일품 수학 ❸(하)

정답 및 풀이

● 정답을 확인할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

빠른 정답 찾기

Ⅴ 통계

09 대푯값과 산포도

▸개념 & 기출유형 * 본책 8~9쪽

001 95점 002 ②, ④ 003 26회 004 4.8 005 $\sqrt{6}$ kg
006 4반 007 ⑤ 008 ③ 009 ③

▸내신 만점 도전하기 * 본책 10~11쪽

010 ② 011 252 012 ⑤ 013 81 또는 123
014 ② 015 $\sqrt{17}$점 016 98 017 2, 9 018 (ㄱ), (ㄷ)
019 ③ 020 풀이 8쪽 021 1.8 022 ②

▸내신 만점 굳히기 * 본책 12쪽

023 56 024 ③ 025 ③ 026 C, E 027 113
028 125

▸내신 만점 정복하기 * 본책 13~14쪽

029 ② 030 10회 031 ⑤ 032 ⑤ 033 ④
034 $\sqrt{7}$점 035 ⑤ 036 A팀, B팀 037 ④
038 3 038 77점 040 10 041 $2\sqrt{19}$회

▸교과서 속 창의유형 * 본책 15쪽

042 B

Ⅵ 피타고라스 정리

10 피타고라스 정리

▸개념 & 기출유형 * 본책 18~21쪽

043 54 cm² 044 10 045 ⑤ 046 ③ 047 196
048 ④ 049 3 050 ① 051 1 052 ②
053 $3<x<\sqrt{33}$ 또는 $\sqrt{65}<x<11$ 054 ③ 055 10
056 32 057 ④ 058 $2\sqrt{3}$ cm 059 ② 060 $12\sqrt{2}$
061 18π cm² 062 $2\sqrt{65}$ cm 063 $\frac{50}{3}$

▸내신 만점 도전하기 * 본책 22~25쪽

064 ② 065 16 cm 066 ④ 067 ④
068 $38+10\sqrt{5}$ 069 13 m 070 ④ 071 $7+\sqrt{13}$
072 98 073 30 074 5 cm, $\sqrt{7}$ cm 075 ②
076 45 077 $\frac{2}{7}$ 078 ⑤ 079 ③ 080 $10+6\sqrt{5}$
081 ③ 082 $\left(\frac{18}{5}, \frac{24}{5}\right)$ 083 $\sqrt{13}$ 084 ②
085 ③ 086 ④ 087 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ cm²
088 $(9\pi+36)$ cm²

▸내신 만점 굳히기 * 본책 26쪽

089 ④ 090 146 091 ① 092 ⑤
093 $(15-5\sqrt{3})$초 094 40

11 피타고라스 정리의 활용 (1)

▸개념 & 기출유형 * 본책 27~29쪽

095 36 096 ① 097 $\frac{84}{5}$ cm 098 ③ 099 $3\sqrt{3}$ cm²
100 ⑤ 101 $6\sqrt{6}$ cm² 102 $18\sqrt{5}$ cm²
103 ③ 104 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 105 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 106 ③ 107 ⑤
108 $\sqrt{10}$ 109 ① 110 25

▸내신 만점 도전하기 * 본책 30~32쪽

111 ③ 112 ② 113 $\frac{7}{5}$ 114 ③ 115 $2\sqrt{7}$ cm
116 $16\sqrt{3}$ 117 ② 118 $(24\sqrt{3}+16)$ cm 119 ④
120 $\frac{5}{3}\pi$ 121 ④ 122 ② 123 54 cm² 124 $\frac{5}{2}$
125 ⑤ 126 $72\sqrt{2}$ cm² 127 ③ 128 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$
129 20 m

▸내신 만점 굳히기 * 본책 33쪽

130 ② 131 ② 132 $4(2-\sqrt{3})$ cm² 133 ②
134 $\frac{45}{4}$ 135 $5\sqrt{2}$ cm

12 피타고라스 정리의 활용 (2)

▸개념 & 기출유형
* 본책 34~36쪽

136 3 **137** 9 cm **138** $10\sqrt{2}$ cm **139** ①
140 $18\sqrt{2}\pi$ **141** ③ **142** ② **143** ③
144 $\frac{32\sqrt{14}}{3}$ cm³ **145** $144\sqrt{2}$ cm³ **146** ③
147 $3\sqrt{6}$ cm **148** ④ **149** 2 cm **150** ① **151** $2\sqrt{53}$
152 $10\sqrt{2}$ **153** $12\sqrt{3}$ cm

▸내신 만점 도전하기
* 본책 37~39쪽

154 ④ **155** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm **156** $2\sqrt{21}$ **157** ③
158 $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ **159** ④ **160** $\frac{\sqrt{10}}{4}$배 **161** $4+4\sqrt{5}$
162 $60°$ **163** ③ **164** ③ **165** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm²
166 ② **167** ② **168** $3\sqrt{3}$ cm **169** ⑤ **170** 25π
171 $\sqrt{74}$

▸내신 만점 굳히기
* 본책 40쪽

172 ④ **173** $\frac{19\sqrt{38}}{12}$ **174** 2 **175** ② **176** $2\sqrt{7}$
177 $\sqrt{34}$

▸내신 만점 정복하기
* 본책 41~46쪽

178 ③ **179** 120 m² **180** ③ **181** ① **182** ①
183 예각삼각형 **184** ⑤ **185** ⑤ **186** 125
187 ① **188** 11 cm **189** $(16+2\sqrt{17})$ cm
190 $\frac{8}{3}$ cm² **191** 32 **192** ① **193** ④
194 $\frac{336}{25}$ cm² **195** $108\sqrt{3}$ cm² **196** ②
197 ② **198** $2\sqrt{7}$ cm **199** ⑤ **200** ②
201 49π cm² **202** $8(\sqrt{2}-1)$ cm **203** $\sqrt{10}$
204 ② **205** ② **206** $16\sqrt{2}$ **207** $6\sqrt{2}$ cm²
208 ③ **209** 216π cm³ **210** ⑤ **211** ①
212 ① **213** 64 cm³ **214** 18π cm³ **215** 30 cm

▸교과서 속 창의유형
* 본책 47~48쪽

216 0.5초 **217** 16 : 9 **218** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **219** $50\sqrt{181}$ cm

Ⅶ 삼각비

13 삼각비 (1)

▸개념 & 기출유형
* 본책 50~51쪽

220 ③ **221** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **222** $2\sqrt{34}$ **223** 4 **224** ②
225 ① **226** $\frac{3}{10}$ **227** ④ **228** $\frac{7}{5}$ **229** ③
230 $\frac{11}{9}$

▸내신 만점 도전하기
* 본책 52~54쪽

231 ③ **232** $\frac{4}{5}$ **233** ③ **234** ③ **235** ②
236 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **237** ② **238** $8-4\sqrt{2}$ **239** $\frac{8}{17}$ **240** 24
241 $1-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ **242** ④ **243** ④ **244** $\frac{4}{5}$
245 ⑤ **246** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ **247** ④ **248** $\frac{6}{5}$

▸내신 만점 굳히기
* 본책 55쪽

249 ⑤ **250** $\frac{1}{3}$ **251** $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ **252** ⑤ **253** $\frac{\sqrt{5}}{5}$
254 $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

14 삼각비 (2)

▸개념 & 기출유형
* 본책 56~57쪽

255 ② **256** ⑤ **257** $\sqrt{3}$ **258** $9\sqrt{2}$ **259** $2-\sqrt{3}$
260 $y=\sqrt{3}x+6\sqrt{3}$ **261** ③ **262** -3 **263** ⑤
264 $83°$ **265** 55.056

▸내신 만점 도전하기
* 본책 58~60쪽

266 ①, ③ **267** $\frac{1}{4}$ **268** $\frac{5}{2}$ **269** ① **270** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
271 ② **272** $\left(3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$ cm² **273** $6(\sqrt{3}+1)$ cm
274 ② **275** ⑤ **276** ④ **277** $\frac{\tan x-\sin x\cos x}{2}$
278 ④ **279** ⑤ **280** 4.663 **281** ②
282 $a=0.6820$, $b=1.0724$

▸**내신 만점 굳히기** ∗본책 61쪽

283 60°　284 ④　285 13　286 $96\pi-72\sqrt{3}$
287 ①

15 삼각비의 활용

▸**개념 & 기출유형** ∗본책 62~64쪽

288 ④　289 $360\sqrt{3}\,\text{cm}^3$　290 $30.45\,\text{m}$　291 $3\sqrt{7}$
292 6　293 $\sqrt{41}$　294 $4(\sqrt{3}-1)$　295 $4\sqrt{3}$
296 $75(3+\sqrt{3})\,\text{m}$　297 ①　298 135°　299 ②
300 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$　301 $60\sqrt{6}$　302 ③　303 $15\sqrt{3}$　304 ④
305 ⑤

▸**내신 만점 도전하기** ∗본책 65~68쪽

306 ②　307 ④　308 $(6\sqrt{2}+2\sqrt{6})\,\text{cm}$　309 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
310 $4\sqrt{3}\,\text{m}$　311 ④　312 $\sqrt{29}\,\text{cm}$　313 $\sqrt{2}\,\text{cm}$　314 ②
315 $2(3-\sqrt{3})\,\text{m}$　316 ②　317 $25(\sqrt{3}+1)$
318 ③　319 ②　320 ②　321 ③　322 $\frac{3}{2}$
323 ③　324 $3\sqrt{3}$　325 ①　326 ②　327 $12\sqrt{2}\,\text{cm}^2$
328 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$　329 ⑤　330 $10+\sqrt{13}$　331 $25\sqrt{3}$

▸**내신 만점 굳히기** ∗본책 69쪽

332 ②　333 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　334 ①　335 $24\sqrt{2}-12\sqrt{6}$
336 $600\sqrt{3}-200\pi$　337 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

▸**내신 만점 정복하기** ∗본책 70~75쪽

338 ④　339 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$　340 ⑤　341 $\frac{\sqrt{17}}{17}$
342 $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$　343 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　344 ②　345 $\frac{23}{17}$
346 $\frac{2}{5}$　347 $\frac{\sqrt{13}}{7}$　348 $y=\frac{4}{3}x+\frac{26}{3}$　349 $\frac{\sqrt{6}}{13}$
350 ④　351 ②　352 $\sqrt{3}$　353 ②　354 $18+5\sqrt{3}$
355 $96\sqrt{2}\,\text{m}^2$　356 ②　357 $\frac{m}{m^2+1}+m$
358 ②　359 ③　360 $6\sqrt{2}+4\sqrt{6}$　361 $\sqrt{2}-1$
362 $25(\sqrt{3}-1)$　363 ④　364 ③　365 60°
366 ①　367 ③　368 ⑤　369 ③
370 $\left(\frac{200}{3}\pi-50\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$　371 ④　372 ④
373 $25+50\sqrt{2}$　374 $9\sqrt{3}\pi\,\text{cm}^3$　375 $157\,\text{m}$
376 $\frac{9}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{3})$　377 $4\sqrt{3}$

▸**교과서 속 창의유형** ∗본책 76~77쪽

378 1.1184　379 $\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　380 60
381 $\frac{80\sqrt{3}}{3}\,\text{m/s}$

Ⅷ 원의 성질

16 원과 직선

▸**개념 & 기출유형** ∗본책 80~82쪽

382 $8\,\text{cm}$　383 $6\sqrt{2}\,\text{cm}$　384 ②　385 ②　386 $48\,\text{cm}^2$
387 60°　388 $16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$　389 ③
390 $12(3+\sqrt{3})\,\text{cm}$　391 $3\,\text{cm}$　392 ③　393 $78\,\text{cm}^2$
394 ③　395 $14\,\text{cm}$　396 2　397 $5\,\text{cm}$　398 $4\,\text{cm}$
399 ②

▸**내신 만점 도전하기** ∗본책 83~86쪽

400 ③　401 $108\pi\,\text{cm}^2$　402 ③　403 ④
404 $4\pi-\sqrt{3}$　405 $4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$　406 ③
407 $8\,\text{cm}$　408 ⑤　409 ③　410 $\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\right)\text{cm}$
411 $16\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)\text{cm}^2$　412 ④　413 ③　414 329
415 ③　416 $\sqrt{7}$　417 $12\sqrt{3}+18$
418 $6+3\sqrt{2}-\sqrt{6}$　419 ①　420 $24\pi\,\text{cm}^2$
421 ③　422 ①　423 $\sqrt{3}-1$

▸**내신 만점 굳히기** ∗본책 87쪽

424 ①　425 4　426 $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$　427 ⑤　428 $9\,\text{cm}^2$
429 $18+(6\sqrt{5}-18)\pi$

17 원주각

▸개념 & 기출유형 * 본책 88~89쪽

430 18° 431 ③ 432 16° 433 48° 434 $\frac{3}{5}$
435 ① 436 8 cm 437 54° 438 15° 439 ③
440 265°

▸내신 만점 도전하기 * 본책 90~92쪽

441 68° 442 ③ 443 64° 444 60° 445 3π
446 ③ 447 24 448 ④ 449 $\frac{7}{5}$ 450 ⑤
451 127.5° 452 ④ 453 ② 454 ④ 455 27°
456 ⑤ 457 42° 458 ⑤ 459 96°

▸내신 만점 굳히기 * 본책 93쪽

460 14 461 36π 462 ③ 463 $(1+\sqrt{5})$ cm
464 ④ 465 $2\sqrt{6}$

18 원주각의 활용

▸개념 & 기출유형 * 본책 94~97쪽

466 ④, ⑤ 467 15° 468 100° 469 ③ 470 ③
471 48° 472 ② 473 ③ 474 4 cm 475 ②
476 10 477 ③ 478 4 479 $4\sqrt{3}\pi$ 480 20
481 2 482 4 483 ④ 484 56 485 ①
486 ⑤ 487 3 cm 488 ③

▸내신 만점 도전하기 * 본책 98~101쪽

489 ② 490 ③ 491 148° 492 20° 493 ②
494 6 495 ② 496 ④ 497 85° 498 ④
499 2 500 15π 501 ③ 502 $\frac{128}{17}$ 503 ④
504 ⑤ 505 ② 506 13 507 $\frac{8}{3}$ cm 508 ①
509 $\frac{120}{7}$ 510 11 511 ④ 512 ②

▸내신 만점 굳히기 * 본책 102쪽

513 115° 514 $8\sqrt{19}$ 515 9 516 ③ 517 ⑤
518 $3\sqrt{2}$

▸내신 만점 정복하기 * 본책 103~108쪽

519 ② 520 48π cm^2 521 28π cm 522 ④ 523 ⑤
524 ⑤ 525 ⑤ 526 24 cm 527 ③ 528 25 cm
529 16π cm^2 530 $81\sqrt{3}$ cm^2 531 ⑤
532 17° 533 ③ 534 ① 535 ④ 536 75°
537 125° 538 ⑤ 539 57° 540 ③ 541 ④
542 ⑤ 543 ② 544 $24\sqrt{6}$ cm^2 545 ④
546 ① 547 ④ 548 $4\sqrt{3}$ 549 ② 550 ④
551 6 552 100π cm^2 553 5π 554 1 cm
555 $4\sqrt{2}$ cm

▸교과서 속 창의유형 * 본책 109쪽

556 $(48\pi+108\sqrt{3})$ m^2

만점 공략 BOX

Ⅴ 통계

09 | 대푯값과 산포도

개념&기출유형 본책 8~9쪽

001 5회째 시험에서 받은 수학 성적을 x점이라 하면

$$\frac{85+87+92+96+x}{5}=91$$

(평균) $=\frac{(변량)의\ 총합}{(변량)의\ 개수}$

$360+x=455 \qquad \therefore x=95$

답 95점

002 ② 대푯값은 자료 전체의 특징을 대표적으로 나타내는 값이다.

④ 대푯값에는 평균, 중앙값, 최빈값 등이 있다.

답 ②, ④

보충학습

(1) 평균의 성질
① 평균은 자료 전체의 경향을 나타내는 값으로 가장 많이 이용된다.
② 장점: 모든 자료의 값을 포함하여 계산한다.
③ 단점: 극단적인 값에 영향을 받는다.

(2) 중앙값의 성질
① 장점: 자료의 값 중에 극단적인 값이 있는 경우 자료 전체의 특징을 더 잘 대표할 수 있다.
② 단점: 자료의 모든 정보를 활용한다고 볼 수 없다.

(3) 최빈값의 성질
① 선호도를 조사할 때 주로 사용된다.
② 장점: 자료의 개수가 많은 경우에 쉽게 구할 수 있고, 숫자로 나타내지 못하는 자료의 경우에도 구할 수 있다.
③ 단점: 자료의 개수가 적은 경우, 자료 전체의 특징을 반영하지 못할 수도 있다.

003 변량의 총합은

$16+19+21+(20+a)+(20+a)+28+30+32$
$+33+33$
$=252+2a$

십의 자리의 숫자가 2이고 일의 자리의 숫자가 a이므로
$2\times10+a\times1$
$=20+a$
이때 $2a$로 나타내지 않도록 주의한다.

이고 평균이 26회이므로

$\frac{252+2a}{10}=26, \qquad 252+2a=260$

$2a=8 \qquad \therefore a=4$

이때 자료의 변량은 모두 10개이므로 중앙값은 변량을 작은 값부터 차례로 나열할 때 5번째, 6번째에 오는 두 값, 즉 24와 28의 평균이다.

따라서 구하는 중앙값은

$\frac{24+28}{2}=26\,(회)$

답 26회

004 6, 7, 10, 12, x의 평균이 9이므로

$\frac{6+7+10+12+x}{5}=9$

$35+x=45 \qquad \therefore x=10$

각 변량의 편차는 $-3,\ -2,\ 1,\ 3,\ 1$이므로

(편차)=(변량)−(평균)

$(분산)=\frac{(-3)^2+(-2)^2+1^2+3^2+1^2}{5}$

$=\frac{24}{5}=4.8$

답 4.8

005 편차의 합은 0이므로

$-4+2+0+(-1)+x=0 \qquad \therefore x=3$

$\therefore (분산)=\frac{(-4)^2+2^2+0^2+(-1)^2+3^2}{5}$

$=\frac{30}{5}=6$

$\therefore (표준편차)=\sqrt{6}\ (\mathrm{kg})$

답 $\sqrt{6}$ kg

006 표준편차가 작을수록 변량이 평균 가까이에 밀집되어 있다. 따라서 성적이 가장 고른 학급은 표준편차가 가장 작은 4반이다.

답 4반

007 미술 수행 평가 점수의 평균은

0 이상 4 미만인 계급의 계급값

$\frac{2\times1+6\times2+10\times6+14\times8+18\times3}{20}$

$=\frac{240}{20}=12\,(점)$

계급값	도수	편차	(편차)^2	(편차)$^2\times$(도수)
2	1	−10	100	100
6	2	−6	36	72
10	6	−2	4	24
14	8	2	4	32
18	3	6	36	108
합계	20			336

(분산) $=\frac{\{(편차)^2\times(도수)\}의\ 총합}{(도수)의\ 총합}$

따라서 분산은 $\frac{336}{20}=16.8$

답 ⑤

008 계급값이 6.5시간인 계급의 도수를 x명이라 하면 도수의 합은 10명이므로

$1+3+x+2=10 \qquad \therefore x=4$

$\therefore (평균)=\frac{4.5\times1+5.5\times3+6.5\times4+7.5\times2}{10}$

$=\frac{62}{10}=6.2\,(시간)$

$(분산)=\frac{1}{10}\{(4.5-6.2)^2\times1+(5.5-6.2)^2\times3$
$+(6.5-6.2)^2\times4+(7.5-6.2)^2\times2\}$

$=\frac{8.1}{10}=0.81$

$\therefore (표준편차)=\sqrt{0.81}=0.9\,(시간)$

답 ③

009 n명의 학생들의 수학 점수를 각각 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$이라 하면 n개의 변량의 평균이 m점이고 표준편차가 s점이므로 변량 $x_1+5,\ x_2+5,\ x_3+5,\ \cdots,\ x_n+5$의 평균은 $(m+5)$점이고 표준편차는 s점이다.

각 학생들의 수학 점수를 5점씩 올렸다.

답 ③

내신 만점 도전하기
본책 10~11쪽

010 전략 A, B, C 세 사람의 영어 성적의 총합을 구한다.

풀이 A, B, C 세 사람의 영어 성적을 각각 a점, b점, c점이라 하면 A와 B의 평균이 85점이므로

$\frac{a+b}{2}=85$

$\therefore a+b=170$ …… ㉠

B와 C의 평균이 88점이므로

$\frac{b+c}{2}=88$

$\therefore b+c=176$ …… ㉡

A와 C의 평균이 82점이므로

$\frac{a+c}{2}=82$

$\therefore a+c=164$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(a+b+c)=510$

$\therefore a+b+c=255$

따라서 A, B, C의 영어 성적의 평균은

$\frac{a+b+c}{3}=\frac{255}{3}=85$(점)

답 ②

㉠에서 $c=85$
㉡에서 $a=79$
㉢에서 $b=91$

011 해결 과정 ① 중앙값과 최빈값이 6이므로 $a\le b\le c$라 하면

$a=6,\ b=6$ • 40% 배점

5개의 변량 중 적어도 2개는 6이어야 한다.

해결 과정 ② 이때 평균이 5이므로

$\frac{2+4+6+6+c}{5}=5$

$18+c=25 \quad \therefore c=7$ • 50% 배점

답 구하기 $\therefore abc=252$ • 10% 배점

답 252

012 전략 일주일 동안의 독서 시간의 총합을 구한다.

풀이 평균이 58분이므로 독서 시간의 총합은

$58\times7=406$(분)

$\therefore x=406-(38+46+52+40+90+92)$
$=406-358$
$=48$

주어진 자료를 작은 값부터 차례대로 나열하면

38, 40, 46, 48, 52, 90, 92

이므로 중앙값은 48분이다.

$\therefore y=48$

$\therefore x+y=96$

답 ⑤

{(편차)^{2}의 총합}
=(분산)
×{(변량)의 개수}

013 문제 이해 편차의 총합은 0이므로

$(2x-4)+(-6)+(2x^2+3)+(-3)+(x-2)$
$+(-x^2+2)$
$=0$

$x^2+3x-10=0, \quad (x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$ • 30% 배점

해결 과정 ① (i) $x=-5$일 때,

평균이 70이므로 $C-70=2\times(-5)^2+3$

$\therefore C=123$ • 30% 배점

해결 과정 ② (ii) $x=2$일 때,

평균이 70이므로 $C-70=2\times2^2+3$

$\therefore C=81$ • 30% 배점

답 구하기 (i), (ii)에서 변량 C의 값은 81 또는 123이다. • 10% 배점

답 81 또는 123

014 전략 평균을 이용하여 m, n의 값을 먼저 구한다.

풀이 A팀의 안타 수의 평균이 41개이므로

$\frac{38+m+45+42}{4}=41$

$125+m=164 \quad \therefore m=39$

A팀의 분산은

$\frac{(38-41)^2+(39-41)^2+(45-41)^2+(42-41)^2}{4}$

$=\frac{30}{4}=7.5$

B팀의 안타 수의 평균이 35개이므로

$\frac{31+36+n+33}{4}=35$

$100+n=140 \quad \therefore n=40$

B팀의 분산은

$\frac{(31-35)^2+(36-35)^2+(40-35)^2+(33-35)^2}{4}$

$=\frac{46}{4}=11.5$

따라서 $a=7.5$, $b=11.5$이므로

$b-a=4$

답 ②

015 전략 남학생과 여학생의 표준편차를 이용하여 전체 학생의 편차의 제곱의 총합을 구한다.

풀이 남학생의 분산이 $3^2=9$이므로 편차의 제곱의 합은

$9\times20=180$

여학생의 분산이 $5^2=25$이므로 편차의 제곱의 합은

$25\times20=500$

이때 남학생과 여학생의 음악 성적의 평균이 같으므로 주어진 학급 전체 학생의 분산은

$\frac{180+500}{20+20}=\frac{680}{40}=17$

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{17}$ (점)

답 $\sqrt{17}$ 점

만점비법

평균이 같은 두 집단 전체의 표준편차

평균이 같은 두 집단 A, B의 표준편차와 도수가 오른쪽 표와 같을 때, A, B 두 집단 전체의 표준편차는

$\sqrt{\frac{ax^2+by^2}{a+b}}$

	A	B
표준편차	x	y
도수	a	b

016 해결 과정 ① 직육면체의 모서리의 길이의 평균이 10이므로

$$\frac{4(x+y+z)}{12}=10$$

$\therefore x+y+z=30$ …… ㉠

모서리의 길이의 분산이 4이므로

$$\frac{4(x-10)^2+4(y-10)^2+4(z-10)^2}{12}=4$$

$(x-10)^2+(y-10)^2+(z-10)^2=12$

$x^2+y^2+z^2-20(x+y+z)+300=12$

㉠을 위의 식에 대입하면

$x^2+y^2+z^2=312$ • 40% 배점

해결 과정 ② 이때

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

이므로

$30^2=312+2xy+2yz+2zx$

$\therefore 2xy+2yz+2zx=588$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 주어진 직육면체의 6개의 면의 넓이의 평균은

$$\frac{2xy+2yz+2zx}{6}=\frac{588}{6}=98$$ • 20% 배점

답 98

017 전략 평균을 먼저 구한다.

풀이 $(\text{평균})=\frac{4+x+(11-x)+5+10}{5}=\frac{30}{5}=6$

이고 분산이 9.2이므로

$$\frac{(4-6)^2+(x-6)^2+(11-x-6)^2+(5-6)^2+(10-6)^2}{5}$$

$=9.2$

$2x^2-22x+82=46,\quad x^2-11x+18=0$

$(x-2)(x-9)=0\quad \therefore x=2$ 또는 $x=9$

답 2, 9

018 전략 (편차)=(변량)−(평균)임을 이용한다.

풀이 (ㄱ) B의 편차가 0이므로 B의 점수는 평균과 같다.

(ㄴ) 평균을 m점이라 하면 D는 $(m+2)$점, E는 $(m-1)$점이므로 D와 E의 점수 차는

$(m+2)-(m-1)=3$ (점)

$m+2>m-1$

(ㄷ) $(\text{분산})=\frac{(-2)^2+0^2+1^2+2^2+(-1)^2}{5}=\frac{10}{5}=2$

$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{2}$ (점)

(ㄹ) 점수가 가장 낮은 학생은 A이다.

이상에서 옳은 것은 (ㄱ), (ㄷ)이다. 답 (ㄱ), (ㄷ)

참고 평균을 m점이라 할 때, A, B, C, D, E 5명의 학생의 점수는 다음과 같다.

학생	A	B	C	D	E
점수(점)	$m-2$	m	$m+1$	$m+2$	$m-1$

따라서 점수가 가장 높은 학생은 D이고, 가장 낮은 학생은 A이다.

019 전략 표준편차는 변량들이 평균에서 흩어져 있는 정도를 나타낸다.

풀이 A: 1, 2, 3, …, 50

B: 51, 52, 53, …, 100

C: 2, 4, 6, …, 100

자료 B는 자료 A의 각 변량에 50을 더한 것과 같으므로 자료 A와 자료 B의 표준편차는 같다.

$51=1+50$, $52=2+50$, $53=3+50$, ⋮ $100=50+50$

$\therefore a=b$ …… ㉠

자료 C는 자료 A의 각 변량에 2를 곱한 것과 같으므로 자료 C의 표준편차는 자료 A의 표준편차의 2배이다.

$2=1\times2$, $4=2\times2$, $6=3\times2$, ⋮ $100=50\times2$

$\therefore c=2a$

$a>0$이므로 $c>a$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=b<c$ 답 ③

020 전략 평균과 분산의 뜻을 이용한다.

풀이 (1) $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=m$이므로

(분산)

$$=\frac{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2}{n}$$

$$=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-2m(x_1+x_2+\cdots+x_n)+nm^2}{n}$$

$$=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-2m\times\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+m^2$$

$$=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-2m^2+m^2$$

$$=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-m^2$$

(2) $10^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-50^2$이므로

$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}=2600$ 답 풀이 참조

021 해결 과정 ① 체육관을 이용한 횟수의 평균은

$$m=\frac{5\times5+7\times6+9\times5+11\times2+13\times2}{20}$$

$=\frac{160}{20}=8$ • 20% 배점

해결 과정 ②

계급값	도수	편차	(편차)^2	(편차)^2×(도수)
5	5	−3	9	45
7	6	−1	1	6
9	5	1	1	5
11	2	3	9	18
13	2	5	25	50
합계	20			124

따라서 분산은 $n=\frac{124}{20}=6.2$ • 60% 배점

답 구하기 $\therefore m-n=1.8$ • 20% 배점

답 1.8

022 전략 두 반의 분산을 구하면 변량의 분포를 알 수 있다.

풀이 A반의 영화 관람 횟수의 평균은

$$\frac{1\times10+3\times3+5\times4+7\times3+9\times20}{40}$$
$$=\frac{240}{40}=6\,(\text{회})$$

A반의 분산은

$$\frac{1}{40}\{(1-6)^2\times10+(3-6)^2\times3+(5-6)^2\times4+(7-6)^2\times3+(9-6)^2\times20\}$$
$$=\frac{464}{40}=11.6$$

B반의 영화 관람 횟수의 평균은

$$\frac{1\times1+3\times7+5\times10+7\times15+9\times7}{40}$$
$$=\frac{240}{40}=6\,(\text{회})$$

B반의 분산은

$$\frac{1}{40}\{(1-6)^2\times1+(3-6)^2\times7+(5-6)^2\times10+(7-6)^2\times15+(9-6)^2\times7\}$$
$$=\frac{176}{40}=4.4$$

(ㄱ) A반의 평균과 B반의 평균은 같다.
(ㄴ) A반의 분산은 B반의 분산보다 크다.
(ㄷ) A반의 분산이 B반의 분산보다 크므로 A반의 영화 관람 횟수의 분포가 B반보다 넓게 퍼져 있다.
이상에서 옳은 것은 (ㄱ), (ㄴ)이다. 답 ②

보충학습

표준편차의 직관적 비교
① 표준편차가 작다.
→ 변량이 평균 가까이에 밀집되어 있다.
→ 변량 간의 격차가 작다.
② 표준편차가 크다.
→ 변량이 평균에서 멀리 떨어져 있다.
→ 변량 간의 격차가 크다.

내신 만점 굳히기 본책 12쪽

023 전략 7개의 자료를 작은 값부터 차례대로 나열한다.

풀이 7개의 자료를 작은 값부터 차례대로 나열할 때, 중앙값이 81이므로 4번째에 81이 오고, 최빈값이 75이므로 가장 작은 자료의 값 x가 75보다 작다고 하면 두 번째와 세 번째에 75가 각각 온다. 또 가장 큰 자료의 값이 92이므로 7번째에 92가 온다.

자료가 7개이므로 $\frac{7+1}{2}=4$ (번째)에 오는 값이 중앙값이다.

따라서 다섯 번째와 여섯 번째에 오는 자료를 각각 a, b라 하면 7개의 자료는

x, 75, 75, 81, a, b, 92

x의 값이 최소이려면 a, b의 값이 최대이어야 하고, 최빈값이 75이므로 $81<a<b<92$이어야 한다.
따라서 $a=90$, $b=91$일 때 x의 값이 최소가 되고, 이때 평균이 80이므로

$$\frac{x+75+75+81+90+91+92}{7}=80$$
$$504+x=560 \qquad \therefore x=56$$

즉 x의 최솟값은 56이다. 답 56

024 전략 남자와 여자의 인구수를 문자로 놓고 전체 인구의 나이의 평균을 구하는 식을 세운다.

풀이 남자와 여자의 인구수를 각각 a명, b명이라 하면

a명의 평균이 x, b명의 평균이 y일 때, $(a+b)$명 전체의 평균은 $\frac{ax+by}{a+b}$

$$\frac{46a+52b}{a+b}=48, \qquad 46a+52b=48(a+b)$$
$$2a=4b \qquad \therefore a=2b$$

따라서 이 도시의 남자와 여자의 인구수의 비는

$a:b=2b:b=2:1$ 답 ③

025 전략 평균과 분산의 뜻을 이용하여 m과 s^2을 먼저 구한다.

풀이 변량 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5의 평균이 m이므로

$$m=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}$$
$$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5m$$

또 변량 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5의 표준편차가 s이므로

$$(\text{분산})=\frac{(\text{편차})^2\text{의 총합}}{(\text{변량})\text{의 개수}}$$

$$s^2=\frac{1}{5}\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+(x_3-m)^2+(x_4-m)^2+(x_5-m)^2\}$$
$$\therefore (x_1-m)^2+(x_2-m)^2+(x_3-m)^2+(x_4-m)^2+(x_5-m)^2=5s^2$$

따라서 변량 $\frac{x_1-m}{s}$, $\frac{x_2-m}{s}$, $\frac{x_3-m}{s}$, $\frac{x_4-m}{s}$, $\frac{x_5-m}{s}$의 평균은

$$\frac{1}{5}\left(\frac{x_1-m}{s}+\frac{x_2-m}{s}+\frac{x_3-m}{s}+\frac{x_4-m}{s}+\frac{x_5-m}{s}\right)$$
$$=\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)-5m}{5s}$$
$$=\frac{5m-5m}{5s}=0$$

이므로 분산은

$$\frac{1}{5}\left\{\left(\frac{x_1-m}{s}\right)^2+\left(\frac{x_2-m}{s}\right)^2+\left(\frac{x_3-m}{s}\right)^2+\left(\frac{x_4-m}{s}\right)^2+\left(\frac{x_5-m}{s}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{5s^2}\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+(x_3-m)^2+(x_4-m)^2+(x_5-m)^2\}$$
$$=\frac{1}{5s^2}\times5s^2=1$$
$$\therefore (\text{표준편차})=1$$

답 ③

026 문제 이해 5개의 컵 A, B, C, D, E에 들어 있는 물의 양의 합은

$120+60+30+100+50=360\,(\text{mL})$ • 10% 배점

해결 과정 ① 물컵을 4개로 만들 때, 물의 양의 평균은

$\frac{360}{4}=90\,(\text{mL})$ • 30% 배점

해결 과정 ② 물의 양의 표준편차를 가능한 작게 하려면 평균 90 mL보다 적게 들어 있는 컵 B, C, E 중 두 개의 컵에 들어 있는 물을 합하면 된다.

	물의 양(mL)	편차	(편차)^{2}의 합
B+C, E	90, 50	0, -40	1600
B, C+E	60, 80	-30, -10	1000
B+E, C	110, 30	20, -60	4000

• 40% 배점

답 구하기 따라서 C, E를 합할 때 표준편차가 가장 작다. • 20% 배점

답 C, E

027 해결 과정 ① 평균이 8점이므로

$\frac{8+6+9+10+x+y}{6}=8$

$33+x+y=48$

$\therefore x+y=15$ ······㉠ • 30% 배점

해결 과정 ② 이때 분산은

$\frac{0^2+(-2)^2+1^2+2^2+(x-8)^2+(y-8)^2}{6}$

$=\frac{(x-8)^2+(y-8)^2+9}{6}$

이고, 분산이 최소일 때 표준편차도 최소이다.
따라서 ㉠을 만족시키는 자연수 x, y에 대하여 $(x-8)^2+(y-8)^2$의 값이 최소이어야 하므로

$x=7$, $y=8$ 또는 $x=8$, $y=7$ • 50% 배점

답 구하기 $\therefore x^2+y^2=113$ • 20% 배점

답 113

참고 $(x-8)^2+(y-8)^2$

$=(x-8)^2+(7-x)^2$ ($\because y=15-x$)

$=2x^2-30x+113$

$=2\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

이때 x는 자연수이므로 $x=7$ 또는 $x=8$일 때 최솟값 1을 갖는다.

028 [문제 해결 길잡이]

❶ A, B, C, D, E의 평균과 표준편차를 이용하여 $A+B+C+D+E$, $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2$의 값을 구한다.

❷ ❶에서 구한 값을 이용하여 $f(t)$의 식을 정리한다.

❸ $f(t)$의 최솟값을 구한다.

풀이 변량 A, B, C, D, E의 평균이 2이므로

$\frac{A+B+C+D+E}{5}=2$

$\therefore A+B+C+D+E=10$

분산은 5^2이다.

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는
① $a>0$이면 $x=p$에서 최솟값은 q, 최댓값은 없다.
② $a<0$이면 $x=p$에서 최댓값은 q, 최솟값은 없다.

평균은 극단적인 값에 영향을 받는다.

(실수)$^2\geq0$이므로 $x-8=0$ 또는 $y-8=0$인 경우를 생각한다.

표준편차가 5이므로

$\frac{(A-2)^2+(B-2)^2+(C-2)^2+(D-2)^2+(E-2)^2}{5}$

$=5^2$

$A^2+B^2+C^2+D^2+E^2-4(A+B+C+D+E)+20$

$=125$

$A^2+B^2+C^2+D^2+E^2-40+20=125$

$\therefore A^2+B^2+C^2+D^2+E^2=145$ ❶

$f(t)$의 식을 정리하면

$f(t)=(A-t)^2+(B-t)^2+(C-t)^2+(D-t)^2+(E-t)^2$

$=A^2+B^2+C^2+D^2+E^2-2t(A+B+C+D+E)+5t^2$

$=145-20t+5t^2$

$=5(t-2)^2+125$ ❷

따라서 $f(t)$의 최솟값은 125이다. ❸ 답 125

내신 만점 정복하기

본책 13~14쪽

029 전략 대푯값은 자료 전체의 특징을 나타내는 값이다.

풀이 각각의 평균을 구하면

① 35 ② $\frac{44}{3}$ ③ $\frac{500}{3}$

④ 5 ⑤ 15

②의 평균은 $\frac{44}{3}$이지만 어느 하나의 특정 변량이 아주 커서 평균이 아주 커졌다. 따라서 자료 전체의 특징을 대표한다고 할 수 없다. 답 ②

030 전략 중앙값 ➲ 자료의 변량을 작은 값부터 차례대로 나열할 때 중앙에 위치하는 값

풀이 도수의 총합은

$1+4+7+5+3=20$ (명)

따라서 중앙값은 턱걸이 횟수가 낮은 쪽에서 10번째, 11번째인 학생이 모두 속한 8회 이상 12회 미만인 계급에 속하므로 구하는 계급값은

$\frac{8+12}{2}=10$ (회) 답 10회

031 전략 분산과 표준편차를 구한다.

풀이 ① (평균)$=\frac{5+4+1+4+1+2+4+3}{8}$

$=\frac{24}{8}=3$ (개)

② 변량을 작은 값부터 차례대로 나열하면

1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5

따라서 중앙값은

$\frac{3+4}{2}=3.5$ (개)

③ 최빈값은 4개이다.
④ 편차의 합은 항상 0이다.
⑤ $(분산)=\frac{1}{8}\{(5-3)^2+(4-3)^2+(1-3)^2$
$+(4-3)^2+(1-3)^2+(2-3)^2$
$+(4-3)^2+(3-3)^2\}$
$=\frac{16}{8}=2$
$\therefore (표준편차)=\sqrt{2}\,(개)$ 답 ⑤

032 전략 먼저 중간고사 3개 과목의 평균과 분산을 구하는 식을 세운다.
풀이 중간고사 3개 과목의 성적을 각각 a점, b점, c점이라 하면 평균이 84점, 표준편차가 6점이므로
$$\frac{a+b+c}{3}=84$$
$$\frac{1}{3}\{(a-84)^2+(b-84)^2+(c-84)^2\}=6^2$$
기말고사 3개 과목의 성적은 $(a+5)$점, $(b+5)$점, $(c+5)$점이므로 평균은
$$\frac{(a+5)+(b+5)+(c+5)}{3}=\frac{a+b+c}{3}+5$$
$$=84+5=89\,(점)$$
중간고사 3개 과목의 성적의 평균
또 분산은
$$\frac{1}{3}\{(a+5-89)^2+(b+5-89)^2+(c+5-89)^2\}$$
$$=\frac{1}{3}\{(a-84)^2+(b-84)^2+(c-84)^2\}$$
중간고사 3개 과목의 성적의 분산
$$=6^2=36$$ 답 ⑤
참고 기말고사에서는 3개 과목 모두 점수가 5점씩 올랐으므로
(기말고사의 평균)=(중간고사의 평균)+5
이고, 분산은 변함없다.

033 전략 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$임을 이용한다.
풀이 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$$
$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=a^2-2b$$
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때
① $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$
② $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

이때 α, β의 평균은 $\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{a}{2}$이므로 분산은
$$\frac{1}{2}\left\{\left(\alpha+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\beta+\frac{a}{2}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\alpha^2+\beta^2+a(\alpha+\beta)+\frac{a^2}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(a^2-2b-a^2+\frac{a^2}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}-2b\right)$$
$$=\frac{a^2-4b}{4}$$ 답 ④

034 전략 분산은 편차의 제곱의 평균임을 이용한다.
풀이 남학생 4명과 여학생 6명의 평균은 같고, 분산은 각각 4, 9이므로 10명 전체의 국어 성적의 편차의 제곱의 합은
$$4\times4+9\times6=70$$
따라서 10명 전체의 국어 성적의 표준편차는
$$\sqrt{\frac{70}{10}}=\sqrt{7}\,(점)$$ 답 $\sqrt{7}$점

035 전략 변량 x, y, z의 평균이 m, 표준편차가 s이면 변량 $ax+b$, $ay+b$, $az+b$ (a, b는 상수)의 평균은 $am+b$, 표준편차는 $|a|s$이다.
풀이 x, y, z의 평균을 m, 표준편차를 s라 하자.
ㄱ. $x+3$, $y+3$, $z+3$의 평균은 $m+3$이다.
ㄴ. x, y, z의 분산은 s^2이고 $x-1$, $y-1$, $z-1$과 $x+1$, $y+1$, $z+1$의 분산은 s^2으로 서로 같다.
ㄷ. $-2x$, $-2y$, $-2z$의 표준편차는 $|-2|s=2s$
$\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}z$의 표준편차는 $\frac{1}{2}s$
따라서 $-2x$, $-2y$, $-2z$의 표준편차는 $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}z$의 표준편차의 4배이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

036 전략 자료가 평균에 밀집되어 있을수록 표준편차가 작음을 이용한다.
풀이 표준편차는 자료가 평균을 중심으로 흩어진 정도를 나타내므로 점수의 차가 클수록 표준편차가 크고, 작을수록 표준편차가 작다.
따라서 표준편차가 가장 큰 팀은 A팀, 가장 작은 팀은 B팀이다. 답 A팀, B팀
참고 A, B, C 세 팀의 평균은 모두 8.5회이고, 표준편차는 각각 $\sqrt{1.85}$회, $\sqrt{0.65}$회, $\sqrt{1.05}$회이다.

037 전략 그래프가 넓게 퍼져 있으면 자료의 분산이 크다.
풀이 ㄱ. A도시가 B도시보다 자료의 분포가 좁게 퍼져 있으므로 주민 간의 소득의 격차가 작다.
ㄴ. 두 그래프의 퍼져 있는 정도가 다르므로 두 도시의 소득의 표준편차는 다르다.
ㄷ. 그래프의 대칭축이 평균을 나타내므로 A도시의 주민들이 B도시의 주민들보다 평균 소득이 낮다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

038 문제 이해 중앙값이 $3a$이므로 자료의 변량을 작은 값부터 차례대로 나열하면
$$a,\ a^2,\ 3a,\ a^2+2a,\ a^2+3a$$ • 30% 배점
a는 자연수이므로 $a<3a$, $a^2<a^2+2a<a^2+3a$
해결 과정 ① (i) $3a=a^2$인 경우
$a(a-3)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=3$
그런데 a는 자연수이므로 $a=3$
이때 주어진 자료는 3, 9, 9, 15, 18이므로 중앙값과 최빈값이 모두 9이다. • 30% 배점

해결 과정 ② (ii) $3a=a^2+2a$인 경우

$a(a-1)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=1$

그런데 a는 자연수이므로 $\quad a=1$

이때 주어진 자료는 1, 1, 3, 3, 4이므로 중앙값은 3이지만 최빈값은 1과 3이다. • 30% 배점

답 구하기 (i), (ii)에서 $\quad a=3$ • 10% 배점

답 3

039 해결 과정 C의 수학 성적의 편차를 x점이라 하면 편차의 합은 0이므로

(편차)=(변량)−(평균)

$-3+0+x+(-2)+4=0$

$\therefore x=1$ • 70% 배점

답 구하기 따라서 C의 수학 성적은

$1+76=77$ (점) • 30% 배점

답 77점

040 해결 과정 ① A모둠과 B모둠의 평균이 같으므로

$$\frac{7+x+y+2}{4}=\frac{6+6+1+3}{4}$$

$$\frac{9+x+y}{4}=4$$

$9+x+y=16$

$\therefore x+y=7 \quad \cdots\cdots$ ㉠ • 40% 배점

해결 과정 ② A모둠과 B모둠의 분산이 같으므로

$$\frac{(7-4)^2+(x-4)^2+(y-4)^2+(2-4)^2}{4}$$
$$=\frac{(6-4)^2+(6-4)^2+(1-4)^2+(3-4)^2}{4}$$

$x^2+y^2-8(x+y)+27=0$

$x^2+y^2-8\times7+27=0$

$\therefore x^2+y^2=29 \quad \cdots\cdots$ ㉡ • 40% 배점

답 구하기 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로 ㉠, ㉡에서

$7^2=29+2xy$

$\therefore xy=10$ • 20% 배점

답 10

041 해결 과정 ① 전체 학생 수는 $(29+x)$명이고 평균이 18회이므로

$7+18+x+4=29+x$

$$\frac{5\times7+15\times18+25\times x+35\times4}{29+x}=18$$

$445+25x=522+18x$

$7x=77$

$\therefore x=11$ • 30% 배점

해결 과정 ② 따라서 분산은

$$\frac{1}{40}\{(5-18)^2\times7+(15-18)^2\times18$$
$$+(25-18)^2\times11+(35-18)^2\times4\}$$
$$=\frac{3040}{40}=76$$ • 50% 배점

답 구하기 $\therefore$ (표준편차)$=2\sqrt{19}$ (회) • 20% 배점

답 $2\sqrt{19}$ 회

교과서 속 창의유형

본책 15쪽

042 [문제 해결 길잡이]

❶ B팀의 스트라이크 횟수의 평균과 분산을 구한다.
❷ A팀에서 스트라이크를 1회, 2회 성공시킨 선수가 각각 3명, 2명일 때, 대표팀으로 적합한 팀을 구한다.
❸ A팀에서 스트라이크를 1회, 2회 성공시킨 선수가 각각 2명, 3명일 때, 대표팀으로 적합한 팀을 구한다.
❹ 학교 대표 팀으로 적합한 팀을 구한다.

풀이 B팀의 스트라이크 횟수의 평균은

$$\frac{1\times2+2\times2+3\times1+4\times4+5\times1}{10}$$
$$=\frac{30}{10}=3\text{(회)}$$

이므로 분산은

$$\frac{(-2)^2\times2+(-1)^2\times2+0^2\times1+1^2\times4+2^2\times1}{10}$$
$$=\frac{18}{10}=1.8$$ ❶

(i) A팀에서 스트라이크를 1회, 2회 성공시킨 선수가 각각 3명, 2명인 경우

A팀의 스트라이크 성공 횟수의 평균은

$$\frac{1\times3+2\times2+3\times1+4\times1+5\times3}{10}$$
$$=\frac{29}{10}=2.9\text{(회)}$$

따라서 B팀의 평균이 더 높으므로 대표팀으로 적합한 팀은 B이다. ❷

(ii) A팀에서 스트라이크를 1회, 2회 성공시킨 선수가 각각 2명, 3명인 경우

A팀의 스트라이크 성공 횟수의 평균은

$$\frac{1\times2+2\times3+3\times1+4\times1+5\times3}{10}$$
$$=\frac{30}{10}=3\text{(회)}$$

즉 B팀과 평균이 같으므로 횟수가 고른 팀이 대표팀으로 적합하다.

이때 A팀의 분산은

$$\frac{(-2)^2\times2+(-1)^2\times3+0^2\times1+1^2\times1+2^2\times3}{10}$$
$$=\frac{24}{10}=2.4$$

따라서 B팀의 분산이 A팀의 분산보다 작으므로 횟수가 고른 팀은 B이다. ❸

(i), (ii)에서 대표 팀으로 적합한 팀은 B이다. ❹

답 B

Ⅵ 피타고라스 정리

10 | 피타고라스 정리

개념&기출유형 본책 18~21쪽

043 $\overline{AC}=\sqrt{15^2-9^2}=12\,(\text{cm})$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 9\times 12=54\,(\text{cm}^2)$ 답 54 cm^2

044 $\triangle ADC$의 넓이가 24이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{DC}\times 8=24$

$\therefore \overline{DC}=6$

$\triangle ADC$에서 $\overline{AD}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$\therefore \overline{BD}=\overline{AD}=10$ 답 10

045 $\overline{OA}=\overline{OA'}=x\,\text{cm}$라 하면

$\overline{OB}=\overline{OB'}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x\,(\text{cm})$

$\overline{OC}=\overline{OC'}=\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+x^2}=\sqrt{3}x\,(\text{cm})$

$\overline{OD}=\overline{OD'}=\sqrt{(\sqrt{3}x)^2+x^2}=2x\,(\text{cm})$

즉 $2x=4\sqrt{6}$이므로 $x=2\sqrt{6}$ 답 ⑤

046 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=5\,(\text{cm})$

$\square ACHI=\square LMGC$이므로 $4^2=5\times\overline{MG}$

$\therefore \overline{MG}=\frac{16}{5}\,(\text{cm})$ 답 ③

047 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$,

$\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}=10$, $\overline{AH}=\overline{BE}=\overline{CF}=\overline{DG}$이므로

$\triangle AEH\equiv\triangle BFE\equiv\triangle CGF\equiv\triangle DHG$ (SAS 합동)

따라서 $\overline{EH}=\overline{FE}=\overline{GF}=\overline{HG}$이고,

$\angle HEF=\angle EFG=\angle FGH=\angle GHE=90°$이므로

$\square EFGH$는 정사각형이다.

이때 $\square EFGH$의 넓이가 116이므로

$\overline{EH}^2=116$

$\triangle AEH$에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{EH}^2-\overline{AE}^2}=\sqrt{116-100}=4$

따라서 $\overline{AB}=10+4=14$이므로

$\square ABCD=14^2=196$ 답 196

048 ① $(\sqrt{29})^2=2^2+5^2$

② $(2\sqrt{6})^2=3^2+(\sqrt{15})^2$

③ $6^2=3^2+(3\sqrt{3})^2$

④ $(2\sqrt{10})^2\neq 4^2+5^2$

⑤ $20^2=12^2+16^2$

따라서 직각삼각형이 아닌 것은 ④이다. 답 ④

> 삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작다.

> 변의 길이는 항상 양수이다.

> 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형에서 c가 가장 긴 변의 길이일 때
> ① $c^2<a^2+b^2$ → 예각삼각형
> ② $c^2=a^2+b^2$ → 직각삼각형
> ③ $c^2>a^2+b^2$ → 둔각삼각형

> **삼각형이 되기 위한 조건**
> 삼각형의 한 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 차보다 크고 두 변의 길이의 합보다 작다.

> $\angle AEH=\angle BFE$, $\angle BFE+\angle BEF=90°$이므로
> $\angle AEH+\angle BEF=90°$
> $\therefore \angle HEF=90°$
> 같은 방법으로 하면
> $\angle EFG=\angle FGH=\angle GHE=90°$

049 $x+2$가 가장 긴 변의 길이이므로 삼각형이 되려면

$x+2<x+(x+1)$ $\therefore x>1$

직각삼각형이 되려면

$(x+2)^2=x^2+(x+1)^2$

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x>1$) 답 3

050 $4^2+(4\sqrt{3})^2=8^2$이므로 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 8인 직각삼각형이다.

따라서 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ 답 ①

051 $x>9$에서 x가 가장 긴 변의 길이이므로 삼각형이 되려면

$9<x<5+9$

$\therefore 9<x<14$ …… ㉠

또 예각삼각형이 되려면

$x^2<5^2+9^2$, $x^2<106$

$\therefore 0<x<\sqrt{106}$ ($\because x>0$) …… ㉡

㉠, ㉡에서 $9<x<\sqrt{106}$

따라서 자연수 x는 10의 1개이다. 답 1

052 (ㄱ) $8^2>3^2+6^2$이므로 둔각삼각형이다.

(ㄴ) $5^2>3^2+(2\sqrt{2})^2$이므로 둔각삼각형이다.

(ㄷ) $17^2=8^2+15^2$이므로 직각삼각형이다.

(ㄹ) $(3\sqrt{7})^2=3^2+(3\sqrt{6})^2$이므로 직각삼각형이다.

(ㅁ) $4^2<(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2$이므로 예각삼각형이다.

이상에서 둔각삼각형은 (ㄱ), (ㄴ)의 2개이다. 답 ②

053 삼각형이 되려면

$7-4<x<7+4$

$\therefore 3<x<11$ …… ㉠

(i) 가장 긴 변의 길이가 x, 즉 $x>7$일 때,

$x^2>4^2+7^2$, $x^2>65$

$\therefore x>\sqrt{65}$ ($\because x>0$) …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{65}<x<11$

(ii) 가장 긴 변의 길이가 7, 즉 $x<7$일 때,

$7^2>4^2+x^2$, $x^2<33$

$\therefore 0<x<\sqrt{33}$ ($\because x>0$) …… ㉢

㉠, ㉢에서 $3<x<\sqrt{33}$

(i), (ii)에서 $3<x<\sqrt{33}$ 또는 $\sqrt{65}<x<11$

답 $3<x<\sqrt{33}$ 또는 $\sqrt{65}<x<11$

054 $\overline{AC}^2=\overline{AD}\times\overline{AB}$이므로

$x^2=4\times 7=28$ $\therefore x=2\sqrt{7}$ ($\because x>0$)

$\triangle ADC$에서 $y=\sqrt{(2\sqrt{7})^2-4^2}=2\sqrt{3}$

$\triangle CDB$에서 $z=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{21}$

$\therefore xyz=2\sqrt{7}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{21}=84$ 답 ③

055 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:4$이므로

$\overline{AB}=3k,\ \overline{AC}=4k\ (k>0)$

라 하면 $\triangle ABC$에서

$\overline{BC}=\sqrt{(3k)^2+(4k)^2}=5k$

$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}\times\overline{AD}$이므로

$3k\times4k=5k\times6 \qquad \therefore k=\frac{5}{2}\ (\because k>0)$

$\therefore \overline{AC}=4k=4\times\frac{5}{2}=10$ 답 10

056 $\triangle ABC$에서

$\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$\overline{DE}^2+\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BE}^2$이므로

$\overline{DE}^2+10^2=\overline{AD}^2+(2\sqrt{17})^2$

$\therefore \overline{AD}^2-\overline{DE}^2=10^2-(2\sqrt{17})^2=32$ 답 32

057 $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DA}^2$이므로

$(2\sqrt{2})^2+\overline{CD}^2=2^2+4^2$

$\therefore \overline{CD}^2=12$

$\triangle COD$에서 $\overline{CD}^2=x^2+y^2$이므로

$x^2+y^2=12$ 답 ④

058 $\triangle AOD$에서

$\overline{AD}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\ (\text{cm})$

$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DA}^2$이고 $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로

$2\overline{AB}^2=4^2+(2\sqrt{2})^2$

$\overline{AB}^2=12 \qquad \therefore \overline{AB}=2\sqrt{3}\ (\text{cm})\ (\because \overline{AB}>0)$

답 $2\sqrt{3}$ cm

등변사다리꼴의 평행하지 않은 두 대변의 길이는 같다.

