad \therefore 3^\alpha+3^\beta=15$$

답 15

0376 $2^x - 2^{1-x} \geq 1$ 의 양변에 2^x 을 곱하면
 $(2^x)^2 - 2 \geq 2^x$, $(2^x)^2 - 2^x - 2 \geq 0$
 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $t^2 - t - 2 \geq 0$
 $(t+1)(t-2) \geq 0 \quad \therefore t \leq -1$ 또는 $t \geq 2$
 그런데 $t > 0$ 이므로 $t \geq 2$
 즉 $2^x \geq 2$ 에서 밑이 1보다 크므로 $x \geq 1$

답 $x \geq 1$

0377 $5^x > 5^{-2x+1}$ 에서 밑이 1보다 크므로
 $x > -2x+1$, $3x > 1$

$\therefore x > \frac{1}{3}$ ㉠ ... ①

$\left(\frac{1}{4}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 16 < 0$ 에서 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 16 < 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $t^2 - 6t - 16 < 0$

$(t+2)(t-8) < 0 \quad \therefore -2 < t < 8$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t < 8$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ 에서 밑이 1보다 작으므로

$x > -3$ ㉡ ... ②

㉠, ㉡에서 주어진 연립부등식의 해는 $x > \frac{1}{3}$... ③

답 $x > \frac{1}{3}$

채점 기준	비율
① 부등식 $5^x > 5^{-2x+1}$ 의 해를 구할 수 있다.	30 %
② 부등식 $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 16 < 0$ 의 해를 구할 수 있다.	50 %
③ 주어진 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

0378 $\left(\frac{1}{9}\right)^x - p\left(\frac{1}{3}\right)^x + q < 0$ 에서 $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - p\left(\frac{1}{3}\right)^x + q < 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $t^2 - pt + q < 0$ ㉠

이때 $-1 < x < 2$ 에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \quad \therefore \frac{1}{9} < t < 3$

해가 $\frac{1}{9} < t < 3$ 이고 t^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(t - \frac{1}{9}\right)(t - 3) < 0 \quad \therefore t^2 - \frac{28}{9}t + \frac{1}{3} < 0$

이것이 ㉠과 일치하므로 $p = \frac{28}{9}$, $q = \frac{1}{3}$

$\therefore 9(p+q) = 31$ ㉡

0379 $16^x - 4^{x+1} + 2k \geq 0$ 에서 $(4^x)^2 - 4 \cdot 4^x + 2k \geq 0$

$4^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $t^2 - 4t + 2k \geq 0$

$\therefore (t-2)^2 + 2k - 4 \geq 0$

위의 부등식이 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$2k - 4 \geq 0 \quad \therefore k \geq 2$ ㉢

0380 $49^x - 2 \cdot 7^{x+1} - k > 0$ 에서 $(7^x)^2 - 14 \cdot 7^x - k > 0$

$7^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $t^2 - 14t - k > 0$... ㉣

$\therefore (t-7)^2 - k - 49 > 0$

위의 부등식이 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$-k - 49 > 0 \quad \therefore k < -49$... ㉤

따라서 정수 k 의 최댓값은 -50 이다. ... ㉥

답 -50

채점 기준	비율
① t 에 대한 부등식을 세울 수 있다.	40 %
② k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ 정수 k 의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0381 $4^x + 2^{x+1} + k \geq 0$ 에서 $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x + k \geq 0$

$2^x = t$ 로 놓으면 $x \geq 0$ 일 때 $t \geq 1$ 이고

$t^2 + 2t + k \geq 0$

위의 부등식이 $t \geq 1$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로

$f(t) = t^2 + 2t + k = (t+1)^2 + k - 1$

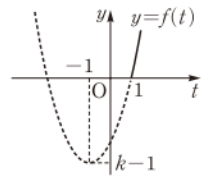
로 놓으면 오른쪽 그림에서 $f(1) \geq 0$ 이어야

한다. 즉

$f(1) = k + 3 \geq 0$

$\therefore k \geq -3$

따라서 실수 k 의 최솟값은 -3 이다.



답 ②

0382 10마리의 박테리아가 4시간 후 160마리가 되므로

$10a^4 = 160$, $a^4 = 16$

$\therefore a = 2$ ($\because a > 0$)

따라서 10마리의 박테리아가 x 시간 후 $10 \cdot 2^x$ 마리가 되므로

$10 \cdot 2^x = 1280$, $2^x = 128 = 2^7$

$\therefore x = 7$

즉 박테리아는 처음으로부터 7시간 후에 1280마리가 된다.

답 7시간

0383 15년 후에 방사성 물질의 양이 처음의 양의 $\frac{1}{2}$ 이 되므로

15년 후의 방사성 물질의 양은 처음의 양의 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이 된다.

이때 $\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$ 이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^6 \quad \therefore n \geq 6$

따라서 방사성 물질의 양이 처음의 양의 $\frac{1}{64}$ 이하로 줄어드는 데 최소 15·6=90(년)이 걸린다. ㉦

답 ④

0384 x 시간 후 두 세균배양기에 있는 세균 A, B의 수는 각각

2^x , $2 \cdot 4^x$

이때 세균의 수의 합이 136 이상이 되려면

$2^x + 2 \cdot 4^x \geq 136$, $2^x + 2 \cdot (2^x)^2 \geq 136$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $2t^2 + t - 136 \geq 0$

$(2t+17)(t-8) \geq 0 \quad \therefore t \geq 8$ ($\because t > 0$)

즉 $2^x \geq 8$ 에서 $x \geq 3$ 이므로 최소 3시간이 지나야 한다. ㉧

답 3시간

0385 **전략** $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-b=f(x-a)$ 이고, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(-x)$ 임을 이용한다.

풀이 ㄱ, ㄴ, ㄷ. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$ 의 그래프

는 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로
-1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행
이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$ 의 그래프는 제2
사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지나
고, 점근선의 방정식은 $y = -1$ 이다.

ㄷ. $y = 2^{x-1} + 1$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면

$$-y = 2^{-x-1} + 1 \quad \therefore y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0386 전략 주어진 함수의 그래프의 개형을 그린 후 그래프가 제4사
분면을 지나지 않을 조건을 찾는다.

풀이 함수 $y = 3^{x-2} + n$ 의 그래프가 오른쪽
그림과 같으므로 그래프가 제4사분면을 지
나지 않으려면 $x=0$ 일 때

$$y = 3^{-2} + n = n + \frac{1}{9}$$

에서 $n + \frac{1}{9} \geq 0$, 즉 $n \geq -\frac{1}{9}$ 이어야 한다.

따라서 n 의 최솟값은 $-\frac{1}{9}$ 이다.

답 $-\frac{1}{9}$

0387 전략 함수 $y = a^x (0 < a < 1)$ 에서 x 가 최소일 때 y 는 최대, x
가 최대일 때 y 는 최소가 됨을 이용한다.

풀이 $0 < a < 1$ 이므로 함수 $f(x) = a^x$ 은 $x = -1$ 일 때 최댓값
 $f(-1)$, $x = 2$ 일 때 최솟값 $f(2)$ 를 갖는다.

$$\text{즉 } f(-1) = a^{-1} = \frac{5}{4} \text{에서 } a = \frac{4}{5}$$

$$\text{따라서 } m = f(2) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \text{이므로}$$

$$am = \frac{4}{5} \cdot \frac{16}{25} = \frac{64}{125}$$

답 ③

0388 전략 지수법칙을 이용하여 밑을 2로 같게 한 후 지수에 대한 방
정식을 세운다.

풀이 $4^{x+3} = 2^{x^2-2}$ 에서 $2^{2x+6} = 2^{x^2-2}$ 이므로

$$2x+6 = x^2-2, \quad x^2-2x-8=0$$

$$(x+2)(x-4)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 구하는 모든 근의 곱은 -8

답 -8

0389 전략 지수법칙을 이용하여 각 방정식을 간단히 한 후 지수에 대
한 방정식을 세운다.

$$\text{풀이 } 32^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y = 16 \text{에서 } 2^{5x} \cdot 2^{-y} = 2^4, \quad 2^{5x-y} = 2^4$$

$$\therefore 5x - y = 4$$

$$\dots\dots \textcircled{1} \quad \rightarrow \textcircled{1}$$

$$4^{x-2} \cdot 8^y = 2 \text{에서 } 2^{2(x-2)} \cdot 2^{3y} = 2, \quad 2^{2x+3y-4} = 2$$

$$\text{즉 } 2x + 3y - 4 = 1 \text{이므로}$$

$$2x + 3y = 5$$

$$\dots\dots \textcircled{2} \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } x=1, y=1$$

$$\rightarrow \textcircled{3}$$

$$\text{답 } x=1, y=1$$

채점 기준	비율
① $32^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y = 16$ 에서 지수에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
② $4^{x-2} \cdot 8^y = 2$ 에서 지수에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
③ 연립방정식의 해를 구할 수 있다.	20 %

0390 전략 함수 $y = a^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의
방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y = a^{x-m} + n$ 임을 이용한다.

풀이 $y = a^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동시킨 그래프의 식은
 $y = a^{-x}$

이 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이
동시킨 그래프의 식은

$$y - 2 = a^{-(x-3)} \quad \therefore y = a^{3-x} + 2$$

$$y = a^{3-x} + 2 \text{의 그래프가 점 } (1, 4) \text{를 지나므로 } 4 = a^2 + 2$$

$$a^2 = 2 \quad \therefore a = \sqrt{2} (\because a > 0)$$

답 ①

0391 전략 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이면 $g(a) = b$ 일 때, $f(b) = a$
이다.

풀이 $g(x)$ 가 $f(x) = 5^x$ 의 역함수이므로

$$g\left(\frac{1}{25}\right) = a \text{라 하면 } f(a) = \frac{1}{25}$$

$$5^a = 5^{-2} \quad \therefore a = -2$$

$$g(25) = b \text{라 하면 } f(b) = 25$$

$$5^b = 5^2 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{25}\right)g(25) = -2 \cdot 2 = -4$$

답 ②

0392 전략 두 점 C, D의 x 좌표를 a 로 나타낸다.

풀이 두 점 C, D의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 라 하자.

$$\text{두 점 } A(a, 4^a), C(x_1, 2^{x_1}) \text{의 } y \text{좌표가 같으므로 } 2^{x_1} = 4^a = 2^{2a}$$

$$\therefore x_1 = 2a$$

$$\text{또 두 점 } B(a, 2^a), D(x_2, 4^{x_2}) \text{의 } y \text{좌표가 같으므로 } 4^{x_2} = 2^a$$

$$2^{2x_2} = 2^a \quad \therefore x_2 = \frac{a}{2}$$

$$\therefore \frac{BD}{AC} = \frac{a - \frac{a}{2}}{2a - a} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} (\because a > 0)$$

답 $\frac{1}{2}$

0393 전략 밑을 2로 같게 한 후 지수함수의 성질을 이용한다.

$$\text{풀이 } A = \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}, B = 0.5^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}},$$

$$C = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{4}{3} \text{이고 밑이 1보다 크므로 } 2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{3}{4}} < 2^{\frac{4}{3}}$$

$$\therefore B < A < C$$

답 ③

0394 전략 $g(x) = t$ 로 치환하여 함수 $(f \circ g)(x)$ 를 t 에 대한 함수
로 나타낸다.

$$\text{풀이 } g(x) = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$$

$$\text{이므로 } g(x) = t \text{라 하면 } t \leq 1$$

$\rightarrow \textcircled{1}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(t) = 5^t \text{에서 밑이 1보다 크므로}$$

$$(f \circ g)(x) \text{는 } t=1, \text{ 즉 } x=2 \text{일 때 최댓값 5를 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } a=2, M=5 \text{이므로}$$

$\rightarrow \textcircled{2}$

$$aM = 10$$

$\rightarrow \textcircled{3}$

답 10

채점 기준	비율
① $g(x)=t$ 로 놓고 t 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
② a, M 의 값을 구할 수 있다.	60 %
③ aM 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0395 **전략** 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $f(x)=5^{x+a}+\frac{1}{5^{x-a}}+3=5^a\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)+3$

이때 $5^x>0, \frac{1}{5^x}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} f(x) &= 5^a\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)+3 \\ &\geq 5^a \cdot 2\sqrt{5^x \cdot \frac{1}{5^x}}+3=2 \cdot 5^a+3 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립)

따라서 $2 \cdot 5^a+3=53$ 이므로 $2 \cdot 5^a=50$
 $5^a=25=5^2 \quad \therefore a=2$ **답 2**

0396 **전략** $2^x=t$ 로 치환하여 주어진 방정식을 t 에 대한 이차방정식으로 나타낸 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $2^{2x}-5 \cdot 2^x+2k=0$ 에서 $(2^x)^2-5 \cdot 2^x+2k=0$

$2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 $t^2-5t+2k=0$

이 이차방정식의 두 근이 $2^a, 2^b$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $2^a \cdot 2^b=2k, \quad 2^{a+b}=2k$

이때 $a+b=2$ 이므로 $2^2=2k \quad \therefore k=2$ **답 ⑤**

0397 **전략** 밑을 5로 같게 한 후 지수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 $25^{-x-2}<5^{4-x^2}<\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}$ 에서

$$\begin{aligned} 5^{2(-x-2)} &< 5^{4-x^2} < 5^{-(x+2)} \\ 5^{-2x-4} &< 5^{4-x^2} < 5^{-x-2} \end{aligned}$$

밑이 1보다 크므로 $-2x-4<4-x^2<-x-2$

(i) $-2x-4<4-x^2$ 에서
 $x^2-2x-8<0, \quad (x+2)(x-4)<0$
 $\therefore -2<x<4$

(ii) $4-x^2<-x-2$ 에서
 $x^2-x-6>0, \quad (x+2)(x-3)>0$
 $\therefore x<-2$ 또는 $x>3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $3<x<4$
 따라서 $a=3, b=4$ 이므로 $ab=12$ **답 ④**

0398 **전략** 해가 $p \leq x \leq q$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-p)(x-q) \leq 0$ 임을 이용한다.

풀이 $49^x+a \cdot 7^{x+1}+b \leq 0$ 에서 $(7^x)^2+7a \cdot 7^x+b \leq 0$

$7^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 $t^2+7at+b \leq 0$ ㉠

이때 $1 \leq x \leq 2$ 에서 $7^1 \leq 7^x \leq 7^2 \quad \therefore 7 \leq t \leq 49$

해가 $7 \leq t \leq 49$ 이고 t^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(t-7)(t-49) \leq 0 \quad \therefore t^2-56t+343 \leq 0$$

이것이 ㉠과 일치하므로

$$\begin{aligned} 7a &= -56, b=343 \quad \therefore a=-8, b=343 \\ \therefore a+b &= 335 \end{aligned}$$
 답 335

0399 **전략** a^x 꼴이 반복되는 지수방정식 또는 지수부등식을 풀 때에는 $a^x=t$ 로 치환하여 t 에 대한 방정식 또는 부등식을 푼다.

풀이 $4^x-10 \cdot 2^x+16=0$ 에서 $(2^x)^2-10 \cdot 2^x+16=0$

$2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 $t^2-10t+16=0$

$$(t-2)(t-8)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=8$$

즉 $2^x=2$ 또는 $2^x=8$ 이므로

$$x=1 \text{ 또는 } x=3 \quad \therefore A=\{1, 3\} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-1}<2-17 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 에서 $9\left(\frac{1}{9}\right)^x+17 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x-2<0$

$$9\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^2+17 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x-2<0$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=s$ ($s>0$)로 놓으면 $9s^2+17s-2<0$

$$(s+2)(9s-1)<0 \quad \therefore -2<s<\frac{1}{9}$$

그런데 $s>0$ 이므로 $0<s<\frac{1}{9}$

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^x<\frac{1}{9}$ 에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^2$

밑이 1보다 작으므로 $x>2 \quad \therefore B=\{x|x>2\} \quad \cdots \textcircled{2}$

$$\therefore A \cap B = \{3\} \quad \cdots \textcircled{3}$$

답 {3}

채점 기준	비율
① 집합 A 를 구할 수 있다.	40 %
② 집합 B 를 구할 수 있다.	50 %
③ $A \cap B$ 를 구할 수 있다.	10 %

0400 **전략** 먼저 주어진 식에 $t=15, W_0=w_0, W=3w_0$ 을 대입하여 지수방정식을 푼다.

풀이 $t=15$ 일 때, $W_0=w_0, W=3w_0$ 이므로

$$3w_0=\frac{w_0}{2}10^{15a}(1+10^{15a}), \quad 10^{30a}+10^{15a}=6$$

$$\therefore (10^{15a})^2+10^{15a}-6=0$$

$10^{15a}=X$ ($X>0$)로 놓으면 $X^2+X-6=0$

$$(X+3)(X-2)=0 \quad \therefore X=2 \quad (\because X>0)$$

$$\therefore 10^{15a}=2$$

$t=30$ 일 때, 기대자산은

$$\frac{w_0}{2}10^{30a}(1+10^{30a})=\frac{w_0}{2}(10^{15a})^2\{1+(10^{15a})^2\}$$

$$=\frac{w_0}{2} \cdot 2^2(1+2^2)$$

$$=10w_0$$

$$\therefore k=10 \quad \text{답 ②}$$

0401 **전략** (a, b) 가 집합 A 의 원소이므로 $b=3^a$ 임을 이용하여 보기의 순서쌍들이 집합 A 의 원소인지 확인한다.

풀이 (a, b) 가 집합 A 의 원소이므로

$$b=3^a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\therefore y=3^x$ 의 x 에 $-a$ 를 대입하면

$$y=3^{-a}=\frac{1}{3^a}=\frac{1}{b} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore \left(-a, \frac{1}{b}\right) \in A$$

ㄴ. $y=3^x$ 의 x 에 $3a$ 를 대입하면

$$y=3^{3a}=(3^a)^3=b^3 (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore (3a, b^3) \in A$$

ㄷ. $y=3^x$ 의 x 에 $\frac{a}{3}$ 를 대입하면

$$y=3^{\frac{a}{3}}=(3^a)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3^a}=\sqrt[3]{b} (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{27}\right) \notin A$$

ㄹ. $y=3^x$ 의 x 에 $a-1$ 을 대입하면

$$y=3^{a-1}=3^a \cdot \frac{1}{3} = \frac{b}{3} (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore \left(a-1, \frac{b}{3}\right) \in A$$

이상에서 집합 A 의 원소인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

참고 (a, b) 가 집합 A 의 원소라는 것은 좌표평면에서 점 (a, b) 가 함수 $y=3^x$ 의 그래프 위의 점임을 나타낸다.

0402 전략 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 이은 선분을 $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$ 임을 이용한다.

풀이 점 A 는 함수 $y=3^x$ 의 그래프 위의 점이고 y 좌표가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{3}=3^x \text{에서 } x=-1 \quad \therefore A\left(-1, \frac{1}{3}\right)$$

점 B 의 좌표를 $(a, 3^a)$ 이라 하면 선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점 C 의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot a + 2 \cdot (-1)}{1+2}, \frac{1 \cdot 3^a + 2 \cdot \frac{1}{3}}{1+2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{a-2}{3}, \frac{3^a + \frac{2}{3}}{3}\right)$$

이때 점 C 는 y 축 위에 있으므로

$$\frac{a-2}{3}=0 \quad \therefore a=2$$

따라서 점 B 의 y 좌표는 $3^2=9$ 답 ⑤

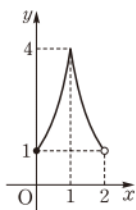
다른풀이 $3^x=\frac{1}{3}$ 에서 $x=-1 \quad \therefore A\left(-1, \frac{1}{3}\right)$

점 A 와 y 축 사이의 거리가 1이므로 점 B 와 y 축 사이의 거리는 2이다.

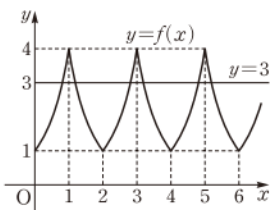
따라서 점 B 의 x 좌표가 2이므로 y 좌표는 $3^2=9$

0403 전략 방정식 $f(x)-3=0$ 의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $0 \leq x < 2$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같고, 조건 (나)에 의하여 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

방정식 $f(x)-3=0$, 즉 $f(x)=3$ 의 실근의 개수는 위의 그림에서 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 의 교점의 개수와 같다.

이때 $0 \leq x < 2$ 에서 방정식 $f(x)=3$ 의 실근의 개수는 2이므로 구하는 실근의 개수는 $2 \cdot 10 = 20$ 답 20

0404 전략 $3^x+3^{-x}=t$ 로 놓고 주어진 함수를 t 에 대한 이차함수로 나타낸다.

풀이 $3^x+3^{-x}=t$ 로 놓으면 $3^x > 0, 3^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t=3^x+3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}}=2 \text{ (단, 등호는 } x=0 \text{일 때 성립)} \cdots \textcircled{1}$$

이때

$$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$$

이므로 주어진 함수는

$$y=t^2-2-6t+k=(t-3)^2-11+k \text{ (} t \geq 2 \text{)} \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $t=3$ 일 때 y 는 최솟값 $-11+k$ 를 가지므로

$$-11+k=1 \quad \therefore k=12 \cdots \textcircled{3}$$

답 12

채점 기준	비율
① t 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
② 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0405 전략 $5^x=t$ ($t>0$)로 놓고 주어진 방정식을 t 에 대한 이차방정식으로 나타낸다.

풀이 $5^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2-5t+k=0 \cdots \textcircled{1}$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 하므로

$$x>0 \text{에서 } t>1$$

즉 이차방정식 ①은 $t>1$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

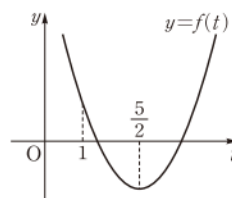
$$D=(-5)^2-4k>0 \quad \therefore k<\frac{25}{4}$$

(ii) $f(t)=t^2-5t+k$ 라 하면 $y=f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $f(1)>0$ 에서

$$1-5+k>0 \quad \therefore k>4$$

$$(i), (ii) \text{에서 } 4 < k < \frac{25}{4}$$

따라서 정수 k 는 5, 6의 2개이다. 답 ②



라센 특강 이차방정식의 근의 분리

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ ($a>0$)의 판별식을 $D=b^2-4ac$ 라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$ 라 하면 상수 p, q ($p<q$)에 대하여 다음이 성립한다.

① 두 근이 모두 p 보다 크다.

$$\Leftrightarrow D \geq 0, f(p) > 0, -\frac{b}{2a} > p$$

② 두 근이 모두 p 보다 작다.

$$\Leftrightarrow D \geq 0, f(p) > 0, -\frac{b}{2a} < p$$

③ 두 근 사이에 p 가 있다.

$$\Leftrightarrow f(p) < 0$$

④ 두 근이 모두 p, q 사이에 있다.

$$\Leftrightarrow D \geq 0, f(p) > 0, f(q) > 0, p < -\frac{b}{2a} < q$$

04

로그함수

I. 지수함수와 로그함수

0406 \neg, \neg

0407 주어진 함수는 $\{x|x \text{는 실수}\}$ 에서 $\{y|y>0\}$ 으로의 일대일 대응이다.

$$y=7^x \text{에서 } x=\log_7 y$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y=\log_7 x$$

$y=\log_7 x$

참고 $y=\log_7 x$ 에서 정의역 $\{x|x>0\}$ 은 생략할 수 있다.

0408 주어진 함수는 $\{x|x>0\}$ 에서 $\{y|y \text{는 실수}\}$ 로의 일대일 대응이다.

$$y=\log_{\frac{1}{2}} x \text{에서 } x=\left(\frac{1}{2}\right)^y$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

0409 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_3 \frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-1$

-1

0410 $f(\sqrt{3})=\log_3 \sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2},$

$$f(9)=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2$$

$$\therefore f(\sqrt{3})f(9)=1$$

1

0411 $f(2)=\log_{\frac{1}{2}} 2=\log_{2^{-1}} 2=-1$

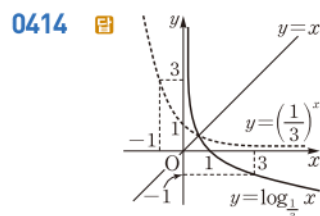
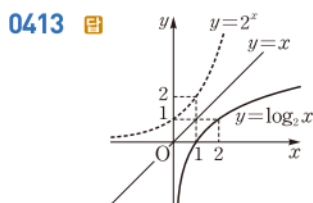
-1

0412 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}=\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2=2,$

$$f(8)=\log_{\frac{1}{2}} 8=\log_{2^{-1}} 2^3=-3$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right)f(8)=-6$$

-6



0415 \bigcirc

0416 \bigcirc

0417 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

\times

0418 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지난다.

\times

0419 \bigcirc

0420 $2\log_3 2=\log_3 2^2=\log_3 4$ 이고 $4<5$ 이다.

이때 함수 $y=\log_3 x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$\log_3 4<\log_3 5 \quad \therefore 2\log_3 2<\log_3 5$$

$2\log_3 2<\log_3 5$

0421 $6<8$ 이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\log_{\frac{1}{4}} 8<\log_{\frac{1}{4}} 6$$

$\log_{\frac{1}{4}} 8<\log_{\frac{1}{4}} 6$

0422 $y=\log_{\frac{1}{5}}(x+2)+1$

0423 $-y=\log_{\frac{1}{5}} x$ 에서 $y=-\log_{\frac{1}{5}} x$

$y=-\log_{\frac{1}{5}} x$

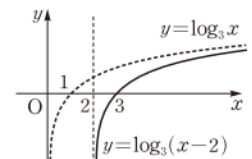
0424 $y=\log_{\frac{1}{5}}(-x)$

0425 $-y=\log_{\frac{1}{5}}(-x)$ 에서 $y=-\log_{\frac{1}{5}}(-x)$

$y=-\log_{\frac{1}{5}}(-x)$

0426 $y=\log_3(x-2)$ 의 그래프는 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

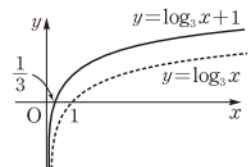
따라서 정의역은 $\{x|x>2\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x=2$ 이다.



풀이 참조

0427 $y=\log_3 x+1$ 의 그래프는 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

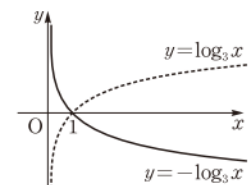
따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x=0$ 이다.



풀이 참조

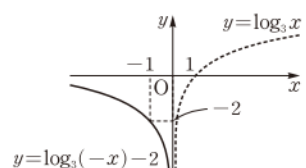
0428 $y=-\log_3 x$ 의 그래프는 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x=0$ 이다.

풀이 참조

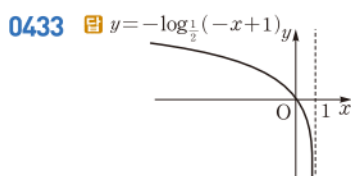
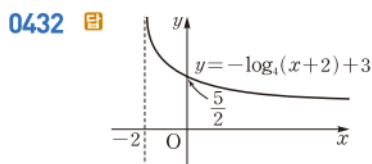
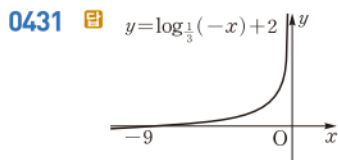
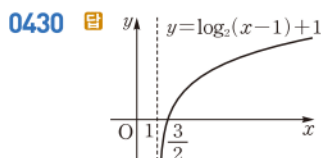



0429 $y=\log_3(-x)-2$ 의 그래프는 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.


따라서 정의역은 $\{x|x<0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x=0$ 이다.





풀이 참조




0434 함수 $y = \log_4 x$ 에서
 $x = \frac{1}{4}$ 일 때, $y = \log_4 \frac{1}{4} = \log_4 4^{-1} = -1$
 $x = 64$ 일 때, $y = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$
 따라서 최댓값은 3, 최솟값은 -1이다.  최댓값: 3, 최솟값: -1


0435 함수 $y = \log_{\frac{1}{8}} x$ 에서
 $x = \frac{1}{64}$ 일 때, $y = \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{64} = \log_{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 2$
 $x = 8$ 일 때, $y = \log_{\frac{1}{8}} 8 = \log_{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = -1$
 따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -1이다.  최댓값: 2, 최솟값: -1


0436 함수 $y = \log_3(x+1) - 3$ 에서
 $x = 2$ 일 때, $y = \log_3 3 - 3 = 1 - 3 = -2$
 $x = 8$ 일 때, $y = \log_3 9 - 3 = \log_3 3^2 - 3 = -1$
 따라서 최댓값은 -1, 최솟값은 -2이다.  최댓값: -1, 최솟값: -2


0437 진수의 조건에서 $2x+1 > 0$ 이므로
 $x > -\frac{1}{2}$ ㉠
 $\log_2(2x+1) = 1$ 에서 $2x+1 = 2$
 $2x = 1 \quad \therefore x = \frac{1}{2}$
 $x = \frac{1}{2}$ 은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.  $x = \frac{1}{2}$


0438 밑의 조건에서 $x > 0, x \neq 1$ ㉠
 $\log_7 x = -2$ 에서 $x^{-2} = 7, \quad x^2 = \frac{1}{7}$
 $\therefore x = \pm \frac{\sqrt{7}}{7}$


㉠에 의하여 구하는 해는 $x = \frac{\sqrt{7}}{7}$ 이다.  $x = \frac{\sqrt{7}}{7}$

0439 진수의 조건에서 $2x-7 > 0, x > 0$ 이므로
 $x > \frac{7}{2}, x > 0 \quad \therefore x > \frac{7}{2}$ ㉠
 $\log_3(2x-7) = \log_3 x$ 에서 $2x-7 = x$
 $\therefore x = 7$
 $x = 7$ 은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.  $x = 7$

0440 진수의 조건에서 $5x+6 > 0, x > 0$ 이므로
 $x > -\frac{6}{5}, x > 0 \quad \therefore x > 0$ ㉠
 $\log_4(5x+6) = \log_2 x$ 에서 $\log_4(5x+6) = \log_4 x^2$ 이므로
 $5x+6 = x^2, \quad x^2 - 5x - 6 = 0$
 $(x+1)(x-6) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 6$
 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x = 6$ 이다.  $x = 6$

0441 진수의 조건에서 $x+2 > 0, 5x+24 > 0$ 이므로
 $x > -2, x > -\frac{24}{5} \quad \therefore x > -2$ ㉠
 $\log_{\sqrt{7}}(x+2) = \log_7(5x+24)$ 에서 $\log_7(x+2)^2 = \log_7(5x+24)$
 이므로
 $(x+2)^2 = 5x+24, \quad x^2 - x - 20 = 0$
 $(x+4)(x-5) = 0 \quad \therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 5$
 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x = 5$ 이다.  $x = 5$

0442 진수의 조건에서 $x+1 > 0, x-1 > 0$ 이므로
 $x > -1, x > 1 \quad \therefore x > 1$ ㉠
 $\log_{\frac{1}{5}}(x+1) = \log_5(x-1)$ 에서 $\log_{\frac{1}{5}}(x+1) = -\log_{\frac{1}{5}}(x-1)$ 이
 므로
 $x+1 = \frac{1}{x-1}, \quad (x+1)(x-1) = 1$
 $x^2 = 2 \quad \therefore x = \pm \sqrt{2}$
 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x = \sqrt{2}$ 이다.  $x = \sqrt{2}$

0443 $\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면 $t^2 - t - 2 = 0$
 $(t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 2$
 즉 $\log_{\frac{1}{3}} x = -1$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}} x = 2$ 이므로
 $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$ 또는 $x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
 $x = \frac{1}{9}$ 또는 $x = 3$

 참고 $\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 에서 $x = \left(\frac{1}{3}\right)^t$ 이므로 $x > 0$ 이다. 즉 진수의 조건을 항상 만족시킨다.

0444 $(\log_5 x)^2 - \log_5 x^3 = 0$ 에서 $(\log_5 x)^2 - 3\log_5 x = 0$
 $\log_5 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 3t = 0, \quad t(t-3) = 0$
 $\therefore t = 0$ 또는 $t = 3$
 즉 $\log_5 x = 0$ 또는 $\log_5 x = 3$ 이므로
 $x = 1$ 또는 $x = 5^3 = 125$ ▶ $x = 1$ 또는 $x = 125$

0445 $x^{\log x} = 10$ 의 양변에 상용로그를 취하면
 $\log x^{\log x} = \log 10, \quad \log x \cdot \log x = 1$
 $(\log x)^2 = 1$
 $\therefore \log x = -1$ 또는 $\log x = 1$
 즉 $\log x = \log 10^{-1}$ 또는 $\log x = \log 10^1$ 이므로

$$x = \boxed{\frac{1}{10}} \text{ 또는 } x = 10$$

$$\therefore \textcircled{㉠} \log x \text{ (나) } 1 \text{ (다) } \frac{1}{10} \quad \textcircled{▶} \textcircled{㉠} \log x \text{ (나) } 1 \text{ (다) } \frac{1}{10}$$

0446 진수의 조건에서 $5x+2 > 0$ 이므로
 $x > -\frac{2}{5}$ ㉠
 $\log_7 (5x+2) \geq 1$ 에서 $\log_7 (5x+2) \geq \log_7 7$
 밑이 1보다 크므로
 $5x+2 \geq 7, \quad 5x \geq 5$
 $\therefore x \geq 1$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x \geq 1$ ▶ $x \geq 1$

0447 진수의 조건에서 $x^2 > 0$ 이므로 x 는 $x \neq 0$ 인 실수이다.
 ㉠
 $\log_3 x^2 < 2$ 에서 $\log_3 x^2 < \log_3 9$
 밑이 1보다 크므로
 $x^2 < 9, \quad (x+3)(x-3) < 0$
 $\therefore -3 < x < 3$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
 $-3 < x < 0$ 또는 $0 < x < 3$
▶ $-3 < x < 0$ 또는 $0 < x < 3$

0448 진수의 조건에서 $7x+5 > 0$ 이므로
 $x > -\frac{5}{7}$ ㉠
 $\log_{\frac{1}{3}} (7x+5) \leq 1$ 에서 $\log_{\frac{1}{3}} (7x+5) \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$
 밑이 1보다 작으므로
 $7x+5 \geq \frac{1}{3}, \quad 7x \geq -\frac{14}{3} \quad \therefore x \geq -\frac{2}{3}$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x \geq -\frac{2}{3}$ ▶ $x \geq -\frac{2}{3}$

0449 진수의 조건에서 $x-5 > 0$ 이므로
 $x > 5$ ㉠
 $\log_{\frac{1}{4}} (x-5) > \frac{1}{2}$ 에서 $\log_{\frac{1}{4}} (x-5) > \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$
 밑이 1보다 작으므로

$$x-5 < \frac{1}{2} \quad \therefore x < \frac{11}{2} \quad \text{..... } \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $5 < x < \frac{11}{2}$ ▶ $5 < x < \frac{11}{2}$

0450 진수의 조건에서 $x+1 > 0, 2x-1 > 0$ 이므로
 $x > -1, x > \frac{1}{2} \quad \therefore x > \frac{1}{2}$ ㉠
 $\log_2 (x+1) \geq \log_2 (2x-1)$ 에서 밑이 1보다 크므로
 $x+1 \geq 2x-1, \quad -x \geq -2 \quad \therefore x \leq 2$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{2} < x \leq 2$ ▶ $\frac{1}{2} < x \leq 2$

0451 진수의 조건에서 $9-x > 0, x-8 > 0$ 이므로
 $x < 9, x > 8 \quad \therefore 8 < x < 9$ ㉠
 $\log_3 (9-x) < \log_3 (x-8)$ 에서 밑이 1보다 크므로
 $9-x < x-8, \quad -2x < -17 \quad \therefore x > \frac{17}{2}$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{17}{2} < x < 9$ ▶ $\frac{17}{2} < x < 9$

0452 진수의 조건에서 $3x+1 > 0, 3-2x > 0$ 이므로
 $x > -\frac{1}{3}, x < \frac{3}{2} \quad \therefore -\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$ ㉠
 $\log_{\frac{1}{7}} (3x+1) > -\log_7 (3-2x)$ 에서
 $\log_{\frac{1}{7}} (3x+1) > \log_{\frac{1}{7}} (3-2x)$
 밑이 1보다 작으므로
 $3x+1 < 3-2x, \quad 5x < 2 \quad \therefore x < \frac{2}{5}$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-\frac{1}{3} < x < \frac{2}{5}$
▶ $-\frac{1}{3} < x < \frac{2}{5}$

0453 진수의 조건에서 $x+2 > 0, x+14 > 0$ 이므로
 $x > -2, x > -14 \quad \therefore x > -2$ ㉠
 $\log_{\frac{1}{5}} (x+2) \leq \log_{\frac{1}{25}} (x+14)$ 에서
 $\log_{\frac{1}{5}} (x+2) \leq \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{5}} (x+14)$
 $2 \log_{\frac{1}{5}} (x+2) \leq \log_{\frac{1}{5}} (x+14)$
 $\log_{\frac{1}{5}} (x+2)^2 \leq \log_{\frac{1}{5}} (x+14)$
 밑이 1보다 작으므로 $(x+2)^2 \geq x+14$
 $x^2+3x-10 \geq 0, \quad (x+5)(x-2) \geq 0$
 $\therefore x \leq -5$ 또는 $x \geq 2$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x \geq 2$ ▶ $x \geq 2$

0454 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - 4t + 3 \leq 0$
 $(t-1)(t-3) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq t \leq 3$
 즉 $1 \leq \log_3 x \leq 3$ 이므로 $\log_3 3 \leq \log_3 x \leq \log_3 27$
 밑이 1보다 크므로 $3 \leq x \leq 27$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
 $3 \leq x \leq 27$ ▶ $3 \leq x \leq 27$

0455 진수의 조건에서

$$x > 0, x^2 > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x^2 > 0 \text{에서} \quad (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - 2 \log_{\frac{1}{2}} x > 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = t \text{로 놓으면} \quad t^2 - 2t > 0$$

$$t(t-2) > 0 \quad \therefore t < 0 \text{ 또는 } t > 2$$

$$\text{즉 } \log_{\frac{1}{2}} x < 0 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{2}} x > 2 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 1 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$$

$$\text{밀이 1보다 작으므로} \quad x > 1 \text{ 또는 } x < \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통 범위를 구하면

$$0 < x < \frac{1}{4} \text{ 또는 } x > 1 \quad \text{답 } 0 < x < \frac{1}{4} \text{ 또는 } x > 1$$

0456 진수의 조건에서 $x > 0$

$$x^{\log_2 x} \geq 2 \text{의 양변에 밀이 2인 로그를 취하면}$$

$$\log_2 x^{\log_2 x} \geq \log_2 2, \quad (\log_2 x)^2 \geq 1$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면} \quad t^2 \geq 1$$

$$\therefore t \leq -1 \text{ 또는 } t \geq 1$$

$$\text{즉 } \log_2 x \leq -1 \text{ 또는 } \log_2 x \geq 1 \text{이므로}$$

$$\log_2 x \leq \log_2 \frac{1}{2} \text{ 또는 } \log_2 x \geq \log_2 2$$

$$\text{밀이 1보다 크므로} \quad x \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } x \geq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통 범위를 구하면} \quad 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$\therefore \textcircled{1} 0 \quad \textcircled{2} \log_2 x \quad \textcircled{3} 1 \quad \textcircled{4} \frac{1}{2} \quad \textcircled{5} 2 \quad \text{답 풀이 참조}$$

0457 $a > 1$ 이면 $0 < \frac{1}{a} < 1$ 이다.

$$\textcircled{5} y = \log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x \text{이므로 } y = \log_{\frac{1}{a}} x \text{의 그래프와 } y = \log_a x \text{의 그래프는 } x \text{축에 대하여 대칭이다.} \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

0458 $y = \log_5(-x^2 - 3x + 10)$ 에서

$$-x^2 - 3x + 10 > 0, \quad x^2 + 3x - 10 < 0$$

$$(x+5)(x-2) < 0 \quad \therefore -5 < x < 2$$

따라서 구하는 정의역은

$$\{x \mid -5 < x < 2\} \quad \text{답 } \{x \mid -5 < x < 2\}$$

$$0459 \quad \neg. y = -\log_3 \frac{1}{x} = -\log_3 x^{-1} = \log_3 x$$

$$\cup. y = \log_{\frac{1}{3}}(-x) = -\log_3(-x)$$

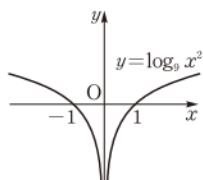
$$\cap. y = \frac{1}{3} \log_3 x^3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \log_3 x = \log_3 x$$

$$\epsilon. y = \log_9 x^2 = \log_3 x^2 = \log_3 |x|$$

이상에서 함수 $y = \log_3 x$ 와 같은 함수인 것은 \neg, \cap 이다.

답 ②

참고 ϵ . 함수 $y = \log_9 x^2$ 의 정의역은 $x^2 > 0$ 에서 $\{x \mid x \neq 0 \text{인 실수}\}$ 이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0460 주어진 그래프의 함수식을 $y = \log_3(x-m) + n$ 이라 하자.

$$\text{점근선의 방정식이 } x=2 \text{이므로} \quad m=2$$

또 그래프가 점 $(3, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = \log_3(3-2) + n \quad \therefore n = -1$$

$$\text{따라서 그래프의 식은} \quad y = \log_3(x-2) - 1 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0461 함수 $y = \log_4 x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = -\log_4(-x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \rightarrow \textcircled{1}$$

①의 그래프를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\log_4\{-(x-k)\} = -\log_4(-x+k) \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

②의 그래프가 점 $(4, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = -\log_4(-4+k), \quad \log_4(-4+k) = 1$$

$$-4+k=4 \quad \therefore k=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \quad \rightarrow \textcircled{3}$$

답 8

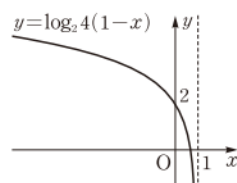
채점 기준	비율
① 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
② 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0462 $y = \log_2 4(1-x) = \log_2\{-(x-1)\} + 2$ 의 그래프는

$y = \log_2(-x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y = \log_2(-x)$ 의 그래프는

$y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $y = \log_2 4(1-x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지난다.

② 정의역은 $\{x \mid x < 1\}$ 이다.

③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$ 이다.

④ x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소한다.

⑤ 그래프가 제3사분면을 지나지 않는다. 답 ⑤

참고 $y = \log_2 4(1-x) = \log_2(-x+1) + 2$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 y 축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

0463 $\neg. y = \log_5 \frac{1}{x} = \log_5 x^{-1} = -\log_5 x$ 의 그래프는 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$\cup. y = \log_{25} x = \log_5 x = \frac{1}{2} \log_5 x$ 의 그래프는 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여도 겹쳐지지 않는다.

$\cap. y = \log_5(-5x) = \log_5 5(-x) = \log_5(-x) + 1$ 의 그래프는 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$\epsilon. y = \log_{\frac{1}{5}}(x+1) = -\log_5(x+1)$ 의 그래프는 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이상에서 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 \neg, \cap, ϵ 이다. 답 ④

0464 $y = \log_2 6x = \log_2 x + \log_2 6$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\log_2 6$ 만큼 평행이동한 것이다.

즉 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는

$$(4-1) \cdot \log_2 6 = 3 \log_2 6$$

답 ④

0465 $f(1) = \log_a 3 + 5 = 4$ 이므로 $\log_a 3 = -1$

$$a^{-1} = 3 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

따라서 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+2) + 5$ 이므로

$$f(7) = \log_{\frac{1}{3}} 9 + 5 = \log_{3^{-1}} 3^2 + 5 = -2 + 5 = 3$$

답 3

0466 $f(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$ 이므로 $f(2) + f(a) = f(6)$ 에서

$$-1 + \log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{2}} 6$$

$$\log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{2}} 6 + 1 = \log_{\frac{1}{2}} \left(6 \cdot \frac{1}{2} \right) = \log_{\frac{1}{2}} 3$$

$$\therefore a = 3$$

답 3

0467 $f\left(\frac{1}{25}\right) = 2 \log_5 \frac{1}{25} = 2 \log_5 5^{-2}$

$$= 2 \cdot (-2) = -4$$

→ ①

$$\therefore (f \circ f)\left(\frac{1}{25}\right) = f\left(f\left(\frac{1}{25}\right)\right) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81}$$

→ ②

답 $\frac{1}{81}$

채점 기준	비율
① $f\left(\frac{1}{25}\right)$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② $(f \circ f)\left(\frac{1}{25}\right)$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0468 $f(x) = \log_{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \log_{\sqrt{2}} \frac{x-1}{x}$

$$\therefore f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(16)$$

$$= \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} + \log_{\sqrt{2}} \frac{2}{3} + \log_{\sqrt{2}} \frac{3}{4} + \cdots + \log_{\sqrt{2}} \frac{15}{16}$$

$$= \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{15}{16} \right) = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{16}$$

$$= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{-4} = (-4) \cdot 2 = -8$$

답 ①

0469 $\log_2 M = 0.2$, $\log_2 N = 0.4$ 에서

$$\log_2 M + \log_2 N = 0.2 + 0.4 = 0.6$$

즉 $\log_2 MN = 0.6$ 이고 주어진 그래프에서 $\log_2 a = 0.6$ 이므로

$$MN = a$$

답 ①

0470 점 A의 좌표를 (a, b) 라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로 $b = 2$

$$\text{즉 } 2 = \log_4 a \text{에서 } a = 4^2 = 16$$

따라서 A(16, 2)이므로 B(14, 2)

답 B(14, 2)

0471 함수 $y = 2^x$ 의 그래프에서

$$2^a = e, 2^b = f \quad \therefore \log_2 e = a, \log_2 f = b$$

함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프에서 $\log_2 c = e, \log_2 d = f$

$$\begin{aligned} \therefore \log_2 cdef &= \log_2 c + \log_2 d + \log_2 e + \log_2 f \\ &= e + f + a + b = a + b + e + f \end{aligned}$$

답 ③

0472 $y = \log_4(x+a) - 3$ 에서 $\log_4(x+a) = y+3$

$$x+a = 4^{y+3} \quad \therefore x = 4^{y+3} - a$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 4^{x+3} - a$

따라서 함수 $y = \log_4(x+a) - 3$ 의 역함수는 $y = 4^{x+3} - a$ 이고, 이것이 $y = 4^{x+b} - 1$ 과 일치해야 하므로 $a = 1, b = 3$

$$\therefore a + b = 4$$

답 ④

라센 특강 역함수 구하기

함수 $y = f(x)$ 의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 함수 $y = f(x)$ 가 일대일대응인지 확인한다.

(ii) $y = f(x)$ 에서 x 를 y 에 대한 식으로 나타낸다. 즉 $x = f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.

(iii) $x = f^{-1}(y)$ 의 x 와 y 를 서로 바꾸어 $y = f^{-1}(x)$ 꼴로 나타낸다.

0473 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-3) + 1$ 에서 $\log_{\frac{1}{3}}(x-3) = y-1$

$$x-3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{y-1} \quad \therefore x = \left(\frac{1}{3}\right)^{y-1} + 3$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 3$$

$$\text{답 } y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 3$$

0474 함수 $y = \log_5(x+m) + 1$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점을 직선 $y = x$ 가 지나므로 함수 $y = \log_5(x+m) + 1$ 의 그래프는 점 (2, 2)를 지난다.

→ ①

즉 $2 = \log_5(2+m) + 1$ 에서 $\log_5(2+m) = 1$

$$2+m = 5 \quad \therefore m = 3$$

→ ②

답 3

채점 기준	비율
① $y = \log_5(x+m) + 1$ 의 그래프가 점 (2, 2)를 지남을 알 수 있다.	50 %
② m 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0475 $f(a) = p$ 에서 $\log_{\sqrt{3}} a = p$

$$\therefore a = (\sqrt{3})^p = 3^{\frac{p}{2}}$$

$g(3p) = q$ 라 하면 $f(q) = 3p$ 이므로 $\log_{\sqrt{3}} q = 3p$

$$\therefore q = (\sqrt{3})^{3p} = 3^{\frac{3}{2}p} = (3^{\frac{p}{2}})^3 = a^3$$

답 ⑤

0476 $(f \circ g)(x) = x$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.

$$y = 3^x + 1 \text{로 놓으면 } 3^x = y - 1$$

$$\therefore x = \log_3(y-1)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \log_3(x-1)$

$$\therefore g(x) = \log_3(x-1)$$

$$\begin{aligned} \therefore (g \circ g)(82) &= g(g(82)) = g(\log_3 81) = g(4) \\ &= \log_3 3 = 1 \end{aligned}$$

답 ④

다른풀이 $g(82)=a$ 라 하면 $f(a)=82$ 이므로
 $3^a+1=82, \quad 3^a=81=3^4 \quad \therefore a=4$
 $g(4)=b$ 라 하면 $f(b)=4$ 이므로
 $3^b+1=4, \quad 3^b=3 \quad \therefore b=1$
 $\therefore (g \circ g)(82)=g(g(82))=g(4)=1$

0477 $A=4\log_5 2=\log_5 2^4=\log_5 16$

$B=2=\log_5 5^2=\log_5 25$

$C=\frac{3}{\log_5 5}=3\log_5 3=\log_5 3^3=\log_5 27$

이때 $16 < 25 < 27$ 이고 밑이 1보다 크므로

$\log_5 16 < \log_5 25 < \log_5 27$

$\therefore A < B < C$ 답 ①

0478 $-2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{2}} 4$

이때 $4 < \sqrt{20} < 5$ 이고 밑이 1보다 작으므로

$\log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{20} < \log_{\frac{1}{2}} 4$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{20} < -2$ 답 $\log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{20} < -2$

0479 $1 < a < 3$ 의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면

$0 < \log_3 a < 1 \quad \therefore 0 < A < 1$

$B=\log_3 \frac{1}{a}=\log_3 a^{-1}=-\log_3 a$ 이므로

$-1 < -\log_3 a < 0 \quad \therefore -1 < B < 0$

$C=\log_a 3=\frac{1}{\log_3 a}$ 이므로 $\frac{1}{\log_3 a} > 1 \quad \therefore C > 1$

따라서 가장 큰 수는 C 이다. 답 C

0480 함수 $y=\log_2(x-a)+2$ 에서 밑이 1보다 크므로 이 함수는 $x=3$ 일 때 최솟값 4를 갖는다.

즉 $\log_2(3-a)+2=4$ 이므로 $\log_2(3-a)=2$

$3-a=4 \quad \therefore a=-1$ 답 -1

0481 $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)-1$ 에서 밑이 1보다 작으므로 y 는 $2x+1$

이 최대이면 최소, 최소이면 최대가 된다. → ①

$x=1$ 일 때, $y=\log_{\frac{1}{3}} 3-1=-2$

$x=4$ 일 때, $y=\log_{\frac{1}{3}} 9-1=-3$

따라서 $M=-2, m=-3$ 이므로 → ②

$2M+m=-7$ → ③

답 -7

채점 기준	비율
① $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)-1$ 이 최대, 최소가 되는 경우를 알 수 있다.	40 %
② M, m 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $2M+m$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0482 $f(x)=x^2-4x+6$ 으로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2+2$

$-3 \leq x \leq 3$ 에서 $f(-3)=27, f(2)=2, f(3)=3$ 이므로

$2 \leq f(x) \leq 27$

$y=\log_3 f(x)$ 에서

$f(x)=2$ 일 때, $y=\log_3 2$

$f(x)=27$ 일 때, $y=\log_3 27=\log_3 3^3=3$

따라서 y 의 최댓값은 3, 최솟값은 $\log_3 2$ 이므로 구하는 곱은

$3\log_3 2$ 답 $3\log_3 2$

0483 $f(x)=-x^2+2x+3$ 으로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+4$

$-1 < x < 2$ 에서 진수의 최댓값은 4이고 최솟값은 없다.

