Solution

Lecture Book

Work Book

01 여러 가지 순열

6쪽 **Lecture 01** **1-1** (1) 24 (2) 120 **1-2** 40
2-1 6, 120, 2, 120, 240

7쪽 **유형 Q+Q** **01** ④ **02** ③ **03** 12 **04** ⑤
05 ② **06** 720 **07** 8 **08** ② **09** 30 **10** ③
11 ⑤ **12** 360

9쪽 **Lecture 02** **1-1** (1) 49 (2) 625 (3) 32 (4) 216
1-2 (1) 4 (2) 3 (3) 2 (4) 7 **2-1** 81 **2-2** 125

10쪽 **Lecture 03** **1-1** (1) 6 (2) 60 (3) 20 (4) 90
1-2 (1) 60 (2) 180 (3) 2520 **1-3** 3, 2, a, 5, 3, 10

11쪽 **유형 Q+Q** **01** 15 **02** ① **03** ④ **04** 243
05 ③ **06** 40 **07** 192 **08** ④ **09** ③ **10** 81
11 360 **12** ④ **13** 360 **14** ⑤ **15** ① **16** 180
17 ③ **18** 60 **19** 22 **20** ②

14쪽 **중단원 마무리** **01** ⑤ **02** 16 **03** 48 **04** 4
05 ③ **06** 1008 **07** ① **08** 81 **09** ⑤ **10** 60
11 ② **12** 52 **13** ④ **14** ④ **15** 33 **16** ③
17 ② **18** 42 **19** ⑤

02 중복조합과 이항정리

18쪽 **Lecture 04** **1-1** (1) 15 (2) 84 (3) 9 (4) 35
1-2 (1) 6 (2) 8 (3) 5 (4) 2 **2-1** 21 **2-2** 165

19쪽 **유형 Q+Q** **01** ② **02** 7 **03** 286 **04** ⑤
05 330 **06** 10 **07** 28 **08** ③ **09** ③ **10** 15
11 10 **12** ⑤ **13** 20 **14** 70 **15** ②

21쪽 **Lecture 05** **1-1** (1) $x^4+12x^3+54x^2+108x+81$
(2) $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$
(3) $64a^6+192a^5b+240a^4b^2+160a^3b^3+60a^2b^4+12ab^5+b^6$
(4) $x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$
1-2 (1) 640 (2) 20 **2-1** (1) 16 (2) 0 (3) 128 (4) 16

22쪽 **Lecture 06** **1-1** 3, 4, 6, 5, 10, 10,
$x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$
1-2 (1) $a^5+10a^4+40a^3+80a^2+80a+32$
(2) $x^4+12x^3y+54x^2y^2+108xy^3+81y^4$
1-3 (1) ${}_3C_2$ (2) ${}_6C_4$ (3) ${}_4C_2$ (4) ${}_6C_3$

23쪽 **유형 Q+Q** **01** 25 **02** ② **03** 24 **04** ④
05 ③ **06** 20 **07** ③ **08** 6 **09** 8 **10** ⑤
11 ② **12** 35

25쪽 **중단원 마무리** **01** ⑤ **02** ③ **03** 36 **04** ②
05 9 **06** 124 **07** ④ **08** ④ **09** 220 **10** 336
11 ② **12** -48 **13** ⑤ **14** ② **15** 24 **16** ③
17 ③ **18** ⑤ **19** 490

03 확률의 뜻과 활용

30쪽 **Lecture 07** **1-1** (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(2) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ (3) $\{2, 3, 5\}$ (4) $\{1, 3\}$
2-1 (1) $\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$ (2) $\{10\}$ (3) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
(4) $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$
3-1 C와 A

31쪽 **Lecture 08** **1-1** (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$
1-2 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$ **2-1** $\frac{21}{25}$ **2-2** $\frac{9}{10}$

32쪽 **Lecture 09** **1-1** (1) $\frac{3}{5}$ (2) 1 (3) 0
1-2 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 0

33쪽 **유형 Q+Q** **01** ④ **02** 6 **03** ㄴ **04** ②
05 ⑤ **06** $\frac{3}{16}$ **07** $\frac{1}{15}$ **08** ④ **09** ③ **10** $\frac{1}{10}$
11 $\frac{4}{7}$ **12** $\frac{3}{8}$ **13** ② **14** $\frac{5}{14}$ **15** ① **16** $\frac{4}{9}$
17 $\frac{2}{3}$ **18** $\frac{1}{4}$ **19** ③ **20** ④

36쪽 **Lecture 10** **1-1** $\frac{3}{20}$ **1-2** $\frac{7}{18}$ **2-1** $\frac{4}{7}$ **2-2** 0.4

37쪽 **유형 Q+Q** **01** 0.3 **02** ③ **03** ④ **04** $\frac{7}{10}$
05 $\frac{1}{6}$ **06** ① **07** $\frac{7}{8}$ **08** ② **09** ⑤ **10** $\frac{16}{21}$
11 ④ **12** $\frac{15}{16}$

39쪽 중단원 마무리 01 8 02 8 03 ④ 04 ④ 05 $\frac{3}{5}$ 06 ⑤ 07 ① 08 4 09 $\frac{9}{25}$ 10 1 11 ② 12 $\frac{4}{15}$ 13 ⑤ 14 17 15 $\frac{1}{3}$ 16 ② 17 ⑤ 18 $\frac{3}{4}$ 19 ③

04 조건부확률

42쪽 **Lecture 11** 1-1 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{4}{9}$ 1-2 (1) 0.3 (2) $\frac{3}{7}$
1-3 (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{1}{2}$

43쪽 **Lecture 12** 1-1 (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{9}{10}$ 1-2 $\frac{1}{9}$
1-3 (1) $\frac{3}{7}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{2}{7}$

44쪽 유형 Q+Q 01 $\frac{1}{3}$ 02 $\frac{5}{7}$ 03 $\frac{4}{9}$ 04 ① 05 $\frac{3}{7}$ 06 ② 07 $\frac{14}{65}$ 08 $\frac{3}{38}$ 09 (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{3}{5}$ 10 ④ 11 ③ 12 $\frac{14}{29}$

46쪽 **Lecture 13** 1-1 (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{4}{9}$
1-2 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{3}{8}$ (3) 독립 2-1 종속 2-2 0.2

47쪽 **Lecture 14** 1-1 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{2}{9}$ 1-2 $\frac{5}{16}$ 1-3 $\frac{3}{64}$

48쪽 유형 Q+Q 01 ① 02 ④ 03 ㄱ, ㄴ 04 ⑤ 05 $\frac{5}{9}$ 06 $\frac{4}{5}$ 07 0.58 08 ② 09 ④ 10 $\frac{16}{81}$ 11 ⑤ 12 $\frac{13}{256}$

50쪽 중단원 마무리 01 ② 02 ④ 03 $\frac{2}{3}$ 04 ③ 05 2 06 $\frac{2}{7}$ 07 0.143 08 ⑤ 09 $\frac{8}{11}$ 10 ③ 11 ㄱ, ㄴ, ㄷ 12 0.2 13 4 14 ④ 15 50 16 $\frac{64}{125}$ 17 ⑤ 18 ④

05 확률변수와 확률분포

56쪽 **Lecture 15** 1-1 (1) 1, 2, 3, 4, 5, 6 (2) 0, 1, 2, 3
(3) 0, 1, 2, 3, 4

2-1 (1) 0, 1, 2 (2) $P(X=0)=\frac{1}{4}$, $P(X=1)=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{1}{4}$

(3)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

2-2

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

57쪽 **Lecture 16** 1-1 (1) x, $2-x$

(2)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

(3) $\frac{7}{10}$

2-1 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{5}{6}$

58쪽 **Lecture 17** 1-1 (1) 연 (2) 이 (3) 연
2-1 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ 2-2 $\frac{1}{10}$

59쪽 유형 Q+Q 01 0, 100, 500, 600, 1000, 1100 02 ④ 03 ① 04 $\frac{1}{4}$ 05 $\frac{2}{3}$ 06 $\frac{7}{12}$ 07 ③ 08 ⑤ 09 $\frac{2}{21}$ 10 $\frac{1}{2}$ 11 ④

61쪽 **Lecture 18** 1-1 (1) 3 (2) 1 (3) 1
1-2 (1) $\frac{7}{3}$ (2) $\frac{5}{9}$ (3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

1-3 (1)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) 평균: $\frac{2}{3}$, 분산: $\frac{4}{9}$, 표준편차: $\frac{2}{3}$

62쪽 **Lecture 19** 1-1 (1) 평균: -12, 분산: 8, 표준편차: $2\sqrt{2}$
(2) 평균: 14, 분산: 18, 표준편차: $3\sqrt{2}$
(3) 평균: 6, 분산: $\frac{1}{2}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(4) 평균: 3, 분산: $\frac{2}{9}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{2}}{3}$
1-2 (1) -23 (2) $\frac{1}{4}$ (3) 4
1-3 (1) 평균: $\frac{5}{3}$, 분산: $\frac{11}{9}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{11}}{3}$
(2) 평균: 8, 분산: 44, 표준편차: $2\sqrt{11}$

63쪽 유형 **01** $\frac{\sqrt{15}}{4}$ **02** ① **03** ③ **04** $\frac{\sqrt{3}}{2}$
05 4250원 **06** ② **07** 10 **08** ⑤ **09** $2\sqrt{3}$ **10** ①
11 $-\frac{5}{2}$, $\frac{21}{4}$ **12** $2\sqrt{6}$

65쪽 중단원 마무리 **01** ④ **02** $\frac{3}{5}$ **03** ② **04** $\frac{10}{21}$
05 2 **06** ③ **07** 5 **08** ③ **09** ② **10** ④
11 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **12** ② **13** 37 **14** 250 **15** ① **16** ②
17 33 **18** $4\sqrt{26}$

06 이항분포와 정규분포

68쪽 Lecture 20 **1-1** (1) $\mathrm{B}\left(8,\ \frac{1}{3}\right)$ (2) 이항분포를 따르지 않는다.
1-2 (1) $\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ (2) $\frac{8}{27}$
2-1 (1) 평균: 10, 분산: 5, 표준편차: $\sqrt{5}$
(2) 평균: 80, 분산: 16, 표준편차: 4

69쪽 유형 **01** ④ **02** ㄱ, ㄴ **03** ② **04** $\frac{21}{2}$
05 $\frac{609}{625}$ **06** ③ **07** ④ **08** 294 **09** ② **10** 75
11 61 **12** ⑤

71쪽 Lecture 21 **1-1** (1) $\mathrm{N}(3,\ 1^2)$ (2) $\mathrm{N}(-4,\ 3^2)$
2-1 (1) $<$ (2) $<$ **2-2** (1) $a+b$ (2) $0.5-a$

72쪽 Lecture 22 **1-1** (1) 0.3413 (2) 0.0388 (3) 0.0401 (4) 0.9332
1-2 (1) 2.5 (2) -1 (3) 1.5 (4) 1

73쪽 Lecture 23 **1-1** (1) $Z=\frac{X-15}{3}$ (2) $Z=\frac{X-86}{12}$
(3) $Z=\frac{X-100}{8}$ (4) $Z=\frac{X+7}{5}$
1-2 (1) $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$ (2) $\mathrm{P}(-2\le Z\le 0.5)$
1-3 (1) 0.6687 (2) 0.0919

74쪽 유형 **01** ⑤ **02** ㄴ **03** 0.8185 **04** ③
05 0.3174 **06** 2.5 **07** ① **08** ㄱ, ㄴ **09** ③ **10** 22.5
11 0.0013 **12** 0.23 **13** ② **14** 200 **15** 78.4점 **16** ④
17 A, C, B **18** ⑤

77쪽 Lecture 24 **1-1** (1) $\mathrm{N}(32,\ 4^2)$ (2) $\mathrm{N}(90,\ 6^2)$
1-2 (1) $Z=\frac{X-12}{3}$ (2) 0.8185 **1-3** (1) 0.2857 (2) 0.0668

78쪽 유형 **01** 0.044 **02** ② **03** ④ **04** 0.0062
05 ①

79쪽 중단원 마무리 **01** $\frac{11}{243}$ **02** ④ **03** ④ **04** ⑤
05 64 **06** 36 **07** ④ **08** ② **09** 0.1336 **10** 22
11 62 **12** ④ **13** ⑤ **14** 20 **15** 537 g **16** 96
17 ③ **18** 0.16

07 통계적 추정

82쪽 Lecture 25 **1-1** (1) 전수조사 (2) 표본조사 (3) 표본조사
(4) 전수조사
2-1 (1) 16 (2) 12 **3-1** (1) $m=5$, $\sigma=2\sqrt{2}$ (2) $\overline{X}=4$, $S=3\sqrt{2}$

83쪽 Lecture 26 **1-1** (1) 2, 3, 4, 5, 6
(2)

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(3) $\mathrm{E}(\overline{X})=4$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{3}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{2\sqrt{3}}{3}$
1-2 $\mathrm{E}(\overline{X})=70$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{25}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{2}{5}$
2-1 (1) $\mathrm{E}(\overline{X})=150$, $\mathrm{V}(\overline{X})=4$ (2) $\mathrm{N}(150,\ 2^2)$ (3) $Z=\frac{\overline{X}-150}{2}$
(4) 0.9772
2-2 0.1359

84쪽 유형 **01** ⑤ **02** 9
03 $\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{7}{6}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{1}{6}$ **04** 4 **05** $\frac{61}{18}$ **06** ④
07 ⑤ **08** 9 **09** 0.8185 **10** ① **11** 9 **12** ①

86쪽 Lecture 27 **1-1** (1) $8.2\le m\le 27.8$ (2) $24.12\le m\le 35.88$
1-2 (1) $34.02\le m\le 35.98$ (2) $33.71\le m\le 36.29$
2-1 (1) 7.84 (2) 10.32

87쪽 유형 **01** $59.02\le m\le 60.98$ **02** 133.44
03 $22.42\le m\le 27.58$ **04** ③ **05** 81 **06** ④ **07** 4.9
08 ④ **09** ② **10** 144 **11** ① **12** 96 **13** ⑤
14 6 **15** ① **16** ①

90쪽 중단원 마무리 **01** ③ **02** 405 **03** ④ **04** ⑤
05 28 **06** ⑤ **07** ⑤ **08** 25 **09** ④ **10** ⑤
11 225 **12** ③ **13** 10 **14** 9 **15** 84 **16** ①

01 여러 가지 순열

W 2쪽 01 원순열

01 (1) 120 (2) 720　02 (1) 144 (2) 70　03 12　04 ⑤
05 5　06 ③　07 480　08 ④　09 144　10 ③
11 ②　12 30　13 ①　14 8　15 ④　16 ③
17 ②　18 120

W 5쪽 02 여러 가지 순열

01 (1) 10 (2) 256 (3) 243 (4) 64　02 (1) 5 (2) 2
03 (1) 16 (2) 64　04 (1) 30 (2) 360 (3) 1260
05 (1) 6 (2) 35　06 ④　07 6　08 81　09 ②
10 ④　11 ①　12 6　13 ⑤　14 32　15 ③
16 50 번째　17 ③　18 48　19 ②　20 ⑤　21 1140
22 ③　23 ④　24 36　25 ①　26 210　27 ⑤
28 1680　29 40　30 ④　31 ③　32 19　33 ②

02 중복조합과 이항정리

W 10쪽 03 중복조합

01 (1) 20 (2) 45 (3) 1 (4) 55　02 (1) 4 (2) 5
03 (1) 8 (2) 126　04 ①　05 ⑤　06 5　07 210
08 11　09 ②　10 ③　11 ④　12 36　13 ①
14 4　15 ⑤　16 ②　17 ④　18 66　19 ③
20 35　21 ④　22 ①　23 (1) 10 (2) 35　24 ⑤
25 30

W 14쪽 04 이항정리

01 (1) $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$
(2) $x^5-15x^4y+90x^3y^2-270x^2y^3+405xy^4-243y^5$
02 (1) 280 (2) 70　03 (1) 128 (2) 0 (3) 32
04 (1) $x^4+16x^3+96x^2+256x+256$
(2) $x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6$
05 (1) ${}_5C_3$ (2) ${}_8C_6$　06 ①　07 2　08 ④　09 ③
10 121　11 ②　12 -140　13 ④　14 162　15 ③
16 ③　17 ②　18 9　19 ④　20 ①　21 210
22 125

03 확률의 뜻과 활용

W 17쪽 05 확률의 뜻과 기본 성질

01 (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ (2) $\{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$
(3) $\{3, 5\}$ (4) $\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$
02 B와 C　03 (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{6}$　04 $\frac{3}{5}$　05 (1) 1 (2) $\frac{2}{5}$ (3) 0
06 24　07 ⑤　08 ⑤　09 ④　10 11　11 $\frac{1}{8}$
12 ③　13 $\frac{3}{7}$　14 ②　15 $\frac{1}{35}$　16 ③　17 ①
18 $\frac{1}{5}$　19 $\frac{1}{3}$　20 ⑤　21 $\frac{5}{16}$　22 ⑤　23 $\frac{3}{8}$
24 $\frac{3}{10}$　25 $\frac{4}{7}$　26 ④　27 ②　28 6　29 ④
30 ㄱ, ㄴ

W 22쪽 06 확률의 덧셈정리

01 (1) $\frac{5}{12}$ (2) $\frac{4}{15}$　02 (1) $\frac{11}{14}$ (2) $\frac{3}{20}$　03 $\frac{3}{5}$　04 $\frac{5}{7}$
05 ①　06 $\frac{3}{4}$　07 $\frac{4}{5}$　08 ④　09 ③　10 $\frac{11}{42}$
11 ②　12 $\frac{13}{15}$　13 ④　14 ②　15 6　16 $\frac{11}{12}$
17 ②　18 $\frac{63}{64}$

04 조건부확률

W 25쪽 07 조건부확률

01 (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$　02 $\frac{3}{5}$
03 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{4}{15}$ (3) $\frac{4}{15}$　04 ⑤　05 $\frac{8}{15}$　06 ③
07 $\frac{1}{3}$　08 ③　09 $\frac{3}{5}$　10 ②　11 $\frac{3}{7}$　12 $\frac{5}{9}$
13 ③　14 ③　15 $\frac{5}{14}$　16 ①　17 $\frac{6}{7}$　18 5
19 $\frac{11}{28}$　20 ③　21 $\frac{3}{10}$　22 ④　23 $\frac{5}{8}$　24 ④

W 29쪽 08 사건의 독립과 종속

01 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{4}{7}$ (3) 종속　02 $\frac{5}{8}$　03 종속　04 $\frac{27}{64}$
05 독립　06 ④　07 ①　08 ③　09 ⑤　10 $\frac{7}{10}$
11 $\frac{1}{5}$　12 ④　13 ①　14 $\frac{11}{12}$　15 ④　16 $\frac{973}{1000}$

17 ⑤ **18** 146 **19** ③ **20** $\frac{5}{16}$ **21** ② **22** $\frac{5}{16}$
23 $\frac{3}{4}$

05 확률변수와 확률분포

W 33쪽 **09 이산확률변수와 연속확률변수**

01 (1) 0, 1, 2 (2) $\mathrm{P}(X=0)=\frac{4}{9}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{9}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{9}$

(3)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

02 (1) $\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_{2}\mathrm{C}_{x}\cdot{}_{4}\mathrm{C}_{2-x}}{{}_{6}\mathrm{C}_{2}}$ $(x=0, 1, 2)$

(2)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

(3) $\frac{14}{15}$

03 (1) $\frac{3}{7}$ (2) $\frac{4}{7}$ (3) $\frac{6}{7}$ (4) $\frac{6}{7}$ **04** (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$
05 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{8}$ **06** (가) 0 (나) 1 (다) $\frac{1}{4}$

07

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

08 $\frac{1}{29}$ **09** $\frac{4}{9}$
10 ② **11** ② **12** $\frac{6}{7}$ **13** $\frac{4}{7}$ **14** ③ **15** $\frac{2}{5}$
16 $\frac{1}{10}$ **17** ② **18** $\frac{19}{30}$ **19** $\frac{5}{3}$

W 36쪽 **10 이산확률변수의 평균과 표준편차**

01 (1) $\frac{7}{3}$ (2) $\frac{8}{9}$ (3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **02** (1) 15 (2) 16 (3) $\frac{1}{4}$
03 ③ **04** $\frac{1}{6}$ **05** $\frac{\sqrt{11}}{2}$ **06** ② **07** $\frac{17}{36}$ **08** 1
09 ④ **10** 350원 **11** ⑤ **12** 2
13 평균: 50점, 표준편차: 10점 **14** ② **15** 38 **16** ⑤
17 ③ **18** ⑤ **19** $3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}$

06 이항분포와 정규분포

W 39쪽 **11 이항분포**

01 (1) $\mathrm{B}\left(5, \frac{1}{2}\right)$ (2) $\mathrm{P}(X=x)={}_{5}\mathrm{C}_{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$ $(x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$ (3) $\frac{5}{32}$
02 평균: 60, 분산: 20, 표준편차: $2\sqrt{5}$ **03** ① **04** 100

05 ③ **06** ② **07** ④ **08** $\frac{1}{4}$ **09** $\frac{56}{81}$ **10** ⑤
11 ① **12** $\frac{2}{3}$ **13** ⑤ **14** 208 **15** ③ **16** ②
17 75 **18** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **19** ① **20** ④ **21** 31 **22** ④
23 18 **24** (1) $X=5Y-24$ (2) 16

W 43쪽 **12 정규분포와 표준정규분포**

01 (1) 바뀐다 (2) 낮아진다 **02** (1) $b-a$ (2) $0.5-b$
03 (1) 0.9544 (2) 0.9332 **04** 0.8185 **05** ③ **06** 12
07 ① **08** ㄱ, ㄷ **09** 0.1587 **10** 22 **11** ① **12** ①
13 -1 **14** 1.8 **15** ④ **16** 27 **17** 0.5996 **18** ②
19 0.4514 **20** ⑤ **21** 2 **22** ③ **23** 0.11 **24** ②
25 ④ **26** 456 **27** ③ **28** 148.2 cm **29** ④
30 ②

W 48쪽 **13 이항분포와 정규분포의 관계**

01 (1) 0.9974 (2) 0.1359 **02** 0.0241 **03** ③ **04** ③
05 0.9938 **06** 9

07 통계적 추정

W 49쪽 **14 모집단과 표본**

01 ㄱ, ㄴ **02** (1) $\overline{X}=2$, $S^2=2$, $S=\sqrt{2}$ (2) $\overline{X}=3$, $S^2=1$, $S=1$
03 (1) 18 (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$ **04** (1) 0.0013 (2) 0.9876
05 ② **06** 4 **07** ⑤ **08** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **09** 23 **10** ④
11 35 **12** 57 **13** ④ **14** 0.84 **15** ① **16** 0.86
17 ③ **18** 36 **19** ④

W 52쪽 **15 모평균의 추정**

01 (1) $56.08\le m\le 63.92$ (2) $54.84\le m\le 65.16$
02 (1) 15.68 (2) 20.64 **03** ② **04** 51.1 **05** 90 **06** ④
07 $368.28\le m\le 371.72$ **08** ⑤ **09** ④ **10** 64 **11** ⑤
12 5.88 **13** 2.48 **14** 400 **15** ⑤ **16** 64 **17** ②
18 88 **19** 1.5 **20** 49 **21** ③ **22** 144 **23** ②
24 $\frac{1}{3}$배

I. 순열과 조합

01 여러 가지 순열

01 원순열

Lecture 01 원순열

6쪽

1-1 (1) $(5-1)!=4!=24$
(2) $(6-1)!=5!=120$

답 (1) 24 (2) 120

$n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$

1-2 6명의 학생 중에서 3명을 택하는 경우의 수는
$_6C_3=20$
택한 3명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(3-1)!=2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$20\cdot2=40$

답 40

$_nP_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)

$_nC_r=\dfrac{_nP_r}{r!}$ (단, $0\le r\le n$)

2-1 답 6, 120, 2, 120, 240

쌤 한마디

다음 그림과 같이 ①을 기준으로 생각할 때, 6명이 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 ①이 앉는 자리에 따라 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.

회전하여 일치하지 않는 경우

기본+표준 유형 Q+Q

7쪽

01 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(7-1)!=6!=720$

답 ④

02 9명의 회원 중에서 4명을 택하는 경우의 수는
$_9C_4=126$
택한 4명의 회원이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$126\cdot6=756$

답 ③

6~8쪽

03 선생님 2명을 한 사람으로 생각하면 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
선생님끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot2=12$

답 12

04 컵 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
컵 사이사이의 5개의 자리에 접시 3개를 배열하는 경우의 수는
$_5P_3=60$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\cdot60=1440$

답 ⑤

05 연극배우 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(3-1)!=2!=2$
연극배우 사이사이의 3개의 자리에 영화배우 3명이 앉는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\cdot6=12$

답 ②

참고 영화배우가 먼저 앉은 후 그 사이사이의 자리에 연극배우가 앉는 경우의 수를 구해도 결과는 같다.

06 아버지의 자리가 결정되면 어머니의 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 부모님이 마주 보고 앉는 경우의 수는 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$(7-1)!=6!=720$

답 720

어머니를 제외한 7명

07 가운데 영역을 칠하는 경우의 수는
$_4C_1=4$
나머지 3개의 영역을 서로 다른 3가지 색으로 칠하는 경우의 수는
$(3-1)!=2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot2=8$

답 8

가운데 영역에 칠할 색을 택하는 경우의 수

가운데 영역에 칠한 색을 제외한 3가지 색

08 서로 다른 5가지 색을 각 영역에 칠하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$

답 ②

09 주어진 사각뿔의 밑면을 칠하는 경우의 수는
$_5C_1=5$
4개의 옆면을 서로 다른 4가지 색으로 칠하는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$5\cdot6=30$

답 30

옆면은 모두 합동이므로 옆면을 칠하는 경우의 수는 서로 다른 4가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같다.

10 주어진 삼각뿔대의 두 밑면을 칠하는 경우의 수는

$\quad {}_5P_2=20$

3개의 옆면을 서로 다른 3가지 색으로 칠하는 경우의 수는

$\quad (3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

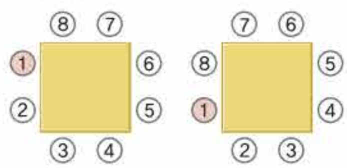
$\quad 20\cdot2=40$ 답 ③

Q BOX
삼각뿔대의 두 밑면은 합동이 아니므로 순열을 이용한다.

11 8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$\quad (8-1)!=7!=5040$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 정사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



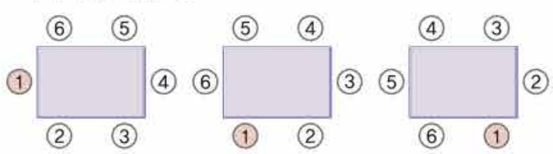
따라서 구하는 경우의 수는

$\quad 5040\cdot2=10080$ 답 ⑤

12 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$\quad (6-1)!=5!=120$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$\quad 120\cdot3=360$ 답 360

02 여러 가지 순열

Lecture 02 중복순열 9쪽

1-1 (1) ${}_7\Pi_2=7^2=49$

(2) ${}_5\Pi_4=5^4=625$

(3) ${}_2\Pi_5=2^5=32$

(4) ${}_6\Pi_3=6^3=216$

답 (1) 49 (2) 625 (3) 32 (4) 216

1-2 (1) ${}_n\Pi_3=64$에서

$\quad n^3=4^3 \quad \therefore n=4$

(2) ${}_n\Pi_n=27$에서

$\quad n^n=3^3 \quad \therefore n=3$

(3) ${}_9\Pi_r=81$에서

$\quad 9^r=9^2 \quad \therefore r=2$

(4) ${}_2\Pi_r=128$에서

$\quad 2^r=2^7 \quad \therefore r=7$

답 (1) 4 (2) 3 (3) 2 (4) 7

2-1 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$\quad {}_3\Pi_4=3^4=81$ 답 81

2-2 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$\quad {}_5\Pi_3=5^3=125$ 답 125

Lecture 03 같은 것이 있는 순열 10쪽

1-1 (1) 4개의 숫자 중에서 1이 2개, 2가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\quad \dfrac{4!}{2!\cdot2!}=6$

(2) 6개의 숫자 중에서 2가 3개, 3이 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\quad \dfrac{6!}{3!\cdot2!}=60$

(3) 5개의 문자 중에서 a가 3개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\quad \dfrac{5!}{3!}=20$

(4) 6개의 문자 중에서 a가 2개, b가 2개, c가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\quad \dfrac{6!}{2!\cdot2!\cdot2!}=90$

답 (1) 6 (2) 60 (3) 20 (4) 90

1-2 (1) 5개의 문자 중에서 s가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\quad \dfrac{5!}{2!}=60$

(2) 6개의 문자 중에서 o가 2개, s가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\quad \dfrac{6!}{2!\cdot2!}=180$

(3) 7개의 문자 중에서 c가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\quad \dfrac{7!}{2!}=2520$

답 (1) 60 (2) 180 (3) 2520

1-3 답 3, 2, a, 5, 3, 10

도로망에서 최단 거리로 가는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 구한다.

기본+표준 유형 Q+Q 11쪽

01 ${}_n\Pi_2=121$에서

$\quad n^2=11^2 \quad \therefore n=11$

$_5\Pi_r=625$에서

$5^r=5^4 \quad \therefore r=4$

$\therefore n+r=15$ 답 15

02 $_1\Pi_3+{}_2\Pi_3+{}_3\Pi_3+{}_4\Pi_3=1^3+2^3+3^3+4^3$

$=100$ 답 ①

03 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_6=2^6=64$ 답 ④

04 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_5=3^5=243$ 답 243

05 전구 4개를 각각 켜거나 끄는 경우의 수는

$_2\Pi_4=2^4=16$

이때 전구가 모두 꺼진 경우는 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는

$16-1=15$ 답 ③

06 두 깃발을 합해서 3번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_3=2^3=8$

두 깃발을 합해서 5번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 신호의 개수는

$8+32=40$ 답 40

07 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 3의 3개

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3\cdot64=192$ 답 192

08 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

5, 7, 9의 3개

백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$_6\Pi_2=6^2=36$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$3\cdot36=108$ 답 ④

09 X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 X의 원소 a, b에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$_4\Pi_2=4^2=16$ 답 ③

Q BOX

정의역의 원소 2는 함숫값이 정해져 있으므로 2를 제외한 나머지 정의역의 원소에 공역의 원소를 대응시키는 경우의 수를 구한다.

양 끝의 c는 같은 문자이므로 자리를 바꾸는 것은 생각하지 않는다.

연필을 필통에 넣는 경우이므로 중복을 허용하여 택할 수 있는 것은 필통이다.

맨 앞자리에 어떤 숫자가 오는지에 따라 남은 숫자 중 같은 것의 개수가 달라지므로 맨 앞자리의 숫자를 기준으로 경우를 나눈다.

2개의 깃발에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

맨 앞자리에는 0이 올 수 없다.

10 $f(2)=0$을 만족시키는 함수의 개수는 Y의 원소 -1, 0, 1의 3개에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 X의 원소 1, 3, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$_3\Pi_4=3^4=81$ 답 81

11 양 끝에 2개의 c를 나열하고, 2개의 c를 제외한 6개의 문자 a, u, r, a, t, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$ 답 360

12 모음 i, e를 한 문자 X로 생각하면 5개의 문자 X, l, t, t, l을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$

모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$30\cdot2=60$ 답 ④

13 (i) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우

6개의 숫자 0, 2, 3, 3, 3, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!}=120$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 3인 경우

6개의 숫자 0, 2, 2, 3, 3, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot2!}=180$

(iii) 맨 앞자리의 숫자가 5인 경우

6개의 숫자 0, 2, 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot3!}=60$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$120+180+60=360$ 답 360

다른 풀이 7개의 숫자 0, 2, 2, 3, 3, 3, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\cdot3!}=420$

이때 맨 앞자리의 숫자가 0인 경우의 수는 6개의 숫자 2, 2, 3, 3, 3, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{6!}{2!\cdot3!}=60$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$420-60=360$

14 (i) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

5개의 숫자 1, 3, 3, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$

(ⅱ) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

5개의 숫자 1, 2, 3, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 짝수의 개수는

$30+60=90$ 답 ⑤

15 B, D의 순서가 정해져 있으므로 구하는 경우의 수는 B, D를 모두 X로 생각하면 4개의 문자 A, X, C, X를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 B, 두 번째 X는 D로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$ 답 ①

16 3개의 모음 o, o, a를 먼저 일렬로 나열한 후 5개의 자음 b, k, m, r, k를 그 뒤에 일렬로 나열하면 된다.

모음 o, o, a를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

자음 b, k, m, r, k를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot 60=180$ 답 180

17 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{8!}{5!\cdot 3!}=56$ 답 ③

18 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$

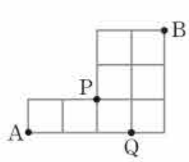
P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot 6=60$ 답 60

19 오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(ⅰ) A → P → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

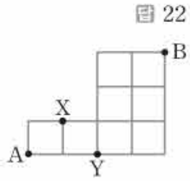
$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}=3\cdot 6=18$

(ⅱ) A → Q → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

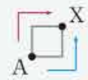
$1\cdot\frac{4!}{3!}=1\cdot 4=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $18+4=22$ 답 22

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 두 지점 X, Y를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



A에서 X까지 최단 거리로 가는 경우는 다음 그림과 같이 2가지이다.



(ⅰ) A → X → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$2\cdot\left(1\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}\right)=2\cdot 6=12$

(ⅱ) A → Y → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

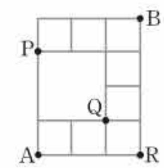
$1\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}=1\cdot 10=10$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $12+10=22$

쌤 한마디

최단 거리로 가는 경우의 수를 바로 구할 수 없을 때에는 중간에 반드시 거쳐야 하는 지점을 잡아서 생각한다.
이때 중간 지점 P, Q, R, …는 다음에 주의하여 잡는다.
① 중간 지점 P, Q, R, …를 동시에 지나는 경우가 없도록 한다.
② 중간 지점 P, Q, R, …를 모두 지나지 않는 경우가 없도록 한다.

20 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(ⅰ) A → P → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$1\cdot\frac{4!}{3!}=1\cdot 4=4$

(ⅱ) A → Q → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{4!}{3!}=3\cdot 4=12$

(ⅲ) A → R → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$1\cdot 1=1$

이상에서 $4+12+1=17$ 답 ②

중단원 마무리

14쪽

01 전략 당근 컵케이크를 제외한 7개 중에서 5개를 택한 후 원순열의 수를 이용한다.

풀이 당근 컵케이크를 제외한 7개 중에서 5개를 택하는 경우의 수는

${}_7C_5={}_7C_2=21$

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

택한 5개와 당근 컵케이크를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$21\cdot 120=2520$ 답 ⑤

02 전략 각 부부를 한 사람으로 생각하여 원탁에 둘러앉힌다.

풀이 각 부부를 한 사람으로 생각하면 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

부부끼리 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot 2!\cdot 2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot 8=16$ 답 16

03 전략 구하는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12인 경우의 수를 뺀 것과 같다.

풀이 6개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

1부터 6까지의 자연수 중에서 두 수의 곱이 12인 경우는

$2\cdot 6=12$ 또는 $3\cdot 4=12$

(i) 2, 6이 적힌 의자가 이웃하는 경우

2, 6이 적힌 의자를 한 묶음으로 생각하면 5개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

2, 6이 적힌 의자의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉 2, 6이 적힌 의자가 이웃하는 경우의 수는

$24\cdot 2=48$

(ii) 3, 4가 적힌 의자가 이웃하는 경우

3, 4가 적힌 의자를 한 묶음으로 생각하면 5개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

3, 4가 적힌 의자의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉 3, 4가 적힌 의자가 이웃하는 경우의 수는

$24\cdot 2=48$

(iii) 2, 6과 3, 4가 적힌 의자가 각각 이웃하는 경우

2, 6과 3, 4가 적힌 의자를 각각 한 묶음으로 생각하면 4개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

2, 6과 3, 4가 적힌 의자끼리 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot 2!=4$

즉 2, 6과 3, 4가 적힌 의자가 각각 이웃하는 경우의 수는

$6\cdot 4=24$

이상에서 2, 6 또는 3, 4가 적힌 의자가 이웃하는 경우의 수는

$48+48-24=72$

서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12인 경우

따라서 구하는 경우의 수는

$120-72=48$ 답 48

04 전략 펭귄 인형을 먼저 배열한 후, 펭귄 인형 사이사이의 자리에 코끼리 인형을 배열한다.

풀이 펭귄 인형 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!$

펭귄 인형 사이사이의 5개의 자리에 코끼리 인형 5개를 배열하는 경우의 수는

$5!$

따라서 펭귄 인형과 코끼리 인형을 교대로 배열하는 경우의 수는

$4!\cdot 5!=4\cdot 6!$

$4!\cdot 5!=(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\cdot 5!=4\cdot 6!$

이므로 $k=4$ 답 4

05 전략 빨간색을 칠할 날개가 결정되면 파란색을 칠할 날개는 맞은편에 있는 날개로 고정된다.

풀이 빨간색을 칠할 날개가 결정되면 파란색을 칠할 날개는 맞은편에 있는 날개로 고정되므로 빨간색과 파란색을 서로 맞은편의 날개에 칠하는 경우의 수는 서로 다른 5가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같다.

파란색을 제외한 5가지 색

따라서 구하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$ 답 ③

06 전략 밑면을 칠하는 경우의 수를 먼저 구한 후 나머지 색으로 옆면을 칠하는 경우의 수를 구한다.

풀이 주어진 오각뿔대의 두 밑면을 칠하는 경우의 수는

$_7P_2=42$ ···· ❶

오각뿔대의 두 밑면은 합동이 아니므로 순열을 이용한다.

5개의 옆면을 서로 다른 5가지 색으로 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$ ···· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$42\cdot 24=1008$ ···· ❸

답 1008

단계	채점 기준	비율
❶	밑면을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷	옆면을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸	오각뿔대의 각 면을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

07 전략 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서의 서로 다른 경우의 수를 구한다.

풀이 10명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$9!\cdot 5$ 답 ①

08 전략 각 학생은 가위, 바위, 보 중에서 하나를 택할 수 있다.

풀이 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

가위, 바위, 보의 3개

$_3\Pi_4=3^4=81$ 답 81

09 전략 그릇 A에 2개의 과일을 담고 나머지 과일을 그릇 B, C에 담는 경우의 수를 구한다.

풀이 서로 다른 과일 5개 중에서 그릇 A에 담을 과일 2개를 택하는 경우의 수는

$_5C_2=10$

나머지 과일 3개를 2개의 그릇 B, C에 남김없이 나누어 담는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

B, C의 2개

$_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot8=80$ 답 ⑤

10 전략 두 기호를 합해서 n개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 $_2\Pi_n$임을 이용한다.

풀이 두 기호를 합해서 2개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_2=2^2=4$

두 기호를 합해서 3개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_3=2^3=8$

두 기호를 합해서 4개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_4=2^4=16$

두 기호를 합해서 5개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 신호의 개수는

$4+8+16+32=60$ 답 60

11 전략 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 2, 3, 5이다.

풀이 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

2, 3, 5의 3개

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$_6\Pi_3=6^3=216$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3\cdot216=648$ 답 ②

12 전략 구하는 자연수의 개수는 만들 수 있는 모든 세 자리 자연수의 개수에서 7을 포함하지 않는 세 자리 자연수의 개수를 뺀 것과 같다.

풀이 주어진 5개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

맨 앞자리에는 0이 올 수 없다.

$4\cdot{}_5\Pi_2=4\cdot5^2=100$ ⋯ ❶

7을 제외한 나머지 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

0, 1, 3, 5

$3\cdot{}_4\Pi_2=3\cdot4^2=48$ ⋯ ❷

따라서 구하는 자연수의 개수는

$100-48=52$ ⋯ ❸

답 52

단계	채점 기준	비율
❶	세 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷	7을 포함하지 않는 세 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸	7을 반드시 포함하는 세 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

13 전략 $f(d)$의 값이 될 수 있는 것을 구하고, b와 d를 제외한 나머지 정의역의 원소에 공역의 원소를 대응시키는 경우를 생각한다.

풀이 $f(d)\neq8$이므로 $f(d)$의 값이 될 수 있는 것은

2, 4의 2개

또 $f(b)=4$이므로 Y의 원소 2, 4, 8의 3개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 X의 원소 a, c, e에 대응시키는 경우의 수는

$_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 함수의 개수는

$2\cdot27=54$ 답 ④

14 전략 먼저 5장의 카드를 택하는 경우를 구하고, 각 경우에서 주어진 조건에 따라 카드를 나열하는 경우의 수를 구한다.

풀이 6장의 카드 중에서 5장을 택하는 경우는

A, B, B, C, C 또는 A, B, C, C, C 또는 B, B, C, C, C

(i) A, B, B, C, C가 적힌 카드를 택하는 경우
왼쪽에서 두 번째의 위치에 C가 적힌 카드를 놓고 나머지 4개의 자리에 A, B, B, C가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ii) A, B, C, C, C가 적힌 카드를 택하는 경우
왼쪽에서 두 번째의 위치에 C가 적힌 카드를 놓고 나머지 4개의 자리에 A, B, C, C가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(iii) B, B, C, C, C가 적힌 카드를 택하는 경우
왼쪽에서 두 번째의 위치에 C가 적힌 카드를 놓고 나머지 4개의 자리에 B, B, C, C가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$

이상에서 구하는 경우의 수는

$12+12+6=30$ 답 ④

15 **전략** a가 두 번, 세 번, 네 번 나오는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) a가 두 번 나오는 경우

a, a, b, b 또는 a, a, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\cdot2!}+\frac{4!}{2!\cdot2!}=6+6=12$$

a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

(ii) a가 세 번 나오는 경우

a, a, a, b 또는 a, a, a, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{3!}=4+4=8$$

(iii) a가 네 번 나오는 경우

a, a, a, a를 일렬로 나열하는 경우의 수는 1

이상에서 구하는 경우의 수는

$12+12+8+1=33$ 답 33

16 **전략** 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리, 천의 자리에 홀수를 나열하는 경우의 수와 나머지 자리에 짝수를 나열하는 경우의 수를 각각 구한다.

풀이 8개의 숫자 중 홀수가 4개, 짝수가 4개이므로 홀수는 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리, 천의 자리에 나열하고 짝수는 나머지 자리에 나열하면 된다.

홀수 1, 3, 3, 5를 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리, 천의 자리에 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

짝수 2, 2, 4, 4를 나머지 자리에 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$12\cdot6=72$ 답 ③

17 **전략** 2, 4가 적혀 있는 카드와 홀수가 적혀 있는 카드를 각각 같은 문자로 바꿔서 생각한다.

풀이 2, 4가 적혀 있는 카드와 홀수 1, 3, 5가 적혀 있는 카드의 순서가 정해져 있으므로 구하는 경우의 수는 2, 4를 모두 X로, 1, 3, 5를 모두 Y로 생각하면 Y, X, Y, X, Y, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 2, 두 번째 X는 4, 첫 번째 Y는 1, 두 번째 Y는 3, 세 번째 Y는 5로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!\cdot3!}=60$$ 답 ②

18 **전략** A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 P에서 Q를 거치지 않고 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 각각 구하여 곱한다.

풀이 (i) A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$$

(ii) P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4!\cdot2!}=15$$

P에서 Q를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$2\cdot\frac{4!}{3!}=2\cdot4=8$$

즉 P에서 Q를 거치지 않고 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

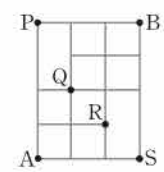
$15-8=7$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6\cdot7=42$ 답 42

19 **전략** A에서 B까지 갈 때 반드시 거쳐야 하는 지점을 잡아서 경우를 나눈다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → P → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$1\cdot1=1$

(ii) A → Q → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot2!}=3\cdot6=18$$

(iii) A → R → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\cdot\left(1\cdot\frac{3!}{2!}\right)=3\cdot3=9$$

(iv) A → S → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$1\cdot1=1$

이상에서 $1+18+9+1=29$ 답 ⑤

02 중복조합과 이항정리

03 중복조합

Lecture 04 중복조합

18쪽

1-1 (1) ${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=15$

(2) ${}_7H_3={}_{7+3-1}C_3={}_9C_3=84$

(3) ${}_2H_8={}_{2+8-1}C_8={}_9C_8={}_9C_1=9$

(4) ${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

답 (1) 15 (2) 84 (3) 9 (4) 35

${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}$ (단, $0\le r\le n$)

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

1-2 (1) ${}_nH_1={}_6C_1$에서 ${}_nC_1={}_6C_1$

$\therefore n=6$

(2) ${}_nH_3={}_{10}C_7$에서 ${}_{n+2}C_3={}_{10}C_7={}_{10}C_3$

$n+2=10$ $\therefore n=8$

(3) ${}_4H_r={}_8C_5$에서 ${}_{3+r}C_r={}_8C_5$

$\therefore r=5$

(4) ${}_8H_r={}_9C_7$에서 ${}_{7+r}C_r={}_9C_7={}_9C_2$

$\therefore r=2$

$r=7$이면 좌변은 ${}_{14}C_7$이므로 등식이 성립하지 않는다.

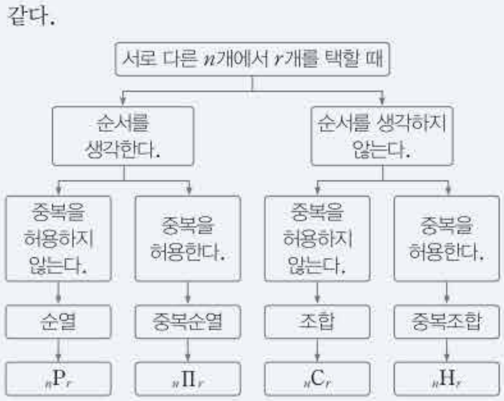
답 (1) 6 (2) 8 (3) 5 (4) 2

2-1 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$ 답 21

쌤 한마디

순열, 중복순열, 조합, 중복조합을 정리하면 다음과 같다.



2-2 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$ 답 165

공책을 학생들에게 나누어 주는 경우이므로 중복을 허용하여 택할 수 있는 것은 학생이다.