059 $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$이므로

$20^2+12^2=18^2+\overline{DP}^2$

$\overline{DP}^2=220 \qquad \therefore \overline{DP}=2\sqrt{55}\ (\because \overline{DP}>0)$ 답 ②

060 $\triangle ABC$가 $\angle C=90°$인 직각삼각형이므로

$P=Q+R$

$\therefore Q=52\pi-16\pi=36\pi$

따라서 $\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원의 넓이가 36π이므로

$\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2=36\pi$

$\overline{BC}^2=288 \qquad \therefore \overline{BC}=12\sqrt{2}\ (\because \overline{BC}>0)$

답 $12\sqrt{2}$

직각삼각형의 세 변을 지름으로 하는 세 반원을 각각 그리면 작은 두 반원의 넓이의 합은 큰 반원의 넓이와 같다.

061 $\triangle ABC$가 $\angle A=90°$인 직각삼각형이므로

($\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)

=($\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)

+($\overline{AC}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\pi\times6^2$

$=18\pi\ (\text{cm}^2)$

답 $18\pi\ \text{cm}^2$

062 (색칠한 부분의 넓이)$=\triangle ABC$이므로

$56=\frac{1}{2}\times14\times\overline{AC} \qquad \therefore \overline{AC}=8\ (\text{cm})$

따라서 $\triangle ABC$에서

$\overline{BC}=\sqrt{14^2+8^2}=2\sqrt{65}\ (\text{cm})$ 답 $2\sqrt{65}$ cm

063 $\overline{PB}=x$라 하면 $\quad \overline{PC}=\overline{PA}=15-x$

$\triangle PBC$에서 $\quad (15-x)^2=x^2+5^2$

$30x=200 \qquad \therefore x=\frac{20}{3}$

$\therefore \triangle PBC=\frac{1}{2}\times5\times\frac{20}{3}=\frac{50}{3}$ 답 $\frac{50}{3}$

내신 만점 도전하기 본책 22~25쪽

064 전략 $\triangle OCD$가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 주어진 반원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\overline{OC}=r\ \text{cm},\ \overline{OD}=(r-1)\ \text{cm}$

$\triangle OCD$에서

$r^2=3^2+(r-1)^2$

$2r=10 \qquad \therefore r=5$ 답 ②

065 문제 이해 $\triangle ABC$에서 $\overline{AD}$가 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}=5:3$ • 30% 배점

해결 과정 $\overline{AB}=5k\ \text{cm},\ \overline{AC}=3k\ \text{cm}\ (k>0)$라 하면 $\triangle ABC$에서

$(5k)^2=(3k)^2+8^2$

$16k^2=64, \qquad k^2=4$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$ • 50% 배점

답 구하기 따라서 $\overline{AB}=10\ \text{cm},\ \overline{AC}=6\ \text{cm}$이므로

$\overline{AB}+\overline{AC}=16\ (\text{cm})$ • 20% 배점

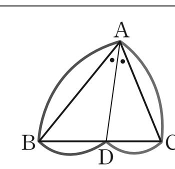
답 16 cm

보충학습

삼각형의 내각의 이등분선의 성질

$\triangle ABC$에서 $\angle A$의 이등분선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 D라 하면

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



066 전략 먼저 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{AC}$의 길이를 구한다.

풀이 $\overline{AB}=\overline{AM}=15\ \text{cm},\ \overline{CB}=\overline{CN}=8\ \text{cm}$이므로

$\triangle ABC$에서

$\overline{AC}=\sqrt{15^2+8^2}=17\ (\text{cm})$

즉 $\overline{CM}=\overline{AC}-\overline{AM}=17-15=2\ (\text{cm})$이므로

$\overline{MN}=\overline{CN}-\overline{CM}=8-2=6\ (\text{cm})$ 답 ④

067 전략 직각삼각형의 빗변의 중점은 외심이다.

풀이 △ABC에서 $\overline{AB}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+4^2}=4\sqrt{3}$

직각삼각형의 빗변의 중점은 외심이므로

$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$

> 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

$\therefore \overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

점 G가 △ABC의 무게중심이므로

$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{CM}=\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 답 ④

> 삼각형의 무게중심은 중선을 각 꼭짓점으로부터 2 : 1로 나눈다.

068 전략 △ABE에서 $\overline{BE}$의 길이를 구한 후 △FEC에서 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 $\overline{AE}=\overline{AD}=20$이므로 △ABE에서

$\overline{BE}=\sqrt{20^2-16^2}=12$

$\therefore \overline{CE}=20-12=8$

$\overline{CF}=x$라 하면 $\overline{EF}=\overline{DF}=16-x$이므로 △CFE에서

$(16-x)^2=8^2+x^2,\quad 32x=192\quad \therefore x=6$

$\therefore \overline{EF}=\overline{DF}=16-6=10$

△ADF에서 $\overline{AF}=\sqrt{20^2+10^2}=10\sqrt{5}$

따라서 □ABEF의 둘레의 길이는

$16+12+10+10\sqrt{5}=38+10\sqrt{5}$ 답 $38+10\sqrt{5}$

참고 $\overline{EF}$의 길이를 다음과 같이 구할 수도 있다.

△ABE∽△ECF (AA 닮음)이므로

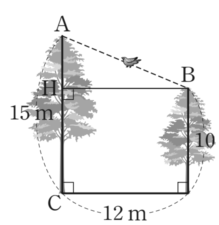
> ∠AEB+∠BAE=90°, ∠AEB+∠CEF=90° 이므로
> ∠BAE=∠CEF
> ∠B=∠C=90°
> ∴ △ABE∽△ECF (AA 닮음)

$\overline{AB}:\overline{EC}=\overline{AE}:\overline{EF}$

$16:8=20:\overline{EF}$에서 $\overline{EF}=10$

069 전략 보조선을 그어 직각삼각형을 만든 후 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 큰 나무와 작은 나무의 꼭대기를 각각 A, B, 큰 나무와 지면이 만나는 부분을 C라 하고 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=15-10=5\,(\text{m})$

△AHB에서 $\overline{AB}=\sqrt{5^2+12^2}=13\,(\text{m})$

따라서 새가 날아간 거리는 13 m이다. 답 13 m

070 전략 먼저 △ACH와 넓이가 같은 삼각형을 찾는다.

풀이 △ACG≡△HCB (SAS 합동)이므로

> $\overline{AC}=\overline{HC}$, $\overline{CG}=\overline{CB}$,
> ∠ACG=∠ACB+90°=∠HCB
> ∴ △ACG≡△HCB (SAS 합동)

△ACH=△BCH=△ACG

=△LCG=△LMG

∴ □ACHI=2△ACH=2△BCH=2△ACG

=2△LCG=2△LMG=□LMGC

이때 △AMG>△LMG이므로

2△AMG>□ACHI이고, 2△ALG의 넓이가 □ACHI의 넓이와 같은지는 알 수 없다.

이상에서 □ACHI의 넓이와 항상 같은 것은 (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ), (ㅁ)의 4개이다. 답 ④

071 전략 △ABQ≡△BCR≡△CDS≡△DAP이므로 □ABCD는 정사각형이다.

풀이 $\overline{AQ}=x$라 하면 △ABQ에서

$\overline{AB}=\sqrt{x^2+36}$

$\therefore$ □ABCD$=x^2+36$

$\overline{PQ}=x-6$이므로 □PQRS$=(x-6)^2$

> $\overline{PQ}=x-6$에서
> $x-6>0\quad \therefore x>6$

□PQRS의 넓이가 □ABCD의 넓이의 $\frac{1}{7}$이므로

$(x-6)^2=\frac{1}{7}(x^2+36),\quad x^2-14x+36=0$

> 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 해는
> $x=-a\pm\sqrt{a^2-b}$

$\therefore x=7+\sqrt{13}\ (\because x>6)$ 답 $7+\sqrt{13}$

다른풀이 □ABCD의 넓이가 □PQRS의 넓이의 7배이므로 $\overline{PQ}=x$라 하면 $\overline{AB}=\sqrt{7}x$이다.

△ABQ에서 $(\sqrt{7}x)^2=(6+x)^2+6^2$

$7x^2=x^2+12x+72,\quad 6x^2-12x-72=0$

$x^2-2x-12=0\quad \therefore x=1+\sqrt{13}\ (\because x>0)$

$\therefore \overline{AQ}=\overline{AP}+\overline{PQ}=6+(1+\sqrt{13})=7+\sqrt{13}$

072 문제 이해 △ABC≡△CDE이므로

∠BAC=∠DCE, $\overline{AC}=\overline{CE}$

이때 ∠ACB+∠BAC=90°이므로

∠ACB+∠DCE=90°

∴ ∠ACE=180°−(∠ACB+∠DCE)=90°

따라서 △ACE는 $\overline{AC}=\overline{CE}$인 직각이등변삼각형이다.

• 40% 배점

해결 과정 △ACE의 넓이가 58이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{CE}=58,\quad \overline{AC}^2=116$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{29}\ (\because \overline{AC}>0)$

△ABC에서

$\overline{BC}=\sqrt{(2\sqrt{29})^2-10^2}=4$ • 30% 배점

답 구하기 ∴ □ABDE=2△ABC+△ACE

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times4\times10\right)+58$

$=98$ • 30% 배점

> □ABDE는 $\overline{AB}/\!/\overline{DE}$인 사다리꼴이므로
> □ABDE
> $=\frac{1}{2}\times(4+10)\times14$
> $=98$
> 과 같이 구할 수도 있다.

답 98

073 해결 과정 ① $2x+1$이 가장 긴 변의 길이이므로 삼각형이 되려면

$2x+1<(x-1)+2x\quad \therefore x>2$ • 30% 배점

해결 과정 ② 직각삼각형이 되려면

$(2x+1)^2=(x-1)^2+(2x)^2$

$x^2-6x=0,\quad x(x-6)=0$

$\therefore x=6\ (\because x>2)$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 직각을 낀 두 변의 길이가 5, 12이므로 이 직각삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times12=30$ • 30% 배점

답 30

074 전략 가장 긴 막대의 길이를 정한 후 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 필요한 막대의 길이를 x cm라 하면

(i) 가장 긴 막대의 길이가 x cm일 때,

삼각형이 되려면 $4<x<7$

> $x<3+4\quad \therefore x<7$

Ⅵ 피타고라스 정리

직각삼각형이 되려면

$x^2=3^2+4^2=25$

$\therefore x=5$ ($\because 4<x<7$)

(ii) 가장 긴 막대의 길이가 4 cm일 때,

삼각형이 되려면 $\quad 1<x<4$

$4<3+x \quad \therefore 1<x$

직각삼각형이 되려면

$4^2=3^2+x^2, \qquad x^2=7$

$\therefore x=\sqrt{7}$ ($\because 1<x<4$)

(i), (ii)에서 필요한 막대의 길이는 5 cm 또는 $\sqrt{7}$ cm이다.

답 5 cm, $\sqrt{7}$ cm

075 전략 연속하는 세 짝수를 $x-2,\ x,\ x+2\,(x>2$인 짝수$)$라 하고 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 연속하는 세 짝수를 $x-2,\ x,\ x+2\,(x>2$인 짝수$)$라 하면

$x-2$는 변의 길이이므로 $x-2>0 \quad \therefore x>2$

$(x+2)^2=x^2+(x-2)^2$

$x^2-8x=0, \qquad x(x-8)=0$

$\therefore x=8$ ($\because x>2$)

따라서 세 변의 길이가 6, 8, 10이므로 이 직각삼각형의 둘레의 길이는

$6+8+10=24$

답 ②

만점비법

연속하는 수에 대한 문제에서 다음과 같이 미지수를 정하면 편리하다.

① 연속하는 두 정수 ➔ $x,\ x+1$ 또는 $x-1,\ x$

② 연속하는 세 정수 ➔ $x-1,\ x,\ x+1$ 또는 $x-2,\ x-1,\ x$ 또는 $x,\ x+1,\ x+2$

③ 연속하는 두 짝수 ➔ $x,\ x+2$ 또는 $2x,\ 2x+2$

④ 연속하는 두 홀수 ➔ $x,\ x+2$ 또는 $2x-1,\ 2x+1$

076 해결 과정 ① 삼각형이 되려면

$12-5<x<12+5 \qquad \therefore 7<x<17$

$x>12$이므로 $\quad 12<x<17 \quad \cdots\cdots$ ㉠ • 30% 배점

해결 과정 ② 둔각삼각형이 되려면

$x^2>5^2+12^2, \qquad x^2>169$

$\therefore x>13 \quad \cdots\cdots$ ㉡ • 30% 배점

해결 과정 ③ ㉠, ㉡에서 $\quad 13<x<17$ • 20% 배점

답 구하기 따라서 구하는 모든 자연수의 합은

$14+15+16=45$ • 20% 배점

답 45

077 전략 예각삼각형 ➲ (가장 긴 변의 길이의 제곱) <(나머지 두 변의 길이의 제곱의 합)

풀이 5개의 끈 중에서 3개를 골라 삼각형을 만들 수 있는 경우를 순서쌍으로 나타내면

(5, 6, 12), (5, 6, 13), (5, 8, 13)인 경우에는 삼각형이 만들어지지 않는다.

(5, 6, 8), (5, 8, 12), (5, 12, 13), (6, 8, 12), (6, 8, 13), (6, 12, 13), (8, 12, 13)

의 7가지이다.

$8^2>5^2+6^2$ ➔ 둔각삼각형

$12^2>5^2+8^2$ ➔ 둔각삼각형

$13^2=5^2+12^2$ ➔ 직각삼각형

$12^2>6^2+8^2$ ➔ 둔각삼각형

$13^2>6^2+8^2$ ➔ 둔각삼각형

$13^2<6^2+12^2$ ➔ 예각삼각형

$13^2<8^2+12^2$ ➔ 예각삼각형

따라서 예각삼각형이 되는 경우는 (6, 12, 13), (8, 12, 13)의 2가지이므로 구하는 확률은

$\dfrac{2}{7}$

답 $\dfrac{2}{7}$

078 전략 먼저 길이가 가장 긴 변을 찾은 후 삼각형의 변의 길이에 대한 각의 크기를 이용한다.

풀이 $m>n>0$에서 $(m-n)^2>0,\ mn>0$이므로

$m^2-2mn+n^2>0$

$\therefore m^2+n^2>2mn>mn$

따라서 $\overline{AB}$가 가장 긴 변이므로

$\overline{AB}^2=(m^2+n^2)^2=m^4+2m^2n^2+n^4$

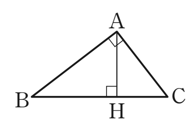
$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=(mn)^2+(m^2-n^2)^2$

$=m^4-m^2n^2+n^4$

$\therefore \overline{AB}^2>\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $\angle C>90^\circ$인 둔각삼각형이다.

답 ⑤



➔ $\triangle ABC \backsim \triangle HBA \backsim \triangle HAC$

① $\overline{AB}^2=\overline{BH}\times\overline{BC}$

② $\overline{AC}^2=\overline{CH}\times\overline{CB}$

③ $\overline{AH}^2=\overline{BH}\times\overline{CH}$

④ $\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}\times\overline{AH}$

079 전략 $\overline{BC}$의 길이를 구한 후 $\overline{AC}^2=\overline{CH}\times\overline{CB}$임을 이용한다.

풀이 $\triangle ABC$에서

$\overline{BC}=\sqrt{(8\sqrt{3})^2+8^2}=16$ (cm)

$\overline{AC}^2=\overline{CH}\times\overline{CB}$이므로

$8^2=\overline{CH}\times 16 \qquad \therefore \overline{CH}=4$ (cm)

$\triangle AHC$에서 $\qquad \overline{AH}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$ (cm)

이때 $\overline{MC}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times 16=8$ (cm)이므로

$\overline{MH}=8-4=4$ (cm)

$\therefore \triangle AMH=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ (cm^2)

답 ③

080 해결 과정 ① $\overline{AB}=c,\ \overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b$라 하면

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\times a\times 4=20$이므로

$a=10$

또 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CA}=\dfrac{1}{2}bc=20$이므로

$bc=40$ • 40% 배점

해결 과정 ② $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로

$b^2+c^2=100, \qquad (b+c)^2-2bc=100$

$(b+c)^2-80=100, \qquad (b+c)^2=180$

$\therefore b+c=6\sqrt{5}$ ($\because b+c>0$) • 40% 배점

답 구하기 $\therefore$ ($\triangle ABC$의 둘레의 길이)

$=a+b+c=10+6\sqrt{5}$ • 20% 배점

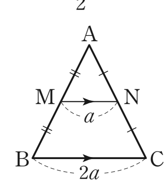
답 $10+6\sqrt{5}$

081 전략 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질을 이용한다.

$\triangle ABC$에서 $\overline{AM}=\overline{MB},\ \overline{AN}=\overline{NC}$이면

$\overline{MN}/\!/\overline{BC},$

$\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$



풀이 $\triangle ABC$에서 $\overline{AM}=\overline{MB},\ \overline{AN}=\overline{NC}$이므로

$\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$, 즉 $\overline{BC}=2\overline{MN}$

이때 $\overline{BN}^2+\overline{CM}^2=\overline{MN}^2+\overline{BC}^2$에서

$\overline{MN}^2+(2\overline{MN})^2=12^2+9^2$

$5\overline{MN}^2=225$, $\quad \overline{MN}^2=45$

$\therefore \overline{MN}=3\sqrt{5}$ ($\because \overline{MN}>0$) 답 ③

다른풀이 $\overline{AM}=a$, $\overline{AN}=b$라 하면

$\triangle$ABN에서 $\quad (2a)^2+b^2=144 \quad$ …… ㉠

$\triangle$AMC에서 $\quad a^2+(2b)^2=81 \quad$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $\quad 5(a^2+b^2)=225$

$\therefore a^2+b^2=45$

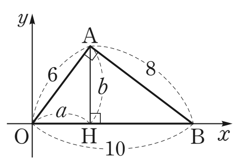
$\therefore \overline{MN}=\sqrt{a^2+b^2}=3\sqrt{5}$

082 **전략** 점 A에서 $\overline{OB}$에 수선의 발을 내려 본다.

풀이 $\triangle$AOB에서

$\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2$이므로

$\angle A=90°$



점 A의 좌표를 $(a,\ b)$, 점 A에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{OA}^2=\overline{OH}\times\overline{OB}$에서

$6^2=a\times 10 \qquad \therefore a=\frac{18}{5}$

$\overline{OA}\times\overline{AB}=\overline{OB}\times\overline{AH}$에서

$6\times 8=10\times b \qquad \therefore b=\frac{24}{5}$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{18}{5},\ \frac{24}{5}\right)$ 답 $\left(\frac{18}{5},\ \frac{24}{5}\right)$

083 **해결 과정 ①** $\triangle$OCD에서

$\overline{CO}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2}=3$ • 20% 배점

해결 과정 ② $\overline{CO}=\frac{1}{2}\overline{AO}$이므로

$3=\frac{1}{2}\overline{AO} \qquad \therefore \overline{AO}=6$ • 20% 배점

해결 과정 ③ $\triangle$AOD에서

$\overline{AD}=\sqrt{6^2+(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{6}$ • 20% 배점

답 구하기 따라서 □ABCD에서

$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$이므로

$(2\sqrt{10})^2+(3\sqrt{3})^2=(3\sqrt{6})^2+\overline{BC}^2$

$\overline{BC}^2=13$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{13}$ ($\because \overline{BC}>0$) • 40% 배점

답 $\sqrt{13}$

다른풀이 $\triangle$OCD에서

$\overline{CO}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2}=3$

$\overline{CO}=\frac{1}{2}\overline{AO}$이므로 $\quad \overline{AO}=6$

$\triangle$ABO에서 $\quad \overline{BO}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-6^2}=2$

$\triangle$BCO에서 $\quad \overline{BC}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

084 **전략** 먼저 $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$임을 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구한다.

풀이 $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$에서

$3^2+5^2=\overline{BC}^2+4^2$

$\overline{BC}^2=18 \qquad \therefore \overline{BC}=3\sqrt{2}$ ($\because \overline{BC}>0$)

(시간)$=\dfrac{(거리)}{(속력)}$

두 대각선이 직교하는 사각형에서 마주 보는 두 변의 길이의 제곱의 합이 서로 같다.

$\triangle$BCO에서 $\quad \overline{CO}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore \triangle BCO=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times 2\sqrt{3}=3\sqrt{2}$ 답 ②

085 **전략** 직사각형 ABCD의 내부의 한 점 P에 대하여 ➡ $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$

풀이 $\overline{AP}=x$ m라 하면 $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$에서

$x^2+(150\sqrt{6})^2=150^2+450^2$

$x^2=90000 \qquad \therefore x=300$ ($\because x>0$)

따라서 $\overline{AP}=300$ (m)$=0.3$ (km)이므로 집 A에서 출발하여 시속 3 km로 걸어서 공원까지 가는 데 걸리는 시간은

$\frac{0.3}{3}=0.1$ (시간)$=6$ (분) 답 ③

086 **전략** $P+Q=R$임을 이용하여 Q의 값을 구한다.

풀이 $P=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2=6\pi$에서

$\overline{AB}^2=48 \qquad \therefore \overline{AB}=4\sqrt{3}$ ($\because \overline{AB}>0$)

$Q=R-P=4\pi$이므로 $\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2=4\pi$에서

$\overline{AC}^2=32 \qquad \therefore \overline{AC}=4\sqrt{2}$ ($\because \overline{AC}>0$)

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{3}=8\sqrt{6}$ 답 ④

다른풀이 $R=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2=10\pi$에서

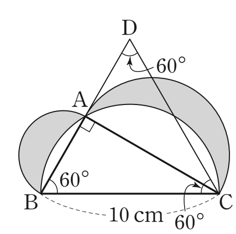
$\overline{BC}^2=80 \qquad \therefore \overline{BC}=4\sqrt{5}$ ($\because \overline{BC}>0$)

$\triangle$ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-(4\sqrt{3})^2}=4\sqrt{2}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{3}=8\sqrt{6}$

087 **해결 과정 ①** 오른쪽 그림과 같이 $\angle DCB=60°$가 되도록 $\overline{AB}$의 연장선 위에 점 D를 잡으면 $\triangle$BCD는 정삼각형이므로 점 C에서 $\overline{BD}$에 그은 수선은 $\overline{BD}$를 이등분한다.



$\therefore \overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 10=5$ (cm) • 40% 배점

해결 과정 ② $\triangle$ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$ (cm) • 20% 배점

답 구하기 색칠한 부분의 넓이는 $\triangle$ABC의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times 5\times 5\sqrt{3}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$ (cm^2) • 40% 배점

답 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ cm^2

088 **전략** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$를 각각 지름으로 하는 반원의 넓이의 합은 $\overline{CA}$를 지름으로 하는 반원의 넓이와 같다.

풀이 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$를 지름으로 하는 반원의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하면

$S_3=S_1+S_2$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

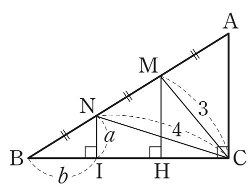
$$\begin{aligned}&S_1+S_3+\triangle ABC-S_2\\&=S_1+(S_1+S_2)+\triangle ABC-S_2\\&=2S_1+\triangle ABC\\&=2\times\left(\frac{1}{2}\times\pi\times3^2\right)+\frac{1}{2}\times12\times6\\&=9\pi+36\ (cm^2)\end{aligned}$$

답 $(9\pi+36)\ cm^2$

내신 만점 굳히기 본책 26쪽

089 전략 두 점 M, N에서 각각 $\overline{BC}$에 그은 수선은 $\overline{AC}$와 평행하므로 직각삼각형의 닮음을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 M, N에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고 $\overline{NI}=a$, $\overline{BI}=b$라 하자.



두 점 M, N이 빗변 AB의 삼등분점이므로

$\overline{NI}:\overline{MH}:\overline{AC}=\overline{BI}:\overline{BH}:\overline{BC}=1:2:3$

$\therefore\ \overline{MH}=2a,\ \overline{IC}=2b,\ \overline{HC}=b$

△NBI, △MBH, △ABC는 닮음비가 1 : 2 : 3인 닮은 도형이다.

$\overline{BC}=3b$, $\overline{BH}=2b$이므로
$\overline{IC}=3b-b=2b$
$\overline{HC}=3b-2b=b$

△CMH에서 $(2a)^2+b^2=3^2$

$\therefore\ 4a^2+b^2=9$ …… ㉠

△CNI에서 $a^2+(2b)^2=4^2$

$\therefore\ a^2+4b^2=16$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $5(a^2+b^2)=25$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

$\therefore\ \overline{MN}=\overline{BN}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$

답 ④

090 문제 이해 $\overline{BF}=\overline{DF}=x$라 하면 $\overline{FC}=25-x$이므로 △DCF에서

$x^2=(25-x)^2+15^2$, $50x=850$

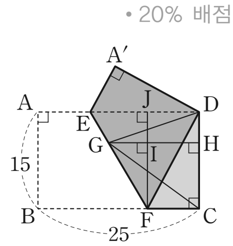
$\therefore\ x=17$

△A′ED≡△CFD이므로

$\overline{DE}=\overline{DF}=17$ • 20% 배점

$\overline{A'D}=\overline{CD}=15$, ∠A′=∠C=90°, ∠A′DE=∠CDF이므로
△A′ED≡△CFD (ASA 합동)

해결 과정 ① 오른쪽 그림과 같이 점 G에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H, 점 F에서 $\overline{GH}$, $\overline{ED}$에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하면



$\overline{ED}/\!/\overline{GH}/\!/\overline{FC}$

$\overline{EG}:\overline{EF}=1:3$이므로

$\overline{DH}:\overline{DC}=1:3$

$\overline{DH}:15=1:3$ $\therefore\ \overline{DH}=5$ • 30% 배점

해결 과정 ② 또 △EFJ에서

$\overline{EF}:\overline{GF}=\overline{EJ}:\overline{GI}$, $3:2=9:\overline{GI}$

$\overline{ED}=\overline{FD}=17$이고 $\overline{JD}=\overline{FC}=8$이므로
$\overline{EJ}=17-8=9$

$\therefore\ \overline{GI}=6$

$\therefore\ \overline{GH}=6+8=14$ • 30% 배점

답 구하기 △DGH에서 $\overline{DG}^2=5^2+14^2=221$

△GCH에서 $\overline{CG}^2=10^2+14^2=296$

$\therefore\ 2\overline{DG}^2-\overline{CG}^2=146$ • 20% 배점

답 146

091 전략 삼각형의 무게중심은 세 중선의 교점이다.

풀이 점 G는 △BCD의 무게중심이므로

□ABCD의 두 대각선의 교점을 O라 하면 $\overline{CO}$는 △BCD의 중선이다.
따라서 점 G는 두 중선 $\overline{CO}$, $\overline{DE}$의 교점이므로 △BCD의 무게중심이다.

$\triangle CDG=\frac{1}{3}\triangle BCD=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)=\frac{2}{3}$

△AFD와 △DEC에서

$\overline{AD}=\overline{DC}$, $\overline{DF}=\overline{CE}$, ∠ADF=∠DCE=90°

이므로 △AFD≡△DEC (SAS 합동)

따라서 ∠DAF=∠HDF, ∠AFD는 공통이므로

△AFD∽△DFH (AA 닮음)

$\overline{AF}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{AF}:\overline{DF}=\sqrt{5}:1$

즉 △AFD와 △DFH의 닮음비가 $\sqrt{5}:1$이므로 넓이의 비는 $(\sqrt{5})^2:1^2=5:1$이다.

이때 $\triangle ADF=\frac{1}{2}\times2\times1=1$이므로

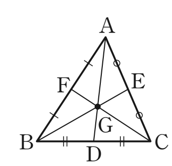
$1:\triangle DFH=5:1$ $\therefore\ \triangle DFH=\frac{1}{5}$

$\therefore\ \square HGCF=\triangle CDG-\triangle DFH$
$=\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$

답 ①

보충학습

삼각형의 세 중선에 의하여 삼각형의 넓이는 6등분된다.
→ △ABC의 무게중심을 G라 하면
△GAF=△GBF=△GBD
=△GCD=△GCE
$=\triangle GAE=\frac{1}{6}\triangle ABC$



092 전략 △ABF, △ABG, △ADF, △AEG는 모두 ∠A=90°인 직각삼각형이다.

풀이 $\overline{AD}=x$, $\overline{AF}=y$ $(x>0,\ y>0)$라 하자.

△ADF에서 $x^2+y^2=25$ …… ㉠

△ABG에서 $(3x)^2+(2y)^2=(2\sqrt{35})^2$

$9x^2+4y^2=140$ …… ㉡

㉡−㉠×4를 하면 $5x^2=40$

$x^2=8$ $\therefore\ x=2\sqrt{2}\ (\because x>0)$

$x=2\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면 $y=\sqrt{17}\ (\because y>0)$

△AEG에서

$\overline{EG}^2=(2x)^2+(2y)^2=(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{17})^2=100$

△ABF에서

$\overline{BF}^2=(3x)^2+y^2=(6\sqrt{2})^2+(\sqrt{17})^2=89$

$\therefore\ \overline{EG}^2+\overline{BF}^2=189$

답 ⑤

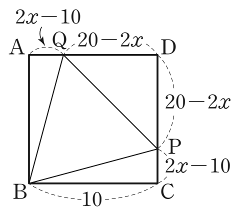
다른풀이 $x=2\sqrt{2}$, $y=\sqrt{17}$이므로 △AEF에서

$\overline{EF}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(\sqrt{17})^2}=7$

따라서 △ABG에서

$\overline{EG}^2+\overline{BF}^2=\overline{EF}^2+\overline{BG}^2=7^2+(2\sqrt{35})^2=189$

093 문제 이해 x초 후에 $\triangle$BPQ가 정삼각형이 되다고 하면 두 점 P, Q가 각각 $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ 위에 있어야 하므로



$10<2x<20$

$\therefore 5<x<10$ • 20% 배점

> x초 동안 점 P, Q가 움직인 거리

해결 과정 ① $\triangle$BCP에서

$\overline{PB}^2=10^2+(2x-10)^2$

> x초 동안 $2x$ 움직였으므로
> $\overline{BC}+\overline{CP}=2x$
> $\therefore \overline{CP}=2x-\overline{BC}$
> $=2x-10$

$\triangle$QPD에서

$\overline{QP}^2=(20-2x)^2+(20-2x)^2$ • 30% 배점

해결 과정 ② $\overline{PB}^2=\overline{QP}^2$이므로

> $\triangle$BPQ가 정삼각형이므로
> $\overline{PB}=\overline{QP}$
> $\therefore \overline{PB}^2=\overline{QP}^2$

$10^2+(2x-10)^2=(20-2x)^2+(20-2x)^2$

$4x^2-120x+600=0,\qquad x^2-30x+150=0$

$\therefore x=15-5\sqrt{3}\ (\because 5<x<10)$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 $(15-5\sqrt{3})$초 후에 $\triangle$BPQ가 정삼각형이 된다. • 10% 배점

답 $(15-5\sqrt{3})$초

094 [문제 해결 길잡이]

❶ $\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{EF}$임을 이용하여 $\overline{EF}$의 길이를 구한다.
❷ 직각삼각형의 합동을 이용하여 크기가 같은 각을 찾아 $\angle$AED의 크기를 구한다.
❸ $\triangle$AED에서 $\overline{EF}^2=\overline{AF}\times\overline{DF}$임을 이용하여 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 길이를 구한다.
❹ $\square$ABCD의 넓이를 구한다.

풀이 $\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{EF}$이고 $\overline{BC}=8$이므로

$\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{BC}=4$ ❶

$\triangle$ABE와 $\triangle$AFE에서

$\angle ABE=\angle AFE=90^\circ$,

$\overline{AE}$는 공통, $\overline{BE}=\overline{FE}$

이므로 $\triangle ABE\equiv\triangle AFE$ (RHS 합동)

$\therefore \angle AEB=\angle AEF$ …… ㉠

$\triangle$DCE와 $\triangle$DFE에서

$\angle DCE=\angle DFE=90^\circ$,

$\overline{DE}$는 공통, $\overline{CE}=\overline{FE}$

이므로 $\triangle DCE\equiv\triangle DFE$ (RHS 합동)

$\therefore \angle DEC=\angle DEF$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\angle AED=\angle AEF+\angle DEF$

$=\frac{1}{2}\angle BEF+\frac{1}{2}\angle CEF$

$=\frac{1}{2}(\angle BEF+\angle CEF)$

> 180°

$=90^\circ$ ❷

따라서 $\overline{AB}=\overline{AF}=a$, $\overline{CD}=\overline{FD}=b$ (a, b는 1보다 큰 자연수)라 하면 $\triangle$AED에서 $\overline{EF}^2=\overline{AF}\times\overline{DF}$이므로

$4^2=ab$ …… ㉢

이때 a, b는 1보다 큰 자연수이고 $a<b$이므로 ㉢을 만족시키는 a, b의 값은

$a=2,\ b=8$ ❸

$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\times(2+8)\times 8=40$ ❹ 답 40

11 | 피타고라스 정리의 활용 (1)

개념&기출유형

본책 27~29쪽

095 가로, 세로의 길이를 각각 $5a$, $4a$ $(a>0)$라 하면

$\sqrt{(5a)^2+(4a)^2}=2\sqrt{41}$

$\sqrt{41}a=2\sqrt{41}\qquad \therefore a=2$

따라서 직사각형의 둘레의 길이는

$2(5a+4a)=18a=18\times 2=36$ 답 36

096 원에 내접하는 정사각형의 대각선의 길이는 원의 지름의 길이와 같다.

따라서 정사각형의 한 변의 길이를 a cm라 하면

$\sqrt{2}a=2\times 10$

$\therefore a=10\sqrt{2}$ 답 ①

097 $\overline{BD}=\sqrt{12^2+9^2}=15\,(\text{cm})$

$\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{BD}\times\overline{AH}$이므로

> $\triangle$ABD의 넓이에서
> $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}$
> $=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AH}$

$9\times 12=15\times\overline{AH}$

$\therefore \overline{AH}=\frac{36}{5}\,(\text{cm})$

$\overline{AD}^2=\overline{DH}\times\overline{DB}$이므로

$12^2=\overline{DH}\times 15$

$\therefore \overline{DH}=\frac{48}{5}\,(\text{cm})$

> $\triangle$AHD에서 피타고라스 정리를 이용하여
> $\overline{DH}=\sqrt{12^2-\left(\frac{36}{5}\right)^2}$
> $=\frac{48}{5}$
> 과 같이 구할 수도 있다.

$\therefore \overline{AH}+\overline{DH}=\frac{84}{5}\,(\text{cm})$ 답 $\frac{84}{5}$ cm

098 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=16\sqrt{3},\qquad a^2=64$

$\therefore a=8\ (\because a>0)$

따라서 정삼각형의 둘레의 길이는

$3\times 8=24$ 답 ③

099 $\overline{AD}=\frac{3}{2}\overline{AG}=\frac{3}{2}\times 2=3\,(\text{cm})$

> 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 나눈다.

즉 정삼각형 ABC의 높이가 3 cm이므로 한 변의 길이를 a cm라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=3\qquad \therefore a=2\sqrt{3}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

답 $3\sqrt{3}$ cm^2

100 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\pi r^2=8\pi\qquad \therefore r=2\sqrt{2}\ (\because r>0)$

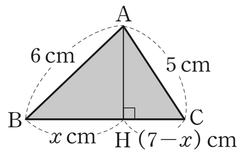
따라서 주어진 정육각형은 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$ cm인 정삼각형 6개로 이루어져 있으므로 구하는 넓이는

$6\times\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2\right\}=12\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$ 답 ⑤

만점비법

정육각형 문제 → 보조선을 그어 6개의 합동인 정삼각형을 만든다.

101 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{BH}=x\,\text{cm}$라 하면



$\overline{CH}=7-x\,(\text{cm})$

$\triangle ABH$와 $\triangle AHC$에서

$\overline{AH}^2=6^2-x^2=5^2-(7-x)^2$

$36-x^2=25-49+14x-x^2$

$14x=60 \quad \therefore x=\dfrac{30}{7}$

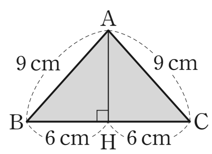
따라서 $\overline{AH}=\sqrt{6^2-\left(\dfrac{30}{7}\right)^2}=\dfrac{12\sqrt{6}}{7}$ (cm)이므로

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times7\times\dfrac{12\sqrt{6}}{7}$

$=6\sqrt{6}\,(\text{cm}^2)$ 답 $6\sqrt{6}\,\text{cm}^2$

세 변의 길이가 주어진 일반 삼각형
한 꼭짓점에서 대변에 수선을 그어 삼각형의 높이와 넓이를 구한다.

102 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BH}=6$ cm이므로 $\triangle ABH$에서



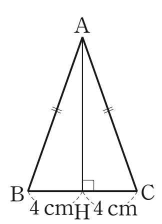
$\overline{AH}=\sqrt{9^2-6^2}$

$=3\sqrt{5}\,(\text{cm})$

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times12\times3\sqrt{5}$

$=18\sqrt{5}\,(\text{cm}^2)$ 답 $18\sqrt{5}\,\text{cm}^2$

103 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle ABC$의 넓이가 $32\sqrt{2}\,\text{cm}^2$이므로



$\dfrac{1}{2}\times8\times\overline{AH}=32\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AH}=8\sqrt{2}\,(\text{cm})$

이때 $\overline{BH}=4$ cm이므로 $\triangle ABH$에서

$\overline{AB}=\sqrt{4^2+(8\sqrt{2})^2}=12\,(\text{cm})$

따라서 $\triangle ABC$의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=12+8+12=32\,(\text{cm})$ 답 ③

104 $\triangle BCD$에서 $\quad \overline{BC}:\overline{CD}=\sqrt{3}:1$

$\overline{BC}:\sqrt{3}=\sqrt{3}:1 \qquad \therefore \overline{BC}=3$

$\triangle ABC$에서 $\quad \overline{AC}:\overline{BC}=1:\sqrt{2}$

$\overline{AC}:3=1:\sqrt{2} \qquad \therefore \overline{AC}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 답 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

105 $\triangle ABC$에서 $\quad \overline{AB}:\overline{AC}=1:2$

$\overline{AB}:8=1:2 \qquad \therefore \overline{AB}=4$

$\angle BAD=\angle DAC$이고 $\angle BAC=60°$이므로 $\triangle ABD$에서

$\angle BAD=30°,\ \angle ADB=60°$

따라서 $\overline{AB}:\overline{BD}=\sqrt{3}:1$이므로

$4:\overline{BD}=\sqrt{3}:1 \qquad \therefore \overline{BD}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 답 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

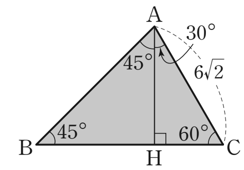
다른풀이 $\triangle ABC$에서 $\quad \overline{AC}:\overline{BC}=2:\sqrt{3}$

$8:\overline{BC}=2:\sqrt{3} \qquad \therefore \overline{BC}=4\sqrt{3}$

$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=1:2$이므로

$\overline{BD}=4\sqrt{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

106 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\angle BAH=45°$

$\angle CAH=30°$

$\triangle ABH$에서
$\angle BAH$
$=180°-(90°+45°)$
$=45°$

$\triangle AHC$에서 $\qquad \overline{AH}:\overline{AC}=\sqrt{3}:2$

$\overline{AH}:6\sqrt{2}=\sqrt{3}:2 \qquad \therefore \overline{AH}=3\sqrt{6}$

또 $\overline{AC}:\overline{HC}=2:1$이므로 $\qquad 6\sqrt{2}:\overline{HC}=2:1$

$\therefore \overline{HC}=3\sqrt{2}$

$\triangle ABH$에서 $\qquad \overline{AH}:\overline{BH}=1:1$

$3\sqrt{6}:\overline{BH}=1:1 \qquad \therefore \overline{BH}=3\sqrt{6}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BH}+\overline{HC}=3\sqrt{6}+3\sqrt{2}$

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times(3\sqrt{6}+3\sqrt{2})\times3\sqrt{6}$

$=27+9\sqrt{3}$ 답 ③

107 $\overline{AC}=\sqrt{(2+2)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{52}$

$\overline{BC}=\sqrt{(2-a)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{(2-a)^2+16}$

이때 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(2-a)^2+16}=\sqrt{52}$

$(2-a)^2+16=52$

$(a-2)^2=36, \qquad a-2=\pm6$

$\therefore a=8\ (\because a>0)$ 답 ⑤

$(2-a)^2+16=52$에서
$a^2-4a-32=0$
$(a+4)(a-8)=0$
$\therefore a=8\ (\because a>0)$

108 $y=2x^2-8x+7=2(x-2)^2-1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\quad (2,\ -1)$

따라서 점 $(2,\ -1)$과 점 $(3,\ 2)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3-2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$ 답 $\sqrt{10}$

이차함수
$y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$y=a(x-p)^2+q$
꼴로 변형하여 구한다.

보충학습

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 성질

① 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
② 꼭짓점의 좌표: $(p,\ q)$
③ 축의 방정식: $x=p$

109 $\overline{AB}=\sqrt{(1-5)^2+(2-5)^2}=\sqrt{25}$

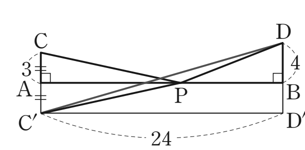
$\overline{BC}=\sqrt{(4-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{18}$

$\overline{CA}=\sqrt{(5-4)^2+(5+1)^2}=\sqrt{37}$

$\overline{CA}^2<\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$이므로 $\triangle ABC$는 예각삼각형이다.

답 ①

110 오른쪽 그림과 같이 점 C와 $\overline{AB}$에 대하여 대칭인 점을 C′이라 하면



$\overline{CP}+\overline{PD}=\overline{C'P}+\overline{PD}$

$\geq\overline{C'D}$

점 C′을 지나고 $\overline{AB}$와 평행한 직선이 $\overline{DB}$의 연장선과 만나는 점을 D′이라 하면 △DC′D′에서

$\overline{C'D}=\sqrt{(4+3)^2+24^2}=25$

따라서 $\overline{CP}+\overline{PD}$의 최솟값은 25이다. 답 25

참고 점 D와 $\overline{AB}$에 대하여 대칭인 점을 D″이라 하면 $\overline{CD''}$이 $\overline{CP}+\overline{PD}$의 최솟값이 된다.

내신 만점 도전하기

본책 30~32쪽

111 **전략** 직사각형 ODCE의 대각선의 길이는 사분원의 반지름의 길이와 같다.

풀이 $\overline{OD}=\overline{DA}$이므로 $\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{OA}=4\,(\text{cm})$

$\overline{CD}=x\,\text{cm}$라 하면 직사각형 ODCE의 대각선의 길이가 8 cm이므로

$4^2+x^2=8^2,\quad x^2=48$

$\therefore x=4\sqrt{3}\ (\because x>0)$

$\therefore \square\text{ODCE}=4\times4\sqrt{3}=16\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$ 답 ③

112 **전략** 한 변의 길이가 a인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}a$임을 이용한다.

풀이 □BEFG의 한 변의 길이를 a라 하면

$\overline{BF}=\sqrt{2}a,\ \overline{FC}=a$

이므로 △BFC에서 $\overline{BC}=\sqrt{(\sqrt{2}a)^2+a^2}=\sqrt{3}a$

따라서 □ABCD와 □BEFG의 닮음비가 $\sqrt{3}:1$이므로 넓이의 비는

$(\sqrt{3})^2:1^2=3:1$ 답 ②

113 **문제 이해** $\overline{BD}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ • 20% 배점

해결 과정 ① $\overline{AB}^2=\overline{BE}\times\overline{BD}$이므로

$3^2=\overline{BE}\times5\quad\therefore \overline{BE}=\frac{9}{5}$ • 30% 배점

해결 과정 ② $\overline{CD}^2=\overline{DF}\times\overline{DB}$이므로

$3^2=\overline{DF}\times5\quad\therefore \overline{DF}=\frac{9}{5}$ • 30% 배점

답 구하기 $\therefore \overline{EF}=\overline{BD}-\overline{BE}-\overline{DF}$

$=5-\frac{9}{5}-\frac{9}{5}=\frac{7}{5}$ • 20% 배점

답 $\frac{7}{5}$

다른풀이 $\overline{BC}^2=\overline{BF}\times\overline{BD}$이므로

$4^2=\overline{BF}\times5\quad\therefore \overline{BF}=\frac{16}{5}$

$\therefore \overline{EF}=\overline{BF}-\overline{BE}=\frac{16}{5}-\frac{9}{5}=\frac{7}{5}$

114 **전략** 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이다.

풀이 $\overline{AD}$는 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 높이이므로

$\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$

△DC′D′은 빗변의 길이가 $\overline{C'D}$이고 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 7, 24인 직각삼각형이다.

$\angle ABC=\angle ECD=60^\circ$

즉 동위각의 크기가 같으므로

$\overline{AB}/\!/\overline{EC}$

$\overline{EC}$를 밑변으로 생각하면 △ACE와 △BCE의 높이가 같으므로

△ACE=△BCE

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{EH}$

닮음인 두 평면도형의 닮음비가 $m:n$이면

① 둘레의 길이의 비 → $m:n$

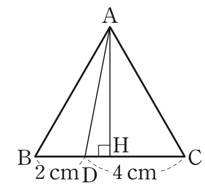
② 넓이의 비 → $m^2:n^2$

따라서 정삼각형 ADE의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$ 답 ③

115 **전략** 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 수선을 그어 생각한다.

풀이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △ABC의 한 변의 길이가 6 cm이므로



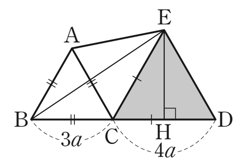
$\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3\,(\text{cm})$

$\therefore \overline{DH}=3-2=1\,(\text{cm})$

$\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}\,(\text{cm})$이므로 △ADH에서

$\overline{AD}=\sqrt{1^2+(3\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}\,(\text{cm})$ 답 $2\sqrt{7}$ cm

116 **문제 이해** $\overline{BC}=3a$, $\overline{CD}=4a\,(a>0)$라 하고, △ECD의 꼭짓점 E에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{EH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4a=2\sqrt{3}a$ • 30% 배점

해결 과정 이때 △ACE=△BCE이므로

$12\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times3a\times2\sqrt{3}a$

$a^2=4\quad\therefore a=2\ (\because a>0)$ • 50% 배점

답 구하기 따라서 $\overline{CD}=4a=4\times2=8$이므로

$\triangle ECD=\frac{\sqrt{3}}{4}\times8^2=16\sqrt{3}$ • 20% 배점

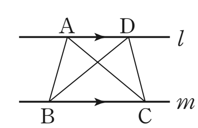
답 $16\sqrt{3}$

보충학습

평행선을 이용한 삼각형의 넓이

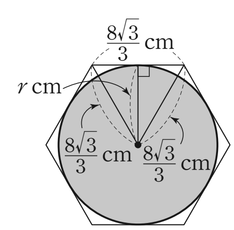
$l/\!/m$이면

△ABC=△DBC



117 **전략** 정육각형은 6개의 합동인 정삼각형으로 나누어지고, 각각의 정삼각형의 높이는 내접원의 반지름의 길이와 같다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 정육각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면



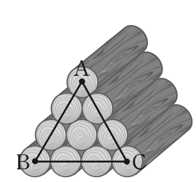
$r=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{8\sqrt{3}}{3}=4$

따라서 구하는 내접원의 넓이는

$\pi\times4^2=16\pi\,(\text{cm}^2)$

답 ②

118 **해결 과정** 오른쪽 그림에서 △ABC는 한 변의 길이가 48 cm인 정삼각형이므로 그 높이는



$\frac{\sqrt{3}}{2}\times48=24\sqrt{3}\,(\text{cm})$

• 60% 배점

만점 공략 BOX

답 구하기 따라서 지면에서 제일 꼭대기까지의 높이는

$8+24\sqrt{3}+8=24\sqrt{3}+16\,(\text{cm})$ • 40% 배점

답 $(24\sqrt{3}+16)\text{cm}$

119 전략 $\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA$임을 이용한다.

풀이 $\triangle ABC$의 한 변의 길이를 a라 하면

$\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{1}{2}\times a\times\overline{PD}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PE}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PF}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{1}{2}a(\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF})$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}a \qquad \therefore a=6\ (\because a>0)$$

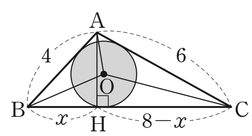
$$\therefore \triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=9\sqrt{3}$$

답 ④

120 전략 $\triangle ABC$의 내접원의 중심을 O라 하면

➡ $\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고,



$\overline{BH}=x$라 하면

$\overline{CH}=8-x$

$\triangle ABH$와 $\triangle AHC$에서

$$\overline{AH}^2=4^2-x^2=6^2-(8-x)^2$$

$$16x=44 \qquad \therefore x=\frac{11}{4}$$

따라서 $\overline{AH}=\sqrt{4^2-\left(\frac{11}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{3\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$$

$\triangle ABC$의 내접원의 중심을 O라 하고 반지름의 길이를 r라 하면 $\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$이므로

$$3\sqrt{15}=\frac{1}{2}\times 4\times r+\frac{1}{2}\times 8\times r+\frac{1}{2}\times 6\times r$$

$$3\sqrt{15}=9r \qquad \therefore r=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

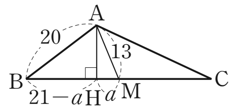
따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi\times\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2=\frac{5}{3}\pi$$

답 $\frac{5}{3}\pi$

121 전략 보조선을 그어 직각삼각형을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{HM}=a$라 하면 $\overline{BH}=21-a$



$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=21$이므로

$\overline{BH}=\overline{BM}-\overline{HM}$

$=21-a$

$\triangle ABH$와 $\triangle AHM$에서

$$\overline{AH}^2=20^2-(21-a)^2=13^2-a^2$$

$$42a=210 \qquad \therefore a=5$$

$$\therefore \overline{AH}=\sqrt{13^2-5^2}=12$$

또 $\overline{HC}=\overline{HM}+\overline{MC}=5+21=26$이므로 $\triangle AHC$에서

$$\overline{AC}^2=\overline{AH}^2+\overline{HC}^2=12^2+26^2=820$$

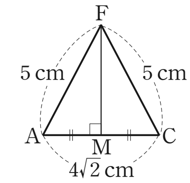
답 ④

122 전략 $\triangle AFC$는 $\overline{AF}=\overline{CF}$인 이등변삼각형이다.

풀이 $\overline{AF}=\overline{CF}=\sqrt{4^2+3^2}=5\,(\text{cm})$,

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}\,(\text{cm})$이므로 $\triangle AFC$는 $\overline{AF}=\overline{CF}$인 이등변삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 F에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\triangle AFM$에서



이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점에서 밑변에 그은 수선은 밑변을 이등분하므로

$\overline{AM}=\overline{MC}$

$=\frac{1}{2}\overline{AC}$

$=2\sqrt{2}\,(\text{cm})$

$$\overline{FM}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{17}\,(\text{cm})$$

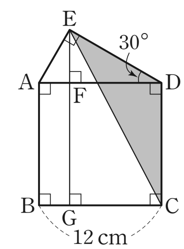
$$\therefore \triangle AFC=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times\sqrt{17}$$

$$=2\sqrt{34}\,(\text{cm}^2)$$

답 ②

123 해결 과정 ① $\triangle EAD$에서

$\overline{DE}:\overline{AD}=\sqrt{3}:2$이므로



$\overline{DE}:12=\sqrt{3}:2$

$\therefore \overline{DE}=6\sqrt{3}\,(\text{cm})$ • 30% 배점

해결 과정 ② 꼭짓점 E에서 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 F, G라 하면 $\triangle DEF$에서

$\overline{DF}:\overline{DE}=\sqrt{3}:2$이므로

$\overline{DF}:6\sqrt{3}=\sqrt{3}:2 \qquad \therefore \overline{DF}=9\,(\text{cm})$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore \triangle ECD=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{DF}$

$$=\frac{1}{2}\times 12\times 9$$

$$=54(\text{cm}^2)$$ • 30% 배점

답 $54\,\text{cm}^2$

124 문제 이해 $\overline{PQ}=x\ (x>2)$라 하면 $\triangle PBQ$에서

$\overline{BP}:\overline{PQ}=2:1$이므로

$\overline{BP}:x=2:1 \qquad \therefore \overline{BP}=2x$

$\therefore \overline{AP}=\overline{AB}-\overline{BP}=6-2x$ • 20% 배점

해결 과정 $\triangle ABC$와 $\triangle APS$에서

$\angle A$는 공통, $\angle ABC=\angle APS$ (동위각)

$\overline{BC}/\!/\overline{PS}$

이므로 $\triangle ABC \backsim \triangle APS$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{AB}:\overline{AP}=\overline{BC}:\overline{PS}$이므로

$6:(6-2x)=9:\overline{PS}$

$\therefore \overline{PS}=9-3x$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 $\square PQRS=x(9-3x)=\frac{15}{4}$이므로

$$4x^2-12x+5=0, \qquad (2x-5)(2x-1)=0$$

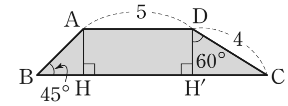
$$\therefore x=\frac{5}{2}\ (\because x>2)$$

즉 $\overline{PQ}$의 길이는 $\frac{5}{2}$이다. • 40% 배점

답 $\frac{5}{2}$

125 전략 특수한 직각삼각형의 세 변의 길이의 비를 이용할 수 있도록 보조선을 긋는다.