그런데 주어진 함수가 최솟값을 가지므로 $0 < a < 1$ 이다. → ①

즉 $\log_a 4 = -2$ 이므로 $a^{-2}=4, \quad \frac{1}{a^2}=4$

$\therefore a=\frac{1}{2} (\because 0 < a < 1)$ → ②

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
① a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	40 %

0484 $f(x)=|2x+1|+1$ 로 놓으면

(i) $x \geq -\frac{1}{2}$ 일 때,

$f(x)=2x+1+1=2x+2$

(ii) $x < -\frac{1}{2}$ 일 때,

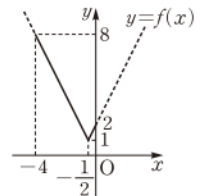
$f(x)=-(2x+1)+1=-2x$

(i), (ii)에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$-4 \leq x \leq 0$ 에서 $f(-4)=8, f(-\frac{1}{2})=1,$

$f(0)=2$ 이므로 $1 \leq f(x) \leq 8$

따라서 $y=\log_2 f(x)$ 는 $f(x)=8$ 일 때 최댓값 $\log_2 8=3$ 을 갖는다. 답 ③



0485 $\log_3 x=t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 27$ 에서

$\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 27 \quad \therefore 0 \leq t \leq 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

따라서 y 는 $t=3$ 일 때 최댓값 5, $t=1$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

답 최댓값: 5, 최솟값: 1

0486 $y=(\log_2 x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x^4+3=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3$

$\log_2 x=t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

y 는 $t=2$ 일 때 최솟값 -1을 가지므로 $\log_2 x=2$ 에서

$x=2^2=4$

따라서 $a=4, b=-1$ 이므로 $a+b=3$ 답 ③

0487 $y=\log_5 \frac{x}{25} \cdot \log_5 5x$

$=(\log_5 x - \log_5 25)(\log_5 x + \log_5 5)$

$=(\log_5 x - 2)(\log_5 x + 1)$

$=(\log_5 x)^2 - \log_5 x - 2$

$\log_5 x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{25} \leq x \leq 5$ 에서

$$\log_5 \frac{1}{25} \leq \log_5 x \leq \log_5 5 \quad \therefore -2 \leq t \leq 1$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - t - 2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

따라서 y 는 $t = -2$ 일 때 최댓값 4, $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $-\frac{9}{4}$ 를 가지므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$$4 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = -9 \quad \text{답 } -9$$

0488 $x^{\log 4} = 4^{\log x}$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= -4^{\log x} \cdot x^{\log 4} + 2(4^{\log x} + x^{\log 4}) \\ &= -4^{\log x} \cdot 4^{\log x} + 2(4^{\log x} + 4^{\log x}) \\ &= -(4^{\log x})^2 + 4 \cdot 4^{\log x} \end{aligned}$$

$4^{\log x} = t$ 로 놓으면 $x > 1$ 에서 $t > 1$

이때 주어진 함수는

$$y = -t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

y 는 $t=2$ 일 때 최댓값 4를 가지므로 $4^{\log x} = 2$ 에서

$$4^{\log x} = 4^{\frac{1}{2}}, \quad \log x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \sqrt{10}$$

따라서 $a = \sqrt{10}$, $b = 4$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 26 \quad \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \textcircled{3} \quad \text{답 } 26$$

채점 기준	비율
① 주어진 함수를 t 에 대한 이차함수로 변형할 수 있다.	50 %
② a , b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $a^2 + b^2$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0489 $y = x^{2+\log_3 x}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log_3 y &= \log_3 x^{2+\log_3 x} = (2 + \log_3 x) \log_3 x \\ &= (\log_3 x)^2 + 2 \log_3 x \end{aligned}$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $\log_3 y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1$

$\log_3 y$ 는 $t = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로

$$\log_3 x = -1 \text{에서} \quad x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\log_3 y = -1 \text{에서} \quad y = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

따라서 y 는 $x = \frac{1}{3}$ 일 때 최솟값 $\frac{1}{3}$ 을 갖는다. 답 $\frac{1}{3}$

0490 $y = 10x^{2-\log x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log y &= \log 10x^{2-\log x} \\ &= \log 10 + \log x^{2-\log x} \\ &= 1 + (2 - \log x) \log x \\ &= -(\log x)^2 + 2 \log x + 1 \end{aligned}$$

$\log x = t$ 로 놓으면 $\log y = -t^2 + 2t + 1 = -(t-1)^2 + 2$

$\log y$ 는 $t=1$ 일 때 최댓값 2를 가지므로

$$\log x = 1 \text{에서} \quad x = 10 \quad \therefore a = 10$$

$$\log y = 2 \text{에서} \quad y = 10^2 = 100 \quad \therefore b = 100$$

$$\therefore \frac{b}{a} = 10 \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

$$\textbf{0491} \quad y = \log_x 100 + \log x = \frac{2}{\log x} + \log x$$

이때 $x > 1$ 에서 $\log x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2}{\log x} + \log x \geq 2\sqrt{\frac{2}{\log x} \cdot \log x} = 2\sqrt{2} \quad (\text{단, 등호는 } \log x = \sqrt{2} \text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{2}$ 이다. 답 $\textcircled{2}$

$$\begin{aligned} \textbf{0492} \quad \log_2 \left(x + \frac{1}{y}\right) + \log_2 \left(\frac{1}{x} + y\right) &= \log_2 \left(x + \frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{x} + y\right) \\ &= \log_2 \left(xy + \frac{1}{xy} + 2\right) \end{aligned}$$

이때 $x > 0$, $y > 0$ 에서 $xy > 0$, $\frac{1}{xy} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$xy + \frac{1}{xy} + 2 \geq 2\sqrt{xy \cdot \frac{1}{xy}} + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4 \quad (\text{단, 등호는 } xy = 1 \text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 $\log_2 4 = 2$ 이다. 답 2

$$\textbf{0493} \quad \log_x y^2 + \log_{\sqrt{y}} x = 2 \log_x y + 2 \log_y x$$

이때 $x > 1$, $y > 1$ 에서 $\log_x y > 0$, $\log_y x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 2 \log_x y + 2 \log_y x &\geq 2\sqrt{2 \log_x y \cdot 2 \log_y x} \\ &= 2\sqrt{4} = 4 \quad (\text{단, 등호는 } x = y \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 4이다. 답 $\textcircled{1}$

0494 $1 < x < 25$ 에서 $\log_5 x > 0$, $\log_5 \frac{25}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log_5 x + \log_5 \frac{25}{x} \geq 2\sqrt{\log_5 x \cdot \log_5 \frac{25}{x}}$$

$$\text{이때 } \log_5 x + \log_5 \frac{25}{x} = \log_5 \left(x \cdot \frac{25}{x}\right) = \log_5 25 = 2 \text{이므로}$$

$$2 \geq 2\sqrt{\log_5 x \cdot \log_5 \frac{25}{x}}, \quad \sqrt{\log_5 x \cdot \log_5 \frac{25}{x}} \leq 1$$

$$\therefore 0 < \log_5 x \cdot \log_5 \frac{25}{x} \leq 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{즉 } y = \log_5 x \cdot \log_5 \frac{25}{x} \text{의 최댓값은 } 1 \text{이므로} \quad b = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

한편 등호는 $\log_5 x = \log_5 \frac{25}{x}$, 즉 $x = \frac{25}{x}$ 일 때 성립하므로

$$x^2 = 25 \quad \therefore x = 5 \quad (\because 1 < x < 25)$$

따라서 $a = 5$ 이므로 $\cdots \textcircled{3}$

$$a + b = 6 \quad \cdots \textcircled{4} \quad \text{답 } 6$$

채점 기준	비율
① $\log_5 x \cdot \log_5 \frac{25}{x}$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	10 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $a + b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

다른풀이 $y = \log_5 x \cdot \log_5 \frac{25}{x} = \log_5 x (\log_5 25 - \log_5 x)$

$$= -(\log_5 x)^2 + 2\log_5 x$$

$\log_5 x = t$ 로 놓으면 $1 < x < 25$ 에서

$$0 < t < 2$$

이때 주어진 함수는

$$y = -t^2 + 2t = -(t-1)^2 + 1$$

y 는 $t=1$ 일 때 최댓값 1을 가지므로 $\log_5 x = 1$ 에서

$$x = 5$$

따라서 $a=5, b=1$ 이므로 $a+b=6$

0495 진수의 조건에서 $x-1 > 0, x > 0$ 이므로

$$x > 1, x > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_2 x = 1$ 에서

$$2\log_2(x-1) + \log_2 x = 1$$

$$\log_2(x-1)^2 + \log_2 x = 1$$

$$\log_2 x(x-1)^2 = \log_2 2$$

$$x(x-1)^2 = 2, \quad x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x^2+1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 2 \quad (\because \textcircled{1})$$

따라서 $a=2$ 이므로

$$10^a = 10^2 = 100 \quad \text{답 } 100$$

0496 진수의 조건에서 $x > 0, (x+1)^2 > 0$ 이므로

$$x > 0, x \neq -1 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{4}}(x+1)^2 = -1$ 에서

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+x) = \log_{\frac{1}{2}} 2, \quad x^2+x = 2$$

$$x^2+x-2=0, \quad (x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x = 1 \quad (\because \textcircled{1}) \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

0497 $(\log_2 2x)^2 - 2\log_2 8x^3 = 0$ 에서

$$(\log_2 2 + \log_2 x)^2 - 2(\log_2 8 + \log_2 x^3) = 0$$

$$(1 + \log_2 x)^2 - 2(3 + 3\log_2 x) = 0$$

$$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 5 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - 4t - 5 = 0$

$$(t+1)(t-5) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 5$$

즉 $\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 5$ 이므로

$$x = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2^5 = 32$$

$$\text{답 } x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 32$$

0498 $\log_5 x \cdot \log_5 25x = 3$ 에서

$$\log_5 x (\log_5 25 + \log_5 x) = 3, \quad \log_5 x (2 + \log_5 x) = 3$$

$$(\log_5 x)^2 + 2\log_5 x - 3 = 0$$

$\log_5 x = t$ 로 놓으면 $t^2 + 2t - 3 = 0$

$$(t+3)(t-1) = 0 \quad \therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

즉 $\log_5 x = -3$ 또는 $\log_5 x = 1$ 이므로

$$x = 5^{-3} = \frac{1}{125} \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 모든 근의 곱은

$$\frac{1}{125} \cdot 5 = \frac{1}{25} \quad \text{답 } \frac{1}{25}$$

0499 밑과 진수의 조건에서 $x > 0, x \neq 1$

$\log_3 x + \log_x 27 = 4$ 에서

$$\log_3 x + 3\log_x 3 = 4, \quad \log_3 x + \frac{3}{\log_3 x} = 4$$

$\log_3 x = t$ ($t \neq 0$)로 놓으면 $t + \frac{3}{t} = 4$

$$t^2 - 4t + 3 = 0, \quad (t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 3$$

즉 $\log_3 x = 1$ 또는 $\log_3 x = 3$ 이므로

$$x = 3 \text{ 또는 } x = 3^3 = 27$$

따라서 $a=27, b=3$ 이므로 $a-b=24$ 답 ②

0500 $x^{\log 2} = 2^{\log x}$ 이므로 $2^{\log x} \cdot x^{\log 2} - 3(2^{\log x} + x^{\log 2}) - 16 = 0$ 에서

$$2^{\log x} \cdot 2^{\log x} - 3(2^{\log x} + 2^{\log x}) - 16 = 0$$

$$(2^{\log x})^2 - 6 \cdot 2^{\log x} - 16 = 0$$

$2^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 6t - 16 = 0, \quad (t+2)(t-8) = 0$$

$$\therefore t = 8 \quad (\because t > 0)$$

즉 $2^{\log x} = 8$ 이므로 $\log x = 3$

$$\therefore x = 10^3 = 1000 \quad \text{답 } x = 1000$$

0501 밑과 진수의 조건에서

$$x^2 > 0, x^2 \neq 1, x+12 > 0, x+12 \neq 1, x-2 > 0$$

$$\therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $x^2 = x+12$ 일 때,

$$x^2 - x - 12 = 0, \quad (x+3)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 4$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $x = 4$

(ii) $x-2=1$ 일 때, $x=3$

$x=3$ 은 $\textcircled{1}$ 을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=4$

따라서 $a=3, b=4$ 이므로 $\beta - a = 1$ 답 1

0502 밑과 진수의 조건에서

$$2x > 0, 2x \neq 1, x^2 + 1 > 0, x^2 + 1 \neq 1, 3x + 1 > 0$$

$$\therefore 0 < x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \rightarrow \textcircled{1}$$

(i) $2x = x^2 + 1$ 일 때,

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \quad (x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$$

$x=1$ 은 $\textcircled{1}$ 을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다. $\rightarrow \textcircled{2}$

(ii) $3x+1=1$ 일 때,

$$3x = 0 \quad \therefore x = 0$$

$x=0$ 은 $\textcircled{1}$ 을 만족시키지 않으므로 주어진 방정식의 해가 아니다. $\rightarrow \textcircled{3}$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x=1$ $\rightarrow \textcircled{4}$

답 $x=1$

채점 기준	비율
① 밑과 진수의 조건을 이용하여 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
② $x=1$ 이 주어진 방정식의 해임을 알 수 있다.	30 %
③ $x=0$ 이 주어진 방정식의 해가 아님을 알 수 있다.	30 %
④ 주어진 방정식의 해를 구할 수 있다.	10 %

0503 $1000x^{\log x} = x^4$ 의 양변에 상용로그를 취하면
 $\log 1000x^{\log x} = \log x^4$
 $\log 1000 + \log x^{\log x} = 4 \log x$
 $3 + (\log x)^2 = 4 \log x, \quad (\log x)^2 - 4 \log x + 3 = 0$
 $\log x = t$ 로 놓으면 $t^2 - 4t + 3 = 0$
 $(t-1)(t-3) = 0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$
 즉 $\log x = 1$ 또는 $\log x = 3$ 이므로 $x=10$ 또는 $x=10^3$
 따라서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은
 $10 \cdot 10^3 = 10^4$ 답 ④

0504 $x^{\log_3 x} - 27x^2 = 0$, 즉 $x^{\log_3 x} = 27x^2$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면
 $\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 27x^2, \quad (\log_3 x)^2 = \log_3 27 + \log_3 x^2$
 $(\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x - 3 = 0$
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - 2t - 3 = 0$
 $(t+1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$
 즉 $\log_3 x = -1$ 또는 $\log_3 x = 3$ 이므로
 $x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ 또는 $x = 3^3 = 27$
 주어진 방정식의 모든 근의 합은 $\frac{1}{3} + 27 = \frac{82}{3}$
 따라서 $p=3, q=82$ 이므로 $p+q=85$ 답 ③

0505 진수의 조건에서 $x > 0, y > 0$ ㉠
 $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y = -4 \\ \log_{\sqrt{2}}(x+y) = 6 \end{cases}$ 에서
 $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} xy = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \\ \log_{\sqrt{2}}(x+y) = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^6 \end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases} xy = 16 \\ x+y = 8 \end{cases}$
 이 연립방정식을 풀면 $x=4, y=4$
 이때 $x=4, y=4$ 는 ㉠을 만족시키므로 $x+2y=12$ 답 ⑤

0506 진수의 조건에서 $x > 0, y > 0$ ㉠ → ①
 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} \log_3 \{\log_5 (x^2 + y^2)\} = 0 \\ \log_4 x + \log_2 \sqrt{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$ ㉡ → ② 이므로
 ㉡에서 $\log_5 (x^2 + y^2) = 1 \quad \therefore x^2 + y^2 = 5$
 ㉠에서 $\log_4 x + \log_4 y = \frac{1}{2} \quad \therefore xy = 4^{\frac{1}{2}} = 2$
 즉 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$ → ②
 이 연립방정식을 풀면
 $x=1, y=2$ 또는 $x=-2, y=-1$ ($\because a < \beta$)
 이때 $x=-2, y=-1$ 은 ㉠을 만족시키지 않으므로 주어진 연립방정식의 해는 $x=1, y=2$ → ③
 따라서 $a=1, \beta=2$ 이므로 $2a+\beta=2 \cdot 1+2=4$ → ④
답 4

채점 기준	비율
① 진수의 조건을 구할 수 있다.	20 %
② x, y 에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
③ 연립방정식의 해를 구할 수 있다.	30 %
④ $2a+\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0507 진수의 조건에서 $x > 0, y > 0$ ㉠

$$\begin{cases} \log_4 x - \log_3 y = 1 \\ \log_{16} x + \log_{27} y = \frac{4}{3} \end{cases} \text{ 에서 } \begin{cases} \log_4 x - \log_3 y = 1 \\ \frac{1}{2} \log_4 x + \frac{1}{3} \log_3 y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$\log_4 x = X, \log_3 y = Y$ 로 놓으면

$$\begin{cases} X - Y = 1 \\ \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}Y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $X=2, Y=1$

즉 $\log_4 x = 2, \log_3 y = 1$ 이므로

$$x = 4^2 = 16, y = 3$$

이때 $x=16, y=3$ 은 ㉠을 만족시키므로 주어진 연립방정식의 해이다.

$$\therefore xy = 16 \cdot 3 = 48$$

답 48

0508 $\log_2 x = X, \log_3 y = Y$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} X + Y = 6 \\ XY = 8 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $X=2, Y=4$ 또는 $X=4, Y=2$

(i) $X=2, Y=4$ 일 때,

$$\log_2 x = 2, \log_3 y = 4 \text{ 이므로 } x = 4, y = 81$$

그런데 이것은 $a > \beta$ 를 만족시키지 않는다.

(ii) $X=4, Y=2$ 일 때,

$$\log_2 x = 4, \log_3 y = 2 \text{ 이므로 } x = 16, y = 9$$

(i), (ii)에서 $a=16, \beta=9$

$$\therefore a - \beta = 7$$

답 7

0509 $\log_{\sqrt{3}} x = t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2 + kt - 5 = 0$$

..... ㉠

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha\beta=9$ 이고 방정식 ㉠의 근은

$\log_{\sqrt{3}} \alpha, \log_{\sqrt{3}} \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_{\sqrt{3}} \alpha + \log_{\sqrt{3}} \beta = -k, \quad \log_{\sqrt{3}} \alpha \beta = -k$$

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = 4 = -k \quad \therefore k = -4$$

답 ③

0510 $\log_2 x - \log_4 x = 2 \log_2 x \cdot \log_4 x - 2$ 에서

$$\log_2 x - \frac{1}{2} \log_2 x = 2 \log_2 x \cdot \frac{1}{2} \log_2 x - 2$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x = (\log_2 x)^2 - 2, \quad 2(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 4 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $2t^2 - t - 4 = 0$ → ①

이 방정식의 근은 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = \frac{1}{2}$$

→ ②

$$\log_2 \alpha \beta = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha \beta = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

→ ③

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
① t 에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	50 %
② 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	30 %
③ $\alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0511 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (\log_5 a + 1)^2 - (\log_5 a + 3) = 0$$

$$(\log_5 a)^2 + \log_5 a - 2 = 0$$

$$\log_5 a = t \text{로 놓으면 } t^2 + t - 2 = 0$$

$$(t+2)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 1$$

$$\text{즉 } \log_5 a = -2 \text{ 또는 } \log_5 a = 1 \text{이므로}$$

$$a = 5^{-2} = \frac{1}{25} \text{ 또는 } a = 5$$

$$\text{답 } \frac{1}{25}, 5$$

0512 진수의 조건에서 $x-3 > 0$, $x-1 > 0$ 이므로

$$x > 3, x > 1 \quad \therefore x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-3) < \log_{\frac{1}{4}}(x-1) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(x-3)^2 < \log_{\frac{1}{4}}(x-1)$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } (x-3)^2 > x-1$$

$$x^2 - 7x + 10 > 0, \quad (x-2)(x-5) > 0$$

$$\therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{의 공통 범위를 구하면 } x > 5$$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 6이다.

$$\text{답 } 6$$

0513 진수의 조건에서 $x^2 + x - 2 > 0$ 이므로

$$(x+2)(x-1) > 0 \quad \therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\log_2(x^2 + x - 2) \leq 2 \text{에서 } \log_2(x^2 + x - 2) \leq \log_2 4$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x^2 + x - 2 \leq 4$$

$$x^2 + x - 6 \leq 0, \quad (x+3)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{의 공통 범위를 구하면}$$

$$-3 \leq x < -2 \text{ 또는 } 1 < x \leq 2$$

따라서 정수 x 는 -3, 2의 2개이다.

$$\text{답 } \textcircled{2}$$

0514 진수의 조건에서 $x-1 > 0$, $2x-3 > 0$ 이므로

$$x > 1, x > \frac{3}{2} \quad \therefore x > \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\log_3(x-1) + \log_3(2x-3) < 1 \text{에서}$$

$$\log_3(x-1)(2x-3) < \log_3 3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } (x-1)(2x-3) < 3$$

$$2x^2 - 5x < 0, \quad x(2x-5) < 0$$

$$\therefore 0 < x < \frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{의 공통 범위를 구하면 } \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$$

해가 $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) < 0 \quad \therefore x^2 - 4x + \frac{15}{4} < 0$$

$$\text{양변에 양수 } a \text{를 곱하면 } ax^2 - 4ax + \frac{15}{4}a < 0$$

이 부등식이 $ax^2 + bx + 15 < 0$ 과 같으므로

$$-4a = b, \quad \frac{15}{4}a = 15 \quad \therefore a = 4, b = -16$$

$$\therefore a + b = -12 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

0515 진수의 조건에서 $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$ 이므로

$$0 < x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x) \leq 1 \text{에서 } \log_3(\log_{\frac{1}{2}} x) \leq \log_3 3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \log_{\frac{1}{2}} x \leq 3$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } x \geq \frac{1}{8} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{의 공통 범위를 구하면 } \frac{1}{8} \leq x < 1 \quad \text{답 } \frac{1}{8} \leq x < 1$$

0516 진수의 조건에서 $\log_2(\log_5 x) > 0$ $\dots\dots \textcircled{A}$

$$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_2(\log_5 x)\} > 0 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_2(\log_5 x)\} > \log_{\frac{1}{3}} 1$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } \log_2(\log_5 x) < 1 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{의 공통 범위를 구하면}$$

$$0 < \log_2(\log_5 x) < 1$$

$$\text{즉 } \log_2 1 < \log_2(\log_5 x) < \log_2 2 \text{에서 밑이 1보다 크므로}$$

$$1 < \log_5 x < 2, \quad \log_5 5 < \log_5 x < \log_5 5^2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 5 < x < 25$$

$$\text{따라서 } a = 5, b = 25 \text{이므로 } a + b = 30 \quad \text{답 } 30$$

0517 부등식 $\log_3(\log_2 x) < 1$ 을 풀면 진수의 조건에서

$$\log_2 x > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\log_3(\log_2 x) < 1 \text{에서 } \log_3(\log_2 x) < \log_3 3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \log_2 x < 3 \quad \therefore x < 8 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{의 공통 범위를 구하면 } 1 < x < 8$$

$$\therefore A = \{x \mid 1 < x < 8\}$$

부등식 $\log_2(\log_4 x) < 1$ 을 풀면 진수의 조건에서

$$\log_4 x > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\log_2(\log_4 x) < 1 \text{에서 } \log_2(\log_4 x) < \log_2 2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \log_4 x < 2 \quad \therefore x < 16 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$$\textcircled{C}, \textcircled{D} \text{의 공통 범위를 구하면 } 1 < x < 16$$

$$\therefore B = \{x \mid 1 < x < 16\}$$

따라서 $A \cap B = \{x \mid 1 < x < 8\}$ 이므로 집합 $A \cap B$ 의 원소가 아닌 것은 ⑤이다. $\text{답 } \textcircled{5}$

0518 진수의 조건에서 $x > 0$ $\dots\dots \textcircled{A}$

$$(\log_5 x)^2 - \log_5 125x^2 \leq 0 \text{에서}$$

$$(\log_5 x)^2 - (\log_5 125 + \log_5 x^2) \leq 0$$

$$(\log_5 x)^2 - 2\log_5 x - 3 \leq 0$$

$$\log_5 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - 3 \leq 0$$

$$(t+1)(t-3) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq t \leq 3$$

$$\text{즉 } -1 \leq \log_5 x \leq 3 \text{이므로 } \log_5 5^{-1} \leq \log_5 x \leq \log_5 5^3$$

$$\therefore \frac{1}{5} \leq x \leq 125 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{의 공통 범위를 구하면 } \frac{1}{5} \leq x \leq 125$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{1}{5}, \beta = 125 \text{이므로}$$

$$\alpha\beta = 25 \quad \text{답 } 25$$

0519 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$(2 + \log_{\frac{1}{2}} x) \log_2 x < -3 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} (2 - \log_2 x) \log_2 x &< -3 \\ -(\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x + 3 &< 0 \\ (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x - 3 &> 0 \end{aligned}$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - 3 > 0 \quad \cdots \text{ ㉡}$$

$$(t+1)(t-3) > 0 \quad \therefore t < -1 \text{ 또는 } t > 3$$

즉 $\log_2 x < -1$ 또는 $\log_2 x > 3$ 이므로

$$x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 8 \quad \cdots \text{ ㉢}$$

$$\text{㉠, ㉢의 공통 범위를 구하면 } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 8 \quad \cdots \text{ ㉣}$$

따라서 정수 x 의 최솟값은 9이다. ㉤ 9

채점 기준	비율
㉠ t 에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
㉡ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
㉣ 정수 x 의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0520 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$\log_{\frac{1}{3}} 27x \cdot \log_3 \frac{x}{9} \geq 0 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} (\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_{\frac{1}{3}} x)(\log_3 x - \log_3 9) &\geq 0 \\ (-3 - \log_3 x)(\log_3 x - 2) &\geq 0 \\ (\log_3 x + 3)(\log_3 x - 2) &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면 } (t+3)(t-2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq t \leq 2$$

$$\text{즉 } -3 \leq \log_3 x \leq 2 \text{이므로 } \log_3 3^{-3} \leq \log_3 x \leq \log_3 3^2$$

$$\therefore \frac{1}{27} \leq x \leq 9 \quad \cdots \text{ ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 } \frac{1}{27} \leq x \leq 9$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{1}{27}, \beta = 9 \text{이므로 } \frac{1}{\alpha\beta} = 3 \quad \text{㉢ 2}$$

0521 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log_2 x} < 4x$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 x^{\log_2 x} < \log_2 4x, \quad (\log_2 x)^2 < 2 + \log_2 x$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 < 2 + t$$

$$t^2 - t - 2 < 0, \quad (t+1)(t-2) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 2$$

$$\text{즉 } -1 < \log_2 x < 2 \text{이므로 } \log_2 2^{-1} < \log_2 x < \log_2 2^2$$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 4 \quad \cdots \text{ ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 } \frac{1}{2} < x < 4$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 는 1, 2, 3이므로 구하는 합은 $1+2+3=6$ ㉢ 2

0522 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log x - 2} < 1000$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log x^{\log x - 2} &< \log 1000, \quad (\log x - 2) \log x < 3 \\ (\log x)^2 - 2 \log x - 3 &< 0 \end{aligned}$$

$$\log x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - 3 < 0$$

$$(t+1)(t-3) < 0 \quad \therefore -1 < t < 3$$

$$\text{즉 } -1 < \log x < 3 \text{이므로 } \log 10^{-1} < \log x < \log 10^3$$

$$\therefore \frac{1}{10} < x < 1000 \quad \cdots \text{ ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 } \frac{1}{10} < x < 1000$$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, ..., 999의 999개이다. ㉢ 4

0523 $2^{3x} \leq 5^{2x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 2^{3x} \leq \log 5^{2x}, \quad 3x \log 2 \leq 2x \log 5$$

$$x(3 \log 2 - 2 \log 5) \leq 0, \quad x \log \frac{8}{25} \leq 0$$

$$\therefore x \geq 0 \quad (\because \log \frac{8}{25} < 0) \quad \text{㉢ } x \geq 0$$

0524 $3^x < 10^{x-1}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 3^x < \log 10^{x-1}, \quad x \log 3 < x - 1$$

$$x(\log 3 - 1) < -1$$

$$\log 3 - 1 < 0 \text{이므로 } x > -\frac{1}{\log 3 - 1} \quad \therefore x > \frac{1}{1 - \log 3}$$

$$\therefore a = \frac{1}{1 - \log 3} \quad \text{㉢ 1}$$

0525 $(\log_9 x)^2 - \log_9 ax^2 \geq 0$ 에서

$$(\log_9 x)^2 - 2 \log_9 x - \log_9 a \geq 0$$

$$\log_9 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - \log_9 a \geq 0$$

모든 실수 t 에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2 - 2t - \log_9 a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 + \log_9 a \leq 0, \quad \log_9 a \leq -1$$

$$\therefore a \leq \frac{1}{9}$$

$$\text{이때 } a > 0 \text{이므로 } 0 < a \leq \frac{1}{9}$$

따라서 a 의 최댓값은 $\frac{1}{9}$ 이다. ㉢ $\frac{1}{9}$

0526 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (\log a)^2 - 4(3 + \log a) < 0$$

$$(\log a)^2 - 4 \log a - 12 < 0 \quad \cdots \text{ ㉠}$$

$$\log a = t \text{로 놓으면 } t^2 - 4t - 12 < 0$$

$$(t+2)(t-6) < 0 \quad \therefore -2 < t < 6$$

$$\text{즉 } -2 < \log a < 6 \text{이므로 } \log 10^{-2} < \log a < \log 10^6$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 10^{-2} < a < 10^6 \quad \cdots \text{ ㉡}$$

따라서 $\alpha = 10^{-2}, \beta = 10^6$ 이므로

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{10^6}{10^{-2}} = 10^8 \quad \cdots \text{ ㉢}$$

㉤ 10^8

채점 기준	비율
㉠ $D < 0$ 임을 이용하여 부등식을 세울 수 있다.	40 %
㉡ a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
㉢ $\frac{\beta}{\alpha}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0527 n 년 후 관광객 수가 처음으로 3배 이상이 된다고 하면

$$a \times 1.07^n \geq 3a, \quad 1.07^n \geq 3$$

양변에 상용로그를 취하면 $n \log 1.07 \geq \log 3$

$$\therefore n \geq \frac{\log 3}{\log 1.07} = \frac{0.48}{0.03} = 16$$

따라서 관광객 수가 처음으로 3배 이상이 되는 것은 지금으로부터 16년 후이다. **답 ③**

0528 초기 온도가 25°C 인 화재실에서 화재가 발생한 지 $\frac{9}{8}$ 분 후의 온도가 375°C 이므로

$$25 + k \log \left(8 \cdot \frac{9}{8} + 1 \right) = 375, \quad 25 + k \log 10 = 375$$

$$\therefore k = 375 - 25 = 350$$

또 화재가 발생한 지 a 분 후의 온도가 725°C 이므로

$$25 + 350 \log (8a + 1) = 725, \quad 350 \log (8a + 1) = 700$$

$$\log (8a + 1) = 2, \quad 8a + 1 = 10^2$$

$$\therefore a = \frac{99}{8} \quad \text{답 } \frac{99}{8}$$

0529 n 년 후 물질 A가 처음으로 10 kg 이하가 된다고 하면

$$100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{60}} \leq 10, \quad \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{60}} \leq \frac{1}{10}$$

양변에 상용로그를 취하면 $\frac{n}{60} \log \frac{1}{2} \leq \log \frac{1}{10}$

$$-\frac{n}{60} \log 2 \leq -1 \quad \therefore n \geq \frac{60}{\log 2} = \frac{60}{0.3} = 200$$

따라서 대기 중에 남아 있는 물질 A의 양이 처음으로 10 kg 이하가 되는 것은 현재로부터 200년 후이다. **답 200년**

0530 **전략** $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 임을 이용하여 함숫값을 구한다.

풀이 $f(-2) = \left(\frac{1}{3} \right)^{-2} = 9$ 이므로

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(9) = \log_9 9 = 1 \quad \text{답 } 1$$

0531 **전략** $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-b=f(x-a)$ 이고, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(-x)$ 임을 이용한다.

풀이 ③ $y=\log_2(x+1)-3$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \log_2(-x+1)-3$$

$$\therefore y = -\log_2(-x+1)+3 = \log_{\frac{1}{2}}(-x+1)+3$$

따라서 두 함수 $y=\log_2(x+1)-3$, $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)+3$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

④ $y=\log_2(x+1)-3$ 의 그래프는 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다. **답 ④**

0532 **전략** 로그의 성질을 이용하여 등식이 성립하는지 확인한다.

풀이 $\neg. f\left(\frac{1}{3}\right) = \log_a \frac{1}{3} = \log_a 3^{-1} = -\log_a 3 = -f(3)$

$$\neg. f(2^3) = \log_a 2^3 = 3 \log_a 2 = 3f(2) \neq \{f(2)\}^3$$

$$\neg. f(\sqrt{2}) = \log_a \sqrt{2} = \log_a 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a 2 = \frac{1}{2} f(2)$$

$$\neg. f(8) = \log_a 8 = \log_a 2^3 = 3 \log_a 2,$$

$$f(4) = \log_a 4 = \log_a 2^2 = 2 \log_a 2 \text{ 이므로}$$

$$\frac{f(8)}{f(4)} = \frac{3 \log_a 2}{2 \log_a 2} = \frac{3}{2} \neq f(2)$$

이상에서 옳은 것은 \neg , \neg 이다. **답 ②**

0533 **전략** 주어진 세 수의 밑을 π 로 통일한 후 진수를 비교한다.

풀이 $\log_{\sqrt{\pi}} 3 = \log_{\pi^{\frac{1}{2}}} 3 = 2 \log_{\pi} 3 = \log_{\pi} 9,$

$$\log_{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{3} = \log_{\pi^{-1}} 3^{-1} = \log_{\pi} 3$$

이때 $3 < 9 < 3\pi$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$\log_{\pi} 3 < \log_{\pi} 9 < \log_{\pi} 3\pi$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{3} < \log_{\sqrt{\pi}} 3 < \log_{\pi} 3\pi$$

$$\text{답 } \log_{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{3} < \log_{\sqrt{\pi}} 3 < \log_{\pi} 3\pi$$

0534 **전략** 함수 $y=\log_a f(x)$ 에서 $0 < a < 1$ 이면 $f(x)$ 가 최대일 때 y 는 최소가 됨을 이용한다.

풀이 진수의 조건에서 $x+2 > 0$, $4-x > 0$ 이므로

$$x > -2, x < 4 \quad \therefore -2 < x < 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

주어진 함수의 식을 정리하면

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+2) + \log_{\frac{1}{3}}(4-x)$$

$$= \log_{\frac{1}{3}}(x+2)(4-x)$$

$$= \log_{\frac{1}{3}}(-x^2+2x+8)$$

밑이 1보다 작으므로 $-x^2+2x+8$ 의 값이 최대일 때 y 는 최소값을 갖는다.

$$f(x) = -x^2+2x+8 \text{로 놓으면} \quad f(x) = -(x-1)^2+9$$

$x=1$ 일 때 최댓값 9를 가지므로 주어진 함수의 최솟값은

$$y = \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$$

$$\text{즉 } a=1, m=-2 \text{이므로} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$a+m=-1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{답 } -1$$

채점 기준	비율
① x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
② a, m 의 값을 구할 수 있다.	60 %
③ $a+m$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0535 **전략** 점 $M(x, y)$ 가 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 를 이은 선분 PQ의 중점이면 $x=\frac{a+c}{2}$, $y=\frac{b+d}{2}$ 임을 이용한다.

풀이 세 점 P, M, Q의 y 좌표는 각각 $\log_3 5$, $\log_3 a$, $\log_3 20$ 이고 점 M이 선분 PQ의 중점이므로

$$\log_3 a = \frac{\log_3 5 + \log_3 20}{2} = \frac{\log_3 100}{2}$$

$$= \frac{\log_3 10^2}{2} = \frac{2 \log_3 10}{2}$$

$$= \log_3 10$$

$$\therefore a=10 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0536 [전략] 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 이은 선분을 $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표는 $(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n})$ 임을 이용한다.

[풀이] 두 점 A, B가 함수 $f(x)=\log_3 x$ 의 그래프 위에 있으므로

$$A(a, \log_3 a), B(b, \log_3 b)$$

선분 AB를 2:3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \cdot b + 3 \cdot a}{2+3}, \frac{2 \cdot \log_3 b + 3 \cdot \log_3 a}{2+3}\right),$$

$$\approx \left(\frac{3a+2b}{5}, \frac{3 \log_3 a + 2 \log_3 b}{5}\right)$$

이 점이 x 축 위에 있으므로 $\frac{3 \log_3 a + 2 \log_3 b}{5} = 0$

$$3 \log_3 a + 2 \log_3 b = 0, \quad \log_3 a^3 b^2 = 0$$

$$\therefore a^3 b^2 = 1$$

답 1

0537 [전략] 점 A의 y 좌표가 3임을 이용한다.

[풀이] 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 3이므로 점 A의 y 좌표는 3이다.

점 A가 함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프 위의 점이므로 점 D의 x 좌표를 a 라 하면 $\log_3 a = 3$ 에서 $a = 3^3 = 27$

$$\therefore A(27, 3)$$

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 3이므로 점 C의 x 좌표는

$$27 - 3 = 24 \quad \therefore C(24, 0)$$

$$\therefore G(24, \log_3 24)$$

따라서 정사각형 EFCG의 한 변의 길이는

$$CG = \log_3 24 = \log_3 (2^3 \cdot 3)$$

$$= \log_3 2^3 + \log_3 3 = 3 \log_3 2 + 1$$

답 ⑤

0538 [전략] 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

[풀이] $y=2^x-1$ 에서 $2^x=y+1$

양변에 밑이 2인 로그를 취하면 $x=\log_2(y+1)$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=\log_2(x+1)$

따라서 두 함수 $y=2^x-1$ 과 $y=\log_2(x+1)$ 은 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

또 직선 AB의 기울기가 -1이므로 직선 AB는 직선 $y=x$ 와 수직이다.

즉 점 B는 점 A(2, 3)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로 B(3, 2)

따라서 C(2, 0), D(3, 0)이므로 사각형 ACDB의 넓이는

$$\frac{1}{2}(3+2) \cdot 1 = \frac{5}{2}$$

답 ①

0539 [전략] 함수 $y=f(x)$ 의 역함수는 $y=f(x)$ 에서 x 를 y 로 나타낸 후 x 와 y 를 서로 바꾸어 구한다.

[풀이] $y=\log_3(x-1)-2$ 에서 $\log_3(x-1)=y+2$

$$x-1=3^{y+2} \quad \therefore x=3^{y+2}+1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 함수 $y=\log_3(x-1)-2$ 의 역함수는

$$y=3^{x+2}+1$$

따라서 $a=3, b=2, c=1$ 이므로

$$a^2+b^2+c^2=14$$

답 ③

[참고] 함수 $y=\log_3(x-1)-2$ 는 집합 $\{x|x>1\}$ 에서 실수 전체의 집합으로의 일대일 대응이다.

0540 [전략] 주어진 방정식의 각 항의 밑을 5로 통일한 후 $\log_5 x=t$ 로 치환한다.

[풀이] $\log_5 x - 2 \log_{\frac{1}{5}} x = 3 \log_5 x \cdot \log_{\frac{1}{5}} x$ 에서

$$\log_5 x + 2 \log_5 x = -3 \log_5 x \cdot \log_5 x$$

$$(\log_5 x)^2 + \log_5 x = 0$$

$$\log_5 x = t \text{로 놓으면} \quad t^2 + t = 0 \quad \cdots ①$$

$$t(t+1)=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=0$$

즉 $\log_5 x = -1$ 또는 $\log_5 x = 0$ 이므로

$$x = \frac{1}{5} \text{ 또는 } x = 1 \quad \cdots ②$$

이때 $\alpha < \beta$ 이므로 $\alpha = \frac{1}{5}, \beta = 1$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \beta = 6 \quad \cdots ③$$

답 6

채점 기준	비율
① t 에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
② 주어진 방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
③ $\frac{1}{\alpha} + \beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0541 [전략] 주어진 방정식의 양변에 상용로그를 취한 후 로그의 성질을 이용하여 식을 정리한다.

[풀이] $5^{x+2} = 2^{5-x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$(x+2) \log 5 = (5-x) \log 2$$

$$x \log 5 + 2 \log 5 = 5 \log 2 - x \log 2$$

$$x(\log 5 + \log 2) = 5 \log 2 - 2 \log 5$$

$$x \log 10 = \log 2^5 - \log 5^2 = \log \frac{32}{25}$$

$$\therefore x = \log \frac{32}{25}$$

따라서 $a = \frac{32}{25}$ 이므로 $25a = 32$

답 32

0542 [전략] $\log_2 x = t$ 로 치환하여 주어진 방정식을 t 에 대한 이차방정식으로 나타낸 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

[풀이] $(\log_2 x)^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 8 = 0$ 에서

$$(\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x - 8 = 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면} \quad t^2 - 2t - 8 = 0 \quad \cdots ①$$

이 방정식의 두 근은 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 2 \quad \cdots ②$$

$$\log_2 \alpha \beta = 2$$

$$\therefore \alpha \beta = 2^2 = 4 \quad \cdots ③$$

답 4

채점 기준	비율
① t 에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
② 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	40 %
③ $\alpha \beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0543 [전략] 로그부등식 $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$ 에서 $a > 10$ 이면 $f(x) > 0, g(x) > 0, f(x) \leq g(x)$ 의 공통 범위를 구한다.

[풀이] 진수의 조건에서 $x-1 > 0, \frac{1}{2}x+k > 0$ 이므로

$$x > 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$\log_5(x-1) \leq \log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$x-1 \leq \frac{1}{2}x+k, \quad \frac{1}{2}x \leq k+1$$

$$\therefore x \leq 2k+2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1 < x \leq 2k+2$

이 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 3이므로

$$2k+2-1=3 \quad \therefore k=1 \quad \text{답 ①}$$

0544 [전략] 밑을 3으로 통일한 후 진수에 대한 부등식을 세운다.

[풀이] 진수의 조건에서 $3-x > 0, 9+x > 0$ 이므로

$$x < 3, x > -9 \quad \therefore -9 < x < 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$\log_3(3-x) + \log_3(9+x) > 2$ 에서

$$\log_3(3-x)(9+x) > \log_3 3^2$$

밑이 1보다 크므로

$$(3-x)(9+x) > 9, \quad x^2+6x-18 < 0$$

$$\therefore -3-3\sqrt{3} < x < -3+3\sqrt{3} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-3-3\sqrt{3} < x < -3+3\sqrt{3}$

따라서 $\alpha = -3-3\sqrt{3}, \beta = -3+3\sqrt{3}$ 이므로

$$\alpha + \beta = (-3-3\sqrt{3}) + (-3+3\sqrt{3}) = -6 \quad \text{답 ③}$$

0545 [전략] $\log_a x$ 꼴이 반복되는 로그부등식을 풀 때에는 $\log_a x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 부등식을 푼다.

[풀이] 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots ㉠$

$$\log_{\frac{1}{5}} \frac{x}{25} \cdot \log_{\frac{1}{5}} \frac{5}{x} \geq -2$$

$$(\log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}} 25)(\log_{\frac{1}{5}} 5 - \log_{\frac{1}{5}} x) \geq -2$$

$$(\log_{\frac{1}{5}} x + 2)(-1 - \log_{\frac{1}{5}} x) \geq -2$$

$$\log_{\frac{1}{5}} x = t \text{로 놓으면 } (t+2)(-1-t) \geq -2 \quad \dots\dots ㉡$$

$$t^2+3t \leq 0, \quad t(t+3) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq t \leq 0$$

$$\text{즉 } -3 \leq \log_{\frac{1}{5}} x \leq 0 \text{이므로 } \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \leq \log_{\frac{1}{5}} x \leq \log_{\frac{1}{5}} 1$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } 1 \leq x \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 125 \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉢의 공통 범위를 구하면 $1 \leq x \leq 125 \quad \dots\dots ㉣$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x 는 125개이다. **답 125**

채점 기준	비율
① t 에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
② 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
③ 자연수 x 의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0546 [전략] 양변에 밑이 2인 로그를 취하여 로그부등식을 푼다.

[풀이] $x^{\log_2 x} \geq (32x)^{2k}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 x^{\log_2 x} \geq \log_2 (32x)^{2k}, \quad (\log_2 x)^2 \geq 2k \log_2 32x$$

$$(\log_2 x)^2 \geq 2k(5 + \log_2 x)$$

$$(\log_2 x)^2 - 2k \log_2 x - 10k \geq 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2kt - 10k \geq 0$$

모든 실수 t 에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2 - 2kt - 10k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - (-10k) \leq 0, \quad k^2 + 10k \leq 0$$

$$k(k+10) \leq 0 \quad \therefore -10 \leq k \leq 0 \quad \text{답 } -10 \leq k \leq 0$$

0547 [전략] 로그부등식 $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$ 에서 $a > 10$ 이면 $f(x) > 0, g(x) > 0, f(x) \leq g(x)$ 의 공통 범위를 구한다.

[풀이] 진수의 조건에서 $f(x) > 0, g(x) > 0 \quad \dots\dots ㉠$

$\log_2 f(x) \leq \log_2 g(x)$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$f(x) \leq g(x) \quad \dots\dots ㉡$$

즉 주어진 부등식의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프가 x 축의 위쪽에 있으면서 $y=f(x)$ 의 그래프가 $y=g(x)$ 의 그래프와 만나거나 그 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2 \leq x < 3$ 또는 $7 < x \leq 10$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 는 2, 8, 9, 10의 4개이다. **답 ④**

0548 [전략] 10개의 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간은 10T초임을 이용한다.

[풀이] 메뉴가 10개이고 각 메뉴 안에 항목이 n 개씩 있으므로 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간은

$$10 \left\{ 2 + \frac{1}{3} \log_2(n+1) \right\} (\text{초})$$

$$\text{이때 } 10 \left\{ 2 + \frac{1}{3} \log_2(n+1) \right\} \leq 30 \text{에서}$$

$$2 + \frac{1}{3} \log_2(n+1) \leq 3$$

$$\frac{1}{3} \log_2(n+1) \leq 1, \quad \log_2(n+1) \leq 3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } n+1 \leq 2^3 \quad \therefore n \leq 7$$

따라서 n 의 최댓값은 7이다. **답 ①**

0549 [전략] 점 (a, b) 가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이면 $b=f(a)$ 임을 이용한다.

[풀이] 오른쪽 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡자.

점 A는 $y=3^x$ 의 그래프 위에 있고 y 좌표가 a 이므로 x 좌표를 구하면

$$3^x = a \quad \therefore x = \log_3 a$$

따라서 B($\log_3 a, 0$), C(0, $\log_3 a$)이며
므로 점 D의 y 좌표는 $\log_3 a$ 이다.

점 D는 $y=\log_9 x$ 의 그래프 위에 있고 x 좌표가 b 이므로

$$\log_9 b = \log_3 a, \quad \frac{1}{2} \log_3 b = \log_3 a$$

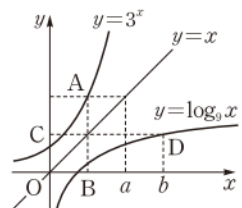
$$\log_3 b = 2 \log_3 a, \quad \log_3 b = \log_3 a^2$$

$$\therefore b = a^2 \quad \dots\dots ㉠$$

한편 $ab=64$ 이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$$a^3 = 64 \quad \therefore a = 4$$

$$\text{이것을 ㉠에 대입하면 } b = 16 \quad \text{답 16}$$



0550 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 해임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-2^x+m$ 이므로 $f(x)=0$ 에서
 $-2^x+m=0$, $2^x=m$ $\therefore x=\log_2 m$
 $\therefore A(\log_2 m, 0)$

$2^x=f(x)$ 에서 $2^x=-2^x+m$
 $2 \cdot 2^x=m$ ㉠
 $2^{x+1}=m$, $x+1=\log_2 m$
 $\therefore x=\log_2 m-1$

이때 ㉠에서 $2 \cdot 2^x=m$ 이므로

$$2^x = \frac{m}{2}$$

$$\therefore B\left(\log_2 m-1, \frac{m}{2}\right), C\left(0, \frac{m}{2}\right)$$

$\overline{OA}=2\overline{BC}$ 이므로

$$\log_2 m=2(\log_2 m-1), \quad \log_2 m=2$$

$$\therefore m=4$$

답 ②

0551 전략 선분 PQ의 중점이 원의 중심과 일치함을 이용한다.

풀이 \overline{PQ} 가 원 C의 지름이므로 \overline{PQ} 의 중점은 원의 중심 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ 이다.

두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β ($\beta < \alpha$)라 하면

$$P(\alpha, \log_a \alpha), Q(\beta, \log_a \beta)$$

이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{5}{4}$ 에서

$$\alpha+\beta=\frac{5}{2}$$
 ㉠

$$\log_a \alpha + \log_a \beta = 0 \text{에서} \quad \log_a \alpha \beta = 0$$

$$\alpha \beta = 1$$
 ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\alpha=2, \beta=\frac{1}{2} (\because \beta < \alpha)$$

한편 $x=2$ 를 원의 방정식 $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$ 에 대입하면

$$\frac{9}{16}+y^2=\frac{13}{16} \quad \therefore y=\pm \frac{1}{2}$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 이고 이때 점 P는 곡선 $y=\log_a x$ 위

에 있으므로

$$\frac{1}{2}=\log_a 2, \quad 2=a^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore a=4$$

답 ③

0552 전략 양변에 밑이 3인 로그를 취하여 $\log_3 y$ 의 최댓값, 최솟값을 구한다.

풀이 $y=x^{4-\log_3 x}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log_3 y &= \log_3 x^{4-\log_3 x} = (4-\log_3 x) \log_3 x \\ &= -(\log_3 x)^2 + 4 \log_3 x \end{aligned}$$

..... ①

$\log_3 x=t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 27$ 에서

$$\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 27 \quad \therefore 0 \leq t \leq 3$$

이때 주어진 함수는

$$\log_3 y = -t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4$$

따라서 $\log_3 y$ 는 $t=2$ 일 때 최댓값 4, $t=0$ 일 때 최솟값 0을 갖는다.
 즉 $0 \leq \log_3 y \leq 4$ 이므로

$$\log_3 1 \leq \log_3 y \leq \log_3 3^4 \quad \therefore 1 \leq y \leq 81$$

..... ②

따라서 $M=81$, $m=1$ 이므로

$$M-m=80$$

..... ③

답 80

채점 기준	비율
① $y=x^{4-\log_3 x}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하여 정리할 수 있다.	30 %
② y 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
③ $M-m$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0553 전략 $\log_2 x=t$ 로 놓고 t 에 대한 삼차방정식을 푼다.

풀이 $\log_2 x^3 + (\log_2 x)^3 = 6(\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 + 2$ 에서

$$3 \log_2 x + (\log_2 x)^3 = 6(\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x + 2$$

$$(\log_2 x)^3 - 6(\log_2 x)^2 + 7 \log_2 x - 2 = 0$$

$\log_2 x=t$ 로 놓으면

$$t^3 - 6t^2 + 7t - 2 = 0, \quad (t-1)(t^2 - 5t + 2) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t^2 - 5t + 2 = 0$$

$t=1$ 에서 $\log_2 x=1$ $\therefore x=2$

이때 주어진 방정식의 세 실근을 2, α , β 라 하면 방정식

$t^2 - 5t + 2 = 0$ 의 두 실근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과

계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 5, \quad \log_2 \alpha \beta = 2$$

$$\therefore \alpha \beta = 2^2 = 4$$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은

$$2\alpha\beta=8$$

답 ⑤

참고 이차방정식 $t^2 - 5t + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=5^2-4 \cdot 1 \cdot 2=17>0$$

이므로 방정식 $t^2 - 5t + 2 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0554 전략 처음 투자액이 a 원이고 매년 $b\%$ 씩 투자액을 늘려나갈 때,

n 년 후의 투자액은 $a\left(1+\frac{b}{100}\right)^n$ 원이다.

풀이 n 년 후 제품 A의 투자액이 제품 B의 투자액을 초과한다고 하

면 $1000\left(1+\frac{25}{100}\right)^n > 2000\left(1+\frac{20}{100}\right)^n$

$$1000 \times 1.25^n > 2000 \times 1.2^n, \quad 1.25^n > 2 \times 1.2^n$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 1.25^n > \log (2 \times 1.2^n)$$

$$n \log 1.25 > \log 2 + n \log 1.2$$

$$n(\log 1.25 - \log 1.2) > \log 2, \quad n \log \frac{1.25}{1.2} > \log 2$$

$$n \log \frac{25}{24} > \log 2, \quad n\{\log 5^2 - \log (2^3 \times 3)\} > \log 2$$

$$n\{2(1-\log 2) - (3 \log 2 + \log 3)\} > \log 2$$

$$n(2-5 \log 2 - \log 3) > \log 2$$

이때 $2-5 \log 2 - \log 3 > 0$ 이므로

$$n > \frac{\log 2}{2-5 \log 2 - \log 3} = \frac{0.3010}{0.0179} = 16.81 \dots$$

따라서 지금으로부터 17년 후에 제품 A의 투자액이 제품 B의 투자액을 처음으로 초과한다.

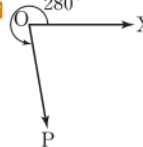
답 ③

05

삼각함수

II. 삼각함수

0555  25°


0556  280°


0557  -165°


0558  -380°


0559 $360^\circ \times n + 115^\circ$

0560 $360^\circ \times n + 330^\circ$

0561 $780^\circ = 360^\circ \times 2 + 60^\circ$ 이므로
 $360^\circ \times n + 60^\circ$  $360^\circ \times n + 60^\circ$


0562 $1190^\circ = 360^\circ \times 3 + 110^\circ$ 이므로
 $360^\circ \times n + 110^\circ$  $360^\circ \times n + 110^\circ$


0563 $-415^\circ = 360^\circ \times (-2) + 305^\circ$ 이므로
 $360^\circ \times n + 305^\circ$  $360^\circ \times n + 305^\circ$


0564 $-820^\circ = 360^\circ \times (-3) + 260^\circ$ 이므로
 $360^\circ \times n + 260^\circ$  $360^\circ \times n + 260^\circ$


0565  제 4 사분면


0566 $850^\circ = 360^\circ \times 2 + 130^\circ$
 따라서 850° 는 제 2 사분면의 각이다.  제 2 사분면


0567 $-170^\circ = 360^\circ \times (-1) + 190^\circ$
 따라서 -170° 는 제 3 사분면의 각이다.  제 3 사분면

0568 $-1070^\circ = 360^\circ \times (-3) + 10^\circ$
 따라서 -1070° 는 제 1 사분면의 각이다.  제 1 사분면

0569 $120^\circ = 120 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$  $\frac{2}{3}\pi$


0570 $330^\circ = 330 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11}{6}\pi$  $\frac{11}{6}\pi$


0571 $-144^\circ = (-144) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{4}{5}\pi$  $-\frac{4}{5}\pi$


0572 $-225^\circ = (-225) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{4}\pi$  $-\frac{5}{4}\pi$

0573 $\frac{2}{5}\pi = \frac{2}{5}\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 72^\circ$  72°

0574 $\frac{7}{3}\pi = \frac{7}{3}\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 420^\circ$  420°


0575 $-\frac{5}{6}\pi = \left(-\frac{5}{6}\pi\right) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -150^\circ$  -150°


0576 $-\frac{7}{4}\pi = \left(-\frac{7}{4}\pi\right) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -315^\circ$  -315°


0577 


도($^\circ$)	0°	30°	45°	240°	270°	360°
라디안	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π


0578  $2n\pi + \frac{\pi}{2}$


0579 $\frac{16}{5}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{6}{5}\pi$ 이므로
 $2n\pi + \frac{6}{5}\pi$  $2n\pi + \frac{6}{5}\pi$


0580 $-\frac{4}{3}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{2}{3}\pi$ 이므로
 $2n\pi + \frac{2}{3}\pi$  $2n\pi + \frac{2}{3}\pi$

0581 $-\frac{9}{4}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{7}{4}\pi$ 이므로
 $2n\pi + \frac{7}{4}\pi$  $2n\pi + \frac{7}{4}\pi$

0582 $l = 5 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$, $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{25}{8}\pi$
 $l = \frac{5}{4}\pi$, $S = \frac{25}{8}\pi$

0583 $r \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$ 이므로 $r = 4$
 $\therefore S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\pi = 4\pi$  $r = 4$, $S = 4\pi$

0584 $\overline{OP} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 이므로
 (1) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (2) $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 (3) $\tan \theta = \frac{1}{2}$  (1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (3) $\frac{1}{2}$

0585 $\overline{OP} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ 이므로
 (1) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\cos \theta = -\frac{1}{2}$
 (3) $\tan \theta = \sqrt{3}$  (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

0586 $\overline{OP} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$ 이므로

(1) $\sin \theta = -\frac{5}{13}$

(2) $\cos \theta = \frac{12}{13}$

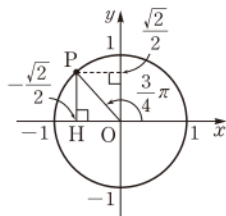
(3) $\tan \theta = -\frac{5}{12}$

답 (1) $-\frac{5}{13}$ (2) $\frac{12}{13}$ (3) $-\frac{5}{12}$

0587 답 (가) 1 (나) $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ (다) $-\frac{1}{2}$ (라) $\sqrt{3}$

0588 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ 를

나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



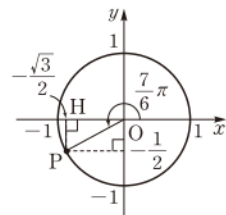
$\overline{OP} = 1$ 이고, $\angle POH = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$P(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = -1$ 답 풀이 참조

0589 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta = \frac{7}{6}\pi$ 를

나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



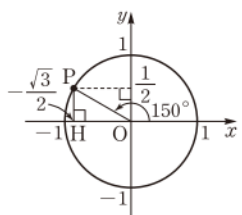
$\overline{OP} = 1$ 이고, $\angle POH = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$P(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\therefore \sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 풀이 참조

0590 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta = 150^\circ$ 를

나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



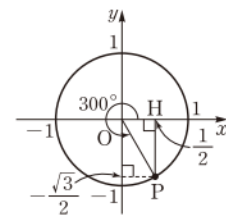
$\overline{OP} = 1$ 이고, $\angle POH = 30^\circ$ 이므로

$P(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$ 답 풀이 참조

0591 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta = -60^\circ$ 를

나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OP} = 1$ 이고, $\angle POH = 60^\circ$ 이므로

$P(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = \frac{1}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$ 답 풀이 참조

0592 $\theta = \frac{13}{6}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{6}$ 에서 θ 는 제1사분면의 각이므로

$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$

답 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$

0593 $\theta = 670^\circ = 360^\circ \times 1 + 310^\circ$ 에서 θ 는 제4사분면의 각이므로

$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

답 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

0594 $\theta = -\frac{10}{3}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{2}{3}\pi$ 에서 θ 는 제2사분면의 각이므로

$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

답 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

0595 $\theta = -460^\circ = 360^\circ \times (-2) + 260^\circ$ 에서 θ 는 제3사분면의 각이므로

$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

답 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

0596 $\sin \theta > 0$ 이므로 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고, $\cos \theta < 0$ 이므로 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

답 제2사분면

0597 $\sin \theta < 0$ 이므로 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\tan \theta < 0$ 이므로 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.