기본+표준 유형 Q+Q

19쪽

01 ① ${}_5H_3={}_7C_3=35$

② ${}_6H_3={}_8C_3=56$

③ ${}_6C_3=20$

④ ${}_7H_2={}_8C_2=28$

⑤ ${}_{10}C_2=45$

따라서 가장 큰 수는 ${}_6H_3$이다. 답 ②

02 ${}_3H_r={}_{2+r}C_r={}_{2+r}C_2=\dfrac{(2+r)(1+r)}{2\cdot1}$이므로

$(2+r)-r=2$

${}_3H_r=36$에서 $\dfrac{(2+r)(1+r)}{2\cdot1}=36$

$(2+r)(1+r)=9\cdot8$

$\therefore r=7$ 답 7

쌤 한마디

r의 값은 이차방정식 $(2+r)(1+r)=9\cdot8$, 즉 $r^2+3r-70=0$을 풀어 구할 수도 있지만 $1+r$, $2+r$가 자연수이므로 곱이 72인 연속인 두 자연수가 8, 9임을 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

03 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=286$ 답 286

04 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$ 답 ⑤

05 먼저 음료수를 5명의 학생에게 각각 1개씩 나누어 주고, 나머지 7개의 음료수를 5명의 학생에게 나누어 주면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_7={}_{11}C_7={}_{11}C_4=330$ 답 330

06 먼저 야구공, 테니스공, 골프공을 각각 2개씩 꺼내고, 나머지 3개의 공을 꺼내면 된다.

$9-2\cdot3=3$

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$ 답 10

07 구하는 항의 개수는 a, b, c의 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$ 답 28

$(a+b+c)^6=\underbrace{(a+b+c)\cdots(a+b+c)}_{6\text{개}}$ 이므로 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 a, b, c의 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

08 구하는 항의 개수는 a, b, c, d의 4개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=220$ 답 ③

09 구하는 순서쌍의 개수는 x, y, z의 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$ 답 ③

10 x, y, z가 양의 정수이므로 $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$로 놓으면 a, b, c는 음이 아닌 정수이고 $x+y+z=7$에서

$(a+1)+(b+1)+(c+1)=7$

$\therefore a+b+c=4$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$ 답 15

Q BOX: $x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$인 정수

Q BOX: a, b, c의 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수

11 x, y, z가 음이 아닌 정수이므로

$x+y+z=0$ 또는 $x+y+z=1$ 또는 $x+y+z=2$

(i) $x+y+z=0$일 때,

순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_0={}_2C_0=1$

Q BOX: $(0, 0, 0)$의 1개

(ii) $x+y+z=1$일 때,

순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_1={}_3C_1=3$

(iii) $x+y+z=2$일 때,

순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_2={}_4C_2=6$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+3+6=10$ 답 10

12 1, 2, 3, ⋯, 10의 10개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b로 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_{10}H_2={}_{11}C_2=55$ 답 ⑤

Q BOX: 중복을 허용하여 2개를 뽑으면 $a\leq b$를 만족시키는 a, b가 하나로 정해진다. 예를 들어 1, 2를 뽑으면 $a=1$, $b=2$로 정해지고, 1, 1을 뽑으면 $a=1$, $b=1$로 정해진다.

13 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c로 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_4H_3={}_6C_3=20$ 답 20

14 구하는 함수 f의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 1, 3, 5, 7에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5H_4={}_8C_4=70$ 답 70

15 구하는 함수 f의 개수는 Y의 원소 0, 2, 4, 6, 8, 10의 6개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 1, 3, 2에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_6H_3={}_8C_3=56$ 답 ②

04 이항정리

Lecture 05 이항정리 21쪽

1-1 (1) $(x+3)^4$

$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\cdot3+{}_4C_2x^2\cdot3^2+{}_4C_3x\cdot3^3+{}_4C_43^4$

$=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$

(2) $(a-b)^5$

$={}_5C_0a^5+{}_5C_1a^4(-b)+{}_5C_2a^3(-b)^2+{}_5C_3a^2(-b)^3+{}_5C_4a(-b)^4+{}_5C_5(-b)^5$

$=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

(3) $(2a+b)^6$

$={}_6C_0(2a)^6+{}_6C_1(2a)^5b+{}_6C_2(2a)^4b^2+{}_6C_3(2a)^3b^3+{}_6C_4(2a)^2b^4+{}_6C_52ab^5+{}_6C_6b^6$

$=64a^6+192a^5b+240a^4b^2+160a^3b^3+60a^2b^4+12ab^5+b^6$

(4) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\cdot\frac{1}{x}+{}_4C_2x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2+{}_4C_3x\left(\frac{1}{x}\right)^3+{}_4C_4\left(\frac{1}{x}\right)^4$

$=x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$

답 (1) $x^4+12x^3+54x^2+108x+81$
(2) $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$
(3) $64a^6+192a^5b+240a^4b^2+160a^3b^3+60a^2b^4+12ab^5+b^6$
(4) $x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$

1-2 $(x+4y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_rx^{5-r}(4y)^r={}_5C_r4^rx^{5-r}y^r$

(1) x^2y^3항은 $r=3$일 때이므로 x^2y^3의 계수는

${}_5C_3\cdot4^3=10\cdot64=640$

(2) x^4y항은 $r=1$일 때이므로 x^4y의 계수는

${}_5C_1\cdot4=5\cdot4=20$

답 (1) 640 (2) 20

2-1 (1) ${}_4C_0+{}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4=2^4$

$=16$

(3) ${}_8C_0+{}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8=2^{8-1}$

$=128$

(4) ${}_5C_1+{}_5C_3+{}_5C_5=2^{5-1}$

$=16$

답 (1) 16 (2) 0 (3) 128 (4) 16

Lecture 06 파스칼의 삼각형 22쪽

1-1 답 3, 4, 6, 5, 10, 10,

$x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

1-2

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

(1) 위의 파스칼의 삼각형에서

$$(a+2)^5=a^5+5\cdot a^4\cdot 2+10\cdot a^3\cdot 2^2$$
$$+10\cdot a^2\cdot 2^3+5\cdot a\cdot 2^4+2^5$$
$$=a^5+10a^4+40a^3+80a^2+80a+32$$

(2) 위의 파스칼의 삼각형에서

$$(x+3y)^4=x^4+4\cdot x^3\cdot 3y+6\cdot x^2\cdot (3y)^2$$
$$+4\cdot x\cdot (3y)^3+(3y)^4$$
$$=x^4+12x^3y+54x^2y^2+108xy^3+81y^4$$

답 (1) $a^5+10a^4+40a^3+80a^2+80a+32$
(2) $x^4+12x^3y+54x^2y^2+108xy^3+81y^4$

1-3 (3) ${}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2={}_3C_1+{}_3C_2={}_4C_2$

${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$

(4) ${}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3={}_5C_2+{}_5C_3={}_6C_3$

답 (1) ${}_5C_2$ (2) ${}_6C_4$ (3) ${}_4C_2$ (4) ${}_6C_3$

기본+표준 유형 Q+Q

23쪽

01 $(3-x)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r 3^{6-r}(-x)^r={}_6C_r 3^{6-r}(-1)^r x^r$$

x^4항은 $r=4$일 때이므로 x^4의 계수는

$$a={}_6C_4\cdot 3^2\cdot(-1)^4=15\cdot 9=135$$

$\left(x^2+\dfrac{4}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(x^2)^{5-r}\left(\frac{4}{x}\right)^r={}_5C_r 4^r\frac{x^{10-2r}}{x^r}$$

x^4항은 $10-2r-r=4$, 즉 $r=2$일 때이므로 x^4의 계수는

$3r=6 \quad \therefore r=2$

$$b={}_5C_2\cdot 4^2=10\cdot 16=160$$
$$\therefore b-a=25$$

답 25

02 $(ax+y)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(ax)^{4-r}y^r={}_4C_r a^{4-r}x^{4-r}y^r$$

x^3y항은 $r=1$일 때이고, x^3y의 계수가 108이므로

$${}_4C_1 a^3=108,\qquad a^3=27$$

$27=3^3$

$$\therefore a=3\ (\because a\text{는 실수})$$

답 ②

03 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=3$, $n=12$를 대입하면

$$4^{12}={}_{12}C_0+{}_{12}C_1\cdot 3+{}_{12}C_2\cdot 3^2+\cdots+{}_{12}C_{12}\cdot 3^{12}$$

즉 $2^n=4^{12}=2^{24}$이므로

$4^{12}=(2^2)^{12}=2^{24}$

$$n=24$$

답 24

04 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=10$, $n=33$을 대입하면

$$11^{33}$$
$$={}_{33}C_0+{}_{33}C_1\cdot 10+{}_{33}C_2\cdot 10^2+\cdots+{}_{33}C_{33}\cdot 10^{33}$$
$$=1+33\cdot 10+10^2({}_{33}C_2+{}_{33}C_3\cdot 10+\cdots+{}_{33}C_{33}\cdot 10^{31})$$
$$=331+10^2({}_{33}C_2+{}_{33}C_3\cdot 10+\cdots+{}_{33}C_{33}\cdot 10^{31})$$

이때 $10^2({}_{33}C_2+{}_{33}C_3\cdot 10+\cdots+{}_{33}C_{33}\cdot 10^{31})$은 100으로 나누어떨어지므로 11^{33}을 100으로 나눈 나머지는 331을 100으로 나눈 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는 31이다.

$331=100\cdot 3+31$

답 ④

05 $(2+x)^7$의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r 2^{7-r}x^r \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(1-x)(2+x)^7$의 전개식에서 x^5항은 1과 ㉠의 x^5항이 곱해질 때, $-x$와 ㉠의 x^4항이 곱해질 때 나타난다.

$(1-x)(2+x)^7$
$=(2+x)^7-x(2+x)^7$

(i) ㉠에서 x^5항은 $r=5$일 때이므로

$${}_7C_5\cdot 2^2x^5=84x^5$$

(ii) ㉠에서 x^4항은 $r=4$일 때이므로

$${}_7C_4\cdot 2^3x^4=280x^4$$

(i), (ii)에서 $(1-x)(2+x)^7$의 전개식에서 x^5항은

$$1\cdot 84x^5-x\cdot 280x^4=-196x^5$$

이므로 구하는 계수는 -196이다.

답 ③

06 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r(-1)^r\frac{x^{4-r}}{x^r} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(x^2+4)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항은 x^2과 ㉠의 $\dfrac{1}{x^2}$항이 곱해질 때, 4와 ㉠의 상수항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 $\dfrac{1}{x^2}$항은 $r-(4-r)=2$, 즉 $r=3$일 때이므로

$${}_4C_3\cdot(-1)^3\frac{1}{x^2}=-\frac{4}{x^2}$$

(ii) ㉠에서 상수항은 $4-r=r$, 즉 $r=2$일 때이므로

$${}_4C_2\cdot(-1)^2=6$$

(i), (ii)에서 $(x^2+4)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항은

$$x^2\cdot\left(-\frac{4}{x^2}\right)+4\cdot 6=20$$

답 20

07 $(1-x)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(-x)^r={}_5C_r(-1)^rx^r$$

$(1+x)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_s x^s$$

즉 $(1-x)^5(1+x)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(-1)^rx^r\cdot{}_6C_sx^s={}_5C_r\cdot{}_6C_s(-1)^rx^{r+s}$$

x^2항은 $r+s=2$일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

r, s는 각각 $0\le r\le 5$, $0\le s\le 6$인 정수이다.

$$(0, 2),\ (1, 1),\ (2, 0)$$

따라서 구하는 x^2의 계수는

$${}_5C_0\cdot{}_6C_2\cdot\underline{(-1)^0}+{}_5C_1\cdot{}_6C_1\cdot(-1)+{}_5C_2\cdot{}_6C_0\cdot(-1)^2$$
$$=15-30+10=-5$$ 답 ③

$a\neq0$일 때, $a^0=1$

08 $(2+x)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3C_r2^{3-r}x^r$

$(a+x)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_sa^{4-s}x^s$

즉 $(2+x)^3(a+x)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r2^{3-r}x^r\cdot{}_4C_sa^{4-s}x^s={}_3C_r\cdot{}_4C_s2^{3-r}a^{4-s}x^{r+s}$$

x^6항은 $r+s=6$일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

r, s는 각각 $0\leq r\leq3$, $0\leq s\leq4$인 정수이다.

$(2, 4)$, $(3, 3)$

x^6의 계수는

$${}_3C_2\cdot{}_4C_4\cdot2\cdot a^0+{}_3C_3\cdot{}_4C_3\cdot2^0\cdot a=6+4a$$

이때 x^6의 계수가 30이므로

$6+4a=30$ $\therefore a=6$ 답 6

09 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$2^n=256=2^8$ $\therefore n=8$ 답 8

10 ${}_{16}C_0-{}_{16}C_1+{}_{16}C_2-\cdots-{}_{16}C_{15}+{}_{16}C_{16}=0$이므로

$${}_{16}C_1-{}_{16}C_2+{}_{16}C_3-{}_{16}C_4+\cdots+{}_{16}C_{15}$$
$$={}_{16}C_0+{}_{16}C_{16}=2$$ 답 ⑤

11 ${}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3$

$$={}_5C_2+{}_5C_3={}_6C_3$$ 답 ②

12 $\underline{{}_2C_2}+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2$

${}_2C_2=1={}_3C_3$

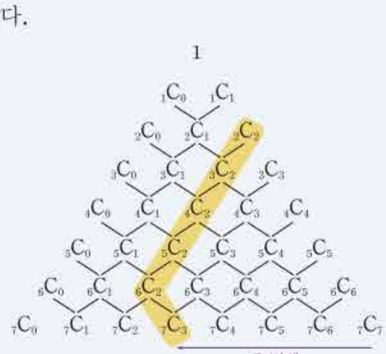
$$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2$$
$$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2$$
$$={}_5C_3+{}_5C_2+{}_6C_2$$
$$={}_6C_3+{}_6C_2={}_7C_3=35$$ 답 35

쌤 한마디

파스칼의 삼각형에서 각 단계의 첫 번째 또는 마지막 수인 1에서 시작하여 대각선 방향으로 배열된 n개의 수를 더한 값은 그 다음 단계의 첫 번째 또는 마지막 수로부터 n 번째 수와 같다.

이를 파스칼의 삼각형에 표시하면 다음 그림과 같은 모양이 되고, '하키 스틱 패턴'이라 한다.

문제에서 구하는 수의 합은 ${}_2C_2=1$부터 대각선 방향으로 ${}_6C_2$까지의 5개의 이항계수를 모두 더한 값이므로 그 다음 단계의 마지막 수로부터 5 번째 수인 ${}_7C_3$과 같다.



중단원 마무리

25쪽

01 전략 ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$임을 이용한다.

풀이 ${}_4H_r={}_8C_3$에서 ${}_{3+r}C_r={}_8C_3={}_8C_5$

$\therefore r=5$

$\therefore {}_5H_4={}_8C_4=70$ 답 ⑤

02 전략 구하는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 세 수의 곱이 100 초과인 경우의 수를 뺀 것과 같다.

풀이 네 개의 자연수 1, 2, 4, 8 중에서 중복을 허락하여 세 수를 택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_3={}_6C_3=20$

세 수의 곱이 100 초과인 경우는

$8\cdot8\cdot8=512$, $8\cdot8\cdot4=256$,

$8\cdot8\cdot2=128$, $8\cdot4\cdot4=128$의 4가지

따라서 구하는 경우의 수는

$20-4=16$ 답 ③

03 전략 먼저 사과 맛 젤리를 2개, 포도 맛 젤리를 3개 택한 후 중복조합의 수를 이용한다.

풀이 먼저 사과 맛 젤리를 2개, 포도 맛 젤리를 3개 택하고, 사과 맛, 포도 맛, 복숭아 맛 젤리 중에서 나머지 7개의 젤리를 택하면 된다.

$12-2-3=7$

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$ 답 36

04 전략 먼저 초콜릿을 1개씩 나누어 준 후 나머지 4개의 초콜릿을 규칙 (나)를 만족시키도록 나누어 주는 경우를 생각한다.

풀이 규칙 (가)에 의하여 먼저 초콜릿을 4명의 학생에게 각각 1개씩 나누어 주고, 나머지 4개의 초콜릿을 규칙 (나)를 만족시키도록 4명의 학생에게 나누어 주면 된다.

(i) 나머지 4개의 초콜릿 중 A가 1개를 받는 경우

규칙 (나)에 의하여 A는 나머지 4개의 초콜릿 중 1개 이상을 받아야 한다.

B는 0개를 받고, 3개의 초콜릿을 2명의 학생 C, D에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는

${}_2H_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

(ii) 나머지 4개의 초콜릿 중 A가 2개를 받는 경우

B가 0개를 받으면 2개의 초콜릿을 2명의 학생 C, D에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는

${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

B가 1개를 받으면 1개의 초콜릿을 2명의 학생 C, D에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는

${}_2C_1=2$

(iii) 나머지 4개의 초콜릿 중 A가 3개를 받는 경우

1개의 초콜릿을 3명의 학생 B, C, D에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는

${}_3C_1=3$

(iv) 나머지 4개의 초콜릿을 A가 모두 받는 경우

1가지

이상에서 구하는 경우의 수는

$4+3+2+3+1=13$ 답 ②

05 전략 $(a+b+c)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 ${}_3H_n$임을 이용한다.

풀이 서로 다른 항의 개수는 a, b, c의 3개에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_n={}_{2+n}C_n={}_{2+n}C_2=\frac{(2+n)(1+n)}{2\cdot1}$$

즉 $\frac{(2+n)(1+n)}{2\cdot1}=55$이므로

$(2+n)(1+n)=11\cdot10$

$\therefore n=9$ 답 9

06 전략 x, y, z, w가 음이 아닌 정수이므로 w의 값이 0, 1, 2인 경우로 나누어 순서쌍의 개수를 구한다.

풀이 (i) $w=0$일 때,

$x+y+z=11$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_{11}={}_{13}C_{11}={}_{13}C_2=78$ ··· ❶

(ii) $w=1$일 때,

$x+y+z+4=11$ $\therefore x+y+z=7$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$ ··· ❷

(iii) $w=2$일 때,

$x+y+z+8=11$ $\therefore x+y+z=3$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$ ··· ❸

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$78+36+10=124$ ··· ❹

답 124

단계	채점 기준	비율
❶	$w=0$일 때의 순서쌍의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷	$w=1$일 때의 순서쌍의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸	$w=2$일 때의 순서쌍의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹	순서쌍의 개수를 구할 수 있다.	10 %

07 전략 각 자리의 숫자를 a, b, c, d라 하고 방정식 $a+b+c+d=7$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 개수를 구한다.

풀이 네 자리 자연수의 각 자리의 숫자를 a, b, c, d라 하면 각 자리의 숫자의 합이 7이므로

$a+b+c+d=7$

이때 각 자리의 숫자가 0이 아니므로 a, b, c, d는 한 자리 자연수이다.

Q BOX

x, y, z의 3개에서 11개를 택하는 중복조합의 수

a, b, c, d는 네 자리 자연수의 각 자리의 숫자이므로 한 자리 자연수이다.

x, y, z는 0이 아니므로 자연수이다.

$a-1=x$, $b-1=y$, $c-1=z$, $d-1=w$로 놓으면 x, y, z, w는 음이 아닌 정수이고 $a+b+c+d=7$에서

$(x+1)+(y+1)+(z+1)+(w+1)=7$

$\therefore x+y+z+w=3$

따라서 구하는 자연수의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수와 같으므로

${}_4H_3={}_6C_3=20$ 답 ④

08 전략 a, b, c, d, e 중에서 0의 값을 갖는 2개를 택한 후 나머지 세 자연수의 합이 10임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 a, b, c, d, e의 5개에서 0의 값을 갖는 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

a, b, c, d, e 중 0이 아닌 나머지 세 수를 x, y, z라 하면 조건 (나)에서

$x+y+z=10$ ······ ㉠

이때 x, y, z는 자연수이므로

$x-1=p$, $y-1=q$, $z-1=r$

로 놓으면 p, q, r는 음이 아닌 정수이고 ㉠에서

$(p+1)+(q+1)+(r+1)=10$

$\therefore p+q+r=7$

따라서 ㉠을 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)의 개수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$10\cdot36=360$ 답 ④

09 전략 세 자연수 a, b, c의 곱이 홀수이므로 a, b, c는 모두 홀수임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $a\times b\times c$가 홀수이므로 a, b, c는 모두 홀수이어야 한다.

또 조건 (나)에 의하여 1, 3, 5, ···, 19의 10개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c로 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_{10}H_3={}_{12}C_3=220$ 답 220

10 전략 $f(2)$, $f(5)$, $f(7)$의 값을 정하는 경우의 수와 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수를 각각 구하여 곱한다.

풀이 구하는 함수 f의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 2, 5, 7에 대응시키고, Y의 원소 6개에서 1개를 뽑아 X의 원소 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_6H_3\cdot{}_6C_1={}_8C_3\cdot{}_6C_1=56\cdot6=336$ 답 336

11 전략 $(p+q)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r p^{n-r}q^r$임을 이용한다.

풀이 $\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(x^2)^{5-r}\left(\dfrac{a}{x}\right)^r={}_5C_r a^r\dfrac{x^{10-2r}}{x^r}$$

$\dfrac{1}{x^2}$항은 $r-(10-2r)=2$, 즉 $r=4$일 때이므로 $\dfrac{1}{x^2}$의 계수는

$3r=12 \quad \therefore r=4$

$${}_5C_4a^4=5a^4$$

x항은 $10-2r-r=1$, 즉 $r=3$일 때이므로 x의 계수는

$3r=9 \quad \therefore r=3$

$${}_5C_3a^3=10a^3$$

이때 $\dfrac{1}{x^2}$의 계수와 x의 계수가 같으므로

$$5a^4=10a^3, \qquad a^3(a-2)=0$$

$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

답 ②

12 전략 $(4-x)^n$의 전개식의 일반항을 구한 후 상수항을 이용하여 n의 값을 구한다.

풀이 $(4-x)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r4^{n-r}(-x)^r={}_nC_r4^{n-r}(-1)^rx^r$$

상수항은 $r=0$일 때이므로

$${}_nC_04^n(-1)^0=4^n$$

즉 $4^n=64=4^3$이므로

$$n=3$$

따라서 ${}_3C_r4^{3-r}(-1)^rx^r$에서 x항은 $r=1$일 때이므로 x의 계수는

$${}_3C_1\cdot4^2\cdot(-1)=-48$$

답 -48

13 전략 $(x+1)^n={}_nC_0x^n+{}_nC_1x^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}+\cdots+{}_nC_n$임을 이용한다.

풀이 $(x+1)^n={}_nC_0x^n+{}_nC_1x^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}+\cdots+{}_nC_n$의 양변에 $x=2$, $n=12$를 대입하면

$$3^{12}={}_{12}C_0\cdot2^{12}+{}_{12}C_1\cdot2^{11}+{}_{12}C_2\cdot2^{10}+\cdots+{}_{12}C_{12}$$

$$\therefore {}_{12}C_1\cdot2^{11}+{}_{12}C_2\cdot2^{10}+{}_{12}C_3\cdot2^9+\cdots+{}_{12}C_{12}$$
$$=3^{12}-2^{12}$$

답 ⑤

14 전략 x^2, $2x$, 1과 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항이 각각 곱해질 때 x항이 나타나는 경우를 생각한다.

풀이 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_rx^{6-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6C_r\dfrac{x^{6-r}}{x^r} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(x^2+2x+1)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x항은 x^2과 ㉠의 $\dfrac{1}{x}$항이 곱해질 때, $2x$와 ㉠의 상수항이 곱해질 때, 1과 ㉠의 x항이 곱해질 때 나타난다.

$$(x^2+2x+1)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$$
$$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$$
$$+2x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$$
$$+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$$

(i) ㉠에서 $\dfrac{1}{x}$항은 $r-(6-r)=1$, 즉 $r=\dfrac{7}{2}$일 때이지만 r는 $0\le r\le6$인 정수이므로 ㉠에서 $\dfrac{1}{x}$항은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠에서 상수항은 $6-r=r$, 즉 $r=3$일 때이므로

$${}_6C_3=20$$

(iii) ㉠에서 x항은 $6-r-r=1$, 즉 $r=\dfrac{5}{2}$일 때이지만 r는 $0\le r\le6$인 정수이므로 ㉠에서 x항은 존재하지 않는다.

이상에서 $(x^2+2x+1)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x항은

$$2x\cdot20=40x$$

이므로 구하는 계수는 40이다.

답 ②

15 전략 분모가 x이므로 분자의 전개식에서 x^3의 계수를 구한다.

풀이 $\dfrac{(1+x)^4(1-2x)^5}{x}$의 전개식에서 x^2의 계수는 $(1+x)^4(1-2x)^5$의 전개식에서 x^3의 계수와 같다. ··· ❶

$(1+x)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_rx^r$$

$(1-2x)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_s(-2x)^s={}_5C_s(-2)^sx^s$$

즉 $(1+x)^4(1-2x)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_rx^r\cdot{}_5C_s(-2)^sx^s={}_4C_r\cdot{}_5C_s(-2)^sx^{r+s} \quad \cdots ❷$$

x^3항은 $r+s=3$일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

r, s는 각각 $0\le r\le4$, $0\le s\le5$인 정수이다.

$$(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$$

따라서 $(1+x)^4(1-2x)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는

$${}_4C_0\cdot{}_5C_3\cdot(-2)^3+{}_4C_1\cdot{}_5C_2\cdot(-2)^2$$
$$+{}_4C_2\cdot{}_5C_1\cdot(-2)+{}_4C_3\cdot{}_5C_0\cdot(-2)^0$$
$$=-80+160-60+4=24$$

즉 구하는 x^2의 계수는 24이다. ··· ❸

$\dfrac{24x^3}{x}=24x^2$

답 24

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식의 전개식에서 x^2의 계수는 분자의 전개식에서 x^3의 계수와 같음을 알 수 있다.	20 %
❷	분자의 전개식의 일반항을 구할 수 있다.	30 %
❸	주어진 식의 전개식에서 x^2의 계수를 구할 수 있다.	50 %

16 전략 이항계수의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄷ. ${}_{10}C_1+{}_{10}C_3+{}_{10}C_5+{}_{10}C_7+{}_{10}C_9=2^{10-1}=2^9$

${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^{10-1}=2^9$이므로

$${}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^9-1$$

$$\therefore {}_{10}C_1+{}_{10}C_3+{}_{10}C_5+{}_{10}C_7+{}_{10}C_9$$
$$\ne{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

17 전략 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$임을 이용한다.

풀이 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$$

즉 주어진 부등식은

$100<2^n-1<150 \quad \therefore 101<2^n<151$

이때 $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$이므로

$n=7$ 답 ③

18 전략 원소의 개수가 n인 부분집합의 개수는 ${}_{11}C_n$임을 이용한다.

풀이 원소의 개수가 n인 부분집합의 개수는

${}_{11}C_n$

따라서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

$${}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11-1}$$
$$=1024$$ 답 ⑤

19 전략 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$임을 이용할 수 있도록 적절한 수를 더하고 뺀다.

풀이
$$\begin{aligned}&({}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_7)\\&+({}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_8)\\=&({}_4C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_7)-{}_4C_0\\&+({}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_8)-{}_4C_1\\=&({}_5C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_7)-1\\&+({}_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_8)-4\\=&({}_6C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_7)\\&+({}_6C_3+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_8)-5\\=&({}_7C_3+\cdots+{}_{10}C_7)+({}_7C_4+\cdots+{}_{10}C_8)-5\\&\vdots\\=&({}_{10}C_6+{}_{10}C_7)+({}_{10}C_7+{}_{10}C_8)-5\\=&{}_{11}C_7+{}_{11}C_8-5\\=&{}_{12}C_8-5={}_{12}C_4-5\\=&495-5=490\end{aligned}$$
답 490

Q BOX

한 개의 주사위를 던지는 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합

${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$임을 이용하려면 ${}_4C_0$이 필요하다. 이때 같은 수를 더하고 빼므로 구하는 식의 값은 변하지 않는다.

두 집합의 교집합이 공집합인지 확인한다.

모든 경우의 수는 $4+6=10$

03 확률의 뜻과 활용

05 확률의 뜻과 기본 성질

Lecture 07 시행과 사건 30쪽

1-1 답 (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(2) $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$
(3) $\{2, 3, 5\}$
(4) $\{1, 3\}$

2-1 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

이므로

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{5, 10\}$

(1) $A\cup B=\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

(2) $A\cap B=\{10\}$

(3) $A^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

(4) $B^C=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

답 풀이 참조

3-1 $A\cap B=\{7\}$, $B\cap C=\{5\}$, $C\cap A=\varnothing$

따라서 두 사건이 서로 배반사건인 것은 C와 A뿐이다.

답 C와 A

Lecture 08 수학적 확률과 통계적 확률 31쪽

1-1 (1) $\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

(2) $\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

답 (1) $\dfrac{2}{5}$ (2) $\dfrac{3}{5}$

1-2 두 개의 동전을 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$2\cdot2=4$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

(1) 두 개 모두 앞면이 나오는 경우는

HH의 1가지

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{1}{4}$

(2) 서로 다른 면이 나오는 경우는

HT, TH의 2가지

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

(3) 두 개 모두 앞면이 나오는 경우의 수는 1이므로 적어도 한 개는 뒷면이 나오는 경우의 수는

$4-1=3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{4}$

> HH – 모두 앞면이 나오는 경우
> HT, TH, TT – 적어도 한 개는 뒷면이 나오는 경우

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$

2-1 $\frac{420}{500}=\frac{21}{25}$ 답 $\frac{21}{25}$

2-2 $\frac{270}{300}=\frac{9}{10}$ 답 $\frac{9}{10}$

Lecture 09 확률의 기본 성질 (32쪽)

1-1 답 (1) $\frac{3}{5}$ (2) 1 (3) 0

1-2 (1) $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

> 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$ $\therefore n(S)=20$

(2) $A\cup B=\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{20}{20}=1$

(3) $A\cap B=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

> 홀수이면서 짝수인 자연수는 없다.

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 0

기본+표준 유형 Q+Q (33쪽)

01 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$이므로 $A=\{3, 6\}$, $B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$

③ $B^C=\{1, 2, 3\}$이므로

$A\cup B^C=\{1, 2, 3, 6\}$

④ $A^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$이므로

$A^C\cap B=\{4, 5, 7, 8\}$

$\therefore n(A^C\cap B)=4$

⑤ $A\cup B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로

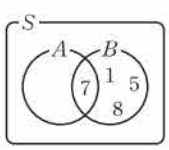
$n(A\cup B)=6$

답 ④

02 $B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$

$=\{7\}\cup\{1, 5, 8\}$

$=\{1, 5, 7, 8\}$



이때 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이므로

$B^C=\{2, 3, 4, 6, 9, 10\}$

따라서 B^C의 원소의 개수는 6이다. 답 6

03 $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{5, 6\}$, $C=\{1, 2, 4\}$

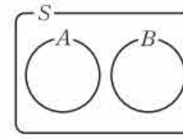
ㄱ. $A\cap B=\{5\}$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄴ. $B\cap C=\varnothing$이므로 두 사건 B와 C는 서로 배반사건이다.

ㄷ. $C\cap A=\{2\}$이므로 두 사건 C와 A는 서로 배반사건이 아니다.

이상에서 서로 배반사건인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

04 표본공간 S의 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



② [반례] $S=\{1, 2, 3\}$, $A=\{2\}$, $B=\{3\}$이면 두 사건 A, B가 서로 배반사건이지만 $A\cup B\neq S$이다.

> 일반적으로 $(A\cup B)\subset S$

답 ②

Q 쌤 한마디

다음은 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 모두 같은 의미이다.

① A와 B는 서로 배반사건이다.

② A와 B는 동시에 일어나지 않는다. 즉 $A\cap B=\varnothing$

③ A는 B의 여사건의 부분집합이다. 즉 $A\subset B^C$

05 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\cdot6=36$

나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 두 눈의 수의 합이 6인 경우는

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 5가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 12인 경우는

$(6, 6)$의 1가지

(i), (ii)에서 두 눈의 수의 합이 6의 배수인 경우의 수는

$5+1=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ 답 ⑤

06 정사면체를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $4\cdot4=16$

$\frac{a}{b}$가 짝수인 경우를 a, b의 순서쌍 (a, b)로 나타내면

> $\frac{a}{b}=2$ 또는 $\frac{a}{b}=4$

$(2, 1)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$의 3가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{16}$ 답 $\frac{3}{16}$

07 6명이 일렬로 서는 경우의 수는

$6!=720$

양 끝에 여학생 2명이 서는 경우의 수는

$2!=2$

이고, 그 사이에 남학생 4명이 일렬로 서는 경우의 수는

$4!=24$

이므로 양 끝에 여학생이 서는 경우의 수는

$2\cdot24=48$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$$ 답 $\frac{1}{15}$

08 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

$_5P_3=60$

5의 배수인 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수는 일의 자리에 오는 5를 제외한 4개의 숫자 중 백의 자리와 십의 자리에 오는 숫자를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_4P_2=12$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$ 답 ④

09 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

해성이와 영한이를 한 사람으로 생각하면 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이고, 해성이와 영한이가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이므로 해성이와 영한이가 이웃하게 앉는 경우의 수는

$6\cdot2=12$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$$ 답 ③

10 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

중학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

이고, 중학생 사이사이의 3개의 자리에 고등학생 3명이 앉는 경우의 수는

$3!=6$

이므로 중학생과 고등학생이 교대로 앉는 경우의 수는

$2\cdot6=12$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$$ 답 $\frac{1}{10}$

11 네 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

$_7\Pi_4=7^4$

홀수일 때, 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 3, 5, 7의 4개

이고, 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$_7\Pi_3=7^3$

이므로 홀수인 네 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

$4\cdot7^3$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4\cdot7^3}{7^4}=\frac{4}{7}$$ 답 $\frac{4}{7}$

Q BOX

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때
① X에서 Y로의 함수의 개수 ➡ $_n\Pi_m=n^m$
② X에서 Y로의 일대일함수의 개수 ➡ $_nP_m$ (단, $n\ge m$)

일의 자리의 숫자가 5인 세 자리 자연수

n개 중에서 같은 것이 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 경우의 수
➡ $\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$
(단, $p+q+\cdots+r=n$)

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수
➡ $(n-1)!$

오른쪽으로 5칸, 위쪽으로 4칸 가야 한다.

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수
➡ $_n\Pi_r=n^r$

12 X에서 Y로의 함수의 개수는

$_4\Pi_3=4^3=64$

X에서 Y로의 일대일함수의 개수는

$_4P_3=24$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$$ 답 $\frac{3}{8}$

13 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

모음 i, a를 한 문자로 생각하면 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

이고, i, a가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이므로 모음끼리 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$12\cdot2=24$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$$ 답 ②

14 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{9!}{5!\cdot4!}=126$

A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

이고, P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\cdot2!}=15$

이므로 A에서 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$3\cdot15=45$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{45}{126}=\frac{5}{14}$$ 답 $\frac{5}{14}$

15 7개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$_7C_2=21$

서로 다른 색의 공을 꺼내려면 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

$_4C_1\cdot{}_3C_1=12$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$ 답 ①

16 9장의 카드 중에서 2장의 카드를 뽑는 경우의 수는

$_9C_2=36$

짝수가 적힌 카드 2장을 뽑는 경우의 수는

$_4C_2=6$

이고, 홀수가 적힌 카드 2장을 뽑는 경우의 수는

$_5C_2=10$

이므로 뽑힌 카드에 적힌 두 수의 합이 짝수인 경우의 수는

$6+10=16$

따라서 구하는 확률은

$\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$ 답 $\frac{4}{9}$

17 세탁기에 하자가 발생할 확률은

$\frac{10}{6000}=\frac{1}{600}$ $\therefore a=\frac{1}{600}$

건조기에 하자가 발생할 확률은

$\frac{20}{8000}=\frac{1}{400}$ $\therefore b=\frac{1}{400}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{1}{600}\cdot 400=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

18 야구 선수의 타석수는 $190+210=400$

야구 선수가 출루한 횟수는 $45+55=100$

따라서 구하는 확률은 $\frac{100}{400}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

19 ㄱ. 임의의 사건 A^C에 대하여

$0\le \mathrm{P}(A^C)\le 1$

ㄴ. $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$이므로

$\mathrm{P}(S)+\mathrm{P}(\varnothing)=1$

ㄷ. $\varnothing\subset(A\cup B)\subset S$이므로

$\mathrm{P}(\varnothing)\le\mathrm{P}(A\cup B)\le\mathrm{P}(S)$

$\therefore 0\le\mathrm{P}(A\cup B)\le 1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

20 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4\}$

① $x^2+3x=0$에서 $x(x+3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$

따라서 주어진 사건은 $\varnothing$이므로 그 확률은 0

② $x^2<10$에서 $-\sqrt{10}<x<\sqrt{10}$

표본공간의 원소 중 위의 부등식을 만족시키는 것은 1, 2, 3이다.

따라서 주어진 사건은 $\{1, 2, 3\}$이므로 그 확률은

$\frac{3}{4}$

③ $\{2, 4\}$이므로 그 확률은 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

④ $\{1, 2, 3, 4\}$이므로 그 확률은 1

⑤ x가 자연수일 때 $4x$의 값은 $4, 8, 12, \cdots$

이 중 표본공간의 원소인 것은 4뿐이다.

따라서 주어진 사건은 $\{4\}$이므로 그 확률은

$\frac{1}{4}$

이상에서 확률이 1인 사건은 ④이다. 답 ④

BOX

(짝수)+(짝수)=(짝수)

(홀수)+(홀수)=(짝수)

두 사건 A, B가 서로 배반사건
➡ $A\cap B=\varnothing$
➡ $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

-3, 0은 주어진 표본공간의 원소가 아니다.

20의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건

축구 경기와 배드민턴 경기를 모두 관람한 경험이 있는 학생을 택하는 사건

06 확률의 덧셈정리

Lecture 10 확률의 덧셈정리 36쪽

1-1 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{7}{10}=\frac{3}{5}+\frac{1}{4}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{20}$ 답 $\frac{3}{20}$

1-2 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=\frac{7}{18}$ 답 $\frac{7}{18}$

2-1 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$ 답 $\frac{4}{7}$

2-2 내일 비가 오지 않는 사건을 A라 하면 A^C는 내일 비가 오는 사건이므로 $\mathrm{P}(A^C)=0.6$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-0.6=0.4$ 답 0.4

기본+표준 유형 Q+Q 37쪽

01 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-0.3=0.7$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$0.8=0.7+0.4-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.3$ 답 0.3

02 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{5}{6}=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(B)$, $\frac{5}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$ 답 ③

03 4의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 A, 5의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{40}=\frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=\frac{2}{5}$ 답 ④

04 축구 경기를 관람한 경험이 있는 학생을 택하는 사건을 A, 배드민턴 경기를 관람한 경험이 있는 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{15}=\frac{7}{10}$$ 답 $\frac{7}{10}$

05 나오는 두 눈의 수의 합이 5인 사건을 A, 두 눈의 수의 차가 5인 사건을 B라 하고 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$,
$B=\{(1, 6), (6, 1)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{6}$$ 답 $\frac{1}{6}$

06 같은 색의 색연필을 꺼내려면 2개 모두 파란색 색연필을 꺼내거나 2개 모두 노란색 색연필을 꺼내면 된다. 2개 모두 파란색 색연필을 꺼내는 사건을 A, 2개 모두 노란색 색연필을 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{5}{18}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{5}{18}=\frac{4}{9}$$ 답 ①

07 정팔면체를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$8\cdot 8=64$

바닥에 닿는 면에 적힌 두 수의 곱이 소수가 아닌 사건을 A라 하면 A^C는 두 수의 곱이 소수인 사건이므로 바닥에 닿는 면에 적힌 두 수를 순서쌍으로 나타내면

$A^C=\{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 7),$
$(2, 1), (3, 1), (5, 1), (7, 1)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$ 답 $\frac{7}{8}$

08 수진이와 양현이가 연달아 발표를 하지 않는 사건을 A라 하면 A^C는 수진이와 양현이가 연달아 발표를 하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{5!\cdot 2!}{6!}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$ 답 ②

QBOX

${}_2\Pi_4=2^4=16$

두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6\cdot 6=36$

3개의 당첨 제비를 제외한 6개의 제비 중에서 임의로 3개의 제비를 동시에 뽑는 경우의 수

서로 다른 5개의 동전을 동시에 던질 때 앞면이 나온 동전의 개수와 뒷면이 나온 동전의 개수의 차는 다음과 같이 1, 3, 5이다.

앞면 개수	뒷면 개수	차
0	5	5
1	4	3
2	3	1
3	2	1
4	1	3
5	0	5

두 수의 곱이 소수이려면 두 수는 1과 소수, 즉 1과 2, 3, 5, 7 중 하나이어야 한다.

6명이 한 명씩 차례대로 발표를 하는 경우의 수는 6명을 일렬로 세우는 경우의 수와 같다.

09 적어도 한 문제를 맞히는 사건을 A라 하면 A^C는 4문제 모두 맞히지 못하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{{}_2\Pi_4}=\frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$ 답 ⑤

10 적어도 한 개의 당첨 제비를 뽑는 사건을 A라 하면 A^C는 3개 모두 당첨 제비가 아닌 제비를 뽑는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{5}{21}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$$ 답 $\frac{16}{21}$

11 불량품을 1개 이상 택하는 사건을 A라 하면 A^C는 불량품을 택하지 않는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{1}{14}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$$ 답 ④

12 앞면이 나온 동전의 개수와 뒷면이 나온 동전의 개수의 차가 3 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 앞면이 나온 동전의 개수와 뒷면이 나온 동전의 개수의 차가 3 초과인 사건이다.
이때 동전의 개수의 차는 4가 될 수 없으므로 A^C는 동전의 개수의 차가 5인 사건이다.
즉 A^C는 모두 앞면만 나오거나 모두 뒷면만 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{{}_2\Pi_5}=\frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$ 답 $\frac{15}{16}$

중단원 마무리

39쪽

01 전략 먼저 표본공간의 원소의 개수를 이용하여 n의 값을 구한다.

풀이 서로 다른 n개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 표본공간의 원소의 개수는 2^n이므로

$2^n=16=2^4 \qquad \therefore n=4$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 서로 다른 4개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 뒷면이 1개 나오는 경우는

HHHT, HHTH, HTHH, THHH의 4가지

따라서 $k=4$이므로

$n+k=8$ 답 8

02 전략 사건 A와 배반사건인 사건의 개수는 여사건 A^C의 부분집합의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 사건 A와 배반사건인 사건은 여사건 A^C의 부분집합이다.

표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

이므로 $A=\{2, 4, 6\}$

$\therefore A^C=\{1, 3, 5\}$

따라서 구하는 사건의 개수는

$2^3=8$ 답 8

원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수 ➡ 2^n

03 전략 이차방정식의 판별식을 D라 하면 이차방정식이 실근을 가질 조건은 $D\ge0$임을 이용한다.

풀이 모든 경우의 수는 $4\cdot4=16$

이차방정식 $ax^2+bx+1=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 실근을 가질 조건은

$D=b^2-4a\ge0 \quad \therefore b^2\ge4a$

이때 $b^2\ge4a$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

(i) $a=2$일 때, $b^2\ge8$이므로

$(2, 4)$, $(2, 6)$, $(2, 8)$의 3개

(ii) $a=4$일 때, $b^2\ge16$이므로

$(4, 4)$, $(4, 6)$, $(4, 8)$의 3개

(iii) $a=6$일 때, $b^2\ge24$이므로

$(6, 6)$, $(6, 8)$의 2개

(iv) $a=8$일 때, $b^2\ge32$이므로

$(8, 6)$, $(8, 8)$의 2개

이상에서 주어진 이차방정식이 실근을 가지는 경우의 수는

$3+3+2+2=10$

따라서 구하는 확률은

$\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$ 답 ④

04 전략 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 숫자가 적혀 있는 4장의 카드 중 2장의 카드가 올 수 있음을 이용한다.

풀이 서로 다른 9장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$9!$

A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 1, 2, 3, 4가 적혀 있는 4장의 카드 중 2장의 카드를 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2$

이고, A가 적혀 있는 카드와 바로 양옆에 오는 2장의 카드를 한 장의 카드로 생각하면 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!$

이므로 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 각각 숫자가 적혀 있는 카드가 놓이는 경우의 수는

${}_4P_2\cdot7!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{{}_4P_2\cdot7!}{9!}=\frac{1}{6}$ 답 ④

05 전략 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 원순열의 수를 이용한다.

풀이 6명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$ ··· ❶

여학생 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이고, 여학생 사이사이의 4개의 자리에 남학생 2명이 앉는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

이므로 남학생끼리 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는

$6\cdot12=72$ ··· ❷

따라서 구하는 확률은

$\frac{72}{120}=\frac{3}{5}$ ··· ❸

답 $\frac{3}{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	6명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷	남학생끼리 이웃하지 않게 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸	남학생끼리 이웃하지 않게 앉을 확률을 구할 수 있다.	20 %

06 전략 서로 다른 바구니 중에서 서로 다른 과일을 넣을 바구니를 택하면 되므로 중복순열의 수를 이용한다.

풀이 서로 다른 2개의 과일을 서로 다른 5개의 바구니에 넣는 경우의 수는

서로 다른 5개의 바구니에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

${}_5\Pi_2=5^2=25$

2개의 과일을 모두 같은 바구니에 넣는 경우의 수는

5

따라서 구하는 확률은

$\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$ 답 ⑤

07 전략 먼저 곱이 12가 되는 6 이하의 자연수 4개를 찾는다.

풀이 한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot6\cdot6\cdot6=6^4$

a, b, c, d는 6 이하의 자연수이므로 곱이 12가 되는 6 이하의 자연수 4개는

$1, 1, 2, 6$ 또는 $1, 1, 3, 4$ 또는 $1, 2, 2, 3$

즉 $a\times b\times c\times d$가 12인 경우의 수는 위의 자연수 4개를 각각 일렬로 나열하는 경우의 수의 합과 같으므로

$$3\cdot\frac{4!}{2!}=36$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{36}{6^4}=\frac{1}{36}$$

답 ①

08 전략 2개 모두 당첨 제비일 확률을 n에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 확률과 비교하여 n의 값을 구한다.