풀이 두 꼭짓점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면



$\triangle \mathrm{DH'C}$에서 $\angle \mathrm{CDH'}=150°-90°=60°$이므로

$\overline{\mathrm{DC}}:\overline{\mathrm{DH'}}=2:1$

$4:\overline{\mathrm{DH'}}=2:1 \qquad \therefore \overline{\mathrm{DH'}}=2$

또 $\overline{\mathrm{DC}}:\overline{\mathrm{CH'}}=2:\sqrt{3}$이므로

$4:\overline{\mathrm{CH'}}=2:\sqrt{3} \qquad \therefore \overline{\mathrm{CH'}}=2\sqrt{3}$

$\triangle \mathrm{ABH}$에서 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{DH'}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BH}}+\overline{\mathrm{HH'}}+\overline{\mathrm{CH'}}$

$=2+5+2\sqrt{3}=7+2\sqrt{3}$

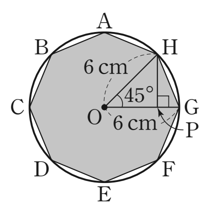
$\therefore \square \mathrm{ABCD}=\frac{1}{2}\times\{5+(7+2\sqrt{3})\}\times 2$

$=12+2\sqrt{3}$ 　답 ⑤

$\square \mathrm{AHH'D}$는 직사각형이므로
$\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{AD}}=5$

126 전략 꼭짓점 H에서 $\overline{\mathrm{OG}}$에 수선을 그어 $\triangle \mathrm{HOG}$의 넓이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H에서 $\overline{\mathrm{OG}}$에 내린 수선의 발을 P라 하면



$\angle \mathrm{HOG}=\frac{360°}{8}=45°$

이므로 $\triangle \mathrm{HOP}$에서

$\overline{\mathrm{HP}}:\overline{\mathrm{OH}}=1:\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{HP}}:6=1:\sqrt{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{HP}}=3\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$

따라서 정팔각형의 넓이는

$8\triangle \mathrm{HOG}=8\times\left(\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{2}\right)$

$=72\sqrt{2}\ (\mathrm{cm}^2)$ 　답 $72\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$

127 전략 가장 긴 변의 길이의 제곱과 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합을 비교하여 삼각형의 모양을 판별한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-3-2)^2+(0-5)^2}=\sqrt{50}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(3+3)^2+(2-0)^2}=\sqrt{40}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(2-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{10}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$이므로 $\triangle \mathrm{ABC}$는 $\angle \mathrm{C}=90°$인 직각삼각형이다.

$\therefore \triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{40}\times\sqrt{10}=10$ 　답 ③

128 전략 x축 위의 점의 좌표 ➡ $(a,\ 0)$

풀이 구하는 점을 $\mathrm{P}(a,\ 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(a-6)^2+(0-2)^2}$

$=\sqrt{(a-6)^2+4}$

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(a-2)^2+(0-4)^2}$

$=\sqrt{(a-2)^2+16}$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이므로

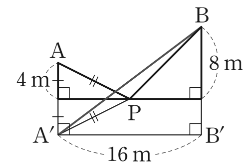
$\sqrt{(a-6)^2+4}=\sqrt{(a-2)^2+16}$

$(a-6)^2+4=(a-2)^2+16$

$8a=20 \qquad \therefore a=\frac{5}{2}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이다. 　답 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$

129 해결 과정 오른쪽 그림에서 토끼가 이동하는 거리는



$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$
$\geq\overline{\mathrm{A'B}}$

$\triangle \mathrm{BA'B'}$은 빗변이 $\overline{\mathrm{A'B}}$이고 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 12 cm, 16 cm인 직각삼각형이다.

• 50% 배점

답 구하기 $\triangle \mathrm{BA'B'}$에서

$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{16^2+(8+4)^2}=20\ (\mathrm{m})$

따라서 토끼가 이동하는 최단 거리는 20 m이다.

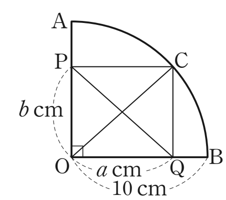
• 50% 배점

답 20 m

내신 만점 굳히기　본책 33쪽

130 전략 가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b인 직사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{\mathrm{OQ}}=a\ \mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{OP}}=b\ \mathrm{cm}$라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OC}}=10\ \mathrm{cm}$이므로



직사각형의 두 대각선의 길이는 같다.

$a^2+b^2=10^2=100$

또 $\square \mathrm{POQC}$의 넓이가 $48\ \mathrm{cm}^2$이므로 $ab=48$

$\therefore (a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$=100+2\times 48=196$

그런데 $a+b>0$이므로 $a+b=14$

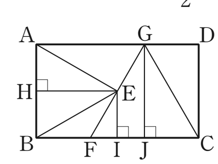
$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=(10-b)+10+(10-a)$

$=30-(a+b)$

$=30-14=16\ (\mathrm{cm})$ 　답 ②

131 전략 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이 ➡ $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

풀이 점 E에서 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 각각 H, I, 점 G에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 J라 하고 $\overline{\mathrm{AB}}=a$라 하면



$\overline{\mathrm{HE}}=\overline{\mathrm{BI}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\triangle \mathrm{GFC}$에서 $\overline{\mathrm{GJ}}=a$이므로 $\overline{\mathrm{FC}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\overline{\mathrm{GJ}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{\mathrm{FC}}$이므로
$\overline{\mathrm{FC}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{GJ}}$

$\therefore \overline{\mathrm{FJ}}=\overline{\mathrm{JC}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{FC}}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

$\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{GE}}$, $\overline{\mathrm{EI}}/\!/\overline{\mathrm{GJ}}$이므로

$\overline{\mathrm{IJ}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{FJ}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$

$\triangle \mathrm{ABC}$에서 변 AB의 중점을 지나고 변 BC에 평행한 직선과 변 AC의 교점을 N이라 하면
$\overline{\mathrm{AN}}=\overline{\mathrm{NC}}$

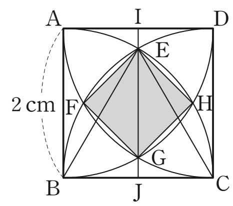
$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BI}}+\overline{\mathrm{IJ}}+\overline{\mathrm{JC}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{6}a+\frac{\sqrt{3}}{3}a$

$=\sqrt{3}a$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=a:\sqrt{3}a=1:\sqrt{3}$ 　답 ②

132 해결 과정 오른쪽 그림에서 $\triangle BCE$는 한 변의 길이가 $2\,cm$인 정삼각형이므로 직선 EG가 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$와 만나는 점을 각각 I, J라 하면



$\overline{EJ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}\,(cm)$

$\overline{GJ}=\overline{IE}=2-\sqrt{3}\,(cm)$

$\therefore \overline{EG}=\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})$

$=2(\sqrt{3}-1)\,(cm)$ • 60% 배점

답 구하기 따라서 정사각형 EFGH의 대각선의 길이가 $2(\sqrt{3}-1)\,cm$이므로

$\square EFGH=\frac{1}{2}\times\overline{EG}\times\overline{FH}$

$=\frac{1}{2}\times\{2(\sqrt{3}-1)\}^2$

$=4(2-\sqrt{3})\,(cm^2)$ • 40% 배점

답 $4(2-\sqrt{3})cm^2$

133 전략 세 내각의 크기가 $30°$, $60°$, $90°$인 직각삼각형의 세 변의 길이의 비를 이용한다.

풀이 $\triangle ABC$는 정삼각형이므로

$\angle A=\angle B=\angle C=60°$

$\triangle AFE$, $\triangle BDF$, $\triangle CED$는 모두 직각삼각형이므로

$\angle AFE=\angle BDF=\angle CED=90°-60°=30°$

$\therefore \angle DEF=\angle EFD=\angle FDE$

$=180°-(90°+30°)=60°$

즉 $\triangle DEF$는 정삼각형이다.

$\triangle AFE$에서 $\overline{AF}:\overline{AE}:\overline{FE}=2:1:\sqrt{3}$이고

$\overline{AE}=\overline{BF}$이므로 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 닮음비는

$\overline{AB}:\overline{FE}=3:\sqrt{3}$

따라서 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 넓이의 비는

$3^2:(\sqrt{3})^2=3:1$

답 ②

$\triangle AFE\equiv\triangle BDF$
$\equiv\triangle CED$
(ASA 합동)
이므로
$\overline{AE}=\overline{BF}$

$\overline{AE}=a$라 하면
$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}$
$=\overline{AF}+\overline{AE}$
$=2a+a=3a$
$\overline{FE}=\sqrt{3}a$
$\therefore \overline{AB}:\overline{FE}=3:\sqrt{3}$

134 문제 이해 $x=-2$일 때 $y=4$이므로

$A(-2,\ 4)$ • 10% 배점

해결 과정 ① $B(a,\ a^2)\ (a>0)$이라 하면 $\triangle AOB$에서

$\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2$

$a^2+a^4=(-2)^2+4^2+(a+2)^2+(a^2-4)^2$

$8a^2-4a-40=0,\quad 2a^2-a-10=0$

$(a+2)(2a-5)=0\qquad \therefore a=\frac{5}{2}\ (\because a>0)$

$\therefore B\left(\frac{5}{2},\ \frac{25}{4}\right)$ • 40% 배점

해결 과정 ② $\overline{OA}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}+2\right)^2+\left(\frac{25}{4}-4\right)^2}=\frac{9\sqrt{5}}{4}$ • 30% 배점

답 구하기 $\therefore \triangle AOB=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\frac{9\sqrt{5}}{4}$

$=\frac{45}{4}$ • 20% 배점

답 $\frac{45}{4}$

135 [문제 해결 길잡이]

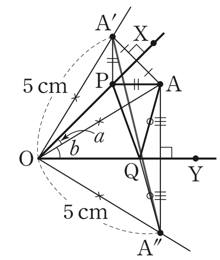
❶ 점 A를 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$에 대하여 각각 대칭이동한다.

❷ $\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{AQ}=\overline{A''Q}$임을 이용하여 $\triangle APQ$의 둘레의 길이의 최솟값과 길이가 같은 선분을 찾는다.

❸ $\angle POA=\angle POA'$, $\angle QOA=\angle QOA''$임을 이용하여 $\angle A'OA''$의 크기를 구한다.

❹ 피타고라스 정리를 이용하여 $\triangle APQ$의 둘레의 길이의 최솟값을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A를 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A′, A″이라 하자. ❶



$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{AQ}=\overline{A''Q}$이므로

$\triangle APQ$의 둘레의 길이는

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$

$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QA''}$

$\geq\overline{A'A''}$ ❷

$\angle POA=a$, $\angle QOA=b$라 하면

$\angle A'OA''=2a+2b=2(a+b)$

$=2\times 45°=90°$ ❸

$\therefore \overline{A'A''}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}\,(cm)$

따라서 구하는 둘레의 길이의 최솟값은 $5\sqrt{2}\,cm$이다. ❹

답 $5\sqrt{2}\,cm$

12 | 피타고라스 정리의 활용 (2)

개념&기출유형 본책 34~36쪽

136 $\overline{AD}=x$라 하면

$\sqrt{4^2+x^2+5^2}=5\sqrt{2}$

$x^2+41=50$, $x^2=9$

$\therefore x=3\ (\because x>0)$ 답 3

137 정육면체의 한 모서리의 길이를 a cm라 하면

$6a^2=162$, $a^2=27$

$\therefore a=3\sqrt{3}\ (\because a>0)$

따라서 정육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}=9\,(\text{cm})$ 답 9 cm

138 $\overline{BD}=\sqrt{8^2+6^2}=10\ (\text{cm})$

$\overline{DM}=\frac{1}{2}\overline{DH}=10\,(\text{cm})$이므로 △BDM에서

$\overline{BM}=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}\,(\text{cm})$ 답 $10\sqrt{2}$ cm

139 원뿔의 높이를 h cm, 모선의 길이를 l cm라 하면

$\frac{1}{3}\times\pi\times 3^2\times h=9\sqrt{3}\pi$ $\therefore h=3\sqrt{3}$

$\therefore l=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2}=6$

$\therefore$ (원뿔의 겉넓이)$=$(밑넓이)$+$(옆넓이)

$=\pi\times 3^2+\frac{1}{2}\times(2\pi\times 3)\times 6$

$=27\pi\,(\text{cm}^2)$ 답 ①

보충학습

원뿔의 전개도에서 옆면인 부채꼴의 중심각의 크기를 모를 때,

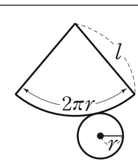
(부채꼴의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times$(부채꼴의 호의 길이)

$\times$(부채꼴의 반지름의 길이)

$=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times l$

$=\pi rl$



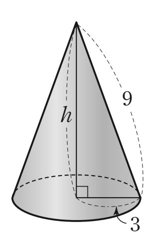
140 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r라 하면

$2\pi r=6\pi$ $\therefore r=3$

$\overline{OA}=l$이라 하면

$2\pi\times l\times\frac{120}{360}=6\pi$ $\therefore l=9$

주어진 전개도로 만들어지는 원뿔은 오른쪽 그림과 같으므로 원뿔의 높이를 h라 하면



$h=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$

따라서 원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi\times 3^2\times 6\sqrt{2}=18\sqrt{2}\pi$

답 $18\sqrt{2}\pi$

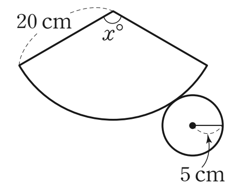
원뿔의 전개도에서
(부채꼴의 호의 길이)
=(밑면인 원의 둘레의 길이)

정육면체는 각 면이 모두 합동인 6개의 정사각형으로 이루어져 있다.

141 원뿔의 모선의 길이를 l cm라 하면

$l=\sqrt{(5\sqrt{15})^2+5^2}=20$

오른쪽 그림의 전개도에서 부채꼴의 중심각의 크기를 $x°$라 하면



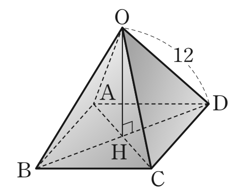
$2\pi\times 20\times\frac{x}{360}=2\pi\times 5$

$\therefore x=90$ 답 ③

142 $\overline{HD}=\frac{1}{2}\overline{BD}=4\sqrt{2}\,(\text{cm})$이므로 △OHD에서

$\overline{OD}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2}=8\,(\text{cm})$ 답 ②

143 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 O에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{BD}=\sqrt{2}\times 12=12\sqrt{2}$

$\therefore \overline{HD}=\frac{1}{2}\overline{BD}=6\sqrt{2}$

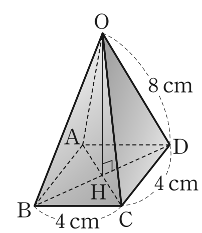
△OHD에서

$\overline{OH}=\sqrt{12^2-(6\sqrt{2})^2}=6\sqrt{2}$

따라서 사각뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times 12^2\times 6\sqrt{2}=288\sqrt{2}$ 답 ③

144 주어진 전개도로 만들어지는 사각뿔은 오른쪽 그림과 같으므로



$\overline{BD}=\sqrt{2}\times 4=4\sqrt{2}\,(\text{cm})$

$\therefore \overline{DH}=\frac{1}{2}\overline{BD}=2\sqrt{2}\,(\text{cm})$

△OHD에서

$\overline{OH}=\sqrt{8^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{14}\,(\text{cm})$

따라서 사각뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times 4^2\times 2\sqrt{14}=\frac{32\sqrt{14}}{3}\ (\text{cm}^3)$ 답 $\frac{32\sqrt{14}}{3}$ cm³

만점비법

주어진 전개도로 만들어지는 사각뿔을 그려 문제를 해결한다.

145 정사면체의 한 모서리의 길이를 a cm라 하면

$\frac{\sqrt{6}}{3}a=4\sqrt{6}$ $\therefore a=12$

따라서 정사면체의 부피는

$\frac{\sqrt{2}}{12}\times 12^3=144\sqrt{2}\,(\text{cm}^3)$ 답 $144\sqrt{2}$ cm³

146 ① $\overline{MH}=\frac{1}{3}\overline{DM}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=\sqrt{3}\,(\text{cm})$

② $\overline{DH}=\frac{2}{3}\overline{DM}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=2\sqrt{3}\,(\text{cm})$

△AHD에서 $\overline{AH}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}\,(\text{cm})$

③ $\triangle \mathrm{AHD}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DH}}\times\overline{\mathrm{AH}}$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{6}=6\sqrt{2}\,(\mathrm{cm}^2)$

④ (정사면체의 겉넓이)$=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=36\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^2)$

정사면체는 각 면이 모두 합동인 4개의 정삼각형으로 이루어져 있다.

⑤ (정사면체의 부피)$=\frac{\sqrt{2}}{12}\times 6^3=18\sqrt{2}\,(\mathrm{cm}^3)$

답 ③

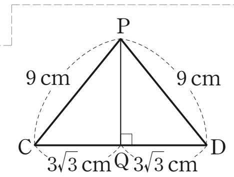
만점비법

정사면체에서 길이 또는 넓이 구하는 방법
(i) 직각삼각형을 찾거나 보조선을 그어 직각삼각형을 만든다.
(ii) 피타고라스 정리를 이용하여 길이 또는 넓이를 구한다.

147 $\overline{\mathrm{PC}}$, $\overline{\mathrm{PD}}$는 각각 정삼각형 ABC, ABD의 높이이므로

$\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PD}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6\sqrt{3}=9\,(\mathrm{cm})$

오른쪽 그림에서 $\triangle \mathrm{PCD}$는 이등변삼각형이므로



이등변삼각형의 성질
① 두 밑각의 크기가 같다.
② 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{9^2-(3\sqrt{3})^2}$

$=3\sqrt{6}\,(\mathrm{cm})$

답 $3\sqrt{6}$ cm

다른풀이 $\overline{\mathrm{BP}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}=3\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$,

$\overline{\mathrm{BQ}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6\sqrt{3}=9(\mathrm{cm})$이므로 $\triangle \mathrm{PBQ}$에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{9^2-(3\sqrt{3})^2}=3\sqrt{6}\,(\mathrm{cm})$

148 단면인 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

따라서 단면인 원의 넓이는

$\pi\times(5\sqrt{3})^2=75\pi\,(\mathrm{cm}^2)$

답 ④

149 단면인 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$2\pi\times r=4\sqrt{3}\pi \qquad \therefore r=2\sqrt{3}$

따라서 구의 중심과 평면 사이의 거리는

$\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2\,(\mathrm{cm})$

답 2 cm

150 단면인 원의 넓이가 $51\pi\,\mathrm{cm}^2$이므로

$\pi\times\overline{\mathrm{AH}}^2=51\pi$

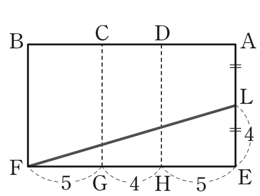
$\therefore \overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{51}\,(\mathrm{cm})\ (\because \overline{\mathrm{AH}}>0)$

따라서 $\triangle \mathrm{OHA}$에서 구의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(\sqrt{51})^2+7^2}=10\,(\mathrm{cm})$

답 ①

151 오른쪽 그림의 전개도에서 구하는 최단 거리는 $\overline{\mathrm{FL}}$의 길이이므로



$\overline{\mathrm{FL}}=\sqrt{14^2+4^2}$

$=2\sqrt{53}$

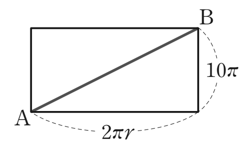
$5+4+5=14$

답 $2\sqrt{53}$

만점비법

입체도형에서 최단 거리를 구할 때는 전개도를 그려 평면도형에서 생각한다. 이때 입체도형의 전개도를 필요한 부분만 그리면 편리하다.

152 밑면의 반지름의 길이를 r라 하면 밑면의 둘레의 길이는 $2\pi r$이므로 옆면의 전개도는 오른쪽 그림과 같다.



이때 최단 거리는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이이므로

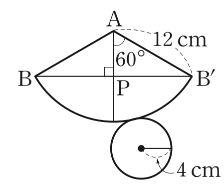
$\sqrt{(2\pi r)^2+(10\pi)^2}=30\pi$

$4r^2+100=900, \qquad r^2=200$

$\therefore r=10\sqrt{2}\ (\because r>0)$

답 $10\sqrt{2}$

153 원뿔의 전개도에서 부채꼴의 중심각의 크기를 $x°$라 하면



$2\pi\times 12\times\frac{x}{360}=2\pi\times 4$

$\therefore x=120$

점 A에서 $\overline{\mathrm{BB'}}$에 내린 수선의 발을 P라 하면 직각삼각형 APB′에서 $\angle \mathrm{PAB'}=60°$이므로

$\triangle \mathrm{ABB'}$은 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AP}}$는 $\angle \mathrm{BAB'}$의 이등분선이다.
$\therefore \angle \mathrm{PAB'}$
$=\frac{1}{2}\angle \mathrm{BAB'}$
$=60°$

$\overline{\mathrm{PB'}}:\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{3}:2$

$\overline{\mathrm{PB'}}:12=\sqrt{3}:2 \qquad \therefore \overline{\mathrm{PB'}}=6\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

따라서 구하는 최단 거리는

$\overline{\mathrm{BB'}}=2\overline{\mathrm{PB'}}=12\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

답 $12\sqrt{3}$ cm

내신 만점 도전하기

본책 37~39쪽

154 전략 $\overline{\mathrm{OA}}$와 $\overline{\mathrm{OB}}$는 각각 직각삼각형 AEO와 BFO의 빗변이다.

풀이 $\overline{\mathrm{EG}}=\sqrt{2}\times 2=2\sqrt{2}$이므로 $\quad \overline{\mathrm{EO}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{EG}}=\sqrt{2}$

$\triangle \mathrm{AEO}$에서 $\quad \overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

$\triangle \mathrm{BFO}$에서 $\quad \overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

점 O에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\triangle \mathrm{OAM}$에서

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{17}$

이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선은 밑변을 이등분하므로
$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}=1$

$\therefore \triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OM}}$

$=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{17}=\sqrt{17}$

답 ④

155 전략 직각삼각형 AEG에서 $\overline{\mathrm{AG}}\times\overline{\mathrm{EP}}=\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{EG}}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{\mathrm{EG}}=\sqrt{2}\times 4=4\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$

$\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{4^2+4^2+8^2}=4\sqrt{6}\,(\mathrm{cm})$

$\triangle \mathrm{AEG}$에서 $\overline{\mathrm{AG}}\times\overline{\mathrm{EP}}=\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{EG}}$이므로

$4\sqrt{6}\times\overline{\mathrm{EP}}=8\times 4\sqrt{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{EP}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\,(\mathrm{cm})$

답 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm

156 전략 닮은 삼각형을 찾아 닮음비를 이용한다.

풀이 $\triangle$AIP와 $\triangle$AEG에서

$\angle$A는 공통,

$\angle$AIP$=\angle$AEG$=90^\circ$

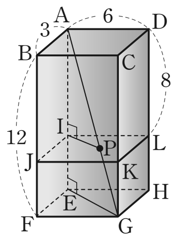
이므로

$\triangle$AIP$\backsim\triangle$AEG (AA 닮음)

따라서 $\overline{AP}:\overline{AG}=\overline{AI}:\overline{AE}$이고

$\overline{AG}=\sqrt{6^2+3^2+12^2}=3\sqrt{21}$이므로

$\overline{AP}:3\sqrt{21}=8:12$ $\quad\therefore \overline{AP}=2\sqrt{21}$ 답 $2\sqrt{21}$



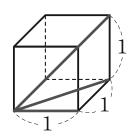
157 전략 세 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 직육면체의 대각선의 길이 ➲ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

풀이 두 꼭짓점 사이의 거리가 될 수 있는 경우는 다음과 같다.

(i) 정육면체가 한 개인 경우

1, $\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$,

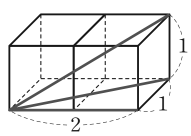
$\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$



(ii) 두 개의 정육면체가 붙어 있는 경우

2, $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

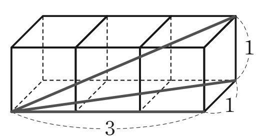
$\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$



(iii) 세 개의 정육면체가 붙어 있는 경우

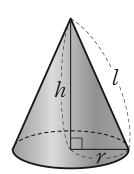
3, $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$,

$\sqrt{3^2+1^2+1^2}=\sqrt{11}$



이상에서 두 꼭짓점 사이의 거리가 될 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

158 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 주어진 전개도로 만들어지는 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r, 모선의 길이를 l, 높이를 h라 하자. • 10% 배점



해결 과정 ① 밑면인 원의 둘레의 길이가 4π이므로 $\quad 2\pi r=4\pi \quad \therefore r=2$ • 20% 배점

해결 과정 ② 옆면인 부채꼴의 넓이가 12π이므로

$\frac{1}{2}\times l\times4\pi=12\pi \quad \therefore l=6$ • 20% 배점

해결 과정 ③ $\therefore h=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$ • 20% 배점

답 구하기 따라서 구하는 원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times4\sqrt{2}=\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ • 30% 배점

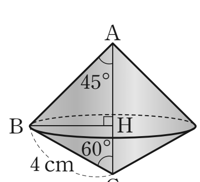
답 $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$

159 전략 주어진 도형을 1회전 시킬 때 생기는 회전체는 두 원뿔을 붙여 만든 것과 같다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$BCH에서

$\overline{BC}:\overline{CH}=2:1$이므로

$4:\overline{CH}=2:1$



$\therefore \overline{CH}=2$ (cm)

또 $\overline{BC}:\overline{BH}=2:\sqrt{3}$이므로

$4:\overline{BH}=2:\sqrt{3} \quad \therefore \overline{BH}=2\sqrt{3}$ (cm)

$\triangle$ABH에서 $\overline{AH}:\overline{BH}=1:1$이므로

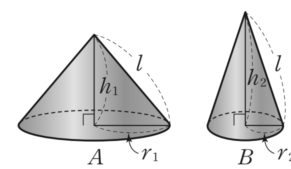
$\overline{AH}:2\sqrt{3}=1:1 \quad \therefore \overline{AH}=2\sqrt{3}$ (cm)

따라서 회전체의 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi\times(2\sqrt{3})^2\times2\sqrt{3}+\frac{1}{3}\times\pi\times(2\sqrt{3})^2\times2$

$=8(\sqrt{3}+1)\pi$ (cm^3) 답 ④

160 문제 이해 원 모양의 종이의 반지름의 길이를 l, 두 원뿔 A, B의 밑면의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하자. • 10% 배점



해결 과정 ① 원뿔 A에서

$2\pi l\times\frac{240}{360}=2\pi r_1 \quad \therefore r_1=\frac{2}{3}l$

$\therefore h_1=\sqrt{l^2-\left(\frac{2}{3}l\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}l$ • 30% 배점

해결 과정 ② 원뿔 B에서

$2\pi l\times\frac{120}{360}=2\pi r_2 \quad \therefore r_2=\frac{1}{3}l$

$\therefore h_2=\sqrt{l^2-\left(\frac{1}{3}l\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}l$ • 30% 배점

답 구하기 $\frac{h_1}{h_2}=\frac{\sqrt{5}}{3}l\times\frac{3}{2\sqrt{2}\,l}=\frac{\sqrt{10}}{4}$이므로 h_1은 h_2의 $\frac{\sqrt{10}}{4}$배이다. • 30% 배점

$h_1=\frac{\sqrt{10}}{4}h_2$

답 $\frac{\sqrt{10}}{4}$배

161 해결 과정 ① $\overline{EG}=\sqrt{2}\times2=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{EO}=\frac{1}{2}\overline{EG}=\sqrt{2}$

$\triangle$AEO에서

$\overline{AO}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$ • 30% 배점

해결 과정 ② 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\triangle$AIO에서

$\triangle$AIO는 빗변이 $\overline{AO}$인 직각삼각형이다.

$\overline{OI}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-1^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \triangle ABO=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}=\sqrt{5}$

이때 $\triangle$ABO, $\triangle$BCO, $\triangle$CDO, $\triangle$DAO는 모두 합동이므로 넓이가 같다. • 40% 배점

답 구하기 따라서 사각뿔 O-ABCD의 겉넓이는

$2\times2+4\times\sqrt{5}=4+4\sqrt{5}$ • 30% 배점

답 $4+4\sqrt{5}$

162 전략 $\overline{AH}$, $\overline{FH}$의 길이의 비를 이용하여 $\angle$AFH의 크기를 구한다.

풀이 사각뿔의 부피가 $\frac{500\sqrt{3}}{3}$이므로

$\frac{1}{3}\times10^2\times\overline{AH}=\frac{500\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \overline{AH}=5\sqrt{3}$

$\overline{HF}=\frac{1}{2}\overline{BC}=5$이므로 $\triangle AHF$에서

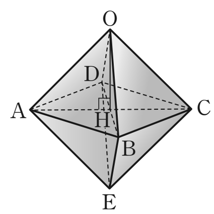
$\overline{AH}:\overline{HF}=5\sqrt{3}:5=\sqrt{3}:1$

$\therefore \angle AFH=60°$ 답 $60°$

$\angle A=30°$, $\angle B=60°$, $\angle C=90°$인 직각삼각형의 세 변의 길이의 비는
$\overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$

163 전략 주어진 전개도로 만들어지는 입체도형은 정팔면체이고 정팔면체는 합동인 사각뿔 2개를 붙여 놓은 모양과 같다.

풀이 주어진 전개도로 만들어지는 입체도형은 오른쪽 그림과 같은 정팔면체이고, 꼭짓점 O에서 □ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 □ABCD의 두 대각선의 교점과 일치한다.



높이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형의 한 변의 길이는

$2\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=4$

즉 정팔면체의 한 모서리의 길이가 4이므로

$\overline{AC}=\sqrt{2}\times4=4\sqrt{2}$ $\therefore \overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AC}=2\sqrt{2}$

따라서 $\triangle OAH$에서

$\overline{OH}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore$ (정팔면체의 부피)$=2\times$(사각뿔의 부피)

$=2\times\frac{1}{3}\times4^2\times2\sqrt{2}$

$=\frac{64\sqrt{2}}{3}$ 답 ③

164 전략 한 모서리의 길이가 x인 정사면체의 높이 ➡ $\frac{\sqrt{6}}{3}x$

풀이 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\overline{AF}=\sqrt{2}a$

즉 $\overline{CI}$는 한 모서리의 길이가 $\sqrt{2}a$인 정사면체의 높이이므로

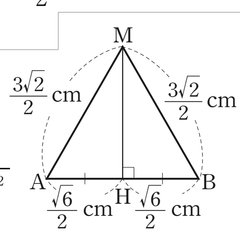
$\overline{CI}=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{2}a=4\sqrt{3}$ $\therefore a=6$ 답 ③

165 전략 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이 ➡ $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

풀이 $\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{6}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (cm)

오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABM$의 꼭짓점 M에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle MAH$에서

$\triangle ABM$은 $\overline{MA}=\overline{MB}$인 이등변삼각형이다.



$\overline{MH}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{3}$ (cm)

$\therefore \triangle ABM=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{MH}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (cm^2) 답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm^2

다른풀이 꼭짓점 A에서 $\overline{BM}$에 내린 수선의 발을 E라 하면 $\overline{AE}$의 길이는 정사면체의 높이와 같으므로

$\overline{AE}=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{6}=2$ (cm)

$\therefore \triangle ABM=\frac{1}{2}\times\overline{BM}\times\overline{AE}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (cm^2)

166 전략 밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi r^2h$이다.

풀이 원뿔의 밑면의 반지름의 길이는

$\sqrt{r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$

이므로 원뿔의 부피 V_1은

$V_1=\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2\times\frac{3}{2}r=\frac{3}{8}\pi r^3$

(원뿔의 높이)
=(구의 반지름의 길이)
+(구의 중심에서 원뿔의 밑면까지의 거리)
$=r+\frac{r}{2}=\frac{3}{2}r$

또 반지름의 길이가 r인 구의 부피 V_2는

$V_2=\frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore \frac{V_2}{V_1}=\frac{4}{3}\pi r^3\times\frac{8}{3\pi r^3}=\frac{32}{9}$ 답 ②

167 전략 구의 중심과 수면 사이의 거리를 구한 후 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 구의 반지름의 길이는 5 cm이므로 구의 중심에서 수면까지의 거리는

$5-2=3$ (cm)

따라서 단면인 원의 반지름의 길이는

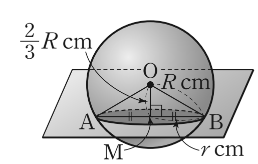
$\sqrt{5^2-3^2}=4$ (cm)

이므로 구하는 넓이는

$\pi\times4^2=16\pi$ (cm^2) 답 ②

168 전략 구의 반지름의 길이를 R cm라 하고 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 단면인 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$\pi r^2=15\pi$

$\therefore r=\sqrt{15}$ ($\because r>0$)

구의 반지름의 길이를 R cm라 하면

$\overline{OM}=\frac{2}{3}R$ (cm)

$\triangle OMB$에서

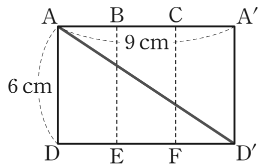
$\left(\frac{2}{3}R\right)^2+(\sqrt{15})^2=R^2$

$\frac{5}{9}R^2=15$, $R^2=27$

$\therefore R=3\sqrt{3}$ ($\because R>0$) 답 $3\sqrt{3}$ cm

169 전략 최단 거리 ➡ 선이 지나는 면의 전개도를 그려 본다.

풀이 오른쪽 전개도에서 구하는 최단 거리는 $\overline{AD'}$의 길이이므로



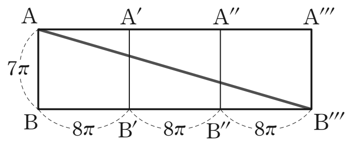
$\overline{AD'}=\sqrt{6^2+9^2}$
$=3\sqrt{13}\,(\text{cm})$

답 ⑤

170 해결 과정 ① 밑면의 둘레의 길이는

$2\pi\times4=8\pi$ • 20% 배점

해결 과정 ②



위의 전개도에서 구하는 최단 거리는 $\overline{AB'''}$의 길이이다. • 40% 배점

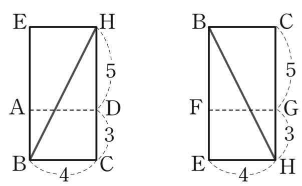
답 구하기 $\therefore\ \overline{AB'''}=\sqrt{(7\pi)^2+(24\pi)^2}=25\pi$ • 40% 배점

답 25π

만점비법

옆면을 세 바퀴 돌면 옆면을 세 번 지나게 되므로 최단 거리는 전개도에서 옆면 3개가 붙여진 직사각형의 대각선의 길이이다.

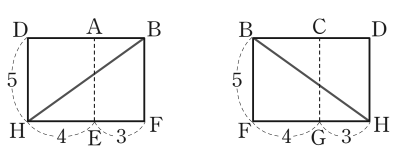
171 해결 과정 ① (i) $\overline{AD}$ 또는 $\overline{FG}$를 지나는 경우



이때의 최단 거리는

$\sqrt{4^2+(5+3)^2}=\sqrt{80}$ • 30% 배점

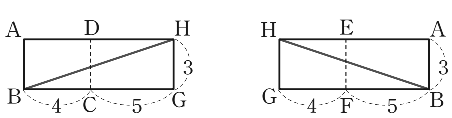
해결 과정 ② (ii) $\overline{AE}$ 또는 $\overline{CG}$를 지나는 경우



이때의 최단 거리는

$\sqrt{5^2+(4+3)^2}=\sqrt{74}$ • 30% 배점

해결 과정 ③ (iii) $\overline{CD}$ 또는 $\overline{EF}$를 지나는 경우



이때의 최단 거리는

$\sqrt{(4+5)^2+3^2}=\sqrt{90}$ • 30% 배점

답 구하기 이상에서 구하는 최단 거리는 $\sqrt{74}$이다. • 10% 배점

답 $\sqrt{74}$

$\overline{DD'}$의 길이는 한 변의 길이가 3 cm인 정삼각형의 둘레의 길이이므로
$\overline{DD'}=9\,\text{cm}$

$\overline{EF}\perp\overline{BC}$

$\overline{BD}/\!/\overline{FH}$

$\overline{BD}=\overline{FH}$이고
$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BD}$이므로
$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{FH}$

정육면체의 한 변의 길이를 a라 하면 △FGH에서
$a^2+a^2=(3\sqrt{2})^2$
$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

$\overline{BC}/\!/\overline{FG}$

내신 만점 굳히기

본책 40쪽

172 전략 세 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 직육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$이다.

풀이 $\overline{AC}=2x$라 하면

$\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{4^2+(4\sqrt{2})^2+x^2}=\sqrt{x^2+48}$

△ABC에서 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$이므로

$4x^2=2(x^2+48)$, $\quad x^2=48$

$\therefore\ x=4\sqrt{3}\ (\because\ x>0)$

$\therefore\ \overline{AC}=2\times4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

답 ④

173 전략 $\overline{BE}$, $\overline{CE}$의 길이를 구하여 △BCE가 어떤 삼각형인지 알아본다.

풀이 점 B에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$,

$\overline{EH}=\overline{AH}-\overline{AE}=3-\frac{1}{3}\times6=1$

이므로 △BHE에서

$\overline{BE}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+1^2}=2\sqrt{7}$

같은 방법으로 하면

$\overline{CE}=\overline{BE}=2\sqrt{7}$

즉 △BCE는 $\overline{BE}=\overline{CE}$인 이등변삼각형이므로

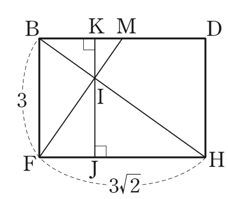
$\overline{EF}=\sqrt{(2\sqrt{7})^2-3^2}=\sqrt{19}$

따라서 $\overline{EF}$를 한 모서리로 하는 정사면체의 부피는

$\frac{\sqrt{2}}{12}\times(\sqrt{19})^3=\frac{19\sqrt{38}}{12}$

답 $\frac{19\sqrt{38}}{12}$

174 문제 이해 □ABCD의 두 대각선의 교점을 M이라 하고 점 I에서 두 면 ABCD, EFGH에 내린 수선의 발을 각각 K, J라 하면 □BFHD는 오른쪽 그림과 같다. • 20% 배점



해결 과정 △BIM과 △HIF에서

$\angle IBM=\angle IHF$, $\angle IMB=\angle IFH$ (엇각)

이므로 $\quad$ △BIM∽△HIF (AA 닮음)

$\therefore\ \overline{IK}:\overline{IJ}=\overline{BM}:\overline{HF}=1:2$ • 40% 배점

답 구하기 이때 $\overline{KJ}=\overline{BF}=3$이므로 구하는 거리는

$\overline{IJ}=3\times\frac{2}{3}=2$ • 40% 배점

답 2

175 전략 (뿔대의 부피)

=(큰 뿔의 부피)−(작은 뿔의 부피)

풀이 △OFG에서 $\overline{OF}=\overline{OG}$, $\angle OFG=60°$이므로 △OFG는 정삼각형이다.

또 △OBC에서 $\overline{OB}=\overline{OC}$, $\angle OBC=\angle OFG=60°$이므로 △OBC도 정삼각형이다.

$\therefore \overline{OB}=\overline{BC}=6$, $\overline{OF}=6+6=12$

두 사각뿔 O-ABCD, O-EFGH의 부피를 각각 V_1, V_2라 하면 두 사각뿔의 닮음비가 $1:2$이므로

$V_1:V_2=1^3:2^3$

$\therefore V_2=8V_1$

사각뿔 O-ABCD의 꼭짓점 O에서 밑면에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{BM}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

이므로 △OBM에서

$\overline{OM}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

$\therefore V_1=\frac{1}{3}\times6^2\times3\sqrt{2}=36\sqrt{2}$

따라서 구하는 사각뿔대의 부피는

$V_2-V_1=8V_1-V_1=7V_1$

$=7\times36\sqrt{2}=252\sqrt{2}$

답 ②

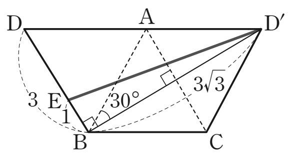
$\overline{OB}:\overline{OF}=6:12$
$=1:2$

닮은 도형의 둘레의 길이, 넓이, 부피의 비
닮음비가 $m:n$인 두 도형에 대하여
① 둘레의 길이의 비
→ $m:n$
② 넓이의 비
→ $m^2:n^2$
③ 부피의 비
→ $m^3:n^3$

$\overline{BM}$의 길이는 정사각형 ABCD의 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$이다.

176 전략 네 변의 길이가 같은 사각형은 마름모이고, 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

풀이 오른쪽 전개도에서 구하는 최단 거리는 $\overline{ED'}$의 길이이다.



□ABCD′은 네 변의 길이가 모두 같으므로 마름모이고, 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로

$\angle ABD'=30°$,

$\overline{BD'}=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times3\right)=3\sqrt{3}$

$\angle DBD'=\angle DBA+\angle ABD'=90°$이고

$\overline{EB}=\frac{1}{3}\overline{BD}=\frac{1}{3}\times3=1$이므로 △EBD′에서

$\overline{ED'}=\sqrt{1^2+(3\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$

답 $2\sqrt{7}$

△ABC와 △ACD′은 한 변의 길이가 3인 정삼각형이다.

△DBA는 정삼각형이므로
$\angle DBA=60°$

177 [문제 해결 길잡이]

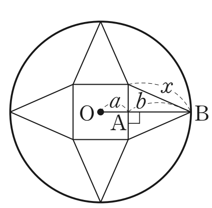
❶ 이등변삼각형의 높이를 b라 하고 원의 반지름의 길이를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

❷ 사각뿔의 부피를 a, b로 나타낸 후 ❶의 관계식을 이용하여 a에 대한 방정식을 구한다.

❸ a가 자연수임을 이용하여 ❷의 방정식을 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

❹ x의 값을 구한다.

풀이 원의 중심을 O라 하면 사각뿔의 밑면의 한 변의 길이가 $2a$이므로 오른쪽 그림에서 $\overline{OA}=a$이다.



$\overline{AB}=b$라 하면 원의 반지름의 길이가 8이므로

$\overline{OB}=a+b=8$ …… ㉠ ❶

주어진 전개도로 만든 사각뿔의 부피가 48이므로

$\frac{1}{3}\times(2a)^2\times\sqrt{b^2-a^2}=48$

$a^2\sqrt{b^2-a^2}=36$

사각뿔의 높이는 $\sqrt{b^2-a^2}$이다.

이때 ㉠에서 $b=8-a$이므로

$a^2\sqrt{(8-a)^2-a^2}=36$, $a^2\sqrt{64-16a}=36$

$\therefore a^2\sqrt{4-a}=9$ …… ㉡ ❷

이때 a가 자연수이므로

$a^2=1$ 또는 $a^2=9$

(i) $a^2=1$, 즉 $a=1$일 때,

$\sqrt{3}\neq9$이므로 ㉡이 성립하지 않는다.

(ii) $a^2=9$, 즉 $a=3$일 때,

$9=9$이므로 ㉡이 성립한다.

(i), (ii)에서 $a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=5$ ❸

$\therefore x=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$ ❹

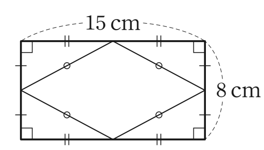
답 $\sqrt{34}$

내신 만점 정복하기

본책 41~46쪽

178 전략 직사각형의 각 변의 중점을 연결하여 만들어지는 도형은 마름모이다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 각 변의 중점을 연결하여 만들어지는 도형은 마름모이다.



이때 마름모의 한 변의 길이는

$\sqrt{4^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2}=\frac{17}{2}$ (cm)

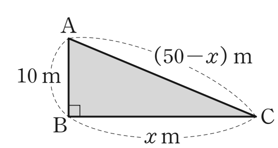
이므로 구하는 둘레의 길이는

$4\times\frac{17}{2}=34$ (cm)

답 ③

179 전략 B지점에서 C지점까지의 거리를 xm라 하고 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 B지점에서 C지점까지의 거리를 xm라 하면 A지점에서 C지점까지의 거리는



$60-(10+x)=50-x$ (m)

이므로

$(50-x)^2=10^2+x^2$

$100x=2400$ $\therefore x=24$

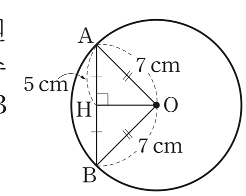
따라서 공터의 넓이는

$\frac{1}{2}\times24\times10=120$ (m^2)

답 120 m^2

180 전략 이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점에서 밑변에 그은 수선은 밑변을 이등분한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △OAB는 이등변삼각형이므로



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=5$ (cm)

$\overline{OH}$가 밑변을 이등분하므로
$\overline{AH}=\overline{BH}$

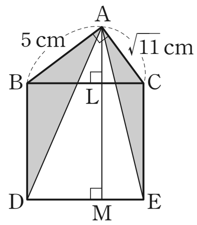
$\triangle$AHO에서

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{7^2-5^2}=2\sqrt{6}\,(\mathrm{cm})$

따라서 원의 중심 O에서 현 AB에 이르는 거리는 $2\sqrt{6}$ cm이다. 답 ③

181 전략 색칠한 두 삼각형과 각각 넓이가 같은 삼각형을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{DE}}$에 내린 수선의 발을 각각 L, M이라 하면



$\triangle\mathrm{ABD}=\triangle\mathrm{LBD}$

$=\frac{1}{2}\square\mathrm{BDML}$

$=\frac{1}{2}\times 5^2$

$=\frac{25}{2}\,(\mathrm{cm}^2)$

($\overline{\mathrm{AB}}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이) $=\square\mathrm{BDML}$

$\triangle\mathrm{AEC}=\triangle\mathrm{LEC}=\frac{1}{2}\square\mathrm{LMEC}$

$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{11})^2=\frac{11}{2}\,(\mathrm{cm}^2)$

($\overline{\mathrm{AC}}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이) $=\square\mathrm{LMEC}$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{AEC}=\frac{25}{2}+\frac{11}{2}=18\,(\mathrm{cm}^2)$ 답 ①

다른풀이 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{5^2+(\sqrt{11})^2}=6\,(\mathrm{cm})$이고

$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{AEC}=\frac{1}{2}(\square\mathrm{BDML}+\square\mathrm{LMEC})$

$=\frac{1}{2}\square\mathrm{BDEC}$

$=\frac{1}{2}\times 6^2=18\,(\mathrm{cm}^2)$

182 전략 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형에서 $c^2=a^2+b^2$이면 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

풀이 $\triangle$ABC에서

$x=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3$

따라서 $\triangle$ACD에서 $3^2=(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2$이므로

$y=90$

$\therefore x+y=93$ 답 ①

183 전략 삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c이고 c가 가장 긴 변의 길이일 때, $c^2<a^2+b^2$이면 예각삼각형이다.

풀이 $\triangle$ABH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

$\triangle$AHC에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(\sqrt{21})^2+6^2}=\sqrt{57}$

$\triangle$ABC에서 $(2+6)^2<5^2+(\sqrt{57})^2$이므로 $\triangle$ABC는 예각삼각형이다. 답 예각삼각형

세 변의 길이가 주어질 때 삼각형 모양 판별하기
(ⅰ) 가장 긴 변의 길이를 찾는다.
(ⅱ) 가장 긴 변의 길이의 제곱과 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합의 대소를 비교한다.

184 전략 $\triangle$EAC가 이등변삼각형임을 이용한다.

풀이 $\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{ACE}$ (접은 각)

$\overline{\mathrm{AD}}/\!/\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{EAC}$ (엇각)

$\therefore \angle\mathrm{EAC}=\angle\mathrm{ECA}$

즉 $\triangle$EAC는 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{EC}}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{EC}}=x$ cm라 하면 $\overline{\mathrm{EA}}=x$ cm이므로

$\overline{\mathrm{ED}}=4\sqrt{3}-x\,(\mathrm{cm})$

$\triangle$DEC에서

$x^2=(4\sqrt{3}-x)^2+4^2$

$8\sqrt{3}x=64 \qquad \therefore x=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

$\triangle$ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2}=8\,(\mathrm{cm})$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}=4\,(\mathrm{cm})$

$\triangle$EAC는 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{EC}}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{HC}}$

$\triangle$EHC에서

$\overline{\mathrm{EH}}=\sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2-4^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\,(\mathrm{cm})$

$\therefore \triangle\mathrm{EHC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EH}}\times\overline{\mathrm{CH}}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times 4$

$=\frac{8\sqrt{3}}{3}\,(\mathrm{cm}^2)$ 답 ⑤

185 전략 직선의 방정식에 $x=0$, $y=0$을 각각 대입하여 두 점 A, B의 좌표를 구하고 $\overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{OB}}$의 길이를 구한다.

풀이 $x=0$을 $y=2x+6$에 대입하면

$y=6 \qquad \therefore \mathrm{A}(0,\ 6)$

$y=0$을 $y=2x+6$에 대입하면

$x=-3 \qquad \therefore \mathrm{B}(-3,\ 0)$

즉 $\overline{\mathrm{OA}}=6$, $\overline{\mathrm{OB}}=3$이므로 $\triangle$ABO에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OH}}$이므로

$6\times 3=3\sqrt{5}\times\overline{\mathrm{OH}}$

$\therefore \overline{\mathrm{OH}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 답 ⑤

186 전략 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 구한 후 $\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{DE}}^2$임을 이용한다.

풀이 $\triangle$ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$\therefore \overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{DE}}^2$

$=10^2+5^2=125$ 답 125

187 전략 $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2$임을 이용한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

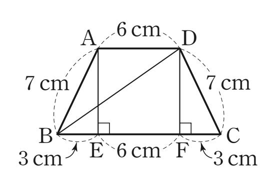
$7^2+8^2=5^2+\overline{\mathrm{BC}}^2$

$\overline{\mathrm{BC}}^2=88 \qquad \therefore \overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{22}\ (\because \overline{\mathrm{BC}}>0)$

$\triangle$OBC에서

$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{(2\sqrt{22})^2-6^2}=2\sqrt{13}$ 답 ①

188 해결 과정 ① 오른쪽 그림과 같이 두 꼭짓점 A, D에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하면



$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{CF}}=\frac{1}{2}\times(12-6)$

$=3(\mathrm{cm})$

• 40% 배점

해결 과정 ② △DFC에서

$\overline{DF}=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$ (cm) • 30% 배점

답 구하기 따라서 △DBF에서

$\overline{BD}=\sqrt{9^2+(2\sqrt{10})^2}=11$ (cm) • 30% 배점

답 11 cm

189 **해결 과정 ①** △ABC≡△CDE이므로

$\overline{CD}=\overline{AB}=5$ (cm), $\overline{BC}=\overline{DE}=3$ (cm)

$\therefore \overline{AC}=\overline{CE}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$ (cm) • 40% 배점

해결 과정 ② 이때 ∠ACB+∠ECD=90°이므로

∠ACE=90°

$\therefore \overline{AE}=\sqrt{(\sqrt{34})^2+(\sqrt{34})^2}=2\sqrt{17}$ • 30% 배점

답 구하기 따라서 □ABDE의 둘레의 길이는

$5+8+3+2\sqrt{17}=16+2\sqrt{17}$ (cm) • 30% 배점

답 $(16+2\sqrt{17})$ cm

△ABC에서
∠CAB+∠ACB
=90°
△ABC≡△CDE이므로
∠CAB=∠ECD
∴ ∠ACB+∠ECD
=90°

190 **문제 이해** △AFD에서

$\overline{DF}=\sqrt{10^2-8^2}=6$ (cm)

$\therefore \overline{CF}=\overline{DC}-\overline{DF}=8-6=2$ (cm) • 30% 배점

해결 과정 △AFD와 △EFC에서

∠ADF=∠ECF=90°,

∠AFD=∠EFC (맞꼭지각)

이므로 △AFD∽△EFC (AA 닮음)

따라서 $\overline{AD}:\overline{EC}=\overline{DF}:\overline{CF}$이므로

$8:\overline{EC}=6:2$

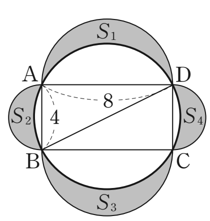
$\therefore \overline{EC}=\frac{8}{3}$ (cm) • 50% 배점

답 구하기 $\therefore \triangle CEF=\frac{1}{2}\times\overline{CF}\times\overline{EC}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{8}{3}$

$=\frac{8}{3}$ (cm²) • 20% 배점

답 $\frac{8}{3}$ cm²

191 **해결 과정** 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 △ABD, △BCD는 각각 직각삼각형이므로



$S_1+S_2=\triangle ABD$

$S_3+S_4=\triangle BCD$

• 50% 배점

답 구하기 $\therefore S_1+S_2+S_3+S_4$

$=\triangle ABD+\triangle BCD=\square ABCD$

$=8\times4=32$ • 50% 배점

답 32

다른풀이 (색칠한 부분의 넓이)

=(전체 넓이)−(가운데 큰 원의 넓이)

$=(\pi\times4^2+\pi\times2^2+8\times4)-\pi\times(2\sqrt{5})^2$

$=32$

가운데 큰 원의 지름의 길이는
$\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$
이므로 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이다.

192 **전략** △ABE에서 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

풀이 $\overline{AE}=9-6=3$ (cm)이므로 △ABE에서

$\overline{AB}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$ (cm)

따라서 □ABCD의 대각선의 길이는

$\sqrt{9^2+(3\sqrt{3})^2}=6\sqrt{3}$ (cm)

답 ①

193 **전략** 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 구한다.