답 제4사분면

0598 $\sin \theta \cos \theta > 0$ 에서

$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$

이므로 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

답 제1사분면 또는 제3사분면

0599 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$\sin^2 \theta + (\frac{5}{13})^2 = 1 \quad \therefore \sin^2 \theta = \frac{144}{169}$

이때 θ 가 제4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$

$\therefore \sin \theta = -\frac{12}{13}$

답 $-\frac{12}{13}$

0600 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$(-\frac{1}{3})^2 + \cos^2 \theta = 1 \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{8}{9}$

이때 θ 가 제3사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0$

$\therefore \cos \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

답 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

0601 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2$

$= \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$

$= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 2$

답 2

0602 $\frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta}$
 $= \frac{\sin \theta(1-\cos \theta) + \sin \theta(1+\cos \theta)}{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)}$
 $= \frac{\sin \theta - \sin \theta \cos \theta + \sin \theta + \sin \theta \cos \theta}{1-\cos^2 \theta}$
 $= \frac{2 \sin \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{2}{\sin \theta}$ 답 $\frac{2}{\sin \theta}$

0603 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$
 $1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}, \quad 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$
 $\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$ 답 $-\frac{3}{8}$

0604 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$
 $1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}, \quad -2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{9}$
 $\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$ 답 $\frac{4}{9}$

0605 ① $-670^\circ = 360^\circ \times (-2) + 50^\circ$
 ② $-330^\circ = 360^\circ \times (-1) + 30^\circ$
 ③ $-310^\circ = 360^\circ \times (-1) + 50^\circ$
 ④ $410^\circ = 360^\circ \times 1 + 50^\circ$
 ⑤ $770^\circ = 360^\circ \times 2 + 50^\circ$ 답 ②

0606 ① $-550^\circ = 360^\circ \times (-2) + 170^\circ$
 ② $-280^\circ = 360^\circ \times (-1) + 80^\circ$
 ③ $450^\circ = 360^\circ \times 1 + 90^\circ$
 ④ $660^\circ = 360^\circ \times 1 + 300^\circ$
 ⑤ $810^\circ = 360^\circ \times 2 + 90^\circ$ 답 ②

0607 ㄱ. $-1050^\circ = 360^\circ \times (-3) + 30^\circ$
 ㄴ. $-650^\circ = 360^\circ \times (-2) + 70^\circ$
 ㄷ. $500^\circ = 360^\circ \times 1 + 140^\circ$
 ㄹ. $790^\circ = 360^\circ \times 2 + 70^\circ$
 ㅁ. $1010^\circ = 360^\circ \times 2 + 290^\circ$
 이상에서 70° 를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄴ, ㄹ이다.
답 ㄴ, ㄹ

0608 ① $-620^\circ = 360^\circ \times (-2) + 100^\circ$ \therefore 제2사분면
 ② $-335^\circ = 360^\circ \times (-1) + 25^\circ$ \therefore 제1사분면
 ③ $490^\circ = 360^\circ \times 1 + 130^\circ$ \therefore 제2사분면
 ④ $510^\circ = 360^\circ \times 1 + 150^\circ$ \therefore 제2사분면
 ⑤ $860^\circ = 360^\circ \times 2 + 140^\circ$ \therefore 제2사분면 답 ②

0609 동경 OP가 원점 O를 중심으로 시초선에서 음의 방향으로 230° 만큼 회전하면 그 각의 크기는 -230° 이고, 양의 방향으로 110° 만큼 회전하면 동경 OP가 나타내는 각의 크기는
 $-230^\circ + 110^\circ = -120^\circ$ → ①
 이때 $-120^\circ = 360^\circ \times (-1) + 240^\circ$ 이므로 동경 OP는 제3사분면에 있다. → ②
답 제3사분면

채점 기준	비율
① 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 구할 수 있다.	50 %
② 동경 OP가 제몇 사분면에 있는지 구할 수 있다.	50 %

0610 θ 가 제1사분면의 각이므로
 $360^\circ \times n < \theta < 360^\circ \times n + 90^\circ$ (n 은 정수)
 $\therefore 180^\circ \times n < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 45^\circ$
 (i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,
 $180^\circ \times 2k < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times 2k + 45^\circ$
 $\therefore 360^\circ \times k < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 45^\circ$
 따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각이다.
 (ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,
 $180^\circ \times (2k+1) < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times (2k+1) + 45^\circ$
 $\therefore 360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 225^\circ$
 따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각이다.
 (i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.
답 제1사분면 또는 제3사분면

0611 2θ 가 제3사분면의 각이므로
 $360^\circ \times n + 180^\circ < 2\theta < 360^\circ \times n + 270^\circ$ (n 은 정수)
 $\therefore 180^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 180^\circ \times n + 135^\circ$
 (i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,
 $180^\circ \times 2k + 90^\circ < \theta < 180^\circ \times 2k + 135^\circ$
 $\therefore 360^\circ \times k + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 135^\circ$
 따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.
 (ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,
 $180^\circ \times (2k+1) + 90^\circ < \theta < 180^\circ \times (2k+1) + 135^\circ$
 $\therefore 360^\circ \times k + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 315^\circ$
 따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.
 (i), (ii)에서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다. 답 ⑤

0612 ③ $\frac{5}{12}\pi = \frac{5}{12}\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 75^\circ$ 답 ③

0613 ㄱ. $20^\circ = 20 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9}$
 ㄴ. $165^\circ = 165 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11}{12}\pi$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{90^\circ}{\pi}$$

$$\therefore 2 = 2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{360^\circ}{\pi}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0614 각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$4\theta - \theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$3\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{3}\pi \quad \dots\dots ㉠$$

$$0 < \theta < \pi \text{에서 } 0 < \frac{2n}{3}\pi < \pi \text{이므로} \quad 0 < n < \frac{3}{2}$$

$$\therefore n=1$$

$$\text{이것을 ㉠에 대입하면} \quad \theta = \frac{2}{3}\pi \quad \text{답 ㉠ ㉡}$$

0615 각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$$3\theta - \theta = (2n+1)\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$2\theta = (2n+1)\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n+1}{2}\pi \quad \dots\dots ㉠ \quad \dots\dots ㉡$$

$$\pi < \theta < 2\pi \text{에서 } \pi < \frac{2n+1}{2}\pi < 2\pi \text{이므로}$$

$$2 < 2n+1 < 4, \quad \frac{1}{2} < n < \frac{3}{2} \quad \therefore n=1 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\text{이것을 ㉠에 대입하면} \quad \theta = \frac{3}{2}\pi \quad \dots\dots ㉢$$

답 $\frac{3}{2}\pi$

채점 기준	비율
① θ 를 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
② n 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ θ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0616 각 θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$6\theta - \theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{5}\pi \quad \dots\dots ㉠$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 < \frac{2n}{5}\pi < \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$0 < n < \frac{5}{4} \quad \therefore n=1$$

$$\text{이것을 ㉠에 대입하면 } \theta = \frac{2}{5}\pi \text{이므로}$$

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{15}\right) = \sin\left(\frac{2}{5}\pi - \frac{\pi}{15}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{답 ㉠ ㉡}$$

0617 각 θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$7\theta - \theta = (2n+1)\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = (2n+1)\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n+1}{6}\pi \quad \dots\dots ㉠$$

$$0 < \theta < \pi \text{에서 } 0 < \frac{2n+1}{6}\pi < \pi \text{이므로}$$

$$0 < 2n+1 < 6, \quad -\frac{1}{2} < n < \frac{5}{2}$$

$$\therefore n=0 \text{ 또는 } n=1 \text{ 또는 } n=2$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 구하는 모든 θ 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi \quad \text{답 } \frac{3}{2}\pi$$

0618 각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 3\theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{2}\pi \quad \dots\dots ㉠$$

$$\pi < \theta < 2\pi \text{에서 } \pi < \frac{n}{2}\pi < 2\pi \text{이므로} \quad 2 < n < 4$$

$$\therefore n=3$$

$$\text{이것을 ㉠에 대입하면} \quad \theta = \frac{3}{2}\pi \quad \text{답 ㉠ ㉡}$$

0619 각 α 를 나타내는 동경과 각 β 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 $\alpha + \beta$ 는 $360^\circ \times n + 90^\circ$ (n 은 정수) 꼴이어야 한다.

$$\text{① } 405^\circ = 360^\circ \times 1 + 45^\circ \quad \text{② } 420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$$

$$\text{③ } 450^\circ = 360^\circ \times 1 + 90^\circ \quad \text{④ } 750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$$

$$\text{⑤ } 765^\circ = 360^\circ \times 2 + 45^\circ \quad \text{답 ㉢}$$

0620 각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = (2n+1)\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = (2n+1)\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{2n+1}{6}\pi \quad \dots\dots ㉠ \quad \dots\dots ㉡$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \frac{\pi}{2} < \frac{2n+1}{6}\pi < \pi \text{이므로}$$

$$3 < 2n+1 < 6, \quad 1 < n < \frac{5}{2}$$

$$\therefore n=2$$

$$\text{이것을 ㉠에 대입하면} \quad \theta = \frac{5}{6}\pi \quad \dots\dots ㉢$$

답 $\frac{5}{6}\pi$

채점 기준	비율
① θ 를 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
② n 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ θ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0621 각 θ 를 나타내는 동경과 각 2θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 2\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n \text{은 정수})$$

$$3\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} \quad \dots\dots ㉠$$

$$0 < \theta < \pi \text{에서 } 0 < \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} < \pi \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{6} < \frac{2n}{3} < \frac{5}{6}, \quad -\frac{1}{4} < n < \frac{5}{4}$$

$$\therefore n=0 \text{ 또는 } n=1$$

$$\text{이것을 ㉠에 대입하면 } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 구하는 모든 θ 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \pi \quad \text{답 } \pi$$

0622 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi = 8\pi \quad \therefore r=8$$

$$\text{따라서 } 8\theta = 2\pi \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{답 } ②$$

0623 반지름의 길이가 a , 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴의 호의 길이가 4π 이므로

$$a \cdot \frac{2}{3}\pi = 4\pi \quad \therefore a=6$$

따라서 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\pi = 12\pi \quad \therefore b=12$$

$$\therefore b-a=6 \quad \text{답 } ⑤$$

0624 반지름의 길이가 r 인 원의 넓이는 πr^2 → ①

반지름의 길이가 $4r$ 이고 호의 길이가 6π 인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 4r \cdot 6\pi = 12\pi r \quad \text{→ ②}$$

두 넓이가 서로 같으므로 $\pi r^2 = 12\pi r$

$$r^2 - 12r = 0, \quad r(r-12) = 0$$

$$\therefore r=12 \quad (\because r>0) \quad \text{→ ③}$$

답 12

채점 기준	비율
① 원의 넓이를 구할 수 있다.	20 %
② 부채꼴의 넓이를 구할 수 있다.	40 %
③ r 의 값을 구할 수 있다.	40 %

0625 원의 둘레의 길이는 $2\pi \cdot 4 = 8\pi$

부채꼴의 호의 길이를 l 이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이는

$$2 \cdot 4 + l = 8 + l$$

$$\text{즉 } 8\pi = 2(8+l) \text{이므로 } l = 4\pi - 8$$

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 $l = 4\theta$ 이므로

$$4\pi - 8 = 4\theta \quad \therefore \theta = \pi - 2 \quad \text{답 } \pi - 2$$

0626 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 둘레의 길이가 12이므로

$$2r + l = 12 \quad \therefore l = 12 - 2r$$

$$\text{이때 } 12 - 2r > 0, r > 0 \text{이므로 } 0 < r < 6$$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(12-2r)$$

$$= -r^2 + 6r = -(r-3)^2 + 9 \quad (0 < r < 6)$$

따라서 $r=3$ 일 때 S 는 최대이므로 넓이가 최대인 부채꼴의 반지름의 길이는 3이다. 답 ①

라센 특강

제한된 범위에서 이차함수의 최대·최소

$a \leq x \leq b$ 에서 이차함수 $f(x) = a(x-p)^2 + q$ 의 최댓값과 최솟값은

① $a \leq p \leq b$ 일 때

• $f(p), f(a), f(b)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② $p < a$ 또는 $p > b$ 일 때

• $f(a), f(b)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

0627 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 둘레의 길이가 8이므로

$$2r + l = 8 \quad \therefore l = 8 - 2r$$

$$\text{이때 } 8 - 2r > 0, r > 0 \text{이므로 } 0 < r < 4$$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(8-2r)$$

$$= -r^2 + 4r = -(r-2)^2 + 4 \quad (0 < r < 4)$$

따라서 $r=2$ 일 때 S 는 최댓값 4를 갖는다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ 이므로

$$4 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \theta \quad \therefore \theta = 2$$

답 반지름의 길이: 2, 중심각의 크기: 2

0628 부채꼴의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m라 하면 둘레의 길이가 100 m이므로

$$2r + l = 100 \quad \therefore l = 100 - 2r \quad \text{→ ①}$$

$$\text{이때 } 100 - 2r > 0, r > 0 \text{이므로 } 0 < r < 50$$

부채꼴의 넓이를 S m²라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(100-2r)$$

$$= -r^2 + 50r = -(r-25)^2 + 625 \quad (0 < r < 50)$$

즉 $r=25$ 일 때 S 는 최댓값 625를 갖는다.

따라서 화단의 넓이의 최댓값은 625 m²이다. → ③

답 625 m²

채점 기준	비율
① l 을 r 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
② S 를 r 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
③ 화단의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

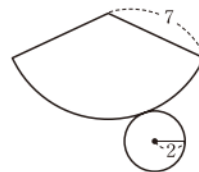
0629 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4\pi = 14\pi$$

$$\therefore (\text{원뿔의 겉넓이}) = 14\pi + \pi \cdot 2^2 = 18\pi \quad \text{답 } ②$$



0630 [그림1]과 같이 모선의 길이가 13이고 높이가 12인 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$r = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

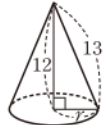
원뿔의 전개도는 [그림2]와 같고 이때 부채꼴의 호의 길이는 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$2\pi \cdot 5 = 10\pi$$

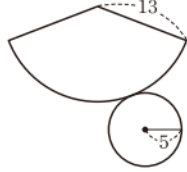
따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 10\pi = 65\pi$$

답 65π



[그림 1]



[그림 2]

0631 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = 3\sqrt{3}$$

→ ①

$\angle AOH = \theta$ 라 하면

$$\sin \theta = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

$$\therefore \angle AOB = \frac{2}{3}\pi$$

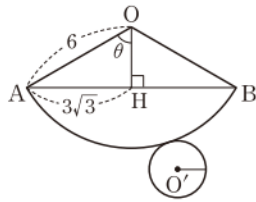
→ ②

원뿔의 밑면인 원 O'의 둘레의 길이는 부채꼴의 호의 길이와 같으므로

$$6 \cdot \frac{2}{3}\pi = 4\pi$$

→ ③

답 4π



채점 기준	비율
① AH의 길이를 구할 수 있다.	30 %
② $\angle AOB$ 의 크기를 구할 수 있다.	40 %
③ 원 O'의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	30 %

0632 오른쪽 그림과 같이 주어진 원뿔의 전개도에서 부채꼴 ABB'의 반지름의 길이를 a , 밑면인 원의 반지름의 길이를 r 라 하자. 이때 호 BB'의 길이는 원의 둘레의 길이 $2\pi r$ 와 같으므로 부채꼴 ABB'의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2\pi r = \pi ar$$

원뿔의 옆넓이는 밑넓이의 2배이므로

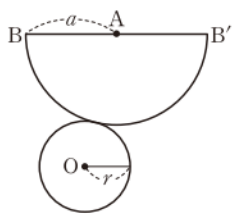
$$\pi ar = 2 \cdot \pi r^2 \quad \therefore a = 2r$$

주어진 원뿔에서 $\triangle ABO$ 는 직각삼각형이므로

$$\cos(\angle ABO) = \frac{\overline{BO}}{\overline{AB}} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle ABO = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < \angle ABO < \frac{\pi}{2})$$

답 ①



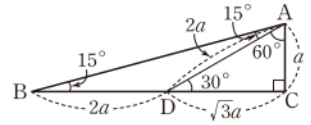
0633 $\angle ABD + \angle BAD = \angle ADC$ 이므로
 $15^\circ + \angle BAD = 30^\circ \quad \therefore \angle BAD = 15^\circ$

즉 $\triangle ABD$ 는 이등변삼각형이므로 오른쪽 그림에서
 $\overline{AD} = \overline{BD} = 2a$ 라 하면 $\triangle ADC$ 에서

$$\overline{AC} = a, \overline{CD} = \sqrt{3}a$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan 15^\circ &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{a}{(2+\sqrt{3})a} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \\ &= 2-\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ④



0634 오른쪽 그림에서 $\angle B = 45^\circ$ 이므로

$$\angle ABD = \angle DBC = 22.5^\circ$$

또 $\overline{BC} : \overline{BA} = \overline{CD} : \overline{AD}$ 이므로

$$1 : \sqrt{2} = \overline{CD} : \overline{AD}$$

$$\therefore \overline{AD} = \sqrt{2} \overline{CD}$$

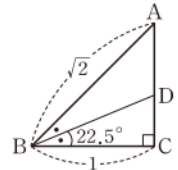
$$\overline{AD} + \overline{CD} = 1 \text{이므로} \quad (\sqrt{2} + 1)\overline{CD} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{CD} &= \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

$\triangle BCD$ 에서

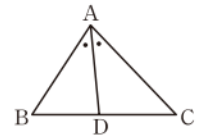
$$\tan 22.5^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{1} = \sqrt{2} - 1$$

답 ①



라벤 **특강** 삼각형의 내각의 이등분선

$\triangle ABC$ 에서 \overline{AD} 가 $\angle A$ 의 이등분선일 때
 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

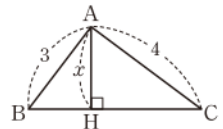


0635 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AH} = x$ 라 하면

$$\sin B = \frac{x}{3}, \sin C = \frac{x}{4}$$

$$\therefore \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\frac{x}{4}}{\frac{x}{3}} = \frac{3}{4}$$

답 3/4



0636 $\overline{OP} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5}$$

답 ③

0637 점 $P(-\frac{1}{2}, a)$ 에서 $\tan \theta = \frac{a}{-\frac{1}{2}} = -2a$ 이므로

$$-2a = -3 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

답 ④

0638 $5x+12y=0$ 에서 $y=-\frac{5}{12}x$ 이므로

$$\tan \theta = -\frac{5}{12}$$

$0 < \theta < \pi$ 이므로 오른쪽 그림에서 직선

$y=-\frac{5}{12}x$ 위의 점 $P(-12, 5)$ 에 대하여

$$OP = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13$$

이므로

$$\sin \theta = \frac{5}{13}, \cos \theta = -\frac{12}{13}$$

$$\therefore 13(\sin \theta + \cos \theta) = 13 \left\{ \frac{5}{13} + \left(-\frac{12}{13} \right) \right\}$$

$$= -7$$

→ ①

→ ②

→ ③

답 -7

채점 기준	비율
① $\tan \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $\sin \theta, \cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	60 %
③ $13(\sin \theta + \cos \theta)$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0639 점 D의 좌표는 $(\cos \theta, \sin \theta)$

점 A는 점 D와 y 축에 대하여 대칭이므로 점 A의 좌표는

$$(-\cos \theta, \sin \theta)$$

따라서 점 A의 x 좌표는 $-\cos \theta$

답 ⑤

0640 점 $P(a, b)$ 가 직선 $y=-\sqrt{3}x$ 위의 점이므로

$$b = -\sqrt{3}a$$

이때 $a > 0$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 점 $P(a, b)$ 는 제4사분면 위에 있고

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-\sqrt{3}a)^2}$$

$$= \sqrt{4a^2} = 2a \quad (\because a > 0)$$

따라서

$$\sin \theta = \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{3}a}{2a} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \theta = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

이므로

$$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

답 -1

0641 (i) $\sin \theta \tan \theta > 0$ 일 때,

$\sin \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 같으므로 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos \theta \tan \theta < 0$ 일 때,

$\cos \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제4사분면의 각이다.

답 ④

0642 θ 가 제3사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$

$$\therefore \sqrt{\cos^2 \theta} - |\sin \theta| + \cos \theta = -\cos \theta - (-\sin \theta) + \cos \theta$$

$$= \sin \theta$$

답 $\sin \theta$

0643 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 에서 θ 가 제2

사분면의 각이고 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ 이므로 오른쪽

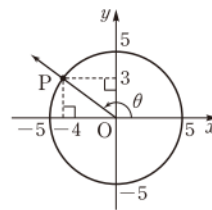
그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원을 그리면 각 θ 를 나타내는 동경과 만나는 점 P는 $P(-4, 3)$

따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$$\cos \theta = -\frac{4}{5}, \tan \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos \theta - \tan \theta = -\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{4} \right) = -\frac{1}{20}$$

답 $-\frac{1}{20}$



0644 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 에서 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 2n\pi + \pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore n\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < n\pi + \frac{\pi}{2}$$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$$2k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$(2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 2k\pi + \frac{5}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$$

(i), (ii)에서

$$2k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{또는 } 2k\pi + \frac{5}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$$

이때 $\frac{5}{4}\pi < \frac{4}{3}\pi < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 각 $\frac{\theta}{2}$ 가 될 수 있는 것은 ③이다.

답 ③

$$\begin{aligned} \text{0645 } \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \tan \theta &= \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + \sin \theta + \sin^2 \theta}{(1 + \sin \theta) \cos \theta} \\ &= \frac{1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta) \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{\cos \theta}$

$$\begin{aligned} \text{0646 } \cos^2 \theta (1 - \tan \theta)^2 + \cos^2 \theta (1 + \tan \theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta \{ (1 - \tan \theta)^2 + (1 + \tan \theta)^2 \} \\ &= \cos^2 \theta (1 - 2 \tan \theta + \tan^2 \theta + 1 + 2 \tan \theta + \tan^2 \theta) \\ &= \cos^2 \theta (2 + 2 \tan^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) \\ &= 2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2 \end{aligned}$$

답 2

$$\begin{aligned} \text{0647 } \textcircled{1} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin^2 \theta - \cos \theta (1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \cos \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad (1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) &= \cos^2 \theta \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \sin^4 \theta - \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= 1 - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2\cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad &\left(\frac{1}{\sin \theta} + 1\right)\left(\frac{1}{\cos \theta} + 1\right)\left(\frac{1}{\sin \theta} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos \theta} - 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sin \theta} + 1\right)\left(\frac{1}{\sin \theta} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos \theta} + 1\right)\left(\frac{1}{\cos \theta} - 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1\right) = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad \frac{2 \tan \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \tan^2 \theta} &= \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\frac{2 \sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned} \text{0648} \quad &\sqrt{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} + \sqrt{1 - 2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \sqrt{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\ &\quad + \sqrt{\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} + \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} \\ &= |\sin \theta + \cos \theta| + |\sin \theta - \cos \theta| \\ &= \sin \theta + \cos \theta + \{-(\sin \theta - \cos \theta)\} \quad (\because 0 < \sin \theta < \cos \theta) \\ &= 2 \cos \theta \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} \text{0649} \quad &\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1}{5} \text{에서} \\ 5(1 - \sin \theta) &= 1 + \sin \theta, \quad 5 - 5 \sin \theta = 1 + \sin \theta \\ -6 \sin \theta &= -4 \quad \therefore \sin \theta = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \text{이므로}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \left(\because \frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} \text{0650} \quad &\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta + (1 + \sin \theta)^2}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + 1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{2(1 + \sin \theta)}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{2}{\cos \theta} \end{aligned}$$

→ ①

$$\frac{2}{\cos \theta} = 4 \text{이므로} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}$$

→ ②

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(\because \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi\right)$$

→ ③

$$\text{답} -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

채점 기준	비율
① 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %
② $\cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %
③ $\sin \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

$$\begin{aligned} \text{0651} \quad &\frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} = \frac{(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{2}{\sin^2 \theta} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\sin^2 \theta} = 3 \text{이므로} \quad \sin^2 \theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{이때} \quad \tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \text{이므로} \quad \tan^2 \theta = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

$$\therefore \tan \theta = \sqrt{2} \quad \left(\because \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi\right)$$

답 ④

$$\begin{aligned} \text{0652} \quad &(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{이때} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로} \quad \sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

$$\text{따라서} \quad \sin \theta - \cos \theta > 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

답 ③

$$\text{0653} \quad \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{25}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25} \quad \text{답} -\frac{12}{25}$$

$$\text{0654} \quad \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 2$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \text{에서}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = 0$$

답 ③

$$\text{0655} \quad \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 2 \text{에서}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 2, \quad \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 2 \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

→ ①

$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$ 에서

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$... ②

$$\begin{aligned} \therefore \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

... ③
답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

채점 기준	비율
① $\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $\sin \theta + \cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0656 이차방정식 $2x^2 + x + k = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{2}, \sin \theta \cos \theta = \frac{k}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta &= \frac{1}{4} \\ 1 + 2 \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $\frac{k}{2} = -\frac{3}{8} \quad \therefore k = -\frac{3}{4}$ 답 ①

0657 주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 이차방정식의 한 근이 $3 + 2\sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $3 - 2\sqrt{2}$ 이다. ... ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = (3 + 2\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2}) = 6 \quad \dots\dots ②$$

이때

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

에서 $\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 6$ 이므로 $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{6}$

$$\therefore 6 \sin \theta \cos \theta = 1 \quad \dots\dots ③$$

답 1

채점 기준	비율
① $3 - 2\sqrt{2}$ 가 주어진 이차방정식의 근임을 알 수 있다.	20 %
② $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $6 \sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0658 $2x^2 - \sqrt{6}x + k = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}, \sin \theta \cos \theta = \frac{k}{2}$$

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{2}$$

$$1 + k = \frac{3}{2} \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

이때

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 4, \end{aligned}$$

$$\tan \theta \cdot \frac{1}{\tan \theta} = 1$$

이므로 x^2 의 계수가 1이고 $\tan \theta$, $\frac{1}{\tan \theta}$ 을 두 근으로 하는 이차방

정식은 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 답 $x^2 - 4x + 1 = 0$

0659 전략 어떤 각의 동경의 위치를 구할 때에는 그 각을 $360^\circ \times (\text{정수}) + \alpha^\circ$ ($0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ$) 꼴로 나타낸다.

풀이 $\therefore 105^\circ = 105 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{12} \pi$

$\therefore 1560^\circ = 360^\circ \times 4 + 120^\circ$ 이므로 1560° 는 제2사분면의 각이다.

$$\therefore -\frac{\pi}{6} = 2\pi \times (-1) + \frac{11}{6} \pi$$

$$330^\circ = 330 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{6} \pi$$

$$-750^\circ = -750 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{25}{6} \pi$$

$$= 2\pi \times (-3) + \frac{11}{6} \pi$$

따라서 $-\frac{\pi}{6}$, 330° , -750° 를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

즉, $\frac{\pi}{3} + \frac{11}{3} \pi = 4\pi$ 이므로 $\frac{\pi}{3}$ 와 $\frac{11}{3} \pi$ 를 나타내는 동경은 x 축에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0660 전략 중심각의 크기가 θ (라디안)이고, 반지름의 길이가 r 인 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 각각 $r\theta$, $\frac{1}{2}r^2\theta$ 이다.

풀이 부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}$ 이고 둘레의 길이가 11이므로

$$2r + \frac{3}{4}r = 11, \quad \frac{11}{4}r = 11 \quad \therefore r = 4 \quad \dots\dots ①$$

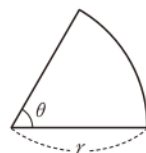
$$\text{따라서 부채꼴의 넓이는 } \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{3}{4} = 6 \quad \dots\dots ②$$

답 6

채점 기준	비율
① r 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② 부채꼴의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

라떼 특강 부채꼴의 둘레의 길이

중심각의 크기가 θ (라디안)이고 반지름의 길이가 r 인 부채꼴의 둘레의 길이를 l 이라 하면
 $l = 2 \times (\text{반지름의 길이}) + (\text{호의 길이})$
 $= 2r + r\theta$



0661 **전략** 중심각의 크기가 θ (라디안)이고 반지름의 길이가 r 인 부채꼴의 호의 길이는 $r\theta$ 이다.

풀이 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ 라 하면 둘레의 길이는 $2r+r\theta$

원의 둘레의 길이는 $2\pi r$

$$\text{즉 } 2r+r\theta=2\pi r \cdot \frac{1}{2} \text{ 이므로 } r(2+\theta)=\pi r$$

$$\therefore \theta=\pi-2 \quad (\because r>0) \quad \text{답 ④}$$

0662 **전략** $\sqrt{\frac{a}{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}} \quad (ab \neq 0)$ 이면 $a>0, b<0$ 임을 이용한다.

풀이 $\sin \theta \cos \theta \neq 0$ 이고 $\frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{\cos \theta}}=-\sqrt{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$ 이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

즉 θ 는 제2사분면의 각이다. 답 ②

0663 **전략** 먼저 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 임을 이용하여 주어진 식을 통분한 후 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 을 이용하여 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이} & \left(1 + \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta}\right) \left(1 + \frac{1}{\tan \theta} - \frac{1}{\sin \theta}\right) \\ &= \frac{\cos \theta + \sin \theta + 1}{\cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2 \quad \text{답 ①} \end{aligned}$$

0664 **전략** θ 가 제3사분면의 각이면

$2n\pi + \pi < \theta < 2n\pi + \frac{3}{2}\pi$ (n 은 정수)임을 이용한다.

풀이 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$2n\pi + \pi < \theta < 2n\pi + \frac{3}{2}\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{3} < \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{2}$$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때,

$$\frac{2 \cdot 3k}{3}\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{3} < \frac{2 \cdot 3k}{3}\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 2k\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$\frac{2(3k+1)}{3}\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{3} < \frac{2(3k+1)}{3}\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 2k\pi + \pi < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + \frac{7}{6}\pi$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,

$$\frac{2(3k+2)}{3}\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{3} < \frac{2(3k+2)}{3}\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 2k\pi + \frac{5}{3}\pi < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + \frac{11}{6}\pi$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각이다.

이상에서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면 또는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다. 답 제2사분면

0665 **전략** 두 각 α, β 를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이면 $\alpha - \beta = (2n+1)\pi$ (n 은 정수)임을 이용한다.

풀이 각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$5\theta - \theta = (2n+1)\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = (2n+1)\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n+1}{4}\pi \quad \dots\dots ①$$

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{에서 } \pi < \frac{2n+1}{4}\pi < \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$4 < 2n+1 < 6, \quad \frac{3}{2} < n < \frac{5}{2} \quad \therefore n=2$$

$$\text{이것을 ①에 대입하면 } \theta = \frac{5}{4}\pi \quad \text{답 } \frac{5}{4}\pi$$

0666 **전략** 두 각 α, β 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이면 $\alpha + \beta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)임을 이용한다.

풀이 각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{12} \quad \dots\dots ①$$

$$0 < \theta < \pi \text{에서 } 0 < \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{12} < \pi \text{이므로}$$

$$-\frac{\pi}{12} < \frac{n}{3}\pi < \frac{11}{12}\pi, \quad -\frac{1}{4} < n < \frac{11}{4}$$

$$\therefore n=0 \text{ 또는 } n=1 \text{ 또는 } n=2$$

각 θ 중에서 크기가 가장 큰 것은 $n=2$ 일 때이므로 이것을 ①에 대

$$\text{입하면 } \alpha = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{12} = \frac{3}{4}\pi$$

각 θ 중에서 크기가 가장 작은 것은 $n=0$ 일 때이므로 이것을 ①에

$$\text{대입하면 } \beta = 0 + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{2}{3}\pi \quad \text{답 ④}$$

0667 **전략** 중심각의 크기가 θ (라디안), 반지름의 길이가 r 인 부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면 $l=r\theta, S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r^2\theta$ 이다.

풀이 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 둘레의 길이가 20이므로

$$2r+l=20 \quad \therefore l=20-2r \quad \dots\dots ①$$

이때 $20-2r>0, r>0$ 이므로 $0<r<10$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(20-2r) \quad \dots\dots ②$$

$$=-r^2+10r=-(r-5)^2+25 \quad (0<r<10)$$

즉 $r=5$ 일 때 S 는 최댓값 25를 갖는다. $\therefore a=5$
 이때 중심각의 크기가 b 이므로 $\frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot b = 25 \quad \therefore b=2$
 $\therefore a+b=7$

→ ③

답 7

채점 기준	비율
① l 을 r 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
② S 를 r 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0668 전략 먼저 원의 넓이를 이용하여 원의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\pi r^2 = 100\pi, \quad r^2 = 100$$

$$\therefore r = 10 (\because r > 0)$$

호 AB 의 길이가 반지름의 길이의 2배이므로

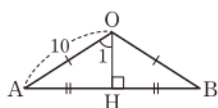
$$10\theta = 2 \cdot 10 \quad \therefore \theta = 2$$

$\triangle OAB$ 는 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 인 이등변삼각형이므로 오른쪽 그림과 같이 점 O 에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\triangle OAH$ 에서 $\angle AOH = 1$ 이고

$$\sin 1 = \frac{\overline{AH}}{10} \quad \therefore \overline{AH} = 10 \sin 1$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 20 \sin 1$$

답 ②



0669 전략 직선 $y = mx + n$ 이 x 축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ 일 때, $m = \tan \theta$ 임을 이용한다.

풀이 $y = -\frac{2}{3}x$ 에서 $\tan \theta = -\frac{2}{3}$

$0 < \theta < \pi$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 직선

$y = -\frac{2}{3}x$ 위의 점 $P(-3, 2)$ 에 대하여

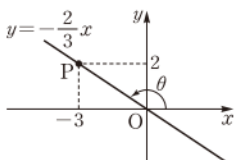
$$\overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

이므로

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} - \tan \theta &= \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)} - \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= -\frac{13}{6} + \frac{2}{3} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 $-\frac{3}{2}$



0670 전략 좌표평면 위에 각 θ 를 나타내는 동경과 원점 O 를 중심으로 하는 원을 그려 본다.

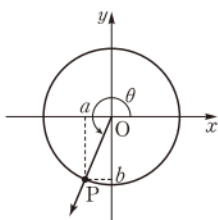
풀이 오른쪽 그림과 같이 원점 O 를 중심으로 하는 원을 그리고 각 θ 를 나타내는 동경과 원이 만나는 점 P 를

$$P(a, b) \quad (a < 0, b < 0)$$

라 하자.

이때 $\tan \theta = \frac{b}{a}$ 이므로 $\frac{b}{a} = 2$

$$\therefore b = 2a$$



$$\begin{aligned} \therefore \overline{OP} &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} \\ &= -\sqrt{5}a \quad (\because a < 0) \end{aligned}$$

따라서

$$\sin \theta = \frac{b}{-\sqrt{5}a} = \frac{2a}{-\sqrt{5}a} = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\cos \theta = \frac{a}{-\sqrt{5}a} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

이므로

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{5}$$

답 ④

0671 전략 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 각 삼각함수의 값의 부호를 조사한다.

풀이 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서

$$\sin \theta > 0, \quad \cos \theta < 0, \quad \tan \theta < 0$$

이므로

$$\sin \theta - \cos \theta > 0, \quad \sin \theta \cos \theta < 0$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0672 전략 먼저 $\cos \theta$ 의 값을 구한 후 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ 를 이용한다.

$$\text{풀이} \quad \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{3}{4} \text{에서} \quad 4 - 4 \cos \theta = 3 + 3 \cos \theta$$

$$7 \cos \theta = 1 \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{7}$$

→ ①

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{48}{49} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{4\sqrt{3}}{7} \quad \left(\because \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi\right)$$

→ ②

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{4\sqrt{3}}{7}}{\frac{1}{7}} = -4\sqrt{3}$$

→ ③

답 $-4\sqrt{3}$

채점 기준	비율
① $\cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $\sin \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $\tan \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0673 전략 주어진 등식의 양변을 제곱하여 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구한다.

풀이 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}, \quad 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{18}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left\{1 - \left(-\frac{5}{18}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{23}{18} = \frac{23}{27}$$

답 ⑤

0674 전략 조건에 맞도록 두 동경 OP, OQ의 위치를 좌표평면 위에 나타내어 본다.

풀이 ㄱ. $\alpha - \beta = 2n\pi$ 이면

$$\alpha = \beta + 2n\pi$$

두 동경 OP, OQ를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 두 동경 OP, OQ는 일치한다.

ㄴ. 두 동경 OP, OQ가 원점에 대하여 대칭
이므로 두 동경을 좌표평면 위에 나타내면
오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore \alpha - \beta = (2n+1)\pi$$

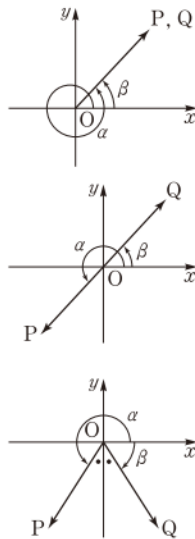
$$= 2n\pi + \pi$$

ㄷ. $\alpha = \frac{4}{3}\pi, \beta = -\frac{\pi}{3}$ 를 좌표평면 위에 나

타내면 오른쪽 그림과 같이 두 동경

OP, OQ는 y 축에 대하여 대칭이다.

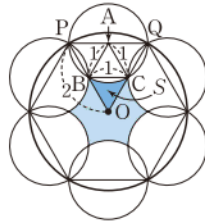
이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.



답 ①

0675 전략 한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림에서 삼각형 OPQ는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고, 삼각형 APB와 삼각형 ACQ는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로



$$S$$

$$= (\text{삼각형 OPQ의 넓이})$$

$$- \{ (\text{삼각형 APB의 넓이})$$

$$+ (\text{부채꼴 ABC의 넓이})$$

$$+ (\text{삼각형 ACQ의 넓이}) \}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$6S = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = 3\sqrt{3} - \pi$$

답 ①

0676 전략 직각삼각형의 외심의 성질과 이등변삼각형의 성질을 이용하여 θ 와 크기가 같은 각을 찾는다.

풀이 점 O가 삼각형 ABC의 외심이므로

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \theta$$

$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$$

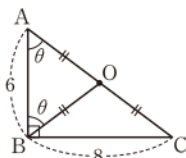
$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\tan \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 15(\sin \theta + \cos \theta) \tan \theta = 15 \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{4}{3}$$

$$= 28$$

답 ⑤

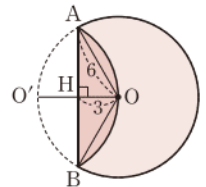


삼각형의 외심

- ① 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.
- ② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.
- ③ 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점에 있다.

0677 전략 접힌 부분에서 직각삼각형을 찾고 삼각비를 이용하여 호에 대한 중심각의 크기를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 접힌 선분의 양 끝 점을 A, B라 하고 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H, \overline{OH} 의 연장선과 접기 전의 원주와의 교점을 O' 이라 하자.



$$\overline{OA} = 6, \overline{OH} = \overline{O'H} = 3$$

이므로 직각삼각형 OAH에서

$$\cos(\angle AOH) = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle AOH = \frac{\pi}{3} \left(\because 0 < \angle AOH < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore \angle AOB = 2\angle AOH = \frac{2}{3}\pi$$

→ ①

따라서 접힌 활꼴 부분의 넓이는

$$(\text{부채꼴 AOB의 넓이}) - (\text{삼각형 OAB의 넓이})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin\left(\pi - \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= 12\pi - 9\sqrt{3}$$

→ ②

$$\text{답 } 12\pi - 9\sqrt{3}$$

채점 기준	비율
① $\angle AOB$ 의 크기를 구할 수 있다.	50 %
② 접힌 활꼴 부분의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

0678 전략 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 임을 이용하여 $\sin \theta, \cos \theta$ 의 값을 구한다.

풀이 $4\sin \theta = 3\cos \theta$ 에서 $\sin \theta = \frac{3}{4}\cos \theta$ ㉠

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$$\left(\frac{3}{4}\cos \theta \right)^2 + \cos^2 \theta = 1, \quad \frac{25}{16}\cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{16}{25} \quad \therefore \cos \theta = \frac{4}{5} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

이것을 ㉠에 대입하면 $\sin \theta = \frac{3}{5}$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{\cos \theta} = \frac{5}{4}$$

이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 $\tan \theta, \frac{1}{\cos \theta}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} = 2, \quad b = \tan \theta \cdot \frac{1}{\cos \theta} = \frac{15}{16}$$

$$\therefore 8ab = 15$$

답 ③

06

삼각함수의 그래프

II. 삼각함수

0679 함수 $f(x)$ 의 주기가 4이므로
 $f(x+4)=f(x)$
 $\therefore f(14)=f(10)=f(6)=f(2)=1$

답 1

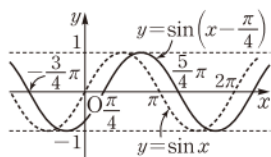
0680 함수 $f(x)$ 의 주기가 3이므로
 $f(x+3)=f(x)$
 $\therefore f(8)=f(5)=f(2)$
 $0 \leq x < 3$ 에서 $f(x)=2x$ 이므로
 $f(8)=f(2)=4$

답 4

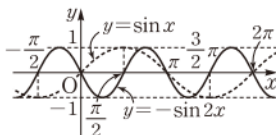
0681 답 (가) -2 (나) 2 (다) 2 π

0682 답 (가) -1 (나) 1 (다) π

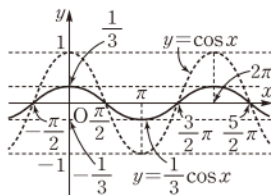
0683 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프는
 $y=\sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로
 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것과 같다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같
고, 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$, 주기는 2π 이다.



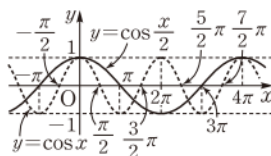
0684 $y=-\sin 2x$ 의 그래프는
 $y=\sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향
으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 후 x 축에 대하여 대
칭이동한 것과 같다.
따라서 그래프는 위의 그림과 같고, 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$, 주
기는 π 이다.



0685 $y=\frac{1}{3}\cos x$ 의 그래프는
 $y=\cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향
으로 $\frac{1}{3}$ 배 한 것과 같다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같
고, 치역은 $\left\{y \mid -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3}\right\}$, 주
기는 2π 이다.

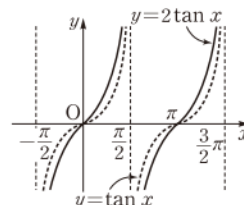


0686 $y=\cos \frac{x}{2}$ 의 그래프는
 $y=\cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으
로 2배 한 것과 같다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같
고, 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$, 주
기는 4π 이다.



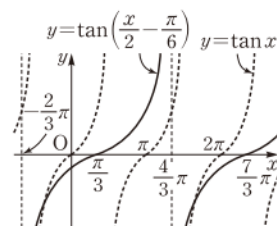
0687 답 (가) π (나) $\frac{\pi}{2}$ (다) $\frac{\pi}{4}$

0688 $y=2\tan x$ 의 그래프는
 $y=\tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로
2배 한 것과 같다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
치역은 실수 전체의 집합, 주기는 π ,
점근선의 방정식은
 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이다.



풀이 참조

0689 $y=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\tan \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의
그래프를 x 축의 방향으로 2배 한
후 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼 평행이
동한 것과 같다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같
고, 치역은 실수 전체의 집합, 주
기는 2π , 점근선의 방정식은
 $x=2n\pi+\frac{4}{3}\pi$ (n 은 정수)이다.



풀이 참조

0690 $y=\frac{1}{3}\sin 2x$ 에서 최댓값은 $\frac{1}{3}$, 최솟값은 $-\frac{1}{3}$ 이고 주기는
 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ 이다.

최댓값: $\frac{1}{3}$, 최솟값: $-\frac{1}{3}$, 주기: π

0691 $y=2\cos 3x$ 에서 최댓값은 2, 최솟값은 -2이고 주기는
 $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ 이다.

최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

0692 $y=-\tan 2x$ 에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

최댓값, 최솟값은 없다, 주기: $\frac{\pi}{2}$

0693 $y=-\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ 에서 $y=-\sin \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -1이고 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ 이다.

최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 4π

0694 $y=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$ 에서 $y=3\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$
따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -4이고 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ 이다.

최댓값: 2, 최솟값: -4, 주기: π

0695 $y = \tan 2\pi x + 4$ 에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ 이다. 답 최댓값, 최솟값은 없다, 주기: $\frac{1}{2}$

0696 $\sin \frac{13}{6}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0697 $\cos \frac{17}{4}\pi = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0698 $\tan \frac{13}{3}\pi = \tan\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

0699 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0700 $\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right) = \cos \frac{7}{3}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0701 $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$ 답 -1

0702 $\sin \frac{4}{3}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

0703 $\cos \frac{5}{4}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

0704 $\tan \frac{7}{6}\pi = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0705 $\sin \frac{3}{4}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0706 $\cos \frac{5}{6}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

0707 $\tan \frac{2}{3}\pi = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\tan \frac{\pi}{6}} = -\sqrt{3}$ 답 $-\sqrt{3}$

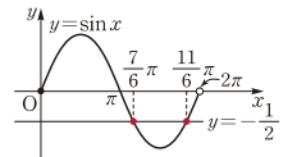
0708 $\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$
삼각함수표에서 $\cos 15^\circ = 0.9659$ 이므로
 $\sin 105^\circ = 0.9659$ 답 0.9659

0709 $\cos 343^\circ = \cos(360^\circ - 17^\circ) = \cos 17^\circ$
삼각함수표에서 $\cos 17^\circ = 0.9563$ 이므로
 $\cos 343^\circ = 0.9563$ 답 0.9563

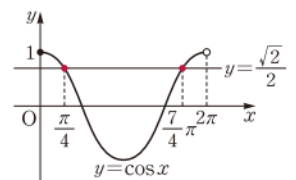
0710 $\tan 164^\circ = \tan(180^\circ - 16^\circ) = -\tan 16^\circ$
삼각함수표에서 $\tan 16^\circ = 0.2867$ 이므로
 $\tan 164^\circ = -0.2867$ 답 -0.2867

0711 답 (가) $\frac{1}{2}$ (나) $\frac{\pi}{6}$ (다) $\frac{5}{6}\pi$

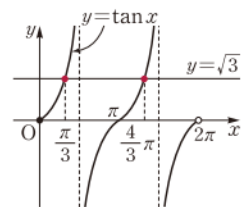
0712 오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표가 $\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ 이므로
 $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$ 답 $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$



0713 $\sqrt{2} \cos x = 1$ 에서 $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 x 좌표가 $\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi$ 이므로
 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$ 답 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$

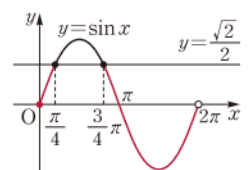


0714 $\tan x - \sqrt{3} = 0$ 에서 $\tan x = \sqrt{3}$
오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = \sqrt{3}$ 의 교점의 x 좌표가 $\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$ 이므로
 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$ 답 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$



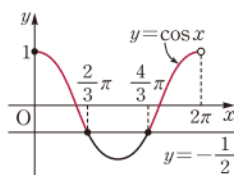
0715 답 (가) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (나) $\frac{3}{4}\pi$ (다) $\frac{5}{4}\pi$

0716 부등식 $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는
 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 와 만나는 부분 또는 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위가므로 오른쪽 그림에서
 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi \leq x < 2\pi$ 답 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi \leq x < 2\pi$



0717 $2\cos x + 1 \geq 0$ 에서 $\cos x \geq -\frac{1}{2}$

부등식 $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ 의 해는 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

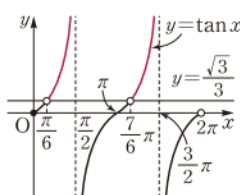


$0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi \leq x < 2\pi$

답 ④ $0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi \leq x < 2\pi$

0718 $\sqrt{3}\tan x > 1$ 에서 $\tan x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

부등식 $\tan x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 해는 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서



$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

답 ⑤ $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

0719 ④ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

답 ④

0720 ㄱ. 치역은 실수 전체의 집합이다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0721 $y = \sin x$ 의 그래프에서

$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\therefore x_1 + x_2 = \pi$

$\frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{5}{2}\pi$ $\therefore x_3 + x_4 = 5\pi$

$\frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{9}{2}\pi$ $\therefore x_5 + x_6 = 9\pi$

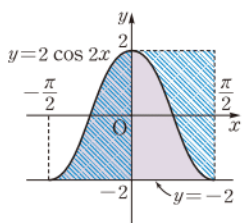
$\frac{x_7 + x_8}{2} = \frac{13}{2}\pi$ $\therefore x_7 + x_8 = 13\pi$

답 13π

0722 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는

$\frac{\pi}{2} \cdot \{2 - (-2)\} = 2\pi$

답 ③



0723 $y = \sin x$ 의 그래프가 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여

대칭이므로 $\frac{p+r}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\therefore p+r = \pi$ ①

또 $y = \cos x$ 의 그래프가 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 직선 $x = \pi$ 에 대하여 대칭

이므로 $\frac{q+s}{2} = \pi$ $\therefore q+s = 2\pi$ ②

$\therefore p+q+r+s = (p+r) + (q+s) = 3\pi$

③

답 3π

채점 기준	비율
① $p+r$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $q+s$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $p+q+r+s$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0724 두 점 A, B는 직선 $x = \frac{\pi}{4}$ 에 대하여 대칭이므로

$\frac{a+\beta}{2} = \frac{\pi}{4}$ $\therefore a+\beta = \frac{\pi}{2}$ ㉠

두 점 C, D는 직선 $x = \frac{3}{4}\pi$ 에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma+\delta}{2} = \frac{3}{4}\pi$ $\therefore \gamma+\delta = \frac{3}{2}\pi$ ㉡

두 점 B, C는 점 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\therefore \beta+\gamma = \pi$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$a+2\beta+2\gamma+\delta = (a+\beta) + (\beta+\gamma) + (\gamma+\delta)$
 $= \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3}{2}\pi = 3\pi$ ③

다른풀이 두 점 A, D는 점 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이므로

$\frac{a+\delta}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\therefore a+\delta = \pi$ ㉣

두 점 B, C는 점 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\therefore \beta+\gamma = \pi$ ㉤

㉣, ㉤에서

$a+2\beta+2\gamma+\delta = (a+\delta) + 2(\beta+\gamma) = \pi + 2\pi = 3\pi$

0725 $y = 2\sin(\pi x - \pi) + 1 = 2\sin \pi(x-1) + 1$ 의 그래프는 $y = 2\sin \pi x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=1$, $n=1$ 이므로 $m+n=2$ ⑤

0726 $y = \sin \frac{\pi}{3}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = \sin \frac{\pi}{3}(x - \frac{1}{2})$ ①

이 함수의 그래프가 점 $(\frac{5}{4}, a)$ 를 지나므로

$a = \sin \frac{\pi}{3} \cdot (\frac{5}{4} - \frac{1}{2}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ②

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

채점 기준	비율
① 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	50 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0727 ㄱ. $y = \cos(2x - \pi) + \frac{1}{2} = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$ 의 그래프는 $y = \cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄴ. $y = 2\cos 2x - 1$ 의 그래프는 $y = \cos 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 후 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄷ. $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 후 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. $y = \cos(2x + 3\pi) = \cos 2\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)$ 의 그래프는 $y = \cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{3}{2}\pi$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

이상에서 $y = \cos 2x$ 의 그래프를 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄹ이다. **답 ③**

0728 $y = \sin 3x - 1$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \sin 3x - 1 \quad \therefore y = -\sin 3x + 1$$

따라서 $a = -1$, $b = 1$ 이므로

$$a + b = 0 \quad \text{답 0}$$

0729 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \cos(-x) = \cos x$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1, \quad \text{즉 } f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 1$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} + 1$$

$$= \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{3}{2} \quad \text{답 ⑤}$$

0730 $y = \sin \frac{x}{2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 π 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sin \frac{1}{2}(x - \pi)$$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \sin \frac{1}{2}(-x - \pi), \quad -y = -\sin \frac{1}{2}(x + \pi)$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \quad \therefore y = \cos \frac{x}{2} \quad \text{답 ③}$$

참고 함수 $y = \cos \frac{x}{2}$ 의 그래프는 함수 $y = \sin \frac{x}{2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\pi$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

0731 ① 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이다.