풀이 12개의 제비 중에서 2개의 제비를 뽑는 경우의 수는

$${}_{12}\mathrm{C}_2=66$$

2개 모두 당첨 제비를 뽑는 경우의 수는

$${}_{n}\mathrm{C}_2=\frac{n(n-1)}{2}$$

2개 모두 당첨 제비일 확률이 $\frac{1}{11}$이므로

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{66}=\frac{1}{11},\qquad \frac{n(n-1)}{2}=6$$

$$n^2-n-12=0,\qquad (n+3)(n-4)=0$$

$\therefore n=4$ ($\because$ n은 자연수)

답 4

09 전략 조사한 전체 학생 수를 구한 후 통계적 확률을 이용한다.

풀이 조사한 전체 학생 수는

$$85+162+94+78+31=450$$

450명 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 그 학생의 급식 만족도가 '만족'일 확률은

$$\frac{162}{450}=\frac{9}{25}$$

답 $\frac{9}{25}$

10 전략 반드시 일어나는 사건의 확률은 1이고, 절대로 일어나지 않는 사건의 확률은 0임을 이용한다.

풀이 주머니에 들어 있는 초록색 카드는 3장이므로 임의로 4장의 카드를 동시에 꺼낼 때, 반드시 빨간색 카드를 1장 이상 꺼낸다.

따라서 빨간색 카드를 1장 이상 꺼내는 사건은 반드시 일어나는 사건이므로

$$p=1$$

또 초록색 카드를 4장 꺼내는 사건은 절대로 일어나지 않는 사건이므로

$$q=0$$

$$\therefore p+q=1$$

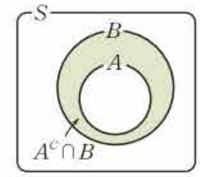
답 1

11 전략 두 사건 A와 B^C가 서로 배반사건임을 이용하여 A, B 사이의 포함 관계를 구한다.

풀이 두 사건 A, B^C는 서로 배반사건이므로

$$A\cap B^C=\varnothing\qquad \therefore A\subset B$$

따라서 표본공간을 S라 하면 오른쪽 벤다이어그램에서



$$\mathrm{P}(B)$$
$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ②

12 전략 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)$가 최소가 되는 경우는 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대인 경우이다.

풀이 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$$

$\mathrm{P}(A\cap B)$가 최소가 되는 경우는 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대일 때이고 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대인 경우는

$$A\cup B=S,\ \text{즉}\ \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(S)=1$$

인 경우이다.

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 최솟값은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{5}+\frac{2}{3}-1=\frac{4}{15}$$

답 $\frac{4}{15}$

13 전략 사건 A, B를 정한 후 확률의 덧셈정리를 이용한다.

풀이 A가 뽑히는 사건을 A, B가 뽑히는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{7}\mathrm{C}_4}{{}_{8}\mathrm{C}_5}=\frac{5}{8},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_{7}\mathrm{C}_4}{{}_{8}\mathrm{C}_5}=\frac{5}{8},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_{6}\mathrm{C}_3}{{}_{8}\mathrm{C}_5}=\frac{5}{14}$$

A가 뽑히려면 A를 먼저 뽑은 후 나머지 7명 중에서 4명을 뽑으면 된다.

A, B가 모두 뽑히려면 A, B를 먼저 뽑은 후 나머지 6명 중에서 3명을 뽑으면 된다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{5}{8}+\frac{5}{8}-\frac{5}{14}=\frac{25}{28}$$

답 ⑤

다른 풀이 A 또는 B가 뽑히는 사건을 A라 하면 A^C는 A, B가 모두 뽑히지 않는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{6}\mathrm{C}_5}{{}_{8}\mathrm{C}_5}=\frac{3}{28}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{28}=\frac{25}{28}$$

14 전략 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

풀이 한 개의 동전을 5번 던질 때 앞면이 2번 나오는 사건을 A, 앞면이 4번 나오는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{5}\mathrm{C}_2}{{}_{2}\Pi_5}=\frac{5}{16},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_{5}\mathrm{C}_4}{{}_{2}\Pi_5}=\frac{5}{32}\quad\cdots\cdots❶$$

5번 중에서 앞면이 나오는 2번을 택하는 경우의 수

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 앞면이 2번 또는 4번 나올 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{5}{16}+\frac{5}{32}=\frac{15}{32}$$

따라서 $p=32$, $q=15$이므로

$p-q=17$ ⋯ ❷

답 17

단계	채점 기준	비율
❶	앞면이 2번, 4번 나오는 사건의 확률을 각각 구할 수 있다.	50 %
❷	$p-q$의 값을 구할 수 있다.	50 %

15 전략 6과 서로소이려면 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니어야 한다.

최대공약수가 1인 두 자연수를 서로소라 한다.

풀이 2의 배수를 택하는 사건을 A, 3의 배수를 택하는 사건을 B라 하면 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수, 즉 6과 서로소인 수를 택하는 사건은

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$

드모르간의 법칙
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$,
$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

$P(A)=\frac{150}{300}=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$,

$P(A\cap B)=\frac{50}{300}=\frac{1}{6}$

6의 배수를 택하는 사건

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 확률은

$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$

$=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

16 전략 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 서로 다른 세 주사위를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot6\cdot6=216$

$(a-b)(b-c)(c-a)=0$인 사건을 A라 하면 A^C는 $(a-b)(b-c)(c-a)\neq0$인 사건이다.

따라서 A^C는 $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$, 즉 세 주사위의 눈이 모두 다른 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_6P_3}{216}=\frac{5}{9}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)$

$=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

답 ②

17 전략 적어도 한 개가 검은 공인 사건의 여사건은 3개의 공이 모두 흰 공인 사건임을 이용한다.

풀이 적어도 한 개가 검은 공인 사건을 A라 하면 A^C는 3개의 공이 모두 흰 공인 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$

흰 공 4개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)$

$=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$

답 ⑤

다른 풀이 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 검은 공인 경우는 모두 검은 공이거나 2개 또는 1개가 검은 공인 경우이다.

(i) 꺼낸 3개의 공이 모두 검은 공일 확률은

$\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$

(ii) 꺼낸 3개의 공 중에서 2개가 검은 공일 확률은

$\frac{{}_3C_2\cdot{}_4C_1}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$

(iii) 꺼낸 3개의 공 중에서 1개가 검은 공일 확률은

$\frac{{}_3C_1\cdot{}_4C_2}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$

(i), (ii), (iii)은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{35}+\frac{12}{35}+\frac{18}{35}=\frac{31}{35}$

18 전략 만든 세 자리 자연수가 230 미만일 확률을 구한 후 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 세 자리 자연수가 230 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 230 미만인 사건이고 230 미만인 자연수는 21□ 꼴 또는 1□□ 꼴이다.

(i) 21□ 꼴일 확률은

$\frac{3}{{}_5P_3}=\frac{1}{20}$

(ii) 1□□ 꼴일 확률은

$\frac{{}_4P_2}{{}_5P_3}=\frac{1}{5}$

(i), (ii)에서 세 자리 자연수가 230 미만일 확률은

$P(A^C)=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)$

$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

19 전략 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 초과 7 미만일 확률을 구한 후 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 초과 7 미만인 사건이다.

즉 A^C는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 5 또는 6인 사건이다.

(i) 가장 작은 수가 5일 확률은

$\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{12}$

5가 적힌 카드를 꺼내고 6, 7, 8, 9, 10이 적힌 카드 중에서 2장을 꺼내면 된다.

(ii) 가장 작은 수가 6일 확률은

$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{20}$

(i), (ii)에서 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 5 또는 6일 확률은

$P(A^C)=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{2}{15}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)$

$=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$

답 ③

04 조건부확률

07 조건부확률

Lecture 11 조건부확률

42쪽

1-1 (1) $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{4}{9}$

답 (1) $\dfrac{1}{3}$ (2) $\dfrac{4}{9}$

1-2 (1) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.9=0.7+0.5-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.3$

(2) $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.3}{0.7}=\dfrac{3}{7}$

답 (1) 0.3 (2) $\dfrac{3}{7}$

1-3 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$

(1) $A\cap B=\{1, 5\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

(2) $\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{5}$

(3) $\mathrm{P}(B)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) $\dfrac{1}{5}$ (2) $\dfrac{2}{5}$ (3) $\dfrac{1}{2}$

Lecture 12 확률의 곱셈정리

43쪽

1-1 (1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$

$=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{10}$

(2) $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{9}{10}$

답 (1) $\dfrac{3}{10}$ (2) $\dfrac{9}{10}$

Q BOX

첫 번째에 노란 구슬을 꺼냈을 때, 두 번째에 검은 구슬을 꺼낼 확률

$\dfrac{1}{6}\div\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}\times 2=\dfrac{1}{3}$

첫 번째에 노란 구슬을 꺼내고 두 번째에 검은 구슬을 꺼낼 확률

나오는 두 눈의 수의 곱이 5 이하이고 차가 3인 사건

1-2 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^{C})=1-\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}$

답 $\dfrac{1}{9}$

1-3 (1) $\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{3+4}=\dfrac{3}{7}$

(2) 첫 번째에 노란 구슬을 꺼낸 후 주머니에 남은 구슬은 노란 구슬 2개, 검은 구슬 4개이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{4}{2+4}=\dfrac{2}{3}$

(3) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{7}$

답 (1) $\dfrac{3}{7}$ (2) $\dfrac{2}{3}$ (3) $\dfrac{2}{7}$

기본+표준 유형 Q+Q

44쪽

01 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.7=0.3+0.6-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.2$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{0.2}{0.6}=\dfrac{1}{3}$

답 $\dfrac{1}{3}$

02 $\mathrm{P}(B^{C})=1-\mathrm{P}(B)=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

$\mathrm{P}(A^{C}\cap B^{C})=\mathrm{P}((A\cup B)^{C})=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\dfrac{3}{7}=\dfrac{4}{7}$

$\therefore \mathrm{P}(A^{C}|B^{C})=\dfrac{\mathrm{P}(A^{C}\cap B^{C})}{\mathrm{P}(B^{C})}=\dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{5}{7}$

답 $\dfrac{5}{7}$

03 검도를 배운 적이 있는 학생을 택하는 사건을 A, 여학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{8}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{4}{9}$

답 $\dfrac{4}{9}$

04 나오는 두 눈의 수의 곱이 5 이하인 사건을 A, 나오는 두 눈의 수의 차가 3인 사건을 B라 할 때, 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$,

$B=\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$,

$A\cap B=\{(1, 4), (4, 1)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{18}}=\frac{1}{5}$$ 답 ①

05 장기 자랑 대회에 참가하는 학생을 택하는 사건을 A, 남학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{14}{27}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{14}{27}}=\frac{3}{7}$$ 답 $\frac{3}{7}$

쌤 한마디

두 사건 A, B와 그 각각의 여사건 A^C, B^C가 일어나는 경우의 수를 표를 이용하여 아래와 같이 나타낼 때, 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 다음과 같이 구한다.

	A	A^C	합계
B	a	b	$a+b$
B^C	c	d	$c+d$
합계	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

$\mathrm{P}(A)=\frac{a+c}{a+b+c+d}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{a}{a+b+c+d}$

이므로 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{a}{a+c}$

06 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남자 직원	여자 직원	합계
손목시계를 차고 있음	35	20	55
손목시계를 차고 있지 않음	65	60	125
합계	100	80	180

손목시계를 차고 있지 않은 직원을 택하는 사건을 A, 여자 직원을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{125}{180}=\frac{25}{36}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{60}{180}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{25}{36}}=\frac{12}{25}$$ 답 ②

07 첫 번째에 여자 회원을 뽑는 사건을 A, 두 번째에 남자 회원을 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{28}{40}=\frac{7}{10}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{12}{39}=\frac{4}{13}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{7}{10}\cdot\frac{4}{13}=\frac{14}{65}$ 답 $\frac{14}{65}$

BOX

두 사건 A, B에 대하여
$\mathrm{P}(B)$
$=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

(두 번째에만 빨간 공을 꺼낼 확률)
=(첫 번째에 흰 공을 꺼내고 두 번째에 빨간 공을 꺼낼 확률)

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$
$=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

전체 회원이 40명, 남자 회원이 12명이므로 여자 회원은
$40-12=28$(명)

(원정 경기일 확률)
=1−(홈경기일 확률)
=1−0.4=0.6

08 1부터 20까지의 자연수 중 20의 약수는

1, 2, 4, 5, 10, 20의 6개

이므로 첫 번째에 20의 약수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 20의 약수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{19}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{19}=\frac{3}{38}$ 답 $\frac{3}{38}$

09 첫 번째에 빨간 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 빨간 공을 꺼내는 사건을 B라 하자.

(1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$

(2) $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$

(3) 두 사건 $A\cap B$와 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$

답 (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{3}{5}$

10 토요일에 비가 오는 사건을 A, 대산이가 우산을 가지고 외출하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$ 답 ④

11 재식이가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 세아가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{3}$$ 답 ③

12 홈경기인 사건을 A, 원정 경기인 사건을 B, 경기에서 승리하는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=0.4\times0.7=0.28$,

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=0.6\times0.5=0.3$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$

$=0.28+0.3=0.58$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{0.28}{0.58}=\frac{14}{29}$$ 답 $\frac{14}{29}$

08 사건의 독립과 종속

Lecture 13 사건의 독립과 종속 (46쪽)

1-1 (1) $P(B|A)=P(B)=\frac{5}{6}$

두 사건 A, B가 서로 독립이다.

(2) $P(A|B)=P(A)=\frac{4}{9}$

답 (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{4}{9}$

1-2 (1) $P(B|A)=\frac{3}{8}$

꺼낸 공을 다시 넣으므로 주머니의 흰 공과 검은 공의 개수는 변하지 않는다.

(2) $P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$

$=P(A)P(B|A)+P(A^C)P(B|A^C)$

$=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$

(3) $P(B|A)=P(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

답 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{3}{8}$ (3) 독립

2-1 $P(A)P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$이므로

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다. 답 종속

2-2 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$=0.4\times0.5=0.2$ 답 0.2

Lecture 14 독립시행의 확률 (47쪽)

1-1 (1) 주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈이 나올 확률은

1, 2, 3, 6의 4가지

$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(2) 각 시행은 독립시행이므로 구하는 확률은

${}_3C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{2}{9}$

1-2 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 확률은

$\frac{1}{2}$

각 시행은 독립시행이므로 구하는 확률은

${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$ 답 $\frac{5}{16}$

1-3 생산한 제품 중 신제품을 택할 확률은

$\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

각 시행은 독립시행이므로 구하는 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{3}{64}$ 답 $\frac{3}{64}$

기본+표준 유형 Q+Q (48쪽)

01 $A=\{3, 6, 9, 12\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

ㄱ. $P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

ㄴ. $A\cap B=\{3, 6, 12\}$이므로

$P(A\cap B)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

ㄷ. $P(A)P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

02 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$A=\{TT\}$, $B=\{TH, TT\}$, $C=\{HH, TT\}$

(가) $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이므로

$P(A)P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$A\cap B=\{TT\}$에서 $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

(나) $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이므로

$P(B)P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$B\cap C=\{TT\}$에서 $P(B\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$P(B\cap C)=P(B)P(C)$

따라서 두 사건 B, C는 서로 독립이다.

(다) $P(C)=\frac{1}{2}$, $P(A)=\frac{1}{4}$이므로

$P(C)P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$C\cap A=\{TT\}$에서 $P(C\cap A)=\frac{1}{4}$이므로

$P(C\cap A)\neq P(C)P(A)$

따라서 두 사건 C, A는 서로 종속이다.

답 ④

03 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(B|A)=P(B)$, $P(B|A^C)=P(B)$

$\therefore P(B|A)=P(B|A^C)$

ㄴ. $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$이므로 두 사건 A, B^C는 서로 독립이다.

ㄷ. $A\cap B=\varnothing$이므로 $\quad \mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때 $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$이므로

$0<\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)<1$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

다른 풀이 ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A, B^C는 서로 독립이다.

쌤 한마디

$0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$인 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C와 B, A^C와 B^C도 각각 서로 독립이다.

04 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

① $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

③ $\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$
$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$
$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

④ $\mathrm{P}(A^C|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$
$=\dfrac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}$
$=1-\mathrm{P}(A)$

$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C|B)=1$

⑤ $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$
$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A\cap B)$
$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

따라서 두 사건 A^C, B^C는 서로 독립이다.

답 ⑤

다른 풀이 ④ 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)$

$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$

Q BOX

두 사건 A, B가 서로 배반사건이면
$A\cap B=\varnothing$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이다.

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

05 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{2}{3}=\frac{1}{4}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$

$\frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{5}{12} \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{5}{9}$ 답 $\frac{5}{9}$

06 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}\mathrm{P}(A)$

즉 $\frac{1}{6}\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A)-\frac{1}{6}$이므로

$\frac{5}{6}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6} \qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$

한편 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$
$=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ 답 $\frac{4}{5}$

07 내일 두 도시 A, B에 눈이 오는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.3$, $\mathrm{P}(B)=0.4$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 두 도시 A, B에 모두 눈이 올 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=0.3\times0.4=0.12$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=0.3+0.4-0.12=0.58$ 답 0.58

다른 풀이 내일 두 도시 A, B에 눈이 오는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.3$, $\mathrm{P}(B)=0.4$

내일 두 도시 A, B에 모두 눈이 오지 않을 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$
$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=(1-0.3)\times(1-0.4)=0.42$

따라서 구하는 확률은

$1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-0.42=0.58$

08 성연이와 세희가 시험에 합격하는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

성연이만 시험에 합격할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$
$=\frac{3}{5}\cdot\left(1-\frac{5}{6}\right)$
$=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$

세희만 시험에 합격할 확률은

$$\begin{aligned}P(A^c\cap B)&=P(A^c)P(B)\\&=\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{5}{6}\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

두 사건 $A\cap B^c$와 $A^c\cap B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{3}=\frac{13}{30}$$ 답 ②

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^c, B도 서로 독립이다.

09 주어진 정팔면체를 한 번 던질 때, 바닥에 닿는 면에 적힌 수가 소수일 확률은

$$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

2, 3, 5, 7의 4가지

따라서 구하는 확률은

$${}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$$ 답 ④

10 5 번째 경기에서 소희가 상품을 받으려면 4 번째 경기까지 소희가 2번 이기고 5 번째 경기에서 소희가 이겨야 한다.

한 번의 경기에서 소희가 이길 확률은

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

4 번째 경기까지 소희가 2번 이길 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{8}{27}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$$ 답 $\frac{16}{81}$

5 번째 경기에서 소희가 이길 확률

11 (i) 주사위는 3 이하의 눈이 나오고, 동전을 2번 던져서 앞면이 1번 나올 확률은

$$\frac{1}{2}\cdot{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$$

주사위를 던져서 3 이하의 눈이 나오는 경우는 1, 2, 3의 3가지이므로 그 확률은

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

(ii) 주사위는 4 이상의 눈이 나오고, 동전을 3번 던져서 앞면이 1번 나올 확률은

$$\frac{1}{2}\cdot{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{16}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$$ 답 ⑤

12 한 명을 택할 때, 자전거를 타고 등교하는 학생일 확률은

$$\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$$

(i) 자전거를 타고 등교하는 학생이 3번 나올 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{3}{64}$$

(ii) 자전거를 타고 등교하는 학생이 4번 나올 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{256}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$$ 답 $\frac{13}{256}$

QBOX

중단원 마무리

50쪽

01 전략 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$임을 이용한다.

풀이 $P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)$이므로

$$\frac{4}{9}=\frac{2}{3}-P(A\cap B)\qquad\therefore P(A\cap B)=\frac{2}{9}$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$$ 답 ②

02 전략 $P(A)$, $P(B)$를 $P(A\cap B)$에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{4}$에서

$P(A)=4P(A\cap B)$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3}$에서

$P(B)=3P(A\cap B)$

$P(A)+P(B)=\frac{7}{10}$에서

$$4P(A\cap B)+3P(A\cap B)=\frac{7}{10}$$

$$7P(A\cap B)=\frac{7}{10}$$

$$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{10}$$ 답 ④

03 전략 빨간색 카드를 꺼내는 사건을 A, 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라 하고 구하는 확률을 조건부확률로 나타낸다.

풀이 빨간색 카드를 꺼내는 사건을 A, 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{3}{7}$ …… ❶

$P(A\cap B)=\frac{2}{7}$ …… ❷

홀수가 적힌 빨간색 카드를 꺼내는 사건

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{2}{3}$ …… ❸

답 $\frac{2}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	빨간색 카드를 꺼낼 확률을 구할 수 있다.	20 %
❷	홀수가 적힌 빨간색 카드를 꺼낼 확률을 구할 수 있다.	30 %
❸	임의로 꺼낸 한 장의 카드가 빨간색일 때, 그 카드에 적힌 숫자가 홀수일 확률을 구할 수 있다.	50 %

04 전략 전체 학생 수와 주어진 확률을 a, b에 대한 식으로 나타내어 a, b의 값을 구한다.

풀이 조사한 전체 학생 수가 200이므로

$10a+b+(48-2a)+(b-8)=200$

$\therefore 4a+b=80$ …… ㉠

남학생을 택하는 사건을 A, 휴대폰 요금제 A를 선택한 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{10a+b}{200},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{10a}{200}$$

임의로 택한 1명이 남학생일 때, 이 학생이 휴대폰 요금제 A를 선택한 학생일 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{10a}{200}}{\frac{10a+b}{200}}=\frac{10a}{10a+b}$$

즉 $\frac{10a}{10a+b}=\frac{5}{8}$이므로

$80a=50a+5b$

$\therefore 6a-b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8,\ b=48$

$\therefore b-a=40$ 답 ③

㉠−㉡에서
$-2a+2b=80$, 즉
$b-a=40$
과 같이 구할 수도 있다.

05 전략 당첨 제비의 개수를 n이라 하고 보미만 당첨 제비를 꺼낼 확률을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 당첨 제비의 개수를 n이라 하고, 도준이가 당첨 제비를 꺼내지 않는 사건을 A, 보미가 당첨 제비를 꺼내는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{7-n}{7},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{6}$$

보미만 당첨 제비를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{7-n}{7}\cdot\frac{n}{6}=\frac{7n-n^2}{42}$$ ··· ❶

즉 $\frac{7n-n^2}{42}=\frac{5}{21}$이므로 $7n-n^2=10$

$n^2-7n+10=0$, $(n-2)(n-5)=0$

$\therefore n=2$ 또는 $n=5$

이때 당첨 제비는 짝수 개이므로 당첨 제비의 개수는 2이다. ··· ❷

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	보미만 당첨 제비를 꺼낼 확률을 당첨 제비의 개수를 이용하여 나타낼 수 있다.	50 %
❷	당첨 제비의 개수를 구할 수 있다.	50 %

06 전략 A 지역에서 자동차를 소유한 사람을 택하는 경우와 B 지역에서 자동차를 소유한 사람을 택하는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 A 지역의 사람을 택하는 사건을 A, B 지역의 사람을 택하는 사건을 B, 자동차를 소유한 사람을 택하는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{14},$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{14}$$

두 지역 A, B의 인구수의 비가 4 : 3이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{4+3}=\frac{4}{7}$,
$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4+3}=\frac{3}{7}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{3}{14}+\frac{1}{14}=\frac{2}{7}$$ 답 $\frac{2}{7}$

07 전략 암에 걸린 사람을 택하는 사건을 A, 암에 걸렸다고 진단하는 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$이다.

풀이 암에 걸린 사람을 택하는 사건을 A, 암에 걸렸다고 진단하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10},\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$$

또

$$\mathrm{P}(B|A)=0.98,\ \mathrm{P}(B|A^C)=0.05$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{1}{10}\times0.98+\frac{9}{10}\times0.05\\&=0.098+0.045=0.143\end{aligned}$$ 답 0.143

08 전략 주머니 A에서 꺼낸 공의 색에 따라 주머니 B에 넣는 공의 색이 달라지므로 경우를 나누어 생각한다.

풀이 주머니 A에서 1개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 주머니 B에서 1개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B라 하면

(i) 주머니 A에서 흰 공을 꺼낸 경우

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{5}$$

흰 공 2개를 주머니 B에 넣으므로 주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있다.

(ii) 주머니 A에서 검은 공을 꺼낸 경우

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$$

검은 공 2개를 주머니 B에 넣으므로 주머니 B에는 흰 공 1개와 검은 공 5개가 들어 있다.

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$ 답 ⑤

09 전략 먼저 이 공장의 제품 중 임의로 조사한 한 개가 불량품일 확률을 구한다.

풀이 A 기계에서 생산한 제품을 택하는 사건을 A, B 기계에서 생산한 제품을 택하는 사건을 B, 불량품을 택하는 사건을 E라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap E)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)\\&=0.2\times0.03\\&=0.006,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B\cap E)&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)\\&=0.8\times0.02\\&=0.016\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=0.006+0.016=0.022\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.016}{0.022}=\frac{8}{11}$$ 답 $\frac{8}{11}$

10 전략 각 사건을 집합으로 나타내고 그 확률을 구한다.

풀이 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{1, 2\}$

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$B\cap C=\{2\}$에서 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$이므로

$$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 B, C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$C\cap A=\{1\}$에서 $\mathrm{P}(C\cap A)=\frac{1}{6}$이므로

$$\mathrm{P}(C\cap A)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A)$$

따라서 두 사건 C, A는 서로 독립이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

11 전략 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C와 B, A^C와 B^C도 서로 독립임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$$

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(B^C|A)=\mathrm{P}(B^C)$$

또 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(B^C|A)&=\mathrm{P}(B^C)\\&=1-\mathrm{P}(B)\\&=1-\mathrm{P}(B|A^C)\end{aligned}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

12 전략 두 사건 A, C가 서로 독립임을 이용하여 $\mathrm{P}(A)$를 구한 후 두 사건 A, B가 서로 배반사건임을 이용하여 $\mathrm{P}(B)$를 구한다.

풀이 두 사건 A, C가 서로 독립이면 두 사건 A, C^C도 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C^C)=\mathrm{P}(A)\times 0.4$$

이때 $\mathrm{P}(A\cap C^C)=0.2$이므로

$$\mathrm{P}(A)\times 0.4=0.2 \qquad \therefore \mathrm{P}(A)=0.5$$

또 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$$0.7=0.5+\mathrm{P}(B) \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=0.2$$

답 0.2

Q BOX

$\mathrm{P}(C^C)=1-\mathrm{P}(C)$
$=1-0.6=0.4$

$A\cap B=\varnothing$

13 전략 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$임을 이용하여 $\mathrm{P}(B)$를 구한 후 B의 원소의 개수를 구한다.

풀이 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$이고 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B) \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$$

이때 $\mathrm{P}(B)=\frac{n(B)}{n(S)}$이므로 $\frac{1}{4}=\frac{n(B)}{8}$

$$\therefore n(B)=2$$

따라서 $5\in B$, $2\notin B$, $3\notin B$, $7\notin B$이고 $n(B)=2$인 사건 B는

$\{1, 5\}$, $\{4, 5\}$, $\{5, 6\}$, $\{5, 8\}$

의 4개이다. 답 4

14 전략 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$이고 두 사건 A, B가 서로 독립임을 이용한다.

풀이 $$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{1}{4}=\frac{7}{12}\mathrm{P}(B) \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{7}$$

답 ④

15 전략 주어진 표를 이용하여 각 사건의 확률을 구하고 두 사건이 서로 독립임을 이용한다.

풀이 재직 연수가 10년 미만일 사건을 A, 조직 개편안에 찬성할 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{120}{360}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(B)=\frac{150}{360}=\frac{5}{12},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{a}{360}$$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{a}{360}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12} \qquad \therefore a=50$$

답 50

다른 풀이 재직 연수가 10년 미만일 사건을 A, 조직 개편안에 찬성할 사건을 B라 하면 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A), \qquad \frac{a}{150}=\frac{120}{360}$$

$$\therefore a=50$$

16 전략 한 문제를 맞힐 확률을 구한 후 각 문제에 답하는 시행이 독립시행임을 이용한다.

풀이 오지선다형 한 문제에 임의로 답을 적어 맞힐 확률은

$$\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$$

답 $\frac{64}{125}$

17 전략 다섯 눈의 수의 곱이 짝수이려면 5번의 시행에서 짝수의 눈이 적어도 한 번 나와야 함을 이용한다.

풀이 한 개의 주사위를 5번 던져서 나오는 다섯 눈의 수의 곱이 짝수이려면 짝수의 눈이 적어도 한 번 나와야 한다.

이때 주사위를 5번 던져서 짝수의 눈이 적어도 한 번 나오는 사건은 주사위를 5번 던져서 모두 홀수의 눈이 나오는 사건의 여사건이다.

한 개의 주사위를 한 번 던져서 홀수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

이므로 주사위를 5번 던져서 모두 홀수의 눈이 나올 확률은

$$_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{32}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

답 ⑤

> 한 개의 주사위를 5번 반복하여 던지므로 주어진 시행은 독립시행이다.
>
> 1, 3, 5의 3가지

18 전략 먼저 점수의 합이 6 이하가 될 조건을 구한다.

풀이 한 개의 동전을 5번 던져 앞면이 나온 횟수를 x라 하면 뒷면이 나온 횟수는 $5-x$이다.

주어진 시행을 5번 반복하여 얻은 점수의 합이 6 이하가 되려면

$$2x+1\cdot(5-x)\le 6$$

$$\therefore\ x\le 1$$

따라서 앞면이 0번 또는 1번 나와야 한다.

동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은

$$\frac{1}{2}$$

(i) 앞면이 0번 나올 확률은

$$_5C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

(ii) 앞면이 1번 나올 확률은

$$_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{32}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{32}+\frac{5}{32}=\frac{3}{16}$$

답 ④

> 앞면이 나오면 2점
>
> 뒷면이 나오면 1점

05 확률변수와 확률분포

09 이산확률변수와 연속확률변수

Lecture 15 확률변수와 확률분포 56쪽

1-1 답 (1) 1, 2, 3, 4, 5, 6
(2) 0, 1, 2, 3
(3) 0, 1, 2, 3, 4

2-1 (1) 0, 1, 2

(2) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 짝수의 눈이 나오지 않을 확률, 즉 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$$P(X=0)={}_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

$$P(X=1)={}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2},$$

$$P(X=2)={}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}$$

(3)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

답 풀이 참조

2-2 한 개의 동전을 한 번 던질 때 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나오지 않을 확률, 즉 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$$P(X=0)={}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8},$$

$$P(X=1)={}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8},$$

$$P(X=2)={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8},$$

$$P(X=3)={}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

답 풀이 참조

Lecture 16 이산확률변수와 확률질량함수 57쪽

1-1 (1) 5개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는 $_5C_2$

꺼낸 2개의 공 중에서 빨간 공이 x개 포함되는 경우의 수는 $_2C_x\cdot{}_3C_{2-x}$

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{{}_2C_{\boxed{x}}\cdot{}_3C_{\boxed{2-x}}}{{}_5C_2}\ (x=0,\ 1,\ 2)$$

(2) $P(X=0)=\frac{{}_2C_0\cdot{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$,

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$,

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\cdot{}_3C_0}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

(3) 구하는 확률은

$$P(X\ge1)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

답 풀이 참조

2-1 (1) 확률의 총합은 1이므로

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$\frac{1}{6}+a+\frac{1}{6}+a=1,\quad 2a=\frac{2}{3}$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

(2) $P(X=0$ 또는 $X=3)=P(X=0)+P(X=3)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

(3) $P(0\le X\le2)$

$=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

(4) $P(X\ge1)$

$=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

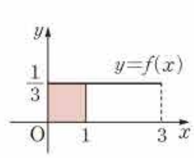
답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{5}{6}$

Lecture 17 연속확률변수와 확률밀도함수

58쪽

1-1 답 (1) 연 (2) 이 (3) 연

2-1 (1) $P(X\le1)$은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$P(X\le1)=(1-0)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Q BOX

확률질량함수의 식에 $x=0$을 대입한 것이다.

$f(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)+1=\frac{1}{2}$

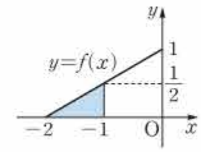
(사다리꼴의 넓이) $=\frac{1}{2}\times\{($윗변의 길이$)+($아랫변의 길이$)\}\times($높이$)$

$0\le X\le2$를 만족시키는 X의 값은 0, 1, 2이다.

검은 공을 0개 꺼내려면 흰 공을 3개 꺼내야 한다. 그런데 주어진 흰 공은 2개뿐이므로 3개를 꺼낼 수 없다. 따라서 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3

길이, 시간, 무게, 온도 등과 같이 어떤 범위에 속하는 임의의 실수의 값을 연속적으로 가지는 확률변수는 연속확률변수이다.

(2) $P(-2\le X\le-1)$은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=-1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$P(-2\le X\le-1)=\frac{1}{2}\cdot\{-1-(-2)\}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$

2-2 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot(3k+k)\cdot5=1,\quad 10k=1$

$\therefore k=\frac{1}{10}$

답 $\frac{1}{10}$

기본+표준 유형 Q+Q

59쪽

01 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 3개의 동전을 동시에 던져서 나오는 각각의 경우와 그때의 X의 값을 구하면 다음과 같다.

100원	500원	500원	X
H	H	H	1100
H	H	T	600
H	T	H	600
H	T	T	100
T	H	H	1000
T	H	T	500
T	T	H	500
T	T	T	0

따라서 X가 가질 수 있는 값은

0, 100, 500, 600, 1000, 1100

답 0, 100, 500, 600, 1000, 1100

02 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_2C_2}{{}_6C_3}=\frac{1}{5}$,

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\cdot{}_2C_1}{{}_6C_3}=\frac{3}{5}$,

$P(X=3)=\frac{{}_4C_3\cdot{}_2C_0}{{}_6C_3}=\frac{1}{5}$

따라서 X의 확률분포를 그래프로 바르게 나타낸 것은 ④이다.

답 ④

03 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$3k+4k+5k=1$

$12k=1\quad\therefore k=\frac{1}{12}$

답 ①

04 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=1$$

$$\left(k-\frac{1}{3}\right)+\left(k-\frac{1}{6}\right)+k+\left(k-\frac{1}{3}\right)=1$$

$$4k-\frac{5}{6}=1, \qquad 4k=\frac{11}{6}$$

$$\therefore k=\frac{11}{24}$$

따라서

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{11}{24}+\dfrac{x}{6} & (x=-2,\ -1)\\[2mm] \dfrac{11}{24}-\dfrac{x}{3} & (x=0,\ 1)\end{cases}$$

이므로

$$P(X=-2 \text{ 또는 } X=1)$$
$$=P(X=-2)+P(X=1)$$
$$=\left(\frac{11}{24}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{11}{24}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

05 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$$

$$a+(2a^2+a)+a^2=1, \qquad 3a^2+2a-1=0$$

$$(a+1)(3a-1)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=\frac{1}{3}$$

이때 $0\le P(X=x)\le 1$이므로 $\quad a=\frac{1}{3}$

$$\therefore P(X\ge 1)=P(X=1)+P(X=2)$$
$$=\frac{5}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$$

$P(X=1)=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$
$=\frac{5}{9}$

답 $\frac{2}{3}$

06 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{{}_3C_x\cdot{}_6C_{2-x}}{{}_9C_2}\ (x=0,\ 1,\ 2)$$

이므로

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_6C_1}{{}_9C_2}=\frac{1}{2},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_6C_0}{{}_9C_2}=\frac{1}{12}$$

$$\therefore P(1\le X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

답 $\frac{7}{12}$

07 $X^2-6X+8\le 0$에서

$(X-2)(X-4)\le 0 \qquad \therefore 2\le X\le 4$

$$\therefore P(X^2-6X+8\le 0)$$
$$=P(2\le X\le 4)$$
$$=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$

나오는 두 눈의 수를 각각 a, b라 하면 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여

$|a-b|=2$인 경우는

$(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(3, 5)$,
$(4, 2)$, $(4, 6)$, $(5, 3)$, $(6, 4)$의 8가지

$|a-b|=3$인 경우는

$(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$,
$(4, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 3)$의 6가지

$|a-b|=4$인 경우는

$(1, 5)$, $(2, 6)$, $(5, 1)$, $(6, 2)$의 4가지

이므로 그 확률은 각각

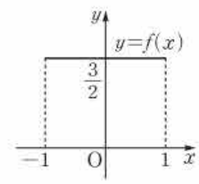
$$P(X=2)=\frac{2}{9},\ P(X=3)=\frac{1}{6},\ P(X=4)=\frac{1}{9}$$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는
$6\cdot 6=36$
이므로
$P(X=2)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$,
$P(X=3)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$,
$P(X=4)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

$$\therefore P(X^2-6X+8\le 0)$$
$$=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$
$$=\frac{2}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{1}{2}$$

답 ③

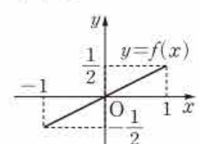
08 ① $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



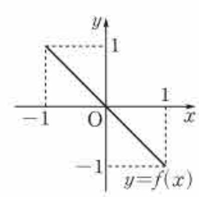
$$2\cdot\frac{3}{2}=3\ne 1$$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

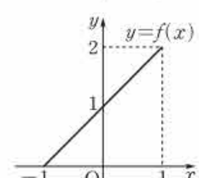
② $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $-1\le x<0$에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.



③ $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $0<x\le 1$에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.



④ $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는

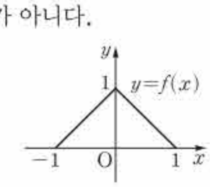


$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2\ne 1$$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

⑤ $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $-1\le x\le 1$에서 $f(x)\ge 0$이고 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$y=-|x|+1$의 그래프는 $y=|x|$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수이다.

답 ⑤

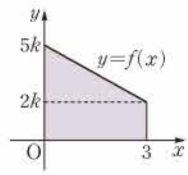
쌤 한마디

함수 $f(x)$ $(\alpha\le x\le\beta)$가 확률밀도함수인지 판단할 때에는 $f(x)$가 다음을 모두 만족시키는지 확인한다.

① 모든 함숫값이 0 이상이다.

② $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이다.

09 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

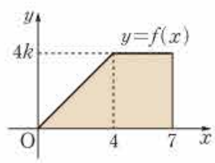


$$\frac{1}{2}\cdot(5k+2k)\cdot3=1$$

$$\frac{21}{2}k=1 \qquad \therefore k=\frac{2}{21}$$

답 $\frac{2}{21}$

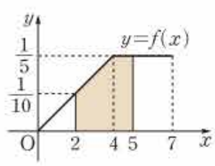
10 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=7$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\cdot(3+7)\cdot4k=1$$

$$20k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{20}$$

$P(2\leq X\leq5)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$P(2\leq X\leq5)$

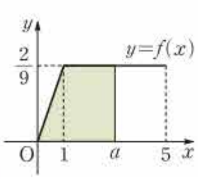
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)\cdot2+1\cdot\frac{1}{5}$$

$$=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{20}x\ (0\leq x\leq4)$
이므로
$f(2)=\frac{1}{10}$, $f(4)=\frac{1}{5}$

11 $P(0\leq X\leq a)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$\frac{1}{2}\cdot\{(a-1)+a\}\cdot\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

$$2a-1=5, \qquad 2a=6$$

$$\therefore a=3$$

답 ④

$P(0\leq X\leq1)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{2}{9}$
$=\frac{1}{9}$
이므로
$P(0\leq X\leq a)=\frac{5}{9}$에서
$a>1$

10 이산확률변수의 평균과 표준편차

Lecture 18 이산확률변수의 기댓값(평균), 분산, 표준편차 61쪽

1-1 (1) $E(X)=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{2}{5}=3$

(2) $E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{10}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{3}{10}+4^2\cdot\frac{2}{5}=10$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=10-3^2=1$$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{1}=1$

답 (1) 3 (2) 1 (3) 1

$V(X)=2$이므로
$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2}$

QBOX

다른 풀이 (2) $V(X)=(1-3)^2\cdot\frac{1}{10}+(2-3)^2\cdot\frac{1}{5}$
$+(3-3)^2\cdot\frac{3}{10}+(4-3)^2\cdot\frac{2}{5}$
$=1$

확률질량함수가 주어지면 먼저 각 확률을 구하여 확률분포를 표로 나타낸 후 평균을 구하는 것이 편리하다.

1-2 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

(1) $E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$

(2) $E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{2}=6$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=6-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

답 (1) $\frac{7}{3}$ (2) $\frac{5}{9}$ (3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

1-3 (1) X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이므로

$$P(X=0)={}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},$$
$$P(X=1)={}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{4}{9},$$
$$P(X=2)={}_2C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{9}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $E(X)=0\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{4}{9}+1^2\cdot\frac{4}{9}+2^2\cdot\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{8}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$
$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

답 풀이 참조

Lecture 19 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 62쪽

1-1 (1) $E(-2X)=-2E(X)=-2\cdot6=-12$

$V(-2X)=(-2)^2V(X)=4\cdot2=8$

$\sigma(-2X)=|-2|\sigma(X)=2\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

(2) $E(3X-4)=3E(X)-4=3\cdot6-4=14$

$V(3X-4)=3^2V(X)=9\cdot2=18$

$\sigma(3X-4)=|3|\sigma(X)=3\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

(3) $E\left(\frac{1}{2}X+3\right)=\frac{1}{2}E(X)+3=\frac{1}{2}\cdot6+3=6$

$V\left(\frac{1}{2}X+3\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2V(X)=\frac{1}{4}\cdot2=\frac{1}{2}$

$\sigma\left(\frac{1}{2}X+3\right)=\left|\frac{1}{2}\right|\sigma(X)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $E\left(-\frac{1}{3}X+5\right)=-\frac{1}{3}E(X)+5=-\frac{1}{3}\cdot6+5=3$

$V\left(-\frac{1}{3}X+5\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^2V(X)=\frac{1}{9}\cdot2=\frac{2}{9}$

$\sigma\left(-\frac{1}{3}X+5\right)=\left|-\frac{1}{3}\right|\sigma(X)=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

답 풀이 참조

1-2 (1) $E(-5X+2)=-5E(X)+2$

$=-5\cdot5+2=-23$

(2) $V\left(\frac{X-1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2V(X)=\frac{1}{4}\cdot1=\frac{1}{4}$

(3) $\sigma(-4X)=|-4|\sigma(X)=4\cdot1=4$

답 (1) -23 (2) $\frac{1}{4}$ (3) 4

1-3 (1) $E(X)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{3}=4$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=4-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{11}{9}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{11}{9}}=\frac{\sqrt{11}}{3}$

(2) $E(6X-2)=6E(X)-2=6\cdot\frac{5}{3}-2=8$

$V(6X-2)=6^2V(X)=36\cdot\frac{11}{9}=44$

$\sigma(6X-2)=|6|\sigma(X)=6\cdot\frac{\sqrt{11}}{3}=2\sqrt{11}$

답 풀이 참조

기본+표준 유형 Q+Q

63쪽

01 확률의 총합은 1이므로

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$
$=1$

$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1 \qquad \therefore a=\frac{3}{8}$

$E(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{4}$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{2}$이므로

Q BOX

$\sigma(3X-4)$
$=\sqrt{V(3X-4)}$
$=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$
와 같이 구할 수도 있다.

$V(X)=1$이므로
$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=1$

원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수
➡ 2^n

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{5}{2}-\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

답 $\frac{\sqrt{15}}{4}$

02 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=4)=1$

$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{4}{k}=1 \qquad \therefore k=7$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

$E(X)=1\cdot\frac{1}{7}+2\cdot\frac{2}{7}+4\cdot\frac{4}{7}=3$,

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{7}+2^2\cdot\frac{2}{7}+4^2\cdot\frac{4}{7}=\frac{73}{7}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{73}{7}-3^2=\frac{10}{7}$

답 ①

03 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_5C_2\cdot{}_4C_0}{{}_9C_2}=\frac{5}{18}$,

$P(X=1)=\frac{{}_5C_1\cdot{}_4C_1}{{}_9C_2}=\frac{5}{9}$,

$P(X=2)=\frac{{}_5C_0\cdot{}_4C_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{6}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=0\cdot\frac{5}{18}+1\cdot\frac{5}{9}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{8}{9}$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{5}{18}+1^2\cdot\frac{5}{9}+2^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{9}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{11}{9}-\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{35}{81}$

답 ③

04 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_3C_0}{2^3}=\frac{1}{8}$,

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1}{2^3}=\frac{3}{8}$,

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{2^3}=\frac{3}{8}$,

$P(X=3)=\frac{{}_3C_3}{2^3}=\frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}=3$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

05 한 장의 행운권으로 받을 수 있는 상금을 X원이라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	5000	100000	200000	합계
$P(X=x)$	$\frac{289}{400}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{400}$	1

$\therefore E(X)=0\cdot\frac{289}{400}+5000\cdot\frac{1}{4}+100000\cdot\frac{1}{40}+200000\cdot\frac{1}{400}$

$=4250$

따라서 구하는 기댓값은 4250원이다. 답 4250원

06 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 한 번의 게임에서 나오는 각각의 경우와 그때의 상금은 다음과 같다.