풀이 □ABCD=36 cm²이므로

$\overline{AD}^2=36$ $\therefore \overline{AD}=6$ (cm) ($\because \overline{AD}>0$)

$\therefore \overline{BD}=6\sqrt{2}$ (cm)

□DEFG=4 cm²이므로

$\overline{DG}^2=4$ $\therefore \overline{DG}=2$ (cm) ($\because \overline{DG}>0$)

$\therefore \overline{DF}=2\sqrt{2}$ (cm)

이때 ∠BDF=∠BDC+∠EDF=45°+45°=90°이므로

$\triangle DBF=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=12$ (cm²)

답 ④

194 **전략** 직각삼각형 ABD에서 $\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{BD}\times\overline{AE}$, $\overline{AB}^2=\overline{BE}\times\overline{BD}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{BD}=\sqrt{6^2+8^2}=10$ (cm)

△ABD에서 $\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{BD}\times\overline{AE}$이므로

$6\times8=10\times\overline{AE}$ $\therefore \overline{AE}=\frac{24}{5}$ (cm)

또 $\overline{AB}^2=\overline{BE}\times\overline{BD}$이므로

$6^2=\overline{BE}\times10$ $\therefore \overline{BE}=\frac{18}{5}$ (cm)

같은 방법으로 하면 $\overline{DF}=\frac{18}{5}$ (cm)이므로

$\overline{EF}=10-2\times\frac{18}{5}=\frac{14}{5}$ (cm)

$\therefore \square AECF=\frac{24}{5}\times\frac{14}{5}=\frac{336}{25}$ (cm²)

□AECF는 $\overline{AE}/\!/\overline{FC}$, $\overline{AE}=\overline{FC}$에서 평행사변형이므로 $\overline{AE}$를 밑변으로 생각하면 $\overline{EF}$가 높이이다.
∴ □AECF
$=\overline{AE}\times\overline{EF}$

답 $\frac{336}{25}$ cm²

다른풀이 △ABE=△AFD=△EBC=△FCD이므로

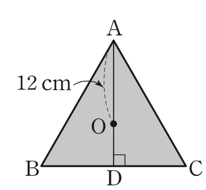
□AECF=□ABCD−4△ABE

$=6\times8-4\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{18}{5}\times\frac{24}{5}\right)$

$=48-\frac{864}{25}=\frac{336}{25}$ (cm²)

195 **전략** 정삼각형의 외심과 무게중심은 일치한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AO}$의 연장선과 $\overline{BC}$가 만나는 점을 D라 하면 점 O는 △ABC의 무게중심이므로



정삼각형의 내심, 외심, 무게중심은 일치한다.

$\overline{AO}:\overline{AD}=2:3$

$\overline{AO}:\overline{OD}=2:1$

$\therefore \overline{AD}=\frac{3}{2}\overline{AO}$

$=\frac{3}{2}\times12=18$ (cm)

△ABC의 한 변의 길이를 a cm라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=18$ $\therefore a=12\sqrt{3}$

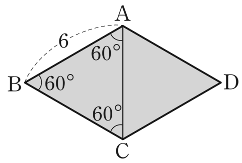
$\therefore \triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(12\sqrt{3})^2$

$=108\sqrt{3}$ (cm²)

답 $108\sqrt{3}$ cm²

196 전략 마름모 ◯ 네 변의 길이가 모두 같은 사각형

풀이 $\angle A+\angle B=180°$이므로



$\angle B=60°$

따라서 $\triangle ABC$는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로

$\overline{AC}=6$

$\therefore \square ABCD=2\triangle ABC$

$=2\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2\right)$

$=18\sqrt{3}$ 답 ②

다른풀이 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 O라 하면

$\overline{BO}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$

이므로 $\overline{BD}=2\times 3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

$\overline{BD}=\overline{BO}+\overline{OD}$
$=2\overline{BO}$

$\therefore \square ABCD=\dfrac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AC}$

$=\dfrac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 6$

$=18\sqrt{3}$

197 전략 $\triangle BDE$와 $\triangle ADF$에서 특수한 직각삼각형의 세 변의 길이의 비를 이용한다.

풀이 $\overline{AD}:\overline{DB}=2:1$이므로

$\overline{AD}=9\times\dfrac{2}{3}=6\ (cm),\ \overline{DB}=9\times\dfrac{1}{3}=3\ (cm)$

$\triangle BDE$에서 $\angle B=60°$이므로

$\overline{BD}:\overline{DE}=1:\sqrt{3},\quad 3:\overline{DE}=1:\sqrt{3}$

$\therefore \overline{DE}=3\sqrt{3}\ (cm)$

$\triangle ADF$에서 $\angle A=60°$이므로

$\overline{AD}:\overline{DF}=1:\sqrt{3},\quad 6:\overline{DF}=1:\sqrt{3}$

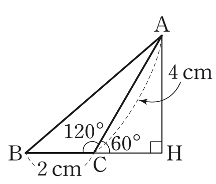
$\therefore \overline{DF}=6\sqrt{3}\ (cm)$

$\therefore \overline{EF}=\overline{DF}-\overline{DE}=6\sqrt{3}-3\sqrt{3}=3\sqrt{3}\ (cm)$

답 ②

198 전략 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$의 연장선에 수선을 그어 특수한 직각삼각형의 세 변의 길이의 비를 이용한다.

풀이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle ACH$에서



$\angle ACH=180°-120°=60°$이므로

$\overline{AC}:\overline{CH}=2:1$

$4:\overline{CH}=2:1\qquad \therefore \overline{CH}=2\ (cm)$

또 $\overline{AC}:\overline{AH}=2:\sqrt{3}$이므로

$4:\overline{AH}=2:\sqrt{3}\qquad \therefore \overline{AH}=2\sqrt{3}\ (cm)$

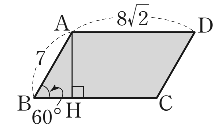
따라서 $\triangle ABH$에서

$\overline{AB}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}\ (cm)$ 답 $2\sqrt{7}$ cm

$\overline{BH}=\overline{BC}+\overline{CH}$
$=2+2=4\ (cm)$

199 전략 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 수선을 그어 특수한 직각삼각형의 세 변의 길이의 비를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle ABH$에서



$\overline{AH}:\overline{AB}=\sqrt{3}:2$

$\overline{AH}:7=\sqrt{3}:2$

$\therefore \overline{AH}=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \square ABCD=8\sqrt{2}\times\dfrac{7\sqrt{3}}{2}=28\sqrt{6}$ 답 ⑤

200 전략 좌표평면 위의 두 점 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리 ◯ $\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(-3+4)^2}=\sqrt{10}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-1-1)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{8}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-2+1)^2+(-4+1)^2}=\sqrt{10}$

따라서 $\overline{AB}=\overline{CA}$, $\overline{AB}^2<\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$이므로 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이면서 예각삼각형이다. 답 ②

201 해결 과정 ① 작은 원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\times 14=7(cm)$ • 30% 배점

해결 과정 ② 정사각형의 대각선의 길이는 $14\sqrt{2}$ cm이므로 큰 원의 반지름의 길이는

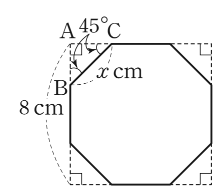
$\dfrac{1}{2}\times 14\sqrt{2}=7\sqrt{2}\ (cm)$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 색칠한 부분의 넓이는

$\pi\times(7\sqrt{2})^2-\pi\times 7^2=49\pi\ (cm^2)$ • 30% 배점

답 $49\pi\ cm^2$

202 해결 과정 정팔각형의 한 변의 길이를 $x$cm라 하면 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서



$\overline{AC}:\overline{BC}=1:\sqrt{2}$이므로

$\overline{AC}:x=1:\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\ (cm)$ • 40% 배점

정팔각형의 한 외각의 크기는
$\dfrac{360°}{8}=45°$
이므로 $\triangle ABC$에서
$\angle ACB=\angle ABC$
$=45°$

답 구하기 정사각형의 한 변의 길이가 8cm이므로

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=8,\qquad (\sqrt{2}+1)x=8$

$\therefore x=\dfrac{8}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{8(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$=8(\sqrt{2}-1)$ • 60% 배점

분자, 분모에 $\sqrt{2}-1$을 각각 곱하여 분모를 유리화한다.

답 $8(\sqrt{2}-1)$ cm

203 해결 과정 ① $y=3x^2+6x-1=3(x+1)^2-4$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(-1,\ -4)$ • 30% 배점

해결 과정 ② $y=-x^2+4x-7=-(x-2)^2-3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(2,\ -3)$ • 30% 배점

답 구하기 따라서 두 꼭짓점 사이의 거리는

$\sqrt{(2+1)^2+(-3+4)^2}=\sqrt{10}$ • 40% 배점

답 $\sqrt{10}$

만점비법

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 꼴의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 꼴로 고쳐서 구한다.

204 전략 세 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 직육면체의 대각선의 길이 ➲ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

풀이 $\overline{DH}=a$라 하면

$\sqrt{8^2+6^2+a^2}=12$, $\quad a^2+100=144$

$a^2=44 \quad \therefore a=2\sqrt{11}$ ($\because a>0$)

이때 $\overline{FH}=\sqrt{8^2+6^2}=10$이므로

$\square BFHD=10\times2\sqrt{11}=20\sqrt{11}$ 답 ②

205 전략 $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{AE}=c$라 하고 주어진 조건을 이용하여 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구한다.

풀이 $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{AE}=c$라 하면

$\overline{BD}^2=a^2+b^2=25$

$\overline{BG}^2=b^2+c^2=40$

$\overline{DG}^2=a^2+c^2=33$

위의 세 식을 변끼리 더하면

$2(a^2+b^2+c^2)=98$

$\therefore a^2+b^2+c^2=49$

따라서 구하는 직육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=7$ 답 ②

206 전략 한 모서리의 길이가 a인 정육면체의 대각선의 길이 ➲ $\sqrt{3}a$

풀이 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\sqrt{3}a=2\sqrt{6} \quad \therefore a=2\sqrt{2}$

따라서 정육면체의 부피는

$a^3=(2\sqrt{2})^3=16\sqrt{2}$ 답 $16\sqrt{2}$

207 전략 한 모서리의 길이가 a인 정육면체의 대각선의 길이 ➲ $\sqrt{3}a$

풀이 정육면체의 한 모서리의 길이를 a cm라 하면

$\sqrt{3}a=6 \quad \therefore a=2\sqrt{3}$

$\overline{EG}=\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$ (cm)이므로

$\triangle AEG=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{3}$

$=6\sqrt{2}$ (cm^2) 답 $6\sqrt{2}$ cm^2

△AEG는 ∠AEG$=90°$인 직각삼각형이므로
△AEG
$=\frac{1}{2}\times\overline{EG}\times\overline{AE}$

208 전략 주어진 조건을 이용하여 원뿔의 밑면의 반지름의 길이와 모선의 길이를 구한다.

풀이 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r cm라 하면

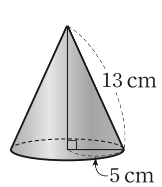
$2\pi r=10\pi \quad \therefore r=5$

모선의 길이를 l cm라 하면

$\frac{1}{2}\times l\times10\pi=65\pi \quad \therefore l=13$

반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이
→ $\frac{1}{2}rl$

주어진 전개도로 원뿔을 만들면 오른쪽 그림과 같으므로 원뿔의 높이는



$\sqrt{13^2-5^2}=12$ (cm) 답 ③

209 전략 △OHB에서 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{HB}$의 길이를 구한다.

풀이 $\overline{OH}=18-10=8$ (cm)이므로 △OHB에서

$\overline{HB}=\sqrt{10^2-8^2}=6$ (cm)

따라서 원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times18=216\pi$ (cm^3) 답 216π cm^3

210 전략 △OHD에서 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{HD}$의 길이를 구한다.

풀이 △OHD에서

$\overline{HD}=\sqrt{8^2-(2\sqrt{7})^2}=6$

사각뿔의 밑면의 한 변의 길이를 a라 하면

$\overline{HD}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

점 H는 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이므로
$\overline{HD}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$

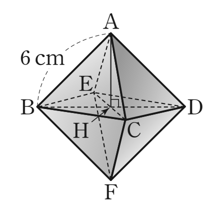
이므로 $\frac{\sqrt{2}}{2}a=6 \quad \therefore a=6\sqrt{2}$

따라서 사각뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times(6\sqrt{2})^2\times2\sqrt{7}=48\sqrt{7}$ 답 ⑤

211 전략 두 꼭짓점 A, F 사이의 거리
➲ $2\times$(꼭짓점 A와 면 BCDE 사이의 거리)

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{BD}=\sqrt{2}\times6=6\sqrt{2}$ (cm)

이므로

$\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BD}=3\sqrt{2}$ (cm)

△ABH에서

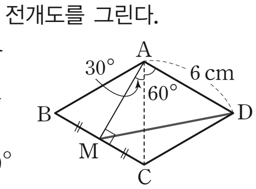
$\overline{AH}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$ (cm)

따라서 두 꼭짓점 A, F 사이의 거리는

$\overline{AF}=2\times3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$ (cm) 답 ①

212 전략 주어진 정사면체의 전개도를 그린다.

풀이 오른쪽 전개도에서 구하는 최단 거리는 $\overline{DM}$의 길이이다.



$\angle MAC=30°$, $\angle CAD=60°$

이므로

$\angle MAD=90°$

△ABC에서

$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$ (cm)

따라서 △AMD에서

$\overline{DM}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+6^2}=3\sqrt{7}$ (cm) 답 ①

213 문제 이해 정육면체의 한 모서리의 길이를 a cm라 하면

$\overline{MN}=\overline{BD}=\sqrt{2}a$ (cm)

$\overline{AG}=\sqrt{3}a$ (cm) • 30% 배점

해결 과정 $\overline{AM}=\overline{MG}=\overline{GN}=\overline{NA}$에서 □AMGN은 마름모이므로

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times\sqrt{3}a=8\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2}a^2=8\sqrt{6},\quad a^2=16$$

$\therefore a=4\,(\because a>0)$ • 50% 배점

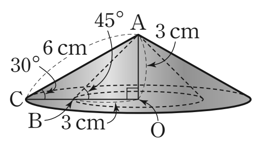
답 구하기 따라서 정육면체의 부피는

$4^3=64\,(\text{cm}^3)$ • 20% 배점

답 $64\,\text{cm}^3$

(마름모의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times$(한 대각선의 길이)$\times$(다른 대각선의 길이)

214 문제 이해 △ABC를 직선 l을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 입체도형은 오른쪽 그림과 같다.



• 20% 배점

해결 과정 △AOC에서 $\overline{OA}:\overline{AC}=1:2$이므로

$\overline{OA}:6=1:2\quad\therefore\overline{OA}=3\,(\text{cm})$

또 $\overline{OC}:\overline{AC}=\sqrt{3}:2$이므로

$\overline{OC}:6=\sqrt{3}:2\quad\therefore\overline{OC}=3\sqrt{3}\,(\text{cm})$

한편 △AOB에서

$\overline{OB}=\overline{OA}=3\,(\text{cm})$ • 40% 배점

(시간)$=\frac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$

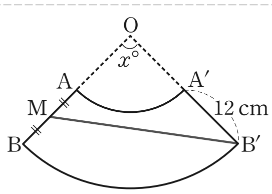
답 구하기 따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\frac{1}{3}\times\pi\times(3\sqrt{3})^2\times3-\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times3$$

$=27\pi-9\pi=18\pi\,(\text{cm}^3)$ • 40% 배점

답 $18\pi\,\text{cm}^3$

215 문제 이해 오른쪽 전개도에서 구하는 최단 거리는 $\overline{MB'}$의 길이이다.



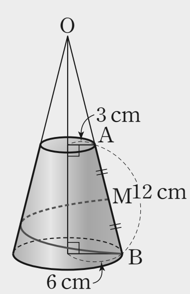
• 10% 배점

원뿔의 전개도에서 부채꼴의 호의 길이는 밑면의 둘레의 길이와 같다.

해결 과정 ① 이때 $\overline{OA}:\overline{OB}=3:6$이므로

$\overline{OA}:(\overline{OA}+12)=1:2\quad\therefore\overline{OA}=12\,(\text{cm})$

$\therefore\overline{OB}=12+12=24\,(\text{cm})$ • 30% 배점



해결 과정 ② 부채꼴의 중심각의 크기를 $x°$라 하면

$$2\pi\times24\times\frac{x}{360}=2\pi\times6$$

$\therefore x=90$ • 30% 배점

답 구하기 $\overline{OM}=12+\frac{1}{2}\times12=18\,(\text{cm})$이므로

△OMB′에서

$\overline{MB'}=\sqrt{24^2+18^2}=30\,(\text{cm})$ • 30% 배점

답 $30\,\text{cm}$

보충학습

부채꼴의 호의 길이와 넓이
반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$$l=2\pi r\times\frac{x}{360},\ S=\pi r^2\times\frac{x}{360}$$

교과서 속 창의유형

본책 47~48쪽

216 [문제 해결 길잡이]

❶ (거리)=(속력)×(시간)임을 이용하여 P지점과 A, B, D지점 사이의 거리를 각각 구한다.

❷ $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$임을 이용하여 P지점과 C지점 사이의 거리를 구한다.

❸ 폭죽을 터뜨린 후 몇 초 후에 C지점에 설치한 소음 측정기가 소음을 측정하는지 구한다.

풀이 소리의 속력이 340 m/s이고,
(거리)=(속력)×(시간)이므로

$\overline{AP}=340\times\frac{\sqrt{5}}{5}=68\sqrt{5}\,(\text{m})$

$\overline{BP}=340\times0.6=204\,(\text{m})$

$\overline{DP}=340\times0.3=102\,(\text{m})$ ❶

이때 $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$이므로

$(68\sqrt{5})^2+\overline{CP}^2=204^2+102^2$

$\overline{CP}^2=28900$

$\therefore\overline{CP}=170\,(\text{m})$ ❷

따라서 폭죽을 터뜨린 후 C지점에 설치한 소음 측정기가 소음을 측정할 때까지 걸리는 시간은

$\frac{170}{340}=0.5$(초) ❸

답 0.5초

다른풀이 속력이 일정할 때 시간과 거리는 비례하므로 C지점에서 소음을 측정하는 데 걸린 시간을 x초라 하면

$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2+x^2=(0.6)^2+(0.3)^2$

$x^2=0.25$

$\therefore x=0.5\,(\because x>0)$

217 [문제 해결 길잡이]

❶ $S_2, S_3, S_4, \cdots$의 한 변의 길이를 구하여 규칙을 찾아 S_n의 한 변의 길이를 n으로 나타낸다.

❷ S_6의 한 변의 길이를 구한다.

❸ S_2와 S_6의 닮음비를 구한다.

풀이 S_2의 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

S_3의 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

S_4의 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

⋮

S_n의 한 변의 길이는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\,(n\geq2)$ ❶

따라서 S_6의 한 변의 길이는

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5=\frac{9\sqrt{3}}{32}$ ❷

정삼각형은 항상 닮음인 도형이다.

이므로 S_2와 S_6의 닮음비는

$\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{9\sqrt{3}}{32}=16:9$ ❸

답 16 : 9

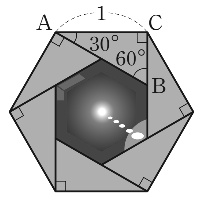
참고 일반적으로 닮음비는 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.

218 [문제 해결 길잡이]

❶ 정육각형 모양의 렌즈를 정삼각형으로 나누어 그 넓이를 구한다.
❷ 특수한 직각삼각형의 세 변의 길이의 비를 이용하여 조리개의 넓이를 구한다.
❸ 노출된 렌즈의 넓이를 구한다.

풀이 렌즈의 넓이는

$6\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ❶



정육각형의 한 내각의 크기는

$\frac{180°\times(6-2)}{6}=120°$

이므로 오른쪽 그림에서

$\angle BAC=120°-90°=30°$

$\angle ABC=90°-30°=60°$

$\triangle ABC$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=\sqrt{3}:1$이므로

$1:\overline{BC}=\sqrt{3}:1$

$\therefore \overline{BC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

조리개의 넓이는

$6\times\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\sqrt{3}$ ❷

따라서 구하는 넓이는

$\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ❸

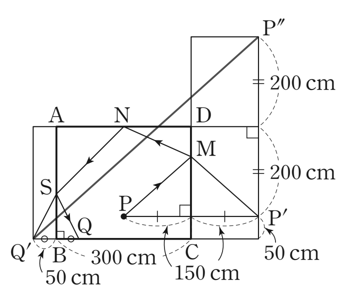
답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

정n각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180°\times(n-2)}{n}$

219 [문제 해결 길잡이]

❶ 두 점 P, Q를 대칭이동하여 로봇청소기가 움직인 최단 거리와 길이가 같은 선분을 찾는다.
❷ 피타고라스 정리를 이용하여 로봇청소기가 움직인 최단 거리를 구한다.

풀이



위의 그림과 같이 점 P를 $\overline{CD}$에 대하여 대칭이동한 점을 P′, 점 P′을 직선 AD에 대하여 대칭이동한 점을 P″이라 하고 점 Q를 $\overline{AB}$에 대하여 대칭이동한 점을 Q′이라 하면 로봇청소기가 움직인 거리는

$\overline{PM}+\overline{MN}+\overline{NS}+\overline{SQ}$

$=\overline{P'M}+\overline{MN}+\overline{NS}+\overline{SQ'}$

$\geq\overline{P'N}+\overline{Q'N}$

$=\overline{P''N}+\overline{Q'N}$

$\geq\overline{P''Q'}$ ❶

따라서 로봇청소기가 움직인 최단 거리는

$\overline{P''Q'}=\sqrt{500^2+450^2}=50\sqrt{181}$ (cm) ❷

답 $50\sqrt{181}$ cm

Ⅶ 삼각비

13 | 삼각비 (1)

개념&기출유형

본책 50~51쪽

220 $\overline{BC}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-2^2}=\sqrt{2}$

① $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\cos A=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

③ $\tan A=\frac{\sqrt{2}}{2}$　④ $\sin B=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

⑤ $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 ③

221 $y=0$을 $y=2x+6$에 대입하면

$x=-3$　$\therefore A(-3, 0)$

$x=0$을 $y=2x+6$에 대입하면

$y=6$　$\therefore B(0, 6)$

따라서 직각삼각형 AOB에서

$\overline{OA}=3,\ \overline{OB}=6,\ \overline{AB}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

$\therefore \sin a+\cos a=\frac{6}{3\sqrt{5}}+\frac{3}{3\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

답 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

222 $\tan B=\frac{\overline{AC}}{10}=\frac{3}{5}$에서　$\overline{AC}=6$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{10^2+6^2}=2\sqrt{34}$

답 $2\sqrt{34}$

223 $\cos A=\frac{\overline{AC}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서　$\overline{AC}=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$

답 4

224 $\sin B=\frac{2\sqrt{14}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$에서　$\overline{BC}=6\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(6\sqrt{2})^2-(2\sqrt{14})^2}=4$

따라서 $\sin C=\frac{4}{6\sqrt{2}}$, $\tan C=\frac{4}{2\sqrt{14}}$이므로

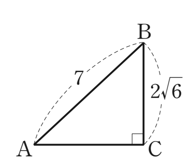
$\sin C\times\tan C=\frac{4}{6\sqrt{2}}\times\frac{4}{2\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{7}}{21}$

답 ②

225 $\sin A=\frac{2\sqrt{6}}{7}$이므로 오른쪽 그림과 같이

$\angle C=90°$, $\overline{AB}=7$,

$\overline{BC}=2\sqrt{6}$



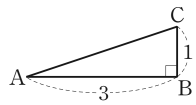
인 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다.

이때 $\overline{AC}=\sqrt{7^2-(2\sqrt{6})^2}=5$이므로

$\tan A=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

답 ①

226 $\tan A=\frac{1}{3}$이므로 오른쪽 그림과 같이



$\angle B=90^\circ$, $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=1$

인 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다.

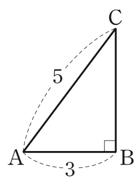
이때 $\overline{AC}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로

$$\sin A=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos A=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \sin A\times\cos A=\frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3}{10}$$

답 $\frac{3}{10}$

227 $\cos A=\frac{3}{5}$이므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}=5$, $\overline{AB}=3$으로 놓으면



$\overline{BC}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

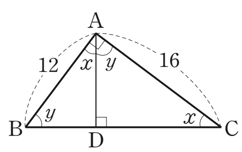
④ $\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$

⑤ $\sin^2 A+\cos^2 A=\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1$

답 ④

> 닮은 직각삼각형에서 대응각에 대한 삼각비의 값은 일정하다.

228 직각삼각형 ABC에서



$\overline{BC}=\sqrt{12^2+16^2}=20$

$\angle DCA=\angle DAB=x$,

$\angle DBA=\angle DAC=y$이므로

> $\triangle ABC \backsim \triangle DBA$
> $\backsim \triangle DAC$

$$\cos x=\frac{16}{20}=\frac{4}{5},\ \cos y=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos x+\cos y=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$$

답 $\frac{7}{5}$

다른풀이 직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\sqrt{12^2+16^2}=20$

$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{AD}\times\overline{BC}$에서

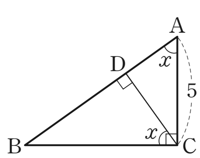
$12\times16=\overline{AD}\times20$ $\quad\therefore \overline{AD}=9.6$

따라서 $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서

$$\cos x=\frac{9.6}{12}=\frac{4}{5},\ \cos y=\frac{9.6}{16}=\frac{3}{5}$$

이므로 $\quad \cos x+\cos y=\frac{7}{5}$

229 $\triangle ABC$와 $\triangle CBD$에서



$\angle B$는 공통,

$\angle ACB=\angle CDB=90^\circ$

이므로

$\triangle ABC \backsim \triangle CBD$ (AA 닮음)

$\therefore \angle BAC=\angle BCD=x$

즉 $\triangle ABC$에서 $\cos x=\frac{5}{\overline{AB}}=\frac{5}{7}$이므로

$\overline{AB}=7$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{7^2-5^2}=2\sqrt{6}$

답 ③

230 $\triangle ABC$와 $\triangle DBE$에서

$\angle B$는 공통, $\angle C=\angle DEB=90^\circ$

이므로 $\quad \triangle ABC \backsim \triangle DBE$ (AA 닮음)

$\therefore \angle BDE=\angle A=x$

직각삼각형 DBE에서 $\overline{BE}=\sqrt{11^2-9^2}=2\sqrt{10}$이므로

$$\sin x=\frac{2\sqrt{10}}{11},\ \tan x=\frac{2\sqrt{10}}{9}$$

$$\therefore \frac{\tan x}{\sin x}=\frac{2\sqrt{10}}{9}\times\frac{11}{2\sqrt{10}}=\frac{11}{9}$$

답 $\frac{11}{9}$

내신 만점 도전하기

본책 52~54쪽

231 전략 삼각비의 뜻을 이용하여 $\angle A$, $\angle B$의 삼각비의 값을 구한다.

풀이 $\cos A=\frac{b}{c}$

① $\sin A=\frac{a}{c}$ ② $\tan A=\frac{a}{b}$

③ $\sin B=\frac{b}{c}$ ④ $\cos B=\frac{a}{c}$

⑤ $\tan B=\frac{b}{a}$

답 ③

232 해결 과정 직각삼각형 DBC에서

$\overline{BC}=\sqrt{15^2-9^2}=12$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{20^2-12^2}=16$ • 60% 배점

답 구하기 $\therefore \cos x=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$ • 40% 배점

답 $\frac{4}{5}$

233 전략 $\triangle EBF$는 이등변삼각형이다.

풀이 $\overline{DE}=\overline{BE}=a$라 하면 $\overline{AE}=6-a$이므로 직각삼각형 ABE에서

$$a^2=(6-a)^2+2^2,\quad 12a=40\quad \therefore a=\frac{10}{3}$$

점 F에서 $\overline{ED}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle BFE$는 $\overline{BE}=\overline{BF}$인 이등변삼각형이므로

> $\angle DEF=\angle BFE$ (엇각),
> $\angle DEF=\angle BEF$ (접은 각)
> 이므로
> $\angle BFE=\angle BEF$
> $\therefore \overline{BE}=\overline{BF}$

$$\overline{HD}=\overline{FC}=6-\overline{BF}=6-\frac{10}{3}=\frac{8}{3}$$

$$\therefore \overline{EH}=\overline{DE}-\overline{HD}=\frac{10}{3}-\frac{8}{3}=\frac{2}{3}$$

따라서 직각삼각형 EFH에서

$$\overline{EF}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+2^2}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$\therefore \sin x+\cos x=\frac{\overline{FH}}{\overline{EF}}+\frac{\overline{EH}}{\overline{EF}}$$
$$=2\times\frac{3}{2\sqrt{10}}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{2\sqrt{10}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

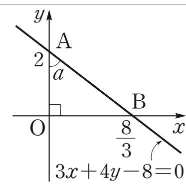
답 ③

234 전략 직선을 그려서 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 직각삼각형을 생각한다.

풀이 주어진 직선이 y축, x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 $\quad \mathrm{A}(0,\ 2),\ \mathrm{B}\left(\frac{8}{3},\ 0\right)$

> $x=0$을 $3x+4y-8=0$에 대입하면
> $4y-8=0 \quad \therefore y=2$
> $y=0$을 $3x+4y-8=0$에 대입하면
> $3x-8=0$
> $\therefore x=\frac{8}{3}$

직선 $3x+4y-8=0$은 오른쪽 그림과 같으므로 직각삼각형 AOB에서



$$\overline{\mathrm{OA}}=2,\ \overline{\mathrm{OB}}=\frac{8}{3},$$
$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{10}{3}$$

따라서 $\sin a=\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{8}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{4}{5}$,

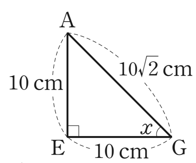
$\cos a=\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=2\times\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$이므로

$$5(\sin a+\cos a)=5\times\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=7$$

답 ③

235 **전략** 직각삼각형 AEG에서 삼각비의 값을 구한다.

풀이 $\triangle\mathrm{AEG}$에서 $\angle\mathrm{AEG}=90^\circ$이고



$$\overline{\mathrm{AE}}=10\,(\mathrm{cm}),$$
$$\overline{\mathrm{EG}}=\sqrt{6^2+8^2}=10\,(\mathrm{cm}),$$
$$\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{6^2+8^2+10^2}=10\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$$

> 세 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 직육면체의 대각선의 길이
> $\rightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

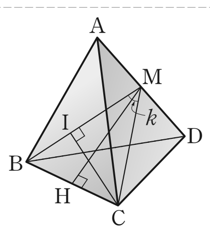
이므로

$$\sin x=\frac{10}{10\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos x=\frac{10}{10\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\tan x=\frac{10}{10}=1$$
$$\therefore \sin x\times\cos x-\tan x=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

답 ②

236 **전략** 점 M과 점 C에서 각각 $\overline{\mathrm{BC}}$와 $\overline{\mathrm{BM}}$에 수선을 그어 직각삼각형을 만든다.

풀이 정사면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면



$$\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{CM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

> 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이
> $\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a$

점 M에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle\mathrm{MBH}$에서

$$\overline{\mathrm{MH}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

> $\overline{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$

점 C에서 $\overline{\mathrm{BM}}$에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\triangle\mathrm{BCM}$의 넓이에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{MH}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BM}}\times\overline{\mathrm{CI}}$$
$$\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\overline{\mathrm{CI}}$$
$$\therefore \overline{\mathrm{CI}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

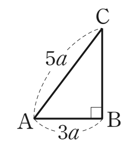
따라서 직각삼각형 MIC에서

$$\sin k=\frac{\overline{\mathrm{CI}}}{\overline{\mathrm{CM}}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a\times\frac{2}{\sqrt{3}a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

237 **전략** 주어진 삼각비의 값을 갖는 직각삼각형을 그려 본다.

풀이 $\cos A=\frac{3}{5}$이므로 오른쪽 그림과 같이



$\angle\mathrm{B}=90^\circ$, $\overline{\mathrm{AB}}=3a$, $\overline{\mathrm{AC}}=5a$

인 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다.

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(5a)^2-(3a)^2}=4a$이므로

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times3a\times4a=150$$
$$6a^2=150 \qquad \therefore a=5\ (\because a>0)$$

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$의 세 변의 길이는 15, 20, 25이므로 둘레의 길이는

$$15+20+25=60$$

답 ②

238 **해결 과정 ①** $\triangle\mathrm{ABC}$에서

$$\tan B=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{4}=2$$
$$\therefore \overline{\mathrm{AC}}=8$$
• 30% 배점

해결 과정 ② $\triangle\mathrm{ADE}\backsim\triangle\mathrm{ABC}$(AA 닮음)이므로

> $\angle\mathrm{AED}=\angle\mathrm{C}=90^\circ$,
> $\angle\mathrm{A}$는 공통이므로
> $\triangle\mathrm{ADE}\backsim\triangle\mathrm{ABC}$
> (AA 닮음)

$$\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{AC}}$$
$$2\sqrt{2}:4=\overline{\mathrm{AE}}:8 \qquad \therefore \overline{\mathrm{AE}}=4\sqrt{2}$$
• 50% 배점

답 구하기 $\therefore \overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{AE}}$
$$=8-4\sqrt{2}$$
• 20% 배점

답 $8-4\sqrt{2}$

239 **해결 과정 ①** $\triangle\mathrm{ABC}$에서

$$\tan x=\frac{15}{\overline{\mathrm{BC}}}=\frac{3}{5}$$
$$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=25$$
• 30% 배점

해결 과정 ② $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{CD}}=25-a$이므로 $\triangle\mathrm{ADC}$에서

$$a^2=(25-a)^2+15^2$$
$$50a=850 \qquad \therefore a=17$$
$$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}=17,\ \overline{\mathrm{CD}}=8$$
• 50% 배점

답 구하기 $\therefore \cos y=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{8}{17}$
• 20% 배점

답 $\frac{8}{17}$

240 **전략** 꼭짓점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이를 이용하여 $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이를 구한다.

풀이 꼭짓점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times16\times\overline{\mathrm{AH}}=40\sqrt{3}$$
$$\therefore \overline{\mathrm{AH}}=5\sqrt{3}$$

$\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $\qquad c=10$

$\triangle\mathrm{ABH}$에서 $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{10^2-(5\sqrt{3})^2}=5$이므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=16-5=11$$

또 $\triangle\mathrm{ACH}$에서 $\qquad b=\sqrt{(5\sqrt{3})^2+11^2}=14$

$$\therefore b+c=24$$

답 24

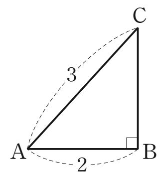
241 해결 과정 ① $9x^2-12x+4=0$에서

$(3x-2)^2=0 \quad \therefore x=\frac{2}{3}$ (중근) • 20% 배점

해결 과정 ② 따라서 $\cos A=\frac{2}{3}$이므로 오른쪽 그림과 같이

$\angle B=90°$, $\overline{AC}=3$, $\overline{AB}=2$

인 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다.



이때 $\overline{BC}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$이므로

$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{3}$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore (\cos A-\sin A)^2$

$=\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=1-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ • 40% 배점

답 $1-\frac{4\sqrt{5}}{9}$

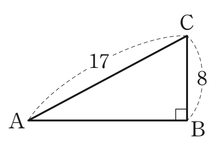
242 전략 주어진 삼각비의 값을 갖는 직각삼각형을 그려 본다.

풀이 $17\sin A-8=0$에서 $\sin A=\frac{8}{17}$

따라서 오른쪽 그림과 같이

$\angle B=90°$, $\overline{AC}=17$, $\overline{BC}=8$

인 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다.



이때 $\overline{AB}=\sqrt{17^2-8^2}=15$이므로

$\cos A=\frac{15}{17}$, $\tan A=\frac{8}{15}$

$\therefore \cos A-\sin A=\frac{15}{17}-\frac{8}{17}=\frac{7}{17}$,

$\cos A\times\tan A+\sin A=\frac{15}{17}\times\frac{8}{15}+\frac{8}{17}=\frac{16}{17}$

$\therefore \frac{\cos A-\sin A}{\cos A\times\tan A+\sin A}=\frac{7}{17}\times\frac{17}{16}=\frac{7}{16}$

답 ④

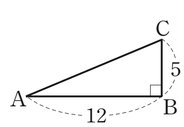
243 전략 $\sin A$와 $\cos A$의 값의 비를 이용하여 직각삼각형을 그려 본다.

풀이 $12\sin A=5\cos A$에서

$\sin A:\cos A=5:12$이므로 오른쪽 그림과 같이

$\angle B=90°$, $\overline{AB}=12$, $\overline{BC}=5$

인 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다.



> △ABC에서 $\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, $\cos A=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ 이므로 $\sin A:\cos A=\overline{BC}:\overline{AB}$

이때 $\overline{AC}=\sqrt{12^2+5^2}=13$이므로

$\cos(90°-A)=\cos C=\frac{5}{13}$

답 ④

244 전략 닮은 두 직각삼각형에서 대응각에 대한 삼각비의 값은 일정하다.

풀이 △ABD와 △EAD에서

$\angle D$는 공통, $\angle BAD=\angle AED=90°$

이므로 △ABD∽△EAD (AA 닮음)

$\therefore \angle ABD=\angle EAD=x$

$\overline{BD}=\sqrt{12^2+9^2}=15$이므로

$\sin x=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

답 $\frac{4}{5}$

245 전략 닮은 두 직각삼각형에서 대응각에 대한 삼각비의 값은 일정하다.

풀이 △ABC∽△ACD∽△ADE (AA 닮음)이므로

> △ACD∽△ADE

$4:\overline{AD}=\overline{AD}:5$, $\quad\overline{AD}^2=20$

$\therefore \overline{AD}=2\sqrt{5}$ ($\because \overline{AD}>0$)

$\therefore \cos(\angle BAC)=\cos(\angle DAE)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

> $\cos(\angle BAC)$
> $=\cos(\angle CAD)$
> $=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

답 ⑤

246 해결 과정 ① △ADC에서

$\overline{DE}^2=\overline{CE}\times\overline{AE}=24$이므로

$\overline{DE}=2\sqrt{6}$ ($\because \overline{DE}>0$)

$\overline{CD}^2=\overline{CE}\times\overline{CA}=60$이므로

$\overline{CD}=2\sqrt{15}$ ($\because \overline{CD}>0$) • 40% 배점

> △CED에서
> $\overline{CD}=\sqrt{\overline{CE}^2+\overline{DE}^2}$
> $=\sqrt{6^2+(2\sqrt{6})^2}$
> $=2\sqrt{15}$
> 와 같이 구할 수도 있다.

해결 과정 ② $\angle C=x$이므로 △CDE에서

$\sin x=\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

> △CAD∽△ABD (AA 닮음)이므로 $\angle ACD=\angle BAD=x$

또 $\angle CDE=y$이므로 △CDE에서

$\cos y=\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$ • 40% 배점

> △CDE∽△DAE (AA 닮음)이므로 $\angle CDE=\angle DAE=y$

답 구하기 $\therefore \sin x+\cos y=\frac{2\sqrt{10}}{5}$ • 20% 배점

답 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

247 전략 닮은 두 직각삼각형에서 대응각에 대한 삼각비의 값은 일정하다.

풀이 △AOB와 △OHB에서

$\angle ABO$는 공통, $\angle AOB=\angle OHB=90°$

이므로 △AOB∽△OHB (AA 닮음)

$\therefore \angle BAO=\angle BOH$

즉 $\tan(\angle BAO)=\frac{3}{4}$이므로

$\overline{AO}=4k$, $\overline{BO}=3k$ $(k>0)$

라 하면 $\overline{AB}=\sqrt{(4k)^2+(3k)^2}=5k$

$\overline{AO}\times\overline{BO}=\overline{AB}\times\overline{OH}$이므로

$4k\times3k=5k\times6 \quad \therefore k=\frac{5}{2}$

$\overline{AO}=4k=4\times\frac{5}{2}=10$, $\overline{BO}=3k=3\times\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$이므로

$A(-10, 0)$, $B\left(0, \frac{15}{2}\right)$

따라서 주어진 직선의 방정식은 $y=\frac{3}{4}x+\frac{15}{2}$이므로

$a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{15}{2} \quad \therefore a+b=\frac{33}{4}$

답 ④

248 문제 이해 △ABC에서

$\overline{BC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$ • 10% 배점

해결 과정 ① △ABC∽△EBD (AA 닮음)이므로

> $\angle A=\angle BED=90°$, $\angle B$는 공통이므로 △ABC∽△EBD (AA 닮음)

$\angle C=\angle BDE=x$

$\therefore \sin x=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$ • 40% 배점

해결 과정 ② $\triangle ABC \backsim \triangle GFC$ (AA 닮음)이므로

$\angle B=\angle GFC=y$

$\therefore \cos y=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore \sin x+\cos y=\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{6}{5}$ • 10% 배점

답 $\dfrac{6}{5}$

> $\angle A=\angle FGC=90°$, $\angle C$는 공통이므로 $\triangle ABC \backsim \triangle GFC$ (AA 닮음)

내신 만점 굳히기 본책 55쪽

249 전략 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 고쳐서 구한다.

풀이 $y=x^2+x+\cos a$

$=\left(x^2+x+\dfrac{1}{4}\right)+\cos a-\dfrac{1}{4}$

$=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\cos a-\dfrac{1}{4}$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \cos a-\dfrac{1}{4}\right)$이다.

> 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(p,\ q)$이다.

원점과 꼭짓점 사이의 거리는

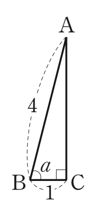
$\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\cos a-\dfrac{1}{4}\right)^2}$

이므로 $\cos a-\dfrac{1}{4}=0$, 즉 $\cos a=\dfrac{1}{4}$일 때 최소이다.

$\cos a=\dfrac{1}{4}$이므로 오른쪽 그림과 같이

$\angle C=90°$, $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=1$

인 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다.



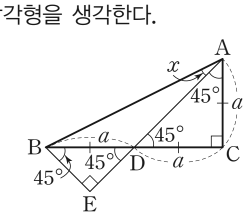
이때 $\overline{AC}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$이므로

$\tan a=\sqrt{15}$

답 ⑤

250 전략 점 B에서 $\overline{AD}$의 연장선에 수선을 그어 $\angle BAD$를 한 각으로 하는 직각삼각형을 생각한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AD}$의 연장선에 내린 수선의 발을 E라 하고, $\overline{AC}=\overline{BD}=\overline{DC}=a$라 하면



$\triangle ADC$에서

$\overline{AD}=\sqrt{2}a$

$\triangle BED$에서 $\overline{BD}:\overline{BE}:\overline{DE}=\sqrt{2}:1:1$이므로

$a:\overline{BE}:\overline{DE}=\sqrt{2}:1:1$

$\therefore \overline{BE}=\overline{DE}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

따라서 $\overline{AE}=\sqrt{2}a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a$이므로 $\triangle ABE$에서

$\tan x=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\times\dfrac{2}{3\sqrt{2}a}=\dfrac{1}{3}$

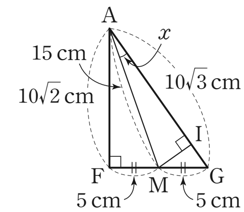
답 $\dfrac{1}{3}$

251 해결 과정 ① $\overline{AF}=\sqrt{2}\times10=10\sqrt{2}$ (cm),

$\overline{FM}=\overline{MG}=5$ cm이므로 $\triangle AFM$에서

$\overline{AM}=\sqrt{(10\sqrt{2})^2+5^2}=15$ (cm) • 20% 배점

해결 과정 ② 오른쪽 그림과 같이 점 M에서 $\overline{AG}$에 내린 수선의 발을 I라 하면



$\overline{AG}=\sqrt{3}\times10$

$=10\sqrt{3}$ (cm)

이므로 $\triangle AMG$의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}\times10\sqrt{3}\times\overline{MI}=\dfrac{1}{2}\times5\times10\sqrt{2}$

$\therefore \overline{MI}=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$ (cm) • 40% 배점

해결 과정 ③ $\triangle AMI$에서

$\overline{AI}=\sqrt{15^2-\left(\dfrac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{25\sqrt{3}}{3}$ (cm) • 20% 배점

답 구하기 $\therefore \cos x=\dfrac{\overline{AI}}{\overline{AM}}=\dfrac{25\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{15}$

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ • 20% 배점

답 $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

252 전략 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름에 수직임을 이용한다.

풀이 (ㄱ) $\triangle OAB$에서 $\angle OAB=90°$이므로

$\tan a=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\overline{AB}$

(ㄴ) $\overline{AB}\perp\overline{OC}$, $\overline{OB}\perp\overline{BC}$이므로 $\triangle OBC$에서

$\overline{AB}^2=\overline{OA}\times\overline{AC}=\overline{AC}$

$\therefore \overline{AC}=\overline{AB}^2=(\tan a)^2$

(ㄷ) $\triangle OAB$에서 $\cos a=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\dfrac{1}{\overline{OB}}$

$\therefore \overline{OB}=\dfrac{1}{\cos a}$

이상에서 (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ) 모두 옳다.

답 ⑤

253 해결 과정 ① 주어진 식에서

$(3\sin A+2\cos A)(2\sin A-\cos A)=0$

$3\sin A+2\cos A>0$이므로

> $0°<A<90°$에서 $\sin A>0$, $\cos A>0$

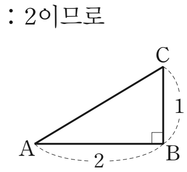
$2\sin A-\cos A=0$

$\therefore 2\sin A=\cos A$ • 40% 배점

해결 과정 ② 즉 $\sin A:\cos A=1:2$이므로 오른쪽 그림과 같이

$\angle B=90°$, $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$

인 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다. • 30% 배점



답 구하기 이때 $\overline{AC}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로

$\sin A=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ • 30% 배점

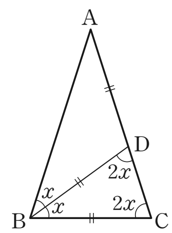
답 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

254 [문제 해결 길잡이]

❶ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°임을 이용하여 $\angle\mathrm{ABD}$와 $\angle\mathrm{A}$의 크기를 구한다.

❷ $\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{BC}}=b$라 하고 삼각형의 닮음을 이용하여 b를 a에 대한 식으로 나타낸다.

❸ $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타내어 $\cos 36^\circ$의 값을 구한다.



풀이 $\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DBC}=\angle x$라 하면 $\triangle\mathrm{ABC}$와 $\triangle\mathrm{BCD}$는 이등변삼각형이므로

$$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{BDC}=2\angle x$$

$\triangle\mathrm{BCD}$에서

$$5\angle x=180^\circ \qquad \therefore \angle x=36^\circ$$

또 $\triangle\mathrm{ABC}$에서

$$\angle\mathrm{A}+4\angle x=180^\circ$$

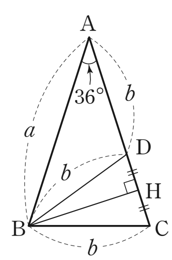
이므로

$$\angle\mathrm{A}+4\times 36^\circ=180^\circ$$

$$\therefore \angle\mathrm{A}=180^\circ-144^\circ=36^\circ \text{ ❶}$$

따라서 $\triangle\mathrm{ABD}$는 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}$인 이등변삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BC}}$$



오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{\mathrm{CD}}$에 내린 수선의 발을 H, $\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{BC}}=b$라 하면

$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{BCD}$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CD}}$$

$$a:b=b:(a-b)$$

$$b^2=a(a-b)$$

$$b^2+ab-a^2=0$$

$$\therefore b=\frac{-a+\sqrt{5}a}{2}\ (\because a>0,\ b>0) \text{ ❷}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AH}}=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$$

$$=\left(a+\frac{-a+\sqrt{5}a}{2}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{4}a$$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$$\cos 36^\circ=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}a\times\frac{1}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ ❸}$$

답 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이다.

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{ABD}=36^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}$

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CBD}$, $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{BCD}$이므로 $\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{BCD}$ (AA 닮음)

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해는 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

14 | 삼각비 (2)

개념&기출유형

본책 56~57쪽

255 $\dfrac{\sqrt{2}\sin 45^\circ\times\tan 60^\circ}{2\tan 45^\circ}+\cos 30^\circ-\sqrt{2}\cos 45^\circ$

$$=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3}}{2\times 1}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\sqrt{3}-1$$

답 ②

256 $\cos(x-20^\circ)=\dfrac{1}{2}$이므로

$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$

$$x-20^\circ=60^\circ \qquad \therefore x=80^\circ$$

답 ⑤

다른풀이 $\sin 30^\circ=\cos 60^\circ$이므로

$$x-20^\circ=60^\circ \qquad \therefore x=80^\circ$$

257 $\tan 45^\circ=1$이므로

$$x-15^\circ=45^\circ \qquad \therefore x=60^\circ$$

$$\therefore \sin x+\cos\frac{1}{2}x=\sin 60^\circ+\cos 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$

258 $\triangle\mathrm{ABD}$에서 $\sin 60^\circ=\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{6\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=9$$

$\triangle\mathrm{ADC}$에서 $\sin 45^\circ=\dfrac{9}{\overline{\mathrm{AC}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

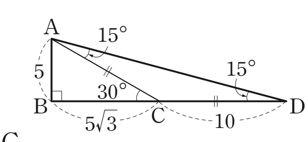
$$\therefore \overline{\mathrm{AC}}=9\sqrt{2}$$

답 $9\sqrt{2}$

259 $\triangle\mathrm{ABC}$에서

$$\sin 30^\circ=\frac{5}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{1}{2} \qquad \therefore \overline{\mathrm{AC}}=10$$

$$\tan 30^\circ=\frac{5}{\overline{\mathrm{BC}}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore \overline{\mathrm{BC}}=5\sqrt{3}$$



$\triangle\mathrm{ACD}$에서

$$\angle\mathrm{DAC}=30^\circ-15^\circ=15^\circ$$

삼각형의 한 외각의 크기는 이와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

$$\therefore \angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{DAC}$$

즉 $\triangle\mathrm{ACD}$는 이등변삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AC}}=10$$

$\triangle\mathrm{ABD}$에서 $\tan 15^\circ=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BD}}}$

$$\therefore \tan 15^\circ=\frac{5}{10+5\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$=2-\sqrt{3}$$

답 $2-\sqrt{3}$

260 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 a라 할 때, $m=\tan a$

직선의 y절편을 k라 하면

$$\tan 60^\circ=\frac{k}{6}=\sqrt{3} \qquad \therefore k=6\sqrt{3}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=\sqrt{3}x+6\sqrt{3}$$

답 $y=\sqrt{3}x+6\sqrt{3}$

다른풀이 직선의 방정식을 $y=ax+b$라 하면

$a=\tan 60°=\sqrt{3}$

x절편이 -6이므로 $x=-6$, $y=0$을 $y=\sqrt{3}x+b$에 대입하면 $b=6\sqrt{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x+6\sqrt{3}$

261 ① $\sin x=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BC}}{1}=\overline{BC}$

② $\sin y=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$

③ $\cos z=\cos y=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BC}}{1}=\overline{BC}$

$\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이므로 $y=z$ (동위각)

④ $\tan x=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{DE}}{1}=\overline{DE}$

⑤ $\tan z=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DE}}=\dfrac{1}{\overline{DE}}$ 답 ③

262 $(\cos 90°-\sin 90°)(\sin 0°+3\cos 0°-\tan 0°)$

$=(0-1)\times(0+3\times1-0)$

$=-3$ 답 -3

263 ① x의 크기가 증가하면 $\sin x$의 값도 증가하므로

$\sin 16°<\sin 20°$

② x의 크기가 증가하면 $\cos x$의 값은 감소하므로

$\cos 61°>\cos 63°$

③ x의 크기가 증가하면 $\tan x$의 값도 증가하므로

$\tan 8°<\tan 10°$

④ $45°<x<90°$이면 $\sin x>\cos x$이므로

$\sin 70°>\cos 70°$

⑤ $\tan 45°=1<\tan 50°$, $\sin 90°=1$이므로

$\sin 90°<\tan 50°$ 답 ⑤

참고 ④ $\sin 45°=\cos 45°$이고 $45°<x<90°$일 때, x의 크기가 증가하면 $\sin x$의 값은 증가하고 $\cos x$의 값은 감소하므로

$\sin x>\cos x$

264 주어진 삼각비의 표에서 $\sin 43°=0.6820$, $\tan 40°=0.8391$이므로

$x=43°$, $y=40°$ $\therefore x+y=83°$ 답 $83°$

265 $\angle A=36°$이므로

$\angle B=90°-36°=54°$

주어진 삼각비의 표에서 $\tan 54°=1.3764$이므로

$\tan 54°=\dfrac{\overline{AC}}{40}=1.3764$

$\therefore \overline{AC}=1.3764\times 40=55.056$ 답 55.056

내신 만점 도전하기

본책 58~60쪽

266 전략 특수한 각$(30°,\ 45°,\ 60°)$의 삼각비의 값을 이용한다.

풀이 ① $\sin 60°+\cos 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$,

$\sin 60°-\cos 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\therefore \dfrac{1}{\sin 60°+\cos 60°}-\dfrac{1}{\sin 60°-\cos 60°}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

$=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)-2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=-2$

② $2\sin 30°-\sqrt{2}\sin 45°+\tan 30°$

$=2\times\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=1-1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

③ $\sin 45°\times(\cos 30°-\tan 30°)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

④ $\sqrt{3}\sin 60°-\dfrac{\sqrt{2}\cos 45°\times\tan 45°}{\sqrt{3}\tan 60°}$

$=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{6}$

⑤ (좌변)$=\tan 45°\div\sin 45°$

$=1\div\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

(우변)$=\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

답 ①, ③

267 전략 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$임을 이용하여 A의 크기를 구한다.

풀이 삼각형의 세 내각의 크기를 a, $2a$, $3a\ (a>0°)$라 하면 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로

$a+2a+3a=180°$

$6a=180°$ $\therefore a=30°$

$a=30°$이므로 삼각형의 세 내각의 크기는 $30°$, $60°$, $90°$이다.

따라서 $A=30°$이므로

$A=180°\times\dfrac{1}{6}=30°$와 같이 구할 수도 있다.