② 최댓값은 $2 - 1 = 1$ 이다.

③ 최솟값은 $-2 - 1 = -3$ 이다.

④ $x = 0$ 을 대입하면

$$y = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 1 = -2\sin \frac{\pi}{3} - 1 = -\sqrt{3} - 1$$

따라서 그래프는 원점을 지나지 않는다.

⑤ $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$ 의 그래프는

$y = 2\sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것과 같다. **답 ④**

0732 $y = 3\sin(2x - \pi) + 1$ 에서

$$a = 3 + 1 = 4, \quad b = -3 + 1 = -2, \quad c = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\therefore abc = -8\pi \quad \text{답 } -8\pi$$

0733 ① $y = \sin \pi x - 2$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

② $y = \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

③ $y = \tan \frac{\pi}{2}x + 2$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$

④ $y = 2\tan \frac{x}{2} - 1$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

⑤ $y = 3\sin \pi(x - 1)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

따라서 주기가 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다. **답 ④**

0734 $y = 3\cos \frac{1}{2}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 3\cos \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3 \quad \cdots ①$$

이 함수의 최댓값은 $3 - 3 = 0$, 최솟값은 $-3 - 3 = -6$ 이므로

$$M = 0, \quad m = -6 \quad \cdots ②$$

$$\therefore M + m = -6 \quad \cdots ③$$

$$\text{답 } -6$$

채점 기준	비율
① 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
② M , m 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $M + m$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0735 ㄱ. 주기가 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ 인 주기함수이다.

$$\therefore f(-x) = \tan\left(-\frac{x}{2}\right) + 1 = -\tan \frac{x}{2} + 1,$$

$$-f(x) = -\tan \frac{x}{2} - 1 \quad \text{이므로} \quad f(-x) \neq -f(x)$$

ㄷ. 최댓값은 없다.

ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x = 2n\pi + \pi$ (n 은 정수)이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. **답 ㄱ**

0736 $f(x) = a \cos \pi x + b$ 의 최댓값이 3이고 $a > 0$ 이므로
 $a + b = 3$ ㉠

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \text{이므로} \quad a \cos \frac{\pi}{3} + b = 2$$

$$\therefore \frac{1}{2}a + b = 2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 1$
 $\therefore a - b = 1$ **답 ④**

0737 $f(x) = a \tan bx + 2$ 의 주기가 2π 이고 $b > 0$ 이므로
 $\frac{\pi}{b} = 2\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$

또 함수 $f(x) = a \tan \frac{1}{2}x + 2$ 에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 이므로

$$a \tan \frac{\pi}{4} + 2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore ab = -1$$
 답 ③

0738 $f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - bx\right) + c$ 에서 최댓값이 5이고 $a > 0$ 이므로
 $a + c = 5$ ㉠

주기가 2π 이고 $b > 0$ 이므로 $\frac{2\pi}{b} = 2\pi$
 $\therefore b = 1$

또 함수 $f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + c$ 에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3$ 이므로

$$a \sin \frac{\pi}{6} + c = 3 \quad \therefore \frac{1}{2}a + c = 3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 4, c = 1$
 $\therefore a + b - c = 4$ **답 4**

0739 주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2 이고 $a > 0$ 이므로
 $a = 2$

또 주기가 $\frac{2}{3}\pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y = 2 \sin(2x - c)$ 이고, 그래프가 점
 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 을 지나므로

$$0 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - c\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{3} - c\right) = 0$$

$0 < c < \pi$ 이므로 $c = \frac{\pi}{3}$
 $\therefore abc = \frac{4}{3}\pi$ **답 $\frac{4}{3}\pi$**

0740 주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -1 이고 $a > 0$ 이므로
 $a + c = 3, -a + c = -1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, c = 1$ ①

또 주기가 $3\pi - (-\pi) = 4\pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore abc = 1 \quad \dots\dots ③$$
답 1

채점 기준	비율
① a, c 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ abc 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0741 주어진 함수의 주기가 2π 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = 2\pi \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y = \tan\left(\frac{1}{2}x - b\right)$ 이고, 그래프가 점
 $(\pi, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

$$0 < b < \pi \text{이므로} \quad b = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore ab = \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots \frac{\pi}{4}$$

0742 주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -5 이고 $a > 0$ 이므로
 $a + b = 3, -a + b = -5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 4, b = -1$

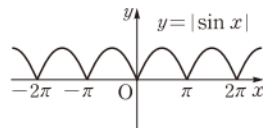
$$\therefore y = 4 \cos \frac{\pi}{4}(2x - 1) - 1 = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

따라서 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 이고, 그래프에서 주기는 $2\left(c - \frac{1}{2}\right)$ 이므로

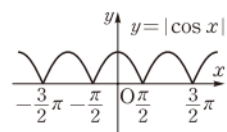
$$2\left(c - \frac{1}{2}\right) = 4 \quad \therefore c = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a + 2b + 2c = 7 \quad \dots\dots ①$$

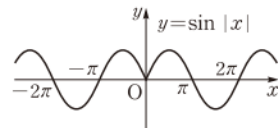
0743 $y = |\sin x|$ 의 그래프는 오른쪽
 그림과 같다.



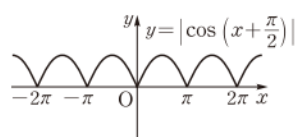
ㄱ. $y = |\cos x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림
 과 같다.



ㄴ. $y = \sin |x|$ 의 그래프는 오른쪽
 그림과 같다.



ㄷ. $y = \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$ 의 그래프
 는 오른쪽 그림과 같다.



이상에서 $y = |\sin x|$ 의 그래프와 일치하는 것은 ㄷ뿐이다. **답 ②**

0744 $y = |\tan ax|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{|a|}$ 이고, $y = 4 \cos 3x$ 의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$

이므로 ①

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{2}{3}\pi, \quad |a| = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2} \quad (\because a > 0)$$

→ ②

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
① 두 함수의 주기를 구할 수 있다.	80 %
② a의 값을 구할 수 있다.	20 %

$$0745 \quad \sin \frac{7}{6}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{2}{3}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{13}{6}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\tan \frac{5}{6}\pi = -\tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{4}$

$$0746 \quad \sin 260^\circ = \sin(90^\circ \times 3 - 10^\circ) = -\cos 10^\circ = -0.9848$$

$$\cos 110^\circ = \cos(90^\circ \times 1 + 20^\circ) = -\sin 20^\circ = -0.3420$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin 260^\circ - \cos 110^\circ &= -0.9848 - (-0.3420) \\ &= -0.6428 \end{aligned}$$

답 ②

$$0747 \quad \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = -\cos \theta$$

$$\neg. \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\neg. \sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$$

$$\neg. \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \sin \theta$$

$$\neg. \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

이상에서 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)$ 의 값과 같은 것은 \neg , \neg 이다.

답 \neg , \neg

$$0748 \quad \tan 100^\circ = \tan(90^\circ \times 1 + 10^\circ) = -\frac{1}{\tan 10^\circ}$$

$$\cos 130^\circ = \cos(90^\circ \times 1 + 40^\circ) = -\sin 40^\circ$$

$$\tan 260^\circ = \tan(90^\circ \times 3 - 10^\circ) = \frac{1}{\tan 10^\circ}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \sin 40^\circ - \frac{1}{\tan 10^\circ} - \sin 40^\circ + \frac{1}{\tan 10^\circ} \\ &= 0 \end{aligned}$$

답 0

$$0749 \quad \cos(2\pi - \theta) = \cos \theta, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta,$$

$$\cos(3\pi + \theta) = -\cos \theta, \quad \sin(\pi - \theta) = \sin \theta,$$

$$\sin(3\pi - \theta) = \sin \theta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \left\{ \frac{\cos \theta \cdot (-\cos \theta)}{\cos \theta} \right\}^2 + \left\{ \frac{\sin \theta \cdot (-\sin \theta)}{\sin \theta} \right\}^2 \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

답 ③

$$0750 \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \cos\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\right\} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \text{이므로}$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = 1$$

답 1

$$0751 \quad \cos(90^\circ - \alpha^\circ) = \sin \alpha^\circ \text{이므로}$$

$$\cos^2(90^\circ - \alpha^\circ) + \cos^2 \alpha^\circ = \sin^2 \alpha^\circ + \cos^2 \alpha^\circ = \boxed{1}$$

$$\therefore \cos^2 5^\circ + \cos^2 10^\circ + \cos^2 15^\circ + \cdots + \cos^2 85^\circ$$

$$\begin{aligned} &= (\cos^2 5^\circ + \cos^2 85^\circ) + (\cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ) \\ &\quad + (\cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ) + \cdots + (\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ) \\ &\quad + \cos^2 45^\circ \end{aligned}$$

$$= \underbrace{1+1+\cdots+1}_{8\text{개}} + \frac{1}{2} = 8 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{17}{2}}$$

$$\text{따라서 } a=1, b=\frac{17}{2} \text{ 이므로 } a+b=\frac{19}{2}$$

답 ⑤

$$0752 \quad \tan 89^\circ = \tan(90^\circ - 1^\circ) = \frac{1}{\tan 1^\circ}$$

$$\tan 88^\circ = \tan(90^\circ - 2^\circ) = \frac{1}{\tan 2^\circ}$$

\vdots

$$\tan 46^\circ = \tan(90^\circ - 44^\circ) = \frac{1}{\tan 44^\circ}$$

→ ①

$$\therefore \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \cdots \times \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ$$

$$= \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \cdots \times \tan 44^\circ \times \tan 45^\circ$$

$$\times \frac{1}{\tan 44^\circ} \times \cdots \times \frac{1}{\tan 2^\circ} \times \frac{1}{\tan 1^\circ}$$

$$= \tan 45^\circ = 1$$

→ ②

답 1

채점 기준	비율
① 주어진 삼각함수의 각을 변형할 수 있다.	70 %
② 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

$$0753 \quad \overline{AB} \text{가 원의 지름이므로 } \angle ACB = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

또 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$$

$$\therefore \sin(\alpha + 2\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos \beta$$

$$= \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$0754 \quad \text{삼각형의 세 내각의 크기 } A, B, C \text{에 대하여}$$

$$A+B+C=\pi \quad \therefore B+C=\pi-A$$

$$\therefore \cos\left(\frac{B+C-2\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi-A-2\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi+A}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right)$$

$$= -\sin \frac{A}{2} = -\frac{1}{3}$$

답 ②

0755 $5\theta = \pi$ 이므로

$$\begin{aligned} & \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 9\theta \\ &= \cos 2\theta + \cos (5\theta - \theta) + \cos 5\theta + \cos (5\theta + 2\theta) + \cos (10\theta - \theta) \\ &= \cos 2\theta + \cos (\pi - \theta) + \cos \pi + \cos (\pi + 2\theta) + \cos (2\pi - \theta) \\ &= \cos 2\theta - \cos \theta - 1 - \cos 2\theta + \cos \theta \\ &= -1 \end{aligned}$$

답 ②

0756 $-1 \leq \cos 3x \leq 1$ 이므로

$$\begin{aligned} -4 &\leq \cos 3x - 3 \leq -2, & 2 \leq |\cos 3x - 3| \leq 4 \\ 4 &\leq 2|\cos 3x - 3| \leq 8 \\ \therefore 5 &\leq 2|\cos 3x - 3| + 1 \leq 9 \end{aligned}$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 9, 최솟값은 5이므로

$$\begin{aligned} M &= 9, m = 5 \\ \therefore M + m &= 14 \end{aligned}$$

답 ④

0757 $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos x$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 3\cos x - 1 \\ &= -\cos x + 3\cos x - 1 = 2\cos x - 1 \end{aligned}$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-3 \leq 2\cos x - 1 \leq 1$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이므로

$$\begin{aligned} M &= 1, m = -3 \\ \therefore M - m &= 4 \end{aligned}$$

답 4

0758 $-1 \leq \sin 3x \leq 1$ 이므로

$$\begin{aligned} -3 &\leq \sin 3x - 2 \leq -1, & 1 \leq |\sin 3x - 2| \leq 3 \\ \therefore a + b &\leq a|\sin 3x - 2| + b \leq 3a + b & (\because a > 0) \end{aligned}$$

따라서 주어진 함수의 최댓값이 $3a + b$, 최솟값이 $a + b$ 이므로

$$3a + b = 5, a + b = 1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = -1$

$$\therefore a - b = 3$$

답 3

채점 기준	비율
① 주어진 함수의 함수값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
② 최댓값과 최솟값을 a, b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
③ $a - b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0759 $y = -|3\sin x - a| + 4$ 에서 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이고 $a > 0$ 이므로 주어진 함수는 $\sin x = -1$ 일 때 최솟값 -1을 갖는다.

즉 $-|-3 - a| + 4 = -1$ 이므로

$$\begin{aligned} -(3 + a) + 4 &= -1, & -3 - a &= -5 \\ \therefore a &= 2 \\ \therefore y &= -|3\sin x - 2| + 4 \end{aligned}$$

따라서 주어진 함수는 $\sin x = \frac{2}{3}$ 일 때 최댓값 4를 가지므로

$$\begin{aligned} b &= 4 \\ \therefore a + b &= 6 \end{aligned}$$

답 6

0760 $y = \frac{\cos x}{\cos x - 3}$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{t}{t-3} = \frac{t-3+3}{t-3} = \frac{3}{t-3} + 1$$

오른쪽 그림에서

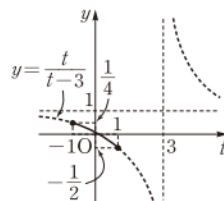
$t = -1$ 일 때 최댓값은 $\frac{1}{4}$,

$t = 1$ 일 때 최솟값은 $-\frac{1}{2}$

이므로 $M = \frac{1}{4}, m = -\frac{1}{2}$

$$\therefore M - m = \frac{3}{4}$$

답 ①



라벤 특강 함수 $y = \frac{k}{x-p} + q$ ($k \neq 0$)의 그래프

함수 $y = \frac{k}{x-p} + q$ ($k \neq 0$)의 그래프는 함수 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.

0761 $y = \frac{2\tan x + 1}{\tan x + 1}$ 에서 $\tan x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{2t+1}{t+1} = \frac{2(t+1)-1}{t+1} = -\frac{1}{t+1} + 2$$

오른쪽 그림에서

$t = 1$ 일 때 최댓값은 $\frac{3}{2}$,

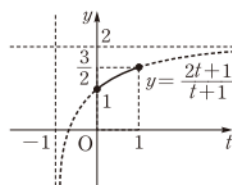
$t = 0$ 일 때 최솟값은 1

이므로 주어진 함수의 치역은

$$\left\{ y \mid 1 \leq y \leq \frac{3}{2} \right\}$$

따라서 $a = 1, b = \frac{3}{2}$ 이므로 $a + b = \frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$



채점 기준	비율
① t 에 대한 유리함수를 구할 수 있다.	30 %
② 주어진 함수의 치역을 구할 수 있다.	50 %
③ $a + b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0762 $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ 이므로 주어진 함수의 식은

$$y = \frac{-2\sin x - 1}{\sin x - 2}$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{-2t-1}{t-2} = \frac{-2(t-2)-5}{t-2} = -\frac{5}{t-2} - 2$$

오른쪽 그림에서

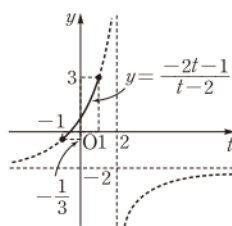
$t = 1$ 일 때 최댓값은 3,

$t = -1$ 일 때 최솟값은 $-\frac{1}{3}$

이므로 $M = 3, m = -\frac{1}{3}$

$$\therefore Mm = -1$$

답 -1



$$\begin{aligned} 0763 \quad y &= \sin^2 x - 2\cos x + 1 \\ &= (1 - \cos^2 x) - 2\cos x + 1 \\ &= -\cos^2 x - 2\cos x + 2 \end{aligned}$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -t^2 - 2t + 2 = -(t+1)^2 + 3$$

오른쪽 그림에서 $t = -1$ 일 때 최댓값은 3이므로

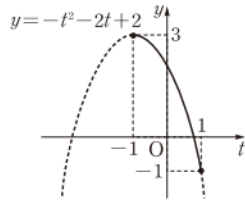
$$b = 3$$

또 $t = -1$, 즉 $\cos x = -1$ 에서

$$x = \pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$\therefore a = \pi$$

$$\therefore ab = 3\pi$$



답 ⑤

$$\begin{aligned} 0764 \quad y &= \cos^2 x + 4\sin x + a \\ &= (1 - \sin^2 x) + 4\sin x + a \\ &= -\sin^2 x + 4\sin x + a + 1 \end{aligned}$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -t^2 + 4t + a + 1$$

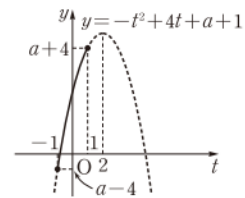
$$= -(t-2)^2 + a + 5$$

오른쪽 그림에서 $t = -1$ 일 때 최솟값은

$a - 4$ 이므로

$$a - 4 = -1$$

$$\therefore a = 3$$



답 3

0765 $\sin\left(\frac{5}{2}\pi + x\right) = \cos x$, $\cos(2\pi - x) = \cos x$ 이므로 주어진 함수의 식은

$$y = \sin^2\left(\frac{5}{2}\pi + x\right) + \cos(2\pi - x) + 1$$

$$= \cos^2 x + \cos x + 1$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

오른쪽 그림에서

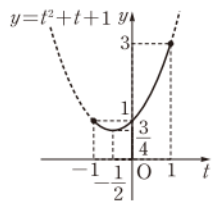
$t = 1$ 일 때 최댓값은 3,

$t = -\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 $\frac{3}{4}$

이므로 $M = 3$, $m = \frac{3}{4}$

$$\therefore Mm = \frac{9}{4}$$

답 ⑤



0766 이차방정식 $2x^2 - 4x\sin\theta - \cos^2\theta = 0$ 의 두 근이 α , β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{4\sin\theta}{2} = 2\sin\theta, \quad \alpha\beta = -\frac{\cos^2\theta}{2}$$

→ ①

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= (2\sin\theta)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{\cos^2\theta}{2}\right)$$

$$= 4\sin^2\theta + \cos^2\theta$$

$$= 4\sin^2\theta + (1 - \sin^2\theta)$$

$$= 3\sin^2\theta + 1$$

$\alpha^2 + \beta^2 = y$ 라 하고 $\sin\theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = 3t^2 + 1$$

→ ②

따라서 y , 즉 $\alpha^2 + \beta^2$ 은 $t = 0$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

→ ③

답 1

채점 기준	비율
① 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	30 %
② t 에 대한 이차함수를 구할 수 있다.	50 %
③ $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

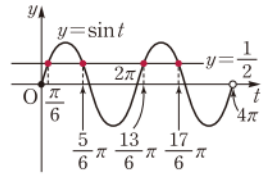
0767 $2x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $0 \leq t < 4\pi$ 이고 주어진 방정식은 $\sin t = \frac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq t < 4\pi$ 에서

함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 t 좌표가

$$\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi$$



이므로

$$x = \frac{\pi}{12} \text{ 또는 } x = \frac{5}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{13}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{17}{12}\pi$$

따라서 방정식 $\sin 2x = \frac{1}{2}$ 의 근이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

0768 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\sin x$ 이므로 주어진 방정식은

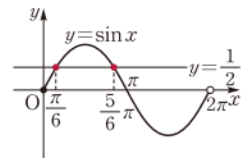
$$3\sin x - \sin x = 1 \quad \therefore \sin x = \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함

수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의

교점의 x 좌표가 $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$



따라서 모든 실근의 합은 $\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \pi$

답 π

0769 $\tan \frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$ 에서 $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{3}$

$\frac{x}{2} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 4\pi$ 에서 $0 \leq t < 2\pi$ 이고 주어진 방정식은

$$\tan t = \sqrt{3}$$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq t < 2\pi$ 에서 함수

$y = \tan t$ 의 그래프와 직선 $y = \sqrt{3}$ 의 교

점의 t 좌표가 $\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$ 이므로

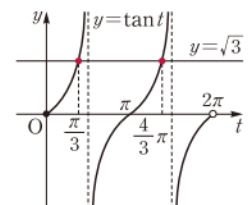
$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{8}{3}\pi$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{2}{3}\pi + \frac{8}{3}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos \frac{10}{3}\pi$$

$$= \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$



답 ②

0770 $\sin x = -\sqrt{3}\cos x$ 에서 $\cos x = 0$ 인 경우 $\sin x \neq 0$ 이므로

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x \neq 0$$

$$\therefore \cos x \neq 0$$

$\sin x = -\sqrt{3}\cos x$ 에서 양변을 $\cos x$ 로 나누면

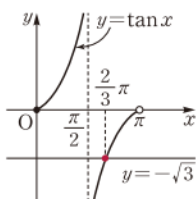
$$\frac{\sin x}{\cos x} = -\sqrt{3} \quad \therefore \tan x = -\sqrt{3}$$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = -\sqrt{3}$ 의 교점

의 x 좌표가 $\frac{2}{3}\pi$ 이므로

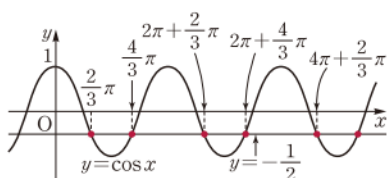
$$x = \frac{2}{3}\pi$$

$$\boxed{\text{답}} \quad x = \frac{2}{3}\pi$$



0771 방정식 $\cos x = -\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 x 는 함수 $y = \cos x$ 의

그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



즉 $\cos x = -\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 양수 x 를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi + \frac{2}{3}\pi, 2\pi + \frac{4}{3}\pi, 4\pi + \frac{2}{3}\pi, \dots$$

이므로 5번째 수는

$$4\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{14}{3}\pi$$

$$\boxed{\text{답}} \quad \frac{14}{3}\pi$$

0772 $6\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$ 에서

$$6(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0 \quad \therefore 6\sin^2 x - \sin x - 5 = 0$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서 $0 \leq t \leq 1$ 이고

$$6t^2 - t - 5 = 0, \quad (6t+5)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because 0 \leq t \leq 1)$$

따라서 $\sin x = 1$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x < \pi)$$

$$\boxed{\text{답}} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

0773 $2\cos^2 x - \sin(\pi - x) - 1 = 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \quad (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = -1 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

→ ①

$0 \leq x < 2\pi$ 이므로

$$\sin x = -1 \text{에서} \quad x = \frac{3}{2}\pi$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{에서} \quad x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

→ ②

따라서 $M = \frac{3}{2}\pi, m = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$M + m = \frac{5}{3}\pi$$

→ ③

$$\boxed{\text{답}} \quad \frac{5}{3}\pi$$

채점 기준	비율
① 방정식을 만족시키는 $\sin x$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② 방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
③ $M+m$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0774 $\tan x + \frac{1}{\tan x} = 2$ 에서 $\tan x \neq 0$ 이므로 양변에 $\tan x$ 를 곱

하면

$$\tan^2 x + 1 = 2\tan x, \quad \tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0$$

$$(\tan x - 1)^2 = 0 \quad \therefore \tan x = 1$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi \quad (\because 0 \leq x < 2\pi)$$

따라서 모든 실근의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

→ ⑤

0775 방정식 $\cos^2 x + \sin x - a = 0$, 즉 $\cos^2 x + \sin x = a$ 가 실근을 가지려면 함수 $y = \cos^2 x + \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점이 존재해야 한다.

$y = \cos^2 x + \sin x$ 에서

$$y = (1 - \sin^2 x) + \sin x$$

$$= -\sin^2 x + \sin x + 1$$

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -t^2 + t + 1$$

$$= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

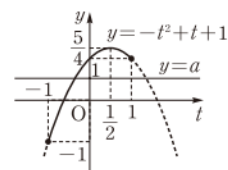
따라서 오른쪽 그림에서 함수

$$y = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

$y = a$ 가 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$-1 \leq a \leq \frac{5}{4}$$

→ ③



0776 방정식 $2\sin^2(\pi + x) + 2\cos x + k = 0$, 즉

$-2\sin^2(\pi + x) - 2\cos x = k$ 가 실근을 가지려면 함수

$y = -2\sin^2(\pi + x) - 2\cos x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 존재해야 한다.

$y = -2\sin^2(\pi + x) - 2\cos x$ 에서

$$y = -2\sin^2 x - 2\cos x$$

$$= -2(1 - \cos^2 x) - 2\cos x$$

$$= 2\cos^2 x - 2\cos x - 2$$

이때 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = 2t^2 - 2t - 2 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}$$

→ ①

오른쪽 그림에서 함수

$$y = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}$$

가 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$$-\frac{5}{2} \leq k \leq 2$$

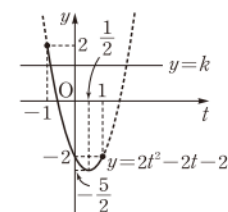
→ ②

따라서 $M = 2, m = -\frac{5}{2}$ 이므로

$$Mm = -5$$

→ ③

$$\boxed{\text{답}} \quad -5$$



채점 기준	비율
① t 에 대한 이차함수를 구할 수 있다.	50 %
② k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
③ Mm 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0777 $x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11\pi}{6}$ 이고

주어진 부등식은 $\sin t \geq \frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $\sin t \geq \frac{1}{2}$ 의

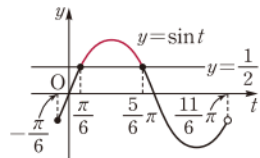
해는 $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$ 이므로

$$\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$$

따라서 $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \pi$ 이므로

$$a + b = \frac{4\pi}{3}$$



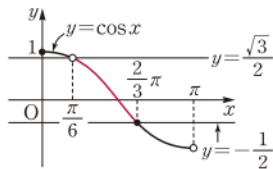
답 ④ $\frac{4\pi}{3}$

0778 오른쪽 그림에서 부등식

$-\frac{1}{2} \leq \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{2\pi}{3}$$

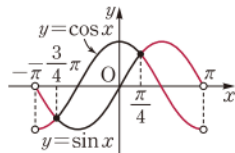
답 ①



0779 부등식 $\sin x \geq \cos x$ 의 해는 $y = \sin x$ 의 그래프가 $y = \cos x$ 의 그래프와 만나는 부분 또는 $y = \sin x$ 의 그래프가 $y = \cos x$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서 부등식 $\sin x \geq \cos x$ 의 해는

$$-\pi < x \leq -\frac{3\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{\pi}{4} \leq x < \pi$$

따라서 주어진 부등식의 해가 될 수 없는 것은 ②이다.



답 ②

0780 $|3 \tan x| \leq \sqrt{3}$ 에서 $-\sqrt{3} \leq 3 \tan x \leq \sqrt{3}$

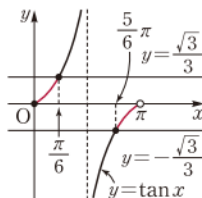
$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

오른쪽 그림에서 부등식

$-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 해는

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5\pi}{6} \leq x < \pi$$

답 ④



0781 $2 \cos^2 x < 3 \sin x$ 에서 $2 \cos^2 x - 3 \sin x < 0$

$$2(1 - \sin^2 x) - 3 \sin x < 0$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 > 0$$

$$(2 \sin x - 1)(\sin x + 2) > 0$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\sin x + 2 > 0$ 이므로

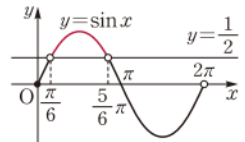
$$2 \sin x - 1 > 0 \quad \therefore \sin x > \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 부등식 $\sin x > \frac{1}{2}$ 의

해는

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

답 ②



0782 $2 \cos^2 x - \sin x - 1 \geq 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 \geq 0$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 \leq 0$$

$$(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) \leq 0$$

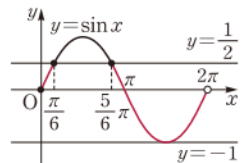
$$\therefore -1 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 부등식

$-1 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$ 의 해는

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5\pi}{6} \leq x < 2\pi$$

$$\text{답 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5\pi}{6} \leq x < 2\pi$$



0783 $2 \sin^2 x - 5 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) > 4$ 에서

$$2(1 - \cos^2 x) - 5 \cos x - 4 > 0$$

$$2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 < 0$$

$$(2 \cos x + 1)(\cos x + 2) < 0$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\cos x + 2 > 0$ 이므로

$$2 \cos x + 1 < 0$$

$$\therefore \cos x < -\frac{1}{2}$$

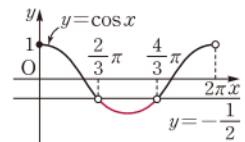
오른쪽 그림에서 부등식 $\cos x < -\frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$$

따라서 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{4\pi}{3}$ 이므로

$$\beta - \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

답 ③



0784 이차방정식 $x^2 + 2\sqrt{2}x \sin \theta + 3 \cos \theta = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{2} \sin \theta)^2 - 3 \cos \theta \geq 0$$

$$2 \sin^2 \theta - 3 \cos \theta \geq 0$$

$$2(1 - \cos^2 \theta) - 3 \cos \theta \geq 0$$

$$2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2 \leq 0$$

$$(2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 2) \leq 0$$

$0 < \theta < 2\pi$ 에서 $\cos \theta + 2 > 0$ 이므로

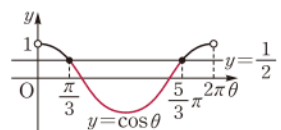
$$2 \cos \theta - 1 \leq 0$$

$$\therefore \cos \theta \leq \frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 θ

의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}$$



$$\text{답 } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}$$

0785 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 + 4x \sin \theta + 4 \sin \theta = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta < 0$$

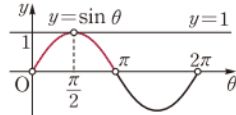
$$4 \sin \theta (\sin \theta - 1) < 0$$

$$\therefore 0 < \sin \theta < 1$$

오른쪽 그림에서 θ 의 값의 범위는

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

따라서 조건을 만족시키지 않는 θ 의 값은 ②이다. 답 ②



$$\begin{aligned} \text{0786 } y &= x^2 - 2x \sin \theta - \cos^2 \theta \\ &= (x - \sin \theta)^2 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= (x - \sin \theta)^2 - 1 \end{aligned}$$

이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(\sin \theta, -1)$

이 꼭짓점이 직선 $y = \sqrt{2}x$ 위에 있으므로

$$-1 = \sqrt{2} \sin \theta \quad \therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{이므로 } \theta = \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{7}{4}\pi$$

따라서 θ 의 최댓값은 $\frac{7}{4}\pi$ 이다. 답 ③

→ ①

→ ②

→ ③

답 $\frac{7}{4}\pi$

채점 기준	비율
① 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
② $\sin \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ θ 의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0787 **전략** 두 함수 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 는 주기가 2π 인 주기함수이다.

풀이 d . $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동하면 $y = \sin x$ 의 그래프와 일치하므로

$$f(x) = g\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른풀이 d . $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ 이므로

$$g\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$$

0788 **전략** 세 함수 $y = a \sin bx$, $y = a \cos bx$, $y = a \tan bx$ 의 주기는 각각 $\frac{2\pi}{|b|}$, $\frac{2\pi}{|b|}$, $\frac{\pi}{|b|}$ 이다.

풀이 $y = \frac{1}{2} \sin 3x$, $y = 2 \cos \frac{1}{2}x$, $y = \tan 2x$ 의 주기는 각각

$$a = \frac{2}{3}\pi, b = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi, c = \frac{\pi}{2}$$

이므로 $c < a < b$ 답 ⑤

0789 **전략** $y = a \sin bx$ 에서 a 는 최댓값, 최솟값을 결정하고, b 는 주기를 결정함을 이용한다.

풀이 주어진 그래프에서 최댓값은 5, 최솟값은 -5 이고 $a > 0$ 이므로 $a = 5$

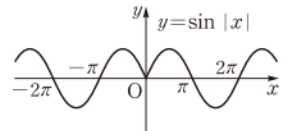
주어진 그래프에서 주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a - b = 3$$
 답 3

0790 **전략** $y = f(|x|)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프에서 $x \geq 0$ 인 부분만 그린 후 y 축에 대하여 대칭이동한다.

풀이 ④ $y = \sin |x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기함수가 아니다. 답 ④



0791 **전략** 보기의 관계식을 주어진 등식에 대입하여 성립하는지 확인한다.

풀이 ① $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ 에서 $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ 이므로

$$\tan \beta = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha} \neq \tan \alpha$$

② $\beta - \alpha = \pi$ 에서 $\beta = \pi + \alpha$ 이므로

$$\tan \beta = \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

③ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 에서 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 이므로

$$\tan \beta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha} \neq \tan \alpha$$

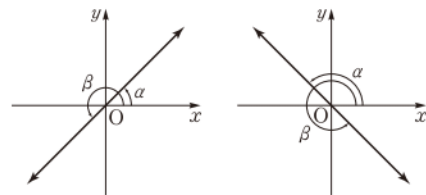
④ $\alpha + \beta = \pi$ 에서 $\beta = \pi - \alpha$ 이므로

$$\tan \beta = \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \neq \tan \alpha$$

⑤ $\alpha + \beta = 2\pi$ 에서 $\beta = 2\pi - \alpha$ 이므로

$$\tan \beta = \tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha \neq \tan \alpha$$
 답 ②

다른풀이 $\tan \alpha = \tan \beta$ 이고 $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ 이므로 두 각 α , β 를 좌표평면 위에 나타내면 다음의 두 가지 경우가 있다.



두 경우 모두 두 각 α , β 를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로 $\beta = \alpha + \pi \quad \therefore \beta - \alpha = \pi$

0792 **전략** $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 임을 이용하여 $\sin^2 \theta$ 를 $\cos \theta$ 에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$$\cos \theta \geq \frac{1}{2} \text{에서 } \cos^2 \theta \geq \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$-\cos^2 \theta \leq -\frac{1}{4}, \quad 1 - \cos^2 \theta \leq \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin^2 \theta \leq \frac{3}{4}$$

따라서 $\sin^2 \theta$ 의 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다. 답 ②

0793 **전략** 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 방정식의 근을 구한다.

풀이 방정식 $|\cos x| = \frac{1}{2}$ 의 근은 함수 $y = |\cos x|$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표이다. → ①

오른쪽 그림에서 구하는 근은

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{2\pi}{3}\pi$$

$$\text{또는 } x = \frac{4}{3}\pi \text{ 또는}$$

$$x = \frac{5}{3}\pi$$

→ ②

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi = 4\pi$ → ③

답 4π

채점 기준	비율
① 주어진 방정식의 근의 의미를 이해할 수 있다.	20 %
② 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	60 %
③ 모든 실근의 합을 구할 수 있다.	20 %

다른풀이 $|\cos x| = \frac{1}{2}$ 에서 $\cos x = \frac{1}{2}$ 또는 $\cos x = -\frac{1}{2}$

$0 \leq x < 2\pi$ 이므로

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{에서 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{에서 } x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi = 4\pi$

라센 특강 $y = |f(x)|$ 의 그래프

$y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.

(i) $y = f(x)$ 의 그래프를 그린다.

(ii) $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 둔다.

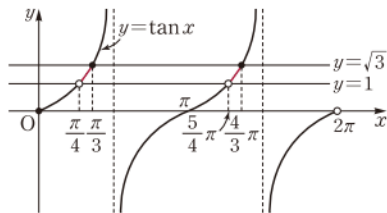
(iii) $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한다.

0794 **전략** 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 부등식의 해를 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 부등식 $1 < \tan x \leq \sqrt{3}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ 또는}$$

$$\frac{5}{4}\pi < x \leq \frac{4}{3}\pi$$



$$\text{답 } \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi < x \leq \frac{4}{3}\pi$$

0795 **전략** 삼각함수의 그래프를 그린 후 대소를 비교한다.

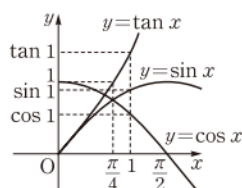
풀이 $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$ 이므로 오른쪽 그림

에서

$$\cos 1 < \sin 1 < \tan 1$$

$$\therefore B < A < C$$

답 ③



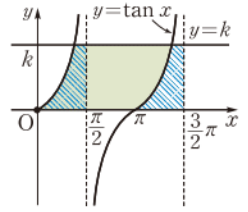
0796 **전략** 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 넓이가 같은 부분을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 $y = \tan x$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $y = k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$k\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2}\right) = k\pi$$

즉 $k\pi = 5\pi$ 이므로 $k = 5$

답 5



0797 **전략** $y = a \cos(bx + c) + d$ 에서 a , d 는 최댓값, 최솟값을 결정하고, b 는 주기를 결정함을 이용한다.

풀이 ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) = f(x)$$

$$\therefore f(x + 2\pi) = f\left(x + \frac{4}{3}\pi\right) = f\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) = f(x)$$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $4 - 1 = 3$, 최솟값은 $-4 - 1 = -5$ 이다.

ㄷ. $f(x) = 4 \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 4 \cos 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$ 이므로 함수

$y = f(x)$ 의 그래프는 $y = 4 \cos 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$\frac{\pi}{6}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

$$\begin{aligned} \text{참고 } f(x) &= 4 \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - 1 \\ &= 4 \sin 3x - 1 \end{aligned}$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = 4 \sin 3x - 1$ 의 그래프와 일치한다.

0798 **전략** $f(x + p) = f(x)$ 를 만족시키는 양수 p 의 최솟값은 함수 $f(x)$ 의 주기임을 이용한다.

풀이 조건 ㉞에서 함수 $f(x)$ 의 주기가 3π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 3\pi \quad \therefore b = \frac{2}{3}$$

→ ①

조건 ㉝에서 최댓값이 4, 최솟값이 -2 이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 4, -a + c = -2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 3, c = 1$ → ②

$$\therefore \frac{3a - c}{b} = \frac{3}{2} \cdot (3 \cdot 3 - 1) = 12$$

→ ③

답 12

채점 기준	비율
① b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② a, c 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $\frac{3a - c}{b}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0799 **전략** 함수 $y = |\sin bx|$ 의 주기는 함수 $y = \sin bx$ 의 주기의 $\frac{1}{2}$ 임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x) = a|\sin bx| + c$ 의 주기는 $y = |\sin bx|$ 의 주기와 같으므로

$$\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = 2 (\because b > 0)$$

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 1이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 1 \quad \dots\dots ㉑$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2} \text{이므로} \quad a \left| \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) \right| + c = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}a + c = -\frac{1}{2} \quad \therefore a + 2c = -1 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면 $a = 3, c = -2$

따라서 $f(x) = 3|\sin 2x| - 2$ 이므로 구하는 최솟값은 -2 이다.

답 -2

참고 $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ 이므로 $0 \leq |\sin 2x| \leq 1$

$$\therefore -2 \leq 3|\sin 2x| - 2 \leq 1$$

0800 전략 주어진 삼각함수의 주기를 구한 후 그래프의 대칭성을 이용하여 $\alpha + \beta$ 의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x) = \sin kx$ 에서 $k > 0$ 이므로 주기는 $\frac{2\pi}{k}$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{k}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(\alpha + \beta + \gamma) &= f\left(\frac{\pi}{k} + \gamma\right) \\ &= \sin k\left(\frac{\pi}{k} + \gamma\right) \\ &= \sin(\pi + k\gamma) \\ &= -\sin k\gamma \\ &= -f(\gamma) = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 ③

0801 전략 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(x-p) = f(x+p)$ 이면 $f(x) = f(x+2p)$ 임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x-2) = f(x+2)$ 이므로 x 대신 $x+2$ 를 대입하면 $f(x) = f(x+4)$

$$\therefore f\left(\frac{61}{4}\right) = f\left(\frac{45}{4}\right) = f\left(\frac{29}{4}\right) = f\left(\frac{13}{4}\right) = f\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) = \sin \pi x$ 이므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{61}{4}\right) &= f\left(-\frac{3}{4}\right) = \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \\ &= -\sin \frac{3}{4}\pi = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

0802 전략 각이 $\frac{\pi}{2} \times n \pm \theta$ (n 은 정수) 꼴일 때, 각 삼각함수는 n 이 짝수이면 그대로, n 이 홀수이면 $\sin \rightarrow \cos$, $\cos \rightarrow \sin$ 으로 바뀔을 이용한다.

$$\text{풀이} \quad \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{4}, \quad \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6},$$

$$\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{4}, \quad \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{4} - \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

답 2

0803 전략 $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ 임을 이용하여 $\cos \alpha$ 와 같은 것을 찾는다.

$$\text{풀이} \quad \beta - \alpha = \frac{\pi}{2} \text{이므로} \quad \alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \alpha &= \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \\ &= \sin \beta \end{aligned}$$

답 ②

0804 전략 $|\cos x| = t$ 로 놓고 $y = \frac{t-3}{t+2}$ 의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $y = \frac{|\cos x| - 3}{|\cos x| + 2}$ 에서 $|\cos x| = t$ 로 놓으면 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 에서 $0 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{t-3}{t+2} = \frac{(t+2)-5}{t+2} = -\frac{5}{t+2} + 1$$

오른쪽 그림에서

$t = 1$ 일 때 최댓값은 $-\frac{2}{3}$,

$t = 0$ 일 때 최솟값은 $-\frac{3}{2}$

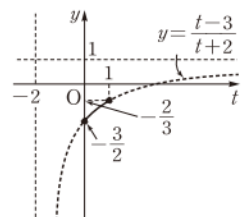
이므로 주어진 함수의 치역은

$$\left\{y \mid -\frac{3}{2} \leq y \leq -\frac{2}{3}\right\}$$

따라서 $a = -\frac{3}{2}, b = -\frac{2}{3}$ 이므로

$$ab = 1$$

답 ④



0805 전략 주어진 방정식을 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입한다.

$$\text{풀이} \quad \sin \theta + 1 = 2 \cos \theta \text{에서} \quad \sin \theta = 2 \cos \theta - 1$$

이것을 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면

$$(2 \cos \theta - 1)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$5 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta (5 \cos \theta - 4) = 0$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < \cos \theta < 1$ 이므로

$$5 \cos \theta - 4 = 0$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{4}{5}$$

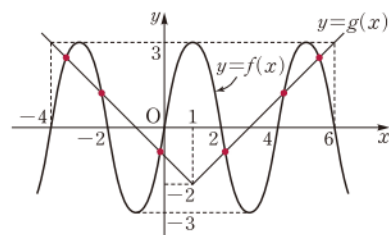
답 ⑤

0806 전략 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 실근은 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같음을 이용한다.

풀이 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 실근은 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

이때 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로

구하는 실근의 개수는 6이다.



답 ③

0807 [전략] 주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구한 후 $y=2x$ 에 대입한다.

[풀이] $y = x^2 - 2x \cos \theta - \sin^2 \theta$
 $= (x - \cos \theta)^2 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
 $= (x - \cos \theta)^2 - 1$
 이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(\cos \theta, -1)$
 이 꼭짓점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로
 $-1 = 2 \cos \theta, \quad \cos \theta = -\frac{1}{2}$
 $\therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta = \frac{4}{3}\pi$ ($\because 0 \leq \theta < 2\pi$)

따라서 구하는 합은
 $\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 2\pi$

답 ③

0808 [전략] 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $a > 0, b^2 - 4ac < 0$ 이어야 함을 이용한다.

[풀이] 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 2x \sin \theta - \cos \theta + 1 > 0$ 이 성립하므로 이차방정식 $x^2 - 2x \sin \theta - \cos \theta + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

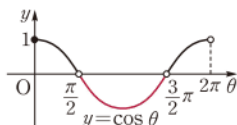
$$\frac{D}{4} = \sin^2 \theta + \cos \theta - 1 < 0$$

$$(1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta - 1 < 0, \quad \cos^2 \theta - \cos \theta > 0$$

$$\cos \theta (\cos \theta - 1) > 0 \quad \therefore \cos \theta < 0 \text{ 또는 } \cos \theta > 1$$

이때 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ 이므로 $\cos \theta < 0$
 따라서 오른쪽 그림에서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$$



답 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$

라벨

특장 이차부등식이 항상 성립할 조건

이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다. (단, $D = b^2 - 4ac$)

- (1) $ax^2 + bx + c > 0 \iff a > 0, D < 0$
 (2) $ax^2 + bx + c < 0 \iff a < 0, D < 0$

0809 [전략] 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(x-p) = f(x+p)$ 이면 $f(x) = f(x+2p)$ 임을 이용한다.

[풀이] 모든 실수 x 에 대하여 $f(x-p) = f(x+p)$ 를 만족시키는 최소의 양수 p 가 2이므로

$$f(x-2) = f(x+2) \quad \therefore f(x) = f(x+4)$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 주기는 4이다.

주어진 각 함수의 주기를 구하면

① $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ ② $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$ ③ $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

④ $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ ⑤ $\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$

답 ①

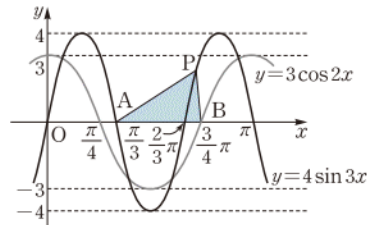
0810 [전략] \overline{AB} 를 $\triangle ABP$ 의 밑변으로 생각할 때 높이가 최대가 되도록 하는 점 P 의 위치를 잡아본다.

[풀이] $y = 4 \sin 3x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{3}$

$y = 3 \cos 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$

이때 $0 < a < \frac{\pi}{2} < b < \pi$ 이므로 $a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{3}{4}\pi$

$\therefore A\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), B\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$



위의 그림에서 $\overline{AB} = \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{12}\pi$ 이고 함수 $y = 4 \sin 3x$ 의 최대값은 4이므로

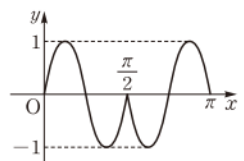
$$\triangle ABP \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}\pi \cdot 4 = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 $\triangle ABP$ 의 넓이의 최댓값은 $\frac{5}{6}\pi$ 이다.

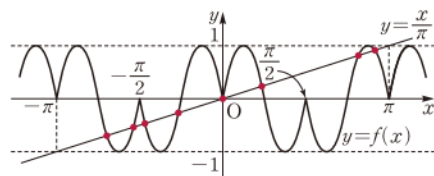
답 ④

0811 [전략] 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그린다.

[풀이] $y = \sin 4x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 이고,
 $y = -\sin 4x$ 의 그래프는 $y = \sin 4x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 조건 (나), (다)에 의하여 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



또 조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 의 주기는 π 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{\pi}$ 는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{\pi}$ 가 만나는 점의 개수는 8이다.

답 ⑤

0812 [전략] $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 이면 $\sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ 임을 이용하여 주어진 식을 정리한다.

[풀이] $\frac{1}{\sin^2 89^\circ} = \frac{1}{\sin^2(90^\circ - 1^\circ)} = \frac{1}{\cos^2 1^\circ}$

$$\frac{1}{\sin^2 88^\circ} = \frac{1}{\sin^2(90^\circ - 2^\circ)} = \frac{1}{\cos^2 2^\circ}$$

$$\frac{1}{\sin^2 87^\circ} = \frac{1}{\sin^2(90^\circ - 3^\circ)} = \frac{1}{\cos^2 3^\circ}$$

\vdots

$$\frac{1}{\sin^2 1^\circ} = \frac{1}{\sin^2(90^\circ - 89^\circ)} = \frac{1}{\cos^2 89^\circ}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore A-B &= \frac{1}{\cos^2 1^\circ} + \frac{1}{\cos^2 2^\circ} + \frac{1}{\cos^2 3^\circ} + \cdots + \frac{1}{\cos^2 89^\circ} \\
 &\quad - (\tan^2 1^\circ + \tan^2 2^\circ + \tan^2 3^\circ + \cdots + \tan^2 89^\circ) \\
 &= \frac{1}{\cos^2 1^\circ} + \frac{1}{\cos^2 2^\circ} + \frac{1}{\cos^2 3^\circ} + \cdots + \frac{1}{\cos^2 89^\circ} \\
 &\quad - \left(\frac{\sin^2 1^\circ}{\cos^2 1^\circ} + \frac{\sin^2 2^\circ}{\cos^2 2^\circ} + \frac{\sin^2 3^\circ}{\cos^2 3^\circ} + \cdots + \frac{\sin^2 89^\circ}{\cos^2 89^\circ} \right) \\
 &= \frac{1-\sin^2 1^\circ}{\cos^2 1^\circ} + \frac{1-\sin^2 2^\circ}{\cos^2 2^\circ} + \frac{1-\sin^2 3^\circ}{\cos^2 3^\circ} \\
 &\quad + \cdots + \frac{1-\sin^2 89^\circ}{\cos^2 89^\circ} \\
 &= \frac{\cos^2 1^\circ}{\cos^2 1^\circ} + \frac{\cos^2 2^\circ}{\cos^2 2^\circ} + \frac{\cos^2 3^\circ}{\cos^2 3^\circ} + \cdots + \frac{\cos^2 89^\circ}{\cos^2 89^\circ} \\
 &= \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{89\text{개}} \\
 &= 89
 \end{aligned}$$

답 89

0813 **전략** 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π 임을 이용한다.

풀이 $A+B+C=\pi$ 이므로

$$\therefore \sin A = \sin \{\pi - (B+C)\} = \sin (B+C)$$

$$\therefore \cos (A+B+C) = \cos \pi = -1$$

$$\therefore \sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{\pi-C}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \tan \frac{B}{2} \tan \frac{A+C}{2} &= \tan \frac{B}{2} \tan \frac{\pi-B}{2} \\
 &= \tan \frac{B}{2} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} \right) \\
 &= \tan \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{\tan \frac{B}{2}} = 1
 \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0814 **전략** 주어진 방정식의 좌변을 공통부분이 있는 항끼리 묶은 후 인수분해한다.

풀이 $4\cos^3 x + 2\sqrt{3}\cos^2 x - 6\sin x \cos x - 3\sqrt{3}\sin x = 0$ 에서

$$2\cos^2 x(2\cos x + \sqrt{3}) - 3\sin x(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$$

$$(2\cos x + \sqrt{3})(2\cos^2 x - 3\sin x) = 0$$

$$\therefore \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } 2\cos^2 x - 3\sin x = 0$$

$$(i) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 일 때,}$$

$$x = -\frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \quad (\because -\pi < x < \pi)$$

$$(ii) 2\cos^2 x - 3\sin x = 0 \text{ 일 때,}$$

$$2(1-\sin^2 x) - 3\sin x = 0, \quad 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$(\sin x + 2)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} \quad (\because \sin x + 2 > 0)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \quad (\because -\pi < x < \pi)$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근은 $-\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ 의 3개이다.

답 3

0815 **전략** 이차방정식의 판별식을 D , 두 근을 α, β 라 할 때, 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 $D > 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ 이어야 함을 이용한다.