100원	100원	50원	상금(원)
H	H	H	250
H	H	T	200
H	T	H	150
H	T	T	100
T	H	H	150
T	H	T	100
T	T	H	50
T	T	T	0

한 번의 게임에서 받을 수 있는 상금을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 50, 100, 150, 200, 250이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{1}{8}$, $P(X=50)=\frac{1}{8}$,

$P(X=100)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $P(X=150)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$,

$P(X=200)=\frac{1}{8}$, $P(X=250)=\frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	50	100	150	200	250	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\therefore E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+50\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{1}{4}+150\cdot\frac{1}{4}+200\cdot\frac{1}{8}+250\cdot\frac{1}{8}$

$=125$

따라서 구하는 기댓값은 125원이다. 답 ②

Q BOX

$P(X=0)=\frac{289}{400}$,

$P(X=5000)=\frac{100}{400}=\frac{1}{4}$,

$P(X=100000)=\frac{10}{400}=\frac{1}{40}$,

$P(X=200000)=\frac{1}{400}$

$P(X=1)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$,

$P(X=2)=\frac{3}{20}$,

$P(X=3)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$,

$P(X=4)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$,

$P(X=5)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

07 $E(Y)=2$에서 $E(aX+b)=2$

$aE(X)+b=2$

$\therefore 5a+b=2$ ...... ㉠

$V(Y)=36$에서 $V(aX+b)=36$

$a^2V(X)=36$, $9a^2=36$

$a^2=4$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$10+b=2$ $\therefore b=-8$

$\therefore a-b=10$ 답 10

08 $E(2X-1)=5$에서 $2E(X)-1=5$

$\therefore E(X)=3$

$V(2X)=20$에서 $2^2V(X)=20$

$\therefore V(X)=5$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$5=E(X^2)-3^2$

$\therefore E(X^2)=14$ 답 ⑤

09 확률의 총합은 1이므로

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$

$a+\frac{2}{3}+a=1$, $2a=\frac{1}{3}$

$\therefore a=\frac{1}{6}$

$E(X)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=1$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{2}{3}+2^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{4}{3}-1^2=\frac{1}{3}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\sigma(6X+3)=|6|\sigma(X)$

$=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

10 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=1$

$\frac{k}{5}+\frac{3}{10}k+\frac{2}{5}k+\frac{k}{2}+\frac{3}{5}k=1$

$2k=1$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

즉 $P(X=x)=\frac{x+1}{20}$ ($x=1, 2, 3, 4, 5$)이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	1

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{3}{20}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{3}{10}=\frac{7}{2}$$

이므로

$$E(-4X-5)=-4E(X)-5=-4\cdot\frac{7}{2}-5=-19$$

답 ①

11 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, ⋯, 8이고, 그 확률은 모두 $\frac{1}{8}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{8}+5\cdot\frac{1}{8}+6\cdot\frac{1}{8}+7\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{8}=\frac{9}{2},$$

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{8}+2^2\cdot\frac{1}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}+4^2\cdot\frac{1}{8}+5^2\cdot\frac{1}{8}+6^2\cdot\frac{1}{8}+7^2\cdot\frac{1}{8}+8^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{51}{2}$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{51}{2}-\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$$

$$\therefore E(-X+2)=-E(X)+2=-\frac{9}{2}+2=-\frac{5}{2},$$

$$V(-X+2)=(-1)^2V(X)=\frac{21}{4}$$

답 $-\frac{5}{2}$, $\frac{21}{4}$

12 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\cdot{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{35},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_2}{{}_7C_3}=\frac{12}{35},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\cdot{}_3C_1}{{}_7C_3}=\frac{18}{35},$$

$$P(X=3)=\frac{{}_4C_3\cdot{}_3C_0}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{35}+1\cdot\frac{12}{35}+2\cdot\frac{18}{35}+3\cdot\frac{4}{35}=\frac{12}{7},$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{35}+1^2\cdot\frac{12}{35}+2^2\cdot\frac{18}{35}+3^2\cdot\frac{4}{35}=\frac{24}{7}$$ 이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{24}{7}-\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{24}{49}}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$이므로

$$\sigma(7X+1)=|7|\sigma(X)=7\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}=2\sqrt{6}$$

답 $2\sqrt{6}$

Q BOX

1, 4, 6이 적힌 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 동시에 뽑는 경우의 수

중단원 마무리

65쪽

01 전략 바닥에 닿는 면에 적힌 두 수의 합을 모두 구한다.

풀이 바닥에 닿는 면에 적힌 두 수의 합은

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

이므로 X가 가질 수 있는 모든 값은 7개이다. 답 ④

+	2	3	4	5
2	4	5	6	7
3	5	6	7	8
4	6	7	8	9
5	7	8	9	10

02 전략 $P(X=2)$, ⋯, $P(X=5)$를 각각 $P(X=1)$로 나타낸 후 확률의 총합은 1임을 이용하여 $P(X=1)$을 구한다.

풀이 $P(X=k)=kP(X=1)$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$에서

$$P(X=2)=2P(X=1),$$
$$P(X=3)=3P(X=1),$$
$$P(X=4)=4P(X=1),$$
$$P(X=5)=5P(X=1)$$

이때 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=5)=1$$
$$P(X=1)+2P(X=1)+\cdots+5P(X=1)=1$$
$$15P(X=1)=1$$
$$\therefore P(X=1)=\frac{1}{15}$$

$1+2+3+4+5=15$

따라서 $P(X=k)=\frac{k}{15}$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$이므로

$$P(2\le X\le 4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

03 전략 $\frac{a}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=a(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$이고 확률의 총합은 1임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=99)=1$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}+1}+\frac{a}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{a}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{a}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}=1$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}+1}=\frac{a(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=a(\sqrt{2}-1)$$

$$a\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})\}=1$$

$a(-1+\sqrt{100})=1,\qquad 9a=1$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{9}$

즉

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{9(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 99)$$

이므로

$$\begin{aligned}b&=\mathrm{P}(X=16)+\mathrm{P}(X=17)+\mathrm{P}(X=18)+\cdots+\mathrm{P}(X=99)\\&=\frac{1}{9(\sqrt{17}+\sqrt{16})}+\frac{1}{9(\sqrt{18}+\sqrt{17})}+\frac{1}{9(\sqrt{19}+\sqrt{18})}+\cdots+\frac{1}{9(\sqrt{100}+\sqrt{99})}\\&=\frac{1}{9}\{(\sqrt{17}-\sqrt{16})+(\sqrt{18}-\sqrt{17})+(\sqrt{19}-\sqrt{18})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})\}\\&=\frac{1}{9}(-\sqrt{16}+\sqrt{100})\\&=\frac{1}{9}\cdot 6=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\therefore\ a+b=\dfrac{7}{9}$

답 ②

04 전략 $X^2-4X+3=0$을 만족시키는 X의 값을 찾아 그 값을 갖는 확률을 구한다.

풀이 $X^2-4X+3=0$에서

$(X-1)(X-3)=0$

$\therefore\ X=1$ 또는 $X=3$

9장의 카드 중에서 홀수가 적힌 카드는 1, 3, 5, 7, 9의 5장이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}=\dfrac{5}{14}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_0}{{}_9\mathrm{C}_3}=\dfrac{5}{42}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X^2-4X+3=0)&=\mathrm{P}(X=1\text{ 또는 }X=3)\\&=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)\\&=\frac{5}{14}+\frac{5}{42}=\frac{10}{21}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{10}{21}$

05 전략 확률변수 X의 확률분포를 구한다.

풀이 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3\cdot{}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_4}=\dfrac{1}{14}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_4}=\dfrac{3}{7}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_4}=\dfrac{3}{7}$,

$\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_0\cdot{}_5\mathrm{C}_4}{{}_8\mathrm{C}_4}=\dfrac{1}{14}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$	1

⋯ ❶

따라서

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{1}{14}+\dfrac{3}{7}=\dfrac{1}{2}$

이므로 $\mathrm{P}(X\le 2)=\dfrac{1}{2}$

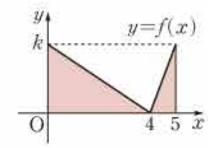
$\therefore\ a=2$ ⋯ ❷

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	X의 확률분포를 표로 나타낼 수 있다.	70 %
❷	a의 값을 구할 수 있다.	30 %

06 전략 확률밀도함수의 성질을 이용한다.

풀이 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot k+\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot k=1$

$\dfrac{5}{2}k=1\qquad\therefore\ k=\dfrac{2}{5}$

답 ③

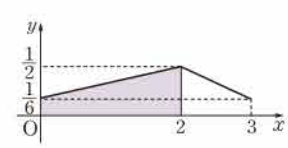
07 전략 먼저 확률밀도함수의 성질을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 주어진 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$3\cdot k+\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2k=1,\qquad 6k=1$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{6}$

$\mathrm{P}(0\le X\le 2)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\right)\cdot 2=\dfrac{2}{3}$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로

$p+q=5$

답 5

08 전략 $f(5-x)=f(5+x)$이므로 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=5$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 $f(5-x)=f(5+x)$이므로 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=5$에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$가 $f(a-x)=f(a+x)$를 만족시키면 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\mathrm{P}(3\le X\le 5)=\mathrm{P}(5\le X\le 7)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(3\le X\le 7)&=\mathrm{P}(3\le X\le 5)+\mathrm{P}(5\le X\le 7)\\&=2\mathrm{P}(3\le X\le 5)\\&=2\{\mathrm{P}(0\le X\le 5)-\mathrm{P}(0\le X\le 3)\}\\&=2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ③

쌤 한마디

확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=10$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$$P(0\le X\le 10)=1$$

이때 $f(x)$의 그래프가 직선 $x=5$에 대하여 대칭이므로

$$P(0\le X\le 5)=P(5\le X\le 10)=\frac{1}{2}$$

09 전략 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$임을 이용한다.

풀이 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=8a+9-(2a)^2$$
$$=-4a^2+8a+9$$
$$=-4(a-1)^2+13$$

따라서 $V(X)$는 $a=1$일 때, 최댓값 13을 갖는다.

답 ②

10 전략 확률의 총합은 1이고, $V(X)=\frac{5}{12}$임을 이용하여 a, b에 대한 식을 각각 세운다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=1$$

$$a+\frac{1}{3}+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$E(X)=-1\cdot a+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot b=-a+b$,

$E(X^2)=(-1)^2\cdot a+0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot b=a+b$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=a+b-(-a+b)^2$$

이때 $V(X)=\frac{5}{12}$에서

$$a+b-(-a+b)^2=\frac{5}{12}$$

$$\frac{2}{3}-(-a+b)^2=\frac{5}{12}\ (\because ㉠)$$

$$\therefore (a-b)^2=\frac{1}{4}$$

답 ④

$(-a+b)^2$
$=\{-(a-b)\}^2$
$=(a-b)^2$

11 전략 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸 후 $\sigma(X)$를 구한다.

풀이 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$,

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{2}=6$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=6-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

12 전략 같은 면이 연속하여 나오지 않는 경우와 2번, 3번 나오는 경우를 구하여 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

풀이 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 한 개의 동전을 세 번 던질 때 얻을 수 있는 점수는

HTH, THT일 때, 0

HHT, HTT, THH, TTH일 때, 1

HHH, TTT일 때, 3

즉 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 3이고, 그 확률은 각각 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

한 개의 동전을 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$2\cdot2\cdot2=8$
이므로
$P(X=0)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$,
$P(X=1)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$,
$P(X=3)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

X	0	1	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{2}+3^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{11}{4}-\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{19}{16}$$

답 ②

13 전략 확률변수 X가 가질 수 있는 값에 대한 확률을 각각 구하여 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

풀이 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각 다음과 같다.

(i) $X=1$인 경우는

(①, ②), (①, ③), (①, ❶), (①, ❷),
(①, ❸), (❶, ②), (❶, ③), (❶, ❷),
(❶, ❸)의 9가지

$$\therefore P(X=1)=\frac{9}{{}_6C_2}=\frac{3}{5}$$

(ii) $X=2$인 경우는

(②, ③), (②, ❷), (②, ❸), (❷, ③),
(❷, ❸)의 5가지

$$\therefore P(X=2)=\frac{5}{{}_6C_2}=\frac{1}{3}$$

(iii) $X=3$인 경우는

(③, ❸)의 1가지

$$\therefore P(X=3)=\frac{1}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$$

이상에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	1

$E(X)=1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{15}=\frac{22}{15}$이므로

$p=15$, $q=22$

$\therefore p+q=37$

답 37

14 전략 전체 추첨권을 a장이라 하고 추첨권 한 장으로 받을 수 있는 상금의 확률분포를 표로 나타낸다.

풀이 전체 추첨권을 a장이라 하고 한 장의 추첨권으로 받을 수 있는 상금을 X원이라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	10000	50000	100000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{a-85}{a}$	$\frac{50}{a}$	$\frac{25}{a}$	$\frac{10}{a}$	1

$\mathrm{E}(X)=11000$에서

$$0\cdot\frac{a-85}{a}+10000\cdot\frac{50}{a}+50000\cdot\frac{25}{a}+100000\cdot\frac{10}{a}=11000$$

$$\frac{2750000}{a}=11000 \qquad \therefore a=250$$

따라서 전체 추첨권은 250장이다. 답 250

15 전략 먼저 $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구한 후 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$임을 이용하여 $\mathrm{E}(X^2)$을 구한다.

풀이 $\mathrm{E}(Y)=-14$에서 $\quad \mathrm{E}(-5X+1)=-14$

$-5\mathrm{E}(X)+1=-14$

$\therefore \mathrm{E}(X)=3$

$\mathrm{V}(Y)=50$에서 $\quad \mathrm{V}(-5X+1)=50$

$(-5)^2\mathrm{V}(X)=50$

$\therefore \mathrm{V}(X)=2$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$2=\mathrm{E}(X^2)-3^2$

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=11$ 답 ①

16 전략 먼저 X의 확률분포를 표로 나타내어 $\mathrm{E}(X)$를 구한다.

풀이 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{3}{7}+2\cdot\frac{2}{7}+3\cdot\frac{1}{7}+4\cdot0+5\cdot\frac{1}{7}=\frac{15}{7}$이므로

$$\mathrm{E}(14X+5)=14\mathrm{E}(X)+5=14\cdot\frac{15}{7}+5=35$$

답 ②

17 전략 확률변수 X의 확률분포를 구한 후 $\mathrm{V}(X)$를 구한다.

풀이 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수에 대하여 4로 나누었을 때의 나머지는

1, 5일 때, 1

2, 6일 때, 2

3일 때, 3

4일 때, 0

QBOX

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{6}$,

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{6}$

즉 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

··· ❶

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{19}{6}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$$

··· ❷

$$\therefore \mathrm{V}(-6X+2)=(-6)^2\mathrm{V}(X)=36\cdot\frac{11}{12}=33$$

··· ❸

답 33

단계	채점 기준	비율
❶	X의 확률분포를 표로 나타낼 수 있다.	40 %
❷	$\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	40 %
❸	$\mathrm{V}(-6X+2)$를 구할 수 있다.	20 %

18 전략 $\mathrm{E}(X)$를 a에 대한 식으로 나타낸 후 $\mathrm{E}(12X-3)=29$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	a	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{3}+a\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{3}+\frac{a}{6}$$

이때 $\mathrm{E}(12X-3)=29$에서

$12\mathrm{E}(X)-3=29$, $\quad 12\left(\frac{5}{3}+\frac{a}{6}\right)-3=29$

$17+2a=29 \qquad \therefore a=6$

따라서 $\mathrm{E}(X)=\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$,

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{3}+6^2\cdot\frac{1}{6}=10$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=10-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{26}{9}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{26}{9}}=\frac{\sqrt{26}}{3}$$

$$\therefore \sigma(12X-3)=|12|\sigma(X)=12\cdot\frac{\sqrt{26}}{3}=4\sqrt{26}$$

답 $4\sqrt{26}$

06 이항분포와 정규분포

11 이항분포

Lecture 20 이항분포 68쪽

1-1 (1) 한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(8,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

3의 배수의 눈이 나오는 경우는 3, 6의 2가지이므로 그 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(2) 10개의 제비 중에서 2개의 제비를 차례대로 뽑을 때, 뽑은 제비를 다시 넣지 않으므로 각 시행은 독립시행이 아니다.
따라서 확률변수 X는 이항분포를 따르지 않는다.

답 (1) $B\left(8,\ \frac{1}{3}\right)$ (2) 이항분포를 따르지 않는다.

1-2 (1) $P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}$
$(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

(2) $P(X=2)={}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=6\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}=\frac{8}{27}$

답 풀이 참조

2-1 (1) $E(X)=20\cdot\frac{1}{2}=10$

$V(X)=20\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=5$

$\sigma(X)=\sqrt{5}$

(2) $E(X)=100\cdot\frac{4}{5}=80$

$V(X)=100\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=16$

$\sigma(X)=\sqrt{16}=4$

답 (1) 평균: 10, 분산: 5, 표준편차: $\sqrt{5}$
(2) 평균: 80, 분산: 16, 표준편차: 4

기본+표준 유형 Q+Q 69쪽

01 한 개의 주사위를 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{12}C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{12-x}$
$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$

6의 약수의 눈이 나오는 경우는 1, 2, 3, 6의 4가지이므로 그 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

이고, X는 이항분포 $B\left(12,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

따라서 $n=12$, $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{nb}{a}=12\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=6$ 답 ④

02 ㄱ. 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던질 때, 서로 다른 면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

ㄴ. 자유투를 한 번 던질 때, 성공할 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

50 % ➡ $\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$

ㄷ. 10개의 제비 중에서 한 개의 제비를 뽑을 때, 당첨 제비가 나올 확률이 $\frac{1}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

이상에서 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르는 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

03 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_7C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{7-x}$
$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$

이므로

$P(X\geq 6)=P(X=6)+P(X=7)$
$={}_7C_6\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^1+{}_7C_7\left(\frac{2}{3}\right)^7\left(\frac{1}{3}\right)^0$
$=7\cdot\frac{2^6}{3^7}+\frac{2^7}{3^7}=\frac{9\cdot 2^6}{3^7}=\frac{2^6}{3^5}$ 답 ②

$a\neq 0$일 때, $a^0=1$

04 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_8C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{8-x}$
$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$

이때 $P(X=2)=kP(X=1)$이므로

${}_8C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^6=k\cdot{}_8C_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^7$

$28\cdot\frac{9}{4^8}=8k\cdot\frac{3}{4^8}$ $\therefore k=\frac{21}{2}$ 답 $\frac{21}{2}$

05 이벤트에 한 번 응모할 때, 당첨될 확률이 $\frac{2}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4,\ \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

40 % ➡ $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$

따라서 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{4-x}(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

이므로

$P(X\leq 3)=1-P(X=4)$
$=1-{}_4C_4\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^0$
$=1-\frac{16}{625}=\frac{609}{625}$ 답 $\frac{609}{625}$

06 과녁을 명중시키는 횟수를 X라 하면 총을 한 번 쏠 때, 과녁을 명중시킬 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}$$

$(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\geq 4)&=P(X=4)+P(X=5)\\&={}_5C_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1+{}_5C_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0\\&=\frac{15}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{1}{64}\end{aligned}$$

답 ③

07 $E(X)=15$에서

$45p=15$ $\quad\therefore p=\frac{1}{3}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(45,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$V(X)=45\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=10$

답 ④

08 $E(X)=42$에서

$np=42$ ······ ㉠

$\sigma(X)=6$에서 $V(X)=36$이므로

$np(1-p)=36$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad 42(1-p)=36$

$1-p=\frac{6}{7}$ $\quad\therefore p=\frac{1}{7}$

$p=\frac{1}{7}$을 ㉠에 대입하면 $\quad\frac{1}{7}n=42$

$\therefore n=294$

답 294

09 한 개의 주사위를 던질 때, 6 이상의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{6}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(72,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=72\cdot\frac{1}{6}=12,\ V(X)=72\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=10$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$10=E(X^2)-12^2$

$\therefore E(X^2)=154$

답 ②

10 한 번의 시행에서 검은 공 1개와 흰 공 2개를 꺼낼 확률이

$$\frac{{}_3C_1\cdot{}_5C_2}{{}_8C_3}=\frac{15}{28}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(140,\ \frac{15}{28}\right)$를 따른다.

$\therefore E(X)=140\cdot\frac{15}{28}=75$

답 75

11 페널티 킥을 한 번 찰 때, 성공할 확률이 $\frac{13}{20}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(40,\ \frac{13}{20}\right)$을 따른다.

따라서 $E(X)=40\cdot\frac{13}{20}=26$이므로

$$\begin{aligned}E(2X+9)&=2E(X)+9\\&=2\cdot 26+9=61\end{aligned}$$

답 61

Q BOX

평균의 대소는 대칭축의 위치로, 표준편차의 대소는 곡선의 가운데 부분의 높이와 옆으로 퍼진 모양으로 판단한다.

$V(X)=\{\sigma(X)\}^2$
$=6^2=36$

공을 꺼내 색을 확인하고 다시 넣으므로 확률은 변하지 않는다.

65 % ➡ $\frac{65}{100}=\frac{13}{20}$

12 $E(X)=\frac{1}{4}n,\ V(X)=n\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}n$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$\frac{3}{16}n=\frac{11}{2}-\frac{1}{16}n^2,\qquad n^2+3n-88=0$

$(n+11)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because n$은 자연수)

따라서 $V(X)=\frac{3}{16}\cdot 8=\frac{3}{2}$이므로

$V(6X-3)=6^2V(X)=36\cdot\frac{3}{2}=54$

답 ⑤

12 정규분포와 표준정규분포

Lecture 21 정규분포

71쪽

1-1 답 (1) $N(3,\ 1^2)$ (2) $N(-4,\ 3^2)$

2-1 답 (1) $<$ (2) $<$

2-2 (1) $P(m-\sigma\leq X\leq m+2\sigma)$
$=P(m-\sigma\leq X\leq m)+P(m\leq X\leq m+2\sigma)$
$=P(m\leq X\leq m+\sigma)+P(m\leq X\leq m+2\sigma)$
$=a+b$

(2) $P(X\geq m+\sigma)=P(X\geq m)-P(m\leq X\leq m+\sigma)$
$=0.5-a$

답 (1) $a+b$ (2) $0.5-a$

Lecture 22 표준정규분포

72쪽

1-1 (1) $P(-1\leq Z\leq 0)=P(0\leq Z\leq 1)=0.3413$

(2) $P(1.25\leq Z\leq 1.5)$
$=P(0\leq Z\leq 1.5)-P(0\leq Z\leq 1.25)$
$=0.4332-0.3944=0.0388$

(3) $P(Z\geq 1.75)=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1.75)$
$=0.5-0.4599=0.0401$

(4) $P(Z\geq -1.5)=P(-1.5\leq Z\leq 0)+P(Z\geq 0)$
$=P(0\leq Z\leq 1.5)+P(Z\geq 0)$
$=0.4332+0.5=0.9332$

답 (1) 0.3413 (2) 0.0388 (3) 0.0401 (4) 0.9332

1-2 (1) $P(0\leq Z\leq 2.5)=0.4938$이므로

$a=2.5$

(2) $P(Z\geq a)=0.8413$에서

$P(a\leq Z\leq 0)+P(Z\geq 0)=0.8413$

$P(0\leq Z\leq -a)+0.5=0.8413$

$\therefore P(0\leq Z\leq -a)=0.3413$

이때 $P(0\leq Z\leq 1)=0.3413$이므로

$-a=1$ $\quad\therefore a=-1$

(3) $\mathrm{P}(-a\le Z\le a)=0.8664$에서

$\mathrm{P}(-a\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.8664$

$2\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.8664$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$a=1.5$

(4) $\mathrm{P}(Z\le a+1)=0.9772$에서

$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le a+1)=0.9772$

$0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le a+1)=0.9772$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le a+1)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

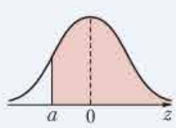
$a+1=2\qquad \therefore\ a=1$

답 (1) 2.5 (2) -1 (3) 1.5 (4) 1

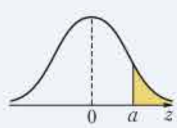
쌤 한마디

$\mathrm{P}(Z\ge 0)=\mathrm{P}(Z\le 0)=0.5$이므로 $\mathrm{P}(Z\ge a)$ 또는 $\mathrm{P}(Z\le a)$가 0.5보다 큰지 작은지에 따라 다음과 같이 a의 부호가 결정된다.

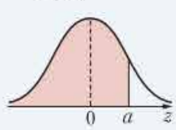
① $\mathrm{P}(Z\ge a)>0.5$이면 $a<0$



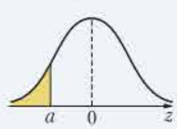
② $\mathrm{P}(Z\ge a)<0.5$이면 $a>0$



③ $\mathrm{P}(Z\le a)>0.5$이면 $a>0$



④ $\mathrm{P}(Z\le a)<0.5$이면 $a<0$



이와 같이 확률변수 Z에 대하여 주어진 확률을 만족시키는 상수의 값을 구하거나 확률을 구할 때, 확률변수 Z의 정규분포곡선을 그리고 곡선 위에 확률을 나타내면 그 의미를 쉽게 파악할 수 있다.

Lecture 23 정규분포의 표준화

73쪽

1-1 답 (1) $Z=\dfrac{X-15}{3}$ (2) $Z=\dfrac{X-86}{12}$

(3) $Z=\dfrac{X-100}{8}$ (4) $Z=\dfrac{X+7}{5}$

1-2 $Z=\dfrac{X-30}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(30\le X\le 34)=\mathrm{P}\left(\dfrac{30-30}{4}\le Z\le \dfrac{34-30}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

(2) $\mathrm{P}(22\le X\le 32)=\mathrm{P}\left(\dfrac{22-30}{4}\le Z\le \dfrac{32-30}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0.5)$

답 (1) $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$ (2) $\mathrm{P}(-2\le Z\le 0.5)$

1-3 $Z=\dfrac{X-24}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(23\le X\le 28)=\mathrm{P}\left(\dfrac{23-24}{2}\le Z\le \dfrac{28-24}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.1915+0.4772$

$=0.6687$

(2) $\mathrm{P}(26\le X\le 27)=\mathrm{P}\left(\dfrac{26-24}{2}\le Z\le \dfrac{27-24}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(1\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4332-0.3413$

$=0.0919$

답 (1) 0.6687 (2) 0.0919

기본+표준 유형 Q+Q

74쪽

01 ⑤ σ의 값이 작을수록 가운데 부분의 높이는 높아진다.

답 ⑤

02 ㄱ. 곡선 $y=f(x)$의 대칭축이 곡선 $y=g(x)$의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로

$\mathrm{E}(X_1)<\mathrm{E}(X_2)$

ㄴ. 곡선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$보다 가운데 부분의 높이는 낮고 옆으로 퍼진 모양이므로

$\sigma(X_1)<\sigma(X_2)$

ㄷ. $\mathrm{E}(X_1)<a$이므로 $\mathrm{P}(X_1\le a)>0.5$

$\mathrm{E}(X_2)>a$이므로 $\mathrm{P}(X_2\le a)<0.5$

$\therefore\ \mathrm{P}(X_1\le a)>\mathrm{P}(X_2\le a)$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

BOX 표준편차 σ는 자료들이 평균을 중심으로 흩어진 정도를 나타낸다. 즉 표준편차가 크면 자료가 평균을 중심으로 넓게 흩어져 있고, 표준편차가 작으면 자료가 평균을 중심으로 가까이 모여 있다.

03 $m=15,\ \sigma=3$이므로

$\mathrm{P}(9\le X\le 18)$

$=\mathrm{P}(15-2\cdot 3\le X\le 15+3)$

$=\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+\sigma)$

$=\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

$=\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

$=0.4772+0.3413=0.8185$ 답 0.8185

04 $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=a$에서

$2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=a$

$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=\dfrac{a}{2}$

$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=b$에서

$2\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=b$

$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=\dfrac{b}{2}$

$\therefore$ $P(m+\sigma \le X \le m+2\sigma)$
$=P(m \le X \le m+2\sigma)-P(m \le X \le m+\sigma)$
$=\frac{b-a}{2}$ 답 ③

05 $P(|Z| \ge 1)=P(Z \le -1)+P(Z \ge 1)$
$=2P(Z \ge 1)$
$=2\{P(Z \ge 0)-P(0 \le Z \le 1)\}$
$=2(0.5-0.3413)$
$=0.3174$ 답 0.3174

06 $P(-a \le Z \le a)=0.5762$에서
$P(-a \le Z \le 0)+P(0 \le Z \le a)=0.5762$
$2P(0 \le Z \le a)=0.5762$
$\therefore$ $P(0 \le Z \le a)=0.2881$
이때 $P(0 \le Z \le 0.8)=0.2881$이므로
$a=0.8$
$P(b \le Z \le a)=0.7435$에서
$P(b \le Z \le 0)+P(0 \le Z \le a)=0.7435$
$P(0 \le Z \le -b)+0.2881=0.7435$
$\therefore$ $P(0 \le Z \le -b)=0.4554$
이때 $P(0 \le Z \le 1.7)=0.4554$이므로
$-b=1.7$ $\quad\therefore$ $b=-1.7$
$\therefore$ $a-b=2.5$ 답 2.5

07 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(17, 4^2)$, $N(28, 5^2)$을 따르므로
$Z_X=\frac{X-17}{4}$, $Z_Y=\frac{Y-28}{5}$
로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
$P(X \ge 21)=P(Y \ge k)$에서
$P\left(Z_X \ge \frac{21-17}{4}\right)=P\left(Z_Y \ge \frac{k-28}{5}\right)$
$\therefore$ $P(Z_X \ge 1)=P\left(Z_Y \ge \frac{k-28}{5}\right)$
따라서 $\frac{k-28}{5}=1$이므로
$k-28=5$ $\quad\therefore$ $k=33$ 답 ①

08 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(0, 1^2)$, $N(0, 2^2)$을 따르므로
$Z_X=X$, $Z_Y=\frac{Y}{2}$
로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
ㄱ. 두 확률변수 X, Y의 평균이 0이므로
$P(X \le 0)=P(Y \ge 0)=0.5$
ㄴ. $P(-1 \le X \le 1)=P(-1 \le Z_X \le 1)$
$=2P(0 \le Z_X \le 1)$,
$2P(0 \le Y \le 2)=2P(0 \le Z_Y \le 1)$이므로
$P(-1 \le X \le 1)=2P(0 \le Y \le 2)$

ㄷ. $P(0 \le X \le a)=P(0 \le Z_X \le a)$,
$P(0 \le Y \le b)=P\left(0 \le Z_Y \le \frac{b}{2}\right)$이므로
$P(0 \le X \le a)=P(0 \le Y \le b)$에서
$P(0 \le Z_X \le a)=P\left(0 \le Z_Y \le \frac{b}{2}\right)$
$\therefore$ $a=\frac{b}{2}$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

09 $Z=\frac{X-15}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
① $P(9 \le X \le 15)=P\left(\frac{9-15}{6} \le Z \le \frac{15-15}{6}\right)$
$=P(-1 \le Z \le 0)$
$=P(0 \le Z \le 1)$
$=0.3413$
② $P(9 \le X \le 21)=P\left(\frac{9-15}{6} \le Z \le \frac{21-15}{6}\right)$
$=P(-1 \le Z \le 1)$
$=2P(0 \le Z \le 1)$
$=2 \times 0.3413=0.6826$
③ $P(X \le 21)=P\left(Z \le \frac{21-15}{6}\right)$
$=P(Z \le 1)$
$=P(Z \le 0)+P(0 \le Z \le 1)$
$=0.5+0.3413$
$=0.8413$
④ $P(X \le 9)=P\left(Z \le \frac{9-15}{6}\right)$
$=P(Z \le -1)=P(Z \ge 1)$
$=P(Z \ge 0)-P(0 \le Z \le 1)$
$=0.5-0.3413$
$=0.1587$
⑤ $P(X \ge 9)=1-P(X \le 9)$
$=1-0.1587=0.8413$
답 ③

10 $Z=\frac{X-21}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(15 \le X \le a)=0.6687$에서
$P\left(\frac{15-21}{3} \le Z \le \frac{a-21}{3}\right)=0.6687$
$P\left(-2 \le Z \le \frac{a-21}{3}\right)=0.6687$
$P(-2 \le Z \le 0)+P\left(0 \le Z \le \frac{a-21}{3}\right)=0.6687$
$0.4772+P\left(0 \le Z \le \frac{a-21}{3}\right)=0.6687$
$\therefore$ $P\left(0 \le Z \le \frac{a-21}{3}\right)=0.1915$
이때 $P(0 \le Z \le 0.5)=0.1915$이므로
$\frac{a-21}{3}=0.5$, $\quad a-21=1.5$
$\therefore$ $a=22.5$ 답 22.5

Q BOX

$P(Z \le -1)=P(Z \ge 1)$

$P(b \le Z \le a)=0.7435$ 이고 $P(0 \le Z \le a)=0.2881$ 이므로 $b<0$

두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $\frac{k-28}{5}=1$

$P\left(-2 \le Z \le \frac{a-21}{3}\right)=0.6687$ 이고 $P(-2 \le Z \le 0)=P(0 \le Z \le 2)=0.4772$ 이므로 $\frac{a-21}{3}>0$

11 당근 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-200}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge215)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{215-200}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge3)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le3)\\&=0.5-0.4987\\&=0.0013\end{aligned}$$

답 0.0013

12 제품 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-120}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X\le112)+\mathrm{P}(X\ge132)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{112-120}{8}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{132-120}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-1)+\mathrm{P}(Z\ge1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1)+\mathrm{P}(Z\ge1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&\quad+\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)\\&=0.5-0.34+0.5-0.43\\&=0.23\end{aligned}$$

답 0.23

(제품 한 개가 불량품일 확률)
=(제품 한 개의 무게가 112 g 이하일 확률)
+(제품 한 개의 무게가 132 g 이상일 확률)

13 주말 TV 시청 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(82,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-82}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(76\le X\le88)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{76-82}{4}\le Z\le\frac{88-82}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le1.5)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)\\&=2\times0.43=0.86\end{aligned}$$

500명의 학생 중 한 명을 택할 때, 택한 학생의 주말 TV 시청 시간이 76분 이상 88분 이하일 확률

따라서 주말 TV 시청 시간이 76분 이상 88분 이하인 학생 수는

$0.86\times500=430$

답 ②

14 음료 한 개의 용량을 X mL라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-200}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\le188)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{188-200}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-2)=\mathrm{P}(Z\ge2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

따라서 하루에 중량 미달로 판정되는 음료의 개수는

$0.02\times10000=200$

답 200

15 영어 시험 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(68,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-68}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
상위 15 %에 속하는 학생의 최저 점수를 a점이라 하면

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X\ge a)=0.15\\&\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-68}{10}\right)=0.15\\&\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-68}{10}\right)=0.15\\&0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-68}{10}\right)=0.15\\&\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-68}{10}\right)=0.35\end{aligned}$$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-68}{10}\right)=0.15<0.5$이므로 $\frac{a-68}{10}>0$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.04)=0.35$이므로

$\frac{a-68}{10}=1.04,\qquad a-68=10.4$

$\therefore\ a=78.4$

따라서 상위 15 %에 속하는 학생의 최저 점수는 78.4점이다.

답 78.4점

16 돼지의 무게를 X kg이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(115,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-115}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
무게가 가벼운 쪽에서 10 번째인 돼지의 무게를 a kg이라 하면

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X\le a)=\frac{10}{100}=0.1\\&\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-115}{2}\right)=0.1\\&\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{115-a}{2}\right)=0.1\\&\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{115-a}{2}\right)=0.1\\&0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{115-a}{2}\right)=0.1\\&\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{115-a}{2}\right)=0.4\end{aligned}$$

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-115}{2}\right)=0.1<0.5$이므로 $\frac{a-115}{2}<0$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.3)=0.4$이므로

$\frac{115-a}{2}=1.3,\qquad 115-a=2.6$

$\therefore\ a=112.4$

따라서 무게가 가벼운 쪽에서 10 번째인 돼지의 무게는 112.4 kg이다.

답 ④

17 승주네 반 전체 학생의 A, B, C 세 과목의 시험 성적을 각각 X_A점, X_B점, X_C점이라 하면 세 확률변수 X_A, X_B, X_C는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(68,\ 10^2)$, $\mathrm{N}(60,\ 12^2)$, $\mathrm{N}(71,\ 14^2)$을 따르므로

$$Z_A=\frac{X_A-68}{10},\ Z_B=\frac{X_B-60}{12},\ Z_C=\frac{X_C-71}{14}$$

로 놓으면 세 확률변수 Z_A, Z_B, Z_C는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

승주가 다른 학생들보다 A, B, C 세 과목의 시험 성적이 높을 확률은 각각

$P(X_A<88)=P\left(Z_A<\frac{88-68}{10}\right)=P(Z_A<2)$,

$P(X_B<72)=P\left(Z_B<\frac{72-60}{12}\right)=P(Z_B<1)$,

$P(X_C<92)=P\left(Z_C<\frac{92-71}{14}\right)=P(Z_C<1.5)$

이때 $P(Z_B<1)<P(Z_C<1.5)<P(Z_A<2)$이므로

$P(X_B<72)<P(X_C<92)<P(X_A<88)$

따라서 승주의 성적이 상대적으로 좋은 과목부터 순서대로 나열하면 A, C, B이다. 답 A, C, B

확률이 높은 과목일수록 상대적으로 성적이 좋다.

18 세 확률변수 X, Y, W는 각각 정규분포 $N(22, 4^2)$, $N(18, 8^2)$, $N(15, 2^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-22}{4}$, $Z_Y=\frac{Y-18}{8}$, $Z_W=\frac{W-15}{2}$

로 놓으면 세 확률변수 Z_X, Z_Y, Z_W는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

이때

$a=P(X\ge26)=P\left(Z_X\ge\frac{26-22}{4}\right)$

$=P(Z_X\ge1)$,

$b=P(Y\ge22)=P\left(Z_Y\ge\frac{22-18}{8}\right)$

$=P(Z_Y\ge0.5)$,

$c=P(W\ge19)=P\left(Z_W\ge\frac{19-15}{2}\right)$

$=P(Z_W\ge2)$

이므로

$P(Z_W\ge2)<P(Z_X\ge1)<P(Z_Y\ge0.5)$

$\therefore c<a<b$ 답 ⑤

13 이항분포와 정규분포의 관계

Lecture 24 이항분포와 정규분포의 관계 Ⓛ 77쪽

1-1 (1) 확률변수 X가 이항분포 $B\left(64, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=64\cdot\frac{1}{2}=32$, $V(X)=64\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=16$

이때 64는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(32, 4^2)$을 따른다.

(2) 확률변수 X가 이항분포 $B\left(150, \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=150\cdot\frac{3}{5}=90$,

$V(X)=150\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=36$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(90, 6^2)$을 따른다.

답 (1) $N(32, 4^2)$ (2) $N(90, 6^2)$

1-2 (1) 확률변수 X가 이항분포 $B\left(48, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=48\cdot\frac{1}{4}=12$,

$V(X)=48\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=9$

이때 48은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(12, 3^2)$을 따른다.

$\therefore Z=\frac{X-12}{3}$

(2) 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(6\le X\le15)=P\left(\frac{6-12}{3}\le Z\le\frac{15-12}{3}\right)$

$=P(-2\le Z\le1)$

$=P(-2\le Z\le0)+P(0\le Z\le1)$

$=P(0\le Z\le2)+P(0\le Z\le1)$

$=0.4772+0.3413$

$=0.8185$

답 (1) $Z=\frac{X-12}{3}$ (2) 0.8185

1-3 확률변수 X가 이항분포 $B\left(162, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$E(X)=162\cdot\frac{2}{3}=108$,

$V(X)=162\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=36$

이때 162는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(108, 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-108}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

(1) $P(111\le X\le120)$

$=P\left(\frac{111-108}{6}\le Z\le\frac{120-108}{6}\right)$

$=P(0.5\le Z\le2)$

$=P(0\le Z\le2)-P(0\le Z\le0.5)$

$=0.4772-0.1915=0.2857$

(2) $P(X\ge117)=P\left(Z\ge\frac{117-108}{6}\right)$

$=P(Z\ge1.5)$

$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

답 (1) 0.2857 (2) 0.0668

기본+표준 유형 Q+Q Ⓛ 78쪽

01 확률변수 X가 이항분포 $B\left(72, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=72\cdot\frac{1}{3}=24$, $V(X)=72\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=16$

이때 72는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(24, 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-24}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(30\le X\le 32)&=P\left(\frac{30-24}{4}\le Z\le \frac{32-24}{4}\right)\\&=P(1.5\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.4772-0.4332\\&=0.044\end{aligned}$$

답 0.044

02 확률변수 X가 이항분포 $B\left(192, \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$$E(X)=192\cdot\frac{3}{4}=144,\ V(X)=192\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=36$$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(144, 6^2)$을 따른다.

$Z_X=\frac{X-144}{6}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\le 150)=P(Z\le a)$에서

$$P\left(Z_X\le \frac{150-144}{6}\right)=P(Z\le a)$$

$$\therefore P(Z_X\le 1)=P(Z\le a)$$

$$\therefore a=1$$

답 ②

두 확률변수 Z_X, Z가 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $a=1$

03 홀수의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

한 개의 주사위를 던질 때 홀수의 눈이 나올 확률

$$E(X)=400\cdot\frac{1}{2}=200,$$

$$V(X)=400\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=100$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(200, 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-200}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&P(195\le X\le 220)\\&=P\left(\frac{195-200}{10}\le Z\le \frac{220-200}{10}\right)\\&=P(-0.5\le Z\le 2)\\&=P(-0.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 0.5)+P(0\le Z\le 2)\\&=0.19+0.48\\&=0.67\end{aligned}$$

답 ④

04 불량품의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B(10000, 0.1)$을 따르므로

$10\ \% \Rightarrow \frac{10}{100}=0.1$

$$E(X)=10000\times 0.1=1000,$$

$$V(X)=10000\times 0.1\times 0.9=900$$

이때 10000은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(1000, 30^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-1000}{30}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le 925)&=P\left(Z\le \frac{925-1000}{30}\right)\\&=P(Z\le -2.5)=P(Z\ge 2.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5-0.4938\\&=0.0062\end{aligned}$$

답 0.0062

05 꽃이 핀 꽃씨의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(150, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$$E(X)=150\cdot\frac{2}{5}=60,$$

$$V(X)=150\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=36$$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(60, 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-60}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\ge a)=0.98$에서

$$P\left(Z\ge \frac{a-60}{6}\right)=0.98$$

$$P\left(\frac{a-60}{6}\le Z\le 0\right)+P(Z\ge 0)=0.98$$

$$P\left(0\le Z\le \frac{60-a}{6}\right)+0.5=0.98$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{60-a}{6}\right)=0.48$$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.48$이므로

$$\frac{60-a}{6}=2,\qquad 60-a=12$$

$$\therefore a=48$$

답 ①

중단원 마무리

79쪽

01 전략 확률변수 X의 확률질량함수를 이용하여 확률을 구한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $B\left(5, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x}$$

$$(x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\begin{aligned}\therefore P(X\ge 4)&=P(X=4)+P(X=5)\\&={}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1+{}_5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0\\&=\frac{10}{243}+\frac{1}{243}=\frac{11}{243}\end{aligned}$$

답 $\frac{11}{243}$

02 전략 확률변수 X가 따르는 이항분포 $B(n, p)$를 구한 후 $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $B\left(75, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\sigma(X)=\sqrt{75\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

답 ④

03 전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다고 하고 주어진 평균과 분산을 이용하여 n, p의 값을 먼저 구한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다고 하면 $\mathrm{E}(X)=4$에서

$np=4$ ...... ㉠

$\mathrm{V}(X)=2$에서

$np(1-p)=2$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $4(1-p)=2$

$1-p=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore p=\frac{1}{2}$

$p=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}n=4$ $\quad\therefore n=8$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(8,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_8\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{8-x}$$
$$={}_8\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^8\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$$

$\therefore \mathrm{P}(X=2)={}_8\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{7}{64}$ 답 ④

04 전략 사건 A가 일어날 확률을 구하여 확률변수 X가 따르는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 구한 후 $\mathrm{E}(X)=np$임을 이용한다.

주어진 시행은 독립시행이므로 확률변수 X는 이항분포를 따른다.

풀이 주어진 $y=f(x)$의 그래프에서 $0<x<3$일 때 $f(x)>0$이므로 $f(m)>0$에서

$0<m<3$

즉 사건 A가 일어나려면 $m=1$ 또는 $m=2$이어야 하므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=15\cdot\frac{1}{3}=5$ 답 ⑤

05 전략 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$, $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$임을 이용한다. (단, a, b는 상수, $a\neq0$)

풀이 $\mathrm{E}(2X-3)=45$에서

$2\mathrm{E}(X)-3=45,\quad 2\mathrm{E}(X)=48$

$\therefore \mathrm{E}(X)=24$

한편 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(72,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=72p$

즉 $72p=24$이므로

$p=\frac{1}{3}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=72\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=16$

$\therefore \mathrm{V}(2X-3)=2^2\mathrm{V}(X)=4\cdot16=64$ 답 64

Q BOX

06 전략 확률변수 X가 따르는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 구한 후 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$임을 이용하여 n에 대한 방정식을 세운다.

4 이하의 눈이 나오는 경우는 1, 2, 3, 4의 4가지이므로 그 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

풀이 한 개의 주사위를 던질 때, 4 이하의 눈이 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=\frac{2}{3}n,\ \mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}n$ ··· ❶

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\frac{2}{9}n=148-\left(\frac{2}{3}n\right)^2,\quad 2n^2+n-666=0$

$(2n+37)(n-18)=0$

$\therefore n=18$ ($\because$ n은 자연수) ··· ❷

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{18\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}=2$이므로

$$\sigma(nX-1)=\sigma(18X-1)$$
$$=|18|\sigma(X)$$
$$=18\cdot2=36$$ ··· ❸

답 36

단계	채점 기준	비율
❶	$\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷	n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$\sigma(nX-1)$을 구할 수 있다.	30 %

07 전략 정규분포곡선은 직선 $x=$(평균)에 대하여 대칭이고, 표준편차가 작을수록 가운데 부분의 높이가 높아지고 평균을 중심으로 모인 모양이 된다.

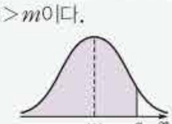
풀이 ④ B 반의 정규분포곡선이 A 반의 정규분포곡선보다 가운데 부분의 높이가 더 높고 평균을 중심으로 더 모여 있으므로 B 반 학생들이 A 반 학생들보다 국어 성적이 더 고르다.

분산, 표준편차가 작을수록 변량들이 평균을 중심으로 가까이 모여 있으므로 자료가 더 고르다.

답 ④

08 전략 확률변수 X가 정규분포를 따르고 $\mathrm{P}(X\le a)$가 0.5보다 크므로 $a>m$임을 이용하여 식을 변형한다.

$\mathrm{P}(X\le a)=0.9772$
>0.5
이므로 다음 그림과 같이 $a>m$이다.



풀이 $\mathrm{P}(X\le a)=0.9772$에서

$\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le a)=0.9772$

$0.5+\mathrm{P}(m\le X\le a)=0.9772$

$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le a)=0.4772$

이때

$$\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le a)$$
$$=0.5-0.4772$$
$$=0.0228$$

이고 $\mathrm{P}(X\ge m+2\sigma)=0.0228$이므로

$a=m+2\sigma=40+2\cdot7=54$ 답 ②

다른 풀이 $m=40$, $\sigma=7$이므로

$\mathrm{P}(X\ge m+2\sigma)=0.0228$에서

$\mathrm{P}(X\ge 40+2\cdot7)=0.0228$

$\therefore \mathrm{P}(X\ge54)=0.0228$

이때 $\mathrm{P}(X \le a)=0.9772$이므로

$\mathrm{P}(X \ge a)=1-0.9772=0.0228$

$\therefore a=54$

09 **전략** 주어진 확률에서 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$를 구하고 이를 이용할 수 있도록 구하는 확률의 식을 변형한다.