$\sin A\times\cos A\times\tan A$

$=\sin 30°\times\cos 30°\times\tan 30°$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{4}$ 답 $\dfrac{1}{4}$

268 해결 과정 $x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$에서

$(x-1)(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}$

즉 $\tan A=1$ 또는 $\tan A=\sqrt{3}$이므로

$A=45°$ 또는 $A=60°$

$A=45°\ (\because 0°\le A\le 45°)$ • 60% 배점

답 구하기 $\therefore \sin^2 A-\sqrt{2}\cos A+3$

$=\sin^2 45°-\sqrt{2}\cos 45°+3$

$=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+3$

$=\dfrac{5}{2}$ • 40% 배점

답 $\dfrac{5}{2}$

269 전략 특수한 각 (30°, 45°, 60°)의 삼각비의 값을 이용하여 $\overline{BC}$, $\overline{DC}$의 길이를 구한다.

풀이 $\triangle ABC$에서 $\tan 30° = \dfrac{6}{\overline{BC}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \overline{BC} = 6\sqrt{3}$

$\triangle ABD$에서

$\angle ADC = 30° + 15° = 45°$

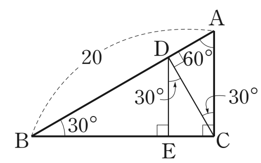
$\triangle ADC$에서 $\tan 45° = \dfrac{6}{\overline{DC}} = 1$

$\therefore \overline{DC} = 6$

$\therefore \overline{BD} = \overline{BC} - \overline{DC} = 6\sqrt{3} - 6 = 6(\sqrt{3} - 1)$

답 ①

270 해결 과정 ① $\triangle ABC$에서



$\sin 30° = \dfrac{\overline{AC}}{20} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \overline{AC} = 10$

• 30% 배점

해결 과정 ② $\angle A = 90° - 30° = 60°$이므로

$\angle ACD = 90° - 60° = 30°$

$\triangle ADC$에서

$\cos 30° = \dfrac{\overline{CD}}{10} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{CD} = 5\sqrt{3}$ • 30% 배점

답 구하기 $\overline{DE} /\!/ \overline{AC}$이므로

$\angle EDC = \angle ACD = 30°$ (엇각)

$\overline{DE} \perp \overline{BC}$, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$이므로 $\overline{DE} /\!/ \overline{AC}$

$\triangle DEC$에서 $\sin 30° = \dfrac{\overline{EC}}{5\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \overline{EC} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ • 40% 배점

답 $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

271 전략 $\sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$임을 이용하여 x의 크기를 구한다.

풀이 $\sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\sin(2x - 15°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서

$2x - 15° = 45°$, $2x = 60°$

$\therefore x = 30°$

$\triangle OAB$에서 $\cos 30° = \dfrac{\overline{OB}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{OB} = 4\sqrt{3}$

$\triangle OBC$에서 $\cos 30° = \dfrac{\overline{OC}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{OC} = 6$

$\triangle OCD$에서 $\sin 30° = \dfrac{\overline{CD}}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \overline{CD} = 3$

답 ②

272 문제 이해 부채꼴 AOB의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$2\pi r \times \dfrac{30}{360} = \pi$ $\therefore r = 6$ • 20% 배점

해결 과정 $\triangle AOH$에서

$\sin 30° = \dfrac{\overline{AH}}{6} = \dfrac{1}{2}$ $\therefore \overline{AH} = 3$ (cm)

$\cos 30° = \dfrac{\overline{OH}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore \overline{OH} = 3\sqrt{3}$ (cm)

• 50% 배점

답 구하기 따라서 색칠한 부분의 넓이는

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 넓이는 $\pi r^2 \times \dfrac{x}{360}$

$\pi \times 6^2 \times \dfrac{30}{360} - \dfrac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3 = 3\pi - \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ (cm²)

• 30% 배점

답 $\left(3\pi - \dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right)$ cm²

273 문제 이해 $2\angle AOC = 3\angle COB$에서

$\angle AOC : \angle COB = 3 : 2$

이므로

$\angle AOC = 150° \times \dfrac{3}{5} = 90°$ • 20% 배점

해결 과정 ① $\triangle OAC$는 $\overline{OA} = \overline{OC}$인 이등변삼각형이므로

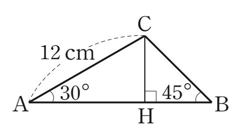
$\angle OAC = \angle OCA = \dfrac{1}{2} \times (180° - 90°) = 45°$

$\triangle OAB$는 $\overline{OA} = \overline{OB}$인 이등변삼각형이므로

$\angle OAB = \angle OBA = \dfrac{1}{2} \times (180° - 150°) = 15°$

$\therefore \angle CAB = 45° - 15° = 30°$ • 30% 배점

해결 과정 ② 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle CAH$에서



$\cos 30° = \dfrac{\overline{AH}}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore \overline{AH} = 6\sqrt{3}$ (cm)

$\sin 30° = \dfrac{\overline{CH}}{12} = \dfrac{1}{2}$ $\therefore \overline{CH} = 6$ (cm)

$\triangle CHB$에서 $\tan 45° = \dfrac{6}{\overline{BH}} = 1$

$\therefore \overline{BH} = 6$ (cm) • 40% 배점

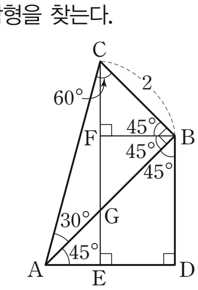
답 구하기 $\therefore \overline{AB} = \overline{AH} + \overline{BH} = 6\sqrt{3} + 6$

$= 6(\sqrt{3} + 1)$ (cm) • 10% 배점

답 $6(\sqrt{3} + 1)$ cm

274 전략 75°의 각이 있는 직각삼각형을 찾는다.

풀이 $\triangle ABC$에서



$\angle CAB = 180° - (90° + 60°)$

$= 30°$

이므로

$\tan 30° = \dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \overline{AB} = 2\sqrt{3}$

$\triangle ADB$에서 $\overline{AD} = \overline{BD}$이므로

$\angle BAD = \angle ABD = \dfrac{1}{2} \times (180° - 90°) = 45°$

$\sin 45° = \dfrac{\overline{BD}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\overline{BD} = \sqrt{6}$

$\therefore \overline{AD} = \overline{BD} = \sqrt{6}$

Ⅶ 삼각비

$\angle DBF=90^\circ$이므로 $\quad \angle ABF=90^\circ-45^\circ=45^\circ$

$\therefore \angle FBC=90^\circ-45^\circ=45^\circ$

$\triangle CFB$에서 $\sin 45^\circ=\dfrac{\overline{CF}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\overline{CF}=\sqrt{2} \quad \therefore \overline{BF}=\overline{CF}=\sqrt{2}$

한편 □FEDB는 직사각형이므로

$\overline{ED}=\overline{BF}=\sqrt{2},\ \overline{FE}=\overline{BD}=\sqrt{6}$

$\therefore \overline{CE}=\overline{CF}+\overline{FE}=\sqrt{2}+\sqrt{6},$

$\overline{AE}=\overline{AD}-\overline{ED}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

$\triangle CAE$에서 $\angle CAE=30^\circ+45^\circ=75^\circ$이므로

$\tan 75^\circ=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=2+\sqrt{3}$ 답 ②

□FEDB에서
$\angle BFE=\angle FED$
$=\angle EDB$
$=90^\circ$
이므로
$\angle DBF=90^\circ$

$\triangle CFB$는 $\angle F=90^\circ$, $\overline{FC}=\overline{FB}$인 직각이등변삼각형이다.

275 전략 분모인 변의 길이가 1인 직각삼각형을 찾아 삼각비의 값을 구한다.

풀이 $\overline{CD} /\!/ \overline{AE}$이므로

$\angle ODC=\angle OEA=y$ (동위각)

① $\cos y=\cos(\angle ODC)=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=\overline{CD}$

② $\tan x=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{OA}}=\overline{AE}$

③ $\sin y=\sin(\angle ODC)=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OD}}=\overline{OC}$

④, ⑤ $\triangle EOA$에서 $\quad x+y=90^\circ$

따라서 x의 크기가 작아지면 y의 크기는 커지므로 $\sin y$, $\tan y$의 값은 커진다. 답 ⑤

$\sqrt{a^2}=|a|$
$=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

276 전략 x와 크기가 같은 각을 찾아 $\sin x$의 값을 구한다.

풀이 $\tan x=\dfrac{\overline{OF}}{\overline{EF}}=\overline{OF}$

$\overline{AB} /\!/ \overline{EF}$에서 $\angle OAB=\angle OEF=x$(동위각)이므로

$\sin x=\sin(\angle OAB)=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\overline{OB}$

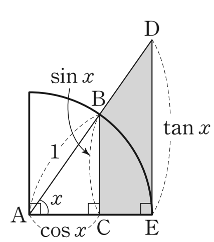
$\therefore \tan x-\sin x=\overline{OF}-\overline{OB}=\overline{BF}$ 답 ④

277 전략 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$의 길이를 각각 x의 삼각비로 나타낸다.

풀이 $\sin x=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\overline{BC}$

$\cos x=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\overline{AC}$

$\tan x=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\overline{DE}$



$\therefore$ □BCED

$=\triangle AED-\triangle ACB$

$=\dfrac{1}{2}\times 1\times \tan x-\dfrac{1}{2}\times \cos x\times \sin x$

$=\dfrac{\tan x-\sin x\cos x}{2}$ 답 $\dfrac{\tan x-\sin x\cos x}{2}$

참고 사다리꼴 BCED의 넓이는

$\dfrac{1}{2}(\sin x+\tan x)(1-\cos x)$

와 같이 나타낼 수도 있다.

278 전략 $0^\circ\le x\le 90^\circ$일 때, x의 크기가 증가하면 ▶ $\sin x$, $\tan x$의 값은 증가한다.

풀이 $0^\circ\le x\le 90^\circ$일 때, x의 크기가 증가하면 $\sin x$, $\tan x$의 값도 증가하므로

$\sin 45^\circ<\sin 68^\circ,\ \tan 58^\circ<\tan 72^\circ$

또 $\sin 90^\circ=1,\ \cos 0^\circ=1,\ \tan 45^\circ=1$이므로

$\sin 45^\circ<\sin 68^\circ<\cos 0^\circ<\tan 58^\circ<\tan 72^\circ$

따라서 크기가 작은 것부터 차례대로 나열하면

(ㄴ) – (ㄹ) – (ㄱ) – (ㄷ) – (ㅁ) 답 ④

279 전략 $45^\circ<A<90^\circ$ ▶ $\sin A>\cos A$

풀이 $45^\circ<A<90^\circ$일 때, $\sin A>0$, $\cos A>0$, $\sin A>\cos A$이므로

$\sin A+\cos A>0,\ \cos A-\sin A<0$

$\therefore |\sin A+\cos A|-\sqrt{(\cos A-\sin A)^2}$

$=(\sin A+\cos A)-\{-(\cos A-\sin A)\}$

$=\sin A+\cos A+\cos A-\sin A$

$=2\cos A$ 답 ⑤

보충학습

① $0^\circ\le x<45^\circ$일 때, $\quad \sin x<\cos x$
② $45^\circ<x\le 90^\circ$일 때, $\quad \sin x>\cos x$

280 해결 과정 $\triangle ABC$에서

$\sin 45^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{10\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \overline{AC}=10$ • 50% 배점

답 구하기 $\angle BAC=90^\circ-45^\circ=45^\circ$이므로

$\angle DAC=45^\circ-20^\circ=25^\circ$

따라서 $\triangle ADC$에서 $\quad \tan 25^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{10}=0.4663$

$\therefore \overline{CD}=4.663$ • 50% 배점

답 4.663

281 전략 삼각비의 값 ▶ 삼각비의 표의 가로줄과 세로줄이 만나는 곳의 수

풀이 $\dfrac{0.2123+\tan x}{0.5877-\tan x}=7$에서

$0.2123+\tan x=4.1139-7\tan x$

$8\tan x=3.9016 \quad \therefore \tan x=0.4877$

주어진 삼각비의 표에서 $\tan 26^\circ=0.4877$이므로

$x=26^\circ$

$\therefore \cos(x+34^\circ)+\sin(x+42^\circ)$

$=\cos 60^\circ+\sin 68^\circ$

$=0.5+0.9272=1.4272$ 답 ②

282 전략 삼각비의 표를 이용하여 $\sin A=0.7314$를 만족시키는 A의 크기를 구한다.

풀이 $\sin A=0.7314$라 하면 주어진 삼각비의 표에서

$A=47^\circ$

$\therefore a=\cos A=\cos 47^\circ=0.6820,$

$b=\tan A=\tan 47^\circ=1.0724$

답 $a=0.6820,\ b=1.0724$

내신 만점 굳히기 본책 61쪽

283 문제 이해 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4\sqrt{3},\ \alpha\beta=8$ • 30% 배점

해결 과정 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=48-32=16$

이므로 $\alpha-\beta=4\ (\because \alpha>\beta)$

$\therefore \tan A=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\dfrac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$ • 50% 배점

답 구하기 $\tan 60°=\sqrt{3}$이므로

$A=60°$ • 20% 배점

답 $60°$

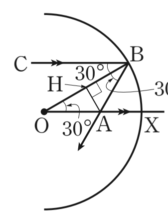
곱셈 공식의 변형
① a^2+b^2
$=(a+b)^2-2ab$
② a^2+b^2
$=(a-b)^2+2ab$
③ $(a+b)^2$
$=(a-b)^2+4ab$
④ $(a-b)^2$
$=(a+b)^2-4ab$

보충학습

이차방정식의 근과 계수의 관계
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때,
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

284 전략 엇각의 크기를 이용하여 △OAB는 이등변삼각형임을 안다.

풀이 오른쪽 그림에서 $\overline{CB}/\!/\overline{OX}$이므로



$\angle BOA=\angle CBO$
$=30°$ (엇각)

$\therefore \angle BOA=\angle OBA$

따라서 △OAB는 $\overline{AO}=\overline{AB}$인 이등변삼각형이므로 점 A에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\dfrac{r}{2}$

$\overline{AO}=\overline{AB}$인 이등변삼각형의 꼭짓점 A에서 $\overline{OB}$에 내린 수선은 $\overline{OB}$를 이등분하므로
$\overline{OH}=\overline{BH}=\dfrac{r}{2}$

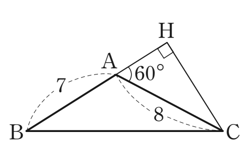
직각삼각형 AOH에서

$\cos 30°=\dfrac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{OA}=\overline{OH}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{r}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r$ 답 ④

285 전략 점 C에서 $\overline{AB}$의 연장선에 수선을 그어 직각삼각형을 만든다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AB}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 △ACH에서



$\cos 60°=\dfrac{\overline{AH}}{8}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \overline{AH}=4$

$\sin 60°=\dfrac{\overline{CH}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$에서

$\overline{CH}=4\sqrt{3}$

따라서 △BCH에서

$\overline{BC}=\sqrt{(7+4)^2+(4\sqrt{3})^2}=13$ 답 13

$\overline{BH}=\overline{BA}+\overline{AH}$

286 전략 $60°$의 삼각비의 값을 이용하여 $\overline{IE},\ \overline{AI}$의 길이를 원의 반지름에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면 △AOI에서

$\cos 60°=\dfrac{\overline{OI}}{r}=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore \overline{OI}=\dfrac{1}{2}r$

$\therefore \overline{IE}=\overline{OE}-\overline{OI}=r-\dfrac{1}{2}r=\dfrac{1}{2}r$

$\sin 60°=\dfrac{\overline{AI}}{r}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$에서 $\quad\overline{AI}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$

또 $\widehat{AE}=2\pi r\times\dfrac{60}{360}=\dfrac{1}{3}\pi r$이므로

$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{3}\pi\right)r=6+6\sqrt{3}+4\pi$ $\quad\therefore r=12$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$4\times\{$(부채꼴 AOE의 넓이)$-$△AOI$\}$

$=4\times\left(\pi\times12^2\times\dfrac{60}{360}-\dfrac{1}{2}\times6\times6\sqrt{3}\right)$

$=96\pi-72\sqrt{3}$ 답 $96\pi-72\sqrt{3}$

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 넓이 S는
$S=\pi r^2\times\dfrac{x}{360}$

287 [문제 해결 길잡이]

❶ 점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하고 $\cos a,\ \sin a$를 $x_1,\ y_1$로 나타낸다.

❷ 점 C의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$라 하고 $\overline{OC}$가 x축과 이루는 예각의 삼각비의 값을 $x_2,\ y_2$로 나타낸다.

❸ 점 D의 좌표를 $(x_3,\ y_3)$이라 하고 $\overline{OD}$가 x축과 이루는 예각의 삼각비의 값을 $x_3,\ y_3$으로 나타낸다.

❹ 옳은 것을 모두 고른다.

풀이 (ㄱ) 점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면

$\cos a=\dfrac{x_1}{\overline{OA}}=\dfrac{x_1}{1}=x_1$

$\sin a=\dfrac{y_1}{\overline{OA}}=\dfrac{y_1}{1}=y_1$

$\therefore A(\cos a,\ \sin a)$ ❶

(ㄴ) 점 C의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$라 하면 $\overline{OC}$가 x축과 이루는 예각의 크기는 a이므로

점 C는 제3 사분면 위의 점이므로
$x_2<0,\ y_2<0$

$\cos a=\dfrac{-x_2}{\overline{OC}}=-\dfrac{x_2}{1}=-x_2$

$\sin a=\dfrac{-y_2}{\overline{OC}}=-\dfrac{y_2}{1}=-y_2$

$\therefore C(-\cos a,\ -\sin a)$ ❷

(ㄷ) 점 D의 좌표를 $(x_3,\ y_3)$이라 하면 $\overline{OD}$가 x축과 이루는 예각의 크기는 b이므로

점 D는 제4 사분면 위의 점이므로
$x_3>0,\ y_3<0$

$\cos b=\dfrac{x_3}{\overline{OD}}=\dfrac{x_3}{1}=x_3$

$\sin b=\dfrac{-y_3}{\overline{OD}}=-\dfrac{y_3}{1}=-y_3$

$\therefore D(\cos b,\ -\sin b)$ ❸

이상에서 옳은 것은 (ㄱ)뿐이다. ❹ 답 ①

만점비법

원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 $P(x,\ y)\ (x>0,\ y>0)$에 대하여 $\overline{OP}$가 x축과 이루는 예각의 크기가 a일 때, $x=\cos a,\ y=\sin a$이다.
즉 점 P의 좌표를 $(\cos a,\ \sin a)$로 나타낼 수 있다.

Ⅶ 삼각비

15 | 삼각비의 활용

개념&기출유형

본책 62~64쪽

288 $a=10\cos 36°=10\times 0.81=8.1$

$b=10\sin 36°=10\times 0.59=5.9$

$\therefore a+b=14$ 답 ④

289 $\overline{FG}=12\cos 30°=6\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\overline{CG}=12\sin 30°=6\,(\text{cm})$

따라서 직육면체의 부피는

$6\sqrt{3}\times 10\times 6=360\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$ 답 $360\sqrt{3}\,\text{cm}^3$

(직육면체의 부피) =(가로의 길이) ×(세로의 길이) ×(높이)

290 진영이의 눈높이에서 국기 게양대 끝부분까지의 높이는

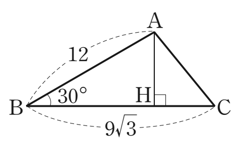
$45\sin 40°=45\times 0.64=28.8\,(\text{m})$

따라서 국기 게양대의 높이는

$1.65+28.8=30.45\,(\text{m})$ 답 $30.45\,\text{m}$

한 꼭짓점에서 그 대변에 수선을 내려 만든 직각삼각형을 이용한다.

291 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △ABH에서



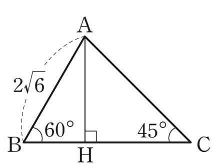
$\overline{AH}=12\sin 30°=6$

$\overline{BH}=12\cos 30°=6\sqrt{3}$

$\overline{CH}=9\sqrt{3}-6\sqrt{3}=3\sqrt{3}$이므로 △AHC에서

$\overline{AC}=\sqrt{6^2+(3\sqrt{3})^2}=3\sqrt{7}$ 답 $3\sqrt{7}$

292 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △ABH에서

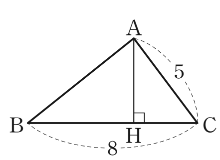


$\overline{AH}=2\sqrt{6}\sin 60°=3\sqrt{2}$

△AHC에서 $\overline{AC}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin 45°}=6$ 답 6

$\angle C=180°-(60°+75°)=45°$

293 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △AHC에서



$\overline{AH}=5\sin C$

$=5\times 0.8=4$

$\overline{CH}=5\cos C=5\times 0.6=3$

$\overline{BH}=8-3=5$이므로 △ABH에서

$\overline{AB}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$ 답 $\sqrt{41}$

294 $\angle BAH=45°$, $\angle CAH=60°$이므로 $\overline{AH}=h$라 하면

$\overline{BH}=h\tan 45°=h$

$\overline{CH}=h\tan 60°=\sqrt{3}h$

$h+\sqrt{3}h=8$이므로 $(1+\sqrt{3})h=8$

$\therefore h=\dfrac{8}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{8(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=4(\sqrt{3}-1)$

답 $4(\sqrt{3}-1)$

295 $\angle BAH=60°$, $\angle CAH=30°$이므로

$\overline{BH}=6\tan 60°=6\sqrt{3}$

$\overline{CH}=6\tan 30°=2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{BC}=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ 답 $4\sqrt{3}$

296 $\angle ACD=45°$, $\angle BCD=30°$이므로 $\overline{CD}=h\,\text{m}$라 하면

$\overline{AD}=h\tan 45°=h\,(\text{m})$

$\overline{BD}=h\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}h\,(\text{m})$

$h-\dfrac{\sqrt{3}}{3}h=150$이므로 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}h=150$

$\therefore h=150\times\dfrac{3}{3-\sqrt{3}}$

$=150\times\dfrac{3(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}$

$=75(3+\sqrt{3})$ 답 $75(3+\sqrt{3})\,\text{m}$

297 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times 5\times 6\times\sin 30°$

$=\dfrac{1}{2}\times 5\times 6\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{15}{2}\,(\text{cm}^2)$ 답 ①

298 $\dfrac{1}{2}\times 8\times 12\times\sin(180°-C)=24\sqrt{2}$이므로

$\sin(180°-C)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $180°-C=45°$이므로 $\angle C=135°$ 답 $135°$

299 $\overline{BC}=12$이므로

$\overline{AB}=12\sin 30°=6$

$\angle ABD=60°+90°=150°$이므로

$\triangle ABD=\dfrac{1}{2}\times 6\times 12\times\sin(180°-150°)$

$=\dfrac{1}{2}\times 6\times 12\times\dfrac{1}{2}=18$ 답 ②

평행사변형에서 이웃하는 두 내각의 크기의 합은 180°이다.

300 $\angle B=180°-150°=30°$이므로

$\square ABCD=5\times 5\sqrt{3}\times\sin 30°$

$=5\times 5\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$ 답 $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$

301 $\square ABCD=\dfrac{1}{2}\times 20\times 12\sqrt{2}\times\sin 60°$

$=\dfrac{1}{2}\times 20\times 12\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=60\sqrt{6}$ 답 $60\sqrt{6}$

등변사다리꼴의 성질
① 평행하지 않은 두 대변의 길이가 같다.
② 두 대각선의 길이가 같다.

302 등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 서로 같으므로 $\overline{BD}=x\,\text{cm}$라 하면

$\frac{1}{2}\times x\times x\times \sin(180°-120°)=32\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}\times x^2\times \frac{\sqrt{3}}{2}=32\sqrt{3}$

$x^2=128$ $\quad\therefore x=8\sqrt{2}\ (\because x>0)$ 답 ③

303 $\square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 8\times \sin 60°$

$+\frac{1}{2}\times 6\times 2\times \sin(180°-120°)$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 8\times \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 6\times 2\times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$=12\sqrt{3}+3\sqrt{3}=15\sqrt{3}$ 답 $15\sqrt{3}$

참고 보조선을 그을 때 넓이를 구할 수 있는 삼각형, 즉 두 변의 길이와 그 끼인 각의 크기를 알 수 있는 삼각형이 만들어지도록 긋는다.

304 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=\frac{16}{\tan 45°}=16$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 16\times 16=128$

또 $\overline{AC}=\frac{16}{\sin 45°}=16\sqrt{2}$이므로

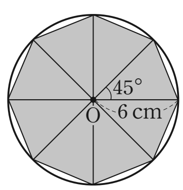
$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times 16\sqrt{2}\times 4\sqrt{6}\times \sin(180°-120°)$

$=\frac{1}{2}\times 16\sqrt{2}\times 4\sqrt{6}\times \frac{\sqrt{3}}{2}=96$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=128+96=224$ 답 ④

305 오른쪽 그림과 같이 정팔각형은 8개의 합동인 이등변삼각형으로 나누어진다.



따라서 정팔각형의 넓이는

$8\times\left(\frac{1}{2}\times 6\times 6\times \sin 45°\right)$

$=8\times\left(\frac{1}{2}\times 6\times 6\times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=72\sqrt{2}\ (\mathrm{cm}^2)$ 답 ⑤

$\frac{360°}{8}=45°$

내신 만점 도전하기 본책 65~68쪽

306 전략 $\triangle ABD$에서 $\overline{AD}$의 길이를 구한 후 삼각비를 이용하여 $\overline{AC}$, $\overline{DC}$의 길이를 구한다.

풀이 $\triangle ABD$에서

$\angle BAD=30°-15°=15°$

즉 $\triangle ABD$는 이등변삼각형이므로

$\overline{AD}=\overline{BD}=4$

$\triangle ADC$에서

$\overline{AC}=4\sin 30°=2$

$\overline{DC}=4\cos 30°=2\sqrt{3}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times(4+2\sqrt{3})\times 2=4+2\sqrt{3}$ 답 ②

$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}$

307 전략 직각삼각형에서 삼각비를 이용하여 $\overline{BQ}$, $\overline{PQ}$의 길이를 구한다.

풀이 $\triangle ABQ$에서

$\overline{BQ}=200\tan 30°=\frac{200\sqrt{3}}{3}\ (\mathrm{m})$

$\triangle PBQ$에서

$\overline{PQ}=\frac{200\sqrt{3}}{3}\tan 60°=200\ (\mathrm{m})$ 답 ④

308 문제 이해 $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AC}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 4$

$=2\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$ • 30% 배점

점 H는 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점과 일치하므로 $\overline{AH}=\overline{CH}$ $=\frac{1}{2}\overline{AC}$

해결 과정 $\triangle OAH$에서

$\overline{OA}=\frac{2\sqrt{2}}{\cos 60°}=4\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$

$\overline{OH}=2\sqrt{2}\tan 60°=2\sqrt{6}\ (\mathrm{cm})$ • 50% 배점

답 구하기 따라서 $\triangle OAH$의 둘레의 길이는

$4\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}\ (\mathrm{cm})$ • 20% 배점

답 $(6\sqrt{2}+2\sqrt{6})\ \mathrm{cm}$

309 해결 과정 ① $\triangle OBC$에서

$\overline{OB}=4\sin 60°=2\sqrt{3}$

$\overline{OC}=4\cos 60°=2$ • 50% 배점

해결 과정 ② $\triangle AOC$에서

$\overline{AO}=2\tan 45°=2$ • 30% 배점

답 구하기 따라서 삼각뿔의 부피는

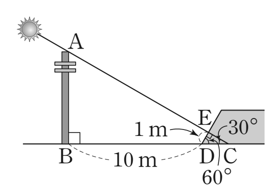
$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\right)\times 2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ • 20% 배점

답 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

(삼각뿔의 부피) $=\frac{1}{3}\times$(밑넓이) $\times$(높이)

310 전략 삼각비를 이용할 수 있도록 직각삼각형을 그린다.

풀이 오른쪽 그림에서



$\angle EDC=60°$,

$\angle ECD=30°$

이므로 $\triangle EDC$는 $\angle E=90°$인 직각삼각형이다.

$\therefore \overline{DC}=\frac{1}{\cos 60°}$

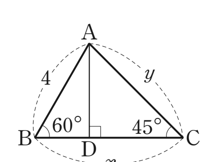
$=2\ (\mathrm{m})$

따라서 $\overline{BC}=10+2=12\ (\mathrm{m})$이므로 $\triangle ABC$에서

$\overline{AB}=12\tan 30°=4\sqrt{3}\ (\mathrm{m})$ 답 $4\sqrt{3}\ \mathrm{m}$

311 전략 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 수선을 그어 2개의 직각삼각형을 만든다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 D라 하면 $\triangle ABD$에서



$\overline{AD}=4\sin 60°=2\sqrt{3}$

$\overline{BD}=4\cos 60°=2$

$\triangle$ADC에서

$$\overline{AC}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 45^\circ}=2\sqrt{6} \qquad \therefore y=2\sqrt{6}$$

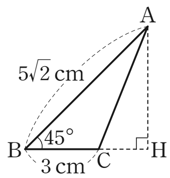
또 $\overline{DC}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\tan 45^\circ}=2\sqrt{3}$이므로

$$\overline{BC}=2+2\sqrt{3} \qquad \therefore x=2+2\sqrt{3}$$

답 ④

312 전략 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$의 연장선에 수선을 그어 직각삼각형을 만든다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$ABH에서



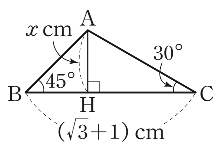
$$\overline{AH}=5\sqrt{2}\sin 45^\circ=5\,(\text{cm})$$
$$\overline{BH}=5\sqrt{2}\cos 45^\circ=5\,(\text{cm})$$

$\overline{CH}=5-3=2\,(\text{cm})$이므로 $\triangle$ACH에서

$$\overline{AC}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}\,(\text{cm})$$

답 $\sqrt{29}$ cm

313 해결 과정 ① 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AH}=x$ cm라 하면 $\triangle$ABH에서



$$\overline{BH}=\frac{x}{\tan 45^\circ}=x\,(\text{cm})$$

또 $\triangle$AHC에서

$$\overline{CH}=\frac{x}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}x\,(\text{cm})$$ • 40% 배점

해결 과정 ② 즉 $x+\sqrt{3}x=\sqrt{3}+1$이므로

$$(1+\sqrt{3})x=\sqrt{3}+1 \qquad \therefore x=1$$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore \overline{AB}=\dfrac{1}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2}\,(\text{cm})$ • 20% 배점

답 $\sqrt{2}$ cm

다른풀이 $\overline{AB}=a$ cm라 하면 $\triangle$ABH에서

$$\overline{BH}=a\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}a\,(\text{cm})$$
$$\overline{AH}=a\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}a\,(\text{cm})$$

$\triangle$AHC에서

$$\overline{HC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a\times\frac{1}{\tan 30^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{2}a\,(\text{cm})$$

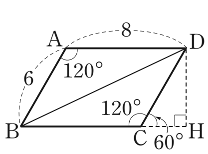
즉 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a+\dfrac{\sqrt{6}}{2}a=\sqrt{3}+1$이므로

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}a=\sqrt{3}+1$$
$$\therefore a=(\sqrt{3}+1)\times\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\sqrt{2}$$

314 전략 꼭짓점 D에서 $\overline{BC}$의 연장선에 수선을 그어 직각삼각형을 만든다.

평행사변형의 성질
① 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
② 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
③ 두 대각선이 서로를 이등분한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 D에서 $\overline{BC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$DCH에서



$$\overline{DH}=6\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$$
$$\overline{CH}=6\cos 60^\circ=3$$

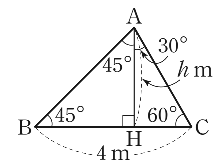
$\overline{BH}=8+3=11$이므로 $\triangle$DBH에서

$$\overline{BD}=\sqrt{11^2+(3\sqrt{3})^2}=2\sqrt{37}$$

답 ②

315 전략 나무의 높이를 h m라 하고 삼각비를 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 h로 나타낸다.

풀이 나무의 높이를 h m라 하면 오른쪽 그림에서 $\angle BAH=45^\circ$, $\angle CAH=30^\circ$이므로



$$\overline{BH}=h\tan 45^\circ=h\,(\text{m})$$
$$\overline{CH}=h\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}h\,(\text{m})$$

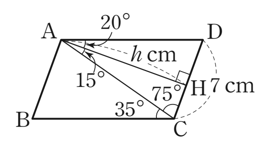
즉 $h+\dfrac{\sqrt{3}}{3}h=4$이므로 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}h=4$

$$\therefore h=4\times\frac{3}{3+\sqrt{3}}=\frac{12(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$
$$=2(3-\sqrt{3})$$

답 $2(3-\sqrt{3})$ m

316 전략 점 A와 $\overline{CD}$ 사이의 거리를 h cm라 하고 삼각비를 이용하여 $\overline{CD}$의 길이를 h로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AH}=h$ cm라 하면



$$\angle CAH=15^\circ,\ \angle DAH=20^\circ$$

$\angle DAC=\angle ACB$
$=35^\circ$(엇각)
이므로
$\angle DAH=35^\circ-15^\circ$
$=20^\circ$

이므로

$$\overline{CH}=h\tan 15^\circ=0.27h$$
$$\overline{DH}=h\tan 20^\circ=0.36h$$

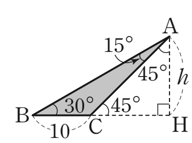
$0.27h+0.36h=7$이므로

$$0.63h=7 \qquad \therefore h=\frac{100}{9}$$

즉 점 A와 $\overline{CD}$ 사이의 거리는 $\dfrac{100}{9}$ cm이다.

답 ②

317 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면



삼각형의 한 외각의 크기는 이와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

$$\angle ACH=30^\circ+15^\circ=45^\circ$$
$$\therefore \angle CAH=45^\circ$$ • 30% 배점

해결 과정 $\overline{AH}=h$라 하면

$$\overline{CH}=h\tan 45^\circ=h$$
$$\overline{BH}=h\tan 60^\circ=\sqrt{3}h$$

$\sqrt{3}h-h=10$이므로 $(\sqrt{3}-1)h=10$

$$\therefore h=\frac{10}{\sqrt{3}-1}=\frac{10(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=5(\sqrt{3}+1)$$ • 50% 배점

답 구하기 $\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times 10\times 5(\sqrt{3}+1)$

$$=25(\sqrt{3}+1)$$ • 20% 배점

답 $25(\sqrt{3}+1)$

318 전략 삼각형의 세 중선에 의하여 삼각형의 넓이는 6등분된다.

풀이 $\triangle GBD=\frac{1}{6}\triangle ABC$이므로

$$4\sqrt{3}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times 8\times\overline{AC}\times\sin 60^\circ$$

$\therefore \overline{AC}=12$ 답 ③

319 전략 한 원에서 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례한다.

풀이 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=3:4:5$이므로

$$\angle AOB=360^\circ\times\frac{3}{12}=90^\circ$$

(만점 공략 BOX: $3+4+5=12$)

$$\angle BOC=360^\circ\times\frac{4}{12}=120^\circ$$

$$\angle COA=360^\circ\times\frac{5}{12}=150^\circ$$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABC&=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA\\&=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 90^\circ\\&\quad+\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin(180^\circ-120^\circ)\\&\quad+\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin(180^\circ-150^\circ)\\&=2\times 1+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{1}{2}\\&=3+\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)\end{aligned}$$

답 ②

320 전략 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$

풀이 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$이므로

$$\frac{1}{2}\times 6\times 3\times\sin(180^\circ-120^\circ)$$

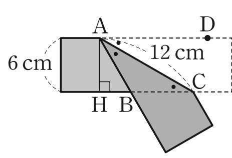
$$=\frac{1}{2}\times 6\times\overline{AD}\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times 3\times\overline{AD}\times\sin 60^\circ$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}\overline{AD}\qquad\therefore \overline{AD}=2$$

답 ②

321 전략 접은 각과 엇각의 크기가 같으므로 $\triangle ABC$는 이등변삼각형임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림의 $\triangle AHC$에서



$$\sin(\angle ACH)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \angle ACH=30^\circ$

이때 $\triangle ABC$에서 $\angle BAC=\angle BCA=30^\circ$이므로

(만점 공략 BOX: $\angle DAC=\angle BAC$ (접은 각), $\angle DAC=\angle BCA$ (엇각) 이므로 $\angle BAC=\angle BCA$)

$$\angle ABH=30^\circ+30^\circ=60^\circ$$

$$\therefore \overline{BC}=\overline{AB}=\frac{6}{\sin 60^\circ}=4\sqrt{3}\ (\text{cm})$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 12\times\sin 30^\circ=12\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

답 ③

(만점 공략 BOX: $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}$를 밑변이라 하면 $\overline{AH}$가 높이이므로 $\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 6=12\sqrt{3}$ 과 같이 구할 수도 있다.)

322 해결 과정 ① $\overline{CN}=a$, $\overline{CQ}=b$, $\angle C=x$라 하면

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 4a\times 3b\times\sin x=6ab\sin x$$

$$\triangle LPC=\frac{1}{2}\times 3a\times 2b\times\sin x=3ab\sin x$$

$$\triangle MQC=\frac{1}{2}\times 2a\times b\times\sin x=ab\sin x$$

• 50% 배점

해결 과정 ② $S_1=\triangle ABC-\triangle LPC=3ab\sin x$

$S_2=\triangle LPC-\triangle MQC=2ab\sin x$ • 30% 배점

답 구하기 $\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{3ab\sin x}{2ab\sin x}=\frac{3}{2}$ • 20% 배점

답 $\frac{3}{2}$

323 전략 $\triangle ABC$와 $\square DEFG$의 넓이를 각각 구한다.

풀이 $\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$

$\square DEFG=bc\sin(180^\circ-150^\circ)=\frac{1}{2}bc$

이때 $\triangle ABC=\square DEFG$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}ab=\frac{1}{2}bc\qquad\therefore a=\frac{2}{\sqrt{3}}c$$

$\therefore a:c=2:\sqrt{3}$ 답 ③

324 해결 과정 ① $\angle A:\angle B=2:1$이므로

$$\angle B=180^\circ\times\frac{1}{3}=60^\circ$$

(만점 공략 BOX: 평행사변형에서 이웃하는 두 내각의 크기의 합은 180°이므로 $\angle A+\angle B=180^\circ$)

$\therefore \square ABCD=3\times 8\times\sin 60^\circ=12\sqrt{3}$ • 50% 배점

해결 과정 ② 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로

$\triangle OAB=\triangle OBC=\triangle OCD=\triangle ODA$

• 30% 배점

답 구하기 $\therefore \triangle OBC=\frac{1}{4}\square ABCD=3\sqrt{3}$

• 20% 배점 답 $3\sqrt{3}$

325 전략 $0^\circ\le x\le 90^\circ$에서 $\sin x$의 값은 $x=90^\circ$일 때 최대이다.

풀이 두 대각선이 이루는 각의 크기를 $x\,(0^\circ<x\le 90^\circ)$라 하면

$$\square ABCD=\frac{1}{2}\times 8\times 12\times\sin x=48\sin x$$

즉 $\square ABCD$의 넓이는 $\sin x$의 값이 최대일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 $\sin x$는 $x=90^\circ$일 때 최댓값 1을 가지므로 $\square ABCD$의 넓이의 최댓값은 48이다. 답 ①

326 전략 $\overline{AC'}$, $\overline{BD'}$의 길이를 각각 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$로 나타낸 후 $\square ABC'D'$의 넓이를 구한다.

풀이 $\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin x$이므로

$$\begin{aligned}\square ABC'D'&=\frac{1}{2}\times 0.8\overline{AC}\times 1.3\overline{BD}\times\sin x\\&=1.04\times\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin x\\&=1.04\times\square ABCD\end{aligned}$$

따라서 사각형의 넓이는 4 % 증가한다. 답 ②

만점비법

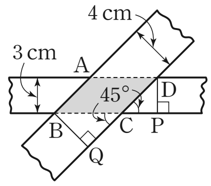
a에 대하여

① r % 증가 → $a\left(1+\frac{r}{100}\right)$

② r % 감소 → $a\left(1-\frac{r}{100}\right)$

327 전략 겹친 부분이 평행사변형임을 알고 이웃하는 두 변의 길이를 구한다.

풀이 겹친 부분을 □ABCD라 하면 △CPD에서



$\overline{CD}=\dfrac{3}{\sin 45^\circ}$

$=3\sqrt{2}\,(\text{cm})$

△BQC에서

$\overline{BC}=\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=4\sqrt{2}\,(\text{cm})$

이때 □ABCD는 평행사변형이므로

□ABCD$=3\sqrt{2}\times4\sqrt{2}\times\sin(180^\circ-135^\circ)$

$=12\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$ 답 $12\sqrt{2}\,\text{cm}^2$

□ABCD에서 $\overline{BC}$를 밑변이라 하면 $\overline{DP}$는 높이이므로

$4\sqrt{2}\times3=12\sqrt{2}$

와 같이 구할 수도 있다.

328 전략 $\angle ABD=x$라 하고 $\sin x$의 최댓값을 구한다.

풀이 $\angle ABD=x$라 하면

□ABCD$=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times\sin x$

$+\dfrac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}\times\sin30^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

이때 $\sin x$의 최댓값은 1이므로 □ABCD의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$ 답 $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

329 전략 외접원의 중심에서 각 꼭짓점을 연결하는 선분을 그으면 정십이각형은 합동인 이등변삼각형 12개로 나누어지고, 정구각형은 합동인 이등변삼각형 9개로 나누어진다.

풀이 정십이각형의 넓이는

$12\times\left(\dfrac{1}{2}\times10\times10\times\sin30^\circ\right)=300$

$\dfrac{360^\circ}{12}=30^\circ$

정구각형의 넓이는

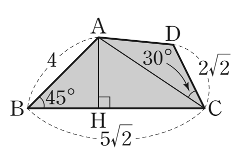
$9\times\left(\dfrac{1}{2}\times10\times10\times\sin40^\circ\right)=288$

$\dfrac{360^\circ}{9}=40^\circ$

따라서 두 도형의 넓이의 합은

$300+288=588$ 답 ⑤

330 해결 과정 ① 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=4\sin45^\circ=2\sqrt{2}$, $\overline{BH}=4\cos45^\circ=2\sqrt{2}$

• 30% 배점

해결 과정 ② $\overline{CH}=5\sqrt{2}-2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$이므로 △AHC에서

$\overline{AC}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{26}$ • 30% 배점

답 구하기 ∴ □ABCD$=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\dfrac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times2\sqrt{2}$

$+\dfrac{1}{2}\times\sqrt{26}\times2\sqrt{2}\times\sin30^\circ$

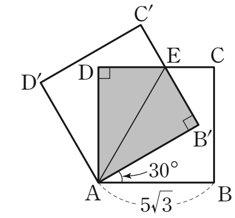
$\angle BCD=180^\circ-30^\circ$
$=150^\circ$

$=10+\sqrt{13}$ • 40% 배점

답 $10+\sqrt{13}$

331 전략 □DAB′E를 합동인 두 직각삼각형으로 나눈다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AE}$를 그으면



$\overline{AD}=\overline{AB'}$, $\overline{AE}$는 공통,

$\angle ADE=\angle AB'E=90^\circ$

이므로

$\triangle AED\equiv\triangle AEB'$

(RHS 합동)

$\triangle AEB'$에서 $\angle EAB'=\dfrac{1}{2}\angle DAB'=30^\circ$이므로

$\angle DAB'=90^\circ-30^\circ$
$=60^\circ$

$\overline{EB'}=\overline{AB'}\tan30^\circ=5\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=5$

$\therefore\ \triangle AEB'=\dfrac{1}{2}\times5\sqrt{3}\times5=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$

∴ □DAB′E$=2\triangle AEB'=25\sqrt{3}$ 답 $25\sqrt{3}$

내신 만점 굳히기

본책 69쪽

332 전략 직각삼각형의 변의 길이를 삼각비를 이용하여 나타낸다.

풀이 $\overline{EC}=b$라 하면 $\overline{AC}=\overline{BC}=a+b$

△BCD에서 $\overline{CD}=(a+b)\tan30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(a+b)$

△AEC에서 $\tan75^\circ=\dfrac{a+b}{b}=2+\sqrt{3}$

$a+b=b(2+\sqrt{3})$, $a=b(1+\sqrt{3})$

$\therefore\ b=\dfrac{a}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}a$ …… ㉠

$\therefore\ \overline{AD}=\overline{AC}-\overline{CD}=(a+b)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(a+b)$

$=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}(a+b)$

$=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\left(a+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}a\right)$ (∵ ㉠)

$=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ 답 ②

333 해결 과정 ① 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BH}=2\cos30^\circ=\sqrt{3}$ $\therefore\ \overline{BC}=2\sqrt{3}$

△ABC, △DCE의 닮음비가 1 : 2이므로

$2:\overline{DC}=1:2$ $\therefore\ \overline{DC}=4$ • 30% 배점

해결 과정 ② 이때 $\triangle DBC=\triangle FBC+\triangle FCD$이므로

$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times4\times\sin(180^\circ-150^\circ)$

$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\overline{FC}\times\sin30^\circ$

$+\dfrac{1}{2}\times\overline{FC}\times4\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$\angle FCD$
$=180^\circ-30^\circ-30^\circ$
$=120^\circ$

$2\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\overline{FC}$ $\therefore\ \overline{FC}=\dfrac{4}{3}$ • 50% 배점

답 구하기 $\therefore \triangle FCD=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times 4\times\sin(180°-120°)$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ • 20% 배점

답 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

다른풀이 $\triangle ABF$와 $\triangle CDF$에서

$\angle BAF=\angle DCF$, $\angle AFB=\angle CFD$ (맞꼭지각)

이므로 $\triangle ABF \backsim \triangle CDF$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{AF}:\overline{CF}=\overline{AB}:\overline{CD}=1:2$이고 $\overline{AC}=2$이므로

$\overline{CF}=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

334 **전략** 두 대각선의 길이가 a, b이고 두 대각선이 이루는 예각의 크기가 x인 사각형의 넓이 ➡ $\frac{1}{2}ab\sin x$

풀이 두 사각형의 넓이의 차가 3이므로

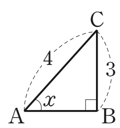
$\frac{1}{2}\times 8\times 3\times\sin x-\frac{1}{2}\times 8\times 2\times\sin x=3$

$\therefore \sin x=\frac{3}{4}$

따라서 오른쪽 그림과 같이

$\angle B=90°$, $\overline{AC}=4$, $\overline{BC}=3$

인 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다.



이때 $\overline{AB}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$이므로

$\tan x=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

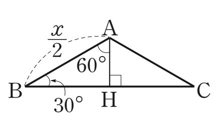
답 ①

335 **문제 이해** 정육각형의 한 내각의 크기는

$\frac{180°\times(6-2)}{6}=120°$ • 10% 배점

정n각형의 한 내각의 크기 ➡ $\frac{180°\times(n-2)}{n}$

해결 과정 ① 오른쪽 그림과 같이 큰 정육각형의 한 변의 길이를 x라 하고 큰 정육각형의 한 꼭짓점에서 작은 정육각형의 변에 수선을 내리면



$\overline{BH}=\frac{x}{2}\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{4}x$

$\therefore \overline{BC}=2\overline{BH}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

즉 작은 정육각형의 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}x$이다.

• 30% 배점

해결 과정 ② 두 도형의 넓이의 차가 $12\sqrt{3}$이므로

외접원의 중심에서 각 꼭짓점을 연결하는 선분을 그으면 ➡ 정육각형은 합동인 정삼각형 6개로 나누어진다.

$6\times\frac{1}{2}\times x^2\times\sin 60°-6\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2\times\sin 60°$

$=12\sqrt{3}$

$x^2=32$ $\therefore x=4\sqrt{2}$ ($\because x>0$) • 30% 배점

해결 과정 ③ 즉 큰 정육각형의 둘레의 길이는

$6\times 4\sqrt{2}=24\sqrt{2}$

작은 정육각형의 둘레의 길이는

$6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\sqrt{2}=12\sqrt{6}$ • 20% 배점

답 구하기 따라서 두 정육각형의 둘레의 길이의 차는

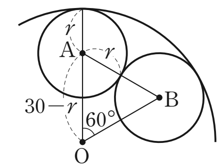
$24\sqrt{2}-12\sqrt{6}$ • 10% 배점

답 $24\sqrt{2}-12\sqrt{6}$

336 **전략** 색칠한 부분의 넓이

➡ (작은 원의 각 중심을 연결하여 만든 정육각형의 넓이) $-2\times$(작은 원의 넓이)

풀이 오른쪽 그림과 같이 접하고 있는 작은 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\angle AOB=60°$,



$\frac{360°}{6}=60°$

$\overline{OA}=\overline{OB}=30-r$이므로

$\angle OAB=\angle OBA=60°$

따라서 $\triangle OAB$는 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{OA}$

$2r=30-r$ $\therefore r=10$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$=6\times\frac{1}{2}\times 20^2\times\sin 60°-2\times 10^2\times\pi$

(정육각형에서 색칠하지 않은 부분의 넓이) =(중심각의 크기가 120°인 부채꼴 6개의 넓이) =2×(반지름의 길이가 10인 원의 넓이)

$=600\sqrt{3}-200\pi$

답 $600\sqrt{3}-200\pi$

337 **[문제 해결 길잡이]**

❶ $\overline{PB}=x$, $\overline{PC}=y$라 하고 $\triangle PBC$의 넓이를 이용하여 $\sin a$를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

❷ 점 P가 점 A와 점 D에 있을 때 $\sin a$의 값을 각각 구하여 $\sin a$의 값의 범위를 구한다.

❸ $\sin a$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구한다.

풀이 $\overline{PB}=x$, $\overline{PC}=y$라 하면

$\triangle PBC=\frac{1}{2}\times 4\times 2=\frac{1}{2}xy\sin a$

$\therefore \sin a=\frac{8}{xy}$ ❶

(i) 점 P가 점 A에 있을 때,

$x=2$, $y=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$이므로

$\sin a=\frac{8}{4\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(ii) 점 P가 점 D에 있을 때,

$x=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이므로

$\sin a=\frac{8}{8}=1$

(i), (ii)에서 $\frac{2\sqrt{5}}{5}\le\sin a\le 1$ ❷

따라서 $\sin a$의 최댓값은 1, 최솟값은 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$1\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ❸

답 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

참고 점 P가 점 A에 있을 때, $\triangle PBC$에서 가장 긴 변은 $\overline{PC}$이므로 $\angle PBC$가 크기가 가장 큰 각이 되고, 점 P가 점 D에 있을 때, $\triangle PBC$에서 가장 긴 변은 $\overline{BC}$이므로 $\angle BPC$가 크기가 가장 큰 각이 된다.

따라서 점 P가 점 A에서 점 D로 이동할수록 $\angle BPC$의 크기는 커진다.

내신 만점 정복하기

본책 70~75쪽

338 **전략** 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 먼저 구한다.

풀이 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

$\therefore \sin A+\cos A=\frac{8}{10}+\frac{6}{10}=\frac{7}{5}$ 답 ④

339 전략 $\overline{AD}$가 $\angle A$의 이등분선이므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$이므로

$15:\overline{AC}=3:2 \quad \therefore \overline{AC}=10$

$\triangle ABC$에서 $\quad \overline{BC}=\sqrt{15^2-10^2}=5\sqrt{5}$

$\therefore \overline{CD}=5\sqrt{5}\times\frac{2}{5}=2\sqrt{5}$

$\therefore \cos x+\tan y=\frac{5\sqrt{5}}{15}+\frac{10}{2\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$ 답 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

340 전략 점 D가 직각삼각형 ABC의 외심이므로 $\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{DB}$이다.

직각삼각형의 빗변의 중점은 외심이다.

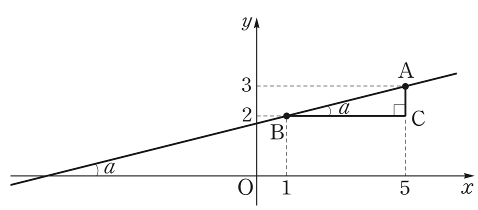
풀이 $\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{DB}$에서 $\triangle DBC$는 이등변삼각형이므로

$\angle DBC=\angle DCB=x$

$\therefore \tan x=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ 답 ⑤

341 전략 주어진 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 동위각을 찾아 삼각비의 값을 구한다.

풀이



두 점 A, B를 지나는 직선은 위의 그림과 같으므로

$\angle ABC=a$

이때 $\triangle ABC$에서

$\overline{AC}=1,\ \overline{BC}=4,\ \overline{AB}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$

$\therefore \sin a=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$ 답 $\frac{\sqrt{17}}{17}$

342 전략 한 모서리의 길이가 a인 정육면체의 대각선의 길이 ➡ $\sqrt{3}a$

풀이 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\overline{EG}=\sqrt{2}a,\ \overline{EC}=\sqrt{3}a$

이므로 $\triangle CEG$에서

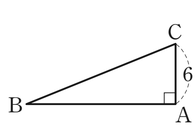
$\angle CGE=90°$인 직각삼각형이다.

$\sin x=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \cos x=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \sin x+\cos x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$

343 전략 $\sin B$의 값을 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구한다.

풀이 $\sin B=\frac{6}{\overline{BC}}=\frac{1}{3}$에서



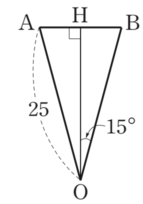
$\overline{BC}=18$

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{18^2-6^2}=12\sqrt{2}$이므로

$\sin C=\frac{12\sqrt{2}}{18}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

344 전략 시계의 중심에서 $\overline{AB}$에 수선을 내려 직각삼각형 2개로 나누어 생각한다.

풀이 원 모양의 시계의 중심을 O, 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\quad \angle AOB=\frac{360°}{12}=30°$



$\triangle AOB$는 이등변삼각형이므로

$\angle BOH=15°$

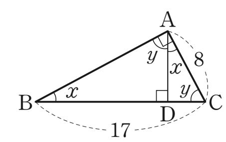
$\triangle BOH$에서 $\quad \sin 15°=\frac{\overline{BH}}{25}=0.26$

$\therefore \overline{BH}=6.5\,(cm)$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{BH}=13\,(cm)$ 답 ②

345 전략 닮은 두 평면도형에서의 대응각의 크기는 같음을 이용한다.