풀이 주어진 이차방정식의 판별식을 D , 두 근을 α, β 라 하면 이 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지므로

$$(i) \frac{D}{4} > 0 \text{ 에서}$$

$$\frac{D}{4} = 4\cos^2 \theta - 2\{(\sqrt{3}-2)\sin \theta - \sqrt{3}+2\} > 0$$

$$2\cos^2 \theta - \{(\sqrt{3}-2)\sin \theta - \sqrt{3}+2\} > 0$$

$$2(1-\sin^2 \theta) - (\sqrt{3}-2)\sin \theta + \sqrt{3}-2 > 0$$

$$2\sin^2 \theta + (\sqrt{3}-2)\sin \theta - \sqrt{3} < 0$$

$$(2\sin \theta + \sqrt{3})(\sin \theta - 1) < 0$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin \theta < 1$$

오른쪽 그림에서 부등식

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin \theta < 1 \text{ 의 해는}$$

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{또는 } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$$

→ ①

$$(ii) \alpha + \beta > 0 \text{ 에서}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{4\cos \theta}{2} > 0 \quad \therefore \cos \theta < 0$$

오른쪽 그림에서 부등식 $\cos \theta < 0$ 의

해는

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$$

→ ②

$$(iii) \alpha\beta > 0 \text{ 에서}$$

$$\alpha\beta = \frac{(\sqrt{3}-2)\sin \theta - \sqrt{3}+2}{2} > 0$$

$$(\sqrt{3}-2)\sin \theta - \sqrt{3}+2 > 0$$

$$(2-\sqrt{3})\sin \theta < 2-\sqrt{3} \quad \therefore \sin \theta < 1$$

오른쪽 그림에서 부등식 $\sin \theta < 1$ 의

해는

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$$

→ ③

$$\text{이상에서 구하는 } \theta \text{ 의 값의 범위는 } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{4}{3}\pi$$

→ ④

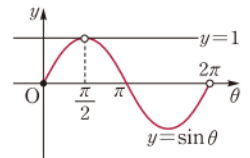
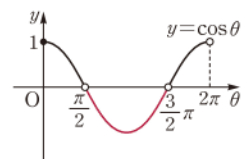
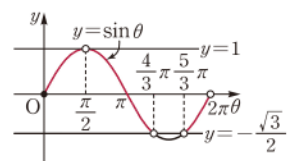
$$\text{따라서 } A = \frac{\pi}{2}, B = \frac{4}{3}\pi \text{ 이므로}$$

$$\sin A + \cos B = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{4}{3}\pi$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

→ ⑤

답 1/2



채점 기준	비율
① 판별식을 이용하여 θ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
② 두 근의 합이 양수임을 이용하여 θ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
③ 두 근의 곱이 양수임을 이용하여 θ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
④ θ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
⑤ $\sin A + \cos B$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

07

삼각함수의 활용

II. 삼각함수

0816 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}, \quad 2 \sin 60^\circ = c \sin 45^\circ$$

$$\therefore c = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \textcircled{가} 2 \quad \textcircled{나} 60^\circ \quad \textcircled{다} \sqrt{6} \quad \textcircled{답} \textcircled{가} 2 \quad \textcircled{나} 60^\circ \quad \textcircled{다} \sqrt{6}$$

0817 사인법칙에 의하여 $\frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}$

$$3 \sin 45^\circ = c \sin 30^\circ$$

$$\therefore c = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 3\sqrt{2}$$

$$\textcircled{답} 3\sqrt{2}$$

0818 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$

$$a \sin 135^\circ = \sqrt{2} \sin 30^\circ$$

$$\therefore a = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\textcircled{답} 1$$

0819 사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$

$$\sqrt{2} \sin 60^\circ = \sqrt{3} \sin A$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\textcircled{답} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

0820 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{2}{\sin A} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}, \quad 2 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2} \sin A$$

$$\therefore \sin A = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 30^\circ$ 또는 $A = 150^\circ$

그런데 $A + C < 180^\circ$ 이므로 $A = 30^\circ$

$$\therefore \textcircled{가} 2 \quad \textcircled{나} 45^\circ \quad \textcircled{다} \frac{1}{2} \quad \textcircled{라} 30^\circ \quad \textcircled{마} 150^\circ$$

$\textcircled{답}$ 풀이 참조

0821 사인법칙에 의하여 $\frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin C}$

$$4 \sin C = 4\sqrt{2} \sin 30^\circ$$

$$\therefore \sin C = 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 45^\circ$ 또는 $C = 135^\circ$

$\textcircled{답} 45^\circ$ 또는 135°

0822 사인법칙에 의하여 $\frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin B}$

$$3 \sin B = \sqrt{3} \sin 60^\circ$$

$$\therefore \sin B = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 30^\circ$ 또는 $B = 150^\circ$

그런데 $A + B < 180^\circ$ 이므로 $B = 30^\circ$

$\textcircled{답} 30^\circ$

0823 사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin 45^\circ} = 2R$

$$\therefore R = \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\textcircled{답} 3\sqrt{2}$$

0824 $A + B + C = 180^\circ$ 이므로

$$C = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{5}{\sin 30^\circ} = 2R$

$$\therefore R = \frac{5}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$\textcircled{답} 5$$

0825 코사인법칙에 의하여 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 이므로

$$c^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13$$

$c > 0$ 이므로 $c = \sqrt{13}$

$$\therefore \textcircled{가} 4 \quad \textcircled{나} 60^\circ \quad \textcircled{다} 13 \quad \textcircled{라} \sqrt{13}$$

$\textcircled{답}$ 풀이 참조

0826 코사인법칙에 의하여

$$b^2 = (4\sqrt{2})^2 + 5^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ$$

$$= 32 + 25 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 17$$

$b > 0$ 이므로 $b = \sqrt{17}$

$$\textcircled{답} \sqrt{17}$$

0827 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 120^\circ$$

$$= 3 + 12 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 21$$

$a > 0$ 이므로 $a = \sqrt{21}$

$$\textcircled{답} \sqrt{21}$$

0828 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = 2^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ$$

$$= 4 + 27 - 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 13$$

$a > 0$ 이므로 $a = \sqrt{13}$

$$\textcircled{답} \sqrt{13}$$

0829 코사인법칙에 의하여

$$b^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \cos 150^\circ$$

$$= 3 + 9 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 21$$

$b > 0$ 이므로 $b = \sqrt{21}$

$$\textcircled{답} \sqrt{21}$$

0830 코사인법칙 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ 를 변형하면

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{이므로}$$

$$\cos B = \frac{1^2 + (\sqrt{3})^2 - 1^2}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore B = 30^\circ$$

$$\therefore \textcircled{가} \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad \textcircled{나} 1 \quad \textcircled{다} \sqrt{3} \quad \textcircled{라} \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \textcircled{마} 30^\circ \quad \textcircled{답} \textcircled{가} \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

0831 코사인법칙에 의하여

$$(1) \cos A = \frac{4^2 + (2\sqrt{7})^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

$$(2) \cos B = \frac{(2\sqrt{7})^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot 6} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$(3) \cos C = \frac{6^2 + 4^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

답 (1) $\frac{\sqrt{7}}{14}$ (2) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ (3) $\frac{1}{2}$

0832 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore A = 45^\circ$ 답 45°

0833 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{4}$$

답 $\frac{15}{4}$

0834 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ$

$$= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

답 $14\sqrt{3}$

0835 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \sin 135^\circ$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$$

답 $7\sqrt{2}$

0836 $\triangle ABC = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot \frac{65}{8}} = 84$

답 84

0837 $\square ABCD = 3\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \sin 45^\circ = 3\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 18$

답 18

0838 $\square ABCD = 6 \cdot 10 \cdot \sin 150^\circ = 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 30$

답 30

0839 $\square ABCD = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ$

$$= \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 27$$

답 27

0840 $\square ABCD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1 = \frac{21}{2}$

답 $\frac{21}{2}$

0841 사인법칙에 의하여 $\frac{3}{\sin 45^\circ} = \frac{4}{\sin B}$

$$3 \sin B = 4 \sin 45^\circ \quad \therefore \sin B = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \cos^2 B = 1 - \sin^2 B = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

답 ①

0842 $A + B + C = 180^\circ$ 이므로

$$A = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$

$$a \sin 60^\circ = \sqrt{6} \sin 45^\circ \quad \therefore a = \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2$$

답 ④

0843 \widehat{BC} 에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$$\angle BAC = \angle BDC = 45^\circ$$

$\triangle ABC$ 에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 45^\circ}$

$$\overline{AB} \sin 45^\circ = 12 \sin 30^\circ$$

$$\therefore \overline{AB} = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

→ ①

→ ②

→ ③

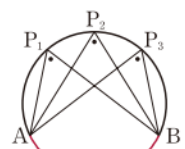
답 $6\sqrt{2}$

채점 기준	비율
① $\angle BAC$ 의 크기를 구할 수 있다.	20 %
② 사인법칙을 이용하여 식을 세울 수 있다.	40 %
③ \overline{AB} 의 길이를 구할 수 있다.	40 %

라벤 특강

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

$$\angle AP_1B = \angle AP_2B = \angle AP_3B$$



0844 $\angle ADB = \theta$ 라 하면 $\triangle ABD$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin \theta} = \frac{\overline{BD}}{\sin 45^\circ}, \quad 2 \sin 45^\circ = \overline{BD} \sin \theta$$

$$\therefore \overline{BD} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \theta} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\angle ADC = 180^\circ - \theta$ 이므로 $\triangle ADC$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{3}{\sin (180^\circ - \theta)} = \frac{\overline{DC}}{\sin 60^\circ}, \quad \frac{3}{\sin \theta} = \frac{\overline{DC}}{\sin 60^\circ}$$

$$3 \sin 60^\circ = \overline{DC} \sin \theta$$

$$\therefore \overline{DC} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sin \theta} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \sin \theta} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \theta} : \frac{3\sqrt{3}}{2 \sin \theta} = 2\sqrt{2} : 3\sqrt{3} = 4 : 3\sqrt{6}$$

$$\therefore k = 4$$

답 4

0845 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\therefore \sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{a+b+c}{2R}$$

$$= \frac{18}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

답 ④

0846 $\triangle ABC$ 는 $B=C$ 인 이등변삼각형이므로

$$B = \frac{1}{2}(180^\circ - A) = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{8}{\sin 30^\circ} = 2R \quad \therefore R = \frac{8}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 8 \quad \text{답 8}$$

0847 $A+B=180^\circ-C$ 이므로

$$\sin(A+B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$$

즉 $3\sin(A+B)\sin C = 1$ 에서

$$3\sin C \cdot \sin C = 1 \quad \therefore \sin^2 C = \frac{1}{3}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에

의하여 $\frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\therefore R = \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{15}}{2}$$

0848 $A+B+C=180^\circ$ 이고, $A:B:C=1:1:2$ 이므로

$$A=B=180^\circ \times \frac{1}{4} = 45^\circ, C=180^\circ \times \frac{2}{4} = 90^\circ$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a:b:c &= \sin A : \sin B : \sin C \\ &= \sin 45^\circ : \sin 45^\circ : \sin 90^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} : 1 = 1:1:\sqrt{2} \quad \text{답 ①} \end{aligned}$$

0849 사인법칙에 의하여

$$a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C = 3:4:5$$

이므로 $a=3k, b=4k, c=5k$ ($k>0$)로 놓으면

$$ab=3k \cdot 4k=12k^2, bc=4k \cdot 5k=20k^2, ca=5k \cdot 3k=15k^2$$

$$\therefore ab:bc:ca=12k^2:20k^2:15k^2$$

$$=12:20:15 \quad \text{답 } 12:20:15$$

0850 $A+B+C=180^\circ$ 이고, $A:B:C=1:2:3$ 이므로

$$A=180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ, B=180^\circ \times \frac{2}{6} = 60^\circ,$$

$$C=180^\circ \times \frac{3}{6} = 90^\circ \quad \dots ①$$

사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a:b:c &= \sin A : \sin B : \sin C \\ &= \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ \\ &= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 \\ &= 1:\sqrt{3}:2 \quad \dots ② \end{aligned}$$

따라서 $a=k, b=\sqrt{3}k, c=2k$ ($k>0$)로 놓으면

$$\frac{a^2+b^2}{ac} = \frac{k^2+(\sqrt{3}k)^2}{k \cdot 2k} = \frac{4k^2}{2k^2} = 2 \quad \dots ③$$

답 2

채점 기준	비율
① A, B, C 를 구할 수 있다.	30 %
② $a:b:c$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $\frac{a^2+b^2}{ac}$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0851 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$a \cdot \frac{a}{2R} = b \cdot \frac{b}{2R} + c \cdot \frac{c}{2R} \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

답 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

0852 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$b \cdot \frac{b}{2R} = c \cdot \frac{c}{2R} \quad \therefore b^2 = c^2$$

b, c 는 양수이므로 $b=c$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

답 ②

0853 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$(a-b) \cdot \frac{c}{2R} = a \cdot \frac{a}{2R} - b \cdot \frac{b}{2R}, \quad a^2 - b^2 - ac + bc = 0$$

$$(a+b)(a-b) - (a-b)c = 0, \quad (a-b)(a+b-c) = 0$$

$a+b \neq c$ 이므로 $a-b=0$, 즉 $a=b$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

답 ②

0854 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-\sin B)^2 - (\cos A + \cos C)(\cos A - \cos C) \\ &= \sin^2 B - \cos^2 A + \cos^2 C \\ &= \sin^2 B - (1 - \sin^2 A) + (1 - \sin^2 C) \\ &= \sin^2 B + \sin^2 A - \sin^2 C \end{aligned}$$

이므로

$$\sin^2 B + \sin^2 A - \sin^2 C = 0 \quad \dots \dots ①$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이므로 ①에서

$$\begin{aligned} \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{a}{2R}\right)^2 - \left(\frac{c}{2R}\right)^2 &= 0 \\ \therefore a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

답 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형

0855 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 25 + 16 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 21$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{21} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{21}}{\sin 60^\circ} = 2R \quad \therefore R = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{7}$$

0856 $\overline{AC} = x$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos 120^\circ$$

$$49 = 9 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0, \quad (x+8)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 5 \quad (\because x > 0)$$

따라서 \overline{AC} 의 길이는 5이다.

채점 기준	비율
① 코사인법칙을 이용하여 방정식을 세울 수 있다.	50 %
② \overline{AC} 의 길이를 구할 수 있다.	50 %

0857 $\triangle ABC$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}, \quad \overline{AC} \sin 60^\circ = \sqrt{6} \sin 45^\circ$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2$$

$\triangle ACD$ 는 $\overline{AC} = \overline{CD} = 2$ 인 이등변삼각형이고,

$$\angle ACD = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

이므로 $\triangle ACD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ$$

$$= 4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 12$$

$$\therefore \overline{AD} = 2\sqrt{3} \quad (\because \overline{AD} > 0)$$

0858 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = (2\sqrt{3})^2 + 5^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ$$

$$= 12 + 25 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{7} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

$$\therefore \cos A = \frac{(\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 5^2}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{6}{4\sqrt{21}} = -\frac{\sqrt{21}}{14}$$

0859 사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{2} : 2$$

따라서 $a = k$, $b = \sqrt{2}k$, $c = 2k$ ($k > 0$)로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{(2k)^2 + k^2 - (\sqrt{2}k)^2}{2 \cdot 2k \cdot k} = \frac{3k^2}{4k^2} = \frac{3}{4}$$

0860 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{x^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot x \cdot 6} = \frac{x^2 + 20}{12x} = \frac{x}{12} + \frac{5}{3x}$$

$x > 0$ 이므로 $\frac{x}{12} > 0$, $\frac{5}{3x} > 0$ 이고 산술평균과 기하평균의 관계에

$$\text{의하여} \quad \frac{x}{12} + \frac{5}{3x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{12} \cdot \frac{5}{3x}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

위의 식에서 $\frac{x}{12} = \frac{5}{3x}$ 일 때 등호가 성립하므로

$$x^2 = 20 \quad \therefore x = 2\sqrt{5} \quad (\because x > 0)$$

따라서 $x = 2\sqrt{5}$ 일 때 $\cos A$ 는 최솟값 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 를 갖는다.

$$\text{최솟값: } \frac{\sqrt{5}}{3}, x = 2\sqrt{5}$$

0861 $\triangle ABC$ 에서 $C = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{100\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R \quad \therefore R = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = 100$$

따라서 잔디밭의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \cdot 100^2 = 10000\pi \text{ (m}^2\text{)}$$

0862 $\triangle ACB$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = 150^2 + 150^2 - 2 \cdot 150 \cdot 150 \cdot \cos 120^\circ$$

$$= 2 \cdot 150^2 - 2 \cdot 150^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot 150^2$$

$$\therefore \overline{AB} = 150\sqrt{3} \text{ (m)} \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 두 나무 A, B 사이의 거리는 $150\sqrt{3}$ m이다.

0863 $\angle ACB = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$ 이므로 직각삼각형

ABC 에서

$$\overline{AC} = \overline{AB} \sin 30^\circ = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30 \text{ (m)}$$

직각삼각형 ABD 에서

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AB}}{\cos 30^\circ} = \frac{60}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 40\sqrt{3} \text{ (m)}$$

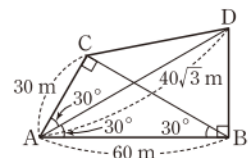
따라서 오른쪽 그림의 $\triangle ADC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2 = 30^2 + (40\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ$$

$$= 2100$$

$$\therefore \overline{CD} = 10\sqrt{21} \text{ (m)} \quad (\because \overline{CD} > 0)$$

따라서 두 지점 C, D 사이의 거리는 $10\sqrt{21}$ m이다.



0864 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{이므로} \quad \sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

$$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad (\because 0^\circ < C < 180^\circ)$$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin C} = 2R \quad \therefore R = \frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8\sqrt{15}}{15}$$

따라서 거울의 반지름의 길이는 $\frac{8\sqrt{15}}{15}$ 이다. → ③

답 $\frac{8\sqrt{15}}{15}$

채점 기준	비율
① $\cos C$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $\sin C$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ 거울의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %

0865 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 이므로 이것을

주어진 식에 대입하면

$$c \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = c^2$$

a, c 는 양수이므로 $a = c$

따라서 △ABC는 $a = c$ 인 이등변삼각형이다. 답 ③

0866 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ 이므로 이것을

주어진 식에 대입하면

$$b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - a \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = c$$

$$b^2 + c^2 - a^2 - (c^2 + a^2 - b^2) = 2c^2 \quad \therefore b^2 = a^2 + c^2$$

따라서 △ABC는 $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

답 $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

0867 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + B\right) = \cos B$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \sin C$ 이므로 주어진

식은 $\cos B \sin C = \sin A$ ①

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ 이므로 이것을 ①

에 대입하면

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{a}{2R}, \quad c^2 + a^2 - b^2 = 2a^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

따라서 △ABC는 $C = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.

답 $C = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형

0868 $A + B + C = 180^\circ$ 이므로 $A + B = 180^\circ - C$

따라서 $\sin(A + B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$ 이므로

$$\sin C = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} = 8$$

답 8

0869 △ABC의 넓이가 18이므로 $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \sin A = 18$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ < A < 90^\circ$ 이므로 $A = 60^\circ$

답 60°

0870 $\angle AOB : \angle BOC : \angle COA = \widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 4 : 3 : 5$
이므로

$$\angle AOB = 360^\circ \times \frac{4}{12} = 120^\circ, \quad \angle BOC = 360^\circ \times \frac{3}{12} = 90^\circ,$$

$$\angle COA = 360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ$$

→ ①

$$\therefore \triangle ABC = \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COA$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 90^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 150^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 4(3 + \sqrt{3})$$

→ ②

답 $4(3 + \sqrt{3})$

채점 기준	비율
① $\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ 의 크기를 구할 수 있다.	30 %
② △ABC의 넓이를 구할 수 있다.	70 %

0871 $\triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = 25$

늘어난 부분의 넓이는

$$\triangle APQ = \frac{1}{2} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \sin(180^\circ - A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} b \cdot \frac{6}{5} c \cdot \sin A$$

$$= \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{6}{25} \triangle ABC = \frac{6}{25} \cdot 25 = 6$$

$$\triangle BQR = \frac{1}{2} \cdot \overline{BQ} \cdot \overline{BR} \cdot \sin(180^\circ - B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} c \cdot \frac{6}{5} a \cdot \sin B$$

$$= \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{6}{25} \triangle ABC = \frac{6}{25} \cdot 25 = 6$$

$$\triangle CRP = \frac{1}{2} \cdot \overline{CR} \cdot \overline{CP} \cdot \sin(180^\circ - C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} a \cdot \frac{6}{5} b \cdot \sin C$$

$$= \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{6}{25} \triangle ABC = \frac{6}{25} \cdot 25 = 6$$

$$\therefore \triangle PQR = \triangle ABC + \triangle APQ + \triangle BQR + \triangle CRP$$

$$= 25 + 6 + 6 + 6 = 43$$

답 ⑤

0872 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 △ABC의 넓이가 $12\sqrt{5}$ 이므로

$$12\sqrt{5} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{4R}, \quad 12\sqrt{5} = \frac{126}{R}$$

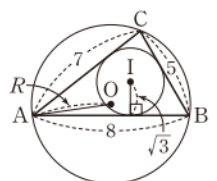
$$\therefore R = \frac{21\sqrt{5}}{10}$$

답 $\frac{21\sqrt{5}}{10}$

0873 오른쪽 그림에서 △ABC의 외접원 O 의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot (5 + 7 + 8) = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{4R}$$

$$10\sqrt{3} = \frac{70}{R} \quad \therefore R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$



라벤

특강 삼각형의 내접원의 반지름의 길이와 삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 r 일 때,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

0874 오른쪽 그림과 같이 \overline{BD} 를 그으면 $\triangle BCD$ 는 $\overline{BC}=\overline{CD}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle DBC = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$$

따라서 $\triangle BCD$ 는 정삼각형이고 $\angle ABD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned} \square ABCD &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 18 + 16\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ②

0875 오른쪽 그림과 같이 \overline{AC} 를 그으면 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 12 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = 2\sqrt{3} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

$\triangle ABC$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin(\angle ACB)}, \quad 2\sqrt{3} \sin(\angle ACB) = 2 \sin 60^\circ$$

$$\therefore \sin(\angle ACB) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < \angle ACB < 75^\circ$ 이므로 $\angle ACB = 30^\circ$

따라서 $\triangle ACD$ 에서 $\angle ACD = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned} \square ABCD &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

답 ③

0876 $\overline{AD}=\overline{BC}=8$, $\overline{DC}=\overline{AB}=6$ 이고 $\square ABCD$ 의 넓이가 $24\sqrt{3}$ 이므로

$$8 \cdot 6 \cdot \sin D = 24\sqrt{3} \quad \therefore \sin D = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ < D < 90^\circ$ 이므로 $D = 60^\circ$

답 60°

0877 평행사변형 ABCD에서

$$B = 180^\circ - C = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

$$\therefore \square ABCD = 4 \cdot 5 \cdot \sin 45^\circ = 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

답 ①

0878 $\triangle ACD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos D = \frac{8^2 + 7^2 - 13^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = -\frac{1}{2}$$

이때 $90^\circ < D < 180^\circ$ 이므로 $D = 120^\circ$

$$\therefore \square ABCD = 8 \cdot 7 \cdot \sin 120^\circ$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 28\sqrt{3}$$

답 28√3

채점 기준	비율
① D 를 구할 수 있다.	50 %
② $\square ABCD$ 의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

0879 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{8}{9}$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\because 0^\circ < \theta < 180^\circ)$$

$$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 20\sqrt{2}$$

답 ⑤

0880 등변사다리꼴의 한 대각선의 길이를 x 라 하면 넓이가 9이므로

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \sin 150^\circ = 9, \quad \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \frac{1}{2} = 9$$

$$x^2 = 36 \quad \therefore x = 6 \quad (\because x > 0)$$

답 6

0881 $\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ \\ &= 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 28 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BD} = 2\sqrt{7} \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

평행사변형 ABCD에서 $B = 180^\circ - A = 60^\circ$ 이고 $\overline{BC}=\overline{AD}=4$ 이므로 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 12 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = 2\sqrt{3} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

이때

$$\square ABCD = 2 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \sin \theta = 4\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{21} \sin \theta = 4\sqrt{3} \quad \therefore \sin \theta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

답 ⑤

0882 전략 사인법칙을 이용하여 $\sin C$ 의 값을 구한다.

풀이 사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin C}$

$$2 \sin C = 2\sqrt{3} \sin 30^\circ \quad \therefore \sin C = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ < C < 90^\circ$ 이므로 $C = 60^\circ$

답 60°

0883 전략 $\angle ADB = \angle ACB$ 임을 알고 $\triangle ABD$ 에서 사인법칙을 이용한다.

풀이 \widehat{AB} 에 대한 원주각의 크기가 같으므로 $\angle ADB = \angle ACB = 30^\circ$

따라서 $\triangle ABD$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ} = \frac{16\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$$

$$\overline{AD} \sin 30^\circ = 16\sqrt{2} \sin 45^\circ$$

$$\therefore \overline{AD} = 16\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 32$$

답 32

0884 전략 먼저 A 를 구하고, 사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 $A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$A = 180^\circ - (70^\circ + 80^\circ) = 30^\circ$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{5}{\sin 30^\circ} = 2R \quad \therefore R = \frac{5}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 5$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 외접원의 넓이는 $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$

답 ②

0885 전략 원에 내접하는 사각형의 두 대각의 크기의 합은 180° 임을 이용하여 먼저 D 를 구한 후 코사인법칙을 이용한다.

풀이 $\square ABCD$ 가 원에 내접하므로 $B+D=180^\circ$

$$\therefore D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

→ ①

$\triangle ACD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 37$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{37} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

→ ②

답 $\sqrt{37}$

채점 기준	비율
① D 를 구할 수 있다.	30 %
② \overline{AC} 의 길이를 구할 수 있다.	70 %

0886 전략 두 대각선의 길이가 p, q 이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ 인 사각형의 넓이는 $\frac{1}{2}pq \sin \theta$ 임을 이용한다.

풀이 $\square ABCD$ 의 두 대각선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면 $\square ABCD$ 의 넓이가 14이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot \sin \theta = 14 \quad \therefore \sin \theta = \frac{1}{2}$$

θ 는 예각이므로 $\theta = 30^\circ$

답 ②

0887 전략 한 원에서 원주각의 크기는 호의 길이에 비례함을 이용하여 삼각형의 세 각의 크기를 구한다.

풀이 $A+B+C=180^\circ$ 이고 $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 3 : 4 : 5$ 이므로

$$A = 180^\circ \times \frac{4}{12} = 60^\circ, B = 180^\circ \times \frac{5}{12} = 75^\circ,$$

$$C = 180^\circ \times \frac{3}{12} = 45^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$

$$\overline{BC} \sin 45^\circ = 6\sqrt{2} \sin 60^\circ$$

$$\therefore \overline{BC} = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{3}$$

답 ⑤

0888 전략 정사면체의 전개도에 $\overline{MP} + \overline{PD}$ 가 최소가 되는 경우를 그려 본다.

풀이 정사면체의 전개도는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\overline{MP} + \overline{PD} \geq \overline{DM}$$

→ ①

$\triangle AMD$ 에서 코사인법칙에 의하여

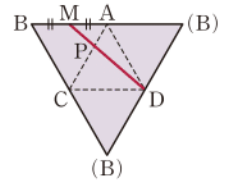
$$\overline{DM}^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 63$$

$$\therefore \overline{DM} = 3\sqrt{7} \quad (\because \overline{DM} > 0)$$

따라서 $\overline{MP} + \overline{PD}$ 의 최솟값은 $3\sqrt{7}$ 이다.

→ ②

답 $3\sqrt{7}$



채점 기준	비율
① $\overline{MP} + \overline{PD} \geq \overline{DM}$ 임을 알 수 있다.	40 %
② $\overline{MP} + \overline{PD}$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

0889 전략 먼저 코사인법칙을 이용하여 \overline{BC} 의 길이를 구한 후 사인법칙을 이용한다.

풀이 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{3}{5} = 25$$

$$\therefore \overline{BC} = 5 \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

이때

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \quad (\because 0^\circ < A < 180^\circ)$$

이므로 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R$

$$\therefore R = \frac{5}{\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{8}$$

$$\therefore 16R = 16 \cdot \frac{25}{8} = 50$$

답 50

0890 전략 삼각형의 세 변 중 길이가 가장 긴 변의 대각이 삼각형의 세 각 중 가장 큰 각이다.

풀이 사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 7 : 13 : 8$$

이때 가장 긴 변의 대각이 크기가 가장 큰 각이므로 구하는 각의 크기는 B 이다.

$a=7k, b=13k, c=8k$ ($k>0$)로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{(8k)^2 + (7k)^2 - (13k)^2}{2 \cdot 8k \cdot 7k} = -\frac{1}{2}$$

$0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 120^\circ$

따라서 구하는 각의 크기는 120° 이다.

답 120°

0891 전략 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ 임을 이용한다.

풀이 $6 \sin A = 2\sqrt{3} \sin B = 3 \sin C$ 에서

$$\sin A = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2}$$

이므로 $\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{3} : 2$

사인법칙에 의하여 $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$ 이므로

$$a=k, b=\sqrt{3}k, c=2k \quad (k>0)$$

로 놓으면 코사인법칙에 의하여

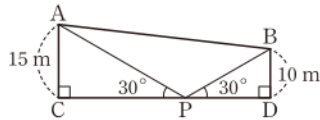
$$\cos A = \frac{(\sqrt{3}k)^2 + (2k)^2 - k^2}{2 \cdot \sqrt{3}k \cdot 2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 30^\circ$ 답 ⑤

0892 [전략] 삼각함수의 정의를 이용하여 \overline{AP} , \overline{BP} 의 길이를 구한 후 $\triangle APB$ 에서 코사인법칙을 이용한다.

[풀이] 오른쪽 그림의 직각삼각형 ACP에서

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ} \\ &= \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30 \text{ (m)}\end{aligned}$$



직각삼각형 BPD에서 $\overline{BP} = \frac{\overline{BD}}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20 \text{ (m)}$... ②

이때 $\triangle APB$ 에서 $\angle APB = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$

이므로 코사인법칙에 의하여 $\overline{AB}^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos 120^\circ = 1900$
 $\therefore \overline{AB} = 10\sqrt{19} \text{ (m)} \quad (\because \overline{AB} > 0)$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $10\sqrt{19} \text{ m}$ 이다. ... ③
답 ③

채점 기준	비율
① \overline{AP} 의 길이를 구할 수 있다.	30 %
② \overline{BP} 의 길이를 구할 수 있다.	30 %
③ 두 지점 A, B 사이의 거리를 구할 수 있다.	40 %

0893 [전략] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 주어진 관계식을 a , b , c 에 대한 식으로 변형한다.

[풀이] $\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin A$, $\sin(\pi - B) = \sin B$ 이므로 주어진 식은 $\sin A = 2 \sin B \cos C$ ①

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이므로 이것을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{a}{2R} &= 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ a^2 &= a^2 + b^2 - c^2, \quad b^2 = c^2\end{aligned}$$

b, c 는 양수이므로 $b = c$
 따라서 $\triangle ABC$ 는 $b = c$ 인 이등변삼각형이다. 답 ③

0894 [전략] $\triangle ABC$ 의 두 변의 길이 a, b 와 그 끼인각의 크기 C 에 대하여 $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab \sin C$ 임을 이용한다.

[풀이] $\overline{AD} = x$ 라 하면 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot x \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot x \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ \\ 20\sqrt{3} &= 2x + \frac{5}{2}x, \quad \frac{9}{2}x = 20\sqrt{3} \quad \therefore x = \frac{40\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

따라서 \overline{AD} 의 길이는 $\frac{40\sqrt{3}}{9}$ 이다. 답 ④

0895 [전략] 사각형 모양의 잔디 광장을 두 개의 삼각형으로 나누어 넓이를 구한다.

[풀이] 잔디 광장을 오른쪽 그림과 같이 사각형 PQRS라 하고 \overline{PR} 를 그으면 직각삼각형 PRS에서

$$\overline{PR} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ (m)}$$

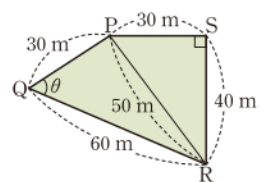
$\triangle PQR$ 에서 $\angle PQR = \theta$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{30^2 + 60^2 - 50^2}{2 \cdot 30 \cdot 60} = \frac{5}{9} \\ \therefore \sin \theta &= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2} = \frac{2\sqrt{14}}{9} \quad (\because 0^\circ < \theta < 180^\circ)\end{aligned}$$

$$\therefore \square PQRS = \triangle PQR + \triangle PRS$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 60 \cdot \frac{2\sqrt{14}}{9} + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 \\ &= 200(3 + \sqrt{14}) \text{ (m}^2\text{)}\end{aligned}$$

따라서 잔디 광장의 넓이는 $200(3 + \sqrt{14}) \text{ m}^2$ 이다. 답 ⑤



0896 [전략] 먼저 $\triangle ACD$ 에서 코사인법칙을 이용하여 \overline{CD} 의 길이를 구한다.

[풀이] $\overline{CD} = x$ 라 하면 $\triangle ACD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}(3\sqrt{3})^2 &= 6^2 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \cos 60^\circ \\ 27 &= 36 + x^2 - 6x, \quad x^2 - 6x + 9 = 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \quad \therefore x = 3\end{aligned}$$

따라서 $\overline{CD} = 3$ 이므로

$$\square ABCD = 6 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$
 답 ②

[다른 풀이] $\triangle ACD$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sin(\angle ACD)}, \quad 3\sqrt{3} \sin(\angle ACD) = 6 \sin 60^\circ$$

$$\therefore \sin(\angle ACD) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} = 1$$

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ$$

따라서 직각삼각형 ACD에서 $\overline{CD} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{3})^2} = 3$

$$\therefore \square ABCD = 6 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$$

0897 [전략] $\triangle ABP$ 에서 코사인법칙을 이용하여 $\square ABCD$ 의 두 대각선이 이루는 각의 크기를 구한다.

[풀이] $\angle APB = \theta$ 라 하면 $\triangle ABP$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{2^2 + 4^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{1}{4} \\ \therefore \sin \theta &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad (\because 0^\circ < \theta < 180^\circ)\end{aligned}$$

$$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{49\sqrt{15}}{8}$$
 답 ⑤

0898 [전략] 먼저 $\angle BAD$ 의 크기를 구하여 $\triangle ABD$ 에서 사인법칙을 이용한다.

[풀이] $\triangle ADC$ 에서 $\angle ADC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$
 $\triangle ABD$ 에서 $\angle BAD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$

오른쪽 그림의 $\triangle ABD$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin 15^\circ} = \frac{50}{\sin 30^\circ}$$

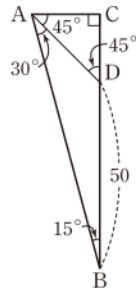
$$\overline{AD} \sin 30^\circ = 50 \sin 15^\circ$$

$$\therefore \overline{AD} = 50 \times 0.25 \times 2 = 25$$

따라서 직각삼각형 ADC 에서

$$\overline{AC} = \overline{AD} \sin 45^\circ = 25 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{답 } \frac{25\sqrt{2}}{2}$$



0899 **전략** \overline{BD} 를 긋고 두 삼각형 BCD , ABD 에서 코사인법칙을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 \overline{BD} 를 그으면 $\triangle BCD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 7$$

$$\therefore \overline{BD} = \sqrt{7} \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

→ ①

$\square ABCD$ 가 원에 내접하므로

$$A = 180^\circ - C = 60^\circ$$

→ ②

이때 $\overline{AD} = x$ 라 하면 $\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{7})^2 = 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \cos 60^\circ$$

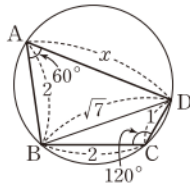
$$7 = 4 + x^2 - 2x, \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 3 \quad (\because x > 0)$$

따라서 \overline{AD} 의 길이는 3이다.

→ ③

답 3



채점 기준	비율
① \overline{BD} 의 길이를 구할 수 있다.	30 %
② A 를 구할 수 있다.	10 %
③ \overline{AD} 의 길이를 구할 수 있다.	60 %

0900 **전략** 삼각형 ABC 에서 코사인법칙을 이용하여 $\cos B$ 를 구한다.

풀이 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{5^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{19}{30}$$

이므로 $\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{19}{30} = \frac{55}{3}$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{\sqrt{165}}{3} \quad (\because \overline{AD} > 0)$$

$$\text{답 } \frac{\sqrt{165}}{3}$$

0901 **전략** 먼저 코사인법칙을 이용하여 \overline{AB} , \overline{BC} 에 대한 관계식을 구한다.

풀이 $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$13^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ$$

$$\therefore 169 = x^2 + y^2 + xy$$

..... ㉠

이때

$$x^2 + y^2 + xy = (x+y)^2 - xy$$

이고 $x+y=15$ 이므로 ㉠에서

$$15^2 - xy = 169 \quad \therefore xy = 56$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 56 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

답 ④

08 등차수열

Ⅲ. 수열

0902 **답** 1111

0903 **답** 6

0904 **답** 27

0905 **답** 16

0906 **답** $\frac{1}{6}$

0907 $a_1 = 1 - 1 = 0, a_2 = 2 - 1 = 1, a_3 = 3 - 1 = 2$

답 $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2$

0908 $a_1 = 3^1 = 3, a_2 = 3^2 = 9, a_3 = 3^3 = 27$

답 $a_1 = 3, a_2 = 9, a_3 = 27$

0909 $a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

답 $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{8}, a_3 = \frac{1}{16}$

0910 $a_1 = 10^1 - 1 = 9, a_2 = 10^2 - 1 = 99, a_3 = 10^3 - 1 = 999$

답 $a_1 = 9, a_2 = 99, a_3 = 999$

0911 $a_1 = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{3+1}{3+2} = \frac{4}{5}$

답 $a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{4}{5}$

0912 **답** $a_n = n^2$

0913 **답** $a_n = n(n+1)$

0914 $a_1 = 10 = 10^1, a_2 = 100 = 10^2, a_3 = 1000 = 10^3,$

$a_4 = 10000 = 10^4, \dots$ 이므로

$a_n = 10^n$

답 $a_n = 10^n$

0915 $a_1 = -1 = (-1)^1, a_2 = 1 = (-1)^2, a_3 = -1 = (-1)^3,$

$a_4 = 1 = (-1)^4, \dots$ 이므로

$a_n = (-1)^n$

답 $a_n = (-1)^n$

0916 $a_1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{2 \cdot 1 - 1}, a_2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 2 - 1}, a_3 = \frac{1}{5} = \frac{1}{2 \cdot 3 - 1},$

$a_4 = \frac{1}{7} = \frac{1}{2 \cdot 4 - 1}, \dots$ 이므로

$a_n = \frac{1}{2n-1}$

답 $a_n = \frac{1}{2n-1}$

0917 $2-1=3-2=4-3=\cdots=1$ 답 1

0918 $12-14=10-12=8-10=\cdots=-2$ 답 -2

0919 $3-1=2$ 에서 공차가 2이므로 주어진 수열은
1, 3, $\boxed{5}$, 7, 9, ... 답 5

0920 $7-10=-3$ 에서 공차가 -3이므로 주어진 수열은
10, 7, 4, $\boxed{1}$, -2, ... 답 1

0921 $2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ 에서 공차가 $\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 수열은
 $\frac{1}{2}$, $\boxed{1}$, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, ... 답 1

0922 $\frac{7}{3}-3=-\frac{2}{3}$ 에서 공차가 $-\frac{2}{3}$ 이므로 주어진 수열은
3, $\frac{7}{3}$, $\boxed{\frac{5}{3}}$, 1, $\frac{1}{3}$, ... 답 $\frac{5}{3}$

0923 $a_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1$ 답 $a_n=3n-1$

0924 $a_n=5+(n-1)\cdot (-2)=-2n+7$ 답 $a_n=-2n+7$

0925 첫째항이 -3, 공차가 $1-(-3)=4$ 이므로
 $a_n=-3+(n-1)\cdot 4=4n-7$ 답 $a_n=4n-7$

0926 첫째항이 7, 공차가 $6-7=-1$ 이므로
 $a_n=7+(n-1)\cdot (-1)=-n+8$ 답 $a_n=-n+8$

0927 x 는 7과 17의 등차중항이므로
 $x=\frac{7+17}{2}=12$ 답 12

0928 x 는 6과 -2의 등차중항이므로
 $x=\frac{6+(-2)}{2}=2$ 답 2

0929 $\log x$ 는 $\log 3$ 과 $\log 243$ 의 등차중항이므로
 $\log x=\frac{\log 3+\log 243}{2}=\frac{\log 3+5\log 3}{2}=3\log 3=\log 27$
 $\therefore x=27$ 답 27

0930 $\frac{15(1+5)}{2}=45$ 답 45

0931 $\frac{15\{2\cdot 3+(15-1)\cdot (-1)\}}{2}=-60$ 답 -60

0932 첫째항이 -5, 공차가 $-1-(-5)=4$ 이므로
 $\frac{15\{2\cdot (-5)+(15-1)\cdot 4\}}{2}=345$ 답 345

0933 첫째항이 4, 공차가 $2-4=-2$ 이므로
 $\frac{15\{2\cdot 4+(15-1)\cdot (-2)\}}{2}=-150$ 답 -150

0934 (1) 첫째항이 40, 공차가 $34-40=-6$ 이므로
 $a_n=40+(n-1)\cdot (-6)=-6n+46$
(2) $a_n=-6n+46$ 이므로
 $a_k=-6k+46=-14$, $-6k=-60$
 $\therefore k=10$
(3) 첫째항이 40, 제 10 항이 -14인 등차수열의 첫째항부터 제 10 항
까지의 합이므로
 $\frac{10(40-14)}{2}=130$

다른풀이 (1) $a_n=-6n+46$ (2) 10 (3) 130
(3) 첫째항이 40, 공차가 -6인 등차수열의 첫째항부터
제 10 항까지의 합이므로
 $\frac{10\{2\cdot 40+(10-1)\cdot (-6)\}}{2}=130$

0935 등차수열 3, 8, 13, ...의 첫째항이 3, 공차가 $8-3=5$ 이므
로 이 수열의 제 k 항을 38이라 하면
 $3+(k-1)\cdot 5=38$, $5k=40$
 $\therefore k=8$

따라서 구하는 합은 첫째항이 3, 제 8 항이 38인 등차수열의 첫째항
부터 제 8 항까지의 합이므로
 $3+8+13+\cdots+38=\frac{8(3+38)}{2}=164$ 답 164

0936 등차수열 17, 13, 9, ...의 첫째항이 17, 공차가 $13-17=-4$
이므로 이 수열의 제 k 항을 -27이라 하면
 $17+(k-1)\cdot (-4)=-27$, $-4k=-48$
 $\therefore k=12$

따라서 구하는 합은 첫째항이 17, 제 12 항이 -27인 등차수열의 첫
째항부터 제 12 항까지의 합이므로
 $17+13+9+\cdots+(-27)=\frac{12\{17+(-27)\}}{2}=-60$ 답 -60

0937 (1) $a_1=S_1=1^2+3\cdot 1=4$
(2) $a_{10}=S_{10}-S_9=(10^2+3\cdot 10)-(9^2+3\cdot 9)=22$
(3) $n\geq 2$ 일 때,
 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+3n-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$
 $=2n+2$ ㉠
이때 $a_1=4$ 는 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로
 $a_n=2n+2$ 답 (1) 4 (2) 22 (3) $a_n=2n+2$

0938 (i) $n=1$ 일 때,
 $a_1=S_1=1^2-2\cdot 1=-1$
(ii) $n\geq 2$ 일 때,
 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-2n-\{(n-1)^2-2(n-1)\}$
 $=2n-3$ ㉡

이때 $a_1 = -1$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n - 3 \quad \text{답 } a_n = 2n - 3$$

0939 (i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = 2n^2 + n - \{2(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 4n - 1 \end{aligned} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때 $a_1 = 3$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 4n - 1 \quad \text{답 } a_n = 4n - 1$$

0940 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_{15} = a + 14d = 25 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a_{23} = a + 22d = 41 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -3, d = 2$

$$\therefore a_n = -3 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 5 \quad \text{답 } a_n = 2n - 5$$

0941 주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 제40 항이 28이므로

$$15 + 39d = 28 \quad \therefore d = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \text{㉠}$$

0942 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면 제10 항이 5이므로

$$a + 9 \cdot (-2) = 5 \quad \therefore a = 23$$

따라서 $a_n = 23 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 25$ 이므로

$$\begin{aligned} b_n &= a_{2n} = -2 \cdot 2n + 25 \\ &= -4n + 25 \end{aligned} \quad \text{답 } b_n = -4n + 25$$

0943 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 + a_6 = 0 \text{이므로} \quad (a+d) + (a+5d) = 0$$

$$\therefore a + 3d = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{또 } a_8 = 12 \text{이므로} \quad a + 7d = 12 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -9, d = 3 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\therefore a_n = -9 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 12 \quad \dots\dots \text{㉣}$$

$$\text{답 } a_n = 3n - 12$$

채점 기준	비율
① a, d 에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
② a, d 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ a_n 을 구할 수 있다.	30 %

0944 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 = 2 \text{에서} \quad a + 4d = 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a_3 + a_8 = 1 \text{에서} \quad (a+2d) + (a+7d) = 1$$

$$\therefore 2a + 9d = 1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 14, d = -3$

$$\therefore a_n = 14 + (n-1) \cdot (-3)$$

$$= -3n + 17$$

-46을 제 k 항이라 하면

$$-3k + 17 = -46, \quad 3k = 63$$

$$\therefore k = 21$$

따라서 -46은 제21 항이다.

답 ㉤

0945 첫째항이 23, 공차가 $20 - 23 = -3$ 이므로 주어진 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 23 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 26$$

-28을 제 k 항이라 하면

$$-3k + 26 = -28, \quad 3k = 54 \quad \therefore k = 18$$

따라서 -28은 제18 항이다.

답 ㉢

0946 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 = \log 2 \text{에서} \quad a + 4d = \log 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a_8 = \log 16 \text{에서} \quad a + 7d = \log 16 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -\log 8, d = \log 2$

$$\therefore a_n = -\log 8 + (n-1) \cdot \log 2$$

$$= n \log 2 - (\log 2 + \log 8)$$

$$= n \log 2 - \log 16$$

$$\therefore a_{13} = 13 \log 2 - \log 16$$

$$= 13 \log 2 - 4 \log 2$$

$$= 9 \log 2 = \log 512$$

답 ㉣

0947 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_4 = 3 \text{에서} \quad a + 3d = 3 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a_5 : a_{10} = 1 : 3 \text{에서} \quad 3a_5 = a_{10} \text{이므로} \quad 3(a + 4d) = a + 9d$$

$$\therefore 2a + 3d = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -3, d = 2$

$$\therefore a_n = -3 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 5$$

$$\therefore a_{20} = 2 \cdot 20 - 5 = 35$$

답 35

0948 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공차가 $3 - 4 = -1$ 인 등차수열이므로

$$a_n = 4 + (n-1) \cdot (-1) = -n + 5$$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 -25, 공차가 $-21 - (-25) = 4$ 인 등차수열이므로

$$b_n = -25 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 29$$

$$a_k + b_k = 0 \text{에서} \quad (-k + 5) + (4k - 29) = 0$$

$$3k - 24 = 0 \quad \therefore k = 8$$

답 ㉡

다른풀이 $a_1 + b_1 = 4 - 25 = -21, a_2 + b_2 = 3 - 21 = -18,$

$a_3 + b_3 = 2 - 17 = -15, \dots$ 이므로 수열 $\{a_n + b_n\}$ 은 첫째항이 -21, 공차가 $-18 - (-21) = 3$ 인 등차수열이다.

$$\therefore a_n + b_n = -21 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 24$$

$$a_k + b_k = 0 \text{에서} \quad 3k - 24 = 0 \quad \therefore k = 8$$

0949 주어진 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하고, 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_5 = -17 \text{에서} \quad a + 4d = -17 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a_{17} = 7 \text{에서} \quad a + 16d = 7 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -25, d = 2$

$$\therefore a_n = -25 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 27$$

$$2n - 27 > 0 \text{에서} \quad 2n > 27$$

$$\therefore n > 13.5$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제14 항이다.

답 ㉣

$$\text{0950 } a_n = 50 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 54$$

→ ㉠

$$-4n + 54 < 10 \text{에서} \quad 4n > 44$$

$\therefore n > 11$ → ②
따라서 처음으로 10보다 작아지는 항은 제 12 항이다. → ③
답 제 12 항

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	40 %
② n 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ 처음으로 10보다 작아지는 항이 제 몇 항인지 구할 수 있다.	20 %

0951 $a_n = -16 + (n-1) \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2}n - \frac{37}{2}$

$\frac{5}{2}n - \frac{37}{2} < 0$ 에서 $5n < 37$

$\therefore n < \frac{37}{5} = 7.4$

이때 $a_7 = \frac{5}{2} \cdot 7 - \frac{37}{2} = -1$, $a_8 = \frac{5}{2} \cdot 8 - \frac{37}{2} = \frac{3}{2}$ 이므로

$|a_7| = 1$, $|a_8| = \frac{3}{2}$

따라서 $|a_n|$ 의 최솟값은 1이다. 답 ③

0952 주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 1, 제 19 항이 55이므로

$1 + 18d = 55 \quad \therefore d = 3$

이때 a_5 는 주어진 수열의 제 6 항이므로

$a_5 = 1 + (6-1) \cdot 3 = 16$ 답 16

0953 첫째항이 -5, 공차가 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열의 제 $(n+2)$ 항이 27이

므로 $-5 + (n+1) \cdot \frac{1}{2} = 27$

$\frac{1}{2}(n+1) = 32, \quad n+1 = 64$

$\therefore n = 63$ 답 63

0954 주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 17, 제 $(n+2)$ 항이 53이므로

$17 + (n+1)d = 53, \quad (n+1)d = 36$

$\therefore n+1 = \frac{36}{d}$

이때 n 은 자연수이므로 d 는 36을 제외한 36의 양의 약수이어야 한다.

따라서 공차가 될 수 없는 것은 ④이다. 답 ④

0955 세 수 6, a^2+4a , $4a$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a^2+4a) = 6+4a, \quad 2a^2+4a-6=0$

$a^2+2a-3=0, \quad (a+3)(a-1)=0$

$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$ 답 ③

0956 세 수 8, a , 16이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a = \frac{8+16}{2} = 12$

세 수 12, 9, b 도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$9 = \frac{12+b}{2} \quad \therefore b = 6$

$\therefore a-b = 6$ 답 6

0957 세 수 $3-2\sqrt{3}$, b , 1이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2} = 2-\sqrt{3}$ → ①

세 수 a , $3-2\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ 도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(3-2\sqrt{3}) = a+2-\sqrt{3}$

$\therefore a = 6-4\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})$

$= 4-3\sqrt{3}$ → ②

$\therefore ab = (4-3\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 17-10\sqrt{3}$ → ③

답 $17-10\sqrt{3}$

채점 기준	비율
① b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ ab 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0958 다섯 개의 수 2, a , b , c , 18이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 세 수 2, b , 18도 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$\therefore b = \frac{2+18}{2} = 10$

또 a , 10, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a+c = 2 \cdot 10 = 20$

$\therefore a+b+c = 30$ 답 ③

0959 α , β 가 이차방정식 $x^2-6x-5=0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 6, \quad \alpha\beta = -5$

이때 a 는 α , β 의 등차중항이므로

$a = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{6}{2} = 3$

또 b 는 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ 의 등차중항이므로

$b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = \frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta} = \frac{6}{2 \cdot (-5)} = -\frac{3}{5}$

$\therefore a+b = \frac{12}{5}$ 답 $\frac{12}{5}$

0960 (1) $f(1) = a \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = a-1$,

$f(2) = a \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 4a-3$,

$f(4) = a \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 1 = 16a-7$ → ①

(2) 세 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, 즉 $a-1$, $4a-3$, $16a-7$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(4a-3) = (a-1) + (16a-7)$ → ②

$8a-6 = 17a-8, \quad 9a = 2 \quad \therefore a = \frac{2}{9}$ → ③

답 (1) $f(1) = a-1, f(2) = 4a-3, f(4) = 16a-7$ (2) $\frac{2}{9}$

채점 기준	비율
① $f(1), f(2), f(4)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② a 에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20 %

라벤 특강 나머지정리

다항식 $P(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면
 $R = P(a)$

0961 세 수를 $a-d$, a , $a+d$ 로 놓으면

$$(a-d)+a+(a+d)=12 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(a-d) \cdot a \cdot (a+d)=28 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $3a=12 \quad \therefore a=4$

$a=4$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$(4-d) \cdot 4 \cdot (4+d)=28, \quad 16-d^2=7$$

$$d^2=9 \quad \therefore d=\pm 3$$

따라서 세 수는 1, 4, 7이므로 세 수의 제곱의 합은

$$1^2+4^2+7^2=66 \quad \text{답 ④}$$

0962 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ 로 놓으면

$$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=32 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(a-3d)(a+3d)=55 \quad \cdots \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $4a=32 \quad \therefore a=8$

$a=8$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$(8-3d)(8+3d)=55, \quad 64-9d^2=55$$

$$d^2=1 \quad \therefore d=\pm 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 네 수는 5, 7, 9, 11이므로 네 수 중에서 가장 작은 수는 5이다. $\cdots \textcircled{3}$

답 5

채점 기준	비율
① 네 수를 a , d 로 나타내고 a , d 에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
② a , d 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ 가장 작은 수를 구할 수 있다.	20 %

0963 삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a , $a+d$ 로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은

$$(a-d)+a+(a+d)=3$$

$$3a=3 \quad \therefore a=1$$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 1이므로 방정식에 $x=1$ 을 대입하면

$$1^3-3 \cdot 1^2+k \cdot 1+8=0$$

$$\therefore k=-6 \quad \text{답 ②}$$

참고 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 곱은

$$a(a-d)(a+d)=-8$$

이므로 이 식에 $a=1$ 을 대입하면 $d=\pm 3$

따라서 세 근은 -2, 1, 4이다.

라벨 특장 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 세 근을 α , β , γ 라 할 때

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

0964 조건 (가)에서 직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d$, a , $a+d(a>d>0)$ 로 놓으면 삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로

$$(a-d)+a>a+d \quad \therefore a>2d$$

피타고라스 정리에 의하여

$$(a+d)^2=(a-d)^2+a^2, \quad a(a-4d)=0$$

$$\therefore a=4d (\because a \neq 0) \quad \cdots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 $\frac{1}{2}a(a-d)=96$

$$\therefore a^2-ad=192 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$16d^2-4d^2=192, \quad d^2=16$$

$$\therefore d=4 (\because d>0)$$

따라서 $d=4$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a=16$ 이므로 직각삼각형의 빗변의 길이는

$$a+d=16+4=20 \quad \text{답 ③}$$

0965 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2=5 \text{에서} \quad a+d=5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_6=29 \text{에서} \quad a+5d=29 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, d=6$

$$\therefore S_{10}=\frac{10\{2 \cdot (-1)+(10-1) \cdot 6\}}{2}=260 \quad \text{답 260}$$

0966 첫째항이 42, 제 m 항이 -15인 등차수열의 첫째항부터 제 m 항까지의 합이 270이므로

$$\frac{m\{42+(-15)\}}{2}=270 \quad \therefore m=20$$

따라서 $a_{20}=-15$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$42+19d=-15 \quad \therefore d=-3 \quad \text{답 ④}$$

0967 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 19, 공차가 -4이므로

$$S_n=\frac{n\{2 \cdot 19+(n-1) \cdot (-4)\}}{2}=-2n^2+21n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$S_n<0 \text{에서} \quad -2n^2+21n<0, \quad n(2n-21)>0$$

$$\therefore n>\frac{21}{2}=10.5 (\because n \text{은 자연수}) \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 11이다. $\cdots \textcircled{3}$

답 11

채점 기준	비율
① S_n 을 구할 수 있다.	40 %
② n 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ 자연수 n 의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0968 연속하는 20개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 a 라 하면

$$a, a+1, a+2, \dots, a+19$$

이 20개의 자연수의 합이 430이므로

$$\frac{20(a+a+19)}{2}=430, \quad 2a+19=43$$

$$2a=24 \quad \therefore a=12$$

따라서 구하는 가장 큰 수는 $12+19=31$ 답 31

0969 첫째항이 3, 끝항이 42, 항수가 $n+2$ 인 등차수열의 합이 540이므로

$$\frac{(n+2)(3+42)}{2}=540, \quad n+2=24$$

$$\therefore n=22 \quad \text{답 ③}$$

0970 첫째항이 -7 , 끝항이 37 , 항수가 20 인 등차수열의 합은

$$\frac{20(-7+37)}{2}=300$$

따라서 $-7+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}+37=300$ 이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}=300-(-7+37)=270$$

답 270

0971 $12+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+(-28)=12-136-28=-152$ 즉 첫째항이 12 , 끝항이 -28 , 항수가 $n+2$ 인 등차수열의 합이 -152 이므로

$$\frac{(n+2)(12-28)}{2}=-152, \quad n+2=19$$

$$\therefore n=17$$

답 ④

0972 주어진 등차수열의 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_5=55 \text{에서} \quad \frac{5(2 \cdot 3+4d)}{2}=55$$

$$3+2d=11 \quad \therefore d=4$$

$$\therefore S_{15}=\frac{15(2 \cdot 3+14 \cdot 4)}{2}=465$$

답 465

0973 (1) 주어진 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_{10}=25 \text{에서} \quad \frac{10(2a+9d)}{2}=25$$

$$\therefore 2a+9d=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{20}=150 \text{에서} \quad \frac{20(2a+19d)}{2}=150$$

$$\therefore 2a+19d=15 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-2, d=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$(2) S_{30}=\frac{30\{2 \cdot (-2)+29 \cdot 1\}}{2}=375 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 (1) 첫째항: -2 , 공차: 1 (2) 375

채점 기준	비율
① a, d 에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
② a, d 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ S_{30} 을 구할 수 있다.	30 %

0974 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_4=32, S_8=32+128=160$$

$$S_4=32 \text{에서} \quad \frac{4(2a+3d)}{2}=32$$

$$\therefore 2a+3d=16 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_8=160 \text{에서} \quad \frac{8(2a+7d)}{2}=160$$

$$\therefore 2a+7d=40 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, d=6$

$$\therefore S_{20}=\frac{20\{2 \cdot (-1)+19 \cdot 6\}}{2}=1120$$

답 1120

0975 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_4=8 \text{에서} \quad \frac{4(2a+3d)}{2}=8$$

$$\therefore 2a+3d=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{20}=-280 \text{에서} \quad \frac{20(2a+19d)}{2}=-280$$

$$\therefore 2a+19d=-28 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=5, d=-2$

$$\begin{aligned} \therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20} &= S_{20}-S_{10} \\ &= -280 - \frac{10\{2 \cdot 5+9 \cdot (-2)\}}{2} \\ &= -240 \end{aligned}$$

답 ②

0976 주어진 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n=-30+(n-1) \cdot 4=4n-34$$

$$4n-34>0 \text{에서} \quad n>\frac{34}{4}=8.5$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 제 9 항부터 양수이므로 첫째항부터 제 8 항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_8=4 \cdot 8-34=-2$ 이므로 구하는 최솟값은

$$S_8=\frac{8\{-30+(-2)\}}{2}=-128$$

답 -128

다른 풀이 $S_n=\frac{n\{2 \cdot (-30)+(n-1) \cdot 4\}}{2}$

$$=2n^2-32n=2(n-8)^2-128$$

따라서 S_n 은 $n=8$ 일 때 최솟값 -128 을 갖는다.