풀이 $\mathrm{P}(Z \le 1.5)=0.9332$에서

$\mathrm{P}(Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)=0.9332$

$0.5+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)=0.9332$

$\therefore \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)=0.4332$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|Z| \ge 1.5)&=\mathrm{P}(Z \le -1.5)+\mathrm{P}(Z \ge 1.5)\\&=2\mathrm{P}(Z \ge 1.5)\\&=2\{\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)\}\\&=2(0.5-0.4332)\\&=0.1336\end{aligned}$$

답 0.1336

10 **전략** 두 확률변수 X, Y를 각각 표준화한 후 주어진 조건을 만족시키는 k의 값을 구한다.

풀이 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(22,\ 3^2)$, $\mathrm{N}(38,\ 12^2)$을 따르므로

$Z_X=\dfrac{X-22}{3}$, $Z_Y=\dfrac{Y-38}{12}$

로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X \ge 26)=\mathrm{P}(Y \le k)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X \ge \dfrac{26-22}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y \le \dfrac{k-38}{12}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z_X \ge \dfrac{4}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y \le \dfrac{k-38}{12}\right)$

$\therefore \mathrm{P}\left(Z_X \ge \dfrac{4}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y \ge \dfrac{38-k}{12}\right)$

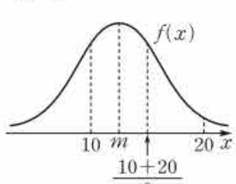
따라서 $\dfrac{4}{3}=\dfrac{38-k}{12}$이므로

$38-k=16 \qquad \therefore k=22$

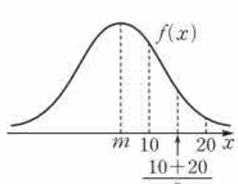
답 22

11 **전략** 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 확률밀도함수 $f(x)$의 값이 클수록 x가 m에 가까워짐을 이용하여 m의 값을 구한다.

풀이 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $f(x)$의 값이 클수록 x가 평균 m에 가까워지므로 조건 (가)를 만족시키려면 다음 그림과 같아야 한다.



[$10<m<20$인 경우]

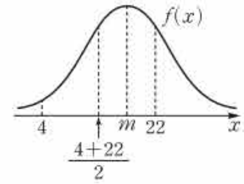


[$m<10$인 경우]

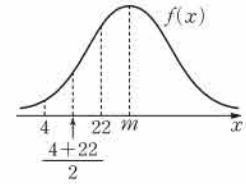
위의 두 경우 모두 $m<\dfrac{10+20}{2}$이므로

$m<15$ …… ㉠

또 조건 (나)를 만족시키려면 다음 그림과 같아야 한다.



[$4<m<22$인 경우]



[$m>22$인 경우]

위의 두 경우 모두 $m>\dfrac{4+22}{2}$이므로

$m>13$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $13<m<15$

이때 m은 자연수이므로 $m=14$

즉 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(14,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-14}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(17 \le X \le 18)\\&=\mathrm{P}\left(\dfrac{17-14}{5} \le Z \le \dfrac{18-14}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(0.6 \le Z \le 0.8)\\&=\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.8)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.6)\\&=0.288-0.226=0.062\end{aligned}$$

따라서 $a=0.062$이므로

$1000a=62$

답 62

12 **전략** 두 확률변수 X, Y를 각각 표준화한 후 m, σ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 3^2)$, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-8}{3}$, $Z_Y=\dfrac{Y-m}{\sigma}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(4 \le X \le 8)+\mathrm{P}(Y \ge 8)=\dfrac{1}{2}$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{4-8}{3} \le Z_X \le \dfrac{8-8}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z_Y \ge \dfrac{8-m}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{4}{3} \le Z_X \le 0\right)+\mathrm{P}\left(Z_Y \ge \dfrac{8-m}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z_X \le \dfrac{4}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z_Y \ge \dfrac{8-m}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}$

> **Q BOX** 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $\mathrm{P}(Z \ge 0)=\dfrac{1}{2}$이므로 주어진 등식이 성립하려면 $\dfrac{4}{3}=\dfrac{8-m}{\sigma}$이어야 한다.

따라서 $\dfrac{4}{3}=\dfrac{8-m}{\sigma}$이므로 $\dfrac{4\sigma}{3}=8-m$

$\therefore m=8-\dfrac{4\sigma}{3}$ …… ㉠

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}\left(Y \le 8+\dfrac{2\sigma}{3}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_Y \le \dfrac{8+\dfrac{2\sigma}{3}-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_Y \le \dfrac{8+\dfrac{2\sigma}{3}-\left(8-\dfrac{4\sigma}{3}\right)}{\sigma}\right)\ (\because ㉠)\\&=\mathrm{P}\left(Z_Y \le \dfrac{2\sigma}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z_Y \le 2)\\&=\mathrm{P}(Z_Y \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z_Y \le 2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

답 ④

쌤 한마디

두 확률변수 X, Y의 평균 또는 표준편차가 다르면 X, Y의 확률을 바로 비교할 수 없으므로 X, Y를 각각 표준화하여 비교해야 한다.
이때 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$$P(0\le Z\le a)+P(Z\ge b)=\frac{1}{2}$$

을 만족시키면 $P(Z\ge 0)=\frac{1}{2}$이므로

$$a=b$$

가 성립한다. 마찬가지로

$$P(a\le Z\le 0)+P(Z\le b)=\frac{1}{2}$$

을 만족시키면 $P(Z\le 0)=\frac{1}{2}$이므로

$$a=b$$

가 성립한다.

13 전략 하루 동안 추출하는 호르몬의 양을 확률변수 X라 하고 X를 표준화하여 확률을 구한다.

풀이 하루 동안 추출하는 호르몬의 양을 X mg이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(30.2,\ 0.6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-30.2}{0.6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&P(29.6\le X\le 31.4)\\&=P\left(\frac{29.6-30.2}{0.6}\le Z\le\frac{31.4-30.2}{0.6}\right)\\&=P(-1\le Z\le 2)\\&=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 ⑤

하루 동안 추출한 호르몬의 양이 29.6 mg 이상이고 31.4 mg 이하일 확률

14 전략 먼저 전구의 수명이 206시간 이상일 확률을 구한다.

풀이 전구의 수명을 X시간이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(182,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-182}{12}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X\ge 206)&=P\left(Z\ge\frac{206-182}{12}\right)\\&=P(Z\ge 2)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

전구의 수명이 206시간 이상일 확률

따라서 수명이 206시간 이상인 전구의 개수는

$$0.02\times 1000=20$$

답 20

15 전략 무게가 상위 20 %에 속하는 포도 한 송이의 최저 무게를 a g이라 하고, 포도 한 송이의 무게가 a g 이상일 확률이 0.2임을 이용한다.

풀이 포도 한 송이의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(520,\ 20^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-520}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
상위 20 %에 속하는 포도 한 송이의 최저 무게를 a g이라 하면

$$\begin{aligned}&P(X\ge a)=0.2\\&P\left(Z\ge\frac{a-520}{20}\right)=0.2\\&P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{a-520}{20}\right)=0.2\\&0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-520}{20}\right)=0.2\\&\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-520}{20}\right)=0.3\end{aligned}$$

20 % ➡ $\frac{20}{100}=0.2$

이때 $P(0\le Z\le 0.85)=0.3$이므로

$$\frac{a-520}{20}=0.85,\qquad a-520=17$$

$$\therefore a=537$$

따라서 포도 특상품 한 송이의 최저 무게는 537 g이다.

답 537 g

16 전략 두 과수원 A, B에서 생산하는 귤의 무게를 각각 확률변수 X_A, X_B라 하고 두 확률변수를 각각 표준화하여 확률을 비교한다.

풀이 두 과수원 A, B에서 생산하는 귤의 무게를 각각 X_A, X_B라 하면 두 확률변수 X_A, X_B는 각각 정규분포 $N(86,\ 15^2)$, $N(88,\ 10^2)$을 따르므로

$$Z_A=\frac{X_A-86}{15},\ Z_B=\frac{X_B-88}{10}$$

로 놓으면 두 확률변수 Z_A, Z_B는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
이때 $P(X_A\le 98)=P(X_B\le a)$이므로

$$\begin{aligned}&P\left(Z_A\le\frac{98-86}{15}\right)=P\left(Z_B\le\frac{a-88}{10}\right)\\&\therefore P\left(Z_A\le\frac{4}{5}\right)=P\left(Z_B\le\frac{a-88}{10}\right)\end{aligned}$$

A 과수원에서 임의로 선택한 귤의 무게가 98 이하일 확률은
$P(X_A\le 98)$
B 과수원에서 임의로 선택한 귤의 무게가 a 이하일 확률은
$P(X_B\le a)$

따라서 $\frac{4}{5}=\frac{a-88}{10}$이므로

$$8=a-88\qquad\therefore a=96$$

답 96

17 전략 주어진 분산을 이용하여 n의 값을 구한 후 확률변수 X가 근사적으로 따르는 정규분포를 구한다.

풀이 $V(X)=16$에서

$$n\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16\qquad\therefore n=100$$

즉 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$E(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(20,\ 4^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}\left(X \geq \frac{4}{25}n\right) = \mathrm{P}(X \geq 16)$$
$$= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{16-20}{4}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \geq -1)$$
$$= \mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 0) + \mathrm{P}(Z \geq 0)$$
$$= \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1) + \mathrm{P}(Z \geq 0)$$
$$= 0.34 + 0.5 = 0.84$$

답 ③

18 전략 먼저 합격할 확률, 즉 점수가 78점 이상일 확률을 구한다.

풀이 응시자의 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(62,\ 8^2)$을 따르므로 $Z_X = \frac{X-62}{8}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore \mathrm{P}(X \geq 78) = \mathrm{P}\left(Z_X \geq \frac{78-62}{8}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z_X \geq 2)$$
$$= \mathrm{P}(Z_X \geq 0) - \mathrm{P}(0 \leq Z_X \leq 2)$$
$$= 0.5 - 0.48$$
$$= 0.02 \quad \cdots❶$$

625명 중 합격자 수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(625,\ \frac{1}{50}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(Y) = 625 \cdot \frac{1}{50} = \frac{25}{2},$$
$$\mathrm{V}(Y) = 625 \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{49}{50} = \frac{49}{4}$$

이때 625는 충분히 큰 수이므로 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{25}{2},\ \left(\frac{7}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z = \dfrac{Y - \frac{25}{2}}{\frac{7}{2}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 ⋯❷

$$\mathrm{P}(Y \geq 16) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{16 - \frac{25}{2}}{\frac{7}{2}}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \geq 1)$$
$$= \mathrm{P}(Z \geq 0) - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$$
$$= 0.5 - 0.34$$
$$= 0.16 \quad \cdots❸$$

답 0.16

단계	채점 기준	비율
❶	합격할 확률을 구할 수 있다.	30%
❷	합격자 수를 확률변수로 놓고 표준화할 수 있다.	40%
❸	합격자가 16명 이상일 확률을 구할 수 있다.	30%

Q BOX

임의로 택한 한 명이 합격할 확률은
$0.02 = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$

크기가 n인 표본의 표본분산을 구할 때 $n-1$로 나누어야 함에 주의한다.

07 통계적 추정

14 모집단과 표본

Lecture 25 모집단과 표본

L 82쪽

1-1 답 (1) 전수조사 (2) 표본조사
(3) 표본조사 (4) 전수조사

Q 쌤 한마디

전수조사	표본조사
• 조사 대상 전체를 조사한다. • 자료의 특성을 정확히 알 수 있다. • 많은 시간과 비용이 필요하다. • 인구 주택 총조사, 대학 수학 능력 시험 결과 분석 등에 적합하다.	• 조사 대상 중 일부분을 뽑아 조사한다. • 자료의 특성을 근사적으로 알 수 있다. • 시간과 비용을 절약할 수 있다. • 생산 제품 품질 검사 등에 적합하다.

2-1 (1) 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$
(2) 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로
$${}_4\mathrm{P}_2 = 12$$
답 (1) 16 (2) 12

3-1 (1) $m = 1 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5} + 7 \cdot \frac{1}{5} + 9 \cdot \frac{1}{5} = 5$

$$\sigma^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{5} + 3^2 \cdot \frac{1}{5} + 5^2 \cdot \frac{1}{5} + 7^2 \cdot \frac{1}{5} + 9^2 \cdot \frac{1}{5} - 5^2$$
$$= 33 - 25 = 8$$
$$\therefore \sigma = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(2) $\overline{X} = \frac{1}{2}(1+7) = 4$

$$S^2 = \frac{1}{2-1}\{(1-4)^2 + (7-4)^2\} = 18$$
$$\therefore S = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

답 (1) $m=5$, $\sigma = 2\sqrt{2}$ (2) $\overline{X} = 4$, $S = 3\sqrt{2}$

Lecture 26 표본평균의 분포

L 83쪽

1-1 (1) 표본이 (2, 2)일 때, $\overline{X} = \frac{2+2}{2} = 2$

표본이 (2, 4), (4, 2)일 때, $\overline{X} = \frac{2+4}{2} = 3$

표본이 (2, 6), (4, 4), (6, 2)일 때,

$\overline{X}=\frac{2+6}{2}=\frac{4+4}{2}=4$

표본이 (4, 6), (6, 4)일 때, $\overline{X}=\frac{4+6}{2}=5$

표본이 (6, 6)일 때, $\overline{X}=\frac{6+6}{2}=6$

따라서 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은

2, 3, 4, 5, 6

(2)

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(3) $E(\overline{X})=2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{2}{9}+4\cdot\frac{1}{3}+5\cdot\frac{2}{9}+6\cdot\frac{1}{9}=4$

$V(\overline{X})=2^2\cdot\frac{1}{9}+3^2\cdot\frac{2}{9}+4^2\cdot\frac{1}{3}+5^2\cdot\frac{2}{9}+6^2\cdot\frac{1}{9}-4^2$

$=\frac{52}{3}-16=\frac{4}{3}$

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 풀이 참조

1-2 $m=70$, $\sigma=2$, $n=25$이므로

$E(\overline{X})=70$, $V(\overline{X})=\frac{2^2}{25}=\frac{4}{25}$,

$\sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}$

답 $E(\overline{X})=70$, $V(\overline{X})=\frac{4}{25}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{2}{5}$

2-1 (1) $m=150$, $\sigma=20$, $n=100$이므로

$E(\overline{X})=150$, $V(\overline{X})=\frac{20^2}{100}=4$

(2) $N(150, 2^2)$

(3) $Z=\frac{\overline{X}-150}{2}$

(4) 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\ge 146)=P\left(Z\ge\frac{146-150}{2}\right)$

$=P(Z\ge -2)$

$=P(-2\le Z\le 0)+P(Z\ge 0)$

$=P(0\le Z\le 2)+P(Z\ge 0)$

$=0.4772+0.5=0.9772$

답 풀이 참조

2-2 $E(\overline{X})=220$, $V(\overline{X})=\frac{18^2}{36}=9$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(220, 3^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-220}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(223\le\overline{X}\le 226)$

$=P\left(\frac{223-220}{3}\le Z\le\frac{226-220}{3}\right)$

$=P(1\le Z\le 2)$

$=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1)$

$=0.4772-0.3413=0.1359$

답 0.1359

Q BOX

표본평균 $\overline{X}$는 추출된 표본에 따라 여러 가지 값을 가질 수 있는 확률변수이다.

모집단의 확률변수 X의 확률분포가 주어졌으므로 모평균 $E(X)$, 모표준편차 $\sigma(X)$를 구한다.

모집단이 정규분포를 따르므로 표본평균도 정규분포를 따른다.

표본평균 $\overline{X}$의 확률분포는 구하기 복잡하므로 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 이용한다.

$P(X=1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

기본+표준 유형 Q+Q

84쪽

01 $E(\overline{X})=8$, $V(\overline{X})=\frac{12^2}{16}=9$ 답 ⑤

02 $E(\overline{X})=21$, $\sigma(\overline{X})=\frac{6}{\sqrt{n}}$이므로

$E(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=23$에서

$21+\frac{6}{\sqrt{n}}=23$, $\frac{6}{\sqrt{n}}=2$

$\sqrt{n}=3$ $\therefore n=9$ 답 9

03 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+a+\frac{1}{12}=1$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

$E(X)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{7}{6}$

$V(X)=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{12}-\left(\frac{7}{6}\right)^2$

$=\frac{7}{3}-\frac{49}{36}=\frac{35}{36}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{36}}=\frac{\sqrt{35}}{6}$

이때 표본의 크기가 35이므로

$E(\overline{X})=\frac{7}{6}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\frac{\sqrt{35}}{6}}{\sqrt{35}}=\frac{1}{6}$

답 $E(\overline{X})=\frac{7}{6}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{1}{6}$

04 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

$E(X)=2\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{3}{10}+5\cdot\frac{2}{5}=4$

$V(X)=2^2\cdot\frac{1}{10}+3^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{3}{10}+5^2\cdot\frac{2}{5}-4^2$

$=17-16=1$

$\sigma(X)=\sqrt{1}=1$

이때 표본의 크기가 4이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

$\therefore \sigma(-8\overline{X})=|-8|\sigma(\overline{X})=8\cdot\frac{1}{2}=4$ 답 4

05 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 수를 X라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$

$V(X)=1^2\cdot\frac{2}{3}+2^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$=4-\frac{25}{9}=\frac{11}{9}$

이때 표본의 크기가 2이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{5}{3},\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{11}{9}}{2}=\frac{11}{18}$$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$$\frac{11}{18}=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\therefore \mathrm{E}(\overline{X}^2)=\frac{61}{18}$$

답 $\frac{61}{18}$

06 주머니에서 임의로 1개의 동전을 꺼낼 때, 동전의 금액을 X원이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	100	500	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{n+3}$	$\frac{n}{n+3}$	1

$$\mathrm{E}(X)=100\cdot\frac{3}{n+3}+500\cdot\frac{n}{n+3}=\frac{500n+300}{n+3}$$

이때 $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=260$이므로

$$\frac{500n+300}{n+3}=260$$

$500n+300=260n+780$

$240n=480 \qquad \therefore n=2$

$$\therefore \mathrm{V}(X)=100^2\cdot\frac{3}{5}+500^2\cdot\frac{2}{5}-260^2$$
$$=106000-67600=38400$$

이때 표본의 크기가 3이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{38400}{3}=12800$$

답 ④

07 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(75,\ \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(75,\ \frac{\sigma^2}{25}\right)$을 따른다.

따라서 $75=a,\ \frac{\sigma^2}{25}=9$이므로

$a=75,\ \sigma=15\ (\because \sigma>0)$

$\therefore a+\sigma=90$

답 ⑤

08 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(320,\ \frac{6^2}{n}\right)$을 따른다.

따라서 $\frac{6^2}{n}=2^2$이므로

$n=9$

답 9

09 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 18^2)$을 따르고 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(200,\ \frac{18^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(200,\ 3^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-200}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

Q BOX

$\frac{\sigma^2}{25}=9$에서 $\sigma^2=225$

$\therefore \sigma=15\ (\because \sigma>0)$

임의추출한 36명의 제자리멀리뛰기 기록의 평균은 표본평균 $\overline{X}$이다.

두 확률변수 Z_1, Z_2가 모두 표준정규분포를 따르므로

$\frac{1}{2}=\frac{a-24}{2}$

$$\mathrm{P}(197\le\overline{X}\le206)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{197-200}{3}\le Z\le\frac{206-200}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le2)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$$
$$=0.3413+0.4772=0.8185$$

답 0.8185

10 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ 8^2)$을 따르므로 $Z_1=\frac{X-24}{8}$로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

또 표본평균 $\overline{X}$가 정규분포 $\mathrm{N}\left(24,\ \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(24,\ 2^2)$을 따르므로 $Z_2=\frac{\overline{X}-24}{2}$로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X<28)=\mathrm{P}(\overline{X}<a)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_1<\frac{28-24}{8}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2<\frac{a-24}{2}\right)$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(Z_1<\frac{1}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2<\frac{a-24}{2}\right)$$

따라서 $\frac{1}{2}=\frac{a-24}{2}$이므로

$a-24=1 \qquad \therefore a=25$

답 ①

11 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(150,\ \frac{12^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-150}{\frac{12}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le144)=0.0668$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{144-150}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)=0.0668$$

$$\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668$$

$$\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.4332$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=1.5, \qquad \sqrt{n}=3$

$\therefore n=9$

답 9

12 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(135,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(135,\ \frac{6^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-135}{\frac{6}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(129\le\overline{X}\le141)=0.9544$에서

$$P\left(\frac{129-135}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{141-135}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right)=0.9544$$

$$P(-\sqrt{n}\le Z\le\sqrt{n})=0.9544$$

$$2P(0\le Z\le\sqrt{n})=0.9544$$

$$\therefore\ P(0\le Z\le\sqrt{n})=0.4772$$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\sqrt{n}=2\qquad\therefore\ n=4$ 답 ①

Q BOX

$P(-\sqrt{n}\le Z\le\sqrt{n})$
$=P(-\sqrt{n}\le Z\le0)+P(0\le Z\le\sqrt{n})$
$=2P(0\le Z\le\sqrt{n})$

15 모평균의 추정

Lecture 27 모평균의 추정 L 86쪽

1-1 (1) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$18-1.96\times\frac{15}{\sqrt{9}}\le m\le18+1.96\times\frac{15}{\sqrt{9}}$$

$$18-9.8\le m\le18+9.8$$

$$\therefore\ 8.2\le m\le27.8$$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$30-1.96\times\frac{15}{\sqrt{25}}\le m\le30+1.96\times\frac{15}{\sqrt{25}}$$

$$30-5.88\le m\le30+5.88$$

$$\therefore\ 24.12\le m\le35.88$$

답 (1) $8.2\le m\le27.8$ (2) $24.12\le m\le35.88$

1-2 (1) 표본의 크기 144는 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 6을 이용할 수 있다.
따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$35-1.96\times\frac{6}{\sqrt{144}}\le m\le35+1.96\times\frac{6}{\sqrt{144}}$$

$$35-0.98\le m\le35+0.98$$

$$\therefore\ 34.02\le m\le35.98$$

(2) 표본의 크기 144는 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 6을 이용할 수 있다.
따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$35-2.58\times\frac{6}{\sqrt{144}}\le m\le35+2.58\times\frac{6}{\sqrt{144}}$$

$$35-1.29\le m\le35+1.29$$

$$\therefore\ 33.71\le m\le36.29$$

답 (1) $34.02\le m\le35.98$ (2) $33.71\le m\le36.29$

표본의 크기 n이 충분히 크면 표본표준편차 S의 값 s는 모표준편차 σ와 큰 차이가 없음이 알려져 있다.
따라서 모표준편차를 모르는 경우 σ 대신 s를 이용하여 모평균에 대한 신뢰구간을 구할 수 있다.

2-1 (1) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\times\frac{16}{\sqrt{64}}=7.84$$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\times\frac{16}{\sqrt{64}}=10.32$$

답 (1) 7.84 (2) 10.32

기본+표준 유형 Q+Q L 87쪽

01 표본평균이 60, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 16이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$60-1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}\le m\le60+1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}$$

$$60-0.98\le m\le60+0.98$$

$$\therefore\ 59.02\le m\le60.98$$

답 $59.02\le m\le60.98$

02 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 8, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{8}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{8}{\sqrt{36}}$$

$$\therefore\ \overline{x}-3.44\le m\le\overline{x}+3.44$$

즉 $a=\overline{x}-3.44,\ b=\overline{x}+3.44$이므로 $a+b=260$에서

$$(\overline{x}-3.44)+(\overline{x}+3.44)=260$$

$$2\overline{x}=260\qquad\therefore\ \overline{x}=130$$

$$\therefore\ b=130+3.44=133.44$$

답 133.44

03 표본평균이 25이고, 표본의 크기 144는 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 12를 이용할 수 있다.
따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$25-2.58\times\frac{12}{\sqrt{144}}\le m\le25+2.58\times\frac{12}{\sqrt{144}}$$

$$25-2.58\le m\le25+2.58$$

$$\therefore\ 22.42\le m\le27.58$$

답 $22.42\le m\le27.58$

04 표본평균이 124이고, 표본의 크기 64는 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 24를 이용할 수 있다.
따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$124-2\cdot\frac{24}{\sqrt{64}}\le m\le124+2\cdot\frac{24}{\sqrt{64}}$$

$$124-6\le m\le124+6$$

$$\therefore\ 118\le m\le130$$

따라서 $\alpha=118,\ \beta=130$이므로

$$2\alpha-\beta=236-130=106$$

답 ③

문제에서 $P(|Z|\le2)=0.95$가 주어졌으므로 2를 곱한다.

05 표본평균이 45, 모표준편차가 6, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$45-2.58\times\frac{6}{\sqrt{n}}\le m\le45+2.58\times\frac{6}{\sqrt{n}}$$

이 부등식이 $43.28 \le m \le 46.72$와 같으므로

$45-2.58\times\frac{6}{\sqrt{n}}=43.28$,

$45+2.58\times\frac{6}{\sqrt{n}}=46.72$

따라서 $2.58\times\frac{6}{\sqrt{n}}=1.72$이므로

$\sqrt{n}=9$ $\quad\therefore n=81$ 답 81

06 표본평균이 210, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$210-1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le m\le 210+1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}$$

이 부등식이 $208.6\le m\le a$와 같으므로

$210-1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}=208.6$에서

$1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}=1.4,\quad \sqrt{n}=14$

$\therefore n=196$

따라서 $a=210+1.96\times\frac{10}{\sqrt{196}}=211.4$이므로

$n+a=407.4$ 답 ④

07 모표준편차가 20, 표본의 크기가 256이므로 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{20}{\sqrt{256}}=4.9$ 답 4.9

08 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이 l은

$$l=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=2\times2.58\times\frac{\sigma}{10}$$

모표준편차가 σ, 표본의 크기가 4이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{4}}=2\times2.58\times\frac{\sigma}{2}=5l$ 답 ④

09 모표준편차가 3, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이가 3 이하이려면

$2\cdot3\cdot\frac{3}{\sqrt{n}}\le3,\quad \sqrt{n}\ge6$

$\therefore n\ge36$

따라서 n의 최솟값은 36이다. 답 ②

10 모표준편차가 9, 표본의 크기가 n이므로 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 2.94이려면

$2\times1.96\times\frac{9}{\sqrt{n}}=2.94,\quad \sqrt{n}=12$

$\therefore n=144$ 답 144

11 모표준편차가 4, 표본의 크기가 25이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$2\cdot k\cdot\frac{4}{\sqrt{25}}=2.64$ $\quad\therefore k=1.65$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le1.65)=0.9$이므로

$\frac{\alpha}{100}=0.9$ $\quad\therefore \alpha=90$ 답 ①

12 모표준편차가 12, 표본의 크기가 400이고 $\mathrm{P}(|Z|\le1)=0.68$이므로 모평균에 대한 신뢰도 68 %의 신뢰구간의 길이 l은

$$l=2\cdot1\cdot\frac{12}{\sqrt{400}}=1.2$$

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이가 $2l=2\times1.2=2.4$이므로

$2\cdot k\cdot\frac{12}{\sqrt{400}}=2.4$ $\quad\therefore k=2$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le2)=0.96$이므로

$\frac{\alpha}{100}=0.96$ $\quad\therefore \alpha=96$ 답 96

13 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 27, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2\cdot\frac{27}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2\cdot\frac{27}{\sqrt{n}}$

$-\frac{54}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{54}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\overline{x}|\le\frac{54}{\sqrt{n}}$

이때 $|m-\overline{x}|\le3$이려면

$\frac{54}{\sqrt{n}}\le3,\quad \sqrt{n}\ge18$

$\therefore n\ge324$

따라서 n의 최솟값은 324이다. 답 ⑤

14 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 18, 표본의 크기가 81이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-3\cdot\frac{18}{\sqrt{81}}\le m\le\overline{x}+3\cdot\frac{18}{\sqrt{81}}$

$-6\le m-\overline{x}\le6$

$\therefore |m-\overline{x}|\le6$

따라서 모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차의 최댓값은 6이다. 답 6

15 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 추정한 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$ …… ㉠

ㄱ. ㉠에서 n의 값이 같을 때, k의 값이 커지면 ㉠의 값도 커지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다.

ㄴ. ㉠에 n 대신 $4n$을 대입하면 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}=\frac{1}{2}\cdot2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서 신뢰도가 같을 때, 표본의 크기를 4배 하면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{2}$배가 된다.

Q BOX

$2.58\times\frac{6}{\sqrt{n}}=45-43.28$
$=46.72-45$
$=1.72$

$\mathrm{P}(|Z|\le1.65)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le1.65)$
$=2\times0.450=0.9$

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때의 모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차
➡ $|m-\overline{x}|\le k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$에서 α의 값이 커지면 k의 값도 커진다.

07 통계적 추정

ㄷ. ㉠에서 k의 값이 커지고 n의 값이 작아지면 ㉠의 값은 커지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

쌤 한마디

표본의 크기가 같을 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이는 길어진다.
또 신뢰도가 같을 때, 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

16 처음 표본의 크기를 n, $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 표본의 크기가 a배, 즉 an일 때 신뢰구간의 길이는 5배가 되므로

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{an}}=5\cdot2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \sqrt{a}=\frac{1}{5}$$

$$\therefore a=\frac{1}{25}$$ 답 ①

중단원 마무리

90쪽

01 전략 모평균이 m, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이면 $E(\overline{X})=m$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 $E(\overline{X})=24$이므로

$$\frac{n}{6}=24 \qquad \therefore n=144$$

즉 $\sigma(\overline{X})=\frac{a}{\sqrt{144}}=\frac{a}{12}$이므로

$$1=\frac{a}{12} \qquad \therefore a=12$$ 답 ③

02 전략 먼저 확률변수 X가 이항분포를 따름을 이용하여 $E(X)$, $V(X)$를 구한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $B\left(80, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$E(X)=80\cdot\frac{1}{4}=20,$$

$$V(X)=80\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=15$$ ··· ❶

이때 표본의 크기가 3이므로

$$E(\overline{X})=20,\ V(\overline{X})=\frac{15}{3}=5$$ ··· ❷

$V(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-\{E(\overline{X})\}^2$에서

$$5=E(\overline{X}^2)-20^2$$

$$\therefore E(\overline{X}^2)=405$$ ··· ❸

답 405

단계	채점 기준	비율
❶	$E(X)$, $V(X)$를 구할 수 있다.	40 %
❷	$E(\overline{X})$, $V(\overline{X})$를 구할 수 있다.	30 %
❸	$E(\overline{X}^2)$을 구할 수 있다.	30 %

03 전략 먼저 확률의 성질과 주어진 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한 후 $V(X)$를 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{6}+a+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{5}{6} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$E(X^2)=\frac{16}{3}$에서

$$0^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot a+4^2\cdot b=\frac{16}{3}, \qquad 4a+16b=\frac{16}{3}$$

$$\therefore a+4b=\frac{4}{3} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{2}{3},\ b=\frac{1}{6}$$

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{3}+4\cdot\frac{1}{6}=2$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{16}{3}-2^2=\frac{4}{3}$$

이때 표본의 크기가 20이므로

$$V(\overline{X})=\frac{\frac{4}{3}}{20}=\frac{1}{15}$$ 답 ④

04 전략 먼저 주어진 모집단의 확률분포를 표로 나타내어 $\sigma(X)$를 구한다.

풀이 임의로 1개의 택배 상자를 택할 때, 택한 상자의 무게를 X kg이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

택배 상자의 총개수는
$20+30+10=60$
이므로
$P(X=2)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$,
$P(X=4)=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$,
$P(X=8)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{2}+8\cdot\frac{1}{6}=4$$

$$V(X)=2^2\cdot\frac{1}{3}+4^2\cdot\frac{1}{2}+8^2\cdot\frac{1}{6}-4^2$$
$$=20-16=4$$

$\sigma(X)=\sqrt{4}=2$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$\sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{4}}=1$$ 답 ⑤

05 전략 모집단이 정규분포를 따르지 않아도 표본의 크기가 충분히 크면 표본평균은 근사적으로 정규분포를 따름을 이용한다.

풀이 표본의 크기 140은 충분히 크므로 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $N\left(m, \frac{7^2}{140}\right)$, 즉 $N\left(m, \frac{7}{20}\right)$을 따른다.

따라서 $m=80$, $k=\frac{7}{20}$이므로

$$mk=28$$ 답 28

06 전략 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의 추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따름을 이용한다.

풀이 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(10,\ \frac{2^2}{n}\right)$을 따르므로

$Z=\dfrac{\overline{X}-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

ㄱ. $V(\overline{X})=\frac{2^2}{n}=\frac{4}{n}$

ㄴ. $P(\overline{X}\le 10-a)=P\left(Z\le \dfrac{10-a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$

$=P\left(Z\le -\frac{a\sqrt{n}}{2}\right)$

$P(\overline{X}\ge 10+a)=P\left(Z\ge \dfrac{10+a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$

$=P\left(Z\ge \frac{a\sqrt{n}}{2}\right)$

이때 $P\left(Z\le -\frac{a\sqrt{n}}{2}\right)=P\left(Z\ge \frac{a\sqrt{n}}{2}\right)$이므로

$P(\overline{X}\le 10-a)=P(\overline{X}\ge 10+a)$

ㄷ. $P(\overline{X}\ge a)=P\left(Z\ge \dfrac{a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=P(Z\le b)$이므로

$P(Z\le b)=P(Z\ge -b)$

$\dfrac{a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}=-b,\qquad a-10=-\frac{2}{\sqrt{n}}b$

$\therefore\ a+\frac{2}{\sqrt{n}}b=10$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

07 전략 표본평균이 따르는 정규분포를 구하고, 표준화하여 확률을 구한다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(201.5,\ 1.8^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(201.5,\ \frac{1.8^2}{9}\right)$, 즉 $N(201.5,\ 0.6^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-201.5}{0.6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(\overline{X}\ge 200)=P\left(Z\ge \frac{200-201.5}{0.6}\right)$

$=P(Z\ge -2.5)$

$=P(-2.5\le Z\le 0)+P(Z\ge 0)$

$=P(0\le Z\le 2.5)+P(Z\ge 0)$

$=0.4938+0.5$

$=0.9938$ 답 ⑤

08 전략 표본평균이 따르는 정규분포를 구하고, 표준화하여 주어진 부등식을 변형한다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(8,\ 1.2^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(8,\ \frac{1.2^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(7.76\le \overline{X}\le 8.24)\ge 0.6826$에서

$P\left(\dfrac{7.76-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\le Z\le \dfrac{8.24-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\right)\ge 0.6826$

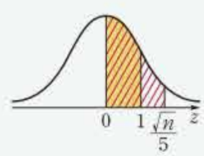
$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.6826$

$2P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.6826$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.3413$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge P(0\le Z\le 1)$



즉 $\frac{\sqrt{n}}{5}\ge 1$이므로 $\qquad \sqrt{n}\ge 5$

$\therefore\ n\ge 25$

따라서 n의 최솟값은 25이다. 답 25

09 전략 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이고 $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은 $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

풀이 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 40, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{40}{\sqrt{64}}\le m\le \overline{x}+2.58\times\frac{40}{\sqrt{64}}$

$\therefore\ \overline{x}-12.9\le m\le \overline{x}+12.9$

이 부등식이 $\overline{x}-c\le m\le \overline{x}+c$와 같으므로

$c=12.9$ 답 ④

10 전략 표본의 크기가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차를 이용할 수 있다.

풀이 표본평균이 200이고, 표본의 크기 100은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 30을 이용할 수 있다.

3시간 20분은
$3\cdot 60+20=200$
이므로 200분이다.

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$200-1.96\times\frac{30}{\sqrt{100}}\le m\le 200+1.96\times\frac{30}{\sqrt{100}}$

$200-5.88\le m\le 200+5.88$

$\therefore\ 194.12\le m\le 205.88$ 답 ⑤

11 전략 모평균 m에 대한 신뢰구간을 n을 사용하여 나타낸 후 주어진 부등식에 포함될 조건을 생각한다.

풀이 표본평균이 46, 모표준편차가 30, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$46-2\cdot\frac{30}{\sqrt{n}}\le m\le 46+2\cdot\frac{30}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ 46-\frac{60}{\sqrt{n}}\le m\le 46+\frac{60}{\sqrt{n}}$$

이 부등식이 $42\le m\le 50$에 포함되어야 하므로

$$46-\frac{60}{\sqrt{n}}\ge 42,\ 46+\frac{60}{\sqrt{n}}\le 50$$

즉 $\frac{60}{\sqrt{n}}\le 4$이므로 $\quad\sqrt{n}\ge 15$

$$\therefore\ n\ge 225$$

따라서 n의 최솟값은 225이다. 답 225

12 **전략** $P(|Z|\le k_1)=0.98$, $P(|Z|\le k_2)=0.76$을 만족시키는 k_1, k_2의 값을 이용하여 신뢰구간의 길이를 구한다.

풀이 $P(|Z|\le 2.4)=0.98$이므로 모표준편차를 σ라 하면 표본의 크기가 n일 때, 모평균에 대한 신뢰도 98 %의 신뢰구간의 길이 l은

$$l=2\times 2.4\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{4.8\sigma}{\sqrt{n}}$$

또 $P(|Z|\le 1.2)=0.76$이므로 모평균에 대한 신뢰도 76 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times 1.2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2.4\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}l$$

답 ③

$$\frac{2.4\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\times\frac{4.8\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}l$$

13 **전략** 신뢰구간이 $a\le m\le b$일 때, $b-a$는 신뢰구간의 길이임을 이용한다.

풀이 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}=0.49\sigma$$

이때 $b-a=4.9$, 즉 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 4.9이므로

$$0.49\sigma=4.9$$

$$\therefore\ \sigma=10$$

답 10

14 **전략** 신뢰구간의 길이를 n을 사용하여 나타낸 후 주어진 조건을 만족시키도록 부등식을 세운다.

풀이 모표준편차가 3, 표본의 크기가 n이므로 모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이가 6 이하이려면

$$2\cdot 3\cdot\frac{3}{\sqrt{n}}\le 6,\qquad \sqrt{n}\ge 3$$

$$\therefore\ n\ge 9$$

따라서 n의 최솟값은 9이다. 답 9

15 **전략** 모평균 m에 대한 신뢰구간이 $a\le m\le a+2.8$이므로 신뢰구간의 길이는 2.8임을 이용한다.

풀이 표본의 크기 81은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 9를 이용할 수 있다.

92쪽

$P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2k\cdot\frac{9}{\sqrt{81}}=2k \quad \cdots ❶$$

신뢰구간 $a\le m\le a+2.8$에서 신뢰구간의 길이는

$$(a+2.8)-a=2.8$$

이므로 $\quad 2k=2.8$

$$\therefore\ k=1.4 \quad \cdots ❷$$

이때 $P(|Z|\le 1.4)=0.84$이므로

$$\frac{\alpha}{100}=0.84\qquad\therefore\ \alpha=84 \quad \cdots ❸$$

답 84

단계	채점 기준	비율
❶	$P(\|Z\|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 신뢰구간의 길이를 k를 사용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷	k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	α의 값을 구할 수 있다.	30 %

16 **전략** 신뢰구간을 이용하여 모평균과 표본평균의 차에 대한 부등식을 세운다.

풀이 표본평균을 $\bar{x}$라 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}-3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\bar{x}\le\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ |m-\bar{x}|\le\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 모평균과 표본평균의 차의 최댓값은 $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

모표준편차의 $\frac{1}{3}$

$$\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{3}\sigma,\qquad\sqrt{n}=9$$

$$\therefore\ n=81$$

답 ①

Work Book

I. 순열과 조합

01 여러 가지 순열

01 원순열

W 2쪽

01 (1) $(6-1)!=5!=120$

(2) $(7-1)!=6!=720$

답 (1) 120 (2) 720

02 (1) 6명의 가수 중에서 5명을 택하는 경우의 수는

$_6C_5={}_6C_1=6$

택한 5명의 가수가 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$

(2) 7명의 대표 중에서 3명을 택하는 경우의 수는

$_7C_3=35$

택한 3명의 대표가 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

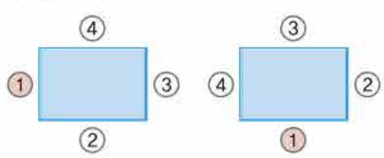
$35\cdot2=70$

답 (1) 144 (2) 70

03 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot2=12$

답 12

04 부모님을 제외한 5명 중에서 3명을 택하는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

택한 3명과 부모님이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot24=240$

답 ⑤

05 쿠키 n개를 원형으로 배열하는 경우의 수가 24이므로

$(n-1)!=24$

Q BOX

$n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$

$_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

$_nP_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)

2명이 이웃하지 않는 경우의 수는 다음과 같이 구할 수도 있다.
(모든 경우의 수)
−(2명이 이웃하는 경우의 수)

W 2~3쪽

이때 $24=4\cdot3\cdot2\cdot1=4!$이므로

$(n-1)!=4!,\quad n-1=4$

$\therefore n=5$

답 5

06 A, B, C 세 사람을 한 사람으로 생각하면 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!=720$

A와 C가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$720\cdot2=1440$

답 ③

07 두 쌍의 부부를 각각 한 사람으로 생각하면 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

두 쌍의 부부가 각각 부부끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot2!=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot4=480$

답 480

08 피아니스트를 제외한 나머지 연주자 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

나머지 연주자 사이사이의 4개의 자리에 피아니스트 2명이 앉는 경우의 수는

$_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot12=72$

답 ④

다른 풀이 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

피아니스트 2명을 한 사람으로 생각하면 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

피아니스트끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉 피아니스트끼리 이웃하게 앉는 경우의 수는

$24\cdot2=48$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-48=72$

09 모자 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

모자 사이사이의 4개의 자리에 안경 4개를 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$

답 144

참고 안경을 먼저 배열한 후 그 사이사이의 자리에 모자를 배열하는 경우의 수를 구해도 결과는 같다.

10 사회자의 자리가 결정되면 서기의 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 사회자와 서기가 마주 보고 앉는 경우의 수는 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같다.

서기를 제외한 5명

따라서 구하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$ 답 ③

11 서로 다른 6가지 색 중에서 4가지 색을 택하는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

서로 다른 4가지 색을 각 영역에 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot6=90$ 답 ②

12 가운데 영역을 칠하는 경우의 수는

가운데 영역에 칠할 색을 택하는 경우의 수

${}_5C_1=5$

나머지 4개의 영역을 서로 다른 4가지 색으로 칠하는 경우의 수는

가운데 영역에 칠한 색을 제외한 4가지 색

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot6=30$ 답 30

13 노란색과 초록색을 한 묶음으로 생각하면 서로 다른 5가지 색을 각 영역에 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

노란색과 초록색의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot2=48$ 답 ①

14 주어진 삼각뿔의 밑면을 칠하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

3개의 옆면을 서로 다른 3가지 색으로 칠하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

옆면은 모두 합동이므로 옆면을 칠하는 경우의 수는 서로 다른 3가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4\cdot2=8$ 답 8

15 정육면체의 한 밑면에 특정한 한 가지 색을 칠하면 마주 보는 밑면을 칠하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

4개의 옆면을 서로 다른 4가지 색으로 칠하는 경우의 수는

두 밑면에 칠한 색을 제외한 4가지 색

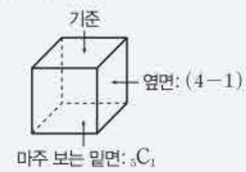
$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot6=30$ 답 ④

쌤 한마디

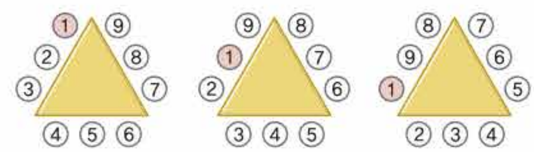
회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 볼 때, 각뿔대를 칠하는 방법으로 정육면체를 칠하면 정육면체의 밑면과 옆면은 합동이므로 밑면이 옆면으로 오도록 회전시킬 경우 서로 일치하는 것이 생긴다.
따라서 정육면체의 각 면을 서로 다른 6가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법은 다음 그림과 같이 한 밑면을 기준으로 생각하고 마주 보는 밑면과 옆면을 칠하는 방법으로 생각한다.



16 9명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(9-1)!=8!$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



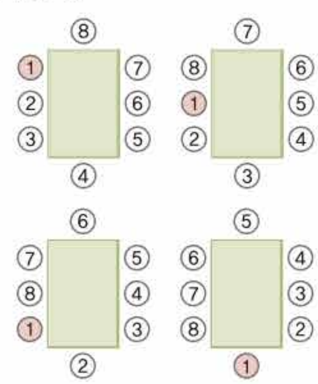
따라서 구하는 경우의 수는

$8!\cdot3$ 답 ③

17 8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 4가지씩 존재한다.



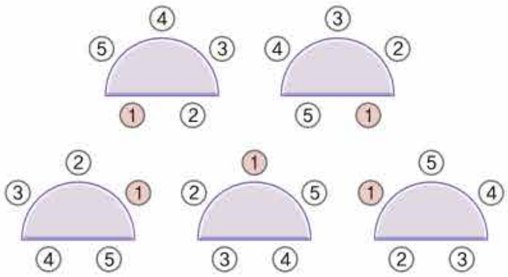
따라서 구하는 경우의 수는

$7!\cdot4$ 답 ②

18 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 반원 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot5=120$ 답 120

Q BOX

오른쪽으로 1칸 가는 것을 a, 위쪽으로 1칸 가는 것을 b라 하면 구하는 경우의 수는 a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

5명이 주어진 반원 모양의 탁자에 둘러앉을 때, 회전하여 일치하는 경우가 없으므로 구하는 경우의 수는 5명을 일렬로 나열하는 경우의 수 $5!$과 같다.