풀이 $\triangle ABC$에서



$\overline{AB}=\sqrt{17^2-8^2}=15$

$\angle DBA=\angle DAC=x$,

$\triangle ABC \backsim \triangle DBA \backsim \triangle DAC$ (AA 닮음)

$\angle DCA=\angle DAB=y$이므로

$\sin x=\frac{8}{17},\ \sin y=\frac{15}{17}$

$\therefore \sin x+\sin y=\frac{23}{17}$ 답 $\frac{23}{17}$

346 해결 과정 ① $\triangle ABC$에서

$\overline{BC}=\sqrt{25^2-15^2}=20$

$\therefore \tan x=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$ • 40% 배점

해결 과정 ② 또 $\triangle ADC$에서

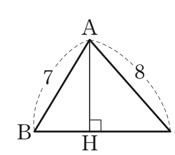
$\overline{DC}=\sqrt{17^2-15^2}=8$

$\therefore \tan y=\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}=\frac{15}{8}$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore \frac{\tan x}{\tan y}=\frac{3}{4}\times\frac{8}{15}=\frac{2}{5}$ • 20% 배점

답 $\frac{2}{5}$

347 해결 과정 ① 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle AHC$에서



$\cos C=\frac{\overline{CH}}{8}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

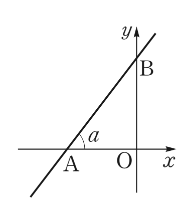
$\therefore \overline{CH}=2\sqrt{7}$ • 40% 배점

해결 과정 ② $\overline{AH}=\sqrt{8^2-(2\sqrt{7})^2}=6$이므로 $\triangle ABH$에서 $\quad \overline{BH}=\sqrt{7^2-6^2}=\sqrt{13}$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore \cos B=\frac{\sqrt{13}}{7}$ • 20% 배점

답 $\frac{\sqrt{13}}{7}$

348 해결 과정 ① 일차함수의 그래프가 오른쪽 그림과 같다고 하자.



$\sin a=\frac{4}{5}$이므로 $\overline{AB}=5k$,

$\overline{OB}=4k\ (k>0)$라 하면

$\overline{OA}=\sqrt{(5k)^2-(4k)^2}=3k$

따라서 일차함수의 그래프의 기울기는

$\tan a=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{4k}{3k}=\dfrac{4}{3}$ • 50% 배점

해결 과정 ② 구하는 일차함수의 식을 $y=\dfrac{4}{3}x+b$라 하면 이 일차함수의 그래프가 점 $(-2,\ 6)$을 지나므로

일차함수의 식에 $x=-2$, $y=6$을 대입하면 성립한다.

$6=-\dfrac{8}{3}+b \qquad \therefore b=\dfrac{26}{3}$ • 30% 배점

답 구하기 따라서 구하는 일차함수의 식은

$y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{26}{3}$ • 20% 배점

답 $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{26}{3}$

349 해결 과정 ① $\triangle ABC$에서

$\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\overline{BE}=2$

$\sin x=\dfrac{2}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{5} \qquad \therefore \overline{AC}=10$ • 20% 배점

해결 과정 ② $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$ (AA 닮음)에서

$\angle ABC=\angle EDC=90^\circ$, $\angle ACB=\angle ECD$ (맞꼭지각) 이므로 $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$ (AA 닮음)

$\overline{AC} : \overline{EC}=\overline{BC} : \overline{DC}$이므로

$10 : 2=2 : \overline{DC} \qquad \therefore \overline{DC}=\dfrac{2}{5}$

$\therefore \overline{AD}=\overline{AC}+\overline{CD}=10+\dfrac{2}{5}=\dfrac{52}{5}$

또 $\triangle CDE$에서

$\overline{DE}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$ • 50% 배점

답 구하기 $\therefore \tan y=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\times\dfrac{5}{52}=\dfrac{\sqrt{6}}{13}$

• 30% 배점

답 $\dfrac{\sqrt{6}}{13}$

350 전략 특수한 각의 삼각비의 값을 구한 후 곱셈 공식을 이용한다.

풀이 (주어진 식)$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+1$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$=\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+1=\dfrac{7}{4}$ 답 ④

351 전략 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°임을 이용하여 $\angle A$의 크기를 구한다.

풀이 $\angle B=90^\circ$이므로 $\qquad \angle A+\angle C=90^\circ$

이때 $\angle A=2\angle C$, 즉 $\angle C=\dfrac{1}{2}\angle A$이므로

$\angle A+\dfrac{1}{2}\angle A=90^\circ, \qquad \dfrac{3}{2}\angle A=90^\circ$

$\therefore \angle A=60^\circ$

$\therefore \cos A=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$ 답 ②

352 전략 $0^\circ<A<90^\circ$일 때, $\tan A=1$ ➡ $A=45^\circ$

풀이 $\tan(69^\circ-2x)=1$이므로

$69^\circ-2x=45^\circ \qquad \therefore x=12^\circ$

$\therefore \sin 5x+\cos(3x-6^\circ)$

$=\sin 60^\circ+\cos 30^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

353 전략 $\tan 60^\circ$를 선분의 길이의 비로 나타낸 후 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$임을 이용한다.

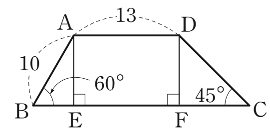
풀이 $\overline{OA}=\overline{OC}$이므로 $\triangle ADO$에서

$\tan 60^\circ=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OD}}=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OD}}=\sqrt{3}$

$\therefore \overline{OC} : \overline{OD}=\sqrt{3} : 1$ 답 ②

354 전략 수선을 그어 직각삼각형을 만든다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 꼭짓점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하면 $\triangle ABE$에서



$\cos 60^\circ=\dfrac{\overline{BE}}{10}=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore \overline{BE}=5$

또 $\sin 60^\circ=\dfrac{\overline{AE}}{10}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\qquad \overline{AE}=5\sqrt{3}$

$\triangle DFC$에서 $\qquad \tan 45^\circ=\dfrac{5\sqrt{3}}{\overline{FC}}=1$

$\therefore \overline{FC}=5\sqrt{3}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EF}+\overline{FC}$

$=5+13+5\sqrt{3}$

$=18+5\sqrt{3}$ 답 $18+5\sqrt{3}$

355 전략 $\triangle DCF$에서 $\overline{CF}$의 길이를 구한다.

풀이 $\triangle DCF$에서 $\qquad \cos 45^\circ=\dfrac{\overline{CF}}{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \overline{CF}=6\sqrt{2}\,(\mathrm{m})$

$\therefore \square EBCF=6\sqrt{2}\times 16=96\sqrt{2}\,(\mathrm{m}^2)$

답 $96\sqrt{2}\ \mathrm{m}^2$

356 전략 $\triangle BGD$의 세 변의 길이를 구한다.

$\cos 60^\circ=\dfrac{a}{\overline{BG}}=\dfrac{1}{2}$ $\quad \therefore \overline{BG}=2a$

$\tan 60^\circ=\dfrac{\overline{BF}}{a}=\sqrt{3}$ $\quad \therefore \overline{BF}=\sqrt{3}a$

풀이 $\overline{FG}=a$라 하면 $\triangle BFG$에서

$\overline{BG}=2a,\ \overline{BF}=\sqrt{3}a$

$\triangle DGH$에서 $\overline{DH}=\overline{BF}=\sqrt{3}a$이므로

$\overline{GH}=\sqrt{3}a,\ \overline{DG}=\sqrt{6}a$

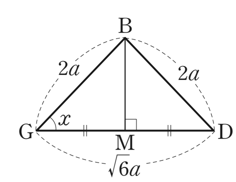
$\tan 45^\circ=\dfrac{\sqrt{3}a}{\overline{GH}}=1$ $\quad \therefore \overline{GH}=\sqrt{3}a$

$\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{3}a}{\overline{DG}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \therefore \overline{DG}=\sqrt{6}a$

$\triangle FGH$에서 $\qquad \overline{FH}=\sqrt{a^2+(\sqrt{3}a)^2}=2a$

$\therefore \overline{BD}=\overline{FH}=2a$

따라서 $\triangle BGD$는 $\overline{BG}=\overline{BD}$인 이등변삼각형이므로 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{GD}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면



$\overline{GM}=\overline{DM}=\dfrac{1}{2}\overline{GD}$

$\cos x=\dfrac{\overline{GM}}{\overline{BG}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\times\dfrac{1}{2a}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ 답 ②

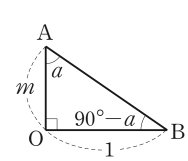
357 전략 $\overline{OB}=1$로 놓고 $\overline{OA}$의 길이를 m에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y=-mx+n$에서 기울기 $-m$은

기울기가 $-m$이다. ➡ x의 값이 1만큼 증가할 때, y의 값은 m만큼 감소한다.

$-m=-\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OB}=1$로 놓으면 $\overline{OA}=m$이므로



$\overline{AB}=\sqrt{m^2+1}$

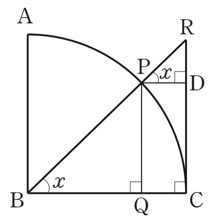
$\therefore \sin a\cos a+\tan(90°-a)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}\times\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}+m$

$=\dfrac{m}{m^2+1}+m$ 답 $\dfrac{m}{m^2+1}+m$

358 전략 보조선을 그어 주어진 선분의 길이의 비와 같은 삼각비를 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P를 지나고 $\overline{BC}$에 평행한 직선을 그어 $\overline{CR}$와 만나는 점을 D라 하면 △PDR는 ∠PDR=90°, ∠RPD=x인 직각삼각형이다.



$\therefore \dfrac{\overline{QC}}{\overline{PR}}=\dfrac{\overline{PD}}{\overline{PR}}=\cos x$

$\overline{PD}/\!/\overline{BC}$이므로 ∠RPD=∠RBC (동위각)

답 ②

359 전략 x의 크기가 증가하면 $\sin x$, $\tan x$의 값은 증가하고 $\cos x$의 값은 감소한다.

풀이 ① $\sin 25°<\sin 30°=\dfrac{1}{2}$

② $\tan 45°=1$

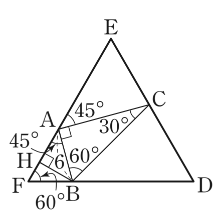
③ $\dfrac{1}{2}=\cos 60°<\cos 50°<\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60°<\sin 65°<\sin 90°=1$

⑤ $\tan 80°>\tan 45°=1$

따라서 두 번째로 작은 것은 ③이다. 답 ③

360 해결 과정 ① 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AF}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △AHB에서



$\cos 45°=\dfrac{\overline{AH}}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \overline{AH}=3\sqrt{2}$

$\sin 45°=\dfrac{\overline{BH}}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\overline{BH}=3\sqrt{2}$

또 △BHF에서

$\tan 60°=\dfrac{3\sqrt{2}}{\overline{FH}}=\sqrt{3}$

$\therefore \overline{FH}=\sqrt{6}$

$\therefore \overline{AF}=\overline{AH}+\overline{FH}=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$ • 40% 배점

해결 과정 ② △ABC에서 $\tan 30°=\dfrac{6}{\overline{AC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \overline{AC}=6\sqrt{3}$

△EAC∽△FAB (AA 닮음)이므로

∠EAC=∠FAB=45°, ∠AEC=∠AFB=60°이므로 △EAC∽△FAB (AA 닮음)

$\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{EA}:\overline{FA}$

$6\sqrt{3}:6=\overline{EA}:(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$

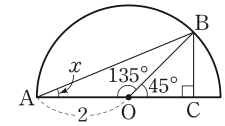
$\therefore \overline{EA}=3\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore \overline{EF}=\overline{EA}+\overline{AF}$

$=6\sqrt{2}+4\sqrt{6}$ • 20% 배점

답 $6\sqrt{2}+4\sqrt{6}$

361 해결 과정 ① 오른쪽 그림의 △OCB에서



∠BOC=180°−135° =45°

$\sin 45°=\dfrac{\overline{BC}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{2}$ • 40% 배점

해결 과정 ② 또 $\cos 45°=\dfrac{\overline{OC}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\overline{OC}=\sqrt{2}$ • 30% 배점

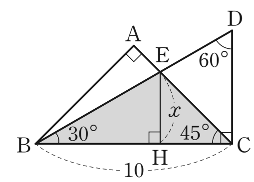
답 구하기 △ACB에서

$\tan x=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$=\sqrt{2}-1$ • 30% 배점

답 $\sqrt{2}-1$

362 해결 과정 ① 오른쪽 그림과 같이 점 E에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{EH}=x$라 하면 △EHC에서



$\tan 45°=\dfrac{x}{\overline{CH}}=1$

$\therefore \overline{CH}=x$ $\therefore \overline{BH}=10-x$ • 30% 배점

해결 과정 ② △EBH에서

△DBC에서 ∠DBC=90°−60° =30°

$\tan 30°=\dfrac{\overline{EH}}{\overline{BH}}=\dfrac{x}{10-x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$3x=10\sqrt{3}-\sqrt{3}x,\quad (3+\sqrt{3})x=10\sqrt{3}$

$\therefore x=\dfrac{10\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{10\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=5(\sqrt{3}-1)$

• 40% 배점

답 구하기 $\therefore △EBC=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{EH}$

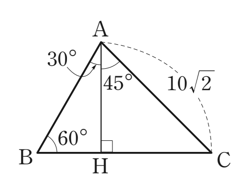
$=\dfrac{1}{2}\times10\times5(\sqrt{3}-1)$

$=25(\sqrt{3}-1)$ • 30% 배점

답 $25(\sqrt{3}-1)$

363 전략 점 A에서 $\overline{BC}$에 수선을 내려 2개의 직각삼각형을 만든다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 ∠BAH=30°, ∠CAH=45°이므로 △AHC에서



$\overline{AH}=10\sqrt{2}\cos 45°=10$

$\overline{CH}=10\sqrt{2}\sin 45°=10$

또 △ABH에서

$\overline{BH}=\dfrac{10}{\tan 60°}=\dfrac{10}{\sqrt{3}}=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

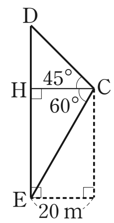
$\overline{AB}=\dfrac{10}{\sin 60°}=10\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$

$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}+10$

$\therefore \overline{AB}+\overline{BC}=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}+\left(\dfrac{10\sqrt{3}}{3}+10\right)$

$=10(1+\sqrt{3})$ 답 ④

364 전략 직각삼각형을 찾아 삼각비를 이용하여 $\overline{DH}$, $\overline{HE}$의 길이를 구한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{DE}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$DHC에서

$\overline{DH}=20\tan 45°=20\,(\text{m})$

$\overline{EH}=20\tan 60°=20\sqrt{3}\,(\text{m})$

따라서 A건물의 높이는

$\overline{DE}=\overline{DH}+\overline{EH}=20+20\sqrt{3}$

$=20(1+\sqrt{3})\,(\text{m})$ 답 ③

365 전략 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 x (예각)인 삼각형의 넓이 ➡ $\frac{1}{2}ab\sin x$

풀이 $\frac{1}{2}\times 6\times 10\times \sin x=15\sqrt{3}$이므로

$30\sin x=15\sqrt{3}$ $\quad\therefore \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\quad x=60°$ 답 60°

366 전략 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.

풀이 $\triangle$ABC가 이등변삼각형이므로

$\angle B=180°-2\times 75°=30°$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 10\times 10\times \sin 30°$

$=\frac{1}{2}\times 10\times 10\times \frac{1}{2}=25$ 답 ①

367 전략 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 x (둔각)인 삼각형의 넓이 ➡ $\frac{1}{2}ab\sin(180°-x)$

풀이 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle CBD$이므로 $\overline{BD}=x\,\text{cm}$라 하면

$\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}\times \sin(180°-150°)$

$=\frac{1}{2}\times 6\times x\times \sin(180°-120°)$

$+\frac{1}{2}\times x\times 3\sqrt{3}\times \sin 30°$

$18\sqrt{3}=9\sqrt{3}x$ $\quad\therefore x=2$

$\therefore \triangle ABD=\frac{1}{2}\times 6\times 2\times \sin(180°-120°)$

$=3\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$ 답 ③

368 전략 □ABED와 넓이가 같은 삼각형을 찾는다.

풀이 $\overline{AE}/\!/\overline{DC}$이므로 $\quad\triangle AED=\triangle AEC$

$\therefore$ □ABED$=\triangle ABE+\triangle AED$

$=\triangle ABE+\triangle AEC$

$=\triangle ABC$

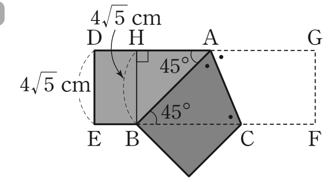
$=\frac{1}{2}\times 4\times 5\times \sin 60°$

$=\frac{1}{2}\times 4\times 5\times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$=5\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$ 답 ⑤

369 전략 크기가 같은 각을 찾는다.

풀이



위의 그림과 같이 점 B에서 $\overline{DA}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle BAH=\angle ABC=45°$ (엇각), $\overline{BH}=4\sqrt{5}\,\text{cm}$이므로 $\triangle$ABH에서

$\overline{AB}=\frac{4\sqrt{5}}{\sin 45°}=4\sqrt{10}\,(\text{cm})$

이때 $\angle BAC=\angle CAG$ (접은 각),

$\angle CAG=\angle ACB$ (엇각)이므로

$\angle BAC=\angle ACB$

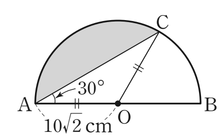
$\therefore \overline{BC}=\overline{AB}=4\sqrt{10}\,(\text{cm})$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{10}\times 4\sqrt{10}\times \sin 45°$

$=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{10}\times 4\sqrt{10}\times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$=40\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$ 답 ③

370 전략 $\triangle$OAC는 이등변삼각형임을 이용한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}$를 그으면

$\overline{OA}=\overline{OC}=10\sqrt{2}\,(\text{cm})$

즉 $\triangle$OAC는 이등변삼각형이므로 $\quad\angle OCA=\angle OAC=30°$

$\therefore \angle AOC=180°-2\times 30°=120°$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$=$(부채꼴 AOC의 넓이)$-\triangle AOC$

$=\pi\times(10\sqrt{2})^2\times\frac{120}{360}$

$-\frac{1}{2}\times 10\sqrt{2}\times 10\sqrt{2}\times \sin(180°-120°)$

$=\frac{200}{3}\pi-50\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$ 답 $\left(\frac{200}{3}\pi-50\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$

이등변삼각형의 성질
➡ 두 밑각의 크기가 같다.

반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 넓이 S는
$S=\pi r^2\times\frac{x}{360}$

371 전략 마름모는 이웃하는 두 변의 길이가 같은 평행사변형이다.

풀이 마름모의 한 변의 길이를 x라 하면 마름모의 넓이가 $8\sqrt{3}$이므로

$x\times x\times \sin(180°-120°)=8\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2=8\sqrt{3}$, $\quad x^2=16$ $\quad\therefore x=4\ (\because x>0)$

따라서 마름모의 한 변의 길이는 4이다. 답 ④

372 전략 두 대각선의 길이가 a, b이고 두 대각선이 이루는 예각의 크기가 x인 사각형의 넓이 ➡ $\frac{1}{2}ab\sin x$

풀이 $\triangle$AOD에서 $\angle AOD=180°-120°=60°$이므로

$\triangle AOD=\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times 3\times \sin 60°=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3\sqrt{3}}{4}\overline{AO}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore \overline{AO}=6$

두 대각선의 길이의 합이 20이므로 $\overline{BD}=11$

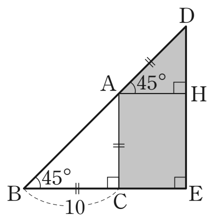
$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\times 11\times 9\times \sin 60^\circ=\frac{99\sqrt{3}}{4}$

답 ④

$\overline{AC}=6+3=9$
이므로
$9+\overline{BD}=20$
$\therefore \overline{BD}=11$

373 전략 점 A에서 $\overline{DE}$에 수선을 내린다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{DE}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\triangle ABC$가 직각이등변삼각형이므로 $\angle ABC=45^\circ$이고, $\overline{AH}/\!/\overline{BE}$이므로

$\angle DAH=\angle ABC=45^\circ$

$\triangle DAH$에서

$\overline{AH}=10\cos 45^\circ=5\sqrt{2}$, $\overline{DH}=10\sin 45^\circ=5\sqrt{2}$

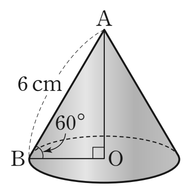
$\overline{AD}=\overline{AC}=\overline{BC}=10$

$\therefore \square ACED=\frac{1}{2}\times(10+10+5\sqrt{2})\times 5\sqrt{2}$

$=25+50\sqrt{2}$ 답 $25+50\sqrt{2}$

(사다리꼴의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times\{$(윗변의 길이)
$+$(아랫변의 길이)$\}$
$\times$(높이)

374 해결 과정 오른쪽 그림에서



$\overline{AO}=6\sin 60^\circ=3\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\overline{BO}=6\cos 60^\circ=3(\text{cm})$

• 70% 배점

답 구하기 따라서 원뿔의 부피는

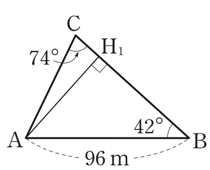
$\frac{1}{3}\times\pi\times 3^2\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}\pi\,(\text{cm}^3)$ • 30% 배점

답 $9\sqrt{3}\pi\,\text{cm}^3$

375 해결 과정 ① $\triangle ABC$에서

$\angle C=180^\circ-(64^\circ+42^\circ)=74^\circ$

점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면



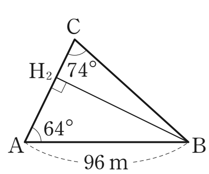
$\overline{AH_1}=\overline{AC}\sin 74^\circ$

$=96\sin 42^\circ$

$\therefore \overline{AC}=\frac{96\sin 42^\circ}{\sin 74^\circ}$

$=\frac{96\times 0.67}{0.96}=67\,(\text{m})$ • 40% 배점

해결 과정 ② 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H_2라 하면



$\overline{BH_2}=\overline{BC}\sin 74^\circ$

$=96\sin 64^\circ$

$\therefore \overline{BC}=\frac{96\sin 64^\circ}{\sin 74^\circ}$

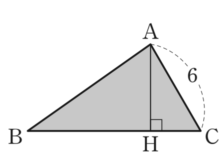
$=\frac{96\times 0.9}{0.96}=90\,(\text{m})$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 구하는 거리의 합은

$67+90=157\,(\text{m})$ • 20% 배점

답 157 m

376 해결 과정 ① 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle AHC$에서



$\overline{CH}=6\cos C=3$

$\therefore \overline{AH}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$ • 40% 배점

해결 과정 ② $\triangle ABH$에서 $\overline{AB}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin B}=9$

$\therefore \overline{BH}=\sqrt{9^2-(3\sqrt{3})^2}=3\sqrt{6}$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$

$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}$

$=\frac{1}{2}\times(3\sqrt{6}+3)\times 3\sqrt{3}$

$=\frac{9}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{3})$ • 20% 배점

답 $\frac{9}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{3})$

377 해결 과정 ① $\square ADPF$에서

$\angle ADP=\angle AFP=90^\circ$, $\angle A=60^\circ$

이므로

$\angle DPF=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+60^\circ)$

$=120^\circ$ • 30% 배점

해결 과정 ② 같은 방법으로 하면 $\angle DPE=120^\circ$, $\angle EPF=120^\circ$이므로

$\triangle PDE=\frac{1}{2}xy\sin(180^\circ-120^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{4}xy$

$\triangle PEF=\frac{1}{2}yz\sin(180^\circ-120^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{4}yz$

$\triangle PFD=\frac{1}{2}zx\sin(180^\circ-120^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{4}zx$

• 40% 배점

답 구하기 $\therefore \triangle DEF=\triangle PDE+\triangle PEF+\triangle PFD$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 16=4\sqrt{3}$ • 30% 배점

답 $4\sqrt{3}$

교과서 속 창의유형

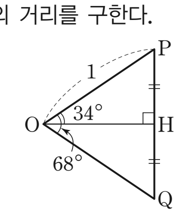
본책 76~77쪽

378 [문제 해결 길잡이]

❶ 주어진 삼각비의 값을 이용하여 $\overline{PH}$의 길이를 구한다.

❷ $\overline{PQ}=2\overline{PH}$임을 이용하여 두 별 사이의 거리를 구한다.

풀이 관측 지점을 O라 하고, 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{PH}=1\times\sin 34^\circ$

$=0.5592$ ❶

따라서 두 별 사이의 거리는

$\overline{PQ}=2\overline{PH}=2\times 0.5592=1.1184$ ❷

답 1.1184

$\triangle OQP$는 $\overline{OQ}=\overline{OP}$인 이등변삼각형이므로
$\overline{PH}=\overline{HQ}$
$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PH}$

379 [문제 해결 길잡이]

❶ $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$, …의 길이를 구하여 규칙을 찾아 $\overline{A_nB_n}$의 길이를 구한다.

❷ ❶의 결과를 이용하여 $\dfrac{\overline{A_5B_5}}{\overline{A_3B_3}}$의 값을 구한다.

풀이 $\overline{A_2B_2}=1-1\times\tan 30^\circ=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{A_3B_3}=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)-\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\tan 30^\circ=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$\vdots$

$\therefore \overline{A_nB_n}=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$ ❶

따라서 $\overline{A_3B_3}=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$, $\overline{A_5B_5}=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^4$이므로

$\dfrac{\overline{A_5B_5}}{\overline{A_3B_3}}=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ❷

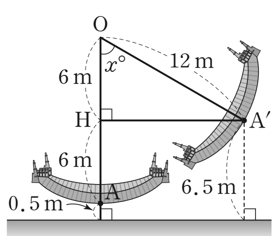
답 $\dfrac{4}{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

380 [문제 해결 길잡이]

❶ 삼각비를 이용할 수 있도록 직각삼각형을 만든 후 $\overline{OA'}$, $\overline{OH}$의 길이를 구한다.

❷ $\cos x^\circ=\dfrac{\overline{OH}}{\overline{OA'}}$임을 이용하여 x의 값을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A′에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OA'}=12\,(\text{m})$

$\overline{OH}=12.5-6.5$
$=6\,(\text{m})$ ❶

이때 △OHA′에서

$\cos x^\circ=\dfrac{\overline{OH}}{\overline{OA'}}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$

$\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$이므로 $x=60$ ❷

답 60

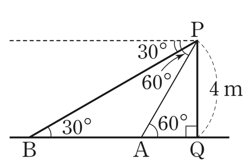
381 [문제 해결 길잡이]

❶ $\tan 30^\circ$, $\tan 60^\circ$의 값을 이용하여 $\overline{AQ}$, $\overline{BQ}$의 길이를 구한다.

❷ $\overline{AB}$의 길이를 구하여 자동차가 0.1초 동안 움직인 거리를 구한다.

❸ $(\text{속력})=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$임을 이용하여 자동차의 속력을 구한다.

풀이 오른쪽 그림의 △PAQ, △PBQ에서



$\angle PAQ=60^\circ$,

$\angle PBQ=30^\circ$

이므로

$\overline{AQ}=\dfrac{4}{\tan 60^\circ}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\,(\text{m})$

$\overline{BQ}=\dfrac{4}{\tan 30^\circ}=4\sqrt{3}\,(\text{m})$ ❶

자동차가 0.1초 동안 움직인 거리는

$\overline{AB}=\overline{BQ}-\overline{AQ}=4\sqrt{3}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\,(\text{m})$ ❷

따라서 구하는 자동차의 속력은

$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{0.1}=\dfrac{80\sqrt{3}}{3}\,(\text{m/s})$ ❸ 답 $\dfrac{80\sqrt{3}}{3}$ m/s

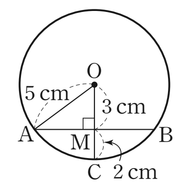
VIII 원의 성질

16 원과 직선

개념&기출유형

본책 80~82쪽

382 직각삼각형 OAM에서

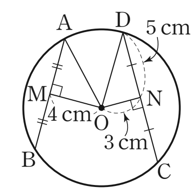


$\overline{AM}=\sqrt{5^2-3^2}=4\,(\text{cm})$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AM}=8\,(\text{cm})$

답 8 cm

383 $\overline{DN}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=5\,(\text{cm})$이므로



직각삼각형 DON에서

$\overline{OD}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}\,(\text{cm})$

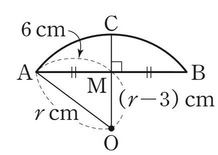
$\overline{OA}=\overline{OD}=\sqrt{34}\,(\text{cm})$이므로 직각삼각형 AMO에서

$\overline{AM}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-4^2}=3\sqrt{2}\,(\text{cm})$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AM}=6\sqrt{2}\,(\text{cm})$

답 $6\sqrt{2}$ cm

384 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O, 반지름의 길이를 r cm라 하면 $\overline{OM}=(r-3)$ cm이므로 직각삼각형 AOM에서



$r^2=6^2+(r-3)^2$

$6r=45 \quad \therefore r=\dfrac{15}{2}$

답 ②

385 직각삼각형 AMO에서

$\overline{AM}=\sqrt{5^2-3^2}=4\,(\text{cm})$

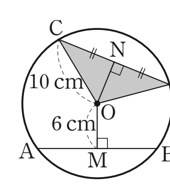
$\therefore \overline{AB}=2\overline{AM}=8\,(\text{cm})$

이때 $\overline{OM}=\overline{ON}$이므로

$\overline{CD}=\overline{AB}=8\,(\text{cm})$

답 ②

386 원의 중심 O에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 N이라 하면 $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로



$\overline{ON}=\overline{OM}=6\,(\text{cm})$

직각삼각형 CON에서

$\overline{CN}=\sqrt{10^2-6^2}=8\,(\text{cm})$

따라서 $\overline{CD}=2\overline{CN}=16\,(\text{cm})$이므로

$\triangle OCD=\dfrac{1}{2}\times16\times6=48\,(\text{cm}^2)$

답 48 cm²

387 $\overline{OM}=\overline{ON}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}$

즉 △ABC는 이등변삼각형이다.

이때 □AMON에서

$\angle MAN=360^\circ-(120^\circ+90^\circ+90^\circ)=60^\circ$

사각형의 내각의 크기의 합은 $180^\circ\times(4-2)=360^\circ$

$\therefore \angle ABC=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-60^\circ)=60^\circ$

답 60°

보충학습

다각형의 내각의 크기의 합
n각형의 내각의 크기의 합은
$180^\circ\times(n-2)$

388 $\overline{PA}=\overline{PB}$에서 △APB는 이등변삼각형이므로

$\angle PAB=\angle PBA=\frac{1}{2}\times(180^\circ-60^\circ)=60^\circ$

따라서 △APB는 정삼각형이므로

$\triangle APB=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 8^2=16\sqrt{3}\,(cm^2)$ 답 $16\sqrt{3}\,cm^2$

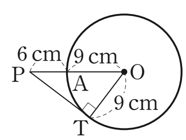
한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이 h와 넓이 S는
$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,
$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

다른풀이 $\overline{PB}=\overline{PA}=8$ cm이므로

$\triangle APB=\frac{1}{2}\times 8\times 8\times \sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 8\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}\,(cm^2)$

389 $\overline{OA}=\overline{OT}=9$ cm,
$\angle PTO=90^\circ$이므로 △PTO에서
$\overline{PT}=\sqrt{15^2-9^2}=12$ (cm)



답 ③

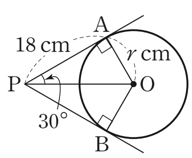
직선 PT가 원 O의 접선이므로
$\overline{PT}\perp\overline{OT}$

390 원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면 $\angle OAP=90^\circ$,
$\angle APO=30^\circ$이므로 △APO에서

$r=18\tan 30^\circ=6\sqrt{3}$

따라서 □PBOA의 둘레의 길이는

$2(18+6\sqrt{3})=12(3+\sqrt{3})$ (cm)

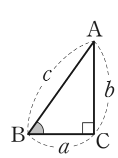


답 $12(3+\sqrt{3})$ cm

△PAO≡△PBO (RHS 합동)이므로
$\angle APO=\angle BPO$
$\therefore \angle APO=\frac{1}{2}\angle APB=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$

보충학습

$\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서
(1) $\angle B$의 크기와 빗변 AB의 길이 c를 알 때
→ $a=c\cos B$, $b=c\sin B$
(2) $\angle B$의 크기와 변 BC의 길이 a를 알 때
→ $b=a\tan B$, $c=\frac{a}{\cos B}$
(3) $\angle B$의 크기와 변 AC의 길이 b를 알 때
→ $a=\frac{b}{\tan B}$, $c=\frac{b}{\sin B}$



391 $\overline{BD}=\overline{BE}$, $\overline{CE}=\overline{CF}$이므로

$\overline{AD}+\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$
$=11+7+10=28$ (cm)

$\overline{AD}=\overline{AF}$이므로 $\overline{AD}=14$ cm

$\therefore \overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}$
$=14-11=3$ (cm) 답 3 cm

다른풀이 $\overline{BD}=x$ cm라 하면 $\overline{CF}=7-x$ (cm)
이때 $\overline{AD}=\overline{AF}$이므로
$11+x=10+(7-x)$ $\therefore x=3$

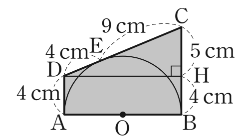
$\overline{AB}\perp\overline{OD}$ → $\overline{OD}=r$
$\overline{BC}\perp\overline{OE}$ → $\overline{OE}=r$
$\overline{AC}\perp\overline{OF}$ → $\overline{OF}=r$

392 $\overline{BD}=\overline{BE}$, $\overline{CE}=\overline{CF}$이므로 △ABC의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AD}+\overline{AF}=2\overline{AD}$
$=24$ (cm) 답 ③

$\overline{AD}=8+4=12$(cm)

393 반원 O와 $\overline{CD}$의 접점을 E라 하면



$\overline{DE}=\overline{DA}=4$ (cm),
$\overline{CE}=\overline{CB}=9$ (cm)

$\overline{CD}=4+9=13$(cm),
$\overline{CH}=9-4=5$(cm)

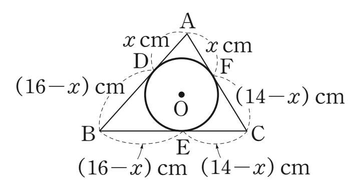
점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{DH}=\sqrt{13^2-5^2}=12$ (cm)

$\therefore$ □ABCD$=\frac{1}{2}\times(4+9)\times 12=78\,(cm^2)$

답 $78\,cm^2$

394



$\overline{AD}=\overline{AF}=x$ cm라 하면

$\overline{BE}=\overline{BD}=16-x$ (cm)
$\overline{CE}=\overline{CF}=14-x$ (cm)

$\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}$이므로

$18=(16-x)+(14-x)$
$2x=12$ $\therefore x=6$ 답 ③

395 $\overline{AF}=\overline{AD}=2$ cm, $\overline{CE}=\overline{CF}=9$ cm이므로
$\overline{BD}=\overline{BE}=x$ cm라 하면

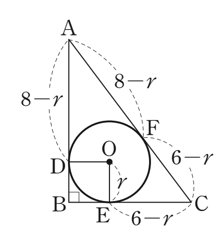
$2(x+2+9)=32$
$x+11=16$ $\therefore x=5$
$\therefore \overline{BC}=5+9=14$ (cm) 답 14 cm

396 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{AF}=\overline{AD}=8-r$
$\overline{CF}=\overline{CE}=6-r$



$\overline{AC}=\overline{AF}+\overline{CF}$이므로

$10=(8-r)+(6-r)$
$2r=4$ $\therefore r=2$ 답 2

다른풀이 △ABC=△OAB+△OBC+△OCA이므로

$\frac{1}{2}\times 6\times 8=\frac{1}{2}\times 8\times r+\frac{1}{2}\times 6\times r+\frac{1}{2}\times 10\times r$

$24=12r$ $\therefore r=2$

397 $\overline{AB}+\overline{DC}=\overline{AD}+\overline{BC}$이므로

$\overline{AD}+\overline{BC}=8+7=15$ (cm)

$\therefore \overline{AD}=15\times\frac{1}{3}=5$ (cm) 답 5 cm

398 원 O의 반지름의 길이가 5 cm이므로

$\overline{BQ}=5\,\text{cm}$

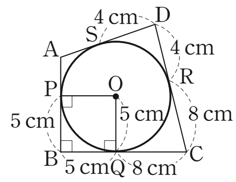
따라서

$\overline{CR}=\overline{QC}=13-5$

$=8\,(\text{cm})$

이므로

$\overline{SD}=\overline{RD}=12-8=4\,(\text{cm})$ 답 4 cm



□PBQO는 한 변의 길이가 5 cm인 정사각형이다.

399 $\overline{CE}=x\,\text{cm}$라 하면 $\overline{BE}=6-x\,(\text{cm})$

□ABED가 원 O에 외접하므로 $\overline{AB}+\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{BE}$에서

$4+\overline{DE}=6+(6-x)$

$\therefore \overline{DE}=8-x\,(\text{cm})$

직각삼각형 DEC에서

$(8-x)^2=x^2+4^2$

$16x=48 \quad \therefore x=3$

$\therefore \triangle DEC=\frac{1}{2}\times3\times4=6\,(\text{cm}^2)$ 답 ②

다른풀이 오른쪽 그림에서 $\overline{GE}=x\,\text{cm}$라 하면

$\overline{HE}=x\,\text{cm}$

$\overline{BG}=\overline{BF}=2\,\text{cm}$,

$\overline{AF}=\overline{AI}=2\,\text{cm}$이므로

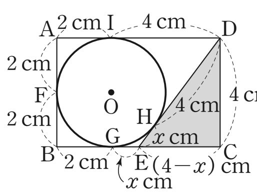
$\overline{DH}=\overline{DI}=6-2=4\,(\text{cm})$

$\overline{CE}=\overline{GC}-\overline{GE}=4-x\,(\text{cm})$이므로 직각삼각형 DEC에서

$(4+x)^2=(4-x)^2+4^2$

$16x=16 \quad \therefore x=1$

$\therefore \triangle DEC=\frac{1}{2}\times(4-1)\times4=6\,(\text{cm}^2)$



내신 만점 도전하기

본책 83~86쪽

400 전략 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{AM}=\overline{BM}$, $\angle AOM=\angle BOM$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2\sqrt{3}\,(\text{cm})$

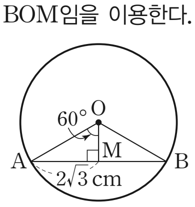
$\angle AOM=\frac{1}{2}\angle AOB=60°$

직각삼각형 OAM에서

$\overline{OA}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°}=4\,(\text{cm})$

따라서 원 O의 둘레의 길이는

$2\pi\times4=8\pi\,(\text{cm})$ 답 ③



반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 넓이는

$\pi\times r^2\times\frac{x}{360}$

△OAM과 △OBM에서

$\overline{OA}=\overline{OB}$,

$\overline{AM}=\overline{BM}$,

$\overline{OM}$은 공통

이므로

△OAM≡△OBM (SSS 합동)

$\therefore \angle AOM$

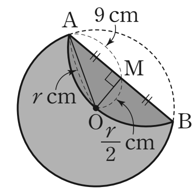
$=\angle BOM$

$=\frac{1}{2}\angle AOB$

401 전략 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분함을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 접힌 현을 AB, 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=9\,(\text{cm})$



원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면 $\overline{OM}=\frac{r}{2}$ cm이므로 직각삼각형 AOM에서

$r^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2+9^2 \quad \therefore r^2=108$

따라서 처음 종이의 넓이는 $108\pi\,\text{cm}^2$이다.

답 $108\pi\,\text{cm}^2$

402 전략 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분함을 이용한다.

풀이 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=4\,(\text{cm})$

$\overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{AC}=3\,(\text{cm})$

$\therefore$ □AMON$=4\times3=12\,(\text{cm}^2)$ 답 ③

403 전략 현의 수직이등분선 ➡ 원의 중심을 지난다.

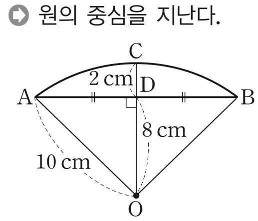
풀이 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O라 하면 직각삼각형 AOD에서

$\overline{AD}=\sqrt{10^2-8^2}$

$=6\,(\text{cm})$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AD}$

$=12\,(\text{cm})$ 답 ④



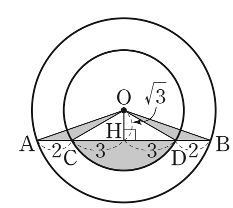
404 전략 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분함을 이용한다.

풀이 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\overline{BH}=5$

$\overline{CH}=\overline{DH}=3$

$\therefore \overline{AC}=\overline{BD}=2$



직각삼각형 OCH에서

$\overline{OC}=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$\tan(\angle COH)=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$이므로 $\angle COH=60°$

$\therefore \angle COD=120°$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

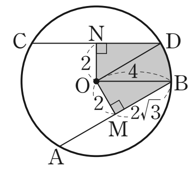
$2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\right)+\pi\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{120}{360}$

$-\frac{1}{2}\times6\times\sqrt{3}$

$=4\pi-\sqrt{3}$ 답 $4\pi-\sqrt{3}$

VIII 원의 성질

405 해결 과정 ① $\overline{OD}=\overline{OB}=4$



이므로

$\overline{BM}=\overline{DN}$

$=\sqrt{4^2-2^2}$

$=2\sqrt{3}$ • 30% 배점

해결 과정 ② 이때

$\cos(\angle BOM)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,

$\cos(\angle DON)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

이므로

$\angle BOM=60^\circ$, $\angle DON=60^\circ$

$\therefore \angle DOB=150^\circ-(60^\circ+60^\circ)=30^\circ$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 색칠한 부분의 넓이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\right)+\pi\times4^2\times\frac{30}{360}$

$=4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$ • 30% 배점

답 $4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$

(색칠한 부분의 넓이)
$=\triangle OMB+\triangle OND$
$+$(부채꼴 OBD의 넓이)

406 전략 한 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같음을 이용한다.

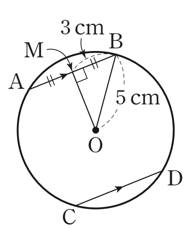
풀이 $\overline{OD}=\overline{OE}$이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}$

$\therefore \angle A=\angle C$

따라서 $\angle A:\angle B:\angle C=5:2:5$이므로

$\angle A=180^\circ\times\frac{5}{5+2+5}=75^\circ$ 답 ③

407 전략 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있음을 이용한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3\,(\text{cm})$

이므로 직각삼각형 OBM에서

$\overline{OM}=\sqrt{5^2-3^2}=4\,(\text{cm})$

따라서 두 현 사이의 거리는 8 cm이다. 답 8 cm

$\overline{AB}$와 $\overline{CD}$는 원의 중심 O로부터 같은 거리에 있다.

408 전략 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용한다.

풀이 ① $\triangle BOD$와 $\triangle POD$에서

$\angle OBD=\angle OPD=90^\circ$,

$\overline{OB}=\overline{OP}$, $\overline{OD}$는 공통

이므로 $\triangle BOD\equiv\triangle POD$ (RHS 합동)

② $\triangle AOC$와 $\triangle POC$에서

$\angle OAC=\angle OPC=90^\circ$,

$\overline{OA}=\overline{OP}$, $\overline{OC}$는 공통

이므로 $\triangle AOC\equiv\triangle POC$ (RHS 합동)

$\therefore \angle OCA=\angle OCP$

③ $\angle AOC=\angle POC$, $\angle BOD=\angle POD$이므로

$\angle COD=\angle POC+\angle POD$

$=\frac{1}{2}(\angle AOP+\angle BOP)$

$=\frac{1}{2}\times180^\circ$

$=90^\circ$

④ $\overline{AC}=\overline{PC}$, $\overline{BD}=\overline{PD}$이므로

$\overline{AC}+\overline{BD}=\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{CD}$

⑤ $\triangle OCP$와 $\triangle DOP$에서

$\angle CPO=\angle OPD=90^\circ$, $\angle OCP=\angle DOP$

이므로 $\triangle OCP\backsim\triangle DOP$ (AA 닮음)

$\therefore \overline{OC}:\overline{DO}=\overline{CP}:\overline{OP}$

답 ⑤

409 전략 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용한다.

풀이 $\overline{PA}=\overline{PT}=\overline{PB}$이므로 $\triangle PAT$, $\triangle PBT$는 모두 이등변삼각형이다.

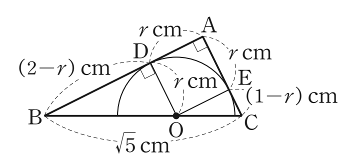
따라서 $\angle PTA=\angle PAT=40^\circ$이므로

$\angle TPB=40^\circ+40^\circ=80^\circ$

$\therefore \angle PBT=\frac{1}{2}\times(180^\circ-80^\circ)=50^\circ$ 답 ③

410 문제 이해 $\triangle ABC$에서 $(\sqrt{5})^2=2^2+1^2$, 즉 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$이므로 $\triangle ABC$는 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이다. • 20% 배점

해결 과정



반원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면 $\triangle DBO$와 $\triangle ABC$에서

$\angle BDO=\angle BAC=90^\circ$, $\angle B$는 공통

이므로 $\triangle DBO\backsim\triangle ABC$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{BD}:\overline{BA}=\overline{DO}:\overline{AC}$이므로

$(2-r):2=r:1$

$2-r=2r$, $3r=2$

$\therefore r=\frac{2}{3}$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 반원 O의 둘레의 길이는

$\frac{1}{2}\times2\pi\times\frac{2}{3}+2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\,(\text{cm})$ • 40% 배점

답 $\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\right)$cm

다른풀이 $\triangle ABC=\triangle DBO+\square ADOE+\triangle EOC$이므로

$\frac{1}{2}\times2\times1=\frac{1}{2}\times r\times(2-r)+r^2+\frac{1}{2}\times r\times(1-r)$

$1=r-\frac{1}{2}r^2+r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}r^2$

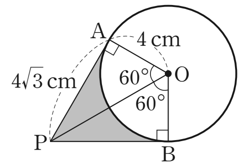
$\frac{3}{2}r=1$ $\therefore r=\frac{2}{3}$

참고 반원의 둘레의 길이를 구할 때 지름의 길이를 더해주는 것을 빠뜨리지 않도록 주의한다.

411 전략 원의 접선은 그 접점을 지나는 원의 반지름과 서로 수직임을 이용한다.

풀이 $\angle PAO=90^\circ$,
$\angle AOP=60^\circ$이므로
$\triangle APO$에서

$\overline{AP}=4\tan 60^\circ$
$=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$



따라서 색칠한 부분의 넓이는

$2\triangle APO-(\text{부채꼴 OAB의 넓이})$

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}\right)-\pi\times4^2\times\frac{120}{360}$

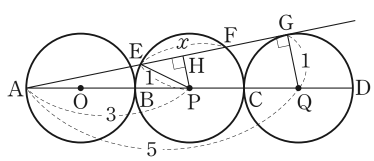
$=16\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)(\text{cm}^2)$ 답 $16\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)\text{cm}^2$

> $\triangle APO\equiv\triangle BPO$ (RHS 합동)이므로
> $\angle AOP=\angle BOP$
> $=\frac{1}{2}\angle AOB$
> $=60^\circ$

> $\triangle APO\equiv\triangle BPO$이므로
> $\square APBO$
> $=\triangle APO+\triangle BPO$
> $=2\triangle APO$

412 전략 원의 접선은 그 접점을 지나는 원의 반지름과 서로 수직임을 이용한다.

풀이



위의 그림과 같이 점 P에서 $\overline{AG}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle APH$와 $\triangle AQG$에서

$\angle AHP=\angle AGQ=90^\circ$, $\angle A$는 공통

이므로 $\triangle APH\backsim\triangle AQG$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{AP}:\overline{AQ}=\overline{PH}:\overline{QG}$이므로

$3:5=\overline{PH}:1$ $\therefore\ \overline{PH}=\frac{3}{5}$

직각삼각형 PHE에서

$\overline{EH}=\sqrt{1^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ x=2\overline{EH}=\frac{8}{5}$

$\sqrt{ax}=\sqrt{\frac{8}{5}a}=\sqrt{2^2\times\frac{2}{5}\times a}$가 자연수가 되어야 하므로

$a=5\times2\times n^2$ (n은 자연수) 꼴이어야 한다.

따라서 a의 최솟값은 10이다. 답 ④

> $\overline{AP}:\overline{AQ}=3:5$이므로 $\triangle APH$와 $\triangle AQG$의 닮음비는 $3:5$이다.

> $n=1$일 때, $a=10$

413 전략 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용한다.

풀이 $\overline{DE}=\overline{DA}=x$라 하면

$\overline{CB}=\overline{CE}=8-x$

$\overline{PA}=\overline{PB}$이므로

$10+x=12+(8-x)$

$2x=10$ $\therefore\ x=5$

이때 $\overline{GF}=\overline{GE}$, $\overline{FH}=\overline{AH}$이므로

$(\triangle DGH\text{의 둘레의 길이})$

$=\overline{DG}+\overline{GF}+\overline{FH}+\overline{DH}$

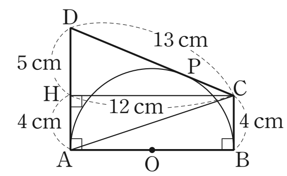
$=(\overline{DG}+\overline{GE})+(\overline{AH}+\overline{DH})$

$=\overline{DE}+\overline{DA}=5+5=10$ 답 ③

> $(\triangle PCD\text{의 둘레의 길이})=2\overline{PA}$이므로
> $12+8+10=2\overline{PA}$
> $\therefore\ \overline{PA}=15$
> $\therefore\ \overline{DA}=15-10$
> $=5$

414 전략 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\overline{BC}=4\,(\text{cm})$

$\overline{DH}=9-4=5\,(\text{cm})$

$\overline{CD}=\overline{CP}+\overline{DP}$

$=\overline{CB}+\overline{DA}$

$=4+9$

$=13\,(\text{cm})$

$\triangle DHC$에서 $\overline{HC}=\sqrt{13^2-5^2}=12\,(\text{cm})$이므로

$\triangle HAC$에서

$\overline{AC}^2=12^2+4^2=160$

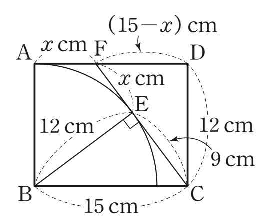
$\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{CD}^2=160+13^2$

$=329$ 답 329

415 전략 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 서로 수직임을 이용한다.

풀이 $\angle BEC=90^\circ$이므로

직각삼각형 BCE에서



$\overline{CE}=\sqrt{15^2-12^2}$

$=9\,(\text{cm})$

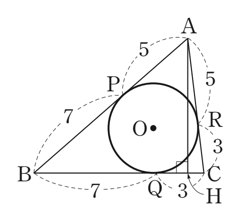
$\overline{AF}=x$ cm라 하면 직각삼각형 CDF에서

$(9+x)^2=(15-x)^2+12^2$

$48x=288$

$\therefore\ x=6$ 답 ③

416 문제 이해 오른쪽 그림에서



$\overline{BC}=7+3=10$

• 20% 배점

해결 과정 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{BH}=x$라 하면 $\triangle ABH$와 $\triangle ACH$에서

$\overline{AH}^2=12^2-x^2=8^2-(10-x)^2$

$20x=180$ $\therefore\ x=9$

$\therefore\ \overline{AH}=\sqrt{12^2-9^2}=3\sqrt{7}$

• 40% 배점

답 구하기 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

$\frac{1}{2}\times10\times3\sqrt{7}$

$=\frac{1}{2}\times12\times r+\frac{1}{2}\times10\times r+\frac{1}{2}\times8\times r$

$15\sqrt{7}=15r$

$\therefore\ r=\sqrt{7}$

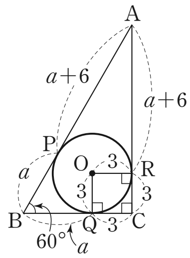
• 40% 배점

답 $\sqrt{7}$

> 직각삼각형이 만들어지도록 한 꼭짓점에서 그 대변에 수선의 발을 내린다.

417 전략 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용한다.

풀이 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면 원 O의 넓이가 9π이므로



$\pi r^2=9\pi$

$\therefore r=3$ ($\because r>0$)

$\therefore \overline{OQ}=\overline{OR}=3$

$\overline{BP}=\overline{BQ}=a$라 하면

$$\overline{AB}=\frac{a+3}{\cos 60^\circ}=2a+6$$

따라서 $\overline{AR}=\overline{AP}=(2a+6)-a=a+6$이므로

$$\tan 60^\circ=\frac{a+9}{a+3},\quad \sqrt{3}=\frac{a+9}{a+3}$$

$a+9=\sqrt{3}a+3\sqrt{3},\quad (\sqrt{3}-1)a=9-3\sqrt{3}$

$$\therefore a=\frac{9-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1}=3\sqrt{3}$$

$\therefore$ ($\triangle ABC$의 둘레의 길이)

$=(2a+6)+(a+3)+(a+9)$

$=4a+18=12\sqrt{3}+18$

답 $12\sqrt{3}+18$

다른풀이 $\overline{BC}=x$라 하면

$\overline{AC}=\sqrt{3}x$, $\overline{AB}=2x$

원 O의 반지름의 길이가 3이므로

$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

$$\frac{1}{2}\times x\times\sqrt{3}x$$

$$=\frac{1}{2}\times 2x\times 3+\frac{1}{2}\times x\times 3+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}x\times 3$$

$\sqrt{3}x=9+3\sqrt{3}$

$$\therefore x=\frac{9+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}+3$$

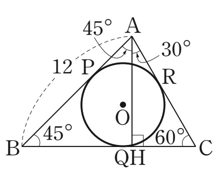
$\therefore$ ($\triangle ABC$의 둘레의 길이)$=2x+x+\sqrt{3}x$

$=(3+\sqrt{3})x$

$=(3+\sqrt{3})(3\sqrt{3}+3)$

$=12\sqrt{3}+18$

418 해결 과정 ① 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\angle ABH=\angle BAH=45^\circ$

이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}=12\cos 45^\circ=6\sqrt{2}$ • 20% 배점

해결 과정 ② $\triangle ACH$에서 $\angle HAC=30^\circ$, $\angle ACH=60^\circ$이므로

$\overline{CH}=6\sqrt{2}\tan 30^\circ=2\sqrt{6}$

$$\overline{AC}=\frac{2\sqrt{6}}{\sin 30^\circ}=4\sqrt{6}$$ • 40% 배점

해결 과정 ③ $\overline{BQ}=x$라 하면 $\overline{BP}=\overline{BQ}=x$

$\overline{AR}=\overline{AP}=12-x$

$\overline{CR}=\overline{CQ}=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}-x$ • 30% 배점

$\overline{CQ}=\overline{BH}-\overline{BQ}+\overline{CH}$
$=6\sqrt{2}-x+2\sqrt{6}$

답 구하기 $\overline{AC}=\overline{AR}+\overline{CR}$에서

$4\sqrt{6}=(12-x)+(6\sqrt{2}+2\sqrt{6}-x)$

$2x=12+6\sqrt{2}-2\sqrt{6}$

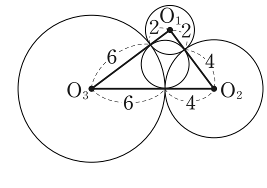
$\therefore x=6+3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ • 10% 배점

답 $6+3\sqrt{2}-\sqrt{6}$

419 전략 내접원의 중심에서 세 변에 이르는 거리

➡ 내접원의 반지름의 길이

풀이 오른쪽 그림과 같이 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $O_1O_2O_3$의 세 변의 길이는 각각 6, 8, 10이고



$10^2=8^2+6^2$

이므로 $\triangle O_1O_2O_3$은 $\angle O_1=90^\circ$인 직각삼각형이다.