0977 주어진 등차수열의 공차를 d 라 하고 일반항을 a_n 이라 하면 첫째항이 -17 , 제 3 항이 -11 이므로

$$-17+2d=-11 \quad \therefore d=3$$

$$\therefore a_n=-17+(n-1) \cdot 3=3n-20$$

$$3n-20>0 \text{에서} \quad n>\frac{20}{3}=6.66\cdots$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 제 7 항부터 양수이므로 첫째항부터 제 6 항까지의 합이 최소이다.

$$\therefore n=6$$

답 6

0978 주어진 등차수열의 공차를 d 라 하고 일반항을 a_n 이라 하면 첫째항부터 제 5 항까지의 합이 75이므로

$$\frac{5(2 \cdot 19+4d)}{2}=75, \quad 19+2d=15$$

$$\therefore d=-2$$

$$\therefore a_n=19+(n-1) \cdot (-2)=-2n+21 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$-2n+21<0 \text{에서} \quad -2n<-21 \quad \therefore n>10.5$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 제 11 항부터 음수이므로 첫째항부터 제 10 항까지의 합이 최대이다.

따라서 최댓값은

$$\frac{10\{2 \cdot 19+9 \cdot (-2)\}}{2}=100$$

$$\text{이므로} \quad p=10, q=100 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore p+q=110 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 110

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	40 %
② p, q 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $p+q$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0979 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 : a_6 = 5 : 2 \text{에서 } 2a_2 = 5a_6 \text{이므로 } 2(a+d) = 5(a+5d)$$

$$3a = -23d \quad \therefore a = -\frac{23}{3}d$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= -\frac{23}{3}d + (n-1)d \\ &= nd - \frac{26}{3}d \end{aligned}$$

이때 $a > 0$ 이므로 $d < 0$

$$nd - \frac{26}{3}d < 0 \text{에서 } nd < \frac{26}{3}d$$

$$\therefore n > \frac{26}{3} = 8.66\cdots$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 제 9 항부터 음수이므로 첫째항부터 제 8 항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore n = 8 \quad \text{답 ②}$$

0980 30 이하의 자연수 중에서 2로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$1, 3, 5, \cdots, 29$$

이때 $29 = 1 + 2 \cdot 14$ 에서 구하는 값은 첫째항이 1, 끝항이 29, 항수가 15인 등차수열의 합이므로

$$\frac{15(1+29)}{2} = 225 \quad \text{답 ⑤}$$

0981 20보다 크고 80보다 작은 자연수 중에서 3의 배수는

$$21, 24, 27, \cdots, 78 \quad \cdots \text{ ㉠}$$

이때 $78 = 21 + 3 \cdot 19$ 이므로 ㉠은 첫째항이 21, 끝항이 78, 항수가 20인 등차수열이다.

$$\text{즉 그 합은 } \frac{20(21+78)}{2} = 990$$

20보다 크고 80보다 작은 자연수 중에서 5의 배수는

$$25, 30, 35, \cdots, 75 \quad \cdots \text{ ㉡}$$

이때 $75 = 25 + 5 \cdot 10$ 이므로 ㉡은 첫째항이 25, 끝항이 75, 항수가 11인 등차수열이다.

$$\text{즉 그 합은 } \frac{11(25+75)}{2} = 550$$

한편 20보다 크고 80보다 작은 자연수 중에서 15의 배수는

$$30, 45, 60, 75$$

이므로 이 네 수의 합은

$$30 + 45 + 60 + 75 = 210$$

따라서 20보다 크고 80보다 작은 자연수 중에서 3 또는 5로 나누어 떨어지는 수의 총합은

$$990 + 550 - 210 = 1330 \quad \text{답 ④}$$

0982 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$3, 7, 11, 15, 19, 23, \cdots \quad \cdots \text{ ㉢}$$

6으로 나누었을 때의 나머지가 5인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$5, 11, 17, 23, 29, 35, \cdots \quad \cdots \text{ ㉣}$$

㉢, ㉣에서 공통인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$11, 23, 35, \cdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 11, 공차가 12인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} &= \frac{10(2 \cdot 11 + 9 \cdot 12)}{2} \\ &= 650 \quad \text{답 650} \end{aligned}$$

0983 $S_n = 2n^2 + 5n$ 에서

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 7$$

$$a_7 = S_7 - S_6 = (2 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7) - (2 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6) = 31$$

$$\therefore a_1 + a_7 = 7 + 31 = 38 \quad \text{답 ①}$$

다른풀이 $S_n = 2n^2 + 5n$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 7$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = 2n^2 + 5n - \{2(n-1)^2 + 5(n-1)\} \\ &= 4n + 3 \quad \cdots \text{ ㉠} \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 7$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 4n + 3$$

$$\therefore a_1 + a_7 = 7 + (4 \cdot 7 + 3) = 38$$

0984 $S_n = -n^2 + 7n$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = -1^2 + 7 \cdot 1 = 6$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = -n^2 + 7n - \{-(n-1)^2 + 7(n-1)\} \\ &= -2n + 8 \quad \cdots \text{ ㉡} \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 6$ 은 ㉡에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = -2n + 8 \quad \cdots \text{ ①}$$

$$-2n + 8 > 0 \text{에서 } 2n < 8 \quad \therefore n < 4$$

즉 $a_n > 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값이 3이므로 첫째항부터 제 3항까지 양수이다. $\cdots \text{ ②}$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned} S_3 &= -3^2 + 7 \cdot 3 = 12 \quad \cdots \text{ ③} \\ &\text{답 12} \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	40 %
② 양수인 항을 알 수 있다.	40 %
③ 양수인 항의 총합을 구할 수 있다.	20 %

0985 $S_n = 3n^2 - n$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = 3n^2 - n - \{3(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 6n - 4 \quad \cdots \text{ ㉢} \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 2$ 는 ㉢에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 6n - 4$$

$$5 \leq a_n \leq 30 \text{에서} \quad 5 \leq 6n - 4 \leq 30, \quad 9 \leq 6n \leq 34$$

$$\therefore \frac{3}{2} \leq n \leq \frac{17}{3}$$

따라서 자연수 n 은 2, 3, 4, 5의 4개이다.

답 ②

0986 $S_n = n^2 - 4n$, $T_n = n^2 + kn + 3$ 이라 하면

$$a_5 = S_5 - S_4 = (5^2 - 4 \cdot 5) - (4^2 - 4 \cdot 4) = 5$$

$$b_5 = T_5 - T_4 = (5^2 + 5k + 3) - (4^2 + 4k + 3) = 9 + k$$

이때 $a_5 = b_5$ 이므로 $5 = 9 + k$

$$\therefore k = -4$$

답 ①

0987 $S_5 = 110$ 에서 $a \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 = 110$

$$25a = 100 \quad \therefore a = 4$$

→ ①

따라서 $S_n = 4n^2 + 2n$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 6$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = 4n^2 + 2n - \{4(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 8n - 2 \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 $a_1 = 6$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 8n - 2$$

→ ②

답 $a_n = 8n - 2$

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② a_n 을 구할 수 있다.	70 %

0988 $S_n = n^2 - 2n + k$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 + k = k - 1$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = n^2 - 2n + k - \{(n-1)^2 - 2(n-1) + k\} \\ &= 2n - 3 \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등차수열을 이루려면 $a_1 = k - 1$ 은 ㉠

에 $n=1$ 을 대입한 것과 같아야 하므로

$$k - 1 = -1 \quad \therefore k = 0$$

답 0

0989 $S_n = an^2 - 5n + b$ 에서

$$a_1 = S_1 = a \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + b = 1$$

$$\therefore a + b = 6$$

..... ㉠

또 $a_6 = S_6 - S_5 = 17$ 에서

$$(a \cdot 6^2 - 5 \cdot 6 + b) - (a \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 + b) = 17$$

$$11a - 5 = 17 \quad \therefore a = 2$$

$a=2$ 를 ㉠에 대입하면 $b=4$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

답 2

참고 $a_1 = 10$ 이고 $S_n = 2n^2 - 5n + 4$ 에서 $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - 5n + 4 - \{2(n-1)^2 - 5(n-1) + 4\} \\ &= 4n - 7 \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은

$$1, 1, 5, 9, 13, \dots$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

0990 **전략** 주어진 항을 이용하여 등차수열의 첫째항과 공차에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = 18 \text{에서} \quad a + d = 18 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_6 = 10 \text{에서} \quad a + 5d = 10 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 20, d = -2$

$$\therefore a_n = 20 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 22$$

따라서 $p = -2, q = 22$ 이므로

$$pq = -44$$

답 -44

0991 **전략** 첫째항과 공차를 모두 a 로 놓고 주어진 식을 이용하여 a 의 값을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차를 모두 a 라 하면

$$a_n = a + (n-1)a = an$$

$$a_2 + a_4 = 24 \text{에서} \quad 2a + 4a = 24$$

$$6a = 24 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $a_n = 4n$ 이므로 $a_5 = 4 \cdot 5 = 20$

답 20

0992 **전략** 세 수 p, q, r 가 이 순서대로 등차수열을 이루면

$$q = \frac{p+r}{2} \text{임을 이용한다.}$$

풀이 세 수 $-3, a, 7$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a = \frac{-3+7}{2} = 2$$

세 수 $4, 10, b^2$ 도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$10 = \frac{4+b^2}{2}, \quad b^2 = 16$$

$$\therefore b = 4 \quad (\because b > 0)$$

답 ①

0993 **전략** 주어진 합을 이용하여 일반항을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_{10} = 110 \text{에서} \quad \frac{10(2 \cdot 2 + 9d)}{2} = 110$$

$$4 + 9d = 22 \quad \therefore d = 2$$

따라서 $a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$ 이므로

$$a_{20} = 2 \cdot 20 = 40$$

답 ③

0994 **전략** 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여

$a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 임을 이용하여 일반항 a_n 을 구한다.

풀이 $S_n = 2n^2 - n$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = 2n^2 - n - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 4n - 3 \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 $a_1 = 1$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 4n - 3$$

따라서 $a_k = 17$ 에서 $4k - 3 = 17$

$$\therefore k = 5$$

답 5

0995 [전략] 일반항에 n 대신 $3n$ 또는 $n-1$ 을 대입하거나 반례를 찾아 참, 거짓을 판별한다.

[풀이] ㄱ. $a_n=3n$ 에 n 대신 $3n$ 을 대입하면

$$a_{3n}=3 \cdot 3n=9n$$

ㄴ. $n+1=k$ 로 놓으면 $n=k-1$ 이므로 $a_{n+1}=3n-2$ 에서

$$a_k=3(k-1)-2=3k-5$$

$$\therefore a_n=3n-5 \quad (n \geq 2)$$

ㄷ. [반례] 수열 $\{a_n\}$ 이 0, 4, 0, 16, 0, 36, ...이면 $a_{2n}=4n^2$ 이지만 $a_n \neq n^2$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0996 [전략] 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 일반항을 각각 구한 후 수열 $\{-2a_n+4b_n\}$ 의 일반항을 구한다.

[풀이] 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항을 각각 a , b 라 하면

$$a_n=a+(n-1) \cdot 1=n+a-1$$

$$b_n=b+(n-1) \cdot (-3)=-3n+b+3$$

→ ①

$$\therefore -2a_n+4b_n=-2(n+a-1)+4(-3n+b+3)$$

$$=-14n-2a+4b+14$$

$$=-2a+4b+(n-1) \cdot (-14)$$

→ ②

따라서 구하는 수열의 공차는 -14이다.

→ ③

답 -14

채점 기준	비율
① a_n, b_n 을 구할 수 있다.	40 %
② $-2a_n+4b_n$ 을 구할 수 있다.	40 %
③ 공차를 구할 수 있다.	20 %

0997 [전략] a_1, a_2, a_3, a_4 를 각각 구한 후 지수법칙을 이용한다.

[풀이] 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_1=a, a_2=a+2, a_3=a+2 \cdot 2=a+4, a_4=a+3 \cdot 2=a+6$$

$$\therefore k=\frac{3^{a_2}+3^{a_4}}{3^{a_1}+3^{a_3}}$$

$$=\frac{3^{a+2}+3^{a+6}}{3^a+3^{a+4}}=\frac{3^{a+2}(1+3^4)}{3^a(1+3^4)}$$

$$=3^2=9$$

$$\therefore \log_3 k = \log_3 9 = 2$$

답 2

0998 [전략] 주어진 항을 이용하여 등차수열의 첫째항과 공차를 구한 후 일반항 a_n 을 구한다.

[풀이] 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5=26 \text{에서} \quad a+4d=26 \quad \dots\dots ㉑$$

$$a_{10}=16 \text{에서} \quad a+9d=16 \quad \dots\dots ㉒$$

→ ①

$$㉑, ㉒ \text{을 연립하여 풀면} \quad a=34, d=-2$$

$$\therefore a_n=34+(n-1) \cdot (-2)=-2n+36$$

→ ②

$$-2n+36 < 0 \text{에서} \quad 2n > 36$$

$$\therefore n > 18$$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제 19 항이다.

→ ③

답 제 19 항

채점 기준	비율
① a, d 에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
② a_n 을 구할 수 있다.	30 %
③ 처음으로 음수가 되는 항이 제 몇 항인지 구할 수 있다.	30 %

0999 [전략] b 가 a 와 -10의 등차중항임을 이용한다.

[풀이] 세 수 $a, b, -10$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b=\frac{a-10}{2} \quad \therefore a-2b=10 \quad \dots\dots ㉑$$

$x=2$ 가 이차방정식 $ax^2+bx-10=0$ 의 한 근이므로

$$4a+2b-10=0 \quad \therefore 2a+b=5 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면 $a=4, b=-3$

즉 주어진 이차방정식이 $4x^2-3x-10=0$ 이므로

$$(4x+5)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-\frac{5}{4} \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 다른 한 근은 $-\frac{5}{4}$ 이다.

답 $-\frac{5}{4}$

[다른풀이] 주어진 이차방정식이 $4x^2-3x-10=0$ 이고 다른 한 근을 α 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2+\alpha=\frac{3}{4} \quad \therefore \alpha=-\frac{5}{4}$$

1000 [전략] a_7 이 a_6 과 a_8 의 등차중항임을 이용한다.

[풀이] a_7 은 a_6 과 a_8 의 등차중항이므로 조건 ㉑에서

$$a_6+a_8=2a_7=0 \quad \therefore a_7=0$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $d>0$ 이므로 7보다 작은 자연수 n 에 대하여 $a_n<0$ 이다.

따라서 조건 ㉒에서

$$-a_6=0+3 \quad \therefore a_6=-3$$

즉 $d=a_7-a_6=3$ 이므로

$$a_2=a_7-5d=0-5 \cdot 3=-15$$

답 ①

[다른풀이] 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d ($d>0$)라 하면 조건 ㉑에서

$$(a+5d)+(a+7d)=0$$

$$2a+12d=0 \quad \therefore a=-6d \quad \dots\dots ㉑$$

조건 ㉒에서

$$|a+5d|=|a+6d|+3 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑을 ㉒에 대입하면

$$|-d|=3 \quad \therefore d=3 \quad (\because d>0)$$

이것을 ㉑에 대입하면 $a=-18$

$$\therefore a_2=-18+3=-15$$

1001 [전략] 등차수열을 이루는 세 모서리의 길이를 $a-d, a, a+d$ 로 놓고 식을 세운다.

[풀이] 직육면체의 세 모서리의 길이를 $a-d, a, a+d$ ($a>d \geq 0$)로 놓으면 모든 모서리의 길이의 합이 36이므로

$$4\{(a-d)+a+(a+d)\}=36$$

$$12a=36 \quad \therefore a=3$$

또 직육면체의 부피가 15이므로

$$(3-d) \cdot 3 \cdot (3+d)=15$$

$$9-d^2=5, \quad d^2=4$$

$$\therefore d=2 \quad (\because d \geq 0)$$

따라서 직육면체의 세 모서리의 길이는 1, 3, 5이므로 구하는 겉넓이는

$$2(1 \cdot 3+1 \cdot 5+3 \cdot 5)=46$$

답 ④

1002 [전략] 주어진 식을 d 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_8 - a_6 = 2d$,
 $S_8 - S_6 = a_8 + a_7 = (6+7d) + (6+6d) = 12+13d$ 이므로
 $\frac{a_8 - a_6}{S_8 - S_6} = 2$ 에서 $\frac{2d}{12+13d} = 2$
 $d = 12+13d \quad \therefore d = -1$ 답 ①

1003 [전략] 두 수 사이에 n 개의 수를 넣어서 만든 수열의 항수는 $n+2$ 임을 이용한다.

풀이 첫째항이 10, 끝항이 30, 항수가 $n+2$ 인 등차수열의 합이 420이므로

$$\frac{(n+2)(10+30)}{2} = 420, \quad n+2 = 21$$

$$\therefore n = 19$$

이 수열의 공차를 d 라 하면 제21 항이 30이므로

$$10 + 20d = 30, \quad 20d = 20 \quad \therefore d = 1$$

→ ①

→ ②

답 1

채점 기준	비율
① n 의 값을 구할 수 있다.	60 %
② 공차를 구할 수 있다.	40 %

1004 [전략] 첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은 $\frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$ 임을 이용한다.

풀이 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차를 각각 d , d' 이라 하면

$$a_1 + b_1 = -7, \quad d + d' = 3$$

$$\therefore (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{15})$$

$$= \frac{15(2a_1 + 14d)}{2} + \frac{15(2b_1 + 14d')}{2}$$

$$= \frac{15\{2(a_1 + b_1) + 14(d + d')\}}{2}$$

$$= \frac{15\{2 \cdot (-7) + 14 \cdot 3\}}{2} = 210$$
답 ④

다른풀이 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 수열 $\{a_n + b_n\}$ 은 첫째항이 -7 , 공차가 3인 등차수열이므로

$$(주어진 식) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_{15} + b_{15})$$

$$= \frac{15\{2 \cdot (-7) + 14 \cdot 3\}}{2} = 210$$

1005 [전략] 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때 $a_k > 0$, $a_{k+1} < 0$ 이면 S_n 의 최댓값은 S_k 임을 이용한다.

풀이 주어진 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 일반항을 a_n 이라 하면

$$S_5 = 130 \text{에서} \quad \frac{5(2a + 4d)}{2} = 130$$

$$\therefore a + 2d = 26 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{15} = 165 \text{에서} \quad \frac{15(2a + 14d)}{2} = 165$$

$$\therefore a + 7d = 11 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 32$, $d = -3$

$$\therefore a_n = 32 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 35$$

$$3n + 35 < 0 \text{에서} \quad 3n > 35 \quad \therefore n > \frac{35}{3} = 11.66\dots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 제12 항부터 음수이므로 첫째항부터 제11항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore n = 11$$
답 11

1006 [전략] 12와 52 사이에 있는 5의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열한 수열의 항수를 구한다.

풀이 12와 52 사이에 있는 5의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$15, 20, 25, \dots, 50$$

이때 $50 = 15 + 5 \cdot 7$ 에서 구하는 값은 첫째항이 15, 끝항이 50, 항수가 8인 등차수열의 합이므로

$$\frac{8(15+50)}{2} = 260$$
답 ②

1007 [전략] 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여 $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용하여 일반항 a_n 을 구한다.

풀이 $S_n = n^2 - 2n$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 2n - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\}$$

$$= 2n - 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = -1$ 은 ①에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n - 3$$
→ ①

따라서 $a_1 = -1$, $a_3 = 3$, $a_5 = 7$, \dots , $a_{19} = 35$ 이므로

$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}$ 는 첫째항이 -1 , 끝항이 35, 항수가 10인 등차수열의 합과 같다.

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = \frac{10(-1+35)}{2}$$

$$= 170$$
→ ②

답 170

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	60 %
② $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

1008 [전략] 주어진 조건을 이용하여 등차수열의 첫째항에 대한 식을 세운다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_n = a + (n-1) \cdot 4$$

$$|a_3 - 2| = |a_4 - 2| \text{에서}$$

$$|a + 2 \cdot 4 - 2| = |a + 3 \cdot 4 - 2|$$

$$|a + 6| = |a + 10|$$

이때 $a + 6 \neq a + 10$ 이므로

$$a + 6 = -(a + 10), \quad 2a = -16$$

$$\therefore a = -8$$

따라서 $a_n = -8 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 12$ 이므로

$$a_6 = 4 \cdot 6 - 12 = 12$$
답 12

1009 [전략] 주어진 수열을 $\{a_n\}$ 이라 하면 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 이 등차수열임을 이용한다.

풀이 수열 $10, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, 2$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d 라 하면

$$10+4d=2, \quad 4d=-8$$

$$\therefore d=-2$$

따라서 $\frac{1}{x}=10-2=8, \frac{1}{y}=8-2=6, \frac{1}{z}=6-2=4$ 이므로

$$x=\frac{1}{8}, y=\frac{1}{6}, z=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{yz}{x}=\frac{1}{x} \cdot y \cdot z=8 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

→ ①

→ ②

→ ③

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
① 공차를 구할 수 있다.	50 %
② x, y, z 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $\frac{yz}{x}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른풀이 수열 $10, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, 2$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 수열 $10, \frac{1}{y}, 2$ 도 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$$\text{즉 } \frac{1}{y}=\frac{10+2}{2}=6 \text{이므로 } y=\frac{1}{6}$$

수열 $10, \frac{1}{x}, 6$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\frac{1}{x}=\frac{10+6}{2}=8 \quad \therefore x=\frac{1}{8}$$

또 수열 $6, \frac{1}{z}, 2$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\frac{1}{z}=\frac{6+2}{2}=4 \quad \therefore z=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{yz}{x}=\frac{1}{3}$$

1010 전략 n 각형의 내각의 크기의 합은 $180^\circ(n-2)$ 임을 이용한다.

풀이 n 각형의 내각의 크기의 합은

$$180^\circ(n-2)=180^\circ n-360^\circ$$

첫째항이 30, 공차가 40, 항수가 n 인 등차수열의 합은

$$\frac{n\{2 \cdot 30+(n-1) \cdot 40\}}{2}=20n^2+10n$$

따라서 $20n^2+10n=180n-360$ 이므로

$$20n^2-17n+36=0, \quad (n-4)(2n-9)=0$$

$$\therefore n=4 \text{ 또는 } n=\frac{9}{2}$$

이때 n 은 자연수이므로 $n=4$

답 4

1011 전략 먼저 a_m, a_{m+k} 를 구한 후 등차수열의 합의 공식을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n=30-(n-1)d$$

이므로

$$a_m=30-(m-1)d, a_{m+k}=30-(m+k-1)d$$

즉 $a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{m+k}$ 는 첫째항이 $30-(m-1)d$, 끝항이 $30-(m+k-1)d$, 항수가 $k+1$ 인 등차수열의 합이므로

$$\frac{(k+1)\{30-(m-1)d+30-(m+k-1)d\}}{2}=0$$

$$\frac{(k+1)\{60-(2m+k-2)d\}}{2}=0$$

이때 $k+1>0$ 이므로 $60-(2m+k-2)d=0$

$$(2m+k-2)d=60$$

$$\therefore 2m+k=2+\frac{60}{d}$$

따라서 위의 식을 만족시키는 두 자연수 m, k 가 존재하려면 d 가 60의 양의 약수이어야 한다.

$60=2^2 \cdot 3 \cdot 5$ 이므로 자연수 d 의 개수는

$$3 \cdot 2 \cdot 2=12$$

답 ②

라센 특강 자연수의 약수의 개수

자연수 $N=a^\alpha b^\beta c^\gamma$ 의 양의 약수의 개수는

$$(a+1)(\beta+1)(\gamma+1) \quad (\text{단, } a, b, c \text{는 서로 다른 소수})$$

1012 전략 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구한 후 처음으로 음수가 되는 항을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_9=25+8d=9, \quad 8d=-16 \quad \therefore d=-2$$

$$\therefore a_n=25+(n-1) \cdot (-2)=-2n+27$$

$$-2n+27<0 \text{에서 } n>\frac{27}{2}=13.5$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제13항까지 양수이고, 제14항부터 음수이다.

이때 $a_{13}=1, a_{14}=-1, a_{20}=-13$ 이므로

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$$

$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{13})-(a_{14}+a_{15}+a_{16}+\cdots+a_{20})$$

$$=\frac{13(25+1)}{2}-\frac{7\{-1+(-13)\}}{2}$$

$$=169+49=218$$

답 218

1013 전략 등차수열의 합의 공식을 이용하여 일반항을 구한 후 처음으로 양수가 되는 항을 구한다.

풀이 주어진 등차수열의 공차를 d , 일반항을 a_n 이라 하면

$$S_2=\frac{2\{2 \cdot (-1)+d\}}{2}=d-2$$

$$S_7=\frac{7\{2 \cdot (-1)+6d\}}{2}=21d-7$$

이때 $S_2=S_7$ 에서 $d-2=21d-7$

$$20d=5 \quad \therefore d=\frac{1}{4}$$

$$\therefore a_n=-1+(n-1) \cdot \frac{1}{4}=\frac{1}{4}n-\frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{4}n-\frac{5}{4}>0 \text{에서 } n>5$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 제6항부터 양수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_5=\frac{1}{4} \cdot 5-\frac{5}{4}=0$ 이므로 구하는 최솟값은

$$S_5=\frac{5(-1+0)}{2}=-\frac{5}{2}$$

답 ②

참고 $a_5=0$ 이므로 $S_4=S_5$ 이다. 따라서 S_4 를 구해도 된다.

09

등비수열

Ⅲ. 수열

1014 $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \dots = 2$

답 2

1015 $\frac{3}{6} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \dots = \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

1016 $\frac{3}{1} = 3$ 에서 공비가 3이므로 주어진 수열은
1, 3, $\boxed{9}$, 27, 81, ...

답 9

1017 $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ 에서 공비가 $\frac{1}{5}$ 이므로 주어진 수열은
10, 2, $\boxed{\frac{2}{5}}$, $\frac{2}{25}$, $\frac{2}{125}$, ...

답 $\frac{2}{5}$

1018 $\frac{-54}{18} = -3$ 에서 공비가 -3이므로 주어진 수열은
2, $\boxed{-6}$, 18, -54, 162, ...

답 -6

1019 $\frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$ 에서 공비가 $-\frac{1}{6}$ 이므로 주어진 수열은
6, -1, $\boxed{\frac{1}{6}}$, $-\frac{1}{36}$, $\frac{1}{216}$, ...

답 $\frac{1}{6}$

1020 $a_n = -6 \cdot 4^{n-1}$

1021 $a_n = 4 \cdot (-5)^{n-1}$

1022 첫째항이 1, 공비가 $\frac{-4}{1} = -4$ 이므로

$a_n = 1 \cdot (-4)^{n-1} = (-4)^{n-1}$ 답 $a_n = (-4)^{n-1}$

1023 첫째항이 1000, 공비가 $\frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$ 이므로

$a_n = 1000 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-4}$ 답 $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-4}$

1024 x 는 1과 25의 등비중항이므로

$x^2 = 1 \cdot 25 = 25 \quad \therefore x = \pm 5$ 답 -5 또는 5

1025 x 는 7과 2의 등비중항이므로

$x^2 = 7 \cdot 2 = 14 \quad \therefore x = \pm \sqrt{14}$ 답 $-\sqrt{14}$ 또는 $\sqrt{14}$

1026 $\frac{3(2^8-1)}{2-1} = 765$

답 765

1027 $8 \cdot (-1) = -8$

답 -8

1028 첫째항이 8, 공비가 $\frac{16}{8} = 2$ 이므로

$\frac{8(2^8-1)}{2-1} = 2040$ 답 2040

1029 첫째항이 2, 공비가 $\frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$ 이므로

$\frac{2\{1-(-\sqrt{2})^8\}}{1-(-\sqrt{2})} = \frac{-30}{1+\sqrt{2}} = 30(1-\sqrt{2})$ 답 $30(1-\sqrt{2})$

1030 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 이므로

$\frac{1\{1-(\frac{1}{2})^8\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{1}{2}} = \frac{255}{256} = \frac{255}{128}$ 답 $\frac{255}{128}$

1031 (1) 첫째항이 $\frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$, 공비가 $\frac{1}{3^4} = 3$ 이므로

$a_n = \frac{1}{81} \cdot 3^{n-1}$

(2) $a_n = \frac{1}{81} \cdot 3^{n-1}$ 이므로

$a_k = \frac{1}{81} \cdot 3^{k-1} = 3, \quad 3^{k-1} = 3^5$

$k-1=5 \quad \therefore k=6$

(3) 첫째항이 $\frac{1}{81}$, 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제6항까지의 합이므로

$\frac{\frac{1}{81}(3^6-1)}{3-1} = \frac{364}{81}$

답 (1) $a_n = \frac{1}{81} \cdot 3^{n-1}$ (2) 6 (3) $\frac{364}{81}$

1032 등비수열 2, 4, 8, ...의 첫째항이 2, 공비가 $\frac{4}{2} = 2$ 이므로 이 수열의 제 k 항을 256이라 하면

$2 \cdot 2^{k-1} = 256, \quad 2^k = 2^8 \quad \therefore k=8$

따라서 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$2+4+8+\dots+256 = \frac{2(2^8-1)}{2-1} = 510$ 답 510

1033 등비수열 12, -6, 3, ...의 첫째항이 12, 공비가 $\frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$

이므로 이 수열의 제 k 항을 $\frac{3}{16}$ 이라 하면

$12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{3}{16}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{64} = \left(-\frac{1}{2}\right)^6$

$k-1=6 \quad \therefore k=7$

따라서 첫째항이 12, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$12-6+3-\dots+\frac{3}{16} = \frac{12\{1-(-\frac{1}{2})^7\}}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{129}{16}$ 답 $\frac{129}{16}$

1034 (1) $a_1 = S_1 = 2^2 - 2 = 2$

(2) $a_{10} = S_{10} - S_9 = (2^{11} - 2) - (2^{10} - 2) = 2^{10}(2-1) = 1024$

(3) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^{n+1} - 2) - (2^n - 2) \\ = 2^n(2 - 1) = 2^n \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $a_1 = 2$ 는 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로
 $a_n = 2^n$

답 (1) 2 (2) 1024 (3) $a_n = 2^n$

1035 (i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) \\ = 3^{n-1}(3 - 1) = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $a_1 = 2$ 는 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로
 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

답 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

1036 (i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 5^1 - 1 = 4$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (5^n - 1) - (5^{n-1} - 1) \\ = 5^{n-1}(5 - 1) = 4 \cdot 5^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $a_1 = 4$ 는 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로
 $a_n = 4 \cdot 5^{n-1}$

답 $a_n = 4 \cdot 5^{n-1}$

1037 (1) a 원을 연이율 3%의 복리로 n 년 동안 예금하면 n 년 후의
 원리합계는 $a \times (1 + 0.03)^n = a \times 1.03^n$ (원)

$$\therefore \textcircled{7} a \times 1.03^4 \quad \textcircled{4} a \times 1.03$$

$$(2) a \times 1.03 + a \times 1.03^2 + \dots + a \times 1.03^5 = \frac{a \times 1.03(1.03^5 - 1)}{1.03 - 1} \\ = \frac{a \times 1.03(1.2 - 1)}{0.03} \\ = \frac{103}{15} a \text{ (원)}$$

답 (1) $\textcircled{7} a \times 1.03^4$ $\textcircled{4} a \times 1.03$ (2) $\frac{103}{15} a$ 원

1038 a 원을 연이율 5%의 복리로 n 년 동안 예금하면 n 년 후의 원
 리합계는 $a \times (1 + 0.05)^n = a \times 1.05^n$ (원)

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$$a \times 1.05 + a \times 1.05^2 + \dots + a \times 1.05^5 \\ = \frac{a \times 1.05(1.05^5 - 1)}{1.05 - 1} = \frac{a \times 1.05(1.3 - 1)}{0.05} \\ = 6.3a \text{ (원)}$$

답 6.3a원

1039 (1) a 원을 연이율 3%의 복리로 n 년 동안 예금하면 n 년 후의 원
 리합계는 $a \times (1 + 0.03)^n = a \times 1.03^n$ (원)

$$\therefore \textcircled{7} a \times 1.03^3 \quad \textcircled{4} a$$

$$(2) a + a \times 1.03 + \dots + a \times 1.03^4 = \frac{a(1.03^5 - 1)}{1.03 - 1} \\ = \frac{a(1.2 - 1)}{0.03} = \frac{20}{3} a \text{ (원)}$$

답 (1) $\textcircled{7} a \times 1.03^3$ $\textcircled{4} a$ (2) $\frac{20}{3} a$ 원

1040 a 원을 연이율 5%의 복리로 n 년 동안 예금하면 n 년 후의 원
 리합계는 $a \times (1 + 0.05)^n = a \times 1.05^n$ (원)

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$$a + a \times 1.05 + \dots + a \times 1.05^4 = \frac{a(1.05^5 - 1)}{1.05 - 1} \\ = \frac{a(1.3 - 1)}{0.05} \\ = 6a \text{ (원)}$$

답 6a원

1041 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_4 = -8 \text{에서} \quad ar^3 = -8 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_7 = 64 \text{에서} \quad ar^6 = 64 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{8} \div \textcircled{7} \text{을 하면} \quad r^3 = -8 \quad \therefore r = -2$$

$$r = -2 \text{를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면} \quad -8a = -8 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a_n = 1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1} \quad \text{답 } a_n = (-2)^{n-1}$$

1042 주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 제8항이 162이므로

$$2\sqrt{3} \cdot r^7 = 162, \quad r^7 = 27\sqrt{3} = (\sqrt{3})^7$$

$$\therefore r = \sqrt{3}$$

답 ①

1043 $a_n = \frac{2}{5^{2n-1}}$ 에서

$$a_1 = \frac{2}{5^1} = \frac{2}{5}, \quad a_2 = \frac{2}{5^3} = \frac{2}{125}$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 $\frac{2}{5}$, 공비는 $\frac{\frac{2}{125}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{25}$ 이다.

답 첫째항: $\frac{2}{5}$, 공비: $\frac{1}{25}$

다른풀이 $a_n = \frac{2}{5^{2n-1}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5^{2n-2}}$
 $= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{5^2}\right)^{n-1} = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{n-1}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 $\frac{2}{5}$, 공비는 $\frac{1}{25}$ 이다.

1044 $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 이므로

$$a_n^2 = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{n-1} = \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{16}$ 인 등비수열이므로

$$a = 1, \quad r = \frac{1}{16} \quad \therefore \frac{a}{r} = 16$$

답 16

1045 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 = 8 \text{에서} \quad ar^2 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_7 = \frac{1}{2} \text{에서} \quad ar^6 = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{8} \div \textcircled{7} \text{을 하면} \quad r^4 = \frac{1}{16} \quad \therefore r = \frac{1}{2} \quad (\because r > 0)$$

$$r = \frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면} \quad \frac{1}{4} a = 8 \quad \therefore a = 32$$

$$\therefore a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{16} \text{을 제 } k \text{항이라 하면} \quad 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^9, \quad k-1=9 \quad \therefore k=10$$

따라서 $\frac{1}{16}$ 은 제10항이다.

답 제10항

1046 주어진 수열은 첫째항이 $\frac{1}{12}$, 공비가 $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}}=2$ 인 등비수열이

므로 일반항을 a_n 이라 하면 $a_n = \frac{1}{12} \cdot 2^{n-1}$

$\frac{512}{3}$ 를 제 k 항이라 하면 $\frac{1}{12} \cdot 2^{k-1} = \frac{512}{3}$

$$2^{k-1} = 2^{11}, \quad k-1=11 \quad \therefore k=12$$

따라서 $\frac{512}{3}$ 는 제 12항이다. 답 ④

1047 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = -3 \text{에서} \quad ar = -3 \quad \dots\dots ①$$

$$a_5 : a_7 = 1 : 4 \text{에서} \quad 4a_5 = a_7, \quad 4ar^4 = ar^6$$

$$r^2 = 4 \quad \therefore r = -2 \quad (\because r < 0)$$

$$r = -2 \text{를 } ① \text{에 대입하면} \quad -2a = -3 \quad \therefore a = \frac{3}{2} \quad \dots\dots ①$$

$$\text{따라서 } a_n = \frac{3}{2} \cdot (-2)^{n-1} \text{이므로} \quad \dots\dots ②$$

$$a_6 = \frac{3}{2} \cdot (-2)^5 = -48 \quad \dots\dots ③$$

답 -48

채점 기준	비율
① a, r 의 값을 구할 수 있다.	60 %
② a_n 을 구할 수 있다.	20 %
③ a_6 을 구할 수 있다.	20 %

1048 $\log_2 a_4 = 2$ 에서 $a_4 = 2^2 = 4$

이때 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 $a_4 = 1 \cdot r^3 = r^3$ 이므로 $r^3 = 4$

$$\text{따라서 } a_{13} = 1 \cdot r^{12} = (r^3)^4 = 4^4 = 2^8 \text{이므로}$$

$$\log_2 a_{13} = \log_2 2^8 = 8 \quad \text{답 ④}$$

1049 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면 $a_n = a \cdot 3^{n-1}$ 이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 = 3a + 3^3a + 3^5a = 3a(1 + 3^2 + 3^4)$$

$$a_5 + a_7 + a_9 = 3^4a + 3^6a + 3^8a = 3^4a(1 + 3^2 + 3^4)$$

$$\therefore \frac{a_5 + a_7 + a_9}{a_2 + a_4 + a_6} = \frac{3^4a(1 + 3^2 + 3^4)}{3a(1 + 3^2 + 3^4)} = 3^3 = 27 \quad \text{답 27}$$

1050 주어진 등비수열의 공비를 r , 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_4 = 3 \text{에서} \quad 81 \cdot r^3 = 3, \quad r^3 = \frac{1}{27} \quad \therefore r = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } a_n = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{이므로 } 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \frac{1}{162}, \quad 3^{n-1} > 162$$

$$\text{이때 } 3^4 = 81, \quad 3^5 = 243 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 5 \quad \therefore n \geq 6$$

따라서 처음으로 $\frac{1}{2}$ 보다 작아지는 항은 제 6항이다. 답 제 6항

1051 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 = 2 \text{에서} \quad ar^2 = 2 \quad \dots\dots ①$$

$$a_5 = 4 \text{에서} \quad ar^4 = 4 \quad \dots\dots ②$$

$$① \div ② \text{을 하면} \quad r^2 = 2 \quad \therefore r = \sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

$$r = \sqrt{2} \text{를 } ① \text{에 대입하면} \quad 2a = 2 \quad \therefore a = 1 \quad \dots\dots ①$$

$$\text{따라서 } a_n = 1 \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^{n-1} \text{이므로}$$

$$a_n^2 = \{(\sqrt{2})^{n-1}\}^2 = \{(2)^{\frac{n-1}{2}}\}^2 = 2^{n-1} \quad \dots\dots ②$$

$$a_n^2 > 500 \text{에서} \quad 2^{n-1} > 500$$

$$\text{이때 } 2^8 = 256, \quad 2^9 = 512 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 9 \quad \therefore n \geq 10$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10이다. 답 10

채점 기준	비율
① a, r 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② a_n^2 을 구할 수 있다.	30 %
③ 자연수 n 의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

1052 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 + a_6 = 9 \text{에서} \quad ar^2 + ar^5 = 9$$

$$\therefore ar^2(1 + r^3) = 9 \quad \dots\dots ①$$

$$a_4 + a_7 = 18 \text{에서} \quad ar^3 + ar^6 = 18$$

$$\therefore ar^3(1 + r^3) = 18 \quad \dots\dots ②$$

$$① \div ② \text{을 하면} \quad r = 2$$

$$r = 2 \text{를 } ① \text{에 대입하면} \quad a \cdot 4 \cdot 9 = 9 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} \text{이므로 } \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} > 1000 \text{에서}$$

$$2^{n-1} > 4000$$

$$\text{이때 } 2^{11} = 2048, \quad 2^{12} = 4096 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 12 \quad \therefore n \geq 13$$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제 13항이다. 답 ②

1053 주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 2, 제 6항이 2048이므로

$$2r^5 = 2048, \quad r^5 = 1024 \quad \therefore r = 4$$

이때 a_1 과 a_3 은 각각 주어진 수열의 제 2항과 제 4항이므로

$$a_1 = 2 \cdot 4 = 8, \quad a_3 = 2 \cdot 4^3 = 128$$

$$\therefore a_1 + a_3 = 136 \quad \text{답 ④}$$

1054 주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 8, 제 5항이 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$8r^4 = \frac{1}{2}, \quad r^4 = \frac{1}{16} \quad \therefore r = \frac{1}{2} \quad (\because r > 0)$$

이때 a_3 은 주어진 수열의 제 4항이므로

$$a_3 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 \quad \text{답 1}$$

1055 첫째항이 18, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열의 제 $(n+2)$ 항이 $\frac{2}{243}$

$$\text{이므로} \quad 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{2}{243}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^7$$

$$n+1=7 \quad \therefore n=6 \quad \text{답 ②}$$

1056 세 양수 $x, x+3, 4x$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(x+3)^2 = x \cdot 4x, \quad x^2 + 6x + 9 = 4x^2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0, \quad (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x=3 \quad (\because x>0) \quad \text{답 3}$$

1057 세 수 2, a , 18이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $a^2=2 \cdot 18=36 \quad \therefore a=6 (\because a>0)$
 또 세 수 6, 18, b 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $18^2=6b \quad \therefore b=54$
 $\therefore a+b=60$

답 60

1058 세 수 a , b , c 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $b^2=ac$
 $b^3=8ac$ 에서 $b^3=8b^2 \quad \therefore b=8 (\because b \neq 0)$
 따라서 세 수 1, a , 8이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $a^2=8 \quad \therefore a=-2\sqrt{2}$ 또는 $a=2\sqrt{2}$
 이때 주어진 등비수열의 공비가 1보다 크므로
 $a=2\sqrt{2}$

답 ②

1059 세 수 $\sin \theta$, $\frac{1}{4}$, $\cos \theta$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $\sin \theta \cos \theta = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$
 $\therefore \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
 $= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$
 $= \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$

답 ⑤

1060 세 수 -2 , a , b 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
 $2a=-2+b \quad \therefore b=2a+2$ ㉠
 세 수 a , b , 18이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $b^2=18a$ ㉡
 ㉠을 ㉡에 대입하면
 $(2a+2)^2=18a, \quad 4a^2+8a+4=18a$
 $2a^2-5a+2=0, \quad (2a-1)(a-2)=0$
 $\therefore a=2 (\because a>1)$
 $a=2$ 를 ㉠에 대입하면 $b=6$
 $\therefore a+b=8$

답 8

1061 다항식 $f(x)=2x^2-x+a$ 를 일차식 x , $x-1$, $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 각각
 $R_1=f(0)=a, R_2=f(1)=a+1, R_3=f(2)=a+6$ ①
 이때 a , $a+1$, $a+6$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $(a+1)^2=a(a+6), \quad a^2+2a+1=a^2+6a$
 $4a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$ ②
 답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
① R_1, R_2, R_3 를 구할 수 있다.	40 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	60 %

라벤 특강 나머지정리

다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-\alpha$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면
 $R=f(\alpha)$

1062 세 실수를 a , ar , ar^2 으로 놓으면
 $a+ar+ar^2=3$ 에서 $a(1+r+r^2)=3$ ㉠
 $a \cdot ar \cdot ar^2=-8$ 에서 $(ar)^3=-8$ ㉡
 ㉡에서 $ar=-2 \quad \therefore a=-\frac{2}{r}$ ㉢

$a=-\frac{2}{r}$ 를 ㉠에 대입하면
 $-\frac{2}{r}(1+r+r^2)=3$
 양변에 r 를 곱하여 정리하면
 $2r^2+5r+2=0, \quad (r+2)(2r+1)=0$
 $\therefore r=-2$ 또는 $r=-\frac{1}{2}$

㉢에서 $r=-2$ 일 때 $a=1$, $r=-\frac{1}{2}$ 일 때 $a=4$ 이므로 세 실수는
 $1, -2, 4$
 따라서 가장 큰 수는 4이다.

답 ⑤

1063 주어진 삼차방정식의 세 실근을 a , ar , ar^2 으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $a+ar+ar^2=p$
 $a \cdot ar+ar \cdot ar^2+ar^2 \cdot a=-24$ ㉠
 $a \cdot ar \cdot ar^2=-64$ ㉡ ①
 ㉡에서 $(ar)^3=-64 \quad \therefore ar=-4$ ②
 ㉠에서 $ar(a+ar+ar^2)=-24$ 이므로
 $-4p=-24 \quad \therefore p=6$ ③
 답 6

채점 기준	비율
① 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	50 %
② ar 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ p 의 값을 구할 수 있다.	20 %

1064 세 실수를 a , ar , ar^2 으로 놓으면
 $a+ar+ar^2=13$ 에서 $a(1+r+r^2)=13$ ㉠
 $a^2+(ar)^2+(ar^2)^2=91$ 에서 $a^2+a^2r^2+a^2r^4=91$
 $\therefore a^2(1+r^2+r^4)=91$
 ㉠을 제곱하면 $a^2(1+r+r^2)^2=13^2$
 $a^2(1+r^2+r^4+2r+2r^2+2r^3)=169$
 $a^2(1+r^2+r^4)+2ar \cdot a(1+r+r^2)=169$
 $91+2ar \cdot 13=169 \quad \therefore ar=3$
 따라서 세 수의 곱은
 $a \cdot ar \cdot ar^2=(ar)^3=27$

답 27

1065 1회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $256 \cdot \frac{3}{4}$
 2회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $256 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = 256 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$
 \vdots
 n 회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $256 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$
 따라서 5회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는
 $256 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 2^8 \cdot \frac{3^5}{2^{10}} = \frac{243}{4}$

답 $\frac{243}{4}$

1066 1번째 튀어 오른 공의 높이는 $2 \cdot \frac{5}{8}(\text{m})$
 2번째 튀어 오른 공의 높이는 $2 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = 2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2(\text{m})$
 \vdots
 n 번째 튀어 오른 공의 높이는 $2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^n(\text{m})$
 따라서 8번째 튀어 오른 공의 높이는
 $2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^8 = 2 \cdot \frac{5^8}{2^{24}} = \frac{5^8}{2^{23}}(\text{m})$ 답 ③

1067 한 번의 길이가 9인 정사각형의 넓이는 $9^2=81$
 첫 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $81 \cdot \frac{8}{9}$
 두 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $81 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} = 81 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$
 \vdots
 n 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $81 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$
 따라서 10번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는
 $81 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{10} = 3^4 \cdot \frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{2^{30}}{3^{16}}$
 즉 $p=30, q=16$ 이므로 $p+q=46$ 답 ④

1068 처음 빵의 단위 무게당 가격을 A 원이라 하면 1번 시행 후
 A 원으로 살 수 있는 빵의 무게는 처음 무게의 $1 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = \frac{4}{5}$ 이다.
 1번 시행 후 빵의 단위 무게당 가격은 $\frac{5}{4}A$ (원)
 2번 시행 후 빵의 단위 무게당 가격은 $\frac{5}{4}A \cdot \frac{5}{4} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 A$ (원)
 3번 시행 후 빵의 단위 무게당 가격은
 $\frac{5}{4}A \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 A = \frac{125}{64}A$ (원)
 따라서 빵의 단위 무게당 가격은 처음의 $\frac{125}{64}$ 배이다. 답 $\frac{125}{64}$ 배

1069 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a_2=10$ 에서 $ar=10$ ㉠
 $a_4=40$ 에서 $ar^3=40$ ㉡
 ㉠÷㉡을 하면 $r^2=4$ $\therefore r=2$ ($\because r>0$)
 $r=2$ 를 ㉠에 대입하면 $2a=10$ $\therefore a=5$
 따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은
 $\frac{5(2^{10}-1)}{2-1}=5115$ 답 5115

1070 주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 제5항이 81이므로
 $1 \cdot r^4=81$ $\therefore r=-3$ ($\because r<0$)
 따라서 주어진 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합은
 $\frac{1\{1-(-3)^5\}}{1-(-3)} = \frac{244}{4}=61$ 답 ③

1071 $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2, \log_2 4^3 = \log_2 2^6 = 6,$
 $\log_2 4^9 = \log_2 2^{18} = 18, \log_2 4^{27} = \log_2 2^{54} = 54$ 이므로 주어진 수열은
 첫째항이 2, 공비가 $\frac{6}{2}=3$ 인 등비수열이다.
 따라서 주어진 등비수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은
 $\frac{2(3^8-1)}{3-1}=3^8-1$ 답 ④

1072 주어진 등비수열은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{12}{3}=4$ 이므로
 $S_n = \frac{3(4^n-1)}{4-1} = 4^n - 1$ ①
 $S_k = 1023$ 에서 $4^k - 1 = 1023$
 $4^k = 1024 = 4^5$ $\therefore k=5$ ②
답 5

채점 기준	비율
① S_n 을 구할 수 있다.	60 %
② k 의 값을 구할 수 있다.	40 %

1073 $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$ 이므로
 $3^{a_n} = 3^{2n-1} = 3^{2(n-1)+1} = 3 \cdot 3^{2(n-1)} = 3 \cdot 9^{n-1}$
 따라서 수열 $\{3^{a_n}\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 9인 등비수열이므로 첫째
 항부터 제10항까지의 합은
 $\frac{3(9^{10}-1)}{9-1} = \frac{3}{8}(9^{10}-1) = \frac{3}{8}(3^{20}-1)$ 답 ③

1074 주어진 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 첫째항부
 터 제3항까지의 합이 14이므로
 $\frac{a(r^3-1)}{r-1}=14$ ㉠
 첫째항부터 제6항까지의 합이 126이므로
 $\frac{a(r^6-1)}{r-1}=126$
 $\therefore \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=126$ ㉡
 ㉠÷㉡을 하면 $r^3+1=9, r^3=8$
 $\therefore r=2$
 $r=2$ 를 ㉠에 대입하면
 $7a=14$ $\therefore a=2$
 따라서 주어진 등비수열의 제5항은 $2 \cdot 2^4=32$ 답 32

1075 주어진 등비수열의 첫째항을 a 라 하면
 $\frac{a\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=55, 11a=55$
 $\therefore a=5$ ①
 따라서 주어진 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은
 $\frac{5\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=-1705$ ②
답 -1705

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	60 %
② 첫째항부터 제10항까지의 합을 구할 수 있다.	40 %

1076 주어진 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$S_n=20 \text{에서} \quad \frac{a(r^n-1)}{r-1}=20 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{2n}=30 \text{에서} \quad \frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=30$$

$$\therefore \frac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1}=30 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면} \quad r^n+1=\frac{3}{2} \quad \therefore r^n=\frac{1}{2}$$

$$\therefore S_{3n}=\frac{a(r^{3n}-1)}{r-1}=\frac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}$$

$$=20 \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} + 1 \right\} = 35 \quad \text{답 35}$$

1077 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

수열 a_1, a_3, a_5, \dots 의 공비는 r^2 이므로

$$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=\frac{a_1\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}=\frac{a_1(r^{10}-1)}{r^2-1}$$

$$\therefore \frac{a_1(r^{10}-1)}{r^2-1}=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

수열 a_2, a_4, a_6, \dots 의 공비도 r^2 이므로

$$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=\frac{a_1r\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}=\frac{a_1r(r^{10}-1)}{r^2-1}$$

$$\therefore \frac{a_1r(r^{10}-1)}{r^2-1}=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면} \quad r=2 \quad \text{답 ②}$$

다른풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=4 \text{에서}$$

$$a+ar^2+ar^4+ar^6+ar^8=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=8 \text{에서}$$

$$ar+ar^3+ar^5+ar^7+ar^9=8$$

$$\therefore r(a+ar^2+ar^4+ar^6+ar^8)=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$4r=8 \quad \therefore r=2$$

1078 $S_n=4^{n+1}-4$ 에서

$$a_1=S_1=4^2-4=12$$

$$a_4=S_4-S_3=(4^5-4)-(4^4-4)=768$$

$$\therefore a_1+a_4=780 \quad \text{답 ⑤}$$

1079 $S_n=2^n-1$ 에서

$$(i) n=1 \text{일 때,} \quad a_1=S_1=2^1-1=1$$

$$(ii) n \geq 2 \text{일 때,}$$

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)$$

$$=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{이때 } a_1=1 \text{은 } \textcircled{1} \text{에 } n=1 \text{을 대입한 것과 같으므로}$$

$$a_n=2^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_n > 1000 \text{에서} \quad 2^{n-1} > 1000 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{이때 } 2^9=512, 2^{10}=1024 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 10 \quad \therefore n \geq 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{따라서 자연수 } n \text{의 최솟값은 } 11 \text{이다.} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{답 11}$$

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	40 %
② n 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ 자연수 n 의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

1080 $S_n=3^{n+1}-3$ 에서

$$(i) n=1 \text{일 때,} \quad a_1=S_1=3^2-3=6$$

$$(ii) n \geq 2 \text{일 때,}$$

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^{n+1}-3)-(3^n-3)$$

$$=3^n(3-1)=2 \cdot 3^n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $a_1=6$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2 \cdot 3^n$$

$$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=2 \cdot 3+2 \cdot 3^3+2 \cdot 3^5+2 \cdot 3^7+2 \cdot 3^9$$

$$=\frac{2 \cdot 3\{(3^2)^5-1\}}{3^2-1}$$

$$=\frac{3}{4}(3^{10}-1) \quad \text{답 ⑤}$$

1081 $S_n=3 \cdot 4^{n+1}+k$ 에서

$$(i) n=1 \text{일 때,} \quad a_1=S_1=3 \cdot 4^2+k=48+k$$

$$(ii) n \geq 2 \text{일 때,}$$

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3 \cdot 4^{n+1}+k)-(3 \cdot 4^n+k)$$

$$=3 \cdot 4^n(4-1)=9 \cdot 4^n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $a_1=48+k$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같아야 하므로

$$48+k=9 \cdot 4 \quad \therefore k=-12 \quad \text{답 -12}$$

1082 매년 말에 200만 원씩 적립하면 10년째 말의 적립금의 원리 합계는

$$200+200(1+0.04)+200(1+0.04)^2+\cdots+200(1+0.04)^9$$

$$=200+200 \times 1.04+200 \times 1.04^2+\cdots+200 \times 1.04^9$$

$$=\frac{200(1.04^{10}-1)}{1.04-1}=\frac{200(1.48-1)}{0.04}$$

$$=2400(\text{만 원}) \quad \text{답 2400만 원}$$

1083 매월 초에 5000원씩 적립하면 1년째, 즉 12개월째 말의 적립금의 원리합계는

$$5000(1+0.01)+5000(1+0.01)^2+\cdots+5000(1+0.01)^{12}$$

$$=5000 \times 1.01+5000 \times 1.01^2+\cdots+5000 \times 1.01^{12}$$

$$=\frac{5000 \times 1.01(1.01^{12}-1)}{1.01-1}=\frac{5000 \times 1.01(1.13-1)}{0.01}$$

$$=65650(\text{원}) \quad \text{답 65650원}$$

1084 매년 말에 a 만 원씩 적립하면 10년째 연말까지 적립금의 원리합계는

$$a+a(1+0.05)+a(1+0.05)^2+\cdots+a(1+0.05)^9$$

$$=a+a \times 1.05+a \times 1.05^2+\cdots+a \times 1.05^9$$

$$=\frac{a(1.05^{10}-1)}{1.05-1}=\frac{a(1.6-1)}{0.05}$$

$$=12a(\text{만 원})$$

이때 $12a=300$ 이어야 하므로 $a=25$ 답 ④

1085 [전략] 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = a \cdot r^{n-1}$ 임을 이용하여 주어진 수열의 일반항을 구한다.