02 여러 가지 순열 W 5쪽

01 (1) ${}_{10}\Pi_1=10^1=10$

(2) ${}_4\Pi_4=4^4=256$

(3) ${}_3\Pi_5=3^5=243$

(4) ${}_8\Pi_2=8^2=64$

답 (1) 10 (2) 256 (3) 243 (4) 64

02 (1) ${}_n\Pi_3=125$에서

$n^3=5^3 \qquad \therefore n=5$

(2) ${}_6\Pi_r=36$에서

$6^r=6^2 \qquad \therefore r=2$

답 (1) 5 (2) 2

03 (1) 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_4=2^4=16$

(2) 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

답 (1) 16 (2) 64

04 (1) 5개의 문자 중에서 s가 2개, e가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\cdot2!}=30$

(2) 6개의 문자 중에서 a가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!}=360$

(3) 7개의 문자 중에서 a가 2개, r가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\cdot2!}=1260$

답 (1) 30 (2) 360 (3) 1260

05 (1) $\dfrac{(2+2)!}{2!\cdot2!}=\dfrac{4!}{2!\cdot2!}=6$

(2) $\dfrac{(4+3)!}{4!\cdot3!}=\dfrac{7!}{4!\cdot3!}=35$

답 (1) 6 (2) 35

06 ${}_2\Pi_2+{}_4\Pi_2+{}_6\Pi_2+{}_8\Pi_2+{}_{10}\Pi_2$

$=2^2+4^2+6^2+8^2+10^2=220$ 답 ④

07 ${}_nP_2+{}_n\Pi_2=66$에서

$n(n-1)+n^2=66, \qquad 2n^2-n-66=0$

$(2n+11)(n-6)=0$

$\therefore n=6$ ($\because n$은 자연수) 답 6

08 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$ 답 81

09 A가 전주 또는 속초를 택하는 경우의 수는 2

B, C가 각각 여행지를 택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot16=32$ 답 ②

10 5곳의 점검표에 ○, △, ×가 표시되는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

(i) 청소 상태가 양호한 화장실이 0곳인 경우

5곳의 점검표에 △, ×가 표시되는 것과 같으므로 그 경우의 수는

${}_2\Pi_5=2^5=32$

서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

(ii) 청소 상태가 양호한 화장실이 1곳인 경우

5곳 중 1곳의 점검표에 ○가 표시되고, 나머지 4곳의 점검표에 △, ×가 표시되는 것과 같으므로 그 경우의 수는

$5\cdot{}_2\Pi_4=5\cdot2^4=80$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$243-(32+80)=131$ 답 ④

Q 쌤 한마디

① (X가 아닌 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(X인 경우의 수)

② (사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)
−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

③ (X 이상인 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(X 미만인 경우의 수)

④ (X 이하인 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(X 초과인 경우의 수)

11 네 기호를 합해서 2개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$_4\Pi_2=4^2=16$

네 기호를 합해서 3개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$_4\Pi_3=4^3=64$

네 기호를 합해서 4개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$_4\Pi_4=4^4=256$

따라서 구하는 신호의 개수는

$16+64+256=336$ 답 ①

4개의 기호에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

12 두 깃발을 합해서 1번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_1=2^1$

빨간색 깃발을 드는 경우와 보라색 깃발을 드는 경우의 2가지가 있다.

두 깃발을 합해서 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_2=2^2$

⋮

두 깃발을 합해서 n번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_n=2^n$

즉 두 깃발을 합해서 1번 이상 n번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n$

$n=5$일 때,

$2+2^2+2^3+2^4+2^5=62<100$

$n=6$일 때,

$2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=126>100$

따라서 n의 최솟값은 6이다. 답 6

13 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

5의 1개

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$_6\Pi_3=6^3=216$

따라서 구하는 5의 배수의 개수는

$1\cdot216=216$ 답 ⑤

14 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

5, 6의 2개

십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$2\cdot16=32$ 답 32

15 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4의 4개

맨 앞자리에는 0이 올 수 없다.

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0, 2, 4의 3개

백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$4\cdot3\cdot25=300$ 답 ③

16 주어진 4개의 숫자로 만들 수 있는 한 자리 자연수의 개수는

3

1, 2, 3의 3개

주어진 4개의 숫자로 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수는

$3\cdot4=12$

십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 0을 제외한 3개

주어진 4개의 숫자로 만들 수 있는 백의 자리의 숫자가 1 또는 2인 세 자리 자연수의 개수는

$2\cdot{}_4\Pi_2=2\cdot4^2=32$

백의 자리의 숫자가 3인 세 자리 자연수 중 302보다 작은 수는 300, 301의 2개이다.

따라서 302보다 작은 자연수의 개수는

$3+12+32+2=49$

이므로 302는 50 번째 수이다. 답 50 번째

17 함수 f의 개수는 Y의 원소 1, 3, 5, 7, 9의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 X의 원소 2, 4, 6에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$a={}_5\Pi_3=5^3=125$

함수 f 중에서 일대일함수의 개수는 Y의 원소 1, 3, 5, 7, 9의 5개에서 서로 다른 3개를 뽑아 X의 원소 2, 4, 6에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$b={}_5P_3=60$

$\therefore a-b=65$ 답 ③

일대일함수
함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$인 함수

쌤 한마디

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때

① X에서 Y로의 함수의 개수
○ $_n\Pi_m=n^m$

② X에서 Y로의 일대일함수의 개수
○ $_nP_m$ (단, $n\geq m$)

③ X에서 X로의 일대일대응의 개수
○ $_mP_m=m!$

18 $f(a)\neq5$이므로 $f(a)$의 값이 될 수 있는 것은

6, 7, 8의 3개

또 Y의 원소 5, 6, 7, 8의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 X의 원소 b, c에 대응시키는 경우의 수는

$_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 함수의 개수는

$3\cdot16=48$ 답 48

다른 풀이 Y의 원소 5, 6, 7, 8의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 X의 원소 a, b, c에 대응시키는 경우의 수는

$_4\Pi_3=4^3=64$

$f(a)=5$일 때, Y의 원소 5, 6, 7, 8의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 X의 원소 b, c에 대응시키는 경우의 수는

$_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 함수의 개수는

$64-16=48$

19 $f(2)+f(5)=4$를 만족시키는 $f(2)$, $f(5)$의 값을 순서쌍 $(f(2), f(5))$로 나타내면

(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)의 5개

또 Y의 원소 0, 1, 2, 3, 4의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 X의 원소 3, 4에 대응시키는 경우의 수는

$_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수의 개수는

$5\cdot 25=125$ 답 ②

20 B와 C를 제외한 6개의 문자 A, A, A, D, D, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\cdot 3!}=20$

A, A, A, D, D, D의 사이사이와 양 끝의 7개의 자리에 B와 C를 나열하는 경우의 수는

$_7P_2=42$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\cdot 42=840$ 답 ⑤

다른 풀이 8개의 문자 A, A, A, B, C, D, D, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{3!\cdot 3!}=1120$

B와 C를 한 문자 X로 생각하면 7개의 문자 X, A, A, A, D, D, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\cdot 3!}=140$

B와 C가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉 B와 C가 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$140\cdot 2=280$

따라서 구하는 경우의 수는

$1120-280=840$

21 7개의 문자 a, d, d, r, e, s, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\cdot 2!}=1260$

(ⅰ) 양 끝에 d가 오는 경우

2개의 d를 제외한 5개의 문자 a, r, e, s, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(ⅱ) 양 끝에 s가 오는 경우

2개의 s를 제외한 5개의 문자 a, d, d, r, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(ⅰ), (ⅱ)에서 양 끝에 서로 같은 문자가 오도록 나열하는 경우의 수는

$60+60=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$1260-120=1140$ 답 1140

(모든 경우의 수)
−(양 끝에 서로 같은 문자가 오는 경우의 수)

22 (ⅰ) b끼리 이웃하는 경우

2개의 b를 한 문자 X로 생각하면 7개의 문자 X, a, s, e, a, l, l을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\cdot 2!}=1260$

(ⅱ) l끼리 이웃하는 경우

2개의 l을 한 문자 Y로 생각하면 7개의 문자 Y, b, a, s, e, b, a를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\cdot 2!}=1260$

(ⅲ) b끼리, l끼리 이웃하는 경우

2개의 b, 2개의 l을 각각 한 문자 X, Y로 생각하면 6개의 문자 X, Y, a, s, e, a를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

이상에서 구하는 경우의 수는

$1260+1260-360=2160$ 답 ③

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수가 l이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는
$m+n-l$

23 7개의 숫자 중 홀수가 4개, 짝수가 3개 있으므로 홀수는 홀수 번째에, 짝수는 짝수 번째에 오도록 나열하면 된다.

홀수 1, 3, 3, 5를 홀수 번째에 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

짝수 2, 2, 4를 짝수 번째에 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\cdot 3=36$ 답 ④

24 (ⅰ) 맨 앞자리의 숫자가 1인 경우

4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

(ⅱ) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우

4개의 숫자 1, 1, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는

$24+12=36$ 답 36

맨 앞자리의 숫자가 3인 수 중 가장 작은 수는 31124이므로 30000보다 작은 자연수는 맨 앞자리의 숫자가 1 또는 2이다.

25 6개의 숫자 3, 3, 4, 4, 4, 5에서 5개를 택하는 경우는

3, 3, 4, 4, 4 또는 3, 3, 4, 4, 5 또는

3, 4, 4, 4, 5

(i) 3, 3, 4, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$$

(ii) 3, 3, 4, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$$

(iii) 3, 4, 4, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!}=20$$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$10+30+20=60$ 답 ①

26 4개의 모음 i, a, i, e의 순서가 정해져 있으므로 구하는 경우의 수는 모음을 모두 X로 생각하면 7개의 문자 X, m, X, g, X, n, X를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 a, 두 번째 X는 e, 세 번째와 네 번째 X는 i로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4!}=210$$

답 210

27 r, n과 e, o의 순서가 각각 정해져 있으므로 구하는 경우의 수는 r, n을 모두 X로, e, o를 모두 Y로 생각하면 6개의 문자 Y, X, a, X, g, Y를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 r, 두 번째 X는 n, 첫 번째 Y는 e, 두 번째 Y는 o로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!}=180$$

답 ⑤

28 짝수 2, 4, 6의 순서가 정해져 있으므로 구하는 경우의 수는 짝수를 모두 X로 생각하면 1, X, 3, 3, X, 5, 5, X를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 6, 두 번째 X는 4, 세 번째 X는 2로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=1680$$

답 1680

29 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

A에서 P, Q를 모두 거쳐 B까지 최단 거리로 가려면 A → P → Q → B 의 순서로 가야 한다.

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$$

P에서 Q까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 1

Q에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot 1\cdot 4=40$ 답 40

30 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{8!}{5!\cdot 3!}=56$$

A에서 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{5!}{4!}=3\cdot 5=15$$

따라서 A에서 P를 거치지 않고 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$56-15=41$ 답 ④

31 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 정육면체의 모서리를 각각 2개, 1개, 4개 지나야 한다.

가로, 세로, 높이의 방향으로 정육면체의 모서리 1개를 지나는 것을 각각 a, b, c라 하면 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, b, c, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

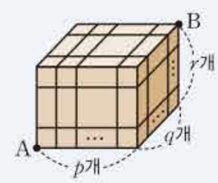
$$\frac{7!}{2!\cdot 4!}=105$$

답 ③

쌤 한마디

입체도형에서 최단 거리로 가는 경우의 수

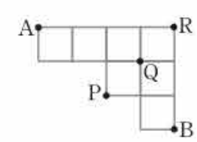
오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체를 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 p개, q개, r개 쌓아 만든 직육면체가 있다.



이때 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$$

32 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → P → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\left(\frac{3!}{2!}\cdot 1\right)\cdot(1\cdot 2)=3\cdot 2=6$$

(ii) A → Q → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

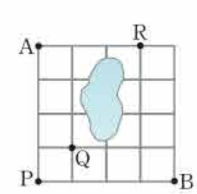
$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{3!}{2!}=4\cdot 3=12$$

(iii) A → R → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$1\cdot 1=1$

이상에서 $6+12+1=19$ 답 19

33 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → P → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$1\cdot 1=1$

(ii) A → Q → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{4!}{3!}=4\cdot 4=16$$

(iii) A → R → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$1\cdot\frac{5!}{4!}=1\cdot 5=5$$

이상에서 $1+16+5=22$ 답 ②

02 중복조합과 이항정리

03 중복조합

W 10쪽

01 (1) ${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

(2) ${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

(3) ${}_5H_0={}_{5+0-1}C_0={}_4C_0=1$

(4) ${}_{10}H_2={}_{10+2-1}C_2={}_{11}C_2=55$

답 (1) 20 (2) 45 (3) 1 (4) 55

02 (1) ${}_nH_2={}_5C_3$에서 ${}_{n+1}C_2={}_5C_3={}_5C_2$

$n+1=5$ $\quad\therefore n=4$

(2) ${}_7H_r={}_{11}C_5$에서 ${}_{6+r}C_r={}_{11}C_5$

$\therefore r=5$

답 (1) 4 (2) 5

03 (1) 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_7={}_8C_7={}_8C_1=8$

(2) 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6H_4={}_9C_4=126$

답 (1) 8 (2) 126

04 ${}_5H_r={}_{12}C_4$에서 ${}_{4+r}C_r={}_{12}C_4={}_{12}C_8$

$\therefore r=8$

$\therefore {}_8H_3={}_{10}C_3=120$

답 ①

05 ${}_nH_2={}_{n+1}C_2=\dfrac{(n+1)n}{2\cdot1}$이므로 ${}_nH_2=21$에서

$\dfrac{(n+1)n}{2\cdot1}=21,\quad (n+1)n=7\cdot6$

$\therefore n=6$

${}_4H_r={}_{3+r}C_r={}_{3+r}C_3=\dfrac{(3+r)(2+r)(1+r)}{3\cdot2\cdot1}$이므로

${}_4H_r=20$에서 $\dfrac{(3+r)(2+r)(1+r)}{3\cdot2\cdot1}=20$

$(3+r)(2+r)(1+r)=6\cdot5\cdot4$

$\therefore r=3$

$\therefore n+r=9$

답 ⑤

$(3+r)-r=3$

06 ${}_{8-r}H_r={}_{11-r}H_{r-3}$에서

${}_7C_r={}_7C_{r-3}$

따라서 $r+(r-3)=7$이므로

$2r=10\quad\therefore r=5$

답 5

$(8-r)+r-1=7,$
$(11-r)+(r-3)-1=7$

07 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 5개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_6={}_{10}C_6={}_{10}C_4=210$

답 210

2, 3, 5, 7이 소수이므로 중복을 허용하여 뽑은 수를 모두 곱하면 같은 수가 나오지 않는다.

08 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_{10}={}_{11}C_{10}={}_{11}C_1=11$

답 11

쌤 한마디

무기명 또는 기명으로 투표하는 경우의 수

무기명 투표는 유권자가 어느 후보를 뽑았는지 알 수 없으므로 후보 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복조합으로 생각할 수 있다.

한편 기명 투표는 유권자가 어느 후보를 뽑았는지 알 수 있으므로 후보 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복순열로 생각할 수 있다. 즉

무기명 투표 ◯ 중복조합

기명 투표 ◯ 중복순열

09 장미 4송이를 서로 다른 세 꽃병 A, B, C에 나누어 꽂는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

튤립 7송이를 서로 다른 세 꽃병 A, B, C에 나누어 꽂는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot36=540$

답 ②

택하는 것의 개수보다 빨간 펜의 개수가 작으므로 빨간 펜이 6개 이상이라 생각하고 구한 경우의 수에서 빨간 펜을 3개 이상 택하는 경우의 수를 뺀다.

10 빨간 펜이 6개 이상이라 생각하면 빨간 펜, 파란 펜, 검은 펜 중에서 6개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

이때 빨간 펜을 3개 이상 택하는 경우의 수는 먼저 빨간 펜을 3개 택한 후 빨간 펜, 파란 펜, 검은 펜 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$28-10=18$

답 ③

다른 풀이 6개의 펜을 택할 때, 빨간 펜을 0개, 1개, 2개 택하는 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) 빨간 펜을 0개 택하는 경우

파란 펜, 검은 펜 중에서 6개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

(ⅱ) 빨간 펜을 1개 택하는 경우

파란 펜, 검은 펜 중에서 5개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

(iii) 빨간 펜을 2개 택하는 경우

파란 펜, 검은 펜 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$7+6+5=18$$

11 먼저 쿠키를 4개의 접시에 각각 1개씩 나누어 담고, 나머지 3개의 쿠키를 4개의 접시에 나누어 담으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3={}_6C_3=20$$ 답 ④

12 장난감 12개를 서로 다른 세 상자에 나누어 담을 때, 세 상자 중 일부만 사용해도 되는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$a={}_3H_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=91$$

모든 상자를 사용해야 하는 경우는 먼저 장난감을 세 상자에 각각 1개씩 나누어 담고, 나머지 9개의 장난감을 세 상자에 나누어 담으면 된다.

즉 모든 상자를 사용해야 하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$b={}_3H_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$$

$$\therefore a-b=36$$ 답 36

13 먼저 야채 김밥을 2줄 주문하고, 야채 김밥, 치즈 김밥 중에서 나머지 6줄의 김밥을 주문하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$$ 답 ①

14 서로 다른 항의 개수는 a, b, c의 3개에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_n={}_{2+n}C_n={}_{2+n}C_2=\frac{(2+n)(1+n)}{2\cdot 1}$$

즉 $\frac{(2+n)(1+n)}{2\cdot 1}=15$이므로

$$(2+n)(1+n)=6\cdot 5$$

$$\therefore n=4$$ 답 4

15 $(a+b)^8$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 a, b의 2개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_8={}_9C_8={}_9C_1=9$$

$(c+d+e)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 c, d, e의 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$$

따라서 구하는 항의 개수는

$$9\cdot 21=189$$ 답 ⑤

Q BOX

빈 접시가 없다는 것은 각 접시에 쿠키가 1개 이상씩 놓여 있다는 의미이다.

$x\geq 1$, $y\geq 1$, $z\geq 1$, $w\geq 1$인 정수

a, b, c, d의 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수

16 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 x, y, z, w의 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$p={}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$$

x, y, z, w가 양의 정수일 때 $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$, $w-1=d$로 놓으면 a, b, c, d는 음이 아닌 정수이고 $x+y+z+w=6$에서

$$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)=6$$

$$\therefore a+b+c+d=2$$

따라서 양의 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같으므로

$$q={}_4H_2={}_5C_2=10$$

$$\therefore p+q=94$$ 답 ②

17 x, y, z가 음이 아닌 정수이므로

$x+y+z=3$ 또는 $x+y+z=4$ 또는 $x+y+z=5$

(i) $x+y+z=3$일 때,

순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$$

(ii) $x+y+z=4$일 때,

순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$$

(iii) $x+y+z=5$일 때,

순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$10+15+21=46$$ 답 ④

18 x, y, z가 $x\geq 1$, $y\geq 2$, $z\geq 3$인 정수이므로 $x-1=a$, $y-2=b$, $z-3=c$로 놓으면 a, b, c는 음이 아닌 정수이고 $x+y+z=16$에서

$$(a+1)+(b+2)+(c+3)=16$$

$$\therefore a+b+c=10$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

$${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$$ 답 66

19 x, y, z가 홀수이므로 $x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$ (a, b, c는 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x+y+z=17$에서

$$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)=17$$

$$\therefore a+b+c=7$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

$${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$$ 답 ③

20 4, 5, 6, 7, 8의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c로 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_5H_3={}_7C_3=35$$

답 35

21 3, 4, 5, …, 10의 8개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 $|a|$, b로 정하면 되므로 $|a|$, b의 순서쌍 $(|a|, b)$의 개수는

$${}_8H_2={}_9C_2=36$$

이때 $|a|=\pm a$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$36\cdot 2=72$$

답 ④

순서쌍 $(|a|, b)$는 $(-a, b)$, (a, b)의 2개

22 2, 4, 6, 8, 10, 12의 6개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c로 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_6H_3={}_8C_3=56$$

답 ①

12 이하의 자연수 중에서 짝수

23 (1) 구하는 함수 f의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 서로 다른 3개를 뽑아 작은 수부터 차례대로 X의 원소 2, 4, 8에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_3={}_5C_2=10$$

(2) 구하는 함수 f의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 2, 4, 8에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_5H_3={}_7C_3=35$$

답 (1) 10 (2) 35

쌤 한마디

두 집합 $X=\{1, 2, 3, \cdots, r\}$, $Y=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$에 대하여 $a\in X$, $b\in X$일 때 X에서 Y로의 함수 f 중에서

① $a<b$이면 $f(a)<f(b)$인 함수의 개수
　⇨ ${}_nC_r$ (단, $r\le n$)

② $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$인 함수의 개수
　⇨ ${}_nH_r$

중복을 허용하지 않고 정의역의 원소의 개수만큼 공역의 원소를 택하면 함수가 결정된다.

중복을 허용하여 정의역의 원소의 개수만큼 공역의 원소를 택하면 함수가 결정된다.

24 구하는 함수 f의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, …, 8의 8개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 1, -1에 대응시키고, Y의 원소 8개에서 1개를 뽑아 X의 원소 0에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_8H_2\cdot{}_8C_1={}_9C_2\cdot{}_8C_1=36\cdot 8=288$$

답 ⑤

25 조건 (가)에서 $f(3)=5$이므로 조건 (나)에 의하여

$$f(1)\ge f(2)\ge 5\ge f(4)$$

$f(1)\ge f(2)\ge 5$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은

5, 7, 9, 11의 4개

이때 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 크거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 1, 2에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_2={}_5C_2=10$$

$5\ge f(4)$에서 $f(4)$의 값이 될 수 있는 것은

1, 3, 5의 3개

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$10\cdot 3=30$$

답 30

04 이항정리

14쪽

01 (1) $(a+b)^6$

$$={}_6C_0a^6+{}_6C_1a^5b+{}_6C_2a^4b^2+{}_6C_3a^3b^3+{}_6C_4a^2b^4+{}_6C_5ab^5+{}_6C_6b^6$$

$$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

(2) $(x-3y)^5$

$$={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4(-3y)+{}_5C_2x^3(-3y)^2+{}_5C_3x^2(-3y)^3+{}_5C_4x(-3y)^4+{}_5C_5(-3y)^5$$

$$=x^5-15x^4y+90x^3y^2-270x^2y^3+405xy^4-243y^5$$

답 (1) $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$
(2) $x^5-15x^4y+90x^3y^2-270x^2y^3+405xy^4-243y^5$

02 (1) $(2x+y)^7$의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r(2x)^{7-r}y^r={}_7C_r2^{7-r}x^{7-r}y^r$$

x^3y^4항은 $r=4$일 때이므로 x^3y^4의 계수는

$${}_7C_4\cdot 2^3=35\cdot 8=280$$

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

$${}_8C_rx^{8-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_8C_r\frac{x^{8-r}}{x^r}$$

상수항은 $8-r=r$일 때이므로

$$r=4$$

따라서 상수항은

$${}_8C_4=70$$

답 (1) 280 (2) 70

쌤 한마디

상수항은 $\frac{x^{8-r}}{x^r}=1$일 때이고, 다음과 같은 거듭제곱의 나눗셈을 이용하여 r의 값을 구한다.

$a\ne 0$이고, m, n이 자연수일 때,

① $m>n$이면　$a^m\div a^n=a^{m-n}$
② $m=n$이면　$a^m\div a^n=1$
③ $m<n$이면　$a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}$

03 (1) ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_7C_7=2^7=128$

(3) ${}_6C_0+{}_6C_2+{}_6C_4+{}_6C_6=2^{6-1}=32$

답 (1) 128 (2) 0 (3) 32

04

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \end{array}$$

(1) 위의 파스칼의 삼각형에서

$$(x+4)^4=x^4+4\cdot x^3\cdot 4+6\cdot x^2\cdot 4^2+4\cdot x\cdot 4^3+4^4$$
$$=x^4+16x^3+96x^2+256x+256$$

(2) 위의 파스칼의 삼각형에서

$$(x-y)^6$$
$$=x^6+6\cdot x^5\cdot(-y)+15\cdot x^4\cdot(-y)^2+20\cdot x^3\cdot(-y)^3$$
$$+15\cdot x^2\cdot(-y)^4+6\cdot x\cdot(-y)^5+(-y)^6$$
$$=x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6$$

답 (1) $x^4+16x^3+96x^2+256x+256$

(2) $x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6$

05 (1) ${}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3={}_4C_2+{}_4C_3={}_5C_3$

(2) ${}_6C_4+{}_6C_5+{}_7C_6={}_7C_5+{}_7C_6={}_8C_6$

답 (1) ${}_5C_3$ (2) ${}_8C_6$

${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$

06 $\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)^8$의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r(2x)^{8-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r={}_8C_r\,2^{8-r}(-1)^r\frac{x^{8-r}}{x^{2r}}$$

$\dfrac{1}{x^7}$항은 $2r-(8-r)=7$일 때이므로

$3r=15$ $\quad\therefore r=5$

$\dfrac{x^{8-r}}{x^{2r}}=\dfrac{1}{x^7}$에서
$2r-(8-r)=7$

따라서 $\dfrac{1}{x^7}$의 계수는

$${}_8C_5\cdot 2^3\cdot(-1)^5=56\cdot 8\cdot(-1)=-448$$

답 ①

07 $(x-ay)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r\,x^{5-r}(-ay)^r={}_5C_r(-a)^r x^{5-r}y^r$$

x^2y^3항은 $r=3$일 때이므로 x^2y^3의 계수는

$${}_5C_3(-a)^3=-10a^3$$

xy^4항은 $r=4$일 때이므로 xy^4의 계수는

$${}_5C_4(-a)^4=5a^4$$

이때 x^2y^3의 계수와 xy^4의 계수의 합이 0이므로

$-10a^3+5a^4=0,\quad a^3(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a\neq 0$)

답 2

08 $(x+a)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r\,x^{6-r}a^r={}_6C_r\,a^r x^{6-r}$$

x^3항은 $6-r=3$, 즉 $r=3$일 때이므로 x^3의 계수는

$${}_6C_3\,a^3=20a^3$$

x^4항은 $6-r=4$, 즉 $r=2$일 때이므로 x^4의 계수는

$${}_6C_2\,a^2=15a^2$$

이때 x^3의 계수가 x^4의 계수의 8배이므로

$20a^3=8\cdot 15a^2,\quad a^2(a-6)=0$

$\therefore a=6$ ($\because a\neq 0$)

답 ④

Q BOX

09 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=4$, $n=15$를 대입하면

$$5^{15}={}_{15}C_0+{}_{15}C_1\cdot 4+{}_{15}C_2\cdot 4^2+\cdots+{}_{15}C_{15}\cdot 4^{15}$$
$$\therefore {}_{15}C_1\cdot 4+{}_{15}C_2\cdot 4^2+{}_{15}C_3\cdot 4^3+\cdots+{}_{15}C_{15}\cdot 4^{15}$$
$$=5^{15}-1$$

답 ③

10 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=20$, $n=26$을 대입하면

$$21^{26}$$
$$={}_{26}C_0+{}_{26}C_1\cdot 20+{}_{26}C_2\cdot 20^2+\cdots+{}_{26}C_{26}\cdot 20^{26}$$
$$=1+26\cdot 20+20^2({}_{26}C_2+{}_{26}C_3\cdot 20+\cdots+{}_{26}C_{26}\cdot 20^{24})$$
$$=521+20^2({}_{26}C_2+{}_{26}C_3\cdot 20+\cdots+{}_{26}C_{26}\cdot 20^{24})$$

400×(상수) 꼴이므로 200으로 나누어떨어진다.

이때 $20^2({}_{26}C_2+{}_{26}C_3\cdot 20+\cdots+{}_{26}C_{26}\cdot 20^{24})$은 200으로 나누어떨어지므로 21^{26}을 200으로 나눈 나머지는 521을 200으로 나눈 나머지와 같다.

$521=200\cdot 2+121$

따라서 구하는 나머지는 121이다.

답 121

11 $\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(x^2)^{4-r}\left(\frac{3}{x}\right)^r={}_4C_r\,3^r\frac{x^{8-2r}}{x^r} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\left(x-\dfrac{2}{x^2}\right)\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)^4$
$=x\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)^4$
$-\dfrac{2}{x^2}\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)^4$

이때 $\left(x-\dfrac{2}{x^2}\right)\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^3항은 x와 ㉠의 x^2항이 곱해질 때, $-\dfrac{2}{x^2}$와 ㉠의 x^5항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x^2항은 $8-2r-r=2$, 즉 $r=2$일 때이므로

$${}_4C_2\cdot 3^2x^2=54x^2$$

(ii) ㉠에서 x^5항은 $8-2r-r=5$, 즉 $r=1$일 때이므로

$${}_4C_1\cdot 3x^5=12x^5$$

(i), (ii)에서 $\left(x-\dfrac{2}{x^2}\right)\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^3항은

$$x\cdot 54x^2-\frac{2}{x^2}\cdot 12x^5=30x^3$$

이므로 구하는 계수는 30이다.

답 ②

12 $(4x-y)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(4x)^{5-r}(-y)^r={}_5C_r\,4^{5-r}(-1)^r x^{5-r}y^r \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$(x+y)(4x-y)^5$
$=x(4x-y)^5+y(4x-y)^5$

이때 $(x+y)(4x-y)^5$의 전개식에서 x^2y^4항은 x와 ㉠의 xy^4항이 곱해질 때, y와 ㉠의 x^2y^3항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 xy^4항은 $r=4$일 때이므로

$${}_5C_4\cdot 4\cdot(-1)^4xy^4=20xy^4$$

(ii) ㉠에서 x^2y^3항은 $r=3$일 때이므로

$${}_5C_3\cdot 4^2\cdot(-1)^3x^2y^3=-160x^2y^3$$

(i), (ii)에서 $(x+y)(4x-y)^5$의 전개식에서 x^2y^4항은

$$x\cdot 20xy^4+y\cdot(-160x^2y^3)=-140x^2y^4$$

이므로 구하는 계수는 -140이다.

답 -140

13 $(a+x)^4$의 전개식의 일반항은

$_4C_r\,a^{4-r}x^r$ ...... ㉠

이때 $(x^2-3x)(a+x)^4$의 전개식에서 x^4항은 x^2과 ㉠의 x^2항이 곱해질 때, $-3x$와 ㉠의 x^3항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x^2항은 $r=2$일 때이므로

$$_4C_2\,a^2x^2=6a^2x^2$$

(ii) ㉠에서 x^3항은 $r=3$일 때이므로

$$_4C_3\,ax^3=4ax^3$$

(i), (ii)에서 $(x^2-3x)(a+x)^4$의 전개식에서 x^4항은

$$x^2\cdot 6a^2x^2-3x\cdot 4ax^3=(6a^2-12a)x^4$$

이때 x^4의 계수가 48이므로

$$6a^2-12a=48,\quad a^2-2a-8=0$$

$$(a+2)(a-4)=0$$

$$\therefore a=4\ (\because a>0)$$

답 ④

14 $(1+x)^5$의 전개식의 일반항은

$$_5C_r\,x^r$$

$(3+x)^3$의 전개식의 일반항은

$$_3C_s\,3^{3-s}x^s$$

즉 $(1+x)^5(3+x)^3$의 전개식의 일반항은

$$_5C_r\,x^r\cdot{}_3C_s\,3^{3-s}x^s={}_5C_r\cdot{}_3C_s\,3^{3-s}x^{r+s}$$

x항은 $r+s=1$일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

r, s는 각각 $0\le r\le 5$, $0\le s\le 3$인 정수이다.

$$(0,\ 1),\ (1,\ 0)$$

따라서 구하는 x의 계수는

$$_5C_0\cdot{}_3C_1\cdot 3^2+{}_5C_1\cdot{}_3C_0\cdot 3^3=27+135$$
$$=162$$

답 162

15 $(1-x)^4$의 전개식의 일반항은

$$_4C_r(-x)^r={}_4C_r(-1)^rx^r$$

$(a+x)^5$의 전개식의 일반항은

$$_5C_s\,a^{5-s}x^s$$

즉 $(1-x)^4(a+x)^5$의 전개식의 일반항은

$$_4C_r(-1)^rx^r\cdot{}_5C_s\,a^{5-s}x^s={}_4C_r\cdot{}_5C_s(-1)^ra^{5-s}x^{r+s}$$

x^7항은 $r+s=7$일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

r, s는 각각 $0\le r\le 4$, $0\le s\le 5$인 정수이다.

$$(2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3)$$

x^7의 계수는

$$_4C_2\cdot{}_5C_5\cdot(-1)^2a^0+{}_4C_3\cdot{}_5C_4\cdot(-1)^3a$$
$$+{}_4C_4\cdot{}_5C_3\cdot(-1)^4a^2$$
$$=6-20a+10a^2$$

$a\neq 0$일 때, $a^0=1$

이때 x^7의 계수가 156이므로

$$6-20a+10a^2=156,\quad a^2-2a-15=0$$

$$(a+3)(a-5)=0$$

$$\therefore a=5\ (\because a>0)$$

답 ③

16 $$\frac{_{32}C_0+{}_{32}C_2+{}_{32}C_4+\cdots+{}_{32}C_{32}}{_{32}C_0+{}_{32}C_1+{}_{32}C_2+\cdots+{}_{32}C_{32}}=\frac{2^{32-1}}{2^{32}}=\frac{1}{2}$$

답 ③

17 $_{25}C_0+{}_{25}C_1+{}_{25}C_2+\cdots+{}_{25}C_{12}$

$={}_{25}C_{25}+{}_{25}C_{24}+{}_{25}C_{23}+\cdots+{}_{25}C_{13}$

$_{25}C_0={}_{25}C_{25}$, $_{25}C_1={}_{25}C_{24}$, $_{25}C_2={}_{25}C_{23}$, ⋮ $_{25}C_{12}={}_{25}C_{13}$

이고 $_{25}C_0+{}_{25}C_1+{}_{25}C_2+\cdots+{}_{25}C_{25}=2^{25}$이므로

$$_{25}C_0+{}_{25}C_1+{}_{25}C_2+\cdots+{}_{25}C_{12}=\frac{2^{25}}{2}=2^{24}$$

답 ②

18 n이 홀수일 때, $_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$이므로 주어진 부등식은

$$200<2^{n-1}<500$$

이때 $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$이므로

$$n-1=8\qquad\therefore n=9$$

답 9

19 $_{n-1}C_3+{}_{n-1}C_4={}_nC_4$이므로

$$_nC_4={}_nC_5$$
$$\therefore n=4+5=9$$

답 ④

20 $_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5+{}_7C_6$

$_1C_0=1={}_2C_0$

$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5+{}_7C_6$

$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5+{}_7C_6$

$={}_4C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5+{}_7C_6$

$={}_5C_3+{}_5C_4+{}_6C_5+{}_7C_6$

$={}_6C_4+{}_6C_5+{}_7C_6$

$={}_7C_5+{}_7C_6$

$={}_8C_6={}_8C_2$

답 ①

21 $_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3$

$_3C_3=1={}_4C_4$

$={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3$

$={}_5C_4+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3$

$={}_6C_4+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3$

$={}_7C_4+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3$

$={}_8C_4+{}_8C_3+{}_9C_3$

$={}_9C_4+{}_9C_3$

$={}_{10}C_4=210$

답 210

22 $_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4$

$=({}_5C_0+{}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4)-{}_5C_0$

$=({}_6C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4)-1$

$=({}_7C_2+{}_7C_3+{}_8C_4)-1$

$=({}_8C_3+{}_8C_4)-1$

$={}_9C_4-1=125$

답 125

03 확률의 뜻과 활용

05 확률의 뜻과 기본 성질

Ⓦ 17쪽

01 (1) 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

(2) $A=\{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B=\{1, 3, 5\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$

(3) $A\cap B=\{3, 5\}$

(4) $A^C=\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

답 풀이 참조

02 $A\cap B=\{1, 9\}$, $B\cap C=\varnothing$, $C\cap A=\{5\}$

따라서 두 사건이 서로 배반사건인 것은 B와 C뿐이다.

답 B와 C

03 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내자.

(1) 나오는 두 눈의 수의 합이 4인 경우는

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(2) 나오는 두 눈의 수의 차가 3인 경우는

$(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 1)$,

$(5, 2)$, $(6, 3)$의 6가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

답 (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{6}$

04 $\frac{540}{900}=\frac{3}{5}$

답 $\frac{3}{5}$

05 (2) 짝수가 적힌 공을 꺼내는 경우는

2, 4의 2가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{5}$

답 (1) 1 (2) $\frac{2}{5}$ (3) 0

06 한 개의 동전을 던질 때 나오는 모든 경우는

앞면, 뒷면의 2가지

한 개의 주사위를 던질 때 나오는 모든 경우는

1, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지

Q BOX

(근원사건의 개수)
=(표본공간의 원소의 개수)

한 개의 공을 꺼내면 1, 2, 3, 4, 5가 적힌 공이 나오므로 5 이하의 자연수가 적힌 공이 반드시 나온다.

한 개의 공을 꺼낼 때 6이 적힌 공은 절대로 나오지 않는다.

사건 C는
$\varnothing$, $\{4\}$, $\{7\}$, $\{4, 7\}$

따라서 주어진 시행의 근원사건의 개수는

$2\cdot2\cdot6=24$

답 24

07 표본공간을 S라 하면

$S=\{\text{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}\}$

이므로

$A=\{\text{HTT, THT, TTH, TTT}\}$,

$B=\{\text{HHH, TTT}\}$

③ $C=A\cap B=\{\text{TTT}\}$

④ $B^C=\{\text{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH}\}$

이므로 $n(B^C)=6$

⑤ $A^C=\{\text{HHH, HHT, HTH, THH}\}$이므로

$A^C\cup B=\{\text{HHH, HHT, HTH, THH, TTT}\}$

$\therefore n(A^C\cup B)=5$

답 ⑤

08 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 3, 4, 6, 7, 8\}$

이므로 $A=\{1, 3, 7\}$, $B=\{4, 8\}$

④ $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.

⑤ $A^C=\{4, 6, 8\}$, $B^C=\{1, 3, 6, 7\}$이므로

$A^C\cap B^C=\{6\}$

따라서 두 사건 A^C와 B^C는 서로 배반사건이 아니다.

답 ⑤

09 ㄱ. $A\cap B^C=\varnothing$이므로 두 사건 A와 B^C는 서로 배반사건이다.

ㄴ. $A^C\cap B=\{p, s\}$이므로 두 사건 A^C와 B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. $A^C\cap B^C=\{r\}$이므로 두 사건 A^C와 B^C는 서로 배반사건이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

10 사건 A와 배반사건인 사건은 여사건 A^C의 부분집합이고, 사건 B와 배반사건인 사건은 여사건 B^C의 부분집합이다.

즉 두 사건 A, B와 모두 배반사건인 사건 C는 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

이때 $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{1, 3, 5\}$이므로

$A^C=\{4, 5, 7\}$, $B^C=\{2, 4, 6, 7\}$

$\therefore A^C\cap B^C=\{4, 7\}$

따라서 사건 C의 모든 원소의 합이 최대인 사건은

$\{4, 7\}$

이므로 구하는 원소의 합의 최댓값은

$4+7=11$

답 11

11 집합 $\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합의 개수는

$2^5=32$

세 원소 a, c, e가 모두 포함되어 있는 부분집합의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$ 답 $\frac{1}{8}$

Q BOX
원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수
⇒ 2^n

쌤 한마디

특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

① A의 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수
○ 2^{n-k} (단, $k<n$)

② A의 특정한 원소 l개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수
○ 2^{n-l} (단, $l<n$)

③ A의 원소 중에서 k개는 반드시 원소로 갖고, l개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수
○ 2^{n-k-l} (단, $k+l<n$)

12 $540=2^2\cdot3^3\cdot5$이므로 540의 양의 약수의 개수는

$(2+1)\cdot(3+1)\cdot(1+1)=24$

540의 양의 약수 중 홀수의 개수는 $3^3\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

$3^3\cdot5$의 양의 약수의 개수는

$(3+1)\cdot(1+1)=8$

따라서 구하는 확률은

$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$ 답 ③

자연수 $N=p^aq^b$ (a, b는 자연수, p, q는 서로 다른 소수)의 양의 약수의 개수는
$(a+1)(b+1)$

13 $x+y=50$을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 49), (2, 48), (3, 47), \cdots, (49, 1)$ ⋯⋯ ㉠

의 49개이다.

$y=50-x$이므로 $xy\ge525$에서

$x(50-x)\ge525,\quad x^2-50x+525\le0$

$(x-15)(x-35)\le0 \quad \therefore 15\le x\le35$

㉠에서 $15\le x\le35$를 만족시키는 순서쌍 (x, y)는

$(15, 35), (16, 34), (17, 33), \cdots, (35, 15)$

의 21개이다.

$35-15+1=21$(개)

따라서 구하는 확률은

$\frac{21}{49}=\frac{3}{7}$ 답 $\frac{3}{7}$

14 5개의 인형을 일렬로 진열하는 경우의 수는

$5!=120$

토끼 인형 3개를 한 인형으로 생각하면 3개의 인형을 일렬로 진열하는 경우의 수는

$3!=6$

이고, 토끼 인형끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

이므로 토끼 인형끼리 이웃하게 진열하는 경우의 수는

$6\cdot6=36$

따라서 구하는 확률은

$\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$ 답 ②

15 7개의 음료를 일렬로 놓는 경우의 수는

$7!$

주스 4개를 일렬로 놓는 경우의 수는

$4!$

이고, 주스 사이사이의 3개의 자리에 우유를 놓는 경우의 수는

$3!$

이므로 우유와 주스를 교대로 놓는 경우의 수는

$4!\cdot3!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4!\cdot3!}{7!}=\frac{1}{35}$ 답 $\frac{1}{35}$

$7!$, $4!$, $3!$을 각각 계산하여 확률을 구하는 것보다 약분을 이용하여 확률을 구하는 것이 계산이 편리하다.

16 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

w와 r 사이에 들어가는 3개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

이고, w와 r를 포함한 5개의 문자를 한 문자로 생각하면 2개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

이때 w와 r가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이므로 w와 r 사이에 3개의 문자가 있도록 나열하는 경우의 수는

$24\cdot2\cdot2=96$

따라서 구하는 확률은

$\frac{96}{720}=\frac{2}{15}$ 답 ③

17 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

가수 2명과 코미디언 1명을 한 사람으로 생각하면 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

이고, 가수끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이므로 코미디언의 양옆에 가수가 앉는 경우의 수는

$2\cdot2=4$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$ 답 ①

18 서로 다른 6가지 색을 각 영역에 칠하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

분홍색과 보라색을 마주 보는 영역에 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

19 세 사람이 가위바위보를 한 번 할 때 나오는 모든 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이기는 한 명을 정하는 경우의 수는

3

이고, 이기는 한 명이 가위, 바위, 보 중에서 어느 하나를 내는 경우의 수는

3

이므로 한 명이 이기는 경우의 수는

$3\cdot3=9$

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

20 백승이와 세린이가 각각 다섯 종류의 과자 중에서 하나를 택하는 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

백승이와 세린이가 서로 다른 과자를 택하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

따라서 구하는 확률은

$\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$ 답 ⑤

21 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

770보다 작은 자연수는 76□ 꼴 또는 6□□ 꼴이다.

(i) 76□ 꼴인 자연수의 개수는

4

(ii) 6□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

(i), (ii)에서 770보다 작은 자연수의 개수는

$4+16=20$

따라서 구하는 확률은

$\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$ 답 $\frac{5}{16}$

22 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot2!}=180$

맨 뒤에 7을 나열하고, 나머지 숫자 1, 3, 3, 5, 7을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

따라서 구하는 확률은

$\frac{60}{180}=\frac{1}{3}$ 답 ⑤

23 X에서 Y로의 함수 f의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

$f(0)+f(1)+f(2)=10$을 만족시키는 함수 f의 개수는 3, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

24 6명의 학생 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

민희는 포함되고 영준이는 포함되지 않는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ 답 $\frac{3}{10}$

25 8개의 동전 중에서 2개의 동전을 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

앞면과 뒷면의 개수가 처음과 같으려면 앞면과 뒷면이 보이는 동전을 각각 1개씩 뒤집어야 하므로 그 경우의 수는

${}_4C_1\cdot{}_4C_1=16$

따라서 구하는 확률은

$\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$ 답 $\frac{4}{7}$

26 7개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

이때 삼각형이 만들어지는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 l에서 2개의 점을 택하고, 직선 m에서 1개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_5C_2\cdot{}_2C_1=20$

(ii) 직선 l에서 1개의 점을 택하고, 직선 m에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_5C_1\cdot{}_2C_2=5$

(i), (ii)에서 삼각형이 만들어지는 경우의 수는

$20+5=25$

따라서 구하는 확률은

$\frac{25}{35}=\frac{5}{7}$ 답 ④

Q BOX

분홍색을 칠하는 영역이 결정되면 보라색을 칠하는 영역은 마주 보는 영역에 고정되므로 보라색을 제외한 나머지 5가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같다.

이기는 한 명이 가위, 바위, 보 중에서 어느 하나를 냈을 때 나머지 두 명이 내는 것은 정해져 있다.

백승이와 세린이가 같은 종류의 과자를 고를 수 있으므로 중복순열을 이용한다.

백승이와 세린이가 서로 같은 과자를 택하는 경우의 수가 5이므로

$25-5=20$

과 같이 구할 수도 있다.

3, 4 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 그 합이 10이 되는 경우는

$3+3+4=10$

뿐이다.

민희와 영준이를 제외한 4명의 학생 중에서 2명의 대표를 뽑는 경우의 수

한 직선에서 2개의 점을 택하고, 다른 직선에서 1개의 점을 택하는 경우

27 양궁 선수가 10점을 맞힐 확률은

$\frac{900}{1500}=\frac{3}{5}$

따라서 화살을 45번 쏘아서 10점을 맞히는 횟수는

$\frac{3}{5}\cdot 45=27$ 답 ②

28 주머니 속에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n이라 하면 꺼낸 2개의 제비가 모두 당첨 제비일 확률이 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{{}_{n}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$, $\frac{n(n-1)}{90}=\frac{1}{3}$

$n(n-1)=6\cdot 5$ $\therefore n=6$

따라서 주머니 속에는 6개의 당첨 제비가 들어 있다.