세 원의 접점을 지나는 원은 $\triangle O_1O_2O_3$의 내접원이므로 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\triangle O_1O_2O_3$의 넓이에서

$$\frac{1}{2}\times 6\times 8=\frac{1}{2}\times 6\times r+\frac{1}{2}\times 8\times r+\frac{1}{2}\times 10\times r$$

$24=12r\qquad \therefore r=2$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times 2=4\pi$

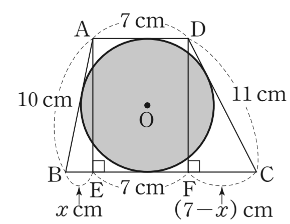
답 ①

420 문제 이해 $\overline{AB}+\overline{DC}=\overline{AD}+\overline{BC}$이므로

$10+11=7+\overline{BC}$

$\therefore \overline{BC}=14$ (cm) • 30% 배점

해결 과정 오른쪽 그림과 같이 두 꼭짓점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고 $\overline{BE}=x$ cm라 하면 $\overline{AE}^2=\overline{DF}^2$이므로



$10^2-x^2=11^2-(7-x)^2$

$\overline{FC}=\overline{BC}-\overline{BF}$
$=14-(x+7)$
$=7-x$ (cm)

$14x=28\qquad \therefore x=2$

$\therefore \overline{AE}=\sqrt{10^2-2^2}=4\sqrt{6}$ (cm) • 50% 배점

$\overline{AE}$는 원 O의 지름의 길이와 같다.

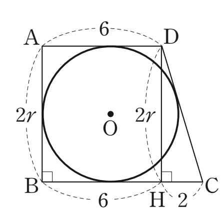
답 구하기 따라서 원 O의 반지름의 길이는 $2\sqrt{6}$ cm이므로 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{6})^2=24\pi$ (cm^2) • 20% 배점

답 24π cm^2

421 전략 원의 외접사각형에서 두 쌍의 변의 길이의 합은 서로 같음을 이용한다.

풀이 원 O의 반지름의 길이를 r라 하고 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AB}+\overline{DC}=\overline{AD}+\overline{BC}$이므로



$2r+\overline{DC}=6+8$

$\therefore \overline{DC}=14-2r$

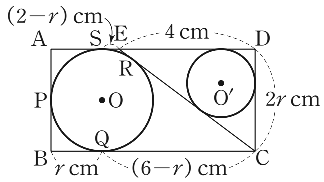
직각삼각형 DHC에서

$(14-2r)^2=(2r)^2+2^2$

$$56r=192\qquad \therefore r=\frac{24}{7}$$

답 ③

422 전략 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 원 O와 사각형 ABCE의 접점을 각각 P, Q, R, S라 하고 원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\overline{BQ}=\overline{AS}=r\,(\text{cm})$

이므로

$\overline{CR}=\overline{CQ}=6-r\,(\text{cm})$

$\overline{ER}=\overline{ES}=2-r\,(\text{cm})$

$\therefore \overline{EC}=\overline{ER}+\overline{CR}$

$=(2-r)+(6-r)$

$=8-2r\,(\text{cm})$

$\overline{AE}=6-4=2\,(\text{cm})$이므로
$\overline{ES}=\overline{AE}-\overline{AS}$
$=2-r\,(\text{cm})$

이때 $\overline{DC}=2r$ cm이므로 직각삼각형 ECD에서

$(8-2r)^2=4^2+(2r)^2$

$32r=48 \qquad \therefore r=\dfrac{3}{2}$

$\overline{CD}=3$ cm, $\overline{EC}=5$ cm이므로 원 O′의 반지름의 길이를 r'이라 하면 △ECD의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}\times4\times3=\dfrac{1}{2}\times r'\times4+\dfrac{1}{2}\times r'\times5+\dfrac{1}{2}\times r'\times3$

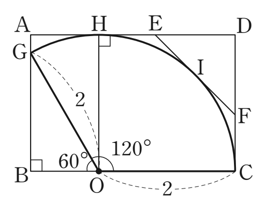
$6=6r' \qquad \therefore r'=1$

따라서 두 원 O, O′의 반지름의 길이의 합은

$\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}\,(\text{cm})$

답 ①

423 해결 과정 ① 오른쪽 그림에서 $\overline{OG}=\overline{OC}=2$이고 $\angle GOB=60°$이므로



$\overline{BG}=2\sin60°=\sqrt{3}$

$\overline{BO}=2\cos60°=1$

따라서 △GBO의 둘레의 길이는

$1+2+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$ • 40% 배점

해결 과정 ② $\overline{OH}=\overline{OC}=2$이고 $\overline{EH}=\overline{EI}$, $\overline{FC}=\overline{FI}$이므로 △DEF의 둘레의 길이는

$\overline{ED}+\overline{EI}+\overline{IF}+\overline{DF}$

$=(\overline{ED}+\overline{EH})+(\overline{CF}+\overline{DF})$

$=\overline{DH}+\overline{CD}$

$=2+2=4$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 구하는 길이의 차는

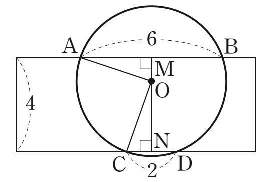
$(3+\sqrt{3})-4=\sqrt{3}-1$ • 20% 배점

답 $\sqrt{3}-1$

내신 만점 굳히기

본책 87쪽

424 전략 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분함을 이용한다.



풀이 원의 중심을 O라 하고 점 O에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면

$\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=3$

$\overline{CN}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=1$

$\overline{OM}=x$라 하면 $\quad \overline{ON}=4-x$

이때 $\overline{OA}^2=\overline{OC}^2$이므로

△AOM에서
$\overline{OA}^2=\overline{AM}^2+\overline{MO}^2$
△OCN에서
$\overline{OC}^2=\overline{ON}^2+\overline{CN}^2$

$3^2+x^2=1^2+(4-x)^2$

$8x=8 \qquad \therefore x=1$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

답 ①

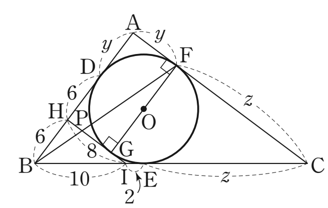
425 해결 과정 ① $\overline{EI}=\overline{GI}=x$라 하면

$\overline{DH}=\overline{GH}=8-x$

이때 $\overline{BD}=\overline{BE}$이므로 $\quad 6+(8-x)=10+x$

$2x=4 \qquad \therefore x=2$ • 20% 배점

해결 과정 ② 오른쪽 그림과 같이



$\overline{AD}=\overline{AF}=y$,

$\overline{CE}=\overline{CF}=z$라 하면

$\overline{HI}\,/\!/\,\overline{AC}$이므로

△BIH∽△BCA

(AA 닮음)

∠BHI=∠A(동위각),
∠B는 공통이므로
△BIH∽△BCA
(AA 닮음)

$\overline{BH}:\overline{BA}=\overline{BI}:\overline{BC}=\overline{HI}:\overline{AC}$이므로

$6:(12+y)=10:(12+z)=8:(y+z)$

$6:(12+y)=10:(12+z)$에서

$72+6z=120+10y$

$\therefore 5y-3z=-24$ …… ㉠

$10:(12+z)=8:(y+z)$에서

$10y+10z=96+8z$

$\therefore 5y+z=48$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

㉡−㉠을 하면
$4z=72 \quad \therefore z=18$
$z=18$을 ㉡에 대입하면
$5y=30 \quad \therefore y=6$

$y=6,\ z=18$ • 40% 배점

해결 과정 ③ 또 △BPH∽△BFA (AA 닮음)이므로

$\overline{BH}:\overline{BA}=\overline{HP}:\overline{AF}$에서

$6:18=\overline{HP}:6 \qquad \therefore \overline{HP}=2$ • 20% 배점

답 구하기 $\therefore \overline{PG}=\overline{HI}-(\overline{HP}+\overline{GI})$

$=8-(2+2)=4$ • 20% 배점

답 4

426 전략 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용한다.

풀이 $\overline{FC}=\overline{FE}$, $\overline{GE}=\overline{GB}$, $\overline{HB}=\overline{HC}$이므로 △HGF의 둘레의 길이는

$\overline{HG}+\overline{GF}+\overline{HF}=\overline{HG}+(\overline{GE}+\overline{EF})+\overline{HF}$

$=\overline{HG}+(\overline{GB}+\overline{FC})+\overline{HF}$

$=(\overline{HG}+\overline{GB})+(\overline{FC}+\overline{HF})$

$=\overline{HB}+\overline{HC}=2\overline{HB}$

△AOC에서 $\sin(\angle \mathrm{CAO})=\dfrac{r}{2r}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\angle \mathrm{CAO}=30°$

△ABH에서 $\angle \mathrm{HAB}=30°$, $\overline{\mathrm{AB}}=r$이므로

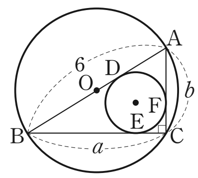
$\overline{\mathrm{HB}}=r\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r$

따라서 △HGF의 둘레의 길이는

$2\overline{\mathrm{HB}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$ 　　답 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$

427 전략 직각삼각형의 외접원의 중심은 빗변의 중점이다.

풀이 △ABC와 내접원의 접점을 각각 D, E, F라 하고 $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{AC}}=b\,(a>b)$라 하면 직각삼각형의 빗변은 외접원의 지름이므로



$a^2+b^2=6^2=36$

△ABC의 넓이가 7이므로

$\dfrac{1}{2}ab=7$ 　　$\therefore ab=14$

따라서 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=36+28=64$이므로

$a+b=8$ $(\because a+b>0)$

즉 $b=8-a$이므로 이것을 $ab=14$에 대입하여 풀면

$a(8-a)=14,\quad a^2-8a+14=0$

$\therefore a=4\pm\sqrt{2}$

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해는
> $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

그런데 $a>b$이므로 　$a=4+\sqrt{2}$, $b=4-\sqrt{2}$

△ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AF}}=4-\sqrt{2}-r$

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BE}}=4+\sqrt{2}-r$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BD}}$이므로

$6=(4-\sqrt{2}-r)+(4+\sqrt{2}-r)$

$2r=2$ 　　$\therefore r=1$ 　　답 ⑤

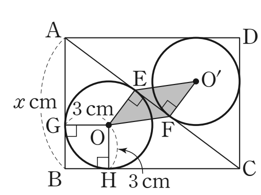
다른풀이 △ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 △ABC의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}\times a\times b=\dfrac{1}{2}\times r\times(6+a+b)$

$\dfrac{1}{2}\times 14=\dfrac{1}{2}\times r\times 14$

$\therefore r=1$

428 해결 과정 ① 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{AB}}=x$ cm라 하면 $\overline{\mathrm{BC}}=(21-x)$ cm이므로



> □ABCD의 둘레의 길이가 42 cm이므로
> $2(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}})=42$
> $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=21$
> $\therefore \overline{\mathrm{BC}}=21-\overline{\mathrm{AB}}$
> $=21-x$ (cm)

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{CE}}$

$=\overline{\mathrm{AG}}+\overline{\mathrm{CH}}$

$=(x-3)+(21-x-3)$

$=15$ (cm) 　　• 20% 배점

해결 과정 ② 직각삼각형 ABC에서

$x^2+(21-x)^2=15^2,\quad x^2-21x+108=0$

$(x-9)(x-12)=0$ 　　$\therefore x=9$ 또는 $x=12$

그런데 $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=9$ cm, $\overline{\mathrm{BC}}=12$ cm 　　• 30% 배점

해결 과정 ③ 따라서 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AG}}=6$ cm이고 마찬가지로 $\overline{\mathrm{CF}}=6$ cm이므로

$\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{AC}}-(\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{CF}})$

$=15-(6+6)=3$ (cm) 　　• 30% 배점

답 구하기 $\therefore$ □EOFO′$=3\times3=9\,(\mathrm{cm}^2)$ 　　• 20% 배점

> $\overline{\mathrm{OE}}/\!/\overline{\mathrm{FO'}}$, $\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{FO'}}$이므로 □EOFO′은 평행사변형이다.

답 9 cm²

429 [문제 해결 길잡이]

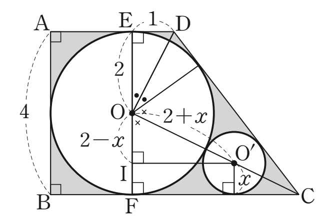
❶ $\angle \mathrm{DOE}+\angle \mathrm{IOO'}=90°$임을 이용하여 △DEO∽△OIO′임을 보인다.

❷ ❶의 닮음과 피타고라스 정리를 이용하여 원 O′의 반지름의 길이를 구한다.

❸ △OFC∽△OIO′임을 이용하여 $\overline{\mathrm{FC}}$의 길이를 구한다.

❹ 색칠한 부분의 넓이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원 O′의 반지름의 길이를 x라 하고, 점 O′에서 $\overline{\mathrm{OF}}$에 내린 수선의 발을 I라 하면 △DEO와 △OIO′에서



$\angle \mathrm{DEO}=\angle \mathrm{OIO'}=90°$,

$\angle \mathrm{EDO}=90°-\angle \mathrm{DOE}=\angle \mathrm{IOO'}$

이므로 　△DEO∽△OIO′ (AA 닮음) ❶

따라서 $\overline{\mathrm{ED}}:\overline{\mathrm{IO}}=\overline{\mathrm{EO}}:\overline{\mathrm{IO'}}$이므로

$1:(2-x)=2:\overline{\mathrm{IO'}}$

$\therefore \overline{\mathrm{IO'}}=4-2x$

직각삼각형 OIO′에서

$(2+x)^2=(2-x)^2+(4-2x)^2$

$x^2-6x+4=0$ 　　$\therefore x=3-\sqrt{5}$ $(\because x<2)$ ❷

한편 △OFC∽△OIO′ (AA 닮음)이므로

$\overline{\mathrm{OF}}:\overline{\mathrm{OI}}=\overline{\mathrm{FC}}:\overline{\mathrm{IO'}}$

$2:(2-x)=\overline{\mathrm{FC}}:(4-2x)$

$\therefore \overline{\mathrm{FC}}=4$ ❸

따라서 색칠한 부분의 넓이는

□ABCD$-$(원 O의 넓이)$-$(원 O′의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times(3+6)\times4-\pi\times2^2-\pi\times(3-\sqrt{5})^2$

$=18+(6\sqrt{5}-18)\pi$ ❹

답 $18+(6\sqrt{5}-18)\pi$

17 | 원주각

개념&기출유형

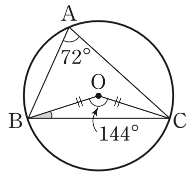
본책 88~89쪽

한 원에서 모든 호에 대한 중심각의 크기의 합은 360°, 원주각의 크기의 합은 180°이다.

430 $\angle BOC=2\angle BAC$

$=2\times 72°$

$=144°$



△OBC는 $\overline{OB}=\overline{OC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle OBC=\frac{1}{2}\times(180°-144°)=18°$ 답 18°

431 $\angle y=2\angle BCD=2\times 100°=200°$

$\angle BOD=360°-\angle y=360°-200°=160°$이므로

$\angle x=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}\times 160°=80°$

$\therefore \angle x+\angle y=80°+200°=280°$ 답 ③

$\overset{\frown}{BCD}$에 대한 중심각의 크기

432 $\angle x=\angle BDC=38°$

△ABP에서 $\angle x+\angle y=60°$이므로

$\angle y=60°-\angle x=60°-38°=22°$

$\therefore \angle x-\angle y=38°-22°=16°$ 답 16°

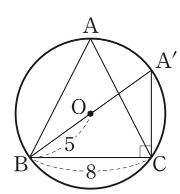
433 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로

$\angle BCD=90°$

$\angle BDC=\angle BAC=42°$이므로 △BCD에서

$\angle x=90°-42°=48°$ 답 48°

434 $\overline{BO}$의 연장선이 원 O와 만나는 점을 A′이라 하면



$\angle BAC=\angle BA'C$

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로

$\angle A'CB=90°$

$\overline{A'B}=10$이므로 직각삼각형 A′BC에서

$\overline{A'C}=\sqrt{10^2-8^2}=6$

$\therefore \cos A=\cos A'=\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

다른풀이 원의 중심 O에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 직각삼각형 OBM에서

$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=4,\ \overline{OM}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\therefore \cos A=\cos(\angle BOM)=\frac{\overline{OM}}{\overline{OB}}=\frac{3}{5}$

$\angle BOC=2\angle A$이므로

$\angle A=\frac{1}{2}\angle BOC$

$=\angle BOM$

435 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$이므로

$\angle DCB=\angle ABC=25°$

△PCB에서

$\angle x=25°+25°=50°$ 답 ①

436 △ABP에서

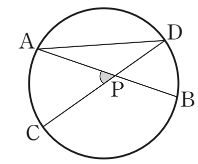
$\angle BAP=\angle BPC-\angle ABP=75°-50°=25°$

$\overset{\frown}{AD}:\overset{\frown}{BC}=\angle ABD:\angle BAC$이므로

$\overset{\frown}{AD}:4=50:25$

$\therefore \overset{\frown}{AD}=8\,(\text{cm})$ 답 8 cm

437 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$를 그으면 $\overset{\frown}{AC}$의 길이가 원주의 $\frac{1}{5}$이므로



$\angle ADC=180°\times\frac{1}{5}=36°$

$\overset{\frown}{BD}$의 길이가 원주의 $\frac{1}{10}$이므로

$\angle DAB=180°\times\frac{1}{10}=18°$

따라서 △APD에서

$\angle APC=\angle ADP+\angle DAP$

$=36°+18°=54°$ 답 54°

438 $\angle x=2\angle BAD=2\times 65°=130°$

□ABCD가 원 O에 내접하므로

$65°+\angle y=180°$

$\therefore \angle y=115°$

$\therefore \angle x-\angle y=130°-115°=15°$ 답 15°

이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.

439 △OBC는 $\overline{OB}=\overline{OC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle OCB=\angle OBC=35°$

따라서 $\angle BOC=180°-(35°+35°)=110°$이므로

$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 110°=55°$

$\therefore \angle x=\angle BAD=55°+27°=82°$ 답 ③

440 □PQCD가 원 O′에 내접하므로

$\angle y=\angle PDC=95°$

□ABQP가 원 O에 내접하므로

$\angle BAP=180°-\angle y$

$=180°-95°=85°$

$\therefore \angle x=2\angle BAP=2\times 85°=170°$

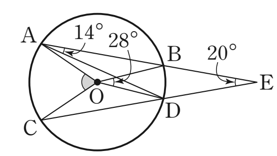
$\therefore \angle x+\angle y=170°+95°=265°$ 답 265°

내신 만점 도전하기

본책 90~92쪽

441 전략 삼각형의 한 외각의 크기는 이와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$를 그으면



$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD$

$=\frac{1}{2}\times 28°$

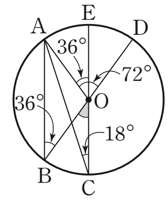
$=14°$

△ADE에서 $\angle ADC=14°+20°=34°$이므로

$\angle AOC=2\angle ADC=2\times 34°=68°$ 답 68°

442 전략 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$배이다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BO}$, $\overline{CO}$의 연장선이 원 O와 만나는 점을 각각 D, E라 하면



$\angle AOE=2\angle ACE$
$=2\times 18°=36°$,
$\angle AOD=2\angle ABD$
$=2\times 36°=72°$

이므로 $\angle EOD=72°-36°=36°$

$\therefore \angle BOC=\angle EOD=36°$ (맞꼭지각) 답 ③

> 두 직선이 만나서 생기는 맞꼭지각의 크기는 서로 같다.

다른풀이 $\triangle OAC$는 $\overline{OA}=\overline{OC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle OAC=\angle OCA=18°$

또 $\triangle OAB$는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로

$\angle OAB=\angle OBA=36°$

$\therefore \angle CAB=\angle OAB-\angle OAC=36°-18°=18°$

$\therefore \angle BOC=2\angle BAC=2\times 18°=36°$

443 전략 사각형의 네 내각의 크기의 합은 360°임을 이용한다.

풀이 $\angle PAO=\angle PBO=90°$이므로 $\square APBO$에서

> 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 서로 수직이다.

$\angle AOB=180°-52°=128°$

$\therefore \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 128°=64°$

따라서 $\square APBC$에서

$(\angle x+90°)+52°+(\angle y+90°)+64°=360°$

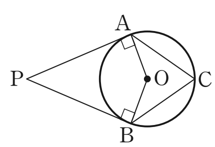
$\therefore \angle x+\angle y=64°$ 답 64°

보충학습

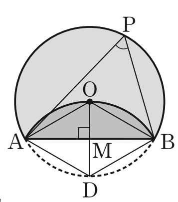
$\overline{PA}$, $\overline{PB}$가 원 O의 접선이고, 두 점 A, B가 접점일 때

① $\angle P+\angle AOB=180°$

② $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$
$=\frac{1}{2}(180°-\angle P)$



444 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 M이라 하고, $\overline{OM}$의 연장선과 원 O의 교점을 D라 하자.



• 10% 배점

해결 과정 $\triangle AOM$과 $\triangle ADM$에서

$\overline{AM}$은 공통, $\overline{OM}=\overline{DM}$, $\angle OMA=\angle DMA=90°$

이므로 $\triangle AOM\equiv\triangle ADM$ (SAS 합동)

$\therefore \overline{AO}=\overline{AD}$

또 $\overline{AO}=\overline{OD}$이므로 $\triangle AOD$는 정삼각형이다.

> 원 O의 반지름의 길이

같은 방법으로 하면 $\overline{BO}=\overline{BD}=\overline{OD}$이므로 $\triangle BOD$도 정삼각형이다. • 60% 배점

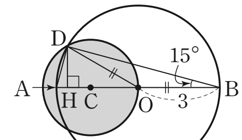
답 구하기 $\angle AOB=\angle AOD+\angle BOD$
$=60°+60°=120°$

이므로

$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 120°=60°$ • 30% 배점

답 60°

445 해결 과정 ① 점 D에서 $\overline{AO}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\angle AOD=2\angle ABD$
$=2\times 15°=30°$

이고, $\overline{OD}=\overline{OB}=3$이므로 $\triangle DHO$에서

$\overline{DH}=3\sin 30°=\frac{3}{2}$ • 50% 배점

해결 과정 ② $\angle ACD=2\angle AOD=2\times 30°=60°$이므로 $\triangle DHC$에서

$\overline{DC}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{\sin 60°}=\sqrt{3}$ • 30% 배점

> $\triangle DHC$에서
> $\sin 60°=\frac{\overline{DH}}{\overline{DC}}$
> $\therefore \overline{DC}=\frac{\overline{DH}}{\sin 60°}$

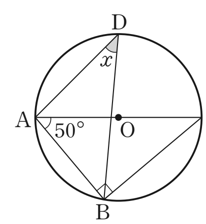
답 구하기 따라서 원 C의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{3})^2=3\pi$ • 20% 배점

답 3π

446 전략 $\overline{BC}$를 그어서 $\widehat{AB}$에 대한 원주각의 크기를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$를 그으면



$\angle ABC=90°$

$\triangle ABC$에서

$\angle ACB=90°-50°$
$=40°$

이므로 $\angle x=\angle ACB=40°$ 답 ③

다른풀이 $\overline{OB}$를 그으면 $\triangle OAB$는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로

$\angle OBA=\angle OAB=50°$

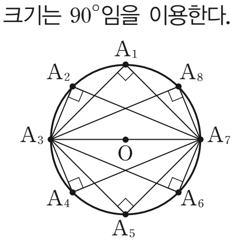
$\therefore \angle AOB=180°-(50°+50°)=80°$

$\therefore \angle x=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 80°=40°$

447 전략 반원에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O라 하면 한 지름에 대하여 만들 수 있는 직각삼각형이 6개이고, 지름은 모두 4개이므로 직각삼각형의 개수는

> $\overline{A_1A_5}$, $\overline{A_2A_6}$, $\overline{A_3A_7}$, $\overline{A_4A_8}$



$6\times 4=24$

답 24

448 전략 반원에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용한다.

풀이 직선 BP는 반원의 접선이므로

$\angle PBA=90°$

$\overline{AB}$는 반원 O의 지름이므로

$\angle ACB=90°$

$\triangle PCE$에서

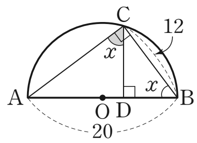
$\angle CPE=\angle CED-\angle PCE=104°-90°=14°$

$\angle APB=2\times 14°=28°$이므로 $\triangle PAB$에서

$\angle CAB=90°-28°=62°$ 답 ④

449 전략 반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$임을 이용한다.

풀이 $\angle ACB=90°$이므로



$\angle ABC=90°-\angle DCB$

$=\angle x$

이때 $\triangle ABC$에서

$\overline{AC}=\sqrt{20^2-12^2}=16$이므로

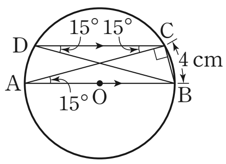
$$\sin x=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$$

$$\cos x=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

$\therefore \sin x+\cos x=\frac{7}{5}$ 답 $\frac{7}{5}$

450 전략 평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때 생기는 엇각의 크기가 같음을 이용한다.

풀이 $\widehat{BC}$에 대하여



$\angle CDB=\angle BAC=15°$

$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로

$\angle DCA=\angle BAC$

$=15°$(엇각)

이때 $\angle ACB=90°$이므로 $\triangle DBC$에서

$\angle CBD=180°-(90°+15°)-15°=60°$

$\widehat{BC} : \widehat{CD}=\angle BAC : \angle CBD$이므로

$4 : \widehat{CD}=15 : 60$ $\quad\therefore \widehat{CD}=16\,(\text{cm})$ 답 ⑤

451 해결 과정 ① $\widehat{AD}=\widehat{DE}=\widehat{BE}$이므로

$\angle ACD=\angle DCE=\angle ECB=\frac{1}{3}\angle ACB$

$=\frac{1}{3}\times 90°=30°$

$\therefore \angle x=30°$ • 40% 배점

해결 과정 ② $\widehat{AC} : \widehat{BC}=7 : 5$이므로

$\angle CAB=90°\times\frac{5}{12}=37.5°$

$\therefore \angle y=\angle ACE+\angle CAB$

$=60°+37.5°=97.5°$ • 50% 배점

답 구하기 $\therefore \angle x+\angle y=30°+97.5°$

$=127.5°$ • 10% 배점

답 $127.5°$

$\angle COB=180°\times\frac{5}{12}$

$=75°$

에서

$\angle CAB=\frac{1}{2}\angle COB$

$=\frac{1}{2}\times 75°$

$=37.5°$

452 전략 한 원에서 호의 길이는 그 호에 대한 원주각의 크기에 정비례한다.

풀이 $\widehat{AB}=2a$, $\widehat{BC}=2b$, $\widehat{CA}=2c$라 하면

$$\angle PQR=180°\times\frac{a+c}{2a+2b+2c}=69°$$

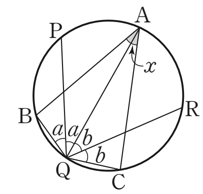
$$\therefore \angle x=180°\times\frac{2b}{2a+2b+2c}$$

$$=180°\times\left(\frac{2a+2b+2c}{2a+2b+2c}-\frac{2a+2c}{2a+2b+2c}\right)$$

$=180°-2\times 69°$

$=42°$ 답 ④

다른풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AQ}$를 긋고 $\angle PQA=\angle a$, $\angle AQR=\angle b$라 하면 $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$에 대한 원주각의 크기의 합은 $180°$이므로



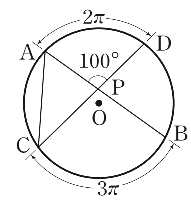
$2\angle a+2\angle b+\angle x=180°$

$\angle a+\angle b=69°$이므로 위의 식에 대입하면

$138°+\angle x=180°$ $\quad\therefore \angle x=42°$

453 전략 $\overline{AC}$를 그어서 $\widehat{AD}$에 대한 원주각의 크기를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 그으면 $\widehat{AD} : \widehat{BC}=2 : 3$이므로



$\angle ACD : \angle CAB=2 : 3$

$\triangle ACP$에서

$\angle ACP+\angle CAP=100°$

이므로

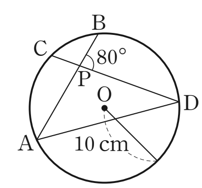
$\angle ACD=100°\times\frac{2}{5}=40°$

따라서 $\angle AOD=2\angle ACD=2\times 40°=80°$이므로 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$2\pi\times r\times\frac{80}{360}=2\pi$ $\quad\therefore r=\frac{9}{2}$ 답 ②

454 전략 $\overline{AD}$를 그어서 $\widehat{AC}$와 $\widehat{BD}$에 대한 원주각의 크기를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$를 그으면 $\triangle PAD$에서



$\angle PDA+\angle PAD=80°$

즉 $\widehat{AC}$와 $\widehat{BD}$에 대한 원주각의 크기의 합이 $80°$이므로

$\widehat{AC}+\widehat{BD}=2\pi\times 10\times\frac{80}{180}=\frac{80}{9}\pi\,(\text{cm})$ 답 ④

455 해결 과정 $\widehat{AB}=\widehat{AD}$이므로

$\angle ABD=\angle ADB=\angle x$

$\therefore \angle DBC=\frac{4}{3}\angle ABD=\frac{4}{3}\angle x$

$\overline{BC}$는 원 O의 지름이므로

$\angle BDC=90°$ • 50% 배점

답 구하기 $\square ABCD$가 원 O에 내접하므로

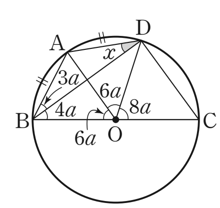
$\angle ABC+\angle ADC=180°$

$\left(\angle x+\frac{4}{3}\angle x\right)+(\angle x+90°)=180°$

$\frac{10}{3}\angle x=90°$ $\quad\therefore \angle x=27°$ • 50% 배점

답 $27°$

다른풀이 $\angle DBC=\frac{4}{3}\angle ABD$에서 $3\angle DBC=4\angle ABD$이므로



$\angle DBC : \angle ABD=4 : 3$

$\angle DBC=4\angle a$,

$\angle ABD=3\angle a$라 하면

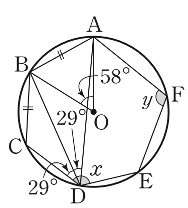
$\angle BOA = \angle AOD$
$= 2\times 3\angle a = 6\angle a$
$\angle DOC = 2\times 4\angle a = 8\angle a$
따라서 $\angle BOA + \angle AOD + \angle DOC = 180°$이므로
$6\angle a + 6\angle a + 8\angle a = 180°$
$20\angle a = 180°$ $\therefore \angle a = 9°$
$\therefore \angle x = 3\angle a = 3\times 9° = 27°$

∠BOC는 평각이다.

456 전략 원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°임을 이용한다.
풀이 □ABCD가 원 O에 내접하므로
$\angle B + \angle x = 180°$
$\therefore \angle B = 180° - \angle x$
△FBC에서
$\angle FCE = 40° + (180° - \angle x) = 220° - \angle x$
△CDE에서
$\angle x = (220° - \angle x) + 50°$
$2\angle x = 270°$ $\therefore \angle x = 135°$
답 ⑤

457 해결 과정 □BCDE가 원 O에 내접하므로
$\angle BED = 180° - 114° = 66°$
또 $\overline{BE}$는 원 O의 지름이므로
$\angle BDE = 90°$
$\therefore \angle DBE = 180° - (66° + 90°) = 24°$ • 50% 배점
답 구하기 따라서 $\angle ABD = 2\times 24° = 48°$이므로
△FBD에서
$\angle BFD = 180° - (48° + 90°) = 42°$ • 50% 배점
답 42°

458 전략 다각형에 보조선을 그어 사각형을 만들어 생각한다.
풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$, $\overline{BD}$를 그으면



$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB$
$= \frac{1}{2}\times 58° = 29°$
$\overline{AB} = \overline{BC}$이므로
$\angle BDC = \angle ADB = 29°$

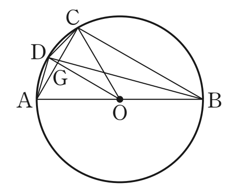
한 원에서 길이가 같은 두 현에 대한 원주각의 크기는 같다.

또 □ADEF가 원 O에 내접하므로
$\angle ADE + \angle EFA = 180°$에서
$\angle x - (29° + 29°) + \angle y = 180°$
$\therefore \angle x + \angle y = 238°$
답 ⑤

459 해결 과정 ① □ABQP가 원 O_1에 내접하므로
$\angle PAB = \angle PQS$
□PQSR가 원 O_2에 내접하므로
$\angle PQS = \angle DRS$
$\therefore \angle PAB = \angle DRS$ • 40% 배점
해결 과정 ② □RSCD가 원 O_3에 내접하므로
$\angle DRS + \angle DCS = 180°$
$\therefore \angle DRS = 180° - \angle DCS$
$= 180° - 84° = 96°$ • 40% 배점
답 구하기 $\therefore \angle PAB = \angle DRS = 96°$ • 20% 배점
답 96°

내신 만점 굳히기 본책 93쪽

460 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$와 $\overline{DO}$의 교점을 G라 하면 △DAG와 △DCG에서



$\overline{AD} = \overline{CD}$, $\overline{GD}$는 공통,
$\angle ADG = \angle CDG$

△ADO와 △CDO는 합동인 이등변삼각형이므로
$\angle ADO = \angle CDO$

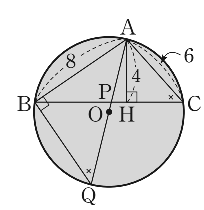
이므로 △DAG≡△DCG (SAS 합동)
$\therefore \angle DGA = \angle DGC = 90°$ • 20% 배점
해결 과정 ① △ADB와 △DGA에서
$\angle ADB = \angle DGA = 90°$, $\angle ABD = \angle DAG$

$\overline{AD} = \overline{DC}$이므로
$\angle ABD = \angle DAG$

이므로 △ADB∽△DGA (AA 닮음)
따라서 $\overline{AB} : \overline{DA} = \overline{AD} : \overline{DG}$이므로
$16 : 4 = 4 : \overline{DG}$ $\therefore \overline{DG} = 1$
$\therefore \overline{OG} = \overline{OD} - \overline{DG} = 8 - 1 = 7$ • 40% 배점
해결 과정 ② 직각삼각형 AOG에서
$\overline{AG} = \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{15}$
$\therefore \overline{AC} = 2\overline{AG} = 2\sqrt{15}$ • 20% 배점
답 구하기 직각삼각형 ABC에서
$\overline{BC} = \sqrt{16^2 - (2\sqrt{15})^2} = 14$ • 20% 배점
답 14

다른풀이 △AOG와 △ABC에서
∠A는 공통, $\angle AGO = \angle ACB = 90°$
이므로 △AOG∽△ABC (AA 닮음)
따라서 $\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{OG} : \overline{BC}$이므로
$8 : 16 = 7 : \overline{BC}$ $\therefore \overline{BC} = 14$

461 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BQ}$를 그으면 ∠ACB와 ∠AQB는 $\widehat{AB}$에 대한 원주각이므로



$\angle ACB = \angle AQB$
$\overline{AQ}$는 원 O의 지름이므로
$\angle ABQ = 90°$ • 30% 배점
해결 과정 △AHC와 △ABQ에서
$\angle ACH = \angle AQB$, $\angle AHC = \angle ABQ = 90°$
이므로 △AHC∽△ABQ (AA 닮음)
즉 $\overline{AH} : \overline{AB} = \overline{AC} : \overline{AQ}$이므로
$4 : 8 = 6 : \overline{AQ}$ $\therefore \overline{AQ} = 12$ • 50% 배점
답 구하기 따라서 원 O의 반지름의 길이가 6이므로 넓이는
$\pi \times 6^2 = 36\pi$ • 20% 배점
답 36π

462 전략 반원에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용한다.

풀이 $l_1^{\,2}+l_2^{\,2}+l_3^{\,2}+\cdots+l_{16}^{\,2}=l$이라 하면

$l=(l_1^{\,2}+l_{15}^{\,2})+(l_2^{\,2}+l_{14}^{\,2})$
$\quad+\cdots+(l_7^{\,2}+l_9^{\,2})+l_8^{\,2}+l_{16}^{\,2}$

$\angle \mathrm{P_0OP_1}=\angle \mathrm{P_1OP_2}=\cdots=\angle \mathrm{P_{15}OP_{16}}$에서 중심각의 크기가 같으면 현의 길이가 같으므로

$l_{15}=\overline{\mathrm{P_1P_{16}}},\ l_{14}=\overline{\mathrm{P_2P_{16}}},\ \cdots,\ l_9=\overline{\mathrm{P_7P_{16}}}$

따라서

$l=(l_1^{\,2}+\overline{\mathrm{P_1P_{16}}}^2)+(l_2^{\,2}+\overline{\mathrm{P_2P_{16}}}^2)$
$\quad+\cdots+(l_7^{\,2}+\overline{\mathrm{P_7P_{16}}}^2)+l_8^{\,2}+l_{16}^{\,2}$

에서 $l_1^{\,2}+\overline{\mathrm{P_1P_{16}}}^2,\ l_2^{\,2}+\overline{\mathrm{P_2P_{16}}}^2,\ \cdots,\ l_7^{\,2}+\overline{\mathrm{P_7P_{16}}}^2$의 값은 각각 직각삼각형 $\mathrm{P_0P_1P_{16}},\ \mathrm{P_0P_2P_{16}},\ \cdots,\ \mathrm{P_0P_7P_{16}}$의 빗변의 길이의 제곱과 같고 이 직각삼각형들의 빗변은 모두 원 O의 지름이다.

$\therefore\ l=\overline{\mathrm{P_{16}P_0}}^2+\overline{\mathrm{P_{16}P_0}}^2+\cdots+\overline{\mathrm{P_{16}P_0}}^2+l_8^{\,2}+l_{16}^{\,2}$
$\quad=7\times2^2+(\sqrt{2})^2+2^2=34$

답 ③

$\triangle \mathrm{P_0P_8P_{16}}$은
$\angle \mathrm{P_0P_8P_{16}}=90°$,
$\overline{\mathrm{P_0P_8}}=\overline{\mathrm{P_8P_{16}}}$
인 직각이등변삼각형이므로
$l_8:2=1:\sqrt{2}$
$\therefore\ l_8=\sqrt{2}$

463 전략 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 서로 같음을 이용한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{EA}}$이므로

$\widehat{\mathrm{AB}}=\widehat{\mathrm{BC}}=\widehat{\mathrm{CD}}=\widehat{\mathrm{DE}}=\widehat{\mathrm{EA}}$

따라서 $\widehat{\mathrm{AB}}$의 길이는 원주의 $\frac{1}{5}$이므로

$\angle \mathrm{ACB}=180°\times\frac{1}{5}=36°$

또 $\widehat{\mathrm{CDE}}$의 길이는 원주의 $\frac{2}{5}$이므로

$\angle \mathrm{CBF}=180°\times\frac{2}{5}=72°$

$\triangle \mathrm{BCF}$에서 $\angle \mathrm{CFB}=180°-(36°+72°)=72°$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CF}}$

두 내각의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형이다.

$\triangle \mathrm{ABC}$와 $\triangle \mathrm{AFB}$에서

$\angle \mathrm{BAC}$는 공통, $\angle \mathrm{ACB}=\angle \mathrm{ABF}$

이므로 $\triangle \mathrm{ABC}\backsim\triangle \mathrm{AFB}$ (AA 닮음)

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{FC}}=x$ cm라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{AB}}$이므로

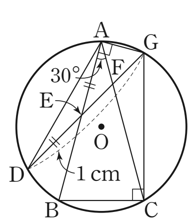
$x:2=(2+x):x,\quad x^2=4+2x$

$x^2-2x-4=0\quad \therefore\ x=1+\sqrt{5}\ (\because x>0)$

답 $(1+\sqrt{5})$ cm

464 전략 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 서로 같음을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AD}}$를 그으면



$\angle \mathrm{DAB}=\angle \mathrm{ADG}$
$\quad=180°\times\frac{1}{12}$
$\quad=15°$

이므로 $\triangle \mathrm{EAD}$는 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{ED}}$인 이등변삼각형이다.

이때 $\triangle \mathrm{ABC}$에서

$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\times(180°-30°)=75°$

이고, $\angle \mathrm{ACG}=\angle \mathrm{ADG}=15°$이므로

$\angle \mathrm{BCG}=\angle \mathrm{ACB}+\angle \mathrm{ACG}$
$\quad=75°+15°=90°$

이때 □ABCG가 원 O에 내접하므로

$\angle \mathrm{BAG}=180°-\angle \mathrm{BCG}=180°-90°=90°$

또 $\triangle \mathrm{ADE}$에서

$\angle \mathrm{AEG}=\angle \mathrm{EAD}+\angle \mathrm{EDA}$
$\quad=15°+15°=30°$

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{ED}}=x$ cm라 하면 $\overline{\mathrm{EG}}=(1-x)$ cm이므로

$\triangle \mathrm{AEG}$에서

$\cos 30°=\frac{\overline{\mathrm{AE}}}{\overline{\mathrm{EG}}}=\frac{x}{1-x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x=\sqrt{3}(1-x),\quad (2+\sqrt{3})x=\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$ (cm)

답 ④

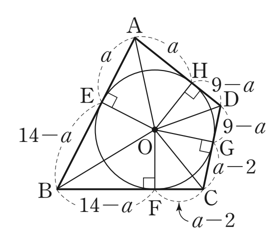
465 [문제 해결 길잡이]

❶ $\overline{\mathrm{AH}}=a$라 하고 □ABCD의 각 꼭짓점에서 내접원 O에 그은 접선의 길이를 각각 a로 나타낸다.
❷ $\triangle \mathrm{AEO}\backsim\triangle \mathrm{OFC}$임을 이용하여 r와 a의 관계식을 구한다.
❸ $\triangle \mathrm{BFO}\backsim\triangle \mathrm{OGD}$임을 이용하여 r와 a의 관계식을 구한다.
❹ ❷, ❸의 식을 연립하여 r의 값을 구한다.

풀이 □ABCD는 원에 내접하므로

$\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{C}=180°$

오른쪽 그림과 같이 사각형 ABCD와 내접원 O의 접점을 각각 E, F, G, H라 하고 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AH}}=a$라 하면



$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BE}}=14-a$
$\overline{\mathrm{DG}}=\overline{\mathrm{DH}}=9-a$
$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{CG}}=a-2$ ❶

$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{CG}}$
$\quad=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{BF}}$
$\quad=12-(14-a)$
$\quad=a-2$

$\triangle \mathrm{AEO}$와 $\triangle \mathrm{OFC}$에서

$\angle \mathrm{AEO}=\angle \mathrm{OFC}=90°$,

$\angle \mathrm{EAO}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{A}=\frac{1}{2}(180°-\angle \mathrm{C})$
$\quad=90°-\frac{1}{2}\angle \mathrm{C}=90°-\angle \mathrm{OCF}=\angle \mathrm{FOC}$

이므로 $\triangle \mathrm{AEO}\backsim\triangle \mathrm{OFC}$ (AA 닮음)

이때 내접원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{EO}}:\overline{\mathrm{FC}}$에서

$a:r=r:(a-2)$

$\therefore\ r^2=a(a-2)$ …… ㉠ ❷

같은 방법으로 하면 $\triangle \mathrm{BFO}\backsim\triangle \mathrm{OGD}$ (AA 닮음)이므로 $\overline{\mathrm{BF}}:\overline{\mathrm{OG}}=\overline{\mathrm{FO}}:\overline{\mathrm{GD}}$에서

$(14-a):r=r:(9-a)$

$\therefore\ r^2=(14-a)(9-a)$ …… ㉡ ❸

㉠, ㉡에서 $a(a-2)=(14-a)(9-a)$

$21a=126\quad \therefore\ a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $r^2=24$

$\therefore\ r=2\sqrt{6}\ (\because r>0)$

따라서 내접원 O의 반지름의 길이는 $2\sqrt{6}$이다. ❹

답 $2\sqrt{6}$

Ⅷ 원의 성질

18 | 원주각의 활용

개념&기출유형

본책 94~97쪽

466 ① $\angle BAC \neq \angle BDC$
② $\angle ADB \neq \angle ACB$
③ $\angle ABD=80°-35°=45°$이므로
$\angle ABD \neq \angle ACD$
④ $\angle BAC=180°-(80°+30°)=70°$이므로
$\angle BAC=\angle BDC$
⑤ $\angle BDC=90°-30°=60°$이므로
$\angle BAC=\angle BDC$
따라서 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있는 것은 ④, ⑤이다. 답 ④, ⑤

원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

네 점이 한 원 위에 있는지 알아보려면 한 직선에 대하여 같은 쪽에 있는 두 점으로 만들어진 각의 크기가 같은지 확인한다.

467 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로
$\angle x=\angle DBC=180°-(95°+60°)=25°$
$\triangle ABP$에서 $\angle ABP=95°-55°=40°$이므로
$\angle y=\angle ABD=40°$
$\therefore \angle y-\angle x=40°-25°=15°$ 답 15°

468 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로
$\angle x=\angle ACB=25°$
$\triangle PBD$에서 $\angle y=50°+25°=75°$
$\therefore \angle x+\angle y=25°+75°=100°$ 답 100°

469 ③ $\angle DAB=\angle DCB$이지만
$\angle DAB+\angle DCB \neq 180°$이면 □ABCD가 원에 내접하지 않는다. 답 ③

470 (ㄷ) 직사각형의 네 내각의 크기는 모두 90°이므로 대각의 크기의 합이 180°이다.
(ㅁ) 정사각형의 네 내각의 크기는 모두 90°이므로 대각의 크기의 합이 180°이다.
(ㅂ) 등변사다리꼴의 아랫변의 양 끝 각의 크기가 서로 같고 윗변의 양 끝 각의 크기가 서로 같으므로 대각의 크기의 합이 180°이다.
이상에서 항상 원에 내접하는 사각형은 (ㄷ), (ㅁ), (ㅂ)의 3개이다. 답 ③

471 $\angle ACB : \angle BAC : \angle ABC$
$=\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA}=8:4:3$
이므로 $\angle BAC=180° \times \dfrac{4}{8+4+3}=48°$
$\therefore \angle BCT=\angle BAC=48°$ 답 48°

한 원에서 호의 길이는 그 호에 대한 원주각의 크기에 정비례한다.

472 $\angle EDC=\angle EFD=63°$
$\triangle CED$는 $\overline{CD}=\overline{CE}$인 이등변삼각형이므로
$\angle ECD=180°-2\times 63°=54°$
따라서 $\triangle ABC$에서
$\angle ABC=180°-(84°+54°)=42°$ 답 ②

473 $\angle ATP=\angle ACT=100°$이므로 $\triangle APT$에서
$\angle APT=180°-(100°+40°)=40°$
$\therefore \angle BPT=\angle APT=40°$ 답 ③

다른풀이 $\angle ABT+\angle ACT=180°$이므로
$\angle ABT=180°-\angle ACT$
$=180°-100°=80°$
$\angle BTP=\angle BAT=40°$이므로 $\triangle BPT$에서
$\angle BPT=\angle ABT-\angle BTP$
$=80°-40°=40°$

474 $\overline{CP}=x$ cm라 하면 $\overline{DP}=14-x$ (cm)
$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로 $8\times5=x(14-x)$
$x^2-14x+40=0$, $(x-4)(x-10)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=10$
그런데 $\overline{CP}<\overline{DP}$이므로 $\overline{CP}=4$ cm 답 4 cm

$\overline{CP}=4$ cm, $\overline{DP}=10$ cm 또는 $\overline{CP}=10$ cm, $\overline{DP}=4$ cm

475 $\overline{CP}=x$라 하면 $\overline{CQ}=2x$, $\overline{DQ}=x$
$\overline{QA}\times\overline{QB}=\overline{QC}\times\overline{QD}$이므로 $4\times9=2x\times x$
$x^2=18$ $\therefore x=3\sqrt{2}$ ($\because x>0$) 답 ②

476 $\overline{PB} : \overline{PD}=3:2$이므로
$(2+x) : (y+7)=3:2$
$\therefore 4+2x=3y+21$ ······ ㉠
$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로
$2\times(2+x)=y(y+7)$
$\therefore 4+2x=y^2+7y$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서
$3y+21=y^2+7y$, $y^2+4y-21=0$
$(y+7)(y-3)=0$ $\therefore y=3$ ($\because y>0$)
$y=3$을 ㉠에 대입하면 $x=13$
$\therefore x-y=10$ 답 10

477 원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면
$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로
$6\times(2r-6)=12\times12$
$12r=180$ $\therefore r=15$ 답 ③

478 $\overline{OP}=x$라 하면 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로
$(10+x)(10-x)=7\times12$
$x^2=16$ $\therefore x=4$ ($\because x>0$) 답 4

479 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면
$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로
$3\times8=(6-r)(6+r)$
$r^2=12$ $\therefore r=2\sqrt{3}$ ($\because r>0$)
따라서 원 O의 둘레의 길이는
$2\pi\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\pi$ 답 $4\sqrt{3}\pi$

480 원 O에서 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PE}\times\overline{PF}$이므로
$\overline{PA}\times2=4\times6$ $\therefore \overline{PA}=12$
원 O′에서 $\overline{PC}\times\overline{PD}=\overline{PE}\times\overline{PF}$이므로
$3\times\overline{PD}=4\times6$ $\therefore \overline{PD}=8$
$\therefore \overline{PA}+\overline{PD}=20$ 답 20

481 $\overline{PC}=x$라 하면 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로
$(6+x)\times 3=x\times(3+9)$
$18+3x=12x \qquad \therefore x=2$
답 2

482 $\overline{PA}=x$라 하면 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로
$x(x+20)=6\times 16$
$x^2+20x-96=0, \qquad (x+24)(x-4)=0$
$\therefore x=4\ (\because x>0)$
답 4

483 $\angle ATP=\angle ABT=\angle APT$이므로 $\triangle APT$는 $\overline{AP}=\overline{AT}=4$인 이등변삼각형이다.
$\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$이므로
$\overline{PT}^2=4\times 12=48$
$\therefore \overline{PT}=4\sqrt{3}\ (\because \overline{PT}>0)$
답 ④

484 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로
$5\times 8=x(x+6)$
$x^2+6x-40=0, \qquad (x+10)(x-4)=0$
$\therefore x=4\ (\because x>0)$
$\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$이므로 $\qquad y^2=5\times 8=40$
$\therefore x^2+y^2=4^2+40=56$
답 56

485 $\overline{AT}^2=\overline{AO}\times\overline{AB}$이므로
$\overline{AT}^2=4\times 8=32$
$\therefore \overline{AT}=4\sqrt{2}\,(\text{cm})\,(\because \overline{AT}>0)$
이때 $\angle ATO'=90°$이고 $\overline{TO'}=\frac{1}{2}\overline{AO}=2\,(\text{cm})$이므로

원의 접선은 그 접점을 지나는 원의 반지름과 서로 수직이다.

$\triangle AO'T=\frac{1}{2}\times 2\times 4\sqrt{2}=4\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$
답 ①

486 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$이므로
$x^2=3\times(3+y) \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$\overline{PT'}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$이므로
$(3\sqrt{2})^2=3\times(3+y) \qquad \therefore y=3$
$y=3$을 ㉠에 대입하면 $\qquad x=3\sqrt{2}\ (\because x>0)$

$x^2=3\times(3+3)=18$
$\therefore x=3\sqrt{2}$
$(\because x>0)$

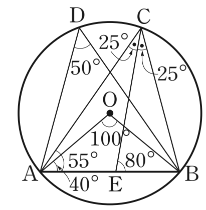
$\therefore xy=9\sqrt{2}$
답 ⑤

487 $\overline{TT'}=12\,\text{cm}$이므로 $\qquad \overline{PT}=\overline{PT'}=6\,\text{cm}$
$\overline{PA}=x\,\text{cm}$라 하면 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$이므로
$6^2=x(x+9), \qquad x^2+9x-36=0$
$(x+12)(x-3)=0 \qquad \therefore x=3\ (\because x>0)$
답 3 cm

488 $\overline{PC}=x$라 하면 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로
$5\times 12=x(x+4), \qquad x^2+4x-60=0$
$(x+10)(x-6)=0 \qquad \therefore x=6\ (\because x>0)$
답 ③

내신 만점 도전하기
본책 98~101쪽

489 전략 $\overline{OB}$를 긋고 $\angle CAB$, $\angle OAB$의 크기를 구한다.