[풀이] $a_n = \frac{5}{4} \cdot 4^{n-1}$ 이므로 $a_k = 1280$ 에서

$$\frac{5}{4} \cdot 4^{k-1} = 1280, \quad 4^{k-1} = 256 \cdot 4 = 4^5$$

$$k-1=5 \quad \therefore k=6 \quad \text{답 ②}$$

1086 [전략] 64는 주어진 수열의 제6항임을 이용한다.

[풀이] 주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 -2 , 제6항이 64이므로

$$-2 \cdot r^5 = 64, \quad r^5 = -32 \quad \therefore r = -2 \quad \text{답 -2}$$

1087 [전략] 주어진 식의 밑을 통일시킨 후 로그의 성질을 이용한다.

[풀이] 세 수 $a, 9, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$\begin{aligned} ab &= 9^2 = 81 \\ \therefore \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_3 b} &= \log_3 a + \log_3 b = \log_3 ab \\ &= \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

1088 [전략] 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열의 제 n 항은 ar^{n-1} 임을 이용하여 공비를 구한다.

[풀이] 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\begin{aligned} a_7 &= 2a_5 \text{에서} \quad 2r^6 = 2 \cdot 2r^4 \\ r^2 &= 2 \quad \therefore r = \sqrt{2} \quad (\because r > 0) \end{aligned} \quad \dots \text{①}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{2\{(\sqrt{2})^8 - 1\}}{\sqrt{2} - 1} = 30(\sqrt{2} + 1) \quad \dots \text{②}$$

$$\text{답 } 30(\sqrt{2} + 1)$$

채점 기준	비율
① r 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② 첫째항부터 제8항까지의 합을 구할 수 있다.	50 %

1089 [전략] 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 S_n 이면 $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 임을 이용하여 일반항 a_n 을 구한다.

[풀이] $S_n = 6^{n+1} - 6$ 에서

$$(i) n=1 \text{일 때,} \quad a_1 = S_1 = 6^2 - 6 = 30$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (6^{n+1} - 6) - (6^n - 6) \\ &= 6^n(6 - 1) = 5 \cdot 6^n \end{aligned} \quad \dots \text{①}$$

이때 $a_1 = 30$ 은 ①에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 5 \cdot 6^n$$

따라서 $p=5, q=6$ 이므로

$$p-q = -1 \quad \text{답 ③}$$

1090 [전략] 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열의 제 n 항은 ar^{n-1} 임을 이용하여 a, r 의 값을 구한다.

$$\text{[풀이]} \quad a_3 = 12 \text{에서} \quad ar^2 = 12 \quad \dots \text{①}$$

$$a_6 = 324 \text{에서} \quad ar^5 = 324 \quad \dots \text{②}$$

$$\text{②} \div \text{①을 하면} \quad r^3 = 27 \quad \therefore r = 3$$

$$r=3 \text{을 ①에 대입하면} \quad 9a = 12 \quad \therefore a = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{a}{r} = \frac{4}{9} \quad \text{답 ②}$$

1091 [전략] 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\text{공비})$ 임을 이용한다.

[풀이] 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 $\frac{a_3}{a_2} - \frac{a_6}{a_4} = \frac{1}{4}$ 에서

$$r - r^2 = \frac{1}{4}, \quad 4r^2 - 4r + 1 = 0$$

$$(2r-1)^2 = 0 \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } a_5 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16} \text{이므로}$$

$$p=16, q=3 \quad \therefore p+q=19 \quad \text{답 19}$$

1092 [전략] 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $2b=a+c$, 등비수열을 이루면 $b^2=ac$ 임을 이용한다.

[풀이] 세 수 $2y, x, 16$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$x = \frac{2y+16}{2} = y+8 \quad \dots \text{①} \quad \dots \text{①}$$

세 수 $2, y, 4x-8$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$y^2 = 2(4x-8) = 8x-16 \quad \dots \text{②} \quad \dots \text{②}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} y^2 &= 8(y+8) - 16, \quad y^2 - 8y - 48 = 0 \\ (y+4)(y-12) &= 0 \quad \therefore y = 12 \quad (\because y > 0) \end{aligned}$$

$$y=12 \text{를 ①에 대입하면} \quad x=20 \quad \dots \text{③}$$

따라서 등차수열 24, 20, 16의 공차는 -4 , 등비수열 2, 12, 72의 공비는 6이므로 $d=-4, r=6$

$$\therefore d+r=2 \quad \dots \text{④}$$

답 2

채점 기준	비율
① 등차중항을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
② 등비중항을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
③ x, y 의 값을 구할 수 있다.	20 %
④ $d+r$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

1093 [전략] 세 점 P, Q, R의 좌표를 구한 후 세 선분 AP, AQ, AR의 길이를 구한다.

[풀이] $P(3, a^3), Q(3, 2^3), R(3, \log_3 3)$, 즉 $P(3, a^3), Q(3, 8), R(3, 1)$ 이므로 $\overline{AP} = a^3, \overline{AQ} = 8, \overline{AR} = 1$

$$\dots \text{①}$$

세 수 $a^3, 8, 1$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$8^2 = a^3 \cdot 1, \quad a^3 = 64 \quad \therefore a = 4 \quad \dots \text{②}$$

답 4

채점 기준	비율
① 세 선분 AP, AQ, AR의 길이를 구할 수 있다.	50 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	50 %

1094 [전략] A노래의 다운로드 건수가 등비수열을 이룸을 이용한다.

[풀이] 1월부터 5월까지 감소하는 일정한 비율을 $r (r > 0)$, A노래의 'n월 다운로드 건수'를 $a_n (n=1, 2, \dots, 5)$ 이라 하자.

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 480이고 공비가 r 인 등비수열이므로

$$a_5 = 480 \cdot r^4 = 30$$

$$r^4 = \frac{1}{16} \quad \therefore r = \frac{1}{2} \quad (\because r > 0)$$

따라서 구하는 A노래의 '3월 다운로드 건수'는

$$a_3 = 480 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 120 \quad \text{답 120}$$

다른풀이 A노래의 '3월 다운로드 건수'를 x 라 하면 480, x , 30은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$x^2 = 480 \cdot 30 = 14400 \quad \therefore x = 120 \quad (\because x > 0)$$

1095 [전략] 첫째항이 a , 공비가 $r(r \neq 1)$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은 $\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ 임을 이용한다.

풀이 $f(11) = 11^{10} + 11^9 + \dots + 11 + 1 = 1 + 11 + 11^2 + \dots + 11^{10}$

$$= \frac{1(11^{11} - 1)}{11 - 1} = \frac{1}{10}(11^{11} - 1) \quad \text{답 ③}$$

1096 [전략] 첫째항이 a , 공비가 $r(r \neq 1)$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은 $\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ 임을 이용한다.

풀이 $S_n = \frac{1}{2}(2^n - 1) = \frac{1}{2}(2^n - 1)$ 이므로 $S_k > 2018$ 에서

$$\frac{1}{2}(2^k - 1) > 2018, \quad 2^k - 1 > 4036 \quad \therefore 2^k > 4037$$

이때 $2^{11} = 2048$, $2^{12} = 4096$ 이므로 $k \geq 12$
 따라서 자연수 k 의 최솟값은 12이다. 답 12

1097 [전략] 주어진 조건을 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비를 구한 후 등비수열의 합의 공식을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r(r > 0)$ 라 하면
 $a_1 a_2 = a_{10}$ 에서 $a_1^2 r = a_1 r^9 \quad \therefore a_1 = r^8 \quad \dots \textcircled{1}$

$a_1 + a_9 = 20$ 에서 $a_1 + a_1 r^8 = 20 \quad \dots \textcircled{2}$

①을 ②에 대입하면

$$a_1 + a_1^2 = 20, \quad a_1^2 + a_1 - 20 = 0 \\ (a_1 + 5)(a_1 - 4) = 0 \quad \therefore a_1 = 4 \quad (\because a_n > 0)$$

$a_1 = 4$ 를 ②에 대입하면 $r^8 = 4$

$$\therefore r^4 = 2$$

이때 a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 는 공비가 r^2 인 등비수열을 이루고, $a_1, -a_3, a_5, -a_7, a_9$ 는 공비가 $-r^2$ 인 등비수열을 이루므로

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9)(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9) \\ &= \frac{a_1\{1 - (r^2)^5\}}{1 - r^2} \cdot \frac{a_1\{1 - (-r^2)^5\}}{1 - (-r^2)} \\ &= \frac{a_1(1 - r^{10})}{1 - r^2} \cdot \frac{a_1(1 + r^{10})}{1 + r^2} = \frac{a_1^2(1 - r^{20})}{1 - r^4} \\ &= \frac{a_1^2\{1 - (r^4)^5\}}{1 - r^4} = \frac{4^2(1 - 2^5)}{1 - 2} \\ &= 496 \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

1098 [전략] 등비수열의 합의 공식과 주어진 조건을 이용하여 공비를 구한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하면

$$S_2 = \frac{a_1(r^2 - 1)}{r - 1}, \quad S_4 = \frac{a_1(r^4 - 1)}{r - 1}$$

$$\frac{S_4}{S_2} = \frac{\frac{a_1(r^4 - 1)}{r - 1}}{\frac{a_1(r^2 - 1)}{r - 1}} = \frac{r^4 - 1}{r^2 - 1} = 9 \text{에서}$$

$$\frac{(r^2 + 1)(r^2 - 1)}{r^2 - 1} = 9$$

$$r^2 + 1 = 9 \quad \therefore r^2 = 8$$

$$\therefore \frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 r^3}{a_1 r} = r^2 = 8 \quad \text{답 ④}$$

참고 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $r=10$ 면 $S_2 = a_1 + a_1 = 2a_1$, $S_4 = a_1 + a_1 + a_1 + a_1 = 4a_1$ 이므로

$$\frac{S_4}{S_2} = \frac{4a_1}{2a_1} = 2 \neq 9 \quad \therefore r \neq 1$$

1099 [전략] 공비를 r 라 하고 등비수열의 합의 공식을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15 \text{에서} \quad \frac{a_1(r^4 - 1)}{r - 1} = 15 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 240 \text{에서}$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) = 15 + 240 = 255$$

$$\text{이므로} \quad \frac{a_1(r^8 - 1)}{r - 1} = 255$$

$$\therefore \frac{a_1(r^4 - 1)(r^4 + 1)}{r - 1} = 255 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면} \quad r^4 + 1 = 17, \quad r^4 = 16$$

$$\therefore r = 2 \quad (\because r > 0) \quad \text{답 2}$$

다른풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15 \text{에서}$$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 = 15 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 240 \text{에서}$$

$$ar^4 + ar^5 + ar^6 + ar^7 = 240$$

$$\therefore r^4(a + ar + ar^2 + ar^3) = 240 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면} \quad r^4 = 16 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

1100 [전략] 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용한다.

풀이 $\because a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$

$\therefore n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) \\ = 3^{n-1}(3 - 1) = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = 2$ 는 ①에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 3인 등비수열이다.

$$\therefore \frac{2}{3}a_n + 1 = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 3^{n-1} + 1 = 4 \cdot 3^{n-2} + 1 \text{이므로}$$

$$S_n \neq \frac{2}{3}a_n + 1$$

이상에서 옳은 것은 \neg, \perp 이다. 답 ②

1101 [전략] 로그의 정의를 이용하여 S_n 을 구한다.

풀이 $\log_5(S_n + 1) = n$ 에서 $S_n + 1 = 5^n$

$$\therefore S_n = 5^n - 1$$

$S_n = 5^n - 1$ 에서

$$(i) n=1 \text{일 때,} \quad a_1 = S_1 = 5^1 - 1 = 4$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 5^n - 1 - (5^{n-1} - 1) \\ = 5^{n-1}(5 - 1) = 4 \cdot 5^{n-1} \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = 4$ 는 ①에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 4 \cdot 5^{n-1}$$

$$\therefore a_2 a_4 = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5^3 = 2^4 \cdot 5^4 \\ = 10^4 = 10000 \quad \text{답 10000}$$

1102 전략 주어진 항을 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_4=14 \text{에서} \quad a+3d=14 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$a_{10}=38 \text{에서} \quad a+9d=38 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, d=4$

$$\therefore a_n=2+(n-1) \cdot 4=4n-2 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$\begin{aligned} \therefore b_n &= 2^{a_n} = 2^{4n-2} = 2^{4(n-1)+2} \\ &= 2^{4(n-1)} \cdot 2^2 = 4 \cdot 16^{n-1} \end{aligned} \quad \cdots \cdots \text{②}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항은 4, 공비는 16이므로 구하는 합은 20이다. ③

답 20

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	40 %
② b_n 을 구할 수 있다.	40 %
③ 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항과 공비의 합을 구할 수 있다.	20 %

1103 전략 등비수열을 이루는 세 수를 a, ar, ar^2 으로 놓고 식을 세운다.

풀이 곡선 $y=x^3+3x^2-6x+k$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 삼차방정식 $x^3+3x^2-6x+k=0$ 의 세 실근과 같다.

즉 $x^3+3x^2-6x+k=0$ 은 서로 다른 세 실근을 가지므로 세 실근을 a, ar, ar^2 으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+ar+ar^2=-3$$

$$a \cdot ar+ar \cdot ar^2+ar^2 \cdot a=-6 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$a \cdot ar \cdot ar^2=-k \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠에서 $ar(a+ar+ar^2)=-6$ 이므로

$$-3ar=-6 \quad \therefore ar=2$$

$ar=2$ 를 ㉡에 대입하면

$$-k=(ar)^3=2^3=8 \quad \therefore k=-8 \quad \text{답 ①}$$

1104 전략 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비를 구하여 a_n^2 을 구한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3=6 \text{에서} \quad ar^2=6 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$a_6=48 \text{에서} \quad ar^5=48 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉡} \div \text{㉠} \text{을 하면} \quad r^3=8 \quad \therefore r=2$$

$$r=2 \text{를 } \text{㉠} \text{에 대입하면} \quad 4a=6 \quad \therefore a=\frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \text{①}$$

따라서 $a_n=\frac{3}{2} \cdot 2^{n-1}$ 이므로

$$a_n^2=\left(\frac{3}{2} \cdot 2^{n-1}\right)^2=\frac{9}{4} \cdot 4^{n-1} \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\therefore a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{9}{4} \cdot 4+\frac{9}{4} \cdot 4^2+\cdots+\frac{9}{4} \cdot 4^9$$

$$=\frac{9}{4} \frac{(4^{10}-1)}{4-1}=\frac{3}{4} (2^{20}-1) \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{답 } \frac{3}{4} (2^{20}-1)$$

채점 기준	비율
① a, r 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② a_n^2 을 구할 수 있다.	20 %
③ $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

1105 전략 매년 생산하는 석유의 양이 등비수열을 이룬다고 이용한다.

풀이 2018년의 석유 생산량을 a 톤이라 하고 석유 생산량이 지난해의 r 배가 된다고 하면 n 년 후의 석유 생산량은

$$ar^n \text{ (톤)}$$

2018년부터 2023년까지 생산하는 석유가 3000톤이므로

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^5=3000$$

$$\therefore \frac{a(r^6-1)}{r-1}=3000 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

2024년부터 2029년까지 생산하는 석유가 2000톤이므로

$$ar^6+ar^7+ar^8+\cdots+ar^{11}=2000$$

$$\therefore \frac{ar^6(r^6-1)}{r-1}=2000 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉡} \div \text{㉠} \text{을 하면} \quad r^6=\frac{2}{3}$$

따라서 2030년의 석유 생산량은

$$ar^{12}=a(r^6)^2=\frac{4}{9}a \text{ (톤)}$$

이므로 2018년의 석유 생산량의 $\frac{4}{9}$ 배이다. 답 $\frac{4}{9}$ 배

1106 전략 등비수열을 이루는 네 수를 a, ar, ar^2, ar^3 으로 놓고 조건을 만족시키는 a, r 의 값을 찾는다.

풀이 서로 다른 네 개의 수를 a, ar, ar^2, ar^3 (a, r 는 자연수, $a \geq 100, r > 1$)으로 놓으면

$$ar^3 < 1000 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

(i) $r=2$ 일 때,

$$\text{㉠에서 } 8a < 1000 \text{이므로} \quad a < 125$$

$$\therefore a=100, 101, 102, \cdots, 124$$

(ii) $r \geq 3$ 일 때,

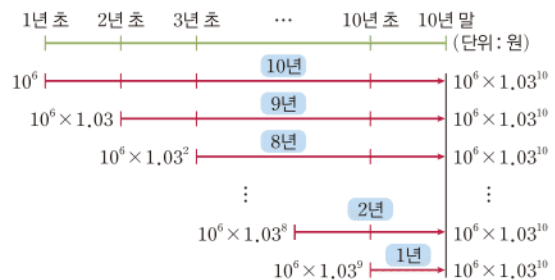
$a \geq 100, ar^3 < 1000$ 을 만족시키는 자연수 a 는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=124, r=2$ 일 때 네 수의 합이 가장 크므로 구하는 합은

$$\frac{124(2^4-1)}{2-1}=1860 \quad \text{답 ②}$$

1107 전략 매년 초에 적립하는 금액의 원리합계를 그림으로 나타낸다.

풀이 매년 초에 적립하는 금액의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 10년째 말의 적립금의 원리합계는

$$10^6 \times 1.03^{10} \times 10 = 1.34 \times 10^7$$

$$=1340 \text{ (만 원)}$$

답 1340만 원

10

수열의 합

Ⅲ. 수열

1108 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20} = \sum_{k=1}^{20} a_k$ 답 20, k

1109 $b_{11} + b_{12} + b_{13} + \cdots + b_{25} = \sum_{k=11}^{25} b_k$ 답 25, 11

1110 $\sum_{k=1}^n 2k$

1111 $\sum_{k=10}^{21} 5^k$

1112 $1 + 4 + 9 + \cdots + 64 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 8^2$
 $= \sum_{k=1}^8 k^2$ 답 $\sum_{k=1}^8 k^2$

1113 $\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k(k+1)}$

1114 $7 + 14 + 21 + \cdots + 70$

1115 $\sum_{i=1}^{10} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3$
 $= 1 + 8 + 27 + \cdots + 1000$ 답 $1 + 8 + 27 + \cdots + 1000$

1116 $\sum_{j=2}^5 2^j = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$
 $= 4 + 8 + 16 + 32$ 답 $4 + 8 + 16 + 32$

1117 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{7}$

1118 $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 1 = 2 + 1 \cdot 10 = 12$ 답 12

1119 $\sum_{k=1}^{10} (5a_k + b_k) = 5 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 5 \cdot 2 + 3 = 13$ 답 13

1120 $\sum_{k=1}^{10} 2(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{10} (2a_k + 2b_k) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} b_k$
 $= 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10$ 답 10

1121 $\sum_{k=1}^{10} (a_k - 3b_k + 1) = \sum_{k=1}^{10} a_k - 3 \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 1$
 $= 2 - 3 \cdot 3 + 1 \cdot 10 = 3$ 답 3

1122 $1 + 2 + 3 + \cdots + 8 = \sum_{k=1}^8 k = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$ 답 36

1123 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 8^2 = \sum_{k=1}^8 k^2 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204$ 답 204

1124 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 8^3 = \sum_{k=1}^8 k^3 = \left(\frac{8 \cdot 9}{2}\right)^2$
 $= 36^2 = 1296$ 답 1296

1125 $\sum_{k=1}^5 (2k + 5) = 2 \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 5 = 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + 5 \cdot 5$
 $= 30 + 25 = 55$ 답 55

1126 $\sum_{k=1}^6 (k^2 - 3k) = \sum_{k=1}^6 k^2 - 3 \sum_{k=1}^6 k = \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} - 3 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2}$
 $= 91 - 63 = 28$ 답 28

1127 $\sum_{k=1}^7 (k^3 - k + 1) = \sum_{k=1}^7 k^3 - \sum_{k=1}^7 k + \sum_{k=1}^7 1$
 $= \left(\frac{7 \cdot 8}{2}\right)^2 - \frac{7 \cdot 8}{2} + 1 \cdot 7$
 $= 784 - 28 + 7$
 $= 763$ 답 763

1128 $\sum_{k=1}^5 (k+1)(k-1) = \sum_{k=1}^5 (k^2 - 1) = \sum_{k=1}^5 k^2 - \sum_{k=1}^5 1$
 $= \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 1 \cdot 5$
 $= 55 - 5 = 50$ 답 50

1129 $\sum_{k=1}^6 k^2(k-1) = \sum_{k=1}^6 (k^3 - k^2) = \sum_{k=1}^6 k^3 - \sum_{k=1}^6 k^2$
 $= \left(\frac{6 \cdot 7}{2}\right)^2 - \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6}$
 $= 441 - 91 = 350$ 답 350

1130 (1) $a_n = n(n+1)$
 (2) $a_k = 110$ 에서 $k(k+1) = 110 = 10 \cdot 11$
 $\therefore k = 10$
 (3) $2 + 6 + 12 + \cdots + 110 = \sum_{k=1}^{10} k(k+1) = \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k)$
 $= \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k$
 $= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2}$
 $= 385 + 55 = 440$
답 (1) $a_n = n(n+1)$ (2) 10 (3) 440

1131 수열 2, 4, 6, ...의 일반항을 a_n 이라 하면
 $a_n = 2n$
 $a_k = 20$ 에서 $2k = 20 \quad \therefore k = 10$
 $\therefore 2 + 4 + 6 + \cdots + 20 = \sum_{k=1}^{10} 2k = 2 \sum_{k=1}^{10} k$
 $= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 110$ 답 110

1132 수열 3, 5, 7, ...의 일반항을 a_n 이라 하면
 $a_n = 2n + 1$
 $a_k = 41$ 에서 $2k + 1 = 41$
 $2k = 40 \quad \therefore k = 20$

$$\begin{aligned}\therefore 3+5+7+\cdots+41 &= \sum_{k=1}^{20} (2k+1) = 2 \sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 1 \\ &= 2 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} + 1 \cdot 20 \\ &= 420 + 20 \\ &= 440\end{aligned}$$

답 440

1133 수열 $1^2, 3^2, 5^2, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= (2n-1)^2 \\ a_k &= 17^2 \text{에서 } (2k-1)^2 = 17^2 \\ 2k-1 &= 17, \quad 2k=18 \quad \therefore k=9 \\ \therefore 1^2+3^2+5^2+\cdots+17^2 &= \sum_{k=1}^9 (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^9 (4k^2-4k+1) \\ &= 4 \sum_{k=1}^9 k^2 - 4 \sum_{k=1}^9 k + \sum_{k=1}^9 1 \\ &= 4 \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} - 4 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} + 1 \cdot 9 \\ &= 1140 - 180 + 9 \\ &= 969\end{aligned}$$

답 969

$$\begin{aligned}\textbf{1134} \quad 5^2+6^2+7^2+\cdots+12^2 &= \sum_{k=5}^{12} k^2 = \sum_{k=1}^{12} k^2 - \sum_{k=1}^4 k^2 \\ &= \frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} \\ &= 650 - 30 = 620\end{aligned}$$

답 620

다른풀이 수열 $5^2, 6^2, 7^2, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= (n+4)^2 \\ a_k &= 12^2 \text{에서 } (k+4)^2 = 12^2 \\ k+4 &= 12 \quad \therefore k=8 \\ \therefore 5^2+6^2+7^2+\cdots+12^2 &= \sum_{k=1}^8 (k+4)^2 = \sum_{k=1}^8 (k^2+8k+16) \\ &= \sum_{k=1}^8 k^2 + 8 \sum_{k=1}^8 k + \sum_{k=1}^8 16 \\ &= \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + 8 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} + 16 \cdot 8 \\ &= 204 + 288 + 128 = 620\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textbf{1135} \quad 3^3+4^3+5^3+\cdots+8^3 &= \sum_{k=3}^8 k^3 = \sum_{k=1}^8 k^3 - \sum_{k=1}^2 k^3 \\ &= \left(\frac{8 \cdot 9}{2}\right)^2 - \left(\frac{2 \cdot 3}{2}\right)^2 \\ &= 1296 - 9 = 1287\end{aligned}$$

답 1287

다른풀이 수열 $3^3, 4^3, 5^3, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= (n+2)^3 \\ a_k &= 8^3 \text{에서 } (k+2)^3 = 8^3, \quad k+2=8 \\ \therefore k &= 6 \\ \therefore 3^3+4^3+5^3+\cdots+8^3 &= \sum_{k=1}^6 (k+2)^3 = \sum_{k=1}^6 (k^3+6k^2+12k+8) \\ &= \sum_{k=1}^6 k^3 + 6 \sum_{k=1}^6 k^2 + 12 \sum_{k=1}^6 k + \sum_{k=1}^6 8 \\ &= \left(\frac{6 \cdot 7}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} + 12 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 8 \cdot 6 \\ &= 441 + 546 + 252 + 48 = 1287\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textbf{1136} \quad &\text{수열 } 1 \cdot 6, 2 \cdot 7, 3 \cdot 8, \dots \text{의 일반항을 } a_n \text{이라 하면} \\ &a_n = n(n+5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_k &= 10 \cdot 15 \text{에서 } k(k+5) = 10 \cdot 15 \quad \therefore k=10 \\ \therefore 1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + \cdots + 10 \cdot 15 &= \sum_{k=1}^{10} k(k+5) = \sum_{k=1}^{10} (k^2+5k) = \sum_{k=1}^{10} k^2 + 5 \sum_{k=1}^{10} k \\ &= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 5 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 385 + 275 = 660\end{aligned}$$

답 660

$$\begin{aligned}\textbf{1137} \quad &\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}\end{aligned}$$

답 $\frac{5}{12}$

$$\begin{aligned}\textbf{1138} \quad &\sum_{k=1}^5 \frac{2}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{2}{(2k+3)-(2k+1)} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{13} = \frac{10}{39}\end{aligned}$$

답 $\frac{10}{39}$

$$\begin{aligned}\textbf{1139} \quad &\sum_{k=1}^8 \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^8 \frac{1}{(k+2)-k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{58}{45} \\ &= \frac{29}{45}\end{aligned}$$

답 $\frac{29}{45}$

1140 수열 $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{n(n+1)} \\ a_k &= \frac{1}{9 \cdot 10} \text{에서 } \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{9 \cdot 10} \quad \therefore k=9 \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^9 \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}\end{aligned}$$

답 $\frac{9}{10}$

1141 수열 $\frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ a_k &= \frac{1}{19 \cdot 21} \text{에서 } \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{19 \cdot 21}\end{aligned}$$

$$2k-1=19 \quad \therefore k=10$$

\therefore (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k+1)-(2k-1)} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{10}{21} \quad \text{답 10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1142 \quad & \sum_{k=3}^{14} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\ &= (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) + (\sqrt{7} - \sqrt{6}) + \cdots + (\sqrt{16} - \sqrt{15}) \\ &= \sqrt{16} - \sqrt{4} = 4 - 2 = 2 \quad \text{답 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1143 \quad & \sum_{k=1}^{21} \frac{1}{\sqrt{k+3} + \sqrt{k+4}} \\ &= \sum_{k=1}^{21} \frac{\sqrt{k+4} - \sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+4} + \sqrt{k+3})(\sqrt{k+4} - \sqrt{k+3})} \\ &= \sum_{k=1}^{21} (\sqrt{k+4} - \sqrt{k+3}) \\ &= (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) + (\sqrt{7} - \sqrt{6}) + \cdots + (\sqrt{25} - \sqrt{24}) \\ &= \sqrt{25} - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3 \quad \text{답 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1144 \quad & \sum_{k=1}^7 \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^7 \frac{2(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})} \\ &= \sum_{k=1}^7 (\sqrt{k+2} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{8} - \sqrt{6}) + (\sqrt{9} - \sqrt{7}) \\ &= \sqrt{8} + \sqrt{9} - 1 - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3 - 1 - \sqrt{2} \\ &= 2 + \sqrt{2} \quad \text{답 2} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1145 \quad & \text{수열 } \frac{1}{\sqrt{2+1}}, \frac{1}{\sqrt{3+2}}, \frac{1}{\sqrt{4+3}}, \dots \text{의 일반항을 } a_n \text{이라} \\ & \text{하면 } a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ & a_k = \frac{1}{\sqrt{16} + \sqrt{15}} \text{에서 } \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{16} + \sqrt{15}} \\ & \therefore k=15 \\ & \therefore \text{ (주어진 식)} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} \\ &= \sum_{k=1}^{15} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{16} - \sqrt{15}) \\ &= \sqrt{16} - 1 = 4 - 1 = 3 \quad \text{답 3} \end{aligned}$$

$$1146 \quad \text{수열 } \frac{2}{\sqrt{3+1}}, \frac{2}{\sqrt{5+3}}, \frac{2}{\sqrt{7+5}}, \dots \text{의 일반항을 } a_n \text{이라}$$

$$\text{하면 } a_n = \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

$$a_k = \frac{2}{\sqrt{25} + \sqrt{23}} \text{에서}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}} = \frac{2}{\sqrt{25} + \sqrt{23}}$$

$$2k+1=25, \quad 2k-1=23 \quad \therefore k=12$$

\therefore (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{12} \frac{2}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{12} \frac{2(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})}{(\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^{12} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\ &= (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{25} - \sqrt{23}) \\ &= \sqrt{25} - 1 = 5 - 1 = 4 \quad \text{답 4} \end{aligned}$$

$$1147 \quad \sum_{k=2}^{100} a_k = 5 \text{에서}$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} = 5 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$\sum_{k=1}^{99} a_k = 3 \text{에서}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{99} = 3 \quad \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠} - \text{㉡} \text{을 하면 } a_{100} - a_1 = 2 \quad \text{답 4}$$

$$1148 \quad \textcircled{1} \sum_{k=1}^{3n} 3k = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 3 \cdot 3n$$

$$= 3 + 6 + 9 + \cdots + 9n$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^{10} (2k-1)$$

$$= (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \cdots + (2 \cdot 10 - 1)$$

$$= 1 + 3 + 5 + \cdots + 19$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=1}^n 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

$$= 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=1}^6 (-1)^{k+1}$$

$$= (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7$$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$$

$$\textcircled{5} \sum_{k=1}^{10} (k+1)^2 = (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + \cdots + (10+1)^2$$

$$= 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 11^2$$

$$= 4 + 9 + 16 + \cdots + 121$$

따라서 옳은 것은 ④이다. 답 4

참고 ① $3 + 6 + 9 + \cdots + 3n = \sum_{k=1}^n 3k$ ② $1 + 3 + 5 + \cdots + 21 = \sum_{k=1}^{11} (2k-1)$

③ $4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1}$ ⑤ $4 + 9 + 16 + \cdots + 100 = \sum_{k=1}^9 (k+1)^2$

$$1149 \quad \sum_{k=1}^9 f(k+1) - \sum_{k=2}^{10} f(k-1)$$

$$= \{f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(10)\}$$

$$- \{f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(9)\}$$

$$= f(10) - f(1) = 80 - 4 = 76 \quad \text{답 76}$$

$$\begin{aligned} 1150 \quad \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} a_k \end{aligned} \quad \cdots ①$$

$$\text{이므로} \quad \sum_{k=1}^{2n} a_k = 3n^2 - 2n$$

위의 식의 양변에 $n=10$ 을 대입하면

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = 3 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10 = 280 \quad \cdots ②$$

답 280

채점 기준	비율
① $\sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k})$ 를 변형할 수 있다.	60 %
② $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

$$\begin{aligned} 1151 \quad \sum_{k=1}^{10} (a_k + 2)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + 4a_k + 4) \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 4 \sum_{k=1}^{10} a_k + 4 \cdot 10 \\ &= 8 + 4 \cdot 4 + 40 = 64 \end{aligned} \quad \cdots ③$$

답 ③

$$\begin{aligned} 1152 \quad \sum_{k=1}^{20} a_k &= \alpha, \quad \sum_{k=1}^{20} b_k = \beta \text{라 하자.} \\ \sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k) &= 12 \text{에서} \quad \sum_{k=1}^{20} a_k + \sum_{k=1}^{20} b_k = 12 \\ \therefore \alpha + \beta &= 12 \end{aligned} \quad \cdots ㉠$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} (a_k - b_k) &= -4 \text{에서} \quad \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^{20} b_k = -4 \\ \therefore \alpha - \beta &= -4 \end{aligned} \quad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $\alpha = 4, \beta = 8$

$$\begin{aligned} \text{따라서} \quad \sum_{k=1}^{20} a_k &= 4, \quad \sum_{k=1}^{20} b_k = 8 \text{이므로} \\ \sum_{k=1}^{20} (2a_k - 4b_k + 3) &= 2 \sum_{k=1}^{20} a_k - 4 \sum_{k=1}^{20} b_k + 3 \cdot 20 \\ &= 2 \cdot 4 - 4 \cdot 8 + 60 = 36 \end{aligned} \quad \cdots \text{답 36}$$

$$\begin{aligned} 1153 \quad \sum_{k=1}^{15} (a_k - b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{15} (a_k^2 - 2a_k b_k + b_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{15} (a_k^2 + b_k^2) - 2 \sum_{k=1}^{15} a_k b_k \\ \therefore \sum_{k=1}^{15} (a_k^2 + b_k^2) &= \sum_{k=1}^{15} (a_k - b_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{15} a_k b_k \\ &= 10 + 2 \cdot 20 = 50 \end{aligned} \quad \cdots \text{답 50}$$

$$\begin{aligned} 1154 \quad \sum_{k=1}^{100} \frac{3^k - 4^k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{100} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^k - 2^k \right] = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{3}{2} \right)^k - \sum_{k=1}^{100} 2^k \\ &= \frac{\frac{3}{2} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{100} - 1 \right]}{\frac{3}{2} - 1} - \frac{2(2^{100} - 1)}{2 - 1} \\ &= 3 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{100} - 1 \right] - 2(2^{100} - 1) \\ &= -1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{100} - 2 \cdot 2^{100} \end{aligned}$$

따라서 $a=3, b=-2$ 이므로 $a+b=1$ 답 ③

$$\begin{aligned} 1155 \quad \sum_{k=1}^{20} 2^{-k} \cos k\pi &= \frac{1}{2} \cos \pi + \frac{1}{2^2} \cos 2\pi + \frac{1}{2^3} \cos 3\pi + \cdots + \frac{1}{2^{20}} \cos 20\pi \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{20}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{20} \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} = -\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{20} \right\} \end{aligned} \quad \cdots ①$$

답 ①

$$\begin{aligned} 1156 \quad 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{k-1} &= \frac{1 \cdot (3^k - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{2} (3^k - 1) \quad \cdots ① \\ \therefore \sum_{k=1}^n (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{k-1}) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (3^k - 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 3^k - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} - \frac{1}{2} \cdot n \\ &= \frac{3}{4} \cdot 3^n - \frac{1}{2} n - \frac{3}{4} \end{aligned} \quad \cdots ②$$

따라서 $a = \frac{3}{4}, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{3}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} a + b + c &= -\frac{1}{2} \quad \cdots ③ \\ \text{답} \quad &-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{k-1}$ 을 간단히 할 수 있다.	30 %
② $\sum_{k=1}^n (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{k-1})$ 을 $a \cdot 3^n + bn + c$ 꼴로 나타낼 수 있다.	50 %
③ $a + b + c$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

$$\begin{aligned} 1157 \quad \sum_{k=1}^{10} (2k-3)^2 - \sum_{k=1}^{10} (2k)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (4k^2 - 12k + 9) - \sum_{k=1}^{10} 4k^2 \\ &= -12 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 9 \\ &= -12 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 9 \cdot 10 \\ &= -660 + 90 \\ &= -570 \end{aligned} \quad \cdots \text{답 -570}$$

$$\begin{aligned} 1158 \quad \sum_{k=1}^n (4k-1) &= 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= 2n^2 + n \\ \text{따라서} \quad 2n^2 + n &= 36 \text{이므로} \quad 2n^2 + n - 36 = 0 \\ (2n+9)(n-4) &= 0 \quad \therefore n = -\frac{9}{2} \text{ 또는 } n = 4 \\ \text{그런데 } n \text{은 자연수이므로} \quad n &= 4 \end{aligned} \quad \cdots \text{답 4}$$

$$\begin{aligned} 1159 \quad a_n &= 3n - 2 \text{에서} \\ a_{2k-1} &= 3(2k-1) - 2 = 6k - 5 \\ \therefore \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} (6k - 5) = 6 \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 5 \\ &= 6 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - 5(n-1) \\ &= 3n^2 - 8n + 5 \end{aligned} \quad \cdots \text{답 ②}$$

$$\begin{aligned}
 1160 \quad \frac{1+2+3+\cdots+k}{k+1} &= \frac{1}{k+1}(1+2+3+\cdots+k) \\
 &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^k i \\
 &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k(k+1)}{2} \\
 &= \frac{k}{2} \quad \cdots ① \\
 \therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{1+2+3+\cdots+k}{k+1} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} k \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = \frac{55}{2} \quad \cdots ②
 \end{aligned}$$

답 55/2

채점 기준	비율
① 수열의 일반항을 간단히 할 수 있다.	50 %
② 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

1161 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_k + \beta_k = k, \alpha_k \beta_k = -k$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \alpha_k^2 + \beta_k^2 &= (\alpha_k + \beta_k)^2 - 2\alpha_k \beta_k \\
 &= k^2 - 2 \cdot (-k) = k^2 + 2k \\
 \therefore \sum_{k=1}^5 (\alpha_k^2 + \beta_k^2) &= \sum_{k=1}^5 (k^2 + 2k) \\
 &= \sum_{k=1}^5 k^2 + 2 \sum_{k=1}^5 k \\
 &= \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} \\
 &= 55 + 30 = 85
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 1162 \quad \sum_{n=1}^7 \left(\sum_{m=1}^n mn \right) &= \sum_{n=1}^7 \left(n \sum_{m=1}^n m \right) = \sum_{n=1}^7 \left[n \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^7 (n^3 + n^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^7 n^3 + \sum_{n=1}^7 n^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{7 \cdot 8}{2} \right)^2 + \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} \right] \\
 &= \frac{1}{2} (784 + 140) = 462
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 1163 \quad \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{m=1}^k (2m-k) \right\} &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^k 2m - \sum_{m=1}^k k \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left\{ 2 \cdot \frac{k(k+1)}{2} - k^2 \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^n k \\
 &= \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\approx \frac{n(n+1)}{2} = 66 \text{이므로}$$

$$n(n+1) = 132 = 11 \cdot 12 \quad \therefore n = 11$$

답 11

$$\begin{aligned}
 1164 \quad \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n (i+j) \right] &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n i + \sum_{j=1}^n j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^m \left[in + \frac{n(n+1)}{2} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^m in + \sum_{i=1}^m \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= n \sum_{i=1}^m i + \frac{n(n+1)}{2} \cdot m \\
 &= n \cdot \frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \cdot m \\
 &= \frac{mn(m+n+2)}{2} \\
 &= \frac{30(11+2)}{2} = 195
 \end{aligned}$$

답 ⑤

1165 수열 1·3, 2·5, 3·7, ...의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n(2n+1) = 2n^2 + n$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 (2k^2 + k) = 2 \sum_{k=1}^8 k^2 + \sum_{k=1}^8 k \\
 &= 2 \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + \frac{8 \cdot 9}{2} \\
 &= 408 + 36 = 444
 \end{aligned}$$

답 444

1166 수열 1·2², 2·3², 3·4², ...의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n(n+1)^2 = n^3 + 2n^2 + n$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (k^3 + 2k^2 + k) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} k^3 + 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k \\
 &= \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 + 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} \\
 &= 3025 + 770 + 55 \\
 &= 3850
 \end{aligned}$$

답 ④

1167 (1) $a_1 = 9 = 10 - 1$, $a_2 = 99 = 100 - 1 = 10^2 - 1$,

$$a_3 = 999 = 1000 - 1 = 10^3 - 1, \dots \text{이므로}$$

$$a_n = 10^n - 1$$

①

$$\begin{aligned}
 (2) S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (10^k - 1) = \sum_{k=1}^n 10^k - \sum_{k=1}^n 1 \\
 &= \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n = \frac{10}{9} (10^n - 1) - n
 \end{aligned}$$

②

$$\text{답 (1) } a_n = 10^n - 1 \quad (2) S_n = \frac{10}{9} (10^n - 1) - n$$

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	50 %
② S_n 을 구할 수 있다.	50 %

1168 수열 1, 1+3, 1+3+5, ...의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$$

$$= \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

한편 $2n-1=13$ 에서 $n=7$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^7 a_k = \sum_{k=1}^7 k^2 = \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} = 140 \quad \text{답 ②}$$

1169 수열 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2, \left(1+\frac{2}{n}\right)^2, \left(1+\frac{3}{n}\right)^2, \dots$ 의 일반항을 a_k 라 하면

$$a_k = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 = 1 + \frac{2k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$$

따라서 주어진 식은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= n + \frac{2}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{6n^2 + 6n(n+1) + (n+1)(2n+1)}{6n} \\ &= \frac{6n(2n+1) + (n+1)(2n+1)}{6n} \\ &= \frac{(2n+1)(7n+1)}{6n} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}$$

1170 수열 $1 \cdot (n-1), 2 \cdot (n-2), 3 \cdot (n-3), \dots$ 의 일반항을 a_k 라 하면

$$a_k = k(n-k) = nk - k^2$$

따라서 주어진 식은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} a_k &= \sum_{k=1}^{n-1} (nk - k^2) = n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= n \cdot \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)\{3n - (2n-1)\}}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{6} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

1171 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - 2n$$

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 - 2 = -1$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = n^2 - 2n - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\} \\ &= 2n - 3 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = -1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n - 3$$

따라서 $a_{2k-1} = 2(2k-1) - 3 = 4k - 5$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{10} (4k - 5) = 4 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 5 \\ &= 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 5 \cdot 10 \\ &= 220 - 50 = 170 \end{aligned} \quad \text{답 170}$$

1172 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 3$$

이므로 $a_1 = S_1 = 1^2 + 3 = 4$

$$a_{30} = S_{30} - S_{29} = (30^2 + 3) - (29^2 + 3) = 59$$

$$\therefore a_1 + a_{30} = 63 \quad \text{답 ④}$$

다른풀이 $S_n = n^2 + 3$ 에서

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 4$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = n^2 + 3 - \{(n-1)^2 + 3\} \\ &= 2n - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 + a_{30} = 4 + (2 \cdot 30 - 1) = 63$$

1173 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$$

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = 2$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n$$

따라서 $ka_k = k \cdot 2k = 2k^2$ 이므로

$$\sum_{k=1}^8 ka_k = \sum_{k=1}^8 2k^2 = 2 \sum_{k=1}^8 k^2 = 2 \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 408 \quad \text{답 ④}$$

1174 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2^{n+1} - 2$$

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2^2 - 2 = 2$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = 2^{n+1} - 2 - (2^n - 2) \\ &= 2^n (2 - 1) = 2^n \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = 2$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2^n$$

$$\therefore a_{2k} = 2^{2k} = 4^k \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^7 a_{2k} = \sum_{k=1}^7 4^k = \frac{4(4^7 - 1)}{4 - 1} = \frac{2^{16} - 4}{3} \quad \dots \textcircled{3}$$

따라서 $p=3, q=16$ 이므로 $p+q=19$

답 19

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	40 %
② $\sum_{k=1}^7 a_{2k}$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $p+q$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

1175 수열 2, 5, 8, ...은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항은

$$2 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 1$$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제14항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{14} a_k &= \sum_{k=1}^{14} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{41} - \frac{1}{44} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{44} \right) = \frac{7}{44} \quad \text{답 ④}\end{aligned}$$

1176 수열 $1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} \\ &= 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \quad \cdots ①\end{aligned}$$

한편 $a_k = \frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 에서

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2+3+\cdots+k} &= \frac{1}{1+2+3+\cdots+10} \quad \therefore k=10 \\ \therefore (\text{주어진 식}) \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{20}{11} \quad \cdots ②\end{aligned}$$

답 20/11

채점 기준	비율
① 수열의 일반항을 구할 수 있다.	50 %
② 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

1177 수열 $\frac{1}{2^2-1}, \frac{1}{4^2-1}, \frac{1}{6^2-1}, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{(2n)^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)\end{aligned}$$

한편 $a_k = \frac{1}{100^2-1}$ 에서 $\frac{1}{(2k)^2-1} = \frac{1}{100^2-1}$
 $2k=100 \quad \therefore k=50$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \cdots + \frac{1}{100^2-1} \\ &= \sum_{k=1}^{50} a_k = \sum_{k=1}^{50} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{101} \right) = \frac{50}{101}\end{aligned}$$

따라서 $p=101, q=50$ 이므로 $p-q=51$ 답 51

1178 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = -4, \alpha_n \beta_n = -(4n^2 - 1)$$

이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} &= \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{4}{4n^2 - 1} = \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= 2 \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{30} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{30} 2 \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{59} - \frac{1}{61} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{61} \right) = \frac{120}{61} \quad \text{답 120/61}\end{aligned}$$

1179 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})} \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\end{aligned}$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제23항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{23} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{23} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \cdots + (\sqrt{25} - \sqrt{24}) \\ &= \sqrt{25} - \sqrt{2} = 5 - \sqrt{2} \quad \text{답 ②}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1180 \quad \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} &= \frac{2(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})} \\ &= \sqrt{k+2} - \sqrt{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{79} \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{79} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{80} - \sqrt{78}) + (\sqrt{81} - \sqrt{79}) \\ &= \sqrt{80} + \sqrt{81} - 1 - \sqrt{2} = 4\sqrt{5} - \sqrt{2} + 8\end{aligned}$$

따라서 $a=4, b=8$ 이므로 $a+b=12$ 답 ②

1181 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항과 공차가 모두 3인 등차수열이므로

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n \quad \cdots ①$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} &= \frac{1}{\sqrt{3k} + \sqrt{3(k+1)}} \\ &= \frac{\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k}}{(\sqrt{3k+3} + \sqrt{3k})(\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k})} \\ &= \frac{1}{3} (\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k}) \quad \cdots ②\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{24} (\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k}) \\ &= \frac{1}{3} \{ (\sqrt{6} - \sqrt{3}) + (\sqrt{9} - \sqrt{6}) + (\sqrt{12} - \sqrt{9}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{75} - \sqrt{72}) \} \\ &= \frac{1}{3} (\sqrt{75} - \sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \cdots ③\end{aligned}$$

답 4√3/3

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	20 %
② $\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$ 을 간단히 할 수 있다.	40 %
③ 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

1182 $\sum_{k=1}^{63} \log_2 \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{63} \log_2 \frac{k+1}{k}$$

$$= \log_2 \frac{2}{1} + \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \cdots + \log_2 \frac{64}{63}$$

$$= \log_2 \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{64}{63}\right)$$

$$= \log_2 64$$

$$= \log_2 2^6 = 6$$

답 ③

1183 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항과 공비가 모두 3인 등비수열이므로

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \quad \cdots ①$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \log_{27} a_k = \sum_{k=1}^n \log_{3^3} 3^k$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6} \quad \cdots ②$$

즉 $\frac{n(n+1)}{6} = 155$ 이므로

$$n(n+1) = 155 \cdot 6 = 30 \cdot 31$$

$$\therefore n = 30 \quad \cdots ③$$

답 30

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	20 %
② $\sum_{k=1}^n \log_{27} a_k$ 를 간단히 할 수 있다.	50 %
③ n 의 값을 구할 수 있다.	30 %

1184 $a_n = 1 + \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{n^2}{n^2 - 1}$ 이므로

$$\sum_{k=2}^{19} \log a_k$$

$$= \sum_{k=2}^{19} \log \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

$$= \sum_{k=2}^{19} \log \left(\frac{k}{k-1} \cdot \frac{k}{k+1} \right)$$

$$= \log \left(\frac{2}{2-1} \cdot \frac{2}{2+1} \right) + \log \left(\frac{3}{3-1} \cdot \frac{3}{3+1} \right)$$

$$+ \log \left(\frac{4}{4-1} \cdot \frac{4}{4+1} \right) + \cdots + \log \left(\frac{19}{19-1} \cdot \frac{19}{19+1} \right)$$

$$= \log \left[\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \cdots \left(\frac{19}{18} \cdot \frac{19}{20} \right) \right]$$

$$= \log \left(2 \cdot \frac{19}{20} \right) = \log \frac{19}{10}$$

따라서 $p=10, q=19$ 이므로

$$p+q=29$$

답 ③

1185 위에서 n 번째 줄에는 n 개의 자연수가 있으므로 첫 번째 줄부터 n 번째 줄까지의 자연수의 개수는

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$n=13$ 일 때 $\frac{13 \cdot 14}{2} = 91$, $n=14$ 일 때 $\frac{14 \cdot 15}{2} = 105$ 이므로 100은 위에서 14번째 줄의 왼쪽에서 9번째에 있다.

따라서 $a=14, b=9$ 이므로 $a+b=23$ 답 ③

1186 각 줄의 첫 번째 수는 차례대로

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots$$

이므로 8번째 줄의 첫 번째 수는

$$8^2 = 64$$

이때 8번째 줄은 왼쪽에서 4번째에 있는 수까지 1씩 줄어들므로 구하는 수는 61이다. 답 ②

1187 n 번째 줄에는 n 개의 자연수가 있으므로 첫 번째 줄부터 9번째 줄까지의 자연수의 개수는

$$\sum_{k=1}^9 k = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

이때 $45+3=48$ 이므로 10번째 줄의 왼쪽에서 3번째에 있는 수는 수열

$$1, 3, 5, 7, \cdots$$

의 제 48항과 같다.