답 6

29 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ㄱ. $\{2, 3, 5\}$이므로 그 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

ㄴ. $\varnothing$이므로 그 확률은 0

ㄷ. $\{1\}$이므로 그 확률은 $\frac{1}{6}$

ㄹ. $x(x+6)\le 0$에서 $-6\le x\le 0$

따라서 주어진 사건은 $\varnothing$이므로 그 확률은 0

이상에서 확률이 0인 사건은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

30 ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$이고, 두 사건 A와 A^C는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{n(A^C)}{n(S)}=\frac{n(S)-n(A)}{n(S)}$

$=1-\frac{n(A)}{n(S)}=1-\mathrm{P}(A)$

$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$

ㄴ. $\varnothing\subset(A\cap B)\subset S$이므로

$\mathrm{P}(\varnothing)\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(S)$

$\therefore 0\le\mathrm{P}(A\cap B)\le 1$

ㄷ. [반례] $S=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1\}$, $B=\{1, 2\}$이면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$이지만 $A\cap B=\{1\}$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

06 확률의 덧셈정리

Ⓦ 22쪽

01 (1) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

(2) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{4}{5}=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{15}$

답 (1) $\frac{5}{12}$ (2) $\frac{4}{15}$

02 (1) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{7}=\frac{11}{14}$

(2) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$\frac{3}{4}=\frac{3}{5}+\mathrm{P}(B)$ $\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{20}$

답 (1) $\frac{11}{14}$ (2) $\frac{3}{20}$

03 10의 약수가 아닌 수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A라 하면 A^C는 10의 약수가 적힌 카드를 뽑는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

04 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(S)=1$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=1$

따라서 $1=\mathrm{P}(A)+\frac{2}{7}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{7}$ 답 $\frac{5}{7}$

05 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$ ······ ㉠

이때

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{10}$

이므로 ㉠에서

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$ 답 ①

06 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8}$에서

$\mathrm{P}(A)\left\{\mathrm{P}(A)+\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{8}$

$8\{\mathrm{P}(A)\}^2+2\mathrm{P}(A)-1=0$

$\{2\mathrm{P}(A)+1\}\{4\mathrm{P}(A)-1\}=0$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$ ($\because 0<\mathrm{P}(A)<1$)

Q BOX

10의 약수가 적힌 카드를 뽑는 경우는
1, 2, 5, 10의 4가지

표본공간의 원소 중 이 부등식을 만족시키는 것은 없다.

드모르간의 법칙
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$,
$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

W 03 확률의 뜻과 활용

따라서 $P(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$이고, 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

07 개를 기르는 가구를 택하는 사건을 A, 고양이를 기르는 가구를 택하는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{65}{100}=\frac{13}{20},\ P(B)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5},$$

$$P(A\cap B)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$$

개와 고양이를 모두 기르는 가구를 택하는 사건

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{13}{20}+\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=\frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

08 홀수인 다섯 자리 자연수를 만드는 사건을 A, 20000 이하인 다섯 자리 자연수를 만드는 사건을 B라 하면

1□□□□ 꼴

홀수이려면 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 3, 5의 3개

$$P(A)=\frac{{}_3C_1\cdot 4!}{5!}=\frac{3}{5},\ P(B)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5},$$

$$P(A\cap B)=\frac{{}_2C_1\cdot 3!}{5!}=\frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

답 ④

09 G가 맨 앞에 오는 사건을 A, G가 맨 뒤에 오는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{5!}{6!}=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{5!}{6!}=\frac{1}{6}$$

G$\underbrace{□□□□□}_{5!}$

$\underbrace{□□□□□}_{5!}$G

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

답 ③

10 여학생이 남학생보다 많이 뽑히려면 뽑힌 5명의 학생 중에서 여학생이 3명 또는 4명이어야 한다.

여학생을 3명 뽑는 사건을 A, 여학생을 4명 뽑는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{{}_4C_3\cdot{}_6C_2}{{}_{10}C_5}=\frac{5}{21},$$

$$P(B)=\frac{{}_4C_4\cdot{}_6C_1}{{}_{10}C_5}=\frac{1}{42}$$

10명의 학생 중에서 5명을 뽑는 경우의 수

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{21}+\frac{1}{42}=\frac{11}{42}$$

답 $\frac{11}{42}$

11 나오는 두 눈의 수의 곱이 10의 배수가 아닌 사건을 A라 하면 A^C는 나오는 두 눈의 수의 곱이 10의 배수인 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 두 눈의 수의 곱이 10의 배수인 경우는 (2, 5), (5, 2), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)의 6가지

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

답 ②

12 연속하지 않는 자연수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 A라 하면 A^C는 연속하는 자연수가 적힌 카드를 꺼내는 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{14}{{}_{15}C_2}=\frac{2}{15}$$

두 수가 연속하는 경우는 1과 2, 2와 3, 3과 4, …, 14와 15의 14가지

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$$

답 $\frac{13}{15}$

13 적어도 한 개는 4의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 A라 하면 A^C는 3개 모두 4의 배수가 아닌 수가 적힌 공을 꺼내는 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_9C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{21}{55}$$

4의 배수가 적힌 공은 4, 8, 12이므로 4의 배수가 아닌 수가 적힌 공은 12−3=9(개)

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{21}{55}=\frac{34}{55}$$

답 ④

14 적어도 2명이 같은 지역을 탐험하는 사건을 A라 하면 A^C는 4명 모두 다른 지역을 탐험하는 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_5P_4}{{}_5\Pi_4}=\frac{24}{125}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{24}{125}=\frac{101}{125}$$

답 ②

15 적어도 한 개의 꿀이 들어 있는 떡을 꺼내는 사건을 A라 하면 A^C는 2개 모두 꿀이 들어 있지 않은 떡을 꺼내는 사건이다.

꿀이 들어 있지 않은 떡의 개수는 $10-n$이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_{10-n}C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{(10-n)(9-n)}{90}$$

이때 $P(A)=\frac{13}{15}$이므로

$$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{13}{15}=\frac{2}{15}$$

즉 $\frac{(10-n)(9-n)}{90}=\frac{2}{15}$이므로

$n^2-19n+78=0$, $(n-6)(n-13)=0$

$\therefore n=6$

바구니에는 10개의 떡이 들어 있으므로 $n\neq 13$

답 6

16 바닥에 닿는 면에 적힌 두 수의 합이 6 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 바닥에 닿는 면에 적힌 두 수의 합이 6 미만인 사건이므로 두 수를 순서쌍으로 나타내면

$$A^C=\{(2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$$

두 수의 합이 4인 경우

두 수의 합이 5인 경우

$$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

답 $\frac{11}{12}$

쌤 한마디

각 면에 2, 3, 4, 5, 6, 7의 숫자가 각각 하나씩 적힌 정육면체를 두 번 던지는 시행이므로

4≤(두 수의 합)≤14

이다.

따라서 두 수의 합이 6 미만인 사건은 두 수의 합이 4이거나 5인 사건이다.

17 은반지를 2개 이하로 꺼내는 사건을 A라 하면 A^C는 은반지를 2개 초과, 즉 3개 꺼내는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$$

답 ②

18 기호가 두 종류 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 기호가 두 종류 미만, 즉 한 종류인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{4}{{}_4\Pi_4}=\frac{1}{64}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

답 $\frac{63}{64}$

Q BOX

04 조건부확률

07 조건부확률

W 25쪽

01 $A=\{3, 6\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$

(1) $A\cap B=\{3\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$

(2) $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

(3) $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

답 (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$

02 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

03 첫 번째에 파란 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 파란 공을 꺼내는 사건을 B라 하자.

(1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

(2) $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

첫 번째에 파란 공을 꺼내고 두 번째에 빨간 공을 꺼낼 확률

(3) $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{4}{15}$ (3) $\frac{4}{15}$

04 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{7}{8}$$

답 ⑤

05 $\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$이고 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$$

다음과 같이 벤다이어그램으로 확인할 수도 있다.

$$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{15}$$

답 $\frac{8}{15}$

06 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}$에서

$P(A\cap B)=\frac{1}{2}P(B)$

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$\frac{6}{5}P(B)=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{2}P(B)$

$\frac{7}{10}P(B)=\frac{1}{2}\qquad\therefore P(B)=\frac{5}{7}$ 답 ③

07 앞면이 한 번 나오는 사건을 A, 두 번째에 앞면이 나오는 사건을 B라 할 때, 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$A=\{HTT, THT, TTH\}$,

$B=\{HHH, HHT, THH, THT\}$,

$A\cap B=\{THT\}$

$\therefore P(A)=\frac{3}{8}, P(A\cap B)=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$$ 답 $\frac{1}{3}$

08 A 메뉴를 선택한 승객을 택하는 사건을 A, 여자 승객을 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}, P(A\cap B)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{8}$$ 답 ③

09 불량품을 택하는 사건을 A, P 회사의 제품을 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{3+2}{45}=\frac{1}{9}, P(A\cap B)=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{9}}=\frac{3}{5}$$ 답 $\frac{3}{5}$

10 당첨 제비를 꺼내는 사건을 A, 1등 당첨 제비를 꺼내는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1+{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{6}{7}$,

$P(A\cap B)=\frac{{}_1C_1\cdot{}_6C_1}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{6}{7}}=\frac{1}{3}$$ 답 ②

11 스노보드를 선호하는 남자 회원 수는

$20-11=9$

이므로 전체 남자 회원 수는

$12+9=21$

남자 회원을 택하는 사건을 A, 스노보드를 선호하는 회원을 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{21}{50}, P(A\cap B)=\frac{9}{50}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{50}}{\frac{21}{50}}=\frac{3}{7}$$ 답 $\frac{3}{7}$

12 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
P 영화	13	9	22
Q 영화	8	10	18
합계	21	19	40

Q 영화를 관람한 학생을 택하는 사건을 A, 여학생을 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{18}{40}=\frac{9}{20}, P(A\cap B)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{20}}=\frac{5}{9}$$ 답 $\frac{5}{9}$

13 일본어를 선택한 남학생 수를 x라 하면 전체 학생 수는

$x+25+21+19=x+65$

일본어를 선택한 학생을 택하는 사건을 A, 남학생을 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{x+21}{x+65}, P(A\cap B)=\frac{x}{x+65}$

임의로 택한 한 명이 일본어를 선택한 학생일 때, 그 학생이 남학생일 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{x}{x+65}}{\frac{x+21}{x+65}}=\frac{x}{x+21}$$

즉 $\frac{x}{x+21}=\frac{5}{12}$이므로

$12x=5x+105\qquad\therefore x=15$

따라서 남학생 수는

$15+25=40$ 답 ③

14 희찬이가 땅콩 초콜릿을 꺼내는 사건을 A, 연아가 땅콩 초콜릿을 꺼내는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{7}{18}, P(B|A)=\frac{6}{17}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

$=\frac{7}{18}\cdot\frac{6}{17}=\frac{7}{51}$ 답 ③

Q BOX

한 개의 동전을 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $2\cdot2\cdot2=8$

당첨 제비를 1개 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_1\cdot{}_3C_1$
당첨 제비를 2개 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_2$
따라서 당첨 제비를 꺼내는 경우의 수는
${}_4C_1\cdot{}_3C_1+{}_4C_2$

희찬이가 땅콩 초콜릿을 꺼냈을 때, 연아가 땅콩 초콜릿을 꺼낼 확률

15 A 주머니를 택하는 사건을 A, 흰 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B|A)=\frac{5}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{14}$$

답 $\frac{5}{14}$

16 첫 번째에 A 인터넷 사이트 회원인 여학생을 뽑는 사건을 A, 두 번째에 A 인터넷 사이트 회원이 아닌 남학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{10}{26}=\frac{5}{13},\ P(B|A)=\frac{3}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$
$$=\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{25}=\frac{3}{65}$$

답 ①

17 사격 선수가 총을 쏠 때 첫 번째 시도에서 명중시키는 사건을 A라 하면 $P(A)=\frac{4}{7}$이므로

$$P(A^C)=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$$

두 번째 시도에서 명중시키는 사건을 B라 하면 첫 번째 시도에서 명중시키지 못했을 때 두 번째 시도에서 명중시키지 못할 확률이 $\frac{1}{3}$이므로

$$P(B^C|A^C)=\frac{1}{3}$$

이 사격 선수가 두 번 모두 명중시키지 못할 확률은

$$P(A^C\cap B^C)=P(A^C)P(B^C|A^C)$$
$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-P(A^C\cap B^C)=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

답 $\frac{6}{7}$

18 첫 번째에 500원짜리 동전을 뒤집는 사건을 A, 두 번째에 100원짜리 동전을 뒤집는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{3}{n+3},\ P(B|A)=\frac{n}{n+2}$$

첫 번째에 500원짜리 동전을, 두 번째에 100원짜리 동전을 뒤집을 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$
$$=\frac{3}{n+3}\cdot\frac{n}{n+2}$$
$$=\frac{3n}{(n+3)(n+2)}$$

즉 $\frac{3n}{(n+3)(n+2)}=\frac{3}{10}$이므로

$10n=n^2+5n+6,\quad n^2-5n+6=0$

$(n-2)(n-3)=0\quad \therefore n=2$ 또는 $n=3$

따라서 모든 n의 값의 합은

$2+3=5$

답 5

Q BOX

A^C는 5점짜리 문제를 택하는 사건이다.

두 주머니 중 임의로 한 개를 택할 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

전체 학생 수는 $9+3+10+4=26$

(적어도 한 개가 ●일 확률)
$=1-$(모두 ●가 아닐 확률)

19 상희가 4점짜리 문제를 택하는 사건을 A, 문제의 정답을 맞히는 사건을 B라 하면

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{7},$$
$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$$
$$=\frac{1}{7}+\frac{1}{4}=\frac{11}{28}$$

답 $\frac{11}{28}$

20 내년 여름의 평균 기온이 예년보다 높은 사건을 A, 회사가 내년에 판매 목표액을 달성하는 사건을 B라 하면

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=0.5\times0.9=0.45,$$
$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=0.5\times0.6=0.3$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$$
$$=0.45+0.3=0.75$$

답 ③

21 수아가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 진혁이가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하면

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15},$$
$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{7}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$$
$$=\frac{1}{15}+\frac{7}{30}=\frac{3}{10}$$

답 $\frac{3}{10}$

22 남학생을 택하는 사건을 A, 여학생을 택하는 사건을 B, 햄버거를 선택하는 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{100}{180}\cdot\frac{60}{100}=\frac{1}{3},$$
$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{80}{180}\cdot\frac{50}{100}=\frac{2}{9}$$
$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}$$

답 ④

23 A 상자를 택하는 사건을 A, B 상자를 택하는 사건을 B, 주황색 탁구공 2개를 꺼내는 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{7},$$
$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_5C_2}{{}_7C_2}=\frac{5}{21}$$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$

$=\frac{1}{7}+\frac{5}{21}=\frac{8}{21}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{5}{21}}{\frac{8}{21}}=\frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

24 카드 A를 꺼내는 사건을 A, 카드 B를 꺼내는 사건을 B, 카드 C를 꺼내는 사건을 C, 꺼낸 카드의 보이는 면에 ♣가 그려져 있는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,

$\mathrm{P}(C\cap E)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)=\frac{1}{3}\cdot 0=0$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+0=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$ 답 ④

세 장의 카드 중 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

08 사건의 독립과 종속

W 29쪽

01 (1) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

꺼낸 구슬을 다시 넣지 않으므로 주머니의 금색 구슬과 은색 구슬의 개수가 변한다.

(2) $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{7}$

(3) $\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{4}{7}$ (3) 종속

02 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

03 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{4}{7}=\frac{3}{7}+\frac{1}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{21}$

이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다. 답 종속

04 각 시행은 독립시행이므로 구하는 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64}$ 답 $\frac{27}{64}$

05 8장의 카드 중에서 자음이 적힌 카드는 R, P, L, N의 4장이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

초록색 카드는 A, R, N, E의 4장이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

초록색 카드 중 자음이 적힌 카드는 R, N의 2장이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다. 답 독립

06 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{3, 6\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$A\cap B=\{2\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$B\cap C=\{3\}$에서 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 B, C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$C\cap A=\{6\}$에서 $\mathrm{P}(C\cap A)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(C\cap A)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A)$

따라서 두 사건 C, A는 서로 독립이다.

이상에서 서로 독립인 사건인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

07 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\boxed{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$

$B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$이고 $A\cap B$와 $A^C\cap B$는 서로 $\boxed{\text{배반}}$사건이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(B)-\boxed{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$

$=\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(A)\}$

$=\boxed{\mathrm{P}(A^C)}\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A^C, B도 서로 독립이다.

$\therefore$ (가) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ (나) 배반 (다) $\mathrm{P}(A^C)$

답 ①

08 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이때 $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$이므로

$0<\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)<1$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq 0$

따라서 두 사건 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A|A\cap B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)}=1$이고 $0<\mathrm{P}(A)<1$

이므로

$\mathrm{P}(A|B)\neq \mathrm{P}(A|A\cap B)$

ㄷ. $A\cap B=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

따라서

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=0$,

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=0$

이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

09 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{2}{7}$

$\therefore \mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)$

$=1-\dfrac{2}{7}=\dfrac{5}{7}$

답 ⑤

10 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$,

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$이고, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{7}{10}$

답 $\dfrac{7}{10}$

11 두 사건 A^C, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이고 $\mathrm{P}(A)=k$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{10}{7}k$이므로

$\dfrac{3}{7}=k+\dfrac{10}{7}k-\dfrac{10}{7}k^2$

$10k^2-17k+3=0$, $(2k-3)(5k-1)=0$

$\therefore k=\dfrac{1}{5}$ ($\because 0<k<1$)

답 $\dfrac{1}{5}$

Q BOX

$\mathrm{P}(A)=k$이므로

$0\le k\le 1$

이때 $k=0$ 또는 $k=1$이면 $\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{3}{7}$을 만족시키지 않는다.

$\therefore 0<k<1$

$\mathrm{P}(A\cap(A\cap B))$
$=\mathrm{P}(A\cap B)$

$\dfrac{7}{10}\mathrm{P}(B)=k$에서

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{10}{7}k$

12 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{3}{4}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{4}\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\dfrac{5}{6}=\dfrac{3}{4}+\mathrm{P}(B)-\dfrac{3}{4}\mathrm{P}(B)$

$\dfrac{1}{4}\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{12}$ $\therefore \mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}$

한편 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

$=\dfrac{3}{4}\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

답 ④

13 두 상자 A, B에서 빨간색 깃발을 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{7}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{14}$

답 ①

14 정우와 서희가 그림을 완성하는 사건을 각각 A, B라 하면 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 정우와 서희가 모두 그림을 완성할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{12}$

답 $\dfrac{11}{12}$

15 하연이와 용규가 마라톤을 완주하는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=p$, $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\dfrac{4}{15}$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

$\dfrac{4}{15}=\dfrac{2}{5}(1-p)$, $1-p=\dfrac{2}{3}$

$\therefore p=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{15}$

답 ④

16 한 명도 완치되지 못할 확률, 즉 0명이 완치될 확률은

$${}_3C_0\left(\frac{7}{10}\right)^0\left(\frac{3}{10}\right)^3=\frac{27}{1000}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{27}{1000}=\frac{973}{1000}$$ 답 $\frac{973}{1000}$

17 한 개의 공을 꺼낼 때, 파란 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{2}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$${}_5C_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$$ 답 ⑤

18 주사위를 한 번 던질 때, 5의 약수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

주사위를 4번 던질 때, 5의 약수의 눈이 한 번도 나오지 않을 확률, 즉 5의 약수의 눈이 0번 나올 확률은

$${}_4C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

이므로 5의 약수의 눈이 한 번 이상 나올 확률은

$$1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}$$

따라서 $p=81$, $q=65$이므로

$p+q=146$ 답 146

19 앞면이 x번, 뒷면이 y번 나온다고 하면 동전을 4번 던졌으므로

$x+y=4$ …… ㉠

점 P가 꼭짓점 A에서 꼭짓점 F까지 움직인 거리는 5이므로

$x+2y=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=1$

따라서 동전을 4번 던져서 앞면이 3번, 뒷면이 1번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$$ 답 ③

쌤 한마디

동전을 4번 던져서 나오는 각 경우에 따라 점 P의 위치는 다음과 같다.

① 앞면이 4번 나올 때 ◎ 꼭짓점 E
② 앞면이 3번, 뒷면이 1번 나올 때 ◎ 꼭짓점 F
③ 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나올 때 ◎ 꼭짓점 A
④ 앞면이 1번, 뒷면이 3번 나올 때 ◎ 꼭짓점 B
⑤ 뒷면이 4번 나올 때 ◎ 꼭짓점 C

20 한 개의 동전을 4번 던져서 앞면이 나오는 횟수보다 뒷면이 나오는 횟수가 크려면 뒷면이 3번 또는 4번 나와야 한다.

동전을 한 번 던질 때, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

Q BOX

적어도 한 명이 완치되는 사건은 0명이 완치되는 사건의 여사건이다.

70 % ➡ $\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$

5의 약수의 눈이 한 번 이상 나오는 사건은 5의 약수의 눈이 0번 나오는 사건의 여사건이다.

동전을 한 번 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

홀수의 눈이 1번, 짝수의 눈이 2번 나와야 한다.

홀수의 눈이 2번, 짝수의 눈이 1번 나와야 한다.

(ⅰ) 뒷면이 3번 나올 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$$

(ⅱ) 뒷면이 4번 나올 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$$ 답 $\frac{5}{16}$

21 웅이가 본선에 진출하려면 예선 4문제를 모두 맞히거나 예선 4문제 중 3문제를 맞히고 패자 부활전의 추가 문제를 맞혀야 한다.

(ⅰ) 예선 4문제를 모두 맞힐 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81}$$

(ⅱ) 예선 4문제 중 3문제를 맞히고 패자 부활전의 추가 문제를 맞힐 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\frac{1}{4}=\frac{8}{81}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{81}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{81}+\frac{2}{81}=\frac{1}{27}$$ 답 ②

22 6 번째 경기에서 우승 팀이 결정되려면 우승 팀은 5 번째 경기까지 3번 이기고 6 번째 경기에서 이겨야 한다.

두 팀이 이길 확률이 서로 같으므로 A, B 두 팀이 이길 확률은 각각 $\frac{1}{2}$

(ⅰ) A 팀이 우승할 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$$

(ⅱ) B 팀이 우승할 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{5}{32}+\frac{5}{32}=\frac{5}{16}$$ 답 $\frac{5}{16}$

23 주사위를 3번 던질 때, 점 P와 원점 사이의 거리가 1이려면 점 P의 좌표가 -1 또는 1이어야 한다.

주사위를 한 번 던질 때, 홀수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

(ⅰ) 점 P의 좌표가 -1일 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

(ⅱ) 점 P의 좌표가 1일 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$$ 답 $\frac{3}{4}$

05 확률변수와 확률분포

09 이산확률변수와 연속확률변수

W 33쪽

01 (1) 0, 1, 2

(2) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 5의 약수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이므로

$$P(X=0)={}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},$$

$$P(X=1)={}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{4}{9},$$

$$P(X=2)={}_2C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{9}$$

Q BOX: 5의 약수의 눈이 나오는 경우는 1, 5의 2가지이므로 그 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(3)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

답 풀이 참조

02 (1) 6개의 제비 중에서 2개의 제비를 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_2$

뽑힌 2개의 제비 중에서 당첨 제비가 x개 포함되는 경우의 수는 ${}_2C_x\cdot{}_4C_{2-x}$

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{{}_2C_x\cdot{}_4C_{2-x}}{{}_6C_2}\ (x=0,\ 1,\ 2)$$

Q BOX: 당첨 제비가 2개 있으므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2

(2) $P(X=0)=\frac{{}_2C_0\cdot{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}$,

Q BOX: 확률질량함수의 식에 $x=0$을 대입한 것이다.

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$,

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\cdot{}_4C_0}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

(3) 구하는 확률은

$$P(X\le1)=P(X=0)+P(X=1)$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{8}{15}=\frac{14}{15}$$

답 풀이 참조

03 (1) 확률의 총합은 1이므로

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+a+\frac{1}{7}=1$

$\therefore a=\frac{3}{7}$

(2) $P(X=0$ 또는 $X=2)=P(X=0)+P(X=2)$

$=\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

(3) $P(1\le X\le3)$

$=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$

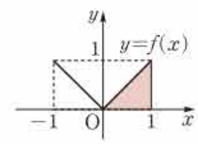
(4) $P(X\le2)$

$=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{6}{7}$

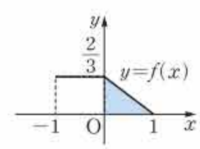
답 (1) $\frac{3}{7}$ (2) $\frac{4}{7}$ (3) $\frac{6}{7}$ (4) $\frac{6}{7}$

04 (1) $P(0\le X\le1)$은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$P(0\le X\le1)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}$$

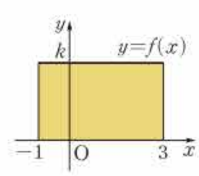
(2) $P(0\le X\le1)$은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$P(0\le X\le1)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

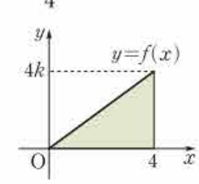
답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$

05 (1) $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\{3-(-1)\}\cdot k=1\qquad\therefore k=\frac{1}{4}$$

(2) $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\cdot4\cdot4k=1\qquad\therefore k=\frac{1}{8}$$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{8}$

쌤 한마디

확률밀도함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 때 $f(x)$의 식에 미지수가 있으면 확률은 0 이상이므로 제1사분면과 제2사분면에서만 생각한다.

06 답 (가) 0 (나) 1 (다) $\frac{1}{4}$

07 뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하면 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수의 차가

2인 경우는 $(2, 4)$, $(4, 6)$, $(6, 8)$의 3가지

4인 경우는 $(2, 6)$, $(4, 8)$의 2가지

6인 경우는 $(2, 8)$의 1가지

즉 X가 가질 수 있는 값은 2, 4, 6이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

답 풀이 참조

08 확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$$

$$k\cdot2^2+k\cdot3^2+k\cdot4^2=1$$

$$29k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{29}$$

답 $\frac{1}{29}$

09 확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=-3)+\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)=1$$

$$a+4a+a+b=1$$

$$\therefore 6a+b=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\mathrm{P}(X=-2)=\frac{4}{3}\mathrm{P}(X=0)$에서

$$4a=\frac{4}{3}b \qquad \therefore a=\frac{b}{3} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{9},\ b=\frac{1}{3}$$

㉡을 ㉠에 대입하면
$6\cdot\frac{b}{3}+b=1,\ 3b=1$
$\therefore b=\frac{1}{3}$
$b=\frac{1}{3}$을 ㉡에 대입하면
$a=\frac{1}{9}$

$X^2+3X=0$에서

$$X(X+3)=0 \qquad \therefore X=-3 \text{ 또는 } X=0$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X^2+3X=0)&=\mathrm{P}(X=-3 \text{ 또는 } X=0)\\&=\mathrm{P}(X=-3)+\mathrm{P}(X=0)\\&=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

답 $\frac{4}{9}$

10 확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=8)=1$$

$$\frac{k}{1\cdot2}+\frac{k}{2\cdot3}+\cdots+\frac{k}{8\cdot9}=1$$

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$
(단, $A\neq B$)

$$k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\right\}=1$$

$$k\left(1-\frac{1}{9}\right)=1 \qquad \therefore k=\frac{9}{8}$$

따라서

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{9}{8x(x+1)} \quad (x=1, 2, \cdots, 8)$$

이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(3\le X\le5)\\&=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)\\&=\frac{9}{8\cdot3\cdot4}+\frac{9}{8\cdot4\cdot5}+\frac{9}{8\cdot5\cdot6}\\&=\frac{9}{8}\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\right\}\\&=\frac{9}{8}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{16}\end{aligned}$$

답 ②

11 바닥에 닿는 면에 적힌 두 수를 각각 a, b라 하면 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여

$a+b=2$인 경우는

$(1, 1)$의 1가지

$a+b=6$인 경우는

$(1, 5)$, $(3, 3)$, $(5, 1)$의 3가지

이므로 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{16},\ \mathrm{P}(X=6)=\frac{3}{16}$$

정사면체를 두 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는
$4\cdot4=16$
이므로
$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{16}$,
$\mathrm{P}(X=6)=\frac{3}{16}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X=2 \text{ 또는 } X=6)&\\=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=6)&\\=\frac{1}{16}+\frac{3}{16}=\frac{1}{4}&\end{aligned}$$

답 ②

12 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x\cdot{}_4\mathrm{C}_{2-x}}{{}_7\mathrm{C}_2} \quad (x=0, 1, 2)$$

이므로

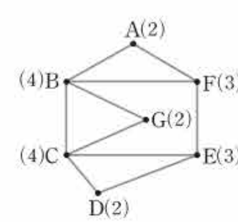
$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\le1)&=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\\&=\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7}\end{aligned}$$

답 $\frac{6}{7}$

13 각 지점에 연결된 도로의 개수를 표시하면 오른쪽 그림과 같으므로 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4



$3X-2>4$에서

$$3X>6 \qquad \therefore X>2$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(3X-2>4)&=\mathrm{P}(X>2)\\&=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\\&=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4}{7}\end{aligned}$$

답 $\frac{4}{7}$

14 ① $\frac{4}{3}<x\le2$에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

② $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdot1=\frac{5}{4}\neq1$$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

③ $0\le x\le 2$에서 $f(x)\ge 0$이고 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)=1$$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수이다.

④ $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2=\frac{1}{2}\pi\ne 1$$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

⑤ $0\le x<\frac{1}{2}$에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

답 ③

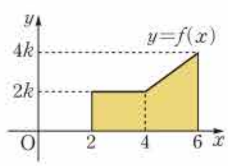
15 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\{3-(-2)\}\cdot k=1,\qquad \frac{5}{2}k=1$$

$$\therefore k=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

16 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=6$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$2\cdot 2k+\frac{1}{2}\cdot(2k+4k)\cdot 2=1,\qquad 10k=1$$

$$\therefore k=\frac{1}{10}$$

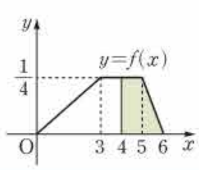
답 $\frac{1}{10}$

17 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\cdot(2+6)\cdot k=1,\qquad 4k=1$$

$$\therefore k=\frac{1}{4}$$

$\mathrm{P}(X\ge 4)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

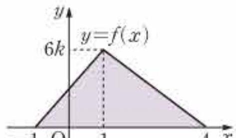


$$\mathrm{P}(X\ge 4)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\frac{3}{8}$$

$(5-4)+(6-4)$
$=1+2=3$

답 ②

18 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



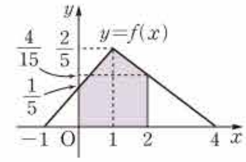
$$\frac{1}{2}\cdot\{4-(-1)\}\cdot 6k=1$$

$$15k=1\qquad\therefore k=\frac{1}{15}$$

$f(x)=\frac{1}{5}(x+1)$
$(-1\le x\le 1)$이므로
$f(0)=\frac{1}{5}$

$f(x)=\frac{2}{15}(4-x)$
$(1\le x\le 4)$이므로
$f(2)=\frac{4}{15}$

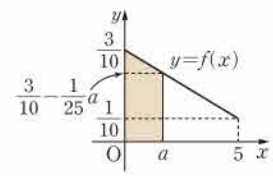
$\mathrm{P}(0\le X\le 2)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$\mathrm{P}(0\le X\le 2)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)\cdot 1$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{15}\right)\cdot 1$$
$$=\frac{19}{30}$$

답 $\frac{19}{30}$

19 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $\mathrm{P}(X\le a)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(X\le a)=\frac{4}{9}$에서

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{3}{10}+\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{25}a\right)\right\}\cdot a=\frac{4}{9}$$

$$9a^2-135a+200=0$$

$$(3a-5)(3a-40)=0$$

$$\therefore a=\frac{5}{3}\ (\because 0<a<5)$$

답 $\frac{5}{3}$

10 이산확률변수의 평균과 표준편차

Ⓦ 36쪽

01 (1) $\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{9}$

$$=\frac{7}{3}$$

(2) $\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{2}{9}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{3}+4^2\cdot\frac{1}{9}$

$$=\frac{19}{3}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{19}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

답 (1) $\frac{7}{3}$ (2) $\frac{8}{9}$ (3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

02 (1) $\mathrm{E}(3X-6)=3\mathrm{E}(X)-6$

$$=3\cdot 7-6=15$$

(2) $\mathrm{V}(-2X+5)=(-2)^2\mathrm{V}(X)$

$$=4\cdot 4=16$$

(3) $\sigma\left(-\frac{1}{8}X\right)=\left|-\frac{1}{8}\right|\sigma(X)$

$$=\frac{1}{8}\cdot 2=\frac{1}{4}$$

$\mathrm{V}(X)=4$이므로
$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=2$

답 (1) 15 (2) 16 (3) $\frac{1}{4}$

03 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	1

$\mathrm{E}(X)=-1\cdot\frac{1}{7}+0\cdot\frac{3}{14}+1\cdot\frac{2}{7}+2\cdot\frac{5}{14}=\frac{6}{7}$,

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{1}{7}+0^2\cdot\frac{3}{14}+1^2\cdot\frac{2}{7}+2^2\cdot\frac{5}{14}=\frac{13}{7}$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{13}{7}-\left(\frac{6}{7}\right)^2\\&=\frac{55}{49}\end{aligned}$$

답 ③

04 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=5)=1$

$a+\frac{1}{6}+b=1$

$\therefore a+b=\frac{5}{6}$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=\frac{10}{3}$에서

$a+3\cdot\frac{1}{6}+5b=\frac{10}{3}$

$\therefore a+5b=\frac{17}{6}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore b-a=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

05 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$a+a^2+\frac{a}{2}=1,\qquad 2a^2+3a-2=0$

$(a+2)(2a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

이때 $0\le\mathrm{P}(X=x)\le1$이므로

$a=\frac{1}{2}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{4}=5$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=5-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{11}{4}\end{aligned}$$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{11}}{2}$

06 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{6}$,

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_6\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{E}(X)&=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{30}\\&=\frac{6}{5}\end{aligned}$$

답 ②

07 X가 가질 수 있는 값은 -1, 0, 1이고, 그 확률은 각각

두 수의 곱이 -1인 경우는
$-1\cdot1=-1$

$\mathrm{P}(X=-1)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}$,

두 수의 곱이 1인 경우는
$1\cdot1=1$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$,

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{1}{3}+0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{6}\right)^2\\&=\frac{17}{36}\end{aligned}$$

답 $\frac{17}{36}$

08 뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하면 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수 중 큰 수가

1인 경우는

$(0, 1)$의 1가지

2인 경우는

$(0, 2)$, $(1, 2)$의 2가지

3인 경우는

$(0, 3)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$의 3가지

4인 경우는

$(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$의 4가지

즉 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$$P(X=1)=\frac{1}{{}_5C_2}=\frac{1}{10},\ P(X=2)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{1}{5},$$
$$P(X=3)=\frac{3}{{}_5C_2}=\frac{3}{10},\ P(X=4)=\frac{4}{{}_5C_2}=\frac{2}{5}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

$E(X)=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{2}{5}=3,$

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{10}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{3}{10}+4^2\cdot\frac{2}{5}=10$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=10-3^2=1$$
$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{1}=1$$

답 1

09 $a+b+c=8$에서 $\quad c=8-a-b \quad \cdots\cdots$ ㉠

X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{a}{8}$	$\frac{b}{8}$	$\frac{8-a-b}{8}$	1

$E(X)=\frac{3}{2}$에서

$$1\cdot\frac{a}{8}+2\cdot\frac{b}{8}+3\cdot\frac{8-a-b}{8}=\frac{3}{2}$$
$$\therefore 2a+b=12 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{1}{2}$에서

$$1^2\cdot\frac{a}{8}+2^2\cdot\frac{b}{8}+3^2\cdot\frac{8-a-b}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$
$$\therefore 8a+5b=50 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=5,\ b=2$

$a=5,\ b=2$를 ㉠에 대입하면

$$c=8-5-2=1$$
$$\therefore a+b-c=6$$

답 ④

10 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 한 번의 게임에서 나오는 각각의 경우와 그때의 상금은 다음과 같다.

500원	100원	100원	상금(원)
H	H	H	700
H	H	T	600
H	T	H	600
H	T	T	500
T	H	H	200
T	H	T	100
T	T	H	100
T	T	T	0

한 번의 게임에서 받을 수 있는 상금을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 200, 500, 600, 700이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{1}{8},\ P(X=100)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},$$
$$P(X=200)=\frac{1}{8},\ P(X=500)=\frac{1}{8},$$
$$P(X=600)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},\ P(X=700)=\frac{1}{8}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	200	500	600	700	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\therefore E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{1}{4}+200\cdot\frac{1}{8}+500\cdot\frac{1}{8}$$
$$+600\cdot\frac{1}{4}+700\cdot\frac{1}{8}$$
$$=350$$

따라서 구하는 기댓값은 350원이다.

답 350원

11 한 번의 게임에서 받을 수 있는 상금을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 500, 1000, 1500이고, 그 확률은 각각

$$P(X=500)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_3C_0}{{}_6C_2}=\frac{1}{5},$$
$$P(X=1000)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{5},$$
$$P(X=1500)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{3}{5}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	500	1000	1500	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

$$\therefore E(X)=500\cdot\frac{1}{5}+1000\cdot\frac{1}{5}+1500\cdot\frac{3}{5}$$
$$=1200$$

따라서 구하는 기댓값은 1200원이다.

답 ⑤

12 $E(Y)=5$에서 $\quad E\left(\frac{1}{2}X+3\right)=5$

$$\frac{1}{2}E(X)+3=5,\quad \frac{1}{2}E(X)=2$$
$$\therefore E(X)=4$$

또

$$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$$
$$=26-5^2=1$$

이므로

$$V\left(\frac{1}{2}X+3\right)=1,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^2V(X)=1$$
$$\therefore V(X)=4$$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{4}=2$이므로

$$\frac{E(X)}{\sigma(X)}=2$$

답 2

Q BOX

㉡×5−㉢을 하면
$2a=10 \quad \therefore a=5$
$a=5$를 ㉡에 대입하면
$10+b=12 \quad \therefore b=2$

$V(Y)=1$에서
$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=1$
임을 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.
$\sigma\left(\frac{1}{2}X+3\right)=1$
$\left|\frac{1}{2}\right|\sigma(X)=1$
$\therefore \sigma(X)=2$

13 $\mathrm{E}(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T)&=\mathrm{E}\left(10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50\right)\\&=\mathrm{E}\left(\frac{10}{\sigma}X-\frac{10m}{\sigma}+50\right)\\&=\frac{10}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{10m}{\sigma}+50\\&=\frac{10}{\sigma}m-\frac{10m}{\sigma}+50=50,\end{aligned}$$

> $\frac{10}{\sigma}$, $-\frac{10m}{\sigma}+50$은 상수이다.

$$\begin{aligned}\sigma(T)&=\sigma\left(10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50\right)\\&=\sigma\left(\frac{10}{\sigma}X-\frac{10m}{\sigma}+50\right)\\&=\left|\frac{10}{\sigma}\right|\sigma(X)\\&=\frac{10}{\sigma}\cdot\sigma=10\end{aligned}$$

> $\sigma>0$이므로 $\frac{10}{\sigma}>0$

따라서 확률변수 T의 평균은 50점, 표준편차는 10점이다.

답 평균: 50점, 표준편차: 10점

14 주어진 그래프에서

> $\mathrm{P}(X=-3)=\frac{1}{9}$, $\mathrm{P}(X=0)=\frac{4}{9}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{9}$, $\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{3}$

$$\mathrm{E}(X)=-3\cdot\frac{1}{9}+0\cdot\frac{4}{9}+3\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{1}{3}=2,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=(-3)^2\cdot\frac{1}{9}+0^2\cdot\frac{4}{9}+3^2\cdot\frac{1}{9}+6^2\cdot\frac{1}{3}\\&=14\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=14-2^2=10\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(Y)=3$에서 $\mathrm{E}(aX+b)=3$

$a\mathrm{E}(X)+b=3$ $\quad\therefore 2a+b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{V}(Y)=10$에서 $\mathrm{V}(aX+b)=10$

$a^2\mathrm{V}(X)=10$, $\quad 10a^2=10$

$a^2=1$ $\quad\therefore a=-1$ $(\because a<0)$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$-2+b=3$ $\quad\therefore b=5$

$\therefore b-a=6$

답 ②

15 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$
$=1$

$\frac{1}{4}+2a+\frac{3}{2}a+a=1$, $\quad\frac{9}{2}a=\frac{3}{4}$

$\therefore a=\frac{1}{6}$

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{3},$$

> $2a=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}a=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{17}{6}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{17}{6}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{19}{18}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{V}\left(\frac{1}{a}X\right)&=\mathrm{V}(6X)=6^2\mathrm{V}(X)\\&=36\cdot\frac{19}{18}=38\end{aligned}$$

답 38

16 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)=1$

$a+b+\frac{1}{5}=1$ $\quad\therefore a+b=\frac{4}{5}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{E}(X)=\frac{6}{5}$에서

$0\cdot a+1\cdot b+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$ $\quad\therefore b=\frac{3}{5}$

$b=\frac{3}{5}$을 ㉠에 대입하면

$a+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{5}+1^2\cdot\frac{3}{5}+3^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{12}{5}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{12}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{24}{25}\end{aligned}$$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$이므로

$$\begin{aligned}\sigma(aX+b)&=\sigma\left(\frac{1}{5}X+\frac{3}{5}\right)=\left|\frac{1}{5}\right|\sigma(X)\\&=\frac{1}{5}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{2\sqrt{6}}{25}\end{aligned}$$

답 ⑤

17 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_0}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{8}{15}+2\cdot\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(9X-2)&=9\mathrm{E}(X)-2\\&=9\cdot\frac{2}{3}-2=4\end{aligned}$$

답 ③

18 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 한 개의 동전을 3번 던질 때 받을 수 있는 점수는

HHH일 때, $\quad 2\cdot 3=6$

HHT, HTH, THH일 때, $\quad 2\cdot 2+(-1)\cdot 1=3$

HTT, THT, TTH일 때, $\quad 2\cdot 1+(-1)\cdot 2=0$

TTT일 때, $\quad -1\cdot 3=-3$

즉 X가 가질 수 있는 값은 -3, 0, 3, 6이고, 그 확률은 각각 $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

> 한 개의 동전을 3번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $2\cdot 2\cdot 2=8$

X	-3	0	3	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(X)=-3\cdot\frac{1}{8}+0\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{3}{8}+6\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$,

$E(X^2)=(-3)^2\cdot\frac{1}{8}+0^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{3}{8}+6^2\cdot\frac{1}{8}=9$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=9-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\sigma(4X+3)=|4|\sigma(X)$$
$$=4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

답 ⑤

19 모서리의 양 끝 점을 택하는 경우 $X=1$이고, 그 확률은

$$P(X=1)=\frac{12}{{}_8C_2}=\frac{3}{7}$$

정육면체의 모서리의 개수

한 면의 대각선의 양 끝 점을 택하는 경우 $X=\sqrt{2}$이고, 그 확률은

$$P(X=\sqrt{2})=\frac{6\cdot 2}{{}_8C_2}=\frac{3}{7}$$

(정육면체의 면의 개수)×(한 면에서 대각선의 개수)

정육면체의 대각선의 양 끝 점을 택하는 경우 $X=\sqrt{3}$이고, 그 확률은

$$P(X=\sqrt{3})=\frac{4}{{}_8C_2}=\frac{1}{7}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$$E(X)=1\cdot\frac{3}{7}+\sqrt{2}\cdot\frac{3}{7}+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{7}$$
$$=\frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{7}$$

이므로

$$E(7X)=7E(X)=7\cdot\frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{7}$$
$$=3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

답 $3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}$

06 이항분포와 정규분포

11 이항분포

W 39쪽

01 (1) 한 개의 동전을 던질 때, 뒷면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

(2) $P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$

$={}_5C_x\left(\frac{1}{2}\right)^5$ $(x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

(3) $P(X=1)={}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}$

답 풀이 참조

02 $E(X)=90\cdot\frac{2}{3}=60$

$V(X)=90\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=20$

$\sigma(X)=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

답 평균: 60, 분산: 20, 표준편차: $2\sqrt{5}$

03 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수가 될 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(60, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

답 ①

두 눈의 수의 곱이 홀수가 되는 경우는 (홀수)×(홀수)이므로 그 확률은 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

04 $n=98$, $p=\frac{2}{7}$이므로

$n+7p=98+7\cdot\frac{2}{7}=100$

답 100

05 확률변수 X의 확률질량함수가

$P(X=x)={}_{30}C_x\frac{5^x}{6^{30}}$

$={}_{30}C_x\left(\frac{5}{6}\right)^x\left(\frac{1}{6}\right)^{30-x}$

$(x=0, 1, 2, \cdots, 30)$

$\frac{5^x}{6^{30}}=\frac{5^x}{6^x}\cdot\frac{1}{6^{30-x}}=\left(\frac{5}{6}\right)^x\left(\frac{1}{6}\right)^{30-x}$

이므로 X는 이항분포 $B\left(30, \frac{5}{6}\right)$를 따른다.

따라서 $n=30$, $p=\frac{5}{6}$이므로

$n(1-p)=30\cdot\left(1-\frac{5}{6}\right)=5$

답 ③

06 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}$

$(x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

이므로

$P(X=2)={}_5C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{135}{512}$

답 ②

07 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_6C_x p^x(1-p)^{6-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

이때 $5P(X=1)=P(X=2)$이므로

$5\cdot{}_6C_1 p^1(1-p)^5={}_6C_2 p^2(1-p)^4$

$2(1-p)=p$ $(\because p\neq0,\ p\neq1)$, $\quad 3p=2$

$\therefore p=\frac{2}{3}$ 답 ④

08 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_4C_x p^x(1-p)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

이때 $P(X=2)=\frac{3}{2}p^2$이므로

${}_4C_2 p^2(1-p)^2=\frac{3}{2}p^2$

$6(1-p)^2=\frac{3}{2}$ $(\because p\neq0)$, $\quad 4p^2-8p+3=0$

$(2p-1)(2p-3)=0$

$\therefore p=\frac{1}{2}$ $(\because 0<p<1)$

$\therefore P(X=3)={}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

09 한 개의 주사위를 던질 때, 5 이상의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}$

$(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

이므로

$P(1\le X\le2)=P(X=1)+P(X=2)$

$={}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$=\frac{32}{81}+\frac{8}{27}=\frac{56}{81}$ 답 $\frac{56}{81}$

10 한 개의 문항에 임의로 답할 때, 맞힐 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(6,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_6C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}$

$={}_6C_x\left(\frac{1}{2}\right)^6$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

이므로

$P(X\le5)=1-P(X=6)$

$=1-{}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$ 답 ⑤

11 득점에 성공하는 횟수를 X라 하면 서브를 한 번 할 때, 득점에 성공할 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}$

$(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

이므로 구하는 확률은

$P(X\ge2)=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}$

$=1-\left\{{}_5C_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5+{}_5C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4\right\}$

$=1-\left(\frac{243}{1024}+\frac{405}{1024}\right)$

$=\frac{47}{128}$ 답 ①

Q BOX

25 % ➡ $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

적어도 2번 득점에 성공할 확률은 2번 이상 득점에 성공할 확률과 같다.