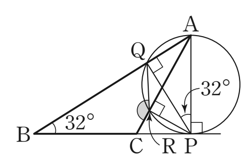
풀이 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로
$\angle ACB=\angle ADB=50°$
$\therefore \angle ACE=\angle BCE$
$=25°$
또 $\angle AOB=2\angle ACB=100°$이고 $\triangle OAB$는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로
$\angle OAB=\frac{1}{2}\times(180°-100°)=40°$
$\triangle CAE$에서 $\qquad \angle CAE=80°-25°=55°$
$\therefore \angle CAO=\angle CAE-\angle OAB$
$=55°-40°=15°$
답 ②

490 전략 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 이용한다.
풀이 $\angle BEC=\angle BDC$이므로 네 점 B, C, D, E는 한 원 위에 있다.
이때 $\angle BEC=90°$이고 $\overline{BM}=\overline{CM}$이므로 점 M은 이 원의 중심이다.

직각삼각형의 빗변의 중점은 외심이다.

$\triangle ABD$에서 $\qquad \angle ABD=90°-70°=20°$
$\therefore \angle EMD=2\angle EBD=2\times 20°=40°$
답 ③

491 전략 $\angle AQP=\angle ARP$이므로 네 점 A, Q, R, P가 한 원 위에 있음을 이용한다.

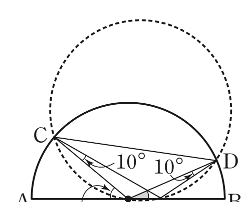


풀이 $\angle AQP=\angle ARP$이므로 네 점 A, Q, R, P는 한 원 위에 있다.
$\therefore \angle ARQ=\angle APQ$

호 AQ에 대한 원주각

$\triangle AQP \backsim \triangle APB$ (AA 닮음)이므로
$\angle APQ=\angle ABP=32°$
$\therefore \angle ARQ=\angle APQ=32°$
$\therefore \angle QRC=180°-\angle ARQ$
$=180°-32°=148°$
답 148°

492 해결 과정 ① $\triangle COP$에서



$\angle CPO=40°-10°$
$=30°$
$\angle OCP=\angle ODP$이므로 네 점 C, O, P, D는 한 원 위에 있다.
$\therefore \angle CDO=\angle CPO=30°$ • 50% 배점

호 CO에 대한 원주각

해결 과정 ② $\triangle COD$는 $\overline{OC}=\overline{OD}$인 이등변삼각형이므로
$\angle COD=180°-2\times 30°=120°$ • 30% 배점
답 구하기 $\therefore \angle DOB=180°-(\angle AOC+\angle COD)$
$=180°-(40°+120°)$
$=20°$ • 20% 배점
답 20°

493 전략 한 외각의 크기가 그 내대각의 크기와 같은 사각형은 원에 내접함을 이용한다.

풀이 $\triangle ABP$에서

$\angle ABP=180°-(75°+33°)=72°$

$\angle ADC=25°+47°=72°$이므로

$\angle ABP=\angle ADC$

따라서 $\square ABCD$는 원에 내접하므로

$\angle BAC=\angle BDC=47°$

$\therefore\ \angle DAC=180°-(75°+47°)=58°$

$\triangle AED$에서

$\angle DEC=25°+58°=83°$ 답 ②

494 전략 사각형이 원에 내접하기 위한 조건을 생각한다.

풀이 (i) 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°인 경우

$\square ADHF$, $\square BEHD$, $\square CFHE$

(ii) 한 직선에 대하여 같은 쪽에 있는 두 점으로 만들어진 각의 크기가 같은 경우

$\square ABEF$, $\square BCFD$, $\square CADE$

(i), (ii)에서 구하는 사각형의 개수는 6이다. 답 6

495 전략 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

풀이 $\triangle TBP$는 $\overline{TB}=\overline{TP}$인 이등변삼각형이므로

$\angle TBA=\angle APT=38°$

이때 $\overline{PT}$가 원의 접선이므로

$\angle ATP=\angle TBA=38°$

따라서 $\triangle TAP$에서

$\angle BAT=38°+38°=76°$ 답 ②

496 전략 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

풀이 $\angle BAT=\angle BCA=54°$

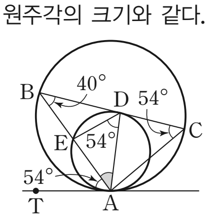
이므로

$\angle EDA=\angle EAT=54°$

$\angle EAD=\angle x$라 하면

$\angle BDE=\angle x$이므로 $\triangle BAD$

에서



$40°+\angle x+(54°+\angle x)=180°$

$2\angle x=86°$ $\quad\therefore\ \angle x=43°$ 답 ④

497 해결 과정 $\angle BTQ=\angle BAT=40°$

이때 $\angle PTD=\angle BTQ=40°$(맞꼭지각)이므로

$\angle TCD=\angle PTD=40°$ • 70% 배점

답 구하기 따라서 $\triangle DTC$에서

$\angle DTC=180°-(55°+40°)=85°$ • 30% 배점

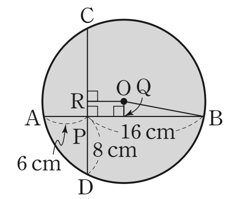
답 85°

498 전략 원에서 두 현의 수직이등분선의 교점은 원의 중심이다.

풀이 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로

$6\times16=\overline{PC}\times8$ $\quad\therefore\ \overline{PC}=12\,(cm)$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 두 현 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면



원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

$\overline{QB}=\dfrac{1}{2}\times(6+16)$

$=11\,(cm)$

$\overline{OQ}=\overline{RP}=\dfrac{1}{2}\times(8+12)-8=2\,(cm)$

직각삼각형 OQB에서

$\overline{OB}=\sqrt{2^2+11^2}=5\sqrt{5}\,(cm)$

따라서 원 O의 넓이는

$\pi\times(5\sqrt{5})^2=125\pi\,(cm^2)$ 답 ④

499 해결 과정 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로

$3\times\overline{PB}=2\times6$ $\quad\therefore\ \overline{PB}=4$ • 40% 배점

답 구하기 $\overline{BQ}=x$라 하면 $\overline{QB}\times\overline{QA}=\overline{QE}\times\overline{QD}$이므로

$x(x+7)=3\times(3+3)$, $\quad x^2+7x-18=0$

$(x+9)(x-2)=0$

$\therefore\ x=2\ (\because\ x>0)$ • 60% 배점

답 2

500 전략 점 P는 두 현 AB, CD의 교점이므로 $\overline{AP}\times\overline{BP}=\overline{CP}\times\overline{DP}$이다.

풀이 직각삼각형 PBD에서

$\overline{PB}=\sqrt{(6\sqrt{5})^2-6^2}=12$

원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{AP}=2r-12$

$\overline{AP}\times\overline{BP}=\overline{CP}\times\overline{DP}$이므로

$\overline{CP}=\overline{DP}=6$

$(2r-12)\times12=6\times6$, $\quad 2r-12=3$

$2r=15$ $\quad\therefore\ r=\dfrac{15}{2}$

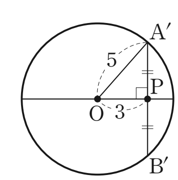
따라서 원 O의 둘레의 길이는

$2\pi\times\dfrac{15}{2}=15\pi$ 답 15π

501 전략 원에서 길이가 가장 긴 현은 지름이다.

풀이 점 P를 지나는 현 중에서 길이가 가장 긴 것은 지름일 때이므로 그 길이는 10이다.

또 점 P를 지나는 현 중에서 길이가 가장 짧은 것은 [그림 1]과 같이 현이 $\overline{OP}$에 수직일 때이므로



[그림 1]

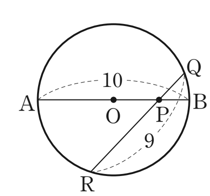
$\overline{A'P}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\therefore\ \overline{A'B'}=8$

따라서 정수인 현의 길이는 8, 9, 10이므로

$\overline{QR}=\overline{PQ}+\overline{PR}=9$

이때 [그림 2]와 같이 점 P를 지나는 원 O의 지름을 AB라 하면



[그림 2]

$\overline{PQ}\times\overline{PR}=\overline{PA}\times\overline{PB}$

이므로

$(5+3)(5-3)$

$\overline{PQ}\times\overline{PR}=8\times2=16$

$\overline{PQ}=a$, $\overline{PR}=b$라 하면

$a+b=9,\ ab=16$이므로

$|a-b|=\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$

$=\sqrt{9^2-4\times16}=\sqrt{17}$ 답 ③

502 해결 과정 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면 직각삼각형 DPO에서

$17^2=(7+r)^2+r^2,\qquad r^2+7r-120=0$

$(r+15)(r-8)=0$

$\therefore r=8\ (\because r>0)$ • 40% 배점

답 구하기 $\overline{CD}=x$라 하면 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로

$7\times(7+16)=(17-x)\times17$

$161=289-17x,\qquad 17x=128$

$\therefore x=\dfrac{128}{17}$ • 60% 배점

답 $\dfrac{128}{17}$

503 전략 점 B는 두 현 AC, DE의 교점이므로 $\overline{AB}\times\overline{BC}=\overline{BD}\times\overline{BE}$이다.

풀이 $\overline{BC}=\overline{AB}=4$

점 B에서 서로 외접하는 두 원의 반지름의 길이를 각각 $a,\ b$라 하면 $\overline{AB}\times\overline{BC}=\overline{BD}\times\overline{BE}$이므로

$4^2=2a\times2b\qquad \therefore ab=4$

따라서 두 원의 넓이의 곱은

$\pi a^2\times\pi b^2=\pi^2(ab)^2=16\pi^2$ 답 ④

$\overline{DE}$는 가장 큰 원의 지름이고, $\overline{AC}\perp\overline{DE}$이므로 $\overline{DE}$는 $\overline{AC}$를 이등분한다.

504 전략 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 이등분한다.

풀이 두 원 O, O′의 반지름의 길이를 각각 $r,\ r'$이라 하면 원 O′에서 $\overline{O'O}\perp\overline{DO}$이므로

$\overline{AO}\times\overline{OE}=\overline{DO}^2,\qquad r(r-5)=(r-3)^2$

$r^2-5r=r^2-6r+9\qquad \therefore r=9$

또 $2r'=2r-5$이므로

$r'=r-\dfrac{5}{2}=9-\dfrac{5}{2}=\dfrac{13}{2}$

따라서 두 원의 둘레의 길이의 합은

$2\pi\times9+2\pi\times\dfrac{13}{2}=31\pi$ 답 ⑤

505 전략 $\overline{PE}\times\overline{PB}=\overline{PD}\times\overline{PF},\ \overline{PE}\times\overline{PA}=\overline{PF}\times\overline{PC}$임을 이용한다.

풀이 원 O′에서 $\overline{PE}\times\overline{PB}=\overline{PD}\times\overline{PF}$이므로

$\overline{PE}\times3=2\times\overline{PF}$ …… ㉠

원 O에서 $\overline{PE}\times\overline{PA}=\overline{PF}\times\overline{PC}$이므로

$\overline{PE}\times\overline{PA}=\overline{PF}\times10$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{3}{\overline{PA}}=\dfrac{1}{5}$

$\therefore \overline{PA}=15\ (\text{cm})$ 답 ②

506 해결 과정 ① $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로

$\overline{PA}\times(\overline{PA}+8)=6\times(6+2)$

$\overline{PA}^2+8\overline{PA}-48=0$

$(\overline{PA}+12)(\overline{PA}-4)=0$

$\therefore \overline{PA}=4\ (\because \overline{PA}>0)$ • 40% 배점

해결 과정 ② $\overline{PA}:\overline{PG}=4:3$이므로

$4:\overline{PG}=4:3\qquad \therefore \overline{PG}=3$ • 20% 배점

$\overline{PG}\times\overline{PH}=\overline{PE}\times\overline{PF}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

답 구하기 $\overline{PG}\times\overline{PH}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로

$3\times(3+\overline{GH})=6\times(6+2)$

$3+\overline{GH}=16\qquad \therefore \overline{GH}=13$ • 40% 배점

답 13

원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같다.

507 해결 과정 ① $\overline{PQ}=\overline{PT}=8\ (\text{cm})$ • 30% 배점

해결 과정 ② $\overline{AQ}=x\ \text{cm}$라 하면 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$이므로

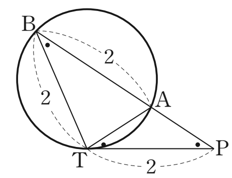
$8^2=(8-x)(8+4)$ • 50% 배점

답 구하기 $64=96-12x\qquad \therefore x=\dfrac{8}{3}$

$\therefore \overline{AQ}=\dfrac{8}{3}\ \text{cm}$ • 20% 배점

답 $\dfrac{8}{3}\ \text{cm}$

508 전략 접선과 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같음을 이용한다.



풀이 $\angle ATP=\angle ABT$이고 $\triangle BTP$는 $\overline{PT}=\overline{BT}$인 이등변삼각형이므로

$\angle TPA=\angle ABT$

$\therefore \angle ATP=\angle TPA$

따라서 $\triangle ATP$에서 $\overline{AT}=\overline{PA}$

이때 $\overline{PA}=x$라 하면 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$이므로

$2^2=x(x+2),\qquad x^2+2x-4=0$

$\therefore x=-1+\sqrt{5}\ (\because x>0)$

$\therefore \overline{AT}=\overline{PA}=-1+\sqrt{5}$ 답 ①

509 문제 이해 $\angle ACB=90°$이므로 $\triangle ABC$에서

$\overline{BC}=\sqrt{10^2-8^2}=6$ • 10% 배점

해결 과정 ① $\overline{BD}=x,\ \overline{CD}=y$라 하면 $\overline{CD}^2=\overline{AD}\times\overline{BD}$이므로

$y^2=x(x+10)$ …… ㉠ • 30% 배점

해결 과정 ② $\triangle ADC$와 $\triangle CDB$에서

$\angle CAD=\angle BCD$, $\angle D$는 공통

이므로 $\triangle ADC\backsim\triangle CDB$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{AC}:\overline{CB}=\overline{CD}:\overline{BD}$이므로

$8:6=y:x,\qquad 8x=6y$

$\therefore x=\dfrac{3}{4}y$ …… ㉡ • 30% 배점

답 구하기 ㉡을 ㉠에 대입하면

$y^2=\dfrac{3}{4}y\left(\dfrac{3}{4}y+10\right),\qquad 7y^2-120y=0$

$\therefore y=\dfrac{120}{7}\ (\because y\neq0)$ • 30% 배점

답 $\dfrac{120}{7}$

510 전략 $\overline{BC}^2=\overline{CP}\times\overline{CA}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로

$\angle APB=90°\qquad \therefore \angle BPC=90°$

$\overline{QB}=\overline{QP}$이므로 $\angle QBP=\angle QPB$

Ⅷ 원의 성질

$\therefore \angle QPC = 90° - \angle QPB$

$= 90° - \angle QBP = \angle ABP$

이때 $\triangle ABC \backsim \triangle APB$(AA 닮음)이므로

$\angle ACB = \angle ABP$

따라서 $\angle QPC = \angle ACB$이므로

$\overline{QC} = \overline{QP} = 2\sqrt{11}$

$\overline{PC} = x$라 하면 $\overline{BC}^2 = \overline{CP} \times \overline{CA}$이므로

$(4\sqrt{11})^2 = x(x+5)$

$\overline{BC} = \overline{BQ} + \overline{QC} = 2\sqrt{11} + 2\sqrt{11} = 4\sqrt{11}$

$x^2 + 5x - 176 = 0, \quad (x+16)(x-11) = 0$

$\therefore x = 11$ ($\because x > 0$) 답 11

511 전략 $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$임을 이용한다.

풀이 ① $\overline{PT}^2 = \overline{PC} \times \overline{PD}$이므로

$\overline{PT}^2 = 6 \times (6+14) = 120$

$\therefore \overline{PT} = 2\sqrt{30}$ ($\because \overline{PT} > 0$)

② $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$이므로 $\quad \overline{PT}^2 = 8 \times (8 + \overline{AB})$

$120 = 8 \times (8 + \overline{AB}) \qquad \therefore \overline{AB} = 7$

③ $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$이므로 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

원 O에서 $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$
원 O′에서 $\overline{PT}^2 = \overline{PC} \times \overline{PD}$
$\therefore \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

⑤ 원 O에서 접선과 할선 사이의 관계에 의하여

$\angle PTA = \angle TBA$ 답 ④

참고 ④ ③에 의하여 $\angle BAD = \angle BCD$이다.

512 전략 $\overline{PB} \times \overline{PA} = \overline{PC}^2 = \overline{PD} \times \overline{PE} = \overline{PF}^2$임을 이용한다.

풀이 원 O_1의 넓이가 $36\pi = 6^2 \times \pi$이므로 반지름의 길이는 6이다.

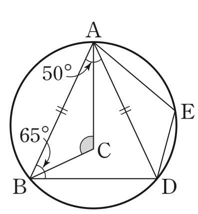
$\overline{PB} \times \overline{PA} = \overline{PC}^2 = \overline{PD} \times \overline{PE} = \overline{PF}^2$이므로

$3 \times (3+12) = \overline{PF}^2$

$\therefore \overline{PF} = 3\sqrt{5}$ ($\because \overline{PF} > 0$) 답 ②

내신 만점 굳히기 본책 102쪽

513 해결 과정 ① $\triangle ABC$와 $\triangle ADE$가 합동이므로



$\overline{AB} = \overline{AD}$

$\therefore \angle ABD$

$= \frac{1}{2} \times (180° - 50°)$

$= 65°$ • 30% 배점

해결 과정 ② 네 점 A, B, D, E가 한 원 위에 있으므로 □ABDE에서

□ABDE가 원에 내접한다.

$\angle ABD + \angle AED = 180°$

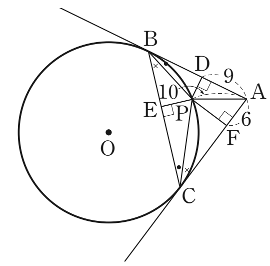
$65° + \angle AED = 180°$

$\therefore \angle AED = 115°$ • 50% 배점

답 구하기 $\therefore \angle ACB = \angle AED = 115°$ • 20% 배점

답 115°

514 전략 닮음인 삼각형을 찾아 닮음비를 이용한다.



풀이 $\overline{AB}$는 원 O의 접선이므로

$\angle BCP = \angle ABP$

$\overline{AC}$는 원 O의 접선이므로

$\angle CBP = \angle PCA$

$\triangle BPD$와 $\triangle CPE$에서

$\angle DBP = \angle ECP$,

$\angle BDP = \angle CEP = 90°$

이므로 $\quad \triangle BPD \backsim \triangle CPE$ (AA 닮음)

$\therefore \overline{BP} : \overline{CP} = \overline{DP} : \overline{EP}$ ...... ㉠

$\triangle BEP$와 $\triangle CFP$에서

$\angle PBE = \angle PCF$,

$\angle BEP = \angle CFP = 90°$

이므로 $\quad \triangle BEP \backsim \triangle CFP$ (AA 닮음)

$\therefore \overline{BP} : \overline{CP} = \overline{EP} : \overline{FP}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{DP} : \overline{EP} = \overline{EP} : \overline{FP}$이므로

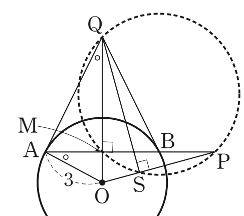
$\overline{EP}^2 = \overline{DP} \times \overline{FP}$

$= \sqrt{10^2 - 9^2} \times \sqrt{10^2 - 6^2}$

$= \sqrt{19} \times 8 = 8\sqrt{19}$ 답 $8\sqrt{19}$

$\triangle ADP$에서 $\overline{DP} = \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{AD}^2}$
$\triangle APF$에서 $\overline{FP} = \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{AF}^2}$

515 문제 이해 $\overline{OQ} \perp \overline{AB}$이므로



$\angle QMP = \angle QSP = 90°$

즉 네 점 S, P, Q, M은 한 원 위의 점이므로

$\overline{OS} \times \overline{OP} = \overline{OM} \times \overline{OQ}$

...... ㉠ • 40% 배점

해결 과정 $\triangle AMO$와 $\triangle QAO$에서

$\angle AMO = \angle QAO = 90°$, $\angle AOM$은 공통

이므로 $\quad \triangle AMO \backsim \triangle QAO$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{OM} : \overline{OA} = \overline{OA} : \overline{OQ}$이므로

$\overline{OM} \times \overline{OQ} = \overline{OA}^2 = 9$ ...... ㉡ • 40% 배점

답 구하기 ㉠, ㉡에서 $\quad \overline{OS} \times \overline{OP} = 9$ • 20% 배점

답 9

516 전략 닮음인 삼각형을 찾아 닮음비를 이용한다.

풀이 $\overline{AP}^2 = \overline{AO} \times \overline{AB}$이므로

$\overline{AP}^2 = 6 \times 12 = 72 \qquad \therefore \overline{AP} = 6\sqrt{2}$ ($\because \overline{AP} > 0$)

$\triangle APO'$과 $\triangle AQB$에서

$\angle APO' = \angle AQB = 90°$, $\angle A$는 공통

이므로 $\quad \triangle APO' \backsim \triangle AQB$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{AP} : \overline{AQ} = \overline{AO'} : \overline{AB}$이므로

$\overline{AO'} = \overline{AO} + \overline{OO'} = 6 + 3 = 9$

$6\sqrt{2} : \overline{AQ} = 9 : 12$

$9\overline{AQ} = 72\sqrt{2} \qquad \therefore \overline{AQ} = 8\sqrt{2}$

또 $\overline{PO'} : \overline{QB} = \overline{AO'} : \overline{AB}$이므로

$3 : \overline{QB} = 9 : 12$

$9\overline{QB} = 36 \qquad \therefore \overline{QB} = 4$

$\overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP}$

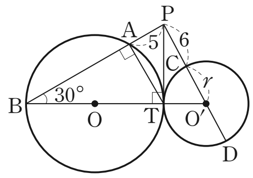
즉 $\overline{PQ} = 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, $\overline{QB} = 4$이므로 직각삼각형 PQB에서

$\overline{PB} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$ 답 ③

517 전략 $\overline{PO'}$의 연장선과 원 O′의 교점을 D라 하면 $\overline{PT}^2=\overline{PC}\times\overline{PD}$임을 이용한다.

풀이 △BTP에서

$\angle BPT=90°-30°$
$=60°$



$\overline{AT}$를 그으면

$\angle BAT=90°$

이므로 직각삼각형 ATP에서

$\overline{PT}=\dfrac{5}{\cos 60°}=10$

$\overline{PO'}$의 연장선과 원 O′의 교점을 D, 원 O′의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{PT}^2=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로

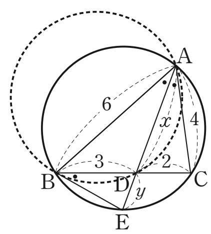
$10^2=6\times(6+2r)$, $100=36+12r$

$12r=64$ $\therefore r=\dfrac{16}{3}$ 답 ⑤

518 [문제 해결 길잡이]

❶ 삼각형의 각의 이등분선의 성질을 이용하여 $\overline{BD}$, $\overline{CD}$의 길이를 구한다.
❷ △ABE∽△BDE임을 이용하여 $\overline{BE}$의 길이를 y에 대한 식으로 나타낸다.
❸ $\overline{BE}$에 접하고 세 점 A, B, D를 지나는 원에서 원과 비례를 이용하여 x, y의 값을 구한다.
❹ $\overline{AD}$의 길이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$의 연장선과 원의 교점을 E라 하고 $\overline{AD}=x$, $\overline{DE}=y$라 하자.



$\overline{AD}$가 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$에서

$6:4=\overline{BD}:\overline{CD}$

이때 $\overline{BC}=5$이므로

$\overline{BD}=3$, $\overline{CD}=2$ ❶

△ABE와 △BDE에서

$\angle BAE=\angle EAC=\angle DBE$, ∠E는 공통

이므로 △ABE∽△BDE (AA 닮음)

따라서 $\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{BE}:\overline{DE}$이므로

$6:3=\overline{BE}:y$ $\therefore \overline{BE}=2y$ ❷

이때 $\overline{BE}$는 세 점 A, B, D를 지나는 원의 접선이므로

$\overline{BE}^2=\overline{ED}\times\overline{EA}$

$(2y)^2=y(y+x)$ $\therefore 3y^2=xy$ …… ㉠

또 $\overline{AD}\times\overline{ED}=\overline{BD}\times\overline{CD}$이므로

$xy=3\times2=6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $3y^2=6$ $\therefore y=\sqrt{2}$ ($\because y>0$)

$y=\sqrt{2}$를 ㉡에 대입하면 $x=3\sqrt{2}$ ❸

$\therefore \overline{AD}=3\sqrt{2}$ ❹ 답 $3\sqrt{2}$

내신 만점 정복하기

본책 103~108쪽

519 전략 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분함을 이용한다.

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로

$\overline{AD}=\overline{DB}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$
$=\dfrac{1}{2}\times12$
$=6\,(\text{cm})$

$\overline{BD}=5\times\dfrac{6}{6+4}=3$,
$\overline{CD}=5\times\dfrac{4}{6+4}=2$

∠BAE=∠DBE이므로 접선과 현이 이루는 각의 성질을 이용한다.

정삼각형은 외심, 내심, 무게중심이 모두 일치한다.

풀이 $\overline{AM}=\overline{MP}$, $\overline{PN}=\overline{NB}$이므로

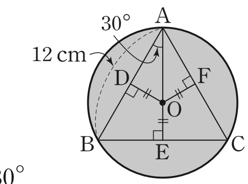
$\overline{AB}=(\overline{AM}+\overline{MP})+(\overline{PN}+\overline{NB})$
$=2\overline{MP}+2\overline{PN}=2(\overline{MP}+\overline{PN})=2\overline{MN}$

따라서 $2\overline{MN}=16$이므로 $\overline{MN}=8\,(\text{cm})$ 답 ②

520 전략 원의 중심에서 같은 거리에 있는 현의 길이는 같음을 이용한다.

풀이 $\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}$이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$



즉 △ABC는 정삼각형이므로

$\angle BAC=60°$

$\therefore \angle DAO=\dfrac{1}{2}\times60°=30°$

$\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=6\,(\text{cm})$이므로 직각삼각형 ADO에서

$\overline{AO}=\dfrac{6}{\cos 30°}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$

따라서 원 O의 넓이는

$\pi\times(4\sqrt{3})^2=48\pi\,(\text{cm}^2)$ 답 $48\pi\,\text{cm}^2$

다른풀이 $\overline{AE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times12=6\sqrt{3}\,(\text{cm})$

점 O는 정삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{AO}=\dfrac{2}{3}\overline{AE}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$

따라서 원 O의 넓이는 $\pi\times(4\sqrt{3})^2=48\pi\,(\text{cm}^2)$

보충학습

삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 나눈다.

521 전략 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같음을 이용한다.

풀이 $\overline{OM}=\overline{ON}$이므로 $\overline{CD}=\overline{AB}=14\sqrt{2}\,(\text{cm})$

$\overline{DN}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=7\sqrt{2}\,(\text{cm})$이므로 직각삼각형 ODN에서

$\overline{OD}=\dfrac{7\sqrt{2}}{\cos 45°}=14\,(\text{cm})$

따라서 원 O의 둘레의 길이는

$2\pi\times14=28\pi\,(\text{cm})$ 답 $28\pi\,\text{cm}$

522 전략 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용한다.

풀이 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5\,(\text{cm})$

$\overline{BR}=\overline{BP}=x\,\text{cm}$라 하면

$\overline{CQ}=\overline{CR}=4-x\,(\text{cm})$

이때 $\overline{AP}=\overline{AQ}$이므로 $5+x=3+(4-x)$

$2x=2$ $\therefore x=1$

$\therefore \overline{AP}=5+1=6\,(\text{cm})$ 답 ④

다른풀이 (△ABC의 둘레의 길이)$=\overline{AP}+\overline{AQ}$
$=2\overline{AP}$

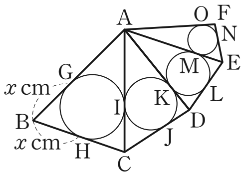
이므로

$2\overline{AP}=5+4+3=12$ $\therefore \overline{AP}=6$

만점 공략 BOX

523 전략 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림에서



$\overline{BG}=\overline{BH}=x$ cm라 하면

$\overline{AG}=20-x$ (cm)

$\overline{CH}=15-x$ (cm)

$\overline{CJ}=\overline{CH}$이므로

$\overline{DJ}=12-(15-x)=x-3$ (cm)

$\overline{DL}=\overline{DJ}$이므로 $\overline{EL}=9-(x-3)=12-x$ (cm)

$\overline{EN}=\overline{EL}$이므로 $\overline{FN}=6-(12-x)=x-6$ (cm)

$\therefore \overline{FO}=\overline{FN}=x-6$ (cm)

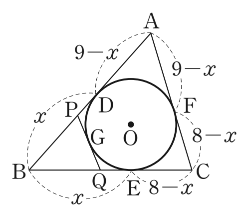
한편 $\overline{AO}=\overline{AM}=\overline{AK}=\overline{AI}=\overline{AG}=(20-x)$cm이므로

$\overline{AF}=\overline{AO}+\overline{FO}=(20-x)+(x-6)=14$ (cm)

답 ⑤

524 전략 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용한다.

풀이 $\overline{BD}=\overline{BE}=x$라 하면



$\overline{AF}=\overline{AD}=9-x$

$\overline{CF}=\overline{CE}=8-x$

$\overline{AC}=\overline{AF}+\overline{CF}$이므로

$7=(9-x)+(8-x)$

$2x=10 \quad \therefore x=5$

이때 $\overline{PG}=\overline{PD}$, $\overline{QG}=\overline{QE}$이므로 $\triangle$PBQ의 둘레의 길이는

$\overline{BP}+\overline{PQ}+\overline{BQ}=\overline{BP}+\overline{PG}+\overline{QG}+\overline{BQ}$

$=(\overline{BP}+\overline{PD})+(\overline{QE}+\overline{BQ})$

$=\overline{BD}+\overline{BE}=5+5=10$ 답 ⑤

① 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.
② 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

525 전략 내접원의 중심에서 세 변에 이르는 거리 ➲ 내접원의 반지름의 길이

풀이 내접원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\frac{1}{2}\times r\times(7+12+13)=24\sqrt{3} \quad \therefore r=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

이때 $\overline{CF}=\overline{CE}=a$ cm라 하면

$\overline{AD}=\overline{AF}=12-a$ (cm)

$\overline{BD}=\overline{BE}=13-a$ (cm)

$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}$이므로 $7=(12-a)+(13-a)$

$2a=18 \quad \therefore a=9$

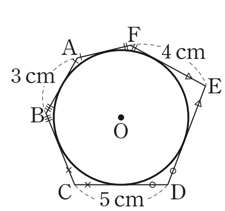
직각삼각형 OEC에서

$\overline{OC}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+9^2}=\frac{3\sqrt{39}}{2}$ (cm) 답 ⑤

세 변의 길이가 각각 a, b, c이고 내접원의 반지름의 길이가 r인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}r(a+b+c)$

526 전략 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림에서



$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}$

$=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{AF}$

$=3+5+4$

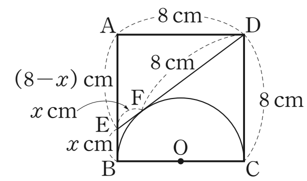
$=12$ (cm)

따라서 육각형 ABCDEF의 둘레의 길이는

$12+12=24$ (cm) 답 24 cm

527 전략 $\overline{BE}=x$ cm라 하고 직각삼각형 AED에서 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 $\overline{BE}=x$ cm라 하면 $\overline{AE}=(8-x)$ cm, $\overline{DE}=(8+x)$ cm이므로 직각삼각형 AED에서

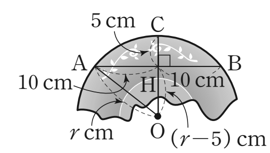


$(8+x)^2=8^2+(8-x)^2$

$32x=64 \quad \therefore x=2$

$\therefore \overline{DE}=8+2=10$ (cm) 답 ③

528 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O, 반지름의 길이를 r cm라 하자. • 30% 배점



해결 과정 직각삼각형 AOH에서

$r^2=10^2+(r-5)^2$

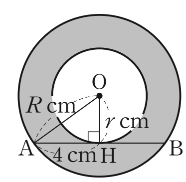
$10r=125 \quad \therefore r=12.5$ • 50% 배점

답 구하기 따라서 접시의 지름의 길이는

$2\times12.5=25$ (cm) • 20% 배점

답 25 cm

529 해결 과정 ① 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\overline{BH}=4$ cm • 20% 배점

해결 과정 ② 큰 원의 반지름의 길이를 R cm, 작은 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면 직각삼각형 OAH에서

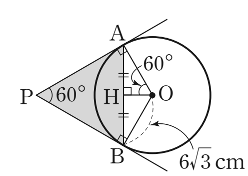
$R^2=r^2+4^2 \quad \therefore R^2-r^2=16$ • 40% 배점

답 구하기 색칠한 부분의 넓이는 큰 원의 넓이에서 작은 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)=16\pi$ (cm^2) • 40% 배점

답 16π cm^2

530 문제 이해 □APBO에서 $\angle$P$=60°$이고 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $\triangle$APB는 정삼각형이다. • 40% 배점



해결 과정 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle$AOH$=60°$이므로

$\overline{AH}=6\sqrt{3}\sin60°=9$ (cm)

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=18$ (cm) • 40% 배점

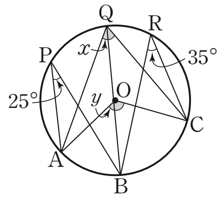
답 구하기 $\therefore \triangle APB=\frac{\sqrt{3}}{4}\times18^2$

$=81\sqrt{3}$ (cm^2) • 20% 배점

답 $81\sqrt{3}$ cm^2

531 전략 $\overline{QB}$를 긋고, 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같음을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{QB}$를 그으면



$\angle AQB=\angle APB=25°$,
$\angle BQC=\angle BRC=35°$
이므로
$\angle x=25°+35°=60°$
$\therefore \angle y=2\angle x=120°$
$\therefore \angle x+\angle y=60°+120°=180°$ 답 ⑤

원에서 한 호에 대한 중심각의 크기는 그 호에 대한 원주각의 크기의 2배이다.

532 전략 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$배임을 이용한다.

풀이 $\angle ACD=\frac{1}{2}\angle AOD=\frac{1}{2}\times 56°=28°$
$\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로 $\angle ACB=90°$
이때 $\overline{CE}$가 $\angle ACB$의 이등분선이므로
$\angle ACE=45°$
$\therefore \angle x=\angle ACE-\angle ACD$
$=45°-28°=17°$ 답 17°

533 전략 한 원에서 호의 길이는 그 호에 대한 원주각의 크기에 정비례한다.

풀이 $\widehat{AC}:\widehat{BD}=4\pi:10\pi=2:5$이므로
$\angle ADC:\angle BAD=2:5$
$\therefore \angle ADC=\frac{2}{5}\angle BAD$
△APD에서 $\angle BAD=24°+\frac{2}{5}\angle BAD$
$\frac{3}{5}\angle BAD=24°$ $\therefore \angle BAD=40°$
따라서 $\angle BOD=80°$이므로
$80:360=10\pi:$(원 O의 둘레의 길이)
$\therefore$ (원 O의 둘레의 길이)$=45\pi$ 답 ③

삼각형에서 한 외각의 크기는 이와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

534 전략 한 원에서 호의 길이는 그 호에 대한 원주각의 크기에 정비례한다.

풀이 △ACP에서 $\angle CAP=70°-25°=45°$
원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면
$\widehat{BC}:2\pi r=45:180$
$2\pi:2\pi r=1:4$ $\therefore r=4$ 답 ①

535 전략 □ABCD가 원에 내접하므로 $\angle BCD+\angle x=180°$, $\angle ABC=\angle y$임을 이용한다.

풀이 $\angle BCD=180°\times\frac{3}{5}=108°$이므로
$\angle x=180°-108°=72°$
$\angle ABC=180°\times\frac{5}{9}=100°$이므로
$\angle y=\angle ABC=100°$
$\therefore \angle x+\angle y=72°+100°=172°$ 답 ④

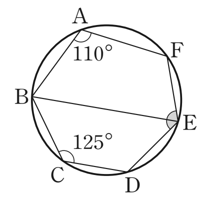
① 원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.
② 원에 내접하는 사각형의 한 외각의 크기는 그 내대각의 크기와 같다.

536 해결 과정 ① $\overline{BC}$가 반원 O의 지름이므로
$\angle BDC=\angle BEC=90°$
□ADFE에서 $\angle ADF=\angle AEF=90°$이므로
$\angle DFE=360°-(75°+90°+90°)=105°$
$\therefore \angle y=\angle DFE=105°$ (맞꼭지각) • 40% 배점

해결 과정 ② △ABE에서
$\angle ABE=180°-(75°+90°)=15°$이므로
$\angle x=2\angle ABE=2\times 15°=30°$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore \angle y-\angle x=105°-30°=75°$ • 20% 배점
답 75°

537 해결 과정 ① 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BE}$를 그으면 □ABEF는 원에 내접하므로



$110°+\angle BEF=180°$
$\therefore \angle BEF=70°$ • 40% 배점

해결 과정 ② 또 □BCDE는 원에 내접하므로
$125°+\angle BED=180°$
$\therefore \angle BED=55°$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore \angle E=70°+55°=125°$ • 20% 배점
답 125°

538 전략 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있고 점 A, D가 $\overline{BC}$에 대하여 같은 쪽에 있을 때 ⇨ $\angle BAC=\angle BDC$

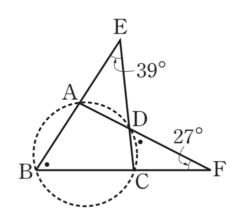
풀이 △ABP에서
$\angle BAP=180°-(55°+70°)=55°$
$\therefore \angle x=\angle BAP=55°$
$\angle DBC=\angle DAC=30°$이므로 △PBC에서
$\angle y=70°-30°=40°$
$\therefore \angle x+\angle y=55°+40°=95°$ 답 ⑤

다른풀이 $\angle ADB=\angle y$, $\angle DBC=\angle DAC=30°$이고 □ABCD는 원에 내접하므로
$(55°+30°)+(\angle x+\angle y)=180°$
$\therefore \angle x+\angle y=95°$

$\angle ABC+\angle ADC$
$=180°$

539 전략 □ABCD가 원에 내접하므로 한 외각의 크기와 그 내대각의 크기는 같다.

풀이 □ABCD가 원에 내접하므로



$\angle CDF=\angle ABC=\angle x$
△EBC에서
$\angle ECF=39°+\angle x$
따라서 △DCF에서
$\angle x+(39°+\angle x)+27°=180°$
$2\angle x=114°$ $\therefore \angle x=57°$ 답 57°

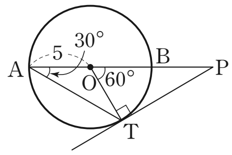
다른풀이 △EBC에서 $\angle ECF=39°+\angle x$
△ABF에서 $\angle EAF=27°+\angle x$
□ABCD가 원에 내접하므로
$\angle ECF=\angle BAD=180°-\angle EAF$
$39°+\angle x=180°-(27°+\angle x)$
$2\angle x=114°$ $\therefore \angle x=57°$

540 전략 $\overline{OT}$를 그으면 $\angle OTP=90^\circ$임을 이용한다.

풀이 $\overline{OT}$를 그으면

$\angle BOT=2\angle BAT$

$=2\times30^\circ=60^\circ$



이때 $\overline{PT}$는 원 O의 접선이므로 $\angle OTP=90^\circ$

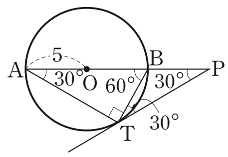
$\triangle OTP$에서 $\overline{OP}:\overline{OT}=2:1$

세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 직각삼각형이다.

$(5+\overline{BP}):5=2:1 \quad \therefore \overline{BP}=5$ 　답 ③

다른풀이 $\overline{BT}$를 그으면

$\angle BTP=\angle BAT=30^\circ$



$\overline{AB}$는 원 O의 지름이므로

$\angle ATB=90^\circ$

$\triangle BTP$에서

$\angle BPT=60^\circ-30^\circ=30^\circ$

즉 $\triangle BTP$는 $\angle BTP=\angle BPT$인 이등변삼각형이므로

$\overline{BP}=\overline{BT}$

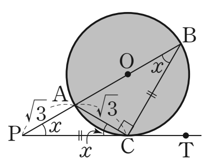
이때 $\triangle ATB$에서 $\overline{AB}:\overline{BT}=2:1$

$10:\overline{BT}=2:1 \quad \therefore \overline{BP}=\overline{BT}=5$

541 전략 반원에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용한다.

풀이 $\triangle BPC$에서 $\overline{BC}=\overline{PC}$이므로

$\angle BPC=\angle PBC=\angle x$



라 하고 $\overline{AC}$를 그으면

$\angle ACP=\angle ABC=\angle x$

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

$\overline{AB}$는 원 O의 지름이므로 $\angle ACB=90^\circ$

$\triangle BPC$에서 $\angle x+(\angle x+90^\circ)+\angle x=180^\circ$

$3\angle x=90^\circ \quad \therefore \angle x=30^\circ$

즉 직각삼각형 BAC에서 $\angle ABC=30^\circ$이므로

$\overline{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=2\sqrt{3}$

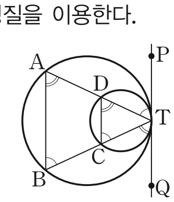
따라서 원 O의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이므로 넓이는

$\pi\times(\sqrt{3})^2=3\pi$ 　답 ④

542 전략 접선과 현이 이루는 각의 성질을 이용한다.

풀이 ① 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여

$\angle ABT=\angle ATP$



② $\angle BAT=\angle BTQ$,

$\angle CDT=\angle BTQ$이므로

$\angle BAT=\angle CDT$

③ $\angle BAT=\angle CDT$이므로 동위각의 크기가 같다.

$\therefore \overline{AB}/\!/\overline{DC}$

④ $\triangle ATB$와 $\triangle DTC$에서

$\angle BAT=\angle CDT$, $\angle ATB$는 공통

이므로 $\triangle ATB \backsim \triangle DTC$ (AA 닮음)

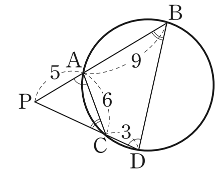
⑤ $\triangle ATB \backsim \triangle DTC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{TA}:\overline{TD}=\overline{TB}:\overline{TC}$

$\therefore \overline{TA}\times\overline{TC}=\overline{TB}\times\overline{TD}$ 　답 ⑤

543 전략 한 원에서 두 현 AB, CD의 연장선이 서로 만나는 점을 P라 하면 ➡ $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

풀이 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로



$5\times14=\overline{PC}\times(\overline{PC}+3)$

$\overline{PC}^2+3\overline{PC}-70=0$

$(\overline{PC}+10)(\overline{PC}-7)=0$

$\therefore \overline{PC}=7$ ($\because \overline{PC}>0$)

$\triangle PAC$와 $\triangle PDB$에서

$\angle PAC=\angle PDB$, $\angle P$는 공통

이므로 $\triangle PAC \backsim \triangle PDB$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{PA}:\overline{PD}=\overline{CA}:\overline{BD}$이므로

$5:10=6:\overline{BD} \quad \therefore \overline{BD}=12$ 　답 ②

544 전략 원에 내접하는 □ABCD의 두 대각선의 교점을 P라 하면 ➡ $\overline{PA}\times\overline{PC}=\overline{PB}\times\overline{PD}$

풀이 □ABCD가 원에 내접하므로

$\overline{PA}\times\overline{PC}=\overline{PB}\times\overline{PD}$에서

$4\times\overline{PC}=4\sqrt{2}\times4\sqrt{2} \quad \therefore \overline{PC}=8\ (\mathrm{cm})$

$\therefore \square ABCD=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin 60^\circ$

두 대각선의 길이가 각각 $4+8$, $4\sqrt{2}+4\sqrt{2}$이고 두 대각선이 이루는 예각의 크기가 60°인 사각형이다.

$=\dfrac{1}{2}\times(4+8)\times(4\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=24\sqrt{6}\ (\mathrm{cm}^2)$ 　답 $24\sqrt{6}\,\mathrm{cm}^2$

보충학습

사각형의 넓이

□ABCD의 두 대각선의 길이가 a, b이고 두 대각선이 이루는 예각의 크기가 x일 때, □ABCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}ab\sin x$

545 전략 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PD}\times\overline{PE}$, $\overline{PB}\times\overline{PC}=\overline{PE}\times\overline{PF}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PD}\times\overline{PE}$이므로

$6\times10=5\times(5+x)$

$60=25+5x \quad \therefore x=7$

$\overline{PB}\times\overline{PC}=\overline{PE}\times\overline{PF}$이므로

$10\times(10+y)=12\times20$

$100+10y=240 \quad \therefore y=14$

$\therefore x+y=21$ 　답 ④

546 전략 구하는 원의 반지름의 길이를 r로 놓고 원 O에서의 비례 관계를 이용한다.

풀이 반지름의 길이를 r라 하자.

① $\overline{OC}$의 연장선이 원 O와 만나는 점을 D라 하면

$\overline{AH}\times\overline{BH}=\overline{CH}\times\overline{DH}$에서

$4\times4=2\times(2r-2), \quad 4r=20$

$\therefore r=5$

② $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$에서

$4\times3=\dfrac{1}{2}r\times\dfrac{3}{2}r, \quad r^2=16$

$\overline{PD}=\dfrac{1}{2}r+r=\dfrac{3}{2}r$

$\therefore r=4$ ($\because r>0$)

③ $\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$에서

$6^2=4\times(4+2r),\quad 8r=20$

$\therefore r=\frac{5}{2}$

④ $\overline{PO}$의 연장선이 원 O와 만나는 점을 B라 하면 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$에서

$4^2=(5-r)(5+r),\quad r^2=9$

$\therefore r=3\ (\because r>0)$

⑤ $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$에서

$(7-r)(7+r)=5\times9,\quad r^2=4$

$\therefore r=2\ (\because r>0)$

따라서 반지름의 길이가 가장 긴 것은 ①이다. 답 ①

547 전략 $\overline{AE}\times\overline{BE}=\overline{PE}\times\overline{QE}=\overline{CE}\times\overline{DE}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AE}\times\overline{BE}=\overline{CE}\times\overline{DE}$이므로

$(9+3)\times4=3\times\overline{DE}$

$\therefore \overline{DE}=16$ 답 ④

548 전략 직각삼각형에서 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 직각삼각형 OAQ에서

$\overline{OQ}\perp\overline{AB}$이므로 $\angle OQA=90°$

$\overline{AQ}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

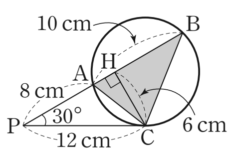
이때 $\overline{BQ}=\overline{AQ}=4$이고, $\overline{PT}^2=\overline{PB}\times\overline{PA}$이므로

$\overline{PT}^2=4\times12=48$

$\therefore \overline{PT}=4\sqrt{3}\ (\because \overline{PT}>0)$ 답 $4\sqrt{3}$

549 전략 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 삼각비를 이용하여 $\overline{CH}$의 길이를 구한다.

풀이 $\overline{PC}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$에서



$12^2=8\times(8+\overline{AB})$

$144=64+8\overline{AB}$

$\therefore \overline{AB}=10\ (\text{cm})$

점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle P=30°$이므로 직각삼각형 PCH에서

$\overline{CH}=12\sin30°=6\ (\text{cm})$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times10\times6=30\ (\text{cm}^2)$ 답 ②

다른풀이 $\triangle ABC$

$=\triangle BPC-\triangle APC$

$=\frac{1}{2}\times12\times18\times\sin30°-\frac{1}{2}\times12\times8\times\sin30°$

$=54-24=30\ (\text{cm}^2)$

$\triangle ABC$에서 두 변의 길이 a, c와 그 끼인 각 $\angle B$(예각)의 크기를 알 때, $\triangle ABC$의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}ac\sin B$

550 전략 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$, $\overline{PT'}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$임을 이용하여 $\overline{PT}$와 $\overline{PT'}$의 길이를 구한다.

풀이 원 O에서 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$이므로

$\overline{PT}^2=5\times18=90$

$\therefore \overline{PT}=3\sqrt{10}\ (\text{cm})\ (\because \overline{PT}>0)$

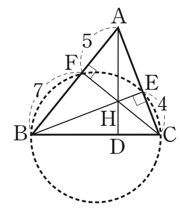
원 O′에서 $\overline{PT'}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$이므로

$\overline{PT'}=3\sqrt{10}\ (\text{cm})\ (\because \overline{PT'}>0)$

$\therefore \overline{TT'}=\overline{PT}+\overline{PT'}=6\sqrt{10}\ (\text{cm})$ 답 ④

551 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 $\angle BEC=\angle BFC=90°$이므로 □FBCE는 원에 내접한다. • 40% 배점

$\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각



해결 과정 $\overline{AF}\times\overline{AB}=\overline{AE}\times\overline{AC}$에서

$5\times12=\overline{AE}\times(\overline{AE}+4)$

$\overline{AE}^2+4\overline{AE}-60=0$

$(\overline{AE}+10)(\overline{AE}-6)=0$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore \overline{AE}=6\ (\because \overline{AE}>0)$ • 20% 배점

답 6

552 해결 과정 ① $\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$이므로

$\overline{PT}^2=9\times(9+16)=225$

$\therefore \overline{PT}=15(\text{cm})\ (\because \overline{PT}>0)$ • 40% 배점

해결 과정 ② 이때 $\angle PTB=90°$이므로 $\triangle PTB$에서

$\overline{BT}=\sqrt{25^2-15^2}=20(\text{cm})$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 원 O의 반지름의 길이는 10 cm이므로 넓이는

$\pi\times10^2=100\pi\ (\text{cm}^2)$ • 20% 배점

답 $100\pi\ \text{cm}^2$

553 해결 과정 ① $\overline{CP}$를 그으면

$\angle ACP=\angle APT=47°$ • 40% 배점

해결 과정 ② $\angle PCB=83°-47°=36°$이므로

$\angle POB=2\times36°=72°$ • 40% 배점

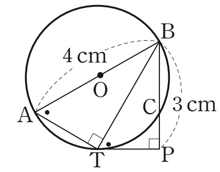
답 구하기 따라서 부채꼴 OPB의 넓이는

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴에서
① (호의 길이) $=2\pi r\times\frac{x}{360}$
② (넓이) $=\pi r^2\times\frac{x}{360}$

$\pi\times5^2\times\frac{72}{360}=5\pi$ • 20% 배점

답 5π

554 해결 과정 ① $\triangle BAT$와 $\triangle BTP$에서



$\angle BAT=\angle BTP$,

$\angle ATB=\angle TPB=90°$

이므로

$\triangle BAT\backsim\triangle BTP$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{BA}:\overline{BT}=\overline{BT}:\overline{BP}$이므로

$4:\overline{BT}=\overline{BT}:3,\quad \overline{BT}^2=12$

$\therefore \overline{BT}=2\sqrt{3}(\text{cm})\ (\because \overline{BT}>0)$ • 50% 배점

해결 과정 ② 직각삼각형 BTP에서

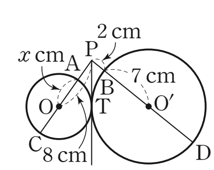
$\overline{PT}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{3}(\text{cm})$ • 20% 배점

답 구하기 따라서 $\overline{PT}^2=\overline{PC}\times\overline{PB}$이므로

$(\sqrt{3})^2=\overline{PC}\times3\quad \therefore \overline{PC}=1(\text{cm})$ • 30% 배점

답 1 cm

555 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PO}$, $\overline{PO'}$의 연장선이 두 원 O, O′과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. • 30% 배점



해결 과정 $\overline{AO}=x$ cm라 하면 $\overline{PA}\times\overline{PC}=\overline{PB}\times\overline{PD}$이므로

Ⅷ 원의 성질

$(8-x)(8+x)=2\times16$

$64-x^2=32,\quad x^2=32$

$\therefore x=4\sqrt{2}\ (\because x>0)$ • 50% 배점

답 구하기 $\therefore \overline{AO}=4\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$ • 20% 배점

답 $4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$

교과서 속 창의유형

본책 109쪽

556 [문제 해결 길잡이]

❶ 공원을 원 O라 하고 원 O의 반지름의 길이를 구한다.

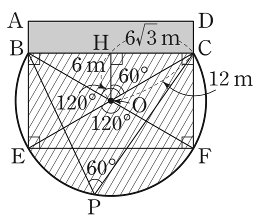
❷ ❶의 원에서 객석이 될 수 있는 영역을 구한다.

❸ 객석이 될 수 있는 영역의 넓이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 공원을 원 O라 하면 $\angle BPC=60^\circ$이므로

$\angle BOC=2\angle BPC$

$=120^\circ$



점 O에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle HOC=\frac{1}{2}\angle BOC=60^\circ,$

$\overline{HC}=\frac{1}{2}\overline{BC}=6\sqrt{3}\,(\mathrm{m})$

이므로 직각삼각형 HOC에서

$\overline{OC}=\frac{6\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=12\,(\mathrm{m})$

따라서 원 O의 반지름의 길이는 12 m이다. ❶

이때 객석의 방향이 모두 무대를 향하고 있으므로 객석이 될 수 있는 영역은 위의 그림의 빗금친 부분과 같다. ❷

직각삼각형 HOC에서

$\overline{OH}=12\cos 60^\circ=6\,(\mathrm{m})$

이므로

$\square BEFC=12\sqrt{3}\times12=144\sqrt{3}\,(\mathrm{m}^2)$

현 EF와 호 EF로 이루어진 활꼴의 넓이는

$\pi\times12^2\times\frac{120}{360}-\frac{1}{2}\times12\sqrt{3}\times6$

$=48\pi-36\sqrt{3}\,(\mathrm{m}^2)$

따라서 객석이 될 수 있는 영역의 넓이는

$144\sqrt{3}+(48\pi-36\sqrt{3})=48\pi+108\sqrt{3}\,(\mathrm{m}^2)$ ❸

답 $(48\pi+108\sqrt{3})\,\mathrm{m}^2$

$\square BEFC$
$=\overline{BC}\times\overline{BE}$
$=\overline{BC}\times2\overline{OH}$

$\triangle OEF$
$=\triangle OCB$
$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{OH}$