수열 $1, 3, 5, 7, \cdots$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$$

따라서 $a_{48} = 2 \cdot 48 - 1 = 95$ 이므로 구하는 수는 95이다. 답 95

1188 전략 $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 임을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{14} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{15} a_{k-1} = (a_2 + a_3 + \cdots + a_{15}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{14})$

$$= a_{15} - a_1$$

$$= 30 - 3 = 27$$

답 27

1189 전략 $(a_k+1)(a_k-1)$ 을 전개한 후 Σ 의 성질을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{10} (a_k+1)(a_k-1) = \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 - 1) = \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - \sum_{k=1}^{10} 1$

$$= 22 - 10 = 12$$

답 ①

1190 전략 주어진 조건을 이용하여 $a_k + 2b_k$ 를 b_k 에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k) = \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k + b_k)$

$$= \sum_{k=1}^{10} (10 + b_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} 10 + \sum_{k=1}^{10} b_k$$

$$= 100 + \sum_{k=1}^{10} b_k$$

따라서 $100 + \sum_{k=1}^{10} b_k = 160$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = 60$$

답 ①

1191 [전략] 주어진 식을 간단히 한 후 자연수의 거듭제곱의 합을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^5 (k+3)^2 - \sum_{k=1}^5 (k^2+5) = \sum_{k=1}^5 (k^2+6k+9) - \sum_{k=1}^5 (k^2+5)$
 $= \sum_{k=1}^5 (6k+4)$
 $= 6 \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 4$
 $= 6 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + 4 \cdot 5$
 $= 90 + 20 = 110$ **답 110**

1192 [전략] $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 로 놓고 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 임을 이용하여 a_{40} 을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면
 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n(n-1)$
 $\therefore a_{40} = S_{40} - S_{39} = 40 \cdot 39 - 39 \cdot 38$
 $= 39(40 - 38) = 78$ **답 ②**

1193 [전략] $\sum_{k=1}^{99} (a_{k+1} - a_k)$ 를 합의 꼴로 나타내어 간단히 한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{99} (a_{k+1} - a_k) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{100} - a_{99})$
 $= a_{100} - a_1 = a_{100} - 1$ \cdots ①
 따라서 $a_{100} - 1 = 300$ 이므로 $a_{100} = 301$ \cdots ②
답 301

채점 기준	비율
① $\sum_{k=1}^{99} (a_{k+1} - a_k)$ 를 간단히 할 수 있다.	80 %
② a_{100} 을 구할 수 있다.	20 %

1194 [전략] 주어진 두 등식에 $n=10$ 을 대입한 값을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^n a_k = 3n, \sum_{k=1}^n b_k = \frac{1}{2}n^2$ 에 $n=10$ 을 각각 대입하면
 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3 \cdot 10 = 30, \sum_{k=1}^{10} b_k = \frac{1}{2} \cdot 10^2 = 50$
 $\therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k + 4b_k - 3) = \sum_{k=1}^{10} a_k + 4 \sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 3$
 $= 30 + 4 \cdot 50 - 3 \cdot 10$
 $= 200$ **답 ③**

1195 [전략] 주어진 두 등식을 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 $a_8 a_{10} = 100$ 에서
 $a_1 r^7 \cdot a_1 r^9 = 100, \quad a_1^2 r^{16} = 100$
 $(a_1 r^8)^2 = 10^2$
 이때 모든 항이 양수이므로 $a_1 r^8 = 10$ \cdots ①
 $a_9 + a_{11} = 30$ 에서 $a_1 r^8 + a_1 r^{10} = 30$
 $\therefore a_1 r^8 (1 + r^2) = 30$ \cdots ②
 ①을 ②에 대입하면
 $10(1 + r^2) = 30, \quad r^2 + 1 = 3, \quad r^2 = 2$
 $\therefore r = \sqrt{2} (\because r > 0)$

$r = \sqrt{2}$ 를 ①에 대입하면

$$a_1 \cdot (\sqrt{2})^8 = 10 \quad \therefore a_1 = \frac{5}{8}$$

따라서 $a_n = \frac{5}{8} (\sqrt{2})^{n-1}$ 이므로

$$a_{2k-1} = \frac{5}{8} (\sqrt{2})^{2k-1-1} = \frac{5}{8} \{(\sqrt{2})^2\}^{k-1}$$

$$= \frac{5}{8} \cdot 2^{k-1}$$

$$\therefore \sum_{k=5}^{10} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^4 a_{2k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{5}{8} \cdot 2^{k-1} - \sum_{k=1}^4 \frac{5}{8} \cdot 2^{k-1}$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1} - \frac{5}{8} \cdot \frac{2^4-1}{2-1}$$

$$= \frac{5}{8} (1023 - 15) = 630$$
 답 630

다른 풀이 a_9 는 a_8 과 a_{10} 의 등비중항이므로

$$a_9^2 = a_8 a_{10} = 100 \quad \therefore a_9 = 10 (\because a_9 > 0)$$

$$a_9 + a_{11} = 30$$
에서 $10 + a_{11} = 30 \quad \therefore a_{11} = 20$
 따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 공비가 2인 등비수열이므로
 $\sum_{k=5}^{10} a_{2k-1} = a_9 + a_{11} + a_{13} + \cdots + a_{19}$
 $= \frac{10(2^6 - 1)}{2 - 1} = 630$

1196 [전략] 주어진 등식을 이용하여 $a_k - a_{k+1}$ 을 구한 후 자연수의 거듭제곱의 합을 계산한다.

풀이 $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$ 에서 $a_k - a_{k+1} = -2k + 5$ 이므로 \cdots ①
 $k(a_k - a_{k+1}) = k(-2k + 5) = -2k^2 + 5k$
 $\therefore \sum_{k=1}^{10} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{10} (-2k^2 + 5k) = -2 \sum_{k=1}^{10} k^2 + 5 \sum_{k=1}^{10} k$
 $= -2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 5 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}$
 $= -770 + 275$
 $= -495$ \cdots ②
답 -495

채점 기준	비율
① $k(a_k - a_{k+1})$ 을 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
② $\sum_{k=1}^{10} k(a_k - a_{k+1})$ 의 값을 구할 수 있다.	60 %

1197 [전략] $\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$ 임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\sum_{k=0}^n (x-k)^2 = \sum_{k=1}^n (x+k)^2$ 에서
 $x^2 + \sum_{k=1}^n (x-k)^2 = \sum_{k=1}^n (x+k)^2$
 $x^2 + \sum_{k=1}^n \{(x-k)^2 - (x+k)^2\} = 0$
 $x^2 - \sum_{k=1}^n 4kx = 0, \quad x^2 - 4x \sum_{k=1}^n k = 0$
 $x^2 - 4x \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 0, \quad x^2 - 2xn(n+1) = 0$
 $x\{x - 2n(n+1)\} = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2n(n+1)$
 따라서 $a_n = 2n(n+1)$ 이므로
 $a_{10} = 2 \cdot 10 \cdot 11 = 220$ **답 ③**

1198 [전략] 원을 이등분하는 직선은 원의 중심을 지남을 이용한다.

[풀이] 직선 $y=3x+a_n$ 이 원 $(x-n)^2+(y-6n^2-3n)^2=4n$ 을 이등분하므로 직선 $y=3x+a_n$ 은 원의 중심 $(n, 6n^2+3n)$ 을 지난다. $6n^2+3n=3n+a_n$ 에서 $a_n=6n^2$

따라서 $ka_k=k \cdot 6k^2=6k^3$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 ka_k &= \sum_{k=1}^5 6k^3 = 6 \sum_{k=1}^5 k^3 \\ &= 6 \cdot \left(\frac{5 \cdot 6}{2}\right)^2 \\ &= 1350\end{aligned}$$

답 1350

1199 [전략] 일반항에서 상수인 것과 상수가 아닌 것을 구별하여 괄호 안부터 계산한다.

[풀이] $\sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^l 1 \right) \right\} = \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^m l \right) = \sum_{m=1}^n \frac{m(m+1)}{2}$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (m^2+m) = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^n m^2 + \sum_{m=1}^n m \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \left(\frac{2n+1}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\end{aligned}$$

답 ①

1200 [전략] 먼저 주어진 수열의 일반항을 구한다.

[풀이] 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 2^{n+1} - 2n$$

→ ①

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^7 a_k &= \sum_{k=1}^7 (2^{k+1} - 2k) = \sum_{k=1}^7 2^{k+1} - 2 \sum_{k=1}^7 k \\ &= \frac{4(2^7-1)}{2-1} - 2 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} \\ &= 508 - 56 = 452\end{aligned}$$

→ ②

답 452

채점 기준	비율
① 수열의 일반항을 구할 수 있다.	40 %
② 첫째항부터 제7항까지의 합을 구할 수 있다.	60 %

1201 [전략] 일반항의 분모를 유리화한다.

[풀이] 수열 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \\ &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \\ \therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1}-1\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{n+1}-1=10$ 이므로 $\sqrt{n+1}=11$

$$n+1=121 \quad \therefore n=120$$

답 ④

1202 [전략] 일반항의 k 에 1, 2, 3, ..., 126을 차례대로 대입한 후 로그의 성질을 이용한다.

[풀이] $\sum_{k=1}^{126} \log_7 \{ \log_{k+1}(k+2) \}$

$$\begin{aligned}&= \log_7 (\log_2 3) + \log_7 (\log_3 4) + \log_7 (\log_4 5) \\ &\quad + \dots + \log_7 (\log_{127} 128) \\ &= \log_7 (\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{127} 128) \\ &= \log_7 \left(\frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \dots \cdot \frac{\log 128}{\log 127} \right) \\ &= \log_7 \left(\frac{\log 128}{\log 2} \right) = \log_7 (\log_2 128) \\ &= \log_7 (2^7) = \log_7 7 = 1\end{aligned}$$

답 ②

라벨 특강 로그의 밑의 변환

$a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, N > 0$ 일 때,

$$\textcircled{1} \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \quad \textcircled{2} \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

1203 [전략] 위에서 m 번째 줄, 왼쪽에서 n 번째에 있는 수의 규칙을 찾아본다.

[풀이] 위에서 m 번째 줄의 왼쪽에서 n 번째에 있는 수는 mn 대각선 위의 수는 m 번째 줄의 왼쪽에서 m 번째에 있는 수이므로 그 수는 m^2

100은 대각선 위의 수이므로 $100=10^2$ 에서 100은 10번째 줄의 왼쪽에서 10번째에 있다. → ①

따라서 a 는 9번째 줄의 왼쪽에서 9번째에 있는 수, b 는 9번째 줄의 왼쪽에서 10번째에 있는 수, c 는 10번째 줄의 왼쪽에서 9번째에 있는 수이므로

$$a=9^2=81, b=9 \cdot 10=90, c=10 \cdot 9=90$$

→ ②

$$\therefore a+b+c=261$$

→ ③

답 261

채점 기준	비율
① 100이 몇 번째 줄의 왼쪽에서 몇 번째에 있는지 알 수 있다.	30 %
② a, b, c 의 값을 구할 수 있다.	60 %
③ $a+b+c$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

1204 [전략] 나머지정리를 이용하여 a_n 을 구한다.

[풀이] $f(x)=x^{n-1}(x-2)$ 라 하면 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $f(3)$ 이므로

$$f(3)=3^{n-1} \cdot (3-2)=3^{n-1}$$

따라서 $a_n=3^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n 3^{k-1} = \frac{3^n-1}{3-1} = \frac{3^n-1}{2}$$

답 ③

1205 [전략] 삼각형의 넓이 a_n 을 n 에 대한 식으로 나타낸다.

[풀이] $a_n = \frac{1}{2} \cdot \{ (n+1) - (n-1) \} \cdot \frac{3}{n} = \frac{3}{n}$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10} \frac{9}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{9}{\frac{3}{n} \cdot \frac{3}{n+1}} = \sum_{n=1}^{10} (n^2+n) \\ &= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 385 + 55 = 440\end{aligned}$$

답 ④

1206 전략 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 로 놓고 $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용하여 일반항 a_n 을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = (n-1)^2$$

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 0$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n-1)^2 - (n-2)^2 = 2n-3$$

(i), (ii)에서 $a_1 = 0$, $a_n = 2n-3$ ($n \geq 2$)

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^5 a_k^2 &= a_1^2 + \sum_{k=2}^5 a_k^2 = \sum_{k=1}^5 (2k-3)^2 - (2 \cdot 1 - 3)^2 \\ &= \sum_{k=1}^5 (4k^2 - 12k + 9) - 1 \\ &= 4 \sum_{k=1}^5 k^2 - 12 \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 9 - 1 \\ &= 4 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 12 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + 9 \cdot 5 - 1 \\ &= 220 - 180 + 45 - 1 \\ &= 84 \end{aligned}$$

답 ③

1207 전략 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구한다.

풀이 $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$ 이므로

$$a_k = 2k-1, a_{k+1} = 2(k+1)-1 = 2k+1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^8 \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^8 \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{17} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{17} \right) = \frac{8}{17} \end{aligned}$$

답 8/17

1208 전략 n 번째 줄에 나열된 수들의 규칙을 파악한 후 그 합을 식으로 나타낸다.

풀이 n 번째 줄에 나열된 수의 합은 첫째항이 n , 공차가 n 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이다.

n 번째 줄에 나열된 수의 합을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{n\{2n + (n-1) \cdot n\}}{2} = \frac{n^3 + n^2}{2} \quad \cdots ①$$

따라서 첫 번째 줄부터 8번째 줄까지 나열된 수의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 \frac{k^3 + k^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^8 k^3 + \sum_{k=1}^8 k^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{8 \cdot 9}{2} \right)^2 + \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} \right] \\ &= \frac{1}{2} (1296 + 204) = 750 \end{aligned}$$

②

답 750

채점 기준	비율
① n 번째 줄에 나열된 수의 합을 구할 수 있다.	50 %
② 첫 번째 줄부터 8번째 줄까지 나열된 수의 합을 구할 수 있다.	50 %

11

수학적 귀납법

III. 수열

1209 $a_{n+1} = a_n + n + 1$ 에서 $a_1 = 1$ 이므로

$$a_2 = a_1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$a_3 = a_2 + 2 + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$$

$$\therefore a_4 = a_3 + 3 + 1 = 6 + 3 + 1 = 10$$

답 10

1210 $a_{n+1} = na_n + 1$ 에서 $a_1 = 2$ 이므로

$$a_2 = a_1 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$\therefore a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \cdot 7 + 1 = 22$$

답 22

1211 답 $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + 3$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

1212 답 $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

1213 답 -2

1214 $a_{n+1} - a_n = 7$ 에서 $a_{n+1} = a_n + 7$

따라서 구하는 공차는 7이다.

답 7

1215 주어진 수열은 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n+1$$

답 $a_n = 2n+1$

1216 주어진 수열은 첫째항이 7, 공차가 -1 인 등차수열이므로

$$a_n = 7 + (n-1) \cdot (-1) = -n+8$$

답 $a_n = -n+8$

1217 $a_{n+1} - a_n = 5$ 에서 주어진 수열은 공차가 5인 등차수열이다. 이때 첫째항이 $a_1 = -2$ 이므로

$$a_n = -2 + (n-1) \cdot 5 = 5n-7$$

답 $a_n = 5n-7$

1218 $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ 에서 주어진 수열은 등차수열이고

$$a_1 = 12, a_2 - a_1 = 8 - 12 = -4$$

이므로 첫째항이 12, 공차가 -4 이다.

$$\therefore a_n = 12 + (n-1) \cdot (-4)$$

$$= -4n+16$$

답 $a_n = -4n+16$

1219 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 주어진 수열은 등차수열이고

$$a_1 = -5, a_2 - a_1 = -3 - (-5) = 2$$

이므로 첫째항이 -5 , 공차가 2이다.

$$\therefore a_n = -5 + (n-1) \cdot 2 = 2n-7$$

답 $a_n = 2n-7$

1220 주어진 수열은 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열이므로

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 4 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{답 } a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 4 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

참고 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$a_1 = 2, a_2 = 6, a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{또는 } a_1 = 2, a_2 = 6, 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

와 같이 정의할 수도 있다.

1221 주어진 수열은 첫째항이 4, 공차가 -3인 등차수열이므로
 $a_1=4, a_{n+1}=a_n-3 \ (n=1, 2, 3, \dots)$
 답 $a_1=4, a_{n+1}=a_n-3 \ (n=1, 2, 3, \dots)$

1222 답 $a_1=2, a_{n+1}=-2a_n \ (n=1, 2, 3, \dots)$

1223 답 $a_1=8, a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n \ (n=1, 2, 3, \dots)$

1224 답 3

1225 $a_{n+1} \div a_n = -5$ 에서 $a_{n+1} = -5a_n$
 따라서 구하는 공비는 -5이다. 답 -5

1226 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = -2$ 에서 $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$
 따라서 구하는 공비는 $-\frac{1}{2}$ 이다. 답 $-\frac{1}{2}$

1227 주어진 수열은 첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열이므로
 $a_n = 1 \cdot 4^{n-1} = 4^{n-1}$ 답 $a_n = 4^{n-1}$

1228 주어진 수열은 첫째항이 -5, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로
 $a_n = -5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 답 $a_n = -5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

1229 $a_{n+1} \div a_n = 2$ 에서 주어진 수열은 공비가 2인 등비수열이다.
 이때 첫째항이 $a_1 = 2$ 이므로
 $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 답 $a_n = 2^n$

1230 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 에서 주어진 수열은 등비수열이고
 $a_1 = -48, a_2 \div a_1 = 12 \div (-48) = -\frac{1}{4}$

이므로 첫째항이 -48, 공비가 $-\frac{1}{4}$ 이다.
 $\therefore a_n = -48 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 답 $a_n = -48 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

1231 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 주어진 수열은 등비수열이고
 $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 \div a_1 = 4 \div \frac{1}{2} = 8$

이므로 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 8이다.
 $\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 8^{n-1}$ 답 $a_n = \frac{1}{2} \cdot 8^{n-1}$

1232 주어진 수열은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로
 $a_1=3, a_{n+1}=2a_n \ (n=1, 2, 3, \dots)$
 답 $a_1=3, a_{n+1}=2a_n \ (n=1, 2, 3, \dots)$

참고 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로
 $a_1=3, a_2=6, a_{n+1} \div a_n = a_{n+2} \div a_{n+1} \ (n=1, 2, 3, \dots)$
 또는 $a_1=3, a_2=6, a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} \ (n=1, 2, 3, \dots)$
 와 같이 정의할 수도 있다.

1233 주어진 수열은 첫째항이 1, 공비가 -3인 등비수열이므로
 $a_1=1, a_{n+1}=-3a_n \ (n=1, 2, 3, \dots)$
 답 $a_1=1, a_{n+1}=-3a_n \ (n=1, 2, 3, \dots)$

1234 주어진 수열은 첫째항이 100, 공비가 $\frac{1}{10}$ 인 등비수열이므로
 $a_1=100, a_{n+1}=\frac{1}{10}a_n \ (n=1, 2, 3, \dots)$
 답 $a_1=100, a_{n+1}=\frac{1}{10}a_n \ (n=1, 2, 3, \dots)$

1235 답 (가) 0 (나) n

1236 답 (가) $n=1$ (나) $k+1$

1237 답 (가) $n=5$ (나) $k+1$

1238 (i) $n=1$ 일 때,
 (좌변) = 1, (우변) = $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

위의 식의 양변에 $k+1$ 을 더하면

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

\therefore (가) 1 (나) $k+2$ 답 (가) 1 (나) $k+2$

1239 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 65, 공차가 3인 등차수열이므로
 $a_n = 65 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 62$
 $\therefore a_{10} = 3 \cdot 10 + 62 = 92$ 답 ②

1240 $a_{n+1} - a_n = 5$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 5인 등차수열이다.
 이때 첫째항이 $a_1 = -1$ 이므로
 $a_n = -1 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 6$... ①

$a_k = 89$ 에서 $5k - 6 = 89, \quad 5k = 95$
 $\therefore k = 19$... ②

답 19

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	60 %
② k 의 값을 구할 수 있다.	40 %

1241 $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_{10} = 6$ 에서 $a + 9d = 6$ ㉠
 $a_{20} = 11$ 에서 $a + 19d = 11$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \frac{3}{2}, d = \frac{1}{2}$

따라서 $a_n = \frac{3}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + 1$ 이므로

$$a_{30} = \frac{1}{2} \cdot 30 + 1 = 16 \quad \text{답 ④}$$

1242 $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고

$$a_1 = 15, a_2 - a_1 = 11 - 15 = -4$$

이므로 첫째항이 15, 공차가 -4이다.

따라서 $a_n = 15 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 19$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} (-4n + 19) = -4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 19 \cdot 10 \\ &= -220 + 190 = -30 \quad \text{답 -30} \end{aligned}$$

다른풀이 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 은 첫째항이 15, 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \frac{10\{2 \cdot 15 + (10-1) \cdot (-4)\}}{2} = -30$$

1243 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

따라서 $a_{15} = 3^{15-1} = 3^{14}$ 이므로 $k = 14$ 답 14

1244 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ 에서 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1 = 4^8$ 이므로

$$a_n = 4^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (2^2)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^{16}}{2^{n-1}}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{4^{10}} = \frac{1}{(2^2)^{10}} = \frac{1}{2^{20}} \text{에서 } \frac{2^{16}}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{20}}, \quad 2^{k-1} = 2^{36} \\ k-1 &= 36 \quad \therefore k = 37 \quad \text{답 ⑤} \end{aligned}$$

1245 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\sqrt{2}$, 공비가 $\sqrt{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$$

이때 $a_{19} = 512\sqrt{2}$, $a_{20} = 1024$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 이 처음으로 1000 이상인 항은 제 20 항이다. 답 제 20 항

1246 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고

$$a_1 = 1, \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

이므로 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore a_n = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots ①$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^8 a_n &= \frac{1 \cdot \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right] \\ &= \frac{85}{128} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{85}{128}$$

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	60 %
② $\sum_{n=1}^8 a_n$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

1247 $a_{n+1} = a_n + 2n - 3$ 에서 $a_1 = -3$ 이므로

$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 1 - 3 = -3 + (-1) = -4$$

$$a_3 = a_2 + 2 \cdot 2 - 3 = -4 + 1 = -3$$

$$a_4 = a_3 + 2 \cdot 3 - 3 = -3 + 3 = 0$$

$$a_5 = a_4 + 2 \cdot 4 - 3 = 0 + 5 = 5$$

$$a_6 = a_5 + 2 \cdot 5 - 3 = 5 + 7 = 12$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^6 a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= -3 + (-4) + (-3) + 0 + 5 + 12 \\ &= 7 \quad \text{답 ③} \end{aligned}$$

1248 $a_{n+1} = n - a_n$ 에서 $a_1 = 1$ 이므로

$$a_2 = 1 - a_1 = 1 - 1 = 0$$

$$a_3 = 2 - a_2 = 2 - 0 = 2$$

$$\therefore a_4 = 3 - a_3 = 3 - 2 = 1 \quad \text{답 1}$$

1249 $a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} a_n$ 에서 $a_1 = 1$ 이므로

$$a_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} a_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3}$$

$$a_4 = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} a_3 = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4}$$

$$\vdots$$

$$a_{16} = \sqrt{16}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_2 a_{16} &= \log_2 \sqrt{16} = \log_2 2^2 \\ &= 2 \quad \text{답 ④} \end{aligned}$$

1250 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2 & (n \text{은 짝수}) \\ 2a_n & (n \text{은 홀수}) \end{cases}$ 에서 $a_1 = 2$ 이므로

$$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 2 = 4, \quad a_3 = a_2 + 2 = 4 + 2 = 6,$$

$$a_4 = 2a_3 = 2 \cdot 6 = 12, \quad a_5 = a_4 + 2 = 12 + 2 = 14,$$

$$a_6 = 2a_5 = 2 \cdot 14 = 28, \quad a_7 = a_6 + 2 = 28 + 2 = 30,$$

$$a_8 = 2a_7 = 2 \cdot 30 = 60, \quad a_9 = a_8 + 2 = 60 + 2 = 62$$

$$\therefore a_{10} = 2a_9 = 2 \cdot 62 = 124 \quad \text{답 ②}$$

1251 $a_{n+1} = a_n + 2^n$ 에서 $a_1 = a$ 이므로

$$a_2 = a_1 + 2^1 = a + 2$$

$$a_3 = a_2 + 2^2 = a + 2 + 2^2$$

$$a_4 = a_3 + 2^3 = a + 2 + 2^2 + 2^3$$

$$\vdots$$

$$a_9 = a + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8 \quad \cdots ①$$

이때 $a_9 = 550$ 이므로

$$a + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8 = 550 \quad \cdots ②$$

$$a + \frac{2(2^8 - 1)}{2 - 1} = 550$$

$$a + 510 = 550 \quad \therefore a = 40 \quad \cdots ③$$

$$\text{답 40}$$

채점 기준	비율
① $a_2, a_3, a_4, \dots, a_9$ 를 구할 수 있다.	40 %
② a 에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20 %

1252 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ 에서 $a_1=4, a_2=3$ 이므로

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 - a_1 = 3 - 4 = -1 \\ a_4 &= a_3 - a_2 = -1 - 3 = -4 \\ a_5 &= a_4 - a_3 = -4 - (-1) = -3 \\ a_6 &= a_5 - a_4 = -3 - (-4) = 1 \\ a_7 &= a_6 - a_5 = 1 - (-3) = 4 \\ a_8 &= a_7 - a_6 = 4 - 1 = 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 4, 3, -1, -4, -3, 1이 이 순서대로 반복되므로 $a_{n+p}=a_n$ 을 만족시키는 가장 작은 자연수 p 는 6이다. **답 6**

1253 $a_{n+2}=\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n}$ 에서 $a_1=1, a_2=2, a_3=4$ 이므로

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{a_1 a_3}{a_2} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2, & a_5 &= \frac{a_2 a_4}{a_3} = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1, \\ a_6 &= \frac{a_3 a_5}{a_4} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2, & a_7 &= \frac{a_4 a_6}{a_5} = \frac{2 \cdot 2}{1} = 4, \\ a_8 &= \frac{a_5 a_7}{a_6} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2, \dots \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 2, 4, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $99=4 \cdot 24 + 3$ 이므로

$$a_{99}=a_3=4 \quad \text{답 ⑤}$$

1254 $a_1=1$ 에서

$$\begin{aligned} a_2 &= (3 \cdot 1 \text{을 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 3 \\ a_3 &= (3 \cdot 3 \text{을 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 4 \\ a_4 &= (3 \cdot 4 \text{를 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 2 \\ a_5 &= (3 \cdot 2 \text{를 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 1 \\ a_6 &= (3 \cdot 1 \text{을 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 3, 4, 2가 이 순서대로 반복된다. **답 ②**

이때 $2018=4 \cdot 504 + 2, 2019=4 \cdot 504 + 3, 2020=4 \cdot 505$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} &= a_2 + a_3 + a_4 \\ &= 3 + 4 + 2 = 9 \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

답 9

채점 기준	비율
① $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ 을 구할 수 있다.	40 %
② 수열 $\{a_n\}$ 의 규칙을 찾을 수 있다.	40 %
③ $a_{2018} + a_{2019} + a_{2020}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

1255 $(n+1)$ 일 후 수족관에 남아 있는 물의 양 a_{n+1} L는 n 일 후 수족관에 남아 있는 물의 양 a_n L의 $\frac{3}{4}$ 배에 20 L를 더한 것이므로

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + 20 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ \text{답 } a_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + 20 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

1256 (1) 용기에 5마리의 박테리아를 넣고 1시간이 지난 후 용기 안에 들어 있는 박테리아의 수 a_1 은

$$a_1 = (5-3) \cdot 4 = 8$$

(2) $(n+1)$ 시간 후 용기 안에 들어 있는 박테리아의 수 a_{n+1} 은 n 시간 후 용기 안에 들어 있는 박테리아의 수 a_n 에서 3마리는 죽고 나머지는 각각 4마리로 분열하므로

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (a_n - 3) \cdot 4 \\ &= 4a_n - 12 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } 8 \quad (2) a_{n+1} = 4a_n - 12 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

1257 [1단계]의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$$a_1 = 1$$

[2단계]의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$$a_2 = a_1 + 4$$

[3단계]의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$$a_3 = a_2 + 8$$

[4단계]의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$$a_4 = a_3 + 12$$

\vdots

따라서 $[(n+1)\text{단계}]$ 의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$$a_{n+1} = a_n + 4n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{답 } a_{n+1} = a_n + 4n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

1258 $S_{n+1}=3S_n-4$ 에서 $S_1=3$ 이므로

$$S_2 = 3S_1 - 4 = 3 \cdot 3 - 4 = 5$$

$$S_3 = 3S_2 - 4 = 3 \cdot 5 - 4 = 11$$

$$S_4 = 3S_3 - 4 = 3 \cdot 11 - 4 = 29$$

$$S_5 = 3S_4 - 4 = 3 \cdot 29 - 4 = 83$$

$$\therefore a_5 = S_5 - S_4 = 83 - 29 = 54$$

답 ②

1259 $S_n=2a_n-5n$

$\dots \textcircled{1}$

에서

$$S_{n+1} = 2a_{n+1} - 5(n+1) = 2a_{n+1} - 5n - 5$$

이므로

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= S_{n+1} - S_n = 2a_{n+1} - 5n - 5 - (2a_n - 5n) \\ &= 2a_{n+1} - 2a_n - 5 \end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n + 5 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서 $S_1=a_1=2a_1-5$ 이므로

$$a_1 = 5$$

따라서 $a_{n+1}=2a_n+5$ 에서

$$a_2 = 2a_1 + 5 = 2 \cdot 5 + 5 = 15$$

$$a_3 = 2a_2 + 5 = 2 \cdot 15 + 5 = 35$$

$$a_4 = 2a_3 + 5 = 2 \cdot 35 + 5 = 75$$

답 75

1260 \neg . $p(1)$ 이 참이면 주어진 조건에 의하여

$$p(3), p(5), p(7), \dots, p(2n+1)$$

이 모두 참이지만 $p(2n)$ 이 참인지는 알 수 없다.

\neg . $p(2)$ 가 참이면 주어진 조건에 의하여

$$p(4), p(6), p(8), \dots, p(2n+2)$$

가 모두 참이다.

\neg . \neg 에서 $p(1)$ 이 참이면 $p(2n+1)$ 이 참이고, \neg 에서 $p(2)$ 가 참이면 $p(2n+2)$ 가 참이다.

따라서 $p(1), p(2)$ 가 참이면 $p(n)$ 이 참이다.
 이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

1261 조건 (가)에서 $p(1)$ 이 참이므로 조건 (나)에서 $p(2)$ 가 참이다.
 $p(2)$ 가 참이므로 조건 (나)에서 $p(4)$, 즉 $p(2^2)$ 이 참이다.
 $p(4)$ 가 참이므로 조건 (나)에서 $p(8)$, 즉 $p(2^3)$ 이 참이다.
 \vdots
 따라서 $p(2^n)$ 이 모두 참이므로 반드시 참인 명제는 $p(64)$ 이다. 답 ③

1262 \neg . $p(1)$ 이 참이면
 $p(3), p(5), p(7), \dots, p(2n+1)$
 도 참이다.
 이때 $63=2 \cdot 31+1$ 이므로 $p(63)$ 은 참이다.
 ㄴ. $p(1)$ 이 참이면
 $p(5), p(9), p(13), \dots, p(4n+1)$
 도 참이다.
 그런데 $63=4 \cdot 15+3$ 이므로 $p(63)$ 이 참인지는 알 수 없다.
 ㄷ. $p(1)$ 이 참이면
 $p(2 \cdot 1+1)=p(3), p(2 \cdot 3+1)=p(7),$
 $p(2 \cdot 7+1)=p(15), p(2 \cdot 15+1)=p(31),$
 $p(2 \cdot 31+1)=p(63), \dots$
 도 참이다.
 이상에서 조건 (나)가 될 수 있는 것은 \neg , ㄷ이다. 답 ③

1263 명제 $p(n)$ 이 $n=3, 5, 7, 9, \dots$ 일 때 참임을 보이려면
 (i) $n=3$ 일 때, $p(n)$ 이 참임을 보인다.
 (ii) $5=3+2, 7=5+2, 9=7+2, \dots$ 이므로 $n=k(k \geq 3)$ 일 때
 $p(n)$ 이 참이라고 가정하면 $n=k+2$ 일 때도 $p(n)$ 이 참임을
 보인다.
 \therefore (가) 3 (나) $k+2$ → ①
 따라서 $a=3, f(k)=k+2$ 이므로
 $f(a)=f(3)=3+2=5$ → ②

답 5

채점 기준	비율
① (가), (나)에 알맞은 것을 구할 수 있다.	70 %
② $f(a)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

1264 (i) $n=1$ 일 때,
 (좌변) $=2 \cdot 1-1=1$, (우변) $=1^2=1$
 따라서 주어진 등식이 성립한다.
 (ii) $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$
 위의 식의 양변에 $2k+1$ 을 더하면
 $1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1$
 $= (k+1)^2$
 따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.
 (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.
 \therefore (가) 1 (나) $2k+1$ 답 (가) 1 (나) $2k+1$

1265 (ii) $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $2+2^2+2^3+\dots+2^k=2^{k+1}-2$
 위의 식의 양변에 2^{k+1} 을 더하면
 $2+2^2+2^3+\dots+2^k+2^{k+1}=2^{k+1}-2+2^{k+1}=2 \cdot 2^{k+1}-2$
 $= 2^{k+2}-2$
 따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.
 (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.
 \therefore (가) 2^{k+1} (나) $2^{k+2}-2$ 답 ③

1266 (1) $n=1$ 일 때,
 (좌변) $=1^2=1$, (우변) $=\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}=1$
 따라서 주어진 등식이 성립한다. → ①
 (2) $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $1^2+2^2+3^2+\dots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$
 위의 식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면
 $1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2$
 $=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$
 $=\frac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}$
 $=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$
 $=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$
 따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다. → ②
답 풀이 참조

채점 기준	비율
① $n=1$ 일 때 주어진 등식이 성립함을 보일 수 있다.	30 %
② $n=k+1$ 일 때 주어진 등식이 성립함을 보일 수 있다.	70 %

1267 (1) $n=1$ 일 때,
 (좌변) $=\frac{1}{1 \cdot 3}=\frac{1}{3}$, (우변) $=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$
 따라서 주어진 등식이 성립한다. → ①
 (2) $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3}+\frac{1}{3 \cdot 5}+\frac{1}{5 \cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$
 위의 식의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 을 더하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3}+\frac{1}{3 \cdot 5}+\frac{1}{5 \cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$
 $+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$
 $=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$
 $=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$
 $=\frac{k+1}{2k+3}$
 따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다. → ②
답 풀이 참조

채점 기준	비율
① $n=1$ 일 때 주어진 등식이 성립함을 보일 수 있다.	30 %
② $n=k+1$ 일 때 주어진 등식이 성립함을 보일 수 있다.	70 %

1268 (ii) $n=k$ 일 때 $3^{2n}-1$ 이 8의 배수라 가정하면

$$3^{2k}-1=8N \quad (N \text{은 자연수})$$

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$ 이면

$$3^{2(k+1)}-1=3^2 \cdot 3^{2k}-1=\boxed{9} \cdot 3^{2k}-1$$

$$=9(8N+1)-1$$

$$=9 \cdot 8N+8=8(\boxed{9N+1})$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $3^{2n}-1$ 은 8의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $3^{2n}-1$ 은 8의 배수이다.

$$\therefore \textcircled{7} 9 \quad \textcircled{8} 9N+1$$

따라서 $a=9, f(N)=9N+1$ 이므로

$$f(a)=f(9)=9 \cdot 9+1=82$$

답 82

1269 (ii) $n=k$ 일 때 16^n-1 이 5의 배수라 가정하면

$$16^k-1=5N \quad (N \text{은 자연수})$$

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$ 이면

$$16^{k+1}-1=16 \cdot 16^k-1=16(5N+\boxed{1})-1$$

$$=16 \cdot 5N+\boxed{15}$$

$$=5(\boxed{16N+3})$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 16^n-1 은 5의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 16^n-1 은 5의 배수이다.

$$\therefore \textcircled{7} 1 \quad \textcircled{8} 15 \quad \textcircled{9} 16N+3$$

답 풀이 참조

1270 (ii) $n=k$ 일 때 $2^{n+1}+3^{2n-1}$ 이 7의 배수라 가정하면

$$2^{k+1}+3^{2k-1}=7N \quad (N \text{은 자연수})$$

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$ 이면

$$2^{k+2}+3^{2k+1}=\boxed{2} \cdot 2^{k+1}+\boxed{9} \cdot 3^{2k-1}$$

$$=2 \cdot 2^{k+1}+2 \cdot 3^{2k-1}+7 \cdot 3^{2k-1}$$

$$=2(2^{k+1}+3^{2k-1})+7 \cdot 3^{2k-1}$$

$$=2 \cdot 7N+7 \cdot \boxed{3^{2k-1}}$$

$$=7(2N+3^{2k-1})$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $2^{n+1}+3^{2n-1}$ 은 7의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{n+1}+3^{2n-1}$ 은 7의 배수이다.

$$\therefore \textcircled{7} 2 \quad \textcircled{8} 9 \quad \textcircled{9} 3^{2k-1}$$

따라서 $a=2, b=9, f(k)=3^{2k-1}$ 이므로

$$f(a+b)=f(2+9)=f(11)=3^{2 \cdot 11-1}=3^{21}$$

답 3²¹

1271 (ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$ 을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} > \frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{2k+1}{k+1} \quad \cdots \textcircled{7}$$

이때

$$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2k+2}{k+2}=\frac{(2k+1)(k+2)-(2k+2)(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{\boxed{k}}{(k+1)(k+2)} > 0$$

$$\text{이므로 } \frac{2k+1}{k+1} > \frac{2k+2}{k+2} \quad \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k+1} > \frac{2k+2}{k+2}=\frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

$$\therefore \textcircled{7} \frac{2k+1}{k+1} \quad \textcircled{8} k$$

따라서 $f(k)=\frac{2k+1}{k+1}, g(k)=k$ 이므로

$$f(3)g(8)=\frac{7}{4} \cdot 8=14$$

답 ②

1272 (ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k > 1+kh$$

위의 식의 양변에 $\boxed{1+h}$ 를 곱하면

$$(1+h)^{k+1} > (1+kh)(1+h)$$

$$=1+\boxed{(k+1)h}+kh^2 \quad \cdots \textcircled{7}$$

이때 $kh^2 > 0$ 이므로

$$1+(k+1)h+kh^2 > 1+(k+1)h \quad \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서

$$(1+h)^{k+1} > 1+(k+1)h$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

$$\therefore \textcircled{7} 1+h \quad \textcircled{8} (k+1)h$$

답 ⑤

1273 (1) $n=3$ 일 때,

$$(\text{좌변})=2^4=16, (\text{우변})=3 \cdot 2=6$$

따라서 주어진 부등식이 성립한다. $\cdots \textcircled{1}$

(2) $n=k(k \geq 3)$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^{k+1} > k(k-1)$$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+2} > 2k(k-1)=k^2+k(k-2)$$

이때 $k^2+k(k-2) \geq k^2+k$ 이므로

$$2^{k+2} > k^2+k=k(k+1)$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다. $\cdots \textcircled{2}$

답 풀이 참조

채점 기준	비율
① $n=3$ 일 때 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.	30 %
② $n=k+1$ 일 때 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.	70 %

1274 [전략] 주어진 식의 양변을 제곱하여 수열 $\{a_n\}$ 이 어떤 수열인지 찾는다.

[풀이] $a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}}$, 즉 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고 첫째항이 1이므로 공비를 r 라 하면

$$a_n = 1 \cdot r^{n-1} = r^{n-1}$$

$$\frac{a_6}{a_2} = \frac{r^5}{r} = r^4 \text{이므로 } r^4 = 16$$

$$\therefore \frac{a_{30}}{a_{10}} = \frac{r^{29}}{r^9} = r^{20} = (r^4)^5 = 16^5 = (2^4)^5 = 2^{20} \quad \text{답 ④}$$

1275 [전략] 주어진 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하여 수열의 각 항을 구한다.

[풀이] $a_1 = 5$ 이므로

$$a_2 = a_1 = 5, \quad a_3 = a_1 + a_2 = 5 + 5 = 10,$$

$$a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 5 + 5 + 10 = 20$$

$$\therefore a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5 + 5 + 10 + 20 = 40 \quad \text{답 40}$$

1276 [전략] 주어진 식의 n 에 1, 2, 3, 4, ...를 차례대로 대입하여 규칙을 찾는다.

[풀이] $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$ 에서 $a_1 = 1$ 이므로

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{2}{3} a_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{3}{4} a_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$a_5 = \frac{4}{5} a_4 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

\vdots

$$a_k = \frac{1}{k}$$

$$\text{따라서 } a_k = \frac{1}{50} \text{에서 } \frac{1}{k} = \frac{1}{50}$$

$$\therefore k = 50 \quad \text{답 50}$$

1277 [전략] 주어진 식의 n 에 1, 2를 차례대로 대입하여 a_3 을 k 에 대한 식으로 나타낸다.

[풀이] $a_{n+1} = \frac{k}{a_n + 2}$ 에서 $a_1 = 1$ 이므로

$$a_2 = \frac{k}{a_1 + 2} = \frac{k}{1 + 2} = \frac{k}{3}$$

$$a_3 = \frac{k}{a_2 + 2} = \frac{k}{\frac{k}{3} + 2} = \frac{3k}{k + 6}$$

$a_3 = \frac{3}{2}$ 이어야 하므로

$$\frac{3k}{k + 6} = \frac{3}{2}, \quad 6k = 3k + 18$$

$$3k = 18 \quad \therefore k = 6 \quad \text{답 ③}$$

1278 [전략] 수직선 위의 두 점 $A(a)$, $B(b)$ 를 이은 선분 AB 의 중점의 좌표는 $\frac{a+b}{2}$ 임을 이용한다.

[풀이] 점 P_{n+1} 은 선분 $P_n P_{n+2}$ 의 중점이므로

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2} \quad \dots ①$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고

$$a_1 = 0, \quad a_2 - a_1 = 4 - 0 = 4$$

이므로 첫째항이 0, 공차가 4이다.

$$\therefore a_n = 0 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 4 \quad \dots ②$$

따라서 $a_6 = 4 \cdot 6 - 4 = 20$ 이므로 점 P_6 이 나타내는 수는 20이다.

$$\dots ③$$

답 20

채점 기준	비율
① a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
② 일반항 a_n 을 구할 수 있다.	50 %
③ 점 P_6 이 나타내는 수를 구할 수 있다.	20 %

1279 [전략] 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열임을 이용하여 일반항 a_n 을 구한다.

[풀이] $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고

$$a_1 = 31, \quad a_2 - a_1 = 28 - 31 = -3$$

이므로 첫째항이 31, 공차가 -3 이다.

$$\therefore a_n = 31 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 34$$

$$-3n + 34 < 0 \text{에서 } n > \frac{34}{3} = 11.33 \dots$$

따라서 제 12항부터 음수이므로 첫째항부터 제 11항까지의 합이 최대가 된다.

즉 S_n 이 최대가 되도록 하는 자연수 n 의 값은 11이다. 답 ①

1280 [전략] 주어진 관계식을 간단히 하여 a_{n+1} 과 a_n 사이의 관계식을 구한다.

[풀이] $(a_{n+1} + a_n)^2 = 4a_n a_{n+1} + 25$ 에서

$$a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}a_n + a_n^2 = 4a_n a_{n+1} + 25$$

$$a_{n+1}^2 - 2a_n a_{n+1} + a_n^2 = 25$$

$$(a_{n+1} - a_n)^2 = 25$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = -5 \quad (\because a_n > a_{n+1}) \quad \dots ①$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 100, 공차가 -5 인 등차수열이므로

$$a_n = 100 + (n-1) \cdot (-5) = -5n + 105 \quad \dots ②$$

$$\therefore a_{25} = -5 \cdot 25 + 105 = -20 \quad \dots ③$$

답 -20

채점 기준	비율
① 주어진 관계식을 정리할 수 있다.	30 %
② 일반항 a_n 을 구할 수 있다.	50 %
③ a_{25} 를 구할 수 있다.	20 %

1281 [전략] 주어진 식의 n 에 1, 2, 3, ...를 차례대로 대입하여 규칙을 찾는다.

[풀이] $a_{n+1} = 3a_n + 1$ 에서 $a_1 = 1$ 이므로

$$a_2 = 3a_1 + 1 = 3 + 1$$

$$a_3 = 3a_2 + 1 = 3(3 + 1) + 1 = 3^2 + 3 + 1$$

$$a_4 = 3a_3 + 1 = 3(3^2 + 3 + 1) + 1 = 3^3 + 3^2 + 3 + 1$$

\vdots

$$a_{10} = 3a_9 + 1 = 3^9 + 3^8 + 3^7 + \dots + 3 + 1$$

$$= \frac{3^{10} - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^{10} - 1) \quad \text{답 ①}$$

1282 전략 a_2, a_3, a_4, \dots 를 구하여 최초로 10이 되는 항이 제몇 항인지 구한다.

풀이 $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n \text{은 짝수}) \\ a_n + 1 & (a_n \text{은 홀수}) \end{cases}$ 에서 $a_1 = 20$ 이므로
 $a_2 = \frac{1}{2}a_1 = 10, a_3 = \frac{1}{2}a_2 = 5, a_4 = a_3 + 1 = 6,$
 $a_5 = \frac{1}{2}a_4 = 3, a_6 = a_5 + 1 = 4, a_7 = \frac{1}{2}a_6 = 2,$
 $a_8 = \frac{1}{2}a_7 = 1, a_9 = a_8 + 1 = 2, a_{10} = \frac{1}{2}a_9 = 1, \dots$
 따라서 $a_k = 1$ 을 만족시키는 k 의 최솟값은 8이다. **답** 8

1283 전략 a_2, a_3, a_4, \dots 를 구한 후 a_3, a_6, a_9, \dots 의 수열의 각 항의 규칙을 찾는다.

풀이 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + (-1)^n \cdot 2 & (n \text{이 } 3 \text{의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n + 1 & (n \text{이 } 3 \text{의 배수인 경우}) \end{cases}$ 에서
 $a_1 = a$ 이므로
 $a_2 = a_1 + (-1)^1 \cdot 2 = a - 2$
 $a_3 = a_2 + (-1)^2 \cdot 2 = a$
 $a_4 = a_3 + 1 = a + 1$
 $a_5 = a_4 + (-1)^4 \cdot 2 = a + 3$
 $a_6 = a_5 + (-1)^5 \cdot 2 = a + 1$
 $a_7 = a_6 + 1 = a + 2$
 $a_8 = a_7 + (-1)^7 \cdot 2 = a$
 $a_9 = a_8 + (-1)^8 \cdot 2 = a + 2$
 \vdots
 $\therefore a_{3n} = a + (n-1) \quad (n \geq 1)$
 따라서 $a_{15} = a + 4 = 43$ 이므로 $a = 39$ **답** ⑤

1284 전략 a_n 을 이용하여 a_{n+1} 을 나타낼 수 있도록 규칙을 찾는다.

풀이 (i) n 명의 학생을 두 조로 나누는 방법의 수는 a_n 이고 각각의 방법에서 추가된 1명을 두 조 중 어느 한 조에 넣는 방법의 수는 $2a_n$
 (ii) n 명과 추가된 1명으로 두 조를 나누는 방법의 수는 $\boxed{1}$
 (i), (ii)에서 구하는 관계식은
 $a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n=2, 3, 4, \dots)$
 \therefore ㉗ $2a_n$ ㉘ 1 **답** ㉗ $2a_n$ ㉘ 1

1285 전략 [1단계], [2단계], [3단계]에 사용된 성냥개비의 개수를 각각 구하여 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 (1) $a_1 = 4, a_2 = a_1 + 6, a_3 = a_2 + 8, \dots$ 이므로
 $a_{n+1} = a_n + 2n + 4 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ **→ ①**
 (2) $a_{n+1} = a_n + 2n + 4$ 이고 $a_1 = 4$ 이므로
 $a_2 = a_1 + 6 = 4 + 6$
 $a_3 = a_2 + 8 = 4 + 6 + 8$
 $a_4 = a_3 + 10 = 4 + 6 + 8 + 10$
 \vdots
 $a_{10} = a_9 + 22 = 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 22$
 $= \frac{10(4+22)}{2} = 130$ **→ ②**
답 (1) $a_{n+1} = a_n + 2n + 4 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ (2) 130

채점 기준	비율
① a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
② a_{10} 을 구할 수 있다.	60 %

1286 전략 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ 임을 이용하여 주어진 등식을 변형한다.

풀이 $2S_n = a_{n+1} - 3$ **→ ㉙**
 에서
 $2S_{n+1} = a_{n+2} - 3$ **→ ㉚**
 이므로 ㉚ - ㉙을 하면
 $2(S_{n+1} - S_n) = a_{n+2} - a_{n+1}$
 이때 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 이므로 $2a_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$
 $\therefore a_{n+2} = 3a_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ **→ ㉛**
 ㉙에서 $2S_1 = 2a_1 = a_2 - 3$ 이고, $a_1 = 2$ 이므로
 $a_2 - 3 = 2 \cdot 2 \quad \therefore a_2 = 7$
 따라서 ㉛에서
 $a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 7, a_4 = 3a_3 = 3^2 \cdot 7, a_5 = 3a_4 = 3^3 \cdot 7$
 $\therefore a_6 = 3a_5 = 3^4 \cdot 7 = 567$ **답** 567

1287 전략 $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립하도록 하는 식을 등식의 양변에 더해 준다.

풀이 (ii) $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$
 위의 식의 양변에 $\frac{(k+1)(k+2)}{3}$ 를 더하면
 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$
 $= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$
 $= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3}$
 $= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$
 따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.
 (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.
 \therefore ㉗ $(k+1)(k+2)$ ㉘ $(k+1)(k+2)(k+3)$
 따라서 $f(k) = (k+1)(k+2), g(k) = (k+1)(k+2)(k+3)$ 이므로
 $f(3) + g(3) = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 = 140$ **답** 140

1288 전략 n 개의 직선에 1개의 직선을 추가했을 때 증가하는 교점의 개수를 이용하여 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 (1) n 개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n 개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 n 개의 새로운 교점이 생긴다. 즉 $(n+1)$ 번째 직선을 추가하면 교점이 n 개 증가하므로
 $a_{n+1} = a_n + n$
 $\therefore f(n) = n$
 (2) 1개의 직선을 그을 때 생기는 교점은 없으므로 $a_1 = 0$
 $a_{n+1} = a_n + n$ 에서
 $a_2 = a_1 + 1 = 1$
 $a_3 = a_2 + 2 = 1 + 2$

$$a_4 = a_3 + 3 = 1 + 2 + 3$$

⋮

$$a_{10} = a_9 + 9 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 8 + 9$$

$$= \sum_{k=1}^9 k = \frac{9(9+1)}{2}$$

$$= 45$$

$$\text{답 (1)} f(n) = n \quad (2) 45$$

1289 **전략** 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열임을 알고 일반항 a_n 을 구한다.

풀이 $\log a_n - 2 \log a_{n+1} + \log a_{n+2} = 0$ 에서

$$\log a_n + \log a_{n+2} = 2 \log a_{n+1}$$

$$\log a_n a_{n+2} = \log a_{n+1}^2$$

$$\therefore a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 \quad (a_n > 0)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = 3a_1 \text{에서}$$

$$ar = 3a \quad \therefore r = 3 \quad (\because a > 0)$$

또 $a_4 = 27$ 에서

$$ar^3 = 27, \quad 27a = 27$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 a_k = \sum_{k=1}^5 3^{k-1}$$

$$= \frac{3^5 - 1}{3 - 1}$$

$$= 121$$

답 ②

1290 **전략** a_2, a_3, a_4, \dots 를 차례대로 구하여 20의 배수인 항을 찾는다.

풀이 $a_{n+1} = (n+1)a_n$ 에서 $a_1 = 1$ 이므로

$$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 1$$

$$a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$a_4 = 4a_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

⋮

$$a_{30} = 30a_{29} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \cdots \cdot 1$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{30}$$

$$= 1 + (2 \cdot 1) + (3 \cdot 2 \cdot 1) + \cdots + (30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \cdots \cdot 1) \quad \cdots ①$$

이때 $a_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ 이므로 $a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{30}$ 은 20으로 나누어떨어진다. ⋮ ②

따라서 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{30}$ 을 20으로 나누었을 때의 나머지는 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 를 20으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$$

이므로 구하는 나머지는 13이다. ⋮ ③

답 13

채점 기준	비율
① $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{30}$ 을 구할 수 있다.	40 %
② $a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{30}$ 이 20으로 나누어떨어짐을 알 수 있다.	30 %
③ 나머지를 구할 수 있다.	30 %

1291 **전략** 먼저 a_3, a_4, a_5, \dots 를 구하여 a_n 의 규칙을 찾은 후 $b_n + b_{n+1}$ 을 구한다.

풀이 $a_{n+2} = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2$ 에서 $a_1 = a_2 = 1$ 이므로

$$a_3 = (a_2)^2 - (a_1)^2 = 1^2 - 1^2 = 0$$

$$a_4 = (a_3)^2 - (a_2)^2 = 0^2 - 1^2 = -1$$

$$a_5 = (a_4)^2 - (a_3)^2 = (-1)^2 - 0^2 = 1$$

$$a_6 = (a_5)^2 - (a_4)^2 = 1^2 - (-1)^2 = 0$$

$$a_7 = (a_6)^2 - (a_5)^2 = 0^2 - 1^2 = -1$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $n \geq 2$ 일 때, 1, 0, -1이 이 순서대로 반복된다.

$b_{n+1} = a_n - b_n + n$ 에서 $b_n + b_{n+1} = a_n + n$ 이므로

$$b_1 + b_2 = a_1 + 1$$

$$-(b_2 + b_3) = -(a_2 + 2)$$

$$b_3 + b_4 = a_3 + 3$$

$$-(b_4 + b_5) = -(a_4 + 4)$$

⋮

$$-(b_{18} + b_{19}) = -(a_{18} + 18)$$

$$b_{19} + b_{20} = a_{19} + 19$$

변끼리 더하면

$$b_1 + b_{20}$$

$$= a_1 - a_2 + \cdots - a_{18} + a_{19} + (1 - 2 + \cdots - 18 + 19)$$

$$= a_1 + \{(-a_2 + a_3 - a_4) + (a_5 - a_6 + a_7) + \cdots$$

$$+ (a_{17} - a_{18} + a_{19})\} + \{1 + (-2 + 3) + (-4 + 5) + \cdots$$

$$+ (-18 + 19)\}$$

$$k + 14 = 1 + 10$$

$$\therefore k = -3$$

답 ①

1292 **전략** $A > B > C$ 이면 $A > C$ 임을 이용한다.

풀이 (1) $n = 2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}, \quad (\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(2) $n = k$ ($k \geq 2$)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \quad \cdots ①$$

이때 $k \geq 2$ 에서

$$\left\{2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}\right\} - \left(2 - \frac{1}{k+1}\right) = -\frac{1}{k(k+1)^2} < 0$$

이므로

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1} \quad \cdots ②$$

①, ②에서

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

답 풀이 참조