$a\neq0$일 때, $\quad a^0=1$

12 $V(X)=16$에서 $\quad 72p(1-p)=16$

$9p^2-9p+2=0$, $\quad (3p-1)(3p-2)=0$

$\therefore p=\frac{2}{3}\left(\because p>\frac{1}{2}\right)$ 답 $\frac{2}{3}$

13 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_4C_x p^x(1-p)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

이때 $P(X=4)=\frac{81}{625}$이므로

${}_4C_4 p^4(1-p)^0=\frac{81}{625}$, $\quad p^4=\left(\frac{3}{5}\right)^4$

$\therefore p=\frac{3}{5}$ $(\because 0<p<1)$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$V(X)=4\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{24}{25}$ 답 ⑤

14 $E(X)=14$에서 $\quad 98p=14 \quad \therefore p=\frac{1}{7}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(98,\ \frac{1}{7}\right)$을 따르므로 $\quad V(X)=98\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}=12$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$12=E(X^2)-14^2$

$\therefore E(X^2)=208$ 답 208

15 $\sigma(X)=\sqrt{20p(1-p)}=\sqrt{-20\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+5}$

따라서 $\sigma(X)$는 $p=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\sqrt{5}$를 갖는다.

답 ③

16 확률변수 X는 이항분포 $B(400,\ 0.08)$을 따르므로 $\quad E(X)=400\times0.08=32$ 답 ②

17 부모의 유전자형이 모두 AB형인 자녀의 유전자형이 AB형일 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(300,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

50 % ➡ $\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$

$\therefore V(X)=300\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=75$ 답 75

18 관람객이 20대 이하일 확률이 $\frac{15+25}{100}=\frac{2}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(150, \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{150\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}}=6$

관람객이 40대 이상일 확률이 $\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$이므로 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(150, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore \sigma(Y)=\sqrt{150\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}=2\sqrt{6}$

$\therefore \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

19 윷짝 한 개를 던질 때, 둥근 면이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$, 평평한 면이 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 윷짝 네 개를 동시에 던질 때, 도가 나올 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(162, \frac{8}{81}\right)$을 따르므로

$E(X)=162\cdot\frac{8}{81}=16$ 답 ①

20 노란 방울토마토의 개수를 x라 하면 한 번의 시행에서 노란 방울토마토를 꺼낼 확률이 $\frac{x}{15}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(30, \frac{x}{15}\right)$를 따른다.

$E(X)=16$에서

$30\cdot\frac{x}{15}=16 \qquad \therefore x=8$

따라서 노란 방울토마토의 개수는 8이다. 답 ④

21 확률변수 X는 이항분포 $B\left(1000, \frac{3}{20}\right)$을 따르므로

$E(X)=1000\cdot\frac{3}{20}=150$

$\therefore E\left(\frac{1}{5}X+1\right)=\frac{1}{5}E(X)+1$

$=\frac{1}{5}\cdot 150+1=31$ 답 31

22 서로 다른 3개의 동전을 동시에 던질 때, 앞면이 2개 나올 확률이

${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(960, \frac{3}{8}\right)$을 따른다.

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{960\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}}=15$이므로

$\sigma(-2X+3)=|-2|\sigma(X)=2\cdot 15=30$ 답 ④

Q BOX

2 이하의 눈이 나오면 점 P를 양의 방향으로 4만큼 이동시키므로 $4Y$
3 이상의 눈이 나오면 점 P를 음의 방향으로 1만큼 이동시키므로 $-(24-Y)$

방울토마토를 꺼내 색을 확인하고 다시 넣으므로 확률은 변하지 않는다.

한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률

23 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_9C_x p^x(1-p)^{9-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 9)$

이때 $P(X=2)=P(X=3)$이므로

${}_9C_2 p^2(1-p)^7={}_9C_3 p^3(1-p)^6$

$3(1-p)=7p$ ($\because p\neq 0, p\neq 1$), $\qquad 10p=3$

$\therefore p=\frac{3}{10}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(9, \frac{3}{10}\right)$을 따르므로

$E(X)=9\cdot\frac{3}{10}=\frac{27}{10}$

$\therefore E(10X-9)=10E(X)-9$

$=10\cdot\frac{27}{10}-9=18$ 답 18

24 (1) 한 개의 주사위를 24번 던져서 2 이하의 눈이 나오는 횟수가 Y이면 3 이상의 눈이 나오는 횟수는 $24-Y$이므로

$X=4Y-(24-Y)=5Y-24$

(2) 한 개의 주사위를 던질 때, 2 이하의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(24, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 $E(Y)=24\cdot\frac{1}{3}=8$이므로

$E(X)=E(5Y-24)=5E(Y)-24$

$=5\cdot 8-24=16$

답 (1) $X=5Y-24$ (2) 16

12 정규분포와 표준정규분포

Ⓦ 43쪽

01 답 (1) 바뀐다 (2) 낮아진다

02 (1) $P(m+\sigma\le X\le m+2\sigma)$

$=P(m\le X\le m+2\sigma)-P(m\le X\le m+\sigma)$

$=b-a$

(2) $P(X\le m-2\sigma)$

$=P(X\le m)-P(m-2\sigma\le X\le m)$

$=P(X\le m)-P(m\le X\le m+2\sigma)$

$=0.5-b$

답 (1) $b-a$ (2) $0.5-b$

03 (1) $P(-2\le Z\le 2)$

$=P(-2\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$

$=2P(0\le Z\le 2)$

$=2\times 0.4772=0.9544$

(2) $P(Z\le1.5)=P(Z\le0)+P(0\le Z\le1.5)$
$=0.5+0.4332=0.9332$

답 (1) 0.9544 (2) 0.9332

04 $Z=\dfrac{X-8}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(4\le X\le16)&=P\left(\frac{4-8}{4}\le Z\le\frac{16-8}{4}\right)\\&=P(-1\le Z\le2)\\&=P(-1\le Z\le0)+P(0\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 0.8185

05 곡선 A의 대칭축이 곡선 B의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로

$m_A<m_B$

곡선 A가 곡선 B보다 가운데 부분의 높이는 낮고 옆으로 퍼진 모양이므로

$\sigma_A>\sigma_B$

답 ③

06 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, $P(X\le9)=P(X\ge15)$이므로

$m=\dfrac{9+15}{2}=12$

답 12

07 확률변수 X의 평균이 13이므로 X의 확률밀도함수는 $x=13$에서 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x=13$에 대하여 대칭이다.

따라서 $P(k-2\le X\le k+6)$이 최대가 되려면

$\dfrac{(k-2)+(k+6)}{2}=13,\qquad k+2=13$

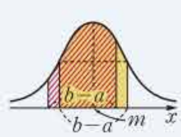
$\therefore k=11$

답 ①

쌤 한마디

정규분포곡선과 확률의 최댓값

확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 오른쪽 정규분포곡선에서 색칠한 부분의 넓이가 빗금 친 부분의 넓이보다 크다.



즉 $b-a$가 일정할 때 $P(a\le X\le b)$가 최대이려면 $\dfrac{a+b}{2}=m$이어야 한다.

08 ㄱ. 두 확률변수 X_A, X_B의 평균이 각각 m_A, m_B이므로

$P(X_A\le m_A)=P(X_B\le m_B)=0.5$

ㄴ. 두 곡선 A, B의 대칭축이 같으므로

$m_A=m_B$

따라서 두 고등학교 A, B 학생들의 수학 점수의 평균이 같다.

ㄷ. 곡선 B가 곡선 A보다 가운데 부분의 높이는 낮고 옆으로 퍼진 모양이므로

$\sigma_A<\sigma_B$

따라서 A 고등학교 학생들의 수학 점수가 B 고등학교 학생들의 수학 점수보다 더 고르다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

09 $P(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=0.6826$에서

$P(m-\sigma\le X\le m)+P(m\le X\le m+\sigma)=0.6826$

$2P(m\le X\le m+\sigma)=0.6826$

$\therefore P(m\le X\le m+\sigma)=0.3413$

$$\begin{aligned}\therefore P(X\le m-\sigma)&=P(X\ge m+\sigma)\\&=P(X\ge m)-P(m\le X\le m+\sigma)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 0.1587

10 $P(X\ge a)=0.9332$에서

$P(a\le X\le m)+P(X\ge m)=0.9332$

$P(a\le X\le m)+0.5=0.9332$

$\therefore P(a\le X\le m)=0.4332$

이때 $P(m\le X\le m+1.5\sigma)=0.4332$에서

$P(m-1.5\sigma\le X\le m)=0.4332$이므로

$a=m-1.5\sigma=28-1.5\times4=22$

답 22

11 $P(|X-8|\le3)=0.3830$에서

$P(-3\le X-8\le3)=0.3830$

$\therefore P(5\le X\le11)=0.3830$

확률변수 X의 평균이 8이므로

$P(5\le X\le8)+P(8\le X\le11)=0.3830$

$2P(8\le X\le11)=0.3830$

$\therefore P(8\le X\le11)=0.1915$

$Y=3X-4$이므로

$$\begin{aligned}P(Y\le29)&=P(3X-4\le29)\\&=P(X\le11)\\&=P(X\le8)+P(8\le X\le11)\\&=0.5+0.1915\\&=0.6915\end{aligned}$$

답 ①

12 $P(|Z|\le2)=0.9544$에서

$P(-2\le Z\le2)=0.9544$

$P(-2\le Z\le0)+P(0\le Z\le2)=0.9544$

$2P(0\le Z\le2)=0.9544$

$\therefore P(0\le Z\le2)=0.4772$

$$\begin{aligned}\therefore P(Z\ge2)&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 ①

다른 풀이 $P(|Z|\le2)=0.9544$에서

$P(-2\le Z\le2)=0.9544$

Q BOX

확률변수 Z의 정규분포곡선은 직선 $z=0$에 대하여 대칭이므로

$P(Z\ge0)=P(Z\le0)$
$=0.5$

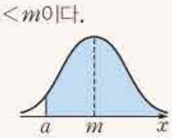
$\sigma_A<\sigma_B$이므로 σ_A인 경우가 σ_B인 경우보다

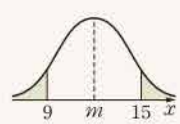
➡ 자료가 평균 주위에 많이 몰려 있다.

➡ 자료가 고르게 분포되어 있다.

$P(X\ge a)=0.9332$
>0.5

이므로 다음 그림과 같이 $a<m$이다.





확률변수 X가 정규분포 $N(28,\ 4^2)$을 따르므로

$m=28,\ \sigma=4$

$8-5=11-8$이므로

$P(5\le X\le8)$
$=P(8\le X\le11)$

$\therefore P(Z\ge 2)=\frac{1}{2}\{1-P(-2\le Z\le 2)\}$

$=\frac{1}{2}(1-0.9544)=0.0228$

13 $P(Z\le a)=0.1587$에서

$P(Z\ge -a)=0.1587$

$P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le -a)=0.1587$

$0.5-P(0\le Z\le -a)=0.1587$

$\therefore P(0\le Z\le -a)=0.3413$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$-a=1 \quad \therefore a=-1$ 답 -1

$P(Z\le a)=0.1587<0.5$이므로 $a<0$

14 $P(Z\ge -a)=0.7257$에서

$P(-a\le Z\le 0)+P(Z\ge 0)=0.7257$

$P(0\le Z\le a)+0.5=0.7257$

$\therefore P(0\le Z\le a)=0.2257$

이때 $P(0\le Z\le 0.6)=0.2257$이므로

$a=0.6$

$P(a\le Z\le b)=0.1592$에서

$P(0.6\le Z\le b)=0.1592$

$P(0\le Z\le b)-P(0\le Z\le 0.6)=0.1592$

$P(0\le Z\le b)-0.2257=0.1592$

$\therefore P(0\le Z\le b)=0.3849$

이때 $P(0\le Z\le 1.2)=0.3849$이므로

$b=1.2$

$\therefore a+b=1.8$ 답 1.8

$P(Z\ge -a)=0.7257>0.5$이므로 $-a<0$ $\therefore a>0$

15 확률변수 X가 정규분포 $N(52,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-52}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(52\le X\le k)=P(0\le Y\le 2.5)$에서

$P\left(\frac{52-52}{10}\le Z\le \frac{k-52}{10}\right)=P(0\le Y\le 2.5)$

$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{k-52}{10}\right)=P(0\le Y\le 2.5)$

따라서 $\frac{k-52}{10}=2.5$이므로

$k-52=25 \quad \therefore k=77$ 답 ④

두 확률변수 $Z,\ Y$가 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $\frac{k-52}{10}=2.5$

16 두 확률변수 $X,\ Y$가 각각 정규분포 $N(5,\ 3^2)$, $N(m,\ 7^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-5}{3},\ Z_Y=\frac{Y-m}{7}$

으로 놓으면 두 확률변수 $Z_X,\ Z_Y$는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$2P(5\le X\le 8)=P(20\le Y\le 2m-20)$에서

$2P\left(\frac{5-5}{3}\le Z_X\le \frac{8-5}{3}\right)$

$=P\left(\frac{20-m}{7}\le Z_Y\le \frac{2m-20-m}{7}\right)$

이므로

$2P(0\le Z_X\le 1)=P\left(-\frac{m-20}{7}\le Z_Y\le \frac{m-20}{7}\right)$

$\therefore P(0\le Z_X\le 1)=P\left(0\le Z_Y\le \frac{m-20}{7}\right)$

따라서 $\frac{m-20}{7}=1$이므로

$m-20=7 \quad \therefore m=27$ 답 27

17 확률변수 X가 정규분포 $N(58,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-58}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(X\le 52)+P(56\le X\le 62)$

$=P\left(Z\le \frac{52-58}{4}\right)$

$+P\left(\frac{56-58}{4}\le Z\le \frac{62-58}{4}\right)$

$=P(Z\le -1.5)+P(-0.5\le Z\le 1)$

$=P(Z\ge 1.5)+P(-0.5\le Z\le 0)$

$+P(0\le Z\le 1)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.5)$

$+P(0\le Z\le 0.5)+P(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.4332+0.1915+0.3413$

$=0.5996$ 답 0.5996

18 $E(X)=15,\ \sigma(X)=5$에서

$E(Y)=E(2X-1)=2E(X)-1$

$=2\cdot 15-1=29,$

$\sigma(Y)=\sigma(2X-1)=|2|\sigma(X)=2\cdot 5=10$

이때 확률변수 X가 정규분포 $N(15,\ 5^2)$을 따르므로 확률변수 Y는 정규분포 $N(29,\ 10^2)$을 따른다.

$Z=\frac{Y-29}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(Y\le 9)=P\left(Z\le \frac{9-29}{10}\right)$

$=P(Z\le -2)=P(Z\ge 2)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$ 답 ②

다른 풀이 $Y=2X-1$이므로

$P(Y\le 9)=P(2X-1\le 9)=P(X\le 5)$

$Z=\frac{X-15}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(Y\le 9)=P(X\le 5)=P\left(Z\le \frac{5-15}{5}\right)$

$=P(Z\le -2)=P(Z\ge 2)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

19 $Z=\frac{X-30}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(X\ge 36)=0.2743$에서

$P\left(Z\ge \frac{36-30}{10}\right)=0.2743$

$\mathrm{P}(Z\geq 0.6)=0.2743$
$\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)=0.2743$
$0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)=0.2743$
$\therefore\ \mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)=0.2257$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(24\leq X\leq 36)&=\mathrm{P}\left(\frac{24-30}{10}\leq Z\leq\frac{36-30}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.6\leq Z\leq 0.6)\\&=2\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)\\&=2\times 0.2257\\&=0.4514\end{aligned}$$

답 0.4514

20 $Z=\dfrac{X-27}{8}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\leq 27-k)=0.0062$에서

$\mathrm{P}\left(Z\leq\dfrac{27-k-27}{8}\right)=0.0062$

$\mathrm{P}\left(Z\leq -\dfrac{k}{8}\right)=0.0062$

$\mathrm{P}\left(Z\geq\dfrac{k}{8}\right)=0.0062$

$\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\dfrac{k}{8}\right)=0.0062$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\dfrac{k}{8}\right)=0.0062$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\dfrac{k}{8}\right)=0.4938$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)=0.4938$이므로

$\dfrac{k}{8}=2.5\qquad\therefore\ k=20$

답 ⑤

21 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(m-k\sigma\leq X\leq m+k\sigma)=0.9544$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{m-k\sigma-m}{\sigma}\leq Z\leq\dfrac{m+k\sigma-m}{\sigma}\right)=0.9544$

$\mathrm{P}(-k\leq Z\leq k)=0.9544$

$2\mathrm{P}(0\leq Z\leq k)=0.9544$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\leq Z\leq k)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로

$k=2$

답 2

22 체리 한 박스에 들어 있는 체리의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(62,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-62}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(71\leq X\leq 77)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{71-62}{6}\leq Z\leq\frac{77-62}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(1.5\leq Z\leq 2.5)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)\\&=0.49-0.43=0.06\end{aligned}$$

따라서 체리의 개수가 71 이상 77 이하인 박스는 전체의 6 %이다.

답 ③

Q BOX

연속확률변수 X에서
$\mathrm{P}(X=x)=0$이므로
$\mathrm{P}(a\leq X\leq b)$
$=\mathrm{P}(a\leq X<b)$
$=\mathrm{P}(a<X\leq b)$
$=\mathrm{P}(a<X<b)$

$\mathrm{E}(X)=30$이므로 표준화하지 않고 다음과 같이 확률을 구할 수도 있다.
$\mathrm{P}(30\leq X\leq 36)$
$=\mathrm{P}(X\geq 30)$
$\quad -\mathrm{P}(X\geq 36)$
$=0.5-0.2743=0.2257$
이므로
$\mathrm{P}(24\leq X\leq 36)$
$=2\mathrm{P}(30\leq X\leq 36)$
$=2\times 0.2257=0.4514$

50개의 쿠키 중 한 개를 택할 때, 택한 쿠키의 무게가 92 g 이상 107 g 이하일 확률

10000명의 학생 중 한 명을 택할 때, 택한 학생의 휴대 전화 음성 통화량이 3시간, 즉 180분 이상일 확률

체리 한 박스에 들어 있는 체리의 개수가 71 이상 77 이하일 확률

23 준우가 등교하는 데 걸리는 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
학교에 오전 8시 20분이 지난 후에 도착하면, 즉 $X>25$이면 지각이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X>25)=\mathrm{P}(X\geq 25)&\\&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{25-20}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 1.25)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.25)\\&=0.5-0.39=0.11\end{aligned}$$

답 0.11

24 쿠키 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(102,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-102}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(92\leq X\leq 107)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{92-102}{5}\leq Z\leq\frac{107-102}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 1)\\&=\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=0.48+0.34=0.82\end{aligned}$$

따라서 무게가 92 g 이상 107 g 이하인 쿠키의 개수는

$0.82\times 50=41$

답 ②

25 휴대 전화 음성 통화량을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(169,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-169}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\geq 180)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{180-169}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 1.1)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.1)\\&=0.5-0.3643=0.1357\end{aligned}$$

따라서 휴대 전화 음성 통화량이 3시간 이상인 학생 수는

$0.1357\times 10000=1357$

답 ④

26 공복 혈당 수치를 X mg/dL이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(84,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-84}{8}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\geq 100)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{100-84}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 2)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

따라서 재검진을 받는 직원 수는

$0.0228\times 20000=456$ 답 456

27 응시자의 시험 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(70,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-70}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a점이라 하면

$$P(X\geq a)=\frac{42}{600}=0.07$$
$$P\left(Z\geq\frac{a-70}{2}\right)=0.07$$
$$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-70}{2}\right)=0.07$$
$$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-70}{2}\right)=0.07$$
$$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{a-70}{2}\right)=0.43$$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.5)=0.43$이므로

$$\frac{a-70}{2}=1.5,\qquad a-70=3$$
$$\therefore a=73$$

따라서 합격자의 최저 점수는 73점이다. 답 ③

28 학생의 키를 X cm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(168,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-168}{12}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

키가 작은 쪽에서 20 번째인 학생의 키를 a cm라 하면

$$P(X\leq a)=\frac{20}{400}=0.05$$
$$P\left(Z\leq\frac{a-168}{12}\right)=0.05$$
$$P\left(Z\geq\frac{168-a}{12}\right)=0.05$$
$$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{168-a}{12}\right)=0.05$$
$$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{168-a}{12}\right)=0.05$$
$$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{168-a}{12}\right)=0.45$$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.65)=0.45$이므로

$$\frac{168-a}{12}=1.65,\qquad 168-a=19.8$$
$$\therefore a=148.2$$

따라서 키가 작은 쪽에서 20 번째인 학생의 키는 148.2 cm이다. 답 148.2 cm

29 도윤이네 반 전체 학생의 국어, 영어, 수학 시험 성적을 각각 X_A점, X_B점, X_C점이라 하면 세 확률변수 X_A, X_B, X_C는 각각 정규분포 $N(75,\ 8^2)$, $N(68,\ 4^2)$, $N(72,\ 3^2)$을 따르므로

$$Z_A=\frac{X_A-75}{8},\ Z_B=\frac{X_B-68}{4},\ Z_C=\frac{X_C-72}{3}$$

로 놓으면 세 확률변수 Z_A, Z_B, Z_C는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

도윤이가 다른 학생들보다 국어, 영어, 수학 시험 성적이 높을 확률은 각각

$$P(X_A<79)=P\left(Z_A<\frac{79-75}{8}\right)=P(Z_A<0.5),$$
$$P(X_B<80)=P\left(Z_B<\frac{80-68}{4}\right)=P(Z_B<3),$$
$$P(X_C<75)=P\left(Z_C<\frac{75-72}{3}\right)=P(Z_C<1)$$

이때 $P(Z_A<0.5)<P(Z_C<1)<P(Z_B<3)$이므로

$$P(X_A<79)<P(X_C<75)<P(X_B<80)$$

따라서 도윤이의 성적이 상대적으로 좋은 과목부터 순서대로 나열하면 영어, 수학, 국어이다. 답 ④

30 두 회사 A, B에서 생산하는 서플콕의 무게를 각각 X_A g, X_B g이라 하면 두 확률변수 X_A, X_B는 각각 정규분포 $N(m,\ 1^2)$, $N(4.9,\ 0.6^2)$을 따르므로

$$Z_A=X_A-m,\ Z_B=\frac{X_B-4.9}{0.6}$$

로 놓으면 두 확률변수 Z_A, Z_B는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $P(X_A\geq 5.5)=P(X_B\geq 5.5)$이므로

$$P(Z_A\geq 5.5-m)=P\left(Z_B\geq\frac{5.5-4.9}{0.6}\right)$$
$$\therefore P(Z_A\geq 5.5-m)=P(Z_B\geq 1)$$

따라서 $5.5-m=1$이므로

$m=4.5$ 답 ②

Q BOX

600명 중 42명이 합격하므로 입사 시험에 합격할 확률은 $\frac{42}{600}=0.07$

확률이 높은 과목일수록 상대적으로 성적이 좋다.

두 회사에서 생산하는 셔틀콕을 각각 임의로 하나씩 택할 때 그 무게가 5.5 g 이상일 확률이 같다.

13 이항분포와 정규분포의 관계

48쪽

01 확률변수 X가 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$E(X)=100\cdot\frac{1}{2}=50,$$
$$V(X)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=25$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $P(35\leq X\leq 65)=P\left(\frac{35-50}{5}\leq Z\leq\frac{65-50}{5}\right)$
$=P(-3\leq Z\leq 3)$
$=2P(0\leq Z\leq 3)$
$=2\times 0.4987$
$=0.9974$

(2) $P(55\leq X\leq 60)=P\left(\frac{55-50}{5}\leq Z\leq\frac{60-50}{5}\right)$
$=P(1\leq Z\leq 2)$
$=P(0\leq Z\leq 2)-P(0\leq Z\leq 1)$
$=0.4772-0.3413$
$=0.1359$

답 (1) 0.9974 (2) 0.1359

02 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=400\cdot\frac{4}{5}=320,\ \mathrm{V}(X)=400\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=64$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-320}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X\le 304)+\mathrm{P}(X\ge 344)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{304-320}{8}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{344-320}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -2)+\mathrm{P}(Z\ge 3)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)+\mathrm{P}(Z\ge 3)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&\quad+\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 3)\\&=0.5-0.4772+0.5-0.4987\\&=0.0241\end{aligned}$$

답 0.0241

03 $\mathrm{V}(X)=36$에서

$$n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=36\qquad\therefore n=162$$

즉 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(162,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=162\cdot\frac{1}{3}=54$$

이때 162는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(54,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-54}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 60)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{60-54}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413\\&=0.8413\end{aligned}$$

답 ③

04 6의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=180\cdot\frac{1}{6}=30,\ \mathrm{V}(X)=180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=25$$

이때 180은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-30}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(35\le X\le 40)&=\mathrm{P}\left(\frac{35-30}{5}\le Z\le\frac{40-30}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4772-0.3413\\&=0.1359\end{aligned}$$

답 ③

Q BOX

20 % ➡ $\frac{20}{100}=0.2$

공연을 보러 온 모든 관객이 공연을 보려면 예약을 취소하는 관객이 $100-90=10$ (명) 이상이어야 한다.

한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나올 확률

2개의 주사위를 동시에 던질 때 모두 짝수의 눈이 나올 확률

한 개의 주사위를 던질 때 6의 눈이 나올 확률

05 예약을 취소하는 관객의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.2)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=100\times 0.2=20,$$
$$\mathrm{V}(X)=100\times 0.2\times 0.8=16$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 10)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{10-20}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2.5)\\&=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=0.4938+0.5\\&=0.9938\end{aligned}$$

답 0.9938

06 주사위 한 개를 던질 때 짝수의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(324,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=324\cdot\frac{1}{2}=162,\ \mathrm{V}(X)=324\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=81$$

이때 324는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(162,\ 9^2)$을 따른다.

따라서 $Z_X=\frac{X-162}{9}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 171)&=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{171-162}{9}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge 1)\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

한편 주사위 2개를 동시에 던질 때 모두 짝수의 눈이 나오는 횟수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(Y)=48\cdot\frac{1}{4}=12,\ \mathrm{V}(Y)=48\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=9$$

이때 48은 충분히 큰 수이므로 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z_Y=\frac{Y-12}{3}$로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(Y\le a)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{a-12}{3}\right)\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\mathrm{P}(Z_X\ge 1)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{a-12}{3}\right)$이므로

$$\mathrm{P}(Z_X\ge 1)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{12-a}{3}\right)$$

따라서 $1=\frac{12-a}{3}$이므로

$$12-a=3\qquad\therefore a=9$$

답 9

07 통계적 추정

14 모집단과 표본

Ⓦ 49쪽

01 답 ㄱ, ㄴ

> 지하수의 수질 오염도와 자동차의 충돌 안전성은 전수조사가 불가능하다.

02 (1) $\overline{X}=\frac{1}{2}(1+3)=2$

> 표본이 1, 3이므로 표본의 크기는 2이다.

$S^2=\frac{1}{2-1}\{(1-2)^2+(3-2)^2\}=2$

$\therefore S=\sqrt{2}$

(2) $\overline{X}=\frac{1}{3}(2+3+4)=3$

> 표본이 2, 3, 4이므로 표본의 크기는 3이다.

$S^2=\frac{1}{3-1}\{(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2\}=1$

$\therefore S=\sqrt{1}=1$

답 (1) $\overline{X}=2$, $S^2=2$, $S=\sqrt{2}$
(2) $\overline{X}=3$, $S^2=1$, $S=1$

03 $m=18$, $\sigma=3$, $n=36$이므로

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=18$

(2) $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{3^2}{36}=\frac{1}{4}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\frac{3}{\sqrt{36}}=\frac{1}{2}$

답 (1) 18 (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$

04 $\mathrm{E}(\overline{X})=45$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{10^2}{25}=4$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(45,\ 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-45}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(\overline{X}\le 39)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{39-45}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -3)=\mathrm{P}(Z\ge 3)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$

$=0.5-0.4987=0.0013$

(2) $\mathrm{P}(40\le\overline{X}\le 50)=\mathrm{P}\left(\frac{40-45}{2}\le Z\le\frac{50-45}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 2.5)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=2\times 0.4938=0.9876$

답 (1) 0.0013 (2) 0.9876

05 $\mathrm{E}(\overline{X})=27$, $\sigma(\overline{X})=\frac{8}{\sqrt{9}}=\frac{8}{3}$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})\cdot\sigma(\overline{X})=72$ 답 ②

06 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{8^2}{400}=\frac{4}{25}$이므로

$\mathrm{V}(5\overline{X}+1)=5^2\mathrm{V}(\overline{X})$

> 확률변수 X와 상수 a, b $(a\ne 0)$에 대하여
> ① $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$
> ② $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$
> ③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

$=25\cdot\frac{4}{25}=4$ 답 4

07 $\sigma(\overline{X})=\frac{5}{\sqrt{n}}$이므로 $\sigma(\overline{X})\ge\frac{1}{3}$에서

$\frac{5}{\sqrt{n}}\ge\frac{1}{3}$, $\sqrt{n}\le 15$

$\therefore n\le 225$

따라서 n의 최댓값은 225이다. 답 ⑤

08 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{5}+3a+\frac{2}{5}=1$, $4a=\frac{2}{5}$

$\therefore a=\frac{1}{10}$

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{10}+1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{2}{5}=2$

$\mathrm{V}(X)=0^2\cdot\frac{1}{10}+1^2\cdot\frac{1}{5}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{2}{5}-2^2$

$=5-4=1$

$\sigma(X)=\sqrt{1}=1$

이때 표본의 크기가 8이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

09 $\mathrm{E}(X)=-2\cdot\frac{3}{8}+(-1)\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{1}{4}$

$=-\frac{3}{4}$

$\mathrm{V}(X)=(-2)^2\cdot\frac{3}{8}+(-1)^2\cdot\frac{1}{4}+0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{1}{4}$

$-\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

$=2-\frac{9}{16}=\frac{23}{16}$

표본의 크기가 n일 때, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{16}$이므로

$\frac{\frac{23}{16}}{n}=\frac{1}{16}$ $\therefore n=23$ 답 23

10 임의로 1장의 카드를 뽑을 때, 카드에 적힌 수를 X라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

> 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포는 구하기 복잡하므로 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 이용한다.

X	2	4	6	8	10	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\mathrm{E}(X)=2\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+6\cdot\frac{1}{5}+8\cdot\frac{1}{5}+10\cdot\frac{1}{5}=6$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=6$ 답 ④

11 상자에서 임의로 1개의 구슬을 꺼낼 때, 구슬의 무게를 X g이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$

$V(X)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}+5^2\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{11}{4}\right)^2$

$=\frac{39}{4}-\frac{121}{16}=\frac{35}{16}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{16}}=\frac{\sqrt{35}}{4}$

표본의 크기가 n일 때, $\sigma(\overline{X})=\frac{1}{4}$이므로

$\frac{\frac{\sqrt{35}}{4}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{4},\quad \sqrt{n}=\sqrt{35}$

$\therefore n=35$ 답 35

12 모집단이 정규분포 $N(62, \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 50이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(62, \frac{\sigma^2}{50}\right)$을 따른다.

따라서 $62=a$, $\frac{\sigma^2}{50}=\frac{1}{2}$이므로

$a=62$, $\sigma=5$ ($\because \sigma>0$)

$\therefore a-\sigma=57$ 답 57

13 모집단이 정규분포 $N(110, 15^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(110, \frac{15^2}{n}\right)$을 따른다.

따라서 $\frac{15^2}{n}=3^2$이므로 $n=25$ 답 ④

14 모집단이 정규분포 $N(74, 15^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(74, \frac{15^2}{25}\right)$, 즉 $N(74, 3^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-74}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(\overline{X}\ge 71)=P\left(Z\ge\frac{71-74}{3}\right)$

$=P(Z\ge -1)$

$=P(-1\le Z\le 0)+P(Z\ge 0)$

$=P(0\le Z\le 1)+P(Z\ge 0)$

$=0.34+0.5=0.84$ 답 0.84

15 한라봉 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(250, 12^2)$을 따른다.

이때 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(250, \frac{12^2}{9}\right)$, 즉 $N(250, 4^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-250}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P\left(\overline{X}\le\frac{2160}{9}\right)=P(\overline{X}\le 240)$

$=P\left(Z\le\frac{240-250}{4}\right)$

$=P(Z\le -2.5)=P(Z\ge 2.5)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2.5)$

$=0.5-0.4938=0.0062$ 답 ①

QBOX

$\frac{\sigma^2}{50}=\frac{1}{2}$에서 $\sigma^2=25$

$\therefore \sigma=5$ ($\because \sigma>0$)

$P\left(-2\le Z\le\frac{a-90}{7}\right)=0.82$

에서

$P(-2\le Z\le 0)$

$=P(0\le Z\le 2)=0.48$

이므로 $\frac{a-90}{7}>0$

한라봉 한 상자를 크기가 9인 표본으로 생각한다.

한라봉 한 상자가 불량품으로 판정되려면 $9\overline{X}\le 2160$, 즉 $\overline{X}\le 240$이어야 한다.

16 모집단이 정규분포 $N(m, 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{20^2}{16}\right)$, 즉 $N(m, 5^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-m}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(|m-\overline{X}|\le 7.5)$

$=P(-7.5\le m-\overline{X}\le 7.5)$

$=P(m-7.5\le\overline{X}\le m+7.5)$

$=P\left(\frac{m-7.5-m}{5}\le Z\le\frac{m+7.5-m}{5}\right)$

$=P(-1.5\le Z\le 1.5)$

$=2P(0\le Z\le 1.5)$

$=2\times 0.43=0.86$ 답 0.86

17 모집단이 정규분포 $N(90, 14^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(90, \frac{14^2}{4}\right)$, 즉 $N(90, 7^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-90}{7}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(76\le\overline{X}\le a)=0.82$에서

$P\left(\frac{76-90}{7}\le Z\le\frac{a-90}{7}\right)=0.82$

$P\left(-2\le Z\le\frac{a-90}{7}\right)=0.82$

$P(-2\le Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{a-90}{7}\right)=0.82$

$P(0\le Z\le 2)+P\left(0\le Z\le\frac{a-90}{7}\right)=0.82$

$0.48+P\left(0\le Z\le\frac{a-90}{7}\right)=0.82$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-90}{7}\right)=0.34$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.34$이므로

$\frac{a-90}{7}=1,\quad a-90=7$

$\therefore a=97$ 답 ③

18 모집단이 정규분포 $N(150, 24^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(150, \frac{24^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-150}{\frac{24}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\le 157)=0.96$에서

$P\left(Z\le\frac{157-150}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\right)=0.96$

$P\left(Z\le\frac{7\sqrt{n}}{24}\right)=0.96$

$P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{7\sqrt{n}}{24}\right)=0.96$

$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{7\sqrt{n}}{24}\right)=0.96$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{7\sqrt{n}}{24}\right)=0.46$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.75)=0.46$이므로

$\frac{7\sqrt{n}}{24}=1.75,\quad 7\sqrt{n}=42$

$\sqrt{n}=6\quad \therefore n=36$ 답 36

19 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{6^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{6}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고 표본평균 $\overline{X}$와 모평균 m의 차가 3 이하일 확률이 0.98이므로

$\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 3)=0.98$

$\mathrm{P}(-3\le \overline{X}-m\le 3)=0.98$

$\mathrm{P}(m-3\le \overline{X}\le m+3)=0.98$

$\mathrm{P}\left(\frac{m-3-m}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\le Z\le \frac{m+3-m}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right)=0.98$

$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.98$

$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.98$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.49$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.49$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=2.5,\quad \sqrt{n}=5$

$\therefore n=25$ 답 ④

15 모평균의 추정

Ⓦ 52쪽

01 (1) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$60-1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 60+1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}$

$60-3.92\le m\le 60+3.92$

$\therefore 56.08\le m\le 63.92$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$60-2.58\times\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 60+2.58\times\frac{20}{\sqrt{100}}$

$60-5.16\le m\le 60+5.16$

$\therefore 54.84\le m\le 65.16$

답 (1) $56.08\le m\le 63.92$ (2) $54.84\le m\le 65.16$

02 (1) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 1.96\times\frac{28}{\sqrt{49}}=15.68$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.58\times\frac{28}{\sqrt{49}}=20.64$

답 (1) 15.68 (2) 20.64

03 표본평균이 180, 모표준편차가 3, 표본의 크기가 25이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$180-2\cdot\frac{3}{\sqrt{25}}\le m\le 180+2\cdot\frac{3}{\sqrt{25}}$

$180-1.2\le m\le 180+1.2$

$\therefore 178.8\le m\le 181.2$ 답 ②

Q BOX: 문제에서 $\mathrm{P}(|Z|\le 2)=0.95$가 주어졌으므로 2를 곱한다.

04 표본평균이 64, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$64-2.58\times\frac{10}{\sqrt{36}}\le m\le 64+2.58\times\frac{10}{\sqrt{36}}$

$64-4.3\le m\le 64+4.3$

$\therefore 59.7\le m\le 68.3$

따라서 $a=59.7,\ b=68.3$이므로

$2a-b=119.4-68.3$

$=51.1$ 답 51.1

05 표본평균이 71, 모표준편차가 8, 표본의 크기가 16이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$71-k\cdot\frac{8}{\sqrt{16}}\le m\le 71+k\cdot\frac{8}{\sqrt{16}}$

$\therefore 71-2k\le m\le 71+2k$

이 부등식이 $67.7\le m\le 74.3$과 같으므로

$71-2k=67.7,\ 71+2k=74.3$

즉 $2k=3.3$이므로 $k=1.65$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.65)=0.9$이므로

$\frac{\alpha}{100}=0.9\quad \therefore \alpha=90$ 답 90

Q BOX: $2k=71-67.7$
$=74.3-71$
$=3.3$

06 표본평균이 120이고, 표본의 크기 144가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 9를 이용할 수 있다.

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$120-2\cdot\frac{9}{\sqrt{144}}\le m\le 120+2\cdot\frac{9}{\sqrt{144}}$

$120-1.5\le m\le 120+1.5$

$\therefore 118.5\le m\le 121.5$

$\therefore a=118.5,\ b=121.5$ 답 ④

Q BOX: 표본의 크기 n이 충분히 크면, 즉 $n\ge 30$이면 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 S의 값 s를 이용하여 모평균에 대한 신뢰구간을 구할 수 있다.

07 표본평균이 370이고, 표본의 크기 81은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 6을 이용할 수 있다.

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$370-2.58\times\frac{6}{\sqrt{81}}\le m\le 370+2.58\times\frac{6}{\sqrt{81}}$$

$$370-1.72\le m\le 370+1.72$$

$$\therefore\ 368.28\le m\le 371.72$$

답 $368.28\le m\le 371.72$

08 표본평균이 480이고, 표본의 크기 196은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 16을 이용할 수 있다.

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$480-1.96\times\frac{16}{\sqrt{196}}\le m\le 480+1.96\times\frac{16}{\sqrt{196}}$$

$$480-2.24\le m\le 480+2.24$$

$$\therefore\ 477.76\le m\le 482.24$$

따라서 신뢰구간에 속하는 자연수는 478, 479, 480, 481, 482의 5개이다.

답 ⑤

09 표본평균이 10, 모표준편차가 3, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$10-3\times\frac{3}{\sqrt{n}}\le m\le 10+3\times\frac{3}{\sqrt{n}}$$

이 부등식이 $8.5\le m\le 11.5$와 같으므로

$$10-3\times\frac{3}{\sqrt{n}}=8.5,\ 10+3\times\frac{3}{\sqrt{n}}=11.5$$

따라서 $3\times\frac{3}{\sqrt{n}}=1.5$이므로

$$\sqrt{n}=6\qquad\therefore\ n=36$$

답 ④

$$3\times\frac{3}{\sqrt{n}}=10-8.5$$
$$=11.5-10$$
$$=1.5$$

10 표본평균이 80, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$80-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\le m\le 80+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}$$

이 부등식이 $79.51\le m\le 80.49$와 같으므로

$$80-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}=79.51,$$

$$80+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}=80.49$$

따라서 $1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}=0.49$이므로

$$\sqrt{n}=8\qquad\therefore\ n=64$$

답 64

11 모표준편차가 22, 표본의 크기가 121이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\times\frac{22}{\sqrt{121}}=10.32$$

답 ⑤

12 모표준편차가 9, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$b-a=2\times1.96\times\frac{9}{\sqrt{36}}=5.88$$

답 5.88

Q BOX

신뢰구간이 $a\le m\le b$일 때, $b-a$의 값은 신뢰구간의 길이이다.

13 모표준편차가 16, 표본의 크기가 64이므로 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이 l은

$$l=2\times1.96\times\frac{16}{\sqrt{64}}=7.84$$

모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이 m은

$$m=2\times2.58\times\frac{16}{\sqrt{64}}=10.32$$

$$\therefore\ m-l=2.48$$

답 2.48

14 모표준편차가 5, 표본의 크기가 n이므로 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 1 이하이려면

$$2\cdot2\cdot\frac{5}{\sqrt{n}}\le1,\qquad \sqrt{n}\ge20$$

$$\therefore\ n\ge400$$

따라서 n의 최솟값은 400이다.

답 400

15 모표준편차를 σ라 하면 표본의 크기가 100일 때, 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{2\sigma}{5}$$

표본의 크기가 n일 때, 모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6\sigma}{\sqrt{n}}$$

즉 $\frac{2\sigma}{5}=\frac{6\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$$\sqrt{n}=15\qquad\therefore\ n=225$$

답 ⑤

16 모표준편차를 σ, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 표본의 크기가 256일 때, 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이 l은

$$l=2\cdot k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{256}}=\frac{1}{8}k\sigma$$

표본의 크기가 n일 때, 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이 $2l$은

$$2l=2\cdot k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}}k\sigma$$

즉 $2\cdot\underbrace{\frac{1}{8}k\sigma}_{l}=\frac{2}{\sqrt{n}}k\sigma$이므로

$$\sqrt{n}=8\qquad\therefore\ n=64$$

답 64

17 모표준편차가 18, 표본의 크기가 324이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot k\cdot\frac{18}{\sqrt{324}}=3.64$$

$$\therefore\ k=1.82$$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le1.82)=0.93$이므로

$$\frac{\alpha}{100}=0.93\qquad\therefore\ \alpha=93$$

답 ②

$$\mathrm{P}(|Z|\le1.82)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z\le1.82)$$
$$=2\times0.465$$
$$=0.93$$

18 모표준편차가 6, 표본의 크기가 81이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하면 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot k\cdot\frac{6}{\sqrt{81}}=2.04 \qquad \therefore k=1.53$$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.53)=0.88$이므로

$$\frac{\alpha}{100}=0.88 \qquad \therefore \alpha=88$$

답 88

19 모표준편차가 4, 표본의 크기가 64이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하면 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot k\cdot\frac{4}{\sqrt{64}}=1.2 \qquad \therefore k=1.2$$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.2)=0.76$이므로

$$\frac{\alpha}{100}=0.76 \qquad \therefore \alpha=76$$

따라서 모평균에 대한 신뢰도 86 %의 신뢰구간의 길이는

$\mathrm{P}(|Z|\le 1.5)=0.86$

$$2\times1.5\times\frac{4}{\sqrt{64}}=1.5$$

답 1.5

20 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 21, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-3\cdot\frac{21}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+3\cdot\frac{21}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{63}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{63}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m-\overline{x}|\le\frac{63}{\sqrt{n}}$$

이때 $|m-\overline{x}|\le 9$이려면

$$\frac{63}{\sqrt{n}}\le 9, \qquad \sqrt{n}\ge 7$$

$$\therefore n\ge 49$$

따라서 n의 최솟값은 49이다.

답 49

21 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 16, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2\cdot\frac{16}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2\cdot\frac{16}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{32}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{32}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m-\overline{x}|\le\frac{32}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 8 이하이려면

$|m-\overline{x}|\le 8$

$$\frac{32}{\sqrt{n}}\le 8, \qquad \sqrt{n}\ge 4$$

$$\therefore n\ge 16$$

따라서 n의 최솟값은 16이다.

답 ③

22 모평균을 m, 표본평균을 $\overline{x}$, 모표준편차를 σ라 하면 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

Q BOX

$$\overline{x}-3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m-\overline{x}|\le\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균과 표본평균의 차가 $\dfrac{1}{4}\sigma$ 이하이려면

모표준편차의 $\dfrac{1}{4}$

$$\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{4}\sigma, \qquad \sqrt{n}\ge 12$$

$$\therefore n\ge 144$$

따라서 n의 최솟값은 144이다.

답 144

23 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n일 때, 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는 다음과 같다.

① $2\cdot2\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{25}}=\dfrac{4}{5}\sigma$

② $2\cdot3\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{25}}=\dfrac{6}{5}\sigma$

③ $2\cdot2\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}=\dfrac{1}{2}\sigma$

④ $2\cdot3\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}=\dfrac{3}{4}\sigma$

⑤ $2\cdot2\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}=\dfrac{2}{5}\sigma$

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 ②이다.

답 ②

쌤 한마디

①~⑤에서 표본의 크기가 같거나 신뢰도가 같으므로 이를 이용하여 신뢰구간의 길이를 비교할 수 있다.
①, ②와 ③, ④는 각각 표본의 크기가 같고 신뢰도가 다르다. 표본의 크기가 같을 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이가 길어지므로 ①보다 ②, ③보다 ④의 신뢰구간의 길이가 길다.
또 ①, ③, ⑤와 ②, ④는 각각 신뢰도가 같고 표본의 크기가 다르다. 신뢰도가 같을 때, 표본의 크기가 작아지면 신뢰구간의 길이가 길어지므로 ①, ③, ⑤ 중 ①의 신뢰구간의 길이가 가장 길고, ④보다 ②의 신뢰구간의 길이가 길다.

24 표본의 크기를 n, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

표본의 크기가 $9n$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{9n}}=\frac{1}{3}\cdot2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 표본의 크기를 9배 하면 신뢰구간의 길이는 $\dfrac{1}{3}$배가 된다.

답 $\dfrac{1}{3}$배

W 07 통계적 추정

MEMO